

Physik 1 Skript

Tom Herrmann

4. Juni 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	4
1.1 Übungsgruppen	4
1.2 Klausurbonus	4
1.3 Buchempfehlungen	4
I Vorlesung 1	4
2 Was ist Experimentalphysik?	4
3 Was macht ein gutes Experiment aus?	4
4 SI-Einheiten	4
4.1 Dimension	5
II Vorlesung 2	5
5 Wiederholung	5
5.1 Definitionen	5
6 Kinematik des Massenpunktes	5
6.1 Behauptung	6
6.2 1-dimensionale Bewegung	6
III Vorlesung 3	7
7 3.3.4 Spezialfälle	8
7.1 Gleichförmige Bewegung	8
7.2 konstante Beschleunigung	8
8 3.4 3-Dimensionale Bewegung (Vektoren)	8
IV Vorlesung 4	8
V Vorlesung 5	12
9 Newton Axiome	12

10 Inertialsysteme	12
11 Gravitation	12
11.1 Erdbeschleunigung	12
12 Träge und schwere Masse	13
VI Vorlesung 6	13
13 Impulserhaltung	14
13.1 Federn	14
13.1.1 Hook'sches Gesetz	14
13.1.2 Taylorentwicklung	14
13.1.3 Seilspannung	16
14 Reibung	16
14.0.1 Stokes Reibung	16
14.0.2 Newton-Reibung	17
VII Vorlesung 8	17
14.1 Wiederholung	17
15 Schwingungen	17
15.1 Harmonischer Oszillator	17
15.1.1 Pendel	17
15.2 allgemeine Lösung harmonischer Oszillator:	18
15.2.1 Anfangsbedingungen	18
16 4.7 Variable Masse	19
16.1 Bsp. inelastischer Stoß	19
VIII Vorlesung 9	19
16.2 Rakete	20
16.2.1 Lösung	20
17 4.8 Energie	20
17.1 Arbeit	20
17.1.1 Beispiel: Der Freie Fall	21
17.1.2 Bsp: Feder	21
17.1.3 Konstante Kraft	21
17.2 Konservative Kräfte	21
17.2.1 Das geschlossenes Wegintegral	22
IX Vorlesung 10	22
18 4.9 Potentielle Energie und Potential	22
18.1 Beispiel	22
18.2 Gravitation	22
18.3 Von Potentieller Energie auf Energie schließen	23

18.4 kinetische Energie	23
18.5 Energieerhaltung	23
18.6 4.10 Drehbewegung	24
X Vorlesung 11	24
XI Vorlesung 12	26
18.7 4.11 Drehmomente	26
19 Scheinkräfte	26
20 6 Zweiteilchen Systeme	26
20.1 Schwerpunktsystem und Relativsystem	26
20.2 Rechnung	27
20.3 Gesamtmoment	27
XII Vorlesung 12 - Übernahme durch Prof. Hagner	27
20.4 kinetische Energie	29
20.5 sonderfall: Abgeschlossene Systeme	30
20.6 Das Schwerpunktsystem	30
XIII Vorlesung 13	30

1 Einführung

peter.schleper@physik.uni-hamburg.de

1.1 Übungsgruppen

Es gibt 4 Übungsgruppen und eine davon ist auf Englisch.

1.2 Klausurbonus

Es müssen 50% der Aufgaben richtig abgegeben worden sein des jeweiligen Teils (Experimental und theoretische Physik) um einen Klausurbonus zu erhalten. Der Klausurbonus ermöglicht es mit nur 30% der benötigten Punktzahl die Klausur zu bestehen.

1.3 Buchempfehlungen

Gerthsen "Physik" Verlag Springer ist das Buch mit dem er gelernt hat.

Teil I

Vorlesung 1

2 Was ist Experimentalphysik?

Die ersten Leute die sich gedanken in Richtung Physik gemacht haben waren Philosophen und erst ab dem 17 Jahrhundert fing der Umschwung an. Dabei war der Gedanke einfach Erkenntnisse über die Natur zu erlangen und dies wenn möglich zu vereinfachen. Wie Einstein aber sagte: "Dinge zu vereinfachen ist gut, sie einfacher zu machen als sie eigentlich sind aber nicht"

3 Was macht ein gutes Experiment aus?

- Naturbeobachtung
- reproduzierbar
- Naturgesetze daraus ableiten

4 SI-Einheiten

$x = 1.307m \rightarrow$ Einheit $[x] \Rightarrow$ Meter ; dim x = Länge definieren Standards

- [Zeit] = SI: s - cgs: s
- [Längen] = SI: m - cgs: cm
- [Masse] = SI: kg - cgs: g

4.1 Dimension

[Länge] = 1m

[Fläche] = 1m²

[Volumen] = 1m³

[Geschwindigkeit] = 1 $\frac{m}{s}$

[Zeit] = 1s

[Kraft] = 1N = 1 $\frac{kg \times m}{s^2}$

[Leistung] = 1W = 1 $\frac{N}{s^2}$ = 1 $\frac{kg \times m}{s^3}$

Sämtliche Terme einer Gleichung müssen dem entsprechend die gleiche Dimension haben

Teil II

Vorlesung 2

5 Wiederholung

Wichtige Faktoren für ein gutes Experiment

- Reduzierung von Naturerscheinungen
- Vereinfachung
- Systematisch
- Qualitativ
- Reproduzierbar

5.1 Definitionen

Eine Sekunde wird am besten über die Atomphysik definiert und zwar über die Cs Atome.

Ein Meter ist über die Lichtgeschwindigkeit Definition. 1m = c * $\frac{1s}{299792458m}$

Die Masse wird definiert über ein sogenanntes Urkilogramm. Sprich über eine Masse werden alle anderen Massen definiert.

Stromstärke: A wird ebenfalls über ein Experiment definiert.

Stoffmenge: mol

Temperatur: Kelvin k

Alle Naturkonstanten wurden letztes Jahr (2018) dabei neu definiert um eine höhere Genauigkeit zu gewährleisten

6 Kinematik des Massenpunktes

Ein realer Körper:

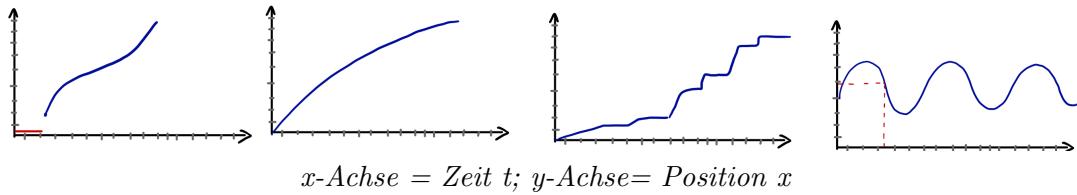
- Translation
- Rotation
- Deformation

Aber nun reden wir über einen starren Körper also einen Körper bei dem alle Abstände innerhalb des Körpers unabhängig von der Zeit gleich bleiben (**keine Deformation**).

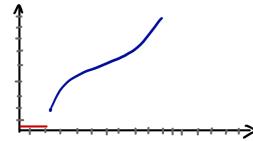
Auf den Massepunkt wirkt ebenfalls keine Rotation in diesem Beispiel. Was allerdings nicht heißt dass man in der realen Welt die Rotation (SPIN) einfach vernachlässigen kann egal wie klein dieses Teilchen auch sein möge.

6.1 Behauptung

Man kann 2-Dimensionale Bewegungen beschreiben.



6.2 1-dimensionale Bewegung



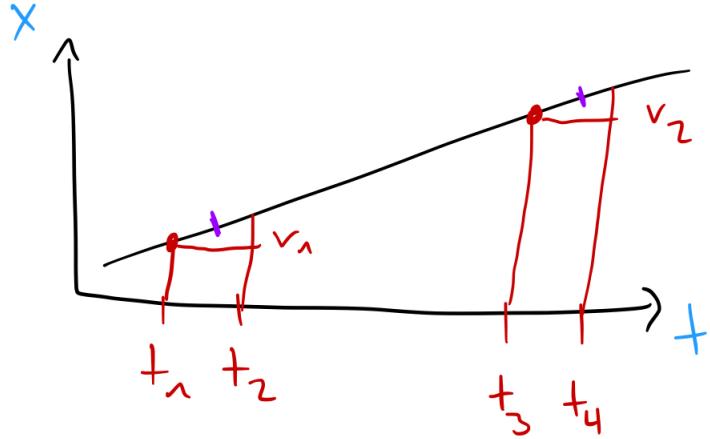
$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

Die Geschwindigkeit ist natürlich immer eine Durchschnittsangabe da es über eine gewisse Zeitspanne angegeben wird.

Teil III

Vorlesung 3

$$\begin{aligned} v &= \dot{x} & v &= \frac{dx}{dt} \\ a &= \dot{v} = \ddot{x} & a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ \text{Mittelwerbeschleunigung} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{x_4 - x_3}{t_4 - t_3} - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}{t_3 - t_1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \rightarrow x(t) = x_0 + \int_t^{t_0} v dt \\ a &= \frac{dv}{dt} \rightarrow v(t) = v_0 + \int_t^{t_0} a dt \end{aligned}$$

$x(t)$ bei gegebenen $a(t)$.

$$x(t) = x_0 + \int_t^{t_0} (v_0 + \int_t^{t_0} a(t) dt) dt''$$

$v(t)$ aus $a(x)$:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} & dt &= \frac{dx}{v} \\ a &= \frac{dv}{dt} & dt &= \frac{dv}{a} \end{aligned}$$

darauf ergibt sich $\frac{dx}{v} = \frac{dv}{a} \Leftrightarrow \int_{v_1}^{v_0} v dv = \int_{x_1}^{x_2} a(x) dx$ durch weiteres umformen kommt man zum ausdruck:

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \int_x^{x_0} a(x) dx$$

Wenn man nun die Masse mit einbezieht kommt man zur klassischen kinetischen Energie

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_x^{x_0} a(x) dx$$

7 3.3.4 Spezialfälle

7.1 Gleichförmige Bewegung

$$a = 0 \Leftrightarrow v = v_0 \quad x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$$

Also ist die Geschwindigkeit konstant

7.2 konstante Beschleunigung

$$a = \text{const} \quad v = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t (v_0 + a(t - t_0)) dt$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt + a \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

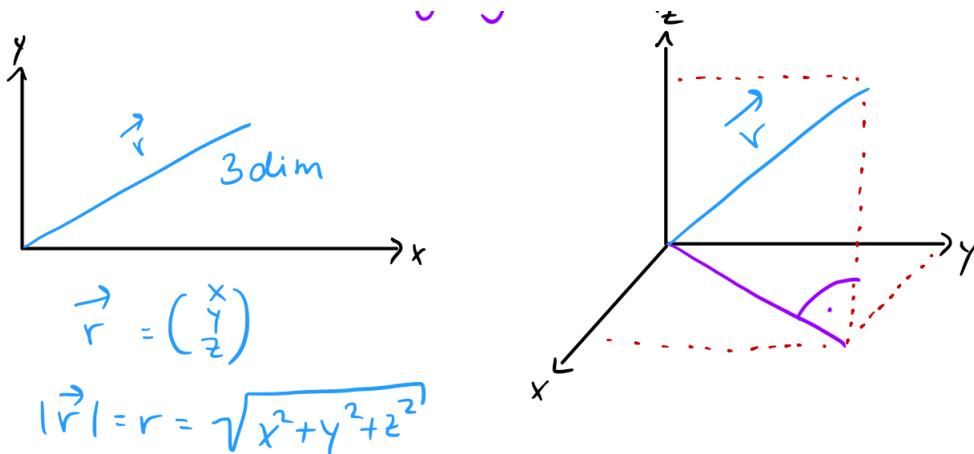
$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Wahl des Koordinaten Systems:

t=0 und x=0 Gleichförmige Bewegung: $a = 0; v = v_0 \rightarrow x = v * t$

konstante Beschleunigung: $a = \text{const}; v = v_0 + at; x = vt + \frac{1}{2}at^2$

8 3.4 3-Dimensionale Bewegung (Vektoren)



Sofern es keinen Vektorpfeil über einem Vektor gibt ist meist die Länge des Vektors gemeint

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \|\vec{r}\| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Leftrightarrow v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\text{Beschleunigung } a_x = \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Teil IV

Vorlesung 4

Zusammenfassung am 23. April 19

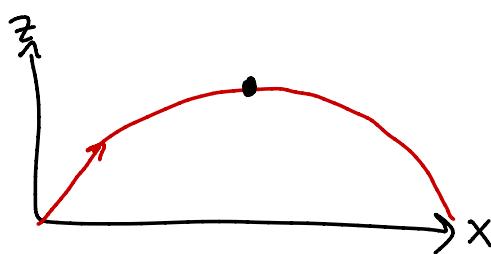
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{v}$$

Bsp: $\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{r})$ Klammer vor Punkt vor Strich vor Ableitung

Bsp. Kapitel 3.4.1.: schiefw Wurf



Anfangsgeschw $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} \end{pmatrix}$

Beschleunigung $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix}$ $a_z = -9,81 \frac{m}{s^2}$

Spezialfall: $\vec{a} = \text{const}$

$$\vec{r} = \cancel{\vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0)} + \frac{1}{2} \vec{a} (t-t_0)^2$$

Koord $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$ $t_0 = 0 \text{ s}$

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \cdot t \\ 0 \\ v_{0z} \cdot t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \cdot t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= v_{0x} \cdot t \\ y &= 0 \\ z &= v_{0z} \cdot t + \frac{1}{2} a_z t^2 \end{aligned}$$

höchster Punkt des schießen Wurfs:

$$v_z(+)_m = 0 \Rightarrow v_z = v_{0z} + a_z t_m = 0$$

$$t_m = -\frac{v_{0z}}{a_z}$$

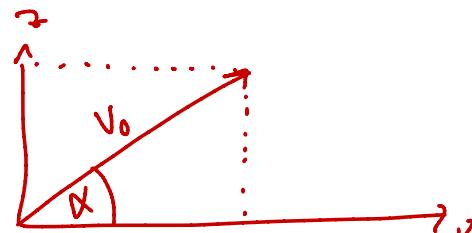
$$t_{\text{total}} = 2 t_m = -2 \frac{v_{0z}}{a_z}$$

$$\Rightarrow x = v_{0x} \cdot t$$

$$x_{\text{total}} = v_{0x} \cdot t_{\text{total}} = -2 \frac{v_{0z} v_{0x}}{a_z}$$

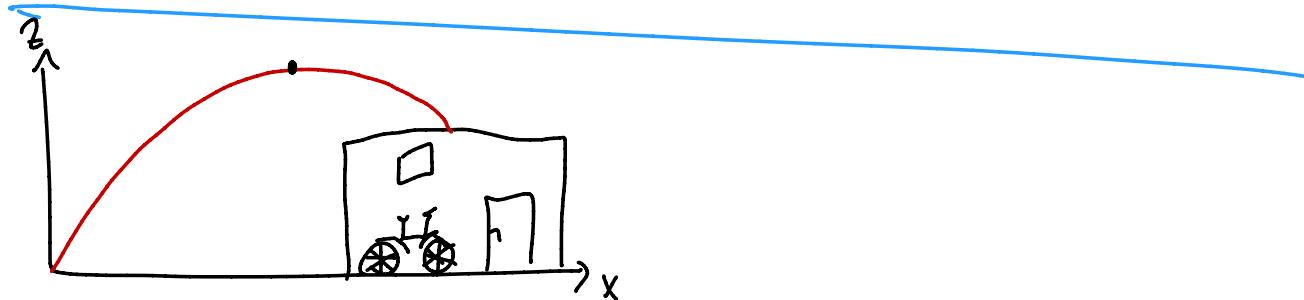
Als Funktion des Winkels:

$$\frac{d}{d\alpha} x_{\text{total}}(\alpha) = 0 \Rightarrow \text{Max Wurfweite}$$



$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{0z} = v_0 \cdot \sin \alpha$$



Heute wollen wir über Kräfte reden

Kapitel 4 Dynamik von Massenpunkten:

4.1: Newton'sche Axiome

· Trägheitsprinzip

· gleichförmig geradlinig, falls keine äußeren Kräfte wirken

· Aktionsprinzip

· Änderung des Impulses kann nur proportional zur Kraft und in Richtung der Kraft (äußeren) stattfinden.

$$\text{Impuls} = \vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$$

$$[F] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) = m \vec{v} + m \cdot \vec{a}$$

$$= m \vec{v} + m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

$$\text{falls } m = \text{const} \Rightarrow m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

Teil V

Vorlesung 5

9 Newton Axiome

- **Trägheitsprinzip** Ein Körper bleibt in Ruhe oder gleichförmiger Bewegung wenn keine resultierende äußere Kraft wirkt.
- **Aktionsprinzip** Ein Körper wird in Richtung der resultierenden äußeren Kraft beschleunigt und es gilt

$$\vec{F} = m * \vec{a}$$

, mit m = Masse des Körpers (Konstant) und \vec{a} der resultierender Beschleunigungsvektor.
 $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$

- **actio = reactio** Die Kräfte treten immer Paarweise auf: Wenn der Körper A eine Kraft $\vec{F}_A^{(B)}$ auf einen Körper B ausübt, dann wirkt eine gleichgroße, aber entgegengesetzte gerichtete Kraft $\vec{F}_B^{(A)}$ von B auf A.
 $\vec{F}_A^{(B)} = -\vec{F}_B^{(A)}$

10 Inertialsysteme

In einem Intertialsystem gilt $F = m * a$ in seiner reinsten Form. Es ist damit ein Bezugssystem, in welchem sich ein kräftefreier Körper gradlinig gleichförmig bewegt. Die **Newton'schen Axiome** gelten damit **nur in Intertialsystemen**

11 Gravitation

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{a}_G$$

$$F_G = m \cdot g$$

$$\vec{F}_{12} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{e}_{21}$$

g ist ortsabhängig, m ist eine intrinsische Eigenschaft.

Dabei ist $G = 6,67 * 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

11.1 Erdbeschleunigung

Die Annahme zum Ausrechnen der Erdbeschleunigung ist dass der Masseschwerpunkt im Mittelpunkt der Masse ist.

$$F_k = G \frac{M_E * m_k}{(r_E + h)^2} \quad h \ll r_E$$

$$F = G \frac{M_E}{r_E^2} * m_k = g * m_k$$

$$\Rightarrow g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

Zum Momentanen Stand besprechen wir dabei nicht die Fluchtgeschwindigkeit. Diese wird aber zu einem späteren Zeitpunkt noch besprochen.

Da die Erde eine so große Masse hat ist die beschleunigung dem entsprechend für uns klein $1 >> a$ wie aus $F = m * a$ folgt.

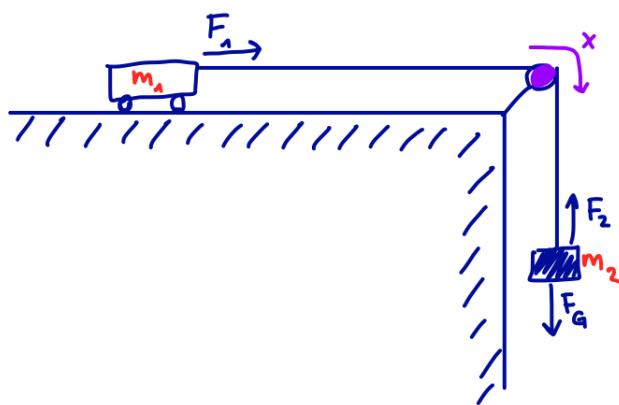
12 Träge und schwere Masse

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_{träge} * \vec{v})$$

$$G \text{ mit } \vec{F}_G = G \frac{m_{1,schwer} * m_{2,schwer}}{r^2} * \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = g * m_{schwer}$$

Durch Experimente durchgeführt von **Eötvös** folge $m_{schwer} = m_{träge}$ für alle Stoffe

$$G \frac{m_{träge} * a}{\frac{m:Em_{schwer}}{r^2}} = konst = \frac{m_{träge}}{m_{schwer}} = \frac{a * r^2}{G * m_E}$$



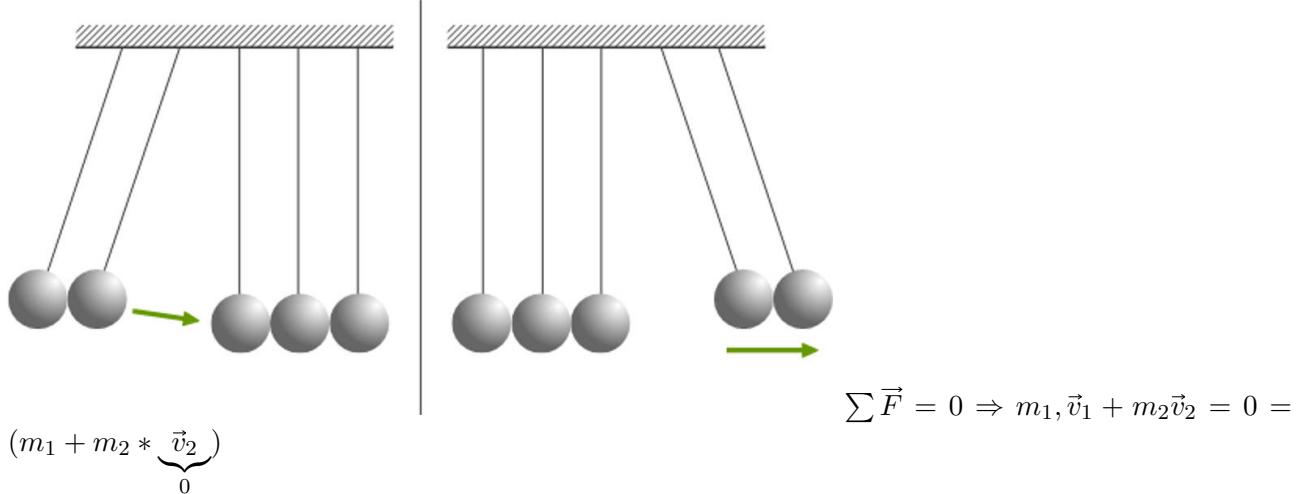
$$\begin{aligned}
 m_1 a_1 &= F_1 \text{ (träge)} \\
 m_2 a_2 &= F_2 + F_G \text{ (träge)} \\
 F_1 &= -F_2 \\
 \text{Der Faden muss gespannt bleiben.} \\
 a_1 &= a_2 \\
 \Rightarrow m_1 a &= -m_2 a \\
 F_1 &= -F_2 \\
 m_{1,träge} a_1 &= F_1 = -F_2 = -(m_{2,träge} a_2 - F_G) \\
 \text{mit } F_G &= -m_{2,schwer} g \\
 m_{1,träge} a &= -m_{2,träge} - m_{2,schwer} g \ddot{a}
 \end{aligned}$$

$$a = \frac{m_{2,schwer}}{m_{1,träge} + m_{2,träge}} g$$

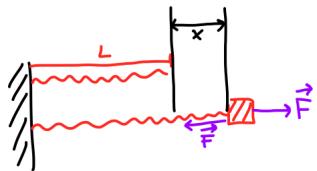
Teil VI Vorlesung 6

Bei der Gravitation gibt es einige Experimentelle Möglichkeiten die Gravitation zu veranstalichen und zu beweisen. Im allgemeine gilt immer dass eine Schwere Masse immer eine Gravitation auf andere Objekte ausübt. Die Masse kann aber noch so gering sein und trotzdem wird dies einen unterschied im Gravitationsfeld machen, es wird nur für das Menschliche Auge nicht sichtbar sein da es viel größere Massen gibt.

13 Impulserhaltung



13.1 Federn



Ruhelage
 $\vec{F} = -k\vec{x}$ (linear)
 $m \underbrace{\ddot{x}}_{\ddot{x}} = \vec{F} = -k\vec{x}$
 $\ddot{x} + \frac{k}{m}\vec{x} = 0$ Bewegungsgleichung
Differentialgleichung 2. Ordnung

13.1.1 Hook'sches Gesetz

$$F_x = -k_F \cdot \Delta x \quad \Delta x \equiv x - x_0 \equiv x$$

$$\rightarrow F_x = -k_F \cdot x$$

Zuerst wird Arbeit an der Feder verrichtet (Verformung), dann verrichtet die Feder selbst Arbeit.

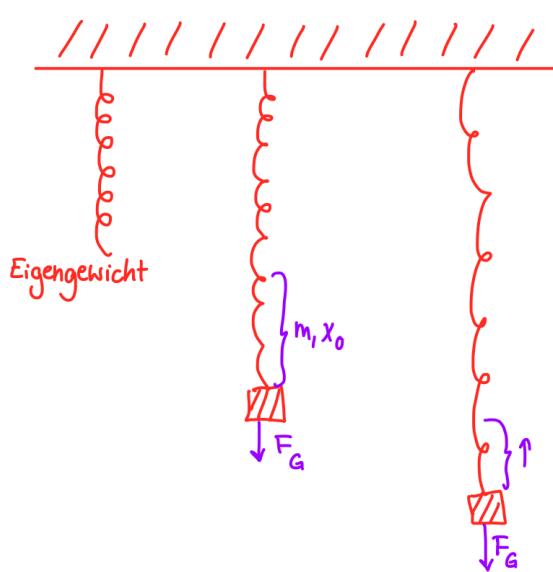
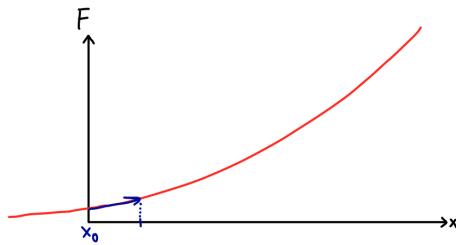
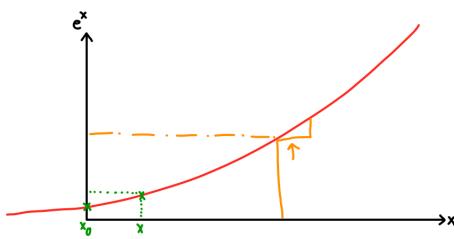
$$W_{02} = \int_{x_0}^{x_2} F_x \Delta x = -\frac{1}{2} k_f x_2^2 < 0$$

$$W_{20} = \int_{x_2}^{x_0} F_x \Delta x = \frac{1}{2} k_f x_2^2 > 0$$

13.1.2 Taylorentwicklung

In dem Fall gibt es auch das Beispiel der Taylorentwicklung der e-Funktion. $d_{(x)}$ $d'_{(x)}$
 $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''$
 $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + (x - 0)e^0 + \frac{(x - 0)^2}{2!}e^0 + \dots = \underbrace{1}_{Ruhelage} + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$



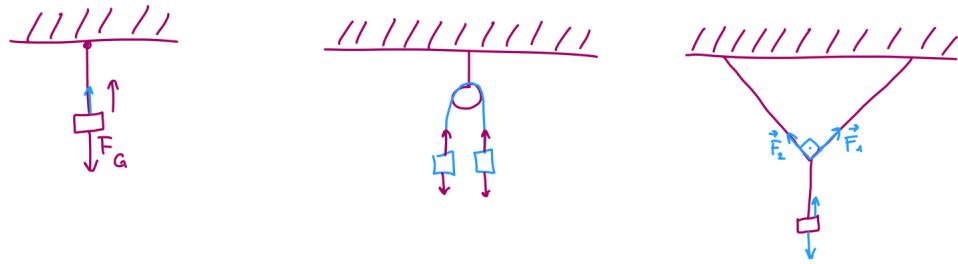
$$F_G + F_{Feder} = mg - kx_0 \underset{(1)}{=} 0 \Rightarrow k$$

$$m\ddot{x} = mg - k \underbrace{(x_0 + x)}_{(1) \text{ einsetzen}}$$

$$m\ddot{x} = kx$$

$$\ddot{x} \frac{k}{m} x$$

13.1.3 Seilspannung



$$m * a = \sum F = F_G + F_A S = 0 \quad \sum \vec{F} = 0$$

$$-F_G = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

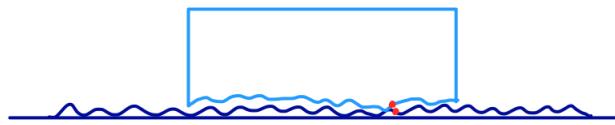
Notiz: $\vec{F}_1 * \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| * |\vec{F}_2| * \cos\alpha$

$$\vec{F}_G^2 = \vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^2 + 2 \underbrace{\vec{F}_1 \vec{F}_2}_{=0 \text{ wegen } 90 \text{ grad}}$$

$$S^2 = 4^2 + 3^2$$

14 Reibung

$$F_R = \mu \cdot F \quad \vec{F}_R \text{ ist entgegen } \vec{v}$$

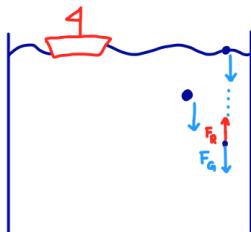


Reibungskraft:

μ	Haft	Gleit
Stahl - Stahl	0,75	0,57
Teflon - Teflon	0,04	0,03

14.0.1 Stokes Reibung

Reibung im Wasser



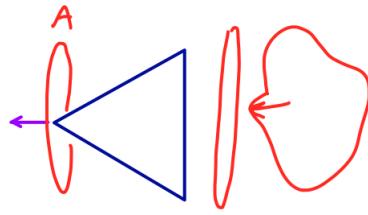
$$F_R = 6\pi * r\mu * v \Rightarrow \text{Viskosität}$$

$$|F_R| = |F_G| \Rightarrow mg = 6\pi r\mu v$$

$$\Rightarrow v = \text{konst}$$

solange v klein ist

14.0.2 Newton-Reibung



$$F_R = \frac{1}{2} \underbrace{a_w}_{\text{spezifische Luftwiderstand}} \underbrace{\rho}_{\text{Dichte der Luft}} Av^2$$

Teil VII

Vorlesung 8

14.1 Wiederholung

Angenommen man habe eine Senke und ein Auto welcher hinterrutscht. Man hat also drei Kräfte die Auftreten. Diese Wären die Gewichtskraft, die Normalkraft und die Reibung(Haftreibung). Dazu gilt wenn die nicht negative Kraft größer ist als die Haftreibung dann herrscht beschleunigung.

$$F_{Haft} = \mu F_N$$

$$\text{Gleitreibung } F_{Gleit} = \mu_G F_N$$

15 Schwingungen

15.1 Harmonischer Oszilator

Wenn man eine Feder hat und an dieser irgendeine Masse m hängt, gibt es logischerweise eine Auslenkung an der Feder. Damit wirkt natürlich eine Kraft nach oben und die Federkraft nach unten.

$$m\ddot{x} = F = -kx$$

Und nun zur Bewegungsgleichung des Harmonischen Oszilator. Dieser Fall lässt sich auf sehr viele Beispiele anwenden.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

15.1.1 Pendel

Man nehme ein Pendel in einer Ruhelage und ein weiteres Pendel welches dem anderen Pendel vollkommen gleicht. Das zweite Pendel unterscheidet sich lediglich durch die auslenkung des Pendels um den Winkel φ .

Die **Masse** ist bei einem Pendel vollkommen egal da nur die Gewichtskraft auf die Masse des Pendels wirkt.

Wir sagen nun, dass wir bei dem zweiten Pendel noch zusätzlich eine Tangentialkraft haben welche logischerweise in Richtung des Ruhelage zeigt.

$$F_T = -F_G \cdot \sin\varphi = -mg \cdot \sin\varphi$$

Nun nutzen wir die Definition des Bogenmaßes um folgende Gleichung daraus zubekommen.

$$\underbrace{x_T}_{\text{Umfang aller Bahnen}} = \underbrace{l}_{\text{Radius}} \cdot \underbrace{\varphi}_{\text{Winkel}}$$

Also

$$\ddot{x}_T = l\ddot{\varphi}$$

$$F_t = m_{Träge} \cdot \underbrace{a_T}_{\ddot{x}_T} \Rightarrow m_g \cdot g \cdot \sin \varphi = m_T \cdot l\ddot{\varphi}$$

\Rightarrow

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

Nährung dazu: $\sin \varphi \approx \varphi$ in Bogenmaß für kleine φ

Ein Praktischer Exkurs:

$$\varphi_{\text{in Grad}} = \varphi_{\text{Bogenmaß}} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} \quad (2)$$

15.2 allgemeine Lösung harmonischer Oszilator:

Feder: $w^2 = \frac{k}{m}$ Pendel $w^2 = \frac{g}{l}$

Bewegungsgleichung: $\ddot{y}_{(t)} + w^2 y_{(t)} = 0$ Da wir nun eine Differentialgleichung haben brauchen wir nun einen Ansatz den wir raten müssen.

$$\dot{y}_{(t)} = A \cdot \sin(w \cdot t) + B \cdot \cos(w \cdot t)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= w \cdot A \cdot \cos(wt) - w \cdot B \cdot \sin(wt) \\ \ddot{y} &= -w^2 \cdot A \cdot \sin(wt) - w^2 \cdot B \cdot \cos(wt) \\ \ddot{y}_{(t)} - w^2 y_{(t)} &= 0 \end{aligned}$$

15.2.1 Anfangsbedingungen

- **1. Fall:** $y_{(0)=y_0} = B$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{(0)} &= 0 = wA \\ \Rightarrow A &= 0 \quad y_{(t)} = y_0 \cdot \cos(wt) \end{aligned}$$

- **2. Fall** $y_0 = 0 = B$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{(0)} &= v_0 = w \cdot A \\ \Rightarrow A &= \frac{v_0}{w} \end{aligned}$$

Die beiden letzten Zeilen zusammen ergibt dann:

$$y_{(0)} = \frac{v_0}{w} \sin(wt)$$

- **Alternative:**

$$y_{(0)} = C \cdot (wt + \varphi_0)$$

Wir nutzen nun die Additionstheoreme.

$$C \cdot \sin(wt) \cdot \cos \varphi_0$$

$$C \cdot \cos(wt) \cdot \sin \varphi_0$$

$$= \underbrace{C \cdot \cos \varphi_0}_{A} \cdot \sin(wt) + \underbrace{C \cdot \sin \varphi_0}_{B} \cdot \cos(wt)$$

wir setzen die Dimension $[w] = \frac{1}{s}$ also die Kreisfrequenz

$$\sin(wt)$$

Ich überspringe einfach mal die weitere Herleitung:

$$w = \frac{2\pi}{T} \quad w = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ bzw. } \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [w] = \left(\frac{m}{s^2 m}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{s}$$

16 4.7 Variable Masse

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \Rightarrow \vec{p} = \vec{F} dt \\ &= \int_{p_0}^{p(t)} d\vec{p} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt \\ &= p(t) - p_0 = \underbrace{\int_{t_0}^t \vec{F} dt}_{\text{Kraftstoß}} \end{aligned}$$

16.1 Bsp. inelastischer Stoß

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

Teil VIII

Vorlesung 9

Wiederholung

Man stelle sich vor man habe eine Kraft die proportional zu einer Auslenkung von der Ruhelage ist. So hat man die Differentialgleichung einer Schwingung: $\ddot{x} + w^2 x = 0$

$$x(t) = A \cdot \sin(wt) + B \cdot \cos(wt)$$

16.2 Rakete

$v_G = v' - v$ 02
 $m(t)$
 $v(t)$
 dm
 t
 $t + dt$
 $m(t+dt)$
 $v(t+dt) = v(t) + dv$
 $P(t) = m(t) \cdot v(t)$
 $P(t+dt) = (m + dm) \cdot (v + dv) + dm \cdot v_G$
 \downarrow
 $dm = -dm_G > 0$
 $v' \text{ relativ zum I-System}$
 $v_G \text{ relativ zur Rakete}$
 $= m \cdot v + m \cdot dv + dm \cdot v + dm \cdot dv$
 $= m \cdot v - dm \cdot v_G + dm \cdot dv$
 $+ m \cdot dv \approx \text{vernachlässigt}$
 $\underline{\underline{dp = m \cdot dv - dm \cdot v_G}}$

Äußere Kraft:

$$F = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \vec{v}_G$$

$$-mg = m \cdot \dot{\vec{v}} - \dot{m} \cdot \vec{v}_G \quad (3)$$

Wird nun mit $\frac{dt}{m}$ multipliziert

Das ganze muss immer größer 0 sein.

$$\underbrace{|\vec{v}_G| \cdot \left| \frac{dm}{dt} \right|}_{\text{Schubkraft}} \text{ kleiner als } mg$$

16.2.1 Lösung

$$-\sum_{t_0}^t g \cdot dt = \sum_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} - \sum_{m(t)}^{m_0} \frac{dm}{m} \cdot \vec{v}_G =$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - g(t - t_0) + |\vec{v}_G| \cdot \ln \frac{m_0}{m(t)} \quad (4)$$

17 4.8 Energie

17.1 Arbeit

Wir gucken uns zunächst die Arbeit für ein sehr kleines Stück eines Weges an.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_r \cdot |d\vec{r}|$$

$$\int dW = \sum \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad \text{dabei ist } d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

und $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Es gibt aber noch die Möglichkeit, die häufig auftritt und die Rechnung erheblich vereinfacht ist, dass:

falls $\alpha = \text{const}$
 $w = \cos \alpha \int |\vec{F}| ds$

17.1.1 Beispiel: Der Freie Fall

Wir haben damit einen Punkt A und einen Punkt B wobei A höher liegt als B. die Distanz zwischen den beiden Punkten bezeichnen wir mit h .

$$\vec{r}_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \quad \vec{r}_B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} d\vec{r} = - \int_h^0 m \cdot g dz = -m \cdot g \cdot (0 - h) = m \cdot g \cdot h$$

17.1.2 Bsp: Feder

$$F = -kx$$

$$\left[W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int_{x_0}^0 F dx = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^0 = \frac{1}{2} k x_0^2 \right]$$

17.1.3 Konstante Kraft

$$\vec{F} = \text{konst}$$

- $W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \int_A^B d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$
 r_B ist dabei der Endpunkt und logischerweise ist r_A dann der Anfangspunkt.

17.2 Konservative Kräfte

Fast alle Kräfte in der Natur sind konservative Kräfte.

- \vec{F} konstant
- \vec{F} Zentralkraft (F hängt nur von r ab also vom Zentrum der Kraft)

Es ist keine konservative Kraft, wenn diese von der Zeit oder von der Geschwindigkeit abhängt. Ein Beispiel für eine Kraft die von der Geschwindigkeit abhängt wäre beispielsweise die Reibung.

Eine konservative Kraft W ist unabhängig vom Weg

17.2.1 Das geschlossenes Wegintegral

$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$ für konservative Kräfte

Teil IX Vorlesung 10

Arbeit:

$$dW = \vec{F} d\vec{s}$$

$$W = \int \vec{F} d\vec{s} = \int \vec{F} \vec{v} dt$$

18 4.9 Potentielle Energie und Potential

Wenn wir einen Weg haben mit einem start und einem Endpunkt, dann ist der Weg als Arbeit definiert. So haben sowohl anfangs als auch endpunkt eine Potentielle Energie.

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = E_{Pot,A} - E_{Pot,B}$$

Dazu machen wir jetzt noch ein Paar Beispiele. Was man noch anmerken kann ist, dass Potentielle Energie nur für konservative Kräfte formuliert ist, durch einfache Überlegungen dürfte dies auch klar werden.

Wie bereits bekannt ist die Potentielle Energie:

$$E_{Pot} = m \cdot g \cdot h$$

18.1 Beispiel

$$E_{Pot(h)} - \underbrace{E_{Pot,(0)}}_{E_{Pot(h=0)}=0} = W = m \cdot g \cdot h$$

18.2 Gravitation

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} E_{pot}(r=0) - E_{pot}(r) = - \int G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Theorem 1.

$$E_{Pot(r)} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Die Potentielle Energie ist also immer negativ für eine **Anziehende Kraft**.

Theorem 2.

$$V_{(r)} = -G \frac{m_1}{r}$$

Nun stellen wir uns die Frage wie man das ganze Rückwärts machen würde oder ob das überhaupt möglich ist. Die Antwort ist ja, es geht.

18.3 Von Potentieller Energie auf Engergie schließen

$$\vec{F} \rightarrow E_{pot}$$

$$E_{pot,B} - E_{pot,A} = \int_A^B F_x dx$$

$$dF_{pot} = -F_x dx$$

$$F_x = -\frac{dE_{pot}}{dx}$$

Theorem 3.

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot(\vec{r})}$$

Ableitung des Potentials ist die Kraft.

18.4 kinetische Energie

Theorem 4.

$$\frac{1}{2}mv^2$$

Wie bereits bekannt ist wird so die Potentielle Energie definiert. Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten dies zu beweisen. Folgendes st eine Möglichkeit die wir in der Vorlesung genutzt haben.

Beweis.

$$\begin{aligned} F_T &= m \frac{dv}{dt} \\ \vec{F} d\vec{r} &= F_T ds = m \frac{dv}{dt} ds \\ &= m = \frac{ds}{dt} dv \\ &= m \cdot v dv \\ W &= \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_{V_A}^{V_B} m \cdot v dv = \frac{1}{2} mv^2 \\ &= \frac{1}{2} m (\vec{v}_B^2 - \vec{v}_A^2) \\ E_{kin} &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad W = E_{kin,B} - E_{kin,A} \end{aligned}$$

□

18.5 Energieerhaltung

$$W = E_{kin,B} - E_{kin,A}$$

$$W = E_{pot,A} - E_{pot,B}$$

Theorem 5.

$$E := E_{pot,A} + E_{kin,A} = E_{pot,B} + E_{kin,B}$$

Ein Gutes Beispiel dafür wäre mal wieder eine Feder.

18.6 4.10 Drehbewegung

”Drehmoment ist das was das Drehmoment ändert.”

$$\vec{r}_{(t)} = R \begin{pmatrix} \cos(wt) \\ \sin(wt) \end{pmatrix}$$

Damit definieren wir nun die Winkelgeschwindigkeit:

Theorem 6. $w = \dot{\varphi}$

Die Winkelgeschwindigkeit sagt also aus wie viel sich der Winkel ändert

$$\begin{aligned}\vec{v}_{(t)} &= \dot{\vec{r}} = \dot{\varphi} R \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \vec{w} \times \vec{r} \\ \vec{a} &= \ddot{\vec{v}} = \ddot{\varphi} R \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} + \underbrace{\dot{\varphi}^2}_{w^2} R \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}}_{-\vec{v}} \\ &= \vec{a} = \underbrace{\dot{w} R \vec{e}_v}_{\text{erhöht Rotationsgeschwindigkeit}} - \underbrace{w^2 \cdot r}_{\text{Zentripetalkraft nach innen}}\end{aligned}$$

Teil X

Vorlesung 11

Alles

		gradlinig	kreisbewegung
$x(t)$	$\vec{r}(t)$	$v_x(t)$	$\dot{\varphi}(t)$
$\frac{d}{dt}$	$\vec{v}(t)$	ω	$\vec{\omega}$
$\frac{d^2}{dt^2}$	$\vec{a}(t)$	$\dot{\omega}$	Richtung aus Drehsinn $\vec{\dot{\omega}}$
Newton m	$F_x = \dot{p}_x$	$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$	M_x $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ Drehmoment
	$p_x = m \cdot v_x$	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	L_x $\vec{L} = I \times \vec{\omega}$ Drehimpuls
E_{pot}	$E_{pot} = \int F dx$	$\int \vec{F} dr$	
E_{kin}	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_x^2$	$\frac{1}{2} m \vec{v}^2$	$E_{kin} = \frac{1}{2} I \vec{\omega}^2$ E_{kin} für Rotationen $= \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$
Massen m			$I = m \cdot r^2$ Trägheitsmoment ↳ Abstand von Drehachse

Def: Trägheitsmoment $I = m \cdot r^2$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Diese Größen sind hier alle additiv!

$$\vec{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Teil XI

Vorlesung 12

18.7 4.11 Drehmomente

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \dot{\vec{L}} &= \vec{M} \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\end{aligned}$$

19 Scheinkräfte

Es gibt verschiedene Möglichkeiten sich zu bewegen. Wir nehmen uns nun die Gradlinige Beschleunigung und die Rotation. Dazu haben wir jetzt noch ein Initialsystem S mit der Kraft \vec{F} und der Beschleunigung \vec{a} . Zu diesen Größen gibt es dann noch jeweils die ' komponente die für das Relativistisch Beschleunigte System steht..

Gradlinige Beschleunigung:

$$\begin{aligned}v_{(t)} &= \text{const} \quad \vec{r}' = \vec{r} - v \\ \vec{v}' &= \vec{v} - v \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a}\end{aligned}$$

$\vec{V}_{(r)}$ = nicht konstant

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= \vec{a} - \vec{A} \quad \text{gradlinige Beschleunigung} \quad m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{A} \\ \vec{F}' &= \vec{F} - \underbrace{m\vec{A}}_{\text{Trägheitskraft}}\end{aligned}$$

Rotation

$$\vec{F}' = \vec{F} - \underbrace{2m\vec{w} \times \vec{v}'}_{\text{Corioliskraft}} - \underbrace{m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}')}_{\text{Flächenkraft}}$$

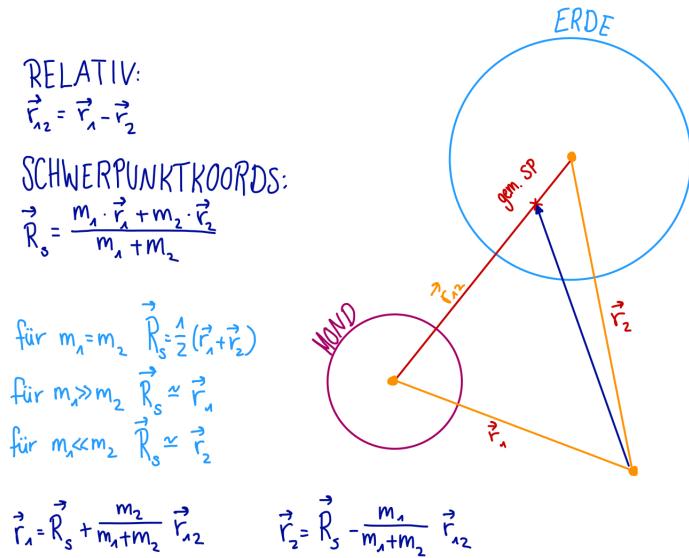
20 6 Zweiteilchen Systeme

20.1 Schwerpunktsystem und Relativsystem

- Erde - Mond
- H proton + elektron
- O_2 $O + O$
- Feder von Box 1 zu Box 2

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= -\vec{F}_{12} \Leftarrow \text{innen} \\ \vec{F}_1, \vec{F}_2 &\Leftarrow \text{äußere} \\ m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_1 \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_2\end{aligned}$$

20.2 Rechnung



$$\vec{v}_{12} = \dot{\vec{r}}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad \vec{V}_S = \dot{\vec{R}}_S = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$M = m_1 + m_2$$

Für die reduzierte Masse:

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} [\mu] = kg$$

$$\text{für } m_1 = m_2 \quad \mu = \frac{1}{2}m_1 = \frac{1}{2}m_2$$

$$\text{für } m_1 \gg m_2 \quad \mu \leq m_2$$

20.3 Gesamtimpuls

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Also

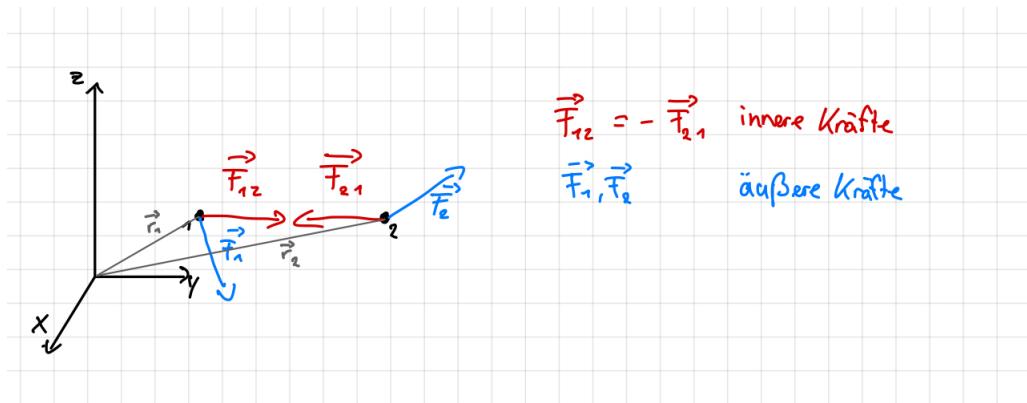
$$\vec{p} = \mu \cdot \vec{V}_s$$

$$\underbrace{m_1 \ddot{\vec{v}}_1 + m_2 \ddot{\vec{v}}_2}_{\dot{\vec{p}}} = \underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}_{\text{Kraft außen}}$$

$$\dot{\vec{p}} = \underbrace{\sum_{i, \text{außen}} \vec{F}_i}_{\text{Gesamtimpulsänderung}}$$

Teil XII

Vorlesung 12 - Übernahme durch Prof. Hagner



Schwerpunkt:

$$\vec{R}_S = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Der Schwerpunkt ist also der Punkt wo das Objekt im Gleichgewicht liegt.

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{V}_S = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Diagram illustrating the Earth-Moon system. The center of mass is labeled r_{EM} . The center of mass radius from the Earth's center to the center of mass is labeled R_s . The formula for R_s is given as:

$$R_s = \frac{m_E \cdot 0 + M_M \cdot r_{EM}}{m_E + m_m}$$

$$R_s = \frac{m_M}{m_E + m_M} r_{EM} = \\ = m_M = 7 \cdot 10^{22} \text{ kg} \quad \frac{m_M}{m_E} \approx 0,012 \\ = m_E = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ r_{EM} = 384.400 \text{ km}$$

$$0,012 \cdot 384.400 \text{ km} = 6370 \text{ km}$$



$$R_S = \frac{m_s \cdot 0 + M_M \cdot R_{EM}}{m_E + M_M}$$

$$R_S = \frac{m_M}{M_E + m_m} \cdot r_{EM} = 4600 \text{ km}$$

$$m_M = 7 \cdot 10^{22} \text{ kg} \quad \frac{m_M}{m_E} \approx 0,012$$

$$m_E = 6 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$r_{EM} = 384.400 \text{ km}$$

reduzierte Masse:

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= m_1 \vec{v} + m_2 \vec{v}_2 = M \cdot \vec{v}_s \\ \frac{d}{dt} \vec{p} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \sum \vec{F}\end{aligned}$$

welches dann für die äußere Kraft steht.

20.4 kinetische Energie

Nun wollen wir die gesamte kinetische Energie bestimmen

$$\begin{aligned}E_{kin} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_S + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{12})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}_S \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{12})^2\end{aligned}$$

dabei haben wir genutzt dass:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_S + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{12} \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_S + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (-\vec{v}_{12})$$

nun können wir noch weiter umformen

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{v}_S^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right) \vec{v}_{12}^2$$

Dabei heben sich die Terme $\vec{v}_S \vec{v}_{12}$ auf

$$E_{kin} = \underbrace{\frac{1}{2} M v_S^2}_{\text{kin. Energie des SP}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu v_{12}^2}_{\text{reduzierte Masse, Relativgeschwindigkeit}}$$

Der Gesamt-Drehimpuls bezüglich des Koordinaten Ursprungs

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = m \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$$

Auf dem Übungsblatt 6 gibt es dazu eine Aufgabe wo das genau ausgerechnet werden soll wobei das Ergebnis dann so aussieht:

$$\vec{L} = M \vec{R}_S \times \vec{v}_S + \mu \vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}$$

Gesamt. Drehmoment (bzgl. Koordinaten Ursprung)

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_{12} + \vec{F}_1) + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_{12} + \vec{F}_2) \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2]\end{aligned}$$

Durch Überlegen wie sich die Skalarprodukte verhalten wird klar, dass folgendes herauskommen muss:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \sum_{\text{äußere } \vec{M}} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{M} = \sum_{\text{äußere } \vec{M}}\end{aligned}$$

Das ist nun also die **Drehimpulserhaltung** wenn keine äußere Kräfte wirken

20.5 sonderfall: Abgeschlossene Systeme

keine äußeren Kraft $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 0$

$$\text{Impuls } \vec{P} = M \cdot \vec{V}_S = \text{konst}$$

Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit

$$\text{Drehimpuls } \vec{L} = M \cdot \vec{R}_S \times \vec{a}_s + \mu \vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12} = \text{konst}$$

Drehimpuls ist erhalten

20.6 Das Schwerpunktsystem

Def:

Koordinatenursprung liegt im Schwerpunkt obere äußere Kräfte:



$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}_S$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_S$$

$$\vec{v}_S = \text{konst} \Rightarrow \text{CMS ist Inertialsyste}$$

$$\vec{R}'_S = 0 \quad \vec{r}'_{12} = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_{12}$$

$$\vec{v}'_{12} = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{12}$$

Dabei ist $\vec{p}' = 0$ und der Gesammtimpuls im SPS damit 0

$$m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = 0$$

$$E'_{kin} = \frac{1}{2} \mu \vec{v}_{12}^2 \quad \vec{L}' = \mu \vec{r}'_{12} \times \vec{v}'_{12} \text{ also } L' = \text{konst}$$

Die **Bewegungsgleichung** für m_1, m_2 reduziert sich auf eine Bewegungsgleichung der Polarkoordinate

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{v}'_{12} &= \frac{d}{dt} \vec{v}'_1 - \frac{d}{dt} \vec{v}'_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} \\ &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu} \vec{F}_{12} \end{aligned}$$

Nun zum Ergebnis

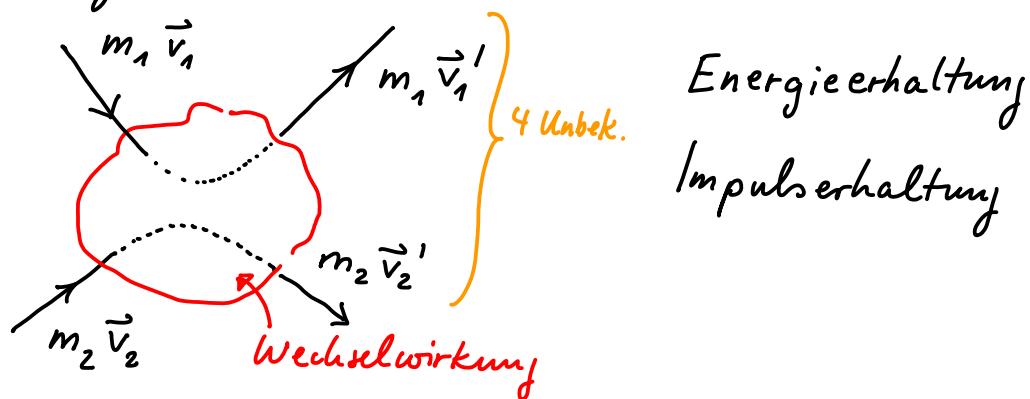
$$\mu \frac{d}{dt} \vec{v}'_{12} = \vec{F}_{12} = \mu \frac{d^2 \vec{r}'_{12}}{dt^2}$$

Als kurze Zusammenfassung lässt sich sagen, dass wenn es keine äußeren Kräfte gibt sich das Zweikörperproblem reduzieren lässt auf ein Einkörperproblem mit reduzierter Masse (μ) und Relativkoordinate (\vec{r}_{12})

Stoßprozesse

(Beschränkung auf 2 Teilchen)
nichtrelativistisch $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$

Allgemeine Beschreibung



Energieerhaltung
Impulserhaltung

3 Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 + \vec{P}_2 &= \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 & \text{Gesamtimpuls (vorher)} &= \text{Gesamtimpuls (nachher)} \\ \frac{\vec{P}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{P}_2^2}{2m_2} + Q &= \frac{(\vec{P}'_1)^2}{2m_1} + \frac{(\vec{P}'_2)^2}{2m_2} & Q = 0 & \text{elastischer Stoß} \\ && Q < 0 & \text{inelastischer Stoß} \\ && Q > 0 & \text{superelastischer Stoß} \end{aligned}$$

Aus Drehimpulserhaltung folgt:

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}'_1, \vec{p}'_2$ liegen in einer Ebene

Inelastische Stöße

Hier 1dim (ÜB7 2dim)

$$\vec{v}_s = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{P}_s = M \cdot \vec{v}_s$$

oder Impulserhaltung $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}' \rightarrow \vec{v}' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \vec{v}_s$

Energieerhaltung: Wie groß ist Q sh. ÜB7

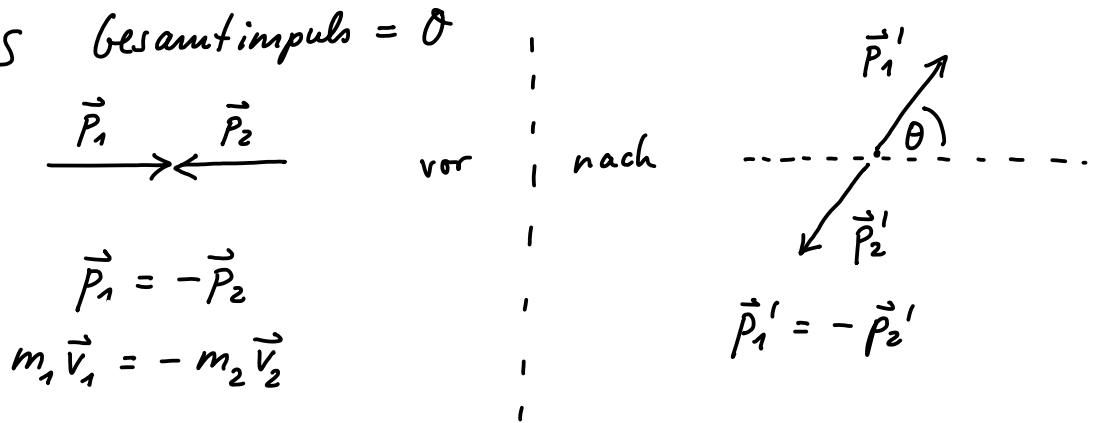
$$Q = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_s^2 - \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \stackrel{\downarrow}{=} - \frac{1}{2} \cancel{\mu} v_{12}^2$$

red. Plane $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Die kinetische Energie der Relativbewegung geht beim vollständig inelastischen Stoß verloren

Elastische Stöße im Schwerpunktssystem

Im SPS gesamtimpuls = 0



Energieerhaltung ($\alpha=0$)

$$\frac{\vec{P}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{P}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{P}'_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{P}'_2^2}{2m_2}$$

$$\cancel{\vec{P}_1^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right)} = \vec{P}'_1^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) \quad \vec{P}_1 = \vec{P}'_1$$

Genau so $\vec{P}_2 = \vec{P}'_2$

Die kinetischen Energien der einzelnen Teilchen bleiben erhalten

Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} v_A = 0.8 \text{ m/s} & & v_B = -2.2 \text{ m/s} \\ \bullet \xrightarrow{\hspace{1cm}} & & \xleftarrow{\hspace{1cm}} \bullet \\ m_A = m & & m_B = 2m \end{array}$$

Relativgeschwindigkeit $v_A - v_B = 3 \text{ m/s}$

Impulssch.: $m v_A + 2m v_B = m v'_A + 2m v'_B$

$$v'_A - v'_B = -(v_A - v_B)$$

Energiech.: $\rightarrow v_A^2 + 2v_B^2 = v'^2_A + 2v'^2_B$ statt Energiech. als 2. Gleichung

Umweg ins Schwerpunktssystem

$$v_S = \frac{m \cdot 0.8 \text{ m/s} - 2m \cdot 2.2 \text{ m/s}}{3m} = -\frac{3.6 \text{ m}}{3 \text{ s}} = -1.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

In SPS:

$$\begin{array}{ccc} v_A = 2 \text{ m/s} & & v_B = -1 \text{ m/s} \\ A \xrightarrow{\hspace{1cm}} & & \xleftarrow{\hspace{1cm}} B \\ P_A = m \cdot 2 \text{ m/s} & & P_B = 2m \cdot 1 \text{ m/s} \end{array}$$

Auch hier $v_A - v_B = 3 \text{ m/s}$

nach dem Stop im SPS

kin. Energie
muss gleich
bleiben

$$\begin{array}{ccc} v'_A = -2 \text{ m/s} & & v'_B = +1 \text{ m/s} \end{array}$$

$$v'_A - v'_B = -3 \text{ m/s}$$

Relativgesch.
dreht sich um!

Ins LS:

$$\begin{array}{c} \text{nach dem Stop} \\ \xleftarrow{\hspace{1cm}} v'_B = -0.2 \text{ m/s} \\ \xleftarrow{\hspace{1cm}} v'_A = -3.2 \text{ m/s} \end{array}$$

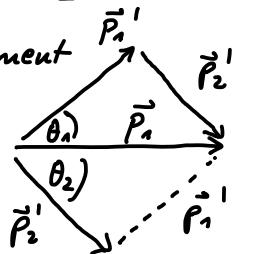
Auch im Laborsystem

Spezialfälle:

$$m_1 \xrightarrow{v_1}$$

m_2 in Ruhe

fixed target experiment



elastisch:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_1' + \vec{p}_2'$$

$$\frac{P_1^2}{2m_1} = \frac{P_1'^2}{2m_1} + \frac{P_2'^2}{2m_2}$$

a) $m_1 = m_2 \quad p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 \quad \text{Pythagoras} \quad \vec{p}_1' \perp \vec{p}_2' \\ (\text{näherungsweise z.B. Billard})$

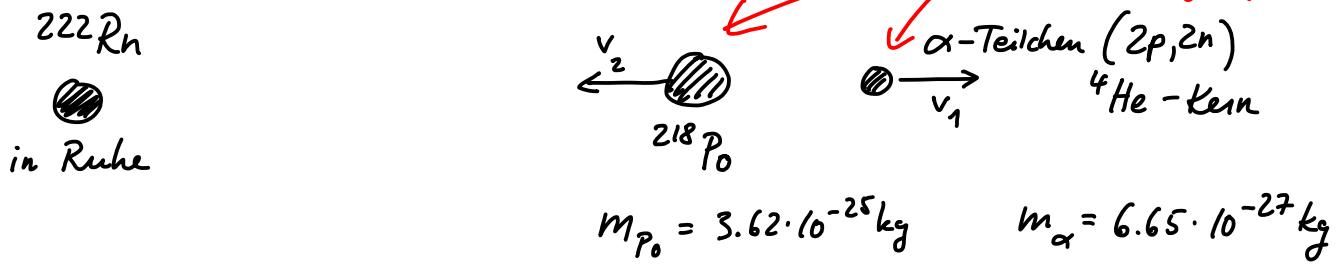
b) zentraler Stoß $\theta_1 = \theta_2 = 0$

(Rechnung wie in voriger Folie) $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

$m_1 > m_2 \quad \text{Nachlaufen}$

$m_1 < m_2 \quad \text{Zurückprallen}$

(Moderne) Anwendung : Zerfälle von Atomkernen 06
Vorher Nachher Im 2 Körperzerfall
ganz genau festgelegte



Zerfall, weil Zweiteilchen ($P_0 + \alpha$) ist energetisch günstiger

Es wird Energie frei $Q = 9.0 \cdot 10^{-13} J$

$$\underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}_{K_1} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}_{K_2} = Q$$

$$m_1 v_1 = - m_2 v_2$$

$$m_1^2 v_1^2 = m_2^2 v_2^2$$

$$2m_1 K_1 = 2m_2 K_2 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{m_1}{m_2}, \text{ damit } K_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} Q$$

$$E_\alpha = K_1 = 8.8 \cdot 10^{-13} \text{ J} \quad 98\% \text{ der Energie erhält das } \alpha\text{-T.}$$

$$E_{p_0} = Q - K_1 = 2 \cdot 10^{-14} \text{ J} \quad 2\% \text{ der Energie geht in Kern Rückstoß}$$