Física Geral I
F -128

Aula 12
Momento Angular

Plano da Aula

- Momento Angular
  - Conservação de momento angular

Plano da Aula

- Pergunta: porque os gatos (e lagartixas) sempre caem em pé?

http://www.youtube.com/watch?v=RtWbpyjJqrU

http://www.youtube.com/watch?v=HTD514UwLnE

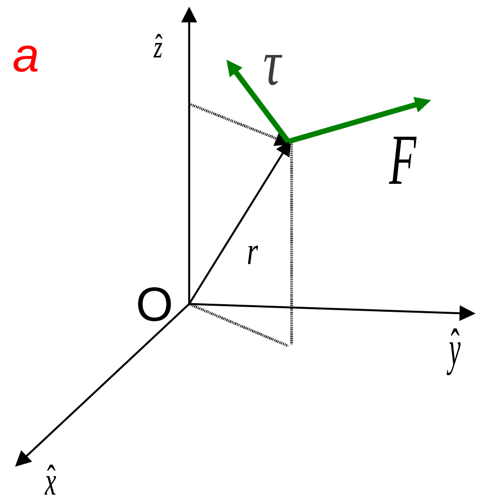
Momento Angular

Como vimos anteriormente, as variáveis angulares de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo $\hat{z}$ têm sempre correspondentes lineares:

$$\tau \leftrightarrow F \;;\alpha \leftrightarrow a \;e\; I \leftrightarrow M$$

Vamos definir mais uma grandeza angular que nos será extremamente útil: o momento angular!

Ampliaremos a definição de torque para aplicá-la a uma partícula, que se move em uma trajetória qualquer, *em relação a um ponto fixo* (em vez de um eixo).



O torque da força F, que age sobre a partícula, em relação ao ponto O é definido como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Momento Angular

Definição: o momento angular ℓ de uma partícula de momento p em relação ao ponto O é:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

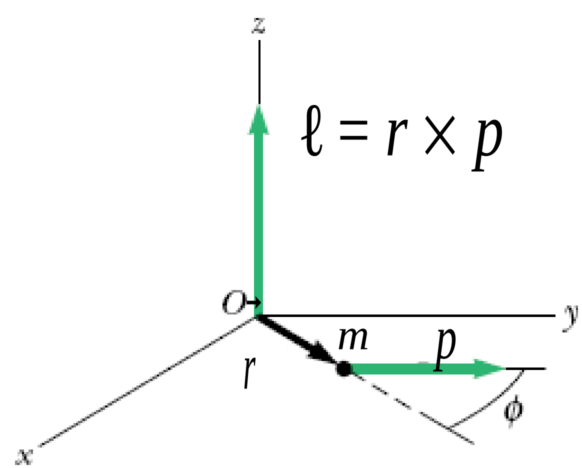
(Note que a partícula *não* precisa estar girando em torno de O para ter momento angular em relação a este ponto).

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Por outro lado: $\vec{F}_{res} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Então: $\dfrac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{res} = \vec{\tau}_{res}$



Pergunta 1

Uma partícula em movimento retilíneo pode ter momento angular?

a) Sim

b) Não

c) Não sei !!!!!!

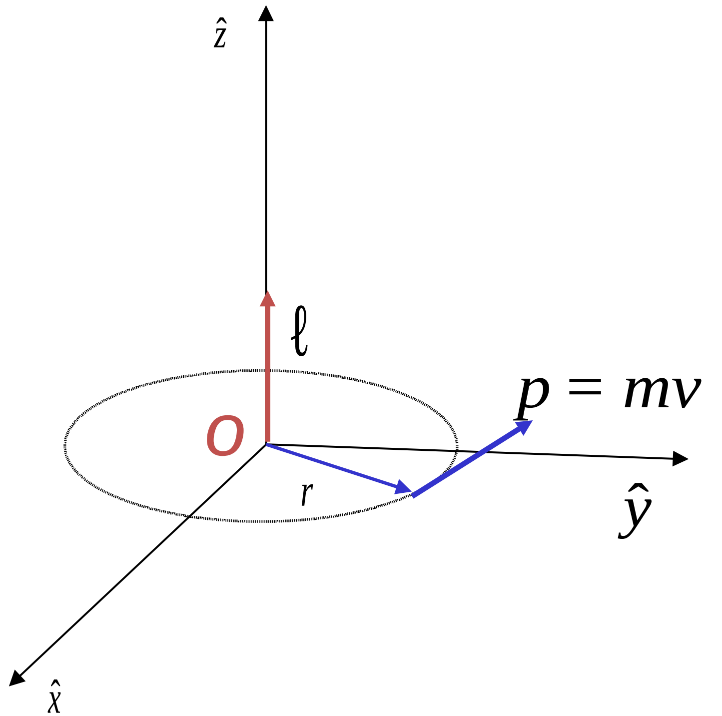
Conservação do momento angular

Como para qualquer massa puntiforme em movimento

$$\tau_{res} = \frac{d\ell}{dt} \quad ,$$

podemos imediatamente dizer que se

$$\boxed{\tau_{res} = 0 \Rightarrow \ell = \overrightarrow{constante}}$$



r e p mantêm-se num plano (perpendicular a ℓ) durante o movimento quando o torque é nulo.

Exemplo 1

Calcular o momento e o torque do pinguim em relação ao ponto *Q*

O momento é dado por:

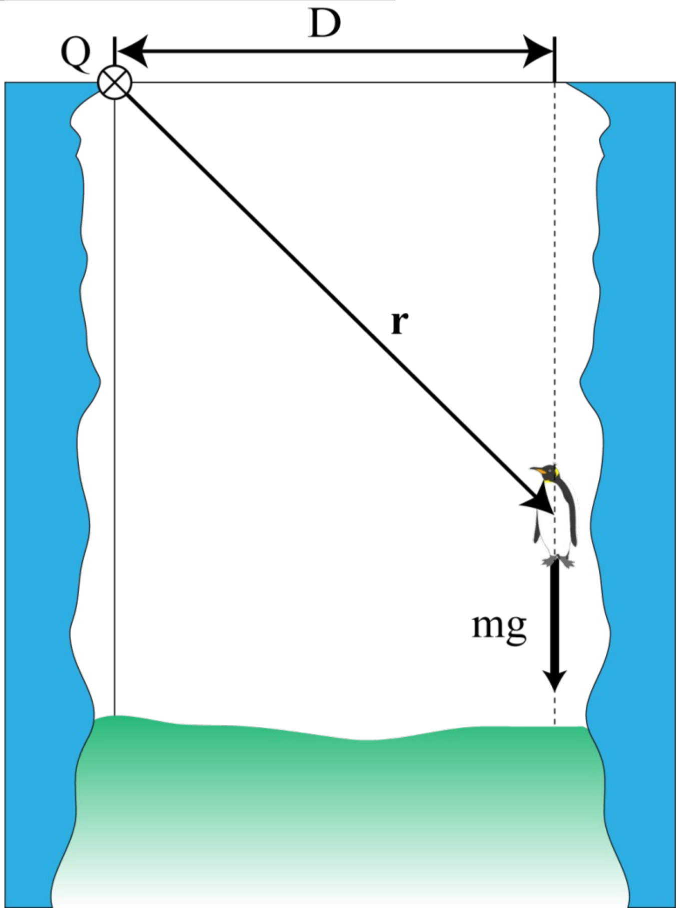
$$\ell = r \times p$$

Mas o momento do pinguim em função do tempo é dado por:

$p(t) = m\,v(t) = mgt$

Assim:

$l\,(t) = Dmgt$



Como: $$\tau_{res} = \frac{d\ell}{dt}$$, então $\tau = Dmg$.

(Verifique que este é o torque calculado quando leva-se em consideração a força peso no cálculo direto do torque.)

Pergunta 2

Uma partícula em movimento retilíneo uniforme tem Conserva seu momento angular?

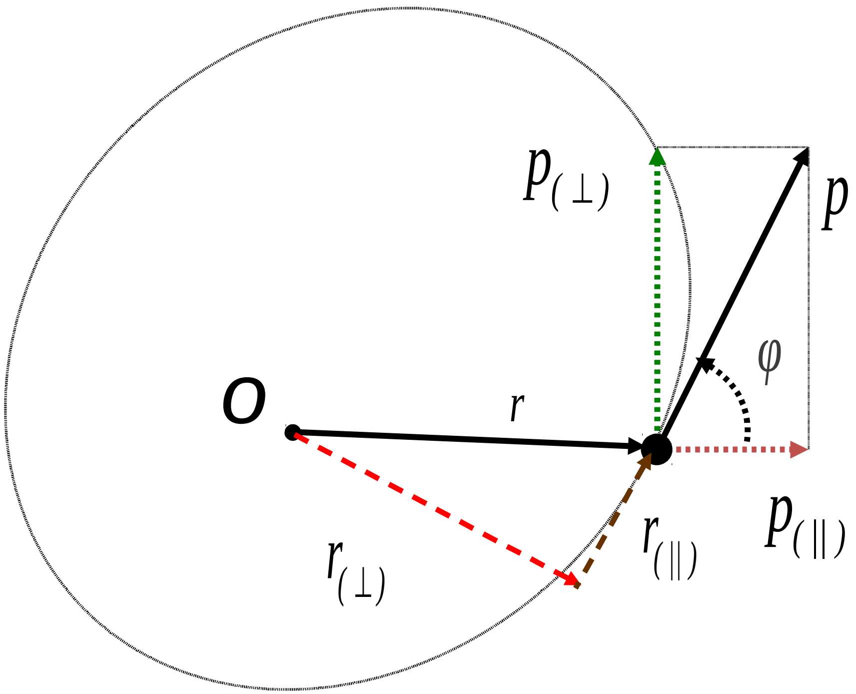
a) Sim

b) Não

c) Não sei !!!!!!

Momento Angular

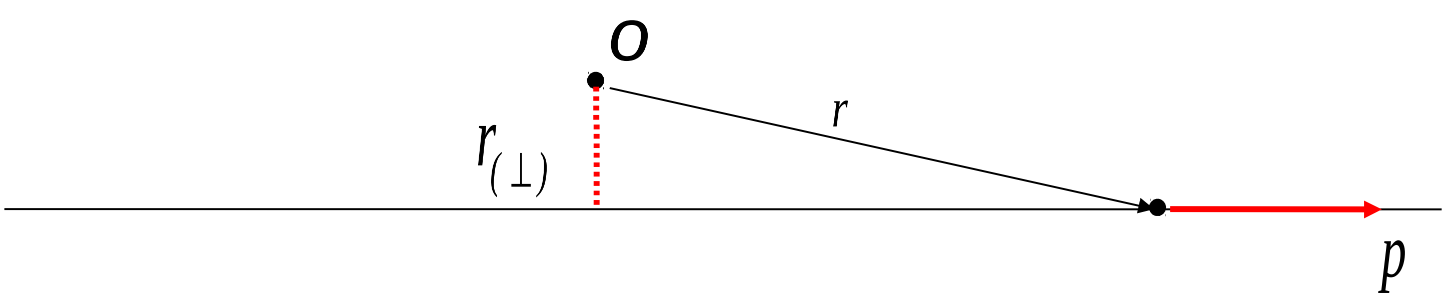
O momento angular da partícula da figura ao lado é um vetor perpendicular ao plano do movimento e o seu módulo vale



$$\ell = r\ p_{(\perp)} = r_{(\perp)}\ p$$

Se a força sobre a partícula é nula ela segue uma trajetória retilínea e

$$\tau = 0 \Rightarrow \ell = r_{(\perp)}\ p = \text{constante}$$



Momento Angular

Forças Centrais

Há, entretanto, outros casos onde o momento angular se conserva mesmo na presença de forças não nulas. Um exemplo é o de forças centrais, que são forças da forma

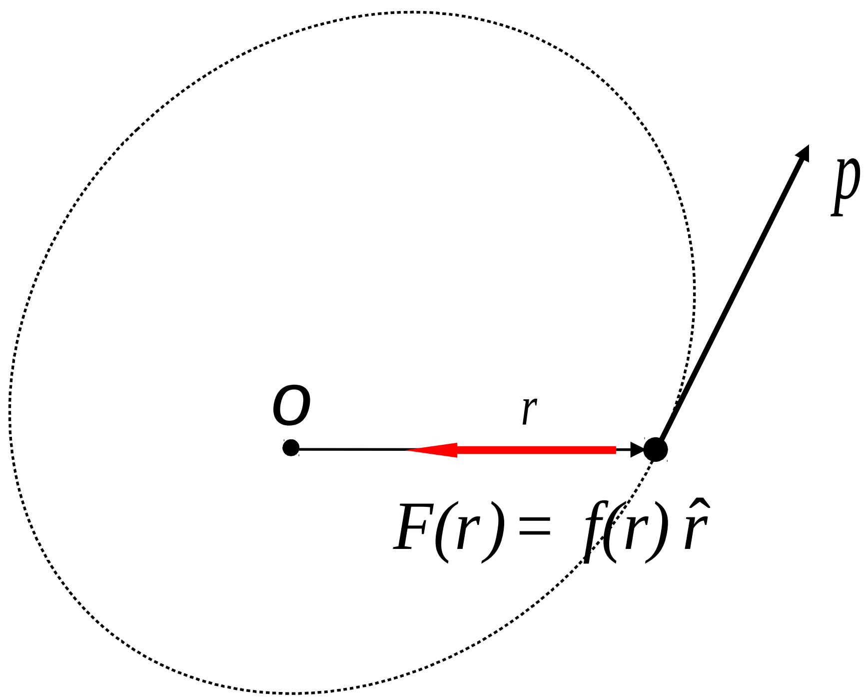
$$F(r) = f(r)\,\hat{r}$$

Neste caso:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \tau = \underbrace{\vec{r} \times f(r)\,\hat{r}}_{=0}$$

e se

$$\boxed{\tau = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\ell} = \overrightarrow{const.}}$$

