GABARITO

MA211 – PROVA 1

Sexta-feira (noite), 03/10/2014.

*Para correção, cada símbolo "$\checkmark$**x**" o item que o antecede vale* **x** *pontos.*

Resolução da Questão 1. (a) A função f é contínua em $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0). \tag{1}$$

Temos que $f(0,0)=0$. Devemos verificar se o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe.

Considerando o caminho $\mathcal{C}_1 = \{(x,y) : x = t, y = 0\}$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{2}$$

Considerando o caminho $\mathcal{C}_2 = \{(x,y) : x = t^2, y = t\}$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{3}$$

Como o limite por dois caminhos diferentes são distintos, o limite não existe. $\checkmark$ **0.2** .

Portanto, a função não é contínua. $\checkmark$ **0.2**

(b) Pela definição de derivada parcial, temos que

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{4}$$

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{0+h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^5} = 0. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{5}$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c) Pela definição de derivada direcional, temos que

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h, \frac{1}{2}h\right) - f(0,0)}{h} \checkmark \mathbf{0.2} \tag{6}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(\sqrt{3}/2)h(1/4)h^2}{(3/4)h^2+(1/16)h^4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(\sqrt{3}/8)h^3}{(12+h^2)(h^2/16)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sqrt{3}h^3}{(12+h^2)(h^3)} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3}}{6}. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{7}$$

(d) O produto escalar $\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u}$ não fornece a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(0,0)$ porque f não é diferenciável em $(0,0)$. $\checkmark$ **0.2** A função f não é diferenciável em $(0,0)$ porque ela não é contínua nesse ponto (se ela fosse diferenciável, ela deveria ser contínua). $\checkmark$ **0.2**

Resolução da Questão 2. (a) Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y \phi'(x-y).\checkmark\mathbf{0.2} \tag{8}$$

Similarmente, pela regra do produto e da cadeia, encontramos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^y \phi(x-y) + e^y \phi'(x-y)(-1).\checkmark\mathbf{0.4} \tag{9}$$

Assim,

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^y \phi'(x-y) + e^y \phi(x-y) - e^y \phi'(x-y) = e^y \phi(x-y) = z.\checkmark\mathbf{0.2} \tag{10}$$

(b) As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + \operatorname{sen} y)\checkmark\mathbf{0.2} \tag{11}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x + \operatorname{sen} y)\cos y \qquad \text{(pela regra da cadeia).}\checkmark\mathbf{0.4} \tag{12}$$

As derivadas parciais de segunda ordem $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ são

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} y)\cos y,\ \checkmark\mathbf{0.2} \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} y).\checkmark\mathbf{0.2} \tag{14}$$

Logo,

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\cos(x + \operatorname{sen} y)\operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} y)\cos y, \tag{15}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos(x + \operatorname{sen} y)\cos y \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} y). \tag{16}$$

Como os termos do lado direito das duas equações são iguais para todo (x, y), concluímos que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.\checkmark\mathbf{0.2} \tag{17}$$

Resolução da Questão 3. O plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$ é dado por

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b). \checkmark \mathbf{0.4} \tag{18}$$

Agora, pela regra do produto e a regra da cadeia, as derivas parciais de f são

$$f_x(x,y) = \psi\left(\frac{x}{y}\right) + x\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y} = \psi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\psi'\left(\frac{x}{y}\right), \checkmark \mathbf{0.3} \tag{19}$$

$$f_y(x,y) = x\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-x}{y^2}\right) = -\frac{x^2}{y^2}\psi'\left(\frac{x}{y}\right). \checkmark \mathbf{0.3} \tag{20}$$

Logo, para $(x, y) = (a, b)$, encontramos

$$f(a,b) = a\phi\left(\frac{a}{b}\right), \quad f_x(a,b) = \psi\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b}\psi'\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{e} \quad f_y(a,b) = -\frac{a^2}{b^2}\psi'\left(\frac{a}{b}\right) \checkmark \mathbf{0.2}. \tag{21}$$

O plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b)$ é

$$z - \left[a\phi\left(\frac{a}{b}\right)\right] = \left[\psi\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b}\psi'\left(\frac{a}{b}\right)\right](x-a) - \left[\frac{a^2}{b^2}\psi'\left(\frac{a}{b}\right)\right](y-b). \checkmark \mathbf{0.2} \tag{22}$$

Por fim, a origem está no plano tangente se a equação (22) é verdadeira para $x = 0, y = 0$ e $z = 0$ $\checkmark \mathbf{0.4}$. Com efeito, para $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, o termo do lado direito de (22) satisfaz

$$\left[\psi\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b}\psi'\left(\frac{a}{b}\right)\right](-a) - \left[\frac{a^2}{b^2}\psi'\left(\frac{a}{b}\right)\right](-b) = -a\psi\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{a^2}{b}\psi'\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{a^2}{b}\psi'\left(\frac{a}{b}\right) = -a\psi\left(\frac{a}{b}\right), \checkmark \mathbf{0.2} \tag{23}$$

que é exatamente o termo do lado esquerdo de (22) com $z = 0$. Logo, a origem pertence ao plano tangente.

