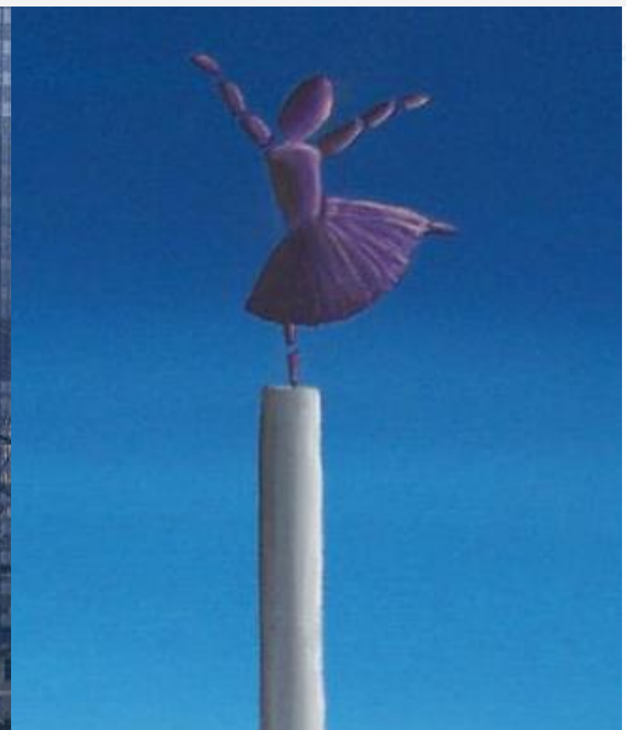
Aula-2
Equilíbrio, Elasticidade

Física Geral II - F 228

2º semestre, 2016


Condições para o equilíbrio

- Um corpo rígido está em equilíbrio se:
  - O momento linear ***P*** e o momento angular ***L*** têm valor constante.

$$\vec{P} = m\vec{v} = \mathbf{cte.} \qquad \vec{L} = m\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = \mathbf{cte.}$$

- Esta definição não exige que o corpo esteja em repouso, ou seja, ***P*** e ***L*** não são necessariamente zero.

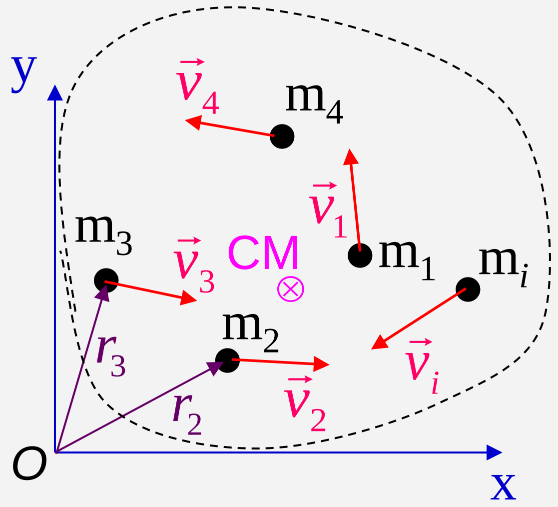
- Se ***P*** e ***L*** são zero então temos equilíbrio estático.

Equações de movimento para o corpo rígido

A translação do centro de massa (CM) :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i(ext)} = \vec{F}_{(ext)}$$

Pois: $\sum_i \vec{F}_{i(int)} = 0$



A rotação em torno do ponto "*O*" :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times \vec{v}_i\right) = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{i(ext)}\right) = \sum_i \vec{\tau}_{i(ext)} = \vec{\tau}_{(ext)}$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i = \vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$$

Estática para o corpo rígido

As condições de equilíbrio <u>estático</u> são:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{(ext)} = \sum_i \vec{F}_{i(ext)} = 0$$

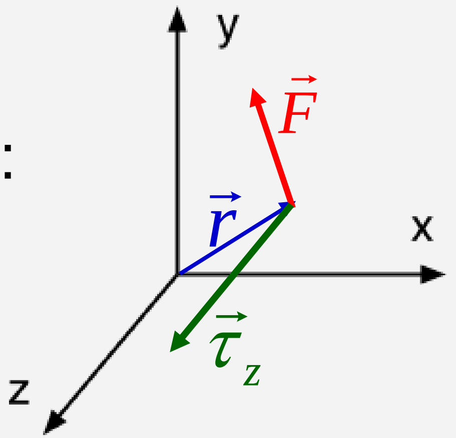
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{(ext)} = \sum_i \vec{\tau}_{i(ext)} = 0$$

Cada vetor tem 3 componentes e as equações formam um sistema de 6 equações escalares simultâneas

Forças coplanares:

Forças no plano x-y têm versão simplificada:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0$$

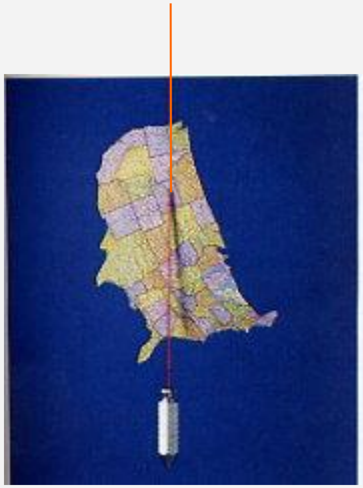


$$\vec{\tau}_z = \vec{r} \times \vec{F}$$

Equilíbrio sob a ação de *g*

• Aplicação de uma única força *M**g*** para cima no CM (ou CG) deixa o corpo em equilíbrio. Podemos usar este fato para determinar o CM.

