Aula 3: A Lei de Gauss

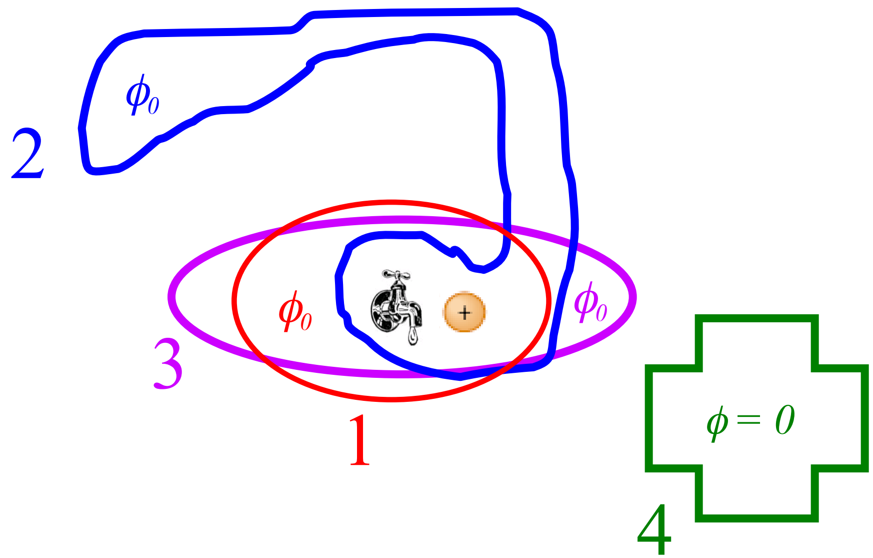
F 328: Física Geral III

1º semestre 2017

Instituto de Física Gleb Wataghin

Ponto essencial

O fluxo de água (ϕ) que atravessa uma superfície fechada depende somente das torneiras no interior dela.

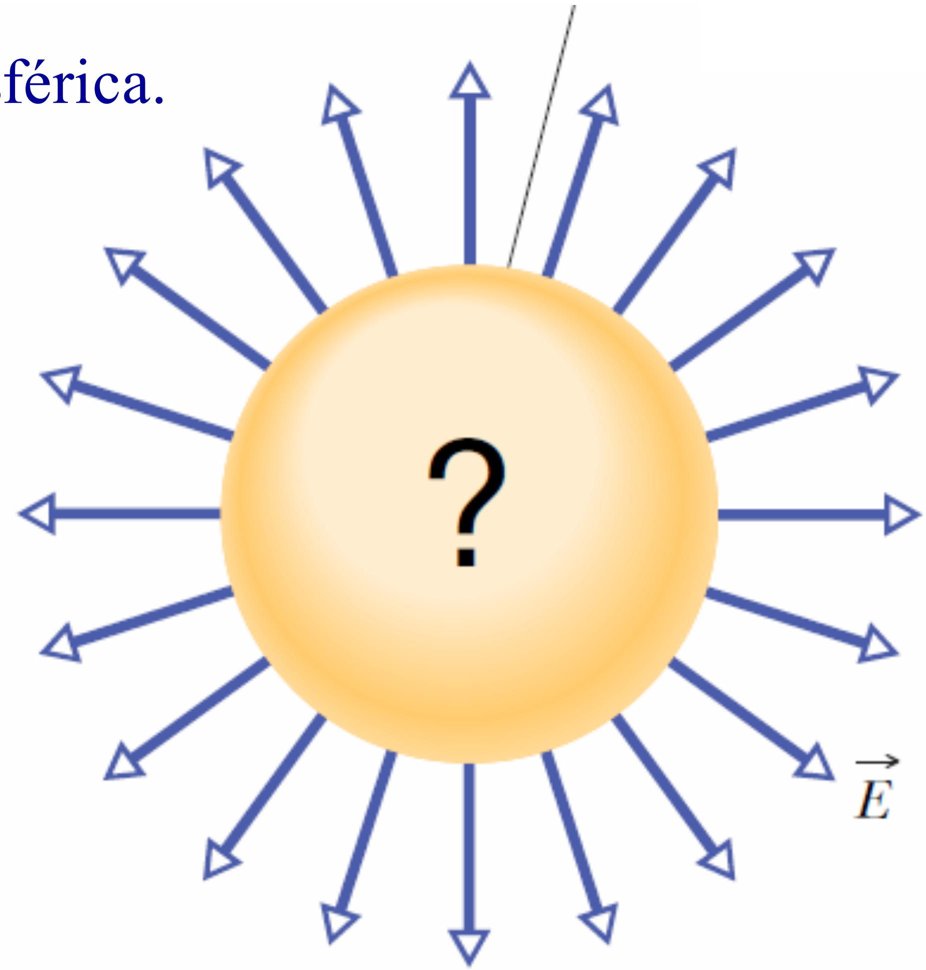


O fluxo de campo elétrico que atravessa uma superfície fechada depende somente das cargas elétricas contidas no interior da superfície.

Fluxo de um campo vetorial

Quais afirmações podemos fazer sobre a distribuição de carga elétrica no interior da esfera ?

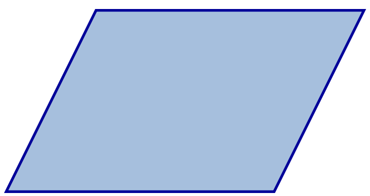
Positiva, com simetria esférica.



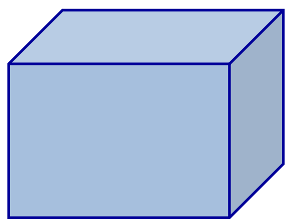
Fluxo de um campo vetorial

Definições:

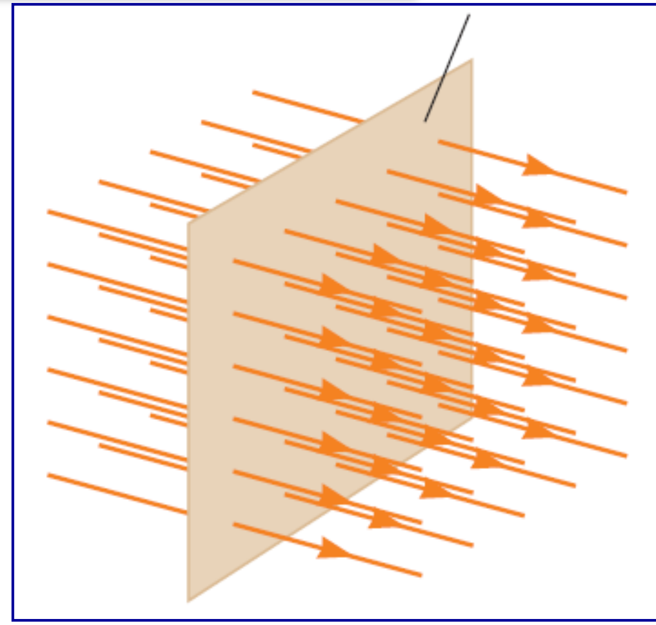
- Quantidade de campo vetorial que atravessa uma superfície
- Número de linhas de campo
- Campo elétrico, magnético, etc.
- Superfície aberta ou fechada:



