TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
29 januari 2025 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER

NAAM Jan Rots

CONCEPT UITWERKINGEN

Antwoordformulier

CTB2210 Constructiemechanica 3

Maak alle opgaven op dit antwoordformulier. Lever dit formulier in.
Kladpapier wordt niet ingenomen.
Het nietje mag niet verwijderd worden.

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.
Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.
Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.
Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier. Tenzij anders vermeld, wordt het eigen gewicht van een constructie buiten beschouwing gelaten.

Aantal opgaven: 6.
De opgaven hebben verschillende weging. Een schatting van het gewicht is in tijd weergegeven.

Relevante **formulebladen** zijn bijgevoegd.

Toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:
Conventionele zakrekenmachientje, eenvoudige grafische rekenmachine (geen CAS of soortgelijke systemen, geen wifi en bluetooth), tekenmaterialen waaronder passer.

Niet toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:
Boeken, dictaten, aantekeningen, andere formulebladen, oude tentamens, COZ- of andere uitwerkingen, woordenboeken, computer, mobiele telefoon, smart watch, smart phone of apparaten met vergelijkbare functies.

Mobiel UIT en opbergen in tas.
Elk vermoeden van fraude wordt gemeld bij de examencommissie.

TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
29 januari 2025 van 13.30-16.30 uur

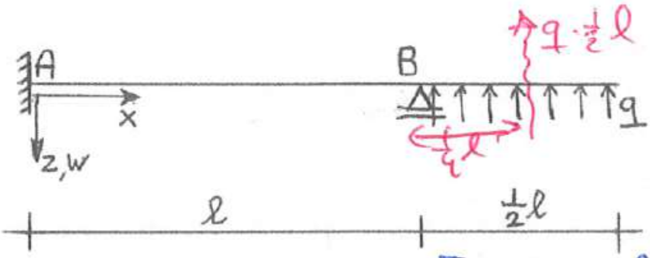
STUDIENUMMER
NAAM

Opgave 1 (gemengde theorie, ongeveer 20 minuten)

a. Gegeven: onderstaande ligger belast door een gelijkmatig verdeelde belasting op het overstek. Gegeven: uitgaande van een *x*-as langs de staaf-as, en *z*, *w* naar beneden zoals aangegeven, luidt de vier orde differentiaalvergelijking voor buiging:

$$EI\,w'''' = q$$

Gevraagd: beschouw alleen het gedeelte AB, los voor dat deel de vierde-orde differentiaalvergelijking op, en bepaal daarmee het inklemmingsmoment M_A. Laat duidelijk uw stappen zien, inclusief de gebruikte randvoorwaarden. Schets de resulterende momentenlijn en controleer uw antwoord met een vergeet-me-nietje.



AB: $q \cdot \frac{1}{2}\ell \cdot \frac{1}{4}\ell = \frac{1}{8} q \ell^2$

dit is in het x, z vlak een positief moment (neerbuigend)

$EI \dfrac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad (\rightarrow q = 0)$

$EI \dfrac{d^3 w}{dx^3} = C_1$

$EI \dfrac{d^2 w}{dx^2} = C_1 x + C_2$

$EI \dfrac{dw}{dx} = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

$EI\, w = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$

Randvw: $x = 0,\ w = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

$x = 0,\ \dfrac{dw}{dx} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

$x = \ell,\ w = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{6} C_1 \ell^3 + \frac{1}{2} C_2 \ell^2 \quad (1)$

$x = \ell,\ M = +\frac{1}{8} q\ell^2 \Rightarrow$ en $M = -EI \dfrac{d^2 w}{dx^2}$ $\Big\} \Rightarrow -(C_1 \cdot \ell + C_2) = +\frac{1}{8} q \ell^2$

$\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{8} q\ell^2 - C_1 \ell \quad (2)$

(2) invullen in (1) $\Rightarrow 0 = \frac{1}{6} C_1 \ell^3 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8} q \ell^2 - C_1 \ell\right) \cdot \ell^2$

$\Rightarrow \frac{1}{6} C_1 \ell^3 - \frac{1}{2} C_1 \ell^3 = \frac{1}{16} q \ell^4 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{16} q\ell$

$C_2 = -\frac{1}{8} q \ell^2 + \frac{3}{16} q\ell \cdot \ell$

$= +\frac{1}{16} q\ell^2$

M_A bij $x = 0$: $\cancel{-EI} \dfrac{d^2 w}{dx^2} = -C_2$

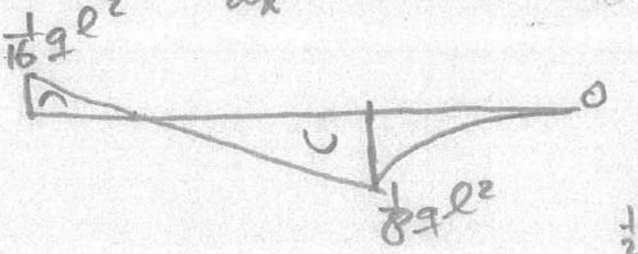
$M_A = -\frac{1}{16} q \ell^2$

TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
29 januari 2025 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER
NAAM

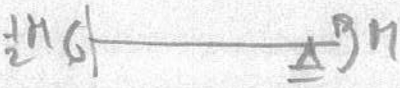
$\Rightarrow M_A$ bij $x=0$: $-EI\frac{d^2w}{dx^2} = -C_2 = M_A \Rightarrow M_A = -\frac{1}{16}\frac{q\ell^2}{EI}$

M-lijn



controle:

$M_{overhaalt} = -\frac{1}{2}M$



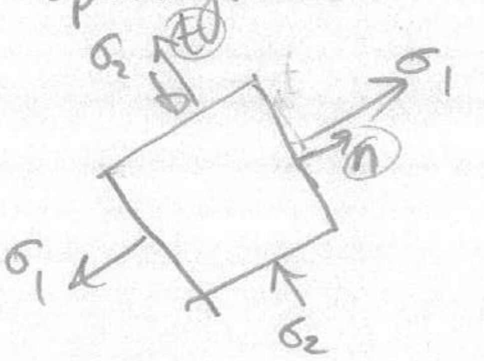
b. Bij dit vak is enkele keren het wiskundige begrip *eigenwaardeprobleem* aan bod gekomen. Geef onderstaand een korte beschrijving van één van die eigenwaardeproblemen, naar keuze. Gebruik enkele zinnen, schetsen en/of beknopte formules om het principe van dat mechanica eigenwaardeprobleem aan te geven, met aandacht voor eigenwaarden en eigenvectoren.

- probleem met 2 vrijheidsgraden:

2 eigenvormen als knikmodes
laagste eigenwaarde, laagste F_k
(hoogste

- homogene lineaire DV
met constante coefficienten
voor knik van buigzame staaf
oplossing: een sinus als eigenvorm, met bijbehorende F_k
en sinus met meerdere golflengtes

- spanningstensor:



hoofdspanningen in de richting van
~~het~~ normaal op het vlakje
(geen schuifspanningen)

$\rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ t \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} n \\ t \end{pmatrix}$

of $(\underline{A} - \lambda \underline{I}) \cdot \begin{pmatrix} n \\ t \end{pmatrix} = 0$
eigenwaarde format

TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
29 januari 2025 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER

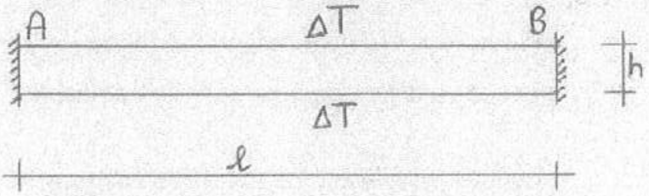
NAAM

Opgave 2 (ongeveer 20 minuten)

Gegeven: een tweezijdig ingeklemde ligger AB met lengte l, hoogte h, buigstijfheid EI, rekstijfheid EA en uitzettingscoefficient α. Er zijn twee gevallen: uniforme temperatuurverhoging (a) en niet-uniforme temperatuurverhoging (b).

Gevraagd:

a. De ligger wordt belast door een uniforme temperatuurverhoging ΔT. Bepaal de normaalkracht in de ligger, uitgedrukt in de grootheden ΔT, EA, EI, α, l en h, of een subset daarvan. Geef ook aan of het trek of druk is.



$\varepsilon^T = \alpha \cdot \Delta T$ alle vezels

$\varepsilon^{elastisch} = -\varepsilon^T$

want totale rek $= 0$

$N = EA \cdot \varepsilon^{el} = -EA\alpha\Delta T$

druk

b. De ligger wordt door zonbestraling aan de bovenzijde ΔT warmer dan aan de onderzijde, met lineair temperatuurverloop over de hoogte. Bepaal de inklemmingsmomenten in A en in B, uitgedrukt in de grootheden ΔT, EA, EI, α, l en h, of een subset daarvan. Aanwijzing: het is handig (niet noodzakelijk) om gebruik te maken van symmetrie.
Schets vervolgens kwalitatief het verloop van de buigende momenten M, van de thermische kromming κ^T, van de kromming κ^M ten gevolge van het moment, van de totale kromming κ^{tot} en van de doorbuiging w. Zet buigtekens erbij.

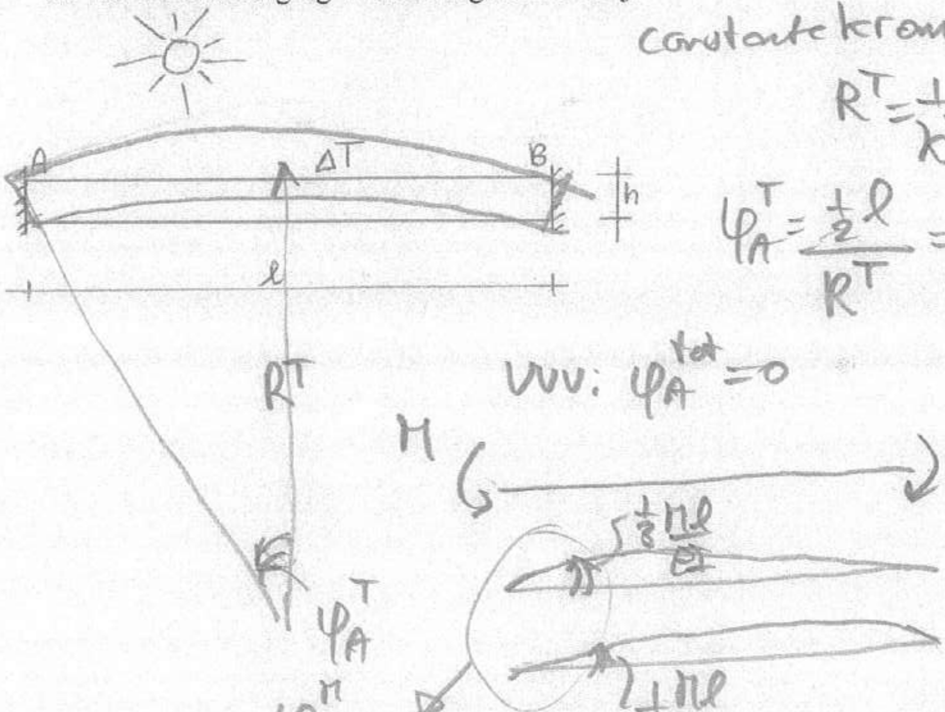
constante kromming $\kappa^T = \dfrac{\alpha\Delta T}{h}$

$R^T = \dfrac{1}{\kappa^T} = \dfrac{h}{\alpha\Delta T}$

$\varphi_A^T = \dfrac{\frac{1}{2}l}{R^T} = \frac{1}{2}l \cdot \kappa^T = \frac{1}{2}l \cdot \dfrac{\alpha\Delta T}{h}$

$M_A = M_B = M$

VVV: $\varphi_A^{tot} = 0$



$\varphi_A^M = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)\dfrac{Ml}{EI} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Ml}{EI}$

STUDIENUMMER

NAAM

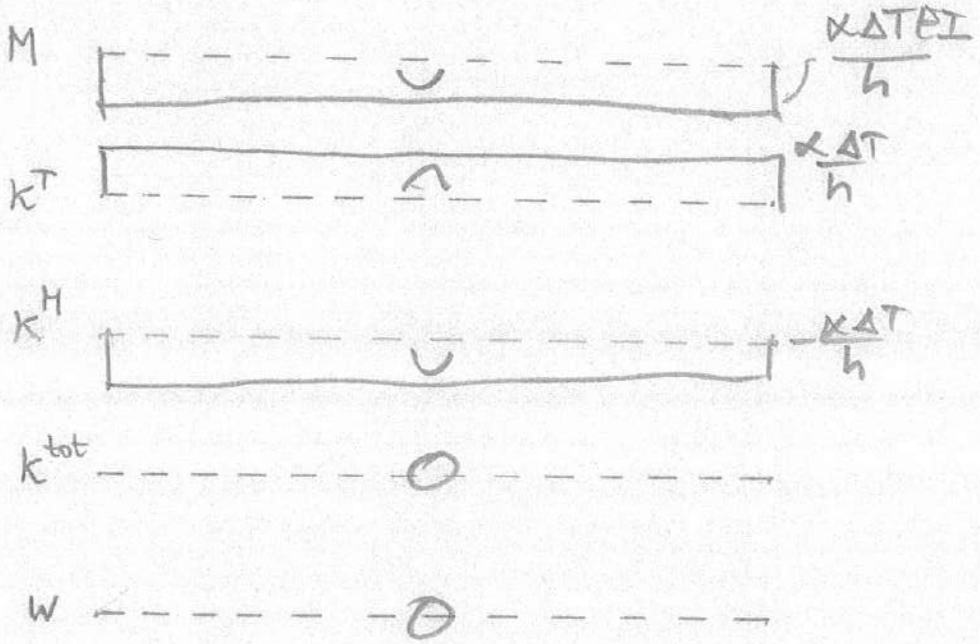
$$\varphi_A^{tot} = +\frac{1}{2}\ell \cdot \frac{\alpha \Delta T}{h} + \frac{1}{2}\frac{M\ell}{EI} \overset{\text{vwv}}{=} 0$$

$+\circlearrowright$

$$\Rightarrow M = -\alpha \frac{\Delta T\, EI}{h}$$ – dwz:

klopt ook, want je moet de gaping tgv ΔT dichtdrukken"

$$\left|\kappa^{\text{tgv } M}\right| = \left|\frac{M}{EI}\right| = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$ $\smile$

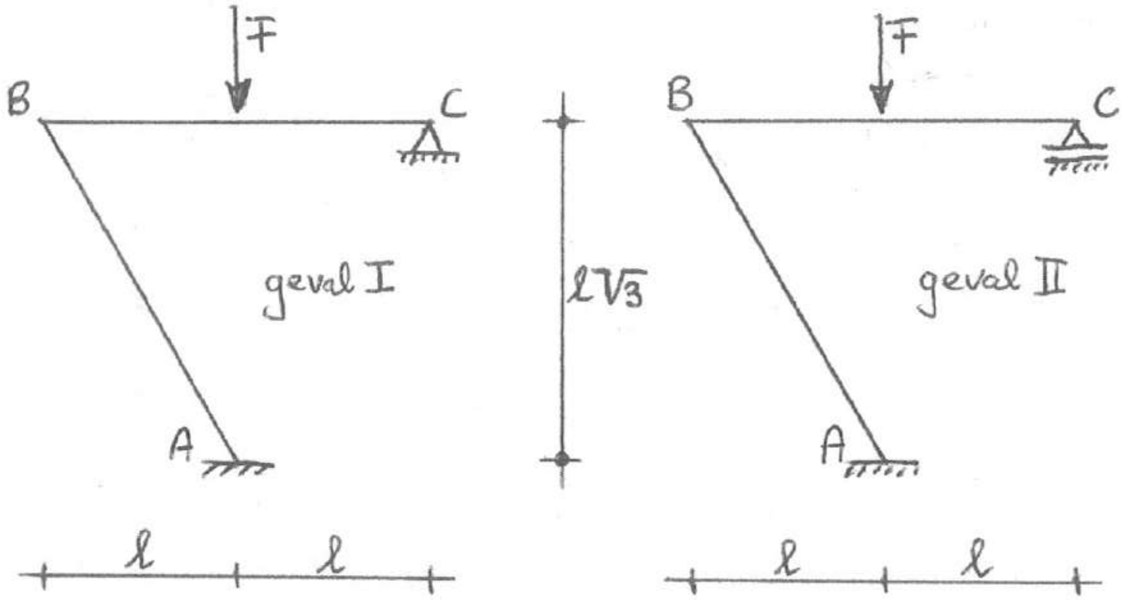


TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
29 januari 2025 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER
NAAM

Opgave 3 (ongeveer 40 minuten)

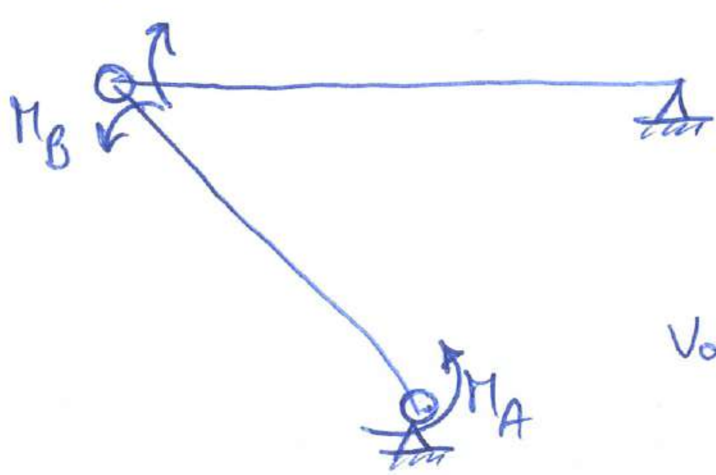
Gegeven: Onderstaande constructie ABC, met twee varianten: geval I heeft een scharnier bij C (deelvragen a, b) en geval II heeft een roloplegging bij C (deelvragen c, d). Voor het overige zijn beide constructies gelijk, met een inklemming bij A, een puntlast F halverwege BC en buigstijfheid EI. De lengtematen uitgedrukt in l en $l\sqrt{3}$ zijn aangegeven. De invloed van normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd.
Houd voor de berekeningen aan: $l = 2$ m, $F = 308$ kN en $EI = 20000$ kNm^2. U mag de vergelijkingen zo lang mogelijk symbolisch uitwerken en aan het eind de numerieke waarden invullen, of direct numeriek te werk gaan.



Gevraagd:

a) Voor geval I: bereken de buigende momenten in A en B. Laat duidelijk alle stappen in uw aanpak zien.

Geval I: Niet-verplaatsbare knopen



bij A scharnier toevoegen met nog onbekend inklemmingsmoment M_A

bij B scharnier toevoegen met nog onbekend momentenpaar M_B

Vormveranderingsvoorwaarden:

$\varphi_A = 0$

$\varphi_B^{links} = \varphi_B^{rechts}$

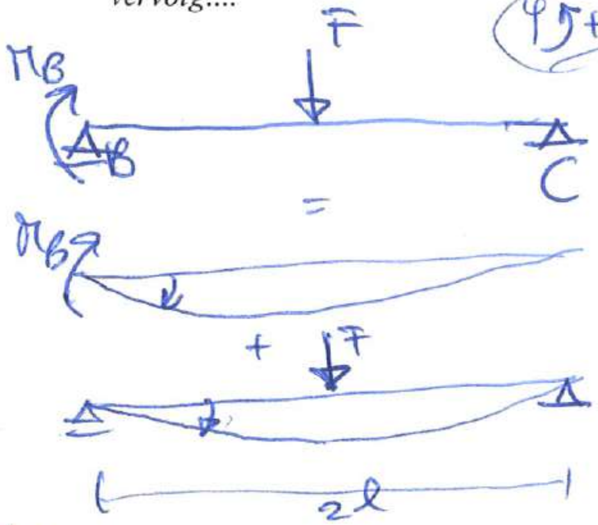
daarmee M_A, M_B oplossen

STUDIENUMMER

NAAM

vervolg....

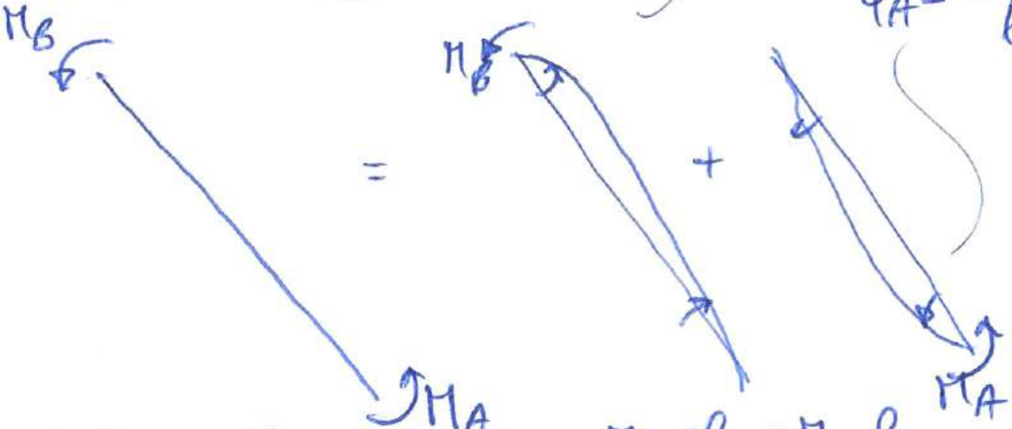
φ ↻ +



$$\varphi_B^{rechts} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{M_B\cdot 2l}{EI} - \frac{1}{16}\frac{F\cdot(2l)^2}{EI}$$

$$\varphi_B^{links} = +\frac{1}{3}\frac{M_B\cdot 2l}{EI} - \frac{1}{6}\frac{M_A\cdot 2l}{EI}$$

$$\varphi_A = -\frac{1}{6}\frac{M_B\cdot 2l}{EI} + \frac{1}{3}\frac{M_A\cdot 2l}{EI}$$



vw:

$$(1)\quad -\frac{1}{3}\frac{M_B 2l}{EI} - \frac{1}{4}\frac{Fl^2}{EI} = +\frac{1}{3}\frac{M_B\cdot 2l}{EI} - \frac{1}{3}\frac{M_A\cdot l}{EI}$$

en:

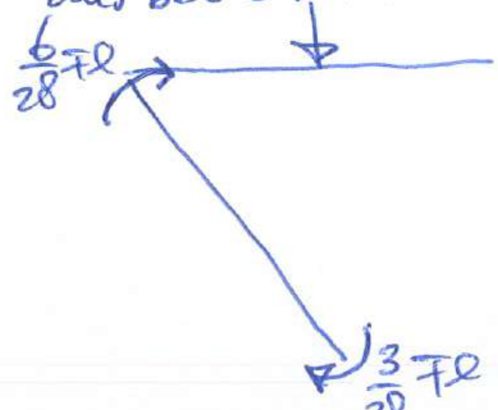
$$(2)\quad -\frac{1}{3}\frac{M_B l}{EI} + \frac{2}{3}\frac{M_A l}{EI} = 0$$

$(2) \Rightarrow M_B = \frac{2}{3}M_A\cdot 3 \Rightarrow M_B = 2M_A$ invullen in (1) geeft:

$-\frac{8}{3}M_A\cdot l + \frac{1}{3}M_A\cdot l = \frac{1}{4}Fl^2 \Rightarrow -\frac{7}{3}M_A = \frac{1}{4}Fl \Rightarrow M_A = -\frac{3}{28}Fl$

dus: $M_B = 2M_A \Rightarrow M_B = -\frac{6}{28}Fl$

dus beide momenten werken andersom als aangenomen



in getallen:

$M_A = -\frac{3}{28}\cdot 308\cdot 2 = -66$ kNm

dwz ↻ 66

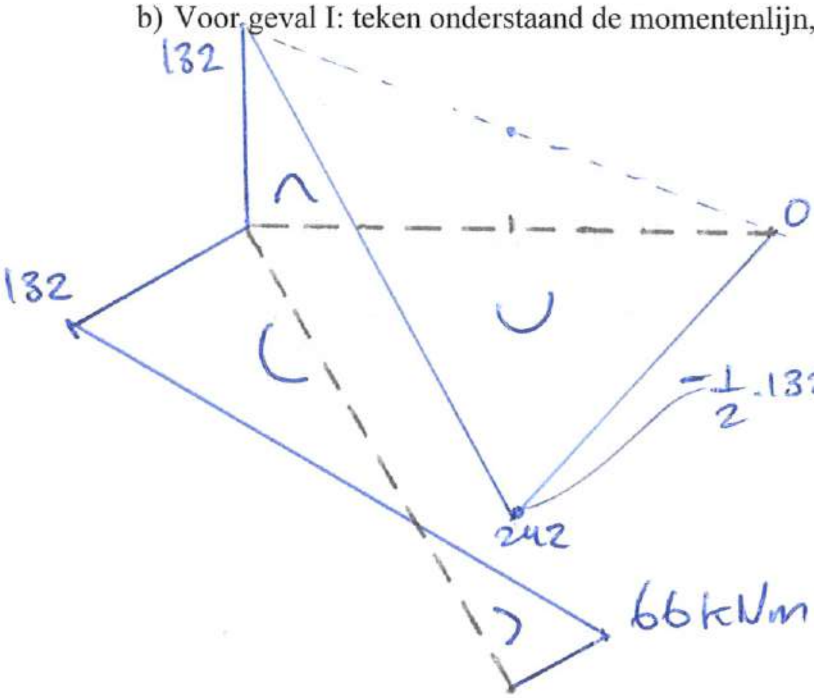
$M_B = -\frac{6}{28}\cdot 308\cdot 2 = -132$ kNm

dwz 132 ↻

STUDIENUMMER | | | | | | | |

NAAM

b) Voor geval I: teken onderstaand de momentenlijn, met buigtekens en markante waarden.



$= \frac{1}{2} \cdot 132 + \frac{1}{4} 7.2\ell^{u} = \frac{1}{2} \cdot 132 + \frac{1}{4} 308.4$

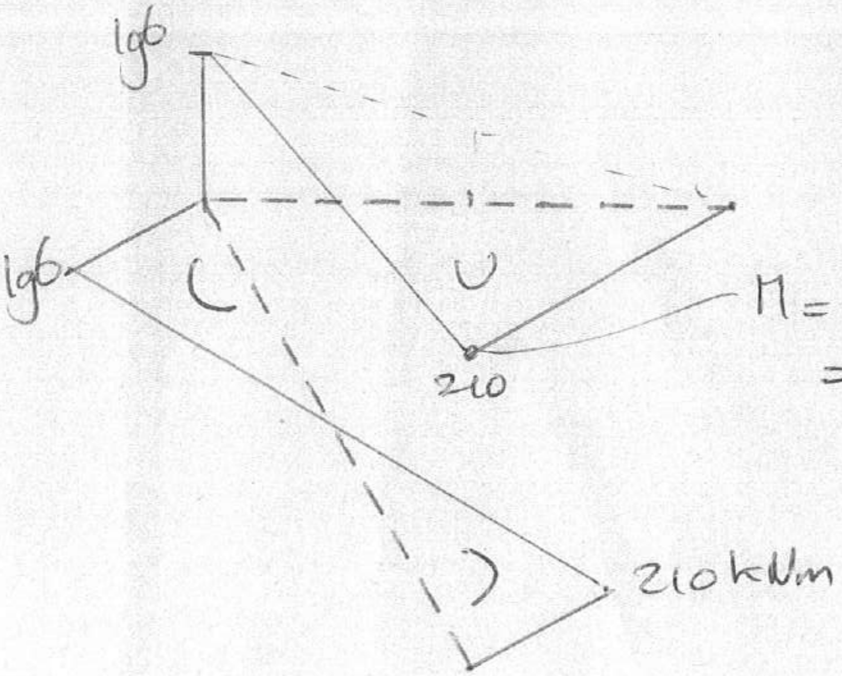
$= 242$ kNm

c) Voor geval II: bereken de buigende momenten in A en B. Laat duidelijk alle stappen in uw aanpak zien. Aanwijzing: u kunt een groot deel van uw aanpak bij deelvraag (a) hergebruiken, en een aantal termen en een vergelijking toevoegen, en dan oplossen.

Deze vraag is geen onderdeel meer van het vak

STUDIENUMMER
NAAM

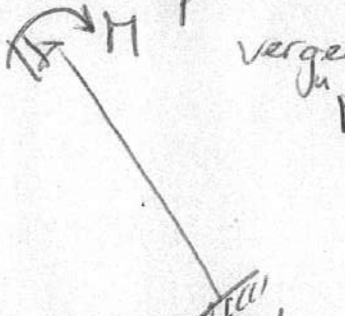
d) Voor geval II: teken onderstaand de momentenlijn, met buigtekens en markante waarden.



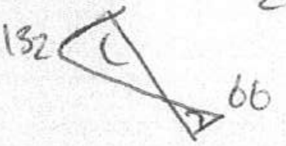
$M = -\frac{1}{2} \cdot 196 + \frac{1}{4} F \cdot 2\ell$
$= -\frac{1}{2} \cdot 196 + 308 = 210$ kNm

e) Inzichtsvraag, ook kwalitatief te beantwoorden mocht u geen rekenresultaten hebben: wat kunt u zeggen over de verhouding tussen M_A en M_B voor respectievelijk geval I en geval II?

bij geval I, met niet-verplaatsbare knopen,
geldt:



"vergeet-me-nietje,"
"M aan de overkant bij de inklemming $= -\frac{1}{2}M$"
als $M=132 \Rightarrow \frac{1}{2}M = 66$



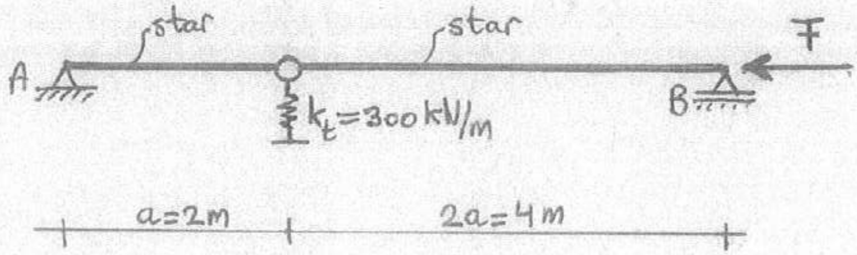
bij geval II,
met verplaatsbare knopen,
geldt dat niet.
Er komt een andere verhouding uit.

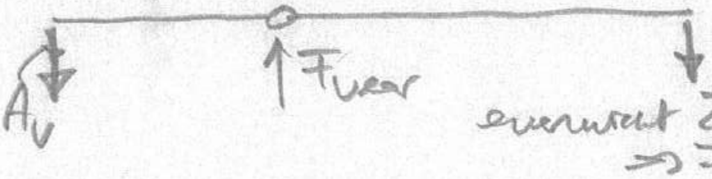
TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
29 januari 2025 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER
NAAM

Opgave 4 (ongeveer 20 minuten)

Gegeven: onderstaande constructie bestaande uit twee starre staven en belast door een drukkracht F als aangegeven. De staven zijn scharnierend verbonden en het scharnier wordt ondersteund door een translatieveer. Lengtematen en veerstijfheid zijn aangegeven.
Gevraagd: de knikkracht F_k. Aanwijzing: zet de constructie in een verplaatste stand en beschouw evenwicht voor het geheel en/of delen.



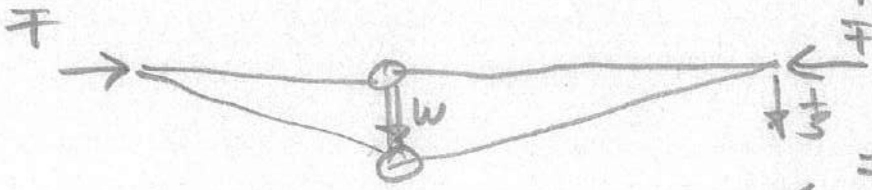


evenwicht $\Sigma T|A = 0$

$$\Rightarrow F_{veer} \cdot a - B_V \cdot 3a = 0$$

$$B_V = \tfrac{1}{3} F_{veer} \downarrow$$

$$A_V = \tfrac{2}{3} F_{veer} \downarrow$$



rechterdeel:

$$\Sigma T|punt = F \cdot w - \tfrac{1}{3} F_{veer} \cdot 2a = 0$$

$$F_{veer} = k_t \cdot w$$

$$\Rightarrow F_k \cdot w - \tfrac{1}{3} k_t \cdot w \cdot 2a = 0 \Rightarrow F_k = \tfrac{1}{3} k_t \cdot 2a$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot 300 \cdot 4$$

$$= 400 \text{ kN}$$

(evenwicht linkerdeel in verplaatste stand mag ook, komt hetzelfde uit)

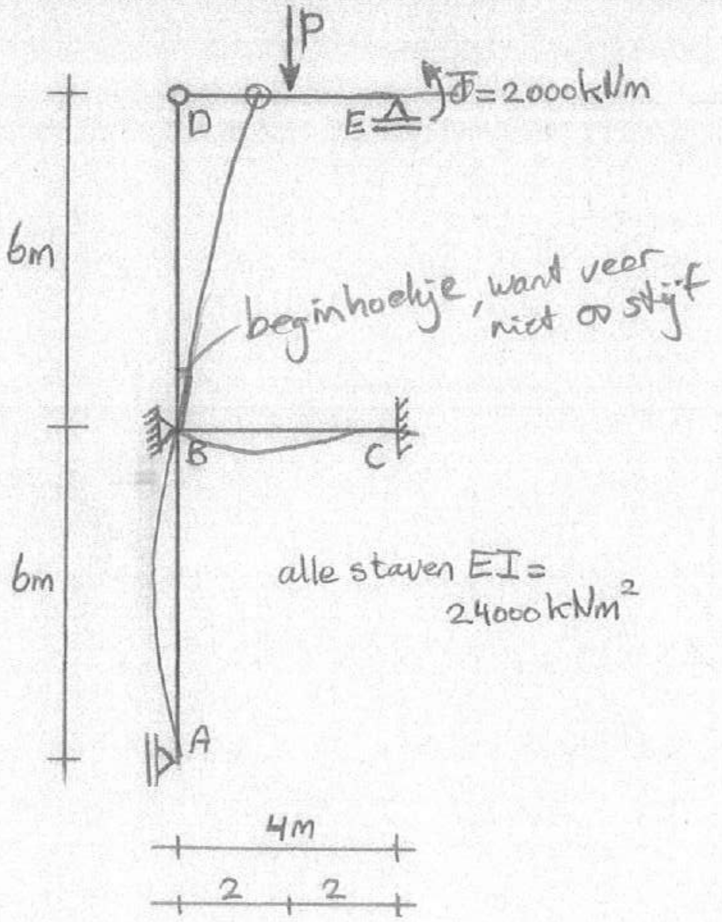
TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
29 januari 2025 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER
NAAM

Opgave 5 (ongeveer 35 minuten) typefoutje aangegeven bij tentamen,

DE

Gegeven: onderstaande constructie ABC, belast door een puntlast P in het midden van DE en een gegeven koppel $T = 2000$ kNm in E. Alle staven hebben buigstijfheid $EI = 24000$ kNm^2. Lengtematen en opleggingen zijn aangegeven. Normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd. Aanwijzing: besef dat de normaalkracht in BD niet gelijk is aan P.



Gevraagd:

a. Schets de knikvorm van deze constructie, in de figuur hierboven.

b. Geef onderstaand een schets van het model met rotatieveer/veren waarmee de kniklast van deze constructie kan worden bepaald.

BD : knik, want daar normaalkracht
AB en BC: parallelle veren

{ongeschoord, want rol bij E
{enkel zijdig verend
⇒ reciproke formule

$$k_r = \text{"}\frac{4EI}{\ell}\text{"} + \text{"}\frac{3EI}{\ell}\text{"} = \frac{4 \cdot 24000}{4} + \frac{3 \cdot 24000}{6\ \text{m}} =$$ kNm^2

$= 24000 + 12000 = 36000$ kNm/rad

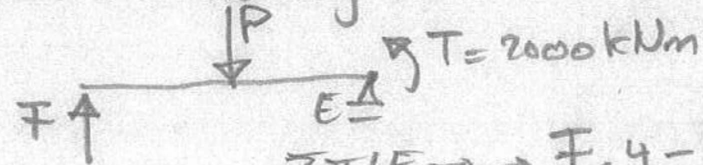
TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
29 januari 2025 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER

NAAM

c. Bepaal de kritische waarde van de puntlast P_k waarbij knik van de constructie optreedt. Laat duidelijk al uw stappen zien.

kracht F in BD is gerelateerd aan P en T volgens:



$$\Sigma T|E = 0 \Rightarrow F \cdot 4 - P \cdot 2 - T = 0$$

$$\Rightarrow F = \tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{4}T = \tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{4}\cdot 2000 = \tfrac{1}{2}P + 500 \text{ kN}$$

eerst de knikkracht F_k van BD bepalen:

omgekeerd: $P = 2\cdot(F - 500)$

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{F_{k1}} + \frac{1}{F_{k2}} \Rightarrow \frac{1}{F_k} = \frac{1}{1645} + \frac{1}{6000} \Rightarrow F_k = 1291 \text{ kN}$$

$$F_{k1} = \frac{\pi^2 EI}{(2\cdot 6)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 24000}{144} = 1645 \text{ kN}$$

rtd $F_{k2} = \text{"}\frac{k_r}{\ell}\text{"} = \frac{36000}{6} = 6000 \text{ kN}$

dan 'omrekenen' naar P:

$$F_k = \tfrac{1}{2}P_k + 500$$

$$\Rightarrow 1291 = \tfrac{1}{2}\cdot P_k + 500$$

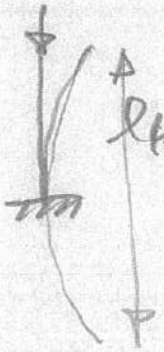
$$\Rightarrow P_k = 2\cdot(1291 - 500) = 1582 \text{ kN}$$

d. Bepaal de kniklengte l_k van het knikkende deel. Vergelijk deze met de kniklengte van een extreem geval waarmee u de situatie zou kunnen vergelijken.

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \Rightarrow 1291 = \frac{\pi^2 \cdot 24000}{l_k^2}$$

$$\Rightarrow l_k^2 = \frac{\pi^2 \cdot 24000}{1291} \Rightarrow l_k = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 24000}{1291}} = 13{,}5\,m$$

vgl:

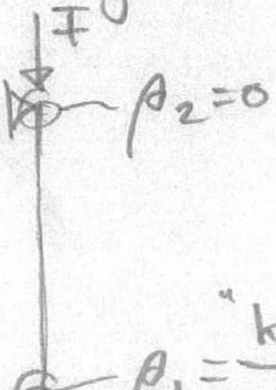


$l_k = 2 \cdot 6 = 12\,m$

dus idd. grotere kniklengte en lagere kniklast (1291 vs. 1645)

e. Stel: *de roloplegging bij E wordt vervangen door een scharnierende oplegging*. Bepaal opnieuw de kritische waarde van de puntlast P_k waarbij de constructie knikt. Vergelijk uw antwoord met het antwoord bij de vorige situatie en verklaar het verschil.

da: geschoord. ⇒ rho-formule (Grafische rekenmachine ezelsbruggetje)



$$\beta_1 = "\frac{k_{r1}}{EI/l}" = \frac{36000}{24000/6} = 9$$

$$F_k = "\frac{(5+2\cdot\beta_1)(5+2\beta_2)}{(5+\beta_1)(5+\beta_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}" = \frac{(5+18)\cdot 5}{(5+9)\cdot 5} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$= \frac{23}{14} \cdot \frac{\pi^2 \cdot 24000}{6^2} = 10810\,kN$$

$$P_k = 2 \cdot (10810 - 500) = 20620\,kN$$

Veél groter dan bij c, want geschoord, "kan niet weg"
Veel kleinere kniklengte → grotere knikkracht.

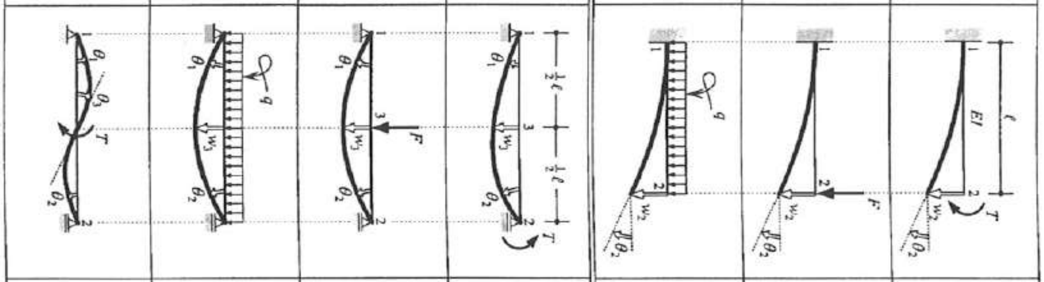
STUDIENUMMER

NAAM

vervolg ….

niet nodig dit blad

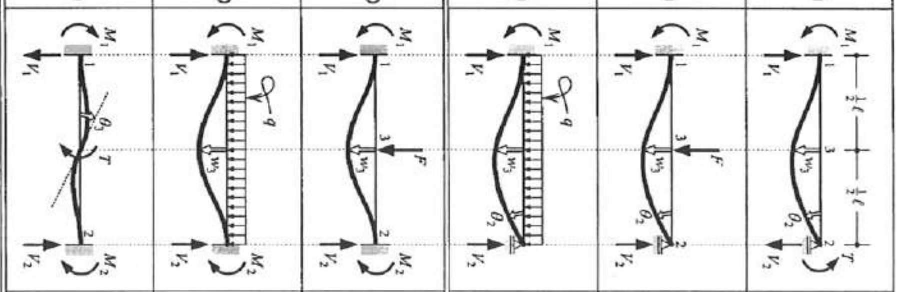
FORMULEBLAD
(scheur dit deel los van het werk)



(1)	$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}$; $w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)	$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}$; $w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)	$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}$; $w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)	$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_2 = \frac{1}{3}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell^2}{EI}$
(5)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$
(6)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$
(a)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_3 = \frac{1}{12}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$

vergeet-mij-nietjes (1)–(3)

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald) (4)–(a)



(7)	$\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{32}\frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$
(8)	$\theta_2 = \frac{1}{32}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{7}{768}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16}F\ell$; $V_1 = \frac{11}{16}F$; $V_2 = \frac{5}{16}F$
(9)	$\theta_2 = \frac{1}{48}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{192}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8}q\ell^2$; $V_1 = \frac{5}{8}q\ell$; $V_2 = \frac{3}{8}q\ell$
(10)	$w_3 = \frac{1}{192}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8}F\ell$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}F$
(11)	$w_3 = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12}q\ell^2$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}q\ell$
(b)	$\theta_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd) (7)–(9)

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd) (10)–(b)

Enkele formules voor prismatische liggers met buigstijfheid EI.
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

Spanningen en rekken :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \sigma_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases}$$

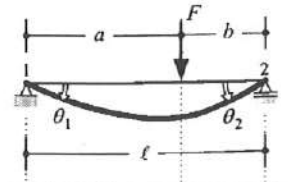
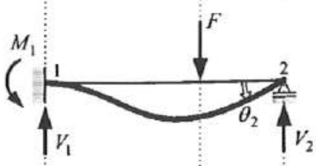
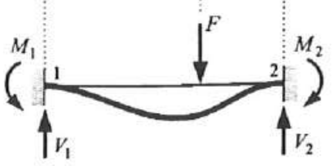
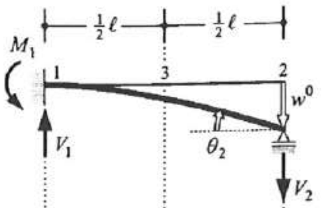
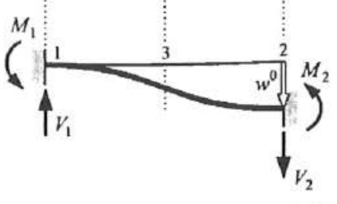
$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) \quad \text{voor } i, j = x, y$$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

von Mises : $\frac{1}{6}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \le \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

(c)		$\theta_1 = \frac{Fab(\ell+b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI}\left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell+a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI}\left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2-b^2)}{2\ell^2} = F\ell\left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2-b^2)}{2\ell^3} = F\left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell-a)}{2\ell^3} = F\left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI}\left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$
(e)		$M_1 = \frac{Fab^2}{\ell^2} = F\ell\left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell+2a)}{\ell^3} = F\left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell\left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell+2b)}{\ell^3} = F\ell\left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2}w^0$; $V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3}w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2}\frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8}\frac{w^0}{\ell}$; $w_3 = \frac{5}{16}w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2}w^0$; $V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3}w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2}\frac{w^0}{\ell}$; $w_3 = \frac{1}{2}w^0$

drie bij-de handjes

zettingen

Tensortransformatie formules in x-y assenstelsel:

$$k_{\bar{x}\bar{x}} = \tfrac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) + \tfrac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\cos 2\alpha + k_{xy}\sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{y}\bar{y}} = \tfrac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) - \tfrac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\cos 2\alpha - k_{xy}\sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{x}\bar{y}} = -\tfrac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\sin 2\alpha + k_{xy}\cos 2\alpha$$

Hoofdwaarden en hoofdrichtingen:

$$\tan 2\alpha = \frac{2k_{xy}}{(k_{xx} - k_{yy})}; \quad k_1, k_2 = \tfrac{1}{2}\left(k_{xx} + k_{yy}\right) \pm \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(k_{xx} - k_{yy}\right)\right]^2 + k_{xy}^2}$$

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_\mathrm{k}} = \frac{1}{\frac{r}{l}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_\mathrm{k} = l\sqrt{4 + \frac{10}{\rho}}$$

$$\text{met:} \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met:} \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x$$

Of :

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met:} \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

en $S_z(x) = M' - Fw'$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3\alpha \sin\alpha x - C_4\alpha \cos\alpha x$$

$$M(x) = EI \times \left[C_3\alpha^2 \cos\alpha x + C_4\alpha^2 \sin\alpha x\right]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

η-formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_\mathrm{k} = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1\eta_2(\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met :} \quad \begin{array}{l} \eta_1 = 4 + \frac{10}{\rho_1}; \ \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 = 4 + \frac{10}{\rho_2}; \ \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} \end{array}$$

ρ-formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met :} \quad \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

Kromming t.g.v temperatuursgradient:

"Vrije" kromming t.g.v lineair temperatuurs-verloop over de hoogte *h* van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$