GABARITO

MA211 – PROVA 1

Quinta-feira (tarde), 02/10/2014.

*Para correção, cada símbolo "✓**x** " o item que o antecede vale* **x** *pontos.*

Resolução da Questão 1. (a) A função f é contínua em $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0). \tag{1}$$

Temos que $f(0,0) = 0$. Devemos verificar se o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe.

Considerando o caminho $\mathcal{C}_1 = \{(x,y) : x = t, y = t\}$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}.\checkmark \mathbf{0.2} \tag{2}$$

Considerando o caminho $\mathcal{C}_2 = \{(x,y) : x = t, y = 0\}$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0.\checkmark \mathbf{0.2} \tag{3}$$

Como o limite por dois caminhos diferentes são distintos, o limite não existe. ✓**0.2** .

Portanto, a função não é contínua. ✓**0.2**

(b) Pela definição de derivada parcial, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.\checkmark \mathbf{0.2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.\checkmark \mathbf{0.2} \tag{5}$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c) Usando a regra do quociente para $(x,y) \neq (0,0)$, encontramos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}.\checkmark \mathbf{0.3} \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - xy(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}.\checkmark \mathbf{0.3} \tag{7}$$

(d) A função não é derivável por um dos seguintes motivos: ✓**0.2**

(i) Porque suas derivadas parciais não são contínuas em $(0,0)$.

(ii) Porque f não é contínua em $(0,0)$.

Resolução da Questão 2. (a) As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}\checkmark\mathbf{0.2} \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}.\checkmark\mathbf{0.2} \tag{8}$$

A taxa de variação máxima ocorre na direção do gradiente $\nabla f(1, 1)$. Portanto, a direção é

$$\nabla f(1, 1) = (1, 1).\checkmark\mathbf{0.2} \tag{9}$$

A taxa de variação máxima de f em $(1, 1)$ dada pela norma do gradiente:

$$\|\nabla f(1, 1)\| = \sqrt{2}.\checkmark\mathbf{0.2} \tag{10}$$

(b) A derivada direcional é dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}, \tag{11}$$

em que $\mathbf{u}$ é um vetor unitário. Na questão,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{5}(3, 4).\checkmark\mathbf{0.2} \tag{12}$$

Logo,

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 1) = \frac{1}{5}\nabla f(1, 1) \cdot (3, 4) = \frac{7}{5}.\checkmark\mathbf{0.2} \tag{13}$$

(c) Usando a regra do quociente, encontramos as seguintes derivadas parciais f_{xx} e f_{yy} de segunda ordem:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)}\checkmark\mathbf{0.3}. \tag{14}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}\checkmark\mathbf{0.3}. \tag{15}$$

Assim,

$$f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)} + \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)} = \frac{2(y^2 - x^2) + 2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)} = 0.\checkmark\mathbf{0.2} \tag{16}$$

Resolução da Questão 3. O plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$ é dado por

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b). \checkmark \mathbf{0.4} \tag{17}$$

Agora, pela regra da cadeia, as derivas parciais de f são

$$f_x(x,y) = \phi(x^2-y^2) + x\phi'(x^2-y^2)(2x) = \phi(x^2-y^2) + 2x^2\phi'(x^2-y^2), \checkmark \mathbf{0.3} \tag{18}$$

$$f_y(x,y) = x\phi'(x^2-y^2)(2y) = 2xy\phi'(x^2-y^2), \checkmark \mathbf{0.3} \tag{19}$$

Logo, para $(x, y) = (a, a)$, encontramos

$$f(a,a) = a\phi(0), \quad f_x(a,a) = \phi(0) + 2a^2\phi'(0) \quad \text{e} \quad f_y(a,a) = -2a^2\phi'(0) \checkmark \mathbf{0.2}. \tag{20}$$

O plano tangente ao gráfico de f em $(a, a, f(a, a)$ é

$$z - a\phi(0) = \big(\phi(0) + 2a^2\phi'(0)\big)(x-a) - 2a^2\phi'(0)(y-a). \checkmark \mathbf{0.2} \tag{21}$$

Por fim, a origem está no plano tangente se a equação (21) é verdadeira para $x = 0, y = 0$ e $z = 0$ $\checkmark \mathbf{0.4}$. Com efeito, para $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, o termo do lado direito de (21) satisfaz

$$\big(\phi(0) + 2a^2\phi'(0)\big)(-a) - 2a^2\phi'(0)(-a) = -a\big(\phi(0) + 2a^2\phi'(0) - 2a^2\phi'(0)\big) = -a\phi(0), \checkmark \mathbf{0.2} \tag{22}$$

que é exatamente o termo do lado esquerdo de (21) com $z = 0$. Logo, a origem pertence ao plano tangente.

