

Experiência 1 – Modelagem matemática e linearização do ECP M-505 Pêndulo Invertido

Rodrigo Seiji Piubeli Hirao (186837)

3 de abril de 2021

Conteúdo

1	Representação por variáveis de estado e simulação do pêndulo não linear	2
1.1	Forma de variáveis de estado	2
1.2	Simulação do sistema não linear	2
1.3	Haste fixa	3
1.3.1	3
1.3.2	4
1.3.3	5
2	Linearização	5
2.1	Processo de Linearização	5
2.2	Função de Transferência	5
2.3	Comparação Linear x Não linear	6

1 Representação por variáveis de estado e simulação do pêndulo não linear

1.1 Forma de variáveis de estado

Usando a seguinte mudança de variáveis:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Foram encontradas as seguintes equações de estado para o sistema do pêndulo invertido:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-2m_1x_3x_4x_2 - m_1l_0x_3x_2^2 + m_2l_cg\sin(x_1) + m_1gx_3\cos(x_1) + l_0F}{J} \\ x_4 \\ \frac{J^*x_3x_2^2 + 2m_1l_0x_3x_4x_2 - (m_2l_0l_c - J)g\sin(x_1) - m_1l_0gx_3\cos(x_1) - \frac{J^*}{m_1}F}{J} \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

