Ostatni raz wygenerowano: 10 czerwca 2023. Kontakt: thasiow(at)onet.pl

1 Egzamin z 8 stycznia 2007

Zadanie 1.1 W pewnej populacji kohorta x-latków zmniejsza po roku swą liczebność o 10%. O tej samej kohorcie wiadomo również, że średnia liczba lat, którą przeżyli ci, którzy dożyli wieku x oraz nie dożyli wieku $(x+1)$ lat wynosi $a(x) = 0.38$. Dla omawianej kohorty oblicz wartość współczynnika umieralności (central death rate). Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 1.1 *Centralne natężenie śmiertelności:*

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}$$

gdzie l_x - przeciętna liczba osób dożywających wieku x spośród początkowej liczby l_0, L_x - oczekiwana łączna liczba lat jaką mają do przeżycia w ciągu najbliższego roku noworodki, które dożyją wieku x. Wzór: $L_x = \int_0^1 l_{x+t}dt$

Z treści zadania: $l_{x+1} = 0.9 \cdot l_x$, $d_x = l_x - l_{x+1} = 0.1 \cdot l_x$. Mamy:

$$L_x = \underbrace{\frac{1}{1}}_{\text{średnia liczba lat, którą przeżyli ci, którzy przeżyli rok}} \cdot l_{x+1} +$$

$$\underbrace{0.38}_{\text{średnia liczba lat, którą przeżyli ci, którzy nie dożyli x+1 (w ciągu roku)}} \cdot d_x$$

Stąd

$$m_x = \frac{0.1 \cdot l_x}{l_{x+1} + 0.38 \cdot 0.1 \cdot l_x} = \frac{0.1 \cdot l_x}{0.9 \cdot l_x + 0.38 \cdot 0.1 \cdot l_x} \approx 0.1066$$

Zadanie 1.2 Dane są składki: ${}_{20}P_{40} = \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{20|}}} = 0.0212$, $P_{40:\overline{20|}} = 0.0335$, $A_{60} = 0.4933$. Wyznacz $1000 \cdot P^{\,1}_{40:\overline{20|}}$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 1.2 *Mamy*

$$P^{\,1}_{40:\overline{20|}} = \frac{A^{\,1}_{40:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{20|}}}$$

Wiemy, że

$$A_{40} = A^{\,1}_{40:\overline{20|}} + A_{40:\overset{1}{\overline{20|}}} \cdot A_{60}$$

Dalej:

$$\underbrace{\frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{20|}}}}_{{}_{20}P_{40}=0.0212} = \underbrace{\frac{A^{\,1}_{40:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{20|}}}}_{P^{\,1}_{40:\overline{20|}}} + \frac{A_{40:\overset{1}{\overline{20|}}}}{\ddot{a}_{40:\overline{20|}}} \cdot \underbrace{A_{60}}_{=0.4933}$$

$$\frac{A^{\ \ 1}_{40:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{20|}}} = \frac{A_{40:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{20|}}} - \frac{A_{40:\overline{20|}}^{\ \ \ \ 1}}{\ddot{a}_{40:\overline{20|}}}$$

Podstawiamy i mamy:

$$\frac{A_{40:\overline{20|}}^{\ \ \ \ 1}}{\ddot{a}_{40:\overline{20|}}} = 0.0242747187$$

Stąd

$$1000 \cdot P^{\ \ 1}_{40:\overline{20|}} = 9.225281231$$

Zadanie 1.3 Rozpatrujemy ciągły typ ubezpieczenia dla osoby (x) z populacji o wykładniczym rozkładzie czasu trwania życia z $\mu = 0.02$. W ubezpieczeniu tym przez pierwsze 20 lat płacona jest składka ze stałą intensywnością π. Ubezpieczenie zapewnia następujące świadczenie:
- w przypadku śmierci przed osiągnięciem wieku (x+20):jednorazowe świadczenie w wysokości wpłaconych składek wraz z oprocentowaniem o intensywności $\delta_j = 0.04$
- od osiągniętego wieku (x+20): rentę dożywotnią z roczną intensywnością 10 000 zł.
Wyznacz wysokość składki π przy oprocentowaniu technicznym $\delta_i = 0.05$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 1.3 *Wykładniczy rozkład czasu trwania życia:* ${}_tp_x = e^{-\mu t}$, $\mu_{x+t} = \mu$. *Mamy:*

$$\pi \cdot \bar{a}_{x:\overline{20|}} = A + 10000 \cdot e^{-20\cdot\delta_i} \cdot \bar{a}_{x+20} \cdot {}_{20}p_x$$

Zakumulowana wartość dla renty płaconej w sposób ciągły:

$$\bar{s}_{\overline{n|}} = \int_0^n e^{\delta_j(n-t)} = \frac{e^{\delta_j \cdot n} - 1}{\delta_j}$$

$$A = \int_0^{20} \pi \cdot \bar{s}_{\overline{t|}} \cdot e^{-\delta_i t} {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \pi \int_0^{20} \frac{e^{0.04t} - 1}{0.04} \cdot e^{-0.02t} \cdot e^{-0.05t} \cdot 0.02 dt$$

$$A = 2.138355808\pi$$

$$\bar{a}_{x:\overline{20|}} = \int_0^{20} e^{-0.05t} \cdot e^{-0.02t} dt = 10.76290052$$

Po wykonaniu podstawień mamy:

$$\pi = 4084.637381$$

Zadanie 1.4 Dla osoby $x = 60$ z populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem 100 lat rozpatrujemy ciągły typ ubezpieczenia na życie z jednorazową składką i malejącą sumą ubezpieczenia $b(t) = 40 - t$ dla $0 < t \leqslant 40$. Wyznacz $\frac{\partial}{\partial t}V(20)$, jeśli $\delta = 0.05$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 1.4 *Populacja de Moivre'a: rozkład T_0 jest jednostajny na przedziale $[0,\omega]$. Mamy: $s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$, $\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$, ${}_tp_x = 1 - \frac{t}{\omega - t}$.*

Równanie Thielego: $\frac{d_tV}{dt} = \bar{\pi}(t) + (\delta + \mu_{x+t})_tV - b(t)\mu_{x+t}$.

Z równania Thielego:

$$\frac{\partial}{\partial t}V(20) = \underbrace{\bar{\pi}(t)}_{=0} + \left(0.05 + \frac{1}{100-80}\right)\bar{V}(20) - (40-20)\frac{1}{100-80}$$

$V(t)$ - rezerwa w ubezpieczeniu z malejącą sumą ubezpieczenia i jednorazową składką netto - rezerwa w danym momencie $t > 0$ to JSN.

$$V(20) = \int_0^{20} b(t)e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^{20} e^{-0.05t}\frac{1}{20}\cdot(40-20-t)dt = 7.357588823$$

Stąd

$$\frac{\partial}{\partial t}V(20) = -0.264$$

Zadanie 1.5 Rozważamy ciągły typ ubezpieczenia na życie (x) ze zmienną sumą ubezpieczenia $c(t)$. Składka netto ma stała roczną intensywność $\pi(t) = 0.06$ i w równych częściach dzieli się na składkę $\pi^{(s)}(t)$ oraz $\pi^{(r)}(t)$. Oblicz wyskość świadczenia c(10), jeśli $\mu_{x+t} = 0.05$ oraz $\delta = 0.04$. Wskaż wartość najbliższą.

Rozwiązanie 1.5 *Równanie Thielego: $\frac{d_tV}{dt} = \bar{\pi}(t) + (\delta + \mu_{x+t})_tV - b(t)\mu_{x+t}$. Podział składki w modelu ciągłym: $\bar{\pi}(t) = \bar{\pi}^{(s)}(t) + \bar{\pi}^{(r)}(t)$, $\bar{\pi}^{(s)}(t) = \frac{d_tV}{dt} - \delta_tV$, $\bar{\pi}^{(r)}(t) = \mu_{x+t}(b(t) - {}_tV)$ Mamy:*

$$\bar{\pi}^{(s)}(t) = \frac{d_tV}{dt} - \delta_tV = 0.03$$

Równanie o zmiennych rozdzielonych typu: $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ Niech ${}_tV = x$:

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{0.03 + \delta x}_{=f(x)} \Rightarrow \frac{1}{f(x)}dx = dt \Rightarrow \frac{1}{0.03 + \delta x}dx = dt$$

$$\int \frac{1}{0.03 + \delta x}dx = \int dt$$

$$\ln(0.03 + \delta x)\cdot\frac{1}{\delta} = t + c \Rightarrow x = {}_tV = \frac{e^{\delta t}\cdot e^c - 0.03}{\delta}$$

Wykorzystując warunek brzegowy

$$t = 0 \rightarrow {}_0V = 0 = \frac{e^{\delta 0}\cdot e^c - 0.03}{\delta} \rightarrow e^c = 0.03$$

Stąd

$$_tV = \frac{e^{\delta t} \cdot 0.03 - 0.03}{\delta}$$

Z $\bar{\pi}^{(r)}(10)$ *mamy:*

$$0.03 = \left(c(10) - \frac{e^{0.04 \cdot 10} \cdot 0.03 - 0.03}{0.04}\right) 0.05 \Rightarrow c(10) \approx 0.97$$

Zadanie 1.6 Rozpatrujemy dyskretny typ bezterminowego ubezpieczenia na życie z sumą ubezpieczenia 1000 oraz stałą składką roczną P_x, płatną na początku roku przez cały okres ubezpieczenia. Wiadomo, że w drugim roku ubezpieczenia ta część składki, która pokrywa ryzyko śmierci, jest o 5% wyższa od analogicznej składki z pierwszego roku. Wyznacz składkę P_{x+2}, jeśli dane są:

$$q_x = 0.02; \qquad q_{x+1} = 0.022; \qquad v = 0.96$$

Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 1.6 ***Kontrakt ubezpieczeniowy ogólnego typu (dyskretny)***

$$_kV + \pi_k = v(c_{k+1} q_{x+k} + {}_{k+1}V \cdot p_{x+k})$$

$$_kV + \pi_k = v({}_{k+1}V + (c_{k+1} - {}_{k+1}V) q_{x+k})$$

$$\pi_k = \pi_k^s + \pi_k^r$$

$$\pi_k^s := {}_{k+1}V \cdot v - {}_kV$$

$$\pi_k^r := (c_{k+1} - {}_{k+1}V) \cdot v \cdot q_{x+k}$$

Z treści zadania (warunek dla π_k^r*):*

$$(1000 - {}_1V) \cdot v \cdot q_x \cdot 1.05 = (1000 - {}_2V) \cdot v \cdot q_{x+1}$$

czyli

$$(1000 - {}_1V) \cdot 0.96 \cdot 0.02 \cdot 1.05 = (1000 - {}_2V) \cdot 0.96 \cdot 0.022$$

$$_1V = \frac{0.022 {}_2V - 1}{0.021}$$

Stąd wniosek, że w wyliczeniu P_{x+2} *będziemy używali rezerwy. Mamy:*

$$P_{x+2} = 1000 \frac{A_{x+2}}{\ddot{a}_{x+2}} = 1000 \frac{A_{x+2} d}{1 - A_{x+2}} \to A_{x+2} = \frac{P_{x+2}}{1000d + P_{x+2}}$$

$$_2V = 1000 A_{x+2} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+2}$$

$$P_{x+2} = 1000 \frac{1 - d\ddot{a}_{x+2}}{\ddot{a}_{x+2}} \to \ddot{a}_{x+2} = \frac{1000}{P_{x+2} + 1000d}$$

Mamy:

$$_2V = 1000 \frac{P_{x+2}}{1000d + P_{x+2}} - P_x \frac{1000}{P_{x+2} + 1000d} = \frac{1000(P_{x+2} - P_x)}{P_{x+2} + 1000d}$$

Stąd

$$P_{x+2} = \frac{1000(P_x + d_2V)}{1000 - {}_2V} \qquad (*)$$

ze wzoru na kontrakt ubezpieczeniowego ogólnego typu:

$${}_1V + P_x = v(1000 \cdot q_{x+1} + {}_2V \cdot p_{x+1})$$

$${}_1V + P_x = 0.96 \cdot (1000 \cdot 0.022 + {}_2V \cdot 0.978)$$

Podstawiamy do $(*)$

$$P_{x+2} = \frac{1000(0.96 \cdot 1000 \cdot 0.022 + 0.96 \cdot 0.978_2V - \frac{0.022_2V - 1}{0.021}) + 40_2V}{1000 - {}_2V} =$$

$$= \frac{68739.04762 - 68.7390476_2V}{1000 - {}_2V} = \frac{68.7390476(1000 - {}_2V)}{1000 - {}_2V} \approx 68.75$$

Zadanie 1.7 *Do zrobienia...*

Zadanie 1.8 *Nie ma sensu liczyć*

Zadanie 1.9 *Wyznacz* $\ddot{a}^{(12)}_{x|y:\overline{10|}}$ *(10-letni okres ważności polisy biegnie od momentu jej wystawienia), jeśli dane są* $\ddot{a}_{x|y:\overline{10|}} = 1.50$, $i = 5\%$, ${}_{10}p_x = 0.425$, ${}_{10}p_y = 0.85$. *Przyjmij, że* $T(x)$ *oraz* $T(y)$ *są niezależne oraz śmiertelność ma jednostajny rozkład w ciągu kolejnych lat życia. Wskaż najbliższą wartość.*

Rozwiązanie 1.7 *Renta wdowia (otrzymuje y po śmierci x):*

$$\bar{a}_{x|y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{x:y}$$

Przybliżenia (przy HU):

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

gdzie $\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}$, $\beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$. *Dla małych stóp procentowych:*

$$\alpha(m) \to 1, \qquad \beta(m) \to \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \beta(m)(1 - A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}})$$

Mamy:

$$\ddot{a}^{(12)}_{x|y:\overline{10|}} = \ddot{a}^{(12)}_{y:\overline{10|}} - \ddot{a}^{(12)}_{x:y:\overline{10|}} =$$

$$\alpha(12)\ddot{a}_{y:\overline{10|}} - \beta(12)(1 - A_{y:\overset{1}{\overline{10|}}}) - \alpha(12)\ddot{a}_{x:y:\overline{10|}} + \beta(12)(1 - \underbrace{A_{x:y:\overset{1}{\overline{10|}}}}_{=v^{10}{}_{10}p_x{}_{10}p_y}) =$$

$$= \alpha(12)\left(\underbrace{\ddot{a}_{y:\overline{10}|} - \ddot{a}_{x:y:\overline{10}|}}_{=\ddot{a}_{x|y:\overline{10}|}}\right) + \beta(12)v^{10}{}_{10}p_y - \beta(12)v^{10}{}_{10}p_{x\,10}p_y =$$

$$= \alpha(12)\cdot 1.5 + \beta(12)\cdot 0.5218 - \beta(12)\cdot 0.22178 = (*)$$

Niech $\alpha(12) = 1$, $\beta(12) = 11/24$, *wtedy*

$$(*) \approx 1.63751 \approx 1.64$$

2 Egzamin z 17 marca 2008

Zadanie 2.1 Niech Z oznacza wartość obecną świadczenia z ubezpieczenia bezterminowego na życie (x), które wypłaca 1 w chwili śmierci. Ponadto, niech Y oznacza wartość obecną renty życiowej dla (x), który wypłaca świadczenie z intensywnością roczną 1 aż do śmierci. Zakładamy, że (x) należy do populacji wykładniczej ze stałym natężeniem wymierania $\mu_{x+t} = \mu > 0$ oraz, że techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta > 0$. Ponadto wiadomo, że

$$P(Z < E(Z)) = P(Y < E(Y))$$

Wówczas spełnione jest równanie: $E(X) + E(Y) =?$

Rozwiązanie 2.1 *Wiemy, że* $E(Z) = \bar{A}_x$, $E(Y) = \bar{a}_x$. *Z zadania:*

$$P(Z < \bar{A}_x) = P(Y < \bar{a}_x)$$

Mamy:

$$Z = e^{-\delta T}$$

$$Y = \int_0^T e^{-\delta T} = \frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}$$

$$E(Z) = 1 - \frac{\delta}{\mu + \delta}$$

$$E(Y) = \int_0^\infty e^{-(\mu+\delta)t} dt = \frac{1}{\mu + \delta}$$

Zapiszmy nasz warunek:

$$P(e^{-\delta T} < E(e^{-\delta T})) = P\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} < E\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}e^{-\delta T}\right)\right)$$

Prawa strona jest równa

$$P(e^{-\delta T} > E(e^{-\delta T}))$$

stąd możemy wywnioskować, że

$$P(e^{-\delta T} < E(e^{-\delta T})) = \frac{1}{2}$$

$$P(Z < E(Z)) = P(e^{-\delta T} < E(e^{-\delta T})) = P\left(e^{-\delta T} < \frac{\mu}{\mu + \delta}\right) =$$

$$= P\left(-\delta T < \ln\left(\frac{\mu}{\mu + \delta}\right)\right) = P\left(T > \frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\mu + \delta}{\mu}\right)\right) =$$

$$P\left(T > \ln\left(\frac{\mu + \delta}{\mu}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right) = 1 - e^{-\mu \ln\left(\frac{\mu+\delta}{\mu}\right)^{\frac{1}{\delta}}}$$

Stąd i z powyższej uwagi:

$$1 - e^{-\mu \ln\left(\frac{\mu+\delta}{\mu}\right)^{\frac{1}{\delta}}} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-\mu \ln\left(\frac{\mu+\delta}{\mu}\right)^{\frac{1}{\delta}}} = \frac{1}{2}$$

$$2\mu^{\frac{\mu}{\delta}} = (\mu+\delta)^{\frac{\mu}{\delta}}$$

stąd $\mu = \delta$ *co daje odpowiedź*

3 Egzamin z 30 listopada 2009

Zadanie 3.1 Rozważamy polisę emerytalną dla (x). Polega ona na tym, że przez następne m lat będzie on płacił co rok składkę netto P. Po dożyciu wieku $x+m$ zacznie otrzymywać emeryturę w postaci renty dożywotniej w stałej wysokosci 1 zł (na początku każdego roku). Gdy umrze przed osiągnieciem wieku $x+m$ nic nie będzie wypłacone. Niech L oznacza stratę ubezpieczyciela netto na moment wystawienia polisy. Wówczas zdarzenie $L<0$ opisuje poprawnie formuła:

ODP (A) $v^{K+1} > 1-(P+1)(1-v^m)$

Rozwiązanie 3.1 *Wstęp teoretyczny (BR 197). Renta na całe życie z góry:*

$$Y = 1 + v + v^2 + \ldots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

Określamy teraz stratę $_kL$ ubezpieczyciela po k latach od wystawienia polisy (bezterminowe ubezpieczenie na życie) wzorem: BW w chwili k przyszłych wypłat - BW w chwili k przyszłej składki:

$$_kL = v^{K_x+1-k} - P_x \ddot{a}_{\overline{K_x+1-k}|}$$

$$L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

W chwili $J+1$ następuje wypłata świadczenia.

W zadaniu mamy: Gdy $K<m$ L zawsze jest ujemne (bo są tylko wpłaty). Rozważmy przypadek gdy $K>m$. Chcemy by

$$L < 0$$

Bieżąca wartość w chwili 0 (uwzględniając, że $K>m$) przyszłych wypłat $v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{K+1-m}|}$:

$$v^m \cdot \frac{1-v^{K+1-m}}{d}$$

Bieżąca wartość w chwili 0 (uwzględniając, że $K>m$) przyszłych składek (składki płacone do wieku $x+m$):

$$P \cdot \frac{1-v^m}{d}$$

Stąd:

$$0 > v^m \cdot \frac{1-v^{K+1-m}}{d} - P \cdot \frac{1-v^m}{d}$$

$$0 > v^m - v^{K+1} - P - Pv^m$$

$$v^{K+1} > 1-(P+1)(1-v^m)$$

cnd.

Zadanie 3.2 Niech $\bar{A}^1_{x:\overline{m}|}(\delta)$ oznacza składkę $\bar{A}^1_{x:\overline{m}|}$ obliczoną z użyciem technicznej intensywności oprocentowania $\delta > 0$. Obliczyć $\Delta\delta$, które spełnia równanie:

$$\bar{A}^1_{x:\overline{m}|}(\delta) = \bar{A}^{\ \ 1}_{x+\frac{1}{12}:\overline{m+\frac{1}{12}}|}(\delta + \Delta\delta)$$

jeżeli dane są wartości: $\bar{A}^1_{x:\overline{m}|}(\delta) = 0.131763$, $A_{x:\overline{m}|}^{\ \ \frac{1}{}} = 0.0768021$, $(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = 3.0173$, $\mu_x = 0.002$, $\mu_{x+m} = 0.05$, $\delta = \ln(1.05) = 0.04879$

Rozwiązanie 3.2 *Z wzoru Taylora:*

$$f\left(x + \frac{1}{12}, m + \frac{1}{12}, \delta + \Delta\delta\right) \approx f(x, m, \delta) + \frac{df}{dx}\frac{1}{12} + \frac{df}{dm}\frac{1}{12} + \frac{df}{d\delta}\Delta\delta$$

Wiemy, że:

$$\frac{d}{dx}\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = (\mu_x + \delta)\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \mu_{x+n}\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ \frac{1}{}} - \mu_x$$

$$\frac{d}{d\delta}\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = -(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$$

$$\frac{d}{dm}\bar{A}^1_{x:\overline{m}|} = e^{-\delta m} \cdot {}_m p_x \cdot \mu_{x+m} = A_{x:\overline{m}|}^{\ \ \frac{1}{}} \cdot \mu_{x+m}$$

Wszystko dane, podstawiamy i mamy:

$$\Delta\delta = 0.0003417$$

Zadanie 3.3 On (y) jest wylosowany z populacji Gompertza a ona (x) z populacji Weibulla. Dane są: $\mathring{e}_{x:y} = 7$, $\mu_x = 0.02$ oraz $P(T(x) < T(y)) = 0.25$. Obliczyć przybliżoną wartość: $\mathring{e}_{x+\frac{1}{12}:y}$

Zadanie 3.4 Niech P_x oznacza tradycyjnie regularną coroczną składkę płatną aż do śmierci za ubezieczenie osoby w wieku x, które wypłaci 1 zł na koniec roku śmierci. Załóżmy, że x jest liczbą całkowtią a $u \in (0, 1)$. Przy założeniu UDD składka P_{x+u} wyraża się przez składki P_x oraz P_{x+1} następująco:

Rozwiązanie 3.3 [TEORIA] *W stuatusie niesymetrycznym:*

$${}_s q_{\overset{1}{x}:y} = Pr(T(x) \leqslant s, T(x) \leqslant T(y))$$

$${}_s q_{\overset{1}{x}:y} = \int_0^s {}_t p_x \mu_{[x]+t} dt \int_t^\infty {}_u p_y \mu_{[y]+u} du = \int_0^s {}_t p_x \mu_{[x]+t} {}_t p_y dt = \int_0^s {}_t p_{x:y} \mu_{[x]+t} dt$$

oczywiście

$${}_\infty q_{\overset{1}{x}:y} = \int_0^\infty {}_t p_{x:y} \mu_{[x]+t} dt$$

jest prawdopodobieństwiem, że (x) umrze wcześniej niż (y).

$${}_s q_{x:\overset{2}{y}} = Pr(T(y) < T(x) \leqslant s) = {}_s q_x - {}_s q_{\overset{1}{x}:y}$$

$$ {}_{s}q^{2}_{x:y} = \int_0^s (1 - {}_tp_y)\,{}_tp_x \mu_{[x]+t} dt $$

w zadaniu mamy:

$$ P(T(x) < T(y)) = \int_0^\infty {}_tp_x\,{}_tp_y \mu_{x+t} dt $$

$$ \mathring{e}_{x+\frac{1}{12}} \approx \mathring{e}_{x:y} + \frac{1}{12}\frac{d}{dx}\mathring{e}_{x:y} $$

$$ \frac{d}{dx}\mathring{e}_{x:y} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^\infty {}_tp_x\,{}_tp_y dt\right) = \int_0^\infty {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})\,{}_tp_y dt = $$

$$ = \int_0^\infty {}_tp_x \mu_x\,{}_tp_y dt - \int_0^\infty {}_tp_x \mu_{x+t}\,{}_tp_y dt $$

Podstawiamy i mamy:

$$ \mathring{e}_{x+\frac{1}{12}} \approx 6.99 $$

4 Egzamin z 15 marca 2010 r.

Zadanie 4.1 Dana jest liczba całkowita dodatnia x oraz liczba $t \in (0, 1)$. Wiadomo, że ${}_tq_x^{(UDD)} = 0.018$, ${}_tq_x^{(B)} = 0.01822$. Obliczyć ${}_tq_x^{(CF)}$.

Rozwiązanie 4.1 Hipoteza przedziałami stałego natężenia zgonów (HCFM) *powiemy, że rozkład T_x spełnia hipotezę przedziałami stałego natężenia zgonów (constant force of mortality), jeżeli $\mu_{[x]+t}$ jest stałą funkcją zmiennej t w przedziałach $(n, n+1)$, $(n = 0, 1, \ldots)$; tj.*

$$\mu_{[x]+n+u} = \mu_{[x]+n}, \qquad 0 \leqslant u < 1$$

Przy założeniu HCFM:

$$\mu_{[x]+n+u} = \mu_{[x]+n} = -\log p_{[x]+n}, \qquad 0 \leqslant u < 1$$

$${}_{n+u}p_x = {}_np_x(p_{[x]+n})^u$$

$${}_up_x = (p_x)^u$$

$${}_uq_x = 1 - (p_x)^u$$

dla $0 \leqslant u < 1$

Hipoteza Balducciego *Rozkład T_x spełnia hipotezę Balducciego dla wieku x, jeżeli:*

$${}_{q-u}q_{[x]+n+u} = (1-u)q_{[x]+n}$$

HB mówi, że prawdopodobieństwo tego, iż x-latek umrze przed końcem n-tego roku, pod warunkiem, że przeżyje cześć u tego roku, jest proporcjonalne do pozostąłej części roku, tj. $1 - u$ Wzory:

$${}_{n+u}p_x = \frac{{}_{n+1}p_x}{1-(1-u)q_{[x]+n}}$$

$$\mu_{[x]+n+u} = \frac{q_{[x]+n}}{1-(1-u)q_{[x]+n}}$$

$${}_{n+1}p_x = {}_{n+u}p_x {}_{1-u}p_{[x]+n+u}$$

$${}_up_x = \frac{p_x}{u+(1-u)p_x}$$

$${}_uq_x = \frac{uq_x}{u+(1-u)p_x}$$

Hipoteza jednostajności (HU)
Funkcja ${}_tp_x$ zmiennej t jest ciągła i liniowa w przedziałach $[n, n+1)$

$${}_{n+u}p_x = (1-u)_np_x + u \cdot {}_{n+1}p_x, \qquad 0 \leqslant u < 1$$

$$\mu_{[x]+n+u} = \frac{q_{[x]+n}}{1 - u \cdot q_{[x]+n}}$$

$$_{n+u}p_x = {}_np_x(1 - u \cdot q_{[x]+n})$$

$$_up_x = 1 - u \cdot q_x$$

$$_uq_x = u \cdot q_x$$

Wiemy, że $UDD = HU$ stąd:

$$_tq_x^{UDD} = t \cdot q_x$$

$$0.018 = t \cdot q_x$$

Dla HB

$$_uq_x = \frac{uq_x}{u + (1-u)p_x}$$

$$_tq_x = \frac{tq_x}{t + (1-t)(1-q_x)} = \frac{tq_x}{1-(1-t)q_x}$$

$$0.01822(1-(1-t)q_x) = \underbrace{tq_x}_{0.0018}$$

$$t = 0.5985108402$$

$$q_x = 0.0300746$$

Dla CF

$$_uq_x = 1 - (p_x)^u$$

Szukane:

$$_tq_x^{(CF)} = 1 - (1-q_x)^t = 0.1811022675 \approx 0.01811$$

Zadanie 4.2 Rozważmy (25) wylosowanego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$. Za jednorazową składkę netto SJN kupił on ubezpiecznie na życie, które wypłaci 1 w chwili śmierci. Niech Z oznacza wartość obecną świadczenia na moment wystawienia polisy. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia:

$$P(|Z - SJN| < \sqrt{VAR(Z)})$$

Rozwiązanie 4.2 *Maksymalny wiek jednostki $\omega = 100$ lat. Rozkład T_0 jest jednostajny na przedziale $[0, \omega]$. Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Mamy:

$$Z = v^T$$

$$SJN = \bar{A}_x$$

$$VAR(Z) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$$
$$\bar{A}_x = E(v^{Tx}) = \int_0^\infty v^t f(x)dt = \int_0^\infty v^t {}_tp_x \mu_{[x]+t} dt$$
$${}^2\bar{A}_x = E((v^{Tx})^2) = \int_0^\infty (v^t)^2 f(x)dt = \int_0^\infty v^{2t} {}_tp_x \mu_{[x]+t} dt$$

mamy:

$$\bar{A}_x = \int_0^{75} e^{-0.03t} \underbrace{\frac{1}{75}}_{=f_x(t)} dt = 0.3976003446$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^{75} e^{-0.06t} \underbrace{\frac{1}{75}}_{=f_x(t)} dt = 0.2197535563$$

Szukamy:

$$P(|Z - SJN| < \sqrt{VAR(Z)}) = P\left(|v^T - \bar{A}_x| < \sqrt{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}\right) =$$

$$= P\left(-\sqrt{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2} < v^T - \bar{A}_x < \sqrt{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}\right) =$$

$$= P\left(-\sqrt{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2} + \bar{A}_x < e^{-0.03T} < \sqrt{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2} + \bar{A}_x\right) =$$

$$= P\left(\underbrace{-\frac{100}{3}\ln\left(\bar{A}_x - \sqrt{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}\right)}_{A} > T > \underbrace{-\frac{100}{3}\ln\left(\sqrt{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2} + \bar{A}_x\right)}_{B}\right) =$$

$${}_{s|t}q_x = Pr(s < T_x \leqslant s+t) = {}_sp_x - {}_{s+t}p_x$$

czyli

$$Pr(B < T_x \leqslant A) = {}_Bp_x - {}_Ap_x = 1 - \frac{B}{75} - (1 - \frac{A}{75}) \approx 0.6510791952$$

Zadanie 4.3 Rozważmy (33) wybranego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 132$. Za składkę jednorazową w wysokości $SJ = v^{E(T(33))}$ kupił ubezpieczenie na życie, które wypłaci 1 w chwili śmierci. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wartość zakumulowana składki SJ na moment śmierci jest większa niż 1. Techniczna intensywność oprocentowana wynosi $\delta = 0.04$. Wybrać odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 4.3 *mamy:*

$$E(T(33)) =?$$

Górny kraniec $= 132$*, dolny* $= 33$*, czyli* T *liczony jest od* 0 *do* 99 *średnia* $= \frac{99}{2}$.
Szukamy:

$$P(JSN \cdot e^{\delta t} > 1) = P(e^{-\delta \cdot 99/2} \cdot e^{\delta T} > 1) = P(\cdot e^{\delta T} > e^{\delta \cdot 99/2}) =$$

$$= P(e^{\delta T} > e^{\delta \cdot 99/2}) = P(T > 99/2) = {}_{99}p_{33} = 1 - \frac{99/2}{99} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 4.4 Rozważamy ubezpieczenie na życie dla (x), które wypłaci 1 na koniec roku śmierci. (x) płaci regularne coroczne składki w wysokości P_x aż do śmierci. Dane są: $i = 0.05$, $l_{x+20} = 86750$, $l_{x+21} = 85780$, $l_{x+22} = 84750$ oraz $\pi_{20}^r = 0.00805176$, $\pi_{21}^r = 0.00850703$. Obliczyć wartość A_x. Wybrać odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 4.4 *Wzory:*

$$ {}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

Mamy:

$$\pi_k = \pi_k^s + \pi_k^r$$

na dwie składowe:

$$\pi_k^s := {}_{k+1}Vv - {}_kV$$

$$\pi_k^r := (c_{k+1} - {}_{k+1}V) \cdot vq_{x+k}$$

Stąd:

$$\pi_{21}^r = (1 - {}_{22}V)vq_{x+21}$$

$${}_{22}V = 1 - \frac{\pi_{21}^r}{vq_{x+21}}$$

$$\pi_{20}^r = (1 - {}_{21}V)vq_{x+20}$$

$${}_{21}V = 1 - \frac{\pi_{20}^r}{vq_{x+20}}$$

Kontrakt ubezpieczeniowy ogólnego typu

$${}_kV + \pi_k = v(c_{k+1}q_{x+k} + {}_{k+1}V \cdot p_{x+k})$$

$${}_{21}V + P_x = v \cdot q_{x+21} + v \cdot {}_{22}V \cdot p_{x+21}$$

$$P_x = v \cdot q_{x+21} - 1 - \frac{\pi_{20}^r}{vq_{x+20}} + v \cdot p_{x+21}\left(1 - \frac{\pi_{21}^r}{vq_{x+21}}\right)$$

$$P_x = \underbrace{v \cdot q_{x+21} + v \cdot p_{x+21}}_{=v} - 1 - \frac{\pi_{20}^r}{vq_{x+20}} - v \cdot p_{x+21}\frac{\pi_{21}^r}{vq_{x+21}}$$

$$P_x = v - \pi_{21}^r \frac{l_{x+22}}{l_{x+21} - l_{x+22}} - 1 + \frac{\pi_{20}^r}{v} \cdot \frac{l_{x+20}}{l_{x+20} - l_{x+21}}$$

$$P_x = \frac{d \cdot A_x}{1 - A_x} \approx 0.1515684459$$

Zadanie 4.5 Rozważamy dwóch emerytów: Bolka (70) i Lolka (75). kązdy z nich w wieku (65) kupił za jednorazową składkę netto ubezpieczenie emerytalne, które wypłaca co roku 1 (na początku roku) aż do śmierci. Tak więc Bolek pobiera emeryturę od 5 lat, a Lolek od 10 lat. Dane są $i = 0.05$, $A_{70} = 0.62$, $A_{75} = 0.69$. Zakładamy, że dalsze trwania życia Bolka i Lolka są niezależne. Zdarzenie, że polisa Lolka przyniesie ubezpieczycielowi stratę netto i równocześnie polisa Bolka nie przyniesie straty opisuje poprawnie formuła:

ODP D: $K(70) \leqslant 8$ oraz $K(75) \geqslant 7$

Rozwiązanie 4.5 *Dla Bolka w momencie* $t = 70$ *do wypłaty zostało* $\ddot{a}_{70}$. *Polisa Bolka nie przyniesie straty gdy:*

$$\ddot{a}_{\overline{K(70)+1}|} - \ddot{a}_{70} < 0$$

Pierwsza renta to renta finansowa, druga życiowa. Mamy $K(70)+1$ *ponieważ, gdy np* $K(70) = 2$ *to oznacza, że 70-latek w rzeczywistości będzie żył 2 lata i troszkę dłużej także dostanie 3 płatności. Poza tym w ubezpieczeniu na całe życie, które gwarantuje wypłatę 1 na koniec roku śmierci ubezpieczonego, wartość obecna takiej polisy to:*

$$Z = v^{K+1}$$

Dla Lolka:

$$\ddot{a}_{\overline{K(75)+1}|} - \ddot{a}_{75} \geqslant 0$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}$$

mamy:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Stąd:

$$\frac{1 - v^{K(70)+1}}{d} < \frac{1 - 0.62}{d}$$

oraz

$$\frac{1 - v^{K(75)+1}}{d} \geqslant \frac{1 - 0.69}{d}$$

Dla Bolka:

$$K(70) < \frac{\ln 0.62}{\ln v} - 1 = 9.79 - 1 = 8.79$$

Dla Lolka:

$$K(75) \geqslant \frac{\ln 0.69}{\ln v} - 1 = 7.6 - 1 = 6.6$$

Stąd

$$K(70) \leqslant 8, \qquad K(75) \geqslant 7$$

Zadanie 4.6 Niech $SJN(n,a,b)$ oznacza składkę jednorazową netto za ubezpieczenie ciągłe n-letnie na życie i dożycie dla (x), które wypłaci a w chwili śmierci, gdy ubezpieczony (x) umrze w ciągu n-latm albo b, gdy dożyje wieku x+n. Dane są: $i = 0.05$, $SJN(n,2,3) = 0.474219$, $SJN(n,5,7) = 1.1388$. Obliczyć przybliżoną wartość SJN(n+1/12,1,1). Wybrać odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 4.6 *Mamy:*

$$SJN(n,a,b) = a \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + b \cdot \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

Ze wzoru Taylora mamy:

$$SJN(n+\frac{1}{12},1,1) \approx SJN(n,1,1) + \frac{1}{12}SJN'(n,1,1)$$

Wobec faktu, że:

$$0.474219 = SJN(n,2,3) = 2 \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + 3 \cdot \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

$$1.1388 = SJN(n,5,7) = 5 \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + 7 \cdot \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

mamy:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = 0.096867$$

$$\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = 0.093495$$

$$SJN(n,1,1) = 0.190362$$

Ubezpieczenia terminowe

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t{}_tp_x\mu_{[x]+t}dt$$

Czyste ubezpieczenie na dożycie

$$\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n{}_np_x$$

$$\frac{d}{dn}SJN(n,1,1) = a \cdot v^n \cdot {}_np_x \cdot \mu_{x+n} + b \cdot \frac{d}{dn}({}_np_x) \cdot v^n + b \cdot {}_np_x \cdot \frac{d}{dn}(v^n) =$$

$$= a \cdot e^{-\delta n} \cdot {}_np_x \cdot \mu_{x+n} - b \cdot {}_np_x \cdot \mu_{x+n} \cdot e^{-\delta n} + b \cdot {}_np_x \cdot (-\delta) \cdot e^{-\delta n}$$

$$i = e^{\delta} - 1 \Rightarrow \delta = \ln(1+i)$$

Stąd:

$$SJN(n+\frac{1}{12},1,1) \approx SJN(n,1,1) + \frac{1}{12}SJN'(n,1,1) \approx 0.1899818636 \approx 0.1900$$

Zadanie 4.7 (65) wylosowany z populacji de Moivre'a z wiekiem nieprzekraczalnym $\omega = 100$ rozważa zakup za jednorazową składkę netto 1 jednej z następujących polis emerytalnych:

- P1 będzie wypłacać mu do końca życia z roczną intensywnością E1 oraz dodatkowo w przypadku śmierci przed osiągnięciem wieku 70 wypłaci rodzinie jednorazowe świadczenie śmiertelne w wysokości $(5-t)/5$, gdy umrze w wieku $65+t$
- P2 będzie wypłacać mu do końca życia z roczną intensywnością E2 oraz dodatkowo w przypadku śmierci przed osiągnięciem wieku 75 wypłaci rodzinie jednorazowe świadczenie śmiertelne w wysokości $(10-t)/10$, gdy umrze w wieku $65+t$ obliczyć $E2/E1$. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.03$. Wybierz odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 4.7 Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki* $\omega = 100$ *lat. Rozkład* T_0 *jest jednostajny na przedziale* $[0,\omega]$. *Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Rozkład jednostajny więc:

$$f_x(t) = {}_tp_x\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x}$$

Mamy:

$$1 = \int_0^{35} E_1 v^t {}_tp_x dt + \int_0^5 \frac{5-t}{5} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

$$1 = \int_0^{35} E_2 v^t {}_tp_x dt + \int_0^{10} \frac{10-t}{10} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Stąd:

$$1 = \int_0^{35} E_1 e^{-\delta t}\left(1 - \frac{t}{35}\right) dt + \int_0^5 \frac{5-t}{5} e^{-\delta t} \frac{1}{35} dt$$

oraz

$$1 = \int_0^{35} E_2 e^{-\delta t}\left(1 - \frac{t}{35}\right) dt + \int_0^{10} \frac{10-t}{10} e^{-\delta t} \frac{1}{35} dt$$

mamy:

$$\frac{1 - \int_0^{10} \frac{10-t}{10} e^{-\delta t} \frac{1}{35} dt}{1 - \int_0^5 \frac{5-t}{5} e^{-\delta t} \frac{1}{35} dt} = \frac{E_2}{E_1} = 0.9339123906$$

Zadanie 4.8 W modelu szkodowości dwojakiej dane są funkcje intensywności poszczególnych szkód: $\mu_{1,x+t} = \frac{1}{\omega_1 - t}$ dla $0 \leqslant t < \omega_1$ oraz $\mu_{2,x+t} = \frac{1}{\omega_2 - t}$ dla $0 \leqslant t < \omega_2$ przy czym $\omega_1 < \omega_2$. Wiadomo ponadto, że

$$Pr\left(J = 2 | T > \frac{\omega_1}{2}\right) = 0.269737$$

Obliczyć

$$Pr\left(J = 1 | T < \frac{\omega_1}{2}\right)$$

Rozwiązanie 4.8 *Ubezpieczenia wieloopcyjne:*

$$Pr(J_x = j) = \int_0^\infty f_x(t,j)dt$$

1. Prawodpodobieństwo wyjścia ze statusu dla x-latka przed upływam czasu t:

$${}_tq_x^{(\tau)} = Pr(T_x \leqslant t)$$

2. Prawdopodobieństwo pozostania w statusie dla x-latka przez czas t:

$${}_tp_x^{(\tau)} = 1 - {}_tq_x^{(\tau)}$$

3. Prawdopodobieństwo wyjścia ze statusu dla x-latka przed upływem czasu t z przyczyny j

$${}_tq_x^{(j)} = Pr(T_x \leqslant t, J_x = j)$$

J_x *- rodzaj zdarzenia*

4. Przy założeniu HCFM-D zachodzi wzór:

$${}_uq_x^{(j)} = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} {}_uq_x^{(\tau)} \qquad 0 \leqslant u < 1$$

Zachodzą następujące własności:

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{[x]+s}^{(j)} ds$$

$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{[x]+s}^{(\tau)} ds}$$

$$\mu_{[x]+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m \mu_{[x]+t}^{(j)}$$

W zadaniu mamy:

$$\mu_{[x]+t}^{(\tau)} = \mu_{1,x+t} + \mu_{2,x+t} = \frac{1}{\omega_1 - t} + \frac{1}{\omega_2 - t}$$

$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{[x]+s}^{(\tau)} ds} = \frac{(\omega_1 - t)(\omega_2 - t)}{\omega_1 \omega_2}$$

dla $t \in (0, \omega_1)$ *Prawdopodobieństwo warunkowe*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Szukamy:

$$Pr\left(J = 1 | T < \frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{Pr\left(J = 1, T < \frac{\omega_1}{2}\right)}{Pr\left(T < \frac{\omega_1}{2}\right)}$$

Dla pierwszej przyczyny t ograniczone do w_1

$$P(J=1)=P(T<\omega_1,J=1)=?$$

Sprawdźmy

$${}_tq_x^{(1)}=Pr(T_x\leqslant t,J_x=1)=\int_0^t {}_sp_x^{(\tau)}\mu_{[x]+s}^{(j)}ds=\int_0^t\frac{(\omega_1-t)(\omega_2-t)}{\omega_1\omega_2}\frac{1}{\omega_1-t}dt=$$

dla $t<\omega_1$

$$=\frac{t}{\omega_1}-\frac{t^2}{2\omega_1\omega_2}$$

$$Pr(T_x\leqslant t,J_x=2)=\frac{t}{\omega_2}-\frac{t^2}{2\omega_1\omega_2}$$

Stąd:

$$P(J=1)=P(T<\omega_1,J=1)=1-\frac{\omega_1}{2\omega_2}$$

$$P(J=2)=P(T<\omega_1,J=2)=\frac{\omega_1}{\omega_2}-\frac{\omega_1}{2\omega_2}=\frac{\omega_1}{2\omega_2}$$

Dalej mamy:

$$P(T<t)=\frac{t}{\omega_1}-\frac{t^2}{2\omega_1\omega_2}+\frac{t}{\omega_2}-\frac{t^2}{2\omega_1\omega_2}=\frac{t}{\omega_1}+\frac{t}{\omega_2}-\frac{t^2}{\omega_1\omega_2}$$

Wracając do szukanych:

$$Pr\left(J=1|T<\frac{\omega_1}{2}\right)=\frac{Pr\left(J=1,T<\frac{\omega_1}{2}\right)}{Pr\left(T<\frac{\omega_1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\omega_1}{8\omega_2}}{\frac{1}{2}+\frac{\omega_1}{4\omega_2}}$$

korzystając z danych

$$Pr\left(J=2|T>\frac{\omega_1}{2}\right)=0.269737$$

mamy

$$Pr\left(J=2,T>\frac{\omega_1}{2}\right)=Pr\left(J=2,T<\omega_1\right)-Pr\left(J=2,T<\frac{\omega_1}{2}\right)=\frac{\omega_1}{2\omega_2}-\frac{\omega_1}{2\omega_2}+\frac{\omega_1}{8\omega_2}=\frac{\omega_1}{8\omega_2}$$

Czyli

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=0.7008549673$$

Stąd

$$Pr\left(J=1|T<\frac{\omega_1}{2}\right)=0.6107593841$$

Zadanie 4.9 On (y) jest wylosowany z populacji Gomertza a ona (x) z populacji Weibulla. Dane są $\bar{a}_{x:y}=7$, $\mu_x=0.02$, $\bar{a}_{x+\frac{1}{12}:y}=6.98$ oraz $\delta>0$. Obliczyć przybliżoną wartość składki jednorazowej netto za to ubezpieczenie, które wypłaci 1 w chwili śmierci (x), ale tylko wtedy, gdy (x) umrze wcześniej niż (y). Zakładamy, że ich życia są niezależne. Wybrać odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 4.9 Prawo Gompertza
Natężenie zgonów jest wykładnicze postaci $\mu_t = Bc^t$. *Mamy:*

$$s(t) = exp(-m(c^t - 1))$$

gdzie $m = \frac{B}{\ln c}$

$${}_tp_x = \exp\left(-m(c^{t+x} - c^x)\right)$$

Prawo Weibulla
Natężenie zgonów rośnie jak pewna potęga t:

$$\mu_t = kt^n$$

$$s(t) = \exp\left(-ut^{n+1}\right)$$

gdzie $u = \frac{k}{n+1}$

$${}_tp_x = \exp\left(-u((t+x)^{n+1} - x^{n+1})\right)$$

Wiemy, że

$$\bar{A}_{\overset{1}{xy}} = \int_0^\infty v^s \cdot {}_sp_y \cdot {}_sp_x \cdot \mu_{x+s} ds$$

Z Taylora:

$$\bar{a}_{x+\frac{1}{12}:y} \approx \bar{a}_{x:y} + \frac{1}{12}\frac{d}{dx}\bar{a}_{x:y}$$

$$\frac{d}{dx}\bar{a}_{x:y} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^\infty v^t {}_tp_x {}_tp_y dt\right) = \int_0^\infty v^t {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t}) {}_tp_y dt =$$

$$= \int_0^\infty v^t {}_tp_x {}_tp_y \mu_x dt - \int_0^\infty v^t {}_tp_x {}_tp_y \mu_{x+t} dt =$$

$$= 0.02 \cdot \bar{a}_{x:y} - \bar{A}_{\overset{1}{xy}}$$

Stąd

$$6.98 \approx 7 + \frac{1}{12}(0.02 \cdot 7 - \bar{A}_{\overset{1}{xy}})$$

mamy:

$$\bar{A}_{\overset{1}{xy}} = 0.38$$

Zadanie 4.10 Rozważmy dwie osoby: jedną w wieku (x) a drugą w wieku (y). Załóżmy, że zmienne losowe $T(x)$ oraz $T(y)$ opisujące dalsze trwanie życia są niezależne. Dane są wartości: $E(T(x)) = 12$, $E(T(x:y)) = 9$, $Cov(T(x:y), T(\overline{x:y})) = 30$. Obliczyć $E(T(y))$. Wybrać odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 4.10 *Niech* $T(x) = X$, $T(y) = Y$

$$E(X) = 12$$

$$E(\min(X, Y)) = 9$$

W ogólności dla dwóch zmiennych losowych:

$$Cov(X \cdot Y) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY$$

W naszym przypadku

$$Cov(\min(X, Y), \max(X, Y)) = E(\min(X, Y)\max(X, Y)) - E(\min(X, Y)) \cdot E(\max(X, Y)) =$$

$$= \underbrace{E(XY)}_{EY \cdot EX} - E(min(X, Y)) \cdot (E(X) + E(Y) - E(\min(X, Y)))$$

$$30 = 12 \cdot EY - 9(12 + EY - 9)$$

Stąd

$$EY = 19$$

5 Egzamin z 31 maja 2010 r.

Zadanie 5.1 Niech $T(x)$ oznacza dalesze trwanie życia (x) oraz $K(x) = \lfloor T_x \rfloor$ niech oznacza część całkowitą $T(x)$. Niech dalej $e_x = E(K(x))$. Dane są: $e_x = 48.26$, $q_x = 0.00136$, $q_{x+1} = 0.00136$, $q_{x+2} = 0.00134$. Obliczyć e_{x+3}. Wskazać odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 5.1 *Wiemy, że*

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_tp_x$$

czyli:

$$e_x = {}_1p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \ldots$$

Dodatkowo wiemy, że:

$$_kp_x = p_x \prod_{i=1}^{k-1} p_{[x]+i}$$

czyli:

$$e_x = {}_1p_x + p_x p_{x+1} + p_x p_{x+1} p_{x+2} + \ldots$$

$$e_x = p_x + p_x(p_{x+1} + p_{x+1}p_{x+2} + \ldots) = p_x + p_x e_{x+1}$$

Stąd:

$$e_x = p_x + p_x(p_{x+1} + p_{x+1}(p_{x+2} + p_{x+2}e_{x+3}))$$

Mamy: $p_x = 1 - q_x = 0.99864$, $p_{x+1} = 0.99864$, $p_{x+2} = 99866$ *rozwiązujemy równanie i dostajemy:*

$$e_{x+3} \approx 45.45$$

Zadanie 5.2 Rozważmy ubezpieczenie spłaty kredytu hipotecznego 30 - letniego wysokości 1 zł, który zaciągnał (25) wylosowany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$. Intensywność oprocentowania kredytu wynosi $\Delta = 0.12$ w skali roku. Kredyt jest spłacany w postaci renty ciągłej z odpowiednio dobraną stałą intensywnością. W przypadku śmierci kredytobiorcy w ciągu najbliższych 30 lat ubezpieczyciel spłaci natychmiast kredytodawcy niespłaconą część kredytu. Obliczyć składkę jednorazową netto SJN za to ubezpieczenie. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.04$. Wybierz odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 5.2 Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki* $\omega = 100$ *lat. Rozkład* T_0 *jest jednostajny na przedziale* $[0, \omega]$. *Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$$
{}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}
$$

30-letnia renta ciągła (uwaga! nie jest to renta życiowa, kredyt to renta pewna):

$$
\bar{a}_{\overline{30}|} = \int_0^{30} e^{-0.12t} dt = 8.105635646
$$

$$
1 = \bar{P}\bar{a}_{\overline{30}|}
$$

Stąd

$$
\bar{P} = 1/\bar{a}_{\overline{30}|} = 0.1233709537
$$

W momencie k zostało do spłacenia jeszcze $\bar{P} \cdot \bar{a}_{\overline{30-k}|}$

$$
\bar{a}_{\overline{30-k}|} = \int_0^{30-k} e^{-0.12t} dt = \frac{e^{-0.12(30-k)} - 1}{-0.12} = A(k)
$$

Ubezpieczenia terminowe

$$
\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \underbrace{{}_tp_x \mu_{[x]+t}}_{f_x(t)} dt
$$

Gęstość w rozkładzie jednostajnym:

$$
f(t) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{75}
$$

mamy:

$$
\int_0^{30} \bar{P} \cdot (A(t))\, e^{-0.04t} \cdot \frac{1}{75} dt \approx 0.1925514022 \approx 0.19
$$

Zadanie 5.3 Osoba urodzona 1 lipca zawarła 1 października, w wieku $(x + \frac{1}{4})$ lat ubezpieczenie rentowe na 3 wypłaty po 10000 zł płatne w kolejne 3 daty 1 stycznia. Podaj jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie jeśli: $q_x = q_{x+1} = 0.12$, $q_{x+2} = 0.16$, $v = 0.95$ oraz śmiertelność w ciągu roku życia ma rozkład zgodny z hipotezą Balducciego. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 5.3 Hipoteza Balducciego *Rozkład T_x spełnia hipotezę Balducciego dla wieku x, jeżeli:*

$$
{}_{1-u}q_{[x]+n+u} = (1-u)q_{[x]+n}
$$

HB mówi, że prawdopodobieństwo tego, iż x-latek umrze przed końcem n-tego roku, pod warunkiem, że przeżyje cześć u tego roku, jest proporcjonalne do pozostąłej części roku, tj. $1-u$ Wzory:

$$
{}_{n+u}p_x = \frac{{}_{n+1}p_x}{1-(1-u)q_{[x]+n}}
$$

$$\mu_{[x]+n+u} = \frac{q_{[x]+n}}{1-(1-u)q_{[x]+n}}$$
$${}_{n+1}p_x = {}_{n+u}p_x \cdot {}_{1-u}p_{[x]+n+u}$$
$${}_{u}p_x = \frac{p_x}{u+(1-u)p_x}$$
$${}_{u}q_x = \frac{uq_x}{u+(1-u)p_x}$$

W zadaniu mamy:

$$JSN = 10000(v^{0.25}{}_{0.25}p_{x+0.25} + v^{1.25}{}_{1.25}p_{x+0.25} + v^{2.25}{}_{2.25}p_{x+0.25})$$

Wiemy, że:

$${}_{t}p_{x+s} = \frac{{}_{s+t}p_x}{{}_{s}p_x}$$
$${}_{0.25}p_{x+0.25} = \frac{{}_{0.5}p_x}{{}_{0.25}p_x} \approx 0.9680851064$$
$${}_{1.25}p_{x+0.25} = \frac{{}_{1.5}p_x}{{}_{0.25}p_x} \approx 0.8519148936$$
$${}_{2.25}p_{x+0.25} = \frac{{}_{2.5}p_x}{{}_{0.25}p_x} \approx 0.7311652174$$

Z HB:

$${}_{n+u}p_x = \frac{{}_{n+1}p_x}{1-(1-u)q_{[x]+n}}$$
$${}_{u}p_x = \frac{p_x}{u+(1-u)p_x}$$
$${}_{0.25}p_x = \frac{1-0.12}{0.25+0.75(1-0.12)} = 0.967032967$$
$${}_{0.5}p_x = \frac{1-0.12}{0.5+0.5(1-0.12)} = 0.9361702128$$
$${}_{1+0.5}p_x = \frac{p_x p_{x+1}}{1-(1-u)q_{[x]+n}} = \frac{(1-0.12)^2}{1-(1-0.5)0.12} = 0.8238297872$$
$${}_{2+0.5}p_x = \frac{p_x p_{x+1} p_{x+2}}{1-(1-u)q_{[x]+n}} = \frac{(1-0.12)^2 \cdot (1-0.16)}{1-(1-0.5)0.16} = 0.7070608696$$

Stąd

$$JSN \approx 24062$$

Zadanie 5.4 Rozważmy ubezpieczenie bezterminowe na życie dla (25), które jest opłacane za pomocą renty życiowej corocznych składek w wysokości netto P_{25}. Na koniec roku śmierci ubezpieczonego będzie wypłacona suma ubezpieczenia 1 zł. Korzystając z założenia UDD obliczyć rezerwę składek netto:

$${}_{34\frac{1}{2}}V_{25}$$

Dane są $i = 0.05$, $q_{59} = 0.02256$, $A_{25} = 0.147$, $A_{60} = 0.493$

Rozwiązanie 5.4 *Mamy:*

$$_kV_x = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x}$$

$$_{35}V_{25} = \frac{A_{60} - A_{25}}{1 - A_{25}} = 0.4056271981$$

Przy założeniu HU

$$_{k+u}V = \frac{v^{1-u}}{1 - u \cdot q_{[x]+k}} (q_{[x]+k} \cdot b_{k+1}(1-u) + p_{[x]+k} \cdot {}_{k+1}V)$$

$$_{34+\frac{1}{2}}V = \frac{v^{0.5}}{1 - 0.5 \cdot q_{59}} (q_{59} \cdot 1 \cdot (1 - 0.5) + p_{59} \cdot {}_{35}V) \approx 0.4024692053$$

Zadanie 5.5 Rozpatrujemy dyskretny typ n-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 1000 zł i składką płatną przez n lat ubezpieczenia. Po k latach ubezpieczenia ubezpieczony zaprzestał płacenia składek i może wybrać jeden z dwóch, aktuarialne równoważnych, sposobów konwersji swej polisy:

(1) bezterminowe ubezpieczenie na życie z sumą ubezpieczenia 1900 zł,

(2) terminowe, $(n-k)$-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie ze świadczeniem śmiertelnym S oraz sumą ubezpieczenia za dożycie 1000 zł. Wyznacz sumę ubezpieczenia za śmierć S. Dane są:

$$\frac{A_{x+k:\overline{n-k}|}}{A_{x+k}} = 1.6$$

$$\frac{A^{\,1}_{x+k:\overline{n-k}|}}{_{n-k}E_{x+k}} = 0.3$$

Rozwiązanie 5.5 *Mamy: Opcja 1*

$$_kV_x = 1900 \cdot A_{x+k}$$

Opcja 2

$$_kV_x = S \cdot A^{\,1}_{x+k:\overline{n-k}|} + 1000 \cdot A_{x+k:\overset{\,1}{\overline{n-k}|}}$$

Mamy:

$$\frac{A^{\,1}_{x+k:\overline{n-k}|}}{_{n-k}E_{x+k}} = 0.3$$

$$A^{\,1}_{x+k:\overline{n-k}|} = 0.3 A_{x+k:\overset{\,1}{\overline{n-k}|}}$$

Oraz

$$\frac{A_{x+k:\overline{n-k}|}}{A_{x+k}} = 1.6$$

Stąd

$$A_{x+k} = \frac{1.3}{1.6} A_{\stackrel{1}{x+k:\overline{n-k|}}}$$

Mamy:

$$1900 \cdot A_{x+k} = S \cdot A_{\stackrel{1}{x+k:\overline{n-k|}}} + 1000 \cdot A_{x+k:\overline{\stackrel{1}{n-k|}}}$$

$$S = \frac{1900 \cdot \frac{1.3}{1.6} A_{x+k:\overline{\stackrel{1}{n-k|}}} - 1000 \cdot A_{x+k:\overline{\stackrel{1}{n-k|}}}}{A_{\stackrel{1}{x+k:\overline{n-k|}}}} \approx 1812.5 \approx 1812$$

Zadanie 5.6 (25) płaci regularnie coroczne składki w wysokości P aż do osiągnięcia wieku 60. Od tego momenu zacznie otrzymywać emeryturę dożywotnią w wysokości 1 na rok. Dane są: $i = 0.05$, $Var(\Lambda_{33}) = 1.42026$, $N_{60} = 41942$, $D_{60} = 3940$ oraz $l_{25} = 96969$, $l_{58} = 76909$, $l_{59} = 75301$, $l_{60} = 73602$

Rozwiązanie 5.6 *Wiemy, że*

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$Var(\Lambda_k) = (c_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 \cdot v^2 \cdot {}_{k+1}p_x \cdot q_{x+k}$$

Kontrakt ubezpieczeniowy ogólnego typu

$${}_kV + \pi_k = v(c_{k+1} q_{x+k} + {}_{k+1}V \cdot p_{x+k})$$

Stąd (1)

$$\underbrace{Var(\Lambda_{33})}_{1.42026} = ({}_{34}V)^2 \cdot v^2 {}_{34}p_{25} \cdot q_{58}$$

$$\underbrace{Var(\Lambda_{33})}_{1.42026} = ({}_{34}V)^2 \cdot v^2 \frac{l_{59}}{l_{25}} \left(1 - \frac{l_{59}}{l_{58}}\right)$$

Stąd

$${}_{34}V = 9.820528801$$

ze wzoru rekurencyjnego na rezerwę:

$${}_{34}V + \underbrace{\pi_{34}}_{=P} = v(\underbrace{c_{k+1} q_{x+k}}_{=0} + \underbrace{{}_{k+1}V}_{=\ddot{a}_{60}} \cdot p_{59})$$

oraz $\ddot{a}_{60} = \frac{N_x}{D_x} = 10.64517766$*, mamy:* $P = 0.088988$

Zadanie 5.7 W modelu szkodowości dwojakiej dane są funkcje intensywności poszczególnych szkód:

$$\mu_{1,x+t} = \frac{2}{80 - t}, \qquad \mu_{2,x+t} = \frac{1}{\omega - t}$$

Wiadomo ponadto, że

$$Pr(J = 1) = Pr(J = 2)$$

Oblicz ω.

Rozwiązanie 5.7 *Prawdopodobieństwo wyjścia ze statusu dla x-latka przed upływem czasu t z przyczyny j*

$$ {}_tq_x^{(j)} = Pr(T_x \leqslant t, J_x = j) $$

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{[x]+s}^{(j)} ds $$

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{[x]+s}^{(\tau)} ds} $$

$$ \mu_{[x]+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{[x]+t}^{(j)} $$

Mamy:

$$ \mu_{[x]+t}^{(\tau)} = \frac{2}{80-t} + \frac{1}{\omega - t} $$

dla $t \in (0, \omega)$, *gdzie* $\omega < 80$

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \frac{2}{80-s} + \frac{1}{\omega-s} ds} = \frac{(80-t)^2(\omega-t)}{80^2\omega} $$

mamy:

$$ {}_tq_x^{(1)} = \int_0^{\omega} {}_sp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{[x]+s}^{(1)} ds = \int_0^{\omega} \frac{(80-s)^2(\omega-s)}{80^2\omega} \frac{2}{80-s} ds = \frac{40\omega - \frac{1}{6}\omega^2}{3200} $$

Wiemy, że

$$ Pr(J = 1) = Pr(J = 2) $$

stąd $Pr(J = 1) = 0.5$ *czyli*

$$ \frac{40\omega - \frac{1}{6}\omega^2}{3200} = 0.5 $$

$$ -\frac{1}{6}\omega^2 + 40\omega - 1600 = 0 $$

$$ X \approx 190, \qquad X \approx 50 $$

Odpowiedź to $\omega \approx 50$

Zadanie 5.8 Rozpatrujemy ciągły typ ubezpieczenia dla (x=65) oraz (y=60), które w pierwszych 5 latach ubezpieczenia wypłaca jednorazowo 10 000 w chwili śmierci (x), jeśli (y) żyje, a następnie (niezależnie od daty śmierci (x)) 5 lat po śmierci (x), jeśli (y) nadal żyje, zaczyna wypłacać (y) dożywotnią rente z intensywnością 10 000 na rok. Podaj jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, jeśli obydwa życia (x) i (y) są niezależne, mają wykładniczy rozkład czasu trwania życia $\mu_x = 0.03$, $\mu_y = 0.02$ oraz $\delta = 0.05$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 5.8 *Mamy:*

$$JSN = 10000\left(\int_0^5 v^t {}_tp_{xt}p_y\mu_{x+t} + A\right)$$

mamy

$$A = \int_5^\infty {}_{t-5}q_x v^t {}_tp_y dt = \int_0^\infty {}_tq_x v^{t+5} {}_{t+5}p_y dt = \int_0^\infty (1-e^{-0.03t})e^{-0.05(t+5)}e^{-0.02(t+5)}$$

$$JSN \approx 31381,32615$$

Wyjaśnienie dla A, ${}_tq_x$ - x umiera w momencie t, za 5 lat zaczynamy wypłacać rentę bierzemy prawdopodobieństwo przeżycia oraz dyskonto.

6 Egzamin z 4 października 2010 r.

Zadanie 6.1 Dane jest $q_x = 0.05$. Oblicz:

$$\bar{A}^1_{x:\overline{1}|}(UDD) - \bar{A}^1_{x:\overline{1}|}(CF)$$

gdzie UDD w pierwszym nawiasie oznacza, że odpowiednią składkę obliczeniu przy założeniu interpolacyjnym UDD(o jednostajnym rozkładzie śmierci w ciągu roku); natomiast CF w drugim nawiasie oznacza zastosowanie do obliczenia składki założenia o stałym natężeniu umierania między kolejnymi wiekami całkowitymi (constant force assumption). Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.08$.

Rozwiązanie 6.1 *Dla przypomnienia:*

Hipoteza jednostajności (HU)
Funkcja ${}_tp_x$ zmiennej t jest ciągła i liniowa w przedziałach $[n, n+1)$

$${}_{n+u}p_x = (1-u)_np_x + u \cdot {}_{n+1}p_x, \qquad 0 \leqslant u < 1$$

$$\mu_{[x]+n+u} = \frac{q_{[x]+n}}{1 - u \cdot q_{[x]+n}}$$

$${}_{n+u}p_x = {}_np_x(1 - u \cdot q_{[x]+n})$$

$${}_up_x = 1 - u \cdot q_x$$

$${}_uq_x = u \cdot q_x$$

Hipoteza przedziałami stałego natężenia zgonów (HCFM) *powiemy, że rozkład T_x spełnia hipotezę przedziałami stałego natężenia zgonów (constant force of mortality), jeżeli $\mu_{[x]+t}$ jest stałą funkcją zmiennej t w przedziałach $(n, n+1)$, $(n = 0, 1, \ldots)$; tj.*

$$\mu_{[x]+n+u} = \mu_{[x]+n}, \qquad 0 \leqslant u < 1$$

Przy założeniu HCFM:

$$\mu_{[x]+n+u} = \mu_{[x]+n} = -\log p_{[x]+n}, \qquad 0 \leqslant u < 1$$

$${}_{n+u}p_x = {}_np_x(p_{[x]+n})^u$$

$${}_up_x = (p_x)^u$$

$${}_uq_x = 1 - (p_x)^u$$

dla $0 \leqslant u < 1$

W zadaniu mamy:

$$\bar{A}^1_{x:\overline{1}|}(UDD) = \int_0^1 v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^1 e^{-\delta t}(1 - tq_x) \cdot \frac{q_x}{1 - tq_x} dt = \int_0^1 e^{-0.08t} 0.05 dt = 0.04805228351 = A$$

$$\bar{A}^1_{x:\overline{1}|}(CF) = \int_0^1 v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^1 e^{-\delta t}(1 - q_x)^u \cdot (-\log p_x) dt = 0.04806871389 = B$$

$$A - B = -0.000016430$$

Zadanie 6.2 Niech $\bar{A}_x(\omega,\delta)$ dla $0 < x < \omega$ oznacza składkę jednorazową netto za ubezpieczenie bezterminowe ciągłe dla (x) wypłacające 1 w chwili śmierci, przy czym (x) jest wylosowany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym ω, a techniczna intensywność oprocentowania użyta w rachunkach wynosi $\delta > 0$. Jeśli

$$\bar{A}_x(\omega+\Delta\omega,\delta+\Delta\delta) = \bar{A}_x(\omega,\delta)$$

to mamy przybliżoną równość: ODP D

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta\omega} = -\frac{\delta}{\omega - x}$$

Rozwiązanie 6.2 Wzór Taylora

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{d}{dx}f(a,b)(x-a) + \frac{d}{dy}f(a,b)(y-b)$$

Czyli

$$\bar{A}_x(\omega+\Delta\omega,\delta+\Delta\delta) \approx \bar{A}_x(\omega,\delta) + \frac{d}{d\omega}\bar{A}_x(\omega,\delta)\cdot\Delta\omega + \frac{d}{d\delta}\bar{A}_x(\omega,\delta)\cdot\Delta\delta$$

Stąd

$$\frac{d}{d\omega}\bar{A}_x(\omega,\delta)\cdot\Delta\omega = -\frac{d}{d\delta}\bar{A}_x(\omega,\delta)\cdot\Delta\delta$$

mamy:

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t {}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

gęstość w rozkładzie jednostajnym $f_x(t) = \frac{1}{\omega-x}$ *(założenie o populacji de Moivre'a). Mamy:*

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} e^{-\delta t}\frac{1}{\omega-x}dt = \frac{1-e^{-\delta(\omega-x)}}{(\omega-x)\delta}$$

Obliczamy pochodne i podstawiamy by uzyskać $\frac{\Delta\delta}{\Delta\omega}$

Zadanie 6.3 Rozpatrujemy ciągły model ubezpieczenia na życie dla osoby (50) z populacji de Moivre'a z parametrem $\omega = 100$. Jeśli ubezpieczony umrze w wieku (50+t), to polisa zaczyna wypłacać uposażonym rentę płatną z roczną intensywnością 10 000 przez okres przeciętnego dalszego trwania życia osoby w wieku (50+t). Oblicz jednorazową składkę netto w tym ubezpieczeniu dla $\delta = 0.05$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 6.3 Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki* $\omega = 100$ *lat. Rozkład* T_0 *jest jednostajny na przedziale* $[0,\omega]$. *Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

W zadaniu: Przeciętna dalsza długość trwania życia w rozkładzie jednostajnym to średnia: $n = \frac{a+b}{2}$, górna granica dla t to $\omega - 50 - t$ dolna to 0 czyli mamy $n = \frac{100-50-t+0}{2} = \frac{50-t}{2}$ Renta:

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} = \frac{1 - e^{-\delta \frac{50-n}{2}}}{\delta}$$

Mamy ubezpieczenie:

$$JSN = 10000 \int_0^{50} \bar{a}_{\overline{t}|} \cdot v^t \underbrace{_tp_x \mu_{x+t}}_{f_x(t) = \frac{1}{50}} dt = 10000 \int_0^{50} e^{-0.05t} \frac{1 - e^{-0.05 \frac{50-t}{2}}}{0.05} \frac{1}{50} \approx 40726.03 \approx 40730$$

Zadanie 6.4 Rozważamy dyskretny typ bezterminowego ubezpieczenia na życie (50) z rosnącą sumąubezpieczenia $Z(k+1) = S + B(k+1)$, gdzie S jest kwotą bazową, a $B(k+1)$ bonusem na koniec $k+1$ roku ubezpieczenia. W momencie wystawienia polisy $B(0) = B$, a następnie przed każdą n-tą rocznicą polisy bonus zwiększa się do poziomu $B(n) = a \cdot S + (1+b) \cdot B(n-1)$. Przykładowo, śmierć w pierwszym roku ubezpieczenia spowoduje wypłatę na koniec roku w wysokości $Z(1) = S + a \cdot S + (1+b) \cdot B$. Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, jeśli $S = 100000$, $B = 10000$, $a = 3\%$, $b = 4\%$, $i = 5\%$ a ubezpieczeni pochodzą z populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem $\omega = 90$ lat. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 6.4

$$JSN = \sum_{k=0}^{39} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k} \cdot Z(k+1)$$

$$_kp_{50} \cdot q_{50+k} = \frac{1}{40}$$

Populacja de Moivre'a: $s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$, $\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$, $_tp_x = 1 - \frac{t}{\omega - x}$. Mamy:

$$B(0) = 0$$

$$B(k+1) = 3\% \cdot 100000 + (1.04) \cdot B(k)$$

$$B(1) = 3000 + (1.04) \cdot B$$

$$B(2) = 3000 + (1.04) \cdot (3000 + (1.04) \cdot B) = 3000 \cdot (1 + 1.04) + (1.04)^2$$

$$B(3) = 3000 + (1.04) \cdot (3000(1 + 1.04) + (1.04)^2 \cdot B) = 3000 \cdot (1 + 1.04 + 1.04^2) + 1.04^3 \cdot B$$

$$B(k) = 3000 \cdot \sum_{s=0}^{k-1} (1.04)^k + 1.04^k \cdot B$$

W naszym zadaniu:

$$s_{\overline{n}|} = (1+b)^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{(1+b)^n - 1}{b}$$

$$JSN = \sum_{k=0}^{39} (\frac{1}{1.05})^{k+1} \cdot \frac{1}{40} \cdot (100000 + B(k+1)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{39} (\frac{1}{1.05})^{k+1} \cdot \frac{1}{40} \cdot (100000 + 3000 \cdot \frac{1.04^{k+1} - 1}{0.04} + 10000 \cdot (1.04)^{k+1}) \approx 81000$$

Zadanie 6.5 Rozważmy ubezpieczenie kredytu hipotecznego w wysokości 1, który został udzielony (x) wylosowanemu z populacji wykładniczej z natężeniem umierania $\mu = 0.01$. Kredyt ten będzie spłacany za pomocą renty ciągłej 30-letniej, przy czym intensywność raty spłacającej kaptiał jest stała. Gdy kredytobiorca umrze w ciągu najbliższych 30 lat to ubezpieczyciel wypłaci bankowi sumę ubezpieczenia równą saldu kredytu w chwili śmierci. Oblicz składkę jednorazową netto przyjmując techniczną intensywność oprocentowania na poziomie $\delta = 0.03$

Rozwiązanie 6.5 *Rata kapitałowa jest stała, wobec tego* $K = \frac{1}{30}$. *W momencie śmierci spłacane jest saldo kredytu czyli w momencie* t *mamy*

$$S_t = 1 - \frac{t}{30}$$

. Mamy JSN:

$$JSN = \int_0^{30} S_t \cdot e^{-\delta t} \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Dla przypomnienia:

Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że* T_x *ma rozkład wykładniczy z gęstością* $\mu e^{-\mu t}$. *Wtedy*

$${}_t p_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

Mamy:

$$JSN = \int_0^{30} \left(1 - \frac{t}{30}\right) e^{-0.03t} \cdot e^{-0.01t} 0.01 dt = 0.1044154608 \approx 0.1044$$

Zadanie 6.6 Rozważamy model ciągły ubezpieczenia dla (x), które polega na tym, że jeżeli umrze on przed osiągnięciem wieku $m > x$ to uposażeni otrzymają sumę ubezpieczenia $c_1 > 0$ w chwili śmierci. Natomiast jeśli umrze on w wieku późniejszym niż m to w chwili śmierci będzie wypłacona suma ubezpieczenia

$x_2 > 0$. składka za to ubezpieczenie jest płacona w formie renty życiowej ciągłej przy czym do wieku m intensywność składki wynosi $\bar{P}_1 > 0$ a potem $\bar{P})2 > 0$. Wówczas skok pochodnej funkcji $V(t)$ w punkcie $t_0 = m - x$ dobrze przybliża formuła:

Rozwiązanie 6.6 *Mamy równanie Thielego:*

$$\frac{d_t \bar{V}}{dt} = \bar{\pi}\,(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})_t \bar{V} - b(t)\mu_{[x]+t}$$

gdzie: $b(t)$ - suma ubezpieczenia, $\overline{\pi}(t)$ - intensywność płacenia składki

Dla przypomnienia rezerwa w ubezpieczeniu terminowym:

$$_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}^{\;1}_{[x]+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}$$

Niech $t < m - x$ mamy ubezpieczenie składające się z dwóch części każda ma rezerwę oznaczmy je $V_1(t)$ oraz $V_2(t)$. Mamy:

$$V_1(t) = c_1 \cdot \bar{A}^{\;1}_{[x]+t:\overline{m-x-t}|} - \bar{P}_1 \bar{a}_{x+t:\overline{m-x-t}|}$$

$$V_2(t) = c_2 \cdot v^{m-x-t}{}_{m-x-t}p_{x+t} \cdot \bar{A}_m - \bar{P}_2 \cdot v^{m-x-t}{}_{m-x-t}p_{x+t}\bar{a}_m$$

mamy $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ Niech $t > m - x$ wtedy

$$V_3(t) = c_2 \cdot \bar{A}_{x+t} - \bar{P}_2 \bar{a}_{x+t}$$

$$\lim_{t \to t_0^+} V'(t) = (\delta + \mu_m) \lim_{t \to t_0^+} V_3(t) + \bar{P}_2 - c_2\mu_m$$

$$\lim_{t \to t_0^-} V'(t) = (\delta + \mu_m) \lim_{t \to t_0^-} V(t) + \bar{P}_1 - c_1\mu_m$$

W granicy $V_1(t)$ się zeruje, a $V_2(t)$ zbliża do $V_3(t)$

$$\lim_{t \to t_0^+} V'(t) = (\delta + \mu_m)(c_2\bar{A}_m - \bar{P}_2\bar{a}_m) + \bar{P}_2 - c_2\mu_m$$

$$\lim_{t \to t_0^-} V'(t) = (\delta + \mu_m)(c_2\bar{A}_m - \bar{P}_2\bar{a}_m) + \bar{P}_1 - c_1\mu_m$$

Wychodzi:

$$\lim_{t \to t_0^+} V'(t) - \lim_{t \to t_0^-} V'(t) = \bar{P}_2 - \bar{P}_1 + \mu_m(c_1 - c_2)$$

Zadanie 6.7 Rozważmy emeryturę małżeńską dla (x) i (y), która zacznie wypłacać natymiast według następujących reguł. Póki żyją oboje otrzymują emeryturę z intensywnością $A > 0$. Po pierwszej śmierci owdowiała osoba będzie nadal otrzymywać emeryturę z intensywnością A, ale tylko przez 3 lata (lub krócej, gdy umrze w ciągu tych trzech lat). Po upływie trzech lat od pierwszej śmierci owdowiała osoba (o ile żyje) otrzymuje emeryturę z intensywnością $B < A$. Który z podanych wzorów na SJN jest prwadziwy? Zakładamy, że nie ma wieku granicznego oraz, że $T(x)$ i $T(y)$ są niezależne. Do rachunków użyto technicznej intensywności oprocentowania na poziomie $\delta > 0$

Rozwiązanie 6.7 *Przykład wprowadzający: Wyznaczyć wartość aktuarialną renty ciągłej, której wypłata rozpoczyna się w chwili śmierci osoby (y) i trwa przez 5 lat lub krócej, jeśli wcześniej nastąpi śmierć osoby (x).*

Następujące sformułowanie warunku dokonania płatności: wypłata dokonywana tylko wtedy, gdy (x) żyje, (y) już nie żyje, ale nie dłużej niż od 5 lat, można wyrazić w postaci wzoru

$$WA = \int_0^\infty v^t {}_tp_x({}_{t-5}p_y - {}_tp_y)dt$$

Mamy:

$$Pr(t-5 < T_y \leqslant t-5+5) = {}_{t-5}p_y - {}_tp_y$$

czyli prawdopodobieństwo, że przeżył $t-5$ i umarł w ciągu 5 lat.

