

Física Geral I

F -128

Aula 08

Colisões

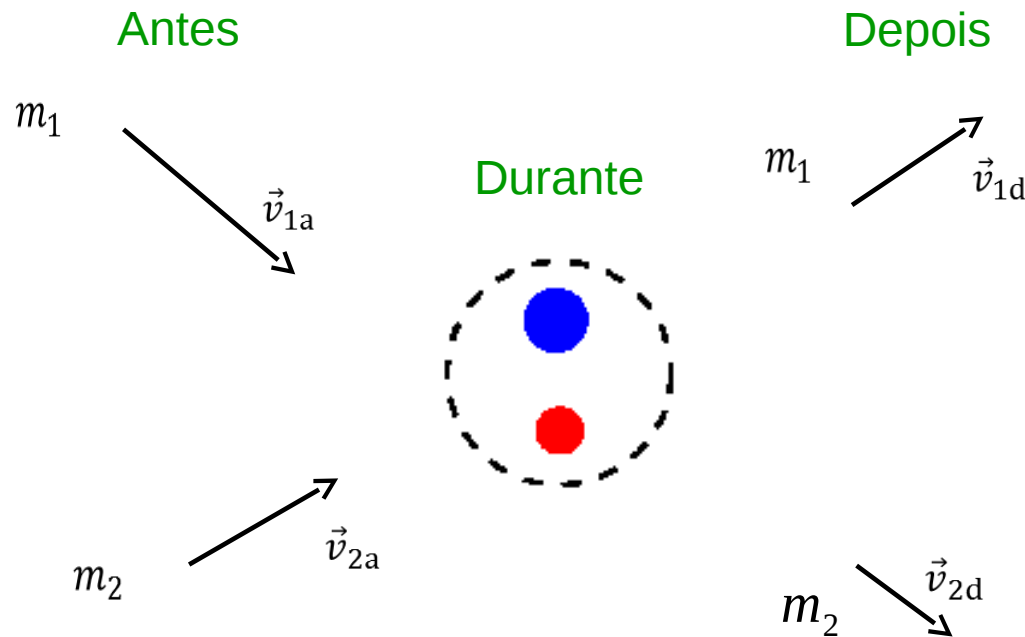


Colisões

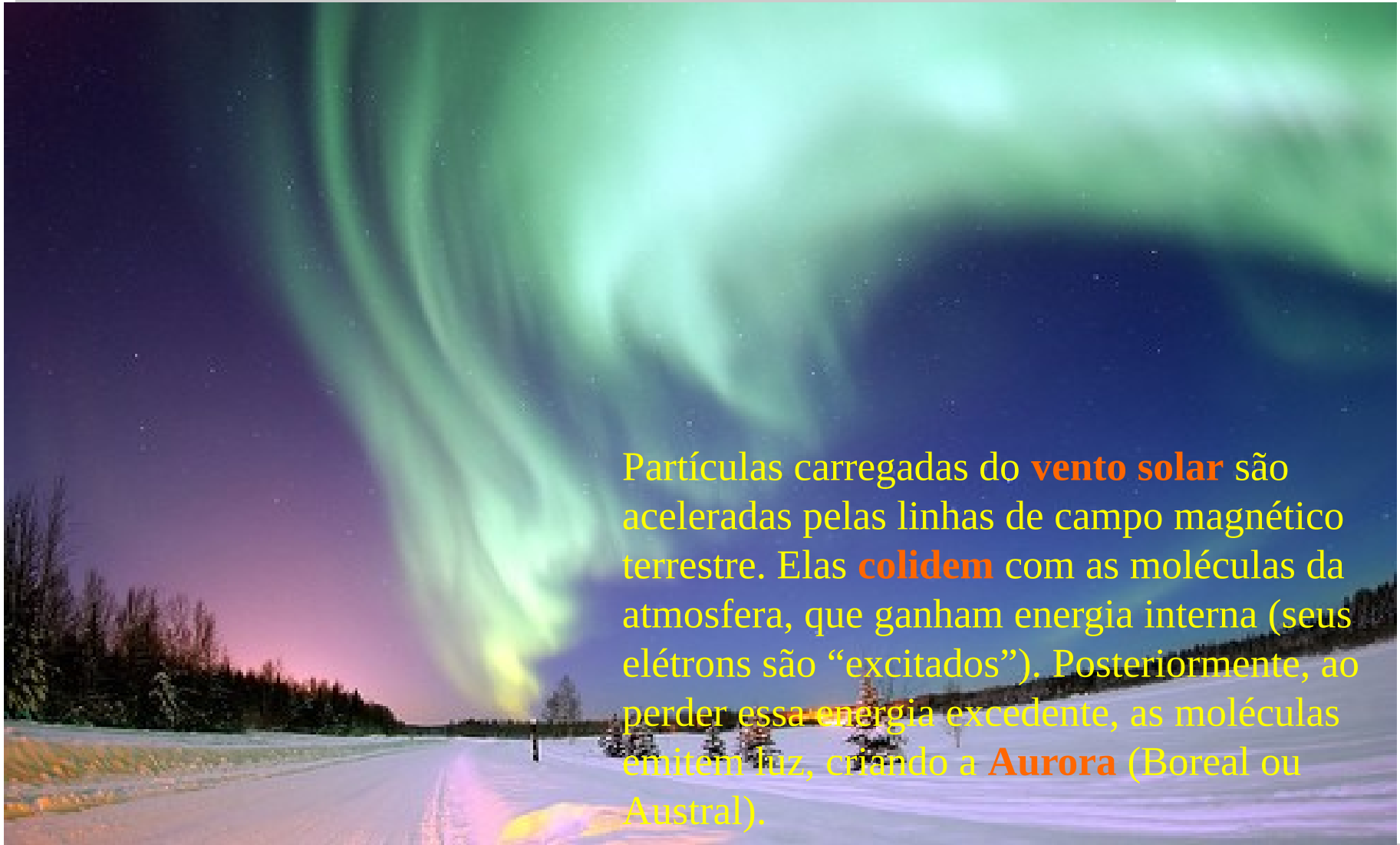
- Características Gerais de uma colisão
- Colisões Elásticas 1D
 - Análise no referencial do CM
- Colisões Inelásticas 1D
 - Pêndulo Balístico
- Colisões em 2D

O que é uma colisão?

Em Física, dá-se o nome de **colisão** a uma interação entre duas partículas (dois corpos) cuja duração é extremamente **curta** na escala de tempo humana e onde há troca de momento linear e energia. Queremos estudar as possíveis situações finais depois que as partículas se afastam da região de interação.



Exemplo: Atmosfera

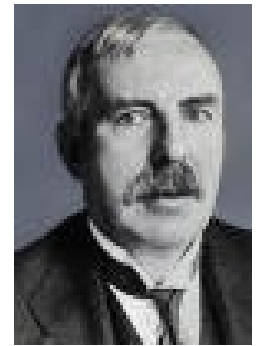
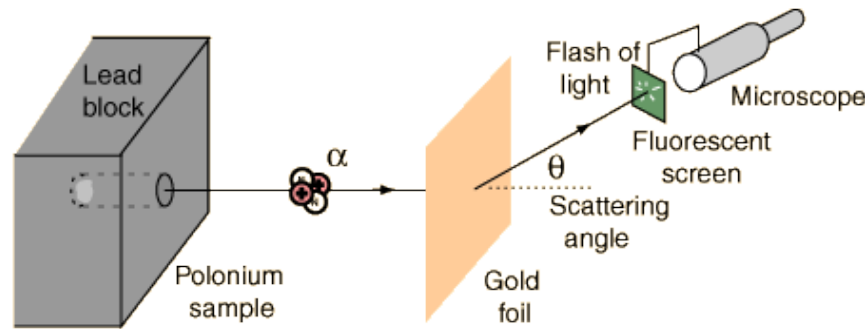


Partículas carregadas do **vento solar** são aceleradas pelas linhas de campo magnético terrestre. Elas **colidem** com as moléculas da atmosfera, que ganham energia interna (seus elétrons são “excitados”). Posteriormente, ao perder essa energia excedente, as moléculas emitem luz, criando a **Aurora** (Boreal ou Austral).

