

Axiome der Newton'schen Mechanik:

1. Trägheitsgesetz: Jeder kräftefreie Körper verharrt in folge seiner Trägheit ("träge Masse") im Zustand geradlinig-gleichförmiger Bewegung (mit Ruhe als Spezialfall)
2. Bewegungsgesetz: Die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers ist gleich der auf ihn einwirkenden Kraft
$$\text{Impuls} = \underbrace{m}_{\text{träge Masse}} \vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{p}$$

also

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \dot{\vec{v}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$$

3. Actio-Reactio-Gesetz: Jede Wirkung ruft eine gleich große Gegenwirkung hervor

d.h. die von einem Körper 1 auf einen Körper 2 ausgeübte Kraft \vec{F}_{21} ist gleich dem Negativen der von Körper 2 auf Körper 1 ausgeübten Kraft \vec{F}_{12} :

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Beachte: Axiom 1 folgt eigentlich aus Axiom 2

Darüberhinaus hat man

4. Superpositionsgesetz: Kräfte addieren sich vektoriell

In Newton's Mechanik sind Raum und Zeit absolut und bilden eine unveränderliche "Bühne" auf der sich alle Prozesse abspielen.

Der Raum ist Euklidisch und Axiom 2 gilt in sogenannten unbeschleunigten oder Inertialsystemen, die sich relativ zu einander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

In der Tat ist ~~Miom~~ 2 invariant unter Transformationen zwischen Inertialsystemen, auch als Galilei-Transformation bekannt;

$$\vec{r}' = \vec{r} + \underbrace{\vec{v}_0}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{t}_{\text{absolute Newton'sche Zeit}} + \vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_0$$

$$\vec{a}' = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{a}$$

\Rightarrow Galileisches Relativitätsprinzip: Die Newton'sche Bewegungsgleichung ist forminvariant unter Galilei-Transformationen

Übrigens ist bis heute nicht vollständig verstanden was Inertialsysteme auszeichnet. Es scheint eine kosmologische Frage zu sein, da die Mikrowellenhintergrund-Strahlung ein bevorzugtes System etabliert. Nach dem Machschen Prinzip ist die Existenz von Raum, Zeit und Inertialsystemen an die homogene Massenverteilung gebunden.

Beachte: Auf der Erde sind wir in einem rotierenden System, und damit nicht in einem Inertialsystem

\Rightarrow "Scheinkräfte", z.B. Zentrifugalkraft, Corioliskraft

Ausblick: In der Relativitätstheorie werden Raum und Zeit relativ und Galileische Transformationen werden durch (etwas kompliziertere) Lorentz-Transformationen ersetzt

Koordinatentransformationen - krummlinige Koordinaten

PT- (17)

Im n -dimensionalen:

$$x_i = x_i(y_1, \dots, y_n) = x_i(y_j) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\Rightarrow dx_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$$

z.B. in 3D $n=3$ und oft schreibt man $(x_i) = (x, y, z)$; $(y_i) = (u, v, w)$
also

$$x = x(u, v, w) \quad dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw$$

$$y = y(u, v, w) \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw$$

$$z = z(u, v, w) \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw$$

In Euklidischen Koordinaten (x_i)

$$\vec{r} = (x_1, \dots, x_n) = (x_i); \quad d\vec{r} = (dx_1, \dots, dx_n) = (dx_i) = \sum_i dx_i \vec{e}_i$$

mit $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

In allgemeinen krummlinigen Koordinaten (y_i) wird das damit

$$d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} dy_i$$

z.B. in 3D

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (dx, dy, dz) = \vec{e}_1 dx + \vec{e}_2 dy + \vec{e}_3 dz \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Man kann neue Basis-Einheitsvektoren

$$\vec{u}_k := \frac{1}{b_k} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_k} \quad \text{mit} \quad b_k := \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_k} \right|$$

definieren, so daß

$$d\vec{r} = \sum_k \vec{u}_k ds_k \quad \text{mit den Längenelementen} \quad ds_k = b_k dy_k$$

