

Optimale Schrittzahl zum Lösen der Türme von Hanoi

Dominick Labatz, Tom Herrmann, Christoph Noack

29.05.2020

1 Induktionsbehauptung

Die Anzahl der Züge in einem optimalen Durchlauf ist $F(n) = 2^n - 1$

2 Induktionsanfang: $n = 0$

Für keine Scheibe muss nichts bewegt werden. $2^0 - 1 = 0$.

3 Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Zunächst muss ein Turm der Höhe n von A nach B gelöst werden. Dies entspricht nach der Induktionsbehauptung genau $F(n)$ Zügen. Danach wird die $n + 1$ 'te Scheibe nach C bewegt und zuletzt wird der Turm der Größe n von B nach C bewegt. Dies entspricht wieder $F(n)$. Für einen Turm der Größe $n + 1$ werden entsprechend genau $2 \cdot (2^n - 1) + 1$ Schritte benötigt.

$$2(2^n - 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 \quad \square$$