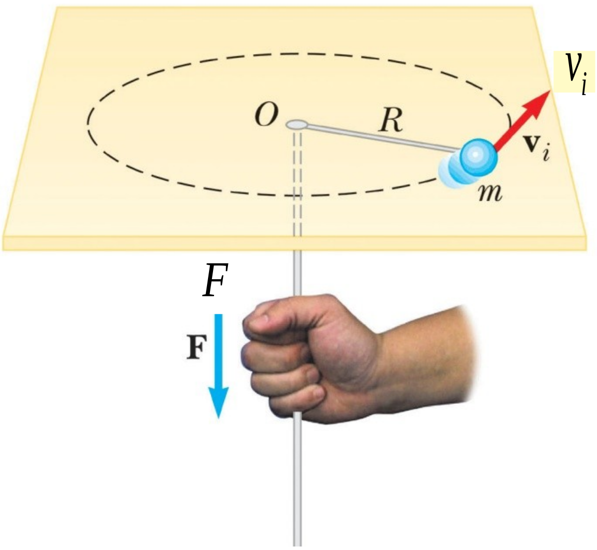


Exemplo 2

Dados *R* e v_i pede-se:

a) v_f em função do raio *r*;

a) o trabalho da força *F*.



Como a força é central, o momento angular em relação a O se conserva:

$$m\,v_i\,R = m\,v_f\,r \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{R v_i}{r}$$

O trabalho da força é dado por

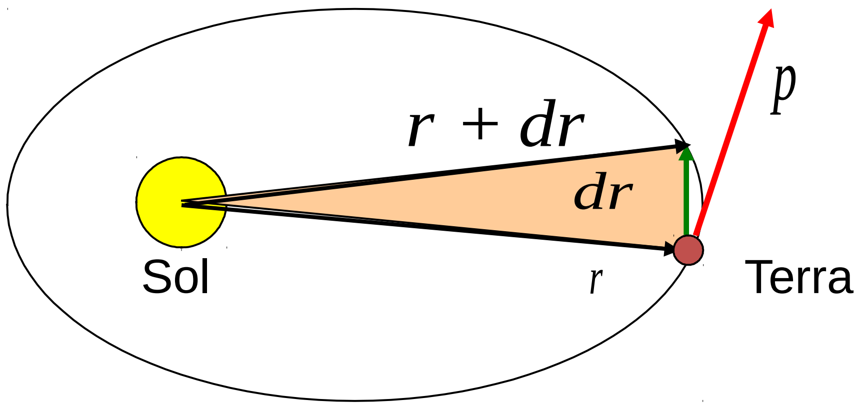
$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_f^{\,2} - \frac{1}{2} m v_i^{\,2} = \frac{1}{2} m v_i^{\,2}\left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1\right]$$

Exemplo 3

Lei das áreas

A Força gravitacional entre dois corpos, por exemplo, Sol e Terra é dada por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r}$$



Como a força gravitacional é central, o momento angular da Terra se conserva (Sol estático, centro de atração gravitacional para a Terra)

$$\tau = 0 \Rightarrow \vec{\ell} = const.$$

$\Rightarrow$ o movimento se dá num plano normal a ℓ.

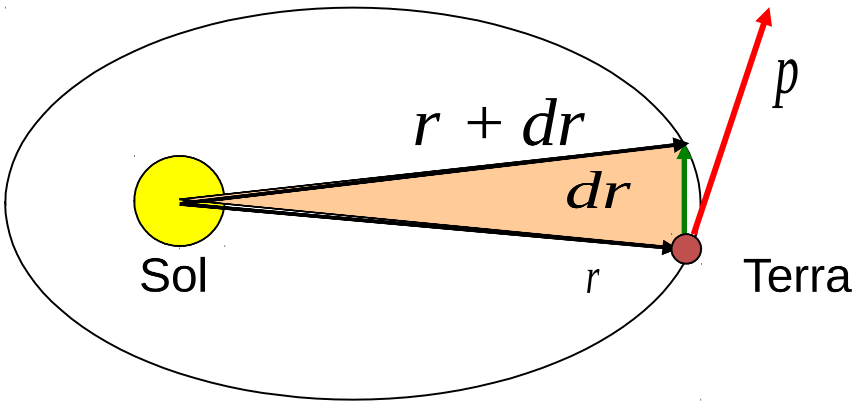
Exemplo 3

Lei das áreas

Área do triângulo colorido:

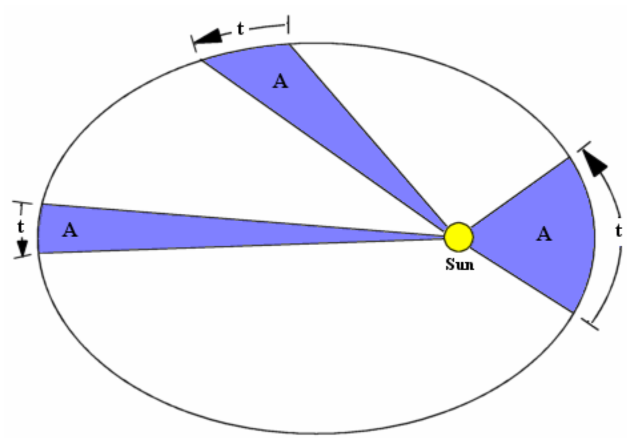
$$d\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r}$$

($|dA|$ = metade da área do paralelogramo)



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}\vec{r} \times m\frac{dr}{dt} = \frac{\ell}{2m}$$

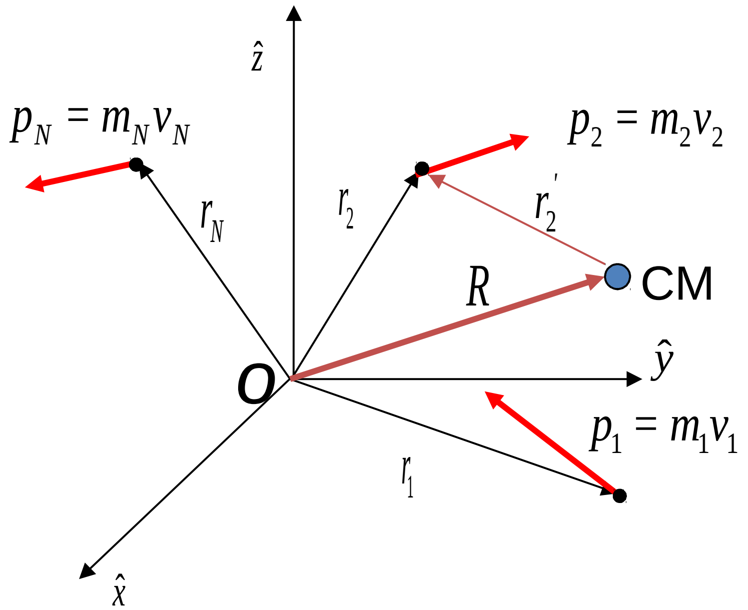
$$\left|\frac{dA}{dt}\right| = \frac{\ell}{2m} = \text{constante}$$



2ª Lei de Kepler: “O raio vetor que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais”.

Momento angular de um sistema de partículas

O momento angular de um sistema de partículas é dado por:



$$L = \sum_i \ell_i = \sum_i r_i \times p_i = \sum_i m_i \, r_i \times v_i$$

Lembrando que a posição do CM é

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$$, podemos escrever:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,'} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{v}_i^{\,'} = \sum_i \vec{p}_i^{\,'} = 0$$

Como $\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,'} + \vec{R}$ segue que $v_i = v_i' + V$

, onde V é a velocidade do CM:

Momento angular de um sistema de partículas

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_1 \left(\vec{r'}_i + \vec{R}\right)\left(\vec{v'}_i + \vec{V}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_1 \vec{r'}_i \times \vec{v'}_i + \vec{R} \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v'}_i\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r'}_i\right)}_{=0} \times \vec{V} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{=M} \vec{R} \times \vec{V}$$

$$\boxed{L = L^{'} + R \times P}$$

Ou seja, o momento angular de um sistema de partículas é a soma do momento angular em relação ao CM com o momento angular do CM. Note que o momento linear interno de um sistema de partículas se anula.

Momento angular de um sistema de partículas

Lei fundamental da dinâmica das rotações

A variação do momento angular total de um sistema de partículas é:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)=\sum_i\left(\underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\vec{p}_i}_{=0}+\vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right)=\sum_i \vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i$$

Aqui $\vec{F}_i=\frac{dp_i}{dt}$ (referencial inercial) representa a força total sobre a partícula *i*.

Como $\sum_i r_i\times F_i=\sum_i r_i\times(F_{i(ext)}+\sum_{j\neq i}F_{i\leftarrow j})$,

podemos trocar *i* por *j* e reescrever:

Momento angular de um sistema de partículas

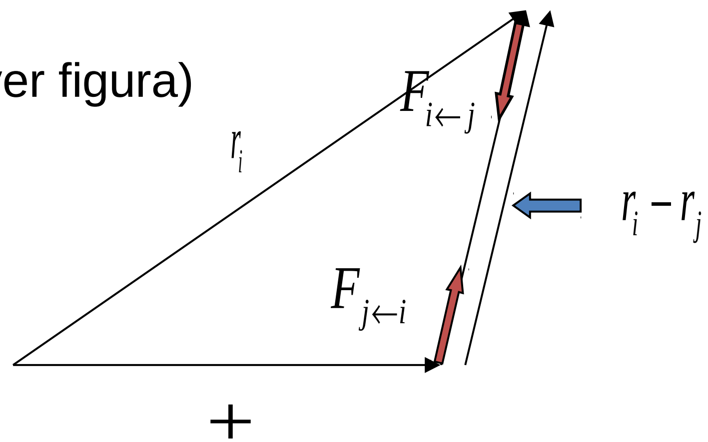
$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(ext)} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sum_{i\neq j}[(\vec{r}_i \times \vec{F}_{i\leftarrow j}) + (\vec{r}_j \times \vec{F}_{j\leftarrow i})]$$

Usando a 3ª Lei de Newton $F_{j\leftarrow i} = -F_{i\leftarrow j}$ temos

$$\frac{dL}{dt} = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(ext)}}_{\tau_{(ext)}} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sum_{i\neq j}[(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{i\leftarrow j})$$

Como o produto vetorial do segundo termo é nulo (ver figura)

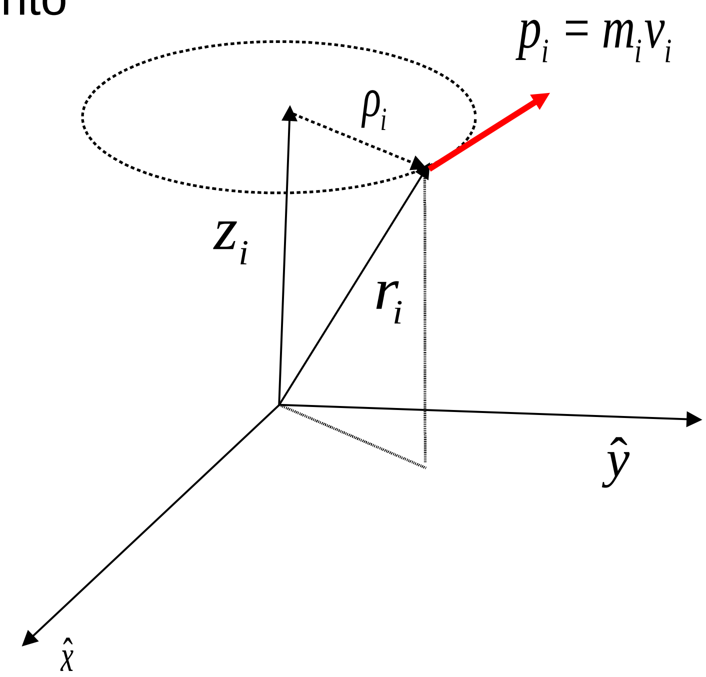
$$\frac{dL}{dt} = \vec{\tau}_{(ext)}$$



Rotação em torno de um eixo fixo

Vamos agora estudar o movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Como podemos decompor o vetor posição de qualquer ponto do corpo rígido como

$r_i = \rho_i + z_i$, temos:



$$\ell_i = r_i \times p_i = \underbrace{\rho_i \times p_i}_{//\,\hat{z}} + \underbrace{z_i \times p_i}_{\perp\,\hat{z}}$$

$$\ell_i^{(z)}\hat{z} = \rho_i \times p_i$$

$$\frac{d\ell_i^{(z)}}{dt}\hat{z} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\rho}_i \times \vec{p}_i\right) = \tau_i^{(z)}\,\hat{z}$$