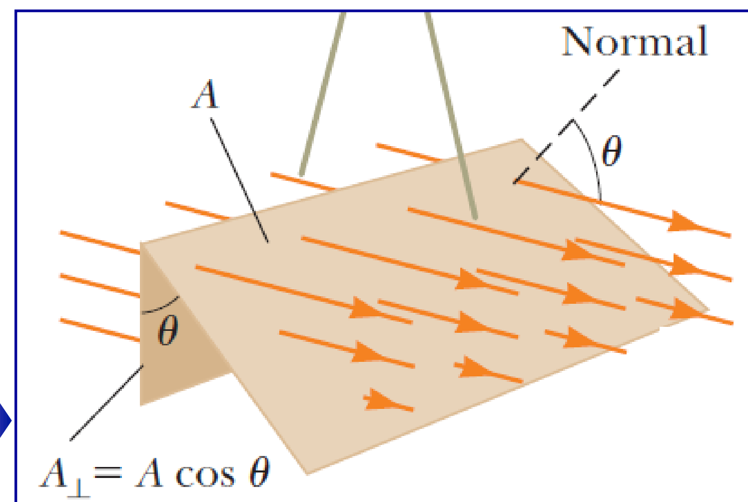
Superfície aberta



Superfície fechada

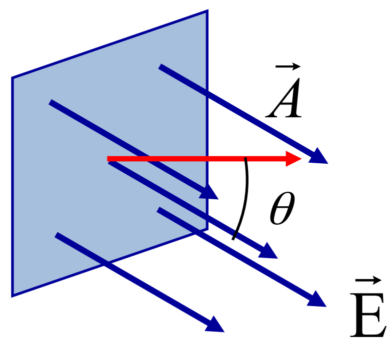


A mesma quantidade de linhas de campo atravessa ambas as superfícies $A_\perp$ (componente perpendicular) e A



Fluxo campo elétrico - superfície aberta

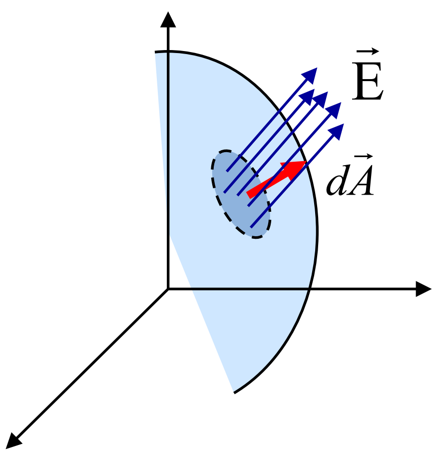
Campo uniforme, superfície plana: $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\theta$



$$\vec{A} \begin{cases} \text{magnitude: área da superfície} \\ \text{direção: normal à superfície} \end{cases}$$

Caso geral:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



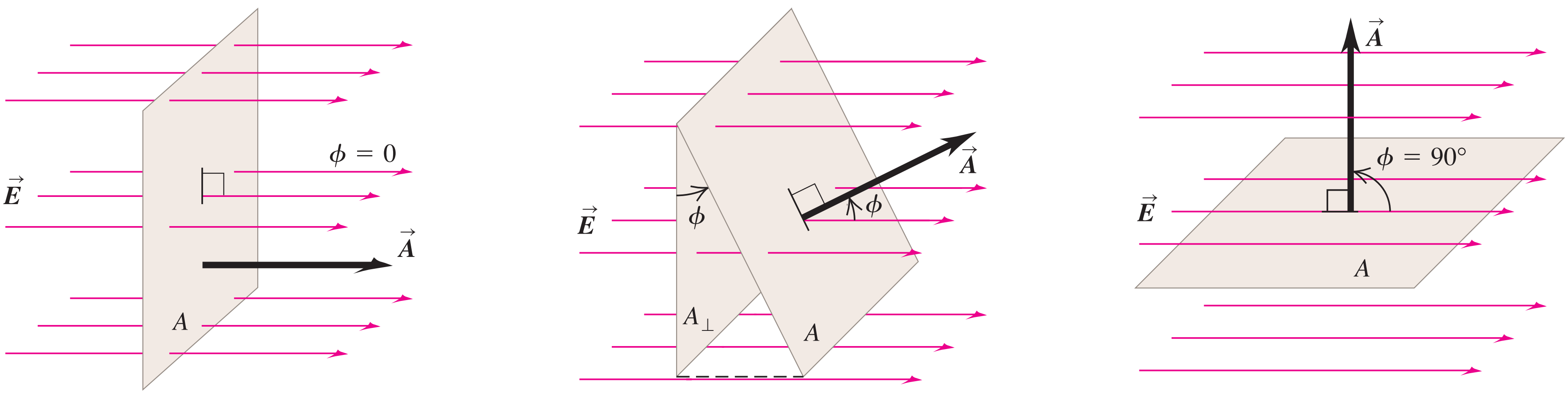
$$d\vec{A} \begin{cases} \text{elemento de superfície} \\ \text{direção: normal à superfície} \end{cases}$$

Fluxo campo elétrico - superfície aberta

Fluxo:

Quantidade de campo vetorial que atravessa perpendicularmente uma superfície

$$\boxed{\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$



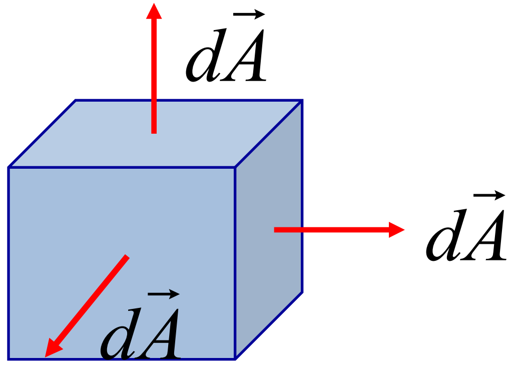
$$\Phi_E = EA \qquad \Phi_E = EA\cos\varphi \qquad \Phi_E = 0$$

Fluxo campo elétrico - superfície fechada

Caso geral: $$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$ (superfície fechada)

Convenção:

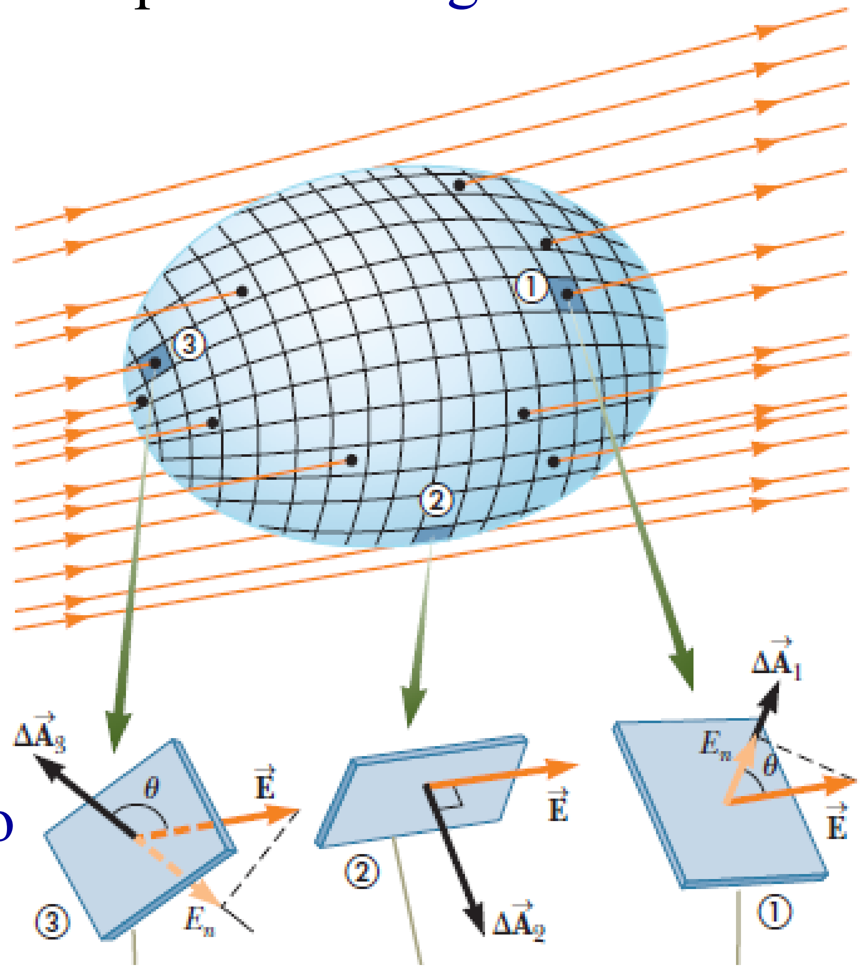
- $d\vec{A}$: sempre saindo da superfície
- Fluxo saindo: positivo
- Fluxo entrando: negativo



