JProf. Dr. Christina Brandt
Dr. Stefan Heitmann
Universität Hamburg

Wintersemester 2020/21
Ausgabedatum: 20. November 2020

Übungen zu Numerische Mathematik

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (Positiv Definite Matrizen) (5 Punkte)

a.) Zeigen Sie folgende Eigenschaften einer symmetrisch positiv definiten Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

(i) $a_{ii} > 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$;

(ii) $a_{ij}^2 < a_{ii} a_{jj}$ für $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

(iii) $\max_{i,j=1,2,\ldots,n} |a_{ij}| = \max_{i=1,2,\ldots,n} a_{ii}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$;

Hinweis: Verwenden Sie spezielle Vektoren $\boldsymbol{x}$ in der quadratischen Form $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$.

b.) Betrachten Sie die folgende Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & \frac{37}{4} & -2 \\ -2 & -2 & \frac{21}{4} \end{pmatrix}.$$

Wie hängen die Matrizen der Cholesky-Zerlegung mit denen der LR–Zerlegung von $\boldsymbol{A}$ zusammen?

Hinweis: Es wird nicht für diese Aufgabe benötigt, aber in Matlab sind verschiedene Faktorisierungen durch den Befehl `decomposition` möglich.

Aufgabe 2. (Konditionszahlen von Matrizen) (5 Punkte)

a) Sei durch $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{L}^{n-1} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{L}^1$ die LR-Zerlegung einer regulären Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erzeugt,d.h. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{L}^{-1}$. Zeigen Sie, dass die Konditionszahl κ_∞ der entstehenden Matrix $\boldsymbol{R}$ abgeschätzt werden kann als

$$\kappa_\infty(\boldsymbol{R}) \leq n^2 \kappa_\infty(\boldsymbol{A})$$

Verwenden Sie dazu die (bei Pivotisierung gerechtfertige) Abschätzung für die Einträge von $\boldsymbol{F}$ bzw. $\boldsymbol{L}$, $|f_{ij}| \leq 1$ bzw. $|\ell_{ij}| \leq 1$.

b) Zeigen Sie folgende Beziehungen für die Konditionszahlen von Matrizen aus $\mathbb{R}^{n \times n}$

(i) $\kappa(\boldsymbol{A}) \geq 1$

(ii) $\kappa_2(\boldsymbol{Q}) = 1$ für eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q}$

Ist an der Konditionszahl kein Index notiert, sind damit alle Konditionszahlen bezüglich einer submultiplikativer Matrixnorm bezeichnet.

Aufgabe 3. (Kondition und Fehlerabschätzung) (5 Punkte)

Bei der Herleitung von Satz 2.20

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\kappa(\boldsymbol{A})}{1-\kappa(\boldsymbol{A})\frac{\|\Delta \boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}\left(\frac{\|\Delta \boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}+\frac{\|\Delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}\right) \tag{1}$$

haben wir das Lemma 2.19 (*Störungslemma*) benutzt.

a) Zeigen Sie: sei $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|\boldsymbol{B}\| < 1$, so existiert die Inverse $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}$ und genügt der Abschätzung

$$\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|\boldsymbol{B}\|}.$$

Dabei muss die verwendete Matrixnorm $\|\boldsymbol{I}\| = 1$ erfüllen.

b) Vergleichen Sie die Fehlerabschätzung (1) mit den exakten Ergebnissen für $\|\Delta\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x}\|$, wenn das System von Blatt 1, Aufgabe 2 b) (i) gestört wird durch

(i) $\Delta\boldsymbol{A} = 10^{-8}\cdot \boldsymbol{I}_3$, (ii) $\Delta\boldsymbol{b} = 10^{-8}\cdot(0,1,0)^\top$

Verwenden Sie für die Analyse die euklidische bzw. Spektralnorm. Die Benutzung der MATLAB-Befehle `norm`, `cond` etc. ist erlaubt.

Aufgabe 4. (Implementierung der Cholesky-Zerlegung) (5 Punkte)

1. Implementieren Sie die Cholesky-Zerlegung für symmetrische Matrizen.

2. Testen Sie die Zerlegung an Hand der Hilbertmatrix $\mathbf{H}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definiert über

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

für $n = 8$. Die Hilbertmatrix ist ein Beispiel für eine sehr schlecht konditionierte Matrix. Bestimmen Sie für $n = 8$ die Konditionszahl von $\mathbf{H}_n$ und den relativen Fehler der Zerlegung

$$\frac{\left\|\mathbf{H}_n - \mathbf{L}\mathbf{L}^T\right\|_\infty}{\|\mathbf{H}_n\|_\infty}.$$

3. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{H}_n\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}$, wobei der Vektor $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ gerade als Einträge die Summe der Spalten von $\mathbf{H}_n$ besitzt, d.h.

$$b_k = \sum_{j=1}^{n} h_{kj}, \qquad k = 1,\ldots,n.$$

Das ungestörte System hat die exakte Lösung $\mathbf{x} = (1,1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^n$. Generieren Sie eine gestörte rechte Seite $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}$, indem Sie einen normalverteilten Zufallsvektor $\Delta\mathbf{b}$ dazu addieren, so dass der relative Fehler $\|\Delta\mathbf{b}\|_\infty / \|\mathbf{b}\|_\infty$ gerade 1% ist (in der Vorlage gibt es dafür die Funktion `noisyVector`).
Lösen Sie das Gleichungssystem mit gestörter rechter Seite mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung für $n = 2,\ldots,10$. Bestimmen Sie den relativen Fehler in der Zerlegung so wie des Ergebnisses $\tilde{\mathbf{x}}$ und visualisieren Sie diese als Funktion über n. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Abschätzung (1).

Hinweis: Wenn Sie nicht erfolgreich die Cholesky-Zerlegung implementieren, können Sie für Aufgabenteil 2 und 3 die Matlabfunktion `chol` verwenden.