Física Geral I
F -128

Aula 09
Sistemas de partículas

Plano da Aula

Sistemas de Partículas

s

- Centro de massa
  - Cálculo do centro de massa
- 2ª. Lei de Newton para um sistema de partículas
  - Momento linear de um sistema de partículas
- Conservação do Momento Linear
- Sistemas de massa variável

Sistemas de partículas

Até agora, tratamos o caso de uma partícula. O que acontece se tivermos um sistema com N partículas? Como descrever o movimento de N partículas?

Sistemas de partículas

Problema: um patinador está parado junto a uma parede. Ao empurrar a parede, ele adquire uma velocidade de afastamento, e portanto uma energia cinética.

Qual o trabalho realizado pela força Normal?

Como interpretar o teorema de trabalho/energia cinética?

Sistemas de partículas

Problema: um patinador está parado junto a uma parede. Ao empurrar a parede, ele adquire uma velocidade de afastamento, e portanto uma energia cinética.

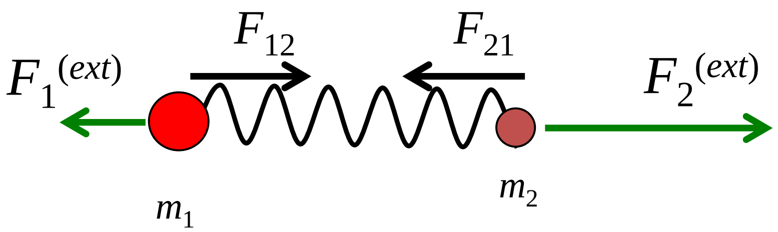
Qual o trabalho realizado pela força Normal?

Como interpretar o teorema de trabalho/energia cinética?

→ sistema de muitos corpos.

Sistemas de 2 partículas

Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 em uma dimensão:



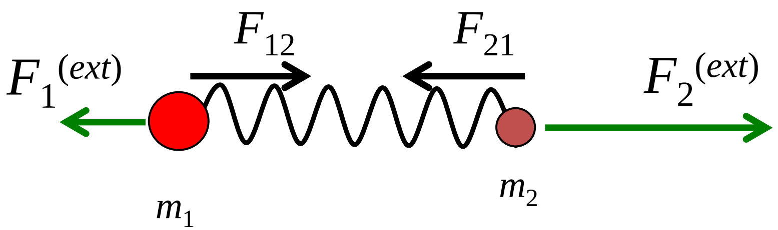
$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_{12} + F_1^{(ext)}$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_{21} + F_2^{(ext)}$$

Aqui, distinguimos entre forças internas (F_{12} e F_{21}) e forças externas ($F_1^{(ext)}$ e $F_2^{(ext)}$).

Sistemas de 2 partículas

Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 em uma dimensão:



$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = F_{12} + F_1^{(ext)} \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = F_{21} + F_2^{(ext)} \end{cases}$$

Aqui, distinguimos entre forças internas (F_{12} e F_{21}) e forças externas ($F_1^{(ext)}$ e $F_2^{(ext)}$). Somando as duas equações termo a termo:

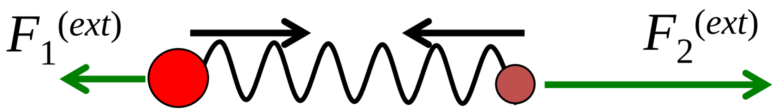
$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_{12} + F_{21} + F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)}$$

$$\Rightarrow m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)} = \sum F^{(ext)} \quad (\text{pois } F_{12} = -F_{21})$$

$\sum F^{(ext)}$ é a força externa resultante. As forças internas se cancelam.

Sistemas de 2 partículas

Centro de massa



$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = F_{12} + F_1^{(ext)} \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = F_{21} + F_2^{(ext)} \end{cases}$$

Assim,

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d^2(m_1x_1 + m_2x_2)}{dt^2} = \sum F^{(ext)} \Rightarrow \sum F^{(ext)} = M \frac{d^2x_{CM}}{dt^2}$$

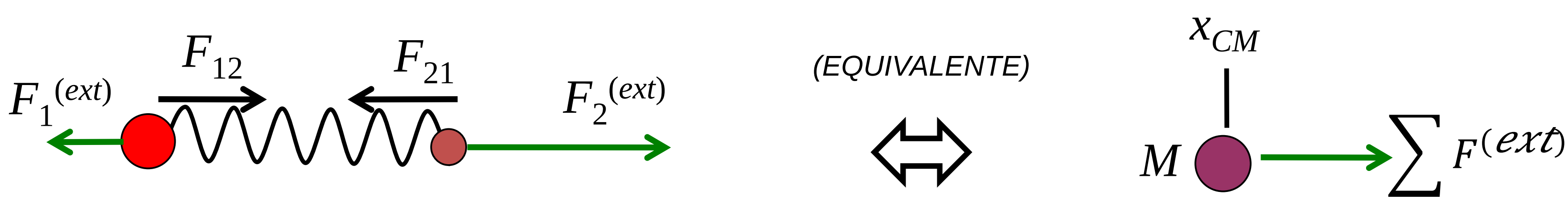
Onde definimos: $x_{CM} = \dfrac{m_1x_1 + m_2\,x_2}{m_1 + m_2}$ e $M = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema.

O ponto x_{CM} é conhecido como centro de massa do sistema.

Sistemas de 2 partículas

Centro de massa

O sistema se comporta como se toda massa do sistema estivesse concentrada no ponto x_{CM} (centro de massa) e a força externa agisse sobre ele.



2ª Lei de Newton para um sistema de 2 partículas:

$$\boxed{\sum F^{ext} = M\frac{d^2x_{cm}}{dt^2} = Ma_{cm}}$$

Em particular, se $\sum F^{ext} = 0 \Rightarrow \frac{dx_{CM}}{dt} = \text{v}_{CM} = constante.$

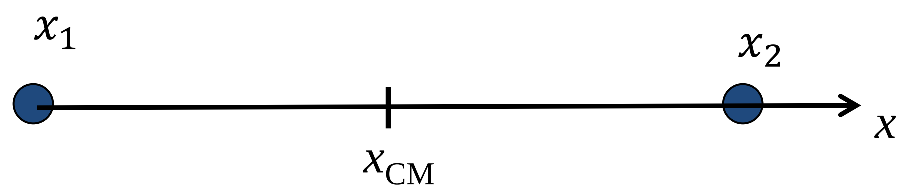
Sistemas de 2 partículas

Cálculo do centro de massa:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2\, x_2}{m_1 + m_2}$$

Exemplos:

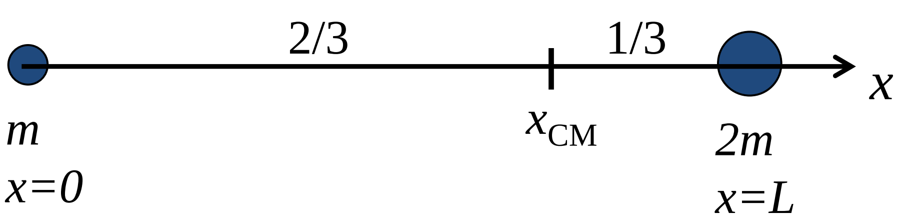
(a) $m_1 = m_2 \Rightarrow x_{CM} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$



