MA141-A- PROVA II- 08 de Outubro 2015-

Observações Importantes:

1-Respostas sem justificativas não serão consideradas. Utilizando alguma regra ou resultado crucial que foi estabelecido em classe, cite-o explicitamente, caso contráro, **é de sua responsabilidade demonstra-la/o**; sem isto, a questão será **anulada.** Isto vale especialmente para cálculo de determinantes, produtos vetoriais e demais formuletas.

2-A **prova é escrita** e, portanto, está totalmente contida nestas folhas; nenhuma explicação oral ou escrita posterior influenciará na sua avaliação.

3-A prova tem duração de **1h:50min**.

4-Clareza na argumentação **é um item avaliado** nesta prova e a transcrição legível dela é importante pois não cabe ao corretor decifrar mensagens criptografadas.

5-A resolução de questões desta prova não tem qualquer valor intrínseco (nem cientifico!); elas são apenas um meio para verificar **a sua** compreensão do assunto que, espera-se, lhe servirá para tratar de questões de fato relevantes no futuro.

6-Soluções corretas existem poucas e basta conhecer uma delas. Soluções erradas, existem inúmeras e mesmo o conhecimento de todas elas não lhe garante o conhecimento de uma solução correta.

QUESTÃO 1: Considere a matriz *circulante*:$M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, onde abc são os primeiros 3 digitos de seu RA.

1a-**Utilizando o Algoritmo de Gauss,** calcule uma sequencia de **matrizes elementares** $n \times n$, $E_1, \ldots\ldots, E_p$ de tal forma que $E_1, \ldots\ldots, E_p M = S$ seja uma matriz escalonada. (Uma matriz elementar $E \in M_{n \times n}$, é aquela cuja multiplicação à esquerda EM de uma matriz $M \in M_{n \times m}$, efetua a respectiva transformação elementar nas linhas de M).

1b-Escreva cada equação do sistema $Mx = (h_1, h_2, h_3)^t$, na forma equivalente $\langle N_k, x \rangle = g_k$ onde N_k é vetor unitário e $h_1 h_2 h_3$ são os tres ultimos digitos de seu RA.

1c-Interprete geometricamente a solução do sistema $Mx = h$.

1d-Calcule o $\det(M)$ **utilizando apenas** as propriedades fundamentais do determinante (determinante do produto e a "*taboada*" do $\det$ para matrizes elementares) .

RESOLUÇÃO:

1a-Esta resolução já foi apresentada na prova anterior.

1b-Toda equação linear não trivial (isto é, que não tenha todos os coeficientes, a, b, c nulos) da forma $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ pode ser re-escrita na forma vetorial $\langle \alpha, x \rangle = d$ onde $\alpha = (a, b, c)$ e $x = (x_1, x_2, x_3)$ são vetores (na representação linha neste caso). Agora, multiplicando a equação por $\frac{1}{\|\alpha\|}$, onde, naturalmente, $\|\alpha\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (que supomos não nulo), obtemos uma equação equivalente (resultado de uma operação elementar multiplicação): $\frac{1}{\|\alpha\|}\langle \alpha, x \rangle = \frac{1}{\|\alpha\|} d$ de onde, $\left\langle \frac{\alpha}{\|\alpha\|}, x \right\rangle = \frac{1}{\|\alpha\|} d$ e, finalmente $N = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ e $g = \frac{1}{\|\alpha\|} d$. Como N é unitário a equação significa que $\langle N, x \rangle$ =Projeção de x na direção de N que define um plano perpendicular a N e que passa a uma distancia $\frac{1}{\|\alpha\|}d$ da origem. (Se $\frac{1}{\|\alpha\|}d < 0$ a distancia se dá no sentido contrário ao indicado por N).

1c-Como N é unitário a equação significa que $\langle N, x\rangle =$"*A projeção de x na direção de N tem sempre valor fixo* $\frac{1}{\|\alpha\|}d$ ", o que define um plano perpendicular a N e que passa a uma distancia $\frac{1}{\|\alpha\|}d$ da origem. (Se $\frac{1}{\|\alpha\|}d < 0$ a distancia se dá no sentido contrário à indicada por N). Então as tres equações simultaneas determinam um ponto do espaço que está na interseção dos tres planos definidos respectivamente pelas três equações.

1d-Esta questão foi resolvida no gabarito da prova anterior.

QUESTÃO 2:

Considere duas retas r_1 e r_2 descritas parametricamente na forma $r_k = \{X^{(k)}(t) = P^{(k)} + tv^{(k)}, -\infty < t < \infty\}$.

a-Argumente sobre a propriedade geométrica (perpendicularidade) que caracteriza os pontos $R_k \in r_k$, tais que $\|R_1 - R_2\|$ ="*distancia entre as duas retas*". (isto é, a menor distancia $\|X_1 - X_2\|$entre os pontos das duas retas).

b-Obtenha estes pontos e a distancia entre as duas retas no caso em que $P_1 = (0,0,0)^t$, $P_2 = (1,1,1)^t$ e $v^{(1)} = (1,2,3)^t$ e $v^{(2)} = (-1,0,1)^t$.

RESOLUÇÃO Q2:

2a-Um esboço geometrico simples (ilustrado e enfatizado várias vezes em classe) mostra que quando os pontos das respectivas retas denotados por $X^1(t)$ e $X^2(s)$, ligados entre si pelos vetores $R(t,s) = X^{(1)}(t) - X^2(s)$, assumem a posição de máxima proximidade(minima distancia) então $R(s,t)$ é perpendicular às duas retas simultaneamente, ou seja, nesta posição temos: $R \perp v^1$ e $R \perp v^2$, o que analiticamente pode ser representado na forma de duas equações: $\langle R(t,s), v^1\rangle = 0$ e $\langle R(t,s), v^2\rangle = 0$. Isto nos dá duas equações a duas incognitas (t e s) que tem, em geral, (mas não com certeza absoluta!) uma única solução.

2b-Aplicando a formulação analitica acima às retas dadas temos:

$$\langle (P_1 + tv^1 - P_2 - sv^2), v^1\rangle = \langle (P_1 - P_2), v^1\rangle + t\langle v^1, v^1\rangle - s\langle v^1, v^2\rangle = 0$$
$$\langle (P_1 + tv^1 - P_2 - sv^2), v^2\rangle = \langle (P_1 - P_2), v^2\rangle + t\langle v^1, v^2\rangle - s\langle v^2, v^2\rangle = 0$$

que no exemplo acima se reduz à

$$-6 + 14t - 2s = 0$$
$$2t - 2s = 0$$

cuja solução obvia é: $s = \frac{1}{2}$ e $t = \frac{1}{2}$ de onde vem que $X_*^1 = P_1 + \frac{1}{2}v^1 = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})^t$ e $X_*^2 = P_2 + \frac{1}{2}v^2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})^t$ e a distancia mínima entre as retas será $d = \|X_*^1 - X_*^2\| = 1$. Como a distancia entre elas é positiva, as retas são reversas e nunca se encontram.(A menos de uma enorme coincidencia, o que se poderia esperar de duas retas no espaço? Se as retas fossem paralelas, mas não coincidentes, o sistema em t e s teria infinitas soluções; interprete isto geometricamente).

QUESTÃO 3:

a-Considere um raio de luz que parte de uma fonte situada no ponto $P^* = (10,-5,8)$ e passa pelo ponto $P_1 = (1,1,1)$. Determine o ponto P_0 de incidencia deste raio no plano $\pi : \langle N,x\rangle = 5$, onde $N = (-1,-1,-1)$.

b-Determine o ângulo de incidencia deste raio (isto é, o ângulo agudo entre a semireta descrita pelo raio e o vetor perpendicular ao plano).

c-Se o raio de luz tem velocidade c determine o tempo gasto entre a fonte e o momento de incidencia do raio no plano.

RESOLUÇÃO:

a-O raio de luz percorre uma trajetoria sobre a reta que parametricamente pode ser descrita na forma $P^* + t(P_1 - P^*) = X(t)$ e sua interseção com o plano π se dará quando: $\langle N, X(t)\rangle = 5$ ou seja, $\langle P^*, N\rangle + t\langle (P_1 - P^*), N\rangle = 5$ que nos dá o seguinte valor de $t = \frac{5-\langle P^*,N\rangle}{\langle (P_1-P^*),N\rangle} = \frac{9}{5}$ e, portanto, o ponto é
$X(\frac{9}{5}) = (10,-5,8) + \frac{9}{5}(-9,6,-7) = (10 - \frac{81}{5}, -5 + \frac{54}{5}, 8 - \frac{63}{5})$.

b-A direção do raio de luz é dada pelo vetor **unitário** $\frac{P_1-P^*}{\|P_1-P^*\|} = n = \frac{(-9,6,-7)}{\sqrt{166}}$ e a direção do vetor **unitario** perpendicular ao plano é $N = (-1,-1,-1)$ de onde, $\langle n, N\rangle = \frac{10}{\sqrt{166}}$, e, portanto, o ângulo de incidencia$= \arccos\frac{10}{\sqrt{166}}$.

c-Para que a descrição do movimento do raio tenha de fato a velocidade c temos que representa-la parametricamente na forma $X(t) = P^* + tv$, onde t é o tempo e o vetor velocidade v tenha a direção e sentido de $P_1 - P^*$ e $\|v\| = c$, o que nos dá: $X(t) = P^* + tc\frac{P_1-P^*}{\|P_1-P^*\|}$e, seguindo o mesmo argumento acima temos:
$t = \frac{5-\langle P^*,N\rangle}{\left\langle (c\frac{P_1-P^*)}{\|P_1-P^*\|}, N\right\rangle} = \frac{\|P_1-P^*\|}{c}\frac{9}{5} = \frac{\sqrt{166}}{c}\frac{9}{5}$.

QUESTÃO 4-

a-Mostre geometricamente & analiticamente a afirmação: No **plano**, dado um vetor não nulo v existem exatamente dois vetores unitários perpendiculares a v.

b-Mostre que todos os vetores unitários no plano podem ser representado na forma $n = (\cos\theta, sen\,\theta)^t$ para algum θ.

c-Mostre geometricamente & analiticamente a afirmação: No **plano**, dado um vetor não nulo v_0 existem exatamente dois vetores unitários v_+ e v_- tais que fazem um ângulo α com relação ao vetor v_0.

d-Dado o vetor $v_0 = (2,-3)$ determine todos os vetores unitários do plano, v_+ e v_- tais que $\alpha = Arc\cos = \frac{2}{\sqrt{5}}$, é o ângulo entre estes e v_0.

e-Obtenha analiticamente **dois** vetores **unitários** no **Espaço** perpendiculares aos vetores $u = (1,2,3)^t$ e $v = (2,3,1)^t$ & mostre analiticamente que não há outros.

f-Mostre geometricamente & analiticamente que um sistema da forma $\langle n,x\rangle = \delta$, $\langle N,x\rangle = \Delta$ para n e N vetores **unitários e ortogonais** de R^3(isto é, $\|n\| = \|N\| = 1$, $\langle n,N\rangle = 0$) tem solução "imediata" : $x = \delta n + \Delta N \in R^3$.

g-Obtenha geometricamente **todas** as soluções $x \in R^3$ do sistema da questão anterior $\langle n,x\rangle = \delta$, $\langle N,x\rangle = \Delta$ para n e N vetores **unitários e ortogonais** de R^3**.**

h-Dados dois vetores não nulos e não paralelos do plano u e v , mostre **geometricamente** que qualquer vetor $\alpha \in R^2$ pode ser escrito de uma única forma como $\alpha = au + bv$, a e b numeros reais.

RESOLUÇÃO-Q4:

a-Sejam $n = (x,y)$ os vetores unitários (isto é, $x^2 + y^2 = 1$) perpendiculares a $v = (a,b)$, onde $a^2 + b^2 > 0$, pois $v \neq 0$. Analiticamente, a perpendicularidade significa: $\langle n,v\rangle = 0$, ou, $ax + by = 0$, de onde, $a^2x^2 = b^2y^2$ e somando b^2x^2 dos dois lados, temos: $(a^2 + b^2)x^2 = b^2$ de onde $x_\pm = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e, respectivamente, $y_\mp = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Enfim, $n_+ = (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}})$, $n_- = (\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$.
Geometricamente, dada a reta r passando pela origem definida pelo vetor v, haverá apenas uma outra reta r_* perpendicular a r passando também pela origem. Portanto, os vetores unitários e perpendiculares a r devem ter a direção da reta r_* e podem ter sentidos opostos. (Veja desenho!).

b-Obviamente se $n = (\cos\theta, sen\theta)$ a formula trigonometrica elementar nos dá $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$ e, portanto todos eles são unitários. Agora se $n = (a,b)$ for unitário, então $a^2 + b^2 = 1$ e, portanto podemos definir **dois** valores de $\theta = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [0,2\pi]$ (pois, $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$) . Como $\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2} = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, escolhemos o (único) angulo θ tal que $sen\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, o que comprova a afirmação.(Observação: Se $b > 0$ então, $\theta \in (0,\pi)$ e se $b < 0$ então $\theta \in (\pi,2\pi)$. Caso $b = 0$, então $\theta = \pi$ se $a = -1$ e $\theta = 0$ se $a = 1$.).

c-Esta questão de certa forma generaliza a anterior que é o caso particular de $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Consideremos o vetor unitário na direção e sentido de v_0, $N = \frac{1}{\|v_0\|}v_0 = (N_1,N_2)$. Levando em conta o exercicio anterior, podemos escrever $N = (\cos\gamma, sen\,\gamma)$ para $\gamma \in [0,2\pi)$. Neste caso, podemos escrever $v_+ = (\cos(\gamma+\alpha), sen(\gamma+\alpha))$ e $v_- = (\cos(\gamma-\alpha), sen(\gamma-\alpha))$. Geometricamente a resposta é clara e se efetuarmos o produto interno e utilizando formulas trigonometricas elementares
$\langle N,v_+\rangle = \cos\gamma\cos(\gamma+\alpha) + sen\gamma sen(\gamma+\alpha) = \cos((\gamma+\alpha)-\gamma) = \cos\alpha$ e
$\langle N,v_-\rangle = \cos\gamma\cos(\gamma-\alpha) + sen\gamma sen(\gamma-\alpha) = \cos(\gamma-(\gamma-\alpha) = \cos\alpha$.

d-Utilizemos um caminho ("bruta força") distinto do método empregado no exercício anterior. Neste caso, $N = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,-3)$ tomemos agora $v = (x,y)$ tal que $x^2 + y^2 = 1$ e $\langle N,v\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x-3y)$. $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2x}{\sqrt{13}} = -3y$. Elevando ao quadrado e substituindo $y^2 = 1 - x^2$obtemos uma equação de segundo grau para x que pode ser resolvida pela formuleta tradicional de duas formas.$\frac{31}{3}x^2 - \frac{8}{\sqrt{65}}x - \frac{43}{5} = 0$, $x_\pm = \frac{\frac{8}{\sqrt{65}} \pm \sqrt{\frac{64}{65} + 4\frac{31}{3}\frac{43}{5}}}{\frac{62}{3}}$ e $y_\pm = \frac{-1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2x_\pm}{\sqrt{13}}\right)$.

e-Um vetor qualquer $w = (x,y,z)$ perpendicular a $u = (1,2,3)$ e $v = (2,3,1)$ terá que satisfazer analiticamente as equações: $\langle w,u\rangle = 0$ e $\langle w,v\rangle = 0$ que constituem um sistema de duas equações a tres incognitas, e a expectativa é que em geral haja soluções multiplas. (De fato, geometricamente, verifica-se que obteremos uma reta porque é fácil ver que u e v não são paralelos). O sistema

$$\langle w,u\rangle = x+2y+3z = 0$$
$$\langle w,v\rangle = 2x+3y+z = 0$$

é equivalente ao sistema reduzido:

$$x+2y+3z = 0$$
$$y-5z = 0$$

que tem solução geral: $z(-13,5,1)$, uma reta que pode ser descrita pelos vetores unitários $N_{\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{13^2+5^2+1^2}}(-13,5,1)$.

f)O produto $\langle n,x\rangle$ é a projeção ortogonal do vetor x em n e $\langle N,x\rangle$ analogamente. Portanto, se fizermos $x = \delta n+\Delta N$ temos, $\langle n,\delta n+\Delta N\rangle = \langle n,\delta n\rangle+\langle n,\Delta N\rangle = \delta\langle n,n\rangle = \delta$ (Pois $\langle n,n\rangle = 1$, e $\langle n,N\rangle = 0$ e analogamente com N de onde vem a resposta. A explicação geométrica é simples: Basta desenhar n e N como vetores unitários nas direções&sentidos de dois eixos ortogonais e escrever x em suas respectivas coordenadas ortogonais, que são suas projeções ortogonais!

g-A questão anterior não se refere à dimensão do espaço que pode ser de 2 ou 3. Se a dimensão for 3 então escrevemos o terceiro vetor unitário b ortogonal a n e N na direção&sentido do terceiro eixo ortogonal e as soluções do problema serão $x = \delta n+\Delta N+\lambda b$ para qualquer b.

h-A solução geométrica deste problema é a seguinte: Reticulamos o plano com duas familias de retas paralelas, uma familia paralela a u e outra paralela a v. Este reticulado de retas varre todo o plano porque os dois vetores não são paralelos. Cada ponto P do plano será determinado pela interseção de duas únicas retas, uma paralela a u e outra paralela a v. O ponto da interseção P pode ser alcançado em duas etapas a partir da origem: Primeiro deslocamos a partir da origem na direção u (no sentido positivo ou negativo de u) até atingirmos a reta na direção de v que atinge P. Digamos que esta primeira etapa é cumprida com o deslocamento $au = P_1$. Em seguida, tomamos a reta que parte de $au = P_1$ na direção de v e deslocamos sobre ela no sentido correto até atingirmos P. Com isto temos $P = au+bv$.

Não é necessario descrever todo o processo se um bom desenho ilustrar a ideia.