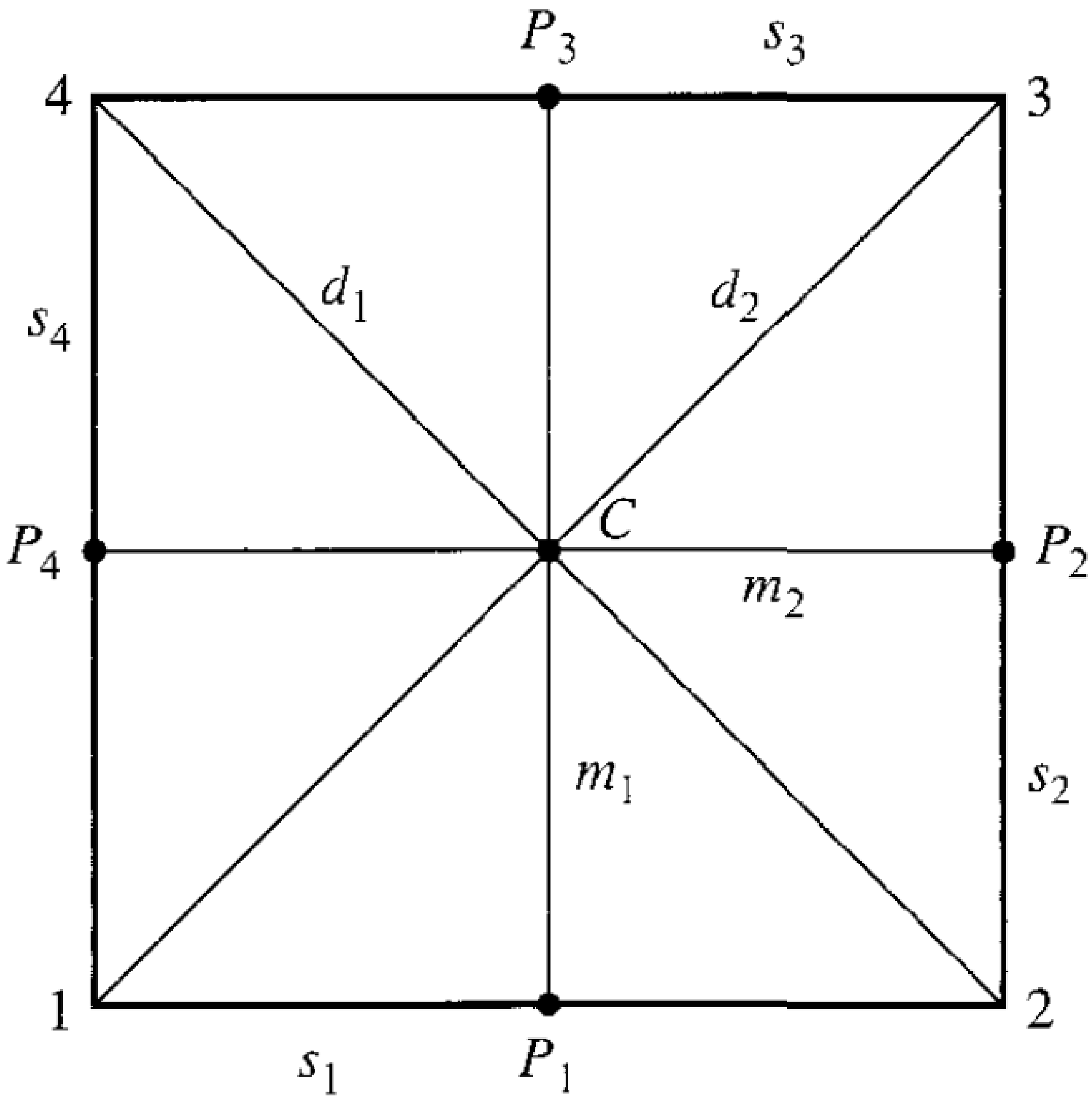
Algunas soluciones de Taller 7

1. Sea $G = D_4 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2\}$. Etiquete los vértices del cuadrado como $1, 2, 3, 4$, los lados como s_1, s_2, s_3, s_4, las diagonales como d_1, d_2, los ejes vertical y horizontal como m_1, m_2, el centro del cuadrado como C y los puntos medios de los lados como P_1, P_2, P_3, P_4 como se muestra en la figura.



Sea $X = \{1, 2, 3, 4, s_1, s_2, s_3, s_4, m_1, m_2, d_1, d_2, C, P_1, P_2, P_4\}$ y sea φ una acción de G en X descrita en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	s_1	s_2	s_3	s_4	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_1
ρ_0	1	2	3	4	s_1	s_2	s_3	s_4	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_1
ρ_1	2	3	4	1	s_2	s_3	s_4	s_1	m_2	m_1	d_2	d_1	C	P_2
ρ_2	3	4	1	2	s_3	s_4	s_1	s_2	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_3
ρ_3	4	1	2	3	s_4	s_1	s_2	s_3	m_2	m_1	d_2	d_1	C	P_4
μ_1	2	1	4	3	s_1	s_4	s_3	s_2	m_1	m_2	d_2	d_1	C	P_1
μ_2	4	3	2	1	s_3	s_2	s_1	s_4	m_1	m_2	d_2	d_1	C	P_3
δ_1	3	2	1	4	s_2	s_1	s_4	s_3	m_2	m_1	d_1	d_2	C	P_2
δ_2	1	4	3	2	s_4	s_3	s_2	s_1	m_2	m_1	d_1	d_2	C	P_4

1. Encuentre los conjuntos X_σ para cada $\sigma \in G$:
   - $X_{\rho_0} = X$
   - $X_{\rho_1} = \{C\}$
   - $X_{\rho_2} = \{m_1, m_2, d_1, d_2, C\}$
   - $X_{\rho_3} = \{C\}$
   - $X_{\mu_1} = \{s_1, s_3, m_1, m_2, C, P_1, P_3\}$
   - $X_{\mu_2} = \{s_2, s_4, m_1, m_2, C, P_2, P_4\}$
   - $X_{\delta_1} = \{2, 4, d_1, d_2, C\}$
   - $X_{\delta_2} = \{1, 3, d_1, d_2, C\}$

2. Los grupos de isotropía G_x para cada $x \in X$:
   - $G_1 = \{\rho_0, \delta_2\}$
   - $G_2 = \{\rho_0, \delta_1\}$
   - $G_3 = \{\rho_0, \delta_2\}$
   - $G_4 = \{\rho_0, \delta_1\}$
   - $G_{s_1} = \{\rho_0, \mu_1\}$
   - $G_{s_2} = \{\rho_0, \mu_2\}$
   - $G_{s_3} = \{\rho_0, \mu_1\}$
   - $G_{s_4} = \{\rho_0, \mu_2\}$

- $G_{m_1} = \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\}$
- $G_{m_2} = \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\}$
- $G_{d_1} = \{\rho_0, \rho_2, \delta_1, \delta_2\}$
- $G_{d_2} = \{\rho_0, \rho_2, \delta_1, \delta_2\}$
- $G_C = G$
- $G_{P_1} = \{\rho_0, \mu_1\}$
- $G_{P_2} = \{\rho_0, \mu_2\}$
- $G_{P_3} = \{\rho_0, \mu_1\}$
- $G_{P_4} = \{\rho_0, \mu_2\}$

3. Las órbitas en X bajo D_4
   - $\{1, 2, 3, 4\}$
   - $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
   - $\{m_1, m_2\}$
   - $\{d_1, d_2\}$
   - $\{C\}$
   - $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

2. Sea X un G-conjunto.

4. Muestre que para cada $g \in G$ la función $\sigma_g : X \to X$ deginida por $\sigma_g(x) = gx$ para cada $x \in X$ es una permutación en X.

   Partiendo de la definición, veamos que

$$\begin{aligned} \sigma_g : X &\to X \\ x &\mapsto gx \end{aligned}$$

Es una función biyectiva:

- **Inyectividad:** Sean $\sigma_g(x) = \sigma_g(y)$, esto es $gx = gy \in X$. Como G es un grupo, $g^{-1} \in G$ y por tanto podemos usar $\sigma_{g^{-1}} : X \to X$ que sabemos es una función, por lo tanto tenemos que

$$
\begin{aligned}
x &= \sigma_e(x) \\
&= \sigma_{g^{-1}g}(x) \\
&= \sigma_{g^{-1}}(\sigma_g(x)) \\
&= \sigma_{g_{-1}}(\sigma_g(y)) \\
&= \sigma_{g^{-1}g}(y) \\
&= \sigma_e(y) \\
&= y
\end{aligned}
$$

- **Sobreyectividad:** Sea $z \in X$, como $\sigma_{g^{-1}} : X \to X$ es una función, $\sigma_{g^{-1}}(z) \in X$ y por tanto $\sigma_g(\sigma_{g^{-1}}(z)) = z$.

2. Pruebe que la aplicacióñ definida por $\phi : G \to S_X$ definida por $\phi(g) = \sigma_g$ es un homomorfismo tal que $\phi(g)(x) = gx$
   Sea S_X el conjunto de todas las simetrías sobre X, veamos que ϕ define un homomorfismo:

- Sean $g_1, g_2 \in G$,

$$
\begin{aligned}
\phi(g_1 g_2)(x) &= \sigma_{g_1 g_2}(x) \\
&= \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x)) \\
&= \phi(g_1)\phi(g_2)(x)
\end{aligned}
$$

Ahora veamos que ϕ es un monomorfismo:

- Sean $g_1, g_2 \in G$ tales que $\phi(g_1) = \phi(g_2)$, entonces $\sigma_{g_1}(x) = \sigma_{g_2}(x)$ para todo $x \in X$, esto es, $g_1 x = g_2 x$ para todo x y por tanto, $g_2^{-1}(g_1(x)) = g_2^{-1}(g_2(x))$ luego $g_2^{-1} g_1(x) = e(x)$ y por tanto $g_2^{-1} g_1 = e$, es decir $g_1 = g_2$.

3. Sea $H \leq G$, definimos L_H como el conjunto de todas las clases laterales izquierdas de H. Muestre que L_H es un G-conjunto

Definamos la función φ dada por

$$
\begin{aligned}
\varphi : G \times L_H &\to L_H \\
(g, xH) &\mapsto (gx)H
\end{aligned}
$$

Veamos que φ define una accióñ de G sobre L_H:

- Sea xH una clase lateral en L_H, sabemos que

$$\begin{aligned}\varphi(e, xH) &= e(xH)\\ &= (ex)H\\ &= xH\end{aligned}$$

- Sean $g_1, g_2 \in G$ y $xH \in L_H$,

$$\begin{aligned}\varphi(g_1 g_2, xH) &= (g_1 g_2 x)H\\ &= g_1[(g_2 x)H]\\ &= g_1[\varphi(g_2, xH)]\\ &= \varphi(g_1, \varphi(g_2, xH))\end{aligned}$$

Así, se suplen las dos condiciones para que φ represente una acción y por tanto L_H es un G-conjunto.

4. Calcule todas las acciones del grupo $\mathbb{Z}_3$ sobre el conjunto $\mathbb{Z}_2$

- La acción trivial φ_0 tal que $\varphi_0(m, n) = n, \forall m \in \mathbb{Z}_3, \forall n \in \mathbb{Z}_2$.
- La acción definida por

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 &\to \mathbb{Z}_2\\ (\overline{n}, \overline{m}) &\mapsto \overline{n+m}\end{aligned}$$

Usando la asociatividad de la suma en $\mathbb{Z}_2$ y que el $\overline{0}$ es neutro en ambos grupos.

> Aquí no supe sacar más acciones de manera intuitiva.

Análisis más profundo:

Intentando asignar manualmente una imágen a cada elemento, primero comprendiendo a $\mathbb{Z}_3 := \{a : a^3 = e\}$ y a $\mathbb{Z}_2 := \{a' : (a')^2 = e'\}$ vemos que es de la forma:

$$
\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 &\to \mathbb{Z}_2 \\
(e, e') &\mapsto e' \\
(e, a') &\mapsto a' \\
(a, e') &\mapsto ae' \\
(a, a') &\mapsto aa' \\
(a^2, e') &\mapsto a^2e' \\
(a^2, a') &\mapsto a^2a'
\end{aligned}
$$

Dado que estamos trabajando con acciones y un grupo cíclico abeliano, sabemos que $\varphi(a^{n+1}, x) = \varphi(a \cdot a^n, x) = \varphi(a, \varphi(a^n, x))$ por lo que podemos definir las acciones de forma recursiva, así, sólo tenemos que definir ae' y aa', usando que $|\mathbb{Z}_2| = 2$ y que tanto ae' como aa' deben ser elementos de este, podemos definir cuatro acciones φ_i distintas:

- φ_0 : Si $ae' = e'$ y $aa' = a'$, entonces $a^2e' = a(ae') = a(e') = e'$ y análogamente $a^2a' = a'$, por lo que φ_0 representa la acción trivial.

- φ_1 : Si $ae' = a'$ y $aa' = e'$, entonces $a^2e' = a(ae') = a(a') = e'$ y análogamente $a^2a' = a'$, por lo que φ_1 coincide con la segunda acción que definimos arriba.

  > Aquí asumo que puede darse que aa' puede ser igual a ae', por lo que ví sigue siendo acción.

- φ_2 : Si $ae' = e' = aa'$ entonces $a^2e' = a(ae') = ae' = e' = aa' = a^2a'$.

- φ_3 : Si $ae' = a' = aa'$ entonces $a^2e' = a(ae') = aa' = a' = ae' = a^2a'$.

  > ¿Son las únicas? Como lo veo si en lugar de definir ae' y aa' defino a^2e' y a^2a' como $(a^2)^2 = a$ entonces necesariamente debo usarlos para definir ae' y aa'. Entonces no conozco otra forma de construir una acción diferente.