Física Geral I
F -128

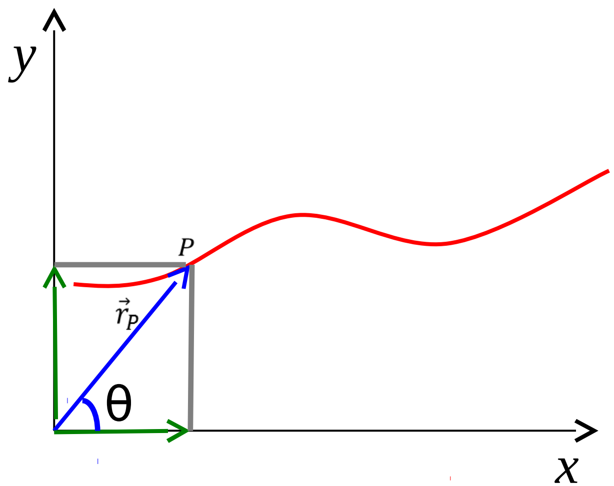
Aula 03
Movimento em 2d e 3d

Plano da Aula

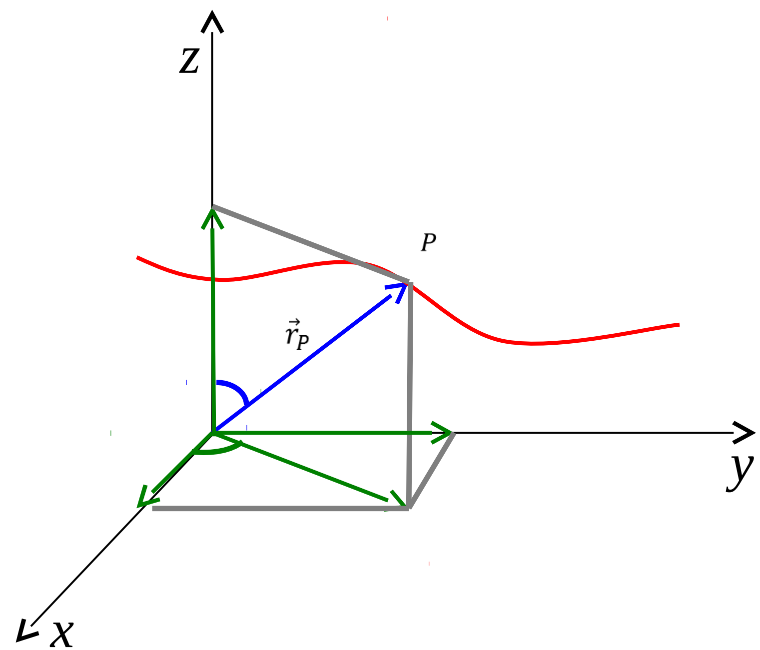
- Deslocamento
- Velocidade
- Aceleração

Posição

No plano (2D)



No espaço (3D)



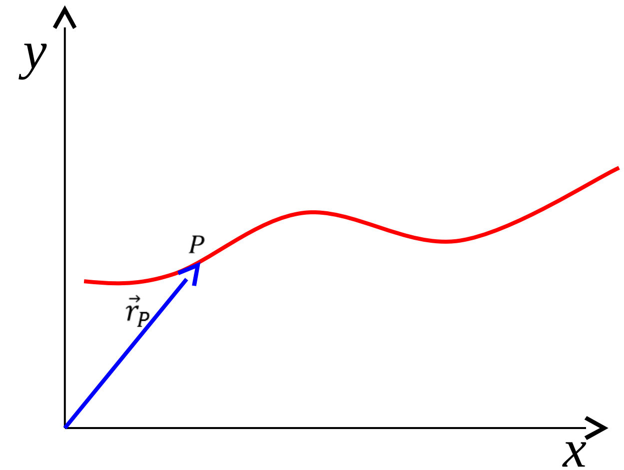
Para determinar completamente a posição de uma partícula, precisamos de mais do que um número; precisamos também da direção → a posição é um vetor!

O Vetor Posição

No plano (2D)

Devido ao movimento, as componentes do vetor variam com o tempo:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$



Exemplo: Se uma partícula se move no plano de forma que:

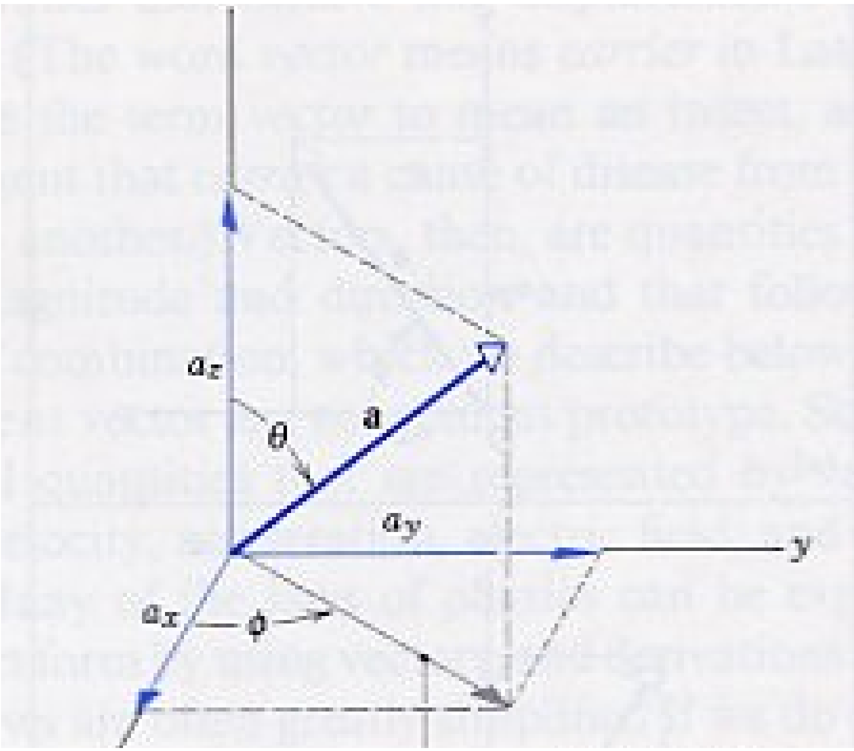
$$\vec{r}(t) = (2t^3 - 3t^2)\hat{i} + (t^2 - 2t + 1)\hat{j} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 2t^3 - 3t^2 \\ y(t) = t^2 - 2t + 1 \end{cases}$$

