



Sei dabei!



PUBLIC CLIMATE SCHOOL



22. - 26. November 2021





WOCHENÜBERSICHT

TAGESTHEMEN

22.-26. NOV.

MONTAG

22. NOV. 2021

KLIMA- KRISE

HIER & JETZT

Was weiß ich über die Klimakrise und was noch nicht?

DIENSTAG

23. NOV. 2021

KLIMA- WIRKUNG

GESTERN, HEUTE
& MORGEN

Welche Auswirkungen hat die Klimakrise auf mich und auf andere?

MITTWOCH

24. NOV. 2021

KLIMA- KOMMUNIKATION

RICHTIG & WICHTIG

Wie wird die Klimakrise kommuniziert und wie gehe ich damit um?

DONNERSTAG

25. NOV. 2021

KLIMA- GESELLSCHAFT

DAS SYSTEM
& ICH

Was kann ich tun und wofür braucht es viele?

FREITAG

26. NOV. 2021

KLIMA- AKTION

FORDERN &
HANDELN

Was passiert in der Politik und wie kann ich mitwirken?



Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-
Technische Fakultät

Klimarekorde – Alles nur Zufall?

Stefan Großkinsky
Public Climate School
25.11.2021



Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-
Technische Fakultät

- Temperaturdaten – Trends und Schwankungen
- Rekorde für iid ZV
- Rekorde für ZV mit Drift
- Asymptotische Verteilung von Extremwerten - Niederschläge
- Zusammenfassung und Diskussion

Klimarekorde – Alles nur Zufall?

Stefan Großkinsky
Public Climate School
25.11.2021

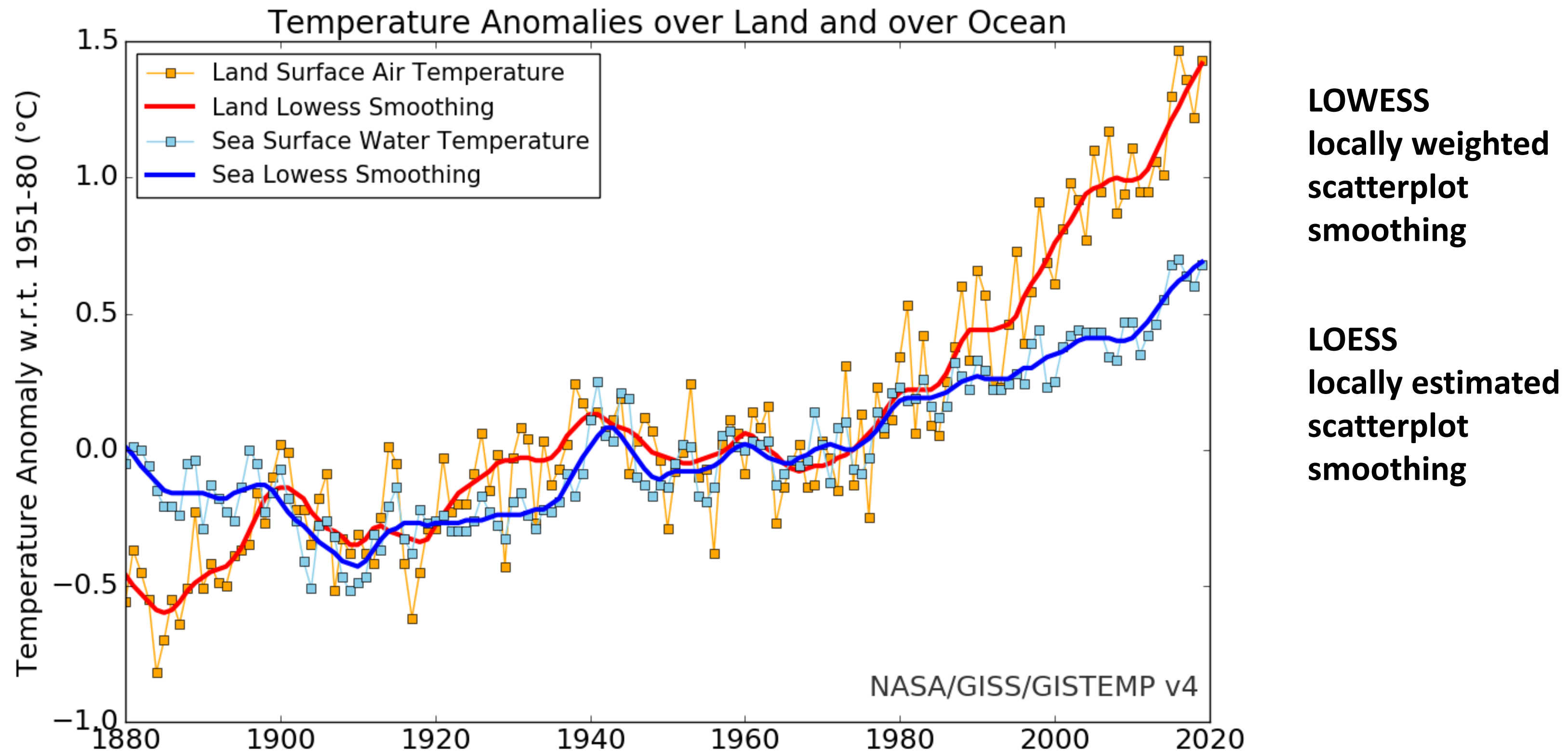
Quellen

- Wergen, Krug: Record-breaking temperatures reveal a warming climate EPL, 92 (2010) 30008
- Franke, Wergen, Krug: Records and sequences of records from random variables with a linear trend, JSTAT (2010) P10013
- G. Wergen, J. Krug, S. Rahmstorf: Klimarekorde, Spektrum der Wissenschaft (2014)

