

# TD 2

Tom Wozniak

18 septembre 2025

## 1 Code ADRS

Dans un premier temps, nous avons étudié le code Python permettant de résoudre l'équation ADRS. On s'est intéressé à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} u + c \frac{\partial}{\partial x} u = 0.$$

Nous avons montré que le schéma d'Euler explicite

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + c \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

était équivalent à un schéma d'Euler décentré auquel on ajoute un terme de viscosité numérique

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + c \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{c\Delta x}{2} \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

Nous avons ensuite modifié le code ADRS pour résoudre l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} u + V \frac{\partial}{\partial x} u = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \lambda u + f$$

avec un schéma d'Euler centré.

Nous sommes ensuite partis de la solution exacte  $u(s) = \exp(-10(s - \frac{L}{2})^2)$  pour trouver la fonction  $f$ . Après calcul, on trouve que

$$f(s) = \exp(-10(s - \frac{L}{2})^2) \left( -20V(s - \frac{L}{2}) + 20\nu - 400\nu(s - \frac{L}{2})^2 + \lambda \right).$$

Après résolution sur Python, on obtient la figure suivante.

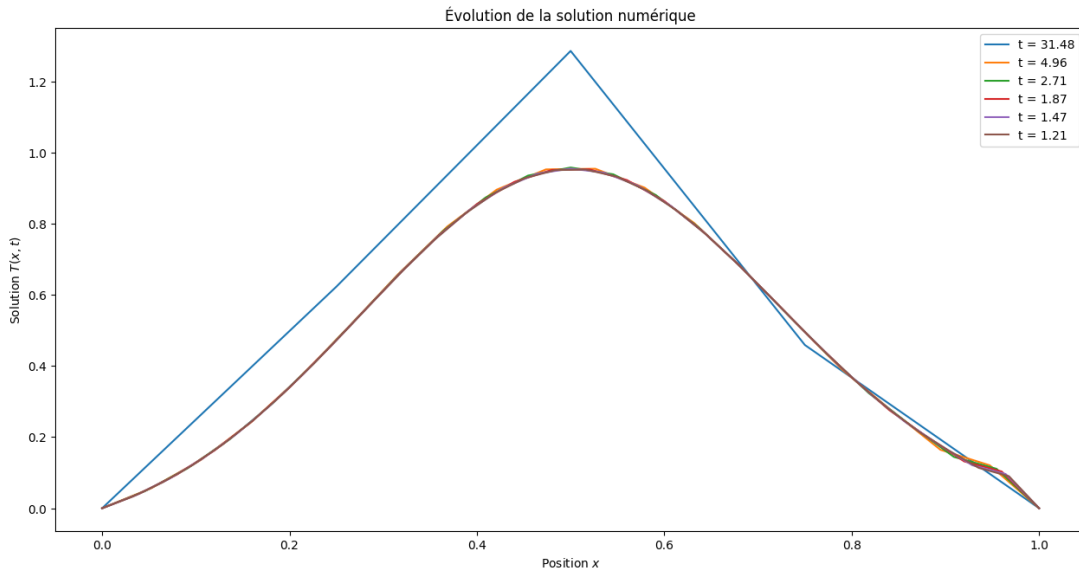


FIGURE 1 – Graphe montrant l'évolution de la solution numérique au cours du temps

Ensuite, nous avons procédé de manière inverse, c'est-à-dire que nous avons implémenté la fonction source  $f$  puis nous avons résolu l'équation numériquement et avons comparé les résultats entre la solution numérique et la solution exacte.