Em t = 2 s, a partícula estará em

$$\vec{r}(t = 2s) = 4\hat{i} + 1\hat{j}$$

O Vetor Posição

No espaço (3D)



$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Trajetória

A trajetória é o caminho percorrido por um objeto (planeta , cometa, foguete, carro..). Qualquer ponto da trajetória pode ser descrito pelo vetor posição que denotamos por r(t). O "desenho" da trajetória pode ser encontrado escrevendo uma relação entre as componente de r.

Exemplo simples: Supondo que

$$x(t) = A.t \quad ; \quad y(t) = Bt^2 + C$$

Podemos encontrar uma relação entre x(t) e y(t):

$$y = \frac{B}{A^2}x^2 + C \longrightarrow \textit{parábola}$$

O Vetor Deslocamento

O deslocamento de um objeto num intervalo de tempo (t_2-t_1) é a diferença entre a posição final ($\boldsymbol{r}_2$) no instante t_2 e a posição inicial ($\boldsymbol{r}_1$) em t_1.

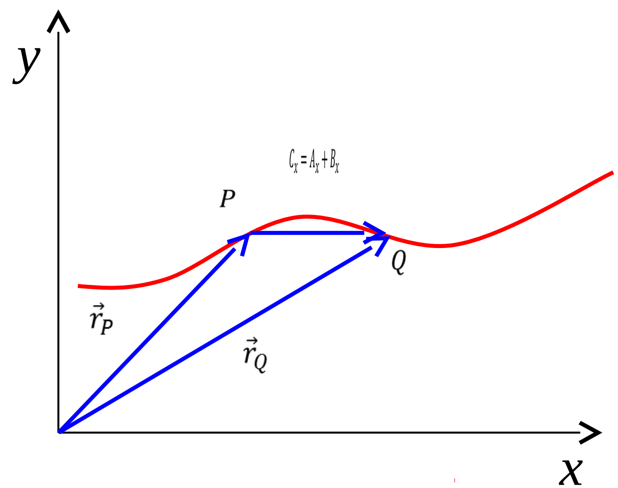
$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}\end{aligned}$$

Exemplo: Para a partícula do exemplo anterior, o deslocamento nos primeiros 2 segundos é

$$\Delta r(t) = \Delta x(t)\hat{i} + \Delta y(t)\hat{j}$$

$$\Delta r(t) = \left[x_2(t) - x_1(t)\right]\hat{i} + \left[y_2(t) - y_1(t)\right]\hat{j}$$

$$\Delta r(t) = 4\hat{i}$$



Questão 2:

Dadas as afirmações abaixo

1- O deslocamento de um objeto em um certo intervalo de tempo depende da escolha da origem de seu sistema de coordenadas.

2- O deslocamento de um objeto em um certo intervalo de tempo aponta na direção da posição deste objeto no início deste intervalo.

É correto afirmar:

a) ambas estão corretas
b) ambas estão erradas
c) a primeira está correta, e a segunda errada
d) a primeira está errada, e a segunda correta

Velocidade Média

$$\vec{v_m} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\hat{j}$$

$$\vec{v_m} = v_{m,x}\hat{i} + v_{m,y}\hat{j}$$

** Se $\Delta x > 0 \Rightarrow v > 0$ (movimento à direita, ou no sentido de crescimento de *x*) e se $\Delta x < 0 \Rightarrow v < 0$ (movimento para a esquerda, ou no sentido do decréscimo de *x*). O mesmo raciocínio se aplica para a componente *y*.

Questão 2 modificada:

1- A velocidade média de um objeto em um certo intervalo de tempo depende da escolha da origem de seu sistema de coordenadas.

2- A velocidade média de um objeto em um certo intervalo de tempo aponta na direção da posição deste objeto no início deste intervalo.

É correto afirmar:

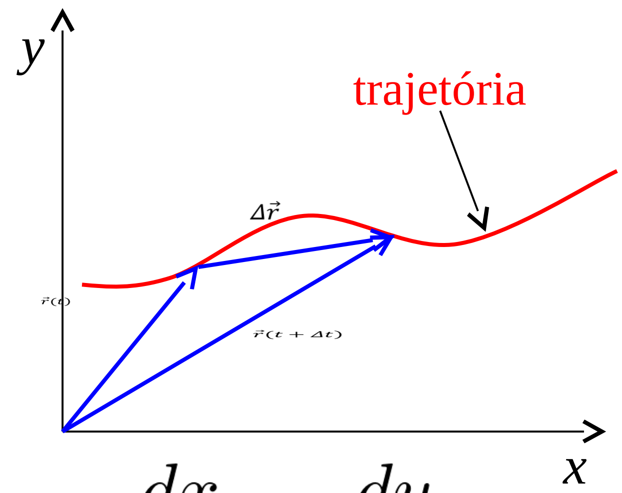
a) ambas estão corretas
b) ambas estão erradas
c) a primeira está correta, e a segunda errada
d) a primeira está errada, e a segunda correta

Velocidade Instantânea

IFGW Instituto de Física Gleb Wataghin

O vetor velocidade instantânea é:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Em termos de componentes cartesianas: $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$

<u>Decorrências da definição:</u>

a) é sempre tangente à trajetória;

b) coincide com o módulo da velocidade escalar definida anteriormente.

