Notas da Aula 1 – Sistemas Numéricos

- Qual o número representado pela sequência de algarismos 123?

- A resposta mais direta e intuitiva é cento e vinte e três.

- Mas por quê? O que está por trás de atribuir o número cento e vinte e três à sequência de algarismos 123?

- Você sabia que 123, além de cento e vinte três, representa o número vinte e sete? E o trinta e oito? E o cinquenta e um? E o sessenta e seis? E infinitos outros?

$$123\begin{cases} cento\ e\ vinte\ e\ três \\ vinte\ e\ sete \\ trinta\ e\ oito \\ cinquenta\ e\ um \\ sessenta\ e\ seis \\ \vdots \end{cases}$$

- Veremos que isso se deve aos diferentes sistemas de representação numérica nos quais a sequência de algarismos 123 pode se "basear".

- <u>1ª Distinção importante:</u> algarismo (ou dígito) não é número!

- Algarismo (ou dígito) é cada um dos caracteres com os quais se representam os números. Geralmente, essa representação simbólica é organizada em um sistema posicional, como no seguinte exemplo:

$$123 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = \begin{matrix} cento\ e\ vinte\ e\ três \\ (100) \quad (20) \quad (3) \end{matrix}$$

- Observe que a posição de cada dígito está associada, de forma multiplicativa, a uma potência de base dez e que, ao descrever um número, apenas elencamos os produtos de cada monômio.

- <u>Nota cultural:</u> o termo "dígito" deriva do latim *digitem*, que significa dedo. Ora, ao todo temos dez dedos nas mãos (cinco em cada), o que nos faz especular a razão pela qual é mais "intuitivo" fazer cálculos em potência de cinco e dez e a razão pela qual a representação simbólica em base dez seja a mais "convencional".

- <u>Pergunta pertinente:</u> em vez de utilizarmos as potências de base dez, qual o número resultante se os caracteres 123 estiverem associados (posicionalmente) às potências de base quatro?

$$123 = 1 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 3 \times 4^0 = vinte\ e\ sete$$

- De forma similar, a sequência de dígitos 123 tem uma representação nas bases cinco, seis, sete, ...

$$123 = 1 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = trinta\ e\ oito$$

$$123 = 1 \times 6^2 + 2 \times 6^1 + 3 \times 6^0 = cinquenta\ e\ um$$
$$123 = 1 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 3 \times 7^0 = sessenta\ e\ seis$$
$$123 = \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad = \quad \vdots$$

- 2ª Distinção importante: somente os dígitos não são suficientes para caracterizar um número, quando se trabalha com diversas representações numéricas. Ou seja, 123 não basta para identificar de que número se trata!

- Para resolver esse impasse é necessário indicar a base b juntamente com os algarismos, como no exemplo adiante:

$$(123)_4 = vinte\ e\ sete = (27)_{10}$$
$$(123)_5 = trinta\ e\ oito = (38)_{10}$$
$$(123)_6 = cinquenta\ e\ um = (51)_{10}$$
$$(123)_7 = sessenta\ e\ seis = (66)_{10}$$
$$(123)_{10} = cento\ e\ vinte\ e\ três$$

- Assim, um número N, associado a uma base b, é grafado como $(N)_b$, em que N representa uma sequência de caracteres adequada à escolha da base.

- Pergunta pertinente: 123 poderia representar um número na base três?

- Para responder essa questão, vamos primeiro retornar a base dez. Nesta, há dez dígitos $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para representar todos os números possíveis. Note que, por isso, o número correspondente à base requer dois dígitos: 10.

- Por associação, percebemos então que a representação em base três requer três dígitos $\{0,1,2\}$ e que, nela, o número três é igual a$(10)_3$. Similarmente, em base dois é preciso dois dígitos $\{0,1\}$ e o número dois é igual a $(10)_2$. Logo, 123 não tem sentido nessas bases.

- Pergunta pertinente: os dez dígitos decimais $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ são suficientes para representar todos os números possíveis na base dezesseis?

- Ora, uma vez que dezesseis é igual a $(10)_{16}$, os números de dez a quinze ficam sem caracteres, ao usar somente os dígitos decimais. Devido a isso, vários números carecem de representação: o vinte e sete, por exemplo.

- Uma forma usual de resolver isso é atribuir as letras $\{A,B,C,D,E,F\}$ para representar, respectivamente, os números inteiros de dez a quinze.

- 3ª Distinção importante: para representar qualquer número N na base b é necessário dispor de b dígitos. Para as representações até a base dez, os dígitos decimais são suficientes, Acima de dez, é necessário sempre a introdução de novos caracteres.

- <u>Pergunta pertinente:</u> como o número fracionário $(123{,}456)_{10}$ está organizado no sistema posicional de base dez?

$$(123{,}456)_{10} = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3}$$

- <u>Generalização necessária:</u> o número N, representado pela sequência de dígitos $a_{q-1}a_{q-2} \cdots a_0 a_{-1} a_{-1} \cdots a_{-p}$, é descrito no sistema numérico de base b como:

$$\begin{aligned}(N)_b &= \left(a_{q-1}a_{q-2} \cdots a_0 a_{-1} a_{-1} \cdots a_{-p}\right)_b \\ &= a_{q-1}b^{q-1} + a_{q-2}b^{q-2} + \cdots + a_0 b^0 + a_{-1}b^{-1} + a_{-2}b^{-2} + \cdots + a_{-p}b^{-p} \\ &= \sum_{i=-p}^{q-1} a_i \cdot b^i \ ,\end{aligned}$$

em que b é um número inteiro maior que um e os $a's$ são inteiros contidos no intervalo $0 \leq a_i \leq b - 1$. Note que a sequência $a_{q-1}a_{q-2} \cdots a_0$ constitui a parte inteira do número, enquanto $a_{-1}a_{-1} \cdots a_{-p}$ constitui a parte fracionária. Então p e q são, respectivamente, a quantidade de dígitos de cada uma dessas partes.

- <u>Convém saber:</u> a_{-p} é designado o dígito menos significativo, enquanto a_{q-1} é o mais significativo.

- Para o número $(123{,}456)_{10}$, por exemplo, o dígito menos significativo é o 6 e o mais significativo é o 1.

- Agora já podemos apresentar os principais sistemas numéricos utilizados ao longo do curso e largamente empregados na área de computação.

- <u>Sistema decimal:</u> o sistema ao qual estamos mais habituados.

$b = 10$

$a's = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Exemplo: $(3526{,}14)_{10} = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

- <u>Sistema binário:</u> o sistema que um computador digital efetua.

$b = 2$

$a's = \{0, 1\}$

Exemplo: $(1101{,}01)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$

- <u>Sistema octal:</u> sistema intermediário que ajuda a compactar e visualizar números binários grandes (veremos como fazer isso em tópicos futuros).

$b = 8$

$a's = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Exemplo: $(152)_8 = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = (106)_{10}$

- <u>Sistema hexadecimal:</u> sistema que ajuda a compactar e visualizar números binários ainda maiores.

$b = 16$

$a's = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Exemplo: $(B3F)_{16} = 11 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = (2879)_{10}$

- A tabela adiante exibe os dezesseis primeiros inteiros não negativos nos quatro sistemas apresentados.

$b = 10$	$b = 2$	$b = 8$	$b = 16$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

- <u>Convém saber:</u> o complemento de um dígito a, denotado por a', na base b é definido como:

$$a' = (b - 1) - a$$

- Note que o complemento a' é a diferença entre o maior digito da base b e o digito a, ou seja, para $b = 2$, $1' = 0$ e $0' = 1$. Já no caso de $b = 10$, $9' = 0$, $8' = 1$, $7' = 2$, $6' = 3$, $5' = 4$, $4' = 5$, ...

- <u>Convém saber:</u> como os números binários são de extrema importância para o curso, reconhecer os números decimais correspondentes as potências de base dois é uma habilidade que ajudará bastante na identificação de números binários.

- A tabela seguinte exibe os valores para as potências de 2^{-2} a 2^{11}.

2^{-2} 0,25	2^{-1} 0,5	2^{0} 1	2^{1} 2	2^{2} 4	2^{3} 8	2^{4} 16
2^{5} 32	2^{6} 64	2^{7} 128	2^{8} 256	2^{9} 512	2^{10} 1024	2^{11} 2048

- Exemplo: $(11010100{,}01)_2 = 128 + 64 + 16 + 4 + 0{,}25 = (212{,}25)_{10}$

- Observação final: quando não ficar claro pelo contexto ou nenhuma outra informação for disponibilizada, interpretaremos uma sequência de dígitos com o seu valor numérico decimal, ou seja, $123 = (123)_{10}$.

- Exercício proposto: na série seguinte, o mesmo número inteiro está expresso em diferentes sistemas numéricos; determine os membros faltantes, N_1 e N_2, dessa série.

10000, 121, 100, N_1, 24, 22, 20, N_2, ...