Inleiding Programmeren: Opdracht 4

Stoops Tom
2 Ba Fysica

30-03-2019

Voor ruwe console output, zie `OUTPUT_CONSOLE.TXT`.

Theorie

In deze taak zullen we de eendimensionale diffusie vergelijking oplossen, algemeen gegeven door:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}T\left(x,t\right)-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}T\left(x,t\right)=0 \tag{1}$$

Hiervoor zullen we volgend explicit finite difference [1] discretisatieschema gebruiken:[I]

$$T_{i,j+1}=T_{i,j}+\eta\left(T_{i+1,j}+T_{i-1,j}-2T_{i,j}\right) \tag{2}$$

Waar i de ruimtestap is en j de tijdstap. Hier is η een constante die overeenkomt met de Courant-Friedrichs-Levy voorwaarde op stabiliteit die bepaald wordt met behulp van Von Neumann stabiliteitsanalyse. Hiervoor is in de opdracht gegeven dat deze voorwaarde gegeven is door:

$$\eta=\frac{K\Delta t}{C\rho\left(\Delta x\right)^2}<\frac{1}{2} \tag{3}$$

In deze opdracht zullen we ook twee vormen van randvoorwaarden beschouwen. Ten eerste de Dirichlet randvoorwaarde, die zeggen dat:

$$\begin{cases} T\left(0,t\right)=\alpha \\ T\left(L,t\right)=\beta \end{cases} \qquad \text{met } \alpha,\beta\in\mathbb{R} \tag{4}$$

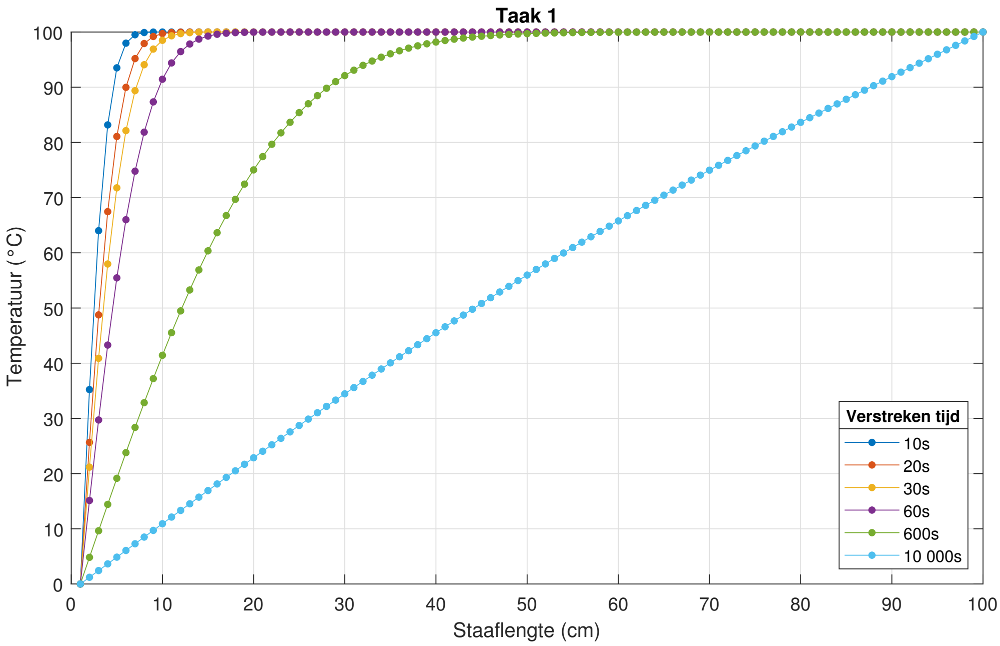
Waarbij de randpunten dus een constante waarde toegewezen krijgen. Ten tweede Neumann randvoorwaarden, gegeven door:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}T\left(0,t\right)=\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x}T\left(L,t\right)=\delta \end{cases} \qquad \text{met } \gamma,\delta\in\mathbb{R} \tag{5}$$

Waarbij dus de afgeleiden op de randpunten constant blijven.

[I] Ook gegeven in de opdracht.

Taak 1



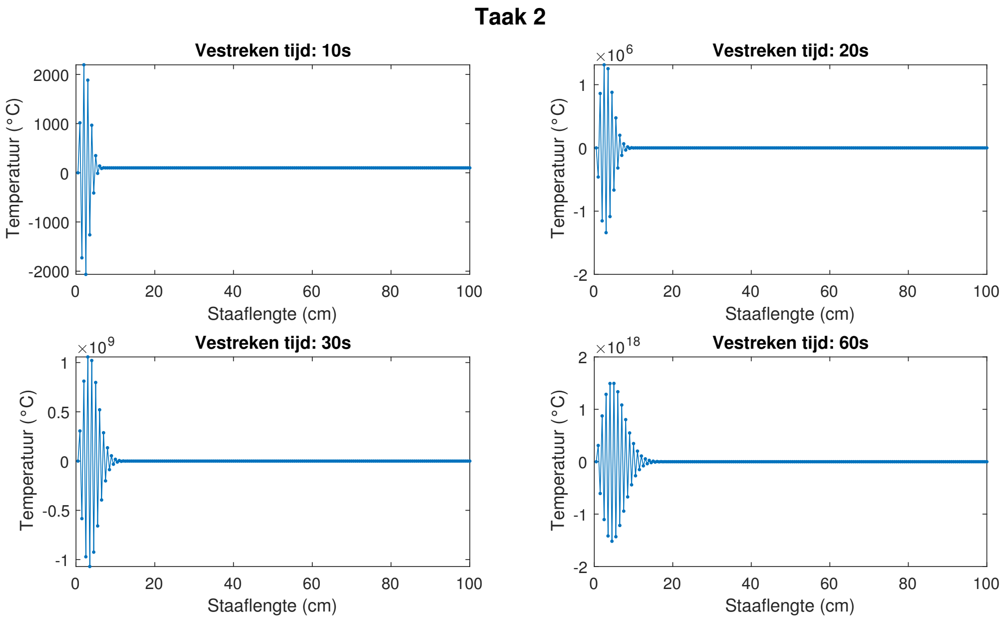
Figuur 1: Gevonden temperatuursverdeling op verschillende tijdstippen voor taak 1.

We zien voor de diffusie van temperatuur bij Dirichlet randvoorwaarden met beginvoorwaarde dat de gehele staaf[II] op 100 °C naar een (bij benadering) lineaire stijging convergeert na verloop van voldoende tijd. Dit is heel duidelijk op de grafiek voor $t = 10\ 000$ s.

Dit is ook een logisch gegeven als we naar een relaxatie-methode zouden kijken voor dit probleem, hierbij wordt bij iedere iteratie het gemiddelde genomen tussen de naburige punten waardoor we een rechte met voorschrift $T = \frac{100\ °\text{C}}{100\ \text{cm}} \cdot L$.

[II]Op het linkse randpunt na.

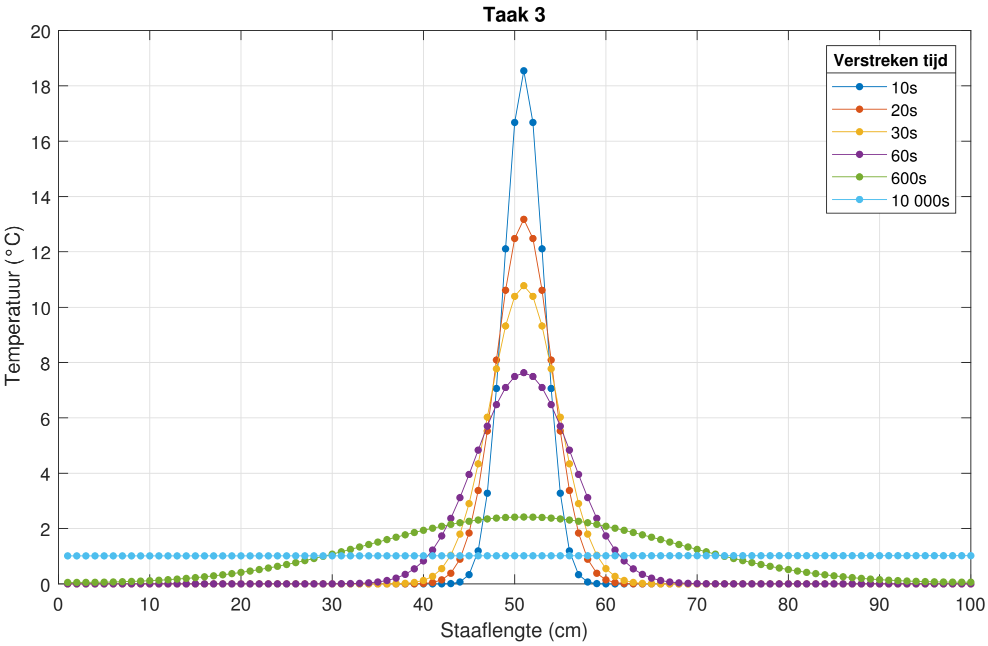
Taak 2



Figuur 2: Gevonden temperatuursverdeling op verschillende tijdstippen voor taak 2.

Wanneer er niet voldaan is aan het stabiliteitscriterium (3) vinden we dat de resultaten divergeren van de oplossing. We zien op figuur 2 duidelijk dat de instabiliteit en fout op het juiste antwoord enorm snel groeit. Als het algoritme instabiel is kunnen we hier geen correcte oplossing uit verwachten. Voor tijdstap $t = 600$ s gaf `C++` zelfs `-nan(ind)` terug als waarde wegens overflow van waarden.

Taak 3



Figuur 3: Gevonden temperatuursverdeling op verschillende tijdstippen voor taak 3.

In deze taak werd de beginvoorwaarde gegeven door een delta piek in het midden van de staaf met Neumann randvoorwaarden. We zien hier dat de initiële piek al snel uitdijnt tot een Gauss-achtige curve waarvan de σ-waarde steeds toeneemt. Na lange tijd (t = 10 000 s) zien we dat de staaf op een vrijwel homogeen verdeelde temperatuur is gekomen van 1 °C.

Referenties

[1] M. Milošević *Cursus: Numerical Methods*, UAntwerpen