MA141X- 2^a Prova -13Maio-2014:**GABARITO**

1-(3pt)-Considere o plano $\pi : x+y+z = 1$, o triangulo Δ formado pelos vértices $A = (2,1,0)$,

$B = (3,0,-2)$, $C = (-1,0,2)$, e uma fonte de luz pontual colocada no ponto $P_* = (3,3,2)$ (que emite raios retilíneos em todas as direções).

(**1pt**)-a)-Verifique se os pontos P_*, A, B e C estão no mesmo semi-espaço determinado por π.

(**1pt**)–b)-Determine o triângulo Δ^* que é a sombra projetada pelo triângulo Δ no plano π

(**1pt)**-c)-Obtenha a razão entre as áreas dos triângulos Δ e Δ^*.

RESOLUÇÃO:

1a)-Reescrevendo a equação do plano com operações vetoriais temos: $(x,y,z)\cdot(1,1,1) = P\cdot\vec{N} = 1$ e, dividindo a equação por $\|N\| = \sqrt{3}$ obtemos a mesma equação na forma normalizada : $P\cdot\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, onde

$\vec{n} = \frac{1}{\|N\|}\vec{N} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ é unitário. Interpretando geometricamente o produto interno $P\cdot\vec{n}$ concluimos que os pontos P que estão no plano são caracterizados pelo fato de que sua projeção sobre $\vec{n}$ é igual a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ que, por conseguinte é a distancia do plano à origem. Ainda, se $P\cdot n > \frac{1}{\sqrt{3}}$ o ponto P estará em um dos semiespaços e se $P\cdot n \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ele estará no outro semi-espaço. Assim, concluimos imediatamente que B e C estão sobre o plano (pois, $B\cdot N = 1$, $C\cdot N = 1$) e, como, $A\cdot n = \frac{3}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $P_*\cdot n = \frac{8}{\sqrt{3}} \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$ estão todos no semi-espaço dos pontos P caracterizado por $P\cdot n \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(A propósito, A está a uma distancia $\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ do plano e P_* está a uma distancia $\frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$ do plano)

1b)-O triangulo Δ^* será determinado pelos seus vértices A^*, B^* e C^* que são obtidos pelas interseções dos raios de luz que passam por P_* e , respectivamente, A, B e C com o plano. Como os pontos B e C já estão no plano, temos $B^* = B$ e $C^* = C$. A reta (raio de luz) que passa por P_* e A em equação parametrica pode ser escrita como: $R(t) = P_* + t(A-P_*)$ e a sua interseção com o plano π é dada quando $R(t)$ estiver no plano, o que equivale dizer (analiticamente) : $R(t)\cdot N = 1$ de onde tiramos uma equação para t e, resolvendo, $P_*\cdot N + t(A-P_*)\cdot N = 1$, ou,

$t = -\frac{P_*\cdot N}{(A-P_*)\cdot N} = \frac{8}{5}$e, portanto

$A^* = P_* + \frac{8}{5}(A-P_*) = (3,3,2) + \frac{8}{5}(-1,-2,-2) = (\frac{7}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{-6}{5})$.

1c)-Uma forma de resolver esta questão é calcular a área de cada um utilizando o produto vetorial: $\frac{|\Delta|}{|\Delta^*|} = \frac{\frac{1}{2}\|((B-A)\times(C-A))\|}{\frac{1}{2}\|((B^*-A^*)\times(C^*-A^*))\|} =$

Chegando até aí, você resolveu essencialmente todo o problema, para completa-lo basta mostrar que sabe fazer o produto vetorial indicado na última expressão.

...

2-(3pt)–A reta r tem equação paramétrica : $R(t) = (2,0,1) + t(1,0,1)$ e a reta l é determinada pela interseção dos planos: $x = 3$ e $y - z - 3 = 0$.

a)(0,5pt)-Verificar se r e l são reversas.

b)-(0,5pt)-Encontrar a distancia entre as duas retas.

c-(2pt)-Encontrar a equação paramétrica da reta s concorrente com r e l paralela ao vetor $v = (1,-5,-1)$.

RESOLUÇÃO:

2a)-Há varias formas de resolver esta questão. Utilizaremos a representação parametrica de ambas. A segunda reta é dada pela interseção de dois planos, que podem ser descritos pelas respectivas equações vetoriais: $(1,0,0) \cdot P = N_1 \cdot P = 3$ e $(0,1,-1) \cdot P = N_2 \cdot P = 3$ onde N_1 e N_2 são, vetores perpendiculares aos respectivos planos. Portanto, um vetor diretor para esta reta é

$v = N_1 \times N_2 = i \times (j - k) = i \times j - i \times k = k + j = (0,1,1)$ e, calculando um ponto qualquer (digamos, $x = 3, y = 0$ temos $z = -3, P_0 = (3,0,-3)$ e a reta $L(s) = (3,0,-3) + s(0,1,1)$. Como os vetores diretores não são paralelos (v tem primeira componente nula e $u = (1,0,1)$ não tem!) as retas não são paralelas. Para determinar se encontram resolvemos imediatamente esta e a segunda questão (1b) calculando a distancia. Para isto, determinamos os pontos $R(t_0)$ e $L(s_0)$de uma e outra que realizam esta distancia, isto é, tal que $d = \|R(t_0) - L(s_0)\|$. Isto ocorre quando o vetor $R(t_0) - L(s_0)$ for perpendicular a ambas, ou seja, para calcular as duas "incognitas" t_0 e s_0 impomos esta condição geométrica que nos dá duas equações:

$$(R(t_0) - L(s_0)) \cdot u = 0$$

$$(R(t_0) - L(s_0)) \cdot v = 0$$

Abrindo as entranhas dos vetores temos as duas equações:

$$(1 - t, s, -4 + s + t) \cdot (1,0,1) = 1 - t - 4 + s + t = -3 + s = 0$$

$$(1 - t, s, -4 + s + t) \cdot (0,1,1) = s - 4 + s + t = 0$$

de onde obtemos $s_0 = 3$ e $t_0 = -2$ ou seja, $R(-2) = (0,0,-1)$ e $L(3) = (3,3,0)$ e $\|R(-2) - L(3)\| = \|(-3,-3,-1)\| = \sqrt{19}$, obviamente reversas.

(Observação: Se um exercicio desses tem por objetivo verificar que as retas não são reversas, um pequeno erro de cálculo levará à conclusão oposta, que é a posição relativa geral de duas retas no espaço).

3c-)Esta terceira reta que denominaremos T terá sua parametrização na forma $T(\theta) = P + \theta(1,-5,-1)$. Digamos que ela encontre as duas retas nos pontos $R(t_1)$ e $L(s_1)$.

Consideremos a parametrização de todas as retas T paralelas a w e partindo de um ponto (ainda desconhecido) da reta r, digamos $R(t_1)$, na forma: $T(\theta) = R(t_1) + \theta w$. Agora determinaremos **qual** delas e em **que ponto** ela se encontra com a reta L o que significa resolver o sistema de **três** equações (componente a componente) $T(\theta) = R(t_1) + \theta w = L(s_1)$ para as **três** incognitas, t_1,θ e s_1, o que dá a conta certa! Portanto devemos ter:

$$(2+t,0,1+t)+(\theta,-5\theta,-\theta)=(3,s,-3+s)$$

ou, componente a componente: $2+t+\theta=3$; $-5\theta=s$; $1+t-\theta=-3+s$. Resolvendo, $t_1=\frac{13}{3}$, $\theta_1=\frac{-5}{3}$, $s_1=\frac{25}{3}$ e daí,

$T(\theta)=R(\frac{13}{5})+\theta(1,-5,-1)$ e de "lambuja" temos o outro ponto de interseção com a reta L, em $L(\frac{25}{3})$.

...

3-(2pt)-Escreva a equação paramétrica da reta r que passa por $A=(2,0,-3)$ e é paralela à reta $s:\frac{1-x}{5}=\frac{3y}{4}=\frac{z+3}{6}$. Calcular a distância entre as duas retas.

RESOLUÇÃO:

A reta s pode ser imediatamente escrita na forma paramétrica fazendo $\frac{1-x}{5}=\frac{3y}{4}=\frac{z+3}{6}=t$, ou seja, $x=-5t+1, y=\frac{4}{3}t, z=-3+6t$, e, daí :$S(t)=(1-5t,\frac{4}{3}t,-3+6t)=(1,0,-3)+t(-5,\frac{4}{3},6)=P+tv$. Se a reta r , $R(\tau)=A+\tau v$, é paralela à reta s , então os vetores diretores das duas retas são paralelos e, portanto, podemos tomar $v=(-5,\frac{4}{3},6)$ e, como r passa por $A=(2,0,-3)$ concluimos que podemos descreve-la parametricamente na forma: $R(\tau)=(2,0,-3)+\tau(-5,\frac{4}{3},6)$.

Há várias formas para se calcular a distancia entre duas retas paralelas, basta fazer um desenho, pensar geometricamente e traduzir a ideia analiticamente. Por exemplo, se tomarmos o ponto $A=(2,0,-3)$ da reta R procuramos o ponto $S(t_0)$ que está exatamente à distancia mais curta de R e verificamos, geometricamente, que ele é tal que $(S(t_0)-A)$ será perpendicular ao vetor diretor de ambas, $v=(-5,\frac{4}{3},6)$ .Analiticamente isto significa que o produto interno $(S(t_0)-A)\cdot v$ é nulo, de onde podemos tirar o valor de t_0 correspondente e daí a distancia $d=\|S(t_0)-A\|$. Resolvendo: De $(S(t)-A)\cdot v=(P+tv-A)\cdot v=0$ tiramos, $t_0=\frac{(A-P)\cdot v}{\|v\|^2}$. Portanto, $d=\|S(t_0)-A\|=\left\|P+\frac{(A-P)\cdot v}{\|v\|^2}v-A\right\|$. O argumento é a essencia da resolução, os cálculos são meros detalhes, se você sabe (e deveria saber) como calcular produto interno, norma, soma, produto vetorial, tabuada...

ATENÇÃO: Decorar fórmulas é perigoso pois, se você esquecer um pequeno (qualquer que seja) detalhe, vai tudo por água abaixo! Não confie tanto na sua memória, prefira o seu raciocínio.

...

4-(2pt)-Verificar se as afirmativas abaixo são falsas ou verdadeiras- (Respostas sem justificativas não serão consideradas).

a)-Os pontos $A=(1,-2,1)$, $B=(2,1,3)$ e $C=(100,1,4)$ são coplanares.

b)-Se u , v, w são vetores tais que $u+v+w=0$ então , $u\times v=v\times w=w\times u$

c)-As diagonais de um quadrado são perpendiculares.

d)-A distancia do ponto $A=(0,0,1)$ ao plano $\pi:3x+4y-z-10=0$ é $\sqrt{7}$.

RESOLUÇÃO:

4a)-**Verdadeira**: Não há o que verificar; três pontos sempre são coplanares, isto é, estão simultaneamente em um mesmo plano. (Este plano será único se $B-A$ e $C-A$ não forem colineares -que é o caso presente- ou, em vários planos, se $B-A$ e $C-A$ forem colineares).

4b)**-Verdadeira:** Basta multiplicar vetorialmente a soma por u e depois por v e utilizar as propriedades distributiva e antisimétrica ($u \times v = -v \times u$):

$0 = u \times (u + v + w) = u \times u + u \times v + u \times w \Longrightarrow u \times v = -u \times w = w \times u$

$0 = v \times (u + v + w) = v \times u + v \times v + v \times w \Longrightarrow u \times v = -v \times w = v \times w.$

4c)-**Verdadeira**: Um desenho sugere que é verdade, mas para provar considere o quadrado com vértices em O, $O + u$, $O + v$, $O + u + v$, com lados de comprimentos $\|u\| = \|v\| \neq 0$ e perpendiculares (pois é um quadrado) $u \cdot v = 0$. As diagonais são $d_1 = u + v$ e $d_2 = v - u$. Multiplicando escalarmente as duas, $d_1 \cdot d_2 = (u + v) \cdot (v - u) = \|v\|^2 - \|u\|^2 = 0,$ o que demonstra serem perpendiculares.

4d**)-Falsa:** Escrevendo o plano na forma $P \cdot n = d$ onde $\|n\| = 1$, ou seja, $(x,y,z) \cdot \frac{1}{\sqrt{26}}(3,4,-1) = \frac{10}{\sqrt{26}}$ verificamos que o plano está a uma distancia $\frac{10}{\sqrt{26}}$ da origem. A projeção do vetor posição do ponto A sobre n é : $A \cdot n = \frac{-1}{\sqrt{26}}$ (ou seja, a distancia do ponto A ao plano paralelo a π que passa pela origem) o que significa que a sua distancia ao plano é $\frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{10}{\sqrt{26}} = \frac{11}{\sqrt{26}} \neq \sqrt{7}$.