Ponieważ dla $t \leqslant 5$

$${}_{t-5}p_y = 1$$

więc

$$WA = \int_0^5 v^t {}_tp_x(1 - {}_tp_y)dt + \int_5^\infty v^t {}_tp_x({}_{t-5}p_y - {}_tp_y)dt$$

Zadanie 6.8 Rozważmy roczne ubezpieczenie na życie wypłacające świadczenie śmiertelne 100 000 zł na koniec roku. Osoba (x) jest narażona na dwa ryzyka śmierci:
(1) standardowe ryzyko śmierci,
(2) ryzyko związane z uprawianym przez tą osobę esktremalnym sportem.
Wiadomo, że dla stopy technicznej $i = 0$ polisa wypłacająca tej osobie świadczenie tylko w przypadku zwykłej śmierci miałaby składkę netto 10 000 zł, natomiast polisa obejmująca wyłącznie śmierć w wyniku ekstremalnego sportu - składkę 30 000 zł. Każde z dwóch ryzyk ma jednostajny rozkład zgonów w ciągu roku. Podaj jednorazową składkę netto w analogicznym ubezpieczeniu dla osoby, która nie uprawia sportów ekstremalnych. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 6.8 *Mamy:*

$$100000 P(T < 1, J = 1) = 10000$$

Stąd $P(T < 1, J = 1) = 0.1$

$$100000 P(T < 1, J = 2) = 30000$$

stąd $P(T < 1, J = 2) = 0.3$

$$30000 = 100000 \cdot v \cdot q_x^{(2)}$$

$$P(T < t, J = 1) = {}_tq_x^{(j)} \underbrace{=}_{UD} t \cdot q_x^{(1)}$$

$$P(T < t, J = 2) = {}_tq_x^{(j)} \underbrace{=}_{UD} t \cdot q_x^{(2)}$$

$$q_x^{(1)} = 0.1$$

$$q_x^{(2)} = 0.3$$

Wiemy, że

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+s}^{(j)} ds$$

Stąd dla $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\frac{d({}_tq_x^{(j)})}{dt} = \frac{d(t \cdot q_x^{(j)})}{dt} = q_x^{(j)} = {}_tp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)}$$

dodatkowo

$${}_tq_x^{(\tau)} = Pr(T_x \leqslant t) = Pr(T_x \leqslant t, J = 1) + Pr(T_x \leqslant t, J = 1) = 0.4 \cdot t$$

$${}_tp_x^{(\tau)} = 1 - 0.4 \cdot t$$

stąd

$$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{0.1}{1 - 0.4 \cdot t}$$

mamy

$${}_1p_x^{'(1)} = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^{(1)} dt} = e^{-\int_0^1 \frac{0.1}{1-0.4 \cdot t} dt} = 0.8801114368$$

Stąd

$$q_x^{'(1)} = 1 - 0.8801117368 = 0.1198882632$$

$$JSN = 100000 \cdot 0.1198882632 \approx 12000$$

Zadanie 6.9 Rozważamy osobę (x) wychodzącą z OFE z kapitałem K i kupującą dożywotnią emeryturę z gwarantowanym okresem wypłat n. Gwarantowany okres jest dobrany tak, by suma wypłat (bez oprocentowania) osiągnęła co najmniej 0.8 kapitału K. Przyjmij ciągły model wypłat emerytalnych.podaj w miesiącach długość okresu gwarancyjnego, jeżeli emeryt pochodzi z populacji o wykładniczym czasie trwania życia z $\mu = 0.15$ oraz $\delta = 0.05$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 6.9 *Niech P - intensywność emerytury. Mamy z treści:*

$$Pn = 0.8K$$

Stąd

$$K = \frac{Pn}{0.8}$$

$$K = \int_0^n Pv^t dt + v^n \cdot {}_np_x \int_0^\infty Pv^t \cdot {}_tp_{x+n} dt$$

Dla przypomnienia:

Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że* T_x *ma rozkład wykładniczy z gęstością* $\mu e^{-\mu t}$. *Wtedy*

$$_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

$$K = \int_0^n Pe^{-0.05t}dt + e^{-0.05n}e^{-0.15n}\int_0^\infty Pe^{-0.05t}\cdot e^{-0.15t}dt =$$

$$= P\left(\frac{1-e^{-0.05n}}{0.05}\right) + Pe^{-0.2n}\frac{1}{0.2} = P(20 - 20e^{-0.05n} + 5e^{-0.2n})$$

Mamy:

$$\frac{Pn}{0.8} = P(20 - 20e^{-0.05n} + 5e^{-0.2n})$$

$$n = 0.8\cdot(20 - 20e^{-0.05n} + 5e^{-0.2n})$$

Rozwiązujemy równanie (kalkulator)

$$n \approx 5.015953145$$

Odpowiedź $12\cdot n \approx 60.19143774 \approx 60$

7 Egzamin z 13 grudnia 2010 r.

Zadanie 7.1 Niech $\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = E(\min(T(x), n))$ oznacza średnią liczbę lat życia, które przeżyje (x) wylosowany z rozważanej populacji, w ciągu najbliższych n lat. Dane są: $\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = 21$, $\mu_x = 0.015$, $l_x = 86752$, $l_{x+n} = 12469$.
Oblicz przybliżoną wartość $\mathring{e}_{x-\frac{1}{12}:\overline{n}|}$. Wybierz najbliższą wartość.

Rozwiązanie 7.1 Wzór Taylora

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \ldots + R_n(x,a)$$

niech $a = x + 12$

$$\mathring{e}_{x-\frac{1}{12}:\overline{n}|} = \mathring{e}_{x:\overline{n}|} + \frac{x - x - \frac{1}{12}}{1!} \cdot (\mathring{e}_{x:\overline{n}|})' = \mathring{e}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{12}\frac{d}{dx}(\mathring{e}_{x:\overline{n}|}) \qquad (1)$$

Z reguły Leibnitza:

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx \Rightarrow I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

mamy

$$\frac{d}{dx}(\mathring{e}_{x:\overline{n}|}) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^n {}_tp_x dt\right) = \int_0^n \frac{d}{dx}({}_tp_x)dt$$

$$\frac{d}{dx}({}_tp_x) = ?$$

Wiemy, że

$${}_tp_x = e^{\left(-\int_0^t \mu_{[x]+u}du\right)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\int_0^t \mu_{[x]+u}du}\right) = \underbrace{e^{-\int_0^t \mu_{[x]+u}du}}_{{}_tp_x} \cdot \frac{d}{dx}\left(-\int_0^t \mu_{[x]+u}du\right) = {}_tp_x \cdot \frac{d}{dx}\left(-\int_x^{x+t} \mu_s ds\right) =$$

$$= {}_tp_x \cdot (\mu_x - \mu_{x+t}) = {}_tp_x\mu_x - {}_tp_x\mu_{x+t}$$

stąd:

$$\int_0^n \frac{d}{dx}({}_tp_x)dt = \int_0^n {}_tp_x\mu_x dt - \underbrace{\int_0^n {}_tp_x\mu_{x+t}dt}_{{}_nq_x} = \mu_x \cdot \underbrace{\int_0^n {}_tp_x dt}_{\mathring{e}_{x:\overline{n}|}} - {}_nq_x = \mu_x\mathring{e}_{x:\overline{n}|} - {}_nq_x$$

Pamiętając, że ${}_np_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$ *podstawiamy do* (1) *i mamy:*

$$\mathring{e}_{x-\frac{1}{12}:\overline{n}|} = 21.0451057 \approx 21.045$$

Zadanie 7.2 Rozpatrujemy ubezpieczenie bezterminowe ciągłe dla (x), odroczone o m lat. Wypłaci ono 1 w chwili śmierci, ale tylko wtedy, gdy ubezpieczony dożyje do wieku $x + m$. ubezpieczenie to będzie opłacane za pomocą m-letniej renty życiowej ciągłej składek o odpowiednio dobranej stałej gęstości $\bar{P}$. Wówczas prawdziwy jest wzór:

ODP
$$\frac{d\bar{P}}{dm} = -v^m {}_m p_x (\bar{P}(A_{x:\overline{m}|}) + \delta)(\mu_{x+m} + \bar{P})$$

Rozwiązanie 7.2 *Wiemy, że:*

$${}_{m|}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$$

czyli

$$\bar{P}({}_{m|}\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{m}|}}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}}$$

$$\frac{d\bar{P}({}_{m|}\bar{A}_x)}{dm} = \frac{(\bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{m}|})'\bar{a}_{x:\overline{m}|} - (\bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{m}|})(\bar{a}_{x:\overline{m}|})'}{(\bar{a}_{x:\overline{m}|})^2} = (*)$$

Z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego:

$$(\bar{A}^1_{x:\overline{m}|})' = \left(\int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{[x]+t} dt\right)' = v^m {}_m p_x \mu_{[x]+m} = A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1} \mu_{[x]+m}$$

$$(\bar{a}_{x:\overline{m}|})' = \left(\int_0^n v^t {}_t p_x dt\right)' = v^m {}_m p_x = A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1}$$

$$(*) = \frac{-A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1}\mu_{[x]+m}\bar{a}_{x:\overline{m}|} - (\bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{m}|})A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1}}{(\bar{a}_{x:\overline{m}|})^2} =$$

$$= -A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1}\bar{a}_{x:\overline{m}|}\frac{\mu_{[x]+m} + \frac{\bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{m}|}}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}}}{(\bar{a}_{x:\overline{m}|})^2} = -A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1}\frac{\mu_{[x]+m} + \bar{P}}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}} = (*)$$

Wiemy, że (wzór):

$$\frac{\mathbf{1}}{\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}:\overline{m}|}} = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{m}|}) + \delta$$

Stąd

$$(*) = \frac{d\bar{P}}{dm} = -v^m {}_m p_x (\bar{P}(A_{x:\overline{m}|}) + \delta)(\mu_{x+m} + \bar{P})$$

Zadanie 7.3 Osoba urodzona 2 lipca kupuje w wieku $(x + \frac{1}{2})$ 20-letnią rentę życiową, wypłacającą 10 000 zł każdego 2 stycznia (od zaraz). Podaj jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, jeżeli: $\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 7.8149$, $q_x = 0.0505$, ${}_{20}q_x = 0.9070$, $i = 0.05$. Przyjmij, że śmiertelność ma jednostajny rozkład w każdym roczniku. Zwróć uwagę na dokładność obliczeń. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 7.3 Hipoteza jednostajności (HU)
Funkcja ${}_tp_x$ *zmiennej* t *jest ciągła i liniowa w przedziałach* $[n, n+1)$

$$ {}_{n+u}p_x = (1-u)_n p_x + u \cdot {}_{n+1}p_x, \qquad 0 \leqslant u < 1 $$

$$ \mu_{[x]+n+u} = \frac{q_{[x]+n}}{1 - u \cdot q_{[x]+n}} $$

$$ {}_{n+u}p_x = {}_np_x(1 - u \cdot q_{[x]+n}) $$

$$ {}_up_x = 1 - u \cdot q_x $$

$$ {}_uq_x = u \cdot q_x $$

Obliczyć: $\ddot{a}_{x+0.5:\overline{20}|}$

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x $$

$$ \ddot{a}_{x+0.5:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_{x+0.5} = (*) $$

Wiemy, że:

$$ {}_tp_{[x]+s} = \frac{{}_{s+t}p_x}{{}_sp_x} $$

oraz

$$ {}_{n+u}p_x = {}_np_x(1 - u \cdot q_{[x]+n}) $$

mamy:

$$ {}_tp_{[x]+\frac{1}{12}} = \frac{{}_{0.5+t}p_x}{{}_{0.5}p_x} = \frac{{}_tp_x(1 - 0.5q_{[x]+t})}{1 - 0.5q_x} $$

$$ (*) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_{x+0.5} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \frac{{}_kp_x(1 - 0.5q_{[x]+k})}{1 - 0.5q_x} = $$

$$ = \frac{1}{1 - 0.5q_x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_tp_x - 0.5 \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_tp_x q_{[x]+t} \right) = (*) $$

Ubezpieczenia terminowe

$$ A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{[x]+k} $$

$$ (*) = \frac{1}{1 - 0.5q_x} \left(\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{2v} \right) = (*) $$

Zachodzą zależności:

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} $$

stąd

$$ A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} $$

mamy

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$
$$A^1_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$
$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = v^n {}_np_x$$

czyli

$$\mathbf{A^1_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - v^n {}_np_x}$$

$$A^1_{x:\overline{20}|} = 1 - \frac{0.05}{1.05}\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - \left(\frac{1}{1.05}\right)^{20}(1 - {}_{20}q_x) = 0.5928111829$$

Mamy

$$(*) = 7.698049889$$

Odpowiedź to $10000 \cdot 7.698049889 \approx 76980$

Zadanie 7.4 Rozważmy model ciągły ubezpieczenia ogólnego typu dla (x), gdzie x jest liczbą całkowitą. Wiadomo, że dla każdego $t \in (25, 26)$ mamy: $\pi(t) \equiv const \equiv 0.17$, $c(t) \equiv const = 5$, $q_{x+25} = 0.03$, $\delta = 0.02$. Wiedząc, że $\bar{V}(25) = 2$ obliczyć przybliżoną wartość $\bar{V}(25\frac{3}{4})$. Wskazówka: Można skorzystać z założenia interpolacyjnego CF (constant force). Wybierz odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 7.4 Hipoteza przedziałami stałego natężenia zgonów (HCFM) *powiemy, że rozkład T_x spełnia hipotezę przedziałami stałego natężenia zgonów (constant force of mortality), jeżeli $\mu_{[x]+t}$ jest stałą funkcją zmiennej t w przedziałach $(n, n+1)$, $(n = 0, 1, \ldots)$; tj.*

$$\mu_{[x]+n+u} = \mu_{[x]+n}, \qquad 0 \leqslant u < 1$$

Przy założeniu HCFM:

$$\mu_{[x]+n+u} = \mu_{[x]+n} = -\log p_{[x]+n}, \qquad 0 \leqslant u < 1$$
$${}_{n+u}p_x = {}_np_x(p_{[x]+n})^u$$
$${}_up_x = (p_x)^u$$
$${}_uq_x = 1 - (p_x)^u$$

dla $0 \leqslant u < 1$

Mamy równianie Thielego:

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = \bar{\pi}\,(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})_t\bar{V} - b(t)\mu_{[x]+t}$$

gdzie: $b(t)$ *- suma ubezpieczenia,* $\overline{\pi}(t)$ *- intensywność płacenia składki.*

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = 0.17 + (0.02 + \mu_{[x]+t}) \cdot {}_t\underbrace{\bar{V}}_{=2} - 5 \cdot \mu_{[x]+t}$$

Wiemy, że

$$\mu_{[x]+n+u} = \mu_{[x]+n} = -\log p_{[x]+n} = -\log(1 - \underbrace{q_{x+25}}_{0.03}) = 0.03045920748$$

$$\bar{V}(25)' = 0.1186223775$$

Ze wzoru Taylora:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{x-a}{1!} f^{(1)}(a)$$

Niech $x = 25\frac{3}{4}$, $a = 25$

$$\bar{V}(x) \approx \underbrace{\bar{V}(25)}_{2} + \frac{0.75}{1!} \bar{V}'(a)_{a=25} \approx 2.088966783 \approx 2.09$$

Zadanie 7.5 Rozważmy ubezpieczenie malejące 30-letnie dla (25), które będzie opłacane w formie 30-letniej renty zyciowej składek o tej samej corocznej wysokości P. W przypadku śmierci ubezpieczonego w ciągu najbliższych 30 lat, na koniec roku śmierci zostanie wypłacona kwota $30 - [T(25)]$, gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej y. oblicz ${}_{15}V$, czyli rezerwę składek netto po 15 latach trwania ubezpieczenia. Dane są: $i = 5\%$, $D_x = 28635$, $D_{x+15} = 13260$, $D_{x+30} = 5548$, $M_x = 4198$, $M_{x+15} = 3508$, $M_{x+30} = 2389$, $(DA)^1_{x:\overline{15}|} = 0.180129$, $R_{x+15} = 81074$, $R_{x+30} = 35783$

Rozwiązanie 7.5 *Z treści zadania mamy:*

$$P \cdot \ddot{a}_{25:\overline{30}|} = (DA)^1_{25:\overline{30}|}$$

mamy obliczyć ${}_{15}V$*:*

$${}_{15}V = (DA)^1_{40:\overline{15}|} - P \cdot \ddot{a}_{40:\overline{15}|}$$

Wiemy, że

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

Znamy powiązanie z funkcjami komutacyjnymi:

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x}$$

mamy:

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} + (DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1+n-k) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (n+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = (n+1) A^1_{x:\overline{n}|}$$

Stąd

$$(DA)^{1}_{40:\overline{15}|} = (15+1)A^{1}_{40:\overline{15}|} - (IA)^{1}_{40:\overline{15}|} =$$

$$= 16 \cdot \frac{M_{40} - M_{55}}{D_{40}} - \frac{R_{40} - R_{55} - 15 \cdot M_{55}}{D_{40}} \approx 704/1105$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{15}|} = \frac{1 - A^{1}_{40:\overline{15}|}}{d} = \frac{1 - \frac{M_{40} - M_{55} + D_{55}}{D_{40}}}{d} \approx 10.44140271$$

Zostaje P :

$$P = \frac{(DA)^{1}_{25:\overline{30}|}}{\ddot{a}_{25:\overline{30}|}}$$

$$(DA)^{1}_{25:\overline{30}|} = ?$$

Wyznaczmy wzór ogólny:

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^{k+1} {}_{k}p_x q_{x+k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} (n-k) v^{k+1} {}_{k}p_x q_{x+k}}_{=A} + \underbrace{\sum_{k=s}^{n-1} (n-k) v^{k+1} {}_{k}p_x q_{x+k}}_{B} =$$

mamy

$$A = \sum_{k=0}^{s-1} \underbrace{n}_{n=s+(n-s)} v^{k+1} {}_{k}p_x q_{x+k} - \sum_{k=0}^{s-1} k v^{k+1} {}_{k}p_x q_{x+k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} (s-k) v^{k+1} {}_{k}p_x q_{x+k}}_{(DA)^{1}_{x:\overline{s}|}} + (n-s) \underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} v^{k+1} {}_{k}p_x q_{x+k}}_{A^{1}_{x:\overline{s}|}}$$

$$B = \sum_{k=0}^{n-1-s} (n-k-s) v^{k+1+s} {}_{k+s}p_x q_{x+k+s} = (*)$$

wiemy, że ${}_{x+s}p_x = {}_{x}p_{x+s} \cdot {}_{s}p_x$

$$(*) = v^s {}_{s}p_x \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1-s} (n-k-s) v^{k+1} {}_{k}p_{x+s} q_{x+k}}_{(DA)^{1}_{x+s:\overline{s}|}}$$

W naszym przypadku:

$$(DA)^{1}_{25:\overline{30}|} = (DA)^{1}_{25:\overline{15}|} + 15 \cdot A^{1}_{25:\overline{15}|} + v^{15} {}_{15}p_{25} \cdot (DA)^{1}_{40:\overline{15}|} =$$

mamy:

$$P = \frac{(DA)^{1}_{25:\overline{30}|}}{1 - A^{1}_{25:\overline{30}|}} \cdot d = \frac{(DA)^{1}_{25:\overline{15}|} + 15 \frac{M_{25} - M_{40}}{D_{25}} + \frac{D_{40}}{D_{25}} \cdot (DA)^{1}_{40:\overline{15}|}}{1 - \frac{M_{25} - M_{55} + D_{55}}{D_{25}}} \cdot d =$$

$$= \frac{0.180129 + 15 * \frac{4198-3508}{28635} + \frac{13260}{28635} \cdot \frac{704}{1105}}{1 - \frac{4198-2389+5548}{28635}} \cdot \frac{0.05}{1.05} \approx 0.0536122575$$

$$_{15}V = (DA)^{1}_{40:\overline{15|}} - P \cdot \ddot{a}_{40:\overline{15|}}$$

$$_{15}V = \frac{704}{1105} - 0.0536122575 * 10.44140271 \approx 0.077$$

Zadanie 7.6 Rozpatrujemy dyskretny model 30-letniego ubezpieczenia na życie ze składką roczną 1000 zł płatną na początku roku przez cały okres ubezpiecenia. Podaj wysokość sumy ubezpieczenia, jeśli po 10 latach rezerwa składek netto osiągnęła 6965 zł. Dane są: $N_x = 1818855$, $N_{x+10} = 872015$, $N_{x+11} = 804490$, $M_x = 29778$, $M_{x+10} = 23925$, $M_{x+11} = 23241$.

Rozwiązanie 7.6 *Składka:*

$$P(A^1_{x:\overline{n|}}) = S \cdot \frac{A^1_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

$$S = \frac{1000 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{A^1_{x:\overline{n|}}}$$

Wiemy, że:

$$A^1_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Stąd (1)

$$S = 1000 \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{M_x - M_{x+n}} \underbrace{=}_{n=30} 1000 \cdot \frac{N_x - N_{x+30}}{M_x - M_{x+30}}$$

Rezerwa:

$$_tV(A^1_{x:\overline{n|}}) = S \cdot A^{\ \ 1}_{x+k:\overline{n-k|}} - P(A^1_{x:\overline{n|}})\ddot{a}_{[x]+k:\overline{n-k|}}$$

$$\underbrace{_{10}V(A^1_{x:\overline{30|}})}_{6965} = S \cdot \underbrace{A^{\ \ 1}_{x+10:\overline{20|}}}_{=\frac{M_{x+10}-M_{x+30}}{D_{x+10}}} - \underbrace{P(A^1_{x:\overline{30|}})}_{1000} \underbrace{\ddot{a}_{[x]+10:\overline{20|}}}_{=\frac{N_{x+10}-N_{x+30}}{D_{x+10}}}$$

Stąd (2)

$$6965 = S \cdot \frac{M_{x+10} - M_{x+30}}{D_{x+10}} - 1000 \cdot \frac{N_{x+10} - N_{x+30}}{D_{x+10}}$$

$$S = \frac{\left(6965 + 1000 \cdot \frac{N_{x+10}-N_{x+30}}{D_{x+10}}\right) \cdot D_{x+10}}{M_{x+10} - M_{x+30}} = \frac{6965D_{x+10} + 1000N_{x+10} - 1000N_{x+30}}{M_{x+10} - M_{x+30}}$$

Mamy:
(1)

$$S(M_x - M_{x+30}) = 1000 \cdot (N_x - N_{x+30})$$

(2)

$$S(M_{x+10} - M_{x+30}) = 6965D_{x+10} + 1000N_{x+10} - 1000N_{x+30}$$

Po odjęciu stronami:

$$S = \frac{1000N_x - 6965D_{x+10} - 1000N_{x+10}}{M_x - M_{x+10}}$$

$$D_{x+10} = ?$$

$$\mathbf{D_{x+k} = N_{x+k} - N_{x+k+1}}$$

Stąd:

$$S \approx 81416.09 \approx 81420$$

Zadanie 7.7 Rozpatrujemy dyskretny model bezterminowego ubezpieczenia na życie ze składką netto $P_x = 0.0449$ płatną na początku roku przez cały okres ubezpieczenia. Na koniec k-tego roku ubezpieczenia (przed zapłacaniem składki za następny rok) ubezpieczyciel obliczył zysk inwestycyjny przypadający ubezpieczonemu i zaproponował dwa równoważne sposoby jego wykorzystania:

1) jednorazowy wzrost przyszłych składek i świadczeń o $z_1 = 0.05$,

2) jednorazowy wzrost świadczenia o z_2 punktów procentowych, bez wzrostu przyszłych składek.

Podaj wysokość z_2. Wiadomo, że składka $P_{x+k} = 0.0775$ oraz $v = 0.95$, a także $q_{x+k} = 0.065$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 7.7 *Rezerwa:*

$${}_kV(A_x) = S \cdot A_{[x]+k} - P(A_x)\ddot{a}_{[x]+k}$$

Zakładamy $S = 1$ *Opcja 1:*

$$Z + {}_kV(A_x) = 1.05 \cdot A_{[x]+k} - 1.05 \cdot \underbrace{P(A_x)}_{0.0449}\ddot{a}_{[x]+k}$$

Opcja 2:

$$Z + {}_kV(A_x) = (1 + z_2) \cdot A_{[x]+k} - \underbrace{P(A_x)}_{0.0449}\ddot{a}_{[x]+k}$$

Odejmujemy stronami i mamy:

$$0.05 \cdot 0.0449\ddot{a}_{[x]+k} = (0.05 - z_2)A_{[x]+k}$$

Wiemy, że:

$$P(A_{[x]+k}) = \frac{A_{[x]+k}}{\ddot{a}_{[x]+k}}$$

Stąd

$$A_{[x]+k} = \underbrace{P(A_{[x]+k})}_{0.0775} \ddot{a}_{[x]+k}$$

$$z_2 = 0.05 - \frac{0.05 \cdot 0.0449}{0.0775} = 0.02103225806$$

Odpowiedź to około 2.1 *procenta.*

Zadanie 7.8 Polisa emerytalna dla pary (x) i (y) polega na tym, że przez najbliższe 40 lat, lub do pierwszej śmierci, będą płacić składkę w postaci renty życiowej ciągłej z odpowiednio dobraną intensywnością netto $\bar{P}$. Jeżeli w ciągu tych 40 lat ona (x) umrze jako pierwsza, to on dostanie natychmiast świadczenie w wysokości 15; natomiast jeżeli w ciągu tych 40 lat on (y) umrze jako pierwszy, to ona dostanie natychmiast świadczenie 10. W przypadku, gdy oboje przeżyją najbliższe 40 lat, zostaje uruchomiona emerytura, która formie renty życiowej wypłaca z roczną intensywnością 1 aż do drugiej śmierci. Obliczyć składkę $\bar{P}$. Ona (x) jest wylosowana z populacji wykładniczej z parametrem $\mu^{(k)} \equiv 1/200$; on (y) jest wylosowany z populacji wykładniczej z parametrem $\mu^{(m)} = 1/100$. Zakładamy, że $T(x)$ i $T(y)$ są niezależne. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.04$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 7.8 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że* T_x *ma rozkład wykładniczy z gęstością* $\mu e^{-\mu t}$. *Wtedy*

$${}_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

Wiemy, że:

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{40|}} = \int_0^{40} v^s \cdot {}_sp_y \cdot {}_sp_x \cdot \mu_{x+s} ds = \int_0^{40} e^{-0.04s} \cdot e^{-0.005s} \cdot e^{-0.01s} \cdot 0.005 \cdot ds = 0.08083607651$$

$$\bar{A}_{x\overset{1}{y}:\overline{40|}} = \int_0^{40} v^s \cdot {}_sp_y \cdot {}_sp_x \cdot \mu_{y+s} ds = \int_0^{40} e^{-0.04s} \cdot e^{-0.005s} \cdot e^{-0.01s} \cdot 0.01 \cdot ds = 0.161672153$$

Mamy (obecna wartość przyszłych wpłat = obecna wartość przyszłych wypłat):

$$\bar{P}\bar{a}_{x:y:\overline{40|}} = 15 \cdot \bar{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{40|}} + 10 \cdot \bar{A}_{x\overset{1}{y}:\overline{40|}} + v^{40} {}_{40}p_{xy} \cdot \bar{a}_{\overline{x:y}}$$

$${}_tp_{\overline{x:y}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}$$

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^{\infty} v^t ({}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}) dt = \int_0^{\infty} e^{-0.04t} (e^{-0.005t} + e^{-0.01t} - e^{-0.005t} e^{-0.01t}) dt$$

$$\bar{a}_{x:y:\overline{40|}} = \int_0^{\infty} v^t {}_tp_{x:y} dt = \int_0^{\infty} e^{-0.04t} e^{-0.005t - 0.01t} dt$$

Po obliczeniu całek dostajemy wynik $\bar{P} \approx 0.34$

Zadanie 7.9 Na osobę (x) wystawiono roczne ubezpieczenie rentowe, wypłacające 10 000 na koniec każdego kwartału. Ubezpieczony został zaliczony do populacji, której odpowiada p_x. W populacji tej śmiertelność w ciągu roku ma jednostajny rozkład. W momencie zawierania ubezpieczenia wiadomo, że ubezpieczony podda się za 8 miesięcy którkiej operacji, którą przeżywa tylko 60 procent pacjentów. Jeśli pacjent przeżyję operację, to jej wpływ na zdrowie i szanse dalszedo życia może się ujawnić nie wcześniej niż po pół roku. Wyznacz składkę netto za to ubezpieczenie przy $v = 0.95$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 7.9 Hipoteza jednostajności (HU)
Funkcja ${}_tp_x$ zmiennej t jest ciągła i liniowa w przedziałach $[n, n+1)$

$$ {}_{n+u}p_x = (1-u)_np_x + u \cdot {}_{n+1}p_x, \qquad 0 \leqslant u < 1 $$

$$ \mu_{[x]+n+u} = \frac{q_{[x]+n}}{1 - u \cdot q_{[x]+n}} $$

$$ {}_{n+u}p_x = {}_np_x(1 - u \cdot q_{[x]+n}) $$

$$ {}_up_x = 1 - u \cdot q_x $$

$$ {}_uq_x = u \cdot q_x $$

Mamy:

$$ 10000({}_{\frac{1}{4}}p_x \cdot v^{0.25} + {}_{\frac{2}{4}}p_x \cdot v^{0.5} + {}_{\frac{8}{12}}p_x \cdot 0.6 \cdot {}_{\frac{9}{12}-\frac{8}{12}}p_{x+\frac{8}{12}} \cdot v^{0.75} + {}_{\frac{8}{12}}p_x \cdot 0.6 \cdot {}_{1-\frac{8}{12}}p_{x+\frac{8}{12}} \cdot v) $$

Wyjaśnienie: ${}_{\frac{8}{12}}p_x$ *- prawdopodobieństwo, że x latek dożył do operacji,* ${}_{\frac{9}{12}-\frac{8}{12}}p_{x+\frac{8}{12}}$ *- prawdopodobieństwo, że* $x + 8/12$ *latek przeżył miesiąc,* ${}_{1-\frac{8}{12}}p_{x+\frac{8}{12}}$ *- prawdopodobieństwo, że* $x + 8/12$ *latek przeżył 4 miesiące. Mamy:*

$$ {}_{\frac{1}{4}}p_x = 1 - \frac{1}{4}\underbrace{q_x}_{=1-0.94} = 0.985 $$

$$ {}_{\frac{2}{4}}p_x = 1 - \frac{2}{4}\underbrace{q_x}_{=1-0.94} = 0.97 $$

Wiemy, że

$$ {}_tp_{[x]+s} = \frac{{}_{s+t}p_x}{{}_sp_x} $$

Stąd:

$$ {}_{\frac{9}{12}-\frac{8}{12}}p_{x+\frac{8}{12}} = \frac{{}_{\frac{9}{12}}p_x}{{}_{\frac{8}{12}}p_x} = \frac{1 - 0.75(1-p_x)}{1 - \frac{2}{3}(1-p_x)} $$

itd. Po wstawieniu v dostajemy odpowiedź ≈ 30050

8 Egzamin z 4 kwietnia 2011 r.

Zadanie 8.1 Dane są wartości: $\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = E(\min(T(x), n)) = 43.79246$ oraz $Var(\min(T(x), n)) = 419.960$. Oblicz przybliżoną wartość $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ dla $\delta = 0.01$.

Rozwiązanie 8.1 *Wartość oczekiwana przyszłego czasu życia x latka zdefiniowana jest następująco (Bowers s.68)*

$$\begin{aligned} \mathring{e}_x &= E(T(x)) = \int_0^\infty t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty t \cdot \underbrace{f_x(t)}_{=\frac{d(-{}_tp_x)}{dt}} dt = \\ &= \int_0^\infty t \cdot \frac{d(-{}_tp_x)}{dt} dt = -[t \cdot {}_tp_x]_0^\infty + \int_0^\infty {}_tp_x dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt \end{aligned}$$

Natomiast

$$E(T(x)^2) = \int_0^\infty t^2 \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = 2\int_0^\infty t \cdot {}_tp_x dt$$

Chwilowa wartość oczekiwana przyszłego czasu życia x latka zdefiniowana jest następująco (Bowers s. 86)

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = n \cdot {}_np_x + \int_0^n t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^n {}_tp_x dt = \frac{T_x - T_{x+n}}{l_x}$$

Mamy

$$VAR(\min(T(x), n)) = (EY)^2 - E(Y^2) = 2\int_0^n t \cdot {}_tp_x dt - (\mathring{e}_{x:\overline{n}|})^2 \tag{1}$$

Renta terminowa

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x dt = \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_tp_x dt$$

Ustalmy

$$f(\delta) = \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_tp_x dt$$

dla $\delta = 0$ jest

$$f(0) = \mathring{e}_{x:\overline{n}|} = 43.79246$$

Taylor:

$$f(0.01) = f(0) + 0.01 \cdot \frac{d(f(0))}{d\delta}$$

$$\frac{d(f(\delta))}{d\delta} = -\int_0^n t \cdot e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x dt$$

$$\frac{d(f(0))}{d\delta} = -\int_0^n t \cdot {}_tp_x dt$$

Z (1) mamy:

$$\int_0^n t \cdot {}_tp_x dt = \frac{VAR(\min(T(x), n)) + (\mathring{e}_{x:\overline{n}|})^2}{2}$$

Podstawiamy i otrzymujemy wynik:

$$f(0,01) = \mathring{e}_{x:\overline{n}|} + 0.01 \left[\frac{VAR(\min(T(x), n)) + (\mathring{e}_{x:\overline{n}|})^2}{-2} \right] \approx 32.1$$

Zadanie 8.2 Na osobę 60-letnia wystawiono ubezpieczenie rentowe, wyłacające dożywotnie świadczenie z intensywnością 10 000 na rok. Na hipotece nieruchomości zabezpieczono jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, płatną w momencie śmierci w wysokości

$$JSN_{60+T(60)} = 400000 - k \cdot \mathring{e}_{60+T(60)}$$

Dla populacji de Moivre'a z parametrem $\omega = 100$ oraz intensywności oprocentowania $\delta = 0.05$ podaj wysokość k, spełniającego zasadę aktualnej równoważności. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 8.2 Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki* $\omega = 100$ *lat. Rozkład* T_0 *jest jednostajny na przedziale* $[0, \omega]$. *Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Rozwiązanie:

$$\mathring{e}_{60+t} = \int_0^{100-60-t} {}_sp_x ds = \int_0^{40-t} \left(1 - \frac{s}{100-60-t}\right) ds = \frac{40-t}{2}$$

Ubezpieczenie na całe życie

$$\bar{A}_x = E(v^{T_x}) = \int_0^\infty v^t f(x) dt = \int_0^\infty v^t {}_tp_x \mu_{[x]+t} dt$$

Renta na całe życie

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t {}_tp_x dt$$

Gęstość w rozkładzie jednostajnym:

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

Dla przypomnienia: $f_x(t) = {}_tp_x \cdot \mu_{[x]+t}$. *mamy:*

$$10000\int_0^{40} e^{-\delta t}{}_tp_x dt = \int_0^{40} JSN_{60+T(60)} \cdot e^{-\delta t} \underbrace{{}_tp_x \cdot \mu_{[x]+t}}_{f_x(t)} dt$$

$$10000\int_0^{40} e^{-\delta t}\left(1 - \frac{t}{100-60}\right) dt = \int_0^{40} \left(400000 - k \cdot \underbrace{\mathring{e}_{60+T(60)}}_{\frac{40-t}{2}}\right) \cdot e^{-\delta t} \cdot \frac{1}{40} dt$$

$$k \approx 10465$$

Zadanie 8.3 Rozważmy ubezpieczenie na życie dla (25), które na koniec roku śmierci wypłaci $\min K(25) + 1,5$ zł. Na początku j-tego roku ubezpieczony płaci składkę w wysokości $\min(j,5) \cdot P$, gdzie P skalkulowano na poziomie netto. Oblicz ${}_5P$ czyli rezerwę składek netto po 5 latach. Dane są: $i = 5\%$, $R_{25} = 116029$, $S_{25} = 9146994$, $R_{30} = 102641$, $S_30 = 6664576$, $\ddot{a}_{30} = 18.54690$

.

Rozwiązanie 8.3 *Ubezpieczenie na całe zycie (model dyskretny)*

$$A_x = E(v^{K+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_kp_x q_{[x]+k}$$

w naszym przypadku:

$$A_{25} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_kp_{25}q_{25+k} \cdot \min(k+1,5)$$

PV składek:

$$P \cdot \sum_{k=0}^{\infty} {}_tp_{25} \cdot v^{k+1} \cdot \min(k+1,5)$$

(rozpoczynamy od zapłacanie składki $= 1$*). Przyrównujemy:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_kp_{25}q_{25+k} \cdot \min(k+1,5) = P \cdot \sum_{k=0}^{\infty} {}_tp_{25} \cdot v^{k+1} \cdot \min(k+1,5)$$

mamy:

$$\sum_{k=0}^{4}(k+1)v^{k+1}{}_kp_{25}q_{25+k} + 5\sum_{k=5}^{\infty} v^{k+1}{}_kp_{25}q_{25+k} = P\left(\sum_{k=0}^{4}(k+1)v^{k+1}{}_kp_{25} + 5\sum_{k=5}^{\infty} v^{k+1}{}_kp_{25}\right)$$

Ubezpieczenie rosnące:

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}{}_kp_x q_{[x]+k}$$

Renta rosnąca:

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^k{}_kp_x$$

Ubezpiecznenie odroczone:

$$_{m|}A = {}_mp_xv^mA_{x+m}$$

Renta odroczona:

$$_m\ddot{a}_x = v^m{}_mp_x\ddot{a}_{x+m}$$

Mamy:

$$(I\ddot{a})_{25:\overline{5}|} + 5{}_5p_xv^5A_{25+5} = P\left((I\ddot{a})_{x:\overline{5}|} + 5v^5{}_5p_{25}\ddot{a}_{25+5}\right)$$

$$(I\ddot{a})_{25:\overline{5}|} + 5A_{25:\overline{5}|}^{\;\;1}A_{30} = P\left((I\ddot{a})_{x:\overline{5}|} + 5A_{25:\overline{5}|}^{\;\;1}\ddot{a}_{30}\right)$$

Funkcje komutacyjne:

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = v^n{}_np_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$(IA)_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}$$

mamy:

$$\frac{R_{25} - R_{30} - 5M_{30}}{D_{25}} + 5\frac{D_{30}}{D_{25}} \cdot \frac{M_{30}}{D_{30}} = P \cdot \left(\frac{S_{25} - S_{30} - 5N_{30}}{D_{25}} + 5\frac{D_{30}}{D_{25}}\frac{N_{30}}{D_{30}}\right)$$

$$\frac{R_{25} - R_{30} - 5M_{30} + 5M_{30}}{D_{25}} = P\frac{S_{25} - S_{30} - 5N_{30} + 5N_{30}}{D_{25}}$$

Stąd:

$$P = \frac{R_{25} - R_{30}}{S_{25} - S_{30}}$$

Rezerwa:

$$_5V = 5A_{25+5} - 5P\ddot{a}_{25+5}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}$$

$$_5V = 5(1 - d\ddot{a}_x) - 5P\ddot{a}_{30} \approx 0.08395$$

Zadanie 8.4 Rozważmy ubezpieczenie emerytalne dla (x), które polega na tym, że przez najbliższe 35 lat będzie on płacił coroczną składkę netto w wysokosci P. Po dożyciu wieku (x+35) zacznie otrzymywać emeryturę dożywotnią w wysokości 1 na początku każdego roku. W przypadku śmierci przed osiądnieciem wieku $x + 35$ uposażeni otrzymają na koniec roku śmierci 0.5 sumy wpłaconych składek. Dane są: $i = 0.05$, $_{34}V = 8.53841$, $_{36}V = 9.02911$, $q_{x+34} = 0.03226$, $q_{x+35} = 0.03459$. Oblicz P. Wybierz odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 8.4 *W momencie $t = 36$ rezerwa wynosi*

$$_{36}V = \ddot{a}_{x+36}$$

Wiemy, że

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1}$$

Stąd

$$\ddot{a}_{x+35} = 1 + vp_{x+35}\ddot{a}_{x+36}$$

Kontrakt ubezpieczeniowy ogólnego typu

$$_kV + \pi_k = v(c_{k+1}q_{x+k} + {}_{k+1}V \cdot p_{x+k})$$

Interpretacja: W przypadku śmierci ubezpieczonego w tym roku ubezpieczyciel wyda c_{k+1} na koniec roku - odpowiada temu składnik aktuarialny $vc_{k+1}q_{x+k}$ po prawej stronie wzoru. W przypadku, gdy ubezpieczony przeżyje najbliższy rok, ubezpieczyciel będzie potrzebował rezerwy na poziomie $_{k+1}V$ - odpowiada temu składnik $v \cdot {}_{k+1}V \cdot p_{x+k}$ Stąd mamy, że

$$_{34}V + \pi_{34} = v(c_{34+1}q_{x+34} + {}_{34+1}V \cdot p_{x+34})$$

$$_{35}V = \ddot{a}_{x+35}$$

$$\pi_{34} = P$$

$$c_{35} = 35 \cdot 0.5P = 17.5P$$

Stąd

$$_{34}V + P = v(17.5Pq_{x+34} + \ddot{a}_{x+35} \cdot p_{x+34})$$

$$v = \frac{1}{1+i} = 0.9523809524$$

$$P = \frac{_{34}V - v\ddot{a}_{x+35} \cdot p_{x+34}}{17.5vq_{x+34} - 1} = \frac{_{34}V - v(1 + vp_{x+35} \cdot {}_{36}V) \cdot p_{x+34}}{17.5vq_{x+34} - 1} \approx 0.075$$

Zadanie 8.5 Rozważmy ubezpieczenie ciągłe ogólnego typu z funkcją intensywności składki $\pi(t)$ oraz funkcją świadczenia śmiertelnego $c(t)$. Kontrakt skalkulowany jest na poziomie netto. Parametr $\delta > 0$ to techniczna inensywność oprocentowania. Wiadomo ponadto, że dla każdego $t \leqslant 20$ zachodzi związek:

$$V(t) = \frac{c(t)\mu_{x+t} + 0.02 - \pi(t)}{\delta + \mu_{x+t}}$$

Oblicz wartość V(10). Wybierz odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 8.5 Równanie Thielego

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = \bar{\pi}(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})_t\bar{V} - b(t)\mu_{[x]+t}$$

gdzie: $b(t)$ *- suma ubezpieczenia,* $\overline{\pi}(t)$ *- intensywność płacenia składki*

Z treści zadania:

$$V(t)\cdot(\delta + \mu_{x+t}) = c(t)\mu_{x+t} + 0.02 - \pi(t)$$

$$V(t)\cdot(\delta + \mu_{x+t}) - c(t)\mu_{x+t} + \pi(t) = 0.02$$

stąd

$$V'(t) = 0.02$$

oraz

$$V(t) = 0.02t + c$$

Biorąc pod uwagę, że $V(0) = 0$ *mamy*

$$V(t) = 0.02t$$

stąd $V(10) = 0.2$

Zadanie 8.6 Rozważmy dyskretny typ n-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł oraz roczną składką 2 580 zł, płatną przez cały okres ubezpieczenia. Po k latach ubezpieczony chce utrzymac dotychczasową wysokość składki oraz pobrać bezzwrotnie 50 000 zł, zmniejszając w ten sposób rezerwę netto. Podaj nową sumę ubezpieczenia. Dane są: $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 13.620$, $\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} = 4.327$, $i = 0.05$. Wskaż najbliższą wartość

Rozwiązanie 8.6 *Ubezpieczenie na dożycie na n lat. Składka netto:*

$$P\left(A_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Rezerwa:

$${}_tV(A_{x:\overline{n}|}) = A_{[x]+t:\overline{n-t}|} - P(A_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}$$

Rezerwa przed zmianą:

$${}_tV(A_{x:\overline{n}|}) = \underbrace{S_1}_{100000} \cdot A_{[x]+k:\overline{n-k}|} - \underbrace{P(A_{x:\overline{n}|})}_{=2580}\ddot{a}_{[x]+k:\overline{n-k}|}$$

Rezerwa po zmianie

$${}_tV(A_{x:\overline{n}|}) - 50000 = \underbrace{S_2}_{?} \cdot A_{[x]+k:\overline{n-k}|} - \underbrace{P(A_{x:\overline{n}|})}_{=2580}\ddot{a}_{[x]+k:\overline{n-k}|}$$

Mamy:

$$100000A_{[x]+k:\overline{n-k}|} - 2580\cdot\ddot{a}_{[x]+k:\overline{n-k}|} - 50000 = S_2\cdot A_{[x]+k:\overline{n-k}|} - 2580\cdot\ddot{a}_{[x]+k:\overline{n-k}|}$$

$$S_2 = \frac{100000 A_{[x]+k:\overline{n-k}|} - 50000}{A_{[x]+k:\overline{n-k}|}}$$

Wiemy, że

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}$$

czyli $\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} = \frac{1-A_{[x]+k:\overline{n-k}|}}{d}$, $A_{[x]+k:\overline{n-k}|} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$ *podstawiając uzyskujemy:*

$$S_2 \approx 37000$$

Zadanie 8.7 W populacji z wykładniczym rozkładem czasu życia, $\mu = 0.03$, rozpatrujemy ciągłe ubezpieczenie na życie i dożycie zawarte na 20 lat ze składką o stałej intensywności, płatną przez cały okres ubezpieczenia. Po 10 latach ubezpieczony prosił o zmianę warunków ubezpieczenia: obniżenie składki netto do 2/3 dotychczasowego poziomu, utrzymanie dotychczasowej sumy ubezpieczenia oraz odpowiednie dostosowanie okresu ubezpieczenia (czyli także okresu płatności składek). Dla $\delta = 0.07$ podaj nowy okres trwania ubezpieczenia liczony od momentu konwersji polisy. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 8.7 *Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy*

$${}_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

Składka netto:

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Rezerwa:

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \underbrace{S}_{=1} \cdot \bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}$$

Rezerwa po 10 latach przed zmianą:

$${}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{20}|}) = \bar{A}_{[x]+10:\overline{10}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{20}|})\bar{a}_{[x]+10:\overline{10}|}$$

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{20}|}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{20}|}}{\bar{a}_{x:\overline{20}|}}$$

Ubezpieczenie na życie i dożycie (endowment)

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{[x]+t} dt$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = v^n {}_np_x$$

$$\bar{A}_{x:\overline{20}|} = \int_0^{20} e^{-0.07t}e^{-0.03t}\cdot 0.03dt + e^{-0.07\cdot 20}\cdot e^{-0.03\cdot 20} = A$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t{}_tp_x dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{20}|} = \int_0^n e^{-0.07t}e^{-0.03t}dt = B$$

$${}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{20}|}) = \int_0^{10} e^{-0.07t}e^{-0.03t}\cdot 0.03\cdot dt + e^{-0.07\cdot 10}e^{-0.03\cdot 10} - \frac{A}{B}\int_0^{10} e^{-0.07t}e^{-0.03t}dt$$

Po zmianie:

$${}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \int_0^{n} e^{-0.07t}e^{-0.03t}\cdot 0.03\cdot dt + e^{-0.07\cdot n}e^{-0.03\cdot n} - \frac{2A}{3B}\int_0^{n} e^{-0.07t}e^{-0.03t}dt$$

przyrównujemy rezerwy i stąd

$$n \approx 13.02$$

Zadanie 8.8 Rozważmy emeryturę małżeńską dla (x) oraz (y).Ona (x) jest wylosowana z populacji wykładniczej z $\mu_{x+1} \equiv 0.01$. Natomiast on (y) jest wylosowany z populacji wykładniczej z $\mu_{y+t} \equiv 0.02$. Za jednorazową składkę netto SJN kupują następujące świadczenie emerytalne. Póki żyją oboje i

$$t < \min\left(E(T(x)), E(T(y))\right)$$

otrzymują emeryturę z intensywnością A na rok (w postaci renty ciągłej). Gdy żyją oboje, ale

$$\min\left(E(T(x), E(T(y))\right) < t < \max\left(E(T(x)), E(T(y))\right)$$

intensywność emerytury wynosi $0.9A$ Wreszcie, gdy żyją oboje, ale

$$t > \max\left(E(T(x)), E(T(y))\right)$$

intensywność świadczenia wynosi 0.8A. Natomiast po pierwszej śmierci intensywność świadczenia emerytalnego wynosi 0.7A. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.03$. Oblicz SJN. Zakładamy, że $T(x)$ i $T(y)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. Wybierz odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 8.8 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy*

$${}_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

$$E(T(x)) = \int_0^\infty {}_tp_x dt = \int_0^\infty e^{-0.01t}dt = 100$$

$$E(T(y)) = 50$$

$$SJN = \int_0^{50} A \cdot e^{-\delta t} {}_tp_{x:y} dt + \int_{50}^{100} 0.9A \cdot e^{-\delta t} \cdot {}_tp_{x:y} dt + \int_{100}^{\infty} 0.8A \cdot e^{-\delta t} {}_tp_{x:y} dt +$$

$$+ \int_0^{\infty} 0.7A \cdot e^{-\delta t} \cdot ({}_tp_x + {}_tp_y - 2{}_tp_x \cdot {}_tp_y) dt \approx 24,74A \approx 25A$$

Po pierwszej śmierci mamy:

$${}_tp_x \cdot (1 - {}_tp_y) + {}_tp_y \cdot (1 - {}_tp_x) = {}_tp_x + {}_tp_y - 2{}_tp_x \cdot {}_tp_y$$

Zadanie 8.9 Rozważmy roczne ubezpieczenie dla osoby (x) na kwotę 100 000zł. Życie ubezpieczonego narażone jest na trzy niezależne od siebie ryzyka. Pierwsze jest typowym demograficznym ryzykiem śmierci ${}_1^*q_x^{(1)}$.
Drugie wiąże się ze specyficznym schorzeniem ubezpieczonego ${}_1^*q_x^{(2)}$
Trzecie wynika ze szczególnego trybu życia ubezpieczonego ${}_1^*q_x^{(3)}$ Osoba ta może kupić polisę na dożycie ze składką netto 58 140 zł. Podaj, ile kosztowałoby ubezpieczenie wypłacające na koniec roku 100 000 jedynie w przypadku śmierci spowodowanej trzecim ryzykiem.
Dane są: ${}_1^*q_x^{(1)} = 0.05$, ${}_1^*q_x^{(2)} = 0.15$, $v = 0.96$

Rozwiązanie 8.9 Stowarzyszony model jednoopcyjny

$${}_tp_x^{'(j)} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{[x]+s}^{(j)} ds\right)$$

$${}_tp_x^{'(j)} = 1 - {}_tq_x^{'(j)}$$

Wielkość ${}_tq_x^{'(j)}$ *nazywamy absolutnym wskaźnikiem wychodzenia ze statusu z powodu ryzka j (z opcja) j lub prawdopodobieństwem netto wyjścia ze statusu z powodu j.*

$${}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x^{'(j)}$$

Przy założeniu HU-D

$${}_sp_x^{'(j)} = \left({}_sp_x^{(\tau)}\right)^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}}$$

$$q_x^{(j)} = \frac{\log p_x^{'(j)}}{\log p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)}$$

Mamy:

$${}_1p_x^{(\tau)} = (1 - 0.05) \cdot (1 - 0.15) * {}_1p_x^{'(3)}$$

Czyste ubezpieczenie na dożycie

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n {}_np_x$$

Mamy:

$$A_{x:\overline{1}|}^{\;1} = v^1 \cdot {}_1p_x^{(\tau)} = 58140$$

Stąd

$${}_1p_x^{'(3)} = 0.75$$

$$q_x^{(3)} = \frac{\log p_x^{'(3)}}{\log p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)}$$

$${}_1p_x^{(\tau)} = 0.605625$$

$$q_x^{(\tau)} = 1 - p_x^{(\tau)} = 0.394375$$

$$q_x^{(3)} = \frac{\log(0.75)}{\log(0.605625)} \cdot 0.394375 = 0.226233116$$

Ubezpieczenie wypłacające na koniec roku 100 000 jedynie w przypadku śmierci spowodowanej trzecim ryzykiem:

$$JSN = q_x^{(3)} \cdot v^1 \cdot 100000 = 21718$$

9 Egzamin z 20 czerwca 2011 r.

Zadanie 9.1 Rozpatrujemy wspólne życie męża (x) i żony (y), przy czym zakładamy, że $T(x)$ oraz $T(y)$ są niezależne. Wiadomo, że $\mathring{e}_{x:y} = 10$, $\mu_x = 0.015$, $\mu_y = 0.008$. Oblicz przybliżoną wartość $\mathring{e}_{x+\frac{1}{12}:y+\frac{1}{12}}$

Rozwiązanie 9.1 *Ze wzoru Taylora dla funkcji dwóch zmiennych w otoczeniu punktu* (a, b)*:*

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{1}{1!}\frac{df(a,b)}{dx}(x-a) + \frac{1}{1!}\frac{df(a,b)}{dy}(y-b)$$

Niech $(a, b) = (x, y)$*, mamy:*

$$\mathring{e}_{x+\frac{1}{12}:y+\frac{1}{12}} = \mathring{e}_{x:y} + \frac{1}{12}\frac{d(\mathring{e}_{x:y})}{dx} + \frac{1}{12}\frac{d(\mathring{e}_{x:y})}{dy}$$

W statusie wspólnego (łącznego) życia:

$$\mu_{x_1:\ldots:x_m}(t) = \mu_{[x_1]+t} + \ldots + \mu_{[x_m]+t}$$

$${}_tp_{x_1:\ldots:x_m} = \prod_{k=1}^{m} {}_tp_{x_k}$$

Mamy:

$$\mathring{e}_{x:y} = \int_0^\infty {}_tp_{xt} \cdot p_y dt$$

$$\frac{d(\mathring{e}_{x:y})}{dx} = \int_0^\infty ({}_tp_x)' {}_tp_y dt = (1)$$

$$\frac{d(\mathring{e}_{x:y})}{dy} = \int_0^\infty {}_tp_x ({}_tp_y)' dt = (2)$$

Wiemy, (patrz rozwiązanie 7.1) że:

$$\frac{d({}_tp_x)}{dx} = {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})$$

oraz

$$\frac{d({}_tp_y)}{dy} = {}_tp_y(\mu_y - \mu_{y+t})$$

$$(1) = \int_0^\infty {}_tp_y \cdot {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})dt = \mu_x \underbrace{\int_0^\infty {}_tp_y \cdot {}_tp_x dt}_{\mathring{e}_{x:y}} - \int_0^\infty {}_tp_y \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt =$$

$$= \mu_x \mathring{e}_{x:y} - \int_0^\infty {}_tp_y \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$(2) = \mu_y \mathring{e}_{x:y} - \int_0^\infty {}_tp_y \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{y+t} dt$$

$$\frac{d(\mathring{e}_{x:y})}{dx}+\frac{d(\mathring{e}_{x:y})}{dy}=\mathring{e}_{x:y}(\mu_x+\mu_y)-\int_0^\infty {}_tp_y\cdot{}_tp_x\cdot(\mu_{x+t}+\mu_{y+t})dt=$$
$$=\mathring{e}_{x:y}(\mu_x+\mu_y)-\underbrace{\int_0^\infty \underbrace{{}_tp_{x:y}\cdot\mu_{x:y}(t)}_{f_{x:y}(t)}dt}_{=1}$$

Stąd:

$$\mathring{e}_{x+\frac{1}{12}:y+\frac{1}{12}}=\mathring{e}_{x:y}+\frac{1}{12}\left(\mathring{e}_{x:y}(\mu_x+\mu_y)-1\right)\approx 9.9358$$

Zadanie 9.2 Rozważmy populację Weibulla zadaną przez funkcję intensywności śmiertelności $\mu_x=\frac{x}{700}$. Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia:

$$\int_0^\infty s(x)\cdot\left(\bar{a}_x-\mathring{e}_x\cdot e^{-\delta x}\right)dx$$

dla $\delta=0.02$. Wskaż najbliższą odpowiedź.

Rozwiązanie 9.2 Prawo Weibulla
Natężenie zgonów rośnie jak pewna potęga t:

$$\mu_t=kt^n$$
$$s(t)=e^{-ut^{n+1}}$$

gdzie $u=\frac{k}{n+1}$

$${}_tp_x=e^{-u((t+x)^{n+1}-x^{n+1})}$$

Mamy:

$$\mu_t=kt^n=\frac{t}{700}$$

stąd $n=1,\ k=\frac{1}{700}$

$$s(t)=e^{-\frac{1}{1400}t^2}$$
$${}_tp_x=e^{-\frac{1}{1400}((t+x)^2-x^2)}=e^{-\frac{1}{1400}t^2-\frac{1}{700}tx}$$
$$\bar{a}_x=\int_0^\infty e^{-\delta t}{}_tp_xdt=\int_0^\infty e^{-0.02t}e^{-\frac{1}{1400}t^2-\frac{1}{700}tx}dt$$
$$\mathring{e}_x=\int_0^\infty {}_tp_xdt=\int_0^\infty e^{-\frac{1}{1400}t^2-\frac{1}{700}tx}dt$$
$$\int_0^\infty s(x)\cdot\left(\bar{a}_x-\mathring{e}_x\cdot e^{-\delta t}\right)dx=$$
$$=\int_0^\infty e^{-\frac{1}{1400}x^2}\left(\int_0^\infty e^{-0.02t}e^{-\frac{1}{1400}t^2-\frac{1}{700}tx}dt\right)dx$$
$$-\int_0^\infty e^{-\frac{1}{1400}x^2}\left(\int_0^\infty e^{-\frac{1}{1400}t^2-\frac{1}{700}tx}dt\right)e^{-0.02x}dx=$$

$$= \iint_0^\infty e^{-\frac{1}{1400}x^2} e^{-0.02t} e^{-\frac{1}{1400}t^2-\frac{1}{700}tx} dtdx -$$

$$\iint_0^\infty e^{-\frac{1}{1400}x^2} e^{-0.02x} e^{-\frac{1}{1400}t^2-\frac{1}{700}tx} dtdx =$$

$$= \iint_0^\infty e^{-\frac{1}{1400}x^2-0.02t-\frac{1}{1400}t^2-\frac{1}{700}tx} dtdx - \iint_0^\infty e^{-\frac{1}{1400}x^2-0.02x-\frac{1}{1400}t^2-\frac{1}{700}tx} = (*)$$

$$(*) \underbrace{=}_{zamiana\ zmiennych\ x=t} 0$$

Zadanie 9.3 Rozważmy ciągły model ubezpieczenie rentowego z intensywnością oprocentowania $\delta = 0.02$. Dwie osoby w wieku 50 lat pochodzą z dwóch różnych populacji:

(w) pierwsza z populacji wykładniczej z parametrem $\mu = 0.05$

(dM) druga z populacji de Moivre'a z parametrem ω. Wiadomo, że dla pewnego n zachodzi:

$$\bar{a}^{(w)}_{50:\overline{n}|} = \bar{a}^{(dM)}_{50:\overline{n}|} = \bar{a}^{(dM)}_{50}$$

Wskaż wartość parametru ω.

Rozwiązanie 9.3 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy*

$${}_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

Prawo de Moivre'a *Rozkład T_0 jest jednostajny na przedziale $[0, \omega]$. Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Mamy:

$$\bar{a}^{(dM)}_{50:\overline{n}|} = \bar{a}^{(dM)}_{50}$$

czyli

$$\int_0^n e^{-0.02t}\left(1 - \frac{t}{\omega - 50}\right) dt = \int_0^{\omega-50} e^{-0.02t}\left(1 - \frac{t}{\omega - 50}\right) dt$$

Stąd n musi być równy $\omega - 50$

$$\bar{a}^{(w)}_{50:\overline{n}|} = \int_0^{\omega-50} e^{-0.02t}e^{-0.05t} = \int_0^{\omega-50} e^{-0.07t} = -\frac{1}{0.07}(e^{-0.07(\omega-50)} - 1) =$$

$$= \frac{100}{7}(1 - e^{-0.07(\omega-50)})$$

$$\bar{a}^{(dM)}_{50} = \int_0^{\omega-50} e^{-0.02t}\left(1 - \frac{t}{\omega-50}\right)dt = 50 - \frac{2500}{\omega-50}(1 - e^{-0.02(\omega-50)})$$

$$\frac{100}{7}(1 - e^{-0.07(\omega-50)}) = 50 - \frac{2500}{\omega-50}(1 - e^{-0.02(\omega-50)})$$

Stąd

$$\omega \approx 80.6225$$

Zadanie 9.4 Określamy funkcję $F(x)$ dodatniego wieku x w następujący sposób

$$F(x) = e^{\delta x}E(e^{\delta T(x)})$$

gdize $\delta > 0$ oznacza techniczną intensywność oprocentowania. Wówczas zachodzi tożsamościowo następujący wzór:

ODP (A) $F'(x) = \mu_x(F(x) - e^{\delta x})$

Rozwiązanie 9.4 *Wiemy, że*

$$\bar{A}_x = E(v^{T(x)}) = E(e^{-\delta T(x)})$$

Mamy:

$$F(x) = e^{\delta x}\underbrace{E(e^{\delta T(x)})}_{\bar{A}_x(-\delta)}$$

$$\frac{d(F(x))}{dx} = \delta e^{\delta x}\cdot\bar{A}_x(-\delta) + e^{\delta x}\frac{d(\bar{A}_x(-\delta))}{dx} = (*)$$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}\bar{A}_x(\delta) = \bar{A}_x\delta + \bar{A}_x\mu_x - \mu_x = \bar{A}_x\cdot(\delta + \mu_x) - \mu_x}$$

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x(-\delta) = \bar{A}_x\cdot(-\delta + \mu_x) - \mu_x$$

$$(*) = \delta e^{\delta x}\cdot\bar{A}_x + e^{\delta x}\bar{A}_x\cdot(-\delta+\mu_x) - e^{\delta x}\mu_x = \mu_x(e^{\delta x}\bar{A}_x - e^{\delta x}) = \mu_x(F(x) - e^{\delta x})$$

Zadanie 9.5 Rozważamy ubezpieczenie ciągłe ogólnego typu dla (x) z funkcją intensywności składki $\pi(t)$ oraz funkcją świadczenia śmiertelnego $c(t)$. Kontrakt skalkulowany jest na poziomie netto. Parametr $\delta = 0.03$ to techniczna intensywność oprocentowania. Wiadomo ponadto, że dla każdego $10 \leqslant t \leqslant 11$ zachodzi związek:

$$\pi(t) - c(t)\mu_{x+t} = 0.02V(t)$$

Wówczas dla każdego $10 \leqslant t \leqslant 11$ mamy równość:

ODP(B) $V(t) = V(10)\frac{e^{0.05(t-10)}}{{}_{t-10}p_{x+10}}$

Rozwiązanie 9.5 Równanie Thielego

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = \bar{\pi}\,(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})_t\bar{V} - b(t)\mu_{[x]+t}$$

gdzie: $b(t)$ *- suma ubezpieczenia,* $\overline{\pi}(t)$ *- intensywność płacenia składki*
Dla $10 \leqslant t \leqslant 11$ *mamy:*

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} - (0.03 + \mu_{[x]+t})_t\bar{V} = \underbrace{\bar{\pi} - b(t)\mu_{[x]+t}}_{0.02V(t)}$$

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = (0.05 + \mu_{[x]+t})_t\bar{V}$$

Niech ${}_t\bar{V} = y$ *oraz* $(0.05 + \mu_{x+t}) = f(t)$*, mamy:*

$$y' = f(t)y$$

Przypomnienie z równań różniczkowych:

Równanie o rozdzielonych zmiennych *Ma ono postać:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Rozdzielamy zmienne

$$g(y)dy = f(x)dx$$

i obustronnie całkujemy

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

Otrzymujmey

$$G(y) = F(x) + C$$

co można zapisać także ogólniej $\Phi(x, y, C) = 0$*. Jest to całka ogólna. Po wykorzstaniu warunku poczatkowego* $y(x_0) = y_0$ *mamy* $\Phi(x_0, y_0, C) = 0$ *skąd obliczamy* $C = C_0$ *i otrzymujemy całkę szczególną* $\Phi(x, y, C_0) = 0$*.*

Wracając do zadania:

$$\frac{dy}{dt} = f(t)y$$

$$\frac{1}{y}dy = f(t)dt + C_1$$

$$\ln y = \int f(t)dt + C_1$$

$$y = e^{\int f(t)dy + C_1} = C_2 \cdot e^{\int (0.05+\mu_{x+s})ds} = C_2 \cdot e^{\int 0.05ds} e^{\int \mu_{x+s}ds}$$

$$V(t) = C_3 \cdot e^{0.05t} \cdot e^{\left[\int \mu_{x+s}ds\right]_t}$$

$$V(10) = C_3 \cdot e^{0.05 \cdot 10} e^{\left[\int \mu_{x+s} ds\right]_{10}}$$

$$\frac{V(t)}{V(10)} = e^{0.05(t-10)} \cdot e^{\left[\int \mu_{x+s} ds\right]_t - \left[\int \mu_{x+s} ds\right]_{10}}$$

$$\frac{V(t)}{V(10)} = e^{0.05(t-10)} e^{\int_{10}^{t} \mu_{x+s} ds} = e^{0.05(t-10)} \frac{1}{e^{-\int_{10}^{t} \mu_{x+s} ds}}$$

Wiemy, że

$$_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{[x]+u} du} = \underbrace{e^{-\int_0^{10} \mu_{[x]+u} du}}_{_{10}p_x} \underbrace{e^{-\int_{10}^{t} \mu_{[x]+u} du}}_{?}$$

$$? = \frac{_t p_x}{_{10} p_x}$$

Wiemy, że

$$_t p_{[x]+s} = \frac{_{s+t} p_x}{_s p_x}$$

Niech $t := t - 10$, $s = 10$

$$_{t-10} p_{x+10} = \frac{_t p_x}{_{10} p_x}$$

Stąd:

$$V(t) = V(10) e^{0.05(t-10)} \frac{1}{_{t-10} p_{x+10}}$$

Zadanie 9.6 Rozpatrujemy ciągły model ubezpieczenia na życie z intensywnością oprocentowania $\delta = 0.03$. Osoby w wieku 40 lat kupują 20-letnie ubezpieczenie ze składką płatną przez cały okres ubezpieczenia. Wiadomo, że dla $x \leqslant 60$ jest to populacja z wykładniczym rozkładem czasu trwania życia z parametrem $\mu = 0.02$. Wiadomo również, że w wieku 60 lat połowa ubezpieczonych będzie miała nadwagę ($BMI > 45$) i śmiertelność tych osób opisuje parametr $\widetilde{\mu} = 0.04$ dla $x > 60$. Osoby bez nadwagi utrzymują śmiertelność na poziomie $\mu = 0.02$. ubezpieczyciel wykorzystuje fakt, że 40-latkowie nie potrafią przewidzieć swego przyszłego BMI i oferuje im terminowe ubezpieczenie z opcją konwersji na bezterminowe, do wykonania w wieku 60 lat. Opcja zapewnia kontynuację ubezpieczenia na standardowych warunkach, z dożywotnią składką odpowiadają $\mu = 0.02$. Ubezpieczyciel przewiduje, że opcje wykorzystają wszyscy 60-latkowie z nadwagą oraz połowa tych, którzy nie mają nadwagi. Podaj, o ile punktów procentowych składka, którą powinien płacić 40-latek za terminowe ubezpieczenie z opcją konwersji, jest wyższa od składki bez opcji. Wskaż najbliższą wartość. Przyjmij, że nie ma rezygnacji z ubezpieczenia w trakcie umowy terminowej.

Rozwiązanie 9.6 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy*

$$_t p_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

Bez konwersji: Ubezpieczenie terminowe na n lat. Składka netto:

$$\bar{P}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\int_0^n v^t {}_tp_x \overbrace{\mu_{[x]+t}}^{0.02} dt}{\int_0^n v^t {}_tp_x dt} = 0.02$$

Niech S - składka z opcją konwersji, S_1 - składka dla osób z nadwagą, S_2 - składka dla osób bez nadwagi (= 0.02, niezależnie od tego czy kontynuują, czy nie). Mamy:

$$S = \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{2}S_2$$

Dożywotnia składka odpowiadająca $\mu = 0.02$ jest równa 0.02.

Obecna wartość składki = obecna wartości przyszłych zobowiązań

$$\underbrace{S_1 \cdot \bar{a}_{40:\overline{20}|;\mu=0.02} + \overbrace{0.02}^{\text{Skladka odpowiadająca } \mu=0.02} \cdot v^{20} \cdot {}_{20}p_{40} \cdot \bar{a}_{60;\mu=0.02}}_{PV(S_1)} = \bar{A}^1_{40:\overline{20}|;\mu=0.02} + \cdot v^{20} \cdot {}_{20}p_{40} \bar{A}_{60;\mu=0.04}$$

$$S_1 \cdot \bar{a}_{40:\overline{20}|;\mu=0.02} + 0.02 \cdot e^{-0.03\cdot 20} \cdot e^{-0.02\cdot 20} \bar{a}_{60;\mu=0.02} = \bar{A}^1_{40:\overline{20}|;\mu=0.02} + \cdot e^{-0.03\cdot 20} \cdot e^{-0.02\cdot 20} \bar{A}_{60;\mu=0.04}$$

$$S_1 = \frac{\int_0^{20} 0.02 e^{-0.05t} dt + e^{-1}\int_0^\infty 0.04 e^{-0.07} dt - 0.02 e^{-1}\int_0^\infty e^{-0.05t} dt}{\int_0^{20} e^{-0.05t} dt} =$$

$$= \frac{0.252848 + 0.210217 - 0.147152}{12.6424} = 0.02498837246$$

$$S = 0.5 \cdot 0.02498837246 + 0.5 \cdot 0.02 = 0.02249418623$$

$$\frac{S}{P} = \frac{0.02249418623}{0.02} = 1.124709312$$

Stąd składka dla ubezpieczenia z opcją konwersji jest wyższa o około 12.47 procenta.

Zadanie 9.7 Rozważmy dyskretny model n-letniego ubezpieczenia na życie ze stałą składką, płatną na początku roku przez cały okres ubezpieczenia. Na koniec k-tego roku ubezpieczenia (przed zapłacaniem składki na następny rok) ubezpieczyciel obliczył zysk inwestycyjny przypadający ubezpieczonemu i zaproponował dwa równoważne sposoby jego wykorzystania:
1) wzrost sumy ubezpieczenia o $z_1 = 0.05$ bez zmiany przyszłych składek,
2) spadek przyszłych składek o z_2 punktów procentowych bez zmiany sumy ubezpieczenia.
Podaj z_2. Dane są: $N_x = 3863670$, $N_{x+k} = 425060$, $N_{x+n} = 2140$, $M_x = 39320$, $M_{x+k} = 19710$, $M_{x+n} = 510$.

Rozwiązanie 9.7 *Ubezpieczenie na życie na n lat. Składka netto:*

$$P\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Rezerwa:

$${}_tV(A^1_{x:\overline{n}|}) = S \cdot A^{\;1}_{x+t:\overline{n-t}|} - P(A^1_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}$$

Opcja 1 (Z - zysk, zakładamy sumę ubezpieczenia równą 1):

$$Z + {}_kV(A^1_{x:\overline{n}|}) = 1.05\underbrace{S}_{=1} A^{\;1}_{x+k:\overline{n-k}|} - P(A^1_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{[x]+k:\overline{n-k}|}$$

Opcja 2

$$Z + {}_kV(A^1_{x:\overline{n}|}) = \underbrace{S}_{=1} A^{\;1}_{x+k:\overline{n-k}|} - (1 - z_2)P(A^1_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{[x]+k:\overline{n-k}|}$$

Odejmujemy 1 i 2 stronami:

$$0 = 0.05A^{\;1}_{x+k:\overline{n-k}|} - (1 - (1 - z_2))P(A^1_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{[x]+k:\overline{n-k}|}$$

$$z_2 = \frac{0.05A^{\;1}_{x+k:\overline{n-k}|}}{P(A^1_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{[x]+k:\overline{n-k}|}}$$

Wiemy, że: $P\left(A^1_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$, $A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$ *Podstawiamy i mamy* $z_2 \approx 22.6\%$

Zadanie 9.8 Niech $E(A, B, C)$ oznacza polisę emerytalną dla pary: on (x), ona (y), która wypłaca A na poczatku każdego roku aż do pierwszej śmierci; potem B co roku do jej śmierci, jeśli on umrze jako pierwszy, albo C co roku do jego śmierci, jeśli ona umrze jako pierwsza. niech $SJN(A, B, C)$ oznacza składkę jednorazową netto za takie ubezpieczenie emerytalne. Wiadomo, że $SJN(5, 4, 3) = 60$, $SJN(7, 5, 4) = 80$, $SJN(8, 6, 4) = 92$. Oblicz SJN(11,7,5).

Rozwiązanie 9.8 *Mamy układ 3 równań:*

$$\begin{aligned} 60 &= 5x + 4y + 3z && (1)\\ 80 &= 7x + 5y + 4z && (2)\\ 92 &= 8x + 6y + 4z && (3) \end{aligned}$$

Rozwiązujemy układ i mamy: $x = 6$, $y = 6$, $z = 2$, *stąd*

$$SJN(11, 7, 5) = 11 \cdot 6 + 7 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 118$$

Zadanie 9.9 Na osobę (x) wystawiono roczną polisę wypłacającą świadczenie na koniec okresu ubezpieczenia. Życie ubezpieczonego jest narażone na trzy niezależne od siebie ryzyka.

Pierwsze jest typowym demograficznym ryzykiem śmierci i osiąga poziom ${}_1^*q_x^{(1)} = 0.05$

Drugie wiąże się ze specyficznym schorzeniem ubezpieczonego i wynosi ${}_1^*q_x^{(2)} = 0.15$
Trzecie wynika ze szczególnego trybu życia ubezpieczonego i osiąga poziom ${}_1^*q_x^{(3)} = 0.20$
Wszystkie trzy ryzyka mają jednostajny rozkład w ciągu roku. Polisa wypłaca 500 000 zł za śmierć z powodu pierwszego ryzyka lub 100 000 zł za śmierć wywołaną drugim ryzykiem. Śmierć z tytułu trzeciego ryzyka nie jest objęta ubezpieczniem. Wyznacz składkę za to ubezpieczenie przy $v = 0.95$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 9.9 Stowarzyszony model jednoopcyjny
Błaszczyszyn, Rolski (s. 315)

$$ {}_tp_x^{'(j)} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{[x]+s}^{(j)} ds\right) $$

$$ {}_tp_x^{'(j)} = 1 - {}_tq_x^{'(j)} $$

Wielkość ${}_tq_x^{'(j)}$ *nazywamy absolutnym wskaźnikiem wychodzenia ze statusu z powodu ryzka j (z opcja) j lub prawdopodobieństwem netto wyjścia ze statusu z powodu j.*

Wzory:

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x^{'(j)} $$

Przy założeniu HU-D

$$ {}_sp_x^{'(j)} = \left({}_sp_x^{(\tau)}\right)^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}} $$

$$ q_x^{(j)} = \frac{\log p_x^{'(j)}}{\log p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)} $$

Szukamy składki za ubezpieczenie:

$$ SJN = (500000 \cdot q_x^{(1)} + 100000 \cdot q_x^{(2)}) \cdot \underbrace{v}_{\text{na koniec okresu}} $$

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x^{'(j)} = (1-0.05)(1-0.15)(1-0.2) = 0.646 $$

$$ {}_tq_x^{(\tau)} = 1 - {}_tp_x^{(\tau)} = 0.354 $$

$$q_x^{(1)} = \frac{\log p_x^{'(1)}}{\log p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)} = \frac{\ln(1-0.05)}{\ln(0.646)} \cdot 0.354 = 0.04155529517$$

$$q_x^{(2)} = \frac{\log p_x^{'(2)}}{\log p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)} = \frac{\ln(1-0.15)}{\ln(0.646)} \cdot 0.354 = 0.1316648144$$

$$SJN = (500000 \cdot 0.04155529517 + 100000 \cdot 0.1316648144 \cdot)0.95 = 32246.92257 \approx 32350$$

10 Egzamin z 3 października 2011 r.

Zadanie 10.1 Rozważmy populację Gompertza z funkcją intensywności śmiertelności postaci $\mu_{x+t} = B \cdot 1.05^{x+t}$. Niech przedział wiekowy $[x, x+10]$ charakteryzuje się tym, że największe jest w nim prawdopodobieństwo śmierci noworodka (spośród wszystkich przedziałów 10-letnich). Oblicz ${}_{10}p_x$.

Rozwiązanie 10.1 Prawo Gompertza
Natężenie zgonów jest wykładnicze postaci $\mu_t = Bc^t$. *Mamy:*

$$s(t) = exp(-m(c^t - 1))$$

gdzie $m = \frac{B}{\ln c}$

$${}_tp_x = \exp\left(-m(c^{t+x} - c^x)\right)$$

Naszym zadaniem jest maksymalizacja prawdopodobieństwa, że 0-latek przeżyje jeszcze x lat, a następnie urze w przeciągu 10 lat. Wzór ogólny: (prawdopodobieństwo, że x-latek przeżyje jeszcze s lat, a następnie umrze w przeciągu czasu t:

$${}_{s|t}q_x = F_x(s+t) - F_x(s) = Pr(s < T_x \leqslant s+t) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x = {}_sp_x - {}_{s+t}p_x$$

W naszym przypadku szukamy maksimum:

$${}_{x|10}q_0 = {}_xp_0 - {}_{x+10}p_0$$

Mamy:

$${}_{x|10}q_0 = e^{-\int_0^x \mu_{0+u}du} - e^{-\int_0^{x+10} \mu_{0+u}du}$$

Różniczkujemy po x oraz korzystamy z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\int_0^x \mu_u du} - e^{-\int_0^{x+10} \mu_u du}\right) = e^{-\int_0^x \mu_u du} \cdot (-\mu_x) - e^{-\int_0^{x+10} \mu_u du} \cdot (-\mu_{x+10})$$

Przyrównujemy do zera

$$e^{-\int_0^x \mu_u du} \cdot (-\mu_x) - e^{-\int_0^{x+10} \mu_u du} \cdot (-\mu_{x+10}) = 0$$

$$e^{-\int_0^x \mu_u du} \cdot (\mu_x) = e^{-\int_0^{x+10} \mu_u du} \cdot (\mu_{x+10})$$

$$e^{-\int_0^x \mu_u du} \cdot (\mu_x) = e^{-\int_0^x \mu_u du + \int_x^{x+10} \mu_u du} \cdot (\mu_{x+10})$$

Wiemy, że przy HJP jest:

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_s ds}$$

$$\underbrace{e^{-\int_0^x \mu_u du}}_{{}_xp_0} \cdot (\mu_x) = \underbrace{e^{-\int_0^x \mu_u du}}_{{}_xp_0} \underbrace{e^{\int_x^{x+10} \mu_u du}}_{{}_{10}p_x} \cdot (\mu_{x+10})$$

Stąd:

$$\frac{B \cdot 1.05^x}{B \cdot 1.05^{x+10}} = {}_{10}p_x$$

Czyli:

$${}_{10}p_x = 1.05^{-10} = 0.6139132535 \approx 0.61$$

Rozwiązanie alternatywne

Mamy:

$$\underbrace{P(x < T(0) \leqslant x + 10)}_{{}_{x|10}q_0} = \phi(x)$$

$${}_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}$$

$${}_xp_0 \cdot {}_{10}q_x = \phi(x)$$

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = ?$$

$$\frac{d}{dx}{}_tp_x = {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})$$

$${}_tp_x = e^{\left(-\int_0^t \mu_{[x]+u} du\right)}$$

Czyli z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego:

$$\frac{d}{dt}{}_tp_x = {}_tp_x(-\mu_{[x]+t})$$

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = \frac{d}{dx}({}_xp_0 \cdot (1 - {}_{10}p_x)) = -{}_xp_0\mu_x(1 - {}_{10}p_x) + {}_xp_0(-{}_{10}p_x)(\mu_x - \mu_{x+t})$$

Przyrównujemy do zera

$$-{}_xp_0\mu_x(1 - {}_{10}p_x) + {}_xp_0(-{}_{10}p_x)(\mu_x - \mu_{x+t}) = 0$$

$$-{}_xp_0 \cdot \mu_x + {}_xp_0 \cdot \mu_x \cdot {}_{10}p_x - {}_xp_0 \cdot \mu_x \cdot {}_{10}p_x + {}_xp_0 \cdot \mu_{x+10} \cdot {}_{10}p_x = 0$$

Stąd:

$${}_{10}p_x = \frac{\mu_x}{\mu_{x+10}} = \frac{B \cdot 1.05^x}{B \cdot 1.05^{x+10}} = 1.05^{-10}$$

Zadanie 10.2 Rozważmy następującą polisę emerytalną dla (25) wylosowanego z populacji de $Moivre'a$ z wiekiem granicznym 100. Przez najbliższe 40 lat będize płacił składkę w formie renty życiowej ciągłej z odpowiednio dobraną intensywnością $\bar{P}$. Jeśli umrze w ciągu najbliższych 40 lat, uposażonym zostanie wypłacona suma ubezpieczenia 100000 w chwili śmierci. Jeśli natomiast dożyje do wieku 65 lat to zacznie otrzymywać emeryturę dożywotnią w postaci renty życiowej z intensywnością 12000 na rok. Dodatkowo, jeżeli umrze w wieku $65+t$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 10$ to uposażeni otrzymają jednorazowo $100000(10-t)$ (w chwili jego śmierci).

Oblicz $\bar{P}$, jeśli wiadomo, że techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.04$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 10.2 Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki* $\omega = 100$ *lat. Rozkład* T_0 *jest jednostajny na przedziale* $[0, \omega]$. *Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

P.V. składek płaconych przez najbliższe 40 lat:

$$\bar{P}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \bar{P}\int_0^n v^t {}_tp_x dt = \bar{P}\int_0^{40} e^{-0.04t} {}_tp_{25} dt = \int_0^{40} e^{-0.04t}\left(1 - \frac{t}{75}\right) dt =$$

$$= \bar{P} \cdot 15.99367827$$

Wartość obecna przyszłych benefitów:

$$100000\bar{A}^{\;1}_{25:\overline{40}|} + v^{40} \cdot {}_{40}p_{20} \cdot 12000 \cdot \bar{a}_{65:\overline{35}|} + 100000{}_{40}p_{25} \cdot v^{40} \cdot (D\bar{A})^{\;1}_{65:\overline{10}|}$$

Mamy:

$$v^{40} = e^{-0.0440} = 0.201896518$$

$${}_{40}p_{25} = 1 - \frac{40}{75} = 0.466666667$$

$$\bar{a}_{65:\overline{35}|} = \int_0^{35} e^{-0.04t}\left(1 - \frac{t}{35}\right) dt = 11.54637436$$

$$\bar{A}^{\;1}_{25:\overline{40}|} = \int_0^t v^t {}_tp_x \mu_{[x]+t} = \int_0^{40} e^{-0.04t}\left(1 - \frac{t}{75}\right) \cdot \left(\frac{1}{75-t}\right) dt = 0.266034494$$

Ubezpieczenie terminowe malejące

$$(\bar{D}\bar{A})^{\;1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t (n - \lfloor t \rfloor) {}_tp_x \mu_{[x]+t} dt$$

$$(\bar{D}\bar{A})^{\;1}_{65:\overline{10}|} = \int_0^{10} e^{-0.04t}(10-t)\left(1 - \frac{t}{35}\right) \cdot \left(\frac{1}{35-t}\right) dt = 1.255715108$$

Mamy:

$$\bar{P} = \frac{100000\bar{A}^{\;1}_{25:\overline{40}|} + v^{40} \cdot {}_{40}p_x \cdot 12000 \cdot \bar{a}_{65:\overline{35}|} + 100000{}_{40}p_{25} \cdot v^{40} \cdot (\bar{D}\bar{A})^{\;1}_{65:\overline{10}|}}{\bar{a}_{25:\overline{40}|}} \approx 3219.34$$

Zadanie 10.3 Rozpatrujemy ciągły model bezterminowego ubezpieczenie rentowego dla (x), które w ciągu 10 lat osoba żyjąca może odwołać w dowolnym momencie $0 < t < 10$, pobierając wypłatę $\bar{a}_{x+t}$ za każdą złotówkę renty. Wiadomo, że wszyscy, którzy odwołują ubezpieczenie, czynią to tuż przed śmiercią, oraz że tylko połowa umierających zdąża odwołać ubezpieczenie. Podaj wysokość jednorazowej składki netto za 1 złotówkę renty, jeśli jest to populacja wykładnicza z parametrem $\mu = 0.04$, a oprocentowanie $\delta = 0.06$

Rozwiązanie 10.3 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy*

$$ {}_tp_x = e^{-\mu t} $$

$$ \mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu $$

Z faktu, że ${}_tp_x$ nie zależy od x wynika, że

$$ \bar{a}_{x+t} = \bar{a}_x $$

bo

$$ \bar{a}_x = \int_0^\infty v^t {}_tp_x dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} dt = \int_0^\infty e^{-0.1t} dt = 10 $$

Z treści zadania wynika, że przez 10 pierwszych lat mamy do czynienia z ubezpieczeniem terminowym, 10 letnim o danej kwocie wyplaty (wyplata równa jest 10 ponieważ $\bar{a}_{x+t} = 10$ w dowolnym momencie t.

Ubezpieczenia terminowe

$$ \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{[x]+t} dt $$

mamy

$$ \bar{A}^1_{x:\overline{10}|} = 10 \cdot \int_0^{10} e^{-0.06t} e^{-0.04t} \cdot \underbrace{0.5}_{\text{Tylko 0.5 odwołuje}} \cdot 0.04 \cdot dt = 1.26424 $$

JSN dla tego ubezpieczenia:

$$ \bar{a}_x + \bar{A}^1_{x:\overline{10}|} = 10 + 1.26424 = 11.26524 \approx 11.265 $$

Zadanie 10.4 Niech $\bar{a}_x(\delta)$ oznacza wartość ciągłej renty życiowej wyznaczonej przy intensywności oprocentowzania δ. Dla pewnej populacji wiadomo, że $\bar{a}_x(0.03) = 11.50$. Spośród podanych niżej wskaż najniższą wartość, której na pewno nie przekroczy $\bar{a}_x(0.04)$

Rozwiązanie 10.4 *Renta na całe życie*

$$ \bar{a}_x = \int_0^\infty v^t {}_tp_x dt $$

Szukamy minimum pomiędzy

$$\int_0^\infty e^{-0.03t}{}_tp_x dt - \int_0^\infty e^{-0.04t}{}_tp_x dt$$

Minimum gdy założymy, że w tej populacji ${}_tp_x = 1$ *do pewnego momentu, a następnie równy zero. Wtedy:*

$$\int_0^n e^{-0.03t}dt = 11.5$$

Stąd $n \approx 14.10400144$

$$\int_0^{14.10400144} e^{-0.04t}dt = 10.77905657$$

Stąd wniosek, że $\bar{a}_x(0.04)$ *nie przekroczy 10.78.*

Zadanie 10.5 Rozważmy ubezpieczenie spłaty n-letniego kredytu hipotetecznego w wysokości 1, który będzie spłacany przez (x) w postaci renty ciągłej n-letniej z odpowiednio dobraną stałą intesywnością (model ciągły metody równych rat). Gdy dłużnik umrze w ciągu n lat, niespłacone saldo kredytu zostanie wypłacone natymiast bankowi. Niech $SJN(n)$ oznacza składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie. Intensywność oprocentowania kredytu jest równa technicznej intensywności oprocentowania używanej przez ubezpieczyciela w rachunku technicznym. Pochodna $SJN'(n)$ wyraża się wzorem:

ODP. (E) $SJN'(n) = \frac{\delta e^{\delta n}}{(e^{\delta n}-1)^2}({}_nq_x - \bar{A}^1_{x:\overline{n|}})$

Rozwiązanie 10.5 *Obecna wartość ciągłej renty pewnej*

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t}dt = \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta n})$$

Mamy:

$$1 = \bar{P}\bar{a}_{\overline{n|}}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{\frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta n})} = \frac{\delta}{1 - e^{-\delta n}}$$

W momencie k zostało do spłacenia jeszcze $\bar{P} \cdot \bar{a}_{\overline{n-k|}}$

$$\bar{a}_{\overline{n-k|}} = \int_0^{n-k} e^{-\delta t}dt = e^{-0.12t}dt = \frac{e^{-\delta(n-k)} - 1}{-\delta} = \frac{1 - e^{-\delta(n-k)}}{\delta}$$

Ubezpieczenia terminowe

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t{}_tp_x\mu_{[x]+t}dt$$

$$SJN(n) = \int_0^n \bar{P}\cdot\bar{a}_{\overline{n-t}|}\cdot e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{[x]+t}dt = \int_0^n \frac{\delta}{1-e^{-\delta n}}\cdot\frac{1-e^{-\delta(n-t)}}{\delta}\cdot e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{[x]+t}dt =$$

$$= \int_0^n \frac{1-e^{-\delta(n-t)}}{1-e^{-\delta n}}\cdot e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{[x]+t}dt = \frac{1}{1-e^{-\delta n}}\int_0^n (1-\underbrace{e^{-\delta(n-t)}}_{e^{-\delta n}\cdot e^{\delta t}})e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{[x]+t}dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\delta n}}\left(\underbrace{\int_0^n e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{[x]+t}dt}_{=\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}} - \int_0^n e^{-\delta n}\underbrace{e^{\delta t}e^{-\delta t}}_{=1}{}_tp_x\mu_{[x]+t}dt\right) =$$

$$= \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{1-e^{-\delta n}} - \frac{e^{-\delta n}}{1-e^{-\delta n}}\underbrace{\int_0^n {}_tp_x\mu_{[x]+t}dt}_{={}_nq_x}$$

Mamy:

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{1-e^{-\delta n}}\right) = \frac{\frac{d}{dn}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})(1-e^{-\delta n}) - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\frac{d}{dn}(1-e^{-\delta n})}{(1-e^{-\delta n})^2} = (*)$$

Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)$$

Mamy:

$$(*) = \frac{e^{-\delta n}{}_np_x\mu_{n+t}(1-e^{-\delta n}) - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\delta e^{-\delta n}}{(1-e^{-\delta n})^2}$$

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{-\delta n}}{1-e^{-\delta n}}\right) = \frac{-\delta e^{-\delta n}}{(1-e^{-\delta n})^2}$$

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{-\delta n}}{1-e^{-\delta n}}{}_nq_x\right) = \frac{-\delta e^{-\delta n}}{(1-e^{-\delta n})^2}\cdot{}_nq_x + \frac{e^{-\delta n}}{1-e^{-\delta n}}\cdot({}_np_x\mu_{x+n})$$

ponieważ ${}_tq_x = \int_0^t {}_sp_x\mu_{[x]+s}ds$

Stąd:

$$\frac{d}{dn}(SJN(n)) = \frac{e^{-\delta n}{}_np_x\mu_{x+n}(1-e^{-\delta n}) - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\delta e^{-\delta n} + \delta e^{-\delta n}{}_nq_x - e^{-\delta n}{}_np_x\mu_{x+n}(1-e^{-\delta n})}{(1-e^{-\delta n})^2} =$$

$$= \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\delta e^{-\delta n} + \delta e^{-\delta n}{}_nq_x}{(1-e^{-\delta n})^2} = \frac{\delta e^{-\delta n}({}_nq_x - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|})}{(1-e^{-\delta n})^2} = \frac{\delta e^{-\delta n}({}_nq_x - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|})}{\left(\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta n}}\right)^2} = \frac{\delta e^{\delta n}({}_nq_x - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|})}{(e^{\delta n-1})^2}$$

Zadanie 10.6 Dla osoby w wieku (x) dostępne są 4 warianty ubezpieczenia, wszystkie z suma ubezpieczenia 100 000 zł, która w przypadku smierci jest wypłacana na koniec roku śmierci. Są to:
(1) 10-letnie ubezpiecznie na życie z jednorazową składką netto 22 395 zł
(2) 10-letnie ubezpieczenie na życie z roczną składką netto płatną przez cały okres ubezpieczenia, na początku roku, w wysokości 3 110 zł
(3) 10-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie z roczną składką netto płatną przez cały okres ubezpieczenia, na początku roku, w wysokości 9 120 zł
(4) bezterminowe ubezpieczenie na życie z roczną składką netto płatną przez cały okres ubezpieczenia, na początku roku, w wysokosci 4635 zł.
(x) wybiera czwarty wariant ubezpieczenia. Podaj wysokość rezerwy skladek netto po 10 latach tego ubezpiecznia.

Rozwiązanie 10.6 *Dane:*

(1) $A^1_{x:\overline{10|}} = 0.22395$
(2) $P^1_{x:\overline{10|}} = \frac{A^1_{x:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}$, *stąd* $\ddot{a}_{x:\overline{10|}} = \frac{A^1_{x:\overline{10|}}}{P^1_{x:\overline{10|}}} = 7.201$
(3) $P_{x:\overline{10|}} = \frac{A_{x:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}$, *stąd* $A_{x:\overline{10|}} = 0.65673$
(4) $P_x = 0.04635$

Szukane: ${}_{10}V_x =?$. *Można policzyć ze wzoru:*

$$A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1} \cdot {}_{10}V_x = P_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{10|}} - A^1_{x:\overline{10|}}$$

Wyprowadzenie wzoru:

Wiemy, że:

$$ {}_{10}V_x = A_{x+10} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+10} \qquad (*)$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_x = \sum_{k=0}^{n} v^k {}_kp_x + \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_kp_x = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \underbrace{v^n {}_np_x}_{A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1}} \cdot \ddot{a}_{x+n} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1} \cdot \ddot{a}_{x+n}$$

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x q_{[x]+k} = \sum_{k=0}^{n} v^{k+1} {}_kp_x q_{[x]+k} + \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x q_{[x]+k} \Rightarrow$$

$$A_x = A^1_{x:\overline{n|}} + v^n \cdot {}_np_x \cdot A_{x+n} = A^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{10|}}^{\;\;1} \cdot A_{x+n}$$

Stąd

$$\ddot{a}_{x+10} = \frac{\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{10|}}}{A_{x:\overline{10|}}^{\;\;1}}$$

$$A_{x+10} = \frac{A_x - A^1_{x:\overline{10|}}}{A_{x:\overline{10|}}^{\;\;1}}$$

Wstawiamy do (∗):

$$_{10}V_x = \frac{A_x - A^1_{x:\overline{10}|}}{A_{x:\overline{10}|}^{\ \ 1}} - P_x \cdot \frac{\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{10}|}}{A_{x:\overline{10}|}^{\ \ 1}}$$

Biorąc pod uwagę, że $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$ *po przekształceniach otrzymujemy:*

$$A_{x:\overline{10}|}^{\ \ 1} \cdot {}_{10}V_x = P_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{10}|} - A^1_{x:\overline{10}|}$$

Pamiętamy, że

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$

Stąd:

$$_{10}V_x = \frac{P_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{10}|} - A^1_{x:\overline{10}|}}{A_{x:\overline{10}|} - A^1_{x:\overline{10}|}} \approx 0.253742612$$

ODP ≈ 25374

Zadanie 10.7 Rozważmy model ciągły bezterminowego ubezpieczenia na życie dla (x), które wypłaci uposażonym sumę ubezpieczenia 1 w chwili śmierci ubezpieczonego, a wcześniej będzie opłacane w postaci ciągłej, życiowej renty składek z odpowiednio dobraną intensywnością netto $\bar{P}_x$. Wówczas spełnione jest równianie różniczkowe:

ODP A: $\frac{d_tV_x}{dx} - \frac{d_tV_x}{dt} + \frac{d\bar{P}_x}{dx} \cdot \bar{a}_{x+t} = 0$

Rozwiązanie 10.7 *Wiemy:*

$$_t\bar{V}_x = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}_x \cdot \bar{a}_{x+t}$$

korzystamy z własności $\bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}$ *i dostajemy:*

$$_t\bar{V}_x = (1 - \delta\bar{a}_{x+t}) - \bar{P}_x \cdot \bar{a}_{x+t}$$

$$\frac{d}{dx}{}_t\bar{V}_x = -\delta\frac{d}{dx}\bar{a}_{x+t} - \frac{d}{dx}\bar{P}_x \cdot \bar{a}_{x+t} - \bar{P}_x\frac{d}{dx}\bar{a}_{x+t} \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}{}_t\bar{V}_x = -\delta\frac{d}{dt}\bar{a}_{x+t} - \underbrace{\frac{d}{dt}\bar{P}_x \cdot \bar{a}_{x+t}}_{=0} - \bar{P}_x\frac{d}{dt}\bar{a}_{x+t} \tag{5}$$

Wiemy, że

$$\frac{d}{dx}\bar{a}_{x+t} = \frac{d}{dt}\bar{a}_{x+t}$$

Odejmując stronami równanie dostajemy:

$$\frac{d_tV_x}{dx} - \frac{d_tV_x}{dt} + \frac{d\bar{P}_x}{dx} \cdot \bar{a}_{x+t} = 0$$

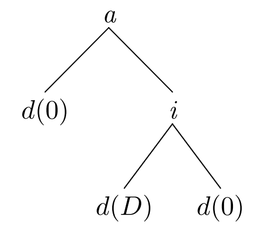
czyli odpowiedź.

Zadanie 10.8 Rozpatrujemy ciągły model dodatkowego ubezpieczenia od ciężkich chorób (critical illness cover), które wypłaca świadczenie, jeśli w ciągu 10 lat zostanie zdiagnozowana ubezpieczona choroba. Polisa wypłaca 50 000 zł w momencie zdiagnozowania choroby oraz dwie dalsze wypłaty po 50 000 zł w odstępach półrocznych, pod warunkiem przeżycia. Następujące oznaczenia identyfikują możliwe stany ubezpieczonego:
a - aktywny, zdrowy;
i - zdiagnozowana choroba;
$d(D)$ - śmierć wywołana zdiagnozowana chorobą,
$d(O)$ - śmierć z innych przyczyn.
Niech y oznacza osiągnięty wiek, r oznacza czas, który upłynął od postawienia diagnozy. Dane są intensywności:

$$\mu_y^{ai} = 0.02,\ \mu_y^{ad(O)} = 0.04,\ \mu_{y,r}^{id(O)} = 0.05,\ \mu_{y,r}^{id(D)} = 0.25$$

oraz intensywność oprocentowania $\delta = 0.05$. Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 10.8 *Możliwe przejścia ze stanu zdrowy:*
zdrowy $\Rightarrow$ zdiagnozowana choroba (ai)
zdrowy $\Rightarrow$ śmierć z innych przyczyn $(ad(O))$.
Możliwe przejścia ze stanu zdiagnozowana choroba:
zdiagnozowana choroba $\Rightarrow$ śmierć wywołana zdiagnozowaną chorobą $(id(D))$,
zdiagnozowana choroba $\Rightarrow$ śmierć z innych przyczyn $id(O)$.



Wartość wypłaty na chwię t: $b(t, ai)$.

$$JSN = \int_0^{10} b(t, ai) \cdot e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x^{(\tau_1)} \cdot \mu_{x+t}^{ai} + \underbrace{0}_{\text{śmierć z innych przyczyn}}$$

Dla ubezpieczeń wieloopcyjnych zachodzą następujące własności:

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{[x]+s}^{(j)} ds$$

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{[x]+s}^{(\tau)} ds}$$

$$\mu_{[x]+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{[x]+t}^{(j)}$$

mamy:

$$ {}_tp_x^{(\tau_1)} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{ai} + \mu_{x+s}^{ad(O)} ds} = e^{-\int_0^t 0.02+0.04ds} = e^{-0.06t} $$

mamy również:

$$ b(t, ai) = 50000(1 + e^{-0.05 \cdot \frac{1}{2}} \cdot {}_{\frac{1}{2}}p_{x+t}^{(\tau_2)} + e^{-0.05} p_{x+t}^{(\tau_2)}) = (*) $$

$$ {}_tp_{x+t}^{(\tau_2)} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{id(D)} + \mu_{x+s}^{id(O)} ds} = e^{-0.3t} $$

$$ (*) = 50000(1 + e^{-0.35 \cdot \frac{1}{2}} + e^{-0.35}) = 127207.2555 $$

$$ JSN = \int_0^{10} 127207.2555 \cdot e^{-0.05t} \cdot e^{-0.06t} \cdot 0.02dt = 15429.75246 \approx 15430 $$

Zadanie 10.9 Bolek (b) i Lolek (l) są wylosowani niezależnie z dwóch populacji wykładniczych, przy czym $E(T(b))/E(T(l)) = 2$. Ponadto wiadomo, że $E(\min(T(b), n)) = 50.3415$, $E(\min(T(l), n)) = 37.6702$. Oblicz $E(\min(T(b), T(l), n))$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 10.9 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy*

$$ {}_tp_x = e^{-\mu t} $$

$$ \mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu $$

Mamy

$$ E(T(b)) = \int_0^\infty {}_tp_x = \int_0^\infty e^{-\mu_1 t} = \frac{1}{\mu_1} $$

$$ E(T(a)) = \int_0^\infty {}_tp_x = \int_0^\infty e^{-\mu_2 t} = \frac{1}{\mu_2} $$

Wiemy, że

$$ \frac{E(T(b))}{E(T(l))} = 2 $$

Czyli

$$ \frac{\frac{1}{\mu_1}}{\frac{1}{\mu_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 2 \rightarrow \mu_2 = 2\mu_1 $$

Wiemy, że

$$ E(\min(T(b), n)) = 50.3415 = \mathring{e}_{x:\overline{n}|}^{(b)} $$

$$ \mathring{e}_{x:\overline{n}|}^{(b)} = \int_0^n {}_tp_x dt = \int_0^n e^{-\mu_1 t} = \frac{e^{-\mu_1 n} - 1}{-\mu_1} = 50.3415 $$

$$ E(\min(T(l), n)) = 37.6702 = \mathring{e}_{x:\overline{n}|}^{(l)} $$

$$\mathring{e}^{(l)}_{x:\overline{n}|} = \frac{e^{-\mu_2 n} - 1}{-\mu_2} = 37.6702$$

$$\begin{aligned} e^{-\mu_1 n} - 1 &= -50.3416\mu_1 \\ e^{-\mu_2 n} - 1 &= -37.6702\mu_2 \end{aligned}$$

korzystając z równości $\mu_2 = 2\mu_1$

$$\begin{aligned} e^{-\mu_1 n} - 1 &= -50.3416\mu_1 \\ e^{-2\mu_1 n} - 1 &= -37.6702 \cdot 2\mu_1 \end{aligned}$$

Ponieśmy do kwadratu

$$(e^{-\mu_1 n} - 1)^2 = (-50.3416\mu_1)^2$$

mamy

$$e^{-2\mu_1 n} - 2e^{-\mu_1 n} + 1 = 50.3416^2 \cdot \mu_1^2$$

podstawiamy

$$-37.6702 \cdot 2\mu_1 + 1 - 2(-50.3416\mu_1 + 1) + 1 = 50.3416^2 \cdot \mu_1^2$$

Po rozwiązaniu równania otrzymujemy $x = 0$ *(odpada) lub* $x \approx 0.01$ *Niech* $\mu_1 = 0.01$ *wtedy*

$$e^{-0.01n} - 1 = -50.3416 \cdot 0.01$$

Stąd $n \approx 70$. *Szukamy* $E(\min(T(b), T(l), n))$

$$\mathring{e}_{x:y:\overline{n}|} = \int_0^n {}_tp_x {}_tp_y dt = \int_0^n e^{-\mu_1 t} e^{-\mu_2 t} dt = \int_0^n e^{-3\mu_1 t} dt = \frac{e^{-3\mu_1 n} - 1}{-3\mu_1} = 29.2515 \approx 29.25$$

Rozwiązanie alternatywne

Wiemy, że

$$\frac{E(T(b))}{E(T(l))} = 2$$

Czyli

$$\frac{\frac{1}{\mu_1}}{\frac{1}{\mu_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 2 \rightarrow \mu_2 = 2\mu_1$$

$$\mathring{e}^{(b)}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n {}_tp_x dt = \frac{e^{-\mu_1 n} - 1}{-\mu_1} = \frac{1}{\mu_1}(1 - e^{-\mu_1 n}) = 50.3415$$

$$\mathring{e}^{(l)}_{x:\overline{n}|} = \frac{e^{-\mu_2 n} - 1}{-\mu_2} = \frac{1}{\mu_2}(1 - e^{-\mu_2 n}) = 37.6702$$

Dla Lolka:

$$\frac{1}{2\mu_1}(1 - e^{-2\mu_1 n}) = 37.6702$$

Różnica kwadratów

$$\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{\mu_1}(1-e^{-\mu_1 n})}_{=50.3415}(1+e^{-\mu_1 n}) = 37.6702$$

Stąd

$$e^{-\mu_1 n} = 0.496586315$$
$$1-e^{-\mu_1 n} = 0.503413685$$
$$\mu_1 = \frac{0.503413685}{50.3415} \approx 0.01$$

Rozwiązanie:

$$\mathring{e}_{x:y:\overline{n|}} = \int_0^n {}_tp_x {}_tp_y dt = \int_0^n e^{-\mu_1 t}e^{-\mu_2 t}dt = \int_0^n e^{-3\mu_1 t}dt = \frac{e^{-3\mu_1 n}-1}{-3\mu_1} = 29.2515 \approx 29.25$$

Zadanie 10.10 Osoba (x) wychodzi z OFE z kapitałem K i kupującą dożywotnią emeryturę z gwarantowanym okresem wypłat n. Gwarantowany okres jest dobrany tak, by suma wypłat (bez oprocentowania) osiągnęła co najmniej 2/3 kapitału K. Przyjmij ciągły model wypłat emerytalnych.podaj w miesiącach długość okresu gwarancyjnego, jeżeli emeryt pochodzi z populacji o wykładniczym czasie trwania życia z $\mu = 0.09$ oraz $\delta = 0.01$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 10.10 *Niech P - intensywność emerytury. Mamy z treści:*

$$Pn = \frac{2}{3}K$$

Stąd

$$K = \frac{3Pn}{2}$$

$$K = \int_0^n Pv^t dt + v^n \cdot {}_np_x \int_0^\infty Pv^t \cdot {}_tp_{x+n}dt$$

Dla przypomnienia:

Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy*

$${}_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

$$K = \int_0^n Pe^{-0.01t}dt + e^{-0.01n}e^{-0.09n}\int_0^\infty Pe^{-0.01t}\cdot e^{-0.09t}dt =$$

$$= P\left(\frac{1-e^{-0.01n}}{0.01}\right) + Pe^{-0.1n}\frac{1}{0.1} = P(100-100e^{-0.01n}+10e^{-0.1n})$$

Mamy:

$$\frac{3Pn}{2} = P(100 - 100e^{-0.01n} + 10e^{-0.1n})$$

$$n = \frac{2}{3} \cdot (100 - 100e^{-0.01n} + 10e^{-0.1n})$$

Rozwiązujemy równanie (kalkulator)

$$n \approx 8.177559408$$

Odpowiedź $12 \cdot n \approx 98.1307129 \approx 98$

11 Egzamin z 12 marca 2012

Zadanie 11.1 Rozważmy populację de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$. Wiadomo, że $\mathring{e}_{x:\overline{30}|} = E(\min(T(x), 30)) = 20$. Oblicz x.

Odp (D) 55.

Rozwiązanie 11.1 *W populacje de Moivre'a mamy ${}_tp_x = 1 - \frac{t}{\omega - x}$. W zadaniu jest ${}_tp_x = 1 - \frac{t}{100-x}$. Mamy:*

$$\mathring{e}_{x:\overline{30}|} = \int_0^{30} 1 - \frac{t}{100 - x} dt = 20$$

Najprościej podstawić kolejne rozwiązania za x. W ten sposób otrzymujemy odpowiedź $x = 55$.

Zadanie 11.2 Niech $\bar{A}_x(\delta, \mu)$ oznacza składkę jednorazową netto za polisę wypłacającą w chwili śmierci, obliczoną z użyciem technicznej intensywności oprocentowania $\delta > 0$ oraz przy rozkładzie trwania życia zaburzonym w stosunku do oryginalnego wg wzoru $\mu'_{x+t} = \mu_{x+t} + \mu$, gdzie parametr $\mu \geqslant 0$ nie zależy od wieku $x + t$. Wówczas zachodzi wzór: (D)

$$\bar{A}_x(\delta, \mu) = \frac{\mu}{\delta + \mu} \bar{A}_x(\delta + \mu, 0) + \frac{\mu}{\delta + \mu}$$

Rozwiązanie 11.2 *Mamy: $\bar{A}_x(\delta + \mu, 0) = \int_0^\infty e^{-(\delta+\mu)t} {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt$. Wiemy, że ${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+u}} du = e^{-\int_x^{x+t} \mu_s} ds$. W zadaniu mamy:*

$$\bar{A}_x(\delta, \mu) = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp'_x \mu'_{x+t} dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\int_x^{x+t} \mu_s + \mu ds} \cdot (\mu_{x+t} + \mu) dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\int_x^{x+t} \mu_s ds} e^{-\mu t} (\mu_{x+t} + \mu) dt = \int_0^\infty e^{-(\delta+\mu)} {}_tp_x (\mu_{x+t} + \mu) dt =$$

$$= \bar{A}_x(\delta + \mu, 0) + \mu \bar{a}_x(\delta + \mu, 0) = (*)$$

Wiemy, że

$$\bar{a}_x(\delta + \mu, 0) = \frac{1 - \bar{A}_x(\mu + \delta, 0)}{\delta + \mu}$$

Dalej

$$(*) = \bar{A}_x(\delta + \mu, 0) + \mu \cdot \frac{(1 - \bar{A}_x(\mu + \delta, 0))}{\delta + \mu} =$$

$$= (1 - \frac{\mu}{\delta + \mu}) \bar{A}_x(\mu + \delta, 0) = \frac{\delta}{\delta + \mu} \bar{A}_x(\delta + \mu, 0) + \frac{\delta}{\delta + \mu}$$

12 Egzamin z 28 maja 2012

Zadanie 12.1 Rozważamy populację, w której rozkład trwania życia spełnia dla każdego wieku $x > 0$ równanie

$$_{E(T(x))}p_x = const$$

Załóżmy ponadto, że $\mu > 0$ dla $x > 0$. Wówczas dla każdego $x > 0$ zachodzi równość:

$$odp.(A) \quad E(T(x)) = \frac{1}{\mu_{x+E(T(x))}}$$

Rozwiązanie 12.1 *Wiemy z treści zadania, że:*

$$_{E(T(x))}p_x = const$$

mamy:

$$\frac{d(_{E(T(x))}p_x)}{dx} = 0$$

$$\frac{d(_{E(T(x))}p_x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{-\int_0^{E(T(x))}\mu_{x+s}ds}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-\int_x^{x+E(T(x))}\mu_s ds}\right) =$$

$$= \underbrace{e^{-\int_x^{x+E(T(x))}\mu_s ds}}_{_{E(T(x))}p_x} \cdot \frac{d}{dx}\left(-\int_x^{x+E(T(x))}\mu_s ds\right) = {}_{E(T(x))}p_x \cdot (-\mu_{x+E(T(x))} \cdot \frac{d}{dx}(x+E(T(x))) + \mu_x) =$$

$$= {}_{E(T(x))}p_x \cdot ((-\mu_{x+E(T(x))})(1+E(T(x))') + \mu_x) = (*)$$

Wiemy, że

$$\frac{d}{dx}(E(T(x))) = \frac{d}{dx}(\mathring{e}_x) = \mathring{e}_x \cdot \mu_x - 1$$

stąd

$$(*) = {}_{E(T(x))}p_x \cdot ((-\mu_{x+E(T(x)})) \cdot (E(T(x)) \cdot \mu_x) + \mu_x)$$

Przyrównujemy do zera i mamy

$$E(T(x)) = \frac{1}{\mu_{x+E(T(x)}}$$

Zadanie 12.2 Niech $\bar{P}(m,n)$ oznacza stałą intensywność składki netto, która będzie płacona przez (x) w formie m-letniej renty życiowej, za ubezpieczenie ciągłe $n-$*letnie* na zycie i dożycie z sumą ubezpieczenia 1, przy czym $0 < m < n$. Dane są: $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 0.188$, $_nE_x = 0.093$, $_mE_x = 0.352$, $\bar{a}_{x:\overline{m}|} = 12.854$, $\delta = 0.0488$. Oblicz przybliżoną wartość $\bar{P}(m+1, n+1)$. Wybierz wartość najbliższą.

Rozwiązanie 12.2 *Mamy:*

$$P(m+1, n+1) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n+1}|}}{\bar{a}_{x:\overline{m+1}|}}$$

Z wzoru Taylora:

$$\bar{a}_{x:\overline{m+1}|} \approx \bar{a}_{x:\overline{m}|} + \frac{(m+1-m)}{1!}\frac{d}{dm}(\bar{a}_{x:\overline{m}|}) = \bar{a}_{x:\overline{m}|} + e^{-\delta m}{}_{m}p_x = 13.206$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n+1}|} \approx \bar{A}_{x:\overline{n}|} + \frac{(n+1-n)}{1!}\frac{d}{dn}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = (*)$$

$$\frac{d}{dn}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{d}{dn}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}) = e^{-\delta n}{}_{n}p_x\mu_{x+n} + \frac{d}{dn}(e^{-\delta n}{}_{n}p_x) =$$

$$= e^{-\delta n}{}_{n}p_x\mu_{x+n} + e^{-\delta n}(-\delta){}_{n}p_x + e^{-\delta n}{}_{n}p_x(-\mu_{x+n})$$

$$(*) = \bar{A}_{x:\overline{n}|} - \delta \cdot e^{-\delta n}{}_{n}p_x = 0.1834616$$

Stąd:

$$P(m+1, n=1) = 0.0138922 \approx 0.0139$$

Zadanie 12.3 Rozważamy 25-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie dla osoby w wieku (x) z sumą ubezpieczenia 100000 oraz składką płaconą na początku roku przez cały okres ubezpieczenia. Świadczenie śmiertelne jest wypłacane na koniec roku śmierci. Jeśli ubezpieczony nie ma nadwagi ($BMI < 45$), to płaci składkę netto $P_{x:\overline{25}|}$, a jeżeli ma nadwagę, to jest traktowany jako osoba o 5 lat starsza i płaci składkę netto $P_{x+5:\overline{25}|}$. Aktuarialnie ekwiwalentne dla osoby z nadwagą jest również ubezpieczenie, w którym płaci ona składkę $P_{x:\overline{25}|}$, lecz ma zmniejszone świadczenie śmiertelne o kwotę D. Wyznacz kwotę D (podaj najbliższą wartość). Dane są: $v = 0.95$, ${}_{25}p_{x+5} = 0.442$, $\ddot{a}_{x:\overline{25}|} = 12.800$, $\ddot{a}_{x+5:\overline{25}|} = 12.108$.

Rozwiązanie 12.3 *Mamy:*

$$P_{x:\overline{25}|} = \frac{A_{x:\overline{25}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{25}|}}$$

$$A_{x:\overline{25}|} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{25}|} = 0.36$$

stąd $P_{x:\overline{25}|} = 0.028125$

$$P_{x+5:\overline{25}|} = \frac{A_{x+5:\overline{25}|}}{\ddot{a}_{x+25}}$$

$$A_{x+5:\overline{25}|} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x+5:\overline{25}|} = 0.3946$$

stąd $P_{x+5:\overline{25}|} = 0.03259$.

Mamy ($S = 10000$)*:*

$$S \cdot P_{x:\overline{25}|} \cdot \ddot{a}_{x+5:\overline{25}|} = (S-D)\bar{A}^{\ 1}_{x+5:\overline{25}|} + S \cdot A_{x+5:\overline{25}|}^{\ \ \ \ \ 1}$$

$$S \cdot P_{x:\overline{25}|} \cdot \ddot{a}_{x+5:\overline{25}|} = S\bar{A}^{\ 1}_{x+5:\overline{25}|} - D\bar{A}^{\ 1}_{x+5:\overline{25}|} + S \cdot A_{x+5:\overline{25}|}^{\ \ \ \ \ 1}$$

$$D = \frac{S(\overbrace{\bar{A}^{\ 1}_{x+5:\overline{25}|} + A_{x+5:\overline{25}|}^{\ \ \ \ \ 1}}^{A_{x+5:\overline{25}|}}) - S \cdot P_{x:\overline{25}|} \cdot \ddot{a}_{x+5:\overline{25}|}}{\underbrace{\bar{A}^{\ 1}_{x+5:\overline{25}|}}_{A_{x+5:\overline{25}|} - v^{25}{}_{25}p_x = 0.27}} \approx 19880$$

Zadanie 12.4 Rozpatrujemy ciągły model bezterminowego ubezpieczenia na życie w populacji o wykładniczym rozkładzie śmietelności z parametrem $\mu = 0.04$. Za składkę, płatną przez cały okres ważności ubezpieczenia ze stałą intensywnością 1000 zł na rok, ubezpieczony otrzymuje polisę, która:
- wypłaca kwotę M w chwili śmierci, pod warunkiem otrzymania ważności ubezpieczenia,
- zwraca wypłacone składki bez opocentowania, gdy ubezpieczony rezygnuje z kontynuaacji ubezpieczenia.
Rezygnacje, podobnie jak śmietelność, mają wykładniczy rozkład z parametrem $\rho = 0.06$. Podaj sumę ubezpieczenia M, jeżeli oprocentowania ma intesywność $\delta = 0.05$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 12.4 *Mamy:*

$$1000 \cdot \bar{a}_{x:y} = M \cdot \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot \mu_{x+t} dt + 1000 \cdot \int_0^\infty t \cdot {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot \mu_{y+t dt}$$

y - drugie "życie", odpowiadające za rezygnację z ubezpieczenia

$$\bar{a}_{x:y} = \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x {}_tp_y dt = \int_0^\infty e^{-0.05t} e^{-0.04t} e^{-0.06t} dt = \frac{1}{0.15}$$

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot \mu_{x+t} dt = 0.04 \cdot \frac{1}{0.15}$$

$$\int_0^\infty t \cdot e^{-\delta t} {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot \mu_{y+t} dt = 0.06 \cdot \frac{1}{0.15^2}$$

Stąd:

$$\frac{1000}{0.15} = M \cdot \frac{0.04}{0.15} + 1000 \cdot \cdot \frac{0.06}{0.15^2}$$

$$M = \left(\frac{1000}{0.15} - 1000 \cdot \frac{0.06}{0.15^2} \right) \frac{0.15}{0.04} = 15000$$

Zadanie 12.5 Rozważamy ciągły model ubezpieczenia ogólnego typu. Załóżmy, że przez cały czas w okresie od t_1 do t_2 (gdzie $0 < t_1 < t_2$) stosunek intensywności składki oszczędnościowej do rezerwy składek netto utrzymuje się na stałym poziomie $f > 0$.Wiadomo, że $V(t_1) = 0.4$, $V(t_2) = 0.9$. Oblicz $V\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$. Wybierz odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 12.5 Równanie Thielego

$$\frac{d_t \bar{V}}{dt} = \bar{\pi}(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})_t \bar{V} - b(t)\mu_{[x]+t}$$

gdzie: $b(t)$ - suma ubezpieczenia, $\overline{\pi}(t)$ - intensywność płacenia składki

Podział składki w modelu ciągłym

$$\bar{\pi} = \bar{\pi}^s(t) + \bar{\pi}^r(t)$$

$$\bar{\pi}^s(t) = \frac{d_t\bar{V}}{dt} - \delta_t\bar{V}$$

$$\bar{\pi}^r(t) = (b(t) - {}_t\bar{V})\mu_{x+t}$$

W zadaniu mamy:

$$\bar{\pi}^s(t) = V'(t) - \delta\bar{V}(t)$$

dzielimy obustronnie przez $\bar{V}(t)$

$$\underbrace{\frac{\bar{\pi}^s(t)}{\bar{V}(t)}}_{=f} = \frac{V'(t)}{\bar{V}(t)} - \delta$$

$$(f+\delta)\cdot\bar{V}(t) = V'(t)$$

Niech $\bar{V}(t) = y$. *Mamy:*

$$(f+\delta)\cdot y = \frac{dy}{dt}$$

$$(f+\delta)\cdot dt = \frac{dy}{y}$$

Całkujemy

$$\int(f+\delta)dt = \int\frac{1}{y}dy$$

$$\int(f+\delta)dt = \ln y + c_1$$

Stąd

$$y = e^{\int(f+\delta)dt - c_1} = e^{(f+\delta)t + c_2 - c_1} = c_3\cdot e^{(f+\delta)t}$$

czyli

$$V(t) = c_3\cdot e^{\overbrace{(f+\delta)}^{=A}t}$$

mamy:

$$V\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) = c_3\cdot e^{A\frac{t_1+t_2}{2}} \quad |^2$$

$$V\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^2 = c_3^2\cdot e^{A(t_1+t_2)} = c_3\cdot e^{At_1}\cdot c_3\cdot e^{At_2} = 0.4\cdot 0.9$$

$$V\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) = \sqrt{0.36} = 0.6$$

13 Egzamin z 17 czerwca 2013

Zadanie 13.1 Niech x będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dane są:

$$_4p_x = 0.99000; \quad _4p_{x+1} = 0.98000; \quad _4p_{x+1/2} = 0.98501$$

przy czym ostatni symbol został obliczony przy założeniu UDD. Dysponując tymi informacjami oblicz l_{x+5}/l_x. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 13.1 Hipoteza jednostajności (HU; UDD)
Funkcja $_tp_x$ zmiennej t jest ciągła i liniowa w przedziałach $[n, n+1)$

$$_{n+u}p_x = (1-u)_n p_x + u \cdot {}_{n+1}p_x, \qquad 0 \leqslant u < 1$$

$$\mu_{[x]+n+u} = \frac{q_{[x]+n}}{1 - u \cdot q_{[x]+n}}$$

$$_{n+u}p_x = {}_np_x(1 - u \cdot q_{[x]+n})$$

$$_up_x = 1 - u \cdot q_x$$

$$_uq_x = u \cdot q_x$$

Szukamy

$$\frac{l_{x+5}}{l_x} = ?$$

Wiemy, że $_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ *czyli* $_5p_x = \frac{l_x+5}{l_x} = X$. *Dodatkowo* $_tp_{x+s} = \frac{_{s+t}p_x}{_sp_x}$. *Z zadania:*

$$_4p_{x+1/2} = \frac{_{4.5}p_x}{_{0.5}p_x} = \frac{0.5 \cdot {}_4p_x + 0.5 \cdot {}_5p_x}{1 - 0.5(1 - p_x)}$$

$$_4p_{x+1} = \frac{_5p_x}{p_x} \Rightarrow p_x = \frac{_5p_x}{_4p_{x+1}}$$

Z 1 i 2 równania mamy:

$$0.98501 = \frac{0.5 \cdot 0.99 + 0.5 \cdot X}{1 - 0.5(1 - \frac{X}{0.98})}$$

Stąd $X \approx 0.9761$

Zadanie 13.2 Niech $\bar{A}_x^{(\delta)}(\mu)$ oznacza składkę policzoną przy intensywności oprocentowania δ dla standardowych tablic opisujących śmiertelność μ. Dane są $\bar{A}_x^{(0.03)}(\mu) = 0.30$ oraz $\bar{A}_x^{(0.04)}(\mu) = 0.25$. Oblicz $\bar{A}_x^{(0.03)}(\mu')$ gdzie μ' oznacza tablice zmodyfikowane zgodnie z formułą $\mu'_x = \mu_x + 0.01$ (dla każdego $X > 0$). Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 13.2

$$_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$$

$$_tp'_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} + 0.01 ds} = {}_tp_x e^{-0.01t}$$

$$\bar{A}_x^{(0.03)}(\mu') = \int_0^\infty {}_tp'_x\mu'_{x+t}e^{-0.03t}dt = \int_0^\infty {}_tp_xe^{-0.04t}(\mu_{x+t}+0.01)dt =$$

wiemy, że $\bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}$

$$= \bar{A}_x^{(0.04)}(\mu) + 0.01\frac{1-\bar{A}_x^{(0.04)}(\mu)}{0.04} = 0.25 + 0.01\frac{1-0.25}{0.04} = 0.4375$$

Zadanie 13.3 *Rozpatrujemy dyskretny typ ubezpieczenia dożywotniego ubezpieczenia rentowego dla osoby w wieku* (x) *lat, ze składką roczną płaconą na początku roku przez pierwsze* n *lat i świadczeniem w wysokości 12 000 wypłacanym na początku roku od wieku* $(x+n)$. *Po wprowadzeniu zakazu rozróżniania płci w taryfie składek, ubezpieczyciel kalkulował składkę dla rocznika* (x) *przy założeniu, że wśród kupujących ubezpieczenie będzie* 50% *kobiet, jednak ubezpieczenie zakupiło* 70% *kobiet. Podaj stratę ubezpieczyciela na 1 sprzedaną polisę, na moment jej wystawienia. Dane są: dla kobiet* $D_x = 228275$, $N_x = 4280170$, $N_{x+n} = 429425$, *dla meżczyzn:* $D_x = 225775$, $N_x = 3986730$, $N_{x+n} = 292370$

Rozwiązanie 13.3 *Mamy:*

$$(0.5\ddot{a}^k_{x:\overline{n}|} + 0.5\ddot{a}^m_{x:\overline{n}|}) \cdot P = 12000(0.5_{n|}\ddot{a}^k_x + 0.5_{n|}\ddot{a}^m_x)$$

Funkcje komutacyjne:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$_{n|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

Stąd po podstawieniu

$$P = 1146.90$$

Strata ubezpieczyciela:

L=OW wypłat-OW składki

$$L = 12000(0.7_{n|}\ddot{a}^k_x + 0.3_{n|}\ddot{a}^m_x) - (0.7\ddot{a}^k_{x:\overline{n}|} + 0.3\ddot{a}^m_{x:\overline{n}|}) \cdot 1146.90 = 1290.87 \approx 1300$$

Zadanie 13.4 Osoba (65), wylosowana z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$, kupiła za jednorazową składkę netto SJN=$\bar{a}_{65}$ emeryturę dożywotnią, która będzie jej wypłacana z intensywnością roczną 1 aż do śmierci. Oblicz wartość oczekiwaną wartości obecnej zrealizowanych do śmierci wyplat emerytalnych pod warunkiem, że na tej polisie ubezpieczyciel nie poniósł straty:

$$E(\bar{a}_{\overline{T(65)}|}|\bar{a}_{\overline{T(65)}|} < \bar{a}_{65})$$

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.02$. Wskaż najbliższą odpowiedź.

Rozwiązanie 13.4 Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki* $\omega = 100$ *lat. Rozkład* T_0 *jest jednostajny na przedziale* $[0, \omega]$. *Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Mamy:

$$\bar{a}_{65} = \int_0^{35} \left(1 - \frac{t}{35}\right) e^{-\delta t} dt = 14.04180741$$

Obecna wartość ciągłej renty pewnej

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta n})$$

Do momentu $T(65)$ *jest:*

$$\bar{a}_{\overline{T(65)}|} = \int_0^{T(65)} e^{-\delta t} dt = \frac{1 - e^{0.02 \cdot T}}{0.02}$$

Z warunków zadania:

$$\bar{a}_{\overline{T(65)}|} < \bar{a}_{65} \Rightarrow \frac{1 - e^{-0.02 \cdot T}}{0.02} < 14.0418 \Rightarrow T < 16.48329263$$

Stąd:

$$E(\bar{a}_{\overline{T(65)}|} | \bar{a}_{\overline{T(65)}|} < \bar{a}_{65}) = \int_0^{16.4833} \left(1 - \frac{t}{16.4833}\right) e^{-0.02t} dt = 7.405964531$$

Zadanie 13.5 (24) *wylosowany z populacji wykładniczej* $\mu_x \equiv \mu = 0.01$ *płaci składkę w formie renty życiowej ciągłej z roczną intensywnością* $\bar{P}$ *przez najbliższe* 43 *lat lub krócej w wypadku śmierci. Po dożyciu do wieku* 67 *zaczyna otrzymywać emeryturę dożywotnią z roczną intensywnością* $\bar{E}$. *Powyższe parametry* $\bar{P}$ *i* $\bar{E}$ *dotyczą też odpowiedniej polisy emerytalnej dla (x), przy czym on zaczyna otrzymywać świadczenia emerytalne po (ewentualnym) dożyciu wieku 65. Wiedząc* $\delta = 0.03$, *że oblicz x. Wybierz odpowiedź najbliższą.*

Rozwiązanie 13.5 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że* T_x *ma rozkład wykładniczy z gęstością* $\mu e^{-\mu t}$. *Wtedy*

$$_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

mamy:

$$(1) \qquad \bar{a}_{24:\overline{43}|} \cdot \bar{P} = \bar{E} \cdot e^{-0.03 \cdot 43} \underbrace{e^{-0.01 \cdot 43}}_{{}_tp_x} \cdot \bar{a}_{67}$$

$$(2) \qquad \bar{a}_{x:\overline{65-x}|} \cdot \bar{P} = \bar{E} \cdot e^{-0.03 \cdot (65-x)} \cdot e^{-0.01 \cdot (65-x)} \cdot \bar{a}_{65}$$

Mamy:

$$(1) \qquad \frac{1 - e^{(-0.04 \cdot 43)}}{0.04} \bar{P} = \bar{E} e^{-0.04 \cdot 43} \frac{1}{0.04}$$

Z (1) $\frac{\bar{P}}{\bar{E}} = \frac{e^{-1.72}}{1-e^{-1.72}}$

$$(1) \qquad \frac{1 - e^{-0.04(65-x)}}{0.04} \cdot \frac{e^{-1.72}}{1 - e^{-1.72}} = e^{-0.04(65-x)} \frac{1}{0.04}$$

Kalkulator (Solver) i mamy

$$x = 22.0906 \approx 22$$

Zadanie 13.6 *Rozpatrujemy ciągły typ 20-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł oraz składką płaconą ze stałą intensywnością przez cały okres ubezpieczenia. Roczna intenstywność kosztów administracyjnych maleje równomiernie od 10% sumy ubezpieczenia w momencie wystawienia polisy do 5% w momencie wygaśnięcia polisy z tytułu dożycia. Wyznacz rezerwę na koszty administracyjne po 10 latach ubezpieczenia, jeśli jest to populacja z wykładniczym rozkładem trwania życia z parametrem $\mu = 0.02$, a intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.03$. Wskaż najbliższą wartość.*

Rozwiązanie 13.6 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy*

$${}_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

Koszty administracyjne (zarządzania polisą) - wszystkie pozostałe składniki kosztów. Koszty administracyjne są pobierane w aąłym okresie ważności polisy w wysokości proporcjonalnej do sumy ubezpieczenia - odpowiedni współczynnik proporcjonalności oznaczamy przez γ.

Mamy obliczyć $\bar{V}^{\gamma}_{10}$. Intensywność maleje od 10% do 5% co daje $5\%/20 = 0.0025$ *spadku rocznie. Po 10 latach intensywność kosztów wynosi 7.5%.*

$$\bar{V}^{\gamma}_{10} = 100000 \cdot \int_0^{10} (0.075 - 0.0025 \cdot t) e^{-0.02t} e^{-0.03t} dt - \bar{P}^{\gamma} \int_0^{10} e^{-0.03t} e^{-0.02t} dt$$

Musimy wyznaczyć $\bar{P}^{\gamma}$. Mamy:

$$100000 \int_0^{20} (0.1 - 0.0025 \cdot t) e^{-0.05t} dt = \bar{P}^{\gamma} \int_0^{20} e^{-0.05t} dt$$

Stąd

$$\bar{P}^{\gamma} = 7909.883534$$

Wracając do piewszego równania mamy:

$$\bar{V_1}0^{\gamma} = -12245.93312 \approx -12250$$

14 Egzamin z 30 września 2013

15 Egzamin z 10 marca 2014

Zadanie 15.1 Zmiana rozkładu trwania życia typu $C(a,b)$ polega na tym, że nowa funkcja μ'_x wyraża się przez "starą" funkcję μ_x wzorem

$$\mu'_x = a\mu_x + b,$$

dla każdego $x \geqslant 0$, przy czym a, b są parametrami. Niech ${}_tp_x(a,b)$ oznacza ${}_tp_x$ dla populacji zmienionej. Dane są ${}_tp_x(1.05; 0.001) = 0.724650$, ${}_tp_x(1.02; 0.002) = 0.716458$. Oblicz

$${}_tp_x(1.11; 0.004)$$

Rozwiązanie 15.1 *Wiemy, że*

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$$

Mamy:

$${}_tp_x(1.05; 0.001) = e^{-\int_0^t 1.05\mu_{x+s}+0.001 ds} = 0.724650$$

oraz

$${}_tp_x(1.05; 0.001) = e^{-\int_0^t 1.02\mu_{x+s}+0.002 ds} = 0.716458$$

Stąd

$$-\int_0^t 1.05\mu_{x+s} + 0.001 ds = -\ln(0.724650)$$

$$-\int_0^t 1.02\mu_{x+s} + 0.002 ds = -\ln(0.716458)$$

Czyli

$$-1.05 \underbrace{\int_0^t \mu_{x+s} ds}_{X} + 0.001t = -\ln(0.724650)$$

$$-1.02 \underbrace{\int_0^t \mu_{x+s} ds}_{X} + 0.002t = -\ln(0.716458)$$

Stąd

$$X = 0.2876827286$$

$$t = 19.99963$$

Wynik:

$${}_tp_x(1.11; 0.004) = e^{-1.11 \cdot 0.287682 - 0.004 \cdot 19.9996} \approx 0.67$$

Zadanie 15.2 Rozważmy ciągłe ubezpieczenie na zycie ogólnego typu, które wypłaca świadczenie śmiertelne według schematu:

- $c(t) = t$ dla $t \leqslant 10$

- $c(t) = -10 + 2t$ dla $10 \leqslant t \leqslant 20$,
- $c(t) = 10 + t$ dla $t \geqslant 20$.

oblicz składkę jednorazową netto SJN. Dane są:

$$(\bar{I}\bar{A})_x = 20$$

$$(\bar{I}\bar{A})_{x+10} = 15$$

$$(\bar{I}\bar{A})_{x+20} = 10$$

$$_{10}p_x = 0.93 \qquad {}_{10}p_{x+10} = 0.88 \qquad v^{10} = 0.8$$

Rozwiązanie 15.2 *Tutaj należy zrobić rysunek pomocniczy (rozrysować $c(t)$). I należy zauważyć, że szukane ubezpieczenie to kombinacja:*

$$(\bar{I}\bar{A})_x + {}_{10|}(\bar{I}\bar{A})_x - {}_{20|}(\bar{I}\bar{A})_x = (*)$$

mamy:

$$(\bar{I}\bar{A})_x = 20$$

$$_{10|}(\bar{I}\bar{A})_x = v^{10}{}_{10}p_x \cdot (\bar{I}\bar{A})_{x+10} = 15 \cdot 0.93 \cdot 0.8$$

analogicznie

$$_{20|}(\bar{I}\bar{A})_x = 10 \cdot 0.93 \cdot 0.88 \cdot 0.8^2$$

Stąd

$$(*) = 25.9224$$

Zadanie 15.3 Rozpatrujemy ubezpieczenie na dożycie do wieku 70 lat dla osób w wieku 40 lat z populacji de Moivre'a, w której kobiety charakteryzuje parametr $\omega^{(f)} = 100$, a mężczyzn $\omega^{(m)} = 80$. Składka jest płacona przez cały okres ubezpieczenia w formie renty ciągłej.
Ubezpieczyciela obowiązuje zakaz rozróżniania płci w taryfie składek, więc kalkulację składki opiera na przewidywaniu, że wśród nabywców ubezpieczenia będzie 40% kobiet. Przy jakim udziale kobiet strata ubezpieczyciela (za cały okres ubezpieczenia, na moment wystawienia polisy) wyniesie 10% kosztów netto ubezpieczenia? Intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.05$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 15.3

$$_{30}p_x^{(f)} = 1 - \frac{30}{100-40} = 0.5$$

$$_{30}p_x^{(m)} = 1 - \frac{30}{80-40} = 0.25$$

$$e^{-0.05\cdot 30} = 0.2231301601$$

$$\bar{a}_x^{(f)} = \int_0^{30} \left(1 - \frac{t}{100-40}\right) e^{-\delta t} dt = 12.58956613$$

$$\bar{a}_x^{(m)} = \int_0^{30} \left(1 - \frac{t}{80-40}\right) e^{-\delta t} dt = 11.1156508$$

Wobec tego składka teoretyczna:

$$P = \frac{0.4 \cdot e^{-30 \cdot 0.05} \cdot 0.5 + 0.6 e^{-30 \cdot 0.05} \cdot 0.25}{0.4 \cdot 12.58957 + 0.6 \cdot 11.115651} = 0.0066718589246$$

Strata ubezpieczyciela:

OW wypłat - OW składek

$$L = x \cdot 0.5 \cdot e^{-30 \cdot 0.05} + (1-x) \cdot 0.25 \cdot e^{-30 \cdot 0.05} - P \cdot (x \cdot \bar{a}_x^{(f)} + (1-x)\bar{a}_x^{(m)})$$

DALEJ JUŻ JEST NIEJASNE, CO OZNACZA 10% Kosztów netto? Kosztów dla kogo? 10% *JSN? Czy wypłat? Zakładając, że powyższe poprawne*

$$L = x \cdot 0.5 \cdot e^{-30 \cdot 0.05} + (1-x) \cdot 0.25 \cdot e^{-30 \cdot 0.05} - P \cdot (x \cdot \bar{a}_x^{(f)} + (1-x)\bar{a}_x^{(m)}) =$$

$$= 10\% \cdot (P \cdot (x \cdot \bar{a}_x^{(f)} + (1-x)\bar{a}_x^{(m)}))$$

Stąd

$$x = 0.5736791839$$

Poprawna odpowiedź to wg. odpowiedzi 0.559*.*

Zadanie 15.4 Potraktujmy zakup przez (x) ubezpieczenia n-letniego na dożycie, za jednorazową składkę netto, jako inwestycję. W przypadku gdy dożyje wieku $x+n$, zrealizowaną intensywnośc zwrotu (per annum) oznaczamy przez $\delta(x,n)$. Który z poniższych wzorów przedstawia prawdziwe przybliżenie przyrostu funkcji $\delta(x,n)$ jej różniczką?

$$\delta(x + \Delta x, n + \Delta n) - \delta(x,n) = ?$$

Rozwiązanie 15.4 *Wzór Taylora dla funkcji 2 zmiennych:*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) +$$

$$+ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0) + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)$$

Potraktować ubezpiecznie na dożycie jako inwestycję to znaczy:

$$v^n {}_n p_x = e^{-n\delta(x,n)}$$

gdzie $v^n = e^{-\delta n}$ *Chcemy obliczyć deltę:*

$$-\frac{\ln(v^n {}_n p_x)}{n} = \delta(x,n)$$

Dla przypomnienia ${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_s ds}$, *pochodna z* ${}_tp_x$ *po* x *to* ${}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})$, *czyli*

$$\frac{\partial_n p_x}{\partial x} = {}_np_x(\mu_x - \mu_{x+n})$$

Pochodna po n:

$$\frac{\partial_n p_x}{\partial n} = {}_np_x(-\mu_{x+t})$$

Stąd

$$\frac{\partial\delta}{\partial x}(x,n) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\ln v^n}{n} - \frac{\ln {}_np_x}{n}\right) = \ldots = \frac{\mu_{x+n-\mu_x}}{n}$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial n}(x,n) = \frac{\partial}{\partial n}\left(-\frac{\ln v^n}{n} - \frac{\ln {}_np_x}{n}\right) = \ldots = \frac{\mu_{x+n} + \delta - \delta(x,n)}{n}$$

Zadanie 15.5 Osoba 65-letnia kupuje za jednorazową składkę netto dożywotnią rentę ciągłą wypłacające świadczenie z intensywnością roczną 15 000 zł oraz jednorazowe świadczenie b(t) za śmierć w wieku $65 + t$ dla $0 < t < 50$. Ubezpieczenie to można w kazdym momencie zamienić na rentę dożywotnią bez świadczenia śmiertelnego, wypłacającą z intensywnością roczną 18 000 zł. podaj wysokość świadczenia śmiertelnego dla wieku 85 lat. Dane są: $\mu_{65+t} = \frac{1}{37.5-0.75t}$ oraz $\delta = 0.04$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 15.5 *Z treści zadania wynika, że zamiany możemy dokonać w dowolnym momencie. Oznacza, to że wartości obecne świadczeń i renty dożywotnej są sobie równe w każdym momencie w przyszłości tj.*

$$\underset{0\leqslant m\leqslant 50}{\forall} \quad 15000\int_0^{50-m} {}_tp_{65}e^{-\delta t}dt + \int_0^{50-m} b(t)\mu_{x+t}{}_tp_x e^{-\delta t}dt = 18000\int_0^{50-m} {}_tp_{65}e^{-\delta t}dt$$

gdzie m to moment zamiany. Stąd:

$$\int_0^{50-m} b(t)e^{-\delta t}{}_tp_{65}\mu_{65+t}dt = 3000\int_0^{50-m} e^{-\delta t}{}_tp_x$$

Jeżeli równość zachodzi dla kazdego m to funkcje podcałkowe muszą być sobie równe. Stąd

$$b(t)e^{-\delta t}{}_tp_{65}\mu_{65+t} = 3000e^{-\delta t}{}_tp_{65}$$

Stąd

$$b(t) = \frac{3000e^{-\delta t}{}_tp_{65}}{e^{-\delta t}{}_tp_{65}\mu_{65+t}} = \frac{3000}{\mu_{65+t}}$$

Wynik:

$$b(20) = 67500$$

Zadanie 15.6 Za składkę jednorazową netto SJN ubezpieczony (65) kupuje polisę emerytalną, która wypłaca następująco:

- Póki żyje dostaje rentę ciągła z intensywnością roczną 1

- W chwili śmierci uposażeni dostają jednorazo kwotę

$$c(t) = \left(1 - \frac{t}{35}\right) \cdot SJN$$

Należy dodać, że ubezpieczeony wylosowany jest z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$. Oblicz SJN, jesli wiadomo, że $\bar{a}_{65} = 11$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 15.6 *Mamy:*

$$SJN = \bar{a}_{65} + \int_0^{35} \left(1 - \frac{t}{35}\right) \cdot SJN \cdot \underbrace{{}_tp_{65}\mu_{65+t}}_{\frac{1}{100-65}} e^{-\delta t} dt$$

Wszystko dane oprócz δ

$$\bar{a}_{65} = \int_0^{35} \left(1 - \frac{t}{100-65}\right) e^{-\delta t} dt$$

lub

$$\bar{a}_{65} = \frac{1 - \bar{A}_{65}}{\delta} = \frac{1 - \int_0^{35} \frac{1}{35} e^{-\delta t} dt}{\delta}$$

Rozwiązujemy i dostajemy $\delta = 0.0453411674$, *podstawiamy i mamy* $SJN \approx 16.04$

Zadanie 15.7 Rozpatrujemy ciągły typ 20-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł oraz składką płaconą ze stałą intensywnością przez cały okres ubezpieczenia. Ubezpieczona populacja ma wykładniczy rozkład czasu trwania życia z parametrem $\mu = 0.002$, a intensywność oprocentowania wynosi równomiernie od 8% sumy ubezpieczenia w momencie wystawienia polisy do 2% w momencie wygaśnięcia polisy z tytułu dożycia. Wyznacz moment, w ktorym rezerwa na koszty administracyjne (na 1 polisę aktywną) osiągnie minimalną wartość. Wskaż najbliższą wartość (w latach).

Rozwiązanie 15.7 *Najpierw określimy zależność kosztów administracyjnych od czasu:*

$$0.08 = a \cdot 0 + b$$

$$0.02 = a \cdot 20 + b \rightarrow 0.02 = a \cdot 20 + 0.08 \rightarrow a = -0.003$$

Uwzględniając sumę ubezpieczenia:

$$f(t) = -300 \cdot t + 8000$$

Teoria dotycząca rezerwy na koszty administracyjne:

$$P^{br}_{x:\overline{n}|} = \underbrace{P_{x:\overline{n}|}}_{P} + \underbrace{\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}}_{P^{\alpha}} + \underbrace{\beta \cdot P^{br}_{x:\overline{n}|}}_{P^{\beta}} + \underbrace{\gamma}_{P^{\gamma}}$$

$$ {}_kV^{br} = {}_kV + {}_kV^{\alpha} + {}_kV^{\gamma} $$
$$ {}_kV^{\gamma} = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^{\gamma} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|} $$

W chwili t obecna wartość aktuarialna kosztów administracyjnych:

$$ \gamma(t) = \int_0^{20-t} f(s)e^{-0.008s}{}_tp_x = \int_0^{20-t} f(s)e^{-0.008s}e^{-0.002s}ds = 18.12692469 $$

Składka na ubezpieczenie płacona jest w stałej intensywności więc P^{γ} również, stąd:

$$ P^{\gamma} = \frac{\gamma(0)}{\bar{a}_{x:\overline{20}|}} = \frac{\int_0^{20} f(s)e^{-0.01s}ds}{\int_0^{20} e^{-0.01}ds} = 5099.9334 $$

Wobec tego rezerwa na koszty administracyjne:

$$ V^{\gamma}(t) = \int_0^{20-t} f(s)e^{-0.01s}ds - P^{\gamma}\int_0^{20-t} e^{-0.01s}ds $$

mamy policzyć maksimum więc bierzemy pochodną. Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego:

$$ F'(x) = f(x) $$
$$ F(b) - F(a) = \int_a^b f(m)dm $$

Reguła Leibnitza (pochodna po górnej granicy całkowania):

$$ \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x) - F(a)\right) = f(x) $$

Minimum będzie gdy pochodna równa zero:

$$ \frac{\partial V^{\gamma}(t)}{dt} = -f(20-t)e^{-0.01(20-t)} + P^{\gamma}(e^{-0.01(20-t)}) = 0 $$
$$ (300 \cdot (20-t) - 8000)e^{-0.01(20-t)} + 5099.9334 \cdot e^{-0.01(20-t)} = 0 $$
$$ (300(20-t) - 8000) = -5099.9334 $$
$$ -300t = -3099.9334 $$
$$ t = 10.33 \approx 10.2 $$

Zadanie 15.8 Rozpatrujemy ciągły typ bezterminowego ubezpieczenia na zycie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł. Ubezpieczeni sa mężczyznami z populacji wykładniczej z śmiertelnością $\mu^{(s)} = 0.02$. Są oni narażeni na ryzyko zawału z intensywnością $\mu^{(z)} = 0.05$, lecz zawał nie jest śmiertelny, ale podnosi do końca życia ryzyko śmierci do poziomu $\mu^{(zs)} = 0.08$. Po pierwszym zawale kolejne zawały nie zmieniają już śmiertelności. Ubezpieczenie jest sprzedawane osobom, które jeszcze nie miały zwału.
Oblicz jednorazową składkę netto w tym ubezpieczeniu dla oprocentowania $\delta = 0.04$. Wskaż najbliższą wartość

Rozwiązanie 15.8

$$\mu^{(\tau)} = \mu^{(s)} + \mu^{(z)} = 0.07$$

$$JSN = 100000 \cdot \int_0^\infty {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(s)} e^{-\delta t} dt +$$

$$+ \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\mu^{(zs)} \cdot t} \mu_{x+t}^{(zs)} e^{-\delta t} dt \right) {}_tp_x^{(tau)} \mu_{x+t}^{(z)} e^{-\delta t} dt =$$

$$= \frac{0.02}{0.11} + \int_0^\infty \frac{0.08}{0.12} e^{-0.07t} 0.05 e^{-0.04t} = \frac{0.08 \cdot 0.05}{0.12 \cdot 0.11}$$

$$JSN = 100000 \cdot 0.484848 \approx 48500$$

Zadanie 15.9 Emerytura małżeńska typu $E(a;b;c;d)$ działa następująco:

- Gdy żyją oboje, ona (x) otrzymuje a na początku roku, a on (y) otrzymuje c na początku roku.
- Gdy żyje tylko ona (x), to otrzymuje b na początku roku.
- Gdy żyje tylko on (y), otrzymuje d na początku roku.

Liczbya, b, c, d są nieujemnymi parametrami polisy.
Wiadomo ponadto, że udział świadczeń dla niej w składce jednorazowej wynosi 2/3 całej składki. Dane są:

$$\ddot{a}_{x:y} = 6; \quad \ddot{a}_{\overline{x:y}} = 12 \quad \ddot{a}_x = 10$$

Oblicz parametr d dla polisy $E(2,3;2,d)$. Zakładamy, że ich życia są niezależne

Rozwiązanie 15.9 *Z treści:*

$$6 + 12 = 10 + \ddot{a}_y \rightarrow \ddot{a}_y = 8$$

Renta wdowia (otrzymuje y po śmierci x:

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x:y}$$

Mamy:

$$JSN = a \cdot \ddot{a}_{x+y} + c \cdot \ddot{a}_{x+y} + b \cdot \ddot{a}_x - b \cdot \ddot{a}_{x+y} + d \cdot \ddot{a}_y - d \cdot \ddot{a}_{x+y}$$

dalej

$$\frac{\textit{świadczenia dla niej}}{JSN} = \frac{2}{3}$$

stąd:

$$3a \cdot \ddot{a}_{x+y} + 3b \cdot \ddot{a}_x - 3b \cdot \ddot{a}_{x+y} =$$

$$= 2a \cdot \ddot{a}_{x+y} + 2c \cdot \ddot{a}_{x+y} + 2b \cdot \ddot{a}_x - 2b \cdot \ddot{a}_{x+y} + 2d \cdot \ddot{a}_y - 2d \cdot \ddot{a}_{x+y}$$

mamy

$$a \cdot \ddot{a}_{x+y} + b \cdot \ddot{a}_x - b \cdot \ddot{a}_{x+y} = 2c \cdot \ddot{a}_{x+y} + 2d \cdot \ddot{a}_y - 2d \cdot \ddot{a}_{x+y}$$

$$2 \cdot 6 + 3 \cdot 10 - 36 = 2 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \cdot d - 2 \cdot d \cdot 6$$

$$0 = 16d - 12d \rightarrow d = 0$$

16 Egzamin z 26 maja 2014

Zadanie 16.1 Wartości q_x są dla całkowitych x wzięte z tablic trwania życia, natomiast wartości typu q_{x+u}, gdzie x całkowite, a $u \in (0,1)$ są obliczane przy użyciu założenia UDD. Wiadomo, że

$$q_x = 0.8 \quad \text{oraz} \quad q_{x+0.5} = 0.816667$$

Oblicz $q_{x+0.333}$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 16.1 *W UDD mamy:*

$$_{n+u}p_x = (1-u) \cdot {}_np_x + u_{n+1}p_x$$

$$_uq_x = u \cdot q_x$$

oraz ogólnie

$$_tp_{x+s} = \frac{_{s+t}p_x}{_sp_x}$$

stąd

$$p_{x+0.5} = \frac{_{1.5}p_x}{_{0.5}p_x} = \frac{0.5 \cdot p_x + 0.5 \cdot {}_2p_x}{1 - 0.5 \cdot q_x} = 0.81667$$

stąd

$$_2p_x = 0.02$$

mamy:

$$p_{x+0.333} = \frac{_{1.333}px}{_{0.333}p_x} = \frac{(1-0.333)p_x + 0.333_2p_x}{1 - 0.333q_x} = 0.19092$$

$$q_{x+0.333} = 0.809$$

Zadanie 16.2 Rozpatrujemy dyskretny model bezterminowego ubezpieczenia na życie dla (x), występującego w dwóch wariantach:

I. polisa I ma sumę ubezpieczenia 100 000 zł oraz dożywotnią roczną składkę netto 7 000 zł

II. polisa II jest wystawiona na kwotę 200 000 zł, lecz wymaga jednorazowej składki A oraz dożywotniej składki rocznej P.

Obydwie składki, w ujęciu netto, zostały ustalone tak, by wariancja straty ubezpieczyciela (na moment wystawienia polisy) była o 100% wyższa od analogicznej wariancji w ubezpieczeniu I. Podaj wysokość składki A, jeśli dla obydwu ubezpieczeń dane są: $i = 5\%$ oraz $\ddot{a}_x = 8.502$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 16.2 *Wyprowadzenie wzoru na stratę ubezpieczyciela:*

$$L = X \cdot v^{K+1} - P(\underbrace{1 + v + \ldots + v^K}_{\ddot{a}_{\overline{K+1|}}}) - A =$$

gdzie X - suma ubezpieczenia.

$$= X \cdot v^{K+1} - P\frac{1-v^{K+1}}{d} - A =$$

$$= v^{K+1}\left(X + \frac{P}{d}\right) - \frac{P}{d} - A$$

$$Var(L) = Var\left(v^{K+1}\left(X + \frac{P}{d}\right) - \frac{P}{d} - A\right)$$

Z własności wariancji: $Var(aY) = a^2 Var(Y)$ *oraz* $Var(a+Y) = Var(Y)$. *Stąd*

$$Var(L) = \left(X + \frac{P}{d}\right)^2 Var\left(v^{K+1}\right)$$

Porównamy wariancje:

$$2 \cdot \left(100000 + \frac{7000}{d}\right)^2 Var(x^{K+1}) = \left(200000 + \frac{P}{d}\right)^2 Var(x^{K+1})$$

wariancje się skracają. Stąd:

$$P = 7110.03571$$

Z warunku dla drugiej polisy:

$$200000 \cdot A_x = A + P \cdot \ddot{a}_x$$

stąd

$$A = 200000(1 - d\ddot{a}_x) - P\ddot{a}_x = 58579.05 \approx 58580$$

Zadanie 16.3 Rozpatrujemy ciągły typ ubezpieczenia rentowego dla osoby z populacji o wykładniczym rozkładzie czasu trwania życia z parametrem $\mu = 0.06$. Ubezpieczenie wypłaca rentę z intensywnością $([x-a]+1)$, gdzie a oznacza wiek w momencie zakupu renty, x jest aktualnym wiekiem świadczeniobiorcy oraz symbol [ ] oznacza część całkowitą. Podaj jednorazową składkę netto w terminowym ubezpieczeniu na 50 lat dla osoby w wieku $a = 40\frac{1}{2}$, jeśli intensywność oprocentowania $\delta = 0.04$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 16.3 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy*

$$_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

Mamy:

$$[x-a]+1 = [t]+1$$

$$JSN = \int_0^{50} ([t]+1)e^{-\mu t}e^{-\delta t}dt = \int_0^1 (\underbrace{[t]}_{=0}+1)e^{-(\delta+\mu)t}dt +$$

$$+\int_1^2 (\underbrace{[t]}_{=1}+1)e^{-(\mu+\delta)t}dt + \ldots$$

$$JSN = \sum_{k=0}^{49}\left((k+1)\int_k^{k+1} e^{-(\mu+\delta)t}dt\right) = 101.0063 \approx 101$$

gdzie $\int_n^{n+1} e^{-(\mu+\delta)t}dt = \frac{e^{-(\mu+\delta)}-e^{-(\mu+\delta)(n+1)}}{\mu+\delta}$

Zadanie 16.4 W pewnej populacji typu de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_1 = 86$lat, ludzie zaczynają pracę w wieku $x = 25$ lat i przechodzą na emeryturę w wieku $x+m = 65$ lat. Pracując, odkładają składkę w formie renty życiowej ciągłej z intensywnością 1 netto na rok; po dożyciu wieku 65 zaczynają otrzymywać emeryturę w postaci renty życiowej ciągłej z intensywnością roczną netto E_1.
Rozważmy zmianę śmiertelności, która spowodowała powiększenie wieku granicznego do $\omega_2 = 88$ (rozkład jest dalej typu de Moivre'a) i zwiększenie wieku przechodzenia na emeryturę do $x+m+2 = 67$ lat. Nie zmienił się sposób płacenia ani intensywność składki; natomiast nowa intensywność netto świadczenia emerytalnego to E_2. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.02$ Oblicz E_2/E_1. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 16.4 Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki* $\omega = 100$ *lat. Rozkład* T_0 *jest jednostajny na przedziale* $[0,\omega]$. *Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Mamy:

$$(1) \qquad 1 \cdot \bar{a}_{25:\overline{40}|} = e^{-\delta\cdot 40}\,{}_{40}p_{25} \cdot E_1 \cdot \bar{a}_{65}$$

$$(2) \qquad 1 \cdot \bar{a}_{25:\overline{42}|} = e^{-\delta\cdot 42}\,{}_{42}p_{25} \cdot E_2 \cdot \bar{a}_{67}$$

stąd

$$\frac{E_2}{E_1} = 1.105$$

Zadanie 16.5 *Rozważamy populację wykładniczą z* $\mu_x \equiv \mu = 0.01$. *Ubezpieczenie ciągłe ogólnego typu ma parametry (netto)*

$$\pi(t) \equiv \bar{P} > 0, \quad c(t) = ct, \quad gdzie\ c > 0$$

Rezerwa składek netto $\bar{V}(t)$ dana jest wzorem

$$\bar{V}(t) = t/5$$

Oblicz $\bar{P}$. Podaj najbliższą odpowiedź.

Rozwiązanie 16.5 Równanie Thielego

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = \bar{\pi}(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})_t\bar{V} - b(t)\mu_{[x]+t}$$

stąd

$$V'(t) = \bar{P} + (\delta + 0.01)V(t) - c \cdot t \cdot 0.01$$

$$V'(t) = \bar{P} + (\delta + 0.01)\frac{t}{5} - c \cdot t \cdot 0.01$$

Całkujemy:

$$V(t) = \int \bar{P} + (\delta + 0.01)\frac{t}{5} - c \cdot t \cdot 0.01 dt$$

$$V(t) = \bar{P}t + (\delta + 0.01)\frac{t^2}{10} - \frac{ct^2}{2}0.01 + c'$$

z $V(0) = 0$ wynika, że $c' = 0$. Podstawiając za $V(t) = t/5$

$$\bar{P}t + (\delta + 0.01)\frac{t^2}{10} - \frac{ct^2}{2}0.01 = \frac{t}{5}$$

$$\bar{P} + (\delta + 0.01)\frac{t}{10} - \frac{ct}{2}0.01 = \frac{1}{5}$$

Pochodna dwustronna po t daje:

$$0 = \frac{\delta}{10} + \frac{0.01}{10} - \frac{c \cdot 0.01}{2} \to \delta = 0.05c - 0.01$$

mamy:

$$\bar{P} = \frac{\int_0^\infty c \cdot t \cdot \mu e^{-\mu} e^{-\delta t} dt}{\int_0^\infty e^{-(\mu+\delta)t} dt} = \frac{c\mu}{\mu + \delta}$$

$$\bar{P} = \frac{c0.01}{0.01 + 0.05c - 0.01} = 0.2$$

Zadanie 16.6 Rozpatrujemy dyskretny typ bezterminowego ubezpieczenia na życie, które ma kilka wariantów różniących się okresem płacenia składek. We wszystkich przypadkach koszty administracyjne, ponoszone na początku każdego roku ważności ubezpieczenia, wynoszą $\gamma\%$ od złotówki sumy ubezpieczenia. Na koniec 10-tego roku, ubezpieczenie z 40-letnim okresem płatności składek miało rezerwę ${}^{(40)}_{10}V^\gamma_x = 0.01587$, lecz zostało przekształcone w (dożywotnie) ubezpieczenie z 20-letnią składką, wraz z odpowiednim przeliczeniem składek do zapłacenia w pozostałych 10 latach. Ile wynosi rezerwa ${}^{(40)}_{20}V^\gamma_x$ po konwersji tego ubezpieczenia? Dane są:

${}^{(40)}p_x^{\gamma} = 0.04117$, czyli roczna składka na koszty administracyjne dla 40-letniej płatności składek (na 1 zł sumy ubezpieczenia),
${}^{(20)}p_x^{\gamma} = 0.05323$, czyli roczna składka na koszty administracyjne dla 20-letniej płatności składek (na 1 zł sumy ubezpieczenia),
${}^{10}P_{\substack{1\\x:\overline{10}|}} = 0.07403$, czyli roczna składka netto w 10-letnim ubezpieczeniu na dożycie (na 1 zł sumy ubezpieczenia). Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 16.6

$$ {}_kV^{br} = {}_kV + {}_kV^{\alpha} + {}_kV^{\gamma} $$

$$ P^{br}_{x:\overline{n}|} = \underbrace{P_{x:\overline{n}|}}_{P} + \underbrace{\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}}_{P^{\alpha}} + \underbrace{\beta \cdot P^{br}_{x:\overline{n}|}}_{P^{\beta}} + \underbrace{\gamma}_{P^{\gamma}} $$

Przy skróconym okresie płacenia składek:

Rezerwa administracyjna ma postać dla $k = 1, 2, \ldots, m-1$:

$$ {}_kV^{\gamma} = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^{\gamma} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|} $$

oraz dla $k \geqslant m$:

$$ {}_kV^{\gamma} = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} $$

Mamy:

$$ {}^{(40)}P_x^{\gamma} = \gamma \cdot \frac{\ddot{a}}{\ddot{a}_{x:\overline{40}|}} = 0.04117 \to \gamma\ddot{a} = \ddot{a}_{x:\overline{40}|} \cdot 0.04117 $$

$$ {}^{(20)}P_x^{\gamma} = \gamma \cdot \frac{\ddot{a}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} = 0.05323 \to \gamma\ddot{a} = \ddot{a}_{x:\overline{20}|} \cdot 0.05323 $$

$$ {}^{(10)}P_{\substack{1\\x:\overline{10}|}} = \frac{v^{10}{}_{10}p_x}{\ddot{a}_{x:\overline{10}|}} = 0.07403 \to v^{10}{}_{10}p_x = \ddot{a}_{x:\overline{10}|} $$

Dodatkowo

$$ \ddot{a}_{x:\overline{40}|} = \ddot{a}_{x:\overline{10}|} + v^{10}{}_{10}p_x \ddot{a}_{x+10:\overline{30}|} $$

$$ \ddot{a}_{x:\overline{20}|} = \ddot{a}_{x:\overline{10}|} + v^{10}{}_{10}p_x \ddot{a}_{x+10:\overline{10}|} $$

$$ \ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{10}|} + v^{10}{}_{10}p_x \cdot \ddot{a}_{x+10} $$

stąd np.

$$ \ddot{a}_{x+10} = \frac{\ddot{a} - \ddot{a}_{x:\overline{10}|}}{v^{10}{}_{10}p_x} $$

Z treści:

$$ \underbrace{{}^{(40)}_{10}V_x^{\gamma}}_{=0.01587} = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+10} - 0.04117 \cdot \ddot{a}_{x+10:\overline{30}|} $$

$$ {}^{(20)}_{10}V_x^{\gamma} = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+10} - 0.05323 \cdot \ddot{a}_{x+10:\overline{10}|} $$

Mamy z pierwszego:

$$0.01587 = \gamma \ddot{a}_{x+10} - 004117 \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\overline{40}|} - \ddot{a}_{x:\overline{10}|}}{v^{10}{}_{10}p_x} =$$

$$= \gamma \ddot{a}_{x+10} - 0.04117 \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\overline{40}|}}{0.07403 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{10}|}} + 0.04117 \cdot \frac{1}{0.07403} =$$

$$= \gamma \cdot \ddot{a}_{x+10} - 0.04117 \frac{\gamma \cdot \ddot{a}_x}{0.04117 \cdot 0.07403 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{10}|}} + \frac{0.04117}{0.07403} =$$

$$= \gamma \frac{\ddot{a} - \ddot{a}_{x:\overline{10}|}}{v^{10}{}_{10}p_x} - \frac{\gamma \ddot{a}_x}{0.07403 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{10}|}} + \frac{0.04117}{0.07403} =$$

$$= \frac{\gamma \ddot{a}_x}{0.07403 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{10}|}} - \frac{\gamma}{0.07403} - \frac{\gamma \ddot{a}_x}{0.07403 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{10}|}} + \frac{0.04117}{0.07403}$$

stąd

$$0.01587 - \frac{0.04117}{0.07403} = -\frac{\gamma}{0.07403}$$
$$\gamma = 0.04$$

To połowa drogi. Dalej

$${}^{(20)}_{10}V^{\gamma}_x = 0.04 \cdot \ddot{a}_{x+10} - 0.05323 \cdot \ddot{a}_{x+10:\overline{10}|}$$

przekształcamy analogicznie jak wyżej i mamy

$${}^{(20)}_{10}V^{\gamma}_x = 0.178711$$

Zadanie 16.7 Rozpatrujemy ciągłe ubezpieczenie rentowe dla (x), które po 40 latach płacenia składek ze stałą intensywnością $\bar{P}$ rozpoczyna wypłatę dożywotnich świadczeń. Wszyscy ubezpieczeni są sprawni w wieku (x). Ci którzy zostaną inwalidami przed wiekiem (x+40) przerywają płacenie składek i od wieku (x+40) uzyskują rentę z intensywnością roczną 15 000 zł. Sprawni w wieku (x+40) uzyskują świadczenie z intensywnością 10 000 zł i jeśli zostaną później inwalidami, uzyskują rentę podwyższoną do 15 000.
Zakładamy, że rozkład trwanoia życia nie zależy od tego, czy się jest inwalidą, czy nie, oraz że stan inwalidztwa jest nieodwracalny. Wyznacz roczną intensywność składki $\bar{P}$. Dane są:

$$\mu^{(d)}_{x+t} = 0.02 \qquad \mu^{(i)}_{x+t} = 0.005, \qquad \delta = 0.03$$

Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 16.7 *Mamy:*

$${}_tp^{(\tau)}_x = e^{-0.025t}$$

Sprawni po 40 latach, którzy mogą stać się niesprawni:

$$15000 \cdot {}_{40}p^{(\tau)}_x e^{-\delta \cdot 40} \bar{a}^{(d)}_{x+40} - 5000{}_{40}p^{(\tau)}_x e^{-\delta \cdot 40} \cdot \bar{a}^{(\tau)}_{x+40} = (*)$$

$$\bar{a}^{(d)}_{x+40} = \frac{1}{0.05}$$

$$\bar{a}^{(\tau)}_{x+40} = \frac{1}{0.055}$$

$$15000 \cdot {}_{40}p^{(\tau)}_x e^{-\delta \cdot 40} \bar{a}^{(d)}_{x+40} = 33240.94751$$

$$5000_{40} p^{(\tau)}_x e^{-\delta \cdot 40} \cdot \bar{a}^{(\tau)}_{x+40} = 10073.0144$$

$$(*) = 23167.93311$$

Ci którzy stali się niesprawni w ciągu pierwszych 40 lat:

$$15000 \int_0^{40} {}_{40-t|}\bar{a}^{(d)}_{x+t} e^{-\delta t} {}_t p^{(\tau)}_x \mu^{(i)}_{x+i} dt = (*)$$

$$_{n|}\bar{a}^{(d)}_{x+t} = \int_n^{\infty} e^{-\delta t} e^{-0.02t} dt = \frac{e^{-0.05n}}{0.05}$$

$$(*) = 15000 \int_0^{40} \frac{e^{-0.05(40-t)}}{0.05} e^{-0.055t} 0.005 dt = 7359.637462$$

Równanie:

$$P \cdot \bar{a}^{(\tau)}_{x:\overline{40|}} = 23167.93311 + 7359.637462 = 30527.57$$

gdzie

$$\bar{a}^{(\tau)}_{x:\overline{40|}} = \frac{1 - e^{-0.055 \cdot 40}}{0.055} = 16.1672$$

Stąd

$$P = 30527.57/16.1672 = 1888.24 \approx 1890$$

Zadanie 16.8 On (y) jest wylosowany z populacji wykładniczej z $\mu_y \equiv 1/60$; ona (x) z populacji wykładniczej z $\mu_x \equiv 1/90$. Rozważamy produkt emerytalny dla nich o następujących cechach.
Przez najbliższe $m = 40$ lat będą płacić składkę w formie renty ciągłej z intensywnością netto $\bar{P}$, gdy żyją oboje albo $0.4\bar{P}$, gdy żyje tylko jedno z nich. Natomiast po 40 latach będzie wypłacana emerytura w postaci renty ciągłej

- z intensywnością 2 na rok, gdy żyją oboje,
- z intensywnością 1,2 na rok, gdy żyje tylko jedna osoba.

Oblicz $\bar{P}$. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.04$. Zakładamy, że ich życia są niezależne.
Wskaż najbliższą odpowiedź.

Rozwiązanie 16.8 *Mamy:*

$$\bar{P} \cdot \bar{a}_{x:y:\overline{40|}} + 0.4\bar{P} \cdot (\bar{a}_{\overline{x:y}:\overline{40|}} - \bar{a}_{x:y:\overline{40|}}) =$$

$$2 \cdot {}_{40|}\bar{a}_{x+40:y+40} + 1.2({}_{40|}\bar{a}_{\overline{x+40:y+40}} - {}_{40|}\bar{a}_{x+40:y+40})$$

mamy

$$\bar{a}_{\overline{x:y}:\overline{40|}} = \int_0^{40} e^{-(1/60+1/90+0.04)t} dt =$$

$${}_{40|}\bar{a}_{\overline{x+40:y+40}} = {}_{40|}\bar{a}_x + {}_{40|}\bar{a}_y - {}_{40|}\bar{a}_{\overline{x:y}}$$

Po podstawieniach dostajemy

$$\bar{P} = 0.3046 \approx 0.305$$

Zadanie 16.9 Ona (x) jest wylosowana z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym ω_k. Natomiast on (y) jest wylosowany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym ω_m. Wiadomo, że

$$\omega_k - x > 25; \;\; \omega_m - y > 10; \;\; \omega_k - x > \omega_m - y + 5$$

oraz dane są prawdopodobieństwa

$$Pr(T(x) \geqslant T(y) + 20 | T(y) \leqslant 5) = 0.678571$$

oraz

$$Pr(T(x) \leqslant T(y) + 5 | T(y) \geqslant 10) = 0.428571$$

Zakładamy, że ich życia są niezależne. Oblicz $Pr(T(x) \geqslant T(y))$.

Rozwiązanie 16.9 Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki $\omega = 100$ lat. Rozkład T_0 jest jednostajny na przedziale $[0, \omega]$. Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Ogólnie

$$P(X \leqslant Y) = \int_0^{\infty} \int_0^{y} f(x)f(y)dxdy$$

W zadaniu:

$$P(T_y \leqslant T_x) = \int_0^{\infty} \int_0^{x} f(x)f(y)dydx$$

Patrz https://www.youtube.com/watch?v=3KEasL-plz8. Dodatkowo całka podwójna z jedynki to pole obszaru. Potrzebne są rysunki pomocnicze (wykorzystamy z *nich pola). Niech $T(x) = X$, $T(y) = Y$ ($T(x)$ to przyszły oczekiwany czas życia osoby w wieku x). Dla pierwszego p-p z zadania mamy:*

$$Pr(X \geqslant Y + 20 | Y \leqslant 5) = \frac{Pr(Y \leqslant X - 20 \wedge Y \leqslant 5)}{P(Y \leqslant 5)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\omega_m - y} \cdot \frac{1}{\omega_k - x} \cdot (1/2 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot (\omega_k - x - 25))}{\frac{5}{\omega_m - y}} = 0.67857$$

stąd

$$\omega_k - x = 70$$

Dla drugiego prawdopobieństwa

$$Pr(X \leqslant Y + 5 | Y \geqslant 10) = \frac{Pr(Y \geqslant X - 5 \wedge Y \geqslant 10)}{Pr(Y \geqslant 10)} =$$

$$\frac{\frac{1}{\omega_m - y} \cdot \frac{1}{\omega_k - x} \cdot (\omega_m - y - 10) \cdot 15 + 1/2 \cdot (\omega_m - y - 10) \cdot (\omega_m - y - 10)}{\frac{\omega_m - y - 10}{\omega_m - y}} =$$

$$= 15 \cdot \frac{1}{\underbrace{70}_{= \omega_k - x}} + 1/2(\omega_m - y - 10) = 0.428571$$

stąd

$$w_m - y = 40$$

stąd, z rysunku pomocniczego:

$$P(X \geqslant Y) = P(Y \leqslant X) = \frac{0.5 \cdot 40 \cdot 40 + 40 \cdot (70 - 40)}{70 \cdot 40} = 0.7143$$

17 Egzamin z 29 września 2014

Zadanie 17.1 W populacji P1 śmietelnością rządzi prawo de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega > 0$. W populacji P2 funkcja intensywności śmiertelności ma postać:

$$\mu_x^{(2)} = \frac{n}{100 - x} \qquad \text{dla } x < 100$$

gdzie $n > 0$ jest danym parametrem. niech zmienna losowa X_i oznacza długość życia noworodka wylosowanego z populacji Pi dla $i = 1, 2$. Wiadomo, że:

$$E(X_1) = E(X_2)$$

oraz

$$Var(X_1) = \frac{4}{9} Var(X_2)$$

oblicz parametr n.

