Лабораторная работа №2

Табачник Максим 413081

25 января 2025 г.

I часть – Теоретическая часть

Дано дифференциальное уравнение Бесселя:

$$x^2\,y''(x)\;+\;x\,y'(x)\;+\;\big(x^2\;-\;\nu^2\big)\,y(x)\;=\;0,\quad x>0,\;\nu\geq 0. \tag{1}$$

Требуется подставить решение вида

$$y_1(x)\;=\;x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n \tag{2}$$

в уравнение (1), найти рекуррентное соотношение для коэффициентов a_n и записать (частное) решение $y_1(x)$ на основе этого соотношения. Затем пояснить, почему данное решение не является общим.

Шаг 1. Выбор формы решения. Мы ищем решение уравнения (1) в виде

$$y_1(x)\;=\;x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n\;=\;\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^{n+\nu}.$$

Чтобы получить рекуррентное соотношение, найдём сначала производные $y_1'(x)$ и $y_1''(x)$.

Шаг 2. Нахождение первой производной $y_1'(x)$. Рассмотрим

$$y_1(x)=x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

Тогда

$$y_1'(x)=\frac{d}{dx}\Big[x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big]=\nu x^{\nu-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{d}{dx}(x^n).$$

Замечаем, что $\frac{d}{dx}(x^n)=n\,x^{n-1}$ для $n\geq 1$, и ноль для $n=0$. Значит,

$$y_1'(x)=\nu x^{\nu-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+x^{\nu}\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n\,x^{n-1}.$$

Вынесем $x^{\nu-1}$ за скобки:

$$y_1'(x)=x^{\nu-1}\Big[\nu\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_nx^n\Big].$$

Шаг 3. Нахождение второй производной $y_1''(x)$. Теперь дифференцируем $y_1'(x)$:

$$y_1''(x)=\frac{d}{dx}\Big[x^{\nu-1}\Big(\nu\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_nx^n\Big)\Big].$$

Применяем правило произведения:
1) $\frac{d}{dx}(x^{\nu-1})=(\nu-1)x^{\nu-2}$,
2) $\frac{d}{dx}\Big(\nu\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_nx^n\Big)=\nu\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}n^2\,a_nx^{n-1}$.
Тогда

$$y_1''(x)=(\nu-1)\,x^{\nu-2}\left(\nu\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n+\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n\,x^n\right)+x^{\nu-1}\Big(\nu\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n\,x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}n^2\,a_n\,x^{n-1}\Big).$$

Шаг 4. Подстановка в уравнение Бесселя. Подставляем $y(x) = y_1(x)$, $y'(x) = y_1'(x)$, $y''(x) = y_1''(x)$ в уравнение Бесселя и разложим каждое слагаемое по степеням x:

1. **Первое слагаемое:** $x^2\, y_1''(x)$

$$x^2\, y_1''(x) = (\nu - 1)\, x^\nu \left[\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^n \right] + x^{\nu+1} \left[\nu \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n\, x^{n-1} \right].$$

Упростим:

$$x^2\, y_1''(x) = (\nu - 1)\nu\, x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n + (\nu - 1)\, x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^n + \nu\, x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n\, x^{\nu+n}.$$

2. **Второе слагаемое:** $x\, y_1'(x)$

$$x\, y_1'(x) = x \cdot x^{\nu-1} \left[\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^n \right] = \nu\, x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n + x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^n.$$

3. **Третье слагаемое:** $(x^2 - \nu^2)\, y_1(x)$

$$(x^2 - \nu^2)\, y_1(x) = x^2 \cdot x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n - \nu^2 \cdot x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = x^{\nu+2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n - \nu^2\, x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Теперь соберём все слагаемые вместе:

$$x^2\, y_1''(x) + x\, y_1'(x) + (x^2 - \nu^2)\, y_1(x) = 0.$$

Подставляем выражения из пунктов 1-3, упорядочиваем и группируем похожие члены:

$$\left[(\nu - 1)\nu + \nu - \nu^2\right] x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n + \left[(\nu - 1) + \nu + 1\right] x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n\, x^{\nu+n} + x^{\nu+2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0.$$

Сократим и упростим коэффициенты:

$$\left[(\nu - 1)\nu + \nu - \nu^2\right] = \nu^2 - \nu + \nu - \nu^2 = 0,$$

$$\left[(\nu - 1) + \nu + 1\right] = \nu - 1 + \nu + 1 = 2\nu.$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$2\nu\, x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n\, x^{\nu+n} + x^{\nu+2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0.$$

Заметим, что все слагаемые имеют общий множитель x^ν. Разделим обе части уравнения на x^ν:

$$2\nu \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n\, x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0.$$

Теперь сгруппируем все члены:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\nu n + n^2\right) a_n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+2} = 0.$$

Сдвинем индекс в последней сумме, заменив n на $n - 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\nu n + n^2\right) a_n\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^n = 0.$$

Теперь объединим суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\nu n + n^2\right) a_n\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^n = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться для всех $x > 0$, коэффициенты при одинаковых степенях x^n должны равняться нулю. Рассмотрим отдельно первые два случая для $n = 0$ и $n = 1$:

Для $n = 0$: Из первой суммы начинаются с $n = 1$, а из второй — с $n = 2$. Следовательно, при $n = 0$ нет дополнительных слагаемых. Таким образом, нет условий для $n = 0$.

Для $n = 1$: Из первой суммы:

$$\left(2\nu \cdot 1 + 1^2\right) a_1\, x^1 = (2\nu + 1)a_1\, x.$$

Из второй суммы при $n = 1$ нет слагаемых, так как $n \geq 2$.
Условие равенства коэффициентов при x^1 нулю:

$$(2\nu + 1)a_1 = 0.$$

Если $\nu \neq -\frac{1}{2}$, то единственным решением является $a_1 = 0$.

Для $n \geq 2$: Для каждого $n \geq 2$ получаем:

$$\left(2\nu n + n^2\right) a_n + a_{n-2} = 0.$$

Тогда рекуррентное соотношение принимает вид:

$$\boxed{a_n = -\frac{1}{2\nu n + n^2}\, a_{n-2}., \quad n \geq 2} \tag{3}$$

Шаг 6. Итоговое (частное) решение $y_1(x)$ Таким образом, решение принимает желаемый вид:

$$y_1(x) \;=\; x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x.$$

Связь с функцией Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ Функция Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ определяется как одно из решений дифференциального уравнения Бесселя и может быть представлена в виде степенного ряда:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

Если переписать $\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$ как $x^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$, то увидим структуру ряда, схожую с

$$x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\dots\Big] x^{2n}.$$

Таким образом, $J_\nu(x)$ тоже можно представить в виде x^ν-фактора и суммы по чётным степеням x^{2n}.
Чтобы «привести» наше решение

$$y_1(x) = x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

к $J_\nu(x)$, достаточно **соответствующим образом выбрать** a_0 и **задать** коэффициенты через факториалы и гамма-функции, а именно:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

В частности, при $n = 0$ получаем

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu + 1)}.$$

Таким образом, чтобы «довести» наше решение до функции Бесселя первого рода $J_\nu(x)$, нужно задать

$$a_0 \;=\; \frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu + 1)},$$

Почему $y_1(x)$ является лишь частным решением, а не общим? Уравнение Бесселя второго порядка имеет *два* линейно независимых решения. Мы построили только *одно* из них — $J_\nu(x)$. Для полного решения необходимо добавить вторую независимую функцию $Y_\nu(x)$. Таким образом, общее решение:

$$y(x) = C_1\, J_\nu(x) + C_2\, Y_\nu(x).$$

Но $J_\nu(x)$ (или $y_1(x)$) само по себе — это лишь *одно* частное решение.

Построение второго решения $y_2(x)$

Ранее мы рассмотрели решение

$$y_1(x) \;=\; x^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n,$$

которое даёт одну ветвь решений уравнения Бесселя. Если 2ν *нецелое*, тогда второе линейно независимое решение можно искать аналогично, но с «обратной» степенью $x^{-\nu}$:

$$y_2(x) \;=\; x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n. \tag{4}$$

Ниже аналогично предыдущему случаю распишем, как находятся коэффициенты b_n.

Шаг 1. Запись уравнения и формы решения. Уравнение Бесселя (для удобства повторим) имеет вид:

$$x^2\, y''(x) \;+\; x\, y'(x) \;+\; \left(x^2 \;-\; \nu^2\right) y(x) \;=\; 0,$$

а мы подставляем в него выражение (4):

$$y_2(x) \;=\; x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n.$$

Чтобы найти рекуррентное соотношение для b_n, вычислим сначала производные $y_2'(x)$ и $y_2''(x)$.

Шаг 2. Вычисление первой производной $y_2'(x)$.

$$y_2(x) = x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^{n-\nu}.$$

Тогда

$$y_2'(x) = \frac{d}{dx}\Big[x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n\Big] = \frac{d}{dx}\big[x^{-\nu}\big] \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n \;+\; x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \frac{d}{dx}(x^n).$$

Производная $\frac{d}{dx}(x^{-\nu}) = -\nu\, x^{-\nu-1}$. Производная $\frac{d}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1}$ (для $n \geq 1$). Значит,

$$y_2'(x) = -\nu\, x^{-\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n \;+\; x^{-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, x^{n-1}.$$

Вынесем $x^{-\nu-1}$ как общий множитель:

$$y_2'(x) = x^{-\nu-1}\Big[-\nu \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, x^n\Big].$$

Шаг 3. Вычисление второй производной $y_2''(x)$. Теперь

$$y_2''(x) = \frac{d}{dx}\Big[x^{-\nu-1}\Big(-\nu \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, x^n\Big)\Big].$$

Снова используем правило произведения. Слагаемые:
1) $\frac{d}{dx}[x^{-\nu-1}] = (-\nu-1)\, x^{-\nu-2}$,
2) $\frac{d}{dx}\Big(-\nu \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, x^n\Big) = -\nu \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, b_n\, x^{n-1}$.
Итого:

$$\begin{aligned} y_2''(x) = (-\nu-1)\, x^{-\nu-2}\, &\Big(-\nu \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, x^n\Big) \\ &+\; x^{-\nu-1}\, \Big(-\nu \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, b_n\, x^{n-1}\Big). \end{aligned}$$

Шаг 4. Подстановка в уравнение Бесселя и рекуррентное соотношение. Подставляем $y_2(x)$, $y_2'(x)$, $y_2''(x)$. Как и раньше, приводим подобные члены по степеням x^n. Каждый коэффициент при одинаковой степени x должен быть равен нулю (ведь сумма равна 0). В итоге, при тщательном сборе получаем рекуррентное соотношение (аналогичное предыдущему, но теперь в нём участвует $-\nu$ вместо ν):

$$\boxed{b_n = -\frac{1}{n^2 - 2n\nu} b_{n-2}, \quad n \geq 2} \tag{5}$$

Шаг 5. Итоговое выражение для $y_2(x)$. Аналогично предыдущему случаю (где мы рассматривали $y_1(x) = x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$), теперь мы подставили в уравнение Бесселя вид

$$y_2(x) \;=\; x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n,$$

Нормировка b_0 для получения $J_{-\nu}(x)$. По аналогии с тем, как мы выбирали $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ для получения $J_\nu(x)$, здесь мы можем задать

$$b_0 \;=\; \frac{1}{2^{-\nu}\, \Gamma(-\nu+1)}$$

Таким образом, при условии, что $2\,\nu$ *не* является целым числом, у нас есть:

$$\boxed{y_1(x) = J_\nu(x) \quad \text{и} \quad y_2(x) = J_{-\nu}(x).}$$

Общее решение и его производная

Общее решение для случая $2\nu \notin \mathbb{Z}$. Мы нашли два линейно независимых решения исходного уравнения Бесселя:

$$y_1(x) \;=\; x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n, \quad y_2(x) \;=\; x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} b_n\, x^n$$

, где ν — неотрицательный параметр, причём 2ν *нецелое* число.

Согласно общей теории линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка, любое такое уравнение имеет *общее решение*, которое является линейной комбинацией двух *линейно независимых* частных решений.

Запишем **общее решение**:

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Производная общего решения $y'(x)$. Наша задача — найти производную $y'(x)$. Используем правило дифференцирования суммы и линейность операции дифференцирования:

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left[C_1 x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + C_2 x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right].$$

Теперь необходимо найти производные каждой из частей отдельно.

Производная $y_1(x)$ Рассмотрим первую часть:

$$y_1(x) = x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Используем правило произведения для производной:

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \frac{d}{dx}\,(x^\nu) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\nu \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right).$$

Вычислим каждую часть отдельно.

1. Производная x^{ν}:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}\right) = \nu x^{\nu-1}.$$

2. Производная ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx}\left(x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Подставим обратно:

$$\frac{d}{dx} y_1(x) = \nu x^{\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Упростим выражение, приведя степени x к общему виду:

$$\frac{d}{dx} y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu a_n x^{\nu+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{\nu+n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\nu+n) x^{\nu+n-1}.$$

Производная $y_2(x)$ Теперь рассмотрим вторую часть:

$$y_2(x) = x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Аналогично, применим правило произведения:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + x^{-\nu} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

Вычислим каждую часть:

1. Производная $x^{-\nu}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}\right) = -\nu x^{-\nu-1}.$$

2. Производная ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n n x^{n-1}.$$

Подставим обратно:

$$\frac{d}{dx} y_2(x) = -\nu x^{-\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n n x^{n-1}.$$

Упростим выражение:

$$\frac{d}{dx} y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\nu b_n) x^{-\nu+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n n x^{-\nu+n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(n-\nu) x^{-\nu+n-1}.$$

Теперь объединим результаты для $y_1'(x)$ и $y_2'(x)$:

$$\boxed{y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\nu+n) x^{\nu+n-1} + C_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n(n-\nu) x^{-\nu+n-1}}.$$

II часть — Наконец-то к машинкам

В данном разделе рассматривается система уравнений движения (по сути, сильно упрощённая модель «ракетного» двигателя), описанная формулами:

$$\begin{cases} m(t)\,\dfrac{dv}{dt} \;+\; \beta\, v^2 \;+\; \mu\, m(t)\, g \;-\; q\, u \;=\; 0, \\ \dfrac{dm}{dt} \;=\; -\,q. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь:

$v = v(t)$ — скорость машины,

$m = m(t)$ — её масса, уменьшающаяся со скоростью q из-за расхода топлива,

β — коэффициент сопротивления воздуха,

μ — коэффициент трения колёс о землю,

u — постоянная (в данной модели) скорость выброса топлива относительно машины,

g — ускорение свободного падения,

q — постоянная скорость расхода топлива ($\dfrac{dm}{dt} = -q$).

Начальные условия таковы, что в момент $t = 0$: $m(0) = m_0$ (машина полна топлива), $v(0) = 0$ (стартовая скорость равна нулю). Второе уравнение из (4) легко интегрируется и даёт:

$$m(t) \;=\; m_0 \;-\; q\, t.$$

Однако первое уравнение — нелинейное и не похоже на уравнение Бесселя, которое мы изучали ранее. Чтобы упростить его структуру, в задании предлагается специальная *замена* переменной скорости.

Замена переменной скорости: введение $V(t)$

По условию, вводят *«изменённую скорость»* $V(t)$ таким образом, что

$$v(t) \;=\; \frac{m(t)}{\beta\, V(t)}\, \frac{dV}{dt}. \tag{5}$$

Иными словами, v выражается не напрямую через V, а через производную dV/dt. Цель такой «хитрой» замены — избавиться от нелинейности по v^2, которая присутствует в уравнении (4).

Почему «поднимается порядок»? При этом замечают, что в дальнейшем уравнение станет *второго порядка* по функции $V(t)$. Однако квадратичная нелинейность $\beta\, v^2$ в исходном уравнении преобразуется в более удобный вид.

Вычисление $\dfrac{dv}{dt}$

Чтобы подставить (5) в первое уравнение системы (4), нужно найти $\frac{dv}{dt}$. Положим:

$$v(t) \;=\; a(t)\, b(t), \quad \text{где} \quad a(t) \;=\; \frac{m(t)}{\beta\, V(t)}, \quad b(t) \;=\; \frac{dV}{dt}.$$

Тогда

$$\frac{dv}{dt} \;=\; \frac{d}{dt}\Big[a(t)\, b(t)\Big] \;=\; a'(t)\, b(t) \;+\; a(t)\, b'(t).$$

Распишем каждую часть:

1. $a(t) = \dfrac{m(t)}{\beta\, V(t)}$.

   Тогда

$$a'(t) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{m(t)}{\beta\, V(t)}\Big) = \frac{1}{\beta}\, \frac{d}{dt}\Big(\frac{m(t)}{V(t)}\Big).$$

Это производная частного:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m(t)}{V(t)}\Big) = \frac{m'(t)\,V(t) - m(t)\,V'(t)}{(V(t))^2}.$$

Зная, что $m'(t) = \frac{dm}{dt} = -\,q$, получаем

$$a'(t) = \frac{1}{\beta}\,\frac{\big(-q\big)\,V(t)\ -\ m(t)\,V'(t)}{(V(t))^2} = \frac{1}{\beta}\,\Big(-\frac{q}{V(t)} - \frac{m(t)\,V'(t)}{(V(t))^2}\Big).$$

2. $b(t) = \dfrac{dV}{dt}$. Значит $\quad b'(t) = \frac{d^2V}{dt^2}$.

Полная производная

$$\frac{dv}{dt} = a'(t)\,b(t)\ +\ a(t)\,b'(t) = \underbrace{\left[\frac{1}{\beta}\Big(-\frac{q}{V(t)}\ -\ \frac{m(t)}{(V(t))^2}\,\frac{dV}{dt}\Big)\right]}_{a'(t)}\cdot\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{b(t)} + \underbrace{\left[\frac{m(t)}{\beta\,V(t)}\right]}_{a(t)}\cdot\underbrace{\frac{d^2V}{dt^2}}_{b'(t)}.$$

Раскрыв произведения, получаем:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\beta}\Big(-\frac{q}{V(t)}\,\frac{dV}{dt}\ -\ \frac{m(t)}{(V(t))^2}\,\Big(\frac{dV}{dt}\Big)^2\Big)\ +\ \frac{m(t)}{\beta\,V(t)}\,\frac{d^2V}{dt^2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\beta}\left(-\frac{q}{V(t)}\,\frac{dV}{dt}\ -\ \frac{m(t)}{\big(V(t)\big)^2}\,\Big(\frac{dV}{dt}\Big)^2\right)\ +\ \frac{m(t)}{\beta\,V(t)}\,\frac{d^2V}{dt^2}}.$$

Переход к уравнению (6) путём замены $v(t) = \frac{m(t)}{\beta\,V(t)}\,\frac{dV}{dt}$

Нужно свести к уравнению, которое имеет вид:

$$m(t)\,\frac{dv}{dt}\ +\ \beta\,v^2\ +\ \mu\,m(t)\,g\ -\ q\,u\ =\ 0.$$

Чтобы переписать его через $V(t)$, нужно:

- Выразить v^2 через $V(t)$ и $\dfrac{dV}{dt}$.
- Выразить $m(t)\,\dfrac{dv}{dt}$ через $V(t)$, $\dfrac{dV}{dt}$ и $\dfrac{d^2V}{dt^2}$.

Шаг 1: Вычисление $\beta\,v^2$.

$$v(t)\ =\ \frac{m(t)}{\beta\,V(t)}\,\frac{dV}{dt}.$$

Тогда

$$v^2\ =\ \Big(\frac{m}{\beta\,V}\Big)^2\,\Big(\frac{dV}{dt}\Big)^2 = \frac{m^2}{\beta^2\,V^2}\Big(\frac{dV}{dt}\Big)^2.$$

Значит

$$\beta\,v^2\ =\ \beta\,\frac{m^2}{\beta^2\,V^2}\,\Big(\frac{dV}{dt}\Big)^2 = \frac{m^2}{\beta\,V^2}\Big(\frac{dV}{dt}\Big)^2.$$

Шаг 2: Вычисление $m(t)\,\dfrac{dv}{dt}$

Из предыдущих шагов (см. «Вычисление $\frac{dv}{dt}$») мы знаем, что

$$\frac{dv}{dt}\ =\ \frac{1}{\beta}\Big(-\frac{q}{V}\,\frac{dV}{dt}\ -\ \frac{m}{V^2}\,\Big(\frac{dV}{dt}\Big)^2\Big)\ +\ \frac{m}{\beta\,V}\,\frac{d^2V}{dt^2}.$$

(Здесь $m = m(t)$, $V = V(t)$, но ради краткости аргумент (t) опускается.)
Тогда, умножая на $m(t)$,

$$m\,\frac{dv}{dt} = m\left\{\frac{1}{\beta}\Big(-\frac{q}{V}\,\frac{dV}{dt}\ -\ \frac{m}{V^2}\,\Big(\frac{dV}{dt}\Big)^2\Big)\ +\ \frac{m}{\beta\,V}\,\frac{d^2V}{dt^2}\right\}.$$

Распределим m:

$$m\,\frac{dv}{dt} = \underbrace{\frac{m}{\beta}\Big(-\frac{q}{V}\,\frac{dV}{dt}\Big)}_{\text{(A)}} \;-\; \underbrace{\frac{m^2}{\beta\,V^2}\Big(\frac{dV}{dt}\Big)^2}_{\text{(B)}} \;+\; \underbrace{\frac{m^2}{\beta\,V}\,\frac{d^2V}{dt^2}}_{\text{(C)}}.$$

Шаг 3: Сложение $m\,\frac{dv}{dt}$ и $\beta\,v^2$

Первое уравнение (4) содержит

$$m\,\frac{dv}{dt} \;+\; \beta\,v^2 \;+\; \mu\,m\,g \;-\; q\,u = 0.$$

Мы уже нашли:

$$m\,\frac{dv}{dt} \;=\; \text{(A)} + \text{(B)} + \text{(C)}, \quad \beta\,v^2 = \frac{m^2}{\beta\,V^2}\Big(\frac{dV}{dt}\Big)^2.$$

Заметим, что (B) $= -\dfrac{m^2}{\beta\,V^2}\left(\frac{dV}{dt}\right)^2$, а $\beta\,v^2 = +\dfrac{m^2}{\beta\,V^2}\left(\frac{dV}{dt}\right)^2$. Эти два слагаемых *суммарно зануляются*:

$$\underbrace{-\,\frac{m^2}{\beta\,V^2}\left(\frac{dV}{dt}\right)^2}_{\text{(B)}} \;+\; \underbrace{\frac{m^2}{\beta\,V^2}\left(\frac{dV}{dt}\right)^2}_{\beta\,v^2} = 0.$$

Значит в сумме остаются:

$$\text{(A)} \;+\; \text{(B)} + \beta\,v^2 \;+\; \text{(C)} \;+\; \mu\,m\,g \;-\; q\,u \;=\; 0,$$

то есть

$$\underbrace{\frac{-\,m\,q}{\beta\,V}\,\frac{dV}{dt}}_{\text{(A)}} \;+\; \underbrace{\frac{m^2}{\beta\,V}\,\frac{d^2V}{dt^2}}_{\text{(C)}} \;+\mu\,m\,g \;-\; q\,u \;=\; 0.$$

Шаг 4: Приведение к линейному ОДУ

Переписываем вышеуказанную сумму:

$$\frac{m^2}{\beta\,V}\,\frac{d^2V}{dt^2} \;-\; \frac{m\,q}{\beta\,V}\,\frac{dV}{dt} \;+\; \mu\,m\,g \;-\; q\,u \;=\; 0.$$

Хотим получить стандартный вид: каждое слагаемое — это линейное выражение по $\dfrac{d^2V}{dt^2}, \dfrac{dV}{dt}, V$. Увидим, что $\mu\,m\,g - q\,u$ может быть умножено на β для согласования форм (или просто умножим всё уравнение на $\frac{\beta\,V}{m^2}$).

Умножаем на $\dfrac{\beta\,V}{m^2}$.

$$\left(\frac{\beta\,V}{m^2}\right)\Big[\frac{m^2}{\beta\,V}\,\frac{d^2V}{dt^2} - \frac{m\,q}{\beta\,V}\,\frac{dV}{dt} + \mu\,m\,g - q\,u\Big] = 0.$$

Внутри скобок каждое произведение упрощается:

- $\left(\dfrac{m^2}{\beta\,V}\right)\left(\dfrac{\beta\,V}{m^2}\right) = 1$, даёт $\dfrac{d^2V}{dt^2}$.
- $\left(\dfrac{m\,q}{\beta\,V}\right)\left(\dfrac{\beta\,V}{m^2}\right) = \dfrac{q}{m}$, даёт $-\frac{q}{m}\,\dfrac{dV}{dt}$.
- $$(\big[\mu\,m\,g - q\,u\big] \cdot \frac{\beta\,V}{m^2} = \beta\,\frac{V}{m^2}\,\big[\mu\,m\,g - q\,u\big].$$

Таким образом, итоговое уравнение:

$$\frac{d^2V}{dt^2} \;-\; \frac{q}{m}\,\frac{dV}{dt} \;+\; \beta\,\frac{V}{m^2}\,\big[\mu\,m\,g - q\,u\big] = 0,$$

где, конечно, $m = m(t)$. Записывая $m(t)$ явно, получаем:

$$\frac{d^2V}{dt^2} \;-\; \frac{q}{m(t)}\,\frac{dV}{dt} \;+\; \beta\,\frac{V(t)}{m^2(t)}\,\Big[\mu\,m(t)\,g - q\,u\Big] \;=\; 0,$$

что уже есть *линейное* ОДУ второго порядка по $V(t)$.

Шаг 5: Приведение к виду: $m^2(t)\,\frac{d^2V}{dt^2} - q\,m(t)\,\frac{dV}{dt} + \cdots = 0$
Часто удобнее, наоборот, *не* делить на m^2, а умножать всё на m^2, получая:

$$\boxed{m^2(t)\,\frac{d^2V}{dt^2}\;-\;q\,m(t)\,\frac{dV}{dt}\;+\;\beta\,\bigl[\mu\,m(t)\,g-q\,u\bigr]\,V(t)\;=\;0.} \tag{6}$$

Именно так выглядит искомое *линейное* уравнение второго порядка для $V(t)$.

Вторая замена: переход к переменной τ

На предыдущем шаге (см. уравнение (6)) мы получили линейное ОДУ второго порядка по функции $V(t)$:

$$m^2(t)\,\frac{d^2V}{dt^2}\;-\;q\,m(t)\,\frac{dV}{dt}\;+\;\beta\bigl[\mu\,m(t)\,g\;-\;q\,u\bigr]\,V(t)\;=\;0. \tag{6}$$

Теперь вводится *вторая* замена переменной, призванная привести это уравнение к виду уравнения Бесселя. Предложено положить

$$\tau\;=\;\frac{2}{q}\,\sqrt{\beta\,\mu\,m(t)\,g}. \tag{7}$$

Ниже подробно распишем, как по этой замене выразить $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d^2V}{dt^2}$, а также $m(t)$ через τ. Затем покажем, что (6) переходит в

$$\tau^2\,\frac{d^2V}{d\tau^2}\;+\;\tau\,\frac{dV}{d\tau}\;+\;\bigl(\tau^2\;-\;\nu^2\bigr)\,V\;=\;0, \tag{8}$$

и выясним, чему равен параметр ν.

1. Выражение для $m(t)$ через τ. Из определения τ (формула (7)) имеем

$$\tau^2\;=\;\left(\frac{2}{q}\right)^2\beta\,\mu\,g\,m(t).$$

Отсюда

$$m(t)\;=\;\frac{q^2}{4\,\beta\,\mu\,g}\,\tau^2.$$

Обозначим для удобства

$$\alpha\;=\;\frac{q^2}{4\,\beta\,\mu\,g},\quad\text{тогда}\quad m(t)\;=\;\alpha\,\tau^2.$$

2. Связь t и τ. Чтобы переписать производные $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d^2V}{dt^2}$ через τ-производные, найдём $\frac{d\tau}{dt}$. Дифференцируем $m(t)=\alpha\,\tau^2$ по времени:

$$\frac{dm}{dt}\;=\;\alpha\,\frac{d}{dt}\bigl[\tau^2\bigr]\;=\;\alpha\cdot2\tau\,\frac{d\tau}{dt}\;=\;-\,q,$$

так как по условию задачи $m'(t)=\frac{dm}{dt}=-q$. Значит

$$2\,\alpha\,\tau\,\frac{d\tau}{dt}\;=\;-\,q,\quad\Longrightarrow\quad\frac{d\tau}{dt}\;=\;-\,\frac{q}{2\,\alpha\,\tau}.$$

Но $\alpha=\frac{q^2}{4\beta\mu g}$. Тогда

$$2\,\alpha\;=\;2\,\frac{q^2}{4\beta\mu g}\;=\;\frac{q^2}{2\beta\mu g},$$

откуда

$$\frac{d\tau}{dt}\;=\;-\,\frac{q}{\frac{q^2}{2\beta\mu g}\,\tau}\;=\;-\,\frac{2\,\beta\,\mu\,g}{q\,\tau}.$$

Итак,

$$\frac{d\tau}{dt}\;=\;-\,\frac{2\beta\mu g}{q\,\tau},\quad\text{а значит}\quad\frac{dt}{d\tau}\;=\;-\,\frac{q\,\tau}{2\beta\mu g}.$$

3. Пересчёт $\dfrac{dV}{dt}$ и $\dfrac{d^2V}{dt^2}$ через производные по τ.

$$\frac{dV}{dt} \;=\; \frac{dV}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt} \;=\; \frac{dV}{d\tau}\Bigl(-\,\frac{2\beta\mu g}{q\,\tau}\Bigr) \;=\; -\,\frac{2\beta\mu g}{q}\,\frac{1}{\tau}\,\frac{dV}{d\tau}.$$

Далее,

$$\frac{d^2V}{dt^2} \;=\; \frac{d}{dt}\Bigl(\frac{dV}{dt}\Bigr) \;=\; \frac{d}{dt}\Bigl[\frac{dV}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt}\Bigr] \;=\; \underbrace{\frac{d^2V}{d\tau^2}\Bigl(\frac{d\tau}{dt}\Bigr)^2}_{\text{применяем правило производной к } \frac{dV}{d\tau}} \;+\; \underbrace{\frac{dV}{d\tau}\,\frac{d}{dt}\Bigl(\frac{d\tau}{dt}\Bigr)}_{\text{производная от второго фактора}}.$$

Из предыдущего пункта знаем:

$$\Bigl(\frac{d\tau}{dt}\Bigr)^2 = \Bigl(-\,\frac{2\beta\mu g}{q\,\tau}\Bigr)^2 = \frac{4(\beta\mu g)^2}{q^2\,\tau^2},$$

а также

$$\frac{d}{dt}\Bigl(\frac{d\tau}{dt}\Bigr) = \frac{d}{dt}\Bigl(-\,\frac{2\beta\mu g}{q\,\tau}\Bigr) = -\,\frac{2\beta\mu g}{q}\,\frac{d}{dt}\Bigl(\frac{1}{\tau}\Bigr) = -\,\frac{2\beta\mu g}{q}\,\Bigl(-\,\frac{1}{\tau^2}\,\frac{d\tau}{dt}\Bigr) = \frac{2\beta\mu g}{q\,\tau^2}\,\frac{d\tau}{dt}.$$

Подставляя $\frac{d\tau}{dt} = -\,\frac{2\beta\mu g}{q\,\tau}$, получаем

$$\frac{d}{dt}\Bigl(\frac{d\tau}{dt}\Bigr) = \frac{2\beta\mu g}{q\,\tau^2}\Bigl(-\,\frac{2\beta\mu g}{q\,\tau}\Bigr) = -\,\frac{4(\beta\mu g)^2}{q^2}\,\frac{1}{\tau^3}.$$

Тогда

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{d^2V}{d\tau^2}\,\frac{4(\beta\mu g)^2}{q^2\,\tau^2} \;+\; \frac{dV}{d\tau}\,\Bigl(-\,\frac{4(\beta\mu g)^2}{q^2}\,\frac{1}{\tau^3}\Bigr).$$

4. Подстановка в уравнение (6) и приведение к виду (8). Вернёмся к уравнению (6):

$$m^2(t)\,\frac{d^2V}{dt^2} \;-\; q\,m(t)\,\frac{dV}{dt} \;+\; \beta\bigl[\mu\,m(t)\,g \;-\; q\,u\bigr]\,V(t) \;=\; 0.$$

Подставляем найденные выражения в уравнение (6):

$$\begin{aligned}
m^2(t)\,\frac{d^2V}{dt^2} &= (\alpha\,\tau^2)^2\,\biggl[\frac{4\,(\beta\mu g)^2}{q^2\,\tau^2}\,\frac{d^2V}{d\tau^2} - \frac{4\,(\beta\mu g)^2}{q^2\,\tau^3}\,\frac{dV}{d\tau}\biggr]\\
&= \alpha^2\,\tau^4\,\biggl[\frac{4\,(\beta\mu g)^2}{q^2\,\tau^2}\,\frac{d^2V}{d\tau^2} - \frac{4\,(\beta\mu g)^2}{q^2\,\tau^3}\,\frac{dV}{d\tau}\biggr]\\
&= \frac{4\,\alpha^2\,(\beta\mu g)^2}{q^2}\,\tau^2\,\frac{d^2V}{d\tau^2} - \frac{4\,\alpha^2\,(\beta\mu g)^2}{q^2}\,\tau\,\frac{dV}{d\tau}.\\
-q\,m(t)\,\frac{dV}{dt} &= -q\,(\alpha\,\tau^2)\,\Bigl(-\,\frac{2\,\beta\mu g}{q}\,\frac{1}{\tau}\,\frac{dV}{d\tau}\Bigr)\\
&= \frac{2\,\alpha\,\beta\mu g}{1}\,\tau\,\frac{dV}{d\tau}.\\
\beta\bigl[\mu\,m(t)\,g - q\,u\bigr]\,V(t) &= \beta\,\bigl[\mu\,(\alpha\,\tau^2)\,g - q\,u\bigr]\,V(\tau)\\
&= \beta\,\bigl[\mu\,\alpha\,g\,\tau^2 - q\,u\bigr]\,V(\tau).
\end{aligned}$$

Собирая все части уравнения, получаем:

$$\frac{4\,\alpha^2\,(\beta\mu g)^2}{q^2}\,\tau^2\,\frac{d^2V}{d\tau^2} - \frac{4\,\alpha^2\,(\beta\mu g)^2}{q^2}\,\tau\,\frac{dV}{d\tau} + \frac{2\,\alpha\,\beta\mu g}{1}\,\tau\,\frac{dV}{d\tau} + \beta\,\bigl[\mu\,\alpha\,g\,\tau^2 - q\,u\bigr]\,V(\tau) = 0.$$

Упрощаем коэффициенты:

$$\frac{4\,\alpha^2\,(\beta\mu g)^2}{q^2}\,\tau^2\,\frac{d^2V}{d\tau^2} + \Bigl(-\frac{4\,\alpha^2\,(\beta\mu g)^2}{q^2}\,\tau + \frac{2\,\alpha\,\beta\mu g}{1}\,\tau\Bigr)\,\frac{dV}{d\tau} + \beta\,\mu\,\alpha\,g\,\tau^2\,V(\tau) - \beta\,q\,u\,V(\tau) = 0.$$

Вынесем общий множитель $\frac{4\,\alpha^2\,(\beta\mu g)^2}{q^2}$:

$$\frac{4\,\alpha^2\,(\beta\mu g)^2}{q^2}\,\biggl[\tau^2\,\frac{d^2V}{d\tau^2} - \tau\,\frac{dV}{d\tau}\biggr] + \frac{2\,\alpha\,\beta\mu g}{1}\,\tau\,\frac{dV}{d\tau} + \beta\,\mu\,\alpha\,g\,\tau^2\,V(\tau) - \beta\,q\,u\,V(\tau) = 0.$$

Далее, используя значение $\alpha = \frac{q^2}{4\,\beta\,\mu\,g}$, упрощаем коэффициенты:

$$\frac{4\left(\frac{q^2}{4\,\beta\,\mu\,g}\right)^2(\beta\mu g)^2}{q^2} = \frac{4\,\frac{q^4}{16\,\beta^2\,\mu^2\,g^2}\,(\beta\mu g)^2}{q^2} = \frac{4\,\frac{q^4}{16}}{q^2} = \frac{q^2}{4},$$
$$\frac{2\,\alpha\,\beta\mu g}{1} = 2\,\frac{q^2}{4\,\beta\,\mu\,g}\,\beta\,\mu\,g = \frac{q^2}{2},$$
$$\beta\,\mu\,\alpha\,g = \beta\,\mu\,\frac{q^2}{4\,\beta\,\mu\,g}\,g = \frac{q^2}{4}.$$

Подставляем упрощённые коэффициенты обратно:

$$\frac{q^2}{4}\left[\tau^2\,\frac{d^2V}{d\tau^2} - \tau\,\frac{dV}{d\tau}\right] + \frac{q^2}{2}\,\tau\,\frac{dV}{d\tau} + \frac{q^2}{4}\,\tau^2\,V(\tau) - \beta\,q\,u\,V(\tau) = 0.$$

Умножим всё уравнение на $\frac{4}{q^2}$ для упрощения:

$$\tau^2\,\frac{d^2V}{d\tau^2} - \tau\,\frac{dV}{d\tau} + 2\,\tau\,\frac{dV}{d\tau} + \tau^2\,V(\tau) - \frac{4\,\beta\,u}{q}\,V(\tau) = 0.$$

Собираем подобные члены:

$$\tau^2\,\frac{d^2V}{d\tau^2} + \tau\,\frac{dV}{d\tau} + \left(\tau^2 - \frac{4\,\beta\,u}{q}\right)V(\tau) = 0.$$

5. Определение параметра ν Сравнивая полученное уравнение с *стандартной формой уравнения Бесселя*:

$$\tau^2\,\frac{d^2V}{d\tau^2} \;+\; \tau\,\frac{dV}{d\tau} \;+\; \left(\tau^2 - \nu^2\right)V(\tau) \;=\; 0,$$

видим, что параметр ν^2 соответствует константе $\frac{4\,\beta\,u}{q}$. Таким образом, получаем:

$$\boxed{\nu^2 = \frac{4\,\beta\,u}{q}, \quad \text{откуда} \quad \nu = \sqrt{\frac{4\,\beta\,u}{q}}.}$$

Решение уравнения Бесселя

Рассмотрим уравнение Бесселя:

$$\tau^2\,\frac{d^2V}{d\tau^2} \;+\; \tau\,\frac{dV}{d\tau} \;+\; \left(\tau^2 - \nu^2\right)V(\tau) \;=\; 0, \quad 2\,\nu \;\notin\; \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Здесь ν — неотрицательный (или вообще вещественный) параметр, удовлетворя условию $2\nu \notin \mathbb{Z}$.

1. Решение вида τ^ν (ветвь $+\nu$)

Первое (частное) решение уравнения Бесселя ищем в виде:

$$V_1(\tau) \;=\; \tau^\nu\,\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\tau^n$$

Чтобы найти коэффициенты a_n, подставим это разложение в уравнение (8).

1.1. Рекуррентное соотношение для a_n Воспользуемся рекуррентным соотношением, которое мы нашли в первой части:

$$a_n = -\,\frac{1}{2\nu n + n^2}\,a_{n-2}., \quad n \geq 2$$

1.2. Итоговое выражение и связь с $J_\nu(\tau)$ Итак, мы имеем:

$$V_1(\tau) \;=\; \tau^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\tau^n, \quad \text{где } a_n = -\,\frac{1}{2\nu n + n^2}\,a_{n-2}., \quad n \ge 2,\ a_1 = 0.$$

Такой ряд (при правильном выборе a_0) даёт *функцию Бесселя первого рода* $J_\nu(\tau)$. Конкретно, если выбрать

$$a_0 \;=\; \frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)},$$

то мы получим классическую формулу для $J_\nu(\tau)$ в виде степенного ряда.
Таким образом, решение τ^ν-ветви:

$$V_1(\tau) \;=\; C_1\,\tau^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\tau^n \;=\; C_1\,J_\nu(\tau),$$

где C_1 — произвольная постоянная, а $J_\nu(\tau)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν.

2. Решение вида $\tau^{-\nu}$ (ветвь $-\nu$)

Второе (независимое) решение обычно ищут в виде:

$$V_2(\tau) \;=\; \tau^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} b_n\,\tau^n$$

Снова подставляем в уравнение Бесселя и находим условия на коэффициенты b_n. Аналогично первому случаю при подходящей нормировке $b_{n=0}$ такой ряд даёт функцию $J_{-\nu}(\tau)$. В частности, если выбрать

$$b_0 \;=\; \frac{1}{2^{-\nu}\,\Gamma(1-\nu)},$$

то мы придём к канонической форме разложения $J_{-\nu}(\tau)$.

Таким образом, решение $\tau^{-\nu}$-ветви:

$$V_2(\tau) \;=\; C_2\,\tau^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,\tau^n \;=\; C_2\,J_{-\nu}(\tau),$$

где C_2 — ещё одна произвольная постоянная.

3. Общее решение

Поскольку $2\nu \notin \mathbb{Z}$, функции $J_\nu(\tau)$ и $J_{-\nu}(\tau)$ являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя (8). Следовательно, общее решение выражается их линейной комбинацией.

Итог:

$$\boxed{V(\tau) \;=\; C_1\,J_\nu(\tau) \;+\; C_2\,J_{-\nu}(\tau),} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}).$$

Это и есть общее решение уравнения (8), если $2\nu \notin \mathbb{Z}$.

Выражение для $v(t)$.

Напомним, наша цель — в итоге найти $v(t)$, физическую скорость. Но сейчас у нас есть функция $V(\tau)$, зависящая от τ, тогда как τ сама есть функция от времени t.

В первой части мы ввели замену (формула (5)), которая определяет

$$v(t) \;=\; \frac{m(t)}{\beta\,V(\tau)}\;\frac{dV}{dt}.$$

По формуле (7) в предыдущих выкладках имеем

$$\tau \;=\; \frac{2}{q}\,\sqrt{\beta\,\mu\,m(t)\,g} \quad\Longleftrightarrow\quad m(t) \;=\; \alpha\,\tau^2, \quad \text{где} \quad \alpha \;=\; \frac{q^2}{4\,\beta\,\mu\,g}.$$

Поэтому в выражении для $v(t)$ вместо $m(t)$ мы теперь пишем $\alpha\,\tau^2$.

Подставим также $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{d\tau}\,\dfrac{d\tau}{dt}$.
Тогда:

$$v(t) \;=\; \frac{m(t)}{\beta\,V(\tau)}\,\frac{dV}{dt} \;=\; \frac{\alpha\,\tau^2}{\beta\,V(\tau)}\;\underbrace{\frac{dV}{d\tau}}_{V'(\tau)}\;\;\underbrace{\frac{d\tau}{dt}}_{-\frac{2\,\beta\,\mu\,g}{q\,\tau}}\;.$$

Здесь мы учли найденную ранее формулу

$$\frac{d\tau}{dt} \;=\; -\,\frac{2\,\beta\,\mu\,g}{q\,\tau}.$$

Теперь выполним подстановку пошагово:

$$v(t) \;=\; \frac{\alpha\,\tau^2}{\beta\,V(\tau)}\;V'(\tau)\;\left(-\,\frac{2\,\beta\,\mu\,g}{q\,\tau}\right).$$

Вынесем общие множители:

$$v(t) \;=\; \alpha\cdot\left(-\,\frac{2\,\beta\,\mu\,g}{q}\right)\;\frac{\tau^2}{\tau}\;\frac{V'(\tau)}{\beta\,V(\tau)} \;=\; \alpha\;\left(-\,\frac{2\,\beta\,\mu\,g}{q}\right)\;\frac{\tau}{\beta}\;\frac{V'(\tau)}{V(\tau)}.$$

Заметим, что $\dfrac{\alpha\,\beta}{\beta} = \alpha$, поэтому дальнейшее упрощение даёт

$$v(t) \;=\; -\,\frac{2\,\alpha\,\mu\,g}{q}\;\tau\;\frac{V'(\tau)}{V(\tau)}.$$

(Поскольку одно β сокращается.)

Если захотим выразить всё через β, q, τ без α, подставим $\alpha = \dfrac{q^2}{4\,\beta\,\mu\,g}$.
Тогда

$$-\,\frac{2\,\alpha\,\mu\,g}{q} = -\,\frac{2\left(\frac{q^2}{4\,\beta\,\mu\,g}\right)\mu\,g}{q} = -\,\frac{2\,q^2\,\mu\,g}{4\,\beta\,\mu\,g\,q} = -\,\frac{q}{2\,\beta}.$$

Таким образом,

$$\boxed{v(t) \;=\; -\,\frac{q}{2\,\beta}\;\tau\;\frac{V'(\tau)}{V(\tau)},}$$

где

$$\tau = \tau(t) = \frac{2}{q}\sqrt{\beta\,\mu\,m(t)\,g},\quad V'(\tau) = \frac{d}{d\tau}V(\tau).$$

Подставляем вместо $V'(\tau)$ и $V(\tau)$ соответствующие значения и совершаем обратную замену. Итого получаем:

$$\boxed{v(t) = -\frac{1}{\beta}\sqrt{\beta\mu m(t)g}\;\frac{C_1 y_1'(\tau) + C_2 y_2'(\tau)}{C_1 y_1(\tau) + C_2 y_2(\tau)}}$$

Введение новой константы $C = \frac{C_1}{C_2}$

Пусть

$$V(\tau) \;=\; C_1\,J_\nu(\tau) \;+\; C_2\,J_{-\nu}(\tau).$$

Если $C_2 \neq 0$, то можно вынести C_2 за скобки:

$$V(\tau) \;=\; C_2\Big[\underbrace{\tfrac{C_1}{C_2}}_{=C}\;J_\nu(\tau) \;+\; J_{-\nu}(\tau)\Big].$$

Таким образом, вводим

$$C \;=\; \frac{C_1}{C_2}.$$

Тогда

$$V(\tau) \;=\; C_2 \,\Big[C\, J_\nu(\tau) \;+\; J_{-\nu}(\tau)\Big].$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{V'(\tau)}{V(\tau)} = \frac{\dfrac{d}{d\tau}\Big\{C_2\big[C\, J_\nu + J_{-\nu}\big]\Big\}}{C_2\big[C\, J_\nu + J_{-\nu}\big]}.$$

Из числителя и знаменателя вынесется общий множитель C_2, поэтому он сократится:

$$\frac{V'(\tau)}{V(\tau)} = \frac{\frac{d}{d\tau}\big[C\, J_\nu(\tau) + J_{-\nu}(\tau)\big]}{C\, J_\nu(\tau) + J_{-\nu}(\tau)}.$$

Таким образом, вся зависимость от (C_1, C_2) сведена к *одному* параметру $C = \frac{C_1}{C_2}$.
Из предыдущих шагов (см. формулу для $v(t)$ в первой части) мы знаем, что

$$v(t) \;=\; -\,\frac{q}{2\beta}\;\tau\;\frac{V'(\tau)}{V(\tau)}.$$

Подставляя полученное выше упрощённое отношение, имеем:

$$\boxed{v(t) = -\frac{1}{\beta}\sqrt{\beta\mu m(t) g}\;\frac{Cy_1'(\tau) + y_2'(\tau)}{Cy_1(\tau) + y_2(\tau)}}$$

Нахождение $\boldsymbol{C}$ из условия $\boldsymbol{\frac{dV}{d\tau} = 0}$ Допустим, в задаче дано дополнительное условие:

$$\frac{dV}{d\tau} \;=\; 0$$

и мы хотим определить C. Откуда это условие могло взяться?

Примем, что $\frac{dV}{dt}\big|_{t=0} = 0$, т.е. $t = 0$ - двигатель машины ещё не «раскручен» и «прирост» функции $V(t)$ в начальный момент равен нулю. Так как $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt}$, то при $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$ равенство $\frac{dV}{dt} = 0$ эквивалентно $\frac{dV}{d\tau} = 0$.

С учётом

$$V(\tau) \;=\; C_2\big[C\, J_\nu(\tau) + J_{-\nu}(\tau)\big],$$

его производная:

$$V'(\tau) = C_2\Big[C\, J_\nu'(\tau) + J_{-\nu}'(\tau)\Big].$$

Тогда условие $V'(\tau) = 0$ означает:

$$C_2\Big[C\, J_\nu'(\tau) \;+\; J_{-\nu}'(\tau)\Big] = 0.$$

Предполагается, что $C_2 \neq 0$. Значит, остаётся:

$$C\, J_\nu'(\tau) + J_{-\nu}'(\tau) = 0.$$

Из последнего равенства сразу получаем:

$$C \;=\; -\,\frac{J_{-\nu}'(\tau)}{J_\nu'(\tau)}.$$

Так и находится нужная константа C. Подставив это C обратно, мы полностью фиксируем конкретное решение $V(\tau)$ (а значит и $v(t)$).

III часть — Симуляция

В этой заключительной части нам предстоит проверить, «на практике», к чему приводят выведенные формулы и ряды. Мы хотим увидеть графики скорости, а также приблизиться к численному ответу на вопрос: *не побьём ли мы рекорд скорости?*

Реализация численного вычисления рядов для y_1, y_2, y_1' и y_2'.

В качестве примера возьмём параметры, подобные тем, что упоминаются для Aussie Invader 5R (см. таблицу ниже):

m_0, кг	m_{final}, кг	q, кг/с	u, м/с	β	μ	g, м/с^2
9100	6300	130	1550	0.1	0.5	9.81

Таблица 1: Примерные параметры Aussie Invader 5R

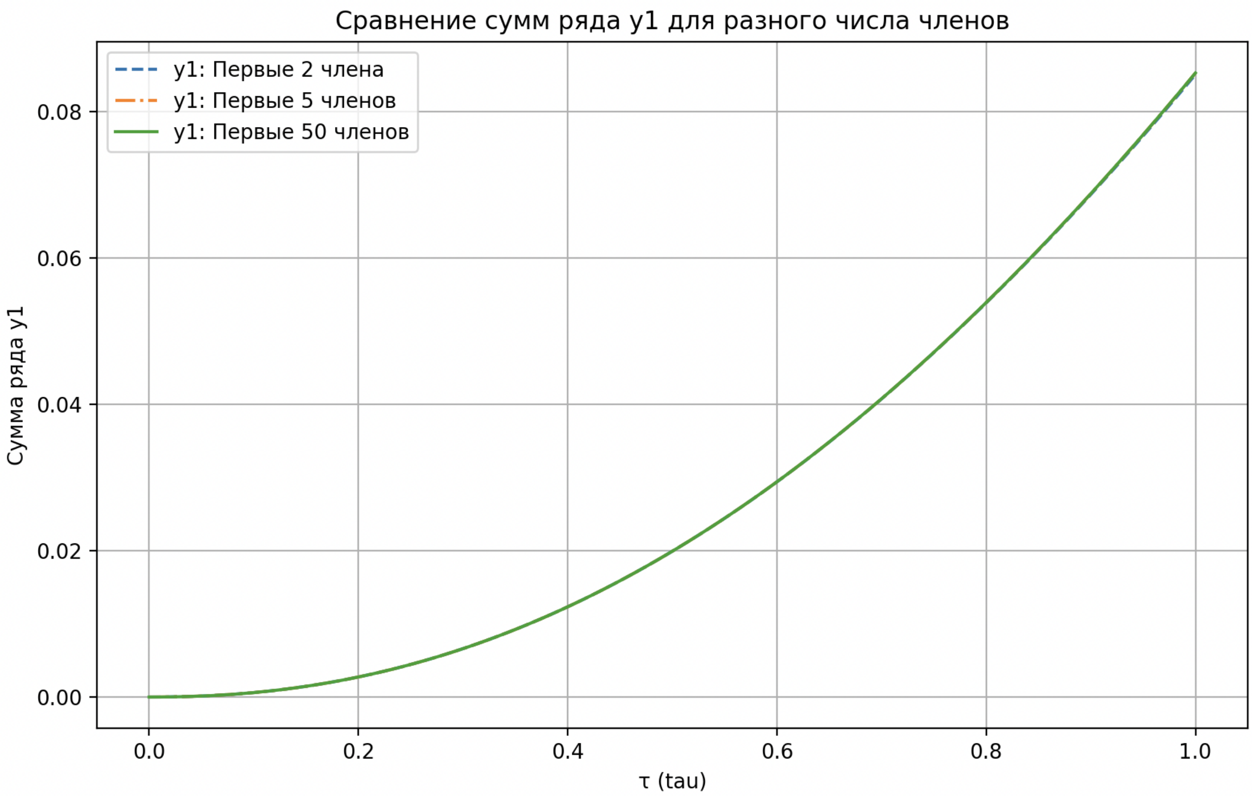
Из этих данных видим, что:

$$m_0 - m_{\text{final}} = 9100 - 6300 = 2800 \text{ кг} \implies \text{примерное время } T = \frac{m_0 - m_{\text{final}}}{q} \approx \frac{2800}{130} \approx 21.54 \text{ с.}$$

То есть за $t \approx 21.55$ секунд топливо иссякнет.

