

Theoretische Physik 1

Tom Herrmann

25. April 2019

1 Einleitung

Gliederung:

- **Mathematische Grundlagen:**
Vektoren, krummlinige Koordinatensysteme, Differential- und Integralrechnung, partielle Ableitungen, Vektoranalysis, Gradient, Divergenz, Rotation, lineare gewöhnliche Differentialgleichungen, Matrizen und Tensoren, Fourier-Transformation, komplexe Zahlen, Wahrscheinlichkeit.
- **Grundlagen der Mechanik:** Kinematik und Dynamik von Massenpunktsystemen, Newtonsche Axiome, Arbeit, konservative Kräfte, Schwingungen, Zentralfeld, Kepler-Problem, beschleunigte Bezugssysteme
- **Spezielle Relativitätstheorie:** Lorentz-Transformation und kinematische Konsequenzen, Minkowski-Raum, Vierer-Impuls, relativistische Bewegungsgleichung, Energie-Impuls-Vektor, Äquivalenz von Masse und Energie
- **Wärmelehre:** Boltzmann Verteilung, Entropie, Irreversibilität

Wenn man eine **Fettgedruckte Größe** in den Übungsaufgaben sieht ist damit ein Vektor gemeint

Teil I

Vorlesung 1

= Anzahl

2 Vektorrechnung

Vektoren sind gerichtete Größen deren Komponenten bei Drehung oder allgemeiner Koordinaten Transformationen gewisse transformationseigenschaften besitzen.

Skalare sind dabei invariant unter Koordinatentransformation. (z.B: Masse, Ladung, Temperatur)
 Ortsvektor \vec{r} , Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
 Vektoren haben eine Richtung und eine Länge.

3 Ableitung

Ableitung können sowas als \dot{f} geschrieben werden als auch als f' somit kann die Geschwindigkeit \vec{v} als die Ableitung der Position ausgedrückt werden $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$.

4 Drehung

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = (x, y)$$

$\vec{a} = (a_u, a_v) = (u, v)$ dabei ist für u und v das Koordinatensystem einfach nur um einen bestimmten Winkel φ gedreht.

$$u = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$v = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

Länge von:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \sqrt{u^2 + v^2} = [(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 + (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi + x y \cos \varphi \sin \varphi + x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi - 2 x y \sin \varphi \cos \varphi]^{\frac{1}{2}} \\ &= [x^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + y^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

□

Drehung als Matrix Multiplikation: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{2} = A_{ij} x_j$

Teil II

Vorlesung 2

5 Basis der Vektorrechnung

Mathematisch abstrakt ist ein linearer oder Vektorraum ein "Körper" von Elementen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, im dem eine Addition und eine Multiplikation mit skalaren α definiert ist.

5.1 Basis ausrechnung

- Die Anzahl der Vektoren stimmt überein mit der Dimension des Vektorraumes.
- Die Vektoren sind linear unabhängig.

5.2 Addition

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

5.3 Subtraktion

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.4 Multiplikation

$$a * \vec{v} = 5 * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 * 2 \\ 5 * 1 \\ 5 * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Bei der Division läuft das ganze dann fast genau so ab einfach nur 5 in den als zähler der jeweiligen Koordinate schreiben.

5.5 Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \circ |\vec{b}| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

6 Eigenschaften von Rechenoperationen

Kommutativität $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Distributivität $\lambda * (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) * \lambda$

Homogenität (gemischtes Assoziativgesetz) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * (\alpha\vec{b})$

6.1 Schwarzsche Ungleichung

$$|\vec{a} * \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

6.2 Projektion auf die Richtung \vec{b}

$a_b := \text{acos}(\varphi) = \vec{a} * \vec{b}$ wo $\vec{b} := \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ der Einheitsvektor in \vec{b} Richtung ist. (Also soll hier b der Einheitsvektor sein)

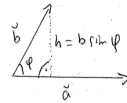
Abstrakte Definition eines Skalarproduktes mit obigen Eigenschaften und zusätzlichen $\vec{a} * \vec{a} > 0 \exists \vec{a} \neq 0$ (positiv definiert)

Teil III

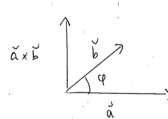
Vorlesung 3

6.3 Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad |\vec{c}| = c = ab |\sin \varphi|$$



