Física Geral I
F -128

Aula 10
Movimento Circular

Plano da Aula

- Movimento Circular Uniforme e Acelerado
- Forças Centrípetas
- Produto Vetorial

Movimento Circular

Este movimento tem como característica uma distância fixa a um ponto central.

Exemplos:

- *Movimento de satélites artificiais;*
- *Pontos de um disco de vitrola;*
- *Pontos de um disco rígido de computador;*
- *Ponteiros de um relógio;*
- *Nós, girando com o movimento da Terra.*

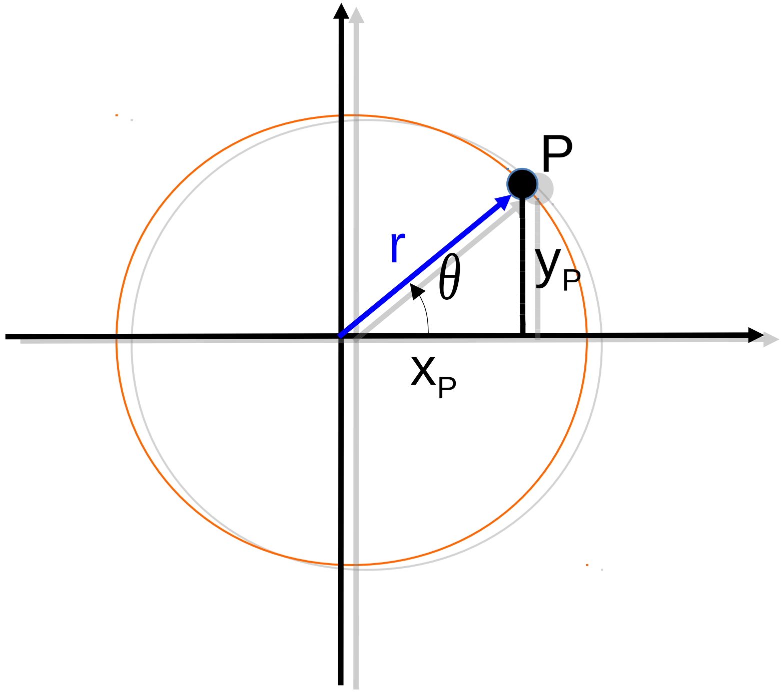
Descrição do Mov. Circular

Coordenadas cartesianas:

Vetor posição:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = r cos\theta\,\hat{i} + r sen\theta\,\hat{j}$$



o raio *r* se mantém constante, mas o ângulo varia com o tempo:

$$\theta = \theta(t)$$

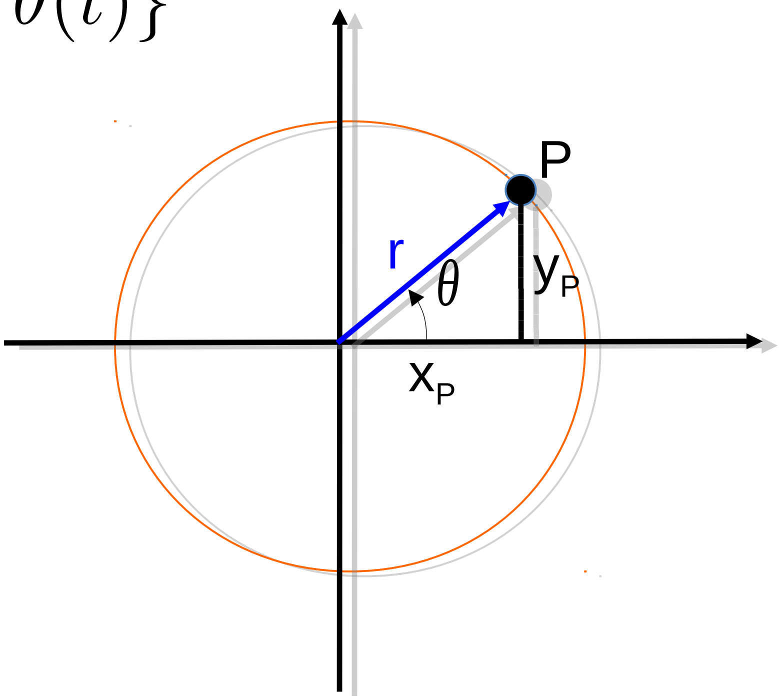
Coordenadas Polares

A descrição do movimento circular pode ser simplificada se trocarmos de sistema de coordenadas:

$$\{x(t), y(t)\} \rightarrow \{r, \theta(t)\}$$

É possível transitar entre estes dois sistemas de coordenadas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad tan\theta = \frac{y}{x}$$



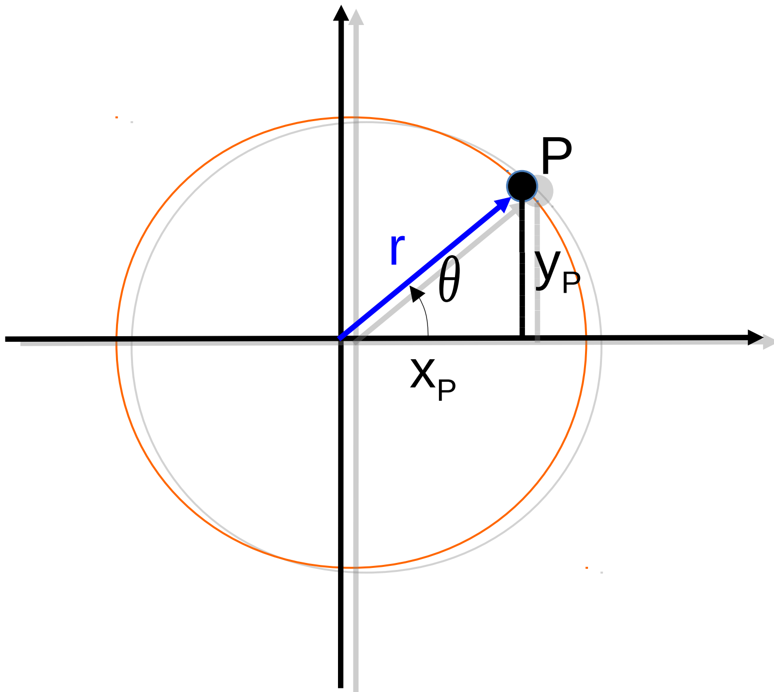
Coordenadas Polares

Outros versores unitários são utilizados:

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

- $\hat{r}$ aponta na direção radial
- $\hat{\theta}$ aponta na direção tangencial, no sentido anti-horário
- $\hat{r}.\hat{\theta} = 0$
- $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ variam com o tempo.



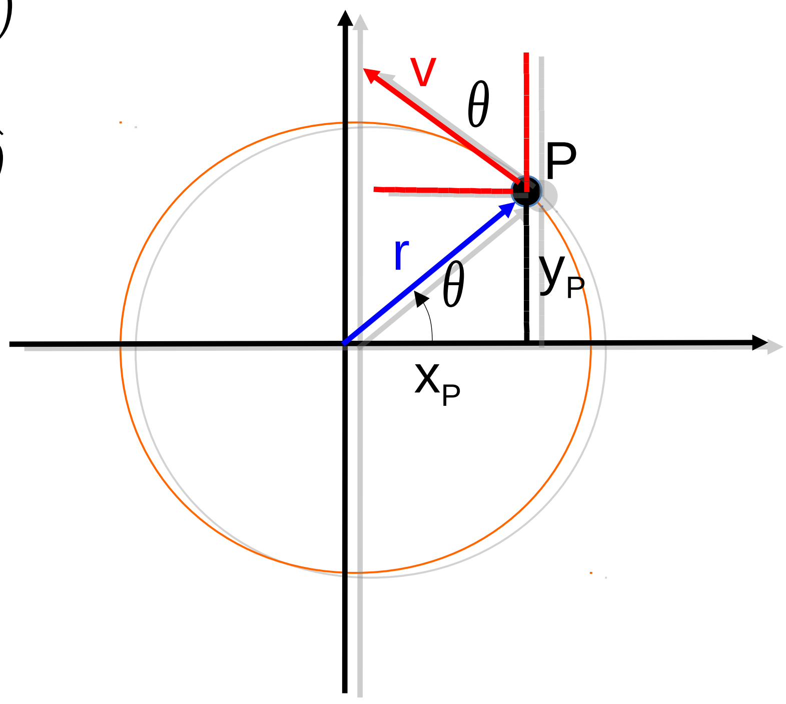
Descrição do Mov. Circular

Instituto de Física Gleb Wataghin

Velocidade:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(rcos\theta, rsen\theta\right)$$

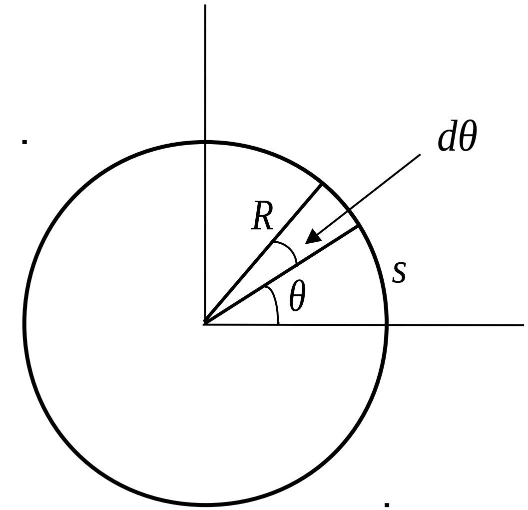
$$= r\left(-sen\theta, cos\theta\right)\frac{d\theta}{dt} = r\omega\hat{\theta}$$



Onde $\omega = d\theta/dt$ é denominada de velocidade angular. A velocidade é tangente à trajetória da partícula descrevendo o movimento circular.

Movimento Circular Uniforme

Outra derivação: relacionando deslocamento linear com angular



$$s = R\theta \quad \rightarrow \quad ds = R d\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = v = R\frac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad v = \omega R$$

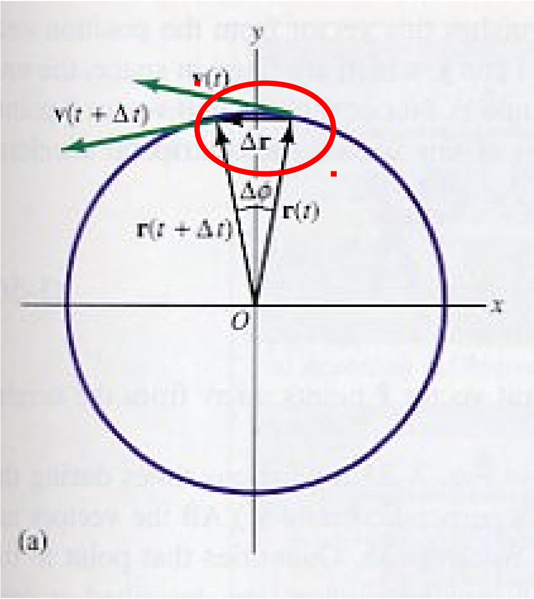
Se $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{cte}$: $\theta = \theta_0 + \omega t$ (Movimento circular uniforme)

Frequência e período: $f = \frac{1}{T}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\Rightarrow$ $\omega = 2\pi f$

Descrição do MCU

Coordenadas Polares:

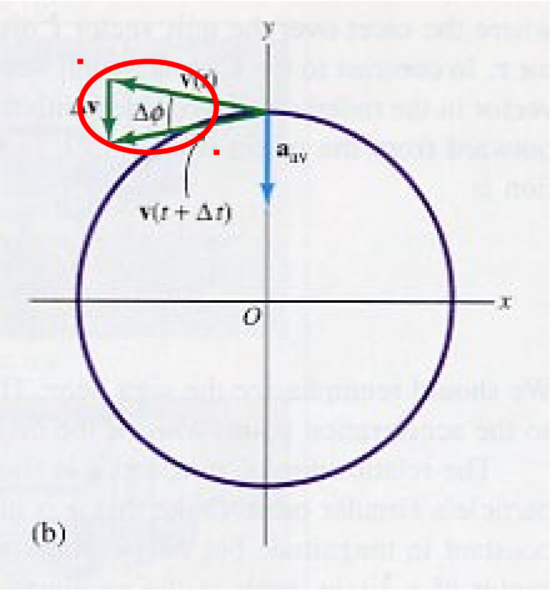
Aceleração:



Da figura:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

(Triângulos Semelhantes)



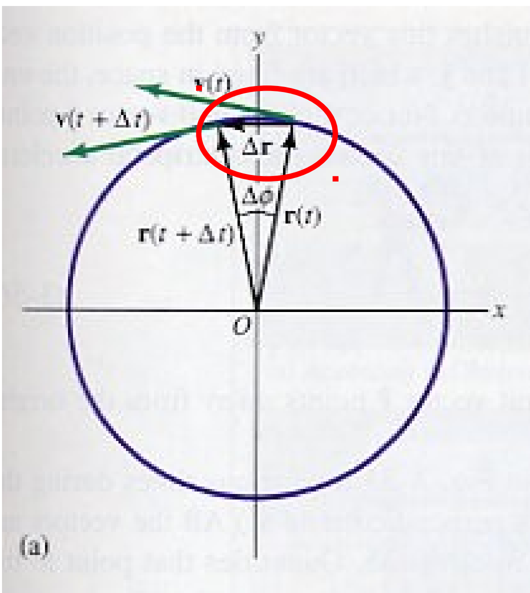
Aceleração média:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Descrição do MCU

Coordenadas Polares:

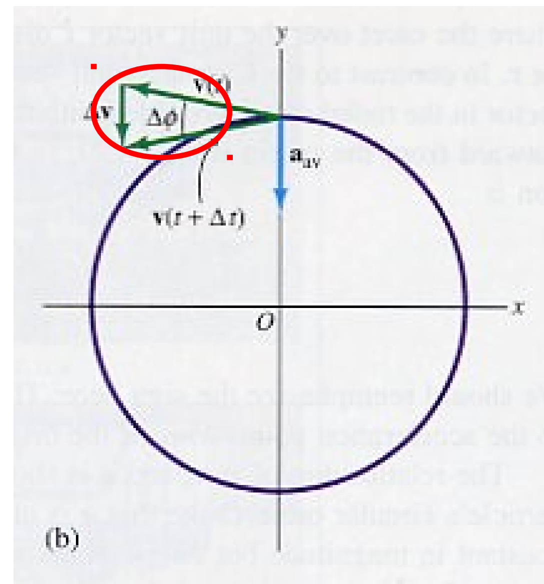
Aceleração:



Da figura:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

(Triângulos Semelhantes)



No limite $\Delta t \rightarrow 0$

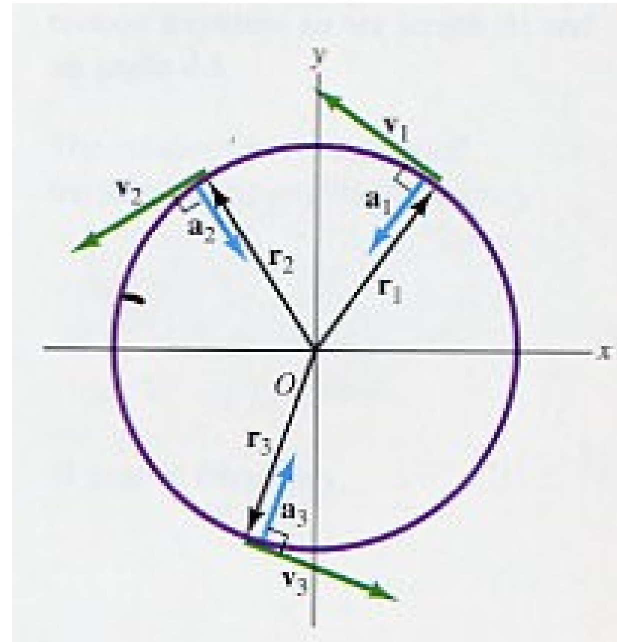
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \longrightarrow a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

(aceleração instantânea)

Descrição do MCU

Coordenadas Polares:

Aqui também podemos usar o vetor unitário para coordenadas circulares:



A aceleração fica:

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

Ou:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

(a aceleração tem a direção do vetor posição e aponta para o centro da circunferência. Esta é a aceleração centrípeta).

