GABARITO

MA211 – PROVA 1

Sexta-feira (manhã), 03/10/2014.

*Para correção, cada símbolo "✓**x**" o item que o antecede vale* **x** *pontos.*

Resolução da Questão 1. (a) Pela definição de derivada parcial, temos que

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{1}$$

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{2}$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$.

(b) A função f é contínua em $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0). \tag{3}$$

Como $f(0,0) = 0$, devemos escolher κ de modo que o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ exista e seja igual a zero. Se $x = 0$ ou $y = 0$, teremos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y = 0. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{4}$$

Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, teremos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \kappa = \kappa. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{5}$$

Logo, f será contínua em $(0,0)$ se $\kappa = 0$. ✓**0.2**

(c) Pela definição, a derivada direcional de f em $(0,0)$ na direção do vetor unitário $\mathbf{v} = (a,b)$ é

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+ah, 0+bh) - f(0,0)}{h} \checkmark \mathbf{0.2} && (6)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h} \qquad \text{(pois } (ah)(bh) = abh^2 \neq 0.) \checkmark \mathbf{0.2} && (7) \end{aligned}$$

Porém, o limite $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}$ não existe. ✓**0.2**

(d) A função f não é derivável em $(0,0)$ por um dos seguintes motivos: ✓**0.4**

(i) f não é contínua em $(0,0)$,

(ii) f não possui derivada direcional para certos vetores $\mathbf{v} = (a,b)$ com $a^2+b^2 = 1$ e $ab \neq 0$.

Resolução da Questão 2. (a) Primeiramente, vamos calcular as derivadas parciais u_x e u_{xx}. Pela regra da cadeia, temos que

$$u_x = f'(x+at) + g'(x-at) \quad \text{e} \quad u_{xx} = f''(x+at) + g''(x-at).\checkmark \mathbf{0.2} \tag{8}$$

Similarmente, pela regra da cadeia temos que a derivadas parciais u_t e u_{tt} satisfazem

$$u_t = af'(x+at) - ag'(x-at) \quad \text{e} \quad u_{tt} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x-at).\checkmark \mathbf{0.2} \tag{9}$$

Finalmente, temos que

$$u_{tt} = a^2 (f''(x+at) + g''(x-at)) = a^2 u_{xx}, \checkmark \mathbf{0.2} \tag{10}$$

de onde concluímos que u satisfaz a equação da onda.

(b) Primeiramente, temos as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 2s, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = 2r, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 2r \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 2s.\checkmark \mathbf{0.4} \tag{11}$$

Pela regra da cadeia, a derivada parcial de z com respeito a s satisfaz

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = h_x(2s) + h_y(2r).\checkmark \mathbf{0.2} \tag{12}$$

Pela regra do produto e da cadeia, deduzimos que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} = \big[h_{xx}(2r) + h_{xy}(2s)\big](2s) + \big[h_{yx}(2r) + h_{yy}(2s)\big](2r) + 2h_y \checkmark \mathbf{0.6} \tag{13}$$

Finalmente, as derivadas de segunda ordem de h são contínuas, temos que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} = 4rs\big(h_{xx} + h_{yy}\big) + 4\big(r^2 + s^2\big)h_{xy} + 2h_y.\checkmark \mathbf{0.2} \tag{14}$$

Resolução da Questão 3. O plano tangente ao gráfico de f em um ponto $(a, b, f(a, b))$ satisfaz

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).\checkmark \mathbf{0.2} \tag{15}$$

Na questão, temos que

$$f_x = -2x \quad \text{e} f_y = -2y.\checkmark \mathbf{0.2} \tag{16}$$

Logo, o plano tangente satisfaz

$$z - (7 - a^2 - b^2) = -2a(x - a) - 2b(y - b), \tag{17}$$

ou, equivalentemente,

$$2ax + 2by + z = 7 + a^2 + b^2.\checkmark \mathbf{0.4} \tag{18}$$

O objetivo será determinar os valores de a e b.

Como o ponto $(1, 0, 7)$ pertence ao plano, devemos ter

$$2a = a^2 + b^2.\checkmark \mathbf{0.3} \tag{19}$$

Analogamente, como o ponto $(3, 0, 3)$ também pertence ao plano, devemos ter

$$6a = 4 + a^2 + b^2.\checkmark \mathbf{0.3} \tag{20}$$

Assim, a e b devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} 2a - a^2 - b^2 = 0 \\ 6a - a^2 - b^2 = 4. \end{cases} \quad \checkmark \mathbf{0.2} \tag{21}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos $4a = 4$, ou seja, $a = 1$. Substituindo $a = 1$ na primeira equação, obtemos $b^2 = 2a - a^2 = 1$, ou seja, $b = 1$ ou $b = -1$. Portanto, temos os planos

$$2x + 2y + z = 9 \qquad \text{e} \qquad 2x - 2y + z = 9.\checkmark \mathbf{0.4} \tag{22}$$

Resolução da Questão 4. Resolução – 1: Da relação $p+q+r=1$ concluímos que $r=1-p-q$. Substituindo essa expressão na equação que fornece a proporção P, obtemos

$$P(p,q) = 2pq + 2p(1-p-q) + 2(1-p-q)q = 2(p - p^2 + q - q^2 - pq).\checkmark\mathbf{0.2} \tag{23}$$

Logo, as derivadas parciais de P são:

$$P_p = 2(1-2p-q) \qquad \text{e} \qquad P_q = 2(1-2q-p).\checkmark\mathbf{0.2} \tag{24}$$

Como P é um polinômio, seus pontos críticos são tais $\nabla P(p,q) = (0,0)$, ou seja,

$$\begin{cases} 2p+1=1, \\ p+2q=1. \end{cases} \quad \checkmark\mathbf{0.4} \tag{25}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $p=q=1/3$. $\checkmark$**0.2** Para verificar que $(1/3,1/3)$ é um máximo de $P(p,q)$, devemos usar o teste da segunda derivada.

As derivadas de segunda ordem P são:

$$P_{pp} = -4, \qquad P_{qq} = -4 \qquad \text{e} \qquad P_{pq} = -2.\checkmark\mathbf{0.2} \tag{26}$$

Logo, o determinante da matriz Hessiana em $(1/3,1/3)$ é

$$D = P_{pp}P_{qq} - P_{pq}^2 = 16 - 4 = 12.\checkmark\mathbf{0.4} \tag{27}$$

Como $D>0$ e $P_{pp} = -4 < 0$, concluímos que $P(1/3,1/3) = 2/3$ é o valor máximo de f. $\checkmark$**0.4**

Resolução – 2: Devemos resolver o problema

$$\text{maximize } P(p,q,r) = 2pq + 2qr + 2rp \quad \text{sujeito à} \quad Q(p,q,r) = p+q+r-1 = 0.\checkmark\mathbf{0.2} \tag{28}$$

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos ter $\nabla P = \lambda \nabla Q$ $\checkmark$**0.2** . Agora, nesta questão, temos os seguintes vetores gradientes

$$\nabla P = (2q+2r, 2p+2r, 2p+2q) \quad \text{e} \quad \nabla Q = (1,1,1).\checkmark\mathbf{0.2} \tag{29}$$

Portanto, devemos resolver o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2q+2r-\lambda = 0, \\ 2p+2r-\lambda = 0, \\ 2p+2q-\lambda = 0, \\ p+q+r = 1, \end{cases} \quad \checkmark\mathbf{0.4} \tag{30}$$

cuja solução é $p=q=r=1/3$ $\checkmark$**0.4** .

Logo, o valor extremo de P é

$$P = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.\checkmark\mathbf{0.4} \tag{31}$$

Devemos verificar se $2/3$ é o valor máximo de P. Para tanto, comparamos $P(1/3,1/3,1/3) = 2/3$ com $P(0,0,1) = 0$. Como $P(0,0,1) = 0 < 2/3 = P(1/3,1/3,1/3)$, o valor máximo de P é realmente $2/3$. $\checkmark$**0.2**

Resolução da Questão 5. O plano tangente a superfície em um ponto (x_0, y_0, z_0) satisfaz

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{32}$$

Nessa questão, as derivadas parciais são:

$$f_x = \frac{x}{2}, \quad f_y = \frac{2y}{9} \quad \text{e} \quad f_z = \frac{z}{8}. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{33}$$

Logo, o plano tangente satisfaz

$$\frac{x_0}{2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{9}(y - y_0) + \frac{z_0}{8}(z - z_0) = 0. \tag{34}$$

Reorganizando os termos e lembrando que (x_0, y_0, z_0) está na superfície, e portanto satisfaz $x_0^2/4 + y_0^2/9 + z_0^2/16 = 1$, obtemos

$$\frac{x_0}{2}x + \frac{2y_0}{9}y + \frac{z_0}{8}z = 2. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{35}$$

Pela fórmula dada na **DICA** com $a = x_0/2$, $b = 2y_0/9$, $c = z_0/8$ e $d = 2$, o volume do tetraedro é $V = 96/(x_0 y_0 z_0)$. Assim, devemos resolver o problema

$$\text{minimize } V(x_0, y_0, z_0) = \frac{96}{x_0 y_0 z_0} \quad \text{sujeito à} \quad g(x_0, y_0, z_0) = \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{9} + \frac{z_0^2}{16} - 1 = 0. \checkmark \mathbf{0.4} \tag{36}$$

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos ter $\nabla V = \lambda \nabla g$. $\checkmark$ **0.2** Mas,

$$\nabla V = \left(-\frac{96}{x_0^2 y_0 z_0}, -\frac{96}{x_0 y_0^2 z_0}, -\frac{96}{x_0 y_0 z_0^2} \right) \checkmark \mathbf{0.2} \quad \text{e} \quad \nabla g = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{2y_0}{9}, \frac{z_0}{8} \right). \tag{37}$$

Logo, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} -\frac{96}{x_0^2 y_0 z_0} = \lambda \frac{x_0}{2}, \\ -\frac{96}{x_0 y_0^2 z_0} = \lambda \frac{2y_0}{9}, \\ -\frac{96}{x_0 y_0 z_0^2} = \lambda \frac{z_0}{8}, \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{9} + \frac{z_0^2}{16} = 1. \end{cases} \qquad \checkmark \mathbf{0.2} \tag{38}$$

Isolando $-96/\lambda$ nas duas primeiras equações, obtemos $x_0^3 y_0 z_0/2 = -96/\lambda = 2x_0 y_0^3 z_0/9$. Logo, $y_0^2 = 9x_0^2/4$. Analogamente, isolando $-96/\lambda$ na primeira e na terceira equações, obtemos $x_0^3 y_0 z_0/2 = -96/\lambda = x_0 y_0 z_0^3/8$. Assim, $z_0^2 = 4x_0^2$. Substituindo $y_0^2 = 9x_0^2/4$ e $z_0^2 = 4x_0^2$ na quarta equação e lembrando que $x_0 > 0$, concluímos que $x_0 = 2/\sqrt{3}$. Novamente, lembrando que $y_0 > 0$ e $z_0 > 0$, temos que a solução do sistema é $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $y_0 = \frac{3}{\sqrt{3}}$ e $z_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}$. $\checkmark$ **0.2** Finalmente, o plano tangente é

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{3\sqrt{3}}y + \frac{1}{2\sqrt{3}}z = 2. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{39}$$