Ostatni raz wygenerowano: 12 czerwca 2023. Kontakt: thasiow(at)onet.pl

Polecana literatura:

Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie - Bartłomiej Błaszczyszyn, Tomasz Rolski.

1 Stopy procentowe

Czynnik dyskonta

$$v = \frac{1}{1+i}$$

$$d = \frac{i}{1+i}; \qquad d = 1 - v$$

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

$$i^{(m)} = m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$

$$d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}}$$

Kapitalizacja ciągła

$$v^t = e^{-\delta t}; \qquad i = e^{\delta} - 1$$

Szeregi

$$I_0(v) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n = \frac{1}{1-v}$$

$$I_1(v) = \sum_{n=1}^{\infty} n v^n = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$I_2(v) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 v^n = \frac{v(v+1)}{(1-v)^3}$$

2 Renty

Renty ciągłe Ciągła renta bezterminowa

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}$$

Obecna wartość ciągłej renty pewnej

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^{n} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta n})$$

Zakumulowana wartość renty:

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{\delta(n-t)} dt = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}$$

Zakumulowana wartość renty (przypadek dyskretny)

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + \ldots + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

Renta rosnąca ciągła:

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{\infty}|} = \int_0^\infty t e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta^2}$$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - n \cdot v^n}{\delta}$$

3 Trwanie życia

Podstawowe definicje:

Prawdopodobieństwo warunkowe przeżycia kolejnych t lat, pod warunkiem, że x-latek przeżyje wcześniej co najmniej s lat

$$_tp_{[x]+s} = \frac{_{s+t}p_x}{_sp_x}$$

Wartość oczekiwana przyszłego czasu życia x latka

$$\mathring{e}_x = E(T_x) = \int_0^\infty t f_x(t) dt$$

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt$$

$$Var(T_x) = 2\int_0^\infty t\,{}_tp_x - \mathring{e}_x^2$$

$$e_x = \sum_{k=1}^\infty {}_kp_x$$

$$e_x = p_x + p_x e_{x+1}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathring{e}_x) = \mathring{e}_x \cdot \mu_x - 1$$

Pozostałe:

$$P(T_0 > t) = {}_tp_0 = s(t)$$

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$$\mu_t = -\frac{s'(t)}{s(t)}$$

$$\mu_{x+t} = \frac{d(-ln_tp_x)}{dt}$$

$$1 - F_x(t) = {}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{[x]+u}du\right)$$

$$_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_s ds\right)$$

$$F_x(t) = {}_tq_x = \int_0^t {}_sp_x\mu_{[x]+s}ds$$

$$f_x(t) = \mu_{[x]+t} \cdot {}_tp_x$$

$$f_x(t) = \frac{d(-{}_tp_x)}{dt}$$

$$_tq_{[x]+s} = \frac{_{s|t}q_x}{_sp_x}$$

Prawdopodobieństwo, że x-latek przeżyje jeszcze s lat, a nastepnie umrze w przeciągu czasu t

$$_{s|t}q_x = Pr(s < T_x \leqslant s+t) = {}_sp_x - {}_{s+t}p_x$$

$$_{s|t}q_x = {}_sp_x \cdot {}_tq_{[x]+s}$$

inne:

$$_kp_x = p_x \prod_{i=1}^{k-1} p_{[x]+i}$$

4 Jednorazowe składki netto (model ciągły)

1. Ubezpieczenie na całe życie

$$\bar{A}_x = E(v^{T_x}) = \int_0^\infty v^t f_x(t)dt = \int_0^\infty v^t {}_tp_x\mu_{[x]+t}dt$$

2. Ubezpieczenia terminowe

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x\mu_{[x]+t}dt$$

3. Czyste ubezpieczenie na dożycie

$$\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n {}_np_x$$

4. Ubezpieczenie na życie i dożycie (endowment)

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

5. Odroczone ubezpieczenie na całe życie

$$_{m|}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}^{1}_{x:\overline{m}|}$$

$$_{m|}\bar{A}_x = \int_m^{\infty} v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

6 Zależności

$$_{m|}\bar{A}_x = {}_mp_x \cdot v^m \cdot \bar{A}_{[x]+m}$$

gdzie $\bar{A}_{[x]+m} = \int_0^{\infty} v^t\,{}_tp_{[x]+m}\mu_{[x]+m+t}dt$

$$\frac{\mathbf{1}}{\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}:\overline{m}|}} = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{m}|}) + \delta$$

Przy założeniu HU (UDD):

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}A_x$$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}A^{1}_{x:\overline{n}|}$$

