Producto de grupos

> En proceso, att. Tomás

Producto directo

Recordando que el producto cartesiano de una familia de conjuntos es generalizado como

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i, \forall i \in I \right\}$$

Es decir, sucesiones de longitud I, donde el i-ésimo término ($f(i)$) es un elemento del i-ésimo conjunto.

A partir de una familia $G = \{(G_i, \cdot_i)\}_{i \in I}$ de grupos, podemos definir una estructura $(\prod G, \times)$ tal que la operación es dada por

$$\begin{aligned} \times : \prod G \times \prod G &\to \prod G \\ (f, g) &\mapsto f \times g = h \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} h : I &\to \bigcup_{i \in I} A_i \\ i &\mapsto f(i) \cdot_i g(i) \end{aligned}$$

Básicamente, es un producto componente a componente con la operación respectiva al grupo.

Veamos que $(\prod G, \times)$ es un grupo:

- **Elemento neutro:** Definimos $e \in \prod G$ tal que $e(i) = e_i,\ \forall i \in I$. Así, para todo elemento $f \in \prod G$, $(f \times e)(i) = f(i) \cdot_i e(i) = f(i) \cdot_i e_i = f(i)$ por lo que $f \times e = f$, análogamente llegamos a que $e \times f = f$.
- **Inversos:** Sea $f \in \prod G$, podemos definir f^{-1} tal que $f^{-1}(i) = (f(i))^{-1}, \forall i \in I$. Así, se tiene que $(f \times f^{-1})(i) = f(i) \cdot_i (f(i))^{-1} = e_i$, luego $f \times f^{-1} = e$ y similarmente $f^{-1} \times f = e$.
- **Asociatividad:** Sean $f, g, h \in \prod G$, $[(f \times g) \times h](i) = (f(i) \times g(i)) \times h(i)$, como G_i es un grupo, $(f(i) \times g(i)) \times h(i) = f(i) \times (g(i) \times h(i)),\ \forall i \in I$, por lo que $(f \times g) \times h = f \times (g \times h)$.

Ahora, también podemos definir el siguiente automorfismo, denominado como **proyección canónica**:

$$\begin{aligned}\pi_j : \prod G &\to \prod G \\ f &\mapsto h\end{aligned}$$

Donde

$$h(i) = \begin{cases} e_i, & i \neq j \\ f(i), & i = j \end{cases}$$

O visto de otra forma, $\pi_j(a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_n) = (e_1, e_2, ..., e_{j-1}, a_j, e_{j+1}, ..., e_n)$.

De esto, es fácil ver que $\pi_j \left[\prod G\right] \cong G_j$.

Análogamente, podemos definir π'_j tal que si $k = \pi'_j(f)$ entonces

$$k(i) = \begin{cases} f(i), & i \neq j \\ e_i, & i = j \end{cases}$$

Nuevamente, veremos que $\pi'_j \left[\prod G\right] \cong G_1 \times G_2 \times ... \times G_{j-1} \times G_{j+1} \times ... \times G_n$.

Además se tiene que $k \times h = h \times k = f$.

Por último, también se puede demostrar que $\pi_j \left[\prod G\right]$ y $\pi'_j \left[\prod G\right]$ son subgrupos normales en $\prod G$.

Ejercicios:

- Si a_i es de orden finito en G_i, ¿cúal es el orden de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ en $\prod_{i \in n} G_i$?

  Solución:

  Sea $m_i = |a_i|,\ \forall i \in I$, tomemos $m = m.c.m.(m_i)_{i \in n}$, usando que la multiplicación es componente a componente y la exponenciación es multiplicación recursiva, tenemos que $(a_1, a_2, ..., a_n)^m = (a_1^m, a_2^m, ..., a_n^m)$, como $m_i | m,\ \forall i \in n$, entonces $(a_1, a_2, ..., a_n)^m = e$.

