

--	--	--	--	--	--	--

Antwoordformulier

CTB2210 Constructiemechanica 3

Maak alle opgaven op dit antwoordformulier. Lever dit formulier in.

Kladpapier wordt niet ingenomen.
Het nietje mag niet verwijderd worden.

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.

Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.

Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.
Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier. Tenzij anders vermeld, wordt het eigen gewicht van een constructie buiten beschouwing gelaten.

Aantal opgaven: 6.

De opgaven hebben verschillende weging. Een schatting van het gewicht is in tijd weergegeven.

Relevante **formulebladen** zijn bijgevoegd.

Toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:

Rekenmachine, grafische rekenmachine, tekenmaterialen waaronder passer. *Vanwege Covid mogen dit keer het boek Statisch onbepaalde constructies en de dictaten Stabiliteit en Elasticiteitsleer worden gebruikt.* Verder niets.

Niet toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:

Aantekeningen, andere formulebladen, woordenboeken, computer, mobiele telefoon, smart phone of apparaten met vergelijkbare functies. Zoals gemeld op Brightspace.

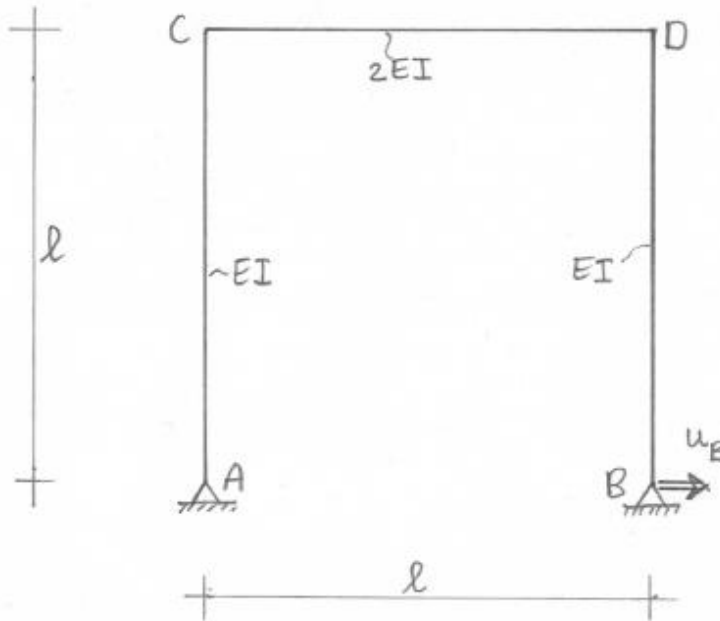
Mobiel UIT en opbergen in tas.

Elk vermoeden van fraude wordt gemeld bij de examencommissie.

--	--	--	--	--	--	--

Opgave 1 (ongeveer 35 minuten)

Gegeven: Onderstaand twee-scharnierspant. Het spant ondergaat bij scharnieroplegging B een opgelegde horizontale verplaatsing u_B . Lengtematen en buigstijfheden zijn aangegeven. Normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd. Houd voor de berekening aan: $EI = 64000 \text{ kNm}^2$, $l = 4 \text{ m}$, $u_B = 10 \text{ mm}$.



Gevraagd:

- Bereken de horizontale kracht bij B. Aanwijzing: een handige mogelijkheid is om die horizontale kracht als statisch onbepaalde te kiezen en te werken met momentenvlakstellingen. U mag eerst symbolisch te werk gaan en aan het eind de numerieke waarden invullen, of direct numeriek te werk gaan. Laat duidelijk alle stappen in uw aanpak zien.

Opmerking: Deze constructie werd bij de opzet van het oude vak opgelost met momentenvlakstellingen. Deze methode maakt geen deel meer uit van het vak, dus is deze som met verplaatsbare hoekpunten is ook geen onderdeel meer van het vak.

TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
26 januari 2022 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER
NAAM

--	--	--	--	--	--	--

...vervolg...

