



Prova 2010, questões e respostas

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

DM-IMECC-UNICAMP – Geometria Analítica e Vetores - MA141 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **2a. prova, 17/05/2010**

Aluno: _____ RA: _____

Assinatura (idêntica à do RG): _____

Observações: *Justifique sucintamente todas as suas afirmações.*

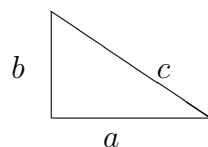
*É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico;
em particular do celular ou calculadora.*

Desligar o celular! Não destaque o grampo da prova.

Questão 1. a) (1,5 pontos). Determine, se existir, os valores de x para que o vetor $\vec{u} = x\vec{i} + \vec{k}$ seja paralelo ao produto vetorial de $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j} - 2\vec{k}$ por $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

b) (1,0 ponto). Usando vetores, prove o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



2. a) (1,5 pontos). Mostre (usando resultado(s)/teorema(s) visto(s) em aula) que os vetores $\vec{u} = (1, 3, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, -2, 1)$ não são coplanares. Qual é o volume do paralelepípedo gerado pelos mesmos? (*Não se esqueça de justificar a sua resposta.*)

b) (1,0 ponto). Seja \vec{v} um vetor não nulo no espaço e α , β , γ os ângulos que \vec{v} forma com os vetores \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , respectivamente. Mostre que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

3. a) (1,5 pontos). Calcule os cossenos (ou senos) dos ângulos internos e a área do triângulo com vértices nos pontos $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (2, 3, -1)$.

b) (1,0 ponto). Mostre que a distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ a uma reta $r : ax + by + c = 0$, no plano xy , é dada pela fórmula

$$\text{dist}(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

4. a) (1,5 pontos). Determine a posição relativa dos planos

$$x - 2y + 3z = 2, \quad 3x + y - 2z = 1, \quad 5x - 3y + 4z = 4.$$

b) (1,0 ponto). O ângulo entre uma reta r com vetor diretor \vec{v} e um plano Π com vetor normal N é definido como sendo o complementar do ângulo entre uma reta perpendicular ao plano e à reta r . Denotando por $\text{sen}(r, \Pi)$ o seno do ângulo entre r e Π , mostre que $\text{sen}(r, \Pi) = \frac{|N \cdot \vec{v}|}{\|N\| \|\vec{v}\|}$. Usando esta fórmula e a fórmula da distância de um ponto a um plano, e supondo que a reta r intercepta o plano Π , conclua que $\text{dist}(P, \Pi) = \|\vec{PP_1}\| \text{sen}(r, \Pi)$, para qualquer ponto P em r , onde P_1 é o ponto de interseção de r e Π .

Sugestão: Tome $\vec{v} = \vec{PP_1}$.

Lembrete: ângulos complementares são aqueles cuja soma é igual a 90° .

5. a) (1,5 pontos). Mostre que a equação da hipérbole com focos em $F_1 = (0, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$ e satisfazendo $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2$ é dada por

$$(x - 2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

b) (1,0 ponto). Sejam r uma reta e F um ponto, num plano Π , com $\text{dist}(F, r) = 1$. Mostre que a equação $\text{dist}(P, F) = \frac{1}{2} \text{dist}(P, r)$, $P \in \Pi$, descreve uma elipse. *Sugestão:* Considere um sistema de coordenadas cartesianas xy em que o eixo x contém o ponto F e é perpendicular à reta r e o eixo y é tal que $F = (\frac{1}{3}, 0)$ e a reta r é dada por $x = \frac{4}{3}$.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova!

Gabarito

Questão1. a) *Determine, se existir, os valores de x para que o vetor $\vec{u} = x\vec{i} + \vec{k}$ seja paralelo ao produto vetorial de $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j} - 2\vec{k}$ por $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.*

Calculando o produto vetorial $\begin{matrix} \vec{v} = \vec{i} + x\vec{j} - 2\vec{k} \\ \times \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} : \end{matrix}$

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= \left(\begin{vmatrix} x & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2x + 2, 0, 1 - x) = 2(1 - x)\vec{i} + (1 - x)\vec{k}. \end{aligned}$$

0,5 pontos até aqui.

Logo, $\vec{u} = x\vec{i} + \vec{k}$ é paralelo a $\vec{v} \times \vec{w}$ se

$$x\vec{i} + \vec{k} = \alpha[2(1 - x)\vec{i} + (1 - x)\vec{k}]$$

para algum escalar α ($\alpha \in \mathbb{R}$)

+ 0,5 pontos até aqui.

i.e.

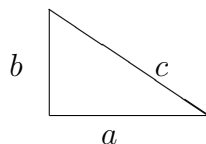
$$\begin{cases} x = 2\alpha(1 - x) \\ 1 = \alpha(1 - x). \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos $x = 2$.

+ 0,5 pontos

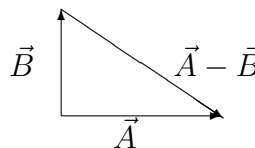
1.b) *Usando vetores, prove o Teorema de Pitágoras:*

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Em termos de vetores, temos:

$$\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 = \|\vec{A} - \vec{B}\|^2$$



0,5 pontos

Para provar esta fórmula, desenvolvemos o lado direito usando o produto escalar, propriedades de operações com vetores e o fato de que os vetores \vec{A} e \vec{B} são ortogonais ($\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$):

$$\begin{aligned} \|\vec{A} - \vec{B}\|^2 &= (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) \\ &= \vec{A} \cdot \vec{A} - 2\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{B} \\ &= \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2. \end{aligned}$$

+ 0,5 pontos

Questão 2. a) *Mostre (usando resultado(s)/teorema(s) visto(s) em aula) que os vetores $\vec{u} = (1, 3, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, -2, 1)$ não são coplanares. Qual é o volume do paralelepípedo gerado pelos mesmos?*

Pelo que aprendemos em aula, para mostrarmos que os vetores não são coplanares, basta verificarmos que o produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ não é nulo (resultado no livro-texto). Também vimos que este produto é igual ao determinante da matriz tendo como linhas as respectivas coordenadas destes vetores (idem). Assim, calculamos (desenvolvendo o determinante pela primeira linha)

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (1 - 2) - 3(2 + 1) + 2(-4 - 1) = -1 - 6 - 10 = -17.\end{aligned}$$

0,8 pontos até aqui.

Como este produto misto não é nulo, concluímos que os vetores não são coplanares.

+ 0,2 pontos

Vimos ainda (em aula/resultado do livro-texto) que o módulo do produto misto é o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores. Então o volume perguntado é 17 (unidades de volume).

+ 0,5 pontos

2.b) *Seja \vec{v} um vetor não nulo no espaço e α , β , γ os ângulos que \vec{v} forma com os vetores \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , respectivamente. Mostre que*
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Denotando as coordenadas (componentes) de \vec{v} por v_1, v_2, v_3 , temos $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$ e $v_1 = \vec{v} \cdot \vec{i} = \|\vec{v}\| \|\vec{i}\| \cos \alpha = \|\vec{v}\| \cos \alpha$, $v_2 = \vec{v} \cdot \vec{j} = \|\vec{v}\| \|\vec{j}\| \cos \beta = \|\vec{v}\| \cos \beta$, $v_3 = \vec{v} \cdot \vec{k} = \|\vec{v}\| \|\vec{k}\| \cos \gamma = \|\vec{v}\| \cos \gamma$.

0,5 pontos

Daí e de $\|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, obtemos
$$\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \alpha + \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \beta + \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \gamma = \|\vec{v}\|^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma),$$
logo, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, já que \vec{v} é não nulo.

+ 0,5 pontos

Questão 3. a) *Calcule os cossenos (ou senos) dos ângulos internos e a área do triângulo com vértices nos pontos $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (2, 3, -1)$.*

Os lados do triângulo podem ser identificados com os vetores

$$\vec{AB} = B - A = (1, -1, 1), \quad \vec{AC} = C - A = (1, 1, 0),$$

$$\vec{BC} = B - C = (0, 2, -1),$$

0,2 pontos até aqui.

logo, os cossenos dos ângulos internos são

$$\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\|} = \frac{1 - 1 + 0}{\|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\|} = 0, \quad \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \|\vec{BC}\|} = \frac{0 + 2 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{15}},$$

$$\frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{CA}\| \|\vec{CB}\|} = \frac{0 + 2 + 0}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

+ 0,5

A área do triângulo é metade da área do paralelogramo determinado pelos vetores \vec{AB} e \vec{AC} (ou \vec{BC} e $\vec{BA} = -\vec{AB}$ ou \vec{CA} e \vec{CB}). **+ 0,2**

A área do paralelogramo determinado pelos vetores \vec{AB} e \vec{AC} é dado pela norma do produto vetorial $\vec{AB} \times \vec{AC}$ **+ 0,3**

que é igual a $\|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \sin(\vec{AB}, \vec{AC}) = \sqrt{3}\sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{6}$, onde usamos que $\sin(\vec{AB}, \vec{AC}) = 1$, já que, como calculado acima, $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 0$.

+ 0,3

3.b) (1,0 ponto). Mostre que a distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ a uma reta $r : ax + by + c = 0$, no plano xy , é dada pela fórmula

$$\text{dist}(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Consideremos o espaço xyz . Então $P_0 = (x_0, y_0, 0)$, $P_1 = (0, -c/b, 0)$ é um ponto da reta e $\vec{v} = (-b, a, 0)$ é um vetor diretor da reta. Para o ponto P_1 , estamos supondo que $b \neq 0$. Como temos uma reta, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$; se $a \neq 0$, podemos tomar $P_1 = (-c/a, 0, 0)$ e o racicínio que se segue vale de forma análoga. **0,3 pontos**

Pela fórmula da distância de um ponto a uma reta, temos

$$\begin{aligned} \text{dist}(P_0, r) &= \frac{\|\vec{P_1 P_0} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} && \textbf{+ 0,3 pontos} \\ &= \frac{\|(x_0 + c/a, y_0, 0) \times (-b, a, 0)\|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\|(0, 0, a(x_0 + c/a) + by_0)\|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

+ 0,4 pontos

Questão 4. a) *Determine a posição relativa dos planos*

$$x - 2y + 3z = 2, \quad 3x + y - 2z = 1, \quad 5x - 3y + 4z = 4.$$

Os vetores $N_1 = (1, -2, 3)$, $N_2 = (3, 1, -2)$, $N_3 = (5, -3, 4)$ são normais aos planos, respectivamente. É fácil ver que nenhum par destes são paralelos, logo, não há dois planos paralelos. **0,5 pontos**

Vejam se estes vetores são coplanares:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\ = (4 - 6) + 2(12 + 10) + 3(-9 - 5) = -2 + 44 - 42 = 0;$$

como o determinante acima é nulo, concluímos que os três vetores normais são coplanares, logo, a posição relativa dos planos é tal que a interseção dos mesmos é um conjunto vazio (os planos se interceptam dois a dois em retas distintas) ou uma reta (os três planos se interceptam segundo uma reta).

+ 0,5 pontos

Para decidir sobre estas duas alternativas, resolvemos o sistema de equações lineares, dados pelas equações dos planos:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 5x - 3y + 4z = 4. \end{cases}$$

Fazendo operações elementares sobre a matriz aumentada do sistema (as contas devem constar na prova) chegamos ao sistema equivalente

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 0x + 7y - 11z = -5 \\ 0x + 0y + 0z = 1, \end{cases}$$

o qual não tem solução. Portanto, a posição relativa dos três planos é que eles se interceptam dois a dois segundo três retas distintas. **+ 0,5 pontos**

b) *O ângulo entre uma reta r com vetor diretor \vec{v} e um plano Π com vetor normal N é definido como sendo o complementar do ângulo entre uma reta perpendicular ao plano e à reta r . Denotando por $\text{sen}(r, \Pi)$ o seno do ângulo entre r e Π , mostre que $\text{sen}(r, \Pi) = \frac{|N \cdot \vec{v}|}{\|N\| \|\vec{v}\|}$. Usando esta fórmula*

e a fórmula da distância de um ponto a um plano, e supondo que a reta r intercepta o plano Π , conclua que $\text{dist}(P, \Pi) = \|P\vec{P}_1\| \text{sen}(r, \Pi)$, para qualquer ponto P em r , onde P_1 é o ponto de interseção de r e Π .

O cosseno $\cos r_1, r_2$ entre duas retas r_1, r_2 é dado pela fórmula $\cos r_1, r_2 = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}$, em que \vec{v}_1, \vec{v}_2 são vetores diretores das (paralelos às) retas, respectivamente. Então, tomando $\vec{v}_1 = \vec{v}$ e $\vec{v}_2 = \vec{N}$, obtemos que

$$\frac{|\vec{v} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{v}\| \|\vec{N}\|}$$

é o cosseno do ângulo pedido. Como este é complementar, segue-se a fórmula $\text{sen}(r, \Pi) = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{N}\| \|\vec{v}\|}$ (pois $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \Rightarrow \cos \theta_1 = \text{sen} \theta_2$). **0,5 pontos**

Para a segunda parte, tomando nesta fórmula $\vec{v} = P\vec{P}_1$ (um vetor paralelo à reta r , já que $P, P_1 \in r$) obtemos

$$\text{sen}(r, \Pi) = \frac{|P\vec{P}_1 \cdot \vec{N}|}{\|P\vec{P}_1\| \|\vec{N}\|}.$$

Daí, como $\text{dist}(P, \Pi) = \frac{|P\vec{P}_1 \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$ (fórmula da distância de um ponto a um plano) vem a fórmula pedida, $\text{dist}(P, \Pi) = \|P\vec{P}_1\| \text{sen}(r, \Pi)$.

+0,5 pontos

Questão 5. a) *Mostre que a equação da hipérbole com focos em $F_1 = (0, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$ e satisfazendo $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2$ é dada por*

$$(x - 2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Escrevendo $P = (x, y)$ e desenvolvendo a equação dada, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2) &= \pm 2 \\
 \text{dist}(P, F_1) &= \pm 2 + \text{dist}(P, F_2) \\
 \|P - F_1\| &= \pm 2 + \|P - F_2\| \\
 \|P - F_1\|^2 &= (\pm 2 + \|P - F_2\|)^2 \\
 &\quad \mathbf{0,5 \text{ pontos}} \\
 &= 4 \pm 4\|P - F_2\| + \|P - F_2\|^2 \\
 x^2 + y^2 &= 4 \pm 4\|P - F_2\| + (x - 4)^2 + y^2 \\
 x^2 &= 4 \pm 4\|P - F_2\| + x^2 - 8x + 16 \\
 8x - 20 &= \pm 4\|P - F_2\| \\
 2x - 5 &= \pm \|P - F_2\| \\
 &\quad \mathbf{+ 0,5 \text{ pontos}} \\
 (2x - 5)^2 &= (\|P - F_2\|)^2 = (x - 4)^2 + y^2 \\
 4x^2 - 20x + 25 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 \\
 3x^2 - 12x + 9 &= y^2 \\
 y^2 &= 3(x^2 - 4x + 3) \\
 &= 3[(x - 2)^2 - 1] \\
 (x - 2)^2 - \frac{y^2}{3} &= 1. \\
 &\quad \mathbf{+ 0,5 \text{ pontos}}
 \end{aligned}$$

b) *Sejam r uma reta e F um ponto, num plano Π , com $\text{dist}(F, r) = 1$. Mostre que a equação $\text{dist}(P, F) = \frac{1}{2}\text{dist}(P, r)$, $P \in \Pi$, descreve uma elipse. Sugestão: Considere um sistema de coordenadas cartesianas xy em que o eixo x contém o ponto F e é perpendicular à reta r e o eixo y é tal que $F = (\frac{1}{3}, 0)$ e a reta r é dada por $x = \frac{4}{3}$.*

Tomando o sistema de coordenadas xy sugerido, escrevendo $P = (x, y)$ e desenvolvendo a equação dada, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(P, F) &= \frac{1}{2}\text{dist}(P, r) \\
 \|P - F\| &= \frac{1}{2}\text{dist}(P, r) \\
 \|(x, y) - (1/3, 0)\| &= \frac{1}{2}\|(x, y) - (4/3, y)\| \\
 &\quad \mathbf{0,5 \text{ pontos}} \\
 \|(x, y) - (1/3, 0)\|^2 &= (\frac{1}{2}\|(x, y) - (4/3, y)\|)^2 \\
 (x - \frac{1}{3})^2 + y^2 &= \frac{1}{4}(x - \frac{4}{3})^2 \\
 x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 &= \frac{1}{4}(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}) \\
 \frac{3}{4}x^2 + y^2 &= \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \\
 \frac{9}{4}x^2 + 3y^2 &= 1 \\
 \frac{x^2}{4/9} + \frac{y^2}{1/3} &= 1 \quad (\text{equação de uma elipse}). \\
 &\quad \mathbf{+ 0,5 \text{ pontos}}
 \end{aligned}$$