



# **TER : Introduction à la géométrie hyperbolique**

**Isabelle Desrippes et Tom Wozniak**

**Tuteur : Daniel Massart**

**Janvier-Mai 2024**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Le demi-plan et le disque de Poincaré</b>	<b>4</b>
2.1	Le demi-plan de Poincaré . . . . .	4
2.1.1	Longueur et distance sur le demi-plan de Poincaré . . . . .	4
2.1.2	Le groupe de Möbius et les isométries du demi-plan de Poincaré. . . . .	5
2.1.3	Les géodésiques du demi-plan de Poincaré. . . . .	10
2.2	Le disque de Poincaré. . . . .	14
2.2.1	Comparaisons avec la géométrie euclidienne. . . . .	16
<b>3</b>	<b>Les triangles du demi-plan de Poincaré</b>	<b>18</b>
3.1	Propriétés . . . . .	18
3.2	La formule de Gauss-Bonnet . . . . .	19
3.3	La réciproque de la formule de Gauss-Bonnet . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Construction de surfaces hyperboliques à partir de polygones</b>	<b>24</b>

# 1 Introduction

La géométrie hyperbolique a été formalisée au XIXème siècle par différents mathématiciens dont les plus connus sont Gauss, Klein, Lobachevsky et Poincaré. Cette géométrie est intrigante car elle ne respecte pas le cinquième postulat d'Euclide, qui stipule que si l'on prend une droite  $\mathcal{D}$  et un point  $\mathcal{P}$  extérieur à  $\mathcal{D}$ , alors on peut tracer une unique droite  $\mathcal{D}'$  qui passe par  $\mathcal{P}$  et qui ne coupera jamais la droite  $\mathcal{D}$  (à savoir : étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première).

Le but de ce TER est d'étudier les rudiments de cette nouvelle géométrie.

Tout d'abord, nous commencerons par une section qui traitera de deux modèles : le demi-plan et le disque de Poincaré. Dans un premier temps, nous développerons la notion de longueur et distance, puis du groupe de Möbius et des isométries, ainsi que la notion de géodésique. Dans un second temps, nous étudierons quelques propriétés dans le disque de Poincaré afin de comparer la géométrie hyperbolique à la géométrie euclidienne en explicitant un exemple concret.

Nous poursuivrons par un développement sur les triangles hyperboliques. Dans cette section, nous démontrerons quelques propriétés trigonométriques dans le demi-plan de Poincaré, puis nous étudierons une formule simplifiée de Gauss-Bonnet, qui fournit une relation entre l'aire d'un triangle et celle de ces angles.

Enfin, nous clôturerons ce TER par une étude de la construction de surfaces hyperboliques par recollement, à partir de polygones hyperboliques.

## 2 Le demi-plan et le disque de Poincaré

Le but de cette section est d'étudier deux modèles fondamentaux de la géométrie hyperbolique, le demi-plan et le disque de Poincaré.

### 2.1 Le demi-plan de Poincaré

#### 2.1.1 Longueur et distance sur le demi-plan de Poincaré

Dans cette partie, on va chercher à introduire le demi-plan de Poincaré et le munir d'une distance. On commence par une définition.

**Définition 1 (Demi-plan de Poincaré)** Soit  $\mathbb{C} = \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$  l'ensemble des nombres complexes. On note

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : y = \text{Im}(z) > 0\}$$

le demi-plan de Poincaré.

On munit  $\mathbb{H}$  de la métrique dite hyperbolique

$$dz = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

de telle sorte que la longueur d'un chemin  $\gamma$  sur  $\mathbb{H}$ , noté  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  vérifie

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt = \int_{\gamma} \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz|.$$

Ainsi, on observe directement que les distances dans  $\mathbb{H}$  vont être différentes des distances usuelles du plan euclidien. En effet, plus on s'approche du bord du demi-plan, plus les distances s'agrandissent. Illustrons cela par un exemple.

**Exemple :** Calculons la distance entre les points d'affixes  $(0, 1)$  et  $(0, T)$ ,  $T > 0$ .

Si  $T > 1$ , alors pour  $t \in [0, T]$ , on a

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_1^T \frac{dt}{t} = \ln(T).$$

Si  $T < 1$ , on a

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_T^1 \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{1}{T}\right)$$

ce qui montre bien que la distance "explose" lorsque  $T$  est proche de 0.

Nous allons maintenant formaliser la notion de distance dans  $\mathbb{H}$ . Pour cela, commençons par une proposition.

**Proposition 1** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  un chemin. Alors,  $l_{\mathbb{H}}(\gamma)$  est finie.

**Démonstration.** Puisque  $y(t) > 0$  et que  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $t \rightarrow \frac{|\gamma'(t)|}{y(t)}$  est continue sur  $[a, b]$ , il en découle directement que  $l_{\mathbb{H}}(\gamma)$  est finie. ■

On est alors en mesure de définir une distance sur  $\mathbb{H}$ .

**Définition 2 (Distance sur le demi-plan de Poincaré)** Soient  $z, z'$  deux points de  $\mathbb{H}$ . On note

$$d_{\mathbb{H}}(z, z') = \inf \{l_{\mathbb{H}}(\gamma) : \gamma \in \Gamma[z, z']\}$$

la distance entre  $z$  et  $z'$ , appelée distance hyperbolique.

Montrons que  $d_{\mathbb{H}}$  est une distance qui fournit une structure d'espace métrique à  $\mathbb{H}$ .

Pour cela, on commence par remarquer que  $\forall z, z' \in \mathbb{H}$ ,  $z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow z$  et  $z'$  sont reliés par un chemin  $\gamma$  dans  $\mathbb{H}$  est une relation d'équivalence.

Soient  $z, z', z'' \in \mathbb{H}$ . L'application  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  vérifiant  $\gamma_1(t) = z$  assure la réflexivité de  $\mathcal{R}$ , l'application  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  définie par  $\gamma_2(t) = \gamma(1-t)$  montre que  $\mathcal{R}$  est symétrique. Enfin, si  $z\mathcal{R}z'$  par  $\gamma$  et  $z'\mathcal{R}z''$  par  $\gamma'$ , alors l'application  $\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  qui vérifie  $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $\gamma_3(t) = \gamma(2t)$  et  $\forall t \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $\gamma_3(t) = \gamma'(2t-1)$  donne la transitivité de la relation.

Ainsi, la symétrie de la relation d'équivalence assure la symétrie de  $d_{\mathbb{H}}$ .

Soient maintenant  $z, z' \in \mathbb{H}$  tels que  $d_{\mathbb{H}}(z, z') = 0$ . Alors,

$$\forall \gamma \in \Gamma[z, z'], \quad l_{\mathbb{H}}(\gamma) = 0.$$

En particulier, pour  $\gamma$  défini par

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) = tz' + (1-t)z,$$

on observe que  $y(t) = \text{Im}(\gamma(t)) = t\text{Im}(z') + (1-t)\text{Im}(z) > 0$ , donc on obtient que l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle, cela implique que  $\gamma$  est constante et donc finalement  $z = z'$ .

Montrons enfin que  $d_{\mathbb{H}}$  vérifie l'inégalité triangulaire. Soient  $z, z', z'' \in \mathbb{H}$  et soient  $\gamma$  un chemin reliant  $z$  et  $z'$  et  $\gamma'$  un chemin reliant  $z'$  et  $z''$ . La concaténation des chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$  est un chemin qui relie  $z$  à  $z''$ . Par conséquent, on a

$$d_{\mathbb{H}}(z, z'') \leq l_{\mathbb{H}}(\gamma) + l_{\mathbb{H}}(\gamma').$$

Il suffit alors de passer à la borne inférieure l'inégalité précédente pour obtenir le résultat souhaité.

### 2.1.2 Le groupe de Möbius et les isométries du demi-plan de Poincaré.

Le but de cette section est de décrire les transformations qui laissent invariant  $\mathbb{H}$ . Pour cela, nous allons nous placer dans  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  qui est le compactifié d'Alexandrov. C'est dans ce cadre que nous définissons le groupe des transformations de Möbius qui conservent l'orientation.

**Définition 3 (Groupe de Möbius)** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ . On note  $M\ddot{o}b$  l'ensemble des homographies  $m_A : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  tel que

$$m_A : \begin{cases} z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \neq \infty \text{ et } cz+d \neq 0 \\ \frac{-d}{c} \mapsto \infty \text{ et } \infty \mapsto \frac{a}{c} & \text{si } c \neq 0 \\ \infty \mapsto \infty & \text{si } c = 0. \end{cases}$$

Les applications  $m_A$  sont parfois appelées transformations de Möbius ou tout simplement applications de Möbius. On notera  $M\ddot{o}b^+$  l'ensemble des transformations de Möbius qui conservent l'orientation.

On donne maintenant quelques propriétés des éléments de  $M\ddot{o}b$ .

**Lemme 1** Pour toute matrice  $A \in GL_2(\mathbb{C})$  et pour tout nombre complexe  $\alpha$ , on a  $m_{\alpha A} = m_A$ .

**Démonstration.** Soient  $A \in GL_2(\mathbb{C})$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on a pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $cz + d \neq 0$  :

$$m_{\alpha A}(z) = \frac{\alpha az + \alpha b}{\alpha cz + \alpha d} = \frac{az + b}{cz + d} = m_A(z).$$

Les cas pour les autres valeurs de  $z$  se traitent de manière similaire, ce qui permet d'achever la preuve. ■

Le lemme précédent nous permet donc de supposer que  $\det(A) = 1$ . C'est ce que nous ferons dans la suite de cette partie, sauf mention explicite du contraire.

**Proposition 2** Pour toute matrice  $A \in GL_2(\mathbb{C})$ , l'application  $m_A$  est bijective et  $(m_A)^{-1} = m_{A^{-1}}$ .

**Démonstration.** Il suffit de vérifier que  $m_A \circ m_{A^{-1}} = m_{A^{-1}} \circ m_A = \text{Id}$ . On écrit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de telle sorte

$$\text{que } A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

On prouve le résultat pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $cz + d \neq 0$ .

$$m_A \circ m_{A^{-1}}(z) = \frac{a \times \frac{dz-b}{-cz+a} + b}{c \times \frac{dz-b}{-cz+a} + d} = \frac{z(ad-bc) + ba - ab}{-cb + da} = z.$$

De même,

$$m_{A^{-1}} \circ m_A(z) = \frac{d \times \frac{az+b}{cz+d} - b}{-c \times \frac{az+b}{cz+d} + a} = \frac{z(da-bc)}{-cb+ad} = z.$$

Les autres cas se traitant de la même façon, on est alors en mesure de terminer la preuve. ■

Nous énonçons également un théorème important sur les transformations de Möbius.

**Théorème 1** *Une transformation de Möbius envoie les cercles et les droites de  $\widehat{\mathbb{C}}$  sur d'autres cercles ou droites de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .*

On note  $\mathcal{CD} = \mathcal{C} \sqcup \mathcal{D}$  l'ensemble des cercles-droites où  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont respectivement l'ensemble des cercles et celui des droites de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Afin de démontrer le théorème, nous allons introduire un lemme qui rappelle que les éléments de  $\mathcal{CD}$  partagent le même type d'équation :

**Lemme 2** *On a équivalence entre  $C \in \mathcal{CD}$  et il existe  $a, k \in \mathbb{R}$  et  $w \in \mathbb{C}$  ( $w \neq 0$  si  $a = 0$ ) tel que  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid az\bar{z} + w\bar{z} + \bar{w}z = k\}$ .*

**Démonstration.** Commençons par supposer que  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid az\bar{z} + w\bar{z} + \bar{w}z = k\}$ , montrons que  $C \in \mathcal{CD}$ .