Man nennt (y_i) ein orthogonales Koordinatensystem wenn

17-18

$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ für $i \neq j$ und damit auch $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij}$
an jedem Raumpunkt gilt

Dann ist das Flächenelement, das von zwei Seiten der Länge ds_i, ds_j aufgespannt wird, gegeben durch

$$dF_{ij} = ds_i ds_j = b_i b_j dy_i dy_j$$

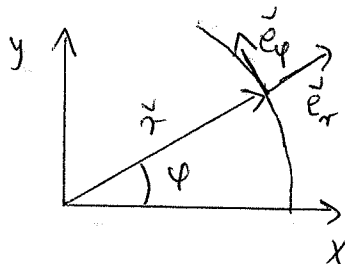
Und das Volumenelement

$$dV = \prod_{i=1}^n ds_i = \prod_{i=1}^n b_i dy_i$$

Ebene Polarkoordinaten

2D, $n=2$

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$



$$\vec{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

Umkehrung: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \pm \arctan \frac{y}{x}$ für $y \geq 0$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1 \Rightarrow \vec{u}_r = \vec{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \Rightarrow \vec{u}_\varphi = \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r(t) \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \dot{\vec{e}}_r(t)$$

$$\dot{\vec{e}}_r(t) = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = (-\sin \varphi, \cos \varphi) \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

\Rightarrow Wenn $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi$ dann ist $v_r = \dot{r}$; $v_\varphi = r \dot{\varphi}$
 $\dot{\varphi}$ ist die Winkelgeschwindigkeit

Beschleunigung $\ddot{\mathbf{a}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{v}_r \check{\mathbf{e}}_r + \dot{v}_\varphi \check{\mathbf{e}}_\varphi) = \frac{d}{dt}(\dot{r} \check{\mathbf{e}}_r + r \dot{\varphi} \check{\mathbf{e}}_\varphi) =$ PI - (19)

$$= \ddot{r} \check{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \dot{\check{\mathbf{e}}}_r + \ddot{r} \dot{\varphi} \check{\mathbf{e}}_\varphi + r \ddot{\varphi} \check{\mathbf{e}}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\check{\mathbf{e}}}_\varphi =$$

$$= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \check{\mathbf{e}}_r + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \check{\mathbf{e}}_\varphi$$

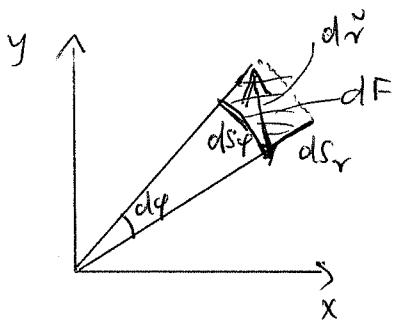
$\dot{\check{\mathbf{e}}}_r = \dot{\varphi} \check{\mathbf{e}}_\varphi$
 $\dot{\check{\mathbf{e}}}_\varphi = \dot{\varphi} (-\cos\varphi, -\sin\varphi) = -\dot{\varphi} \check{\mathbf{e}}_r$

mit $\ddot{\mathbf{a}} = a_r \check{\mathbf{e}}_r + a_\varphi \check{\mathbf{e}}_\varphi$ also

$a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$ Radial beschleunigung

$a_\varphi = r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}$ Winkel beschleunigung

Linien- und Flächenelemente:



$$ds_r = dr \quad ds_\varphi = r d\varphi$$

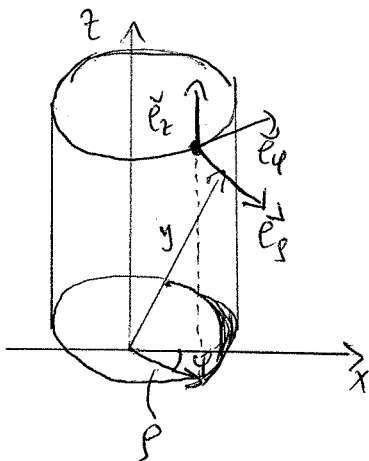
$$\Rightarrow dF = dx dy = ds_r ds_\varphi = r dr d\varphi$$

