Die Formel (97) könnte vielleicht dazu dienen, den Koeffizient des Venturi-Messers zu berechnen. Wenn man das Reibungsglied vernachlässigt, so erhält man:

$$V = 0{,}97 \sqrt{\frac{2gh}{(\sigma_2/\sigma_1)^2 - 1}},$$

wo h die Druckhöhendifferenz und σ_2/σ_1 das Querschnittsverhältnis bedeutet. Die tatsächlich angegebenen Koeffizienten schwanken zwischen 0,94 und 1,00 [1]).

Leider ist mir hierüber nichts Genaueres bekannt.

Dezember 1922. 252

Über die Statistik verketteter Vorgänge.

Von F. EGGENBERGER und G. PÓLYA in Zürich.

In den meisten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sei es in der physikalischen, biologischen oder sozialen Statistik, werden nur »unabhängige« Ereignisse betrachtet. Die n Einzelfälle einer statistischen Serie heißen von einander »unabhängig«, wenn die Chancen bei einem jeden unter ihnen von dem Ausfall der übrigen $n-1$ unbeeinflußt bleiben. Wir können z. B. die sämtlichen Geburten innerhalb Deutschlands während eines Kalendermonats zu einer Serie zusammenfassen und bei jeder Geburt registrieren, ob das neugeborene Kind Knabe oder Mädchen ist. In dieser Beziehung sind die einzelnen Geburten von einander unabhängig, mindestens gibt das vorliegende Zahlenmaterial keine Veranlassung anzunehmen, daß etwa die Chancen einer Knabengeburt in der zweiten Hälfte des Monats durch den Ausfall der Knabenquote in der ersten Hälfte irgendwie beeinflußt wären — was die meisten Leser auch ohne statistische Untersuchung glauben werden. Wir können aber auch sämtliche Personen zu einer statistischen Serie zusammenfassen, die innerhalb Deutschlands während eines Kalendermonats einen Eisenbahnzug besteigen, und bei jedem Reisenden registrieren, ob er infolge Eisenbahnunfalls während der Fahrt gestorben ist. Die einzelnen Ereignisse dieser Serie sind voneinander nicht unabhängig. Denn die Leben der Insassen desselben Zuges sind in hohem Maße »solidarisch«: Der Tod einer Person infolge Eisenbahnunfalls muß als eine außerordentliche Verschlechterung der Chancen aller Mitreisenden angesehen werden.

Die theoretische Behandlung nicht unabhängiger Ereignisse wäre wohl für alle Anwendungsgebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr wichtig, ist aber tatsächlich sehr schwierig. Es sind außerordentlich viele verschiedene Strukturen von gegenseitiger Abhängigkeit denkbar; von diesen ist eine auszuwählen, die erstens die Struktur der Beobachtungsserien annähernd richtig wiedergibt und die zweitens der Rechnung so weit zugänglich ist, daß sie bis zu numerischen Ergebnissen verfolgt werden kann.

In der vorliegenden Abhandlung wird eine Art der Wahrscheinlichkeitsverkettung untersucht, die z. B. die Struktur der Epidemiesterblichkeit, der gewerblichen und Verkehrsunfälle im großen Ganzen zutreffend darstellt, jedenfalls viel zutreffender, als die Annahme der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten. Einige numerische Stichproben, von denen eine im folgenden mitgeteilt wird, sprechen sehr für diese Ansicht. Die untersuchte Art der Wahrscheinlichkeitsverkettung — man könnte sie kurz als »Chancenvermehrung durch Erfolg« bezeichnen — ist sicher auch nicht unähnlich derjenigen, die die einzelnen Individuen einer Pflanzenart auf die verschiedenen Stellen einer einheitlichen, natürlichen Vegetationsdecke verteilt. Die letzten Abschnitte unserer Arbeit sind einer durch diese Bemerkung veranlaßten allgemeinen Untersuchung über die statistische Verteilung von Punktgesamtheiten im Raume gewidmet. Solche Verteilungen haben für die Physik (radioaktiver Zerfall, Brownsche Bewegung) ein gewisses Interesse. — Vom mathematischen Gesichtspunkte aus kommt man zwangsläufig auf die zu betrachtende Aufgabe, wenn man die beiden einfachsten und ältesten Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wiederholte Ziehungen aus einer Urne mit und ohne Zurücklegung der Kugeln, auf »gleiche Benennung« bringen will.

Die theoretischen Ueberlegungen stammen von dem zweitgenannten, die praktische Durchführung der Anwendungen von dem erstgenannten Verfasser.

[1]) Ph. Forchheimer, l. c. S. 224; H. A. Gibson, Hydraulics (London 1919) S. 735.

1. Die Struktur der Wahrscheinlichkeitsverkettung. Wir betrachten eine geordnete Folge von Größen $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$, die dem Zufall unterworfen sind [1]). Wenn die Chancen, von denen der Ausfall von x_n abhängt, im voraus feststehen, unbeeinflußt von dem Ausfall aller übrigen, so heißen $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ voneinander unabhängig. Wenn die Chancen von x_{n+1} durch den Ausfall von x_n besimmt sind ($n \geqq 1$), so haben wir eine einfache Kette von Größen vor uns nach der Terminologie von Markoff, dem eine sehr weitgehende Theorie dieses einfachsten Falles wahrscheinlichkeitstheoretischer Abhängigkeit zu verdanken ist [2]). Der nächst einfachste Fall wäre der, daß die Chancen von x_{n+1} von dem Gesamtresultat der vorangehenden Zufälle, d. h. von dem Ausfall des Wertes der Summe $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ bestimmt sind. Eine allgemeine Theorie dieser Art von Abhängigkeit besitzt man leider noch nicht; ein Spezialfall soll hier behandelt und zunächst durch das Urnenschema erläutert werden.

In einer Urne befinden sich zu Beginn des Spieles R rote und S schwarze, insgesamt $R + S = N$ Kugeln. Man zieht aus der Urne eine Kugel, und man legt an Stelle der gezogenen Kugel $1 + \Delta$ Kugeln derselben Farbe in die Urne. Nun zieht man wieder eine Kugel und wiederholt die gleiche Operation. Nach der n. Ziehung befinden sich also in der Urne $N + \Delta n$ Kugeln. Sind in den ersten n Zügen r rote und s schwarze ($r + s = n$) Kugeln gezogen worden, so befinden sich in der Urne $R + r\Delta$ rote und $S + s\Delta$ schwarze Kugeln, und die Wahrscheinlichkeiten, beim ($n+1$). Zug eine rote beziehungsweise eine schwarze Kugel zu ziehen, sind:

$$\frac{R + r\Delta}{N + n\Delta} = \frac{\varrho + r\delta}{1 + n\delta} \text{ bezw. } \frac{S + s\Delta}{N + n\Delta} = \frac{\sigma + s\delta}{1 + n\delta} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{R}{N} = \varrho, \quad \frac{S}{N} = \sigma, \quad \frac{\Delta}{N} = \delta \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

gesetzt wird. Für $\Delta = 0$ haben wir die geläufige Aufgabe der zurückgelegten, für $\Delta = -1$ die der nicht zurückgelegten Kugeln.