Informação importante: Φ_E é o fluxo total

Fluxo campo elétrico - superfície gaussiana

Superfície gaussiana = superfície imaginária fechada



Campo entrando

$\Phi < 0$

Campo tangente

$\Phi = 0$

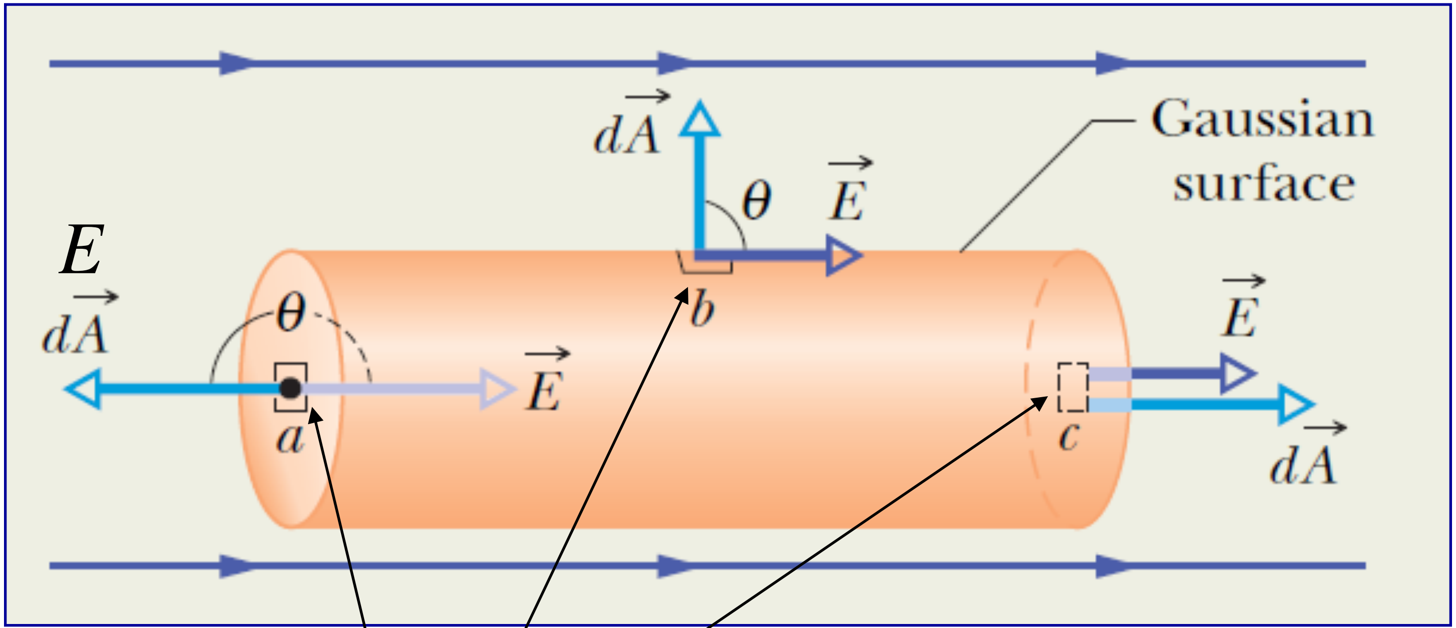
Campo saindo

$\Phi > 0$

Fluxo campo elétrico - superfície gaussiana

Qual é o fluxo de um campo elétrico uniforme através de uma superfície gaussiana cilíndrica cujo eixo é paralelo ao campo elétrico?

Fluxo nulo

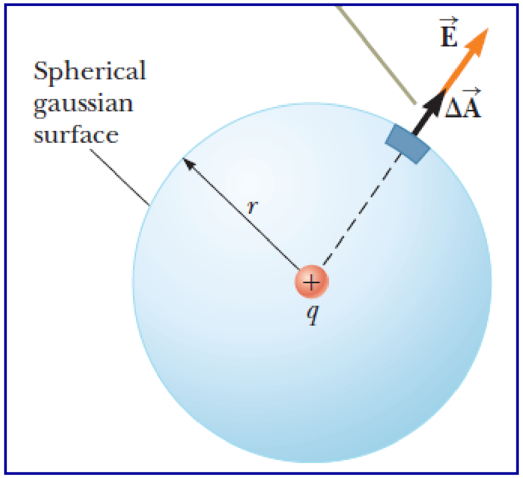


$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = -EA + 0 + EA = 0$$

E se você inclinar a superfície gaussiana?

Lei de Gauss

Fluxo do campo elétrico devido a uma carga pontual q através de uma superfície fechada esférica de raio r:



$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$= \oint E \cdot dA\cos 0^\circ \qquad \left(\vec{E} \parallel d\vec{A}\right)$$

$$= E\oint dA \qquad \text{(E é uniforme sobre toda a superfície)}$$

$$= E\cdot 4\pi r^2 \qquad \left(A_{esfera} = 4\pi r^2\right)$$

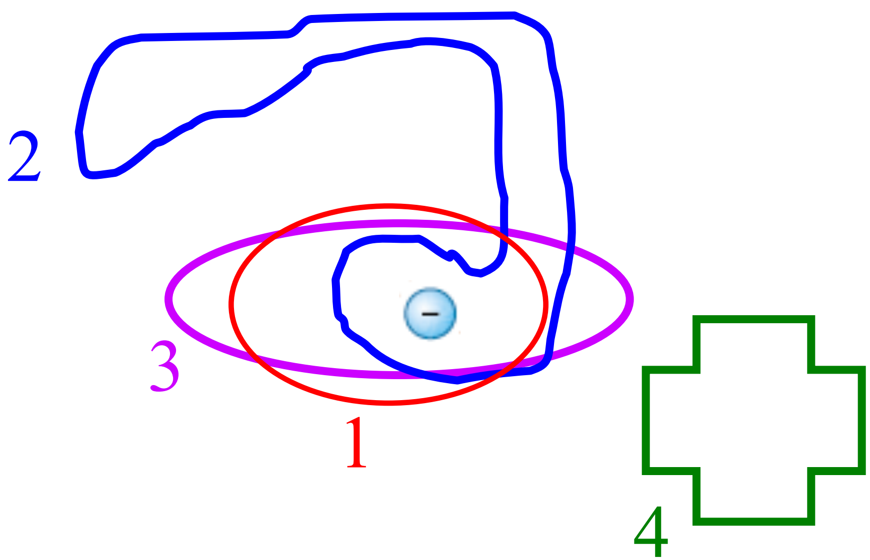
$$= \frac{q_{env}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2 \qquad \left(E_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)$$

$$= \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

Resultado válido para qualquer superfície fechada

Questão 01

Classifique em ordem crescente a intensidade do fluxo do campo elétrico que atravessa as superfícies 1, 2, 3 e 4.