1.2 Simulação do sistema não linear

Foi feita a simulação do sistema a partir das equações das variáveis de estado

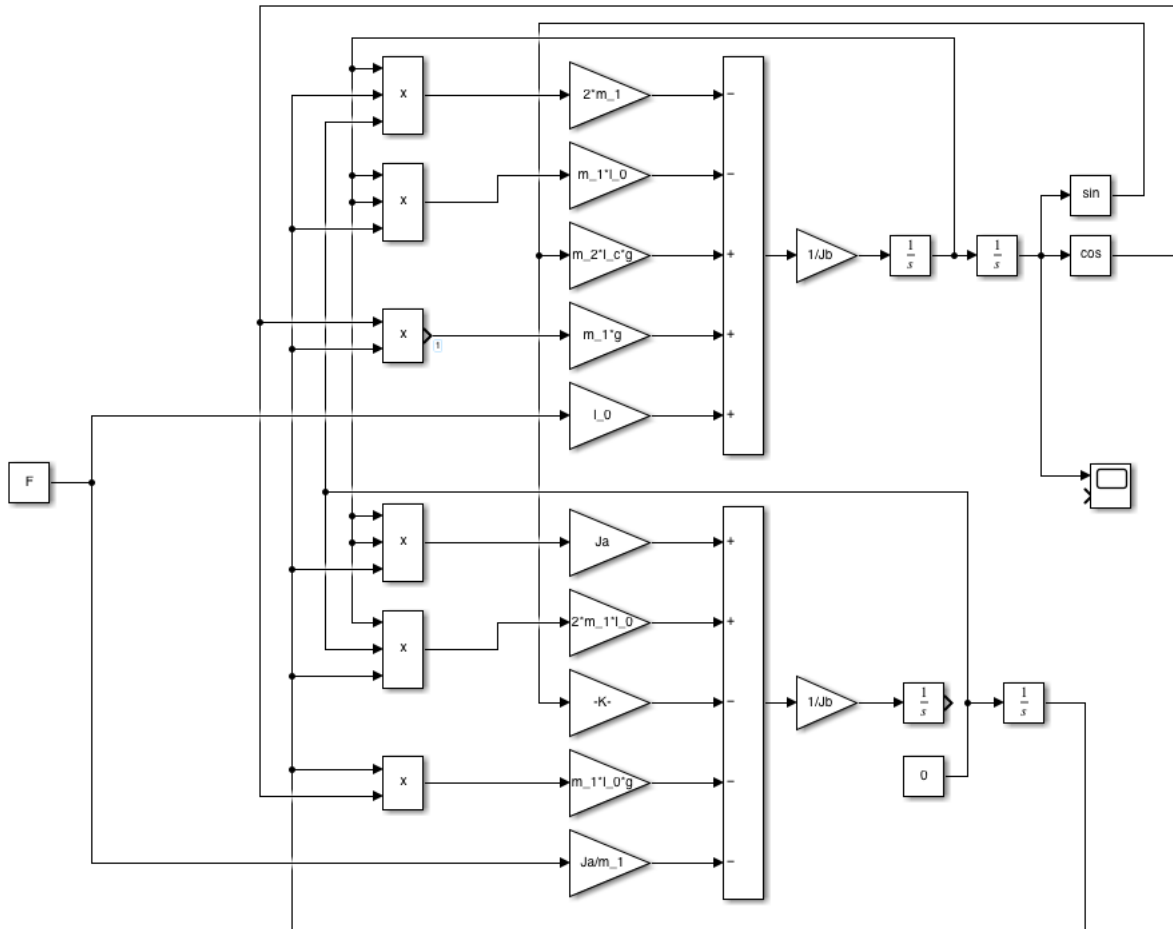


Figura 1: Simulação do sistema não linear no Simulink

E foi medido o ângulo θ com as condições iniciais $\theta(0) = \frac{\pi}{8}, \dot{\theta}(0) = x(0) = \dot{x}(0) = 0$

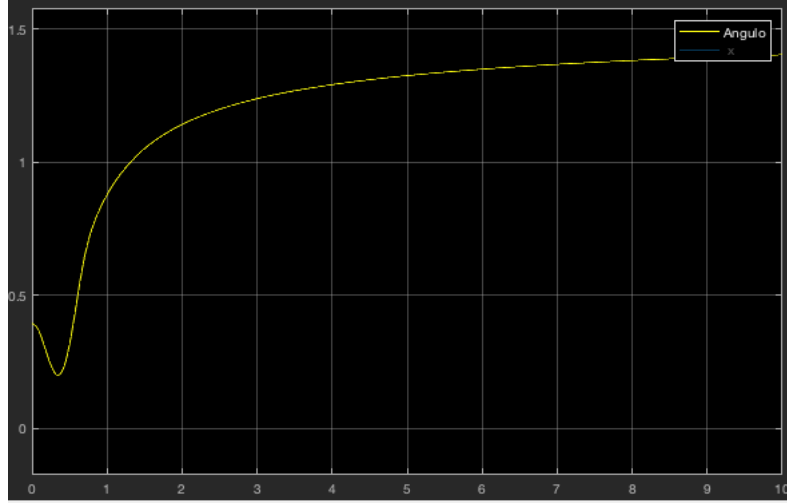


Figura 2: $\theta(t)$, $\theta(0) = \frac{\pi}{8}$

Sabendo que com a condição inicial de $\theta(0) = 0$ a função se mantém constante no valor de 0 é possível ver que o o ponto $\theta(0) = 0$ é um ponto de equilíbrio, e ao rodar a simulação com $\theta(0) = \frac{\pi}{8}$ pode-se perceber que o valor se afasta de 0, assim fazendo $\theta(0) = 0$ ser um ponto de equilíbrio instável.

1.3 Haste fixa

Com $x = \dot{x} = 0$ temos a equação simplificada:

$$\begin{cases} (m_2 l_0 l_c - \bar{J}) g \sin(\theta) = \frac{J^*}{m_1} F \\ \bar{J} \ddot{\theta} - m_2 l_c g \sin(\theta) = -l_c F \end{cases} \quad (1)$$

Com as seguintes variáveis de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{m_2 l_c g \sin(x_1) + l_0 F}{J} \end{bmatrix}$$

1.3.1

Simulando o resultado para as os seguintes valores iniciais de θ , temos as seguintes frequências:

$\theta(0)$	f (mHz)
0.1	686.5
0.4	681.0
0.7	666.9
1.0	645.1
1.3	615.8
1.6	578.9
1.9	534.3
2.2	481.5
2.5	418.7

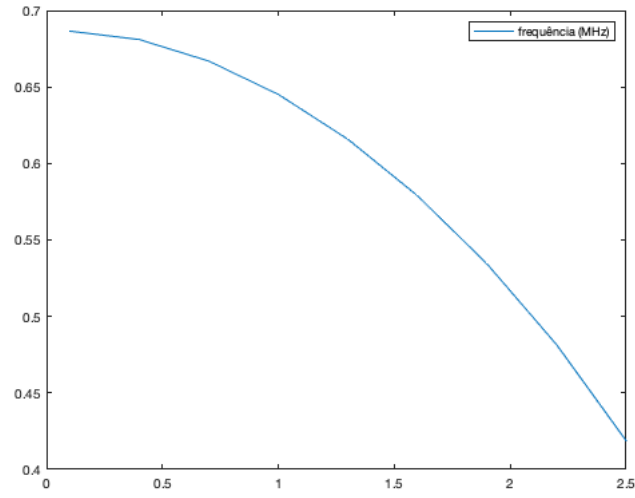


Figura 3: $f(\theta)$

Mostrando que o sistema funciona com maiores frequências quanto menor o ângulo inicial.

1.3.2

Simulando o resultado com o valor inicial de $\theta(0) = \frac{\pi}{8}$ e usando os seguintes valores de l_{w2} , temos as seguintes frequências:

$l_{w2}(cm)$	f (mHz)
-15	698.0
-30	720.0
-50	627.6
-60	587.0

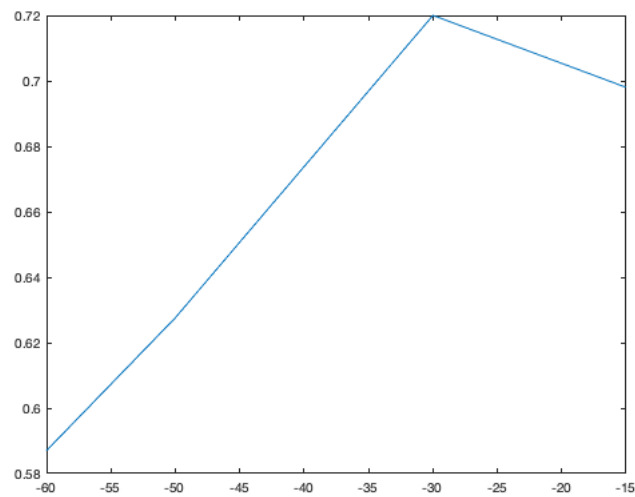


Figura 4: $f(l_{w2})$

Onde temos um pico de frequência próximo de $l_{w2} = -30cm$ que é quando o momento angular do contrapeso começa a se igualar ao da haste.

1.3.3

Testando com diferentes valores de $l_{w2} > -15cm$ foi encontrado o menor valor de $l_{w2} = -5.573cm$ onde o ponto $\dot{x} = x = \dot{\theta} = \theta = 0$ é um ponto de equilíbrio instável, assim tendo o ângulo se afastando de 0 e se estabilizando em, no caso, 3.42 rad:

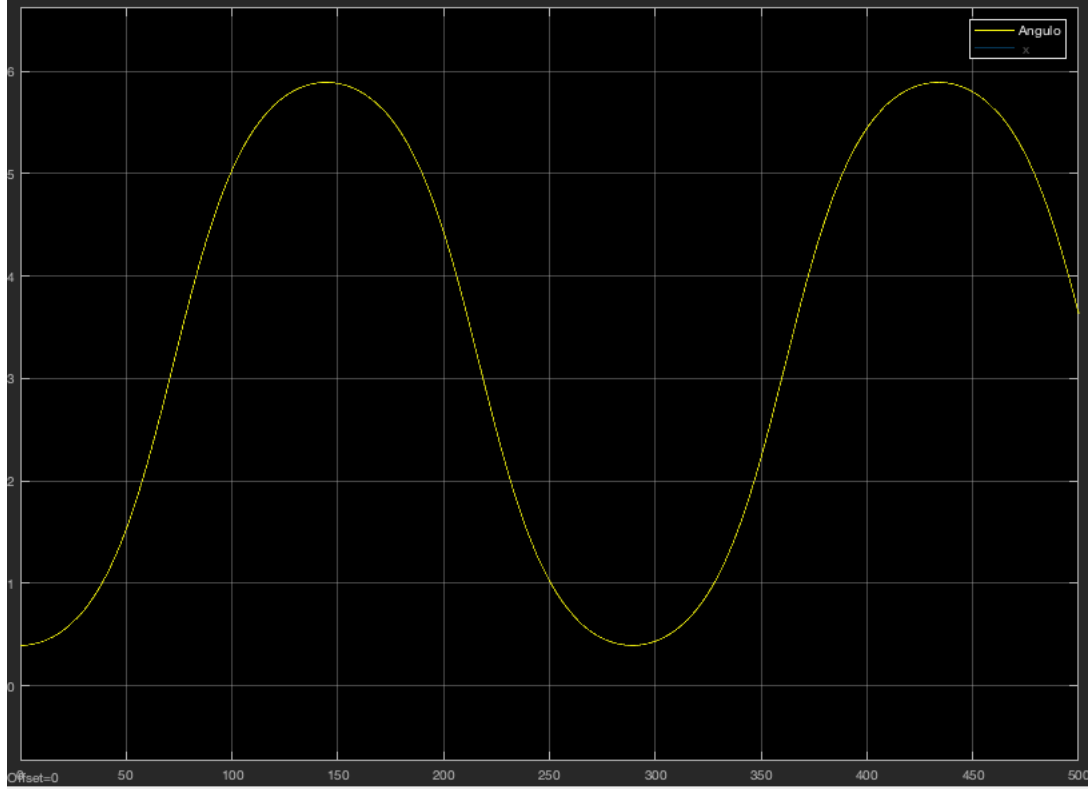


Figura 5: $\theta(t), l_{w2} = -5.573cm$

2 Linearização

2.1 Processo de Linearização

O sistema será linearizado em torno do ponto $x = [0, 0, 0, 0]^T$. Calculando o Jacobiano em torno desse ponto temos que:

$$\dot{x} = Ax + BF = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}(0) & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2}(0) & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3}(0) & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_4}(0) \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1}(0) & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}(0) & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3}(0) & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_4}(0) \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1}(0) & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2}(0) & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3}(0) & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_4}(0) \\ \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_1}(0) & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_2}(0) & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_3}(0) & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_4}(0) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial F}(0) \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial F}(0) \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial F}(0) \\ \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial F}(0) \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m_2 l_c g}{J} & 0 & \frac{m_1 g}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(m_2 l_0 l_c - J)g}{J} & 0 & \frac{m_1 l_0 g}{J} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_0}{J} \\ 0 \\ \frac{J^*}{m_1 J} \end{bmatrix} F$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] x$$

2.2 Função de Transferência

Usando as funções ss e tf do matlab foi descoberta a função de transferência do sistema a partir das variáveis de estado linearizadas.

```
>> ss(A, B, C, D)
```

```
ans =
```

```
A =
      x1      x2      x3      x4
x1      0      1      0      0
x2 -18.68      0  51.88      0
x3      0      0      0      1
x4  15.97      0 -17.12      0
```

```
B =
      u1
x1      0
x2  0.007466
x3      0
x4 -0.006737
```

```
C =
      x1  x2  x3  x4
y1      1   0   0   0
```

```
D =
      u1
y1      0
```

Continuous-time state-space model.

```
>> [Num, Den] = ss2tf(A, B, C, D)
```

```
Num =
      0      0  0.0075      0 -0.2217
```

```
Den =
      1.0000 -0.0000  35.8044      0 -508.4471
```

```
>> tf(Num, Den)
```

```
ans =
      0.007466 s^2 - 0.2217
-----
s^4 - 4.885e-15 s^3 + 35.8 s^2 - 508.4
```

Continuous-time transfer function.

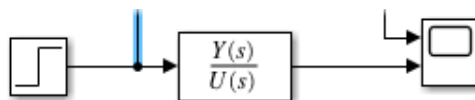


Figura 6: Simulação com a função de transferência do sistema linearizado

2.3 Comparação Linear x Não linear

Comparando a resposta do sistema à entrada degrau de amplitude F , é visto que o sistema se comporta similar em ângulos próximos de 0, mas quanto mais distante o ângulo se afasta de 0, mais as respostas se divergem, a ponto do sistema linearizado não ser mais um sistema estável.

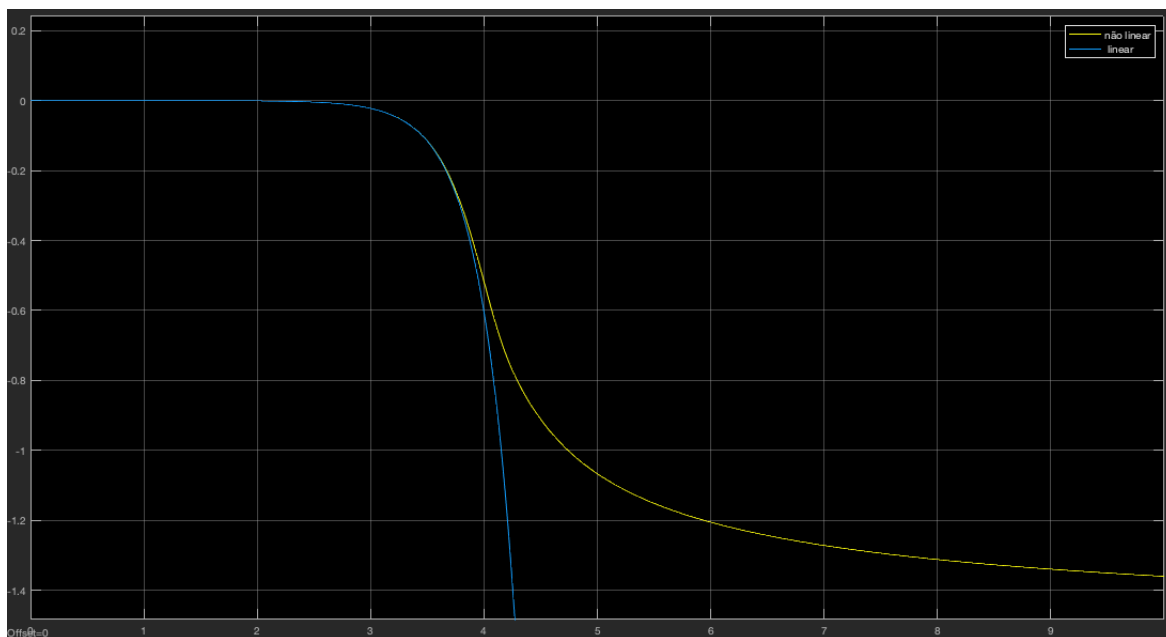


Figura 7: Gráfico do sistema não linear e linearizado, $F = 0.01\text{N}$

Ao aumentar a força externa, pode ser visto ainda que o sistema linearizado deixa de ser confiável logo no começo, pela força externa fazer com que o pêndulo já se afaste consideravelmente de 0, fazendo a linearização não poder mais ser usada.

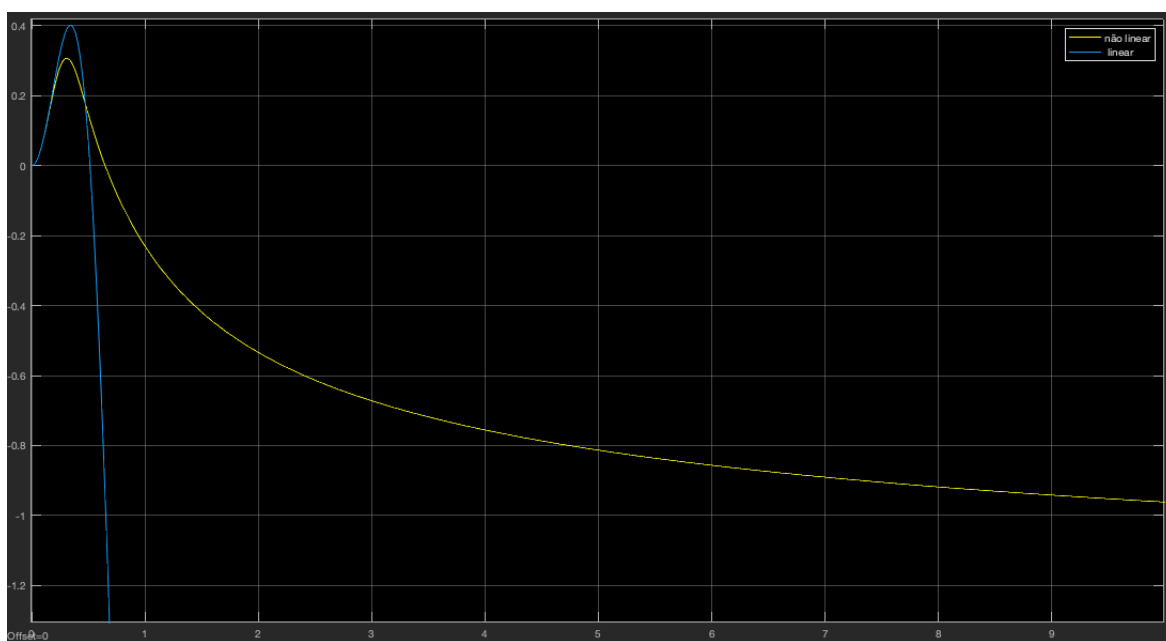


Figura 8: Gráfico do sistema não linear e linearizado, $F = 2000\text{N}$