Wir können uns abstrakter so ausdrücken: die vom Zufall abhängigen Größen $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ sind nur zweier Werte fähig: des Wertes 1 und des Wertes 0. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $x_1 = 1$ ausfällt (roter Zug), sei ϱ, die Wahrscheinlichkeit für $x_1 = 0$ (schwarzer Zug) sei σ, $\varrho + \sigma = 1$. Es seien

$$\frac{\varrho + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\delta}{1 + n\delta} \text{ bezw. } \frac{\sigma + (n - x_1 - x_2 - \ldots - x_n)\delta}{1 + n\delta} \quad \ldots \quad (3)$$

die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß

$$x_{n+1} + 1 \text{ bezw. } x_{n+1} = 0$$

ausfällt. Setzt man

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r, \quad s = n - r \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

so sind die Formeln (1) und (3) identisch. Ist $\delta > 0$, so hat man Chancenvermehrung durch Erfolg und Chancenverminderung durch Mißerfolg, im Falle $\delta < 0$ steht es umgekehrt. Es sind also im Falle $\delta > 0$ sowohl Erfolg wie Mißerfolg »ansteckend«; $\delta = 0$ ergibt den klassischen, einfachsten Fall unabhängiger Ereignisse. Im Falle $\delta \geqq 0$ kann die Reihe der Größen $x_1, x_2 \ldots$ unbegrenzt fortgesetzt werden, im Falle $\delta < 0$ nur so lange, als $1 + n\delta > 0$ ist.

2. Berechnung der Wahrscheinlichkeiten und der Erwartungen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ ausfällt? (für r kommen die Werte $0, 1, 2 \ldots n$ in Betracht). Mit anderen Worten: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter den angegebenen Bedingungen aus der Urne in n Zügen r rote und $s = n - r$ schwarze Kugeln zu ziehen? Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

$$x_1 = 1, \; x_2 = 1, \ldots x_r = 1, \; x_{r+1} = 0, \ldots x_{r+s} = 0$$

ausfällt, ist nach dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeiten

$$= \frac{\varrho}{1} \frac{\varrho + \delta}{1 + \delta} \frac{\varrho + 2\delta}{1 + 2\delta} \cdots \frac{\varrho + (r-1)\delta}{1 + (r-1)\delta} \frac{\sigma}{1 + r\delta} \frac{\sigma + \delta}{1 + (r+1)\delta} \cdots \frac{\sigma + (s-1)\delta}{1 + (n-1)\delta} \quad \ldots \quad (5).$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß r bestimmte unter den $x_1, x_2, \ldots x_n$ den Wert 1 und die übrigen s den Wert 0 erhalten, ist wieder durch (5) gegeben; denn wenn man

[1]) Italienisch kann man an Stelle von »vom Zufall abhängige Größe« etwas glücklicher »variabile casuale« sagen. Vergl. G. Castelnuovo, Calcolo delle probabilità (Milano-Roma-Napoli 1919), S. 30. Im folgenden sind vom Zufall abhängige Größen durch fetten Druck hervorgehoben.

[2]) Vergl. A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Leipzig-Berlin 1912), S. 272 bis 311.

den entsprechenden Produktausdruck nach (3) bildet, so erhält man wieder n Brüche, deren Nenner ebenso lauten wie die von (5), während die Zähler nur in ihrer Reihenfolge vertauscht sind. Die Berechnung kommt somit lediglich auf eine Permutation der Faktoren im Zähler (nicht im Nenner!) hinaus; aus n Elementen kann man r auf $\binom{n}{r}$ Arten herausheben, daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p_{r,s} = \frac{n!}{r!\,s!}\,\frac{\varrho(\varrho+\delta)(\varrho+2\delta)\dots(\varrho+(r-1)\delta)\quad\sigma\quad(\sigma+\delta)\quad\dots(\sigma+(s-1)\delta)}{1(1+\delta)(1+2\delta)\dots(1+(r-1)\delta)(1+r\delta)(1+(r+1)\delta)\dots(1+(n-1)\delta)} \quad (6).$$

Wir berechnen jetzt die **mathematische Erwartung** von $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}-1)(\boldsymbol{r}-2)\dots(\boldsymbol{r}-k+1)$. Die zu berechnende Größe bezeichne[1] man mit $\langle \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}-1)(\boldsymbol{r}-2)\dots(\boldsymbol{r}-k+1)\rangle$. Es ist gemäß (6)

$$\langle \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}-1)(\boldsymbol{r}-2)\dots(\boldsymbol{r}-k+1)\rangle = \sum_{r=0}^{n} r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)\,p_{r,n-r}$$

$$= \frac{\sum\limits_{r+s=n}^{0\dots n} r(r-1)\dots(r-k+1)\,\frac{1}{r!}\,\frac{\varrho}{\delta}\left(\frac{\varrho}{\delta}+1\right)\dots\left(\frac{\varrho}{\delta}+r-1\right)\frac{1}{s!}\,\frac{\sigma}{\delta}\left(\frac{\sigma}{\delta}+1\right)\dots\left(\frac{\sigma}{\delta}+s-1\right)}{\frac{1}{n!}\,\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\left(\frac{1}{\delta}+2\right)\dots\left(\frac{1}{\delta}+n-1\right)}$$

In der Summe im Zähler ist also $r=0, 1, 2, \dots n$, $s=r-n$ zu setzen. Der Zähler ist der Koeffizient von z^n in dem Produkt der beiden Reihen

$$\sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)\dots(r-k+1)\,\frac{\frac{\varrho}{\delta}\left(\frac{\varrho}{\delta}+1\right)\dots\left(\frac{\varrho}{\delta}+r-1\right)}{r!}\,z^r \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\frac{\sigma}{\delta}\left(\frac{\sigma}{\delta}+1\right)\dots\left(\frac{\sigma}{\delta}+s-1\right)}{s!}\,z^s$$

$$= \left(z^k\frac{d^k}{dz^k}(1-z)^{-\varrho/\delta}\right)(1-z)^{-\sigma/\delta} = z^k\,\frac{\varrho}{\delta}\left(\frac{\varrho}{\delta}+1\right)\dots\left(\frac{\varrho}{\delta}+k-1\right)(1-z)^{-\varrho/\delta-k}\,(1-z)^{-\sigma/\delta}$$

$$= \frac{\varrho}{\delta}\left(\frac{\varrho}{\delta}+1\right)\dots\left(\frac{\varrho}{\delta}+k-1\right)z^k(1-z)^{-1/\delta-k}$$

$$= \frac{\varrho}{\delta}\left(\frac{\varrho}{\delta}+1\right)\dots\left(\frac{\varrho}{\delta}+k-1\right)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{\delta}+k\right)\left(\frac{1}{\delta}+k+1\right)\dots\left(\frac{1}{\delta}+k+n-k-1\right)}{(n-k)!}\,z^n.$$

