Gabarito P4

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

Gabarito Prova 4

- **1)** (3pts) Calcule o volume do paralelepipedo determinado pelos pontos A, A, C e D. Calcule a area da face determinada por A, C e D. Onde

  a)
  $$A = (1,2,1)\ ;\ B = (1,-1,1)\ ;\ C = (3,1,1)\ ;\ D(1,1,1)$$
  b)
  $$A = (1,-1,1)\ ;\ B = (3,1,1)\ ;\ C = (1,2,1)\ ;\ D = (0,0,0)$$
  c)
  $$A = (3,1,1)\ ;\ B = (1,2,1)\ ;\ C = (1,-1,1)\ ;\ D = (0,0,0)$$

- **2)**(3 pts)

  a) Achar um vetor $\overrightarrow{V}$ tal que
  $$\overrightarrow{V} \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\ ;\ \|\overrightarrow{V}\| = \sqrt{6}.$$
  b) Achar um vetor $\overrightarrow{V}$ tal que
  $$\overrightarrow{V} \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\ ;\ \|\overrightarrow{V}\| = \sqrt{6}.$$
  c) Achar um vetor $\overrightarrow{V}$ tal que
  $$\overrightarrow{V} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\ ;\ \|\overrightarrow{V}\| = \sqrt{6}.$$

- **3)** Verificar se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. (Respostas sem justificativa não serão consideradas. Justificativas tem que estar no conteudo da disciplina)

  Sejam $\vec{U}$, $\vec{V}$ e $\vec{W}$ vetores no espaço e $\lambda \in \mathbf{R}$.

  (1) Se $\vec{U} \times \vec{W} = \vec{V} \times \vec{W}$ então $\vec{U} = \vec{V}$.

  (2) $(\vec{U} + \vec{V}) \times \vec{W} = \vec{U} \times (\vec{V} + \vec{W})$.

  (3) Se $\vec{U} \times \vec{V} = 0$ então existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que $\vec{U} = \lambda\vec{V}$ ou $\vec{V} = \lambda\vec{U}$.

  (4) $\vec{U} \times (\vec{V} \times \vec{W}) = (\vec{V} \times \vec{U}) \times \vec{W}$.

  (5) $\|\vec{U} \times \vec{V}\| \leq \|\vec{U}\|\|\vec{V}\|$.

  (6) Se $\vec{U} + \vec{V} + \vec{W} = 0$ então
  $$\vec{U} \times \vec{V} + \vec{V} \times \vec{W} + \vec{W} \times \vec{U} = 0.$$
  (7) Vale a seguinte identidade entre produtos mixtos $(\vec{U}\vec{V}\vec{W}) = (\vec{V}\vec{W}\vec{U})$.

  (8)
  $$|(\vec{U}\vec{V}\vec{W})| \leq \|\vec{U}\|\|\vec{V}\|\|\vec{W}\|.$$
  (9) Provar que $(\lambda(\vec{U} + \vec{V})\vec{V}\vec{W}) = \lambda(\vec{U}\vec{V}\vec{W})$.

  (10) Sejam $\vec{U}'$, $\vec{V}'$ e $\vec{W}'$ vetores no espaço. Então
  $$(\vec{U}\vec{V}\vec{W})(\vec{U}'\vec{V}'\vec{W}') = \det\begin{pmatrix} \vec{U}\cdot\vec{U}' & \vec{U}\cdot\vec{V}' & \vec{U}\cdot\vec{W}' \\ \vec{V}\cdot\vec{U}' & \vec{V}\cdot\vec{V}' & \vec{V}\cdot\vec{W}' \\ \vec{W}\cdot\vec{U}' & \vec{W}\cdot\vec{V}' & \vec{W}\cdot\vec{W}' \end{pmatrix}$$

