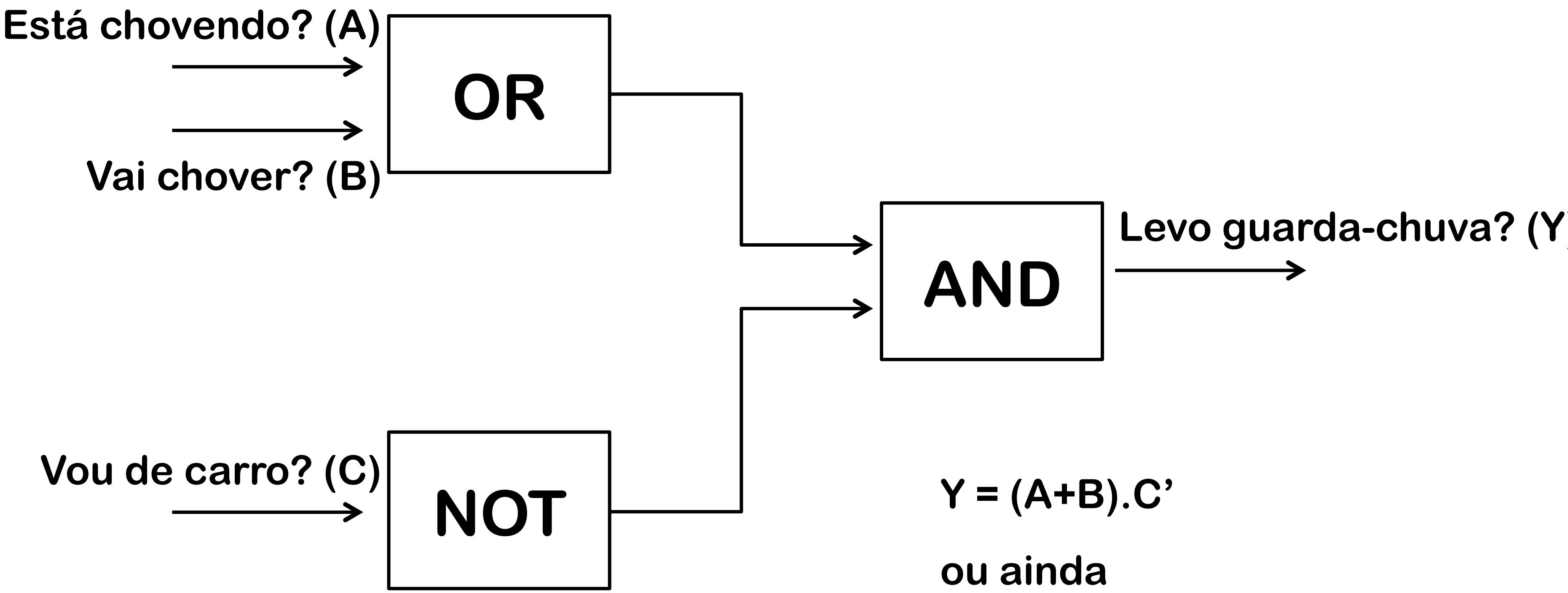
AULA 8
ÁLGEBRA DE CHAVEAMENTO

Profª Letícia Rittner

Motivação



$Y = (A+B).C'$

ou ainda

$Y = B.A.C' + B'.A.C' + B.C'$

Álgebra de Chaveamento

Álgebra de chaveamento

- Sistema algébrico que consiste:
  - Conjunto B = {0, 1}
  - Operações binárias:
    - OR: União
    - AND: Intersecção

Álgebra de chaveamento

Se *x* é uma variável de chaveamento:

- **$x \neq 0$, se e somente se $x = 1$**
- **$x \neq 1$, se e somente se $x = 0$**

Estes 2 valores são ditos *valores verdade* da variável *x*

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Significado dos valores verdade

- Níveis de tensão:
  - ALTO = 5 V = 1
  - BAIXO = 0 V = 0
- Capacitor carregado (1) ou descarregado (0)
- Chave fechada (1) ou aberta (0)
- Fusível intacto (1) ou queimado (0)