Es ist also

$$\langle \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}-1)\dots(\boldsymbol{r}-k+1)\rangle = \frac{\frac{\varrho}{\delta}\left(\frac{\varrho}{\delta}+1\right)\dots\left(\frac{\varrho}{\delta}+k-1\right)\left(\frac{1}{\delta}+k\right)\left(\frac{1}{\delta}+k+1\right)\dots\left(\frac{1}{\delta}+n-1\right)\frac{1}{(n-k)!}}{\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\dots\left(\frac{1}{\delta}+n-1\right)\frac{1}{n!}}$$

$$\langle \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}-1)\dots(\boldsymbol{r}-k+1)\rangle = \frac{\varrho(\varrho+\delta)(\varrho+2\delta)\dots(\varrho+\delta(k-1))}{1(1+\delta)(1+2\delta)\dots(1+\delta(k-1))}\,n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \quad (7).$$

Man kann (7) auch durch andere, mehr kombinatorische Betrachtungen gewinnen. Speziell folgen aus (7) für $k=1,2$ der Erwartungswert von $\boldsymbol{r}$ und das Quadrat der mittleren Abweichung dieser Erwartung:

$$\langle \boldsymbol{r}\rangle = \varrho n \quad \dots\dots \quad (8)$$

$$\langle(\boldsymbol{r}-\langle\boldsymbol{r}\rangle)^2\rangle = \langle\boldsymbol{r}^2\rangle - \langle\boldsymbol{r}\rangle^2 = \langle\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}-1)\rangle + \langle\boldsymbol{r}\rangle - \langle\boldsymbol{r}\rangle^2$$

$$= \frac{\varrho(\varrho+\delta)}{1(1+\delta)}\,n(n-1) + n\varrho - n^2\varrho^2 = n\varrho(1-\varrho)\frac{1+n\delta}{1+\delta} \quad \dots \quad (9).$$

Für $\delta=0$, bezw. für $\delta=-\frac{1}{N}$, $\varrho=\frac{R}{N}$, $\sigma=\frac{S}{N}$, vergl. (2), erhält man hieraus die wohlbekannten klassischen Resultate, was zur Kontrolle dienen mag.

3. Der Grenzfall seltener Ereignisse. Wir wenden uns zu Verhältnissen, die vorliegen, wenn die Anzahl der beobachteten Fälle n sehr groß, aber ϱ so klein, d. h. das Merkmal von der Wahrscheinlichkeit ϱ so selten ist, daß die erwartungsmäßige Anzahl $\langle\boldsymbol{r}\rangle = \varrho n$ nur gering ist. Man denke sich z. B., daß n die Anzahl der Personen ist, die innerhalb Monatsfrist eine Eisenbahnfahrt antreten, und ϱ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die angetretene Fahrt mit tödlichem Unfall endet. Man setze

$$n\varrho = h, \qquad n\delta = d > 0 \quad \dots\dots \quad (10).$$

[1] Die Erwartung (mathematische Hoffnung, Durchschnittswert) einer vom Zufall abhängigen Größe $\boldsymbol{x}$ soll stets mit $\langle\boldsymbol{x}\rangle$ bezeichnet werden, mit spitzen Klammern $\langle\;\rangle$, deren Gebrauch für diese Bezeichnung reserviert wird.

und nehme h und d mäßig, n sehr groß an, oder, in sachgemäßer mathematischer Abstraktion, h und d fest und n gegen ∞ konvergierend. Wir berechnen zuerst den Grenzwert der Wahrscheinlichkeit $p_{0,n}$. Es ist gemäß (6)

$$p_{0,n}=\frac{\sigma(\sigma+\delta)(\sigma+2\delta)\ldots(\sigma+(n-1)\delta)}{1\,(1+\delta)(1+2\delta)\ldots(1+(n-1)\delta)}=\left(1-\frac{\varrho}{1}\right)\left(1-\frac{\varrho}{1+\delta}\right)\left(1-\frac{\varrho}{1+2\delta}\right)\ldots\left(1-\frac{\varrho}{1+(n-1)\delta}\right).$$

Setzt man hierin gemäß (10)

$$\varrho=\frac{h}{n},\qquad \sigma=1-\frac{h}{n},\qquad \delta=\frac{d}{n}\quad\ldots\ldots\quad(11),$$

so ergibt sich

$$p_{0,n}=\left(1-\frac{h}{n}\right)\left(1-\frac{h}{n+d}\right)\ldots\left(1-\frac{h}{n+(n-1)d}\right)$$

$$\lg p_{0,n}=-\left(\frac{h}{n}+\frac{h}{n+d}+\ldots+\frac{h}{n+(n-1)d}\right)-{}^1/_2\left(\left(\frac{h}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{h}{n+(n-1)d}\right)^2\right)\ldots$$

$$\lg p_{0,n}=-\frac{h}{d}\left(\frac{d}{n}+\frac{d}{n}\,\frac{1}{1+\frac{d}{n}}+\ldots+\frac{d}{n}\,\frac{1}{1+(n-1)\frac{d}{n}}\right)-R_n\quad\ldots\quad(12).$$

Der Rest R_n wird für $n=\infty$ unendlich klein; R_n ist von der Ordnung $^1/_n$, wie man sich leicht überzeugt. Der Klammerausdruck rechts in (12) ist als eine Summe von n Rechtecken mit der Basis $^d/_n$ aufzufassen; wenn sie Seite an Seite auf der Abszissenachse so aufgestellt werden, daß ihre Grundlinien die Strecke zwischen den Abszissen 0 und d ausfüllen, so liegen die linken oberen Ecken auf der Kurve $y=\frac{1}{1+x}$. Daher ist

$$\lim_{n=\infty}\lg p_{0,n}=-\frac{h}{d}\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d}{n}\,\frac{1}{1+\frac{(\nu-1)d}{n}}=-\frac{h}{d}\int_0^d\frac{dx}{1+x}=-\frac{h}{d}\lg(1+d).$$

$$\lim_{n=\infty}p_{0,n}=(1+d)^{-h/d}=P_0\quad\ldots\ldots\quad(13).$$

Es folgt aus (6), (11)

$$p_{r,n-r}=p_{0,n}\,\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.\,2.\,3.\ldots r}\,\frac{\varrho}{\sigma+(n-1)\delta}\,\frac{\varrho+\delta}{\sigma+(n-2)\delta}\cdots\frac{\varrho+(r-1)\delta}{\sigma+(n-r)\delta}$$

$$=p_{0,n}\,\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)h(h+d)\ldots(h+(r-1)d)}{r!\left(1+d-\frac{h+d}{n}\right)\left(1+d-\frac{h+2d}{n}\right)\ldots\left(1+d-\frac{h+(r-1)d}{n}\right)}.$$

