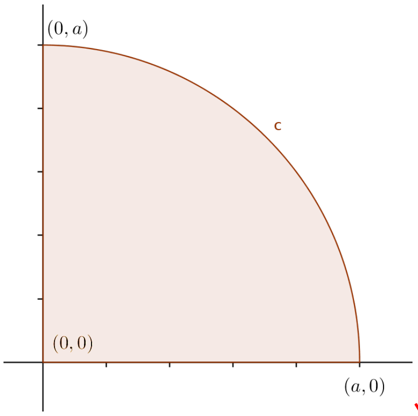
GABARITO

MA211 – PROVA 2

Sexta-feira (noite), 07/11/2014.

*Para correção, cada símbolo "$\checkmark$**x** " o item que o antecede vale* **x** *pontos.*

Resolução da Questão 1. Primeiramente, a região de integração corresponde ao setor circular mostrado abaixo.



$\checkmark \mathbf{0,4}$

Observe que a região é descrita em coordenadas polares pelo conjunto $\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Usando coordenadas polares, podemos escrever a integral como

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx = \underbrace{\int_0^{\pi/2}}_{\checkmark 0,4} \underbrace{\int_0^a}_{\checkmark 0,4} \underbrace{rdrd\theta}_{\checkmark 0,4} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a rdr = \frac{\pi}{2}\frac{r^2}{2}\Big|_0^a = \frac{\pi a^2}{4}. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{1}$$

Resolução da Questão 2. Com objetivo de simplificar a integral, vamos considerar a mudança de variáveis dada pelas seguintes equações:

$$u = y - x \quad \text{e} \quad v = y + x. \checkmark \mathbf{0,5} \tag{2}$$

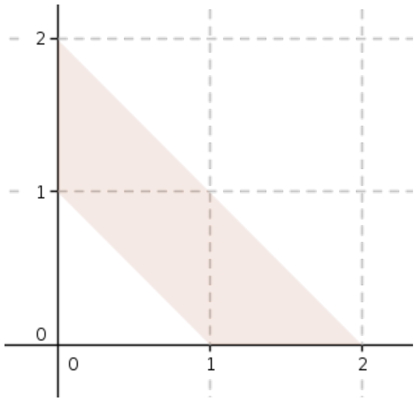
Observe que a transformação inversa é dada por

$$x = \frac{v - u}{2} \quad \text{e} \quad v = \frac{v + u}{2}. \tag{3}$$

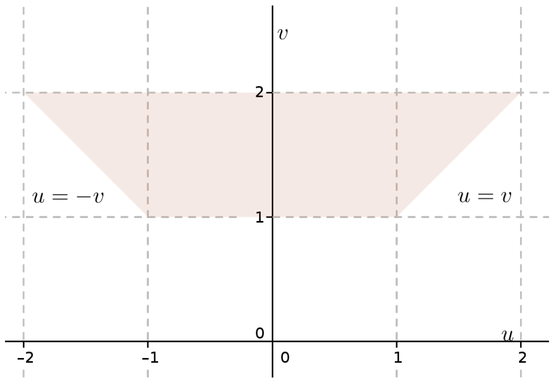
Além disso, o jacobiano da transformação é:

$$J(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. \checkmark \mathbf{0,5} \tag{4}$$

Desta forma, a região trapezoidal R no plano xy



é transformada na seguinte região S, também trapezoidal, no plano uv:



Observe que $S = \{(u, v) : 1 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}$. Logo, a integral pode se escrita da seguinte forma usando as novas variáveis u e v:

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dA = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) dudv \checkmark \mathbf{0,5} && (5) \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 v \operatorname{sen}\left(\frac{u}{v}\right) \Big|_{-v}^{v} dv = \frac{1}{2} \int_1^2 v(\operatorname{sen}(1) - \operatorname{sen}(-1) dv = \operatorname{sen}(1) \int_1^2 v dv && (6) \\ &= \operatorname{sen} 1 \frac{v^2}{2} \Big|_1^2 = \operatorname{sen} 1 \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 1. \checkmark \mathbf{0,5} && (7) \end{aligned}$$

Resolução da Questão 3. O volume do sólido é dado pela seguinte integral em coordenadas cilíndricas:

$$V = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark 0{,}3} \underbrace{\int_0^{2}}_{\checkmark 0{,}3} \underbrace{\int_0^{3-r\,\mathrm{sen}\,\theta}}_{\checkmark 0{,}3} \underbrace{r dz dr d\theta}_{\checkmark 0{,}3} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (3 - r\,\mathrm{sen}\,\theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} (6 - \frac{8}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta) d\theta = 12\pi. \checkmark 0,8 \tag{8}$$

Resolução da Questão 4. As coordenadas do centro de massa é $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, em que

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}. \tag{9}$$

Dessa forma, temos

$$m = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 x dx dy dz = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} \checkmark 0,4 \tag{10}$$

$$M_{yz} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 x^2 dx dy dz = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} \checkmark 0,4 \tag{11}$$

$$M_{xz} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 xy dx dy dz = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{4} \checkmark 0,4 \tag{12}$$

$$M_{xy} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 xz dx dy dz = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{4} \checkmark 0,4 \tag{13}$$

Portanto, o centro de massa é $(2/3, 1/2, 1/2)$. ✓**0,4**

Resolução da Questão 5. A integral pode ser escrita como segue em coordenadas esféricas:

$$I = \iiint_E xyz dV = \underbrace{\int_0^{\pi/2}}_{\checkmark 0{,}2} \underbrace{\int_0^{\pi/3}}_{\checkmark 0{,}2} \underbrace{\int_2^4}_{\checkmark 0{,}2} \underbrace{\rho^3 \,\mathrm{sen}^2\,\phi \cos\phi \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\theta}_{\checkmark 0{,}2}\, \underbrace{\rho^2 \,\mathrm{sen}\,\phi d\rho d\phi d\theta}_{\checkmark 0{,}2} \tag{14}$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/3}\int_2^4 \rho^5 \,\mathrm{sen}^3\,\phi \cos\phi \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\theta d\rho d\phi d\theta \tag{15}$$

$$= \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/3} \mathrm{sen}^3\,\phi \cos\phi d\phi\right)\left(\int_2^4 \rho^5 d\rho\right) \checkmark 0,4 \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

Tomando $u = \mathrm{sen}\,\theta$ e $v = \mathrm{sen}\,\phi$, obtemos as integrais

$$I = \left(\int_0^1 u du\right)\left(\int_0^{\sqrt{3}/2} v^3 dv\right)\left(\int_2^4 \rho^5 d\rho\right) \tag{18}$$

$$= \left(\frac{1}{2}u^2\Big|_0^1\right)\left(\frac{1}{4}v^4\Big|_0^{\sqrt{3}/2}\right)\left(\frac{1}{6}\rho^6\Big|_2^4\right) \tag{19}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\frac{9}{16}\right)\left(\frac{4^6}{6} - \frac{2^6}{6}\right) = \frac{3}{4}(2^6 - 1) \checkmark 0,6 \tag{20}$$