Gabarito 5-ma141

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

Gabarito Prova 5

- **1**
  - **a)** Achar a equação do plano π que contem

    1) o ponto $P=(1,2,1)$ e a reta $r: \begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 1-t \\ z &= 3-2t \end{cases}$.

    2) o ponto $P=(1,1,1)$ e a reta $r: \begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 1-2t \\ z &= 3-2t \end{cases}$.

    3) o ponto $P=(1,-1,1)$ e a reta $r: \begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 1-t \\ z &= 3-2t \end{cases}$.

    4) o ponto $P=(1,0,0)$ e a reta $r: \begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 1-t \\ z &= 3-2t \end{cases}$.
  - **b)** Achar uma equação parametrica do plano π.

Respostas:

- **1.1.a)** Sejam $Q=(1,1,3)$, $R=(0,0,1)\in r$ correspondem a $t=0$ e $t=1$. Logo

$$\overrightarrow{PQ}=(0,-1,2)\ ;\ \overrightarrow{PR}=(-1,-2,0).$$

Calculamos o normal ao plano

$$N=\det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-1\mathbf{k}.$$

Logo a equação do plano é $\pi: 4x-2y-z+f=0$. Como $P\in\pi$ resulta que $f=1$. Ou seja $\pi :: 4x-2y-z+1=0$.

1.1.b) $\pi:(x,y,z)=P+s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PR}$ ou seja

$$\begin{cases} x &= 1-s \\ y &= 2-t-2s \\ z &= 1+2t \end{cases}$$

- **1.2.a)** Sejam $Q=(1,1,3)$, $R=(0,-1,1)\in r$ correspondem a $t=0$ e $t=1$. Logo

$$\overrightarrow{PQ}=(0,0,2)\ ;\ \overrightarrow{PR}=(-1,-2,0).$$

Calculamos o normal ao plano

$$N=\det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}.$$

Logo a equação do plano é $\pi: 4x-2y+f=0$. Como $P\in\pi$ resulta que $f=-2$. Ou seja $\pi :: 4x-2y-z-2=0$.

1.2.b) $\pi:(x,y,z)=P+s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PR}$ ou seja

$$\begin{cases} x &= 1-s \\ y &= 1-2s \\ z &= 1+2t \end{cases}$$

- **1.3.a)** Sejam $Q=(1,1,3)$, $R=(0,0,1)\in r$ correspondem a $t=0$ e $t=1$. Logo

$$\overrightarrow{PQ}=(0,2,2)\ ;\ \overrightarrow{PR}=(-1,1,0).$$

Calculamos o normal ao plano

$$N=\det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}.$$

Logo a equação do plano é $\pi: -2x-2y+2z+f=0$. Como $P\in\pi$ resulta que $f=-2$. Ou seja $\pi :: -2x-2y-z-2=0$.

1.3.b) $\pi : (x, y, z) = P + s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}$ ou seja

$$\begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= -1 + 2s + t \\ z &= 1 + 2s \end{cases}$$

- **1.4.a)** Sejam $Q = (1, 1, 3)$, $R = (0, 0, 1) \in r$ correspondem a $t = 0$ e $t = 1$. Logo

$$\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 3) \ ; \ \overrightarrow{PR} = (-1, 0, 1).$$

Calculamos o normal ao plano

$$N = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}.$$

Logo a equação do plano é $\pi : x - 3y + z + f = 0$. Como $P \in \pi$ resulta que $f = -1$. Ou seja $\pi :: x - 3y + z - 1 = 0$.

