UNICAMP

GABARITO
MA211 – EXAME
Quinta-feira (tarde), 15/01/2014.

*Para correção, cada símbolo "$\checkmark$**x**" o item que o antecede vale* **x** *pontos.*

Resolução da Questão 1. (a) Pela regra da cadeia e do produto (lembrando que $x/y = xy^{-1}$), temos que

$$g_x(x,y) = \psi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}\checkmark\mathbf{0,3} \quad \text{e} \quad g_y(x,y) = \psi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}.\checkmark\mathbf{0,3} \tag{1}$$

Substituindo as fórmulas acima no termo do lado direito da equação que queremos verificar concluímos que

$$xg_x(x,y) + yg_y(x,y) = x\left[\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}\right] = y\left[\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}\right] = \frac{x}{y}\psi'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}\psi'\left(\frac{x}{y}\right) = 0.\checkmark\mathbf{0,2} \tag{2}$$

(b) O elipsoide e a esfera podem ser escritos como $F(x,y,z) = 9$ e $G(x,y,z) = 0$, em que

$$F(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 \quad \text{e} \quad G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24.$$

O plano tangente à superfície de nível $F(x,y,z) = k_1$ em um ponto (x_0,y_0,z_0) é dado por

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0. \tag{3}$$

Nesta questão, as derivadas parciais de F são

$$F_x(x,y,z) = 6x, \quad F_y(x,y,z) = 4y \quad \text{e} \quad F_z(x,y,z) = 2z.\checkmark\mathbf{0,3} \tag{4}$$

Assim, em $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,2)$, temos

$$F_x(1,1,2) = 6, \quad F_y(1,1,2) = 4 \quad \text{e} \quad F_z(1,1,2) = 4. \tag{5}$$

Portanto, o plano tangente ao elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ em $(1,1,2)$ é

$$6(x-1) + 4(y-1) + 4(z-2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 6x + 4y = 4z = 18.\checkmark\mathbf{0,2} \tag{6}$$

Analogamente, o plano tangente à superfície de nível $G(x,y,z) = k_2$ em um ponto (x_0,y_0,z_0) é dado por

$$G_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + G_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + G_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0. \tag{7}$$

Nesta questão, as derivadas parciais de G são

$$G_x(x,y,z) = 2x - 8, \quad G_y(x,y,z) = 2y - 6 \quad \text{e} \quad G_z(x,y,z) = 2z - 8.\checkmark\mathbf{0,3} \tag{8}$$

Assim, em $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,2)$, temos

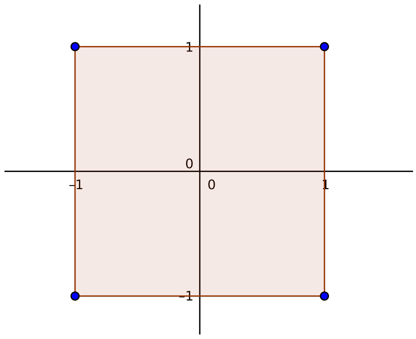
$$G_x(1,1,2) = -6, \quad G_y(1,1,2) = -4 \quad \text{e} \quad G_z(1,1,2) = -4. \tag{9}$$

Portanto, o plano tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ em $(1,1,2)$ é

$$-6(x-1) - 4(y-1) - 4(z-2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 6x + 4y = 4z = 18.\checkmark\mathbf{0,2} \tag{10}$$

Como ambas superfícies possuem o mesmo plano tangente em $(1,1,2)$, elas se tangenciam nesse ponto. $\checkmark$**0,2**

Resolução da Questão 2. Vamos encontrar os pontos críticos de f na região D, que corresponde ao quadrado mostrado na figura abaixo.



Primeiro, no interior do quadrado (excluindo as arestas), devemos ter $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Nesta questão, temos

$$\nabla f(x,y) = (2x + 2xy, 2y + x^2). \tag{11}$$

Desta forma, encontramos o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x(1+y) = 0, \\ x^2 + 2y = 0, \end{cases} \tag{12}$$

cujas soluções são $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$. Como os últimos dois pontos não pertencem ao quadrado D, os pontos críticos de f no interior do quadrado é $(0,0)$. O valor da função nesse ponto é $f(0,0) = 4$. ✓**0,4**

Vamos agora avaliar a função na fronteira do quadrado. Primeiramente, vamos considerar o interior de suas quatro arestas (sem os vértices):

(i) $x = 1$ e $-1 < y < 1$: Nesse caso, temos a função $f_1(y) = f(1,y) = y^2 + y + 5$. Como $f_1'(y) = 2y + 1 = 0$ implica $y = -1/2$, temos que o ponto $(1, -1/2)$ é um candidato a extremo da função. O valor da função nesse ponto é $f(1, -1/2) = 19/4$. ✓**0,2**

