

Física Geral I

F -128

Aula 07

Energia Potencial e Conservação de Energia

Energia Potencial e Conservação de Energia

(Capítulo 8 do livro texto)

- Energia potencial
 - Energia potencial gravitacional
 - Energia potencial elástica
- Forças Conservativas vs. Forças Não-Conservativas
 - Relação entre força e energia potencial
- Conservação da Energia Mecânica
- Curvas de Energia Potencial

Relembrando...

Energia é um conceito que vai além da mecânica de Newton e permanece útil também na mecânica quântica, relatividade, eletromagnetismo, etc.

A **conservação da energia total** de um sistema isolado é uma lei fundamental da natureza.

Energia Cinética: $K = \frac{1}{2}mv^2$

“O trabalho da força resultante que atua sobre uma partícula entre as posições x_1 e x_2 é igual à variação da energia cinética da partícula entre estas posições”.

Energia Potencial

A **energia potencial U** é uma forma de energia que pode ser associada com **a configuração (ou arranjo)** de um sistema de objetos, que exercem forças uns sobre os outros. Se a configuração muda, a energia potencial também pode mudar.

Vamos começar discutindo o **caso unidimensional**. Depois generalizaremos para mais dimensões.

Dois tipos de energia potencial com os quais estaremos lidando são a ***energia potencial gravitacional*** e a ***energia potencial elástica***.

Energia Potencial em 1D

Variação de energia potencial (caso unidimensional):

$$\Delta U(x_0 \rightarrow x) = U(x) - U(x_0) = -W = -\int_{x_0}^x F(x)dx$$

É usual tomar x_0 como uma **configuração de referência fixa**. Assim, a energia potencial da partícula na configuração x é:

$$U(x) = U(x_0) - \int_{x_0}^x F(x)dx \quad \longleftrightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx}$$

Notem que é preciso que a força seja uma função **apenas da posição** (configuração). **Não se pode definir $U(x)$ em outros casos** (a força de arraste dependente da velocidade, por exemplo): ver mais detalhes adiante.

Do ponto de vista físico, apenas as **variações** de energia potencial são relevantes. Então, pode-se sempre atribuir o valor **zero** à **configuração de referência**:

$$U(x_0) = 0$$

Conservação da Energia Mecânica

Do teorema do trabalho-energia cinética para uma força que só depende da posição:

$$W = \Delta K$$

Como $U(x_f) - U(x_i) = -W$

$$U(x_i) - U(x_f) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$



$$\frac{1}{2}mv_i^2 + U(x_i) = \frac{1}{2}mv_f^2 + U(x_f)$$



$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \textit{constante}$$

(a energia mecânica total não varia).

Energia Potencial Gravitacional (campo uniforme)

Nas proximidades da Terra a força gravitacional pode ser aproximada por $m\vec{g}$.

Tomando como referência para U o ponto $y = 0$ ($U(0)=0$):

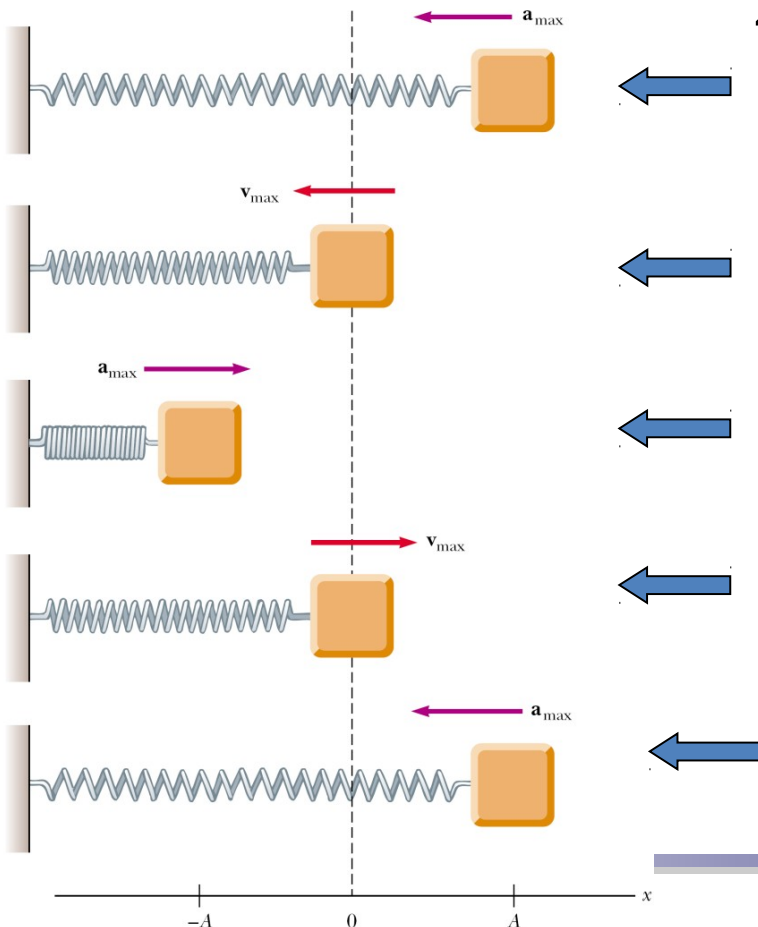
$$U(y) = 0 - \int_0^y (-mg) dy = mgy \quad \leftarrow \quad U(y) = mgy$$

