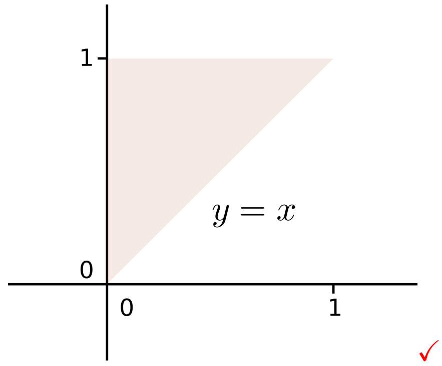
GABARITO

MA211 – PROVA 2

Quinta-feira (tarde), 06/11/2014.

*Para correção, cada símbolo "$\checkmark$**x**" o item que o antecede vale* **x** *pontos.*

Resolução da Questão 1. Primeiramente, observe que a região de integração é o triangulo mostrado abaixo.



$\checkmark \mathbf{0,3}$

Invertendo a ordem de integração, obtemos

$$I = \int_0^1 \int_x^1 3y^4 \cos(xy^2)dydx = \int_0^1 \int_0^y 3y^4 \cos(xy^2)dxdy \checkmark \mathbf{0,7} \tag{1}$$

Tomando $u = xy^2$, obtemos $du = y^2 dx$ e, portanto, a integral interna torna-se:

$$I_1 = \int_0^y 3y^4 \cos(xy^2)dx = 3y^2 \int_0^{y^3} \cos(u)dx = 3y^2 \operatorname{sen}(u)\Big|_0^{y^3} = 3y^2 \operatorname{sen}(y^3) \checkmark \mathbf{0,5}. \tag{2}$$

Desta forma, obtemos a integral $I = \int_0^1 3y^2 \operatorname{sen}(y^3)dy$. Tomando $v = y^3$, temos $dv = 3y^2$ e, portanto, a integral acima torna-se

$$I = \int_0^1 \operatorname{sen}(v)dv = -\cos(v)\Big|_0^1 = 1 - \cos 1. \checkmark \mathbf{0,5} \tag{3}$$

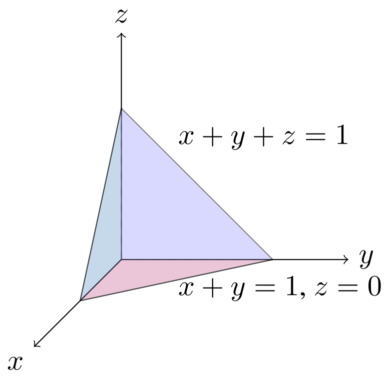
Resolução da Questão 2. Escrevendo a integral em coordenadas polares, obtemos

$$I = \iint_R \operatorname{sen}(x^2+y^2)dA = \underbrace{\int_0^\pi}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\int_0^3}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\operatorname{sen}(r^2)}_{\checkmark 0,3} \underbrace{rdrd\theta}_{\checkmark 0,3} = \int_0^\pi d\theta \int_0^3 \operatorname{sen}(r^2)rdr = \pi \int_0^3 \operatorname{sen}(r^2)rdr \checkmark \mathbf{0,4}. \tag{4}$$

Tomando $u = r^2$, encontramos $du = 2rdr$ e, portanto,

$$I = \frac{\pi}{2} \int_1^9 \operatorname{sen}(u)du = -\frac{\pi}{2} \cos u\Big|_0^9 = -\frac{\pi}{2}(\cos 9 - \cos 0) = \frac{\pi}{2}(1 - \cos 9). \checkmark \mathbf{0,4} \tag{5}$$

Resolução da Questão 3. A massa do sólido é dada pela equação $m = \iiint_T \rho(x,y,z)dV$, em que $\rho(x,y,z)$ é a densidade no ponto (x,y,z) e T representa o sólido que desejamos calcular a massa. **✓0,2** Como a densidade é o produto das coordenadas, temos $\rho(x,y,z) = xyz$. Além disso, o sólido é o tetraedro dado por $T = \{(x,y,z) : x+y+z \leq 1, x,y,z \geq 0\}$ mostrado abaixo.