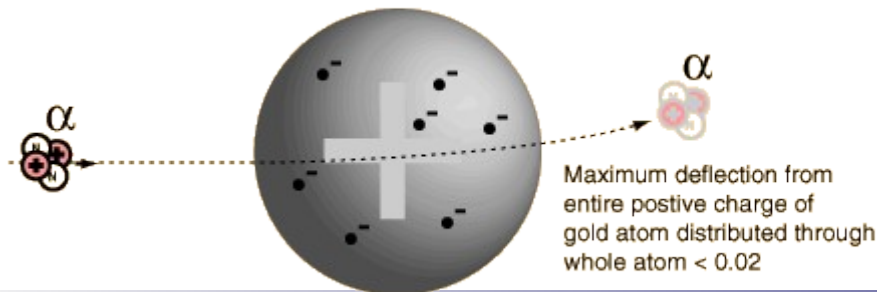
Exemplo histórico: estrutura do átomo

Ernest Rutherford (1911): analisando o resultado do bombardeio de átomos de ouro com partículas alfa, criou o primeiro modelo para o átomo: um núcleo maciço duro, pequeno e positivo, cercado por uma nuvem eletrônica negativa.

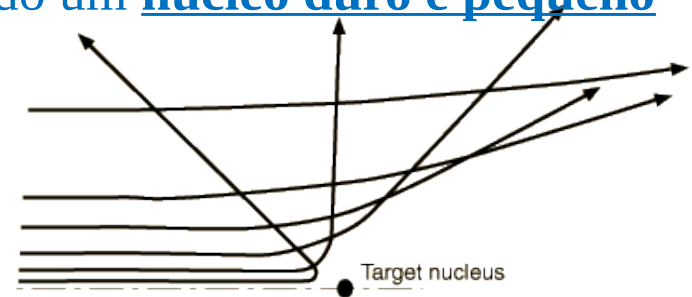
Primeiro experimento de colisão de partículas sub-atômicas.



Modelo de Thompson: previa deflexão pequena das partículas alfa

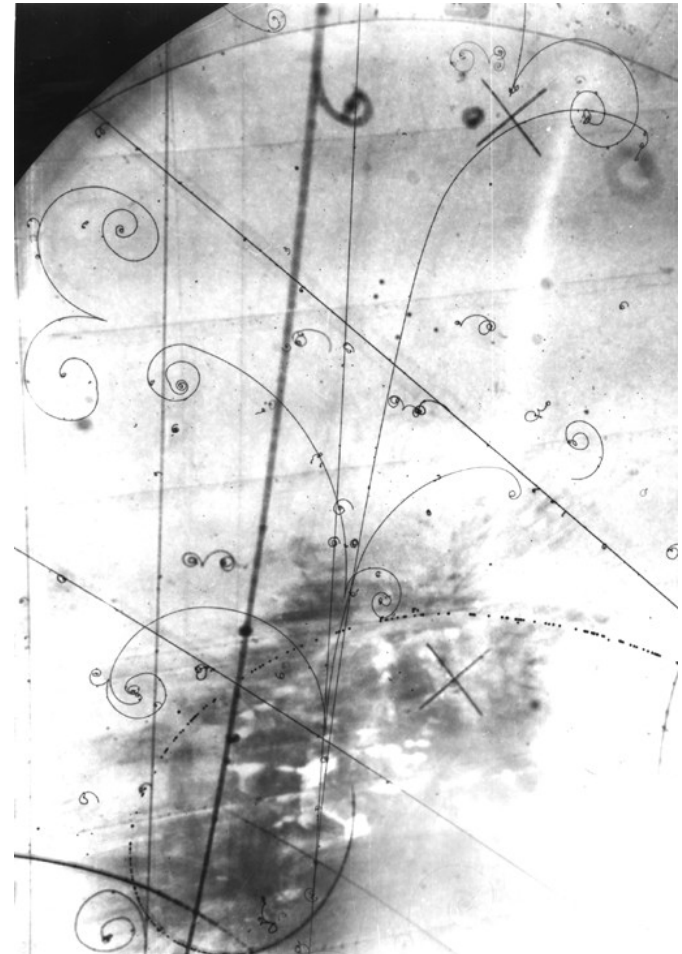


Rutherford observou grandes deflexões, sugerindo um **núcleo duro e pequeno**



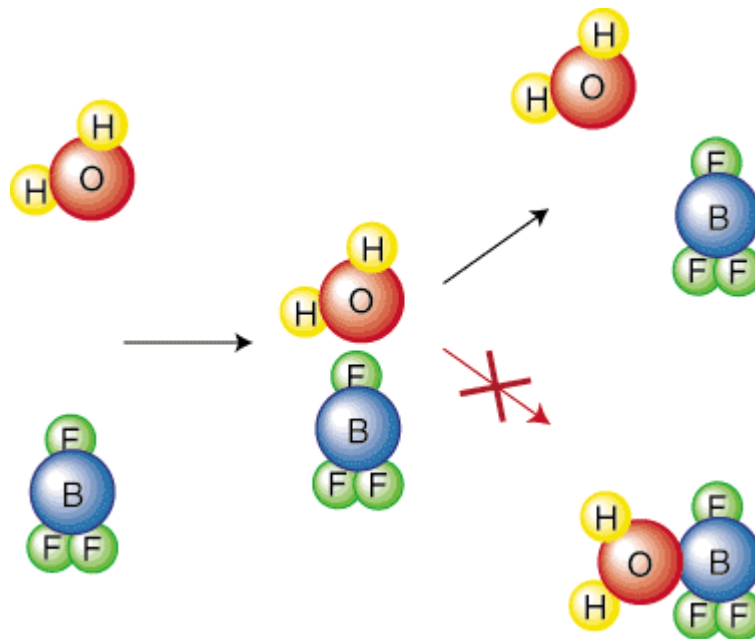
Criação de pares elétron-pósitron

- **Colisões** entre partículas elementares (**elétron-elétron**, **elétron-próton**, etc.) são responsáveis por quase toda a informação que temos sobre as forças fundamentais da natureza (exceto a gravitacional).
- Essas colisões são geradas a partir da aceleração das partículas elementares em grandes **aceleradores** de partículas (FermiLab, SLAC e **LHC**, “**Large Hadron Collider**”).



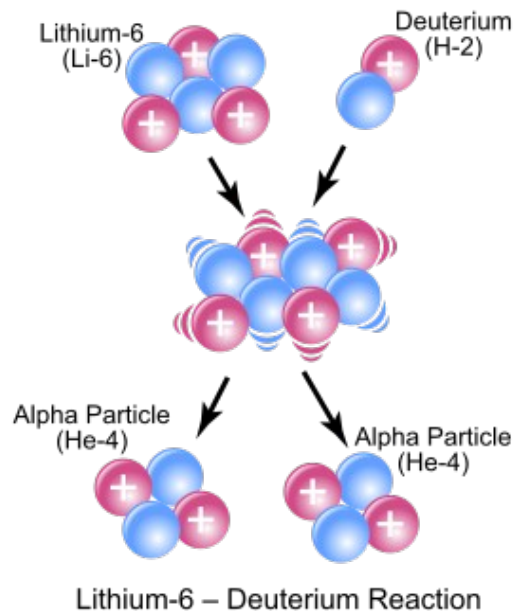
Colisões entre átomos e moléculas; reações químicas

Algumas orientações
relativas não favorecem
a reação química



➡ Na verdade, a técnica de bombardear um alvo por um feixe de partículas, estudando a seguir os resultados das colisões das partículas do feixe com o alvo, continua sendo, hoje em dia, um dos instrumentos mais poderosos em Física para um conhecimento melhor das chamadas “**partículas elementares**” e suas interações.

