Aula 5: Capacitância

Curso de Física Geral III

F-328

2º semestre, 2016

Instituto de Física Gleb Wataghin

Pontos essenciais

- Dispositivos $\Rightarrow$ Capacitores

- Armazenamento de Energia $\Rightarrow$ Via Campo $\vec{E}$

Densidade de energia elétrica { $\vec{E}$}

Energia contida no campo elétrico

Vimos que a energia potencial de um sistema de cargas está relacionado com com o potencial elétrico associado a esse sistema. Esse potencial, por sua vez, está diretamente relacionado com o campo elétrico gerado pela distribuição de cargas. Nesta aula mostraremos que é possível conectar o potencial elétrico de uma distribuição com a carga elétrica que o gerou através da capacitância.

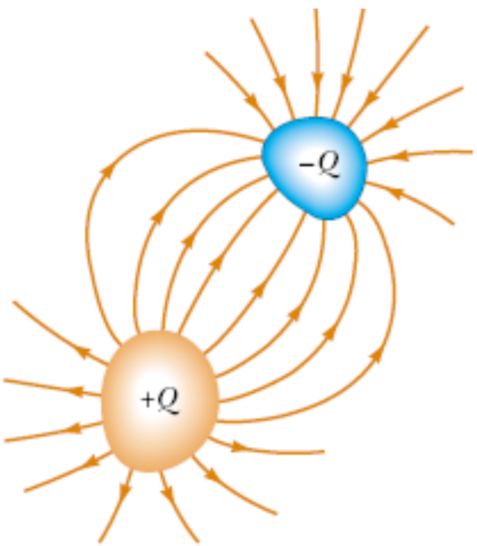
$$\boxed{\left.\begin{aligned} Q_{\text{livre}} &= \oint \varepsilon_o \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA \\ \Delta V &= -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_{\text{livre}} = CV}$$

Vale ressaltar que a capacitância, *C*, depende apenas da geometria da distribuição de cargas.

Capacitância

Capacitores

Dois condutores isolados, de formatos arbitrários, formam o que chamamos de um *capacitor* .



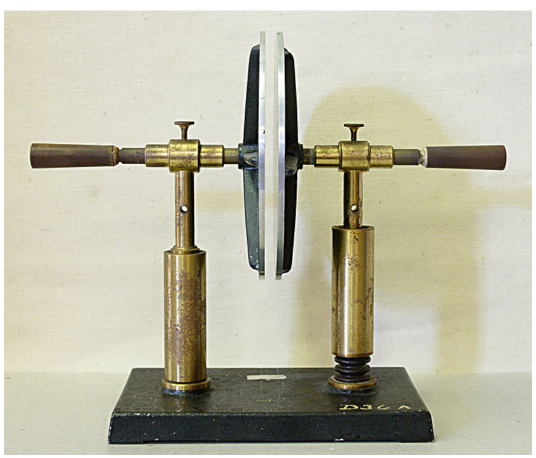
Dois condutores isolados e carregados com cargas +Q e –Q

A sua utilidade é *armazenar energia potencial* no *campo elétrico* por ele formado .

Garrafa de Leiden e bateria

Quatro capacitores carregados formando uma "Bateria". Esse sistema foi usado por **Daniel Gralath** para *armazenar energia potencial* no *campo elétrico* existente no interior dos capacitores - 1756.

Daniel Bernoulli, e Alessandro Volta, mediram a força entre placas de um capacitor, e Aepinus em 1758 foi quem que **supôs** que era uma lei de inverso-de-quadrado. (Em 1785 - Lei de Coulomb).

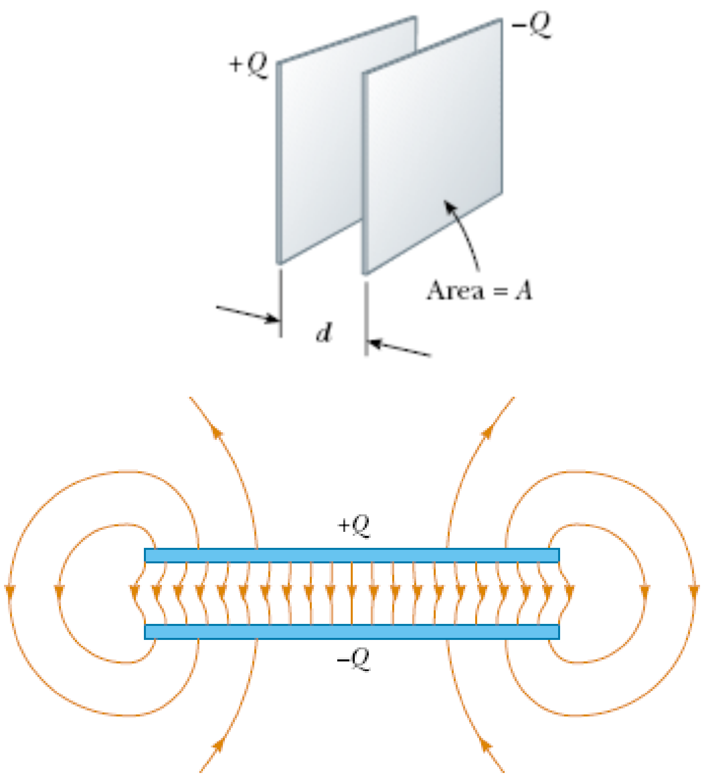


Réplica do sistema de Gralath exitente no museu de Ciência da Cidade de Leiden (Holanda).

Capacitância

Capacitores

O capacitor mais convencional é o de *placas paralelas* . Em geral, dá-se o nome de *placas do capacitor (ou armaduras)* aos condutores que o compõem, independentemente das suas formas.



Capacitor de placas paralelas

Outros capacitores

Capacitância

Capacitores

Como as placas do capacitor são condutoras, elas formam *superfícies equipotenciais*. A carga nas placas é proporcional à diferença de potencial entre elas, ou seja:

$$Q = CV \ ,$$

onde C é a chamada *capacitância* do capacitor. Então:

$$C = \frac{Q}{V}$$

A constante C depende apenas da *geometria* do capacitor.
No SI a capacitância é medida em *farads* (F).

$$1\,\text{farad} = 1\,\text{F} = 1\,\text{coulomb/volt} = 1\,\text{C/V}$$
$$1\ \mu\text{farad} = 10^{-6}\,\text{F}$$

Importante: $\varepsilon_0 = 8{,}85\,\text{pF/m}$

Cálculo da Capacitância

Esquema de cálculo

Em geral, os capacitores que usamos gozam de alguma simetria, o que nos permite calcular o campo elétrico gerado em seu interior através da lei de Gauss:

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

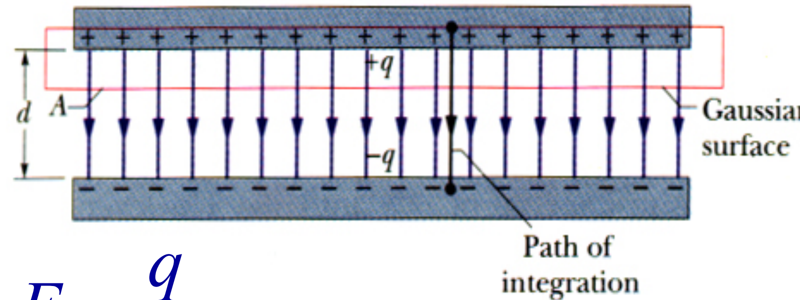
De posse do campo elétrico, podemos calcular a diferença de potencial entre as duas placas como:

$$V = V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

E, finalmente, usamos o resultado anterior em $Q = CV$, de onde podemos extrair C.

Capacitância: Exemplos

Capacitor de placas paralelas



$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

$$V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad \Longrightarrow \quad V = Ed$$

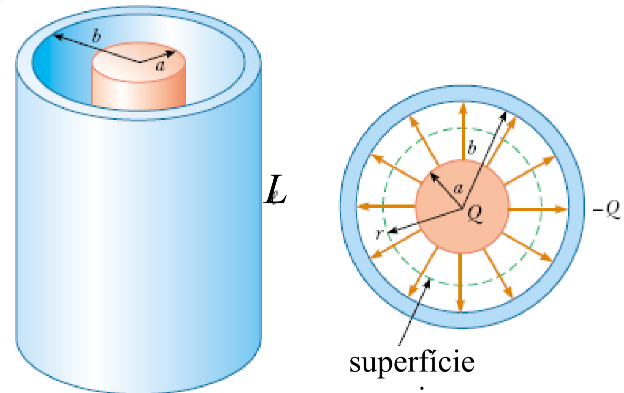
$$q = CV \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Nota-se que a capacitância é proporcional a um comprimento e só depende de *fatores geométricos* do capacitor.

Capacitância: Exemplos

Capacitor cilíndrico

$(L >> b)$



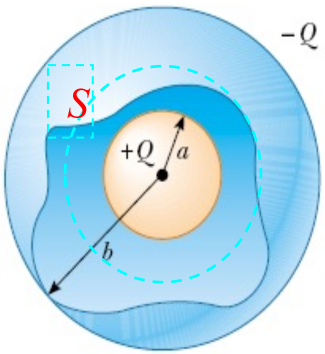
$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{Q}{2\pi\,\varepsilon_0 L r}$$

$$V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$Q = CV \quad \Longrightarrow \quad C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Capacitância: Exemplos

Capacitor esférico



$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

$$Q = CV \quad \Longrightarrow \quad C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

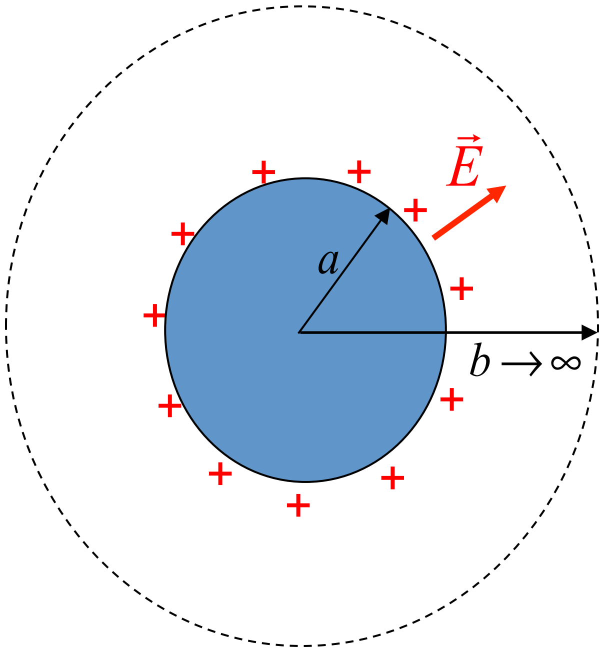
Capacitância: Exemplos

Esfera isolada $(R = a)$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1-\dfrac{a}{b}}$$

$$\Big\downarrow \quad b \to \infty$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0\, a$$



Exemplo numérico:

$R = 1\,m,\ \varepsilon_0 = 8{,}85\,\mathrm{pF/m}$ $\Rightarrow$ $C \approx 1{,}1 \times 10^{-10}\,\mathrm{F}$

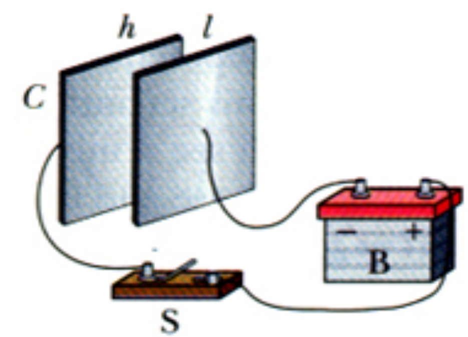
Capacitância

Carregando o capacitor

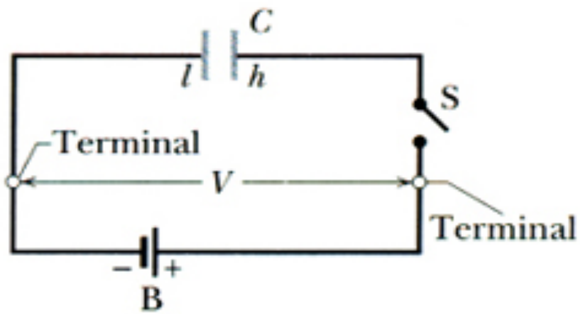
Podemos carregar um capacitor ligando as suas placas a uma bateria que estabelece uma diferença de potencial fixa, V, ao capacitor. Assim, em função de V

$$Q = CV,$$

cargas $+Q$ e $-Q$ irão se acumular nas placas do capacitor estabelecendo entre elas uma diferença de potencial $-V$ que se opõe à diferença de potencial da bateria e faz cessar o movimento de cargas no circuito.



(a)



(b)

Questão 01 - Placas Paralelas

Duas grandes placas metálicas paralelas, separadas por uma distância d, são carregadas ligando-as a uma bateria que fornece uma diferença de potencial V . A bateria é então desligada e as placas são separadas lentamente. Aumentando-se a distância entre as placas: (Escolha uma:)

○ a diferença de potencial entre as placas diminui;
✖ a diferença de potencial entre as placas aumenta;
○ a intensidade do campo elétrico entre as placas aumenta;
○ a carga das placas aumenta;
○ a carga das placas diminui.

Associação de capacitores

Associação de capacitores em paralelo

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V \quad \text{e} \quad q_3 = C_3 V$$

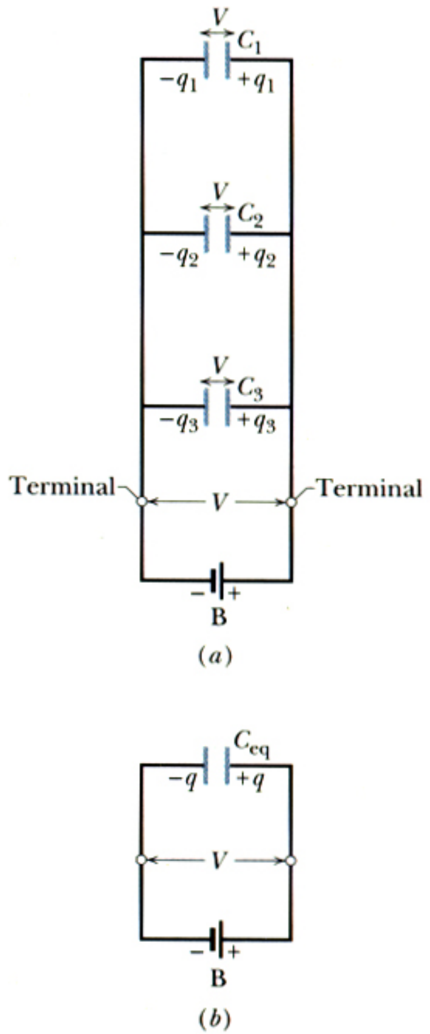
$$q = q_1 + q_2 + q_3 \;\Rightarrow\; q = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

Como $\quad q = C_{eq} V$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

ou

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$



Associação de capacitores

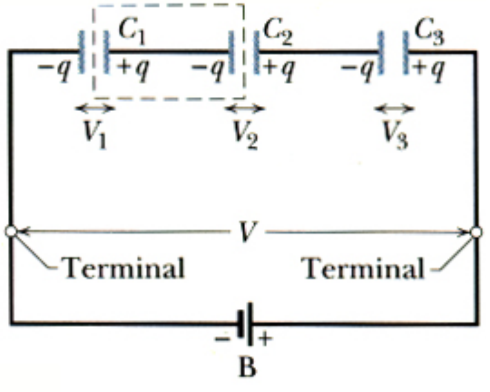
Associação de capacitores em série

$$q = C_1 V_1, \quad q = C_2 V_2 \quad \text{e} \quad q = C_3 V_3$$

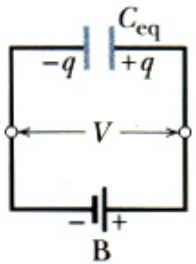
$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

Como $V = \dfrac{q}{C_{eq}}$:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$



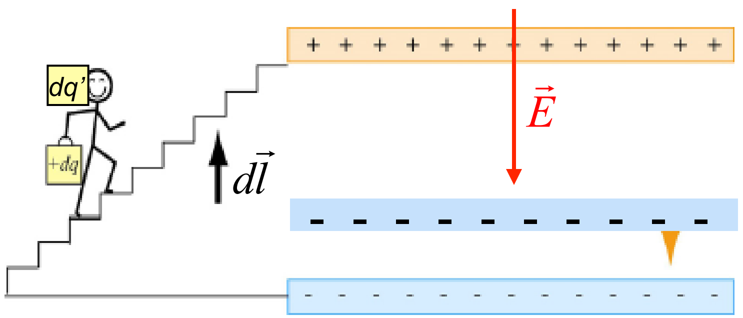
(a)



(b)

Energia armazenada no campo elétrico

Um agente externo deve realizar trabalho para carregar um capacitor. Este trabalho fica armazenado sob a forma de energia potencial na região do campo elétrico entre as placas.



Suponha que haja q' e $-q'$ armazenadas nas placas de um capacitor. O trabalho para se deslocar uma carga elementar dq' de uma placa para a outra é então:

$$dW = V'\,dq' = \frac{q'}{C}\,dq' \;\Longrightarrow\; W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}\,dq' = \frac{q^2}{2C}$$

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Energia no capacitor

Densidade de energia

$$u = \frac{\text{energia potencial}}{\text{volume}}$$

Em um capacitor de placas paralelas sabemos que:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad \text{e} \quad V = Ed$$

$$\Downarrow$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}E^2 d^2$$

$$\Downarrow$$

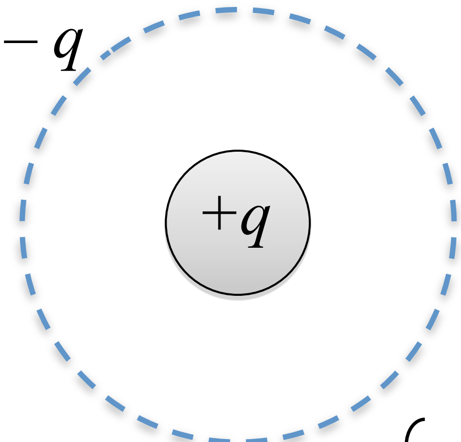
$$u \equiv \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

(Apesar de a demonstração ter sido feita para o capacitor de placas paralelas, esta fórmula é sempre válida!)

Exercício: energia de uma esfera

Considere um condutor esférico de raio R carregado com uma carga q. Qual a energia total neste condutor?

Duas interpretações:



a) Energia potencial de um capacitor esférico de raio R:

$$\begin{cases} U = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C} \\ C = 4\pi\varepsilon_0 R \end{cases} \Rightarrow U = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

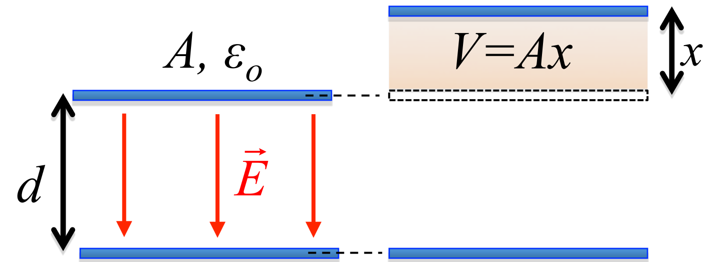
b) Integração da densidade de energia u:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases} \Rightarrow U = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r) 4\pi r^2\, dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

c) Qual o raio R_0 que contém metade da energia total?

$$U(R_0) = \frac{1}{2}U \Rightarrow \int_R^{R_0} (\ldots)\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\int_R^\infty (\ldots)\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{2}\frac{1}{R} \Rightarrow R_0 = 2R$$

Uma nova visão de U



a) Qual é o trabalho W necessário para aumentar em x a separação das placas?

- É a energia adicional que apareceu no volume Ax, que antes não existia. Então:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

$$W = U = u\,Ax = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Ax =$$

$$= \frac{1}{2} E\, Ax\, \varepsilon_0 \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2} QEx$$

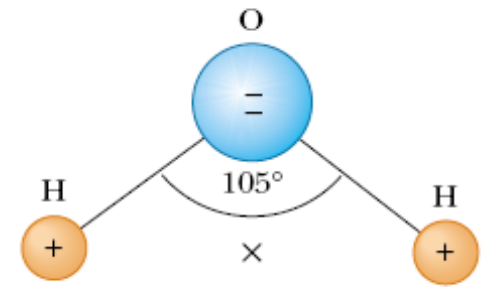
b) Qual é a força de atração entre as placas?

- Como $W = F\,x \Rightarrow F = \frac{1}{2} QE$

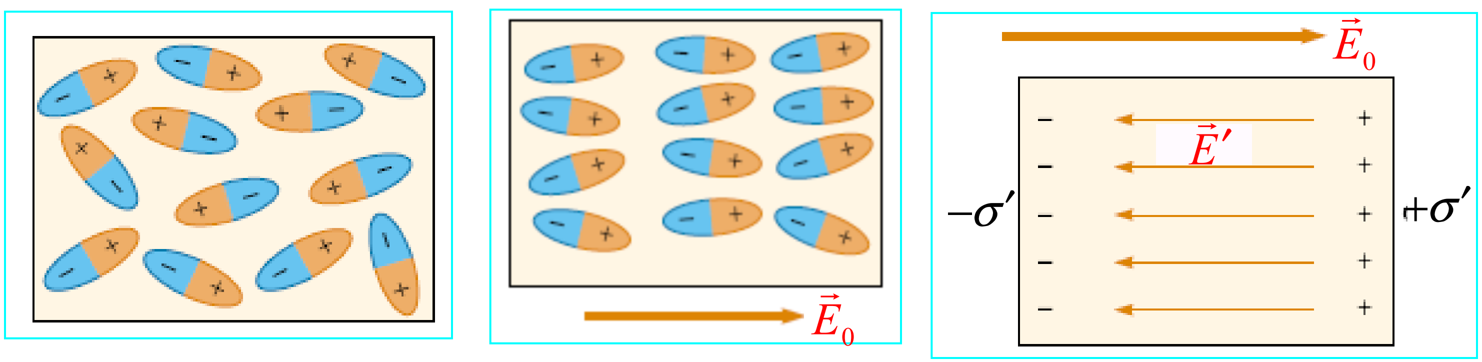
Dielétricos

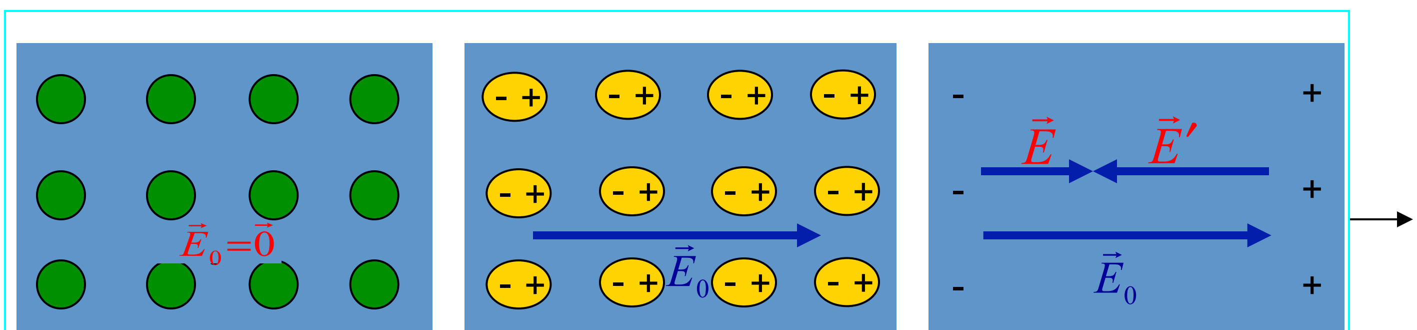
Visão atômica

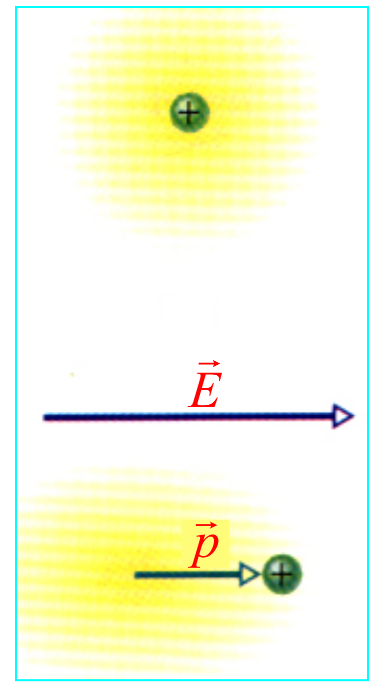
Dielétricos são materiais *isolantes* que podem ser *polares* ou *não-polares*.



um dielétrico polar: molécula de água







dielétrico não-polar

Dielétricos

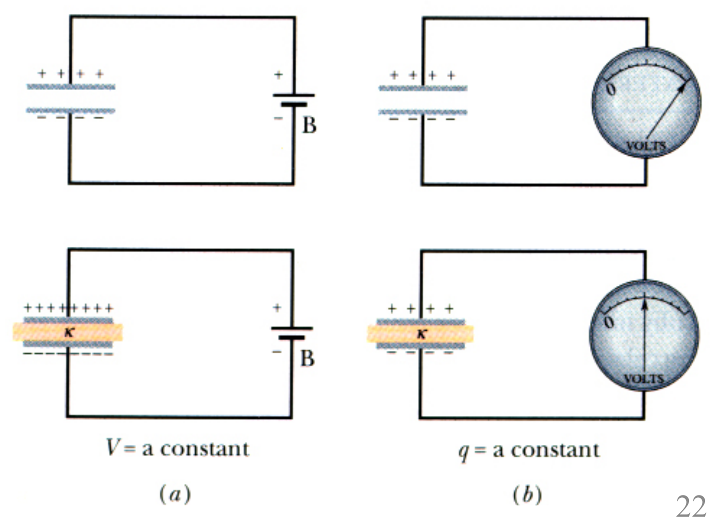
Capacitores com dielétricos

Ao colocarmos um material dielétrico entre as placas de um capacitor, se V é mantido constante, a carga das placas *aumenta*; se Q é mantida constante, V *diminui*. Como $Q = CV$, ambas as situações são compatíveis com o fato de que o dielétrico entre as placas do capacitor faz a sua capacitância aumentar.

Vimos: $C_0 = \varepsilon_0 \mathcal{L}$, onde $\mathcal{L}$ é uma função que depende apenas da geometria e tem dimensão de comprimento.

Então, na presença de um dielétrico preenchendo totalmente o capacitor: $C_d = \kappa\varepsilon_0\mathcal{L} = \kappa C_0$, onde $\kappa > 1$

No vácuo, $\kappa = 1$



Dielétricos

Material	Constante dielétrica	Resistência Dielétrica (kV/mm)
Ar (1 atm)	1,00054	3
Poliestireno	2,6	24
Papel	3,5	16
Pirex	4,7	14
Porcelana	6,5	5,7
Silício	12	
Etanol	25	
Água (20º)	80,4	
Água (25º)	78,5	

Dielétricos

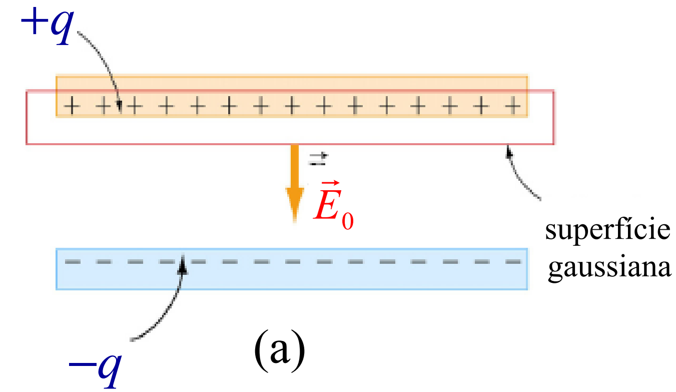
Um capacitor carregado tem um campo elétrico inicial E_0 e uma diferença de potencial inicial V_0 entre suas placas. Sem desligá-lo da bateria que o carregou, insere-se uma placa de dielétrico ($\kappa>1$) entre as placas, que produz um campo elétrico E_d e uma diferença de potencial V_d entre elas. O par de afirmações que melhor representa as relações entre os campos elétricos e as diferenças de potencial antes e depois da inserção do dielétrico é:

Escolha uma:

- ○ $E_d < E_0$; $V_d = V_0$;
- ○ $E_d < E_0$; $V_d < V_0$;
- ○ $E_d = E_0$; $Vd = V_0$;
- ○ $E_d > E_0$; $V_d > V_0$;
- ○ $E_d = E_0$; $V_d < V_0$.

Lei de Gauss com dielétricos

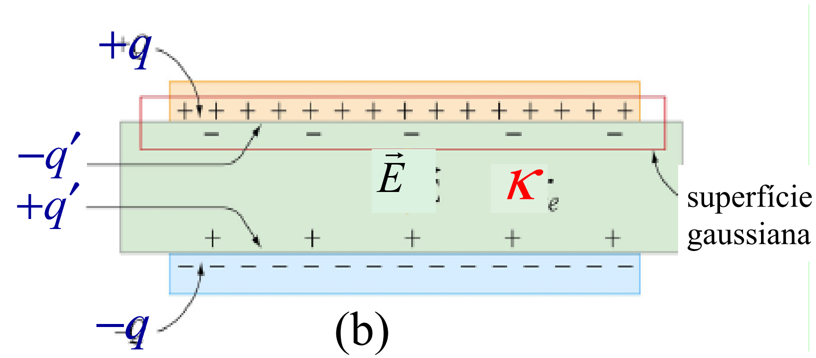
(a): $\oint_S \vec{E}_0(\vec{r})\cdot\hat{n}dA = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_0 = \dfrac{q}{\varepsilon_0 A}$