Si  $a \neq 0$ , l'équation devient

$$\begin{aligned} z\bar{z} + \frac{w\bar{z}}{a} + \frac{\bar{w}z}{a} = k &\iff z\bar{z} + \frac{w\bar{z}}{a} + \frac{\bar{w}z}{a} + \frac{w\bar{w}}{a} = k + \frac{w\bar{w}}{a} \\ &\iff \left(z + \frac{w}{a}\right)\left(\bar{z} + \frac{\bar{w}}{a}\right) = k + \frac{|w|^2}{a^2} \iff \left|z + \frac{w}{a}\right| = k + \frac{|w|^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Si  $k + \frac{|w|^2}{a^2} \geq 0$ , on reconnaît un cercle de centre  $-\frac{w}{a}$  et de rayon  $\sqrt{k + \frac{|w|^2}{a^2}}$ . Dans le cas contraire, il n'y a pas de solution.

Si maintenant  $a = 0$ , l'équation devient  $w\bar{z} + \bar{w}z = k$ . Elle est équivalente à  $w(x+iy) + \bar{w}(x+iy) = k$ , en posant  $z = x+iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ .

D'où,  $x(w + \bar{w}) + yi(\bar{w} - w) = k$ . Or,  $a = x(w + \bar{w})$  et  $b = i(\bar{w} - w) \in \mathbb{R}$ . On reconnaît alors une droite  $(a, b) \neq (0, 0)$  car  $w \neq 0$ .

On a donc montré que dans tous les cas  $C \in \mathcal{CD}$ .

Il ne reste plus qu'à montrer la réciproque. Un calcul similaire permet de conclure que tout élément  $C \in \mathcal{CD}$  a une équation de même forme que celle énoncée dans le lemme. ■

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 1.

**Démonstration.**

Soit  $m_A : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  une transformation de Möbius.

Si  $c \neq 0$ , on a par un calcul simple que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$m_A(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

Or,  $m_A$  peut s'exprimer comme composée de plusieurs homographies. En effet, pour  $u$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on pose

$$\forall z \in \mathbb{C}, T_u(z) = z + u, I(z) = \frac{1}{z}, H_\lambda(z) = \lambda z.$$

Ainsi, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$m_A(z) = (T_{\frac{a}{c}} \circ H_{\frac{bc-ad}{c^2}} \circ I \circ T_{\frac{d}{c}})(z).$$

Si  $c = 0$ , on a

$$m_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = (T_{\frac{b}{d}} \circ H_{\frac{a}{d}})(z).$$

Les homographies  $T_u$  et  $H_\lambda$  sont respectivement une translation et une homothétie, donc elles renvoient des cercles sur des cercles et des droites sur des droites.

Il ne reste plus qu'à montrer que  $I$  préserve l'ensemble des cercles-droites, c'est-à-dire

$$\forall C \in \mathcal{CD}, I(C) \in \mathcal{CD}$$

Soit  $C \in \mathcal{CD}$ , alors par le lemme 2, il existe  $a, k \in \mathbb{R}$  et  $w \in \mathbb{C}$  ( $w \neq 0$  si  $a = 0$ ) tel que  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid az\bar{z} + w\bar{z} + \bar{w}z = k\}$ .

Posons  $z' = \frac{1}{z} = I(z)$  avec  $z \neq 0$ . On peut alors diviser par  $z\bar{z}$ , afin d'obtenir

$$a + \frac{w}{z} + \frac{\bar{w}}{\bar{z}} = \frac{k}{z\bar{z}} \iff a + z'w + \bar{z}'\bar{w} = kz'\bar{z}' \iff a = kz'\bar{z}' - z'w - \bar{z}'\bar{w}.$$

On reconnaît l'équation d'un élément  $C'$  qui est également dans  $\mathcal{CD}$ . On a alors montré que si  $z \in C$ ,  $I(z) \in C'$ . Un calcul similaire montre que  $\forall z \in C'$ ,  $I^{-1}(z) \in C$ , d'où finalement  $I(C) = C'$ .

Ceci permet de conclure que  $I$  préserve l'ensemble des cercles-droites.

Donc, par composition, on obtient que  $m_A$  envoie les cercles et les droites de  $\widehat{\mathbb{C}}$  sur d'autres cercles ou droites de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Ce qui achève la preuve. ■

La proposition suivante établit une propriété importante de  $\text{Möb}^+$ . On commence par un lemme préparatoire.

**Lemme 3** Soit  $m_A$  une transformation de Möbius qui possède trois points fixes. Alors  $m_A$  est l'application identité.

**Démonstration.** Soit  $m_A \in \text{Möb}^+$ , on écrit

$$m_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ avec } ad - bc \neq 0.$$

On suppose que  $m_A$  n'est pas l'application identité.

Si  $c = 0$ , alors  $\infty$  est un point fixe de  $m_A$ , et on peut écrire  $m_A(z) = a'z + b'$  avec  $a', b' \in \mathbb{C}$ . On conclut alors directement que  $m_A$  possède au plus deux points fixes.

Si  $c \neq 0$ , alors  $m_A(\infty) = a/c \neq 0$ . Donc  $\infty$  n'est pas un point fixe. Soit  $z \in \mathbb{C}$ , on a

$$m_A(z) = z \iff \frac{az + b}{cz + d} = z \iff cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Cette équation possède au plus deux solutions distinctes dans  $\mathbb{C}$ , ce qui permet de conclure que  $m_A$  possède au plus deux points fixes.

Dans tous les cas,  $m_A$  possède au plus deux points fixes, ce qui achève la preuve. ■

On donne maintenant la proposition.

**Proposition 3** Soient  $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3)$  deux triplets distincts de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Alors, il existe un unique élément de  $\text{Möb}^+$  qui envoie  $z_1, z_2, z_3$  sur  $w_1, w_2, w_3$  respectivement.

**Démonstration.** On commence par prouver l'unicité. Soient  $m_A, m_{A'} \in \text{Möb}^+$  qui vérifient  $m_A(z_1) = w_1 = m_{A'}(z_1)$ ,  $m_A(z_2) = w_2 = m_{A'}(z_2)$  et  $m_A(z_3) = w_3 = m_{A'}(z_3)$ . Alors, l'application  $m_{A'^{-1}} \circ m_A$  possède trois points fixes distincts, donc par le lemme on conclut que  $m_{A'^{-1}} \circ m_A$  est l'identité et donc que  $m_A = m_{A'}$ .

Pour l'existence, il suffit de trouver une application de  $m_A \in \text{Möb}^+$  qui envoie le triplet  $(z_1, z_2, z_3)$  sur  $(0, 1, \infty)$  respectivement. En effet, si l'on peut construire une telle application, alors on pourra construire une application  $m_{A'} \in \text{Möb}^+$  qui enverra le triplet  $(w_1, w_2, w_3)$  sur  $(0, 1, \infty)$  respectivement, et l'application  $m_{A'^{-1}} \circ m_A$  enverra alors  $(z_1, z_2, z_3)$  sur  $(w_1, w_2, w_3)$ .

Supposons dans un premier temps que  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ . Alors, l'application

$$m_A(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

vérifie  $m_A(z_1) = 0$ ,  $m_A(z_2) = 1$  et  $m_A(z_3) = \infty$ .

Si  $z_1 = \infty$  (respectivement  $z_2 = \infty$ ,  $z_3 = \infty$ ) alors l'application  $m_A(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$  (respectivement  $m_A(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$ ,  $m_A(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_3}$ ) envoie le triplet  $(z_1, z_2, z_3)$  sur  $(0, 1, \infty)$ , ce qui permet de conclure la preuve. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire le groupe des transformations de Möbius conformes qui laissent invariant le demi-plan de Poincaré.

**Définition 4** On note  $Möb^+(\mathbb{H}) = \{m_A \in Möb^+ \mid m_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$  le groupe des éléments de  $Möb^+$  qui conservent  $\mathbb{H}$ .

Nous allons maintenant donner une définition explicite de  $Möb^+(\mathbb{H})$ . Pour cela, on commence par considérer  $\hat{\mathbb{R}} = \partial\mathbb{H}$  la frontière (appelée également le bord) à l'infini de  $\mathbb{H}$ . On commence par définir, de même que précédemment, l'ensemble  $Möb^+(\hat{\mathbb{R}})$ .

**Définition 5** On note  $Möb^+(\hat{\mathbb{R}}) = \{m_A \in Möb^+ \mid m_A(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}\}$  le groupe des éléments de  $Möb^+$  qui conservent  $\hat{\mathbb{R}}$ .

La proposition qui suit nous permet d'exprimer de façon explicite ses éléments.

**Proposition 4**  $Möb^+(\hat{\mathbb{R}}) = \left\{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\right\} = \left\{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in i\mathbb{R}, ad - bc = 1\right\}$

**Démonstration.** Soit  $m_A \in Möb^+(\hat{\mathbb{R}})$ . D'après la remarque qui a été faite précédemment, on peut toujours supposer que  $ad - bc = 1$ . De plus, par définition de  $Möb^+$ , on a pour  $z \neq \infty$  et  $z \neq -\frac{d}{c}$  :

$$m_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad m_A^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c}, \quad m_A(\infty) = \frac{a}{c} \text{ et } m_A^{-1}(0) = \frac{-b}{a}.$$

On commence par supposer que  $a \neq 0$  et  $c \neq 0$ . On observe alors que  $m_A^{-1}(\infty)$ ,  $m_A(\infty)$ ,  $m_A^{-1}(0) \in \mathbb{R}$ . Cela nous permet d'exprimer les coefficients  $a, b$  et  $d$  en fonction de  $c$ . Plus précisément, on a

$$a = m_A(\infty)c, \quad b = -m_A(\infty)m_A^{-1}(0)c, \quad \text{et } d = -m_A^{-1}(\infty)c.$$

Ainsi, on a

$$m_A(z) = \frac{m_A(z)cz - m_A(\infty)m_A^{-1}(0)c}{cz - m_A^{-1}(\infty)c}.$$

Or, puisque  $ad - bc = 1$ , cela impose que

$$\begin{aligned} 1 &= ad - bc = c^2(-m_A(\infty)m_A^{-1}(\infty) + m_A(\infty)m_A^{-1}(0)) \\ &= c^2(m_A(\infty)(m_A^{-1}(0) - m_A^{-1}(\infty))). \end{aligned}$$

Puisque  $m_A^{-1}(\infty)$ ,  $m_A(\infty)$ ,  $m_A^{-1}(0) \in \mathbb{R}$ , on en déduit directement que  $c \in \mathbb{R}$  ou  $c \in i\mathbb{R}$ , et par conséquent que les autres coefficients  $b, c$  et  $d$  sont soit réels, soit imaginaires purs.

Supposons maintenant que  $a = 0$ . La condition  $ad - bc = 1$  impose que  $c \neq 0$ . On considère maintenant les points  $m_A(1) = \frac{b}{c+d}$  et  $m_A^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c}$ .

De même que précédemment, on exprime  $b$  et  $d$  en fonction de  $c$ , il vient que

$$d = -m_A^{-1}(\infty)c, \quad \text{et } b = m_A(1)(c+d) = (1 - m_A^{-1}(\infty))cm_A(1).$$

Par conséquent, on a

$$1 = ad - bc = c^2m_A(1)(m_A^{-1}(\infty) - 1),$$

ce qui impose une nouvelle fois que  $b, c, d \in \mathbb{R}$  ou  $b, c, d \in i\mathbb{R}$ .

Enfin, on suppose que  $c = 0$ . Puisque  $ad - bc = 1$ , on a  $a \neq 0$  et  $d \neq 0$ . On peut alors écrire

$$m_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$



et  $m_A(0) = \frac{b}{d}$ ,  $m_A(1) = \frac{a+b}{d} \in \mathbb{R}$ . Donc, si on exprime  $b$  et  $a$  en fonction de  $d$ , on obtient alors

$$b = m_A(0)d \text{ et } a = (m_A(1) - m_A(0))d.$$

Une nouvelle fois, il vient que

$$1 = ad - bc = d^2(m_A(1) - m_A(0)),$$

ce qui nous donne que  $a, b, d \in \mathbb{R}$  ou  $a, b, d \in i\mathbb{R}$  et qui achève la preuve. ■

Nous sommes maintenant en mesure de décrire les éléments de  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ .

**Proposition 5**  $\text{Möb}^+(\mathbb{H}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$

**Démonstration.** Un élément de  $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{R}})$  est un élément de  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$  si et seulement si pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , on a  $\text{Im}(m_A(z)) > 0$ . Soit  $z \in \mathbb{H}$ , il vient que

$$\begin{aligned} \text{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \text{Im}\left(\frac{ac|z|^2 + bd + adz + bc\bar{z}}{c^2|z|^2 + d^2 + 2cd \text{Re}(z)}\right) \\ &= \text{Im}\left(\frac{adz + (ad-1)\bar{z}}{(c \text{Re}(z) + d)^2 + c^2 \text{Im}^2(z)}\right) \\ &= \frac{\text{Im}(z)}{(c \text{Re}(z) + d)^2 + c^2 \text{Im}^2(z)}. \end{aligned}$$

On observe alors que  $\text{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0$  si et seulement si  $c, d \in \mathbb{R}$ , ce qui achève la preuve. ■

Il découle de cette proposition un corollaire.

**Corollaire 1**  $\text{Möb}(\mathbb{H}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\} \cup \left\{ z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$

**Démonstration.** On observe que l'application conjugaison complexe  $C : z \mapsto \bar{z} \in \text{Möb} \setminus \text{Möb}^+$ .

En effet,  $C$  fixe tous les points de  $\widehat{\mathbb{R}}$ , mais  $C(i) = -i$ , donc  $C$  n'est pas l'application identité. Par le lemme 3, on déduit que  $C \notin \text{Möb}^+$ . Il n'est alors pas difficile de montrer, en reprenant la preuve de la proposition 4, que

$$\text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}) = \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{R}}) \cup \left\{ z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Par conséquent, en reprenant la preuve de la proposition 5, on est en mesure de conclure. ■

Nous allons enfin donner un résultat sur l'invariance de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  sur la quantité  $l_{\mathbb{H}}$ . Pour cela on commence par un résultat sur les éléments générateurs de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

**Lemme 4** *Le groupe  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  est engendré par les applications de la forme  $m(z) = az + b$  avec  $a > 0, b \in \mathbb{R}$ ,  $K(z) = \frac{-1}{z}$  et  $C(z) = -\bar{z}$ .*

**Démonstration.** Le corollaire 1 assure que ces trois applications sont bien des éléments de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Soit  $m_A : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ , alors  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  et  $ad - bc = 1$ .

Si  $c = 0$ , on écrit  $m_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$  et puisque  $1 = ad - bc = ad$  on a  $\frac{a}{d} = a^2 > 0$ .

Si  $c \neq 0$ , alors  $m_A(z) = f(K(g(z)))$  avec  $f(z) = z + \frac{a}{c}$  et  $g(z) = c^2z + cd$ .

Soit  $n_A : z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ , alors  $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$  et  $ad - bc = 1$ . On écrit  $n_A = C^{-1} \circ m_A$  et on en déduit directement le résultat. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la proposition.

**Proposition 6** *Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  un chemin et soit  $m_A \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ . Alors,*

$$l_{\mathbb{H}}(m_A \circ \gamma) = l_{\mathbb{H}}(\gamma).$$

**Démonstration.** Par le lemme précédent, il suffit que l'on vérifie le résultat pour les trois types d'applications qui engendrent  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

En reprenant les notations du lemme, on a  $m'(z) = a$  et  $\text{Im}(m(z)) = a\text{Im}(z)$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{H}}(m \circ \gamma) &= \int_{m \circ \gamma} \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| \\ &= \int_a^b \frac{1}{\text{Im}((m \circ \gamma)(t))} |(m \circ \gamma)'(t)| dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(m(\gamma(t)))} |m'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_{\gamma} \frac{1}{\text{Im}(m(z))} |m'(z)| |dz| \\ &= \int_{\gamma} \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| \end{aligned}$$

On vérifie maintenant le résultat pour l'application  $K(z) = \frac{-1}{z}$ . On commence par observer que  $\text{Im}(\frac{-1}{z}) = \frac{\text{Im}(z)}{|z|^2}$  et  $K'(z) = \frac{1}{z^2}$ . On obtient alors, de même que précédemment,

$$l_{\mathbb{H}}(K \circ \gamma) = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(K \circ \gamma(t))} |K'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \frac{|\gamma(t)|^2}{\text{Im}(\gamma(t))} \times \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|^2} dt.$$

D'où, finalement,

$$l_{\mathbb{H}}(I \circ \gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt = l_{\mathbb{H}}(\gamma).$$

Enfin, vérifions le résultat pour l'application  $C$ . On écrit  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  de sorte que  $C \circ \gamma(t) = -x(t) + iy(t)$ . Alors, on obtient que  $\text{Im}(C \circ \gamma(t)) = \text{Im}(\gamma(t))$  et  $|(C \circ \gamma)'(t)| = |\gamma'(t)|$ . Un calcul similaire à ce qui a été fait précédemment donne bien que  $l_{\mathbb{H}}(C \circ \gamma) = l_{\mathbb{H}}(\gamma)$ , ce qui achève la preuve. ■

En gardant les mêmes notations que la proposition 6, on a par conséquence :

**Corollaire 2** *Les éléments de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  sont des isométries, c'est-à-dire que pour tout  $z, w \in \mathbb{H}$ ,  $d_{\mathbb{H}}(m_A(z), m_A(w)) = d_{\mathbb{H}}(z, w)$ .*

**Démonstration.** Soient  $\gamma$  un chemin et  $m_A \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ , alors par la proposition 6, on a  $l_{\mathbb{H}}(m_A \circ \gamma) = l_{\mathbb{H}}(\gamma)$ . Comme  $\gamma$  est un chemin quelconque, on a que  $d_{\mathbb{H}}(m_A(z), m_A(w)) = d_{\mathbb{H}}(z, w)$ . ■

### 2.1.3 Les géodésiques du demi-plan de Poincaré.

Dans cette dernière section, nous allons tout d'abord donner une définition explicite d'une géodésique, puis nous démontrerons que les géodésiques sont des demi-droites ou des demi-cercles orthogonaux au bord du demi-plan de Poincaré.

**Définition 6 (Géodésique)** *On appelle géodésique tout chemin dont la longueur minimise la distance entre deux points du demi-plan de Poincaré pour la métrique donnée.*

Nous commençons par un premier lemme :

**Lemme 5** *Soient  $z$  et  $w$  deux points du demi-plan de Poincaré qui sont sur une même demi-droite verticale. Alors le segment  $[z, w]$  est l'unique géodésique reliant  $z$  et  $w$ .*

**Démonstration.**

Commençons par démontrer l'existence, c'est-à-dire que si on a  $z$  et  $w$  deux points sur une même demi-droite verticale, alors le chemin qui paramétrise le segment  $[z, w]$  est une géodésique.

On pose alors  $z = x_0 + iy_1$  et  $w = x_0 + iy_2$  avec  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+^*$ . Et on suppose que  $y_1 \leq y_2$ .

Soit  $\gamma$  un chemin tel que

$$\forall t \in [0, 1], \gamma(t) = (x(t), y(t)), \text{ avec } \gamma(0) = (x_0, y_1) \text{ et } \gamma(1) = (x_0, y_2).$$

On a alors

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right|.$$

On en déduit alors

$$\left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| = |\ln(y_2) - \ln(y_1)| = \left| \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \right| = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

Ce résultat s'obtient en utilisant l'hypothèse  $y_1 \leq y_2$ , puis la croissance du logarithme, afin d'avoir  $\ln(\frac{y_2}{y_1}) \geq 0$ . D'où

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma) \geq \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

De plus, en paramétrant le segment  $[z, w]$  par l'application  $c(t) = (x_0, t(y_2 - y_1) + y_1)$  pour  $t \in [0, 1]$  et donc  $c'(t) = (0, y_2 - y_1)$  pour  $t \in [0, 1]$ , on a

$$l_{\mathbb{H}}(c) = \int_0^1 \frac{|c'(t)|}{\text{Im}(c(t))} dt = \int_0^1 \frac{|y_2 - y_1|}{t(y_2 - y_1) + y_1} dt = \int_0^1 \frac{y_2 - y_1}{t(y_2 - y_1) + y_1} dt = \ln(y_2) - \ln(y_1) = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

Donc  $l_{\mathbb{H}}(\gamma) \geq l_{\mathbb{H}}(c)$ .

Comme  $\gamma$  est un chemin quelconque, on a par définition  $d_{\mathbb{H}}(z, w) = l_{\mathbb{H}}(c)$ . Ceci nous permet de conclure que le chemin qui paramétrise le segment  $[z, w]$  minimise la distance entre  $z$  et  $w$ .

Montrons maintenant qu'un tel chemin est unique.

Soient  $z$  et  $w$  deux points du demi-plan de Poincaré qui sont sur la même demi-droite verticale. On pose  $z = x_0 + iy_1$  et  $w = x_0 + iy_2$  avec  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+^*$ . Et on suppose que  $y_1 \leq y_2$ .

Supposons qu'il existe un chemin  $\gamma$  qui relie  $z$  à  $w$ , défini par

$$\forall t \in [0, 1], \gamma(t) = (x(t), y(t)), \text{ avec } \gamma(0) = (x_0, y_1) \text{ et } \gamma(1) = (x_0, y_2).$$

et tel que  $l_{\mathbb{H}}(\gamma) = d_{\mathbb{H}}(z, w)$ .

En refaisant les mêmes calculs que pour l'existence, on a  $l_{\mathbb{H}}(\gamma) \geq l_{\mathbb{H}}(c)$ .

Mais  $l_{\mathbb{H}}(\gamma) = l_{\mathbb{H}}(c)$  si et seulement si  $x'(t) = 0 \iff x(t) = x_0$ .

Donc,  $\gamma(t) = (x_0, y(t))$ , ce qui signifie que  $\gamma$  ne peut être qu'un segment, ce qui termine la preuve. ■

Ce lemme entraîne le résultat suivant :

**Lemme 6** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Les demi-droites verticales du demi-plan de Poincaré

$$\gamma(t) = x_0 + it, \quad t \in ]0, +\infty[$$

sont des géodésiques.

**Démonstration.** Pour démontrer ce résultat, il suffit de prouver que pour tout  $t_1, t_2 \in ]0, +\infty[$  la longueur de  $\gamma$  entre  $\gamma(t_1)$  et  $\gamma(t_2)$  est inférieure ou égale à n'importe quel chemin passant par  $\gamma(t_1)$  et  $\gamma(t_2)$ . Ce qui est immédiat en appliquant le lemme précédent. ■

Nous avons donc montré que les demi-droites verticales sont des géodésiques. Maintenant, nous allons introduire de nouvelles notions dans le but de démontrer deux résultats : les demi-cercles et les arcs de cercle orthogonaux à l'axe infini sont des géodésiques.

Tout d'abord, nous commençons par la définition de l'inversion en nous plaçant dans le plan euclidien, afin de basculer vers la géométrie hyperbolique.

Dans le plan euclidien, on définit :

**Définition 7 (Définition géométrique de l'inversion)** Soit le cercle  $\mathcal{C} = C(\Omega, R)$  de centre  $\Omega \in \mathbb{C}$  et de rayon  $R$ . L'inversion par rapport à  $\mathcal{C}$  est une application  $I_{\mathcal{C}}$  qui envoie un point  $M \neq \Omega$  sur  $M^*$  tel que :

- $M^*$  appartient à la demi-droite issue de  $\Omega$  passant par  $M$
- $\Omega M \cdot \Omega M^* = R^2$ .

On dit que  $\Omega$  est le centre,  $R^2$  la puissance et  $\mathcal{C}$  le cercle d'inversion.

Considérons,  $\mathcal{P}$  un plan euclidien (dans  $\mathbb{R}^2$ ).

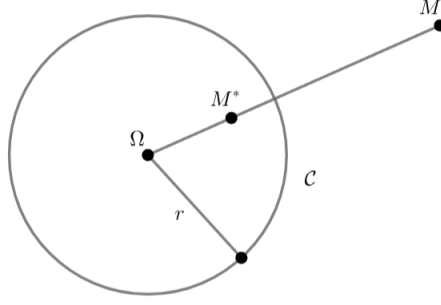


FIGURE 1 – L'inversion d'un point  $M$

**Proposition 7** Soit  $I_C : \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} \rightarrow \mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$  une inversion de centre  $\Omega$  et de puissance  $R^2$ , alors :

- 1) Chaque point du cercle  $\mathcal{C}$  est invariant, c'est-à-dire,  $\forall M \in \mathcal{C}, I_C(M) = M$ .
- 2) L'inversion  $I_C$  est une bijection. C'est donc une involution car pour tout point  $M \in \mathcal{P} \setminus \{\Omega\}, I_C(I_C(M)) = M$ .

