

Краткий конспект

## Лекция 2. Выравнивание. Алгоритм Нидлмана-Вунша

версия 0.1([незавершенная](#))

Д. Ищенко\*    Б. Коварский\*    И. Алтухов\*    Д. Алексеев\*

18 февраля, 2016

---

\*МФТИ

# 1 Сравнение последовательностей

В прошлом семестре мы говорили, что многие свойства биологических последовательностей можно выяснить "по гомологии" сравнивая их с другими последовательностями, чьи свойства нам уже известны. Но чтобы сравнивать нужно задать расстояние на строках. Если строки одинаковой длины, то можно подсчитать количество несовпадений, "мисматчей" в двух строках. Тогда мы получим расстояние Хэмминга:

$$d_H(V^l, W^l) = \sum_{i=1}^l [v_i \neq w_i]$$

$$V^l = (v_1, \dots, v_l); \quad W^l = (w_1, \dots, w_l)$$

Квадратные скобки в записи  $[P]$  - это скобки Айверсона, переводящие истинное утверждение  $P$  в 1 и ложное в 0. Здесь и далее придерживаемся следующих обозначений:  $V^l$  - строка длины  $l$ ,  $v_i$  - символ в строке  $V^l$  в позиции  $i$ ,  $V^j$  - префикс длины  $j \leq l$ .

Ричард Хэмминг ввел такую меру для сравнения двоичных кодов. Ограниченное применение оно находит и в биоинформатике. Возможность сравнения строк лишь одинаковой длины - серьезное ограничение. Для того чтобы мы могли сравнивать строки разной длины помимо замены символа нужно добавить две других элементарных операции, вставку и удаление, возможность индела (insertion-deletion). Тогда мы сможем выравнить две последовательности, т.е. путем элементарных операций привести их к одинаковому виду. Оптимальное выравнивание минимизирует количество таких элементарных операций над строками.

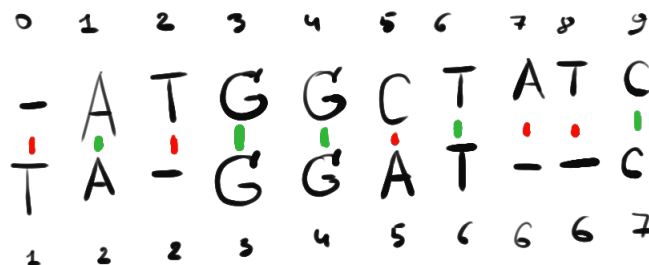


Рис. 1: Пример выравнивания последовательностей ATGGCTATC и TAGGATC. Зеленым показаны совпадающие символы в выравнивании

Неформально же, выравнить две последовательности - записать их друг под другом, в некоторых местах допуская разрыв, так чтобы последовательности частично совпали друг с другом. Разрыв обычно обозначают дефисом. Возможность разрыва позволяет нам ровнять последовательности разной длины. Если рассуждать в терминах элементарных операций на строках, разрыв в одной последовательности означает, что в этой последовательности нам нужно сделать вставку символа чтобы перевести ее в другую.

Расстояние между двумя последовательностями равно минимальному числу элементарных операций, необходимых для перевода одной строки в другую - расстояние Левенштейна,  $d_L$ . Владимир Левенштейн ввел данную метрику на строках в 1965 году, как и Хэмминг, работая с двоичными кодами. Расстояния Левенштейна хорошо подходит для сравнения биологических последовательностей, потому что включает в себя биологическую подоплеку. Элементарные операции над строками соответствует эволюции последовательностей.

Если помимо вставки, удаления и замены допустить транспозицию (перестановку двух подряд идущих символов), то получим модифицированную функцию - расстояние Дамерау-Левенштейна. Оно часто используется в компьютерной лингвистике, в вычислительной биологии - редко.