Colisões entre núcleos em estrelas



Reação nuclear principal no Sol:



Energia liberada = 26 MeV

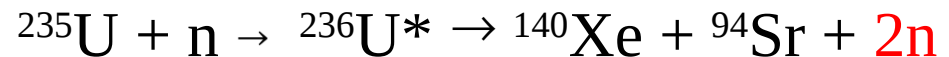
^1H : núcleo de hidrogênio

^4He : núcleo de He ou partícula α

Coração do reator nuclear



Uma das reações de fissão do ^{235}U :



Energia liberada ~ 200 MeV

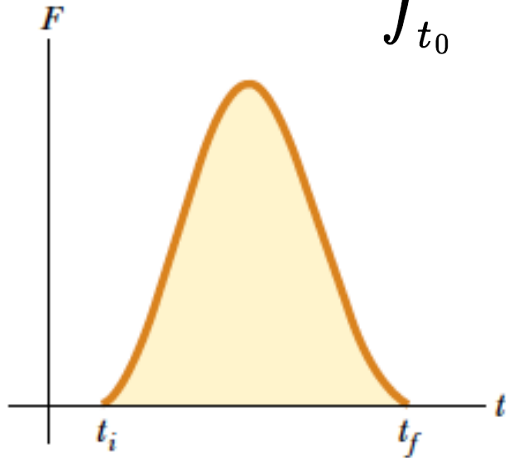
(reação em cadeia)

Forças de Interação

Se a força aplicada é constante durante o intervalo de tempo Δt ,

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt = \vec{F}(t_1 - t_0) = \vec{F}\Delta t$$

Graficamente, o impulso corresponde à área sob a curva num gráfico da força vs. tempo.



A força que a raquete de tênis faz sobre a bola dura um intervalo de tempo curto.

Se calcularmos o impulso da força resultante sobre uma partícula, pela 2ª lei de Newton:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} = \int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \Delta\vec{p}$$

Teorema do impulso-momento linear

Impulso e momento linear total

Vimos que durante uma colisão as forças internas do sistema são \gg que as forças externas que podem agir sobre ele. *Durante* a colisão podemos, pois, desprezar as forças externas (já que o sistema é agora isolado) e dizer que:

“imediatamente após uma colisão, o momento total do sistema que colide é igual ao momento total do sistema imediatamente antes da colisão.”

(Em realidade, o momento total se conserva também durante a colisão, mas o que acontece durante a colisão não é geralmente acessível às medidas). Se houver forças externas agindo sobre o sistema, é bom lembrar que o momento total *não* se conserva durante um intervalo de tempo *finito qualquer, seja antes ou depois da colisão*.

Da 3ª lei de Newton: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \vec{I}_{12} = -\vec{I}_{21} \Rightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$ (1)

O momento linear é *apenas transferido* de uma partícula à outra.

De (1): $\vec{p}_{1d} - \vec{p}_{1a} = -(\vec{p}_{2d} - \vec{p}_{2a}) = \vec{p}_{2a} - \vec{p}_{2d}$

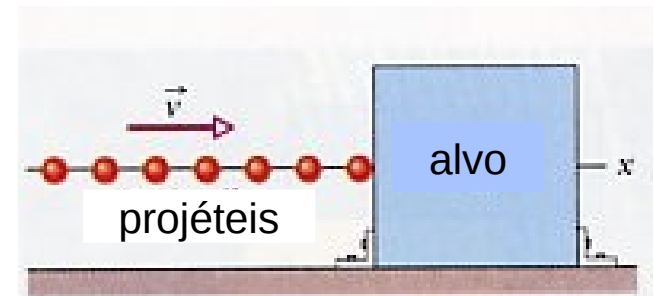
$$\vec{p}_{1a} + \vec{p}_{2a} = \vec{p}_{1d} + \vec{p}_{2d} \rightarrow \vec{P}_a = \vec{P}_d$$

Obviamente, recuperamos a lei de conservação de momento linear (impulso total nulo).

Questão 1: força média de um jato de areia

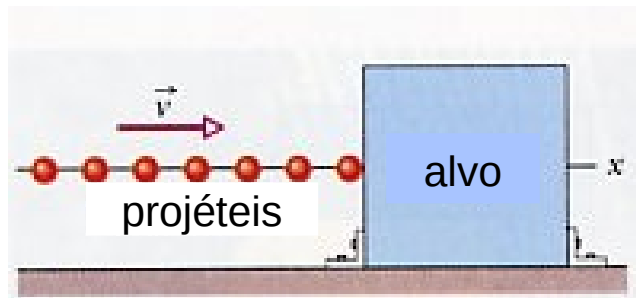
Uma série de projéteis, de massa $m = 0,1 \text{ kg}$ e velocidade $v = 2 \text{ m/s}$ colidem com um alvo fixo. Afirme qual a alternativa correta.

- a) a força é maior para um projétil que ricocheteia em relação a um projétil que gruda no alvo.
- b) a força é maior para um projétil que gruda no alvo em relação a um projétil que ricocheteia .
- c) a força independe das características acima.



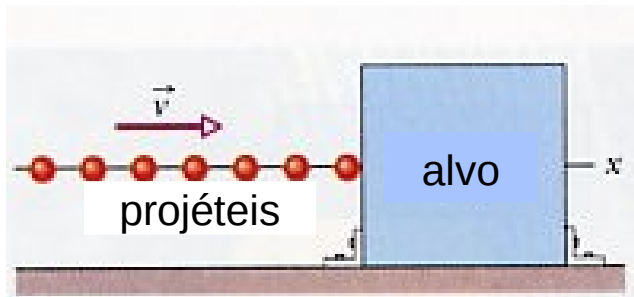
Questão 2: força média de um jato de areia

Uma série de projéteis, de massa $m = 0,1 \text{ kg}$ e velocidade $v = 2 \text{ m/s}$ colidem com um alvo fixo. Qual a força média exercida sobre o alvo se a taxa de colisão é de 5 projéteis/segundo, e o projétil gruda no alvo?



Questão 2: força média de um jato de areia

Uma série de projéteis, de massa $m = 0,1 \text{ kg}$ e velocidade $v = 2 \text{ m/s}$ colidem com um alvo fixo. Qual a força média exercida sobre o alvo se a taxa de colisão é de 5 projéteis/segundo, e o projétil gruda no alvo?



Cada colisão transfere $-\Delta p = 0,2 \text{ kg m/s}$ para o alvo, onde Δp é a **variação de momento linear de um projétil em uma colisão**. Se há 5 colisões num intervalo Δt , o **impulso total transferido** ao alvo é:

$$\Delta I = -n\Delta p = 1 \text{ kg m/s}$$

A **força média** correspondente é:

$$\langle F \rangle = \frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t} \Delta p$$

Se a colisão é tal que as partículas **são absorvidas**:

$$\Delta p = mv_d - mv_a = 0 - mv_{inc}$$

$$F = 1 \text{ N}$$

Se a colisão é tal que as partículas **ricocheteiam**:

$$\Delta p = mv_d - mv_a = 0 - 2mv_{inc}$$

$$F = 2 \text{ N}$$

Características gerais de uma colisão

Energia cinética total: colisões elásticas e inelásticas

Já vimos que colisões, por envolverem basicamente apenas forças internas, conservam o momento linear. **E conservam a energia?**

Embora a **energia total seja sempre conservada**, pode haver transformação da energia cinética (inicialmente só há energia cinética) em outras formas de energia (potencial, interna na forma de vibrações, calor, perdas por geração de ondas sonoras, etc.).

