

Theoretische Physik 1

Tom Herrmann

21. Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
I	Vorlesung 1	4
2	Grundlagen	4
2.1	Vektorrechnung	4
2.2	Formale Schreibweise Ableitungen	5
2.3	Drehung	5
2.4	Drehung als Matrix Multiplikation:	5
II	Vorlesung 2	5
2.5	Basis der Vektorrechnung	6
2.5.1	Basis ausrechnung	6
2.5.2	Addition	6
2.5.3	Subtraktion	6
2.5.4	Multiplikation	6
2.5.5	Skalarprodukt	6
2.5.6	Eigenschaften von Rechenoperationen	6
2.5.7	Projektion auf die Richtung \vec{b}	7
III	Vorlesung 3	7
2.5.8	Vektorprodukt	7
2.6	Schwarzsche Ungleichung	7
2.7	Komponentendarstellung	7
2.8	Spatprodukt	8
2.8.1	Eigenschaften des Spatprodukts	8
2.9	Doppeltes Vektorprodukt	9
2.10	Das Differential	9
2.11	Vektorfunktionen	9
2.12	Integration	10
2.13	Differentialrechnung	10

IV	Vorlesung 4	11
2.14	Vektorfunktionen	11
2.15	Taylor Entwicklung	11
2.15.1	Potenzreihe	11
2.16	Partielle Differentiation	11
2.16.1	Höhere Ableitungen	12
3	Vektoranalysis	12
3.1	Gradient	12
3.1.1	Beispiel	12
3.2	Rotation	13
3.2.1	Summe und Rotation	13
3.2.2	Beispiel:	13
3.2.3	Beispiel B	13
3.3	Divergenz	13
3.3.1	Beispiele	13
V	Vorlesung 5	13
3.4	Gradient und totales Differential	14
3.5	Wegintegral eines Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{r})$	14
3.5.1	Eigenschaften:	14
4	Grundlagen der Dynamik	14
4.1	Allgemeine Galilei- Transformation zwischen Inertialsystemen	15
4.1.1	Galileisches Relativitätsprinzip	15
4.1.2	Exkurs Kosmologie	15
4.1.3	Exkurs Machsches Prinzip	15
4.1.4	Ausblick	16
VI	Vorlesung 6	16
4.2	Koordinatentransformationen - Krummlinige (räunliche) Koordinaten	16
4.2.1	Beispiel	16
4.3	Ebene: Polarkoordianten	17
4.3.1	Umdrehung	17
4.3.2	Bahnkurve	17
4.3.3	Beschleunigung	17
4.4	Linien- und Flächenelemente:	18
VII	Vorlesung 7	18
4.5	Zylinderkoordianten	18
4.5.1	Geschwindigkeit und Beschleunigung	18
4.6	Kugelkoordinaten - sphärische Polarkoordinaten	19
4.6.1	rotierendes Bezugssystem und Scheinkräfte	19
4.6.2	Beispiel	19

VIII	Vorlesung 8	20
4.7	Spezielle Relativitätstheorie - Lorentstransformation	20
4.7.1	Michelson-Versuch	20
4.8	Anwendung- Relativitätstheorie	23
4.8.1	Geschwindigkeitsaddition oder subtraktion	23
4.8.2	Zeitdilatation	23
4.9	Allgemeine Form der Newtonschen Bewegungsgleichung:	23
4.10	Mehrteilchensysteme für N Teilchen	23
4.11	Phasenraum	24
4.11.1	Beispiele	24
4.12	Energie-Erhaltung	25
4.13	Erhaltung von Impuls und Drehimpuls	25
4.13.1	N-Teilchensystem:	26
4.14	Zweiteilchensystem	26
5	Keplerproblem	27
5.1	Zentralkraftfelder	27
5.1.1	Beispiele für potentielle Energie	28
5.2	Keplerproblem	28

1 Einleitung

Gliederung:

- **Mathematische Grundlagen:**

Vektoren, krummlinige Koordinatensysteme, Differential- und Integralrechnung, partielle Ableitungen, Vektoranalysis, Gradient, Divergenz, Rotation, lineare gewöhnliche Differentialgleichungen, Matrizen und Tensoren, Fourier-Transformation, komplexe Zahlen, Wahrscheinlichkeit.

- **Grundlagen der Mechanik:** Kinematik und Dynamik von Massenpunktsystemen, Newtonsche Axiome, Arbeit, konservative Kräfte, Schwingungen, Zentralfeld, Kepler-Problem, beschleunigte Bezugssysteme

- **Spezielle Relativitätstheorie:** Lorentz-Transformation und kinematische Konsequenzen, Minkowski-Raum, Vierer-Impuls, relativistische Bewegungsgleichung, Energie-Impuls-Vektor, Äquivalenz von Masse und Energie

- **Wärmelehre:** Boltzmann Verteilung, Entropie, Irreversibilität

Wenn man eine **Fettgedruckte Größe** in den Übungsaufgaben sieht ist damit ein Vektor gemeint

Teil I

Vorlesung 1

= Anzahl

2 Grundlagen

2.1 Vektorrechnung

Vektoren sind gerichtete Größen deren Komponenten bei Drehung oder allgemeiner Koordinaten Transformationen gewisse transformationseigenschaften besitzen.

Skalare sind dabei invariant unter Koordinatentransformation. (z.B: Masse, Ladung, Temperatur)

Ortsvektor \vec{r} , Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Vektoren haben eine Richtung und eine Länge.

Spickzettel Grundlagen der Vektorrechnung

■ Vektorbegriff

Ein Vektor hat Richtung und Betrag, $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$, $\vec{r} = (x, y, z)$. $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ Einheitsvektor; Länge eines Vektors: $r := |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, insbesondere beim Einheitsvektor: $|\vec{e}_r| = 1$.

■ Einfache Vektoroperationen

- Addition: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$.
- Subtraktion entspricht Verbindungsvektor: $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{BA}$.
- Skalare Multiplikation: $\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$.
- Teile niemals durch einen Vektor!

■ Kanonische Basisdarstellung

$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$, wobei $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ und $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

■ Geschlossener Streckenzug

$\sum_i \vec{r}_i = \vec{0}$.

----- P - H - Y - S - I - K -----

■ Masse und Schwerpunkt

Gesamtmasse: $M = \sum_{i=1}^n m_i$; Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$.

■ Statik

Statikansatz: $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$; Gewichtskraft $\vec{G} = (0, 0, -mg)$, $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$.

2.2 Formale Schreibweise Ableitungen

Ableitung können sowas als f' geschrieben werden als auch als \dot{f} somit kann die Geschwindigkeit \vec{v} als die Ableitung der Position ausgedrückt werden $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$.

2.3 Drehung

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = (x, y)$$

$\vec{a} = (a_u, a_v) = (u, v)$ dabei ist für u und v das Koordinatensystem einfach nur um einen bestimmten Winkeln φ gedreht.

$$u = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$v = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

Länge von:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \sqrt{u^2 + v^2} = [(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 + (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi + x y \cos \varphi \sin \varphi + x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi - 2 x y \sin \varphi \cos \varphi]^{\frac{1}{2}} \\ &= [x^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + y^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

□

2.4 Drehung als Matrix Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{2} = A_{ij} x_j$$

Teil II

Vorlesung 2

2.5 Basis der Vektorrechnung

Mathematisch abstrakt ist ein linearer oder Vektorraum ein "Körper" von Elementen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, in dem eine Addition und eine Multiplikation mit skalaren α definiert ist.

