

--	--	--	--	--	--	--	--

Jan Rots

UITWERKINGEN
concept

Antwoordformulier

CTB2210 Constructiemechanica 3

Maak alle opgaven op dit antwoordformulier. Lever dit formulier in.

Kladpapier wordt niet ingenomen.
Het nietje mag niet verwijderd worden.

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.

Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.

Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.
Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier. Tenzij anders vermeld, wordt het eigen gewicht van een constructie buiten beschouwing gelaten.

Aantal opgaven: 6.

De opgaven hebben verschillende weging. Een schatting van het gewicht is in tijd weergegeven.

Relevante **formulebladen** zijn bijgevoegd.

Toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:

Conventionele zakrekenmachientje, eenvoudige grafische rekenmachine (geen CAS of soortgelijke systemen, geen wifi en bluetooth), tekenmaterialen waaronder passer.

Niet toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:

Boeken, dictaten, aantekeningen, andere formulebladen, oude tentamens, COZ- of andere uitwerkingen, woordenboeken, computer, mobiele telefoon, smart phone of apparaten met vergelijkbare functies.

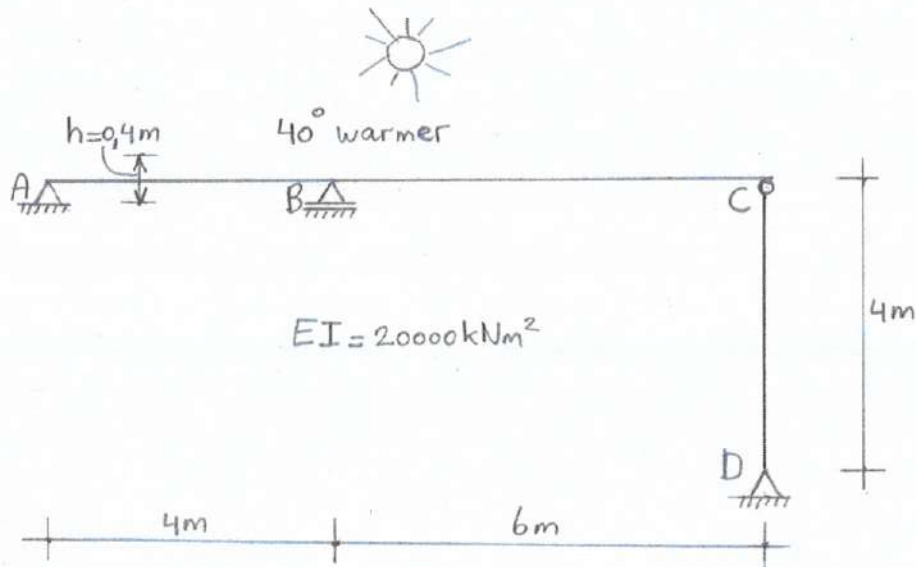
Mobiel UIT en opbergen in tas.

Elk vermoeden van fraude wordt gemeld bij de examencommissie.

--	--	--	--	--	--	--

Opgave 1 (ongeveer 30 minuten)

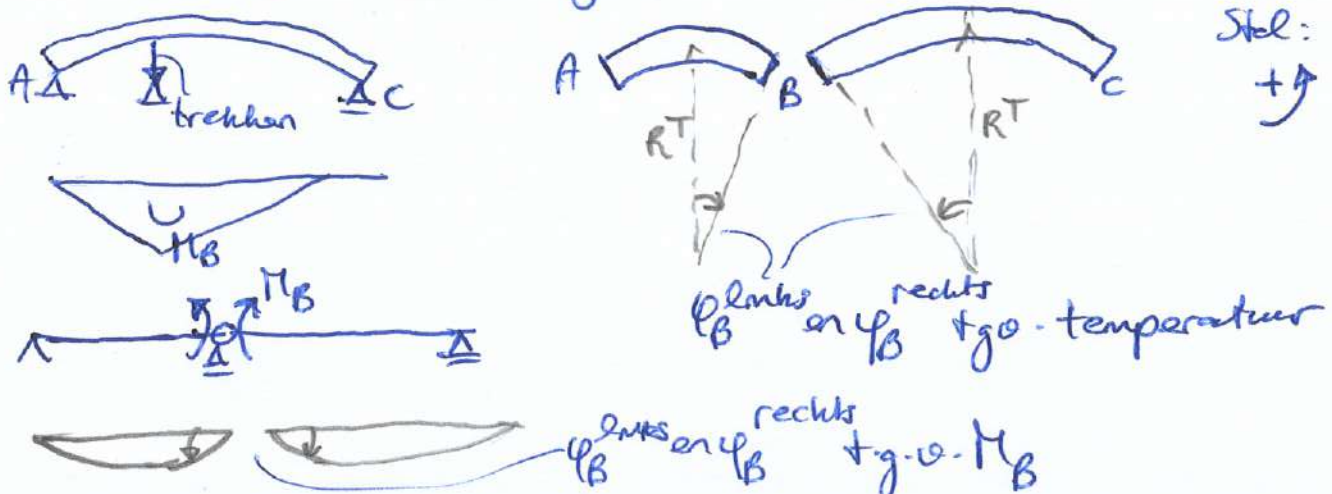
Gegeven: Onderstaande constructie. In een zomermaand wordt de bovenzijde van de doorgaande ligger 40° warmer dan de onderzijde, met lineair temperatuurverloop over de hoogte. De hoogte h van de doorsnede van de ligger is overal 0.4 m . De temperatuur van kolom CD verandert niet. Normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd. Lengtematen zijn aangegeven. De buigstijfheid van alle delen is $EI = 20000\text{ kNm}^2$ en de uitzettingscoëfficiënt $\alpha = 10^{-5}$ per Kelvin.



Gevraagd:

- a. Bereken het buigend moment boven steunpunt B. Aanwijzing: het formuleblad bevat een formule voor kromming t.g.v. temperatuur. Laat duidelijk alle stappen in uw aanpak zien.

Ligger wil boven langer worden dan onder, wil opbollen. Dan moet je hem bij B "naar beneden trekken", dat geeft een neerwaarts buigend moment. Je kunt bij B een scharnier aanbrengen, met een nog onbekend momentenpaar M_B .



--	--	--	--	--	--	--	--

...vervolg...

$$\kappa^T = \frac{1}{R^T} = \frac{\alpha \Delta T}{h} = \frac{10^{-5} \cdot 40}{0,4} = 0,001 \left(\frac{1}{m} \right)$$

$$\varphi_B^{\text{links}} = -\frac{1}{2} l_{AB} \cdot \underbrace{\frac{\alpha \Delta T}{h}}_{\kappa^T} + \frac{1}{3} \frac{M_B \cdot l_{AB}}{EI}$$

$$\varphi_B^{\text{rechts}} = +\frac{1}{2} l_{BC} \cdot \frac{\alpha \Delta T}{h} - \frac{1}{3} \frac{M_B \cdot l_{BC}}{EI}$$

Vormveranderingsvoorwaarde: $\varphi_B^{\text{links}} = \varphi_B^{\text{rechts}}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,001 + \frac{1}{3} \frac{M_B \cdot 4}{20000} = +\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,001 - \frac{1}{3} \frac{M_B \cdot 6}{20000}$$

$$\Rightarrow M_B \cdot (6,667 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-4}) = 0,003 + 0,002$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{0,005}{1,667 \cdot 10^{-4}} = 30 \text{ kNm}$$