1.4.b) $\pi : (x, y, z) = P + s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}$ ou seja

$$\begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= 1 + s \\ z &= 3s + t \end{cases}$$

- **2)** As retas r e s são dadas por
  1)
$$r : x = 1 + t \ ; \ y = -t \ ; \ z = 1$$
e
$$s : x + y + z = 0 \ ; \ x - 3y + 2z = 0$$
  2)
$$r : x = 1 + t \ ; \ y = 2 + t \ ; \ z = -1$$
e
$$s : x + y + z = 0 \ ; \ x - 3y + 2z = 0$$
  3)
$$r : x = t \ ; \ y = 2t \ ; \ z = 1$$
e
$$s : x + y + z = 0 \ ; \ x - 3y + 2z = 0$$
  4)
$$r : x = t \ ; \ y = t \ ; \ z = t$$
e
$$s : x + y + z = 0 \ ; \ x - 3y + 2z = 1$$
  - **a)** Encontrar a distância entre as retas r e s.
  - **b)** Encontrar $P \in r$ e $Q \in s$ tais que
$$d(r, s) = d(P, Q).$$
- **2.1.a** Achamos a reta s na forma parametrica
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Logo
$$s : \begin{cases} x &= -5r \\ y &= r \\ z &= 4r \end{cases}$$
Assim $V_r = (1, -1, 0)$ e $V_s = (-5, 1, 4)$ são os vetores diretores de r e s respetivamente e claro $P = (1, 2, -1) \in r$ e $Q = (0, 0, 0) \in s$. As retas r e s são reversas, pois não são paralelas se $V_s = \lambda V_r$ resulta que $-5 = \lambda$ e $-1 = \lambda$ o que é absurdo. Tambem não são concorrentes pois
$$\begin{cases} -5r - t &= 1 \\ r + t &= 2 \\ 4r &= -1 \end{cases}$$
Não tem solução.

Utilizamos a formula
$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (V_r \times V_s)|}{\|V_r \times V_s\|}.$$
Calculamos
$$V_r \times V_s = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$
Logo
$$d(r, s) = \frac{|(-1, 0, -1) \cdot (-4, 4, -6)|}{\|(4, -4, 6)\|} = \frac{10}{\sqrt{136}}.$$
2.1.b Sejam $P_r = (1 + t, -t, 1)$ e $P_s = (-5r, r, 4r)$ pontos genericos de r e s respectivamente. Então
$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-5r - t - 1, r + t, 4r - 1).$$
Temos que encontrar r e s que resolvem
$$\overrightarrow{P_r P_s} \cdot V_r = 0 \ ; \ \overrightarrow{P_r P_s} \cdot V_s = 0$$
ou seja
$$\begin{cases} -6r - 2t &= 1 \\ 42r + 6t &= -1 \end{cases}$$

A solução é $r = \frac{1}{12}$ $t = -\frac{3}{4}$. Ou seja

$$P_r = (1 - \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1) \ ; \ P_s = (\frac{-5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{4}{12})$$

- **2.2.a** Achamos a reta s na forma parametrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$s : \begin{cases} x & = & -5r \\ y & = & r \\ z & = & 4r \end{cases}$$

Assim $V_r = (1, 1, 0)$ e $V_s = (-5, 1, 4)$ são os vetores diretores de r e s respetivamente e claro $P = (1, 2, -1) \in r$ e $Q = (0, 0, 0) \in s$. As retas r e s são reversas, pois não são paralelas se $V_s = \lambda V_r$ resulta que $-5 = \lambda$ e $1 = \lambda$ o que é absurdo. Tambem não são concorrentes pois

$$\begin{cases} -5r - t & = & 1 \\ r + t & = & 0 \\ 4r & = & 1 \end{cases}$$

Não tem solução.

Utilizamos a formula

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (V_r \times V_s)|}{\|V_r \times V_s\|}.$$

Calculamos

$$V_r \times V_s = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

Logo

$$d(r, s) = \frac{|(-1, -2, 1) \cdot (4, -4, 6)|}{\|(4, -4, 6)\|} = \frac{10}{\sqrt{136}}.$$

2.2.b Sejam $P_r = (1+t, 2+t, -1)$ e $P_s = (-5r, r, 4r)$ pontos genericos de r e s respectivamente. Então

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-5r - t - 1, r - t - 2, 4r + 1).$$