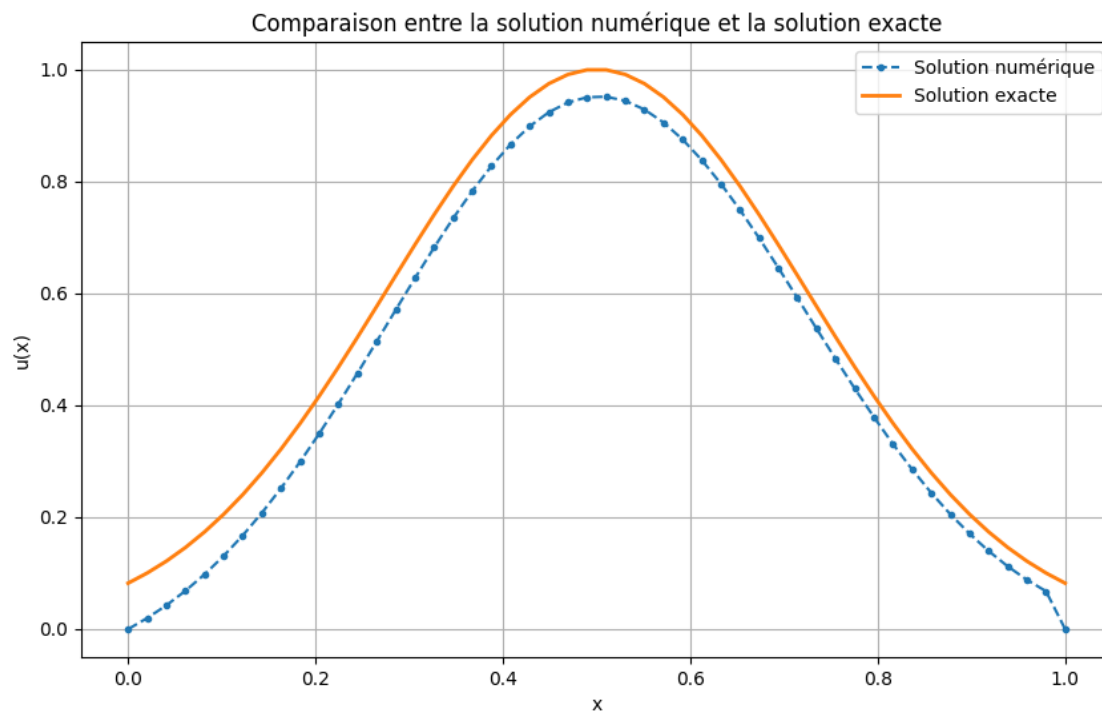


FIGURE 2 – Graphe comparant la solution exacte et la solution numérique

## 2 Convergence en normes

On étudie toujours l'équation ADRS, et on a fait un code pour regarder la convergence de la solution numérique en norme  $L^2$ , pour un maillage de 100 points avec 10 000 itérations.

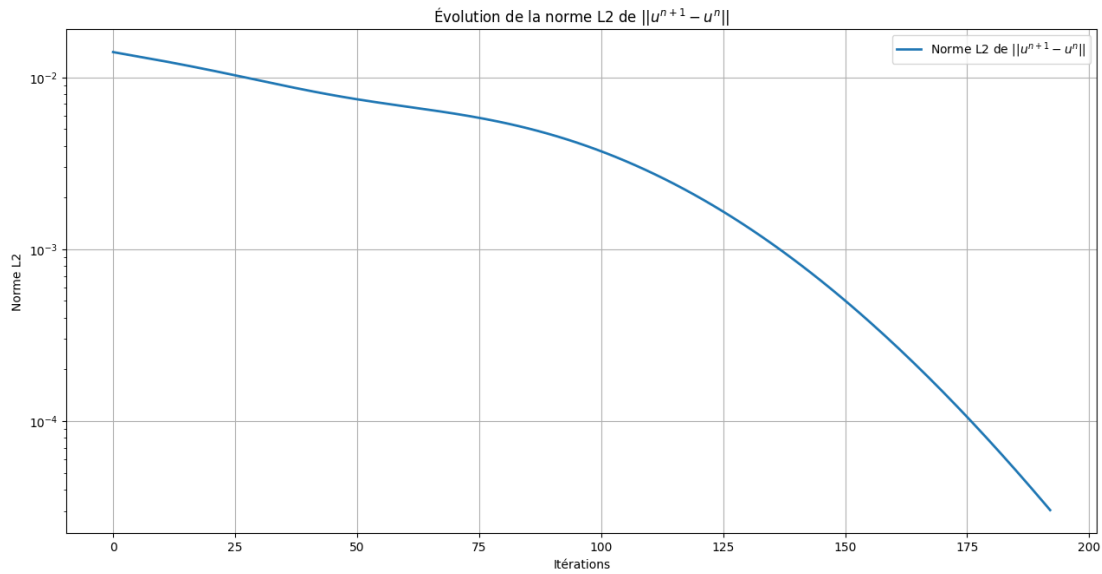


FIGURE 3 – Graphe montrant la convergence de la solution numérique en norme  $L^2$

Ensuite, nous avons modifié le code pour regarder l'erreur en norme  $H^1$  et en norme  $L^2$  pour 5 maillages, en partant de 3 points et en rajoutant 20 à chaque itération.

