GABARITO

MA211 – PROVA 3
Sexta-feira (manhã), 19/12/2014.

*Para correção, cada símbolo "✓**x**" o item que o antecede vale* **x** *pontos.*

Resolução da Questão 1. Primeiramente, note que o campo vetorial **F** está definido em todo $\mathbb{R}^3$ e suas componentes possuem derivadas contínuas pois são polinômios. Além disso, temos que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + 2xyz^2 & 2xy + z & 2x^2z + y + 2z \end{vmatrix} = (1-1)\mathbf{i} + (4xz - 4xz)\mathbf{j} + (2y - 2y)\mathbf{k} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Em vista desses fatos, podemos afirmar que **F** é um campo conservativo (Teorema 4, Capítulo 16.5). **✓0,4**

Sendo **F** conservativo, existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Sobretudo, vale o teorema fundamental das integrais de linha:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(1)) - f(\mathbf{r}(0)), \tag{2}$$

ou seja, podemos calcular a integral desejada avaliando f apenas nos extremos da curva C.

Para determinar f, vamos assumir que $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ em que

$$P(x,y,z) = y^2 + 2xz^2, \quad Q(x,y,z) = 2xy + z \quad \text{e} \quad R(x,y,z) = 2x^2z + y + 2z. \tag{3}$$

Assim, devemos ter

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y,z) \quad \Longrightarrow \quad f(x,y,z) = \int P dx = \int (y^2 + 2xz^2)dx = xy^2 + x^2z^2 + g(y,z), \checkmark \mathbf{0,4} \tag{4}$$

em que g denota uma função apenas de y e z. Devemos ter também

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y,z) \quad \Longrightarrow \quad 2xy + \frac{\partial g}{\partial y} = 2xy + z \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} = z \quad \Longrightarrow \quad g(y,z) = yz + h(z). \tag{5}$$

em que h é uma função somente de z. Combinando as equações acima, concluímos

$$f(x,y,z) = xy^2 + x^2z^2 + yz + h(z). \checkmark \mathbf{0,4} \tag{6}$$

Finalmente, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = R(x,y,z) \quad \Longrightarrow \quad 2x^2z + y + h' = 2x^2z + y + 2z \quad \Longrightarrow \quad h' = 2z \quad \Longrightarrow \quad h(z) = z^2 + c, \tag{7}$$

em que c é uma constante. Finalmente, temos

$$f(x,y,z) = xy^2 + x^2z^2 + yz + z^2 + c. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{8}$$

Observação: Pode-se afirmar que **F** é conservativo uma vez encontrada a função potencial f.

Finalmente, pelo teorema fundamental das integrais de linha, concluímos que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(1)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(1,2,1) - f(0,1,0) = (4 + 1 + 2 + 1 + c) - (c) = 8. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{9}$$

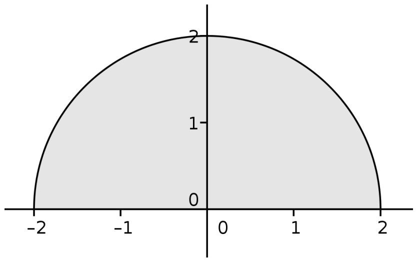
Resolução da Questão 2. Primeiramente, escrevemos $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$, em que

$$P(x,y) = x \quad \text{e} \quad Q(x,y) = x^3 + 3xy^2. \tag{10}$$

Pelo teorema de Green, o trabalho realizado pelo campo de força satisfaz:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \checkmark \mathbf{0,4}, \tag{11}$$

em que D é a região mostrada na figura abaixo.



Mas,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \tag{12}$$

Logo,

$$W = \iint_D 3(x^2 + y^2) dA. \checkmark \mathbf{0,6} \tag{13}$$

Usando coordenadas polares, encontramos

$$W = \underbrace{\int_0^\pi}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\int_0^2}_{\checkmark 0,2} \underbrace{3r^2 r}_{\checkmark 0,2} \, dr d\theta = 3 \int_0^\pi d\theta \int_0^2 r^3 dr = 3\pi \frac{2^4}{4} = 12\pi. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{14}$$

Resolução da Questão 3. A área da superfície dada por $z = f(x,y)$ é

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\,dA. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{15}$$

Nesta questão, temos $f(x,y) = xy$. Logo,

$$f_x = y \quad \text{e} \quad f_y = x. \tag{16}$$

Portanto,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + y^2 + x^2}\,dA, \checkmark \mathbf{0,4} \tag{17}$$

em que D, nesta questão, é o circulo $x^2 + y^2 \leq 1$. Usando coordenadas polares, temos

$$A(S) = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{\sqrt{1+r^2}r}_{\checkmark \mathbf{0,2}}\,dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} r dr \checkmark \mathbf{0,2}. \tag{18}$$

Tomando $u = 1 + r^2$, $du = 2rdr$, encontramos

$$A(S) = 2\pi \int_1^2 u^{1/2} \frac{du}{2} = \frac{2}{3}\pi u^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1). \checkmark \mathbf{0,4} \tag{19}$$

Resolução da Questão 4. Pelo teorema de Stokes e usando a definição de integral de superfície, teremos

$$I = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot }\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\checkmark 0,3 = \iint_D \text{rot }\mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)dA\checkmark 0,3, \tag{20}$$

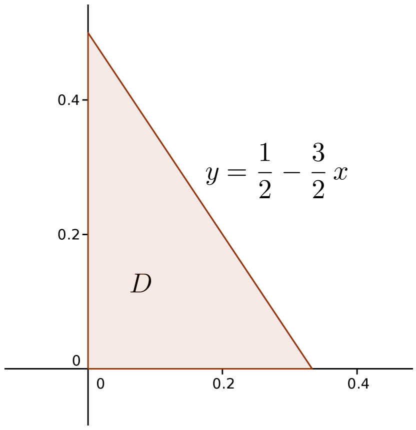
em que $\mathbf{r}_x$ e $\mathbf{r}_y$ são os vetores tangentes a superfície descrita por $\mathbf{r}(x,y)$, com $(x,y)\in D$. Agora, pela definição do rotacional, temos que

$$\text{rot }\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & x+yz & xy-\sqrt{z} \end{vmatrix} = (x-y)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \mathbf{k}.\checkmark 0,4 \tag{21}$$

Além disso, a superfície é dada pela equação $z = 1-3x-2y$ no primeiro octante, ou seja, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$. Assim, a superfície é descrita pela equação

$$\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (1-3x-2y)\mathbf{k}, \quad (x,y)\in D, \tag{22}$$

em que D é a região mostrada na abaixo no plano xy.



Note que

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} - 3\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}. \tag{23}$$

Portanto,

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}, \tag{24}$$

que é um vetor cuja componente $\mathbf{k}$ é positiva. Como o vetor normal a superfície S aponta para cima, a curva C é percorrida no sentido anti-horário. Temos também que

$$\mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = 3(x-y) - 2y + 1 = 3x - 5y + 1. \tag{25}$$

Assim, a integral é dada por

$$I = \underbrace{\int_0^{1/3}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\int_0^{(1-3x)/2}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\big[(3x+1) - 5y\big]dydx}_{\checkmark 0,2} = \int_0^{1/3} (3x+1)y - \frac{5}{2}y^2\Big|_0^{(1-3x)/2} dx \tag{26}$$

$$= \int_0^{1/3} (3x+1)\frac{1-3x}{2} - \frac{5}{2}\frac{(1-3x)^2}{4}dx = \int_0^{1/3} -\frac{9^2}{8}x^2 + \frac{15}{4}x - \frac{1}{8}dx \tag{27}$$

$$= \left[-\frac{3^4}{8}\frac{x^3}{3} + \frac{15}{4}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x\right]\Big|_0^{1/3} = -\frac{3^4}{8}\frac{1}{3^4} + \frac{15}{8}\frac{1}{3^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{3} = \frac{1}{8}\frac{3}{9} = \frac{1}{24}.\checkmark 0,4 \tag{28}$$

Resolução da Questão 5. Pelo teorema do divergente, temos que

$$I = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV, \checkmark \mathbf{0,4} \tag{29}$$

em que E é o sólido dado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e limitado pelos planos $x = -1$ e $x = 2$ e

$$\text{div } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{k} \right) \cdot (3xy^2\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}) = 3y^2 + 0 + 3z^2 = 3(y^2 + z^2). \checkmark \mathbf{0,4} \tag{30}$$

Logo,

$$I = \iint_E 3(y^2 + z^2) dV. \tag{31}$$

Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = x, \\ y = r\cos\theta, \\ z = r\sin\theta, \end{cases} \qquad \text{com} \qquad \begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \tag{32}$$

obtemos

$$I = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark 0{,}2} \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark 0{,}2} \underbrace{\int_{-1}^2}_{\checkmark 0{,}2} \underbrace{3r^2}_{\checkmark 0{,}2} \underbrace{(r)}_{\checkmark 0{,}2} \, dx dr d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 3r^3 dr \right) \left(\int_{-1}^2 dx \right) = 2\pi \frac{3}{4}(2+1) = \frac{9}{2}\pi. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{33}$$