

--	--	--	--	--	--	--	--

*Jan Rots*

**UITWERKINGEN**  
*concept*

## Antwoordformulier

### CTB2210 Constructiemechanica 3

**Maak alle opgaven op dit antwoordformulier. Lever dit formulier in.**

Kladpapier wordt niet ingenomen.

Het nietje mag niet verwijderd worden.

**Zet op alle bladen uw naam en studienummer.**

Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

**Relevante berekeningen vermelden.**

Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.

Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier. Tenzij anders vermeld, wordt het eigen gewicht van een constructie buiten beschouwing gelaten.

**Aantal opgaven: 6.**

De opgaven hebben verschillende weging. Een schatting van het gewicht is in tijd weergegeven.

Relevante **formulebladen** zijn bijgevoegd.

**Toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:**

Rekenmachine, grafische rekenmachine, tekenmaterialen waaronder passer. *Vanwege Covid mogen dit keer het boek Statisch onbepaalde constructies en de dictaten Stabieliteit en Elasticiteitsleer worden gebruikt.* Verder niets.

**Niet toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:**

Aantekeningen, andere formulebladen, woordenboeken, computer, mobiele telefoon, smart phone of apparaten met vergelijkbare functies. Zoals gemeld op Brightspace.

**Mobiel UIT en opbergen in tas.**

Elk vermoeden van fraude wordt gemeld bij de examencommissie.

*on-campus*

*en*

*on-line, met varianten*

--	--	--	--	--	--	--

**Opgave 2** (ongeveer 25 minuten)

Gegeven: onderstaande portalen I en II hebben dezelfde afmetingen, dezelfde buigstijfheden en worden op dezelfde wijze belast door drie puntlasten op beide regels waarvan er twee op de uiteinden en één in het midden aangrijpt, zoals aangegeven.

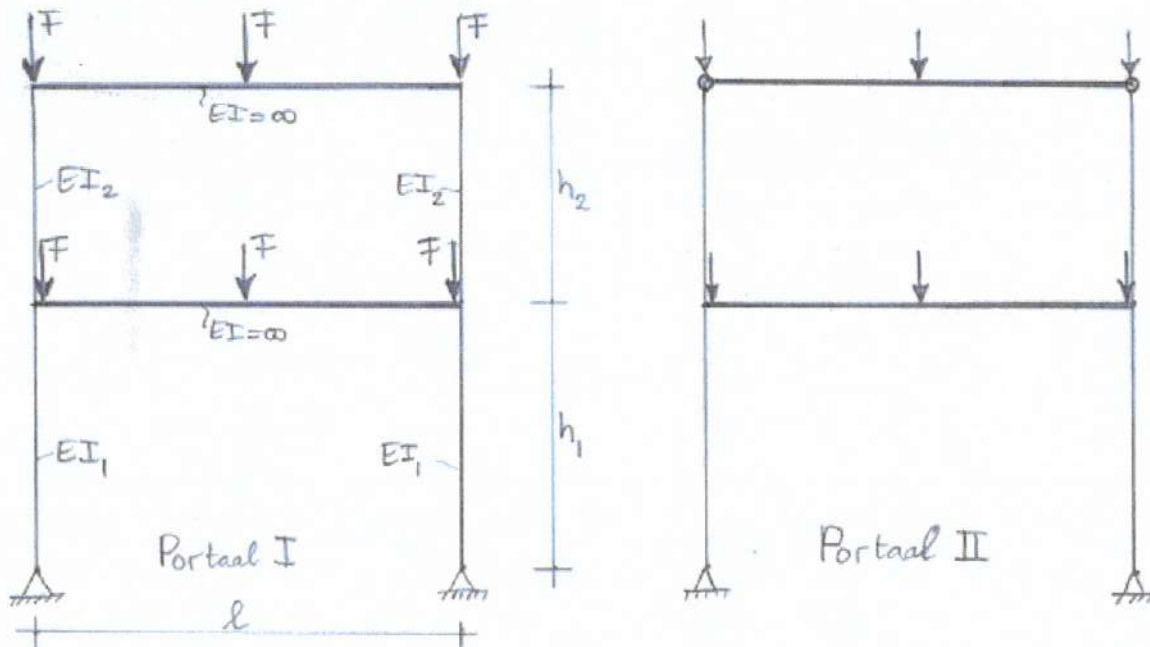
De portalen zijn scharnierend opgelegd.

