

AULA 12

MINIMIZAÇÃO DE

EXPRESSÕES

Profª Letícia Rittner

Projeto lógica combinacional

1. Descrição do problema em linguagem natural
2. Tabela verdade
3. Equações booleanas
4. Minimização das equações
5. Circuito com portas lógicas

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Projeto lógica combinacional

1. Descrição do problema em linguagem natural
2. Tabela verdade
3. Equações booleanas
 1. forma canônica de soma de produtos (mintermos)
 2. forma canônica de produto de somas (maxtermos)
4. Minimização das equações
5. Circuito com portas lógicas

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Mintermos e Maxtermos

Definições

- **Termo de Produto**: É o produto lógico de duas ou mais literais. **Ex.:** $x.y.z'$, $a.b'$,
- **Termo de Soma**: É a soma lógica de duas ou mais literais. **Ex.:** $x + y$, $a' + b + c'$,
- **Termo normal**: É um termo de produto ou termo de soma em que nenhuma literal aparece mais de uma vez.
Ex.: $x.y.z'$, $x + y' + z$

Definições

- **Mintermo**: Para uma expressão com n variáveis, um *mintermo* é um *termo normal de produto* com n literais. **Ex.:** $W' \cdot X' \cdot Y' \cdot Z$
- **Maxtermo**: Para uma expressão com n variáveis, um *maxtermo* é um *termo normal de soma* com n literais. **Ex.:** $W + X' + Y' + Z$

Mintermos e Maxtermos

#	x	y	z	Mintermo	Maxtermo
0	0	0	0	$x'.y'.z'$	$x + y + z$
1	0	0	1	$x'.y'.z$	$x + y + z'$
2	0	1	0	$x'.y.z'$	$x + y' + z$
3	0	1	1	$x'.y.z$	$x' + y' + z'$
4	1	0	0	$x.y'.z'$	$x' + y + z$
5	1	0	1	$x.y'.z$	$x' + y + z'$
6	1	1	0	$x.y.z'$	$x' + y' + z$
7	1	1	1	$x.y.z$	$x' + y' + z'$

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Mintermos e Maxtermos

- Determine se as expressões $G(a,b,c,d,e) = abcd + a'bcde$ e $H(a,b,c,d,e) = abcde + abcde' + a'bcde + a'bcde(a' + c)$ são equivalentes

$$G = abcd + a'bcde$$

$$G = abcd(e+e') + a'bcde$$

$$G = abcde + abcde' + a'bcde$$

$$G = a'bcde + abcde' + abcde \text{ (sum of minterms form)}$$

Equivalente

$$H = abcde + abcde' + a'bcde + a'bcde(a' + c)$$

$$H = abcde + abcde' + a'bcde + a'bcdea' + a'bcdec$$

$$H = abcde + abcde' + a'bcde + a'bcde + a'bcde$$

$$H = abcde + abcde' + a'bcde$$

$$H = a'bcde + abcde' + abcde$$

Mintermos: representação compacta

- Listar cada mintermo como um número
 - ▣ $a'bcde$ corresponde a 01111, ou 15
 - ▣ $abcde'$ corresponde a 11110, ou 30
 - ▣ $abcde$ corresponde a 11111, ou 31
- Então, $H = a'bcde + abcde' + abcde$ pode ser escrito como:
 - ▣ $H = \sum m(15, 30, 31)$
 - ▣ "H é a soma dos mintermos 15, 30, e 31"

Mapa de Karnaugh

Critérios de Minimização

1. Número mínimo de *literais*
2. Número mínimo de literais em uma expressão na forma de *soma de produtos* ou *produto de somas*
3. Número mínimo de *termos* em uma expressão na forma de *soma de produtos*, tal que não haja outra expressão com o mesmo número de *termos* e menos *literais*

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Critérios de Minimização Típicos

1. Número mínimo de *literais*
2. Número mínimo de literais em uma expressão na forma de *soma de produtos* ou *produto de somas*
3. **Número mínimo de *termos* em uma expressão na forma de *soma de produtos*, tal que não haja outra expressão com o mesmo número de *termos* e menos *literais***

Soma mínima

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Exemplos

- $f(x, y, z) = xy + xz + x'y'$
 - ▣ Mínima segundo critério (3)
- $f(x, y, z) = x(y + z) + x'y'$
 - ▣ Mínima segundo critério (1)

Mapa de Karnaugh

2 variáveis

	Y'	Y
X'	m_0	m_1
X	m_2	m_3

3 variáveis

	$Y'Z'$	$Y'Z$	YZ	YZ'
X'	m_0	m_1	m_3	m_2
X	m_4	m_5	m_7	m_6

4 variáveis

	$Z'W'$	$Z'W$	ZW	ZW'
$X'Y'$	m_0	m_1	m_3	m_2
$X'Y$	m_4	m_5	m_7	m_6
XY	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
XY'	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Código Cíclico

Localização dos Mintermos

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Agrupamento de Pares

Agrupando-se um par de células com 1's adjacentes (mintermos) elimina-se a variável (literal) que aparece na forma complementada e não-complementada.

