Gabarito 3 Cursao 2021

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

Gabarito P3

Exercicio 3

Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, demonstre. Se for falsa, exiba um contra-exemplo. (Respostas sem justificativas não serão consideradas. Justificativas devem ser baseadas nos conteúdos trabalhados na disciplina).

(1) Sejam U e V vetores. Então $\|U+V\| = \|U\| + \|V\|$.
(2) Seja $U \in \mathbb{R}^3$ ortogonal aos vetores básicos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Então $U = 0$.
(3) Sejam U, V e W vetores tais que $U \neq 0$ e $U \cdot V = U \cdot W$. Então $V = W$.
(4) Sejam $A = (1,1,1)$, $B = (-1,1,1)$, $C = (-1,-1,1)$ e $D = (1,2,1)$. Então o quadrilátero com vértices A, B, C e D é um paralelogramo.
(5) Sejam U e V vetores. Então $|\|U\| - \|V\|| \leq \|U - V\|$.
(6) Sejam $P = (1,-1)$ e $Q = (0,2)$ pontos do plano. Existe só um ponto à distância 3 de P e Q.
(7) Sejam U um vetor no espaço e λ um escalar. Então

$$\|\lambda U\| = \lambda \|U\|.$$

(8) Sejam U, V e W vetores tais que W é ortogonal a U e V. Então para quaisquer α e β escalares, $\alpha U + \beta V$ é ortogonal a W.
(9) Sejam U e V vetores. Então

$$\|U - V\|^2 = \|U\|^2 + \|V\|^2 + 2\cos\theta \|U\|\|V\|$$

onde θ é o ângulo entre U e V.
(10) Sejam A, B e C os vértices de um triângulo e E e F os pontos médios dos lados AC e BC, respectivamente. Então EF é paralelo a AB.
(11) Sejam A, B, C e D os vértices de um trapézio. Então o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos é paralelo aos lados paralelos.

Respostas

(1) FALSO.
Sejam $U = (1, 0, 0)$ e $V = (-1, 0, 0)$. Então $\|U\| = \|V\| = 1$ e $\|U + V\| = 0$, logo
$$\|U + V\| = 0 < \|U\| + \|V\| = 2.$$
(2) VERDADEIRO.
Como $U = a\mathbf{i} + b\mathbf{i} + c\mathbf{k}$, temos que $a = U \cdot \mathbf{i} = 0$, $b = U \cdot \mathbf{j} = 0$, $c = U \cdot \mathbf{k} = 0$. Logo
$$U = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{k} = 0.$$
(3) FALSO.
Sejam $U = \mathbf{i}$, $V = \mathbf{j}$ e $W = \mathbf{k}$. Logo
$$U \neq 0\ ;\ U \cdot V = U \cdot W = 0\ ;\ V \neq W.$$
(4) FALSO. $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i}$, $\overrightarrow{CD} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ não s ao paralelos.
(5) VERDADEIRO. Aplicando Cauchy-Schwartz $U \cdot V \leq \|U\|\|V\|$,
$$\begin{aligned} (\|U\| - \|V\|)^2 &= \|U\|^2 - 2\|U\|V\| + \|V\|^2 \\ &\leq \|U\|^2 - 2U \cdot V + \|V\|^2 \\ &= \|U - V\|^2 \end{aligned}$$
Logo $|\|U\| - \|V\|| \leq \|U - V\|$.
(6) FALSO. Seja $R = (x, y)$. Então
$$d(P, R)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 = 3^2\ ;\ d(Q, R)^2 = (x-0)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$
Logo $(x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-0)^2 + (y-2)^2$ isto é $-2x + 2y + 2 = -4y + 4$ ie $x = 3y - 1$. Obtemos $(3y-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ que tem duas soluções distintas y_1 e y_2, logo existem dois pontos $R_1 = (x_1, y_1)$ e $R_2 = (x_2, y_2)$ que estam a distancia 3 de P e Q.
(7) FALSO.
Sejam $U = \mathbf{i}$ e $\lambda = -1$. Resulta que
$$\|(-1)U\| = 1\ ;\ (-1)\|U\| = -1.$$
Ou seja $\|(-1)U\| \neq (-1)\|U\| = -1$.
(8) VERDADEIRO. Pois,
$$U \cdot (\alpha V + \beta W) = \alpha U \cdot V + \beta U \cdot W = \alpha 0 + \beta 0 = 0.$$
(9) FALSO.
Sejam $U = \mathbf{i}$ e $V = \mathbf{i}$. Logo
$$\|U - V\|^2 = 0\ ;\ \|U\|^2 + \|V\|^2 + 2\cos\theta\|U\|\|V\| = 1 + 1 + 2\cos 0 = 4$$
Isto é $\|U - V\|^2 \neq \|U\|^2 + \|V\|^2 + 2\cos\theta\|U\|\|V\|$.
(10) VERDADEIRO.
Sejam A, B e C os vertices de um triangulo. E e F os pontos medios dos lados AB e BC respectivamente. Então $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FN}$. Como
$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$
temos que
$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$
Logo EF é paralelo a AC.
(11) VERDADEIRO.
Sejam A, B, C e D os vertices do trapezio, onde AB e CD são paralelos. Logo
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}\ ;\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$
Somando,
$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA}) + \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BN}) + \overrightarrow{AB}$$
Como
$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$
Temos que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$, ou seja MN é paralelo a AB e CD.