Вернемся к выравниваниям. Давайте пронумеруем позиции в выравнивании. Тогда можно заметить, что любому выравниванию можно сопоставить некоторую последовательность точек на двумерной целочисленной решетке. Переходы из одного узла решетки в другой будут соответствовать элементарным операциям над строками: движение по вертикали и горизонтали - вставки-удаления, по диагонали - замены (в случае, когда символы в строках отличаются). Направленно соединив каждый узел с определенными соседями, мы получим редакционный граф (edit graph). Выравниванию двух строк длины  $n$  и  $m$  будет соответствовать пути в этом направленном ациклическом графе из истока, вершины  $(0, 0)$  в сток, вершину  $(n, m)$ . Ребра в данном графе имеют вес - штрафы за несовпадения, если таковые имеются, и вставку. Пока считаем все штрафы равными единице.

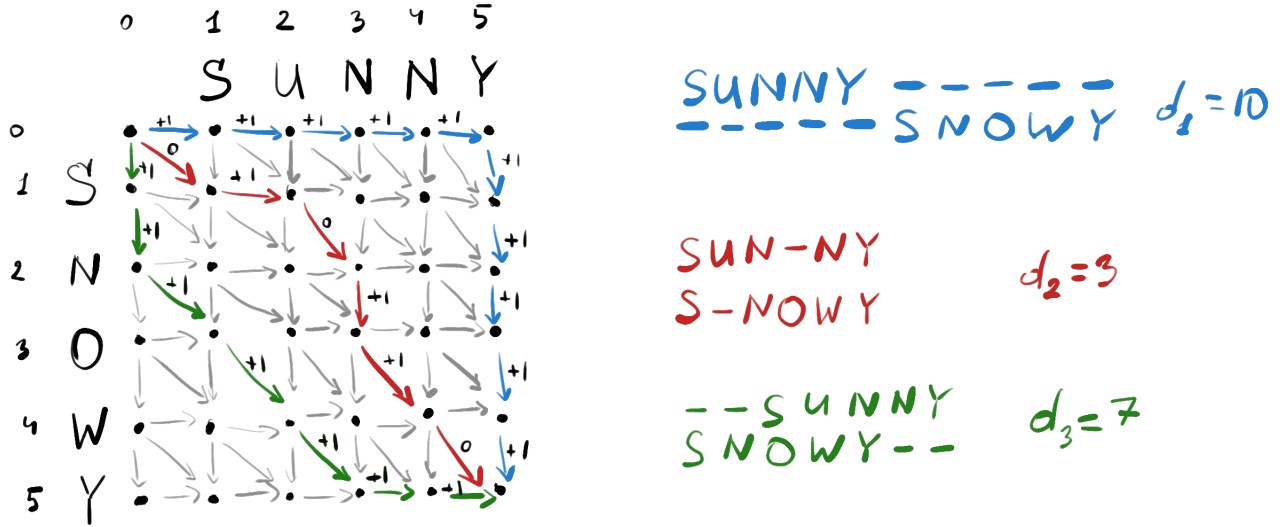


Рис. 2: Редакционный граф для последовательностей SUNNY и SNOWY. Трём путям из  $(0, 0)$  в  $(5, 5)$  соответствуют три выравнивания с разными редакционными расстояниями  $d_1, d_2, d_3$ .

Чтобы узнать редакционное расстояние (количество элементарных операций) для некоторого выравнивания достаточно просуммировать вес всех ребер, входящих в путь соответствующий данному выравниванию. Значит, оптимальное выравнивание - путь из стока в сток с наименьшим суммарным весом ребер.

Что если перебрать всевозможные пути в графе, попутно определяя их вес?

Давайте оценим снизу количество путей из  $(0, 0)$  в  $(n, m)$ , допуская лишь движения по вертикали и горизонтали. Любой такой путь можно закодировать двоичной последовательностью из  $n$  единиц и  $m$  нулей. Тогда количество таких путей равно  $C_{m+n}^n$ .

