Aula 7: Circuitos

Curso de Física Geral III

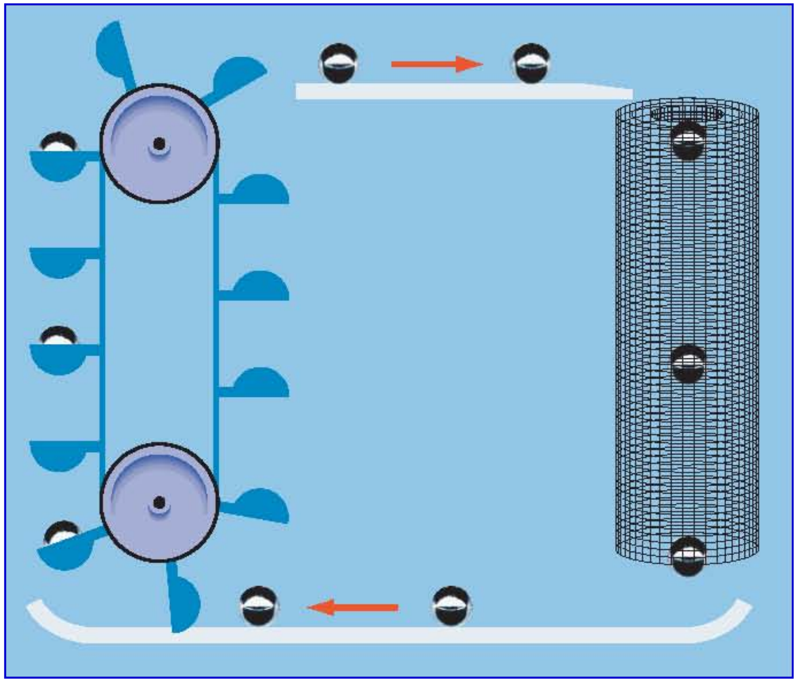
F-328

1º semestre, 2017

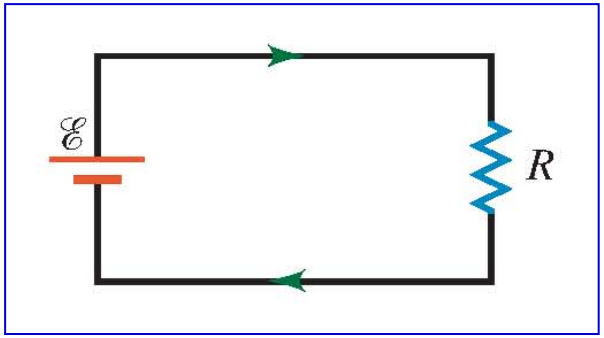
Instituto de Física Gleb Wataghin

Ponto essencial

Para resolver um circuito de corrente contínua, é preciso entender se as cargas estão ganhando ou perdendo energia potencial elétrica quando passam através dos elementos do circuito.



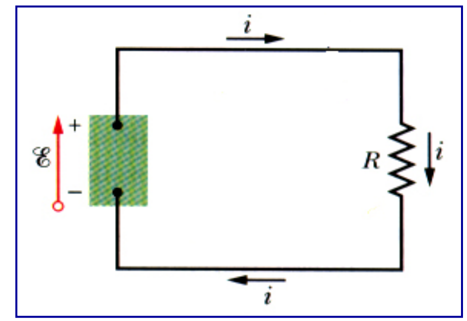
=

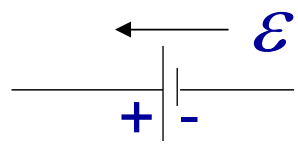


Fonte de força eletromotriz

Fonte de energia em um circuito DC

Resolver um circuito de corrente contínua (DC) é calcular o valor e o sentido da corrente. Como vimos, para que se estabeleça uma corrente duradoura num condutor, é necessário manter uma diferença de potencial entre suas extremidades. No caso prático, isto é feito por um dispositivo chamado *fonte de força eletromotriz* (*fem*), cujo símbolo é:





Trabalho da fonte

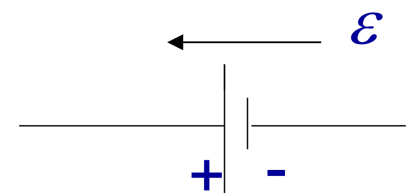
Dentro da fonte, um elemento de carga positiva dq deve se mover de um ponto de potencial mais baixo (–) para outro de potencial mais alto (+), necessitando de uma energia para isso. Então a fonte deve realizar um trabalho dW sobre um elemento de carga dq a fim de forçá-lo a ir do terminal (–) para o terminal (+).

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq} \qquad \left(\frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{volt} \right)$$

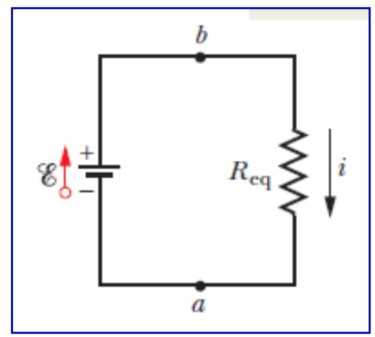
Tipos de fem

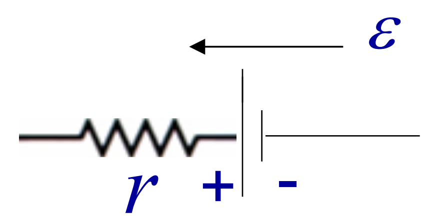
Fonte de tensão ideal

- Modelo idealizado de uma bateria
- Bombeamento de cargas sem nenhuma resistência
- Não há energia dissipada na fonte



$$\Rightarrow \quad V = V_b - V_a = \varepsilon$$



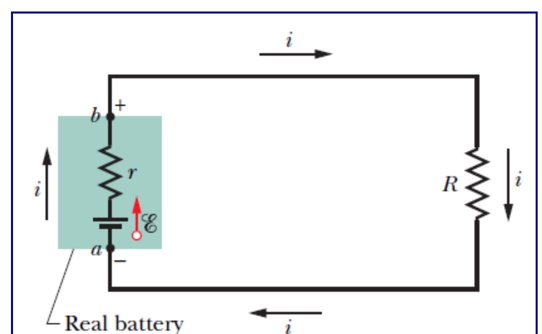


Fonte de tensão real

- Qualquer bateria na prática
- Movimento das cargas afetado pela resistência interna r da bateria
- Há energia dissipada na fonte

$$\Rightarrow \quad V = V_b - V_a = \varepsilon - ir$$

(para o sentido de i como na figura)



