Начальные сведения о конструктивной математике А. А. Маркова

Михайлов Анатолий Андреевич (601-41)

1 октября 2024 г.

Аннотация

Доклад подготовлен студентом первого курса кафедры прикладной математики в сентябре 2024-го года. Цель доклада — дать неподготовленному читателю начальные сведения о конструктивной математике Андрея Андреевича Маркова младшего в доступной форме, чтобы породить интерес к работам А.А. и фундаментальным математическим теориям в целом. Для этого в докладе затрагиваются проблемы классической математики, нормальные алгорифмы, конструктивная логика, сама конструктивная математика и теория типов. Также, доклад содержит краткую справку о самом А. А. Маркове.

1 Об А. А. Маркове

Андрей Андреевич Марков младший (22.09.1903, Санкт-Петербург – 11.10.1979, Москва) — сын великого математика Андрея Андреевича Маркова старшего, ученика Пафнутия Львовича Чебышёва [5]. Получил уникальное домашнее воспитание и образование под руководством отца. Его учили языкам (основными европейскими он отлично владел ещё с юных лет), музыке, рисованию. Как и отец, отлично играл в шахматы. Любил литературу, особенно поэзию. [1, Том 1, От составителя, пункт 3] А. А. Марков по своему образованию не был ни математиком, ни логиком (он в 1924 г. окончил физическое отделение физико-математического факультета Ленинградского университета), и тем не менее сумел добиться значительных успехов в теоретической физике, в прикладной геофизике, в небесной механике и даже в химии [4]. В 1933–1955 гг. работал в ЛГУ (профессор с 1936), с 1959 г. профессор МГУ, в 1939–1972 — в Математическом институте имени В. А. Стеклова АН СССР, с 1972 г. —

в Вычислительном центре АН СССР [5]. А. А. Марков и вслед за ним его ученики, в том числе и Н. М. Нагорный, следуя ленинградской школе математиков, вместо слова «алгоритм» писали «алгорифм» [4]. Н. М. Нагорный в [1, Том 1, От составителя, пункт 1.1] пишет, что натура А. А. Маркова «была во многом художественной и даже артистичной». В этой же книге в сносках описывается множество забавных моментов, связанных с А. А. Марковым. Н. М. Нагорный также пишет, что А. А. Марков обладал способностью точно планировать свои как краткосрочные, так и долгосрочные действия. Это выражалось как в том, что он работал строго в направлении к желаемому результату, «как будто его вела невидимая рука», так и в том, что он выражал свои мысли очень выверенно, легко для восприятия и точно.

2 Основа конструктивного направления

2.1 Конструктивные процессы и объекты

Материал излагаемый в этой главе в основном основан на работе [1, О логике конструктивной математики]. Конструктивная математика — наука о конструктивных процессах, способности их осуществлять и их результатах [1]. Конструктивный процесс — действие, в результате которого строится (создаётся) какой-либо объект *(пояснение от автора доклада, не встречается в литературе)*. Понятия конструктивного процесса и конструктивного объекта являются первоначальными [5]. Согласно [1], в определениях конструктивных процессов и объектов «нет надобности, т.к. каждая математическая теория имеет дело не с конструктивными объектами вообще, а с конструктивными объектами некоторого определённого вида, например со словами в некотором алфавите». Т.е., *(по мнению автора доклада)* предлагается характеризовать процессы и объекты (теперь и далее слово «конструктивный» будет опускаться) для каждого конкретного случая отдельно. Примеры конструктивных процессов:

- Сборка часов на конвеере. Результат этого процесса, объект — часы.
- Написание 3-ёх чёрточек на пустом листе бумаги. Результат, объект — материальное тело, состоящее из чернил и бумаги.
- Приписывание чёрточки справа к уже имеющимся. Результат как в предыдущем пункте.

При этом, процесс может быть невыполним по ресурсам (например, написать $10^{100^{100}}$ чёрточек: для этого не хватит ни места, ни чернил, ни времени), но такой процесс и его результат всё равно можно рассматривать так же, как и выполнимые процессы. Эта условность называется *абстракцией потенциальной осуществимости*. Она используется и в классической математике, когда, например, рассматривается сумма гигантского (но конечного) количества чисел.

Однако, есть условность, которую принимает классическое направление, но отвергвет конструктивное: рассмотрение бесконечных объектов как завершённых, неподвижных во времени — *абстракция актуальной бесконечности*. Например, слово, состоящее из бесконечного количества букв, соответственно имеющее бесконечную длину. В этом примере слово является завершённым статическим (неизменном во времени) объектом. Из-за этой условности в классической математике возникают противоречия (парадоксы), связанные с бесконечными множествами, как, например, парадокс Б. Рассела. Соответственно, отвергая завершённые бесконечные объекты, конструктивное направление избавляется от такого рода парадоксов.

2.2 Конструктивная логика

Закон исключённого третьего это закон классической логики — истинно или само утверждение, или его отрицание: $P \lor \neg P$. Этот закон позволяет *метод доказательства от противного*: если мы опровергли $\neg P$, значит мы доказали P. Из закона исключённого третьего следует закон двойного отрицания: $\neg\neg P \implies P$. Пример на деревянном столе:

$$\begin{aligned} P &= \text{стол деревянный} \\ \neg P &= \text{стол не деревянный} \\ \neg\neg P &= \text{стол не не деревянный} \\ \neg\neg P &\implies P \\ \text{стол не не деревянный} &\implies \text{стол деревянный} \end{aligned}$$

Конструктивная математическая логика отличается от классической математической (аристотелевской) логики правилами доказательств существования объектов с нужными свойствами [3, стр. 9]. В конструктивной математике для доказательства существования объекта достаточно и необходимо предоставить способ его построения (конструкции). Как следствие, нет доказательства от противного. Недостаточно (как это можно делать в классической математике) опровергнуть предположение о том, что не существует искомый объект. Из этого следует отсутствие закона исключённого третьего, потому что если было опровергнуто $\neg P$, это ещё не означает, что доказано P. В следствии этого фундаментального отличия, отличаются и другие логические связки. [1, О логике конструктивной математики, параграф 6] [3, стр. 9]

3 Нормальные алгорифмы

При описании алгорифмов на естественных языках возникают некоторые проблемы, поэтому математики разработали свои строгие исскуственные языки, на которых можно записывать алгорифмы. Из широко известных — это λ-исчисление Алонзо Чёрча, комбинаторная логика и машина Тьюринга. А. А. Марков тоже разработал подобную систему (формализм) — *нормальные алгорифмы*. Все эти формализмы функционально идентичны [3, стр. 10]. Создание таких формализмов позволило:

- Передавать алгорифмы с абсолютной точностью (без трактовок).
- Упростить и вывести на качественно новый уровень анализ алгоритмов (см. колмогоровская сложность и исчисление большого O).
- Автоматизировать (механизировать) вычисление алгорифмов.

Вкратце про нормальные алгорифмы Алфавит — упорядоченный список символов. Пример: A = (0, |, x, ш). Слово алфавита x — упорядоченный список, состоящий только из букв этого алфавита. Пример, одно из слов алфавита A: «|0шшшх00». Нормальный алгорифм в алфавите x — упорядоченный список правил подстановок вида

$$A \to B$$

$$\text{или}$$

$$A \to \cdot$$

где A и B — слова. Правила применяются по порядку: сначала пытаются применить 1-ое правило, и только если оно не подходит, переходят к следующему. Если правило подходит, то первое вхождение A заменяется на B и цикл повторяется с 1-ого правила. Цикл повторяется до тех пор, пока не встретится правило второго типа (завершающее) или не подойдёт ни одно правило. Тогда алгорифм завершается.

4 Практическое применение

Доказательства на основе теории типов это яркий пример практического применения конструктивной математики. Чтобы доказать утверждение, мы буквально конструируем его совмещая объекты нужных типов. Пример написан на языке LF, взят из документации к программе Twelf [7]:

```
nat : type.
z : nat.
s : nat -> nat.
even : nat -> type.
even-z : even z.
even-s : N:nat even N -> even (s (s N)).
two-is-even = even-s z even-z.
```

Здесь доказательством того, что 2 — чётное число является объект «*two-is-even*». Он получается путём применения аксиом, которые являются типизированными функциями, что можно рассматривать как конструктивный процесс, как алгорифм, как программу. Такое соответствие между доказательствами и алгорифмами называется «соответствие Карри–Ховарда».

Список литературы

[1] А. А. Марков, Избранные труды, МЦНМО, 2002

[2] А. А. Марков, Н. М. Нагорный, Теория алгорифмов «Наука», 1984,

[3] А. А. Марков, О конструктивной математике, Тр. МИАН СССР, 1962, том 67, 8–14

[4] Н.М.Нагорный, Реализуемостная семантика раннего периода марковского конструктивизма

[5] Большая российская энциклопедия, https://bigenc.ru/

[6] М. К. Керимов, Памяти Николая Макаровича Нагорного (1928–2007), Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2008, том 48, номер 6, 1140–1144

[7] Proving metatheorems with Twelf, Representing the judgements of the natural numbers, https://twelf.org/wiki/proving-metatheorems-representing-the-judgements-of-the-natural-numbers/, Дата обращения: 30.09.24