Exercicio 1

(1) Sejam A, B e C os seguintes pontos

1)
$$A=(1,2,1)\ ;\ B=(1,-1,1)\ ;\ C=(3,1,1)$$
2)
$$A=(1,-1,1)\ ;\ B=(3,1,1)\ ;\ C=(1,2,1)$$
3)
$$A=(3,1,1)\ ;\ B=(1,2,1)\ ;\ C=(1,-1,1)$$
Escreva o vetor $\overrightarrow{AC}$ como soma de um vetor $\overrightarrow{U}$ paralelo a $\overrightarrow{AB}$ e um vetor ortogonal a $\overrightarrow{AB}$.

Respostas

1) Como $\overrightarrow{AB}=0\mathbf{i}-3\mathbf{j}+0\mathbf{k}$ e $\overrightarrow{AC}=2\mathbf{i}-1\mathbf{j}+0\mathbf{k}$, temos que
$$\|\overrightarrow{AB}\|=3\ ;\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$$
Logo
$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{3^2}\overrightarrow{AB}=0\mathbf{i}-1\mathbf{j}+0\mathbf{k}.$$
Concluimos que $U=0\mathbf{i}-1\mathbf{j}+0\mathbf{k}$ e $V=\overrightarrow{AC}-U=2\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}$, onde U é paralelo a $\overrightarrow{AB}$ e V é um vetor ortogonal a $\overrightarrow{AB}$.

2) Como $\overrightarrow{AB}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+0\mathbf{k}$ e $\overrightarrow{AC}=0\mathbf{i}+3\mathbf{j}+0\mathbf{k}$, temos que
$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{8}\ ;\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$$
Logo
$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\overrightarrow{AB}=\frac{6}{8}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}+0\mathbf{k}.$$
Concluimos que $U=\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}+0\mathbf{k}$ e $V=\overrightarrow{AC}-U=-\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}+0\mathbf{k}$, onde U é paralelo a $\overrightarrow{AB}$ e V é um vetor ortogonal a $\overrightarrow{AB}$.

3) Como $\overrightarrow{AB}=-2\mathbf{i}+1\mathbf{j}+0\mathbf{k}$ e $\overrightarrow{AC}=-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+0\mathbf{k}$, temos que
$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{5}\ ;\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$$
Logo
$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{5}\mathbf{i}+\frac{2}{5}\mathbf{j}+0\mathbf{k}.$$
Concluimos que $U=-\frac{4}{5}\mathbf{i}+\frac{2}{5}\mathbf{j}+0\mathbf{k}$ e $V=\overrightarrow{AC}-U=-\frac{6}{5}\mathbf{i}-\frac{12}{5}\mathbf{j}+0\mathbf{k}$, onde U é paralelo a $\overrightarrow{AB}$ e V é um vetor ortogonal a $\overrightarrow{AB}$.

Exercicio 2

(1) Considere os pontos A, B, C e D

1)

$$A = (0, 0, 1)\ ;\ B = (1, 1, 1)\ ;\ C = (1, 2, 1)\ ;\ D = (1, -5, 1).$$

2)

$$A = (0, 0, 1)\ ;\ B = (1, 2, 1)\ ;\ C = (1, 1, 1)\ ;\ D = (1, -5, 1).$$

3)

$$A = (-1, 1, -1)\ ;\ B = (1, 1, -1)\ ;\ C = (1, 2, 1)\ ;\ D = (-1, -5, 1).$$

(2) Calcule o cosseno do ângulo entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$.

(3) Decida se B, C e D são colineares.

Respostas

1) (2)

$$\overrightarrow{AB} = 1\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\ ;\ \overrightarrow{BC} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(3)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Os pontos B, C e D são colineares.

2) (2)

$$\overrightarrow{AB} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\ ;\ \overrightarrow{BC} = 0\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{BC}\|} = -\frac{12}{6\sqrt{5}}.$$

(3)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Os pontos B, C e D são colineares.

3) (2)

$$\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\ ;\ \overrightarrow{BC} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{BC}\|} = 0.$$

(3)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Os pontos B, C e D não são colineares.