De stijlen zijn momentvast verbonden met de regels, met uitzondering van de verbinding bij de bovenste regel in portaal II, daar bevinden zich scharnieren als aangegeven.

Alle regels zijn oneindig buigstijf.

De stijlen hebben een buigstijfheid als aangegeven.

Houd voor de berekening aan:  $l = 6$  m,  $h_1 = 4$  m,  $h_2 = 3$  m,  $EI_1 = 20000$  kNm<sup>2</sup>,  $EI_2 = 4000$  kNm<sup>2</sup>.  
 Reken met  $\pi^2 = 10$ .



Gevraagd:

a. De waarde  $F = F_k$  waarbij portaal I bezwijkt door instabiliteit.

Laat duidelijk uw berekeningen zien en controles voor meerdere knikmogelijkheden.

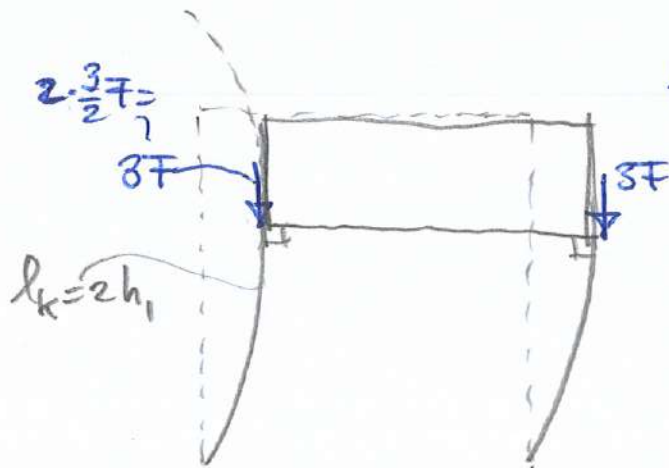
*eerste mogelijkheid:*

bovenste kolommen knikken  
 ongeschoord,  $l_k = h_2$

$$\frac{3}{2} F_k = \frac{\pi^2 EI_2}{h_2^2} = \frac{10 \cdot 4000}{3^2}$$

$$\Rightarrow F_k = 2963 \text{ kN}$$

--	--	--	--	--	--	--



tweede mogelijkheid:

onderste kolommen knikken  
 ongeschoord,  $l_k = 2h_1$

$$3F_k = \frac{\pi^2 EI_1}{(2h_1)^2} = \frac{10 \cdot 20000}{(2 \cdot 4)^2}$$

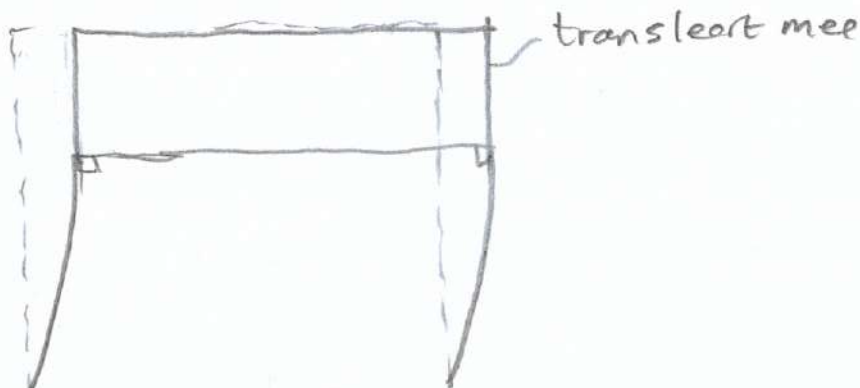
$$F_k = 1042 \text{ kN}$$

laagste van de twee maatgevend:

$F_k = 1042 \text{ kN}$  onderste kolommen

b. Een schets van de bijbehorende (maatgevende) knikvorm voor portaal I.

