studocu

Prova 16 Abril 2019, questões e respostas

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

A Studocu não é patrocinada ou endossada por nenhuma faculdade ou universidade
Baixado por Adam Sandler (worav33123@huvacliq.com)

1	2	3	$\sum$

1ª Prova **Geometria Analítica** - Terça 16/04/2019 - Vespertino **Turma:**____

NOME:____ **RA:**__________

ATENÇÃO:

- **Não é permitido destacar as folhas**
- **Desligue o celular**
- **Incluir na prova, por favor, TODAS as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.**

Boa Prova!

1. Verificar se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. (Respostas sem justificativa no sero consideradas.)

   a) (*1,0 pt*) Seja $AX = B$ um sistema linear com m equações e n variáveis. Se $n < m$ o sistema nunca admite soluções. (FALSO) Por exemplo

   $$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x+2y &= 1 \\ 2x+3y &= 1 \end{cases}$$

   é um sistema com 3 equações e 2 variáveis e tem como solução $(-1,1)$.

   b) (*1,0 pt*) Toda matriz é produto de matrizes elementares. (FALSO) Considere por exemplo a matriz nula:

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   não pode ser nunca produto de elementares.

   c) (*1,0 pt*) Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $A^4 - A^2 + A = 3I_n$, então A invertível. (VERDADEIRO)

   $$A^4 - A^2 + A = 3I_n \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}(A^3 - A + I)\right) = I_n$$

   donde

   $$B = \left(\frac{1}{3}(A^3 - A + I)\right)$$

   é a inversa de A.

Baixado por Adam Sandler (worav33123@huvacliq.com)

d) (*1,0 pt*) Se A, B e C são matrizes $n \times n$, então $\det(A(B+C)) = \det(AB) + \det(AC)$.
(FALSO) Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então claramente $AB = B$ e $AC = C$ e $\det(B) = \det(C) = 0$ e como $B+C = A = I$ temos que $\det(A(B+C)) = 1$.

Baixado por Adam Sandler (worav33123@huvacliq.com)

2. Considere a matriz, que depende do parámetro k,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (*1,0 pt*) Determinar, para quais valores reais de k a matriz A invertvel.

b) (*1,5 pts*) Calcular a inversa, para o caso $k = 0$, utilizando operaes elementares nas linhas.

a) Para saber os valores de k que tornam a matriz A invertível, lembramos que uma matriz é invertível se o seu determinante for diferente de 0. Assim, calculamos o determinante de A

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 + (-1)^{2+3}(k-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 8k+8 \end{pmatrix} + 0 \\ &= -(k-1)(8k+8) \\ &= -8(k^2-1). \end{aligned}$$

Donde tiramos que A será invertível caso $k \notin \{-1, 1\}$.

b) Vamos calcular a inversa de A para o caso $k = 0$, isto é, quando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

fazendo operações elementares nas linhas de A. Assim, procedemos pelo método de Gauss, construimos a matriz $M = [A|I]$ e fazemos operações elementares até chegar na forma escalonada reduzida $\tilde{M} = [I|B]$ e nesse caso $B = A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -l_3 + l_2 \to l_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) l_3/8 \to l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{array}\right) 2l_3 + l_1 \to l_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{array}\right) (-1)l_2 \to l_2$$

Baixado por Adam Sandler (worav33123@huvacliq.com)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{array}\right) \; l_2 \leftrightarrow l_3 \; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Que está na forma escalonada reduzida. Então

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Considere o sistema linear nas três variáveis x, y, z

$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ (a+1)x + 2y + (a+2)z = 3b-2 \\ x + ay + (a+2)z = b+2 \end{cases}$$

i) (*2,0 pts*) Determinar os valores de a e b para os quais o sistema tem: solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução
ii) (*1,5 pts*) Nos casos onde tiver solução, resolver o sistema.

Primeiramente construimos escrevemos o sistema em forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ (a+1) & 2 & (a+2) \\ 1 & a & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3b-2 \\ b+2 \end{pmatrix}$$

e construimos a matriz aumentada do sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 2 \\ (a+1) & 2 & (a+2) & 3b-2 \\ 1 & a & a+2 & b+2 \end{array}\right)$$

E aplicamos o método de Gauss-Jordan para transformar o sistema num sistema mais simples, lembrando que ao manipular as expressões que tem a ou b não estivermos multiplicando por 0 ou dividindo por 0.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 2 \\ (a+1) & 2 & (a+2) & 3b-2 \\ 1 & a & a+2 & b+2 \end{array}\right) \; -l_3 + l_2 \to l_2 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 2 \\ a & 2-a & 0 & 2b-4 \\ 1 & a & a+2 & b+2 \end{array}\right)$$

$$-l_1 + l_3 \to l_3 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 2 \\ a & 2-a & 0 & 2b-4 \\ 0 & 0 & a+2 & b \end{array}\right)$$

Temos assim um novo sistema, cuja matriz principal é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

Baixado por Adam Sandler (worav33123@huvacliq.com)

Claramente se o $\det(A) \neq 0$ o sistema terá solução única pois, nesse caso, A é invertível. Caso $\det(A) = 0$ podem acontecer os outros casos, isto é, o sistema não ter solução ou ter infinitas soluções.
Como
$$\det(A) = (a+2)(2-a-a^2) = -(a+2)^2(a-1).$$
Temos que para $a \notin \{-2, 1\}$ o sistema possui solução única.

Caso $a \notin \{-2, 1\}$**:** Observamos que então $(2-a-a^2) = -(a+2)(a-2) \neq 0$.
Ressolvemos
$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ ax + (2-a)y = 2b-4 \\ (a+2)z = b \end{cases}$$
Então
$$z = \frac{b}{a+2}, \qquad y = \frac{2b-4-2a}{2-a-a^2} \qquad x = 2 - \frac{a(2b-4-2a)}{2-a-a^2}$$
Portanto
$$S = \left(2 - \frac{a(2b-4-2a)}{2-a-a^2}, \frac{2b-4-2a}{2-a-a^2}, \frac{b}{a+2}\right)$$
para todo $b \in \mathbb{R}$.

Caso $a = -2$**:** Neste caso a matriz aumentada do sistema equivalente fica
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & 2b-4 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right) \; 2l_1 + l_2 \to l_2 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$
Portanto se $b \neq 0$ o sistema não tem solução. Se $b = 0$, então o sistema é equivalente a
$$x - 2y = 2$$
cujo conjunto solução é
$$S = \{(2+2y, y, z), \; y, \; z \in \mathbb{R}\}$$

Caso $a = 1$**:** A matriz aumentada do sistema equivalente é
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2b-4 \\ 0 & 0 & 3 & b \end{array}\right)$$

Baixado por Adam Sandler (worav33123@huvacliq.com)

portanto, se $2b - 4 \neq 2$, isto é se $b \neq 3$ o sistema não possui solução. Caso $b = 3$ temos que o sistema fica

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ z & = & 1 \end{array} \right.$$

Donde

$$S = \{(x, 2 - x, 1),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Baixado por Adam Sandler (worav33123@huvacliq.com)