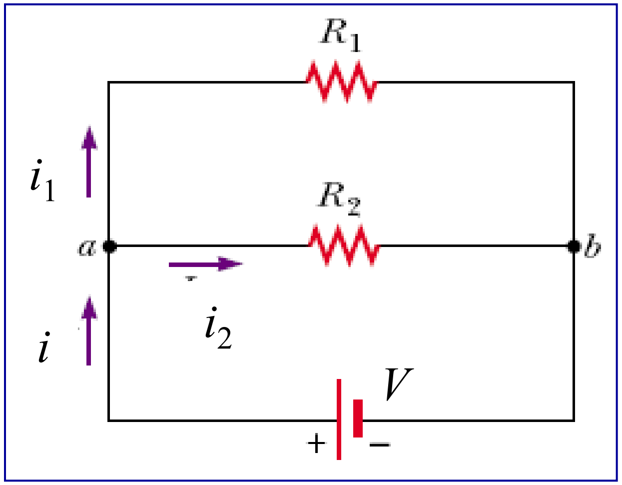
Leis de Kirchhoff – Nó

Lei dos Nós = Conservação de Carga

Nó:

- Ponto do circuito onde três fios ou mais se encontram
- Lei dos nós: A soma algébrica das correntes é nula em um nó
- Não há acúmulo ou destruição de carga em um nó
- Convenção:
  - Corrente entrando: positivo
  - Corrente saindo: negativo

$$\Rightarrow \sum i = 0$$



Nó a: $+i - i_1 - i_2 = 0$

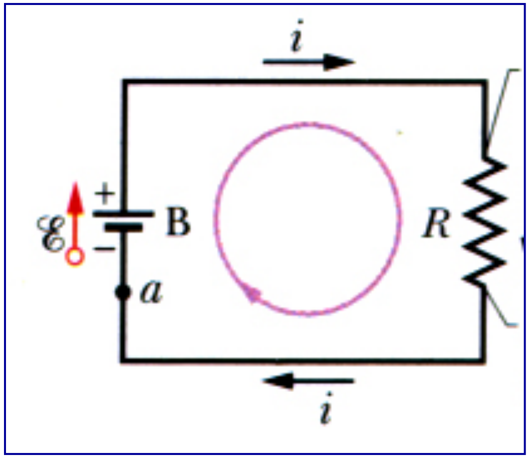
Leis de Kirchhoff - Malha

Lei das Malhas = Conservação de Energia

Malha

- Percurso fechado em um circuito
- Lei das malhas: A soma algébrica das diferença de potencial é nula em uma malha
- Não há acúmulo ou destruição de energia potencial em uma malha
- Convenção:
    - Ganho de energia: positivo
    - Perda de energia: negativo

$$\Rightarrow \sum \Delta V = 0$$

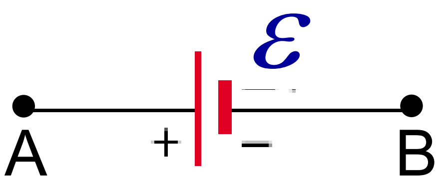


Iniciando no ponto *a*:

$$+\varepsilon - Ri = 0$$

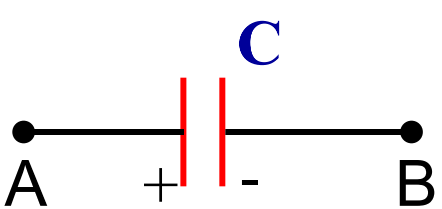
Aplicação das Leis de Kirchhoff

Fonte



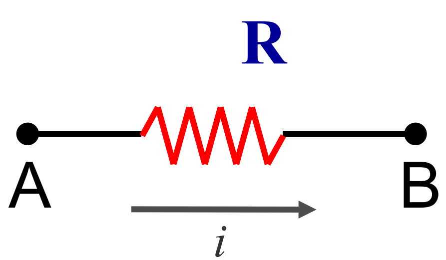
- de A a B: $\Delta V = -\varepsilon$ (perda)
- de B a A: $\Delta V = +\varepsilon$ (ganho)

Capacitor



- de A a B: $\Delta V = -q/C$ (perda)
- de B a A: $\Delta V = +q/C$ (ganho)

Resistor



- de A a B: $\Delta V = -Ri$ (perda)
- de B a A: $\Delta V = +Ri$ (ganho)

Circuito de malha única

Através da energia

Em um intervalo de tempo *dt:*

• A equação de potência ($P = Ri^2$) estabelece que uma energia térmica aparece no resistor do circuito:

$$\Rightarrow \quad dU = Pdt = Ri^2 dt$$

• Uma carga $dq = idt$ se move através da bateria B, e o trabalho que está realizado sobre a carga é:

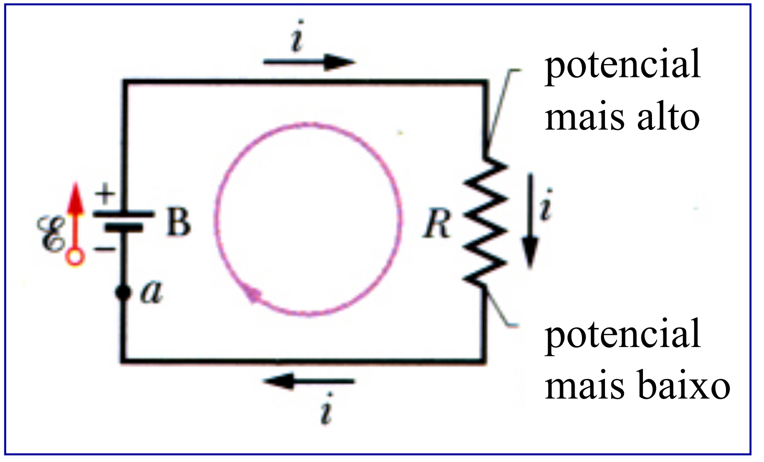
$$\Rightarrow \quad dW = \varepsilon\, dq = \varepsilon\, i\, dt$$

Do princípio de conservação da energia temos:

$$\varepsilon\, i\, dt = R\, i^2\, dt \Leftrightarrow \varepsilon = Ri$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{\varepsilon}{R}$$

cuja unidade é o ampère (A).



Circuito de malha única

Através do potencial

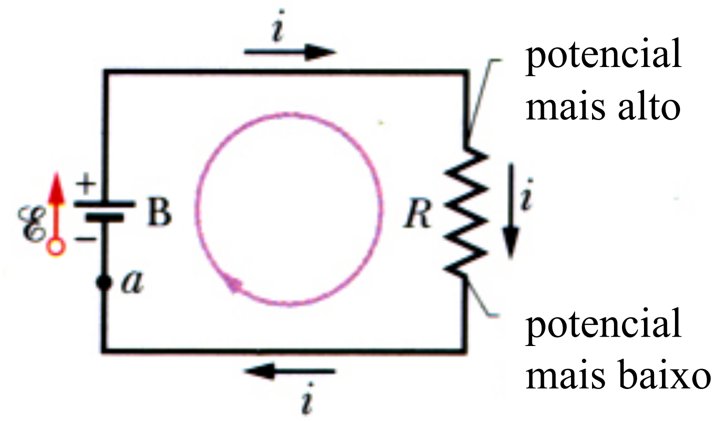
Regra das malhas de Kirchhoff:

A soma algébrica das variações de potencial encontradas ao longo de um caminho fechado qualquer de um circuito deve ser nula.

Partindo do ponto *a* no sentido da corrente:

$$V_a + \varepsilon - iR = V_a \Rightarrow \varepsilon - iR = 0$$

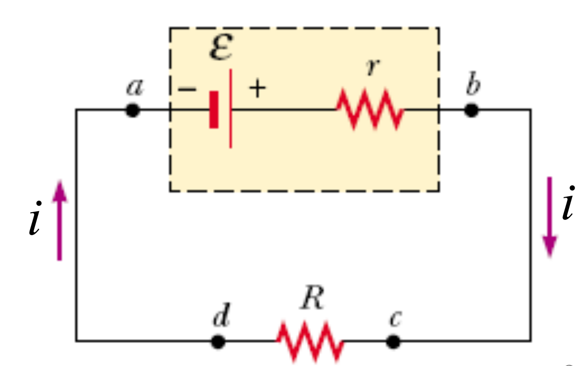
$$\Rightarrow \quad i = \frac{\varepsilon}{R}$$



No caso de uma fonte real (com resistência interna *r*)

$$\varepsilon - ir - iR = 0$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

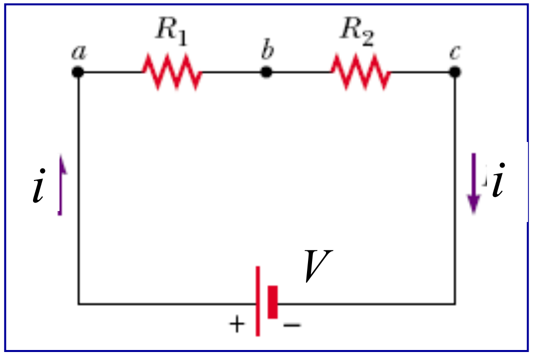


Associação de resistores em série

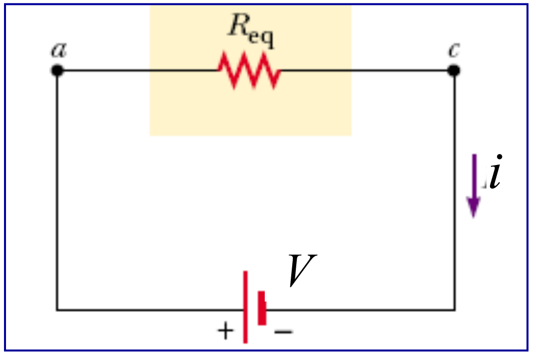
Associação em série

- Mesma corrente passa através dos resistores
- Soma das diferenças de potencial entre as extremidades de cada resistor é igual à diferença de potencial aplicada

$$V = iR_1 + iR_2 = i\,(R_1 + R_2) \Leftrightarrow V = R_{eq} i$$



Comparando: $R_{eq} = R_1 + R_2$



Para três ou mais resistores em série:

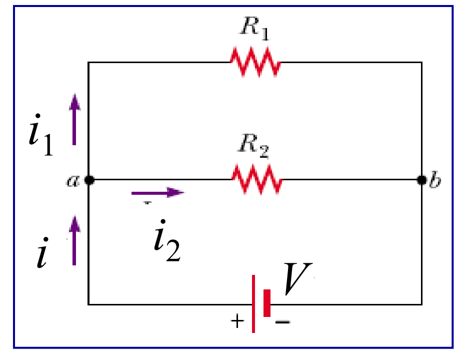
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots = \sum_i R_i$$

Associação de resistores em paralelo

Associação em paralelo

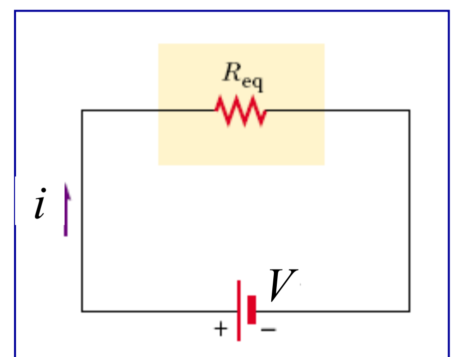
- Mesma diferença de potencial para cada resistor
- Soma das correntes passando através de cada resistor é igual à corrente total

$$i_1 = \frac{V}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V}{R_2}$$



$$i = i_1 + i_2 = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Leftrightarrow i = \frac{V}{R_{eq}}$$

Comparando: $$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



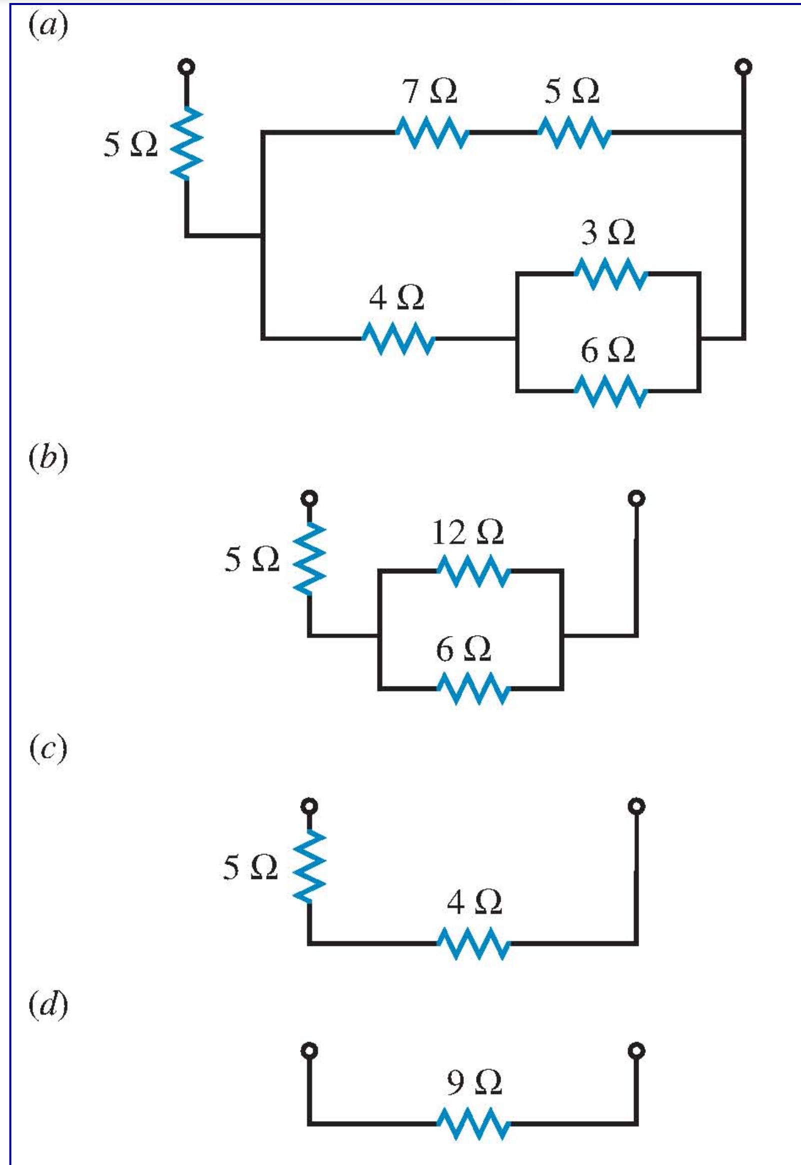
Para três ou mais resistores em paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Estratégia de resolução

Etapas

- Desenhar o circuito colocando em evidência as associações
    - Série: R uma depois da outra
    - Paralelo: Separação da corrente
    - Pode deslocar uma junção de fios ao longo de um fio
- Calcular a R_{eq} da associação menor
- Desenhar o novo circuito
- Calcular a R_{eq} da associação menor
- … até obter somente uma R_{eq}



Estratégia de resolução - várias malhas

Etapas

- Identificar os nós
- Numerar cada ramo (entre dois nós)
- Atribuir uma corrente i_i em um sentido hipotético
- Escrever a lei dos nós para (n-1) nós
- Escrever a lei das malhas passando ao menos uma vez por ramo (sentido arbitrário)
- Resolver o sistema de equações
- Se uma corrente é negativa, seu sentido é oposto ao suposto

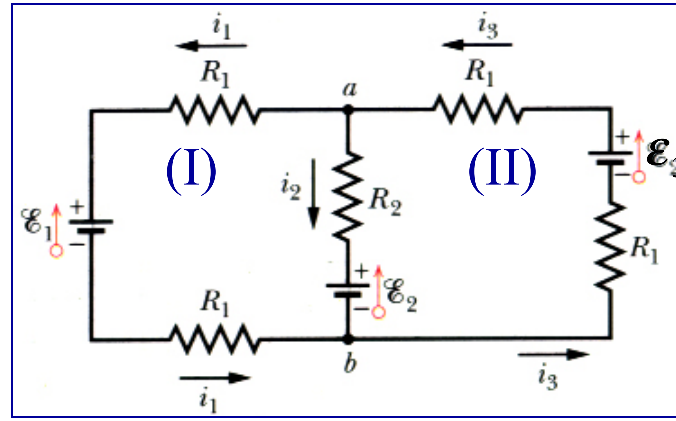
Verificação

- Soma das potências fornecidas pelas fontes igual a soma das potências dissipadas nos resistores

$$\Rightarrow \sum \varepsilon i = \sum R i^2$$

Exemplo - Circuito de várias malhas

Duas malhas: Calcular i_1, i_2, i_3



Nó a: $\Rightarrow$ $i_3 = i_2 + i_1 \quad (1)$

Malha (I): sentido anti-horário a partir de *a*

$$-i_1R_1 - \varepsilon_1 - i_1R_1 + \varepsilon_2 + i_2R_2 = 0 \quad (2)$$

Malha (II): sentido horário a partir de *a*

$$+i_3R_1 - \varepsilon_3 + i_3R_1 + \varepsilon_2 + i_2R_2 = 0 \quad (3)$$

$\Rightarrow$ Resolver o sistema de equações lineares não-homogêneo:

As equações (1), (2) e (3) podem ser apresentadas na forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & 2R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

$$AI = B \quad \Rightarrow$$

Teorema de Cramer

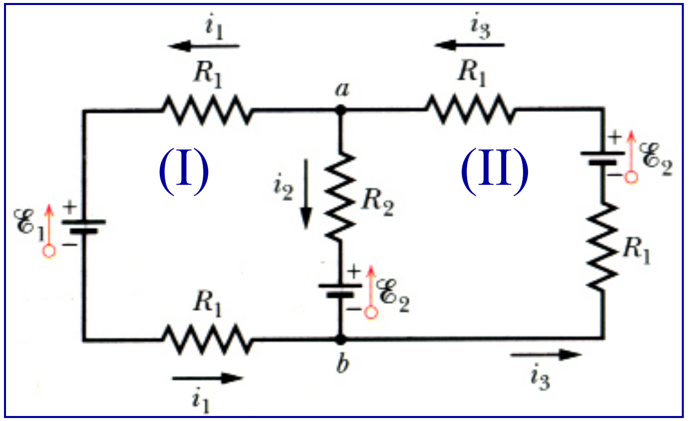
Sejam as matrizes $C_1, C_2, C_3 \ldots C_N$ obtidas pela substituição das colunas 1, 2, 3... N da matriz A, pelo vetor B, respectivamente. Assim a corrente i_j (no ramo j) será dada por:

$$i_j = \frac{\det[C_j]}{\det[A]}$$

Solução – Caso particular

Sejam: $\begin{cases} \varepsilon_1 = 3{,}0\text{V}, \;\; \varepsilon_2 = 6{,}0\text{V} \\ R_1 = 2{,}0\Omega, \;\; R_2 = 4{,}0\Omega \end{cases}$