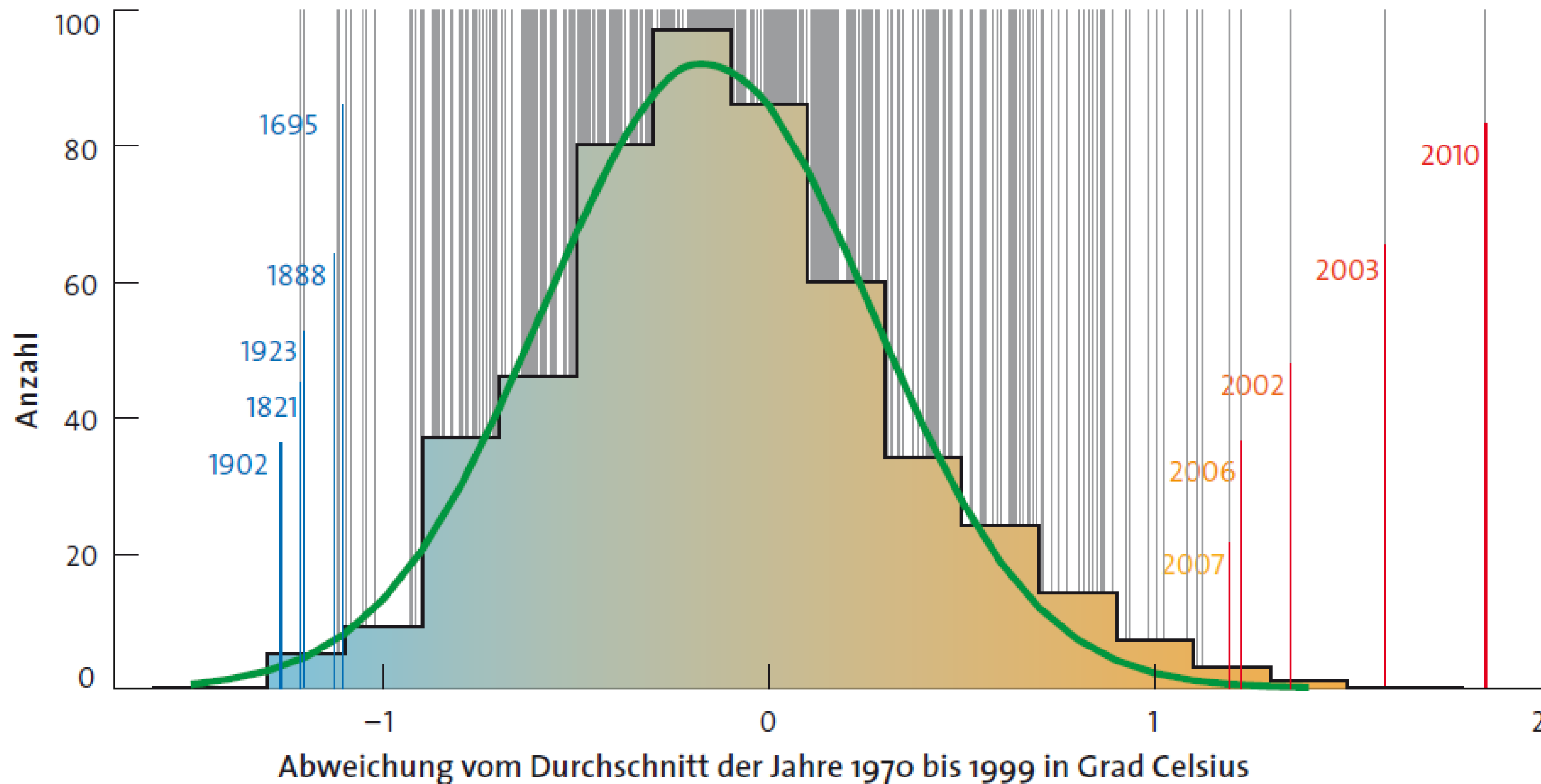
Daten:

- Project team ECAD, European climate assessment and dataset, Technical Report, Royal Netherlands Meteorological Institute, KNMI, 2008
EI: 43 Stationen (1906-2005), EII: 187 Stationen (1976-2005)
- <https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php>
https://data.giss.nasa.gov/gistemp/graphs_v4/

Temperaturmessungen – Trends und Schwankungen

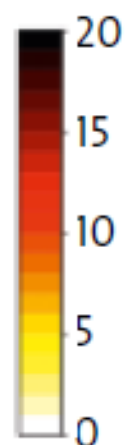
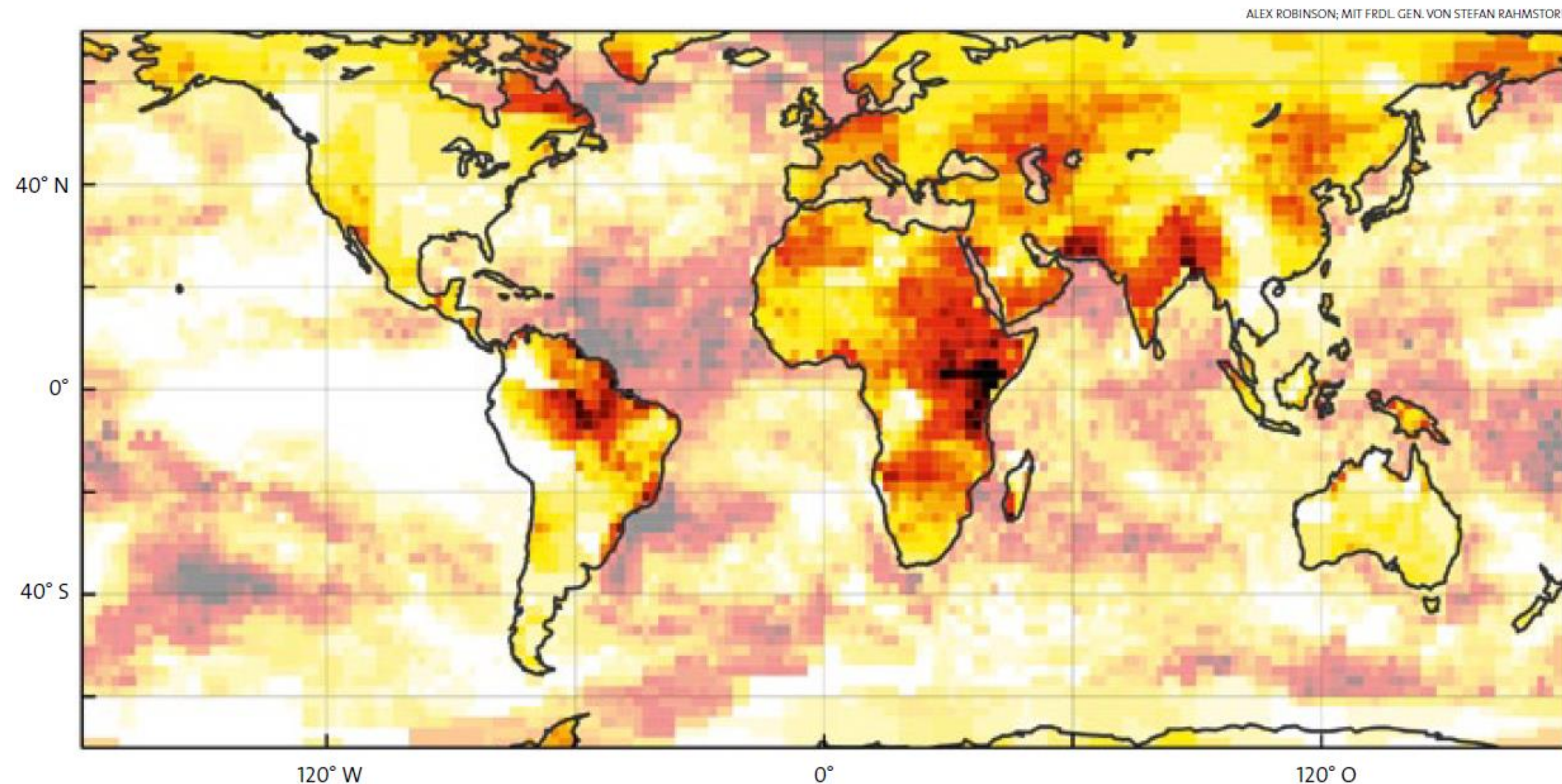


Temperaturmessungen – Trends und Schwankungen



Sommertemperaturen in Europa von 1500 bis 2010. Das Histogramm zeigt an, wie oft die Temperatur in jedes Intervall der Breite 0,2 Grad fiel; grün eingezeichnet ist die Gaußkurve, die am besten zu den Daten passt. Die Jahreszahlen der fünf kältesten und der fünf wärmsten Sommer sind angegeben (Balkenlänge hat keine Bedeutung).

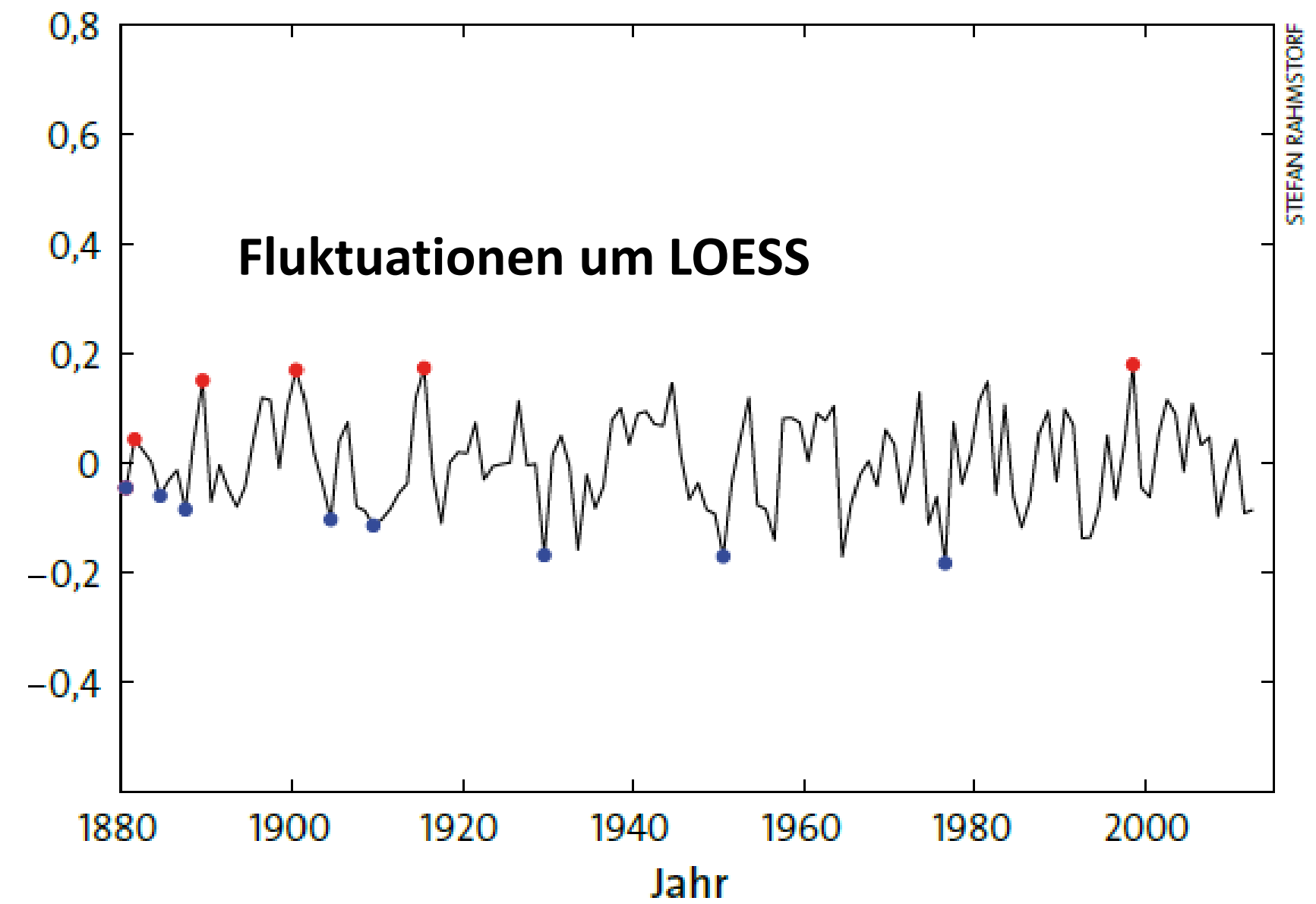
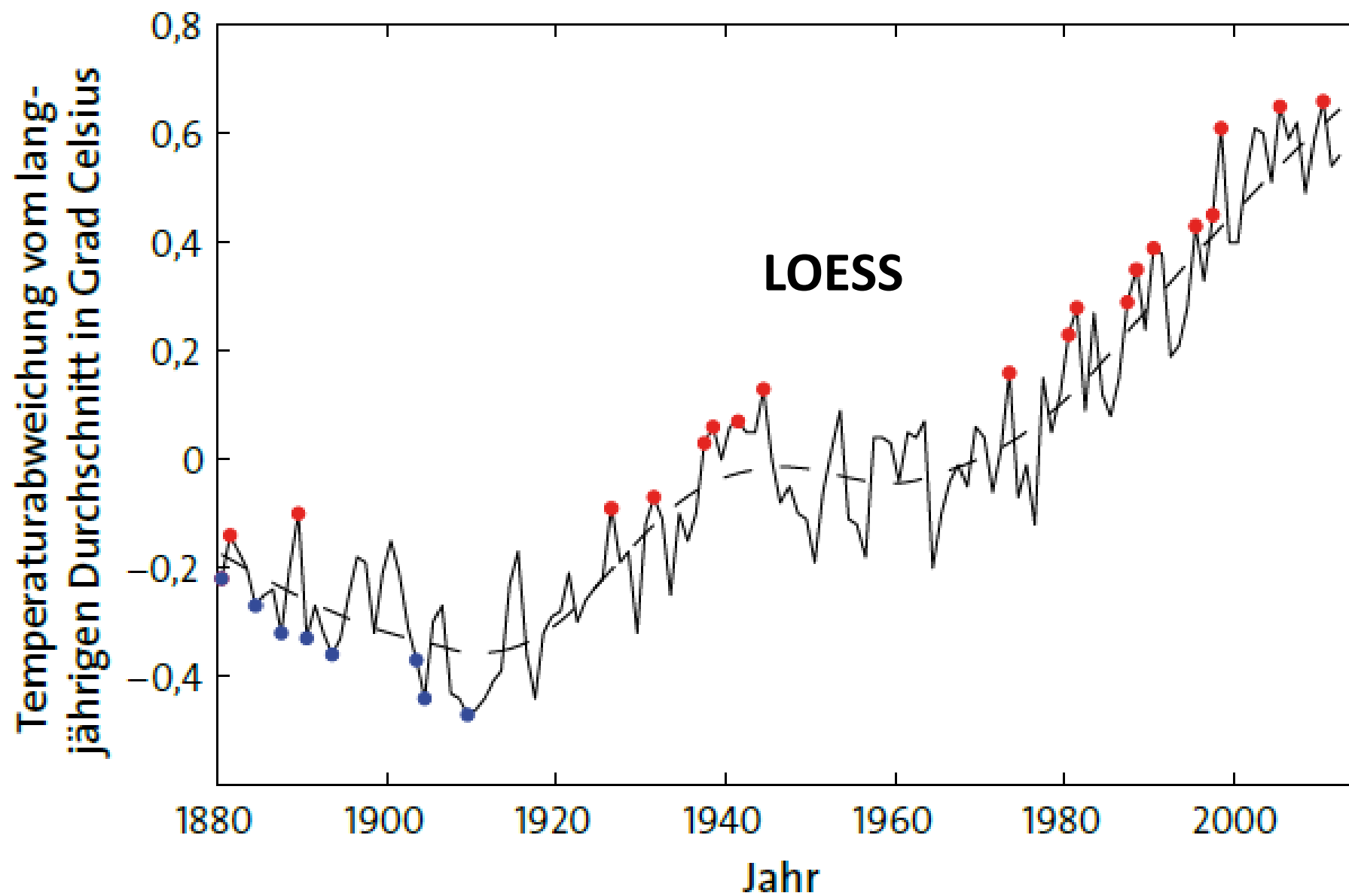
Temperaturmessungen – Trends und Schwankungen



