Theoretische Physik 1

Tom Herrmann

26. April 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Gliederung:

- **Mathematische Grundlagen:**
  Vektoren, krummlinige Koordinatensysteme, Differential- und Integralrechnung, partielle Ableitungen, Vektoranalysis, Gradient, Diverenz, Rotation, lineare gewöhnliche Differentialgleichungen, Matrizen und Tensoren, Fourier-Transformation, komplexe Zahlen, Wahrscheinlichkeit.

- **Grundlagen der Mechanik:** Kinematik und Dynamik von Massenpunktsystemen, Newtonsche Axiome, Arbeit, konservative Kräfte, Schwingungen, Zentralfeld, Kepler-Problem, beschleunigte Bezugssysteme

- **Spezielle Relativitätstheorie:** Lorentz-Transformation und kinematische Konsequenzen, Minkowski-Raum, Vierer-Impuls, relativistische Bewegungsgleichung, Energie-Impuls-Vektor, Äquivalenz von Masse und Energie

- **Wärmelehre:** Boltzmann Verteilung, Entropie, Irreversibilität

Wenn man eine Fettgedruckte Größe in den Übungsaufgaben sieht ist damit ein Vektor gemeint

Teil I

Vorlesung 1

$\# =$ Anzahl

2 Grundlagen

2.1 Vektorrechnung

Vektoren sind gerichtete Größen deren Komponenten bei Drehung oder allgemeiner Koordinaten Transformationen gewisse transformationseigenschaften besitzen.
Skalare sind dabei invariant unter Koordinatentransformation. (z.B: Masse, Ladung, Temperatur)
Ortsvektor $\vec{r}$, Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
Vektoren haben eine Richtung und eine Länge.

2.2 Formale Schreibweise Ableitungen

Ableitung können sowas als f‘ geschrieben werden als auch als $\dot{f}$ somit kann die Geschwindigkeit $\vec{v}$ als die Ableitung der Position ausgedrückt werden $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$.

2.3 Drehung

$\vec{a} = (a_x, a_y) = (x, y)$
$\vec{a} = (a_u, a_v) = (u, v)$ dabei ist für u und v das Koordinatensystem einfach nur um einen bestimmten

Winken φ gedreht.

$$u = xcos\varphi + ysin\varphi$$
$$v = -xsin\varphi + ycos\varphi$$

Länge von:

$$\vec{a} = \sqrt{u^2 + v^2} = \left[\left(xcos\varphi + ysin\varphi\right)^2(-xsin\varphi + ycos\varphi)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$[x^2cos^2\varphi + y^2sin^2\varphi + xycis\varphi sin\varphi + x^2sin^2\varphi + y^2cos^2\varphi - 2xysin\varphi cos\varphi]^{\frac{1}{2}}$$
$$[x^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi) + y^2sin^2\varphi + cos^2\varphi]^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

$\square$

2.3.1 Drehung als Matrix Multiplikation:

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{2} = A_{ij}x_j$

Teil II

Vorlesung 2

2.4 Basis der Vektorrechnung

Mathematisch abstrakt ist ein linearer oder Vektorraum ein "Körper"von Elementen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, im dem eine Addition und eine ultiplikation mit skalaren α definiert ist.

2.4.1 Basis ausrechnung

- Die Anzahl der Vektoren stimmt überein mit der Dimension des Vektorraumes.
- Die Vektoren sind linear unabhängig.

2.4.2 Addition

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2.4.3 Subtraktion

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.4.4 Multiplikation

$$a * \vec{v} = 5 * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5*2 \\ 5*1 \\ 5*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Bei der Division läuft das ganze dann fast genau so ab einfach nur 5 in den als zähler der jeweiligen Koordinate schreiben.

