Mémoire M2 :
Fibrés indigènes sur les surfaces de Riemann

Tom Wozniak

Tuteur : João Pedro dos Santos

Janvier-Juin 2025

Table des matières

1 Introduction

Le but de ce mémoire est d'exposer les résultats principaux de l'article de R. C. Gunning *Special Coordinate Coverings of Riemann Surfaces.* Cet article est consacré à l'étude des structures projectives et affines sur les surfaces de Riemann, en lien avec la géométrie complexe et la théorie des revêtements.

D'après le théorème d'uniformisation, toute surface de Riemann connexe et simplement connexe est biholomorphe à l'une des trois surfaces modèles : la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, le plan complexe $\mathbb{C}$, ou le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$. Il en résulte que toute surface de Riemann M peut être obtenue comme le quotient d'un de ces espaces modèles $\widetilde{M} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ par l'action proprement discontinue d'un groupe Γ de transformations biholomorphes, contenues dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.

De telles représentations ne sont en général pas uniques : une surface de Riemann peut admettre de nombreuses structures de revêtement par des domaines de $\widehat{\mathbb{C}}$, donnant lieu à une multitude de *représentations projectives* distinctes. Chacune de ces représentations définit un recouvrement analytique particulier de la surface, dans lequel les changements de cartes sont des transformations projectives. L'étude de ces structures permet d'établir des liens profonds entre la géométrie locale des surfaces de Riemann, les fibrés en droites munis de connexions plates, et les représentations du groupe fondamental dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Dans un premier temps, nous allons rappeler de nombreux résultats fondamentaux sur les fibrés, notamment les fibrés vectoriels, ainsi que sur les surfaces de Riemann, les faisceaux et la cohomologie de Čech. Ce mémoire propose aussi une construction détaillée des classes de Chern de tout ordre, bien que nous ne nous servirons que de la première classe de Chern.

Dans un second temps, nous introduirons la notion de fibré indigène, connexions analytiques, groupe de cohomologie d'Eichler et représentation géométrique, et observerons comment ces différentes notions permettent une étude approfondie des structures projectives (et affines !) sur les surfaces de Riemann.

2 Notion de fibré

Le but de ce chapitre est d'introduire la notion d'espaces fibrés et de fibrés vectoriels et d'en donner les résultats généraux.

2.1 Définitions et exemples

On commence par une définition.

Définition 2.1 (Provisoire) *Un fibré $\mathcal{B}$ est la donnée de*

(i) Un espace topologique B appelé ***espace fibré****.*

(ii) Un espace topologique X appelé ***base****.*

(iii) Une application continue $p : B \to X$ appelée ***projection****.*

(iv) Un espace topologique Y appelé ***fibre****.*

Pour $x \in X$, l'ensemble $Y_x := p^{-1}(x)$, appelé ***fibre au dessus de*** *x, doit être homéomorphe à Y. Enfin, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x et un homéomorphisme*

$$\phi : V \times Y \to p^{-1}(V)$$

tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} V \times Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "p_1"'] & p^{-1}(V) \arrow[d, "p"] \\ & V. \end{tikzcd}$$

Cette définition n'est pas suffisamment restrictive. On demandera plus tard qu'un fibré contienne un groupe G appelé groupe de structure du fibré. Néanmoins, nous donnerons quand même des exemples de fibrés et expliciterons plus tard le groupe de structure qui leur est associé. Avant tout cela, on rappelle la définition d'une section.

Définition 2.2 (Section d'un fibré) *Une section d'un fibré est une application continue $f : X \to B$ telle que $p \circ f = Id_B$.*

Donnons maintenant quelques exemples de fibrés.

Exemple 1 : Fibré trivial.

Lorsque $B = X \times Y$, on dit que le fibré est trivial. Dans ce cas, la projection p est la projection sur la première coordonnée, et pour tout point $x \in X$, on peut choisir $V = X$ et $\phi = Id$. Enfin, il y a un unique homéomorphisme naturel entre Y_x et Y donné par l'application p_2, qui est la projection sur la deuxième coordonnée.

Exemple 2 : Les revêtements.

Un revêtement (B, p) d'un espace topologique X connexe par arcs est un exemple de fibré. En effet, la définition d'un revêtement est la même que celle donnée précédemment d'un fibré, à l'exception près que la projection doit être un homéomorphisme local et que, par conséquent, les fibres Y_x sont discrètes.

Exemple 3 : Fibré vectoriel.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Un fibré vectoriel est un fibré dont chaque fibre au-dessus d'un point est munie d'une structure de k-espace vectoriel de dimension n. L'espace total du fibré est k^n. Nous reviendrons plus tard sur l'étude de ces fibrés.

2.2 Fibré de coordonnées

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la définition de fibré n'est pas complète. Le but de cette section est de remédier à cela ; on commence par rappeler quelques définitions.

Définition 2.3 (Groupe topologique) *Un groupe topologique G est un ensemble muni d'une structure de groupe et d'une topologie telles que les applications*

$$\begin{array}{rcl} G & \to & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} G \times G & \to & G \\ (g, g') & \mapsto & gg' \end{array}$$

soient continues.

Définition 2.4 (Action topologique de groupes) *Soient G un groupe topologique, Y un espace topologique. On dit que G agit topologiquement sur Y relativement à l'application $\rho : G \times Y \to Y$ si*

(i) L'application ρ est continue.

(ii) $\forall y \in Y,\ \rho(e, y) = y$.

(iii) $\forall g, g' \in G,\ \forall y \in Y,\ \rho(gg', y) = \rho(g, \rho(g', y))$.

Par simplification d'écriture, on notera dorénavant $g.y$ pour désigner $\rho(g, y)$.

Il est intéressant d'observer que, pour $g \in G$ fixé, l'application $y \mapsto g.y$ est un homéomorphisme, puisqu'elle a pour réciproque l'application $y \mapsto g^{-1}.y$, qui est continue. Par conséquent, l'application ρ fournit un morphisme entre G et $\mathrm{Homeo}(Y)$, le groupe des homéomorphismes de Y. Si l'action est libre, ce morphisme est un isomorphisme. Par conséquent, on pourra identifier G à $\mathrm{Homeo}(Y)$. Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, on supposera que l'action de G est libre.

Nous introduisons maintenant la notion de fibré de coordonnées.

Définition 2.5 (Fibré de coordonnées) *Un fibré de coordonnées $\mathcal{B}$ est la donnée de :*

*(1) Un espace topologique B appelé **espace total**.*

*(2) Un espace topologique X appelé **base**.*

*(3) Une application surjective continue $p : B \to X$ appelée **projection**.*

*(4) Un espace topologique Y appelé **fibre**.*

*(5) Un groupe topologique G qui agit topologiquement et librement sur Y appelé **groupe de structure du fibré**.*

*(6) Une famille $\{V_j\}$ d'ouverts recouvrant X indexés par un ensemble J. Les V_j sont appelés **trivialisations**.*

*(7) Pour chaque $j \in J$, un homéomorphisme $\phi_j : V_j \times Y \to p^{-1}(V_j)$ appelé **trivialisation locale**.*

On demande que les trivialisations fassent commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} V_j \times Y \arrow[r, "\phi_j"] \arrow[dr, "p_1"'] & p^{-1}(V_j) \arrow[d, "p"] \\ & V_j. \end{tikzcd}$$

De plus, si on définit l'application $\phi_{j,x} : Y \to p^{-1}(x)$ par

$$\phi_{j,x}(y) = \phi_j(x, y)$$

alors pour tout couple $i, j \in J$ et pour tout $x \in V_i \cap V_j$, l'homéomorphisme $\phi_{j,x}^{-1} \circ \phi_{i,x} : Y \to Y$ correspond à l'action d'un unique élément de G (car G agit librement).

Enfin, on demande que pour tout $i, j \in J$, l'application $g_{ji} : V_i \cap V_j \to G$ définie par $g_{ji}(x) = \phi_{j,x}^{-1} \circ \phi_{i,x}$ soit continue. On dit que l'application g_{ij} est une ***fonction de transition****, et que l'application $g_{ij}(x)$ est un* ***cocycle****.*

Avant de donner la définition finale de fibrés, on donne quelques propriétés portant sur les fonctions de transition.

Proposition 2.1 *On conserve les notations de la définition précédente.*

(1) $\forall i, j, k \in J,\ \forall x \in V_i \cap V_j \cap V_k,\ g_{kj}(x)g_{ji}(x) = g_{ki}(x)$.

(2) $\forall i \in J,\ \forall x \in V_i,\ g_{ii}(x) = Id_G$.

(3) $\forall j, k \in J,\ \forall x \in V_k \cap V_j,\ g_{jk}(x) = (g_{kj}(x))^{-1}$.

(4) Soit $p_j : p^{-1}(V_j) \to Y$ *l'application définie par* $p_j(b) = (\phi_{j,x}(b))^{-1}$ *avec* $x = p(b)$. *Alors,*

$$p_j \circ \phi_j(x, y) = y,\ \phi_j(p(b), p_j(b)) = b,\ g_{ji}(p(b)).p_i(b) = p_j(b).$$

Ces résultats découlent directement de la définition et ne nécessitent pas de preuves plus détaillées.

On définit maintenant une relation d'équivalence sur les fibrés de coordonnées, ce qui va nous permettre de définir les fibrés.

Définition 2.6 *Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux fibrés de coordonnées. On dira que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont* ***équivalents (au sens strict)*** *si et seulement s'ils ont le même espace total, base, projection, fibre, groupe de structure et si les trivialisations locales vérifient la propriété suivante :*

Pour tout $j \in J,\ j' \in J',\ x \in V_j \cap V'_{j'}$, l'homéomorphisme $\phi'^{-1}_{j',x} \circ \phi_{j,x}$ correspond à l'action d'un élément de G, c'est-à-dire qu'il existe une application $\overline{g}_{j'j} : V_j \cap V'_{j'} \to G$ telle que

$$\phi'^{-1}_{j',x} \circ \phi_{j,x} = \overline{g}_{j'j}(x)$$

et l'application $\overline{g}_{j'j}$ est continue.

Proposition 2.2 *La relation "$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont équivalents au sens strict" est une relation d'équivalence.*

Démonstration. La réflexivité est évidente par définition d'un fibré de coordonnées. La symétrie découle du fait que l'application $g \mapsto g^{-1}$ est continue. Enfin, la transitivité provient de la continuité de l'application $(g, g') \mapsto gg'$. ■

Nous sommes maintenant en mesure de donner une définition complète des fibrés.

Définition 2.7 (Fibrés) *Un fibré est une classe d'équivalence de fibrés de coordonnées pour la relation d'équivalence donnée précédemment.*

Comme nous l'avons mentionné précédemment, cette définition est plus riche. Revenons aux premiers exemples de fibrés pour identifier le groupe de structure.

Dans le cas du fibré trivial, nous avions vu qu'il existait un unique homéomorphisme entre Y_x et Y, ce qui traduit le fait que le groupe de structure est trivial et réduit à un élément. Pour les revêtements, il s'agit d'un sous-groupe de permutation, et pour les fibrés vectoriels il s'agit d'un sous-groupe du groupe linéaire.

On clôture cette section en introduisant la notion de morphismes de fibrés.

Définition 2.8 (Morphismes de fibrés) *Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux fibrés de coordonnées possédant la même fibre et le même groupe de structure. Un morphisme de fibré est une application continue $h : B \to B'$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) pour tout $x \in X$, l'application h est un homéomorphisme entre Y_x, et $Y_{h(x)}$ et par conséquent induit une application continue $\overline{h} : X \to X'$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & B' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ X & \xrightarrow{\overline{h}} & X' \end{array}$$

(2) soient $x \in V_j \cap \overline{h^{-1}}(V'_{j'})$, $x' = h(x)$ et $h_x : Y_x \to Y'_x$ l'homéomorphisme induit par h. L'application

$$\overline{g}_{j'j}(x) = \phi'^{-1}_{j',x'} \circ h_x \circ \phi_{j,x}$$

définie de Y dans Y correspond à l'action d'un élément de G et l'application

$$\overline{g}_{j'j} : V_j \cap \overline{h^{-1}}(V'_{j'}) \to G$$

est continue.

2.2.1 Construction de fibrés à partir des fonctions de transitions

Dans cette section, nous allons expliquer comment construire un fibré sur un espace topologique X à partir de fonctions de transition. L'idée intuitive est de considérer un recouvrement ouvert de X, où le fibré apparaît localement comme un produit trivial. Les fonctions de transition permettent alors de recoller ces trivialisations de manière cohérente, définissant ainsi une structure fibrée globale.

Définition 2.9 (Système de fonctions de transition) *Soient G un groupe topologique, X un espace topologique, $\{V_j\}$ un recouvrement de X par des ouverts indexés par un ensemble J. Un système de fonctions de transition est une famille d'applications continues $g_{ij} : V_i \cap V_j \to G$ vérifiant*

$$\forall i, j, k \in J,\ \forall x \in V_i \cap V_j \cap V_k,\ g_{kj}(x) g_{ji}(x) = g_{ki}(x).$$

*Cette relation s'appelle la **relation de cocyclicité**.*

Nous avons vu précédemment les fonctions de transition d'un fibré au-dessus de X de groupe G forment un système de fonctions de transitions. Le théorème suivant donne une réciproque à ce résultat.

Théorème 2.3 *Soient X un espace topologique, G un groupe topologique agissant topologiquement librement sur un espace topologique Y, $\{V_j\}$ un recouvrement de X par des ouverts indexés par un ensemble J et $\{g_{ij}\}$ un système de fonctions de transition. Alors, il existe un fibré $\mathcal{B}$ de base X, de fibre Y, de groupe G et de fonctions de transition $\{g_{ij}\}$.*

Démonstration. On commence par munir J de la topologie discrète pour en faire un espace topologique. Posons

$$T = \{(x, y, j) \in X \times Y \times J,\ x \in V_j\}.$$

Ainsi, T est un espace topologique et on peut écrire

$$T = \bigcup_{j \in J} V_j \times Y \times \{j\}.$$

On définit sur T la relation d'équivalence suivante :

$$(x, y, j) \sim (x', y', k) \Longleftrightarrow x = x',\ g_{kj}(x).y = y'.$$

Le fait que ceci définisse bien une relation d'équivalence découle directement du fait que les applications $\{g_{ij}\}$ forment un système de fonctions de transition.

Posons $B := T/\sim$ et $q : T \to B$ la surjection canonique. On munit B de la topologie quotient et on pose aussi $p : B \to X$ définie par

$$p(\{(x, y, j)\}) = x.$$

Par définition de $\sim$, l'application p est bien définie. De plus, cette application est continue, car pour tout ouvert $W \subset X$, $(pq)^{-1}(W) = q^{-1}(p^{-1}(W)) = T \cap (W \times Y \times J)$ qui est ouvert dans T, on en déduit donc que $p^{-1}(W)$ est ouvert dans B.

Soient $j \in J$, $x \in V_j$ et $y \in Y$. On définit les fonctions de transition par

$$\phi_j(x,y) = q(x,y,j).$$

Ces applications sont continues par continuité de q et $p \circ \phi_j(x,y) = p \circ q(x,y,j) = x$. De plus, si $b = \{(x,y,k)\} \in p^{-1}(V_j)$ alors $x \in V_j \cap V_k$ et $(x,y,k) \sim (x, g_{jk}(x).y, j)$. Par conséquent, ϕ_j réalise une bijection continue entre $V_j \times Y$ et $p^{-1}(V_j)$.

Montrons maintenant que ϕ_j^{-1} est continue. Soit W un ouvert de $V_j \times Y$, alors $\phi_j(W)$ est ouvert dans B si et seulement si $q^{-1} \circ \phi_j(W)$ est ouvert dans T. Puisque les ensembles $V_k \times Y \times k$ sont ouverts et recouvrent T, il suffit de montrer que $q^{-1} \circ \phi_j(W) \cap (V_k \times Y \times k)$ est ouvert pour tout k. Or, on observe que

$$q^{-1} \circ \phi_j(W) \cap (V_k \times Y \times k) \subset (V_j \cap V_k) \times Y \times k$$

et l'ensemble $(V_j \cap V_k) \times Y \times k$ est ouvert dans T. L'application q restreinte à l'ensemble $(V_j \cap V_k) \times Y \times k$ peut alors être factorisée de sorte à faire commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(V_j \cap V_k) \times Y \times k \arrow[r, "q"] \arrow[d, "r"'] & B \\
V_j \times Y \arrow[ur, "\phi_j"'] &
\end{tikzcd}$$

avec $r(x,y,k) = (x, g_{jk}(x).y)$. L'application r est donc continue, donc $r^{-1}(W)$ est ouvert, ce qui achève de montrer que ϕ_j^{-1} est continue.

Soit $x \in V_i \cap V_j$, considérons l'application $\phi_{j,x}^{-1} \circ \phi_{i,x} : Y \to Y$. Si $y' = \phi_{j,x}^{-1} \circ \phi_{i,x}(y)$, alors

$$\phi_j(x,y') = \phi_i(x,y) \iff q(x,y',j) = q(x,y,i) \iff (x,y',j) \sim (x,y,i)$$

et donc $y' = g_{ji}(x).y$.

Par conséquent, pour tout $y \in Y$, on a

$$\phi_{j,x}^{-1} \circ \phi_{i,x}(y) = g_{ji}(x).y$$

ce qui achève la preuve. ■

2.3 Fibrés vectoriels

Dans cette partie, on revient sur la notion de fibrés vectoriels. On note par k le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.10 (Fibré vectoriel) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Un* ***fibré vectoriel*** *de rang n, noté $\mathcal{B} = (E,p,X,Y,G)$, est un fibré tel que Y possède une structure de k-espace vectoriel et tel que chaque fibre $p^{-1}(x)$ possède une structure de k-espace vectoriel de dimension n.*

De plus, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V_j de x et un homéomorphisme

$$\phi_j : V_j \times k^n \to p^{-1}(V_j)$$

tel que, pour tout $x \in V$, la restriction

$$\phi_{j,x} : k^n \to p^{-1}(x)$$

soit un isomorphisme d'espaces vectoriels. On demande aussi que ϕ_j fasse commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
V_j \times Y \arrow[r, "\phi_j"] \arrow[dr, "p_1"'] & p^{-1}(V_j) \arrow[d, "p"] \\
& V_j.
\end{tikzcd}$$

Le groupe de structure du fibré est alors un sous-groupe de $GL(n,k)$.

Lorsque $k = \mathbb{R}$, on dira que $\mathcal{B}$ est un fibré vectoriel réel, lorsque $k = \mathbb{C}$, on dira que $\mathcal{B}$ est un fibré vectoriel complexe.

Définition 2.11 (Morphismes de fibrés vectoriels) *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux fibrés vectoriels. En reprenant les notations de la définition 2.10, un* ***morphisme de fibrés vectoriels*** *$h : E \to E'$ est un morphisme de fibrés tel que, pour tout $x \in X$, la restriction*

$$h : p^{-1}(x) \to p'^{-1}(\overline{h}(x))$$

soit une application linéaire. On observe que si $X = X'$, alors cette dernière condition devient simplement

$$h : p^{-1}(x) \to p'^{-1}(x)$$

est linéaire.

2.3.1 Construction de nouveaux fibrés vectoriels à partir d'anciens

La théorie des fibrés vectoriels offre plusieurs méthodes sophistiquées pour générer de nouvelles structures à partir de fibrés existants. Les propositions suivantes illustrent certaines de ces méthodes fondamentales.

Proposition 2.4 (Restriction des fibrés) *Soit $\mathcal{B}$ un fibré vectoriel d'espace total E et de projection p au-dessus d'une variété différentielle M. Soit M' un sous-espace de M. Alors, en posant $E' = p^{-1}(M')$ et $p' : E' \to X'$ la restriction de p à E', on obtient un fibré vectoriel au-dessus de M' noté $\mathcal{B}_{M'}$.*

Proposition 2.5 (Produit tensoriel de fibrés vectoriels) *Soient $E \xrightarrow{p} M$ et $E' \xrightarrow{p'} M$ deux fibrés vectoriels au-dessus d'une variété différentielle M de rang respectifs r et s. Le produit tensoriel $E \otimes E' \to M$ est un fibré vectoriel au-dessus de M de rang rs.*

Démonstration. Soit $m \in M$ et soit U_α un voisinage ouvert de m. Par hypothèse, il existe des trivialisations locales $\phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ et $\psi_\alpha : E'|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^s$. On définit alors une trivialisation locale de $E \otimes E'$ notée $\varphi_\alpha : (E \otimes E')|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times (\mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^s)$ par

$$\varphi_\alpha(e \otimes e') = (m, (p_2 \circ \phi_\alpha(e)) \otimes (p_2 \circ \psi_\alpha(e')))$$

où p_2 désigne la projection sur la deuxième coordonnée. Puisque ces applications sont justement des isomorphismes d'espaces vectoriels, on en déduit directement que $p_2 \circ \varphi_\alpha$ en est également un.

De plus, sur les intersections $U_\alpha \cap U_\beta$, les changements de cartes de E et E' sont donnés par des matrices $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{C})$, $h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(s, \mathbb{C})$ vérifiant les relations

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(m, v) = (m, g_{\alpha\beta}(m).v), \quad \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(m, w) = (m, h_{\alpha\beta}(m).w).$$

On vérifie alors facilement que les applications de transition de $E \otimes E'$ sont données par $g_{\alpha\beta} \otimes h_{\alpha\beta}$ et vérifient bien

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(m, v) = (m, (g_{\alpha\beta} \otimes h_{\alpha\beta})(m).v)$$

ce qui donne à $E \otimes E'$ une structure de fibré vectoriel de rang rs au-dessus de M. ∎

Proposition 2.6 (Fibré induit) *Soit $\mathcal{B}$ un fibré vectoriel au-dessus d'un espace topologique X, et soit X_1 un espace topologique arbitraire. Pour toute application continue $f : X_1 \to X$, on définit le* ***fibré vectoriel induit*** *$f^*\mathcal{B}$ au-dessus de X_1 par*

$$f^*\mathcal{B} = \{(x, e_1) \in X_1 \times E \mid f(x_1) = p(e)\}$$

Démonstration. On définit E_1 l'espace total de $f^*\mathcal{B}$ comme un sous-ensemble de $X_1 \times E$ tel que

$$\forall (x, e) \in E_1, \; f(x) = p(e).$$

La projection $p_1 : E_1 \to X_1$ est définie par $p_1(x, e) = x$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\hat{f}} & E \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

avec $\hat{f}(x,e) = e$. La structure d'espace vectoriel sur $p^{-1}(x)$ est définie par

$$\lambda_1(x,e_1) + \lambda_2(x,e_2) = (x, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)$$

où λ_1, λ_2 sont des scalaires.

Enfin, si (U,ϕ) est une trivialisation locale de $\mathcal{B}$, alors on pose $U_1 = f^{-1}(U)$ et on définit $\phi_1 : U_1 \times \mathbb{C}^n \to p_1^{-1}(U_1)$ par

$$\phi_1(x,v) = (x, \phi(f(x),v)).$$

Il découle alors directement que $\phi_1|_x : \mathbb{C}^n \to p_1^{-1}(U_1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, ce qui conclut la preuve. ■

Notons que la définition ainsi donné du fibré induit correspond, en géométrie algébrique, à un exemple typique de produit fibré.

Proposition 2.7 (Fibré dual) *Soit $E \xrightarrow{p} M$ un fibré vectoriel de rang r au-dessus d'une variété différentielle M. Alors, le dual $\overset{\vee}{E} := \bigsqcup_{x\in X} \overset{\vee}{(p^{-1}(x))}$ est aussi un fibré vectoriel de rang r au-dessus de M.*

Démonstration. Soit U un ouvert de M, on définit les trivialisations locales $\overset{\vee}{\phi} : U \times \mathbb{C}^r \to \overset{\vee}{E}|_U$ par

$$\overset{\vee}{\phi}(x,v) : E|_U \to \mathbb{C}$$

tel que $\overset{\vee}{\phi}(x,v)(w) =< v,w >$. On vérifie alors aisément que l'application $v \mapsto \overset{\vee}{\phi}(x,v)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels à x fixé.

De plus, sur les intersections $U_\alpha \cap U_\beta$, les changements de cartes de E sont donnés par des matrices $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r,\mathbb{C})$. En posant $\overset{\vee}{g}_{\alpha\beta}(x) = (g_{\alpha\beta}^T)^{-1}(x)$, on a donc

$$\overset{\vee}{\phi}_\alpha^{-1} \circ \overset{\vee}{\phi}_\beta(x,v) = (x, \overset{\vee}{g}_{\alpha\beta}(x).v)$$

ce qui montre que $\overset{\vee}{E}$ possède une structure de fibré vectoriel de rang r. ■

2.3.2 Fibrés en droites

Dans cette section, on introduit la notion de fibrés en droites.

Définition 2.12 (Fibrés en droites) *Un **fibré en droites** est un fibré vectoriel de rang 1 au-dessus d'une variété M, c'est-à-dire un fibré vectoriel où toutes les fibres sont de dimension 1.*

Le fibré trivial $M \times \mathbb{C}$ est un exemple de fibré en droites. Un autre exemple qui nous intéressera plus tard est le fibré canonique $K_M = \Lambda^1(T^*M)$ dans le cas où M est une surface de Riemann.

2.3.3 Fibré déterminant

On suppose dans cette section que M est une variété différentielle complexe. Soit $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ un atlas holomorphe, les fonctions de transition

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$$

sont holomorphes et vérifient la relation de cocyclicité et induisent d'après le théorème 2.3 un fibré vectoriel E de rang r au-dessus de M.

Définition 2.13 (Fibré déterminant) *Soit $E \xrightarrow{p} M$ le fibré vectoriel de rang r au-dessus de M induit par les fonctions de transition. L'application déterminant appliquée aux fonctions de transition donne des applications holomorphes*

$$\det(\varphi_{\alpha\beta}) : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$$

vérifiant la relation de cocyclicité, induisant ainsi un fibré en droites au-dessus de M, que l'on notera $\det(E)$.

2.4 Fibrés projectifs

Le but de cette section est d'introduire la notion de fibrés projectifs qui servira plus tard dans notre étude. Comme nous allons le voir, les fibrés projectifs sont, par construction, intimement liés aux fibrés vectoriels.

On commence donc par fixer une fibré vectoriel $\mathcal{B}$ de rang $n+1$ au-dessus d'une variété lisse M. Par définition, pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans M tel que $p^{-1}(U)$ soit homéomorphe à $U \times \mathbb{C}^{n+1}$ et tel que $p^{-1}(x)$ soit isomorphe à $\mathbb{C}^{n+1}$.

De plus, la fibre Y_x est un espace vectoriel de dimension $n+1$. Par conséquent, on peut effectuer le quotient de $Y_x \setminus \{0\}$ par l'action de $\mathbb{C}^*$ pour obtenir un espace projectif $P(Y_x)$ qui sera isomorphe à $\mathbb{P}^n$.

En passant chaque fibre au quotient de cette manière, on crée sur chaque voisinage ouvert U un fibré trivial $U \times \mathbb{P}^n$ homéomorphe à $p^{-1}(U)$.

Lorsque l'on change de trivialisation sur un autre ouvert V, les cartes locales sont recollées sur les intersections par des applications de $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$, ce qui assure la cohérence de la construction. Le groupe de structure du fibré ainsi construit est donc un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$. On notera $P(\mathcal{B})$ le fibré projectif au-dessus de M.

3 Généralités sur les surfaces de Riemann

Ce chapitre a pour objectif d'introduire des notations et de rappeler certains résultats essentiels pour la suite.

Définition 3.1 (Atlas complexe) *Soit M une variété différentielle (de dimension 2). Un* ***atlas complexe*** *sur M est la donnée d'un recouvrement de M par des ouverts $\{U_\alpha\}$ et d'homéomorphismes (appelés* ***cartes****) $z_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ entre des ouverts de M et des ouverts de $\mathbb{C}$. De plus, l'application*

$$f_{\alpha\beta} := z_\alpha \circ z_\beta^{-1} : z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

appelée ***changement de carte*** *est holomorphe.*

Soient $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ et $\{U'_{\alpha'}, z'_{\alpha'}\}$ deux atlas complexes sur M. On remarque que leur réunion, formée de l'ensemble des ouverts et des cartes des deux atlas, constitue encore un atlas sur M. Cependant, l'ensemble des changements de cartes associés à cet atlas contient davantage d'éléments que la simple réunion des ensembles de changements de cartes des atlas pris séparément, ce qui motive la définition qui suit.

Définition 3.2 (Structure complexe) *Soient $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ et $\{U'_{\alpha'}, z'_{\alpha'}\}$ deux atlas complexes sur M. On dit que ces atlas sont* ***équivalents*** *si leur réunion forme encore un atlas complexe. Il est facile de vérifier que cette relation définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas complexes. Une* ***structure complexe*** *sur M est alors une classe d'équivalence pour cette relation.*

Une variété différentielle de dimension 2 munie d'une structure complexe est appelée **surface de Riemann**.

Il est intéressant de noter que si les fonctions holomorphes sont fermées pour la composition (c'est-à-dire que la composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe) là où la composition est définie, alors on peut construire une structure complexe. Cette propriété sera appelée **propriété de pseudo-groupe**.

Nous rappelons à présent la définition des applications projectives et affines dans le cadre complexe.

Définition 3.3 (Applications projectives complexes et affines complexes) *Soit $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ une application. On dit que f est une* ***application projective complexe*** *si elle s'écrit sous la forme*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

L'ensemble de ces applications forme un groupe pour la composition, noté $PGL(2, \mathbb{C})$.

Une ***application affine complexe*** *est une application projective complexe vérifiant $c = 0$, auquel cas elle s'écrit simplement*

$$f(z) = az + b, \quad a \neq 0.$$

De manière similaire à ce qui a été fait précédemment, on peut définir un **atlas projectif** et un **atlas affine** sur M lorsque les changements de cartes sont des applications projectives complexes et affines complexes respectivement. On peut donc aussi définir les notions de **structure projective** et **structure affine** sur M.

Puisque les applications projectives complexes sont holomorphes, elles permettent de définir une structure complexe sur M, ainsi une structure projective induit une structure complexe. On dit que la structure projective est **subordonnée** à la structure complexe. De même, puisque les applications affines complexes sont également projectives, une structure affine sur M induit une structure projective.

3.1 Construction de fibrés sur les surfaces de Riemann

Le but de cette section est d'examiner la construction de fibrés sur les surfaces de Riemann munies d'une structure projective ou affine.

Soit $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ un atlas projectif ou affine sur une surface de Riemann M. Comme mentionné précédemment, les applications de changement de cartes $\{f_{\alpha\beta}\}$ forment un groupe. De plus, pour tout triplet d'intersections $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \subset M$, on observe que

$$f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma},$$

ce qui montre que les applications de changement de cartes définissent un système de fonctions de transition.

Par conséquent, le théorème 2.3 garantit qu'il est possible de construire un fibré de coordonnées au-dessus de M, dont le groupe de structure est donné par $PGL(2,\mathbb{C})$ dans le cas projectif et $Aff(1,\mathbb{C})$ (le sous-groupe de $PGL(2,\mathbb{C})$ engendré par les applications affines complexes) dans le cas affine.

La fibre de ce fibré est $\hat{\mathbb{C}}$ dans le cas projectif et $\mathbb{C}$ dans le cas affine.

De plus, on observe que l'application

$$f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G, \quad z \mapsto f_{\alpha\beta}$$

est constante, car les applications de changement de cartes sont entièrement déterminées par le quadruplet (a,b,c,d) et ne dépendent donc pas du point z. On en déduit alors que le fibré au-dessus de M est plat.

De plus, on observe que deux fibrés de coordonnées associées à deux atlas projectifs (ou affines) équivalents sont équivalents selon la définition 2.6. Par conséquent, à chaque structure projective (ou affine) correspond un unique fibré plat.

Définition 3.4 (Fibré indigène) *Le fibré plat associé à une structure projective ou affine sur M sera appelé **fibré indigène sur** M. Le fibré plat associé à une structure projective ou affine subordonnée à une structure complexe fixée sur M sera appelé **fibré indigène à la structure complexe (ou à** M**)**.*

Notons que la deuxième définition est plus spécifique, puisqu'elle concerne les fibrés indigènes liés à des structures projectives ou affines subordonnées à une structure complexe.

3.2 Diviseurs

Dans toute cette section, L désigne un fibré en droites holomorphes au-dessus d'une surface de Riemann M compacte et connexe. Soit $s : M \setminus \{a\} \to L$ une section holomorphe, soit U un ouvert de M et soit $e : U \to L$ un repère holomorphe. Alors, pour tout point $p \in U$ il existe une fonction $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ telle que $s(p) = f(p)e(p)$.

Définition 3.5 (Diviseurs) *Un **diviseur** est une fonction $D : M \to \mathbb{Z}$ à support fini que l'on écrit $D = \sum_P n_P[P]$. Le **degré** du diviseur est la quantité $\deg(D) = \sum_P n_P$.*

Définition 3.6 (Ordre d'une section) *On définit l'ordre de s au point a comme $\mathrm{ord}_s(a) = \mathrm{ord}_a(f)$. Notons qu'avec cette définition, on peut avoir $\mathrm{ord}_a(s) = -\infty$.*

Définition 3.7 *On dit que s est méromorphe au point a si $\mathrm{ord}_s(a) > -\infty$.*

Lemme 3.1 *L'ordre de s en a ne dépend pas du repère.*

Démonstration. Soit $\tilde{e} : U \to L$ un autre repère, alors pour tout point p on a $\tilde{e} = g(p)e(p)$ avec $g \in \mathcal{O}(U)^*$, donc

$$s(p) = f(p)e(p) = g(p)^{-1}f(p)\tilde{e}(p).$$

Puisque $\mathrm{ord}_a(g) = 0$, il s'ensuit que $\mathrm{ord}_a(g^{-1}f) = \mathrm{ord}_a(f)$, ce qui montre le résultat. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire la notion de diviseur d'une section méromorphe.

