studocu

Lista 6 - Cônicas e muito mais

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

A Studocu não é patrocinada ou endossada por nenhuma faculdade ou universidade
Baixado por Adam Sandler (worav33123@huvacliq.com)

IMECC/Unicamp
MA141 – Geometria Analítica e Vetores (turma P, 2s2018)
Professor: Dr. Ricardo Miranda Martins

Lista 6: Cônicas e muito mais (esta lista é um plágio de uma lista antiga do Plamen).

10. Rotação - Identificação de Cónicas

1) Considere o plano com o sistema cartesiano canônico xy e faça uma rotação de um ângulo θ obtendo um novo sistema $\overline{x}\,\overline{y}$.

a) Se $P = (2, 2)$ no sistema xy e $\theta = \pi/3$, encontre as coordenadas de P no sistema $\overline{x}\,\overline{y}$.
b) Se $P = (-1, -2)$ no sistema $\overline{x}\,\overline{y}$ e $\theta = \pi/3$, encontre as coordenadas de P no sistema xy.
c) Transforme a equação $x^2 + y^2 = 4$ para o sistema $\overline{x}\,\overline{y}$.
d) Suponha $a = \tan\theta$ (a=tangente de θ). Transforme a equação $y = ax$ para o sistema $\overline{x}\,\overline{y}$.

2) Considere o plano com o sistema cartesiano canônico xy e faça uma rotação de um ângulo θ, com $0 \le \theta \le \pi/2$ obtendo o novo sistema $\overline{x}\,\overline{y}$. Consiere a equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (*)$$

com A, B, C, D, E, F números reais. Ao transformar (*) para o sistema $\overline{x}\,\overline{y}$ obtemos:

$$\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{B}\overline{xy} + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0. \qquad (**)$$

a) Mostre que:

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta \\
\overline{B} &= -2A\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2C\sin\theta\cos\theta \\
\overline{C} &= A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\
\overline{D} &= D\cos\theta + E\sin\theta \\
\overline{E} &= E\cos\theta - D\sin\theta \\
\overline{F} &= F.
\end{aligned}$$

b) Supondo $A > 0$ e $F < 0$, conclua, a partir de a), que a equação $(*)$ representa uma circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $r = \sqrt{\frac{-F}{A}}$ se e somente se para todo θ temos que $A = \overline{A}$, $B = \overline{B}$, $C = \overline{C}$, $D = \overline{D}$, $E = \overline{E}$ e $F = \overline{F}$.

c) Sejam

$$M = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \qquad \overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \frac{\overline{B}}{2} \\ \frac{\overline{B}}{2} & \overline{C} \end{pmatrix} \qquad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Mostre, a partir de a), que

$$\overline{M} = R_\theta^t.M.R_\theta$$

e calculando o determinante dos dois lados da igualdade conclua que

$$\Delta = B^2 - 4AC = \overline{B}^2 - 4\overline{A}.\overline{C}$$

qualquer que seja o ângulo θ

(**OBS:** Δ é conhecido pelo nome de discriminante da equação $(*)$ e o item c) está dizendo que ele é invariante por rotação).

3) Sejam $\mathcal{C}$ a circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$ e $P = (x_1, y_1)$ um ponto do plano. Mostre que:

a) Se $P \in \mathcal{C}$ então a equação da reta tangente a circunferência por P é $x_1x + y_1y = r^2$.
(Lembre que a reta tangente em P sempre é perpendicular ao vetor $\vec{OP}$, com O sendo o centro de $\mathcal{C}$.)
b) Se $r = 1$ e l é a reta de equação $3x + 4y = 5$ então l é tangente a $\mathcal{C}$. Encontre o ponto de tangência.
c) Se P está no exterior da circunferência e $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ são os pontos de $\mathcal{C}$ tais que as retas l_2 que passa por P e P_2, e l_3 que passa por P e P_3 são tangentes à circunferência, então a reta (secante) que passa por P_2 e P_3 tem equação $x_1x + y_1y = r^2$.
(Sugestão: A partir de **a)** encontre as equações das retas l_2 e l_3 e use o fato de que P está em ambas.)

4) Em cada uma das equações abaixo elimine, através de uma rotação, o termo xy. Identifique o conjunto solução e nos casos em que for uma cônica encontre as coordenadas, no sistema inicial, do(s) foco(s), vertice(s), diretrizes e assíntotas (quando couber)e esboce o gráfico.

a) $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$;

This document is available free of charge on studocu

Baixado por Adam Sandler (worav33123@huvacliq.com)

b) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$
c) $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 6x = 0$
d) $18x^2 + 12xy + 2y^2 + 94\frac{\sqrt{10}}{10}x - 282\frac{\sqrt{10}}{10}y + 94 = 0.$
e) $3x^2 + 5y^2 + 4x - 2y - 10 = 0$
f) $x^2 + 2x + y^2 + 2y + 2 = 0$
g) $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$
h) $x^2 + y^2 + (1/3)xy + 6x + 8y - 5 = 0$
i) $x^2 + (1/5)xy + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$
j) $x^2 + 5x + y - 9 = 0$
k) $x^2 + 3y^2 + 4xy + 4y - 4 = 0$
l) $x^2 - 2y^2 + 4xy - 6 = 0$
m) $x^2 + 2y^2 - 4xy + y - 1 = 0$
n) $x^2 - 3y^2 - 2xy - x - y = 0$
o) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y - 1 = 0$
p) $x^2 + 3y^2 - 2xy + 3 = 0$
q) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$
r) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
s) $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0$

11. Coordenadas Polares

5) Desenhe sobre o plano o ponto P que tem coordenadas polares:

a) $(3, \pi/4)$
a) $(1, 5\pi/6)$
a) $(2, 3\pi/2)$
a) $(1, 5\pi/4)$

6) Em cada um dos casos abaixo encontre a equação em coordenadas polares.

a) $x^2 - y^2 = 16$
b) $2xy = 25$
c) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$
d) $x^3 + y^3 - 6xy = 0.$
e) $4x^2 + 3y^2 = 1$
f) $2x^2 - y^2 = 1$
g) $y^2 + 4x = 0$
h) $x^2 - 2y = 0$
i) $x^2 + 2y^2 = 1$

6) Em cada um dos casos abaixo encontre a equação em coordenadas cartesianas.

a) $r = \frac{5}{2-2\cos\theta}$
b) $r^2 = 2\sin 2\theta$
c) $r = \frac{6}{2-3\sin\theta}$
d) $r^2 = \cos\theta.$
d) $r\cos(\theta - \pi/4) = 2$
e) $r\sin(\theta - \pi/3) = 3$
f) $r + r\cos(\theta - \pi/4) = 2$
g) $r + 2r\cos(\theta) = 1$
h) $2r + r\cos(\theta) = 2$

7) Em cada um dos casos abaixo identifique a cônica. Determine a excentricidade, a equação cartesiana da cônica e da diretriz e as coordenadas cartesianas do(s) foco(s) e do(s) vértice(s).

a) $r = \frac{5}{2-2\cos\theta}$
b) $r = \frac{6}{3+\sin\theta}$
c) $r = \frac{3}{2+4\cos\theta}$
d) $r = \frac{4}{2-3\cos\theta}.$
e) $r = \frac{1}{2-\cos(\theta-\pi/4)}$
f) $r = \frac{1}{1+3\sin(\theta-\pi/3)}$
g) $r = \frac{1}{1-\sin(\theta-\pi/6)}$

Baixado por Adam Sandler (worav33123@huvacliq.com)

.
.

12. Parametrização de Cônicas

8)Seja ℓ a curva com equações paramétricas $x = a(1+t^2)/(1-t^2)$, $y = 2bt/(1-t^2)$. Determine ℓ.

9)A elipse ℓ tem focos $F_1(1,2)$ e $F_2(2,4)$ e vértices $A_1(0,0)$ e $A_2(3,6)$. Dê as equações paramétricas de ℓ.

10)A hipérbole ℓ tem focos F_1 e F_2 e vértices A_1 e A_2. Encontrar equações paramétricas de ℓ se

a) $F_1(2,0)$, $F_2(8,0)$, $A_1(3,0)$, $A_2(7,0)$;
b) $F_1(0,0)$, $F_2(4,8)$, $A_1(1,2)$, $A_2(3,6)$.

13. Superfícies e coordenadas cilíndricas e esféricas

11) Reduzir cada uma das equações de forma a identificar a quádrica que ela representa e esboce o gráfico.

a) $4x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$;
b) $3x^2 + 4y^2 + z^2 - 12x - 8y - 2z + 16 = 0$;
c) $x^2 + y + z^2 = 0$;
d) $4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 36z + 3 = 0$.

12)

a) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam do plano $\pi : x = 2$ e do ponto $P = (-2,0,0)$. Que conjunto é este?
b) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam das retas $r : y = z = 0$ e $l : x = y - 1 = 0$. Que conjunto é este?
c) Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x,y,z)$ tais que a soma das distâncias de P aos dois pontos $(2,0,0)$ e $(-2,0,0)$ é igual a 6. Que lugar geométrico é este?

13) Dados a esfera $\mathcal{S}$ de centro $C = (h,k,p)$ e raio r e $P = (x_1,y_1,z_1)$ um ponto da esfera. Mostre que: $\pi \cap \mathcal{S} = \{P\}$, onde π é o plano que é normal ao vetor $\vec{CP}$ e passa por P. Tal plano é chamado de plano tangente à esfera por P.

14) Dada a esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 11 = 0$.

a) Encontre o seu centro e seu raio.
b) Encontre a equação do plano tangente à esfera e que passa pelo ponto $P = (2,1,4) \in S$.

15) Dadas as equações da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes determine a equação da superfície cilíndrica.

a) $y^2 = 4x$, $z = 0$ e $V = (1,-1,1)$
b) $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$ e $V = (0,2,-1)$
c) $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ e $V = (4,1,0)$
d) $4x^2 + z^2 + 4z = 0$, $y = 0$ e $V = (4,1,0)$.

16) Mostre que cada uma das equações representa uma superfície cilíndrica e determine a equação da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes.

a) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$;
b) $17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0$.

17) Determine a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo especificado.

a) $9x^2 + 4y^2 = 36$ e $z = 0$ em torno do eixo y;
b) $yz = 1$ e $x = 0$ em torno do eixo z.

18) Mostre que cada uma das equações representa uma superfície de revolução e determine o seu eixo de revolução e a equação da curva geratriz.

a) $x^2 + y^2 - z^3 = 0$;
b) $y^6 - x^2 - z^2 = 0$

19) Encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada:

a) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$,
b) $x^2 - y^2 = 3z^2$.

This document is available free of charge on studocu

Baixado por Adam Sandler (worav33123@huvacliq.com)

20) Encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9z$;
b) $x^2 + y^2 = 9$.

21) Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é dada:

a) $r = 3\cos\theta$
b) $z^2 \sin\theta = r^3$.
c) $r = z$
d) $z = r^2$
e) $z = r\cos(\theta + \pi/4) - 2r\sin(\theta)$
f) $z = r^2 + r\cos(\theta + \pi/3)$

22) Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas esféricas é dada:

a) $r = 2\tan\theta$;
b) $r = 9\sec\phi$.
c) $r = \sin(\theta)\sin(\phi)$
d) $r = 2\cos(\theta)$
e) $r = \cos(\phi)$

Baixado por Adam Sandler (worav33123@huvacliq.com)