# Experiência 3 - Controle PID

Rodrigo Seiji Piubeli Hirao (186837)

16 de maio de 2021

## Conteúdo


**1 Preliminares** **2**

1.1 Erros dos sistemas dervativos . . . . . . 2

1.2 Sistema $PI\&D$ . . . . . . 2

1.3 Sistema $PID$ . . . . . . 3

1.4 Sistema $PI\&D$ com $k_p$ na malha interna . . . . . . 3

1.5 Comparando os 3 sistemas . . . . . . 3

**2 Efeito da ação integral (degrau)** **3**

2.1 . . . . . . 3

2.2 . . . . . . 4

2.3 . . . . . . 5

2.4 . . . . . . 6

2.5 . . . . . . 6

**3 Efeito da ação integral (rampa)** **7**

3.1 . . . . . . 7

**4 Diagramas de BODE** **8**

# 1 Preliminares

## 1.1 Erros dos sistemas dervativos

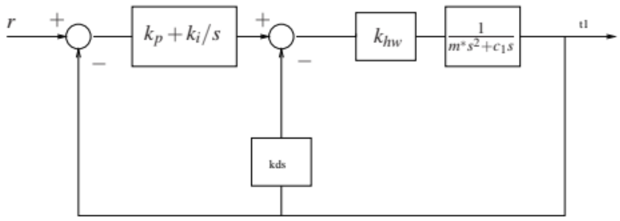


Figura 1: Diagrama do sistema PI&D

Dado a função de $G_p$:

$$G_p = \frac{k_{hw}}{m^*s^2 + c_1 s}$$

Temos as seguintes funções de trasferência para os sistemas PD e P&D ($k_i = 0$), respectivamente:

$$H_{PD} = \frac{(k_p + k_d s)G_p}{1 + (k_p + k_d s)G_p} = \frac{k_p k_{hw} + k_d k_{hw} s}{m^* s^2 + (k_d k_{hw} + c_1)s + k_p k_{hw}}$$

$$H_{P\&D} = \frac{k_p G_p}{1 + (k_p + k_d s)G_p} = \frac{k_p k_{hw}}{m^* s^2 + (k_d k_{hw} + c_1)s + k_p k_{hw}}$$

Assim, podemos calcular o erro como $e(\infty) = \lim_{s\to 0} s(H(s)R(s) - R(s))$ para PD:

$$e_{PD}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{(k_p k_{hw} + k_d k_{hw} s - (m^* s^2 + (k_d k_{hw} + c_1)s + k_p k_{hw}))R(s)}{m^* s^2 + (k_d k_{hw} + c_1)s + k_p k_{hw}}$$

$$e_{PD}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{(m^* s^2 + c_1 s)R(s)}{m^* s^2 + (k_d k_{hw} + c_1)s + k_p k_{hw}}$$

E para o $P\&D$:

$$e_{P\&D}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{(k_p k_{hw} - (m^* s^2 + (k_d k_{hw} + c_1)s + k_p k_{hw}))R(s)}{m^* s^2 + (k_d k_{hw} + c_1)s + k_p k_{hw}}$$

$$e_{P\&D}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{(m^* s^2 + (k_d k_{hw} + c_1)s)R(s)}{m^* s^2 + (k_d k_{hw} + c_1)s + k_p k_{hw}}$$

## 1.2 Sistema $PI\&D$

Para o sistema $PI\&D$ da Figura 1 temos a função de transferência:

$$H_{PI\&D} = \frac{(k_p + \frac{k_i}{s})G_p}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)G_p} = \frac{(k_p s + k_i)\frac{k_{hw}}{m^*}}{s^3 + \frac{k_d k_{hw} + c_1}{m^*}s^2 + \frac{k_p s + k_i}{m^*}k_{hw}}$$

Calculando seu erro para a entrada degrau temos:

$$e_{PI\&D}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{(s^3 + \frac{k_d k_{hw} + c_1}{m^*}s^2)R(s)}{s^3 + \frac{k_d k_{hw} + c_1}{m^*}s^2 + \frac{k_p s + k_i}{m^*}k_{hw}}, R(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{PI\&D}(\infty) = 0$$

E para a entrada rampa temos:

$$e_{PI\&D}(\infty) = 0$$

### 1.3 Sistema $PID$

Para o sistema $PID$ da Figura 1, ou seja, $k_d s$ na malha direta, temos a função de transferência:

$$H_{PI\&D} = \frac{(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)G_p}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)G_p} = \frac{(k_d s^2 + k_p s + k_i)\frac{k_{hw}}{m^*}}{s^3 + \frac{k_d k_{hw} + c_1}{m^*}s^2 + \frac{k_p s + k_i}{m^*}k_{hw}}$$

