UNICAMP

GABARITO

MA211 – EXAME

Sexta-feira (noite), 16/01/2014.

*Para correção, cada símbolo "✓**x**" o item que o antecede vale* **x** *pontos.*

Resolução da Questão 1. (a) Pela regra da cadeia e do produto, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2+y^2)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}\checkmark\mathbf{0,3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2+y^2)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}.\checkmark\mathbf{0,3} \tag{1}$$

Substituindo as fórmulas acima no termo do lado direito da equação que queremos verificar e lembrando que $u = (x^2+y^2)\phi(x/y)$, concluímos que

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x\left[2x\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2+y^2)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}\right] + y\left[2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2+y^2)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}\right] \tag{2}$$

$$= 2x^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2+y^2)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y} + 2y^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) - (x^2+y^2)\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y} \tag{3}$$

$$= 2x^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) + 2y^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) = 2(x^2+y^2)\phi\left(\frac{x}{y}\right) = 2u.\checkmark\mathbf{0,4} \tag{4}$$

(b) A derivada direcional de g no ponto $(0,0,0)$ na direção de $\mathbf{v}$ é dado por $D_u g(0,0,0) = \nabla f(0,0,0)\cdot\mathbf{u}$, em que $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ é um vetor unitário. ✓**0,3**

Nesta questão, temos

$$\nabla g = (e^y + ze^x)\mathbf{i} + (xe^y + e^z)\mathbf{j} + (ye^z + e^x)\mathbf{k},\checkmark\mathbf{0,3} \tag{5}$$

e, portanto, $\nabla g(0,0,0) = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Além disso, $|\mathbf{v}| = \sqrt{5^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{30}$ ✓**0,2** . Portanto, a derivada direcional de g no ponto $(0,0,0)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 5\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ é:

$$D_{\mathbf{u}} g(0,0,0) = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\frac{(5\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})}{\sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{30}}.\checkmark\mathbf{0,2} \tag{6}$$

Resolução da Questão 2. Pela regra da cadeia, o gradiente da função f é

$$\nabla f(x,y) = \left(y + 2 - \frac{1}{x^2y}(2xy), x - \frac{1}{x^2y}(x^2)\right) = \left(y + 2 - \frac{2}{x}, x - \frac{1}{y}\right). \checkmark \mathbf{0,4} \tag{7}$$

Temos $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se, e somente, se

$$\begin{cases} y + 2 - \frac{2}{x} = 0, \\ x - \frac{1}{y} = 0. \end{cases} \quad \checkmark \mathbf{0,4} \tag{8}$$

Da segunda equação, encontramos $xy = 1$. Multiplicando a primeira equação por x, obtemos $xy+2x-2 = 2x-1 = 0$. Logo, $x = 1/2$ e, consequentemente, $y = 2$. Portanto, o único ponto crítico de f é $(1/2, 2)$. ✓**0,4**

Vamos aplicar o teste da segunda derivada para classificar o ponto crítico de f. Como $f_x = y + 2 - 2/x$ e $f_y = x - 1/y$ (primeira e segunda componente do vetor gradiente), as derivadas parciais de segunda ordem de f são:

$$f_{xx} = \frac{2}{x^2}, \quad f_{xy} = f_{yx} = 1 \quad \text{e} \quad f_{yy} = \frac{1}{y^2}. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{9}$$

Logo,

$$D = f_{xx}\left(\frac{1}{2}, 2\right) f_{yy}\left(\frac{1}{2}, 2\right) - f_{xy}\left(\frac{1}{2}, 2\right) = 8\frac{1}{4} - 1^2 = 1 > 0, \tag{10}$$

e, sendo $f_{xx}\left(\frac{1}{2}, 2\right) = 8 > 0$, concluímos que $(1/2, 2)$ é um mínimo local de f. ✓**0,4**

Resolução da Questão 3. Usando coordenas retangulares, o tetraedro é descrito por

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}. \tag{11}$$

Logo, a integral tripla é

$$I = \iiint_T x^2 dV = \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark 0,4} \underbrace{\int_0^{1-x}}_{\checkmark 0,4} \underbrace{\int_0^{1-x-y}}_{\checkmark 0,4} x^2 dz dy dx \tag{12}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2(1 - x - y) dy dx \checkmark \mathbf{0,2} \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx \checkmark \mathbf{0,3} \tag{14}$$

$$= \frac{1}{24} \checkmark \mathbf{0,3}. \tag{15}$$

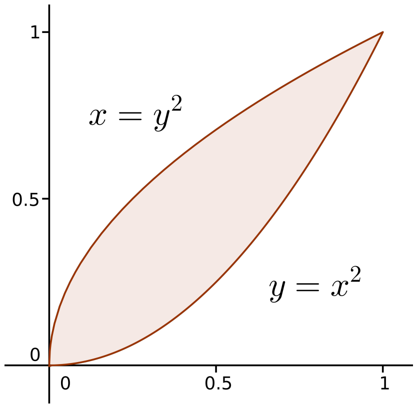
Resolução da Questão 4. Primeiramente, identificamos

$$P(x,y) = y + e^{\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad Q(x,y) = 2x + \cos y^2. \tag{16}$$

Pelo teorema de Green, a integral de linha satisfaz

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \checkmark \mathbf{0,4}, \tag{17}$$

em que D é a região mostrada na figura abaixo.



Mas,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{18}$$

Calculando o trabalho como uma integral iterada, encontramos

$$I = \iint_D 1 dA = \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark \mathbf{0,4}} \underbrace{\int_{x^2}^{\sqrt{x}}}_{\checkmark \mathbf{0,4}} dy dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2) dx = \frac{1}{3}. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{19}$$

Resolução da Questão 5. Pelo teorema de Stokes,

$$I = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \checkmark \mathbf{0,3} \tag{20}$$

em que S a parte do plano $z = 2$ no interior do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, S é o círculo de raio 2 no plano $z = 2$. Com efeito, usando coordenadas cilíndricas, podemos descrever S através das equações $x = r\cos\theta$, $r \operatorname{sen}\theta$ e $z = 2$, com $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Alternativamente, podemos descrever S através da equação vetorial

$$\mathbf{s}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad (r,\theta) \in D, \checkmark \mathbf{0,3} \tag{21}$$

em que $D = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Pela definição de integral de superfície, teremos

$$I = \iint_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot (\mathbf{s}_r \times \mathbf{s}_\theta) dA \checkmark \mathbf{0,3}, \tag{22}$$

em que $\mathbf{s}_r$ e $\mathbf{s}_\theta$ são os vetores tangentes a superfície S dados por

$$\mathbf{s}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{s}_\theta = -r\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + r\cos\theta\mathbf{j}. \tag{23}$$

Portanto,

$$\mathbf{s}_r \times \mathbf{s}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r\mathbf{k}. \checkmark \mathbf{0,3} \tag{24}$$

Observe que $\mathbf{s}_r \times \mathbf{s}_\theta$ aponta para cima e, portanto, a curva C é percorrida no sentido anti-horário! Além disso, pela definição do rotacional, temos que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & 4z & x^2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k} = -4\mathbf{i} - 2r\cos\theta\mathbf{j} + \mathbf{k}. \checkmark \mathbf{0,3} \tag{25}$$

Assim, a integral é dada por

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r dr d\theta \checkmark \mathbf{0,3} = 4\pi. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{26}$$