Física Geral I
F -128

Aula 06
Energia Cinética e Trabalho

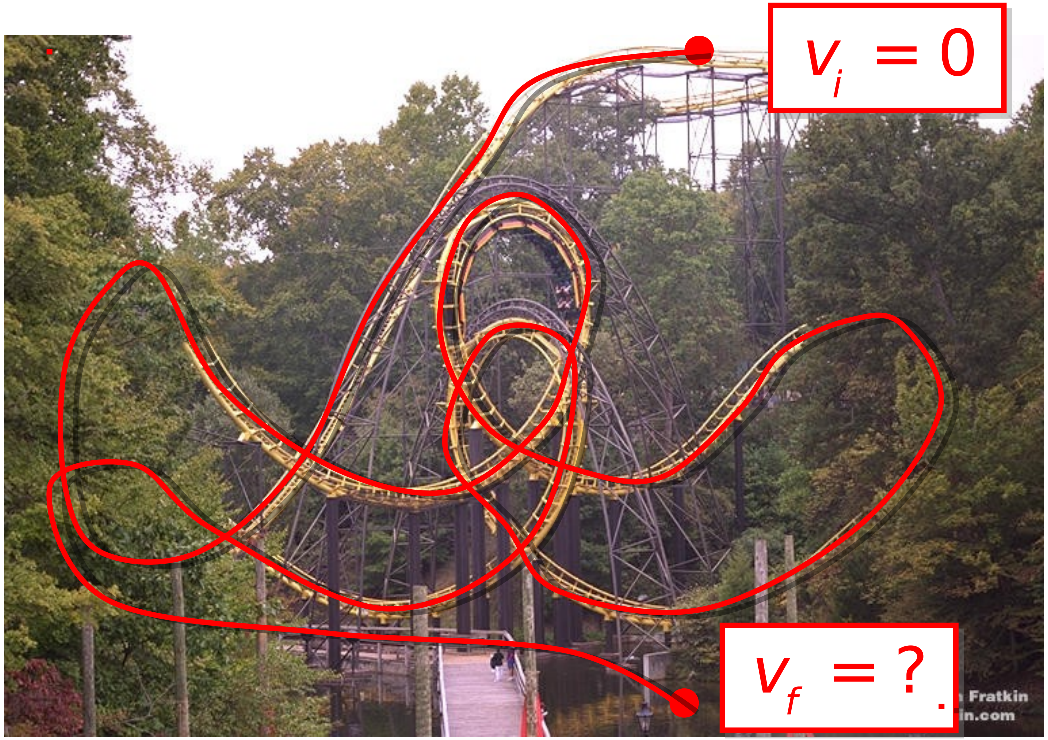
Plano da Aula

Energia Cinética e Trabalho

- Conceito de Energia
  - Energia Cinética
  - Teorema do Trabalho-Energia Cinética
- Trabalho
  - Definição
  - Trabalho de forças constantes
  - Trabalho de forças variáveis
  - Trabalho e potência

Energia

As leis de Newton permitem analisar vários movimentos. Essa análise pode ser bastante complexa, necessitando de detalhes do movimento que são inacessíveis. Exemplo: qual é a velocidade final de um carrinho na chegada de um percurso de montanha russa? Despreze a resistência do ar e o atrito, e resolva o problema usando as leis de Newton.



Energia

Vamos aprender uma técnica muitas vezes mais poderosa (e mais simples) para analisar o movimento. Essa maneira acabou sendo estendida a outras situações, tais como reações químicas, processos geológicos e funções biológicas.

Essa técnica alternativa envolve o conceito de energia, que aparece em várias formas.

O termo energia é tão amplo que é difícil pensar em uma definição concisa.

Tecnicamente, a energia é uma *grandeza escalar associada a um estado de um ou mais corpos (sistema)*. Entretanto, esta definição é excessivamente vaga para ser útil num contexto inicial. Devemos nos restringir a determinadas formas de energia, como a manifestada pelo movimento de um corpo, pela sua posição em relação a outros, pela sua deformação, etc.

Energia

Energia é um conceito que vai além da mecânica de Newton e permanece útil também na mecânica quântica, relatividade, eletromagnetismo, etc.

A **conservação da energia total** de um sistema isolado é uma lei fundamental da natureza.

Energia

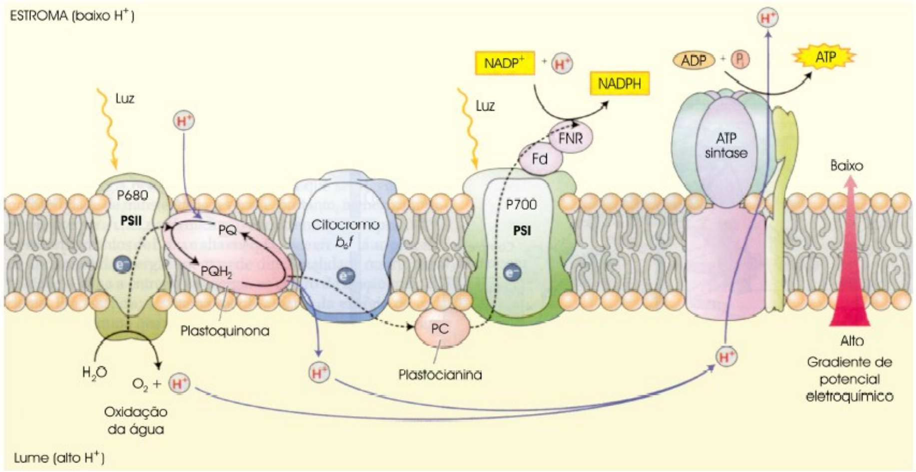
Importância do conceito de energia:

- Processos geológicos
- Balanço energético no planeta Terra
- Reações químicas
- Funções biológicas (maquinas nanoscópicas)

ADP → ATP (energia armazenada)

ATP → ADP (energia liberada)

- Balanço energético no corpo humano



Energia cinética e trabalho

A energia cinética K é a energia associada ao estado de movimento de um objeto. A energia cinética K de um objeto de massa m, movendo-se com velocidade v (muito menor que a velocidade da luz) é:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

A unidade de energia cinética no SI é o joule (J):

1 joule = 1 J = 1 $kg.m^2.s^{-2}$

Quando se aumenta a velocidade de um objeto aplicando-se a ele uma força, sua energia cinética aumenta. Nessa situação, dizemos que um *trabalho* é realizado pela força que age sobre o objeto.

"Realizar trabalho", portanto, é um ato de transferir energia. Assim, o trabalho tem a mesma unidade que a energia e é uma grandeza escalar.

Questão 1:

Uma força constante age em uma partícula, por um intervalo de tempo Δt, e por uma distância Δx. Qual destas quantidades se relaciona com a energia cinética adquirida pela partícula?

a) $F\,\Delta t$

b) $F\,\Delta x$

c) $F\,\Delta x/\Delta t$

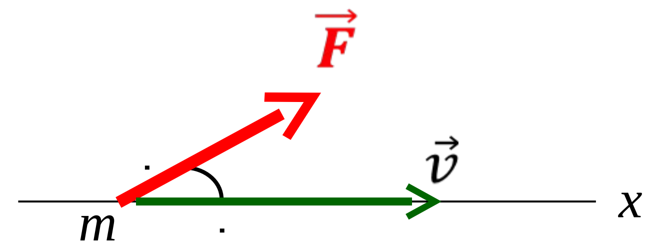
Energia cinética e trabalho

Veremos a relação entre forças agindo sobre um corpo e sua energia cinética.

Problema 1-D: um corpo de massa m desloca-se na direção-x sob ação de uma força resultante constante que faz um ângulo θ com este eixo.