Resolução da Questão 4. Como f é um polinômio, os pontos críticos são aqueles tais que $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Nessa caso, temos

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 2y - 5, 2x + 2y).\checkmark\mathbf{0.2} \tag{23}$$

Temos $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e somente se

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y - 5 = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \quad \checkmark\mathbf{0.2} \tag{24}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$3x^2 - 2x - 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 5/3 \text{ e } x_2 = -1. \tag{25}$$

Se $x_1 = 5/3$, temos da segunda equação $y = -5/3$. Se $x_2 = -1$, temos da segunda equação $y = 1$. Logo, os pontos críticos de f são $(5/3, -5/3)$ e $(-1, 1)$. ✓**0.4**

Devemos agora classificar os pontos críticos. As derivadas parciais de segundar ordem de f são

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{xy}(x,y) = 2, \quad f_{yy}(x,y) = 2.\checkmark\mathbf{0.4} \tag{26}$$

O determinante da Hessiana em $(5/3, 5/3)$ é

$$D = f_{xx}(5/3, -5/3)f_{yy}(5/3, 5/3) - f_{xy}^2(5/3, -5/3) = 6(5/3)2 - 4 = 26. \tag{27}$$

Como $D > 0$ e $f(5/3, 5/3) > 0$, esse é um ponto de mínimo de f ✓**0.4** .

O determinante da Hessiana em $(-1, 1)$ é

$$D = f_{xx}(-1,1)f_{yy}(-1,1) - f_{xy}^2(-1,1) = -16. \tag{28}$$

Como $D < 0$, $(-1, 1)$ é um ponto de sela de f ✓**0.4** .

Resolução da Questão 5. O problema pode ser formulado como

$$\text{maximizar/minimizar} f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{sujeito a} g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0. \tag{29}$$

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, devemos ter

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{e} \quad g(x,y) = 0. \tag{30}$$

Nesta questão,

$$\nabla f = (2x, 2y) \checkmark \mathbf{0.2} \quad \text{e} \quad \nabla g = (2x + y, x + 2y). \checkmark \mathbf{0.2} \tag{31}$$

Portanto, devemos resolver os sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x + y) \\ 2y = \lambda(x + 2y) \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases} \qquad \checkmark \mathbf{0.4} \tag{32}$$

Note que $\lambda = 0$ fornece $x = 0$ e $y = 0$ que não satisfazem a terceira equação. Portanto, $\lambda \neq 0$. Multiplicando a primeira equação por y/λ e a segunda por x/λ, encontramos

$$\frac{2xy}{\lambda} = y(2x + y) \quad \text{e} \quad \frac{2xy}{\lambda} = x + 2y. \tag{33}$$

Logo, devemos ter

$$2xy + y^2 = x^2 + 2xy \quad \Longrightarrow \quad x^2 = y^2 \quad \Longrightarrow \quad y = x ou y = -x. \tag{34}$$

Se $x = y$, então teremos da terceira equação a identidade

$$x^2 + x^2 + x^2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = -1. \tag{35}$$

Portanto, temos os pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$ $\checkmark$ **0.3** .

Se $x = -y$, então teremos da terceira equação a identidade

$$x^2 - x^2 + x^2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}. \tag{36}$$

Portanto, temos os pontos $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. $\checkmark$ **0.3**

Os valores de f nesses pontos são

$$f(1,1) = 2, \quad f(-1,-1) = 2, \quad f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 6, \quad f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{37}$$

Portanto, $(1,1)$ e $(-1,-1)$ são os pontos da elipse mais próximos da origem enquanto $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ são os pontos mais distantes de $(0,0)$. $\checkmark$ **0.4**