Diese Formel ergibt für festes r in Verbindung mit (13)

$$\lim_{n=\infty}p_{r,n-r}=(1+d)^{-h/d}\,\frac{1}{r!}\,\frac{h}{1+d}\,\frac{h+d}{1+d}\cdots\frac{h+(r-1)d}{1+d}$$

$$=\frac{1}{r!}h(h+d)(h+2d)\ldots(h+(r-1)d)(1+d)^{-h/d-r}=P_r\quad\ldots\quad(14).$$

Zur Kontrolle der Formel (14) berechnen wir die Summe der Grenzwahrscheinlichkeiten $P_0,\ P_1,\ P_2,\ldots P_n,\ldots$ Es ist

$$\sum_{r=0}^{\infty}P_r=(1+d)^{-h/d}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\frac{h}{d}\left(\frac{h}{d}+1\right)\ldots\left(\frac{h}{d}+r-1\right)}{1.\,2.\ldots r}\left(\frac{d}{1+d}\right)^r=(1+d)^{-h/d}\left(1-\frac{d}{1+d}\right)^{-h/d}=1.$$

Zur weiteren Kontrolle von (14) berechnen wir die Erwartung

$$\langle r(r-1)\ldots(r-k+1)\rangle=\sum_{r=0}^{\infty}r(r-1)\ldots(r-k+1)P_r$$

$$=(1+d)^{-h/d}\left[x^k\frac{d^k}{dx^k}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\frac{h}{d}\left(\frac{h}{d}+1\right)\ldots\left(\frac{h}{d}+r-1\right)}{1.\,2.\,3.\ldots r}x^r\right]_{x=d(1+d)^{-1}}$$

$$=(1+d)^{-h/d}\left(\frac{d}{1+d}\right)^k\frac{h}{d}\left(\frac{h}{d}+1\right)\ldots\left(\frac{h}{d}+k-1\right)\left(1-\frac{d}{1+d}\right)^{-h/d-k}$$

$$\langle r(r-1)\ldots(r-k+1)\rangle=h(h+d)(h+2d)\ldots(h+(k-1)d)\quad.\quad(15).$$

Dasselbe Resultat hätten wir auch aus (7) durch direkten Grenzübergang erhalten können. Insbesondere gewinnen wir für die Erwartung $\langle r\rangle$ und für das Quadrat der mittleren Abweichung davon, entweder aus (15) oder durch Grenzübergang aus (8), (9) die Werte:

$$\langle r \rangle = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

$$\langle (r-h)^2 \rangle = h\,(1+d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Wir haben bisher den Fall $d > 0$, d. h. den Fall der Chancenvermehrung durch Erfolg vor Augen gehabt. Es wird für $d = 0$

$$\lim_{d=0} P_0 = \lim_{d=0} (1+d)^{-h/d} = e^{-h} = P_0^*$$

und allgemein, vergl. (14),

$$\lim_{d=0} P_r = \frac{h^r e^{-h}}{r!} = P_r^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Die abgeleiteten Formeln schließen also für $d = 0$ den wohlbekannten Fall der unabhängigen seltenen Ereignisse ein, der von Poisson endeckt und von L. v. Bortkiewicz in seiner Bedeutung für die Statistik erkannt worden ist[1]).

4. Anwendung. Die durch die Formel (14) gegebenen Wahrscheinlichkeiten $P_0, P_1, P_2, \ldots P_r, \ldots$ entspringen, kurz zusammengefaßt, folgender wahrscheinlichkeitstheoretischer Struktur: das Beobachtungsmaterial ist sehr groß, das untersuchte Merkmal ist sehr selten, und die einzelnen beobachteten Fälle hängen derart zusammen, daß je stärker in dem einen Teil des Beobachtungsmaterials das Merkmal vertreten ist, um so stärker es auch in dem übrigen Teil zu erwarten ist. Die beobachteten Fälle seien etwa die Sterbefälle in einem bestimmten Land innerhalb eines Monats, das untersuchte besondere Merkmal das Ableben infolge einer seltenen epidemischen Krankheit, wie Pocken oder Cholera. Der Umstand, daß in der ersten Hälfte des Monats besonders viel Pockenfälle zur Registrierung gelangen, präjudiziert die zweite Monatshälfte in demselben Sinne. Eisenbahnunfälle oder gewerbliche Unfälle, z. B. infolge Explosion, greifen, statistisch gesprochen, ähnlich um sich wie eine ansteckende Krankheit, indem sie im allgemeinen mehrere Personen dahinraffen. Es ist zu erwarten, daß die statistischen Zahlen derartiger Erscheinungen mit dem Verlauf der Wahrscheinlichkeiten $P_0, P_1, P_2, \ldots P_r, \ldots$ qualitativ übereinstimmen.

Nun zur quantitativen Prüfung! Nehmen wir etwa die Todesfälle an Pocken in der Schweiz während der Jahre 1877/1900, d. h. während 288 Monaten, vergl. Zahlentafel 1, S. 285. Es fanden insgesamt 1584 solche Todesfälle statt, also durchschnittlich 5,5 im Monat. Setzen wir

$$h = 5{,}5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

so können wir die Wahrscheinlichkeiten $P_0^*, P_1^*, \ldots$ nach Formel (18) berechnen ($P_0^*, P_1^*, \ldots P_r^*, \ldots$ entsprechen unabhängigen seltenen Ereignissen). $288\, P_r^*$ ist die erwartungsmäßige (theoretische) Zahl derjenigen Monate unter den 288 beobachteten, in denen genau r Todesfälle stattfinden sollen, vergl. Spalte III der Zahlentafel 1; die tatsächliche Zahl dieser Monate befindet sich in Spalte II der Zahlentafel 1. In Spalte VI der Zahlentafel 1 befinden sich die Zahlen $288\,(P_0^* + P_1^* + \ldots + P_r^*) = 288 \sum_{\rho=0}^{r} P_\rho^*$, gegenübergestellt den entsprechenden beobachteten Zahlen in Spalte V; im Durchschnitt der Spalte V mit der Zeile r (wo $r = 0, 1, 2, \ldots$) steht also die Anzahl derjenigen Monate unter den beobachteten 288, in denen nicht mehr als r Todesfälle der fraglichen Art sich ereigneten. Die Nichtübereinstimmung der Theorie, die die Unabhängigkeit der Einzelfälle annimmt und zu den Wahrscheinlichkeiten $P_0^*, P_1^*, \ldots P_r^*, \ldots$ führt, mit den vorliegenden Tatsachen, geht entweder aus dem Vergleich der Spalten II und III oder aus dem der Spalten V und VI, oder endlich noch aus folgendem hervor: es müßte, wenn die Ereignisse unabhängig sind, das Quadrat der mittleren Abweichung h betragen (vergl. Formel (17), für $d = 0$; $h = 5{,}5$ in unserem Fall). Multiplizieren wir $(r - 5{,}5)^2$ mit der Anzahl derjenigen Monate, in denen genau r Todesfälle sich ereigneten (vergl. Spalte II, Zeile r), summieren von $r = 0$ bis $r = 60$ und dividieren die erhaltene Summe durch 287, d. h. Gesamtzahl der Monate minus 1, so erhalten wir 83,5888, also bedeutend mehr als 5,5.