7. Ubezpieczenie terminowe malejące

$$(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^{n} v^t(n - \lfloor t \rfloor)\,{}_tp_x\mu_{[x]+t}dt$$

8. Ubezpieczenie rosnące

$$(\bar{I}\bar{A})_x = E(Tv^T) = \int_0^{\infty} tv^t\,{}_tp_x\mu_{[x]+t}$$

5 Jednorazowe składki netto (model dyskretny)

Ubezpieczenie na całe życie (whole life insurance) gwarantuje wypłatę sumy 1 na koniec roku śmierci ubezpieczonego. Obecna wartość takiej polisy wynosi:

$$Z = v^{K+1}$$

1. Ubezpieczenie na całe życie

$$A_x = E(v^{K+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_xq_{[x]+k}$$

2. Ubezpieczenie terminowe

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{[x]+k}$$

3. Czyste ubezpieczenie na dożycie

$$A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}} = \bar{A}_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}} = v^n {}_np_x$$

4. Ubezpieczenie na życie i dożycie (endowment)

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}$$

5. Odroczone ubezpieczenie na całe życie

$${}_{m|}A_x = A_x - A^1_{x:\overline{m}|}$$

6. Rosnące ubezpieczenie na całe życie

$$(IA)_x = E((K+1)\cdot v^{K+1}) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}{}_kp_x q_{[x]+k}$$

7. Rosnące ubezpieczenie terminowe

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = E((K+1)\cdot v^{K+1}\cdot \mathbb{1}(K<n)) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}{}_kp_x q_{[x]+k}$$

8. Malejące ubezpieczenie terminowe

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k}$$

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = (n+1)A^1_{x:\overline{n}|} - (IA)^1_{x:\overline{n}|}$$

9. Zależności

$${}_{m|}A_x = {}_mp_x v^m A_{x+m}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1-A_{x:\overline{n}|}}{d}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k {}_kp_x = \frac{A_{x:\overline{m}|}-A_x}{d}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$A_x = vq_x + vp_xA_{x+1}$$

$$A_x = A^1_{x:\overline{n}|} + v^n {}_np_x A_{x+n}$$

$$(IA)_x = \sum_{m=0}^{\infty} {}_{m|}A_x$$

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^m} A_x$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}$$

Przy HU:

$$A_{x+u} = \frac{1-u}{1-uq_x} A_x + \frac{up_x}{1-uq_x} A_{x+1}$$

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}\left((IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) A_x\right)$$

6 Renty życiowe (model ciągły)

$$Y = \int_0^T v^t dt = \bar{a}_{\overline{T|}}$$

$$\bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1 - v^T}{\delta}$$

1. Renta na całe życie

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_tp_x dt$$

związek:

$$\bar{a}_x = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta}$$

2. Renta terminowa

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t {}_tp_x dt$$

związek:

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\delta}$$

3. Odroczona renta na całe życie

$${}_{m|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m|}}$$

związki:

$${}_{m|}\bar{a}_x = \frac{\bar{A}_{x:\overline{m|}} - \bar{A}_x}{\delta}; \quad {}_{m|}\bar{a}_x = {}_mp_x \cdot v^m \cdot \bar{a}_{[x]+m}$$

4. Odroczona renta terminowa (odroczona o m lat renta na n lat)

$${}_{m|n}\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{m+n|}} - \bar{a}_{x:\overline{m|}}$$

związek:

$${}_{m|n}\bar{a}_x = \frac{\bar{A}_{x:\overline{m|}} - \bar{A}_{x:\overline{m+n|}}}{\delta}$$

7 Renty życiowe (model dyskretny)

Renta na całe życie z góry:

$$Y = 1 + v + v^2 + \ldots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1|}}$$

jednorazowa składka netto:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}$$

$$Var(\ddot{a}_{\overline{K+1|}}) = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{d^2}$$

Renta na całe życie z dołu:

$$Y = v + v^2 + \ldots + v^K = a_{\overline{K|}}$$

$$a_x = \ddot{a}_x - 1$$

$$a_x = \frac{1 - (1+i)A_x}{i}$$

Renta terminowa z góry:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1 - A_{x:\overline{n|}}}{d}$$

$$Var(Y) = \frac{{}^2A_{x:\overline{n|}} - (A_{x:\overline{n|}})^2}{d^2}$$

Renta terminowa z dołu:

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} v^k {}_k p_x$$

Dożywotnia renta z góry odroczona o m:

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = v^m {}_m p_x \ddot{a}_{x+m}$$