Aceleração

Novamente como no caso 1D, a aceleração média é:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\jmath}$$

A aceleração instantânea é:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (2) \qquad \text{ou:} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Em termos de componentes cartesianas:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} \qquad \text{ou:} \qquad \vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$$

Decorrências da definição (2):

a) a aceleração resulta de *qualquer variação* do vetor velocidade (quer seja do módulo, da direção ou do sentido de $\vec{v}$);

b) O vetor aceleração está sempre voltado para o "interior" da trajetória.

Questão 2 modificada (de novo!):

1- A aceleração de um objeto em um certo intervalo de tempo depende da escolha da origem de seu sistema de coordenadas.

2- A aceleração de um objeto em um certo intervalo de tempo aponta na direção da velocidade deste objeto no início deste intervalo.

É correto afirmar:

a) ambas estão corretas
b) ambas estão erradas
c) a primeira está correta, e a segunda errada
d) a primeira está errada, e a segunda correta

O Problema inverso

Conhecida a aceleração $\vec{a}(t)$

podemos integrá-la e obter a velocidade:

$$\vec{v}(t)-\vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\,dt'$$

que, se integrada, nos fornece o deslocamento:

$$\vec{r}(t)-\vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt'$$

Este processo deve ser efetuado para cada componente cartesiana do vetor considerado.

observação:

vetor = vetor, escalar = escalar

$$\vec{v} = 10\, m/s$$ INCORRETO!

$$v = (10m/s)\ \hat{i}$$ INCORRETO!

$$a = \frac{d\vec{v}}{dt}$$ INCORRETO!

$$\vec{r} = \int v(t)dt$$ INCORRETO!

Lançamento de projéteis

$$\vec{a} = 0\hat{i} - g\hat{j}$$

Velocidade constante em ***i***

Aceleração constante em ***j***

componente *x* de $\vec{r}$

$$x = x_0 + v_x t$$

componente *x* de $\vec{v}$

$$v_x = v_{0x} = cte$$

componente *y* de $\vec{r}$

$$y = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

componente *y* de r

$$v_y = v_{0y} - gt$$

http://www.youtube.com/watch?v=NO9c9EM39GM

Lançamento de projéteis

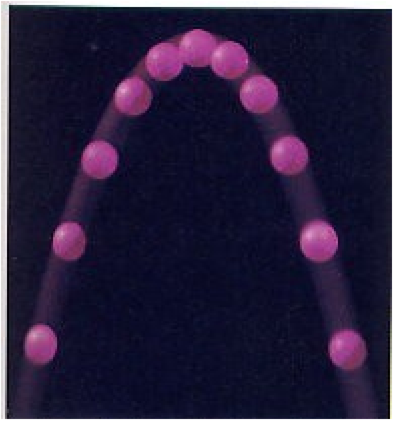
Se tomamos $x_0 = y_0 = 0$ (saindo da origem):

de $x = v_{0x}t$, temos: $t = x/v_{0x}$

Substituindo t na equação para y encontramos a equação da trajetória:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{ox}^2}x^2$$

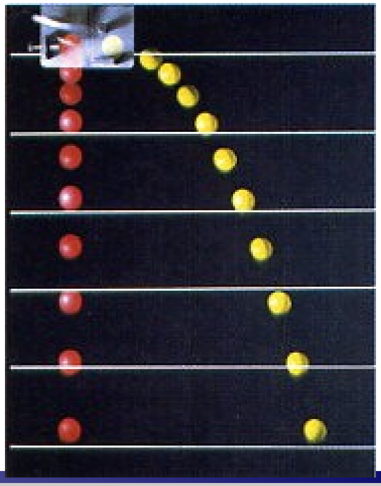
(Equação de uma parábola !)



Fotografia estroboscópica do movimento parabólico

O movimento na direção y não depende da velocidade v_x. Na figura ao lado, duas bolas são jogadas sob a ação da gravidade. A vermelha é solta ($v_{0y}=0$) e a amarela tem velocidade inicial horizontal v_{0x}.

Em qualquer instante elas estão sempre na mesma posição vertical!



Q1a. Qual direção melhor representa a **aceleração** do objeto no ponto B?

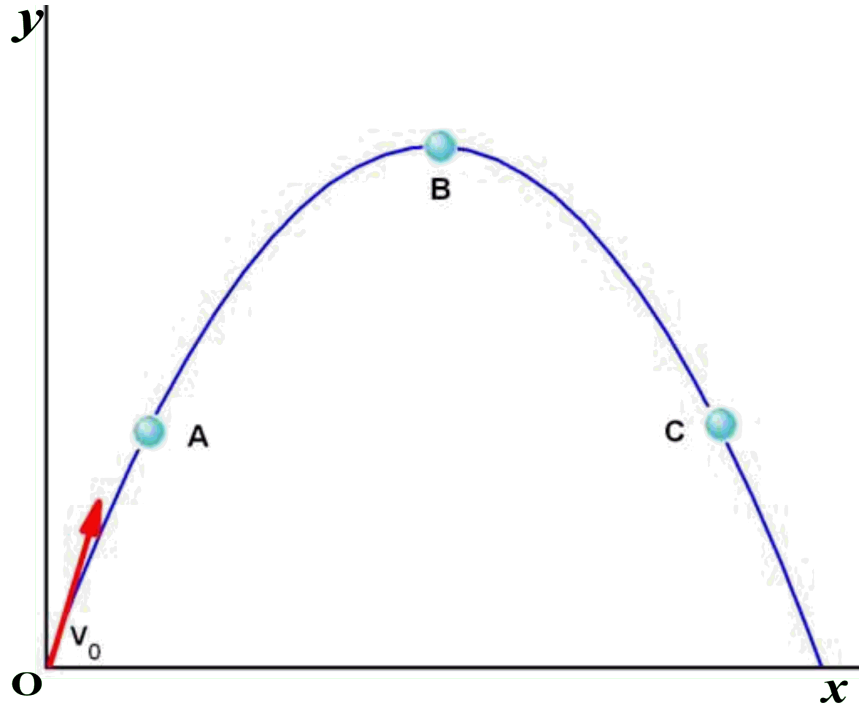
a) $\rightarrow$

b) $\downarrow$

c) $\nearrow$

d) $\uparrow$

e) A aceleração é nula.



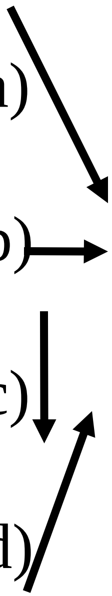
Q1b. Qual direção melhor representa a direção da **velocidade** do objeto no ponto B?

a)

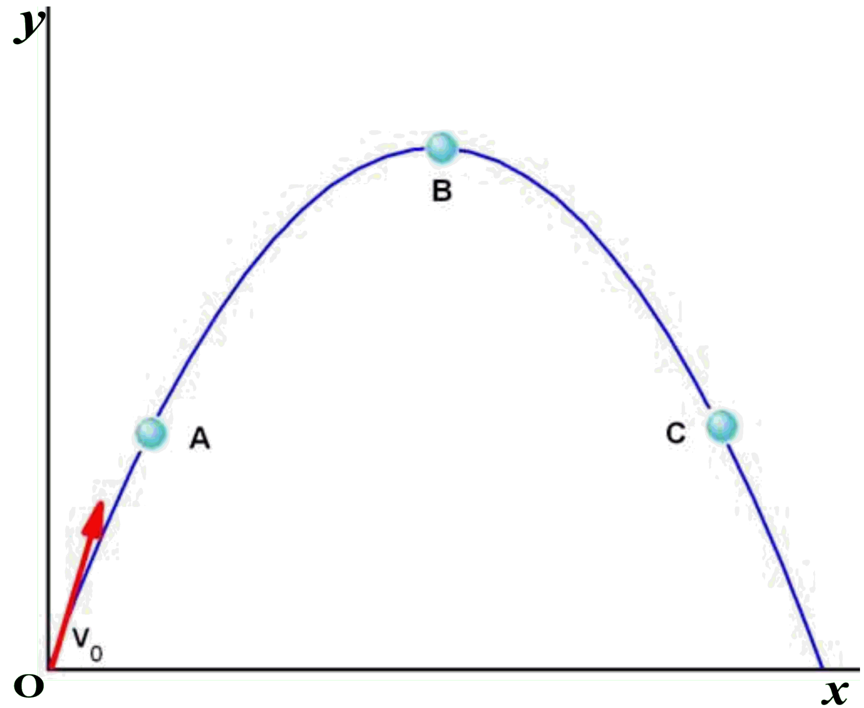
b)

c)

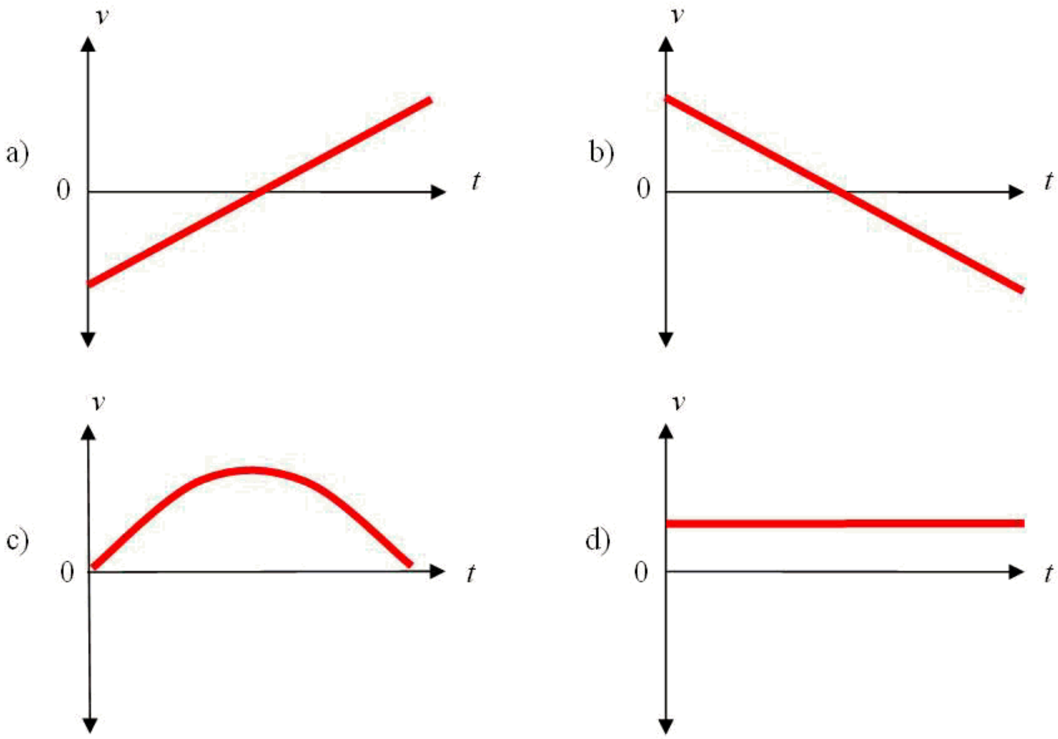
d)