  Ahora supongamos que existe $m' < m$ tal que $(a_1, a_2, ..., a_n)^{m'} = e$, con el argumento anterior sabemos que $e = (e_1, e_2, ..., e_n) = (a_1^{m'}, a_2^{m'}, ..., a_n^{m'})$, así, $a_i^{m'} = e_i$ de manera que $m_i | m',\ \forall i \in n$. Sin embargo esto contradice el hecho que m sea el mínimo común múltiplo de todos los m_i, por tanto $|(a_1, a_2, ..., a_n)| = m$.

Suma directa externa

Definición. Soporte de f:

Sea $f \in \prod G$, definimos el **soporte de** f como el subconjunto de I donde $f(i)$ no sea el neutro, esto es:

$$I_f := \{i \in I : f(i) \neq e_i\}$$

Definición. Producto directo débil (externo):

Sea $G = \{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos, definimos el **producto directo débil (externo)** como:

$$\prod^w G := \{f \in \prod G : |I_f| \in \mathbb{N}\}$$

Esto es, los elementos $(a_1, a_2, ...)$ con un número finito de componentes no neutras. Naturalmente si I es finito entonces el producto directo débil coincide con el producto directo. Si G_i es abeliano para todo $i \in I$, el producto directo debil se denomina **suma directa externa** y se denota con $\sum G$. La operación del producto directo debil (externo) será denotado por $\circledast$ y por $\oplus$ para suma directa externa.

Teorema:

Sea $N = \{N_i\}_{i \in I}$ una familia de subgrupos normales en G tales que

1. $G = \langle \bigcup N \rangle$.
2. $N_j \cap N_k = \{e\}$ para todos $j, k \in I$ con $j \neq k$.

Entonces $G \cong \prod^w N$.

Demostración:

Sea $f \in \prod^w N$, sabemos que I_f es finito y podemos definir $\prod_{i \in I_f} f(i)$ como un elemento de G, por otro lado, por la segunda condición sabemos que si $j \neq k$, $a_k a_j = a_j a_k$ para todos $a_j \in N_j,\ a_k \in N_j$. Así planteamos

$$\begin{aligned} \varphi : \prod^w N &\to G \\ f &\mapsto \prod_{i \in I_f} f(i) \end{aligned}$$

Veamos que φ es un homomorfismo: Sean $h, j \in \prod^w N$, $\varphi(h \circledast j) = \prod_{i \in I_0}(h \circledast j)(i)$ donde $I_0 = \{i \in I : h(i) \cdot j(i) \neq e\}$ que sabemos es subconjunto de $I_h \cup I_j$, como I_h e I_j son finitos, $|I_0| \leq |I_h| + |I_j|$, así tenemos una productoria finita y por tanto

$$
\begin{aligned}
\varphi(h \circledast j) &= (h \circledast j)(i_0) \cdot (h \circledast j)(i_1) \cdot ... \cdot (h \circledast j)(i_n) \\
&= h(i_0) \cdot j(i_0) \cdot h(i_1) \cdot j(i_1) \cdot ... \cdot h(i_n) \cdot j(i_n) \\
&= h(i_0) \cdot h(i_1) \cdot ... \cdot h(i_n) \cdot j(i_0) \cdot j(i_1) \cdot ... \cdot j(i_n) \\
&= \prod_{i \in I_0} h(i) \cdot \prod_{i \in I_0} j(i) \\
&= \prod_{i \in I_h \cup I_j} h(i) \cdot \prod_{i \in I_h \cup I_j} j(i) \\
&= \prod_{i \in I_h} h(i) \cdot \prod_{i \in I_j} j(i) \\
&= \varphi(h) \cdot \varphi(j)
\end{aligned}
$$

