TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
27 januari 2020 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER | | | | | | | |
NAAM

Antwoordformulier

CTB2210 Constructiemechanica 3

Maak alle opgaven op dit antwoordformulier. Lever dit formulier in.
Kladpapier wordt niet ingenomen.
Het nietje mag niet verwijderd worden.

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.
Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.
Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.
Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier.

Aantal opgaven: 5.
De opgaven hebben verschillende weging. Een schatting van het gewicht is in tijd weergegeven.

Relevante **formulebladen** zijn bijgevoegd.

Toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:
Rekenmachine, grafische rekenmachine, tekenmaterialen waaronder passer.

Niet toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:
Boeken, dictaten, aantekeningen, andere formulebladen, woordenboeken, computer, mobiele telefoon, smart phone of apparaten met vergelijkbare functies.

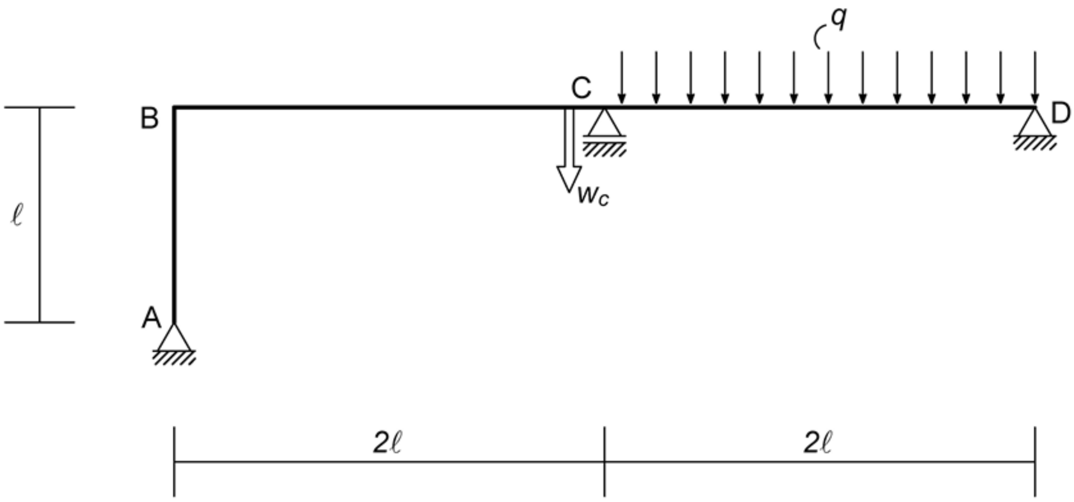
Mobiel UIT en opbergen in tas.
Elk vermoeden van fraude wordt gemeld bij de examencommissie.

STUDIENUMMER

NAAM

Opgave 1: Statisch onbepaalde constructie (ongeveer 45 minuten)

Gegeven: onderstaande constructie. Er zijn twee belastinggevallen: een gelijkmatig verdeelde belasting q op veld CD en een zetting w_C van steunpunt C, zoals schematisch aangegeven. De buigstijfheid van alle delen is EI. De lengte van BC en CD is twee maal zo groot als de lengte van AB. Normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd. Houd ten behoeve van een numerieke uitwerking aan: l = 5 m, q = 44 kN/m, EI = 163,7 MNm^2 en w_C = 20 mm. Een blad met vergeet-me-nietjes is toegevoegd aan dit antwoordformulier.



Gevraagd:

a. Bereken de momenten in B en C ten gevolge van alleen de q-last. U mag eerst symbolisch te werk gaan en aan het eind de numerieke waarden invullen, of direct numeriek te werk gaan.

