Theoretische Physik 1

Tom Herrmann

24. April 2019

1 Einleitung

Gliederung:

- **Mathematische Grundlagen:**
  Vektoren, krummlinige Koordinatensysteme, Differential- und Integralrechnung, partielle Ableitungen, Vektoranalysis, Gradient, Diverenz, Rotation, lineare gewöhnliche Differentialgleichungen, Matrizen und Tensoren, Fourier-Transformation, komplexe Zahlen, Wahrscheinlichkeit.
- **Grundlagen der Mechanik:** Kinematik und Dynamik von Massenpunktsystemen, Newtonsche Axiome, Arbeit, konservative Kräfte, Schwingungen, Zentralfeld, Kepler-Problem, beschleunigte Bezugssysteme
- **Spezielle Relativitätstheorie:** Lorentz-Transformation und kinematische Konsequenzen, Minkowski-Raum, Vierer-Impuls, relativistische Bewegungsgleichung, Energie-Impuls-Vektor, Äquivalenz von Masse und Energie
- **Wärmelehre:** Boltzmann Verteilung, Entropie, Irreversibilität

Wenn man eine Fettgedruckte Größe in den Übungsaufgaben sieht ist damit ein Vektor gemeint

Teil I

Vorlesung 1

$\# =$ Anzahl

2 Vektorrechnung

Vektoren sind gerichtete Größen deren Komponenten bei Drehung oder allgemeiner Koordinaten Transformationen gewisse transformationseigenschaften besitzen.

Skalare sind dabei invariant unter Koordinatentransformation. (z.B: Masse, Ladung, Temperatur)
Ortsvektor $\vec{r}$, Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
Vektoren haben eine Richtung und eine Länge.

3 Ableitung

Ableitung können sowas als f‘ geschrieben werden als auch als $\dot{f}$ somit kann die Geschwindigkeit $\vec{v}$ als die Ableitung der Position ausgedrückt werden $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$.

4 Drehung

$\vec{a} = (a_x, a_y) = (x, y)$
$\vec{a} = (a_u, a_v) = (u, v)$ dabei ist für u und v das Koordinatensystem einfach nur um einen bestimmten Winken φ gedreht.

$$u = xcos\varphi + ysin\varphi$$
$$v = -xsin\varphi + ycos\varphi$$

Länge von:

$$\vec{a} = \sqrt{u^2 + v^2} = \left[\left(xcos\varphi + ysin\varphi\right)^2(-xsin\varphi + ycos\varphi)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$[x^2cos^2\varphi + y^2sin^2\varphi + xycis\varphi sin\varphi + x^2sin^2\varphi + y^2cos^2\varphi - 2xysin\varphi cos\varphi]^{\frac{1}{2}}$$
$$[x^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi) + y^2sin^2\varphi + cos^2\varphi]^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

□

Drehung als Matrix Multiplikation: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{2} = A_{ij}x_j$

Teil II

Vorlesung 2

5 Basis der Vektorrechnung

Mathematisch abstrakt ist ein linearer oder Vektorraum ein "Körper"von Elementen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, im dem eine Addition und eine ultiplikation mit skalaren α definiert ist.

5.1 Basis ausrechnung

- Die Anzahl der Vektoren stimmt überein mit der Dimension des Vektorraumes.
- Die Vektoren sind linear unabhängig.

5.2 Addition

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

5.3 Subtraktion

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.4 Multiplikation

$$a * \vec{v} = 5 * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5*2 \\ 5*1 \\ 5*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Bei der Division läuft das ganze dann fast genau so ab einfach nur 5 in den als zähler der jeweiligen Koordinate schreiben.

5.5 Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \circ |\vec{b}| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

6 Eigenschaften von Rechenoperationen

Kommutativität $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
Distributivität $\lambda * (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) * \lambda$
Homogenität (gemischtes Assoziativgesetz) $\alpha(\vec{a} + \vec{b} = (\alpha\vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * (\alpha\vec{b})$

6.1 Schwarzsche Ungleichung

$|\vec{a} * \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

6.2 Projektion auf die Richtung $\vec{\mathbf{b}}$

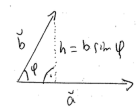
$a_b := acos(\varphi) = \vec{a} * \vec{b}$ wo $\vec{b} := \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ der Einheutsvektor in $\vec{b}$ Richtung ist. (Also soll hier b der Einheitsvektor sein)
Abstrake Definition eines Skalarproduktes mit obigen Eigenschaften und zusätzlichen $\vec{a} * \vec{a} > 0 \exists \vec{a} \neq 0$ (positiv definiert)

Teil III

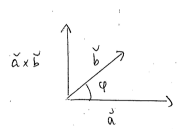
Vorlesung 3

6.3 Vektorprodukt

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad |\vec{c}| = c = ab \quad |sin\varphi|$