Se a energia cinética inicial do sistema é totalmente recuperada após a colisão, a colisão é chamada de **colisão elástica**.

Se não, a colisão é chamada de **colisão inelástica**. Note que se houver aumento da energia cinética (quando há conversão de energia interna em cinética: explosão, por exemplo), a colisão também é inelástica.

~~Em uma colisão elástica, $K_a = K_d$~~
Em uma colisão elástica $K_a = K_d$

Questão 3.

Assinale a alternativa correta:

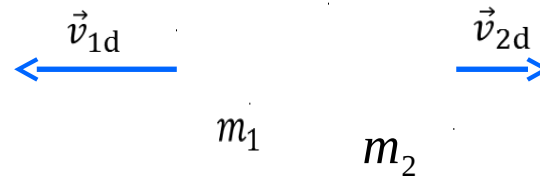
- a) em uma explosão de um projétil, a energia cinética e o momento linear total do conjunto completo dos estilhaços aumentam.
- b) em uma explosão, a energia cinética total do conjunto completo dos estilhaços aumenta, mas o momento linear total permanece constante.
- c) em uma explosão, a energia cinética e o momento linear total do conjunto completo dos estilhaços permanece constante.

Colisões elásticas unidimensionais

Antes:



Depois:



Lembramos que:
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}(mv)^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Assim, as equações básicas para uma colisão elástica são:

$$p_{1a} + p_{2a} = p_{1d} + p_{2d}$$

(Conservação de momento linear)

$$\frac{p_{1a}^2}{2m_1} + \frac{p_{2a}^2}{2m_2} = \frac{p_{1d}^2}{2m_1} + \frac{p_{2d}^2}{2m_2}$$

(Conservação de energia cinética)

Colisões elásticas unidimensionais

No caso unidimensional, estas equações são suficientes para determinar o estado final do sistema, conhecido o estado inicial. *Não* o são para o caso bidimensional.

Sendo dada a razão entre as massas $k = \frac{m_1}{m_2}$ (ou as massas m_1 e m_2), escrevemos:

$$\begin{cases} m_1 v_{1d} + m_2 v_{2d} = m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a} \\ m_1 v_{1d}^2 + m_2 v_{2d}^2 = m_1 v_{1a}^2 + m_2 v_{2a}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k(v_{1d} - v_{1a}) = -(v_{2d} - v_{2a}) & (1) \\ k(v_{1d}^2 - v_{1a}^2) = -(v_{2d}^2 - v_{2a}^2) & (2) \end{cases}$$

Eliminando-se as soluções triviais $v_{1d} = v_{1a}$ e $v_{2d} = v_{2a}$, podemos dividir (2) por (1), obtendo:

$$\begin{cases} k(v_{1d} - v_{1a}) = -(v_{2d} - v_{2a}) \\ v_{1d} + v_{1a} = v_{2d} + v_{2a} \end{cases} \quad \text{ou, finalmente:}$$

Colisões elásticas unidimensionais

$$\left\{ \begin{array}{l} kv_{1d} + v_{2d} = kv_{1a} + v_{2a} \quad (3) \\ v_{1d} - v_{2d} = -(v_{1a} - v_{2a}) \quad (4) \end{array} \right.$$

A equação (4) mostra que a velocidade **relativa troca de sinal** em toda colisão elástica unidimensional, isto é, ela é simplesmente **invertida** pela colisão.

De (3) e (4) tira-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1d} = \frac{(k-1)v_{1a} + 2v_{2a}}{k+1} \\ v_{2d} = \frac{2kv_{1a} - (k-1)v_{2a}}{k+1} \end{array} \right.$$

Explicitamente em termos das massas das partículas, podemos escrever:

$$\begin{aligned} v_{1d} &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1a} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2a} \\ v_{2d} &= \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1a} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2a} \end{aligned}$$

Questão 4?

Duas partículas de massas iguais e velocidades $v_1=30 \text{ m/s}$ e $v_2=12 \text{ m/s}$ colidem. Qual a velocidade final da partícula 1?

Colisões elásticas 1D: casos particulares

1) massas iguais: ($k=1$)

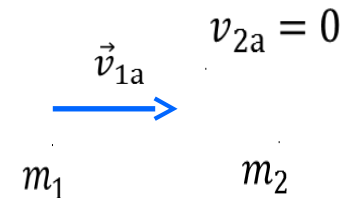
$$\begin{cases} v_{1d} = v_{2a} \\ v_{2d} = v_{1a} \end{cases}$$

(o estado final do sistema é idêntico ao estado inicial: **As partículas trocam suas velocidades!**

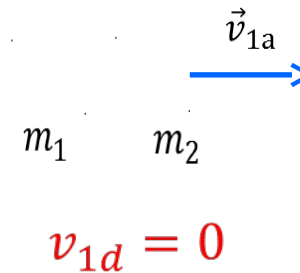
Em particular, se a partícula alvo está inicialmente **em repouso**, a partícula incidente para após a colisão, como no bilhar. Isto é: se $v_{2a} = 0 \Rightarrow v_{1d} = 0$.

$$(v_{aprox} = v_{afast})$$

Antes:

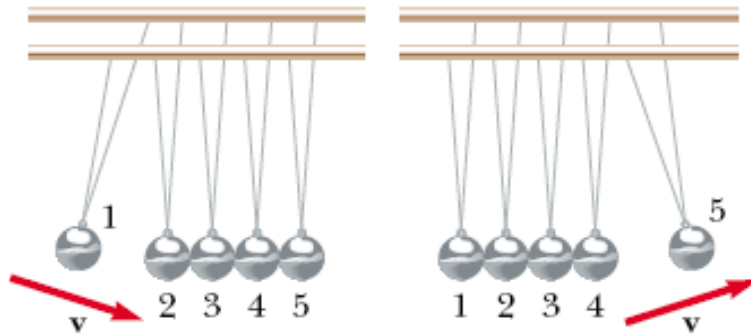
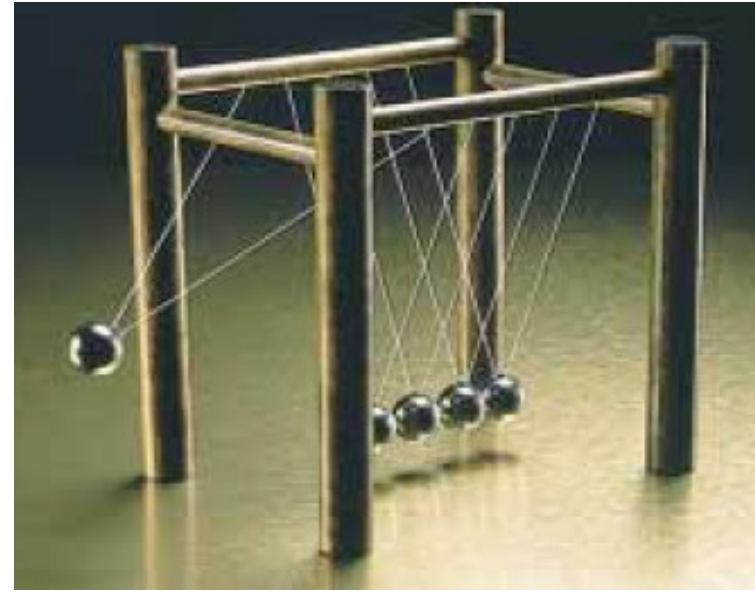


Depois:

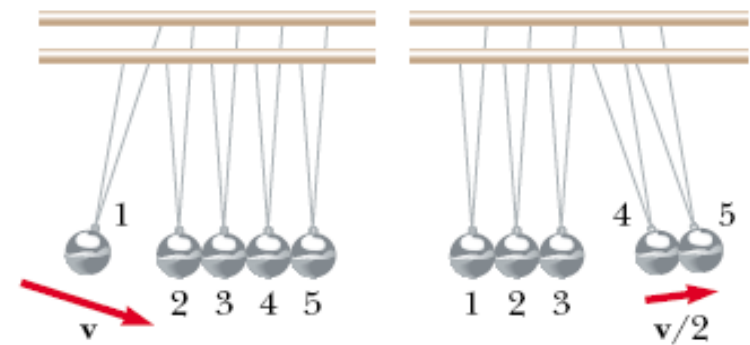


Colisões elásticas 1D: casos particulares

Exemplo: um aliviador de stress para executivos



Isto pode acontecer!

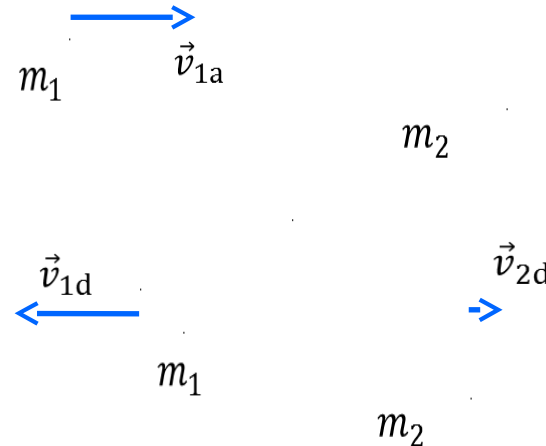


Pode isto acontecer?

Colisões elásticas 1D: casos particulares

2) Alvo em repouso e $m_1 \ll m_2$

$$\begin{cases} v_{1d} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1a} \\ v_{2d} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1a} \end{cases}$$



Destas expressões resultam:

$$\begin{cases} v_{1d} \approx -v_{1a} \\ v_{2d} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2} \right) v_{1a} \ll v_{1a} \end{cases} \quad (v_{aprox} = v_{afast})$$

A partícula incidente reverte sua velocidade e a partícula alvo passa a se mover lentamente, **praticamente permanecendo em repouso**.

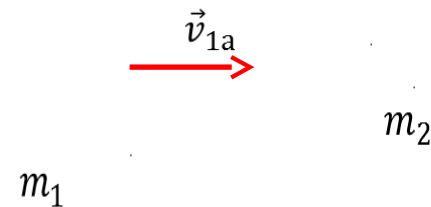
Colisões elásticas 1D: casos particulares

3) Alvo em repouso e $m_1 \gg m_2$

$$v_{1d} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1a}$$

$$v_{2d} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1a}$$

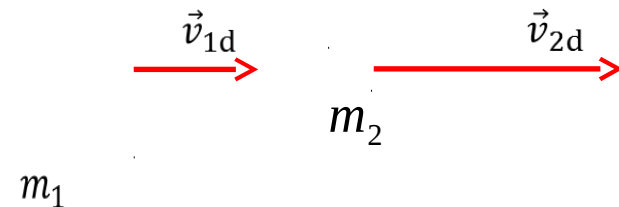
Antes



Destas expressões resultam:

Depois

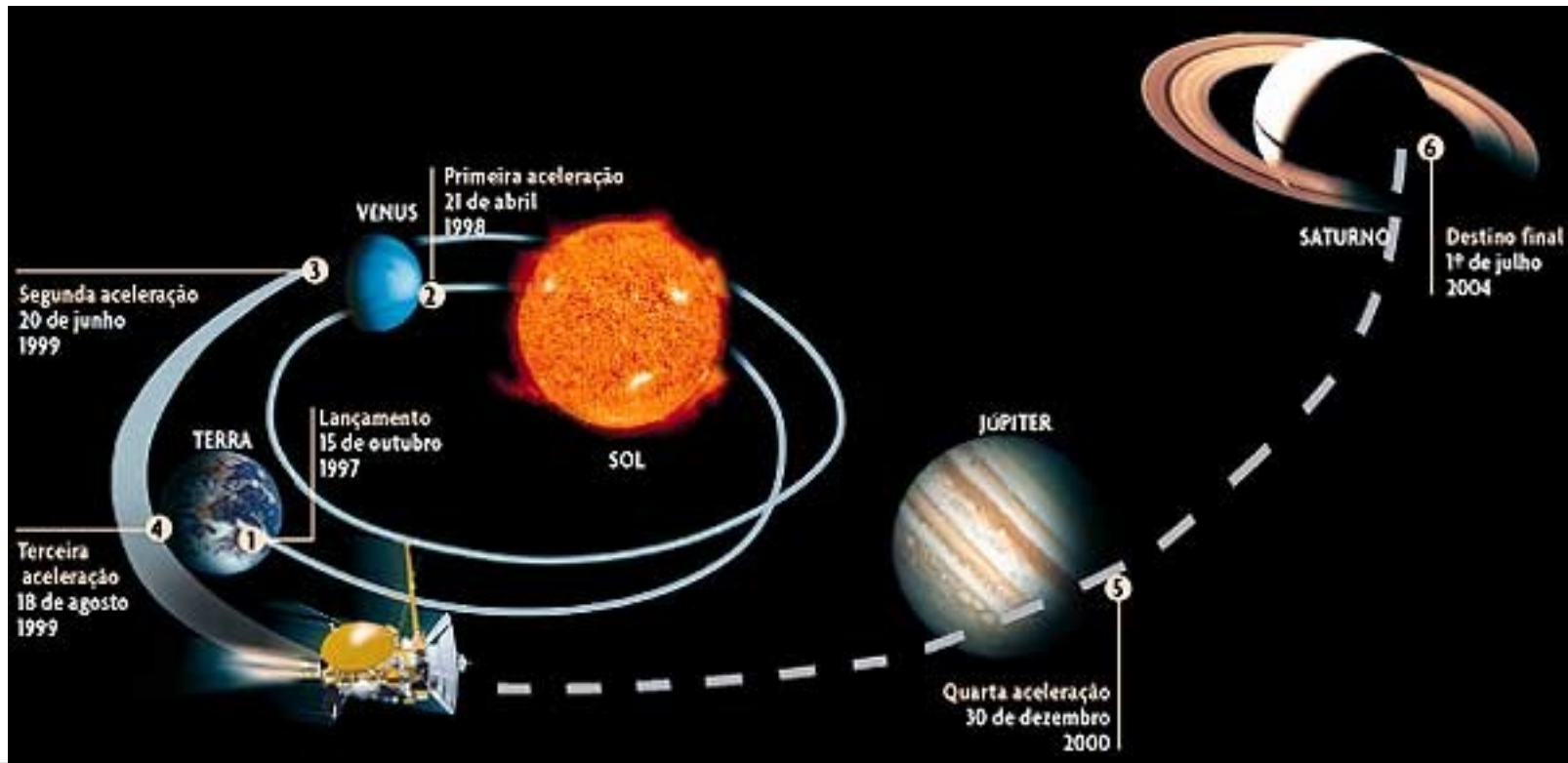
$$\begin{cases} v_{1d} \approx v_{1a} \\ v_{2d} \approx 2v_{1a} \end{cases}$$



A partícula incidente não “sente” a colisão. A partícula alvo passa a se mover com o **dobro da velocidade inicial** da partícula incidente.

Exemplo: efeito estilingue

Envio da sonda Cassini utilizou conservação de momento em “colisões” elásticas com objetos pesados para aumentar sua velocidade.



Moderação de neutrons em reatores nucleares

➤ Reatores nucleares a base de Urânio: p. ex. $^{235}\text{U} + n \rightarrow ^{140}\text{Xe} + ^{94}\text{Sr} + 2n$

Os nêutrons produzidos devem levar a novos processos de fissão, numa **reação em cadeia**. Entretanto, eles são muito energéticos e, por isso, pouco eficientes para gerar novas reações. É preciso **desacelerá-los** (“moderá-los”).

