

Theoretische Physik 1

Tom Herrmann

25. April 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
I	Vorlesung 1	3
2	Grundlagen	3
2.1	Vektorrechnung	3
2.2	Formale Schreibweise Ableitungen	3
2.3	Drehung	3
2.3.1	Drehung als Matrix Multiplikation:	4
II	Vorlesung 2	4
2.4	Basis der Vektorrechnung	4
2.4.1	Basis ausrechnung	4
2.4.2	Addition	4
2.4.3	Subtraktion	4
2.4.4	Multiplikation	5
2.4.5	Skalarprodukt	5
2.5	Eigenschaften von Rechenoperationen	5
2.5.1	Schwarzsche Ungleichung	5
2.5.2	Projektion auf die Richtung \vec{b}	5
III	Vorlesung 3	5
2.5.3	Vektorprodukt	5
2.5.4	Komponentendarstellung	6
2.5.5	Spatprodukt	7
2.5.6	Eigenschaften des Spatprodukts	7
2.5.7	Doppeltes Vektorprodukt	7
2.6	Das Differential	8
2.7	Vektorfunktionen	8
2.8	Integration	8
2.9	Differentialrechnung	8

IV	Vorlesung 4	9
2.10	Vektorfunktionen	9
2.11	Taylor Entwicklung	9
2.11.1	Potenzreihe	9
2.12	Partielle Differentiation	10
2.12.1	Höhere Ableitungen	10
2.13	Vektoranalysis: Gradient, Divergenz, Rotation	10
2.13.1	Gradient	11
2.13.2	Beispiel	11
2.14	Rotation	11
2.14.1	Summe und Rotation	11
2.14.2	Beispiel:	11
2.14.3	Beispiel B	12
2.15	Divergenz	12
2.15.1	Beispiele	12
V	Vorlesung 5	12
2.16	Gradient und totales Differential	12
2.16.1	Wegintegral eines Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{r})$	12
2.16.2	Eigenschaften:	13
2.17	Grundlagen der Dynamik	13
2.17.1	Allgemeine Galilei- Transformation zwischen Inertialsystemen	14
2.17.2	Galileisches Relativitätsprinzip	14
2.17.3	Exkurs Kosmologie	14
2.17.4	Exkurs Machsches Prinzip	14
2.17.5	Ausblick	14
2.17.6	Koordinatentransformationen - Krummlinige (räumliche) Koordinaten	14
2.17.7	Beispiel	14

1 Einleitung

Gliederung:

- **Mathematische Grundlagen:**

Vektoren, krummlinige Koordinatensysteme, Differential- und Integralrechnung, partielle Ableitungen, Vektoranalysis, Gradient, Divergenz, Rotation, lineare gewöhnliche Differentialgleichungen, Matrizen und Tensoren, Fourier-Transformation, komplexe Zahlen, Wahrscheinlichkeit.

- **Grundlagen der Mechanik:** Kinematik und Dynamik von Massenpunktsystemen, Newtonsche Axiome, Arbeit, konservative Kräfte, Schwingungen, Zentralfeld, Kepler-Problem, beschleunigte Bezugssysteme

- **Spezielle Relativitätstheorie:** Lorentz-Transformation und kinematische Konsequenzen, Minkowski-Raum, Vierer-Impuls, relativistische Bewegungsgleichung, Energie-Impuls-Vektor, Äquivalenz von Masse und Energie

- **Wärmelehre:** Boltzmann Verteilung, Entropie, Irreversibilität

Wenn man eine **Fettgedruckte Größe** in den Übungsaufgaben sieht ist damit ein Vektor gemeint

Teil I

Vorlesung 1

= Anzahl

2 Grundlagen

2.1 Vektorrechnung

Vektoren sind gerichtete Größen deren Komponenten bei Drehung oder allgemeiner Koordinaten Transformationen gewisse transformationseigenschaften besitzen.

Skalare sind dabei invariant unter Koordinatentransformation. (z.B: Masse, Ladung, Temperatur)

Ortsvektor \vec{r} , Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Vektoren haben eine Richtung und eine Länge.