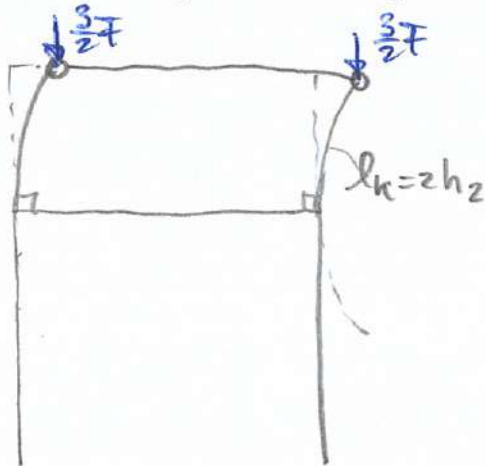
zie ook boven





--	--	--	--	--	--	--

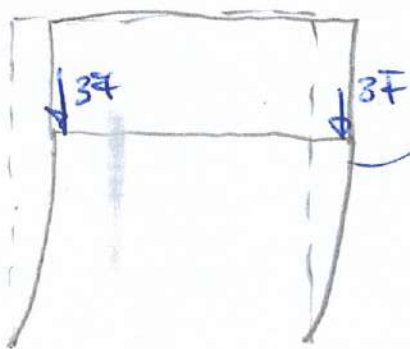
- c. De waarde  $F = F_k$  waarbij portaal II bezwijkt door instabiliteit.  
 Laat duidelijk uw berekeningen zien en controles voor meerdere knikmogelijkheden.



ongeschoord,  $l_k = 2h_2$

$$\frac{3}{2} F_k = \frac{\pi^2 EI_2}{(2h_2)^2} = \frac{10.4000}{(2 \cdot 3)^2}$$

$$F_k = 741 \text{ kN}$$

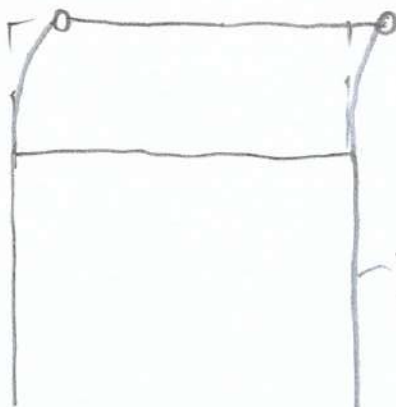


zelfde als 2<sup>e</sup> knikvorm bij  
 vraag a:  
 $F_k = 1042 \text{ kN}$

Nu: bovenste maatgevend,  $F_k = 741 \text{ kN}$

- d. Een schets van de bijbehorende (maatgevende) knikvorm voor portaal II.

