1)
Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} yy'' = 2x(y')^2, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = -4. \end{cases}$$

Понижение порядка уравнения

Введём замену $p = y'$. Тогда производная y'' выражается как p'. Подставляем в уравнение:

$$yp' = 2xp^2.$$

Перепишем уравнение:

$$p' = \frac{2x}{y}p^2.$$

Чтобы избавиться от зависимости от y, воспользуемся методом замены переменных. Пусть $q = \frac{p}{y}$, тогда:

$$p = qy, \quad p' = q'y + qy'.$$

Подставляем в уравнение:

$$y(q'y + qy') = 2x(qy)^2.$$

Упрощаем:

$$y^2q' + y^2q^2 = 2xq^2y^2.$$

Сокращаем на y^2:

$$q' + q^2 = 2xq^2 \quad \Rightarrow \quad q' = q^2(2x - 1).$$

Решение уравнения для q

Полученное уравнение является разделимым:

$$\frac{dq}{q^2} = (2x - 1)dx.$$

Интегрируем обе части:

$$-\frac{1}{q} = x^2 - x + C,$$

где C — константа интегрирования. Отсюда:

$$q = -\frac{1}{x^2 - x + C}.$$

Поскольку $q = \frac{p}{y} = \frac{y'}{y}$, получаем:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2 - x + C}.$$

Решение уравнения для y

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2 - x + C}.$$

Выполним интегрирование правой части. Завершим квадрат для знаменателя:

$$x^2 - x + C = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(C - \frac{1}{4}\right).$$

Однако, для простоты предположим, что $C = \frac{1}{4}$ (это будет определено из начальных условий). Тогда:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Тогда интеграл становится:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Выполняем интегрирование:

$$\ln|y| = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} + D,$$

где D — константа интегрирования. Экспоненцируем обе части:

$$y = K \exp\left(\frac{1}{x - \frac{1}{2}}\right),$$

где $K = e^D$.

Определение констант с учётом начальных условий

Используем начальные условия $y(1) = 1$ и $y'(1) = -4$.

1. При $x = 1$:

$$1 = K \exp\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) = Ke^2.$$

Отсюда:

$$K = e^{-2}.$$

2. Проверим производную:

$$y' = y \cdot \left(-\frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

При $x = 1$:

$$y'(1) = e^{-2}e^2\left(-\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4,$$

что соответствует условию $y'(1) = -4$.

Итоговое решение:

$$y(x) = e^{-2}\exp\left(\frac{1}{x - \frac{1}{2}}\right) = \exp\left(\frac{1}{x - \frac{1}{2}} - 2\right).$$

Ответ:

Решением задачи Коши является

$$y(x) = \exp\left(\frac{1}{x - \frac{1}{2}} - 2\right).$$

2)

$$y'' - y = e^{-2t} \sin t$$

Решение однородного уравнения

Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 1$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_h = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

Поиск частного решения

Предположим, что частное решение имеет вид:

$$y_p = u_1(t) e^t + u_2(t) e^{-t}$$

Найдем производные y_p:

$$y_p' = u_1' e^t + u_1 e^t + u_2' e^{-t} - u_2 e^{-t}$$

$$y_p'' = u_1'' e^t + 2u_1' e^t + u_1 e^t + u_2'' e^{-t} - 2u_2' e^{-t} + u_2 e^{-t}$$

Подставляем y_p и его производные в исходное уравнение:

$$y_p'' - y_p = e^{-2t} \sin t$$

Упрощая и собирая подобные члены, получим систему уравнений для u_1' и u_2':

$$\begin{cases} u_1' e^t + u_2' e^{-t} = 0 \\ u_1' e^t - u_2' e^{-t} = e^{-2t} \sin t \end{cases}$$

Решая систему, находим выражения для u_1' и u_2':

$$u_1' = \frac{e^{-3t} \sin t}{2}, \quad u_2' = -\frac{e^{-t} \sin t}{2}$$

Интегрирование для нахождения u_1 и u_2

Вычислим интегралы:

$$u_1 = \frac{1}{2} \int e^{-3t} \sin t \, dt = \frac{e^{-3t}(-3 \sin t - \cos t)}{20}$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}\int e^{-t}\sin t\,dt = \frac{e^{-t}(\sin t + \cos t)}{4}$$

Запись частного решения

Подставляем найденные u_1 и u_2 в выражение для y_p:

$$y_p = u_1 e^t + u_2 e^{-t} = \left(\frac{-3\sin t - \cos t}{20}e^{-2t}\right) + \left(\frac{\sin t + \cos t}{4}e^{-2t}\right)$$

Упрощаем выражение:

$$y_p = \frac{\sin t + 2\cos t}{10}e^{-2t}$$

Общее решение уравнения

Общее решение исходного неоднородного уравнения состоит из решения однородного уравнения и частного решения:

$$y(t) = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{\sin t + 2\cos t}{10}e^{-2t}$$

Где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

3)
Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}e^x \cos x$$

1. Определение специального вида правой части

Правая часть уравнения состоит из двух слагаемых:

- $\frac{1}{2}\cos 2x$
- $\frac{1}{2}e^x \cos x$

Каждое из этих слагаемых представляет собой функцию вида:

$$e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

Параметры для каждого слагаемого:

1. Для $\frac{1}{2}\cos 2x$:
- $\alpha = 0$
- $\beta = 2$
- $A = \frac{1}{2}$
- $B = 0$

2. Для $\frac{1}{2}e^x \cos x$:
- $\alpha = 1$
- $\beta = 1$
- $A = \frac{1}{2}$
- $B = 0$

2. Решение однородного уравнения

Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + 4y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 2i$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

3. Поиск частных решений

a) Для $\frac{1}{2}\cos 2x$:

Поскольку $\cos 2x$ уже входит в общее решение однородного уравнения, предположим частное решение в виде:

$$y_{p1} = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

Подставляем y_{p1} в уравнение и находим коэффициенты:

$$y_{p1} = \frac{1}{8}x\sin 2x$$

b) Для $\frac{1}{2}e^x\cos x$:

Предположим частное решение вида:

$$y_{p2} = e^x(A\cos x + B\sin x)$$

Подставляем y_{p2} в уравнение и находим коэффициенты:

$$y_{p2} = e^x\left(\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{20}\sin x\right)$$

4. Общее решение уравнения

Суммируем общее решение однородного уравнения и найденные частные решения:

$$y = y_c + y_{p1} + y_{p2} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8}x\sin 2x + e^x\left(\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{20}\sin x\right)$$

Итоговое решение:

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8}x\sin 2x + \frac{1}{10}e^x\cos x + \frac{1}{20}e^x\sin x$$

где C_1и C_2— произвольные постоянные.

4)

$$x(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

с использованием метода Остроградского-Лиувилля.

Приведение уравнения к стандартному виду

Разделим всё уравнение на $x(x-1)$, чтобы получить стандартную линейную форму:

$$y'' - \frac{1}{x-1}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0$$

Поиск одного решения

Предположим решение в виде степенной функции $y = x^k$.

Вычислим производные:

$$y' = kx^{k-1}, \quad y'' = k(k-1)x^{k-2}$$

Подставим в уравнение:

$$x(x-1)k(k-1)x^{k-2} - xkx^{k-1} + x^k = 0$$

Упростим:

$$k(k-1)(x-1)x^{k-1} - kx^k + x^k = 0$$

$$[k(k-1) - k + 1]x^k - k(k-1)x^{k-1} = 0$$

Для выполнения равенства при всех x коэффициенты при одинаковых степенях должны равняться нулю:

$$k(k-1) - k + 1 = 0 \quad \text{и} \quad -k(k-1) = 0$$

Из второго уравнения получаем k = 0 или k = 1. Проверим k = 1:

$$1(1-1) - 1 + 1 = 0$$

Это удовлетворяет уравнению, значит одно решение:

$$y_1 = x$$

Поиск второго решения методом вариации постоянных

Используем формулу для второго решения:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx$$

где $P(x) = -\dfrac{1}{x-1}$.