Définition 3.8 (Diviseur d'une section méromorphe) *Soit s une section méromorphe non nulle de L. On appelle **diviseur** de s la quantité $\mathrm{div}(s)$ définie par*

$$\mathrm{div}(s) = \sum_{p \in M} \mathrm{ord}_p(s).p.$$

On appelle **degré** de ce diviseur, que l'on note $\deg(\mathrm{div}(s))$, l'entier

$$\deg(\mathrm{div}(s)) = \sum_{p \in M} \mathrm{ord}_p(s).$$

Définition 3.9 *Le degré d'une fonction méromorphe sur M est appelé **diviseur principal**.*

Proposition 3.2 *Soient s, s' deux sections méromorphes non nulles de L (qui existent toujours pour un fibré en droites au-dessus d'une surface de Riemann). Alors,* $\mathrm{div}(s) - \mathrm{div}(s')$ *est un diviseur principal, en particulier si M est compacte alors* $\deg(\mathrm{div}(s)) = \deg(\mathrm{div}(s'))$.

Démonstration. Soient s, s' deux sections méromorphes de L et soit (U_α) un recouvrement de M qui trivialise L. En notant $g_{\alpha\beta}$ les fonctions de transition, les sections s et s' se voient localement sur chaque U_α comme des sections s_α, s'_α telles que, sur $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta, \qquad s'_\alpha = g_{\alpha\beta} s'_\beta.$$

En posant $f_\alpha = \frac{s_\alpha}{s'_\alpha}$, on obtient des fonctions méromorphes locales qui se recollent en une fonction méromorphe globale f car ces fonctions sont égales sur les intersections, et on a donc $s = fs'$.

De plus, pour tout $p \in M$, on a $\mathrm{ord}_p(s) = \mathrm{ord}_p(fs') = \mathrm{ord}_p(f) + \mathrm{ord}_p(s')$. Il en résulte que

$$\mathrm{div}(s) - \mathrm{div}(s') = \mathrm{div}(f)$$

donc $\mathrm{div}(s) - \mathrm{div}(s')$ est un diviseur principal. De plus, par le théorème des résidus, on sait que $\deg(\mathrm{div}(f)) = \sum_p ord_p(f) = 0$ ce qui donne le résultat. ■

Cette proposition est capitale car elle montre que sur les surfaces de Riemann compactes, le degré des diviseurs des sections est constant. Cela permet donc de définir le degré d'un fibré en droites.

Définition 3.10 (Degré d'un fibré en droites) *On suppose que M est compacte. On appelle* ***degré du fibré*** *la quantité* $\deg(L)$ *définie comme le degré des diviseurs des sections méromorphes non nulles sur L.*

On peut aussi définir le degré d'un fibré vectoriel de rang r quelconque, grâce au fibré déterminant. Cette définition est motivée par le théorème de Riemann-Roch généralisé, que nous donnerons plus tard (théorème 5.3)

Définition 3.11 (Degré d'un fibré vectoriel) *Soit $E \xrightarrow{p} M$ un fibré vectoriel de rang r au-dessus de M. On définit le degré de E par*

$$\deg(E) := \deg(\det E).$$

4 Faisceaux et cohomologie

Le but de cette partie est d'introduire la notion de faisceaux et de cohomologie de Čech pour pouvoir démontrer le théorème de Riemann-Roch.

4.1 Faisceaux

On commence par la notion de préfaisceau.

Définition 4.1 (Préfaisceau) *Soit X un espace topologique. Un* ***préfaisceau*** *est la donnée*

- d'une fonction $\mathcal{F} : \{ouverts\} \to$ Groupes abéliens

- pour $U \subset V$, d'une fonction "restriction" $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ telle que si $U \subset V \subset W$, on a $\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W$.

Donnons sans plus tarder quelques exemples de préfaisceaux.

Exemple 1 : Si X est une surface de Riemann et U est un ouvert de X, l'ensemble $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorphe}\}$ est un préfaisceau.

Exemple 2 : L'ensemble $\mathcal{A}(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty\}$ est aussi un préfaisceau.

Exemple 3 : Si X est une surface de Riemann et $E \to X$ est un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de X, l'ensemble $\mathcal{O}_E(U) = \{s : U \to E,\ s \text{ section holomorphe}\}$ est un préfaisceau.

On introduit maintenant la notion de faisceau.

Définition 4.2 (Faisceau) *Un* ***faisceau*** *est un préfaisceau tel que pour tout ouvert $\mathcal{U}$ et tout recouvrement $\bigcup_i U_i = \mathcal{U}$, on ait*

F1 : L'application $\Phi : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ définie par $\Phi(s) = s_{|U_i}$ est injective.

F2 : Un élément $s = (s_i) \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ est dans l'image de Φ si et seulement si $s_{i|U_{i,j}} = s_{j|U_{i,j}}$.

La notation $U_{i,j}$ signifie $U_i \cap U_j$ et sera utilisée dans tout le reste de cette partie. Notons également que les exemples de préfaisceaux introduits précédemment sont également des faisceaux.

4.2 Cohomologie des faisceaux

Dans toute cette section, X désigne un espace topologique, $\mathcal{F}$ désigne un faisceau et $\mathcal{U}$ est un ouvert de X muni d'un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$.

Définition 4.3 (Cochaîne) *Soit $p \in \mathbb{N}$. On définit la p-ième cochaîne par*

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0, \ldots i_p \in I^{p+1}} \mathcal{F}(U_{i_0, \ldots, i_p}).$$

On définit l'application de cobord $\delta_p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ par

$$\delta_p(f_{i_0 \ldots i_p})_{i_0, \ldots, i_{p+1}} = f_{i_1 \ldots . i_{p+1}|U_{i_0 \cdots i_{p+1}}} - f_{i_0 i_2 \ldots . i_{p+1}|U_{i_0 \cdots i_{p+1}}} + \ldots.$$

Lemme 4.1 *$\delta_{p+1} \circ \delta_p = 0$.*

Définition 4.4 (Espaces de cohomologie des faisceaux) *On appelle $Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \ker \delta_p$ l'espace des* ***cocycles****, $B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Im(\delta_{p-1})$ l'espace des* ***cobords*** *et le* ***groupe de cohomologie*** *est défini par $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.*

Par exemple, notons que $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \{(f_i) \in \prod_i \mathcal{F}(U_i) \mid f_j - f_i = 0\}$ et $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \{(f_{ij}) \in \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{i,j})) \mid f_{ik} = f_{ij} + f_{jk}\}$. En particulier, on observe que $f_{ii} = 0$ et $f_{ji} = -f_{ji}$.

4.3 Cohomologie de Čech

Le but de cette section est d'introduire la cohomologie de Čech. On conserve les notations de la partie précédente.

Définition 4.5 (Raffinement) *Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux ouverts de X de recouvrement respectifs $(V_k)_{k\in K}$ et $(U_i)_{i\in I}$. Un* ***raffinement*** *$\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ est une fonction $\rho : K \to I$ telle que $V_k \subset U_{\rho(k)}$. Lorsqu'un tel raffinement existe, on écrira $\mathcal{U} > \mathcal{V}$.*

Lemme 4.2 *On suppose que $\mathcal{U} > \mathcal{V}$. Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta_p} & C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ {\scriptstyle\rho}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\ C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta_p} & C^{p+1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \end{array}$$

est commutatif.

Corollaire 4.3 *L'application ρ induit une application $\rho^{ind} : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.*

A priori, il semblerait que l'application induite par le raffinement dépende de la fonction ρ. En vérité, il n'en est rien, on peut montrer que si $\sigma : K \to I$ est une autre fonction de raffinement, alors $\rho^{ind} = \sigma^{ind}$. On renvoie à l'article *Faisceaux Algébriques Cohérents* de Serre [4] pour une preuve de ce résultat.

Définition 4.6 (Cohomologie de Čech) *On pose*

$$\overset{\vee}{H}{}^p(X, \mathcal{F}) = \bigsqcup_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})/\textit{raffinement}$$

le p-ième groupe de cohomologie de Čech.

Pour alléger les notations, on omettra le "$\vee$" et notera simplement $H^p(X, \mathcal{F})$ le p-ième groupe de cohomologie de Čech. Dans tout ce qui suit, on ne travaillera plus qu'avec la cohomologie de Čech.

Théorème 4.4 (Leray) *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts tel que pour tout $i \in I$, $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$. Alors, $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^1(X, \mathcal{F})$.*

Théorème 4.5 (Weil) *Soit X une variété différentielle paracompacte, soit $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibré vectoriel au-dessus de X. Notons $\mathcal{A}_E(U) = \{s : U \to E \mid s \in \mathcal{C}^\infty(U, E),\ s \circ \pi = Id\}$, on observe que c'est un faisceau. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $H^p(X, \mathcal{A}_E(U)) = 0$.*

Théorème 4.6 (Dolbeault-Grothendieck) *Soit $\omega = f d\bar{z}$ une $(0,1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$. Alors, il existe $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ tel que $\bar{\partial} F = \omega$, c'est-à-dire que $f = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$.*

Avant de prouver ce théorème, on va donner et prouver le théorème de Cauchy généralisé qui nous servira ensuite à montrer le théorème de Dolbeault-Grothendieck.

Théorème 4.7 (Cauchy) *Soit U un ouvert contenant $\bar{\mathbb{D}}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors, pour tout point $a \in U$*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(w)}{w-a} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\mathbb{D}}} \frac{\bar{\partial} f(w)}{w-a} dw \wedge d\bar{w}.$$

Dans ce contexte, $\int_{\bar{\mathbb{D}}} \frac{\bar{\partial} f(w)}{w-a} dw \wedge d\bar{w} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\bar{\mathbb{D}} \setminus D_\varepsilon(a)} \frac{\bar{\partial} f(w)}{w-a} dw \wedge d\bar{w}$.

Démonstration. Soit M_ε un disque contenant $D_\varepsilon(a)$. Posons

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

c'est une 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ sur M_ε. Par conséquent,

$$d\varphi = \partial(\frac{f}{z-a}) dz \wedge dz + \bar{\partial}(\frac{f}{z-a}) d\bar{z} \wedge dz = \frac{-\bar{\partial} f}{z-a} dz \wedge d\bar{z}.$$

De plus, par le théorème de Stokes,

$$\int_{M_\varepsilon} d\varphi = \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi - \int_{\partial D_\varepsilon(a)} \varphi.$$

Or,

$$\int_{\partial D_\varepsilon(a)} \varphi = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\pi i f(a)$$

ce qui correspond au résultat attendu. ■

Nous allons maintenant prouver le théorème de Dolbeault-Grothendieck.

Démonstration. Soit U un ouvert contenant $\bar{\mathbb{D}}$, soit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Dans un premier temps, on suppose que f est à support compact dans $\mathbb{D}$. Posons

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\mathbb{D}}} \frac{f(w)}{z-w} dw \wedge d\bar{w}.$$

Cette fonction est bien définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, par le théorème de Cauchy, on a $\bar{\partial} F = f$. Soit $1 > \eta > 0$, grâce à une partition de l'unité, écrivons

$$f = f_1 + f_0$$

avec $f_1(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } |z-a| \leq \eta \\ 0 & \text{si } |z-a| \geq 2\eta \end{cases}$ et $f_0(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z-a| \leq \eta \\ f(z) & \text{si } |z-a| \geq 2\eta \end{cases}$.

Posons aussi

$$F_i^\varepsilon(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\mathbb{D}}\setminus D_\varepsilon(z)} \frac{f_i(z)}{w-z} dw \wedge d\bar{w}$$

pour $i = 0, 1$. On observe que

$$F_0^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\mathbb{D}}\setminus \bar{D}_\eta(a)} \frac{f_0(w)}{w-z} dw \wedge d\bar{w} := F_0(z)$$

Puisque la fonction $(w,z) \mapsto \frac{f_0(w)}{w-z}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\bar{\mathbb{D}} \setminus \bar{D}_\eta(a) \times D_\eta(a)$, on peut dériver sous le signe intégral et observer que $\bar{\partial} F_0 = 0$. De plus, en faisant le changement de variables $u = w - z$, on a

$$F_1^\varepsilon(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}^2\setminus D_\varepsilon(0)} \frac{f_1(z+u)}{u} du \wedge d\bar{u}.$$

En effectuant maintenant le changement de coordonnées polaires, on obtient

$$F_1^\varepsilon(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}^2\setminus[0,\varepsilon[\times\mathbb{R}} \frac{f_1(z+re^{i\theta})}{e^{i\theta}} dr d\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(z+re^{i\theta}) e^{-i\theta} dr d\theta := F_1(z).$$

La fonction F_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bien définie puisque f_1 est à support compact. On peut par ailleurs dériver sous le signe intégral et observer que

$$\bar{\partial} F_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{\partial} f_1(z+re^{i\theta}) e^{-i\theta} dr d\theta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\mathbb{D}}} \frac{\bar{\partial} f_1(w)}{w-z} dw \wedge d\bar{w}.$$

Par conséquent, $\bar{\partial} F = \partial \bar{F}_1$. Puisque

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\bar{\mathbb{D}}} \frac{f_1(w)}{w-z} dw = 0,$$

le théorème de Cauchy assure que $f_1(z) = f(z)$, ce qui prouve le résultat pour le cas où f est à support compact.

Supposons que $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$ avec $0 < R \leq +\infty$. Soit $0 < R_0 < R_1 < \cdots < R_n$ une suite de réels telle que $\lim_{n\to+\infty} R_n = R$, posons $U_n = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R_n\}$.

Via une partition de l'unité, on peut trouver des fonctions lisses ϕ_n telles que $\mathrm{Supp}(\phi_n) \subset U_{n+1}$ et $\phi_{n_{|U_n}} = 1$. D'après ce qui précède, il existe F_n une fonction lisse tel que

$$\bar{\partial} F_n = \phi_n f.$$

Construisons ensuite par récurrence une nouvelle suite de fonctions $(\tilde{F_n})$ définie par

(1) $\bar{\partial}\tilde{F_n} = f \quad \text{sur } U_n,$

(2) $||\tilde{F}_{n+1} - \tilde{F_n}|| \leq 2^{-n}.$

Pour cela, on commence par poser $\tilde{F_1} = F_1$, puis si on suppose que $\tilde{F_1}, \dots \tilde{F_n}$ sont construits alors on observe que, sur U_n,

$$\bar{\partial}(F_{n+1} - \tilde{F_n}) = 0$$

donc l'application $F_{n+1} - \tilde{F_n}$ est holomorphe sur U_n. Par conséquent, il existe P un polynôme (constitué d'un nombre fini de termes du développement en séries de Taylor de l'application $F_{n+1} - \tilde{F_n}$) tel que

$$||F_{n+1} - \tilde{F_n} - P|| \leq 2^{-n}.$$

Il suffit alors de poser $\tilde{F}_{n+1} = F_n - P$ pour obtenir (2). De plus, sur U_{n+1}, on a

$$\bar{\partial}\tilde{F}_{n+1} = F_{n+1} = \phi_{n+1} g = g$$

donc le point (1) est aussi vérifié. Posons maintenant

$$F(z) = \lim_{n \to +\infty} \tilde{F}_{n+1}(z),$$

cette limite existe car chaque point z est contenu dans presque tous les U_n. On écrit maintenant

$$F(z) = \tilde{F_n}(z) + \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{F}_{k+1}(z) - \tilde{F_k}(z).$$

Les fonctions $\tilde{F}_{k+1} - \tilde{F_k}$ sont holomorphes sur U_n, et d'après le point (2), la série $(\sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{F}_{k+1}(z) - \tilde{F_k}(z))$ converge uniformément sur U_n et est holomorphe sur U_n. Par conséquent, la fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et vérifie $\bar{\partial}F = f$ ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 4.8 $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = H^1(\mathbb{D}, \mathcal{O}) = 0.$

4.4 Algèbre homologique

Le but de cette section est de donner quelques résultats d'algèbres homologiques des faisceaux qui nous serviront dans la suite.

Définition 4.7 (Morphisme de faisceaux) *Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ deux faisceaux abéliens sur une surface de Riemann M. Un* ***morphisme de faisceaux*** *$\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une famille de morphismes $\phi_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(U)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\rho_V^U"] \\
\mathcal{E}(V) \arrow[r, "\phi_V"'] & \mathcal{F}(V).
\end{tikzcd}$$

Par exemple, l'application $e : \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M^*$ définie par $e(f) = \exp(2i\pi f)$ est un morphisme de faisceaux.

Définition 4.8 (Noyau) *Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme de faisceau. On pose* $\ker \phi(U) = \ker \phi_U$ *et c'est un faisceau.*

En reprenant l'exemple précédent, on remarque que $\ker e = \mathbb{Z}$.

Notre but est d'introduire la notion de suite exacte de faisceau. Cependant, l'image d'un morphisme de faisceau n'est en général pas un faisceau. Pour cela, on contourne le problème avec la définition suivante.

Définition 4.9 *Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme de faisceau. On dira que ϕ est injectif (respectivement surjectif) en un point x si et seulement si le morphisme $\phi_x : \mathcal{E}_x \to \mathcal{F}_x$ est injectif (respectivement surjectif). Notons ici que la notation $\mathcal{E}_x$ désigne $\mathcal{E}(U)$ où U est l'ouvert le plus raffiné contenant x.*

Nous pouvons maintenant introduire la notion de suites exactes.

Définition 4.10 *On dira que la suite*

$$\mathcal{E}^0 \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{E}^2 \to \dots \xrightarrow{\phi_{n-1}} \mathcal{E}^n$$

est exacte si et seulement si la suite

$$\mathcal{E}^0_x \xrightarrow{\phi_{0,x}} \mathcal{E}^1_x \xrightarrow{\phi_{1,x}} \mathcal{E}^2_x \to \dots \xrightarrow{\phi_{n-1,x}} \mathcal{E}^n_x$$

est exacte.

