2a-lista-retas e planos

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios -MA-141

RETAS E PLANOS NO ESPAÇO

10. Para cada um dos casos abaixo encontre equações paramétricas e equações simétricas para a reta r.

(a) A reta r passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (2, 3, 1)$.

R: $\overrightarrow{AB} = (1, 3, 0)$ é um vetor diretor da reta r. A equação paramétrica é dada por:

$$\begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 3t \\ z &= 1, \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$. A equação simétrica é dada por: $x - 1 = \frac{y}{3}$ e $z = 1$.

(b) A reta r tem vetor diretor $v = (1, 1, -1)$ e passa pelo ponto $P_0 = (0, 1, 7)$.

R: A equação paramétrica :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 1 + t \\ z &= 7 - t, \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$. A equação simétrica é dada por: $x = y - 1 = 7 - z$.

(c) A reta r passa pelo ponto $P_0 = (1, -1, 1)$ e é paralela à reta $l : x-1 = y = \frac{2z-2}{3}$.

R: Um vetor diretor da reta l é $v = (1, 1, \frac{3}{2})$. Como a reta r é paralela à reta l, v também é um vetor diretor de r. Assim, a equação paramétrica de r é dada por:

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= -1+t \\ z &= 1+\frac{3}{2}t, \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$. A equação simétrica é dada por: $x-1 = y+1 = \frac{2z-2}{3}$.

(d) A reta r é perpendicular ao plano $2x - y + 2z = 4$ e passa pelo ponto de interseção das retas l_1 e l_2 dadas por:

$$l_1 : \begin{cases} x &= t \\ y &= 2+t \\ z &= 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad e \qquad l_2 : \begin{cases} x &= -1+2s \\ y &= 1+s \\ z &= 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

R: O vetor normal ao plano $N = (2, -1, 2)$ é um vetor diretor para a reta r , uma vez que r é perpendicular ao plano. O ponto $P_0 = (-1, 1, 0)$ é o ponto de interseção das retas l_1 e l_2. Portanto a equacão paramétrica da reta r é dada por:

$$\begin{cases} x &= -1+2t \\ y &= 1-t \\ z &= 2t, \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$. A equação simétrica: $\frac{x+1}{2} = 1 - y = \frac{z}{2}$.

(e) A reta r é a interseção dos planos $x + y + 2z = 1$ e $2x - y + z = 2$.

R: Um vetor diretor v da reta r é dado pelo produto vetorial entre os vetores normais do plano. Assim $v = (1, 1, 2) \times (2, -1, 1) = (3, 3, -3)$. Para encontrar um ponto de r, podemos tomar $x = 0$ na equação dos planos, obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y+2z &= 1 \\ -y+z &= 2. \end{cases}$$

Para $x = 0$, obtemos $y = -1$ e $z = 1$. Temos que $P_0 = (0, -1, 1)$ é um ponto de r.

Com base nessa informações, temos que a equação paramétrica de r é dada por:

$$\begin{cases} x &= 3t \\ y &= -1+3t \\ z &= 1-3t, \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$, e a equação simétrica por: $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{1-z}{3}$.

11. Para cada par de retas r e l abaixo, encontre $r \cap l$. e nos canos em que a interseção é vazia, decida se elas são paralelas ou reversas.

(a)

$$r : \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}, \quad e \quad \begin{cases} 3x+2y+z &= -2 \\ x-y+2z &= 1, \end{cases}$$

R: Observe que,

$$\frac{2(x-2)}{4} = \frac{y+3}{-1} + \frac{z+2}{3} \Rightarrow 3x+6y-2z = -8.$$

Assim, para acharmos $r \cap l$, basta resolvermos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x+2y+z &= -2 \\ x-y+2z &= 1 \\ 3x+6y-2z &= -8, \end{cases}$$

Portanto, concluímos que $P_0 = (2, -3, -2)$.

(b)

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3}, \quad e \quad l : \frac{x-3}{2} = \frac{y+14}{5} = \frac{z-8}{-3}$$

R: Reescrevendo as equações das retas, temos

$$r : \begin{cases} x &= 2t-1 \\ y &= -5t-4 \\ z &= 3t+2 \end{cases} \qquad l : \begin{cases} x &= 2s+3 \\ y &= 5s-14 \\ z &= -3s+8 \end{cases}$$

Assim, igualando os valores de x, y, z, obtemos o seguinte sistema:

$$r:\begin{cases} 2t-1 & = & 2s+3 \\ -5t-4 & = & 5s-14 \\ 3t+2 & = & -3s+8 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, encontramos que $t = 2$ e $s = 0$. e portanto, encontramos que o ponto de interseção das retas r e l é $P_0 = (3, -14, 8)$.

(c)

$$r:\begin{cases} 3x-y-z & = & 0 \\ 8x-2y-3z & = & -1 \end{cases} \qquad l:\begin{cases} x-3y+z & = & -3 \\ 3x-y-z & = & -5 \end{cases}$$

R: Observe que para verificarmos se as retas r e l se interceptam, basta resolvermos o seguinte sistema:

$$r:\begin{cases} 3x-y-z & = & 0 \\ 8x-2y-3z & = & -1 \\ x-3y+z & = & -3 \\ 3x-y-z & = & -5 \end{cases}$$

Mas este sistema não possui solução. Assim, concluímos que as retas r e l não se interceptam.

Agora vamos verificar se tais retas são paralelas, ou reversas.

Um vetor diretor da reta r é dado pelo produto vetorial dos vetores normais dos planos que definem esta reta, que são $N_{r_1} = (3, -1, -1)$ e $N_{r_2} = (8, -2, -3)$. Assim,

$$V_r = N_{r_1} \times N_{r_2} = (1, 1, 2).$$

Ou seja, concluímos que a reta r é paralela ao vetor $(1, 1, 2)$.

De maneira análoga, dados os vetores normais $N_{l_1} = (1, -3, 1)$ e $N_{l_2} = (3, -1, -1)$, calculamos

$$V_l = N_{l_1} \times N_{l_2} = (4, 4, 8).$$

Ou seja, l é paralela ao vetor $(4, 4, 8)$. Como os vetores $(1, 1, 2)$ e $(4, 4, 8)$ são paralelos, concluímos que a reta r é paralela à reta l.

12. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação do plano π.

(a) O plano π passa pelo ponto $P = (3, 1, 2)$ e tem vetor normal $N = (1, 2, -3)$.

R: $x + 2y - 3z + 1 = 0$

(b) O plano π passa pelos pontos $A = (0, 0, 2)$, $B = (2, 4, 1)$ e $C = (-2, 3, 3)$.

R: O vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (7, 0, 14)$ é um vetor normal ao plano. A equação do plano é: $7x + 14z - 28 = 0$.

(c) Tem-se que $C = (-5, 1, 2) \in \pi$ e que π é perpencdicularbà reta que passa pelos pontos $A = (2, 2, -4)$ e $B = (7, -1, 3)$.

R: O vetor diretor da reta $\overrightarrow{AB} = (5, -3, 7)$ é um vetor normal ao plano π. Assim, $5x - 3y + 7z + 14 = 0$ é a equação do plano.

(d) O plano π é perpendicular ao plano $x + 3y - z = 7$ e contém os pontos $A = (2, 0, 5)$ e $B = (0, 2, -1)$.

R: O vetor normal, $N = (a, b, c)$, ao plano π é perpendicular ao vetor normal $(1, 3, -1)$ do plano acima. Sendo assim, $a + 3b - c = 0$. Usando o fato que os pontos A e B pertencem a π na equação geral do plano, obtemos que $2a + 5c + d = 0$ e $2b - c + d = 0$. Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a + 3b - c & = & 0 \\ 2a - 2b + 6c & = & 0 \end{cases}$$

Uma solução para o sistema é $N = (-2, 1, 1)$. A equação $-2x + y + z - 1 = 0$ é a equação do plano π.

(e) O plano π é perpendicular a cada um dos planos $x - y - 2z = 0$ e $2x + y - 4z - 5 = 0$ e contém o ponto $A = (4, 0, -2)$.

R: Os vetores normais aos planos citados, $N_1 = (1, -1, -2)$ e $N_2 = (2, 1, -4)$, são perpendiculares ao vetor normal $N = (a, b, c)$ ao plano π. Assim,

$$\begin{cases} a - b - 2c & = & 0 \\ 2a + 2b - 4c & = & 0, \end{cases}$$

e uma solução para o sistema acima é $N = (2, 0, 1)$. Portanto $2x + z - 6 = 0$ é a equação do plano π.

13. (a) Encontre a distância do plano $\pi : 2x + 2y - z = 6$ e o ponto $P = (2, 2, -4)$.

R: A fórmula da distância é dada por

$$dist(P_0, \pi) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{\|N\|}.$$

Seja o vetor normal $N = (2, 2, -1)$ e $P_1 = (0, 0, 6)$ um ponto do plano π. Então $\overrightarrow{P_1P_0} = (2, 2, 2)$, e

$$dist(P_0, \pi) = 2.$$

(b) Encontre a distância perpendicular entre os planos (paralelos): $4x - 8y - z = 9$ e $2x - 4y - \frac{z}{2} = 5$.

R: Para encontrar a distância entre dois planos, devemos encontrar a distância entre um ponto de um dos planos ao outro.

Vamos chamar de π_1 o primeiro plano, e π_2 o segundo plano.

Assim, para encontrar tal distância, vamos usar os pontos $P_1 = (0, 0, -9)$ de π_1, e $P_2 = (0, 0, -10)$ pertencente a π_2. Escolhemos também, o vetor normal $N = (4, -8, -1)$ de π_1. Assim,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 0, -1),$$

e

$$dist(P_2, \pi_1) = \frac{1}{9}.$$

(c) Verifique que a reta $x - 1 = z - 2$ e $y = 3$ é paralelo ao plano $x + 2y - z = 3$ e encontre a distância perpendicular entre eles.

R: Reescrevendo a reta, que chamaremos de r, temos

$$r:\begin{cases} x &= t+1 \\ y &= 3 \\ z &= t+2 \end{cases}$$

Assim, o vetor diretor de r é $V = (1,0,1)$ e o vetor normal do plano, que chamaremos de π é $N = (1,2,-1)$. Como o produto

$$V \cdot N = 0,$$

concluímos que tais vetores são perpendiculares, e portanto, a reta r e o plano π são paralelos.

Agora, para calcular a distância perpendicular entre eles, tomamos o ponto $P_1 = (1,3,2)$ de r, e $P_2 = (0,0,-3)$ de π, e o vetor $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,3,5)$, para calcular

$$dist(r,\pi) = dist(P_1,\pi) = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

14. (a) Sejam r a reta $r : x-1 = y = z$ e A , B os pontos $A = (1,1,1)$ e $B = (0,0,1)$. Encontre o ponto de r eqüidistante de A e B.

    R: Queremos encontrar um ponto $P \in r$, tal que $dist(p,A)^2 = dist(p,A)^2$. Um ponto P da reta r tem a forma $P = (x, x-1, x-1)$. Resolvendo a equação $dist(p,A)^2 = dist(p,A)^2$, obtemos que $x = 1$ e $P = (1,0,0)$.

    (b) Dados o plano $x - y + z = 1$ e o ponto $P = (1,0,1)$. Encontre o ponto Q que é simétrico a P em relação ao plano dado.

    R: Considere a reta r que passa pelo ponto P e tem como vetor diretor $N = (1,-1,1)$, que é o vetor normal ao plano dado. A interseção de r com o plano é o ponto médio entre os pontos P e Q.