Temos que encontrar r e s que resolvem

$$\overrightarrow{P_r P_s} \cdot V_r = 0 \ ; \ \overrightarrow{P_r P_s} \cdot V_s = 0$$

ou seja

$$\begin{cases} -6r - 2t & = & 3 \\ 42r & = & 8 \end{cases}$$

A solução é $r = \frac{4}{21}$ $t = -\frac{29}{14}$. Ou seja

$$P_r = (1 - \frac{29}{14}, 2 - \frac{29}{14}, -1) \ ; \ P_s = (-\frac{20}{21}, \frac{4}{21}, \frac{16}{21})$$

- **2.3.a** Achamos a reta s na forma parametrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$s : \begin{cases} x & = & -5r \\ y & = & r \\ z & = & 4r \end{cases}$$

Assim $V_r = (1, 2, 0)$ e $V_s = (-5, 1, 4)$ são os vetores diretores de r e s respetivamente e claro $P = (0, 0, 1) \in r$ e $Q = (0, 0, 0) \in s$. As retas r e s são reversas, pois não são paralelas se $V_s = \lambda V_r$ resulta que $-5 = \lambda$ e $4 = 0\lambda$ o que é absurdo. Tambem não são concorrentes pois

$$\begin{cases} -5r - t & = & 0 \\ r - 2t & = & 0 \\ 4r & = & 1 \end{cases}$$

Não tem solução.

Utilizamos a formula

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (V_r \times V_s)|}{\|V_r \times V_s\|}.$$

Calculamos

$$V_r \times V_s = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 11\mathbf{k}.$$

Logo

$$d(r,s) = \frac{|(0,0,-1) \cdot (8,-4,11)|}{\|(4,-4,6)\|} = \frac{11}{\sqrt{136}}.$$

2.3.b Sejam $P_r = (t, 2t, 1)$ e $P_s = (-5r, r, 4r)$ pontos genericos de r e s respectivamente. Então

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-5r - t, r - 2t, 4r - 1).$$

Temos que encontrar r e s que resolvem

$$\overrightarrow{P_rP_s} \cdot V_r = 0 \ ; \ \overrightarrow{P_rP_s} \cdot V_s = 0$$

ou seja

$$\begin{cases} -3r - 5t &= 0 \\ 42r + 7t &= 4 \end{cases}$$

A solução é $r = \frac{20}{189}$ $t = -\frac{4}{63}$. Ou seja

$$P_r = (-\frac{4}{63}, -\frac{8}{63}, 1) \ ; \ P_s = (-\frac{100}{189}, \frac{20}{189}, \frac{80}{189})$$

- **2.4.a** Achamos a reta s na forma parametrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$s : \begin{cases} x &= -1 - 5r \\ y &= r \\ z &= 1 + 4r \end{cases}$$

Assim $V_r = (1,1,1)$ e $V_s = (-5,1,4)$ são os vetores diretores de r e s respetivamente e claro $P = (0,0,0) \in r$ e $Q = (-1,0,1) \in s$. As retas r e s são reversas, pois não são paralelas se $V_s = \lambda V_r$ resulta que $-5 = \lambda$ e $4 = \lambda$ o que é absurdo. Tambem não são concorrentes pois

$$\begin{cases} -5r - t &= 1 \\ r - t &= 0 \\ 4r - t &= -1 \end{cases}$$

Não tem solução.

Utilizamos a formula

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (V_r \times V_s)|}{\|V_r \times V_s\|}.$$

Calculamos

$$V_r \times V_s = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

Logo

$$d(r,s) = \frac{|(-1,0,1) \cdot (3,-9,6)|}{\|(3,-9,6)\|} = \frac{3}{\sqrt{126}}.$$

2.4.b Sejam $P_r = (t,t,t)$ e $P_s = (-1 - 5r, r, 1 + 4r)$ pontos genericos de r e s respectivamente. Então

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1 - 5r - t, r - t, 1 + 4r - t).$$

Temos que encontrar r e s que resolvem

$$\overrightarrow{P_rP_s} \cdot V_r = 0 \ ; \ \overrightarrow{P_rP_s} \cdot V_s = 0$$

ou seja

$$\begin{cases} -3t &= 0 \\ 42r &= 9 \end{cases}$$

A solução é $r = -\frac{3}{14}$ $t = 0$. Ou seja

$$P_r = (0,0,0)\ ;\ P_s = (\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1 + \frac{1}{7})$$

3) Verificar se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. (Respostas sem justificativa não serão consideradas. Justificativas tem que estar no conteudo da disciplina)

(1) Sejam π um plano e N_1 e N_2 vetores normais a π. Então existe um $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que $N_2 = \lambda N_1$.
(2) Existem dois planos π_1 e π_2 no espaço tais que $\pi_1 \cap \pi_2$ é um ponto.
(3) Dados três pontos quaisquer do espaço P_1, P_2 e P_3 existe um plano π que os contém.
(4) Sejam P um ponto e r uma reta. Assumimos que W é um vetor diretor de r e que $P_0 \in r$. Então

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \times W\|}{\|W\|}.$$

(5) Sejam $\pi_1 : x+y+z = 1$ e $\pi_2 = 2x-3y+4z = 0$ planos do espaço. Então $P = (0, 2, -1) \in \pi_1 \cap \pi_2$.
(6) A equação da reta no plano que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) esta dada por

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

(7) Sejam P_0, P_1 e P_2 pontos do espaço. Os pontos P_0, P_1 e P_2 são colineares se $(P_0P_1P_2) = 0$.
(8) Sejam $P_0 = (-1, 2, 0)$, $P_1 = (1-1, 1)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ e $P_3 = (1, 1, 1,)$. Então existe um plano π tal que $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \pi$.
(9) Sejam r, s e t retas tais que s e t são paralelas. Então o ângulo entre r e s é igual ao ângulo entre r e t. .
(10) O angulo entre os planos $\alpha : x + y + z = 1$ e $\beta : x - y - z = 5$ é de $\frac{\pi}{4}$.
(11) Sejam α e β planos no espaço tal que não são paralelos. Então o ângulo entre eles e distinto de zero.

Respostas:

(1) **Verdadeiro** Sejam N_1 e N_2 normais do plano π. Sejam $P_0, P_1, P_2 \in \pi$ tais que a representação parametrica de π é

$$\overrightarrow{P_0P} = s\overrightarrow{P_0P_1} + t\overrightarrow{P_0P_2}$$

Então

$$N_1 = \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} \ ; \ N_2 = \lambda_2 \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}.$$

com λ_1 e λ_1 não nulos. Logo $N_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} N_1$.

(2) **Falso** Considere as equações que determinan os planos,

$$\pi_1 : ax + by + cz + d = 0 \ ; \ \pi_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

Logo $\pi_1 \cap \pi_2$ é a solução do sistema linear

$$\begin{cases} ax + by + cz &= -d \\ a'x + b'y + c'z &= -d' \end{cases}$$

Sabemos que as soluções posiveis de um sistema linear com duas equações lineares e tres variaveis são o conjunto vazio, uma reta ou o plano.

(3) **Verdadeiro** Sejam P_1, P_2 e P_3 pontos no espaçodistintos dois a dois. A seguinte formula determina o único plano π que passa por P_1, P_2 e P_3,

$$\pi = \{P = (x, y, z) : \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\}$$

Se os tres pontos são iguais $P_1 = P_2 = P_3$ pegamos outros pontos P_4 e P_5 no espaço tais que P_1, P_4 e P_5 são distintos dois a dois e consideramos o único plano π que passa por P_1, P_4 e P_5. Resulta que $P_1, P_2, P_3 \in \pi$.

Se dois pontos são iguais, por exemplo $P_1 = P_2$ pegamos outro ponto P_4 no espaço tal que P_1, P_3 e P_4 são distintos dois a dois e consideramos o único plano π que passa por P_1, P_3 e P_4. Resulta que $P_1, P_2, P_3 \in \pi$.