a) $1 = 2 = 3 = 4$

b) $1 > 2 > 3 > 4$

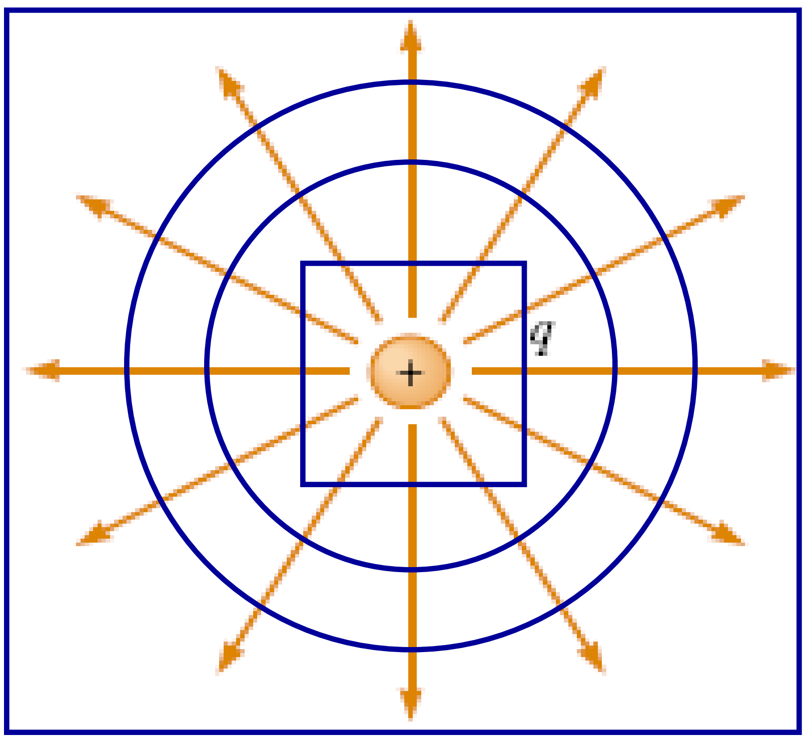
c) $1 < 2 < 3 < 4$

d) $1 = 2 = 3 > 4$

e) $1 = 3 = 2 < 4$

Questão 02

Três superfícies fechadas estão ao redor de uma carga puntiforme. As três superfícies são: um pequeno cubo, uma pequena esfera, e uma esfera maior - todas centradas na carga.
Qual superfície tem o maior fluxo através dela?

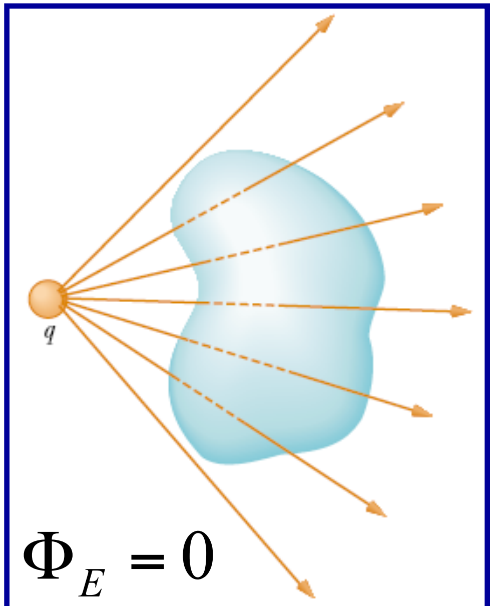


a) pequeno cubo
b) pequena esfera
c) esfera maior
d) impossível determinar sem mais informações
e) as três têm o mesmo fluxo

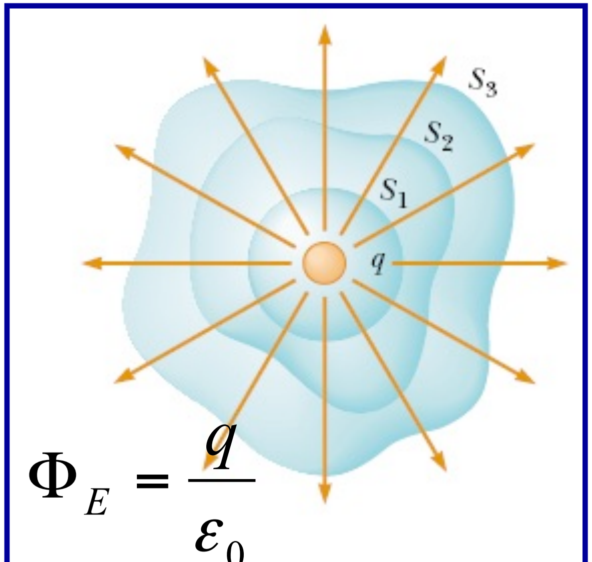
Lei de Gauss

Carga puntiforme fora de uma superfície fechada

Carga puntiforme dentro de superfícies fechadas de vários formatos



$$\Phi_E = 0$$



$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Número de linhas do campo elétrico entrando na superfície é igual ao número de linhas saindo dela.

➡ Fluxo total é nulo

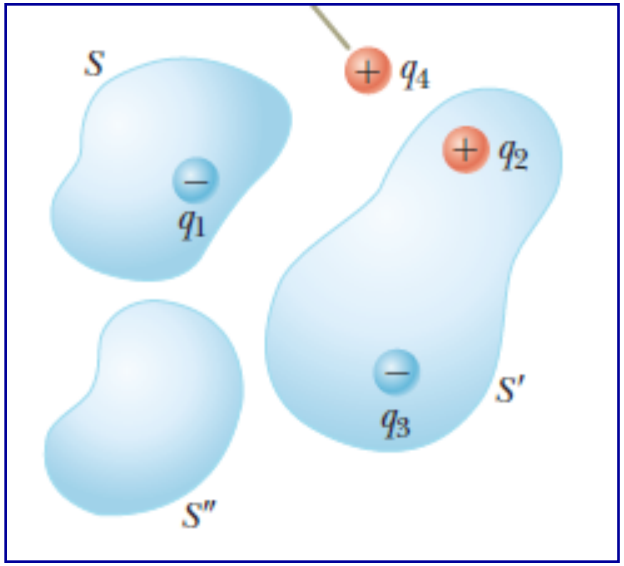
Número de linhas do campo elétrico saindo é igual para todas as superfícies

➡ Fluxo através de todas as superfícies é o mesmo

Lei de Gauss

Lei de Gauss:

- Relaciona o campo elétrico nos pontos de uma superfície gaussiana à carga elétrica contida no seu interior.
- Independe da forma da superfície gaussiana



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

q_{env} : carga total dentro da superfície gaussiana

$d\vec{A}$: direção = para fora superfície gaussiana

$\vec{E}$: campo elétrico na superfície gaussiana

Condutores

Campo elétrico no interior de um condutor *em equilíbrio eletrostático* é sempre nulo.

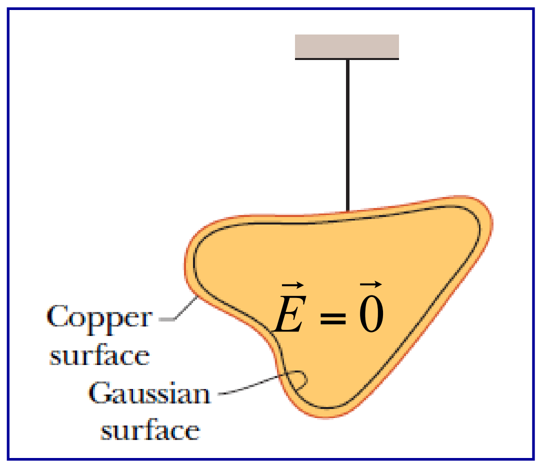
Qual a localização do excesso de carga em um condutor?

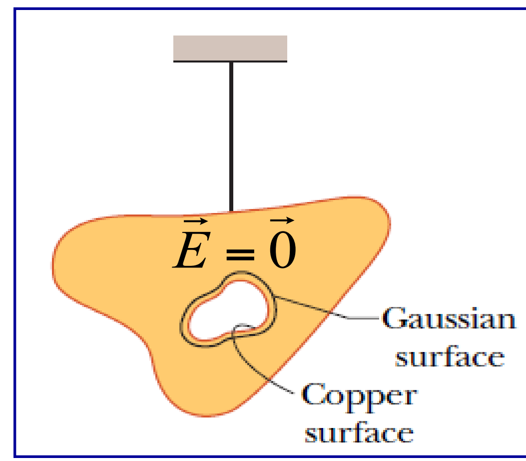
➡ A carga elétrica líquida está na superfície externa do condutor!