Renta rosnąca

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^k {}_k p_x$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^k {}_k p_x$$

$$(I\ddot{a})_x = \frac{\ddot{a}_x - (IA)_x}{d}$$

Jednorazowa składka netto renty na całe życie, płatnej po $1/m$ z góry, m-krotnie w roku, wynosi:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} v^{k/m}{}_{k/m}p_x$$

lub równoważnie

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}$$

Przybliżenia (przy HU):

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

gdzie $\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}$, $\beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$. Dla małych stóp procentowych:

$$\alpha(m) \to 1, \qquad \beta(m) \to \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1})$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m){}_{m|}\ddot{a}_x - \beta(m)A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$$

Pozostałe:

$$\ddot{a}_x = 1 + v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1}$$

Przy HU:

$$\ddot{a}_{x+u} = \frac{1}{1 - uq_x}\left(\ddot{a}_x - \frac{u}{v}A_x\right)$$

$$\ddot{a}_{x+u:\overline{n}|} = \frac{1}{1 - uq_x}\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{u}{v}A^1_{x:\overline{n}|}\right)$$

$$P_{x+u} = \frac{A_{x+u}}{\ddot{a}_{x+u}} = \frac{(1-u)A_x + up_xA_{x+1}}{(1-u)\ddot{a}_x + u(1-q_x)\ddot{a}_{x+1}}$$

8 Składki i rezerwy netto dla wybranych polis (model ciągły)

Błaszczyszyn, Rolski (strona 190)

1. Ubezpieczenie na całe życie. Składka netto:

$$\bar{P}\left(\bar{A}_x\right) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$

Rezerwa:

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{[x]+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{[x]+t} $$

2. Ubezpieczenie terminowe na n lat. Składka netto:

$$ \bar{P}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} $$

Rezerwa:

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}^{\ \ 1}_{[x]+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} $$

3. Czyste ubezpieczenie na dożycie na n lat. Składka netto:

$$ \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} $$

Rezerwa:

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}) = \bar{A}_{[x]+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} $$

4. Ubezpieczenie na dożycie na n lat Składka netto:

$$ \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} $$

Rezerwa:

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} $$

5. Ubezpieczenie na całe życie, ze składką płaconą przez pierwsze h lat

6. Ubezpieczenie na dożycie na n lat, ze składką płaconą przez pierwsze h lat $(h \leqslant n)$

7. Bezterminowa renta odroczona o m lat, ze składką płaconą przez pierwsze h lat $(h \leqslant m)$. Składka netto:

$$ {}_h\bar{P}({}_{m|}\bar{a}_x) = \frac{m|\bar{a}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}} $$

dla $t \leqslant h$ mamy

$$ {}^h_t\bar{V}({}_{m|}\bar{a}_x) = {}_{m-t|}\bar{a}_{[x]+t} - {}_h\bar{P}({}_{m|}\bar{a}_x)\bar{a}_{[x]+t:\overline{h-t}|} $$

dka $t > m$ mamy

$$ {}^h_t\bar{V}({}_{m|}\bar{a}_x) = \bar{a}_{[x]+t} $$

8. Kontrakt ubezpieczeniowy ogólnego typu (dyskretny)

$$ {}_kV + \pi_k = v(c_{k+1}q_{x+k} + {}_{k+1}V \cdot p_{x+k}) $$

Interpretacja: W przypadku śmierci ubezpieczonego w tym roku ubezpieczyciel wyda c_{k+1} na koniec roku - odpowiada temu składnik aktuarialny $vc_{k+1}q_{x+k}$ po prawej stronie wzoru. W przypadku, gdy ubezpieczony przeżyje najbliższy rok, ubezpieczyciel będzie potrzebował rezerwy na poziomie ${}_{k+1}V$ - odpowiada temu składnik $v \cdot {}_{k+1}V \cdot p_{x+k}$

Inna postać zależności rekurencyjnej:

$$ {}_kV + \pi_k = v({}_{k+1}V + (c_{k+1} - {}_{k+1}V)q_{x+k}) $$

Taki zapis oznacza, że na bazie dzisiejszych zasobów (rezerwy i ostatniej dzisiejszej składki) ubezpieczyciel funduje przyszłoroczną rezerwę (tutaj rozważaną w każdej sytuacji - również w przypadku niedożycia przez ubezpieczonego tej chwili!) oraz nadwyżkę ewentualnego świadczenia nad tę rezerwę $(c_{k+1} - {}_{k+1}V) \cdot vq_{x+k}$; nadwyżka ta nosi nazwę ryzyka netto. Taka postać wzoru rekoruncyjnego uzasadnia więc bezpośrednio następujący podział składki π_k:

$$ \pi_k = \pi_k^s + \pi_k^r $$

na dwie składowe:

$$ \pi_k^s := {}_{k+1}V \cdot v - {}_kV $$

$$ \pi_k^r := (c_{k+1} - {}_{k+1}V) \cdot v \cdot q_{x+k} $$

z których pierwsza nosi nazwę składki oszczędnościowej, a druga składki pokrywającej bieżące ryzyko śmierci (ryzyko-składki). Odnotujmy na koniec wzór:

$$ {}_jV = \sum_{k=0}^{j-1} (1+i)^{j-k} \pi_k^s $$

który potwierdza przypuszczenie, że bieżąca rezerwa jest wartością zakumowalną przyszłych składek oszczędnościowych.

8.5 Podział składki w modelu ciągłym

$$ \bar{\pi} = \bar{\pi}^s(t) + \bar{\pi}^r(t) $$

$$ \bar{\pi}^s(t) = \frac{d_t\bar{V}}{dt} - \delta_t\bar{V} $$

$$ \bar{\pi}^r(t) = (b(t) - {}_t\bar{V})\mu_{x+t} $$

9. Związki dla modelu dyskretnego (polisa bezterminowa):

$$ {}_kV_x = 1 - (P_x + d)\ddot{a}_{x+k} $$

$$ {}_kV_x = \left(1 - \frac{P_x}{P_{x+k}}\right) A_{x+k} $$

$$ {}_kV_x = (P_{x+k} - P_x)\ddot{a}_{x+k} $$

$$_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}$$

$$_kV_x = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k} + d}$$

$$_kV_x = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x}$$

Polisa terminowa

$$_kV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

10. Przy założeniu HU (UDD) strona 223, Błaszczyszyn

$$_{k+u}V = \frac{v^{1-u}}{1 - u \cdot q_{[x]+k}}(q_{[x]+k} \cdot b_{k+1}(1-u) + p_{[x]+k} \cdot {}_{k+1}V)$$

$$_{k+u}V = \frac{v^{1-u}}{1 - u \cdot q_{[x]+k}}((1-u)({}_kV + \pi_k)(1+i) + u \cdot p_{[x]+k} \cdot {}_{k+1}V)$$

9 Ubezpieczenia wieloopcyjne

$$f_x(t,j) = {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}$$

$$Pr(J_x = j) = \int_0^\infty f_x(t,j)dt$$

1. Prawodpodobieństwo wyjścia ze statusu dla x-latka przed upływam czasu t:

$$_tq_x^{(\tau)} = Pr(T_x \leqslant t)$$

2. Prawdopodobieństwo pozostania w statusie dla x-latka przez czas t:

$$_tp_x^{(\tau)} = 1 - {}_tq_x^{(\tau)}$$

3. Prawdopodobieństwo wyjścia ze statusu dla x-latka przed upływem czasu t z przyczyny j

$$_tq_x^{(j)} = Pr(T_x \leqslant t, J_x = j)$$

J_x - rodzaj zdarzenia

4. Przy założeniu HCFM-D zachodzi wzór:

$$_uq_x^{(j)} = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}}{}_uq_x^{(\tau)} \qquad 0 \leqslant u < 1$$

Zachodzą następujące własności:

$$_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)}\mu_{[x]+s}^{(j)}ds$$

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu^{(\tau)}_{[x]+s} ds} $$

$$ \mu^{(\tau)}_{[x]+t} = \sum_{j=1}^{m} \mu^{(j)}_{[x]+t} $$

Stowarzyszony model jednoopcyjny
Błaszczyszyn, Rolski (s. 315)

$$ {}_tp_x^{'(j)} = \exp\left(- \int_0^t \mu^{(j)}_{[x]+s} ds \right) $$

$$ {}_tp_x^{'(j)} = 1 - {}_tq_x^{'(j)} $$

Wielkość ${}_tq_x^{'(j)}$ nazywamy absolutnym wskaźnikiem wychodzenia ze statusu z powodu ryzka j (z opcja) j lub prawdopodobieństwem netto wyjścia ze statusu z powodu j.