(b) $m_1 \gg m_2 \rightarrow x_{cm} \approx x_1$

(c) Em geral, o centro de massa é um ponto intermediário entre x_1 e x_2:

$$x_1 < x_{cm} < x_2$$



$$x_{cm} = \frac{m \times 0 + 2m \times L}{3m} = \frac{2}{3}L$$

Questão 3a:

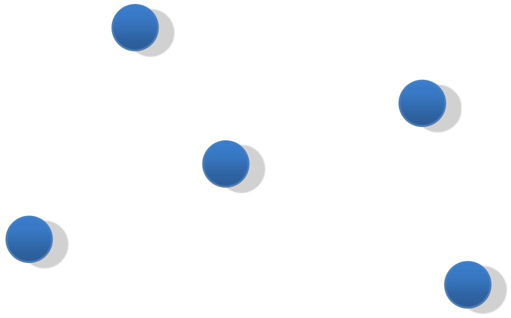
Uma pessoa de 70 kg lança para cima um pacote de arroz de 10 kg. Considerando o sistema pessoa + pacote, calcule a força externa sendo aplicada no sistema após o lançamento.

Questão 3b:

Uma pessoa de 70 kg lança para cima um pacote de arroz de 10 kg. Considerando o sistema pessoa + pacote, calcule a aceleração do centro de massa após o lançamento.

Generalização para *N* partículas

$$
\begin{cases}
m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = F_{12} + F_{13} + \cdots + F_1^{(ext)} \\
m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = F_{21} + F_{23} + \cdots + F_2^{(ext)} \\
\vdots \\
m_N \dfrac{d^2 x_N}{dt^2} = F_{N1} + F_{N2} + \cdots + F_N^{(ext)}
\end{cases}
$$



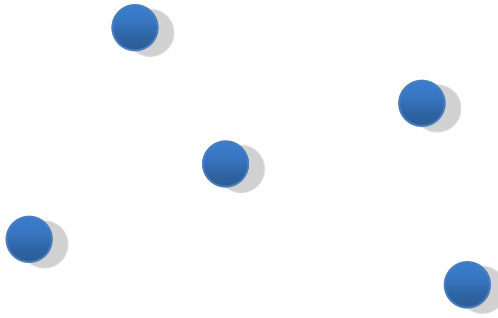
Generalização para *N* partículas

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = \cancel{F_{12}} + \cancel{F_{13}} + \cdots + F_1^{(ext)}$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = \cancel{F_{21}} + \cancel{F_{23}} + \cdots + F_2^{(ext)}$$

$$\vdots$$

$$m_N \frac{d^2x_N}{dt^2} = \cancel{F_{N1}} + \cancel{F_{N2}} + \cdots + F_N^{(ext)}$$



Somando-se as equações, as forças internas se cancelam aos pares:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + \ldots + m_N \frac{d^2x_N}{dt^2} = F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)} + \ldots + F_N^{(ext)} = \sum F^{ext}$$

$$\sum F^{ext} = \frac{d^2(m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_Nx_N)}{dt^2} \Rightarrow \sum F^{ext} = M\frac{d^2x_{cm}}{dt^2}$$

Onde usamos $x_{cm} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots m_Nx_N}{m_1 + m_2 + \cdots m_N} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$

Generalização para 3D

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2\, x_2 + \cdots + m_N\, x_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2\, y_2 + \cdots + m_N\, y_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \qquad \Rightarrow \overrightarrow{r_{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i}$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2\, z_2 + \cdots + m_N\, z_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

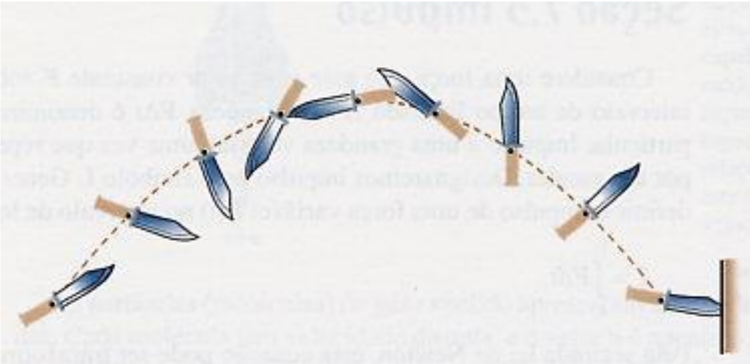
2^a lei de Newton para um sistema de partículas

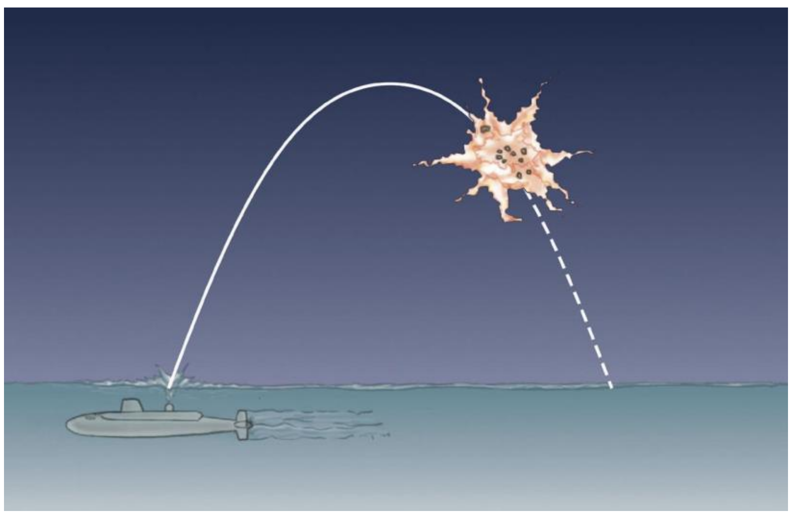
$$\sum \vec{F}^{(ext)} = m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} + \cdots + m_N \frac{d^2\vec{r}_N}{dt^2} = M\,\vec{a}_{CM}$$

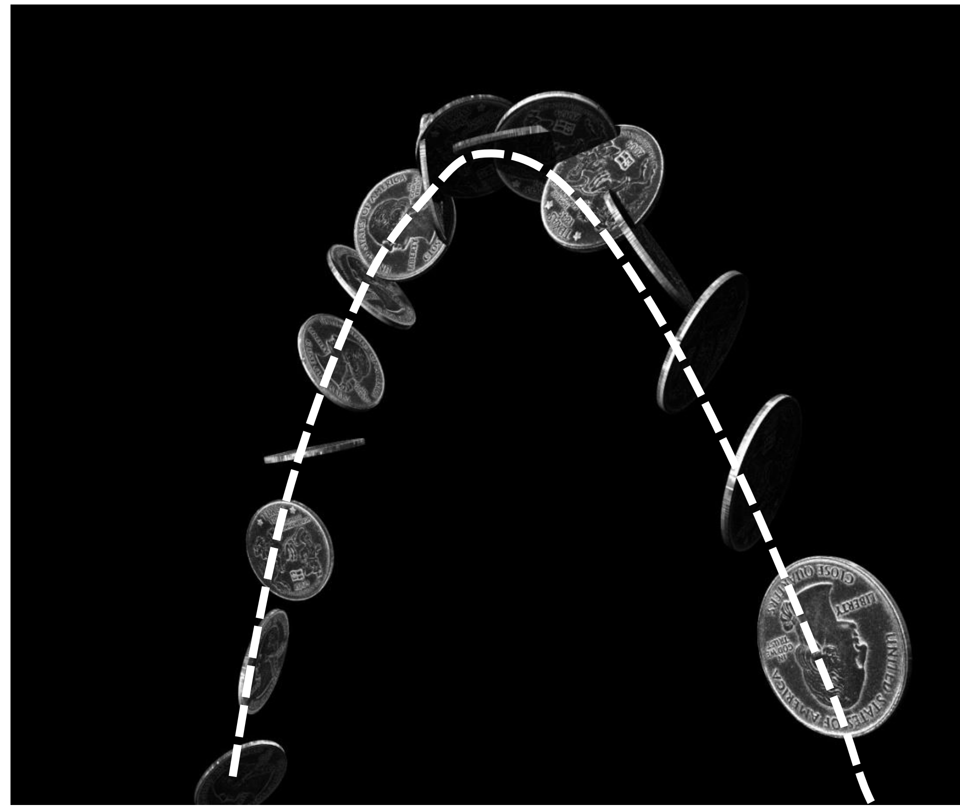
$$\boxed{\sum \vec{F}^{(ext)} = M\,\vec{a}_{CM}}$$

Esta é a 2^a. lei de Newton para um sistema de partículas: **o sistema responde à resultante das forças externas como se a massa total *M* estivesse toda concentrada no centro de massa.**

2ª Lei de Newton para um sistema de partículas:

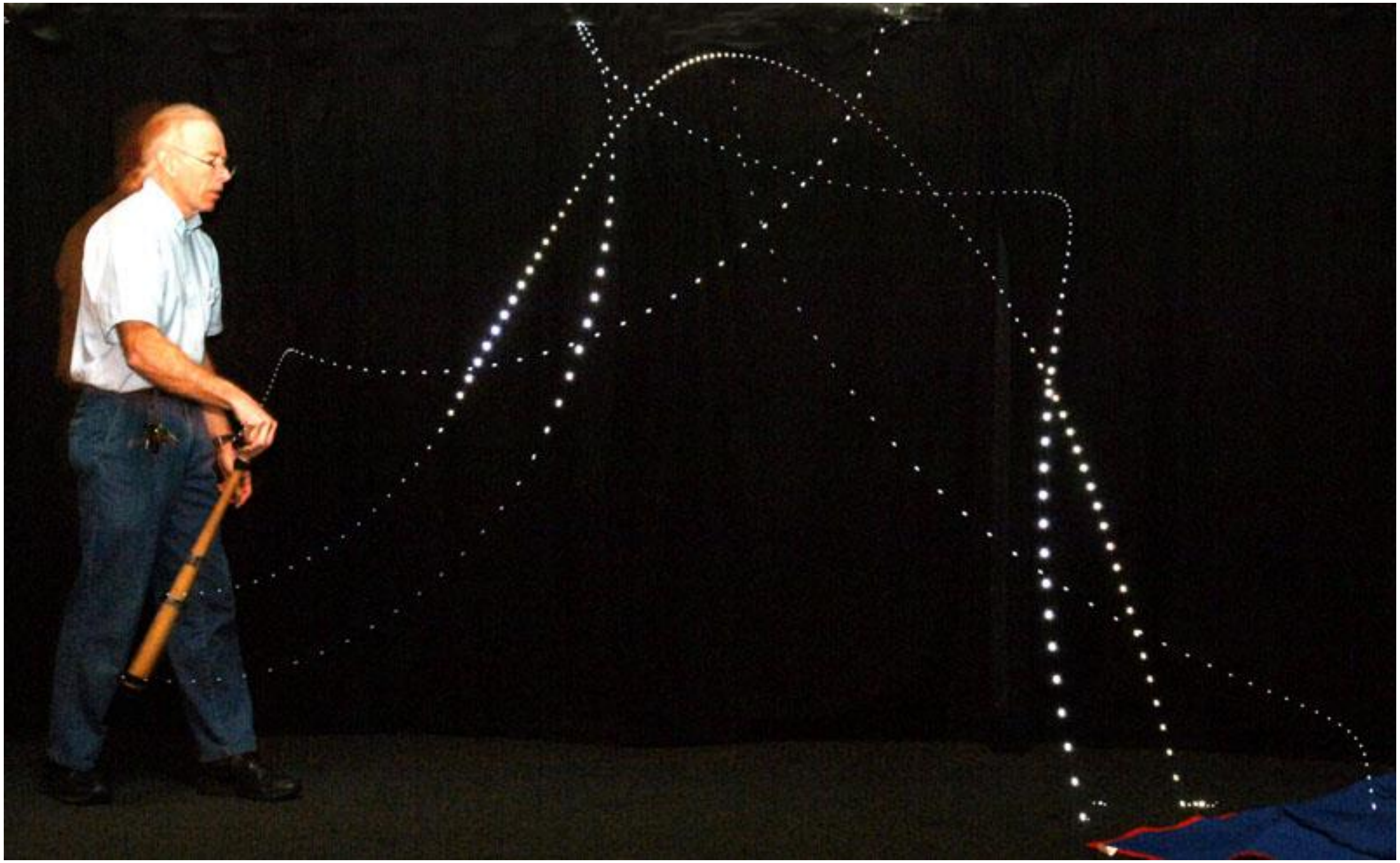






O movimento dos sistemas acima é muito complicado, mas o ***centro de massa descreve uma parábola,*** como uma partícula.

2ª Lei de Newton para um sistema de partículas:

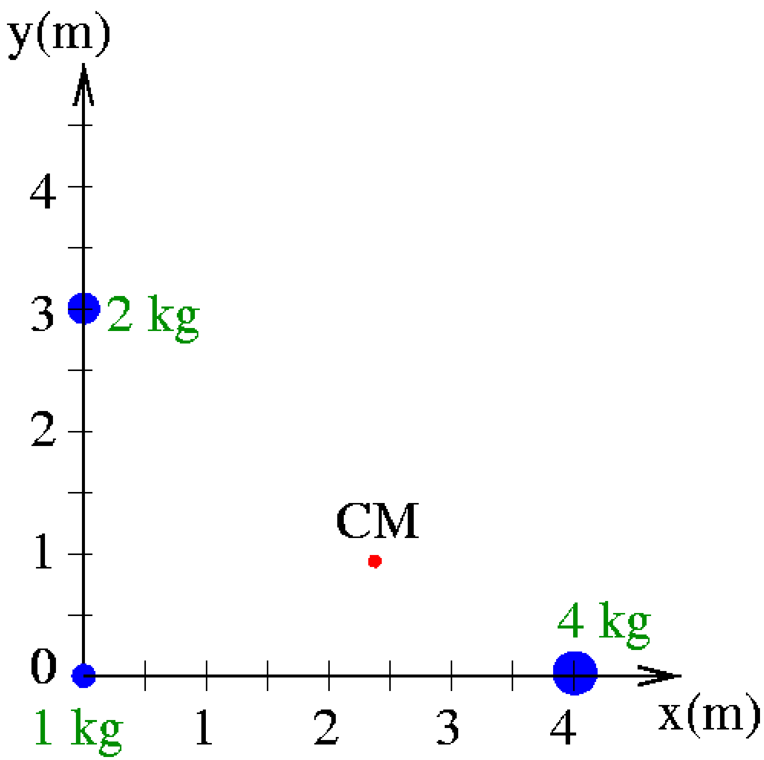


O movimento dos sistemas acima é muito complicado, mas o *centro de massa (próximo ao meio do taco) descreve uma parábola,* como uma partícula.

