# Gabarito 6-ma141Cursao

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

## Gabarito Prova 6

**1)**

(1) Considere a elipse com focos $F_1 = (1, 1)$, $F_2 = (-1, -1)$ e soma das distncias de seus pontos aos seus focos igual a 4. Obtenha uma equao cartesiana para essa elipse.
(2) Considere a elipse com focos $F_1 = (1, -1)$, $F_2 = (-1, 1)$ e soma das distncias de seus pontos aos seus focos igual a 4. Obtenha uma equao cartesiana para essa elipse.
(3) Considere a hiprbole com focos $F_1 = (1, -1)$, $F_2 = (-1, 1)$ e mdulo da diferena das distncias de seus pontos aos seus focos igual a 2. Obtenha uma equao cartesiana para essa hiprbole.

**Respostas:**

- **1.1)**
$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 4$$
Logo
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16 - 8\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} + (x+1)^2 + (y+1)^2$$
Isto é
$$(x+y+4)^2 = (2\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2})^2$$
$$(x+y+4)^2 = 4((x+1)^2 + (y+1)^2)$$
Concluimos que
$$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8 = 0.$$
- **1.2)**
$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = 4$$
Logo
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16 - 8\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + (x+1)^2 + (y-1)^2$$
Isto é
$$(x-y+4)^2 = (2\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2})^2$$
$$(x-y+4)^2 = 4((x+1)^2 + (y-1)^2)$$
Concluimos que
$$3x^2 + 3y^2 + 2xy - 8 = 0.$$
- **1.3)**
$$|\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} - \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}| = 2$$
Logo
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \pm 4\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + (x+1)^2 + (y-1)^2$$
Isto é
$$(-x+y-1)^2 = (\pm\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2})^2$$
$$(-x+y-1)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$$
Concluimos que
$$2xy - 1 = 0.$$

**2)**

- Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano cujas coordenadas $x$ e $y$ satisfazem
  (1) $x^2 - 2x + 8y + 4y^2 - 1 = 0$.
  (2) $x^2 + 4x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$.
  (3) $9x^2 - 18y^2 + 36y - 36 = 0$.
  (4) $5y^2 - 6x - 3x^2 - 10y - 13 = 0$.
  - **a)** Encontrar o sistema de coordenadas $(O'; x', y')$ tal que a cônica esta em sua forma canônica e identificar a cônica.
  - **b)** Encontrar a excentricidade de cada uma das cônicas. Encontrar também as coordenadas dos focos e dos vértices, retas diretrizes.no sistema $(O; x, y)$. Fazer um esboço do gráfico da curva.

**Respostas:**

- **2.1)**
  **a)**

$$(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 2y) - 1 = 0$$

Completamos quadrados

$$(x + 1)^2 - 1 + 4((y + 1)^2 - 1) - 1 = 0.$$

Logo

$$\frac{(x + 1)^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{(y + 1)^2}{(\sqrt{\frac{3}{2}})^2} = 1$$

Fazemos a mudança de coordenadas

$$x' = x + 1 \ ; \ y' = y + 1.$$

Neste sistema dde coordenadas,

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{(y')^2}{(\sqrt{\frac{3}{2}})^2} = 1.$$

Logo a conica é uma elipse.

**b)** Como $a = \sqrt{6}$ e $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$, logo $c = \frac{3}{\sqrt{2}}$. A excentricidade é dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Logo as coordenadas de os focos e vertices são

$$F_1 = -\frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{i}' + 0\mathbf{j}' = -(1 + \frac{3}{\sqrt{2}})\mathbf{i} - 1\mathbf{j} \ ; \ F_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{i}' + 0\mathbf{j}' = (\frac{3}{\sqrt{2}} - 1)\mathbf{i} - 1\mathbf{j}$$

$$A_1 = -\sqrt{6}\mathbf{i}' + 0\mathbf{j}' = -(1 + \sqrt{6})\mathbf{i} - 1\mathbf{j} \ ; \ A_2 = \sqrt{6}\mathbf{i}' + 0\mathbf{j}' = (\sqrt{6} - 1)\mathbf{i} - 1\mathbf{j}.$$

- **2.2)**
  **a)**

$$(x^2 + 4x) + (4y^2 + 8y) + 4 = 0$$

Completamos quadrados

$$((x + 2)^2 - 4) + 4((y + 1)^2 - 1) + 4 = 0.$$

Logo

$$\frac{(x + 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{1} = 1$$

Fazemos a mudança de coordenadas

$$x' = x + 2 \ ; \ y' = y + 1.$$

Neste sistema dde coordenadas,

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1.$$

Logo a conica é uma elipse.