2.2 Formale Schreibweise Ableitungen

Ableitung können sowas als f' geschrieben werden als auch als \dot{f} somit kann die Geschwindigkeit \vec{v} als die Ableitung der Position ausgedrückt werden $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$.

2.3 Drehung

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = (x, y)$$

$\vec{a} = (a_u, a_v) = (u, v)$ dabei ist für u und v das Koordinatensystem einfach nur um einen bestimmten

Winkeln φ gedreht.

$$u = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$v = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

Länge von:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \sqrt{u^2 + v^2} = [(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 + (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi + 2xy \cos \varphi \sin \varphi + x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi - 2xy \sin \varphi \cos \varphi]^{\frac{1}{2}} \\ &= [x^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + y^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

□

2.3.1 Drehung als Matrix Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{2} = A_{ij} x_j$$

Teil II

Vorlesung 2

2.4 Basis der Vektorrechnung

Mathematisch abstrakt ist ein linearer oder Vektorraum ein "Körper" von Elementen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, im dem eine Addition und eine Multiplikation mit skalaren α definiert ist.

2.4.1 Basis ausrechnung

- Die Anzahl der Vektoren stimmt überein mit der Dimension des Vektorraumes.
- Die Vektoren sind linear unabhängig.

2.4.2 Addition

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2.4.3 Subtraktion

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.4.4 Multiplikation

$$a * \vec{v} = 5 * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 * 2 \\ 5 * 1 \\ 5 * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Bei der Division läuft das ganze dann fast genau so ab einfach nur 5 in den als zähler der jeweiligen Koordinate schreiben.

2.4.5 Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \circ |\vec{b}| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

2.5 Eigenschaften von Rechenoperationen

Kommutativität $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Distributivität $\lambda * (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) * \lambda$

Homogenität (gemischtes Assoziativgesetz) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * (\alpha\vec{b})$

2.5.1 Schwarzsche Ungleichung

$$|\vec{a} * \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

2.5.2 Projektion auf die Richtung \vec{b}

$a_b := a \cos(\varphi) = \vec{a} * \vec{b}$ wo $\vec{b} := \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ der Einheitsvektor in \vec{b} Richtung ist. (Also soll hier b der Einheitsvektor sein)

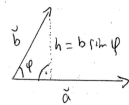
Abstrakte Definition eines Skalarproduktes mit obigen Eigenschaften und zusätzlichen $\vec{a} * \vec{a} > 0 \exists \vec{a} \neq 0$ (positiv definiert)

Teil III

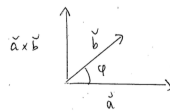
Vorlesung 3

2.5.3 Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad |\vec{c}| = c = ab |\sin \varphi|$$



$\Leftarrow c$ = Fläche des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms Richtung bestimmt durch **Rechts-schrauben regel**: Drehe \vec{a} in Richtung \vec{b}



Eigenschaften:

Antikommutativität: Das heißt, bei Vertauschung der Vektoren wechselt es das Vorzeichen

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Distributivität $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Homogenität (gemischtes Assoziativgesetz) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \alpha\vec{a} \times \vec{c} + \alpha\vec{b} \times \vec{c}$

Sonderfälle:

$$b(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

2.5.4 Komponentendarstellung

Definiere 3 ortonormale Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$

der im 3-Dimensionalen euklidischen Raum, mit (Schreibregel: Der Einfachheit wegen lasse ich in den 2 Zeilen das Zeichen für Einheitsvektor weg, es sollte eigentlich dabei stehen)

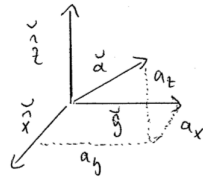
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = 1 \text{ für } i=j, 0 \text{ für } i \neq j$$

und

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

(Ab diesem Zeitpunkt ist die Schreibregel wieder aufgehoben) andere häufige Schreibweisen:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$



$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = (a_1, a_2, a_3) \text{ mit } a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1, a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2, a_3 = \vec{a} \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

