Tarea Producto de Grupos

Maira Florez y Tomás Galeano

1. Sea $G = G_1 \times G_2$, el producto directo de los grupos G_1 y G_2. Determinar el centro de G.

Veamos que $Z(G) = Z(G_1) \times Z(G_2)$:

- $Z(G) \subseteq Z(G_1) \times Z(G_2)$: Sea $x \in Z(G), xy = yx, \forall y \in G$, donde $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$. Por la forma en la que esta definida el producto directo se tiene que $x_1y_1 = y_1x_1$ para todo $y_1 \in G_1$, por lo que $x_1 \in Z(G_1)$ y análogamente $x_2 \in Z(G_2)$, así, $(x_1, x_2) = x \in Z(G_1) \times Z(G_2)$.

- $Z(G) \supseteq Z(G_1) \times Z(G_2)$: Sean $x \in Z(G_1)$, $y \in Z(G_2)$, naturalmente y dado que $Z(G_i) \leq G_i$ para $i \in \{1, 2\}$, entonces $(x, y) \in G_1 \times G_2$, ahora, sea $(a, b) \in G$ donde $a \in G_1$ y $b \in G_2$, se tiene que por la definición de producto directo, $(x, y)(a, b) = (xa, yb) = (ax, by) = (a, b)(x, y)$.

  Así, $(x, y) \in Z(G)$ y por la doble contenencia, queda demostrado que $Z(G) = Z(G_1) \times Z(G_2)$.

2. Sea $G = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ y suponga que B_i es un subgrupo normal de A_i para cada $i = 1, 2, ..., n$. Pruebe que $B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$ es normal en G y que

$(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n)/(B_1 \times B_2 \times ... \times B_n) \cong (A_1/B_1) \times (A_2/B_2) \times ... \times (A_n/B_n)$

Para simplificar notación definimos $I = \{1, 2, ..., n\}$,a $B = \prod_{i \in I} B_i$ y $A = \prod_{i \in I} A_i$.

- Veamos primero que $B \leq A$.

  Dado que $B_i \leq A_i$ para todo i, se tiene que $e_i \in B_i$ y por tanto, $(e_1, e_2, ..., e_n) \in B$ luego $B \neq \varnothing$. Ahora, sean $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ en B, se tiene que $x_i, y_i \in B_i$ con $i \in I$, como $B_i \leq A_i$ se tiene que $y_i^{-1} \in B_i$ y además $x_i y_i^{-1} \in B_i$ por lo que $(x_1 y_1^{-1}, x_2 y_2^{-1}, ..., x_n y_n^{-1}) = xy^{-1} \in B$. Concluyendo que $B \leq A$.

- Ahora veamos que $B \trianglelefteq A$ probando que $yxy^{-1} \in B$ para todo $x \in B$ y $y \in A$: Sea $x \in B$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, y sea un elemento cualquiera $y \in A$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

sabemos que

$$\begin{aligned} yxy^{-1} &= (y_1, y_2, ..., y_n)(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1^{-1}, y_2^{-1}, ..., y_n^{-1}) \\ &= (y_1 x_1 y_1^{-1}, y_2 x_2 y_2^{-1}, ..., y_n x_n y_n^{-1}) \end{aligned}$$

Como $B_i \trianglelefteq A_i$, $y_i x_i y_i^{-1} \in B_i$ para todos $y_i \in A_i$, $x_i \in B_i$ e $i \in I$. Por tanto $yxy^{-1} \in B$ y concluimos que es normal con respecto a A.

Ahora bien hay dos formas de probar el isomorfismo de los cocientes:

1. Demos la siguiente función φ:

$$\begin{aligned} \varphi : A/B &\to \prod_{i \in I} A_i/B_i \\ [f] = \{f_b\}_{b \in B} &\mapsto (\{f_b(i)\}_{b \in B})_{i \in I} \end{aligned}$$

Donde usamos hecho que la clase de un elemento $f \in A$ es $[f] = \{fb : b \in B\}$ y por tanto, un elemento $x \in A/B$ es una familia de funciones con dominio I. Ahora, veamos que nuestra función φ está **bien definida**: Sean $f, g \in [f]$, sabemos que $g = f_{b_j}$ para algún $b_j \in B$ y $j \in |B|$, así,

$$\begin{aligned} \varphi([g]) &= (\{g_{b_1}(1), g_{b_2}(1), ..., g_{b_{k_1}}(1)\}, ..., \{g_{b_1}(n), g_{b_2}(n), ..., g_{b_{k_n}}(n)\}) \\ &= (\{f_{b_j b_1}(1), f_{b_j b_2}(1), ..., f_{b_j b_{k_1}}(1)\}, ..., \{f_{b_j b_1}(n), f_{b_j b_2}(n), ..., f_{b_j b_{k_n}}(n)\}) \\ &= (\{f_{b'_1}(1), f_{b'_2}(1), ..., f_{b'_{k_1}}(1)\}, ..., \{f_{b'_1}(n), f_{b'_2}(n), ..., f_{b'_{k_n}}(n)\}) \\ &= \varphi([f]) \end{aligned}$$

usando el hecho que B_i es cerrado pues es un subgrupo y también definimos $k_i \in |B_i|$ para $i \in I$. Veamos que φ es un **homomorfismo**: sean $[x], [y] \in A/B$,

$$\begin{aligned} \varphi([x][y]) &= \varphi(\{x_{b_1} y_{b_2}\}_{b_1, b_2 \in B}) \\ &= (\{x_{b_1} y_{b_2}(i)\}_{b_1, b_2 \in B})_{i \in I} \\ &= (\{x_{b_1}(i)\}_{b_1 \in B})_{i \in I}(\{y_{b_2}(i)\}_{b_2 \in B})_{i \in I} \\ &= \varphi([x])\varphi([y]) \end{aligned}$$

Si $\varphi([x]) = \varphi([y])$ entonces $(\{x_b(i)\}_{b \in B})_{i \in I} = (\{y_{b'}(i)\}_{b' \in B})_{i \in I}$ entonces son iguales componente a componente, luego $x(i) \in \{y_{b'}(i)\}_{b \in B}$ por lo que $x \in [y]$, así, necesariamente $[x] = [y]$ y concluimos φ es un **monomorfismo**.

Ahora, sea $x \in \prod_{i \in I} A_i/B_i, x = ([a_1], [a_2], ..., [a_n])$ entonces podemos definir $f \in A$ tal que $f(i) = a_i, \forall i \in I$. Naturalmente$f \in [f]$ y además se tiene que $\varphi([f]) =$

$(\{f_b(i)\}_{b\in B})_{i\in I}$, particularmente $e \in B$ por lo que $a_i \in \{f_b(i)\}_{b\in B}$ y por tanto $[a_i] = \{f_b(i)\}_{b\in B}$ por lo que $\varphi([f]) = x$. Concluimos que φ es además un **epimorfismo**.

Así, φ resulta un **isomorfismo**.

2. Definamos otra función

$$\begin{aligned}\phi : A &\to \prod_{i\in I} A_i/B_i \\ (a_i)_{i\in I} &\mapsto ([a_i])_{i\in I}\end{aligned}$$

Veamos que ϕ es un **homomorfismo**:

Sean $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in A$, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi((x_i)_{i\in I} \cdot (y_i)_{i\in I}) &= \phi((x_i y_i)_{i\in I}) \\ &= ([x_i y_i])_{i\in I} \\ &= (B_i x_i y_i)_{i\in I} \\ &= (B_i x_i)_{i\in I}(B_i y_i)_{i\in I} \\ &= ([x_i])_{i\in I}([y_i])_{i\in I} \\ &= \phi((x_i)_{i\in I})\phi((y_i)_{i\in I})\end{aligned}$$

Donde usamos que $([a_i])_{i\in I} = (B_i a_i)_{i\in I}$ para todo $a \in A$.

Ahora, probemos que $\ker(\phi) = B$.

Sea $x \in \ker(\phi)$,

$$\begin{aligned}x \in \ker(\phi) &\Leftrightarrow \phi(x) = ([e_i])_{i\in I} \\ &\Leftrightarrow \phi(x) = (B_i)_{i\in I} \\ &\Leftrightarrow x(i) \in B_i,\ \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in B\end{aligned}$$

Por último, veamos que ϕ es sobreyectiva:

Sea $y \in \prod_{i\in I} A_i/B_i$, y es una n-upla donde cada componente es una clase lateral de A_i/B_i, así, $y = ([x_i])_{i\in I}$ donde $x_i \in A_i$, por lo que podemos formar la preimagen $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ y es natural que $\phi(x) = y$. Por lo que concluimos que ϕ es un **epimorfismo**.

Así, por el **Teorema Fundamental del Homomorfismo**, tenemos que

$$A/B \cong \prod_{i\in I} A_i/B_i$$

Quedando por ambos caminos demostrado lo que buscabamos.