2.5.1 Basis ausrechnung

- Die Anzahl der Vektoren stimmt überein mit der Dimension des Vektorraumes.
- Die Vektoren sind linear unabhängig.

2.5.2 Addition

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2.5.3 Subtraktion

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.5.4 Multiplikation

$$a * \vec{v} = 5 * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 * 2 \\ 5 * 1 \\ 5 * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Bei der Division läuft das ganze dann fast genau so ab einfach nur 5 in den als Zähler der jeweiligen Koordinate schreiben.

2.5.5 Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \circ |\vec{b}| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

2.5.6 Eigenschaften von Rechenoperationen

Kommutativität $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Distributivität $\lambda * (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) * \lambda$

Homogenität (gemischtes Assoziativgesetz) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * (\alpha\vec{b})$

2.5.7 Projektion auf die Richtung \vec{b}

$a_b := \text{acos}(\varphi) = \vec{a} * \vec{b}$ wo $\vec{b} := \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ der Einheitsvektor in \vec{b} Richtung ist. (Also soll hier b der Einheitsvektor sein)

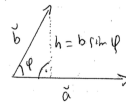
Abstrakte Definition eines Skalarproduktes mit obigen Eigenschaften und zusätzlichen $\vec{a} * \vec{a} > 0 \exists \vec{a} \neq 0$ (positiv definiert)

Teil III

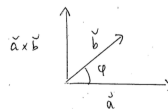
Vorlesung 3

2.5.8 Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad |\vec{c}| = c = ab \quad |\sin \varphi|$$



$\Leftarrow c =$ Fläche des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms Richtung bestimmt durch **Rechts-schrauben regel**: Drehe \vec{a} in Richtung \vec{b}



Eigenschaften:

Antikommutativität: Das heißt, bei Vertauschung der Vektoren wechselt es das Vorzeichen

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Distributivität $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Homogenität (gemischtes Assoziativgesetz) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) * \vec{c} = \alpha\vec{a} * \vec{c} + \alpha\vec{b} * \vec{c}$

Sonderfälle:

$$b(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

2.6 Schwarzsche Ungleichung

$$|\vec{a} * \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

2.7 Komponentendarstellung

Definiere 3  rthogonale das heißt orthogonale Einheitsvektoren

$$\vec{a}, \vec{y}, \vec{z}$$

der im 3-Dimensionalen euklidischen Raum, mit (Schreibregel: Der Einfachheit wegen lasse ich in den 2 Zeilen das Zeichen für Einheitsvektor weg, es sollte eigentlich dabei stehen)

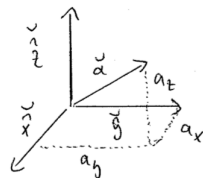
$$\vec{x} * \vec{x} = \vec{y} * \vec{y} = \vec{z} * \vec{z} = 1; \vec{x} * \vec{y} = \vec{x} * \vec{z} = \vec{y} * \vec{z} = 0$$

und

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}, \vec{y} \times \vec{z} = \vec{x}, \vec{z} \times \vec{x} = \vec{y}$$

(Ab diesem Zeitpunkt ist die Schreibregel wieder aufgehoben) andere häufige Schreibweisen:

$$\vec{e}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$



$$\vec{a} = a_x \vec{x} + a_y \vec{y} + a_z \vec{z} = (a_x, a_y, a_z) \text{ mit } a_x = \vec{a} * \vec{x}, a_y = \vec{a} * \vec{y}, a_z = \vec{a} * \vec{z}$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

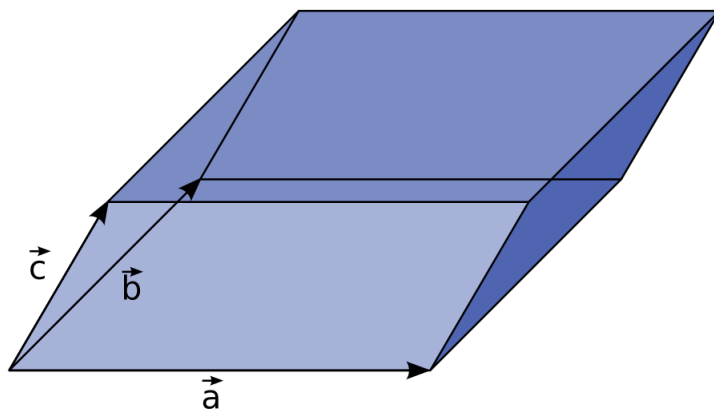
$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

wobei das "Levi-Civita-Symbol"

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i, j, k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } i, j, k \text{ anti-zyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

I

2.8 Spatprodukt



Das Spatprodukt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ dreier Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} des dreidimensionalen euklidischen Vektorraums \mathbb{R}^3 kann wie folgt definiert werden:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

2.8.1 Eigenschaften des Spatprodukts

- Das Spatprodukt ist **nicht kommutativ**. Der Wert ändert sich jedoch nicht, wenn man die Faktoren zyklisch vertauscht:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

- Man kann das **Spatprodukt mit Hilfe der Determinante berechnen**. Für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ gilt:}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

- Die **Multiplikation** mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ ist **assoziativ**

$$(\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

- Es gilt ein **Distributivgesetz**:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$$

- Invarianz unter zyklischer Vertauschung:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) * \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) * \vec{b}$$

Dies ist auch in 3-Dimensionen möglich, wie man am Beispiel der Determinante gesehen hat.

2.9 Doppeltes Vektorprodukt

Im allgemeinen nicht assoziativ

Es gibt die **bac-cab-Regel**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} * \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} * \vec{b})$$

Daraus folgt auch die Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

2.10 Das Differential

Ist $f(x)$ differenzierbar bei x , so nennt man $f'(x)h$ für beliebige h Differential von $f(x)$. Man schreibt oft

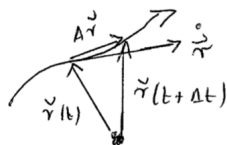
$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

In der Mathematik wird dies Differentialform genannt, die man formal als dual zum Vektorraum bestehend aus Koordinaten x, \dots definiert.

2.11 Vektorfunktionen

z.B. Kurve eines Massenpunktes wird beschrieben durch $\vec{r}|t| = (x(t), y(t), z(t))$ wobei t die Zeit ist.

Kettenregel, Produktregel etc. gelten auf für Vektorfunktionen.



$$\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \text{Geschwindigkeit } \vec{v}$$

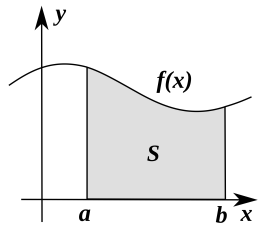
$$\text{Beschleunigung} = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

z.B.

