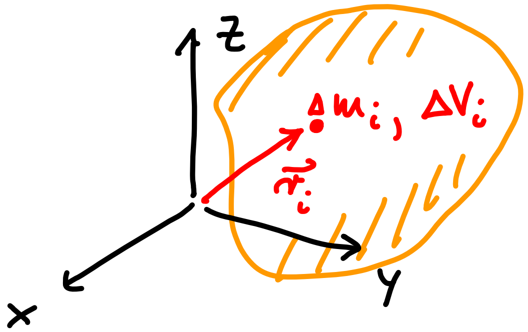
7. Dynamik starrer ausgedehnter Körper

Def.: Mehrteilchensystem, konstante Abstände zwischen den Teilchen



Volumen: $V = \sum_i \Delta V_i$, Masse: $M = \sum_i \Delta m_i$

$\rightarrow$ kontinuierliche Massenverteilung

$$V = \int dV \qquad M = \int dm$$

Dichte: $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$ heißt Massendichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

(Es gibt auch Flächendichte $\sigma = \frac{\Delta m}{\Delta A}$, Liniendichte $\lambda = \frac{\Delta m}{\Delta L}$)

homogener Körper: $\rho = \text{konst}$

Schwerpunkt:

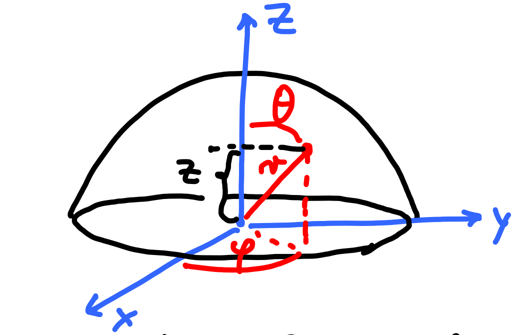
$dm = \rho(\vec{r})\,dV$

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \vec{r}_i}{M} \underset{\substack{N \to \infty \\ \text{kont. Massenverteilung}}}{=} \frac{1}{M} \int_{\text{Verteilung}} \vec{r}\, dm = \frac{1}{M} \int_{\text{Volumen}} \vec{r} \rho(\vec{r})\, dV$$

konst. Dichte:

$$\vec{r}_S = \frac{\rho}{M} \int_{\text{Volumen}} \vec{r}\, dV = \frac{1}{V} \int_{\text{Volumen}} \vec{r}\, dV$$

Beispiel: Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel



Aus Symmetrie: SP liegt auf z-Achse

$$z_s = \frac{1}{V}\int z\, dV$$

Am Einfachsten ist die Integration in Kugelkoordinaten r, θ, φ

$$z = r\cdot\cos\theta \qquad dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

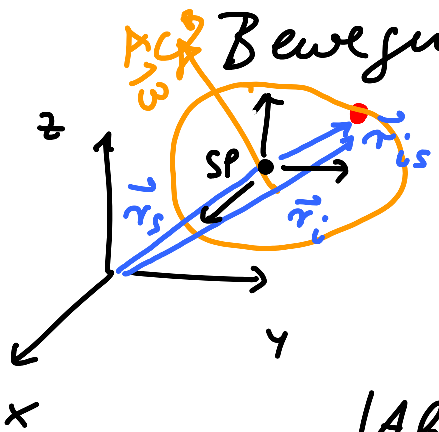
$$z_s = \frac{1}{V}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r\cos\theta\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{V}\iiint r^3 \cos\theta \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$z_s = \frac{1}{V}\underbrace{\int_{r=0}^{R} r^3 dr}_{\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{4}}\;\underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta}\;\underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3}\cdot\frac{R^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \frac{3}{8}R$$

Substitution $y = \cos\theta$, $dy = -\sin\theta\, d\theta$

$$-\int_1^0 y\, dy = \int_0^1 y\, dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Bewegung eines starren Körpers



$$\vec{r}_{is} = \vec{r}_i - \vec{r}_s \qquad \vec{r}_i = \vec{r}_{is} + \vec{r}_s$$

$$\dot{\vec{r}}_{is} = \vec{v}_{is} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$$

$|\text{Abstände}|^2$ sind konstant $\quad r_{is}^2 = \text{konst.} = (\vec{r}_{is})^2$

$$2\,\vec{r}_{is} \cdot \underbrace{\dot{\vec{r}}_{is}}_{\vec{v}_{is}} = 0 \implies \vec{r}_{is} \perp \vec{v}_{is}$$

Kreisbewegung um den Schwerpunkt (Achse durch den SP)

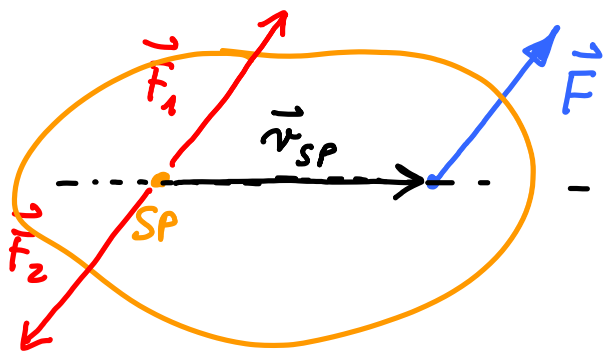
$$\vec{v}_{is} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{is}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{is})$$

Die Bewegung eines ausgedehnten starren Körpers lässt sich zusammensetzen aus der Translation des Schwerpunkts und der Rotation des Körpers um den Schwerpunkt

$\implies$ 6 Freiheitsgrade:
3 Raumkoord. der Transl.
3 Winkel für Rotation

Kraft auf einen starren Körper und Drehmoment



Was passiert?
Beschleunigung und/oder Rotation?

Antwort mit Hilfe von Hilfskräftepaar

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ $\quad$ $\vec{F}_1 = \vec{F}$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

<u>Betrachte:</u> • Drehmoment um den SP

$$\vec{M} = \vec{r}_{SP} \times \vec{F}$$

• Kraft $\vec{F}_1 = \vec{F}$ bewirkt Beschleunigung des SP

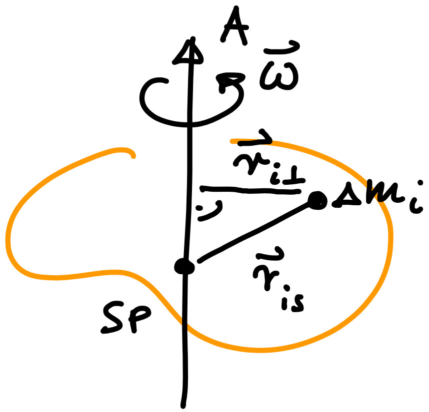
Gleichgewicht des starren Körpers, falls $\sum_i \vec{F}_i = 0$ und $\sum_i \vec{M}_i = 0$

Ein starrer Körper, der im SP unterstützt wird, bleibt stabil im Gleichgewicht

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{g}\,\Delta m_i \curvearrowright \vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{g}\, dm = -\vec{g} \times \underbrace{\int \vec{r}\, dm}_{= M \cdot \vec{r}_S,\ \vec{r}_S = 0} = 0$$

Das Trägheitsmoment und Rotationsenergie, Drehimpuls

Einfacher Fall: Körper, der sich um eine feste Achse dreht



$$E_{kin}(\Delta m_i) = \frac{1}{2}\Delta m_i\, v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i\, \omega^2 r_{i\perp}^2$$

Δm_i hat Abstand $\vec{r}_{i\perp}$ von Drehachse, rotiert mit ω um die Achse

$$v_i = \omega \cdot r_{i\perp}$$

$$E_{rot}^{Gesamt} = \sum_i E_{kin}(\Delta m_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\, r_{i\perp}^2\omega^2 \underset{N\to\infty}{=} \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\int r_\perp^2\, dm}_{I}$$

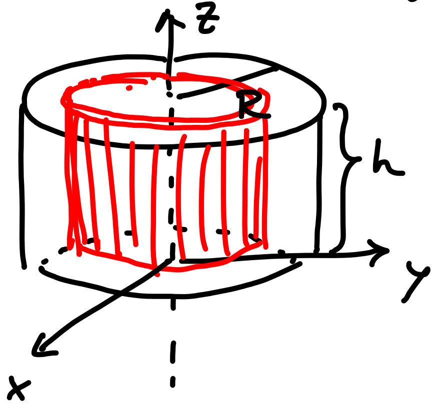
Trägheitsmoment für feste Achse (engl. moment of inertia)

$$I = \underbrace{\int r_\perp^2\, dm}_{\text{Massenvert.}} = \underbrace{\int r_\perp^2\, \rho(\vec{r})\, dV}_{\text{Vol}} \underset{\substack{\text{konst. } \rho \\ \text{homogen}}}{=} \rho\int r_\perp^2\, dV$$

Damit gilt $\boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2}$, Drehimpuls $\boxed{\vec{L} = I\,\vec{\omega}}$

$$L_i(\Delta m_i) = \vec{r}_{i\perp} \times (\Delta m_i \vec{v}_i) = r_{i\perp}^2 \Delta m_i\, \vec{\omega}$$

Beispiel: Trägheitsmoment eines Vollzylinders (um Symmetrieachse)



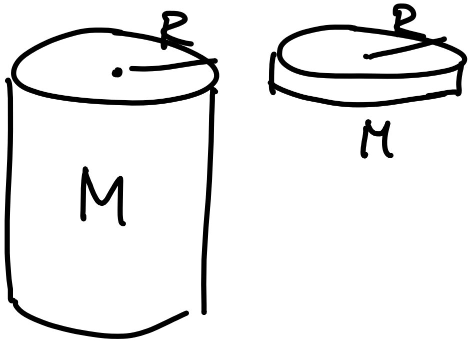
$$M, \quad V = \pi R^2 \cdot h \qquad \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 h}$$

Betrachte dünnen Zylinder Radius r, Wanddicke dr

$$dV = 2\pi r \cdot dr \cdot h$$

$$I_z = \rho \int_{r=0}^{R} r^2 \overbrace{2\pi r \, dr \cdot h}^{dV} = 2\pi h \rho \underbrace{\int_{r=0}^{R} r^3 dr}_{\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{4}}$$

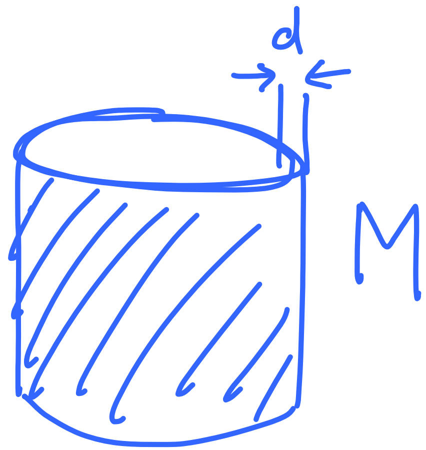
$$I_z = 2\pi h \frac{M}{\pi R^2 h} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$



Höhe ist egal

vgl. mit Hohlzylinder
sehr dünne Wand $d \ll R$

$$I = M R^2$$

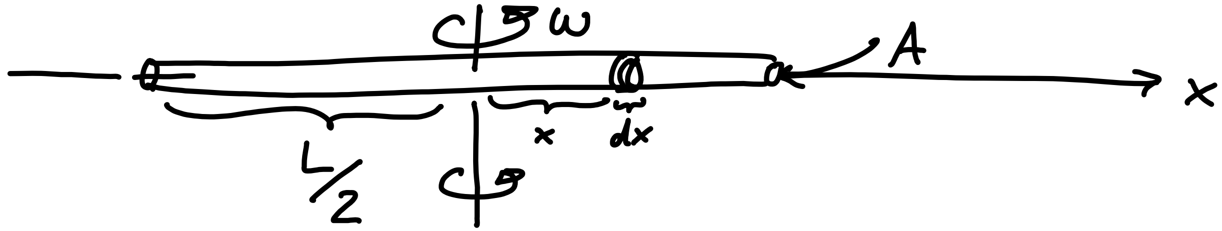


dünner Stab:

Länge L

$V = A \cdot L$

$dV = A \cdot dx$



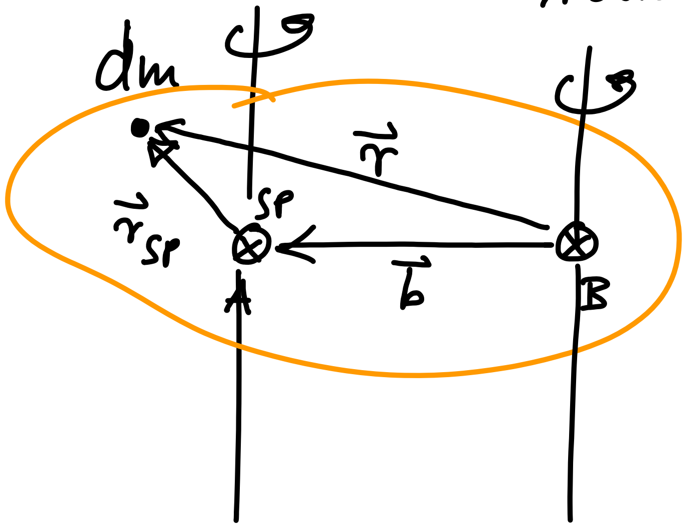
$$I = \int x^2 \, dm = \int x^2 \rho \, dV = \rho \int x^2 A \, dx = \rho \cdot A \int x^2 dx$$

$$I = \rho \cdot A \int_{x=-L/2}^{+L/2} x^2 dx = \rho A \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{+L/2} = \rho \cdot A \cdot \frac{L^3}{12} = \underbrace{\rho \cdot A \cdot L}_{M} \cdot \frac{L^2}{12}$$

$$I = \frac{1}{12} M L^2$$

Steinerscher Satz:

Trägheitsmoment um Achse B die im Abstand b zu Achse A durch den SP liegt



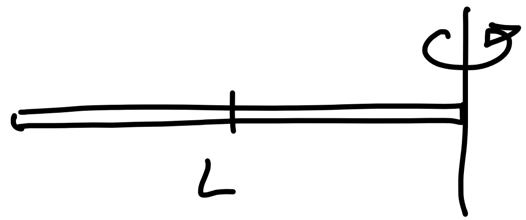
$$I_B = \int \vec{r}^{\,2}\, dm = \int (\vec{r}_{SP} + \vec{b})^2\, dm$$

$$I_B = \int (\vec{r}_{SP}^{\,2} + 2\vec{r}_{SP}\vec{b} + \vec{b}^{\,2})\, dm$$

$$I_B = \int \vec{r}_{SP}^{\,2}\, dm + \underbrace{2\int \vec{r}_{SP}\vec{b}\, dm}_{=0} + \vec{b}^{\,2}\int dm$$

$$\boxed{I_B = I_{SP} + b^2 M}$$

z.B.



$$I = \frac{1}{12} ML^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \frac{4}{12} ML^2$$

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$