Notons que la suite

$$0 \to \mathcal{E} \stackrel{\phi}{\to} \mathcal{F}$$

est exacte si et seulement si ϕ est injective et que la suite

$$\mathcal{E} \stackrel{\phi}{\to} \mathcal{F} \to 0$$

est exacte si et seulement si ϕ est surjective. De plus, si l'on reprend l'exemple précédent avec le morphisme e, on observe sans mal que la suite

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_M \stackrel{e}{\to} \mathcal{O}^*_M \to 0$$

est exacte.

5 Le théorème de Riemann-Roch

Le but de cette section est d'introduire le théorème de Riemann-Roch, qui est fondamental dans l'étude des surfaces de Riemann. On commence par un théorème capital qui permet de définir le genre d'une surface de Riemann.

Théorème 5.1 *Soit X une surface de Riemann compacte connexe et soit $E \xrightarrow{p} X$ un fibré vectoriel holomorphe de rang n au-dessus de X. Alors,* $\dim H^1(M, \mathcal{O}_E) < +\infty$.

Ce théorème nous permet de définir le genre de M.

Définition 5.1 (Genre) *On définit le genre de M, noté g, comme $g = \dim H^1(M, \mathcal{O}_M)$.*

Nous allons maintenant introduire le faisceau de Riemann-Roch, puis introduire quelques notations qui nous permettront d'énoncer le théorème de Riemann-Roch.

Définition 5.2 (Faisceau de Riemann-Roch) *Soit M une surface de Riemann compacte et connexe, soit U un ouvert de M et soit D un diviseur sur M. On définit le faisceau de Riemann-Roch comme*

$$\mathcal{O}(D) = \{f \in \mathcal{M}(U) \ : \ \mathrm{ord}_P(f) \geq -D(P)\}.$$

Avant d'énoncer le théorème de Riemann-Roch, nous allons introduire quelques notations.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau, on pose $h^i(\mathcal{F}) = \dim H^i(X, \mathcal{F})$ et on pose $L(D) = H^0(M, \mathcal{O}(D))$.

Théorème 5.2 (Riemann-Roch) *Soit M une surface de Riemann compacte connexe et D un diviseur sur X. Alors,*

$$h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D)) = \deg(D) + 1 - g.$$

Nous terminons cette section en donnant une version généralisée du théorème de Riemann-Roch, pour tout fibré vectoriel au-dessus d'une surface de Riemann compacte.

Théorème 5.3 (Riemann-Roch généralisé) *Soit M une surface de Riemann compacte connexe de genre g. Soit $E \xrightarrow{p} M$ un fibré vectoriel de rang r au-dessus de M. Alors,*

$$h^0(M, \mathcal{O}(E)) - h^1(M, \mathcal{O}(E)) = \deg(E) + r(1 - g).$$

On rappelle que, par définition, $\deg(E) = \deg(\det E)$.

Démonstration. On prouve ce théorème par récurrence sur le rang de E. Le cas $r = 1$ correspond au théorème de Riemann-Roch, donc l'initialisation est bonne.

Supposons le résultat vrai pour tout fibré vectoriel de rang $r-1$, soit $E \to M$ un fibré vectoriel de rang r. Ce fibré E possède un sous-fibré en droite L (l'existence d'un tel sous-fibré découle d'un résultat classique sur l'existence de sections méromorphes de tout fibré vectoriel au-dessus d'une surface de Riemann compacte, et cette section méromorphe induit l'existence d'un sous-fibré en droite), donc le quotient E/L est un fibré vectoriel bien défini, de rang $r - 1$. On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}(L) \to \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(E/L) \to 0$$

qui induit une suite exacte en cohomologie

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(M, \mathcal{O}(L)) \to H^0(M, \mathcal{O}(E)) \to H^0(M, \mathcal{O}(E/L)) \to \\ &\to H^1(M, \mathcal{O}(L)) \to H^1(M, \mathcal{O}(E)) \to H^1(M, \mathcal{O}(E/L)) \to \\ &\to H^2(M, \mathcal{O}(L)) \to \dots \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que tous ces groupes de cohomologie sont de dimension finie, et puisque $H^2(M, \mathcal{O}(L)) = 0$, la somme alternée des dimensions de ces groupes de cohomologie doit être zéro. En utilisant ces résultats et l'hypothèse de récurrence, on observe que

$$h^0(M, \mathcal{O}(E) - h^1(M, \mathcal{O}(E)) = \deg(L) + 1 - g + \deg(E/L) + (r-1)(1-g).$$

Puisque $\deg(E/L) = \deg(E) - \deg(L)$, on obtient bien le résultat souhaité. ■

5.1 La dualité de Serre

Donnons maintenant le résultat capital, dû à Serre, qui permet une réécriture élégante du théorème de Riemann-Roch.

Théorème 5.4 (Dualité de Serre) *Soit M une surface de Riemann compacte connexe, soient D un diviseur sur X et K un diviseur canonique sur M. Alors,*

$$h^1(\mathcal{O}(D)) = h^0(K - D).$$

On peut donc réécrire le théorème de Riemann-Roch comme

$$h^0(\mathcal{O}(D) - h^0(\mathcal{O}(K - D)) = \deg(D) + 1 - g.$$

5.2 Le fibré canonique

Nous allons maintenant introduire un fibré en droites capitales dans l'étude des surfaces de Riemann. On fixe donc M une surface de Riemann, $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ un atlas holomorphe sur M, $\mathcal{U}$ le recouvrement qui s'en déduit, et on note $f_{\alpha\beta}$ les applications de changements de cartes, de sorte que, pour tout $P \in U_\alpha \cap U_\beta$,

$$z_\alpha(P) = f_{\alpha\beta}(z_\beta(P)).$$

On définit maintenant, sur $U_\alpha \cap U_\beta$, les applications

$$k_{\alpha\beta} = \frac{1}{f'_{\alpha\beta}}.$$

Puisque les applications $f'_{\alpha\beta}$ sont holomorphes et ne s'annulent jamais, il en est de même pour les applications $k_{\alpha\beta}$. De plus, si $P \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, on observe que

$$z_\alpha(P) = f_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(z_\gamma(P))) = f_{\alpha\gamma}(P)$$

donc un calcul direct montre que

$$k_{\alpha\gamma}(P) = k_{\alpha\beta}(P)k_{\beta\gamma}(P)$$

c'est-à-dire que $(k_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*_M)$.

Définition 5.3 *L'élément $K_M \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$ ainsi défini par ce 1-cocycle sera appelé* ***le fibré canonique*** *de la surface de Riemann M.*

Finissons cette partie avec un résultat important, liant le degré du fibré canonique et le genre.

Proposition 5.5 *Si K_M désigne le fibré vectoriel canonique au-dessus de M, alors*

$$\deg(K_M) = 2g - 2.$$

5.3 Fibré thêta

Le but de cette section est d'expliquer la notion de fibré thêta, qui correspond à des racines carrées du fibré canonique, c'est-à-dire des fibrés en droites holomorphes L tels que $L^{\otimes 2} = K_M$.

Définition 5.4 (Jacobienne d'une surface de Riemann) *Soit M une surface de Riemann compacte de genre g. On note $\mathrm{Div}^0(M)$ l'ensemble des diviseurs de degré 0 sur M et $\mathrm{Prin}(M)$ l'ensemble des diviseurs principaux de M. On définit la jacobienne de M, notée $\mathrm{Jac}(M)$ par*

$$\mathrm{Jac}(M) := \mathrm{Div}^0(M)/\mathrm{Prin(M)}$$

Théorème 5.6 (Théorème d'Abel) *La jacobienne de M est isomorphe à un tore complexe. Plus précisément,*

$$\mathrm{Jac}(M) \simeq \mathbb{C}^g/\Lambda$$

où Λ est un réseau de $\mathbb{C}^g$.

Nous allons maintenant démontrer l'existence des fibrés thêta. Cela repose sur le lemme suivant.

Lemme 5.7 *L'application multiplication par deux*

$$[2] : \mathbb{C}^g/\Lambda \to \mathbb{C}^g/\Lambda$$

est surjective.

Démonstration. On observe sans difficulté que l'application est bien définie. Soit $[w] \in \mathbb{C}^g/\Lambda$. Soit $z \in \mathbb{C}^g$ tel que $[z] = [\frac{w+\lambda}{2}]$ pour un certain $\lambda \in \Lambda$. Puisque $\mathbb{C}^g$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, un tel z existe tout le temps. Par conséquent, on a $[2z] = [w]$ ce qui montre le résultat. ■

Soit D un diviseur de degré $g-1$ sur M, et soit K un diviseur canonique. Alors, $2D$ est de degré $2g-2$. Par conséquent, $2D - K$ est un diviseur de degré 0. Par le lemme précédent et le théorème d'Abel, il existe donc E un diviseur de degré 0 tel que

$$2D - K = 2E.$$

Ainsi, $\mathcal{O}(2D-K) = \mathcal{O}(2E) \Leftrightarrow \mathcal{O}(2D) = \mathcal{O}(K) \otimes \mathcal{O}(2E)$. On pose donc

$$L = \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(-E)$$

et on observe que $L^{\otimes 2} = \mathcal{O}(2D) \otimes \mathcal{O}(-2E) = \mathcal{O}(K) = K_M$.

5.3.1 Classe de diviseur d'un fibré

On suppose dans cette section que M est compacte.

Soit $E \xrightarrow{p} M$ un fibré vectoriel de rang 2 au-dessus de M tel que $\det(E) = 1$ (c'est-à-dire que le fibré déterminant de E est trivial). Considérons l'ensemble $\Delta(E)$ constitué des fibrés en droites au-dessus de M tel que le fibré $L^{-1} \otimes E$ admette des sections holomorphes non triviales (ici, L^{-1} est le fibré vectoriel dual de L). D'après le théorème de Riemann-Roch généralisé, l'ensemble $\Delta(E)$ est non vide, et permet de définir la notion de classe de diviseur d'un fibré.

Définition 5.5 (Classe de diviseur d'un fibré) *On suppose toujours que $E \xrightarrow{p} M$ est de rang 2 et que* $\det(E)$ *est trivial. On appelle* ***diviseur du fibré*** *le fibré*

$$\mathrm{div}(E) = \{L \in \Delta(E),\ \deg(L) = \max_{L' \in \Delta(E)} \deg(L')\}.$$

Notons que le degré de $\mathrm{div}(E)$ correspond donc au plus grand degré des fibrés en droites qui sont dans l'ensemble $\Delta(E)$. Notons aussi que $\deg(\mathrm{div}(E))$ est borné, on peut le voir en appliquant le théorème de Riemann-Roch généralisé au fibré $L^{-1} \otimes E$,

$$h^0(M, \mathcal{O}(L^{-1} \otimes E)) - h^1(M, \mathcal{O}(L^{-1} \otimes E)) = \deg(L^{-1} \otimes E) + 2(1-g)$$

donc puisque par hypothèse $L \in \Delta(E)$ et que $\deg(L^{-1} \otimes E) = -\deg(L)$, on a

$$1 \leq h^0(M, \mathcal{O}(L^{-1} \otimes E)) = -\deg(L) + 2(1-g) + h^1(M, \mathcal{O}(L^{-1} \otimes E)),$$

donc si $\deg(L)$ est trop grand, le membre de droite devient négatif, ce qui est absurde. En fait, on peut même voir que $\deg(L) \leq g-1$.

Il est intéressant d'observer que l'on peut définir l'ensemble $\mathrm{div}(E)$ à partir des morphismes de fibrés. On commence par un lemme.

Lemme 5.8 *Soit $f : V \to W$ un morphisme de fibrés vectoriels holomorphes au-dessus d'une surface de Riemann M. Alors, il existe un sous-fibré $i : V' \hookrightarrow W$ et une factorisation*

$$f : V \xrightarrow{f'} V' \xrightarrow{i} W$$

telle que pour toute autre factorisation $V \to W' \hookrightarrow W$, on a $V' \subset W'$.

Démonstration. On sait que le morphisme f induit, pour tout point $x \in M$, un morphisme d'espace vectoriel $f_x : V_x \to W_x$. Soit U un ouvert de M tel que le rang de f_x soit constant sur U, égal à r. Alors, l'image $V'_{|U} := \mathrm{Im} f_{|U} \subset W_{|U}$ définit un sous-fibré holomorphe de rang r.

De plus, $f : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(W)$ est un morphisme de faisceau cohérent, son image $\mathcal{O}(V') := \mathrm{Im} f \subset \mathcal{O}(W)$ est un faisceau cohérent. Or, sur une surface de Riemann, tout faisceau cohérent de rang constant est localement libre, donc $\mathcal{O}(V')$ est localement libre de rang r, ce qui permet de définir un sous-fibré holomorphe global $V' \subset W$.

Maintenant, si $V \to W' \hookrightarrow W$ est une autre factorisation, alors nécessairement $\mathrm{Im} f \subset W'$, donc $\mathcal{O}(V') \subset \mathcal{O}(W')$ et puisque les faisceaux sont localement libres, on a donc $V' \subset W'$. ■

Définition 5.6 (Fibré image) *Le fibré V' défini dans le lemme précédent sera appelé* ***fibré image*** *de f. On le notera* $\mathrm{Im} f$.

Nous avons initialement défini

$$\Delta(E) = \{L \to M,\ L \text{ fibrés en droites holomorphes} \mid\ H^0(M, L^{-1} \otimes E) \neq 0\}.$$

Or, on sait qu'une section non nulle s de $L^{-1} \otimes E$ induit un morphisme de fibré $\varphi_s : L \to E$. On peut donc définir de manière équivalente

$$\Delta(E) = \{L \to M,\ L \text{ fibrés en droites holomorphes} \mid \exists \varphi : L \to E,\ \varphi \neq 0,\ \mathrm{Im}(\varphi) \subset E\}.$$

La définition de $\mathrm{div}(E)$ devient alors

$$\mathrm{div}(E) = \{L \in \Delta(E) \mid \deg(\mathrm{Im}(\varphi)) \text{ est maximal}\}.$$

Illustrons cette manière de voir les choses par un lemme dont le résultat sera important pour la suite.

Lemme 5.9 *On suppose toujours que $E \xrightarrow{p} M$ est de rang 2 et que $\det(E)$ est trivial. On suppose aussi que $\deg(\mathrm{div}(E)) > 0$. Alors, il existe un unique sous-fibré de E de degré $\deg(\mathrm{div}(E))$.*

Démonstration. Il suffit de prouver l'unicité. Soit $L \subset E$ un sous-fibré en droites. On a la suite exacte suivante

$$0 \to L \to E \to E/L \to 0.$$

Donc, on a $\det(E) \simeq \det(L) \otimes \det(E/L) \simeq L \otimes E/L$. Puisque, par hypothèse $\det(E) \simeq \mathcal{O}_M$, on conclut que $L \otimes E/L \simeq \mathcal{O}_M$ donc $E/L \simeq L^{-1}$ et par conséquent la suite exacte devient

$$0 \to L \to E \to L^{-1} \to 0.$$

S'il existe un autre sous-fibré en droite L' de degré $\deg(\mathrm{div}(E))$ alors nécessairement le morphisme $L' \to E \to L^{-1}$ doit être nul car sinon on aurait $L' \subset L^{-1}$ donc $\deg(L') \leq \deg(L^{-1}) = -\deg(L) \leq 0$, ce qui est impossible par hypothèse. Donc, l'image de L' par l'application $L' \to E$ est contenue dans le noyau de l'application $E \to L^{-1}$ qui est, d'après la suite exacte, L. Donc, puisque $L' \subset L$ et que $\deg(L') = \deg(L)$, on a $L = L'$ ce qui achève la preuve. ■

Terminons cette partie par une digression sur la classification des fibrés vectoriels au-dessus d'une surface de Riemann. Soit donc M une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$ et soit $E \to M$ un fibré vectoriel au-dessus de M.

Le cas des fibrés vectoriels de rang 1 est bien compris, puisque pour tout fibré en droite $L \to M$, il existe un diviseur D sur M tel que $L \simeq \mathcal{O}(D)$.

Nous allons à présent nous intéresser plus particulièrement aux fibrés de rang 2, dont la classification est bien plus subtile. Un outil fondamental pour cette étude est la notion de stabilité, dont on donne la définition.

Définition 5.7 *On dit que E est un fibré* ***semi-stable*** *si pour tout fibré $F \subset E$ de rang 1, on a $\deg(F) \leq \deg(E)/2$. Sinon, on dira que E est un fibré* ***instable****.*

La théorie de la stabilité constitue un domaine profond et actif, à la croisée de la géométrie algébrique, de l'analyse complexe et de la topologie différentielle, et nous verrons plus tard dans notre étude apparaître des fibrés vectoriels instables.

6 Classes caractéristiques

Le but de ce chapitre est d'introduire les classes de Chern, qui sont des outils importants en géométrie différentielle. Bien que nous nous servirons uniquement plus tard de la première classe de Chern, la construction proposée est complète et permet de définir toutes les classes de Chern.

6.1 Connexions et courbures

On commence par introduire la notion de connexion, qui est un outil qui permet de connecter localement les fibres les unes aux autres.

Définition 6.1 (Connexion) *Soient M une variété différentielle lisse et E un fibré vectoriel complexe sur M. Une **connexion** sur F est un opérateur différentiel $\mathbb{C}$-linéaire $\nabla : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(T^*M \otimes E)$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ et section $s \in \mathcal{C}^\infty(E)$,*

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s).$$

*L'équation ci-dessus est appelée **règle de Leibniz**, et l'image $\nabla(s)$ est appelée **dérivée covariante** de s.*

Notons que la connexion ∇ est bien définie car, d'après la proposition 2.5, $T^*M \otimes E$ est un fibré vectoriel au-dessus de M.

Donnons maintenant quelques propriétés des connexions.

Proposition 6.1 *Soit $s \in \mathcal{C}^\infty(E)$ une section. Alors,* $\mathrm{supp}(\nabla(s)) \subset \mathrm{supp}(s)$.

Démonstration. Posons $U = M \setminus \mathrm{supp}(s)$. C'est un ouvert de M par définition du support. Pour tout $x \in U$, on construit une fonction f qui vaut 0 hors de U et qui vaut 1 sur un voisinage de x. Alors, par la règle de Leibniz, on a

$$0 = \nabla(fs)(x) = (df \otimes s)(x) + f(x)\nabla(s)(x) = \nabla(s)(x)$$

ce qui permet de conclure. ■

Par conséquent, les connexions sont des opérateurs locaux. Ainsi, si $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement de M, une connexion ∇ sur M est entièrement déterminée par ses restrictions sur les ouverts $\{U_\alpha\}$.

Si un ouvert U est suffisamment petit pour que le fibré $E_{|U}$ soit trivial, alors chaque fibre est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, donc on peut choisir une base locale de sections, globalement définies sur U notée $(s_1, .., s_n)$. Chaque section sur U peut donc s'écrire de manière unique comme une somme $f_1 s_1 + ... + f_n s_n$ où les $f_i : U \to \mathbb{C}$ sont des fonctions lisses.

Lemme 6.2 *Une connexion ∇ sur le fibré trivial $E_{|U}$ est uniquement déterminée par $\nabla(s_1), ..., \nabla(s_n)$. De plus, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, chaque section $\nabla(s_i)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de 1-formes différentielles ω_{ji} sur U*

$$\nabla(s_i) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} \otimes s_j.$$

Par conséquent, en posant

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & \omega_{nn} \end{pmatrix}$$

on obtient que toute section s sur U,

$$\nabla(s) = df + \omega s.$$

Démonstration. Soit s une section sur U. Il existe alors $f_1, ..., f_n : U \to \mathbb{C}$ des fonctions lisses telles que

$$s = \sum_{i=1}^{n} f_i s_i.$$

On a alors

$$\nabla(s) = \nabla\left(\sum_{i=1}^{n} f_i s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \nabla(f_i s_i) = \sum_{i=1}^{n} (df_i \otimes s_i + f_i \nabla(s_i)).$$

Puisque $\nabla(s_i)$ est une section du fibré $T^*U \otimes E_{|U}$, il existe des 1-formes différentielles $w_{ji} \in T^*U$ telles que

$$\nabla(s_i) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} \otimes s_j.$$

En réinjectant cette expression dans l'égalité précédente, on obtient le résultat. ■

Nous allons maintenant étudier le cas des fibrés vectoriels induits. Pour cela, on considère $g : M' \to M$ une application lisse entre deux espaces topologiques. D'après la proposition 2.6, on sait que si E est un fibré vectoriel au-dessus de M, alors on peut créer un fibré vectoriel sur M' qui est induit par E et que l'on notera g^*E.

De plus, on dispose d'une application canonique qui est $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$-linéaire entre les sections :

$$g^* : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(g^*E).$$

Enfin, comme les 1-formes différentielles de M peuvent être tirées en arrière en des 1-formes différentielles sur M', on dispose d'une autre application qui est $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$-linéaire (que l'on appellera aussi g^*)

$$g^* : \mathcal{C}^\infty(T^*M \otimes E) \to \mathcal{C}^\infty(T^*M' \otimes g^*E).$$

Lemme 6.3 *Pour toute connexion ∇ sur E, il existe une unique connexion $\nabla' = g^*\nabla$ sur le fibré vectoriel induit g^*E qui fait commuter le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(E) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "g^*"'] & \mathcal{C}^\infty(T^*M \otimes E) \arrow[d, "g^*"] \\ \mathcal{C}^\infty(g^*E) \arrow[r, "\nabla'"] & \mathcal{C}^\infty(T^*M' \otimes g^*E). \end{tikzcd}$$

Démonstration. On commence par vérifier que ∇' est bien une connexion sur g^*E. Par définition, on a

$$\mathcal{C}^\infty(g^*E) = \{g^*s,\ s \in \mathcal{C}^\infty(E)\}.$$

Soient $f' \in \mathcal{C}^\infty(M'), g^*s \in \mathcal{C}^\infty(g^*E)$, on a

$$f's' = f'g^*s = g^*(fs)$$

avec $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tel que $f = g^*f'$. Puisque

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$$

on obtient que

$$g^*(\nabla(fs)) = g^*(df \otimes s + f\nabla(s)).$$

Par construction des fibrés vectoriels induit et du produit tensoriel de fibrés vectoriels, on a donc

$$g^*(df \otimes s) = d(g^*f) \otimes g^*s = df' \otimes s'$$

et

$$g^*(f\nabla(s)) = (g^*f)g^*(\nabla(s)) = f'\nabla(s').$$

Il en découle que ∇' vérifie la règle de Leibniz et est donc une connexion sur g^*E.

Soit U un ouvert de M et $s_1, ...s_n$ une base locale de sections de $E_{|U}$. D'après le lemme précédent, il existe ω_{ij} des 1-formes différentielles telles que

$$\nabla(s_i) = \sum_j \omega_{ij} \otimes s_j.$$

On peut donc tiré en arrière les sections et les 1-formes, de sorte que sur $g^{-1}(U)$ on ait

$$\nabla'(g^*s_i) = \sum_j g^*\omega_{ij} \otimes g^*s_j.$$

On en déduit alors immédiatement le résultat. ■

6.1.1 Courbure d'une connexion

Dans cette section, nous introduisons la notion de courbure associée à une connexion. Plus précisément, étant donnée une connexion ∇ sur un fibré vectoriel E au-dessus d'une variété M, nous allons construire une connexion induite sur le fibré $T^*M \otimes E$. Cette démarche nous permettra ensuite de définir rigoureusement la courbure de ∇ et d'étudier ses propriétés fondamentales.

Lemme 6.4 *Étant donné une connexion ∇ sur E, il existe une unique application $\mathbb{C}$-linéaire $\hat{\nabla} : \mathcal{C}^\infty(T^*M \otimes \mathcal{B}) \to \mathcal{C}^\infty(\Lambda^2(T^*M) \otimes \mathcal{B})$ qui satisfait la règle de Leibniz*

$$\hat{\nabla}(\theta \otimes s) = d\theta \otimes s - \theta \wedge \nabla(s),$$

pour toute 1-forme θ et toute section $s \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{B})$. De plus, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$, on a

$$\hat{\nabla}(f(\theta \otimes s)) = df \wedge (\theta \otimes s) + f\hat{\nabla}(\theta \otimes s).$$

Démonstration. Soient s une section de E, soit θ une 1-forme différentielle sur M. Soit $(s_1, ..., s_n)$ une base locale des sections. D'après le lemme 6.2, il existe des 1-formes différentielles $\theta_1, .., \theta_n$ telles que

$$\theta \otimes s = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \otimes s_i.$$

Par conséquent, on définit $\hat{\nabla}$ par

$$\hat{\nabla}(\theta \otimes s) = \sum_{i=1}^{n} (d\theta_i \otimes s_i - \theta_i \wedge \nabla(s_i)).$$

L'application $\hat{\nabla}$ est unique par unicité de la décomposition de $\theta \otimes s$ et il est immédiat de voir que cette application satisfait la règle de Leibniz. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$, on a $f(\theta \otimes s) = \sum_{i=1}^{n} f\theta_i \otimes s_i$ donc

$$\hat{\nabla}(f(\theta \otimes s)) = \sum_{i=1}^{n} \hat{\nabla}(f\theta_i \otimes s_i) = \sum_{i=1}^{n} (d(f\theta_i) \otimes s_i - (f\theta_i) \wedge \nabla(s_i)).$$

Or, on sait que $d(f\theta_i) = df \wedge \theta_i + fd\theta_i$, donc on obtient que

$$\hat{\nabla}(f(\theta \otimes s)) = \sum_{i=1}^{n} df \wedge \theta_i \otimes s_i + \sum_{i=1}^{n} (fd\theta_i \otimes s_i - f\theta_i \otimes \nabla(s_i)) = df \wedge (\theta \otimes s) + f\hat{\nabla}(\theta \otimes s)$$

ce qui achève la preuve. ∎

Considérons maintenant l'application $K = \hat{\nabla} \circ \nabla : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(\Lambda^2(T^*M) \otimes E)$.

Lemme 6.5 *La valeur de la section $K(s)$ en un point $x \in M$ ne dépend que de $s(x)$ et non de la valeur de s en d'autres points. En particulier, elle ne dépend pas de la manière dont la section varie au voisinage de x.*

Démonstration. Puisque les opérateurs ∇ et $\hat{\nabla}$ sont des opérateurs locaux, il est clair que K est aussi un opérateur local. Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$, $s \in \mathcal{C}^\infty(E)$. On a

$$K(fs) = \hat{\nabla}(df \otimes s + f\nabla(s)) = 0 - df \wedge \nabla(s) + df \wedge \nabla(s) + f\hat{\nabla}(\nabla(s)) = fK(s)$$

donc l'application K est $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$-linéaire. Soit $s' \in \mathcal{C}^\infty(E)$ tel que $s(x) = s'(x)$. Alors, on peut écrire

$$s - s' = \sum_{i=1}^{n} f_i s_i$$

où les (s_i) forment une base locale des sections et où les fonctions lisses f_i vérifient $f_i(x) = 0$. Par conséquent,

$$(K(s) - K(s'))(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) K(s_i)(x) = 0$$

ce qui achève la preuve. ∎

Définition 6.2 (Courbure d'une connexion) *L'opérateur $K = K_\nabla$ ainsi défini est appelé courbure associée à la connexion ∇.*

Soient $(s_1, ..., s_n)$ une base des sections du fibré trivial $E_{|U}$. En reprenant les notations du lemme 6.2, on sait que

$$\nabla(s_i) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} \otimes s_j$$

donc

$$K(s_i) = \hat{\nabla}\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} \otimes s_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \Omega_{ij} \otimes s_j$$

en posant $\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$.

Par conséquent, la matrice de 2-formes $\Omega := (\Omega_{ij})$ permet de décrire localement la courbure K. De plus, on a

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega.$$

Lorsque la courbure associée à une connexion est nulle, on dit que la connexion et le fibré vectoriel sont **plats**. C'est par exemple le cas lorsque les applications de changements de cartes de la variété sont constantes. En effet, soient $(s_1, ..., s_n), (s'_1, ..., s'_n)$ des bases locales de $E_{|U}$ et $E_{|V}$ respectivement, avec U, V des ouverts de M. Alors, sur l'intersection $U \cap V$, on peut écrire que

$$s'_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} s_i$$

avec f_{ij} des applications de changements de cartes. Alors,

$$\nabla(s'_i) = \sum_{j=1}^{n} df_{ij} \otimes s_i = 0$$

car $df_{ij} = 0$.

6.2 Construction des classes caractéristiques

Dans toute cette section, M est une variété différentielle, E est un fibré vectoriel au-dessus de M possédant une connexion ∇ et on note K la courbure associée à cette connexion. On commence par définir la notion de polynôme invariant.

Définition 6.3 (Polynôme invariant) *Un **polynôme invariant** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une application $P : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ satisfaisant la relation suivante :*

$$\forall T \in GL_n(\mathbb{C}),\ \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ P(TXT^{-1}) = P(X).$$

La trace et le déterminant sont des exemples classiques de polynômes invariants.

6.2.1 Lien avec la cohomologie de De Rham

Nous allons maintenant voir comment il est possible de créer une forme différentielle sur M, notée $P(K)$, à partir d'un polynôme invariant P. Pour tout $x \in M$, on choisit une base locale de sections $(s_1, ..., s_n)$ de telle sorte que

$$K(s_i) = \sum_{j=1}^{n} \Omega_{ij} \otimes s_j$$

où chaque Ω_{ij} est une 2-forme différentielle sur M. Ainsi, les coefficients de la matrice Ω appartiennent à l'algèbre commutative des formes différentielles paires sur M.

Par conséquent, il est possible d'évaluer le polynôme P en la matrice Ω. De plus, $P(\Omega)$ ne dépend pas de la base $(s_1, ..., s_n)$, car un changement de base remplacera la matrice Ω par une matrice de la forme $T\Omega T^{-1}$ et puisque P est un polynôme invariant, on a $P(\Omega) = P(T\Omega T^{-1})$.

Ainsi, puisque chaque $P(\Omega)$ construit localement est indépendant de la base locale, ces formes différentielles se recollent naturellement sur toute la variété M pour donner une forme différentielle globale que l'on note $P(K)$.

Lemme 6.6 (Lemme fondamental) *Pour tout polynôme invariant P, la forme différentielle $P(K)$ est fermée, c'est-à-dire que $dP(K) = 0$.*

Démonstration. Soit P un polynôme invariant. Pour toute matrice $A = (A_{i,j})$, on peut définir la matrice de coefficients $(\frac{\partial P}{\partial A_{i,j}})$ en voyant les coefficients $(A_{i,j})$ comme des variables. On notera $P'(A)$ la transposée de cette matrice.

Soit $\Omega = (\Omega_{i,j})$ la matrice associée à la courbure K par rapport à une base locale des sections du fibré. On sait que

$$dP(\Omega) = \sum_{i,j} \frac{\partial P}{\partial \Omega_{i,j}} d\Omega_{i,j}$$

donc en utilisant la notation matricielle introduite précédemment, on a

$$dP(\Omega) = Tr(P'(\Omega)d\Omega).$$

De plus, on a vu précédemment que

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$$

Par conséquent,

$$d\Omega = \omega \wedge d\omega - d\omega \wedge \omega = \omega \wedge (d\omega - \omega \wedge \omega) - (d\omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega.$$

Cette égalité s'appelle **l'identité de Bianchi**.

Observons maintenant que, pour toute matrice A et tout polynôme invariant P, la matrice $P'(A)$ commute avec la matrice A. Pour prouver ceci, introduisons la matrice $E_{j,i}$ qui a pour coefficient 1 sur la j-ième ligne et i-ième colonne et qui a pour coefficients 0 partout ailleurs. Puisque P est un polynôme invariant, on a

$$P((I + tE_{j,i})A) = P(A(I + tE_{j,i})).$$

On différencie cette égalité par rapport à t, et en évaluant en $t = 0$ on obtient

$$\sum_{i,j} A_{i,\alpha} \frac{\partial P}{\partial A_{j\alpha}} = \sum_{i,j} \frac{\partial P}{\partial A_{\alpha i}} A_{\alpha j}$$

ce qui montre que A commute avec la transposée de la matrice de coefficients $(\frac{\partial P}{\partial A_{i,j}})$. On en déduit alors directement par définition du produit extérieur que

$$\Omega \wedge P'(\Omega) = P'(\Omega) \wedge \Omega.$$

En combinant les équations précédentes et en posant $X = P'(\Omega)\omega$, on observe que

$$dP(\Omega) = Tr(X \wedge \Omega - \Omega \wedge X) = \sum_{i,j} (X_{i,j} \wedge \Omega_{j,i} - \Omega_{j,i} \wedge X_{i,j}) = 0$$

car $X_{i,j}$ commute avec $\Omega_{j,i}$ pour le produit extérieur. ■

Ainsi, $P(K)$ définit un élément, que l'on notera $(P(K))$, de la cohomologie de De Rham $H^{\oplus}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus H^i(M, \mathbb{C})$.

Proposition 6.7 *La classe de cohomologie $(P(K)) = (P(K_\nabla))$ ne dépend pas de la connexion ∇.*

Démonstration. Soient ∇_0, ∇_1 deux connexions différentes sur E. Soit $p_1 : M \times \mathbb{R} \to M$ la première projection, d'après la proposition 2.6, on peut construire un fibré E' au-dessus de $M \times \mathbb{R}$ qui est induit par E. Par le lemme 6.3, on dispose donc de connexions induites ∇'_0, ∇'_1 sur E'. De plus, pour $t \in M$, on peut créer la connexion

$$\nabla = t\nabla'_1 + (1 - t)\nabla'_0.$$

Considérons maintenant l'application $i_\varepsilon : x \mapsto (x, \varepsilon)$ définie de M dans $M \times \mathbb{R}$, avec ε valant 0 ou 1. La connexion induite $(i_\varepsilon)^*\nabla$ sur $(i_\varepsilon)^*E'$ peut être identifiée avec la connexion ∇_ε sur E. Ainsi,

$$(i_\varepsilon)^*(P(K_\nabla)) = (P(K_{\nabla_\varepsilon}).$$

Puisque les applications i_0 et i_1 sont homotopes, on conclut que $(P(K_{\nabla_0}) = (P(K_{\nabla_1})$. ■

6.2.2 Classes de Chern

Dans cette section, nous plongeons dans le concept fondamental des classes de Chern. Ces classes, nommées d'après le mathématicien Shiing-Shen Chern, jouent un rôle crucial dans l'étude des fibrés vectoriels complexes.

Définition 6.4 (Classes de Chern) *Soit E un fibré vectoriel complexe possédant une connexion ∇. On définit la r-ième **classe de Chern** $c_r(E)$ par la formule*

$$c_r(E) = \frac{1}{(2i\pi)^r}(\sigma_r(K_\nabla)).$$

Notons que pour le cas $r = 1$, on a

$$c_1(E) = \frac{1}{2i\pi}(\mathrm{Tr}(K_\nabla)).$$

Comme mentionné au début de cette section, cette construction des classes de Chern est riche et complète, mais nous nous servirons uniquement de la première classe de Chern dans tout ce qui suivra. Il est alors intéressant d'explorer une autre manière de construire la première classe de Chern, en utilisant par exemple d'algèbre cohomologique.

On fixe donc M une surface de Riemann compacte. On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \to 0$$

où e est défini par $e(f) = \exp(2\pi i f)$. Cette suite exacte induit une suite exacte en cohomologie, en particulier,

$$H^1(M,\mathbb{Z}) \to H^1(M,\mathcal{O}) \to H^1(M,\mathcal{O}^*) \to H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathcal{O}).$$

Puisque $H^2(M,\mathcal{O}) = 0$, on a la suite exacte suivante

$$0 \to H^1(M,\mathcal{O})/H^1(M,\mathbb{Z}) \to H^1(M,\mathcal{O}^*) \to H^2(M,\mathbb{Z}) \to 0.$$

On définit alors l'application de bord comme l'application $c : H^1(M,\mathcal{O}^*) \to H^2(M,\mathbb{Z})$ dans la suite exacte précédente, et la première classe de Chern est alors $c(L)$, où le fibré en droites L est vu comme une classe de cohomologie de $H^1(M,\mathcal{O}^*)$.

Cette manière de voir les choses est totalement licite, puisque, comme nous l'avons vu précédemment, les fibrés en droites sont entièrement déterminés par leurs fonctions de transitions, qui sont des 1-cocycles inversibles. De plus, changer de trivialisation correspond à transformer des cocycles par des cobords, ce qui montre bien le résultat.

Proposition 6.8 *Soit M une surface de Riemann compacte et $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement. Soit $(l_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_M^*)$ des 1-cocycles engendrant un fibré en droites holomorphe L, soit (r_α) des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas, définies sur U_α et vérifiant*

$$\forall P \in U_\alpha \cap U_\beta, \quad r_\alpha(P) = r_\beta(P)|l_{\alpha\beta}(P)|^2.$$

Alors, $\varphi = \frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\log r_\alpha \in \Gamma(M, L^2)$ est une forme différentielle bien définie sur M, et

$$c_1(L) = \int_M \varphi.$$

Démonstration. Considérons, comme précédemment, la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \to 0.$$

Quitte à restreindre, on peut supposer que les intersections $U_\alpha \cap U_\beta$ sont simplement connexes, ce qui permet de fixer une détermination du logarithme, et considérer

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2i\pi}\log l_{\alpha\beta} \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{O})$$

de sorte que $l_{\alpha\beta} = e(\sigma_{\alpha\beta})$. Il en découle que la première classe de Chern de L sera représentée par le 2-cocycle $c_{\alpha\beta\gamma} \in Z^2(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ défini par

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \sigma_{\beta\gamma} - \sigma_{\alpha\gamma} + \sigma_{\alpha\beta}.$$

Ce 2-cocycle peut être vu comme un élément de $Z^2(\mathcal{U},\mathbb{C})$ grâce à l'isomorphisme de De Rham et la suite exacte de faisceaux suivante

$$0 \to \mathbb{C} \to L^0 \xrightarrow{d} L^1 \xrightarrow{d} L^2 \to 0.$$

On rappelle que, dans ce contexte, L^i désigne le faisceau des formes complexes de degré i. Si l'on note $L_c^1 \subset L^1$ le sous-faisceau des 1-formes fermées, on a la suite exacte de faisceaux suivante

$$0 \to \mathbb{C} \to L^0 \xrightarrow{d} L_c^1 \to 0.$$

Ainsi, le 2-cocycle $(c_{\alpha\beta\gamma})$ vu comme un élément de $Z^2(\mathcal{U}, L^0)$ sera le cobord d'une 1-cochaîne $(\sigma'_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, L^0)$ sous la condition

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \sigma'_{\alpha\beta} + \sigma'_{\beta\gamma} + \sigma'_{\gamma\alpha}.$$

Donc, $(d\sigma'_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, L_c^1)$ et en prenant $\sigma'_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$, on a alors

$$d\sigma'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2i\pi} d\log l_{\alpha\beta}.$$

En utilisant la suite exacte

$$0 \to L_c^1 \to L^1 \xrightarrow{d} L^2 \to 0,$$

on peut voir $(d\sigma'_{\alpha\beta})$ comme un élément de $Z^1(\mathcal{U}, L^1)$ et comme le cobord d'une 0-cochaîne $(\tau_\alpha) \in C^0(\mathcal{U}, L^1)$ sous la condition que

$$d\sigma'_{\alpha\beta} = \tau_\beta - \tau_\alpha.$$

Ainsi, on a $d\tau_\alpha = d\tau_\beta$ donc les fonctions $(d\tau_\alpha)$ définissent une forme différentielle globale, et on a donc, sur $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2i\pi} d\log l_{\alpha\beta} + \tau_\beta.$$

On en déduit que $\varphi = d\tau_\alpha$ est bien définie et que $c_1(L) = \int_M \varphi$.

De plus, puisque les fonctions r_α ne s'annulent pas, l'application $\log r_\alpha$ est bien définie et on a, pour $P \in U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\log r_\alpha(P) = \log r_\beta(P) + \log l_{\beta\alpha}(P) + \log \overline{l_{\beta\alpha}(P)}.$$

Puisque les fonctions $l_{\alpha\beta}$ sont holomorphes, on observe que $\partial \log l_{\beta\alpha} = d\log l_{\beta\alpha}$ et $\partial \log \overline{l_{\beta\alpha}} = 0$, par conséquent, en prenant $\tau_\alpha = \frac{i}{2\pi}\partial \log r_\alpha$ on a le résultat voulu. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un résultat capital liant la première classe de Chern au degré d'un fibré en droites.

Proposition 6.9 *Soit M une surface de Riemann compacte, soit L un fibré en droites holomorphes au-dessus de M. On a*

$$\deg(L) = c_1(L).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement de M tel que les fonctions de transition $l_{\alpha\beta}$ soient vues comme des éléments de $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ et tel que chaque point P_i possède un voisinage $V_i \subset U_{\alpha_i}$ avec $V_i \cap U_\alpha = \emptyset$ si $\alpha \neq \alpha_i$. Soit s une section méromorphe non nulle de L, on a donc par définition $\deg(L) = \deg(\mathrm{div}(s))$. Notons $s_\alpha = s_{|U_\alpha}$, on a donc, sur $U_\alpha \cap U_\beta$, $s_\alpha = l_{\alpha\beta}s_\beta$.

Par conséquent, les applications $|s_\alpha|^2$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annulent pas sur $U_\alpha \setminus (\cup_i P_i) \cap U_\alpha$, et elles vérifient l'équation

$$|s_\alpha|^2 = |l_{\alpha\beta}|^2 |s_\beta|^2.$$

Par conséquent, il existe des fonctions (g_α) strictement positives et lisses définies sur U_α vérifiant, sur $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$g_\alpha = |l_{\alpha\beta}|^2 g_\beta$$

et sur $U_\alpha \setminus \cup_i V_i \cap U_\alpha$,

$$g_\alpha = |s_\alpha|^2.$$

On applique maintenant la proposition précédente aux fonctions (g_α^{-1}), et on obtient que

$$c_1(L) = \frac{1}{2i\pi}\int_M \partial\bar{\partial}\log g_\alpha^{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_M \bar{\partial}\partial \log g_\alpha.$$

Or, sur $M \setminus \cup_i V_i$, on sait que $g_\alpha = |s_\alpha|^2$ et que les fonctions (s_α) sont holomorphes, donc on a

$$\bar{\partial}\partial \log g_\alpha = \bar{\partial}\partial(\log f_\alpha + \log \overline{f_\alpha}) = 0.$$

Il en découle que

$$c_1(L) = \sum_i \int_{V_i} \bar{\partial}\partial \log g_\alpha.$$

De plus, $\bar{\partial}\partial \log g_\alpha = d\partial \log g_\alpha$, donc, par le théorème de Stokes on a

$$c_1(L) = \frac{1}{2i\pi} \sum_i \int_{\partial V_i} \partial \log g_\alpha.$$

De plus, sur ∂V_i, on a $g_\alpha = |s_\alpha|^2$ et les fonctions (s_α) sont holomorphes, donc on en déduit que

$$c_1(L) = \frac{1}{2i\pi} \sum_i \int_{\partial V_i} \partial \log s_\alpha = \frac{1}{2i\pi} \sum_i \int_{\partial V_i} d \log s_\alpha = \sum_i ord_{P_i}(f) = \deg(L)$$

en utilisant le théorème des résidus. ■

7 Structures affines et projectives sur les surfaces de Riemann

Le but de cette section est de présenter les résultats clés liant les structures affines et projectives sur les surfaces de Riemann compactes aux fibrés indigènes. On montre notamment que l'existence d'une structure affine restreint fortement la topologie de la surface (genre 1) et que les fibrés indigènes correspondent de manière unique à des structures géométriques affines ou projectives.

7.1 Structures affines

Nous allons commencer par étudier le cas des surfaces de Riemann qui possèdent une structure affine.

Lemme 7.1 *Soit M une surface de Riemann compacte qui possède une structure affine. Alors, M est de genre 1.*

Démonstration. Soit $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ un atlas affine de M. Alors, les applications de changements de cartes $f_{\alpha\beta} = z_\alpha \circ z_\beta^{-1} : z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ sont de la forme

$$f_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} z + b_{\alpha\beta}$$

avec $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^*, b_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$. Par conséquent, on observe que

$$z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta) = a_{\alpha\beta} z_\beta + b_{\alpha\beta}.$$

Puisque dz_α et dz_β sont des bases locales du fibré canonique K_M sur leurs cartes respectives, alors on peut écrire

$$dz_\beta = k_{\alpha\beta} dz_\alpha \Leftrightarrow k_{\alpha\beta} = (dz_\alpha/dz_\beta)^{-1} = 1/a_{\alpha\beta}$$

où $k_{\alpha\beta}$ désigne la fonction de changement de base. Puisqu'elle est constante, on conclut que le fibré canonique est plat et donc que

$$c_1(K_M) = 0.$$

Les propositions 5.5 et 6.9 assurent alors que la surface est de genre 1. ■

Théorème 7.2 *Un fibré indigène à une surface de Riemann compacte M est associé à une unique structure affine sur la surface.*

Démonstration. Soient $\{U_\alpha, z_\alpha\}, \{U_\alpha, w_\alpha\}$ deux atlas affines associés au fibré indigène affine. Par conséquent, ces deux atlas possèdent les mêmes applications de changements de cartes, c'est-à-dire que sur $U_\alpha \cap U_\beta$, on a

$$z_\alpha = a_{\alpha\beta} z_\beta + b_{\alpha\beta}, \qquad w_\alpha = a_{\alpha\beta} w_\beta + b_{\alpha\beta}$$

avec $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^*, b_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$. Or, puisque les atlas affines sont subordonnés au même atlas complexe par hypothèse, pour tout ouvert U_α, il existe $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ tel que

$$w_\alpha = f_\alpha(z_\alpha),$$

et il en découle directement que l'application dw_α/dz_α est aussi holomorphe sur U_α. De plus, sur $U_\alpha \cap U_\beta$, on a

$$\frac{dw_\alpha}{dz_\alpha} = \frac{dw_\alpha}{dz_\beta} \times \frac{dz_\beta}{dz_\alpha} = \frac{dw_\alpha}{dw_\beta} \times \frac{dw_\beta}{dz_\beta} \times \frac{dz_\beta}{dz_\alpha} = \frac{dw_\beta}{dz_\beta}.$$

Par conséquent, l'application dw_α/dz_α définit une fonction holomorphe globale sur la surface, qui doit donc être constante car la surface est compacte. Ainsi, sur chaque ouvert U_α, on a

$$w_\alpha = c z_\alpha + d_\alpha.$$

Il en résulte que les deux atlas sont équivalents et appartiennent donc à la même structure, ce qui achève la preuve. ■

7.2 Structures projectives

Nous allons maintenant étudier les surfaces de Riemann qui possèdent une structure projective.

Soit E^0 un fibré projectif complexe de dimension 1 au-dessus d'une surface de Riemann M. Soit $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ un atlas (quelconque) de M, les fonctions de transition $\varphi^0_{\alpha\beta}$ peuvent être représentées par des matrices

$$\varphi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a_{\alpha\beta} & b_{\alpha\beta} \\ c_{\alpha\beta} & d_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont complexes et constants. De plus, puisque ce sont des automorphismes locaux de $\mathbb{P}^1$, on peut voir ces applications comme des restrictions d'automorphismes de $\mathbb{P}^1$, donc comme des éléments de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. On choisira donc des représentants de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ afin de normaliser $\det(\varphi_{\alpha\beta}) = 1$. De plus, puisque les fonctions $\varphi^0_{\alpha\beta}$ vérifient la relation de cocyclicité, on observe que sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ on a

$$\varphi_{\alpha\beta}\ \varphi_{\beta\gamma} = \pm\varphi_{\alpha\gamma}.$$

Lorsque la relation de cocyclicité est vérifiée, il en découle que les applications $\varphi_{\alpha\beta}$ forment un système de fonctions de transition, et induisent donc un fibré vectoriel complexe plat E de rang 2 au-dessus de M. On dira que le fibré projectif E^0 est **associé** au fibré vectoriel E.

Théorème 7.3 *Soit M une surface de Riemann compacte de genre $g > 1$. Un fibré complexe projectif plat E^0 est indigène à M si et seulement si E^0 est associé à un fibré vectoriel plat E tel que $\det(E)$ est trivial et $\deg(\mathrm{div}(E)) = g - 1$. De plus, si $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ est un atlas projectif de M tel que les fonctions z_α définissent une section de E^0, alors il existe un fibré en droite L tel que $\deg(L) = 0$ et une section holomorphe globale $h_\alpha = (h_{1\alpha}, h_{2\alpha})$ de $L \otimes E$ tel que $z_\alpha = h_{1\alpha}/h_{2\alpha}$ sur U_α.*

Avant de prouver ce théorème, notons que ce résultat implique que les fibrés indigènes sont associés à des fibrés vectoriels instables, au sens de la définition 5.7.

Démonstration. On suppose que le fibré complexe projectif E^0 est indigène à M. Alors, il existe un atlas projectif $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ sur M tel que les fonctions de transition du fibré $\varphi^0_{\alpha\beta}$ vérifient sur $U_\alpha \cap U_\beta$

$$z_\alpha = \varphi^0_{\alpha\beta}(z_\beta) = \frac{a_{\alpha\beta} z_\beta + b_{\alpha\beta}}{c_{\alpha\beta} z_\beta + d_{\alpha\beta}}.$$

De plus, les fonctions de transition du fibré canonique K_M vérifient $k_{\alpha\beta} = (dz_\alpha/dz_\beta)^{-1}$. Or, un calcul élémentaire montre que

$$\frac{dz_\alpha}{dz_\beta} = \frac{a_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}}{(c_{\alpha\beta} z_\beta + d_{\alpha\beta})^2} = \frac{1}{(c_{\alpha\beta} z_\beta + d_{\alpha\beta})^2},$$

donc finalement $k_{\alpha\beta} = (c_{\alpha\beta} z_\beta + d_{\alpha\beta})^2$.

Posons $g_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} z_\beta + d_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)^*$. On observe que, sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, on a

$$g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}$$

donc, les applications $(g_{\alpha\beta})$ définissent un fibré en droites, que l'on notera θ. Il est immédiat d'observer que $\theta^{\otimes 2} = K_M$ et donc que $\deg(\theta) = g - 1$. De plus, si on note (l_α) les sections locales de ce fibré, alors sur $U_\alpha \cap U_\beta$, on a

$$l_\beta = g_{\alpha\beta} l_\beta.$$

Par conséquent, pour tout α, on a des morphismes locaux

$$f_\alpha : \theta_{|U_\alpha} \to E_{|U_\alpha}$$

qui se recollent en un morphisme global $f : \theta \to E$. Puisque $\det(E) \simeq \mathcal{O}_M$, on a la suite exacte suivante

$$0 \to \theta \to E \to \theta^{-1} \to 0.$$

On conclut par le lemme 5.9 que $\deg(\mathrm{div}(E)) = g - 1$.

Réciproquement, supposons que E^0 est un fibré projectif plat associé à un fibré vectoriel plat E tel que

$\det(E) = 1$ et $\deg(\mathrm{div}(E)) = g-1$. Soit $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ un atlas holomorphe de M tel que les fonctions de transition du fibré E s'écrivent
$$\varphi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a_{\alpha\beta} & b_{\alpha\beta} \\ c_{\alpha\beta} & d_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$
Par définition du degré de $\mathrm{div}(E)$, il existe L un fibré en droites holomorphe de degré $g-1$ tel que $L^{-1} \otimes E$ possède une section holomorphe non triviale, que l'on note $(h_{1\alpha}, h_{2\alpha})$.

Puisque $L \simeq O(D)$ avec D un diviseur de degré $g-1$, si l'on prend D' un autre diviseur de degré $g-1$ et que l'on pose $L' = O(D'-D)$, il en résulte que L' est un fibré en droites de degré 0 et que
$$L \otimes L' \simeq O(D) \otimes O(D'-D) \simeq O(D')$$
et donc que le fibré $L \otimes L'$ possède une section holomorphe locale, que l'on note g_α. De même que précédemment, puisque $\deg(L') = 0$, les fonctions de transition de L', notées $\eta_{\alpha\beta}$, seront vues comme des nombres complexes de module 1.

Posons maintenant $f_{1\alpha} = g_\alpha h_{1\alpha}$, $f_{2\alpha} = g_\alpha h_{2\alpha}$ et notons $l_{\alpha\beta}$ les fonctions de transition du fibré L. D'après ce qui précède, $(f_{1\alpha}, f_{2\alpha})$ est une section holomorphe du fibré plat $L' \otimes E$. En combinant le fait que, sur $U_\alpha \cap U_\beta$, on ait
$$g_\alpha = \eta_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} g_\beta, \qquad (h_{1\alpha}, h_{2\alpha}) = l_{\alpha\beta}^{-1} \varphi_{\alpha\beta}(h_{1\beta}, h_{2\beta}),$$
il en découle que
$$f_{1\alpha} = \eta_{\alpha\beta}(a_{\alpha\beta} f_{1\beta} + b_{\alpha\beta} f_{2\beta}), \qquad f_{1\beta} = \eta_{\alpha\beta}(c_{\alpha\beta} f_{1\beta} + d_{\alpha\beta} f_{2\beta}).$$
Posons maintenant
$$H_\alpha = \begin{pmatrix} h_{1\alpha} & h'_{1\alpha} \\ h_{2\alpha} & h'_{2\alpha} \end{pmatrix}, \qquad F_\alpha = \begin{pmatrix} f_{1\alpha} & f'_{1\alpha} \\ f_{2\alpha} & f'_{2\alpha} \end{pmatrix}.$$
En notant toujours $k_{\alpha\beta}$ les fonctions de transition du fibré canonique, on observe que, sur $U_\alpha \cap U_\beta$,
$$F_\alpha = \eta_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta} F_\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$
Puisque, par construction, $\eta_{\alpha\beta} = \det(\varphi_{\alpha\beta})$, on a
$$\det(F_\alpha) = \eta_{\alpha\beta}^2 k_{\alpha\beta} \det(F_\beta).$$
Par conséquent,
$$\det(F_\alpha) = g_\alpha^2 \det(H_\alpha)$$
et donc
$$\det(H_\alpha) = l_{\alpha\beta}^{-2} k_{\alpha\beta} \det(H_\beta).$$
Ainsi, les fonctions $\det(H_\alpha)$ forment donc une section holomorphe du fibré $L^{-2} \otimes K_M$. De plus, puisque $\deg(L^{-2} \otimes K_M) = -2\deg(L) + \deg(K_M) = 0$, les fonctions $\det(H_\alpha)$ ne s'annulent jamais.

Posons $w_\alpha = h_{1\alpha}/h_{2\alpha} = f_{1\alpha}/f_{2\alpha}$. Cette fonction est méromorphe sur U_α car $h_{1\alpha}$ et $h_{2\alpha}$ n'ont pas de zéros communs (le fibré $L^{-1} \otimes E$ est de degré 0). Puisque
$$\frac{f_{1\alpha}}{f_{2\alpha}} = \frac{\eta_{\alpha\beta}(a_{\alpha\beta} f_{1\beta} + b_{\alpha\beta} f_{2\beta})}{\eta_{\alpha\beta}(c_{\alpha\beta} f_{1\beta} + d_{\alpha\beta} f_{2\beta})} = \frac{a_{\alpha\beta} w_\beta + b_{\alpha\beta}}{c_{\alpha\beta} w_\beta + d_{\alpha\beta}},$$
on observe que les fonctions w_α sont des sections locales du fibré projectif E^0. De plus,
$$w'_\alpha = \frac{dw_\alpha}{dz_\alpha} = \frac{-\det(H_\alpha)}{h_{2\alpha}^2}$$
et
$$\left(\frac{1}{w_\alpha}\right)' = \frac{\det(H_\alpha)}{h_{1\alpha}^2}$$
donc puisque $\det(H_\alpha) \neq 0$, l'application w_α est un homéomorphisme local entre U_α et la sphère de Riemann, ce qui montre que le fibré E^0 est indigène, ce qui achève la preuve. ■

Nous allons maintenant donner le théorème qui clôture cette section.

Théorème 7.4 *Soit M une surface de Riemann compacte de genre $g > 1$. Un fibré projectif indigène plat à M est associé à une unique structure projective sur M.*

Démonstration. Soient $\{U_\alpha, z_\alpha\}, \{U_\alpha, w_\alpha\}$ deux atlas projectifs de M qui induisent le même fibré projectif E^0. D'après la proposition précédente, ce fibré est associé à un fibré vectoriel complexe E tel que $\det(E) = 1$ et $\deg(\mathrm{div}(E)) = g - 1$. De plus, cette proposition assure aussi l'existence de deux fibrés en droites L et L' de degrés 0 et de sections holomorphes $(g_{1\alpha}, g_{2\alpha}), (h_{1\alpha}, h_{2\alpha})$ des fibrés $L \otimes E$ et $L' \otimes E$ (respectivement) tels que $z_\alpha = g_{1\alpha}/g_{2\alpha}$ et $w_\alpha = h_{1\alpha}/h_{2\alpha}$.

Posons
$$F_\alpha = \begin{pmatrix} g_{1\alpha} & h_{1\alpha} \\ g_{2\alpha} & h_{2\alpha} \end{pmatrix}.$$
En notant comme précédemment $l_{\alpha\beta}$ les fonctions de transition de L et $\eta_{\alpha\beta}$ les fonctions de transition de L', on observe que sur $U_\alpha \cap U_\beta$,
$$F_\alpha = \varphi_{\alpha\beta} F_\beta \begin{pmatrix} l_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \eta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$
Par conséquent, $\det(F_\alpha) = l_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta} \det(F_\beta)$ et donc les fonctions $\det(F_\alpha)$ forment une section du fibré $L \otimes L'$, qui est de degré 0. Il en résulte que, soit $\det(F_\alpha)$ ne s'annule jamais, soit $\det(F_\alpha)$ est identiquement nulle. Si $\det(F_\alpha)$ ne s'annule jamais, alors on peut écrire que, sur $U_\alpha \cap U_\beta$,
$$\varphi_{\alpha\beta} = F_\alpha \begin{pmatrix} l_{\alpha\beta}^{-1} & 0 \\ 0 & \eta_{\alpha\beta}^{-1} \end{pmatrix} F_\beta^{-1}.$$
Il en résulte que les fibrés E et $L^{-1} \otimes L'^{-1}$ sont isomorphes et donc que $\deg(\mathrm{div}(E)) = 0$ ce qui est exclu. Par conséquent, la fonction $\det(F_\alpha)$ est identiquement nulle donc les vecteurs $(g_{1\alpha}, g_{2\alpha})$ et $(h_{1\alpha}, h_{2\alpha})$ sont colinéaires, ce qui montre que $z_\alpha = w_\alpha$ et qui achève la preuve. ■

7.2.1 Lien avec la cohomologie

Nous allons maintenant voir un résultat intéressant liant l'ensemble des structures projectives sur une surface de Riemann et le premier groupe de cohomologie de M à valeurs dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Lemme 7.5 *Il y a une application canonique entre l'ensemble des structures projectives de M et le groupe $H^1(M, \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}))$.*

Démonstration. Soit $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ un atlas projectif sur M. Notons $(\varphi_{\alpha\beta})$ les changements de cartes. En notant $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ le recouvrement, nous avons déjà vu que $(\varphi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}))$.

Si $\{U_\alpha, \tilde{z}_\alpha\}$ est un autre atlas projectif équivalent au précédent, avec pour changements de cartes les applications $\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}$, alors il existe $\theta_\alpha \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ tel que
$$\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \varphi_{\alpha\beta} \theta_\beta^{-1}$$
donc les 1-cocycles $(\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta})$ et $(\varphi_{\alpha\beta})$ sont égaux en tant qu'éléments de $H^1(\mathcal{U}, \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}))$.

De plus, pour tout raffinement $\mathcal{V} < \mathcal{U}$, l'atlas projectif $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ induit naturellement un nouvel atlas projectif, compatible avec l'application $H^1(\mathcal{U}, \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})) \to H^1(\mathcal{V}, \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}))$. Enfin, puisque deux atlas projectifs équivalents induisent deux atlas projectifs équivalents pour un même raffinement, on a le résultat. ■

L'élément de $H^1(M, \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}))$ correspondant à une structure projective sera appelé **classe de cohomologie des coordonnées** de la structure. Il est important d'observer que l'application du lemme n'est ni bijective ni même surjective. Cependant, si l'on se restreint aux structures projectives subordonnées à une structure complexe fixée, alors l'application est bijective, comme l'explique le théorème suivant.

Théorème 7.6 *Soit M une surface de Riemann compacte. Les structures projectives subordonnées à une structure complexe donnée sont uniquement déterminées par leur classe de cohomologie de coordonnées.*

Soit G un groupe, notons $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ l'ensemble des morphismes de $\pi_1(M)$ dans G. Pour tout $\chi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ et tout $g \in G$, on définit l'application $\chi^g \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ par
$$\chi^g(\gamma) = g^{-1}\chi(\gamma)g.$$

Il est immédiat d'observer que l'application χ^g est bien définie. On dira que deux éléments $\chi, \chi' \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ sont équivalents si et seulement s'il existe $g \in G$ tel que $\chi' = \chi^g$. On notera $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)/G$ l'ensemble quotient ainsi obtenu.

Lemme 7.7 *Pour toute surface de Riemann M et tout groupe G, il existe une bijection entre l'ensemble $H^1(M, G)$ et l'ensemble* $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)/G$.

8 Connexions analytiques

Le but de cette section est d'étudier de nouveaux outils permettant de décrire les structures projectives et affines sur les surfaces de Riemann. Cette approche repose sur l'étude d'opérateurs différentiels et du concept de connexions analytiques.

8.1 Deux opérateurs différentiels

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $f : U \to V$ un homéomorphisme local holomorphe (on a donc $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$). On introduit deux opérateurs différentiels θ_1, θ_2 définis par

$$\theta_1 f(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}, \qquad \theta_2 f(z) = \frac{2f'(z)f'''(z) - 3f''(z)^2}{2f'(z)^2}.$$

Les fonctions $\theta_i f$ sont donc bien définies et holomorphes sur U (pour $i = 1, 2$). De plus, si $g : V \to W$ est un homéomorphisme local holomorphe, alors $h = g \circ f : U \to W$ en est aussi un, et un calcul direct montre que, pour $i = 1, 2$, on a

$$\theta_i h(z) = \theta_i g(f(z)) f'(z)^i + \theta_i f(z).$$

Introduisons maintenant les ensembles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ définis comme l'ensemble des homéomorphismes locaux holomorphes tels que $\theta_1 f = 0$ et $\theta_2 f = 0$ (respectivement). Il est clair que ces ensembles possèdent la propriété de pseudo-groupes, et donc introduisent naturellement des structures de surfaces de Riemann.

En effet, il est facile de voir que si $f \in \mathcal{F}_1$ alors $f'' = 0$ donc $f(z) = az + b$, et puisque $f'(z) \neq 0$, on en déduit que $a \neq 0$ et donc que $\mathcal{F}_1$ est composé d'applications complexes affines.

Pour déterminer $\mathcal{F}_2$, on commence par observer que

$$\theta_2 f(z) = -2\sqrt{f'(z)} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{\sqrt{f'(z)}}.$$

Par conséquent, si $f \in \mathcal{F}_2$ alors $\frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{\sqrt{f'(z)}} = 0$ donc $f'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$ et par conséquent $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. La condition $f'(z) \neq 0$ impose que $ad - bc \neq 0$ et donc que $\mathcal{F}_2$ est composée d'applications projectives.

Soit M une surface de Riemann, soit $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ un atlas holomorphe de M, notons $\mathcal{U}$ le recouvrement. On note $f_{\alpha\beta}$ les fonctions de transition de cet atlas, de sorte que, sur $U_\alpha \cap U_\beta$, on ait

$$z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta).$$

Toujours sur $U_\alpha \cap U_\beta$, on définit, grâce à la paramétrisation locale z_β,

$$\sigma_{i\alpha\beta}(z_\beta(P)) = \theta_i f_{\alpha\beta}(z_\beta(P)).$$

Si $P \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, un simple calcul montre que, via la paramétrisation locale z_γ,

$$\sigma_{i\alpha\beta}(z_\gamma(P)) = f'^{-i}_{\gamma\beta}(P) \sigma_{i\alpha\beta}(z_\beta(P)).$$

En utilisant les résultats précédents, on peut montrer par un calcul que, sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$,

$$\sigma_{i\alpha\gamma}(z_\gamma(P)) = (f'_{\beta\gamma})^i(P) \sigma_{i\alpha\beta}(z_\beta(P)) + \sigma_{i\beta\gamma}(z_\gamma(P)),$$

d'où

$$\sigma_{i\alpha\gamma}(z_\gamma(P)) = \sigma_{i\alpha\beta}(z_\gamma(P)) + \sigma_{i\beta\gamma}(z_\gamma(P)).$$

Par conséquent, on observe que $(\sigma_{i\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(K_M^i))$. Nous allons maintenant nous intéresser aux 0-cochaînes qui ont pour cobords les applications $(\sigma_{i\alpha\beta})$.

8.2 Connexions

Définition 8.1 ($\mathcal{F}_i$-connexion) *Une **$\mathcal{F}_i$-connexion pour le recouvrement** $\mathcal{U}$ est une 0-cochaîne $h = (h_\alpha) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(K_M^i))$ telle que $\delta h = \sigma_i$.*

On dira que deux connexions h et h' sur deux recouvrements $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont équivalentes si elles peuvent être prolongées pour former une connexion sur la réunion des deux recouvrements. Cela permet de définir une relation d'équivalence, et les classes d'équivalences pour cette relation d'équivalence seront appelées des $\mathcal{F}_i$-connexions sur la surface de Riemann M. Naturellement, les $\mathcal{F}_1$-connexions sur M seront appelées connexions affines et les $\mathcal{F}_2$-connexions sur M seront appelées connexions projectives.

Ainsi, une $\mathcal{F}_i$-connexion pour $\mathcal{U}$ est composée de sections (h_α) du fibré K_M^i tel que, sur $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\sigma_{i\alpha\beta}(P) = h_\beta(P) - h_\alpha(P).$$

Par conséquent, en termes de paramétrisations locales, on obtient que

$$\sigma_{i\alpha\beta}(z_\beta(P)) = h_\beta(z_\beta(P)) - (f'_{\alpha\beta}(P))^i h_\alpha(z_\alpha(P)).$$

À ce point de notre étude, il est naturel de se demander quel est le rôle de ces connexions dans l'étude des différentes structures sur les surfaces de Riemann. Le théorème suivant permet d'éclaircir ce point et de justifier l'intérêt des $\mathcal{F}_i$-connexions.

Théorème 8.1 *Soit M une surface de Riemann. L'ensemble des structures projectives et affines subordonnées à la structure complexe est en bijection avec l'ensemble des connexions projectives et affines sur M.*

Démonstration. Soit h une $\mathcal{F}_i$-connexion sur M, notons (h_α) un représentant de h pour un recouvrement $\mathcal{U}$. Quitte à raffiner le recouvrement, on observe qu'il existe des homéomorphismes holomorphes $w_\alpha : z_\alpha(U_\alpha) \to V_\alpha \subset \mathbb{C}$ tels que $h_\alpha(z_\alpha) = \theta_i w_\alpha(z_\alpha)$.

En effet, on remarque que l'existence des applications w_α repose sur l'existence de solutions de l'équation différentielle $\theta_i w_\alpha = h_\alpha$ avec $w'_\alpha \neq 0$, au voisinage de chaque point de M. Pour le cas $i = 1$, on obtient une équation différentielle linéaire

$$w''_\alpha - h_\alpha w'_\alpha = 0$$

qui possède bien des solutions pour n'importe quelles valeurs de w'_α. Pour le cas $i = 2$, en réutilisant la formule pour θ_2 utilisée dans la détermination des éléments de $\mathcal{F}_2$, on observe, après avoir posé $w'_\alpha = v_\alpha^{-2}$, qu'on obtient l'équation différentielle

$$v''_\alpha + \frac{1}{2} h_\alpha v_\alpha = 0$$

qui possède aussi des solutions pour toutes les valeurs de w'_α.

Notons maintenant que les homéomorphismes holomorphes sont de la forme $\tilde{w}_\alpha = v_\alpha \circ w_\alpha$ avec $v_\alpha \in \mathcal{F}_i$. En effet, si $\tilde{w}_\alpha$ satisfait $h_\alpha(z_\alpha) = \theta_i \tilde{w}_\alpha(z_\alpha)$, alors en posant $v_\alpha = \tilde{w}_\alpha \circ w_\alpha^{-1} \Leftrightarrow \tilde{w}_\alpha = v_\alpha \circ w_\alpha$, on a, en utilisant les résultats précédents

$$h_\alpha = \theta_i \tilde{w}_\alpha = \theta_i (v_\alpha \circ w_\alpha) = (\theta_i v_\alpha)(w'_\alpha)^i + \theta_i w_\alpha = (\theta_i v_\alpha)(w'_\alpha)^i + h_\alpha$$

ce qui force $\theta_i v_\alpha = 0$ et donc $v_\alpha \in \mathcal{F}_i$.

Soit $\{U_\alpha, \tilde{z}_\alpha\}$ un atlas de M, équivalent à l'atlas $\{U_\alpha, z_\alpha\}$. Alors, nécessairement, on a $\tilde{z}_\alpha = w_\alpha \circ z_\alpha$ avec w_α des homéomorphismes holomorphes locaux. En notant $f_{\alpha\beta}$ les applications de changement de cartes de l'atlas $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ et $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ celles de l'atlas $\{U_\alpha, \tilde{z}_\alpha\}$, on a donc

$$\tilde{f}_{\alpha\beta} = (w_\alpha \circ z_\alpha) \circ (w_\beta \circ z_\beta)^{-1} = w_\alpha \circ f_{\alpha\beta} \circ w_\beta^{-1}.$$

Donc, en écrivant que $w_\alpha \circ f_{\alpha\beta} = \tilde{f}_{\alpha\beta} \circ w_\beta$, on calcule que

$$(\theta_i w_\alpha) = (f'_{\alpha\beta})^i + (\theta_i f_{\alpha\beta} = (\theta_i \tilde{f}_{\alpha\beta})(w'_\beta)^i + \theta_i w_\beta$$

d'où, en posant $h_\alpha = \theta_i w_\alpha$,

$$(\theta_i \tilde{f}'_{\alpha\beta})(w'_\beta)^i = \sigma_{i\alpha\beta} + h_\alpha (f'_{\alpha\beta})^i - h_\beta.$$

Puisque, sur $U_\alpha \cap U_\beta$, nous avons vu que

$$\sigma_{i\alpha\beta}(z_\beta(P)) = h_\beta(z_\beta(P)) - (f'_{\alpha\beta}(P))^i h_\alpha(z_\alpha(P)),$$

on observe que $\theta_i \tilde{f}_{\alpha\beta} = 0$ lorsque h_α est une connexion pour le recouvrement $\mathcal{U}$. Il est facile de voir que c'est en fait une équivalence (il suffit de remonter les calculs dans l'autre sens), ce qui montre que chaque $\mathcal{F}_i$-connexion est associée de manière unique à une structure projective ou affine sur M. ∎

Nous allons maintenant donner des corollaires qui montrent l'importance de ce théorème.

Corollaire 8.2 *Une surface de Riemann compacte de genre $g > 1$ admet toujours une structure projective subordonnée à la structure complexe. De plus, l'ensemble de ces structures est en bijection avec l'ensemble des formes différentielles quadratiques sur la surface.*

Démonstration. D'après la dualité de Serre, on a $H^1(M, \mathcal{O}(K_M^2)) \simeq H^0(M, \mathcal{O}(K_M^{-1}))^*$. Puisque $c_1(K_M^{-1}) = -c_1(K_M) = 2 - 2g$, on observe que $c_1(K_M^{-1}) < 0$ si $g > 1$ et donc que $H^1(M, \mathcal{O}(K_M^2)) = 0$.

Par conséquent, on en déduit l'existence d'une connexion projective globale, et par le théorème précédent, on a donc l'existence d'une structure projective, subordonnée à la structure complexe.

Soient $h = \{h_\alpha\}$ une connexion projective, et $\phi = \{\phi_\alpha(z_\alpha)dz_\alpha^2\}$ une forme différentielle quadratique. On définit une nouvelle connexion projective en posant

$$\tilde{h}_\alpha = h_\alpha + \phi_\alpha.$$

Sur $U_\alpha \cap U_\beta$, on a

$$\tilde{h}_\beta - \tilde{h}_\alpha = \theta_2 f_{\alpha\beta} + \phi_\beta - \phi_\alpha$$

donc on construit bien une nouvelle connexion projective. Réciproquement, si on a deux connexions projectives $h, \tilde{h}$, alors leur différence $\phi_\alpha = \tilde{h}_\alpha - h_\alpha$ permet de définir une forme différentielle quadratique globale, ce qui montre le résultat. ∎

Nous avons maintenant obtenu une classification des différentes structures possibles sur les surfaces de Riemann compactes, via leur genre. En effet, puisque la sphère de Riemann est la seule surface de Riemann de genre 0, et qu'elle admet canoniquement une structure projective, son cas est facilement traité. D'après le lemme 7.1, une surface de Riemann compacte qui possède une structure affine est forcément de genre 1 et enfin le corollaire précédent montre que toutes les surfaces de genre supérieur à 1 possèdent une structure projective.

Par ce qui précède, nous savons maintenant qu'une connexion projective sur une surface de Riemann correspond à une structure projective sur cette surface. Or, nous savons qu'une structure projective engendre un fibré projectif au-dessus de la surface de Riemann, donc le but de notre étude est maintenant de voir comment l'on peut déterminer ce fibré à partir de la connexion projective.

Soit $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ un atlas de M, soit $\{h_\alpha\}$ une connexion projective. Soit L un fibré thêta (on rappelle que $L^{\otimes 2} = K_M$), notons $(l_{\alpha\beta})$ les fonctions de transition du fibré.

Sur chaque ouvert U_α, on choisit deux fonctions holomorphes linéairement indépendantes $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}$ vérifiant l'équation différentielle

$$f''_{i\alpha} - \frac{1}{2} h_\alpha f_{i\alpha} = 0.$$

Posons de plus $F_\alpha = \binom{f_{1\alpha}}{f_{2\alpha}}$. On peut facilement montrer par le calcul que, sur $U_\alpha \cap U_\beta$, les fonctions $(f_{i\beta} \circ f_{\beta\alpha}) l_{\alpha\beta}$ sont aussi solutions de l'équation différentielle précédente. Or, puisque l'équation différentielle est de degré 2, les fonctions $f_{i\alpha}$ forment une base des solutions. Par conséquent, il existe donc une matrice $\varphi_{\alpha\beta}$ à coefficients constants, telle que, sur $U_\alpha \cap U_\beta$, on ait

$$F_\beta(z_\beta(z_\alpha)) l_{\beta\alpha}(z_\alpha) = \varphi_{\beta\alpha} F_\alpha(z_\alpha).$$

Théorème 8.3 *Les matrices $\varphi_{\beta\alpha}$ ainsi définies sont les fonctions de transition définissant le fibré projectif plat associé à la connexion projective $\{h_\alpha\}$.*

Démonstration. On définit, sur U_α, les fonctions méromorphes $g_\alpha = f_{1\alpha}/f_{2\alpha}$. Puisque les fonctions $f_{i\alpha}$ sont linéairement indépendantes, le Wronskien $W_\alpha(z_\alpha) = f'_{1\alpha}(z_\alpha) f_{2\alpha}(z_\alpha) - f'_{2\alpha}(z_\alpha) f_{1\alpha}(z_\alpha)$ ne s'annule jamais. Or, puisque $g'_\alpha \neq 0$ lorsque $f_{2\alpha} \neq 0$ et $(1/g_\alpha)' \neq 0$ lorsque $f_{2\alpha} \neq 0$, et donc puisque $f_{1\alpha}$ et $f_{2\alpha}$ n'ont pas de zéros communs, il en résulte que la fonction g_α est un homéomorphisme local entre U_α et $\mathbb{P}^1$.

Il en résulte, en posant $w_\alpha = g_\alpha(z_\alpha)$ et en raffinant si nécessaire, que l'on peut construire un autre atlas sur M grâce aux fonctions w_α. En voyant les matrices $\varphi_{\beta\alpha}$ comme des applications projectives, on observe que $w_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(w_\alpha)$, c'est-à-dire que l'atlas $\{U_\alpha, w_\alpha\}$ définit une structure projective, dont le fibré projectif associé est engendré par les matrices $\varphi_{\beta\alpha}$. Il ne reste maintenant plus qu'à vérifier que $\theta_2 g_\alpha = h_\alpha$, ce qui se fait facilement par un calcul et achève donc la preuve. ■

9 Cohomologie de Eichler

Dans cette section, nous allons nous intéresser à un groupe de cohomologie particulier qui encode des informations importantes sur les structures projectives des surfaces de Riemann.

Comme d'habitude, on fixe $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ un atlas sur une surface de Riemann M, et on pose $h = \{h_\alpha\}$ une connexion projective sur M. On définit $D = \{D_\alpha\}$ une famille d'opérateurs différentiels définis sur les ouverts U_α par

$$D_\alpha = \frac{d^3}{dz_\alpha^3} - 2h_\alpha \frac{d}{dz_\alpha} - h'_\alpha.$$

Lemme 9.1 *L'opérateur $D : \mathcal{O}(K_M^{-1}) \to \mathcal{O}(K_M^2)$ est un morphisme de faisceaux.*

Démonstration. Soit $f_\alpha \in \mathcal{O}(K_M^{-1})$ un germe de section du fibré K_M^{-1} dans un ouvert U_α. Alors, dans tout autre ouvert U_β dans lequel le germe possède un représentant f_β, on a

$$f_\alpha = k_{\alpha\beta}^{-1} f_\beta,$$

en notant $k_{\alpha\beta}^{-1}$ les fonctions de transition du fibré K_M^{-1}. Un calcul direct montre que $D_\alpha(k_{\alpha\beta}^{-1} f_\beta) = k_{\alpha\beta}^2 D_\beta(f_\beta)$, ce qui montre donc que $D_\alpha(f_\alpha) \in \mathcal{O}(K_M^2)$, qui correspond au résultat souhaité. ■

Ainsi, le lemme précédent assure que $\ker D$ est un faisceau. On notera $\mathcal{O}_h(K_M^{-1})$ ce faisceau, l'indice h servant à montrer la dépendance avec la connexion projective h.

Théorème 9.2 *On suppose que M est compacte et de genre $g > 1$. On a une suite exacte de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels*

$$0 \to H^0(M, \mathcal{O}(K_M^2)) \to H^1(M, \mathcal{O}_h(K_M^{-1})) \to H^0(M, \mathcal{O}(K_M^2)) \to 0.$$

Démonstration. D'après le lemme 9.1, l'opérateur D induit une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_h(K_M^{-1}) \to \mathcal{O}(K_M^{-1}) \xrightarrow{D} \mathcal{O}(K_M^2) \to 0.$$

En effet, le fait que D soit localement surjectif entre les germes des faisceaux découle de résultats classiques sur l'existence locale de solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients holomorphes. Cette suite exacte de faisceaux induit une suite exacte en cohomologie, dont une partie est

$$H^0(M, \mathcal{O}(K_M^{-1})) \to H^0(M, \mathcal{O}(K_M^2)) \to H^1(M, \mathcal{O}_h(K_M^{-1})) \to H^1(M, \mathcal{O}(K_M^{-1})) \to H^1(M, \mathcal{O}(K_M^2)).$$

Puisque $\deg(K_M^{-1}) = 2 - 2g < 0$, on sait que $H^0(M, \mathcal{O}(K_M^{-1})) = 0$. De plus, d'après la dualité de Serre, $H^1(M, \mathcal{O}(K_M^{-1})) \simeq H^0(M, \mathcal{O}(K_M^2))$ et $H^1(M, \mathcal{O}(K_M^2)) \simeq H^0(M, \mathcal{O}(K_M^{-1})) = 0$. En prenant en compte tout ceci, on obtient la suite exacte du théorème, et donc le résultat. ■

Définition 9.1 (Groupe de cohomologie de Eichler) *Le groupe $H^1(M, \mathcal{O}_h(K_M^{-1}))$ sera appelé **groupe de cohomologie de Eichler** de la surface M. Il dépend de la connexion projective h.*

10 La réalisation géométrique

Dans cette section, nous verrons comment les structures projectives (et affines) sur les surfaces de Riemann donnent lieu à des représentations géométriques explicites de ces surfaces, en lien étroit avec le théorème d'uniformisation de Riemann pour les surfaces simplement connexes.

Soit M une surface de Riemann compacte qui possède une structure projective (ou affine), soit $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ le revêtement universel de M. On commence par remarquer que $\widetilde{M}$ hérite, par relèvement, de la structure projective (ou affine) de M. En effet, si $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ est un atlas projectif sur M tel que les ouverts U_α soient connexes et simplement connexes, alors chaque ouvert $\pi^{-1}(U_\alpha)$ sera homéomorphe à U_α, et les applications $z_\alpha \circ \pi$ seront des cartes projectives. Ainsi, $\{\pi^{-1}(U_\alpha), z_\alpha \circ \pi\}$ sera un atlas projectif sur $\widetilde{M}$. On peut de même vérifier que, si $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ et $\{V_\beta, k_\beta\}$ sont deux atlas projectifs équivalents sur M, alors $\{\pi^{-1}(U_\alpha), z_\alpha \circ \pi\}$ et $\{\pi^{-1}(V_\beta), k_\beta \circ \pi\}$ sont deux atlas projectifs équivalents sur $\widetilde{M}$, montrant ainsi que l'on peut définir une structure projective sur $\widetilde{M}$.

Soit $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ un atlas projectif sur M. On choisit une carte (U_0, z_0) et un point $P_0 \in U_0$. Pour tout chemin γ qui part de P_0, il est possible de prolonger analytiquement la carte z_0 via la construction suivante. On suppose que γ est tracé sur un nombre fini de cartes, que l'on note $(U_0, z_0), \dots, (U_n, z_n)$. En notant $(\varphi_{\alpha\beta})$ les changements de cartes, on sait que, sur $U_0 \cap U_1$, on a

$$z_0 = \varphi_{01} \circ z_1.$$

On pose alors $\tilde{z}_1 = \varphi_{01} \circ z_1$ et on remplace la carte z_1 par la carte $\tilde{z}_1$, qui est bien définie sur U_1 et qui permet de prolonger z_0. On réitère le procédé, jusqu'à obtenir

$$\tilde{z}_n = \varphi_{01} \circ \cdots \circ \varphi_{n-1\ n} \circ z_n,$$

qui correspond donc au prolongement analytique de z_0 le long de γ.

La carte (U_0, z_0) permet donc de définir, après relèvement sur le revêtement universel, une application globale

$$\rho : \widetilde{M} \to D \subset \widehat{\mathbb{C}}.$$

Cette application sera appelée **application de réalisation**. Par construction, cette application est holomorphe et pour tout lacet $\gamma \in \pi_1(M)$, on a

$$\rho(\gamma.z) = \varphi_\gamma \circ \rho$$

(ici on a $\varphi_\gamma = \varphi_{01} \circ \cdots \circ \varphi_{n-1\ n} \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$).

Notons que s'il existe un autre atlas projectif représentant la même structure projective (ou affine) sur $\widetilde{M}$, alors on a également une application induite $\rho_1 : \widetilde{M} \to D_1$, mais alors il existe une transformation projective (ou affine) R (puisque les atlas sont équivalents) telle que $\rho_1 = R \circ \rho$. En ce sens, la réalisation géométrique est unique.

On peut aussi observer que l'application φ_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ, ce qui permet de définir une application

$$\rho^* : \pi_1(M) \to \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})\ ;\ \gamma \mapsto \varphi_\gamma.$$

Cette application sera appelée **représentation monodromique**, et son image, noté Γ sera appelée **groupe de monodromie**.

On dira que le couple (ρ, Γ) est la **réalisation géométrique** de la structure projective (ou affine) de M.

Nous concluons maintenant avec le théorème clé lié à la représentation géométrique.

Théorème 10.1 *Soit M une surface de Riemann compacte de genre $g > 1$ qui possède une structure projective, soit $\rho : \widetilde{M} \to D$ la réalisation géométrique de M, on suppose que $D \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$. Alors, l'application de réalisation ρ est un revêtement, et D est soit isomorphe au disque unité, soit son complémentaire dans $\hat{\mathbb{C}}$ possède une infinité de composantes connexes.*

Références

[1] N.Steenrod *: The topology of fiber bundles*, Princeton : Princenton Univ. Press

[2] J. Milnor and J.Stasheff *Characteristic classes* , Princeton : Princeton Univ. Press

[3] D.Husemoller *Fibre bundles*, McGraw-Hill series in higher mathematics.

[4] JP.Serre *Faisceaux algébriques cohérents*, The Annals of mathematics, p197-278.

[5] R.C. Gunning *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton mathematical notes.

[6] O.Forster *Lectures on Riemann surfaces*, Springer.

[7] R.C Gunning *Lectures on vector bundles over Riemann surfaces*, Princeton mathematical notes.

[8] F.Loray and D.M Pérez *Projective structures and projective bundles over compact Riemann surfaces*, Astérisque, tome 323, p.223-252.