

--	--	--	--	--	--	--

## Antwoordformulier

### CTB2210 Constructiemechanica 3

**Maak alle opgaven op dit antwoordformulier. Lever dit formulier in.**

Kladpapier wordt niet ingenomen.  
Het nietje mag niet verwijderd worden.

**Zet op alle bladen uw naam en studienummer.**

Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

**Relevante berekeningen vermelden.**

Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.  
Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier. Tenzij anders vermeld, wordt het eigen gewicht van een constructie buiten beschouwing gelaten.

**Aantal opgaven: 6.**

De opgaven hebben verschillende weging. Een schatting van het gewicht is in tijd weergegeven.

Relevante **formulebladen** zijn bijgevoegd.

**Toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:**

Conventionele zakrekenmachientje, eenvoudige grafische rekenmachine (geen CAS of soortgelijke systemen, geen wifi en bluetooth), tekenmaterialen waaronder passer.

**Niet toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:**

Boeken, dictaten, aantekeningen, andere formulebladen, oude tentamens, COZ- of andere uitwerkingen, woordenboeken, computer, mobiele telefoon, smart watch, smart phone of apparaten met vergelijkbare functies.

**Mobiel UIT en opbergen in tas.**

Elk vermoeden van fraude wordt gemeld bij de examencommissie.

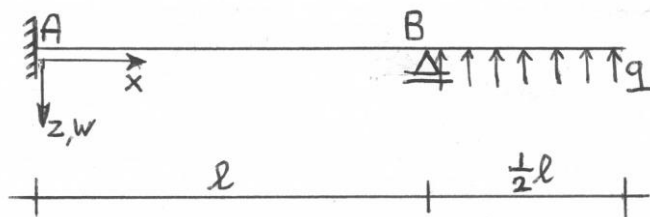
--	--	--	--	--	--	--

**Opgave 1** (gemengde theorie, ongeveer 20 minuten)

- a. Gegeven: onderstaande ligger belast door een gelijkmatig verdeelde belasting op het overstek. Gegeven: uitgaande van een  $x$ -as langs de staaf-as, en  $z, w$  naar beneden zoals aangegeven, luidt de vierde orde differentiaalvergelijking voor buiging:

$$EI w'''' = q$$

Gevraagd: beschouw alleen het gedeelte AB, los voor dat deel de vierde-orde differentiaalvergelijking op, en bepaal daarmee het inklemmingsmoment  $M_A$ . Laat duidelijk uw stappen zien, inclusief de gebruikte randvoorwaarden. Schets de resulterende momentenlijn en controleer uw antwoord met een vergeet-me-nietje.



--	--	--	--	--	--	--

- b. Bij dit vak is enkele keren het wiskundige begrip *eigenwaardeprobleem* aan bod gekomen. Geef onderstaand een korte beschrijving van één van die eigenwaardeproblemen, naar keuze. Gebruik enkele zinnen, schetsen en/of beknopte formules om het principe van dat mechanica eigenwaardeprobleem aan te geven, met aandacht voor eigenwaarden en eigenvectoren.

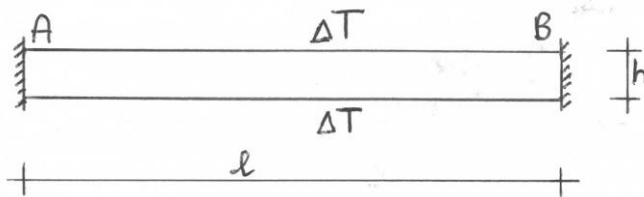
--	--	--	--	--	--	--

**Opgave 2** (ongeveer 20 minuten)

Gegeven: een tweezijdig ingeklemde ligger AB met lengte  $l$ , hoogte  $h$ , buigstijfheid  $EI$ , rekstijfheid  $EA$  en uitzettingscoëfficiënt  $\alpha$ . Er zijn twee gevallen: uniforme temperatuurverhoging (a) en niet-uniforme temperatuurverhoging (b).

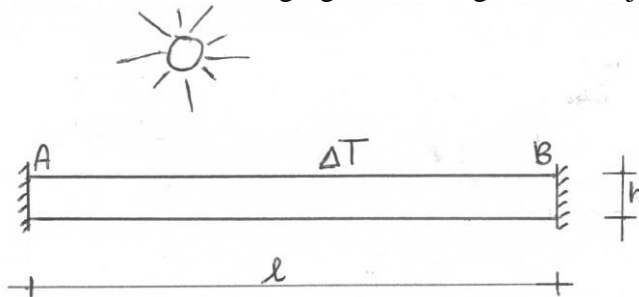
Gevraagd:

- a. De ligger wordt belast door een uniforme temperatuurverhoging  $\Delta T$ . Bepaal de normaalkracht in de ligger, uitgedrukt in de grootheden  $\Delta T$ ,  $EA$ ,  $EI$ ,  $\alpha$ ,  $l$  en  $h$ , of een subset daarvan. Geef ook aan of het trek of druk is.



- b. De ligger wordt door zonbestraling aan de bovenzijde  $\Delta T$  warmer dan aan de onderzijde, met lineair temperatuurverloop over de hoogte. Bepaal de inklemmingsmomenten in A en in B, uitgedrukt in de grootheden  $\Delta T$ ,  $EA$ ,  $EI$ ,  $\alpha$ ,  $l$  en  $h$ , of een subset daarvan. Aanwijzing: het is handig (niet noodzakelijk) om gebruik te maken van symmetrie.

Schets vervolgens kwalitatief het verloop van de buigende momenten  $M$ , van de thermische kromming  $\kappa^T$ , van de kromming  $\kappa^M$  ten gevolge van het moment, van de totale kromming  $\kappa^{\text{tot}}$  en van de doorbuiging  $w$ . Zet buigtekens erbij.



--	--	--	--	--	--	--

M - - - - -

$k^T$  - - - - -

$k^H$  - - - - -

$k^{tot}$  - - - - -

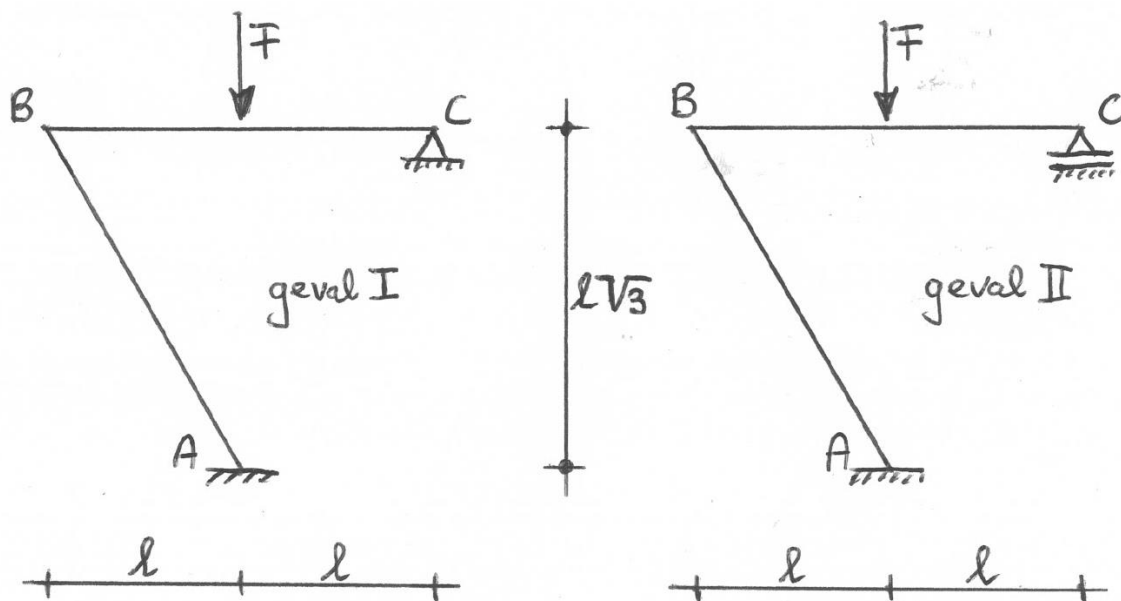
$w$  - - - - -

--	--	--	--	--	--	--

**Opgave 3** (ongeveer 40 minuten)

Gegeven: Onderstaande constructie ABC, met twee varianten: geval I heeft een scharnier bij C (deelvragen a, b) en geval II heeft een roloplegging bij C (deelvragen c, d). Voor het overige zijn beide constructies gelijk, met een inklemming bij A, een puntlast  $F$  halverwege BC en buigstijfheid  $EI$ . De lengtematen uitgedrukt in  $l$  en  $l\sqrt{3}$  zijn aangegeven. De invloed van normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd.

Houd voor de berekeningen aan:  $l = 2$  m,  $F = 308$  kN en  $EI = 20000$  kNm<sup>2</sup>. U mag de vergelijkingen zo lang mogelijk symbolisch uitwerken en aan het eind de numerieke waarden invullen, of direct numeriek te werk gaan.



Gevraagd:

- a) Voor geval I: bereken de buigende momenten in A en B. Laat duidelijk alle stappen in uw aanpak zien.

TU Delft

Faculteit CiTG

Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3

29 januari 2025 van 13.30-16.30 uur

**STUDIENUMMER**

**NAAM**

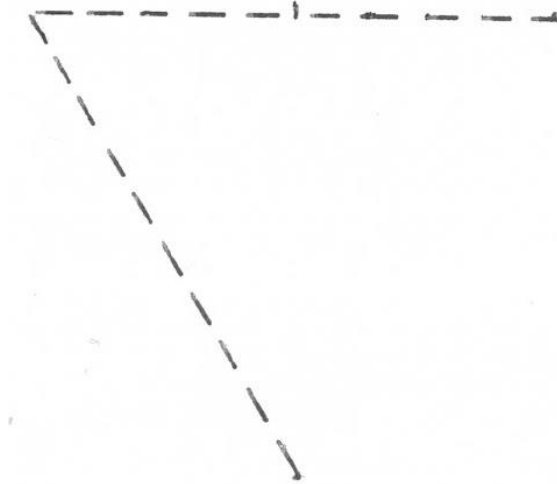
--	--	--	--	--	--	--

---

*vervolg....*

--	--	--	--	--	--	--

- b) Voor geval I: teken onderstaand de momentenlijn, met buigtekens en markante waarden.



- c) Voor geval II: bereken de buigende momenten in A en B. Laat duidelijk alle stappen in uw aanpak zien. Aanwijzing: u kunt een groot deel van uw aanpak bij deelvraag (a) hergebruiken, en een aantal termen en een vergelijking toevoegen, en dan oplossen.

**Opmerking:** Deze constructie werd bij de opzet van het oude vak opgelost met de ‘hybride methode’, welke gebruikt maakt van virtuele arbeid. Deze methode maakt geen deel meer uit van het vak, en is een methode om constructies met één verplaatsbare knoop op te lossen. Deze som is dus geen onderdeel meer van het vak.



TU Delft  
Faculteit CiTG  
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3  
29 januari 2025 van 13.30-16.30 uur

**STUDIENUMMER**  
**NAAM**

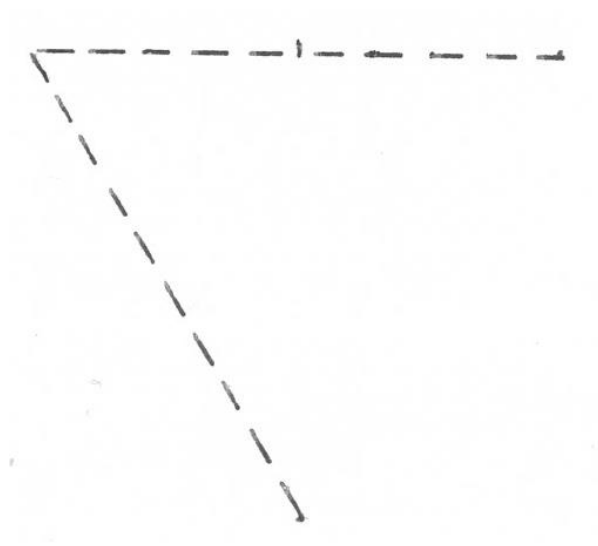
--	--	--	--	--	--	--

---

*vervolg....*

--	--	--	--	--	--	--

- d) Voor geval II: teken onderstaand de momentenlijn, met buigtekens en markante waarden.

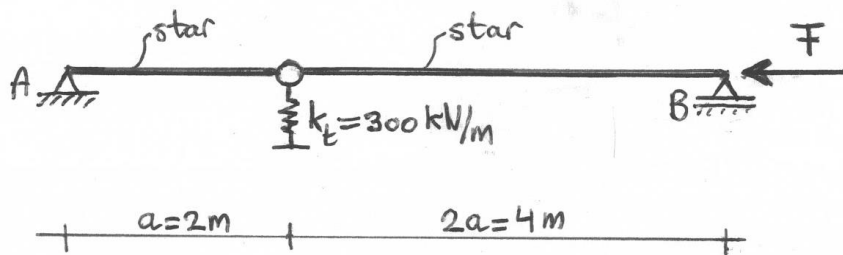


- e) Inzichtsvraag, ook kwalitatief te beantwoorden mocht u geen rekenresultaten hebben: wat kunt u zeggen over de verhouding tussen  $M_A$  en  $M_B$  voor respectievelijk geval I en geval II?

--	--	--	--	--	--	--

**Opgave 4** (ongeveer 20 minuten)

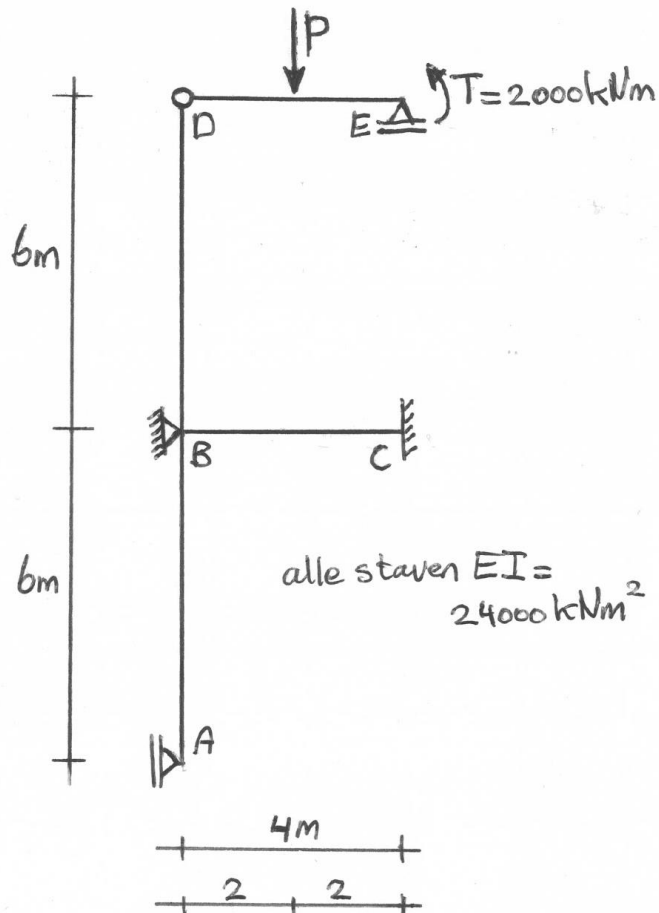
Gegeven: onderstaande constructie bestaande uit twee starre staven en belast door een drukkracht  $F$  als aangegeven. De staven zijn scharnierend verbonden en het scharnier wordt ondersteund door een translatieveer. Lengtematen en veerstijfheid zijn aangegeven. Gevraagd: de knikkracht  $F_k$ . Aanwijzing: zet de constructie in een verplaatste stand en beschouw evenwicht voor het geheel en/of delen.



--	--	--	--	--	--	--

**Opgave 5** (ongeveer 35 minuten)

Gegeven: onderstaande constructie ABC, belast door een puntlast  $P$  in het midden van DE en een gegeven koppel  $T = 2000 \text{ kNm}$  in E. Alle staven hebben buigstijfheid  $EI = 24000 \text{ kNm}^2$ . Lengtematen en opleggingen zijn aangegeven. Normalkrachtvervorming wordt verwaarloosd. Aanwijzing: besef dat de normaalkracht in BD niet gelijk is aan  $P$ .



Gevraagd:

- Schets de knikvorm van deze constructie, in de figuur hierboven.
- Geef onderstaand een schets van het model met rotatieveer/veren waarmee de kniklast van deze constructie kan worden bepaald.

--	--	--	--	--	--	--

- c. Bepaal de kritische waarde van de puntlast  $P_k$  waarbij knik van de constructie optreedt. Laat duidelijk al uw stappen zien.

--	--	--	--	--	--	--

- d. Bepaal de kniklengte  $l_k$  van het knikkende deel. Vergelijk deze met de kniklengte van een extreem geval waarmee u de situatie zou kunnen vergelijken.
- e. Stel: *de roloplegging bij E wordt vervangen door een scharnierende oplegging*. Bepaal opnieuw de kritische waarde van de puntlast  $P_k$  waarbij de constructie knikt. Vergelijk uw antwoord met het antwoord bij de vorige situatie en verklaar het verschil.

TU Delft  
Faculteit CiTG  
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3  
29 januari 2025 van 13.30-16.30 uur

**STUDIENUMMER**  
**NAAM**

--	--	--	--	--	--	--

---

*vervolg ....*

# FORMULEBLAD (scheur dit deel los van het werk)

(1)		$\theta_2 = \frac{Tl}{EI}; w_2 = \frac{Tl^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{Fl^2}{2EI}; w_2 = \frac{Fl^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{ql^2}{6EI}; w_2 = \frac{ql^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{Tl}{EI}; \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{Tl}{EI}; w_3 = \frac{1}{16} \frac{Tl^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EI}; w_3 = \frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}; w_3 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{Tl}{EI}; \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{Tl}{EI}; w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

vergeet-mij-nietjes

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{Tl}{EI}; w_3 = \frac{1}{32} \frac{Tl^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{Fl^2}{EI}; w_3 = \frac{7}{768} \frac{Fl^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} F; V_1 = \frac{11}{16} F; V_2 = \frac{5}{16} F$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{ql^2}{EI}; w_3 = \frac{1}{192} \frac{ql^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} ql^2; V_1 = \frac{5}{8} ql; V_2 = \frac{3}{8} ql$
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{Fl^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} Fl; V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} ql^2; V_1 = V_2 = \frac{1}{2} ql$
(b)		$\theta_2 = \frac{1}{16} \frac{Tl}{EI}; w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$

Enkele formules voor prisma's met buigstijfheid EI.  
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.  
M<sub>i</sub> en V<sub>i</sub> zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegkrachten.

## Spanningen en rekken :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{array} \right. \text{ of } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} = G \gamma_{xy} \end{array} \right. \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \text{ voor } i, j = x, y$$

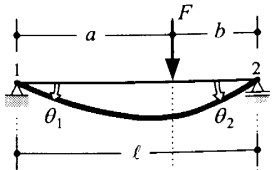
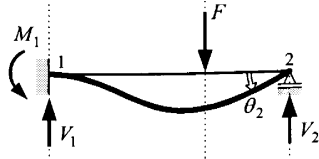
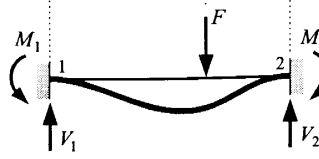
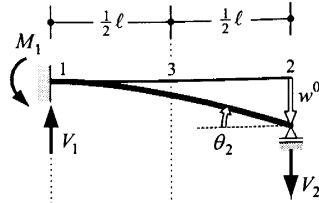
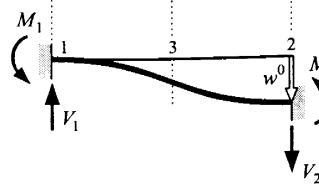
$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

von Mises :  $\frac{1}{6} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \leq \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend



## FORMULEBLAD (vervolg)

(c)		$\theta_1 = \frac{F a b (\ell + b)}{6 E I \ell} = \frac{F \ell^2}{6 E I} \left( 2 \frac{a}{\ell} - 3 \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{F a b (\ell + a)}{6 E I \ell} = \frac{F \ell^2}{6 E I} \left( \frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{F b (\ell^2 - b^2)}{2 \ell^2} = F \ell \left( \frac{a}{\ell} - \frac{3}{2} \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{F b (3 \ell^2 - b^2)}{2 \ell^3} = F \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{F a^2 (3 \ell - a)}{2 \ell^3} = F \left( \frac{3}{2} \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{F a^2 b}{4 E I \ell} = \frac{F \ell^2}{4 E I} \left( \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{F a b^2}{\ell^2} = F \ell \left( \frac{a}{\ell} - 2 \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{F b^2 (\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left( 1 - 3 \frac{a^2}{\ell^2} + 2 \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{F a^2 b}{\ell^2} = F \ell \left( \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{F a^2 (\ell + 2b)}{\ell^3} = F \ell \left( 3 \frac{a^2}{\ell^2} - 2 \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3 E I}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3 E I}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6 E I}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12 E I}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

drie bij-de handjes

zettingen

**Tensortransformatie formules in x-y assenstelsel:**

$$k_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{2} (k_{xx} + k_{yy}) + \frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \cos 2\alpha + k_{xy} \sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{2} (k_{xx} + k_{yy}) - \frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \cos 2\alpha - k_{xy} \sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \sin 2\alpha + k_{xy} \cos 2\alpha$$

**Hoofdwwaarden en hoofdrichtingen:**

$$\tan 2\alpha = \frac{2k_{xy}}{(k_{xx} - k_{yy})}; \quad k_1, k_2 = \frac{1}{2} (k_{xx} + k_{yy}) \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \right]^2 + k_{xy}^2}$$

## FORMULEBLAD (vervolg)

**Eulerse knikvergelijking:**

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

**Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:**

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_k = l \sqrt{4 + \frac{10}{\rho}} \quad \text{met: } \rho = \frac{rl}{EI}$$

**Mechanica relaties:**

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

**Differentiaalvergelijkingen:**

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

Of :

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\text{en } S_z(x) = M' - Fw'$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3 \alpha \sin \alpha x - C_4 \alpha \cos \alpha x$$

$$M(x) = EI \times [C_3 \alpha^2 \cos \alpha x + C_4 \alpha^2 \sin \alpha x]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

**$\eta$ -formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf**

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met: } \begin{aligned} \eta_1 &= 4 + \frac{10}{\rho_1}; \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 &= 4 + \frac{10}{\rho_2}; \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} \end{aligned}$$

**$\rho$ -formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf**

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met: } \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

**Regel van Merchant:**

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

**Kromming t.g.v temperatuursgradient:**

“Vrije” kromming t.g.v lineair temperatuursverloop over de hoogte  $h$  van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$