STUDIENUMMER

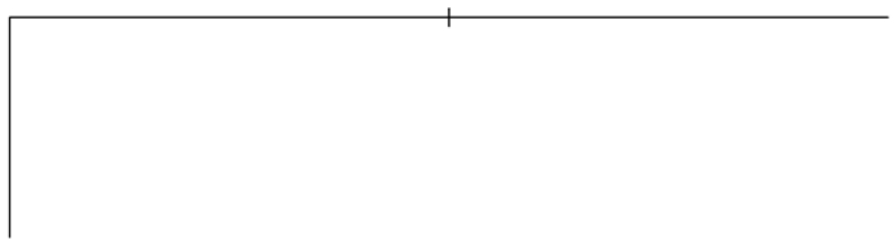
NAAM

…vervolg…

STUDIENUMMER

NAAM

b. Schets onderstaand de momentenlijn ten gevolge van de *q*-last. Zet kenmerkende waarden in A, B, C, D en in het midden van CD erbij, en buigtekens.



c. Bereken de momenten in B en C ten gevolge van alleen de zetting w_C. U mag eerst symbolisch te werk gaan en aan het eind de numerieke waarden invullen, of direct numeriek te werk gaan.

STUDIENUMMER

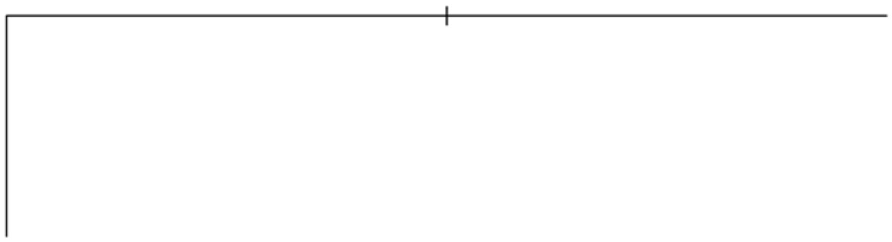
NAAM

…*vervolg*…

STUDIENUMMER

NAAM

d. Schets onderstaand de momentenlijn ten gevolge van de zetting w_C. Zet kenmerkende waarden in A,B, C en D erbij, en buigtekens.



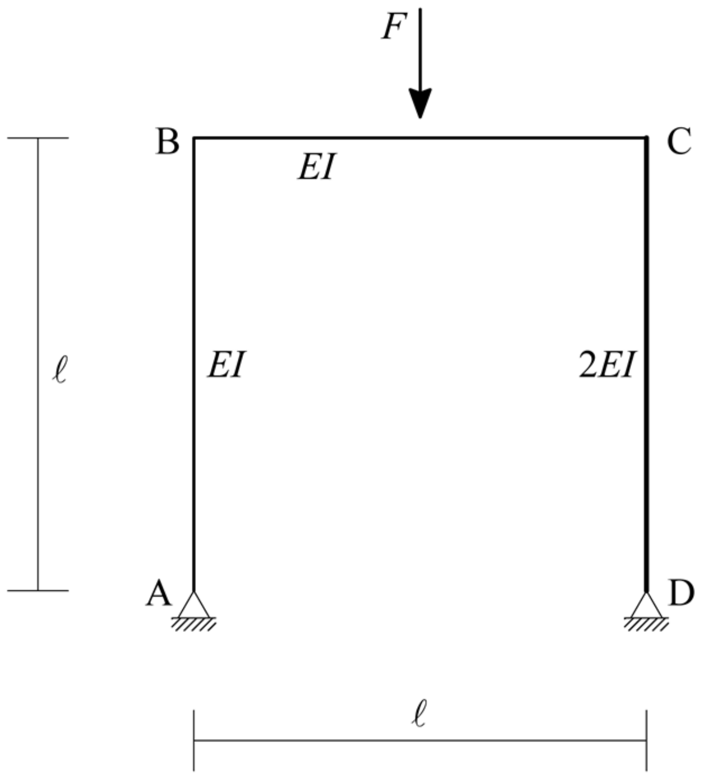
e. Zal het steunpuntsmoment boven C (in absolute zin) groter of kleiner worden als de steunpuntszetting en de *q*-last samen optreden, ten opzichte van de situatie met alleen de *q*-last? Opmerking: u kunt deze vraag ook intuïtief beantwoorden mocht u bij de deelvragen a t/m d het spoor bijster zijn geraakt. Geef een toelichting in maximaal vijf regels tekst met een schetsje.

STUDIENUMMER

NAAM

Opgave 2: Statisch onbepaalde constructie (ongeveer 30 minuten)

Gegeven: Onderstaand portaal waarvan poot CD een tweemaal zo hoge buigstijfheid heeft als poot AB en ligger BC. De puntlast *F* grijpt aan in het midden van BC. De opleggingen, puntlast en lengtematen zijn aangegeven. Normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd.