Da segunda lei de Newton a aceleração na direção-x é:

$$a_x = \frac{F_x}{m} \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a_x\, d = 2\frac{F_x}{m}\, d$$



Então: $$\frac{1}{2} m\, v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = F_x d$$

O lado esquerdo representa a variação da energia cinética do corpo e o lado direito é o trabalho, *W, realizado pela força para mover o corpo por uma distância d:*

$$\boxed{W = F_x d = \vec{F} \cdot \vec{d}}$$

(o produto escalar vem do fato que $F_x = F \cos\theta$)

Se um objeto está sujeito a uma força resultante constante, a velocidade varia conforme a equação acima após percorrer uma distância d.

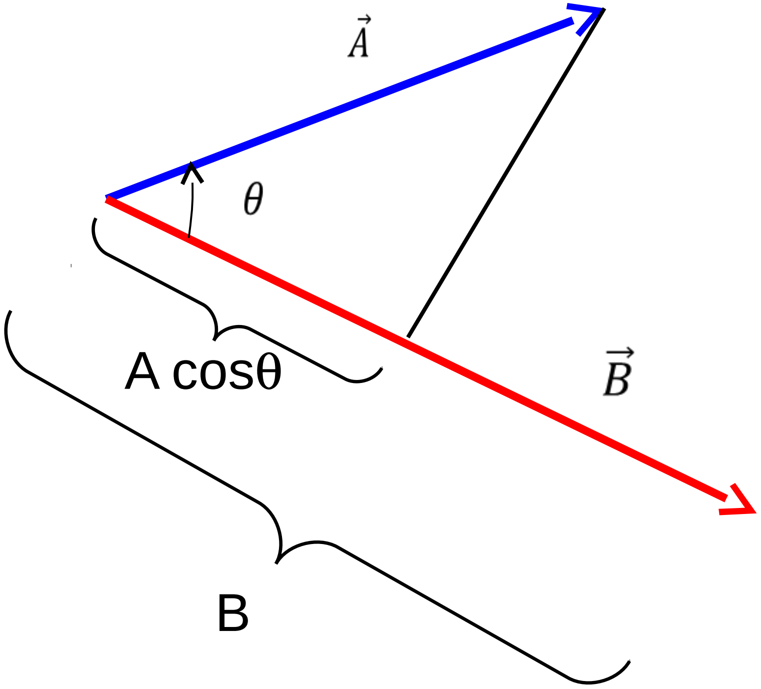
Produto escalar de dois vetores

Definição: $\vec{A}.\vec{B} = ABcos\theta$

onde θ é o ângulo formado entre as direções de $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Geometricamente, projeta-se $\vec{A}$ na direção de $\vec{B}$ e multiplica-se por B (ou vice-versa). Então:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A\,cos\theta)B = (B\,cos\theta)A$$



Produto escalar usando componentes

Devido à distributividade do produto escalar de dois vetores, podemos escrevê-lo em termos das suas componentes cartesianas:

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}).(B_x\hat{i} + B_y\hat{j})$$
$$= A_x B_x + A_y B_y$$

Onde usou-se que $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = 1$ e $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = 0$

Propriedades do produto escalar

O produto escalar **é** comutativo:

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

O resultado do **produto escalar** entre dois vetores é um **escalar**.

Questão 3

É falso dizer que:

a) Se o produto escalar entre dois vetores é zero, um dos dois vetores é um vetor nulo.

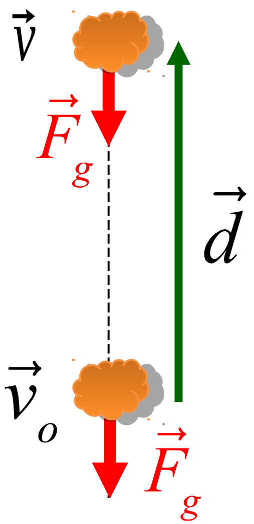
b) $(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$ é um vetor.

c) $\vec{A}.\vec{B} + \vec{C}$ não é uma operação que faça sentido matemático

d)
$$(\vec{A} + \vec{B})^2 = A^2 + B^2 + 2\vec{A}.\vec{B}$$

Trabalho de força constante: força gravitacional

Se o corpo se *eleva* de uma altura *d*, então o trabalho realizado pela força peso é:



$$\boxed{W = mgd\cos\theta = mgd\,\cos 180^0 = -mgd}$$

O sinal negativo indica que a força gravitacional *retira* a energia *mgd* da energia cinética do objeto durante a subida.