Nêutrons \rightarrow partículas incidentes (m_1)

?????? \rightarrow partículas alvo (m_2)

- Se $m_2 \ll m_1$, os nêutrons não “sentem” as colisões.
- Se $m_2 \gg m_1$, os nêutrons só são refletidos.
- Situação ideal $\Rightarrow m_1 \sim m_2$

$$v_{1d} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1a}$$

- Hidrogênio seria perfeito ($m_{\text{próton}} \sim m_{\text{nêutron}}$), mas o próton captura o nêutron para formar o dêuteron.
- Deutério funciona \Rightarrow **D₂O** (água pesada).
- Também se usa **carbono** (grafite ou parafina) ou **berílio**.

Colisões elásticas 1D: análise gráfica

a) No R_{CM} : o momento linear total do sistema é nulo, antes e depois da colisão:

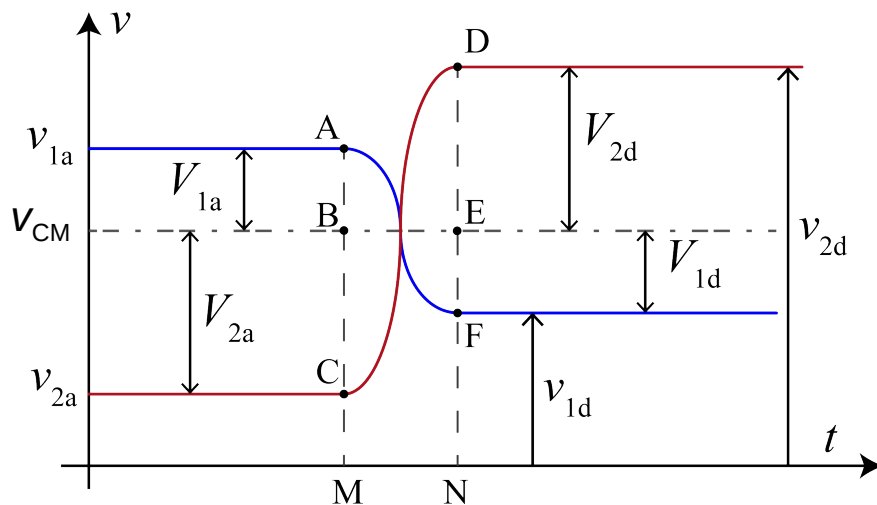
$$m_1 V_{1d} + m_2 V_{2d} = m_1 V_{1a} + m_2 V_{2a} = 0 \therefore$$
$$\frac{V_{1d}}{V_{2d}} = \frac{V_{1a}}{V_{2a}} \left(= -\frac{m_2}{m_1} = -\frac{1}{k} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{V_{1d}}{V_{1a}} = \frac{V_{2d}}{V_{2a}}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{V}_1 + \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{V}_2 + \vec{v}_{cm}$$

$$k = \frac{m_1}{m_2}$$

Mas, por conservação de energia $\Rightarrow |V_{1d}| = |V_{1a}|$ e $|V_{2d}| = |V_{2a}|$



Numa colisão elástica 1D repulsiva:

$$V_{1d} = -V_{1a} \quad \text{e} \quad V_{2d} = -V_{2a}$$

isto é, a colisão *inverte* as velocidades das partículas no R_{CM} , mantendo seus módulos.

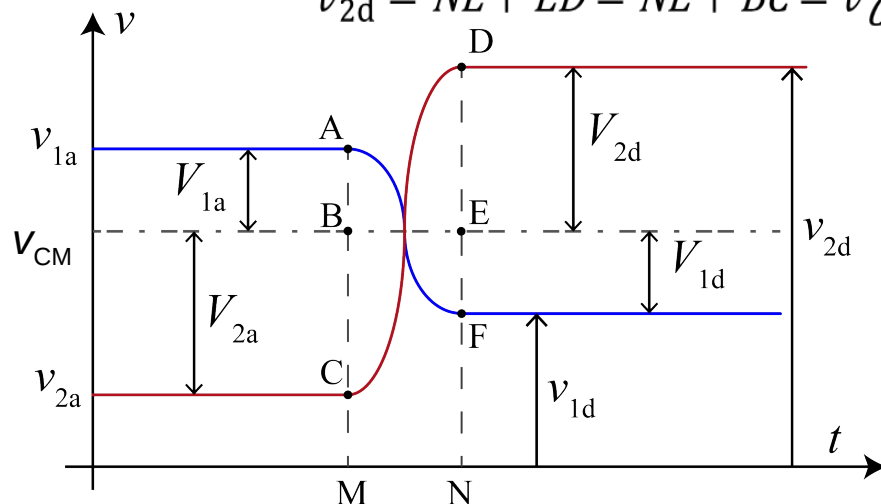
Colisões elásticas 1D: análise gráfica

b) No referencial do laboratório:

Para passar do gráfico ($V \times t$) no RCM para ($v \times t$) no laboratório, faz-se uma translação de $-v_{CM}$ sobre o eixo dos tempos. Então:

$$v_{1d} = \overline{NE} - \overline{EF} = \overline{NE} - \overline{BA} = v_{CM} - (v_{1a} - v_{CM}) = 2v_{CM} - v_{1a}$$

$$v_{2d} = \overline{NE} + \overline{ED} = \overline{NE} + \overline{BC} = v_{CM} + (v_{CM} - v_{2a}) = 2v_{CM} - v_{2a}$$

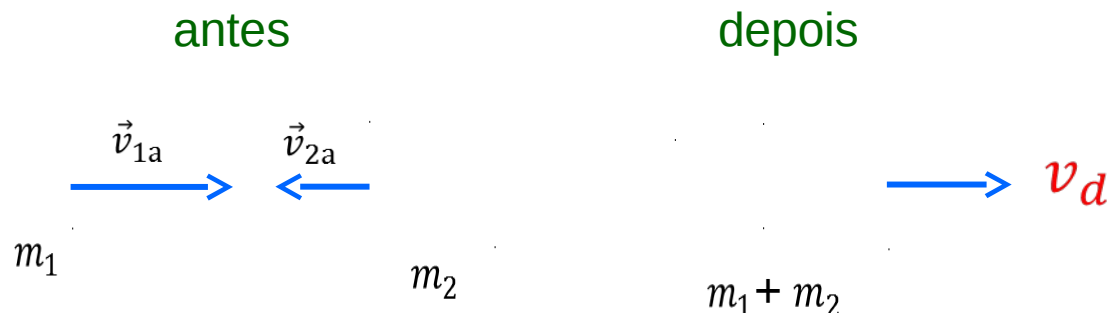


solução:
$$\begin{cases} v_{1d} = 2v_{CM} - v_{1a} \\ v_{2d} = 2v_{CM} - v_{2a} \end{cases}$$

Obs: Este formalismo também se aplica a colisões inelásticas, com exceção de que agora as velocidades “invertidas” são multiplicadas pelo coeficiente de restituição “ e ” dado por:

$$e = - \frac{v_{1d} - v_{2d}}{v_{1a} - v_{2a}}$$

Colisões unidimensionais totalmente inelásticas



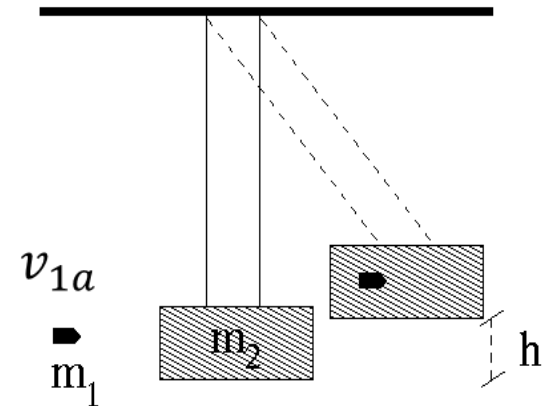
Neste tipo de colisão, a partícula incidente “gruda” na partícula alvo. Pode-se provar que essa situação representa a **perda máxima de energia cinética** numa colisão inelástica em uma dimensão.

$$m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a} = (m_1 + m_2) v_d \Rightarrow v_d = \frac{m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a}}{m_1 + m_2} = v_{CM}$$

Como o centro de massa coincide com as duas partículas “grudadas”, **elas têm que se mover com a velocidade do centro de massa**, que se mantém constante. A energia cinética final é a energia cinética associada ao movimento do CM.