Zie boven

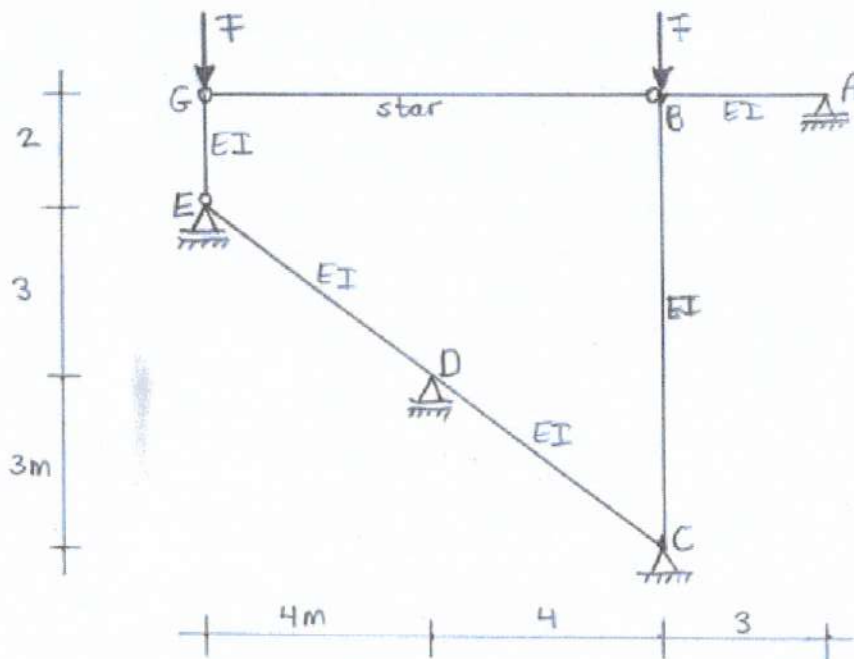


vervormt en  
 verplaatst niet

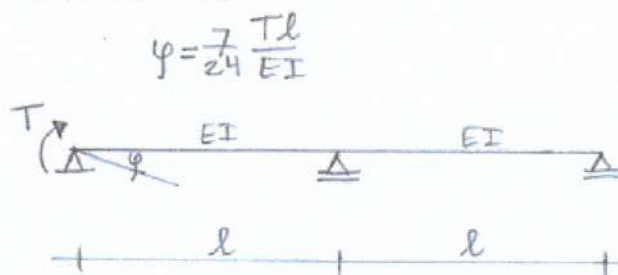
--	--	--	--	--	--	--	--

**Opgave 3** (ongeveer 35 minuten)

Gegeven: onderstaande constructie, met twee kolommen belast door een verticale puntlast  $F$ . Kolom BC is momentvast verbonden met ligger BA en met de doorgaande schuine ligger CDE. Kolom GE is een pendel. Let goed op de posities van scharnieren. Staaf BG is star. De overige staven hebben buigstijfheid  $EI$ . De lengtematen zijn aangegeven. Normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd. Een blad met relevante formules is toegevoegd aan dit antwoordformulier. Houd voor de numerieke uitwerking aan:  $EI = 16000 \text{ kNm}^2$ .

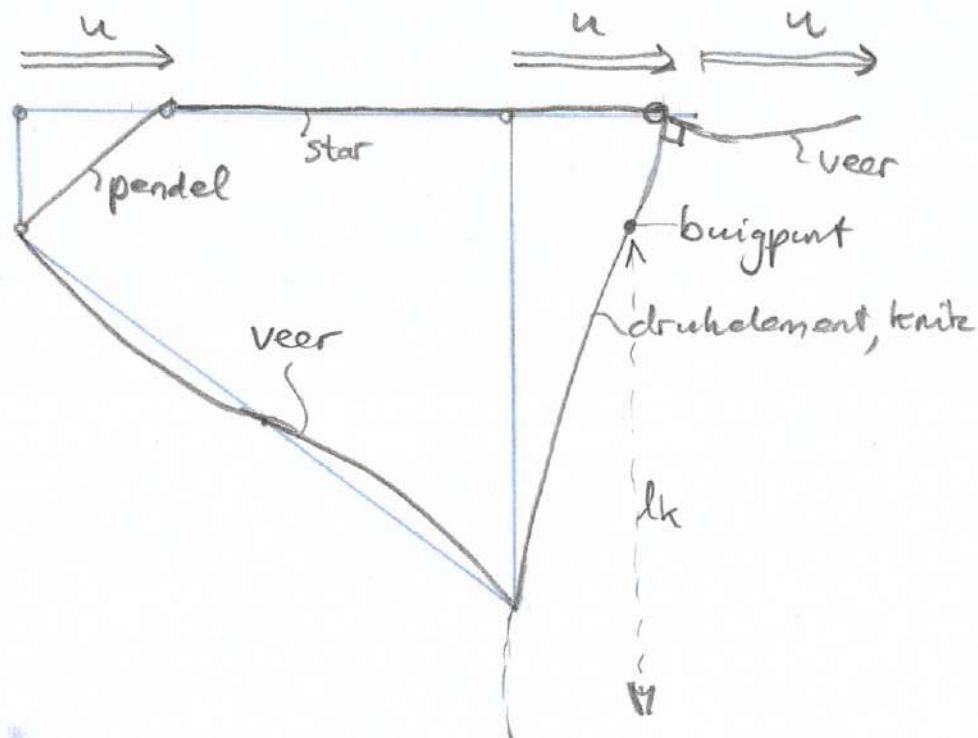


Extra gegeven: de relatie tussen rotatie  $\varphi$  en koppel  $T$  voor onderstaande statisch onbepaalde ligger is gegeven, zie figuur.



Gevraagd:

- Schets bovenaan de volgende pagina de globale, maatgevende knikvorm voor deze constructie. Geef duidelijk aan welke delen buigen en geef indicatief aan waar een buigpunt in het op druk belaste deel te verwachten is.



