# Fractions continues

Tom Wozniak

9 septembre 2025

## 1 Introduction

Les fractions continues constituent une approche unique pour représenter des nombres réels en tant que développements fractionnaires itérés. Elles offrent une perspective distincte des représentations décimales et permettent de saisir des aspects fondamentaux de l'approximation rationnelle des nombres réels. Introduites initialement dans le cadre des mathématiques antiques et popularisées par des mathématiciens comme Euler et Gauss, les fractions continues présentent des applications qui s'étendent de la théorie des nombres à la résolution d'équations diophantiennes. Ce document propose d'explorer quelques propriétés essentielles des fractions continues et leur utilisation dans l'approximation des irrationnels, tout en illustrant leur pertinence dans divers domaines des mathématiques modernes.

## 2 Définitions et propriétés élémentaires

On commence par introduire la notion de fraction continue.

**Définition 1 (Fraction continue)** *Une fraction continue est une expression de la forme*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + ...}} = [a_0, a_1, a_2, ...]$$

*avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_i \in \mathbb{N}$ pour $i > 0$.*

Les fractions continues permettent de donner une écriture différente aux nombres rationnels et d'approcher numériquement de manière aussi précise que voulue les irrationnels. La proposition qui suit précise ce résultat.

**Proposition 1** *Tout nombre réel peut s'écrire comme une fraction continue. De plus, un nombre est rationnel si et seulement si son développement en fraction continue est finie.*

La preuve de ce résultat repose sur l'algorithme d'Euclide. Plutôt que de le démontrer, illustrons le par un exemple, en calculant le développement en fraction continue de $\frac{355}{113}$.

On effectue la division euclidienne de 355 par 113 : $355 = 113 \times 3 + 16$, donc on peut écrire $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}$. Ensuite, on effectue la division euclidienne de 113 par 16 : $113 = 7 \times 16 + 1$, donc $\frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}$. Ainsi, on a $\frac{355}{113} = [3, 7, 16]$.

On introduit maintenant la notion de réduite d'une fraction continue.

**Définition 2 (Réduites d'une fraction continue)** *On appelle réduite d'une fraction continue à l'ordre $n$ la quantité $[a_0, ..., a_n] =: \frac{p_n}{q_n}$.*

Les suites $(p_n)$ et $(q_n)$ possèdent plusieurs relations qui sont résumées dans la proposition suivante.

**Proposition 2** *En posant $p_{-1} = 1$, $p_{-2} = 0$, $q_{-1} = 0$ et $q_{-2} = 1$, on a*

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \\ (-1)^n &= p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}. \end{aligned}$$

Ces relations se prouvent par récurrence en utilisant la définition des fractions continues. Notons aussi que la dernière relation entraîne, via le théorème de Bézout, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les entiers $p_n$ et $q_n$ sont premiers entre eux.

# 3 Développements et applications diverses des fractions continues

Nous allons maintenant nous intéresser à quelques unes des nombreuses applications des fractions continues.

## 3.1 Utilisation des fractions continues pour démontrer l'irrationalité de certaines constantes

D'après la proposition 1, un nombre est irrationnel si et seulement si son développement en fraction continue est infini. Ainsi, les fractions continues sont un outil que l'on peut utiliser pour démontrer l'irrationalité de certaines constantes comme $\pi$ ou même $\zeta(3)$.

**Théorème 1 (Lambert, 1761)** *Le nombre $\pi$ est irrationnel.*

**Démonstration.** La preuve de Lambert repose sur le développement en fraction continue généralisée de la fonction tangente. Il démontre que

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - ...}}}}$$

L'idée pour trouver cette formule a d'abord été d'écrire $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ puis de faire une sorte de "division euclidienne de fonctions" en écrivant

$$\cos(x) = \frac{\sin(x)}{x} - R_1$$

où $R_1$ est une fonction. Il en alors déduit que

$$\tan(x) = \frac{x}{1 - \frac{xR_1}{R_0}}.$$

En posant $R_{-1} = \cos(x)$ et $R_0 = \sin(x)$, il montre alors la formule de récurrence suivante :

$$R_{n-2} = \frac{2n-1}{x} R_{n-1} - R_n \Leftrightarrow \frac{xR_{n-1}}{R_{n-2}} = \frac{x^2}{2n - 1 - \frac{xR_n}{R_{n-1}}}$$

ce qui lui permis de conclure. En utilisant cette formule, il montre que si $x \in \mathbb{Q}^*$ alors $\tan(x)$ est irrationnel. Puisque $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, il conclut par contraposée que $\frac{\pi}{4}$ est irrationnel et donc que $\pi$ est irrationnel. ■

**Théorème 2 (Apéry, 1978)** *Le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel.*

**Démonstration.** Soit $P(x) = 34x^3 + 51x^2 + 27x + 5$. Apéry a démontré que

$$\zeta(3) = \cfrac{6}{P(0) - \cfrac{1^6}{P(1) - \cfrac{2^6}{P(2) - \cfrac{3^6}{P(3) - ...}}}}$$

ce qui permet de démontrer le résultat. ■

## 3.2 Irrationnels quadratiques

Le but de cette sections est de s'intéresser à une famille de nombres irrationnels qui peuvent être caractérisés par leur développement en fractions continues. On commence par donner la définition.

**Définition 3 (Irrationnel quadratique)** *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On dit que $x$ est un nombre irrationnel quadratique si l'extension de corps $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}$ est de degré 2.*

Par exemple, le nombre $\sqrt{2}$ est un irrationnel quadratique car le polynôme $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, de degré 2, et annulateur de $\sqrt{2}$, ce qui implique que l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ est de degré 2.

On donne maintenant le théorème qui caractérise les irrationnels quadratiques par leur développement en fractions continues.

**Théorème 3 (Lagrange)** *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors, $x$ est un nombre irrationnel quadratique si et seulement si son développement en fractions continue est périodique à partir d'un certain rang.*

Nous ne donnerons pas de preuve de ce théorème, nous allons plutôt le vérifier pour quelques irrationnels quadratiques bien connus.

Si l'on reprend l'exemple de $\sqrt{2}$, on peut voir par un calcul simple que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. En itérant ce résultat, on observe alors que

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + ...}} = [1, 2, 2, ...] =: [1, \overline{2}].$$

La barre au dessus du 2 signifiant ici la périodicité.

De même vérifions le pour $\varphi$ le nombre d'or défini comme la racine positive du polynôme $X^2 - X - 1$. L'extension $\mathbb{Q}(\varphi)/\mathbb{Q}$ est de degré 2, et pour calculer le développement en fractions continues de $\varphi$ il suffit d'observer que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. On en déduit alors directement que $\varphi = [\overline{1}]$.

## 3.3 Constante de Khintchine

Le but de cette section est d'étudier plus en profondeur certains résultats liés aux fractions continues. On commence par quelques définitions.

**Définition 4 (Application de Gauss)** *On définit l'application de Gauss $T$ de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$ par $T(x) = \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.*

L'application $T$ agit comme un opérateur de décalage sur les fractions continues.

**Proposition 3** *Pour $[a_1, ..., a_n]$ un développement en fraction continue, on a*

$$T([a_1, ..., a_n]) = [a_2, ..., a_n].$$

La preuve de cette proposition est immédiate avec les définitions. On définit maintenant une mesure de probabilité.

**Définition 5 (Mesure de Gauss)** *Soit $\Omega \subseteq [0\,;1]$ un espace Lebesgue-mesurable. On pose*

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{\ln(2)} \int_{\Omega} \frac{1}{1+x} d\lambda(x).$$

On vérifie facilement que $\mu$ est une mesure sur $[0\,;1]$. De plus, cette mesure coïncide avec la mesure de Lebesgue sur $[0\,;1]$ dans le sens où un ensemble sera de mesure nulle pour $\lambda$ si et seulement si il est de mesure nulle pour $\mu$.

Nous allons maintenant donner un résultat liant les coefficients du développement en fractions continues des nombres irrationnels.

**Théorème 4 (Constante de Khintchin, 1964)** *Pour $\mu$-presque tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \left( \prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{\frac{1}{n}} = K.$$

*Le réel $K$ est appelé constante de Khintchin.*

**Démonstration.** On donne l'idée principale de la preuve qui repose sur la théorie ergodique. Dans un premier temps, on montre que l'application $T$ est $\mu$-ergodique, c'est à dire que pour tout $\Omega \subseteq [0\,;1]$ mesurable tel que $T^{-1}(\Omega) = \Omega$, on a $\mu(\Omega) = 0$ ou $\mu(\Omega) = 1$. Cette partie étant technique, nous l'admettons.
Ce résultat nous permet alors d'utiliser un corollaire du théorème ergodique de Birkhoff, ce qui nous permet d'écrire

$$\forall x \in I := [0\,;1] \setminus \mathbb{Q},\ \forall f \in L^1(I, \mu),\ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f \circ T^k)(x) = \int_I f d\mu.$$

On choisit alors comme fonction $f$ l'application définit par $f([a_1, a_2, ...]) = \ln(a_1)$. D'après la proposition 3, il vient alors que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \ln(a_k) = \int_I f d\mu = \frac{1}{\ln(2)} \sum_{k=1}^{\infty} \ln(k) \times \ln\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right).$$

En utilisant les propriétés basique du logarithme, on peut alors écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\ln(k)}{\ln(2)}}\right)$$

ce qui permet de conclure, en posant $K = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\ln(k)}{\ln(2)}}$. ■

On ne connaît que très peu de choses sur $K$, on ne sait pas si $K$ est irrationnel ou algébrique. Cependant, $K$, $\pi$ ou même $\gamma$ la constante d'Euler-Mascheroni (dont on ignore encore à ce jour si elle est irrationnelle ou non) semblent vérifier la propriété du théorème 4. Parmi les irrationnels qui ne vérifient pas cette propriété, il y a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $e$ et également $\varphi$.

## Références


[1] Kyle Kneisl *: The continued fraction system (and related systems)* https ://petersen.web.unc.edu/wp-content/uploads/sites/17054/2018/04/refrac.pdf

[2] J.H Lambert *: Mémoire sur quelques propriétés des quantités transcendantes et logarithmiques*, 1761.

[3] Alexandre Khintchin *: Continued fractions*, 1964.

[4] Roger Apéry *: Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$ , 1979.