Note que $0 \leq z \leq 1-x-y$. Analogamente, quando $z=0$, obtemos $0 \leq y \leq 1-x$ e $0 \leq x \leq 1$. Portanto, a massa é dada pela integral iterada:

$$m = \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\int_0^{1-x}}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\int_0^{1-x-y}}_{\checkmark 0,3} xyz dz dy dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 dy dx \checkmark \mathbf{0,3} \tag{6}$$

Tomando $u = (1-x) - y$, obtemos $du = -dy$ e, portanto,

$$m = -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_{1-x}^0 x(1-x-u)u^2 du dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x \int_0^{1-x} \left[(1-x)u^2 - u^3\right] du dx = \frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4 dx. \checkmark \mathbf{0,3} \tag{7}$$

Tomando $v = 1-x$, temos $dv = -x$ e, portanto,

$$m = -\frac{1}{24}\int_1^0 (1-v)v^4 dv = \frac{1}{24}\int_0^1 v^4 - v^5 dv = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{(24)(30)} \checkmark \mathbf{0,3} = \frac{1}{720} \tag{8}$$

Resolução da Questão 4. Como a região de integração é um hemisfério, calculamos a integral usando coordenadas esféricas. Primeiro, lembre-se que $r = \sqrt{x^2+y^2} = \rho \operatorname{sen}\phi$. $\checkmark$**0,2** Logo, a integral pode ser escrita da seguinte forma em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_H (9-x^2-y^2)dV = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\int_0^{\pi/2}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\int_0^{3}}_{\checkmark 0,2} (9-\rho^2\operatorname{sen}^2\phi)\, \underbrace{\rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta}_{\checkmark 0,2} & (9)\\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \int_0^3 (9\rho^2-\rho^4\operatorname{sen}^2\phi)d\rho d\phi. & (10)\end{aligned}$$

Mas $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ $\checkmark$**0,2** e

$$\int_0^3 (9\rho^2-\rho^4\operatorname{sen}^2\phi)d\rho = \left(\frac{9}{3}\rho^3 - \frac{1}{5}\rho^5\operatorname{sen}^2\phi\right)\Big|_0^3 = \frac{81}{5}(5-3\operatorname{sen}^2\phi).\checkmark \mathbf{0,3} \tag{11}$$

Assim, lembrando que $\operatorname{sen}^2\phi = 1-\cos^2\phi$, obtemos

$$I = 2\pi\frac{81}{5}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi(5-3\operatorname{sen}^2\phi)d\phi = 2\pi\frac{81}{5}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi(2+3\cos^2\phi)d\phi.\checkmark \mathbf{0,2} \tag{12}$$

Tomando $u=\cos\phi$, temos $du = -\operatorname{sen}\phi d\phi$ e, portanto,

$$I = -2\pi\frac{81}{5}\int_1^0 (2+3u^2)du = 2\pi\frac{81}{5}\left(2u+u^3\right)\Big|_0^1 = 2\pi\frac{81}{5}(3) = \frac{486}{5}\pi.\checkmark \mathbf{0,3} \tag{13}$$

Resolução da Questão 5. Usando coordenadas cilíndricas, escrevemos os paraboloides como

$$z = r^2 \quad \text{e} \quad z = 36-3r^2.\checkmark \mathbf{0,3} \tag{14}$$

Portanto, devemos ter $r^2 \le z \le 36-r^2$. Além disso, os dois paraboloides interceptam quando

$$r^2 = 36-3r^2 \iff 4r^2 = 36 \iff r^2 = 9 \iff r = 3.\checkmark \mathbf{0,3} \tag{15}$$

Desta forma, devemos ter $r \le 3$. Portanto, o volume do sólido é dado pela seguinte integral em coordenadas cilíndricas:

$$V = \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2}^{36-3r^2}}_{\checkmark 0,4} \underbrace{rdzdrd\theta}_{\checkmark 0,3} = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (36-4r^2)rdrd\theta \checkmark \mathbf{0,2} = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^3 (36-4r^2)rdr\right). \tag{16}$$

Porém,

$$\int_0^3 (36-4r^2)rdr = 4\int_0^3 (9r-r^3)dr = 4\left(\frac{9}{2}r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^3 = 4\left(\frac{3^4}{2}-\frac{3^4}{4}\right) = 3^4 \checkmark \mathbf{0,2} = 81. \tag{17}$$

Como $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$, o volume do sólido é $V = (2\pi)(81) = 162\pi$. $\checkmark$**0,3**