



Practicum 8: Partiële differentiaalvergelijkingen II: Geavanceerde expliciete methoden.

Contact: jeroen.mulkers@uantwerpen.be U.305

In het vorige practicum hebben jullie het standaardvoorbeeld van een parabolische PDE, nl. de diffusie vergelijking, numeriek opgelost via een eenvoudige *marching* methode. In dit practicum zullen we een aantal geavanceerdere *marching* methoden gebruiken om *hyperbolische* PDEs op te lossen.

1 De advection vergelijking

1.1 Golf en advection vergelijkingen

Ons standaardvoorbeeld voor een hyperbolische PDE is de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

met $A(x, t)$ de golfamplitude en c de golfsnelheid. Laten we nu, net zoals bij de behandeling van hogere orde ODEs, deze vergelijking schrijven als een paar van eerste orde PDEs. We kiezen

$$P = \frac{\partial A}{\partial t}; \quad Q = -c \frac{\partial A}{\partial x}$$

Hiermee kunnen we de golfvergelijking herschrijven als volgend paar vergelijkingen:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -c \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = -c \frac{\partial P}{\partial x}$$

of

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = -c \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}$$

$$\text{met } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dit suggereert dat de golfvergelijking, hoewel ze voor ons de meest vertrouwde hyperbolische PDE is, niet de eenvoudigste hyperbolische PDE is. Omdat we de numerieke methoden toch eerst willen toepassen op het eenvoudigste voorbeeld, nemen we als model voor de hyperbolische vergelijking de *advection vergelijking*:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -c \frac{\partial a}{\partial x}$$

Advection is in de meteorologie het horizontaal transport van een hoeveelheid lucht of een luchtslaag. Als $a(x, t)$ de temperatuur is in x op ogenblik t , dan zegt deze vergelijking dus dat

(de snelheid waarmee de temperatuur in x verandert) =

– (de snelheid waarmee de lucht zich verplaatst) \times (de temperatuursgradiënt)

De advection vergelijking is het eenvoudigste voorbeeld van een continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{F}(p)$$

Als p bv. de ladingsdichtheid is, dan is F de stroomdichtheid.

1.2 Analytische oplossing van de advection vergelijking

Het is eenvoudig om in te zien dat, met BVW

$$a(x, t = 0) = f_0(x)$$

met f_0 een willekeurige functie, de oplossing van de advection vergelijking gegeven wordt door

$$a(x, t) = f_0(x - ct).$$

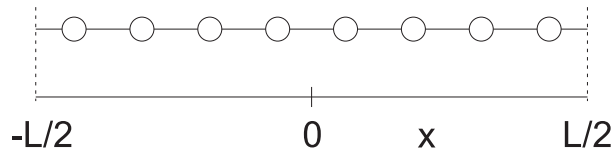
Onderstel dat de BVW een Gaussische puls is gemoduleerd met een cosinus

$$a(x, t = 0) = \cos[k(x - x_0)] \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2} \right]$$

met de constanten x_0 en σ de locatie van de piek en de breedte van de puls. De oplossing is dan

$$\begin{aligned} a(x, t) &= \cos[k((x - ct) - x_0)] \exp \left[-\frac{((x - ct) - x_0)^2}{2\sigma^2} \right] \\ &= \cos[k(x - (x_0 + ct))] \exp \left[-\frac{(x - (x_0 + ct))^2}{2\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

Merk op dat de oplossing zijn vorm exact behoudt, maar de positie van de piek is verschoven naar $x_0 + ct$. Hoewel de advection vergelijking eenvoudig analytisch op te lossen is, is het een goed voorbeeld om numerieke methoden voor hyperbolische PDEs te testen. We zullen zien dat zelfs deze eenvoudige vergelijking niet-triviaal is om numeriek op te lossen.



Figuur 1: De gekozen grid bij periodische RVW. De grens ligt tussen het eerste en laatste gridpunt in.

1.3 FTCS methode voor de advection vergelijking

Laten we eerst de advection vergelijking oplossen met de FTCS methode van vorig practicum. De afgeleide naar de tijd wordt benaderd door de voorwaartse verschil benadering:

$$\frac{\partial a}{\partial t} \Rightarrow \frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\tau}$$

De afgeleide naar x wordt benaderd door de centraal verschil benadering

$$\frac{\partial a}{\partial x} \Rightarrow \frac{a_{i+1}^n - a_{i-1}^n}{2h}$$

We zullen periodische RVW aannemen waarbij x_1 en x_N aangrenzende punten zijn, zoals getoond in figuur 1. De gridstap is $h = L/N$.

Het programma `advect.m` lost de advection vergelijking op met o.a. de FTCS methode. Als BVW werd de Gaussische puls gemoduleerd met een cosinus gekozen. Omdat de golfsnelheid gelijk is aan c , verplaatst de golf zich over een afstand h in een tijd $t_w = h/c$. Dit geeft ons een karakteristieke tijdsschaal voor ons probleem. Verplaatsing over een afstand L betekent met periodische RVW dat de puls zich terug in de startpositie bevindt. Hiervoor zijn $L/(c\tau)$ iteraties nodig.

Opgave

Bestudeer nu even het programma `advect.m`, i.h.b. de manier waarop de RVW zijn geïmplementeerd, en run het FTCS schema. Doe dit voor verschillende waarden van τ . Wat merk je?

1.4 Lax methode voor de advection vergelijking

Voor de advection vergelijking blijkt het FTCS schema altijd onstabiel, voor elke waarde van τ . Gelukkig is er een eenvoudige oplossing: de Lax methode, gedefinieerd door volgend schema:

$$a_i^{n+1} = \frac{1}{2}(a_{i+1}^n + a_{i-1}^n) - \frac{c\tau}{2h}(a_{i+1}^n - a_{i-1}^n)$$

De Lax methode vervangt gewoon de a_i^n term in de FTCS methode door het gemiddelde van de aangrenzende punten. Deze methode is stabiel als $\frac{c\tau}{h} \leq 1$. De maximale waarde voor τ is dus $\tau_{\max} = \frac{h}{c} = t_w$. Dit criterium is gekend als de *Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL) conditie en komt vaak tevoorschijn bij numerieke methoden om hyperbolische PDEs op te lossen.

Opgave

Bestudeer de implementatie van de Lax methode in `advect.m` en los de advection vergelijking op met deze methode. Neem eerst $\tau = \tau_{\max} = t_w$. Verklein daarna de tijdsstap. Wat merk je?

De Lax methode heeft een interessante eigenschap. Voor waarden van $\tau > \tau_{\max}$ heb je problemen omdat de methode niet stabiel is. Echter voor waarden kleiner dan τ_{\max} is de oplossing ook fout! We vinden immers dat de puls dan uitdooft. Het beste resultaat verkrijgt je als $\tau = \tau_{\max}$. Dit is dus een voorbeeld van een methode waarbij een kleinere stapgrootte geen beter resultaat oplevert.

Door het gemiddelde te nemen van twee aangrenzende punten introduceren we als het ware een artificiële diffusie. De grootte van deze artificiële diffusie is omgekeerd evenredig met de tijdsstap τ . Als de tijdsstap te groot wordt gekozen, is de artificiële diffusie te zwak om de oplossing te stabiliseren. Wordt τ te klein gekozen, dan is de artificiële diffusie te sterk en dooft de oplossing uit. Heel wat schema's om hyperbolische PDEs op te lossen introduceren een of andere vorm van diffusie.

1.5 Lax-Wendroff schema

Laten we tot slot een *tweede orde* 'finite difference' methode afleiden, het Lax-Wendroff schema. Daarvoor vertrekken we van de Taylor expansie

$$a(x, t + \tau) = a(x, t) + \tau \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right) + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \right) + O(\tau^3)$$

De term lineair in τ kunnen we m.b.v. de advection vergelijking zelf herschrijven als

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -c \frac{\partial a}{\partial x}.$$

Analoog voor de term in τ^2 :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}.$$

We vinden dan

$$a(x, t + \tau) \approx a(x, t) - c\tau \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{c^2 \tau^2}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}.$$

Discretisatie levert,

$$a_i^{n+1} = a_i^n - \frac{c\tau}{2h}(a_{i+1}^n - a_{i-1}^n) + \frac{c^2 \tau^2}{2h^2}(a_{i+1}^n + a_{i-1}^n - 2a_i^n)$$

Merk op dat de laatste term een discrete benadering is voor de tweede afgeleide van $a(x, t)$. Deze term zorgt nu voor de artificiële diffusie die de oplossing stabiliseert. Ook voor deze methode kan men aantonen dat de CFL conditie het stabiliteitscriterium is. Merk ook op dat als $\tau = \tau_{\max} = h/c$ het Lax Wendroff schema reduceert tot het Lax schema.

Opgave

Run nu ook het Lax-Wendroff schema voor verschillende waarden van τ .

1.6 Opgave

1. Pas `advect.m` aan zodat je de volgende Dirichlet RVW implementeert:

$$\begin{aligned} a(x = -L/2, t) &= \sin(\omega t) \\ a(x = L/2, t) &= 0 \end{aligned}$$

Run het programma (zonder de Gaussische puls) lang genoeg zodat de golf de andere kant $x = L/2$ kan bereiken. Neem bv. $\omega = 10\pi$ en test de FTCS, Lax en Lax-Wendroff schema's.

2. De combinatie van de advection en diffusievergelijking levert de transport-vergelijking:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -c \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Schrijf een programma dat deze PDE oplost m.b.v. een FTCS schema. Neem periodische RVW en onderstel als BVW $T(x, t = 0)$ een Gaussische functie genormaliseerd op 1 en met standaardafwijking $2h$. Ga empirisch na dat de numerieke oplossing stabiel is als

$$\left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 \leq \frac{2\kappa\tau}{h^2} \leq 1$$

Experimenteer daarvoor ook met de waarden voor c en κ .