Вычислим:

$$\int P(x)dx = -\int \frac{1}{x-1}dx = -\ln|x-1|$$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{\ln(x-1)} = x - 1$$

$$y_2 = x\int \frac{x-1}{x^2}dx = x\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = x\left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right) + Cx$$

Опустим константу, так как она покрывается общим решением. Таким образом:

$$y_2 = x\ln x + 1$$

Общее решение

Общее решение однородного уравнения:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1x + C_2(x\ln x + 1)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Ответ:

Общее решение уравнения равно $C_1 \cdot x$ плюс $C_2 \cdot (x\ln x + 1)$. То есть,

$y = C_1 x + C_2(x\ln x + 1)$

5)

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{e^t - 1} \\ \dfrac{-3}{e^t - 1} \end{pmatrix}$$

Решим данную систему поэтапно.

1. Решение однородной системы $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$

Для решения однородной системы найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A.

Нахождение собственных значений:

Находим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} -4 - \lambda & -2 \\ 6 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Вычисляем определитель:

$$(-4 - \lambda)(3 - \lambda) - (-2)(6) = (\lambda^2 + \lambda) = 0$$

Следовательно, собственные значения:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

Нахождение собственных векторов:

Для $\lambda_1 = 0$:

$$(A - 0I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решая систему, получаем собственный вектор:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Для $\lambda_2 = -1$:

$$(A + I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решая систему, получаем собственный вектор:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Общее решение однородной системы:

$$\mathbf{x}_h(t) = C_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

2. Матричная экспонента e^{At}

Поскольку матрица A диагонализируема, выразим её в виде $A = P\Lambda P^{-1}$, где P — матрица собственных векторов, а Λ— диагональная матрица собственных значений.

Матрица собственных векторов:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу P^{-1}. Определитель P:

$$\det(P) = (1)(-3) - (2)(-2) = -3 + 4 = 1$$

Таким образом,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Матричная экспонента вычисляется по формуле:

$$e^{At} = Pe^{\Lambda t}P^{-1}$$

где

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Выполним умножение:

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Выполнив умножение матриц, получим:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -3 + 4e^{-t} & -2 + 2e^{-t} \\ 6 - 6e^{-t} & 4 - 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

3. Решение системы методом Лагранжа (вариации произвольных постоянных)

Общее решение неоднородной системы имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t)$$

где $\mathbf{x}_h(t)$— решение однородной системы, а $\mathbf{x}_p(t)$— частное решение.

Используем метод вариации произвольных постоянных. Предположим, что решение имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = C_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2(t)e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Вычислим производную:

$$\mathbf{x}'(t) = C_1{}'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2{}'(t)e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2(t)(-e^{-t})\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$C_1{}'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2{}'(t)e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{e^t - 1} \\ \dfrac{-3}{e^t - 1} \end{pmatrix}$$

Получаем систему уравнений для $C_1{}'(t)$ и $C_2{}'(t)$:

$$\begin{cases} C_1{}'(t) + 2e^{-t}C_2{}'(t) = \dfrac{2}{e^t - 1} \\ -2C_1{}'(t) - 3e^{-t}C_2{}'(t) = \dfrac{-3}{e^t - 1} \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$C_1{}'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1(t) = \text{const} = C_1$$

$$C_2{}'(t) = \frac{e^t}{e^t - 1}$$

Интегрируя $C_2{}'(t)$:

$$C_2(t) = \int \frac{e^t}{e^t - 1} dt = \int \left(1 + \frac{1}{e^t - 1}\right) dt = t + \ln(e^t - 1) + C$$

Для частного решения выбираем константы $C_1 = 0$ и $C = 0$:

$$C_2(t) = t + \ln(e^t - 1)$$

Таким образом, частное решение:

$$\mathbf{x}_p(t) = \big(t + \ln(e^t - 1)\big)\, e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Общее решение системы:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \ln(e^t - 1) e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

или, сгруппировав константы:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \big(C_2 + \ln(e^t - 1)\big)\, e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

где C_1 и C_2— произвольные постоянные.