UNICAMP

GABARITO

MA211 – EXAME
Sexta-feira (manhã), 16/01/2014.

*Para correção, cada símbolo "$\checkmark$**x**" o item que o antecede vale* **x** *pontos.*

Resolução da Questão 1. (a) Pela regra da cadeia e do produto, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^y \phi'(x-y) \checkmark \mathbf{0,3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^y \phi(x-y) + e^y \phi'(x-y)(-1). \checkmark \mathbf{0,3} \tag{1}$$

Finalmente, substituindo as fórmulas acima no termo do lado direito da equação que queremos verificar e lembrando que $u = e^y \phi(x-y)$, concluímos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = e^y \phi'(x-y) - e^y \phi(x-y) + e^y \phi'(x-y) = e^y \phi(x-y) = u. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{2}$$

(b) A superfície pode ser escrita como $F(x,y,z) = 0$, em que $F(x,y,z) = xe^y \cos z - z - 1$. O plano tangente à superfície de nível $F(x,y,z) = k$ em um ponto (x_0, y_0, z_0) é dado por

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0. \checkmark \mathbf{0,3} \tag{3}$$

Nesta questão, as derivadas parciais de F são

$$F_x(x,y,z) = e^y \cos z, \checkmark \mathbf{0,2} \quad F_y(x,y,z) = xe^y \cos z \checkmark \mathbf{0,2} \quad \text{e} \quad F_z(x,y,z) = -xe^y \operatorname{sen} z - 1. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{4}$$

Assim, em $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,0)$, temos

$$F_x(1,0,0) = 1, \quad F_y(1,0,0) = 1 \quad \text{e} \quad F_z(1,0,0) = -1. \tag{5}$$

Portanto, o plano tangente a superfície $z + 1 = xe^y \cos z$ em $(1,0,0)$ é

$$(1)(x-1) + (1)(y-0) + (-1)(z-0) = 0, \tag{6}$$

ou seja

$$x + y - z = 1. \checkmark \mathbf{0,3} \tag{7}$$

Resolução da Questão 2. Vamos encontrar os pontos críticos de f no interior do disco. Para tanto, devemos ter $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Nesta questão, temos

$$\nabla f(x,y) = (2x-1, 4y). \tag{8}$$

Logo, o ponto crítico de f no interior do círculo é $(1/2, 0)$ e o valor da função nesse ponto é $f(1/2,0) = -1/4$. **✓0,4**

Na fronteira do disco, devemos resolver o problema

$$\text{maximize/minimize} f(x,y) = x^2 + y - 1 \quad \text{sujeito a} \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{9}$$

Pelo o método dos multiplicadores de Lagrande, devemos encontrar x, y e λ tais que $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ e $g(x,y) = 0$. Como $\nabla g = (2x, 2y)$, devemos resolver o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x - 1 = \lambda 2x, \\ 4y = \lambda 2y, \qquad \checkmark \mathbf{0.4} \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{10}$$

As soluções (x, y, λ) desse sistema são $(1, 0, -1/2)$, $(-1, 0, 1/2)$, $(-1/2, \sqrt{3}/2, 2)$ e $(-1/2, -\sqrt{3}/2, 2)$. **✓0.4** Os valores de f para (x,y) nesse conjunto de pontos são

$$f(1,0) = 0, \quad f(0,-1) = 2, \quad f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} \quad \text{e} \quad f\left(-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}. \checkmark \mathbf{0.4} \tag{11}$$

Portanto, o mínimo absoluto de f no disco é $-1/4$, obtido em $(1/2, 0)$, enquanto que o máximo absoluto de f é $9/4$ obtido nos pontos $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$. **✓0.4**

Resolução da Questão 3. Usando coordenas cilíndricas, o cilindro espesso é descrito por $1 \leq r^2 \leq 2$ e os cones são dados por $z = r$ e $z = -r$. Logo, o volume é dado pela integral tripla

$$V = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark 0,4} \underbrace{\int_1^{\sqrt{2}}}_{\checkmark 0,4} \underbrace{\int_{-r}^{r}}_{\checkmark 0,4} \underbrace{r dz dr d\theta}_{\checkmark 0,4} = \frac{4\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1) \checkmark \mathbf{0,4}. \tag{12}$$

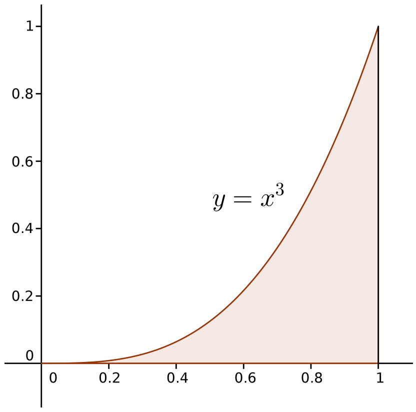
Resolução da Questão 4. Primeiramente, escrevemos $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$, em que

$$P(x,y) = 2xy^3 \quad \text{e} \quad Q(x,y) = 4x^2y^2. \tag{13}$$

Pelo teorema de Green, o trabalho realizado pelo campo de força satisfaz:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \checkmark \mathbf{0,4}, \tag{14}$$

em que D é a região mostrada na figura abaixo.



Mas,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 8xy^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2. \tag{15}$$

Logo,

$$W = \iint_D 2xy^2 dA. \checkmark \mathbf{0,6} \tag{16}$$

Calculando o trabalho como uma integral iterada, encontramos

$$W = \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\int_0^{x^3}}_{\checkmark 0,3} 2xy^2 dy dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^{10} dx = \frac{2}{33} \checkmark \mathbf{0,4} \tag{17}$$

Resolução da Questão 5. Pelo teorema do divergente, temos que

$$I = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV, \checkmark \mathbf{0,4} \tag{18}$$

em que E é o sólido entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e

$$\text{div } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{k} \right) \cdot (5x^3 + 12xy^2)\mathbf{i} + (y^3 + e^y \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + (5z^3 + e^y \cos z)\mathbf{k}, \tag{19}$$

ou seja,

$$\text{div } \mathbf{F} = (15x^2 + 12y^2) + (3y^2 + e^y \operatorname{sen} z) + (15z^2 - e^y \operatorname{sen} z) = 15(x^2 + y^2 + z^2). \checkmark \mathbf{0,4} \tag{20}$$

Logo,

$$I = \iint_E 15(x^2 + y^2 + z^2) dV. \tag{21}$$

Usando coordenadas esféricas, obtemos

$$I = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\int_0^{\pi}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\int_1^{\sqrt{2}}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{15\rho^2}_{\checkmark 0,2} \underbrace{(\rho^2 \operatorname{sen} \phi)}_{\checkmark 0,2} d\rho d\phi d\theta = 15 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \phi d\phi \int_1^{\sqrt{2}} \rho^4 d\rho = 12\pi(4\sqrt{2} - 1). \checkmark \mathbf{0,2} \tag{22}$$