# UITWERKING MET ANTWOORDEN

**Opgave 1**

Situatie 1 : Antwoord **d)**

Situatie 2 : Antwoord **c)**

Situatie 3 : Antwoord **b)**

**Opgave 2**

a) Zie voorbeeld 3 van hoofdstuk in het dictaat.

b) Idem.

c) Het rekenmodel is de starre staaf, horizontaal gesteund door de translatieveer, en belast met de belasting op de staaf EN de aanpendelende belasting. Essentieel is dat bij de bepaling van de aanpendelende belasting rekening wordt gehouden met de lengte van de pendels waarop de belasting staat. De totale belasting op het rekenmodel wordt hiermee:

$$F_{tot} = F + \frac{F}{1,5a}3a + \frac{F}{3a}3a + \frac{F}{1,5a}3a = 6F$$

De kniklast van dit model kan eenvoudig worden bepaald met:

$$F_k = k \times 3a = k = \frac{16}{125}\frac{EA}{a} \times 3a$$

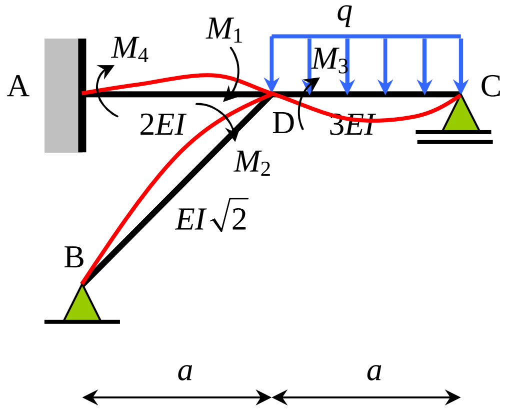
$$F_k = 6F = k = \frac{16}{125}\frac{EA}{a} \times 3a$$

$$F = \frac{8}{125}EA = \frac{8 \times 20000}{125} = 1280 \text{ kN}$$

d) De horizontale veer kan nooit een schuine staaf vervangen. Door het verlengen van de schuine staaf ontstaat niet alleen een horizontale kracht die de constructie overeind wil houden maar er ontstaat ook een extra verticale kracht die de constructie in de verplaatste stand wil drukken (versterkend effect). Dit effect wordt in dit model niet meegenomen. Voor de fijn slijpers; de veer is een tweede orde tensor en deze kan niet als een vector worden behandeld.

## Opgave 3

a) De constructie in situatie 1 is drievoudig statisch onbepaald en heeft **niet-verplaatsbare** knopen. De richting van de aansluitende momenten zijn getekend zoals ze in werkelijkheid zullen werken op de uiteinde van de staven.




$$M_1 + M_2 + M_3 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$M_3 = -(M_1 + M_2)$$

De aansluitende momenten op knoop D moeten in evenwicht zijn. Zodoende kan een van de onbekende momenten op knoop D worden uitgedrukt in de overige momenten. Vanwege het feit dat de knopen niet verplaatsen is ook duidelijk dat het moment bij de inklemming in A de helft is in grootte van het moment in D in staaf AD ($\varphi_A = 0$). Uiteindelijk resteren zo twee vergelijkingen met twee onbekenden. Het statisch bepaalde hoofdsysteem bestaat louter en alleen uit liggertjes op twee steunpunten met de aangegeven onbekende momenten op de uiteinden van de staven.

b) Er zijn drie vormveranderingsvergelijkingen nodig. Echter één vergelijking is al gebruikt. In de resterende twee vergelijkingen wordt direct het knoopevenwicht van D verwerkt:

$$\varphi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{AD}} = \varphi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{DC}} \quad : \frac{\frac{1}{2}M_1 a}{6\times 2EI} - \frac{M_1 a}{3\times 2EI} = -\frac{-(M_1+M_2)a}{3\times 3EI} - \frac{qa^3}{24\times 3EI}$$

$$\varphi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{AD}} = \varphi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{DB}} \quad : \frac{\frac{1}{2}M_1 a}{6\times 2EI} - \frac{M_1 a}{3\times 2EI} = -\frac{M_2 a\sqrt{2}}{3\times EI\sqrt{2}}$$

Opschonen levert:

$$17M_1 + 8M_2 = qa^2$$
$$3M_1 - 8M_2 = 0$$

Elimineren van $M_2$ levert: $M_1 = \frac{1}{20}qa^2$; $M_2 = \frac{3}{160}qa^2$; $M_3 = -\frac{11}{160}qa^2$; $M_4 = \frac{1}{40}qa^2$;
Invullen van de gegevens levert voor de momenten:

$$M_1 = 912 \text{ kNm}$$
$$M_2 = 342 \text{ kNm}$$
$$M_3 = -1254 \text{ kNm}$$
$$M_4 = 456 \text{ kNm}$$

c) Teken een nette momentenlijn inclusief vervormingstekens en de waarden voor een aantal karakteristieke punten.