Cálculo do Centro de Massa (CM)

Exemplo:

Calcule a posição do centro de massa do sistema composto por 3 partículas, como mostrado abaixo.



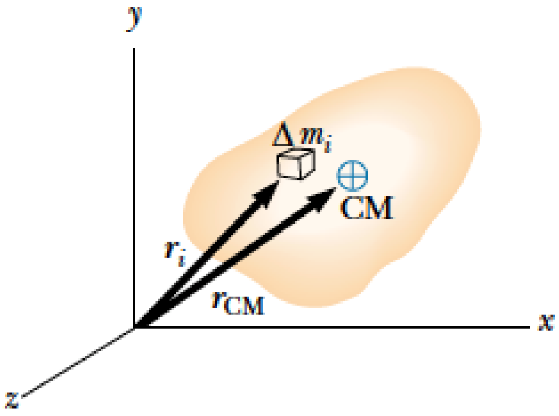
$$m_1 = 1\ \text{kg} \quad x_1 = 0\ \text{m} \quad y_1 = 0\ \text{m}$$
$$m_2 = 2\ \text{kg} \quad x_2 = 0\ \text{m} \quad y_2 = 3\ \text{m}$$
$$m_3 = 4\ \text{kg} \quad x_3 = 4\ \text{m} \quad y_3 = 0\ \text{m}$$

$$x_{CM} = \frac{0\times 1 + 0\times 2 + 4\times 4}{1+2+4}\ \text{m} = 2{,}3\ \text{m}$$

$$y_{CM} = \frac{0\times 1 + 3\times 2 + 0\times 4}{1+2+4}\ \text{m} = 0{,}9\ \text{m}$$

CM de corpos contínuos

Se um corpo consiste de uma distribuição contínua de massa, podemos dividi-lo em porções infinitesimais de massa *dm* e a soma transforma-se numa integral:



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \rightarrow \frac{1}{M}\int x dm$$

$$y_{CM} \rightarrow \frac{1}{M}\int y dm \qquad z_{CM} \rightarrow \frac{1}{M}\int z dm$$

A massa infinitesimal *dm* pode pertencer a um fio, uma superfície ou um volume:

$$dm = \begin{cases} \lambda dl \\ \sigma dA \\ \rho dV \end{cases}$$

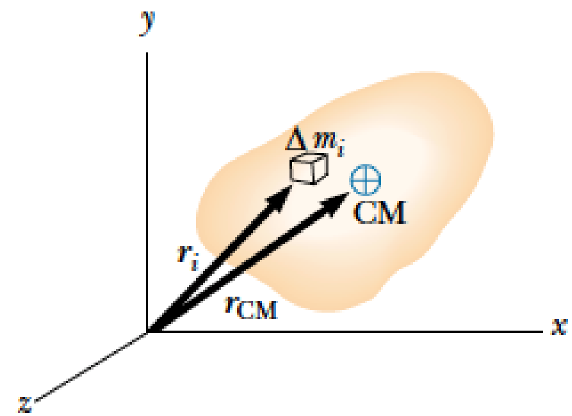
λ : densidade linear de massa

σ : densidade superficial de massa

ρ : densidade volumétrica de massa

CM de corpos contínuos

Se um corpo consiste de uma distribuição contínua de massa, podemos dividi-lo em porções infinitesimais de massa *dm* e a soma transforma-se numa integral:



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \rightarrow \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$y_{CM} \rightarrow \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{CM} \rightarrow \frac{1}{M}\int z\,dm$$

Se o corpo (volume) tiver densidade uniforme: $dm = \rho dV = \frac{M}{V} dV$:

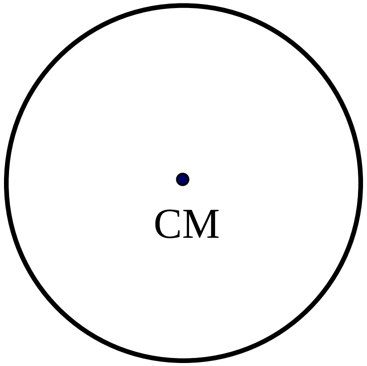
$$x_{CM} = \frac{1}{V}\int x\,dV; \quad y_{CM} = \frac{1}{V}\int y\,dV; \quad z_{CM} = \frac{1}{V}\int z\,dV$$

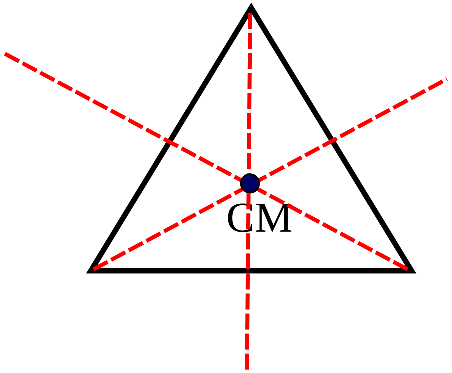
Normalmente, não precisamos calcular estas integrais triplas!

CM e simetrias

Se um corpo possui um ponto, uma linha ou um plano de simetria, o CM situa-se nesse ponto, linha ou plano.

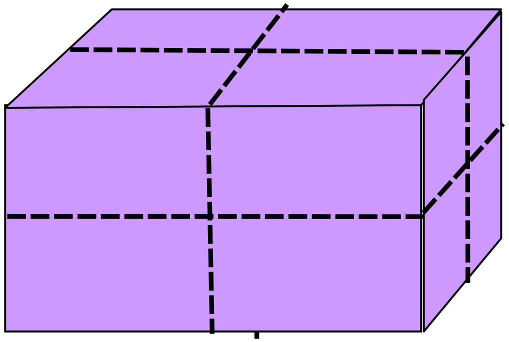
Centro de simetria





Linhas de simetria

Planos de simetria



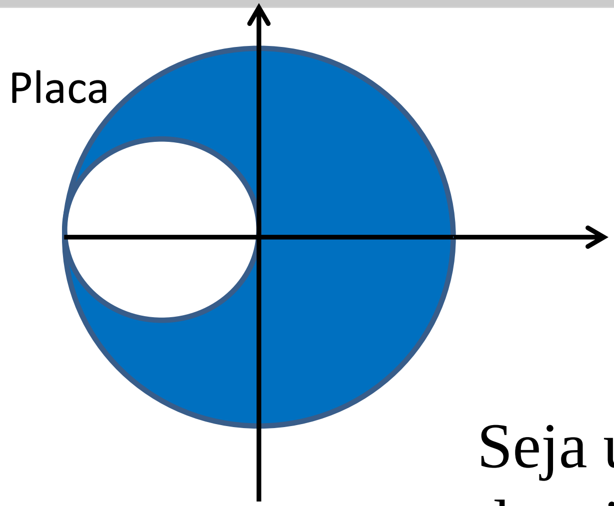
- Note que para que um ponto, linha ou plano seja de simetria, é preciso que, para cada elemento de massa, exista um outro elemento igual na posição simétrica em relação ao ponto, linha ou plano. (confira isso para os elementos de simetria das figuras desta página)

CM e simetrias

Nota: o centro de massa de um corpo não é necessariamente um ponto do corpo!

CM de um atleta de salto em altura pode passar abaixo do sarrafo...

Exemplo de cálculo da posição do CM:

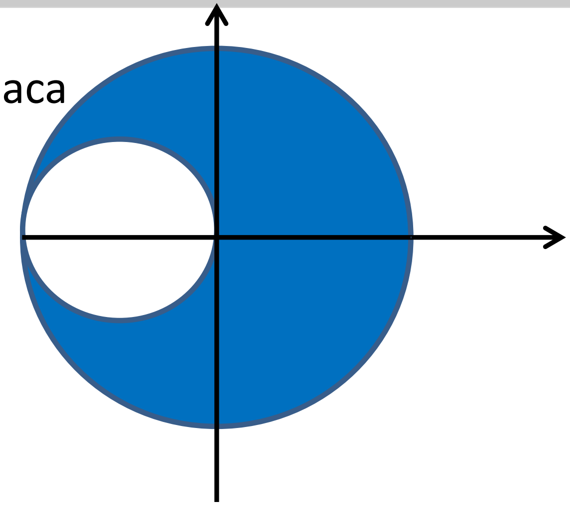


Seja uma placa circular de densidade uniforme, de raio $2R$, com um "buraco" circular de raio R conforme mostrado na figura.
Onde está localizado o CM da placa?

$$\boxed{x_{CMPlaca} = ??}$$

Exemplo de cálculo da posição do CM:

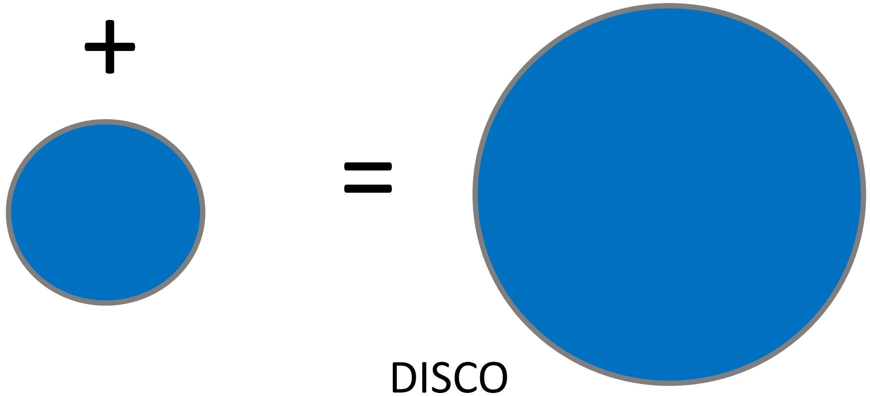
Placa



Seja uma placa circular de densidade uniforme, de raio $2R$, com um "buraco" circular de raio R conforme mostrado na figura.

Onde está localizado o CM da placa?

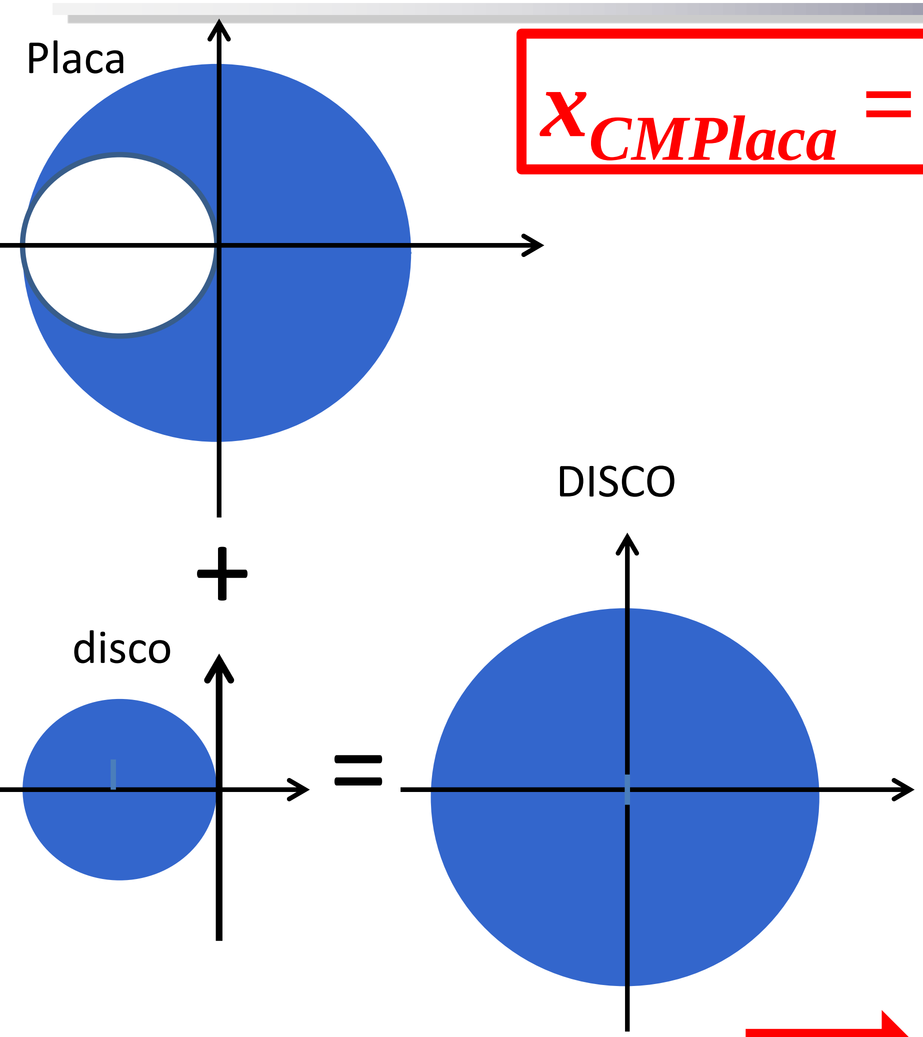
disco



DISCO

$$\boxed{x_{CMPlaca} = ??}$$

Exemplo de cálculo da posição do CM:



$$\boxed{x_{CMPlaca} = ??}$$

$$x_{CMDISCO} = \frac{\left(m_{disco}x_{disco} + m_{placa}x_{placa}\right)}{\left(m_{disco} + m_{placa}\right)} = 0$$

$$m_{disco}x_{disco} + m_{placa}x_{placa} = 0$$

$$x_{placa} = -x_{disco}\frac{m_{disco}}{m_{placa}}$$

$$Como \quad m = \rho V,$$

$$m_{disco} = \rho\pi R^2 h$$

$$m_{placa} = \rho\pi(2R)^2 h - \rho\pi R^2 h = 3\rho\pi R^2 h$$

$$Portanto,$$

$$x_{placa} = -(-R)\frac{\rho\pi R^2 h}{3\rho\pi R^2 h} = \frac{R}{3}$$

Momento Linear de um sistema de *N* partículas

O momento linear de um sistema de *N* partículas é a soma vetorial dos momentos lineares individuais:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N$$