Ahora veamos que φ es un monomorfismo usando que $\ker\varphi = \{f_e\}$ donde f_e es el neutro de $\prod^w N$: La segunda contenencia se tiene inmediata, por esto nos centramos en $\ker\varphi \subseteq \{f_e\}$. Sea $k \in \ker\varphi$, sabemos que $\prod_{i \in I_k} k(i) = e$, esto es $k(i_0) \cdot k(i_1) \cdot ... \cdot k(i_m) = e$. Suponga que $k \neq f_e$, luego $k(o) \neq e$ para algún $o \in I_k$, luego $k(o) \in N_o$ y por tanto, $[k(o)]^{-1} \in \prod_{i \in I_k - \{o\}} f(i)$ sin embargo $[k(o)]^{-1} \in N_o$, lo que contradice que sean grupos disyuntos salvo la identidad. Concluimos que $k(i) = e,\ \forall i \in I_k$, luego $k = f_e$ y por tanto $\ker\varphi \subseteq \{e_f\}$. Así φ es inyectiva.

Por último, veamos que φ es un epimorfismo: Sea $g \in G$, por la primera condición sabemos que $g = q_1 q_2 ... q_n$ para $q_l \in N_l$ con $l \in L \subseteq I$. Luego, definimos $x : I \to \bigcup N$ tal que

$$
x(i) = \begin{cases} e, & i \notin L \\ q_i, & i \in L \end{cases}
$$

Dado que g es generado por un número finito de elementos, I_x es finito y por tanto $x \in \prod^w N$ y $\varphi(x) = g$. Concluimos de esto que φ es sobreyectiva, que con lo mostrado anteriormente demuestra que φ es un isomorfismo y por tanto $G \cong \prod^w N$.

Con este resultado en mente, presentamos la siguiente definición:

Suma directa interna

Sea $N = \{N_i\}_{i \in I}$ una familia de subgrupos normales de G tales que $G = \langle \bigcup_{i \in I} N_i \rangle$ y para todo $k \in I$, $N_k \cap \langle \bigcup_{i \in I - \{k\}} N_i \rangle = \{e\}$ (los subgrupos son disyuntos dos a dos exceptuando el neutro). Entonces se dice que G tiene un **producto directo interno débil (PDID)** para la familia N. Si G es abeliano se dirá que tiene una **suma directa interna**.

Teorema:

Sea $N = \{N_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos normales de G. G tiene un producto directo interno débil por N si y solo si todo elemento $g \in G$ puede verse como producto único de $a_{i_0} \cdot a_{i_1} \cdot ... \cdot a_{i_n}$ donde $e \neq a_{i_k} \in N_{i_k},\ \forall k \leq n$

Demostración:

- $(\Rightarrow)$: Sea $g \in G$, por el teorema anterior, como $\prod^w N \cong G$, entonces existe un isomorfismo φ tal que $\varphi^{-1}(g) \in \prod^w N$, además como φ es biyectiva sólo existe un f tal que $\varphi(f) = g$, así, $g = f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(n)$ por la definicióñ de PDID.
- $(\Leftarrow)$: Dado que todo elemento puede expresarse como producto de elementos de los subgrupos normales, se tiene $(1.)$. Ahora veamos que para $i, j \in I$, si $i \neq j$ entonces $N_i \cap N_j = \{e\}$: Supongamos que $N_i \cap N_j \neq \{e\}$, luego existe $a \in N_i \cap N_j$ y como ambos son subgrupos, $a^{-1} \in N_i \cap N_j$, sea $x = b_0 \cdot b_1 \cdot ... \cdot b_i \cdot ... \cdot b_j \cdot ... \cdot b_n$, se puede ver que no importa si $b_i = a$ y $b_j = a^{-1}$ o si $b_i = a^{-1}$ y $b_j = a$ pues suponemos que conmutan con el resto de los elementos de la productoria, luego contradice qeu exista una única representacióñ de los elemento de G. Por tanto concluimos que $N_i \cap N_j = \{e\}$ y por tanto se tiene (2). Por el teorema anterior G tiene un PDID por N.

Nota. Distinción entre producto interno y externo:

En general, si hablamos de PDID en $\prod^w_{i\in I} N_i$ se sobreentiende que $N_i \trianglelefteq G,\ \forall i \in I$ para algún G. Mientras que si hablamos de PDED, no necesariamente N_i y N_j estén relacionados directamente.

Producto semidirecto

Motivación:

Supongamos que tenemos dos grupos G_1 y G_2, ya vimos anteriormente que podemos definir un grupo por medio del producto directo $G_1 \times G_2$, sin embargo puede que queramos una relación más estrecha entre ambos grupos, esto lo podemos lograr por medio de acciones de grupo, particularmente vamos a buscar una acción φ

$$\varphi : G_2 \to \text{Aut}(G_1)$$
$$x \mapsto \varphi_x$$

Donde φ_x es un automorfismo de G_1, es decir, que $\varphi_x(ab) = \varphi_x(a)\varphi_x(b)$ donde $a, b \in G_1$, además, pedimos que cumpla que para todos $x, y \in G_2$ y $a, b \in G_1$, $\varphi_{e_2}(a) = a$ y $\varphi_{xy}(a) = \varphi_x(\varphi_y(a))$. Así, a partir de una acción φ se define al siguiente operación binaria para $G_1 \times G_2$, sean $a_1, b_1 \in G_1$ y $a_2, b_2 \in G_2$,

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1\varphi_{a_2}(b_1), a_2b_2)$$

De esta forma, cuando dispongamos de una acción φ y queramos referenciar este producto, denotaremos la estructura algebraica como $G_1 \rtimes G_2$ o incluso, dado que la operación depende de la acción, se puede usar $G_1 \rtimes_\varphi G_2$.

Veamos que esta estrucutra define un grupo:

- **Asociatividad:** Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in G_1 \rtimes G_2$,

$$\begin{aligned}
[(a_1, a_2)(b_1, b_2)](c_1, c_2) &= (a_1\varphi_{a_2}(b_1), a_2b_2)(c_1, c_2) \\
&= (a_1\varphi_{a_2}(b_1)\varphi_{a_2b_2}(c_1), a_2b_2c_2) \\
&= (a_1\varphi_{a_2}(b_1)\varphi_{a_2}(\varphi_{b_2}(c_1)), a_2b_2c_2) \\
&= (a_1\varphi_{a_2}(b_1\varphi_{b_2}(c_1)), a_2b_2c_2) \\
&= (a_1, a_2)[(b_1\varphi_{b_2}(c_1), b_2c_2)] \\
&= (a_1, a_2)[(b_1, b_2)(c_1, c_2)]
\end{aligned}$$

- **Elemento neutro:** Existe (e_1, e_2) tal que para todo $(a, b) \in G_1 \rtimes G_2$

$$(a, b)(e_1, e_2) = (a\varphi_b(e_1), be_2) = (ae_1, b) = (a, b)$$

- **Elemento inverso:** Para todo $(a, b) \in G_1 \rtimes G_2$,podemos definir $(\varphi_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1})$ tal que

$$\begin{aligned}
(a, b)(\varphi_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1}) &= (a\varphi_b(\varphi_{b^{-1}}(a^{-1})), bb^{-1}) \\
&= (a\varphi_{bb^{-1}}(a^{-1}), e_2) \\
&= (a\varphi_{e_2}(a^{-1}), e_2) \\
&= (aa^{-1}, bb^{-1}) \\
&= (e_1, e_2)
\end{aligned}$$

Teorema Fundamental de grupos abelianos finitamente generados:

Sea G un grupo abeliano, G es isomorfo a

$$\mathbb{Z}_{p_1^{\mathbb{k}_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\mathbb{k}_2}} \times ... \times \mathbb{Z}_{p_n^{\mathbb{k}_n}} \times \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$$

Donde p_i son números primos no necesariamente distintos y $k_i \in \mathbb{N}$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Este producto es único salvo presentación.

Esto es,

$$G \cong \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{p_i}^{\mathbb{k}_i} \times \mathbb{Z}^m$$

Donde n y m son únicos.

Propiedad universal del Producto:

Sean $G = \{G_i\}_{i \in I} G_i$ una familia de grupos, $\prod G$ el producto usual y $\pi = \{\pi_j : \prod G \to G_j\}_{j \in I}$ las proyecciones canónicas. Entonces,

1. Para cada grupo H con homomorfismos $\{p_j : H \to G_j\}_{j \in I}$, existe un único homomorfismo $\alpha : H \to \prod G$ tal que $\pi_j \alpha = p_j$ para todo $j \in I$.

   > Esto nos dice que si un grupo H tiene homomorfismos hacia cada grupo de la familia G, entonces existe un homomorfismo α hacia $\prod G$ caracterizado por sus p_j.

2. Si otro grupo K que tenga $\pi' = \{\pi' : K \to G_j\}_{j \in I}$ y también tenga la propiedad (1), es isomorfo a $\prod G$.

   > Es decir, que K cumple varias de las propiedades de $\prod G$, y esas propiedades son suficientes para garantizar que K y $\prod G$ son isomorfos.

Demostración:

1. Básicamente queremos definir un α tal que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\prod G \arrow[r, "\pi_j"] & G_j \\
K \arrow[u, dashed, "\alpha"] \arrow[ur, "p_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Así, que definimos

$$\begin{aligned} \alpha : K &\to \prod G \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

Donde $y(i) = p_i(x)$ para todo $i \in I$. Así, usando que el producto es componente a componente y que todos los conjuntos son grupos, tenemos que α es un homomorfismo. Por la construcción misma, $\pi_j \alpha = p_j$ y es fácil ver la unicidad.

2. Tenemos los siguientes diagramas:

(1)

$$\begin{tikzcd}
\prod G \arrow[r, "\pi_j"] & G_j \\
\prod G \arrow[u, dashed, "I_{\prod G}"] \arrow[ur, "\pi_j"'] &
\end{tikzcd}$$

(2)

$$\begin{tikzcd}
\prod G \arrow[r, "\pi_j"] & G_j \\
K \arrow[u, dashed, "\alpha"] \arrow[ur, "\pi'_j"'] &
\end{tikzcd}$$

(3)

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\pi'_j"] & G_j \\
K \arrow[u, dashed, "I_K"] \arrow[ur, "\pi'_j"'] &
\end{tikzcd}$$

(4)

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\pi'_j"] & G_j \\
\prod G \arrow[u, dashed, "\beta"] \arrow[ur, "\pi_j"'] &
\end{tikzcd}$$

- (1) lo tenemos pues es un caso particular de la primera propiedad.
- (2) se tiene así mismo pues K es un grupo con homomorfismos hacia cada grupo de G entonces tenemos garantizada la existencia y unicidad de α.
- (3) y (4) son análogos a (1) y (2) respectivamente.

Así, sabemos que $\pi'_j \beta = \pi_j$ y $\pi_j \alpha = \pi'_j$ por lo que tenemos que

$$\begin{aligned} \pi'_j(\beta\alpha) &= (\pi'_j\beta)\alpha \\ &= \pi_j \alpha \\ &= \pi'_j \end{aligned}$$

y análogamente $\pi_j(\alpha\beta) = \pi_j$. Así, $\beta\alpha$ es una función de K en K tal que $\pi'_j(\beta\alpha) = \pi'_j$, sin embargo por el diagrama (3) sabemos que sólo existe una única función que cumple eso y es la identidad, por tanto $\beta\alpha = I_K$ y análogamente $\alpha\beta = I_{\prod G}$, por tanto se sabe que α y β son biyecciones y como también son homomorfismos concluimos que $\prod G \cong K$.