    A equação simétrica de r é dada por: $x-1 = -y = z-1$. Sendo assim, um ponto P_0 de r tem a forma $P_0 = (x, 1-x, x)$. Substituindo o ponto P_0 na equação do plano , obtemos que $x = \frac{2}{3}$ e, consequentemente, $P_0 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Temos que P_0 é o ponto médio entre P e Q, logo $Q = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

15. Sejam $P = (a, b, c)$ um ponto no espaço e r a reta $\begin{cases} x + y + 2z &= 4 \\ x - 2y + z &= 5 \end{cases}$. Para cada par, não nulo, de números reais (m, n), considere o plano $\pi_{(m,n)} : (m + n)x + (m - 2n)y + (2m + n)z = 4m + 5n$. Mostre que: $P \in r$ se, e somente se, $P \in \pi_{(mn)}$, para todo par não nulo (m, n).

    R: Para começar, vamos achar a equação da reta r. Para isso, sejam os vetores $N_1 = (1, 1, 2)$, o vetor normal do primeiro plano, $N_2 = (1, -2, 1)$, o vetor normal do segundo plano, e $V = N_1 \times N_2 = (5, 1, -3)$.

    Do sistema que define a reta r, encontramos o ponto $P_0 = (6, 0, -1)$ um ponto da reta r. Assim, concluímos que as equações paramétricas da reta r são dadas por,

$$\begin{cases} x &= 6 + 5t \\ y &= t \\ z &= -1 - 3t \end{cases}$$

    Assim, concluímos que o ponto $P \in r$, se, e somente se,

$$a = 6 + 5t, \quad b = t, \quad c = -1 - 3t.$$

    Assim, supondo o par (m, n) não nulo, concluímos que

$$\begin{aligned} (m + n)x + (m - 2n)y + (2m + n)z &= (m + n)(6 + 5t) + (m - 2n)t + (2m + n)(-1 - 3t) \\ &= 4m + 5n, \end{aligned}$$

    como gostaríamos.

16. Dados os dois pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, mostre que o lugar geométrico dos pontos do espaço que eqüidistam de A e B é um plano que passa pelo ponto médio de A e B e é perpendicular à reta que contém A e B.

    R: Sejam $M = \{C \in \mathbb{R}^3; d(C, A) = d(C, B)\}$ e π o plano que passa pelo ponto médio de A e B e é perpendicular à reta que contem A e B.

O plano π tem equação $\pi : (x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (z_2 - z_1)z - \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2 = 0)$.

Dado um ponto $C = (x, y, z) \in M$, temos que $(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2$. Resolvendo essa equação, obtemos que $2[(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (z_2 - z_1)z] = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2$. Portanto $C \in M \Leftrightarrow C \in \pi$ e $\pi = M$.

17. Considere as retas r e l dadas por: $r : x = 0,\ \ y = 2 + t$ e $z = 1 + t$; $l : x - 2 = z + 1$ e $y = 3$.

(a) Mostre que r e l são reversas.

R: As retas r e l são dadas pelas equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad l : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3 \\ z = t - 1 \end{cases}$$

Observe que seus vetores diretores são dados por $V_r = (0, 1, 1)$ e $V_l = (1, 0, 1)$, que não são paralelos. Portanto, concluímos que as retas r e l não são paralelas. Mostremos que a interseção entre elas é vazia. Para isso, igualando os valores de x, y e z das equações paramétricas de r e l, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 0 = t + 2 \\ 2 + t = 3 \\ 1 + t = t - 1 \end{cases}$$

pelo qual concluímos que $1 = -1$. O que é um absurdo!

Portanto, concluímos que as retas r e l não possuem interseção, ou seja, elas são reversas.

(b) Encontre os planos π e α tais que: $r \subset \pi$, $l \subset \alpha$ e π é paralelo a α.

