2a-lista-vetores - Lista de exercício sobre vetores

Geometria Analítica e Vetores (Universidade Estadual de Campinas)

$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios -MA-141

PRODUTO ESCALAR, VETORIAL E MISTO

1. (a) Determine, se existir, os valores de x para que o vetor $v = x\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{k}$ seja paralelo ao produto vetorial de $w = \overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ por $u = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$

   R: Temos que $w \times u = (2x - 2, 2, 1 - 2x)$. Como não existe λ tal que $v = (x, 0, 6) = \lambda(2x - 2, 2, 1 - 2x)$, o vetor v não pode ser paralelo a $w \times u$.

   (b) Determine x para que os pontos $A = (x, 1, 2)$, $B = (2, -2, -3)$, $C = (5, -1, 1)$ e $D = (3, -2, -2)$ sejam coplanares.

   R: Os pontos A,B, C e D são coplanares se, e somente se, o produto misto entre os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ é igual a zero. Temos $(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AB} = -x + 4$. Portanto os pontos A,B,C e D são coplanares se $x = 4$.

2. Encontre o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores u, v e w nos seguintes casos:

   (a) Dados os pontos $A = (1, 3, 4)$, $B = (3, 5, 3)$, $C = (2, 1, 6)$ e $D = (2, 2, 5)$ tome $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$.

   R:

$$u = (2, 2, -1), \quad v = (1, -2, 2), \quad w = (1, -1, 1).$$

   E o volume do paralelepípedo é 1.

   (b) $u = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}, \quad v = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \quad w = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$

   R: o volume do paralelepípedo é 20.

3. Sejam u e v vetores no espaço. Mostre que

   (a) $(u+v)\times(u-v)=2(v\times u)$

   R: Usando o Teorema 3.5, temos

$$\begin{aligned}(u+v)\times(u-v) &= u\times(u-v)+v\times(u-v)\\ &= u\times u+u\times(-v)+v\times u+v\times(-v)\\ &= -(u\times v)+v\times u\\ &= 2(v\times u).\end{aligned}$$

   (b) Se $u\times v$ é não nulo e w é um vetor qualquer no espaço então existem números reais a, b e c tais que $w=a(u\times v)+bu+cv$.

   R: Sejam $w=(w_1,w_2,w_3)$, $u=(u_1,u_2,u_3)$, $v=(v_1,v_2,v_3)$ e $u\times v=(u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)=(x,y,z)$. Queremos encontrar números reais a, b e c tais que

$$\begin{cases} ax+bu_1+cv_1 &= w_1\\ ay+bu_2+cv_2 &= w_2\\ az+bu_3+cv_3 &= w_3.\end{cases}$$

   O sistema linear acima tem três equações e três variáveis (a,b e c). Sendo assim, se A é a matriz dos coeficientes desse sistema, diremos que o sistema tem solução única se A for inversível. Calculando o determinante da matriz A, obtemos $detA=x^2+y^2+z^2\neq 0$ pois $u\times v$ é não nulo.

   (c) Se $u\times v$ é não nulo e u é ortogonal a v então $u\times(u\times v)$ é paralelo a v.

   R: Seja $w=u\times(u\times v)$. Pelo ítem anterior, existem números reais a, b e c tais que $w=a(u\times v)+bu+cv$.

   Como $w=u\times(u\times v)$, temos que $w.u=0$ e $w.(u\times v)=0$. Assim,

$$\begin{cases} w.u &= b(u.u) &= 0 &\Rightarrow & b=0,\\ w.(u\times v) &= a(u\times v).(u\times v) &= 0 &\Rightarrow & a=0.\end{cases}$$

   Logo $w=cv$.

4. Sejam $A=(2,1,2)$, $B=(1,0,0)$ e $C=(1+\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{6})$ três pontos no espaço.

Calcule os ângulos do triângulo ABC, e os comprimentos da mediana e da altura que saem do vértice A.

R: Mediana:

$$P = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, \frac{\sqrt{3}-2}{2}, \frac{-\sqrt{6}-4}{2}\right).$$

Assim,

$$\|\overrightarrow{AP}\|^2 = 9 - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{6}.$$

Altura:

Observe que pela lei dos cossenos, temos

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{PB}\| + \|\overrightarrow{PA}\|, \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{PC}\| + \|\overrightarrow{PA}\|.$$

Então, somando

$$\begin{aligned} 2\|\overrightarrow{PA}\| + \|\overrightarrow{BC}\| &= \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AC}\| \\ \Rightarrow \|\overrightarrow{PA}\| &= \frac{\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AC}\| - \|\overrightarrow{BC}\|}{2}. \end{aligned}$$

5. Sejam $A(-1,2,3)$, $M(-1,3,2)$ e $N(1,1,3)$. O triângulo ABC tem ângulos $A = 90°$ e $B = 30°$ e os vértices B e C pertencem à reta MN. Encontre os vértices B e C.

   R: Seja r a reta com vetor diretor $\overrightarrow{MN}$ e $M \in r$. Sendo assim, a equação da reta r é dada por:

$$\{(-1,3,2) + t\overrightarrow{MN} = (-1,3,2) + t(2,-2,1), t \in \mathbb{R}\}.$$

Encontraremos os pontos $P \in r$, tais que o vetor $\overrightarrow{PA}$ forma um ângulo de 30° e 60° com o vetor deiretor da reta. Como $P \in r$, $P = (-1+2t, 3-2t, 2+t)$. Fazendo alguns cálculos, obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA} &= (-2t, 2t-1, 1-t),\\
(\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{MN}) &= 3(1-3t),\\
\|\overrightarrow{PA}\|^2 &= 9t^2 - 6t + 2,\\
\|\overrightarrow{MN}\|^2 &= 9.
\end{aligned}$$

Temos

$$cos^2\theta = \frac{(\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{MN})^2}{\|\overrightarrow{PA}\|^2\|\overrightarrow{MN}\|^2}.$$

Substituindo na equação acima e considerando $cos^2\theta = \frac{3}{4}$, obtemos $t = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$ ou $t = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$. Ao substituirmos esses valores de t na equação

$$cos\theta = \frac{\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{MN}}{\|\overrightarrow{PA}\|\|\overrightarrow{MN}\|},$$

encontramos para $t = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$ que $cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e para $t = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$ que $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. No primeiro caso $\theta = 150°$ e no segundo $\theta = 30°$. Portanto o t procurado é $t = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$. Substituindo esse valor de t em P, obtemos $B = (\frac{-1-2\sqrt{3}}{3}, \frac{7+2\sqrt{3}}{3}, \frac{7-\sqrt{3}}{3})$.

Usando o mesmo argumento para $cos^2\theta = \frac{1}{4}$, obtemos para $\theta = 60°$ que $t = \frac{3-\sqrt{3}}{9}$ e consequentemente que $C = (\frac{-3-2\sqrt{3}}{9}, \frac{21+2\sqrt{3}}{9}, \frac{21-\sqrt{3}}{9})$.

6. Sejam $u = (-1, 1, 1)$ e $v = (2, 0, 1)$ dois vetores. Encontre os vetores w que são paralelos ao plano determinado por 0, u e v, perpendiculares a v e a $u \cdot w = 7$.

R: O vetor normal ao plano que queremos encontrar é

$$N = u \times v = (1, 3, -2).$$

Assim, a equação do nosso plano é

$$x + 3y - 2z = 0.$$

Como devemos ter $w \cdot v = 0$ e $w \cdot u = 7$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} w_1 + 3w_2 - 2w_3 &= 0 \\ 2w_1 + w_3 &= 0 \\ -w_1 + w_2 + w_3 &= 7 \end{cases}$$

Resolvendo ele, obtemos $w = \left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$.

7. O vetor w é ortogonal aos vetores $u = (2, 3, -1)$ e $v = (1, -2, 3)$ e $w.(2, -1, 1) = -6$. Encontre w.

   R: Se $w = (w_1, w_2, w_3)$, temos que

$$\begin{cases} w.u &= 2w_1 + 3w_2 - w_3 &= 0, \\ w.v &= w_1 - 2w_2 + 3w_3 &= 0, \\ w.(2,-1,1) &= 2w_1 - w_2 + w_3 &= -6. \end{cases}$$

   Resolvendo o sistema acima, obtemos $w = (-3, 3, 3)$.

8. Sejam $u = (1, -1, 3)$ e $v = (3, -5, 6)$. encontre $proj_{u+v}(2u - v)$.

   R:

$$u + v = (4, -6, 9), \quad 2u - v = (-1, 3, 0).$$

$$proj_{u+v}(2u - v) = \left(\frac{-11}{5}, \frac{-33}{5}, 0\right).$$

9. Responda, justificando, falso ou verdadeiro a cada uma das seguintes afirmações:

   (a) Se u, v e w são vetores no espaço, com v não nulo e $v \times u = v \times w$ então $u = w$.

   R: Falso. Tome, por exemplo, $u = v + w$, sendo v um vetor não nulo. Note que $v \times u = v \times w$ e $u \neq w$.

   (b) Se u, v e w são vetores no espaço então: $|u.(v \times w)| = |v.(u \times w)| = |w.(v \times u)| = |v.(w \times u)|$.

R: Verdadeiro. Usando a propriedade de determinante quando trocamos duas linhas de uma matriz, obtemos:

$u.(v \times w) = -v.(u \times w)$ e $w.(v \times u) = -v.(w \times u) = v.(u \times w)$.

(c) Se u, v e w são vetores no espaço então $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$.

R: Falso.

Tome, por exemplo, os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Assim, $e_2 \times (e_2 \times e_3) = -e_3$ e $(e_2 \times e_2) \times e_3 = 0$.

(d) Se u, v e w são vetores no espaço, u é não nulo e $u \times v = u \times w = \overline{0}$ então $v \times w = \overline{0}$.

R: Verdadeiro. Se os vetores v e w são nulos, não temos o que fazer. Suponha então que eles sejam não nulos. Uma vez que $u \times v = \overline{0}$ e $u \times w = \overline{0}$, temos que $u = \alpha v$ e $u = \beta w$. Logo $v = \frac{\beta}{\alpha} w$ e, portanto, $v \times w = \overline{0}$.