Calculando seu erro para a entrada degrau temos:

$$e_{PI\&D}(\infty) = \lim_{s \to 0} s\frac{(s^3 + \frac{c_1}{m^*}s^2)R(s)}{s^3 + \frac{k_d k_{hw} + c_1}{m^*}s^2 + \frac{k_p s + k_i}{m^*}k_{hw}}, R(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{PI\&D}(\infty) = 0$$

E para a entrada rampa temos:

$$e_{PI\&D}(\infty) = 0$$

### 1.4 Sistema $PI\&D$ com $k_p$ na malha interna

Já para o sistema $PI\&D$ da Figura 1, mas com $k_p$ na malha interna invés de estar na malha direta temos a função de transferência:

$$H_{PI\&D} = \frac{\frac{k_i}{s}G_p}{1 + (\frac{k_i}{s} + k_d s + k_p)G_p} = \frac{k_i \frac{k_{hw}}{m^*}}{s^3 + \frac{k_d k_{hw} + c_1}{m^*}s^2 + \frac{k_p s + k_i}{m^*}k_{hw}}$$

Assim vemos que o sistema perde o zero em $s = \frac{k_i}{k_p}$
Calculando seu erro para a entrada degrau temos:

$$e_{PI\&D}(\infty) = \lim_{s \to 0} s\frac{(s^3 + \frac{k_d k_{hw} + c_1}{m^*}s^2 + \frac{k_p k_{hw}}{m^*}s)R(s)}{s^3 + \frac{k_d k_{hw} + c_1}{m^*}s^2 + \frac{k_p k_{hw}}{m^*}s + \frac{k_i k_{hw}}{m^*}}, R(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{PI\&D}(\infty) = 0$$

E para a entrada rampa temos:

$$e_{PI\&D}(\infty) = \frac{k_p}{k_i}$$

### 1.5 Comparando os 3 sistemas

Nota-se então que o sistema $PID$ possui 2 zeros, enquanto o $PI\&D$ possui apenas 1 e ao mover o $k_p$ para a malha interna retiramos o último zero do sistema, assim o sistema não possui mais um erro nulo para uma entrada em rampa.

## 2 Efeito da ação integral (degrau)

### 2.1

Para termos uma frequência natural de $\omega_n = 14\pi rad/s$ temos que:

$$\sqrt{\frac{k_p k_{hw}}{m^*}} = 14\pi rad/s \to k_p = 0.1376$$

$$\frac{c_1 k_{hw} k_d}{2m^* \omega_n} = 1 \to k_d = 0.0061$$

E montando o sistema da Figura 2 com $k_i = 0$ (ou seja, o sistema não tem integração), conseguimos a resposta da Figura 3:

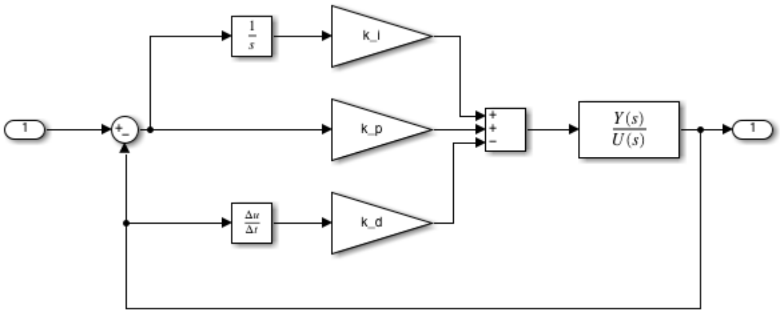


Figura 2: Sistema PI&D

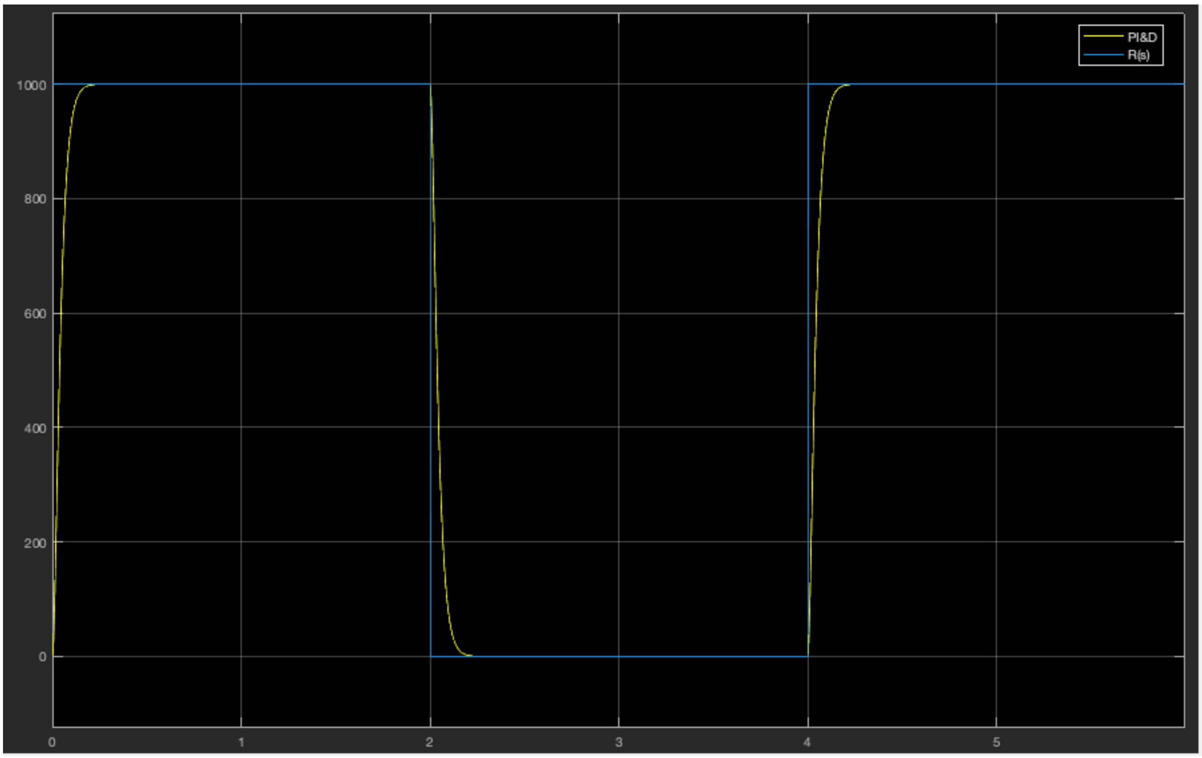


Figura 3: Resposta do sistema PI&D com $k_i = 0$

## 2.2

Usando $k_i = 1.1971$ no mesmo sistema temos a resposta da Figura 4, onde pode ser visto que foi adicionado um overshoot.

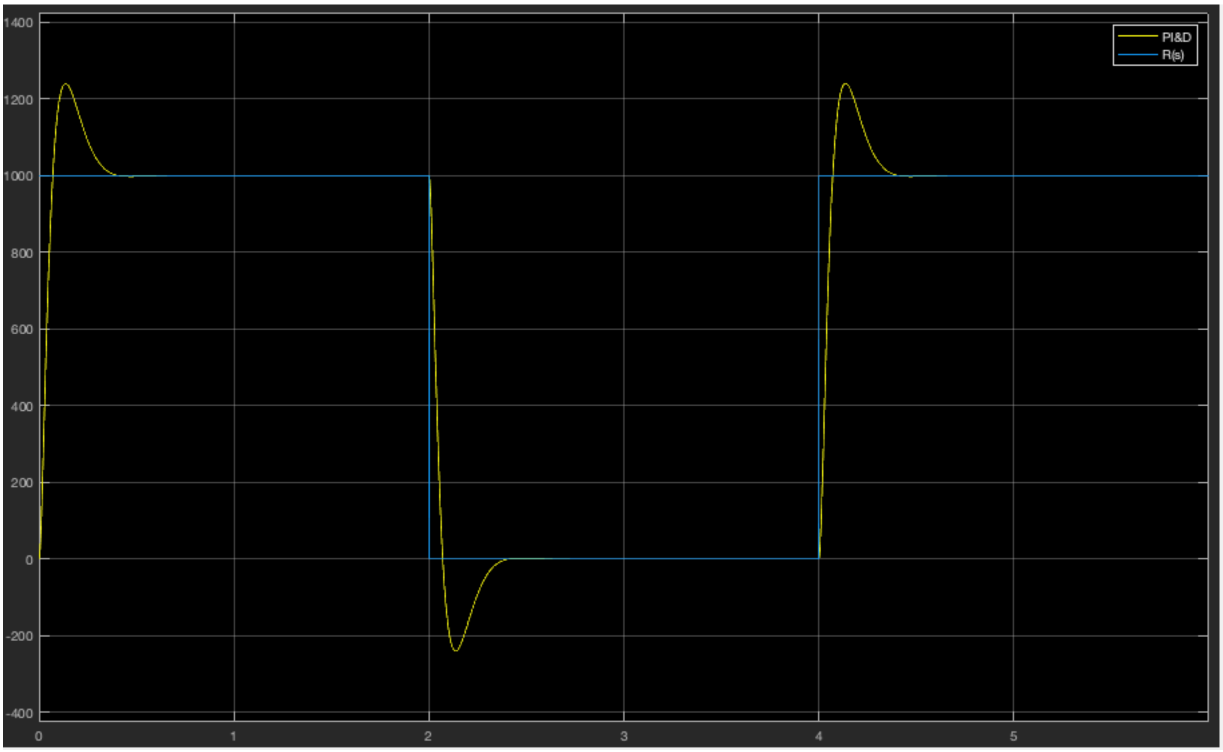


Figura 4: Resposta do sistema PI&D com $k_i = 1.1971$

## 2.3

usando o dobro do valor de $k_i$ (Figura 4) temos um overshoot ainda maior, mostrando a influência do integrador no overshoot.

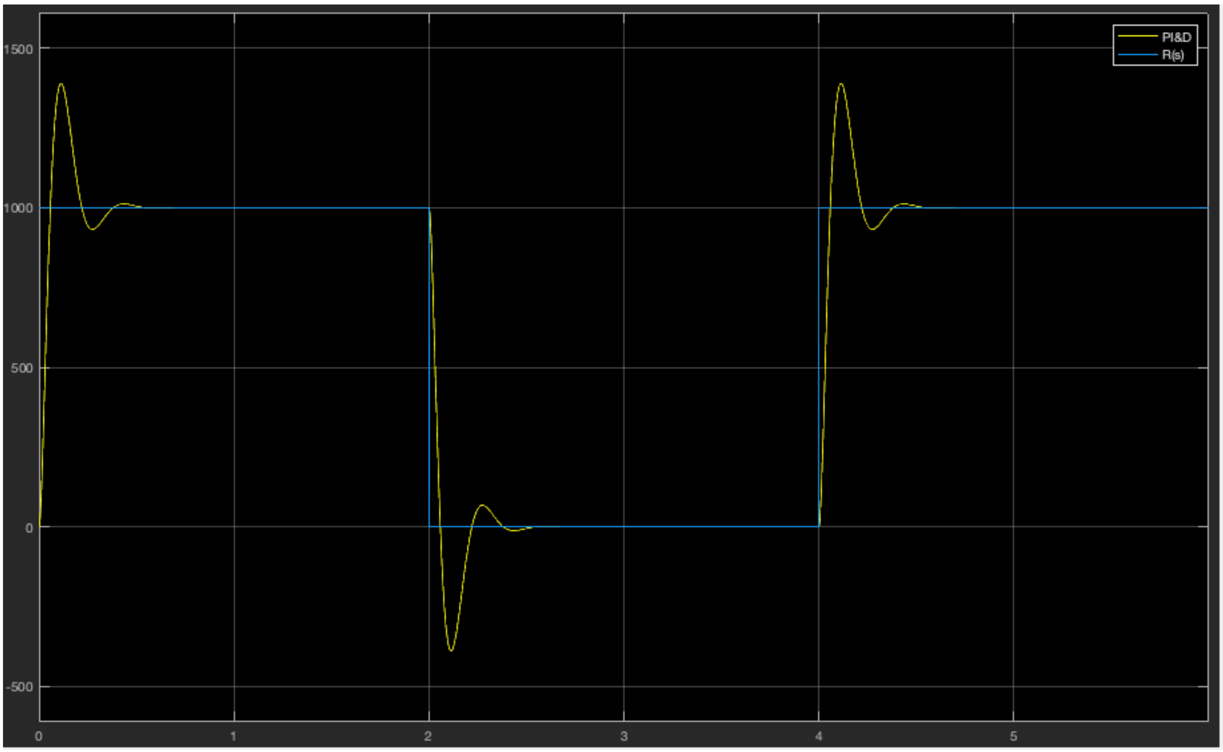


Figura 5: Resposta do sistema PI&D com $k_i = 2.3943$

## 2.4

Percebe-se que o efeito integrador não teve influência sobre o erro estacionário, pois o sistema $P\&D$ já tem um erro nulo para uma entrada degrau. Já o overshoot aumentou significativamente, fazendo o sistema não ser mais criticamente amortecido.

## 2.5

Analizando os polos e zeros das Figuras 5, 6 e 7, vemos que o sistema com $k_i = 0$ tem 2 polos reais iguais sendo criticamente amortecido, já usando $k_i \neq 0$, ou seja, usando o integrador, temos a adição de 2 polos imaginários conjugados dominantes, assim subamortecendo o sistema.

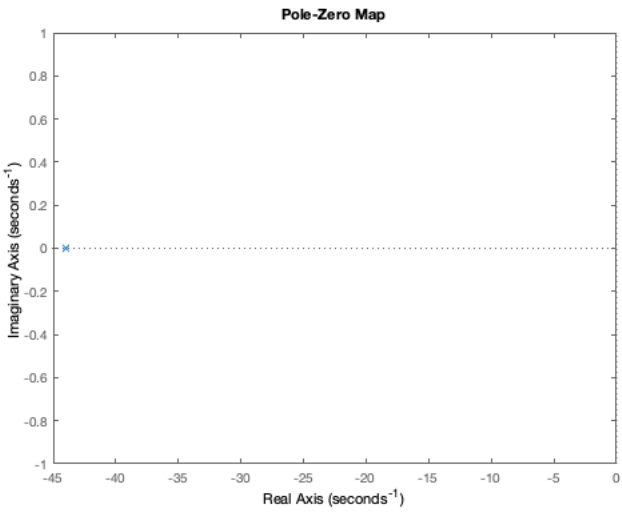


Figura 6: Polos e Zeros do sistema PI&D com $k_i = 0$

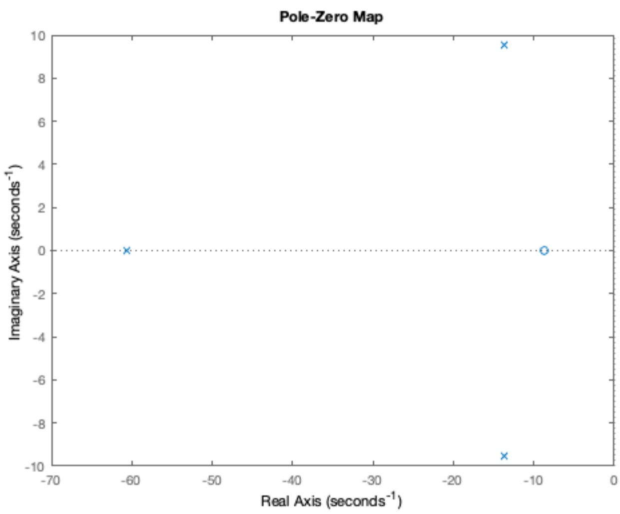


Figura 7: Polos e Zeros do sistema PI&D com $k_i = 1.1971$

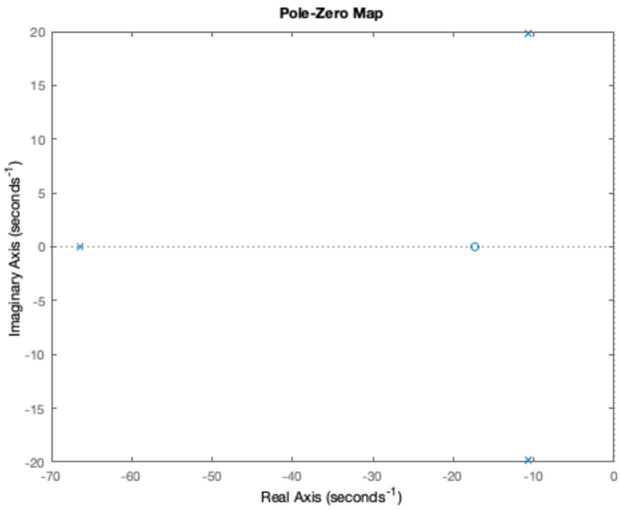


Figura 8: Polos e Zeros do sistema PI&D com $k_i = 2.3943$

# 3 Efeito da ação integral (rampa)

## 3.1

Usando o mesmo sistema da Figura 2, mas agora para a entrada rampa temos os resultados da Figura 8 ($k_i = 0$) e 9 ($k_i = 1.1971$) onde é visto que os sistemas onde $k_i = 0$, ou seja, os sistemas $PD$ e $P\&D$ possuem um erro constante em relação à rampa (também pode-se observar que o erro do sistema $PD$ é muito menor que o do sistema $P\&D$ pois $e_{PD_{rampa}}(\infty) = \frac{c_1}{k_p k_{hw}}$ e $e_{P\&D_{rampa}}(\infty) = \frac{k_p k_{hw} + c_1}{k_p k_{hw}}$ onde $k_p k_{hw} >> c_1$) enquanto os sistemas $PID$ e $PI\&D$ possuem erro nulo à rampa, o que foi calculado na sessão 1.2 e 1.3.

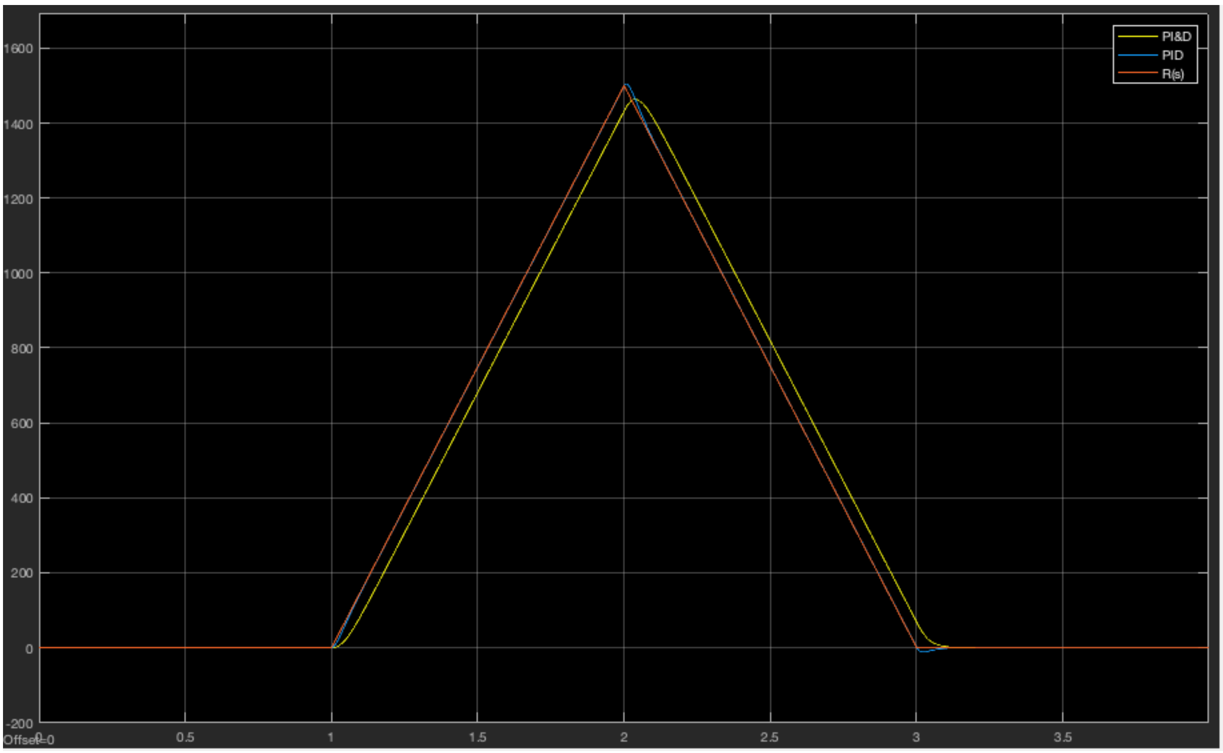


Figura 9: Resposta à rampa do sistema $PID$ e $PI\&D$ com $k_i = 0$

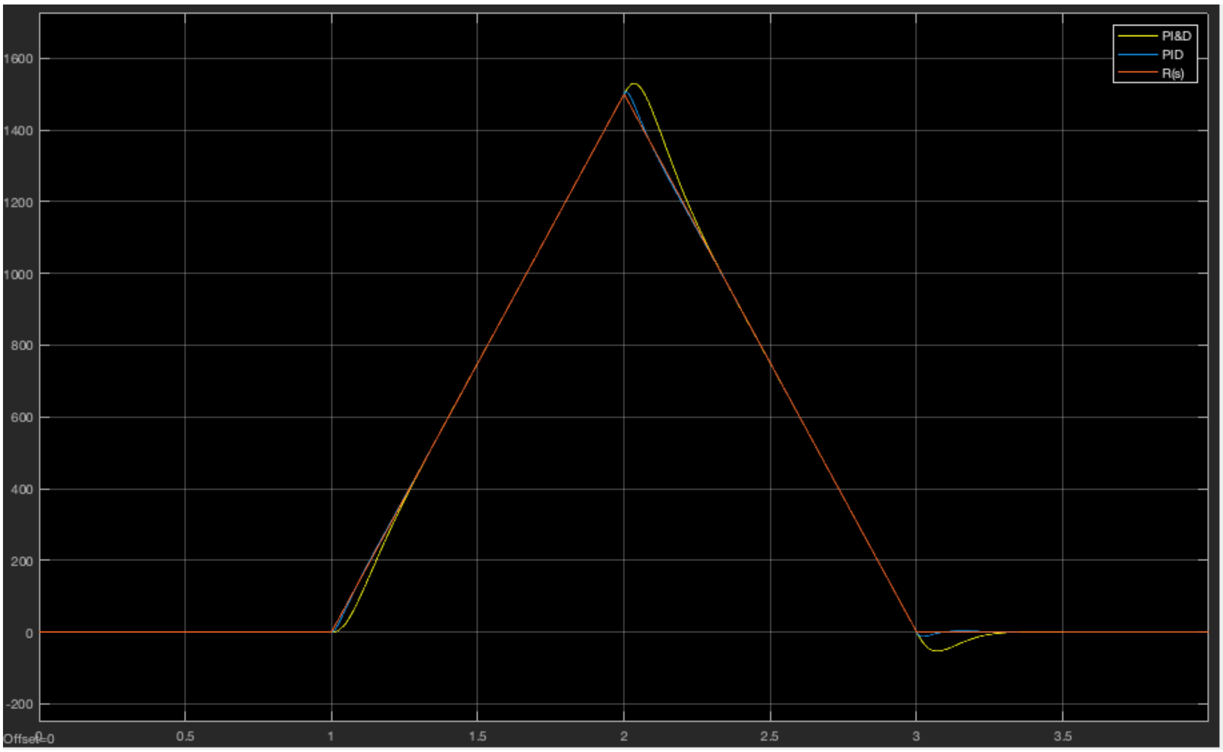


Figura 10: Resposta à rampa do sistema $PID$ e $PI\&D$ com $k_i = 1.1971$

# 4 Diagramas de BODE

Ao executar o sistema $PD$ e $P\&D$ com o sweep de entrada foi conseguido o sistema da Figura 11, então foi plotado o diagrama de BODE do sistema com ampliture absoluta (Figura 12) e com amplitude em dB (Figura 13), e visto que o pico está em aproximadamente $44rad/s$ que é próximo do esperado de $\omega_r = 42.1863rad/s$

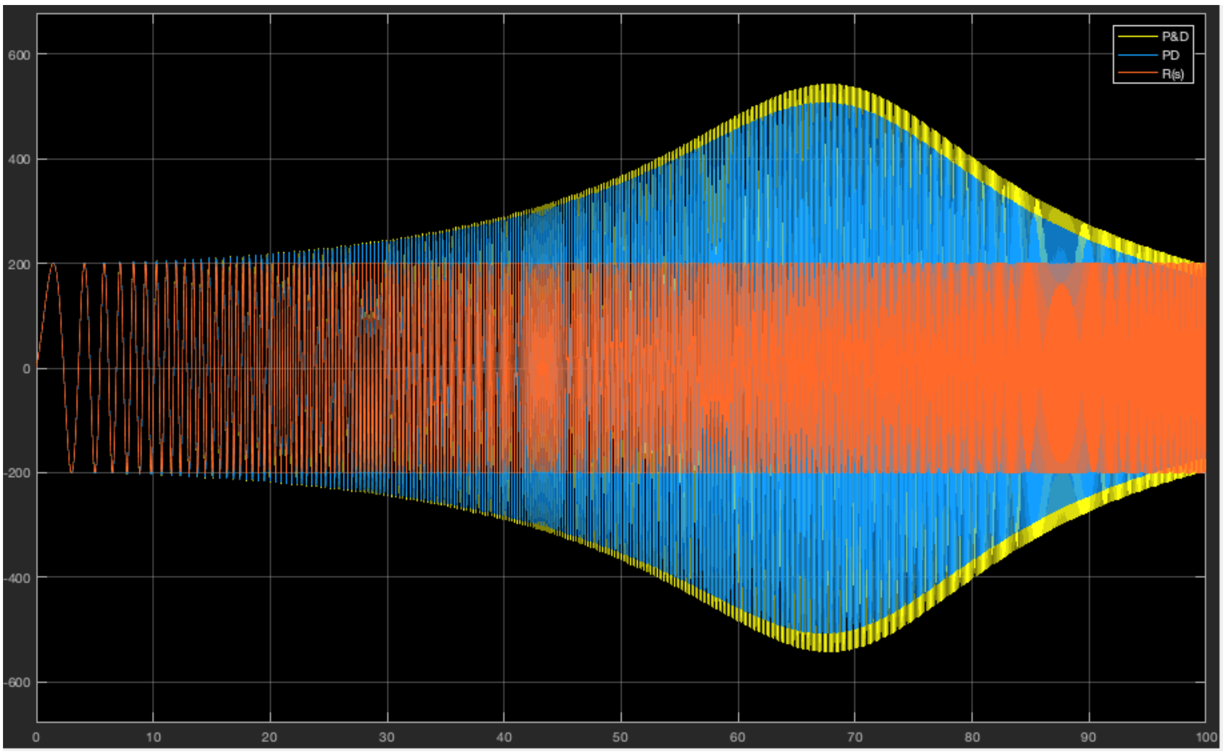


Figura 11: Resposta ao sweep do sistema $PD$ e $P\&D$

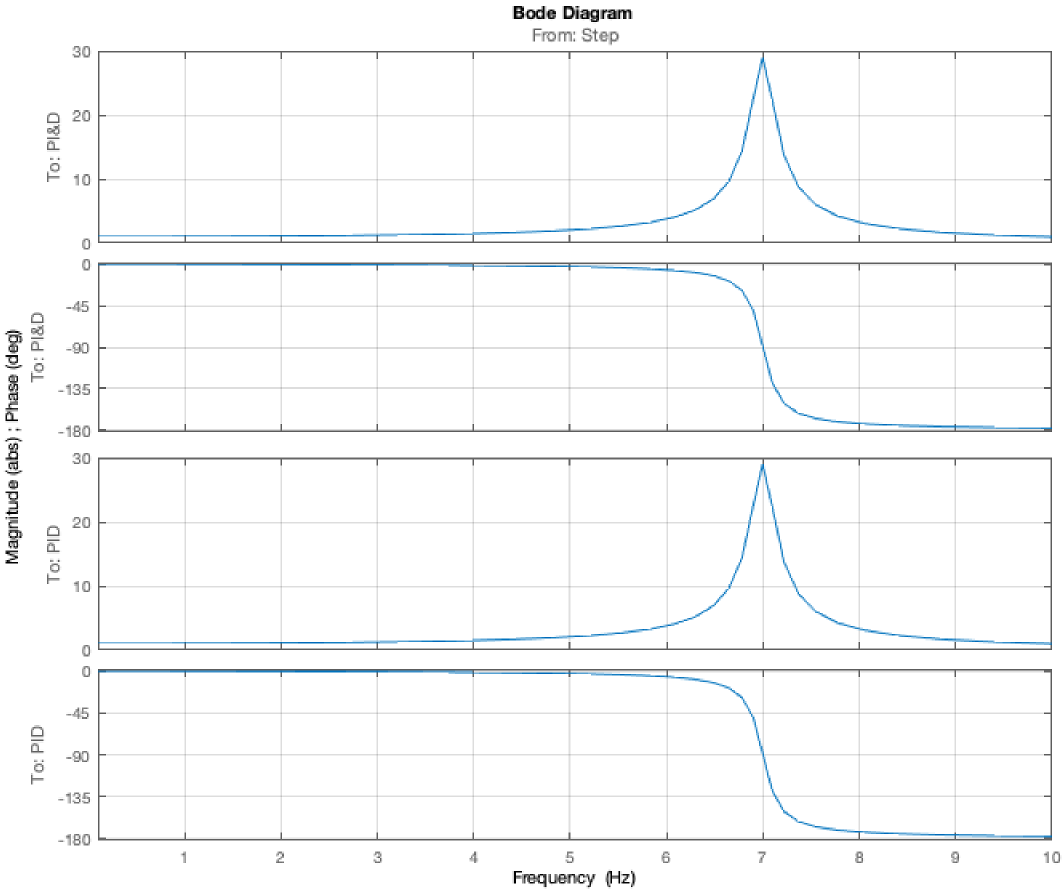


Figura 12: Diagrama de BODE do sistema $PD$ e $P\&D$

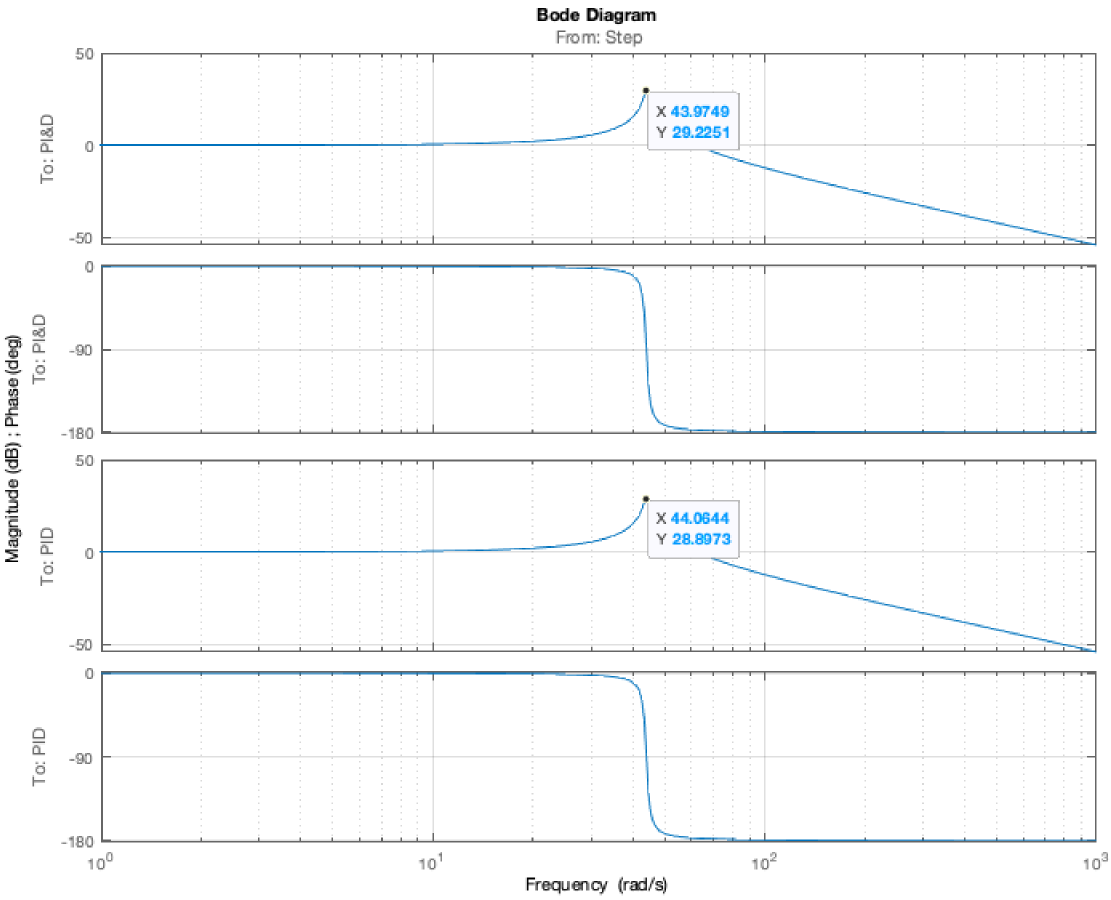


Figura 13: Diagrama de BODE com amplitide em dB do sistema $PD$ e $P\&D$