**b)** Como $a = 2$ e $b = 1$, logo $c = \sqrt{3}$. A excentricidade é dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo as coordenadas dos focos e vertices são

$$F_1 = -\sqrt{3}\mathbf{i}' + 0\mathbf{j}' = -(2+\sqrt{3})\mathbf{i} - 1\mathbf{j}\ ;\ F_2 = \sqrt{3}\mathbf{i}' + 0\mathbf{j}' = (\sqrt{3}-2)\mathbf{i} - 1\mathbf{j}$$
$$A_1 = -2\mathbf{i}' + 0\mathbf{j}' = -4\mathbf{i} - 1\mathbf{j}\ ;\ A_2 = 2\mathbf{i}' + 0\mathbf{j}' = 0\mathbf{i} - 1\mathbf{j}.$$

- **2.3)**

**a)**

$$9x^2 - 18(y^2 - 2y) - 36 = 0$$

Completamos quadrados

$$9x^2 + -18((y-1)^2 - 1) - 36 = 0.$$

Logo

$$\frac{x^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

Fazemos a mudança de coordenadas

$$x' = x\ ;\ y' = y - 1.$$

Neste sistema dde coordenadas,

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(y')^2}{1^2} = 1.$$

Logo a conica é uma hiperbole.

**b)** Como $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$, logo $c = \sqrt{3}$. A excentricidade é dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Logo as coordenadas dos focos e vertices são

$$F_1 = -\sqrt{3}\mathbf{i}' + 0\mathbf{j}' = -\sqrt{3}\mathbf{i} + 1\mathbf{j}\ ;\ F_2 = \sqrt{3}\mathbf{i}' + 0\mathbf{j}' = \sqrt{3}\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$$
$$A_1 = -\sqrt{2}\mathbf{i}' + 0\mathbf{j}' = -\sqrt{2}\mathbf{i} + 1\mathbf{j}\ ;\ A_2 = \sqrt{2}\mathbf{i}' + 0\mathbf{j}' = \sqrt{2}\mathbf{i} + 1\mathbf{j}.$$

- **2.4)**

**a)**

$$-3(x^2 + 2x) + 5(y^2 - 2y) - 13 = 0$$

Completamos quadrados

$$-3((x+1)^2 - 1) + 5((y-1)^2 - 1) - 13 = 0$$

Logo

$$\frac{(y-1)^2}{3} - \frac{(x+1)^2}{5} = 1$$

Fazemos a mudança de coordenadas

$$x' = x + 1\ ;\ y' = y - 1.$$

Neste sistema dde coordenadas,

$$\frac{(y')^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{(x')^2}{\sqrt{5}^2} = 1.$$

Logo a conica é uma hiperbole.

**b)** Como $a = \sqrt{3}$ e $b = \sqrt{5}$, logo $c = 2\sqrt{2}$. A excentricidade é dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Logo as coordenadas dos focos e vertices são

$$F_1 = 0\mathbf{i}' - 2\sqrt{2}\mathbf{j}' = -1\mathbf{i} + (1 - 2\sqrt{2})\mathbf{j}\ ;\ F_2 = 0\mathbf{i}' + 2\sqrt{2}\mathbf{j}' = -1\mathbf{i} + (1 + 2\sqrt{2})\mathbf{j}$$
$$A_1 = 0\mathbf{i}' - \sqrt{3}\mathbf{j}' = -1\mathbf{i} + (1 - \sqrt{3})\mathbf{j}\ ;\ A_2 = 0\mathbf{i}' + \sqrt{3}\mathbf{j}' = -1\mathbf{i} + (1 + \sqrt{3})\mathbf{j}.$$