Respostas
1)
a)

$$\overrightarrow{AB} = 0\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\ ;\ \overrightarrow{AC} = 2\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\ ;\ \overrightarrow{AD} = 0\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + 0\mathbf{i}$$

$$\text{Vol} = |\det\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}| = |0| = 0.$$

$$\text{Area} = \|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\| = 2.$$

b)

$$\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\ ;\ \overrightarrow{AC} = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\ ;\ \overrightarrow{AD} = -1\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$$

$$\text{Vol} = |\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}| = |-6| = 6.$$

$$\text{Area} = \|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\| = 3\sqrt{2}.$$

c)

$$\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\ ;\ \overrightarrow{AC} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\ ;\ \overrightarrow{AD} = -3\mathbf{i} - 1\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$$

$$\text{Vol} = |\det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}| = |-6| = 6.$$

$$\text{Area} = \|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\| = 6.$$

2)

– **a)** Seja $\vec{V} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Logo

$$\vec{V} \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = b\mathbf{i} - (c-a)\mathbf{j} - b\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Obtemos que $b = 2$ e $c - a = 2$. Como $\|\vec{V}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 6$, resulta que $a^2 + c^2 = 2$. Logo $(a+2)^2 + a^2 = 2$, simplificando $a^2 + 2a + 1 = 0$, ou seja $a = -1$. Concluimos que

$$\vec{V} = -1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}.$$

– **b)** Seja $\vec{V} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Logo

$$\vec{V} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (b-c)\mathbf{i} - a\mathbf{j} + a\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Obtemos que $a = 2$ e $b - c = 2$. Como $\|\vec{V}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 6$, resulta que $b^2 + c^2 = 2$. Logo $(c+2)^2 + c^2 = 2$, simplificando $c^2 + 2c + 1 = 0$, ou seja $c = -1$. Concluimos que

$$\vec{V} = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 1\mathbf{k}.$$

– **c)** Seja $\vec{V} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Logo

$$\vec{V} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -c\mathbf{i} + c\mathbf{j} + (a-b)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Obtemos que $c = 2$ e $a - b = 2$. Como $\|\vec{V}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 6$, resulta que $a^2 + b^2 = 2$. Logo $(b+2)^2 + b^2 = 2$, simplificando $b^2 + bc + 1 = 0$, ou seja $b = -1$. Concluimos que

$$\vec{V} = 1\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

3)

(1) FALSO. Sejam $\vec{U} = \mathbf{i}$, $\vec{V} = 2\mathbf{i}$ e $\vec{W} = \mathbf{i}$. Temos que $\vec{U} \times \vec{W} = \vec{0} = \vec{V} \times \vec{W}$ e $\vec{U} \neq \vec{V}$.

(2) FALSO. Sejam $\vec{U} = \mathbf{i}$, $\vec{V} = -\mathbf{i}$ e $\vec{W} = \mathbf{j}$. Então $\vec{U} + \vec{V} = \vec{0}$ e

$$(\vec{U} + \vec{V}) \times \vec{W} = \vec{0}.$$

Por outro lado, $\vec{V} + \vec{W} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e

$$\vec{U} \times (\vec{V} + \vec{W}) = \mathbf{k}.$$

Logo $(\vec{U} + \vec{V}) \times \vec{W} \neq \vec{U} \times (\vec{V} + \vec{W})$.

(3) VERDADEIRO. Sejam $\vec{U}$ e $\vec{V}$ tais que $\vec{U} \times \vec{V} = \vec{0}$. Então $\|\vec{U} \times \vec{V}\| = 0$ ou seja a area do paralelogramo determinada pelos vetores $\vec{U}$ e $\vec{V}$ é zero, isto é $\vec{U}$ e $\vec{V}$ são colineares. Logo existe um λ tal que $\vec{U} = \lambda\vec{V}$ ou $\vec{V} = \lambda\vec{U}$.

(4) FALSO. Sejam $\vec{U} = \mathbf{i}$, $\vec{V} = \mathbf{i}$ e $\vec{W} = \mathbf{j}$. Logo

$$\vec{U} \times (\vec{V} \times \vec{W}) = -\mathbf{j}\ ;\ (\vec{V} \times \vec{U}) \times \vec{W} = \vec{0}.$$

Ou seja $\vec{U} \times (\vec{V} \times \vec{W}) \neq (\vec{V} \times \vec{U}) \times \vec{W}$.

(5) VERDADEIRO.

$$\|\vec{U} \times \vec{V}\| = |\operatorname{sen}\theta| \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \leq \|\vec{U}\| \|\vec{V}\|.$$

(6) FALSO. Sejam $\vec{U} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\vec{V} = -\mathbf{i}$ e $\vec{W} = -\mathbf{j}$. Logo

$$\vec{U} \times \vec{V} = \mathbf{k}\ ;\ \vec{V} \times \vec{W} = \mathbf{k}\ ;\ \vec{W} \times \vec{U} = \mathbf{k}.$$

Logo $\vec{U} \times \vec{V} + \vec{V} \times \vec{W} + \vec{W} \times \vec{U} \neq 0$.

(7) VERDADEIRO. Sejam $\vec{U} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $\vec{V} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ e $\vec{W} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$. Sabemos que

$$(\vec{U}\vec{V}\vec{W}) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = (\vec{V}\vec{W}\vec{U}).$$

(8) VERDADEIRO.

$$\begin{aligned} |(\vec{U}\vec{V}\vec{W})| &= |(\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W})| \\ &\leq \|\vec{U} \times \vec{V}\| \|\vec{W}\| \\ &\leq \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \|\vec{W}\| |\sin\theta| \\ &\leq \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \|\vec{W}\|, \end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz e a propriedade da norma do produto vetorial.

(9) VERDADEIRO. Calculamos

$$\begin{aligned} (\lambda(\vec{U} + \vec{V})\vec{V}\vec{W}) &= (\lambda(\vec{U} + \vec{V}) \times \vec{V}) \cdot \vec{W} \\ &= (\lambda\vec{U} + \lambda\vec{V}) \times \vec{V}) \cdot \vec{W} \\ &= (\lambda\vec{U} \times \vec{V} + \lambda\vec{V} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} \\ &= \lambda(\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} \\ &= \lambda(\vec{U}\vec{V}\vec{W}) \end{aligned}$$

(10) VERDADEIRO. Sejam $\vec{U} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $\vec{V} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ e $\vec{W} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$ e $\vec{U}' = u_1'\mathbf{i} + u_2'\mathbf{j} + u_3'\mathbf{k}$, $\vec{V}' = v_1'\mathbf{i} + v_2'\mathbf{j} + v_3'\mathbf{k}$ e $\vec{W}' = w_1'\mathbf{i} + w_2'\mathbf{j} + w_3'\mathbf{k}$. Sabemos que

$$(\vec{U}\vec{V}\vec{W}) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \; ; \; (\vec{U}'\vec{V}'\vec{W}') = \det \begin{pmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ w_1' & w_2' & w_3' \end{pmatrix}$$

Logo

$$(\vec{U}\vec{V}\vec{W})(\vec{U}'\vec{V}'\vec{W}') = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ w_1' & w_2' & w_3' \end{pmatrix}^T$$

Isto é

$$(\vec{U}\vec{V}\vec{W})(\vec{U}'\vec{V}'\vec{W}') = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' & v_1' & w_1' \\ u_2' & v_2' & w_2' \\ u_3' & v_3' & w_3' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{U}\cdot\vec{U}' & \vec{U}\cdot\vec{V}' & \vec{U}\cdot\vec{W}' \\ \vec{V}\cdot\vec{U}' & \vec{V}\cdot\vec{V}' & \vec{V}\cdot\vec{W}' \\ \vec{W}\cdot\vec{U}' & \vec{W}\cdot\vec{V}' & \vec{W}\cdot\vec{W}' \end{pmatrix}$$