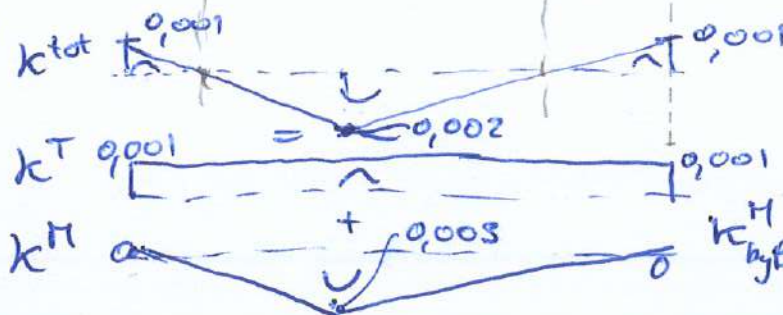


- b. Schets onderstaand de momentenlijn (met buigtekens en markante waarden), en schets het verloop van de vervormingen (w-lijn, zonder waarden, alleen kwalitatief).



buigpunten ruw
 aangegeven was ok.

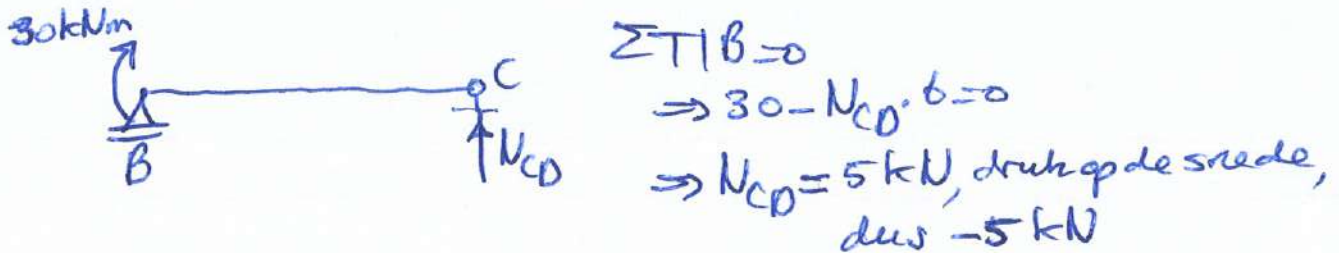
niet gevraagd:



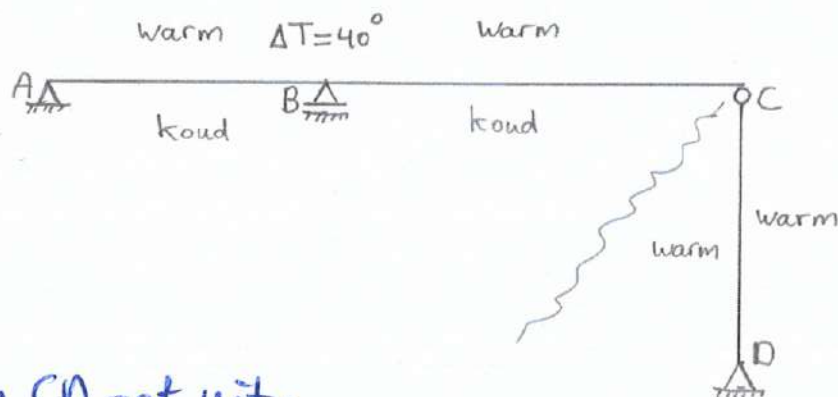
$$\kappa_{byB}^M = \frac{60}{20000} = 0,003 \left(\frac{1}{m} \right)$$

--	--	--	--	--	--	--	--

c. Bereken de normaalkracht in kolom CD.



d. Stel nu: ook de kolom CD wordt warmer, en wel 40° , uniforme temperatuurverhoging. Ligger ABC blijft thermisch belast zoals bij deelvraag a, b en c. De nieuwe situatie is onderstaand geschetst. Bereken opnieuw het buigend moment boven steunpunt B. Laat weer duidelijk alle stappen zien.



Kolom CD zet uit.

$$\epsilon T = \alpha \cdot \Delta T = 10^{-5} \cdot 40 = 40 \cdot 10^{-5}$$

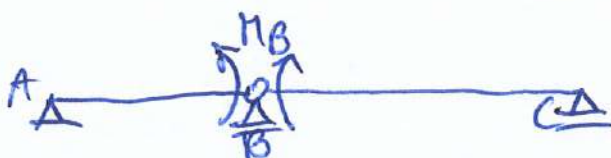
$$\Delta l_{CD} = \epsilon T \cdot l_{CD} = 40 \cdot 10^{-5} \cdot 4 = 160 \cdot 10^{-5} = 0,0016 \text{ m}$$

Dit geeft een opgelegde verplaatsing bij C.

Is apart te behandelen als belastingsval zetting.



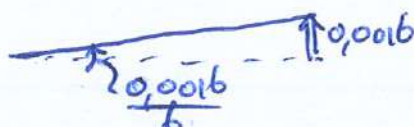
dus buiging weer zo:



$$\varphi_B^{\text{links}} = + \frac{1}{3} \frac{M_B \cdot l_{AB}}{EI}$$



$$\varphi_B^{\text{rechts}} = - \frac{1}{3} \frac{M_B \cdot l_{BC}}{EI} + \frac{0,0016}{6}$$



--	--	--	--	--	--	--	--

.... vervolg

Vormveranderingsvoorwaarde: $\varphi_B^{\text{links}} = \varphi_B^{\text{rechts}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \frac{M_B \cdot 4}{20000} = -\frac{1}{3} \frac{M_B \cdot 6}{20000} + \frac{0,0016}{6}$$

$$\Rightarrow M_B \cdot (6,667 \cdot 10^{-5} + 10^{-4}) = 2,667 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{2,667 \cdot 10^{-4}}{1,667 \cdot 10^{-4}} = 1,6 \text{ kNm}$$



Totaal thermisch + zetting:



$$30 + 1,6 = 31,6 \text{ kNm}$$

- e. Verklaar de wijziging van het steunpuntsmoment bij B ten opzichte van de eerdere situatie waarbij kolom CD niet warmer werd. Wordt het steunpuntsmoment groter of kleiner dan bij de eerdere situatie? Gebruik maximaal vijf regels tekst en een schetsje. U kunt deze vraag ook beantwoorden mocht u bij deelvraag d geen antwoord hebben.

Het steunpuntsmoment wordt groter, in beide gevallen neerbuigend, de momenten versterken elkaar.

Visueel:

verpl-bij C:



buiging:



thermisch:

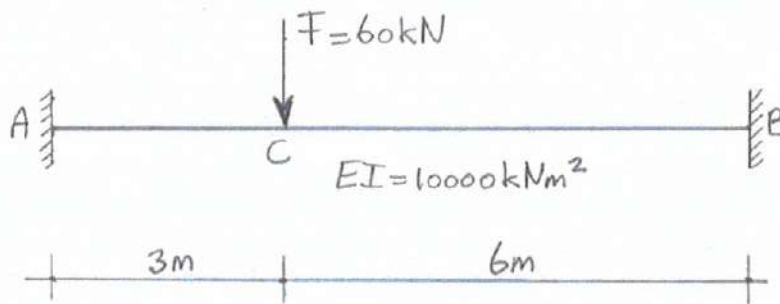


zelfde buigtekens

--	--	--	--	--	--	--	--

Opgave 2 (ongeveer 30 minuten)

Gegeven: onderstaande tweezijdig ingeklemde ligger, belast door een asymmetrisch geplaatste puntlast. De lengtematen, grootte van de puntlast F en de buigstijfheid EI van de ligger zijn aangegeven in de figuur.



