1a-lista-vetores - VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios -MA-141

VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

21. Determine a extremidade ou a origem do segmento orientado nos seguintes casos:

   (a) $v = (1, -2, 1)$ e sua origem o ponto $P = (1, 0, 1)$.

   R: $Q = (2, -2, 2)$.

   (b) $v = (-1, 0, 1)$ e sua origem é o ponto médio entre os pontos $P_1 = (1, 1, 3)$ e $P_2 = (-1, 1, 1)$.

   R: $Q = (1, 1, 3)$.

   (c) $v = (1, 1, 1)$ e sua extremidade é o ponto $P = (1, 1, 1)$.

   R: $Q = (0, 0, 0)$.

22. Verifique se os pontos dados abaixo são colineares:

   (a) $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 2, 0)$ e $C = (0, -2, 2)$;

   R: $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -2, 1)$. Os pontos são colineares, pois $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$.

   (b) $A = (0, 1, -1)$, $B = (1, 2, 0)$ e $C = (0, 2, 1)$;

   R: $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 2)$. Os pontos não são colineares, pois não existe λ tal que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

   (c) $A = (3, 1, 4)$, $B = (2, 7, 1)$ e $C = (0, 1, 5)$;

   R: $\overrightarrow{AB} = (-1, 6, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 1)$. Os pontos não são colineares, pois não existe λ tal que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

23. Dados os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 1, 1)$ e $C = (0, 1, 2)$.

(a) Determine o ponto D tal que A, B, C e D sejam os vértices consecutivos de um paralelogramo.

R: Observe que o ponto

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0).$$

Assim,

$$\overrightarrow{DC} = OC - OD \Rightarrow D = (2, 0, 2).$$

(b) Determine o ponto médio entre A e C e o ponto médio entre B e D.

R:

$$\frac{A+C}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \frac{B+D}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

24. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio (Sugestão: Sejam M e N os pontos médios das duas diagonais. Mostre que $\overline{MN} = \overline{0}$.)

R: Considere um paralelogramo de vértices ABCD. Sejam M e N os pontos médios das diagonais AC e DB, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0N} - \overrightarrow{0M} &= \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{BN} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}) \\
&= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{0A} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}) \\
&= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{0A} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \\
&= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{0A} + \tfrac{1}{2}(2\overrightarrow{BA}) \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \\
&= \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

Logo $M = N$.

25. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos da base.

R: Seja o trapézio ABCD, onde $\overrightarrow{AB}$ é a base menor, e $\overrightarrow{DC}$ é a base maior.

Seja M o ponto médio de $\overrightarrow{AD}$ e N o de $\overrightarrow{BC}$. Assim,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}, \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM}.$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}.$$

26. Sejam $\overrightarrow{0A}$ e $\overrightarrow{0B}$ dois vetores não colineares no espaço. Qual o conjunto dos pontos P tais que $\overrightarrow{0P} = \lambda\overrightarrow{0A} + (1-\lambda)\overrightarrow{0B}$?

    R: A reta determinada pelos pontos A e B.

27. (a) Mostre que as medianas de um triângulo interseptam-se num ponto. Encontre a razão em que esse ponto divide cada mediana.

    R: Sejam o triângulo ABC, M o ponto médio de $\overrightarrow{BC}$, N o de $\overrightarrow{CA}$ e P o de $\overrightarrow{AB}$. Sejam também os pontos G, H e I tais que

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}, \quad \overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}, \quad \overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}.$$

    Assim, observe que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GI} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{MC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CP} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{MP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

    De maneira análoga, mostramos que $\overrightarrow{GH} = 0$. Portanto, concluímos que $G = H = I$, e vale as proporções citadas acima.

    (b) Tente generalizar o item (a) para tetraedros.

    R: Vamos mostrar que o centro de massa do tetraedro é a interseção das medianas.

    Sendo assim, seja o tetraedro $ABCD$. A mediana do tetraedro é definida como sendo o segmento que une um baricentro de uma das faces do tetraedro, com o seu vértice oposto.

Sejam A', B', C', D', sendo respectivamente os baricentros das faces DBC, ABC, ADC e ADB.

Observe que

$$\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'B} + \overrightarrow{D'C} = 0,$$

pois

$$\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'B} = 2\overrightarrow{D'P},$$

onde $p = \frac{A+B}{2}$. Como D' é baricentro do triângulo ABC, segue que $\overrightarrow{CD'} = 2\overrightarrow{D'P}$. Assim,

$$\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'B} + \overrightarrow{D'C} = 2\overrightarrow{D'P} + \overrightarrow{D'C} = \overrightarrow{CD'} + \overrightarrow{D'C} = 0.$$

Seja G o centro de massa do tetraedro. Uma propriedade dele, é que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{GD'} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD'} \\
&= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} - \left(\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'B} + \overrightarrow{D'C}\right) \\
&= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \\
&= -\overrightarrow{GD} \\
&= \overrightarrow{DG}.
\end{aligned}$$

Portanto, $3\overrightarrow{GD'} = \overrightarrow{DG}$, ou seja, o centro de massa G pertence ao segmento $\overline{DD'}$. De maneira análoga, mostramos que G pertence aos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$. Ou seja, G é o ponto de interseção das medianas.

28. A área do triângulo ABC é $\sqrt{6}$. Sabendo-se que $A = (2, 1, 0)$, $B = (-1, 2, 1)$ e que o vértice C está no eixo Y, encontre as coordenadas de C.