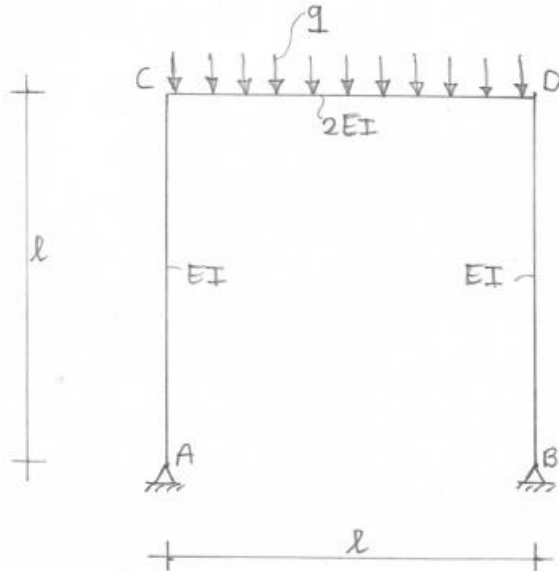
--	--	--	--	--	--	--

- b. Schets onderstaand naast elkaar de resulterende momentenlijn en de vervormingslijn behorend bij vraag a. Geef bij de M-lijn markante waarden en buigtekens aan.

- c. Stel nu: scharnier B ondergaat niet een horizontale verplaatsing u_B , maar een *verticale* verplaatsing w_B . Geef in maximaal 6 regels tekst met een schetsje aan hoe u dit vraagstuk zou oplossen, op dezelfde wijze als bij deelvraag a) of op een andere manier? Geef ook een indicatie van de resulterende momentenverdeling, in kwalitatieve zin.

--	--	--	--	--	--	--

- d. Stel nu: het spant wordt alleen belast door een gelijkmatig verdeelde verticale belasting q op de bovenregel, als onderstaand aangegeven. Houd voor de berekening aan: $q = 80 \text{ kN/m}$. Bereken de momentenverdeling en teken de momentenlijn voor deze constructie belast door uitsluitend de q -last. Geef buigtekens en markante waarden aan. U mag eerst symbolisch te werk gaan en aan het eind de numerieke waarden invullen, of direct numeriek te werk gaan. Aanwijzing: maak gebruik van symmetrie.



--	--	--	--	--	--	--

...vervolg...

- e. Stel: de q-last (deelvraag d) en de opgelegde horizontale verplaatsing van scharnier B (deelvraag a) treden gecombineerd op. Zal het veldmoment in de bovenregel dan toenemen of afnemen ten opzichte van de situatie met alleen de q-last? Motiveer uw antwoord met een schetsje en maximaal vijf regels tekst. Let op: u kunt deze vraag ook in kwalitatieve zin beantwoorden, mocht u bij eerdere deelvragen het rekenspoor bijster zijn geraakt.

--	--	--	--	--	--	--

Opgave 2 (ongeveer 25 minuten)

Gegeven: onderstaande portalen I en II hebben dezelfde afmetingen, dezelfde buigstijfheden en worden op dezelfde wijze belast door drie puntlasten op beide regels waarvan er twee op de uiteinden en één in het midden aangrijpt, zoals aangegeven.

De portalen zijn scharnierend opgelegd.

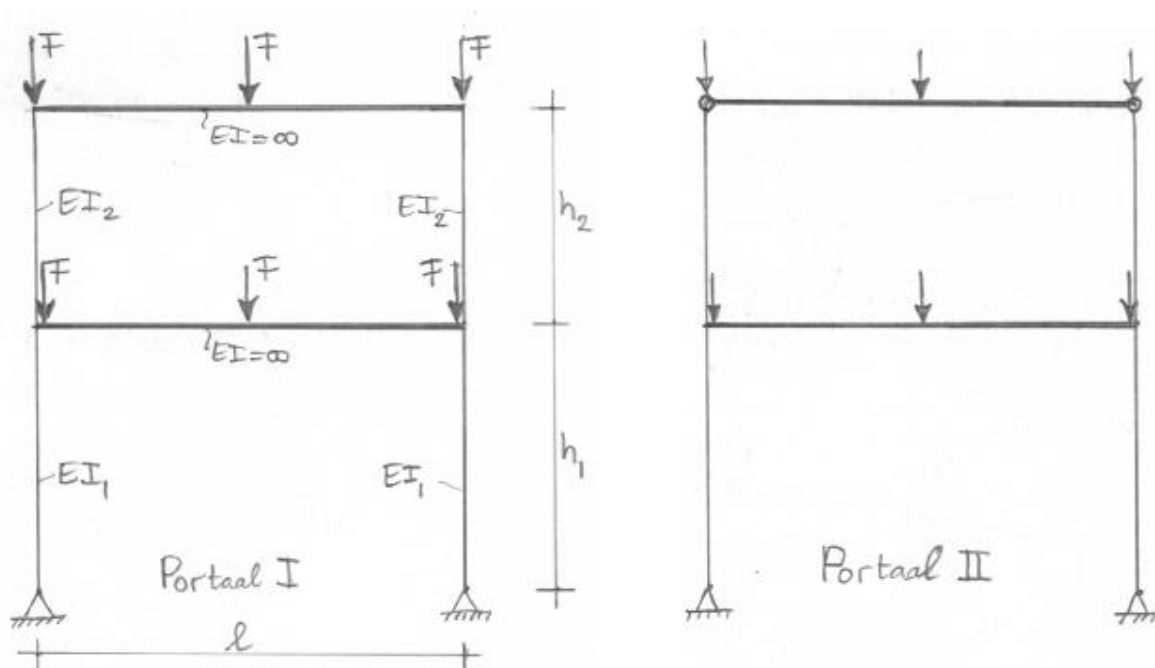
De stijlen zijn momentvast verbonden met de regels, met uitzondering van de verbinding bij de bovenste regel in portaal II, daar bevinden zich scharnieren als aangegeven.