Derivando esta expressão e usando a 2a lei de Newton para um sistema de partículas, podemos escrever:

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}^{(ext)} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

Conservação de momento linear

Uma conseqüência imediata da 2ª lei de Newton para um sistema de partículas é a **conservação do momento linear total** do sistema na **ausência de forças externas:**

$$\sum \vec{F}^{ext} = 0 \;\; \rightarrow \;\; \vec{P} = \overrightarrow{cte}$$

Assim como no caso da conservação da energia mecânica, essa lei pode ser muito útil para resolver problemas, sem ter que lidar com a dinâmica detalhada do sistema.

Conservação de momento linear

Uma conseqüência imediata da 2ª lei de Newton para um sistema de partículas é a **conservação do momento linear total** do sistema na **ausência de forças externas:**

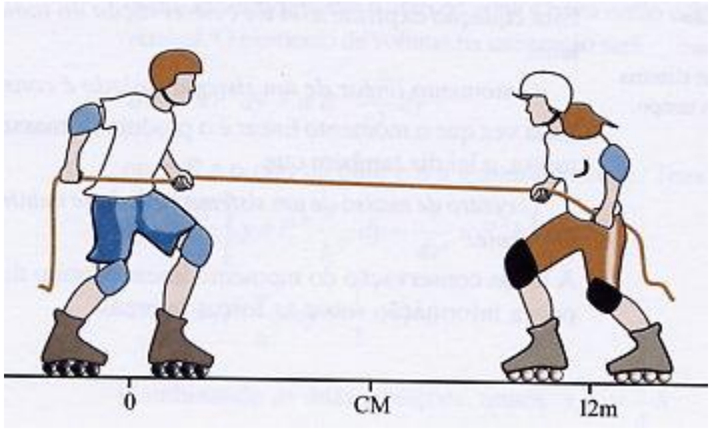
$$\sum \vec{F}^{ext} = 0 \ \rightarrow \ \vec{P} = \overrightarrow{cte}$$

Assim como no caso da conservação da energia mecânica, essa lei pode ser muito útil para resolver problemas, sem ter que lidar com a dinâmica detalhada do sistema.

Note que a <u>única condição</u> para a conservação do momento linear total é a ausência de forças externas. Não há nenhuma restrição quanto à presença de forças dissipativas, desde que elas sejam internas. Por outro lado, forças internas não podem mudar o momento linear total do sistema!

Questão 4:

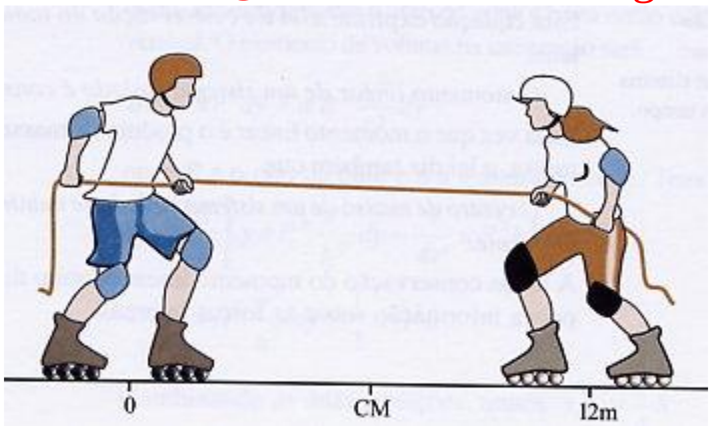
m = 80 kg m = 60 kg



Dois patinadores no gelo (sem atrito com o chão) encontram-se inicialmente a uma distância de 12 m. Eles puxam as extremidades de uma corda até se encontrarem. **Em que ponto eles se encontram?**

Conservação de momento linear

m = 80 kg m = 60 kg



Dois patinadores no gelo (sem atrito com o chão) encontram-se inicialmente a uma distância de 12 m. Eles puxam as extremidades de uma corda até se encontrarem. Em que ponto eles se encontram?

Só há forças internas ao sistema $\Rightarrow$ o centro de massa tem velocidade constante.

$$x_{CM} = \frac{0 \times 80 + 12 \times 60}{80 + 60}\,\mathrm{m} = 5{,}1\ \mathrm{m} \Rightarrow$$

Os patinadores se encontrarão a 5,1 m da posição inicial do patinador da esquerda. **Não importam as forças exercidas por eles (internas).**

Movimento de um sistema de partículas no R_{CM}

Se v_{CM} = constante, um referencial amarrado ao centro de massa (CM) é um referencial inercial, chamado **referencial do centro de massa (R_{CM}).** Ele tem interesse físico, pois dado um sistema de partículas, ele está naturalmente definido, não dependendo da escolha que se faça para o referencial.

Vimos: $$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = \vec{P} = M\vec{v}_{CM}$$

Como $\vec{v}_{CM} = 0$ no R_{CM} $\Rightarrow \vec{P} = 0.$

Ou seja, **no R_{CM} o momento total de um sistema de partículas é nulo, quer o sistema seja isolado ou não.**

Movimento de um sistema de partículas no R_{CM}

Se v_{CM} = constante, um referencial amarrado ao centro de massa (CM) é um referencial inercial, chamado **referencial do centro de massa (R_{CM}).** Ele tem interesse físico, pois dado um sistema de partículas, ele está naturalmente definido, não dependendo da escolha que se faça para o referencial.

Vimos: $$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = \vec{P} = M\vec{v}_{CM}$$

Como $\vec{v}_{CM} = 0$ no R_{CM} $\Rightarrow \vec{P} = 0.$

Ou seja, **no R_{CM} o momento total de um sistema de partículas é nulo, quer o sistema seja isolado ou não.**

<u>Vantagem:</u> o **R_{CM} é o referencial de menor energia cinética do sistema**. De fato, para um sistema de duas partículas:

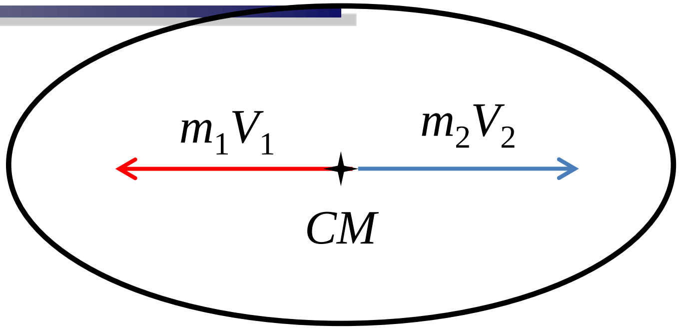
$$\vec{v}_1 = \vec{V}_1 + \vec{v}_{cm} \qquad \vec{v}_2 = \vec{V}_2 + \vec{v}_{cm}$$

onde V_1 e V_2 são as velocidades das partículas 1 e 2 em relação ao CM.

