Notas da Aula 2 – Conversão de Bases

- Uma vez que existem diversos sistemas numéricos (assunto do tópico anterior), é necessária uma forma sistemática de converter a base de um sistema posicional para a base de outro. Veremos como fazer isso adiante.

- Suponha que algum número N, originalmente expresso na base b_1, deve ser convertido para a representação na base b_2. É conveniente distinguir dois casos: $b_1 < b_2$ e $b_1 > b_2$.

- Primeiro caso $(b_1 < b_2)$: a técnica de conversão envolve basicamente expressar o número $(N)_{b_1}$ como um polinômio nas potências de b_1 e, depois, somar os monômios com o uso de operações aritméticas na base b_2.

- É bem mais fácil visualizar essa explicação por meio de exemplos. Desejamos representar os números $(432{,}2)_8$ e $(101{,}001)_2$ na base 10.

$$(432{,}2)_8 = 4 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 + 2 \cdot 10^{-1} = (282{,}25)_{10}$$

$$(101{,}001)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = (5{,}125)_{10}$$

- Segundo caso $(b_1 > b_2)$: o procedimento de conversão, nesse caso, aborda separadamente a parte inteira e a parte fracionária de N.

- Conversão da parte inteira: para converter o número $(548)_{10}$ para a base 8, basta realizar divisões sucessivas de 548 por 8, com o cuidado de sempre preservar os quocientes $Q_i's$ e os restos $r_i's$, como mostrado pela tabela seguinte:

Q_i	r_i
68	4
8	4
1	0
0	1

- A concatenação dos $r_i's$, em ordem inversa a realização das divisões, fornece os dígitos na base 8, ou seja, $(548)_{10} = (1044)_8$.

- Para converter o número $(345)_{10}$ para a base 6, realiza-se o mesmo procedimento anterior, apenas com a diferença de que o divisor agora vale 6.

Q_i	r_i
57	3
9	3
1	3
0	1

- Portanto, $(345)_{10} = (1333)_6$.

- <u>Generalização necessária:</u> seja$(N)_{b_1}$um número inteiro cujo o valor na base b_2 pode ser expresso na forma polinomial:

$$(N)_{b_1} = a_{q-1}{b_2}^{q-1} + a_{q-2}{b_2}^{q-2} + \cdots + a_1{b_2}^1 + a_0{b_2}^0$$

Para achar os valores dos $a's$, basta dividir esse polinômio por b_2:

$$\frac{(N)_{b_1}}{b_2} = a_{q-1}{b_2}^{q-2} + a_{q-2}{b_2}^{q-3} + \cdots + a_1 + \frac{a_0}{b_2} = Q_0 + \frac{a_0}{b_2}$$

em que $Q_0 = a_{q-1}{b_2}^{q-2} + a_{q-2}{b_2}^{q-3} + \cdots + a_1$.

Assim, o dígito menos significativo de $(N)_{b_2}$, a_0, é igual ao resto dessa primeira divisão. O próximo dígito, a_1, obtém-se ao dividir o quociente Q_0 por b_2 novamente:

$$\frac{Q_0}{b_2} = a_{q-1}{b_2}^{q-3} + a_{q-2}{b_2}^{q-4} + \cdots + a_2 + \frac{a_1}{b_2} = Q_1 + \frac{a_1}{b_2}$$

Todos os $a's$ são obtidos por essas divisões sucessivas até que o quociente Q_{q-1} seja igual a zero (o que significa que não é mais possível realizar a divisão).

- <u>Conversão da parte fracionária:</u> para converter o número $(0{,}3125)_{10}$ para a base 8, basta realizar multiplicações sucessivas da parte fracionária por oito, como mostrado adiante:

$$0{,}3125 \cdot 8 = \mathbf{2},5 \ \Rightarrow a_{-1} = 2$$

$$0{,}5000 \cdot 8 = \mathbf{4},0 \ \Rightarrow a_{-2} = 4$$

- Assim, $(0{,}3125)_{10} = (0{,}24)_8$.

- Para converter $(0{,}375)_{10}$ para a base 2, realiza-se o mesmo procedimento, com a diferença de que o fator multiplicativo, nesse caso, é dois.

$$0{,}375 \cdot 2 = \mathbf{0},750 \ \Rightarrow a_{-1} = 0$$

$$0{,}750 \cdot 2 = \mathbf{1},500 \ \Rightarrow a_{-2} = 1$$

$$0{,}500 \cdot 2 = \mathbf{1},000 \ \Rightarrow a_{-3} = 1$$

- Assim, $(0{,}375)_{10} = (0{,}011)_2$.

- <u>Generalização necessária:</u> seja$(N)_{b_1}$um número puramente fracionário cujo o valor na base b_2 pode ser expresso na forma polinomial:

$$(N)_{b_1} = a_{-1}{b_2}^{-1} + a_{-2}{b_2}^{-2} + \cdots + a_{-p}{b_2}^{-p}$$

Para achar os valores dos $a's$, basta multiplicar esse polinômio por b_2:

$$b_2 \cdot (N)_{b_1} = a_{-1} + a_{-2}{b_2}^{-1} + \cdots + a_{-p}{b_2}^{-(p-1)}$$

Nesse caso, os $a's$ correspondem aos dígitos que aparecem na parte inteira, após cada multiplicação sucessiva. O procedimento termina quando a parte fracionária zera.

- <u>Observação importante:</u> esse procedimento de conversão da parte fracionária não necessariamente converge, ou seja, pode não ser possível representar o número fracionário $(N)_{b_1}$ na base b_2 com uma quantidade finita de dígitos, como no exemplo.

- Exemplo: converta o número $(0{,}24)_{10}$ para a base 2.

$$0{,}24 \cdot 2 = \mathbf{0},48 \Rightarrow a_{-1} = 0$$
$$0{,}48 \cdot 2 = \mathbf{0},96 \Rightarrow a_{-2} = 0$$
$$0{,}96 \cdot 2 = \mathbf{1},92 \Rightarrow a_{-3} = 1$$
$$0{,}92 \cdot 2 = \mathbf{1},84 \Rightarrow a_{-4} = 1$$
$$0{,}84 \cdot 2 = \mathbf{1},68 \Rightarrow a_{-5} = 1$$
$$0{,}68 \cdot 2 = \mathbf{1},36 \Rightarrow a_{-6} = 1$$
$$0{,}36 \cdot 2 = \mathbf{0},72 \Rightarrow a_{-7} = 0$$
$$0{,}72 \cdot 2 = \mathbf{1},44 \Rightarrow a_{-8} = 1$$
$$\vdots \quad = \quad \vdots \quad \Rightarrow \quad \vdots$$

- Assim, $(0{,}24)_{10} = (0{,}00111101\ldots)_2$.

- <u>Observação importante:</u> em um número com parte inteira e parte fracionária, realiza-se separadamente os dois procedimentos apresentados para convertê-lo de uma base para a outra, como ilustrado adiante:

- Exemplo: converta o número $(432{,}354)_{10}$ para a representação binária.

<u>Parte inteira:</u>

Q_i	r_i
216	0
108	0
54	0
27	0
13	1
6	1
3	0
1	1
0	1

<u>Parte fracionária:</u>

$$0{,}354 \cdot 2 = \mathbf{0},708 \Rightarrow a_{-1} = 0$$
$$0{,}708 \cdot 2 = \mathbf{1},416 \Rightarrow a_{-2} = 1$$
$$0{,}416 \cdot 2 = \mathbf{0},832 \Rightarrow a_{-3} = 0$$
$$0{,}832 \cdot 2 = \mathbf{1},664 \Rightarrow a_{-4} = 1$$
$$0{,}664 \cdot 2 = \mathbf{1},328 \Rightarrow a_{-5} = 1$$

$$0{,}328 \cdot 2 = \mathbf{0},656 \ \Rightarrow a_{-6} = 0$$
$$0{,}656 \cdot 2 = \mathbf{1},312 \ \Rightarrow a_{-7} = 1$$
$$\vdots \quad = \quad \vdots \quad \Rightarrow \quad \vdots$$

- Assim, $(432{,}354)_{10} = (110110000{,}0101101\ldots)_2$.

- Regra prática (octal): para converter números binários em octais, e vice e versa, há uma regra simples. Note que $8 = 2^3$, ou seja, cada dígito octal pode ser expresso por três dígitos binários. Por exemplo, $(6)_8 = (110)_2$. O processo inverso requer o agrupamento do número binário em grupos de três dígitos e associar cada grupo com o octal correspondente. O principal cuidado que se deve tomar é que os grupos de três devem sempre começar a partir da vírgula, ou seja, a contagem na parte inteira é diferente da contagem na parte fracionária (a primeira é para a esquerda enquanto a segunda é para a direita), como mostra os exemplos:

$$(123{,}4)_8 = 001|010|011|100 = (1010011{,}1)_2$$
$$(1010110{,}0101)_2 = 001|010|110|010|100 = (126{,}24)_8$$

- Regra prática (hexadecimal): nesse caso, $16 = 2^4$, ou seja, cada dígito hexadecimal pode ser representado por quatro dígitos binários e o agrupamento deve ser em grupos de quatro, sempre a partir da vírgula.

$$(123{,}4)_{16} = 0001|0010|0011|0100 = (100100011{,}01)_2$$
$$(1010110{,}0101)_2 = 0101|0110|0101 = (56{,}5)_{16}$$

- Generalização necessária: sempre que $b_2 = {b_1}^k$, k dígitos agrupados na base b_1 correspondem a um único dígito da base b_2.

- Exercício proposto: converta os seguintes números para as representações solicitadas:

$(10100{,}1101)_2 = (?)_8 = (?)_{10} = (?)_{16}$

$(101111{,}0111)_2 = (?)_8 = (?)_{10} = (?)_{16}$

$(7436{,}11)_8 = (?)_2 = (?)_{10} = (?)_{16}$

$(4531{,}7414)_8 = (?)_2 = (?)_{10} = (?)_{16}$

$(9E36{,}7A)_2 = (?)_2 = (?)_8 = (?)_{10}$

$(DEED, BEEF)_2 = (?)_2 = (?)_8 = (?)_{10}$

$(57190{,}75)_{10} = (?)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$

$(53{,}1575)_{10} = (?)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$

- Exercício proposto: cientistas encontraram ruínas de uma civilização em Marte. Dos artefatos achados, os exploradores deduziram que as criaturas apresentavam um tentáculo cuja a terminação se ramificava em algo parecido com “dedos”. Depois de muito estudo, os cientistas conseguiram traduzir a linguagem matemática desses seres. A seguinte equação foi descoberta:

$$5x^2 - 50x + 125 = 0$$

Com indicações de que as soluções eram $x = 5$ e $x = 8$. O primeiro valor até parece legítimo, mas o segundo requer explicações adicionais. Depois de um pouco de reflexão, eles deduziram que o sistema numérico marciano teve uma história similar à da Terra. Dado isso, quantos "dedos" tinham os alienígenas?