Experiência 5 - Controle em cascata do pendulo invertido

Rodrigo Seiji Piubeli Hirao (186837)

5 de junho de 2021

Conteúdo

1 Preliminares

1.1 Controle do ângulo θ por alocação de polos

1.1.1

Temos os controles das Figuras 1 e 2

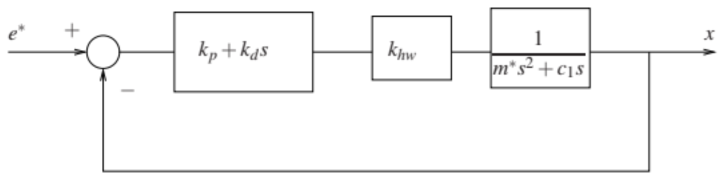

Figura 1: Controle PD da haste

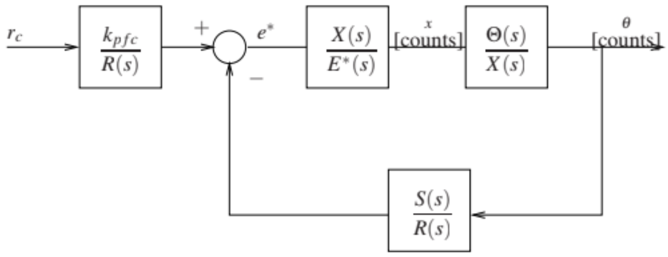

Figura 2: Controle da malha externa do pêndulo

Assim temos a razão da equação 1

$$\frac{X(s)}{E^*(s)} = \frac{\frac{k_{hw}}{m^*}(k_p + k_d s)}{s^2 + \frac{k_{hw}}{m^*}(k_p + k_d s)} \tag{1}$$

E considerando o sistema de equações lineares do pêndulo (2)

$$\begin{cases} \bar{J}\ddot{x}_m + m_1 l_0 g x_m + (m_2 l_0 l_c - \bar{J}) g \theta_{rd} = \frac{J^*}{m_1} F(t) \\ \bar{J}\ddot{\theta}_{rd} - m_1 g x_m - m_2 l_c g \theta_{rd} = -l_0 F(t) \end{cases} \tag{2}$$

Temos o resultado a seguir, que é o resultado esperado (3), mas com $c_r = 0$

$$\bar{J}s^2\Theta(s) - m_1 g X(s) - m_2 l_c g \Theta(s) = -\frac{m_1 l_0}{J^*}(\bar{J}s^2 X(s) + m_1 l_0 g X(s) + (m_2 l_0 l_c - \bar{J}) g \Theta(s))$$

$$(\bar{J}s^2 - m_2 l_c g + \frac{m_1 l_0}{J^*}(m_2 l_0 l_c - \bar{J}) g)\Theta(s) = (m_1 g - \frac{m_1 l_0}{J^*}\bar{J}s^2 - \frac{m_1 l_0}{J^*} m_1 l_0 g) X(s)$$

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{-\frac{m_1 l_0}{J^*}\bar{J}s^2 + m_1 g - \frac{m_1 l_0}{J^*} m_1 l_0 g}{\bar{J}s^2 - m_2 l_c g + \frac{m_1 l_0}{J^*}(m_2 l_0 l_c - \bar{J}) g} = \frac{m_1 l_0}{J^*} \frac{-s^2 + \frac{g}{\bar{J}}(\frac{J^*}{l_0} - m_1 l_0)}{s^2 - \frac{g}{\bar{J}}(m_2 l_c + \frac{m_1 l_0}{J^*}(m_2 l_0 l_c - \bar{J}))}$$

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{m_1 l_0}{J^*} \frac{-s^2 + \frac{g}{l_0}}{s^2 - \frac{g}{J^* - m_1 l_0^2}(m_2 l_c + \frac{m_1 l_0}{J^*}(m_2 l_0 l_c - J^* + m_1 l_0^2))} = \frac{m_1 l_0}{J^*} \frac{-s^2 + \frac{g}{l_0}}{s^2 - g(\frac{m_2 l_c}{J^* - m_1 l_0^2} + \frac{m_1 l_0}{J^*}(\frac{m_2 l_0 l_c}{J^* - m_1 l_0^2} + 1)}$$

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{m_1 l_0}{J^*} \frac{-s^2 + \frac{g}{l_0}}{s^2 - \frac{g}{J^*}(\frac{m_2 l_c}{J^* - m_1 l_0^2}(J^* - m_1 l_0^2) + m_1 l_0)} = \frac{m_1 l_0}{J^*} \frac{-s^2 + \frac{g}{l_0}}{s^2 - \frac{g}{J^*}(m_1 l_0 + m_2 l_c)}$$