Agora, qual é o trabalho realizado pela força peso sobre um corpo de *10,2 kg* que *cai* 1,0 metro?

$$\boxed{W = mgd = 10{,}2 \times 9{,}8 \times 1{,}0 \approx +100\ \text{J}}$$

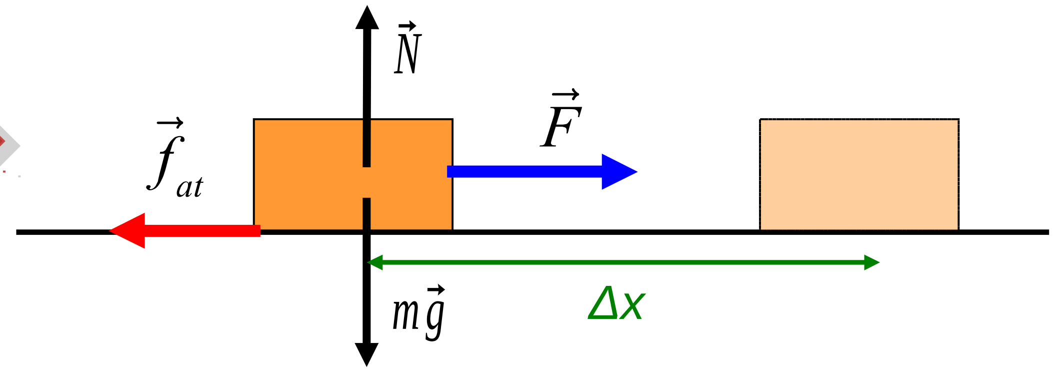
Neste caso, qual é a velocidade final do corpo, se ele parte do repouso?

$$\Delta K = \frac{1}{2}\,m\,v_f^2 - \frac{1}{2}\,mv_i^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_f^2 = W \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{200}{10{,}2}} = 4{,}4\ \text{m/s}}$$

(O mesmo resultado, obviamente, poderia ter sido obtido diretamente da equação de Torricelli).

Trabalho de forças constantes

Modelo para resolver o problema:



Trabalho realizado pelos carregadores:

$$\boxed{W_c = F\Delta x}$$

Trabalho realizado pela força de atrito:

$$\boxed{W_a = f_a \Delta x \cos\pi = -f_a \Delta x}$$

Se o carrinho se desloca com **velocidade constante:**

$$\boxed{\Delta K = 0}$$

E a força resultante é nula, pois **não há aceleração:** $\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + \vec{f}_a$

Isto é consistente com o fato de que o trabalho total ser nulo: $W_c + W_a = 0$.

(O trabalho da **força peso e normal são nulos**, pois o **deslocamento é perpendicular** a estas forças!)

Trabalho e energia cinética em 2D ou 3D

(Força resultante constante com 3 componentes)

Se uma força resultante $\vec{F}$ constante provoca um deslocamento $\Delta\vec{s}$ numa partícula de massa *m*, o trabalho de $\vec{F}$ é:

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s}$$

Para cada componente:

$$F_x \Delta x = \frac{1}{2} m\, v_x^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2 \qquad F_y \Delta y = \frac{1}{2} m\, v_y^2 - \frac{1}{2} m v_{0y}^2 \qquad F_z \Delta z = \frac{1}{2} m\, v_z^2 - \frac{1}{2} m v_{0z}^2$$

Então:

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s} = \boxed{F_x \Delta x} + \boxed{F_y \Delta y} + \boxed{F_z \Delta z} = \frac{1}{2} m (\boxed{v_x^2} + \boxed{v_y^2} + \boxed{v_z^2}) - \frac{1}{2} m (\boxed{v_{0x}^2} + \boxed{v_{0y}^2} + \boxed{v_{0z}^2})$$

Ou seja:

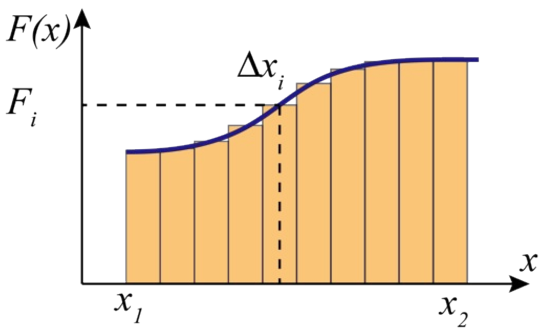
$$\boxed{W = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2}$$

Trabalho de uma força variável (1-D)

Seja $F = F(x)$ a força resultante que atua sobre uma partícula de massa m.

Dividimos o intervalo $(x_2 - x_1)$ em um número muito grande de pequenos intervalos Δx_i.

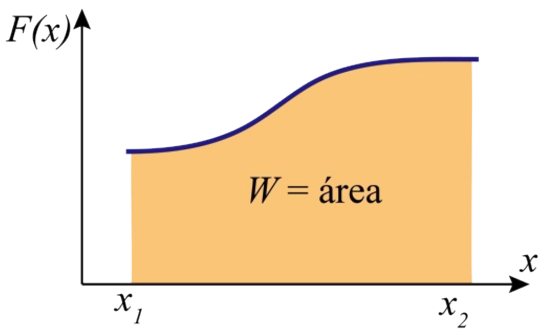
Então: $W = \sum_i F_i \Delta x_i$



No limite, fazendo $\Delta x_i \rightarrow 0$

$\Delta x_i \rightarrow 0$

$$\boxed{W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx}$$



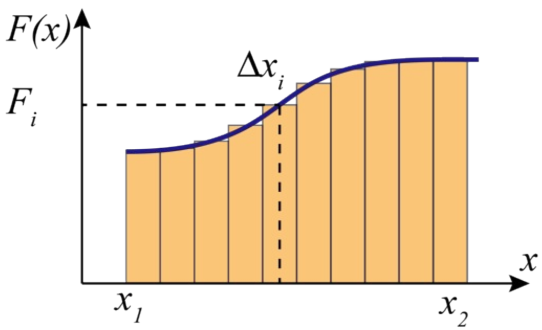
(O trabalho é a área sob a curva de força em função da posição!)

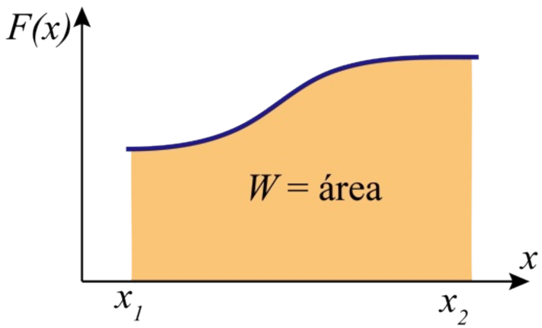
Energia cinética e trabalho

Substituindo a força pela segunda lei Newton teremos:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = m\int_{x_i}^{x_f} \frac{dv}{dt}dx = m\int_{x_i(v_i)}^{x_f(v_f)} dv\frac{dx}{dt} = m\int_{v_i}^{v_f} v\,dv$$

$$= \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \Delta K$$





W = área = ΔK

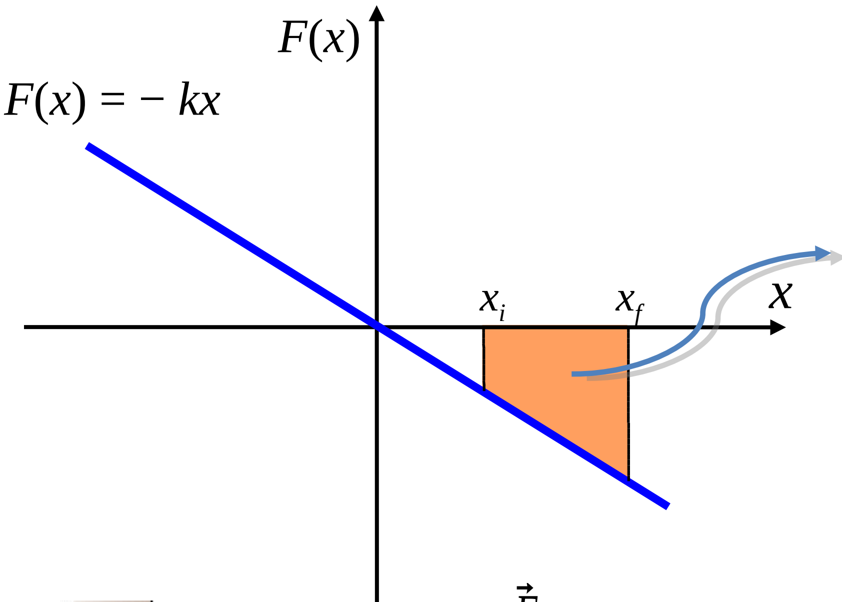
Ou seja:

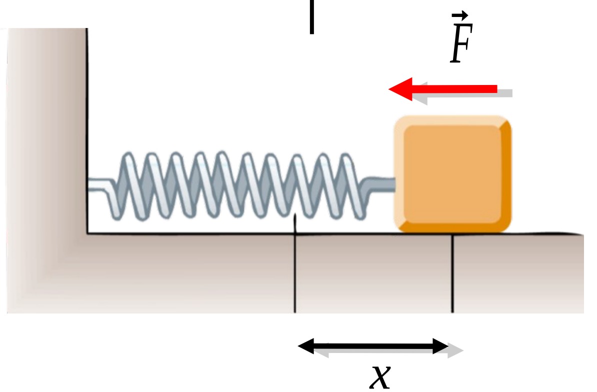
$$\boxed{W = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \Delta K}$$

Este é o teorema do trabalho-energia cinética:

"O trabalho da força resultante que atua sobre uma partícula entre as posições x_1 e x_2 é igual à variação da energia cinética da partícula entre estas posições".

Trabalho realizado por uma força elástica





(mola sendo esticada)

Força da mola: $F(x) = -kx$

$$W_{mola} = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

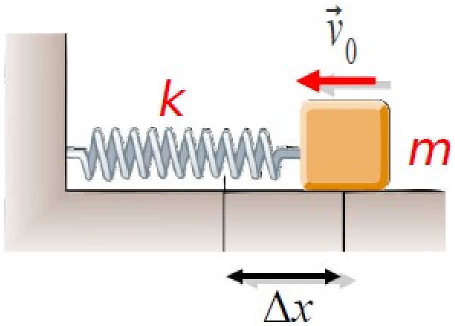
$$W_{mola} = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

Se o trabalho sobre a mola (massa) for realizado por um *agente externo*, seu valor é o obtido acima, porém com sinal trocado.

$\boxed{\text{Se } x_i < x_f \rightarrow W < 0}$

Teorema do trabalho-energia cinética: força variável

Uma massa *m* atinge uma mola não distendida com velocidade $\vec{v}_0$.
Qual é a distância que a massa percorre até parar?



O trabalho da força da mola até a massa parar é:

$$W = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) = -\frac{1}{2}kx_f^2 \qquad (\text{pois } x_i = 0)$$

A variação da energia cinética será: $\Delta K = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = -\frac{1}{2}mv_0^2$

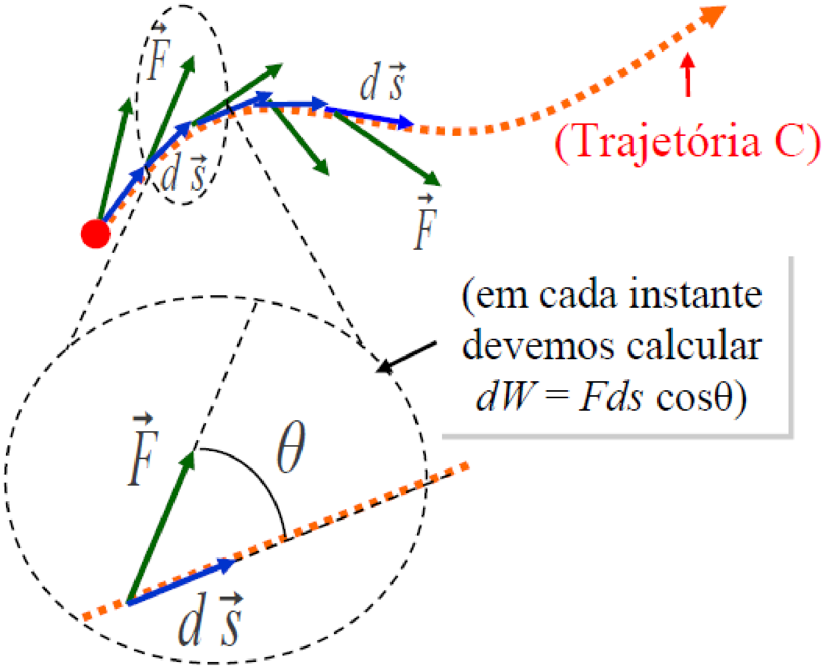
Portanto,

$$\Delta K = W \Rightarrow kx_f^2 = mv_0^2 \Rightarrow x_f = -\sqrt{\frac{m}{k}}v_0 \Rightarrow \boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0}$$

Trabalho de uma força variável: 3D

O trabalho infinitesimal dW de uma força $\vec{F}$ agindo em uma partícula ao longo de um deslocamento infinitesimal $d\vec{s}$ é:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



Portanto o trabalho total, W, será a soma de todos estes trabalhos infinitesimais, dW, ao longo da trajetória descrita pela partícula.

Esta soma leva uma nome e uma símbolo especial; é a Integral de Linha

$$W = \int_C dW = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F\, ds \cos\theta$$

Se $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$

e

$$F_x = F_x(x) \;;\; F_y = F_y(y) \;;\; F_z = F_z(z)$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\, dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\, dz$$

Potência

Até agora não nos perguntamos sobre quão rapidamente é realizado um trabalho!

A potência P é a razão (taxa) de realização do trabalho por unidade de tempo:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

Unidade SI:
J/s = watt (W)

Considerando o trabalho em mais de uma dimensão: $dW = \vec{F}.d\vec{r}$

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\,\vec{r}}{dt}$$

O segundo termo é a velocidade. Então:

$$\boxed{P = \vec{F}.\vec{v}}$$

Trabalho e potência

100 m rasos × Maratona

P. A. Willems *et al*, The Journal of Experimental Biology 198, 379 (1995)

100 m rasos

Trabalho realizado sobre o corredor:
$2{,}1 \times 10^4$ J

Potência:

$$P_{100} = \frac{2{,}1\times 10^4 \text{ J}}{10 \text{ s}} = 2100 \text{ W}$$

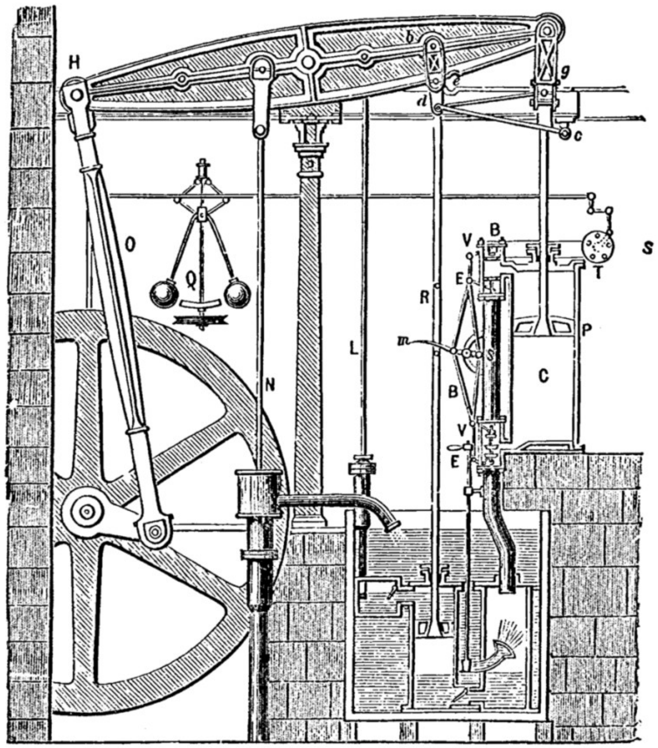
Maratona (42.142 m)

Trabalho realizado sobre maratonista:
$5{,}9 \times 10^6$ J

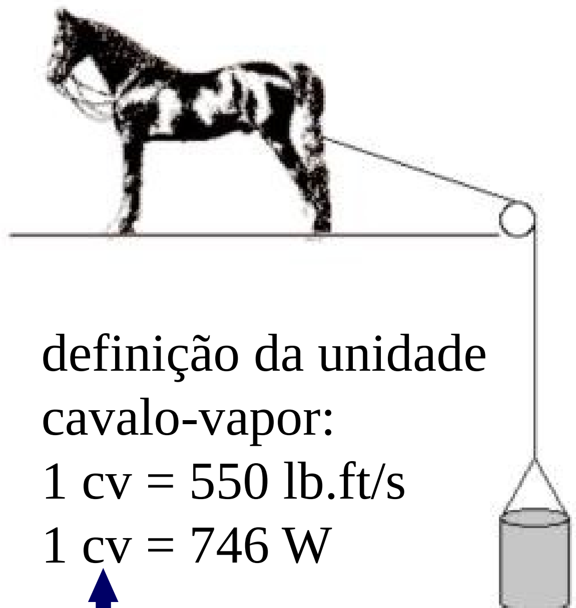
Potência:

$$P_{100} = \frac{5{,}9\times 10^6 \text{ J}}{2\times 60\times 60 \text{ s}} = 816 \text{ W}$$

Um pouco de história



Esquema de máquina a vapor de James Watt (1788)



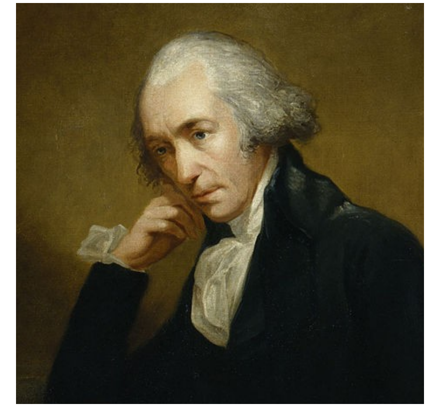
definição da unidade cavalo-vapor:

1 cv = 550 lb.ft/s

1 cv = 746 W

v = 1,0 m/s

m ~ 76 kg



James Watt 1736-1819

Unidade de potência criada por Watt para fazer o *marketing* de sua máquina em uma sociedade fortemente dependente do (e acostumada ao) trabalho realizado por cavalos.

1ª motivação: retirada da água das minas de carvão.

Energia cinética relativística: curiosidade

(energia cinética relativística)

$$K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

No limite para $v << c$:

$$K = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

(energia cinética clássica)