RGB - XYZ 色空間の相互変換

〜 変換マトリックスの意味 〜

guardiancrow (@guardiancrow)

1　はじめに

RGB 色空間を XYZ 色空間に変換するとき、或いはその逆を行おうとするとき、解説している書籍や Web サイトでは決まって以下のような変換マトリックスを示されます。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4124 & 0.3576 & 0.1805 \\ 0.2126 & 0.7152 & 0.0722 \\ 0.0193 & 0.1192 & 0.9505 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2406 & -1.5372 & -0.4986 \\ -0.9689 & 1.8758 & 0.0415 \\ 0.0557 & -0.2040 & 1.0570 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{2}$$

この式の通りに計算すれば確かに変換できるわけですが、この式自体はどのように求めるのでしょうか？

2　定義のまとめ

RGB-XYZ 変換は CIE が 1931 年に制定した CIE RGB 表色系と CIE XYZ 表色系における相互変換です。ここでは特に CIE RGB とは言わず、単に RGB と言うことにします。XYZ についてもです。

RGB 表色系は、最も一般的な表色系でそれぞれ Red、Green、Blue の色の強さがどれぐらいあるかで色を示します。全ての値が最小の時に黒色になり、最大の時に白色になります。

$$0 \leqq R, G, B \leqq 1$$

XYZ 表色系とは、人間の目で感知することができる三刺激値に由来するものです。RGB では表現しきれない（RGB では値が負になるような）色を定義することができます。X は赤っぽい値を表し、Y は輝度を表し、Z は青っぽい値を表します。（っぽいという表現の意図はそれそのものではないという意味です）

ここで輝度は光源の種類によって性質が変わってしまうことに気がつきます。昼光色を D65、昼白色を D50 と呼び、それぞれ色温度を 6500K と 5000K と定義しています。また、最大の輝度の時、すなわち白色の時 $Y = 1$ となるように定義します。

小文字の xyz は CIE が制定した CIE xy 色度図に対応する座標で、大文字の XYZ とは簡単な変換式により対応しています。

$$x = \frac{X}{X+Y+Z}$$

$$y = \frac{Y}{X+Y+Z}$$

$$z = \frac{Z}{X+Y+Z}$$

$$x + y + z = 1$$

XYZ 表色系は他の表色系を表すときにベースとなるものですが直感的ではありません。これを補うためにこれらの小文字 xyz の値を借りて xyY 表色系というものが考案されました。以下のような関係があります。

$$X = \frac{xY}{y} \tag{3}$$

$$Z = \frac{zY}{y} \tag{4}$$

3　下準備

さて、これらの定義を使って変換マトリックスを求めるための方法を探っていきましょう。

まず RGB 色空間の R だけを XYZ 色空間に変換することを考えます。R を XYZ 色空間に変換したそれぞれの値を X_r、Y_r、Z_r とすると、上記 (3)、(4) の式により

$$(X_r, Y_r, Z_r) = (Y_r \frac{x_r}{y_r}, Y_r, Y_r \frac{z_r}{y_r})$$

同様に G と B については、

$$(X_g, Y_g, Z_g) = (Y_g \frac{x_g}{y_g}, Y_g, Y_g \frac{z_g}{y_g})$$

$$(X_b, Y_b, Z_b) = (Y_b \frac{x_b}{y_b}, Y_b, Y_b \frac{z_b}{y_b})$$

これらの値を足すと白色になるので X_w、Y_w、Z_w として表すと、

$$\begin{cases} Y_r \frac{x_r}{y_r} + Y_g \frac{x_g}{y_g} + Y_b \frac{x_b}{y_b} = Y_w \frac{x_w}{y_w} \\ Y_r + Y_g + Y_b = Y_w \\ Y_r \frac{z_r}{y_r} + Y_g \frac{z_g}{y_g} + Y_b \frac{z_b}{y_b} = Y_w \frac{z_w}{y_w} \end{cases}$$

ここで Y_w はそれぞれの要素が最大の輝度の時の値でかつ $Y_w = 1$ でしたので、

$$\begin{cases} Y_r \frac{x_r}{y_r} + Y_g \frac{x_g}{y_g} + Y_b \frac{x_b}{y_b} = \frac{x_w}{y_w} \\ Y_r + Y_g + Y_b = 1 \\ Y_r \frac{z_r}{y_r} + Y_g \frac{z_g}{y_g} + Y_b \frac{z_b}{y_b} = \frac{z_w}{y_w} \end{cases}$$

4 sRGB での計算

さて sRGB の話をします。sRGB では xyY 表色系における Red、 Green、 Blue、 White Point を表す色の四点が決まっています。

色度	Red	Green	Blue	White Point
x	0.6400	0.3000	0.1500	0.3127
y	0.3300	0.6000	0.0600	0.3290

この値を代入すれば Y_r, Y_g, Y_b を三元一次連立方程式で解けることがわかります。

色度	Red	Green	Blue	White Point
x	0.6400	0.3000	0.1500	0.3127
y	0.3300	0.6000	0.0600	0.3290
Y	0.2126	0.7152	0.0722	1.0000

あとは (3)、(4) の式を用いて計算していきます。

$$X_r = \frac{x_r Y_r}{y_r} = \frac{0.6400 * 0.2126}{0.3300} = 0.4124$$

$$X_g = \frac{x_g Y_g}{y_g} = \frac{0.3000 * 0.7152}{0.6000} = 0.3576$$

$$X_b = \frac{x_b Y_b}{y_b} = \frac{0.1500 * 0.0722}{0.3290} = 0.1805$$

$$Z_r = \frac{z_r Y_r}{y_r} = \frac{0.0300 * 0.2126}{0.3300} = 0.0193$$

$$Z_g = \frac{z_g Y_g}{y_g} = \frac{0.1000 * 0.7152}{0.6000} = 0.1192$$

$$Z_b = \frac{z_b Y_b}{y_b} = \frac{0.7900 * 0.0722}{0.0600} = 0.9506$$

まとめると、

$$\begin{cases} X_r + Y_r + Z_r = 0.4124 + 0.3576 + 0.1805 = 0.9505 = X_w \\ X_g + Y_g + Z_g = 0.2126 + 0.7152 + 0.0722 = 1.0000 = Y_w \\ X_b + Y_b + Z_b = 0.0193 + 0.1192 + 0.9506 = 1.0891 = Z_w \end{cases}$$

くどいようですが、これらの値は最大輝度の時でした。R,G,B は 0 以上 1 以下の値ですので、結局のところこれらに R,G,B の割合の値を代入していけば任意の値にも適用でき、RGB から XYZ の変換式になります。任意の値 (r, g, b) について、

$$\begin{cases} 0.4124 * r + 0.3576 * g + 0.1805 * b = X \\ 0.2126 * r + 0.7152 * g + 0.0722 * b = Y \\ 0.0193 * r + 0.1192 * g + 0.9506 * b = Z \\ (0 \leqq r, g, b \leqq 1) \end{cases}$$

すなわち (1) です。

また、逆行列を求めれば XYZ から RGB の変換式が得られます。すなわち (2) です。

さて、本当に R,G,B の割合の値を代入していけば任意の値にも適用できるのでしょうか？　実はそうでもない場合もあります。

カラープロファイルに定義されていれば直線的ではなく、ガンマ補正のような曲線を与えてそれに沿って変換することが許されています。ここでは省略しますが、どちらにしろ基本となる RGB と XYZ の変換式は変わりません。増え方が直線的では無く曲線的になるだけです。

5　応用１　赤と緑が入れ替わった色空間

RGB と W の四原色が与えられれば XYZ への変換マトリックスを求めることができることがわかりました。XYZ 色空間はすべての色空間の基本となる色空間ですから、この手法を得たことはとても素晴らしいことです。

では例えば、正常なモニタで作成された画像を赤と緑が入れ替わってしまったモニタで閲覧するにはどうすれば良いでしょうか？当然そのまま表示すれば赤と緑が逆に表示されてしまいます。しかし、この場合も XYZ 色空間が役に立ちます。すなわち、$RGB \leftrightarrow XYZ \leftrightarrow GRB$ と変換すれば良いのです。ここではカラープロファイルは sRGB であるとして考えてみましょう。（赤と緑が入れ替わった環境では正確には sRGB をまねて原色位置を変えたプロファイルということになります）

ここまでやってきたように、sRGB プロファイルにおける RGB と XYZ の相互変換式はすでに計算しました。では同じように GRB のケースを計算してみましょう。

色度	Red（sRGB では Green）	Green（sRGB では Red）	Blue	White Point
x	0.3000	0.6400	0.1500	0.3127
y	0.6000	0.3300	0.0600	0.3290

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3576 & 0.4124 & 0.1805 \\ 0.7152 & 0.2126 & 0.0722 \\ 0.1192 & 0.0193 & 0.9505 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{grb} \\ G_{grb} \\ B_{grb} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_{grb} \\ G_{grb} \\ B_{grb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9692 & 1.8760 & 0.0416 \\ 3.2410 & -1.5374 & -0.4986 \\ 0.0556 & -0.2040 & 1.0570 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

逆行列計算時の丸め誤差が出てしまいましたが、おおむね $RGB \leftrightarrow XYZ$ の時と比べてひっくり返った値になりましたね。後は順次これらを変換すれば相互の環境で意図した同じ色で見ることができるのです。

計算していきましょう。

$$(R, G, B) = (0.25, 0.5, 0.75)$$

が与えられているものとします。これを XYZ 色空間に変換すると、

$$(X,Y,Z) = (0.4173, 0.4649, 0.7773)$$

となります。さらに GRB に変換すると、

$$(R_{grb}, G_{grb}, B_{grb}) = (0.5, 0.25, 0.75)$$

となり、R, G と R_{grb}, G_{grb} が入れ替わっていることが計算によって求められました。

このように、どのような環境で色を表示しても整合性がとれるので XYZ 色空間の意義はとてもすばらしいです。

6 応用2　AdobeRGB 色空間

応用１はどちらかというと机上の空論で、仕組みを理解するには有用ですが現実的には役に立たないものでした。では別の色空間で、かつ、デファクトスタンダードである AdobeRGB(1998) への応用を考えて、sRGB との相互変換を行うことにより役に立っていることを見せてみましょう。

応用１の時と同様に $sRGB \leftrightarrow XYZ \leftrightarrow AdobeRGB$ と変換していくことになります。

AdobeRGB の各種パラメータもあらかじめ定義されています。

色度	Red	Green	Blue	White Point
x	0.6400	0.2100	0.1500	0.3127
y	0.3300	0.7100	0.0600	0.3290

つまり、Green 方向にちょっとだけ広い色域を持っています。AdobeRGB 色空間の RGB をそれぞれ R_a, G_a, B_a として計算していきます。

$$Y_r = 0.2973$$

$$Y_g = 0.6274$$

$$Y_b = 0.0753$$

$$X_r = \frac{x_r Y_r}{y_r} = \frac{0.6400 * 0.2973}{0.3300} = 0.5766$$

$$X_g = \frac{x_g Y_g}{y_g} = \frac{0.2100 * 0.6274}{0.7100} = 0.1856$$

$$X_b = \frac{x_b Y_b}{y_b} = \frac{0.1500 * 0.0753}{0.0600} = 0.1883$$

$$Z_r = \frac{z_r Y_r}{y_r} = \frac{0.0300 * 0.2973}{0.3300} = 0.0270$$

$$Z_g = \frac{z_g Y_g}{y_g} = \frac{0.0800 * 0.6274}{0.7100} = 0.0707$$

$$Z_b = \frac{z_b Y_b}{y_b} = \frac{0.7900 * 0.0753}{0.0600} = 0.9915$$

まとめると、

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5766 & 0.1856 & 0.1883 \\ 0.2973 & 0.6274 & 0.0753 \\ 0.0270 & 0.0707 & 0.9915 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \\ G_a \\ B_a \end{bmatrix}$$

また逆行列を求めると、

$$\begin{bmatrix} R_a \\ G_a \\ B_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0419 & -0.5650 & -0.3447 \\ -0.9692 & 1.8760 & 0.0416 \\ 0.0134 & -0.1183 & 1.0151 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

無事に求めることができました。あとは sRGB から順に AdobeRGB にしていきましょう。応用１の時と同じく、

$$(R, G, B) = (0.25, 0.5, 0.75)$$

が与えられているものとします。これを XYZ 色空間に変換すると、

$$(X, Y, Z) = (0.4173, 0.4649, 0.7773)$$

となります。ここまでは一緒ですね。さらに AdobeRGB に変換すると、

$$(R_a, G_a, B_a) = (0.3212, 0.5, 0.7773)$$

となりました。R_a が少し増え B_a が少し減る結果となりました。

7　応用３　AdobeRGB 色空間と Bradford 変換

AdobeRGB のカラープロファイルである、.icc ファイルを見てみると、上記で得られたマトリックスでは無いことに気がつきます。引用してみます。

$$
\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6097 & 0.2053 & 0.1492 \\ 0.3111 & 0.6257 & 0.0632 \\ 0.0195 & 0.0609 & 0.7446 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \tag{5}
$$

という具合で全く違っています。この違いはどこから来るのでしょうか？実は前者は $D65$ 環境下で計算されたものであるのに対して、このカラープロファイルのものは Bradford 変換という手法を用いて $D65$ 環境下から $D50$ 環境下に変換したものです。この変換は XYZ 色空間で行われます。

Bradford 変換は、以下のようなものです。

$$
\begin{bmatrix} X_{dest} \\ Y_{dest} \\ Z_{dest} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X_{src} \\ Y_{src} \\ Z_{src} \end{bmatrix}
$$

詳しくは述べませんが、$D65$ から $D50$ に変換するマトリックスは以下のように与えられています。

$$
M = \begin{bmatrix} 1.0478 & 0.0229 & -0.0501 \\ 0.0295 & 0.9905 & -0.0170 \\ -0.0092 & 0.0150 & 0.7521 \end{bmatrix}
$$

つまり間にもう一ステップが入るということになります。

ところで、AdobeRGB(D65) → XYZ → Bradford という手順を踏まなくても、Bradford 変換をした D65 の三原色と D50 の白色の座標を用いて計算すれば AdobeRGB(D65) → XYZ(D50) の計算ができることに気がつきます。

色度	Red(変換後)	Green(変換後)	Blue(変換後)	White Point(D50)
x	0.6484	0.2302	0.1559	0.3457
y	0.3309	0.7016	0.0661	0.3585
z	0.0207	0.0682	0.7780	0.2958

これらにより (5) を得られることがわかります。

また、逆行列を計算すると、

$$
\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9624 & -0.6107 & -0.3414 \\ -0.9792 & 1.9167 & 0.0334 \\ 0.0286 & -0.1405 & 1.3488 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{6}
$$

という逆変換の式が得られます。

Bradford 変換は AdobeRGB 以外の色空間でももちろん有効です。但し、変換マトリックス M が変わることに注意してください。

AdobeRGB 色空間は 24bit カラーの画像形式では表現しきれないとしばしば言われます。念のため各要素が 16bit である 48bit 以上の形式で保存するようにするとよりよいと思います。