(ii) $x = -1$ e $-1 < y < 1$: Nesse caso, temos a função $f_2(y) = f(-1,y) = y^2 + y + 5$. Como $f_2'(y) = 2y + 1 = 0$ implica $y = -1/2$, temos que o ponto $(-1, -1/2)$ é um candidato a extremo da função. O valor da função nesse ponto é também $f(-1, -1/2) = 19/4$. ✓**0,2**

(iii) $-1 < x < 1$ e $y = 1$: Nesse caso, temos a função $f_3(x) = f(x,1) = 2x^2 + 5$. Como $f_3'(x) = 4x = 0$ implica $x = 0$, temos que o ponto $(0,1)$ é um candidato a extremo da função. O valor da função nesse ponto é $f(0,1) = 5$. ✓**0,2**

(iv) $-1 < x < 1$ e $y = -1$: Nesse caso, temos a função constante $f_4(x) = f(x,-1) = 5$. ✓**0,2**

Finalmente, devemos avaliar a função nos vértices $(1,1), (1,-1), (-1,1)$ e $(-1,-1)$ do quadrado. Nesses pontos temos $f(1,1) = 7$, $f(-1,1) = 7$, $f(1,-1) = 5$ e $f(-1,-1) = 5$. ✓**0,4**

Comparando o valor da função nos 9 pontos obtidos, concluímos que o mínimo absoluto de f no quadrado é 4, obtido em $(0,0)$, enquanto que o máximo absoluto de f é 7 obtido nos pontos $(1,1)$ e $(-1,1)$. ✓**0.4**

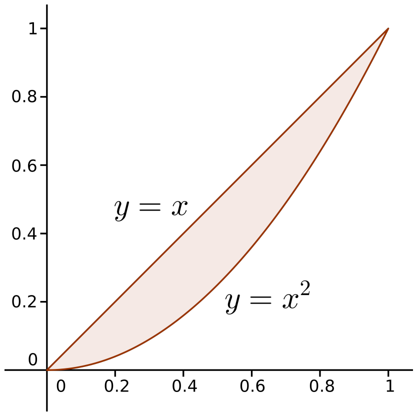
Resolução da Questão 3. Usando coordenas esféricas, o volume da esfera sólida que está entre os dois conces é dado pela integral tripla

$$V = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark 0,4} \underbrace{\int_{\pi/3}^{2\pi/3}}_{\checkmark 0,4} \underbrace{\int_0^{a}}_{\checkmark 0,4} \underbrace{\rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta}_{\checkmark 0,4} = \frac{2}{3}\pi a^3 . \checkmark \mathbf{0,4} \tag{13}$$

Resolução da Questão 4. Primeiramente, escrevemos $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$, em que

$$P(x,y) = xy \quad \text{e} \quad Q(x,y) = y^2. \tag{14}$$

Observe que a partícula move-se no sentido horário ao longo da fronteira da região D mostrada na figura abaixo:



Pelo teorema de Green, o trabalho realizado pelo campo de força satisfaz:

$$W = -\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \checkmark \mathbf{0,4}, \tag{15}$$

em que o sinal de menos foi adicionado porque o teorema de Green vale para curvas percorridas no sentido anti-horário e aqui a curva é percorrida no sentido oposto, ou seja, sentido horário. Mas,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x. \tag{16}$$

Logo,

$$W = -\iint_D (-x) dA. \checkmark \mathbf{0,6} \tag{17}$$

Calculando o trabalho como uma integral iterada, encontramos

$$W = \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\int_{x^2}^x}_{\checkmark 0,3} x dy dx = \frac{1}{12}. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{18}$$

Resolução da Questão 5. Pelo teorema de Stokes,

$$I = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} d\mathbf{r}, \checkmark \mathbf{0,4} \tag{19}$$

em que C é a curva fronteira do cilindro com seu topo, ou seja, C é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$, com $z = 0$, que corresponde ao fundo da superfície S. Usando coordenadas cilíndricas, temos $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$ e $z = 0$, para $0 \leq t \leq 2\pi$. Logo, a curva C é descrita por

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \checkmark \mathbf{0,6} \tag{20}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \checkmark \mathbf{0,2} \tag{21}$$

e o campo vetorial $\mathbf{F}$ é escrito como

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = -a \operatorname{sen} t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + a^2\cos^2 t\mathbf{k}. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{22}$$

Pela definição de integral de linha, temos

$$I = \oint_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^{2\pi} (a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t)dt = 2\pi a^2. \checkmark \mathbf{0,6} \tag{23}$$