Calcular i_1, i_2, i_3



Nó *a*: ➡ $i_3 = i_2 + i_1 \qquad (1)$

Malha (I): sentido anti-horário a partir de *a*

$$-i_1R_1 - \varepsilon_1 - i_1R_1 + \varepsilon_2 + i_2R_2 = 0$$

➡ $4{,}0i_1 - 4{,}0i_2 = 3{,}0 \qquad (2)$

Malha (II): sentido horário a partir de *a*

$$+i_3R_1 - \varepsilon_2 + i_3R_1 + \varepsilon_2 + i_2R_2 = 0$$

➡ $4{,}0i_2 + 4{,}0i_3 = 0 \qquad (3)$

Resolvendo (1), (2) e (3) teremos:

$$\begin{cases} i_1 = 0{,}50 \;\; \text{A} \\ i_2 = -\,0{,}25 \;\; \text{A} \Rightarrow 0{,}25 \;\; \text{A} \\ i_3 = 0{,}25 \;\; \text{A} \end{cases}$$

Sinal negativo de i_2 :
Sentido *real* da corrente i_2 é contrário ao indicado na figura

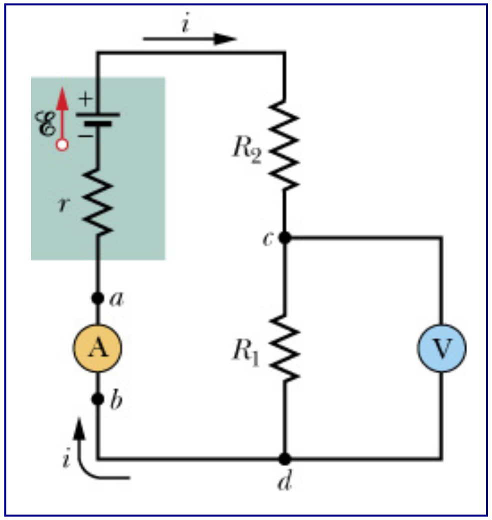
Resolver com o método geral do slide anterior

Amperímetros e voltímetros

Amperímetro

- Instrumento usado para medir corrente elétrica
- Sempre colocado em série no circuito onde se quer medir a corrente
- Para que a resistência do amperímetro (R_A) não altere o valor da corrente a ser medida:

$$\Rightarrow R_A << (r + R_1 + R_2)$$



Voltímetro

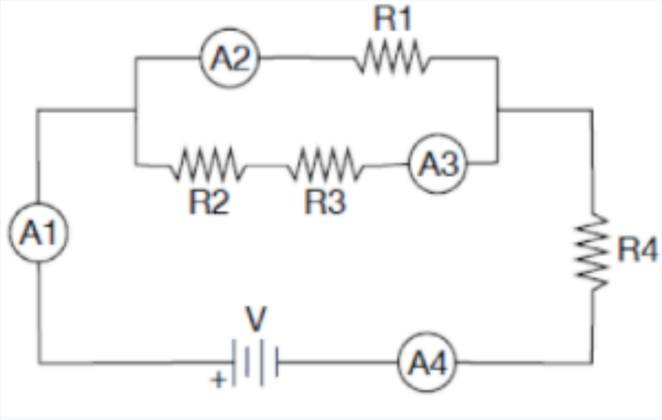
- Instrumento usado para medir diferença de potencial
- Sempre colocado em paralelo com o trecho onde se quer medir a diferença de potencial
- Para que a resistência do voltímetro (R_V) não altere o valor da diferença de potencial a ser medida:

$$\Rightarrow R_V >> R_1$$

Na prática, um único instrumento (*multímetro*) realiza as duas medidas anteriores, além da medida das resistências.

Questão Moodle

O circuito abaixo mostra quatro resistores e quatro amperímetros ligados à fonte de $fem\ V$. Sabe-se que a corrente no amperímetro A_1 é 6,0 A e que a corrente no amperímetro A_2 é 2,0 A. Se a resistência de R_4 é dada, que outra informação é necessária para determinar o valor de V, a fem da bateria?



Escolha uma:

- a. a leitura do amperímetro A_4;
- b. a resistência de R_1;
- c. a leitura do amperímetro A_4 e o valor da resistência de R_1;
- d. a leitura do amperímetro A_4 e o valor da resistência de R_2;
- e. as resistências de R_1, R_2 e R_3;

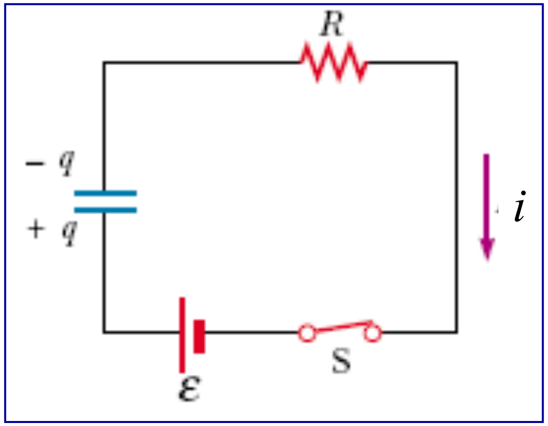
Circuito RC

A corrente em um circuito fica constante se há um capacitor?

Não, o capacitor se carrega ou se descarrega, modificando a corrente

Circuitos *RC*

- Circuitos contendo *resistores e capacitores*
- Correntes e potenciais variam com o tempo
    - Apesar das fontes (*fem*) que alimentam estes circuitos serem independentes do tempo, ocorrem efeitos dependentes do tempo com a introdução de capacitores

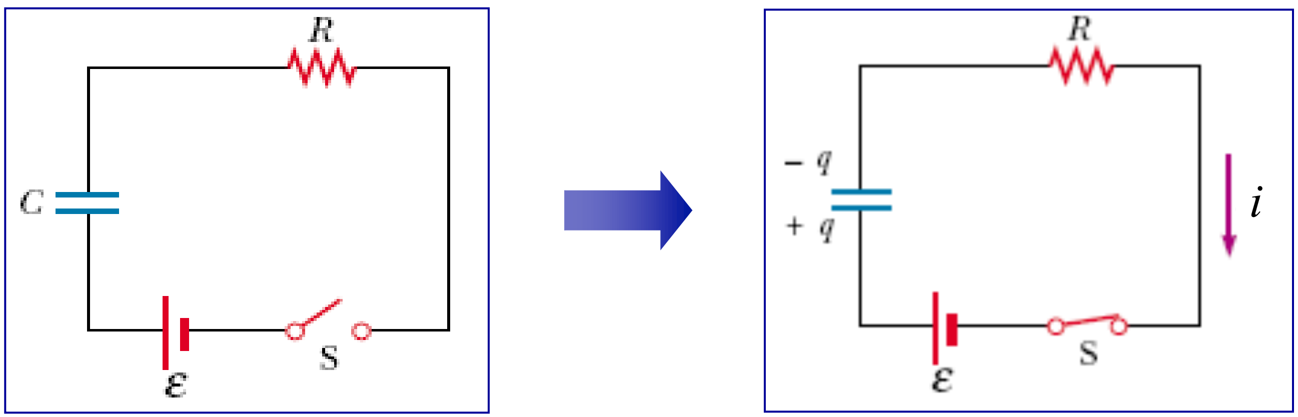


Estes efeitos são úteis para controle do funcionamento de máquinas e motores

Carregar um capacitor

Chave *S* fechada em *t* = 0

- A carga inicial do capacitor é nula
- Assim que *S* se fecha, surge uma corrente dependente do tempo no circuito
- Essa corrente inicia o processo de carga do capacitor

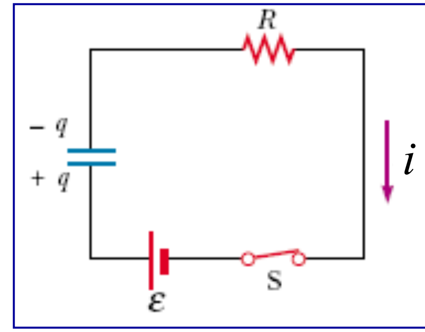


$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad q(0) = 0$$

$$t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad q(t)$$

Carregar um capacitor - Carga

Resolver (estudar) este circuito é encontrar a expressão da corrente $i(t)$ que satisfaça à equação:



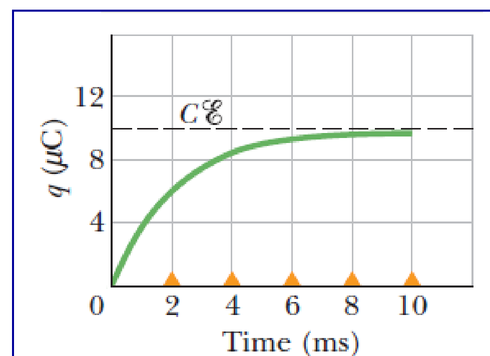
$$\varepsilon - \frac{q}{C} - iR = 0 \qquad \text{(lei das malhas)}$$

Como $i = \dfrac{dq}{dt}$: $\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{R} - \dfrac{q}{RC} \Rightarrow \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{C\varepsilon}{RC} - \dfrac{q}{RC} = -\dfrac{q - C\varepsilon}{RC} \therefore$

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \Leftrightarrow \ln\left(\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow q - C\varepsilon = -C\varepsilon e^{-t/RC}$$

$$(\text{faz-se } \; u = q - C\varepsilon \; \therefore du = dq)$$

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC})$$
$$= Q_f(1 - e^{-t/RC})$$



onde $Q_f \equiv C\varepsilon$ é a carga final do capacitor

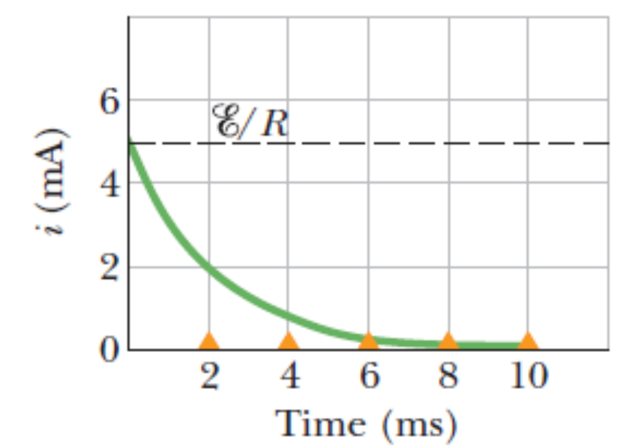
Carregar um capacitor - Corrente

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow i(t) = C\varepsilon\left(\frac{1}{RC}e^{-t/RC}\right)$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$

$$= i_0 e^{-t/RC}$$

onde $i_0 \equiv \dfrac{\varepsilon}{R}$ é a corrente inicial



Observe que a corrente tem valor inicial igual a ε/R e decresce até zero, quando capacitor se torna completamente carregado

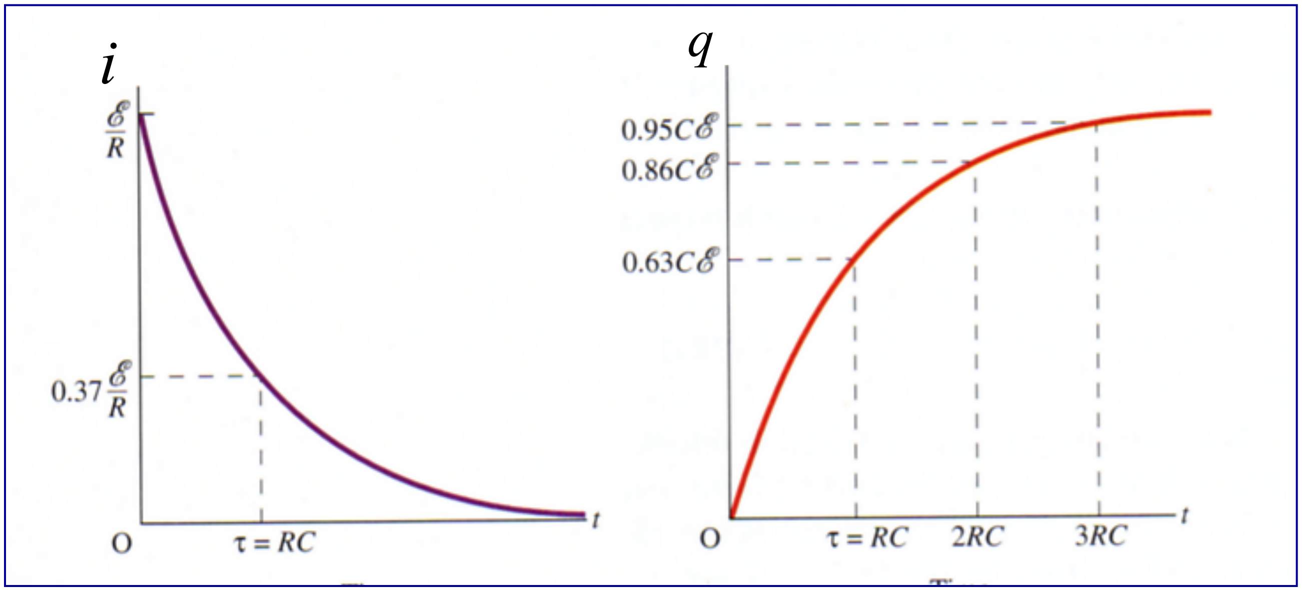
Um capacitor em processo de carga, inicialmente (t=0) funciona como um fio de ligação comum em relação à corrente de carga.
Decorrido um longo tempo, ele funciona como um fio rompido.