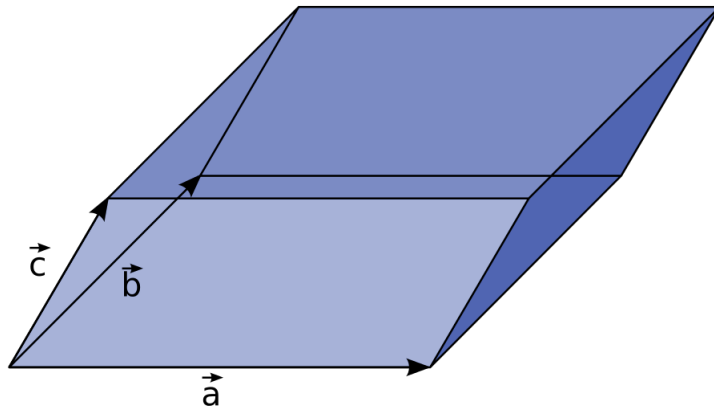
$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

wobei das "Levi-Civita-Symbol"

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i, j, k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } i, j, k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

I

2.5.5 Spatprodukt



Das Spatprodukt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ dreier Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} des dreidimensionalen euklidischen Vektorraums \mathbb{R}^3 kann wie folgt definiert werden:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

2.5.6 Eigenschaften des Spatprodukts

- Das Spatprodukt ist **nicht kommutativ**. Der Wert ändert sich jedoch nicht, wenn man die Faktoren zyklisch vertauscht:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

- Man kann das **Spatprodukt mit Hilfe der Determinante berechnen**. Für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ gilt:}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

- Die **Multiplikation** mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ ist **assoziativ**

$$(\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

- Es gilt ein **Distributivgesetz**:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$$

- Invarianz unter zyklischer Vertauschung:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

Dies ist auch in 3-Dimensionen möglich, wie man am Beispiel der Determinante gesehen hat.

2.5.7 Doppeltes Vektorprodukt

Im allgemeinen nicht assoziativ

Es gibt die **bac-cab-Regel**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Daraus folgt auch die Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

2.6 Das Differential

Ist $f(x)$ differenzierbar bei x , so nennt man $f'(x)h$ für beliebige h Differential von $f(x)$. Man schreibt oft

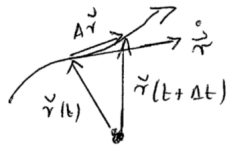
$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

In der Mathematik wird dies Differentialform genannt, die man formal als dual zum Vektorraum bestehend aus Koordinaten x, \dots definiert.

2.7 Vektorfunktionen

z.B. Kurve eines Massenpunktes wird beschrieben durch $\vec{r}|t| = (x(t), y(t), z(t))$ wobei t die Zeit ist.

Kettenregel, Produktregel etc. gelten auf für Vektorfunktionen.

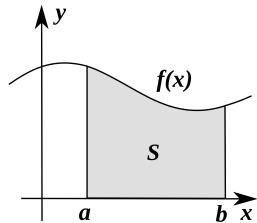


$$\begin{aligned}\vec{r} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \text{Geschwindigkeit } \vec{v} \\ \text{Beschleunigung} &= \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\end{aligned}$$

z.B.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \\ \frac{d}{dt}\vec{r}(f(t')) &= \frac{d\vec{r}}{dt}(f(t')) * \frac{df}{dt'}(t')\end{aligned}$$

2.8 Integration



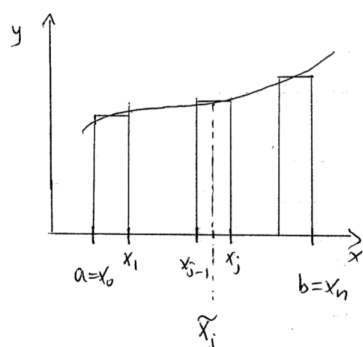
Die Integralrechnung ist aus dem Problem der Flächen- und Volumenberechnung entstanden. Dabei kann die Funktion auch ein komplett random geformter Klotz in einem koordinaten System sein.

$$\int_a^b f(x) dx$$

2.9 Differentialrechnung

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

In der Mathematik wird dies Differentialform genannt, die man formal als dual zum Vektorraum bestehend aus Koordinaten x, \dots definiert.



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j^*) \Delta x_j$$

wobei alle $\Delta x_j \rightarrow 0$

$F(x) := \int_a^x f(t) dt$ ist eine Stammfunktion von f , d.h.

$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$: Integration und Differenziation sind Umkehrungen voneinander

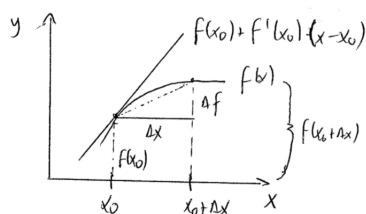
Eine der am häufigsten genutzten Regeln in der Physik ist, dass Konstanten vor das Integral gezogen werden können.

Teil IV

Vorlesung 4

2.10 Vektorfunktionen

z.B. Kurve eines Massenpunktes wird beschrieben durch $\vec{r}|t| = (x(t), y(t), z(t))$ wobei t die Zeit ist.



$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

2.11 Taylor Entwicklung

Im 1. Ordnung: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Verallgemeinerung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \dots$$

2.11.1 Potenzreihe

Jede **Potenzreihe** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ und damit auch jede **Taylor-Reihe** hat einen Konvergenzradius λ , so daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ für alle $|x - x_0| < r$ konvergiert. Im allgemeinen ist r durch den Abstand zur nächsten Singularität von $f(x)$ gegeben, diese Tatsache gilt aber nur allgemein im Raum der komplexen Zahlen.

Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$, da $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = -x^2$ obwohl $\frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert und unendlich oft differenzierbar ist. Der tiefere Grund ist daß $\frac{1}{1+x^2}$ bei $x = \pm i$ singularär ist.

2.12 Partielle Differentiation

Funktionen mehrerer Variablen, z.B. $f(x,y,z)$, können nach den einzelnen Variablen differenziert werden, wobei man sich die anderen Variablen konstant vorstellt.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

und analog für die anderen Variablen.

Kurzschreibweise:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

2.12.1 Höhere Ableitungen

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

übrigens gilt: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (Symmetrie)

Man kann leicht die erweiterte Kettenregel zeigen:

Für $f(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ gilt $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$

oder als Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Kann auch für die 1. Ordnung einer multi-dimensionalen Taylor-Entwicklung verwendet werden:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) + \dots$$

2.13 Vektoranalysis: Gradient, Divergenz, Rotation

Ein **Vektorfeld** ist eine Vektor-wertige Funktion mehrerer Variablen:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$$

Beispiele: Geschwindigkeitsfeld (e.g. Windgeschwindigkeit), Kraftfeld

Ein **Skalarfeld** hat nur eine (skalare) Komponente:

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z)$$

2.13.1 Gradient

$$f \rightarrow \vec{\nabla} f = \text{grad} f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \text{Skalarfeld} \rightarrow \text{Vektorfeld}$$

Es gelten die üblichen Produkt- und Summenregeln:

$$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g; \vec{\nabla}(f \cdot g) = g \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} g$$

2.13.2 Beispiel

f sei Funktion der Abstand $|\vec{r} - \vec{r}_0| = f'(|\vec{r} - \vec{r}_0|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$

Dabei gilt: $|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$

Dabei ist das ganze dann logischer weise nur vom Abstand abhängig

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \vec{e}_{\vec{r} - \vec{r}_0}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = \frac{x - x_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Einheiten in Kugelkoordinaten:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} = \frac{df}{dr} (|\vec{r} - \vec{r}_0|) \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}_0| = f'(|\vec{r} - \vec{r}_0|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad \text{z.B. } f(\vec{r}) = c|\vec{r} - \vec{r}_0| \quad \text{Das Gravitationspotential}$$

zwischen zwei Teilchen der Masse m_1 und m_2

$$\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad \alpha = -1 \quad \text{und} \quad c = -G_N m_1 m_2$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \phi(|\vec{r} - \vec{r}_0|) = \frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad \text{Nebenrechnung: } \phi^\partial(r) = +\frac{G_N m_1 m_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla} \phi = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} (\vec{r} - \vec{r}_0) = \text{Die Kraft die Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausübt.}$$