Считая  $n \approx m \gg 1$ :

$$C_{2n}^n \approx \frac{(2n)!}{n!n!} \approx \frac{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)^2} = \frac{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{2\pi n(\frac{n}{e})^{2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

Точное же количество выравниваний с учетом движения по диагонали:

$$N(n, m) = \sum_{k=0}^{\min(n, m)} 2^k C_m^k C_n^k$$

Экспоненциальная сложность алгоритма - очень плохой результат. Нужен иной подход. Во-первых, заметим, что расстояние Левенштейна симметрично:

$$d_L(W^m, V^n) = d_L(V^n, W^m)$$

Во-вторых, если одна из строк пустая, расстояние Левенштейна равно длине ненулевой.

$$d_L(0, V^n) = n$$

$$d_L(0, 0) = 0$$

Теперь рассмотрим вершину  $(i, j)$  в редакционном графе. Наименьший вес пути из вершину  $(0, 0)$  в  $(i, j)$  равен расстоянию Левенштейна между префиксами  $V^i$  и  $W^j$ . В вершину  $(i, j)$  мы могли прийти лишь тремя способами: из  $(i - 1, j)$  по горизонтали (при этом мы сделали разрыв в строке  $V$ , пройдя по ребру с весом 1), из  $(i, j - 1)$  по вертикали (при этом мы сделали разрыв в строке  $W$ , пройдя по ребру с весом 1), либо из  $(i - 1, j - 1)$  по диагонали. Вес такого ребра равен 0, если  $v_i = w_j$  и равен 1, если  $v_i \neq w_j$ . Из трех возможных переходов мы должны выбрать такой, который бы минимизировал суммарный вес. Тогда:

$$d_L(V^i, W^j) = \min \begin{pmatrix} d_L(V^{i-1}, W^j) + 1, \\ d_L(V^i, W^{j-1}) + 1, \\ d_L(V^{i-1}, W^{j-1}) + [v_i \neq w_j] \end{pmatrix}, \quad i \neq 0 \wedge j \neq 0$$

В итоге мы записали рекурсивную формулу для расстояния Левенштейна. Видно, чтобы вычислить значение в вершине  $(i, j)$  нам нужно знать редакционное расстояние лишь в вершинах  $(i - 1, j - 1)$ ,  $(i - 1, j)$ ,  $(i, j - 1)$ . Рекурсивная структура расстояния, подсказывает, что эту задачу можно эффективно решить при помощи динамического программирования.

Динамическое программирование - способ решения задач путем их разбиения их на более простые подзадачи. Стоит заметить, этот термин родом не из компьютерных наук, а из теории оптимизации. Автор "динамического программирования" Ричард Беллман, под программированием понимал не написание программ, "планирование" многоступенчатых процессов.

Чтобы лучше понять смысл динамического программирования, рассмотрим три задачи, нахождения факториала, биномиального коэффициента и числа Фибоначчи. Что в них общего? Все три величины можно задать рекурсивно.

$$\begin{aligned} n! &= n * (n - 1)!; & 1! &= 1 \\ C_n^k &= C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}; & C_n^0 &= 1, C_n^n = 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}; & F_1 &= 1, F_2 = 1 \end{aligned}$$

Поэтому процесс вычисления можно изобразить в виде направленного ациклического графа.

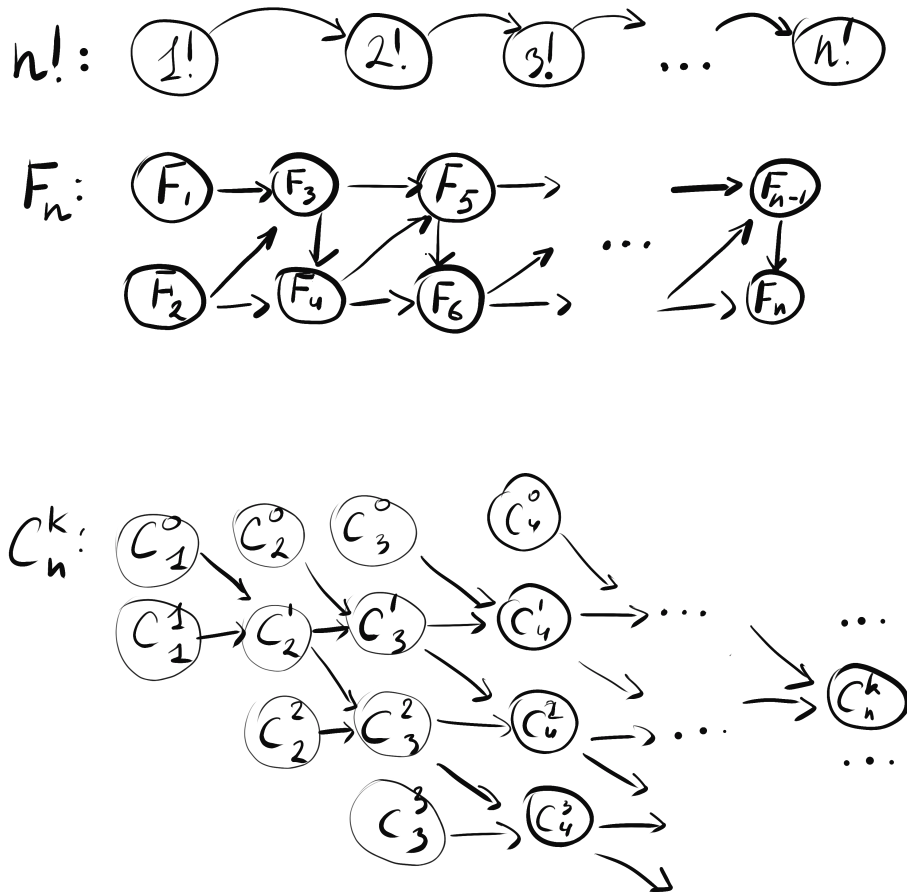


Рис. 3: Графы подзадач для нахождения значений факториала, числа Фибоначчи и биномиального коэффициента

Но просто написать рекурсивную функцию для их вычисления будет неэффективно. Скажем, в задаче про числа Фибоначчи при рекурсивном вызове нам придется многократно вычислять промежуточные значения и сложность будет экспоненциальной. Вместо этого мы можем решать задачу снизу-вверх, запоминая промежуточный результат и используя уже вычисленные значения во всех последующих обращениях. Тогда сложность вычисления числа Фибоначчи будет  $O(n)$ .

Давайте вернемся к нашему графу. В вершинах графа, по сути в таблице размера  $(n+1) \times (m+1)$  можно хранить промежуточный результат - величину расстояние Левенштейна, равное сумме весов ребер кратчайшего пути в эту вершин.

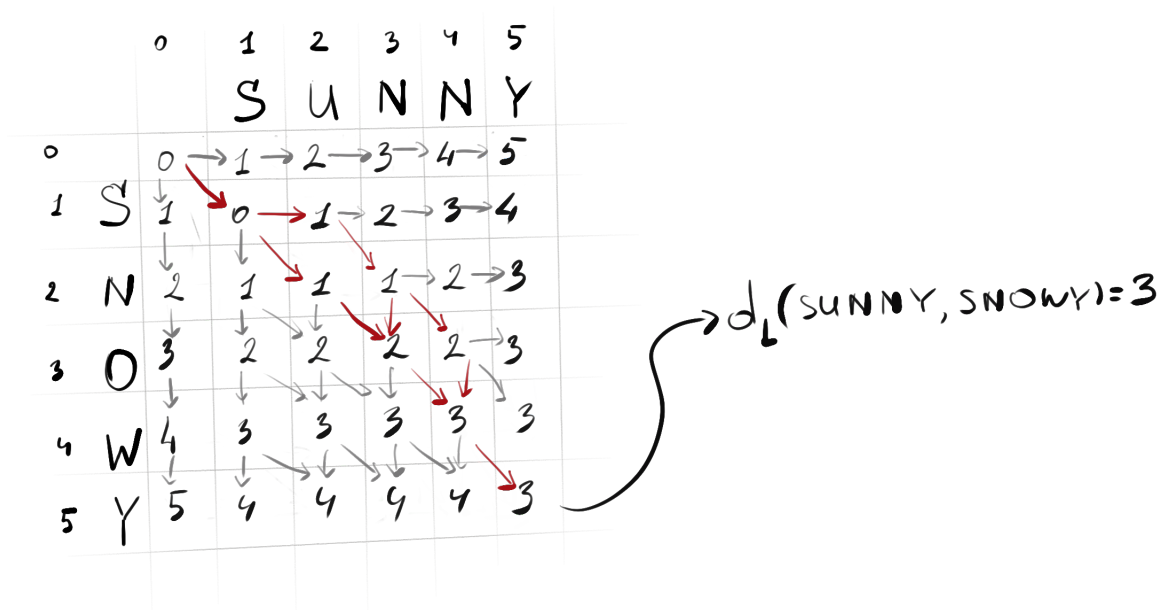


Рис. 4: Таблица со значениями расстояний Левенштейна для строк SNOWY и SUNNY с направлениями оптимальных переходов. Красным показан путь, соответствующий оптимальному выравниванию