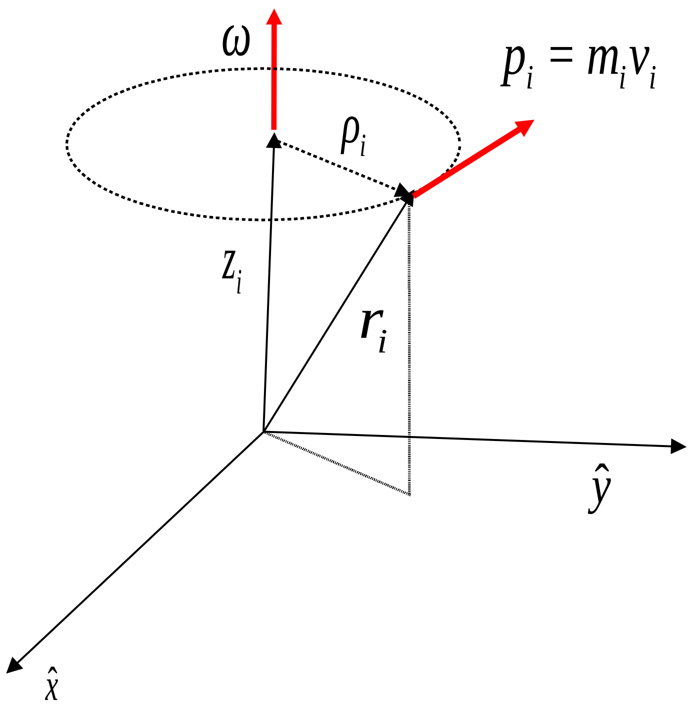
(com o torque definido em relação ao eixo de rotação).

Rotação em torno de um eixo fixo

Como $p_i = m_i v_i = m_i \, \omega \times \rho_i$,

temos: $\ell_i^{(z)} \hat{z} = \rho_i \times p_i = m_i \rho_i^2 \omega \, \hat{z}$

ou $\ell_i^{(z)} = m_i \rho_i^2 \omega$



$$\boxed{L^{(z)} = \sum_i \ell_i^{(z)} = \sum_i m_i \rho_i^2 \omega = I\omega}$$

Note a analogia: $L^{(z)} = I\omega \quad \leftrightarrow \quad p = mv$

Pergunta 3

Uma barata esta na borda de um pequeno disco que gira como um carrossel a uma velocidade angular constante. Se a barata se desloca ao centro do disco, o que acontece com o momento angular do sistema?

a) Aumenta

b) Diminui

c) fica constante

Pergunta 4

Uma barata esta na borda de um pequeno disco que gira como um carrossel a uma velocidade angular constante. Se a barata se desloca sobre o perímetro do disco no sentido do giro, que acontece com o momento angular?

a) Aumenta

b) Diminui

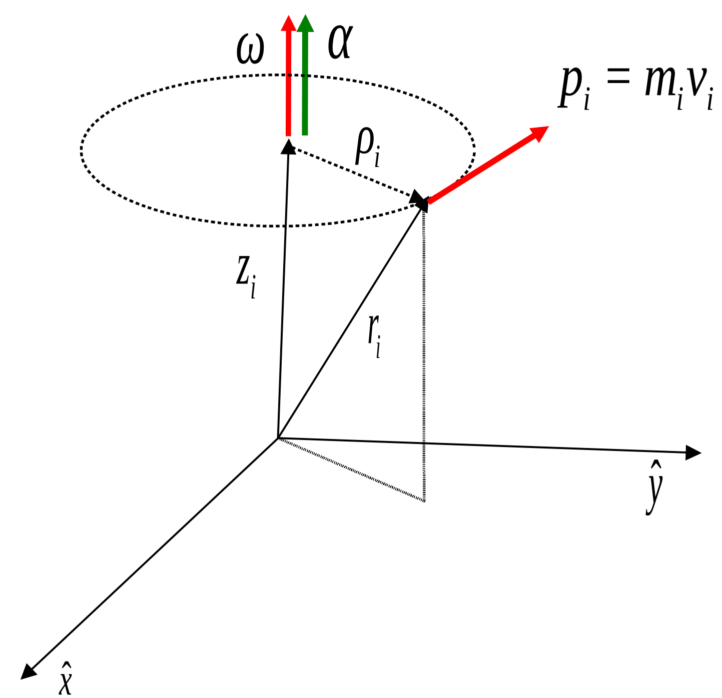
c) fica constante

Rotação em torno de um eixo fixo

Temos também: $$\tau_i^{(z)} = \frac{d\ell_i^{(z)}}{dt}$$

$$\tau^{(z)} = \sum_i \tau_i^{(z)} = \sum_i \frac{d\ell_i^{(z)}}{dt}$$

$$\tau^{(z)} = \frac{d}{dt}\sum_i \ell_i^{(z)} = \frac{dL^{(z)}}{dt} = I\,\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$



Mas, pela Lei fundamental da dinâmica das rotações:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(ext)} = \vec{\tau}_{(ext)}$$

$$\boxed{\tau^{(z)} = \tau_{(ext)}^{(z)} = \frac{dL^{(z)}}{dt} = I\,\alpha}$$

Rotação em torno de um eixo fixo

Tabela de analogias

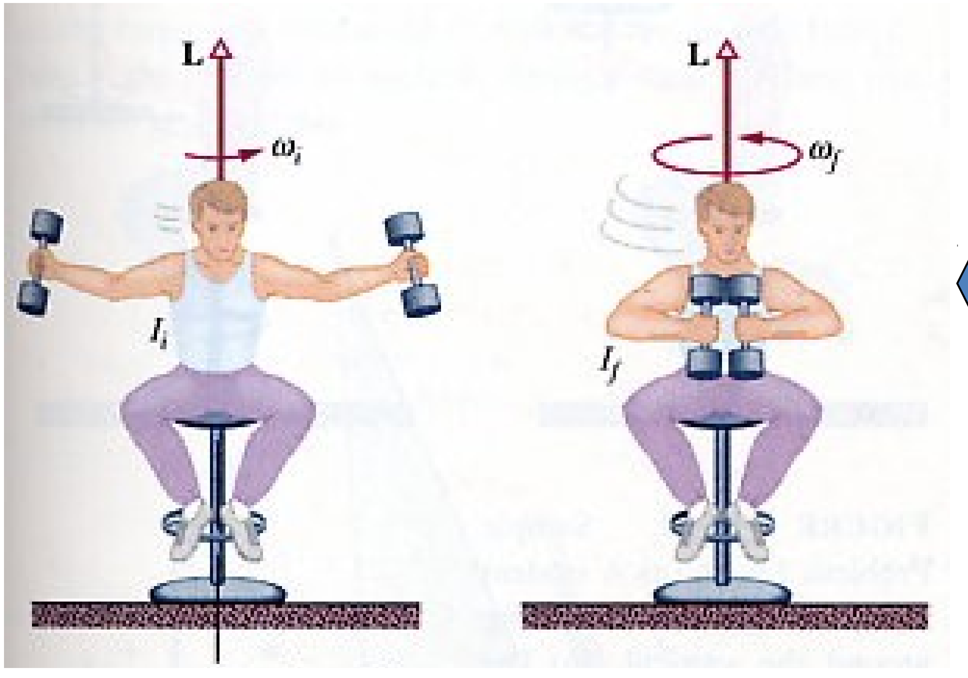
	Rotação em torno de um eixo fixo	Movimento de translação
energia cinética	$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$	$K = \frac{1}{2} m v^2$
equilíbrio	$\sum \tau = 0$	$\sum F = 0$
2ª lei de Newton	$\sum \tau = I \alpha$	$\sum F = m a$
2ª lei de Newton	$\sum \vec{\tau}_{(ext)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
momento	$L = I\omega$	$p = m v$
conservação	$\vec{L}_i = \vec{L}_f$	$p_i = p_f$
potência	$P = \tau \omega$	$P = F v$