2.14 Rotation

Hierbei muss extrem auf die Vorzeichen aufgepasst werden. Es gibt zudem nur 2 Kombinationen wie man im laufe sehen wird die sich nicht wegkürzen.

$$\text{rot}(\vec{F}(\vec{r})) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \vec{e}_{i,j} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

Es sind 3 da wir uns im 3 Dimensionalen befinden. Vektorfeld \Rightarrow Vektorfeld ; Wirbelstärke

2.14.1 Summe und Rotation

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$$

$$\vec{\nabla} \times (f \vec{F}) = f \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} f \times \vec{F}$$

2.14.2 Beispiel:

$$f(\vec{r}) = \vec{F} = f(r) \vec{\nabla} \times \vec{r} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{r}$$

$$\vec{f}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) = \vec{0} \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{\nabla} f = f' \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow (\vec{\nabla} f) \times \vec{r} = \frac{f'}{r} \times \vec{r} = 0$$

2.14.3 Beispiel B

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r}$$

$$|\vec{F}(\vec{r})| = |\vec{w}| \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(w_x y - w_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(w_y x - w_x y)$$

Damit gilt: $\vec{F} = \vec{w} \times \vec{a} \Rightarrow F_z = w_x y - w_y x$ und $F_y = w_z x - w_x z$

Also ist es am ende: $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 2\vec{w}$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = 2\vec{w}$$

2.15 Divergenz

$$\text{div } \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) * F_x, F_y, F_z = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Vektorfunktion \rightarrow Skalarfunktion

$$\vec{\nabla}(\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla}\vec{F} + \vec{\nabla}\vec{G} \quad \vec{\nabla} + (f\vec{f}) = f\vec{\nabla} * \vec{F} + (\vec{\nabla}f) * \vec{F}$$

2.15.1 Beispiele

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \quad \vec{\nabla} * \vec{r} = 3$$

anderes Beispiel: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r} \quad \vec{w} = \text{const.}$

wähle deine Einschränkungen: $\vec{w} = w\vec{e}_z = (0, 0, w) \rightarrow \vec{w} \times \vec{r} = (-wy, wx, 0)$

$$\vec{\nabla} * (\vec{w} \times \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(wx) + \frac{\partial}{\partial z}0 = 0$$

Weitere Beispiele im Skript.

Teil V

Vorlesung 5

2.16 Gradient und totales Differential

$$f(x, y, z) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = (\vec{\nabla} f) * d\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

$$\frac{df}{dt} = (\vec{\nabla} f) * \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \frac{df}{dt} dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} (\vec{\nabla} f) d\vec{r} = f(\vec{r}_1) - f(\vec{r}_0)$$

2.16.1 Wegintegral eines Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{r})$

Angenommen wir haben eine Kurve und wollen ein Kurvenintegral bilden und nennen dies dann c.

Dabei ist der eine Endpunkt \vec{r}_0 und \vec{r}_1

$$\int_c \vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r} = \int_c [F_x dx + F_y dy + F_z dz] :=$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_i) * \Delta \vec{r}_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_i) * \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t} \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta \vec{r}_i = 0$$

Also zum Beispiel eine Arbeit, die durch einer Kraft $\vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r}$ verrichtet wird

$$W = \int \vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r}$$

Dabei muss man sich immer den Kontext klar machen da sich dadurch ganz einfach Vorzeichen ändern können also der unterschied ob Arbeit verrichtet werden muss oder nicht. *Zum Beispiel das Skalarprodukt würde sich dadurch komplett ändern*

$$\int_{c_1} \vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r}$$

$$\int_{c_2} \vec{F}(\vec{r}) * d\vec{r}$$

diese Intergrale sind wegunabhängig $\Leftrightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} f \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