Com os ganhos dos encoders temos

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{k_a m_1 l_0}{k_x J^*} \frac{-s^2 + \frac{g}{l_0}}{s^2 - \frac{g}{J^*}(m_1 l_0 + m_2 l_c)} \tag{3}$$

1.1.2

Usando a equação (4) e analisando o sistema, conseguimos a equação característica (5)

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} := k^* \frac{N_{ax}(s)}{D_{ax}(s)} \tag{4}$$

Com a equação

$$1 + \frac{X(s)}{E^*(s)} \frac{\Theta(s)}{X(s)} \frac{S(s)}{R(s)} = 1 + \frac{X(s)}{E^*(s)} k^* \frac{N_{ax}(s)}{D_{ax}(s)} \frac{S(s)}{R(s)} = D^*_{cl}(s), \frac{X(s)}{E^*(s)} = 1$$

$$D_{ax}(s)R(s) + k^* N_{ax}(s)S(s) = D_{cl}(s) \tag{5}$$

1.1.3

Partindo da equação (6) e calculando seu ganho DC, conseguimos chegar no ganho do pré-filtro k_{pfc} da equação (7)

$$H_c(s) = \frac{k_{pfc}}{R(s)} \frac{G_p(s)}{(1 + G_c(s)G_p(s))} \tag{6}$$

Com

$$G_p(0) = \frac{\Theta(0)}{X(0)} = \frac{k_a m_1 l_0}{k_x J^*} \frac{\frac{g}{l_0}}{\frac{g}{J^*}(m_1 l_0 + m_2 l_c)} = \frac{k_a m_1}{k_x(m_1 l_0 + m_2 l_c)}$$

$$G_c(0) = \frac{S(0)}{R(0)} = \frac{s_0}{r_0}$$

Logo

$$H_c(0) = \frac{k_{pfc}}{R(0)} \frac{G_p(0)}{(1 + G_c(0)G_p(0))} = \frac{k_{pfc}}{r_0} \frac{\frac{k_a m_1}{k_x(m_1 l_0 + m_2 l_c)}}{(1 + \frac{s_0}{r_0} \frac{k_a m_1}{k_x(m_1 l_0 + m_2 l_c)})} = k_{pfc} \frac{k_a m_1}{(r_0 k_x(m_1 l_0 + m_2 l_c) + s_0 k_a m_1)} = 1$$

$$k_{pfc} = \frac{r_0 k_x}{k_a m_1}(m_1 l_0 + m_2 l_c) + s_0 \tag{7}$$

1.2 Atenuação de Ruídos

Temos que a equação (8) característica do sistema da malha interna retorna os polos $-8.0378 + 43.2416i$ e $-8.0378 - 43.2416i$, que possuem módulo de $43.9823Hz$, logo o sistema tem sua maior amplificação nessa faixa e a partir daí sua amplificação apenas dinumiu, então a frequência escolhida de $125Hz$ é um limiar bom para começar a filtrar os sinais.

$$s^2 + \frac{k_{hw}}{m^*}(k_p + k_d s) = 0 \tag{8}$$

2 Simulação

2.1 Controle PD

No sistema da Figura 3, para a obtenção dos valores de $\omega_n = 2\pi rad/s$ e $\xi = 1$, foram usados os valores de $k_p = 0.2808$ e $k_d = 0.0088$, assim obtendo a resposta da Figura 4, onde podemos ver que o tempo aproximado de subida (tempo até chegar em 90%) é de $t = 0.063s$

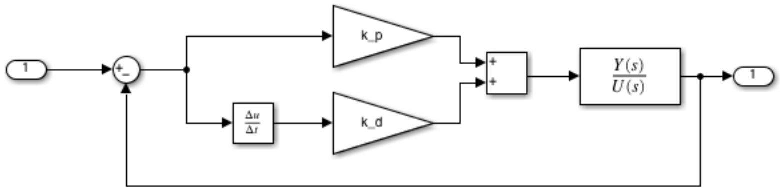

Figura 3: Sistema PD da haste

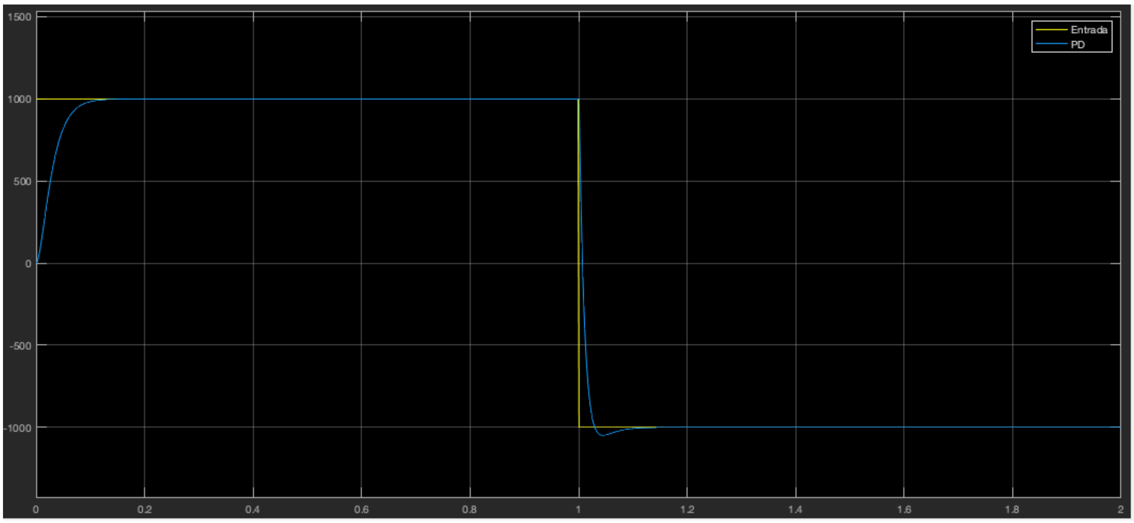

Figura 4: Resposta do sistema PD ao degrau

2.2 Alocação de polos para a planta estável

Queremos o sistema onde $D_{cl} = (s+\pi+i\pi)(s+\pi-i\pi)(s+3\pi) = s^3+5\pi s^2+8\pi^2 s+6\pi^3$, logo temos a equação de Sylvester (9)

$$\begin{bmatrix} 0.4765 & 1.7100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4765 & 1.7100 \\ 1 & -0.0576 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.0576 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \\ r_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\pi^3 \\ 8\pi^2 \\ 5\pi \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Que pode ser dividido nos 2 sistemas (10) e (11)

$$\begin{bmatrix} 0.4765 & 1.7100 \\ 1 & -0.0576 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\pi^3 \\ 5\pi \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} 0.4765 & 1.7100 \\ 1 & -0.0576 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\pi^2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Assim temos as respostas de $R(s) = 3.601s + 21.63$ e $S(s) = 45.17s + 102.8$ e usando a equação (7) temos que $k_{pfc} = 108.8257$ no sistema da Figura 5, foi obtido o resultado da Figura 6, que está próximo do esperado de $\omega_n = 4.4429 rad/s$ e $\xi = 0.9743$ (levemente subamortecido, praticamente criticamente amortecido) com $M_p = 0.00012410\%$, sendo que o M_p prático foi de 7%, o que pode ser um erro numérico considerando o pequeno valor relativo.

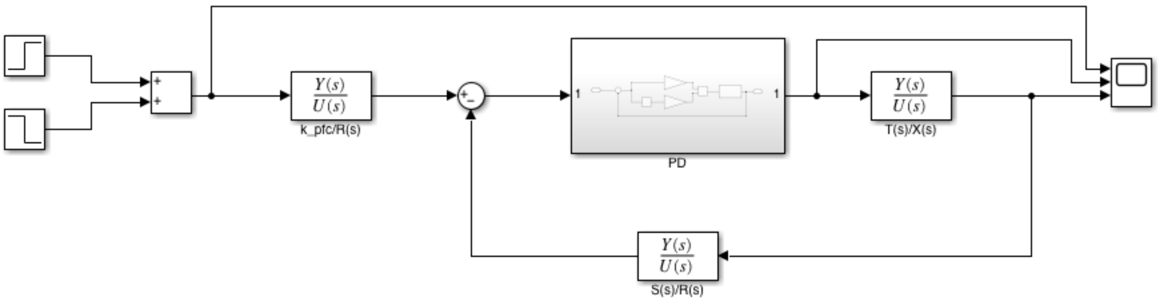

Figura 5: Sistema da malha externa do pêndulo

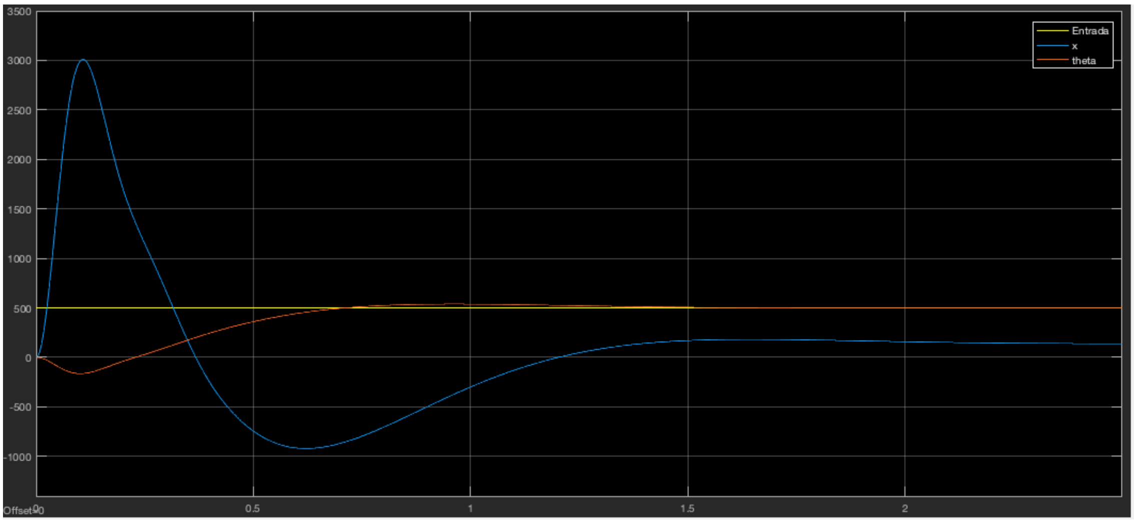

Figura 6: Resposta do sistema estável ao degrau

2.3 Alocação de polos para a planta instável

Com $l_t = 7.0cm$ temos a equação ade Sylvester atualizada (12), assim temos os novos valores de $R = 4.17s + 25.04$, $S = 50.43s + 162.1$ e $k_{pfc} = 108.8108$ e a resposta da Figura 7, que é próxima da resposta do sistema estável, mas com um overshoot máximo maior (10%) no ângulo. Mas pode-se ver que a posição da haste teve um acréscimo significativo para quase 7cm, o que pode não ser possível no pêndulo, dependendo do tamanho da haste.

$$\begin{bmatrix} -4.0590 & 1.9070 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.0590 & 1.9070 \\ 1 & -0.0642 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.0642 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \\ r_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\pi^3 \\ 8\pi^2 \\ 5\pi \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

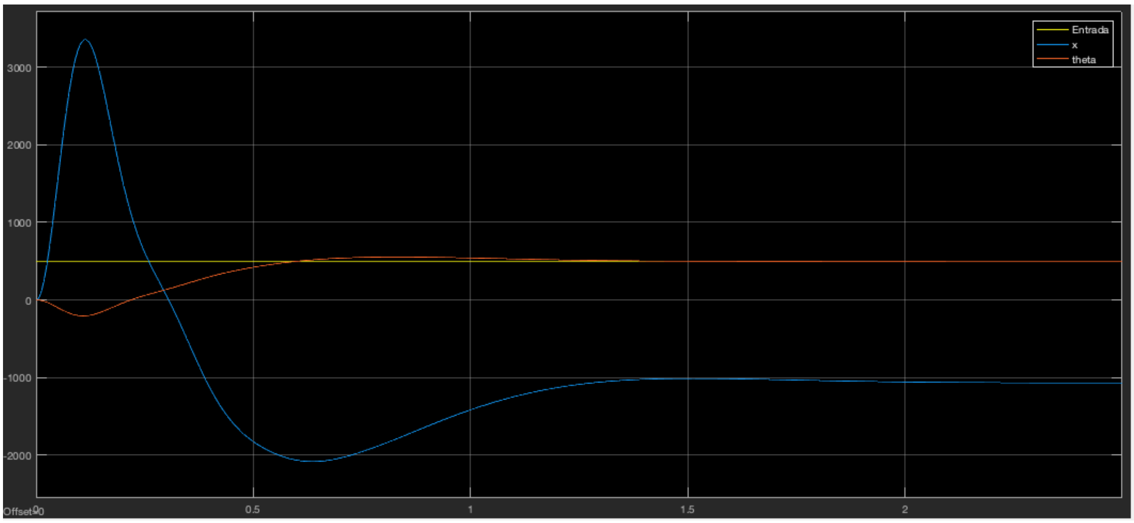

Figura 7: Resposta do sistema instável ao degrau