NOTE: (*Velocidade da partícula 1 no Referencial lab= Velocidade da partícula no R_{CM} + velocidade do CM*)

Movimento de um sistema de partículas no R_{CM}

É claro que:



$$m_1V_1 + m_2V_2 = 0$$

Então, considerando a energia cinética:

$$K = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 =$$

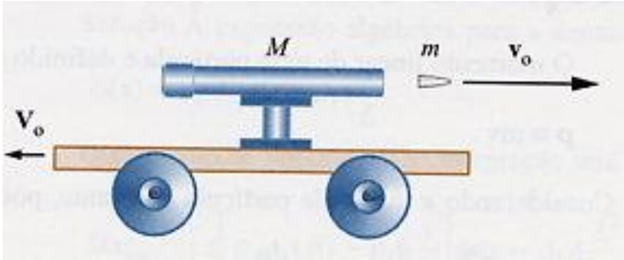
$$= \frac{1}{2}m_1(V_1 + v_{CM})^2 + \frac{1}{2}m_2(V_2 + v_{CM})^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}m_1{V_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{V_2}^2}_{(K)_{RCM}} + \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2{}_{CM}}_{K_{CM}} + \underbrace{(m_1V_1 + m_2V_2)v_{CM}}_{=0}$$

O primeiro termo é a energia cinética do sistema no referencial do CM e o segundo é a energia associada ao movimento do CM. No referencial do CM, esta parcela K_{CM} é nula.

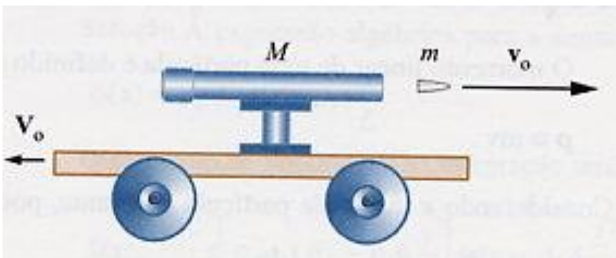
Movimento de um sistema de partículas no R_{CM}

Um canhão de massa $M = 100$ kg dispara uma bala de massa $m = 1{,}0$ kg com velocidade de 300 m/s em relação ao canhão. Imediatamente após o disparo, quais são a velocidade da bala e do recuo do canhão?



Movimento de um sistema de partículas no R_{CM}

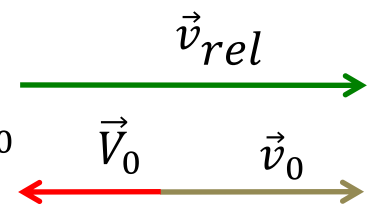
Um canhão de massa M = 100 kg dispara uma bala de massa m = 1,0 kg com velocidade de 300 m/s em relação ao canhão. Imediatamente após o disparo, quais são a velocidade da bala e do recuo do canhão?



Tanto inicialmente, como imediatamente após a explosão, o momento linear total do sistema é nulo, pois as forças que atuam durante a explosão são todas elas forças internas.

Os módulos das velocidades estão assim relacionados: $\begin{cases} MV_0 = mv_0 \\ v_{rel} = v_0 + V_0 \end{cases}$

- Note que $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_0 - \vec{V}_0$



Resolvendo o sistema de equações, encontramos:

$$V_0 = \frac{m}{m+M} v_{rel} = 2{,}97 \text{ m/s}$$

$$v_0 = v_{rel} - V_0 \simeq 297 \text{ m/s}$$

O movimento de recuo do canhão sugere um método de propulsão!

Sistemas de massa variável

Instituto de Física Gleb Wataghin

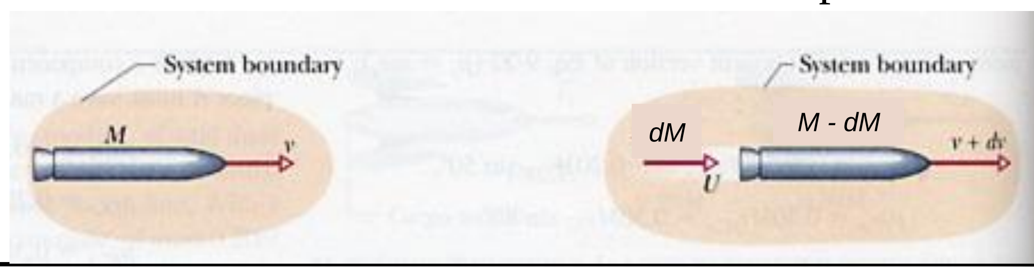
Exemplo: propulsão de foguetes

Um foguete com velocidade instantânea v e massa instantânea M ejeta produtos de exaustão com massa dM e velocidade U.

Depois de um tempo dt, o foguete tem massa M-dM e velocidade $v+dv$.

Todas as velocidades acima são medidas no referencial inercial da Terra.

Antes   Depois



x

Como o sistema (foguete + produtos de exaustão) é fechado e isolado, aplicamos a conservação do momento linear do sistema: $P_i = P_f$

Antes: $P_i = Mv$

Depois: $P_f = (M - dM)(v+dv) + dMU$

$$\cancel{Mv} = \cancel{Mv} + Mdv - vdM - dMdv + U\,dM$$

$$\Rightarrow Mdv = (v+dv - U)dM \qquad (1)$$

Sistemas de massa variável

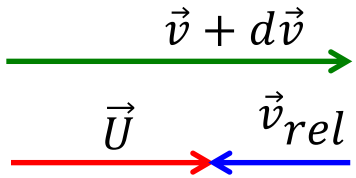
Exemplo: propulsão de foguetes

$$Mdv = (v+dv - U)dM \qquad (1)$$

Introduzindo a velocidade $\vec{v}_{rel}$ dos produtos de exaustão em relação ao foguete (é essa quantidade que é controlada, pois está ligada ao processo de combustão):

$$\vec{v} + d\vec{v} = \vec{U} - \vec{v}_{rel}$$

(Ou ainda, em módulo, $v+dv - U = v_{rel}$)



(é claro que a velocidade relativa $\vec{v}_{rel}$ aponta na direção de *x* negativo, por isso o sinal)

Então, reescrevendo (1):

$$Mdv = dMv_{rel}$$

(Equação fundamental da propulsão de foguetes)

Compare com o resultado anterior do canhão ($V_0 \Rightarrow dv$; $m \Rightarrow dM$):

$$MV_0 = mv_0$$

Sistemas de massa variável

Exemplo: propulsão de foguetes

$$M dv = dM v_{rel} \quad \Rightarrow \quad M\frac{dv}{dt} = v_{rel}\frac{dM}{dt} = R v_{rel}$$

onde $\frac{dM}{dt} = R$ é a taxa de consumo de massa de combustível

Reescrevendo, obtemos: $R v_{rel} = Ma,$

de onde se nota que o empuxo $R v_{rel}$ tem o mesmo efeito de uma força resultante!

Entretanto, mesmo que $R v_{rel}$ seja constante, o movimento do foguete não é uniformemente acelerado, pois a massa é variável:

$$dv = v_{rel}\frac{dM}{M} \Rightarrow \int_{v_i}^{v_f} dv = v_{rel}\int_{M_i}^{M_f}\frac{dM}{M} \Rightarrow$$

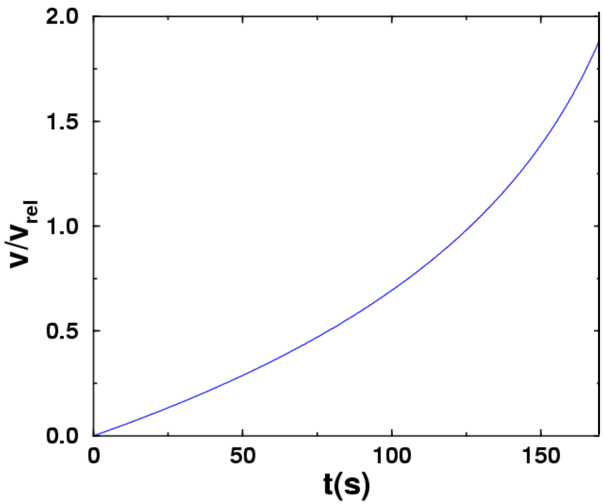
onde corrigimos o sinal de *dM* para considerarmos a variação de massa do foguete, e não do combustível ejetado.

Sistemas de massa variável

Exemplo: propulsão de foguetes

$$M(t) = M_i + Rt \Rightarrow \qquad v(t) = v_0 + v_{rel} \ln\left(\frac{M_i + Rt}{M_i}\right)$$

A curva $v(t)$ não é linear por causa da perda de massa.



Para alguns combustíveis:

- Querosene e oxigênio líquido (programa Apolo): $v_{rel} \approx 10.000$ km/h
- Hidrogênio líquido e oxigênio líquido (ônibus espacial): $v_{rel} \approx 11.500$ km/h
- Valores no vácuo: 10-20% maiores
- Considerações de estabilidade limitam $M_i/M_f \approx 10 \rightarrow \Delta v \approx 2{,}3\, v_{rel} < 30.000$ km/h
- Mas, $v_{escape} \approx 40.000$ km/h !!!!!!! → O que fazer??

Sistemas de massa variável

Foguetes multi-estágios

- Ao final de um estágio de aceleração, descarta-se a carcaça do estágio anterior (tanques de combustíveis, motores...)

Por que isso é vantajoso?

Primeiro estágio: $M_0 \rightarrow M_1 \Rightarrow \Delta v_1 = v_{rel} \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\right)$

Segundo estágio: *descarte de massa* δ

$$M_1 - \delta \rightarrow M_2 - \delta \Rightarrow \Delta v_2 = v_{rel} \ln\left(\frac{M_1 - \delta}{M_2 - \delta}\right)$$

Aceleração total com descarte da carcaça:

$$\Delta v_{desc} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = v_{rel} \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\frac{M_1 - \delta}{M_2 - \delta}\right)$$

Sistemas de massa variável

Foguetes multi-estágios

Aceleração total com descarte da carcaça:

$$\Delta v_{desc} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = v_{rel} \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\frac{M_1 - \delta}{M_2 - \delta}\right)$$

Aceleração total sem descarte da carcaça:

$$\Delta v_{sem} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = v_{rel} \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\frac{M_1}{M_2}\right) = v_{rel} \ln\left(\frac{M_0}{M_2}\right)$$

Comparando:
(mostre isso!)

$$\frac{M_1}{M_2} > 1 \Rightarrow \frac{M_1 - \delta}{M_2 - \delta} > \frac{M_1}{M_2} \qquad \Rightarrow \Delta v_{desc} > \Delta v_{sem}$$

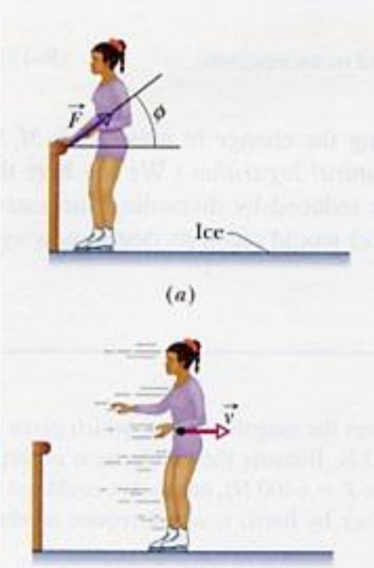
Quanto maior a carcaça δ descartada, maior o ganho no descarte!

Trabalho das forças externas e internas

Vimos que as forças internas não contribuem para a variação do momento total de um sistema de partículas. E contribuem para a energia?

Para a partícula i : $$(\Delta K)_i = \int \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{s}_i + \int \vec{f}^{int} \cdot d\vec{s}_i$$

Para o sistema todo, a variação da energia cinética é a soma do trabalho total das forças externas e do trabalho total das forças internas.
O trabalho total das forças internas pode não ser nulo.



Exemplo:

a) Patinadora

Considere a situação ao lado, em que uma patinadora empurra um corrimão (com uma força $\vec{F}$) e adquire energia cinética no processo. Nessa situação, **a força $\vec{F}$ acelera o CM da patinadora, mas não realiza trabalho**. A patinadora gasta energia (muscular), que se transforma em energia cinética. Há apenas transferência de energia entre partes internas do sistema.

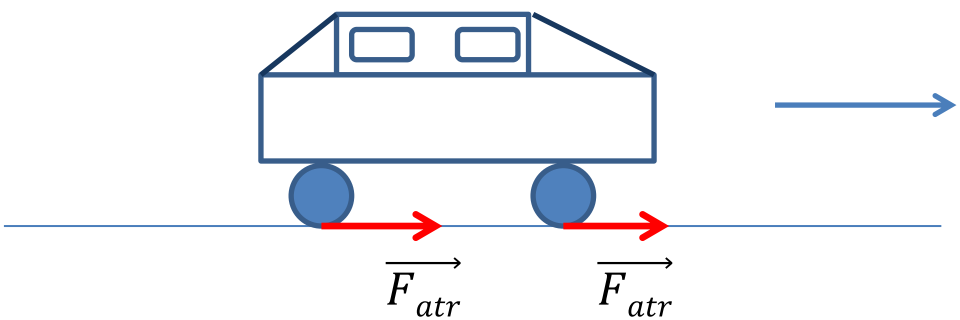
Teorema do Trabalho/Energia Cinética

Como recuperar o teorema do Trabalho/Energia Cinética para sistema de muitos corpos?

Tal teorema ainda se aplica para a força TOTAL resultante, e o deslocamento do Centro de Massa.

EXEMPLO:

Quando o carro está acelerando: as forças de atrito aceleram o CM do carro. Mas a energia cinética vem da queima do combustível do carro (infelizmente!).



Por outro lado, quando o carro está freiando: quem está consumindo a energia cinética são as forças de atrito internas, das rodas com as lonas dos freios. Agora a roda empurra o chão para a frente e as forças de atrito são para trás. Mas elas são estáticas, e não realizam trabalho.