Zylinderkoordinaten

3D, $n=3$

$$x = \rho \cos\varphi \quad y = \rho \sin\varphi \quad z = z$$

→ Ebene Polarkoordinaten + dann senkrechte z-Achse



Umkehrung

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad y \geq 0$$

$$z = z$$

Man findet die orthogonalen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

ferner

$$dV = ds_\varphi ds_\varphi ds_z = \rho d\rho d\varphi dz$$

Für Geschwindigkeit und Beschleunigung erhält man

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$$

Kugelkoordinaten - sphärische Polarkoordinaten

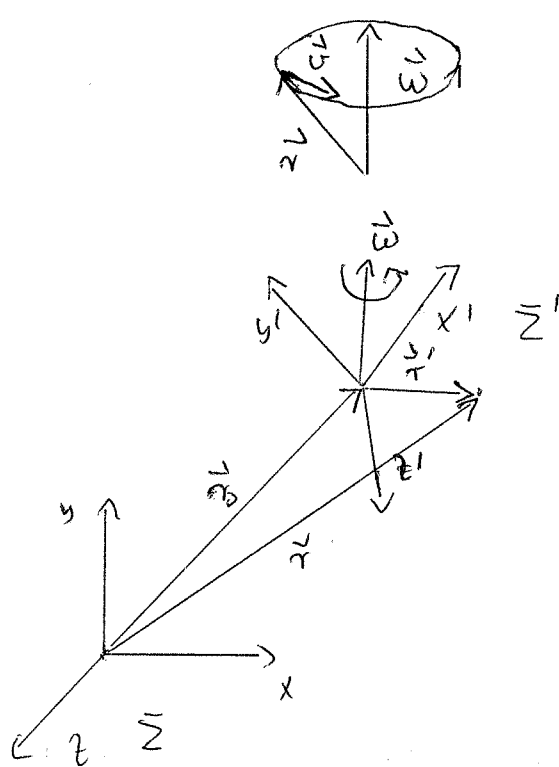
$$3D \quad n=3$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

Rotierendes Bezugssystem und Scheinkräfte



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Für jeden Vektor \vec{b} gilt: $\vec{b} = \sum_i b_i \vec{e}_i = \sum_i b'_i \vec{e}'_i$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{b}}{dt} = \sum_i \underbrace{\frac{db_i}{dt}}_{\text{zeitunabhängig}} \vec{e}_i = \sum_i \frac{db'_i}{dt} \vec{e}'_i + \sum_i b'_i \underbrace{\frac{d\vec{e}'_i}{dt}}_{= \vec{\omega} \times \vec{e}'_i}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)'}_{\text{Ableitung im } \Sigma' \text{-System}} + \vec{\omega} \times \vec{b}$$

Ferner:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}_0 + \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)'}_{\text{Geschwindigkeit im } \Sigma' \text{-System}} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$= \dot{\vec{r}}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Nochmalige Differentiation ergibt Transformationsgesetz für die Beschleunigung:

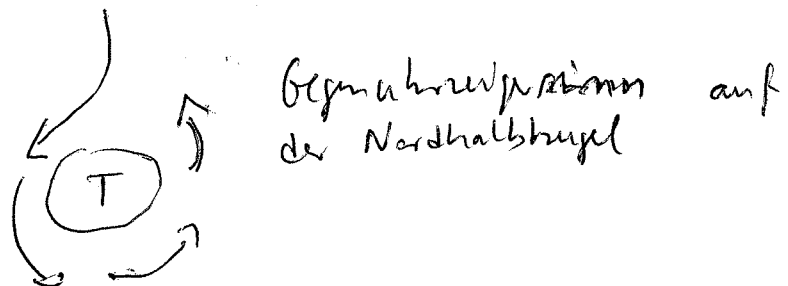
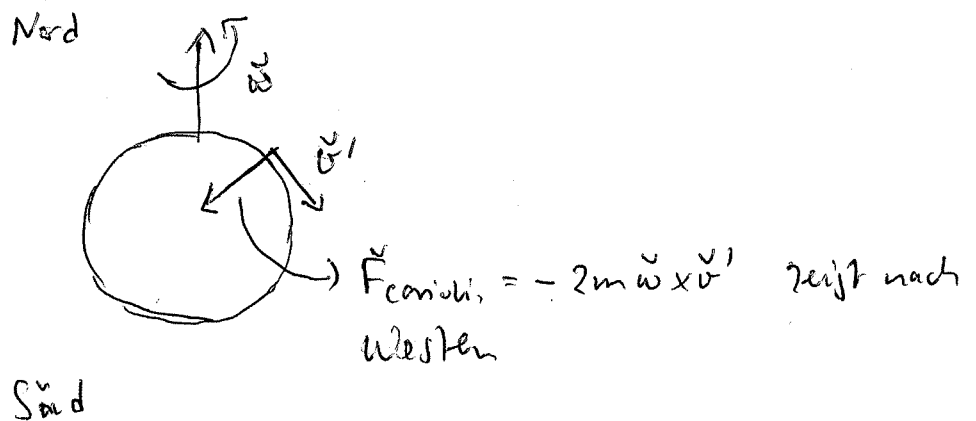
$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}_0 + \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)' + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right) \\ &= \ddot{\vec{r}}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \end{aligned}$$

PI-22

wobei $\ddot{\alpha}' = \left(\frac{d\dot{\alpha}'}{dt}\right)'$ die Beschleunigung gemessen im Σ' -System ist
 Einsetzen in $\vec{F} = m\ddot{\alpha}$ gibt schließlich:

$$m \underbrace{\left(\frac{d^2 \ddot{\alpha}'}{dt^2}\right)'}_{=\ddot{\alpha}'} = \vec{F} - m \left[\underbrace{\ddot{r}_0}_{\text{Coriolis-Kraft}} + 2 \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis-Kraft}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'} \right]$$

Beispiel: rotierendes terrestrisches Bezugssystem: Auf einem Luftstrom der sich auf der Nordhalbkugel von Nord nach Süd bewegt wirkt eine Corioliskraft die nach Westen zeigt. Deshalb drehen sich Luftmassen auf der Nordhalbkugel im Gegen-Uhrzeigersinn um Tiefdruckgebiete. Auf der Südhalbkugel ist es genau anders herum



Galilei-Transformationen in der Newton'schen Mechanik führen zur Vektoraddition von Geschwindigkeiten:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

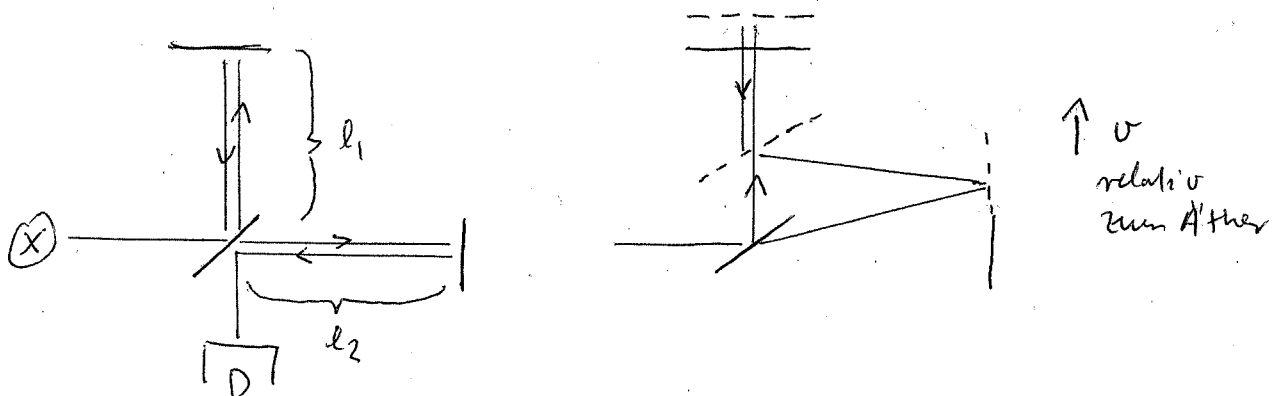
$$\Rightarrow \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_0$$