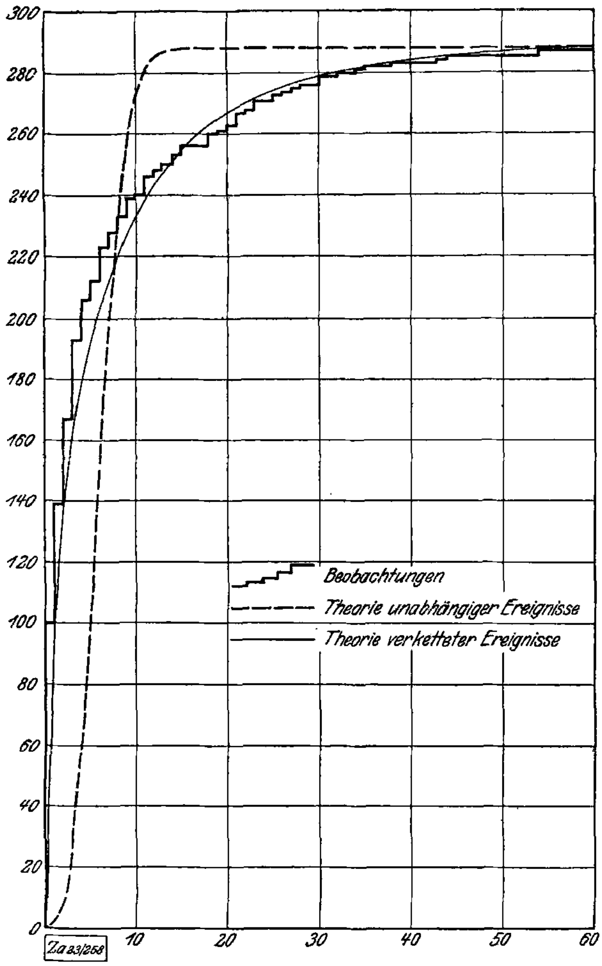
[1]) L. v. Bortkiewicz, Das Gesetz der kleinen Zahlen (Leipzig, 1898). In der Bezeichnung folgen wir R. v. Mises, diese Zeitschrift, 1, S. 121 bis 124.

Um die Theorie der Chancenvermehrung durch Erfolg an dem vorliegenden Fall zu kontrollieren, bestimmen wir, veranlaßt durch Formel (17), d aus der Gleichung

$$h\,(1+d) = 83{,}5888$$

(die Berechnung dieser Zahl 83,5888 wurde eben auseinandergesetzt). Man erhält

$$d = 14{,}20 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20).$$



Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung in der Schweizer Pockenfall-Statistik.

(Die Ordinate zur Abszisse x stellt die Anzahl der Monate dar, in denen die Zahl der Todesfälle weniger als x oder x beträgt.)

Mit den Zahlenwerten (19) (20) berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten P_0, P_1, $P_2, \ldots$ gemäß Formel (14). Die Gegenüberstellung der Spalten II und IV und noch mehr die der Spalten V und VII der Zahlentafel 1 ergibt eine auf den ersten Anblick ganz befriedigende quantitative Uebereinstimmung der theoretischen erwartungsmäßigen Anzahlen IV, VII mit den entsprechenden beobachteten Zahlen II, V.

Natürlich könnte man das Resultat, daß mit den P_r bessere Uebereinstimmung erzielt wurde als mit den P_r^*, auch dem Umstand zuschreiben, daß die P_r^* nur einen anpassungsfähigen Parameter, nämlich h, während die P_r zwei solche enthalten, nämlich h und d. Wir neigen aber der Ansicht zu, daß die bessere Uebereinstimmung nicht bloß von diesem äußerlichen Umstand, sondern vielmehr davon herrührt, daß das wahrscheinlichkeitstheoretische Bild mit der Wirklichkeit viel besser übereinstimmt, wenn Chancenvermehrung durch Erfolg, als wenn Unabhängigkeit der Fälle angenommen wird. Die Prüfung der Theorie an anderem statistischen Material fiel zum Teil noch günstiger aus. Die Einzelheiten wird der erstgenannte Verfasser an anderer Stelle veröffentlichen.

5. Gleichmäßige und stabile Verteilung einer Punktgesamtheit im Raume. Ob der Raum, um den es sich handelt, ein-, zwei-, oder dreidimensonal ist, macht nur einen unerheblichen Unterschied für die nachfolgende Betrachtung aus. Sprechen wir, der Bestimmtheit halber, etwa von dem zweidimensionalen Fall, d. h. die Punkte seien in einer Ebene verteilt.

Es sei vorgelegt ein ebenes Flächenstück F vom Flächeninhalt f. Daß ein Punkt P auf die Fläche F gestreut wird, darunter verstehe man folgendes: es sei F' irgend ein Teilstück von F von dem Flächeninhalt f'; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Punkt P auf dem Teilstück F' liegt, ist gleich $\frac{f'}{f}$. Es ist jetzt klar, was darunter zu verstehen ist, daß mehrere Punkte voneinander unabhängig auf F gestreut sind. Sind $r+\nu$ Punkte voneinander unabhängig auf F gestreut, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von den $r+\nu$ Punkten r Punkte auf das Teilstück F' und ν Punkte außerhalb des Teilstückes F' fallen, gleich

$$\binom{r+\nu}{\nu}\left(\frac{f'}{f}\right)^r\left(1-\frac{f'}{f}\right)^\nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21).$$

Zahlentafel 1.