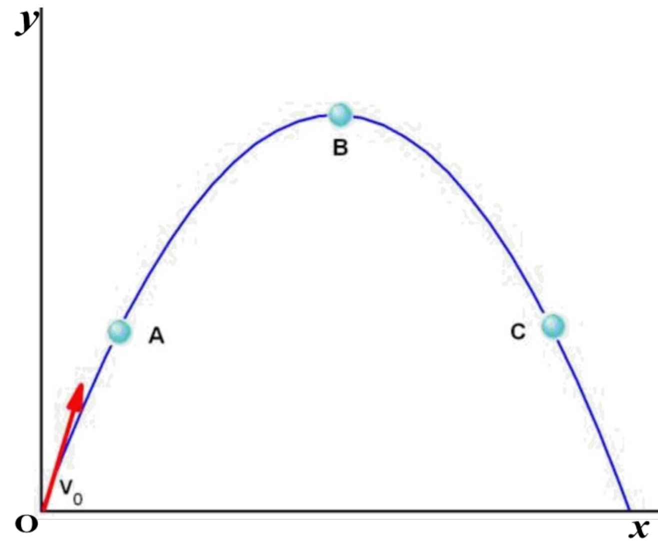


e) A velocidade é nula

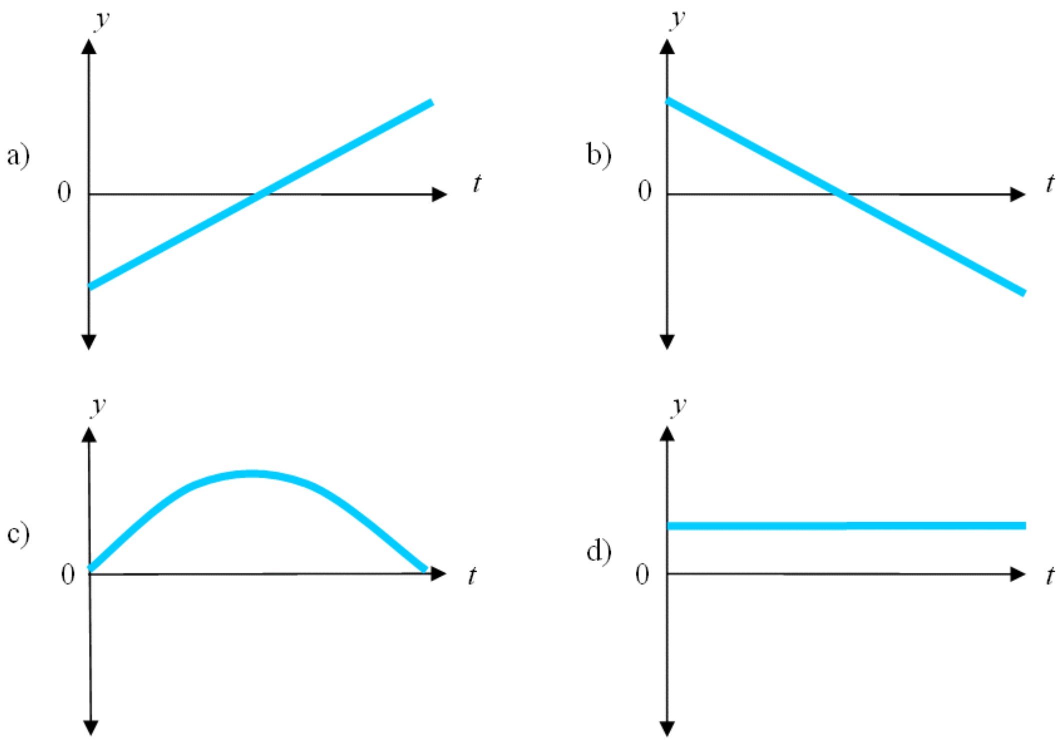


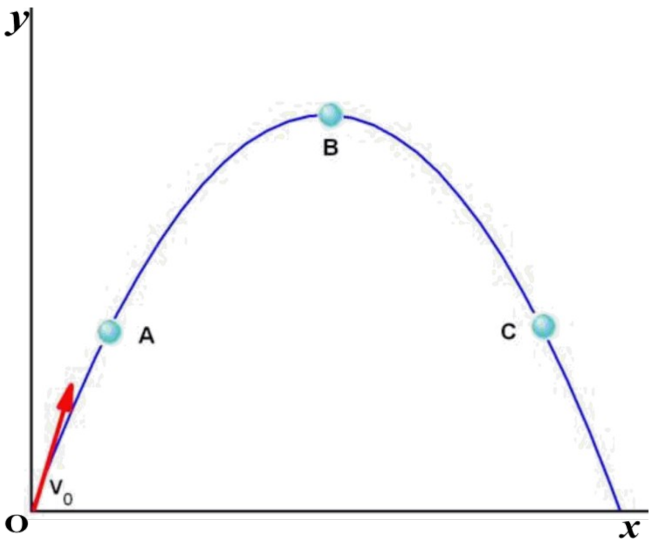
Q1c. Qual dos gráficos melhor representam a velocidade em y do objeto ao longo da trajetória?





Q1d. Qual dos gráficos melhor representa a posição em y do objeto ao longo da trajetória?