Klimarekorde werden häufiger – aber nicht gleichmäßig über die Erde verteilt. Für jede der durch kleine Quadrate gekennzeichneten Regionen wurde ausgezählt, wie oft im Zeitraum von 2001 bis 2010 die über einen Monat gemittelte Temperatur einen Rekord aufstellte, das heißt höher lag als alle entsprechenden Werte für den-

selben Kalendermonat seit 1880. Die Farbkodes zeigen, um welchen Faktor die so ermittelte Zahl der Rekorde die Erwartung für ein unverändertes Klima ($1/n$ -Gesetz) übertrifft: im globalen Mittel um das Fünffache, in einigen Regionen um das 20-Fache. Über den Ozeanen sind die Farben blasser gewählt, damit die Verhältnisse an Land klarer hervortreten.

Temperaturmessungen – Trends und Schwankungen



Rekorde für unabhängige Zufallsvariablen (iid)

$X_1, X_2, \dots \in \mathbb{R}$ iid ZV, kont. Verteilung, d.h. $\mathbb{P}[X_i = X_j] = 0, i \neq j$

Ordnungsstatistik $X_{(1)}^n < \dots < X_{(n)}^n$ der ersten n Elemente

$$\mathbb{P}[X_1 = X_{(1)}^n, \dots, X_n = X_{(n)}^n] = 1/n!$$

Rekorde für unabhängige Zufallsvariablen (iid)

$X_1, X_2, \dots \in \mathbb{R}$ iid ZV, kont. Verteilung, d.h. $\mathbb{P}[X_i = X_j] = 0, i \neq j$

Ordnungsstatistik $X_{(1)}^n < \dots < X_{(n)}^n$ der ersten n Elemente

$$\mathbb{P}[X_1 = X_{(1)}^n, \dots, X_n = X_{(n)}^n] = 1/n!$$

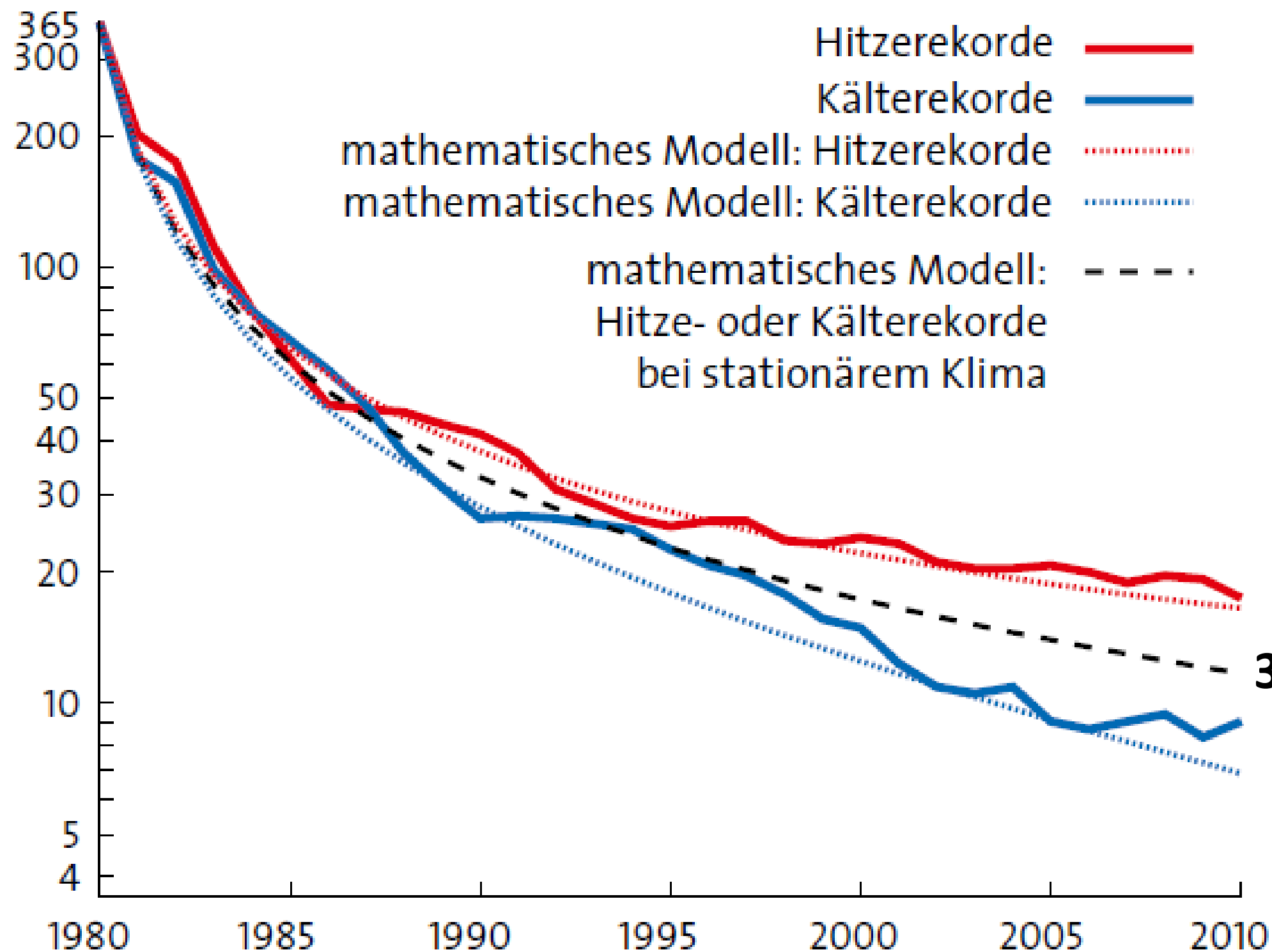
Positiv-Rekord $\mathbb{P}[X_n = X_{(n)}^n] = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

Rekord Ereignisse $Z_n := 1_{X_n = X_{(n)}^n} \in \{0, 1\}$ sind **unabhängig**

der Rekorde $R_n = \sum_{k=1}^n Z_k$ hat $\mathbb{E}[R_n] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \simeq \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$

$$\mathbb{V}[R_n] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \simeq \ln n - \frac{\pi^2}{6} + \gamma + O(\frac{1}{n})$$

Vergleich der Modellvorhersagen mit Klimadaten



Rekorde auf Tagesbasis

Für jede von über 200 europäischen Wetterstationen wurde ein Hitzerekord notiert, wenn die Maximaltemperatur eines Tages höher war als alle seit 1980 am selben Platz und am selben Kalendarstag gemessenen Temperaturen; entsprechend zählte man Kältererekorde. Die dicken Linien zeigen für jedes Jahr die über alle Wetterstationen gemittelte Anzahl dieser Ereignisse.