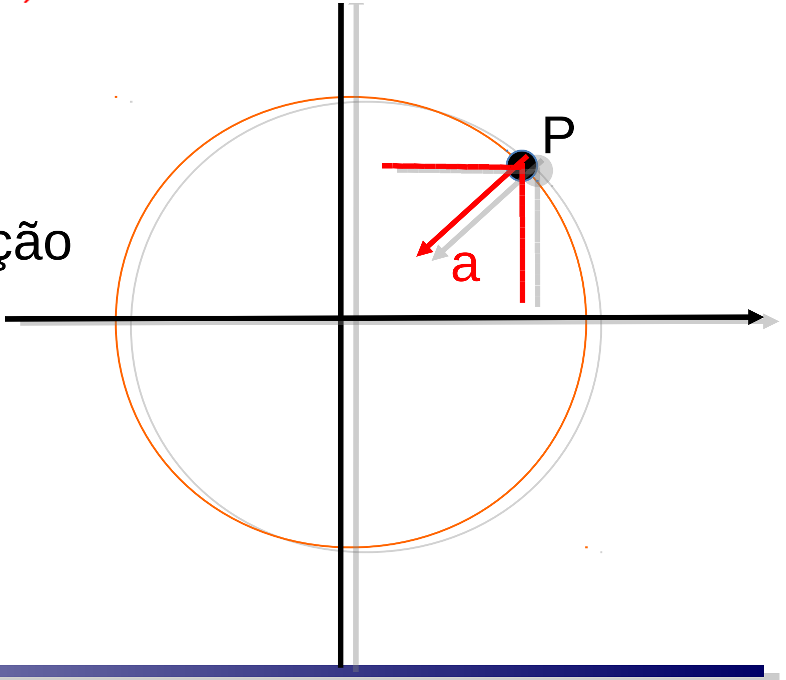
Descrição do MCU

Coordenadas cartesianas:

Aceleração:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\right)\hat{j} = -\frac{v}{r}v_y\hat{i} + \frac{v}{r}v_x\hat{i}$$

$$\vec{a}(t) = \left(-\frac{v^2}{r}cos\theta\right)\hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r}sen\theta\right)\hat{j}$$



Se v é constante, a aponta na mesma direção do raio r, para dentro da circunferência

$$|\vec{a}(t)| = a = \frac{v^2}{r}$$

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_x} = \tan\theta \Rightarrow \phi = \theta$$

Q3a. Em um MCU de raio R e velocidade v, calcule:

$$\vec{r}.\vec{v}/(rv)$$

Q3b. Em um MCU de raio R e velocidade v, calcule:

$$\vec{v}.\vec{a}/(va)$$

Q3c. Em um MCU de raio R e velocidade v, calcule:

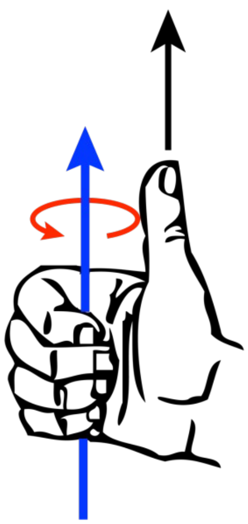
$$\vec{r}.\vec{a}/(ra)$$

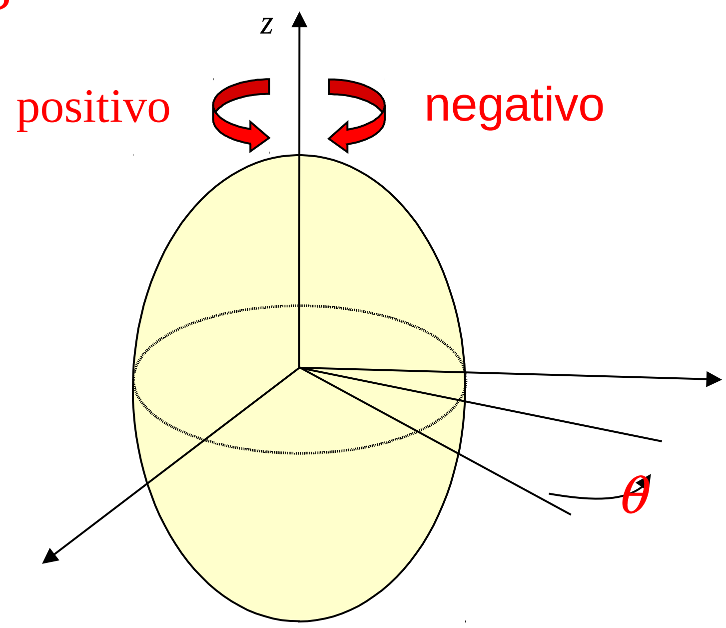
Variáveis rotacionais

a) Posição angular

A posição da linha de referência (fixa ao corpo) define o ângulo de rotação θ do corpo rígido em torno do eixo. θ é a posição angular do corpo rígido.

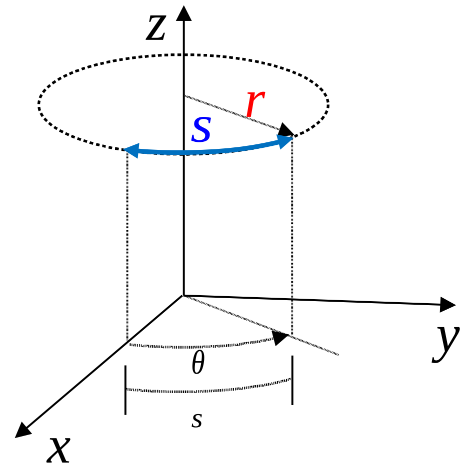
O sentido da rotação é dado pela regra da mão direita.





Variáveis rotacionais

- Cada ponto do corpo rígido executa um movimento circular de raio *r* em torno do eixo.



- distância percorrida pelo ponto:

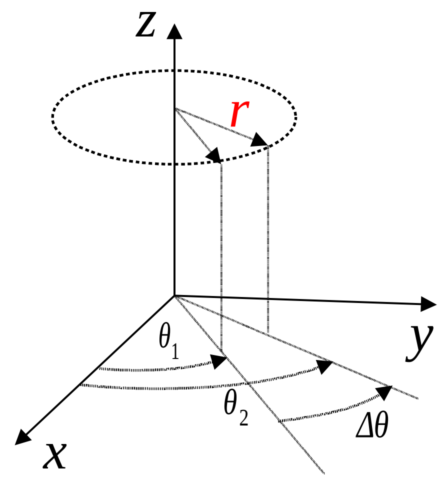
$$s = r\ \theta \quad (\theta \ \ \text{em} \ \ \text{radianos})$$

b) Deslocamento angular

- O deslocamento angular é definido como:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

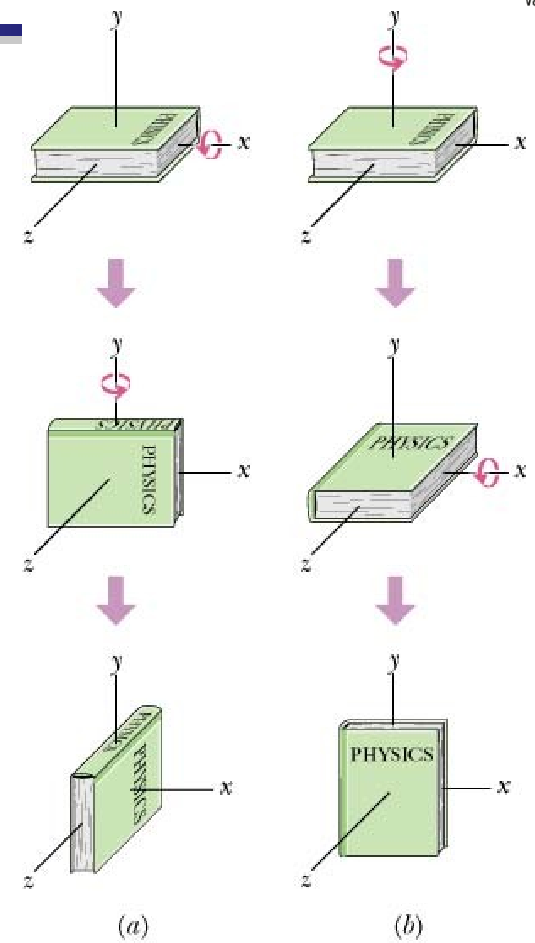
Esta variável tem módulo ($\Delta\theta$) , mas qual a direção e sentido a ela associados?



Vetor ?

Variáveis rotacionais

Não podemos associar um vetor a uma rotação, pois vetores devem obedecer às regras da soma vetorial, o que não acontece com as rotações.
Por exemplo, a soma vetorial é comutativa ($A+B=B+A$), mas duas rotações sucessivas feitas em ordens diferentes dão resultados diferentes!



O exemplo ao lado mostra duas rotações sucessivas de $\pi/2$ em torno dos eixos ***x*** e ***y*** nas duas ordens possíveis: o resultado final depende da ordem!

$$\Delta\theta_1\,\hat{x} + \Delta\theta_2\,\hat{y} \neq \Delta\theta_2\,\hat{y} + \Delta\theta_1\,\hat{x}$$

Então:

$\Delta\theta\hat{z}$ não é um vetor!

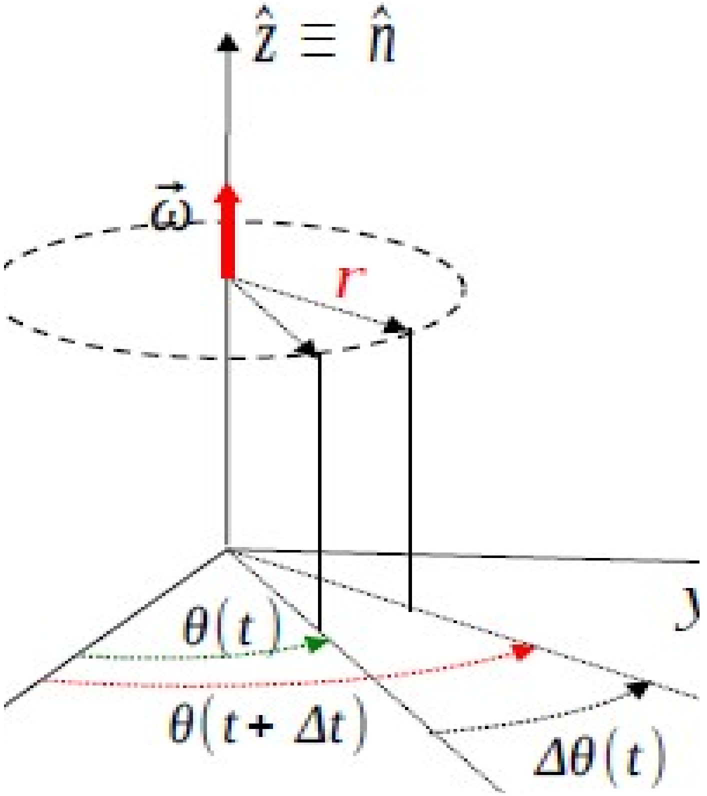
(a menos que os ângulos de rotação sejam infinitesimais, o que será o caso na discussão a seguir!).

Variáveis rotacionais

c) Velocidade angular

Deslocamento angular:

$$\Delta\theta(t) = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$$



Velocidade angular (escalar) média

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Velocidade angular instantânea (vetor)

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{n} = \frac{d\theta}{dt}\hat{n}$$

➡ A velocidade angular é uma característica do corpo como um todo e não somente de um ponto particular nele situado.

Deslocamento angular em torno de $\hat{n}$:

Questão 1

Um atleta corre uma corrida de 1500 metros, dando voltas na pista de atletismo. É correto afirmar que o vetor velocidade angular:

a) aponta no sentido anti-horário, para quem vê o mov. de cima

b) na direção da sua velocidade.

c) aponta para cima

d) aponta na direção radial

Exemplo 1

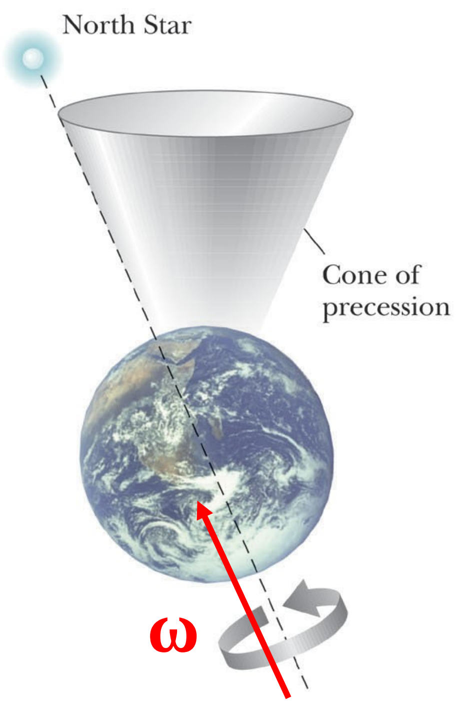
Cálculo da velocidade angular da Terra em torno do seu eixo.

A Terra completa uma revolução a cada 23h56min (dia sideral).

O módulo da sua velocidade angular é

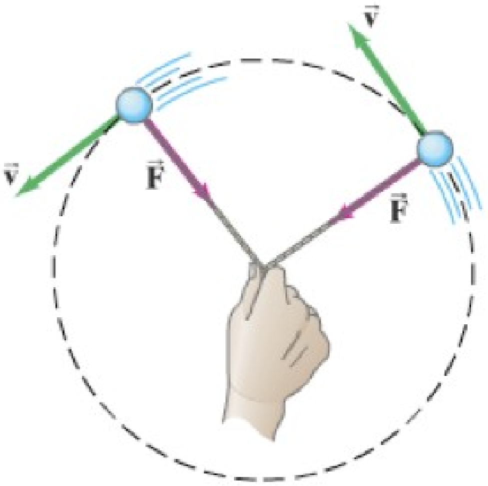
$$\omega = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{dia} = \frac{6,28\,\mathrm{rad}}{86160\,\mathrm{s}} = 7,23\times10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$$

e a sua direção aponta para o norte ao longo do eixo de rotação, cujo período de precessão é de aproximadamente 26.000 anos (analisaremos a questão da precessão mais tarde).



Forças no MCU

Pela 2ª lei de Newton, deve haver uma força no MCU, na **mesma direção da aceleração centrípeta**, cujo módulo vale:



$$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{r}\hat{r} \Rightarrow \vec{F}_c = m\vec{a}_c$$

A força resultante no MCU é o que dá origem à aceleração centrípeta. A esta força resultante dá-se o nome de **força centrípeta.**

No entanto, a **força centrípeta NÃO é uma força** a mais no movimento. **É apenas um nome** que se dá a força resultante no MCU.

Questão 5

Qual das seguintes forças nunca pode ser uma força centrípeta?

a) Normal

b) Tração

c) Peso

d) força de atrito

e) nenhuma das anteriores

Exemplos de MCU

Dedução da 3ª lei de Kepler (ou "pesando o Sol")

Supondo uma órbita aproximadamente circular: MCU

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2\frac{1}{r}$$

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM}r^3$$

$$r = 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$$

$$T = 365,3\,\mathrm{dias} = 3,16 \times 10^7\,\mathrm{s}$$

$$\boxed{M_{sol} = 1,99 \times 10^{30}\,kg}$$

A "pesagem" pode ser refeita usando-se dados de cada planeta conhecido - ou o caminho inverso !!!

Exemplos de MCU

“Pesando” a Terra:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM}$$

<u>Órbita da Lua:</u>

Raio médio: 382.000 km

Período: 27,3 dias (2,35 x 10^6 s)

M_T = 5,97 x 10^{24} kg

E as luas de Júpiter (Io, Europa, Ganimedes e Calisto)?

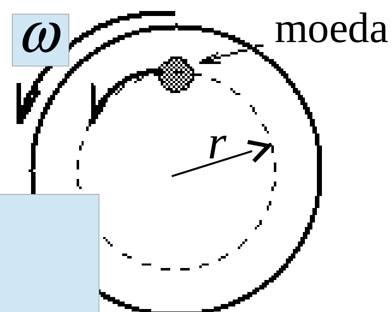
“Pesando” tudo... e determinando as densidades...

Notar a importância de se conhecer G !!!

Exemplos de MCU

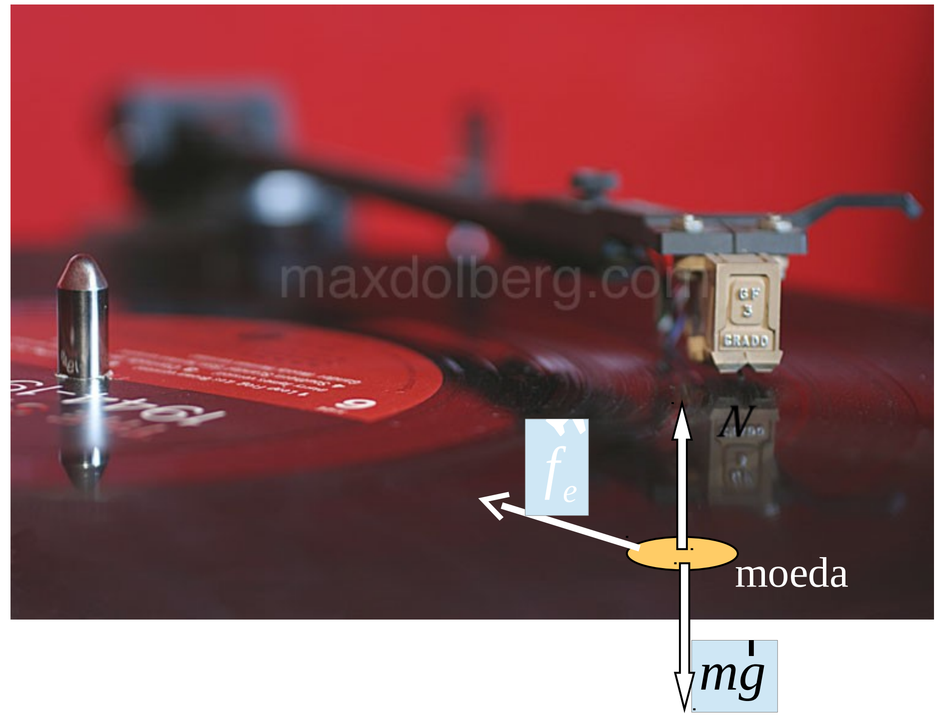
Atrito e Movimento Circular

Qual é a máxima velocidade angular do disco para que a moeda não deslize?



$$N - mg = 0$$

$$f_e \leq \mu_e N = \mu_e mg$$



Para que a moeda não deslize e caia do disco:

$$m\frac{v^2}{r} = f_e \leq \mu_e mg$$

Outro jeito para medir o coeficiente de atrito!

$$\frac{v^2}{r} = \omega^2 r \leq \mu_e g$$

Questão 6

Duas moedas idênticas são colocadas sobre um disco de vinil, que lentamente aumenta sua velocidade de rotação. Uma é colocada a um raio R1 e outra a um raio R2 > R1. Qual moeda descola primeiro?

a) A moeda em R1.

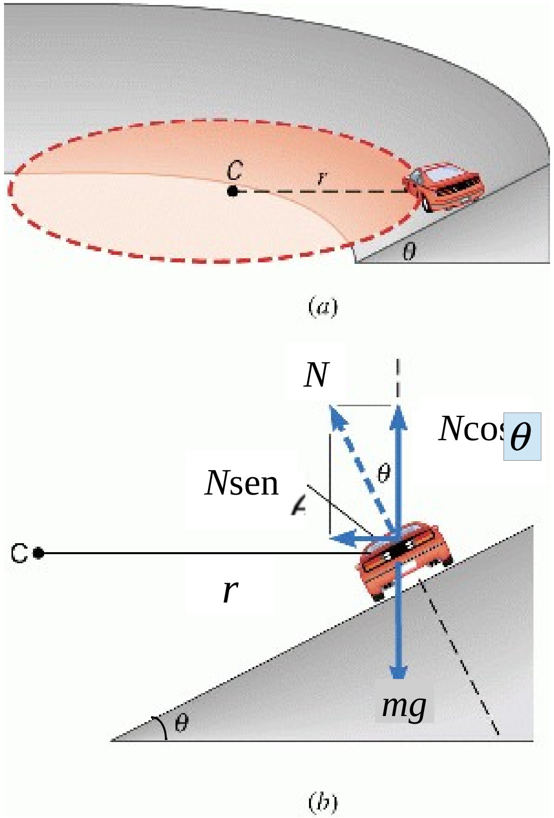
b) A moeda em R2.

c) As duas se descolam no mesmo instante.

Exemplos de MCU

Força Normal e Movimento Circular

Um carro faz uma curva numa estrada sem atrito, superelevada de um ângulo θ. Qual é a velocidade do carro para que ele não derrape?



Componente *x* (centrípeta):

$$N\,\mathrm{sen}\theta = mv^2/r$$

Componente *y* (vertical):

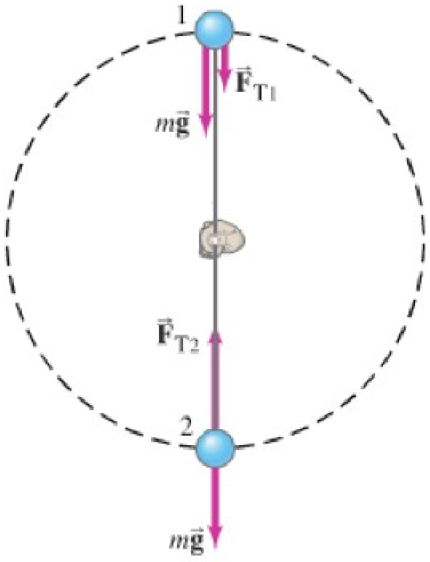
$$N\cos\theta = mg$$

(1)÷(2):

$$\mathrm{tg}\theta = v^2/(gr) \Rightarrow v = \sqrt{gr\,\mathrm{tg}\theta}$$

“Gravidade Zero” no Movimento Circular

Imagine um balde com água preso numa corda e descrevendo um movimento circular como o da figura ao lado. No ponto mais alto da trajetória,



$$mg + T = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

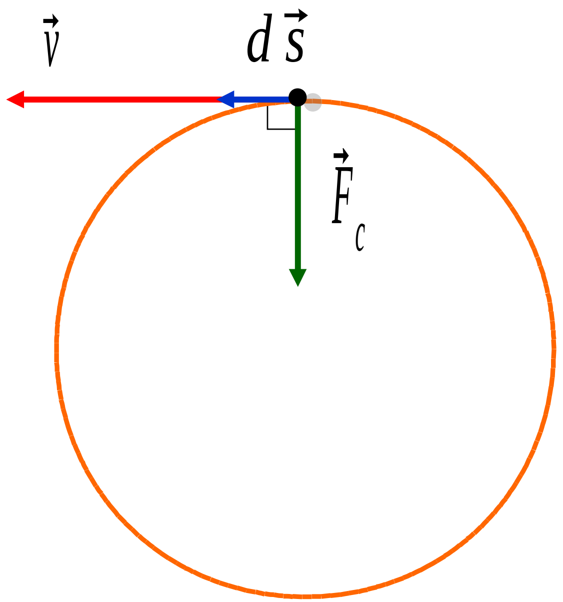
$$T = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

Se $\frac{v^2}{R} = g$, então $T = 0$!

A velocidade crítica para $T = 0$ faz com que o balde com água flutuasse no ponto mais alto (ou seja, a água não cai!) O período de rotação deve ser tal que: $Periodo = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

Trabalho em Movimento circular uniforme

Ausência de trabalho no movimento circular uniforme



A força centrípeta não realiza trabalho:

$$dW = \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{, pois} \quad \vec{F}_c \perp d\vec{s}$$

Ou, pelo teorema do trabalho-energia cinética:

$$\Delta K = W = 0$$

$$\Downarrow$$

$$|\vec{v}| = cte$$

A força $\vec{F}_c$ altera apenas a direção do vetor velocidade, mantendo o seu módulo inalterado.

Movimento Circular não uniforme

IFGW Instituto de Física Gleb Wataghin

c) Aceleração angular

Variação da velocidade angular ⟶ $\Delta\omega = \omega(t+\Delta t) - \omega(t)$

Aceleração angular média ⟶ $\bar{\alpha} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Aceleração angular instantânea ⟶ $\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt}$

A aceleração angular instantânea é um vetor paralelo a ω quando o eixo de rotação é fixo!

Velocidade angular em função de α na direção fixa ($\hat{n}$): ⟶ $\omega(t_2) - \omega(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t)\, dt$

Questão 2

Um atleta que corre uma corrida de 1500 metros, começa a cansar e diminuir sua velocidade. É correto afirmar que o vetor aceleração angular:

a) aponta para baixo

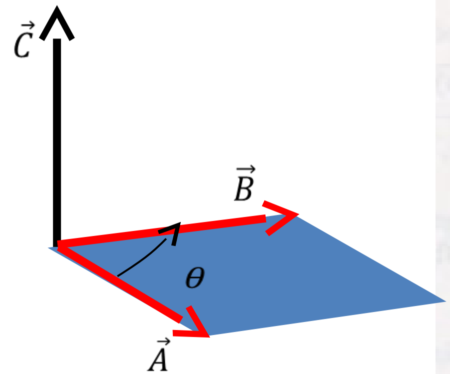
b) aponta na direção da sua velocidade.

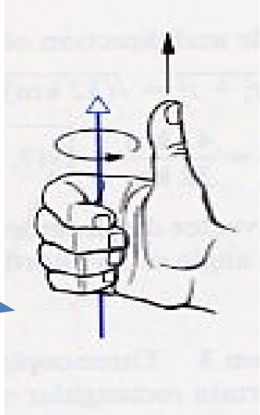
c) aponta para cima

d) aponta na direção radial

Parentesis: Produto vetorial de dois vetores

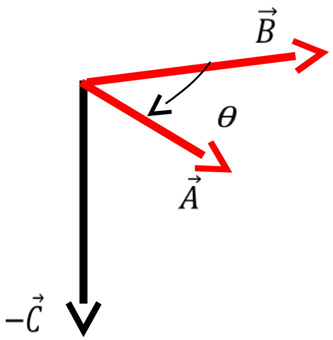
Definição: o produto vetorial de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ representado por $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, é um vetor, tal que:

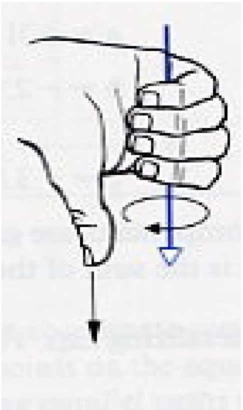




i) a direção de $\vec{C}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$;

ii) o seu sentido obedece à regra da mão direita (figura) ou do saca-rolhas.





Produto vetorial usando componentes

O produto vetorial também é distributivo. Podemos escrevê-lo em termos das suas componentes cartesianas como:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$
$$= A_x B_x(\hat{i} \times \hat{i}) + A_x B_y(\hat{i} \times \hat{j}) + ...$$

O produto vetorial e o determinante

Uma forma de visualizar o produto vetorial de dois vetores é através do determinante da matriz formada pelos versores e pelas componentes cartesianas dos vetores ao longo das suas linhas:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Propriedades do produto vetorial

O produto vetorial não é comutativo:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

O **produto vetorial** entre dois vetores **é um vetor** perpendicular ao plano formado pelos 2 vetores.

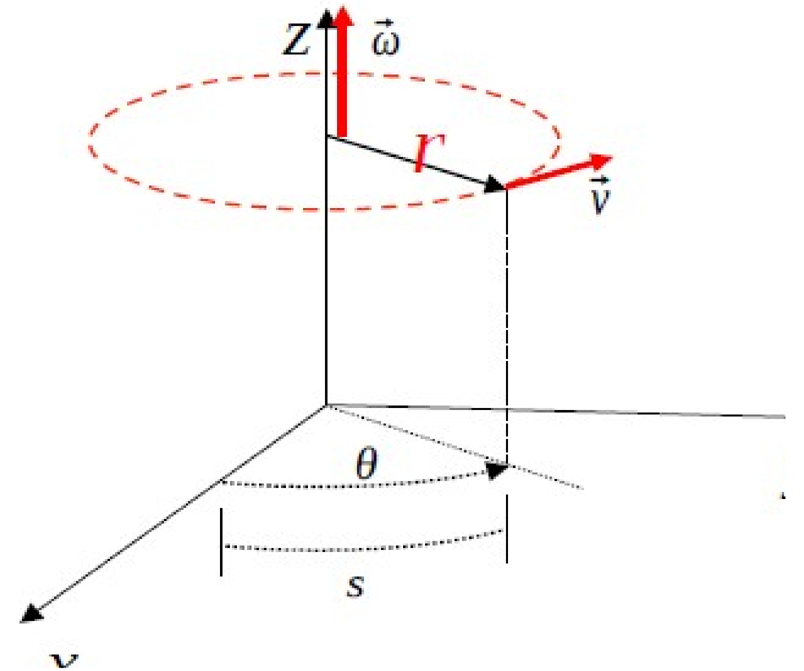
Voltando ao mov. circular:

- Posição:

$$s = r\,\theta$$

- Velocidade:

$$v = \omega\, r$$



Vetorialmente: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$