Física Geral I
F -128

Aula 11
Dinâmica de Rotações

Plano da Aula

Cinemática de Rotações

- Corpo Rígido (CR)
  - Rotação de um corpo rígido
- Energia Cinética de Rotação
  - Momento de Inércia
    - Teorema dos Eixos Paralelos

Movimento de um corpo rígido

Vamos abandonar o modelo de *partícula*: passamos a levar em conta as dimensões do corpo, introduzindo o conceito de *corpo rígido* (CR): é aquele em que a distância entre quaisquer dois de seus pontos é constante. Sendo *i* e *j* dois pontos quaisquer de um CR:

$$r_{ij} = c_{ij}$$

c_{ij} : constante característica do par (*i*, *j*)

O tipo mais geral de movimento de um CR é uma combinação de uma translação com uma rotação. Neste capítulo consideraremos apenas o caso de rotação de um CR em torno de um eixo fixo, como é o caso do movimento de roldanas, rotores, CDs, etc.

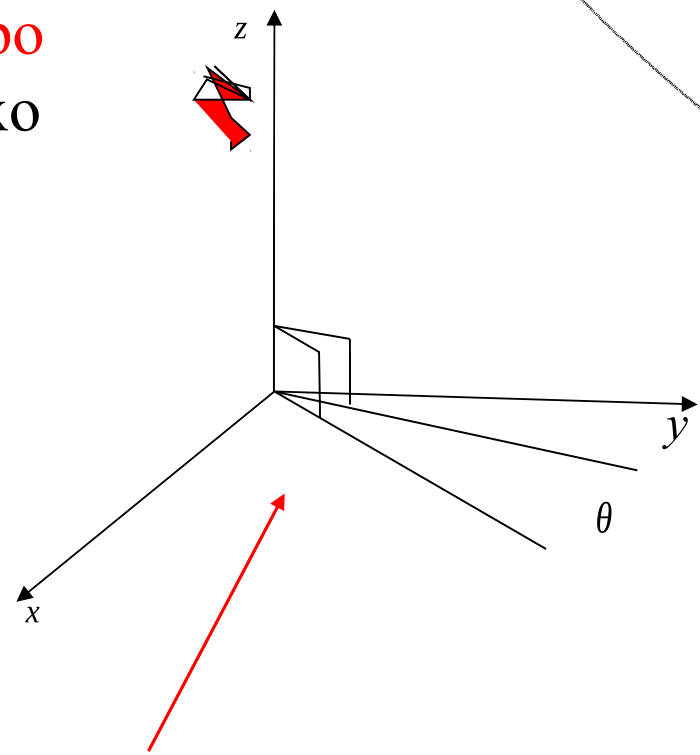
Excluiremos, por exemplo, movimentos como o do Sol (não rígido) ou o de uma bola de boliche, cuja rotação se dá em torno de um eixo que não é fixo (rolamento).

Rotação de um corpo rígido

Queremos estudar a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. O eixo fixo é denominado *eixo de rotação*.

Por conveniência, vamos tomar o eixo de rotação (fixo) como sendo o eixo *z*.

O eixo de rotação não precisa ser um dos eixos de simetria do corpo.



É conveniente escolher uma linha de referência (arbitrária) presa ao corpo, perpendicular ao eixo *z,* para definir as variáveis angulares em relação a ela.

Cinemática angular

Instituto de Física Gleb Wataghin

Em capítulo anterior já estudamos o movimento circular uniforme. Vamos estudar agora o

Movimento circular <u>uniformemente acelerado</u>

Dadas as condições iniciais:

$$t_1 = 0 \; e \; t_2 = t \rightarrow \theta(0) = \theta_0 \;\; e \; \omega(0) = \omega_0$$

Temos, para α constante:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha\, t \; ; \theta(t) = \theta_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\,\alpha\,(\theta - \theta_0)$$

Comparando com as variáveis do movimento linear:

$$\theta(t) \rightarrow x(t) \quad , \quad \omega(t) \rightarrow v(t) \quad , \quad \alpha(t) \rightarrow a(t)$$

Equações do movimento linear e rotacional

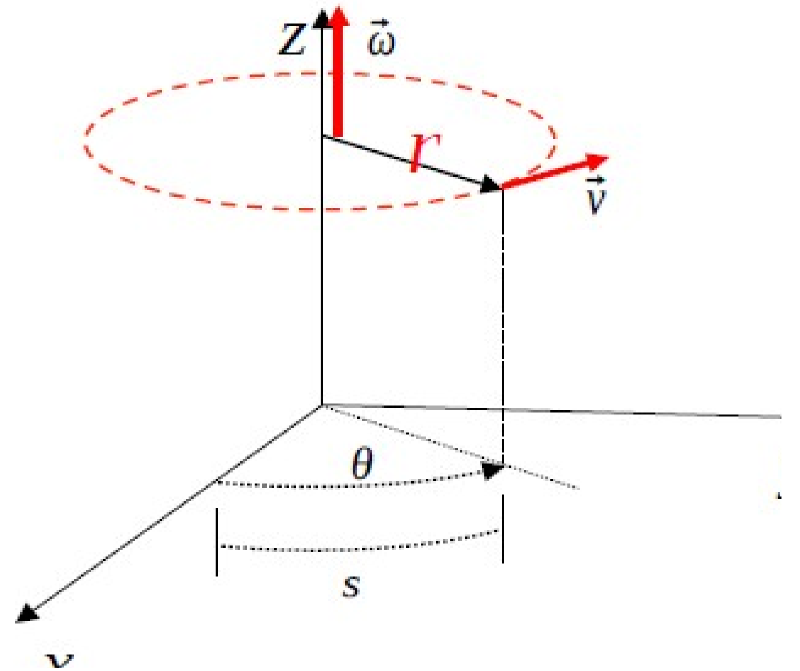
Movimento linear	Movimento de rotação (eixo fixo)
velocidade linear $v = \dfrac{dx}{dt}$	velocidade angular $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
aceleração linear $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$	aceleração angular $\vec{\alpha} = \dfrac{d\omega}{dt}$

$a =$ constante
$$\begin{cases} v = v_0 + a\,t \\ x = x_0 + v_0\,t + \dfrac{1}{2}\,a\,t^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2\,a\,(x - x_0) \end{cases}$$

$\alpha =$ constante
$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha\,t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0\,t + \dfrac{1}{2}\,\alpha\,t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\,\alpha\,(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

Relação com as variáveis lineares

Relembrando:



- Posição:

$$s = r\,\theta$$

- Velocidade:

$$v = \omega\, r$$

Vetorialmente: $|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \times |\vec{r}|$

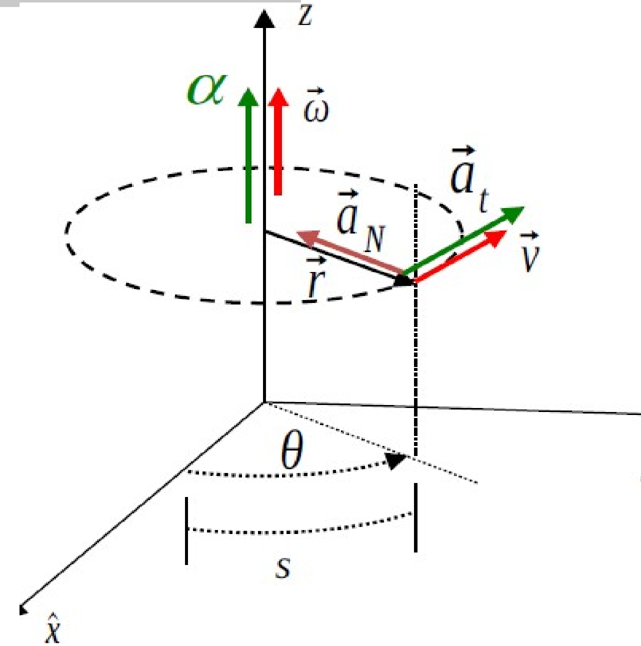
Relação com as variáveis lineares

Instituto de Física Gleb Wataghin

- <u>Aceleração</u>

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) =$$

$$= \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}_{a_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}}_{a_N}$$



$a_t = \alpha \times r = \alpha\, r\, \hat{v}$ (em módulo: $a_t = \alpha\, r$)

$a_N = \omega \times v = \omega \times (\omega \times r) = -\,\omega^2 r\, \hat{r}$ (em módulo: $a_N = \omega^2 r$)

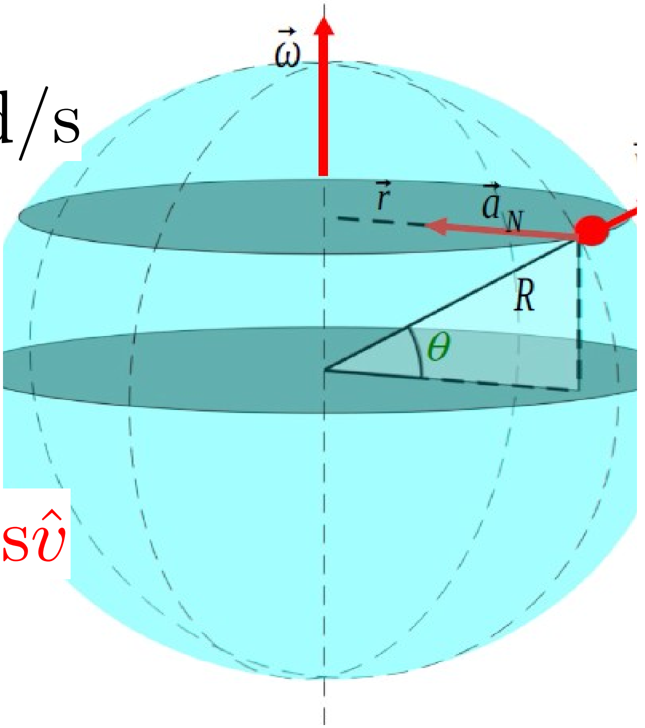
$\hat{v}$ é o vetor unitário tangente à trajetória;

$\hat{r}$ é o vetor unitário na direção que vai do eixo de rotação até a partícula (versor da direção radial)

Exemplo 3

Velocidade e aceleração de um ponto na superfície da Terra a uma dada latitude θ :
(aproximação de esfera perfeita).

$$R = 6,4 \times 10^6 \,\mathrm{m} \quad \omega = 7,2 \times 10^{-5} \,\mathrm{rad/s}$$



Como a aceleração angular é nula:

$$a_t = \alpha\, r\, \hat{v} = 0$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} = \omega R \cos\theta \hat{v} = 470 \cos\theta \,\mathrm{m/s}\hat{v}$$

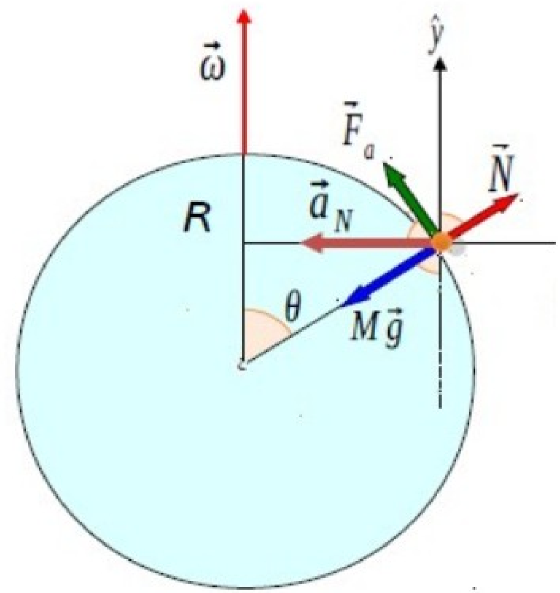
A aceleração centrípeta é

$$\vec{a}_N = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 r\hat{r} = -\omega^2 R cos\theta \hat{r} =$$
$$-3,4 \times 10^{-2} cos\theta \, m/s\, \hat{r}$$

Peso aparente: corpo de massa M em equilíbrio

Num referencial inercial (portanto for a da Terra!) teremos que:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_a = M\vec{a}_N$$



Esta igualdade vale para todos os instantes. Para encontrarmos o valor do peso aparente N, e da força atrito F_a , nossa estratégia será decompor todas estas forças nas direções paralela e normal à aceleração centrípeta:

$$\hat{x} : (N - Mg)sen\,\theta - F_a \cos\,\theta = -Ma_N$$

$$\hat{y} : (N - Mg)cos\,\theta + F_a sen\theta = 0$$

O que resulta em:

$$N = Mg - Ma_N sen\,\theta = M(g - \omega^2 R sen^2\theta)$$

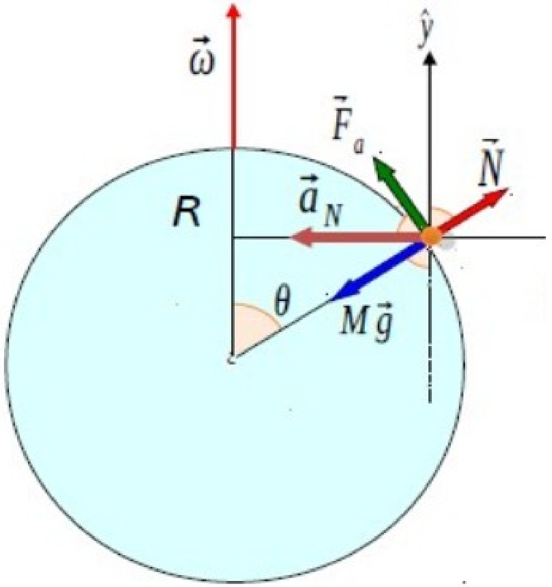
$$N = M(g - 3,4 \times 10^{-2} sen^2\theta)$$

O peso aparente diminui à medida que nos aproximamos do Equador!

Peso aparente: corpo de massa M em equilíbrio

Para a força de atrito teremos:

$$F_a = M\omega^2 R \cos\theta \, sen\,\theta$$



A força de atrito que mantém um objeto parado na superfície da Terra é máxima a 45° e aponta para o norte no hemisfério norte e para o sul no hemisfério sul.

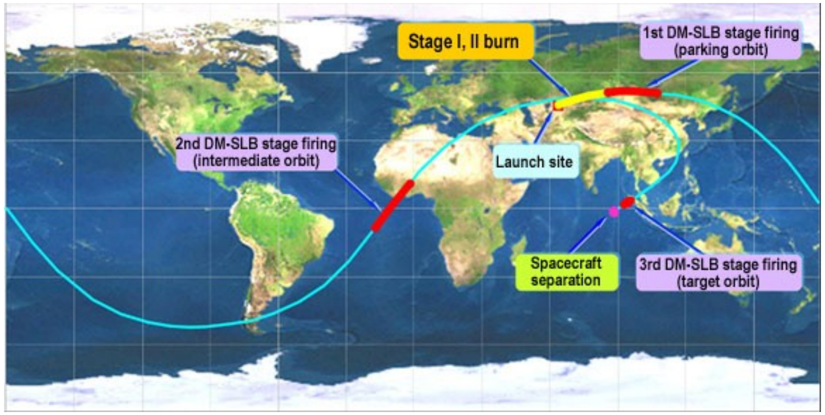
E se não houver atrito?

$$\hat{x} : (N - Mg) sen\,\theta = -Ma_N$$

$$\hat{y} : (N - Mg) cos\,\theta = Ma_y$$

$$a_y = -\omega^2 R \cos\theta$$

Essa aceleração sempre aponta para o equador!

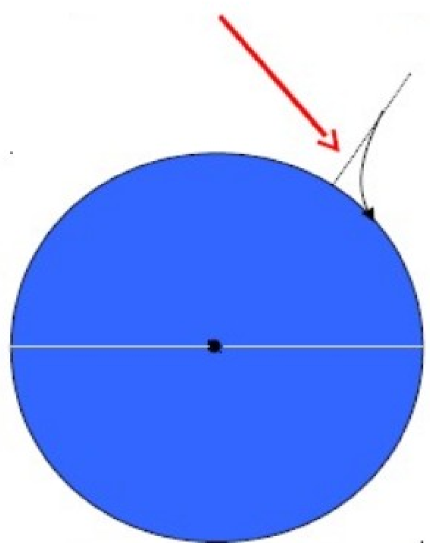


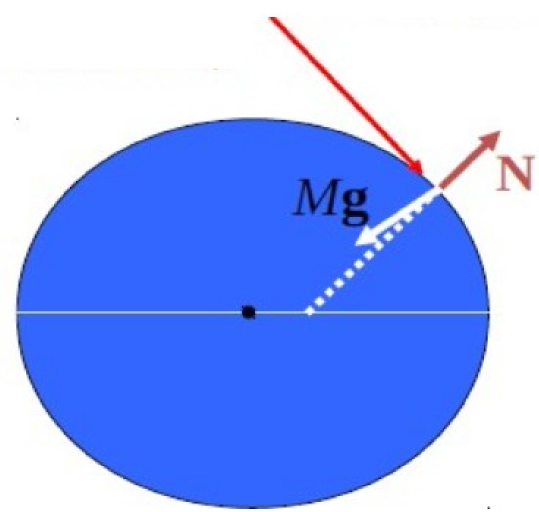
Achatamento de polos

Assim, qualquer corpo sobre o qual não atua nenhuma força horizontal (com respeito à superfície da Terra) se desloca na direção do Equador.

→ desvio diminuto de latitude dos corpos em queda livre na direção do Equador.

→ achatamento dos polos ocorre pelo mesmo efeito e reduz o desvio mencionado (aparece uma pequena força horizontal)

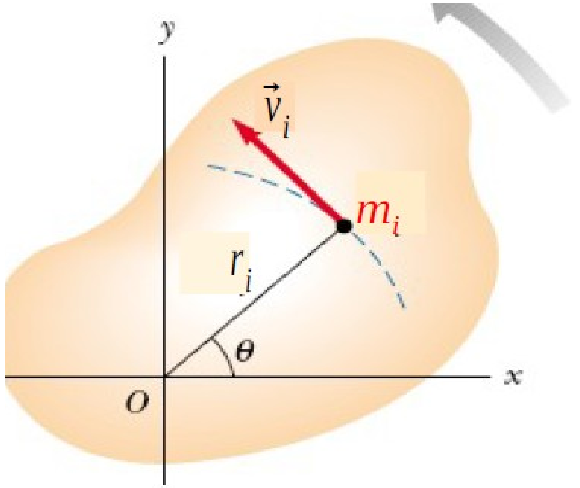




Energia cinética de rotação

A energia cinética de um corpo em rotação é a soma:

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \ldots\frac{1}{2}m_n v_n^2 = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$$



No corpo em rotação, todos os pontos, exceto os radiais, têm mesma velocidade angular ω .

Então:

$$K = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega\, r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\, r_i^2\right)\omega^2$$

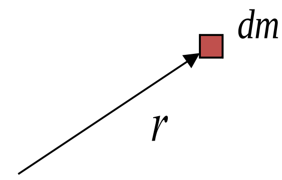
A grandeza entre parênteses é definida como o momento de inércia *I* do corpo em relação ao eixo de rotação. Isto é:

$I = \sum m_i\, r_i^2$ ou seja: $K = \frac{1}{2} I\, \omega^2$ (energia cinética de rotação)

Cálculo do momento de inércia

No caso de partículas puntiformes, vimos:

$$I = \sum m_i \, r_i^2$$



No caso de uma distribuição contínua de massa:

$$I = \int r^2 \, dm \; ,$$

onde *dm* é uma massa infinitesimal, que pode ser a de um fio, a de uma superfície ou a de um volume:

$$dm = \begin{matrix} \lambda dl \\ \sigma dA \\ \rho dV \end{matrix}$$

λ : densidade linear de massa
σ : densidade superficial de massa
ρ : densidade volumétrica de massa

questão 4

Uma partícula de massa m gira em torno de um ponto com velocidade angular w e raio R. Um anel de raio R e mesma massa m gira em torno de seu eixo de simetria com a mesma velocidade angular w. É correto afirmar que:

a) a energia cinética do anel é maior que a da massa.

b) a energia cinética do anel é menor que a da massa.

c) as energias cinéticas são iguais.

questão 5

Uma partícula de massa m gira em torno de um ponto com velocidade angular w e raio R. Um disco de raio R e mesma massa m gira em torno de seu eixo de simetria com a mesma velocidade angular w. É correto afirmar que:

a) a energia cinética do disco é maior que a da massa.

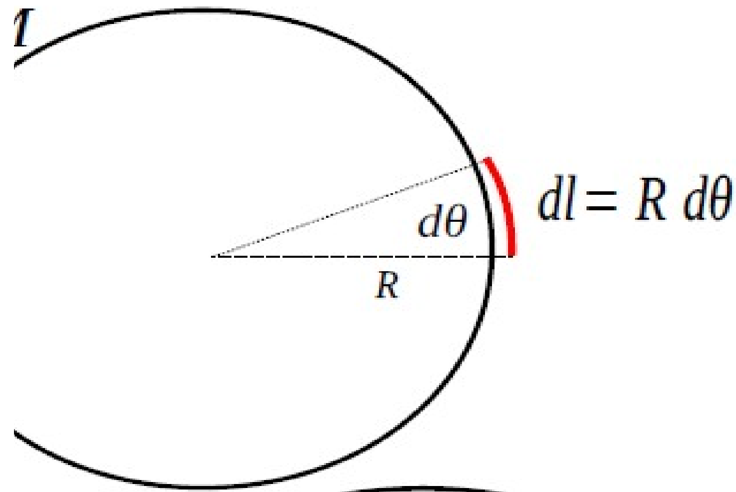
b) a energia cinética do disco é menor que a da massa.

c) as energias cinéticas são iguais.

Cálculo do momento de inércia

Exemplos:

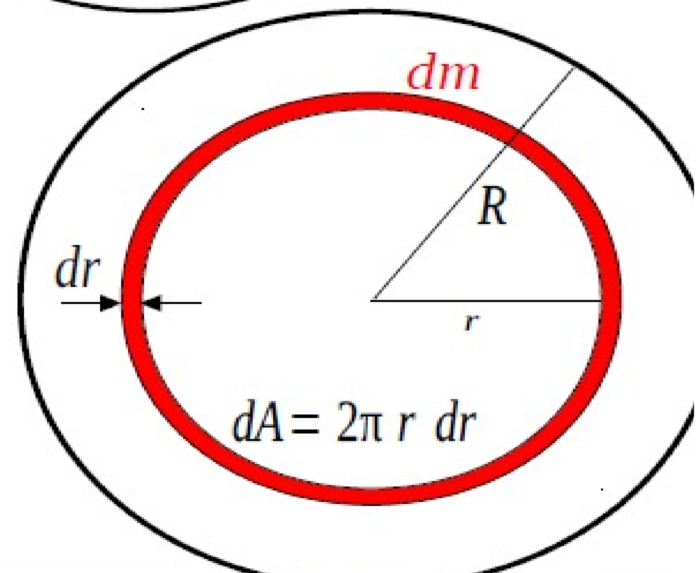
a) Anel de raio R e massa M uniformemente distribuída



$$\lambda = \frac{M}{2\pi R} \Longrightarrow dm = \frac{M}{2\pi R}\, R\, d\theta$$

$$I = \int R^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{M}{2\pi}\, d\theta = MR^2$$

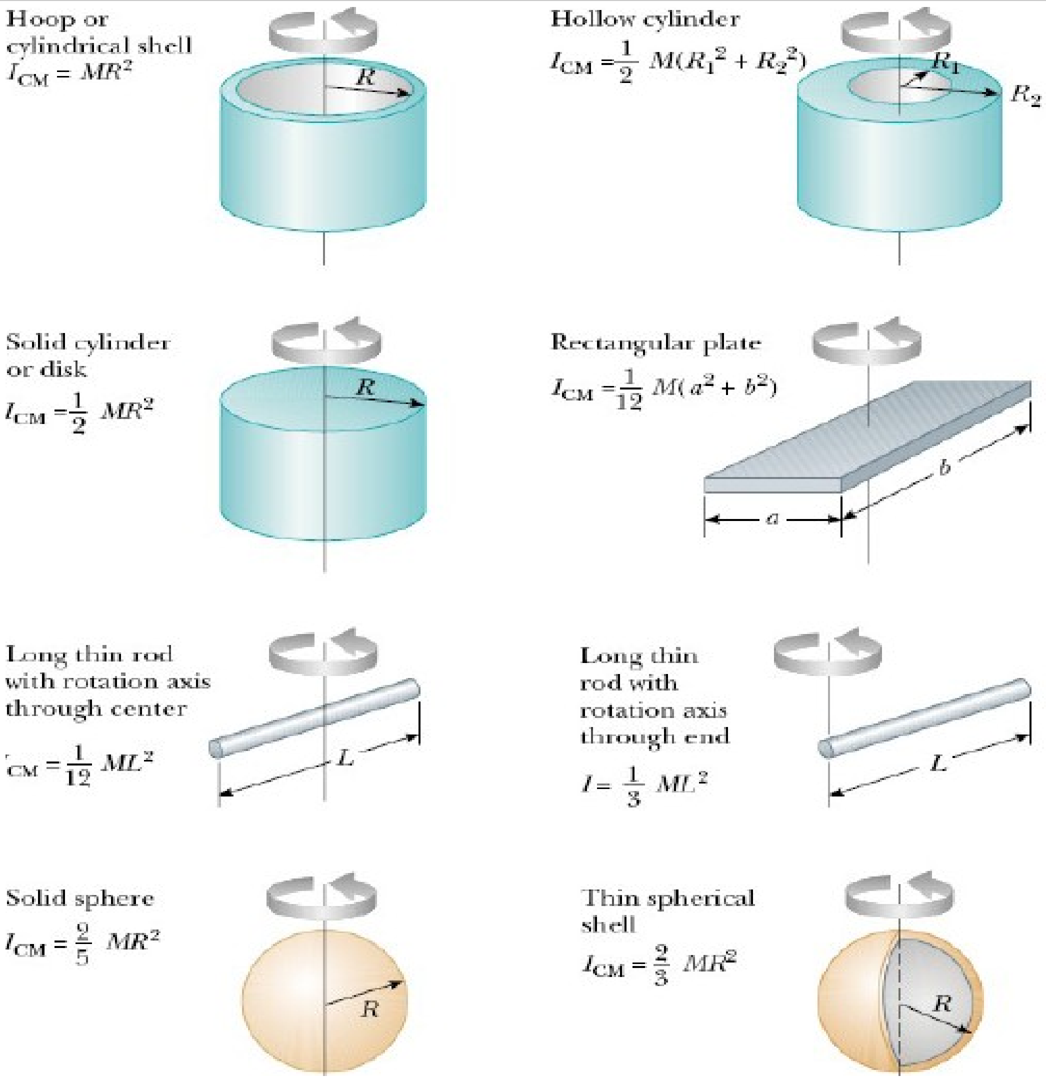
b) Disco de raio R e massa M (idem)



$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} \Rightarrow dm = \sigma\, dA = \frac{M}{\pi R^2}\, 2\pi\, r\, dr$$

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{2M}{R^2}\, r\, dr = \frac{2M}{R^2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{1}{2} MR^2$$

Alguns momentos de inércia

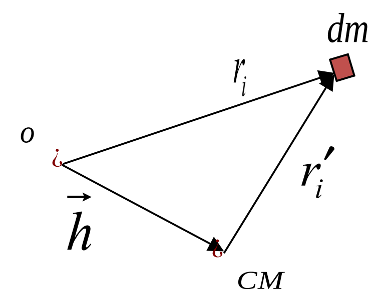


Teorema dos eixos paralelos

Se conhecermos o momento de inércia I_{CM} de um corpo em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa, podemos facilmente determinar I_O do corpo em relação a um eixo paralelo que passa por O. De fato:

$$r_i = r_i' + h \Rightarrow r_i^2 = (r_i' + h)\cdot(r_i' + h)$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i r_i'^2 + \sum_i m_i h^2 + 2\,\vec{h}\cdot\sum_i m_i \vec{r}_i'$$



Mas:

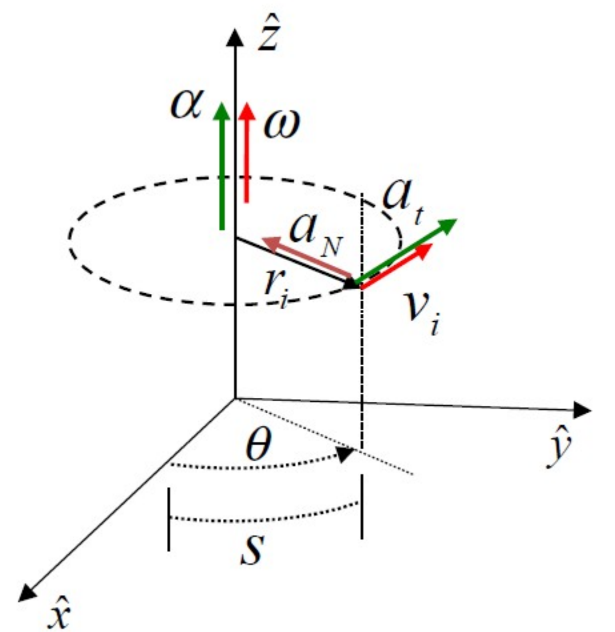
$$\vec{h} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow \sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{h}) = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$$

Então:

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2 = I_{CM} + Mh^2$$ (teorema dos eixos paralelos)

Torque e 2ª Lei de Newton da rotação

Vamos obter a relação entre as forças que atuam sobre um corpo em rotação (*com eixo fixo*) e sua aceleração angular. Notamos que apenas as forças que têm uma componente ortogonal tanto ao eixo quanto à direção radial podem colocar um corpo em rotação.



Decompomos a força F_i que atua sobre uma partícula de massa m_i do corpo rígido nas direções tangencial $F_{(\|)}$ e radial $F_{(\perp)}$:

$$F_i = F_{(\|)i}\ \hat{v}_i + F_{(\perp)i}\,\hat{r}_i$$

Segunda lei de Newton:

$$F_i = m_i\ a_i = m_i \alpha\, r_i\ \hat{v}_i - m_i \omega^2 r_i\ \hat{r}_i$$

$$F_{(\|)i} = m_i \alpha\, r_i = m_i\ a_t$$ → Provoca a aceleração angular

$$F_{(\perp)i} = -\, m_i \omega^2 r_i = m_i\ a_N$$ → Não altera a velocidade angular (é uma força centrípeta).

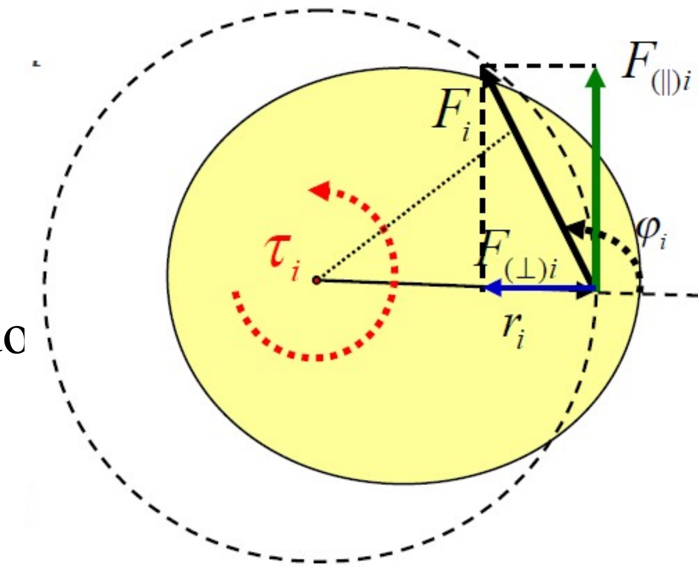
Torque e 2ª Lei de Newton da rotação

IFGW Instituto de Física Gleb Wataghin

No plano perpendicular ao eixo de rotação:

$$F_{(\|)i} = F_i \; sen \quad _i = m_i r_i \alpha \Rightarrow \quad r_i \, F_i sen \quad _i = m_i r_i^2 \alpha$$

Vetorialmente: $\vec{r}_i \times \vec{F}_i = m_i r_i^2 \vec{\alpha} \equiv \vec{\tau}_i$



<u>Definição</u>: $\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ é o torque da força externa $\vec{F}_i$ sobre a *i-ésima* partícula do corpo rígido (é um vetor saindo do plano do desenho)

No caso em que várias forças agem sobre a partícula, o torque total é:

$$\vec{\tau}_{res} = \sum_i \vec{\tau}_i = \Big(\sum_i m_i r_i^2\Big)\vec{\alpha} \equiv I \, \vec{\alpha}$$

Finalmente: $\boxed{\vec{\tau}_{res} = I \, \vec{\alpha}}$ (2.ª lei de Newton da rotação)

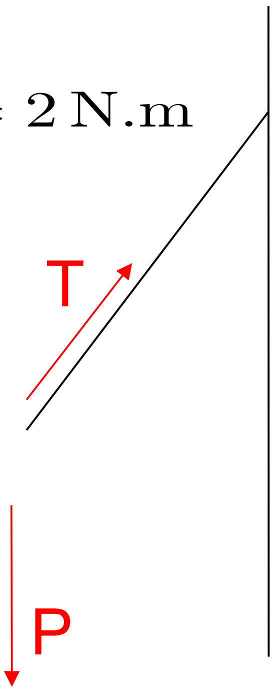
Pergunta

Uma pedra de *0,2 kg* amarrada na ponta de um barbante de 2 m oscila sob a ação da gravidade. No seu ponto mais alto, o barbante fica na horizontal. Qual o torque exercido na pedra quando o barbante define um ângulo de 30^o com a vertical (no SI)?

Pergunta

Uma pedra de *0,2 kg* amarrada na ponta de um barbante de 2 m oscila sob a ação da gravidade. No seu ponto mais alto, o barbante fica na horizontal. Qual o torque exercido na pedra quando o barbante define um ângulo de 30º com a vertical (no SI)?

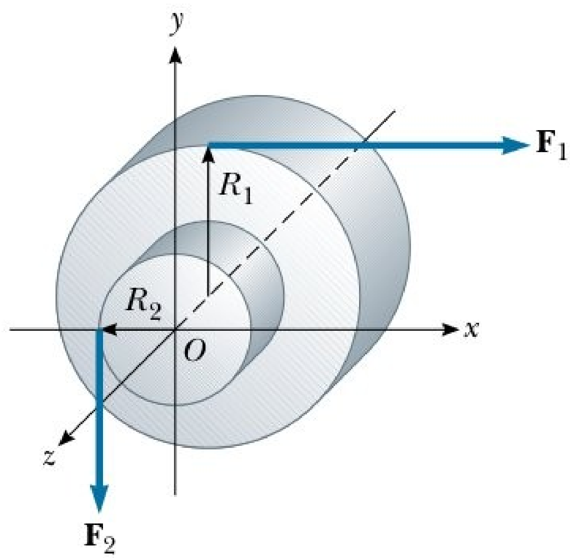
$$\tau = (mg).l.\sin 30^o + T.l.sin180^0 = 2\,\mathrm{N.m}$$



Torque e 2ª Lei de Newton da rotação

Torque é um vetor, portanto se várias forças estiverem agindo, somamos vetorialmente seus torques.

- Como estamos analisando somente rotação em torno de um eixo, tal soma vetorial é trivial.



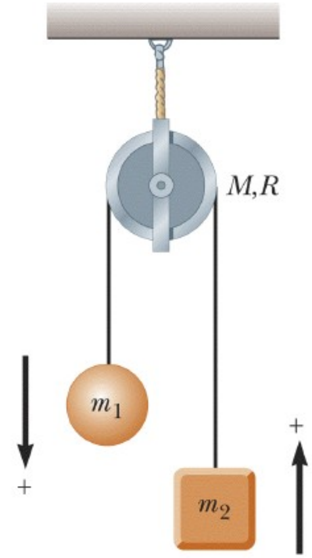
$$\vec{\tau} = (-R_1 F_1 + R_2 F_2)\hat{k}$$

Exemplo:

Máquina de Atwood com uma polia com massa

Massa m_1 ⟹ $\sum F_y = m_1 g - T_1 = m_1 a \qquad (1)$

Massa m_2 ⟹ $\sum F_y = T_2 - m_2 g = m_2 a \qquad (2)$



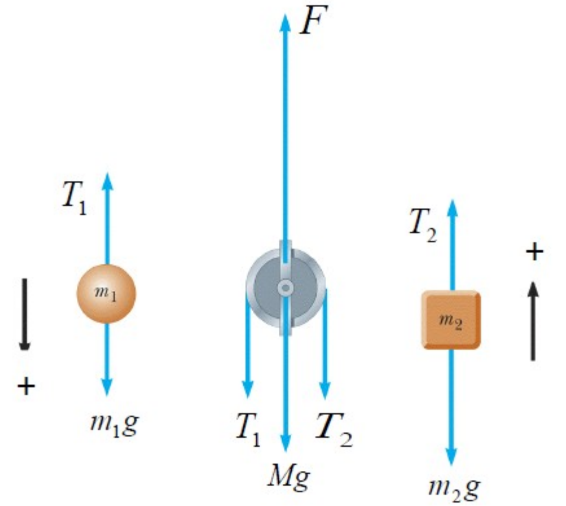
$$\sum \tau = T_1 R - T_2 R = I\alpha =$$

Polia

$$\frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2} M R a \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M a \qquad (3)$$

Então, resolvendo (1), (2) e (3):

$$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M} \right) g$$



Pergunta

Queremos fixar um cubo de madeira de *10 kg* e dimensões *1m x 1m x 1 m* em uma parede através de um parafuso central. Qual a força que o parafuso exercerá na parede?

Pergunta

Queremos fixar um cubo de madeira de *10 kg* e dimensões *1m x 1m x 1 m* em uma parede através de um parafuso central. Qual a força que o parafuso exercerá na parede?

- equilíbrio de forças:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_c = 0$$

Força de contato parafuso/madeira

onde

$$F_c \cos\theta = P \quad (1) \qquad ; \qquad F_c \sin\theta = N \quad (2)$$

- equilíbrio de torques, assumindo que a normal atua na extremidade inferior do cubo:

$$F_c(l/2)\sin\theta = P(l\sqrt{2}/2)\sin 45^o \quad (3)$$

Portanto, substituindo (3) em (1):

$$\theta = 45^o \;\rightarrow F_c = \sqrt{2}P \sim 140N$$

Torque de força gravitacional

No problema anterior assumimos que a força gravitacional age no centro do cubo. Tal suposição é razoável?

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times (dm\vec{g}) \rightarrow \vec{\tau} = \int \vec{r} \times (dm\vec{g}) = \left[\int \vec{r}dm\right] \times \vec{g}$$

Cálculo do C.M.

Logo:

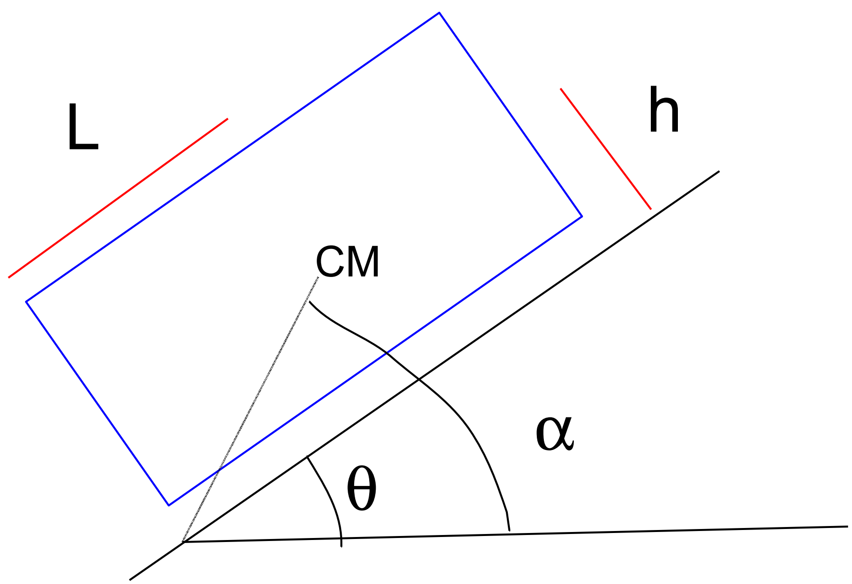
$$\vec{\tau} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}$$

Pergunta

Um carro com tração dianteira percorre uma pista de terra após uma chuva. Ao tentar subir uma ladeira íngreme, os pneus derrapam, e o carro não sobe. Alguém tem uma sugestão para o motorista?

Pergunta

Um carro com tração dianteira percorre uma pista de terra após uma chuva. Ao tentar subir uma ladeira íngreme, os pneus derrapam, e o carro não sobe. Alguém tem uma sugestão para o motorista?



Pergunta

Um carro com tração dianteira percorre uma pista de terra após uma chuva. Ao tentar subir uma ladeira íngreme, os pneus derrapam, e o carro não sobe. Alguém tem uma sugestão para o motorista?

Equilíbrio de forças:

$$\vec{P} + \underbrace{\vec{N}_d + \vec{f}_{at}^{\,(d)}}_{\text{Rodas dianteiras}} + \underbrace{\vec{N}_t + \vec{f}_{at}^{\,(t)}}_{\text{Rodas traseiras}} = 0$$

$$P\cos\theta = N_d + N_t$$

$$P\sin\theta = f_{at}^{(d)} + f_{at}^{(t)} = \mu_e(N_d + N_t)$$

Mas $\vec{N}_d \neq \vec{N}_t$. E agora?

Pergunta

Se o carro está parado, ele tem a tendência a girar sobre a roda traseira caso a curva fique íngreme demais. Portanto assumindo este ponto como o eixo de rotação:

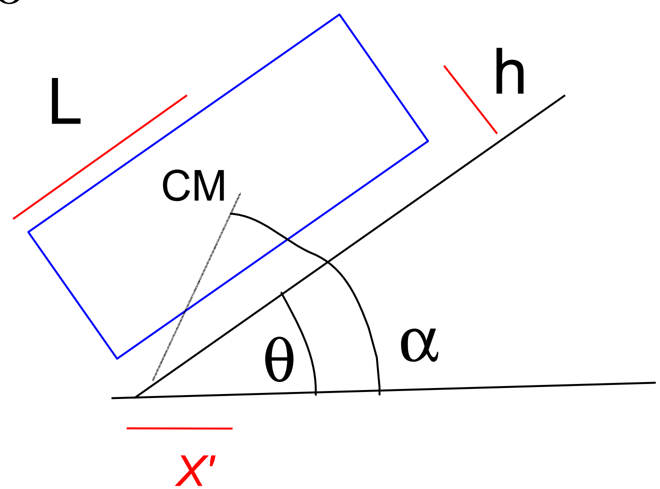
$$\tau_P + \tau_{Nd} = 0$$ Normal traseira e forças de atrito não geram torque

$$P\left[L^2 + h^2\right]^{1/2} \cos\alpha - N_d(2L) = 0$$

X'

$$N_d = (P/2)x'/L$$

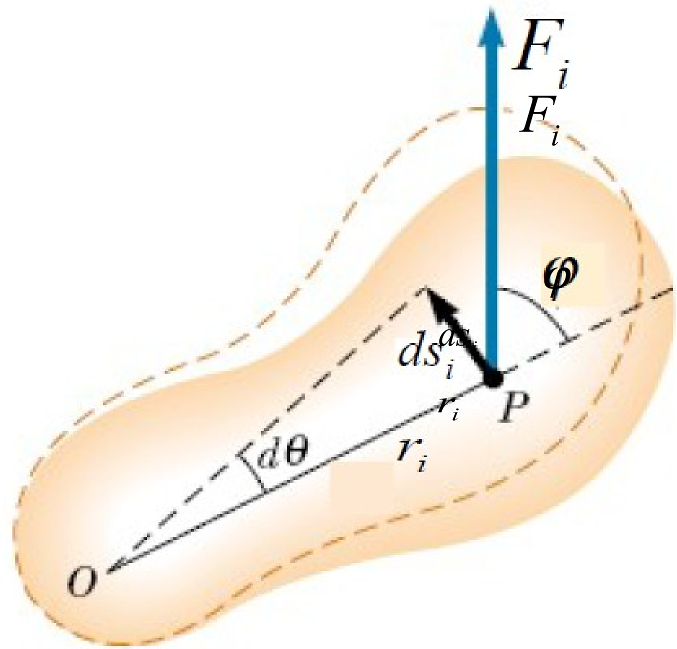
$$< \cos\theta$$



Portanto, $N_d < N_t$, e o mesmo vale para as forças de atrito. Tração traseira sobe ladeiras íngremes derrapando menos!

O trabalho no deslocamento angular

Seja uma força externa F_i aplicada a uma partícula no ponto P. O trabalho infinitesimal num deslocamento $ds_i = r_i d\theta$ é:



$$dW_i = F_i \cdot ds_i = (F_i\ sen\ \quad)\, r_i d\theta = \tau_i\ d\theta$$

($F_i\, sen\, \varphi$ é a componente tangencial de F_i ; a componente radial não trabalha). Então:

$$W = \sum_i \int \tau_i d\theta = \int \tau\ d\theta$$

Como $\tau = I\alpha$:

$$W = \int I\ \alpha\ d\theta = \int I\ \frac{d\omega}{dt}\ \omega\ dt$$

$$W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega\ d\omega\ = \frac{1}{2} I\ \omega_f{}^2 - \frac{1}{2} I\ \omega_i{}^2 = \Delta K$$

(teorema do trabalho-energia cinética na rotação)

Pergunta

Uma barra de dimensão $L=1m$ é fixa em uma ponta, oscilando pela ação da gravidade. Soltando a barra horizontalmente, qual a velocidade angular da barra quando ela está na vertical?
(dados: $I=(1/3)ML^2$.)

Pergunta

Uma barra de dimensão *L=1m* é fixa em uma ponta, oscilando pela ação da gravidade. Soltando a barra horizontalmente, qual a velocidade angular da barra quando ela está na vertical?
(dados: $I=(1/3)ML^2$.)

$$\Delta K = I\omega^2 = (1/3)mL^2\omega^2$$
$$\Delta U = -W = -mg(L/2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \sim 5,5\, rad/s$$

Exemplo:

- Trabalho em uma máquina de Atwood

Se os corpos partem do repouso ($v_i = 0$):

$$v_f = v_i + a\,t = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}\right) g\,t$$

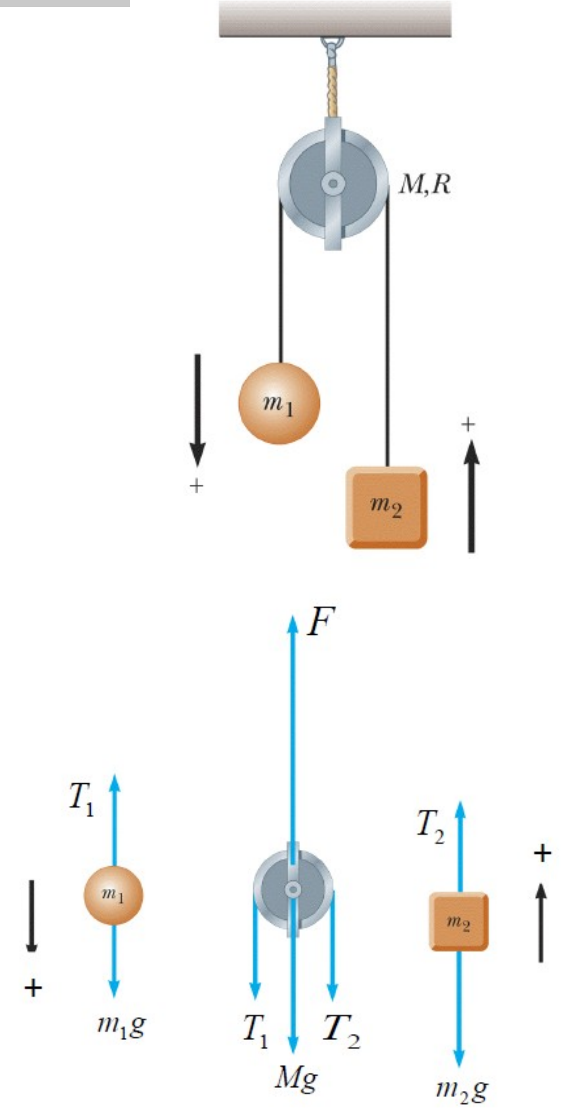
Velocidade angular:

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}\right) g t$$

$$K_{sistema} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}{}^2 + \frac{1}{2} I\omega_f{}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2 + M/2}\right) g^2 t^2$$

Esta variação da energia cinética é igual ao trabalho das forças peso no sistema (verificar).



Potência no deslocamento angular

Usando a definição do momento de inércia:

$$W=\frac{1}{2}I\omega_f^{\,2}-\frac{1}{2}I\omega_i^{\,2}=\sum_k\frac{1}{2}m_k\rho_k^2\omega_{kf}^{\,2}-\sum_k\frac{1}{2}m_k\rho_k^2\omega_{ki}^{\,2}$$

$$=\sum_k\frac{1}{2}m_k v_{kf}^{\,2}-\sum_k\frac{1}{2}m_k v_{ki}^{\,2}=\Delta K$$

que é o teorema do trabalho-energia em sua forma usual.

Potência: é a taxa com que se realiza trabalho:

$$P=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\tau\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\Rightarrow\frac{dW}{dt}=\tau\omega$$

Compare com $P=\dfrac{\Delta W}{\Delta t}=\sum_i\vec{F}_i\cdot\vec{v}_i$

Equações do movimento linear e rotacional

Movimento linear		Movimento de rotação (eixo fixo)	
velocidade linear	$v = \frac{dx}{dt}$	velocidade angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
aceleração linear	$\vec{a} = \frac{dv}{dt}$	aceleração angular	$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt}$
força resultante	$\sum_i F_i = m\,a$	torque resultante	$\sum_i \tau_i = I\,\alpha$
$a =$ constante	$\begin{cases} v = v_0 + a\,t \\ x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2\,a\,(x - x_0) \end{cases}$	$\alpha =$ constante	$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha\,t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0\,t + \frac{1}{2}\alpha\,t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\,\alpha\,(\theta - \theta_0) \end{cases}$
trabalho	$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx$	trabalho	$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\,d\theta$
energia cinética	$K = \frac{1}{2}m\,v^2$	energia cinética	$K = \frac{1}{2}I\,\omega^2$
potência	$P = F\,v$	potência	$P = \tau\,\omega$
massa	m	Momento de inércia	I