d) De uitwerkingen van opgave d-h zijn geen onderdeel van de tentamenstof vanaf collegejaar 2025/2026. De opgaves zelf wel.

$$M_1 = -2480 \text{ kNm}$$
$$M_2 = -400 \text{ kNm}$$
$$M_3 = 2880 \text{ kNm}$$
$$M_4 = -3360 \text{ kNm}$$
$$\theta = 0{,}009422 \text{ rad}$$

Teken vervolgens een nette momentenlijn met de juiste vervormingstekens en zet de gevonden waarden in de *M*-lijn er bij.

h) De horizontale verplaatsing is gelijk aan:

$$u = \theta \times a = 0{,}0377 \text{ m} \quad (\leftarrow)$$

**Opgave 4**

a) De constructie is tweevoudig statisch onbepaald en het betreft een constructie met niet-verplaatsbare knopen (geschoord). Een eerste orde berekening houdt geen rekening met de invloed van de vervormde stand op het evenwicht. De verticale puntlast kan daarom achterwege worden gelaten. Oplossen kan m.b.v. twee vormveranderingsvergelijkingen maar er kan ook gekozen worden om gebruik te maken van een *vergeet-mij-nietje* voor een statisch onbepaalde ligger zoals weergegeven op het laatste formuleblad. De rotatieveren zijn eenvoudig te vinden uit de verende werking van de delen BC en AD.

$$r_1 = \frac{3EI}{l}; \quad \rho_1 = \frac{r_2 h}{EI}; \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = 3;$$

$$r_2 = \frac{3EI}{2l}; \quad \rho_2 = \frac{r_1 h}{EI}; \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \frac{3}{2};$$

$$M_{\mathrm{A}} = \frac{\rho_1(\rho_2+6)}{8\rho_1(\rho_2+4)+32(\rho_2+3)} \times Hh = \frac{3\times 7,5}{8\times 3\times 5,5+32\times 4,5} \times 92\times 4 = 30 \text{ kNm}$$

$$M_{\mathrm{B}} = \frac{\rho_2(\rho_1+6)}{8\rho_2(\rho_1+4)+32(\rho_1+3)} \times Hh = \frac{1,5\times 9}{8\times 1,5\times 7+32\times 6} \times 92\times 4 = 18 \text{ kNm}$$

Het moment t.p.v. de horizontale puntlast van 92 kN wordt hiermee:

$$M_{\mathrm{E}} = \left| \frac{18+30}{2} - \tfrac{1}{4}\times 92\times 4 \right| = 68 \text{ kNm} \quad \text{(los dit grafisch op m.b.v. de } M\text{-lijn)}$$

b) De 1$^{e}$ orde horizontale oplegreactie in C volgt uit het evenwicht:

$$C_H = \tfrac{1}{2}\times 92 - \frac{30}{4} + \frac{18}{4} = 43 \text{ kN}$$

c) De eerste orde verplaatsing in E levert alleen een horizontale verplaatsing op. Met behulp van de gegeven *vergeet-mij-nietjes* volgt hiervoor:

$$u = \frac{92\times 4^3}{48EI} - \frac{18\times 4^2}{16EI} - \frac{30\times 4^2}{16EI} = 0,075 \text{ m} \quad (\rightarrow)$$

d) Controle van de drukstaaf AB, dit is een geschoorde staaf met aan twee zijden een verende inklemming. Gebruik hiervoor de eerder bepaalde rotatieveerstijfheden. De knikcontrole van BC zal eigenlijk ook moeten worden uitgevoerd. In de vraagstelling staat echter dat we ons met name richten op staaf AB. Staaf AB is overigens niet maatgevend maar dat mag zelf worden gecontroleerd.

e) De kniklast volgt uit:

$$F_k = \frac{(5+2\rho_1)(5+2\rho_2)}{(5+\rho_1)(5+\rho_2)} \frac{\pi^2 EI}{h^2} = 1044 \text{ kN} \quad \left(\pi^2 = 10 \Rightarrow 1058 \text{ kN}\right)$$

f) De 2$^{e}$ orde uitbuiging mag worden afgeschat met de vergrotingsfaktor:

$$u_2 = \frac{n}{n-1} u_1 = 1,40\times 0,075 = 0,105 \quad \text{m} \quad \text{met:} \quad n = \frac{F_k}{300} = 3,48$$

g) Een bovengrens voor het 2$^{e}$ orde moment kan worden afgeschat met:

$$M_{\text{E-2}} = M_{\mathrm{E}} + 0,105\times 300 = 117,5 \text{ kNm}$$