Resolução da Questão 4. O problema pode ser formulado como

$$\text{maximizar/minimizar} f(x,y) = xy \quad \text{sujeito a} \quad g(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0. \tag{24}$$

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, devemos ter

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{e} \quad g(x,y) = 0. \tag{25}$$

Nesta questão,

$$\nabla f = (y,x) \checkmark \mathbf{0.2} \quad \text{e} \quad \nabla g = \left(\frac{x}{4}, y\right). \checkmark \mathbf{0.2} \tag{26}$$

Portanto, devemos resolver os sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}\lambda x, \\ x = \lambda y \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1. \end{cases} \qquad \checkmark \mathbf{0.4} \tag{27}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos

$$y = \frac{1}{4}\lambda^2 y \quad \Longrightarrow \quad y = 0, \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -2. \tag{28}$$

Se $y = 0$, da segunda equação, deduzimos que $x = 0$. Porém, o ponto $(0,0)$ não pertence a elipse, ou seja, não satisfaz a terceira equação. $\checkmark$**0.2**

Se $\lambda = 2$, concluímos da primeira equação que $y = x/2$. Assim, substituindo essa expressão na terceira, obtemos

$$\frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \text{ ou } x = -2. \tag{29}$$

Portanto, como $y = x/2$, temos os pontos $(2,1)$ e $(-2,-1)$. $\checkmark$**0.3**

Se $\lambda = -2$, concluímos da primeira equação que $y = -x/2$. Assim, substituindo essa expressão na terceira, obtemos

$$\frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \text{ ou } x = -2. \tag{30}$$

Portanto, como $y = -x/2$, temos os pontos $(2,-1)$ e $(-2,1)$. $\checkmark$**0.3**

Os valores de f nesses quatro pontos são

$$f(2,1) = 2, \quad f(-2,-1) = 2, \quad f(2,-1) = -2, \quad f(-2,1) = -2. \checkmark \mathbf{0.2} \tag{31}$$

Portanto, $(2,1)$ e $(-2,-1)$ são os pontos da elipse que fornecem o valor máximo de f enquanto $(-2,1)$ e $(2,-1)$ são os que fornecem o valor mínimo de f. $\checkmark$**0.2**

Resolução da Questão 5. Como f é um polinômio, os pontos críticos são aqueles tais que $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Nessa questão, temos

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 12y, -12x + 24y^2)\checkmark\mathbf{0.2} \tag{32}$$

Igualando as derivadas parciais a zero, encontramos o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\begin{cases} 3x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 24y^2 = 0 \end{cases} \quad \checkmark\mathbf{0.2} \tag{33}$$

Da segunda equação, obtemos $x = 2y^2$. Usando essa informação na primeira equação, obtemos $3(2y^2) - 12y = 0$, cujas soluções são $y = 0$ e $y = 1$.

Se $y = 0$, obtemos da relação $x = 2y^2$ a identidade $x = 0$.

Se $y = 1$, obtemos da relação $x = 2y^2$ a identidade $x = 2$.

Logo, os pontos críticos de f são:

$$(0,0) \quad \text{e} \quad (2,1).\checkmark\mathbf{0.4} \tag{34}$$

Devemos agora classificar os pontos críticos. Para tanto, as derivadas parciais de segundar ordem de f são:

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{yy}(x,y) = 48y \quad \text{e} \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx} = -12, \checkmark\mathbf{0.4} \tag{35}$$

O determinante da Hessiana em $(0,0)$ é

$$D = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = -144. \tag{36}$$

Como $D < 0$, $(0,0)$ é um ponto de sela de f $\checkmark\mathbf{0.4}$.

O determinante da Hessiana em $(2,1)$ é

$$D = f_{xx}(2,1)f_{yy}(2,1) - f_{xy}^2(2,1) = 564. \tag{37}$$

Como $D > 0$ e $f_{xx}(2,1) = 12 > 0$, $(2,1)$ é um ponto de mínimo relativo de f $\checkmark\mathbf{0.4}$.