1)
Дано дифференциальное уравнение:

$$2y + (x^2y + 1)x\frac{dy}{dx} = 0, \quad x > 0, \, y > 0.$$

Шаг 1: Подстановка

Используем замену $y = z^m$. Найдём степень m , чтобы уравнение стало однородным.

Подставляем $y = z^m$ и вычисляем производную:
$\frac{dy}{dx} = mz^{m-1}\frac{dz}{dx}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$2z^m + (x^2z^m + 1)x \cdot mz^{m-1}\frac{dz}{dx} = 0.$$

Сокращаем на z^{m-1}:

$$2z + mx(x^2z^m + 1)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Для однородности выражения $x^2z^m + 1$ требуется, чтобы степени x и z совпадали. Это достигается при $m = -2$. Таким образом, делаем замену $y = z^{-2}$.

Шаг 2: Приведение к однородному уравнению

После подстановки получаем:

$$2z^{-2} - 2x(x^2z^{-2} + 1)z^{-3}\frac{dz}{dx} = 0,$$

что упрощается до:

$$z - x(x^2z^{-2} + 1)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Решаем относительно $\frac{dz}{dx}$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x(x^2z^{-2} + 1)} .$$

Упрощаем выражение:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^3}{x(x^2 + z^2)}.$$

Шаг 3: Разделение переменных

Вводим замену $v = \dfrac{z}{x}$, тогда $z = vx$ и $\dfrac{dz}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$. Подставляем в уравнение:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3x^3}{x(x^2 + v^2x^2)} = \frac{v^3}{1 + v^2}\,.$$

Получаем:

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{1 + v^2}\,.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{1 + v^2}{v}dv = -\int \frac{1}{x}dx.$$

Вычисляем интегралы:

$$\ln|v| + \frac{v^2}{2} = -\ln|x| + C\,.$$

Возвращаемся к переменной z :

$$2\ln v + v^2 = -2\ln x + C \quad \Rightarrow \quad 2\ln\left(\frac{z}{x}\right) + \left(\frac{z}{x}\right)^2 = C.$$

Преобразуем к исходным переменным y = z^{-2} :

- $$\ln y + \frac{1}{x^2y} = C\,.$$

Ответ:

$$-\ln y + \frac{1}{x^2y} = C$$

2)
Решим линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = y, \quad y > 0$$

Это уравнение имеет вид стандартного линейного уравнения:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

где $P(y) = -\frac{1}{y}$ и $Q(y) = y$.

Шаг 1: Найдём интегрирующий множитель $\mu(y)$

Интегрирующий множитель определяется как:

$$\mu(y) = \exp\left(\int P(y)\,dy\right) = \exp\left(-\int \frac{1}{y}\,dy\right) = \exp(-\ln y) = y^{-1}$$

Шаг 2: Умножим всё уравнение на $\mu(y)$

$$y^{-1}\frac{dx}{dy} - y^{-2}x = y \cdot y^{-1} = 1$$

Левая часть уравнения теперь представляет собой полную производную произведения $x \cdot y^{-1}$:

$$\frac{d}{dy}\left(x \cdot y^{-1}\right) = 1$$

Шаг 3: Интегрируем обе части уравнения

$$x \cdot y^{-1} = \int 1\,dy = y + C$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

Шаг 4: Выразим x через y и C

$$x = y \cdot (y + C) = y^2 + Cy$$

Проверка решения:

Подставим найденное решение $x = y^2 + C$ y в исходное уравнение:

$$\frac{dx}{dy} = 2y + C$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = (2y + C) - \frac{y^2 + Cy}{y} = 2y + C - y - C = y$$

Таким образом, равенство выполняется, и решение верно.

Ответ:

$$x = y^2 + Cy$$

где C — произвольная постоянная.

3)
Дана уравнение Риккати:

$$x^2(y'+y^2)-7xy+7=0, \quad x>0$$

Шаг 1: Приведение к стандартной форме уравнения Риккати

Разделим всё уравнение на x^2:

$$y'+y^2-\frac{7}{x}y+\frac{7}{x^2}=0$$

Таким образом, получаем стандартную форму уравнения Риккати:

$$y'=-y^2+\frac{7}{x}y-\frac{7}{x^2}$$

Шаг 2: Преобразование в линейное уравнение

Используем замену $y=\frac{u'}{u}$, где u — новая функция. Вычислим производные:

$$y=\frac{u'}{u}$$
$$y'=\frac{u'u-(u')^2}{u^2}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$\frac{u'u-(u')^2}{u^2}=-(\frac{u'}{u})^2+\frac{7}{x}\cdot\frac{u'}{u}-\frac{7}{x^2}$$