- b. Geef een schets van het model waarmee de globale kniklast van deze constructie kan worden bepaald. Geef daarbij aan hoe u met de puntlasten in dit rekenmodel omgaat. Let op aspecten als rotatieveren, geschoord/ongeschoord, pendels.

constructie kan vrij  $\rightarrow$  ongeschoord  $\rightarrow$  eta-formule

$$F_{\text{tot}} = F + F \cdot \frac{8}{2} \cdot \frac{l_{\text{stab. element}}}{l_{\text{pendel}}} = F + 4F = 5F$$

aangependelende belasting

$$k_{r1} = \frac{3EI}{l_{BA}} \quad (\text{veer rechtsboven}) = \frac{3EI}{3} = EI$$

$$k_{r2} = \frac{24}{7} \frac{EI}{l_{DC} \text{ (DE)}} \quad (\text{veer links onder}) = \frac{24}{7} \frac{EI}{5} = 0,686EI$$

want gegeven:  $\varphi = \frac{7}{24} \frac{Fl}{EI}$

--	--	--	--	--	--	--	--

- c. Bereken de grootte van  $F$  waarbij knik optreedt. Laat duidelijk alle stappen in uw berekening zien.

$$\rho_1 = \frac{k_{r1} \cdot l_{BC}}{EI} = \frac{EI \cdot \delta}{EI} = \delta \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = 4 + \frac{10}{\rho_1} = 4 + \frac{10}{\delta} = 5,25$$

$$\rho_2 = \frac{k_{r2} \cdot l_{BC}}{EI} = \frac{0,686 EI \cdot \delta}{EI} = 5,49 \quad \eta_2 = 4 + \frac{10}{\rho_2} = 4 + \frac{10}{5,49} = 5,82$$

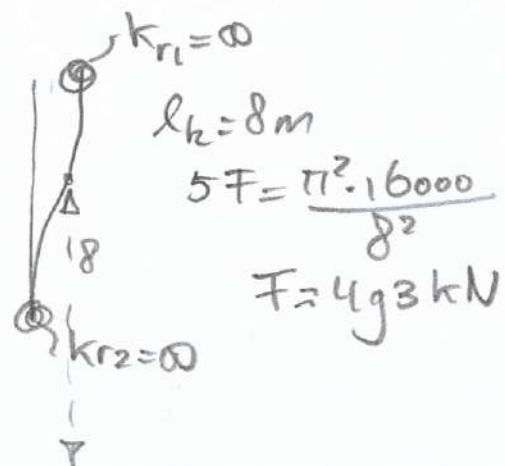
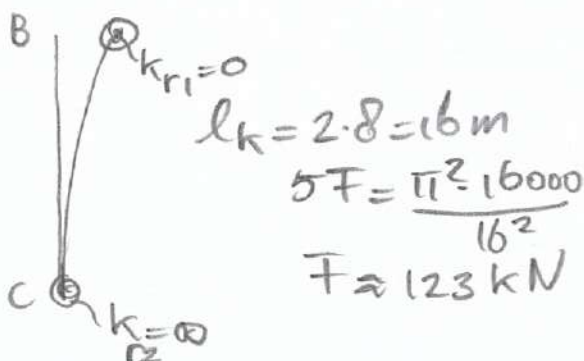
$$\begin{aligned} F_k^{BC} &= \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 - (\eta_1 + \eta_2 - 4)^2} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l_{BC}^2} \\ &= \frac{(5,25 + 5,82)^2}{5,25 \cdot 5,82 - (5,25 + 5,82 - 4)^2} \cdot \frac{\pi^2 EI}{\delta^2} \\ &= 0,0874 EI \quad \left. \begin{array}{l} EI = 16000 \text{ kNm}^2 \\ F_k^{BC} = 1399 \text{ kN voor BC} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

voor deze gehele constructie, met aangepaste belasting:  $5F = 1399 \text{ kN}$

$$\Rightarrow \underline{F = 280 \text{ kN}}$$

dan treedt knik van de constructie op

- d. Controleer of de gevonden knikkraft zich bevindt tussen twee mogelijke extremen die u voor dit geval zou kunnen bedenken.