Die Todesfälle an Pocken in der Schweiz in den Jahren 1877/1900.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Zahl der Todesfälle	Zahl der Monate			Summenzahlen			Abweichung zwischen V	
	tatsächlich	nach Gl. (18)	nach Gl. (14)	zu Spalte II	zu Spalte III	zu Spalte IV	und VI	und VII
0	100	1,2	100,4	100	1,2	100,4	— 98,8	0,4
1	39	6,5	36,3	139	7,7	136,7	—131,3	— 2,3
2	28	17,8	23,5	167	25,5	160,2	—141,5	— 6,8
3	26	32 6	17,5	193	58,1	177,7	—134,9	—15,3
4	13	44,9	13,8	206	103,0	191,5	—103,0	—14,5
5	6	49,4	11,3	212	152,4	202,8	— 59,6	— 9,2
6	11	45,2	9,5	223	197,6	212,3	— 25,4	—10,7
7	5	35,5	8,1	228	233,1	220,4	5,1	— 7,6
8	5	24,5	7,0	233	257,6	227,4	24,6	— 5,6
9	6	15,0	6,1	239	272,6	233,5	33,6	— 5,5
10	1	8,2	5,3	240	280,8	238,8	40,8	— 1,2
11	6	4,1	4,7	246	284,9	243,5	38,9	— 2,5
12	2	1,9	4,2	248	286,8	247,7	38,8	— 0,3
13	2	0,8	3,7	250	287,6	251,4	37,6	1,4
14	3	0,3	3,3	253	287,9	254,7	34,9	1,7
15	3	0,1	3,0	256	288,0	257,7	32,0	1,7
16	—	—	2,7	256	288,0	260,4	32,0	4,4
17	—	—	2,4	256	288,0	262,8	32,0	6,8
18	4	—	2,2	260	288,0	265,0	28 0	5,0
19	1	—	2,0	261	288,0	267,0	27,0	6,0
20	2	—	1,8	263	288,0	268,8	25,0	5,8
21	4	—	1,6	267	288,0	270,4	21,0	3,4
22	1	—	1,5	268	288,0	271,9	20,0	3,9
23	3	—	1,3	271	288,0	273,2	17,0	2,2
24	—	—	1,2	271	288,0	274,4	17 0	3,4
25	2	—	1,1	273	288,0	275,5	15,0	2,5
26	1	—	1,0	274	288,0	276,5	14,0	2,5
27	1	—	0,9	275	288,0	277,4	13,0	2,4
28	1	—	0,8	276	288,0	278,2	12,0.	2,2
29	—	—	0,8	276	288,0	279,0	12,0	3,0
30	3	—	0,7	279	288,0	279,7	9,0	0,7
31	—	—	0,6	279	288,0	280,3	9,0	1,3
32	1	—	0,6	280	288,0	280,9	8,0	0,9
33	—	—	0,5	280	288,0	281,4	8,0	1,4
34	1	—	0,5	281	288,0	281,9	7,0	0,9
35	1	—	0,5	282	288,0	282,4	6,0	0,4
36	—	—	0,4	282	288,0	282,8	6,0	0,8
37	—	—	0,4	282	288,0	283,2	6,0	1,2
38	1	—	0,4	283	288,0	283,6	5,0	0,6
39	—	—	0,3	283	288,0	283,9	5,0	0,9
40	—	—	0,3	283	288,0	284,2	5,0	1,2
41	—	—	0,3	283	288,0	284,5	5,0	1,5
42	—	—	0 3	283	288,0	284,8	5,0	1,8
43	1	—	0,2	284	288,0	285,0	4,0	1,0
44	1	—	0,2	285	288,0	285,2	3,0	0,2
45	—	—	0,2	285	288,0	285,4	3,0	0,4
46	—	—	0,2	285	288,0	285,6	3,0	0,6
47	—	—	0,2	285	288,0	285,8	3,0	0,8
48	—	—	0,2	285	288,0	286,0	3,0	1,0
49	—	—	0,1	285	288,0	286,1	3,0	1,1
50	—	—	0,1	285	288,0	286,2	3,0	1,2
51	—	—	0,1	285	288,0	286,3	3,0	1,3
52	—	—	0,1	285	288,0	286,4	3,0	1,4
53	—	—	0,1	285	288,0	286,5	3,0	1,5
54	2	—	0,1	287	288,0	286,6	1,0	— 0,4

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	VIII
Zahl der Todesfälle	Zahl der Monate			Summenzahlen			Abweichung zwischen V	
	tatsächlich	nach Gl. (18)	nach Gl. (14)	zu Spalte II	zu Spalte III	zu Spalte IV	und VI	und VII
55	—	—	0,1	287	288,0	286,7	1,0	−0,3
56	—	—	0,1	287	288,0	286,8	1,0	−0,2
57	—	—	0,1	287	288,0	286,9	1,0	−0,1
58	—	—	0,1	287	288,0	287,0	1,0	—
59	—	—	0,1	287	288,0	287,1	1,0	0,1
60	1	—	0,1	288	288,0	287,2	—	−0,8
61	—	—	0,1	288	288,0	287,3	—	−0,7
62	—	—	0,1	288	288,0	287,4	—	−0,6

I: Anzahl der Todesfälle in einem Monat $= r$. II: Anzahl der Monate, in denen effektiv r Todesfälle aufgetreten $= M_r$. III: Anzahl der Monate mit r Todesfällen, theoretisch, bei Annahme der Unabhängigkeit $= 288\, P_r^*$. IV: Anzahl der Monate mit r Todesfällen, theoretisch, bei Annahme der Chancenvermehrung durch Erfolg $= 288\, P_r$. V: $\sum_{\nu=0}^{r} M_\nu$. VI: $288 \sum_{\nu=0}^{r} P_\nu^*$. VII: $288 \sum_{\nu=0}^{r} P_\nu$. VIII: $\sum_{\nu=0}^{r} (288\, P_\nu^* - M_\nu)$, Abweichung von VI und V. IX: $\sum_{\nu=0}^{r} (288\, P_\nu - M_\nu)$, Abweichung von VII und V.

Um die Verteilung einer Punktgesamtheit in einer Ebene wahrscheinlichkeitstheoretisch zu charakterisieren, muß man die Wahrscheinlichkeit $W(r, F)$ dafür angeben, daß innerhalb eines Flächenstückes F genau r Punkte der Gesamtheit sich befinden (r, F beliebig). Nehmen wir an, daß die Verteilung gleichmäßig ist, d. h. daß $W(r, F)$ nicht von der Lage und auch nicht von der Form, sondern bloß von dem Flächeninhalt f des Flächenstückes abhängt, $W(r, F) = W_r(f)$. Um eine gleichmäßige Verteilung von Punkten in der Ebene zu charakterisieren, muß man also die Wahrscheinlichkeiten

$$W_0(f),\ W_1(f),\ W_2(f), \ldots W_r(f), \ldots \qquad (22)$$

angeben. Die Funktionen (22) unterliegen der Bedingung

$$W_r(f) \geqq 0 \ \text{für}\ r = 0, 1, 2, 3, \ldots;\ f > 0 \qquad (\mathrm{I}).$$

$$W_0(f) + W_1(f) + W_2(f) + \ldots + W_r(f) + \ldots = 1 \qquad (\mathrm{II}).$$

Die Verteilung einer Punktgesamtheit soll im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne stabil heißen, wenn rein zufällige Störungen daran nichts Wesentliches ändern können. Genauer gesagt: Die Stabilität der Verteilung einer Punktgesamtheit besteht darin, daß an dem statistischen Gesamtbild nichts geändert wird, wenn die in irgend einem Flächenstück F befindlichen Punkte der Gesamtheit aus F herausgenommen und voneinander unabhängig auf F zurückgestreut werden.

Außerhalb F ändert die Herausnahme und Zurückstreuung der in F gelegenen Punkte offenbar nichts; wir müssen also bloß zusehen, was hierdurch an irgend einem Teilstück F' und F geändert wird. Es soll die Verteilung von vornherein als gleichmäßig angenommen und durch die Angabe der Wahrscheinlichkeiten (22) festgelegt werden, die (I) und (II) genügen. Die Flächeninhalte von F und F' sollen wie oben mit f und f' bezeichnet werden.

Vor Herausnahme der Punkte aus F war die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in F' genau r Punkte liegen, $= W_r(f')$.

