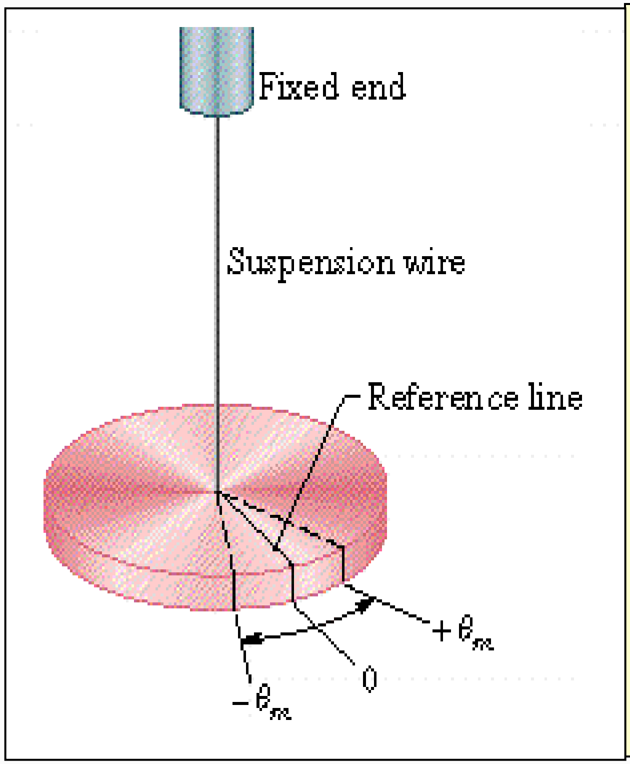
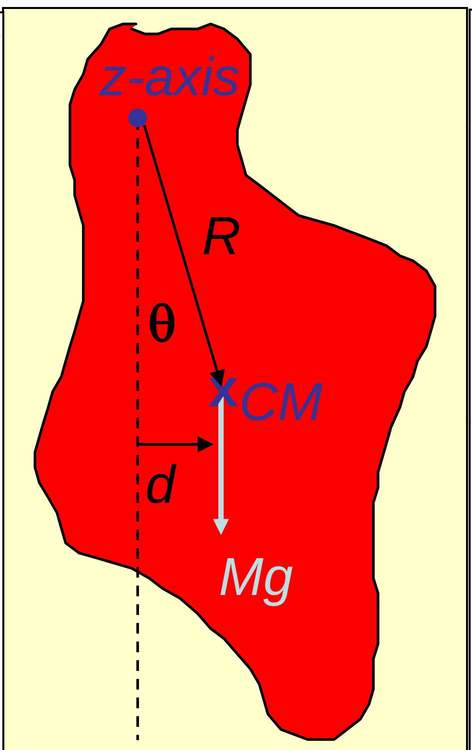
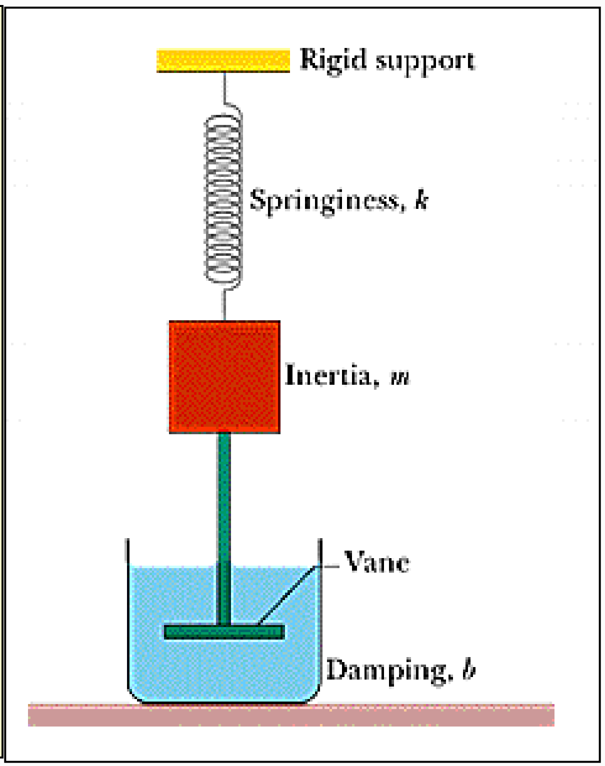
Aula-5
Oscilações

Física Geral II - F 228

2º semestre, 2016







Oscilações
(ou Vibrações)

"Variações temporais"

Ondas

"Variações temporais
e espaciais"

Oscilações

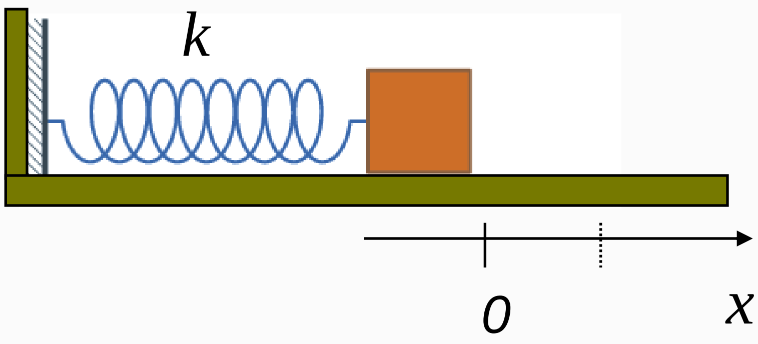
- Muitos fenômenos podem ser descritos como oscilações.
  - Exemplos: Metrônomo, Pêndulo, Sistema Massa-Mola (Fig.)

Em geral são descritos pelas variáveis:

- Deslocamento (x): a partir da posição de equilíbrio;
- Período (T): é o tempo necessário para completar um ciclo;
- Frequência (f): é o número de ciclos por unidade de tempo.

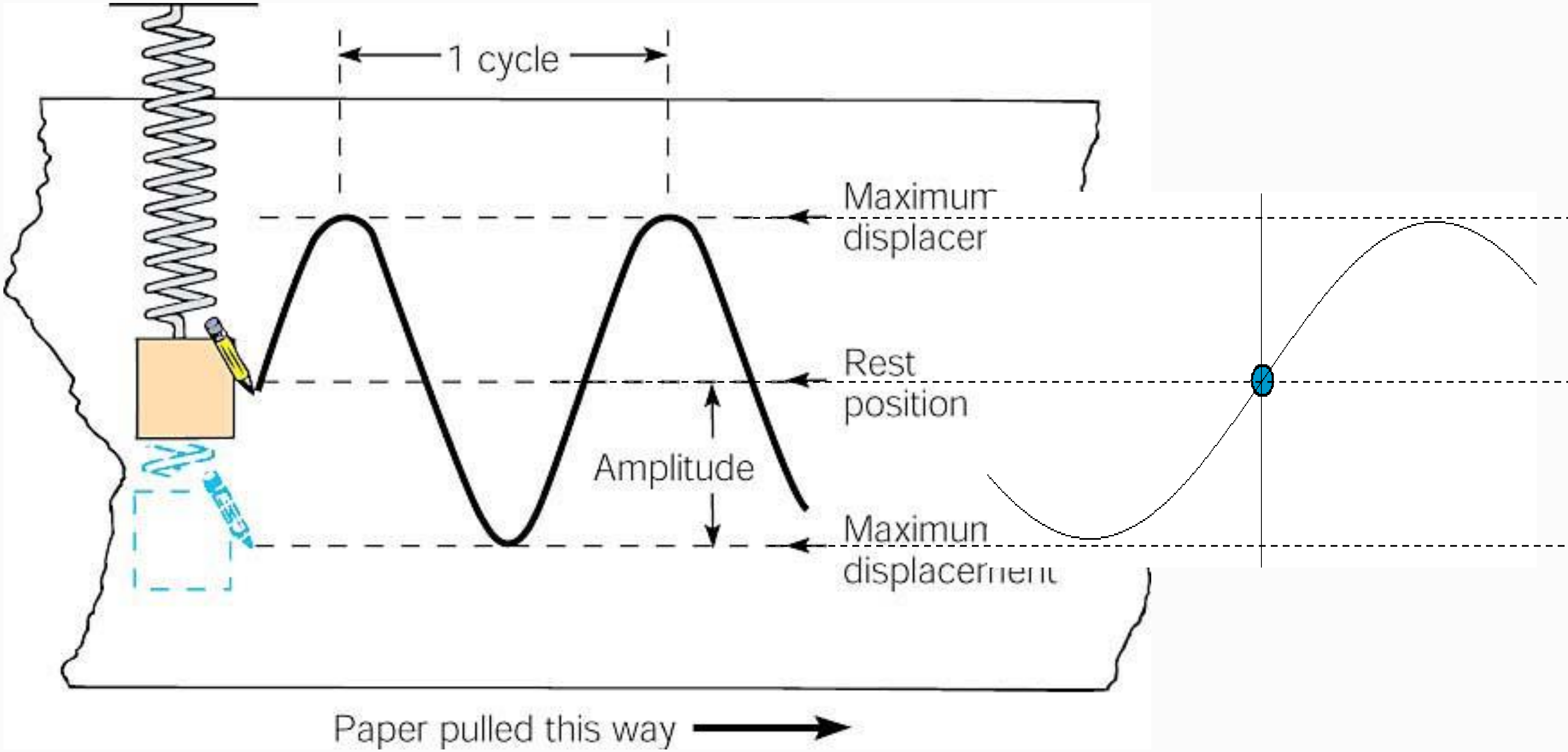
- Um ciclo é o movimento de vai e vem de um ponto, retornando à sua posição inicial.

$$\boxed{T = \frac{1}{f}}$$



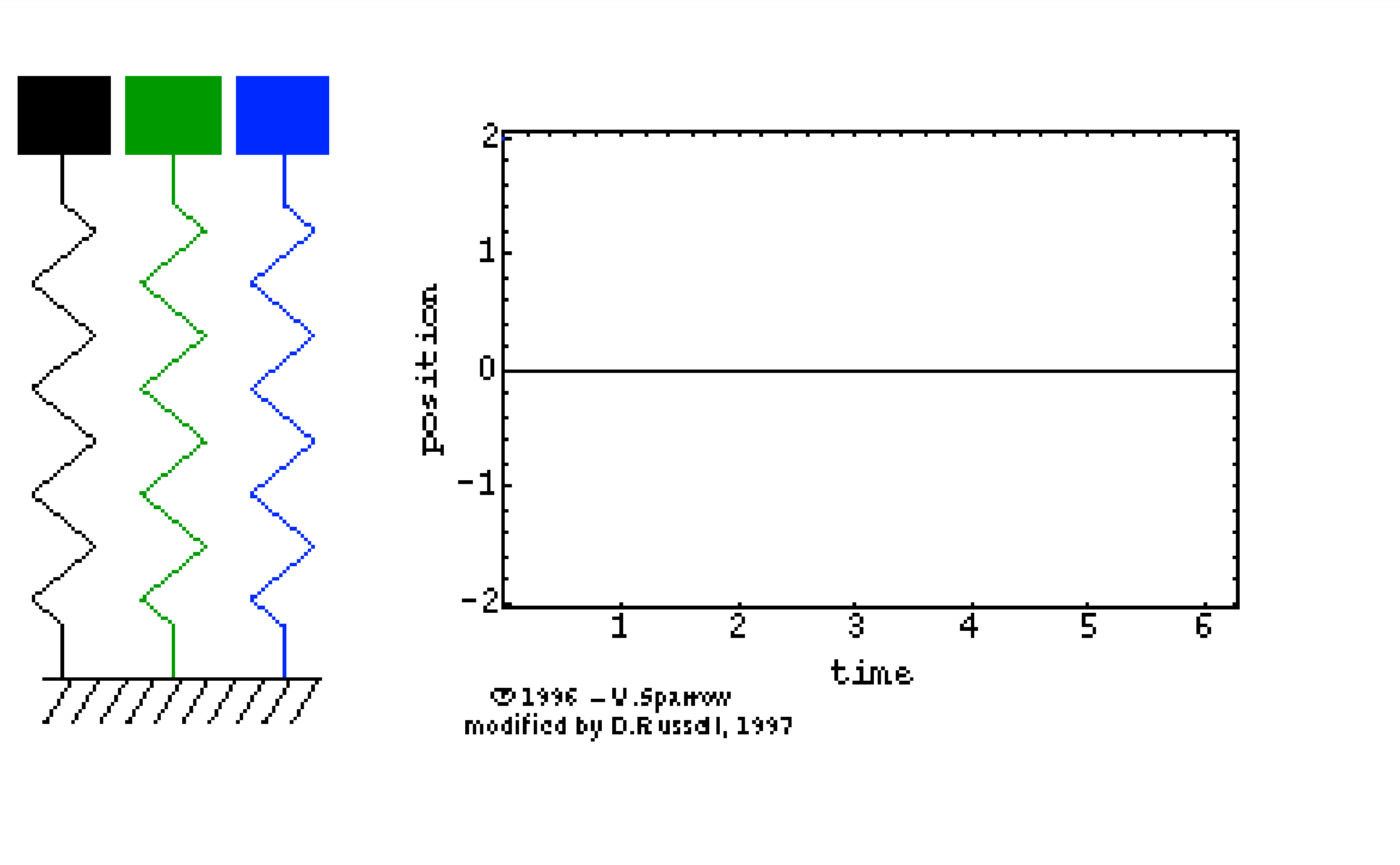
Movimento Harmônico Simples (MHS)

(Ideal)



O gráfico de um Movimento Harmônico Simples é descrito por uma curva senoidal.

MHS



http://www.netzmedien.de/software/download/java/oszillator/index.html

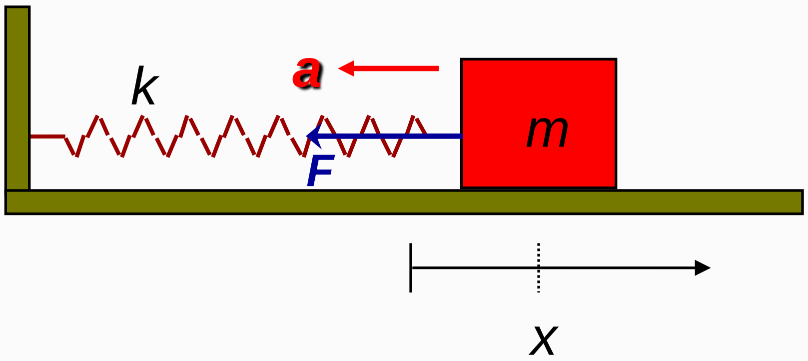
Dinâmica do MHS

- Sabemos que a qualquer instante:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

Mas : $\vec{F} = -k\vec{x}$ (força restauradora)

daí: $ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$



- Portanto:

$$-kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$ Equação diferencial para $x(t)$!

Dinâmica do MHS

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

definindo: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$\omega = 2\pi f \quad ; \quad T = \frac{1}{f}$

Independem de A !...

...para todo MHS !

Solução: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$\phi \rightarrow$ Constante de fase

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

Velocidade e Aceleração

Posição: $x(t) = A\,cos(\omega t + \phi)$

Velocidade: $v(t) = -\,\omega A\,sin(\omega t + \phi)$

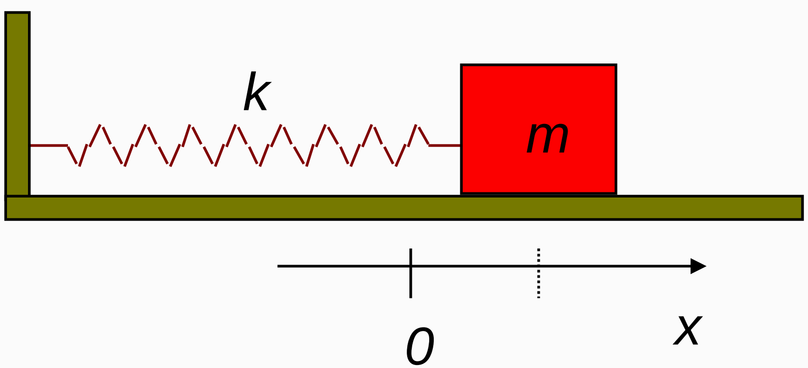
Aceleração: $a(t) = -\,\omega^2 A\,cos(\omega t + \phi)$

pois:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

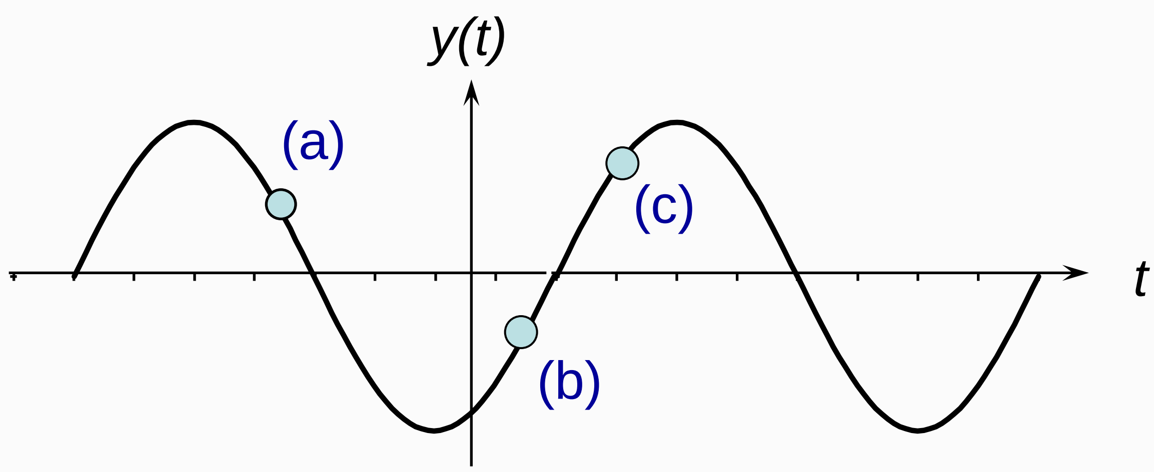
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$x_{MAX} = A$	[m]
$v_{MAX} = \omega A$	[m/s]
$a_{MAX} = \omega^2 A$	[m/s^2]



Exemplo 1

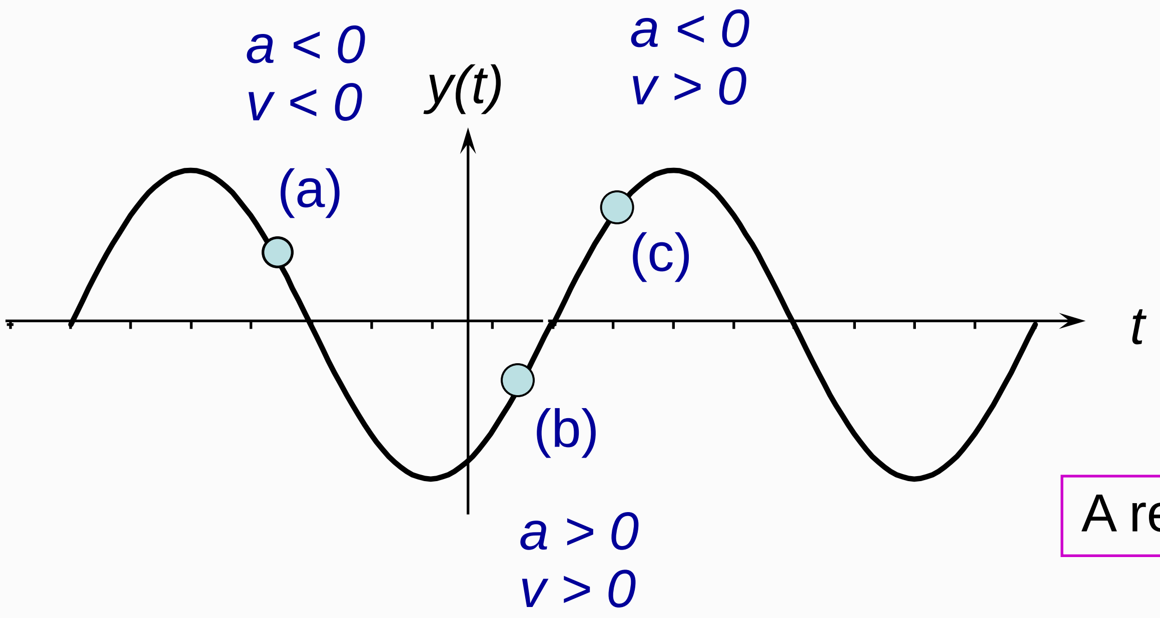
- Uma massa oscila para cima e para baixo em uma mola. Sua posição em função do tempo é mostrada abaixo. Em quais dos pontos assinalados a massa tem uma velocidade <u>positiva</u> e uma aceleração <u>negativa</u> ?



Exemplo 1: solução

- A inclinação $y(t)$ nos mostra o sinal da velocidade, pois $v = \frac{dy}{dt}$
- $y(t)$ e $a(t)$ têm sinais opostos pois: $a(t) = -\omega^2 y(t)$

$y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$



A resposta é: (c)

Exemplo 2

• Uma massa $m = 2\ kg$ oscila em uma mola com amplitude $A = 10\ cm$. Em $t = 0$ sua velocidade é máxima, e vale $v = +2\ m/s$. Calcule:

a) A freqüência angular da oscilação ω;

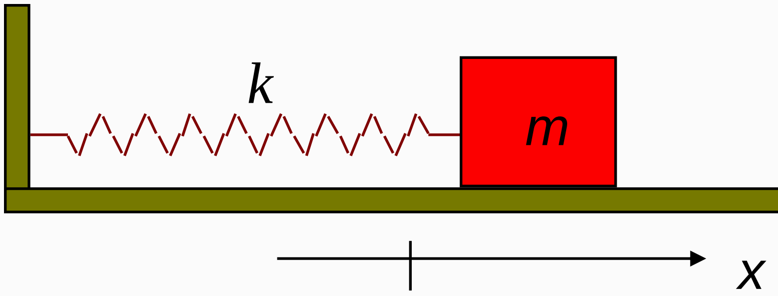
b) A constante da mola k.

$$\boxed{v_{max} = \omega A}$$

$$\omega = \frac{v_{max}}{A} = \frac{2\,m/s}{10\,cm} = 20\ \text{rad}\ s^{-1}$$

também: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ➡ $\boxed{k = m\omega^2}$

Portanto: $k = (2\ kg) \times (20)^2 = 800\ kg/s^2 = 800\ N/m$



Resumo: MHS

- Solução: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

  onde: $\begin{cases} A = \text{amplitude} \\ \omega = \text{frequência angular} \\ \phi = \text{fase} \\ T = \text{período} \end{cases}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

- Para uma massa em uma mola:

➢ A frequência e o período **não** dependem da amplitude! (Isso é geral para qualquer MHS !)

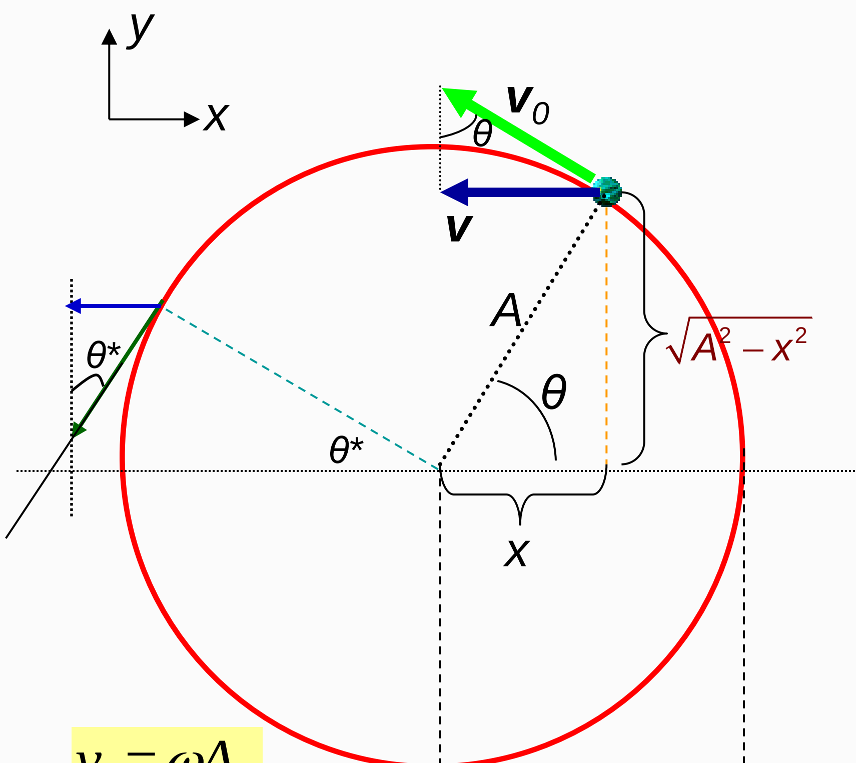
➢ A oscilação ocorre ao redor do ponto de equilíbrio, onde a força resultante é nula!

MHS e Movimento Circular Uniforme

$$\cos\theta = x/A \;\Rightarrow\; x = A\cos\theta$$

$$\boxed{\theta = \omega t}$$ ω : velocidade angular

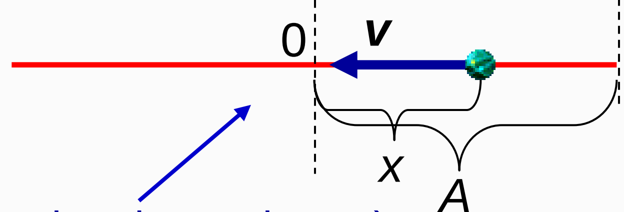
$$x = A\cos\omega t \qquad \boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$



$$v = -v_0 \sin\theta = -v_0 \sin 2\pi f t = -v_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$$

$$v_0 = \omega A$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt} = -v_0 \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = -v_0 \omega \cos(\omega t)$$



(Projetado no eixo x !)

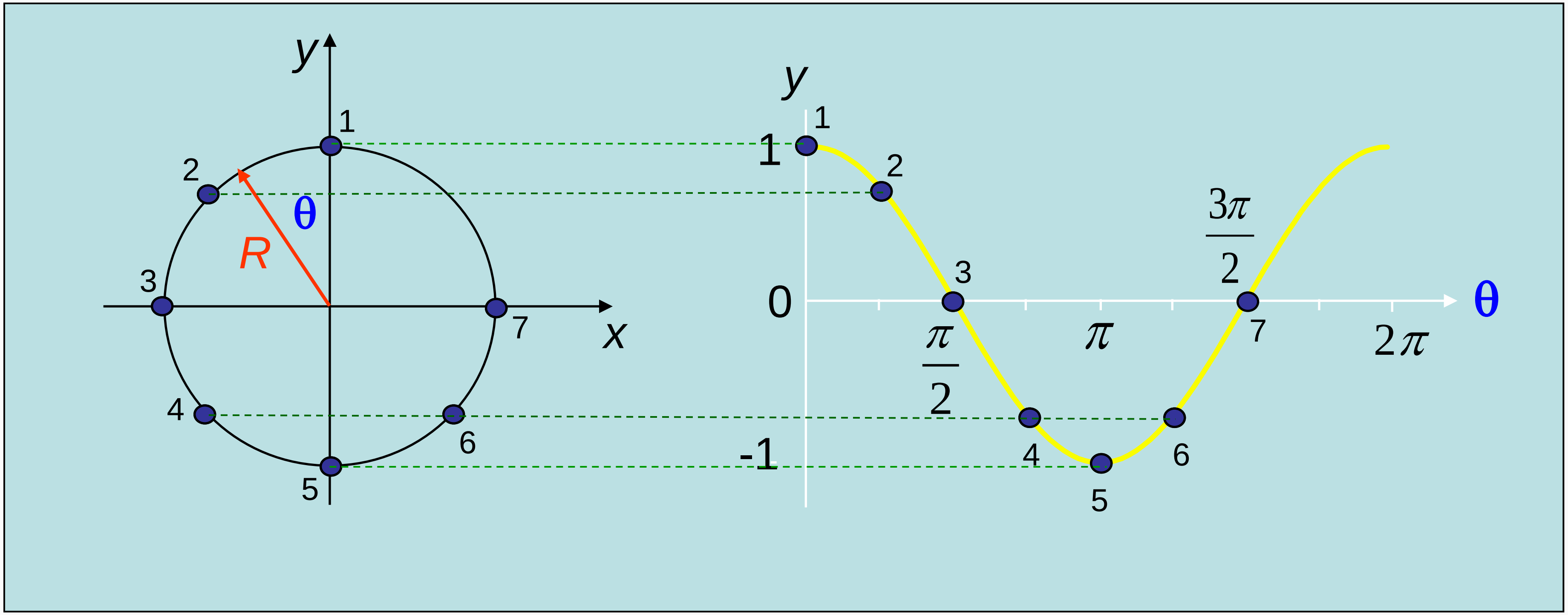
<u>Ou seja:</u> o MHS pode ser visto como um MCU projetado no diâmetro do círculo de raio *A*

MHS e MCU

- Como relacionar o MHS com o MCU?

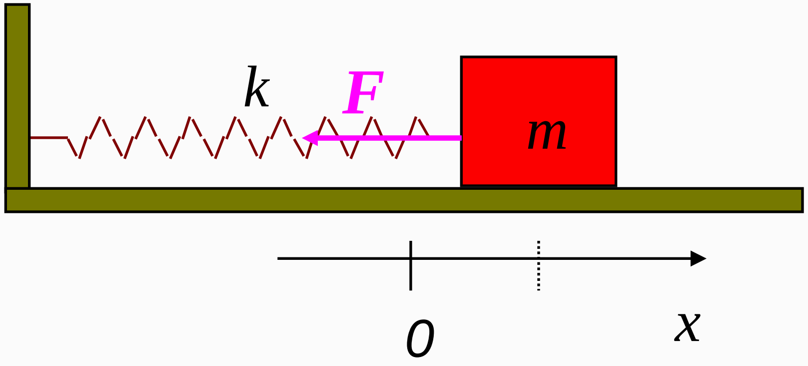
$$y(t) = R\cos\theta = R\cos(\omega t)$$

(Projetado no eixo *y* !)



Força elástica e energia potencial

$$\boxed{F = -kx}$$



$$dW = Fdx = -dU \quad ; F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$ (Força conservativa)

$$\Rightarrow \quad dU = -Fdx = (kx)dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^x dU = \int_0^x (kx)dx$$

Configuração de referência: $U(x=0)=0$

$$U(x) - 0 = \int_0^x kxdx \quad \Rightarrow \quad U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Energia no MHS

- Energia Mecânica Total:

$$E = K + U$$

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{Energia Cinética}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\text{Energia Potencial Elástica}}$$

➢ Quando x = A ou x = -A (extremos):

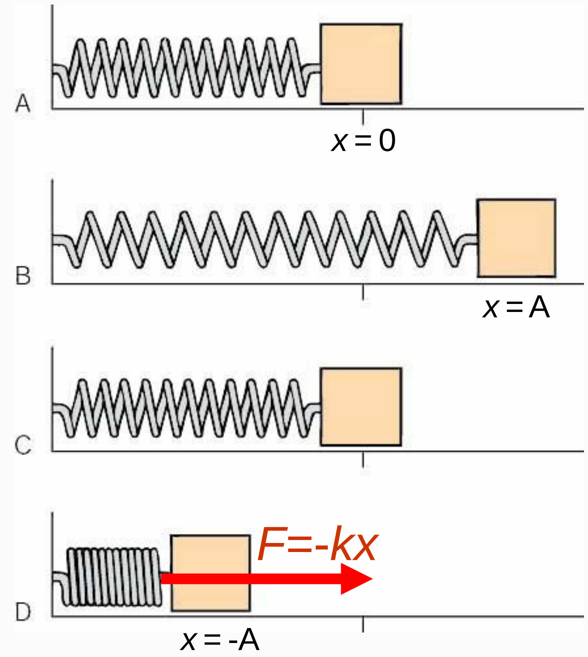
$$E = \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}k(A)^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Energia Mecânica de um MHS é
Proporcional ao quadrado de sua Amplitude!

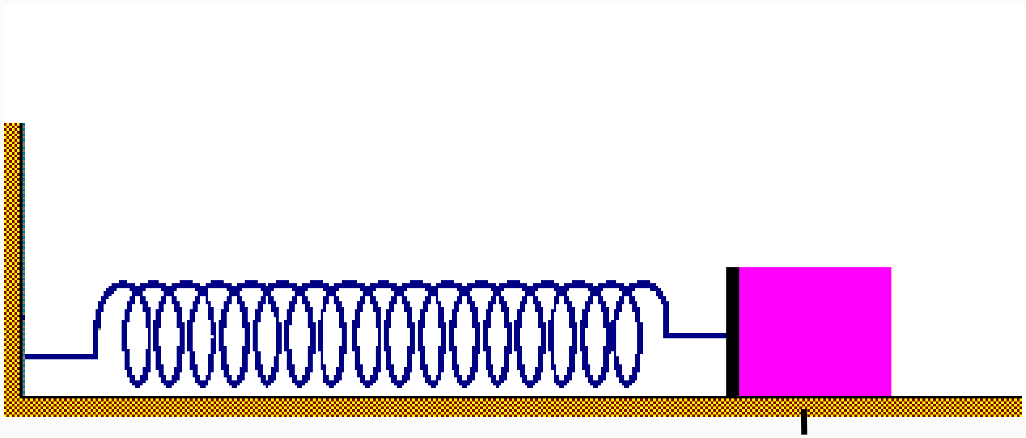
➢ Quando x = 0 (ponto de equilibrio):

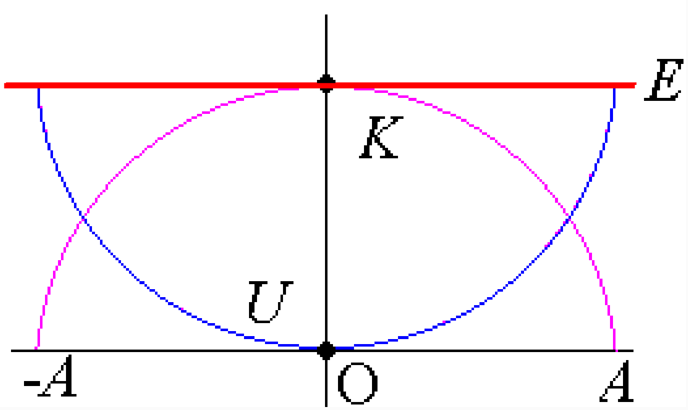
$$E = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + \frac{1}{2}k(0)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Energia no pto. de equilibrio é toda cinética!



Conservação de energia mecânica

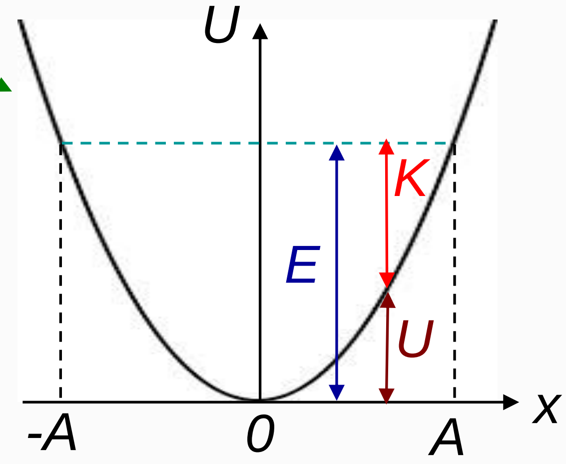




$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E}$$

MHS e potenciais quadráticos

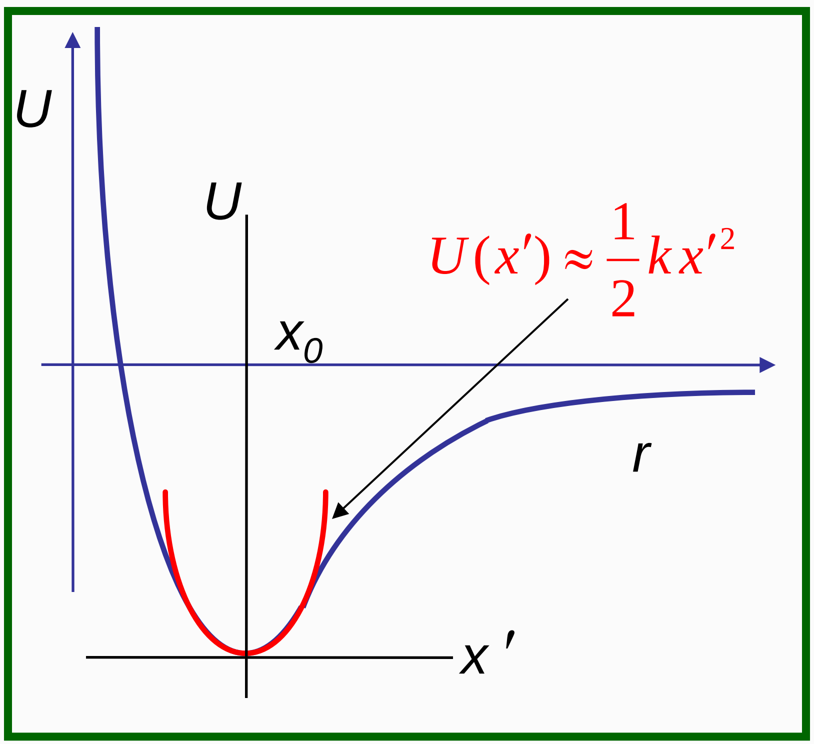
- O MHS vai ocorrer sempre que o potencial for quadrático.



$$E = K + U$$

- Geralmente isso não ocorre na natureza.

Por exemplo, o potencial entre os átomos em uma molécula de H_2 tem a forma:



$$U(r) = \varepsilon\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right]$$

Potencial de *Lennard-Jones*

$\text{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$ para pequenos valores de θ

- A expansão de Taylor para $\text{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$ em torno de $\theta = 0$:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots$$

Então, para $\theta << 1$: $\boxed{\sin\theta \approx \theta}$ e $\boxed{\cos\theta \approx 1}$

Exemplo de MHS: Pêndulo Simples

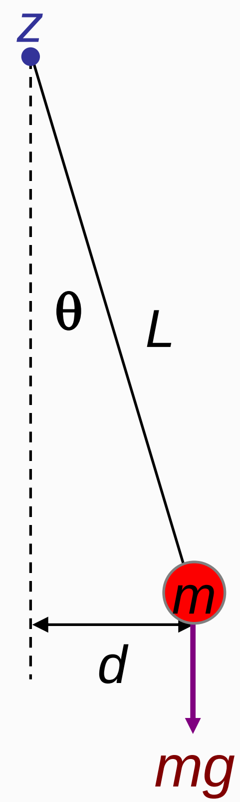
- O torque devido à gravidade ao redor do eixo de rotação (eixo z) é $\tau = -mgd$. Mas:

$d = L\,\text{sen}\,\theta \approx L\theta$; para pequenos θ.

Portanto: $\tau = -mg\,L\theta$

Mas: $\tau = I\alpha$; $I = mL^2$

$$-\cancel{m}g\cancel{L}\theta = \cancel{m}L^{\cancel{2}}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \;; \text{ onde: } \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Que é idêntica à Equação diferencial do MHS !

Daí: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$

$$\omega = 2\pi f \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

O Pêndulo Simples ~ Massa-Mola

$$F = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

Usando: $x \approx L\theta$, temos:

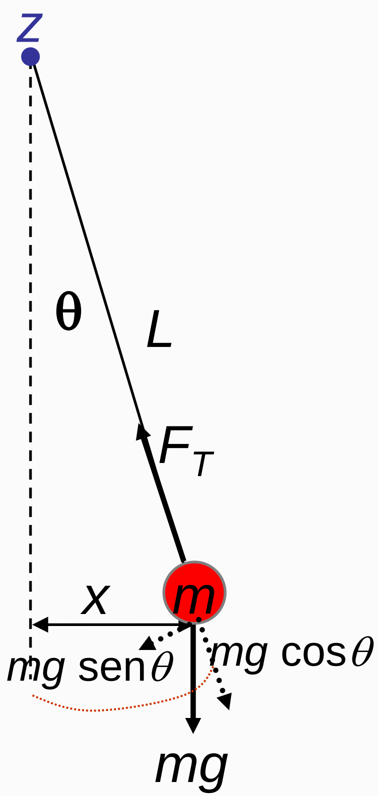
$$F \approx -\frac{mg}{L}x \approx -cte.\,x \qquad cte = \frac{mg}{L}$$

(Similar ao caso de massa-mola!)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

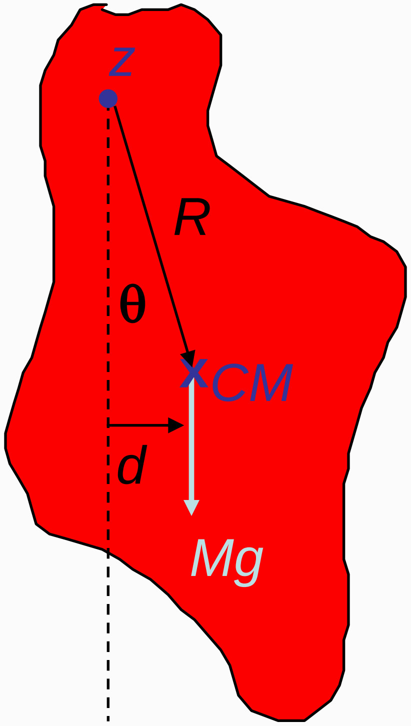
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

(*válido para θ pequeno!*)



Exemplo de MHS: Pêndulo Físico Geral

- Consideremos um sólido de forma arbitrária e massa *M*, pendurado em um eixo fixo. Sabemos onde o *CM* está localizado e qual é o momento de inércia I_z em torno desse eixo.



- O torque em torno do eixo de rotação (*z*) para θ pequenos é (sen$\theta \cong \theta$) :

$$\tau = -Mgd \approx -MgR\theta \quad ; \qquad \underbrace{-MgR\theta}_{\tau} = I_z \underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \qquad \text{onde:} \quad \omega = \sqrt{\frac{MgR}{I_z}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Exemplo: Bastão Oscilante

- O torque em relação ao eixo de rotação (z) é:

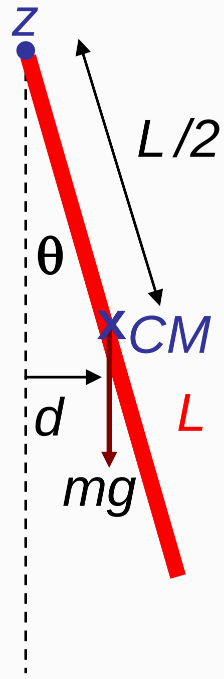
$$\tau = -mgd = -mg(L/2)\,\mathrm{sen}\,\theta \approx -mg(L/2)\theta\,; \quad \theta << 1$$

- Nesse caso: $I_z = \frac{1}{3}mL^2$

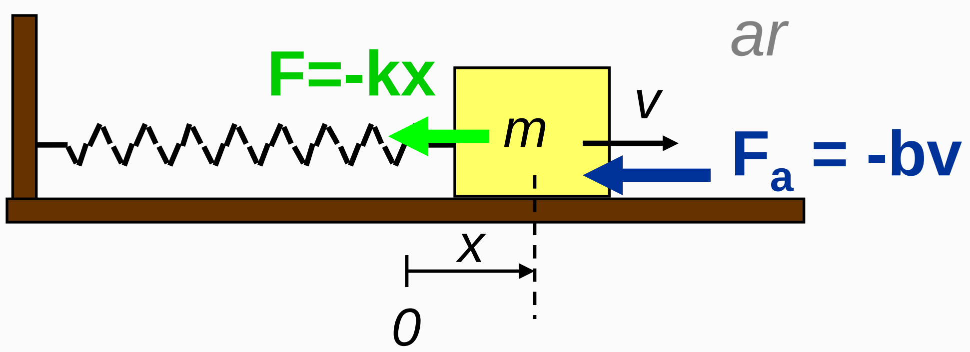
Daí: $\tau = I\alpha \;\Rightarrow\; -mg\underbrace{\frac{L}{2}}_{d}\theta = \underbrace{\frac{1}{3}mL^2}_{I}\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta\;; \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

Ou: $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I_z}}} = \sqrt{\frac{mg(L/2)}{mL^2/3}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$



Dissipação da Energia



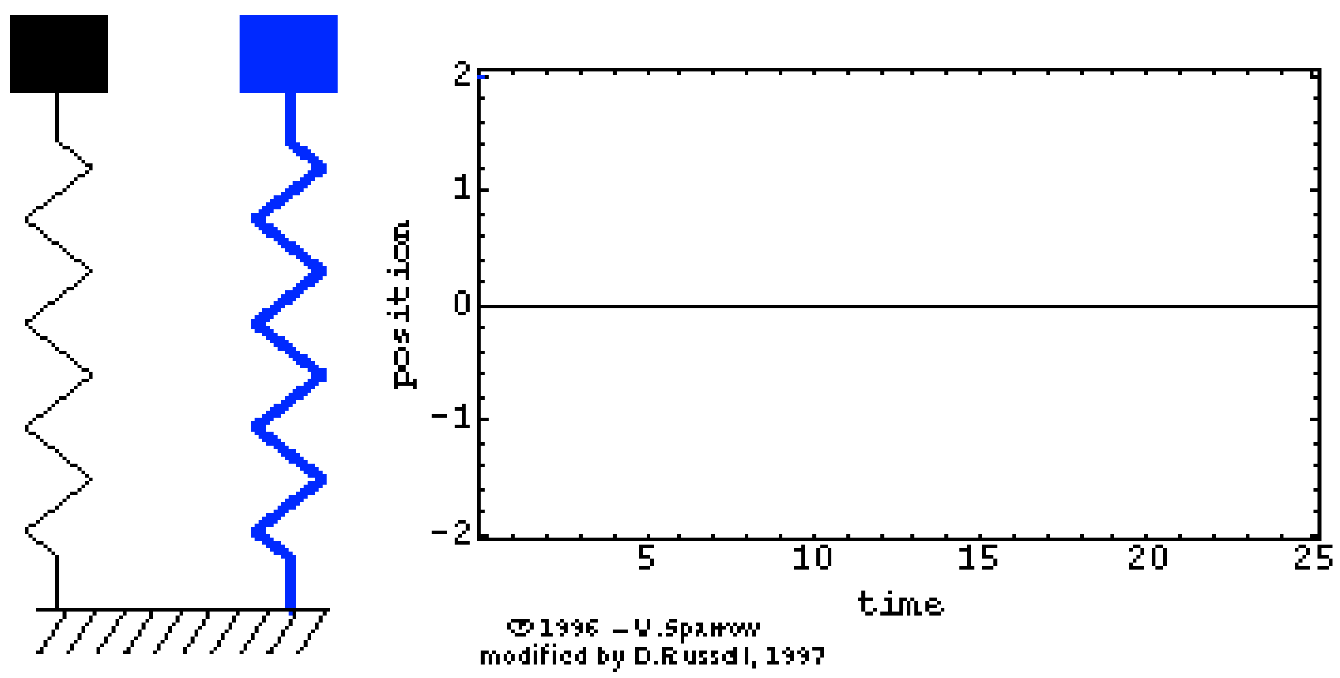
• Na prática sempre existe dissipação de energia:

ATRITO

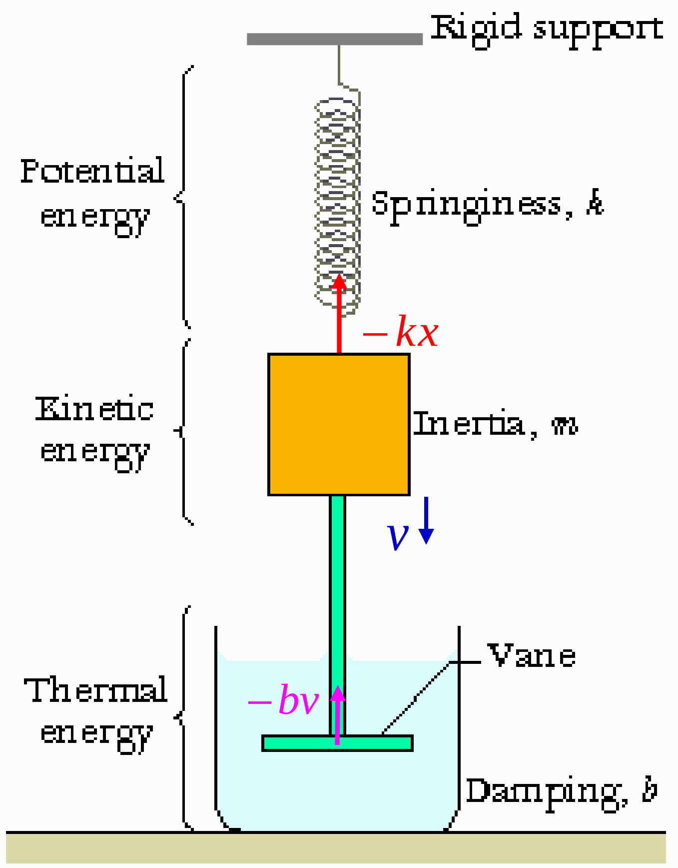
• Ex.: Atrito com o ar a baixas velocidades:

$$F_a = -bv$$

MHS e MH amortecido



Oscilador Harmônico Amortecido



$$F = -kx - bv = ma$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{b}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{k}{m}(x) = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \gamma\left(\frac{dx}{dt}\right) + \omega_0^2(x) = 0}$$

$$\boxed{\gamma = b/m \quad ; \quad \omega_0^2 = k/m}$$

Equação diferencial de 2ª ordem

Oscilador Harmônico Amortecido

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$: \quad \gamma = {}^{b}\!/_{m} \quad ; \quad \omega_0^2 = {}^{k}\!/_{m}$$

Propondo a solução:

$$\boxed{x(t) = Ce^{pt}}$$

$$\frac{dx}{dt} = pCe^{pt} = px \qquad ; \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = p^2Ce^{pt} = p^2x$$

$$p^2x + \gamma px + \omega_0^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0}$$

Oscilador Harmônico Amortecido

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_o x = 0$$

(Equação diferencial de 2ª ordem)

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \quad : \quad \gamma = {}^{b}\!/_{m} \quad ; \quad \omega_0^2 = {}^{k}\!/_{m}$$

Equação polinomial de 2º grau !

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Oscilador Harmônico Amortecido

$$x(t) = Ce^{pt}$$; $$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Se: $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ ⇨ Temos Amortecimento Subcrítico (raiz de número negativo)

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega$$; $$i = \sqrt{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

Amortecimento Subcrítico

$$x(t) = Ce^{pt} \qquad p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$x(t) = Ce^{\left(-\frac{\gamma}{2} \pm i\omega\right)t} \longrightarrow x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(Be^{i\omega t} + B^* e^{-i\omega t}\right)$$

$$\boxed{e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)}$$

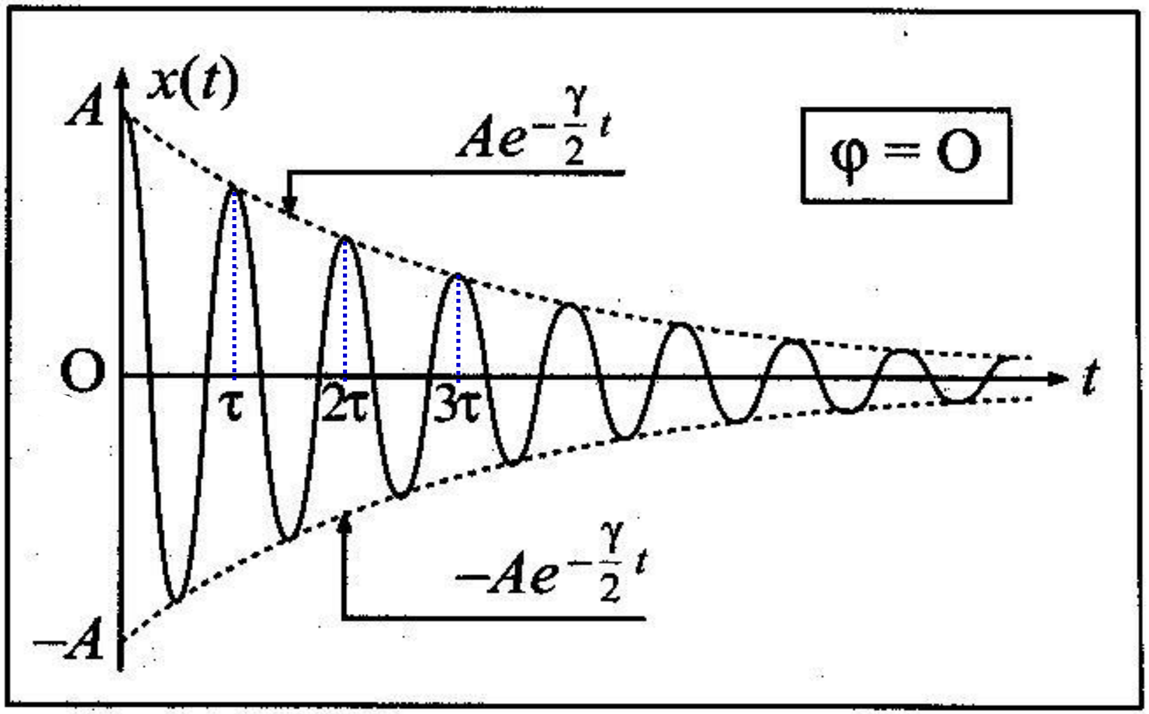
$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[B(\cos(\omega t) + i\, sen(\omega t)) + B^*(\cos(\omega t) - i\, sen(\omega t))\right]$$

Solução (Parte Real) :

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \phi)}$$

Amortecimento Subcrítico

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \phi)$$



$$\gamma = b/m$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$\omega_0^2 = k/m$$

http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/applist/damped/d.htm

Amortecimento Supercrítico

$$x(t) = Ce^{pt} \quad ; \quad p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Se: $\dfrac{\gamma}{2} > \omega_0$ $\Rightarrow$ Raiz de número positivo

Amortecimento supercrítico

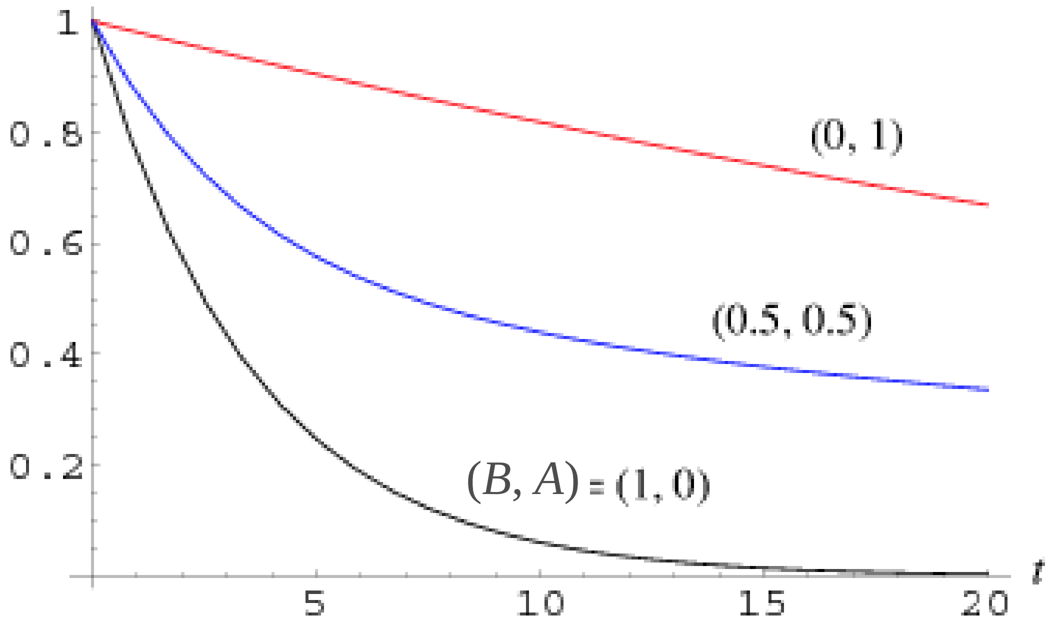
$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \beta$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right) \quad ; \quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Amortecimento Supercrítico

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$



$\gamma = 0.3,\ \omega_0 = 0.075$

Crítico:

$$\frac{\gamma}{2} = \omega_0$$

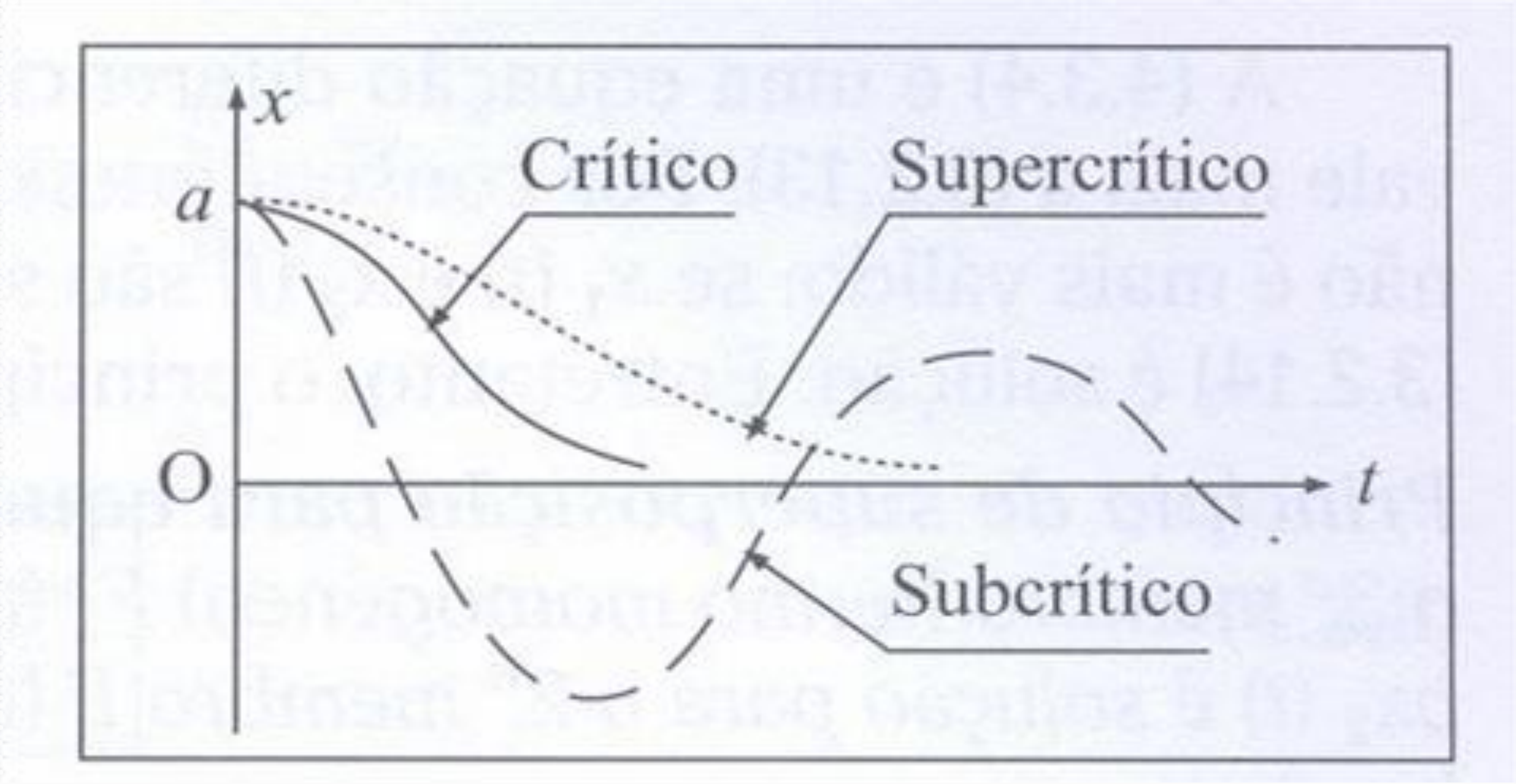
$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A + B)$$

Tipos de Amortecimento

Subcrítico: $\dfrac{\gamma}{2} < \omega_0$

Supercrítico: $\dfrac{\gamma}{2} > \omega_0$

Crítico: $\dfrac{\gamma}{2} = \omega_0$



Oscilações Forçadas

- O sistema oscila com a frequência da força externa (ω)...

...mesmo que esta seja diferente da frequência natural do sistema (ω_0).

Força externa: $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Oscilações Forçadas

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Solução: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) + A\omega_0^2\cos(\omega t + \phi) = \frac{F_o}{m}\cos(\omega t)$$

Se: $t = 0$ e $\phi = 0$ $\rightarrow$ $A = \dfrac{F_0}{m\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}$

Pois: $A \geq 0$

Oscilações Forçadas

$$A = \frac{F_0}{m\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}$$

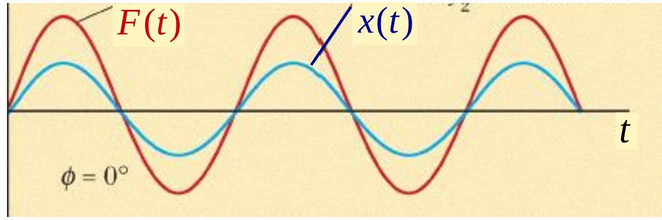
Baixas Frequências: $\omega << \omega_0$

$$\cancel{\frac{d^2x}{dt^2}} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad ; \quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow$$

$$\cancel{-A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)} + A\omega_0^2 \cos(\omega t + \phi) = \frac{F_o}{m}\cos(\omega t)$$

$\phi = 0$ e $\omega << \omega_0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x(t) \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2}\cos(\omega t)}$

- Posição $x(t)$ em fase com a Força:



$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

Oscilações Forçadas

Altas Frequências: $\omega >> \omega_0$

$$A = \frac{F_0}{m\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}$$

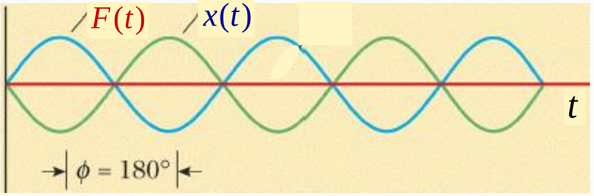
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \cancel{\omega_0^2 x} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad ; \quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \Rightarrow$$

$$-A\omega^2\cos(\omega t + \phi) + \cancel{A\omega_0^2\cos(\omega t + \phi)} = \frac{F_o}{m}\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) \approx -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos(\omega t) = \frac{F_0}{m\omega^2}\cos(\omega t - \pi)$$

$$\phi = -\pi \quad \text{e} \quad \omega >> \omega_0 \Rightarrow x(t) \approx \frac{F_0}{m\omega^2}\cos(\omega t + \phi)$$

- Posição $x(t)$ fora de fase com a Força:



Oscilações forçadas e amortecidas

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\boxed{\gamma\frac{dx}{dt}}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Usamos solução: $x(t)=A_\omega\cos(\omega t+\phi_\omega)$

Para amortecimento fraco: $\gamma \ll \omega_0$

Podemos obter :

$$A^2(\omega)=\frac{F_0^2}{m^2\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right)};\quad \phi(\omega)=-arc\tan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

Oscilações forçadas amortecidas:

$$A^2(\omega) = \frac{F_0^2}{m^2\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2\right)};$$

$$\phi(\omega) = -arc\tan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Ressonância

$$\omega = \omega_o$$

Para: $\omega \to \omega_0$ temos: $|\omega - \omega_0| << \omega_0$

$$A^2(\omega) \approx \left(\frac{F_0}{2m\omega_0}\right)^2 \frac{1}{\left[(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right]}$$

$$\phi(\omega) = -tg^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$\gamma << \omega_0$$

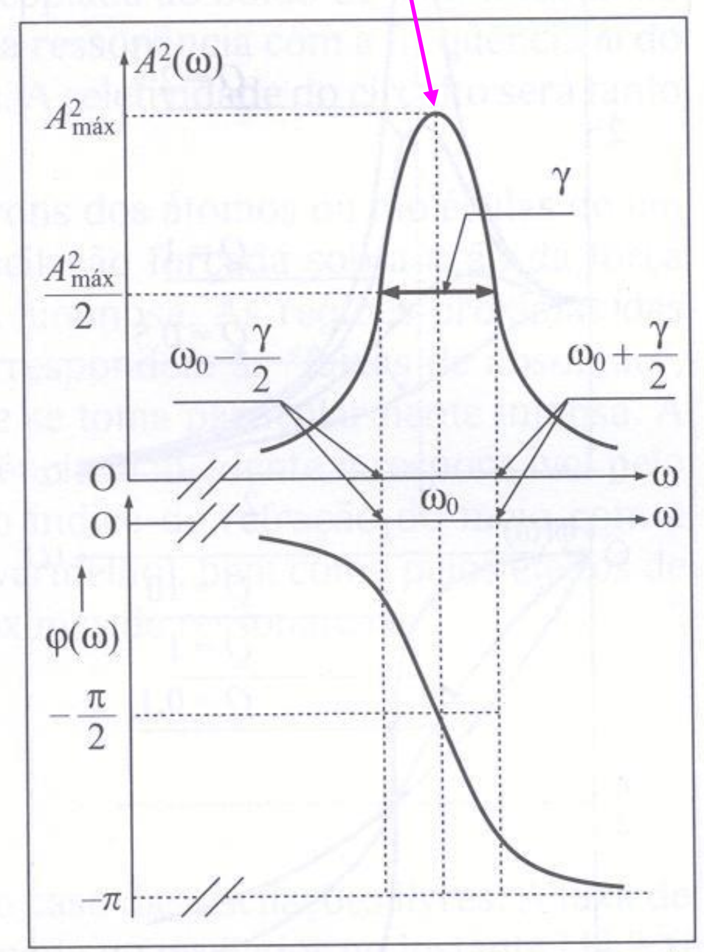


Figura 4.8 — *Amplitude e fase perto de ressonância*

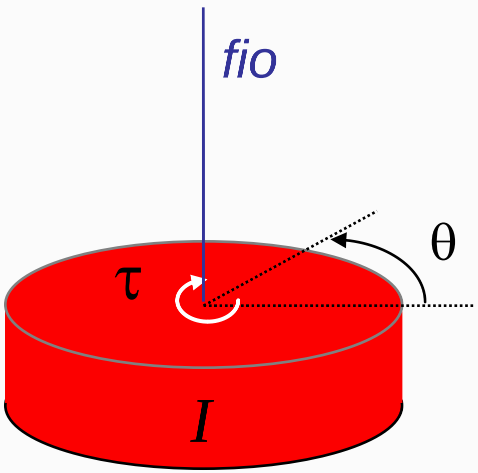
Exemplos de Ressonância

Desastre na Tacoma Narrows Bridge, 1940

Mais Exemplos ...

Pêndulo de Torção

- Consideremos um objeto suspenso por um fio, preso ao seu CM. O fio define o eixo de rotação, e o momento de inércia I em torno desse eixo é conhecido.



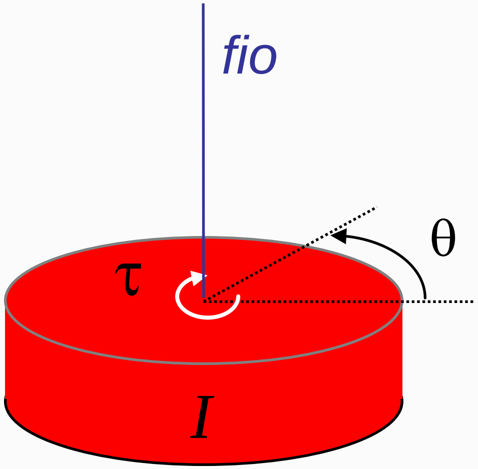
- O fio atua como uma “mola rotacional.”
  - Quando o objeto é rodado, o fio é torcido. Isso provoca um torque que se opõe à rotação.
  - Em analogia com uma mola, o torque produzido é proporcional ao deslocamento:

$$\tau = -k\theta$$

Pêndulo de Torção

- Como: $\tau = -k\theta$ e $\tau = I\alpha$ teremos:

$$-k\theta = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

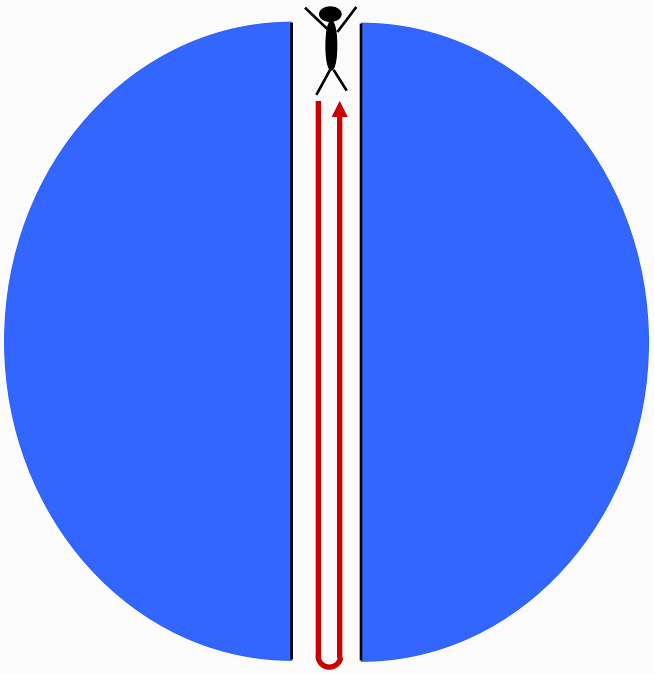


$\Rightarrow$ $$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$ onde: $$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}}$$

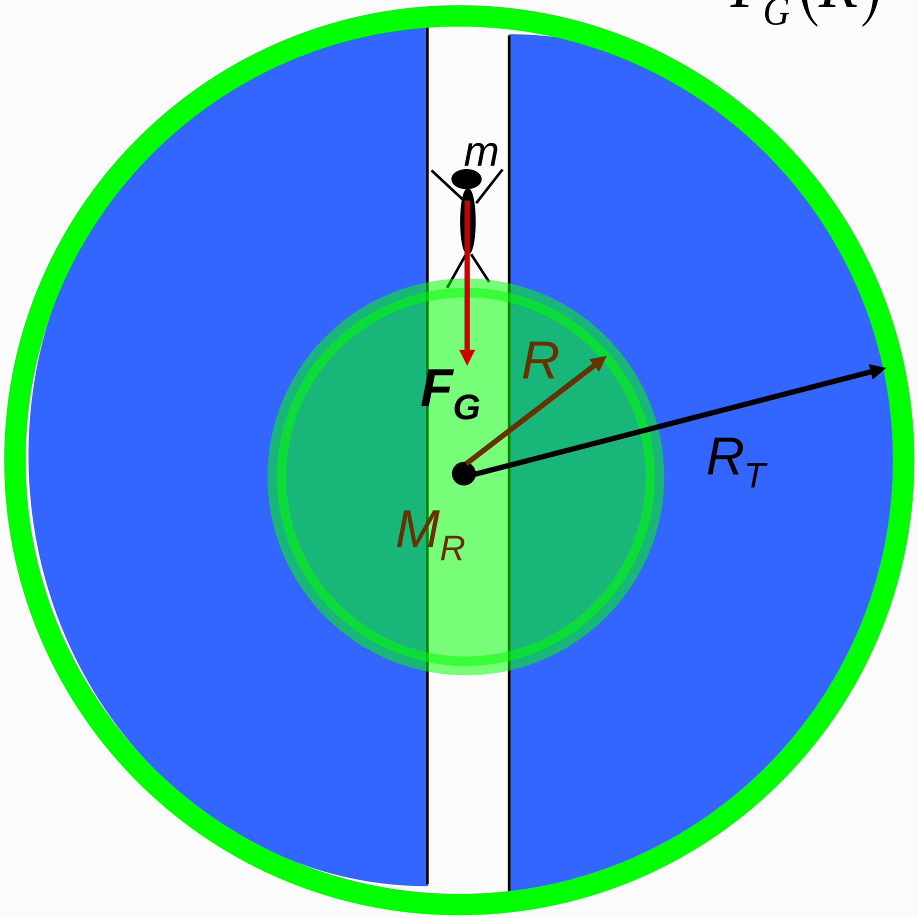
- Que é similar ao caso “massa-mola”; exceto que I tomou o lugar de *m.*

Túnel na Terra

Um túnel reto é construído de Campinas ao outro lado da Terra, passando pelo seu centro.
Um estudante de física pula no túnel ao meio-dia.
A que horas ele retorna a Campinas?



Túnel na Terra



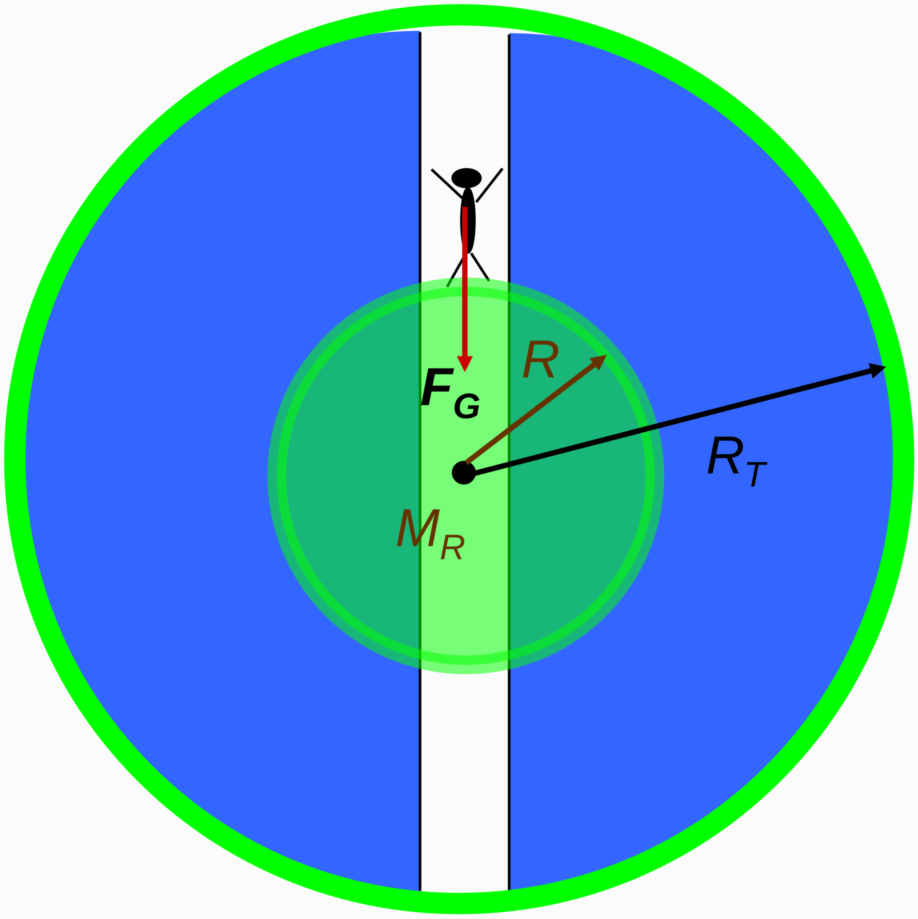
$$F_G(R) = -\frac{GmM_R}{R^2}\,; \quad F_G(R_T) = -\frac{GmM_T}{R_T^2}$$

$$\frac{F_G(R)}{F_G(R_T)} = \frac{M_R R_T^2}{R^2 M_T}$$

$$\boxed{\frac{M_R}{M_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}}$$

$$\frac{F_G(R)}{F_G(R_T)} = \frac{R^3}{R^2}\frac{R_T^2}{R_T^3} = \frac{R}{R_T}$$

Túnel na Terra



$$\frac{F_G(R)}{F_G(R_T)} = \frac{R}{R_T}$$

$$F_G(R) = \frac{F_G(R_T)}{R_T} R$$

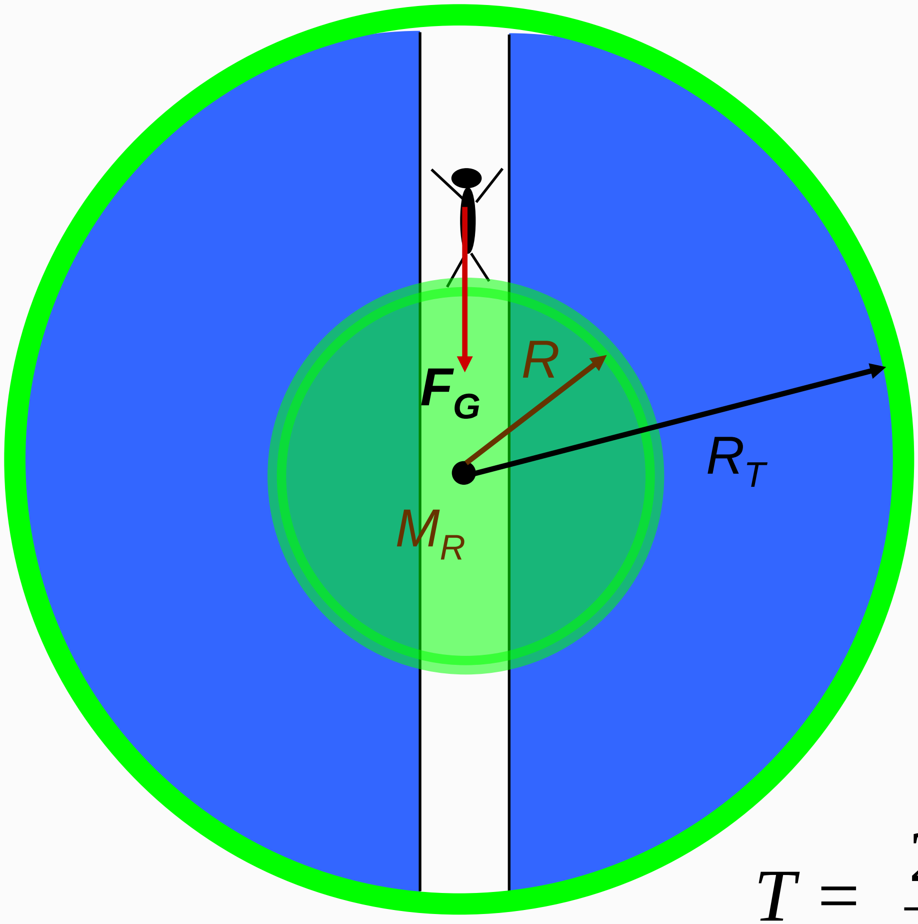
$$F_G(R) = \frac{mg}{R_T} R$$

$$F_G(R) = kR$$

$$\boxed{k = \frac{mg}{R_T}}$$

Túnel na Terra

$$k = \frac{mg}{R_T}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$$

$$g = 9{,}81\ m/s^2$$

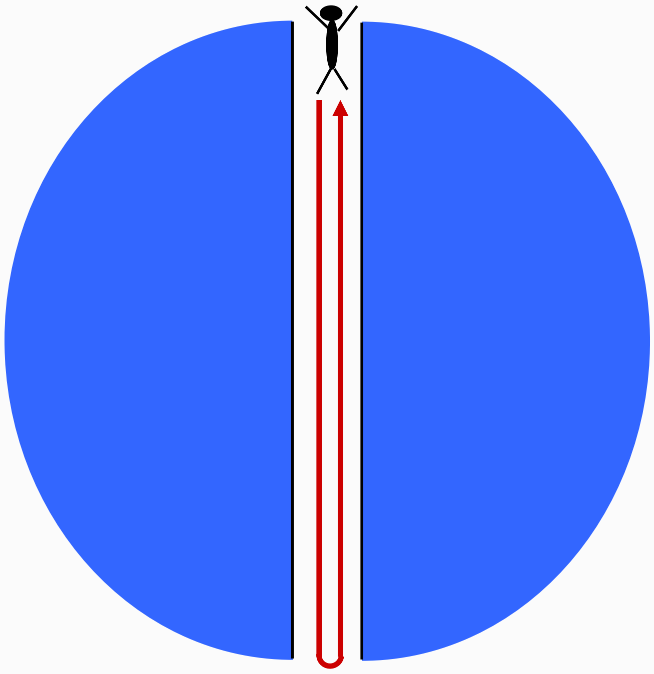
$$R_T = 6{,}38 \times 10^6\ m$$

$$\omega = 0{,}00124\ s^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 5067\ s \approx \mathbf{84\ min\ !}$$

Túnel na Terra

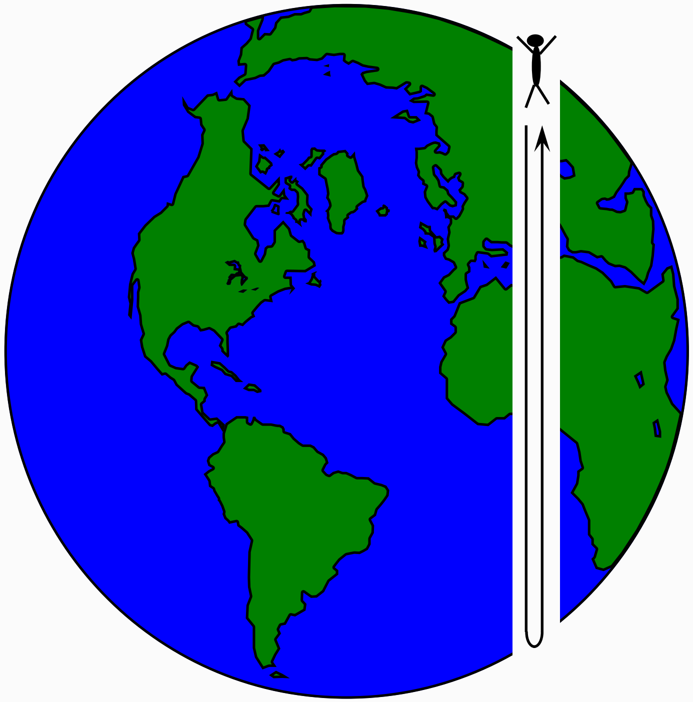
O estudante retorna a Campinas após 84 min, às 13:24 h.



Túnel na Terra

- **O período de oscilação não requer que o túnel passe pelo centro da terra.**

- **Qualquer túnel reto dá o mesmo resultado, desde que não haja atrito e que a densidade da terra seja constante.**



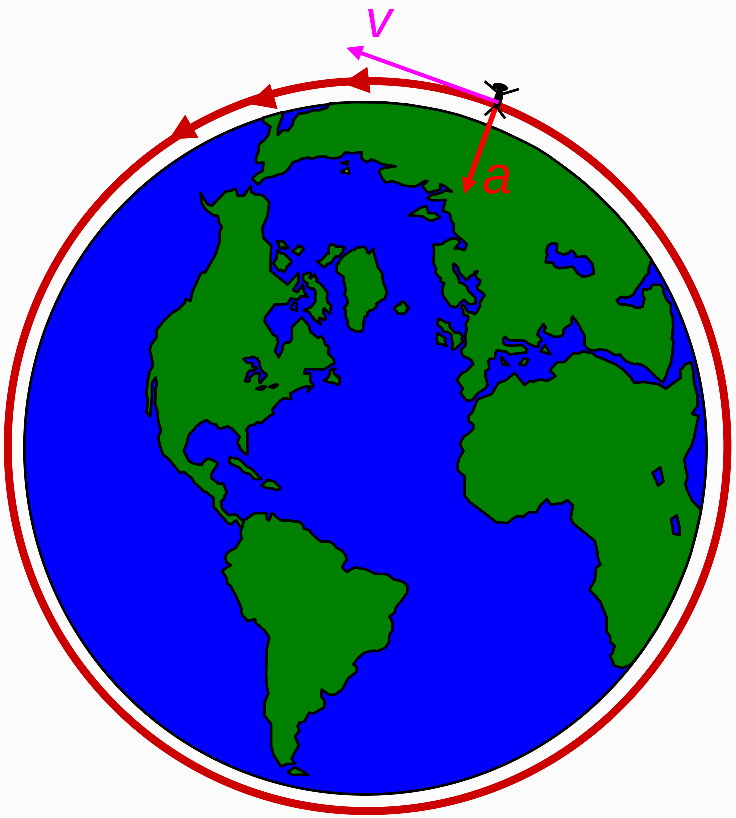
Prove!

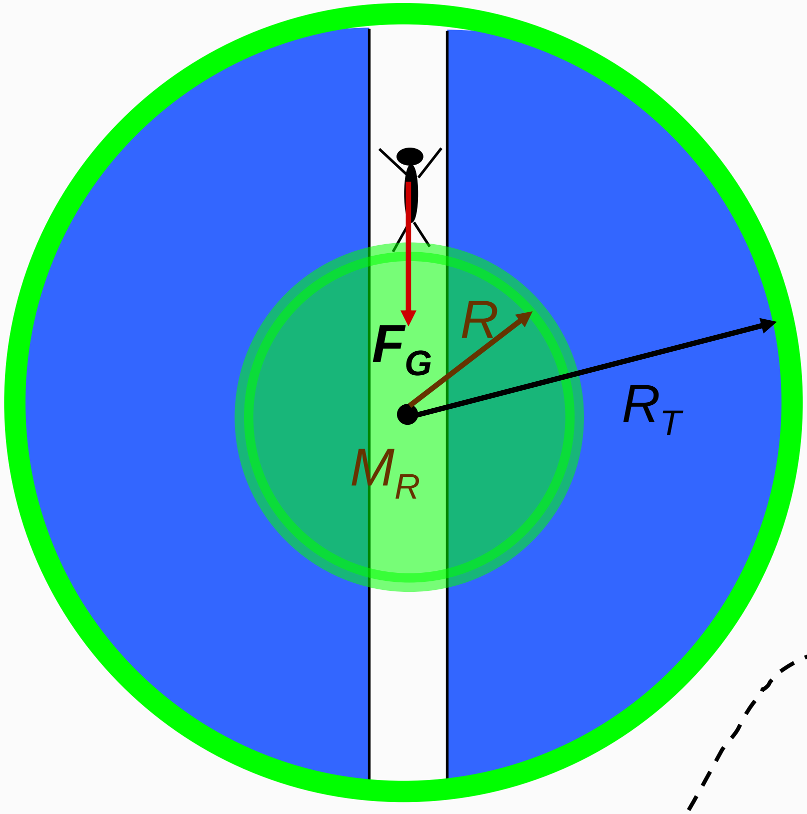
Órbita da Terra

- **Um objeto em órbita próximo à superfície da Terra também tem período idêntico ao da queda no túnel:**

$$a = \omega^2 R_T = g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$$

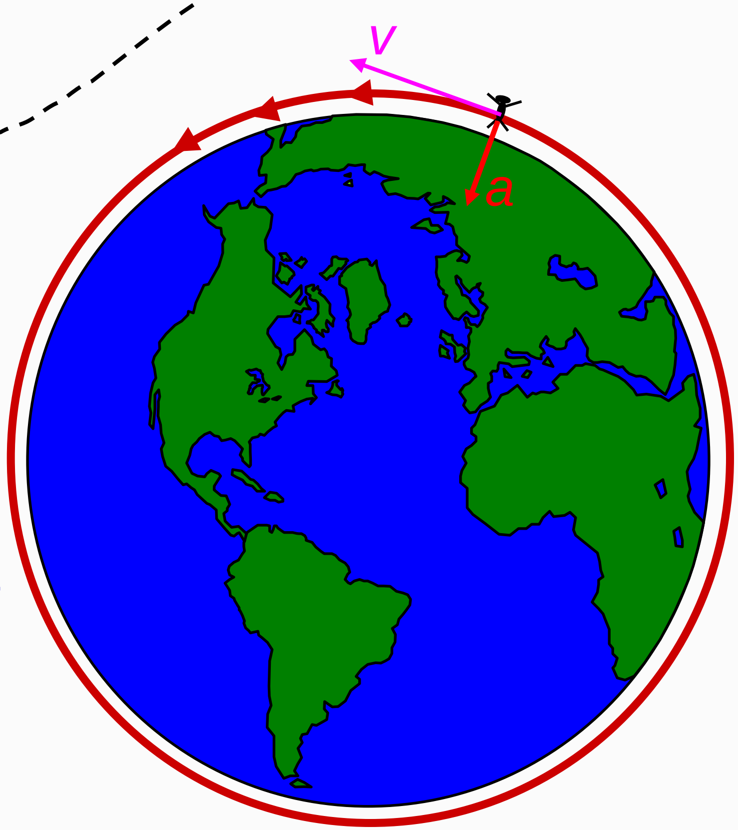




$$F_G(R) = kR$$

$$k = \frac{mg}{R_T}$$

$$a = \omega^2 R_T = g$$

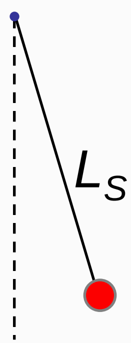


$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$$

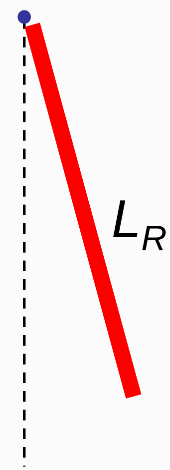
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$$

Exemplo

- Que comprimento deve ter um pêndulo simples para ter o mesmo período de um pêndulo físico?



$$\omega_S = \sqrt{\frac{g}{L_S}}$$



$$\omega_R = \sqrt{\frac{3g}{2L_R}}$$

$\omega_S = \omega_R$, se: $L_S = \dfrac{2}{3} L_R$

Exemplo: Pêndulo Físico

- Um pêndulo é construído ao pendurar um bambolê de diâmetro *D* em um pequeno prego. Qual é a freqüência angular de oscilação do bambolê para deslocamentos pequenos? ($I_{CM} = mR^2$ para um aro)

Para pequenos deslocamentos: $\omega = \sqrt{\dfrac{mgR}{I}}$

Teorema dos eixos paralelos: $I = I_{CM} + mR^2$

$$I = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

Daí: $\omega = \sqrt{\dfrac{mgR}{2mR^2}} = \sqrt{\dfrac{g}{2R}} = \sqrt{\dfrac{g}{D}}$