$365/n = \text{erw. \# der Rekordtage pro Jahr im Jahr } 1979+n$

Rekorde für unabhängige Zufallsvariablen mit Trend

$X_1, X_2, \dots \in \mathbb{R}$ unabh. mit Dichte $\rho_i(x)$ und $F_i(x) = \int_{-\infty}^x \rho_i(y) dy$

$$p_n := \mathbb{P}[X_n = X_{(n)}^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x) \left(\prod_{k=1}^{n-1} F_k(x) \right) dx$$

Drift. $X_k = X'_k + kv$ mit X'_1, X'_2, \dots iid, Entwicklung in $v \in \mathbb{R}$

Rekorde für unabhängige Zufallsvariablen mit Trend

$X_1, X_2, \dots \in \mathbb{R}$ unabh. mit Dichte $\rho_i(x)$ und $F_i(x) = \int_{-\infty}^x \rho_i(y) dy$

$$p_n := \mathbb{P}[X_n = X_{(n)}^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x) \left(\prod_{k=1}^{n-1} F_k(x) \right) dx$$

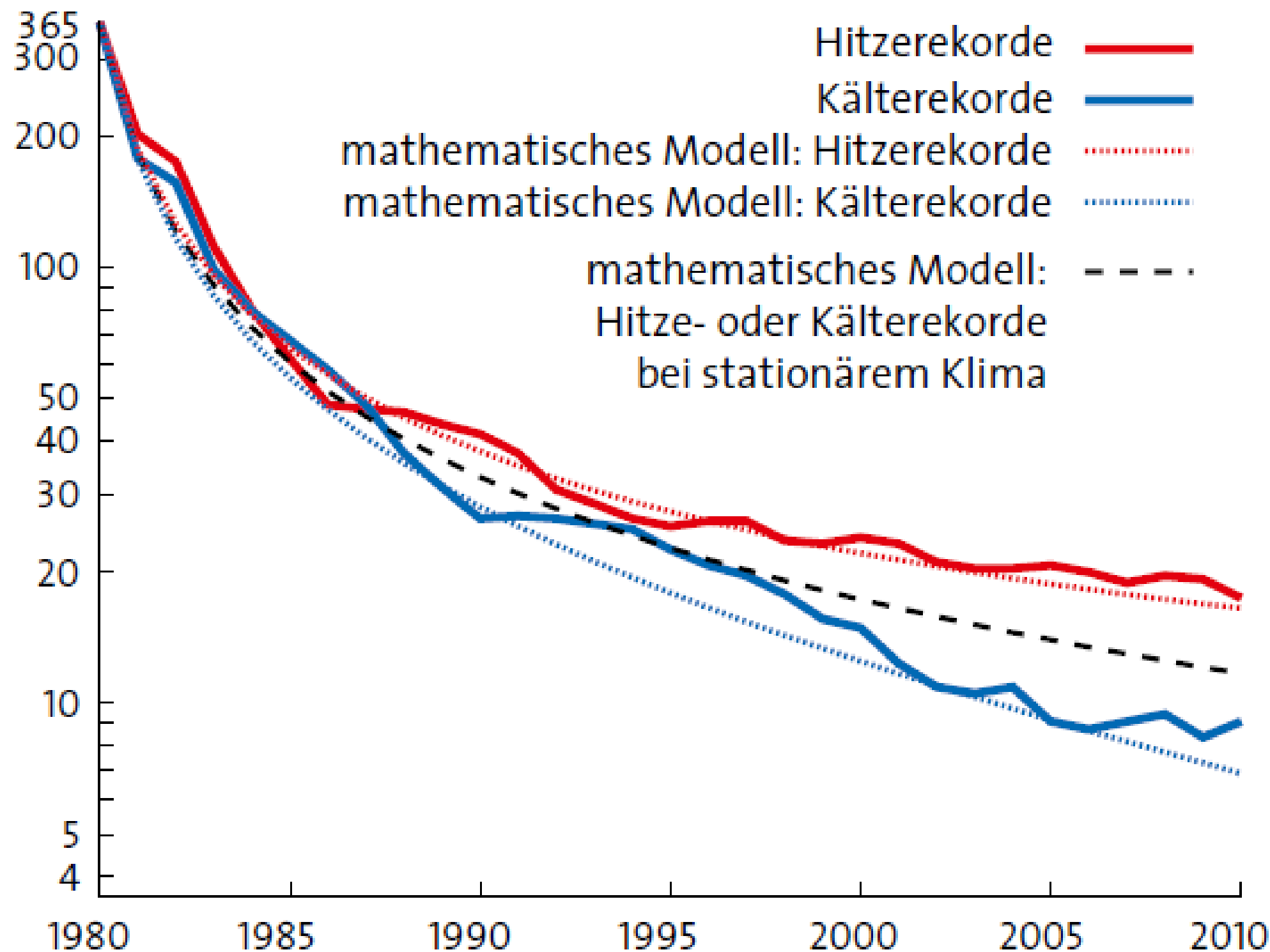
Drift. $X_k = X'_k + kv$ mit X'_1, X'_2, \dots iid, Entwicklung in $v \in \mathbb{R}$

$$p_n = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \left(\prod_{k=1}^{n-1} F(x+kv) \right) dx \simeq \frac{1}{n} + v \frac{n(n-1)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)^2 F(x)^{n-2} dx$$

$$X'_k \sim \mathcal{N}_{0, \sigma^2} \text{ normalverteilt} \Rightarrow p_n \simeq \frac{1}{n} + \frac{v}{\sigma} \frac{2\sqrt{\pi}}{e^2} \sqrt{\ln \left(\frac{n^2}{8\pi} \right)}, \quad n \geq 7$$

$$p_n \simeq \frac{1}{n} \pm \frac{v}{\sigma} f(n), \quad f(30) = 0.91, \quad f(100) = 1.17$$

Vergleich der Modellvorhersagen mit Klimadaten



Rekorde auf Tagesbasis

Für jede von über 200 europäischen Wetterstationen wurde ein Hitzerekord notiert, wenn die Maximaltemperatur eines Tages höher war als alle seit 1980 am selben Platz und am selben Kalendarstag gemessenen Temperaturen; entsprechend zählte man Kältererekorde. Die dicken Linien zeigen für jedes Jahr die über alle Wetterstationen gemittelte Anzahl dieser Ereignisse.

$$\frac{1}{n} + \frac{v}{\sigma} f(n)$$

$$\frac{1}{n} - \frac{v}{\sigma} f(n)$$

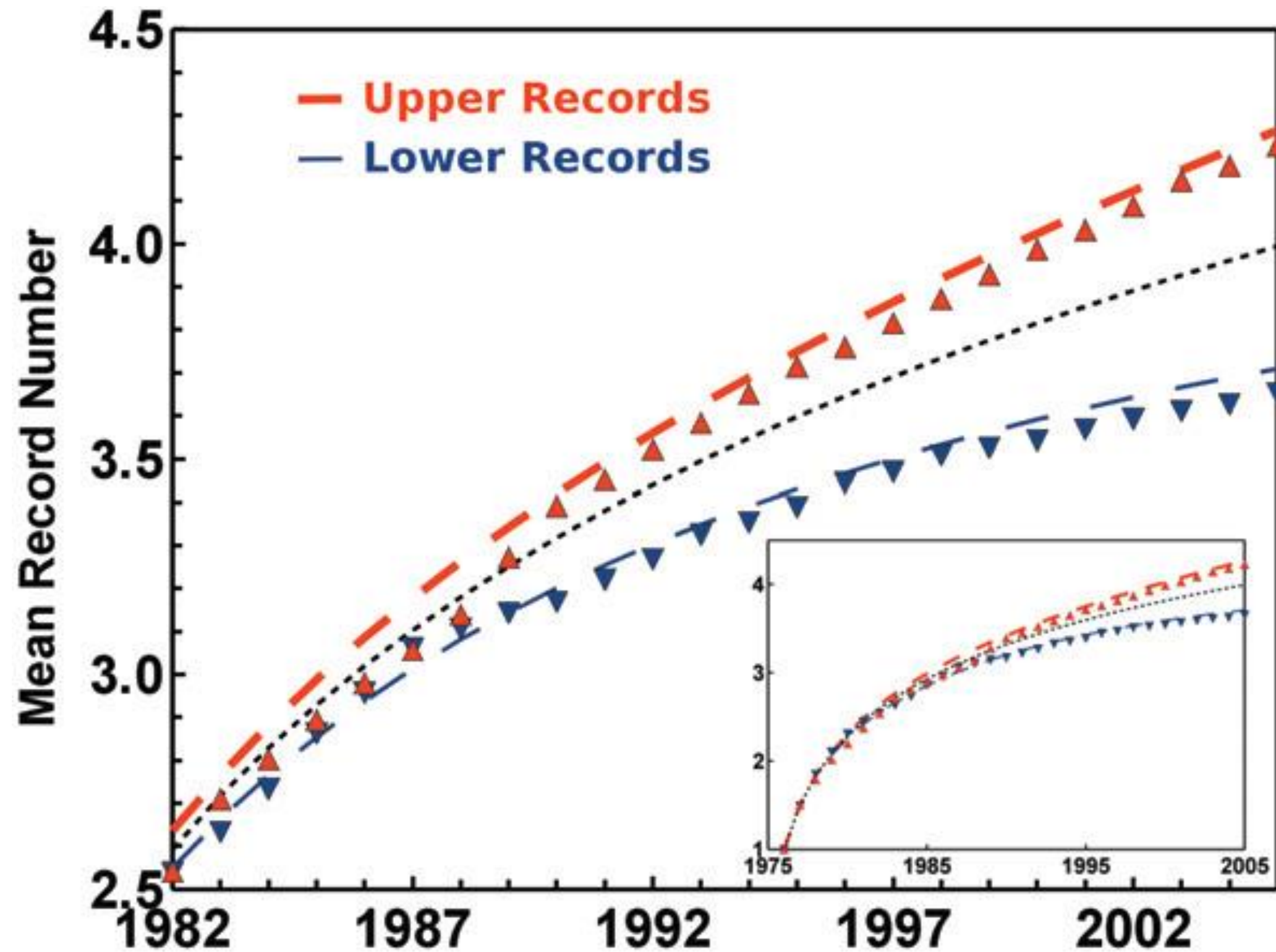
1980-2010:

$v=0.045$ Grad / Jahr

$\sigma=3.3$ Grad

$v/\sigma=0.014$ / Jahr

Vergleich der Modellvorhersagen mit Klimadaten



$$\mathbb{E}[R_n] = \sum_{k=1}^n 1/k \simeq \ln n + \gamma + O(1/n)$$

R_n = Rekorde pro Tag im Jahr 1975 + n

Grenzwertsätze für Summen

Warum sind die über Stationen gemittelten Temperaturdaten normalverteilt?

$X_1, X_2, \dots \in \mathbb{R}$ iid ZV mit $\mu = \mathbb{E}[X_i] \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_i] \in (0, \infty)$

Gesetz der großen Zahlen $S_m = \sum_{i=1}^m X_i$, $\frac{1}{m} S_m \rightarrow \mu$ für $m \rightarrow \infty$

denn $\mathbb{E}\left[\frac{1}{m} S_m\right] = \frac{1}{m} m \mu = \mu$ und $\mathbb{V}\left[\frac{1}{m} S_m\right] = \frac{1}{m^2} m \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{m} \rightarrow 0$

Grenzwertsätze für Summen

Warum sind die über Stationen gemittelten Temperaturdaten normalverteilt?

$X_1, X_2, \dots \in \mathbb{R}$ iid ZV mit $\mu = \mathbb{E}[X_i] \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_i] \in (0, \infty)$

Gesetz der großen Zahlen $S_m = \sum_{i=1}^m X_i$, $\frac{1}{m} S_m \rightarrow \mu$ für $m \rightarrow \infty$

$$\text{denn } \mathbb{E}\left[\frac{1}{m} S_m\right] = \frac{1}{m} m \mu = \mu \quad \text{und} \quad \mathbb{V}\left[\frac{1}{m} S_m\right] = \frac{1}{m^2} m \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{m} \rightarrow 0$$

Zentraler Grenzwertsatz $\frac{S_m - m\mu}{\sqrt{m\sigma^2}} \rightarrow \xi \sim \mathcal{N}_{0,1}$ für $m \rightarrow \infty$

also $\frac{1}{m} S_m \simeq \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \xi + O(1/m)$ und Fluktuationen sind normalverteilt

Grenzwertsätze für Maxima

$X_1, X_2, \dots \in \mathbb{R}$ iid mit $\overline{F}(x) = \mathbb{P}[X > x] \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ "exponentiell"

Maximum $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $\mathbb{P}[M_n \leq x] = (1 - \overline{F}(x))^n$

wähle $x = x_n$ so dass $\mathbb{P}[M_n \leq x_n] \rightarrow e^{-c}, c > 0 \Leftrightarrow \overline{F}(x_n) \simeq \frac{c}{n}$

Grenzwertsätze für Maxima

$X_1, X_2, \dots \in \mathbb{R}$ iid mit $\overline{F}(x) = \mathbb{P}[X > x] \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ "exponentiell"

Maximum $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $\mathbb{P}[M_n \leq x] = (1 - \overline{F}(x))^n$

wähle $x = x_n$ so dass $\mathbb{P}[M_n \leq x_n] \rightarrow e^{-c}, c > 0 \Leftrightarrow \overline{F}(x_n) \simeq \frac{c}{n}$

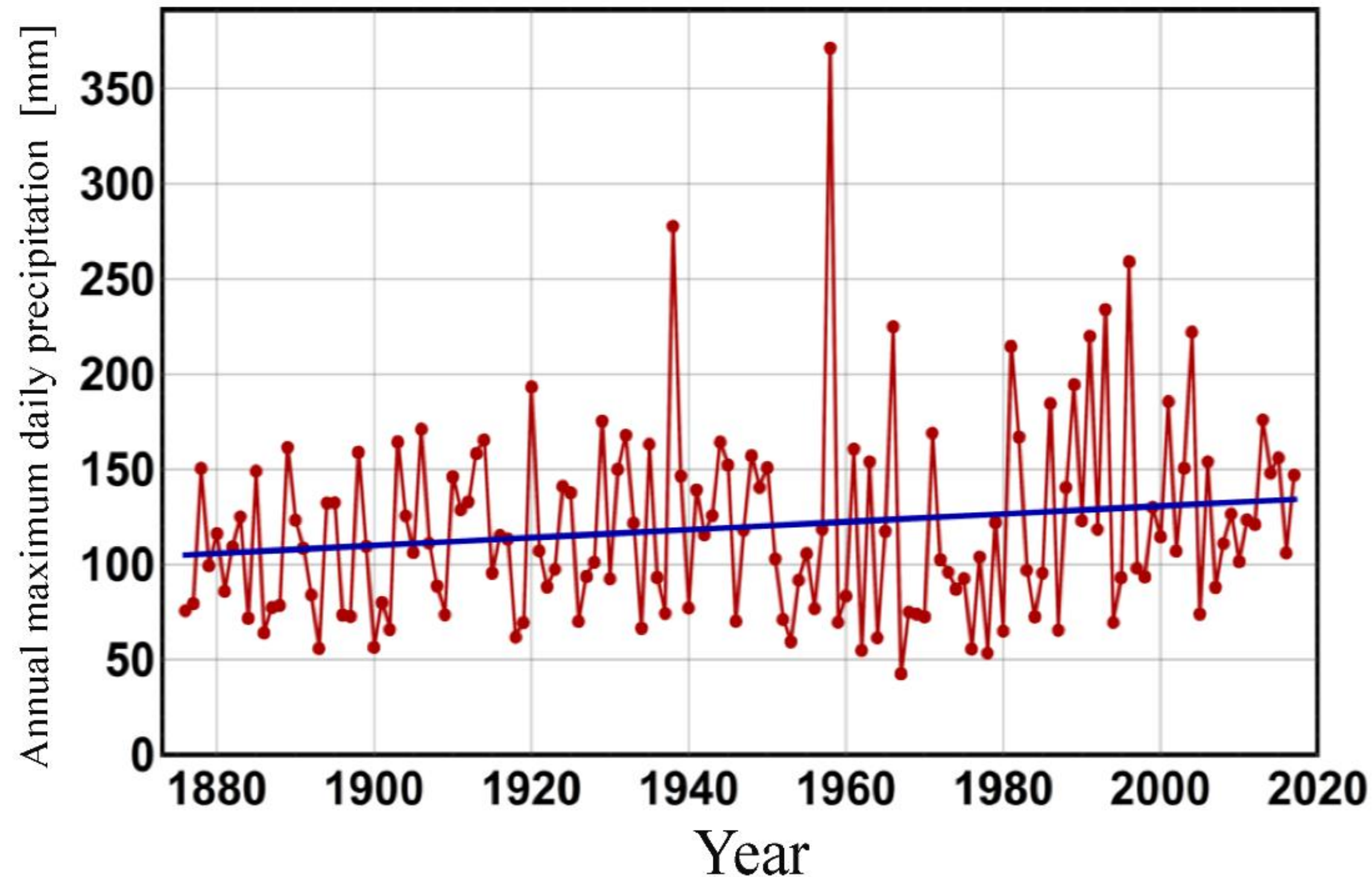
Extremwerttheorem $\mathbb{P}\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right] \rightarrow \exp(-e^{-x}), n \rightarrow \infty$

standard **Gumbel Verteilung** mit Dichte $\rho(x) = \exp(-x - e^{-x}), x \in \mathbb{R}$

Extremwerttheorem (EVT) [Fisher, Tippet, Gnedenko]

- **Fréchet Verteilung** für Variablen mit schwerer Randverteilung (z.B. "power law")
- **Weibull Verteilung** für beschränkte Variablen (z.B. Uniform auf $[a, b]$)

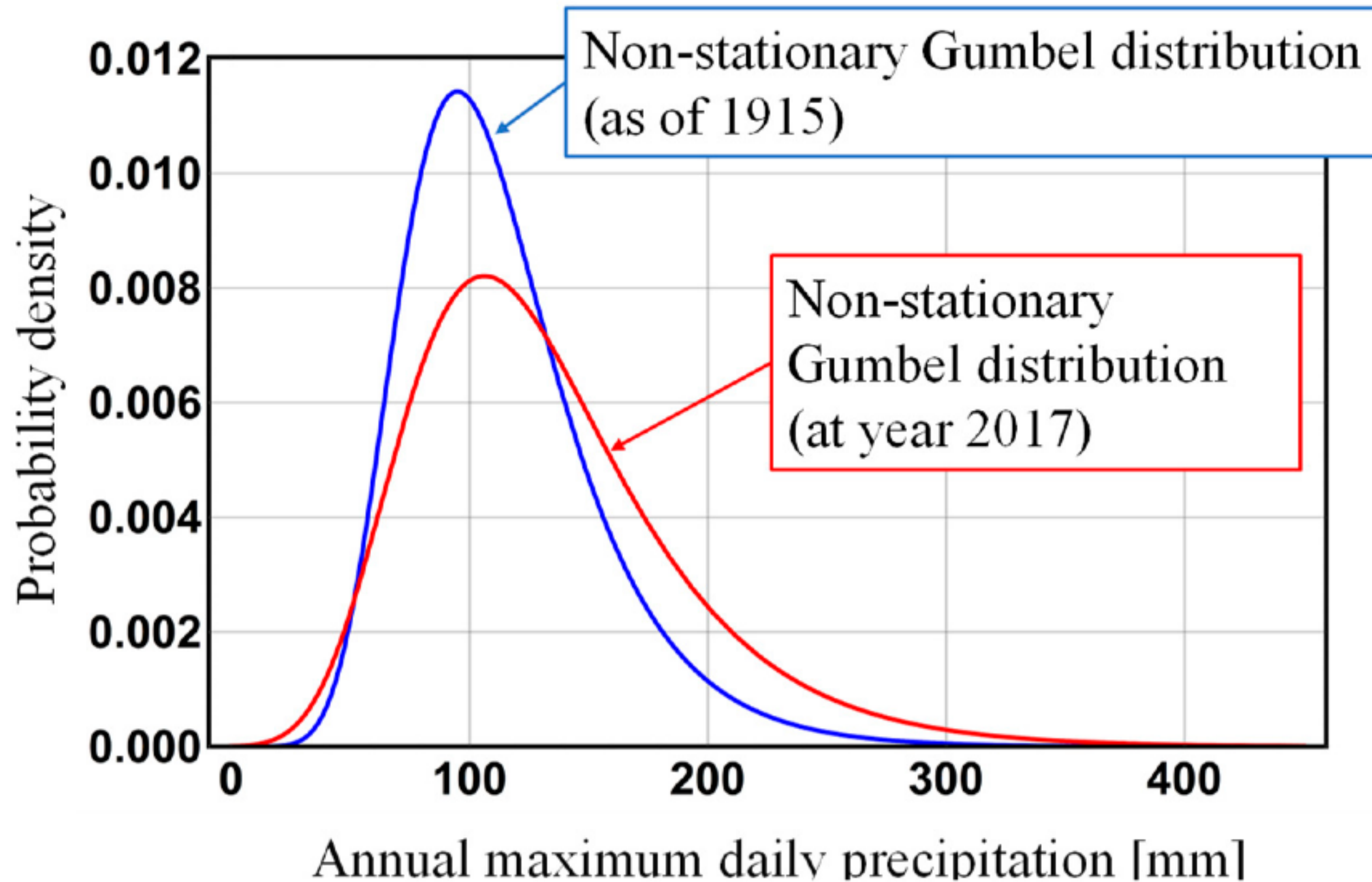
Anwendung auf Niederschläge



Time series showing observed data of the annual maximum daily precipitation over 142 years from **1876 to 2017** at the Meteorological Agency ground observation station **Tokyo** and the regression line fitted to this time series.

[Shimizu, Yamada, Yamada: Introduction of Confidence Interval Based on Probability Limit Method Test into Non-Stationary Hydrological Frequency Analysis, *Water* 2020, 12(10), 2727]

Anwendung auf Niederschläge



Gumble Verteilung

$$F(x) = \exp \left(- e^{-(x-\mu)/\beta} \right)$$

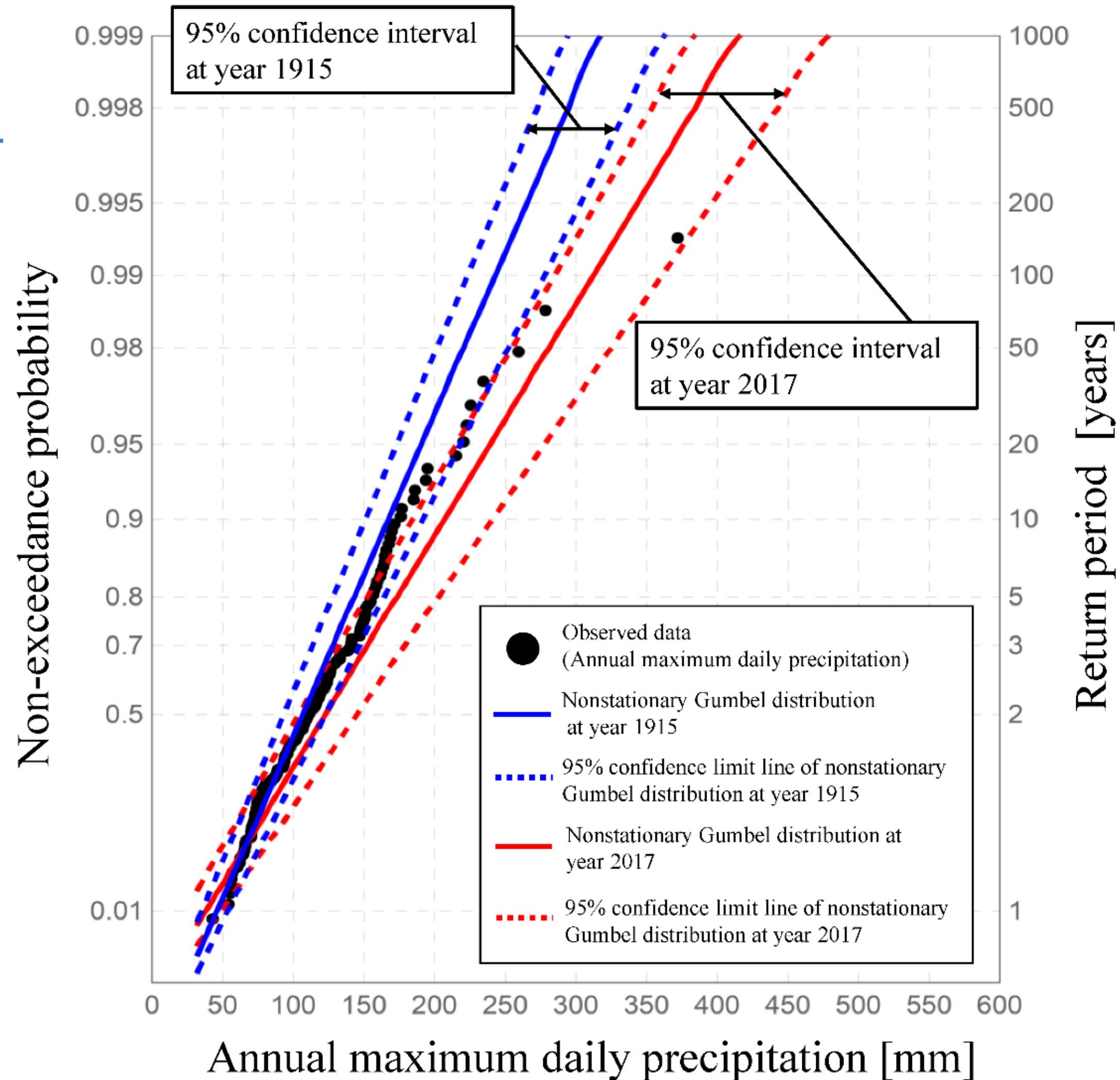
Lageparameter $\mu \in \mathbb{R}$

Skalenparameter $\beta > 0$

Anwendung auf Niederschläge

Jährlichkeit, Annuität, oder Frequenz

Observed data of the annual maximum daily precipitation over 142 years (from 1876 to 2017. at the ground observation station Tokyo, together with the non-stationary Gumbel distribution fitted to these 142 observed data.



Zusammenfassung

- Die Statistik von Extremwerten und Rekorden in Zeitreihen zeigen viele **universelle Eigenschaften**, die mit einfachen stochastischen Modellen untersucht werden können.
- Die Rate von Extremereignissen und die globale Temperatur nimmt in den letzten Jahrzehnten messbar zu. Mittels stochastischer Modelle kann die erhöhte Rate **quantitativ** auf die Erwärmung zurückgeführt werden.
- (Durch etablierte physikalische Modelle kann die Erderwärmung auf die Emission von Treibhausgasen zurückgeführt werden.)
- **Es ist jedoch im Allgemeinen nicht möglich, einzelne Extremereignisse als direkte Folge des Klimawandels zu identifizieren.**