UNICAMP

GABARITO
MA211 – PROVA 3
Sexta-feira (noite), 19/12/2014.

*Para correção, cada símbolo "✓**x**" o item que o antecede vale **x** pontos.*

Resolução da Questão 1. Primeiramente, note que o campo vetorial **F** está definido em todo $\mathbb{R}^3$ e suas componentes possuem derivadas contínuas (seno, cosseno e exponencial). Porém, temos que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \operatorname{sen} y & \cos y & e^z \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - \cos y\mathbf{k}. \tag{1}$$

Como rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, **F** não é um campo vetorial conservativo (Teorema 3, Capítulo 16.5). ✓**0,4**

Como **F** não é conservativo, não podemos aplicar o teorema fundamental das integrais de linha. Usaremos então a definição da integral de linha, ou seja,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)dt \checkmark \mathbf{0,2}, \tag{2}$$

em que a e b definem os limites de t.

Note que as equações paramétricas da curva C são:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t, \\ y = t, \\ z = 2t, \end{cases} \qquad \checkmark \mathbf{0,2} \tag{3}$$

com $0 \leq t \leq \pi/2$. Além disso,

$$\mathbf{r}'(t) = \cos t\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \checkmark \mathbf{0,2} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{4}$$

Desta forma, obtemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \underbrace{\int_0^{\pi/2}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\cos t \operatorname{sen} t + \cos t + 2e^{2t}}_{\checkmark 0,2} dt = I_1 + I_2 + I3, \tag{5}$$

com

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \operatorname{sen} t dt = \int_0^1 u du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}, \qquad (\text{tome } u = \operatorname{sen} t) \tag{6}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \operatorname{sen} t\Big|_0^{\pi/2} = 1 \tag{7}$$

e

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} 2e^{2t} dt = e^{2t}\Big|_0^{\pi/2} = e^{\pi} - 1. \tag{8}$$

Logo,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2} + 1 + e^{\pi} - 1 = e^{\pi} + \frac{1}{2}. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{9}$$

Resolução da Questão 2. Primeiramente, escrevemos $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, em que

$$P(x, y) = x^2 + y \quad \text{e} \quad Q(x, y) = 3x - y^2. \tag{10}$$

Pelo teorema de Green, o trabalho realizado pelo campo de força satisfaz:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \checkmark \mathbf{0,4}, \tag{11}$$

em que D é uma região que tem área 6, isto é, $A(D) = 6$. Mas,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1. \tag{12}$$

Logo,

$$W = \iint_D (3-1) dA = 2 \iint_D dA \checkmark \mathbf{0,6} \tag{13}$$

Mas, $\iint_D dA$ fornece a área da região D, ou seja, $\iint_D dA = A(D) = 6$ ✓**0,6** . Portanto,

$$W = 3 \iint_D dA = 2(6) = 12. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{14}$$

Resolução da Questão 3. A área da superfície dada por $z = f(x,y)$ é

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\,dA.\checkmark \mathbf{0,4} \tag{15}$$

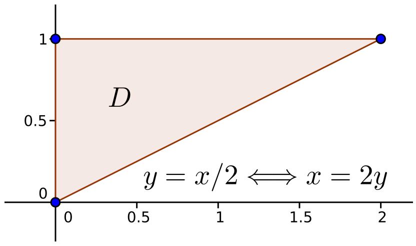
Nesta questão, temos $f(x,y) = 1 + 3x + 3y^2$. Logo,

$$f_x = 3 \quad \text{e} \quad f_y = 6y. \tag{16}$$

Portanto,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (3)^2 + (6y)^2}\,dA = \iint_D \sqrt{1 + 9 + 36y^2}\,dA = \iint_D \sqrt{10 + 36y^2}\,dA, \checkmark \mathbf{0,4} \tag{17}$$

em que D, nesta questão, é o triângulo com vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(2,1)$ mostrado abaixo.



Interpretando D como uma região do Tipo 2 no plano, encontramos

$$A(S) = \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\int_0^{2y}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\sqrt{10 + 36y^2}}_{\checkmark 0,2}\,dx dy = \int_0^1 \sqrt{10 + 36y^2}(2y)dy \checkmark \mathbf{0,2}. \tag{18}$$

Tomando $u = 10 + 36y^2$, $du = 36(2y)dy$, encontramos

$$A(S) = \int_{10}^{46} u^{1/2} \frac{du}{36} = \frac{1}{36} \frac{u^{3/2}}{(3/2)}\Big|_{10}^{46} = \frac{1}{54}(46\sqrt{46} - 10\sqrt{10}).\checkmark \mathbf{0,4} \tag{19}$$

Resolução da Questão 4. Pelo teorema de Stokes, temos

$$I = \iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \checkmark \mathbf{0,3}, \tag{20}$$

em que C é a curva fronteira da superfície que, nesta questão, corresponde a elipse no plano $x + z = 1$, acima da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário ✓**0,3** .

Descrevendo a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ usando coordenadas polares e observando que $z = 1 - x$, a curva C pode ser descrita pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \operatorname{sen} t, \\ z = 1 - \cos t, \end{cases} \qquad \text{com} 0 \leq t \leq 2\pi, \checkmark \mathbf{0,4} \tag{21}$$

ou ainda,

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + (1 - \cos t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \tag{22}$$

Além disso, temos que

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\mathbf{k} \checkmark \mathbf{0,2} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos t\mathbf{i} + (\cos t - 1)\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\mathbf{k}. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{23}$$

Logo,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t \cos t + \cos^2 t - \cos t + \operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos t - \operatorname{sen} t \cos t. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{24}$$

Desta forma, pela definição de integral de linha, encontramos

$$I = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t - \operatorname{sen} t \cos t)\, dt = 2\pi - \int_0^{2\pi} \cos t dt - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t dt = 2\pi, \checkmark \mathbf{0,4} \tag{25}$$

pois

$$\int_0^{2\pi} \cos t dt = \operatorname{sen} t\Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t dt = \int_0^0 u du = 0 \quad (\text{tome } u = \operatorname{sen} t). \tag{26}$$

Resolução da Questão 5. Pelo teorema do divergente, temos que

$$I = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV, \checkmark \mathbf{0,4} \tag{27}$$

em que E é o sólido no primeiro octante dado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $z = 2$. Além disso, temos que

$$\text{div } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{k} \right) \cdot (x^4\mathbf{i} - x^3z^2\mathbf{j} + 4xy^2z\mathbf{k}) = 4x^3 + 4xy^2 = 4x(x^2+y^2). \checkmark \mathbf{0,4} \tag{28}$$

Logo,

$$I = \iint_E 4x(x^2+y^2)dV. \tag{29}$$

Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r \,\text{sen}\, \theta, \\ z = z, \end{cases} \qquad \text{com} \qquad \begin{cases} 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \theta \le \pi/2, \\ 0 \le z \le 2, \end{cases} \tag{30}$$

obtemos

$$I = \underbrace{\int_0^{\pi/2}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\int_0^2}_{\checkmark 0,2} \underbrace{4(r\cos\theta)r^2}_{\checkmark 0,2} \underbrace{(r)dzdrd\theta}_{\checkmark 0,2} = \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \right) \left(\int_0^1 4r^4 dr \right) \left(\int_0^2 dz \right) \tag{31}$$

$$= \left(\text{sen}\,\theta \Big|_0^{\pi/2} \right) \left(\frac{4}{5}r^5 \Big|_0^1 \right) \left(z \Big|_0^2 \right) = (1)\left(\frac{4}{5}\right)(2) = \frac{8}{5}. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{32}$$