L2 - PRODUTO ESCALAR, VETORIAL E MISTO

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios, MA 141

PRODUTO ESCALAR, VETORIAL E MISTO

1. a) Determine, se existir, os valores de x para que o vetor $v = x\vec{i} + 6\vec{k}$ seja paralelo ao produto vetorial de $w = \vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$ por $u = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$
b) Determine x para que os pontos $A = (x, 1, 2)$, $B = (2, -2, -3)$, $C = (5, -1, 1)$ e $D = (3, -2, -2)$ sejam coplanares.

2. Encontre o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores u, v e w nos seguintes casos:
a) Dados os pontos $A = (1, 3, 4)$, $B = (3, 5, 3)$, $C = (2, 1, 6)$ e $D = (2, 2, 5)$ tome $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD} = (1, 3, 4)$.
b) $u = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $v = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $w = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

3. Sejam u e v vetores no espaço. Mostre que
a) $(u + v) \times (u - v) = 2v \times u$
b) Se $u \times v$ é não nulo e w é um vetor qualquer no espaço então existem números reais a, b e c tal que $w = a(u \times v) + bu + cv$.
c) Se $u \times v$ é não nulo e u é ortogonal a v então $u \times (u \times v)$ é paralelo a v.

4. Sejam $A(2, 1, 2)$, $B(1, 0, 0)$ e $C(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$ três pontos no espaço. Calcule os ângulos do triângulo ABC, e os comprimentos da mediana e da altura que saem do vértice A.

5. Sejam $A(-1, 2, 3)$, $M(-1, 3, 2)$ e $N(1, 1, 3)$. O triângulo ABC tem ângulos $A = 90°$ e $B = 30°$ e os vértices B e C pertencem à reta MN. Encontre os vértices B e C.

6. Sejam $u = (-1, 1, 1)$ e $v = (2, 0, 1)$ dois vetores. Encontre os vetores w que são paralelos ao plano determinado por O, u e v, perpendiculares a v e $u.w = 7$.

7. O vetor w é ortogonal aos vetores $u = (2, 3, -1)$ e $v = (1, -2, 3)$ e $w.(2, -1, 1) = -6$. Encontre w.

8. Sejam $u = (1, -1, 3)$ e $v = (3, -5, 6)$. Encontre $proj_{u+v}(2u - v)$.

9. Responda, justificando, falso ou verdadeiro a cada uma das seguintes afirmações:
a) Se u, v e w são vetores no espaço, com v não nulo e $v \times u = v \times w$ então $u = w$.
b) Se u, v e w são vetores no espaço então: $| u.(v \times w) | = | v.(u \times w) | = | w.(v \times u) | = | v.(w \times u) |$.
c) Se u, v e w são vetores no espaço então $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$.
d) Se u, v e w são vetores no espaço, u é não nulo e $u \times v = u \times w = \vec{0}$ então $v \times w = \vec{0}$.

RETAS E PLANOS NO ESPAÇO

10. Para cada um dos casos abaixo encontre equações paramétricas e equações simétricas para a reta r:
a) A reta r passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (2, 3, 1)$.
b) A reta r tem vetor diretor $v = (1, 1, -1)$ e passa pelo ponto $P_0 = (0, 1, 7)$.
c) A reta r passa pelo ponto $P_0 = (1, -1, 1)$ e é paralela à reta $l : x - 1 = y = \frac{2z-2}{3}$.
d) A reta r é perpendicular ao plano $2x - y + 2z = 4$ e passa pelo ponto de interseção das retas l_1 e l_2 dadas por: l_1: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ e l_2: $\begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 1 + s \\ z = 0 \end{cases}$ $, s \in \mathbb{R}$.
e) A reta r é a interseção dos planos $x + y + 2z = 1$ e $2x - y + z = 2$.

11. Para cada par de retas r e l abaixo encontre $l \cap r$. E nos casos em que a interseção é vazia decida se elas são paralelas ou reversas.
a) $r : \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}$ e $l : \begin{cases} 3x + 2y + z = -2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$.
b) $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3}$ e $l : \frac{x-3}{2} = \frac{y+14}{5} = \frac{z-8}{-3}$.
c) $r : \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$ $l : \begin{cases} x - 3y + z = -3 \\ 3x - y - z = -5 \end{cases}$.

12. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação do plano π.
a) O plano π passa pelo ponto $P = (3, 1, 2)$ e tem vetor normal $N = (1, 2, -3)$.
b) O plano π passa pelos pontos $A = (0, 0, 2)$, $B = (2, 4, 1)$ e $C = (-2, 3, 3)$
c) Tem-se que $C = (-5, 1, 2) \in \pi$ e que π é perpendicular à reta que passa pelos pontos $A = (2, 2, -4)$ e $B = (7, -1, 3)$.

d) O plano π é perpendicular ao plano $x + 3y - z = 7$ e contém os pontos $A = (2, 0, 5)$ e $B = (0, 2, -1)$.
e) O plano π é perpendicular a cada um dos planos $x - y - 2z = 0$ e $2x + y - 4z - 5 = 0$ e contém o ponto $A = (4, 0, -2)$.

13. a) Encontre a distância do plano $\pi : 2x + 2y - z = 6$ e o ponto $P = (2, 2, -4)$.
b) Encontre a distância perpendicular entre os planos (paralelos): $4x - 8y - z = 9$ e $2x - 4y - \frac{z}{2} = 5$.
c) Verifique que a reta $x - 1 = z - 2$ e $y = 3$ é paralela ao plano $x + 2y - z = 3$ e encontre a distância perpendicular entre eles.

14. a) Sejam r : a reta $x - 1 = y = z$ e A, B os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, 0, 1)$. Encontre o ponto de r eqüidistante de A e B.
b) Dados o plano $x - y + z = 1$ e o ponto $P = (1, 0, 1)$. Encontre o ponto Q que é simétrico a P em relação ao plano dado.

15. Sejam $P = (a, b, c)$ um ponto no espaço e r a reta $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$. Para cada par, não nulo, de números reais (m, n) considere o plano $\pi_{(m,n)} : (m + n)x + (m - 2n)y + (2m + n)z = 4m + 5n$.
Mostre que: $P \in r$ se e somente se $P \in \pi_{(m,n)}$, para todo par não nulo (m, n).

16. Dados os dois pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, mostre que o lugar geométrico dos pontos do espaço que eqüidistam de A e B é um plano que passa pelo ponto médio de A e B e é perpendicular à reta que contém A e B.

17. Considere as retas r e l dadas por: $r\colon x = 0$, $y = 2 + t$ e $z = 1 + t$; $\quad l\colon x - 2 = z + 1$ e $y = 3$.
a) Mostre que r e l são reversas.
b) Encontre os planos π e α tais que: $r \subset \pi$, $l \subset \alpha$ e π é paralelo a α.
c) Encontre a distância entre os planos π e α do item anterior.
d) Encontre P em r e Q em l tais que a reta que passa por P e Q seja perpendicular a r e a l.

18. Considere os planos $\alpha : x - y + z - 3 = 0$ e $\beta : 2m^2x - (m + 1)y + 2z = 0$.
a) Determine m, em cada caso, para que os planos α e β sejam: paralelos; concorrentes e concorrentes ortogonais.
b) Para $m = -1$ encontre a equação da reta interseção entre α e β.

14. Sejam a, b, c, d números reais tais que $ax + by + cz + d > 0$ para quaisquer x, y, $z \in \mathbb{R}$. Mostre que $a = b = c = 0$ e $d > 0$.

TRANSLAÇÃO NO PLANO - CÔNICAS - COORDENADAS POLARES

19. Tome $x'y'$ o sistema de eixos do plano que é a translação do sistema xy para a nova origem $O' = (1, 1)$, i.é., $x' = x - 1$ e $y' = y - 1$.
a) Dado o ponto $P = (1, 4)$ no sistema xy, encontre as coordenadas de P no sistema $x'y'$.
b) Dado o ponto $A = (2, 1)$ no sistema $x'y'$, encontre as coordenadas de A no sistema xy.
c) Dada a equação $x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12$, encontre tal equação nas variáveis $x'y'$.

20. Encontre os vértices (ou vértice), os focos (ou foco) e a excentricidade de cada uma das cônicas. E esboce o gráfico.
a) $4x^2 + 9y = 144$ **b)** $49x^2 - 9y^2 = 441$ **c)** $3x^2 - 14y = 0$

21. Para cada uma das equações abaixo decida se a cônica C determinada pela equação é degenerada ou não. Nos casos em que não são degeneradas encontre os vértices (ou vértice), os focos (ou foco) e esboce o gráfico.
a) $9x^2 - 18x + 9y^2 - 6y = 10$ **b)** $4x^2 - 4x + 9y^2 - 18y = 26$ **c)** $4y^2 - 4y - 24x + 9 = 0$
d) $36x^2 - 24x + 36y^2 - 36y + 14 = 0$ **e)** $4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 68 = 0$ **f)** $9y^2 - 9x^2 + 6x = 1$.

22. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação em coordenadas polares.
a) $x^2 - y^2 = 16$ **b)** $2xy = 25$ **c)** $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ **d)** $x^3 + y^3 - 6xy = 0$

23. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação em coordenadas cartesianas.
a) $r = \frac{5}{2-2cos\theta}$ **b)** $r^2 = 2sen2\theta$ **c)** $r = \frac{6}{2-3sen\theta}$ **d)** $r^2 = cos\theta$.

24. Em cada um dos casos abaixo identifique a cônica. Determine a excentricidade, a equação cartesiana da cônica e da diretriz e as coordenadas cartesianas do(s) foco(s) e do(s) vértice(s).
a) $r = \frac{5}{2-2cos\theta}$ **b)** $r = \frac{6}{3+sen\theta}$ **c)** $r = \frac{3}{2+4cos\theta}$ **d)** $r = \frac{4}{2-3cos\theta}$.