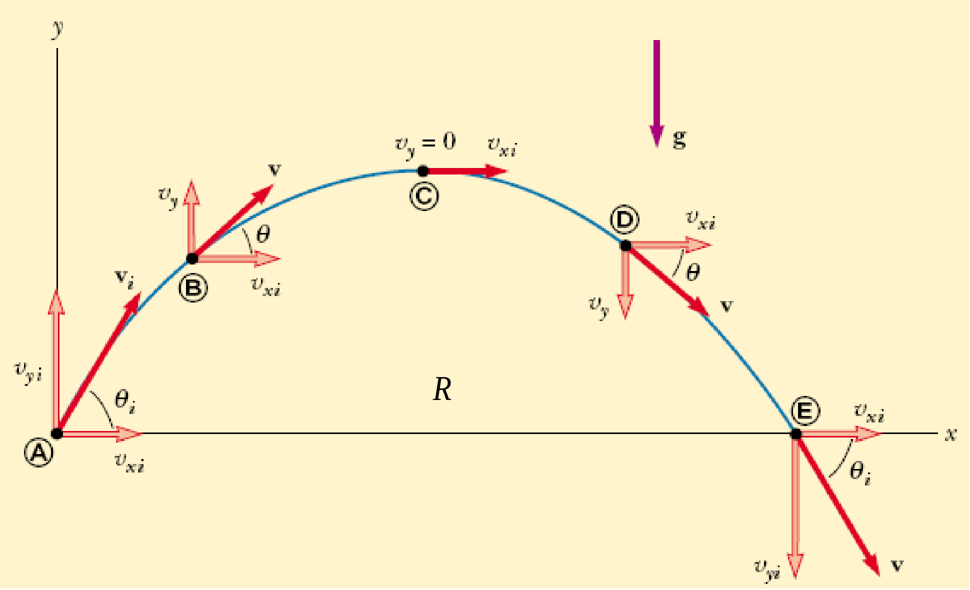


Lançamento de projéteis

Objeto lançado com velocidade $\vec{v}_0$ $(v_{0x} \neq 0, v_{0y} \neq 0)$, formando um ângulo θ_0 com a horizontal.

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = \text{cte}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 sen\theta_0 - gt$$



- Tempo para atingir altura máxima *h* (quando $v_y = 0$):

$$t_h = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g}$$

- Altura máxima *h* :

$$h = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 t_h - \frac{1}{2} g t_h^2 = \frac{\left(v_0 \operatorname{sen}\theta_0\right)^2}{2g}$$

Note que o movimento é simétrico: o corpo leva um tempo t_h para subir e o mesmo tempo t_h para voltar ao mesmo nível.

Lançamento de projéteis

Alcance R de um projétil

Distância horizontal percorrida até o objeto voltar à altura inicial, $R = x(2t_h)$

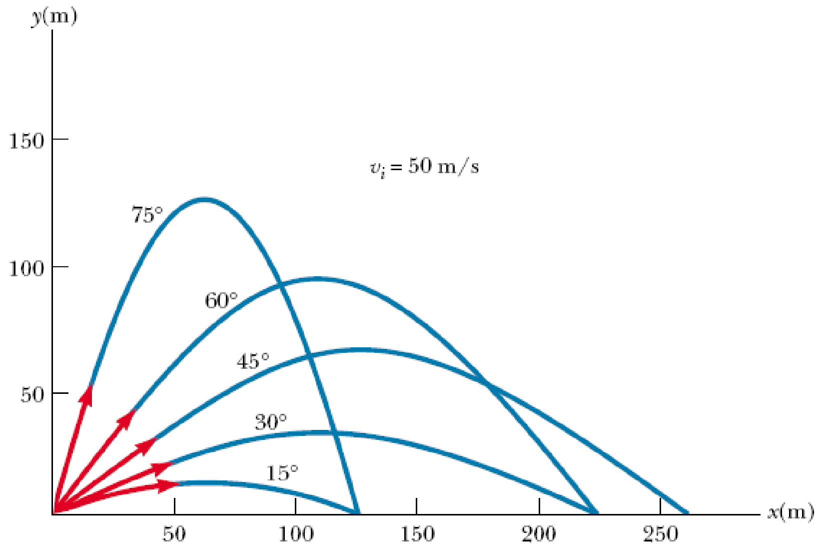
$$R = v_{0x} 2t_h = v_0 \cos\theta_0 \left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} \right) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0$$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0$$

Para um dado módulo da velocidade inicial, o alcance será máximo para:

$$2\theta_0 = \pi/2 \longrightarrow \theta_0 = 45^o$$

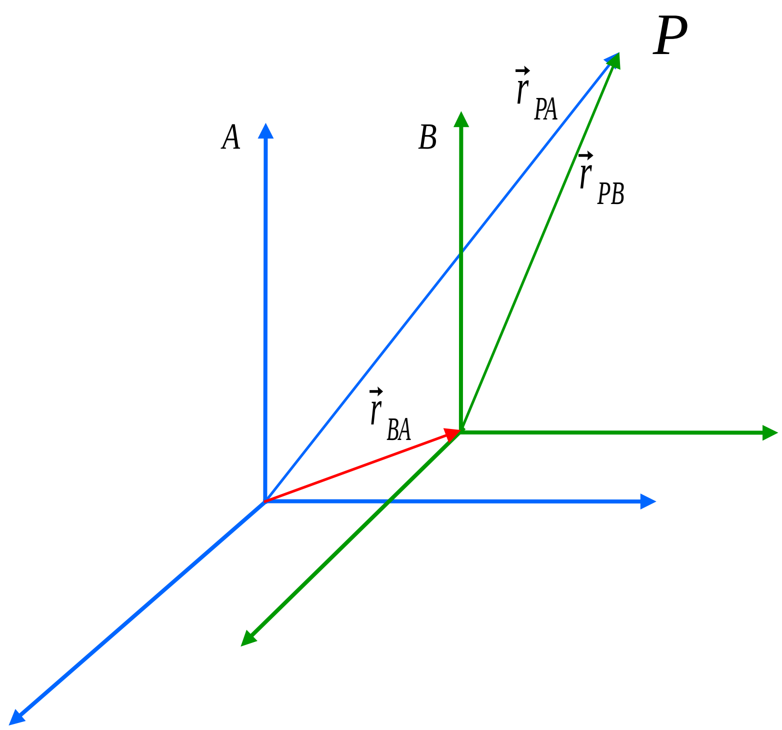
Então: $R_{\max} = \dfrac{v_0^2}{g}$



Movimento Relativo

Problema:

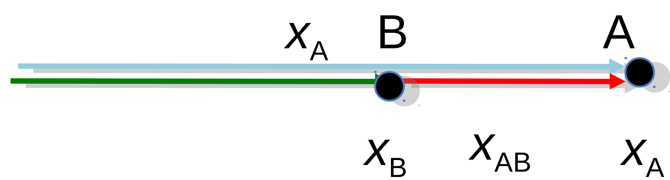
Conhecido o movimento de uma partícula *P* em um dado sistema de coordenadas (referencial *B*), que se move em relação a outro referencial ***A***, como descrever o movimento da partícula neste outro referencial ***A***?