**3)** Classifique cada afirmação a seguir em verdadeira ou falsa, justificando adequadamente.

(1) Se um polinômio tem a forma $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$, com $b^2 - 4ac > 0$, então a equação $p(x,y) = 0$ tem como solução uma hiperbole.
(2) Se um polinômio tem a forma $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$, com $b^2 - 4ac < 0$, então a equação $p(x,y) = 0$ tem como solução uma elipse.
(3) Se um polinômio tem a forma $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$, com $b^2 - 4ac = 0$, então a equação $p(x,y) = 0$ em como solução uma uma parbola.
(4) A intersecção de uma reta e uma elipse sempre corresponde a dois pontos.
(5) A intersecção de uma reta e uma parabola sempre corresponde a dois pontos.
(6) A intersecção de uma reta e uma hipérbole sempre corresponde a dois pontos.
(7) Se duas elipses compartilham um foco, então elas têm intersecção vazia.
(8) Se duas hipérboles compartilham um foco, então elas têm intersecção vazia..
(9) Se um dos focos de uma hipérbole é também foco de uma parábola, então elas têm intersecção vazia.
(10) Se $A$, $B$ e $C$ so pontos não-colineares no plano, então existe uma única elipse e uma nica hipérbole com focos $A$ e $B$ passando por $C$.
(11) A curva dada por $(3 + 2\cos t, -1 + \sin t)$ é uma elipse.
(12) A curva dada por $(2 + 3\cos t, -2 + 2\sin t)$ é uma hiperbole.

**Respostas**

(1) FALSO. Sejam $a = 1$ ; $b = 0$ ; $c = -1$ ; $d = 0$ ; $e = 0$ ; $f = 0$. Logo $p(x,y) = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 0$ a solução é a uniao de um par de retas concorrentes $\{(x,y) : x = y\} \cup \{(x,y) : x = -y\}$.
(2) FALSO. Sejam $a = 1$ ; $b = 0$ ; $c = 1$ ; $d = 0$ ; $e = 0$ ; $f = 0$. Logo $p(x,y) = x^2 + y^2 = 0$ a solução é o ponto $\{(0,0)\}$.
(3) FALSO. Sejam $a = 0$ ; $b = 0$ ; $c = 0$ ; $d = 0$ ; $e = 0$ ; $f = 1$. Logo $p(x,y) = 1 = 0$ a solução é o conjunto vazio..
(4) FALSO. Uma reta é uma elipse podem ter interseção vazia $x^2 + y^2 = 1$ e $x = 10$ tem interseção vazia.
(5) FALSO. Uma reta é uma elipse podem ter interseção vazia $x^2 + y^2 = 1$ e $x = 10$ tem interseção vazia.
(6) FALSO. Uma reta é uma parabola podem ter interseção vazia $y = x^2$ e $y = -1$ tem interseção vazia.
(7) FALSO. Uma reta é uma hiperbole podem ter interseção vazia $x = 0$ e $x^2 - y^2 = 1$ tem interseção vazia.
(8) FALSO. Pegar duas elipses iguais, compartilham um foco e a intersecção é a elipse.
(9) FALSO. Pegar duas hiperboles iguais, compartilham um foco e a intersecção é a hiperbole.
(10) FALSO. Pegar a elipse $x^2 - y^2 = 1$ e a parabola $y^2 = 4\sqrt{2}x$ compartilham o foco $(\sqrt{2}, 0)$ e tem interseção não vazia.
(11) FALSO. No caso da hiperbole é falso. Pegar $A = (-1,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (0,1)$. A hiperbole é $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, com $a^2 + b^2 = 1$. Resulta que $C$ não esta na hiperbole.
(12) VERDADEIRO. Como

$$x = 3 + 2\cos t \ ; \ y = -1 + \sin t$$

temos que

$$\frac{x-3}{2} = \cos t \ ; \ \frac{y+1}{1} = \sin t$$

Logo $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$ que é que é a equação canonica de uma uma elipse no sistema de coordenadas $x' = x - 3$ e $y' = y + 1$.
(13) FALSO. Como

$$x = 3 + 2\cos t \ ; \ y = -2 + 2\sin t$$

temos que

$$\frac{x-3}{2} = \cos t \ ; \ \frac{y+2}{2} = \sin t$$

Logo $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ que é a equação canonica de uma uma elipse no sistema de coordenadas $x' = x - 3$ e $y' = y + 2$. Logo n— ao é uma hiperbole.