Gevraagd:

- a. Bereken de inklemmingsmomenten M_A en M_B . Let op: op het formuleblad toegevoegd aan dit antwoordformulier zijn de vergeet-me-nietjes voor liggers met een asymmetrisch geplaatste puntlast weggepoetst. *U dient deze opgave dus te maken met een methode anders de methode met vergeet-me-nietjes voor een asymmetrische puntlast* (ook indien u die vergeet-me-nietjes uit uw hoofd zou kennen, dient u toch een andere methode te kiezen).
 Laat duidelijk alle stappen in uw aanpak zien.

Meest voor de hand liggende methode: met momentenvlakstellingen, M_A en M_B als onbekenden nemen



vormveranderingsvoorwaarden:
 $\varphi_A = 0$
 $\varphi_B = 0$

Alternatief: vergeet-me-nietjes van uitkragende ligger, M_B en B_V als onbekenden nemen

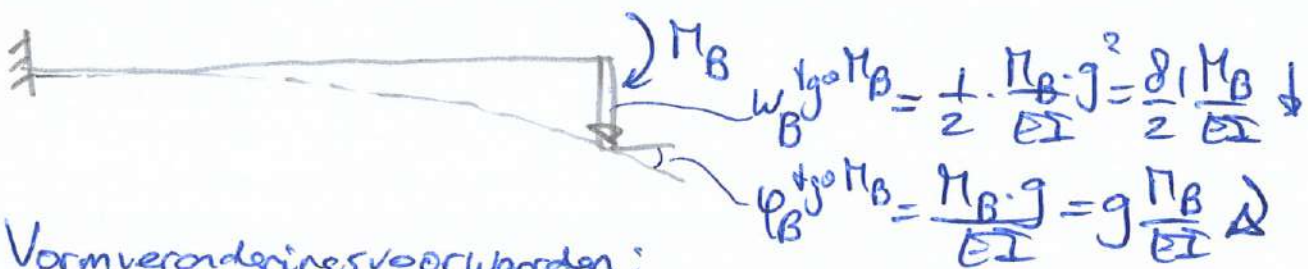
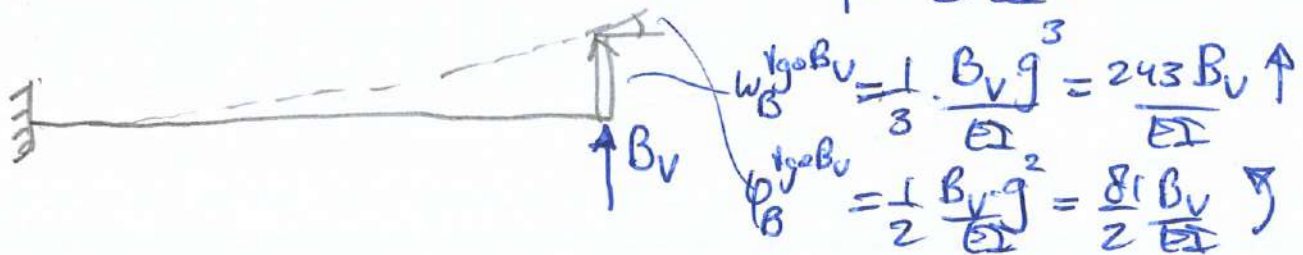
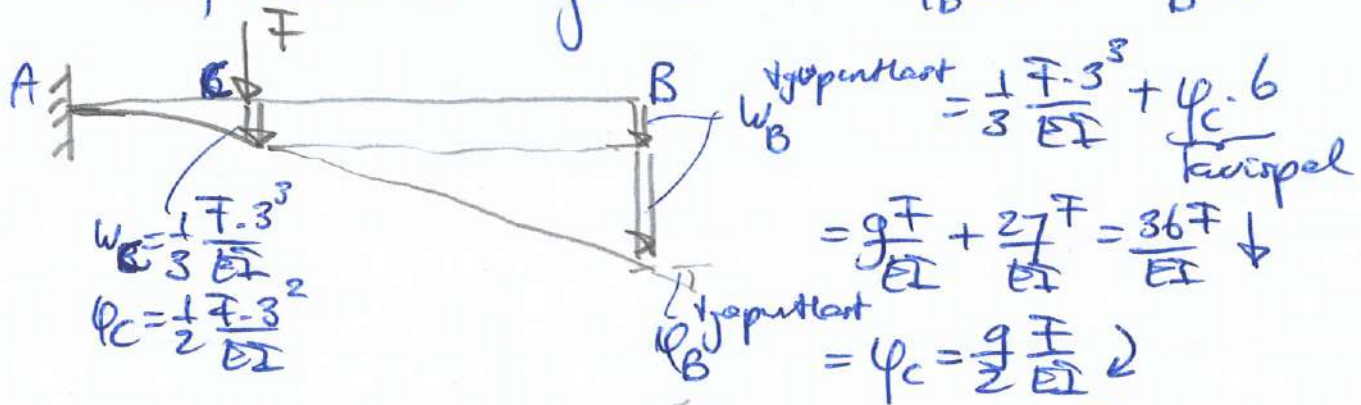


vormveranderingsvoorwaarden:
 $\varphi_B = 0$
 $w_B = 0$

Andere methoden, zoals scharnier aanbrengen bij C, zijn erg lastig, want er zit ook een dwarskracht links en rechts van C, die is overal het moment bij C dan onbekend en moet je niet vergeten.

Uitwerking met alternatief, vergeet-me-nietjes
uitkerende ligger.

inklepping bij B wegdenken, M_B en B_V als statisch onbepaalden nemen, vormveranderingsvoorwaarden: $\psi_B = 0$ en $w_B = 0$



Vormveranderingsvoorwaarden:

$$\begin{aligned}
 +\downarrow w_B^{\text{total}} = 0 &\Rightarrow \frac{36F}{EI} - \frac{243 B_V}{EI} + \frac{81 M_B}{2EI} = 0 \\
 +\uparrow \psi_B^{\text{total}} = 0 &\Rightarrow -\frac{9F}{2EI} + \frac{81 B_V}{2EI} - \frac{3 M_B}{EI} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \begin{cases} 36F - 243 B_V + \frac{81}{2} M_B = 0 \\ -\frac{9}{2} F + \frac{81}{2} B_V - 3 M_B = 0 \end{cases} \rightarrow \times \frac{9}{2}: -\frac{81}{4} F + \frac{729}{4} B_V - \frac{81}{2} M_B = 0 \\
 &\text{onderste } \times \frac{9}{2}, \text{ dan optellen} \quad \text{-----} +
 \end{aligned}$$

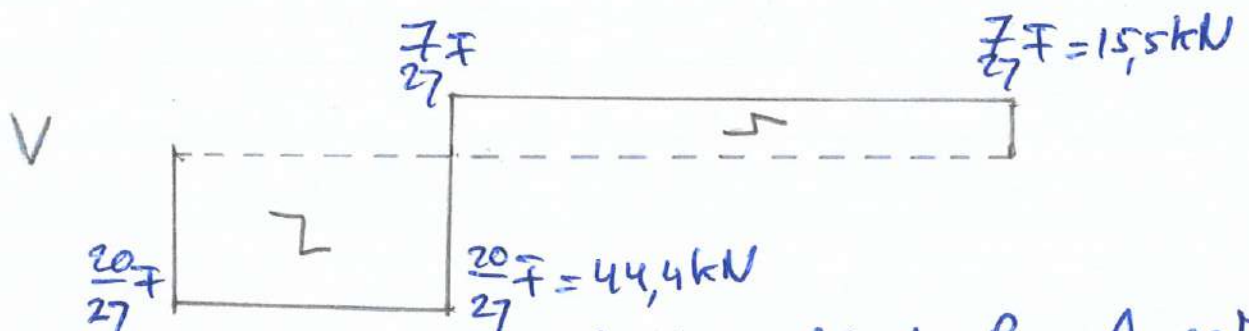
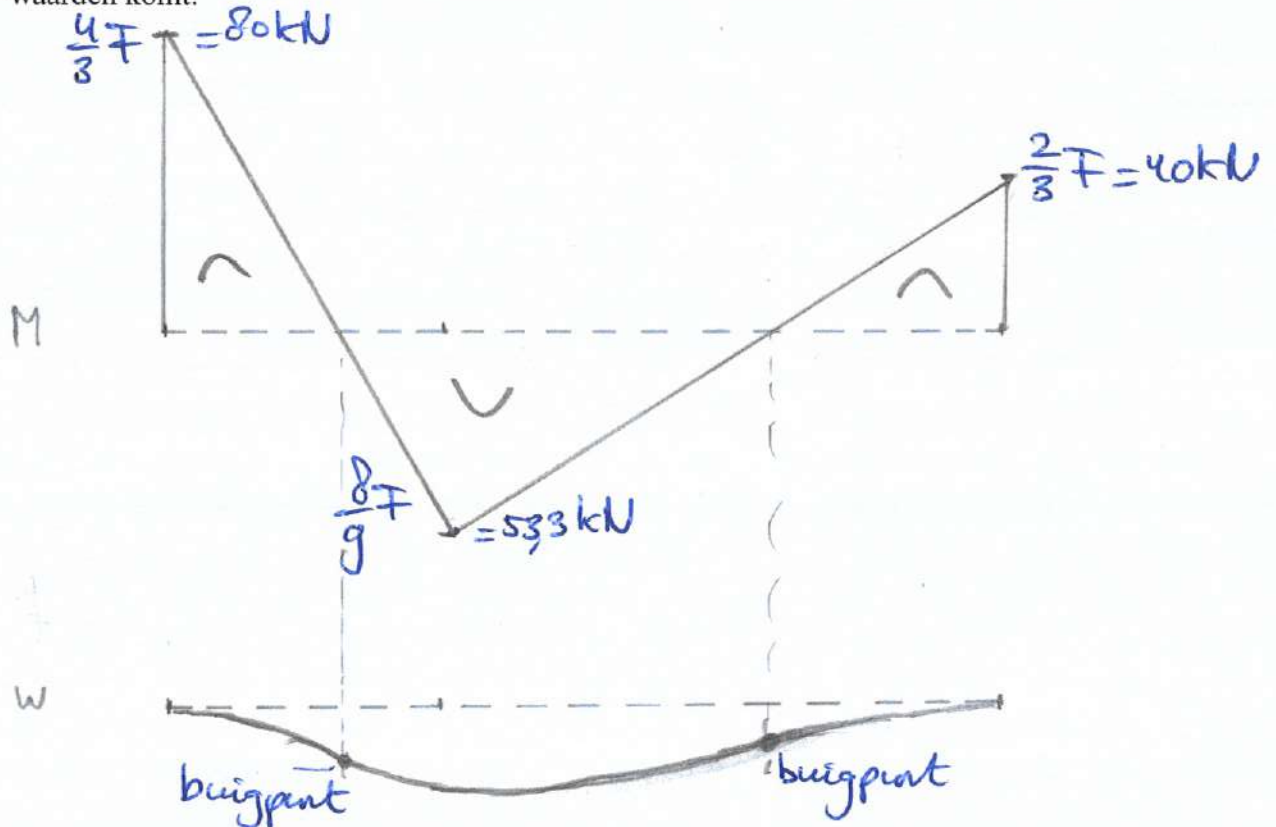
$$\Rightarrow (36 - \frac{81}{4}) F + (-243 + \frac{729}{4}) B_V = 0$$

$$\Rightarrow \frac{69}{4} F - \frac{243}{4} B_V = 0 \Rightarrow B_V = \frac{69}{243} F = \frac{23}{81} F \uparrow$$

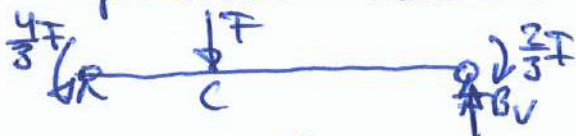
dan: $A_V = \frac{20}{81} F \uparrow$ dan via tegensubstitutie in vv. M_B bepalen
en via evenwicht M_A

--	--	--	--	--	--	--	--

- b. Schets onderstaand de momentenlijn (M -lijn, met buigtekens en waarden erbij), de doorbuigingslijn (w -lijn, alleen kwalitatief, met de goede vorm, geen waarden) en de dwarskrachtenlijn (V -lijn, met afschuiftekens en waarden erbij). Laat ook zien hoe u aan de waarden komt.



Uit methode M -voldstellingen M_A en M_B bepaald; dan B_V en A_V en M_C bepalen via evenwicht:

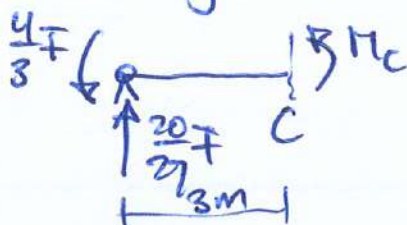


$$\sum T|A=0 \Rightarrow -\frac{4}{3}F + F \cdot \frac{1}{3}l - B_V l + \frac{2}{3}F = 0$$

$$\Rightarrow B_V = \frac{7}{27}F \uparrow$$

$$\sum F_V=0 \Rightarrow A_V = \frac{20}{27}F \uparrow$$

sneede bij C:



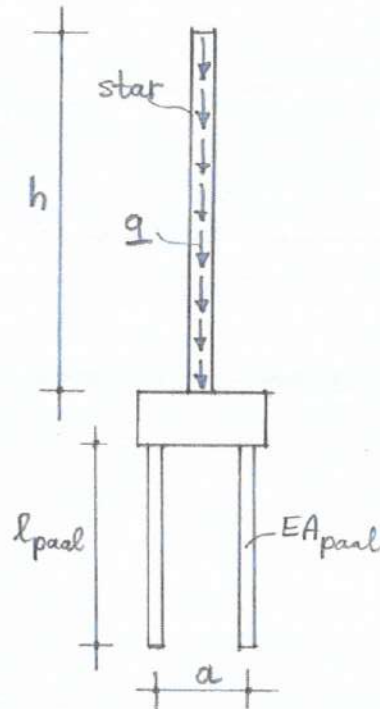
$$\sum T|C=0 \Rightarrow M_C + \frac{4}{3}F - \frac{20}{27}F \cdot 3 = 0$$

$$\Rightarrow M_C = \frac{20}{27} \cdot 3F - \frac{4}{3}F = \left(\frac{20}{9} - \frac{12}{9}\right)F = \frac{8}{9}F$$

--	--	--	--	--	--	--	--

Opgave 4 (ongeveer 25 minuten)

Gegeven: een starre kolom is gefundeerd op een star betonblok waaronder twee symmetrisch geplaatste palen, als aangegeven. De afstand tussen de palen is a . De lengte van de palen is l_{paal} en de rekstijfheid van de palen is EA_{paal} . De hoogte van de kolom is h . De kolom wordt belast door een gelijkmatig verdeelde verticale belasting q als aangegeven.



Gevraagd:

- a. Bepaal de translatievoorconstante van de palen, uitgedrukt in EA_{paal} en l_{paal} .

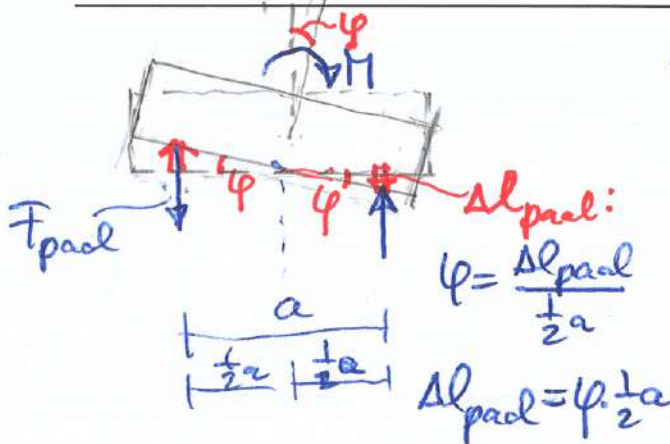
$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA} \Rightarrow N = \frac{EA}{l} \cdot \Delta l \text{ of } "F = k_t \cdot u"$$

$$k_t = \frac{EA_{\text{paal}}}{l_{\text{paal}}}$$

- b. Vat het op palen gefundeerde betonblok op als een rotatieveer en bepaal de rotatieveerconstante, uitgedrukt in EA_{paal} , l_{paal} en a . Bedenk daarbij dat de paal aan de ene zijde extra gedrukt wordt terwijl de druk in de paal aan de andere zijde wordt verminderd (de palen staan sowieso onder druk door de verticale belasting, maar de grootte van die druk is niet relevant voor de stabiliteitsbeschouwing).

zie volgend blad

--	--	--	--	--	--	--	--



evenwicht blok:

$$M - F_{paal} \cdot a = 0$$

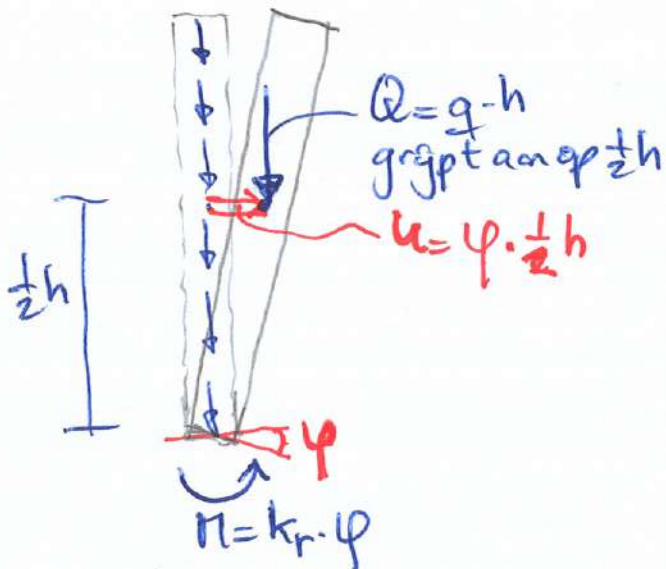
$$M = F_{paal} \cdot a$$

$$M = \frac{EA_{paal}}{l_{paal}} \cdot \Delta l_{paal} \cdot a$$

$$M = \frac{EA_{paal}}{l_{paal}} \cdot \varphi \cdot \frac{1}{2} a \cdot a$$

$$M = \frac{EA_{paal}}{l_{paal}} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \varphi \rightarrow = k_r$$

- c. Bepaal de kniklast q_k van deze constructie, uitgedrukt in EA_{paal} , l_{paal} , a en h . Aanwijzing: zet de constructie in een verplaatste stand.



evenwicht in vervormde stand:

$$Q \cdot u = k_r \cdot \varphi$$

$$q_k \cdot h \cdot \varphi \cdot \frac{1}{2} h = k_r \cdot \varphi$$

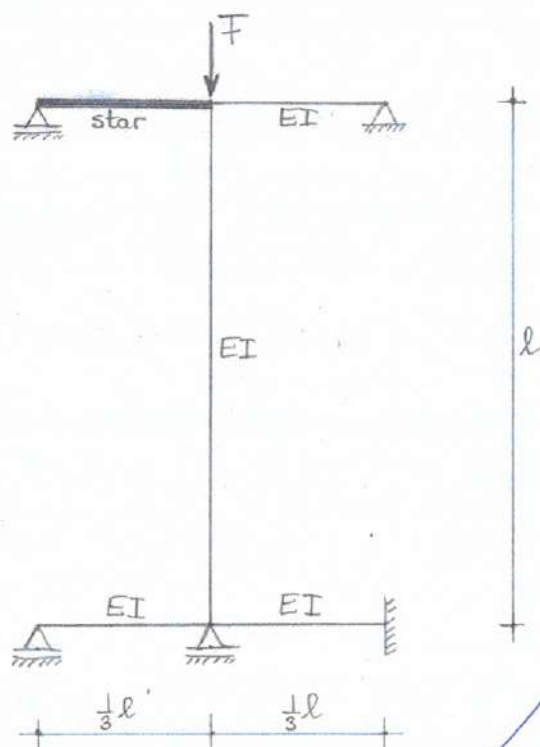
$$q_k = \frac{2k_r}{h^2} = 2 \cdot \frac{EA_{paal}}{l_{paal}} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{h^2}$$

$$q_k = \frac{EA_{paal}}{l_{paal}} \cdot \frac{a^2}{h^2}$$

--	--	--	--	--	--	--	--

Opgave 5 (ongeveer 30 minuten)

Gegeven: Onderstaande constructie met opleggingen en puntlast als aangegeven. De buigstijfheid van het deel linksboven is oneindig. De overige delen hebben buigstijfheid EI . De lengtematen zijn aangegeven en uitgedrukt in l . Normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd.