Movimento Relativo em 1D

Dadas as posições x_A e x_B de dois corpos A e B em relação a uma origem 0 (referencial), a posição relativa de A em relação a B é dada por:

$$x_{AB} = x_A - x_B$$



Então, a velocidade relativa v_{AB} de A em relação a B é:

$$v_{AB} = \frac{dx_{AB}}{dt} = \frac{dx_A}{dt} - \frac{dx_B}{dt} = v_A - v_B$$

E a aceleração relativa a_{AB} de A em relação a B é:

$$a_{AB} = \frac{dv_{AB}}{dt} = a_A - a_B$$

Movimento Relativo em 1D

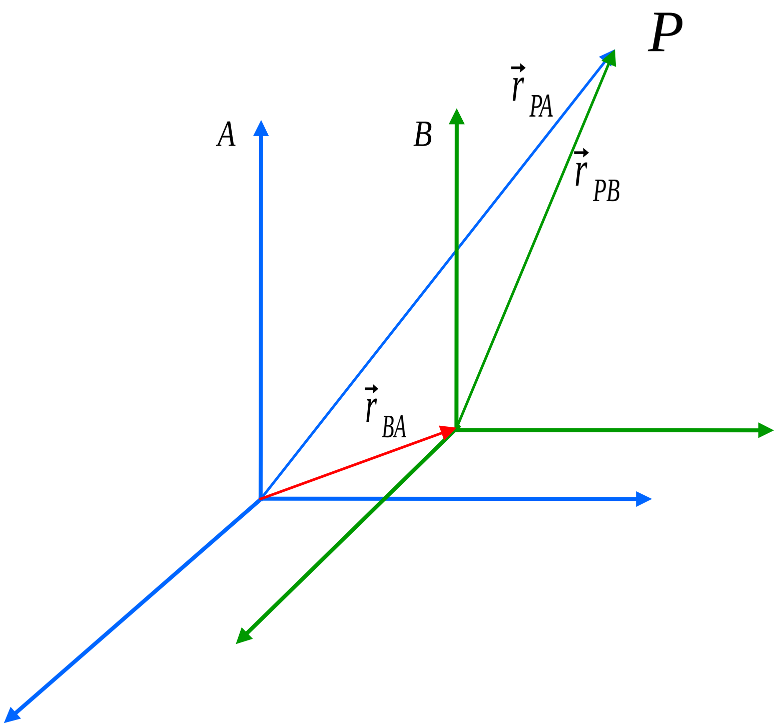
Link: http://www.youtube.com/watch?v=ullR3nN8x8w&hd=1

Ao fazer o reabastecimento aéreo, os dois aviões têm velocidade relativa próxima a zero.

Movimento Relativo em 2D/3D

Problema:

Conhecido o movimento de uma partícula *P* em um dado sistema de coordenadas (referencial *B*), que se move em relação a outro referencial ***A***, como descrever o movimento da partícula neste outro referencial ***A***?



Por adição de vetores, podemos escrever que:

Posição relativa:

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

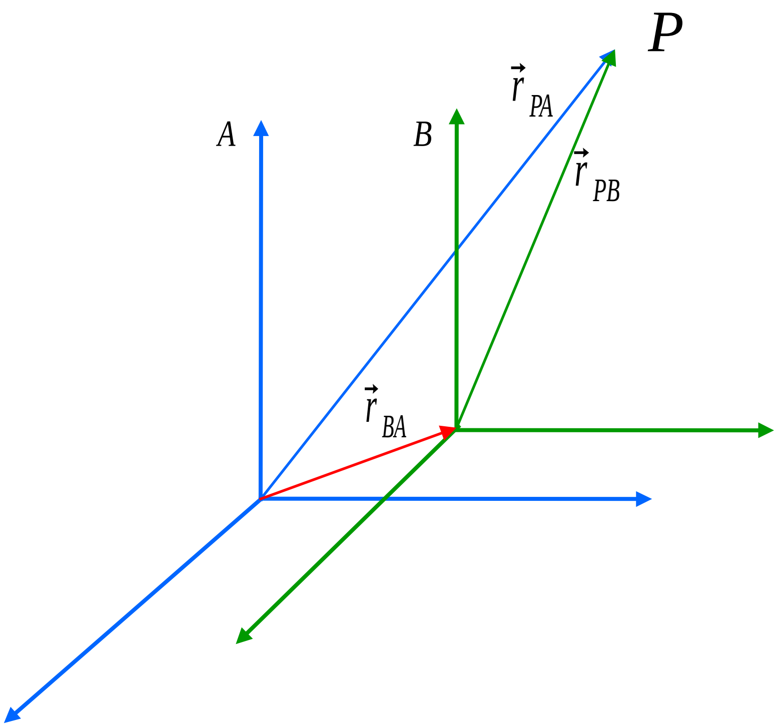
(que é função do tempo! Logo,)

$$\vec{r}_{PA}(t) = \vec{r}_{PB}(t) + \vec{r}_{BA}(t)$$

Movimento Relativo em 2D/3D

Problema:

Conhecido o movimento de uma partícula *P* em um dado sistema de coordenadas (referencial *B*), que se move em relação a outro referencial ***A***, como descrever o movimento da partícula neste outro referencial ***A***?