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\Phi_E = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

➡ $q_{env} = 0$



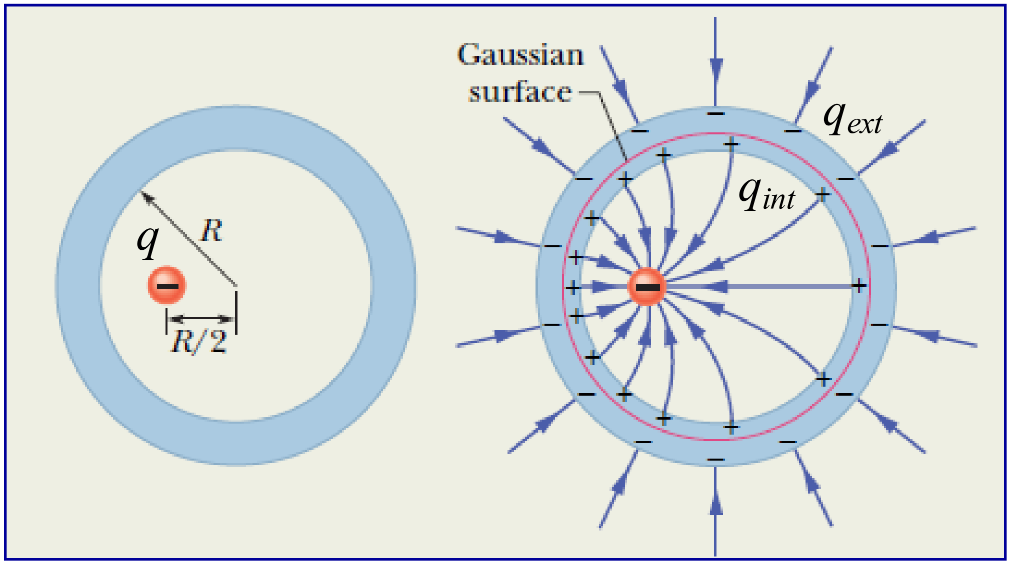


Considerar o condutor com uma cavidade.

Lei de Gauss: excesso de carga na superfície *externa* do condutor !

Condutores - carga induzida

Determinar as cargas induzidas nas superfícies interna e externa de uma camada condutora neutra.



Sup. gaussiana no interior da camada condutora:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= -\frac{q}{\varepsilon_0} + \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$= 0 \quad (\vec{E} \text{ é nulo num condutor})$$

$\Rightarrow$ $q_{\text{int}} = +q$ e $q_{ext} = -q$ (Mesma magnitude que a carga na cavidade)

Note que σ_{int} *não é uniforme*. E σ_{ext}?

onde: $\sigma = \dfrac{q_i}{Area}$

Questão Moodle

Uma carga positiva $+Q$ é colocada sobre uma camada esférica condutora de raio interno R_1 e raio externo R_2. Uma carga puntiforme $+q$ é colocada no centro da cavidade. O módulo do campo elétrico produzido pela carga da superfície interna em um ponto no interior do condutor a uma distância $r > R_1$ do centro é:

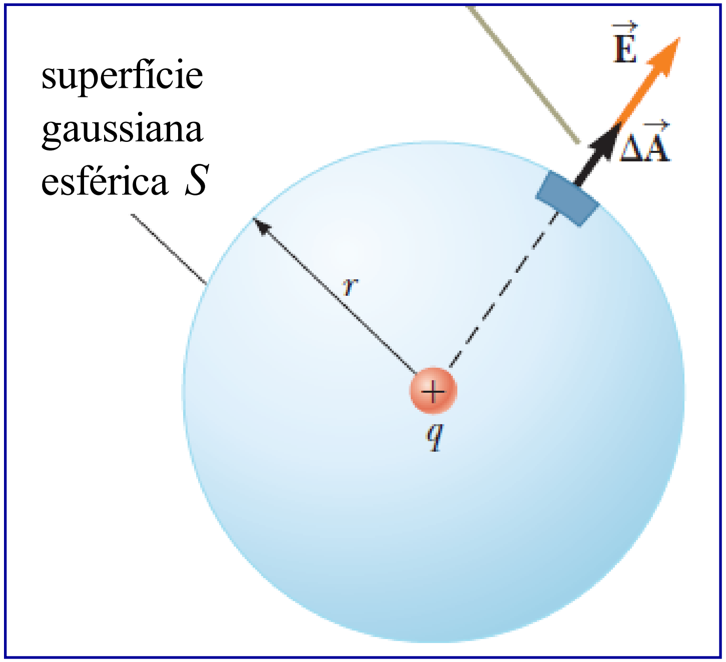
Escolha uma:

- a. $Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$;
- b. $Q/4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}_2^2$;
- c. $q/4\pi\varepsilon_0 r^2$;
- d. $Q/4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}_1^2$;
- e. 0.

Campo elétrico: simetria esférica

Carga puntiforme

Nos pontos de S: $\begin{cases} \vec{E} \text{ paralelo a } d\vec{A} \\ |\vec{E}| \text{ uniforme} \end{cases}$



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_E &= E(r) \cdot 4\pi r^2 \\ \Phi_E &= \frac{q}{\varepsilon_0} \end{aligned}\right\} \quad \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Lei de Gauss - aplicações

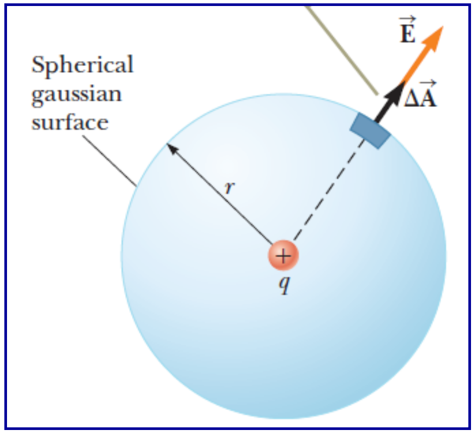
Quando utilizar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico?

➡ Somente nos casos de simetria adequada.

<u>Nestas situações:</u>

- A magnitude do campo elétrico sobre a superfície é uniforme
- $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ são paralelos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$



A lei de Gauss é sempre válida, mas nem sempre útil...

Questão Moodle

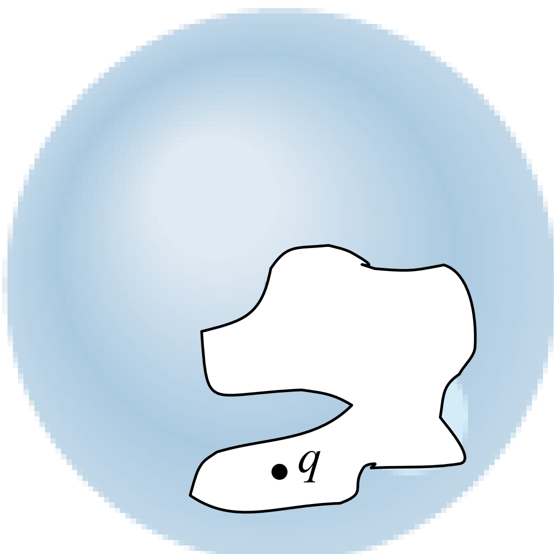
Uma partícula com carga $+Q$ é colocada fora de uma grande camada condutora espessa neutra. Em qualquer ponto no interior da camada o campo elétrico produzido pelas cargas nas superfícies está dirigido:

Escolha uma:

- a. em direção à superfície;
- b. em direção a Q;
- c. afastando-se de Q;
- d. afastando-se da superfície;
- e. a lugar nenhum.

Questão 03

Um condutor esférico descarregado, centrado na origem, contém uma cavidade de formato arbitrário. Em algum ponto no interior da cavidade há uma carga q. Qual é o campo elétrico fora da esfera?



a) $\mathbf{E} = 0$

b) $\mathbf{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

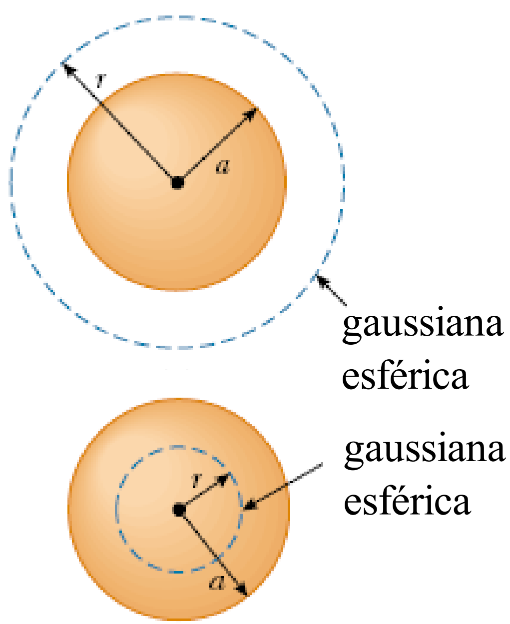
c) $\mathbf{E} = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

d) Não podemos determinar o campo elétrico sem saber o formato da cavidade

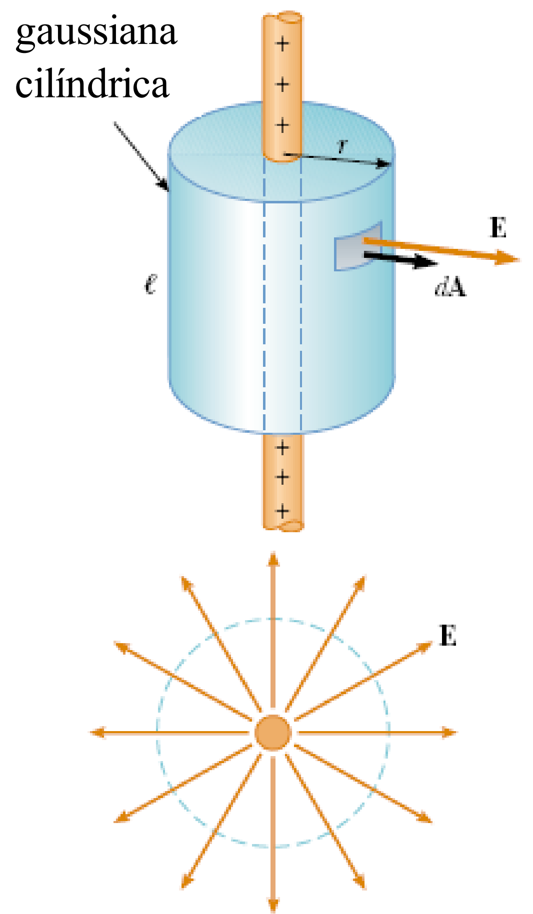
e) Nenhuma das opções acima

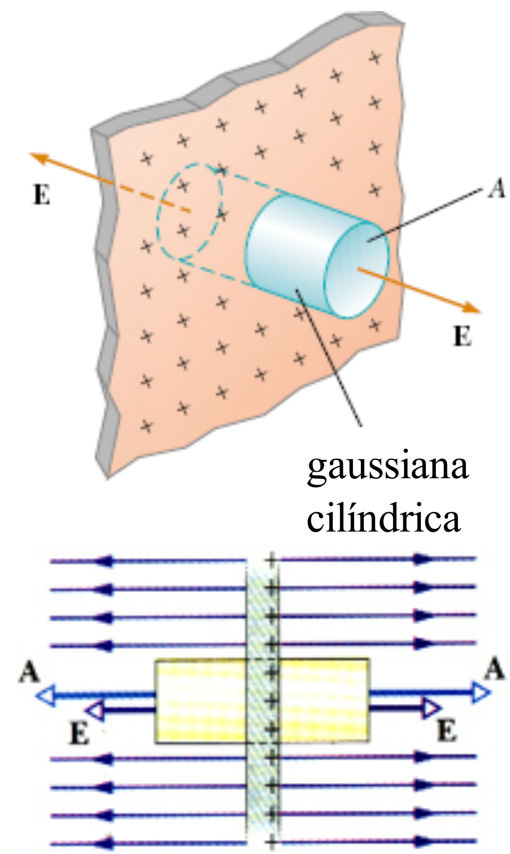
Lei de Gauss - aplicações

Esférica	**Cilíndrica**	**Plana**
(carga puntiforme, casca e esfera)	(barra e cilindro infinitos)	(plano infinito)



$$A_{esfera} = 4\pi r^2$$





Campo elétrico: simetria esférica

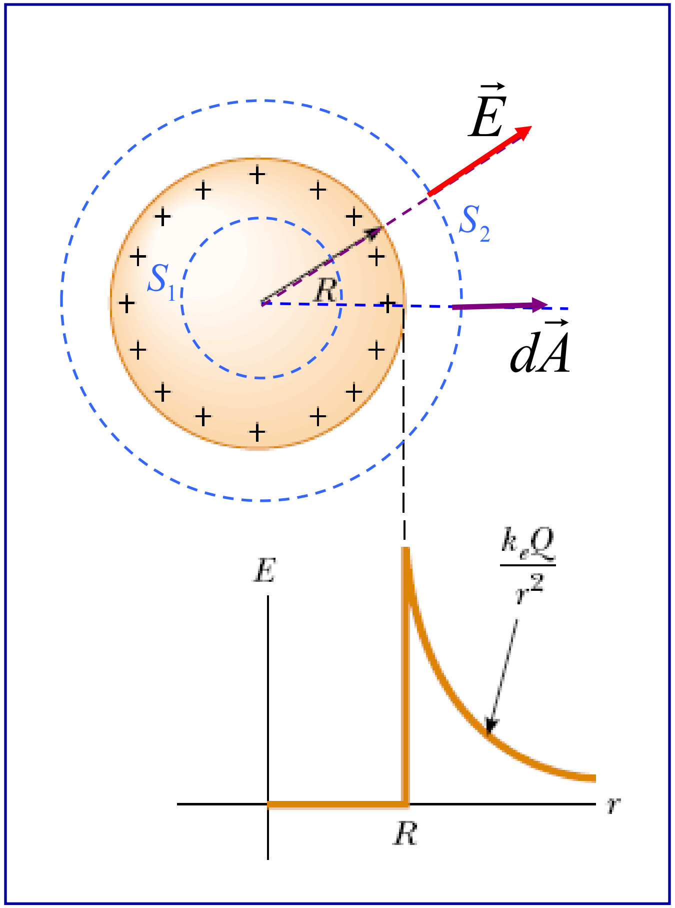
Esfera condutora carregada (ou casca esférica carregada)

Nos pontos de S_i: $\begin{cases} \vec{E} \text{ paralelo a } d\vec{A} \\ |\vec{E}| \text{ uniforme} \end{cases}$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(r)\,4\pi r^2 = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

Como a carga total é diferente dentro e fora da esfera:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$



(Teorema das camadas)