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	1	1
A'B	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
AB'	1	0	0	1

Implicante Primo

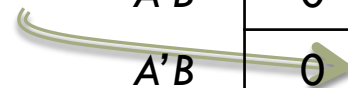
$$\begin{aligned} X &= A'B'CD + A'B'CD' + AB'C'D' + AB'CD' \\ &= A'B'C + AB'D' \end{aligned}$$

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Agrupamento de Quartetos

Agrupando-se um quarteto de 1's adjacentes elimina-se duas variáveis que aparecem nas formas complementada e não-complementada.

Implicante Primo



$A'B'$

$A'B$

AB

AB'

	$C'D'$	$C'D$	CD	CD'
$A'B'$	0	0	0	0
$A'B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
AB'	0	0	0	0

$$X = BD$$

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Agrupamento de Octetos

Agrupando-se um octeto de 1's adjacentes elimina-se três variáveis que aparecem nas formas complementada e não-complementada.

Implicante Primo

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	1	1	0	0
A'B	1	1	0	0
AB	1	1	0	0
AB'	1	1	0	0

$$\begin{aligned}
 X &= A'B'C'D' + A'B'C'D + A'BC'D' + ABC'D' + \\
 &ABC'D' + ABC'D + AB'C'D' + AB'C'D \\
 &= C'
 \end{aligned}$$

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	1	1	1	1
A'B	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
AB'	1	1	1	1

$$X = B'$$

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Procedimento Completo de Simplificação

1. Determine as células contendo 1's isolados
2. Agrupe todos os pares de 1's
3. Agrupe octetos, mesmo que estes contenham células com 1's já selecionadas
4. Agrupe quartetos que contenham 1's que ainda não tenham sido agrupados (certifique-se de usar o menor número possível de agrupamentos)
5. Obtenha a soma mínima como a soma dos implicantes primos definidos nos passos anteriores

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Exemplo 1

	x	y	z	F
m_0	0	0	0	0
m_1	0	0	1	0
m_2	0	1	0	1
m_3	0	1	1	0
m_4	1	0	0	1
m_5	1	0	1	1
m_6	1	1	0	1
m_7	1	1	1	1

$$F(x,y,z) = \sum m(2,4,5,6,7)$$

↓

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
x'	m_0	m_1	m_3	m_2
x	m_4	m_5	m_7	m_6

↓

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
x'	0	0	0	1
x	1	1	1	1

↓

$$F(x,y,z) = x + yz'$$

Exemplo 2

As 2 expressões
são mínimas e
equivalentes

$$F(A,B,C) = \sum m(0,1,5,6,7)$$

	$B'C'$	$B'C$	BC	BC'
A'	m_0	m_1	m_3	m_2
A	m_4	m_5	m_7	m_6

	$B'C'$	$B'C$	BC	BC'
A'	1	1	0	0
A	0	1	1	1

$$F(A,B,C) = A'B' + AB + B'C$$

	$B'C'$	$B'C$	BC	BC'
A'	1	1	0	0
A	0	1	1	1

$$F(A,B,C) = A'B' + AB + AC$$

Condições “Don’t Care”

A saída pode assumir qualquer nível lógico (0 ou 1), pois as combinações das entradas são inválidas ou o nível da saída não tem importância (don't care!)

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	Φ
1	0	0	Φ
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Don't Care {

$$Z(A,B,C) = \sum(5,6,7) + \sum_{\phi}(3,4)$$

$$Z(A,B,C) = \prod(0,1,2) + \prod_{\phi}(3,4)$$

	C	C
	,	
A'B'	0	0
A'B	0	Φ
AB	1	1
AB'	Φ	1



	C	C
	,	
A'B'	0	0
A'B	0	0
AB	1	1
AB'	1	1

$Z = A$

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Exemplo

$$f(w, x, y, z) = \sum(1,4,8) + \sum_{\Phi}(5,7,9,11,12,13,14,15)$$

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
$w'x'$	0	1	0	0
$w'x$	1	Φ	Φ	0
wx	Φ	Φ	Φ	Φ
wx'	1	Φ	Φ	0

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
$w'x'$	0	1	0	0
$w'x$	1	1	0	0
wx	1	1	0	0
wx'	1	1	0	0

$$f(w,x,y,z) = xy' + y'z + wy'$$

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Determinação do Produto de Somas Mínimo

- Os agrupamentos são feitos com 0's adjacentes
- A expressão final é dada pelo produto das somas dos *maxterms* simplificados
 - ▣ As variáveis que aparecem nas formas complementada e não-complementada (em agrupamentos de pares, quartetos e octetos) são eliminadas. O termo de soma será dado pelas variáveis originais complementadas.