--	--	--	--	--	--	--	--

$$123 < 280 < 493 \text{ kN}$$

²  
 dus ligt tussen de twee extremen en

- e. Er is ook een lokale, partiële knikvorm. Toon aan dat deze lokale knik niet maatgevend is, en verklaar dat tevens op basis van geschetste kniklengtes.

pendel GE kan knikken



$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_{GE}^2} \approx \frac{10 \cdot 16000}{2^2} = 40000 \text{ kN}$$

veel groter,  
 niet maatgevend.

$l_k = l_{GE}$

- f. Stel: de constructie wordt belast door een horizontale kracht in knoop G, en de bijbehorende eerste-orde uitwijking bij deze horizontale kracht is 50 mm. Gevraagd: bepaal de tweede-orde uitwijking in knoop G voor het geval dat  $F = 120 \text{ kN}$ .

$$n = \frac{F_k}{F} = \frac{280}{120} = 2,33$$

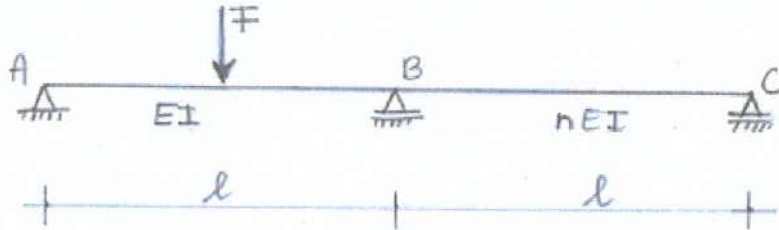
$$u_{\text{tweedeorde}} = \frac{n}{n-1} \cdot u_{\text{eersteorde}} = \frac{2,33}{2,33-1} \cdot 50 = 88 \text{ mm}$$



--	--	--	--	--	--	--

**Opgave 6** (ongeveer 20 minuten)

Gegeven: onderstaande doorgaande ligger waarvan het linkerveld buigstijfheid  $EI$  heeft en het rechterveld buigstijfheid  $nEI$ , als aangegeven. Het linkerveld wordt belast door een puntlast  $F$  in het midden.



Gevraagd:

- a. Inleidende theorievraag: Beschrijf waarom de krachtsverdeling in een statisch onbepaalde constructie doorgaans gevoelig is voor stijfheidsverschillen, en de krachtsverdeling in een statisch bepaalde constructie niet. Gebruik maximaal 8 regels tekst met desgewenst een schetsje.

*Statisch bepaald: M-lijn puur bepaald door evenwicht. Niet afhankelijk van stijfheden. "Voelt niet wat de EI's zijn".*

*bijv. altijd*

*Statisch onbepaald: Naast evenwicht ook vormveranderingsvoorwaarde nodig. Via v.v.v. komen de stijfheden in het spel.*

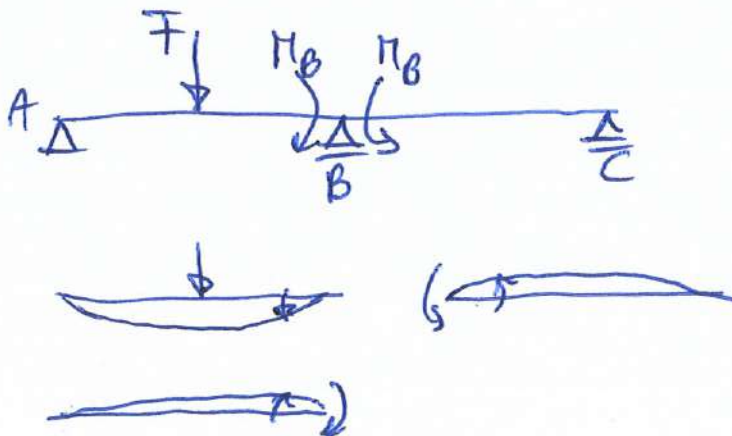
*bijv.*

*of*

*staaldraad*  
*elastische* *of andersom → andere krachtwerving*

- b. Bepaal het steunpuntmoment  $M_B$ , uitgedrukt in  $n$ ,  $F$  en  $l$ . Relevante vergeet-me-nietjes zijn toegevoegd aan dit antwoordformulier.