2.4.5 Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \circ |\vec{b}| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

2.5 Eigenschaften von Rechenoperationen

Kommutativität $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
Distributivität $\lambda * (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) * \lambda$
Homogenität (gemischtes Assoziativgesetz) $\alpha(\vec{a} + \vec{b} = (\alpha\vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * (\alpha\vec{b})$

2.5.1 Schwarzsche Ungleichung

$|\vec{a} * \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

2.5.2 Projektion auf die Richtung $\vec{\mathbf{b}}$

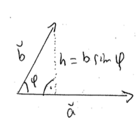
$a_b := acos(\varphi) = \vec{a} * \vec{b}$ wo $\vec{b} := \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ der Einheutsvektor in $\vec{b}$ Richtung ist. (Also soll hier b der Einheitsvektor sein)
Abstrake Definition eines Skalarproduktes mit obigen Eigenschaften und zusätzlichen $\vec{a} * \vec{a} > 0 \exists \vec{a} \neq 0$ (positiv definiert)

Teil III

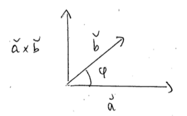
Vorlesung 3

2.5.3 Vektorprodukt

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad |\vec{c}| = c = ab \quad |sin\varphi|$



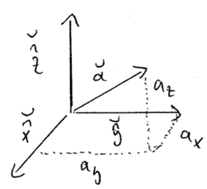
$\Leftarrow$ c = Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Paralellogramms Richtung bestimmt durch **Rechtsschrauben regel**: Drehe $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$



Eigenschaften:
Antikommutativität: Das heißt, bei Vertauschung der Vektoren wechselt es das Vorzeichen
$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
Distributivität $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c})$
Homogenität (gemischtes Assoziativgesetz) $\alpha(\vec{a} + \vec{b} = (\alpha\vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * (\alpha\vec{b})$
Sonderfälle:
$b(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$

2.5.4 Komonentendarstellung

Definiere 3 örthogonaledas heißt orthogonale Einheitsvektoren
$\vec{\hat{a}}, \vec{\hat{y}}, \vec{\hat{z}}$
der im 3-Dimensionalen euklidischen Raum, mit (Schreibregel: Der einfachheit wegen lasse ich in den 2 Zeilen das Zeichen für Einheitsvektor weg, es sollte eigentlich dabei stehen)
$\vec{x} * \vec{x} = \vec{y} * \vec{y} = \vec{z} * \vec{z} = 1; \vec{x} * \vec{y} = \vec{x} * \vec{z} = \vec{y} * \vec{z} = 0$
und
$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}, \vec{y} \times \vec{z} = \vec{x}, \vec{z} \times \vec{x} = \vec{y}$
(Ab diesem Zeitpunkt ist die Schreibregel wieder aufgehoben) andere häufige Schreibweisen:
$\vec{e}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$



$\vec{a} = a_x\vec{\hat{x}} + a_y\vec{\hat{y}} + a_z\vec{\hat{z}} = (a_x, a_y, a_z)$ mit $a_x = \vec{a} * \vec{\hat{x}}, a_y = \vec{a} * \vec{\hat{y}}, a_z = \vec{a} * \vec{\hat{z}}$

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

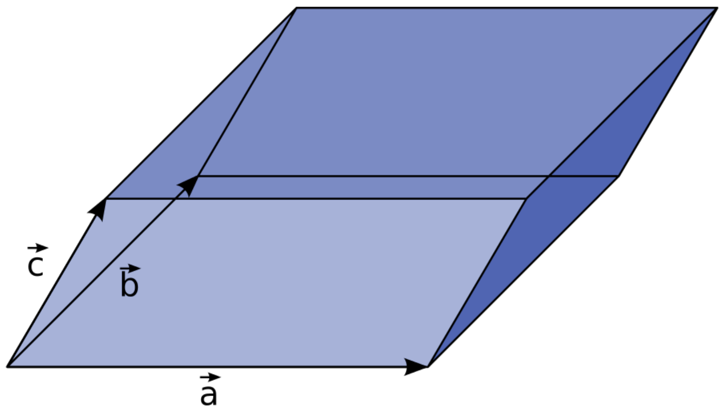
$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_k$$

wobei das "Levi-Civita-Symbol"

