BEKNOPTE UITWERKING MET ANTWOORDEN

Vraagstuk 1 : Statisch onbepaalde constructies en knik

a) De constructie is symmetrisch en wordt symmetrisch belast. Hoewel dit een ongeschoorde constructie is, zal er geen horizontale verplaatsing van de bovenregel optreden. De momenten in A zijn gelijk aan die in B en de momenten in C zijn gelijk aan die in D. Neem negatieve momenten (trek aan de bovenzijde) aan in de hoekpunten van de regels:

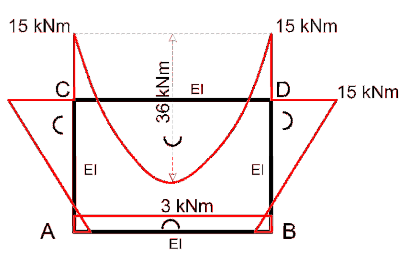
$$\varphi_A^{AB} = \varphi_A^{AC} \qquad \frac{M_A a}{3EI} + \frac{M_A a}{6EI} = -\frac{M_A b}{3EI} + \frac{M_C b}{6EI}$$

$$\varphi_A^{AB} = \varphi_A^{AC} \qquad \frac{M_A b}{6EI} - \frac{M_C b}{3EI} = \frac{M_C a}{3EI} + \frac{M_C a}{6EI} - \frac{qa^3}{24EI}$$

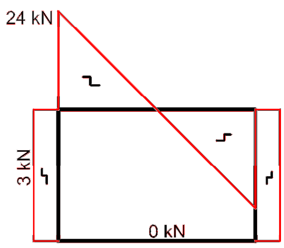
b) De puntlasten hebben geen invloed op de momentenverdeling aangezien de knopen niet verplaatsen en normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd.

c) Oplossen levert: $M_A = M_B = \ 3{,}0$ kNm; $\quad M_C = M_D = 15{,}0$ kNm

d) M- en V-lijn:



M-lijn



V-lijn

e) Zie diktaat en sheets, beschrijf stijfheidsinvloed van de kolom op de M-verdeling.

f) Maximaal moment in de hoekpunten als de bovenregel wordt beschouwd als een ligger die volledig is ingeklemd (starre kolommen). Op basis van *vergeet-mij-nietje* geldt:

$$M_C = \tfrac{1}{12} qa^2 = 24{,}0 \text{ kNm} \qquad \text{(huidige situatie is 62,5\% van deze starre oplossing)}$$

g) De constructie wordt nu niet meer symmetrisch belast. De ongeschoorde constructie zal in C en D horizontaal willen verplaatsen. Pas de hybride oplossingsmethode toe waarbij in alle starre verbindingen tussen de staven scharnieren met overgangsmomenten worden aangenomen. Er ontstaat nu een mechanisme met één vrijheidsgraad. De vijf onbekenden kunnen worden opgelost met vier hoekveranderingsvoorwaarden en een vergelijking voor het evenwicht in de vorm van virtuele arbeid.

h) Ongeschoord raamwerk dus de ongeschoorde situatie is voor knik maatgevend. De beide horizontale regels vormen weerstand tegen het uitknikken van de kolom. De rotatieveerstijfheid van deze regels is (ongeschoorde uitbuigingsvorm) $r = 6EI/a = 1000$ kNm/rad. De kniklast van de kolom wordt hiermee (eta-formule) 149,5 kN. De kniklengte volgt uit de formule van Euler en is $l_k = \sqrt{66} = 8{,}12$ m.

i) De normaalkracht N in kN in de kolom is gelijk aan 24 + F. Hieruit volgt een maximale grootte voor de puntlast van 125,5 kN.

j) Voor F = 15 kN geldt een vergrotingsfactor op basis van N in de kolom van:

$$n = \frac{149{,}5}{15+24} = 3{,}83 \qquad \frac{n}{n-1} = 1{,}35 \qquad \text{(invloed van 2}^{\text{e}}\text{ orde effect is aanzienlijk)}$$

Vraagstuk 2 : Stabiliteit van het evenwicht

a) Zowel constructie A als B zijn ongeschoord. Teken de constructie zijdelings verplaatst waarbij voor A de gehele constructie scheef komt te staan en voor B alleen de onderste kolom (zwaarst belast) zal uitknikken en zijdelings verplaatsen, de rest van de constructie blijft onvervormd.