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$

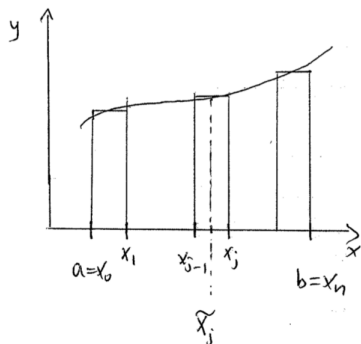
$$\frac{d}{dt} \vec{r}(f(t')) = \frac{d\vec{r}}{dt}(f(t')) * \frac{df}{dt'}(t')$$

2.12 Integration



Die Integralrechnung ist aus dem Problem der Flächen- und Volumenberechnung entstanden. Dabei kann die Funktion auch ein komplett random geformter klotz in einem koordinaten System sein.

$$\int_a^b f(x) dx$$



$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \\ \Delta x_j &:= x_j - x_{j-1} \\ \int_a^b f(x) dx &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Delta x_j \\ &\text{wobei alle } \Delta x_j \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Eine der am häufigsten genutzten Regeln in der Physik ist, dass Konstanten vor das Integral gezogen werden können.

$F(x) := \int_a^x f(x) dx$ ist eine Stammfunktion von f , d.h.

$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$: Integration und Differentiation sind Umkehrungen voneinander

2.13 Differentialrechnung

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

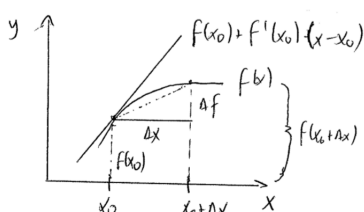
In der Mathematik wird dies Differentialform genannt, die man formal als dual zum Vektorraum bestehend aus Koordinaten x, \dots definiert.

Teil IV

Vorlesung 4

2.14 Vektorfunktionen

z.B. Kurve eines Massenpunktes wird beschrieben durch $\vec{r}|t| = (x(t), y(t), z(t))$ wobei t die Zeit ist.



$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

2.15 Taylor Entwicklung

Im 1. Ordnung: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Verallgemeinerung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \dots$$

2.15.1 Potenzreihe

Jede **Potenzreihe** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ und damit auch jede **Taylor-Reihe** hat einen Konvergenzradius λ , so daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ für alle $|x - x_0| < r$ konvergiert. Im allgemeinen ist r durch den Abstand zur nächsten Singularität von $f(x)$ gegeben, diese Tatsache gilt aber nur allgemein im Raum der komplexen Zahlen.

Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$, da $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = -x^2$ obwohl $\frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert und unendlich oft differenzierbar ist.

Der tiefere Grund ist daß $\frac{1}{1+x^2}$ bei $x = \pm i$ singulär ist.

2.16 Partielle Differentiation

Funktionen mehrerer Variablen, z.B. $f(x, y, z)$, können nach den einzelnen Variablen differenziert werden, wobei man sich die anderen Variablen konstant vorstellt.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

und analog für die anderen Variablen.

Kurzschreibweise:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

2.16.1 Höhere Ableitungen

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

übrigens gilt: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (Symmetrie)

Man kann leicht die erweiterte Kettenregel zeigen:

Für $f(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ gilt $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$

oder als Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Kann auch für die 1. Ordnung einer multi-dimensionalen Taylor-Entwicklung verwendet werden:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) + \dots$$

3 Vektoranalysis

Ein **Vektorfeld** ist eine Vektor-wertige Funktion mehrerer Variablen:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$$

Beispiele: Geschwindigkeitsfeld (e.g. Windgeschwindigkeit), Kraftfeld

Ein **Skalarfeld** hat nur eine (skalare) Komponente:

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z)$$

3.1 Gradient

$$f \rightarrow \vec{\nabla} f = \text{grad} f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \text{Skalarfeld} \rightarrow \text{Vektorfeld}$$

Es gelten die üblichen Produkt- und Summenregeln:

$$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g; \vec{\nabla}(f g) = g \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} g$$

3.1.1 Beispiel

f sei Funktion der Abstand $|\vec{r} - \vec{r}_0| = f'(|\vec{r} - \vec{r}_0|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$

Dabei gilt: $|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$

Dabei ist das ganze dann logischer weise nur vom Abstand abhängig

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(|\vec{r} - \vec{r}_0|) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \vec{e}_{\vec{r} - \vec{r}_0}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = \frac{x - x_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Einheiten in Kugelkoordinaten:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} = \frac{df}{dr}(|\vec{r} - \vec{r}_0|) \vec{\nabla}|\vec{r} - \vec{r}_0| = f'(|\vec{r} - \vec{r}_0|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad \text{z.B. } f(\vec{r}) = c|\vec{r} - \vec{r}_0| \quad \text{Das Gravitationspotential}$$

zwischen zwei Teilchen der Masse m_1 und m_2

$$\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad \alpha = -1 \quad \text{und } c = -G_N m_1 m_2$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \phi(|\vec{r} - \vec{r}_0|) = \frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad \text{Nebenrechnung: } \phi'(r) = +\frac{G_N m_1 m_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla} \phi = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \text{Die Kraft die Teilchen 1 auf Teilchen 2 ausübt.}$$

3.2 Rotation

Hierbei muss extrem auf die Vorzeichen aufgepasst werden. Es gibt zudem nur 2 Kombinationen wie man im Laufe sehen wird die sich nicht wegekürzen.

$$\text{rot}(\vec{F})(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \vec{e}_{i,j} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

Es sind 3 da wir uns im 3 Dimensionalen befinden. Vektorfeld \Rightarrow Vektorfeld ; Wirbelstärke

3.2.1 Summe und Rotation

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$$

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = f\vec{\nabla} \times \vec{F} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{F}$$

3.2.2 Beispiel:

$$f(\vec{r}) = \vec{F} = f(r)\vec{\nabla} \times \vec{r} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{r}$$

$$\vec{f}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) = \vec{0} \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{\nabla} f = f' \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \Rightarrow (\vec{\nabla} f) \times \vec{r} = \frac{f'}{|\vec{r}|} \times \vec{r} = 0$$

3.2.3 Beispiel B

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r}$$

$$|\vec{F}(\vec{r})| = |\vec{w}| \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(w_x y - w_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(w_y x - w_x y)$$

Damit gilt: $\vec{F} = \vec{w} \times \vec{a} \Rightarrow F_z = w_x y - w_y x$ und $F_y = w_z x - w_x z$

Also ist es am ende: $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 2\vec{w}$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = 2\vec{w}$$

3.3 Divergenz

$$\text{div } \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) * F_x, F_y, F_z = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Vektorfunktion \rightarrow Skalarfunktion

$$\vec{\nabla}(\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla}\vec{F} + \vec{\nabla}\vec{G} \quad \vec{\nabla} + (f\vec{f}) = f\vec{\nabla} * \vec{F} + (\vec{\nabla} f) * \vec{F}$$

3.3.1 Beispiele

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \quad \vec{\nabla} * \vec{r} = 3$$

anderes Beispiel: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r} \quad \vec{w} = \text{const.}$

wähle deine Einschränkungen: $\vec{w} = w\vec{e}_z = (0, 0, w) \rightarrow \vec{w} \times \vec{r} = (-wy, wx, 0)$

$$\vec{\nabla} * (\vec{w} \times \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(wx) + \frac{\partial}{\partial z}0 = 0$$

Weitere Beispiele im Skript.

Teil V

Vorlesung 5

3.4 Gradient und totales Differential

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = (\vec{\nabla} f) * d\vec{r} \\ \vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz) \\ \frac{df}{dt} &= (\vec{\nabla} f) * \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \frac{df}{dt} dt &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} (\vec{\nabla} f) d\vec{r} = f(\vec{r}_1) - f(\vec{r}_0) \end{aligned}$$

3.5 Wegintegral eines Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{r})$

Angenommen wir haben eine Kurve und wollen ein Kurvenintegral bilden und nennen dies dann c.

Dabei ist der eine Endpunkt \vec{r}_0 und \vec{r}_1

$$\int_c \vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r} = \int_c [F_x dx + F_y dy + F_z dz] :=$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_i) * \Delta \vec{r}_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_i) * \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t} \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta \vec{r}_i = 0$$

Also zum Beispiel eine Arbeit, die durch einen Kraft $\vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r}$ verrichtet wird

$$W = \int \vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r}$$

Dabei muss man sich immer den Kontext klar machen da sich dadurch ganz einfach Vorzeichen ändern können also der unterschied ob Arbeit verrichtet werden muss oder nicht. *Zum Beispiel das Skalarprodukt würde sich dadurch komplett ändern*

$$\begin{aligned} \int_{c_1} \vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r} \\ \int_{c_2} \vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r} \end{aligned}$$

diese Integrale sind wegunabhängig $\Leftrightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} f \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

3.5.1 Eigenschaften:

$$\int_{-c} \vec{F} * d\vec{r} = - \int_c \vec{F} * d\vec{r}$$

$$c = c_1 + c_2 \Rightarrow \int_c \vec{F} * d\vec{r} = \int_{c_1} \vec{F} * d\vec{r} + \int_{c_2} \vec{F} * d\vec{r}$$

4 Grundlagen der Dynamik

Axiome der Newtonschen Mechanik

- **1. Trägheitsgesetz:** Körper, auf den keine Kräfte wirken, bewegt sich gleichförmig und geradlinig, das heißt $\vec{v} = \text{const}$, $\vec{v} = \vec{0}$ ist ein Spezialfall.

- **2. Aktionsprinzip** Die Zeitliche Änderung des Impulses \vec{p} eines Körpers ist gleich der auf ihn einwirkenden Gesamtkraft

$$Impuls = m * \vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{p}$$

$$\vec{F}_{total} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a}$$

- **3. Actio= Reactio** die von Körper 1 auf Körper 2 ausgeübte Kraft \vec{F}_{21} ist gleich dem negativen der von Körper 2 auf Körper 1 ausgeübte Kraft

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

- **Superpositionsprinzip** Kräfte addieren sich vektoriell.

In Newton's Mechanik sind **Raum** und **Zeit** absolute Begriffe und die Zeit läuft immer gleich ab unabhängig vom Inertialsystem, was natürlich in konflikt mit der Relativitätstheorie steht.

Newtons Axiome gelten zunächst nur in unbeschleunigten, sog. Inertialsystemen. Intertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit

4.1 Allgemeine Galilei- Transformation zwischen Inertialsystemen

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}_0 * t + \vec{r}_0 \quad \vec{v}_0 = const; \vec{r}_0 = const$$

Wie man sieht transformieren sich damit die Ortskoordinaten aber die Zeit bleibt offensichtlichweise gleich. $t' = t$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_0$$

$$\vec{a}' = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$$

4.1.1 Galileisches Relativitätsprinzip

Newtonsche Bewegungsgleichung ist forinvariant unter Galileitransformation.

4.1.2 Exkurs Kosmologie

In der Kosmologie gibt es als *bevorzugtes* Bezugssystem das Rugesystem der thermischen Mikrowellenhintergrundstrahlung.

4.1.3 Exkurs Machsches Prinzip

Existenz von Raum, Zeit und Intertialsystem ist beeinflusst durch die Massenverteilung auf sehr großen (kosmologischen) Skalen.

4.1.4 Ausblick

spezielle Relativitätstheorie: Raum und Zeit werden relativ und die Galileitransformation werden durch Lorentztransformation ersetzt.

allgemeine Relativität Raum und Zeit (Geometrie) sind an die Materieverteilung gekoppelt. Das hat dann die Folge, dass die Teilchenbewegung bestimmt wird durch die Geometrie von Raum und Zeit. Die Massenverteilung bestimmt dann aber erst die Geometrie von Raum und Zeit.

Teil VI

Vorlesung 6

4.2 Koordinatentransformationen - Krummlinige (räumliche) Koordinaten

Man habe n-Dimensionen $(x_i)(y_i) \quad | \leq i, y \leq n$

$$x_i = x_i(y_{y_1, \dots, y_n}) = x_i(y_i)$$

$$dx_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$$

4.2.1 Beispiel

$n = 3$ mit $x_i = (x, y, z)$ Euklidische Koordinaten; und $y_i = (u, v, w)$

$$x = x(u, v, w) \quad dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw$$

$$y = y(u, v, w) \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw$$

$$z = z(u, v, w) \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw$$

$$\vec{r} = (x_1, \dots, x_n) = (x_i) d\vec{r} = (dx, \dots, dx_n) = (dx_i) = \sum_i dx_i \vec{e}_i \text{ mit } \vec{e}_i, \vec{e}_j = \delta_{i,j}$$

In allgemein krummlinigen Koordinaten (y_i) wird die damit

$$d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} dy_i$$

z.B. in 3 Dimensional

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (dx, dy, dz) = \vec{e}_1 dx + \vec{e}_2 dy + \vec{e}_3 dz \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw \text{ mit } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Man kann neue Basis-Einheitsvektoren

$$\vec{u}_{12} := \frac{1}{b_{12}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_{12}} \quad \text{mit } b_k := \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_{12}} \right|$$

($k = 1, 2, 3$) definieren, so daß

$$d\vec{r} = \sum_n \vec{u}_n ds_k \text{ mit den Längenelementen } ds_k = k_k dy_k$$

$= \sum_k \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_{12}} dy_{12}$ Man nennt (y_i) ein orthogonales Koordinatensystem wenn:

$$\vec{U}_i \times \vec{U}_j = 0 \text{ für } i \neq j \text{ und damit auch } \vec{U}_i \cdot \vec{U}_j = \delta_{ij} \text{ an jedem Raumpunkt liegt.}$$

Dann ist das Flächenelement, da von zwei Seiten der Länge ds_i, ds_j angespannt wird, gegeben durch:

$$dF_{ij} = ds_i, ds_j = b_i b_j dy_i dy_j$$

Man kann sich das so vorstellen wie ein Rechteck was grade aufgespannt wird.

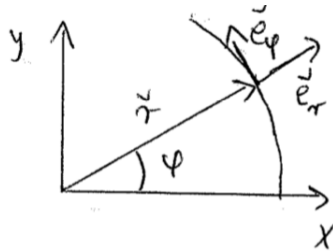
Und das Volumenelement

$$dV = \prod_{i=1}^n ds_i = \prod_{i'=1}^n b_i dy_i$$

4.3 Ebene: Polarkoordinaten

Wir befinden uns als Beispiel zur besseren veranschaulichung nun im \mathbb{R}^2 , also im 2 Dimensionalen Raum. $n = 2$

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$



$$\vec{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

4.3.1 Umdrehung

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \pm \arctan \frac{y}{x} \text{ für } y \neq 0 \text{ für } \varphi \in [0, 2\pi[, [-\pi, \pi[$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1 \Rightarrow \vec{u}_r = \vec{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \Rightarrow \vec{u}_\varphi = \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

4.3.2 Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{e} \Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}(t) + r(t) \dot{\vec{e}}(t)$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \vec{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} = (-\sin \varphi, \cos \varphi) \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

\Rightarrow Wenn $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi$ dann ist $v_r = \dot{r}$; $v_\varphi = r \dot{\varphi}$ dabei ist φ die Winkelgeschwindigkeit.

$$\Rightarrow \dot{v} = \dot{r}(t) \vec{e}_r + r(t) \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \Rightarrow v_r = \dot{r}; v_\varphi = r \dot{\varphi}$$

$\dot{\varphi}$ ist die Winkelgeschwindigkeit und 2 Punkt ist die Rotationsgeschwindigkeit = radius. Winkelgeschwindigkeit

4.3.3 Beschleunigung

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi) = \frac{d}{dt}(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \text{ und } \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_r$$

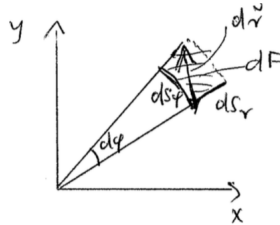
$\ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi$ Nun nutzen wir folgende zuweisungen:

$$\dot{\vec{e}} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \text{ und } \dot{\vec{e}}_\varphi = \dot{\varphi} (-\cos \varphi, -\sin \varphi) = -\dot{\varphi} \vec{e}_r$$

Damit ergibt sich aus der oberen Gleichung: $(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$
 mit $\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi$ also

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 & \text{Radialbeschleunigung} \\ a_\varphi &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} & \text{Winkelbeschleunigung} \end{aligned}$$

4.4 Linien- und Flächenelemente:



$$\begin{aligned} ds_r &= dr & ds_\varphi &= r d\varphi \\ \Rightarrow dF &= dx dy = ds_r ds_\varphi \\ &= r dr d\varphi \end{aligned}$$

Teil VII

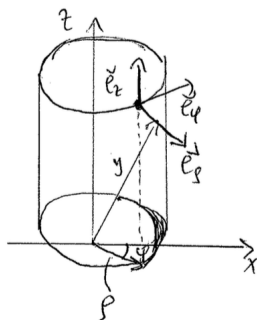
Vorlesung 7

4.5 Zylinderkoordinaten

Für Zylinderkoordinaten befinden wir uns im 3 Dimensionalen wie der name bereits vermuten lässt, $n = 3$

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi \quad z = z$$

→ Ebene Polarkoordinaten + dazu gedrehte z-Achse Man findet die orthogonalen Einheitsvektoren



Umdrehung:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}; \varphi = \pm \arctan \frac{y}{x} \quad y \neq 0 \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\vec{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

Ferner $dV = ds_\rho ds_\varphi ds_z = \rho d\rho d\varphi dz$

4.5.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Für Geschwindigkeit und Beschleunigung erhielt man

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z \end{aligned}$$

4.6 Kugelkoordinaten - sphärische Polarkoordinaten

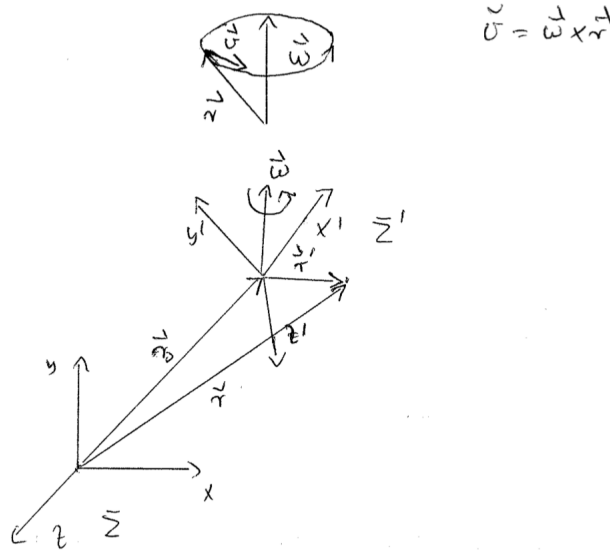
Wir bleiben im 3 Dimensionalen, $n=3$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

4.6.1 rotierendes Bezugssystem und Scheinkräfte



Für jeden Vektor \vec{b} gilt: $\vec{b} = \sum_i b_i \vec{e}_i = \sum_i b'_i \vec{e}'_i$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{b}}{dt} = \sum_i \frac{db_i}{dt} \underbrace{\vec{e}_i}_{\text{Zeitunabhängig}} = \sum_i \frac{db'_i}{dt} \vec{e}'_i = \sum_{b'_i} \underbrace{\frac{db'_i}{dt}}_{\vec{\omega} \times \vec{e}'_i} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{b}}{dt} \right)'}_{\text{Ableitung im } \Sigma' \text{-System}} + \vec{\omega} \times \vec{b}$$

Ferner:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t) \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}_0 + \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)'}_{\text{Geschwindigkeit im } \Sigma' \text{-System}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Notwendige Differentiation ergibt Transformationsgesetz für die beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}_0 + \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)' + \vec{\omega} \times \vec{v} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right)$$

$$\ddot{\vec{r}}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

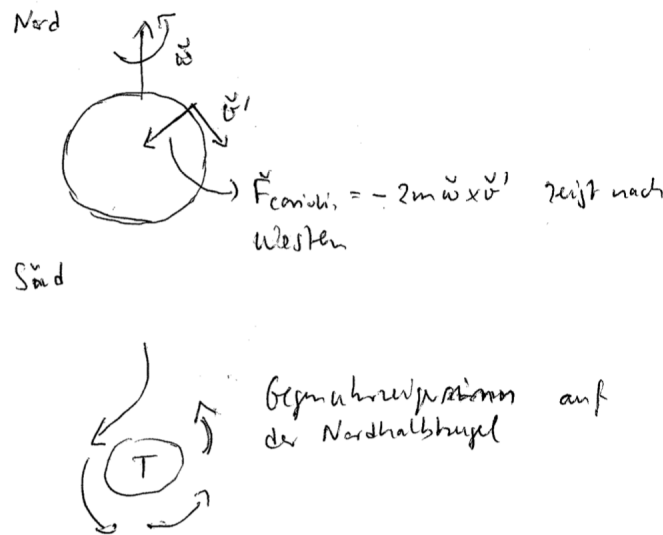
wobei $\vec{a}' = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)'$ die Beschleunigung gemessen im Σ' -System ist Eingesetzt in $\vec{F} = m\vec{a}$, damit bekommt man letztendlich dann:

$$m \underbrace{\left(\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} \right)'}_{\vec{a}'} = \vec{F} - m \left[\ddot{\vec{r}}_0 + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis-Kraft}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \right]$$

4.6.2 Beispiel

rotierendes terrestrisch Bezugssystem: Auf einem Luftraum der sich auf die Nordhalbkugel um Nord nach Süd bewegt wirkt eine Corioliskraft die nach Westen zeigt. Deshalb drehen sich Luftmassen auf

der Nordhalbkugel im Gegen-Uhrzeigersinn um Tiefdruckgebiete. Auf der Süd halbkugel ist es genau andersherum.



Teil VIII

Vorlesung 8

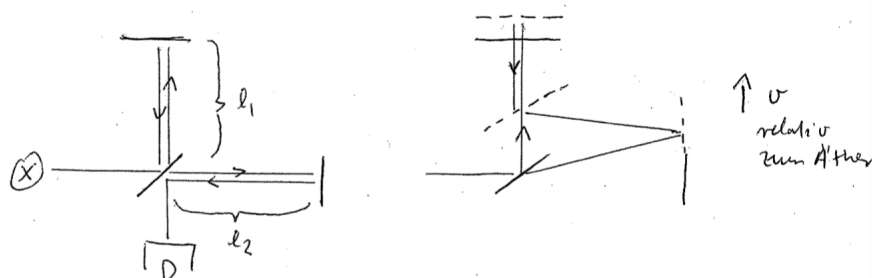
4.7 Spezielle Relativitätstheorie - Lorentstransformation

Galilei-Transformationen in der Newton'schen Mechanik führen zur Vektoraddition von Geschwindigkeiten:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}_0 * t + \vec{r}_0 \Rightarrow \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_0$$

insbesondere hängt Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem (Inertialsystem) ab. \exists bevorzugtes Inertialsystem in welchem Lichtgeschwindigkeit $= c_0 \rightarrow$ Äther! Für den Schall ist der Äther (Medium) die Luft.

4.7.1 Michelson-Versuch



$$\text{Lichtlaufzeit in Arm 1} = \frac{l_1}{c_0 - v} + \underbrace{\frac{l_1}{c + v}}_{\text{kürzt sich}} + \frac{l_1}{c_0 + v} = t_1 = \frac{2l_1}{c_0} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}$$

$$\text{Lichtlaufzeit in Arm 2} = (v \frac{t_2}{2})^2 + l_2^2 = (c_0 \frac{t_2}{2})^2 \Rightarrow t_2 = \frac{2l_2}{c_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{2}{c_0} \left(\frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \right)$$

Drehung um 90° entspricht Austausch von l_1 , und l_2 :

$$\Delta t' = \frac{2}{c_0} \left(\frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} - \frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} \right)$$

Die Differenz der Lichtlaufzeiten ändert sich damit um

$$\delta t = \Delta t - \Delta t' = \frac{2(l_1 + l_2)}{c_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \right)$$

war die Interferenzmuster um die Phase

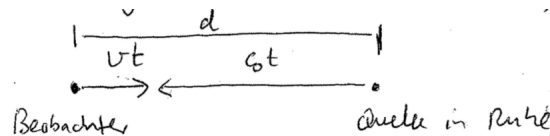
$$\Delta \Phi = \underbrace{w}_{\text{Frequenz des Laserlichtes}} \delta t$$

ändert.

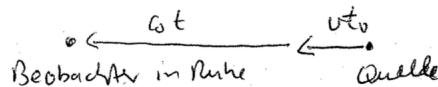
Experimentell ist $\Delta \delta = \Delta \Phi = 0$

\Rightarrow **Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist universell und in jedem Inertialsystem identisch.**

Damit sind alle Inertialsysteme gleichberechtigt und nur Relativgeschwindigkeiten sind physikalisch relevant. Dies ist nicht der Fall in der Äthertheorie, wie folgendes Beispiel zeigt (Geschwindigkeiten relativ zum Äther)



Wenn $v = 0$ und $d = \text{Distanz der Beobachter-Quelle}$ dann ist $t_0 = \frac{d}{c_0}$; wenn $v > 0$ dann $d = c_0 t + vt$
 $\Rightarrow t = \frac{t_0}{1 + \frac{v}{c_0}} \Rightarrow \text{frequenz } f = \frac{1}{t} = f_0(1 + \frac{v}{c_0})$



$t = t_0 - \frac{vt_0}{c_0} + \frac{d}{c_0} \Rightarrow f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c_0}} \Rightarrow$ die beiden Dopplereffekte wären in zweiter Ordnung in $\frac{v}{c_0}$ verschieden.

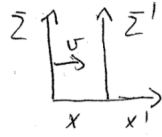
Eine Möglichkeit, die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Inertialsystem zu halten ist

$$c_0^2 \Delta t^2 - (\Delta \vec{r})^2 = \text{unabhängig vom Inertialsystem}$$

zu setzen, denn dann ist für Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit $c_0^2 \Delta t^2 - (\Delta \vec{r})^2 = 0$ in allen Inertialsystemen.

Gesucht ist aber eine Transformation (ohne Einschränkung mit nur einer Raumkoordinate): so daß:

$$(c_0 t')^2 - x'^2 = (c_0 t)^2 - x^2$$



$$x' = ax + bt$$

$$t' = cx + dt$$

$$a, d$$

Definiere $a := \gamma$. Per Definition bewegt sich ein Punkt in Ruhe in $\sum', \Delta x' = 0$, mit Geschwindigkeit v in $\sum, v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$0 = \Delta x' = \gamma \Delta x + b \Delta t \Rightarrow b = -\gamma \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\gamma v$$

aber

$$x' = \gamma(x - vt)$$

weiter würde es gehen:

$$\begin{aligned} (c_0 t')^2 - x'^2 &= c_0^2 (cx + dt)^2 - \gamma^2 (x - vt)^2 \\ &= c_0^2 (d^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c_0^2}) t^2 + (c_0^2 c^2 - t^2) x^2 + 2(c_0^2 cd + \gamma^2 v) xt \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$(1) d^2 = 1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c_0^2}$$

$$(2) c_0^2 c^2 = \gamma^2 - 1$$

$$(3) c_0^2 cd = -\gamma v$$

multipliziere (1) und (2) \Rightarrow $\underbrace{c_0^2 c^2 d^2 = \gamma^4 \frac{v^2}{c_0^2}}_{\text{quadriere(3)}} \Rightarrow c_0^2 c^2 d^2 = -1 + \gamma^2 (1 - \frac{v^2}{c_0^2}) + \gamma^4 \frac{v^2}{c_0^2}$

Nun setzen wir gleich $\Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$ weil $a = \gamma > 0$

$$\Rightarrow d^2 = \gamma^2 (\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c_0^2}) = \gamma^2 \quad d = \gamma \text{ weil } d > 0$$

$$(3) \Rightarrow c = -\frac{\gamma^2 v}{c_0^2 d} = -\gamma \frac{v}{c_0^2}$$

$$\Rightarrow x' = \gamma(x - vt) \quad ; \quad t' = \gamma(t - \frac{vx}{c_0^2})$$

Dabei entspricht $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$ **Hinweis:**

Oft werden natürliche Einheiten verwendet für die $c_0 = 1$

Die Koordinaten $\perp \vec{v}$ bleiben unverändert, das heißt

$$y' = y \quad z' = z$$

Dabei ist zu beachten: Für $\frac{v}{c_0} \rightarrow 0$ ist $\gamma = 1 + 0(v^2) \Rightarrow$ In erster Ordnung in v erhält man Galilei-Transformation:

$$x' = x - vt + 0(v^2) \quad t' = t - \frac{vx}{c_0^2} + 0(v^2)$$

4.8 Anwendung- Relativitätstheorie

4.8.1 Geschwindigkeitsaddition oder subtraktion

In System Σ bewegt sich ein Teilchen mit Geschwindigkeit

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \text{In } \Sigma' \text{ ist Geschwindigkeit}$$

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\Delta t - v \frac{\Delta x}{c_0^2}} = (\text{dividiere oben und unten durch } \Delta t \text{ und verwende } u = \Delta x / \Delta t \frac{u-v}{1-\frac{vu}{c_0^2}})$$

Für $u, v \ll c_0$ gilt Galilei-Transformation bis auf Terme zweiter Ordnung:

$$u' = u - v + 0(v^2, u^2)$$

4.8.2 Zeitdilatation

Betrachte einen Prozess, der im Σ im Ruge stattfindet und eine Zeit Δt dauert, z.B. radioaktiver Zerfall.

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \geq \Delta t$$

Vierervektor-Formatlismus:

Verwende natürliche Einheiten $c_0 \equiv 1$ der Einfachheit halber

$$\Rightarrow t' = \gamma(t - vx) \quad y' = y$$

$$\Rightarrow x' = \gamma(x - vt) \quad z' = z$$

(t, \vec{x}) bildet einen Vierervektor dessen Norm $t^2 - \vec{x}^2$ erhalten ist. Analog bildet (E, \vec{p}) einen Energie Impuls Vierervektor. $\Rightarrow E' = \gamma(E - vp_x) \quad px' = \gamma(p_x - vE)$

$$p'_y = p_y \quad p'_z = p_z$$

Spezialfall: Teilchen in Ruge im Σ , aber $\vec{p} = 0, E = m_0 = \text{Ruhemasse}$

$$\Rightarrow E' = \gamma E = \gamma m_0$$

$$p'_x = -\gamma v E = -\gamma v m_0$$

$$p'_y = p'_z = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}^2 + m_0^2 = m_0^2(1 + \gamma^2 v^2) = \frac{m_0^2}{1-v^2}(1 - v^2 + v^2) = \frac{m_0^2}{1-v^2} = \gamma^2 m_0^2 = E^2$$

ersetze durch ungestrichene Größe

$$\text{in alltäglichen Koordinaten: } E^2 = c_0^2 \vec{p}^2 + m_0^2 c_0^4 \quad [E] = [mv^2], [p] = [mv]$$

Dabei zu beachten ist dass, E positiv und eine negative Wurzel hat.

$E < 0$ entspricht Antiteilchen

\rightarrow in der Relativitätstheorie hat jedes Teilchen ein Anti-Teilchen

Nicht-relativistisches Limit:

$$E = \sqrt{m_0^2 + \vec{p}^2} = m_0 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m_0^2}} = m_0(1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{m_0^2} + 0(p^4))$$

$$E = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} = m_0(1 + \frac{1}{2} v^2 + 0(v^2))$$

$$\approx m_0 + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v_0^2}_{\text{nicht relativistische kinetische Energie}}$$

4.9 Allgemeine Form der Newtonschen Bewegungsgleichung:

$m \ddot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, t) \rightarrow$ gewöhnliche Differentialgleichung zweiter. Ordnung

$$m \ddot{x}_i = F_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3$$

4.10 Mehrteilchensysteme für N Teilchen

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j(\vec{r}_{11} \dots, \vec{r}_{N,t}) \quad j = 1, \dots, N$$

$\Rightarrow 3N$ Differentialgleichung 2ter Ordnung $\rightarrow 3N$ Freiheitsgrade.

4.11 Phasenraum

Für n Freiheitsgrade hat man den n -dimensionalen Ortsvektor $\vec{r} = (y_1, \dots, y_n)$; Der von $\vec{u} = (\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ aufgespannte $2n$ dimensionale Vektorraum heißt Phasenraum, Definiere

$$u_j = y_j \quad j = 1, \dots, n \quad u_{j+n} = \dot{y}_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \dot{u}_j = \dot{y}_j = u_{n+j} \quad j = 1, \dots, n$$

$$\dot{u}_{j+n} = \ddot{y}_j = f_j(u, \dots,$$

$\underbrace{u_{2n}}$

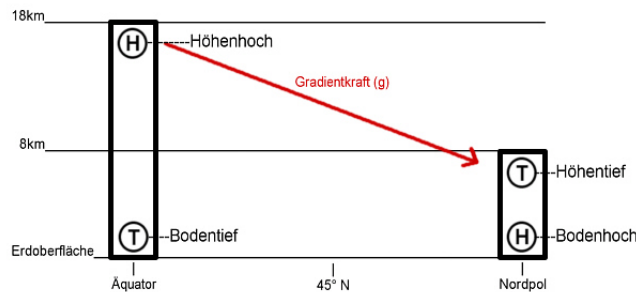
$, t)$ hat die Form:

Kraft kann auch von Geschwindigkeiten abhängen, z.B. Reibung, Lorentz-Kraft

$\ddot{\vec{u}} = \vec{g}(\vec{u}, t) \rightarrow 2n$ gewöhnliche Differentialgleichung **erster** Ordnung

Symmetrien dieser Gleichungen führen i.a. zu Erhaltungsgrößen z.B. führt Zeit-unabhängigkeit i.a. zu Energieerhaltung

\vec{F} heißt Gradienten-Kraft wenn



$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

mit $V(\vec{r})$ eine Skalarfunktion genannt **Potential**

Dann ist

$$e = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r})$$

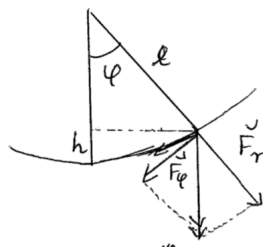
erhalten: $\frac{dE}{dt} = m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V = \dot{\vec{r}} \cdot (m\ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V)$

$$\dot{\vec{r}} \cdot (m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}(\vec{r})) = 0$$

4.11.1 Beispiele

Schräger Wurf \rightarrow siehe experimenteller Teil

mathematisches Pendel (Kräfte Gleichsetzen) wenn $l = \text{const}$ ist $F_\varphi = ma_\varphi$ in Polarkoordinaten



$$\vec{F} = -mg\vec{e}_z$$

$$= -\vec{\nabla} E_{pot}$$

$$\text{mit } E_{pot} = mgh = mgl(1 - \cos\varphi)$$

$$F_\varphi = -mg\sin\varphi \quad a_\varphi = l\ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \text{ oder } \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

4.12 Energie-Erhaltung

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = \text{const} = mgl(1 - \cos\varphi_0)$$

φ_0 = maximale Auslenkung; Falls $\varphi_0 \leq \pi$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$$

damit kann man die Schwingungsperiode berechnen:

$$T = \int_0^T dt = 4 \int_0^{T/4} dt = 4 \int_0^0 \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

Verwende

$$\cos\varphi - \cos\varphi_0 = 2(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2})$$

definiere $h = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$ und transformiere auf neue Variable ξ mit $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2} \sin \xi}{\varphi_0}$ sodaß $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{h - h \sin^2 \xi}}$$

$$\text{dann ist } -\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \sqrt{h} \cos \xi d\xi \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\xi} = 2\sqrt{h} \frac{\cos \xi}{\cos \frac{\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{2\sqrt{h} \cos \xi d\xi}{\sqrt{h} \cos \xi \cos \frac{\varphi}{2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - h \sin^2 \xi}} = K(h) = \text{vollständiges elliptisches Integral}$$

$$\Rightarrow T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2})$$

Taylor Entwicklung von K(h) um k = 0:

$$K(h) \approx \int_0^{\pi/2} d\xi (1 + \frac{h}{2} \sin^2 \xi) \approx \frac{\pi}{2} (1 + \frac{h}{4})$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \frac{h}{4})$$

Für $k \rightarrow 0$ ist $T \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ Das entspricht der harmonischen Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi \approx \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

Lösungen sind dafür:

$$\varphi(t) = A \sin w_0 t + B \cos w_0 t$$

$$\text{mit } w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \text{ aber } T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dies entspricht dem Federpendel

$$m\ddot{x} + hk = 0 \text{ mit } E_{pot} = \frac{h}{2} x^2 \quad F = -\frac{dE_{pot}}{dx} = -hx$$

4.13 Erhaltung von Impuls und Drehimpuls

Impuls eines Teilchens := $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$

Dabei ist m eine Ruhemasse in Newtonscher Physik ansonsten $m \rightarrow m\gamma$ bzw. bewegte Masse

$$\Rightarrow \dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

$$\text{Drehimpuls } \vec{L} := m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}_{=0} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Dieses Ergebnis der Umformung am Ende ist auch bekannt als Drehmoment.

4.13.1 N-Teilchensystem:

$$r_{jk} := |\vec{r}_j - \vec{r}_k| = r_{kj}$$

Angenommen nur Zentralkräfte \vec{F}_{jk} wirken von Teilchen k auf Teilchen j .

$$\Rightarrow \vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}(r_{jk}) \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{r_{jk}} \quad \text{also } \dot{\vec{r}}_j = \sum_{k=1, k \neq j}^N \vec{F}_{jk}$$

insbesondere

$$\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj} \rightarrow 3. \text{ Newton' sche Axiom!}$$

Definiere:

$$\vec{p} = \sum_j \dot{\vec{p}}_j = \sum_{j \neq k} \vec{F}_{jk} = 0$$

\Rightarrow Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j$ bewegt sich mit Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j = \frac{1}{M} \sum \vec{p}_j = \frac{\vec{p}}{M} = \text{const}$$

Damit ist der Schwerpunkt $\vec{R} =$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \sum_j \dot{\vec{L}}_j = \sum_j r \dot{\vec{r}}_j \times \sum_{k, k \neq j} \vec{F}_{jk} = \sum_{j \neq k} \frac{F_{jk}(r_{jk})}{r_{jk}} \vec{r}_j \times (\vec{r}_j - \vec{r}_k) \\ &= -\sum_{j \neq k} \frac{F_{jk}(r_{jk})}{r_{jk}} \vec{r}_j \times \vec{r}_k = 0 \quad \text{weil } \vec{r}_j \times \vec{r}_k = -\vec{r}_k \times \vec{r}_j \end{aligned}$$

4.14 Zweiteilchensystem

Definiere:

$$\vec{r} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \text{Relativkoordinate}$$

$$M = m_1 + m_2 = \text{Gesamtmasse} \quad M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{steht für die reduzierte Masse}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \text{ Steht für den Schwerpunkt}$$

Damit gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) := \underbrace{\vec{F}_{12}}_{\text{Zentralkraft}} = F(r) = F(r) \hat{\vec{r}}$$

Nun können wir eine Bewegungsgleichung aufstellen. Dies tun wir indem wir einfach die normale Bewegungsgleichung für Zweiteilchensysteme nehmen.

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}$$

$\Rightarrow = 0$ wie im N-Körpersystem

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}(\vec{r})$$

Ferner:

$$\vec{L}_{total} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_s + \vec{L}$$

wobei

$$\vec{L}_s = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} = \vec{R} \times \vec{p} = \text{Drehimpuls der Schwerpunktbewegung}$$

und

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{relativ Drehimpuls}$$

5 Keplerproblem

5.1 Zentralkraftfelder

Potential $V(\vec{r}) = V(r)$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Erhaltungsgrößen:

$$F = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}})^2 + E(\vec{r})$$

ist dann die Energie

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{L}} = m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0} = 0$$

Die Newtonsche Kraft entspricht dann: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{e}_r$

Ebene Polarkoordinaten: $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)^2 + E_{pot}(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + E_{pot}(r)$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = mr\dot{\varphi}\vec{r} \times \vec{e}_\varphi \underbrace{=}_{\vec{r}=r\vec{e}_r} mr^2\dot{\varphi}\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{\vec{e}_z} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$$

$$\vec{L}^2 = L^2 = (mr^2\dot{\varphi})^2 = const \Rightarrow mr^2\dot{\varphi} = const = L \Rightarrow \frac{L}{mr^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_{pot}(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

$$V_{eff}(r) = E_{pot}(r) + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{\text{Drehimpulsbarriere}}$$

$$E = const \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} t(r) - t(r_0) &= \int_{r_0}^r dt' = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\dot{r}} \\ &= \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r'))}} \end{aligned}$$

Ähnlich für Azimentalwinkel:

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \int_{\varphi(r_0)}^{\varphi(r)} d\varphi' = \int_{r_0}^r \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{dr'} dr' = \int_{r_0}^r \dot{\varphi} \frac{1}{\dot{r}(r')} dr'$$

$$= \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{eff}(r')}} \quad V_{eff}(r) \leq E$$

Im allgemeinen : $\lim_{r \rightarrow \infty} E_{pot}(r) = 0$

\Rightarrow für ungebundene Bahnen (r.B. Meteore die nicht aus unserem Sonnensystem kommen) ist $E \geq 0$

Für gebundene Bahnen ist $E < 0$:

$$r_{max} \geq r \geq r_{min}$$

gebundene Bahnen können geschlossen aber ungeschlossen sein.

Für geschlossene Bahnen muß:

$$\Delta\varphi = \frac{2L}{\sqrt{2m}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r^{12} \sqrt{E - V_{eff}(r')}} = 2\pi n$$

5.1.1 Beispiele für potentielle Energie

$$E_{pot} = -\frac{G_N m_m}{r} \text{ Gravitationspotenzial zwischen } M \text{ und } m$$

$$E_{pot} = \frac{\vec{e}_1 \vec{e}_2}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ elektrisches Potenzial zwischen zwei Ladungen } e_1, e_2$$

$$E_{pot}(r) = \alpha \left[\underbrace{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}}_{\text{Abstoßung}} - 2 \underbrace{\left(\frac{r_0}{r}\right)^6}_{\text{Anziehung}} \right] \text{ Lennard-Jones Potenzial aus der Kernphysik}$$

5.2 Keplerproblem

zwei Massen m, M i.a. $M \rightarrow m$

wähle Koordinatensystem so daß der Schwerpunkt sich am Ursprung und in Ruhe befindet

$$\vec{R} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M+m} = 0 \Rightarrow \vec{r}_1 = -\frac{m}{M}\vec{r}_2 \text{ r.B. } \frac{m}{M} \ll 1$$

$$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \frac{M+m}{M}\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_2 = \frac{M}{M+m}\vec{r} \quad \vec{r}_1 = \frac{m}{M+m}\vec{r}$$

$$E_{pot}(r) = -\frac{G_N M m}{r} = -\frac{G_N (M+m)\mu}{r} \quad \mu = \frac{Mm}{M+m} \text{ reduzierte Masse}$$