TD 3

Tom Wozniak

28 septembre 2025

1 Comparaison Riemann vs Lebesgue

Le but de cette séance était de comparer les méthodes numériques de résolution d'intégrales en utilisant des programmes Python qui implémentaient le calcul via une intégrale de Riemann ou via une intégrale de Lebesgue, pour des fonctions qui étaient évidemment intégrables dans ces deux sens. On s'est donc intéressés dans un premier temps à la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c\sin(4\pi x) + 10\exp(-100(x-0.5)^2).$$

avec les paramètres $a = 0.5, b = 10, c = 3$.

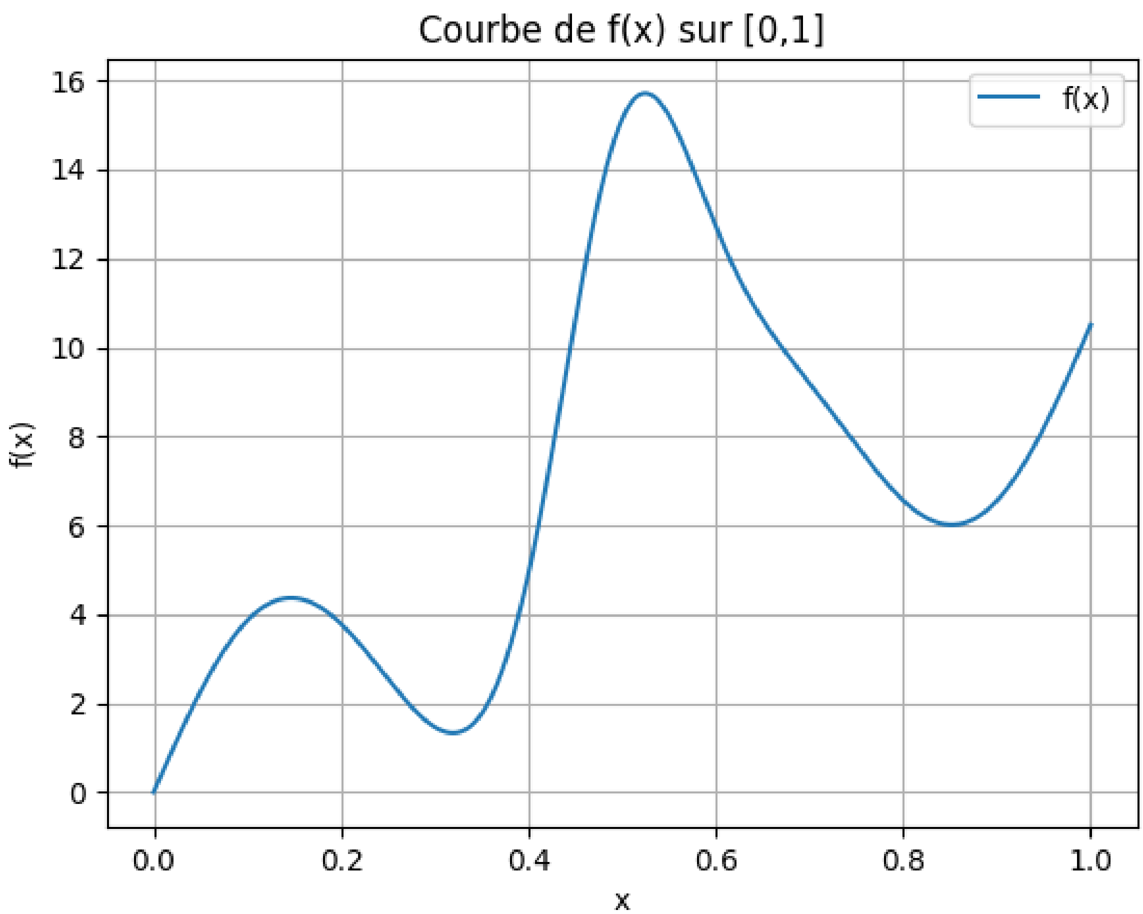

FIGURE 1 – Graphe de la fonction f

Nous avons ensuite implémenté un code Python permettant de calculer la valeur de cette intégrale sur l'intervalle $[0, 1]$, en utilisant tantôt l'intégrale de Riemann (c'est-à-dire un découpage uniforme en rectangles selon l'axe des abscisses) puis en utilisant l'intégrale de Lebesgue (c'est-à-dire un découpage uniforme en rectangles selon l'axe des ordonnées).