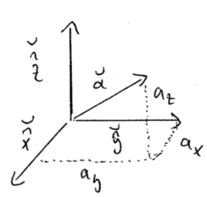
$\Leftarrow$ c = Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Paralellogramms Richtung bestimmt durch **Rechtsschrauben regel**: Drehe $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$



Eigenschaften:
Antikommutativität: Das heißt, bei Vertauschung der Vektoren wechselt es das Vorzeichen
$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
Distributivität $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c})$
Homogenität (gemischtes Assoziativgesetz) $\alpha(\vec{a} + \vec{b} = (\alpha\vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * (\alpha\vec{b})$
Sonderfälle:
$b(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$

6.4 Komonentendarstellung

Definiere 3 örthogonaledas heißt orthogonale Einheitsvektoren
$\vec{\hat{a}}, \vec{\hat{y}}, \vec{\hat{z}}$
der im 3-Dimensionalen euklidischen Raum, mit (Schreibregel: Der einfachheit wegen lasse ich in den 2 Zeilen das Zeichen für Einheitsvektor weg, es sollte eigentlich dabei stehen)
$\vec{x} * \vec{x} = \vec{y} * \vec{y} = \vec{z} * \vec{z} = 1; \vec{x} * \vec{y} = \vec{x} * \vec{z} = \vec{y} * \vec{z} = 0$
und
$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}, \vec{y} \times \vec{z} = \vec{x}, \vec{z} \times \vec{x} = \vec{y}$
(Ab diesem Zeitpunkt ist die Schreibregel wieder aufgehoben) andere häufige Schreibweisen:
$\vec{e}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$



$\vec{a} = a_x\vec{\hat{x}} + a_y\vec{\hat{y}} + a_z\vec{\hat{z}} = (a_x, a_y, a_z)$ mit $a_x = \vec{a} * \vec{\hat{x}}, a_y = \vec{a} * \vec{\hat{y}}, a_z = \vec{a} * \vec{\hat{z}}$

$$\breve{\hat{e}}_i \cdot \breve{\hat{e}}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

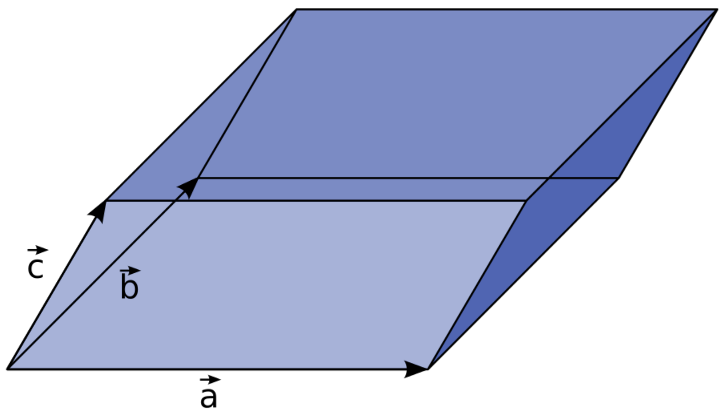
$$\breve{\hat{e}}_i \times \breve{\hat{e}}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, \breve{\hat{e}}_k$$

wobei das "Levi-Civita-Symbol"

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } i,j,k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

I

6.5 Spatprodukt



Das Spatprodukt ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ des dreidimensionalen euklidischen Vektorraums R^3 kann wie folgt definiert werden:
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

6.5.1 Eigenschaften des Spatprodukts

- Das Spatprodukt ist **nicht kommutativ**. Der Wert ändert sich jedoch nicht, wenn man die Faktoren zyklisch vertauscht:
  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$

- Man kann das **Spatprodukt mit Hilfe der Determinante berechnen**. Für
  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ gilt:
  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

- Die **Multiplikation** mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ ist **assoziativ**
  $(\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

- Es gilt ein **Distributivgesetz:**
  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$

- Invarianz unter zyklischer Vertauschung:
  $(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) * \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a} * \vec{b})$
  Dies ist auch in 3-Dimensionen möglich, wie man am Beispiel der Determinante gesehen hat.

6.6 Doppeltes Vektorprodukt

Im algemeinen nicht assoziativ
Es gibt die **bac-cab-Regel**
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} * \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} * \vec{b})$
Daraus folgt auch die Jacobi-Identität
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

7 Das Differential

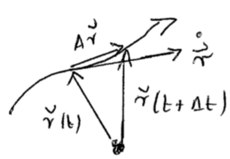
Ist $f(x)$ differenzierbar bei x, so nennt man $f'(x)h$ für beliebige h Differential von $f(x)$. Ma schreibt oft

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

In der Mathematik wird dies Differentialform genannt, die man formal als dual zum Vektorraum bestehend aus Koordinaten $x, ...$ definiert.

8 Vektorfunktionen

z.B. Kurve eines Massenpunktes wird beschrieben durch $\vec{r}|t| = (x(t), y(t), z(t))$ wobei t die Zeit ist.
Kettenregel, Produktregel etc. gelten auf für Vektorfunktionen.



$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$

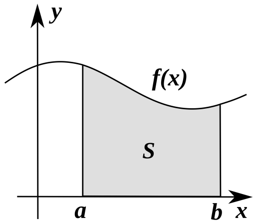
$= (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) =$ Geschwindigkeit $\vec{v}$

Beschleunigung $= \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

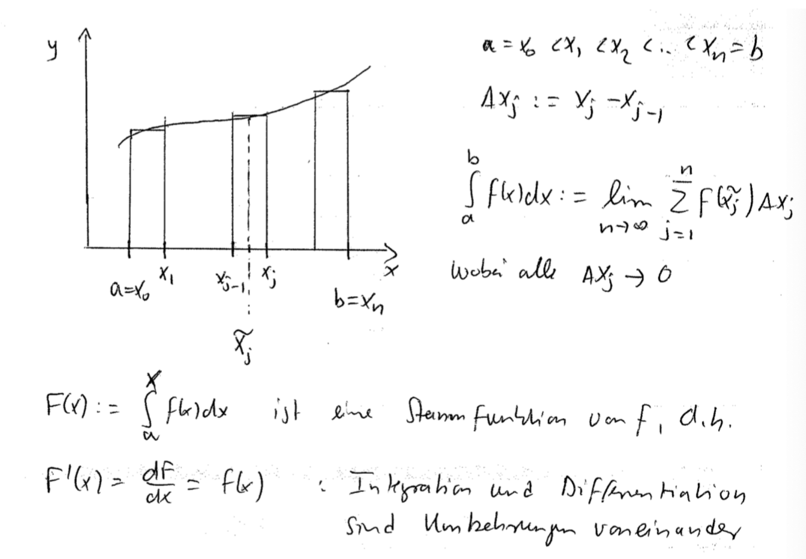
z.B.

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b}\vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}\vec{r}(f(t')) = \frac{d\vec{r}}{dt}(f(t')) * \frac{df}{dt'}(t')$$

9 Integration



Die Integralrechnung ist aus dem Problem der Flächen- und Volumenberechnung entstanden. Dabei kann die Funktion auch ein komplett random geformter klotz in einem koordinaten System sein.
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Eine der am häufigsten genutzen Regeln in der Physik ist, dass Konstanten vor das Integral gezogen werden können.

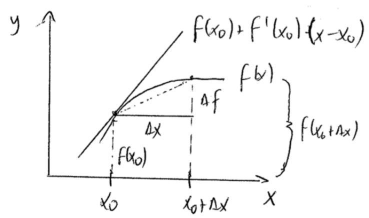
10 Differentialrechnung

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

In der Mathematik wird dies Differentialform genannt, die man formal als dual zum Vektorraum bestehend aus Koordinaten $x, ...$ definiert.

11 Vektorfunktionen

z.B. Kurve eines Massenpunktes wird beschrieben durch $\vec{r}|t| = (x(t), y(t), z(t))$ wobei t die Zeit ist.



$f'(x_0) = \frac{df}{dx}|_{x_0}$

$= lim_{\Delta x \to\ 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

$= lim_{x \to\ x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

12 Taylor Entwicklung

Im 1. Ordnung: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Verallgemeinerung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + ...$$

Jede **Potenzreihe** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und damit auch jede **Taylor-Reihe** hat einen Konvergenzradius λ, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ für alle $|x - x_0| < r$ konvergiert. Im allgemeinen ist r durch den Abstand zur nöchsten Singularität von $f(x)$ gegeben, diese Tatsache gilt aber nur allgemein im Raum der komplexen Zahlen.
Beispiel:
$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$, da $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = -x^2$ obwohl $\frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert und unendlich oft differenzierbar ist.
Der tiefere Grund ist daß $\frac{1}{1+x^2}$ bei $x = \pm i$ singulär ist.

13 Partielle Differentiation

Funktionen mehrerer Variablen, z.B. f(x,y,z), können nach den einzelnen Variablen differenziert werden, wobei man sich die anderen Variablen konstant vorstellt.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = lim_{\Delta x \to\ 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z - f(x, y, z))}{x, y, z}$$

und analog für die anderen Variablen.
Kurzschreibweise:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Höhere Ableitungen:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x}$$

übrigens gilt: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y}$ (Symmetrie)
Man kann leicht die erweiterte Kettenregel zeigen:
Für $f(t) = f(x|t), y(t), z(t)$ gilt $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} frac\partial f \partial y \frac{dy}{dt} + frac \partial f \partial z \frac{dz}{dt}$
oder als Differential
$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz$
Kann auch für die 1. Ordnung einer multi-dimensionalen Taylor-Entwicklung verwendet werden:
$f(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, t_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, t_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, t_0)(z - z_0) + ...$

14 Vektoranalysis: Gradient, Divergenz, Rotation

Ein **Vektorfeld** ist eine Vektor-wertige Funktion mehrerer Variablen:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z))$$

Beispiele: Geschwindkeitsfeld (e.g. Windgeschwindigkeit), Kraftfeld
Ein **Shaderfeld** hat nur eine (skalare) Komponente:

$$f(\vec{r}) = f(x,y,z)$$

Gradient:

$$f \to \vec{\nabla} f = gradf = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad Shaderfeld \to Vektorfeld$$

Es gelten die üblichen Produkt- und Summenregeln:

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g; \vec{\nabla}(f+g) = g\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} g$$

Beispiel: f sei Funktion der Abstand $|\vec{r} - \vec{r}_0| = f'(|\vec{r} - \vec{r}_0|)\frac{x - x_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$
Dabei gilt: $|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$
Dabei ist das ganze dann logischer weise nur vom Abstand abhängig
$\Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \vec{e}_{\vec{r} - \vec{r}_0}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2(x - x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = \frac{x - x_o}{|\vec{r - \vec{r}_0}|}$$

Einheiten in Kegelkoordinaten:
$\Rightarrow \vec{\nabla} = \frac{df}{dr}(|\vec{r} - \vec{r}_0|)\vec{\nabla}|\vec{r} - \vec{r}_0| = f^{\partial}(|\vec{r} - \vec{r}_0|)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$ z.B. $f(\vec{r}) = c|\vec{r} - \vec{r}_0|$ Das Gravitationspotential zwischen zwei Teilchen der Masse m_1 und m_2
$\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$ $\alpha = -1$ und $c = -G_N m_1 m_2$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi(|\vec{r} - \vec{r}_0|) = \frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$ Nebenrechnung: $\phi^{\partial}(r) = +\frac{G_N m_1 m_2}{r^2}$
$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}(\vec{r} - \vec{r}_0) =$ Die Kraft die Teilchen 2 auf Teilchen 2 ausübt.

15 Rotation

Hierbei muss extrem auf die Vorzeichen aufgepasst werden. Es gibt zudem nur 2 Kombinationen wie man im laufe sehen wird die sich nicht wegkürzen.
rot$(\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\vec{e}_i, j = (\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y})$
Es sind 3 da wir uns im 3 Dimensionalen befinden. Vektorfeld $\Rightarrow$ Vektorfeld ; Wirbelstärke

Summe und Rotation:
$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = f\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{\nabla} f) \times \vec{F}$
Beispiele: $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{F} = f(r)\vec{\nabla} \times \vec{r} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{r}$
$\vec{f}(\vec{r}) = (\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y)} = \vec{0}$ $\quad \vec{r} = (x, y, z)$
$\vec{\nabla} f = f' \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \Rightarrow (\vec{\nabla} f) \times \vec{r} = \frac{f'}{|\vec{r}|} \times \vec{r} = 0$

Beispiel B:
$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r}$
$|\vec{F}(\vec{r})| = |\vec{w}|\sqrt{x^2 + y^2}$
$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(w_x y - w_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(w_y x - w_x y)$
Damit gilt: $\vec{F} = \vec{w} \times \vec{a} \Rightarrow F_z = w_x y - w_y x$ und $F_y = w_z x - w_x z$
Also ist es am ende: $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 2\vec{w}$
$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = 2\vec{w}$

16 Divergenz

div $\vec{f} = \vec{\nabla}, \vec{F} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) * F_x, F_y, F_z = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
Vektorfunktion $\rightarrow$ Sklarafunktion
$\vec{\nabla}(\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla}\vec{F} + \vec{\nabla}\vec{G} \quad \vec{\nabla} + (f\vec{f}) = f\vec{\nabla} * \vec{F} + (\overline{\nabla f}) * \vec{F}$
Beispiele:
$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \quad \vec{\nabla} * \vec{r} = 3$
anderes Beispiel: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r} \quad \vec{w} = const.$
wähle deine Einschränkungen: $\vec{w} = w\vec{e}_z = (0, 0, w) \rightarrow \vec{w} \times \vec{r} = (-wy, wx, 0)$
$\vec{\nabla} * (\vec{w} \times \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(wx) + \frac{\partial}{\partial z}0 = 0$ Weitere Beispiele im im Skript.