

Ostatni raz wygenerowano: 10 czerwca 2023. Kontakt: thasiow(at)onet.pl

## 1 Stopy procentowe

Czynnik dyskonta

$$\begin{aligned}v &= \frac{1}{1+i} \\d &= \frac{i}{1+i}; \quad d = 1 - v \\1+i &= \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \\i^{(m)} &= m \left( (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right) \\d^{(m)} &= \frac{i^{(m)}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}}\end{aligned}$$

Kapitalizacja ciągła

$$v^t = e^{-\delta t}; \quad i = e^\delta - 1$$

Szeregi

$$\begin{aligned}I_0(v) &= \sum_{n=0}^{\infty} v^n = \frac{1}{1-v} \\I_1(v) &= \sum_{n=1}^{\infty} n v^n = \frac{v}{(1-v)^2} \\I_2(v) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 v^n = \frac{v(v+1)}{(1-v)^3}\end{aligned}$$

## 2 Renty

**Renty ciągłe** Ciągła renta bezterminowa

$$\bar{a}_{\infty|} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}$$

Obecna wartość ciągłej renty pewnej

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta n})$$

Zakumulowana wartość renty:

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{\delta(n-t)} dt = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}$$

Zakumulowana wartość renty (przypadek dyskretny)

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + \dots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + \dots + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

Renta rosnąca ciągle:

$$(\bar{I}\bar{a})_{\infty|} = \int_0^{\infty} te^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta^2}$$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - n \cdot v^n}{\delta}$$

### 3 Trwanie życia

Podstawowe definicje:

Prawdopodobieństwo warunkowe przeżycia kolejnych  $t$  lat, pod warunkiem, że  $x$ -latek przeżyje wcześniej co najmniej  $s$  lat

$${}_t p_{[x]+s} = \frac{{}_{s+t} p_x}{{}_s p_x}$$

Wartość oczekiwana przyszłego czasu życia  $x$  latka

$$\dot{e}_x = E(T_x) = \int_0^{\infty} t f_x(t) dt$$

$$\dot{e}_x = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt$$

$$Var(T_x) = 2 \int_0^{\infty} t {}_t p_x - \dot{e}_x^2$$

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x$$

$$e_x = p_x + p_x e_{x+1}$$

$$\frac{d}{dx}(\dot{e}_x) = \dot{e}_x \cdot \mu_x - 1$$

Pozostałe:

$$P(T_0 > t) = {}_t p_0 = s(t)$$

$${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$$\mu_t = -\frac{s'(t)}{s(t)}$$

$$\mu_{x+t} = \frac{d(-\ln {}_t p_x)}{dt}$$

$$1 - F_x(t) = {}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{[x]+u} du\right)$$

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_s ds\right)$$

$$F_x(t) = {}_t q_x = \int_0^t {}_s p_x \mu_{[x]+s} ds$$

$$f_x(t) = \mu_{[x]+t} \cdot {}_t p_x$$

$$f_x(t) = \frac{d(-{}_t p_x)}{dt}$$

$${}_t q_{[x]+s} = \frac{{}_s | t q_x}{{}_s p_x}$$

Prawdopodobieństwo, że x-latek przeżyje jeszcze s lat, a następnie umrze w przeciągu czasu t

$${}_s | t q_x = Pr(s < T_x \leq s + t) = {}_s p_x - {}_{s+t} p_x$$

$${}_s | t q_x = {}_s p_x \cdot {}_t q_{[x]+s}$$

inne:

$${}_k p_x = p_x \prod_{i=1}^{k-1} p_{[x]+i}$$

## 4 Jednorazowe składki netto (model ciągły)

1. Ubezpieczenie na całe życie

$$\bar{A}_x = E(v^{T_x}) = \int_0^\infty v^t f_x(t) dt = \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_{[x]+t} dt$$

2. Ubezpieczenia terminowe

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{[x]+t} dt$$

3. Czyste ubezpieczenie na dożycie

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{n}} = v^n {}_n p_x$$

4. Ubezpieczenie na życie i dożycie (endowment)

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{n}}$$

5. Odroczone ubezpieczenie na całe życie

$${}_m|\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}_{x:\overline{m}|}^1$$

$${}_m|\bar{A}_x = \int_m^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

6 Zależności

$${}_m|\bar{A}_x = {}_m p_x \cdot v^m \cdot \bar{A}_{[x]+m}$$

$$\text{gdzie } \bar{A}_{[x]+m} = \int_0^\infty v^t {}_t p_{[x]+m} \mu_{[x]+m+t} dt$$

$$\frac{1}{\bar{a}_{\overline{x}:\overline{m}|}} = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{m}|}) + \delta$$

Przy założeniu HU (UDD):

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1$$

7. Ubezpieczenie terminowe malejące

$$(D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n v^t (n - \lfloor t \rfloor) {}_t p_x \mu_{[x]+t} dt$$

8. Ubezpieczenie rosnące

$$(\bar{I}\bar{A})_x = E(Tv^T) = \int_0^\infty t v^t {}_t p_x \mu_{[x]+t} dt$$

## 5 Jednorazowe składki netto (model dyskretny)

Ubezpieczenie na całe życie (whole life insurance) gwarantuje wypłatę sumy 1 na koniec roku śmierci ubezpieczonego. Obecna wartość takiej polisy wynosi:

$$Z = v^{K+1}$$

1. Ubezpieczenie na całe życie

$$A_x = E(v^{K+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{[x]+k}$$

2. Ubezpieczenie terminowe

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{[x]+k}$$

3. Czyste ubezpieczenie na dożycie

$$A_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{x:\overline{n}|} = v^n {}_n p_x$$

4. Ubezpieczenie na życie i dożycie (endowment)

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\overline{1}}$$

5. Odroczone ubezpieczenie na całe życie

$${}_m|A_x = A_x - A_{x:\overline{m}|}^1$$

6. Rosnące ubezpieczenie na całe życie

$$(IA)_x = E((K+1) \cdot v^{K+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{[x]+k}$$

7. Rosnące ubezpieczenie terminowe

$$(IA)_{x:\overline{n}|}^1 = E((K+1) \cdot v^{K+1} \cdot \mathbb{1}(K < n)) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{[x]+k}$$

8. Malejące ubezpieczenie terminowe

$$(DA)_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

$$(DA)_{x:\overline{n}|}^1 = (n+1) A_{x:\overline{n}|}^1 - (IA)_{x:\overline{n}|}^1$$

9. Zależności

$${}_m|A_x = {}_m p_x v^m A_{x+m}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}$$

$${}_m|\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k {}_k p_x = \frac{A_{x:\overline{m}|} - A_x}{d}$$

$${}_m|\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$A_x = v q_x + v p_x A_{x+1}$$

$$A_x = A_{x:\overline{n}|}^1 + v^n {}_n p_x A_{x+n}$$

$$(IA)_x = \sum_{m=0}^{\infty} {}_m|A_x$$

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^m} A_x$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}$$

Przy HU:

$$A_{x+u} = \frac{1-u}{1-uq_x} A_x + \frac{up_x}{1-uq_x} A_{x+1}$$

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta} \left( (IA)_x - \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{\delta} \right) A_x \right)$$

## 6 Renty życiowe (model ciągły)

$$Y = \int_0^T v^t dt = \bar{a}_{\overline{T}|}$$

$$\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - v^T}{\delta}$$

1. Renta na całe życie

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt$$

związek:

$$\bar{a}_x = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta}$$

2. Renta terminowa

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_t p_x dt$$

związek:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}$$

3. Odroczone renty na całe życie

$${}_m|\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}$$

związki:

$${}_m|\bar{a}_x = \frac{\bar{A}_{x:\overline{m}|} - \bar{A}_x}{\delta}; \quad {}_m|\bar{a}_x = {}_m p_x \cdot v^m \cdot \bar{a}_{[x]+m}$$

4. Odroczone renty terminowe (odroczone o  $m$  lat renta na  $n$  lat)

$${}_m|{}_n\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{m+n}|} - \bar{a}_{x:\overline{m}|}$$

związek:

$${}_m|{}_n\bar{a}_x = \frac{\bar{A}_{x:\overline{m}|} - \bar{A}_{x:\overline{m+n}|}}{\delta}$$

## 7 Renty życiowe (model dyskretny)

Renta na całe życie z góry:

$$Y = 1 + v + v^2 + \dots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

jednorazowa składka netto:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x \\ \ddot{a}_x &= \frac{1 - A_x}{d} \\ \text{Var}(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) &= \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{d^2}\end{aligned}$$

Renta na całe życie z dołu:

$$\begin{aligned}Y &= v + v^2 + \dots + v^K = a_{\overline{K}|} \\ a_x &= \ddot{a}_x - 1 \\ a_x &= \frac{1 - (1+i)A_x}{i}\end{aligned}$$

Renta terminowa z góry:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x \\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} \\ \text{Var}(Y) &= \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{d^2}\end{aligned}$$

Renta terminowa z dołu:

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_x$$

Dożywotnia renta z góry odroczone o m:

$$\begin{aligned}{}_m|\ddot{a}_x &= \sum_{k=m}^{\infty} v^k {}_k p_x \\ {}_m|\ddot{a}_x &= v^m {}_m p_x \ddot{a}_{x+m}\end{aligned}$$

Renta rosnąca

$$\begin{aligned}(I\ddot{a})_x &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^k {}_k p_x \\ (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^k {}_k p_x\end{aligned}$$

$$(I\ddot{a})_x = \frac{\ddot{a}_x - (IA)_x}{d}$$

Jednorazowa składka netto renty na całe życie, płatnej po  $1/m$  z góry,  $m$ -krotnie w roku, wynosi:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k/m} {}_{k/m}p_x$$

lub równoważnie

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}$$

Przybliżenia (przy HU):

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

gdzie  $\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}$ ,  $\beta(m) = \frac{i-i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$ . Dla małych stóp procentowych:

$$\alpha(m) \rightarrow 1, \quad \beta(m) \rightarrow \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - A_{x:\overline{n}|}^1)$$

$${}_m|\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m){}_m|\ddot{a}_x - \beta(m)A_{x:\overline{n}|}^1$$

Pozostałe:

$$\ddot{a}_x = 1 + v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1}$$

Przy HU:

$$\ddot{a}_{x+u} = \frac{1}{1 - uq_x} \left( \ddot{a}_x - \frac{u}{v} A_x \right)$$

$$\ddot{a}_{x+u:\overline{n}|} = \frac{1}{1 - uq_x} \left( \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{u}{v} A_{x:\overline{n}|}^1 \right)$$

$$P_{x+u} = \frac{A_{x+u}}{\ddot{a}_{x+u}} = \frac{(1-u)A_x + up_x A_{x+1}}{(1-u)\ddot{a}_x + u(1-q_x)\ddot{a}_{x+1}}$$

## 8 Składki i rezerwy netto dla wybranych polis (model ciągły)

Błaszczyszyn, Rolski (strona 190)

1. Ubezpieczenie na całe życie. Składka netto:

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$



Rezerwa:

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{[x]+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{[x]+t}$$

2. Ubezpieczenie terminowe na  $n$  lat. Składka netto:

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Rezerwa:

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1) = \bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|}^1 - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}$$

3. Czyste ubezpieczenie na dożycie na  $n$  lat. Składka netto:

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{n}}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{n}}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Rezerwa:

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{n}}) = \bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|}^{\frac{1}{n}} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{n}})\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}$$

4. Ubezpieczenie na dożycie na  $n$  lat Składka netto:

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Rezerwa:

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}$$

5. Ubezpieczenie na całe życie, ze składką płaconą przez pierwsze  $h$  lat

6. Ubezpieczenie na dożycie na  $n$  lat, ze składką płaconą przez pierwsze  $h$  lat ( $h \leq n$ )

7. Bezterminowa renta odroczone o  $m$  lat, ze składką płaconą przez pierwsze  $h$  lat ( $h \leq m$ ). Składka netto:

$${}_h\bar{P}(m|\bar{a}_x) = \frac{m|\bar{a}_x}{\bar{a}_{x:h|}}$$

dla  $t \leq h$  mamy

$${}_t^h\bar{V}(m|\bar{a}_x) = m-t|\bar{a}_{[x]+t} - {}_h\bar{P}(m|\bar{a}_x)\bar{a}_{[x]+t:h-t|}$$

dla  $t > h$  mamy

$${}_t^h\bar{V}(m|\bar{a}_x) = \bar{a}_{[x]+t}$$

**8. Kontrakt ubezpieczeniowy ogólnego typu (dyskretny)**

$${}_kV + \pi_k = v(c_{k+1}q_{x+k} + {}_{k+1}V \cdot p_{x+k})$$

Interpretacja: W przypadku śmierci ubezpieczonego w tym roku ubezpieczyciel wyda  $c_{k+1}$  na koniec roku - odpowiada temu składnik aktuarialny  $v c_{k+1} q_{x+k}$  po prawej stronie wzoru. W przypadku, gdy ubezpieczony przeżyje najbliższy rok, ubezpieczyciel będzie potrzebował rezerwy na poziomie  ${}_k V$  - odpowiada temu składnik  $v \cdot {}_k V \cdot p_{x+k}$

Inna postać zależności rekurencyjnej:

$${}_k V + \pi_k = v({}_{k+1} V + (c_{k+1} - {}_{k+1} V) q_{x+k})$$

Taki zapis oznacza, że na bazie dzisiejszych zasobów (rezerwy i ostatniej dzisiejszej składki) ubezpieczyciel funduje przyszłoroczną rezerwę (tutaj rozważaną w każdej sytuacji - również w przypadku niedożycia przez ubezpieczonego tej chwili!) oraz nadwyżkę ewentualnego świadczenia nad tę rezerwę  $(c_{k+1} - {}_{k+1} V) \cdot v q_{x+k}$ ; nadwyżka ta nosi nazwę ryzyka netto. Taka postać wzoru rekurencyjnego uzasadnia więc bezpośrednio następujący podział składki  $\pi_k$ :

$$\pi_k = \pi_k^s + \pi_k^r$$

na dwie składowe:

$$\pi_k^s := {}_{k+1} V \cdot v - {}_k V$$

$$\pi_k^r := (c_{k+1} - {}_{k+1} V) \cdot v \cdot q_{x+k}$$

z których pierwsza nosi nazwę składki oszczędnościowej, a druga składki pokrywającej bieżące ryzyko śmierci (ryzyko-składki). Odnosząc na koniec wzór:

$${}_j V = \sum_{k=0}^{j-1} (1+i)^{j-k} \pi_k^s$$

który potwierdza przypuszczenie, że bieżąca rezerwa jest wartością zakumulowaną przyszłych składek oszczędnościowych.

### 8.5 Podział składki w modelu ciągłym

$$\bar{\pi} = \bar{\pi}^s(t) + \bar{\pi}^r(t)$$

$$\bar{\pi}^s(t) = \frac{d_t \bar{V}}{dt} - \delta_t \bar{V}$$

$$\bar{\pi}^r(t) = (b(t) - {}_t \bar{V}) \mu_{x+t}$$

9. Związki dla modelu dyskretnego (polisa bezterminowa):

$${}_k V_x = 1 - (P_x + d) \ddot{a}_{x+k}$$

$${}_k V_x = \left(1 - \frac{P_x}{P_{x+k}}\right) A_{x+k}$$

$${}_k V_x = (P_{x+k} - P_x) \ddot{a}_{x+k}$$

$${}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}$$

$${}_kV_x = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k} + d}$$

$${}_kV_x = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x}$$

Polisa terminowa

$${}_kV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

#### 10. Przy założeniu HU (UDD) strona 223, Błaszczyszyn

$${}_{k+u}V = \frac{v^{1-u}}{1 - u \cdot q_{[x]+k}} (q_{[x]+k} \cdot b_{k+1}(1-u) + p_{[x]+k} \cdot {}_{k+1}V)$$

$${}_{k+u}V = \frac{v^{1-u}}{1 - u \cdot q_{[x]+k}} ((1-u)({}_kV + \pi_k)(1+i) + u \cdot p_{[x]+k} \cdot {}_{k+1}V)$$

## 9 Ubezpieczenia wieloopcyjne

$$f_x(t, j) = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)}$$

$$Pr(J_x = j) = \int_0^\infty f_x(t, j) dt$$

1. Prawdopodobieństwo wyjścia ze statusu dla x-latka przed upływem czasu t:

$${}_t q_x^{(\tau)} = Pr(T_x \leq t)$$

2. Prawdopodobieństwo pozostania w statusie dla x-latka przez czas t:

$${}_t p_x^{(\tau)} = 1 - {}_t q_x^{(\tau)}$$

3. Prawdopodobieństwo wyjścia ze statusu dla x-latka przed upływem czasu t z przyczyny j

$${}_t q_x^{(j)} = Pr(T_x \leq t, J_x = j)$$

$J_x$  - rodzaj zdarzenia

4. Przy założeniu HCFM-D zachodzi wzór:

$${}_u q_x^{(j)} = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} {}_u q_x^{(\tau)} \quad 0 \leq u < 1$$

Zachodzą następujące własności:

$${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t {}_s p_x^{(\tau)} \mu_{[x]+s}^{(j)} ds$$

$${}_t p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{[x]+s}^{(\tau)} ds}$$

$$\mu_{[x]+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m \mu_{[x]+t}^{(j)}$$

### Stowarzyszony model jednoopcyny

Błaszczyszyn, Rolski (s. 315)

$${}_t p_x'^{(j)} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{[x]+s}^{(j)} ds\right)$$

$${}_t p_x'^{(j)} = 1 - {}_t q_x'^{(j)}$$

Wielkość  ${}_t q_x'^{(j)}$  nazywamy absolutnym wskaźnikiem wychodzenia ze statusu z powodu ryzyka j (z opcja) j lub prawdopodobieństwem netto wyjścia ze statusu z powodu j.

### Wzory:

$${}_t p_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^m {}_t p_x'^{(j)}$$

Przy założeniu HU-D

$${}_s p_x'^{(j)} = \left({}_s p_x^{(\tau)}\right)^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}}$$

$$q_x^{(j)} = \frac{\log p_x'^{(j)}}{\log p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)}$$

## 10 Analityczne prawa śmiertelności

Błaszczyszyn, Rolski (str 56) Niech Funkcja przeżycia:

$$Pr(T_0 > t) = s(t)$$

$$\mu_t = -\frac{s'(t)}{s(t)}$$

$$s(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu_u du\right)$$

$${}_t p_{[x]+u} = \frac{s(x+u+t)}{s(x+u)}$$

$$\mu_{[x]+t} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}$$

**Prawo de Moivre'a** Maksymalny wiek jednostki  $\omega = 100$  lat. Rozkład  $T_0$  jest jednostajny na przedziale  $[0, \omega]$ . Mamy:

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

**Prawo Gompertza**

Natężenie zgonów jest wykładnicze postaci  $\mu_t = Bc^t$ . Mamy:

$$s(t) = \exp(-m(c^t - 1))$$

gdzie  $m = \frac{B}{\ln c}$

$${}_t p_x = \exp(-m(c^{t+x} - c^x))$$

**Prawo Makehema**

Natężenie zgonów wykładnicze, powiększone o pewną stałą, która ma interpretację wypadkowej intensywności zgonów

$$\mu_t = A + Bc^t$$

$$s(t) = \exp(-At - m(c^t - 1))$$

gdzie  $m = \frac{B}{\ln c}$

$${}_t p_x = \exp(-At - m(c^{t+x} - c^x))$$

**Prawo Weibulla**

Natężenie zgonów rośnie jak pewna potęga  $t$ :

$$\mu_t = kt^n$$

$$s(t) = \exp(-ut^{n+1})$$

gdzie  $u = \frac{k}{n+1}$

$${}_t p_x = \exp(-u((t+x)^{n+1} - x^{n+1}))$$

**Wykładniczy rozkład śmiertelności** Przypuśćmy, że  $T_x$  ma rozkład wykładniczy z gęstością  $\mu e^{-\mu t}$ . Wtedy

$${}_t p_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

## 11 Hipotezy interpolacyjne

### Hipoteza jednostajności (HU; UDD)

Funkcja  ${}_t p_x$  zmiennej  $t$  jest ciągła i liniowa w przedziałach  $[n, n+1)$

$${}_{n+u} p_x = (1-u) {}_n p_x + u \cdot {}_{n+1} p_x, \quad 0 \leq u < 1$$

$$\mu_{[x]+n+u} = \frac{q_{[x]+n}}{1-u \cdot q_{[x]+n}}$$

$${}_{n+u} p_x = {}_n p_x (1-u \cdot q_{[x]+n})$$

$${}_u p_x = 1-u \cdot q_x$$

$${}_u q_x = u \cdot q_x$$

**Hipoteza przedziałami stałego natężenia zgonów (HCFM)** powiemy, że rozkład  $T_x$  spełnia hipotezę przedziałami stałego natężenia zgonów (constant force of mortality), jeżeli  $\mu_{[x]+t}$  jest stałą funkcją zmiennej  $t$  w przedziałach  $(n, n+1)$ ,  $(n=0, 1, \dots)$ ; tj.

$$\mu_{[x]+n+u} = \mu_{[x]+n}, \quad 0 \leq u < 1$$

Przy założeniu HCFM:

$$\mu_{[x]+n+u} = \mu_{[x]+n} = -\log p_{[x]+n}, \quad 0 \leq u < 1$$

$${}_{n+u} p_x = {}_n p_x (p_{[x]+n})^u$$

$${}_u p_x = (p_x)^u$$

$${}_u q_x = 1 - (p_x)^u$$

dla  $0 \leq u < 1$

**Hipoteza Balducciego** Rozkład  $T_x$  spełnia hipotezę Balducciego dla wieku  $x$ , jeżeli:

$$1-u q_{[x]+n+u} = (1-u) q_{[x]+n}$$

HB mówi, że prawdopodobieństwo tego, iż  $x$ -latek umrze przed końcem  $n$ -tego roku, pod warunkiem, że przeżyje część  $u$  tego roku, jest proporcjonalne do pozostałej części roku, tj.  $1-u$  Wzory:

$${}_{n+u} p_x = \frac{{}_{n+1} p_x}{1 - (1-u) q_{[x]+n}}$$

$$\mu_{[x]+n+u} = \frac{q_{[x]+n}}{1 - (1-u) q_{[x]+n}}$$

$${}_{n+1} p_x = {}_{n+u} p_x \cdot {}_{1-u} p_{[x]+n+u}$$

$${}_u p_x = \frac{p_x}{u + (1-u) p_x}$$

$${}_u q_x = \frac{u q_x}{u + (1-u) p_x}$$

## 12 Funkcje komutacyjne - renty

1.

$$D_x = v^x l_x$$

2.

$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$$

3.

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

4.

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

5.

$${}_n|\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

6.

$${}_n|a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

7.

$$M_x = D_x - d \cdot N_x$$

8.

$$S_x = \sum_{k=0}^{\infty} N_{x+k}$$

9.

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

10.

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$$

11.

$$D_{x+k} = N_{x+k} - N_{x+k+1}$$

12.

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}$$

### 13 Funkcje komutacyjne - JSN

1.

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

2.

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = v^n {}_np_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

3.

$$C_x = v^{x+1} d_x$$

4.

$$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$$

5.

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

6.

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

7.

$${}_n|A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x}$$

8.

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

9.

$$R_x = \sum_{h=0}^{\infty} M_{x+h}$$

10.

$$R_x = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)C_{x+h}$$

11.

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$

12.

$$(IA)_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x}$$



## 14 Statusy przeżyciowe

$${}_t p_{x:y} = {}_t p_x {}_t p_y$$

$$\mu_{(x:y)+t} = \mu_{x+t} + \mu_{y+t}$$

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_y \cdot {}_s p_x \cdot \mu_{x+s} ds$$

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^\infty v^t \cdot {}_t q_x \cdot {}_t p_y \cdot \mu_{y+t} dt = \bar{A}_y - \bar{A}_{xy}$$

Renta wdowia (otrzymuje y po śmierci x):

$$\bar{a}_{x|y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{x:y}$$

Emerytura małżeńska: mężowi i żonie, obecnie w wieku x i y, wypłaca się rentę życiową z płatnościami w wysokości A, aż do pierwszej śmierci, a potem w wysokości B co rok - owdowiałej osobie, aż do jej śmierci.

$$SJN = (A - B)\ddot{a}_{x:y} + B\ddot{a}_{\overline{x:y}} = A\ddot{a}_{x:y} + B(\ddot{a}_{\overline{x:y}} - \ddot{a}_{x:y})$$

W statusie niesymetrycznym:

$${}_s q_{x:y}^1 = Pr(T(x) \leq s, T(x) \leq T(y))$$

$${}_s q_{x:y}^1 = \int_0^s {}_t p_x \mu_{[x]+t} dt \int_t^\infty {}_u p_y \mu_{[y]+u} du = \int_0^s {}_t p_x \mu_{[x]+t} {}_t p_y dt = \int_0^s {}_t p_{x:y} \mu_{[x]+t} dt$$

oczywiście

$${}_\infty q_{x:y}^1 = \int_0^\infty {}_t p_{x:y} \mu_{[x]+t} dt$$

jest prawdopodobieństwem, że (x) umrze wcześniej niż (y).

$${}_s q_{x:y}^2 = Pr(T(y) < T(x) \leq s) = {}_s q_x - {}_s q_{x:y}^1$$

$${}_s q_{x:y}^2 = \int_0^s (1 - {}_t p_y) {}_t p_x \mu_{[x]+t} dt$$

Związki:

$$\ddot{a}_{x:y} + \ddot{a}_{\overline{x:y}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y$$

$$A_{x:y} + A_{\overline{x:y}} = A_x + A_y$$

$${}_t p_{x:y} + {}_t p_{\overline{x:y}} = {}_t p_x + {}_t p_y$$

$$\dot{e}_{x:y} + \dot{e}_{\overline{x:y}} = \dot{e}_x + \dot{e}_y$$

Jeśli u jest statusem przeżyciowym, to:

$$\bar{A}_u + \delta \bar{a}_u = 1$$

$$\bar{A}_u + d \bar{a}_u = 1$$

## 15 Pochodne

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = (\delta + \mu_x)\bar{A}_x - \mu_x$$

$$\frac{d}{dx}\bar{P}_x = (\bar{P}_x - \mu_x)(\bar{P}_x + \delta)$$

Zapamiętać tożsamość:

$$\frac{1}{\bar{a}_x} = \bar{P}_x + \delta$$

$$\frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \delta$$

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = (\mu_x + \delta)\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + \mu_{x+n} \cdot \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 - \mu_x$$

$$\frac{d}{d\delta}\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = -(\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1$$

$$\frac{d}{dn}\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = e^{-\delta n} \cdot {}_n p_x \cdot \mu_{x+n} = A_{x:\overline{n}|}^1 \cdot \mu_{x+n}$$

$$\frac{d}{dx}\bar{a}_x = (\mu_x + \delta)\bar{a}_x - 1$$

$$\frac{d}{dx}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = (\mu_x + \delta)\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - A_{x:\overline{n}|}^1)$$

$$\frac{d}{d\delta}\bar{a}_x = -(\bar{I}\bar{a})_x$$

$$\frac{d}{dm}{}_m|\bar{a}_x = -A_{x:\overline{m}|}^1$$

$$\frac{d}{dm}\bar{a}_{x:\overline{m}|} = A_{x:\overline{m}|}^1$$

$$\frac{d}{dx}{}_t p_x = \frac{d}{dx}e^{-\int_x^{x+t} \mu_s ds} = {}_t p_x \cdot (\mu_x - \mu_{x+t})$$

$$\frac{d}{dt}{}_t p_x = \frac{d}{dt}e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} = -{}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$$

## 16 Rozlokowanie straty na poszczególne lata

Strata z polisy w roku  $k+1$  jej ważności ( $k = 0, 1, \dots$ ) jest oznaczana

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } K \leq k-1, \\ c_{k+1} \cdot v - ({}_k V + \pi_k) & \text{dla } K = k, \\ {}_{k+1} V \cdot v - ({}_k V + \pi_k) & \text{dla } K \geq k+1 \end{cases}$$

Wartość ta jest obliczana na początek roku  $(k+1)$ .

Strata ubezpieczyciela w chwili wystawienia polisy:

$$L = c_{K+1} \cdot v^{K+1} - \sum_{k=0}^K \pi_k v^k$$

może być zapisana również jako zdyskontowana suma strat ulokowanych w poszczególnych latach:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k v^k$$

Mamy:

$$E(\Lambda_k) = 0$$

$$Cov(\Lambda_k, \Lambda_j) = 0 \quad \text{dla } k \neq j$$

$$Var(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k} Var(\Lambda_k)$$

Mamy:

$$Var(\Lambda_k) = (c_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 \cdot v^2 \cdot {}_{k+1}p_x \cdot q_{x+k}$$

oraz

$$Var(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} (c_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 {}_{k+1}p_x q_{x+k}$$

Wariancja straty ubezpieczyciela po  $h$  latach ważności polisy

$$Var({}_hL) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} (c_{h+k+1} - {}_{h+k+1}V)^2 {}_{k+1}p_{x+h} q_{x+h+k}$$

## 17 Pozostałe

### Równanie Thielego

$$\frac{d_t \bar{V}}{dt} = \bar{\pi}(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})_t \bar{V} - b(t) \mu_{[x]+t}$$

gdzie:  $b(t)$  - suma ubezpieczenia,  $\bar{\pi}(t)$  - intensywność płacenia składki

### Wzór Taylora

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \dots + R_n(x, a)$$

dla funkcji dwóch zmiennych

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right)$$

Zależności (w rozkładzie wykładniczym):

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta + \mu}$$

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\delta + \mu}$$

$${}^2\bar{A}_x = \frac{\mu}{2\delta + \mu}$$

$$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY$$

Dla ubezpieczenia z rosnącą sumą w rozkładzie wykładniczym:

$$EZ = \int_0^\infty t e^{-\delta t} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{(\mu + \delta)^2}$$

$$EZ^2 = \int_0^\infty t^2 e^{-2\delta t} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{2\mu}{(\mu + 2\delta)^3}$$

**Strata ubezpieczyciela** niech  $P_x$  oznacza roczną składkę netto dla polisy znormalizowanej tego typu (bezterminowa polisa na życie, z wypłatą na koniec roku śmierci opłacana coroczną składką). Funkcja straty ubezpieczyciela  $L$  przyjmuje postać:

$$L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

inny wzór:

$$L = \left(1 + \frac{P}{d}\right) v^{K+1} - \frac{P}{d}$$

Sprzedajemy polisę bezterminową klientowi w wieku  $x$ . Załóżmy, że po  $k$  latach ubezpieczony żyje i odpowiednią rezerwę utworzoną na bazie jego przyszłych składek oznaczmy przez  ${}_kV_x$ . Liczbę pełnych lat życia, które przeżyje  $(x+k)$ -latek aż do śmierci, oznaczmy literą  $J$ . Tak więc

$$J = [T(x+k)] = K(x+k)$$

Określamy teraz stratę  ${}_kL$  ubezpieczyciela po  $k$  latach od wystawienia polisy wzorem: BW w chwili  $t$  przyszłych wypłat - BW w chwili  $t$  przyszłej składki

$${}_kL = v^{J+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{J+1}|}$$

w chwili  $J+1$  następuje wypłata świadczenia. Rezerwę definiujemy jako wartość przeciętną tej straty:

$${}_kV_x = E({}_kL) = A_{x+k} - P_x \ddot{a}_{x+k}$$

## 18 Składki i rezerwy brutto

Koszty ponoszone na bieżąco przez firmę ubezpieczeniową można podzielić na trzy grupy:

1. Koszty akwizycji - koszty związane pośrednio lub bezpośrednio z wystawieniem nowej polisy. Są one proporcjonalne do sumy ubezpieczenia. Współczynnik proporcjonalności oznaczamy przez  $\alpha$ .
2. Koszty pobierania składki - koszty ponoszone tylko na początku tych lat, w których rzeczywiście jest pobierana składka. Zakładamy, że są one proporcjonalne do aktualnie pobieranej składki brutto. Współczynnik proporcjonalności oznaczamy przez  $\beta$ .
3. Koszty administracyjne (zarządzania polisą) - wszystkie pozostałe składniki kosztów. Koszty administracyjne są pobierane w całym okresie ważności polisy w wysokości proporcjonalnej do sumy ubezpieczenia - odpowiedni współczynnik proporcjonalności oznaczamy przez  $\gamma$ .

### Składki brutto

Składką brutto nazywamy poziom składki  $P^{br}$  taki, który przeciętnie wystarczy na pokrycie przyszłych świadczeń z tytułu ubezpieczenia oraz wszystkich kosztów wymienionych wyżej.

$$P^{br} = P + P^\alpha + P^\beta + P^\gamma$$

1. Składka brutto dla ubezpieczenia na życie i dożycie spełnia na mocy przyjętej konwencji następujące równanie:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \cdot P_{x:\overline{n}|}^{br} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta \cdot P_{x:\overline{n}|}^{br} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Dalej:

$$P_{x:\overline{n}|}^{br} = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1 - \beta) \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Jeśli w powyższym wzorze zastąpimy  $\alpha$  przez  $\alpha(A_{x:\overline{n}|} + d\ddot{a}_{x:\overline{n}|})$  mamy:

$$P_{x:\overline{n}|}^{br} = \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha \cdot d + \gamma}{1 - \beta}$$

Dalej

$$P_{x:\overline{n}|}^{br} = \underbrace{P_{x:\overline{n}|}}_P + \underbrace{\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}}_{P^\alpha} + \underbrace{\beta \cdot P_{x:\overline{n}|}^{br}}_{P^\beta} + \underbrace{\gamma}_{P^\gamma}$$

2. Składka brutto dla ubezpieczenia na życie i dożycie ze skróconym okresem płać składek ( $m < n$ )

$$P^{br} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta \cdot P^{br} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

### Rezerwy brutto

Mamy

$${}_kV^{br} = {}_kV + {}_kV^\alpha + {}_kV^\gamma$$

1. Rezerwa brutto dla ubezpieczenia na życie i dożycie. Akwizycyjny składnik rezerwy ma postać:

$${}_kV_{x:\overline{n}|}^\alpha = -P^\alpha \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} = -\alpha \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = -\alpha(1 - {}_kV_{x:\overline{n}|})$$

natomiast dla  $k = 1, 2, \dots, n$  mamy

$${}_kV^\gamma \equiv 0$$

Ostatecznie więc:

$${}_kV_{x:\overline{n}|}^{br} = (1 + \alpha){}_kV_{x:\overline{n}|} - \alpha$$

2. Rezerwa brutto dla ubezpieczenia na życie i dożycie ze skróconym okresem płacenia składek. W tym przypadku dla  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ :

$${}_kV^\alpha = -P^\alpha \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|} = -\alpha(1 - {}_kV_{x:\overline{n}|})$$

oraz dla  $k \geq m$

$${}_kV^\alpha = 0$$

Rezerwa administracyjna ma postać dla  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ :

$${}_kV^\gamma = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^\gamma \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|}$$

oraz dla  $k \geq m$ :

$${}_kV^\gamma = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

Zillmeryzacja: na koniec pierwszego roku rezerwa ma być nieujemna:

$$\alpha = \frac{{}_1V_{x:\overline{n}|}}{1 - {}_1V_{x:\overline{n}|}}$$