Si on note I la valeur de cette intégrale, on trouve qu'avec l'intégrale de Riemann pour un échantillonnage de 10 000 points, $I = 6.938$ et avec l'intégrale de Lebesgue, toujours avec un échantillonnage de 10 000 points, $I = 6.939$. Les valeurs sont donc assez proches, illustrant que pour cette fonction, les méthodes se valent (à noter que j'ai aussi effectué des tests avec des échantillonnages différents, et que les valeurs restent encore très proches selon les méthodes).

1.1 Réduction de l'échantillonnage pour Lebesgue

Nous avons ensuite modifié le programme permettant de calculer l'intégrale de la fonction au sens de Lebesgue en y incorporant une suite de Cauchy afin de réduire l'échantillonnage, et de trouver le nombre N de points minimum pour avoir une précision bonne à $\varepsilon = 10^{-3}$. Après l'exécution du code, on a trouvé que $N = 12800$ était la valeur minimale.

2 Changement de fonction et méthode de Monte-Carlo

Nous avons ensuite basculé avec la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

que l'on cherchait à intégrer sur $]0, 1[$. La valeur théorique de cette intégrale étant connue (elle vaut π), il nous sera plus aisé de comparer la précision des méthodes.

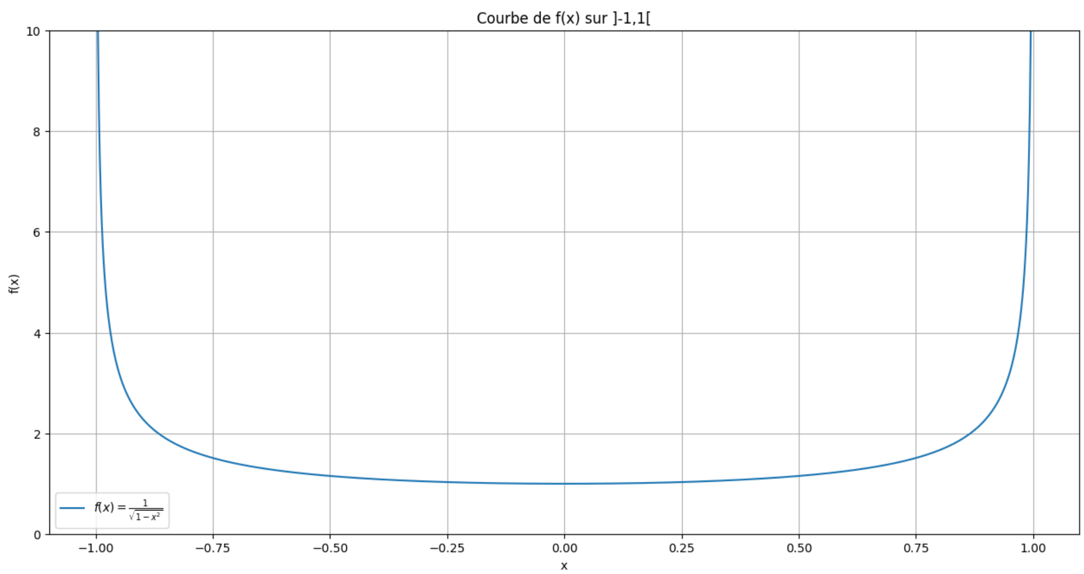

FIGURE 2 – Graphe de la fonction f

Avec la méthode de Lebesgue pour commencer, on trouve que $N = 3200$ est suffisant pour avoir une précision à 10^{-3} de l'intégrale. Avec la méthode de Riemann, on a trouvé que l'échantillonnage minimum était $N = 5120$.

Enfin, nous avons implémenté la méthode de Monte-Carlo pour calculer cette intégrale et pour la comparer avec les deux autres afin de voir laquelle est la plus performante. Pour la méthode de Monte-Carlo, j'ai trouvé que pour avoir une précision à 10^{-3}, il fallait avoir $N = 51200$ ce qui est largement supérieur aux méthodes de Riemann et Lebesgue, mais pas du tout étonnant puisque cette méthode est surtout utile lorsque l'on travaille avec des intégrales dans des dimensions supérieures.

3 Nouveau code

Nous avons ensuite étudié un nouveau code permettant de résoudre numériquement l'équation ADRS. Ce code teste la convergence numérique de la méthode utilisée pour les métriques issues des normes classiques des espaces L^2 et H^1.