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } i,j,k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

I

2.5.5 Spatprodukt



Das Spatprodukt (a⃗, b⃗, c⃗) dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ des dreidimensionalen euklidischen Vektorraums R^3 kann wie folgt definiert werden:
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

2.5.6 Eigenschaften des Spatprodukts

- Das Spatprodukt ist **nicht kommutativ**. Der Wert ändert sich jedoch nicht, wenn man die Faktoren zyklisch vertauscht:
  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$
- Man kann das **Spatprodukt mit Hilfe der Determinante berechnen**. Für
  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ gilt:
  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$
- Die **Multiplikation** mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ ist **assoziativ**
  $(\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
- Es gilt ein **Distributivgesetz:**
  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$
- Invarianz unter zyklischer Vertauschung:
  $(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) * \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a} * \vec{b})$
  Dies ist auch in 3-Dimensionen möglich, wie man am Beispiel der Determinante gesehen hat.

2.5.7 Doppeltes Vektorprodukt

Im algemeinen nicht assoziativ
Es gibt die **bac-cab-Regel**
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} * \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} * \vec{b})$
Daraus folgt auch die Jacobi-Identität
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

2.6 Das Differential

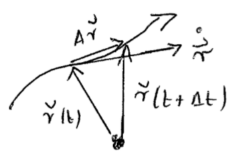
Ist $f(x)$ differenzierbar bei x, so nennt man $f'(x)h$ für beliebige h Differential von $f(x)$. Ma schreibt oft

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

In der Mathematik wird dies Differentialform genannt, die man formal als dual zum Vektorraum bestehend aus Koordinaten $x, ...$ definiert.

2.7 Vektorfunktionen

z.B. Kurve eines Massenpunktes wird beschrieben durch $\vec{r}|t| = (x(t), y(t), z(t))$ wobei t die Zeit ist.
Kettenregel, Produktregel etc. gelten auf für Vektorfunktionen.

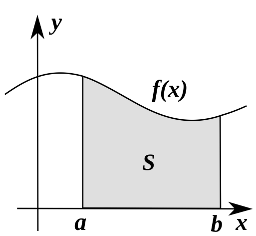


$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$
$= (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) =$ Geschwindigkeit $\vec{v}$
Beschleunigung $= \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

z.B.

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b}\vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}\vec{r}(f(t')) = \frac{d\vec{r}}{dt}(f(t')) * \frac{df}{dt'}(t')$$

2.8 Integration

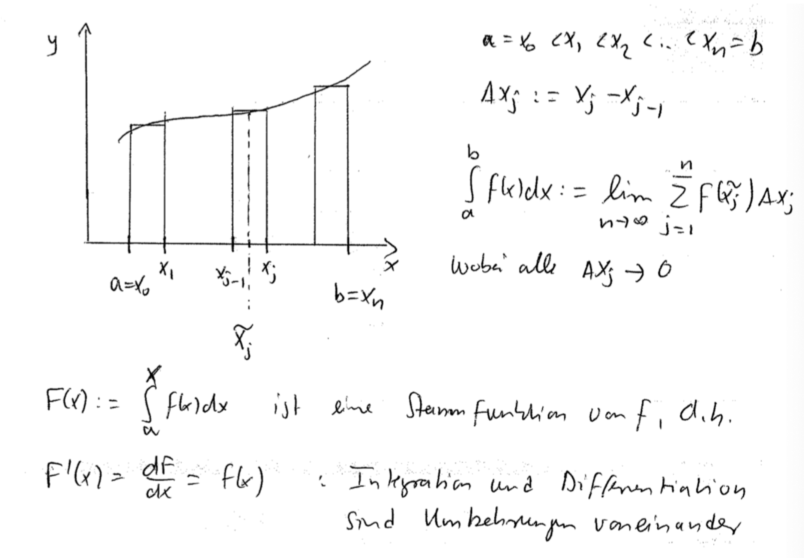


Die Integralrechnung ist aus dem Problem der Flächen- und Volumenberechnung entstanden. Dabei kann die Funktion auch ein komplett random geformter klotz in einem koordinaten System sein.
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

2.9 Differentialrechnung

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

In der Mathematik wird dies Differentialform genannt, die man formal als dual zum Vektorraum bestehend aus Koordinaten $x, ...$ definiert.



