Aula 12: Oscilações Eletromagnéticas

Curso de Física Geral III

F-328

1º semestre, 2017

IFGW
Instituto de Física Gleb Wataghin

Oscilações eletromagnéticas (LC)

Vimos que:

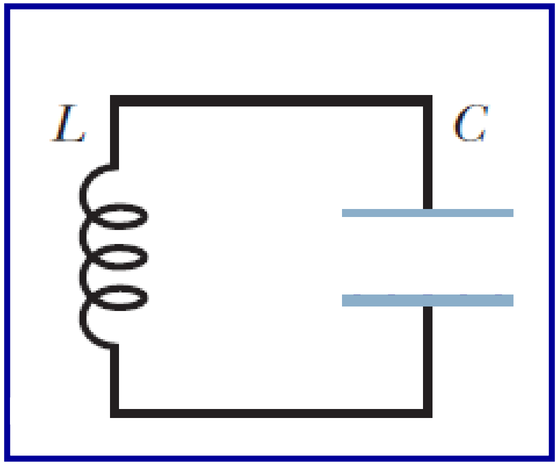
Circuitos *RC* e *RL*:

- $q(t)$, $i(t)$ e $V(t)$: comportamento exponencial

Veremos que:

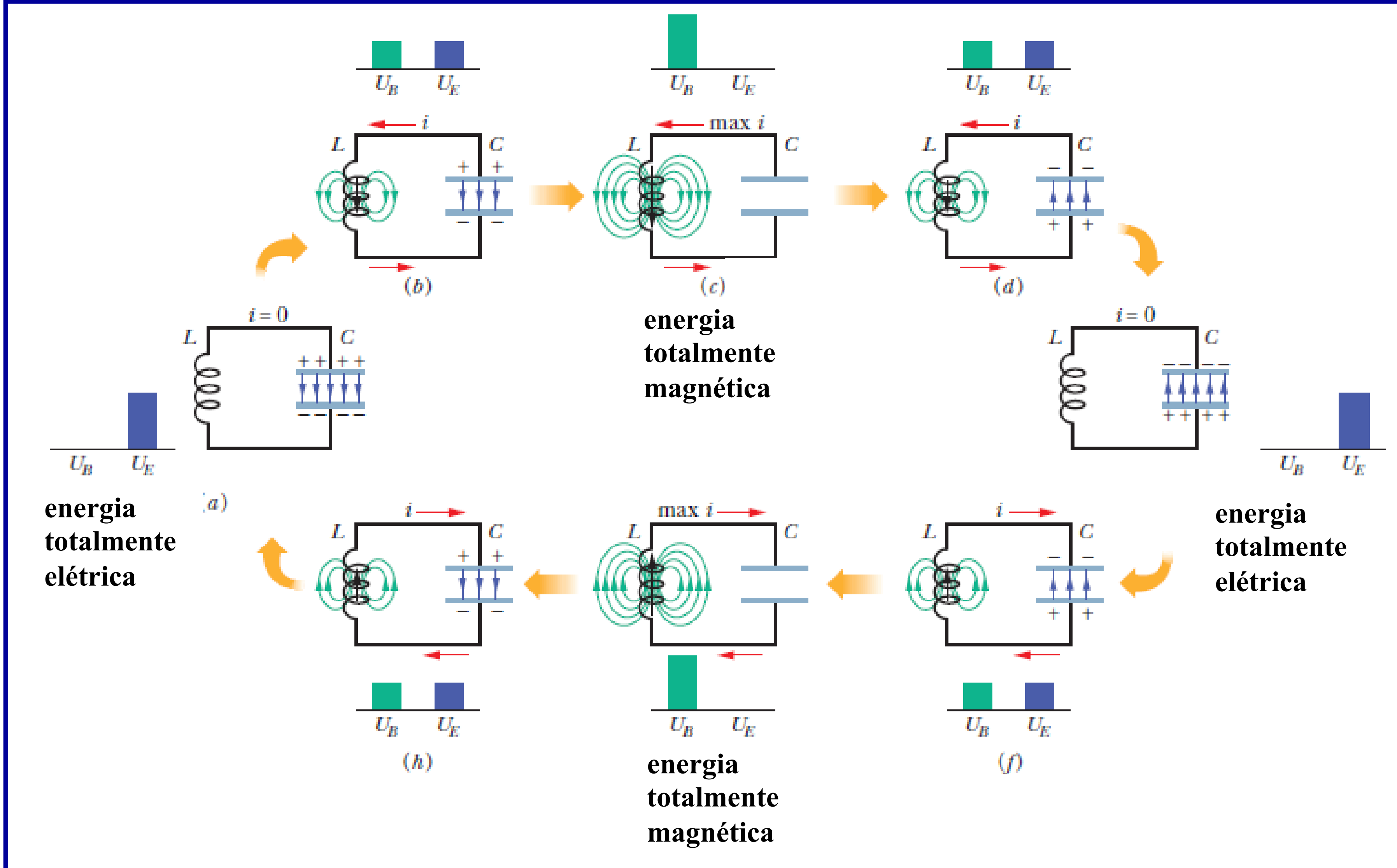
Circuito *LC*:

- $q(t)$, $i(t)$ e $V(t)$: comportamento senoidal
- Oscilações
  - campo elétrico do capacitor
  - campo magnético do indutor



→ Oscilações eletromagnéticas

Oscilações eletromagnéticas (LC)



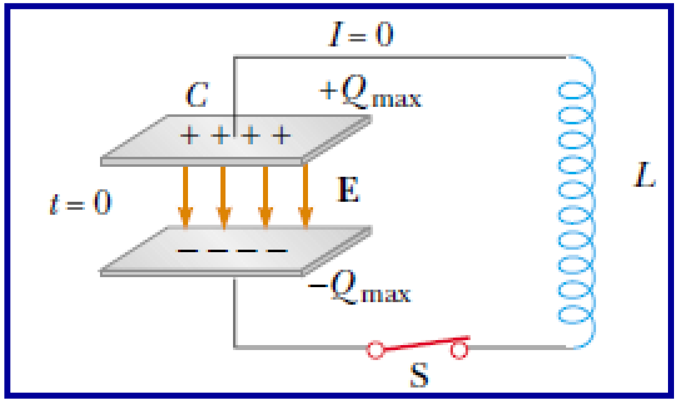
Oscilações eletromagnéticas (LC)

Simulação dos estágios

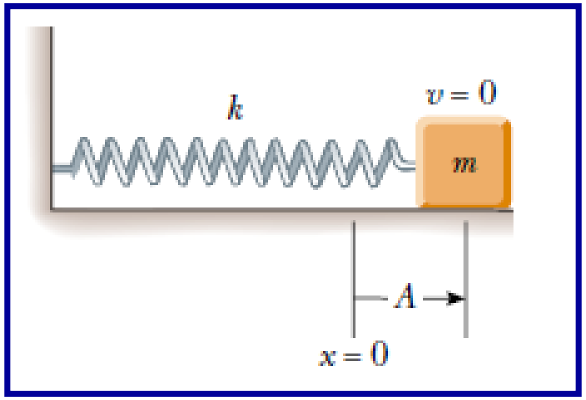
http://www.walter-fendt.de/ph14br/osccirc_br.htm

Osciladores harmônicos simples

Circuito *LC*



Sistema massa-mola



Elétrica: $U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ (do capacitor)

Magnética: $U_B = \frac{1}{2}Li^2$ (do indutor)

$U_B \Leftrightarrow U_E$

Total: $U_E + U_B = U = cte$

Potencial: $U_p = \frac{1}{2}kx^2$ (da mola)

Cinética: $U_c = \frac{1}{2}mv^2$ (do bloco)

$U_c \Leftrightarrow U_p$

Total: $U_p + U_c = U = cte$

Analogia eletromecânica (massa - mola)

No sistema massa-mola, em qualquer instante t, a energia total U é :

$$U = U_c + U_p$$

Se não houver atrito, U permanece constante, isto é:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \left(v = \frac{dx}{dt}\right)$$

Solução eq. diferencial: $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

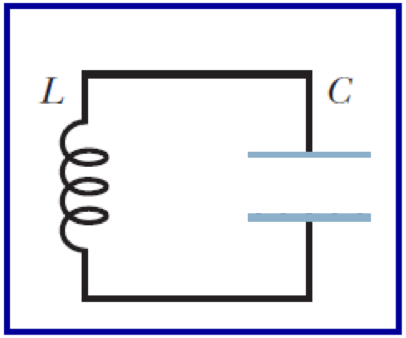
$\Rightarrow$ Movimento oscilatório

- $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$: Frequência angular natural
- X_m : Amplitude
- φ : Constante de fase

Analogia eletromecânica (oscilador LC)

Energia total oscilante : $U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ $\left(i = \frac{dq}{dt} \right)$

Como não há resistência no circuito, temos:



$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = 0 \iff \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Solução eq. diferencial: $q(t) = Q\cos(\omega_0 t + \varphi)$

⇒ Oscilações eletromagnéticas

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$: Frequência angular natural
- Q : Amplitude
- φ : Constante de fase

Corrente: $i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi) = -I \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi)$

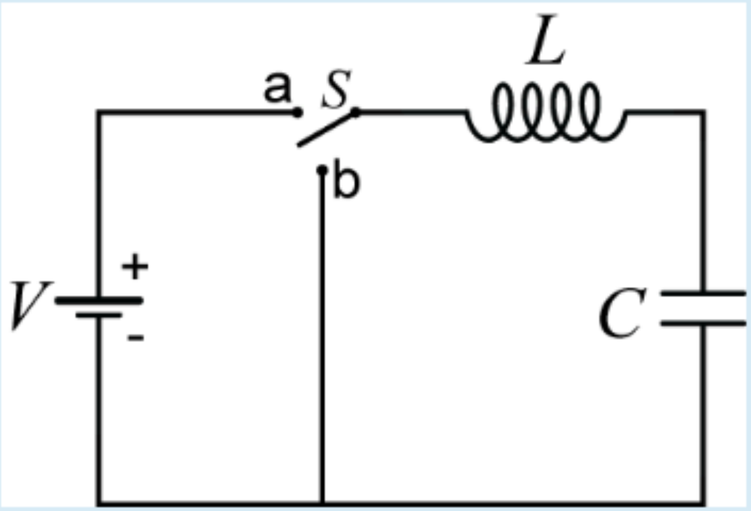
Analogia eletromecânica

	Circuito *LC*	Sistema massa-mola
	$q(t) = Q\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$
Frequência angular:	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$
Amplitude:	Q	X_m
Constante de fase:	φ	φ
Correspondências entre os dois sistemas	$q \leftrightarrow x$ $i \leftrightarrow v$	$L \leftrightarrow m$ $\dfrac{1}{C} \leftrightarrow k$

A amplitude e a constante de fase são determinadas pelas condições iniciais [no circuito *LC*: $i(0)$ e $q(0)$].

Questão Moodle

A bateria da figura tem uma voltagem de 6V, a indutância é L = 12 mH e a capacitância é C = 8,0 μF. Suponha que o indutor e os fios têm resistência desprezível. A chave S ficou na posição a por um tempo muito longo e depois foi mudada para b. Qual é a carga no capacitor no instante t = 0,487 ms após essa mudança?



Escolha uma:

- a. 48 μC;
- b. 1,33 μC;
- c. 0,5 μC;
- d. zero;
- e. 72 μC;

Energias elétrica e magnética

A energia elétrica armazenada no capacitor em qualquer instante t é:

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

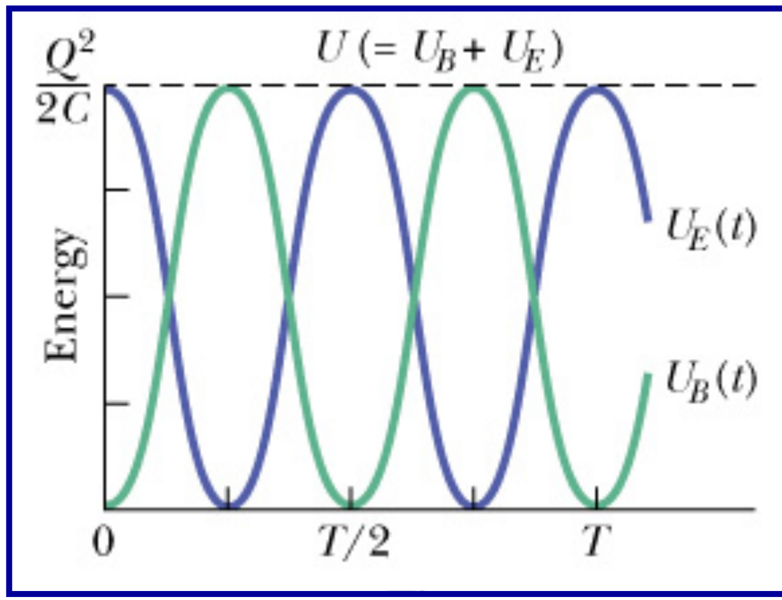
$$\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}\right)$$

Enquanto a energia magnética armazenada no indutor é:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\omega_0{}^2 Q^2 \mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) \Longleftrightarrow U_B = \frac{Q^2}{2C}\mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad U_E + U_B = \frac{Q^2}{2C}$$

A energia total permanece constante !



Questão Moodle

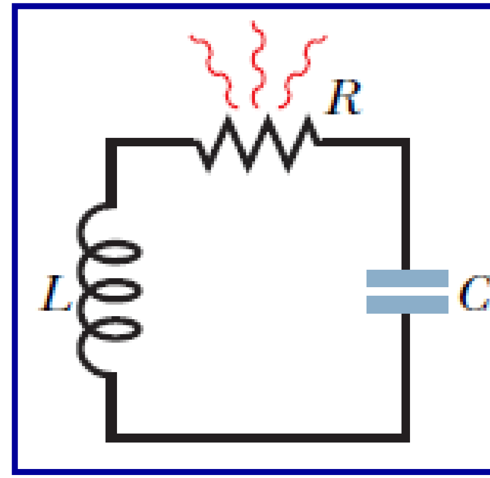
Um capacitor e um indutor são ligados em série. No instante $t = 0$ a corrente é zero, mas o capacitor está carregado. Em termos do período T das oscilações do circuito, o próximo instante após $t = 0$ em que a energia armazenada no campo elétrico do capacitor é máxima é:

Escolha uma:

- a. $T/4$;
- b. $2T$;
- c. $T/2$;
- d. $T/8$;
- e. T;

Oscilações amortecidas (circuito *RLC*)

Com um resistor R no circuito, a energia eletromagnética total U do sistema não é mais constante, pois diminui com o tempo na medida em que é transformada em energia térmica no resistor $\left(\frac{dU}{dt} < 0\right)$.



Energia Eletromagnética: $$U = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}$$

Potência dissipada: $$\frac{dU}{dt} = -Ri^2$$

$$\Rightarrow Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -Ri^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\left(i = \frac{dq}{dt}\right)$$

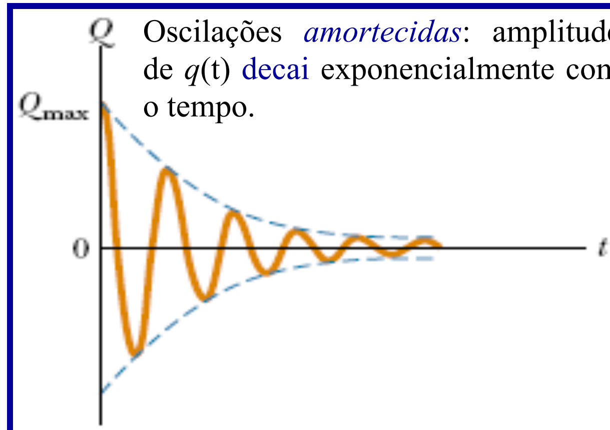
Oscilações amortecidas (circuito RLC)

Solução geral para o caso de amortecimento fraco $\left(R < \sqrt{4L/C}\right)$:

$$q(t) = Q_{max} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega' t + \varphi) \qquad \text{onde:} \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Se: $\frac{R}{2L} << \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega' \cong \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

(ω' aproxima-se da frequência angular natural do sistema)

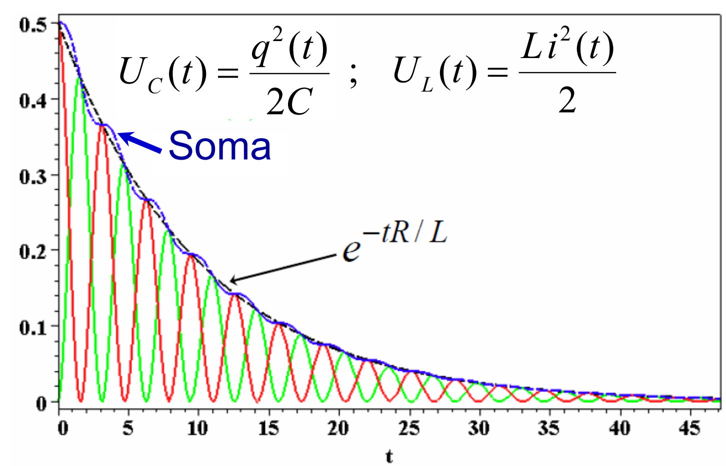


Oscilações *amortecidas*: amplitude de q(t) decai exponencialmente com o tempo.

Energia armazenada no campo elétrico do capacitor:

$$U_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{\left[Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \varphi)\right]^2}{2C}$$

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} e^{-Rt/L} \cos^2(\omega' t + \varphi)$$



Exemplo 1

Um circuito *RLC* série possui indutância L = 12 mH, capacitância C = 1,6 μF, e resistência R = 1,5 Ω.

a) Determinar o instante t tal que a amplitude das oscilações da carga no circuito seja 1/2 do seu valor inicial.

Queremos que: $$Q_{max}\, e^{-\frac{R}{2L}t} = 0{,}5\, Q_{max} \Rightarrow -\frac{Rt}{2L} = \ln 0{,}5$$

daí: $$t = -\frac{2L}{R}\ln 0{,}5 \Rightarrow t = 0{,}011\,s$$

b) Quantas oscilações foram completadas neste intervalo de tempo?

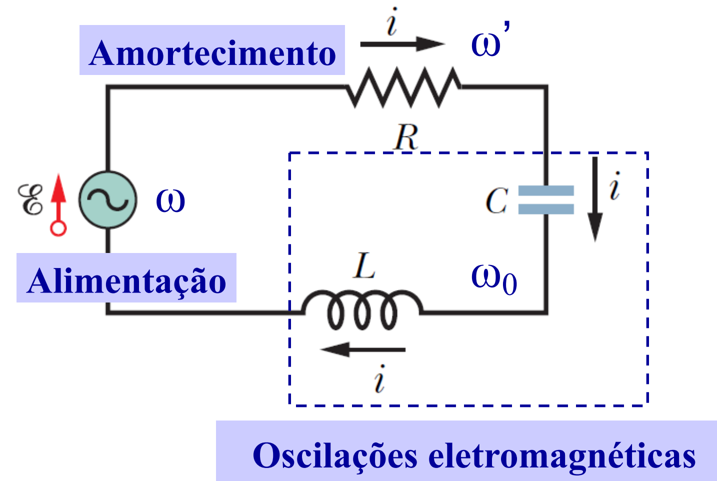
O tempo para uma oscilação completa é o período $T = \dfrac{2\pi}{\omega'}$.

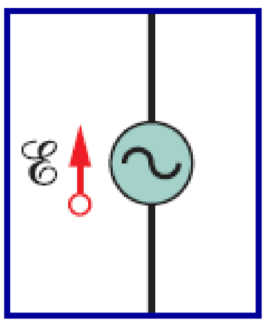
Neste caso, como $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 << \omega_0{}^2$, $\omega' \cong \omega_0$. Ou seja:

$$NT = t \Rightarrow N = \frac{t}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{ou} \quad N = \frac{0{,}011}{2\pi\left(12.10^{-3} \times 1{,}6.10^{-6}\right)^{\frac{1}{2}}} \cong 13$$

Oscilações forçadas (*RLC* com *fem*)

As oscilações de um circuito *RLC* não serão totalmente amortecidas se um dispositivo de *fem* externo fornecer energia suficiente para compensar a energia térmica dissipada no resistor.





Gerador de tensão alternada (*fem* ac): $\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) \\ i_{ac}(t) = I \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) \end{cases}$

ω : frequência angular propulsora

φ : fase; dependente do circuito

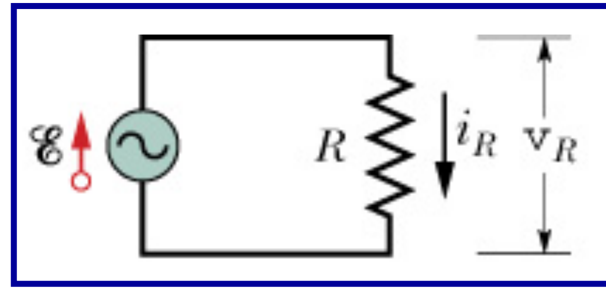
Oscilações forçadas [comportamento de $q(t)$, $i(t)$ e $V(t)$ **]:**

- Frequência: Qualquer que seja ω_0 (natural), essas grandezas oscilam com a frequência propulsora ω.

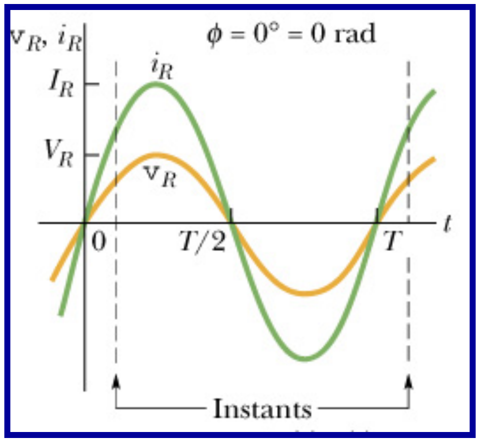
Circuito resistivo (R)

Um resistor ligado ao gerador de *fem alternada*:

$$\varepsilon = v_R = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) = V_R \operatorname{sen}(\omega t)$$



Corrente i_R no resistor: $i_R = \dfrac{v_R}{R} = \dfrac{V_R}{R} \operatorname{sen}(\omega t)$

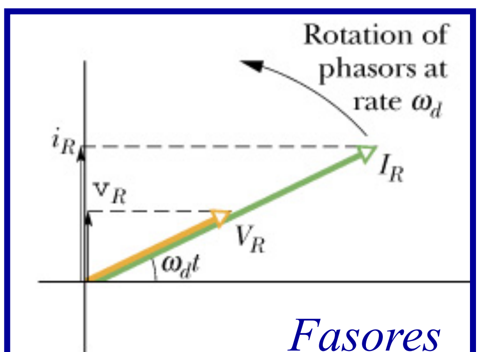


- Relação entre as amplitudes da corrente e da tensão no resistor:

$$I_R = \frac{V_R}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_R = I_R R}$$

Comparando i_R com a forma geral da corrente *ac*:

$$i_{ac}(t) = I \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$



➡ Corrente e tensão *(ddp)* estão *em fase* no resistor:

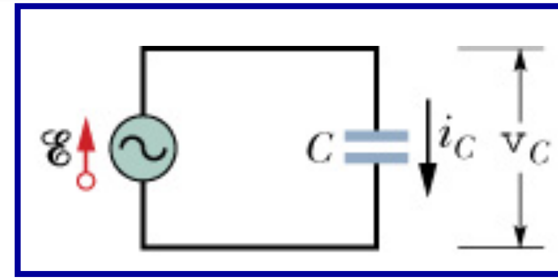
$$\Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad ; \quad i_R(t) = I_R \operatorname{sen}(\omega t)$$

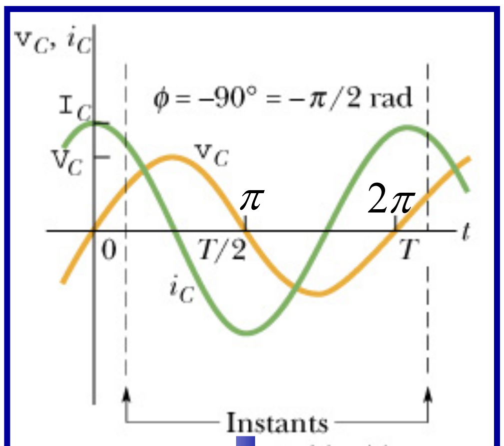
Circuito capacitivo (C)

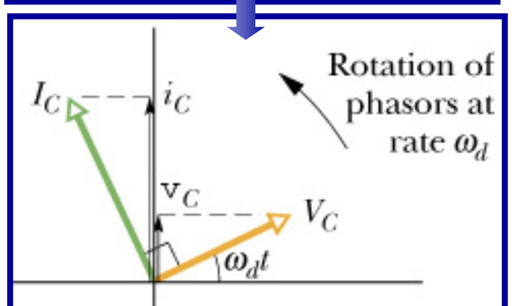
Tensão: $v_C = \varepsilon_m \,\mathrm{sen}(\omega t) = V_C \,\mathrm{sen}(\omega t)$

Carga: $q_C = C v_C = C V_C \mathrm{sen}(\omega t)$

Corrente: $i_C = \omega C V_C \cos(\omega t) = \omega C V_C \mathrm{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2})$







Fasores

Introduzindo a *reatância capacitiva*: $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

$$\Rightarrow \quad i_C = \frac{V_C}{X_C}\mathrm{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad i_{ac}(t) = I \,\mathrm{sen}(\omega t - \varphi)$$

- Relação entre as amplitudes da corrente e da tensão no capacitor:

$$\boxed{V_C = I_C X_C}$$

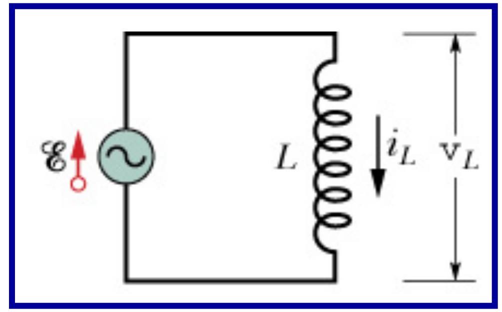
- Corrente está *adiantada* de $\dfrac{\pi}{2}$ em relação à tensão:

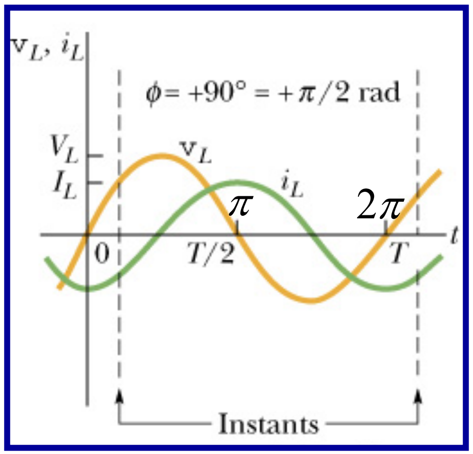
$$\Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

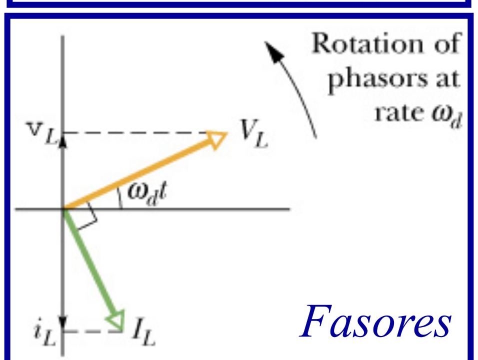
Circuito indutivo (L)

Tensão: $v_L = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) = V_L \operatorname{sen}(\omega t) = L\dfrac{di_L}{dt}$

Corrente: $i_L = \dfrac{V_L}{L}\displaystyle\int \operatorname{sen}(\omega t)dt = -\dfrac{V_L}{\omega L}\cos(\omega t)$







Introduzindo a *reatância indutiva*: $X_L = \omega L$

$$\Rightarrow\ i_L = \frac{V_L}{X_L}\operatorname{sen}(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$i_{ac}(t) = I\operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

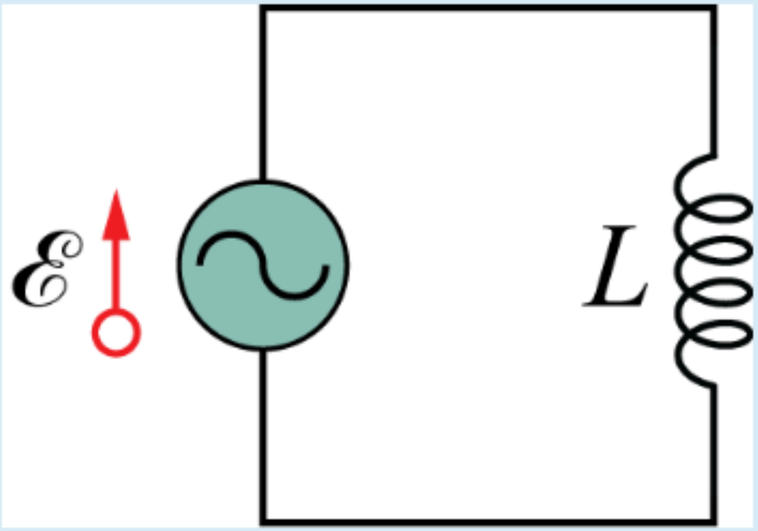
- Relação entre as amplitudes da corrente e da tensão no capacitor: $\boxed{V_L = I_L X_L}$

- Corrente está *atrasada de* $\dfrac{\pi}{2}$ em relação à tensão:

$$\Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Questão Moodle

A figura abaixo mostra um circuito de corrente alternada puramente indutivo. A amplitude da fonte é de 100 V e sua frequência é de 40 Hz. A corrente máxima no circuito é 7,0 A. Qual é o valor aproximado da impedância L?



Escolha uma:

- a. 0,057 H;
- b. 0,54 H;
- c. 0,091 H;
- d. 0,36 H;
- e. 0,27 H;

Simulações dos três circuitos simples

http://www.walter-fendt.de/ph14br/accircuit_br.htm

Lista de exercícios do capítulo 31

•Informações complementares

Os exercícios pares do Livro texto capítulo Oscilações eletromagnéticas:
Consultar:
https://www.ggte.unicamp.br/ea/moodle/login/index.php

Aulas gravadas:
http://lampiao.ic.unicamp.br/weblectures (Prof. Roversi)
ou
UnivespTV e Youtube (Prof. Luiz Marco Brescansin)