

Задание 1.

Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = (1, 7, 10)$$

1. Найдите определитель матрицы  $A$ . Является ли матрица  $A$  невырожденной?
2. Найдите обратную матрицу  $A^{-1}$ , если она существует.
3. Решите СЛАУ  $Ax = \vec{b}$  с помощью обратной матрицы.

1. Определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

в третьей строке есть 0, значит будем считать по ней

$$\det A = 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

по первой строке

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 = 2$$

по второй строке

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot 2 = 1 + 6 = 7$$

таким образом

$$\det A = -2 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 24$$

Ответ: 24

## 2. обратная матрица $A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

воспользуемся методом алгебраических дополнений

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \quad A_{12} = -1^* \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -1^* \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \quad A_{23} = -1^* \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{32} = -1^* \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Присоединенная матрица (транспонируем C)

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ -4 & 8 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ

Обратная матрица =  $\text{adj}(A)/\det A$

$\det A = 24$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/12 & 1/6 & -1/24 \\ -1/6 & 1/3 & -1/12 \\ 1/12 & -1/6 & 7/24 \end{pmatrix}$$

3. Решите СЛАУ  $Ax=b$

$X$  - вектор ответов

$$X=A^{-1}*B$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/12 & 1/6 & -1/24 \\ -1/6 & 1/3 & -1/12 \\ 1/12 & -1/6 & 7/24 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5/12*1+1/6*7-1/24*10 \\ -1/6*1+1/3*7-1/12*10 \\ 1/12*1-1/6*7+7/24*10 \end{pmatrix}$$

Ответ

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 1 & 1/3 \\ 1 & 5/6 \end{pmatrix}$$