2.16.2 Eigenschaften:

$$\int_{-c} \vec{F} * d\vec{r} = - \int_c \vec{F} * d\vec{r}$$

$$c = c_1 + c_2 \Rightarrow \int_c \vec{F} * d\vec{r} = \int_{c_1} \vec{F} * d\vec{r} + \int_{c_2} \vec{F} * d\vec{r}$$

2.17 Grundlagen der Dynamik

Axiome der Newtonschen Mechanik

- **1. Trägheitsgesetz:** Körper, auf den keine Kräfte wirken, bewegt sich gleichförmig und geradlinig, das heißt $\vec{v} = \text{const}$, $\vec{v} = \vec{0}$ ist ein Spezialfall.
- **2. Aktionsprinzip** Die zeitliche Änderung des Impulses \vec{p} eines Körpers ist gleich der auf ihn einwirkenden Gesamtkraft

$$\text{Impuls} = m * \vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{p}$$

$$\vec{F}_{\text{total}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a}$$

- **3. Actio= Reactio** die von Körper 1 auf Körper 2 ausgeübte Kraft \vec{F}_{21} ist gleich dem negativen der von Körper 2 auf Körper 1 ausgeübte Kraft

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

- **Superpositionsprinzip** Kräfte addieren sich vektoriell.

In Newtons Mechanik sind **Raum** und **Zeit** absolute Begriffe und die Zeit läuft immer gleich ab unabhängig vom Inertialsystem, was natürlich in Konflikt mit der Relativitätstheorie steht.

Newtons Axiome gelten zunächst nur in unbeschleunigten, sog. Inertialsystemen. Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit

2.17.1 Allgemeine Galilei- Transformation zwischen Inertialsystemen

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}_0 * t + \vec{r}_0 \quad \vec{v}_0 = const; \vec{r}_0 = const$$

Wie man sieht transformieren sich damit die Ortskoordinaten aber die Zeit bleibt offensichtlich gleich. $t' = t$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_0$$

$$\vec{a}' = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$$

2.17.2 Galileisches Relativitätsprinzip

Newtonsche Bewegungsgleichung ist forinvariant unter Galileitransformation.

2.17.3 Exkurs Kosmologie

In der Kosmologie gibt es als *bevorzugtes* Bezugssystem das Rugesystem der thermischen Mikrowellenhintergrundstrahlung.

2.17.4 Exkurs Machsches Prinzip

Existenz von Raum, Zeit und Intertialsystem ist beeinflusst durch die Massenverteilung auf sehr großen (kosmologischen) Skalen.

2.17.5 Ausblick

spezielle Relativitätstheorie: Raum und Zeit werden relativ und die Galileitransofrmation werden durch Lorentztransformation ersetzt.

allgemeine Relativität Raum und Zeit (Geometrie) sind an die Materieverteilung gekoppelt. Das hat dann die Folge, dass die Teilchenbewegung bestimmt wird durch die Geometrie von Raum und Zeit. Die Massenverteilung bestimmt dann aber erst die Geometrie von Raum und Zeit.

2.17.6 Koordinatentransformationen - Krumlinige (räunliche) Koordinaten

Man habe n-Dimensionen $(x_i)(y_i) \quad | \leq i, y \leq n$

$$x_i = x_i(y_{y_1, \dots, y_n}) = x_i(y_i)$$

$$dx_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$$

2.17.7 Beispiel

$n = 3$ mit $x_i = (x, y, z)$ Euklidische Kooridnaten; und $y_i = (u, v, w)$

$$x = x(u, v, w) \quad dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw$$

$$y = y(u, v, w) \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw \text{ und das gleiche für } z.$$

$$\vec{r} = (x_1, \dots, x_n) = (x_i) d\vec{r} = (dx, \dots, dx_n) = (dx_i) = \sum_i dx_i \vec{e}_i \text{ mit } \vec{e}_i, \vec{e}_j = \delta_{i,j}$$