Suspenda o mapa por qualquer ponto; O CM está na linha vertical do fio de prumo:



Repita a operação para outro ponto qualquer do mapa. O CM está na intersecção das linhas.

O fio de prumo por um terceiro ponto passa necessariamente pelo CM.

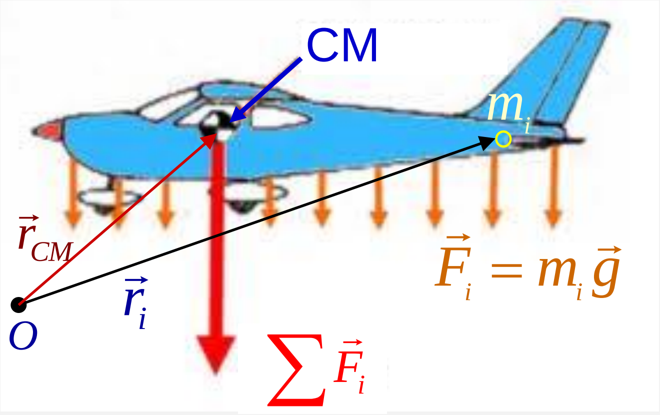
Centro de Gravidade

- A força total que atua em um corpo rígido, devida à gravidade, pode ser substituída por uma força única (peso) atuando no CM do corpo de massa total M.

$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{g}$$ então: $$\sum \vec{F}_i = \vec{g} \sum m_i = M \vec{g}$$

- O torque da força peso em cada elemento de um corpo rígido é:

$$\sum \vec{\tau}_i = \sum \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{g} \right) = \sum \left(m_i \vec{r}_i \times \vec{g} \right)$$

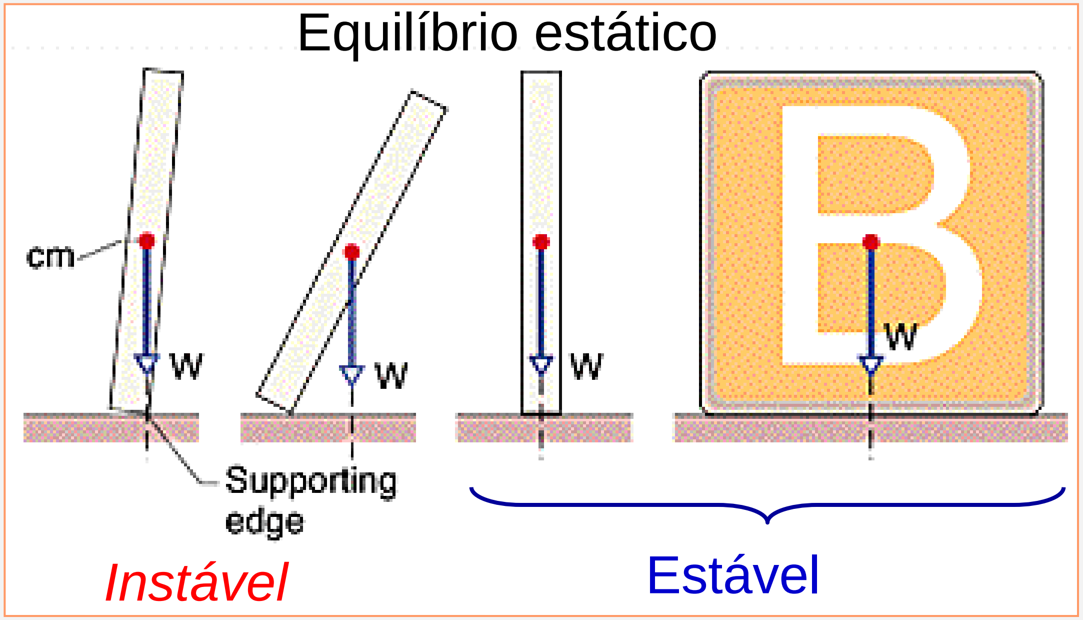


Como g pode ser fatorado :

$$\sum \vec{\tau}_i = \sum \left(m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = M \; \vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times M \; \vec{g}$$