Conservação de momento angular

No sistema homem – halteres: só há forças internas e, portanto:

$$L^{(z)} = I\omega = \text{constante} \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$\omega_i \quad I_i$



$\omega_f \quad I_f$

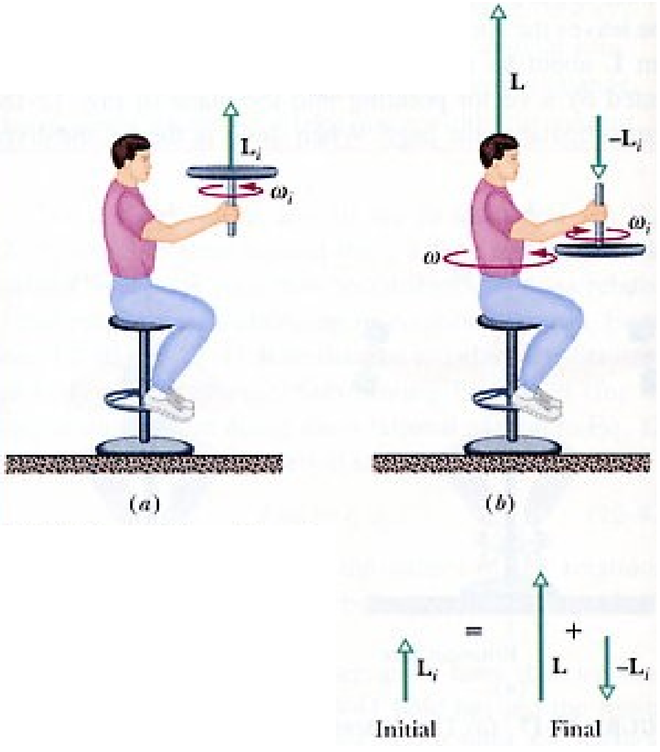
Com a aproximação dos halteres ($I_f < I_i$) a velocidade angular do sistema aumenta.

Conservação do momento angular

Exemplo

Dados $I_{bic} = 1,2 \text{ kg.m}^2; \; I_{tot} = 6,8 \text{ kg.m}^2 \;$ e $\; \omega_i = 3,9 \text{ rot/s}$

Queremos calcular a velocidade angular final ω do sistema após o menino inverter o eixo de rotação da roda de bicicleta (ver figura)



Momento angular inicial do sistema roda de bicicleta-menino (+ banco)

$$L_i = L_{bic} = I_{bic}\omega_i$$

O menino inverte o eixo de rotação da roda de bicicleta

$$L_{bic} \rightarrow -L_i$$

Conservação do momento angular

Momento angular final do sistema:

$$K = \frac{1}{2} I\,\omega^2$$

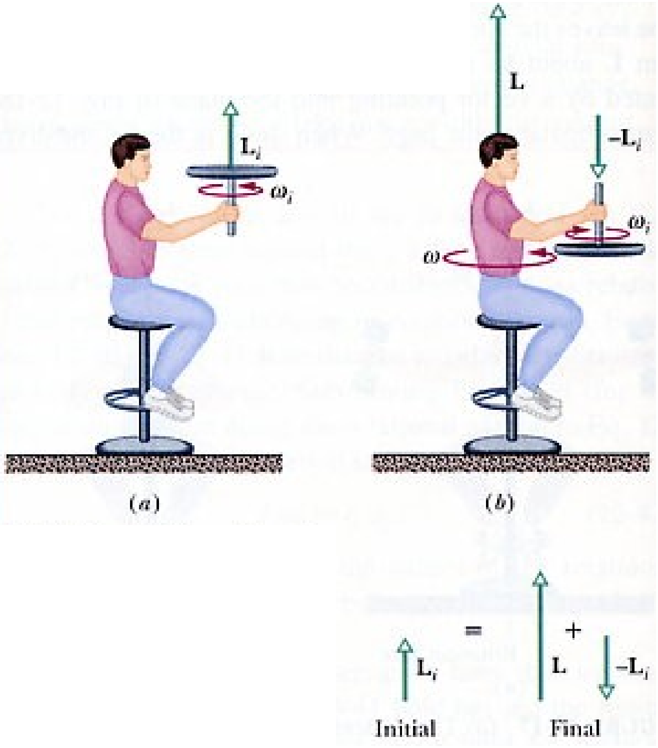
Conservação do momento angular
(pois só há forças internas no sistema)

$$L_f = L_i \Rightarrow L_{men} - L_i = L_i$$

$$\Rightarrow L_{men} = 2\mathrm{L}_i$$

$$I_{tot}\,\omega = 2\mathrm{I}_{bic}\omega_i$$

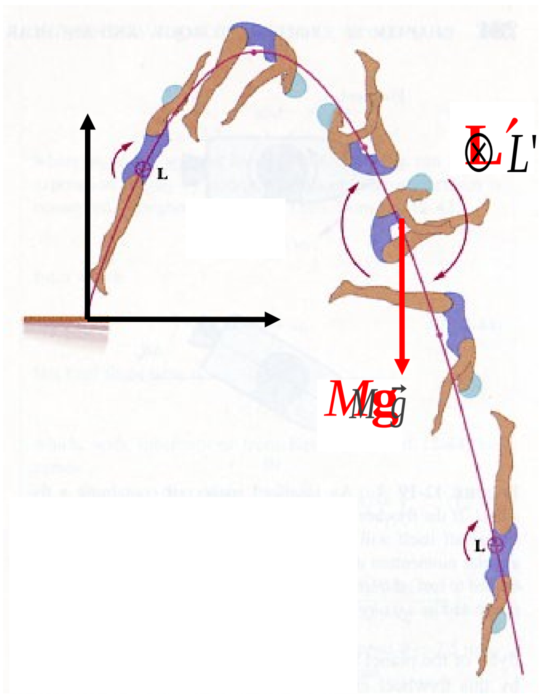
$$\omega = \frac{2I_{bic}\,\omega_i}{I_{tot}} \cong 1{,}4 \quad \text{rot/s}$$



Conservação do momento angular

No caso da mergulhadora da figura ao lado o CM segue um movimento parabólico.

Nenhum torque externo atua sobre ela em relação a um eixo que passa pelo CM; então no referencial do CM:



$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i'}_{=0} \times \vec{g} = 0$$

e o momento angular L' da nadadora é constante durante o salto. Juntando braços e pernas, ela pode aumentar sua velocidade angular em torno do eixo que passa pelo CM, às custas da redução do momento de inércia em relação a este eixo.

Precessão do momento angular

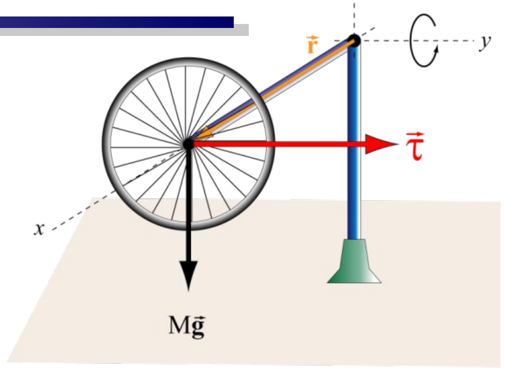
Se a roda tem uma velocidade angular ω grande, seu eixo gira em torno do eixo z, como veremos (*movimento de precessão*).

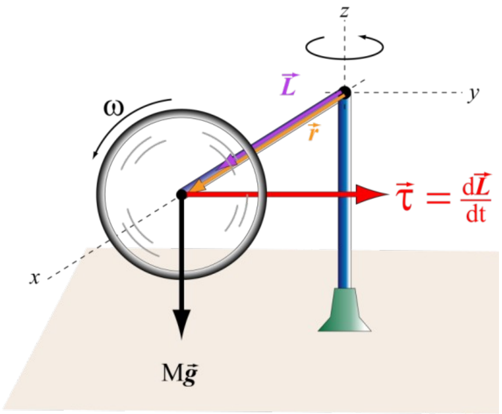
O torque da força peso é:

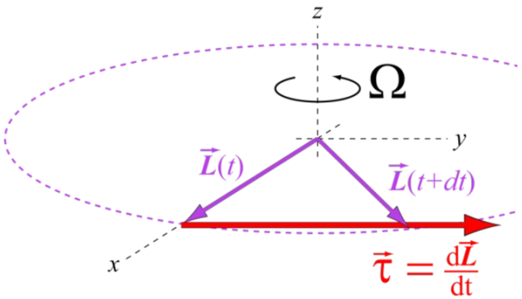
$\tau = r \times Mg$ (τ é perpendicular ao eixo e $\therefore$ ao momento angular L da roda.

Como $\vec{\tau} = \dfrac{dL}{dt}$, segue que dL é perpendicular a L

Então o módulo de L não varia, e o que muda é apenas a sua direção.







Precessão do momento angular

Roda

Temos: $dL = \tau dt = Mgrdt$ e da figura:

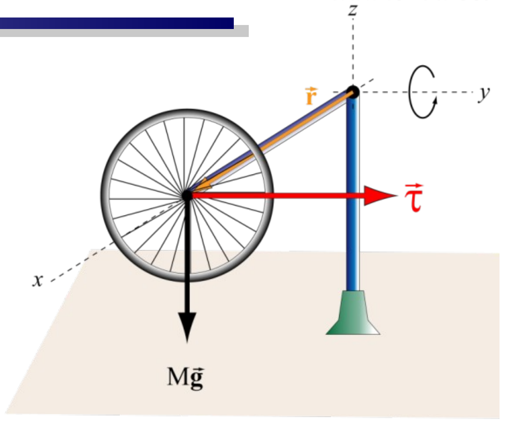
$$dL = Ld \quad = I\omega\, d \quad \therefore$$

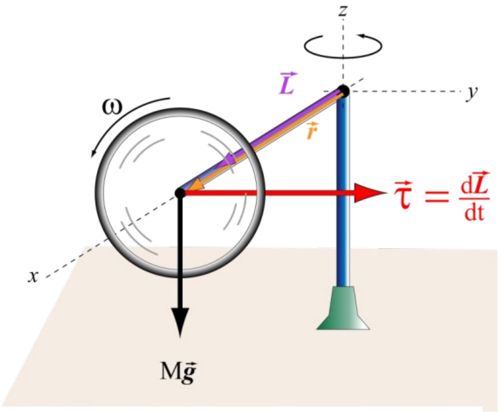
$$d \quad = \frac{dL}{L} = \frac{Mgrdt}{I\omega}$$

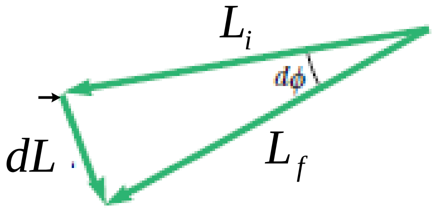
Velocidade angular de precessão:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Mgr}{I\omega}$$

➡ Note que este resultado também é válido quando o eixo do giroscópio (roda) faz um ângulo diferente de zero com a horizontal (ver exemplo do pião, a seguir)







Giroscópio

http://www.youtube.com/watch?v=8H98BgRzpOM

Precessão do momento angular

Pião

Módulo do torque da força peso:

$$\tau = Mgr\ sen\theta$$

Lei fundamental da dinâmica das rotações:

$$\Delta L = \tau\ \Delta t \Rightarrow \Delta L = Mg\ r\ sen\theta\ \Delta t$$

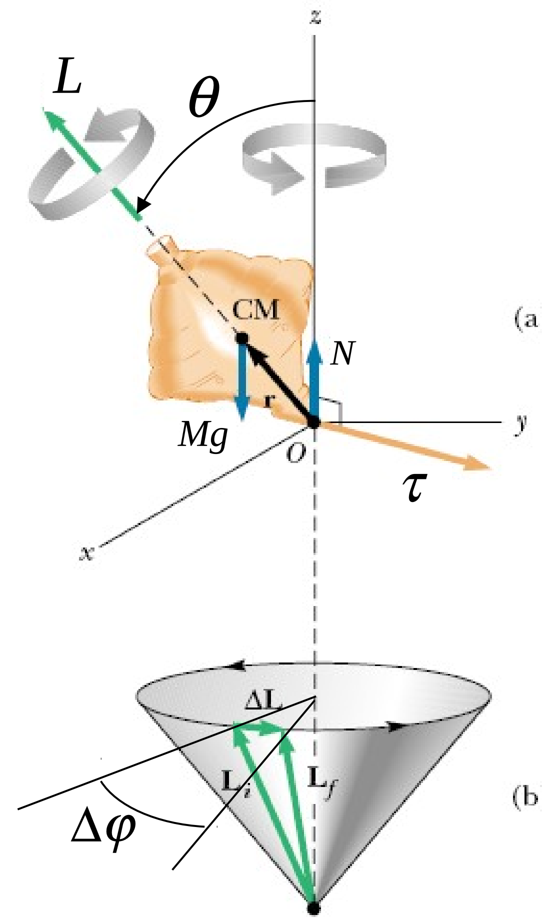
Da figura temos:

$$\Delta L = L\ sen\theta\ \Delta \quad = I\omega\ sen\theta\ \Delta \quad \therefore$$

$$Mgr\ sen\theta\ \Delta t = I\omega\ sen\theta\ \Delta$$

Velocidade angular de precessão:

$$\Omega \equiv \frac{d}{dt} = \frac{Mgr}{I\omega}$$



Precessão do momento angular

O centro de massa do pião executa movimento circular com uma aceleração centrípeta

$$a_c = \Omega^2 r\, sen\theta$$

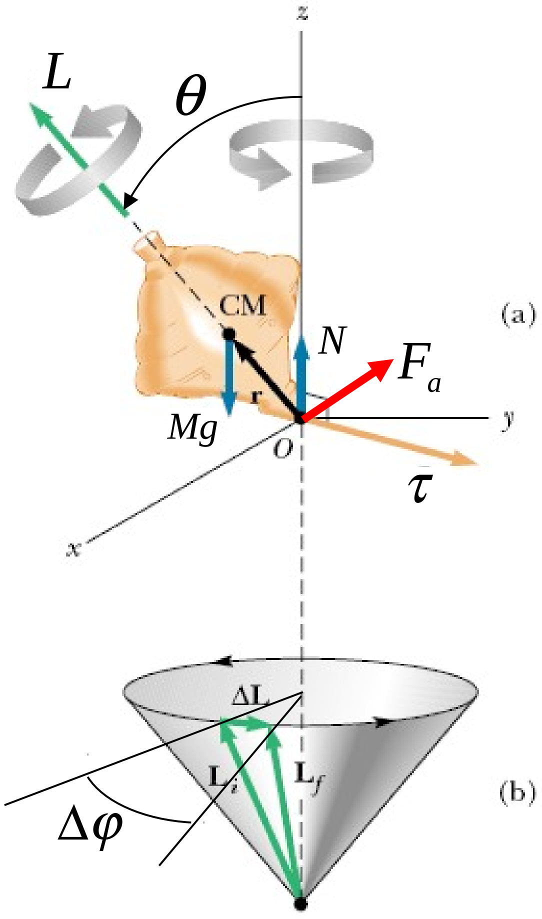
A força de atrito pião-piso é a responsável por esta aceleração

$$F_a = M\Omega^2 r\, sen\theta$$

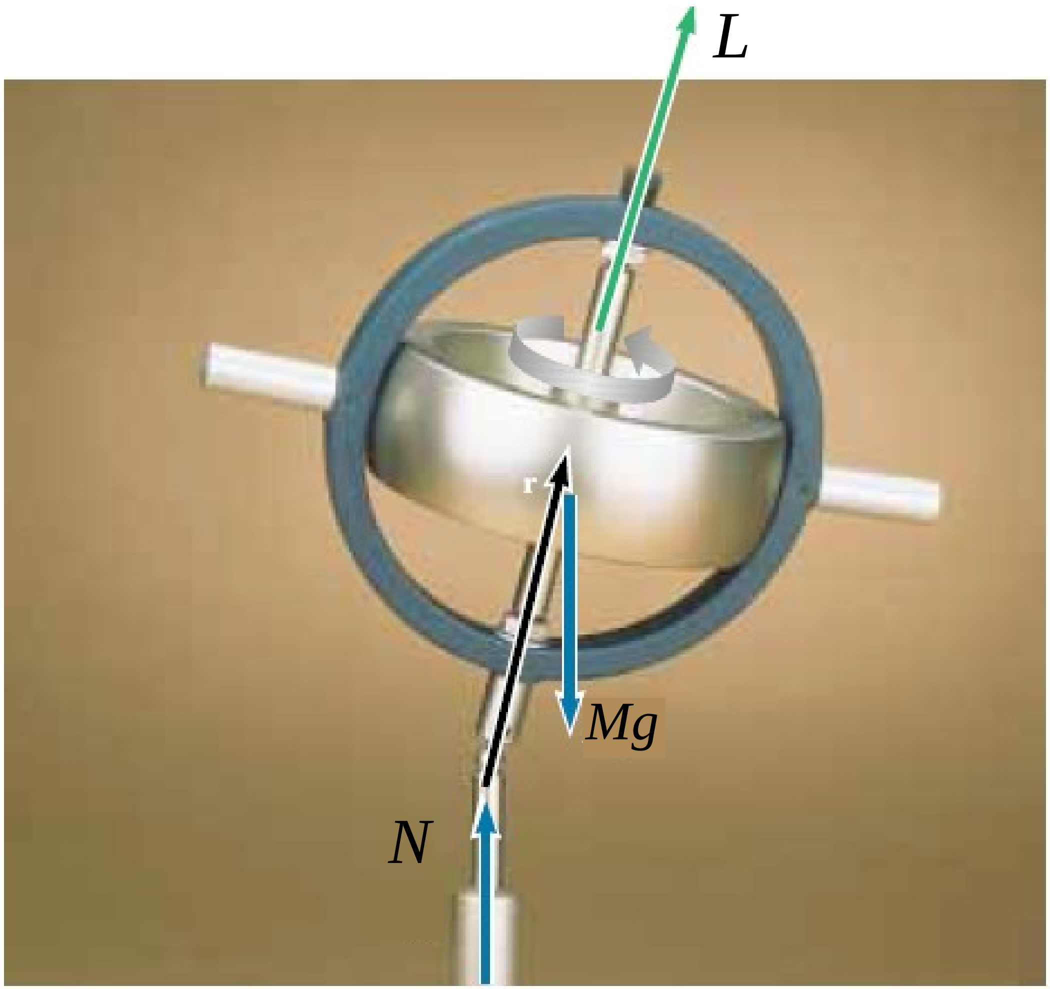
Como $$F_a \leq \mu\, Mg$$

$$sen\theta \leq \frac{\mu g}{\Omega^2 r}$$

para que a ponta do pião fique fixa e haja apenas movimento de rotação!



Giroscópio



Precessão do momento angular

Como a Terra é um esferóide oblato (achatado nos polos), a Lua e o Sol provocam forças como as mostradas abaixo e em 13.000 anos o eixo de rotação sofre precessão de meio período, como na figura.