Выбор разбиения отрезка $[0, T]$: Для численного вычисления рядов y_1, y_2, y_1' и y_2' используется равномерное разбиение отрезка $[0, T]$. Разбиение осуществляется на 100 равномерных точек при помощи функции `numpy.linspace`, что соответствует шагу $\Delta\tau = \frac{T}{99} \approx 0.2177$ секунд. Такое разбиение обеспечивает достаточную точность для построения гладких и информативных графиков.

Численное вычисление рядов:
Для ряда y_1 был написан код, который позволяет вычислить сумму первых 2, 5 и 50 членов ряда. Эти вычисления были проведены также для рядов y_2, y_1' и y_2'. Ниже приведён график для ряда y_1, показывающий разницу между значениями суммы для разного количества членов.



Анализ и выбор достаточного числа членов ряда:
Из графика видно, что при увеличении количества членов ряда точность вычислений возрастает. Для 2 и 5 членов ряда отклонения от значений, полученных при 50 членах, заметны. Однако при 50 членах

ряд практически сходится к истинному значению. Таким образом, для точных вычислений рекомендуется использовать 50 членов ряда, хотя в некоторых случаях 10 - 20 членов может быть достаточно для приближённого анализа, поскольку большее количество может увеличивать время расчета.

Вычисление константы C Используя формулы, которые мы вывели ранее (*см. раздел 2*), а также код на Python, получаем необходимые значения констант.

```
import numpy as np
from scipy.special import gamma
from math import sqrt, factorial
import matplotlib.pyplot as plt

# Исходные параметры
m_0 = 9100
m_final = 6300
q = 130
u = 1550
beta = 0.1
g = 9.81
mu = 0.5
T = 21.54

def m(t):
    return m_0 - q * t

# Вычисление tau
tau = (2 / q) * np.sqrt(beta * mu * m(T) * g)
print(f"tau = {tau}\n")

def compute_series_terms_y1(tau, beta, u, q, num_terms):
    """
    Вычисляет сумму ряда y1 для заданного числа членов.
    """
    nu = 2 * sqrt(beta * u / q)
    series_sum = 0
    for k in range(num_terms):
        term = ((-1)**k * (tau / 2)**(2 * k + nu)) / (factorial(k) * gamma(nu + k + 1))
        series_sum += term
    return series_sum

def compute_series_terms_y2(tau, beta, u, q, num_terms):
    """
    Вычисляет сумму ряда y2 для заданного числа членов.
    """
    nu = 2 * sqrt(beta * u / q)
    series_sum = 0
    for k in range(num_terms):
        term = ((-1)**k * (tau / 2)**(2 * k - nu)) / (factorial(k) * gamma(k + 1 - nu))
        series_sum += term
    return series_sum

def compute_series_terms_y1_prime(tau, beta, u, q, num_terms):
    """
    Вычисляет сумму ряда y1’ (производной y1) для заданного числа членов.
    """
    nu = 2 * sqrt(beta * u / q)
    series_sum = 0
    for k in range(num_terms):
        term = (((-1)**k * (2 * k + nu) * (tau / 2)**(2 * k + nu - 1)) * 0.5) / (factorial(k)
        * gamma(k + 1 + nu))
```

```
        series_sum += term
    return series_sum

def compute_series_terms_y2_prime(tau, beta, u, q, num_terms):
    """
    Вычисляет сумму ряда y2’ (производной y2) для заданного числа членов.
    """
    nu = 2 * sqrt(beta * u / q)
    series_sum = 0
    for k in range(num_terms):
        term = (((-1)**k * (2 * k + nu) * (tau / 2)**(2 * k + nu - 1)) * 0.5) / (factorial(k)
        * gamma(k + 1 - nu))
        series_sum += term
    return series_sum

def compute_series_sum_positive_nu(tau, beta, u, q, num_terms):
    """
    Вычисляет сумму ряда для положительного nu.
    """
    nu = 2 * sqrt(beta * u / q)
    series_sum = 0
    for k in range(num_terms):
        term = (((-1)**k * (2 * k + nu) * (tau / 2)**(2 * k + nu - 1)) * 0.5) / (factorial(k)
        * gamma(k + 1 + nu))
        series_sum += term
    return series_sum

def compute_series_sum_negative_nu(tau, beta, u, q, num_terms):
    """
    Вычисляет сумму ряда для отрицательного nu.
    """
    nu = 2 * sqrt(beta * u / q)
    series_sum = 0
    for k in range(num_terms):
        term = (((-1)**k * (2 * k + nu) * (tau / 2)**(2 * k + nu - 1)) * 0.5) / (factorial(k)
        * gamma(k + 1 - nu))
        series_sum += term
    return series_sum

# Список чисел членов ряда для вычислений
num_terms_list = [2, 5, 50]

# Вычисление и вывод сумм рядов y1, y2, y1’, y2’ для каждого количества членов
for num_terms in num_terms_list:
    series_sum_y1 = compute_series_terms_y1(tau, beta, u, q, num_terms)
    print(f"y1: Сумма первых {num_terms} членов ряда: {series_sum_y1}")

    series_sum_y2 = compute_series_terms_y2(tau, beta, u, q, num_terms)
    print(f"y2: Сумма первых {num_terms} членов ряда: {series_sum_y2}")

    series_sum_y1_prime = compute_series_terms_y1_prime(tau, beta, u, q, num_terms)
    print(f"y1’: Сумма первых {num_terms} членов ряда: {series_sum_y1_prime}")

    series_sum_y2_prime = compute_series_terms_y2_prime(tau, beta, u, q, num_terms)
    print(f"y2’: Сумма первых {num_terms} членов ряда: {series_sum_y2_prime}")

    sum_positive = compute_series_sum_positive_nu(tau, beta, u, q, num_terms)
    sum_negative = compute_series_sum_negative_nu(tau, beta, u, q, num_terms)
    C = -sum_positive / sum_negative
    print(f"C (для {num_terms} членов ряда): {C}\n")
```

```
# Создание массива значений tau для графика y1
tau_values = np.linspace(0, 1, 100)

# Вычисление сумм для разного числа членов ряда для y1
sums_y1_2 = [compute_series_terms_y1(t, beta, u, q, 2) for t in tau_values]
sums_y1_5 = [compute_series_terms_y1(t, beta, u, q, 5) for t in tau_values]
sums_y1_50 = [compute_series_terms_y1(t, beta, u, q, 50) for t in tau_values]

# Построение графика для y1
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(tau_values, sums_y1_2, label=’y1: Первые 2 члена’, linestyle=’--’)
plt.plot(tau_values, sums_y1_5, label=’y1: Первые 5 членов’, linestyle=’-.’)
plt.plot(tau_values, sums_y1_50, label=’y1: Первые 50 членов’, linestyle=’-’)
plt.xlabel(’ (tau)’)
plt.ylabel(’Сумма ряда y1’)
plt.title(’Сравнение сумм ряда y1 для разного числа членов’)
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Консольный вывод

```
tau = 0.8552036194785607

y1: Сумма первых 2 членов ряда: 0.06180350663016658
y2: Сумма первых 2 членов ряда: 1.4012254060810134
y1': Сумма первых 2 членов ряда: 0.149015955306874
y2': Сумма первых 2 членов ряда: 0.09825248731602478

y1: Сумма первых 5 членов ряда: 0.06188482680911447
y2: Сумма первых 5 членов ряда: 1.4876539761941725
y1': Сумма первых 5 членов ряда: 0.14960174114742153
y2': Сумма первых 5 членов ряда: 0.11316171148575847

y1: Сумма первых 50 членов ряда: 0.061884826772848706
y2: Сумма первых 50 членов ряда: 1.4876517191774032
y1': Сумма первых 50 членов ряда: 0.14960174063106818
y2': Сумма первых 50 членов ряда: 0.11316092594571307
```

Вычисление скорости Для расчета скорости напишем соответствующую функцию:

```
# Числитель
numerator = C2 * series_sum_32 + series_sum_42

# Знаменатель
denominator = C2 * series_sum_22 + series_sum2

def m(t):
    return m_0 - q * t

# Скорость
```

```
v2 = (sqrt(beta * u * m(T) * g) / beta) * (numerator / denominator)

# Вывод результата
v2
```

В данном коде показана реализация вычисления скорости с использованием константы, полученной из частичной сумме рядов для первых двух членов. Для расчета скорости 5 и 50 членов используем аналогичные функции, но вместо C_2 - используем C_5 и C_{50} соответственно.
Консольный вывод:
Консольный вывод

```
v2 = 1913.4419548231874
v5 = 1374.2773107601556
v50 = 1374.3044588933112
```

Для вычисления скорости $v(t)$ в выбранных точках были проведены расчёты на основании предложенного ряда.Исследования проводились для разного количества членов ряда: 2, 5 и 50.
В результате вычислений были получены следующие значения максимальных скоростей:

- Для первых двух членов ряда: $v_2 = 1913.44\,\text{км/ч}$,
- Для первых пяти членов ряда: $v_5 = 1374.28\,\text{км/ч}$,
- Для первых пятидесяти членов ряда: $v_{50} = 1374.30\,\text{км/ч}$.

Из данных видно, что с увеличением числа членов ряда точность вычислений стабилизируется. Значения v_5 и v_{50} практически совпадают, что указывает на достаточность учёта пяти членов ряда для точного описания скорости.
Максимальная теоретическая скорость, достигнутая моделью, составила $v_2 = 1374.30\,\text{км/ч}$. Этот результат показал, что теоретички австралийские энтузиасты будут очень близки к побитию рекорда, но все равно не смогут побить рекорд скорости (1000 миль в час, что приблизительно равно $1609.34\,\text{км/ч}$).

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка представляет собой численный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений, характеризующийся высокой точностью и стабильностью. В нашей задаче метод применяется для решения системы уравнений, описывающих скорость и массу ракеты во времени.

Алгоритм метода: Для каждого шага по времени t вычисляются промежуточные значения коэффициентов k_1, k_2, k_3, k_4 для обеих переменных v и m. Затем обновляются значения скорости и массы:

$$v_{i+1} = v_i + \frac{\Delta t}{6}(k_1^v + 2k_2^v + 2k_3^v + k_4^v)$$
$$m_{i+1} = m_i + \frac{\Delta t}{6}(k_1^m + 2k_2^m + 2k_3^m + k_4^m)$$

Ранее нами были получены решения системы уравнений через сумму ряда для различных количеств членов:

- Для первых 2 членов: $v_2 = 1913.44\,\text{км/ч}$
- Для первых 5 членов: $v_5 = 1374.28\,\text{км/ч}$
- Для первых 50 членов: $v_{50} = 1374.30\,\text{км/ч}$

Эти результаты демонстрируют сходимость решения ряда к определенному значению при увеличении количества членов.

Результаты вычислений

Метод Рунге-Кутты

Используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка, было получено максимальное значение скорости ракеты:

$$v_{\text{RK}} = 1603.90\,\text{км/ч}$$

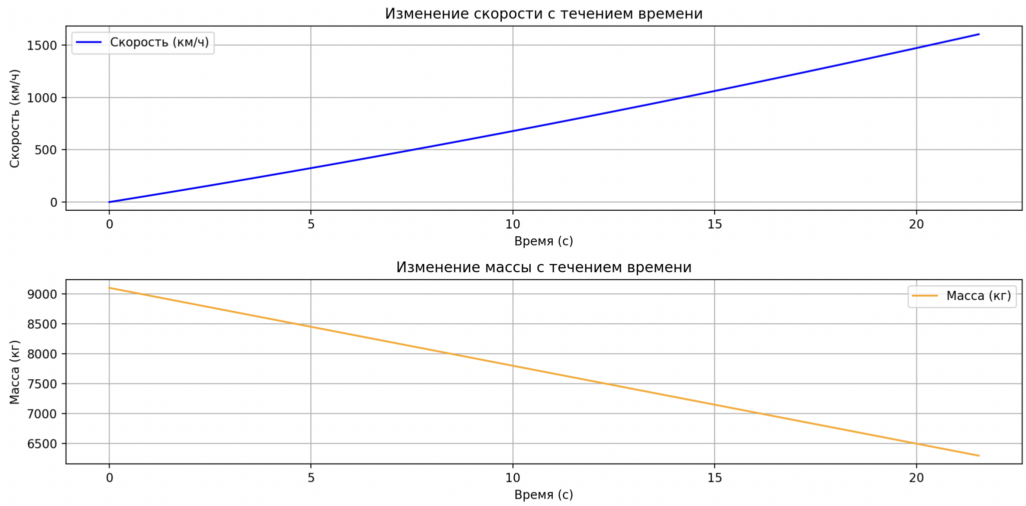
Сумма рядов

Суммируя ряды до различных порядков, получены следующие значения скорости:

- $v_2 = 1913.44\,\text{км/ч}$
- $v_5 = 1374.28\,\text{км/ч}$
- $v_{50} = 1374.30\,\text{км/ч}$

Графическое представление

На графике представлены скорости ракеты от времени, полученные методом Рунге-Кутты



Сравнительный анализ

Точность Метод Рунге-Кутты показал максимальную скорость 1603.90 км/ч, что отличается от значений, полученных через сумму ряда. При увеличении числа членов ряда наблюдается сходимость скорости к 1374.30 км/ч. Это указывает на то, что метод Рунге-Кутты может давать более высокую скорость, возможно из-за особенностей численного метода или начальных условий.

Скорость вычислений Метод Рунге-Кутты требует вычисления нескольких промежуточных коэффициентов на каждом шаге, что может быть более ресурсоемким по сравнению с суммированием рядов, особенно при большом количестве членов. Однако, современные вычислительные мощности позволяют эффективно использовать метод Рунге-Кутты даже для сложных систем.

Вычислительная сложность Вычислительная сложность метода Рунге-Кутты 4-го порядка составляет $O(N)$, где N — количество шагов по времени. Суммирование ряда зависит от количества членов M, и его сложность составляет $O(M)$. При большом количестве членов и шагов метода Рунге-Кутты общая сложность может быть сопоставимой, однако метод Рунге-Кутты обеспечивает лучшую точность при умеренном увеличении вычислительных ресурсов.

Код для Рунге-Кутты:

```
    import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Константы
m_0 = 9100          # Начальная масса ракеты (кг)
m_final = 6300      # Конечная масса ракеты (кг)
q = 130             # Расход топлива (кг/с)
u = 1550            # Удельная тяга (м/с)
beta = 0.1          # Коэффициент сопротивления
g = 9.8             # Ускорение свободного падения (м/с²)
mu = 0.5            # Коэффициент силы тяжести
T = 21.54           # Время горения топлива (с)

# Уравнения
def dvdt(v, m):
    """Скорость изменения скорости."""
    return (u * q - beta * v**2 - mu * m * g) / m

def dmdt(m):
    """Скорость изменения массы."""
    return -q

# Шаг времени и массивы для вычислений
dt = 0.01
N = int(T / dt) + 1
time = np.linspace(0, T, N)
velocity = np.zeros(N)
mass = np.zeros(N)

# Начальные условия
velocity[0] = 0  # Начальная скорость ракеты (м/с)
mass[0] = m_0    # Начальная масса ракеты (кг)

# Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
for i in range(1, N):
    t = time[i - 1]
    v = velocity[i - 1]
    m = mass[i - 1]

    # Вычисляем коэффициенты
    k1_v = dvdt(v, m)
    k1_m = dmdt(m)

    k2_v = dvdt(v + dt * k1_v / 2, m + dt * k1_m / 2)
    k2_m = dmdt(m + dt * k1_m / 2)

    k3_v = dvdt(v + dt * k2_v / 2, m + dt * k2_m / 2)
    k3_m = dmdt(m + dt * k2_m / 2)

    k4_v = dvdt(v + dt * k3_v, m + dt * k3_m)
    k4_m = dmdt(m + dt * k3_m)

    # Обновляем значения
    velocity[i] = v + dt * (k1_v + 2 * k2_v + 2 * k3_v + k4_v) / 6
    mass[i] = m + dt * (k1_m + 2 * k2_m + 2 * k3_m + k4_m) / 6

# Перевод скорости из м/с в км/ч
velocity_kmh = velocity * 3.6
```

```
# Построение графиков
plt.figure(figsize=(12, 6))

# График скорости
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(time, velocity_kmh, label="Скорость (км/ч)", color="blue")
plt.xlabel("Время (с)")
plt.ylabel("Скорость (км/ч)")
plt.title("Изменение скорости с течением времени")
plt.legend()
plt.grid()

# График массы
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(time, mass, label="Масса (кг)", color="orange")
plt.xlabel("Время (с)")
plt.ylabel("Масса (кг)")
plt.title("Изменение массы с течением времени")
plt.legend()
plt.grid()

plt.tight_layout()
plt.show()
```