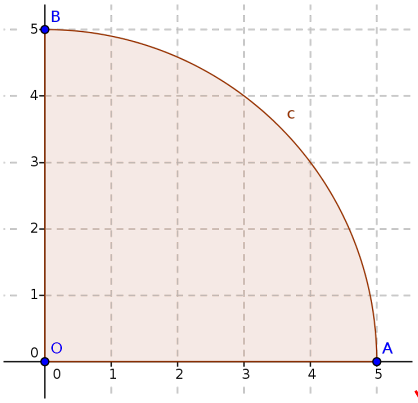
GABARITO

MA211 – PROVA 2

Sexta-feira (manhã), 07/11/2014.

*Para correção, cada símbolo "✓**x** " o item que o antecede vale* **x** *pontos.*

Resolução da Questão 1. Primeiramente, a região de integração é o setor circular mostrado abaixo.



✓0, 4

Observe que a região é descrita em coordenadas polares pelo conjunto $\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 5 \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Escrevendo a integral em coordenadas polares e lembrando que $\tan(\theta) = y/x$, obtemos

$$I = \iint_R \operatorname{arctg}(y/x)dA = \underbrace{\int_0^{\pi/2}}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\int_0^5}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\theta}_{\checkmark 0,3} \underbrace{rdrd\theta}_{\checkmark 0,3} = \int_0^{\pi/2} \frac{25}{2}\theta d\theta = \frac{25}{16}\pi^2 . \checkmark \mathbf{0,4} \tag{1}$$

Resolução da Questão 2. Usando coordenadas cilíndricas, obtemos a integral:

$$I = \iiint_B (x^2+y^2)dV = \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1}_{\checkmark 0,7} \underbrace{r^2}_{\checkmark 0,3} \underbrace{rdzdrd\theta}_{\checkmark 0,2} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 drd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}d\theta = \frac{\pi}{2} \checkmark \mathbf{0,8} \tag{2}$$

Resolução da Questão 3. O momento de inércia com respeito ao eixo z é

$$I_z = \iiint_E (x^2+y^2)\kappa dV, \checkmark \mathbf{0,4} \tag{3}$$

em que E é o cubo $[0,2]\times[0,2]\times[0,2]$. Pelo teorema de Fubini, a integral acima fornece

$$\begin{aligned}
I_z &= \kappa \int_0^2\int_0^2\int_0^2 (x^2+y^2)dzdydx \checkmark \mathbf{0,4} && (4)\\
&= \kappa \int_0^2\int_0^2 (x^2+y^2)z\Big|_0^2 dydx = \kappa\int_0^2\int_0^2 (x^2+y^2)(2-0)dydx = 2\kappa\int_0^2\int_0^2 (x^2+y^2)dydx \checkmark \mathbf{0,4} && (5)\\
&= 2\kappa\int_0^2 (x^2y+\frac{1}{3}y^3)\Big|_0^2 dx = 2\kappa\int_0^2 (2x^2+\frac{2^3}{3})dx \checkmark \mathbf{0,4} && (6)\\
&= 2\kappa\left(2\frac{1}{3}x^3+\frac{2^3}{3}x\right)\Big|_0^2 = 2\kappa\left(2\frac{1}{3}2^3+\frac{2^3}{3}2\right) = 2\kappa\left(\frac{2^4}{3}+\frac{2^4}{3}\right) = \frac{2^6}{3}\kappa \checkmark \mathbf{0,4} \frac{64}{3}\kappa && (7)
\end{aligned}$$

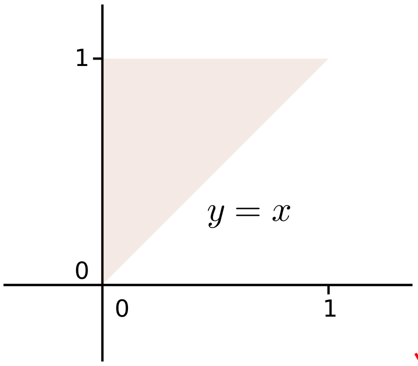
Resolução da Questão 4. O sólido é descrito em coordenadas esféricas. Portanto, o volume é dado pela seguinte integral em coordenadas esféricas:

$$V = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\int_0^{\pi/3}}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\int_0^{4\cos\phi}}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta}_{\checkmark 0,3} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \frac{4^3}{3}\cos^3\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi d\theta \checkmark \mathbf{0,3} \tag{8}$$

Tomando $u = \cos\phi$, obtemos $du = -\operatorname{sen}\phi d\phi$ e a última integral torna-se

$$V = -\int_0^{2\pi}\int_1^{1/2} \frac{4^3}{3} u^3 du d\theta \checkmark \mathbf{0,2} = -\int_0^{2\pi} \frac{4^2}{3}\left(\frac{1}{2^4} - 1\right) d\theta = -2\pi \frac{16}{3}\frac{-15}{16} = 10\pi \checkmark \mathbf{0,3} \tag{9}$$

Resolução da Questão 5. Primeiramente, observe que $0 \le y \le \pi$ e $0 \le x \le y$. Portanto, a região de integração é o triangula mostrado abaixo.



$\checkmark \mathbf{0,3}$

Agora, a integral iterada

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{y} \cos(x/\pi) \frac{y-x}{(x-\pi)^2} dx dy, \tag{10}$$

requer, primeiro, a integração de uma função complicada em x. Porém, fazendo uma mudança na ordem de integração, obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \cos(x/\pi)\frac{y-x}{(x-\pi)^2} dy dx \checkmark \mathbf{0,7} & (11)\\ &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(x/\pi)}{(x-\pi)^2}\left(\frac{1}{2}(y-x)^2\Big|_x^{\pi}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos(x/\pi)}{(x-\pi)^2}(\pi - x)^2 dx \checkmark \mathbf{0,5} & (12)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(x/\pi) dx = \frac{\pi}{4}\operatorname{sen}(x/\pi)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sen} 1. \checkmark \mathbf{0,5} & (13) \end{aligned}$$