Opdracht 4 Inleiding Programmeren, academiejaar 2018-2019

- Je mag tijdens de oefensessies aan je taken werken, en natuurlijk ook thuis en buiten de lesuren in de computerklas
- Dien je taak persoonlijk in **<u>uiterlijk op vrijdag 5 April om 18u</u>**, via het Blackboard
- Zet je naam, email en datum inlevering als commentaar in al je files
- Maak steeds een testprogramma waarin je de functionaliteit demonstreert
- Zip je projectfolder met daarin de broncode en de output van je programma en laad die in zijn geheel op via blackboard
- Lever deze keer ook een verslag in (in PDF formaat) waarbij je naast een beschrijving van het probleem en de numerieke oplossing ervan de grafieken van je berekening netjes weergeeft en bespreekt
- Een willekeurig student wordt op Woensdag 24 April vooraan geroepen om zijn/haar programma voor te stellen en te demonstreren

- De quotering (op dubbel aantal punten dan gewoonlijk) zal bestaan uit:

  1. Correctheid van je resultaat
  2. Implementatie, eenvoud en stijl van je klasse
  3. Gebruiksvriendelijkheid van je klasse en duidelijkheid van het testprogramma
  4. De duidelijkheid van je numerische resultaten (in tabelvorm) en duidelijkheid van je grafische weergave
  5. Een zinnige interpretatie van je bekomen resultaat

<u>Formulering van de opdracht:</u>

Beschouw een ijzeren staaf van lengte L = 1m, gelegen langs de x-as. De staaf is langs zijn lengte geïsoleerd, behalve aan zijn eindpunten.
We kunnen nu de staaf opwarmen of afkoelen en de warmteverdeling bestuderen langs de lengte van de staaf op opeenvolgende tijdstippen t.

<u>Basisvergelijking:</u>

Het transporteren van warmte in een metaal is grotendeels een diffusieprobleem dat in één dimensie wordt beschreven door de volgende differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{K}{C\rho}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad \textbf{(1)}$$

Waarbij K de warmtegeleidingscoëfficient van het materiaal is, C de warmtecapaciteit van het materiaal en ρ de dichtheid.

Numerieke aanpak van het probleem:

Discretiseer je staaf in *n* kleine lengte intervallen *Δx*, en bereken de evolutie in de tijd via discrete tijdsstappen *Δt*.
Hierdoor worden de volgende delen van voorgaande vergelijking gereduceerd tot:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \simeq \frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \simeq \frac{T(x+\Delta x,t) + T(x-\Delta x,t) - 2T(x,t)}{(\Delta x)^2}$$

Waardoor vergelijking (1) zich herleid tot deze vorm:

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \eta\left[T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}\right]$$

Met $\eta = \frac{K\Delta t}{C\rho\Delta x^2}$

En de positie x = iΔx en t = jΔt.

Let op: een numerieke benadering zoals deze is niet altijd stabiel.
Om stabiliteit te verzekeren moeten de lengte en tijdsstappen die je kiest voldoen aan volgende ongelijkheid (Von Neumann Criterium):

(2) $$\eta = \frac{K\Delta t}{C\rho\Delta x^2} < \frac{1}{2}$$

Technische implementatie van het vraagstuk:

Schrijf een klasse Bar (met overeenkomstige header file Bar.h) die minstens als data members de lengte L, de warmtegeleidingscoeefficient K, de dichtheid ρ, en de warmtecapaciteit C bevat.
Gebruik ook een lineaire datastructuur (array of vector) als data member om je temperatuursprofiel van de staaf op te slaan.

Schrijf een functie Heat die op een willekeurig tijdstip t het temperatuursprofiel van de staaf berekent.

<u>Uit te voeren taken:</u>

Maak een klein geschreven verslagje van je bevindingen bij de onderstaande 3 taken waarbij je je grafische resultaten duidelijk weergeeft, bespreekt en interpreteert.

Lever ook je klasse en testprogramma en eventueel de ruwe output van je testprogramma mee met de oplossingen van je opdracht.

Taak1:

Maak een ijzeren staaf met lengte L=1m met volgende eigenschappen:

C = 0.45 J g-1 K-1
K = 80.4 W m-1 K-1
ρ = 7.874 g cm-3

Op tijdstip t_0=0 is de staaf op een uniforme temperatuur T = 100ºC. Dan wordt één van de uiteinden in blijvend contact gebracht met ijswater op T = 0ºC, terwijl het andere in contact blijft met een warmtebron op T = 100ºC.
Bereken het temperatuursprofiel in de staaf op opeenvolgende tijdstippen $t>t_0$.

De beginconditie is bijgevolg:
T(x, t = 0) = 100ºC, voor alle $x \neq 0$
T(x = 0, t = 0) = 0ºC

Verifieer dat ongelijkheid (2) is voldaan indien Δx = 1cm en Δt = 1s.

Verdeel je staaf in 100 lengte elementjes Δx van elk 1 cm en reken de temperatuur uit in elk elementje met tijdstappen Δt = 1s.
Maak een grafiek van de temperatuur in elk punt van de staaf op t = 0s, 10s, 20s, 30s, 100 s, 1000s, …
(Kies zelf een aantal geschikte tijdsintervallen waarbij de verandering van het temperatuursprofiel mooi zichtbaar is)

Geef een selectie van je berekende temperatuursprofielen weer in een nette grafiek en bespreek deze.

Taak 2:

Maak een nieuwe staaf. Doe hetzelfde als bij taak 1, maar kies Δx en Δt zo dat de ongelijkheid uit vgl. (2) niet voldaan is. Wat merk je op in de oplossing van het probleem ?
Geef, indien nuttig, de problematische temperatuursprofielen grafisch weer.

Taak 3:

Zorg er nu terug voor dat het convergentiecriterium uit (2) geldig is. Bereken de evolutie van het temperatuursprofiel voor de volgende beginconditie:

$T(x=L/2, t=0) = 100^{o}C$
$T(x,t=0) = 0^{o}C$, voor alle $x \neq L/2$

Deze keer wordt de staaf niet in een ijsbad gestoken, maar kan je ervan uitgaan dat de omgevingstemperatuur gelijk is aan de temperatuur van het uiteinde van de staaf. De uiteinden worden zoals bij taak 1 anders behandeld, deze keer niet door ze op een vaste waarde te zetten maar door de formule aan te passen. Bijvoorbeeld voor het begin van de staaf is de zogezegde T_{i-1} gelijk aan $T_{i.}$
Maak een structuur in je code waardoor er al dan niet randvoorwaarden bepaald kunnen worden. Als er randvoorwaarden zijn (taak1), zet je de uiteinden van de staaf gelijk aan die constante waarden, als er geen randvoorwaarden zijn (taak3), gebruik je de aangepaste formule.

Maak een grafiek van de temperatuur in elk punt van de staaf op t = 0s, 10s, 20s, 30s, 100 s, 1000s, …
(Kies zelf een aantal geschikte tijdsintervallen waarbij de verandering van het temperatuursprofiel mooi zichtbaar is)

Geef een selectie van je berekende temperatuursprofielen weer in een nette grafiek en bespreek deze.