$\Leftarrow c$ = Fläche des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms Richtung bestimmt durch **Rechts-schrauben regel**: Drehe \vec{a} in Richtung \vec{b}



Eigenschaften:

Antikommutativität: Das heißt, bei Vertauschung der Vektoren wechselt es das Vorzeichen

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Distributivität $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Homogenität (gemischtes Assoziativgesetz) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \alpha\vec{a} \times \vec{c} + \alpha\vec{b} \times \vec{c} = \alpha(\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c})$

Sonderfälle:

$$b(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

6.4 Komponentendarstellung

Definiere 3  rthogonale das heißt orthogonale Einheitsvektoren

$$\vec{\hat{x}}, \vec{\hat{y}}, \vec{\hat{z}}$$

der im 3-Dimensionalen euklidischen Raum, mit (Schreibregel: Der Einfachheit wegen lasse ich in den 2 Zeilen das Zeichen für Einheitsvektor weg, es sollte eigentlich dabei stehen)

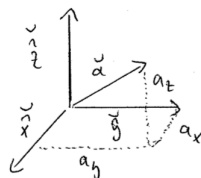
$$\vec{x} * \vec{x} = \vec{y} * \vec{y} = \vec{z} * \vec{z} = 1; \vec{x} * \vec{y} = \vec{x} * \vec{z} = \vec{y} * \vec{z} = 0$$

und

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}, \vec{y} \times \vec{z} = \vec{x}, \vec{z} \times \vec{x} = \vec{y}$$

(Ab diesem Zeitpunkt ist die Schreibregel wieder aufgehoben) andere häufige Schreibweisen:

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$



$$\vec{a} = a_x \vec{\hat{x}} + a_y \vec{\hat{y}} + a_z \vec{\hat{z}} = (a_x, a_y, a_z) \text{ mit } a_x = \vec{a} * \vec{\hat{x}}, a_y = \vec{a} * \vec{\hat{y}}, a_z = \vec{a} * \vec{\hat{z}}$$

$$\check{e}_i \cdot \check{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

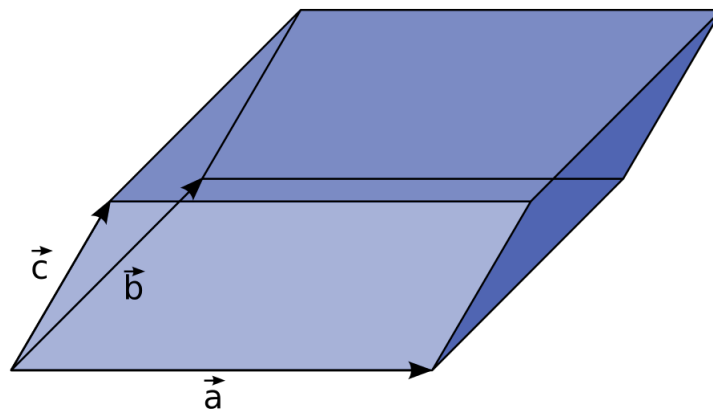
$$\check{e}_i \times \check{e}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \check{e}_k$$

wobei das "Levi-Civita-Symbol"

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i, j, k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } i, j, k \text{ anti-zyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

I

6.5 Spatprodukt



Das Spatprodukt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ dreier Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} des dreidimensionalen euklidischen Vektorraums \mathbb{R}^3 kann wie folgt definiert werden:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

6.5.1 Eigenschaften des Spatprodukts

- Das Spatprodukt ist **nicht kommutativ**. Der Wert ändert sich jedoch nicht, wenn man die Faktoren zyklisch vertauscht:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

- Man kann das **Spatprodukt mit Hilfe der Determinante berechnen**. Für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ gilt:}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

- Die **Multiplikation** mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ ist **assoziativ**

$$(\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

- Es gilt ein **Distributivgesetz**:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$$

- Invarianz unter zyklischer Vertauschung:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) * \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) * \vec{b}$$

Dies ist auch in 3-Dimensionen möglich, wie man am Beispiel der Determinante gesehen hat.

6.6 Doppeltes Vektorprodukt

Im allgemeinen nicht assoziativ

Es gibt die **bac-cab-Regel**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} * \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} * \vec{b})$$

Daraus folgt auch die Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

7 Das Differential

Ist $f(x)$ differenzierbar bei x , so nennt man $f'(x)h$ für beliebige h Differential von $f(x)$. Man schreibt oft

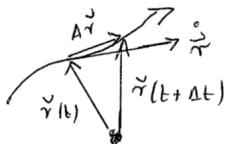
$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

In der Mathematik wird dies Differentialform genannt, die man formal als dual zum Vektorraum bestehend aus Koordinaten x, \dots definiert.

8 Vektorfunktionen

z.B. Kurve eines Massenpunktes wird beschrieben durch $\vec{r}|t| = (x(t), y(t), z(t))$ wobei t die Zeit ist.

Kettenregel, Produktregel etc. gelten auf für Vektorfunktionen.



$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \text{Geschwindigkeit } \vec{v}$$

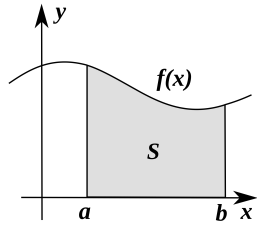
$$\text{Beschleunigung} = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

z.B.

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$

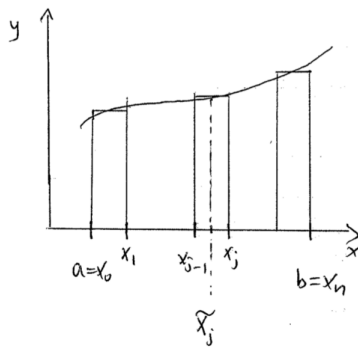
$$\frac{d}{dt}\vec{r}(f(t')) = \frac{d\vec{r}}{dt}(f(t')) * \frac{df}{dt'}(t')$$

9 Integration



Die Integralrechnung ist aus dem Problem der Flächen- und Volumenberechnung entstanden. Dabei kann die Funktion auch ein komplett random geformter klotz in einem koordinaten System sein.

$$\int_a^b f(x) dx$$



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Delta x_j$$

wobei alle $\Delta x_j \rightarrow 0$

$F(x) := \int_a^x f(t) dt$ ist eine Stammfunktion von f , d.h.

$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$: Integration und Differentiation sind Umkehrungen voneinander

Eine der am häufigsten genutzten Regeln in der Physik ist, dass Konstanten vor das Integral gezogen werden können.

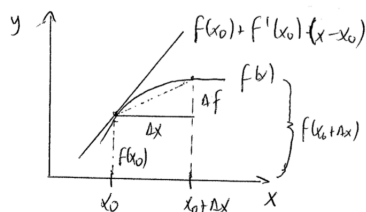
10 Differentialrechnung

$$dy = df(x) = f'(x) dx$$

In der Mathematik wird dies Differentialform genannt, die man formal als dual zum Vektorraum bestehend aus Koordinaten x, \dots definiert.

11 Vektorfunktionen

z.B. Kurve eines Massenpunktes wird beschrieben durch $\vec{r}|t| = (x(t), y(t), z(t))$ wobei t die Zeit ist.



$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

12 Taylor Entwicklung

Im 1. Ordnung: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Verallgemeinerung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \dots$$

Jede **Potenzreihe** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ und damit auch jede **Taylor-Reihe** hat einen Konvergenzradius λ , so daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ für alle $|x - x_0| < r$ konvergiert. Im allgemeinen ist r durch den Abstand zur nächsten Singularität von $f(x)$ gegeben, diese Tatsache gilt aber nur allgemein im Raum der komplexen Zahlen.

Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$, da $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = -x^2$ obwohl $\frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert und unendlich oft differenzierbar ist.

Der tiefere Grund ist daß $\frac{1}{1+x^2}$ bei $x = \pm i$ singulär ist.

13 Partielle Differentiation

Funktionen mehrerer Variablen, z.B. $f(x,y,z)$, können nach den einzelnen Variablen differenziert werden, wobei man sich die anderen Variablen konstant vorstellt.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

und analog für die anderen Variablen.