Campo elétrico: simetria esférica

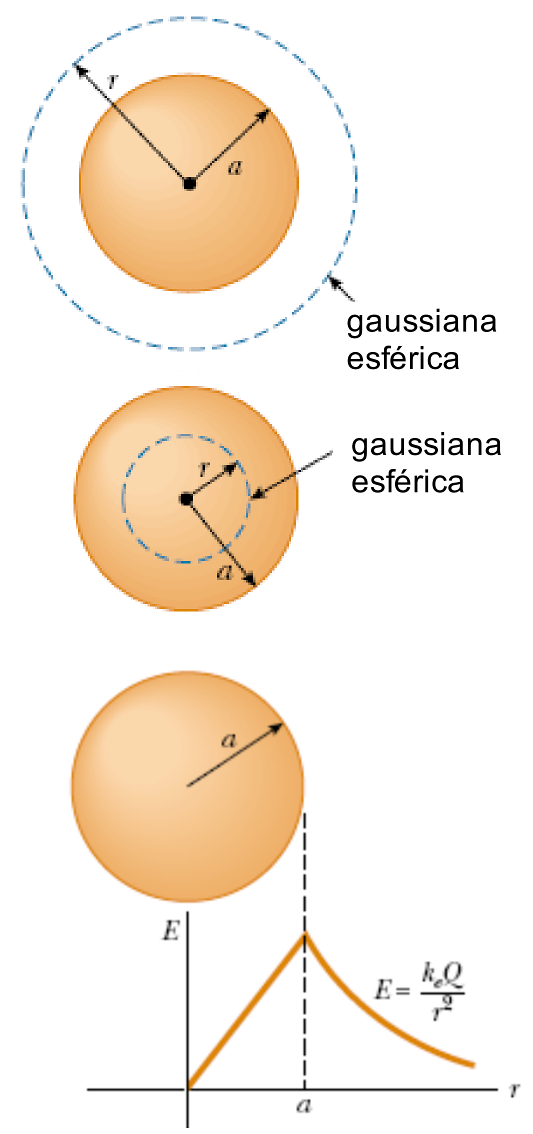
Esfera não condutora uniformemente carregada

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

Como a carga é diferente dentro e fora da esfera

$$\begin{cases} q_{env} = q & ; (r > R) \\ q_{env} = \dfrac{q}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} \times \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) & ; (r < R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (r > R) \\ \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{r} & (r < R) \end{cases}$$



Campo elétrico: simetria cilíndrica

Fio infinito uniformemente carregado

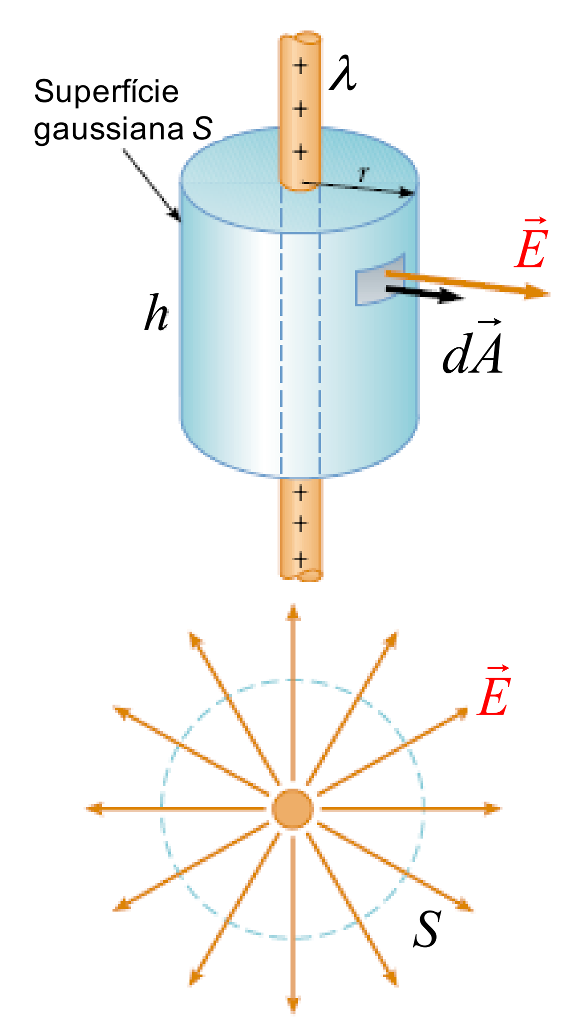
Nos pontos de S: $\begin{cases} \vec{E} \text{ paralelo a } d\vec{A} \text{ (contorno)} \\ |\vec{E}| \text{ uniforme} \end{cases}$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

$$\left(A_{cilindro} = 2\pi r h\right)$$

$$\Phi_E = E(r) \times 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

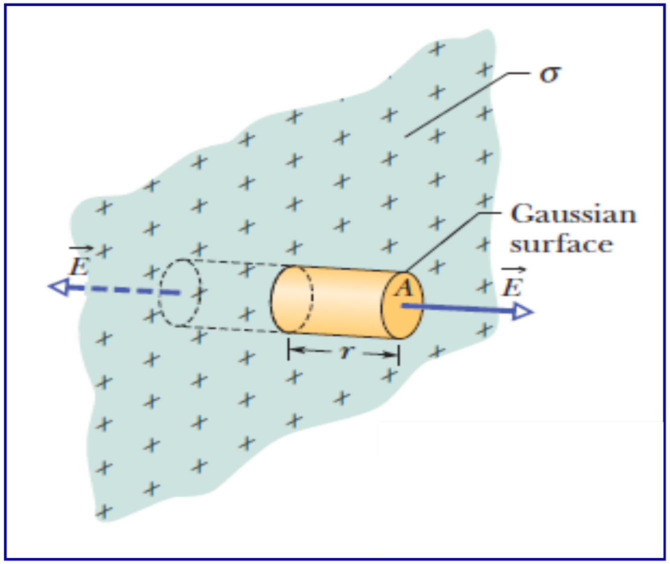
$$\Rightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$



Campo elétrico: simetria plana

Camada não condutora

Nos pontos de S: $\begin{cases} \vec{E} \text{ paralelo a } d\vec{A} \text{ (extremidades)} \\ |\vec{E}| \text{ uniforme} \end{cases}$

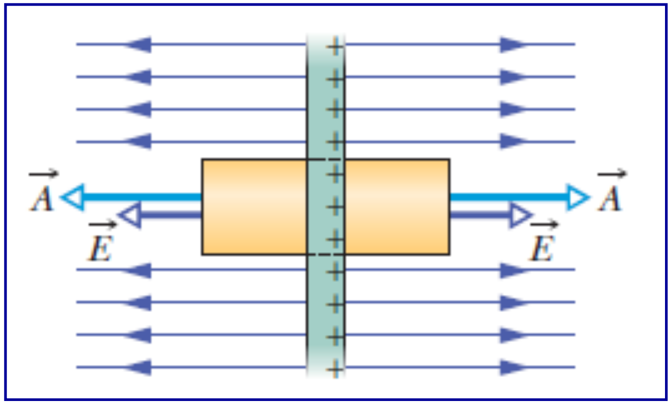


$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = E \times 2A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$ (Duas extremidades)

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

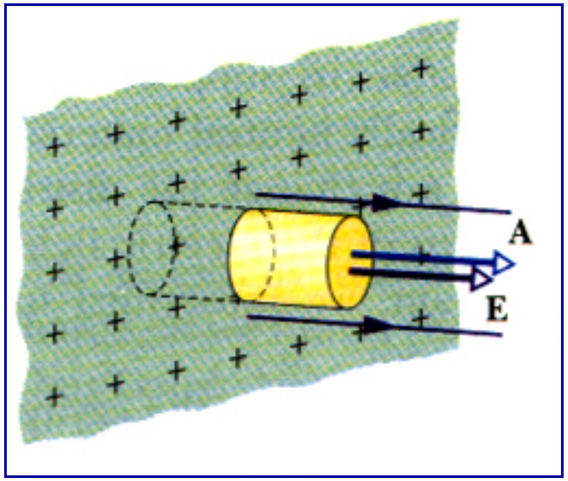
- Uniforme
- Independente de r



Campo elétrico: simetria plana

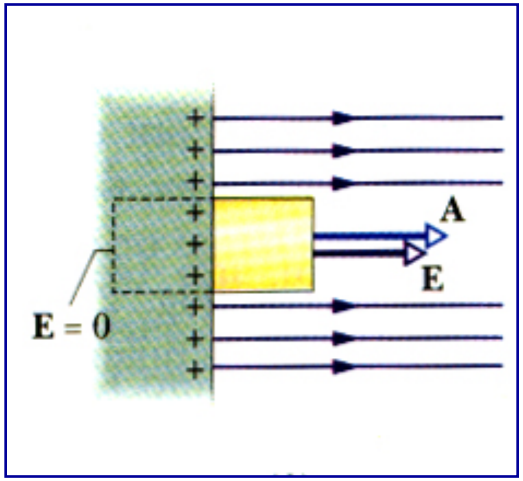
Camada condutora

Nos pontos de S: $\begin{cases} \vec{E} \text{ paralelo a } d\vec{A} \text{ (em uma extremidade)} \\ |\vec{E}| \text{ uniforme} \end{cases}$