↓
universelle Zeit

insbesondere hängt Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem (Inertialsystem) ab. \exists bevorzugtes Inertialsystem in welchem Lichtgeschwindigkeit $= c_0$

→ Äther \vec{v} Für den Schall ist der Äther die Luft

Michelson-Versuch:



$$\text{Lichtlaufzeit in Arm 1} = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = t_1 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\text{" " Arm 2} = \frac{(v \frac{t_2}{2})^2 + l_2^2}{c^2} = \left(c \frac{t_2}{2}\right)^2 \Rightarrow t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{2}{c} \left(\frac{l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Drehung um 90° entspricht Austausch von l_1 und l_2 :

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \right)$$

Die Differenz der Lichtlaufzeiten ändert sich damit um

PI-24

$$\delta t = \Delta t - \Delta t' = \frac{2(l_1 + l_2)}{c_0} \left(\frac{1}{1 - v^2/c_0^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \right)$$

Was die Interferenzmuster um die Phase

$$\Delta \Phi = \omega \delta t$$

↗ Frequenz des Lichts

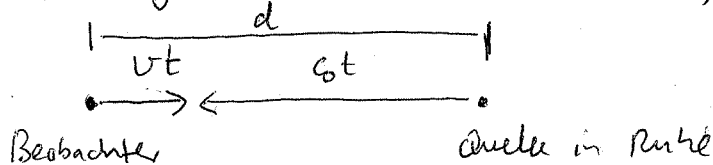
ändert.

Experimentell ist $\Delta f = \Delta \Phi = 0 \Rightarrow$

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist universell und in jedem Inertialsystem identisch

Damit sind alle Inertialsysteme gleichberechtigt und nur Relativgeschwindigkeiten sind physikalisch relevant.

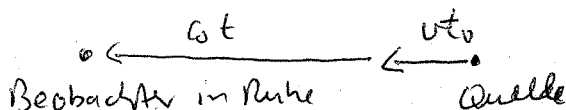
Dies ist nicht der Fall in der Äthertheorie, wie folgendes Beispiel zeigt (Geschwindigkeiten relativ zum Äther)



Wenn $v=0$ und $d = \text{Distanz Beobachter-Quelle}$ dann ist

$$t_0 = \frac{d}{c_0} ; \text{ wenn } v > 0 \text{ dann } d = c_0 t + vt$$

$$\Rightarrow t = \frac{t_0}{1 + v/c_0} \Rightarrow \text{Frequenz } f = \frac{1}{t} = f_0 \left(1 + \frac{v}{c_0} \right)$$



$$t = t_0 - \frac{vt_0}{c_0} + \frac{d}{c_0} \Rightarrow f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{f_0}{1 - v/c_0} \quad f_0 = \frac{1}{t_0}$$

\Rightarrow die beiden Dopplereffekte wären in zweiter Ordnung in $\frac{v}{c_0}$ verschieden

Eine Möglichkeit, die Lorentztransformation unabhängig vom Inertialsystem zu erhalten ist

PI-25

$$c_0^2 \Delta t^2 - (\Delta x)^2 = \text{unabhängig vom Inertialsystem}$$

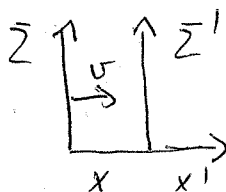
zu setzen, denn dann ist für Bewegung mit Lorentztransformation

$$c_0^2 \Delta t^2 - (\Delta x)^2 = 0 \text{ in allen Inertialsystemen}$$

Gesucht ist also eine Transformation (ohne Einschränkung mit nur einer Raumkoordinate):

$$x' = ax + bt$$

$$t' = cx + dt$$



$$a, d > 0$$

so daß

$$(c_0 t')^2 - x'^2 = (c_0 t)^2 - x^2$$

Definiere $a = \gamma$. Für Per Definition bewegt sich ein Punkt in Ruhe in \bar{Z}' , $\Delta x' = 0$, mit Geschwindigkeit v in \bar{Z} , $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$0 = \Delta x' = \gamma \Delta x + b \Delta t \Rightarrow b = -\gamma \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\gamma v$$

also

$$x' = \gamma(x - vt)$$

Weiter

$$\begin{aligned} (c_0 t')^2 - x'^2 &= c_0^2 (cx + dt)^2 - \gamma^2 (x - vt)^2 \\ &= c_0^2 \left(d^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c_0^2}\right) t^2 + (c_0^2 c^2 - \gamma^2) x^2 + 2(c_0^2 cd + \gamma^2 v) xt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1) \underline{d^2 = 1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c_0^2}} ; (2) \underline{c_0^2 c^2 = \gamma^2 - 1} ; (3) \underline{c_0^2 cd = -\gamma^2 v}$$

multiplizieren (1) und (2)

$$\Rightarrow c_0^2 c^2 d^2 = -1 + \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right) + \gamma^4 \frac{v^2}{c_0^2}$$

$$\Rightarrow c_0^2 c^2 d^2 = \gamma^4 \frac{v^2}{c_0^2}$$

quadriere (3)

$$\text{Gleichsetzen} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c_0^2} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \text{ weil } a = \gamma > 0$$

$$(1) \Rightarrow d^2 = \gamma^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) = \gamma^2 \Rightarrow d = \gamma \quad \text{weil } d > 0$$

$$(3) \Rightarrow c = -\frac{\gamma^2 v}{c^2 d} = -\gamma \frac{v}{c^2}$$

$$\Rightarrow x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

$$\text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Hinweis: Oft werden "natürliche Einheiten" verwendet für die $c_0 = 1$

Die Koordinaten $\perp \vec{v}$ bleiben unverändert, d.h.

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Beachte: Für $v/c_0 \rightarrow 0$ ist $\gamma = 1 + O(v^2) \Rightarrow$ In erster Ordnung in v erhält man Galilei-Transformation:

$$x' = x - vt + O(v^2)$$

$$t' = t - \frac{vx}{c^2} + O(v^2)$$

Anwendungen

1.) Geschwindigkeitsaddition oder -subtraktion

In System Σ bewege sich ein Teilchen mit Geschwindigkeit

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \text{In } \Sigma' \text{ ist Geschwindigkeit}$$

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\Delta t - v \Delta x / c^2} = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}$$

dividiere oben und
unten durch Δt und
verwende $u = \Delta x / \Delta t$

Für $u, v \ll c_0$ gilt Galilei-Transformation bis auf Terme zweiter Ordnung:

$$u' = u - v + O(v^2, u^2)$$

2.) Zeitdilatation

Betrachte einen Prozess, der in \bar{S} in Ruhe stattfindet und eine Zeit Δt dauert, z.B. radioaktiver Zerfall

$$\Rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \geq \Delta t$$

Viervektor-Formalismus

Verwende natürliche Einheiten $c \equiv 1$ der Einfachheit halber

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad t' &= \gamma(t - vx) & y' &= y & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ x' &= \gamma(x - vt) & z' &= z \end{aligned}$$

(t, \vec{x}) bildet "Viervektor" dessen "Norm" $t^2 - \vec{x}^2$ erhalten ist
Analog bildet (E, \vec{p}) "Energie-Impuls-Viervektor"

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad E' &= \gamma(E - v p_x) \\ p_x' &= \gamma(p_x - v E) \\ p_y' &= p_y \\ p_z' &= p_z \end{aligned}$$

Spezialfall: Teilchen in Ruhe in \bar{S} , also $\vec{p} = 0$, $E = m_0 =$
= Ruhemasse

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad E' &= \gamma E = \gamma m_0 \\ p_x' &= -\gamma v E = -\gamma v m_0 \\ p_y' &= p_z' = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}^2 + m_0^2 = m_0^2 (1 + \gamma^2 v^2) = \frac{m_0^2}{1-v^2} (1-v^2+v^2) = \frac{m_0^2}{1-v^2} =$$

↙
ersche durch
umgeschriebene
Größen

$$= \gamma^2 m_0^2 = E^2$$

in "allteilchen" Koordinaten:

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m_0^2 c^4$$

$$[E] = [m v^2], \quad [p] = [m v]$$

Beachte: E hat positive und negative Wurzel

$E < 0$ entspricht Antiteilchen

→ in der Relativitätstheorie hat jedes Teilchen ein Anti-Teilchen

Nicht-relativistisches Limit:

$$E = \sqrt{m_0^2 + p^2} = m_0 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0^2} + O(p^4) \right)$$

$$E = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} u^2 + O(u^2) \right)$$

$$\approx m_0 + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 u^2}$$

nicht-relativistische
kinetische Energie

Allgemeine Form der Newton'schen Bewegungsgleichung:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, t) \quad \rightarrow \text{gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung}$$

$$m \ddot{x}_i = F_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i=1,2,3$$

Mechanikensysteme für N Teilchen

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad j=1, \dots, N$$

$\rightarrow 3N$ Differentialgleichungen 2te Ordnung $\rightarrow 3N$ "Freiheitsgrade"

Phasenraum

Für n Freiheitsgrade hat man den n -dimensionalen Ortsvektor $\vec{r} = (y_1, \dots, y_n)$; Der von $\vec{u} = (\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ aufgespannte $2n$ dimensionale Vektorraum heißt Phasenraum. Definiere

$$u_j = y_j \quad j=1, \dots, n$$

$$u_{j+n} = \dot{y}_j \quad j=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \dot{u}_j = \dot{y}_j = u_{j+n}$$

$$\dot{u}_{j+n} = \ddot{y}_j = f_j(u_1, \dots, u_{2n}, t) \quad j=1, \dots, n$$

\Rightarrow Kraft kann auch von Geschwindigkeiten abhängen, z.B. Reibung, Lorentz-Kraft

hat die Form

$$\dot{\vec{u}} = \vec{g}(\vec{u}, t) \quad \rightarrow 2n \text{ gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung}$$

Symmetrien dieser Gleichungen führen i.a. zu Erhaltungsgrößen
z.B. führt Zeit-unabhängigkeit i.a. zu Energieerhaltung

\vec{F} heißt konservative oder Gradienten-Kraft wenn

PI-30

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

mit $V(\vec{r})$ eine Skalarfunktion genannt "Potential"

Dann ist

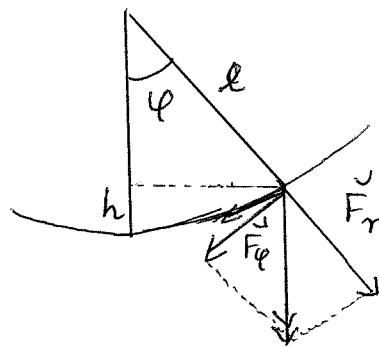
$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r})$$

erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V = \dot{\vec{r}} \cdot (m \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V) \\ &= \dot{\vec{r}} \cdot (m \ddot{\vec{r}} - \vec{F}(\vec{r})) = 0 \end{aligned}$$

Beispiele

Schräger Wurf \rightarrow siehe experimenteller Teil
mathematisches Pendel:



$$\vec{F} = -mg \vec{e}_z$$

$$= -\vec{\nabla} E_{pot}$$

$$\text{mit } E_{pot} = mgh = mgl(1 - \cos \varphi)$$

wenn $l = \text{const.}$ ist $\vec{F}_\varphi = m a_\varphi$ in Polarkoordinaten

$$F_\varphi = -mg \sin \varphi \quad a_\varphi = l \ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow m l \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Energie-Erhaltung:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = \text{const.} = mgl(1 - \cos \varphi_0)$$

φ_0 = maximale Auslenkung; Falls $\varphi_0 \ll \pi$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$$

damit kann man die Schwingungsperiode berechnen:

$$T = \int_0^T dt = 4 \int_0^{\varphi_0} \frac{dt}{d\varphi} = 4 \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}$$

