Capitulo 03 Exercicios

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

Resoluções do livro Um Curso de Geometria Analítica e Álgenra Linear

Autor: Reginaldo J. Santos

Professor: Roberto Andreani

Exercícios 3.1

Exercícios Numéricos (respostas na página 538)

3.1.1. Determine o ponto C tal que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ sendo $A = (0, -2)$ e $B = (1, 0)$

Resolução:

3.1.2. Uma reta no plano tem equação $y = 2x + 1$. Determine um vetor paralelo a esta reta. Determine uma equação para a reta no plano que é paralela ao vetor $V = (2, 3)$ e passa pelo ponto $P_0 = (1, 2)$

Resolução:

3.1.4. Determine o vetor X, tal que $3X - 2V = 15(X - U)$.

Resolução:

3.1.5. Determine os vetores X e Y tais que $\begin{cases} 6X - 2Y = U \\ 3X + Y = U + V \end{cases}$

Resolução:

3.1.6. Determine as coordenadas da extremidade do segmento orientado que representa o vetor $V = (3, 0, -3)$ sabendo-se que sua origem está no ponto $P = (2, 3, -5)$

Resolução:

3.1.7. Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P = (1, 0, 3)$ em relação ao ponto $M = (1, 2, -1)$? (Sugestão: o ponto P' é tal que o vetor $\overrightarrow{MP'} = -\overrightarrow{MP}$)

Resolução:

3.1.8. Verifique se os pontos dados a seguir são colineares, isto é, pertencem a uma mesma reta:

(a) $A = (5, 1, -3), B = (0, 3, 4)$ e $C = (0, 3, -5)$

(b) $A = (-1, 1, 3), B = (4, 2, -3)$ e $C = (14, 4, -15)$

Resolução:

3.1.9. Dados os pontos $A = (1, -2, -3), B = (-5, 2, -1)$ e $C = (4, 0, -1)$. Determine o ponto D tal que A, B, C e D sejam vértices consecutivos de um paralelogramo. Verifique se o vetor U é combinação linear (soma de múltiplos escalares) de V e W : (a) $V = (9, -12, -6), W = (-1, 7, 1)$ e $U = (-4, -6, 2)$ (b) $V = (5, 4, -3), W = (2, 1, 1)$ e $U = (-3, -4, 1)$

Resolução:

3.1.11. Verifique se é um paralelogramo o quadrilátero de vértices (não necessariamente consecutivos)

(a) $A = (4, -1, 1), B = (9, -4, 2), C = (4, 3, 4)$ e $D = (4, -21, -14)$

(b) $A=(4,-1,1), B=(9,-4,2), C=(4,3,4)$ e $D=(9,0,5)$

Resolução:

3.1.12. Quais dos seguintes vetores são paralelos $U=(6,-4,-2), V=(-9,6,3), W=(15,-10,5)$

Resolução:

3.1.13. Considere os pontos $A=(-3,0,4), B=(-3,-1,0)$ e $C=(-1,-4,3)$

(a) Determine os pontos médios, M e N, dos segmentos AC e BC, respectivamente.

(b) Verifique que $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

(c) Determine o ponto D de forma que A, B, D e C sejam vértices consecutivos de um paralelogramo.

Resolução:

Exercícios Teóricos

3.1.15. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a média aritmética das medidas das bases. (Sugestão: mostre que

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$$

e depois conclua que $\overrightarrow{MN}$ é um múltiplo escalar de $\overrightarrow{AB}$. Revise o Exemplo 3.3 na página 149)

Resolução:

Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio. (Sugestão: Sejam M e N os pontos médios das duas diagonais do paralelogramo. Mostre que o vetor $\overrightarrow{MN}=\overline{0}$, então conclua que $M=N$..

Resolução:

3.1.17. Considere o triângulo ABC e sejam M o ponto médio de BC, N o ponto médio de AC e P o ponto médio de AB. Mostre que as medianas (os segmentos AM, BN e CP) se cortam num mesmo ponto que divide as medianas na proporção 2/3 e 1/3. (Sugestão: Sejam G, H e I os pontos definidos por $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$ e $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$. Mostre que $\overrightarrow{GH}=0, \overrightarrow{GI}=\overline{0}$, conclua que $G=H=I$.

Resolução:

3.1.18. Sejam A, B e C pontos quaisquer com $A \neq B$. Prove que:

(a) Um ponto X pertence a reta determinada por A e $B(\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AB})$ se, e somente se, $\overrightarrow{CX}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}, \quad \text{com}\, \alpha+\beta=1$

(b) Um ponto X pertence ao interior do segmento $AB(\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AB}, \text{com}\, 0<\lambda<1)$ se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha>0, \beta>0 \quad \text{e} \quad \alpha+\beta=1$$

(c) Um ponto X é um ponto interior ao triângulo $ABC\,(A'X=\lambda A'B', \text{com}\, 0<\lambda<1,$ em que A' é um ponto interior ao segmento AC e B' é interior ao segmento CB) se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha>0, \beta>0 \quad \text{e} \quad \alpha+\beta<1$$

Resolução:

3.1.19. Mostre que se $\alpha V = \bar{0}$, então $\alpha = 0$ ou $V = \bar{0}$

Resolução:

3.1.20. Se $\alpha U = \alpha V$, então $U = V$? E se $\alpha \neq 0$?

Resolução:

3.1.21. Se $\alpha V = \beta V$, então $\alpha = \beta$? E se $V \neq \bar{0}$?

Resolução:

Exercícios 3.1

Exercicios Numéricos (respostas na página 541)

3.2.1. Determine a equação da reta no plano que é perpendicular ao vetor $N = (2, 3)$ e passa pelo ponto $P_0 = (-1, 1)$

Resolução:

3.2.2. Seja $O = (0, 0, 0)$. Qual o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que $\|\overrightarrow{OP}\|^2 = 4$? Qual figura é representada pela equação $x^2 + y^2 = 4$? Sejam $V = (1, 2, -3)$ e $W = (2, 1, -2)$. Determine vetores unitários paralelos aos vetores

(a) $V + W$.

(b) $V - W$

(c) $2V - 3W$.

Resolução:

3.2.4. Determine o valor de x para o qual os vetores $V = (x, 3, 4)$ e $W = (3, 1, 2)$ são perpendiculares. Demonstre que não existe x tal que os vetores $V = (x, 2, 4)$e$W = (x, -2, 3)$ são perpendiculares. 3.2.6. Ache o ângulo entre os seguintes pares de vetores:

(a) (2,1,0) e (0,1,-1)

(b) (1,1,1) e $(0, -2 - 2)$

(c) (3,3,0) e (2,1,-2)

Resolução:

3.2.7. Decomponha $W = (-1, -3, 2)$ como a soma de dois vetores W_1 e W_2, com W_1 paralelo ao vetor (0,1,3) e W_2 ortogonal a este último. (Sugestão; revise o Exemplo 3.10 na página 174)

3.2.8. Ache o vetor unitário da bissetriz do ângulo entre os vetores $V = (2, 2, 1)$ e $W = (6, 2, -3)$. (Sugestão: observe que a soma de dois vetores está na direção da bissetriz se, e somente se, os dois tiverem o mesmo comprimento. Portanto, tome múltiplos escalares de V e W de forma que eles tenham o mesmo comprimento e tome o vetor unitário na direção da soma deles.)

Exercicios Teóricos

3.2.10. Sejam V e W dois vetores não nulos, θ o ângulo entre elese $W_1 = \text{proj }_W V$.

(a) Usando somente o Teorema de Pitágoras mostre que

$$\|V\|^2 = \|W_1\|^2 + \|V - W_1\|^2 \quad \text{e} \quad \|V - W\|^2 = \|V - W_1\|^2 + \|W - W_1\|^2$$

(b) Mostre que $\|W - W_1\| = |\|W|| - \|V\| \cos\theta|$

(c) Usando somente os itens anteriores prove a Lei dos Cossenos:

$$||V - W||^2 = \|V\|^2 + \|W\|^2 - 2\|V\|\|\|W\| \cos\theta$$

Resolução:

3.2.11. Mostre que em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é perpendicular à base.

Resolução:

3.2.12. Mostre que o ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto. Sugestão para os próximos 2 exercícios: Considere o paralelogramo $ABCD$. Seja $U = AB$ e $V = \overrightarrow{AD}$. Observe que as diagonais do paralelogramo são $U + V$ e $U - V$.

Resolução:

3.2.13. Mostre que se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares, então ele é um losango.

Resolução:

3.2.14. Mostre que se as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo comprimento, então ele é um retângulo.

Resolução:

3.2.15. Se $V \cdot \mathrm{W} = V \cdot U \mathrm{e} V \neq \overline{0}$, então $W = U$?

Resolução:

3.2.16. Mostre que se V é ortogonal a W_1 e W_2, então V é ortogonal a $\alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2$.

Resolução:

3.2.17. Demonstre que as diagonais de um losango são perpendiculares. (Sugestão: mostre que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, usando o fato de que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \mathrm{e} \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot$

Resolução:

3.2.18. Sejam V um vetor não nulo no espaço e α, β e γ os ângulos que V forma com os vetores $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$, respectivamente. Demonstre que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

(Sugestão: $\cos\alpha = \frac{V \cdot \vec{i}}{\|V\|\|\vec{i}\|}, \cos\beta = \frac{V \cdot \vec{j}}{\|\mathbb{W}\|\|\vec{j}\|} \mathrm{e} \cos\gamma = \frac{V \cdot \vec{k}}{\|V\|\|\vec{k}\|}\Big)$

3.2.19. Demonstre que, se V e W são vetores quatisquer, então:

(a) (a) $V \cdot W = \frac{1}{4}\left(\|V + W\|^2 - \|V - W\|^2\right) \quad ;$

(b) $\|V\|^2 + \|W\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|V + W\|^2 + \|V - W\|^2\right)$ (Sugestão: desenvolva os segundos membros das igualdades acima observando que $\|V + W\|^2 = (V + W) \cdot (V + W) \mathrm{e} \|V - W\|^2 = (V - W) \cdot (V - W))$

Resolução:

3.2.20. Demonstre que se V e W são vetores quaisquer, então:

(a) $|V \cdot W| \leq ||V||||W||$

(b) $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$; (Sugestão: mostre que $\|V + W\|^2 = (V + W) \cdot (V + W) \leq (\|V\| + \|W\|)^2$ usando o item anterior)

(c) $|\|V\| - \|W\|| \leq \|V - W\|\cdot$ (Sugestão: defina $U = V - W$ e aplique o item anterior a U e W)

Resolução:

3.2.21. Sejam U_1, U_2 e U_3 três vetores unitários mutuamente ortogonais. Se $A = \left[\begin{array}{ccc} U_1 & U_2 & U_3 \end{array}\right]$ é uma matriz 3×3 cujas colunas são os vetores U_1, U_2 e U_3, então A é invertivel e $A^{-1} = A^t$. (Sugestão: mostre que $A^t A = I_{3.}$)

Resolução:

Exercícios 3.3

Exercicios Numéricos (respostas na página 542)

3.3.1. Verifique se os seguintes pontos pertencem a um mesmo plano:

(a) $A = (2, 2, 1)$, $B = (3, 1, 2)$, $C = (2, 3, 0)$ e $D = (2, 3, 2)$;

(b) $A = (2, 0, 2)$, $B = (3, 2, 0)$, $C = (0, 2, 1)$ e $D = (10, -2, 1)$.

Resolução:

3.3.2. Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 1, 3)$, $C = (1, 3, 2)$ e $D = (1, 2, 1)$.

Resolução:

3.3.3. Calcule a área do paralelogramo em que três vértices consecutivos são $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ e $C = (3, 2, 4)$.

Resolução:

3.3.4. Calcule a área do triângulo com vértices $A = (1, 2, 1), B = (3, 0, 4)$ e $C = (5, 1, 3)$

Resolução:

3.3.5. Ache X tal que $X \times (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ e ——$X|| = \sqrt{6}$

Resolução:

3.3.6. Sabe-se que o vetor X é ortogonal a $\vec{i} + \vec{j}$ e a $-\vec{i} + \vec{k}$, tem norma $\sqrt{3}$ e sendo θ o ângulo entre X e $\vec{j}$, tem-se $\cos\theta > 0$. Ache X

Resolução:

3.3.7. Mostre que $A = (3, 0, 2), B = (4, 3, 0)$ e $C = (8, 1, -1)$ são vértices de um triângulo retângulo. Em qual dos vértices está o ângulo reto?

Resolução:

3.3.8. Considere dois vetores V e W tais que $\|V\| = 5, \|W\| = 2$ e o ângulo entre V e W é $60°$. Determine, como combinação linear de V e $W(xV + yW)$:

(a) Um vetor X tal que $X \cdot V = 20$ e $X \cdot W = 5$

(b) Um vetor X tal que $X \times V = \overline{0}$ e $X \cdot W = 12$.

Resolução:

Exercícios Teóricos

3.3.10. O produto vetorial é associativo? Justifique a sua resposta. (Sugestão: experimente com os vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

Resolução:

3.3.11. SeV $\times$ W = V $\times$ U e V $\neq \overline{0}$, então W = U ?

Resolução:

3.3.12. Demonstre que se V e W são vetores quaisquer no espaço, então

$$\|V \times W\| \leq \|V\|\|W\|$$

Resolução:

3.3.13. Se U, V e W são vetores no espaço, prove que $|U \cdot (V \times W)| \leq \|u\| \mid \|V\|\|W\| \cdot$ (Sugestão: use o Teorema 3.2 na página 168 e o exercício anterior

Resolução:

3.3.14. Mostre que $U \cdot (V \times W) = V \cdot (W \times U) = W \cdot (U \times V)$. (Sugestão: use as propriedades do determinante)

Resolução:

3.3.15. Mostre que

(a) $(\alpha U_1 + \beta U_2) \cdot (V \times W) = \alpha U_1 \cdot (V \times W) + \beta U_2 \cdot (V \times W)$

(b) $U \cdot [(\alpha V_1 + \beta V_2) \times W] = \alpha U \cdot (V_1 \times W) + \beta U \cdot (V_2 \times W)$

(c) $U \cdot [V \times (\alpha W_1 + \beta W_2)] = \alpha U \cdot (V \times W_1) + \beta U \cdot (V \times W2)$

(d) $U \cdot (V \times W) = U \cdot [(V + \alpha U + \beta W) \times W]$

(Sugestão: use as propriedades dos produtos escalar e vetorial)

Resolução:

3.3.16. Prove a identidade de Lagrange

$$\|V \times W\|^2 = \|V\|^2\|W\|^2 - (V \cdot W)^2$$

Resolução:

3.3.17. Mostre que a a do triângulo com vértices (x_i, y_i), para $i = 1, 2, 3$ é igual à $|\det(A)|/2$, em que

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

(Sugestão: Marque os pontos $P_1 = (x_1, y_1, 1)$, $P_2 = (x_2, y_2, 1)$, $P_3 = (x_3, y_3, 1)$ e $P_1' = (x_1, y_1, 0)$. O volume do paralelepípedo determinado por P_1, P_2, P_3 e P_1' é dado por $\left|\overrightarrow{P_1P_1'} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right|$. Mas, a altura deste paralelepípedo é igual à 1. Assim, o seu volume é igual à área da base que é o paralelogramo determinado por P_1, P_2 e P_3. Observe que $\overrightarrow{OP'_1}, \overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ são paralelos ao plano xy.)

Resolução:

3.3.18. Sejam U_1, U_2 e U_3 três vetores unitários mutuamente ortogonais. Se $A = \left[\begin{array}{ccc} U_1 & U_2 & U_3 \end{array}\right]$ é uma matriz 3×3 cujas colunas são os vetores U_1, U_2 e U_3, então A é invertivel e $A^{-1} = A^t$. (Sugestão: mostre que $A^tA = I_3$.)

Resolução:

3.3.19. Sejam $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$. Prove a formula seguinte para o produto vetorial duplo

$$U \times (V \times W) = (U \cdot W)V - (U \cdot V)W$$

seguindo os seguintes passos:

(a) Prove que

$$\begin{aligned} U \times (\vec{i} \times \vec{j}) &= (U \cdot \vec{j})\vec{i} - (U \cdot \vec{i})\vec{j} \\ U \times (\vec{j} \times \vec{k}) &= (U \cdot \vec{k})\vec{j} - (U \cdot \vec{j})\vec{k} \\ U \times (\vec{k} \times \vec{i}) &= (U \cdot \vec{i})\vec{k} - (U \cdot \vec{k})\vec{i} \end{aligned}$$

(b) Prove usando o item anterior e / as propriedades do produto vetorial que

$$U \times (V \times \vec{i}) = (U \cdot \vec{i})V - (U \cdot V)\vec{i}$$

$$\begin{aligned} u \times (V \times \vec{j}) &= (U \cdot \vec{j})V - (U \cdot V)\vec{j} \\ U \times (V \times \vec{k}) &= (U \cdot \vec{k})V - (U \cdot V)\vec{k} \end{aligned}$$

(c) Prove agora o caso geral usando o item anterior e as propriedades do produto vetorial.

Resolução:

3.3.20. (a) Prove que

$$[A \times (B \times C)] + [B \times (C \times A)] + [C \times (A \times B)] = 0$$

(Sugestão: use o exercício anterior).

(b) Mostre que se $(A \times C) \times B = \overline{0}$, então

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

ou seja, o produto vetorial é, neste caso, associativo.

Resolução:

Teste do capitulo

1. Mostre que os pontos $A = (4, 0, 1), B = (5, 1, 3), C = (3, 2, 5), D = (2, 1, 3)$ são vértices de um paralelogramo. Calcule a sua área.

Resolução:

2. Dado o triângulo de vértices $A = (0, 1, -1), B = (-2, 0, 1)$ e $C = (1, -2, 0)$, determine a medida da altura relativa ao lado BC.

Resolução:

3. Sejam U e V vetores no espaço, com $V \neq 0$ (a) Determine o número α, tal que $U - \alpha V$ seja ortogonal a V. (b) Mostre que $(U + V) \times (U - V) = 2V \times U$

Resolução: