UNICAMP

GABARITO

MA211 – PROVA 3

Quinta-feira (tarde), 18/12/2014.

*Para correção, cada símbolo "$\checkmark$**x**" o item que o antecede vale **x** pontos.*

Resolução da Questão 1. Primeiramente, note que o campo vetorial **F** está definido em todo $\mathbb{R}^3$ e suas componentes possuem derivadas contínuas pois são polinômios. Além disso, temos que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yze^{xz} & e^{xz}+2y & xye^{xz}+e^z \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$= (xe^{xz} - xe^{xz})\mathbf{i} + (ye^{xz} + xyze^{xz} - ye^{xz} - xyze^{xz})\mathbf{j} + (ze^{xz} - ze^{xz})\mathbf{k} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Em vista desses fatos, podemos afirmar que **F** é um campo conservativo (Teorema 4, Capítulo 16.5). $\checkmark$**0,4**

Sendo **F** conservativo, existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Sobretudo, vale o teorema fundamental das integrais de linha:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(2)) - f(\mathbf{r}(0)), \tag{3}$$

ou seja, podemos calcular a integral desejada avaliando f apenas nos extremos da curva C.

Para determinar f, vamos assumir que $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ em que

$$P(x,y,z) = yze^{xz}, \quad Q(x,y,z) = e^{xz} + 2y \quad \text{e} \quad R(x,y,z) = xye^{xz} + e^z. \tag{4}$$

Assim, devemos ter

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y,z) \implies f(x,y,z) = \int P dx = \int yze^{xz} dx = ye^{xz} + g(y,z), \checkmark \mathbf{0,4} \tag{5}$$

em que g denota uma função apenas de y e z. Devemos ter também

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y,z) \implies e^{xz} + \frac{\partial g}{\partial y} = e^{xz} + 2y \implies \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \implies g(y,z) = y^2 + h(z). \tag{6}$$

em que h é uma função somente de z. Combinando as equações acima, concluímos

$$f(x,y,z) = ye^{xz} + y^2 + h(z). \checkmark \mathbf{0,4} \tag{7}$$

Finalmente, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = R(x,y,z) \implies xye^{xz} + h' = xye^{xz} + e^z \implies h' = e^z \implies h(z) = e^z + c, \tag{8}$$

em que c é uma constante. Finalmente, temos

$$f(x,y,z) = ye^{xz} + y^2 + e^z + c. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{9}$$

Observação: Pode-se afirmar que **F** é conservativo uma vez encontrada a função potencial f.

Finalmente, pelo teorema fundamental das integrais de linha, concluímos que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(2)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(5,3,0) - f(1,-1,0) = (3+9+1+c) - (-1+1+1+c) = 12. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{10}$$

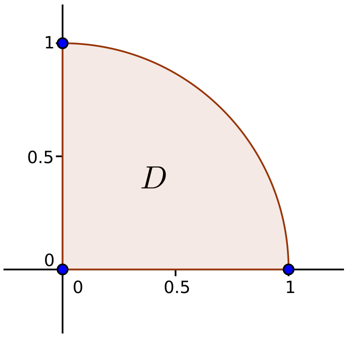
Resolução da Questão 2. Primeiramente, escrevemos $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$, em que

$$P(x,y) = x^2(x-y) \quad \text{e} \quad Q(x,y) = xy^2. \tag{11}$$

Pelo teorema de Green, o trabalho realizado pelo campo de força satisfaz:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \checkmark \mathbf{0,4}, \tag{12}$$

em que D é a região mostrada na figura abaixo.



Agora,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2. \tag{13}$$

Logo,

$$W = \iint_D (x^2 + y^2) dA. \checkmark \mathbf{0,6} \tag{14}$$

Usando coordenadas polares, encontramos

$$W = \underbrace{\int_0^{\pi/2}}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{r^2(r)}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \, dr d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2} \frac{1^4}{4} = \frac{\pi}{8}. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{15}$$

Resolução da Questão 3. A área da superfície dada por $z = f(x, y)$ é

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dA. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{16}$$

Nesta questão, temos $f(x, y) = y^2 - x^2$. Logo,

$$f_x = -2x \quad \text{e} \quad f_y = 2y. \tag{17}$$

Portanto,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA, \checkmark \mathbf{0,4} \tag{18}$$

em que D, nesta questão, é a região dada pelas desigualdades $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$. Usando coordenadas polares, temos

$$A(S) = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{\int_1^{\sqrt{2}}}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{\sqrt{1 + 4r^2}\, r}_{\checkmark \mathbf{0,2}}\, dr d\theta = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, r dr \checkmark \mathbf{0,2}. \tag{19}$$

Tomando $u = 1 + 4r^2$, $du = 8rdr$, encontramos

$$A(S) = 2\pi \int_5^9 u^{1/2} \frac{du}{8} = \frac{\pi}{6} u^{3/2}\Big|_5^9 = \frac{\pi}{6}(9\sqrt{9} - 5\sqrt{5}) = \frac{\pi}{6}(27 - 5\sqrt{5}). \checkmark \mathbf{0,4} \tag{20}$$

Resolução da Questão 4. Pelo teorema de Stokes e usando a definição de integral de superfície, teremos

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \checkmark \mathbf{0,3} = \iint_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) dA \checkmark \mathbf{0,3}, \tag{21}$$

em que $\mathbf{r}_x$ e $\mathbf{r}_y$ são os vetores tangentes a superfície descrita por $\mathbf{r}(x, y)$, com $(x, y) \in D$. Agora, pela definição do rotacional, temos que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (1 + 2y)\mathbf{k}. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{22}$$

Além disso, a superfície é dada pela equação $z = 5 - x - y$ acima do círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Assim, a superfície é descrita pela equação

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (5 - x - y)\mathbf{k}, \quad (x, y) \in D, \tag{23}$$

em que D é o círculo de raio 1. Note que

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} - \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} - \mathbf{k}. \tag{24}$$

Portanto,

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 1\mathbf{k}, \tag{25}$$

que é um vetor cuja componente $\mathbf{k}$ é positiva. Como o vetor normal a superfície S aponta para cima, a curva C é percorrida no sentido anti-horário. Temos também que

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = 1 + 2y. \tag{26}$$

Assim, usando coordenadas polares, obtemos

$$I = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{(1 + 2r \operatorname{sen} \theta) r dy dx}_{\checkmark \mathbf{0,2}} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3} \operatorname{sen} \theta \right) \Big|_0^1 d\theta \tag{27}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \operatorname{sen} \theta \right) d\theta = \left(\frac{\theta}{2} - \frac{2}{3} \cos \theta \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi. \checkmark \mathbf{0,4} \tag{28}$$

Resolução da Questão 5. Pelo teorema do divergente, temos que

$$I = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV, \checkmark \mathbf{0,4} \tag{29}$$

em que E é o sólido acima do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do plano $z = 4$, e

$$\text{div } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{k} \right) \cdot \big((\cos z + xy^2)\mathbf{i} + (xe^{-z})\mathbf{j} + (\text{sen}\, y + x^2 z)\mathbf{k} \big) = y^2 + x^2 . \checkmark \mathbf{0,4} \tag{30}$$

Logo,

$$I = \iint_E (x^2 + y^2) dV. \tag{31}$$

Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r \,\text{sen}\, \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi, \\ r^2 \le z \le 4, \end{cases} \tag{32}$$

obtemos

$$I = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\int_0^{2}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{\int_{r^2}^{4}}_{\checkmark 0,2} \underbrace{r^2}_{\checkmark 0,2} \underbrace{(r)}_{\checkmark 0,2} \, dz dr d\theta \tag{33}$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^2 \int_{r^2}^4 r^3 dz dr \right) = 2\pi \int_0^2 r^3 z \Big|_4^{r^2} dr = 2\pi \int_0^2 r^3 (4 - r^2) dr = 2\pi \int_0^2 (4r^3 - r^5) dr \tag{34}$$

$$= 2\pi \left(4\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^2 = 2\pi \left(2^4 - \frac{2^6}{6} \right) = 2\pi \left(16 - \frac{64}{6} \right) = \frac{\pi}{3}(96 - 64) = \frac{32}{3}\pi . \checkmark \mathbf{0,2} \tag{35}$$