Tarea Acciones de Grupo

Maira Florez y Tomás Galeano

Sea X un G-conjunto:

a). Muestre que para cada $g \in G$ la función $\sigma_g : X \to X$ definida por $\sigma_g(x) = gx$ para $x \in X$ es una permutación en X.

Recordando que por definición,

> Una permutación de un conjunto A es una función biyectiva $\phi : A \to A$.

Por otro lado, si X es un G-conjunto es porque existe una función

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

Que además cumple que

1. $ex = x, \forall x \in X$.
2. $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x), \forall g_1, g_2 \in G$ y $\forall x \in X$.

Tenemos que comprobar que σ_g es biyectivo para todo $g \in G$.

- **Inyectividad:** Sean $x, y \in X$ tales que $\sigma_g(x) = \sigma_g(y)$ para algún $g \in G$. Sabemos que G es un grupo por lo que $g^{-1} \in G$ y así $\sigma_{g^{-1}}$ es también una función bien definida. Evaluando $\sigma_g(x)$ en $\sigma_{g^{-1}}$ tenemos que

$$\begin{aligned} x &= ex \\ &= (g^{-1}g)x \\ &= g^{-1}(gx) \\ &= \sigma_{g^{-1}}(\sigma_g(x)) \\ &= \sigma_{g^{-1}}(\sigma_g(y)) \\ &= g^{-1}(gy) \\ &= (g^{-1}g)y \\ &= ey \\ &= y \end{aligned}$$

Y por tanto $x = y$.

- **Sobreyectividad:** Sea un elemento $z \in X$, nuevamente usando la existencia y buena fundación de $\sigma_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$, sabemos que $\sigma_{g^{-1}}(z) \in G$, así, y usando la definición de σ_g, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_g(\sigma_{g^{-1}}(z)) &= \sigma_g(g^{-1}z) \\
&= g(g^{-1}z) \\
&= (gg^{-1})z \\
&= ez \\
&= z
\end{aligned}$$

Así, tenemos que para todo elemento de X existe una preimagen por σ_g.

Por estos dos puntos, σ_g es una biyección sobre X para todo $g \in G$ y por tanto una permutación.

b). Pruebe que la aplicación definida por $\phi : G \to S_X$ definida por $\phi(g) = \sigma_g$ es un homomorfismo tal que $\phi(g)(x) = \sigma_g(x)$ para todo $x \in X$.

Sean g_1 y g_2 en G, veamos que $\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$. Para esto, debemos ver que $\sigma_{g_1 \cdot g_2}(x) = (\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2})(x)$, para todo $x \in X$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sigma_{g_1 \cdot g_2}(x) &= (g_1 \cdot g_2)(x) \\
&= g_1(g_2 x) \\
&= g_1(\sigma_{g_2}(x) \\
&= \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x)) \\
&= (\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2})(x)
\end{aligned}$$

Por tanto ϕ es un homomorfismo.