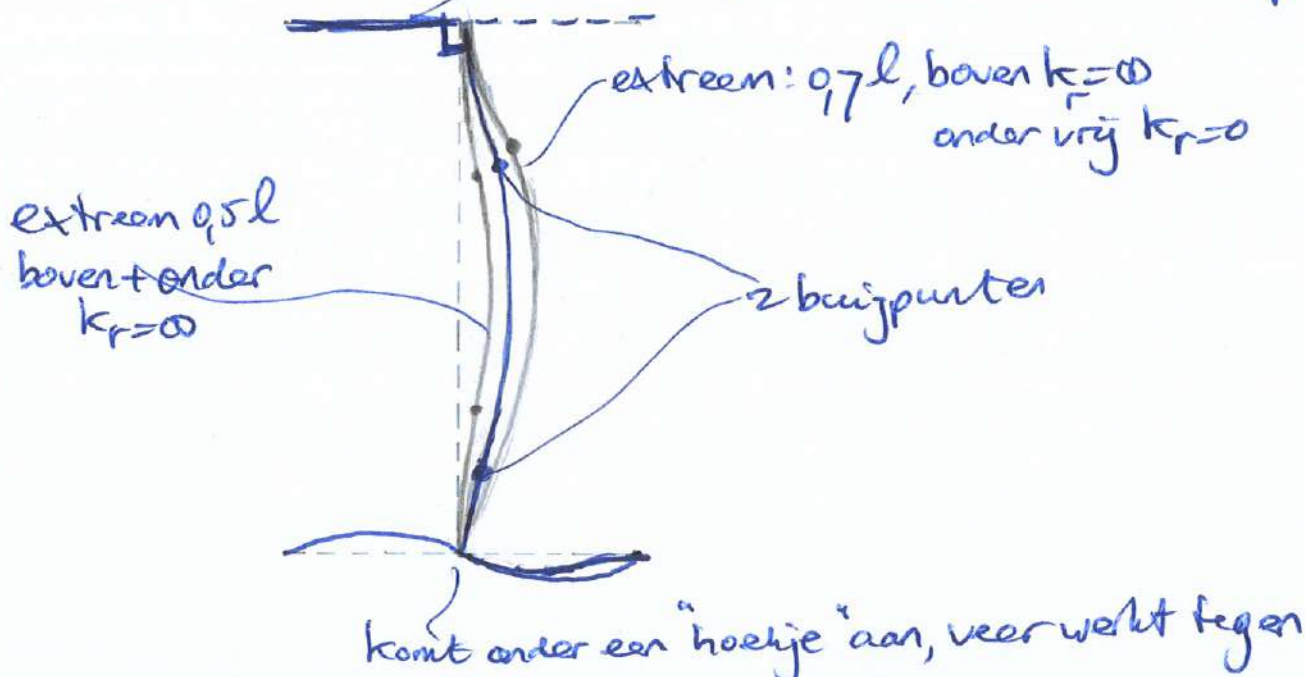


boven
 totale $k_r = \infty + \frac{3EI}{\frac{1}{3}l} = \infty$
 dus buigt niet, $\frac{1}{3}l$
 en \perp vertrekken

Gevraagd:

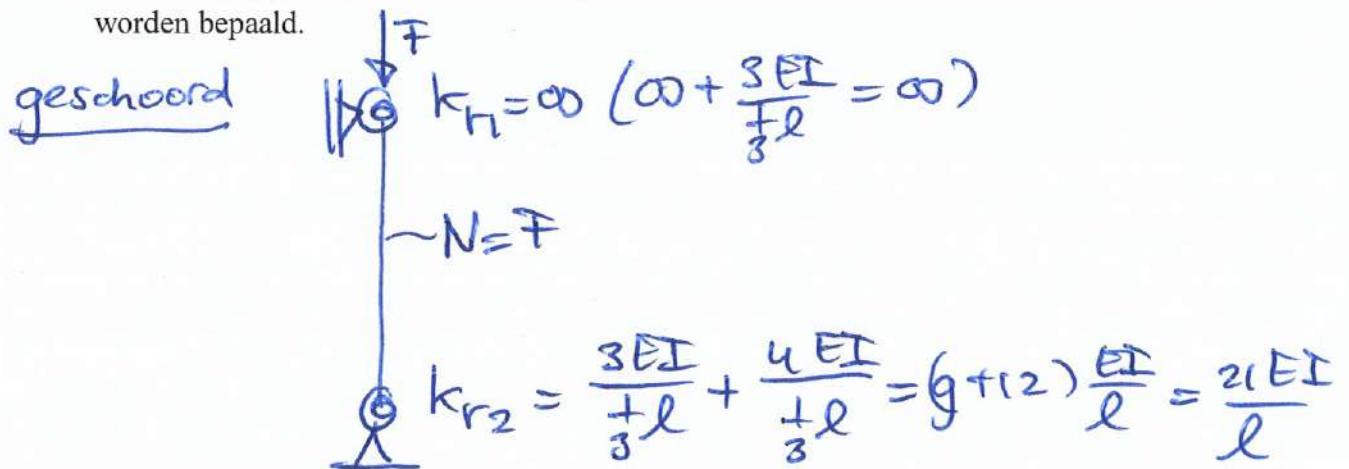
- a. Schets onderstaand de knikvorm van deze constructie, zo nauwkeurig mogelijk.

geschaard, geen horizontale verplaatsing.



--	--	--	--	--	--	--	--

- b. Geef een schets van het model met veren waarmee de kniklast van deze constructie kan worden bepaald.



- c. Bepaal de kniklast F_k van deze constructie, uitgedrukt in EI en l .

geschoord - rho-formule (ezelsbruggetje: Gratisde Rekenmachine)

$$\rho_1 = \frac{k_{r1} \cdot l}{EI} = \infty$$

$$\rho_2 = \frac{k_{r2} \cdot l}{EI} = \frac{21EI}{l} \cdot \frac{l}{EI} = 21$$

$$F_k = \frac{(5 + 2 \cdot \infty)(5 + 2 \cdot 21)}{(5 + \infty) \cdot (5 + 21)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$\downarrow = 2$

$$= 2 \cdot \frac{47}{26} \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$= 3,62 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

--	--	--	--	--	--	--	--

d. Bepaal de kniklengte l_k van deze constructie, uitgedrukt in l .

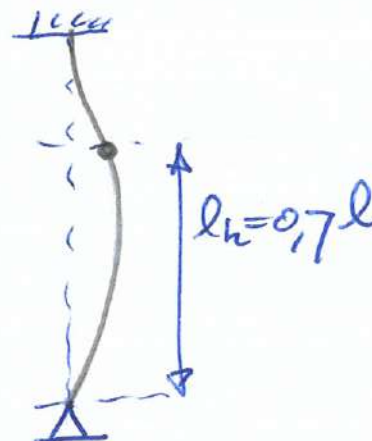
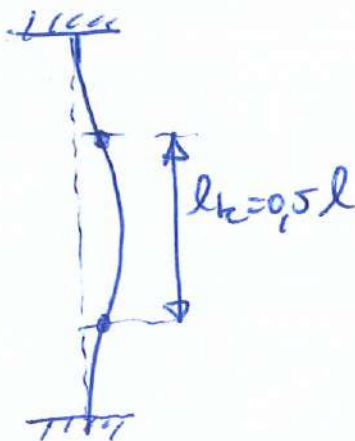
$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot 3,62 = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \Rightarrow l_k^2 = \frac{l^2}{3,62}$$

$$\Rightarrow l_k = \sqrt{\frac{1}{3,62}} \cdot l = \sqrt{0,276} \cdot l \approx 0,53l$$

e. Controleer of de gevonden kniklast en kniklengte zich bevinden tussen twee mogelijke extremen die u voor dit geval zou kunnen bedenken (denk aan variatie buigstijfheden). Geef daarbij kleine schetsjes van de knikvormen voor die extremen.

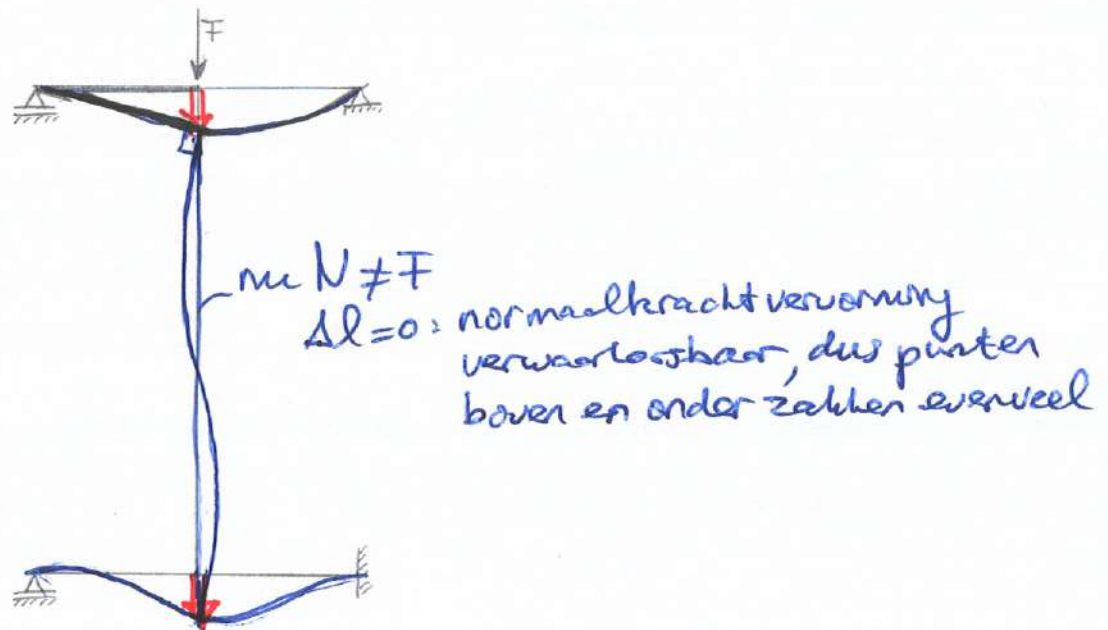
$$0,5l \leq 0,53l \leq 0,7l$$

$\left. \begin{array}{l} \text{boven } k=\infty \\ \text{en onder } k=\infty \end{array} \right\} \text{boven } k=\infty$
 $\left. \begin{array}{l} \text{boven } k=\infty \\ \text{onder } k=0 \end{array} \right\} \text{onder } k=0$



--	--	--	--	--	--	--	--

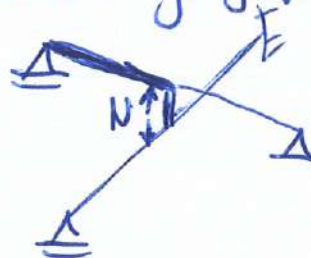
- f. Stel voor deze deelvraag: de oplegging midden onder de kolom wordt verwijderd, zie de schets hieronder. Belasting, overige opleggingen, buigstijfheden en afmetingen blijven hetzelfde. Gevraagd: omschrijf wat er verandert in de methode om de kniklast te bepalen, ten opzichte van de vorige situatie. U hoeft de kniklast niet te bepalen, alleen de methode te omschrijven. Gebruik maximaal 10 regels tekst en/of schetsjes.



Belangrijkste verandering:

- nu $N \neq F$, afhankelijk van buigstijfheid onder versus buigstijfheid boven verdeelt F zich, vergelijk twee kruislings geplaatste balken

dus $N \neq F$



Daarnaast:

- rotatieveren zijn anders
 boven



onder



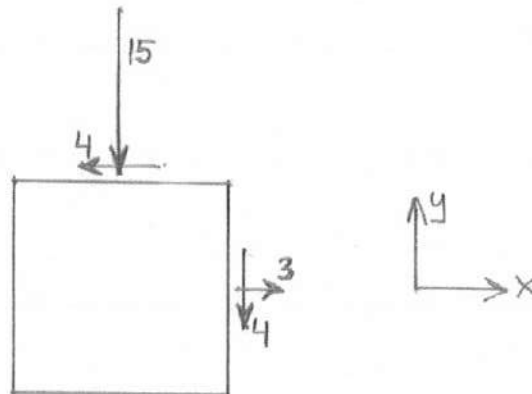
geen "middensteunpunt" meer

rotatie voor deze gevallen te bepalen bij
 aanbrengen Moment

--	--	--	--	--	--	--	--

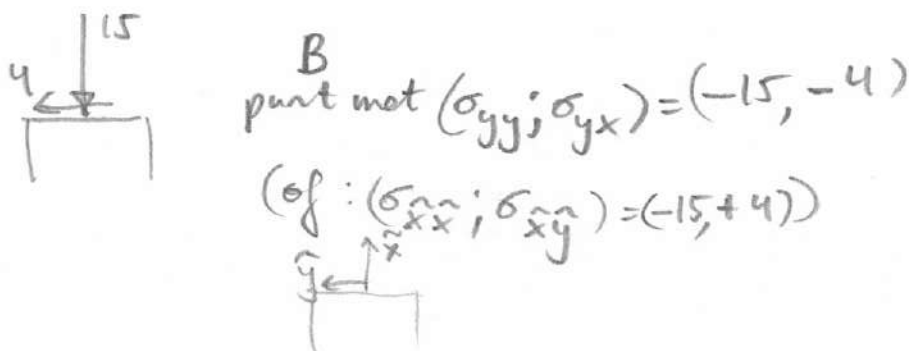
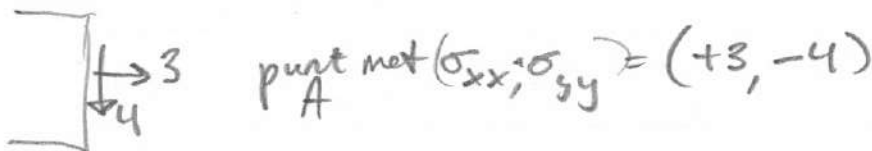
Opgave 6 (ongeveer 40 minuten)

Gegeven: een homogene vlakke spanningstoestand volgens onderstaande figuur. De spanningen in N/mm^2 zijn getekend op twee onderling loodrechte vlakjes.



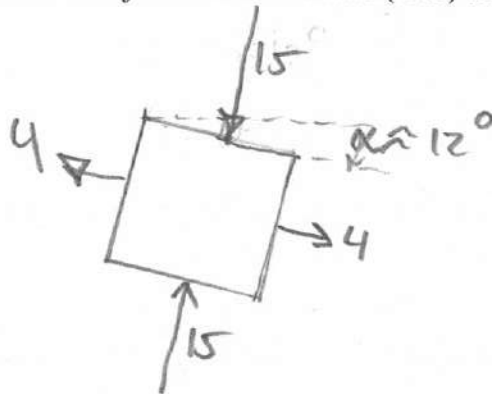
Gevraagd:

- a) Teken de cirkel van Mohr voor de spanningen en geef duidelijk het richtingencentrum en de hoofdrichtingen aan. Gebruik het ruitjespapier op de volgende bladzijde. Draai dat blad linksom. Neem de verticale as behoorlijk naar rechts.



--	--	--	--	--	--	--	--

- b) Bepaal uit de cirkel van Mohr de hoofdspanningen en geef deze onderstaand weer in een schets van een vierkant elementje met de juiste oriëntatie (elementje tekenen in de richting van de hoofdspanningen; de hoofdspanningen aangeven op alle vier de zijden; geef de hoek tussen het blokje en de horizontaal (x-as) aan in graden).



zie cirkel van Mohr

- c) Controleer de grafisch gevonden hoek tussen de grootste hoofdspanning en de horizontaal (x-as) door gebruik te maken van een formule die overeenkomt met de theorie van de cirkel van Mohr. Een nauwkeurigheid van 1 á 2 graden is voldoende.

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sigma_{xy}}{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})} = \frac{2 \cdot 4}{(3 + 15)} = \frac{8}{18} = 0,44$$

$$2\alpha = \arctan 0,44 \Rightarrow 2\alpha = 0,4276$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 0,21 \text{ rad} = 0,21 \cdot \frac{180}{\pi} \approx 12^\circ$$

↑ afgelezen

- d) Stel: het isotrope materiaal heeft een druksterkte van 25 N/mm^2 en een treksterkte 5 N/mm^2 . Stel: de belasting die de spanningstoestand genereert, wordt proportioneel opgevoerd. Zal het materiaal bezwijken op druk of op trek? Motiveer uw antwoord.

opschalen tot bezwijken op trek: $\frac{5}{4} = 1,25$

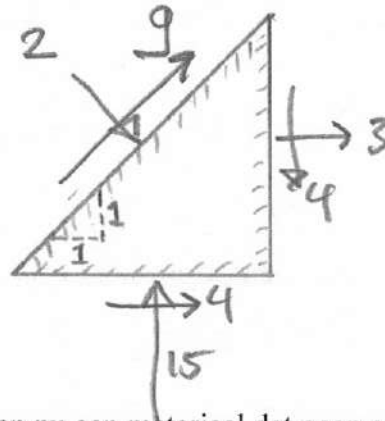
" " " op druk: $\left| \frac{25}{16} \right| = 1,56$

σ_2

laagste maatgevend, dus het materiaal zal bezwijken op trek

--	--	--	--	--	--	--	--

- e) Bepaal de spanningen op onderstaand elementje, waarvan de schuine zijde een helling heeft van 1:1. Teken deze spanningen op alle drie de zijden in onderstaande figuur, in de goede richting, schrijf de waarden erbij.



zie cirkel
 vanuit RC onder 45°

- f) Stel: we hebben nu een materiaal dat geen enkele trek op kan nemen (het is bijv. een heel zwak soort beton of metselwerk). En: stel we gaan het materiaal horizontaal voorspannen: we voegen horizontale drukspanning toe bovenop de reeds aanwezige spanningstoestand. Hoe groot moet de horizontale voorspanning zijn opdat inderdaad nergens in het materiaal trek optreedt? Laat zien hoe u dit aanpakt, benaderend, met een toevoeging in de tekening van de cirkel van Mohr twee pagina's terug.

punt B $(-15; -4)$ blijft 't zelfde
 punt A $(3; -4)$ moet naar links zodanig dat
 cirkel precies in de oorsprong terechtkomt (hoofdsp = 0)

grafisch uitgewerkt en figuur cirkel Mohr.
 kan proberen vanuit $RC + \theta$ (zelfde straal)
 of via middellloodlijn van $RC + \theta$

punt A' dat erbij hoort is dan $\approx (-1; -4)$
 opv A $(+3; -4)$

dus horizontale voorspanning -4 N/mm^2

FORMULEBLAD (scheur dit deel los van het werk)

(1)		$\theta_2 = \frac{TL}{EI}; \quad w_3 = \frac{TL^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{FL^2}{2EI}; \quad w_3 = \frac{FL^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{qL^3}{6EI}; \quad w_3 = \frac{qL^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{FL}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{FL}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{FL^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{FL^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{FL^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{TL}{EI}; \quad \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{TL}{EI}; \quad w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

vergeet-mij-nietjes

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)			statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)		
(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{Tl}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{32} \frac{Tl^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} Tl; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$			
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{Fl^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{7}{768} \frac{Fl^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} Fl; \quad V_1 = \frac{11}{16} F; \quad V_2 = \frac{5}{16} F$			
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{ql^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{192} \frac{ql^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} ql^2; \quad V_1 = \frac{5}{8} ql; \quad V_2 = \frac{3}{8} ql$			
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{Fl^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} Fl; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$			
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} ql^2; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} ql$			
(b)		$\theta_1 = \frac{1}{16} \frac{Tl}{EI}; \quad w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} Tl; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$			
<p>Eenke formules voor prismaatische liggers met buigstijfheid EI.</p> <p>T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.</p> <p>M_1 en V_1 zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede 1 van de ligger ten gevolge van de oplegkrachten.</p>					

Enkele formules voor prismaatiese liggers met buigstijfheid EI.
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, knocht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M₁ en V₁ zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede 1 van de ligger ten gevolge van de oplegkrachten.

Spanningen en rekken :

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \\ \epsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} = G \gamma_{xy} \end{cases} \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

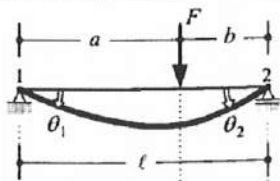
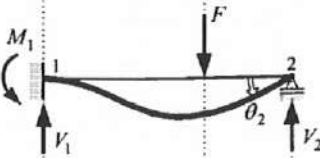
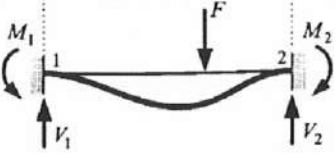
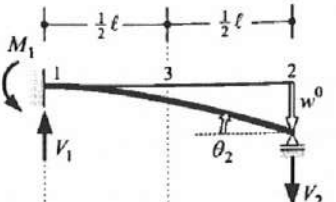

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \text{ voor } i, j = x, y$$

$$\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$$

von Mises : $\frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \leq \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

(c)		
(d)		
(e)		
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

drie bij-de handjes

zettingen

Tensortransformatie formules in x-y assenstelsel:

$$k_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) + \frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy}) \cos 2\alpha + k_{xy} \sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) - \frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy}) \cos 2\alpha - k_{xy} \sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy}) \sin 2\alpha + k_{xy} \cos 2\alpha$$

Hoofdwaarden en hoofdrichtingen:

$$\tan 2\alpha = \frac{2k_{xy}}{(k_{xx} - k_{yy})}; \quad k_1, k_2 = \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\right]^2 + k_{xy}^2}$$

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_k = l \sqrt{4 + \frac{10}{\rho}} \quad \text{met: } \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

Of:

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\text{en } S_z(x) = M' - Fw'$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3 \alpha \sin \alpha x - C_4 \alpha \cos \alpha x$$

$$M(x) = EI \times [C_3 \alpha^2 \cos \alpha x + C_4 \alpha^2 \sin \alpha x]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

η -formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met: } \begin{aligned} \eta_1 &= 4 + \frac{10}{\rho_1}; \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 &= 4 + \frac{10}{\rho_2}; \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} \end{aligned}$$

ρ -formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met: } \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

Kromming t.g.v temperatuursgradient:

“Vrije” kromming t.g.v lineair temperatuursverloop over de hoogte h van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$