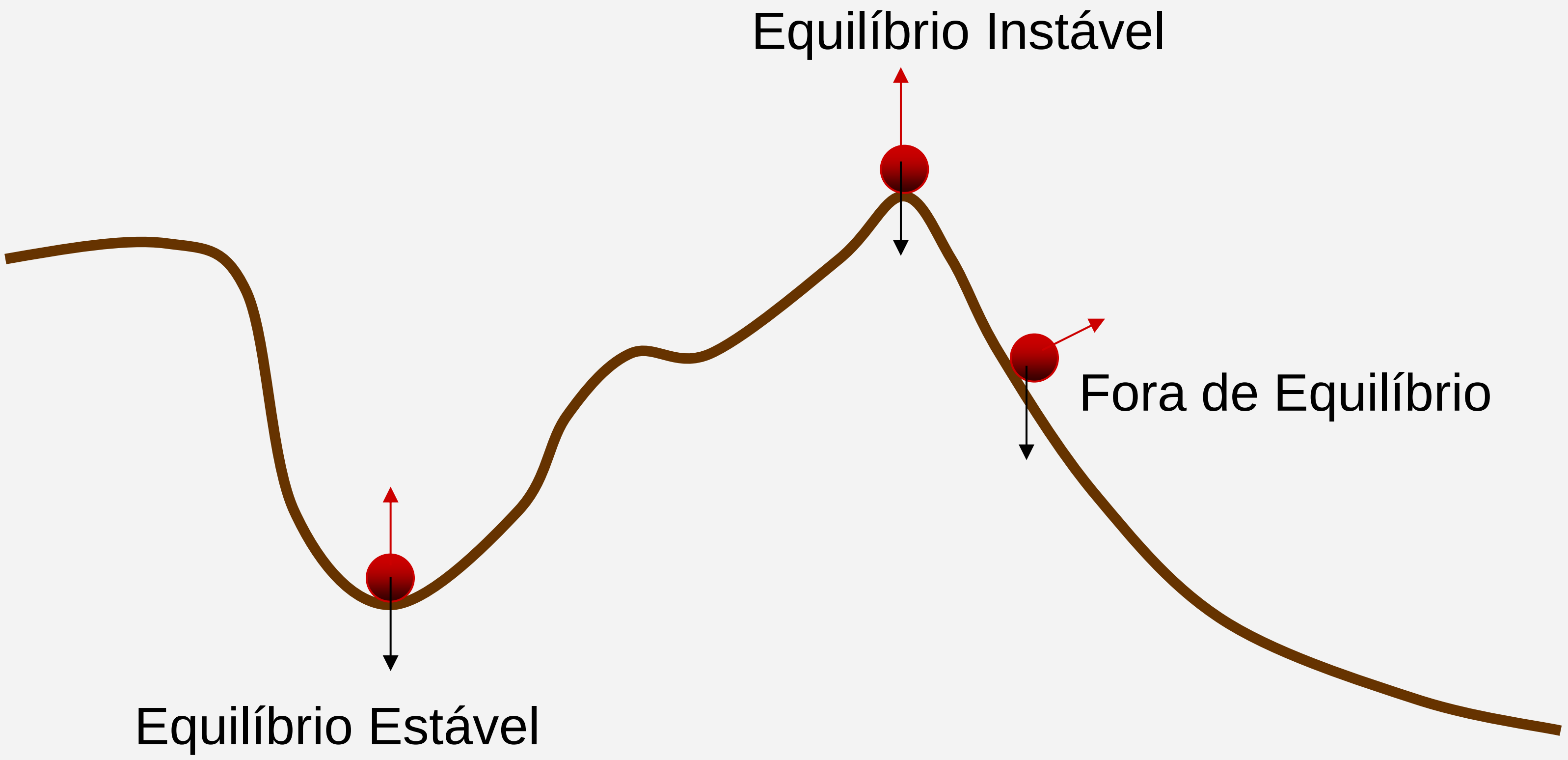
➢ O torque resultante é igual ao torque de uma única força atuando no CM !

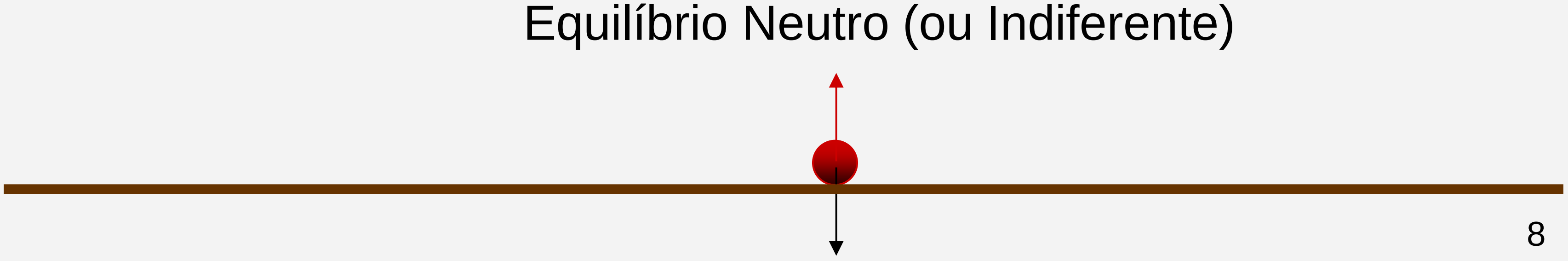
Equilíbrio sob a ação de *g*



X

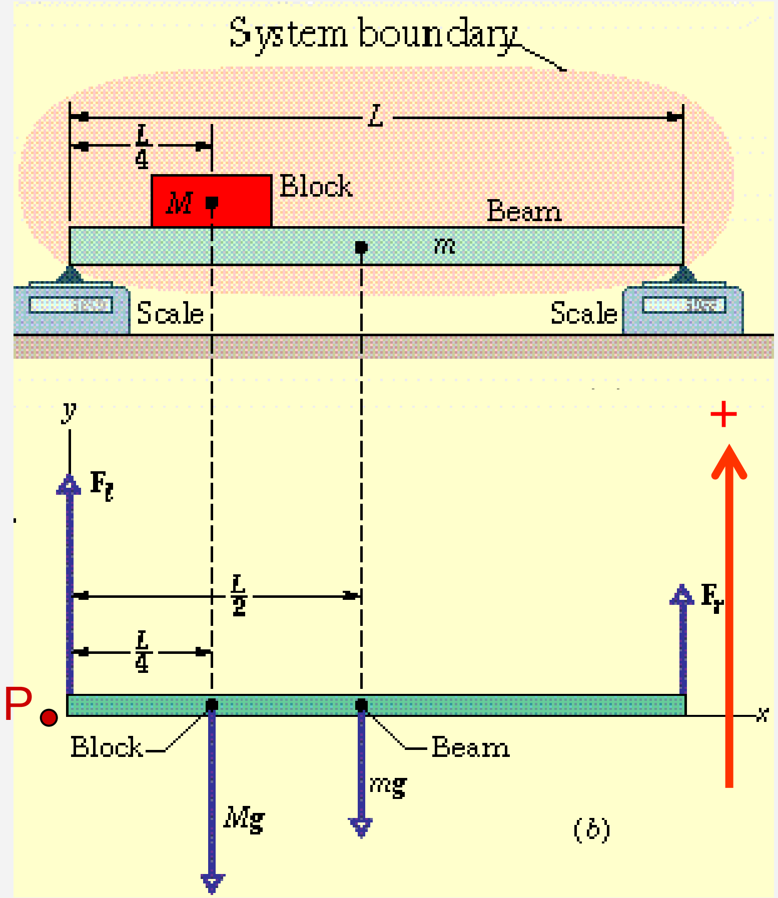
Tipos de Equilíbrio





Exemplo 1

Barra de tamanho L e massa m = 1,8 kg se apoia em duas balanças. Um bloco de massa M = 2,7 kg se apoia na barra a um quarto de distância da balança esquerda. Quais as leituras nas balanças?



- As forças:

$$\sum F_y = F_l + F_r - Mg - mg = 0$$

$$F_l = g(M+m) - F_r$$

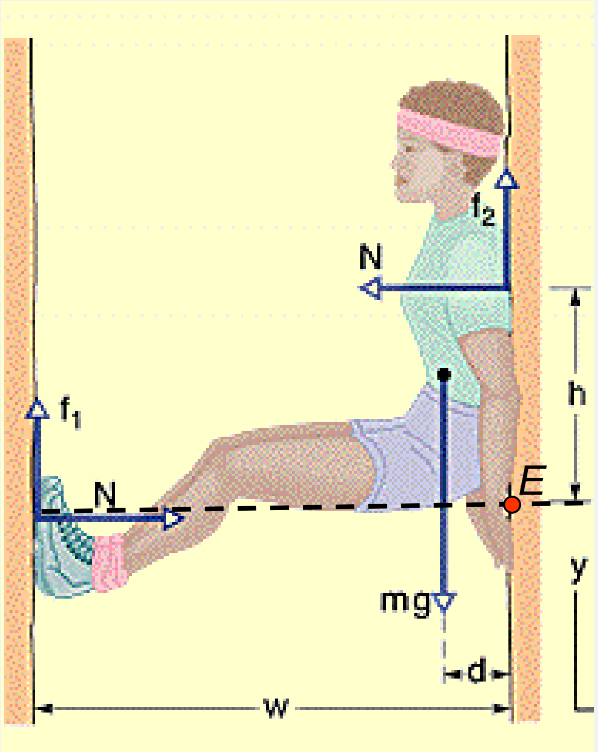
- Os torques:

$$\sum \tau_z = F_l 0 + F_r L - Mg\left(\frac{L}{4}\right) - \frac{mgL}{2} = 0 \longrightarrow F_r = M\frac{g}{4} + m\frac{g}{2}$$

$$F_r = (g/4)\ (M+2m)$$

daí:
$$\begin{cases} F_r = (9{,}83/4)(2{,}7+3{,}6) \approx 15{,}5 \text{ N} \\ F_l = 9{,}83(2{,}7+1{,}8) - 15{,}5 \approx 28{,}7 \text{ N} \end{cases}$$

Exemplo 2



m = 55 kg; w = 1,0 m; d = 0,20 m;

μ_1 = 1,1   e μ_2 = 0.70; N_{min} = ?   h = ?

$$\mu_1 N + \mu_2 N = mg,$$

$$N = \frac{mg}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{(55\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})}{1.1 + 0.70} = 299\ \mathrm{N} \approx 300\ \mathrm{N}.$$

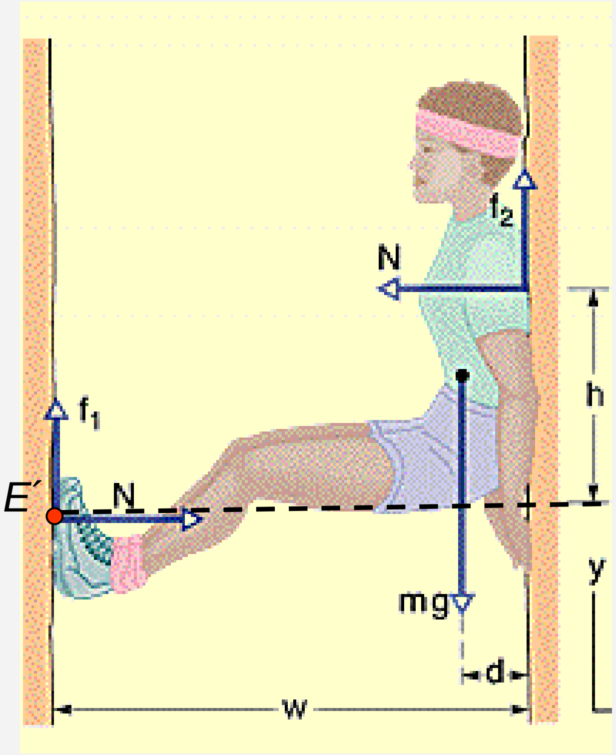
<u>Eixo *E* :</u> $\sum \tau = -f_1 w + Nh + mgd = 0.$

$$h = \frac{f_1 w - mgd}{N} = \frac{\mu_1 N w - mgd}{N} = \mu_1 w - \frac{mgd}{N}$$

$$= (1.1)(1.0\ \mathrm{m}) - \frac{(55\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})(0.20\ \mathrm{m})}{299\ \mathrm{N}}$$

$$= 0.739\ \mathrm{m} \approx 0.74\ \mathrm{m}.$$

Exemplo 2



m = 55 kg; w = 1,0 m; d = 0,20 m;
μ_1 = 1,1 e μ_2 = 0.70; N_{min} = ? h = ?

$$\mu_1 N + \mu_2 N = mg,$$

$$N = \frac{mg}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{(55\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})}{1.1 + 0.70} = 299\ \mathrm{N} \approx 300\ \mathrm{N}.$$

Eixo *E´*: $\sum \tau' = f_2 w + Nh - mg(w-d) = 0$

$$h = \frac{mg(w-d) - \mu_2 N w}{N} = \frac{mg}{N}(w-d) - \mu_2 w$$

$$h = \frac{55 \times 9{,}8}{299}(0{,}8) - 0{,}7 \times 1{,}0 \approx 0{,}74\ \mathrm{m}$$

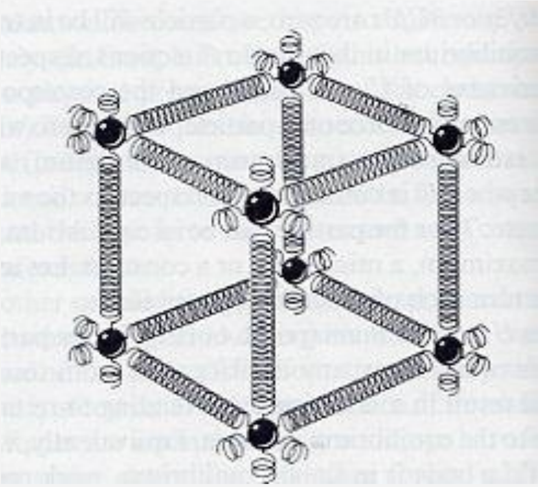
Elasticidade

- A rigidez dos chamados corpos rígidos depende das forças interatômicas.
- Mesmo os corpos rígidos podem ser deformados.
- Sólidos são formados por átomos, numa rede cristalina, ligados por forças similares às forças de uma mola.

Elasticidade

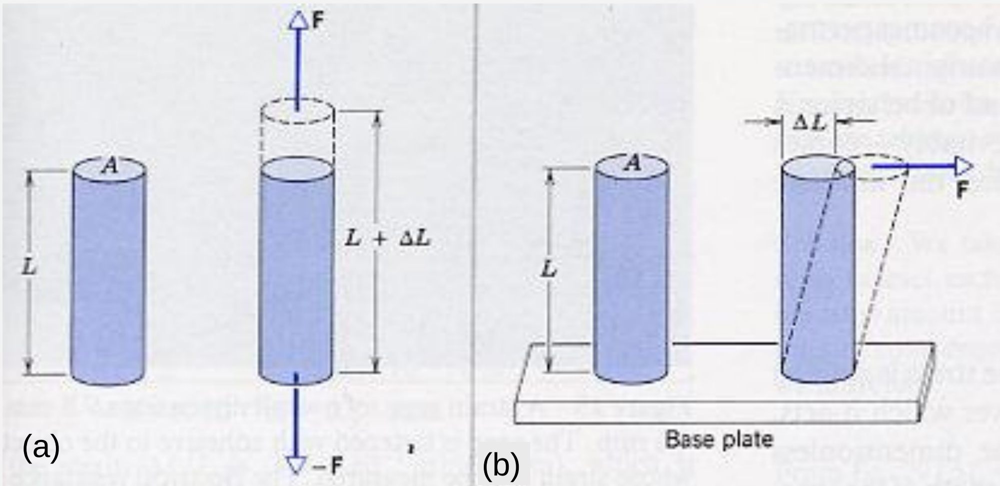
sólido

modelo massa - mola



- Cada átomo está em equilíbrio devido à interação (mola) com seus vizinhos.
- As constantes de mola efetivas são grandes.
- É necessário forças grandes para separar os átomos. Daí a impressão de rigidez!

