Tarea Suma Directa Interna

Maira Florez y Tomás Galeano

1. ¿Puede escribir D_4 como la suma directa interna de dos de sus subgrupos? Explique.

Sea $D_4 = \langle f, r : f^2 = r^4 = e,\ rfr = f^{-1} \rangle$, sabemos que sus subgrupos normales son:

- $N_0 = \{e\}$
- $N_1 = \langle r^2 \rangle$
- $N_2 = \langle r \rangle$
- $N_3 = \{e, rf, r^2, fr\}$
- $N_4 = D_4$

Así, vemos que para todos subgrupos normales $H, K \trianglelefteq D_4$, si $H \neq N_0 \neq K$ entonces $H \cap K \neq \{e\}$ por lo que para describir D_4 como suma directa de dos de sus subgrupos, necesitamos que al menos uno de ellos sea N_0. Así, lógicamente el otro subgrupo debe ser D_4 mismo y por tanto la única opción es

$$D_4 = N_0 \oplus N_4$$

2. Encuentre todas las descomposiciones de S_3 como suma directa de dos de sus subgrupos.

Dado que $S_3 \cong D_3$, entonces trabajaremos con la definición de $D_3 = \langle f, r : f^2 = r^3 = e, rfr = f^{-1} \rangle$, así, sus subgrupos normales son:

- $N_0 = \{e\}$
- $N_1 = \langle r \rangle$
- $N_2 = D_3$

Teniendo en cuenta que como $N_0 N_1 \neq D_3$ y $N_1 \cap N_2 \neq \{e\}$, entonces la única opción es que

$$D_3 = N_0 \oplus N_2$$