Wzory:

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x^{'(j)} $$

Przy założeniu HU-D

$$ {}_sp_x^{'(j)} = \left({}_sp_x^{(\tau)} \right)^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}} $$

$$ q_x^{(j)} = \frac{\log p_x^{'(j)}}{\log p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)} $$

10 Analityczne prawa śmiertelności

Błaszczyszyn, Rolski (str 56) Niech Funkcja przeżycia:

$$ Pr(T_0 > t) = s(t) $$

$$ \mu_t = -\frac{s'(t)}{s(t)} $$

$$ s(t) = \exp\left(- \int_0^t \mu_u du \right) $$

$$ {}_tp_{[x]+u} = \frac{s(x+u+t)}{s(x+u)} $$

$$ \mu_{[x]+t} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} $$

Prawo de Moivre'a Maksymalny wiek jednostki $\omega = 100$ lat. Rozkład T_0 jest jednostajny na przedziale $[0, \omega]$. Mamy:

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Prawo Gompertza
Natężenie zgonów jest wykładnicze postaci $\mu_t = Bc^t$. Mamy:

$$s(t) = exp(-m(c^t - 1))$$

gdzie $m = \frac{B}{\ln c}$

$$_tp_x = \exp\left(-m(c^{t+x} - c^x)\right)$$

Prawo Makehema
Natężenie zgonów wykładnicze, powiększone o pewną stałą, która ma interpretacje wypadkowej intensywności zgonów

$$\mu_t = A + Bc^t$$

$$s(t) = \exp\left(-At - m(c^t - 1)\right)$$

gdzie $m = \frac{B}{\ln c}$

$$_tp_x = \exp\left(-At - m(c^{t+x} - c^x)\right)$$

Prawo Weibulla
Natężenie zgonów rośnie jak pewna potęga t:

$$\mu_t = kt^n$$

$$s(t) = \exp\left(-ut^{n+1}\right)$$

gdzie $u = \frac{k}{n+1}$

$$_tp_x = \exp\left(-u((t+x)^{n+1} - x^{n+1})\right)$$

Wykładniczy rozkład śmiertelności Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy

$$_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

11 Hipotezy interpolacyjne

Hipoteza jednostajności (HU; UDD)
Funkcja ${}_tp_x$ zmiennej t jest ciągła i liniowa w przedziałach $[n, n+1)$

$$ {}_{n+u}p_x = (1-u){}_np_x + u \cdot {}_{n+1}p_x, \qquad 0 \leqslant u < 1 $$

$$ \mu_{[x]+n+u} = \frac{q_{[x]+n}}{1 - u \cdot q_{[x]+n}} $$

$$ {}_{n+u}p_x = {}_np_x(1 - u \cdot q_{[x]+n}) $$

$$ {}_up_x = 1 - u \cdot q_x $$

$$ {}_uq_x = u \cdot q_x $$

Hipoteza przedziałami stałego natężenia zgonów (HCFM) powiemy, że rozkład T_x spełnia hipotezę przedziałami stałego natężenia zgonów (constant force of mortality), jeżeli $\mu_{[x]+t}$ jest stałą funkcją zmiennej t w przedziałach $(n, n+1)$, $(n = 0, 1, \ldots)$; tj.

$$ \mu_{[x]+n+u} = \mu_{[x]+n}, \qquad 0 \leqslant u < 1 $$

Przy założeniu HCFM:

$$ \mu_{[x]+n+u} = \mu_{[x]+n} = -\log p_{[x]+n}, \qquad 0 \leqslant u < 1 $$

$$ {}_{n+u}p_x = {}_np_x(p_{[x]+n})^u $$

$$ {}_up_x = (p_x)^u $$

$$ {}_uq_x = 1 - (p_x)^u $$

dla $0 \leqslant u < 1$

Hipoteza Balducciego Rozkład T_x spełnia hipotezę Balducciego dla wieku x, jeżeli:

$$ {}_{1-u}q_{[x]+n+u} = (1-u)q_{[x]+n} $$

HB mówi, że prawdopodobieństwo tego, iż x-latek umrze przed końcem n-tego roku, pod warunkiem, że przeżyje cześć u tego roku, jest proporcjonalne do pozostałej części roku, tj. $1-u$ Wzory:

$$ {}_{n+u}p_x = \frac{{}_{n+1}p_x}{1-(1-u)q_{[x]+n}} $$

$$ \mu_{[x]+n+u} = \frac{q_{[x]+n}}{1-(1-u)q_{[x]+n}} $$

$$ {}_{n+1}p_x = {}_{n+u}p_x \cdot {}_{1-u}p_{[x]+n+u} $$

$$ {}_up_x = \frac{p_x}{u + (1-u)p_x} $$

$$ {}_uq_x = \frac{uq_x}{u + (1-u)p_x} $$

12 Funkcje komutacyjne - renty

1.
$$D_x = v^x l_x$$

2.
$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$$

3.
$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$
$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