Conservação da energia:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{constante}$$

Energia Potencial Elástica

Configuração de referência: $x_0 = 0 \Rightarrow U(x) = 0 - \int_0^x (-k)x dx = \frac{1}{2} kx^2$

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{constante}$$


$$v = 0 \text{ e } x = A \Rightarrow E = \frac{1}{2} kA^2$$

$$v = -v_{\max} \text{ e } x = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} mv_{\max}^2$$

$$v = 0 \text{ e } x = -A \Rightarrow E = \frac{1}{2} kA^2$$

$$v = v_{\max} \text{ e } x = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} mv_{\max}^2$$

$$v = 0 \text{ e } x = A \Rightarrow E = \frac{1}{2} kA^2$$

Questão 1:

Uma criança de 20 kg está pulando em uma cama elástica, atingindo uma altura $h=1m$ acima da cama em sua posição relaxada a cada pulo, e uma posição $0,5 m$ abaixo do nível da cama relaxada a cada impulso. Quanto vale a energia potencial elástica máxima?

Energia Potencial em mais de uma dimensão

Como no caso unidimensional, só é possível definir a energia potencial para forças conservativas.

Uma força é dita conservativa se o trabalho que ela realiza sobre um corpo que se desloca entre dois pontos não depende da trajetória seguida pelo corpo, mas apenas das posições *inicial* e *final*.

Equivalentemente, uma força é conservativa se o trabalho que ela realiza sobre um corpo que descreve um percurso fechado é zero.

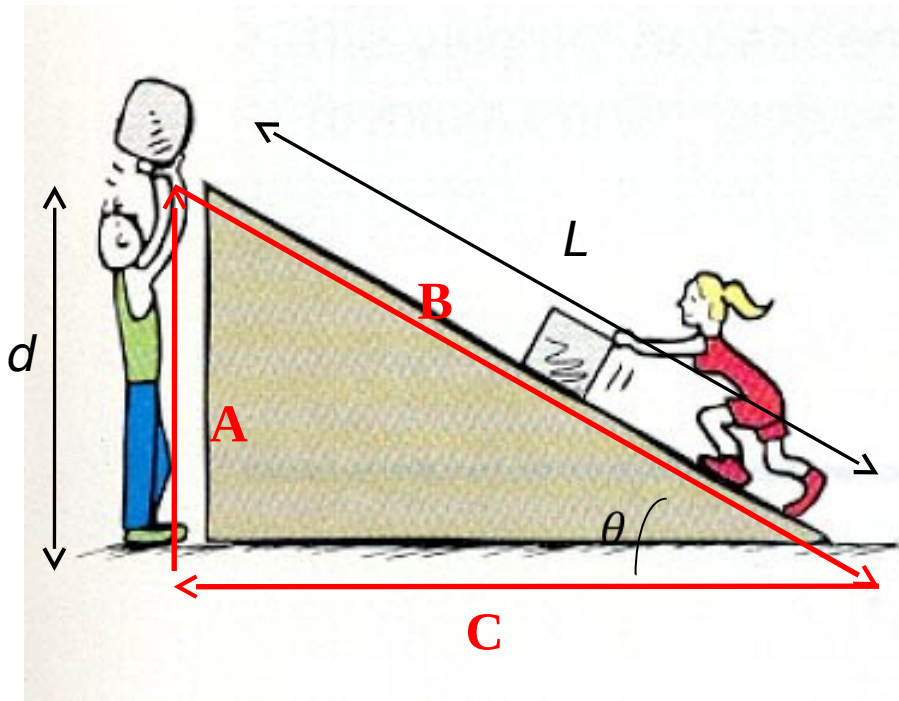
Exemplos de forças conservativas:

1. força gravitacional
2. força elástica
3. qualquer força unidimensional que só dependa da posição: $F(x)$

Com técnicas de cálculo mais avançadas, é possível estabelecer um critério matemático simples para determinar se uma força é conservativa.

