L3 - SUPERF´ICIES E COORDENADAS CIL´INDRICAS E ESF´ERICAS

$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios, MA 141

SUPERFÍCIES E COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

1. Reduzir cada uma das equações de forma a identificar a quádrica que ela representa e esboce o gráfico.
a) $4x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$; **b)** $3x^2 + 4y^2 + z^2 - 12x - 8y - 2z + 16 = 0$.
c) $x^2 + y + z^2 = 0$; **d)** $4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 36z + 3 = 0$.

2. **a)** Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam do plano $\pi : x = 2$ e do ponto $P = (-2, 0, 0)$. Que conjunto é este?
b) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam das retas $r : y = z = 0$ e $l : x = y - 1 = 0$. Que conjunto é este?
c) Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a soma das distâncias de P aos dois pontos $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$ é igual a 6. Que lugar geométrico é este?

3. Dados a esfera $\mathcal{S}$ de centro $C = (h, k, p)$ e raio r e $P = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto da esfera. Mostre que: $\pi \cap \mathcal{S} = \{P\}$, onde π é o plano que é normal ao vetor $\vec{CP}$ e passa por P. Tal plano é chamado de plano tangente à esfera por P.

4. Dada a esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 11 = 0$.
a) Encontre o seu centro e seu raio.
b) Encontre a equação do plano tangente à esfera e que passa pelo ponto $P = (2, 1, 4) \in S$.

5. Dadas as equações da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes determine a equação da superfície cilíndrica.
a) $y^2 = 4x$, $z = 0$ e $V = (1, -1, 1)$ **b)** $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$ e $V = (0, 2, -1)$
c) $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ e $V = (4, 1, 0)$ **d)** $4x^2 + z^2 + 4z = 0$, $y = 0$ e $V = (4, 1, 0)$.

6. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície cilíndrica e determine a equação da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes.
a) $x^2 + y^2 + 2Z^2 + 2xz - 2yz = 1$; **b)** $17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0$.

7. Determine a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo especificado.
a) $9x^2 + 4y^2 = 36$ e $z = 0$ em torno do eixo y; **b)** $yz = 1$ e $x = 0$ em torno do eixo z.

8. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície de revolução e determine o seu eixo de revolução e a equação da curva geratriz.
a) $x^2 + y^2 - z^3 = 0$; **b)** $y^6 - x^2 - z^2 = 0$.

9. Encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada:
a) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$; **b)** $x^2 - y^2 = 3z^2$.

10. Encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada:
a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9z$; **b)** $x^2 + y^2 = 9$.

11. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é dada:
a) $r = 3\cos\theta$; **b)** $z^2 \operatorname{sen}\theta = r^3$.

12. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas esféricas é dada:
a) $r = 2\tan\theta$; **b)** $r = 9\sec\phi$.

CIRCUNFERÊNCIA E ROTAÇÃO NO PLANO

13. Seja ℓ a curva com equações paramétricas $x = a(1 + t^2)/(1 - t^2)$, $y = 2bt/(1 - t^2)$. Determine ℓ.

14. A elipse ℓ tem focos $F_1(1, 2)$ e $F_2(2, 4)$ e vértices $A_1(0, 0)$ e $A_2(3, 6)$. Dê as equações paramétricas de ℓ.

15. A hipérbole ℓ tem focos F_1 e F_2 e vértices A_1 e A_2. Encontrar equações paramétricas de ℓ se
a) $F_1(2, 0)$, $F_2(8, 0)$, $A_1(3, 0)$, $A_2(7, 0)$; b) $F_1(0, 0)$, $F_2(4, 8)$, $A_1(1, 2)$, $A_2(3, 6)$.

16. Considere o plano com o sistema cartesiano canônico xy e faça uma rotação de um ângulo θ obtendo um novo sistema $\overline{x}\,\overline{y}$. Seja P um ponto do plano.

a) Se $P = (2, 2)$ no sistema xy e $\theta = \pi/3$, encontre as coordenadas de P no sistema $\overline{x}\ \overline{y}$.
b) Se $P = (2, 2)$ no sistema $\overline{x}\ \overline{y}$ e $\theta = \pi/3$, encontre as coordenadas de P no sistema xy.
c) Transforme a equação $x^2 + y^2 = 4$ para o sistema $\overline{x}\ \overline{y}$.
d) Suponha que $0 < \theta < \pi/2$ e que $a = \tan\theta$ (a=tangente de θ). Transforme a equação $y = ax$ para o sistema $\overline{x}\ \overline{y}$.

17. Considere o plano com o sistema cartesiano canônico xy e faça uma rotação de um ângulo θ, com $0 \leq \theta \leq \pi/2$ obtendo o novo sistema $\overline{x}\ \overline{y}$. Seja (*) a equação:

(*) $\quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com A, B, C, D, E, F números reais.

Ao transformar (*) para o sistema $\overline{x}\ \overline{y}$ obtemos:

(**) $\quad \overline{A}\overline{x}^2 + \overline{B}\overline{x}\overline{y} + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0.$

a) Mostre que:
$\overline{A} = A\cos^2\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + C\,\mathrm{sen}^2\theta$, $\quad \overline{B} = -2A\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) + 2C\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$,
$\overline{C} = A\,\mathrm{sen}^2\theta - B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$, $\quad \overline{D} = D\cos\theta + E\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\quad \overline{E} = E\cos\theta - D\,\mathrm{sen}\,\theta$ $\quad$ e $\quad \overline{F} = F$.

b) Supondo $A > 0$ e $F < 0$, conclua, a partir de **a)**, que:

A equação $(*)$ representa uma circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $r = \sqrt{\frac{-F}{A}}$ se e somente se para todo θ temos que $A = \overline{A}$, $B = \overline{B}$, $C = \overline{C}$, $D = \overline{D}$, $E = \overline{E}$ e $F = \overline{F}$.

c) Sejam $M = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}$, $\overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \frac{\overline{B}}{2} \\ \frac{\overline{B}}{2} & \overline{C} \end{pmatrix}$ e $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Mostre, a partir de **a)**, que $\overline{M} = R^t_\theta.M.R_\theta$ e calculando o determinante dos dois lados da igualdade conclua que $\Delta = B^2 - 4AC = \overline{B}^2 - 4\overline{A}.\overline{C}$ qualquer que seja o ângulo θ (**OBS:** Δ é conhecido pelo nome de discriminante da equação $(*)$ e o item **c)** está dizendo que ele é invariante por rotação).

18. Em cada uma das equações abaixo elimine, através de uma rotação, o termo xy. Identifique o conjunto solução e nos casos em que for uma cônica encontre as coordenadas, no sistema inicial, do(s) fóco(s) e esboce o gráfico.
a) $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$; $\quad$ **b)** $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$;
c) $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 6x = 0$; $\quad$ **d)** $18x^2 + 12xy + 2y^2 + 94\frac{\sqrt{10}}{10}x - 282\frac{\sqrt{10}}{10}y + 94 = 0$.

19. Sejam $\mathcal{C}$ a circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$ e $P = (x_1, y_1)$ um ponto do plano. Mostre que:
a) Se $P \in \mathcal{C}$ então a equação da reta tangente a circunferência por P é $x_1x + y_1y = r^2$.
(Lembre que a reta tangente em P sempre é perpendicular ao vetor $\vec{OP}$, com O sendo o centro de $\mathcal{C}$.)
b) Se $r = 1$ e l é a reta de equação $3x + 4y = 5$ então l é tangente a $\mathcal{C}$. Encontre o ponto de tangência.
c) Se P está no exterior da circunferência e $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ são os pontos de $\mathcal{C}$ tais que as retas l_2 que passa por P e P_2, e l_3 que passa por P e P_3 são tangentes à circunferência, então a reta (secante) que passa por P_2 e P_3 tem equação $x_1x + y_1y = r^2$.
(Sugestão: A partir de **a)** encontre as equações das retas l_2 e l_3 e use o fato de que P está em ambas.)

IDENTIFICAÇÃO DE CÔNICAS

20. A curva ℓ consiste de todos os pontos $P(x, y)$ cujas coordenadas satisfazem a equação:
a) $3x^2 + 5y^2 + 4x - 2y - 10 = 0$; b) $x^2 + 2x + y^2 + 2y + 2 = 0$; c) $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$;
d) $x^2 + y^2 + (1/3)xy + 6x + 8y - 5 = 0$; e) $x^2 + (1/5)xy + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$; f) $x^2 + 5x + y - 9 = 0$;
e) $x^2 + 3y^2 + 4xy + 4y - 4 = 0$; f) $x^2 - 2y^2 + 4xy - 6 = 0$; g) $x^2 + 2y^2 - 4xy + y - 1 = 0$.

21. Identificar as cônicas e calcular os focos, diretrizes, e assíntotas (quando couber):
a) $x^2 - 3y^2 - 2xy - x - y = 0$; b) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y - 1 = 0$; c) $x^2 + 3y^2 - 2xy + 3 = 0$;
d) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$; e) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$; f) $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0$.