Die Änderung des Gesamtimpulses zwischen t und $t + dt$ ist [4]

$$\begin{aligned} d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) &= m\, d\vec{v} \;-\; dm \cdot (\vec{v}\,' - \vec{v}) + dm \cdot d\vec{v} \\ &\approx m\, d\vec{v} \;-\; dm \cdot \vec{v}_G \end{aligned} \tag{4.57}$$

Im letzten Schritt haben wir das Produkt $dm \cdot d\vec{v}$ vernachlässigt, da es für kleine dt viel kleiner wird als die anderen Terme. Ohne äußere Kräfte gilt Impulserhaltung, so dass $d\vec{p} = 0$ ist. Eine äußere Kraft wie die Gravitation der Erde ändert aber den Gesamtimpuls,

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}_G \tag{4.58}$$

Bei senkrechtem Flug (z-Richtung nach oben) ist $F_z = -mg$ (zumindest nahe der Erdoberfläche) und daher

$$\boxed{-m \cdot g = m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot v_G} \tag{4.59}$$

Bewegungsgleichung der Rakete

Die Rakete wird also in $+z$ Richtung beschleunigt ($dv/dt > 0$), wenn die Schubkraft

$$|v_G| \cdot \left|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right| \;>\; m\, g \tag{4.60}$$

ist. Die Bewegungsgleichung kann man lösen, indem man die Variablen separiert,

$$-g\, dt = dv \;-\; \frac{dm}{m} \cdot v_G \tag{4.61}$$

Bei konstanter Geschwindigkeit des Gases v_G kann diese Gleichung integriert werden,

$$\begin{aligned} -\int_{t_0}^{t} g\, dt &= \int_{v_0}^{v(t)} dv - \int_{m_0}^{m(t)} v_G \frac{1}{m}\, dm \\ -g(t-t_0) &= v(t) - v_0 \;\; - v_G \ln \frac{m(t)}{m_0} \end{aligned} \tag{4.62}$$

oder

$$v(t) = v_0 \;-\; g(t-t_0) \;+\; v_G \cdot \ln \frac{m(t)}{m_0} \tag{4.63}$$

Da hier $v_G < 0$ (entgegen $\vec{v}$) und $m_0 > m(t > t_0)$ schreibt man besser

$$\boxed{v(t) = v_0 \;-\; g(t-t_0) \;+\; |v_G| \cdot \ln \frac{m_0}{m(t)}} \tag{4.64}$$

Aufgabe 4.4: Berechnen Sie die Beschleunigung der Rakete durch ableiten nach der Zeit. Zeigen Sie, dass Sie wieder die Bewegungsgleichung 4.59 erhalten.

[4] Alternativ kann man sich Gl. 4.57 auch in einem Inertialsystem überlegen, in dem die Rakete genau zum Zeitpunkt t in Ruhe ist und damit keine Geschwindigkeit und keinen Impuls hat. Nach kurzer Zeit dt hat die Rakete eine Gasmenge von dm_G mit Geschwindigkeit $\vec{v}_G$ ausgestoßen, und hat selber eine Geschwindigkeit $d\vec{v}$ erhalten. Die Änderung des Gesamtimpulses ist

$$d\vec{p} = m \cdot d\vec{v} \;+\; dm_G \cdot \vec{v}_G = m \cdot d\vec{v} \;-\; dm \cdot \vec{v}_G \tag{4.56}$$

Natürlich hat sich die Masse der Rakete in dem kleinen Zeitraum dt selber um die $dm = -dm_G$ geändert. Relativ zur Gesamtmasse der Rakete ist der Effekt aber vernachlässigbar, wenn der Zeitraum dt infinitesimal klein ist.

4.8 Energie

4.8.1 Arbeit

Ein Zug, der auf Schienen einen Berg hinauffährt, muss Kraft entlang dieses Weges aufbringen, um die Schwerkraft zu überwinden. Die Schwerkraft ist hier ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$, dessen Richtung nach unten zeigt. Die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ ist durch die Schienen vorgegeben. Macht es einen Unterschied, welchen Weg die Schienen nehmen? Entscheidend ist offenbar der Steigungswinkel, d.h. der Winkel zwischen $\vec{F}(\vec{r}(t))$ und $\vec{r}(t)$ auf jedem kleinen Stück $d\vec{r}$ des Weges. Wir definieren die Arbeit entlang dieses Wegstücks $d\vec{r}$ daher als

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{4.65}$$

Arbeit: W
$[W] = \mathrm{J} = \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2} = \text{Joule}$

Die gesamte Arbeit entlang eines bestimmten Weges zwischen zwei Orten $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_B$ ist die Summe aller dW Werte entlang dieses Weges,

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} dW = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r}} \tag{4.66}$$

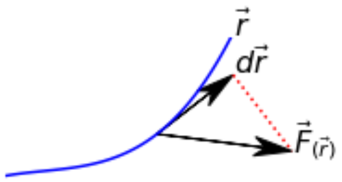

Abb. 4.11 zum Wegintegral.

Dies ist die Arbeit, die von der Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ entlang des Weges von $\vec{r}_A$ nach $\vec{r}_B$ verrichtet wird. Dreht man die Richtung des Weges um, so ändert sich für die Arbeit einfach nur das Vorzeichen. Zeigt zum Beispiel der Weg des Zuges nach unten, so ist der Winkel α zwischen $\vec{F}(\vec{r})$ und $\vec{r}$ kleiner als 90^0 und wegen

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha > 0 \tag{4.67}$$

die Arbeit positiv. Zeigt der Weg dagegen nach oben, so ist die von der Schwerkraft verrichtete Arbeit negativ.

Das Integral in Gl. 4.66 ist ein sogenanntes Linienintegral und wird komponentenweise berechnet, indem man den Weg parametrisiert z.B. als Funktion der Zeit, $r(t)$, und dann

$$d\vec{r} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\, dt = \vec{v}\, dt \tag{4.68}$$

benutzt.

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt \tag{4.69}$$

Im speziellen Fall eines geraden Weges in einem Kraftfeld mit konstanter Richtung kann man alternativ benutzen, dass

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha = F_T \cdot ds \tag{4.70}$$

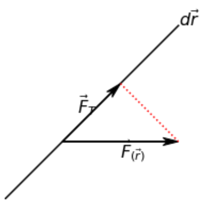

Abb. 4.12 Kraftkomponente F_T parallel zum Weg.

Hier ist $F_T = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha$ gerade die Projektion von $\vec{F}$ auf die Richtung von $d\vec{r}$ und α = ist konstant entlang des ganzen Weges, so dass

$$W = \cos\alpha \cdot \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} |\vec{F}| \cdot ds \tag{4.71}$$

Beispiel: Freier Fall Bei einem freien Fall aus der Höhe h auf geradem Weg nach unten, ist $\vec{F}$ immer parallel zum Weg $d\vec{r}$,

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} \tag{4.72}$$

und

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F} \cdot d\vec{r} = -m \cdot g \cdot dz \tag{4.73}$$

Damit ist die Arbeit

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = -\int_h^0 m\, g\, dz = -m\, g\, (0 - h) \tag{4.74}$$

oder

$$\boxed{W = m\, g\, h} \tag{4.75}$$

Beispiel: Fahrt um eine Kurve Fährt ein Auto um eine Kurve, so muss über die Räder eine Kraft auf den Wagen wirken. Nehmen wir an, dass die Kraft zu jedem Zeitpunkt senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet ist (nach innen), so ist $F_T = 0$, oder

$$\vec{F}\, d\vec{r} = F\, ds\, \cos 90^0 = 0 \tag{4.76}$$

Es ist also zu jeder Zeit $dW = 0$ und damit wird keine Arbeit bei einer solchen Kurvenfahrt verrichtet.

Beispiel: Feder, die sich zusammenzieht Eine Feder sei um die Länge x_0 ausgelenkt. Die Rückstellkraft $F(x) = -kx$ verrichtet Arbeit an der angehängten Masse,

$$W = \int_{x_0}^0 F(x)\, dx = -k \int_{x_0}^0 x\, dx \tag{4.77}$$

oder

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\, k\, x^2} \tag{4.78}$$

Beispiel: Feder, die langsam auseinander gezogen wird Wird die Feder so langsam auseinender gezogen, dass man die Beschleunigung der angehängten Masse vernachlässigen kann, so ist

$$F_a = -F_{Feder} = +k\, x \tag{4.79}$$

Die Arbeit, die man verrichtet bis zu einer Auslenkung x_0, ist daher

$$W = \int_0^{x_0} F_a\, dx = \frac{1}{2}\, k\, x^2 \tag{4.80}$$

Beispiel: Konstante Kraft Gilt $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}$ = konstant, so kann man $\vec{F}$ aus dem Integral herausziehen, so dass

$$W = \int_{\vec{x}_A}^{\vec{x}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = \vec{F}\,(\vec{x}_B - \vec{x}_A) \tag{4.81}$$

Offenbar hängt die Arbeit hier nur vom Abstand von $\vec{x}_A$ und $\vec{x}_B$ ab, aber nicht von dem genauen Weg, den ein Körper nimmt. Dies ist tatsächlich oft viel allgemeiner gültig, nicht nur bei konstanter Kraft.