Gevraagd:

a. Is dit een probleem met verplaatsbare of niet-verplaatsbare knopen? Schets onderstaand het model dat u hanteert om de krachtsverdeling in deze constructie te bepalen. Laat duidelijk zien welke onbekenden u kiest.

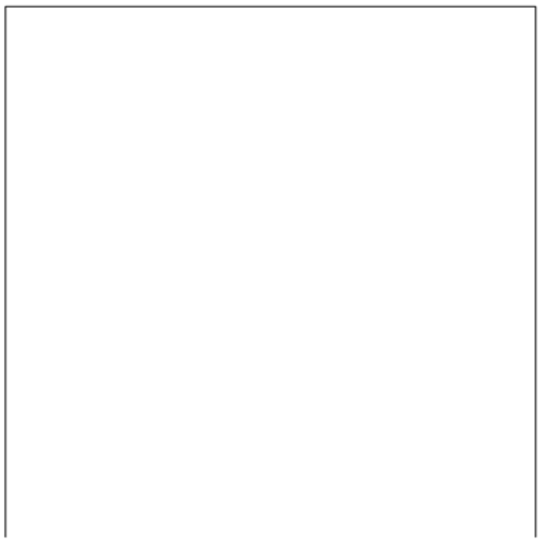
Opmerking: Deze constructie werd bij de opzet van het oude vak opgelost met de 'hybride methode', welke gebruikt maak van virtuele arbeid. Deze methode maakt geen deel meer uit van het vak, en is een methode om constructies met één verplaatsbare knoop op te lossen. Deze som is dus geen onderdeel meer van het vak.

STUDIENUMMER

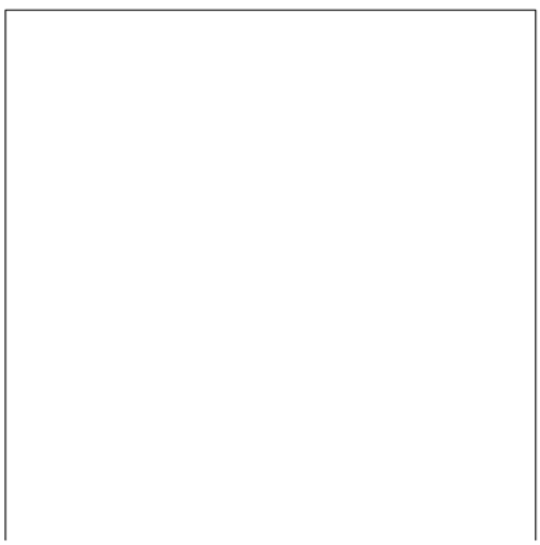
NAAM

b. Stel de noodzakelijke vergelijkingen op die nodig zijn om het probleem op te lossen. Licht met schetsjes toe hoe u aan de vergelijkingen komt. NB: u hoeft de vergelijkingen niet op te lossen. Maak gebruik van de vergeet-me-nietjes toegevoegd aan dit antwoordformulier.

c. Geef onderstaand een principe-schets van de momentenlijn, op basis van inzicht. Er hoeven geen waarden bij (u hoeft de oplossing immers niet kwantitatief te bepalen), wel buigtekens.



d. Geef onderstaand een principe-schets van de vervormingslijn, op basis van inzicht. Er hoeven geen waarden bij. Het gaat om een kwalitatieve impressie van de verplaatsingen en krommingen.



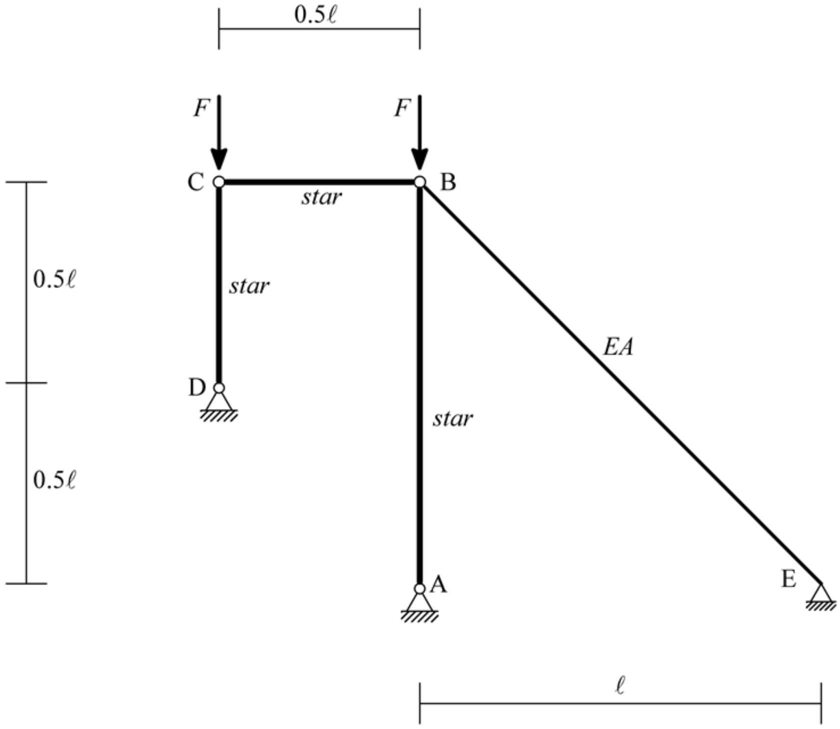
TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
27 januari 2020 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER

NAAM

Opgave 3: Stabiliteit (ongeveer 25 minuten)

Gegeven: de starre kolom AB is via een starre koppelstaaf BC verbonden met een starre aanpendelende kolom CD en is geschoord via een schuin geplaatste staaf BE met rekstijfheid *EA*. De schoor BE kan zowel trek als druk opnemen. De aanpendelende kolom heeft de halve lengte van de geschoorde kolom. Op beide kolommen staat een verticale kracht *F*. De lengtematen zijn aangegeven.



Gevraagd:

a. Toon aan dat dit probleem geschematiseerd kan worden door gebruik te maken van een horizontale veer waarvan de veerstijfheid $EA/(2l\sqrt{2})$ is. Neem daarbij aan dat, als u een verplaatsing aanbrengt, deze verplaatsing dermate klein is ten opzichte van de lengte-afmetingen dat de richtingsverandering van BE mag worden verwaarloosd.

STUDIENUMMER

NAAM

b. Zet de constructie in een verplaatste stand en beschouw eerst het evenwicht van de aanpendelende staaf CD in deze verplaatste stand. Stel een relevante vergelijking op.

STUDIENUMMER

NAAM

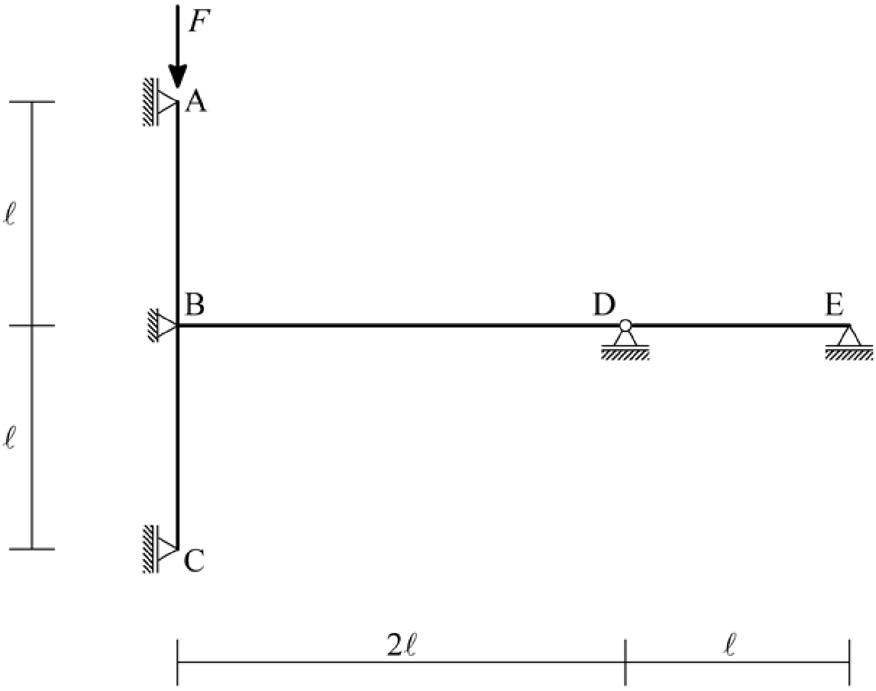
c. Beschouw vervolgens het evenwicht van staaf AB in deze verplaatste stand. Bepaal daarmee en met de gevonden vergelijking uit deelvraag b de kracht F waarbij knik optreedt. Werk symbolisch, druk vergelijkingen uit in F, l en EA. Laat duidelijk alle stappen zien die u neemt om tot deze knikkracht te komen. (Het is niet de bedoeling dat u gebruik maakt van een geprefabriceerde uit-het-hoofd geleerde formule).