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow q(0) = 0,\ i(0) = \dfrac{\varepsilon}{R} \\ t = \infty \Rightarrow q(\infty) = C\varepsilon,\ i(\infty) = 0 \end{cases}$$

Circuito RC - Constante de tempo

O produto RC que aparece nas expressões de $q(t)$ e $i(t)$ tem dimensão de tempo e é a chamada *constante de tempo capacitiva* do circuito RC:

$$\Rightarrow \quad \tau = RC$$



Se $t = RC \;\Rightarrow\; q(t) = 0{,}63\, C\varepsilon$ e $i(t) = 0{,}37\, \dfrac{\varepsilon}{R}$

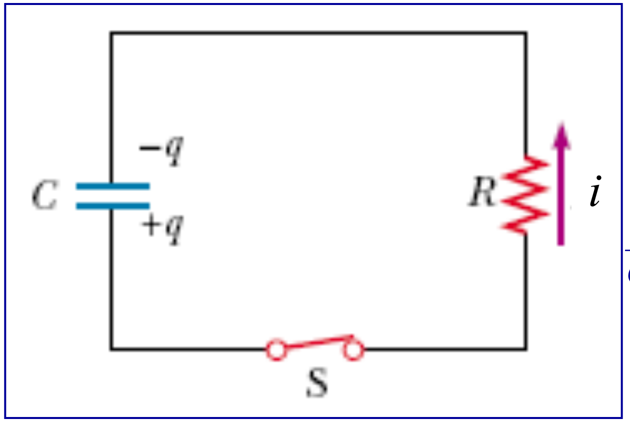
Carregar um capacitor - Exemplo

http://ngsir.netfirms.com/englishhtm/RC_dc.htm

(carga de um capacitor)

Descarregar um capacitor

Lei das malhas: $-Ri + \dfrac{q}{C} = 0$



$\frac{q}{C}=0$

Como $\boxed{i = -\dfrac{dq}{dt}}$ $\Rightarrow$ $R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = 0$

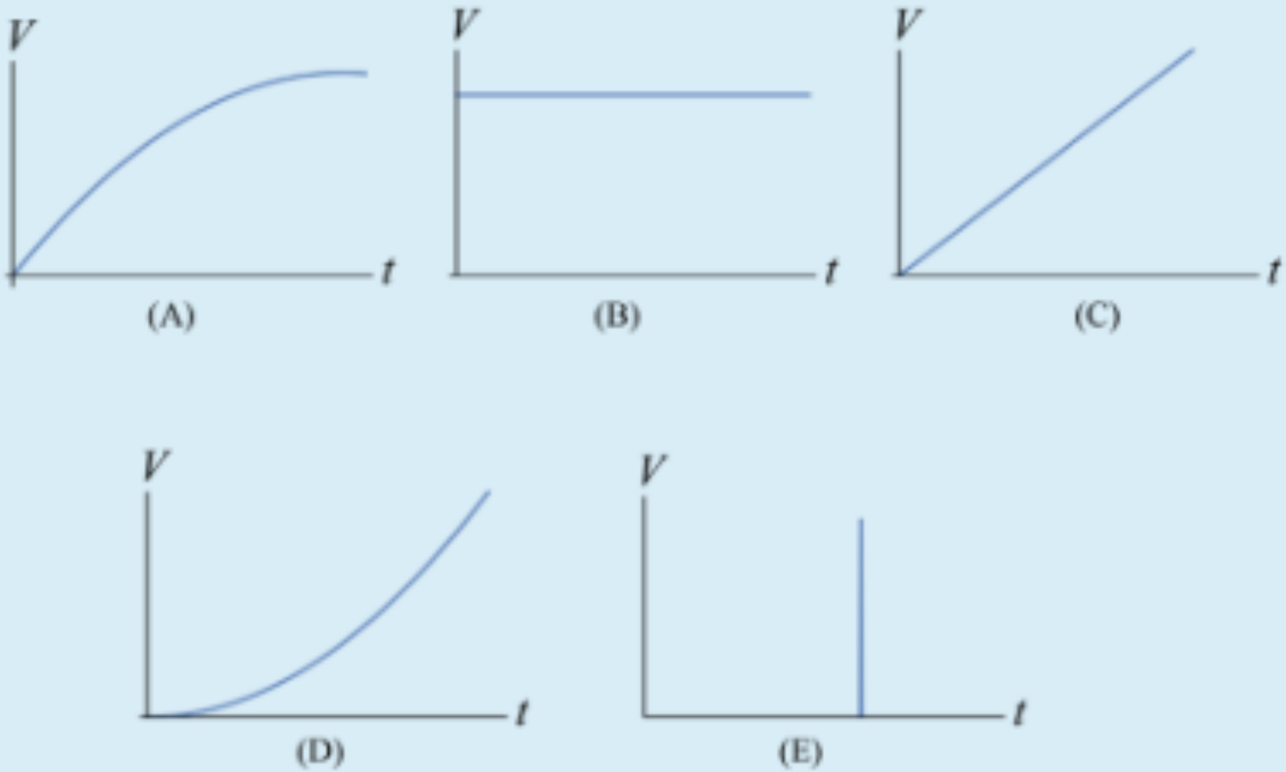
Cujas soluções são: $\Rightarrow$
$$\begin{cases} q(t) = Qe^{-t/RC} \\ i(t) = -\dfrac{dq}{dt} = i_0 e^{-t/RC} \quad ; \quad i_0 \equiv \dfrac{Q}{RC} \end{cases}$$

No processo de descarga, tanto a carga como a corrente diminuem exponencialmente com o tempo.

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad q(0) = Q; \quad i(0) = i_0$$
$$t = \infty \quad \Rightarrow \quad q(\infty) = 0; \quad i(\infty) = 0$$

Questão Moodle

Suponha que a corrente que carrega um capacitor é mantida constante. Qual dos gráficos baixo descreve corretamente a diferença de potencial através do capacitor em função do tempo?