R: Temos que $C = (0, y, 0)$ e a área do triângulo ABC é dada por:

$$\begin{array}{rcl} A^2 & = & \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\|^2 \\ & = & \frac{1}{4}\|(3, -1, -1) \times (1, y-2, -1)\|^2 \\ & = & \frac{1}{4}\|(y-1, 2, 3y-5)\|^2. \end{array}$$

Logo, $10y^2 - 32y + 6 = 0$. Resolvendo esta , obtemos que $y = 3$ ou $y = \frac{1}{5}$. Sendo assim, $C = (0, 3, 0)$ ou $C = (0, \frac{1}{5}, 0)$.

29. (a) Decompor o vetor $w = (1, 3, 2)$ como soma de dois vetores $w = u + v$, onde u é paralelo ao vetor $(0, 1, 3)$ e v é ortogonal a $(0, 1, 3)$.

R:

$$u = (0, \lambda, 3\lambda),$$
$$v \cdot (0, 1, 3) = (v_1, v_2, v_3) \cdot (0, 1, 3) = 0 \Rightarrow v_2 + 3v_3 = 0.$$
$$u + v = (v_1, \lambda + v_2, 3\lambda + v_3) = (1, 3, 2) = w.$$

Resolvendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_2 + 3v_3 & = & 0 \\ \lambda + v_2 & = & 3 \\ 3\lambda + v_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

obtemos

$$\lambda = \frac{9}{10}, \quad v_2 = \frac{21}{10}, \quad v_3 = \frac{-7}{10}.$$

(b) Encontre um vetor u que seja ortogonal aos vetores $(2, 3, -1)$ e $(2, -4, 6)$ tal que $\|u\| = 3\sqrt{3}$.

R: Resolvendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2u_1 + 3u_2 - u_3 & = & 0 \\ 2u_1 - 4u_2 + 6u_3 & = & 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 & = & 27 \end{array} \right.$$

e observando que podemos somar a primeira linha menos a segunda linha, obtemos

$$u = (3, -3, -3), \quad u = (-3, 3, 3).$$

30. (a) Demonstre que não existe x tal que os vetores $v = (x, 2, 3)$ e $u = (x, -2, 3)$ sejam perpendiculares.

    R: $v.u = x^2 - 4 + 9$. Se $v.u = 0$, então $x^2 + 5 = 0$. Não existe um número real x que satisfaça a essa equação.

    (b) Encontre o ângulo entre os vetores $u = (2, 1, 0)$ e $v = (0, 1, -1)$ e entre os vetores $w = (1, 1, 1)$ e $z = (0, -2, -2)$.

    R: $cos\ \theta_1 = \dfrac{u.v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ e $cos\ \theta_2 = \dfrac{w.z}{\|w\|\|z\|} = -\frac{4}{\sqrt{24}}$.

31. (a) Dado um triângulo isósceles, mostre que a mediana relativa à base é a mediatriz(isto é, é perpendicular à base).

    R: Seja o triângulo ABC com base $\overrightarrow{AB}$, ou seja, os lados $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$ possuem a mesma medida.

    Observe que pela lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}\|^2 &= \|\overrightarrow{PC}\|^2 + \|\overrightarrow{PA}\|^2 - 2\|\overrightarrow{PC}\|\|\overrightarrow{PA}\| \cos\theta_1 \\
\Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 &= \|\overrightarrow{PC}\|^2 + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{PC}\|\|\overrightarrow{BA}\| \cos\theta_1, \\
|\overrightarrow{BC}\|^2 &= \|\overrightarrow{PC}\|^2 + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{PC}\|\|\overrightarrow{BA}\| \cos\theta_2.
\end{aligned}$$

    Subtraindo estas duas últimas desigualdades, e lembrando que $\|\overrightarrow{PC}\|\|\overrightarrow{BA}\|$, obtemos

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 - 2\pi.$$

    Como $\theta_1 + \theta_2 = \pi$, concluímos que $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

    (b) Mostre que se um triângulo tem duas medianas iguais, então ele é isósceles.

R: Seja o triângulo ABC, M o ponto médio de $\overrightarrow{BN}$ e N o de $\overrightarrow{AC}$. Seja também P a interseção de $\overrightarrow{BN}$ e $\overrightarrow{AM}$, e por hipótese, temos $\|\overrightarrow{BN}\| = \|\overrightarrow{AM}\|$.

Observe que os triângulos NPM e APB são isósceles. Observe também que como $\overrightarrow{MN}$ é paralelo à $\overrightarrow{AB}$ os ângulos $N\hat{P}A$ e $M\hat{P}B$ são iguais. Assim, pela lei dos cossenos, temos

$$\|\overrightarrow{AN}\|^2 = \|\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PA}\|^2 = \|\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PB}\|^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2.$$

Como $2\|\overrightarrow{AN}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ e $2\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$, então

$$\|\overrightarrow{AN}\| = \|\overrightarrow{BC}\|,$$

e portanto, o triângulo é isósceles.

32. Sejam u e v dois vetores de comprimentos iguais, mostre que para quaisquer números a e b, os vetores $au + bv$ e $av + bu$ têm o mesmo comprimento.

R:

$$\begin{aligned} \|au + bv\|^2 &= a^2\|u\|^2 + 2abu.v + b^2\|v\|^2 \\ &= a^2\|v\|^2 + 2abu.v + b^2\|u\|^2 \\ &= \|av + bu\|^2. \end{aligned}$$

Interpretação geométrica:

Quando calculamos a soma de dois vetores usando a regra do paralelogramo, concluímos então que, não importa a ordem em que tomamos eles para calcular a soma, pois eles terão o mesmo comprimento. Observe os desenhos abaixo: