Задание 2.

Рассмотрим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Выполните следующие действия:

1. Найдите ранг матрицы A и ранг расширенной матрицы $(A|B)$
2. Определите, совместна ли система $Ax = B$, и сколько решений она имеет.
3. Если система совместна, найдите общее решение в параметрическом виде.
4. Вычислите матрицу $A^T A$.

$$A= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad B= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Найдем минор наивысшего (тетьего) порядка

M_{11}=detA

вычисляем по второй строке, там есть 0

detA= $2*(-1)^{2+1}*(2+6)+4*(-1)^{2+2}*(1+3)$
$-16+16=0$

т.к. все (он всего один) миноры третьего порядка равны 0, то ранг матрицы будет меньше 3
проверим миноры второго поядка, необходимо найти хотя бы один не нулевой минор

$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} =4$ итак, мы нашли не нулевой минор второго порядка
следовательно ранг матрицы А = 2

Рарширенная матрица A|B получается через добавлнение вектора к матрице

$$A|B \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

т.к. размернойть матрицы 3х4, то максимально возможный ранг будет 3
Посчитаем миноры третего порядка
M_{11} посчитан выше, он равен 0

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ возьмем по второй строке

$=4*(-1)^{2+1}*(-3+1) +2*(-1)^{2+3}*(4-0)$
$=8-2*4=0$

Все миноры третьего порядка равны 0, следоваетельно необходмо проверить миноры второго порядка

по первой задаче
$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} =4$ итак, мы нашли не нулевой минор второго порядка
следовательно ранг матрицы А = 2

2. Определите совместна ли система Ax=B и сколько решений она имеет

Чтобы определить, совместима ли система (т.е. имеет ли она решения) и сколько решений она имеет,нужно проанализировать ранг (rank) матрицы A и расширенной матрицы [A|B].

На предыдущем шаге мы выяснили что ранг матрицы A=2 и ранго расширенной матрицы тоже равен 2, следовательно система своместима

т.к.ранг матрицы меньше чем количество переменны (2<3), то СЛАУ имеет бесконечное количество решений, когда одна пременная, например x1 будет определяться через другую переменную и таких комбинаций будет множество (параметрический вид)

3. Если система совместима, найдите общее решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+4y=2 \\ 3x+6y+z=3 \end{cases}$$

выразим x через y из второго уравнения

x=1-2y

и решим систему:

$$\begin{cases} \cancel{1}-\cancel{2y}+\cancel{2y}-z=\cancel{1} \\ \cancel{3}-\cancel{6z}+\cancel{6y}+z=\cancel{3} \end{cases}$$

следовательно z=0

Ответ: z=0

x=1-2y (при любых y)

4. Вычислите матрицу A^T x A

A^T

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

AxA^T будет симетричной

$$\begin{pmatrix} 1^2+2^2+3^2 & 1*2+2*4+3*6 & 1*(-1)+2*0+3*1 \\ & 2^2+4^2+6^2 & 2*(-1)+4*0+6*1 \\ & & (-1)^2+0+1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 & 2 \\ 28 & 56 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$