R: Queremos que os planos π e α sejam paralelos. Assim, seus vetores normais, denotados por N_π e N_α, também devem ser paralelos.

Como estamos querendo $r \subset \pi$, $l \subset \alpha$, então podemos concluir que o vetor N_π será perpendicular à r, e o vetor N_α será perpendicular à l.

Sendo assim, podemos tomar $N_\pi = N_\alpha = N = V_r \times V_l$, ou seja, $N = (1, 1, -1)$. Assim, dados os pontos $P_r = (0, 2, 1) \in r$ e $P_l = (2, 3, -1) \in l$, concluímos que as equações dos planos π e α, são

$$\begin{aligned} \pi &: \ x + y - z - 1 = 0, \\ \alpha &: \ x + y - z - 6 = 0. \end{aligned}$$

(c) Encontre a distância entre os planos π e α do item anterior.

R: Usando o vetor $\overrightarrow{P_l P_r} = (-2, -1, 2)$ e o vetor normal $N = (1, 1, -1)$, obtemos

$$dist(\pi, \alpha) = dist(P_r, \alpha) = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

(d) Encontre P em r e Q em l tais que a reta que passa por P e Q seja perpendicular a r e a l.

R: Pelas equações paramétricas das retas, sabemos que $P = (0, 2 + t, 1 + t)$ e $Q = (s + 2, 3, s - 1)$. Então um vetor genérico passando por P e Q é dado por $\overrightarrow{PQ} = (s + 2, 1 + t, s - 2 - t)$. Como queremos que tal vetor seja perpendicular ao vetor diretor da reta r e da reta l, segue que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overrightarrow{PQ} \cdot V_r & = & 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot V_l & = & 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{rcl} 1 + t + s - 2 - t & = & 0 \\ s + 2 + s - 2 - t & = & 0 \end{array} \right.$$

de onde achamos que $s = 1$ e $t = 2$, ou seja, que $P = (0, 4, 3)$ e $Q = (3, 3, 0)$.

18. Considere os planos $\alpha : x - y + z - 3 = 0$ e $\beta : 2m^2 x - (m + 1)y + 2z = 0$.

(a) Determine m, em cada caso, para que os planos α e β sejam: paralelos; concorretes e concorrentes ortogonais.

Paralelo: $(2m^2, -(m+1), 2) = \lambda(1, -1, 1) \Rightarrow \lambda = 2.$. Resolvendo essa igualdade obtemos que $m = 1$.

Concorrentes: Se os vetores normais aos planos não são paralelos, então eles são concorrentes. Assim, para $m \neq 1$, os planos são concorrentes.

Concorrentes ortogonais: Os vetores normais são perpendiculares, isto é, $2m^2 + m + 3 = 0$. Mas não existe um número real m que satisfaça a essa equação. Portanto eles não podem ser concorrentes ortogonais.

(b) Para $m = -1$ encontre a equação da reta interseção entre α e β.

R: Se $m = -1$, $\beta : 2x + 2z = 0$. Um vetor paralelo à reta é dado por: $(1, -1, 1) \times (2, 0, 2) = (-2, 0, 2)$. O ponto $P_0 = (0, -3, 0) \in r$. A equação paramétrica da reta é:

$$\begin{cases} x &= -2t \\ y &= -3 \\ z &= 2t. \end{cases}$$

19. Sejam a, b, c, d números reais tais que $ax + by + cz + d > 0$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$. Mostre que $a = b = c = 0$ e $d > 0$.

R: Tomando $x = y = z = 0$, da desigualdade do enunciado, conseguimos concluir que $d > 0$.

Agora, supondo $a \neq 0$, e tomando $y = z = 0$ e $x = -\frac{d}{a}$, concluímos que $0 > 0$, o que é um absurdo!

Portanto, devemos ter que $a = 0$.

Repetindo o mesmo raciocínio, para b e c, concluímos que $a = b = c = 0$.