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Exemplo

$$f(w, x, y, z) = \prod(0,1,2,3,4,7,8,11,12,13,14,15)$$

	$w'x'$	$w'x$	wx	wx'
$y'z'$	0	0	0	0
$y'z$	0	1	0	1
yz	0	0	0	0
yz'	0	1	0	1

8 Literais!

$$f(w, x, y, z) = (w + x)(w' + x')(y + z)(y' + z')$$

	$w'x'$	$w'x$	wx	wx'
$y'z'$	0	0	0	0
$y'z$	0	1	0	1
yz	0	0	0	0
yz'	0	1	0	1

16 Literais!

$$f(w, x, y, z) = w'xy'z' + wx'y'z + w'xyz' + wx'yz'$$

Adaptado do Prof. Leonardo Abdala

Para casa

Encontre a soma mínima de produtos para cada soma de mintermos:

1. $F(A,B,C) = \sum m(0,1,2,4,7)$

2. $F(A,B,C) = \sum m(1,3,5,7)$

3. $F(A,B,C,D) = \sum m(1,5,7,9,11,13,15)$

Para casa

Encontre a soma mínima de produtos para cada soma de mintermos:

1. $F(A,B,C) = \sum m(0,1,2,4,7)$

Resp: $F = B'C' + A'B' + ABC + A'C'$

1. $F(A,B,C) = \sum m(1,3,5,7)$

Resp: $F = C$

2. $F(A,B,C) = \sum m(0,1,5,6,7)$

Resp: $F = AB + A'B' + B'C = AB + A'B' + AC$

Para casa

Para $f(w, x, y, z) = \sum m(0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 15)$, realize os seguintes procedimentos, com o uso do mapa de Karnaugh:

- a) Encontre todos os implicants primos.
- b) Indique quais destes implicants primos são essenciais
- c) Obtenha uma soma de produtos mínima para f .
Ela é única?
- d) Obtenha um produto de somas mínimo para f .
Ele é único?
- e) Implemente uma rede de portas de dois níveis para a soma obtida em (c) e para o produto obtido em (d).

Para casa

Projete uma rede de dois níveis mínima que compute o produto de dois números inteiros, com valores de 0 a 3. Lembre-se que as especificações binárias do projeto estão em suas mãos. Faça escolhas convenientes!

Resp parcial: Entradas: $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$

Saídas: $z \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$

Função: $z = xy$

Codificando as entradas e saídas em binário e minimizando por Karnaugh, obtem-se:

$$\begin{aligned}z_0 &= x_0 y_0 \\z_1 &= x_1 x_0' y_0 + x_0 y_1 y_0' + x_1' x_0 y_1 + x_1 y_1' y_0 \\z_2 &= x_1 x_0' y_1 + x_1 y_1 y_0' \\z_3 &= x_1 x_0 y_1 y_0\end{aligned}$$

Para casa

Projete uma rede de dois níveis mínima que compute o resto da divisão por 7(mod 7) para os números inteiros na faixa de 0 a 15. Lembre-se que as especificações binárias do projeto estão em suas mãos. Faça escolhas convenientes!

Resp parcial possível (mas não única): Entradas: $x \in$ aos inteiros no interval de $[0, 15]$

Saídas: $y \in$ aos inteiros no interval de $[0, 7]$

Função: $y = x \bmod 7$

Codificando as entradas e saídas em binário e minimizando por Karnaugh, obtem-se:

$$\begin{aligned}y_2 &= x_2x'_1 + x_3x'_2x_1x_0 + x_3x'_2x_0' \\y_1 &= x_3x'_1x_0 + x'_3x'_2x_1 + x'_3x_1x_0' + x_2x_1x_0' \\y_0 &= x_3x'_1x_0' + x_3x'_2x_0' + x_3x_2x_1x_0 + x_3x'_2x_0'\end{aligned}$$

Para casa

Projete uma rede de dois níveis mínima que realize a conversão de código binário de quatro bits para o código de Gray.

Resp parcial possível (mas não unica): Entradas: $b_3b_2b_1b_0$, $b_i \in \{0, 1\}$

Saídas: $g_3g_2g_1g_0$, $g_i \in \{0, 1\}$

Função: g é o código de Gray de b

Minimizando por Karnaugh, obtem-se:

$$\begin{aligned}g_3 &= b_3 \\g_2 &= (b_2 + b_3)(b_2' + b_3') \\g_1 &= (b_1 + b_2)(b_1' + b_2') \\g_0 &= (b_0 + b_1)(b_0' + b_1')\end{aligned}$$