--	--	--	--	--	--	--



$$\varphi_B^{\text{links}} = \varphi_B^{\text{rechts}}$$

$$+\frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EI} - \frac{1}{3} \frac{M_B l}{EI} = +\frac{1}{3} \frac{M_B l}{nEI}$$

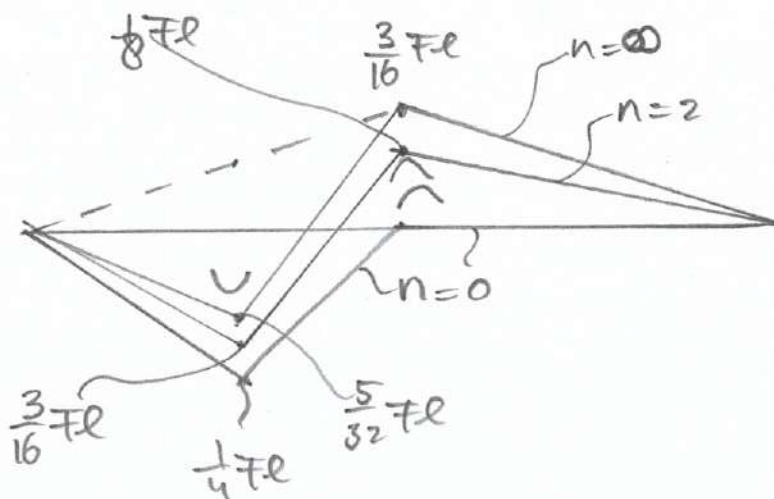
$$\Rightarrow -\frac{1}{3} M_B - \frac{1}{3} \frac{M_B}{n} = -\frac{1}{16} Fl$$

$$\Rightarrow M_B \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{16} Fl \Rightarrow M_B \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{16} Fl$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3}{16} Fl$$

$$M_{\text{veld}} = \frac{1}{16} Fl + \frac{1}{4} Fl = \frac{3}{16} Fl$$

- c. Schets onderstaand de momentenlijn voor de constructie, voor het geval dat  $n=2$ . Schets in dezelfde figuur ook de twee extreme gevallen voor de momentenlijn, voor  $n=0$  en  $n=\infty$ . Geef buigtekens en markante waarden aan.



$$n=2 \Rightarrow M_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} Fl = \frac{1}{8} Fl$$

$$n=0 \Rightarrow M_B = 0$$

$$n=\infty \Rightarrow M_B = \frac{3}{16} Fl$$

$$M_{\text{veld}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} Fl + \frac{1}{4} Fl = \left(\frac{3}{32} + \frac{8}{32}\right) Fl = \frac{5}{32} Fl \approx 0,16 Fl$$

# FORMULEBLAD (scheur dit deel los van het werk)

(1)		$\theta_2 = \frac{Fl}{6EI}$ ; $w_2 = \frac{Fl^3}{48EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{Fl^2}{24EI}$ ; $w_2 = \frac{Fl^3}{48EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{ql^3}{6EI}$ ; $w_2 = \frac{ql^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{Fl}{EI}$ ; $\theta_2 = \frac{1}{3} \frac{Fl}{EI}$ ; $w_2 = \frac{1}{16} \frac{Fl^3}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EI}$ ; $w_2 = \frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}$ ; $w_2 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{Fl}{EI}$ ; $\theta_3 = \frac{1}{12} \frac{Fl}{EI}$ ; $w_2 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)      vergeet-mij-nietjes

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{Fl}{EI}$ ; $w_2 = \frac{1}{32} \frac{Fl^3}{EI}$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{Fl^2}{EI}$ ; $w_2 = \frac{7}{768} \frac{Fl^3}{EI}$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{ql^3}{EI}$ ; $w_2 = \frac{1}{192} \frac{ql^4}{EI}$
(10)		$\theta_1 = \frac{1}{192} \frac{Fl}{EI}$ ; $\theta_2 = \frac{1}{96} \frac{Fl}{EI}$ ; $w_2 = \frac{1}{192} \frac{Fl^3}{EI}$
(11)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{192} \frac{Fl^2}{EI}$ ; $w_2 = \frac{1}{384} \frac{Fl^3}{EI}$
(b)		$\theta_1 = \frac{1}{16} \frac{Fl}{EI}$ ; $w_2 = 0$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)      statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

Enkele formules voor prisma's met buigstijfheid EI.  
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.  
M1 en V1 zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede 1 van de ligger ten gevolge van de oplegkrachten.

## Spanningen en rekken :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \\ \epsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{array} \right. \text{ of } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} = G \gamma_{xy} \end{array} \right. \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \text{ voor } i, j = x, y$$

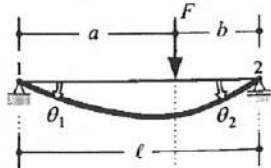
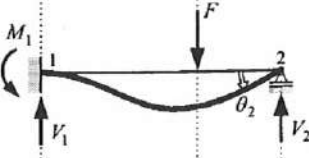
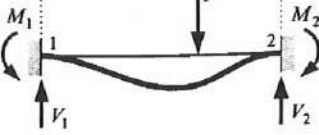
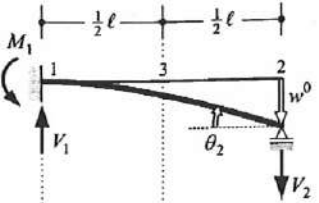
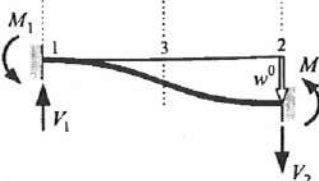
$$\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$$

von Mises :  $\frac{1}{6} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \leq \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend



## FORMULEBLAD (vervolg)

(c)		$\theta_1 = \frac{F a b (\ell + b)}{6 E I \ell} = \frac{F \ell^2}{6 E I} \left( 2 \frac{a}{\ell} - 3 \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{F a b (\ell + a)}{6 E I \ell} = \frac{F \ell^2}{6 E I} \left( \frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{F b (\ell^2 - b^2)}{2 \ell^2} = F \ell \left( \frac{a}{\ell} - \frac{3}{2} \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{F b (3 \ell^2 - b^2)}{2 \ell^3} = F \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{F a^2 (3 \ell - a)}{2 \ell^3} = F \left( \frac{3}{2} \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{F a^2 b}{4 E I \ell} = \frac{F \ell^2}{4 E I} \left( \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{F a b^2}{\ell^2} = F \ell \left( \frac{a}{\ell} - 2 \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{F b^2 (\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left( 1 - 3 \frac{a^2}{\ell^2} + 2 \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{F a^2 b}{\ell^2} = F \ell \left( \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{F a^2 (\ell + 2b)}{\ell^3} = F \ell \left( 3 \frac{a^2}{\ell^2} - 2 \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3 E I}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3 E I}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6 E I}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12 E I}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

drie bij-de handjes

zettingen

**Tensortransformatie formules in x-y assenstelsel:**

$$k_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{2} (k_{xx} + k_{yy}) + \frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \cos 2\alpha + k_{xy} \sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{2} (k_{xx} + k_{yy}) - \frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \cos 2\alpha - k_{xy} \sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \sin 2\alpha + k_{xy} \cos 2\alpha$$

**Hoofdwwaarden en hoofdrichtingen:**

$$\tan 2\alpha = \frac{2k_{xy}}{(k_{xx} - k_{yy})}; \quad k_1, k_2 = \frac{1}{2} (k_{xx} + k_{yy}) \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \right]^2 + k_{xy}^2}$$

## FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_k = l \sqrt{4 + \frac{10}{\rho}}$$

$$\text{met: } \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

Of:

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\text{en } S_z(x) = M' - Fw'$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3 \alpha \sin \alpha x - C_4 \alpha \cos \alpha x$$

$$M(x) = EI \times [C_3 \alpha^2 \cos \alpha x + C_4 \alpha^2 \sin \alpha x]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

$\eta$ -formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met: } \begin{aligned} \eta_1 &= 4 + \frac{10}{\rho_1}; \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 &= 4 + \frac{10}{\rho_2}; \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} \end{aligned}$$

$\rho$ -formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met: } \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

Kromming t.g.v temperatuursgradient:

“Vrije” kromming t.g.v lineair temperatuursverloop over de hoogte  $h$  van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$