Damit nach Herausnahme und Zurückstreuung genau r Punkte in F' liegen sollen, müssen von vornherein $r + \nu$ Punkte in F vorhanden gewesen sein, $\nu \geqq 0$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $r + \nu$ Punkte in F gewesen sind, ist $W_{r+\nu}(f)$; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß aus diesen $r + \nu$ bei der Zurückstreuung genau r auf F' fallen, ist durch (21) angegeben. Es kann $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sein; daher ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach Zurückstreuung genau r Punkte in f' liegen

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} W_{r+\nu}(f) \binom{r+\nu}{\nu} \left(\frac{f'}{f}\right)^r \left(1 - \frac{f'}{f}\right)^\nu .$$

Somit ist die Stabilität der durch die Wahrscheinlichkeiten (22) festgelegten Verteilung durch die Gleichung

$$W_r(f') = \sum_{\nu=0}^{\infty} W_{r+\nu}(f) \binom{r+\nu}{\nu} \left(\frac{f'}{f}\right)^r \left(1 - \frac{f'}{f}\right)^\nu \quad \ldots \quad \text{(III)}$$

$$\text{für } 0 < f' \leqq f, \; r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ausgedrückt.

Um die den Bedingungen (I), (II), (III) genügenden Funktionen (22) aufzusuchen, setzt man

$$W_0(f) + W_1(f) z + W_2(f) z^2 + \ldots = \Phi(f, z) \quad \ldots \quad (23).$$

Die Reihe (23) hat positive Koeffizienten, vergl. (I), und konvergiert für $z = 1$, vergl. (II), also überhaupt für $f > 0$, $|z| \leqq 1$; z ist als komplexe Variable aufgefaßt. Man multipliziere (III) mit z^r und summiere über $r = 0, 1, 2, \ldots$; es ergibt sich

$$\sum_{r=0}^{\infty} W_r(f') z^r = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} z^r W_{r+\nu}(f) \binom{r+\nu}{\nu} \left(\frac{f'}{f}\right)^r \left(1 - \frac{f'}{f}\right)^\nu \quad \ldots \quad (24).$$

Man setze zur Abkürzung

$$\frac{f'}{f} = x, \qquad 0 < x \leqq 1 \quad \ldots \quad (25).$$

Es ergibt sich aus (24)

$$\Phi(fx, z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(r+\nu)(r+\nu-1)\ldots(r+1)}{\nu!} W_{\nu+r}(f) (zx)^r (1-x)^\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-x)^\nu}{\nu!} \sum_{r=0}^{\infty} W_{\nu+r}(f)(r+\nu)(r+\nu-1)\ldots(r+1)(zx)^r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-x)^\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(f, zx),$$

gemäß (23), $\Phi^{(\nu)}(x, y) = \dfrac{\partial^\nu \Phi}{\partial y^\nu}$ gesetzt. Es folgt also

$$\Phi(fx, z) = \Phi(f, zx + 1 - x). \quad \ldots \quad (26).$$

Man setze $\Phi(1, u+1) = \Psi(u)$.

An Stelle der Variabeln f, x, z setze man entweder $1, f, z$ oder $f, \frac{1}{f}, 1 + (z-1)f$; die erste Wahl ist für $f \leqq 1$, die zweite für $f \geqq 1$ angebracht, in Anbetracht der Ungleichung unter (25). Man erhält in beiden Fällen

$$\Phi(f, z) = \Psi(fz - f) \quad \ldots \quad (27).$$

Für $\Phi(f, z)$ die Potenzreihenentwicklung (23) in (27) eingesetzt folgt nach der Maclaurinschen Formel

$$\sum_{r=0}^{\infty} W_r(f) z^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Psi^{(r)}(-f) f^r}{r!} z^r \quad \ldots \quad (28)$$

und durch Koeffizientenvergleichung

$$W_r(f) = \frac{\Psi^{(r)}(-f) f^r}{r!} \; (r = 0, 1, 2, \ldots) \quad \ldots \quad (29).$$

Aus der Gültigkeit der Potenzreihenentwicklung (28) für den Wertbereich $f > 0$, $|z| \leqq 1$ und aus den Bedingungen (I) (II) kommen wir schließlich zu folgendem Resultat: Die Wahrscheinlichkeiten (22) sind, wenn die durch sie definierte Verteilung der Punktgesamtheit stabil sein soll, durch die Gleichung (29) gegeben, wobei $\Psi(u)$ eine in der Halbebene $\Re(u) < 0$ analytische Funktion bedeutet, deren sämtlich Derivierten für reelle negative Werte von u reell und positiv sind; es ist ferner $\lim_{u=0} \Psi(u) = 1$, wenn u von der linken Halbebene dem Punkt 0 zustrebt.

$\Psi'(u)$ nimmt, wenn u durch negative Werte hindurch gegen 0 strebt, stets zu, da $\Psi''(u) > 0$ für $u < 0$.

Es sei
$$\lim_{u=0} \Psi'(u) = D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$
endlich; dann ist $D > 0$ und es gilt gemäß (29)
$$\sum_{r=0}^{\infty} r\, W_r(f) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r f^r \psi^{(r)}(-f)}{r!} = f \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^m \psi^{(1+m)}(-f)}{m!} = f\, \Psi'(0) = f\, D.$$
D ist die durchschnittliche Anzahl der Punkte der Gesamtheit pro Flächeneinheit, d. h., kurz gesagt, die Dichte der Punktgesamtheit.

6. Unabhängigkeit der Teilgesamtheiten. Daß die einzelnen Teile der Punktgesamtheit voneinander unabhängig sind, bedeutet, daß die Chancen der Verteilung an jedem Flächenstück unbeeinflußt von dem Ausfall der Verteilung an den übrigen Flächenstücken sind. Nehmen wir die Verteilung als gleichmäßig an, festgelegt durch die Wahrscheinlichkeiten (22). Betrachten wir zwei Flächenstücke F_1 und F_2, von dem Flächeninhalt f_1 bezw. f_2, die zusammen eine Fläche F ausmachen vom Flächeninhalt $f_1 + f_2 = f$. Sind die einzelnen Teile der Punktgesamtheit voneinander unabhängig, so bleibt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an f_2 genau n Punkte sich befinden, gleich $W_n(f_2)$, unabhängig davon, ob an der Nachbarfläche f_1 0 oder 1 oder 2 oder 3 ... Punkte sich befinden. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an f_1 sich m und an f_2 sich n Punkte befinden, gleich $W_m(f_1)\, W_n(f_2)$, und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß auf f sich insgesamt r Punkte befinden,
$$W_0(f_1)\, W_r(f_2) + W_1(f_1)\, W_{r-1}(f_2) + \ldots W_r(f_1)\, W_0(f_2) = W_r(f_1 + f_2) \quad . \quad (31).$$
Hieraus folgt für die unter (23) definierte Funktion $\Phi(f, z)$ die Beziehung
$$\Phi(f_1 + f_2, z) = \Phi(f_1, z)\, \Phi(f_2, z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$
Wenn irgendwelche Teilgesamtheiten voneinander unabhängig sind, so können f_1, f_2 beliebig gewählt werden. Das Bestehen von (32) für alle Wertepaare f_1, f_2, wo $f_1 > 0, f_2 > 0$, zieht bekanntlich die Gleichung
$$\Phi(f, z) = e^{\varphi(z) f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$
nach sich, wo $\varphi(z)$ eine gewisse Funktion von z ist. Soll noch die Verteilung stabil, also $\Phi(f, z)$ von der Form (27) sein, und auch (30) bestehen, so ist
$$\Psi(u) = e^{Du} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34),$$
$$\Phi(f, z) = e^{D(z-1)f}.$$
Es ergibt sich aus (34), (29)
$$W_r(f) = \frac{(Df)^r e^{-D}}{r!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Die Funktion (34) genügt den am Ende von Abschnitt 5 ausgesprochenen Bedingungen. Die Formel (35) geht aus dem Ausdruck von P_r^* unter (18) hervor, wenn man darin
$$h = Df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$
setzt. Man weiß, daß das zu (35) analoge Gesetz für eine bezw. drei Dimensionen die Verteilung der radioaktiven Zerfallserscheinungen in der Zeit bezw. die der in Brownscher Bewegung befindlichen Teilchen in dem Raum regelt.

