# Producto de grupos

En proceso, att. Tomás

## **Producto directo**

Recordando que el producto cartesiano de una familia de conjuntos es generalizado como

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ f: I o igcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i, orall i \in I 
ight\}$$

Es decir, sucesiones de longitud I, donde el i-ésimo término (f(i)) es un elemento del i-ésimo conjunto.

A partir de una familia  $G=\{(G_i,\cdot_i)\}_{i\in I}$  de grupos, podemos definir una estructura  $(\prod G,\times)$  tal que la operación es dada por

$$egin{aligned} imes : \prod G imes \prod G 
ightarrow \prod G \ (f,g) \mapsto f imes g = h \end{aligned}$$

Donde

$$egin{aligned} h:I & 
ightarrow igcup_{i \in I} A_i \ i & 
ightarrow f(i) \cdot_i g(i) \end{aligned}$$

Básicamente, es un producto componente a componente con la operación respectiva al grupo.

# Veamos que $(\prod G, \times)$ es un grupo:

- Elemento neutro: Definimos  $e \in \prod G$  tal que  $e(i) = e_i, \ \forall i \in I$ . Así, para todo elemento  $f \in \prod G$ ,  $(f \times e)(i) = f(i) \cdot_i e(i) = f(i) \cdot_i e_i = f(i)$  por lo que  $f \times e = f$ , análogamente llegamos a que  $e \times f = f$ .
- Inversos: Sea  $f\in \prod G$ , podemos definir  $f^{-1}$  tal que  $f^{-1}(i)=(f(i))^{-1}, \forall i\in I$ . Así, se tiene que  $(f\times f^{-1})(i)=f(i)\cdot_i (f(i))^{-1}=e_i$ , luego  $f\times f^{-1}=e$  y similarmente  $f^{-1}\times f=e$ .
- Asociatividad: Sean  $f,g,h\in\prod G$ , [(f imes g) imes h](i)=(f(i) imes g(i)) imes h(i), como  $G_i$  es un grupo, (f(i) imes g(i)) imes h(i)=f(i) imes (g(i) imes h(i)),  $\forall i\in I$ , por lo que (f imes g) imes h=f imes (g imes h).

Ahora, también podemos definir el siguiente automorfismo, denominado como **proyección** canónica:

$$\pi_j:\prod G o \prod G \ f\mapsto h$$

Donde

$$h(i) = egin{cases} e_i, & i 
eq j \ f(i), & i = j \end{cases}$$

O visto de otra forma,  $\pi_j(a_1,a_2,...,a_j,...,a_n)=(e_1,e_2,...,e_{j-1},a_j,e_{j+1},...,e_n)$ .

De esto, es fácil ver que  $\pi_j\left[\prod G\right]\cong G_j$ .

Análogamente, podemos definir  $\pi_j'$  tal que si  $k=\pi_j'(f)$  entonces

$$k(i) = egin{cases} f(i), & i 
eq j \ e_i, & i = j \end{cases}$$

Nuevamente, veremos que  $\pi_j' \left[\prod G
ight] \cong G_1 imes G_2 imes ... imes G_{j-1} imes G_{j+1} imes ... imes G_n$  .

Además se tiene que  $k \times h = h \times k = f$ .

Por último, también se puede demostrar que  $\pi_j \ [\prod G]$  y  $\pi_j' \ [\prod G]$  son subgrupos normales en  $\prod G$ .

## **Ejercicios:**

• Si  $a_i$  es de orden finito en  $G_i$ , ¿cúal es el orden de  $(a_1,a_2,...,a_n)$  en  $\prod_{i\in n}G_i$ ?

#### Solución:

Sea  $m_i=|a_i|,\ \forall i\in I$ , tomemos  $m=m.c.m.(m_i)_{i\in n}$ , usando que la multiplicación es componente a componente y la exponenciación es multiplicación recursiva, tenemos que  $(a_1,a_2,...,a_n)^m=(a_1^m,a_2^m,...,a_n^m)$ , como  $m_i|m,\ \forall i\in n$ , entonces  $(a_1,a_2,...,a_n)^m=e$ .

Ahora supongamos que existe m' < m tal que  $(a_1,a_2,...,a_n)^{m'} = e$ , con el argumento anterior sabemos que  $e = (e_1,e_2,...,e_n) = (a_1^{m'},a_2^{m'},...,a_n^{m'})$ , así,  $a_i^{m'} = e_i$  de manera que  $m_i|m', \ \forall i \in n$ . Sin embargo esto contradice el hecho que m sea el mínimo común múltiplo de todos los  $m_i$ , por tanto  $|(a_1,a_2,...,a_n)| = m$ .

## Suma directa externa

### Definición. Soporte de f:

Sea  $f \in \prod G$ , definimos el **soporte de** f como el subconjunto de I donde f(i) no sea el neutro, esto es:

$$I_f:=\{i\in I: f(i)
eq e_i\}$$

## Definición. Producto directo débil (externo):

Sea  $G = \{G_i\}_{i \in I}$  una familia de grupos, definimos el **producto directo débil (externo)** como:

$$\prod^w G := \{f \in \prod G : |I_f| \in \mathbb{N}\}$$

Esto es, los elementos  $(a_1,a_2,...)$  con un número finito de componentes no neutras. Naturalmente si I es finito entonces el producto directo débil coincide con el producto directo. Si  $G_i$  es abeliano para todo  $i \in I$ , el producto directo debil se denomina **suma directa externa** y se denota con  $\sum G$ . La operación del producto directo debil (externo) será denotado por  $\circledast$  y por  $\oplus$  para suma directa externa.

#### **Teorema:**

Sea  $N=\{N_i\}_{i\in I}$  una familia de subgrupos normales en G tales que

1. 
$$G=\langle \bigcup N 
angle$$
 .

2. 
$$N_j \cap N_k = \{e\}$$
 para todos  $j,k \in I$  con  $j 
eq k$ .

Entonces  $G\cong\prod^w N$ .

#### Demostración:

Sea  $f\in \prod^w N$ , sabemos que  $I_f$  es finito y podemos definir  $\prod_{i\in I_f} f(i)$  como un elemento de G, por otro lado, por la segunda condición sabemos que si  $j\neq k$ ,  $a_ka_j=a_ja_k$  para todos  $a_j\in N_j,\ a_k\in N_j$ . Así planteamos

$$arphi:\prod^w N o G \ f\mapsto \prod_{i\in I_f}f(i)$$

Veamos que  $\varphi$  es un homomorfismo: Sean  $h,j\in\prod^w N$ ,  $\varphi(h\circledast j)=\prod_{i\in I_0}(h\circledast j)(i)$  donde  $I_0=\{i\in I:h(i)\cdot j(i)\neq e\}$  que sabemos es subconjunto de  $I_h\cup I_j$ , como  $I_h$  e  $I_j$  son finitos,  $|I_0|\leq |I_h|+|I_j|$ , así tenemos una productoria finita y por tanto

$$egin{aligned} arphi(h \circledast j) &= (h \circledast j)(i_0) \cdot (h \circledast j)(i_1) \cdot ... \cdot (h \circledast j)(i_n) \ &= h(i_0) \cdot j(i_0) \cdot h(i_1) \cdot j(i_1) \cdot ... \cdot h(i_n) \cdot j(i_n) \ &= h(i_0) \cdot h(i_1) \cdot ... \cdot h(i_n) \cdot j(i_0) \cdot j(i_1) \cdot ... \cdot j(i_n) \ &= \prod_{i \in I_0} h(i) \cdot \prod_{i \in I_0} j(i) \ &= \prod_{i \in I_h \cup I_j} h(i) \cdot \prod_{i \in I_h \cup I_j} j(i) \ &= \varphi(h) \cdot arphi(j) \end{aligned}$$

Ahora veamos que  $\varphi$  es un monomorfismo usando que  $\ker \varphi = \{f_e\}$  donde  $f_e$  es el neutro de  $\prod^w N$ : La segunda contenencia se tiene inmediata, por esto nos centramos en  $\ker \varphi \subseteq \{f_e\}$ . Sea  $k \in \ker \varphi$ , sabemos que  $\prod_{i \in I_k} k(i) = e$ , esto es  $k(i_0) \cdot k(i_1) \cdot \ldots \cdot k(i_m) = e$ . Suponga que  $k \neq f_e$ , luego  $k(o) \neq e$  para algún  $o \in I_k$ , luego  $k(o) \in N_o$  y por tanto,  $[k(o)]^{-1} \in \prod_{i \in I_k - \{o\}} f(i)$  sin embargo  $[k(o)]^{-1} \in N_o$ , lo que contradice que sean grupos disyuntos salvo la identidad. Concluimos que k(i) = e,  $\forall i \in I_k$ , luego  $k = f_e$  y por tanto  $\ker \varphi \subseteq \{e_f\}$ . Así  $\varphi$  es inyectiva.

Por último, veamos que  $\varphi$  es un epimorfismo: Sea  $g\in G$ , por la primera condición sabemos que  $g=q_1q_2...q_n$  para  $q_l\in N_l$  con  $l\in L\subseteq I$ . Luego, definimos  $x:I\to\bigcup N$  tal que

$$x(i) = egin{cases} e, & i 
otin L \ q_i, & i \in L \end{cases}$$

Dado que g es generado por un número finito de elementos,  $I_x$  es finito y por tanto  $x\in\prod^w N$  y  $\varphi(x)=g$ . Concluimos de esto que  $\varphi$  es sobreyectiva, que con lo mostrado anteriormente demuestra que  $\varphi$  es un isomorfismo y por tanto  $G\cong\prod^w N$ .

Con este resultado en mente, presentamos la siguiente definición:

## Suma directa interna

Sea  $N=\{N_i\}_{i\in I}$  una familia de subgrupos normales de G tales que  $G=\langle\bigcup_{i\in I}N_i\rangle$  y para todo  $k\in I$ ,  $N_k\cap\langle\bigcup_{i\in I-\{k\}}N_i\rangle=\{e\}$  (los subgrupos son disyuntos dos a dos

exceptuando el neutro). Entonces se dice que G tiene un **producto directo interno débil (** PDID) para la familia N. Si G es abeliano se dirá que tiene una **suma directa interna**.

#### **Teorema:**

Sea  $N=\{N_i\}_{i\in I}$  una familia de subgrupos normales de G. G tiene un producto directo interno débil por N si y solo si todo elemento  $g\in G$  puede verse como producto único de  $a_{i_0}\cdot a_{i_1}\cdot \ldots \cdot a_{i_n}$  donde  $e\neq a_{i_k}\in N_{i_k},\ \forall k\leq n$ 

#### Demostración:

- $(\Rightarrow)$ : Sea  $g\in G$ , por el teorema anterior, como  $\prod^w N\cong G$ , entonces existe un isomorfismo  $\varphi$  tal que  $\varphi^{-1}(g)\in\prod^w N$ , además como  $\varphi$  es biyectiva sólo existe un f tal que  $\varphi(f)=g$ , así,  $g=f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(n)$  por la definición de PDID.
- ( $\Leftarrow$ ): Dado que todo elemento puede expresarse como producto de elementos de los subgrupos normales, se tiene (1.). Ahora veamos que para  $i,j\in I$ , si  $i\neq j$  entonces  $N_i\cap N_j=\{e\}$ : Supongamos que  $N_i\cap N_j\neq \{e\}$ , luego existe  $a\in N_i\cap N_j$  y como ambos son subgrupos,  $a^{-1}\in N_i\cap N_j$ , sea  $x=b_0\cdot b_1\cdot\ldots\cdot b_i\cdot\ldots\cdot b_j\cdot\ldots\cdot b_n$ , se puede ver que no importa si  $b_i=a$  y  $b_j=a^{-1}$  o si  $b_i=a^{-1}$  y  $b_j=a$  pues suponemos que conmutan con el resto de los elementos de la productoria, luego contradice qeu exista una única representación de los elemento de G. Por tanto concluimos que  $N_i\cap N_j=\{e\}$  y por tanto se tiene (2). Por el teorema anterior G tiene un PDID por N.

## Nota. Distinción entre producto interno y externo:

En general, si hablamos de  $\operatorname{PDID}$  en  $\prod_{i\in I}^w N_i$  se sobreentiende que  $N_i \unlhd G, \ \forall i\in I$  para algún G. Mientras que si hablamos de  $\operatorname{PDED}$ , no necesariamente  $N_i$  y  $N_j$  estén relacionados directamente.

## **Producto semidirecto**

### Motivación:

Supongamos que tenemos dos grupos  $G_1$  y  $G_2$ , ya vimos anteriormente que podemos definir un grupo por medio del producto directo  $G_1 \times G_2$ , sin embargo puede que queramos una relación más estrecha entre ambos grupos, esto lo podemos lograr por medio de acciones de grupo, particularmente vamos a buscar una acción  $\varphi$ 

$$arphi:G_2 o\operatorname{Aut}(G_1)\ x\mapsto arphi_x$$

Donde  $\varphi_x$  es un automorfismo de  $G_1$ , es decir, que  $\varphi_x(ab)=\varphi_x(a)\varphi_x(b)$  donde  $a,b\in G_1$ , además, pedimos que cumpla que para todos  $x,y\in G_2$  y  $a,b\in G_1$ ,  $\varphi_{e_2}(a)=a$  y  $\varphi_{xy}(a)=\varphi_x(\varphi_y(a))$ . Así, a partir de una acción  $\varphi$  se define al siguiente operación binaria para  $G_1\times G_2$ , sean  $a_1,b_1\in G_1$  y  $a_2,b_2\in G_2$ ,

$$(a_1,a_2)(b_1,b_2)=(a_1arphi_{a_2}(b_1),a_2b_2)$$

De esta forma, cuando dispongamos de una acción  $\varphi$  y queramos referenciar este producto, denotaremos la estructura algebraica como  $G_1 \rtimes G_2$  o incluso, dado que la operación depende de la acción, se puede usar  $G_1 \rtimes_{\varphi} G_2$ .

Veamos que esta estrucutra define un grupo:

- Asociatividad: Sean  $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in G_1
times G_2$ ,

$$egin{aligned} [(a_1,a_2)(b_1,b_2)](c_1,c_2) &= (a_1arphi_{a_2}(b_1),a_2b_2)(c_1,c_2) \ &= (a_1arphi_{a_2}(b_1)arphi_{a_2b_2}(c_1),a_2b_2c_2) \ &= (a_1arphi_{a_2}(b_1)arphi_{a_2}(arphi_{b_2}(c_1)),a_2b_2c_2) \ &= (a_1arphi_{a_2}(b_1arphi_{b_2}(c_1)),a_2b_2c_2) \ &= (a_1,a_2)[(b_1arphi_{b_2}(c_1),b_2c_2)] \ &= (a_1,a_2)[(b_1,b_2)(c_1,c_2)] \end{aligned}$$

ullet Elemento neutro: Existe  $(e_1,e_2)$  tal que para todo  $(a,b)\in G_1
times G_2$ 

$$(a,b)(e_1,e_2)=(aarphi_b(e_1),be_2)=(ae_1,b)=(a,b)$$

• **Elemento inverso:** Para todo  $(a,b)\in G_1
times G_2$ , podemos definir  $(arphi_{b^{-1}}(a^{-1}),b^{-1})$  tal que

$$egin{aligned} (a,b)(arphi_{b^{-1}}(a^{-1}),b^{-1}) &= (aarphi_b(arphi_{b^{-1}}(a^{-1})),bb^{-1}) \ &= (aarphi_{bb^{-1}}(a^{-1}),e_2) \ &= (aarphi_{e_2}(a^{-1}),e_2) \ &= (aa^{-1},bb^{-1}) \ &= (e_1,e_2) \end{aligned}$$

# Teorema Fundamental de grupos abelianos finitamente generados:

$$\mathbb{Z}_{p_1^{\mathbb{k}_1}} imes \mathbb{Z}_{p_2^{\mathbb{k}_2}} imes ... imes \mathbb{Z}_{p_n^{\mathbb{k}_n}} imes \mathbb{Z} imes ... imes \mathbb{Z}$$

Donde  $p_i$  son números primos no necesariamente distintos y  $k_i \in \mathbb{N}$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .

Este producto es único salvo presentación.

Esto es,

$$G\cong\prod_{i=1}^n\mathbb{Z}_{p_i}^{\Bbbk_i} imes\mathbb{Z}^m$$

Donde n y m son únicos.

# Propiedad universal del Producto:

Sean  $G=\{G_i\}_{i\in I}G_i$  una familia de grupos,  $\prod G$  el producto usual y  $\pi=\{\pi_j:\prod G\to G_j\}_{j\in I}$  las proyecciones canónicas. Entonces,

1. Para cada grupo H con homomorfismos  $\{p_j: H \to G_j\}_{j \in I}$ , existe un único homomorfismo  $\alpha: H \to \prod G$  tal que  $\pi_j \alpha = p_j$  para todo  $j \in I$ .

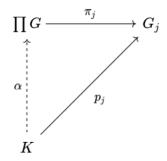
Esto nos dice que si un grupo H tiene homomorfismos hacia cada grupo de la familia G, entonces existe un homomorfismo  $\alpha$  hacia  $\prod G$  caracterizado por sus  $p_j$ .

2. Si otro grupo K que tenga  $\pi'=\{\pi':K\to G_j\}_{j\in I}$  y también tenga la propiedad (1), es isomorfo a  $\prod G$ .

Es decir, que K cumple varias de las propiedades de  $\prod G$ , y esas propiedades son suficientes para garantizar que K y  $\prod G$  son isomorfos.

#### Demostración:

1. Básicamente queremos definir un  $\alpha$  tal que el siguiente diagrama sea conmutativo:

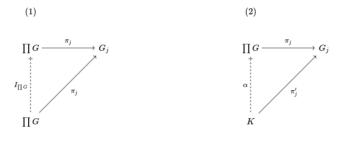


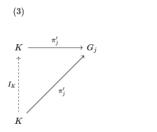
Así, que definimos

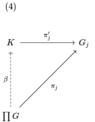
$$lpha:K o\prod G \ x\mapsto y$$

Donde  $y(i)=p_i(x)$  para todo  $i\in I$ . Así, usando que el producto es componente a componente y que todos los conjuntos son grupos, tenemos que  $\alpha$  es un homomorfismo. Por la construcción misma,  $\pi_j\alpha=p_j$  y es fácil ver la unicidad.

#### 2. Tenemos los siguientes diagramas:







- (1) lo tenemos pues es un caso particular de la primera propiedad.
- $\circ$  (2) se tiene así mismo pues K es un grupo con homomorfismos hacia cada grupo de G entonces tenemos garantizada la existencia y unicidad de  $\alpha$ .
- 。 (3) y (4) son análogos a (1) y (2) respectivamente.

Así, sabemos que  $\pi_j'eta=\pi_j$  y  $\pi_jlpha=\pi_j'$  por lo que tenemos que

$$\pi'_{j}(\beta\alpha) = (\pi'_{j}\beta)\alpha$$
$$= \pi_{j}\alpha$$
$$= \pi'_{j}$$

y análogamente  $\pi_j(\alpha\beta)=\pi_j$ . Así,  $\beta\alpha$  es una función de K en K tal que  $\pi'_j(\beta\alpha)=\pi'_j$ , sin embargo por el diagrama (3) sabemos que sólo existe una única función que cumple

eso y es la identidad, por tanto  $\beta\alpha=I_K$  y análogamente  $\alpha\beta=I_{\prod G}$ , por tanto se sabe que  $\alpha$  y  $\beta$  son biyecciones y como también son homomorfismos concluimos que  $\prod G\cong K$ .