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = E \times A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$ (Uma extremidade)



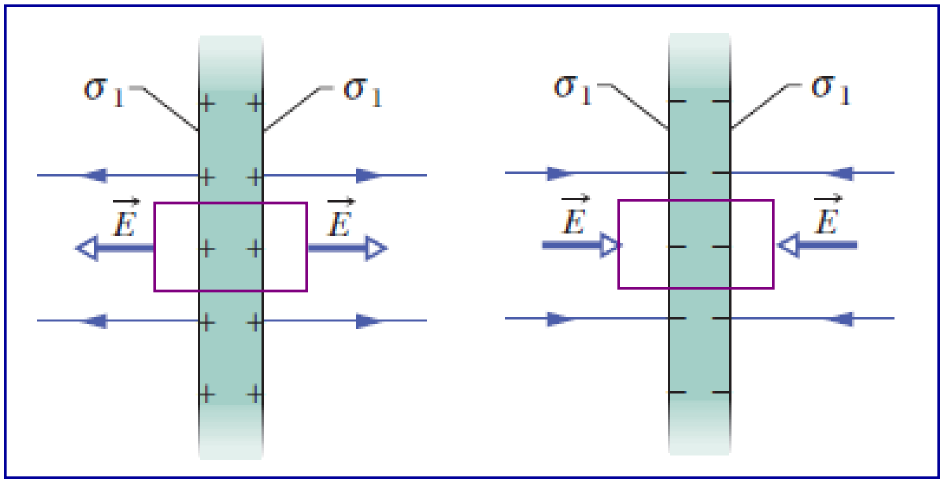
$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

- Uniforme
- Independente de r
- Dobro do campo de uma camada isolante

Campo elétrico: simetria plana

Duas placas condutoras

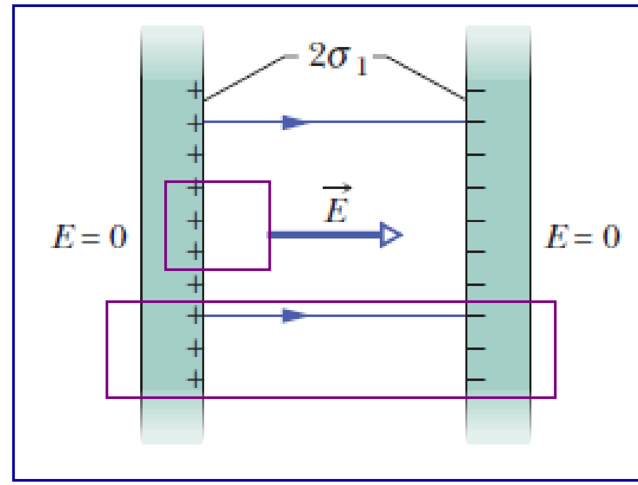
(densidades superficiais uniformes: σ_1 e $-\sigma_1$)



placas bem afastadas

$$\left|\vec{E}(r)\right| = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

(densidades superficiais apenas nas superf. internas: $2\sigma_1$ e $-2\sigma_1$)



placas bem próximas (indução!)

dentro: $$\left|\vec{E}(r)\right| = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

fora: $$\left|\vec{E}(r)\right| = 0$$

Resumo

- Fluxo de campo elétrico:
  - Quantidade de campo que atravessa perpendicularmente uma superfície.

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{\mathrm{A}}$$

- Lei de Gauss:
  - O fluxo de campo elétrico que atravessa uma superfície fechada (gaussiana) depende somente das cargas contidas no interior da superfície.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\mathrm{A}} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

- Condutores (equilíbrio eletrostático)
  - Movimento livre das cargas
  - Cargas em excesso localizadas na superfície externa
  - Campo elétrico nulo no interior
  - Campo elétrico perpendicular à superfície

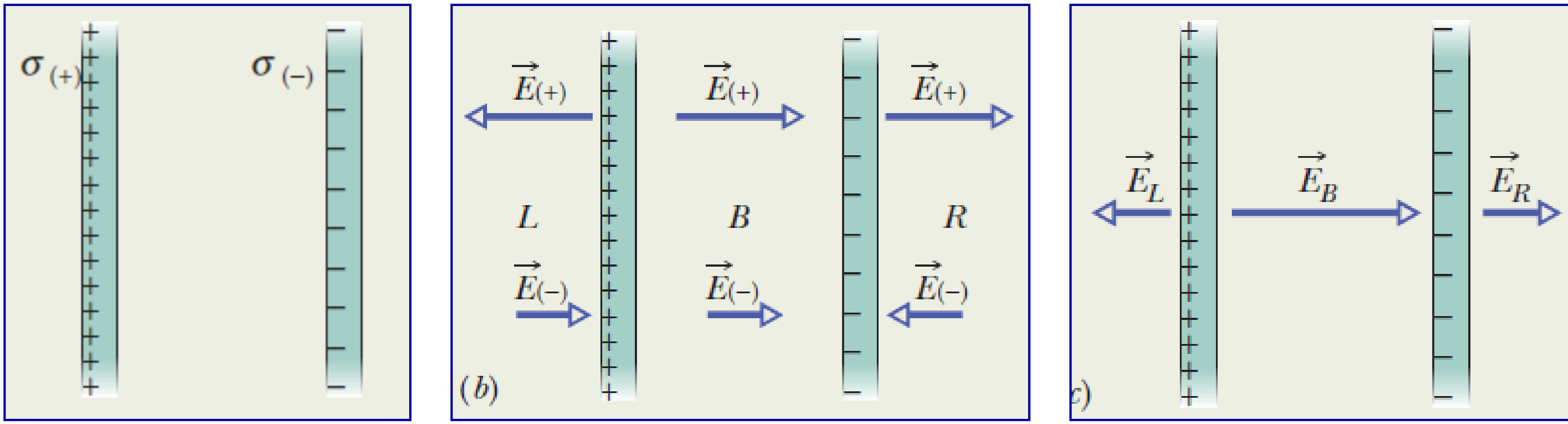
Lista de exercícios do Capítulo 23

Os exercícios sobre Lei de Gauss estão na página da disciplina : (http://www.ifi.unicamp.br).
Consultar: Graduação → Disciplinas → F 328-Física Geral III

Aulas gravadas:
http://lampiao.ic.unicamp.br/weblectures (Prof. Roversi)
ou
UnivespTV e Youtube (Prof. Luiz Marco Brescansin)

Campo elétrico: simetria plana

Duas placas não condutoras (densidades superficiais $\sigma_{(+)}$ e $-\sigma_{(-)}$)



$$E_{(+)} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_{(+)}}{2\varepsilon_0} & \text{à direita da placa} \\ -\dfrac{\sigma_{(+)}}{2\varepsilon_0} & \text{à esquerda da placa} \end{cases} \qquad E_{(-)} = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0} & \text{à direita da placa} \\ \dfrac{\sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0} & \text{à esquerda da placa} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_R = \frac{\sigma_{(+)} - \sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow E_L = \frac{\sigma_{(-)} - \sigma_{(+)}}{2\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow E_B = \frac{\sigma_{(+)} + \sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0}$$