



Introdução

Suponha que em um dado experimento nós medimos os parâmetros x, y, \dots, z n vezes. Ou seja,

$$\left. \begin{array}{l} x_1, y_1, \dots, z_1 \\ x_2, y_2, \dots, z_2 \\ \vdots \\ x_n, y_n, \dots, z_n \end{array} \right\} \text{medidas}$$

Como discutido anteriormente, não é possível saber qual o valor "verdadeiro" ou "absoluto" destes parâmetros devido aos erros experimentais, instrumentais e estatísticos inerentes ao experimento. No entanto, sabemos que os valores médios $\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}$ são aqueles que melhor se aproximam do valor "verdadeiro", dentro de uma faixa de confiança dada por $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \sigma_z$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i & \sigma_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i & \sigma_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ \vdots & & \vdots & \\ \bar{z} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i & \sigma_z^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Mas como devemos encontrar o valor que se aproxima do "verdadeiro", e a sua faixa de confiabilidade, quando o parâmetro que estamos interessados não puder ser medido diretamente, mas sim através de um modelo matemático? Por exemplo, quando queremos obter uma velocidade baseados em medidas diretas de distância e do tempo.

Vamos então supor que queremos encontrar um parâmetro genérico w em função de x, y, \dots, z :

$$w = w(x, y, \dots, z) \quad (2)$$

Uma opção seria calcular todos os w_i para todos os conjuntos x_i, y_i, \dots, z_i de medidas e em seguida, calcular a média \bar{w} e σ_w^2

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} w_1 = w(x_1, y_1, \dots, z_1) \\ w_2 = w(x_2, y_2, \dots, z_2) \\ \vdots \\ w_n = w(x_n, y_n, \dots, z_n) \end{array} \right\} \text{medidas} \\ \bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i & \quad \sigma_w^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Como devemos calcular todos os valores de w_i , esta operação pode ser bastante trabalhosa, principalmente para um grande número de medidas.

Uma pergunta que podemos fazer é se podemos obter \bar{w} diretamente da média dos parâmetros medidos no experimento:

$$\bar{w} = w(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z})? \quad (4)$$

Para responder esta pergunta, vamos considerar a expansão do valor de w_i em séries de potências dos desvios em torno dos valores médios de x, y, \dots, z :

$$\begin{aligned} w_i &= w(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}) + \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) (x_i - \bar{x}) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) (y_i - \bar{y}) + \dots + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) (z_i - \bar{z}) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) (y_i - \bar{y})^2 + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) (z_i - \bar{z})^2 + \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Se a função w varia lentamente (função monotônica), a primeira aproximação, podemos considerar que os termos superiores a segunda ordem são desprezíveis, ou seja:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (x_i - \bar{x})^2 \sim 0 \quad (6)$$

Calculando o valor médio de w usando os valores de w_i obtidos na expansão (5) teremos:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n w(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) (x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) (y_i - \bar{y}) + \dots + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) (z_i - \bar{z}) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Rearranjando os termos da equação (7):

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n w(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) + \dots + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z}) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Nesta expressão os termos à direita da igualdade são nulos, com exceção do primeiro, pois:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x} = \bar{x} - \frac{1}{n} n \bar{x} = 0 \quad (9)$$

Desta forma, em primeira aproximação, \bar{w} pode ser obtido usando os valores médios de x, y, \dots, z :

$$\boxed{\bar{w} = w(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z})} \quad (10)$$

Agora, vamos usar o mesmo raciocínio para calcular o desvio padrão de w :

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})^2 \quad (11)$$

Usando w_i obtido em (5) até primeira ordem teremos:

$$\begin{aligned} (w_i - \bar{w})^2 &= [w(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}) + \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) (x_i - \bar{x}) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) (y_i - \bar{y}) + \dots + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) (z_i - \bar{z}) + \\ &- \bar{w}]^2 = \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (x_i - \bar{x})^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (y_i - \bar{y})^2 + \dots + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) + \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Entretanto,

$$2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 0 \quad (13)$$

Por isso, podemos ignorar os termos cruzados na expressão (12) e escrever σ_w^2 como:

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}_{n\sigma_x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}_{n\sigma_y^2} + \dots \right] \quad (14)$$

Desta forma, podemos calcular σ_w^2 a partir das derivadas primeiras (derivadas parciais) da função w e dos σ^2 de cada valor medido:

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \sigma_z^2 \quad (15)$$

A equação (15) é uma expressão geral para o cálculo do erro propagado do parâmetro w .

No entanto, em F-129 devemos sempre considerar o **erro total** envolvido no problema ao invés do desvio padrão σ_w . Portanto, deve-se utilizar a equação

$$\Delta_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \Delta_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \Delta_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \Delta_z^2 \quad (16)$$

onde Δw é o erro total da variável w devidamente propagado, e os Δx , Δy , ..., Δz , são os erros totais das variáveis primárias x, y, \dots, z .

Referência Bibliográfica:

José Henrique Vuolo, *Fundamentos da Teoria de Erros* (Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1992).

Exemplo: Cálculo da incerteza do volume de um cilindro:

$$V = \pi L R^2 \quad \left. \begin{array}{l} \overline{R} \\ \overline{L} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sigma_R^2 \\ \sigma_L^2 \end{array} \right\} \text{médias das medidas}$$

Usando a expressão (15) para encontrar σ_V^2 :

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L} \right)^2 \sigma_L^2$$

$$\boxed{\sigma_V^2 = (2\pi \overline{L} \overline{R})^2 \sigma_R^2 + (\pi \overline{R}^2)^2 \sigma_L^2} \quad (17)$$

Podemos ainda dividir os dois lados da igualdade por V^2 :

$$\left(\frac{\sigma_V}{V} \right)^2 = \left(\frac{2\pi \overline{L} \overline{R}}{\pi \overline{L} \overline{R}^2} \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\pi \overline{R}^2}{\pi \overline{L} \overline{R}^2} \right)^2 \sigma_L^2 \quad (18)$$

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_V}{V} \right)^2 = \left(\frac{2\sigma_R}{\overline{R}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{\overline{L}} \right)^2} \quad (19)$$

Ou ainda, em conformidade com F-129, escrever a expressão final na forma:

$$\boxed{\left(\frac{\Delta_V}{V} \right)^2 = \left(\frac{2\Delta_R}{\overline{R}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_L}{\overline{L}} \right)^2} \quad (20)$$