**Démonstration.**

1) Soit  $M \in \mathcal{C}$ .

Comme  $I_C$  est une inversion, il existe  $M^* \in \mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$  tel que  $I_C(M) = M^*$ .

Notre but est de montrer que les points  $M$  et  $M^*$  sont confondus.

Par définition,  $\Omega M \cdot \Omega M^* = R^2$  et  $M$  et  $M^*$  sont sur la même demi-droite issue de  $\Omega$ . Comme  $M \in \mathcal{C}(\Omega, R)$ , cela revient à dire que  $\Omega M = R$ , et donc par ce qui précède  $\Omega M^* = R$ . Ceci permet de conclure que  $M$  et  $M^*$  sont confondus, donc  $M = M^*$ . D'où,  $I_C(M) = M$ .

2) Soit  $M \in \mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ .

Comme  $I_C$  est une inversion, il existe  $M^*, M^{**} \in \mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$  tel que  $I(M) = M^*$  et  $I(M^*) = M^{**}$ .

Par définition,  $M^{**}$  appartient à la demi-droite  $[\Omega M^*)$  et  $M^*$  appartient à la demi-droite  $[\Omega M)$ , donc le point  $M^{**}$  appartient à la demi-droite  $[\Omega M)$ . Puisque,  $\Omega M \cdot \Omega M^* = R^2$  et  $\Omega M^* \cdot \Omega M^{**} = R^2$ , on obtient donc l'égalité suivante :  $\Omega M \cdot \Omega M^* = \Omega M^* \cdot \Omega M^{**} \iff \Omega M = \Omega M^{**}$ .

Pour finir, comme  $M$  et  $M^{**}$  sont sur la même demi-droite issue de  $\Omega$ , on a donc  $M = M^{**}$ . D'où,  $I_C(I_C(M)) = M$ , ceci montre que l'application  $I_C$  est une involution et donc est bijective. ■

Nous sommes maintenant en mesure de définir une inversion "sous l'écriture complexe". Nous pouvons dorénavant nous placer dans le demi-plan de Poincaré.

Considérons les points  $\Omega, M$  et  $M^*$  et leurs affixes respectives  $\omega, z$  et  $z^*$ . Notre but est de transformer la relation  $M^* = I_C(M)$  en une condition entre  $z$  et  $z^*$ .

Dans la définition 7 :

- la première condition  $M^* \in [\Omega M)$  devient  $z^* - \omega = \lambda(z - \omega)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,
- la deuxième condition  $\Omega M \cdot \Omega M^* = R^2$  devient la relation complexe  $|z^* - \omega||z - \omega| = R^2$ .

En prenant le module de la première relation on obtient

$$|z^* - \omega| = \lambda|z - \omega|$$

et donc la deuxième relation devient

$$\lambda|z - \omega|^2 = R^2 \iff \lambda = \frac{R^2}{|z - \omega|^2}.$$

Nous pouvons alors exprimer  $z^*$  en fonction de  $z$  et  $\omega$  :

$$z^* = \omega + \lambda(z - \omega) = \omega + R^2 \frac{z - \omega}{|z - \omega|^2} = \omega + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{\omega}}.$$

Cela nous permet d'introduire la définition complexe de l'inversion :

**Définition 8 (L'inversion)** Soit  $\mathcal{C} = C(\omega, R)$ . L'inversion par rapport au cercle  $\mathcal{C}$  est l'application  $I_{\mathcal{C}} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  définie par  $I_{\mathcal{C}}(z) = \omega + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{\omega}}$  pour  $z \in \mathbb{C} \cap \{\omega\}$  et se prolonge par  $I_{\mathcal{C}}(\omega) = \infty$  et  $I_{\mathcal{C}}(\infty) = \omega$ .

Dans la suite nous allons considérer que  $\mathcal{C}$  est un demi-cercle centré en  $\omega \in \mathbb{R}$  et de rayon  $R > 0$ . On énonce maintenant une propriété importante qui nous servira à démontrer le prochain lemme :

**Proposition 8** L'inversion  $I_{\mathcal{C}}$  est une isométrie de  $\mathbb{H}$ .

**Démonstration.** Tout d'abord, on remarque que  $I_{\mathcal{C}} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ . En effet, pour tout  $z$  dans  $\mathbb{H}$ , on a

$$I_{\mathcal{C}}(z) = \omega + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{\omega}} = \frac{\frac{\omega}{-R} \bar{z} + \frac{\omega^2 - R^2}{R}}{\frac{-\bar{z}}{R} + \frac{\bar{\omega}}{R}},$$

avec  $\frac{\omega}{-R} \frac{\bar{\omega}}{R} - \frac{\omega^2 - R^2}{R} \frac{1}{-R} = 1$ .

Or, par le corollaire 2 on a que les éléments de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  sont des isométries, donc  $I_{\mathcal{C}}$  est une isométrie. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire un nouveau lemme qui permet de définir une autre "famille" de géodésique.

**Lemme 7** Les demi-cercles orthogonaux au bord à l'infini (c'est-à-dire l'axe réel) sont des géodésiques.

**Démonstration.**

Soient  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $R > 0$  tel que  $\mathcal{C} = C((x_0, 0), R)$  soit le demi-cercle de centre  $(x_0, 0)$  et de rayon  $R$ .

Soit  $\mathcal{D}$  la demi-droite verticale passant par le point à l'infini  $(x_0 - R, 0)$ .

Posons  $\mathcal{C}' = C((x_0 + R, 0), R)$  le demi-cercle de centre  $(x_0 + R, 0)$  et de rayon  $2R$ .

Soit  $I_{\mathcal{C}'}$  l'inversion par rapport au cercle  $\mathcal{C}'$ . On a par la remarque précédente que  $I_{\mathcal{C}'}$  est une isométrie.

Nous pouvons alors appliquer le théorème 1, afin de construire l'image de  $\mathcal{D}$  par  $I_{\mathcal{C}'}$  qui sera un arc de cercle orthogonal à l'axe réel passant par les points  $(x_0 - R, 0)$  et  $(x_0 + R, 0)$ , donc  $I_{\mathcal{C}'}(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$ .

De plus, le lemme 5 indique que  $\mathcal{D}$  est une géodésique, donc  $I_{\mathcal{C}'}(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$  l'est aussi.

Ce qui prouve le lemme. ■

Nous avons donc démontré que dans le demi-plan de Poincaré, on a deux types de géodésiques via les lemmes 6 et 7. Nous allons introduire un petit résultat utile pour démontrer le dernier théorème de la section, mais auparavant nous définissons la notion de sous-arc :

**Définition 9 (Sous-arc)** Soit  $\gamma$  un chemin. On appelle sous-arc une portion du chemin  $\gamma$ .

**Corollaire 3** Tout sous-arc d'une géodésique est géodésique.

**Démonstration.**

Soit  $\Gamma$  une géodésique du demi-plan de Poincaré qui est donc soit une demi-droite verticale, soit un demi-cercle orthogonal à l'axe infini. Soient  $a, b \in \Gamma$  distincts.

Supposons que le sous-arc entre  $a$  et  $b$  ne soit pas une géodésique, alors il existe un chemin  $c$  passant par  $a$  et  $b$  qui minimise  $a$  et  $b$ . Dans ce cas,  $\Gamma$  n'est plus une géodésique, ce qui est absurde. Donc le sous-arc entre  $a$  et  $b$  est géodésique.

Ce qui termine la preuve. ■

Ceci nous permet énoncer le dernier théorème qui clôture notre section.

**Théorème 2** Soient  $a$  et  $b$  deux points de  $\mathbb{H}$  tels que  $\text{Re}(a) \neq \text{Re}(b)$ . La géodésique reliant  $a$  et  $b$  est l'arc de cercle d'un demi-cercle orthogonal de centre l'intersection de la médiatrice  $[a, b]$  et  $\partial\mathbb{H}$ , coupant de manière orthogonal l'axe réel.

**Démonstration.**

Soient  $a$  et  $b$  deux points de  $\mathbb{H}$  qui ne sont pas sur la même demi-droite verticale.

Posons  $\gamma$  le demi-cercle orthogonal à l'axe réel passant par  $a$  et  $b$  de centre  $x_0$  et de rayon  $R_0$ , avec  $x_0$  le point d'intersection de la médiatrice du segment  $[a, b]$  et de l'axe réel. Par le lemme 7, on sait que le demi-cercle  $\gamma$  est une géodésique de  $\mathbb{H}$  et d'après le corollaire 3 on sait l'arc de cercle entre  $a$  et  $b$  est une géodésique, ce qui achève la preuve. ■

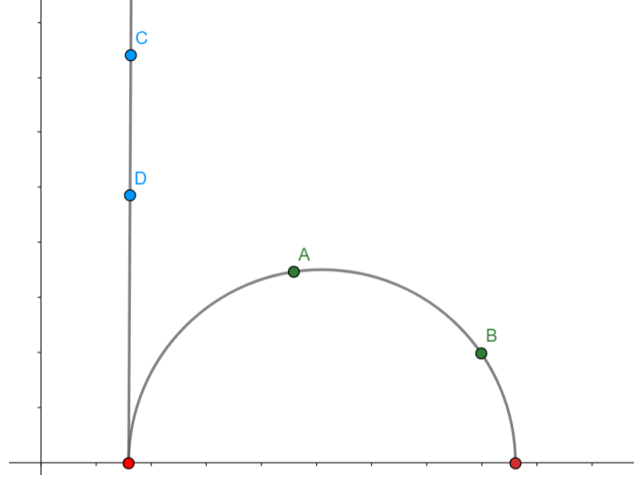


FIGURE 2 – Quelques géodésiques

## 2.2 Le disque de Poincaré.

Le but de cette section est d'introduire un nouveau modèle de la géométrie hyperbolique et d'étudier quelques unes de ses propriétés. Pour cela, nous allons nous servir des résultats déjà établis dans la partie précédente. Nous allons nous placer dans le disque unité que l'on note

$$\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}.$$

On considère l'application  $\Phi_A$  définie par

$$\Phi_A(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

On observe sans mal que  $\Phi_A \in \text{Möb}$ , vérifions que l'image de tout élément de  $\mathbb{H}$  soit dans  $\mathbb{D}$ . Soit  $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z) \in \mathbb{H}$ . On calcule :

$$|\Phi_A(z)|^2 = \frac{\text{Re}^2(z) + (\text{Im}(z) - 1)^2}{\text{Re}^2(z) + (\text{Im}(z) + 1)^2}.$$

Or, puisque  $\text{Im}(z) > 0$ ,  $(\text{Im}(z) - 1)^2 < (\text{Im}(z) + 1)^2$ , donc on a bien  $|\Phi_A(z)| < 1$ .

De plus, l'application  $n_A$  définie par

$$n_A(z) = \frac{iz + 1}{-z - i}$$

envoie  $\mathbb{D}$  sur  $\mathbb{H}$ . En effet, pour  $z \in \mathbb{D}$  on a

$$\text{Im}(n_A(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|-z - i|^2}$$

Donc, puisque  $|z| < 1$ , on a bien  $\text{Im}(n_A(z)) > 0$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire la longueur d'un chemin de  $\mathbb{D}$ .

**Définition 10 (Longueur d'un chemin sur le disque de Poincaré)** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  un chemin de  $\mathbb{D}$ . Alors, l'application  $n_A \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  est un chemin de  $\mathbb{H}$  et on appelle  $l_{\mathbb{D}}(\gamma)$  la longueur de  $\gamma$  dans  $\mathbb{D}$  définie par

$$l_{\mathbb{D}}(\gamma) = l_{\mathbb{H}}(n_A \circ \gamma).$$

On donne maintenant un résultat qui sera utile pour faire des calculs.

**Théorème 3** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  un chemin de  $\mathbb{D}$ . Alors,

$$l_{\mathbb{D}}(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{2}{1 - |z|^2} |dz|.$$

**Démonstration.** Par définition, on a

$$\begin{aligned}
l_{\mathbb{D}}(\gamma) &= l_{\mathbb{H}}(n_A \circ \gamma) = \int_{n_A \circ \gamma} \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} |dz| \\
&= \int_a^b \frac{1}{|\operatorname{Im}((n_A \circ \gamma)(t))|} |(n_A \circ \gamma)'(t)| dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{|\operatorname{Im}(n_A(\gamma(t)))|} |n'_A(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \\
&= \int_{\gamma} \frac{1}{|\operatorname{Im}(n_A(z))|} |n'_A(z)| |dz|.
\end{aligned}$$

On a déjà observé précédemment que

$$\operatorname{Im}(n_A(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|-z - i|^2}$$

et un calcul similaire donne que

$$|n'(z)| = \frac{2}{|z + i|^2},$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{1}{|\operatorname{Im}(n_A(z))|} |n'(z)| = \frac{2}{1 - |z|^2},$$

ce qui achève la preuve. ■

Nous avons défini la quantité  $l_{\mathbb{D}}$  à partir d'un élément explicite de Möb. En fait, n'importe quel élément de Möb qui envoie  $\mathbb{D}$  sur  $\mathbb{H}$  aurait pu servir pour la définition. En effet, si l'on prend  $p \in \operatorname{Möb}$  qui envoie  $\mathbb{D}$  sur  $\mathbb{H}$ , alors l'application  $q = p \circ n_{A^{-1}} \in \operatorname{Möb}(\mathbb{H})$ .

Par conséquent, si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  est un chemin de  $\mathbb{D}$ , alors la proposition 6 assure que

$$l_{\mathbb{H}}(n_A \circ \gamma) = l_{\mathbb{H}}(q \circ n_A \circ \gamma) = l_{\mathbb{H}}(p \circ \gamma),$$

ce qui permet de conclure que  $l_{\mathbb{D}}(\gamma)$  est bien définie.

Illustrons maintenant le théorème 3 par un exemple. Soit  $0 < r < 1$  et soit  $\gamma : [0, r] \rightarrow \mathbb{D}$  un chemin paramétré par  $\gamma(t) = t$ .

Alors, par le théorème précédent :

$$\begin{aligned}
l_{\mathbb{D}}(\gamma) &= \int_{\gamma} \frac{2}{1 - |z|^2} |dz| \\
&= \int_0^r \frac{2}{1 - t^2} dt \\
&= \int_0^r \frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t} dt \\
&= \ln \left( \frac{1 + r}{1 - r} \right).
\end{aligned}$$

Le chemin  $\gamma$  choisi dans cet exemple paramètre le segment entre l'origine et un point situé sur le cercle de rayon  $r$ . On observe que lorsque  $r$  tend vers 1,  $l_{\mathbb{D}}(\gamma)$  tend vers  $+\infty$ . En fait, on a déjà observé ce résultat dans le demi-plan de Poincaré, car les distances augmentaient lorsque l'on se rapprochait de  $\partial\mathbb{H}$ . Ici, les distances augmentent lorsque l'on s'approche du bord du cercle, ce qui nous permet naturellement de définir la frontière à l'infini du disque  $\partial\mathbb{D} = \mathbb{S}^1$ , où  $\mathbb{S}^1$  est la sphère unité.

D'une manière similaire à ce qui a été fait précédemment, nous allons définir une distance  $d_{\mathbb{D}}$  sur  $\mathbb{D}$ . L'espace métrique  $(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}})$  est appelé **disque de Poincaré**.

On commence par donner un résultat préliminaire.

**Lemme 8** *Soit  $m_{A'} \in \operatorname{Möb}$  qui envoie  $\mathbb{H}$  sur  $\mathbb{D}$ , soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  un chemin. Alors,*

$$l_{\mathbb{D}}(m_{A'} \circ \gamma) = l_{\mathbb{H}}(\gamma).$$

**Démonstration.** On applique la définition, il vient que

$$l_{\mathbb{D}}(m_{A'} \circ \gamma) = l_{\mathbb{H}}(m_{A'^{-1}} \circ m_{A'} \circ \gamma) = l_{\mathbb{H}}(\gamma),$$

ce qui termine la preuve. ■

On est maintenant en mesure de définir  $d_{\mathbb{D}}$  et d'en donner une propriété essentielle.

**Définition 11 (Distance sur le disque de Poincaré)** Soient  $x, y \in \mathbb{D}$ . On note

$$d_{\mathbb{D}}(x, y) = \inf \{l_{\mathbb{D}}(\gamma) : \gamma \in \Gamma[x, y]\}$$

la distance hyperbolique entre  $x$  et  $y$  sur  $\mathbb{D}$ .

**Proposition 9**  $(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}})$  est un espace métrique. De plus, si  $x, y \in \mathbb{D}$  et  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  est un chemin vérifiant  $\gamma(a) = x$  et  $\gamma(b) = y$  tel que  $d_{\mathbb{D}}(x, y) = l_{\mathbb{D}}(\gamma)$ , alors  $\gamma$  est un paramétrage de la géodésique reliant  $x$  et  $y$ .

**Démonstration.** Soit  $m_A$  un élément de Möb qui envoie  $\mathbb{H}$  sur  $\mathbb{D}$  et soient  $z, w \in \mathbb{H}$ . On commence par montrer que  $d_{\mathbb{D}}(m_A(z), m_A(w)) = d_{\mathbb{H}}(z, w)$ . On se donne donc  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  un chemin tel que  $\gamma(a) = z$  et  $\gamma(b) = w$ . D'après le lemme, on a

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(z, w) &= \inf \{l_{\mathbb{H}}(\gamma) : \gamma \in \Gamma[z, w]\} \\ &= \inf \{l_{\mathbb{D}}(m_A \circ \gamma) : \gamma \in \Gamma[z, w]\} \\ &\leq \inf \{l_{\mathbb{D}}(g) : g \in \Gamma[m_A(z), m_A(w)]\} \\ &\leq d_{\mathbb{D}}(m_A(z), m_A(w)) \end{aligned}$$

$$\text{car } \{l_{\mathbb{D}}(g) : g \in \Gamma[m_A(z), m_A(w)]\} \subset \{l_{\mathbb{D}}(m_A \circ \gamma) : \gamma \in \Gamma[z, w]\}.$$

Soient  $x, y \in \mathbb{D}$ . On écrit  $x = m_A(z)$  et  $y = m_A(w)$  et il vient que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}}(x, y) &= d_{\mathbb{D}}(m_A(z), m_A(w)) = \inf \{l_{\mathbb{D}}(\gamma) : \gamma \in \Gamma[x, y]\} \\ &= \inf \{l_{\mathbb{H}}(m_A \circ \gamma) : \gamma \in \Gamma[x, y]\} \\ &\leq \inf \{l_{\mathbb{H}}(g) : g \in \Gamma[z, w]\} \\ &\leq d_{\mathbb{H}}(z, w), \end{aligned}$$

$$\text{car } \{l_{\mathbb{H}}(g) : g \in \Gamma[z, w]\} \subset \{l_{\mathbb{H}}(m_A \circ \gamma) : \gamma \in \Gamma[x, y]\}.$$

On a donc montré que  $d_{\mathbb{D}}$  est une distance sur  $\mathbb{D}$ , car  $m_A$  est un homéomorphisme qui préserve les distances entre  $\mathbb{H}$  et  $\mathbb{D}$  et que  $d_{\mathbb{H}}$  est une distance sur  $\mathbb{H}$ .

Prouvons maintenant la deuxième partie de la proposition. Soient  $x, y \in \mathbb{D}$ ,  $z = m_A^{-1}(x)$ ,  $w = m_A^{-1}(y)$  et  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  un chemin tel que  $\tilde{\gamma}(a) = z$ ,  $\tilde{\gamma}(b) = w$  et  $l_{\mathbb{H}}(\tilde{\gamma}) = d_{\mathbb{H}}(z, w)$ .

Puisque  $m_A$  est un homéomorphisme qui préserve les distances entre  $\mathbb{H}$  et  $\mathbb{D}$ , on sait qu'il existe un chemin  $\gamma \in \Gamma[x, y]$  qui réalise la distance entre  $x$  et  $y$ , et il s'agit de  $m_A \circ \tilde{\gamma}$ . Enfin, comme  $\tilde{\gamma}$  est un paramétrage de la géodésique reliant  $z$  et  $w$ , on conclut finalement que  $\gamma = m_A \circ \tilde{\gamma}$  est un paramétrage de la géodésique reliant  $x$  et  $y$ . ■

### 2.2.1 Comparaisons avec la géométrie euclidienne.

Le but de cette section est de comparer la géométrie euclidienne et la géométrie hyperbolique via des résultats connus.

On commence par le périmètre d'un cercle de rayon  $R$  et de centre 0. Dans la géométrie euclidienne, il est bien connu que la circonférence de ce cercle vaut  $2\pi R$ . Faisons maintenant le calcul dans la géométrie hyperbolique.

On commence par fixer  $0 < r < 1$ . On pose  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{D}$  le chemin défini par  $\gamma(t) = re^{it}$ . Par le théorème 3, on trouve immédiatement que

$$l_{\mathbb{D}}(\gamma) = 2\pi r \frac{2}{1 - r^2}.$$



Or, le rayon  $R$  du cercle vérifie  $R = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 2 \operatorname{arctanh}(r)$  d'après l'exemple qui a été fait précédemment. On remplace donc  $r$  par  $\tanh\left(\frac{R}{2}\right)$  dans l'expression de  $l_{\mathbb{D}}(\gamma)$ , il vient que

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{D}}(\gamma) &= 2\pi \tanh\left(\frac{R}{2}\right) \frac{2}{1 - (\tanh\left(\frac{R}{2}\right))^2} \\ &= 2\pi \frac{2 \sinh\left(\frac{R}{2}\right) \cosh\left(\frac{R}{2}\right)}{(\cosh\left(\frac{R}{2}\right))^2 - (\sinh\left(\frac{R}{2}\right))^2} \\ &= 2\pi \sinh(R). \end{aligned}$$

On peut alors remarquer que  $l_{\mathbb{D}}(\gamma) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \pi e^R$ , ce qui traduit une nouvelle fois la croissance explosive des distances lorsque l'on s'approche du bord du disque.

Nous allons maintenant nous intéresser au calcul l'aire de ce cercle. Pour cela, on commence par donner la définition de l'aire d'une partie de  $\mathbb{D}$ .

**Définition 12** Soit  $\Delta$  une partie de  $\mathbb{D}$ . En notant  $z = x + iy$  les éléments de  $\Delta$ , on a

$$A_{\mathbb{D}}(\Delta) = \iint_{\Delta} \frac{4}{(1 - (x^2 + y^2))^2} dx dy.$$

Si l'on se place en coordonnées polaires, l'expression devient

$$A_{\mathbb{D}}(\Delta) = \iint_{\Delta} \frac{4\rho}{(1 - \rho^2)^2} d\rho d\theta.$$

On note  $\mathcal{C}_r$  le cercle de rayon  $r$ . On se place en coordonnées polaires pour faire le calcul. Il vient donc que

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{D}}(\mathcal{C}_r) &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{4\rho}{(1 - \rho^2)^2} d\rho d\theta \\ &= 8\pi \int_0^r \frac{\rho}{(1 - \rho^2)^2} d\rho \\ &= 4\pi \int_0^{r^2} \frac{1}{(1 - u)^2} du \\ &= \frac{4\pi r^2}{1 - r^2}. \end{aligned}$$

De même que précédemment, il faut remplacer  $r$  par  $\tanh\left(\frac{R}{2}\right)$  dans l'expression trouvée. On trouve alors que

$$A_{\mathbb{D}}(\mathcal{C}_R) = 4\pi \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right) = 2\pi(\cosh(R) - 1) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \pi e^R.$$

On observe alors un phénomène intéressant : lorsque  $R$  est très grand, le périmètre et l'aire du cercle croissent de la même manière. Cela illustre donc le fait que l'aire du cercle est principalement concentrée sur le bord dans la géométrie hyperbolique.

### 3 Les triangles du demi-plan de Poincaré

Le but de cette partie est d'étudier certaines propriétés des triangles dans le demi-plan de Poincaré, puis de donner la formule de Gauss-Bonnet qui fournit une relation entre l'aire d'un triangle et ses angles.

#### 3.1 Propriétés

Avant d'expliciter quelques propriétés trigonométriques dans le demi-plan de Poincaré, nous commençons par donner la définition d'un triangle dans  $\mathbb{H}$ .

**Définition 13 (Triangle hyperbolique (géodésique))** *Un triangle hyperbolique est un triangle  $T$  de  $\mathbb{H}$  composé de trois arcs géodésiques. En général, on appelle  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les angles intérieurs des sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$ . De plus, on dit que  $a$  (respectivement  $b$  et  $c$ ) est la longueur hyperbolique opposée, c'est-à-dire le côté  $(B,C)$  (respectivement  $(A,C)$  et  $(A,B)$ ). Plus précisément,  $a = d_{\mathbb{H}}(B,C)$ ,  $b = d_{\mathbb{H}}(A,C)$  et  $c = d_{\mathbb{H}}(A,B)$ .*

On poursuit en introduisant des triangles remarquables de  $\mathbb{H}$ . Commençons par la définition d'un sommet idéal.

**Définition 14 (Sommet idéal)** *Dans un triangle  $T$  de  $\mathbb{H}$ , on dit que  $s$  est un sommet idéal s'il est sur le bord à l'infini (c'est-à-dire  $s \in \partial\mathbb{H}$ ).*

Nous sommes en mesure de définir ce qu'est un triangle idéal.

**Définition 15 (Triangle idéal)** *Un triangle de  $\mathbb{H}$  est idéal, si ses trois sommets sont situés à l'infini.*

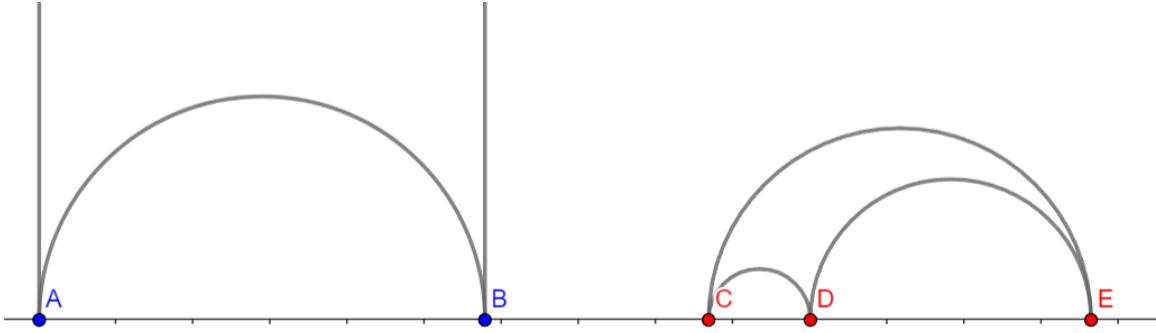


FIGURE 3 – Deux triangles idéaux

**Définition 16 (Triangle rectangle)** *Un triangle hyperbolique  $T$  est rectangle si l'un de ses angles intérieurs est égal à  $\frac{\pi}{2}$ .*

Grâce à ces définitions, nous allons pouvoir donner quelques relations trigonométriques pour les triangles de  $\mathbb{H}$ . Nous admettons ces théorèmes par rapport à l'utilisation que nous allons en faire. Nous renvoyons à *The Geometry of Discrete Groups* de Alan F. Beardon pour une preuve de ces résultats.

On commence donc par un théorème qui permet de mettre en lumière des relations trigonométriques pour les triangles rectangles du demi-plan de Poincaré.

**Théorème 4 (Admis)** *Soit  $T$  un triangle de  $\mathbb{H}$  rectangle en  $A$ , c'est-à-dire que  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . On alors, en utilisant les notations de la définition 13, les relations trigonométriques suivantes :*

$$\begin{aligned}\cos(\beta) &= \frac{\tanh(c)}{\tanh(a)} \\ \tan(\beta) &= \frac{\tanh(b)}{\sinh(c)} \\ \sin(\beta) &= \frac{\sinh(b)}{\sinh(a)} \\ \cosh(a) &= \cosh(b) \cosh(c)\end{aligned}$$

Après ce théorème nous énonçons un dernier résultat qui permettra de clôturer cette section.

**Théorème 5 (Admis)** *Soit  $T$  un triangle de  $\mathbb{H}$ . En conservant les notations de la définition 16 :*

*Loi des sinus :*

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}.$$

*Loi des cosinus I :*

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma).$$

*Loi des cosinus II :*

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)}.$$

### 3.2 La formule de Gauss-Bonnet

Le but de cette section est de démontrer une version faible de la formule de Gauss-Bonnet, qui donne une relation entre l'aire d'un triangle hyperbolique et la somme de ses angles intérieurs.

On commence par donner la définition de l'aire d'une partie de  $\mathbb{H}$ .

**Définition 17 (Aire hyperbolique)** *Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{H}$ . En notant, de même que précédemment,  $z = x + iy$  les éléments de  $X$ , on définit*

$$A_{\mathbb{H}}(X) = \iint_X \frac{1}{y^2} dx dy.$$

Comme nous l'avons vu précédemment dans la proposition 6, on a également un résultat d'invariance de l'aire hyperbolique par l'action de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

**Proposition 10** *L'aire hyperbolique est invariante par l'action de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . C'est à dire que si  $X$  est une partie de  $\mathbb{H}$  dont l'aire est bien définie et si  $m_A$  est un élément de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , alors on a*

$$A_{\mathbb{H}}(X) = A_{\mathbb{H}}(m_A(X)).$$

**Démonstration.** On commence par prouver le résultat pour les éléments de  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ . On note  $z = x + iy$  tout élément de  $\mathbb{H}$ . Soit  $m_A \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ . Par la proposition 5, on sait que

$$\begin{aligned} m_A(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{(cz + d)(c\bar{z} + d)} \\ &= \frac{acx^2 + acy^2 + bd + bcx + adx + iy}{(cx + d)^2 + c^2y^2}. \end{aligned}$$

On considère alors la fonction  $m_A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  définie par  $m_A(x, y) = (\frac{acx^2 + acy^2 + bd + bcx + adx}{(cx + d)^2 + c^2y^2}, \frac{y}{(cx + d)^2 + c^2y^2})$ .

On va appliquer le théorème de changements de variables des fonctions à plusieurs variables à  $m_A$ . Pour cela, on commence par considérer la matrice jacobienne associée à  $m_A$ , il vient donc

$$J_{m_A}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{(cx+d)^2 - c^2y^2}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} & \frac{2cy(cx+d)}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \\ \frac{-2cy(cx+d)}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} & \frac{(cx+d)^2 - c^2y^2}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Puisque  $y > 0$ , la matrice  $J_{m_A}(x, y)$  est inversible en tout point de  $\mathbb{H}$ , et son déterminant vaut

$$\det(J_{m_A}(x, y)) = \frac{1}{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2}.$$

On applique maintenant le théorème de changements de variables, on pose  $h$  la fonction définie par  $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$ , il vient que

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{H}}(m_A(X)) &= \iint_{m_A(X)} \frac{1}{y^2} dx dy \\ &= \iint_X h \circ m_A(x, y) |\det(J_{m_A}(x, y))| dx dy \\ &= \iint_X \frac{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2}{y^2} \frac{1}{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2} dx dy \\ &= A_{\mathbb{H}}(X). \end{aligned}$$

D'après le lemme 4, il ne nous reste plus qu'à prouver le résultat pour l'application  $C$  définie par  $C(z) = -\bar{z}$ .

On a  $C(x, y) = (-x, y)$  et par conséquent

$$J_C(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a  $\det(J_C(x, y)) = -1$  et  $h \circ C(x, y) = \frac{1}{y^2}$ , on en déduit alors immédiatement le résultat. ■

Le reste de cette section est dédiée à la formule de Gauss-Bonnet. Nous allons commencer par nous intéresser aux triangles possédant au moins un sommet idéal.

**Proposition 11** *Soit  $T$  un triangle hyperbolique possédant un sommet idéal et soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les angles intérieurs de ses deux autres sommets. Alors,*

$$A_{\mathbb{H}}(T) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

**Démonstration.** On note  $v_1$  le sommet idéal de  $T$ ,  $v_2, v_3$  les deux autres sommets et  $l_{jk}$  la géodésique reliant  $v_j$  à  $v_k$ . Par la proposition 3, on sait que l'on peut trouver un élément de  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$  qui envoie  $v_1$  sur  $\infty$ ,  $v_2$  sur  $e^{i\varphi}$  et  $v_3$  sur  $e^{i\theta}$  avec  $0 \leq \theta < \varphi \leq \pi$ , de telle sorte que  $l_{23}$  soit envoyée sur une géodésique incluse dans le cercle unité. De plus, la proposition précédente assure que l'aire hyperbolique de  $T$  et du triangle ayant pour sommets  $\infty, e^{i\varphi}$  et  $e^{i\theta}$  est la même.

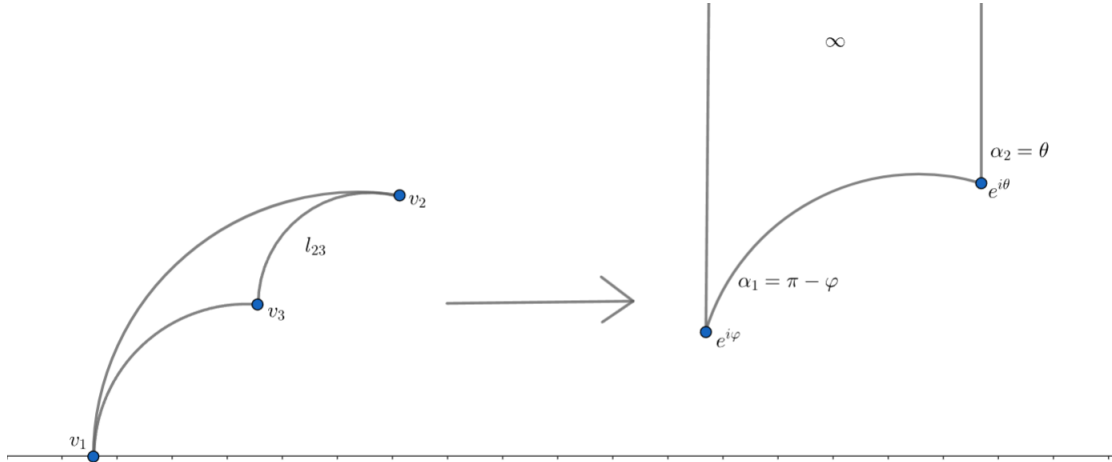


FIGURE 4 –

On calcule, il vient donc que

$$A_{\mathbb{H}}(T) = \iint_T \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{\cos(\varphi)}^{\cos(\theta)} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \int_{\cos(\varphi)}^{\cos(\theta)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

On fait le changement de variables  $x = \cos(u)$ ,  $dx = -\sin(u)du$  et il vient que

$$A_{\mathbb{H}}(T) = \int_{\cos(\varphi)}^{\cos(\theta)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\varphi}^{\theta} -du = \varphi - \theta.$$

Or, puisque l'angle intérieur à  $v_1$  est nul, que l'angle intérieur à  $v_2$  est  $\theta$  et que l'angle intérieur à  $v_3$  est  $\pi - \varphi$ , on obtient bien le résultat demandé. ■

Nous sommes maintenant en mesure de donner le résultat principal de cette partie.

**Théorème 6 (Formule de Gauss-Bonnet)** *Soit  $T$  un triangle hyperbolique d'angles intérieurs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Alors,*

$$A_{\mathbb{H}}(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

**Démonstration.** Soit  $l$  la géodésique reliant  $v_1$  à un point  $x$  sur le bord à l'infini (c'est à dire que  $x \in \partial\mathbb{H}$ ) et passant par  $v_2$ .

Le triangle  $T_1$  ayant pour sommets  $v_1$ ,  $v_3$  et  $x$  possède un sommet idéal en  $x$ . L'angle intérieur en  $v_1$  est  $\alpha$  tandis que l'angle intérieur à  $v_3$  est  $\delta > \gamma$ . Par la proposition précédente, on a

$$A_{\mathbb{H}}(T_1) = \pi - (\alpha + \delta).$$

On considère maintenant le triangle  $T_2$  ayant pour sommets  $v_2$ ,  $v_3$  et  $x$ . Comme précédemment,  $x$  est un sommet idéal de  $T_2$  et on observe que l'angle intérieur en  $v_2$  est  $\pi - \beta$  tandis que celui en  $v_3$  est  $\delta - \gamma$ . Par conséquent, il vient que

$$A_{\mathbb{H}}(T_2) = \pi - (\pi - \beta + \delta - \gamma).$$

Or puisque  $T_1$  est l'union de  $T_2$  et  $T$  on a donc

$$A_{\mathbb{H}}(T) = A_{\mathbb{H}}(T_1) - A_{\mathbb{H}}(T_2).$$

Il en découle alors que

$$A_{\mathbb{H}}(T) = \pi - (\alpha + \delta) - (\pi - (\pi - \beta + \delta - \gamma)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma),$$

ce qui achève la preuve. ■

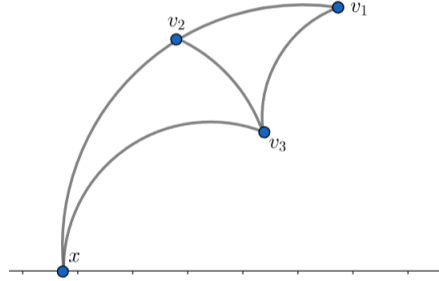


FIGURE 5 –

On peut généraliser la formule à un polygone à  $n$  côtés.

**Corollaire 4** Soit  $P$  un polygone à  $n$  côtés d'angles intérieurs  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Alors,

$$A_{\mathbb{H}}(P) = (n - 2)\pi - \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

**Démonstration.** On fait la preuve par récurrence sur  $n$ , le nombre de côtés du polygone. L'initialisation pour  $n = 3$  correspond au théorème 6.

Supposons alors que pour  $n \geq 3$  fixé la formule soit vraie. Soit  $P$  un polygone à  $n+1$  côtés. Notons  $S_1, \dots, S_{n+1}$  les différents sommets de  $P$ .

Alors, on trace la géodésique reliant  $S_1$  à  $S_3$ , de sorte à ce que l'on observe  $P$  comme la réunion du triangle de sommet  $S_1, S_2, S_3$  et du polygone à  $n$  côtés  $S_1, S_3, \dots, S_{n+1}$  (voir figure). On note  $T$  ce triangle et  $P'$  ce polygone, de sorte que

$$A_{\mathbb{H}}(P) = A_{\mathbb{H}}(T) + A_{\mathbb{H}}(P').$$

On note  $\beta_1$  et  $\beta_3$  les angles intérieurs de  $T$  en  $S_1$  et  $S_3$  et  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$  les angles intérieurs de  $P'$  en  $S_1$  et  $S_3$ . Ainsi, on a

$$\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1 \text{ et } \alpha_3 = \beta_3 + \gamma_3.$$

On applique alors le théorème précédent et l'hypothèse de récurrence, il vient que

$$A_{\mathbb{H}}(P) = \pi - (\beta_1 + \alpha_2 + \beta_3) + (n - 2)\pi - (\gamma_1 + \gamma_3 + \sum_{k=4}^{n+1} \alpha_k).$$

D'où finalement

$$A_{\mathbb{H}}(P) = (n-1)\pi - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_i,$$

ce qui achève la preuve. ■

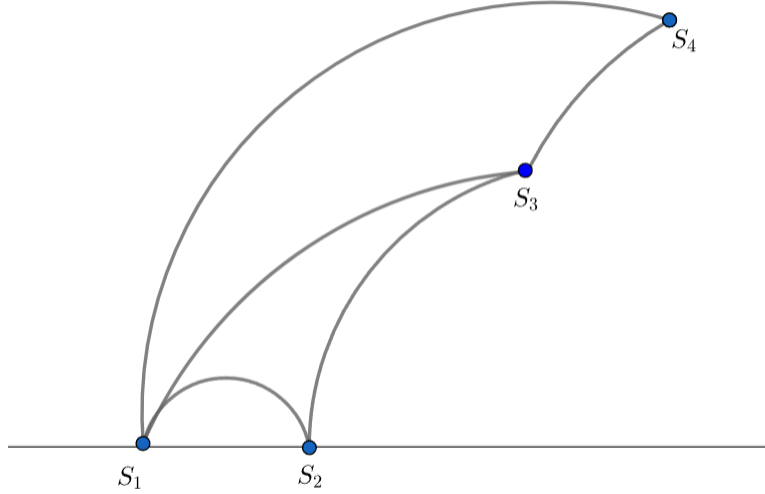


FIGURE 6 – Exemple avec un polygone à 4 côtés.

### 3.3 La réciproque de la formule de Gauss-Bonnet

Le but de cette section est de démontrer la réciproque de la formule de Gauss-Bonnet pour les triangles hyperboliques. En effet, nous allons montrer qu'il est possible de concevoir des triangles hyperboliques avec des angles intérieurs prédéfinis sous une certaine condition. Puis, nous terminerons par l'énoncé de la généralisation de la réciproque de Gauss-Bonnet pour les polygones hyperboliques.

Nous commençons par démontrer ce résultat lorsqu'on a trois angles intérieurs.

**Théorème 7** *Soient  $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$  tel que  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ , alors il existe un unique triangle hyperbolique d'angle intérieurs  $\alpha, \beta, \gamma$  à isométrie près.*

#### Démonstration.

Commençons par démontrer l'existence d'un tel triangle, c'est-à-dire que pour tout  $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$  tel que  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ , il existe un triangle hyperbolique d'angles intérieurs  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Tout d'abord, si  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , alors il existe bien un triangle hyperbolique dont tous les angles sont nuls, il suffit de considérer un triangle idéal.

Ensuite, si  $\gamma = 0$ , alors  $\alpha + \beta < \pi$ . Construisons un tel triangle. Soient  $\mathcal{C}$  un demi-cercle orthogonal à l'axe infini,  $L_1$  et  $L_2$  deux demi-droites verticales distinctes qui s'intersectent avec  $\mathcal{C}$  en  $A$  et  $B$  tel que  $\hat{A} = \alpha$  et  $\hat{B} = \beta$ . Il est clair qu'on obtient un triangle hyperbolique si la condition  $\alpha + \beta < \pi$  est respectée. Plus précisément, ce triangle hyperbolique à l'un de ces sommets qui est idéal.

On traite maintenant le cas général.

Supposons  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  et  $0 < \beta < \pi - \alpha$ . Soient  $\mathcal{C}$  un demi-cercle orthogonal à l'axe infini,  $L_1$  et  $L_2$  deux demi-droites verticales distinctes qui s'intersectent avec  $\mathcal{C}$  en  $A$  et  $B$ , tels que  $\hat{A} = \alpha$  et  $\hat{B} = \beta$ .

Posons  $P_t$  un point sur l'arc de cercle de  $\mathcal{C}$  entre  $A$  et  $B$  de tel sorte que  $P_0 = A$  et  $P_{+\infty} = B$ . Soit  $\mathcal{C}'$  un demi-cercle orthogonal à l'axe infini passant par  $P_t$  tel que  $\hat{P}_t = \beta$  et tel que  $L_1$  et  $\mathcal{C}'$  se coupent en un

point  $Q_{P_t}$  avec un angle noté  $\gamma_t$ .

Si  $Q_{P_t} = \infty$ , alors  $\gamma_t = 0$  et on se retrouve dans la situation précédente.

Sinon, posons  $\Delta_t = \pi - \alpha - \beta - \gamma_t > 0$ , qui correspond à l'aire du triangle  $(AP_tQ_{P_t})$ . Lorsque  $t$  tend  $+\infty$ ,  $P_t$  tend vers  $B$ ,  $\gamma_t$  tend vers 0, ce qui implique que  $\Delta_t$  tend vers  $\pi - \alpha - \beta$ . De plus, lorsque  $t$  tend vers 0,  $P_t$  tend vers  $A$ ,  $\gamma_t$  tend vers  $\pi - \alpha - \beta$  et donc  $\Delta_t$  tend vers 0.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe un  $\tilde{t}$  tel que  $\Delta_{\tilde{t}} = \pi - \alpha - \beta - \gamma_{\tilde{t}}$ . Ainsi, le triangle recherché est le triangle  $(AP_{\tilde{t}}Q_{P_{\tilde{t}}})$ .

Montrons maintenant l'unicité, à isométrie près, d'un tel triangle. Pour cela, on pose l'application *angle* :  $[0, \pi - \alpha - \beta] \rightarrow \mathbb{H}$  défini par

$$\forall t \in [0, \pi - \alpha - \beta], \text{angle}(t) = \widehat{Q_t}.$$

En reprenant la preuve de l'existence et la figure 7, on constate que si  $P_t$  se rapproche de  $A$ , l'aire du triangle  $(AP_tQ_t)$  diminue. Par conséquent, puisque par construction, les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont fixés, on observe que la fonction *angle* est strictement croissante entre 0 et  $\pi - \alpha - \beta$ . ■

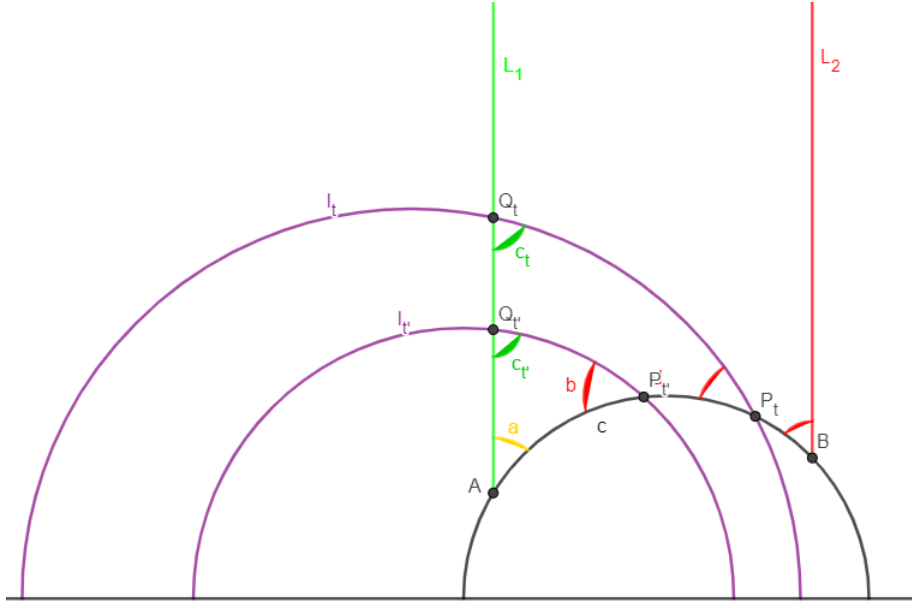


FIGURE 7 –

Maintenant, nous pouvons généraliser le théorème précédent.

**Théorème 8 (Admis)** Pour  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 4$ . Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \pi[$  tels que  $\sum_{k=1}^n \alpha_i < (n-2)\pi$ , il existe un polygone hyperbolique à  $n$  côtés d'angles  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Pour avoir le détail de la preuve, nous renvoyons au *theorem 7.16.2* dans l'ouvrage *The Geometry of Discrete Groups* de Alan F. Beardon [4]. L'idée de la preuve est de construire un polygone hyperbolique en le recouvrant par des triangles hyperboliques. Pour finir, nous constatons que l'unicité n'est plus d'actualité à partir de quatre angles intérieurs, car il est évident qu'on peut recouvrir un polygone hyperbolique de différentes façons en respectant l'hypothèse de départ.

## 4 Construction de surfaces hyperboliques à partir de polygones

Le but de cette section est de donner une méthode générale pour construire des surfaces hyperboliques à partir de polygones hyperboliques. On commence par donner quelques définitions.

**Définition 18 (Surface hyperbolique)** Une surface hyperbolique  $S$  est un ensemble muni d'une distance  $d_S$  telle que pour tout point  $P \in S$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que

$$D_\epsilon(P) = \{Q \in S \mid d_S(P, Q) < \epsilon\}$$

est isométrique à un disque de  $\mathbb{H}$ .

On donne maintenant le vocabulaire lié aux polygones hyperboliques.

**Définition 19 (Polygones hyperboliques)** Un polygone hyperbolique  $\Pi$  est une région de  $\mathbb{H}$  délimitée par un nombre fini d'arêtes, qui sont des géodésiques. Les sommets de  $\Pi$  sont dit propres si ce sont des points de  $\mathbb{H}$  et impropres si ce sont des points situés sur  $\partial\mathbb{H}$ . De même, les arêtes de  $\Pi$  seront dites propres si elles relient deux points de  $\mathbb{H}$  et impropres dans le cas contraire.

Le polygone de la figure 6 est un exemple de polygone hyperbolique possédant deux sommets impropres ( $S_1$  et  $S_2$ ) et deux sommets propres ( $S_3$  et  $S_4$ ).

On introduit maintenant une notion qui va nous permettre de construire des surfaces hyperboliques à partir de polygones hyperboliques.

**Définition 20 (Appairage d'arêtes et identification de points)** Soit  $\Pi$  un polygone hyperbolique, un appairage d'arêtes de  $\Pi$  est une partition des arêtes propres de  $\Pi$  en paires  $\{e, e'\}$  de même longueur, où chaque paire d'arêtes  $\{e, e'\}$  est munie d'une isométrie  $g_{e, e'} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Deux points  $w \in e, w' \in e'$  seront dits identifiés par l'appairage d'arêtes si  $g_{e, e'}(w) = w'$ . On dit aussi que  $w$  est identifié avec  $w''$  si  $w$  est identifié avec  $w'$  et si  $w'$  est identifié avec  $w''$ . Si l'on considère des sommets, l'ensemble maximal  $\{v_1, \dots, v_k\}$  de sommets identifiés sera appelé un cycle de sommets.

La définition précédente nous permet de définir la notion d'espace d'identification.

**Définition 21 (Espace d'identification)** Soit  $\Pi$  un polygone hyperbolique, on définit l'espace d'identification  $S_\Pi$  comme le sous-ensemble de  $\mathbb{H}$  dont les points sont :

- (i) les points intérieurs de  $\Pi$
- (ii) les paires  $\{w, w'\}$  de points identifiés des arêtes propres de  $\Pi$
- (iii) les cycles  $\{v_1, \dots, v_k\}$  de sommets propres de  $\Pi$ .

Nous sommes maintenant en mesure de donner le théorème principal sur la construction de surfaces hyperboliques.

**Théorème 9** On peut munir l'espace d'identification  $S_\Pi$  d'une distance faisant de  $S_\Pi$  une surface hyperbolique si la somme des angles de chaque cycle de sommet fait  $2\pi$ .

**Démonstration.** Soient  $A, B \in S_\Pi$ . On note  $p_{AB}$  le chemin qui relie les points  $A$  et  $B$  sur  $S_\Pi$ . Pour définir correctement la longueur de ce chemin, nous allons interpréter  $p_{AB}$  comme une suite de chemins définis sur  $\Pi$ . Il suffit de décomposer  $p_{AB}$  en  $p_{Aw_1}, p_{w'_1 w_2}, \dots, p_{w_n B}$  avec :

- $w_1$  le premier point où  $p_{AB}$  traverse une arête de  $\Pi$ ,
- $w'_1$  le point identifié avec  $w_1$  où  $p_{AB}$  pénètre à nouveau dans  $\Pi$ ,
- ...
- $w_n$  le dernier point où  $p_{AB}$  entre de nouveau dans  $\Pi$ .

On définit alors la longueur de  $p_{AB}$  par  $l_{S_\Pi}(p_{AB})$  par

$$l_{S_\Pi}(p_{AB}) = l_{\mathbb{H}}(p_{Aw_1}) + \dots + l_{\mathbb{H}}(p_{w_n B}).$$



On peut alors naturellement munir  $S_\Pi$  d'une distance en posant

$$d_{S_\Pi}(A, B) = \inf \{l_{S_\Pi}(p_{AB}) \mid p_{AB} \in \Gamma[A, B]\}.$$

Le fait que  $d_{S_\Pi}$  soit une distance découle directement de la définition 2 et de la définition de la longueur des chemins de  $S_\Pi$ . On va donc chercher à vérifier que pour tout point  $A \in S_\Pi$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que

$$D_\epsilon(A) = \{B \in S_\Pi \mid d_{S_\Pi}(A, B) < \epsilon\}$$

soit isométrique à un disque de  $\mathbb{H}$ .

(i) Si  $A$  est un point intérieur de  $\Pi$ , on choisit  $\epsilon$  strictement inférieur à la moitié de la distance séparant  $A$  de l'arête de  $\Pi$  la plus proche (voir figure 8).

Alors,  $D_\epsilon(A)$  est un disque de  $\mathbb{H}$  et

$$\forall B, C \in D_\epsilon(A), d_{S_\Pi}(B, C) = d_{\mathbb{H}}(B, C).$$

En effet, tout chemin  $p_{BC}$  qui traverse une arête de  $\Pi$  a nécessairement une longueur supérieure à  $\epsilon$ . Par suite, le chemin le plus court entre  $B$  et  $C$  est la géodésique tracée sur  $\mathbb{H}$ .

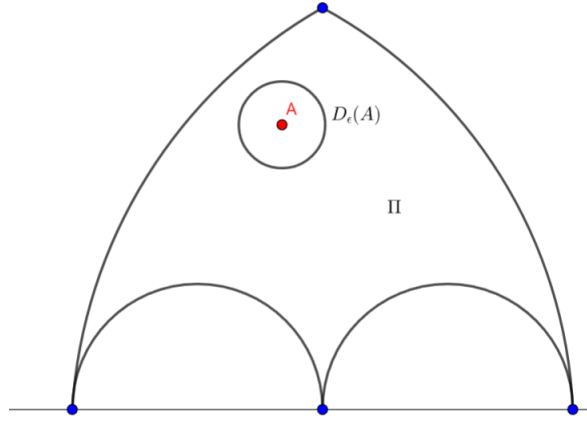


FIGURE 8 –

(ii) Si  $A$  est une paire de points identifiés  $\{w, w'\}$ , on choisit  $\epsilon$  strictement inférieur au quart de la distance séparant  $w$  ou  $w'$  du plus proche sommet ou de n'importe quel autre arête de  $\Pi$ . Il en découle que

$$D_\epsilon(A) = (D_\epsilon(w) \cap \Pi) \cup (D_\epsilon(w') \cap \Pi).$$

Ainsi, (voir figure 9)  $D_\epsilon(A)$  est la réunion de deux demi-disques. Par conséquent, en notant  $B'$  et  $C'$  l'image de  $B$  et  $C$  (respectivement) par une isométrie, notée  $\theta$ , entre  $D_\epsilon(w)$  et  $D_\epsilon(w')$ , on a

$$\forall B, C \in D_\epsilon(A), d_{S_\Pi}(B, C) = \begin{cases} d_{\mathbb{H}}(B, C) & \text{si } B, C \text{ sont dans le même demi-disque} \\ d_{\mathbb{H}}(B', C) & \text{si } B \in D_\epsilon(w), C \in D_\epsilon(w') \\ d_{\mathbb{H}}(B, C') & \text{si } B \in D_\epsilon(w'), C \in D_\epsilon(w). \end{cases}$$

En effet, le choix de  $\epsilon$  impose que tout chemin qui part de  $D_\epsilon(A)$  et qui sort de  $\Pi$  a une longueur supérieure à  $\epsilon$ . Par suite,  $D_\epsilon(A)$  est isométrique à  $D_\epsilon(w')$  via l'application  $\varphi$  définie par

$$\forall B \in D_\epsilon(A), \varphi(B) = \begin{cases} B & \text{si } B \in D_\epsilon(w') \\ \theta(B) & \text{si } B \in D_\epsilon(w). \end{cases}$$

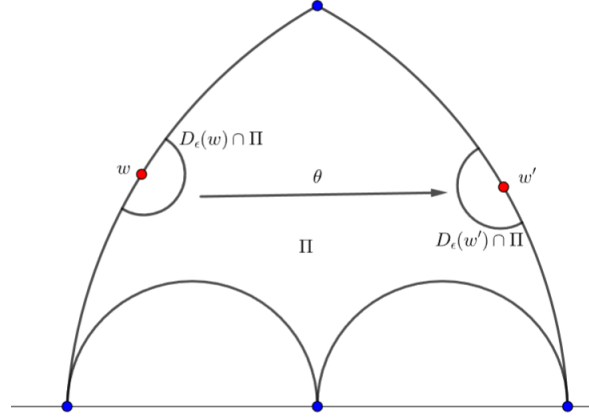


FIGURE 9 –

(iii) Si  $A$  est un cycle  $\{v_1, \dots, v_k\}$  de sommets propres de  $\Pi$ , on choisit  $\epsilon$  strictement inférieur au quart de la longueur de n'importe quelle arête de  $\Pi$ . On en déduit alors que

$$D_\epsilon(A) = \bigcup_{i=1}^k (D_\epsilon(v_i) \cap \Pi).$$

Notons alors  $V_\epsilon(v_i) = D_\epsilon(v_i) \cap \Pi$ , chaque  $V_\epsilon(v_i)$  correspond à un secteur angulaire de rayon  $\epsilon$  et de centre  $v_i$  (voir figure 10). Puisque, par hypothèse, la somme des angles de tous ces secteurs est égale à  $2\pi$ , chaque  $D_\epsilon(v_j)$  peut être décomposé en somme de secteurs isométriques à  $V_\epsilon(v_i)$  adjacents les uns aux autres dans l'ordre dans lequel ils apparaissent dans le cycle de sommets  $\{v_1, \dots, v_k\}$ .

Ainsi, pour  $B, C \in D_\epsilon(A)$ , on définit

$$d_{S_\Pi}(B, C) = d_{\mathbb{H}}(B^{(j)}, C^{(j)}),$$

où les points  $B^{(j)}$  et  $C^{(j)}$  sont des points de  $D_\epsilon(v_j)$  correspondant à  $B$  et  $C$  suivant la décomposition en secteurs décrit précédemment.

De même que pour les points (i) et (ii), tout chemin partant de  $D_\epsilon(A)$  et sortant de  $\Pi$  a une longueur strictement supérieure à  $\epsilon$ . Par suite,  $D_\epsilon(A)$  est isométrique à  $D_\epsilon(v_j)$  qui est un disque de  $\mathbb{H}$ . ■

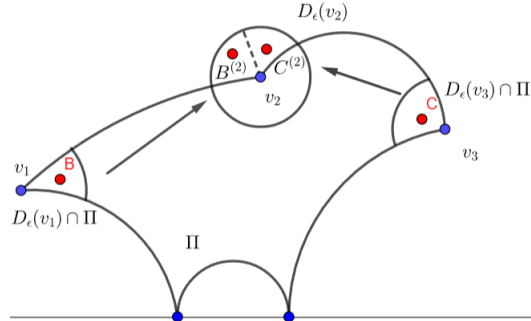


FIGURE 10 –

## Références

- [1] James W.Anderson : *Hyperbolic Geometry*, Springer Undergraduate Mathematics Series 2nd Edition.
- [2] Ricardo Sà Earp & Eric Toubiana : *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*, Cassini.
- [3] John G.Ratcliffe : *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag.
- [4] Alan F.Beardon : *The Geometry of Discrete Groups*, Springer Graduate Texts in Mathematics.
- [5] John Stillwell : *Geometry of Surfaces*, Springer.