4.8.2 Konservative Kraftfelder

Wir definieren daher ganz allgemein:

Konservative Kraftfelder sind Kraftfelder, bei denen die Arbeit wegunabhängig ist und damit nur von Anfang- und Endpunkt des Weges abhängt.

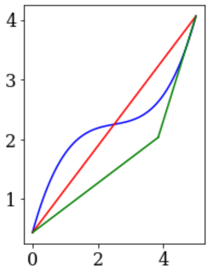

Abb. 4.13 Beispiele für verschiedene Wege im Fall einer konservativen Kraft.

- $\vec{F}$ = konstant
- $\vec{F} = \vec{F}(r)$ Zentralkraftfeld. Die Kraft zeigt überall auf das gleiche Zentrum und ihr Betrag hängt nur vom Abstand vom Zentrum ab. Beispiele sind die Gravitation und die elektrische Coulomb-Kraft.

Beispiele für konservative Kraftfelder: Beispiele für nicht-konservative Kräftfelder:

- $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$ Die Kraft hängt von der Geschwindigkeit ab, z.B. Reibung
- $\vec{F} = \vec{F}(t)$, zeitabhängige Kräfte

Für konservative Käfte gilt insbesondere, dass die Arbeit entlang eines geschlossenen Weges $= 0$ ist,

$$\boxed{W = \oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0} \tag{4.82}$$

Dies gilt, da man jeden geschlossenen Weg in zwei Teilwege $\vec{r}_A \rightarrow \vec{r}_B$ sowie $\vec{r}_B \rightarrow \vec{r}_A$ aufteilen kann. In der Berechnung des Integrals für W ist dies einfach eine Vertauschung der Grenzen des Integrals, so dass die Arbeit für beide Wege sich in der Summe gerade aufheben.

4.9 Potentielle Energie und Potential

Das Potential eines Kraftfeldes ist nur für konservative Kräfte definiert. In diesem Fall ist die Arbeit unabhängig vom zurückgelegten

Weg, so dass man sie ausdrücken kann als Funktion nur des Endpunktes und Anfangspunktes einer Bahnkurve,

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = E_{pot}(\vec{r}_A) - E_{pot}(\vec{r}_B)} \tag{4.83}$$

Tatsächlich sind durch diese Formel nur Differenzen von potentiellen Energien definiert. Man kann also zu $E_{pot}(\vec{r}_A)$ und $E_{pot}(\vec{r}_B)$ eine Konstante addieren, ohne dass sich etwas an der Gleichung ändert. Anders formuliert ist der Nullpunkt der potentiellen Energie frei wählbar.

Achtung:
Reihenfolge beachten!

Beispiel: Freier Fall Wie oben gezeigt ist bei freiem Fall aus der Höhe h die Arbeit, die das Gravitationsfeld an einer Masse m verrichtet, $W = mgh$. Damit ist

$$E_{pot}(h) - E_{pot}(0) = W = mgh \tag{4.84}$$

Definiert man den Nullpunkt der potentiellen Energie durch

$$\text{Wähle:} \quad E_{pot}(0) = 0 \tag{4.85}$$

so ist die potentielle Energie als Funktion der Höhe

$$E_{pot}(h) = mgh \tag{4.86}$$

Beispiel: Gravitation Die Gravitationskraft auf eine Masse m_1 durch eine Masse m_2 ist eine Zentralkraft,

$$\vec{F} = -G\frac{m_1\, m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \tag{4.87}$$

Nähert sich die Masse aus unendlicher Entfernung bis auf einen Abstand r der Masse M, so ist der Weg immer parallel zur Richtung von $\vec{F}$ ist, dann gilt

$$E_{pot}(r = \infty) - E_{pot}(r) = -\int_{\infty}^{r} G\frac{m_1\, m_2}{r^2}\, dr = G\frac{m_1\, m_2}{r} \tag{4.88}$$

Definiert man den Nullpunkt der potentiellen Energie jetzt durch

$$\text{Wähle:} \quad E_{pot}(r = \infty) = 0 \tag{4.89}$$

so folgt

$$\boxed{E_{pot}(r) = -\, G\,\frac{M\, m}{r}} \tag{4.90}$$

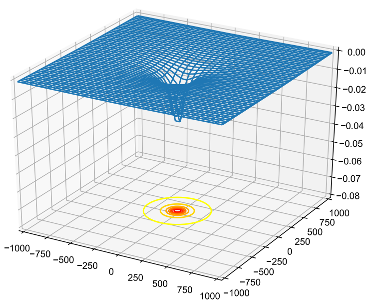

Abb. 4.14 Gravitationspotential.

4.9.1 Berechnung der Kraft aus dem Potential

Wir haben bereits gesehen, dass Differenzen der potentiellen Energien der Arbeit durch ein Kraftfeld entsprechen. Im 1-dimensionalen Fall ist

$$E_{pot}(\vec{r}_B) - E_{pot}(\vec{r}_A) = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} F_x\, dx \tag{4.91}$$

Für infinitesimal kurze Wege dx ist auch die Differenz der potentiellen Energien infinitesimal klein,

$$dE_{pot} = -F_x\,dx \tag{4.92}$$

und daher kann die Kraft aus der potentiellen Energie berechnet werden durch

$$\boxed{F_x(x) = -\frac{\mathrm{d}E_{pot}}{\mathrm{d}x}} \tag{4.93}$$

Im 3-dimensionalen muss dies auch für die anderen Komponenten der Kraft gelten und die potentielle Energie kann von allen Komponenten von $\vec{r}$ abhängen, $E_{pot}(\vec{r})$, so dass

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla E_{pot} := -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} E_{pot} \\ \frac{\partial}{\partial y} E_{pot} \\ \frac{\partial}{\partial z} E_{pot} \end{pmatrix}} \tag{4.94}$$

Die Kraft zeigt damit in Richtung der stärksten Änderung des Potentials.

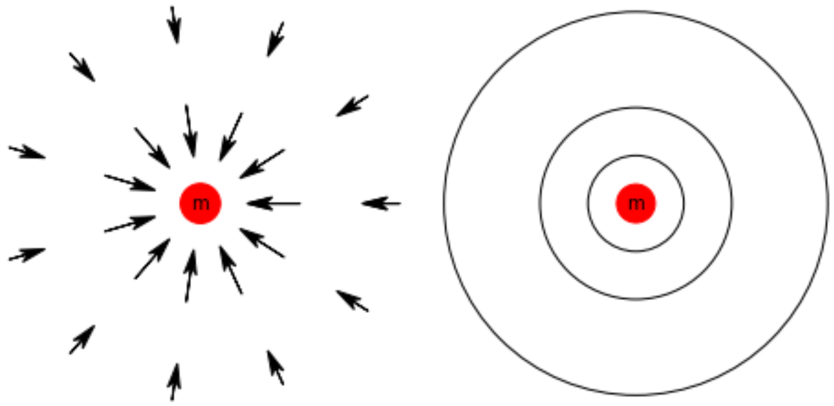

Abb. 4.15 Beispiel einer Zenralkraft (links) und Äquipotentialflächen dazu (rechts).

4.9.2 Kinetische Energie

Da die tangentiale Komponente F_T der Kraft entlang des Weges $d\vec{r}$ die Geschwindigkeit ändert, gilt

$$F_T = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{4.95}$$

Daher folgt auch

$$\vec{F}\,d\vec{r} = F_T\,ds = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,ds = m\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,dv = m\,v\,dv \tag{4.96}$$

Damit ist die Arbeit auch

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{v_A}^{v_B} m\,v\,dv = \frac{1}{2}\,m\,(v_B^2 - v_A^2) \tag{4.97}$$

Wir definieren daher die kinetische Energie als

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2}\, m\, v^2 \;=\; \frac{\vec{p}^2}{2\, m}} \tag{4.98}$$

Die Arbeit, die ein Kraftfeld an einer Masse verrichtet, erzeugt also zusätzliche kinetische Energie

Kinetische Energie E_{kin}
$[E_{kin}] = J = \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2}$

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = E_{kin}(\vec{r}_B) - E_{kin}(\vec{r}_A)} \tag{4.99}$$

4.9.3 Energieerhaltung der klassischen Mechanik

Wir haben nun

$$\begin{aligned} W &= E_{kin}(\vec{r}_B) - E_{kin}(\vec{r}_A) \\ W &= E_{pot}(\vec{r}_A) - E_{pot}(\vec{r}_B) \end{aligned} \tag{4.100}$$

und damit auch

$$E := E_{kin}(\vec{r}_A) + E_{pot}(\vec{r}_A) = E_{kin}(\vec{r}_B) + E_{pot}(\vec{r}_B) \tag{4.101}$$

In einem konservativen Kraftfeld ist also die Gesamtenergie E aus kinetischer und potentieller Energie entlang eines Weges erhalten.