Tensão (*stress*) e deformação (*strain*)



- Dois tipos principais de mudança de forma (*deformação*) de um sólido quando forças atuam sobre ele:

– O cilindro é esticado pela *tensão de elongação* (a);

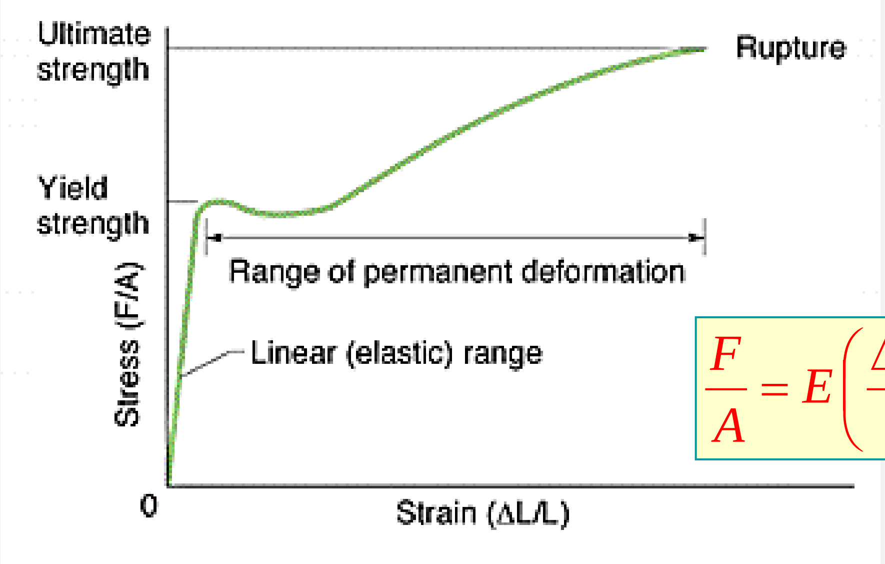
– O cilindro é deformado pela *tensão de cisalhamento* (b);

- Um terceiro tipo seria a *compressão uniforme (pressão hidrostática)* onde as forças são aplicadas uniformemente em todas as direções (c).

Tensão e deformação

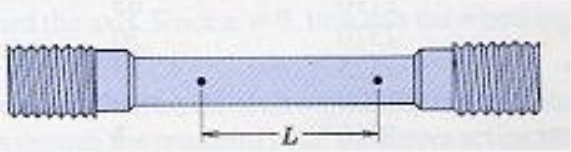
No regime elástico, a *tensão* é proporcional à *deformação* e a constante de proporcionalidade é o módulo de elasticidade.

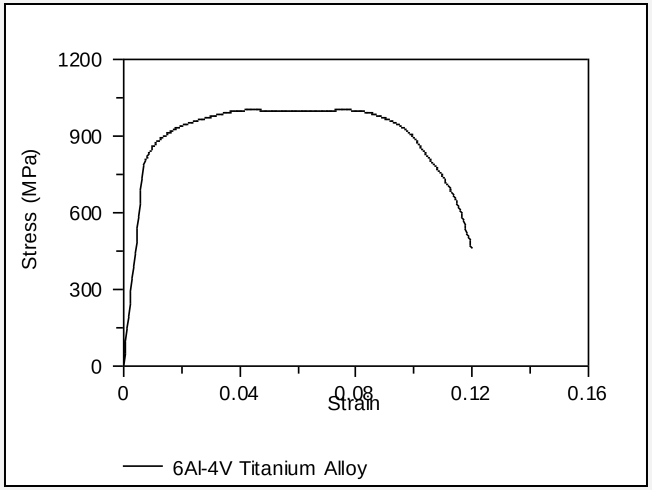
Tensão = módulo de elasticidade X deformação

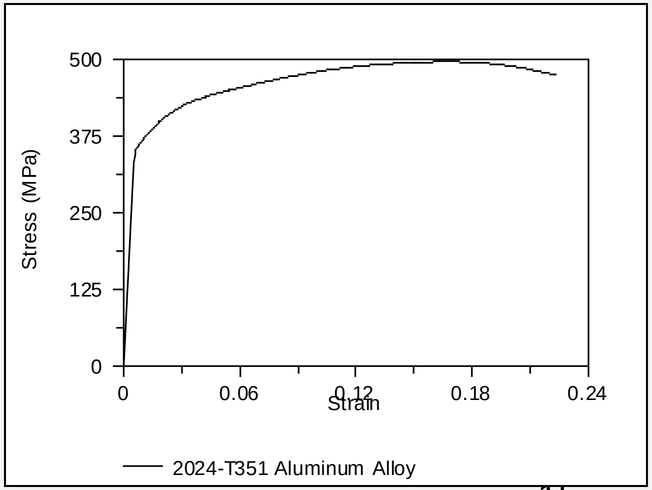


$$\frac{F}{A} = E\left(\frac{\Delta L}{L}\right)$$

Corpo de prova







Tensão e deformação

Tensão, ou compressão simples, se define como F/A, associada a uma deformação específica (ou de elongação) $\Delta L/L$ (ver figura).

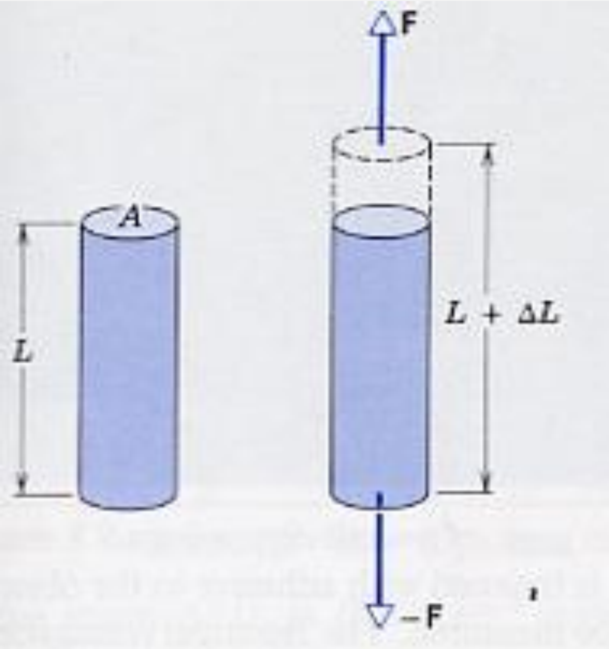
Aqui, o módulo de elasticidade se chama módulo de Young (E):

$$\boxed{\frac{F}{A} = E\left(\frac{\Delta L}{L}\right)}$$

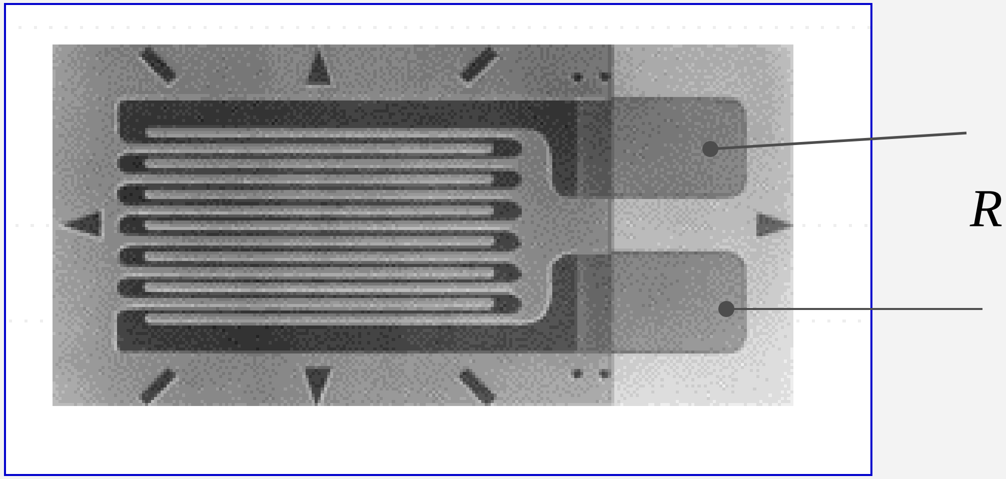
TABLE 1 SOME ELASTIC PROPERTIES OF SELECTED MATERIALS OF ENGINEERING INTEREST

Material	*Density* (kg/m³)	*Young's Modulus* (10^9 N/m²)	*Ultimate Strength* (10^6 N/m²)	*Yield Strength* (10^6 N/m²)
Steel[a]	7860	200	400	250
Aluminum	2710	70	110	95
Glass	2190	65	50[b]	—
Concrete[c]	2320	30	40[b]	—
Wood[d]	525	13	50[b]	—
Bone	1900	9[b]	170[b]	—
Polystyrene	1050	3	48	—

[a] Structural steel (ASTM-A36).
[b] In compression.
[c] High strength.
[d] Douglas fir.



Medida da deformação



A deformação específica (até $\Delta L/L \sim 0{,}03$) pode ser medida com um extensômetro.

A resistência elétrica (R) do extensômetro varia com a deformação.

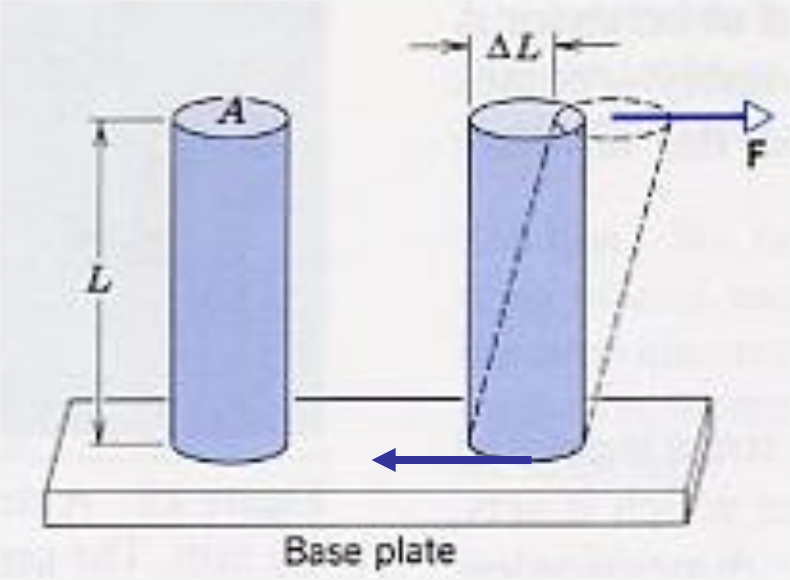
O extensômetro é colado ao objeto, cuja deformação específica se deseja medir, de tal forma que ele sofra a mesma deformação que o objeto.

Tensão de cisalhamento

Tensão de cisalhamento se define como F/A associada a uma deformação $\Delta L/L$, como na figura abaixo.

O módulo, neste caso, se chama módulo de cisalhamento (G):

$$\boxed{\frac{F}{A} = G\,\frac{\Delta L}{L}}$$



A tensão de cisalhamento tem papel importante em fratura de ossos, devido a torções!

Exemplo

Uma haste de R = 9,5 mm e comprimento L = 81 cm é esticada ao longo do seu comprimento por uma força de módulo 6.2×10^4 N. Qual a tensão, o alongamento e a deformação específica? Dado $E = 2.0\times10^{11}$ N/m^2.

$$tensão = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{6.2\times10^4\ \text{N}}{(\pi)(9.5\times10^{-3}\ \text{m})^2}$$

$$= 2.2\times10^8\ \text{N/m}^2.$$

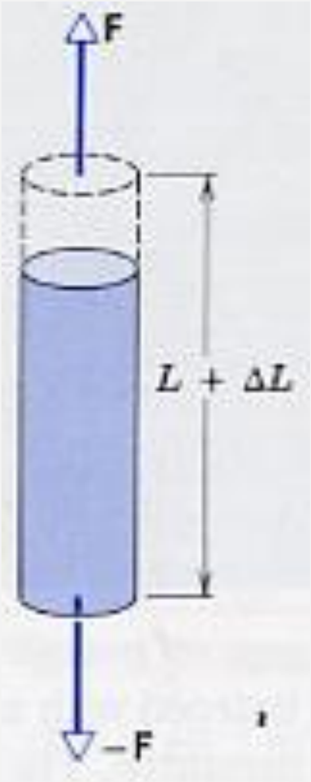
$$\frac{F}{A} = E\,\frac{\Delta L}{L}$$

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(2.2\times10^8\ \text{N/m}^2)(0.81\ \text{m})}{2.0\times10^{11}\ \text{N/m}^2}$$

$$= 8.9\times10^{-4}\ \text{m} = 0.89\ \text{mm}.$$

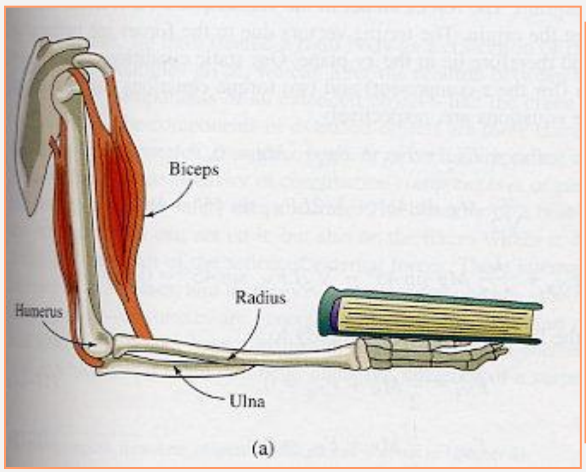
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{8.9\times10^{-4}\ \text{m}}{0.81\ \text{m}}$$

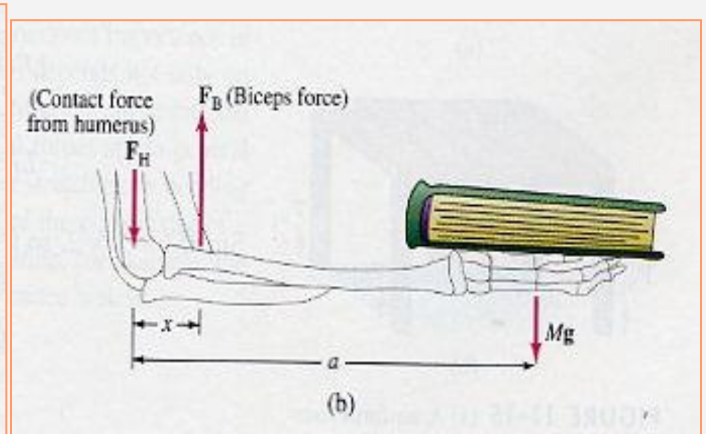
$$= 1.1\times10^{-3} = 0.11\%.$$



Exemplo: Equilíbrio

O bíceps é responsável por dobrar o braço. É um sistema de alavanca como mostra a figura. Os valores típicos para o tamanho do braço, a = 30 cm, e a distância do bíceps ao cotovelo, x = 4 cm. Se uma massa M é sustentada pela mão qual a força feita pelo bíceps? (despreze o peso do braço!)





- Torque total com relação ao cotovelo:

$$0 = Mga - F_B x \;\Rightarrow\; F_B = Mg\left(\frac{a}{x}\right) = 7{,}5 \times Mg$$

A força feita pelo bíceps é muito maior que o peso na mão *!*

Exemplo: Equilíbrio

• O fêmur, osso da coxa, tem o seu menor diâmetro em homem adulto de aproximadamente 2,8 cm, ou seção transversal de $A = 6 \times 10^{-4}\ m^2$.

• Sabendo que a tensão de compressão que provoca ruptura do fêmur vale $S_f = 170 \times 10^6\ N/m^2$, calcule o valor da força compressiva correspondente.

$$F = S_f\, A \approx 1.0 \times 10^5\ N \approx 10 \times 10^3\ kgf$$

Isto é ~ 10 ton-força ! Esta força pode ser atingida, por ex., num salto de ginástica olímpica!!

MAIS EXEMPLOS...

Curiosidade: Tensão x Deformação até a ruptura

Washington's Tacoma Narrows suspension bridge collapsed on Nov.7, 1940

João Bobo ?