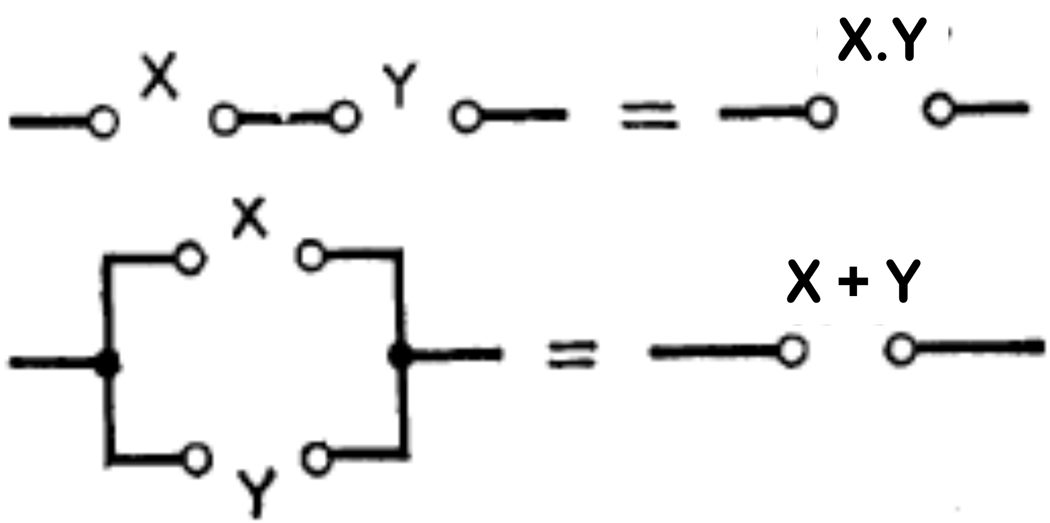
↓

Convenção de ***Lógica Positiva***

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Significado das operações

Convenção de ***Lógica Positiva***



Adaptado de Shannon (1938)

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Operações básicas

- **Operação OR (+)**

x	y	OR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Operações básicas

- Operação AND (.)

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Regra de Precedência

- Regra de precedência: NOT → AND → OR

Álgebra de chaveamento

Postulados (P_1 a P_4) são válidos

- P_1 – As operações + e . são comutativas
  - $x + y = y + x$ e $x . y = y . x$
- P_2 – Existem elementos identidade 0 e 1 relativos a cada operação + e . , respectivamente
  - $x + 0 = x$ e $x . 1 = x$
- P_3 – Cada operação é distributiva sobre a outra
  - $x . (y + z) = x . y + x . z$ e $x + (y . z) = (x + y) . (x + z)$
- P_4 – Para cada elemento *a* de *B* existe um elemento *a'* de *B* tal que
  - $a + a' = 1$ e $a . a' = 0$

Teoremas

Teorema 1

- $x + 1 = 1$
- $x \,.\, 0 = 0$

Teorema 2 (Lei da Idempotência

- $x + x = x$
- $x \,.\, x = x$

Teoremas

Teorema 3 (Lei da Involução)

- $(x')' = x$

Teorema 4 (Lei da absorção)

- $x + x.y = x$
- $x . (x + y) = x$

Teoremas

Teorema 5

- $x + x'.y = x + y$
- $x . (x' + y) = x.y$

Exercício

A partir dos postulados demonstre o Teorema 1

- $x + 1 = 1$
- $x \,.\, 0 = 0$

dual

$x + 1 = (x + 1).1$	P_2	$x\,.0 = (x\,.0) + 0$
$= (x + 1).(x + x')$	P_4	$= x.0 + x.x'$
$= x + (1.x')$	P_3	$= x.(0+x')$
$= x + x'$	P_2	$= x.x'$
$= 1$	P_4	$= 0$

Princípio da Dualidade

Qualquer teorema, propriedade ou identidade da Álgebra Booleana permanece válida se os "0"s e "1"s forem intercambiados, e as operações "AND" e "OR" forem intercambiadas também.

Exemplo:

$$x + x.y = x \rightarrow x.(x+y) = x$$

Teorema de De Morgan

Para 2 variáveis

- $(x + y)' = x' . y'$
- $(x . y)' = x' + y'$

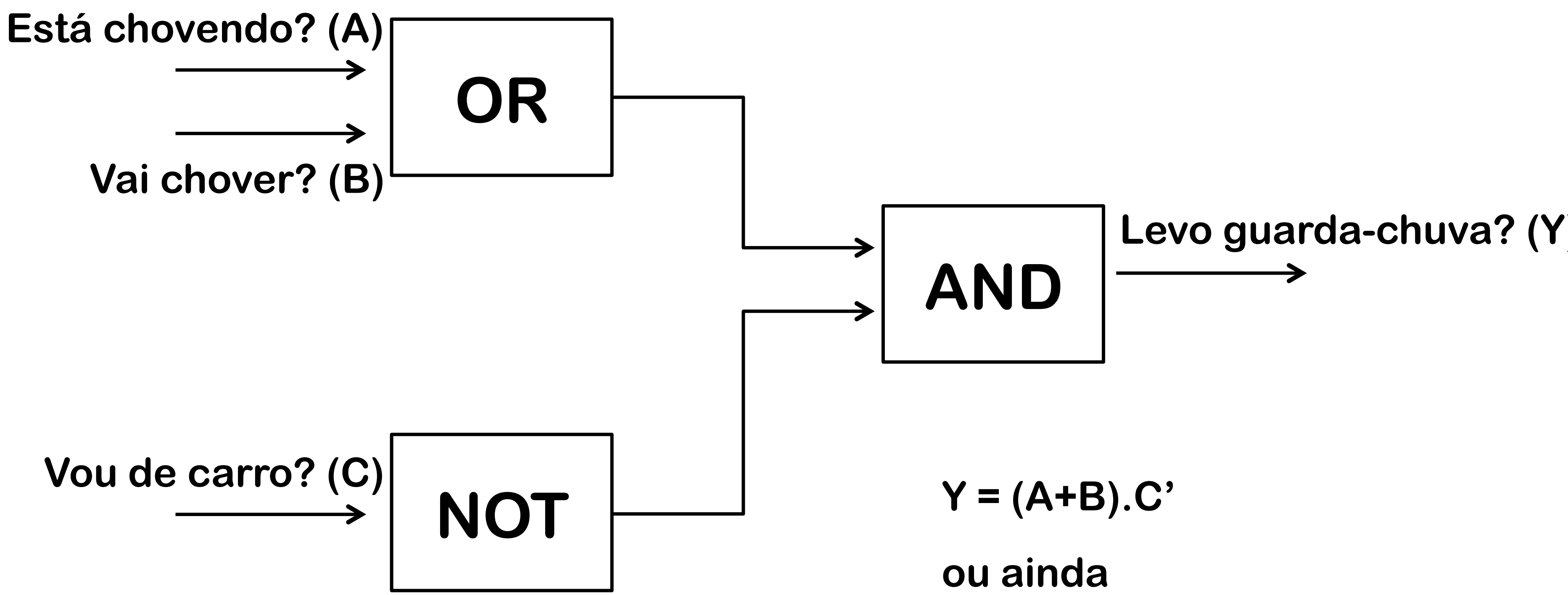
Para n variáveis (generalização)

- $(a + b + c + ... + n)' = a' . b' . c' . .... . n'$
- $(a . b . c . ... n)' = a' + b' + c' + ... + n'$

Expressões de chaveamento

- Uma expressão de chaveamento é uma combinação de um número finito de variáveis de chaveamento (x, y, z, ...) e constantes (0,1) através de operações de chaveamento (+ e .)
- Os postulados e teoremas apresentados são as ferramentas básicas para a simplificação de expressões de chaveamento

Retomando o exemplo inicial



Y = (A+B).C'

ou ainda

Y = B.A.C'+ B'.A.C'+ B.C'

Mostre que as equações são equivalentes!

Retomando o exemplo inicial

Mostre que as equações são equivalentes:

$Y = (A+B).C' = B.A.C' + B'.A.C' + B.C'$

$Y = B.A.C' + B'.A.C' + B.C' =$

$= A.C'(B+B') + B.C' =$

$= A.C'.1 + B.C' =$

$= A.C' + B.C' =$

$= (A+B).C'$

Exemplo 1

- A.B + A.B'=
- = A.(B + B') = (Distributiva)
- = A.1 =
- = A

x	y	A.B + A.B'
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Exemplo 2

- $A.B + A.B'.C + A.B'.C' =$
- $= A.(B + B'.C + B'.C') =$
- $= A.(B + C + B'.C') =$
- $= A.(B + C' + C) =$
- $= A.(B + 1) =$
- $= A.1 =$
- $= A$

Exemplo 3

- (A+B+C).(A+B'+C).(A+B+C') , fazendo X=A+B
- = (X+C).(A+B'+C).(X+C'), pela comutativa
- = (X+C).(X+C'). (A+B'+C), pela distributiva
- = (X+C.C').(A+B'+C)
- = (X+0).(A+B'+C)
- = X.(A+B'+C), substituindo X
- = (A+B).(A+B'+C) , pela distributiva
- = A+ B.(B'+C) , pela distributiva
- = A+B.B'+B.C
- = A+0+B.C = A +B.C

Para casa

- Demonstre o Teoremas 2 e o Teorema 4 (Lei da absorção) a partir dos postulados

Para casa

Simplifique

- $F = A.B + A.B'.C + A.B'.C'$

Resp: $F = A$

Para casa

Simplifique

- $G = (A+B).(A+B').(A'+B).(A'+B')$

Resp: $G = 0$

Para casa

Prove que: $((a+b')' + ((a'+b)' + (a+b+c)')')' = a.b' + b'.c'$

$((a+b')' + ((a'+b)' + (a+b+c)')')' =$	(De Morgan)
$= (a+b') . ((a'+b)' + (a+b+c)') =$	(De Morgan)
$= (a+b').(a.b'+ a'.b'.c') =$	(P3)
$= (a+b').a.b' + (a+b').a'.b'.c' =$	(P3)
$= a.a.b'+a.b'.b'+a.a'.b'.c'+a'.b'.b'.c'=$	(T2, P4)
$= a.b'+ a.b'+ 0 + a'.b'.c' =$	(T2, P2)
$= a.b' + a'.b'.c' =$	(P3)
$= b'.(a+a'.c') =$	(T5)
$= b'.(a + c') =$	
$= a.b' + b'c'$	