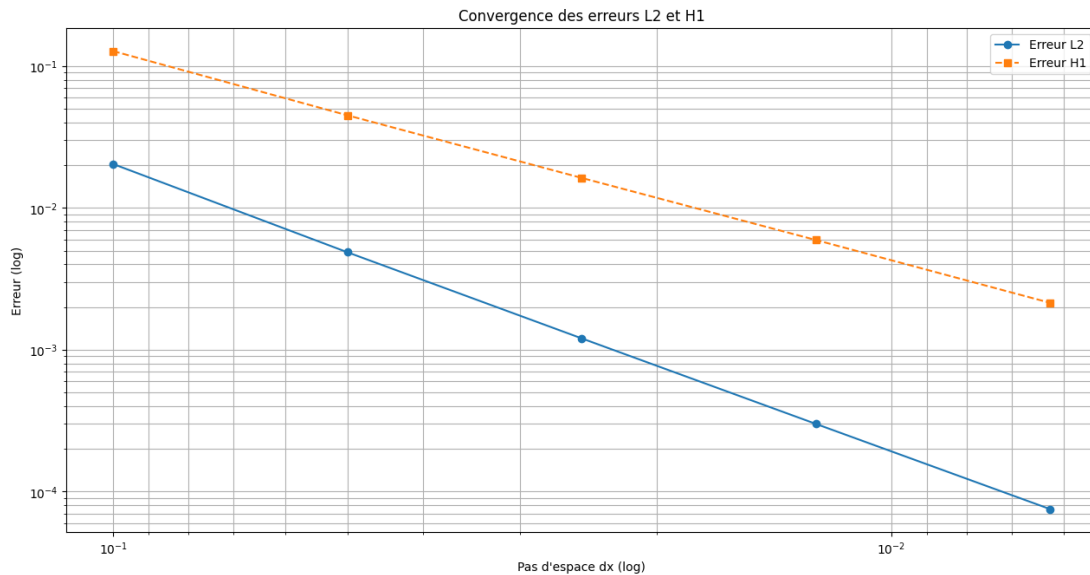


FIGURE 4 – Graphe montrant l'erreur en normes  $L^2$  et  $H^1$

### 3 Code ADRS maillage multiple

Nous nous sommes intéressés à un autre code permettant de résoudre l'équation ADRS. C'est un schéma d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps. Le but de cette partie était de calculer numériquement les constantes liées à l'erreur d'interpolation. On cherchait un couple  $(k, C)$  vérifiant

$$\|u - u_h\|_2 \leq Ch^k \|u\|_{2,2}.$$

Pour cela, on a codé un algorithme d'optimisation. Après résolution, on a trouvé  $k = 0.98$  et  $C = 4.6 \times 10^{-2}$ .

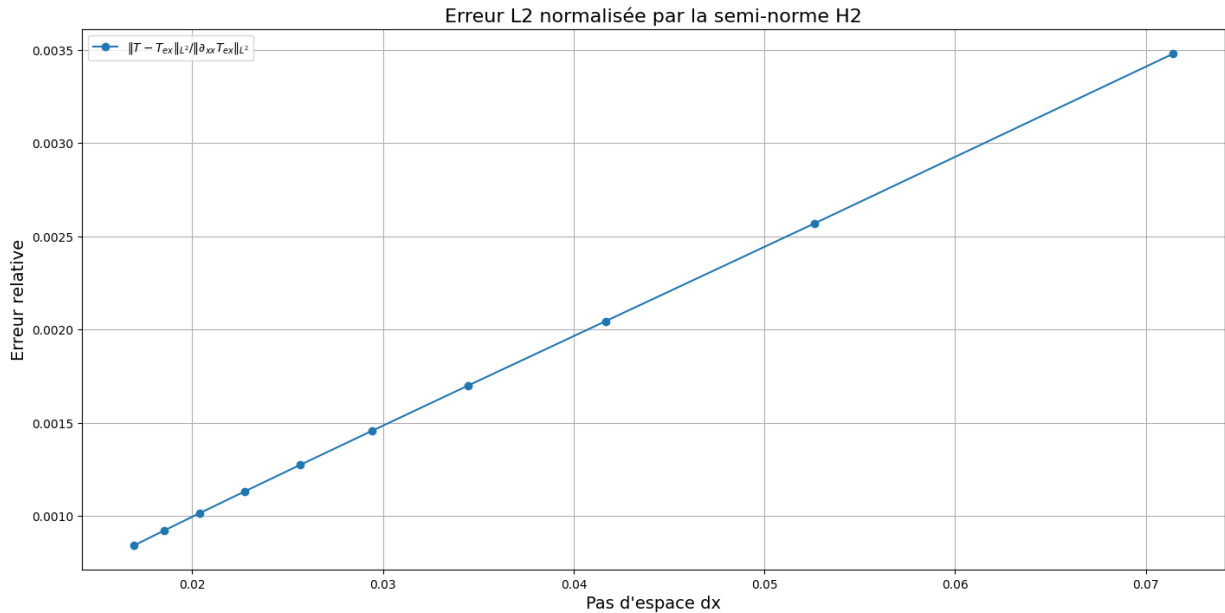


FIGURE 5 – Erreur en échelle log log

### 4 Workflow

Voici le workflow résumant la séance.