(b): $\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}dA = \dfrac{q-q'}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{q-q'}{\varepsilon_0 A}$

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa\varepsilon_0 A} = \frac{q-q'}{\varepsilon_0 A} \;\therefore\; q-q' = \frac{q}{\kappa}$$

Em (b): $\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}dA = \dfrac{q}{\kappa\varepsilon_0}$



Ou: $\oint_A \vec{D}(\vec{r})\cdot\hat{n}dA = q$,

onde $\vec{D}(\vec{r}) \equiv \kappa\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})$ é o vetor de deslocamento elétrico.

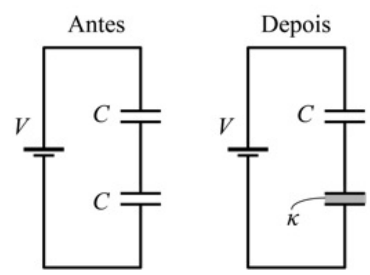
Então, na lei de Gauss expressa com o vetor $\vec{D}$, aparecem apenas as *cargas livres* (das placas).

Cargas livres e meio dielétrico

Dois capacitores idênticos são ligados em série, como mostrado na figura. Uma lâmina de dielétrico ($\kappa > 1$) é colocada entre as placas de um capacitor, e a bateria permanece ligada. Qual(is) das seguintes afirmações é(são) verdadeira(s) depois da inserção do dielétrico:

I) a carga fornecida pela bateria diminui.
II) a carga fornecida pela bateria não muda.
III) a capacitância do sistema aumenta.
IV) a capacitância do sistema diminui.
V) a energia potencial eletrostática do sistema aumenta.
(Escolha uma)

- ○ somente IV é correta.
- ○ somente III é correta.
- ○ somente I é correta.
- ✖ III e V são corretas;
- ○ somente II é correta.



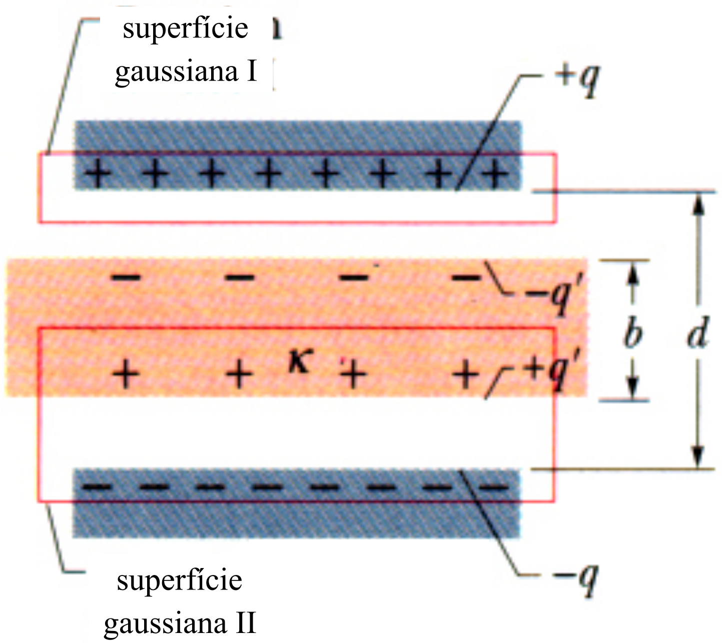
Dielétricos: Exemplo

Exemplo

Capacitor de placas paralelas com A=115 cm^2, d=1.24 cm, V_0=85.5 V, b=0.78 cm, $\kappa=2.61$

Calcule:

a) C_0 sem o dielétrico;
b) a carga livre nas placas;
c) o campo E_0 entre as placas e o dielétrico;
d) o campo E_d no dielétrico;
e) a ddp V entre as placas na presença do dielétrico;
f) A capacitância C com o dielétrico.



Lista de exercícios do capítulo 25

Os exercícios pares do Livro texto capítulo Capacitância:
Consultar:
https://www.ggte.unicamp.br/ea/index.php

Aulas gravadas:
http://lampiao.ic.unicamp.br/weblectures (Prof. Roversi)
ou
UnivespTV e Youtube (Prof. Luiz Marco Brescansin)