STUDIENUMMER

NAAM

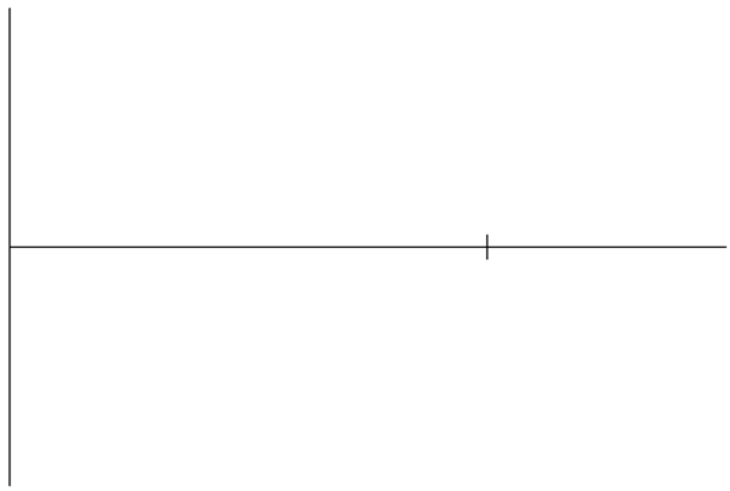
Opgave 4: Stabiliteit (ongeveer 40 minuten)

Gegeven: onderstaande constructie, belast door een puntlast F in A. Opleggingen zijn aangegeven. Boven steunpunt D bevindt zich een scharnier in ligger BDE. Lengtematen zijn aangegeven. De buigstijfheid van alle delen is EI. Normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd. Een blad met relevante formules is toegevoegd aan dit antwoordformulier.



Gevraagd:

a) Schets onderstaand de knikvorm van deze constructie.



b) Geef een schets van het model waarmee de kniklast van deze constructie kan worden bepaald.

c) Bepaal de kniklast F_k van deze constructie, uitgedrukt in EI en l.

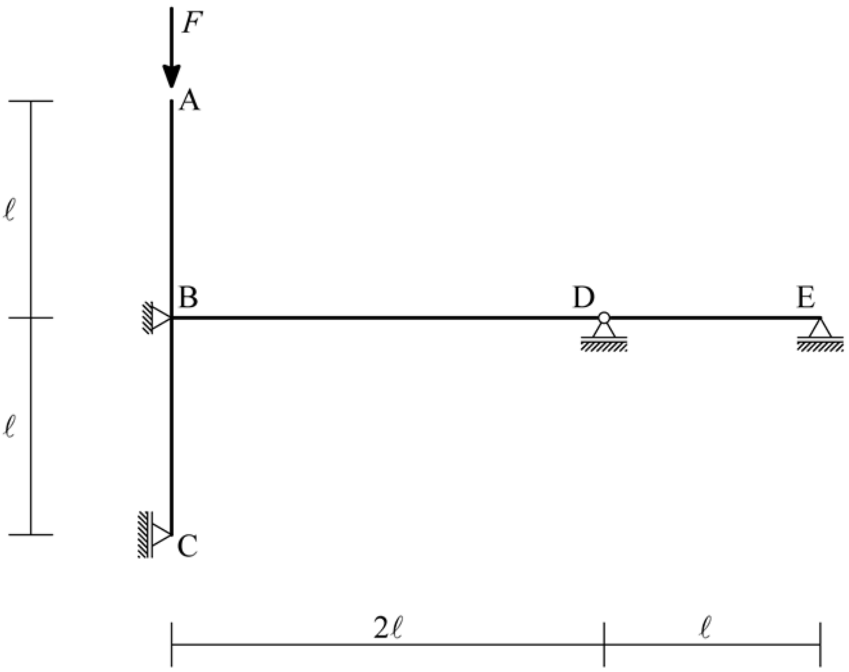
d) Bepaal de kniklengte l_k van deze constructie, uitgedrukt in l.

e) Controleer of de kniklengte binnen twee grenzen ligt die u op basis van inzicht in twee extremen kunt afschatten.

STUDIENUMMER

NAAM

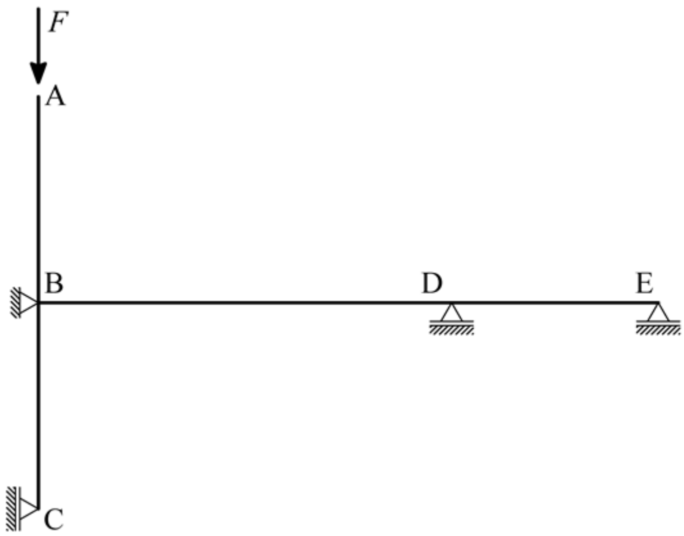
f) Stel: de roloplegging bij A wordt verwijderd, als onderstaand aangegeven. Schets opnieuw de knikvorm. Zal de kniklast groter of kleiner worden dan bij deelvraag c? Bepaal opnieuw de kniklast en de kniklengte. Geef eerst een kwalitatief antwoord en dan kwantitatief.



STUDIENUMMER

NAAM

g) Stel: de roloplegging bij A is weg én het scharnier boven steunpunt D wordt weggehaald zodat BDE een doorgaande ligger is, zie onderstaande figuur. Zal de kniklast groter of kleiner worden dan bij deelvraag f? Motiveer uw antwoord met maximaal 10 regels tekst en schetsjes. U hoeft niet te rekenen.

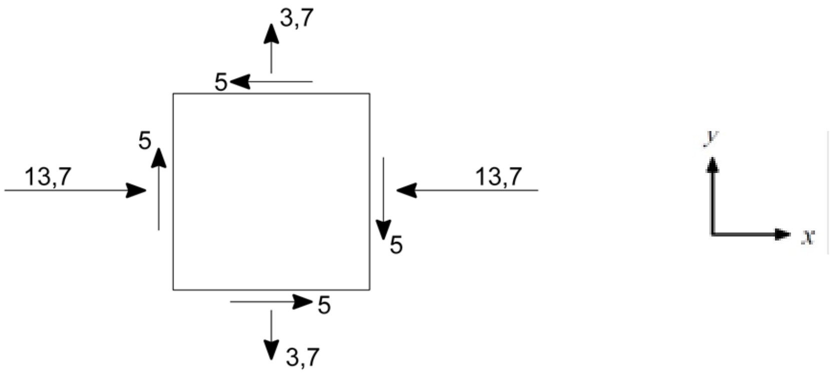


STUDIENUMMER

NAAM

Opgave 5: Spanningsleer (ongeveer 40 minuten)

Gegeven: een homogene vlakke spanningstoestand volgens onderstaande figuur, met spanningen in N/mm^2.



Gevraagd:

a) Teken de cirkel van Mohr voor de spanningen en geef duidelijk het richtingencentrum en de hoofdrichtingen aan. Gebruik het ruitjespapier op de volgende bladzijde. Draai dat blad linksom.

Opmerking: De cirkel van Mohr is geen onderdeel meer van het vak. Maak daarom gebruik van de formules voor spanningstransformaties om deze opgave op te lossen.

STUDIENUMMER

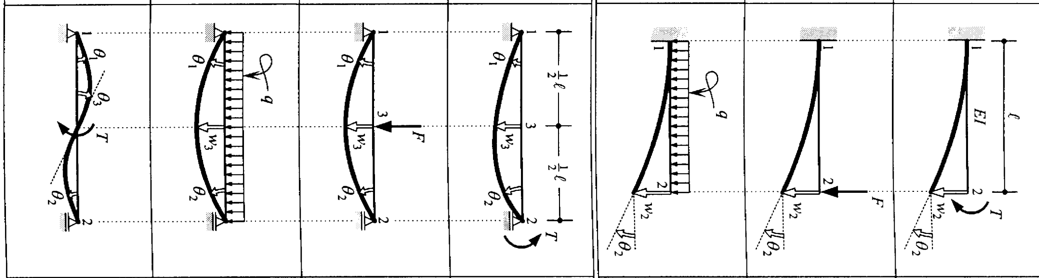
NAAM

b) Bepaal uit de cirkel van Mohr de hoofdspanningen en geef deze onderstaand weer in een schets van een vierkant elementje met de juiste oriëntatie (elementje tekenen in de richting van de hoofdspanningen; de hoofdspanningen aangeven op alle vier de zijden; geef de hoek tussen het blokje en de horizontaal (x-as) aan in graden).

c) Stel: het isotrope materiaal heeft een treksterkte van 6 N/mm^2 en een druksterkte 16 N/mm^2. Stel: de belasting die de spanningstoestand genereert, wordt proportioneel opgevoerd. Zal het materiaal bezwijken op trek of op druk? Motiveer uw antwoord.

d) Bepaal uit de cirkel van Mohr de spanningen op vlakjes waarvoor geldt dat de schuifspanning maximaal is. Geef deze spanningen weer in een schets van een vierkant elementje met de juiste oriëntatie (elementje tekenen in de juiste richting; de normaal- en (maximale) schuifspanningen aangeven op alle vier de zijden; geef de hoek tussen het blokje en de horizontaal (x-as) aan in graden).

FORMULEBLAD
(scheur dit deel los van het werk)



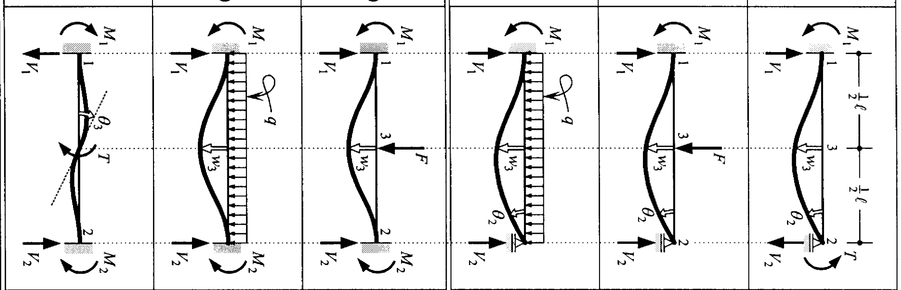
(1)	$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}$; $w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)	$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}$; $w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)	$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}$; $w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)	$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_2 = \frac{1}{3}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell^2}{EI}$
(5)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$
(6)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$
(a)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_3 = \frac{1}{12}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald) (4), (5), (6), (a)

vergeet-mij-nietjes (1), (2), (3)

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd) (10), (11), (b)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd) (7), (8), (9)