Verwende $\cos \varphi - \cos \varphi_0 = 2 \left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$ PI-3)

definiere $k = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$ und transformiere auf neue Variable ξ mit $\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = \sqrt{k} \sin \xi$ so daß $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{k - k \sin^2 \xi}}$$

man ist $\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \sqrt{k} \cos \xi d\xi \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\xi} = 2\sqrt{k} \frac{\cos \xi}{\cos \varphi/2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{2\sqrt{k} \cos \xi d\xi}{\sqrt{k} \cos \xi \cos \varphi/2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi/2}} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k \sin^2 \xi}} = K(k) = \text{vollständiges elliptisches Integral}$$

$$\Rightarrow T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2})$$

Taglar Entwicklung von $K(k)$ um $k=0$:

$$K(k) \cong \int_0^{\pi/2} d\xi \left(1 + \frac{k}{2} \sin^2 \xi \right) \cong \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k}{4} \right)$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{k}{4} \right)$$

Für $k \rightarrow 0$ ist $T \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Das entspricht der harmonischen Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi \approx \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

Lösungen sind

$$\varphi(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, also $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Dies entspricht dem Federpendel

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad \text{mit} \quad E_{\text{pot}} = \frac{k}{2} x^2 \quad F = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dx} = -kx$$

$$\text{Impuls eines Teilchens} := \vec{p} = m \vec{v} = m \dot{\vec{r}}$$

\downarrow
 Ruhemasse in Newton'scher Physik
 ansonsten $m \rightarrow m_f$
 "bewegte Masse"

$$\Rightarrow \dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

$$\text{Drehimpuls } \vec{L} := m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \text{"Drehmoment"}$$

$$N\text{-Teilchen System: } r_{jk} := |\vec{r}_j - \vec{r}_k| = r_{kj}$$

Angenommen nur Zentralkräfte \vec{F}_{jk} wirken von Teilchen k auf Teilchen j

$$\Rightarrow \vec{F}_{jk} = F_{jk}(r_{jk}) \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{r_{jk}} \quad \text{also} \quad \dot{\vec{p}}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \vec{F}_{jk}$$

insbesondere

$$\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj} \rightarrow 3. \text{ Newton'sches Axiom}$$

Definiere:

$$\vec{P} = \sum_j \vec{p}_j \quad \vec{L} = \sum_j \vec{L}_j = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{p}_j$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{P}} = \sum_j \dot{\vec{p}}_j = \sum_{j \neq k} \vec{F}_{jk} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Schwerpunkt } \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j \text{ bewegt sich mit Geschwindigkeit}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j = \frac{1}{M} \sum \vec{p}_j = \frac{\vec{P}}{M} = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \sum_j \dot{\vec{L}}_j = \sum_j \vec{r}_j \times \sum_{k, k \neq j} \vec{F}_{jk} = \sum_{j \neq k} \frac{F_{jk}(r_{jk})}{r_{jk}} \vec{r}_j \times (\vec{r}_j - \vec{r}_k) \\ &= - \sum_{j \neq k} \frac{F_{jk}(r_{jk})}{r_{jk}} \vec{r}_j \times \vec{r}_k = 0 \quad \text{weil } \vec{r}_j \times \vec{r}_k = -\vec{r}_k \times \vec{r}_j \end{aligned}$$

Definiere:

$$\vec{r} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \text{Relativkoordinate}$$

$$M = m_1 + m_2 = \text{Gesamtmasse} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{"reduzierte Masse"}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \text{Schwerpunkt}$$

Dann

$$\vec{F}(\vec{r}) := \vec{F}_{12} = \underbrace{F(r)}_{\text{Zentralkraft}} \vec{\hat{r}}$$

Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{R}} = 0 \quad \text{wie im } N\text{-Körpersystem}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$$

Ferner

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_S + \vec{L}$$

$$\vec{L}_S = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} = \vec{R} \times \vec{P} = \text{Drehimpuls der Schwerpunktbewegung}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{Relativer Drehimpuls}$$

denn: