MA 141-D - PROVA 03 - 18 DE JUNHO 2013- GABARITO E COMENTÁRIOS

I-Considere a elipse no plano xy : $E = \{(x,y,z); 4x^2 + 9y^2 = 36\}$.

0,5)-a-Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ onde os números x_0, y_0, z_0 são respectivamente os três últimos dígitos de seu RA determine se ele está dentro ou fora da elipse.

1,0)-b-Descreva a superficie espacial obtida pela rotação completa desta elipse com respeito ao eixo x e, principalmente, sua equação cartesiana, isto é, em xyz.

1,0)-c-Determine um círculo no espaço xyz com centro na origem, mas inclinado, de tal forma que a sua projeção ortogonal sobre o plano xy (isto é, na direção do eixo z) seja exatamente a elipse original E.

(Sugestão: Pense em uma esfera com centro na origem de raio $r = 3$ (porque?) e apropriadamente "fatiada" por um plano que corta o eixo x).

RESOLUÇÃO: QUESTÃO I:

Ia- A equação acima obviamente determina os pontos (x,y) que estão *exatamente* sobre uma elipse no plano $z = 0$ que na forma canônica pode ser re-escrita como: $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} - 1 = 0$. Na verdade, a função $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} - 1$ reparte o plano em 3 regiões: Pontos que estão dentro da elipse, sobre a elipse ($E = \{(x,y) : \varphi(x,y) = 0$) e fora da elipse.

Para localizar um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ do plano xy com relação a estas regiões há várias maneiras.

Primeiro: Considere a semireta que liga a origem ao ponto (a,b) da elipse, $\varphi(a,b) = 0$. Geometricamente sabemos este é o único ponto desta semireta que intercepta a elipse. Agora, analisando a expressão $\varphi(\lambda a, \lambda b) = \lambda^2(\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{4}) - 1$ para os pontos da semireta, $\lambda(a,b)$ $(\lambda > 0)$, temos conclui-se facilmente que $\varphi(\lambda a, \lambda b) > \varphi(a,b) = 0$ se $\lambda > 1$ e $\varphi(\lambda a, \lambda b) < \varphi(a,b) = 0$ se $\lambda < 1$, o que imediatamente mostra que a região interna é caracterizada por pontos (x,y) tais que $\varphi(x,y) < 0$ e a região externa por pontos (x,y), tais que $\varphi(x,y) > 0$.

Segundo: Como se sabe, as elipses são também caracterizadas pelo "desenho" dos pontos P que mantem a expressão $dist(P,F_1) + dist(P,F_2) = 2l$ constante ("*descrição pelo barbante esticado"*) . É claro que aumentando o comprimento do barbante l e mantendo os focos , temos elipses concêntricas, mais "exterior" conforme cresce o comprimento do barbante. Portanto, para saber em que elipse o ponto P_0 se encontra, determinamos o comprimento do barbante $(2l = 2a = 6)$ e os focos , $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$, ($f = \sqrt{5}$, pois, $f^2 + b^2 = l^2$) da elipse dada. Agora basta verificar se $dist(P_0,F_1) + dist(P_0,F_2)$ é maior ou menor do que 6, ou seja, se ele está em uma elipse exterior ou interior àquela dada.

Observe que com o argumento acima podemos determinar pontos do plano com os parâmetros (θ, l) onde θ é a direção de uma semireta a partir da origem,$(0 \leq \theta < 2\pi)$, e l a elipse (focos fixados) em que se encontra o ponto. Esta maneira de localizar analiticamente os pontos de um plano é chamado Mapeamento plano por coordenadas elipticas e tem sua importancia em Mecânica e Eletrodinamica.

Se $z_0 \neq 0$ é claro que P_0 está fora da elipse (até fora do plano xy), e a questão somente precisa ser analisada para $z_0 \neq 0$.

Ib-Como a superficie é obtida pela rotação de uma curva em torno de x concluimos que a interseção desta superficie com um plano $x = const.$ será um círculo paralelo ao plano yz com centro no eixo x. Portanto, para cada circulo $y^2 + z^2 = r^2$ no plano yz a altura da superficie é a mesma, ou seja, $x = h(y^2 + z^2)$. Mas, esta expressão vale para $z = 0$ que é a relação entre x e y proposta, ou seja, $x = \pm 3\sqrt{1 - \frac{1}{4}(y^2)} = h(y^2)$. Portanto para outros pontos a "altura" da superficie deve satisfazer a equação: $x = \pm 3\sqrt{1 - \frac{1}{4}(y^2 + z^2)}$, ou, melhor, $4x^2 + 9(y^2 + z^2) = 36$.

Ic-

A elipse em questão tem eixos $a = 3$ (na coordenada x) , e $b = 2$ (na coordenada y). Imagine agora um círculo (uma "argola") com centro na origem, raio $r = 3$, girando (devagar!) em torno do eixo x. Em algum momento a sua sombra no plano xy (projeção vertical) será a elipse quando o raio ortogonal à rotação projetar-se no eixo menor, $(0,2,0)$, já que o eixo maior já foi fixado em 3. Este círculo pode ser pensado como a interseção da esfera de raio $r = 3$ com um plano inclinado que passa pelo eixo x e, portanto é perpendicular a vetores da forma $N = (0,\alpha,\beta)$. Enfim, o circulo é solução das equações: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $\alpha y + \beta z = 0$, o que nos leva à relação: $x^2 + \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right)y^2 = 9$, ou, $\beta^2 x^2 + (\alpha^2 + \beta^2)y^2 = \beta^2 9$. Para que esta equação seja a da elipse procurada tomamos $\beta = 2$ e $\alpha = \sqrt{5}$. (A equação do plano poderia ser obtida também observando-se que, nele, x é livre e que a relação entre z e y deve ser tal que o raio de comprimento 3 deve projetar-se em um comprimento 2, ou seja, $z = \frac{\sqrt{3^2 - 2^2}}{2} y)$.

Este exemplo, importante, mostra que de fato "*toda elipse é um círculo*", desde que vista na direção certa, uma propriedade que foi diversas vezes mencionada em sala e que os mais curiosos deveriam ter procurado verificar.

II-Considere uma esfera S de raio unitário com centro na origem e um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ onde os números x_0, y_0, z_0 são respectivamente os três últimos dígitos de seu RA.

0,5)-a-Determine as equações de todos os planos tangentes a esta esfera utilizando os vetores unitários $N(\theta,\varphi) \in S$ onde θ,φ são os ângulos de coordenadas esféricas.

1,0)-b-Determine a equação genérica de todos os planos que passam por P_0 e são tangentes à esfera utilizando os vetores unitários $N(\theta,\varphi)$ e calcule numericamente um qualquer deles.

1,0)-c-Determine a trajetória completa de um raio de luz que passa por P_0 (não paralelo a $\overrightarrow{P_0}$ e nem tangente à esfera), incide sobre a esfera em um ponto P_1 e é refletido.(Observe que o raio é constituido de duas semi-retas)

RESOLUÇÃO QUESTÃO II:

IIa-

Inicialmente escrevemos o vetor *unitário* $N(\theta,\varphi)$ utilizando a definição de coordenadas esféricas: $N(\theta,\varphi) = (sen\varphi \cos\theta, sen\varphi\ sen\theta, \cos\varphi)$. Ora, mas um plano tangente à esfera, passa a uma distancia $d = 1$ da origem e é perpendicular a um dos vetores $N(\theta,\varphi)$, na verdade, intercepta a esfera no ponto $P(\theta,\varphi) = N(\theta,\varphi)$. (*Um* *esboço ou um instante de reflexão geométrica é essencial aqui!*)

Portanto, a equação vetorial destes planos é:

$\{X - N(\theta, \varphi)\} \bullet N(\theta, \varphi) = 0$ ou, $X \bullet N(\theta, \varphi) = 1 = d$ e, para quem gosta das vísceras destes objetos: $(sen\varphi \cos\theta)x + \left(sen\varphi \; sen\theta\right)y + (\cos\varphi)z = 1$. Obviamente cada plano é determinado por um par (θ, φ), onde $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, e há "muitos"!! (Imagine geometricamente de quantas formas os planos podem tangenciar uma esfera!).

IIb-

Geometricamente, deve ser claro que haverá uma quantidade menor de planos agora do que obtemos na questão IIa porque uma restrição foi acrescentada a eles, mas, veremos que ainda há "muitos"!(*Um esboço ou um instante de reflexão geométrica é essencial aqui!*)

Portanto, neste caso, temos ainda $X \bullet N = 1$, (o plano ainda é tangente à esfera!) mas também, $P_0 \bullet N = 1$. Desta segunda (e nova) restrição, vemos que nem todos os vetores normais podem ser utilizados. Os planos que interessam neste caso são aqueles que satisfazem à restrição numérica $(sen\varphi \cos\theta)x_0 + \left(sen\varphi \; sen\theta\right)y_0 + (\cos\varphi)z_0 = 1,$ que fornece uma relação (implicita) entre os angulos θ e φ.

Para calcular numericamente algum destes planos, consideremos o caso mais trabalhoso, $x_0 y_0 z_0 \neq 0$. Devemos escolher (e bem) um dos ângulos e determinar o outro. Para simplificar (já que temos escolha e não queremos complicar mais do que necessário) tomemos, por exemplo, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ o que nos leva à equação (reduzida!): $x_0 \cos\theta + y_0 sen\theta = 1$ que pode ser escrita na forma de produto interno da GA: $(\cos\theta, sen\theta) \bullet \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \right) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$. Calculando $\alpha = \arccos \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$ e $\beta = \arccos \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$, pela propriedade do produto interno, temos que $\theta = \alpha + \beta$.

IIc-

Um raio que passa por P_0 e atinge um tal ponto $P_1(\theta, \varphi) = N(\theta, \varphi)$ da esfera tem a sua primeira semireta de trajetória dada pela semireta que vem de P_0 e termina em P_1, cujo vetor unitário no sentido de P_0 é $v = \frac{P_0 - P_1}{\|P_0 - P_1\|}$ .Este raio é refletido pelo plano tangente a P_1(que é perpendicular a $\vec{N}(\theta, \varphi)$) em uma direção que faz um ângulo com $\vec{N}(\theta, \varphi)$ igual ao de incidencia (ângulo entre v e $\vec{N}(\theta, \varphi)$) e no mesmo plano que $\vec{v}$ e $\vec{N}(\theta, \varphi)$. Aqui, um esboço geométrico da situação é INDISPENSÁVEL POIS SEM ELE É IMPOSSIVEL OBTER A FORMULA QUE SE SEGUE. Geometricamente, (utilizando as operações com vetores) escrevemos então a seguinte expressão para o sentido $\vec{R}$ do raio refletido:

$\vec{R} = v - 2(v - (v \bullet N)N) = 2(v \bullet N)N - v$. Observe que $(v \bullet N)N$ é a projeção vetorial de v no sentido de N e que $v - (v \bullet N)N$ é a projeção de v no plano tangente à esfera.

ESTA QUESTÃO EXEMPLIFICA BEM A ORIENTAÇÃO DE QUE A VISÃO GEOMETRICA DE UM PROBLEMA É IMPORTANTE E AS VEZES INDISPENSAVEL E QUE A ESCRITA MATEMATICA DO PROCEDIMENTO

GEOMETRICO É A RESOLUÇÃO FINAL, EXCETO POR ALGUMA ARITMETICA TEDIOSA MAS SEM IMPORTANCIA.

III-Um objeto é constituido de duas substancias X e Y, em quantidades (massas) x e y desconhecidas e que desejamos determinar indiretamente por intermedio de medidas de propriedades totais do objeto. (Por exemplo, peso, volume, capacidade térmica e etc). Suponha que experiencias distintas resultem em três medidas, M_1, M_2, M_3, cujas intensidades são respostas lineares com respeito às quantidades de massas, isto é, $M_k = a_k x + b_k y$, e os fatores (coeficientes a_k, b_k) são conhecidas constantes específicas para cada propriedade e substancia. Com isto, teremos três equações a duas incognitas que certamente serão inconsistentes, ou seja, sem solução matemática. (Se tiverem solução, há fortes motivos para supor que as experiencias foram forjadas).

2,5)-Descreva por intermedio da Geometria Analitica (Geometria **e** Operações) como resolver esta questão satisfatoriamente, ou seja, como obter x e y que resultem na melhor aproximação $a_k x + b_k y$ das medidas registradas M_1, M_2, M_3.(Sugestão: Considere o plano no espaço gerado por todas as "possíveis respostas" x e y e escolha a melhor, com respeito a $M = (M_1, M_2, M_3)$.

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO III:

Observe que a questão pede que se descreva como resolve-la por intermedio de Geometria e Operações; não há necessidade, portanto, de calcular nada.

Um sistema de tres equações lineares a duas incognitas em geral não tem soluções por inconsistencia. Para melhor entender esta inconsistencia sob o ponto de vista Geométrico, escreve-se (como sugerido) o sistema em uma forma vetorial: (*que, aliás, foi tratada em um dos primeiros exercicios da PRIMEIRA lista*):

$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$. Denotando os vetores do espaço

$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$ podemos interpretar a questão como a procura de uma combinação linear $x\alpha + y\beta$ que produza o ponto M. Mas, como o total destas combinações lineares formam apenas um ("magro") plano π, a "chance" de que ele atinja um ponto M no espaço é zero!(A não ser que o problema tenha sido "cozinhado" de trás pra frente, como acontece em problemas artificiais de livros texto). Não tendo uma solução exata, faz-se o melhor possível, ou seja, tomaremos como resposta o ponto M_0 do plano π que melhor aproxima o ponto "alvo" M. Isto significa que M_0 é a projeção ortogonal de M no plano π. Uma vez obtida esta projeção M_0 teremos que representa-lo na forma $x_0\alpha + y_0\beta = M_0$, para obter a solução em termos de x e y, mas, uma questão de cada vez.

Para realizarmos a projeção necessitamos de um vetor normal (unitario) ao plano que pode ser obtido (operacionalmente) na forma $N = \frac{\alpha\times\beta}{\|\alpha\times\beta\|}$ e calculado com alguma paciencia, mas com poucos neuronios. Assim, projetamos vetorialmente o vetor M nesta normal obtendo $(M \bullet N)N$ e, retirando esta componente de M (como se faz sempre nestes casos e foi uma questão da Prova2 resolvida em Gabarito!!), temos: $M_0 = M - (M \bullet N)N$, cujas coordenadas podem ser calculadas de forma elementar, desde que se saiba fazer o produto interno, matéria da 1a prova!

Encontrado M_0 temos que determinar as suas "coordenadas" segundo os vetores α e β (um problema resolvido em classe varias vezes). Para isto, fazemos o produto interno da igualdade $x_0\alpha + y_0\beta = M_0$, primeiro por α, e depois por β, obtendo um sistema de duas equações a duas incognitas

$$\alpha \bullet \alpha\, x_0 \ + \ \alpha \bullet \beta\, y_0 = M_0 \bullet \alpha$$
$$\beta \bullet \alpha\, x_0 \ + \beta \bullet \beta\, y_0 = M_0 \bullet \beta$$

que pode ser resolvido de forma elementar (da escola de segundo grau) em x_0 e y_0 da seguinte maneira:

$$x_0 = \frac{(M_0 \bullet \alpha)\alpha^2 - (M_0 \bullet \beta)\alpha \bullet \beta}{\alpha^2\beta^2 - (\alpha \bullet \beta)^2}$$
$$y_0 = \frac{(M_0 \bullet \beta)\beta^2 - (M_0 \bullet \alpha)\alpha \bullet \beta}{\alpha^2\beta^2 - (\alpha \bullet \beta)^2}$$

O fato de ter resultado em uma fórmula meio amedrontadora não implica que o problema seja dificil, desde que o "caminho" Geométrico tenha sido estabelecido. Um desenho (esboço) também neste caso ajuda muito.

IV-As órbitas descritas por um corpo celeste "leve" (satélite) sob ação da Gravitação Newtoniana exercida por um corpo celeste "pesado" e fixado na origem são planas e podem ser descritas na forma polar pela seguinte expressão: $r = \frac{de}{1-e\cos\theta}$, onde e e d são parâmetros que dependem das massas e das condições iniciais; e é denominado excentricidade da órbita e pode ter qualquer valor positivo e também $d > 0$.

1,0)-a-Considere o caso $e = 2$. Mostre que a a órbita é ilimitada; uma hiperbole.

1,0)-b-Para a órbita com $e = 2$, determine a maior proximidade atingida pelo satélite com relação ao centro e em função de d.

0,5)-c-No caso acima, determine o ângulo de "escape" da órbita deste satélite. (Este é o ângulo limite que a luneta de um observador na origem assume quando o satélite se afasta para o infinito, isto é, quando $r \to \infty$)

RESOLUÇÃO DA IV QUESTÃO:

IVa-

Observe que a expressão que conecta o ângulo θ ao raio r , $r = \frac{de}{1-2\cos\theta}$, não pode ser válida para todos os valores de θ pois, devemos ter $1 - 2\cos\theta > 0$ ou seja, $\cos\theta < \frac{1}{2} = \cos\theta_0$ e, portanto, $\theta_0 < \theta < 2\pi - \theta_0$. (Trigonometria básica). Por outro lado, temos que se $\theta \to \theta_0$ vemos que $r \to \infty$, e o mesmo acontece para $\theta \to 2\pi - \theta_0$, ou seja a orbita é ilimitada.

Para mostrar que é uma hiperbole, revertemos a equação às coordenadas cartesianas (tal como feito em classe) e escrevemos: $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2d}{1-2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$, ou seja,

$\sqrt{x^2 + y^2} = 2x + 2d$, que elevando ao quadrado, e rearranjando, temos: $-3x^2 - 8dx + y^2 = 4d^2$. Completando os quadrados de x temos: $-3\left(x + \frac{4d}{3}\right)^2 + y^2 = 4d^2 + \frac{16d^2}{3} = \left(y - \sqrt{3}X\right)\left(y + \sqrt{3}X\right)$, onde $X = x + \frac{4d}{3}$., o que nos dá a forma canonica de uma hiperbole em coordenadas transladadas no eixo

x.

IVb-

De acordo com a expressão a maior proximidade (menor valor de r) se dá quando $1 - 2\cos\theta$ tem o maior valor possível, ou seja,para $\theta = \pi$, e $1 - 2\cos\theta = 3$, de onde vem, $r_m = \frac{2d}{3}$.

IVb-

Esta questão está respondida na parte IVa, pois $r \to \infty$, quando $\theta \to 2\pi - \theta_0$, ou $\theta \to \theta_0$. O satélite "aparece" no infinito em um dos dois angulos e "escapa" no infinito pelo outro; não dá para saber qual dos dois. Na verdade, o observador poderia estar em qualquer ponto do eixo x e a sua luneta apontaria para os mesmos angulos de entrada e escape. (Verifique)

Além disso, se um observador conhece o angulo de entrada e depois mede a distancia minima que o satelite (cometa) passa com relação à Terra, ele pode imediatamente reconstruir toda a sua orbita.(Verifique).