

数学之美 — The Beauty of Mathematics

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

作者：任涛

邮箱: me@tomben.me

日期：2019 年 11 月 18 日

版本: 3.14

$$f(x+\Delta x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\Delta x)^i}{i!}f^{(i)}(x)$$

This booklet was proudly made with [L^AT_EX](#) and inspired by [ElegantBook](#). The Chinese text is set in [Source Han Serif](#) (思源宋体) and [KaiTi](#) (楷体). The western text is set in [newtxtext](#). And the math text is set in [newtxmath](#) with a few [modifications](#). All tools mentioned are [open source](#).

前言

- 2 个多月前，姜同学问了我一道证明自然数前 n 项和的公式的题目，也就是自然数幂和公式，让我有了想要重温一下数学的想法。
- 本文最开始是 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 版本，后来用 Markdown 完成写作，也提供 [PDF 版本](#) 下载，后续可能会持续更新。
- 文中选取了一些非常优美的数学公式，并对部分公式加以证明，以此来领略数学的美妙。数学是晦涩难懂的，但又是美丽动人的，实在是难以用言语表达它的美，让人不由感慨数学真是上帝的杰作！

目录



1 自然数幂和公式	2
2 π 和 e	3
3 π 的莱布尼茨公式	6
4 巴塞尔问题	7
5 欧拉公式	8
6 其他	10
6.1 拉马努金恒等式	10
6.2 欧拉常数	10
6.3 梅钦公式	11
6.4 斐波那契数列	11
6.5 连分数	12
6.6 主席函数	12
§ 参考资料	13

1 自然数幂和公式

公式 1. 自然数平方和

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1)$$



证明 1. 自然数平方和

① 方法一：利用立方差公式累加求和

观察下面的等式：

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1, \\ (n)^3 - (n-1)^3 &= 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1, \\ &\dots\dots\dots \\ 3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1, \\ 2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \end{aligned}$$

将以上 n 个等式相加，左边消去中间项，右边提取公因式合并，得到：

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n$$

化简整理得到：

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

② 方法二：一元函数积分法

构造二次函数：

$$f(x) = x^2, x \in [1, n+1]$$

将区间 $[1, n+1]$ 分割为 n 个区间，则每个小曲边三角形的面积为：

$$\int_k^{k+1} (x^2 - k^2) dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_k^{k+1} - k^2x \Big|_k^{k+1} = k + \frac{1}{3}$$

所以区间 $[1, n+1]$ 上 n 个小矩形面积之和为：

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \int_1^{n+1} x^2 dx - \sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3} - \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

证毕.



公式 2. 自然数立方和

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad (2)$$



证明 2. 自然数立方和

观察下面的等式：

$$\begin{aligned} (n+1)^4 - n^4 &= 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1, \\ n^4 - (n-1)^4 &= 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1, \\ &\dots\dots \\ 3^4 - 2^4 &= 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1, \\ 2^4 - 1^4 &= 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \end{aligned}$$

将以上 n 个等式相加，左边消去中间项，右边提取公因式合并，得到：

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 4(1 + 2 + \cdots + n) + n$$

化简整理得到：

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

证毕。



自然数 n 次幂和公式的规律如下：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} i &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n, & \sum_{i=1}^{n-1} i^2 &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 &= \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2, & \sum_{i=1}^{n-1} i^4 &= \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

2 π 和 e

众所周知， π 表示圆周率，是最著名的一个无理数。在社交媒体上，每年圆周率日^①之际，人们总会分享关于 π 的名言，其中 Lisa Hoffman（丽莎·霍夫曼）的这句算是最为著名的之一了：

Love is like pi — natural, irrational, and very important.

爱情就像 π 一样 — 自然、无理，却至关重要。

① 圆周率日 (Pi Day) 是庆祝圆周率 π 的特别日子，日期是 3 月 14 日，由圆周率最常用的近似值 3.14 而来。美国麻省理工学院首先倡议将 3 月 14 日定为国家圆周率日 (National Pi Day)。2009 年美国众议院正式将每年的 3 月 14 号设定为“圆周率日” (Pi Day)。3 月 14 日也是阿尔伯特·爱因斯坦的生日，卡尔·马克思和史蒂芬·霍金的忌日以及白色情人节。

可能是在丽莎·霍夫曼这句话的基础上，另外一句关于 π 类似的话也在网络上广为流传，并且被印在 [T-shirt](#) 上进行出售。

Love is like pi — irrational and never-ending.

爱情就像 π 一样 — 无理并且无穷无尽。

π 有多“无理且无穷无尽”呢？下图是“ π 的足迹”^②。

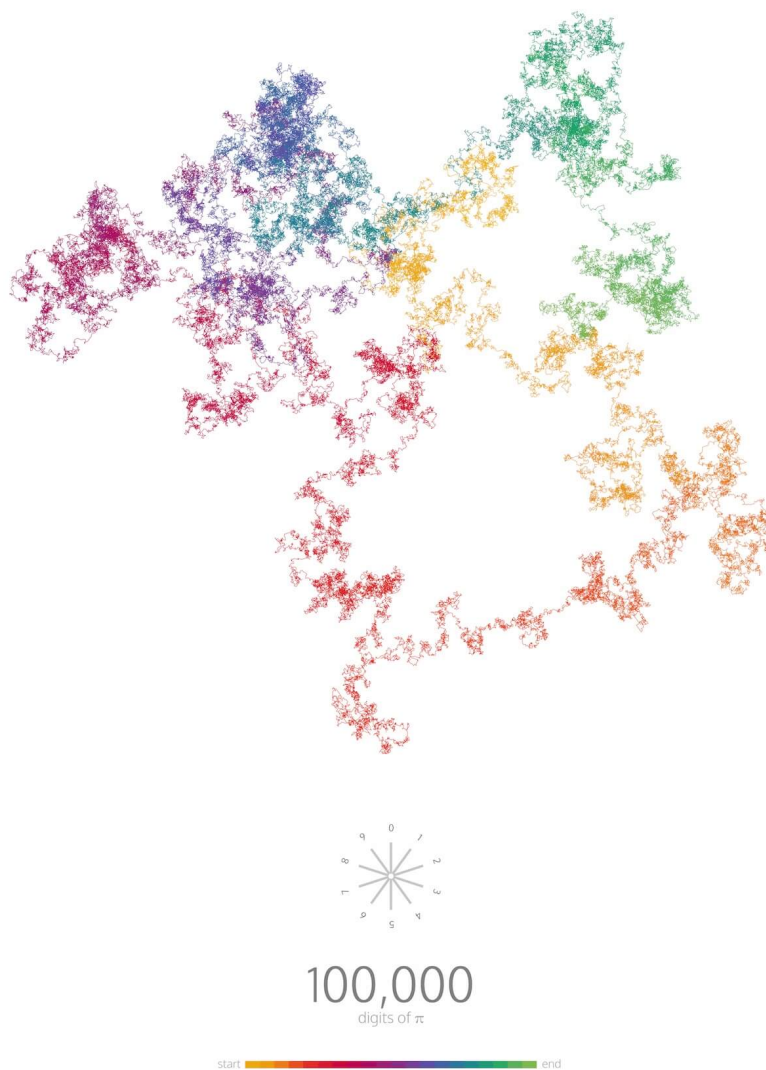


图 1: 100000 位小数的 π

法国数学家弗朗索瓦·勒·利奥奈（François Le Lionnais）曾说：

Who has not been amazed to learn that the function $y = e^x$, like a phoenix rising from its own ashes, is its own derivative?

有谁不被 $y = e^x$ 惊艳过？就像浴火重生的凤凰一般，它从自身的导数中一飞冲天。

^② 不够直观？前往[这里](#)查看 π 的动态小数位数。

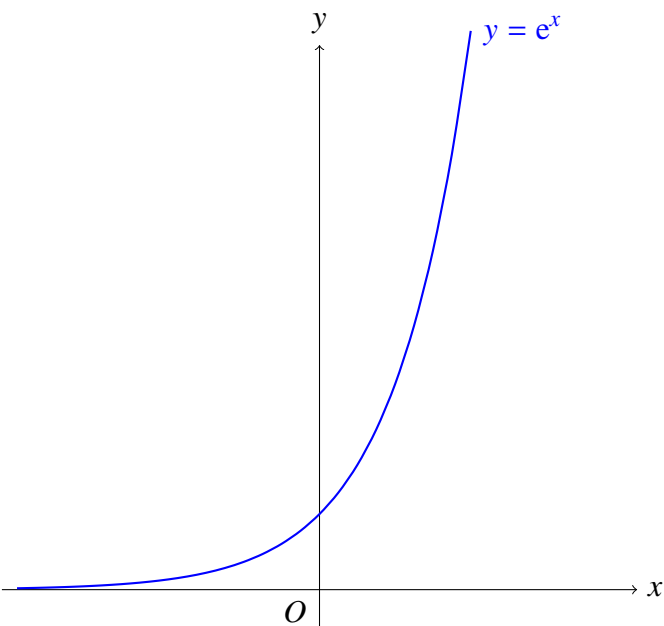


图 2: $y = e^x$ 一飞冲天

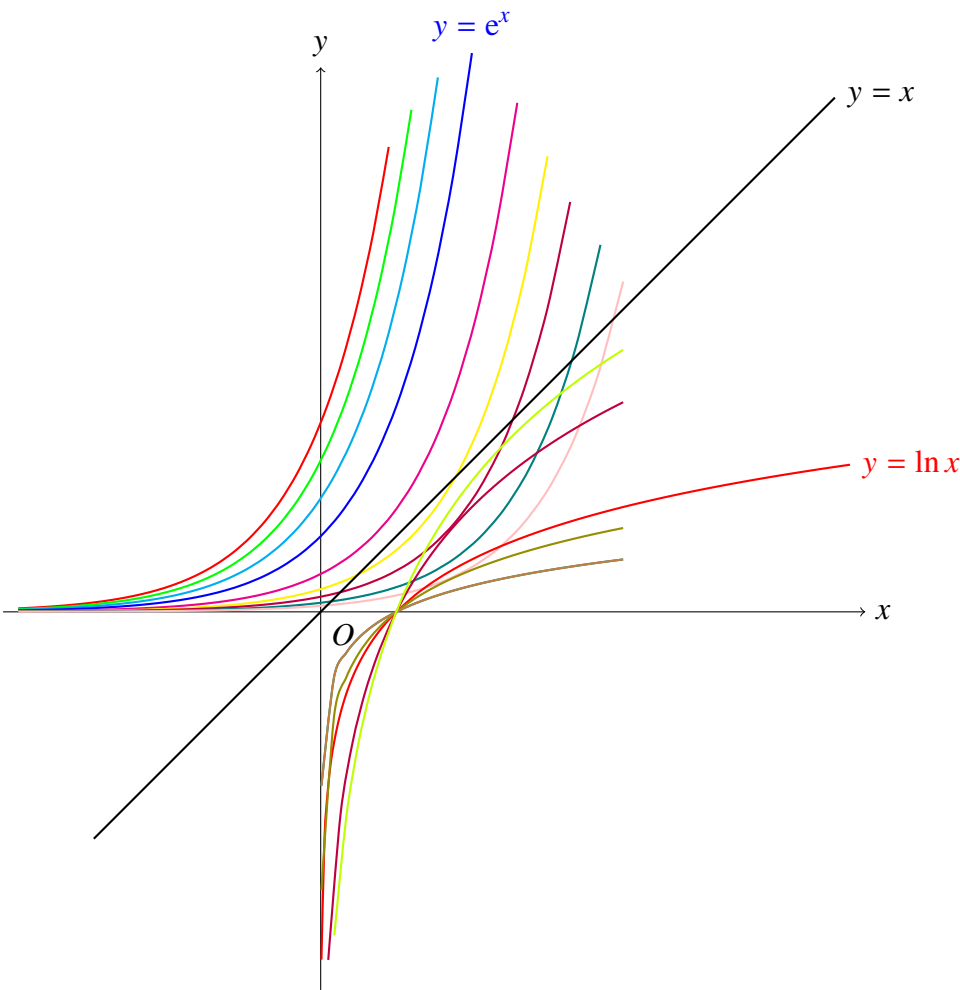


图 3: 指数函数与对数函数互为反函数，图像关于直线 $y = x$ 对称

画了上面这幅图，我不禁想起了老何的两首打油诗：




打油诗 1. 指数函数

一刀冲天刀未残，接近横轴趋无限。
朵朵菊花集一束，愿留芬芳在人间。

打油诗 2. 对数函数

千条万条集一束，左右延伸趋无限。
菊花旋转九十度，指对互为反函数。

π 和 e 作为数学界的“无理双雄”，有着千丝万缕的关系，其中，最好吃的是下图这个关系。点击[这里](#)可下载此图的 PDF 版本。

$$\pi + e = \text{pie}$$


3 π 的莱布尼茨公式公式 3. π 的莱布尼茨公式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (3)$$

公式 (3) 右边的展式是一个无穷级数，被称为莱布尼茨 (Leibniz) 级数，这个级数收敛到 $\pi/4$ 。它通常也被称为格雷戈里-莱布尼茨级数，用以纪念与莱布尼茨同时代的天文学家兼数学家詹姆斯·格雷戈里。

当代有名的数论大家塞尔贝格^③ (Atle Selberg) 曾说：

我喜欢数学的一个动机就是因为公式 $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \cdots$ ，这个公式实在美极了，单数 1, 3, 5... 这样的组合可以给出 π 。对于一个数学家来说，此公式正如一幅美丽图画或风景。

^③ 塞尔贝格，挪威裔美国籍数学家。由于他所做的关于黎曼 ζ 函数零点分布问题的出色成果，以及对素数定理的初等证明，于 1950 年荣获 Fields 奖，时年 33 岁。他还于 1986 年荣获 Wolf 数学奖。

证明 3. π 的莱布尼茨公式

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \arctan(1) \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \right) dx \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \left(\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right)
\end{aligned}$$

考虑上式最后一行积分：

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

根据夹逼定理得：

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx = 0$$

因此：

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

证毕.



4 巴塞尔问题

公式 4. 巴塞尔问题

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \quad (4)$$



巴塞尔（Basel）城是瑞士的第三大城市，也是欧拉和伯努利家族的故乡。巴塞尔问题是数学史上非常著名的问题，至今还未被证明的黎曼猜想就是在巴塞尔问题的研究基础上提出的，历史上人们对巴塞尔问题有过许多研究，其中最著名的当属大数学家欧拉（Euler）的证明。法国物理学家阿拉果曾如是评价欧拉：

欧拉计算时毫不费力，就像人呼吸、或者鹰在风中保持平衡一样。

以下就是欧拉“毫不费力”的证明～

证明 4. 巴塞尔问题

正弦函数的泰勒级数展开式为：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

两边除以 x ($x \neq 0$)，得：

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

当 $x = n\pi$ 时， $\frac{\sin x}{x} = 0$ ，我们假设可以把这个无穷级数表示为线性因子的乘积^a：

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots \end{aligned}$$

把这个乘积展开，并把所有 x^2 的项收集在一起，可以看到， $\frac{\sin x}{x}$ 的二次项系数为：

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

从 $\frac{\sin x}{x}$ 原先的级数展开式中可以看出， $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$ ，因此：

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

等式两边乘以 $-\pi^2$ ，得出所有平方数的倒数之和：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

也即是：

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

证毕。

^a 欧拉没有严格证明这个无穷积，直到魏尔斯特拉斯得到了他著名的“魏尔斯特拉斯分解定理”（Weierstrass factorization theorem）。



5 欧拉公式

公式 5. 欧拉公式

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (5)$$



欧拉公式被称作“上帝公式”或者“最伟大的数学公式”，因为它体现了数学的高度统一性，将圆周率 π ，自然对数的底数 e ，以及 i ， 1 ， 0 这 5 个常数如此简洁地统一于一个公式中。事实上，公式 (5) 是公式：

公式 6. 欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (6) \quad \heartsuit$$

在 $x = \pi$ 时的特例。欧拉公式虽然被称为“最伟大的公式”，但证明它却并不困难，掌握高等数学中泰勒级数的相关知识即可。

公式 7. 欧拉公式

函数 e^x ， $\cos x$ ， $\sin x$ 的泰勒级数形式分别为：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

将 $x = iz$ 代入 e^x 可得：

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \frac{(iz)^8}{8!} + \cdots$$

$$= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{iz^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots\right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \cos z + i \sin z$$

于是：

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

令 $x = \pi$ ，则：

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

证毕. \heartsuit

关于 Basel 问题的更多证明方法，可以阅读 [巴塞尔问题 \(Basel problem\) 的多种解法](#)，或其 [PDF 文件](#)。

6 其他

6.1 拉马努金恒等式

公式 8. 拉马努金恒等式

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \cdots}}}}} \quad (7)$$



斯里尼瓦瑟·拉马努金 (Srinivasa Ramanujan, 1887 — 1920) 是一位印度天才数学家，是亚洲史上最著名的数学家之一。尽管他没有受过正规的高等数学教育，但却沉迷数论，尤爱研究 π 、质数等数学常数的求和公式，以及整数分拆。惯以直觉导出公式，不喜作证明，而他的理论在后来往往被证明是正确的。

拉马努金一生成就颇丰，提出过很多天才般的等式。可惜天妒英才，健康问题困扰了拉马努金一生，他去世时年仅 33 岁。

2013 年 11 月 4 日，[广州恒大微博](#)曾用拉马努金恒等式预测本队与韩国首尔 FC 亚冠决赛的得分，而对手韩国首尔 FC 的得分则是欧拉公式等号右边的结果 0，即比分为 3-0。最终，广州恒大与首尔 FC 两回合战平 3-3，凭借客场进球制度夺得冠军。

6.2 欧拉常数

公式 9. 欧拉常数

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.57721566490 \cdots \quad (8)$$



欧拉常数是欧拉在 1735 年发现的一个常数，欧拉曾经使用 C 作为它的符号，并计算出了它的前 6 位小数，意大利数学家洛伦佐·马斯刻若尼引入了 γ 作为这个常数的符号。目前尚不知道该常数是否为有理数。以下是欧拉常数的一些常见积分形式：

证明 5. 欧拉常数常见积分形式

$$\begin{aligned} \gamma &= - \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \int_{\infty}^0 e^{-x} \ln x \, dx = - \int_0^1 \ln \ln \frac{1}{x} \, dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} \, dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 + x} - e^{-x} \right) \, dx \\ &\quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} \ln x \, dx = -\frac{1}{4}(\gamma + 2 \ln 2)\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln^2 x \, dx = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

$$\gamma = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-1}{(1-xy) \ln(xy)} \, dx \, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)$$

借助欧拉常数，可以轻松证明：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$$

证：记

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

则有：

$$a_n = b_{2n} - b_n + \ln(2n) - \ln n = b_{2n} - b_n + \ln 2$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \gamma$ ，易知也有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} = \gamma$$

于是：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$$

证毕.



6.3 梅钦公式

公式 10. 梅钦公式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \quad (9)$$



6.4 斐波那契数列

公式 11. 斐波那契数列

$$a_n = 1/\sqrt{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (10)$$



6.5 连分数

公式 12. 连分数

$$0.618 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

(11)

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

(12)



6.6 主席函数

“主席函数”这个名字是我起的，是利用三大数学软件之一的 Mathematica，将毛主席的形象用非常复杂的参数方程表示出来。如下图所示，毛泽东的伟岸形象在这里不是普通意义上“画出来”的，而是被视为函数图像（Plot），用一串相当复杂的参数方程表示出来的。

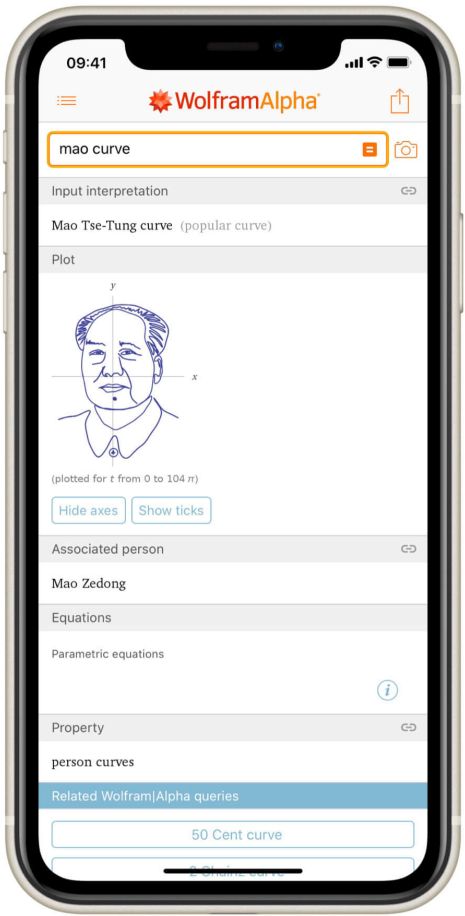


图 4: 在手机上用 WolframAlpha 画“主席函数”



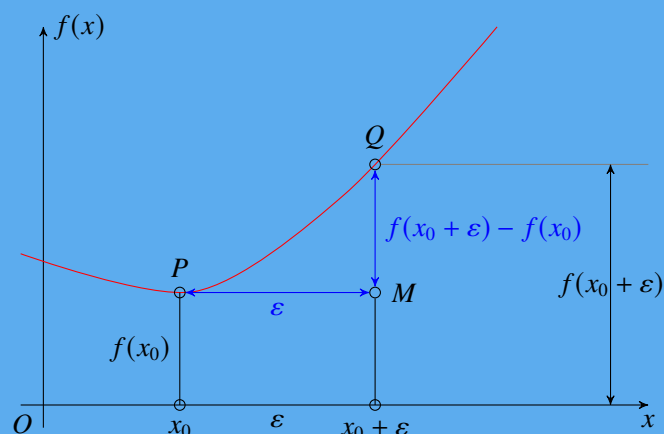
想要知道这个参数方程有多复杂,可前往 [WolframAlpha 网页版](#) 查看。当然,你也可以玩玩其他名人的形象,都可以这样表示。如果说前面的公式都体现了一种数学的简洁美,那么“主席函数”就体现了数学无所不能的美!

§ 参考资料

- [1] Ian Stewart. [In Pursuit of the Unknown: 17 Equations That Changed the World](#)[M]. New York: Basic Books, 2012.
- [2] Le Lionnais François. [Currents of Mathematical Thought: Mathematics: Concepts and Development](#)(Vol. 1)[M]. Mineola: Dover Publications, 2004.
- [3] 李长江. [多视角下自然数平方和公式的推导](#)[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2015(7):42-44.
- [4] [汪晓勤. 欧拉与自然数平方倒数和](#)[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2002, 28(4):29-33.
- [5] [汪晓勤. 谁是幂和公式的开山祖](#)[J]. 科学: 上海, 2002, 54(3):53-56.
- [6] 吴军. [数学之美](#)[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2012.
- [7] 蔡天新. [数学传奇: 那些难以企及的人物](#)[M]. 北京: 商务印书馆, 2018.
- [8] 陈纪修, 於崇华, 金路. [数学分析\(第二版\)\(上册\)](#)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [9] 同济大学数学系. [高等数学\(第七版\)\(上册\)](#)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [10] 同济大学数学系. [高等数学\(第七版\)\(下册\)](#)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

数学之美

The Beauty of Mathematics

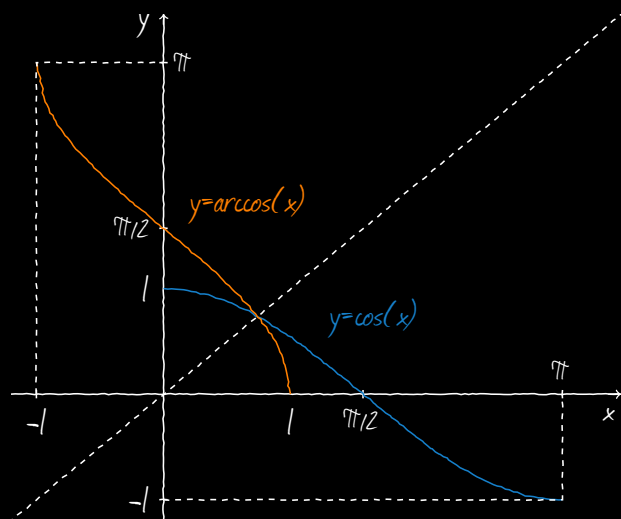
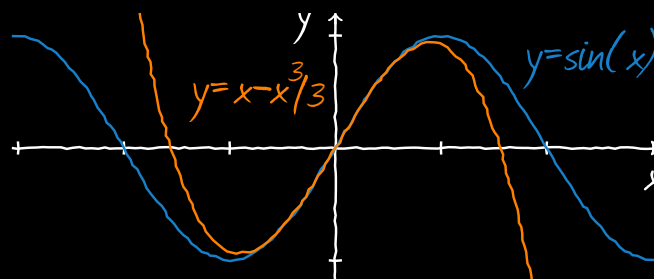


任涛

Version 3.14

Under the LPPL, version 1.3c

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$



$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$