4.
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

5.
$$_{n|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

6.
$$_{n|}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

7.
$$M_x = D_x - d \cdot N_x$$

8.
$$S_x = \sum_{k=0}^{\infty} N_{x+k}$$

9.
$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

10.
$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$$

11.
$$D_{x+k} = N_{x+k} - N_{x+k+1}$$

12.
$$(I\ddot{a})^1_{x:\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}$$

13 Funkcje komutacyjne - JSN

1.
$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} $$
$$ q_x = \frac{d_x}{l_x} $$
$$ d_x = l_x - l_{x+1} $$

2.
$$ A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = v^n {}_np_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

3.
$$ C_x = v^{x+1} d_x $$

4.
$$ M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} $$

5.
$$ A_x = \frac{M_x}{D_x} $$

6.
$$ A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} $$

7.
$$ {}_{n|}A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x} $$

8.
$$ A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} $$

9.
$$ R_x = \sum_{h=0}^{\infty} M_{x+h} $$

10.
$$ R_x = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1) C_{x+h} $$

11.
$$ (IA)_x = \frac{R_x}{D_x} $$

12.
$$ (IA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x} $$

14 Statusy przeżyciowe

$$ {}_tp_{x:y} = {}_tp_x {}_tp_y $$

$$ \mu_{(x:y)+t} = \mu_{x+t} + \mu_{y+t} $$

$$ \bar{A}_{\overset{1}{x}y} = \int_0^\infty v^s \cdot {}_sp_y \cdot {}_sp_x \cdot \mu_{x+s} ds $$

$$ \bar{A}_{x\overset{2}{y}} = \int_0^\infty v^t \cdot {}_tq_x \cdot {}_tp_y \cdot \mu_{y+t} = \bar{A}_y - \bar{A}_{x\overset{1}{y}} $$

Renta wdowia (otrzymuje y po śmierci x):

$$ \bar{a}_{x|y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{x:y} $$

Emerytura małżeńska: mężowi i żonie, obecnie w wieku x i y, wypłaca się rentę życiową z płatnościami w wysokosci A, aż do pierwszej śmierci, a potem w wysokości B co rok - owdowiałej osobie, aż do jej śmierci.

$$ SJN = (A - B)\ddot{a}_{x:y} + B\ddot{a}_{\overline{x:y}} = A\ddot{a}_{x:y} + B(\ddot{a}_{\overline{x:y}} - \ddot{a}_{x:y}) $$

W statusie niesymetrycznym:

$$ {}_sq_{\overset{1}{x}:y} = Pr(T(x) \leqslant s, T(x) \leqslant T(y)) $$

$$ {}_sq_{\overset{1}{x}:y} = \int_0^s {}_tp_x \mu_{[x]+t} dt \int_t^\infty {}_up_y \mu_{[y]+u} du = \int_0^s {}_tp_x \mu_{[x]+t} {}_tp_y dt = \int_0^s {}_tp_{x:y} \mu_{[x]+t} dt $$

oczywiście

$$ {}_\infty q_{\overset{1}{x}:y} = \int_0^\infty {}_tp_{x:y} \mu_{[x]+t} dt $$

jest prawdopodobieństwiem, że (x) umrze wcześniej niż (y).

$$ {}_sq_{\overset{2}{x}:y} = Pr(T(y) < T(x) \leqslant s) = {}_sq_x - {}_sq_{\overset{1}{x}:y} $$

$$ {}_sq_{\overset{2}{x}:y} = \int_0^s (1 - {}_tp_y) {}_tp_x \mu_{[x]+t} dt $$

Związki:

$$ \ddot{a}_{x:y} + \ddot{a}_{\overline{x:y}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y $$

$$ A_{x:y} + A_{\overline{x:y}} = A_x + A_y $$

$$ {}_tp_{x:y} + {}_tp_{\overline{x:y}} = {}_tp_x + {}_tp_y $$

$$ \mathring{e}_{x:y} + \mathring{e}_{\overline{x:y}} = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y $$

Jeśli u jest statusem przeżyciowym, to:

$$ \bar{A}_u + \delta\bar{a}_u = 1 $$

$$ \bar{A}_u + d\ddot{a}_u = 1 $$

15 Pochodne

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = (\delta + \mu_x)\bar{A}_x - \mu_x$$

$$\frac{d}{dx}\bar{P}_x = (\bar{P}_x - \mu_x)(\bar{P}_x + \delta)$$

Zapamietać tożsamość:

$$\frac{1}{\bar{a}_x} = \bar{P}_x + \delta$$

$$\frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \delta$$

$$\frac{d}{dx}\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = (\mu_x + \delta)\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \mu_{x+n} \cdot \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - \mu_x$$

$$\frac{d}{d\delta}\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = -(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$$

$$\frac{d}{dn}\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = e^{-\delta n} \cdot {}_np_x \cdot \mu_{x+n} = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \cdot \mu_{x+n}$$

$$\frac{d}{dx}\bar{a}_x = (\mu_x + \delta)\bar{a}_x - 1$$

$$\frac{d}{dx}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = (\mu_x + \delta)\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})$$

$$\frac{d}{d\delta}\bar{a}_x = -(\bar{I}\bar{a})_x$$

$$\frac{d}{dm}{}_{m|}\bar{a}_x = -A_{x:\overset{1}{\overline{m}|}}$$

$$\frac{d}{dm}\bar{a}_{x:\overline{m}|} = A_{x:\overset{1}{\overline{m}|}}$$

$$\frac{d}{dx}{}_tp_x = \frac{d}{dx}e^{-\int_x^{x+t}\mu_s ds} = {}_tp_x \cdot (\mu_x - \mu_{x+t})$$

$$\frac{d}{dt}{}_tp_x = \frac{d}{dt}e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} = -{}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$$

16 Rozlokowanie straty na poszczególne lata

Strata z polisy w roku $k+1$ jej ważności ($k = 0, 1, \ldots$) jest oznaczana

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } K \leqslant k-1, \\ c_{k+1} \cdot v - ({}_kV + \pi_k) & \text{dla } K = k, \\ {}_{k+1}V \cdot v - ({}_kV + \pi_k) & \text{dla } K \geqslant k+1 \end{cases}$$

Wartość ta jest obliczana na początek roku (k+1).

Strata ubezpieczyciela w chwili wystawienia polisy:

$$L = c_{K+1} \cdot v^{K+1} - \sum_{k=0}^{K} \pi_k v^k$$

może być zapisana również jako zdyskontowana suma strat ulokowanych w poszczególnych latach:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k v^k$$

Mamy:

$$E(\Lambda_k) = 0$$

$$Cov(\Lambda_k, \Lambda_j) = 0 \quad \text{dl a k} \neq \text{j}$$

$$Var(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k} Var(\Lambda_k)$$

Mamy:

$$Var(\Lambda_k) = (c_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 \cdot v^2 \cdot {}_{k+1}p_x \cdot q_{x+k}$$

oraz

$$Var(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} (c_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 {}_{k+1}p_x q_{x+k}$$

Wariancja straty ubezpieczyciela po h latach ważności polisy

$$Var({}_hL) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} (c_{h+k+1} - {}_{h+k+1}V)^2 {}_{k+1}p_{x+h} q_{x+h+k}$$

17 Pozostałe

Równanie Thielego

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = \bar{\pi}\,(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})_t\bar{V} - b(t)\mu_{[x]+t}$$

gdzie: $b(t)$ - suma ubezpieczenia, $\overline{\pi}(t)$ - intensywność płacenia składki

Wzór Taylora

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \ldots + R_n(x,a)$$

dla funkcji dwóch zmiennych

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right)$$

Zależności (w rozkładzie wykładniczym):

$$\bar{a}_x=\frac{1}{\delta+\mu}$$

$$\bar{A}_x=\frac{\mu}{\delta+\mu}$$

$$^2\bar{A}_x=\frac{\mu}{2\delta+\mu}$$

$$Cov(X,Y)=E(X\cdot Y)-EX\cdot EY$$

Dla ubezpieczenia z rosnącą sumą w rozkładzie wykładniczym:

$$EZ=\int_0^\infty te^{-\delta t}\mu e^{-\mu t}dt=\frac{\mu}{(\mu+\delta)^2}$$

$$EZ^2=\int_0^\infty t^2e^{-2\delta t}\mu e^{-\mu t}dt=\frac{2\mu}{(\mu+2\delta)^3}$$

Strata ubezpieczyciela niech P_x oznacza roczną składkę netto dla polisy znormalizowanej tego typu (bezterminowa polisa na zycie, z wypłatą na koniec roku śmierci opłacana coroczną składką). Funkcja straty ubezpieczyciela L przyjmuje postać:

$$L=v^{K+1}-P_x\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

inny wzór:

$$L=(1+\frac{P}{d})v^{K+1}-\frac{P}{d}$$

Sprzedajemy polisę bezterminową klientowi w wieku x. Załóżmy, że po k latach ubezpieczony żyje i odpowiednią rezerwę utworzoną na bazie jego przyszłych składek oznaczmy przez ${}_kV_x$. Liczbę pełnych lat życia, które przeżyje (x+k)-latek aż do śmierci, oznaczmy literą J. Tak więc

$$J=[T(x+k)]=K(x+k)$$

Określamy teraz stratę ${}_kL$ ubezpieczyciela po k latach od wystawienia polisy wzorem: BW w chwili t przyszłych wypłat - BW w chwili t przyszłej składki

$${}_kL=v^{J+1}-P_x\ddot{a}_{\overline{J+1}|}$$

w chwili $J+1$ następuje wypłata świadczenia. Rezerwę definiujemy jako wartość przeciętną tej straty:

$${}_kV_x=E({}_kL)=A_{x+k}-P_x\ddot{a}_{x+k}$$

18 Składki i rezerwy brutto

Koszty ponoszone na bieżąco przez firmę ubezpieczeniową można podzielić na trzy grupy:

1. Koszty akwizycji - koszty związane pośrednio lub bezpośrednio z wystawieniem nowej polisy. Są one proporcjonalne do sumy ubezpieczenia. Współczynnik proporcjonalności oznaczamy przez α.
2. Koszty pobierania składki - koszty ponoszone tylko na początku tych lat, w których rzeczywiście jest pobierana składka. Zakładamy, że są one proporcjonalne do aktualnie pobieranej składki brutto. Współczynnik proporcjonalności oznaczamy przez β.
3. Koszty administracyjne (zarządzania polisą) - wszystkie pozostałe składniki kosztów. Koszty administracyjne są pobierane w aąłym okresie ważności polisy w wysokości proporcjonalnej do sumy ubezpieczenia - odpowiedni współczynnik proporcjonalności oznaczamy przez γ.

Składki brutto

Składką brutto nazywamy poziom składki P^{br} taki, który przeciętnie wystarczy na pokrycie przyszłych świadczeń z tytułu ubezpieczenia oraz wszystkich kosztów wymienionych wyżej.

$$P^{br} = P + P^{\alpha} + P^{\beta} + P^{\gamma}$$

1. Składka brutto dla ubepieczenia na życie i dożycie spełnia na mocy przyjętej konwencji następujące równanie:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \cdot P^{br}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta \cdot P^{br}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Dalej:

$$P^{br}_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Jeśli w powyższym wzorze zastąpimy α przez $\alpha(A_{x:\overline{n}|} + d\ddot{a}_{x:\overline{n}|})$ mamy:

$$P^{br}_{x:\overline{n}|} = \frac{1+\alpha}{1-\beta}P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha \cdot d + \gamma}{1-\beta}$$

Dalej

$$P^{br}_{x:\overline{n}|} = \underbrace{P_{x:\overline{n}|}}_{P} + \underbrace{\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}}_{P^{\alpha}} + \underbrace{\beta \cdot P^{br}_{x:\overline{n}|}}_{P^{\beta}} + \underbrace{\gamma}_{P^{\gamma}}$$

2. Składka brutto dla ubezpieczenia na życie i dożycie ze skróconym okresem płacanie składek ($m < n$)

$$P^{br} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta \cdot P^{br} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Rezerwy brutto

Mamy

$$ {}_kV^{br} = {}_kV + {}_kV^{\alpha} + {}_kV^{\gamma} $$

1. Rezerwa brutto dla ubezpieczenia na życie i dożycie. Akwizycyjny składnik rezerwy ma postać:

$$ {}_kV^{\alpha}_{x:\overline{n}|} = -P^{\alpha} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} = -\alpha \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = -\alpha(1 - {}_kV_{x:\overline{n}|}) $$

natomiast dla $k = 1, 2, \ldots, n$ mamy

$$ {}_kV^{\gamma} \equiv 0 $$

Ostatecznie więc:

$$ {}_kV^{br}_{x:\overline{n}|} = (1+\alpha)_kV_{x:\overline{n}|} - \alpha $$

2. Rezerwa brutto dla ubezpieczenia na życie i dożycie ze skróconym okresem płacenia składek. W tym przypadku dla $k = 1, 2, \ldots, m-1$:

$$ {}_kV^{\alpha} = -P^{\alpha} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|} = -\alpha(1 - {}_kV_{x:\overline{n}|}) $$

oraz dla $k \geqslant m$

$$ {}_kV^{\alpha} = 0 $$

Rezerwa administracyjna ma postać dla $k = 1, 2, \ldots, m-1$:

$$ {}_kV^{\gamma} = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^{\gamma} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|} $$

oraz dla $k \geqslant m$:

$$ {}_kV^{\gamma} = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} $$

Zillmeryzacja: na koniec pierwszego roku rezerwa ma być nieujemna:

$$ \alpha = \frac{{}_1V_{x:\overline{n}|}}{1 - {}_1V_{x:\overline{n}|}} $$