Напишем код нахождения редакционного расстояния и заполнения таблицы:

```

1: procedure LEVENSTEINDISTANCE( $V, W$ )
2:    $D \leftarrow [ ]$  ▷ Создаем массив для хранения расстояний
3:   for  $i \leftarrow 0, n$  do ▷  $n$  - длина первой последовательности
4:      $D[i, 0] \leftarrow i$ 
5:   end for
6:   for  $j \leftarrow 0, m$  do ▷  $m$  - длина второй последовательности
7:      $D[0, j] \leftarrow j$ 
8:   end for
9:   for  $i \leftarrow 1, n$  do
10:    for  $j \leftarrow 1, m$  do
11:       $D[i, j] \leftarrow \min \begin{pmatrix} D[i-1, j] + 1, \\ D[i, j-1] + 1, \\ D[i-1, j-1] + (V[i] \neq W[j]) \end{pmatrix}$ 
12:    end for
13:  end for
14:  return  $D$ 
15: end procedure

```

Для того чтобы восстановить по таблице редакционных расстояний само выравнивание нам необходимо помнить каким образом мы попали в вершину. Помимо таблицы с редакционными расстояниями следует завести таблицу (backtracker), где бы хранились направления переходов:

```

procedure NWGLOBALALIGNMENT( $V, W$ )
2:    $D \leftarrow [ ]$ 
    $B \leftarrow [ ]$  ▷ Создаем массив для хранения направлений
4:   for  $i \leftarrow 0, n$  do
5:      $D[i, 0] \leftarrow i$ 
6:      $B[i, 0] \leftarrow " \rightarrow "$ 
7:   end for
8:   for  $j \leftarrow 0, m$  do
9:      $D[0, j] \leftarrow j$ 
10:     $B[0, j] \leftarrow " \downarrow "$ 
11:  end for
12:  for  $i \leftarrow 1, n$  do
13:    for  $j \leftarrow 1, m$  do
14:       $D[i, j] \leftarrow D[i-1, j-1] + (V[i] \neq W[j])$ 
       $B[i, j] \leftarrow " \searrow "$ 
16:      if  $D[i, j] > D[i-1, j] + 1$  then
17:         $D[i, j] \leftarrow D[i-1, j] + 1$ 
18:         $B[i, j] \leftarrow " \rightarrow "$ 

```



```

                end if
20:             if  $D[i, j] > D[i, j - 1] + 1$  then
                     $D[i, j] \leftarrow D[i, j - 1] + 1$ 
22:              $B[i, j] \leftarrow "$  ↓  $"$ 
                end if
24:         end for
        end for
26:     return  $B$ 
end procedure

```

Итак, подведем итоги. Мы построили разобрали алгоритм Нидлмана-Вунша, который позволяет находить расстояние Левенштейна между двумя строками и тем самым строить оптимальное глобальное выравнивание. Сложность такого алгоритма  $O(nm)$ , затраты по памяти также  $O(nm)$ .

Но этого еще недостаточно. Нам хотелось бы выравнивать биологические последовательности и хочется чтобы у расстояний была какая-то биологическая основа. Поэтому в биологических приложениях обычно делают иначе, вместо задачи минимизации редакционного расстояния, решая задачу максимизации сходства, очков выравнивания. При этом, за совпадение награждают, а за несовпадения и вставки и удаления штрафуют. При этом штраф за индел зависит от его размера, штраф за несовпадения зависит от типа замены. Об этом на следующей лекции.

## 2 Ссылки

- [1] Gusfield D. Algorithms on strings, trees and sequences: computer science and computational biology. – Cambridge university press, 1997.
- [2] Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани У. Алгоритмы – Издательство МЦ-НМО, 2014.
- [3] Jones N., Pevzner P. An Introduction to Bioinformatics Algorithms – MIT Press, 2004.