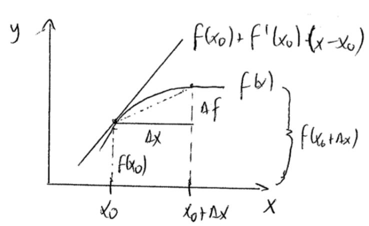
Eine der am häufigsten genutzen Regeln in der Physik ist, dass Konstanten vor das Integral gezogen werden können.

Teil IV

Vorlesung 4

2.10 Vektorfunktionen

z.B. Kurve eines Massenpunktes wird beschrieben durch $\vec{r}|t| = (x(t), y(t), z(t))$ wobei t die Zeit ist.



$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}|_{x_0}$$
$$= lim_{\Delta x \to\ 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$
$$= lim_{x \to\ x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2.11 Taylor Entwicklung

Im 1. Ordnung: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Verallgemeinerung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + ...$$

2.11.1 Potenzreihe

Jede **Potenzreihe** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und damit auch jede **Taylor-Reihe** hat einen Konvergenzradius λ, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ für alle $|x - x_0| < r$ konvergiert. Im allgemeinen ist r durch den Abstand zur nöchsten Singularität von $f(x)$ gegeben, diese Tatsache gilt aber nur allgemein im Raum der komplexen Zahlen.
Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$, da $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = -x^2$ obwohl $\frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert und unendlich oft differenzierbar ist.
Der tiefere Grund ist daß $\frac{1}{1+x^2}$ bei $x = \pm i$ singulär ist.

2.12 Partielle Differentiation

Funktionen mehrerer Variablen, z.B. f(x,y,z), können nach den einzelnen Variablen differenziert werden, wobei man sich die anderen Variablen konstant vorstellt.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = lim_{\Delta x \to\ 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z - f(x,y,z))}{x,y,z}$$

und analog für die anderen Variablen.
Kurzschreibweise:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

2.12.1 Höhere Ableitungen

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$
$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x}$$

übrigens gilt: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y}$ (Symmetrie)
Man kann leicht die erweiterte Kettenregel zeigen:
Für $f(t) = f(x|t), y(t), z(t)$ gilt $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} frac \partial f \partial y \frac{dy}{dt} + frac \partial f \partial z \frac{dz}{dt}$
oder als Differential
$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz$
Kann auch für die 1. Ordnung einer multi-dimensionalen Taylor-Entwicklung verwendet werden:
$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,t_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,t_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,t_0)(z-z_0) + ...$

2.13 Vektoranalysis: Gradient, Divergenz, Rotation

Ein **Vektorfeld** ist eine Vektor-wertige Funktion mehrerer Variablen:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z))$$

Beispiele: Geschwindkeitsfeld (e.g. Windgeschwindigkeit), Kraftfeld
Ein **Skalarfeld** hat nur eine (skalare) Komponente:

$$f(\vec{r}) = f(x,y,z)$$

2.13.1 Gradient

$$f \rightarrow \vec{\nabla} f = gradf = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad Skalarfeld \rightarrow Vektorfeld$$

Es gelten die üblichen Produkt- und Summenregeln:

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g; \vec{\nabla}(f+g) = g\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} g$$

2.13.2 Beispiel

f sei Funktion der Abstand $|\vec{r} - \vec{r}_0| = f'(|\vec{r} - \vec{r}_0|)\frac{x-x_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$
Dabei gilt: $|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$
Dabei ist das ganze dann logischer weise nur vom Abstand abhängig
$\Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}_0}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = \frac{x-x_o}{|\overrightarrow{r-\vec{r}_0}|}$$

Einheiten in Kegelkoordinaten:
$\Rightarrow \vec{\nabla} = \frac{df}{dr}(|\vec{r} - \vec{r}_0|)\vec{\nabla}|\vec{r} - \vec{r}_0| = f^{\partial}(|\vec{r} - \vec{r}_0|)\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$ z.B. $f(\vec{r}) = c|\vec{r} - \vec{r}_0|$ Das Gravitationspotential zwischen zwei Teilchen der Masse m_1 und m_2
$\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$ $\alpha = -1$ und $c = -G_N m_1 m_2$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi(|\vec{r} - \vec{r}_0|) = \frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$ Nebenrechnung: $\phi^{\partial}(r) = +\frac{G_N m_1 m_2}{r^2}$
$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}(\vec{r} - \vec{r}_0) =$ Die Kraft die Teilchen 2 auf Teilchen 2 ausübt.

2.14 Rotation

Hierbei muss extrem auf die Vorzeichen aufgepasst werden. Es gibt zudem nur 2 Kombinationen wie man im laufe sehen wird die sich nicht wegkürzen.
rot$(\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\vec{e}_{i,j} = (\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y})$
Es sind 3 da wir uns im 3 Dimensionalen befinden. Vektorfeld $\Rightarrow$ Vektorfeld ; Wirbelstärke

2.14.1 Summe und Rotation

$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = f\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{\nabla} f) \times \vec{F}$

2.14.2 Beispiel:

$f(\vec{r}) = \vec{F} = f(r)\vec{\nabla} \times \vec{r} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{r}$
$\vec{f}(\vec{r}) = (\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y)} = \vec{0} \qquad \vec{r} = (x, y, z)$
$\vec{\nabla} f = f'\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \Rightarrow (\vec{\nabla} f) \times \vec{r} = \frac{f'}{|\vec{r}|} \times \vec{r} = 0$

2.14.3 Beispiel B

$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r}$
$|\vec{F}(\vec{r})| = |\vec{w}|\sqrt{x^2+y^2}$
$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(w_x y - w_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(w_y x - w_x y)$
Damit gilt: $\vec{F} = \vec{w} \times \vec{a} \Rightarrow F_z = w_x y - w_y x$ und $F_y = w_z x - w_x z$
Also ist es am ende: $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 2\vec{w}$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = 2\vec{w}$$

2.15 Divergenz

div $\vec{f} = \vec{\nabla}, \vec{F} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) * F_x, F_y, F_z = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
Vektorfunktion $\rightarrow$ Sklarafunktion
$\vec{\nabla}(\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla}\vec{F} + \vec{\nabla}\vec{G} \quad \vec{\nabla} + (f\vec{f}) = f\vec{\nabla} * \vec{F} + (\overrightarrow{\nabla f}) * \vec{F}$

2.15.1 Beispiele

$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \quad \vec{\nabla} * \vec{r} = 3$
anderes Beispiel: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r} \quad \vec{w} = const.$
wähle deine Einschränkungen: $\vec{w} = w\vec{e}_z = (0, 0, w) \rightarrow \vec{w} \times \vec{r} = (-wy, wx, 0)$
$\vec{\nabla} * (\vec{w} \times \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(wx) + \frac{\partial}{\partial z}0 = 0$
Weitere Beispiele im im Skript.

Teil V

Vorlesung 5

2.16 Gradient und totales Differential

$f(x, y, z) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = (\vec{\nabla}f) * d\vec{r}$
$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz)$
$\frac{df}{dt} = (\vec{\nabla}f) * \frac{d\vec{r}}{dt}$
$\Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \frac{df}{dt}dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1}(\vec{\nabla}f)d\vec{r} = f(\vec{r}_1) - f(\vec{r}_0)$

2.16.1 Wegintegral eines Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{r})$

Angenoimmen wir haben eine Kurve und wollen ein Kurvenintergral bilden und nennen dies dann c. Dabei ist der eine Endpun kt $\vec{r}_0$ und $\vec{r}_1$
$\int_c \vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r} = \int_c [F_x dx + F_y dy + F_z dz] :=$
$\lim_{N\rightarrow\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}_i) * \Delta\vec{r}_i = \lim_{N\rightarrow\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}_i) * \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t}\Delta t$
$\lim_{\Delta t\rightarrow 0} \Delta t_i = \lim_{N\rightarrow\infty} \Delta\vec{r}_i = 0$

Also zum Beispiel eine Arbeit, die durch einer Kraft $\vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r}$ verrichtet wird

$$W = \int \vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r}$$

Dabei muss man sich immer den Kontext klar machen da sich dadurch ganz einfach Vorzeichen ändern können also der unterschied ob Arbeit verrichtet werden muss oder nicht. *Zum Beispiel das Skalarprodukt würde sich daruch komplett ändern*

$$\int_{c_1} \vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r}$$

$$\int_{c_2} \vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r}$$

diese Intergrale sind wegunabhängig $\Leftrightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} f \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

2.16.2 Eigenschaften:

$\int_{-c} \vec{F} * d\vec{r} = -\int_c \vec{F} * d\vec{r}$
$c = c_1 + c_2 \Rightarrow \int_c \vec{F} * d\vec{r} + \int_{c_2} \vec{F} * d\vec{r}$

3 Grundlagen der Dynamik

Axiome der Newtonschen Mechanik

- **1. Trägheitsgesetz:** Körper, auf den keine Kräte wirken, bewegt sich geleichförmig und gleichlinig, das heißt $\vec{v} = const, \vec{v} = \vec{0}$ ist ein Spezialfall.
- **2. Aktionsprinzip** Die Zeitliche Änderung des Impulses $\vec{p}$ eines Körpers ist gleich der auf ihn einwirkenden Gesammtkraft
$$Impuls = m * \vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{p}$$
$$\vec{F}_{total} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a}$$
- **3. Actio= Reactio** die von Körper 1 auf Körper 2 ausgeübte Kraft $\vec{F}_{21}$ ist gleich dem negativen der von Körper 2 auf Körper 1 ausgeübte Kraft
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$
- **Superpositionsprinzip** Kräfte addieren sich vektoriel.

In Newtons Mechanik sind **Raum** und **Zeit** absolute Begriffe und die Zeit läuft immer gleich ab unabhängig vom Inertialsystem, was natürlich in konflikt mit der Relativitätstheorie steht.
Newtons Axiome gelten zunächst nur in unbeschleunigten, sog. Inertialsystemen. Intertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit

3.0.1 Allgemeine Galilei- Transformation zwischen Inertialsystemen

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}_0 * t + \vec{r}_0 \qquad \vec{v}_0 = const; \vec{r}_0 = const$$

Wie man sieht transformieren sich damit die Ortskoordinaten aber die Zeit bleibt offensichtlicherweise gleich.$t' = t$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dr} + \vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_0$$

$$\vec{a}' = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$$

3.0.2 Galileisches Relativitätsprinzip

Newtonsche Bewegungsgleichung ist forinvariant unter Galileitransformation.

3.0.3 Exkurs Kosmologie

In der Kosmologie gibt es als *bevorzugtes* Bezugssystem das Rugesystem der thermischen Mikrowellenhintergrundstrahlung.

3.0.4 Exkurs Machsches Prinzip

Existenz von Raum, Zeit und Intertialsystem ist beinflusst durch die Massenverteilung auf sehr großen (kosmologischen) Skalen.

3.0.5 Ausblick

spezielle Relativitätstheorie: Raum und Zeit werden relativ und die Galileitransofrmation werden durch Lorentztransformation ersetzt.
allgemeine Relativität Raum und Zeit (Geometrie) sind an die Materieverteilung gekoppelt. Das hat dann die Folge, dass die Teilchenbewegung bestimmt wird durchd ie Geometrie von Raum und Zeit. Die Massenverteilung bestimmt dann aber erst die Geometrie von Raum und Zeit.

3.1 Koordinatentransformationen - Krumlinige (räunliche) Koordinaten

Man habe n-Dimensionen $(x_i)(y_i) \qquad | \leq i, y \leq n$

$$x_i = x_i(y_{y_1,\ldots,y_n}) = x_i(y_i)$$

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_y} dy_i$$

3.1.1 Beispiel

$n = 3$ mit $x_i = (x, y, z)$ Euklidische Kooridnaten; und $y_i = (u, v, w)$
$x = x(u, v, w) \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw$
$y = y(u, v, w) \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw$
$y = z(u, v, w) \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw$

$\vec{r} = (x_1, ..., x_n) = (x_i) d\vec{r} = (dx, ..., dx_n) = (dx_i) = \sum_i dx_i \vec{e}_i$ mit $\vec{e}_i, \vec{e}_j = \delta_{i,j}$
In allgemein krummlinigen Kooridianten (y_i) wird die damit

$$d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} dy_i$$

z.B. in 3 Dimensional

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz) = \vec{e}_1 dx + \vec{e}_2 dy + \vec{e}_3 dz$$
$$= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw \text{mit} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) etc.$$

Man kann neue Basis-Einheitsvektoren

$$\vec{u}_{12} := \frac{1}{b_{12}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_{12}} \quad \text{mit} b_{12} := \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_{12}} \right|$$

definieren, so daß

$$d\vec{r} = \sum_n \vec{u}_n ds_k \text{ mit den Längenelementen } ds_k = k_k dy_k$$

Man nennt (y_i) ein orthogonales Koordiantensystem wenn:

$$\vec{U}_i \times \vec{U}_j = 0 \text{für} i \neq j \text{und damit auch } \vec{U}_i * \vec{U}_j = \delta_{ij} \text{ an jedem Raumpunkt liegt.}$$

Dann ist das Flächenelement, da von zwei Seiten der Länge ds_i, ds_j angespannt wird, gegeben durch:

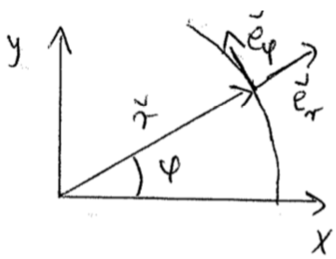
$$dF_{ij} = ds_i, ds_j = b_i b_j dy_i dj_j$$

Und das Volumenelement

$$dV = \prod_{i=1}^{n} ds_i = \prod_{i'=1}^{n} b_i dy_i$$

3.2 Ebene: Polarkoordianten

Wir befinden uns als Beispiel zur besseren veranschaulichung nun im $\mathbb{R}^2$, also im 2 Dimensionalen Raum. $n = 2$
$x = rcos\varphi \qquad y = rsin\varphi$



$\vec{r} = (rcos\varphi, rsin\varphi)$

Umdrehung: $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \pm arctan \frac{y}{x} \text{für} y \neq 0$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (cos\varphi, sin\varphi) \quad |\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}| = 1 \Rightarrow \vec{U}r = \vec{e}_r = (cos\varphi, sin\varphi)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-rsin\varphi, rcos\varphi) \quad |\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}| = r \Rightarrow \vec{u}_\varphi = \vec{e}_\varphi = (-sin\varphi, cos\varphi)$$

3.2.1 Bahnkurve

$\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) \Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}(t) + r(t)\dot{\vec{e}_r}(t)$
$\dot{\vec{e}}_r(t) = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = (-sin\varphi, cos\varphi)\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
$\Rightarrow$ Wenn $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi$ dann ist $v_r = \dot{r}; v_\varphi = r\dot{\varphi}$ dabei ist φ die Winkelgeschwindigkeit.

3.2.2 Beschleunigung

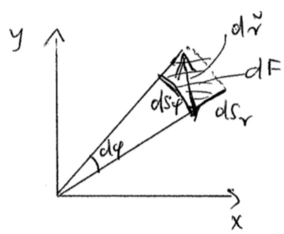
$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi) = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)$
$\ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ Nun nutzen wir folgende zuweisungen:

$$\dot{\vec{e}} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \text{und } \dot{\vec{e}}_\varphi = \dot{\varphi}(-ocs\varphi, -sin\varphi) = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$$

Damit ergibt sich aus der oberen Gleichung: $(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$
mit $\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi$ also

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \quad \textbf{Radialbeschleunigung}$$
$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \quad \textbf{Winkelbeschleunigung}$$

3.2.3 Linien- und Flächenelemente:



$ds_r = dr \qquad ds_\varphi = rd_\varphi$

$\Rightarrow dF = dxdy = ds_r ds_\varphi$

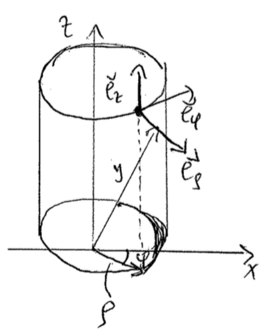
$= rdrd_\varphi$

3.3 Zylinderkoordianten

Für Zylinderkoordinaten befinden wir uns im 3 Dimensionalen wie der name bereits vermuten lässt, $n = 3$

$$x = \rho cos\varphi \quad y = \rho sin\varphi \quad z = z$$

$\rightarrow$ Ebene Polarkoordianten + dazu gedrehte z-Achse Man findet die orthogonalen Einheitsvektoren



Umdrehung:

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \varphi = \pm arctan\frac{y}{x} \quad y \neq 0$

$z = z$

$$\vec{e}_\rho = (cos\varphi, sin\varphi, 0) \quad \vec{e}_\varphi = (-sin\varphi, cos\varphi, 0) \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

Ferner $dV = ds_\rho ds\varphi ds_z = \rho d\rho d\varphi dz$

3.3.1 Geschwindkeit und Beschleunigung

Für Geschwindkiet und Beschleunigung erhielt man

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

3.4 Kugelkoordinaten - sphärische Polarkoordinaten

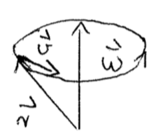
Wir bleiben im 3 Dimensionalen, n=3

$$x = r sin\Theta cos\varphi$$

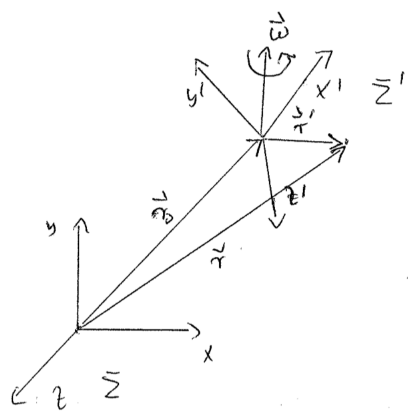
$$y = r sin\theta sin\varphi$$

$$z = r cos\theta$$

3.5 rotierendes Bezugssystem und Scheinkräfte



$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



Für jeden Vektor $\vec{b}$ gilt: $\vec{b} = \sum_i bi\vec{e}_i = \sum_i b_i'\vec{e}_j'$

$\Rightarrow \frac{d\vec{b}}{dt} = \sum_i \frac{db_i}{dt}$

$$Zeitunabhängig = \sum_i \frac{dbi'}{dt}\vec{e}_i' = \sum_{b_i}' \underbrace{\overbrace{\frac{d\vec{e}_i'}{dt}}^{\vec{e}_i}}_{\vec{w}\times\vec{e}_i'} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)'}_{Ableitung im \sum' - System} + \vec{w}\times\vec{b}$$

Ferner:
$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t)$