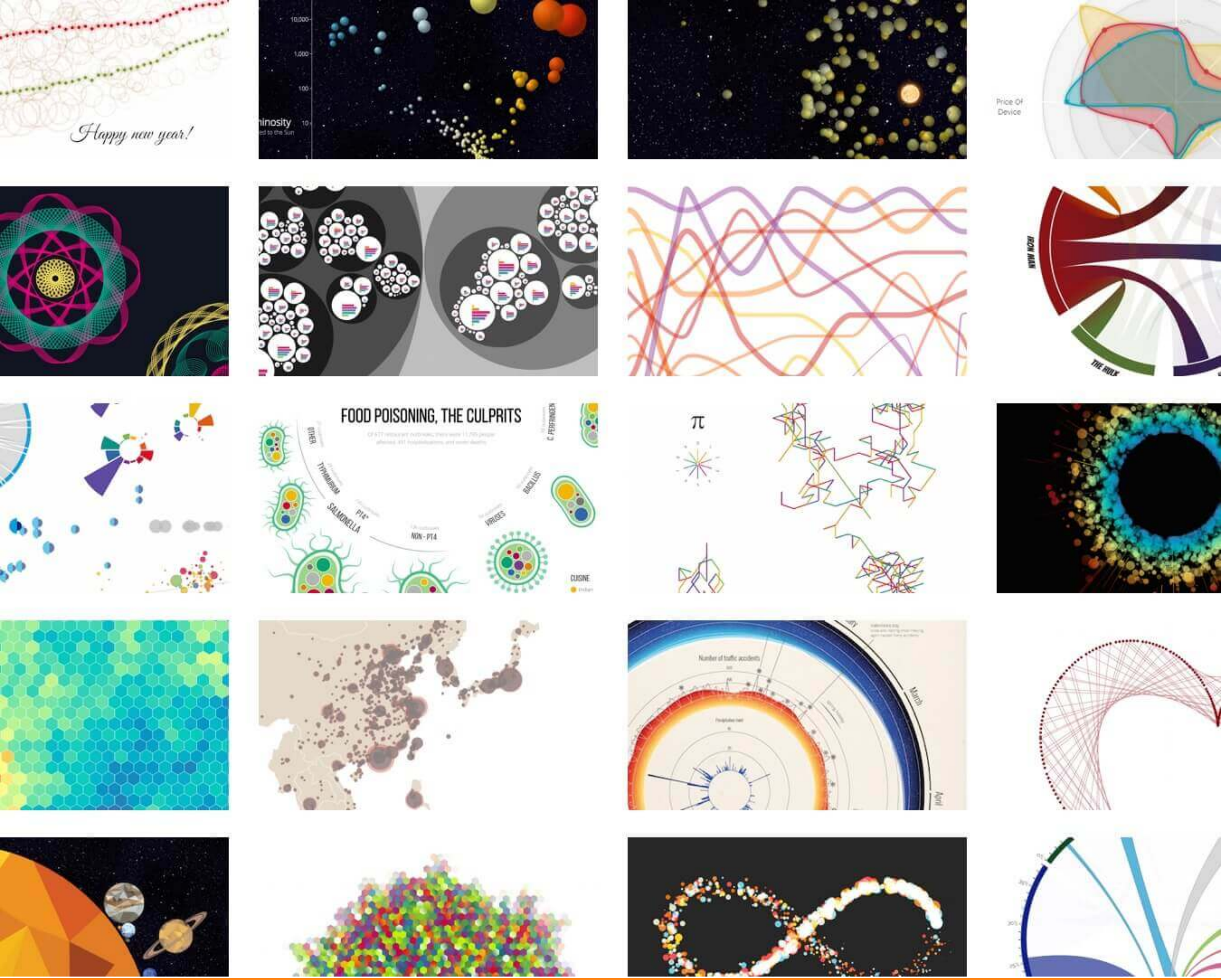


数学之美 — The Beauty of Mathematics

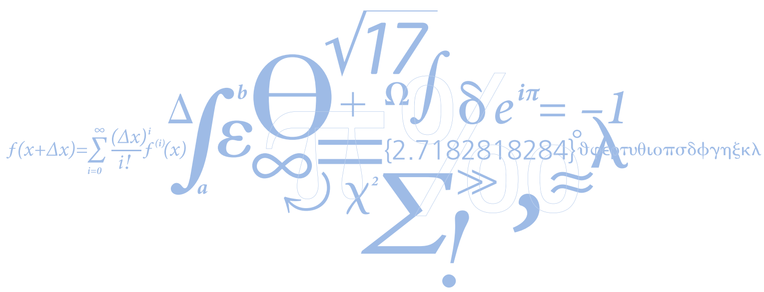
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

作者：任 涛

邮箱：me@tomben.me

日期：2019 年 11 月 18 日

版本：3.14



This booklet was proudly made with LaTeX and inspired by ElegantBook. The Chinese text is set in Source Han Serif（思源宋体）and KaiTi（楷体）. The western text is set in newtxtext. And the math text is set in newtxmath with a few modifications. All tools mentioned are open source.

前言

- 2 个多月前，姜同学问了我一道证明自然数前 n 项和的公式的题目，也就是自然数幂和公式，让我有了想要重温一下数学的想法。
- 本文最开始是 LaTeX 版本，后来用 Markdown 完成写作，也提供 PDF 版本 下载，后续可能会持续更新。
- 文中选取了一些非常优美的数学公式，并对部分公式加以证明，以此来领略数学的美妙。数学是晦涩难懂的，但又是美丽动人的，实在是难以用言语表达它的美，让人不由感慨数学真是上帝的杰作！

目 录

1 自然数幂和公式

公式 1. 自然数平方和

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1}$$

证明 1. 自然数平方和

① 方法一：利用立方差公式累加求和

观察下面的等式：

$$\begin{aligned}
&(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,\\
&(n)^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1,\\
&\cdots\cdots\\
&3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1,\\
&2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1
\end{aligned}$$

将以上 n 个等式相加，左边消去中间项，右边提取公因式合并，得到：

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n$$

化简整理得到：

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

---

② 方法二：一元函数积分法

构造二次函数：

$$f(x) = x^2,\ x \in [1, n+1]$$

将区间 $[1, n+1]$ 分割为 n 个区间，则每个小曲边三角形的面积为：

$$\int_k^{k+1} \left(x^2 - k^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_k^{k+1} - k^2 x\Big|_k^{k+1} = k + \frac{1}{3}$$

所以区间 $[1, n+1]$ 上 n 个小矩形面积之和为：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \int_1^{n+1} x^2\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\left(k + \frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

证毕.

公式 2. 自然数立方和

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{2}$$

证明 2. 自然数立方和

观察下面的等式：

$$\begin{aligned}
&(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,\\
&n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1,\\
&\cdots\cdots\\
&3^4 - 2^4 = 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1,\\
&2^4 - 1^4 = 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1
\end{aligned}$$

将以上 n 个等式相加，左边消去中间项，右边提取公因式合并，得到：

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4\left(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right) + 6\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + 4(1 + 2 + \cdots + n) + n$$

化简整理得到：

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

证毕.

自然数 n 次幂和公式的规律如下：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n, && \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\\
&\sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2, && \sum_{i=1}^{n-1} i^4 = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

2 π 和 e

众所周知，π 表示圆周率，是最著名的一个无理数。在社交媒体上，每年圆周率日[①]之际，人们总会分享关于 π 的名言，其中 Lisa Hoffman（丽莎·霍夫曼）的这句算是最为著名的之一了：

> Love is like pi — natural, irrational, and very important.
>
> 爱情就像 π 一样 — 自然、无理，却至关重要。

① 圆周率日（Pi Day）是庆祝圆周率 π 的特别日子，日期是 3 月 14 日，由圆周率最常用的近似值 3.14 而来。美国麻省理工学院首先倡议将 3 月 14 日定为国家圆周率日（National Pi Day）。2009 年美国众议院正式将每年的 3 月 14 号设定为“圆周率日”（Pi Day）。3 月 14 日也是阿尔伯特·爱因斯坦的生日，卡尔·马克思和史蒂芬·霍金的忌日以及白色情人节。

可能是在丽莎·霍夫曼这句话的基础上，另外一句关于 π 类似的话也在网络上广为流传，并且被印在 T-shirt 上进行出售。

> Love is like pi — irrational and never-ending.
>
> 爱情就像 π 一样 — 无理并且无穷无尽。

π 有多“无理且无穷无尽”呢？下图是“π 的足迹”[②]。

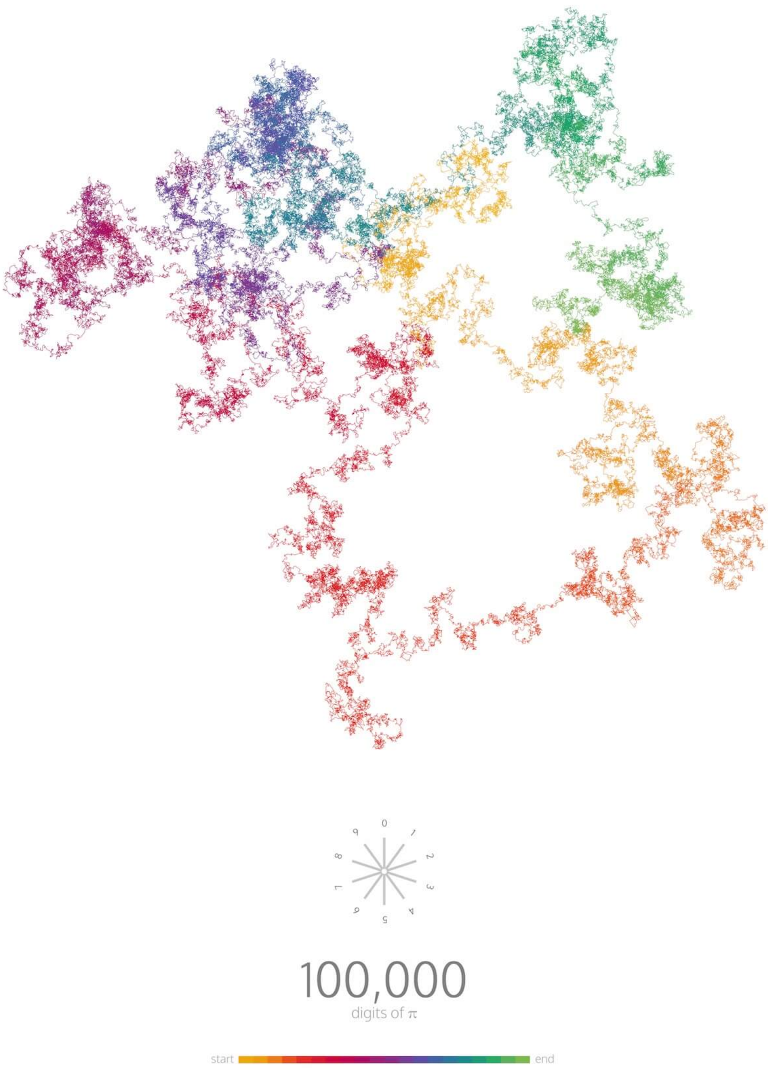


图 1: 100000 位小数的 π

法国数学家弗朗索瓦·勒·利奥奈（François Le Lionnais）曾说：

> Who has not been amazed to learn that the function $y = e^x$, like a phoenix rising from its own ashes, is its own derivative?
>
> 有谁不被 $y = e^x$ 惊艳过？就像浴火重生的凤凰一般，它从自身的导数中一飞冲天。

② 不够直观？前往这里查看 π 的动态小数位数。

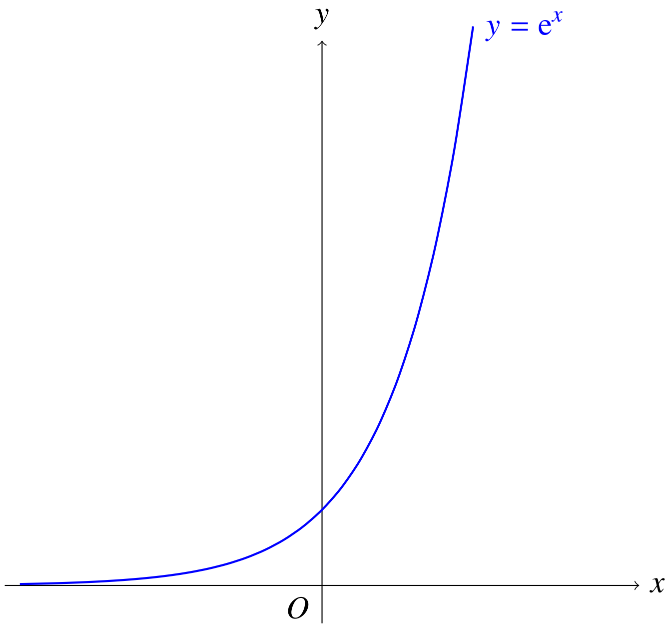


图 2: $y = e^x$ 一飞冲天

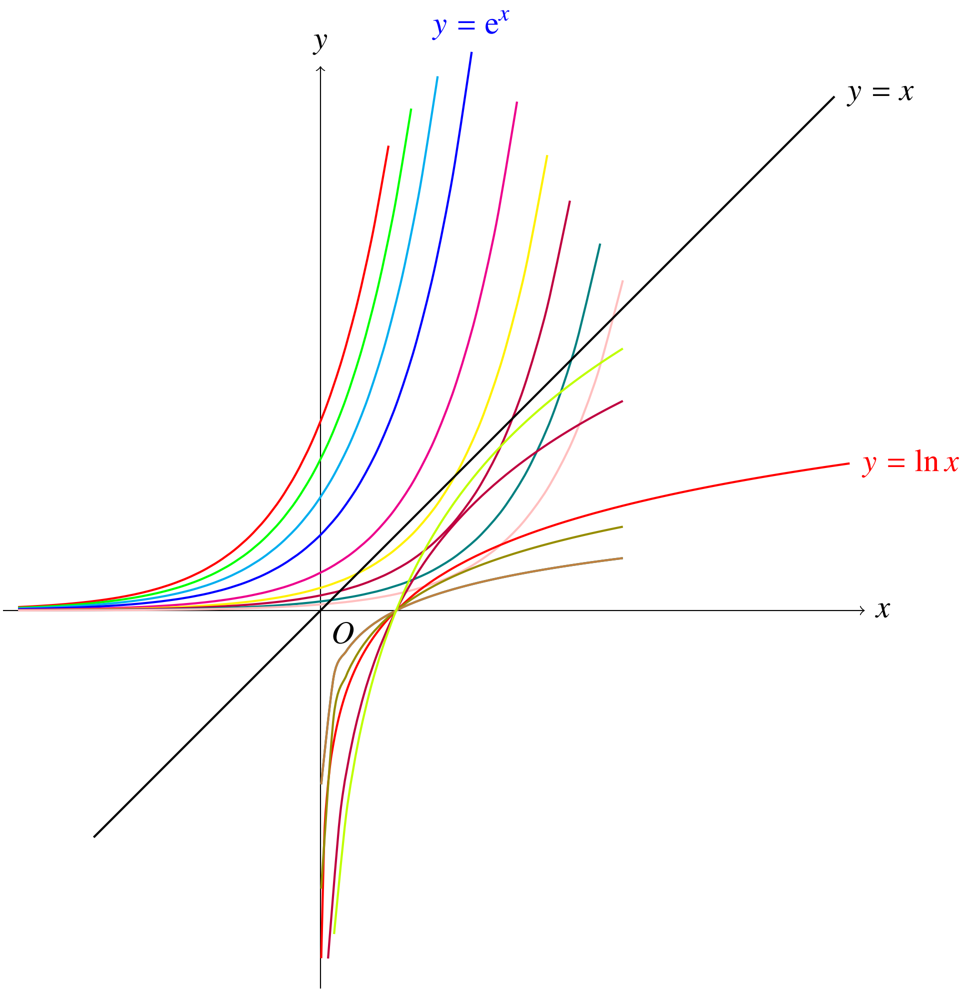


图 3: 指数函数与对数函数互为反函数，图像关于直线 $y = x$ 对称

画了上面这幅图，我不禁想起了老何的两首打油诗：

打油诗 1. 指数函数

一刀冲天刀未残，接近横轴趋无限。
朵朵菊花集一束，愿留芬芳在人间。

打油诗 2. 对数函数

千条万条集一束，左右延伸趋无限。
菊花旋转九十度，指对互为反函数。

π 和 e 作为数学界的“无理双雄”，有着千丝万缕的关系，其中，最好吃的是下图这个关系 。点击这里可下载此图的 PDF 版本。

$$\pi + e = \text{pie}$$

3 π 的莱布尼茨公式

公式 3. π 的莱布尼茨公式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{3}$$

公式 (3) 右边的展式是一个无穷级数，被称为莱布尼茨（Leibniz）级数，这个级数收敛到 $\pi/4$。它通常也被称为格雷戈里-莱布尼茨级数，用以纪念与莱布尼茨同时代的天文学家兼数学家詹姆斯·格雷戈里。

当代有名的数论大家塞尔贝格[③]（Atle Selberg）曾说：

> 我喜欢数学的一个动机就是因为公式 $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \cdots$，这个公式实在美极了，单数 $1, 3, 5 \cdots$ 这样的组合可以给出 π。对于一个数学家来说，此公式正如一幅美丽图画或风景。

③ 塞尔贝格，挪威裔美国籍数学家。由于他所做的关于黎曼 ζ 函数零点分布问题的出色成果，以及对素数定理的初等证明，于 1950 年荣获 Fields 奖，时年 33 岁。他还于 1986 年荣获 Wolf 数学奖。

证明 3. π 的莱布尼茨公式

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \arctan(1)\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1}\left(\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

考虑上式最后一行积分：

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^{2n+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+3} \to 0, \quad n\to\infty$$

根据夹逼定理得：

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

因此：

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

证毕. ♣

4 巴塞尔问题

公式 4. 巴塞尔问题

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6} \tag{4}$$

♡

巴塞尔（Basel）城是瑞士的第三大城市，也是欧拉和伯努利家族的故乡。巴塞尔问题是数学史上非常著名的问题，至今还未被证明的黎曼猜想就是在巴塞尔问题的研究基础上提出的，历史上人们对巴塞尔问题有过许多研究，其中最著名的当属大数学家欧拉（Euler）的证明。法国物理学家阿拉果曾如是评价欧拉：

> 欧拉计算时毫不费力，就像人呼吸、或者鹰在风中保持平衡一样。

以下就是欧拉“毫不费力”的证明～

证明 4. 巴塞尔问题

正弦函数的泰勒级数展开式为：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

两边除以 x $(x \neq 0)$，得：

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

当 $x = n\pi$ 时，$\dfrac{\sin x}{x} = 0$，我们假设可以把这个无穷级数表示为线性因子的乘积[a]：

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

把这个乘积展开，并把所有 x^2 的项收集在一起，可以看到，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的二次项系数为：

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right) = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

从 $\dfrac{\sin x}{x}$ 原先的级数展开式中可以看出，$-\dfrac{1}{3!} = -\dfrac{1}{6}$，因此：

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

等式两边乘以 $-\pi^2$，得出所有平方数的倒数之和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

也即是：

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

证毕.

[a] 欧拉没有严格证明这个无穷积，直到魏尔斯特拉斯得到了他著名的“魏尔斯特拉斯分解定理”（Weierstrass factorization theorem）。

♣

5 欧拉公式

公式 5. 欧拉公式

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{5}$$

♡

欧拉公式被称作“上帝公式”或者“最伟大的数学公式”，因为它体现了数学的高度统一性，将圆周率 π，自然对数的底数 e，以及 i，1，0 这 5 个常数如此简洁地统一于一个公式中。事实上，公式 (5) 是公式：

公式 6. 欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{6}$$

在 $x = \pi$ 时的特例。欧拉公式虽然被称为“最伟大的公式”，但证明它却并不困难，掌握高等数学中泰勒级数的相关知识即可。

公式 7. 欧拉公式

函数 e^x，$\cos x$，$\sin x$ 的泰勒级数形式分别为：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

将 $x = iz$ 代入 e^x 可得：

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \frac{(iz)^8}{8!} + \cdots \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{iz^7}{4!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos z + i\sin z \end{aligned}$$

于是：

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

令 $x = \pi$，则：

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

证毕.

关于巴塞尔问题的更多证明方法，可以阅读 巴塞尔问题（Basel problem）的多种解法，或其 PDF 文件。

6 其他

6.1 拉马努金恒等式

公式 8. 拉马努金恒等式

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}} \tag{7}$$

斯里尼瓦瑟·拉马努金（Srinivasa Ramanujan, 1887 — 1920）是一位印度天才数学家，是亚洲史上最著名的数学家之一。尽管他没有受过正规的高等数学教育，但却沉迷数论，尤爱研究 π、质数等数学常数的求和公式，以及整数分拆。惯以直觉导出公式，不喜作证明，而他的理论在后来往往被证明是正确的。

拉马努金一生成就颇丰，提出过很多天才般的等式。可惜天妒英才，健康问题困扰了拉马努金一生，他去世时年仅 33 岁。

2013 年 11 月 4 日，广州恒大微博曾用拉马努金恒等式预测本队与韩国首尔 FC 亚冠决赛的得分，而对手韩国首尔 FC 的得分则是欧拉公式等号右边的结果 0，即比分为 3-0。最终，广州恒大与首尔 FC 两回合战平 3-3，凭借客场进球制度夺得冠军。

6.2 欧拉常数

公式 9. 欧拉常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0.57721566490\cdots \tag{8}$$

欧拉常数是欧拉在 1735 年发现的一个常数，欧拉曾经使用 C 作为它的符号，并计算出了它的前 6 位小数，意大利数学家洛伦佐·马斯刻若尼引入了 γ 作为这个常数的符号。目前尚不知道该常数是否为有理数。以下是欧拉常数的一些常见积分形式：

证明 5. 欧拉常数常见积分形式

$$\begin{aligned}
\gamma&=-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x=\int_{\infty}^{0}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\ln\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}(\gamma+2\ln 2)\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\ln^2 x\,dx = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

$$\gamma = \int_0^1\int_0^1 \frac{x-1}{(1-xy)\ln(xy)}\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$$

借助欧拉常数，可以轻松证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2$$

证：记

$$a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

则有：

$$a_n = b_{2n} - b_n + \ln(2n) - \ln n = b_{2n} - b_n + \ln 2$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \gamma$，易知也有：

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \gamma$$

于是：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2$$

证毕.

6.3 梅钦公式

公式 10. 梅钦公式

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \tag{9}$$

6.4 斐波那契数列

公式 11. 斐波那契数列

$$a_n = 1/\sqrt{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{10}$$

6.5 连分数

公式 12. 连分数

$$0.618 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} \tag{11}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}} \tag{12}$$

6.6 主席函数

“主席函数”这个名字是我起的，是利用三大数学软件之一的 Mathematica，将毛主席的形象用非常复杂的参数方程表示出来。如下图所示，毛泽东的伟岸形象在这里不是普通意义上“画出来”的，而是被视为函数图像（Plot），用一串相当复杂的参数方程表示出来的。

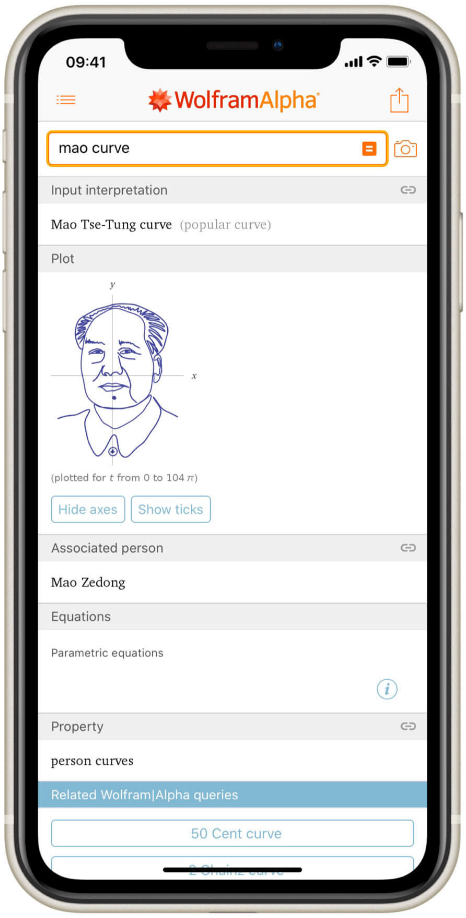


图 4: 在手机上用 WolframAlpha 画“主席函数”

想要知道这个参数方程有多复杂，可前往 WolframAlpha 网页版查看。当然，你也可以玩玩其他名人的形象，都可以这样表示。如果说前面的公式都体现了一种数学的简介美，那么“主席函数”就体现了数学无所不能的美！

§ 参考资料

[1] Ian Stewart. In Pursuit of the Unknown: 17 Equations That Changed the World[M]. New York: Basic Books, 2012.

[2] Le Lionnais François. Currents of Mathematical Thought: Mathematics: Concepts and Development(Vol. 1)[M]. Mineola: Dover Publications, 2004.

[3] 李长江. 多视角下自然数平方和公式的推导[J]. 中学数学研究 (华南师范大学版), 2015(7):42-44.

[4] 汪晓勤. 欧拉与自然数平方倒数和[J]. 曲阜师范大学学报 (自然科学版), 2002, 28(4):29-33.

[5] 汪晓勤. 谁是幂和公式的开山祖[J]. 科学: 上海, 2002, 54(3):53-56.

[6] 吴军. 数学之美[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2012.

[7] 蔡天新. 数学传奇: 那些难以企及的人物[M]. 北京: 商务印书馆, 2018.

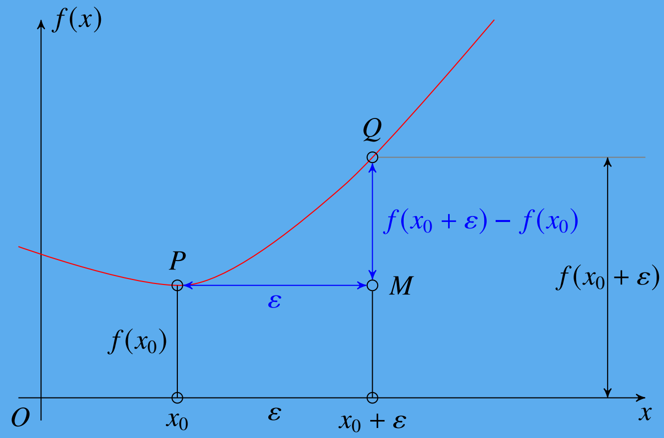
[8] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析 (第二版) (上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[9] 同济大学数学系. 高等数学 (第七版) (上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[10] 同济大学数学系. 高等数学 (第七版) (下册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

数学之美

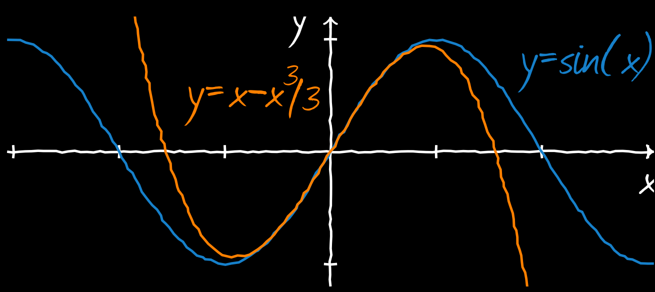
The Beauty of Mathematics

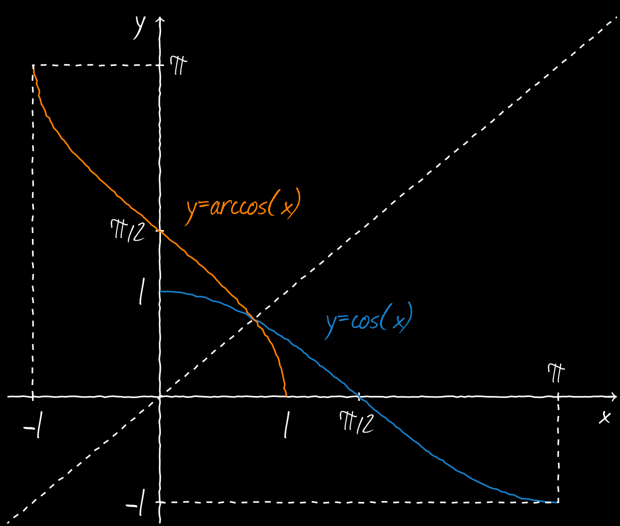


任 涛

Version 3.14

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$





$$e^{i\pi}+1=0$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$