(4) **Verdadeiro** Sejam P um ponto, r uma reta com W vetor diretor e $P_0 \in r$. Então

$$\begin{aligned} d(P,r)^2 &= \|P_0P\|^2 - \frac{(\overrightarrow{P_0P}\cdot W)^2}{\|W\|^2} \\ &= \frac{\|P_0P\|^2\|W\|^2 - \|P_0P\|^2\|W\|^2\cos^2\theta}{\|W\|^2} \\ &= \frac{\|P_0P\|^2\|W\|^2\sin^2\theta}{\|W\|^2} \\ &= \frac{\|\overrightarrow{P_0P}\times W\|^2}{\|W\|^2}. \end{aligned}$$

Assim

$$d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P}\times W\|}{\|W\|}.$$

(5) **Falso** Sejam $\pi_1 : x+y+z = 1$ e $\pi_2 = 2x-3y+4z = 0$ planos do espaço. Como $P = (0,2,-1) \notin \pi_2$, pois

$$2\times 0 - 3\times 2 + 4\times(-1) = -10 \neq 0,$$

claro que $P \notin \pi_1 \cap \pi_2$.

(6) **Verdadeiro** Observamos que

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

é uma equação linear em x e y, logo determina uma reta no plano. Se substituimos x e y por x_0 e y_0 ou x_1 e y_1 temos o determinante de uma matriz com duas linhas iguais logo o determinante é zero. Ou seja x_0 e y_0 ou x_1 e y_1 verificam a equação linear ou seja (x_0, y_0) e (x_1, y_1) pertencem a reta.

(7) **Falso** Os pontos $P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (1,0,0))$ e $P_2 = (0,1,0))$ não são colineares, pois

$$\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2} = (0,0,1) \neq (0,0,0).$$

E claro que $(P_0P_1P_2) = 0$.

(8) **Falso** Sejam $P_0 = (-1,2,0)$, $P_1 = (1-1,1)$, $P_2 = (0,1,0)$ e $P_3 = (1,1,1,)$. Calculamos

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (2,-3,1)\ ;\ \overrightarrow{P_0P_2} = (1,-1,0)\ ;\ \overrightarrow{P_0P_3} = (2,-1,1).$$

Como

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

não existe um plano π que contenha os pontos P_0, P_1, P_2 e P_3.

(9) **Verdadeiro** Sejam V_r, V_s e V_t os vetores diretores das retas r, s e t respectivamente. Como s e t são paralelas podemos considerar que $V_s = V_t$. O angulo entre as retas é o ângulo entre os vetores diretores, logo o angulo entre r e s é igual ao ângulo entre r e t.

(10) **Falso** O angulo entre os planos $\alpha : x+y+z = 1$ e $\beta : x-y-z = 5$ é o angulo entre seus vetores normais. Considere $N_\alpha = (1,1,1)$ e $N_\beta = (1,-1,-1)$ vetores normais dos planos α e β.

$$\cos\theta = \frac{|N_\alpha\cdot N_\beta|}{\|N_\alpha\|\|N_\beta\|} = \frac{1}{3} \neq \cos\frac{\pi}{4}.$$

(11) **Verdadeiro** Sejam N_α e N_β vetores de norma 1 normais aos planos α e β respectivamente. Sabemos que $\cos\theta = |N_\alpha \cdot N_\beta|$ onde θ é o ângulo entre os planos α e β.

Logo $\theta = 0$ implica que $|N_\alpha \cdot N_\beta| = 1 = \|N_\alpha\|\|N_\beta\|$, do teorema de Cauchy-Schwartz, temos que existe λ tal que $N_\beta = \lambda N_\alpha$, isto é α e β são paralelos.

Claro que se α e β são paralelos, então existe um λ tal que $N_\beta = \lambda N_\alpha$. Logo o ûlo entre os planos α e β é zero.