Wiederholung: Rotation im Vgl. zur Translation

Translation $\longleftrightarrow$ Rotation (um feste Achse)

Länge $\vec{x}$ — Winkel φ

Geschwindigkeit $\vec{v}$ — Winkelgeschw. $\vec{\omega}$

Masse m — Trägheitsmoment $I = \int r_\perp^2 \, dm$

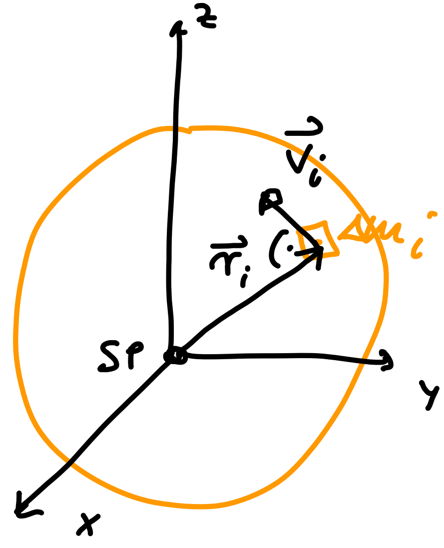
Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ — Drehimpuls $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

Kraft $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ — Drehmoment $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ — $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$

Jetzt allgemeinere Situation:
Rotation um freie Achsen

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$



bac Regel

Drehimpuls $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i$

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

einsetzen

$$\vec{L} = \int dm \left[\vec{\omega} (\vec{r} \vec{r}) - \vec{r} (\vec{r} \vec{\omega}) \right]$$

$$L_x = \int dm \left[\omega_x (x^2 + y^2 + z^2) - x (x \cdot \omega_x + y \omega_y + z \omega_z) \right]$$

$$= \omega_x \cdot \underbrace{\int dm (r^2 - x^2)}_{I_{xx}} - \omega_y \underbrace{\int dm\, xy}_{I_{xy}} - \omega_z \underbrace{\int dm\, xz}_{I_{xz}}$$

ganz analog für L_y, L_z

allgemein und eleganter mit x_i $\quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$I_{ij} = \int dV \rho \left(\delta_{ij} r^2 - x_i x_j \right)$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \underline{\hat{I}} \cdot \vec{\omega}$$

Trägheitstensor

Wichtig: $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ im Allgemeinen nicht parallel

Man kann ein Koordinatensystem finden (3 spezielle Achsen) a, b, c
(Hauptachsentransformation)

$$\begin{pmatrix} L_a \\ L_b \\ L_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{pmatrix}$$

Hauptträgheitsachsen
(Symmetrieachsen)

Diagonalform

Beobachtung: Drehungen um Hauptträgheitsachsen mit I_{max}, I_{min} sind stabil

Wiederholung: Rotation um Hauptträgheitsachse $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\cdot\vec{\omega}\right) = I\cdot\dot{\vec{\omega}} = \vec{D}$$

($\vec{D}$ sei konstant)

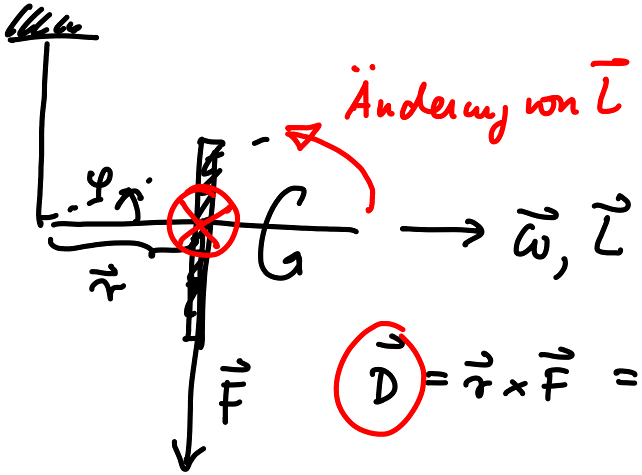
1. Fall $\vec{D} \parallel \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega} \parallel \dot{\vec{\omega}}$

Nur der Betrag $|\vec{\omega}|$ ändert sich
Drehung wird schneller/langsamer

2. Fall $\vec{D} \perp \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega} \perp \dot{\vec{\omega}}$

$|\vec{\omega}|$ ist konstant, Richtung ändert sich
→ Kreisbewegung

Präzession



$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Frequenz der Präzession

$$dL = L\,d\varphi$$

$$D = \frac{dL}{dt} = L\cdot\frac{d\varphi}{dt} = L\cdot\omega_p$$

$$\boxed{\omega_p = \frac{D}{L} = \frac{D}{I\cdot\omega}}$$

Kreisel (Rotation um freie Achse)

Bewegungsgleichungen im System der Hauptträgheitsachsen

Konvention $I_a < I_b < I_c$ $\qquad i \in \{a, b, c\}$

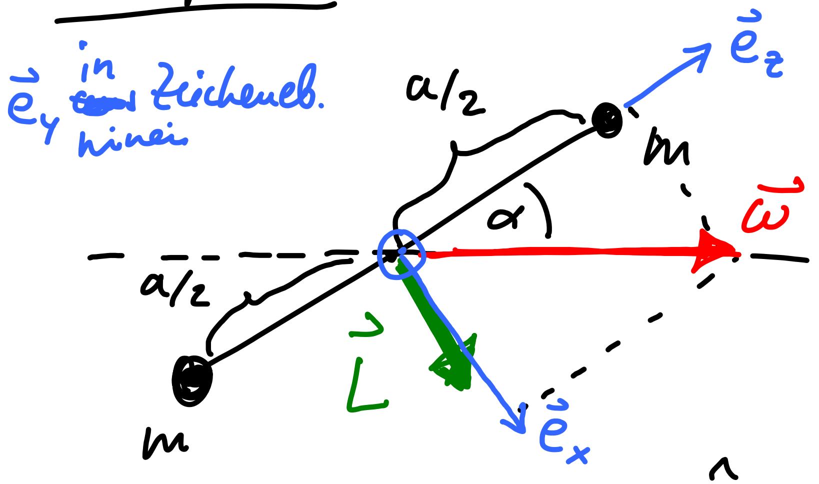
$$\vec{L} = \hat{I}\,\vec{\omega} \quad \xrightarrow{\text{hier}} \quad \begin{pmatrix} L_a \\ L_b \\ L_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L_i \vec{e}_i\right) = \dot{L}_i \vec{e}_i + L_i \dot{\vec{e}}_i = \dot{L}_i \vec{e}_i + \underbrace{L_i\, \vec{\omega} \times \vec{e}_i}_{(\vec{\omega} \times \vec{L})_i}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D_a &= I_a \dot{\omega}_a + (I_c - I_b)\,\omega_c \omega_b \\ D_b &= I_b \dot{\omega}_b + (I_a - I_c)\,\omega_a \omega_c \\ D_c &= I_c \dot{\omega}_c + (I_b - I_a)\,\omega_b \omega_a \end{aligned}}$$

Eulersche Gleichungen

Beispiel: nicht ausgewuchteter Rotator (Hier Hantel)



$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$ Gesucht ist $\vec{D}$

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I_x = I_y = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 m = \frac{1}{2} m a^2$$

$$\hat{I} = \frac{ma^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \omega$$

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega} = \omega \frac{ma^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \omega \frac{ma^2}{2} \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \frac{ma^2}{2} \sin\alpha \, \vec{e}_x$$

$$\vec{D} = \vec{\omega} \times \vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ma^2}{2} \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{ma^2}{2} \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \, \vec{e}_y$$

$\vec{D}$ senkrecht zur Zeichenebene

muss z.B. von Lagern aufgenommen werden

Beispiel 2: Kräftefreier, symmetrischer Kreisel

symmetrisch $I_a = I_b \neq I_c$ $I_a = I_b = I$

Kräftefrei $\vec{D} = 0$

Eulersche Gleichungen

$$\Omega = \frac{I - I_c}{I}\omega_c$$

$$\dot{\omega}_c = 0$$

$$\dot{\omega}_a = \frac{I_b - I_c}{I_a}\omega_c\omega_b = \Omega\,\omega_b$$

$$\dot{\omega}_b = \frac{I_c - I_a}{I_b}\omega_a\omega_c = -\Omega\,\omega_a$$

$$\hookrightarrow \ddot{\omega}_b = -\Omega^2\omega_b \rightarrow \omega_b(t) = \omega_\perp \sin\Omega t$$

$$\omega_a(t) = \omega_\perp \cos\Omega t$$

$$\omega_a^2 + \omega_b^2 = \omega_\perp^2$$

$\vec{\omega}$ kreist um Achse c (Nutation)

$\Longrightarrow$ Nutation