Kurzschreibweise:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Höhere Ableitungen:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x}$$

übrigens gilt: $\frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x} = \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y}$ (Symmetrie)

Man kann leicht die erweiterte Kettenregel zeigen:

Für $f(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ gilt $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$

oder als Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Kann auch für die 1. Ordnung einer multi-dimensionalen Taylor-Entwicklung verwendet werden:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) + \dots$$

14 Vektoranalysis: Gradient, Divergenz, Rotation

Ein **Vektorfeld** ist eine Vektor-wertige Funktion mehrerer Variablen:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$$

Beispiele: Geschwindigkeitsfeld (e.g. Windgeschwindigkeit), Kraftfeld

Ein **Skalarfeld** hat nur eine (skalare) Komponente:

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z)$$

Gradient:

$$f \rightarrow \vec{\nabla} f = \text{grad} f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \text{Skalarfeld} \rightarrow \text{Vektorfeld}$$

Es gelten die üblichen Produkt- und Summenregeln:

$$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g; \vec{\nabla}(f g) = g \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} g$$

Beispiel: f sei Funktion der Abstand $|\vec{r} - \vec{r}_0| = f'(|\vec{r} - \vec{r}_0|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$

Dabei gilt: $|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$

Dabei ist das ganze dann logischer Weise nur vom Abstand abhängig

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \vec{e}_{\vec{r} - \vec{r}_0}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = \frac{x - x_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Einheiten in Kugelkoordinaten:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} = \frac{df}{dr} (|\vec{r} - \vec{r}_0|) \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}_0| = f'(|\vec{r} - \vec{r}_0|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad \text{z.B. } f(\vec{r}) = c |\vec{r} - \vec{r}_0| \quad \text{Das Gravitationspotential}$$

zwischen zwei Teilchen der Masse m_1 und m_2

$$\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad \alpha = -1 \quad \text{und} \quad c = -G_N m_1 m_2$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \phi(|\vec{r} - \vec{r}_0|) = \frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad \text{Nebenrechnung: } \phi'(r) = +\frac{G_N m_1 m_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla} \phi = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} (\vec{r} - \vec{r}_0) = \text{Die Kraft die Teilchen 1 auf Teilchen 2 ausübt.}$$

15 Rotation

Hierbei muss extrem auf die Vorzeichen aufgepasst werden. Es gibt zudem nur 2 Kombinationen wie man im Laufe sehen wird die sich nicht wegekürzen.

$$\text{rot}(\vec{F}(\vec{r})) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \vec{e}_{i,j} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

Es sind 3 da wir uns im 3 Dimensionalen befinden. Vektorfeld \Rightarrow Vektorfeld ; Wirbelstärke

Summe und Rotation:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$$

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = f\vec{\nabla} \times \vec{F} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{F}$$

$$\text{Beispiele: } \vec{f}(\vec{r}) = \vec{F} = f(r)\vec{\nabla} \times \vec{r} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{r}$$

$$\vec{f}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) = \vec{0} \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{\nabla} f = f' \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \Rightarrow (\vec{\nabla} f) \times \vec{r} = \frac{f'}{|\vec{r}|} \times \vec{r} = 0$$

Beispiel B:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r}$$

$$|\vec{F}(\vec{r})| = |\vec{w}| \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(w_x y - w_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(w_y x - w_x y)$$

Damit gilt: $\vec{F} = \vec{w} \times \vec{a} \Rightarrow F_z = w_x y - w_y x$ und $F_y = w_z x - w_x z$

Also ist es am Ende: $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 2\vec{w}$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = 2\vec{w}$$

16 Divergenz

$$\text{div } \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) * F_x, F_y, F_z = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Vektorfunktion \rightarrow Skalarfunktion

$$\vec{\nabla}(\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \vec{F} + \vec{\nabla} \vec{G} \quad \vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{F} + (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{F}$$

Beispiele:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$$

anderes Beispiel: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r} \quad \vec{w} = \text{const.}$

wähle deine Einschränkungen: $\vec{w} = w\vec{e}_z = (0, 0, w) \rightarrow \vec{w} \times \vec{r} = (-wy, wx, 0)$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{w} \times \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(wx) + \frac{\partial}{\partial z}0 = 0$$

Weitere Beispiele im Skript.