Forças Conservativas

Trabalho realizado pela força gravitacional ao longo do circuito fechado $A \rightarrow B \rightarrow C$ indicado:



$$W_A + W_B + W_C = -mgd + mgL\sin\theta + 0 = 0$$

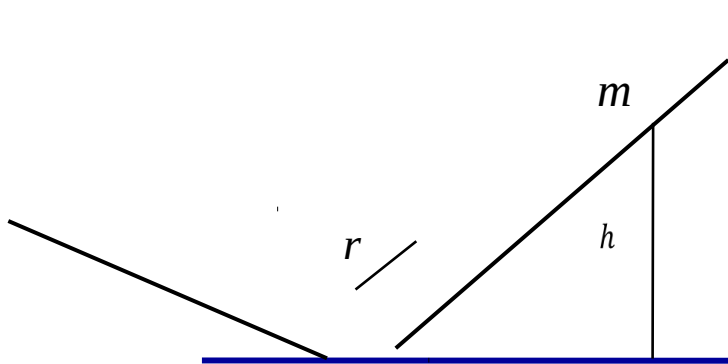
Como calcular a velocidade em qualquer ponto de um trajeto qualquer de uma montanha russa?

$$W_p = \int \vec{P} \cdot d\vec{l} = \int |m\vec{g}| |d\vec{l}| \cos\theta = - \int mg dz = -mg\Delta z$$

Não é um problema unidimensional, mas é como se fosse...

Energia Potencial Gravitacional (campo uniforme)

Exemplo: Qual é a **mínima altura h** para que o corpo deslizando complete o **loop**?



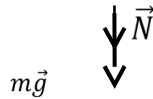
No limiar: $N = 0$

$$mg = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = gr$$

Por conservação de energia mecânica:

$$E = mgh_{min} = mg2r + \frac{1}{2}mv^2 =$$
$$mg2r + \frac{1}{2}mgr = \frac{5}{2}mgr$$

$$h_{min} = 2,5r$$



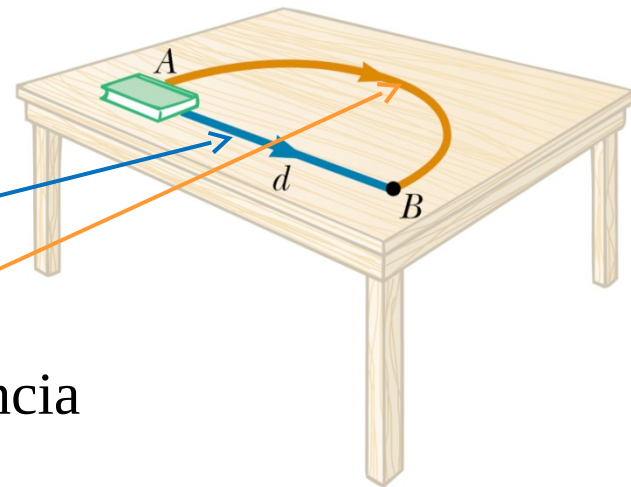
Forças Não-Conservativas

Forças não-conservativas: seu trabalho depende da trajetória.

Exemplos: **força de atrito e força de arraste**.

$$W_{atr}(A \rightarrow B) = \int_C \vec{f}_{atr} \cdot d\vec{s} = -f_{atr} L_{A \rightarrow B} =$$

$$= \begin{cases} -\mu_c m g d & \text{reta} \\ -\mu_c m g \pi d / 2 & \text{semi-circunferência} \end{cases}$$



Nesse caso, não é possível definir uma energia potencial porque o trabalho da força de atrito depende da trajetória descrita pelo corpo.

Energia Potencial em mais de uma dimensão

Generalizando, sempre se pode associar uma **energia potencial** a uma **força conservativa**:

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = -W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Note que não é preciso dizer **qual trajetória** tomar entre \vec{r}_0 e \vec{r} , pois nesse caso o trabalho independe da trajetória.

Se só há forças conservativas, então a **energia mecânica total** (potencial + cinética) é conservada:

$$E = K + U = \text{constante}$$

Energia mecânica na presença de forças não-conservativas

Entretanto, se há forças **não-conservativas**:

$$\left. \begin{array}{l} W = W_{\text{não-cons}} + W_{\text{cons}} = \Delta K \\ W_{\text{cons}} = -\Delta U \end{array} \right\} \Rightarrow W_{\text{não-cons}} = \Delta K + \Delta U = \Delta E_{\text{mec}}$$

No caso de forças como de atrito cinético e de arraste, o trabalho é sempre **negativo** (a força é sempre no sentido oposto ao deslocamento):

$$W_{\text{atrito}} = -f_{\text{atrito}} L < 0 \Rightarrow \Delta E_{\text{mec}} < 0$$

Como o trabalho **forças dissipativas** é sempre negativo, a energia mecânica do sistema sempre **diminui** na presença delas.

Questão 2:

Um bloco está em uma rampa, a uma altura que corresponde a uma diferença de energia potencial em relação ao solo de 10 J . Ao escorregar pela rampa, 1 J é dissipado pela força de atrito. Qual a energia cinética com que o bloco chega ao solo?

- a) 9 Joules
- b) 10 Joules
- c) 11 Joules

Questão 3:

Um bloco está em uma rampa, a uma altura H em relação ao solo. Ao escorregar pela rampa, uma certa quantidade de energia é dissipada pela força de atrito. Considerando que W_{fat} é o trabalho da força de atrito, qual a energia cinética com que o bloco chega ao solo?

a) $K = mgH + W_{fat}$

b) $K = mgH - W_{fat}$

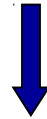
c) $K = mgH$

Forças dissipativas e energia interna

O trabalho das forças dissipativas (e a consequente diminuição da energia mecânica) é acompanhado de um **aumento da temperatura** dos corpos em contato (aumento da agitação térmica das moléculas):

→ **variação da energia interna = - trabalho das forças dissipativas**

$$\left. \begin{array}{l} W_{\text{atrito}} = -\Delta E_{\text{int}} \\ W_{\text{atrito}} = \Delta E_{\text{mec}} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta E_{\text{int}} + \Delta E_{\text{mec}} = \Delta (E_{\text{int}} + E_{\text{mec}}) = 0$$



$$E_{\text{total}} = E_{\text{int}} + E_{\text{mec}} = \text{constante}$$

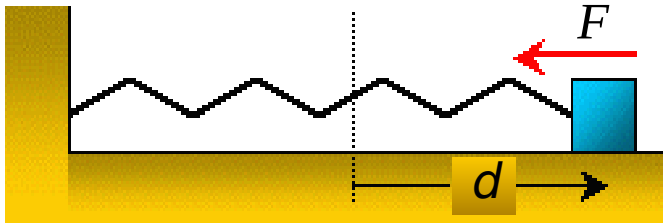
A energia total de um sistema isolado, mecânica mais interna, é conservada.

Em geral, há outras formas adicionais de energia (elétrica, magnética,...) que, uma vez adicionadas acima, fornecem uma **quantidade que se conserva**.

Forças dissipativas e energia interna

Exemplo: O bloco de massa m é solto de $x = d$. Qual é sua velocidade em $x = 0$?

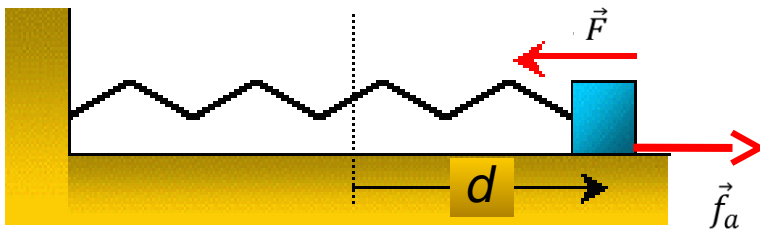
a) Sem atrito



$$\left. \begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2}mv^2 - 0 \\ \Delta U &= 0 - \frac{1}{2}kd^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow |v| = \sqrt{\frac{k}{m}}d$$

a) Com atrito



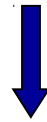
$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = W_{atr} = -\mu_c mgd$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kd^2 - \mu_c mgd$$

$$|v| = \sqrt{\frac{kd^2}{m} - 2\mu_c gd}$$

Relação entre Força e Energia Potencial

$$U(x) - U(x_0) = -W(x_0 \rightarrow x) = - \int_{x_0}^x F(x) dx$$

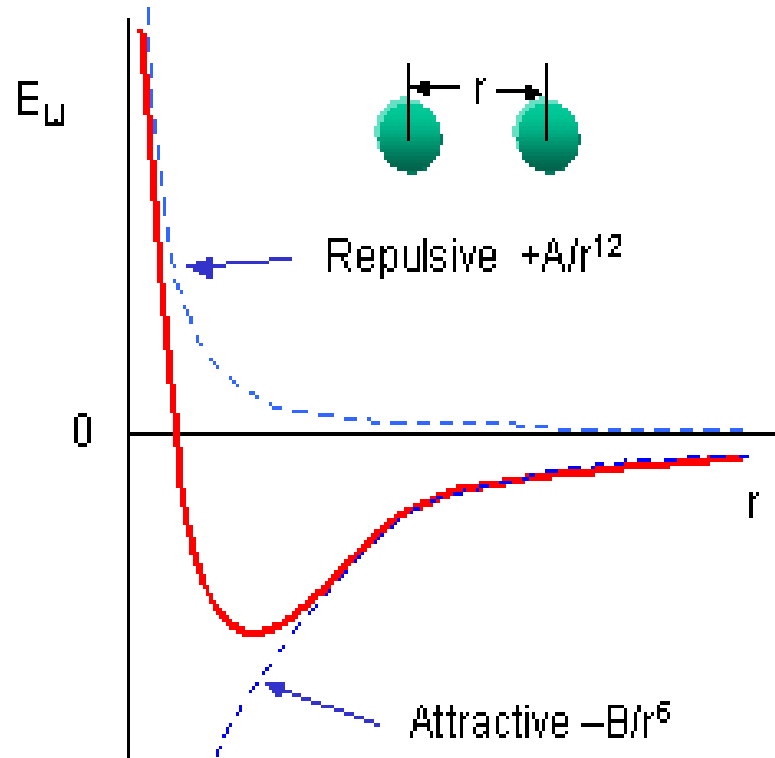


$$F(x) = - \frac{dU}{dx}$$

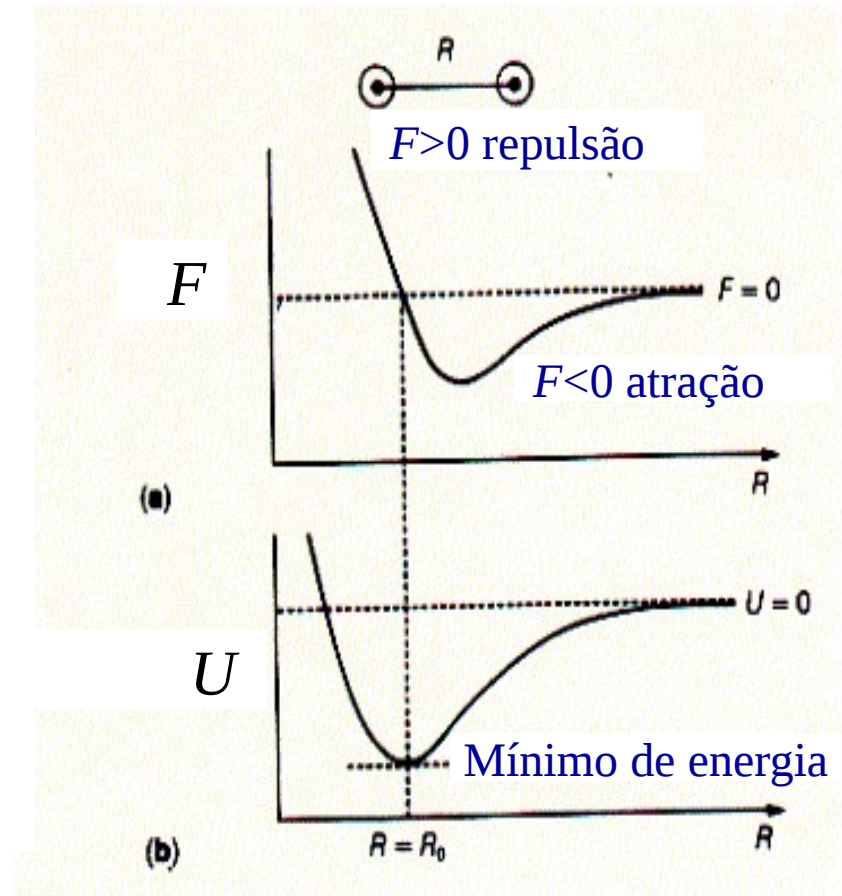
$$\left(\frac{dU}{dx} \right)_{x=x_0} = 0 \quad \leftarrow \quad \begin{cases} F(x_0) = 0 \\ U(x_0): \text{Mínima ou Máxima} \end{cases}$$

Exemplo: Ligação Química

Exemplo de ligação representada por um potencial Lenard - Jones

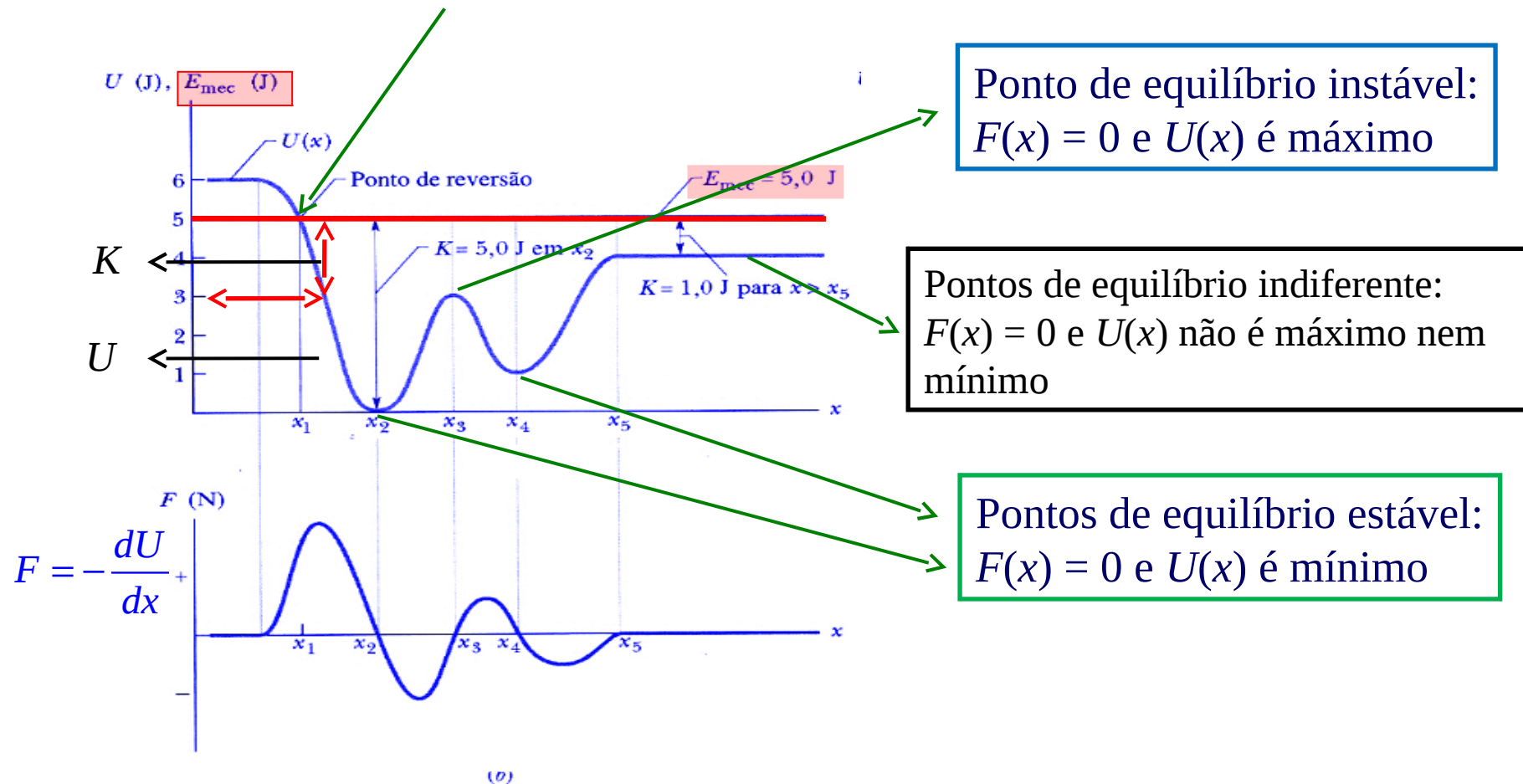


$$F(r) = 12 \frac{\epsilon}{a} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{13} - \left(\frac{a}{r} \right)^7 \right]$$



Diagramas de Energia

Ponto de retorno ou reversão: a velocidade se anula e troca de sinal



Diagramas de Energia

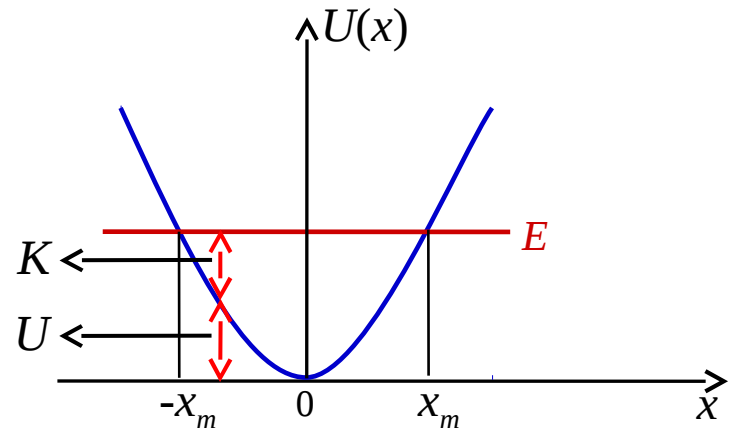
Energia potencial de um bloco de massa m preso a uma mola de constante elástica k :

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

Conservação de energia:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{constante}$$

$$\therefore K = E - U(x)$$



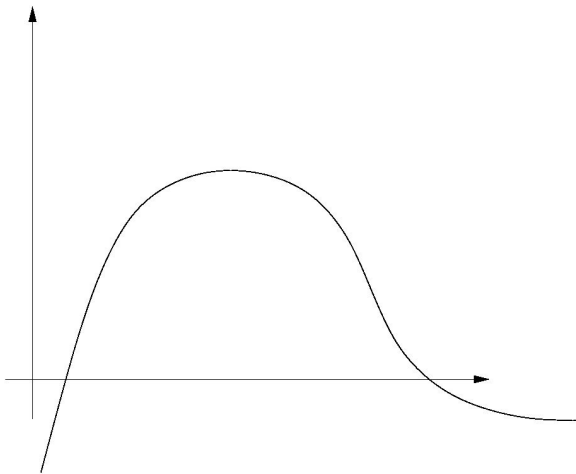
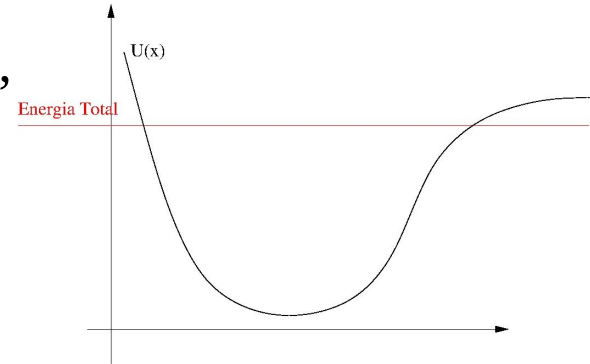
Desta relação e do diagrama, vemos que o movimento do bloco é limitado a pontos x compreendidos no intervalo $-x_m \leq x \leq x_m$. De fato, para pontos x fora deste intervalo, teríamos $U(x) > E$, e portanto $K < 0$, o que é obviamente impossível.

x_m e $-x_m$ são os pontos de retorno, onde a velocidade é nula:

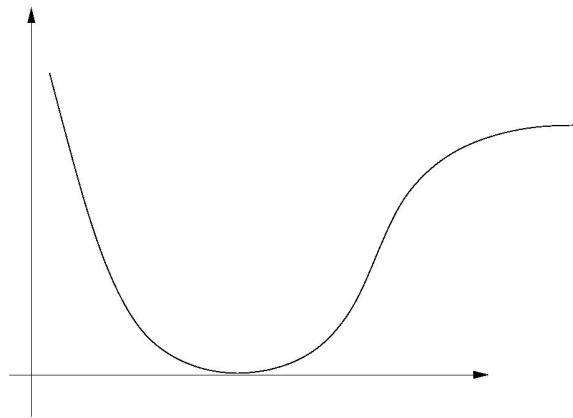
$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m}}$$

Questão 4

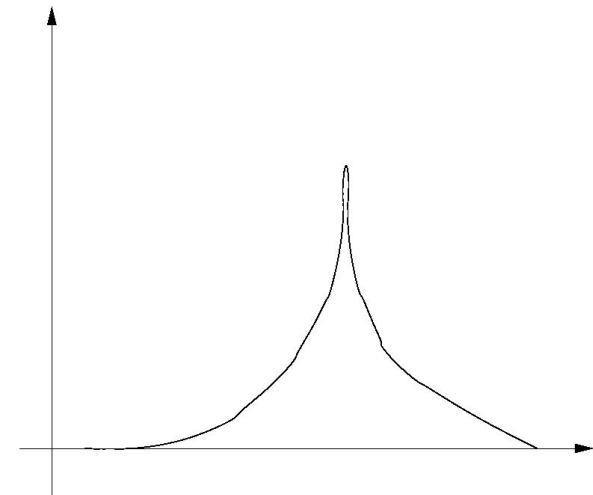
Dada a seguinte curva de potencial, determine qual curva melhor representa a energia cinética:



a)



b)

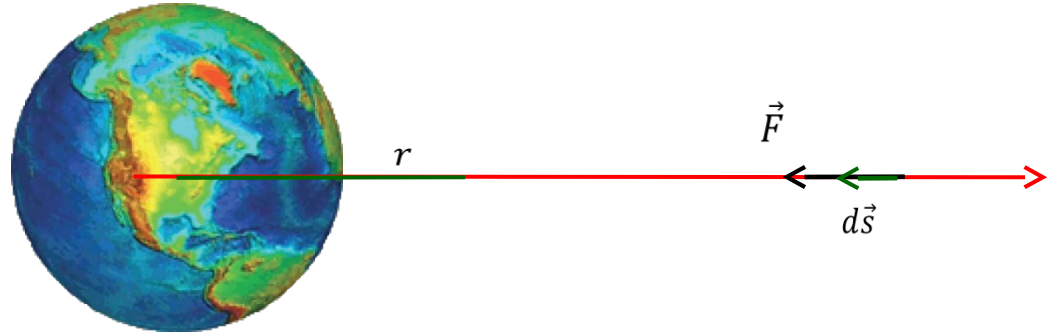


c)

Energia Potencial Gravitacional

Força gravitacional:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$



$$\begin{aligned} U(r) - U(r_0) &= - \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_0}^r F(r) dr \quad , \text{ pois } d\vec{r} = -dr \hat{r} \\ &= \int_{r_0}^r \frac{GMm}{r^2} dr \end{aligned}$$

Tomando a configuração de referência $U(r_0 \rightarrow \infty) = 0$:

$$U(\vec{r}) = \int_{\infty}^r \frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r}$$

Questão 5

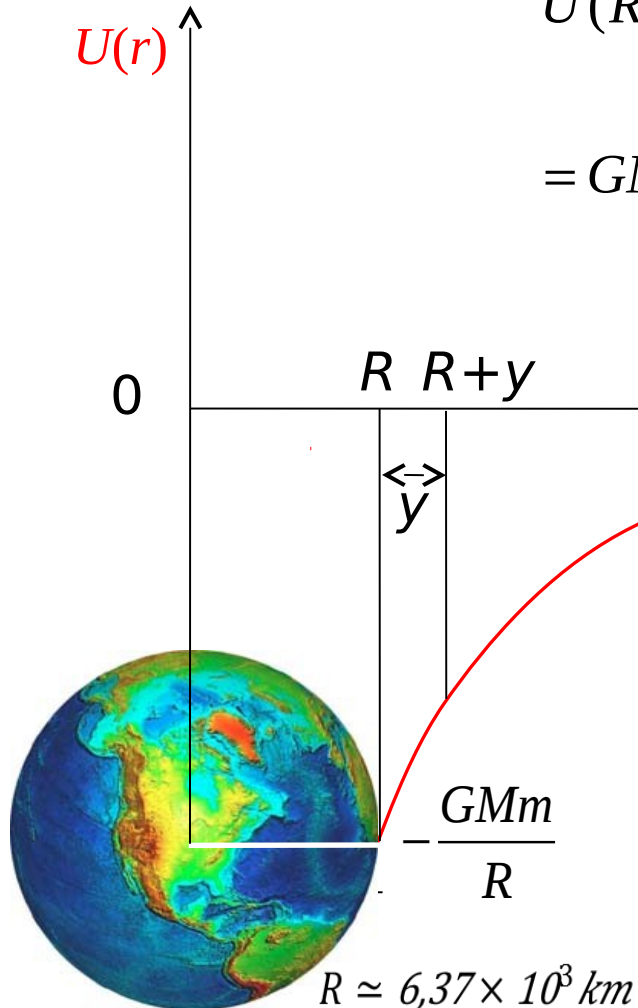
Comparando a expressão $U(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r}$ com a obtida aproximando a força gravitacional por uma força constante, pode-se afirmar que:

- a) Elas tem comportamentos diferentes, pois enquanto uma cresce com a altura, a outra decresce.
- b) Uma é negativa, e outra é positiva, indicando que fizemos escolhas diferentes na orientação do eixo “z”.
- c) Esta expressão vale também para alturas baixas, reproduzindo os resultados para a aproximação de campo constante.

Energia potencial gravitacional: campo uniforme

$$U(R+y) - U(R) = -GMm \left[\frac{1}{R+y} - \frac{1}{R} \right] =$$
$$= GMm \frac{y}{R(R+y)} \cong \left(\frac{GM}{R^2} \right) my = mgy$$

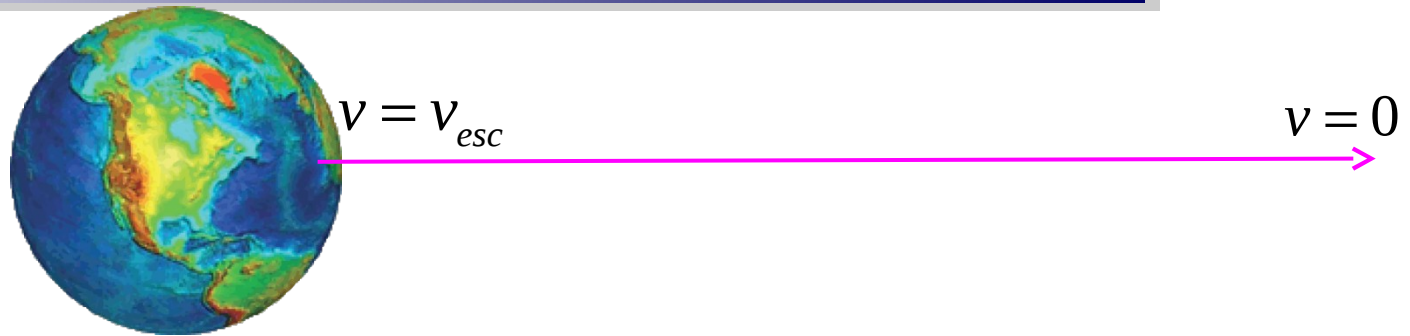
$\rightarrow g = 9,8 \text{ m/s}^2$



Pode-se estimar g a uma altura de 400 km:

$$g'(h = 400 \text{ km}) = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2} \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 =$$
$$= 9,83 \times \left(\frac{6,4}{6,8} \right)^2 \cong 8,7 \text{ m/s}^2$$

Velocidade de Escape



Velocidade limiar para escapar da atração gravitacional de um astro:
→ velocidade de lançamento tal que chegue ao infinito com
velocidade nula. Por conservação de energia mecânica:

$$E = K(R) + U(R) = K(\infty) + U(\infty) = 0$$

$$E = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 + U(R) = U(\infty) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{esc}^2 = \frac{GMm}{R}$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2 \frac{GM}{R^2} R} = \sqrt{2gR}$$

$$v_{esc}^{Terra} = 11,2 \text{ km/s}$$

Buracos Negros

Velocidade de escape igual à velocidade da luz:

$$v_{esc} = c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Raio de um buraco negro de massa M

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} \longrightarrow \text{Raio de Schwarzschild}$$

Para a Terra,

$$R_{Schw}^{Terra} = 8,8 \text{ mm}$$

Se a Terra se transformasse num buraco negro, seu raio diminuiria para 8,87 mm !

Velocidade de escape igual à velocidade da luz:

$$v_{esc} = c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Raio de um buraco negro de massa M

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} \longrightarrow \text{Raio de Schwarzschild}$$

Embora esse resultado da mecânica newtoniana seja igual ao que é obtido na **Teoria da Relatividade Geral**, isso é apenas uma **coincidência!**