Numerieke Methoden
3de Bachelor Fysica

Practicum 6: Gewone differentiaalvergelijkingen met BVW

Contact: jeroen.mulkers@uantwerpen.be U.305

1. **De slinger.** De bewegingsvergelijking van de slinger is

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta,$$

met L de lengte van de slinger en g de valversnelling. In de benadering voor kleine uitwijkingen geldt $\sin\theta \approx \theta$, en de vergelijking vereenvoudigt tot

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta.$$

De oplossing van deze vereenvoudigde vergelijking is eenvoudig:

$$\theta(t) = C_1\cos(2\pi t/T + C_2),$$

waarbij de constanten C_1 en C_2 bepaald worden door de startwaarden van θ en $\omega = d\theta/dt$. De periode wordt gegeven door $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Los nu numeriek de bewegingsvergelijking van de slinger op zonder de benadering voor kleine uitwijkingen te maken. Maak hiervoor eerst gebruik van de methode van Euler (implementeer deze zelf of neem en bestudeerd de file slinger_euler.m). Neem als eenheid van tijd $t' = \sqrt{L/g}$. Plot de hoek en de snelheid in functie van de tijd. Plot ook de snelheid in functie van de hoek. Wat merk je op? Verbetert je oplossing als je de methode van Euler vervangt door de methode van Euler-Cromer (zie slides)? Kijk ook eens naar de oplossing als je start met een grote uitwijking.

Een andere methode om een bewegingsvergelijking op te lossen is de methode van Verlet die hieronder beschreven wordt.

De methode van Verlet. We starten van de bewegingsvergelijkingen

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}.$$

Door gebruik te maken van de centraal verschil benaderingen voor de eerste en tweede afgeleiden bekomen we

$$\frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_{i-1}}{2h} + O(h^2) = \vec{v}_i$$
$$\frac{\vec{r}_{i+1} - 2\vec{r}_i + \vec{r}_{i-1}}{h^2} + O(h^2) = \vec{a}_i,$$

met h de tijdstap. Herschrijven levert volgend te implementeren schema:

$$\vec{r}_{i+1} = 2\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1} + h^2\vec{a}_i + O(h^4) \tag{1}$$
$$\vec{v}_i = \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_{i-1}}{2h} + O(h^2). \tag{2}$$

Dit is de methode van Verlet. Stel dat je $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ kent, dan kan je via uitdrukking (1) $\vec{r}_3$ berekenen. Vervolgens levert uitdrukking (2) dan $\vec{v}_2$, enz...

Echter meestal zijn niet $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ gekend, maar $\vec{r}_1$ en $\vec{v}_1$. Dan kan je bv. de methode van Euler gebruiken om de eerste stap te bereken, nl. $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 h$. De volgende stappen vind je dan via de methode van Verlet.

De methode van Verlet heeft een kleine afrondingsfout, bovendien kan de berekening van de snelheid overgeslagen worden als men er niet in geïnteresseerd is en de kracht enkel plaatsafhankelijk is. Daarom wordt deze methode vaak gebruikt om trajecten te berekenen van systemen met een groot aantal deeltjes zoals in 'molecular dynamics' simulaties.

Schrijf nu een script (of function file) dat de methode van Verlet gebruikt om de bewegingsvergelijking van de slinger op te lossen. Plot het verloop van positie en snelheid a.f.v. de tijd. Plot ook de snelheid in functie van de uitwijking. Je kan proberen de volledige faseruimte te visualiseren door dit te herhalen voor verschillende begin condities.

2. **Het jager-prooi probleem.** De volgende differentiaal vergelijkingen (die gebaseerd zijn op de Volterra vergelijkingen) modelleren de interactie tussen jager-prooi populaties:

$$\frac{dP}{dt} = K_1 P - CPJ$$
$$\frac{dJ}{dt} = -K_2 J + DPJ$$

met de beginvoorwaarden $P = P_0$ en $J = J_0$ op tijd $t = 0$. P staat voor de grootte van de prooipopulatie (bv. hazen), J voor de grootte van de populatie van jagers (bv. lynxen). K_1, K_2, C en D zijn positieve constanten. De eerste vergelijking zegt dat de prooipopulatie zal veranderen o.i.v. van twee factoren. Ten eerste zal ze toenemen evenredig met de grootte van de populatie zelf (die hazen kweken immers), en ten tweede zal ze afnemen door het aantal 'ontmoetingen' tussen jager en prooi, wat evenredig is met het product van de grootte van beide populaties. De jager populatie neemt anderzijds af als er meer jagers zijn, dit is immers concurrentie. Maar het aantal jagers zal wel groeien t.g.v. die 'ontmoetingen' tussen jagers en prooi. Dit betekent immers meer voedsel voor de jagers waardoor ze beter kunnen overleven.

De oplossing van dit stelsel van differentiaalvergelijkingen hangt sterk af van de waarden van de constanten en zal vaak resulteren in een stabiele cyclus. Hoe die constanten best gekozen worden is niet ons probleem (maar van biologen). Kies bv. $K_1 = 2, K_2 = 10, C = 0.001$ en $D = 0.002$. Los nu dit stelsel op m.b.v. de MATLAB ODE solver `ode45`. Start met een populatie van 5000 hazen en 100 lynxen. Plot de grootte van de populaties in de tijd.

3. **Komeetbanen rond de zon.** Beschouw een kleine satelliet zoals een komeet die draait rond de zon. We gebruiken een Copernicaans coördinatensysteem en plaatsen de zon in de oorsprong. Beschouw enkel de aantrekkingskracht van de zon op de komeet en verwaarloos alle andere krachten (zoals krachten t.g.v. planeten). De kracht op de komeet is

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{|\vec{r}|^3}\vec{r},$$

met $\vec{r}$ de positie van de komeet, m zijn massa, $M(= 1.99 \times 10^{30}$ kg) de massa van de zon, en $G(= 6.67 \times 10^{11}$ m^3/kg·s^2) de gravitationele constante. De natuurlijke eenheden voor lengte en tijd zijn niet meters en seconden. Als eenheid van lengte gebruiken we de astronomische eenheid (AU $= 1.496 \times 10^{11}$ m), die gelijk is aan de gemiddelde afstand tussen zon en aarde. Als eenheid van tijd kiezen we een jaar. In deze eenheden wordt het product $GM = 4\pi^2\text{AU}^3/\text{jaar}^2$. We kiezen ook de massa van de komeet m als eenheid. De typische massa van een komeet is $10^{15\pm3}$ kg.

Laat ons voordat we het programma schrijven en runnen dat de baan van de komeet rond de zon berekent, eens snel enkele gekende resultaten overlopen. De totale energie van de satelliet is

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}.$$

Deze totale energie is een behouden grootheid net zoals het angulair moment $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. Als de baan cirkelvormig is, dan is de centripetale kracht gelijk aan de aantrekkingskracht,

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{GM/r}.$$

Bv. voor een cirkelvormige baan bij $r = 1$ AU is de snelheid $v = 2\pi$AU/jaar (ongeveer 30000 km/h). De totale energie wordt dan gegeven door

$$E = -\frac{GMm}{2r}. \tag{3}$$

In een elliptische baan zijn de grote en kleine as, a en b, verschillend. De excentriciteit e van een ellips is gedefinieerd als

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

De excentriciteit van de baan van de aarde is $e = 0.017$, en is dus bijna cirkelvormig. Uitdrukking (3) voor de totale energie blijft geldig als we r vervangen door de lengte van de grote as a. Dus

$$E = -\frac{GMm}{2a}.$$

Voor de snelheid vinden we dan

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

Tot slot, gebruik makend van het behoud van angulair moment, kan de derde wet van Kepler afgeleid worden:

$$T = \frac{4\pi^2}{GM}a^3,$$

met T de periode van de baan.

a) Het script orbe.m berekent de baan van een komeet rond de zon met de methode van Euler. Bestudeer dit script en toon het resultaat voor een *cirkelvormige* baan van straal 1 en met als tijdsstap 0.02 jaar. Je ziet dat de methode van Euler niet stabiel is net zoals in het voorbeeld van de slinger. Kan je dit ook zien in de plot met de energie als functie van de tijd?

b) Verander het algoritme in Euler-Cromer en test opnieuw voor een cirkelvormige baan.

c) Run het Euler-Cromer programma nu voor $r_0 = 1$, $v_0 = \pi$ en $\tau = 0.02$ jaar. Wat gebeurt er? Wat is de betekenis van een positieve energie?

d) Als je de tijdsstap verkleint tot 0.005 jaar krijg je een beter resultaat. Doe dit. Maar merk de niet correcte drift op van de baan. We hebben dus nog een betere methode nodig.

Extra voor wie er echt zin in heeft:

e) Implementeer zelf de Runge-Kutta methode van orde 4 voor dit probleem en bekijk de baan en de totale energie opnieuw.

f) Je kan ook zien dat de snelheid van de komeet het grootst is nabij de zon. Je kan dan ook verwachten dat het nuttig is om nabij de zon de tijdsstap nog kleiner te kiezen, terwijl ver van de zon de stappen groter kunnen genomen worden om dezelfde nauwkeurigheid te verkrijgen. Als je de baan nog elliptischer maakt (door bv. $r_0 = 1, v_0 = \pi/2$ te nemen) dan zal je zien dat Runge-Kutta ook faalt voor $\tau = 0.005$. Je kan τ verkleinen tot $\tau = 0.0005$, maar zelfs dan zit er nog een drift op de baan. Bij nog kleinere tijdsstappen wordt de rekentijd wel al erg lang. De oplossing is dan ook om een adaptieve versie te implementeren van je Runge-Kutta algoritme.

4. **De Lorentz attractor.** Met de wetten van Newton was de basis voor een volledig deterministische beschrijving van de materiële werkelijkheid gelegd. Voor het mechanistisch wereldbeeld braken hoogtij dagen aan. Met de komst van de computer dacht men dat bv. weersvoorspelling over een lange tijd binnen de mogelijkheden lag.

   Begin van de jaren '60 had Edward Lorentz[1], een meteoroloog en wiskundige, het inzicht dat dit geloof onterecht was. Hij vond dat het weer intrinsiek onvoorspelbaar is. Lorentz formuleerde een eenvoudig model voor de beschrijving van het weer, bestaande uit 12 niet-lineaire differentiaalvergelijkingen. Wat hij zag was chaotisch gedrag in de tijd dat extreem gevoelig was voor de beginvoorwaarden.

   Hij introduceerde nog een eenvoudiger model met enkel 3 variabelen dat gelijkaardig chaotisch gedrag vertoont. Het model van Lorentz wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned}$$

   met σ, r en b positieve constanten (meestal neemt men $\sigma = 10$ en $b = 8/3$). Voor $r > 24.7$ vertoont dit stelsel meestal chaotisch gedrag.

   Los dit stelsel op met `ode45`. Plot x, y en z als functie van de tijd. Bekijk ook de trajecten in het fasevlak: plot x als functie van y en plot x als

[1] Niet te verwarren met Hendrik Lorentz, de Nederlandse natuurkundige die we allen kennen van de Lorentztransformatie en de Lorentzkracht.

functie van z. Bekijk je resultaat voor twee erg dichtbij elkaar liggende beginvoorwaarden. Waarom noemt men dit gedrag chaotisch? Bekijk ook eens je resultaat als je r veel kleiner kiest.

Lorentz noemde deze extreme gevoeligheid voor de beginvoorwaarden het 'butterfly' effect: één enkele beweging van de vleugels van een vlinder kan op lange termijn ons weer beïnvloeden.