(7)	$\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{32}\frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$
(8)	$\theta_2 = \frac{1}{32}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{7}{768}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16}F\ell$; $V_1 = \frac{11}{16}F$; $V_2 = \frac{5}{16}F$
(9)	$\theta_2 = \frac{1}{48}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{192}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8}q\ell^2$; $V_1 = \frac{5}{8}q\ell$; $V_2 = \frac{3}{8}q\ell$
(10)	$w_3 = \frac{1}{192}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8}F\ell$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}F$
(11)	$w_3 = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12}q\ell^2$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}q\ell$
(b)	$\theta_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$

Enkele formules voor prismatische liggers met buigstijfheid EI.
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

Spanningen en rekken :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \\ \sigma_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases} \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) \quad \text{voor } i, j = x, y$$

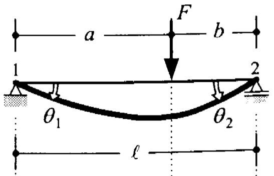
$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

von Mises : $\frac{1}{6}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \le \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

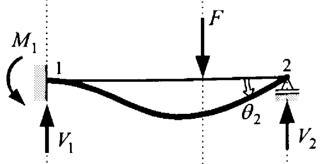
(c)



$$\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI}\left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI}\left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

(d)



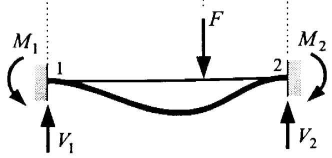
$$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell\left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F\left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F\left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI}\left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

(e)



$$M_1 = \frac{Fab^2}{\ell^2} = F\ell\left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

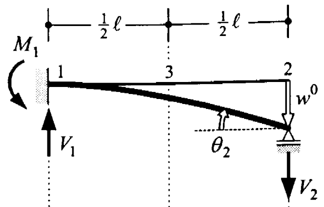
$$V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F\left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell\left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell\left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

drie bij-de handjes

(f)

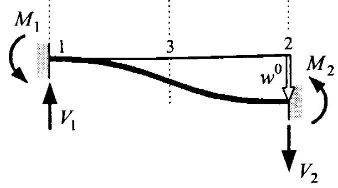


$$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2}w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3}w^0$$

$$\theta_2 = \frac{3}{2}\frac{w^0}{\ell}$$

$$\theta_3 = \frac{9}{8}\frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16}w^0$$

(g)



$$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2}w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3}w^0$$

$$\theta_3 = \frac{3}{2}\frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2}w^0$$

zettingen

Tensortransformatie formules in *x*-*y* assenstelsel:

$$k_{\overline{xx}} = \tfrac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) + \tfrac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\cos 2\alpha + k_{xy}\sin 2\alpha$$

$$k_{\overline{yy}} = \tfrac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) - \tfrac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\cos 2\alpha - k_{xy}\sin 2\alpha$$

$$k_{\overline{xy}} = -\tfrac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\sin 2\alpha + k_{xy}\cos 2\alpha$$

Hoofdwaarden en hoofdrichtingen:

$$\tan 2\alpha = \frac{2k_{xy}}{(k_{xx} - k_{yy})}; \quad k_1, k_2 = \tfrac{1}{2}\left(k_{xx} + k_{yy}\right) \pm \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(k_{xx} - k_{yy}\right)\right]^2 + k_{xy}^2}$$

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{\frac{r}{l}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_k = l\sqrt{4+\frac{10}{\rho}}$$

$$\text{met:}\ \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w''+\alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x$$

Of :

$$w''''+\alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

en $S_z(x) = M' - Fw'$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3\alpha \sin\alpha x - C_4\alpha\cos\alpha x$$

$$M(x) = EI \times \left[C_3\alpha^2 \cos\alpha x + C_4\alpha^2 \sin\alpha x\right]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

η-formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(\eta_1+\eta_2)^2}{\eta_1\eta_2(\eta_1+\eta_2-4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met :} \quad \eta_1 = 4+\frac{10}{\rho_1};\ \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \qquad \eta_2 = 4+\frac{10}{\rho_2};\ \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

ρ-formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(5+2\rho_1)(5+2\rho_2)}{(5+\rho_1)(5+\rho_2)} . \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met :} \quad \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

Kromming t.g.v temperatuursgradient:

“Vrije” kromming t.g.v lineair temperatuurs-verloop over de hoogte *h* van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha\,\Delta T}{h}$$