Prova de MA141 — 07/04/2015

Gabarito

Questão 1. (4 pt) *Consideremos o sistema linear*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x+y+z & = & 1 \\ 2x+(a+1)y+(b+1)z & = & 4 \\ x+y+bz & = & 3 \end{array} \right. ,$$

com 3 equações e 3 variáveis. Determinar os valores de a e b para os quais o sistema tem:

a) Solução única;
b) Várias soluções;
c) Nenhuma solução.
d) Nos casos (a) e (b) resolver o sistema.

Resolução:

A matriz aumentada do sistema é a matriz

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & a+1 & b+1 & | & 4 \\ 1 & 1 & b & | & 3 \end{array} \right)$$

Subtraindo da segunda linha 2 vezes a primeira e da terceira a primeira, obtemos a matriz

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 & | & 2 \\ 0 & 0 & b-1 & | & 2 \end{array} \right).$$

Subtraindo da segunda linha a terceira, obtemos a matriz

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & | & 2 \end{array} \right).$$

Caso $b=1$, a terceira linha fica $[0\ 0\ 0|2]$ que é do tipo $[0\ \cdots\ 0|k]$ com $k \neq 0$ (corresponde à equação $0x+0y+0z=2$), logo, neste caso ($b=1$), o sistema não tem solução.

Suponhamos $b \neq 1$.

Dividindo a terceira linha por $b-1$, obtemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/(b-1) \end{array}\right).$$

e, subtraindo da primeira linha a terceira, obtemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & (b-3)/(b-1) \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/(b-1) \end{array}\right).$$

Caso $a = 1$, a segunda coluna fica sem pivô, logo, o sistema tem infinitas soluções (y é uma variável livre)
e o conjunto solução é dado por

$$\begin{cases} x = & \frac{b-3}{b-1} - y \\ z = & \frac{2}{b-1} \end{cases}$$

Caso $a \neq 1$, dividindo a segunda linha por $a-1$, e, depois, subtraindo da primeira linha a segunda, obtemos a matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (b-3)/(b-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/(b-1) \end{array}\right),$$

a qual é a forma escalonada reduzida da matriz $(A|B)$, donde temos que a forma escalonada reduzida da matriz A é a matriz identidade (não tem colunas sem pivôs), logo, o sistema tem solução única (não há variável livre). Neste caso ($a \neq 1$ e $b \neq 1$), a solução é dada por

$$\begin{cases} x = & \frac{b-3}{b-1} \\ y = & 0 \\ z = & \frac{2}{b-1} \end{cases}$$

Questão 2. (2 pt) *Calcule* $\det A$, $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & a+1 & a+1 & a+1 \\ 1 & 2 & a+2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & a+3 \end{pmatrix}$.

<u>Resolução:</u>

$$\det A = a \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & a+1 & a+1 \\ 1 & 2 & a+2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & a+3 \end{pmatrix}.$$

Substituindo as linhas 2, 3 e 4 por estas menos a linha 1, o determinante não se altera (*"terceira" operação elementar*), logo,

$$\det A = a \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & a+2 \end{pmatrix} = a^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & a+2 \end{pmatrix}.$$

Agora, substituindo as linhas 1, 3 e 4 por elas menos a linha 2, obtemos

$$\det A = a^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix};$$

subtraindo da linha 2 a linha 4,

$$\det A = a^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix};$$

subtraindo da linha 3 a vezes a linha 4,

$$\det A = a^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2-a \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Daí, desenvolvendo o determinante em cofatores pela terceira linha, obtemos que $\det A = a^2(a^2 + a - 1)$.

Questão 3. (2 pt) *Calcular a inversa da matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Subtraindo das linhas 2, 3 e 4 a linha 1, obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

dividindo a linha 2 por 2 e somando à linha 1 a linha 4, obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

subtraindo da linha 4 a linha 3 e somando à linha 1 a linha 3,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

multiplicando as linhas 3 e 4 por -1, obtemos à esquerda a matriz identidade e à direita, a matriz inversa de A,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Questão 4. (2 pt) *Verificar se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. (Respostas sem justificativa não serão consideradas.)*

a) *Se A, B são matrizes $n \times n$, então $AB = BA$.*

Afirmação falsa. **0 pontos até aqui**

Por exemplo, tomando

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

temos que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) *Se A, B são matrizes $n \times n$, então* $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Afirmação falsa. **0 pontos até aqui**

Por exemplo, tomando

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

temos que $\det(A + B) = 1$ e $\det A + \det B = 0 + 0 = 0$.

c) *Se A é uma matriz $n \times n$ tal que $A^2 + A = I$ então A é invertivel.*

Verdadeira. **0 pontos até aqui**

Demonstração: $A^2 + A = I \Rightarrow A(A + I) = I$

logo, A é invertível, pois existe uma matriz B $(B = A + I)$ tal que $AB = I$.

d) *Se X_0 e X_1 são soluções do sistema linear $AX = B$ então $\frac{1}{3}X_0 + \frac{2}{3}X_1$ também é solução.*

Verdadeira. **0 pontos até aqui**

Demonstração:
$$\begin{aligned} A(\tfrac{1}{3}X_0 + \tfrac{2}{3}X_1) &= \tfrac{1}{3}A(X_0) + \tfrac{2}{3}A(X_1) \\ &= \tfrac{1}{3}B + \tfrac{2}{3}B \\ &= (\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3})B = B. \end{aligned}$$