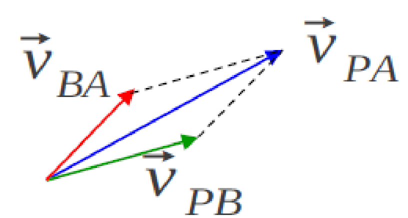
De forma análoga, podemos determinar a velocidade relativa a partir das velocidades medidas em cada referencial:

A velocidade relativa é:

$$\frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$



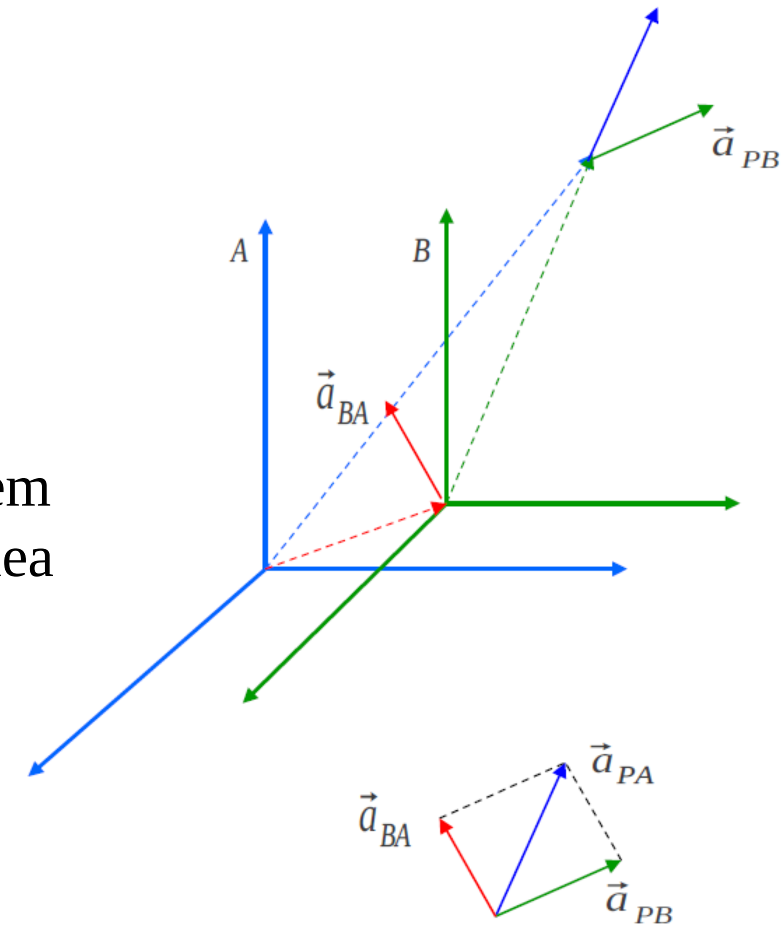
Movimento Relativo em 2D/3D

Aceleração relativa:

$$\frac{d\vec{v}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA}$$



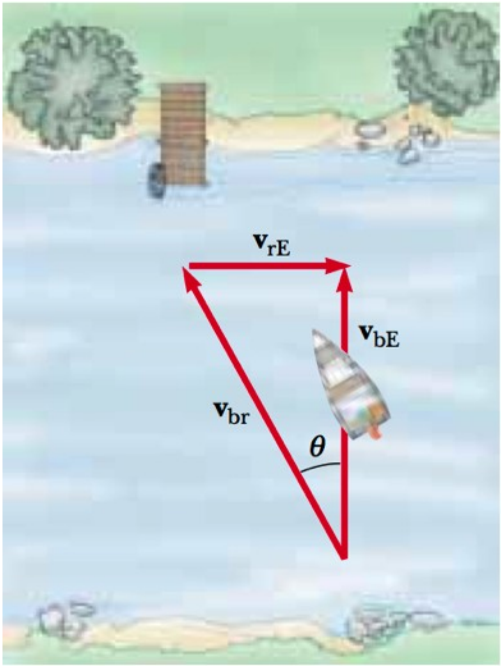
Referenciais Inerciais

Em referenciais inerciais (os que se movem um em relação ao outro em translação retilínea e uniforme),

$$\vec{a}_{BA} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$

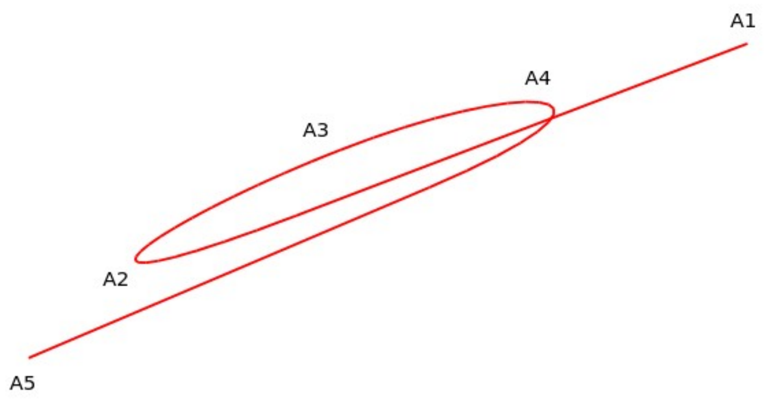
(A aceleração é a mesma quando medida em dois referenciais inerciais.)

Q4. Um barco com velocidade de 10 km/h em relação ao rio tenta ir de uma margem a outra, conforme a figura. A velocidade da água em relação à Terra é de 5 km/h. Qual deve ser a velocidade do barco em relação à Terra para que ele cruze o rio perpendicularmente às margens?



Movimento Relativo em 2D/3D

Curiosidade: planetas se deslocam lentamente em direção ao leste em relação às constelações, por causa de suas órbitas em torno do Sol. Porém, quando a Terra está “ultrapassando” um planeta externo, o movimento aparente é para oeste. Como entender tal fato?



Trajetória de Marte no céu em 2009/2010 (wikipedia)