b) Zet constructie A (*starre* kolom) in de verplaatste stand, maak de linker en rechter kolom vrij door de regels door te knippen (COZ-sommetje). Er ontstaan twee vrijgemaakte lichamen. Van de interactiekrachten spelen alleen de momenten in de liggers een rol in de evenwichtsvergelijking (N en V vallen weg). Na vereenvoudigen wordt gevonden:

$$F \times h\theta + F \times 2h\theta + F \times 3h\theta - 4M_{regel} = 0 \quad \text{met:} \quad M_{regel} = \frac{6EI}{b}\theta$$

$$6hF = \frac{24EI}{b} \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{4EI}{bh} = 8000 \text{ kN}$$

Zet constructie B in de verplaatste stand (*buigzame* op druk belaste kolom) waarbij de *ongeschoorde* situatie maatgevend zal zijn. De kniklengte van de kolom is gelijk aan h (basisgeval Euler). De onderste kolom is maatgevend met de grootste normaalkracht van $3F$:

$$3F = \frac{\pi^2 EI}{h^2} \cong \frac{10 \times 16000}{16} = 10000 \text{ kN}$$

$$F = 3333 \text{ kN}$$

c) Voor constructie A geldt nu:

$$F \times h\theta + F \times 2h\theta + F \times 3h\theta - 3M_{regel} = 0 \quad \text{met:} \quad M_{regel} = \frac{6EI}{b}\theta$$

$$6hF = \frac{18EI}{b} \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{3EI}{bh} = 6000 \text{ kN}$$

Voor constructie B geldt nu dat de basisknikvorm moet worden aangepast. De kniklengte neemt toe tot $2h$ (*ongeschoorde situatie*) waardoor de knikkracht afneemt.

$$3F = \frac{\pi^2 EI}{(2h)^2} \cong \frac{10 \times 16000}{4 \times 16} = 2500 \text{ kN}$$

$$F = 833 \text{ kN}$$

Opmerking:

Een starre kolom toetsen m.b.v. een knikformule op basis van buigingsknik (Euler) wordt niet gewaardeerd. De verende werking van de buigzame regels volgt uit een basisgeval, zie leermiddel en de vele COZ-opgaven. Fouten hierin worden zwaar aangerekend.

Vraagstuk 3 : Verplaatsingenmethode

a) Haal het overstek weg door de kracht te verplaatsen naar D onder toevoeging van een koppel. Van de resterende constructie met *niet-verplaatsbare* knopen is de fundamentele onbekende de *rotatie van knoop D*. De noodzakelijke *evenwichtsvergelijking* is het momentenevenwicht van de knoop. Druk alle staafmomenten uit in de onbekende verplaatsingsgrootheid (vrijheidsgraad). Geef een schets met de relevante gegevens t.a.v. onbekende staafmomenten , de belasting en de vrijheidsgraad.

b) Er resteert: $5F = 3\times\frac{4EI}{5}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{25}{12}\frac{F}{EI} = 0,005 \text{ rad}$.

Er werd uitdrukkelijk gevraagd om dit probleem op te lossen met de *verplaatsingenmethode*. Ga dus niet beginnen met *vormveranderingsvoorwaarden* want dan ken je het onderscheid niet tussen de *krachtenmethode* en de *verplaatsingenmethode*.

Merk op:
De staven DA, DB en DC zijn identiek. Feitelijk is al te voorspellen dat iedere staaf 1/3 van het uitwendige koppel moet opnemen. De 150 kNm uit het overstek wordt dus verdeeld over de drie staven, elk 50 kNm.

c) De momenten in de staafuiteinden nabij knoop D zijn voor de staven DA, DB en DC gelijk aan : $M = \frac{4EI}{5}\times 0,005 = 50 \text{ kNm}$. Het inklemmingsmoment is dan gelijk aan de helft van dit eindmoment, 25 kNm (basis geval zie *vergeet-mij-nietjes*). Teken op basis hiervan snel de momentenlijn inclusief de vervormingstekens en vergeet het overstek niet. Verdere uitwerking wordt hier niet gegeven, zelf doen!

d) De zakking in E volgt uit het kwispeleffect van ED t.g.v. de rotatie van knoop D plus de buigvervorming in staaf ED:

$$w_E = 0,005\times 5,0 + \frac{30\times 5,0^3}{3\times 12500} = 0,125 \text{ m}$$

Opmerking
In de uitwerking worden fouten niet op prijs gesteld. De opgave was dermate doorzichtig dat de resultaten eenvoudig te controleren waren m.b.v. fysische intuïtie. Ook het vergeten van het kwispel-effect wordt niet gewaardeerd. De voorkennis van ConstructieMechanica 2 is en blijft belangrijk en moet onderhouden worden en wordt daarom ook nadrukkelijk bij ConstructieMechanica 3 getoetst.