Alle regels zijn oneindig buigstijf.

De stijlen hebben een buigstijfheid als aangegeven.

Houd voor de berekening aan: $l = 6$ m, $h_1 = 4$ m, $h_2 = 3$ m, $EI_1 = 20000$ kNm², $EI_2 = 4000$ kNm².

Reken met $\pi^2 = 10$.



Gevraagd:

- De waarde $F = F_k$ waarbij portaal I bezwijkt door instabiliteit. Laat duidelijk uw berekeningen zien en controles voor meerdere knikmogelijkheden.

TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
26 januari 2022 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER
NAAM

--	--	--	--	--	--	--

- b. Een schets van de bijbehorende (maatgevende) knikvorm voor portaal I.

--	--	--	--	--	--	--

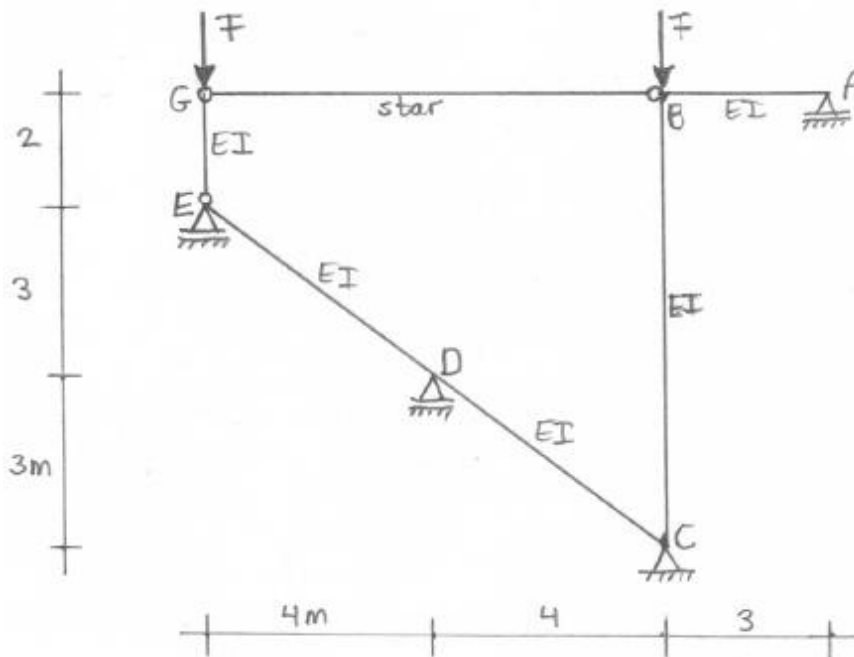
- c. De waarde $F = F_k$ waarbij portaal II bezwijkt door instabiliteit.
Laat duidelijk uw berekeningen zien en controles voor meerdere knikmogelijkheden.

- d. Een schets van de bijbehorende (maatgevende) knikvorm voor portaal II.

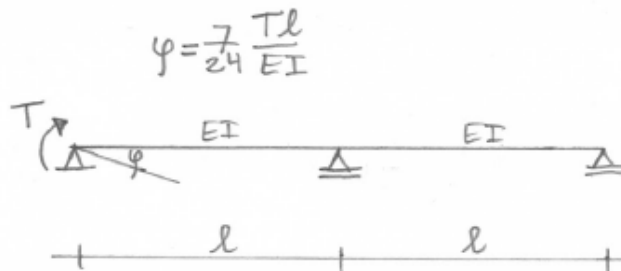
--	--	--	--	--	--	--

Opgave 3 (ongeveer 35 minuten)

Gegeven: onderstaande constructie, met twee kolommen belast door een verticale puntlast F . Kolom BC is momentvast verbonden met ligger BA en met de doorgaande schuine ligger CDE. Kolom GE is een pendel. Let goed op de posities van scharnieren. Staaf BG is star. De overige staven hebben buigstijfheid EI . De lengtematen zijn aangegeven. Normalkrachtvervorming wordt verwaarloosd. Een blad met relevante formules is toegevoegd aan dit antwoordformulier. Houd voor de numerieke uitwerking aan: $EI = 16000 \text{ kNm}^2$.



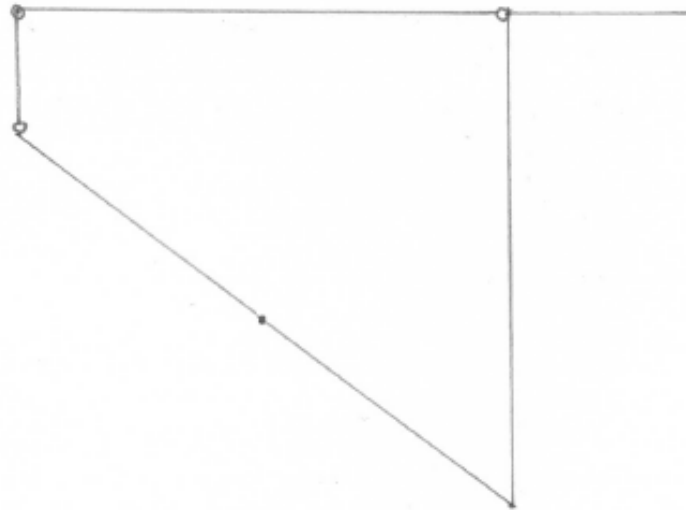
Extra gegeven: de relatie tussen rotatie φ en koppel T voor onderstaande statisch onbepaalde ligger is gegeven, zie figuur.



Gevraagd:

- Schets bovenaan de volgende pagina de globale, maatgevende knikvorm voor deze constructie. Geef duidelijk aan welke delen buigen en geef indicatief aan waar een buigpunt in het op druk belaste deel te verwachten is.

--	--	--	--	--	--	--



- b. Geef een schets van het model waarmee de globale kniklast van deze constructie kan worden bepaald. Geef daarbij aan hoe u met de puntlasten in dit rekenmodel omgaat. Let op aspecten als rotatieveren, geschoord/ongeschoord, pendels.

--	--	--	--	--	--	--

- c. Bereken de grootte van F waarbij knik optreedt. Laat duidelijk alle stappen in uw berekening zien.

- d. Controleer of de gevonden knikkracht zich bevindt tussen twee mogelijke extremen die u voor dit geval zou kunnen bedenken.

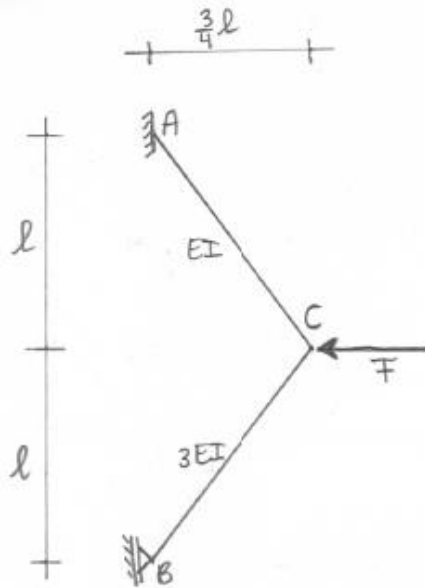
--	--	--	--	--	--	--

- e. Er is ook een lokale, partiële knikvorm. Toon aan dat deze locale knik niet maatgevend is, en verklaar dat tevens op basis van geschetste kniklengtes.
- f. Stel: de constructie wordt belast door een horizontale kracht in knoop G , en de bijbehorende eerste-orde uitwijking bij deze horizontale kracht is 50 mm. Gevraagd: bepaal de tweede-orde uitwijking in knoop G voor het geval dat $F = 120$ kN.