Questão 5: pêndulo balístico

Uma bala de 10 g se aloja num bloco de madeira de 4 kg , e o conjunto se eleva de uma altura $h=5\text{ cm}$. Qual é a velocidade da bala imediatamente antes da colisão?



Questão 5: pêndulo balístico

Uma bala de 10 g se aloja num bloco de madeira de 4 kg , e o conjunto se eleva de uma altura $h=5\text{ cm}$. Qual é a velocidade da bala imediatamente antes da colisão?

Colisão totalmente inelástica:

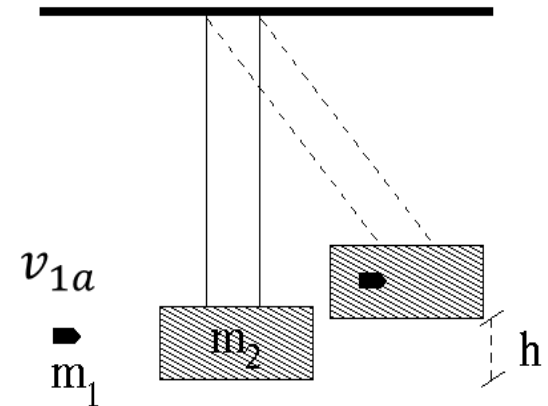
$$m_1 v_{1a} = (m_1 + m_2) v_d \therefore v_d = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1a}$$

Conservação de energia mecânica **após** a colisão:

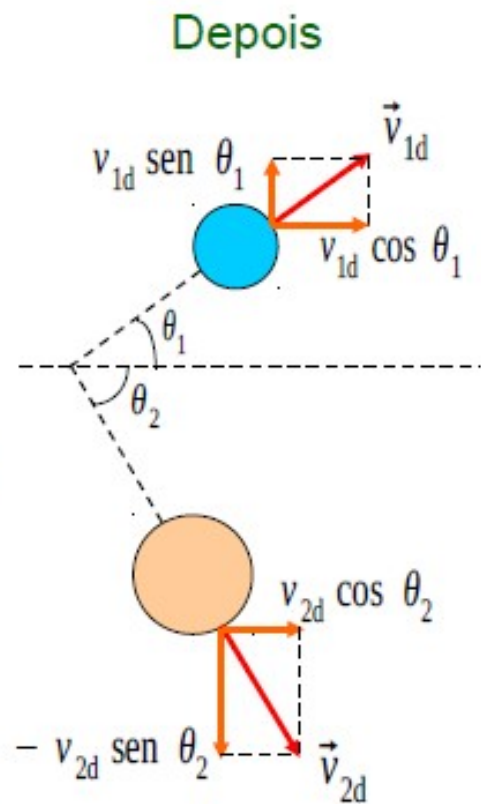
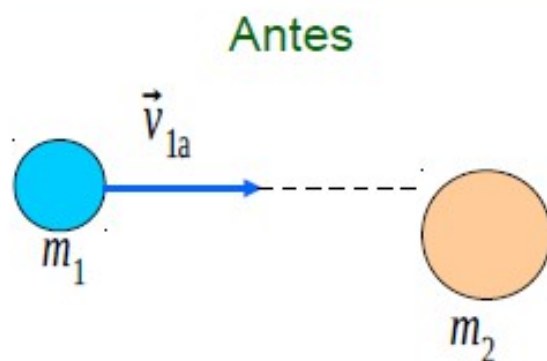
$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_d^2 = (m_1 + m_2) gh \therefore v_d = \sqrt{2gh}$$

Então:
$$v_{1a} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

Se:
$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = 10\text{g} \\ m_2 = 4\text{kg} \Rightarrow v_{1a} = \frac{4,01}{0,01} \times \sqrt{2 \times 9,8 \times 0,05} \text{m/s} = 400\text{m/s} = 1.400\text{km/h} \\ h = 5\text{cm} \end{array} \right.$$

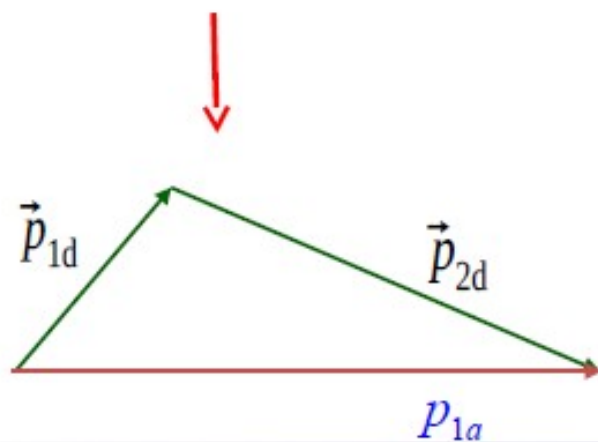


Colisões elásticas bidimensionais



Vamos considerar a **partícula-alvo em repouso** ($v_{2a}=0$)

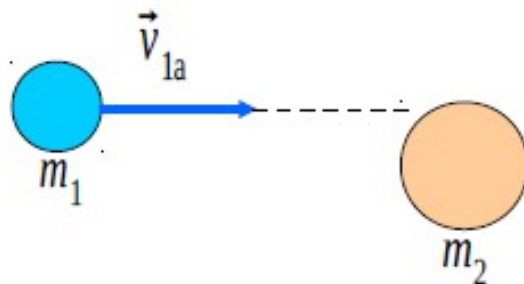
$$\vec{p}_{1a} = \vec{p}_{1d} + \vec{p}_{2d} \quad (\text{Conservação de momento linear})$$



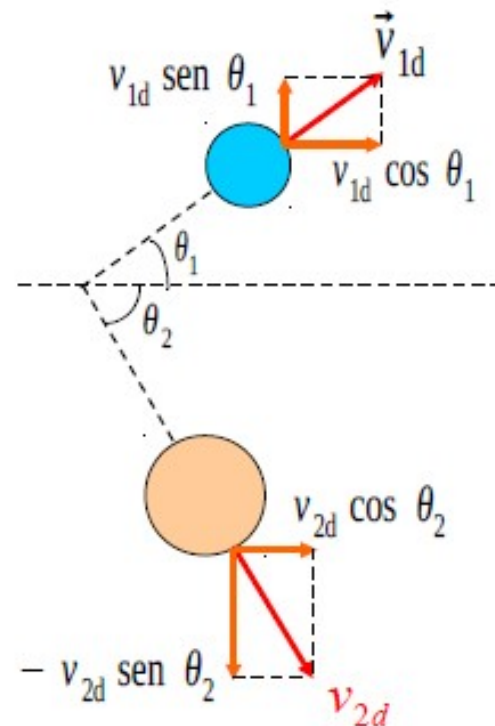
Esses 3 vetores definem um plano, chamado de **plano de colisão**. Isto é, a colisão sempre ocorre em um plano (colisão bi-dimensional).

Colisões elásticas bidimensionais

Antes



Depois



Conservação do momento linear:

$$\begin{cases} p_{1a} = p_{1d} \cos \theta_1 + p_{2d} \cos \theta_2 \\ 0 = p_{1d} \sin \theta_1 - p_{2d} \sin \theta_2 \end{cases}$$

Conservação da energia cinética:

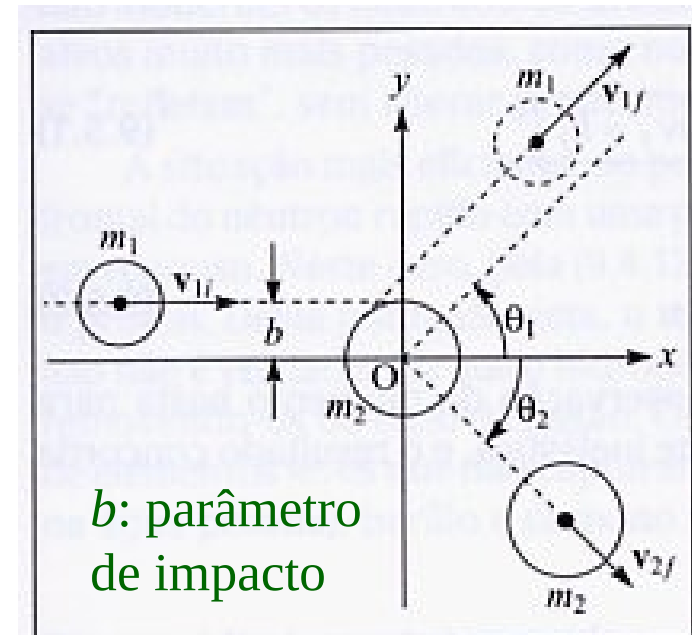
$$\frac{p_{1a}^2}{2m_1} = \frac{p_{1d}^2}{2m_1} + \frac{p_{2d}^2}{2m_2}$$

Colisões elásticas bidimensionais

$$\begin{cases} p_{1a} = p_{1d} \cos \theta_1 + p_{2d} \cos \theta_2 \\ 0 = p_{1d} \sin \theta_1 - p_{2d} \sin \theta_2 \end{cases}$$

$$\frac{p_{1a}^2}{2m_1} = \frac{p_{1d}^2}{2m_1} + \frac{p_{2d}^2}{2m_2}$$

Se tivermos m_1 , m_2 e p_{1a} , teremos 3 equações e 4 incógnitas (p_{1d} , p_{2d} , θ_1 , θ_2). O sistema é indeterminado. Precisamos de mais informação que pode ser, por exemplo, o **parâmetro de impacto** b da colisão de bolas de bilhar.



Obs: supondo que a força entre as bolas é exatamente normal à superfície no ponto de contato, θ_2 fica definido a partir de b (a obtenção de θ_2 a partir de b requer sempre um modelo para a força de interação).

Colisões elásticas bidimensionais: massas iguais

- Nesse caso, podemos obter um resultado simples

$$\frac{p_{1a}^2}{2m_1} = \frac{p_{1d}^2}{2m_1} + \frac{p_{2d}^2}{2m_2} \Rightarrow p_{1a}^2 = p_{1d}^2 + p_{2d}^2 \quad (\text{Conservação de energia cinética})$$

$$\vec{p}_{1a} = \vec{p}_{1d} + \vec{p}_{2d} \Rightarrow p_{1a}^2 = (\vec{p}_{1d} + \vec{p}_{2d}) \cdot (\vec{p}_{1d} + \vec{p}_{2d})$$

$$p_{1a}^2 = p_{1d}^2 + p_{2d}^2 + 2\vec{p}_{1d} \cdot \vec{p}_{2d} \quad (\text{Conservação de momento linear})$$

Igualando as duas equações:

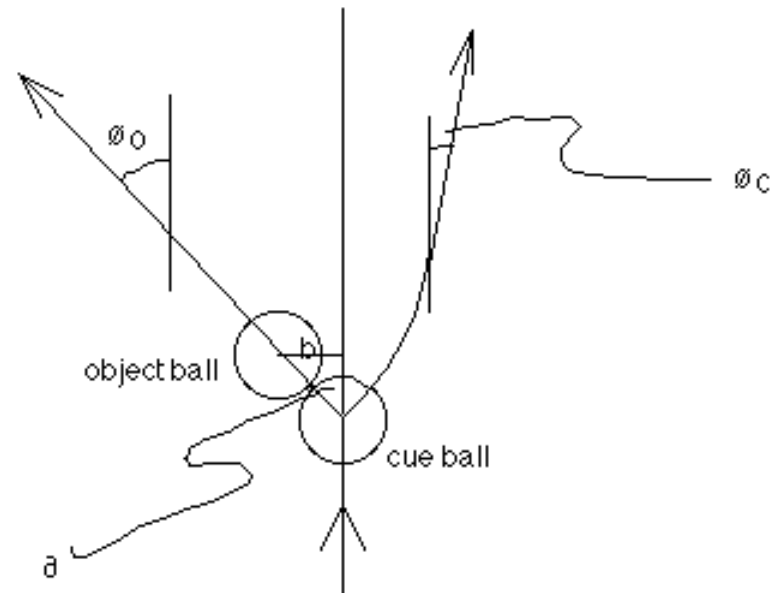
$$\vec{p}_{1a} \cdot \vec{p}_{1d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$

Colisões elásticas bidimensionais: massas iguais

É assim mesmo na mesa de sinuca?

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ?$$

Na verdade, o **movimento de rotação** da bola branca, complica a análise. Embora as bolas saiam da colisão com direções perpendiculares entre si, após um curto tempo a bola branca toma um rumo diferente!!



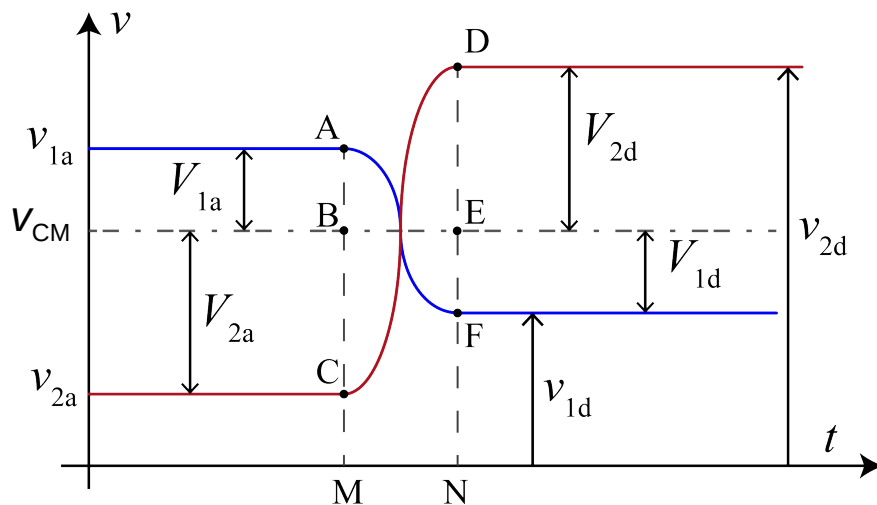
Colisões elásticas 2D: análise gráfica

No R_{CM} : o momento linear total do sistema é nulo, antes e depois da colisão:

$$m_1 \vec{V}_{1d} + m_2 \vec{V}_{2d} = m_1 \vec{V}_{1a} + m_2 \vec{V}_{2a} = 0 \therefore$$

$$\frac{V_{1d}}{V_{2d}} = \frac{V_{1a}}{V_{2a}} \left(= -\frac{m_2}{m_1} = -\frac{1}{k} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{V_{1d}}{V_{1a}} = \frac{V_{2d}}{V_{2a}}$$

Mas, por conservação de energia $\Rightarrow |V_{1d}| = |V_{1a}|$ e $|V_{2d}| = |V_{2a}|$



Colisões elásticas 2D: análise gráfica

Tudo idêntico à colisão em 1 dim., mas com estado final podendo sair a um ângulo arbitrário.

