Teste 1 - GA

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

Geometria Analítica - Teste 1

Matheus Otávio Rodrigues - 222318 - Turma %

Exercícios

1. Pelo próprio enunciado sabemos que:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então, fazendo A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Usando a equação (0.1) para calcular A^3:

$$A^3 = A^2 \cdot A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} = a^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a^3 \cdot I_3 \tag{0.2}$$

Ao analisar a equação (0.2), descobrimos que A^3 é o produto de a^3 por I_3. Sabendo que uma matriz identidade multiplicada por outra de mesma ordem resulta nela mesma ($I_n \cdot I_n = I_n$), podemos dividir o expoente 1983 por 3 a fim de realizar a potência de A^3 em vez de somente A^1 e então, substituir o valor de A^3 encontrado em (0.2) para chegar ao resultado:

$$A^{1983} = \left(A^3\right)^{663} = \left(a^3 \cdot I_3\right)^{663} = a^{1983} \cdot I_3 = a^{1983} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

Analisando agora a invertibilidade da matriz, sabemos que uma das formas de calcular a matriz inversa de qualquer matriz $n \times n$ é o método dos cofatores:

$$\left(A^{1983}\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(A^{1983}\right)}\left(\text{cof.}\, A^{1983}\right)^T \tag{0.4}$$

Analisando especificamente o termo $\det\left(A^{1983}\right)$ na equação (0.4), sabemos para a matriz inversa existir, $\det\left(A^{1983}\right) \neq 0$. Calculando:

$$\begin{gathered} \det\left(A^{1983}\right) \neq 0 \Rightarrow \left(a^{1983}\right)^3 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \\ \left(A^{1983}\right)^{-1} \exists \Leftrightarrow a \neq 0 \end{gathered} \tag{0.5}$$

2.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + \text{kz} = 1 \\ x + (k+1)\,y + z = k^2 - 4 \end{cases}$$

a) Para analisar as soluções criamos a matriz aumentada e realizamos o escalonamento pelo método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & 1+k & 1 & k^2-4 \end{array}\right) \underset{L_3 = L_1 - L_3}{\overset{L_2 = 2L_1 - L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2-k & 1 \\ 0 & -k-2 & 0 & k^2-4 \end{array}\right) \tag{0.6}$$

Usando a última linha como meio de classificar as soluções (-k-2 = k² - 4):

Se -k-2 ≠ k² - 4:

O sistema não apresenta solução graças ao absurdo matemático.

Se -k-2 = k² - 4 = 0:

O sistema apresenta infinitas soluções, já que y se torna variável livre (0y = 0).

Se -k-2 = k² - 4 ≠ 0:

O sistema apresenta solução única.

b) Substituindo k = -2 na equação (0.6):

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2-(-2) & 1 \\ 0 & -(-2)-2 & 0 & (-2)^2-4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = R \tag{0.7}$$

Como a última linha de R é nula, temos que o numéro de linhas não nulas é menor que o número de variáveis, logo, temos um sistema com variável livre que possui infinitas soluções. Calculando a solução geral:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -2y + 4z = 1 \end{cases}, \text{ então :}$$

$$-2y + 4z = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} + 2z \tag{0.8}$$

$$x - y + z = 0 \Rightarrow x - \left(-\frac{1}{2} + 2z\right) + z = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} + z$$

Por (0.8) concluimos que a solução geral do sistema é:

$$S = \left(-\frac{1}{2} + z,\ -\frac{1}{2} + 2z,\ z\right),\ z \in \mathbb{R} \tag{0.9}$$

3. O valor de j varia conforme cada coluna da matriz, então calcularemos as raízes sem levar em conta tal variável. Obtendo as raízes do polinômio $p_{ij}(t) = t^5 + t^3 + t^2$:

$$\begin{gathered} p_{ij}(t) = t^5 + t^3 + t^2 = t^2\left(t^3 + t^1 + 1\right) = 0 \\ t^2 = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \\ t^3 + t + 1 = 0 \Rightarrow t_2 < 0 \end{gathered} \tag{0.10}$$

Como observado em (0.10), obtemos a maior raíz para o polinômio p_{ij}, 0. Agora faremos nossa matriz de ordem 200 somando as coordenadas j a raíz (que no fim resultará em j):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 200 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 200 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 200 \end{pmatrix} \underset{0 \le L_j < 200}{\overset{L_{j+1} = L_j - L_{j+1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 200 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{0.11}$$

Após escalonar A, temos que det(A) é:

$$\det(A) = 1 \cdot 0^{199} - 200 \cdot 0^{199} = 0 \tag{0.12}$$

Outra maneira de interpretar que det(A) = 0 é pelo fato das linhas da matriz serem combinações lineares umas das outras, o que resulta em linhas nulas e consequentemente, determinante nulo.
Como o det(A) = 0, $\nexists A^{-1}$.

4. a) Falso. Supondo um sistema de 5 equações e 3 variáveis e fazendo a sua matriz aumentada:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \tag{0.13}$$

Ao escalonar a matriz A obtém se duas linhas nulas, fazendo com que a quantidade de linhas não nulas da matriz e seu número de variáveis sejam iguais, possibilitando solução única. Prova:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_5 = L_3 - L_5}{\overset{L_4 = L_3 - L_4}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 = L_1 - L_3}{\overset{L_2 = L_1 - L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3 = L_3 + L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{0.14}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -y - z = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\therefore X = (0, 2, -1)$$

b) Verdadeiro. Para as matrizes A_{nxn}, B_{nxn} descritas abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{\text{nn}} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = b_{11} \times b_{22} \times b_{33} \times \cdots \times b_{\text{nn}} \tag{0.15}$$

$$\det(A + B) \neq 0$$
$$\forall\, b_{\text{kk}} \neq 0, \; 0 < k \leq n$$

Sabendo que o valor de det(A+B) ≠ 0, notamos que a matriz B será invertível por ter determinante diferente a zero, o que está de acordo com a afirmação.

c) Falso. Para a seguinte matriz $A_{3\,\text{x}3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.16}$$
$$\text{tr}(A) = 2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$$
$$\det(A) = 2 - 2 = 0$$

Temos para a matriz A acima um caso em que tr(A) ≠ 0, porém det(A) = 0, o que impossibilita a inversão da mesma matriz.

d) Falso. Sabemos que a comutatividade não é uma propriedade existente na multiplicação de matrizes quaisquer, logo, AB ≠ BA, prova:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; \text{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\text{AB} + \text{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{0.17}$$
$$2\,\text{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\therefore \text{AB} + \text{BA} \neq 2\,\text{AB}$$

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + \text{AB} + \text{BA} + B^2 \tag{0.18}$$

Em (0.18), graças a prova realizada em (0.17), não é possível satisfazer a igualdade AB + BA = 2 BA, já que o produto entre duas matrizes quaisquer não é comutativo, provado por AB + BA ≠ 2 AB.

e) Falso. Em geral, somente matrizes identidade permitem a multiplicação comutativa entre matrizes. Tomemos as matrizes A e B como exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix}$$

$$\text{AB} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ 2\,b_{31} & 2\,b_{32} & 2\,b_{33} & 2\,b_{34} & 2\,b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix}, \; \text{BA} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 2\,b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & 2\,b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & 2\,b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & 2\,b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & 2\,b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix} \quad (0.19)$$

$$\therefore \text{AB} \neq \text{BA}$$