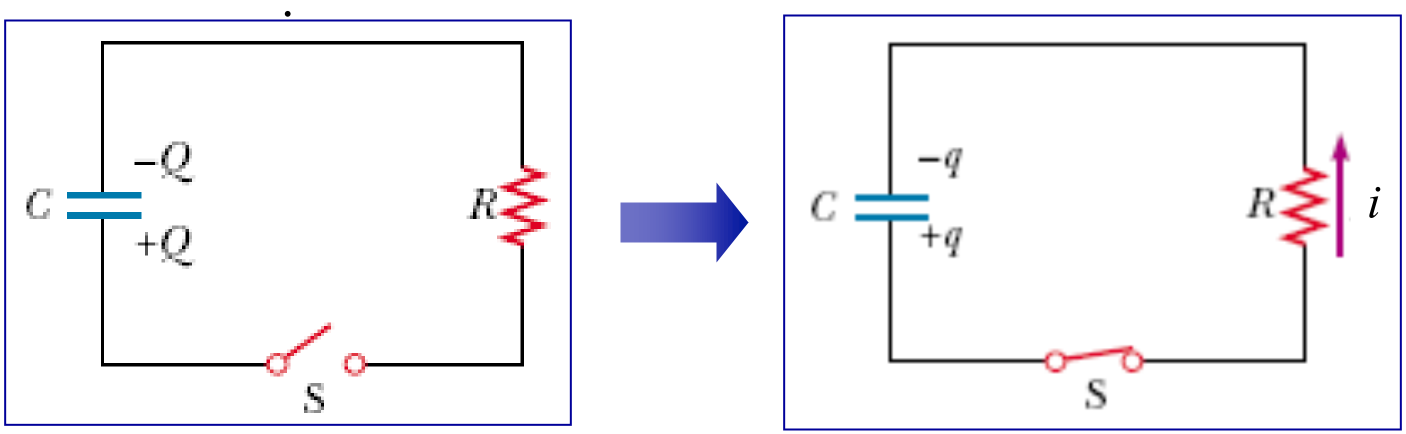
Escolha uma:

- a. C;
- b. D;
- c. E.
- d. A;
- e. B;

Descarregar um capacitor

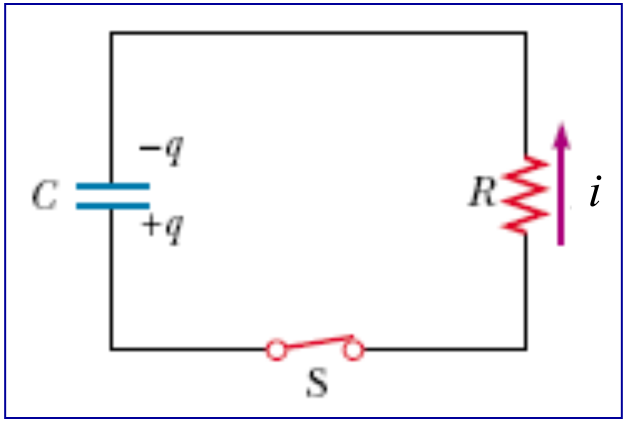
Chave S fechada em $t = 0$

- A carga inicial do capacitor é Q
- O capacitor vai se descarregar através de R
- Como variam agora $q(t)$ e $i(t)$ no circuito?



$$t=0 \Rightarrow q(0)=Q$$
$$t\neq 0 \Rightarrow q(t)$$

Descarregar um capacitor



Lei das malhas: $-Ri+\dfrac{q}{C}=0$

Como $i=-\dfrac{dq}{dt}$ ➡ $R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{q}{C}=0$

Cujas soluções são: ➡ $\begin{cases} q(t)=Qe^{-t/RC} \\ i(t)=-\dfrac{dq}{dt}=i_0e^{-t/RC} \end{cases}$; $i_0\equiv\dfrac{Q}{RC}$

No processo de descarga, tanto a carga como a corrente diminuem exponencialmente com o tempo.

$$t=0 \quad\Rightarrow\quad q(0)=Q; \quad i(0)=i_0$$

$$t=\infty \quad\Rightarrow\quad q(\infty)=0; \quad i(\propto)=0$$

Exemplo

Um capacitor de capacitância C está descarregando através de uma resistência R.

a) Após 4 constantes de tempo $(t = 4RC)$, qual a porcentagem de carga que ainda resta no capacitor em relação ao seu valor de carga inicial ?

$$q = Q\ e^{-t/RC} \Rightarrow q(4RC) = Qe^{-\frac{4RC}{RC}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{q}{Q} = e^{-4} = 0.018 \Rightarrow 1{,}8\% \quad de \quad Q.$$

b) Em que instante a energia armazenada no capacitor será igual à um quarto do seu valor inicial ?

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q_0{}^2}{2C} e^{-2t/RC} = \frac{1}{4} U_0 = \frac{1}{4}\frac{Q_0^2}{2C}$$

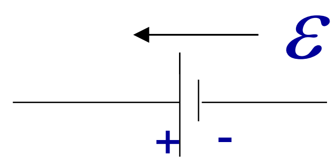
$$\ln\frac{1}{4} = -\ \frac{2t}{RC} \quad \Rightarrow t = \ RC\ \ln 2 \ \cong\ 0{,}70\tau.$$

c) Qual é a energia dissipada no resistor durante a descarga do capacitor?

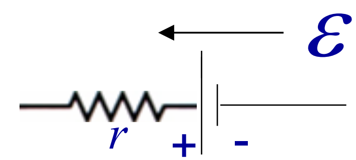
R: $U = \dfrac{Q^2}{2C}$. Por quê? (Reobtenha esta resposta integrando $dU = Ri^2 dt$)

Resumo

- Fonte
  - Mantém uma diferença de potencial



Ideal



Real

- Associação de resistores
  - Em série

$$\Rightarrow \quad R_{eq} = \sum_i R_i$$

  - Em paralelo

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

- Leis de Kirchhoff
  - Lei dos nós

$$\Rightarrow \quad \sum i = 0$$

  - Lei das malhas

$$\Rightarrow \quad \sum \Delta V = 0$$

- Circuitos *RC*
  - Carga

$$\Rightarrow \quad q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC})$$

  - Descarga

$$\Rightarrow \quad q(t) = Qe^{-t/RC}$$

Desafio: Resolver o circuito abaixo

Lista de exercícios – Capítulo 27

•Informações complementares

Os exercícios do Livro texto capítulo Circuitos:

Consultar:
https://www.ggte.unicamp.br/ea

Aulas gravadas:
http://lampiao.ic.unicamp.br/weblectures (Prof. Roversi)
ou
UnivespTV e Youtube (Prof. Luiz Marco Brescansin)