--	--	--	--	--	--	--

Opgave 4 (ongeveer 25 minuten)

Gegeven: onderstaande constructie is ingeklemd in A en op een rol opgelegd in B. De constructie wordt belast door een puntlast in C. De invloed van normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd. Lengtematen en buigstijfheden zijn aangegeven. Deze opgave dient symbolisch te worden uitgewerkt.



Opmerking: Deze constructie werd bij de opzet van het oude vak opgelost met de 'hybride methode', welke gebruikt maakt van virtuele arbeid. Deze methode maakt geen deel meer uit van het vak. Deze som kan nog worden gemaakt door de standaard krachtenmethode te gebruiken, dus zonder een mechanisme te schematiseren.

Gevraagd:

- a) Geef onderstaand een schets van het model waarmee de krachtsverdeling in deze constructie kan worden bepaald. Laat duidelijk zien welke onbekenden u kiest.



--	--	--	--	--	--	--

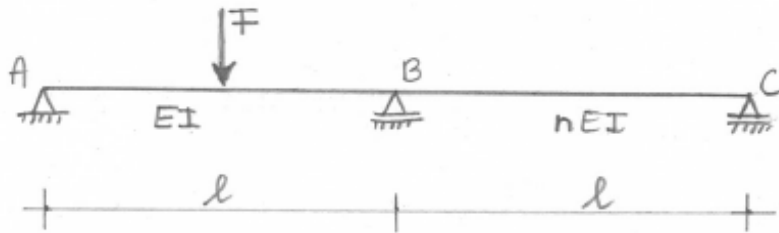
- b) Stel de vergelijkingen in de door u gekozen onbekenden op, waarmee u het probleem zou kunnen oplossen (merk op: *los de onbekenden niet op*, dat hoeft niet).

- c) Kunt u, zonder te rekenen, beredeneren of M_A wel of niet gelijk is aan $\frac{1}{2} M_C$? Gebruik maximaal drie regels tekst en desgewenst een schetsje.

--	--	--	--	--	--	--

Opgave 6 (ongeveer 20 minuten)

Gegeven: onderstaande doorgaande ligger waarvan het linkerveld buigstijfheid EI heeft en het rechterveld buigstijfheid nEI , als aangegeven. Het linkerveld wordt belast door een puntlast F in het midden.



Gevraagd:

- Inleidende theorievraag: Beschrijf waarom de krachtsverdeling in een statisch onbepaalde constructie doorgaans gevoelig is voor stijfheidsverschillen, en de krachtsverdeling in een statisch bepaalde constructie niet. Gebruik maximaal 8 regels tekst met desgewenst een schetsje.
- Bepaal het steunpuntmoment M_B , uitgedrukt in n , F en l . Relevante vergeet-me-nietjes zijn toegevoegd aan dit antwoordformulier.

--	--	--	--	--	--	--

- c. Schets onderstaand de momentenlijn voor de constructie, voor het geval dat $n = 2$. Schets in dezelfde figuur ook de twee extreme gevallen voor de momentenlijn, voor $n = 0$ en $n =$ oneindig. Geef buigtekens en markante waarden aan.

FORMULEBLAD (scheur dit deel los van het werk)

	$\theta_2 = \frac{Tl}{EI}; \quad w_2 = \frac{Tl^2}{2EI}$
	$\theta_2 = \frac{Fl^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{Fl^3}{3EI}$
	$\theta_2 = \frac{ql^2}{6EI}; \quad w_2 = \frac{ql^4}{8EI}$
	$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{Tl}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{Tl}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{Tl^2}{EI}$
	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI}$
	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$
	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{Tl}{EI}; \quad \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{Tl}{EI}; \quad w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

vergeet-mij-nietjes

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

	$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{Tl}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{32} \frac{Tl^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$
	$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{Fl^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{7}{768} \frac{Fl^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} F; \quad V_1 = \frac{11}{16} F; \quad V_2 = \frac{5}{16} F$
	$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{ql^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{192} \frac{ql^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} ql^2; \quad V_1 = \frac{5}{8} ql; \quad V_2 = \frac{3}{8} ql$
	$w_3 = \frac{1}{192} \frac{Fl^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} Fl; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$
	$w_3 = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} ql^2; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} ql$
	$\theta_2 = \frac{1}{16} \frac{Tl}{EI}; \quad w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$

Enkele formules voor prisma's met buigstijfheid EI.
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegkrachten.

Spanningen en rekken :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{array} \right. \text{ of } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} = G \gamma_{xy} \end{array} \right. \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

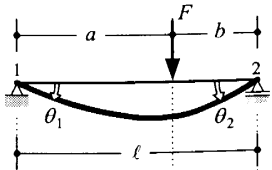
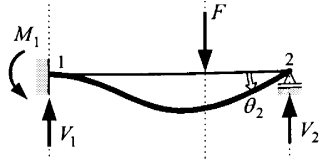
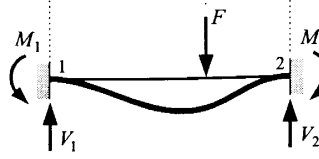
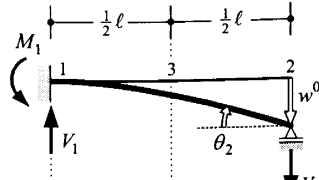
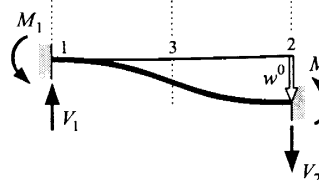
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \text{ voor } i, j = x, y$$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

von Mises : $\frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \leq \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

(c)		$\theta_1 = \frac{F a b (\ell + b)}{6 E I \ell} = \frac{F \ell^2}{6 E I} \left(2 \frac{a}{\ell} - 3 \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{F a b (\ell + a)}{6 E I \ell} = \frac{F \ell^2}{6 E I} \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{F b (\ell^2 - b^2)}{2 \ell^2} = F \ell \left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2} \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{F b (3 \ell^2 - b^2)}{2 \ell^3} = F \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{F a^2 (3 \ell - a)}{2 \ell^3} = F \left(\frac{3}{2} \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{F a^2 b}{4 E I \ell} = \frac{F \ell^2}{4 E I} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{F a b^2}{\ell^2} = F \ell \left(\frac{a}{\ell} - 2 \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{F b^2 (\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left(1 - 3 \frac{a^2}{\ell^2} + 2 \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{F a^2 b}{\ell^2} = F \ell \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{F a^2 (\ell + 2b)}{\ell^3} = F \ell \left(3 \frac{a^2}{\ell^2} - 2 \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3 E I}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3 E I}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6 E I}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12 E I}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

drie bij-de handjes

zettingen

Tensortransformatie formules in x-y assenstelsel:

$$k_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{2} (k_{xx} + k_{yy}) + \frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \cos 2\alpha + k_{xy} \sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{2} (k_{xx} + k_{yy}) - \frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \cos 2\alpha - k_{xy} \sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \sin 2\alpha + k_{xy} \cos 2\alpha$$

Hoofdwaarden en hoofdrichtingen:

$$\tan 2\alpha = \frac{2k_{xy}}{(k_{xx} - k_{yy})}; \quad k_1, k_2 = \frac{1}{2} (k_{xx} + k_{yy}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \right]^2 + k_{xy}^2}$$

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_k = l \sqrt{4 + \frac{10}{\rho}}$$

met: $\rho = \frac{rl}{EI}$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

Of :

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\text{en } S_z(x) = M' - Fw'$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3 \alpha \sin \alpha x - C_4 \alpha \cos \alpha x$$

$$M(x) = EI \times [C_3 \alpha^2 \cos \alpha x + C_4 \alpha^2 \sin \alpha x]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

η -formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met: } \begin{aligned} \eta_1 &= 4 + \frac{10}{\rho_1}; \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 &= 4 + \frac{10}{\rho_2}; \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} \end{aligned}$$

ρ -formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met: } \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

Kromming t.g.v temperatuursgradient:

“Vrije” kromming t.g.v lineair temperatuursverloop over de hoogte h van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$