7. Verteilung bei Chancenvermehrung durch Erfolg. Es sei ein Beispiel angeführt, worin das Verteilungsgesetz sicherlich nicht (35) sein kann. Zur Vertiefung der Begriffe der Pflanzengeographie haben die Botaniker[1]) statistische Aufnahmen folgender Art unternommen: An einer einheitlichen natürlichen Vegetationsdecke werden quadratische Flächen von gleichem Flächeninhalt f abgegrenzt. Innerhalb jedes Quadrates werden sämtliche darin vorkommenden Pflanzenarten bestimmt. Als Resultat der statistischen Aufnahme wird angegeben, wieviel Quadrate insgesamt untersucht, welche Arten gefunden worden sind, und in wieviel Quadraten jede Art vorgekommen ist. Dividiert man die letztgenannte Zahl durch die Gesamtzahl der Quadrate, so erhält man einen Annäherungswert der Wahrscheinlichkeit, in einer Fläche vom Inhalt f mindestens ein Individuum der Art anzutreffen. Diese Wahrscheinlichkeit sei mit H bezeichnet. Es wird dieser Versuch mit verschiedenen Quadratinhalten f ausgeführt, wobei H offenbar

[1]) G. E. Du Rietz, Zur methodologischen Grundlage der modernen Pflanzensoziologie, Dissertation, Upsala 1921.

mit wachsendem f zunehmen muß. Die folgende Zahlentafel 2 bezieht sich auf eine bestimmte Art und Vegetation[1]; sie enthält in der zweiten Zeile die empirischen Werte von H für 7 verschiedene Flächengrößen f, die in der ersten Zeile in m^2 angegeben sind. Die Zähler und Nenner der Brüche für H sind die beobachteten Zahlen selber.

Zahlentafel 2.

I. f in m^2	0,0001	0,0004	0,0025	0,01	0,04	0,25	1
II. H	$\frac{6}{1000}$	$\frac{19}{1250}$	$\frac{55}{1040}$	$\frac{203}{1300}$	$\frac{121}{300}$	$\frac{194}{210}$	$\frac{232}{240}$
III. D	60,18	38,29	21,73	16,98	12,91	10,30	3,40

Gemäß (35) ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an einem Flächenstück vom Inhalt f kein Punkt der Gesamtheit sich findet, $= e^{-Df}$, und folglich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß darin mindestens ein Individuum der Gesamtheit anzutreffen ist, $=$

$$1 - e^{-Df} = H \quad \dots\dots\dots\dots \quad (37).$$

Berechnet man D gemäß (37) aus den in Zahlentafel 2 zusammengefaßten 7 Beobachtungen, so erhält man die in der Zeile III der Zahlentafel 2 befindlichen 7 Werte. Diese sind nicht nur sehr stark unter sich verschieden (sie sollten einander gleich sein), sondern zeigen einen unverkennbaren Gang, eine systematische Abweichung. Man ersieht daraus, daß in der vorliegenden Beobachtungsreihe H tatsächlich langsamer mit f anwächst, als es nach der Formel (37) anwachsen sollte.

Daß das Verteilungsgesetz (35), das bei mannigfachen physikalischen Untersuchungen sich so ausgezeichnet bewährt hat, in diesem Falle versagt, ist nach dem Vorangehenden leicht erklärlich. Die in Abschnitt 6 hervorgehobene Voraussetzung der Unabhängigkeit der einzelnen Teile trifft hier nicht zu; daß die Wahrscheinlichkeit dafür, auf der Fläche F eine gegebene Anzahl Individuen zu finden, ganz die gleiche ist, ob an der Nachbarfläche F viele oder keine Individuen der gleichen Art sich finden, ist hier offenbar falsch. Vielmehr sind neben reich mit der Art bewachsener Flecken leichter benachbarte zu finden, in denen ebenfalls Individuen der Art vorhanden sind, als neben den von der Art total verlassenen Flecken: die benachbarten Flächenstücke werden gewissermaßen »angesteckt«.

Die Funktion

$$\Psi(u) = (1 - \alpha u)^{-D/\alpha} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (38)$$

genügt den in Abschnitt 6 ausgesprochenen Bedingungen ($\alpha > 0$); somit ist die durch die die Wahrscheinlichkeiten

$$W_r(f) = \frac{f^r \Psi^{(r)}(-f)}{r!} = \frac{f^r D(D+\alpha)(D+2\alpha)\dots(D+(r-1)\alpha)}{r!}(1+\alpha f)^{-D/\alpha - r} \quad . \quad (39)$$

festgelegte Verteilung eine stabile im Sinne von Abschnitt 6. Setzt man, wie vorher unter (36),

$$fD = h \text{ und } f\alpha = d,$$

so geht Formel (39) in den Ausdruck von P_r unter (14) über. Es ist anzunehmen, daß das Verteilungsgesetz (39), da der Struktur besser entsprechend, besser auf die angeführte botanische Statistik passen wird, als das klassisch gewordene Verteilungsgesetz (35), das übrigens der Grenzfall von (39) für $\alpha = 0$ ist. An Stelle von (37) tritt jetzt die Formel

$$H = 1 - (1 + \alpha f)^{-D/\alpha}$$

und hierin nimmt H langsamer mit f zu, als in (37).

Eine quantitative Kontrolle, die sehr viel Vorsicht und Mühe erfordert, ist im Gange. Zur Erläuterung des Hauptgedankens dieser Untersuchung ist das Beispiel wohl auch vor der Ausführung dieser Kontrolle geeignet gewesen. 242

[1] Cladonia coccifera in Zahlentafel 23. G. E. Du Rietz a. a. O. [1] Seite 166.