Умножим на u^2 и упростим:

$$u'u-(u')^2=-(u')^2+\frac{7}{x}u'u-\frac{7}{x^2}u^2$$

Сокращаем и получаем линейное уравнение второго порядка:

$$u''-\frac{7}{x}u'+\frac{7}{x^2}u=0$$

Шаг 3: Решение линейного уравнения

Это уравнение Эйлера, ищем решения вида $u=x^m$:

Подставляем $u=x^m$:

$$m(m-1)x^{m-2}-\frac{7}{x}mx^{m-1}+\frac{7}{x^2}x^m=0$$

$$m(m-1)-7m+7=0$$

$$m^2-8m+7=0$$

Корни:

$m = 1$ и $m = 7$

Общее решение линейного уравнения:

$$u = C_1 x + C_2 x^7$$

Шаг 4: Возврат к исходной переменной y

Используем $y = \dfrac{u'}{u}$:

$$u' = C_1 + 7C_2 x^6$$
$$y = \frac{C_1 + 7C_2 x^6}{C_1 x + C_2 x^7}$$

Обозначим отношение констант $C = \dfrac{C_1}{C_2}$, тогда:

$$y = \frac{C + 7x^6}{Cx^7 + x}$$

Перепишем это выражение, выражая C через x и y :

$$(yx - 1) = C(7x^6 - yx^7)$$

Таким образом, решение уравнения можно записать в виде:

$$\frac{yx - 1}{7x^6 - yx^7} = C$$

Ответ:

Решение записывается как $\dfrac{y\,x - 1}{7\,x^6 - y\,x^7} = C$. То есть

$$\frac{yx - 1}{7x^6 - yx^7} = C$$

4)
Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$(3x + 2y + y^2)\,dx + (x + 4xy + 5y^2)\,dy = 0$$

Найдем интегрирующий множитель в виде $\mu(x, y) = (x + y^2)^a$.

Для того чтобы уравнение стало точным после умножения на μ, должно выполняться условие точности:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Где $M = 3x + 2y + y^2$ и $N = x + 4xy + 5y^2$.

Выполним вычисления:

1. Выразим μM и μN:

$$\mu M = (x + y^2)(3x + 2y + y^2)$$

$$\mu N = (x + y^2)(x + 4xy + 5y^2)$$

2. Продифференцируем μM по y и μN по x:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = 6axy + 2xy + 4ay^2 + 2y^2 + 2ay^3 + 2y^3$$

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = (a + 1)x + (4a + 4)xy + (5a + 1)y^2 + 4y^3$$

3. Приравняем коэффициенты и решим относительно a:

$$6a + 2 = 4a + 4 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Таким образом, интегрирующий множитель $\mu(x, y) = x + y^2$.

4. Теперь решим точное уравнение:

$$(x + y^2)(3x + 2y + y^2)\,dx + (x + y^2)(x + 4xy + 5y^2)\,dy = 0$$

Найдём потенциальную функцию F(x, y) такую, что:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x + y^2)(3x + 2y + y^2)$$

Интегрируя по x:

$$F(x, y) = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 + C$$

Таким образом, общее решение уравнения записывается как:

$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = C$$

Ответ:

Одно из решений уравнения имеет вид
$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = C$$

5)

$y = x + y' - \ln y'$

Пусть $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$. Тогда уравнение можно переписать как:

$y = x + p - \ln p$

Перепишем уравнение для x :

$x = y - p + \ln p$

Дифференцируем x по параметру p :

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dp} - 1 + \frac{1}{p}$$

Используя $p = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dp}{dx/dp}$, получаем:

$$p = \frac{\frac{dy}{dp}}{\frac{dy}{dp} - 1 + \frac{1}{p}}$$

Упрощая, получаем:

$$\left(p - 1\right)\frac{dy}{dp} = p - 1$$

$\dfrac{dy}{dp} = 1$ при $(p \neq 1)$

Интегрируем:

y = p + C

Из $x = y - p + \ln p$ и $y = p + C$ получаем:

$x = (p + C) - p + \ln p = C + \ln p$

Из $x = C + \ln p$ и $y = p + C$ выражаем x через y и константу C:

$p = y - C$

$x = C + \ln(y - C)$

Таким образом, общее решение уравнения:

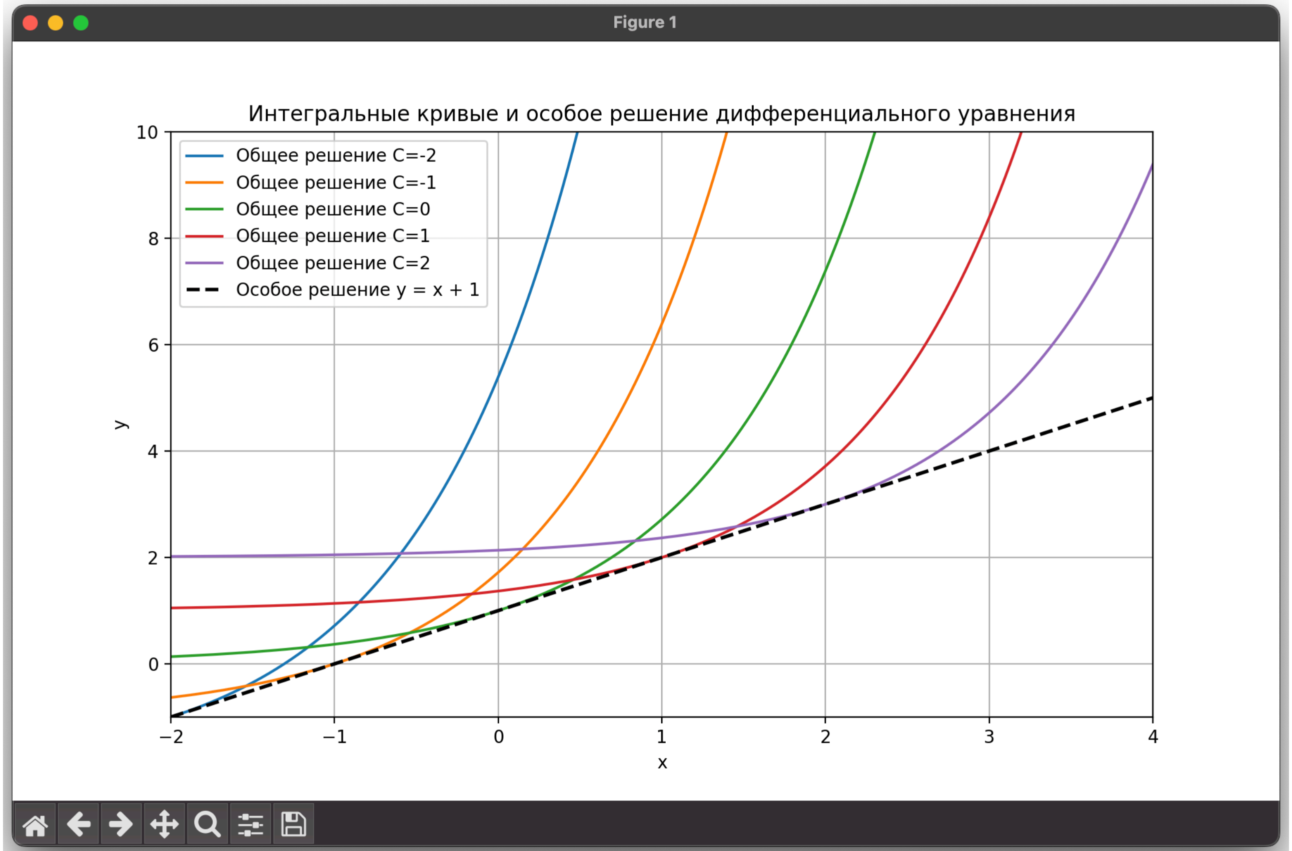
$x = C + \ln(y - C)$

Особым случаем является p = 1 . Подставляя p = 1 в исходное уравнение:

$y = x + 1 - \ln 1$

$y = x + 1$

Это особое решение уравнения.




```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Диапазон значений x
x = np.linspace(-2, 4, 400)

# Значения параметра C для общих решений
C_values = [-2, -1, 0, 1, 2]

# Создаём фигуру и оси
plt.figure(figsize=(10, 6))

# Построение общих решений для разных C
for C in C_values:
    y = C + np.exp(x - C)
    plt.plot(x, y, label=f'Общее решение C={C}')

# Построение особого решения
y_special = x + 1
plt.plot(x, y_special, 'k--', linewidth=2, label='Особое решение y = x
+ 1')

# Настройка графика
plt.title('Интегральные кривые и особое решение дифференциального
уравнения')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.ylim(-1, 10)  # Устанавливаем пределы по оси y для лучшей
видимости
plt.xlim(-2, 4)    # Устанавливаем пределы по оси x

# Отображение графика
plt.show()
```