GA Lista 1 Exercicio 7 - Resolução do exercício de GA

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

Geometria Analítica - Lista1 - Exercicio 7

Matheus Otávio Rodrigues

14 de agosto de 2018

1 Exercício

Seja A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Encontre números reais a, b, c tais que

$$a \cdot A^2 + b \cdot A + c \cdot Id = 0$$

Será que estes números a, b, c existem para qualque matriz?

2 Solução

Sabendo dos dados do enunciado, vamos primeiro calcular A

$$A = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Sabemos que a identidade é uma matriz de mesma ordem da matriz A, preenchida com zeros e como exceção, temos uns em sua diagonal principal:

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos então que:

$$a \cdot A^2 + b \cdot A + c \cdot Id = 0 \rightarrow a \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Fazendo a soma termo a termo, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 5a + b + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema linear por eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} L_1 \cdot -\frac{5}{4} \widetilde{+} L_2 \to L_2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} L_1 \cdot -\frac{9}{4} \widetilde{+} L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 9 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 \end{bmatrix} L_2 \cdot (-1) \widetilde{+} L_3 \to L_3 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos que a última linha do sistema se tornou uma linha nula, isso de deve a linha 2 ser combinação linear das linhas 3 e 1.

Vamos analisar o sistema gerado pela matriz:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 0a - \frac{3}{2}b - \frac{5}{4}c = 0 \\ 0c = 0 \end{cases}$$

Como 0 = 0, temos que qualquer valor de c satisfaz a última equação. Na segunda equação, temos que:

$$b = -\frac{5}{6} \cdot c$$

Substituindo o valor de b encontrado na primeira, temos que

$$a = \frac{1}{6} \cdot c$$

Então, para qualquer valor de c, temos valores de a e b que satisfazem essa equação.

Exemplos:

$$c = 1 : \left\{ \frac{1}{6}, -\frac{5}{6}, 1 \right\}$$

$$c = 0 : \{0, 0, 0\}$$

Falando de outras matrizes, sempre existirão valores a, b, c para a equação descrita no enunciado independente da matriz A dada. Tais soluções podem ser únicas, indeterminadas (como a calculada nesta resolução), ou o próprio vetor nulo (que satisfaz qualquer matriz A nesta equação).