Rozwiązanie 17.1 *Podobne zadanie w egzaminie z 4 kwietnia 2011*

Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki* $\omega = 100$ *lat. Rozkład* T_0 *jest jednostajny na przedziale* $[0, \omega]$. *Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Pozostałe wzory:

$$\mathring{e}_x = E(T_x) = \int_0^\infty t \cdot f_x(t) dt$$

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt$$

$$Var(T_x) = 2 \int_0^\infty t {}_tp_x - \mathring{e}_x^2$$

Wartość oczekiwana przyszłego czasu życia x latka zdefiniowana jest następująco (Bowers s.68)

$$\begin{aligned} \mathring{e}_x &= E(T(x)) = \int_0^\infty t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty t \cdot \underbrace{f_x(t)}_{= \frac{d(-{}_tp_x)}{dt}} dt = \\ &= \int_0^\infty t \cdot \frac{d(-{}_tp_x)}{dt} dt = -[t \cdot {}_tp_x]_0^\infty + \int_0^\infty {}_tp_x dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt \end{aligned}$$

Natomiast

$$E(T(x)^2) \quad = \quad \int_0^\infty t^2 \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = 2\int_0^\infty t \cdot {}_tp_x dt$$

Mamy:

$$EX_1 = \int_0^{\omega - x} \left(1 - \frac{t}{w-x}\right) dt = \frac{\omega - x}{2}$$

co jest naturalne biorąc pod uwagę, że rozkład T_x jest jednostajny. Badamy dla noworodka więc:

$$EX_1 = \frac{\omega}{2}$$

Dla populacji P2 mamy:

$${}_tp_x^{(2)} = e^{-\int_0^t \frac{n}{100-x-s} ds} = e^{-n(-\ln(100-x-t)+\ln(100-x))}) = \frac{(100-x-t)^n}{(100-x)^n}$$

$$EX_2 = \int_0^{100} \left(\frac{100-t}{100}\right)^n dt = -\frac{100}{n+1}\left(\frac{100-t}{100}\right)^{n+1} |_0^{100}$$
$$= \frac{100}{n+1}$$

Z pierwszego warunku z treści zadania

$$\frac{\omega}{2} = \frac{100}{n+1}$$

Dla P1:

$$Var(X_1) = 2\int_0^w t\left(1 - \frac{t}{w}\right) dt - \left(\frac{w}{2}\right)^2 = 2\frac{\omega^2}{2} - 2\frac{\omega^2}{3} - \frac{\omega^2}{4} = \frac{w^2}{12}$$

co jest naturalne bo Var w rozkładzie jednostajnym to $\frac{(b-a)^2}{12}$ Dla P2:

$$Var(X_2) = 2\int_0^{100} t\left(\frac{100-t}{100}\right)^n dt - \left(\frac{100}{n+1}\right)^2 = (*)$$

Wygląda na to, że nie ma co liczyć tylko próbować podstawić, wiemy z treści, że $Var(X_1)/Var(X_2) = 4/9 = 0.444$. Dla $n = 4$ mamy:

$$Var(X_1)/Var(X_2) = \frac{92.5926}{266.6666} = 0.3472$$

dla $n = 6$ mamy

$$Var(X_1)/Var(X_2) = \frac{68.0272}{153.0612} = 0.4428$$

Stąd $n = 6$

Zadanie 17.2 Osoba w wieku 30 lat rozważa kupno ubezpieczenia rentowego, wypłacającego świadczenia przez 20 lat od osiągnięcia 65 lat. Dwa warianty tego ubezpieczenia umożliwiają wybór między (1) rentą roczną wypłacającą 12 000 zł na początku kolejnego roku wypłaty świadczeń lub (2) renty miesięcznej z wypłatą 1000 zł na początku kolejnego miesiąca wypłaty świadczeń. W obydwu przypadkach płacona jest roczna składka netto, na początku roku składkowego, w wysokości 906 zł dla renty (1) lub 864 zł dla renty (2). Zakładając, że parametry aktuarialne nie ulegną zmianie, podaj ile będzie musiała zapłacić osoba, która kupi rentę (1) za jednorazową składkę netto dopiero w wieku 65 lat. Dane są:

$$i = 5\% \qquad {}_{20}p_{65} = 0.197$$

Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 17.2 *Jednorazowa składka netto renty na całe życie, płatnej po $1/m$ z góry, m-krotnie w roku, wynosi:*

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} v^{k/m}{}_{k/m}p_x$$

lub równoważnie

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}$$

Przybliżenia (przy HU):

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

gdzie $\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}$, $\beta(m) = \frac{i-i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$. *Dla małych stóp procentowych:*

$$\alpha(m) \to 1, \qquad \beta(m) \to \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1})$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m){}_{m|}\ddot{a}_x - \beta(m)A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$$

W zadaniu pytamy o:

$$JSN = 12000 \cdot \ddot{a}_{65:\overline{20}|} =?$$

W zadaniu mamy:

$$(1)\;\; 906 \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}|} = 12000v^{35}{}_{35}p_{30}\ddot{a}_{65:\overline{20}|}$$

$$(2)\;\; 864 \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}|} = 12000v^{35}{}_{35}p_{30}\ddot{a}_{65:\overline{20}|}^{(12)}$$

Tutaj trzeba uważać na oznaczania bo mogą być mylące (razem jest $12 \cdot 20$ *wypłat po* 1000*). Według Skałby przybliżenia są "zadziwiająco dobre". Założymy HU i skorzystamy z powyższych aproksymacji:*

$$\ddot{a}^{(12)}_{65:\overline{20|}} = \ddot{a}_{65:\overline{20|}} - \frac{11}{24}\left(1 - {}_{20}p_{65}v^{20}\right) = \ddot{a}_{65:\overline{20|}} - 0.4243$$

mamy z (1):

$$\ddot{a}_{65:\overline{20|}} = \frac{906 \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35|}}}{12000v^{35}{}_{35}p_{30}} =$$

$$= \frac{906 \cdot 12000v^{35}{}_{35}p_{30}\ddot{a}^{(12)}_{65:\overline{20|}}}{864 \cdot 12000v^{35}{}_{35}p_{30}} = \frac{906(\ddot{a}_{65:\overline{20|}} - 0.4243)}{864}$$

$$864\ddot{a}_{65:\overline{20|}} = 906\ddot{a}_{65:\overline{20|}} - 384.4158$$

$$\ddot{a}_{65:\overline{20|}} = 9.1527$$

Stąd

$$JSN \approx 109833$$

Najbliżej z odpowiedzi jest 111320

Żeby wyjśc na odpowiedź w punkt trzeba zastosować dokładne wartości dla $\alpha(m)$ *i* $\beta(m)$ *ze wzorów.*

Zadanie 17.3 Rozpatrujemy ciągły model ubezpieczenia dla osoby (50) z populacji o wykładniczym rozkładzie czasu życia z parametrem $\mu = 0.025$. W momencie śmierci ubezpieczonego polisa zaczyna wypłacać uposazonym ciągłą rentę

$$1000 \cdot (\bar{D}\bar{a})_{\overline{\mathring{e}_{50+t}|}}$$

aż do momentu jej wyczerpania. Oblicz jednorazową składkę netto w tym ubezpieczeniu dla $\delta = 0.04$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 17.3 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że* T_x *ma rozkład wykładniczy z gęstością* $\mu e^{-\mu t}$*. Wtedy*

$${}_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

Z rozkładu wykładniczego wynika, że ${}_tp_x$ *nie zalezy od x. Wiemy, że* $\mathring{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt$*. Mamy:*

$$\mathring{e}_{50+t} = \int_0^\infty e^{-\mu t}dt = \int_0^\infty e^{-0.025t}dt = \frac{1}{0.025} = 40$$

Mamy:

$$JSN = \int_0^\infty 1000 \cdot (\bar{D}\bar{a})_{\overline{\mathring{e}_{50+t}|}}\,{}_tp_x\mu_{x+t}e^{-\delta t}dt$$

$$(\bar{D}\bar{a})_{\overline{e_{50+t}}|} = \int_0^{e_{50+t}} (e_{50+t} - t)e^{-\delta t}dt =$$
$$= \int_0^{40} (40-t)e^{-\delta t}dt = 501.1853$$
$$JSN = \int_0^{\infty} 1000 \cdot 501.1853 \cdot e^{-0.025} \cdot 0.025 \cdot e^{-0.04t}dt = \frac{12529.6325}{0.025+0.04} = 192763.5769 \approx$$
$$\approx 192765$$

Zadanie 17.4 *Za tą samą składkę jednorazową netto SJN można kupić jedną z następujących polis emerytalnych dla* (65)

- *E1 wypłaca na początku każdego roku* $E > 0$*, aż do śmierci, przy czym wypłat będzie co najmniej 10 (nawet, gdy umrze przed wiekiem* 74*);*
- *E2 wypłaca E na początku każdego roku, aż do śmierci lub do dożycia wieku 75 (w zależności do tego co nastąpi wcześniej); począwszy od wieku 75 wypłaca* $E + \Delta E$*, aż do śmierci (*ΔE *ma charakter dodatku pielęgnacyjnego).*

Oblicz $\frac{\Delta E}{E}$ *jeśli dane są:*

$$i = 5\%; \quad D_{65} = 2676.52; \quad N_{65} = 24896.14; \quad N_{75} = 6543.13$$

Rozwiązanie 17.4

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$
$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = v^n {}_np_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Mamy:

$$JSN(E_1) = JSN(E_2)$$
$$JSN(E_1) = E\sum_{k=0}^{9} v^k + E\underbrace{v^{10}{}_{10}p_x}_{\frac{D_{75}}{D_{65}}} \cdot \underbrace{\ddot{a}_{75}}_{\frac{N_{75}}{D_{75}}} = E \cdot 10.55246$$
$$JSN(E_2) = E\underbrace{\ddot{a}_{65:\overline{10}|}}_{\frac{N_{65}-N_{75}}{D_{65}}} + (E+\Delta E)\underbrace{v^{10}{}_{10}p_x}_{\frac{D_{75}}{D_{65}}} \cdot \underbrace{\ddot{a}_{75}}_{\frac{N_{75}}{D_{75}}} =$$
$$= E \cdot 6.86704 + E \cdot 2.44464 + \Delta E \cdot 2.44464$$

Mamy:

$$E \cdot 10.55246 = E \cdot 9.311168 + \Delta E \cdot 2.44464$$
$$\frac{\Delta E}{E} = 0.507455 \approx 0.51$$

Zadanie 17.5 (x) wylosowany z populacji wykładnicze z parametrem $\mu > 0$, przez najbliższej $\frac{1}{2\mu}$ lat będzie płacił składkę emerytalną z intensywnością $\bar{P}$, a po dożyciu wieku $x+\frac{1}{2\mu}$ zacznie otrzymywać emeryturę w postaci renty zyciowej ciągłej z intensywnością 1. Ponadto, w przypadku śmierci w wieku $x+t$, gdzie $0 < t < \frac{1}{2\mu}$ uposażeni otrzymają jednorazowe świadczenie w wysokości $\frac{1}{2}\bar{V}(t)$, gdzie $\bar{V}(t)$ oznacza rezerwę składek netto na moment t. Oblicz $\bar{P}$, jeśli techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 3\mu$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 17.5 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy*

$$ {}_tp_x = e^{-\mu t} $$

$$ \mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu $$

Mamy:

$$ \bar{P}\bar{a}_{x:\overline{\frac{1}{2\mu}}|} = e^{-\delta\frac{1}{2\mu}}\, {}_{\frac{1}{2\mu}}p_x \cdot \bar{a}_{x+\frac{1}{2\mu}} + \int_0^{\frac{1}{2\mu}} \frac{1}{2}\bar{V}(t)\,{}_tp_x\mu_{x+t}e^{-\delta t}dt $$

$$ \bar{a}_{x:\overline{\frac{1}{2\mu}}|} = \int_0^{\frac{1}{2\mu}} e^{-\mu t}e^{-\delta t}dt = \frac{1-e^{-(\delta+\mu)\frac{1}{2\mu}}}{\delta+\mu} = \frac{1-e^{-2}}{4\mu} $$

$$ \bar{a}_{x+\frac{1}{2\mu}} = \frac{1}{4\mu} $$

mamy:

$$ \bar{P}\frac{1-e^{-2}}{4\mu} = e^{-2}\frac{1}{4\mu} + \int_0^{\frac{1}{2\mu}} \frac{1}{2}\bar{V}(t)e^{-4\mu t}\mu \cdot dt $$

Równanie Thielego

$$ \frac{d_t\bar{V}}{dt} = \bar{\pi}\,(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})_t\bar{V} - b(t)\mu_{[x]+t} $$

$$ V'(t) = \bar{P} + 4\mu V(t) - \frac{1}{2}V(t)\mu $$

$$ \frac{dV(t)}{dt} = \bar{P} + 3.5V(t)\mu $$

niech $V(t) = x$, wtedy:

$$ \frac{dx}{dt} = \bar{P} + 3.5x\mu $$

$$ \frac{1}{\bar{P}+3.5x}dx = dt $$

Całkujemy ($f(x) = \bar{P} + 3.5x\mu$) i mamy

$$ \frac{\ln(\bar{P}+3.5\mu x)}{3.5\mu} = t + c $$

Stąd

$$x = V(t) = \frac{e^{3.5\mu t}e^{c} - \bar{P}}{3.5\mu}$$

Warunek poczatkowy $V(0) = 0$ *daje* $e^c = \bar{P}$ *więc finalnie*

$$V(t) = \frac{e^{3.5\mu t}\bar{P} - \bar{P}}{3.5\mu} = \frac{\bar{P}}{3.5\mu}(e^{3.5\mu t} - 1)$$

Podstawiamy do całki i liczymy całkę:

$$\int_0^{\frac{1}{2\mu}} \frac{1}{2}\bar{V}(t)e^{-4\mu t}\mu \cdot dt = \frac{\bar{P}\cdot\mu}{2\cdot 3.5\mu}\int_0^{\frac{1}{2\mu}}(e^{3.5\mu t} - 1)e^{-4\mu t}dt = (*)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2\mu}}(e^{-3.5\mu t} - 1)e^{-4\mu t}dt = \frac{1 - e^{-1/4}}{\frac{1}{2}\mu} - \frac{1 - e^{-2}}{4\mu}$$

$$(*) = \frac{\bar{P}}{2\cdot 3.5}\left(\frac{1 - e^{-1/4}}{\frac{1}{2}\mu} - \frac{1 - e^{-2}}{4\mu}\right)$$

$$\bar{P}\frac{1 - e^{-2}}{4\mu} = e^{-2}\frac{1}{4\mu} + \frac{\bar{P}}{2\cdot 3.5}\left(\frac{1 - e^{-1/4}}{\frac{1}{2}\mu} - \frac{1 - e^{-2}}{4\mu}\right)$$

czyli (kalkulator)

$$\bar{P} = 0.184$$

Zadanie 17.6 Rozważmy 40-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie dla (30) wylosowanego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$. Wypłaci ono 1 w chwili śmierci, jeśli ubezpieczony umrze w ciągu najbliższych 40 lat, lub na jego 70-te urodziny. Oblicz:

$$\frac{\pi^r(20)}{\pi^s(20)}$$

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.04$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 17.6 Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki* $\omega = 100$ *lat. Rozkład* T_0 *jest jednostajny na przedziale* $[0, \omega]$. *Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Równanie Thielego

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = \bar{\pi}\,(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})_t\bar{V} - b(t)\mu_{[x]+t}$$

gdzie: $b(t)$ - suma ubezpieczenia, $\overline{\pi}(t)$ - intensywność płacenia składki

Podział składki w modelu ciągłym

$$\bar{\pi} = \bar{\pi}^s(t) + \bar{\pi}^r(t)$$

$$\bar{\pi}^s(t) = \frac{d_t\bar{V}}{dt} - \delta_t\bar{V}$$

$$\bar{\pi}^r(t) = (b(t) - {}_t\bar{V})\mu_{x+t}$$

Zaczniemy od $\bar{\pi}^s(t)$ z równania Thielego:

$$\frac{d_{20}\bar{V}}{dt} = \bar{\pi}\,(20) + (0.04 + \mu_{[30]+20})_{20}\bar{V} - b(20)\mu_{[30]+20} =$$

$$= \pi(20) + (0.04 + \frac{1}{100-50})_{20}V - 1 \cdot \frac{1}{50} = (\Delta)$$

gdzie:

$$\pi = \frac{\bar{A}_{x:\overline{40}|}}{\bar{a}_{x:\overline{40}|}} = \frac{1 - \delta\bar{a}_{x:\overline{40}|}}{\bar{a}_{x:\overline{40}|}} = 0.02365$$

$$\bar{a}_{x:\overline{40}|} = \int_0^{40} \left(1 - \frac{t}{100-30}\right) e^{-0.04t} dt = 15.7109$$

$${}_{20}V = \bar{A}_{x+20:\overline{20}|} - \pi \cdot \bar{a}_{x+20:\overline{20}|} = 1 - 0.04 \cdot \bar{a}_{x+20:\overline{20}|} - \pi \cdot \bar{a}_{x+20:\overline{20}|} = (*)$$

$$\bar{a}_{x+20:\overline{20}|} = \int_0^{20} \left(1 - \frac{t}{100-50}\right) e^{-0.04t} dt = 11.37667760$$

$$(*) = 0.2758744714$$

$$(\Delta) = 0.2020246828$$

mamy:

$$\bar{\pi}^s(20) = \frac{d_{20}\bar{V}}{dt} - \delta_{20}\bar{V} = 0.2020246828 - 0.04 \cdot 0.2758744714 =$$

$$= 0.00916748942$$

$$\bar{\pi}^r(20) = \bar{\pi}(20) - \bar{\pi}^s(20) = 0.02365 - 0.00916748942 = 0.01448259165$$

Stąd

$$\frac{\pi^r(20)}{\pi^s(20)} = 1.5797 \approx 1.58$$

Zadanie 17.7 Rozpatrujemy dyskretny typ ubezpieczenia na życie i dożycie ze składką brutto płatną przez cały okres ubezpieczenia w stałej wysokości. Warianty tego ubezpieczenia różnią się okresem ubezpieczenia. We wszystkich przypadkach stosowane są te same parametry aktuarialne do kalkulacji składek i rezerw.

Niech symbol ${}_kV^{\alpha}_{x:\overline{n}|}$ oznacza rezerwę Zillmera na koszty początkowe po k latach ubezpieczenia zawartego na n lat; symbol $P^{\alpha}_{x:\overline{n}|}$ oznacza narzuty na koszty początkowe w składce brutto ubezpieczenia zawartego na n lat; symbol $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$ oznacza rozczną składkę netto w n-letnim ubezpieczeniu na dożycie. Wszystkie symoble odnoszą się do jednostkowej sumy ubepzieczenia. Dane są:

$$ {}_{10}V^{\alpha}_{x:\overline{40}|} = -0.03031 $$

$$ P^{\alpha}_{x:\overline{40}|} = 0.002477 $$

$$ P^{\alpha}_{x:\overline{20}|} = 0.003015 $$

$$ P_{x:\overline{10}|}^{\ \ 1} = 0.06895 $$

Oblicz $1000 \cdot {}_{10}V^{\alpha}_{x:\overline{20}|}$. Wskaż najbliższą wartość

Rozwiązanie 17.7

$$ P^{br}_{x:\overline{n}|} = \underbrace{P_{x:\overline{n}|}}_{P} + \underbrace{\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}}_{P^{\alpha}} + \underbrace{\beta \cdot P^{br}_{x:\overline{n}|}}_{P^{\beta}} + \underbrace{\gamma}_{P^{\gamma}} $$

$$ {}_kV^{br} = {}_kV + {}_kV^{\alpha} + {}_kV^{\gamma} $$

1. Rezerwa brutto dla ubezpieczenia na życie i dożycie. Akwizycyjny składnik rezerwy ma postać:

$$ {}_kV^{\alpha}_{x:\overline{n}|} = -P^{\alpha} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} = -\alpha \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = -\alpha(1 - {}_kV_{x:\overline{n}|}) $$

natomiast dla $k = 1, 2, \ldots, n$ mamy

$$ {}_kV^{\gamma} \equiv 0 $$

Ostatecznie więc:

$$ {}_kV^{br}_{x:\overline{n}|} = (1+\alpha)_kV_{x:\overline{n}|} - \alpha $$

W zadaniu mamy obliczyć:

$$ {}_{10}V^{\alpha}_{x:\overline{20}|} = -\alpha \frac{\ddot{a}_{x+10:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} $$

Z treści mamy:

$$ {}_{10}V^{\alpha}_{x:\overline{40}|} = -0.03031 = -\alpha \frac{\ddot{a}_{x+10:\overline{30}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{40}|}} $$

$$ P^{\alpha}_{x:\overline{40}|} = 0.002477 = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{40}|}} $$

$$ P^{\alpha}_{x:\overline{20}|} = 0.003015 = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} $$

$$P_{\overset{1}{x:\overline{10|}}} = 0.06895 = \frac{v^{10}{}_{10}p_x}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}$$

stąd

$$-0.03031 = -\alpha\frac{\ddot{a}_{x+10:\overline{30|}}}{\frac{\alpha}{0.002477}}$$

$$\ddot{a}_{x+10:\overline{30|}} = 12.2365765$$

Z własności rent życiowych:

$$\ddot{a}_{x:\overline{10|}} + v^{10}{}_{10}p_x \cdot \ddot{a}_{x+10:\overline{30|}} = \ddot{a}_{x:\overline{40|}}$$

czyli

$$\ddot{a}_{x:\overline{10|}} + 0.06896 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{10|}} \cdot 12.2365765 = \underbrace{\ddot{a}_{x:\overline{40|}}}_{=\frac{\alpha}{0.002477}}$$

stąd

$$\ddot{a}_{x:\overline{10|}} = 218.9681368 \cdot \alpha$$

Wracając do obliczeń

$${}_{10}V^{\alpha}_{x:\overline{20|}} = -\alpha\frac{\ddot{a}_{x+10:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{20|}}} =?$$

Z własności rent życiowych:

$$\ddot{a}_{x+10:\overline{10|}} \cdot v^{10}{}_{10}p_x + \ddot{a}_{x:\overline{10|}} = \ddot{a}_{x:\overline{20|}}$$

$$\ddot{a}_{x+10:\overline{10|}} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{20|}} - \ddot{a}_{x:\overline{10|}}}{v^{10}{}_{10}p_x}$$

wstawiamy:

$${}_{10}V^{\alpha}_{x:\overline{20|}} = -\alpha\frac{\ddot{a}_{x+10:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{20|}}} = -\alpha\frac{\ddot{a}_{x:\overline{20|}} - \ddot{a}_{x:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{20|}} \cdot v^{10}{}_{10}p_x} =$$

$$= -\alpha\frac{1}{v^{10}{}_{10}p_x} + \alpha\frac{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}{\underbrace{v^{10}{}_{10}p_x}_{=0.06895\cdot\ddot{a}_{x:\overline{10|}}} \cdot \underbrace{\ddot{a}_{x:\overline{20|}}}_{\frac{\alpha}{0.003015}}} =$$

$$= -\alpha\frac{1}{0.06895 \cdot 218.9681368 \cdot \alpha} + \alpha\frac{1}{\alpha\frac{0.06895}{0.003015}} =$$

$$= -0.022500724436$$

$$ODP = -0.022500724436 \cdot 1000 \approx -22.50$$

Zadanie 17.8 Okres zatrudnienia trwa od 25 do 65 roku zycia. Pracownicy z populacji wykładniczej ze śmiertelnością $\mu^{(s)} = 0.025$ są narażeni w okresie zatrudnienia na ryzyko wypadku przy pracy ze stałą intensywnością $\mu^{(w)} = 0.02$. Konsekwencją wypadku jest trwały (do końca życia) wzrost intensywności śmiertelności do poziomu $\mu^{(ws)} = 0.06$. Kolejne wypadku już nie zmieniają ryzyka śmierci. Przed 65 rokiem życia jedyną przyczyną odejścia z pracy jest

śmierć.
Zatrudniając nowych pracowników w wieku 25 lat, pracodawca wykupuje im bezterminowe ubezpieczenie na życie. Wyznacz jednorazową składkę netto za 1000 zł sumy ubezpieczenia, jeśli intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.05$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 17.8 *Rozdzielmy aktywność zawodową:*

- *brak wypadków, przeżyje 40 lat*
- *brak wypadków, nie przeżyje 40 lat*
- *min. 1 wypadek, przeżyje 40 lat.*
- *wypadek, nie przeżyje 40 lat.*

Po pierwsze: brak wypadków, nie przeżyje 40 lat:

$$\int_0^{40} {}_tp_x^{\tau}\mu_{x+t}^{(s)}e^{-\delta t}dt = \int_0^{40} e^{-0.025t}e^{-0.02t}e^{-0.05t}0.025dt = 0.25727085$$

Po drugie: brak wypadków i śmierci przez 40 lat, umiera potem:

$$_{40}p_x^{(\tau)}e^{-40\cdot\delta}\int_0^{\infty} {}_tp_{x+40}^{(\tau)}\mu_{x+40+t}^{(s)}e^{-\delta t}dt =$$

$$= e^{-0.045\cdot 40}e^{-40\cdot 0.05}\int_0^{\infty} e^{-0.075t}0.025dt = e^{-3.8}\cdot 0.025\frac{1}{0.075} =$$

$$= 0.00745692395$$

Przypadek 3 i 4 można rozważyć razem, wtedy wychodzi: wypadek w ciągu 40 lat:

$$\int_0^{40} e^{-0.095t}\cdot 0.02\cdot\left(\int_0^{\infty} e^{0.06s}e^{-0.05s}0.06ds\right)dt =$$

$$= \int_0^{40} e^{-0.095t}\cdot 0.02\cdot\frac{0.06}{0.11}dt = 0.112264$$

Dodając dostajemy:

$$ODP = 0.37699$$

Zadanie 17.9 Rozważmy emeryturę małżeńską dla niej (x) i dla niego (y), która została zakupiona za składkę jednorazową netto SJN, i natychmiast zaczyna wypłacać

- z intensywnością $2A$, póki żyją oboje
- z intensywnością A owdowiałej osobie, aż do jej śmierci.

Oboje wylosowani są niezależnie z populacji wykładniczej z parametrem $\mu = 0.01$. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wartość obecna świadczeń na moment wystawienia polisy przekroczy połowę SJN. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.01$

Rozwiązanie 17.9

$$SJN = 2A\ddot{a}_{x:y} + A(\ddot{a}_{\overline{x:y}} - \ddot{a}_{x:y}) =$$

$$= 2A\ddot{a}_{x:y} + A(\ddot{a}_x + \ddot{a}_y - 2\ddot{a}_{x:y}) = A\ddot{a}_x + B\ddot{a}_y$$

$$\ddot{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{0.02}$$

Z treści:

$$P\left(A\left(\frac{1-Z_x}{\delta} + \frac{1-Z_y}{\delta}\right) > \frac{1}{2} \cdot 2A \cdot \frac{1}{0.02}\right) =$$

$$= P(2 - Z_x - Z_y > 0.5) = P(1.5 > Z_x + Z_y) = P(Z_x < 1.5 - Z_y)$$

Jaką gęstość ma Z_x (oraz Z_y)? Wiemy, że $Z_x = e^{-0.01T_x}$. Skoro T_x ma rozkład wykładniczy z parametrem 0.01 *to korzystając z ogólnych wzorów na transformacje zmiennych losowych dostajemy:*

$$Y = e^{-0.01X}; \qquad X = \frac{\ln(Y)}{-0.01} = h(Y)$$

stąd gęstość zmiennej Y równa:

$$g(y) = e^{-0.01 \cdot \frac{\ln(Y)}{-0.01}} \cdot 0.01 \cdot \left|\frac{1}{-Y \cdot 0.01}\right| = 1$$

czyli żeby policzyć nasze prawdopodbieństwo mamy całkę:

$$P(Z_x < 1.5 - Z_y) = \int\int 1 \cdot 1 \cdot dZ_x dZ_y$$

Bardzo ważne jest rozpatrzenie granic całkowania, zauważmy, że Z_x oraz Z_y są określone na przedziałach $(0,1)$. Wykonujemy rysunek pomocniczy i dodajemy obszary (bo gęstości są jedynkami, więc sprowadza się do obliczenia pola):

$$ODP = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5 + \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.875$$

18 Egzamin z 8 grudnia 2014

Zadanie 18.1 Rozważmy (67), wylosowanego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 95$, który za składkę jednorazową netto SJN kupił polisę emerytalną, która wypłaca mu rentę życiową ciągłą z intensywnością 1 na rok, aż do śmierci. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wartość obecna PV jego wszystkich świadczeń emerytalnych na moment wystawienia polisy przekroczy SJN. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.02$. Wybierz odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 18.1 Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki* $\omega = 100$ *lat. Rozkład* T_0 *jest jednostajny na przedziale* $[0, \omega]$. *Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

$$SJN = \int_0^{28} {}_tp_x e^{-\delta t} dt = \int_0^{28} \left(1 - \frac{t}{28}\right) e^{-0.02t} dt = 11.71509499$$

$$PV = \int_0^{T(x)} e^{-\delta t} dt = \frac{1 - e^{-0.02T(x)}}{0.02}$$

$$P(PV > SJN) = P\left(\frac{1 - e^{-0.02T}}{0.02} > 11.7151\right) = P(0.7657 > e^{-0.02T}) =$$

$$= P(-0.2667 > -0.02T) = P(13.34837 < T) = 1 - \frac{13.34837}{28} = 0.5232 \approx 0.52$$

Zadanie 18.2 Śmiertelność danej populacji opisuje roczna tablica trwania życia. Wiadomo jednak, że w każdym roczniku spełnione są założenia UDD. Wyznacz wartość $(\bar{I}\bar{A})^1_{n:\overline{n}|}$, jeśli dane są:

$$i = 4\%, \qquad A^1_{x:\overline{n}|} = 0.1812, \qquad (IA)^1_{x:\overline{n}|} = 3.1832$$

Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 18.2 *Sposób 1: podstawić do wzoru. Wiemy, że dla ubezpieczenia na całe życie jest:*

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}\left((IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) A_x\right)$$

Analogiczny wzór obowiązuje dla ubezpieczenia terminowego:

$$(\bar{I}\bar{A})^1_{n:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\left((IA)^1_{x:\overline{n}|} - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) (IA)^1_{x:\overline{n}|}\right)$$

Po podstawieniu liczb ($\delta = \ln(1.04)$) mamy,

$$(\bar{I}\bar{A})^1_{n:\overline{n}|} = 3.153443713$$

Sposób 2: Niech S - ułamkowy czas życia, K - obcięty czas życia,

Ogólnie

$$\bar{A}_x = E(v^{T+S}) = E(v^{K+1}) \cdot E(e^{-\delta(S-1)}) = A_x \cdot \int_0^1 e^{-\delta(t-1)}dt = \frac{i}{\delta}A_x$$

Mamy

$$(\bar{I}\bar{A})^1_{n:\overline{n}|} = E((S+K)v^{S+K} \cdot \mathbb{1}(S+K<n)) =$$
$$= E(Sv^{S+K} \cdot \mathbb{1}()) + E(Kv^{S+K} \cdot \mathbb{1}()) =$$
$$= E(Se^{-\delta(S-1)} \cdot \mathbb{1}()) \cdot E(v^{K+1} \cdot \mathbb{1}()) + E((Kv^{K+1} + v^{K+1} - v^{K+1}) \cdot \mathbb{1}())E(e^{-\delta(S-1)} \cdot \mathbb{1}()) =$$
$$\int_0^1 te^{-\delta(t-1)}dt \cdot A^1_{x:\overline{n}|} + \left(E((K+1)v^{K+1}) - A^1_{x:\overline{n}|}\right) \cdot \int_0^1 e^{-\delta(t-1)}dt =$$
$$= 3.153443713$$

Zadanie 18.3 Rozważamy 40-letnie ubezpieczenie na życie dla (30), które wypłaci:

$$c_{k+1} = 100000 + (k+1)2500$$

na koniec roku śmierci, gdy $K(3) = k < 40$, lub 0, gdy $K(30) \geqslant 40$. Składki w stałej wysokości P będą płacone w postaci renty życiowej, na początku każdego roku. Oblicz:

$$\frac{\pi^s_{25}}{\pi^r_{25}}$$

jeżeli dane są $i = 5\%$ oraz: Wskaż odpowiedź najbliższą.

	x=30	x=55	x=56	x=70
q_x	0.00194	0.01652	0.01788	0.04988
D_x	22 252	5 548	5 196	1 709
N_x	383 395	66 319	60 771	13 557
M_x	3 995	2 389	2 302	1 063
R_x	118 994	35 783	33 394	9 333

Rozwiązanie 18.3 Kontrakt ubezpieczeniowy ogólnego typu (dyskretny)

$${}_kV + \pi_k = v(c_{k+1}q_{x+k} + {}_{k+1}V \cdot p_{x+k})$$

Inna postać zależności rekurencyjnej:

$${}_kV + \pi_k = v({}_{k+1}V + (c_{k+1} - {}_{k+1}V)q_{x+k})$$

Podział składki $\pi_k = \pi_k^s + \pi_k^r$*:*

$$\pi_k^s := {}_{k+1}V \cdot v - {}_kV$$

$$\pi_k^r := (c_{k+1} - {}_{k+1}V) \cdot v \cdot q_{x+k}$$

Liczymy $\pi_{25} = P$*, dla przypomnienia* $A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_kp_x q_{[x]+k}$*. Skoro* $c_{k+1} = 100000 + (k+1)2500$ *to mamy*

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_{k+1}v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k} = 10000\sum_{i=0}^{n-1} v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k} + 2500\sum_{i=0}^{n-1} v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k} =$$

$$= 100000A^{\ 1}_{30:\overline{40}|} + 2500IA^{\ 1}_{30:\overline{40}|}$$

Stąd

$$\pi_k = P = \frac{100000A^{\ 1}_{30:\overline{40}|} + 2500IA^{\ 1}_{30:\overline{40}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{40}|}}$$

Z funkcji komutacyjnych:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x}$$

Mamy:

$$\ddot{a}_{30:\overline{40}|} = \frac{N_{30} - N_{70}}{D_{30}} = 16.62043861$$

$$A^{\ 1}_{30:\overline{40}|} = \frac{M_{30} - M_{70}}{D_{30}} = 0.131763437$$

$$(IA)^{\ 1}_{30:\overline{40}|} = \frac{R_{30} - R_{70} - 40 \cdot M_{70}}{D_{30}} = 3.017301816$$

$$\pi_k = P = 1246.63$$

Wiemy, że π_{25}^s

$$\pi_{25}^s = {}_{26}V \cdot \frac{1}{1.05} - {}_{25}V$$

Liczymy rezerwę:

$${}_kV = (100000 + k \cdot 2500) \cdot A^{\ 1}_{x+k:\overline{n-k}|} + 2500(IA)^{\ 1}_{x+k:\overline{n-k}|} - P\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

$${}_{26}V = 32433.4$$

$${}_{25}V = 31716.4$$

mamy odpowiedź:

$$\frac{\pi_{25}^s}{\pi_{25}^r} = \frac{{}_{26}V \cdot \frac{1}{1.05} - {}_{25}V}{P - \left({}_{26}V \cdot \frac{1}{1.05} - {}_{25}V\right)} = -0.3989 \approx -0.4$$

Zadanie 18.4 Na osobę z populacji wykładniczej z parametrem $\mu = 0.04$ wystawiono dożywotnie ubezpieczenie rentowe, wypłacające od zaraz świadczenie z roczną intensywnością 12 000 zł. Ubezpieczenie zawiera gwarancję, że nawet w przypadku śmierci wypłaty rentowe będą kontynuowane tak długo, aż nominalna suma wypłat zrówna się z nominalną wartością jednorazowej składki netto. Podaj wysokość jednorazowej składki netto w tym ubezpieczeniu przy intensywności oprocentowania $\delta = 0.05$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 18.4 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy*

$$_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

Mamy:

$$SJN = 12000 \cdot \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} dt = 12000 \cdot \frac{1}{\mu + \delta} = 133333.33$$

Jako, że ubezpieczenie z gwarancją zawsze będzie droższe, odpadają odpowiedzi A i B. Gdy dodamy gwarancję mamy:

(1) Suma wypłat ma zrównać się z nominalną wartością JSN, czyli

$$n \cdot 12000 = JSN$$

(2) Obliczmy JSN dla ubezpieczenia z gwarancją:

$$JSN = 12000 \left(\int_0^n e^{-\delta t} dt + \int_n^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} dt \right) =$$

$$= 12000 \left(\frac{1 - e^{-0.05n}}{0.05} + \frac{e^{-0.09n}}{0.09} \right)$$

Porównujemy z (1)

$$n \cdot 12000 = 12000 \left(\frac{1 - e^{-0.05n}}{0.05} + \frac{e^{-0.09n}}{0.09} \right)$$

kalkulator (solver) i:

$$n = 13$$

stąd z (1) mamy $JSN = 12000 \cdot n = 156000$

Zadanie 18.5 Rozwazmy polisę ciągłą ogólnego typu, wystawioną (35) wylosowanemu z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$. Będzie on płacić do końca życia składkę w formie życiowej renty ciągłej z opdowiednio dobraną stała intensywnością netto $\bar{P}$. Jeśli umrze w wieku $35+t$, natychmiast zostanie wypłacone świadczenie w wysokości $c(t)$. Parametry kontraktu są tak dobrane, że dla każdego $0 < t < 65$ zachodzi $\pi^r(t) = \bar{P}$. Wiadomo ponadto, że składka jednorazowa netto za to ubezpieczenie wynosi $SJN = \bar{A}_{35}$. Oblicz $t > 0$ spelniające warunek

$$c(t) = 1.$$

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.03$. Wybierz odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 18.5 *Należy wyznaczyć $c(t)$.*

Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki $\omega = 100$ lat. Rozkład T_0 jest jednostajny na przedziale $[0,\omega]$. Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Równanie Thielego

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = \bar{\pi}\,(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})_t\bar{V} - b(t)\mu_{[x]+t}$$

gdzie: $b(t)$ - suma ubezpieczenia, $\overline{\pi}(t)$ - intensywność płacenia składki

Podział składki w modelu ciągłym

$$\bar{\pi} = \bar{\pi}^s(t) + \bar{\pi}^r(t)$$

$$\bar{\pi}^s(t) = \frac{d_t\bar{V}}{dt} - \delta_t\bar{V}$$

$$\bar{\pi}^r(t) = (b(t) - {}_t\bar{V})\mu_{x+t}$$

Rozwiązanie:

Pierwsza uwaga: skoro $\bar{\pi}^r(t) = \bar{P}$ to oznacza, że $\bar{\pi}^s(t) = 0$. Skoro tak to mamy:

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = \delta_t\bar{V}$$

co po zróżniczkowaniu daje

$$_tV = e^{\delta t}e^c$$

Biorąc pod uwagę warunek brzegowy $_0V = 0$ dochodzimy do

$$_tV = e^{\delta t}e^c = e^{\delta t} \cdot c$$

gdzie $c = 0$, a więc ${}_tV = 0$ dla każdego t takiego, że $0 < t < 65$. Ze wzoru na $\bar{\pi}^r(t)$ mamy:

$$\bar{P} \cdot (w - x - t) + {}_tV = c(t)$$

czyli

$$c(t) = \bar{P} \cdot (65 - t)$$

$$\bar{P} = \frac{\bar{A}_{35}}{\frac{1-\bar{A}_{35}}{\delta}} = 0.0235579865$$

podstawiamy odpowiedzi i mamy, że dla $t = 22.55$, $c(t) = 1.000036528$. Powyższe rozwiązanie jest naturalne biorąc pod uwagę, że nie ma części oszczędnościowej składki - modyfikującej rezerwę.

Zadanie 18.6 Rozpatrujemy dyskretny typ bezterminowego ubezpieczenia na życie z sumą ubezpieczenia 10 000 zł oraz składką płaconą przez cały okres ubezpieczenia. Przy tym samym zestawie parametrów aktuarialnych wystawiono ubezpieczenie na życie (x) oraz odrębne ubezpieczenia na życie $(x + 10)$. Po 10 latach obydwa ubezpieczenia mają rezerwy Zillmera na koszty początkowe różnicą się o 18.75 zł. Oblicz współczynnik α narzutu na koszty początkowe przyjęty do kalkulacji rezerw. Wiadomo, że:

$$A_{x+10} - A_x = A_{x+20} - A_{x+10} = \frac{1}{2}(1 - A_{x+20})$$

Rozwiązanie 18.6 *Ogólnie:*

$${}_kV^{br} = {}_kV + {}_kV^{\alpha} + {}_kV^{\gamma}$$

Rezerwa brutto dla ubezpieczenia na życie i dożycie. Akwizycyjny składnik rezerwy ma postać:

$${}_kV^{\alpha}_{x:\overline{n}|} = -P^{\alpha} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} = -\alpha \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = -\alpha(1 - {}_kV_{x:\overline{n}|})$$

natomiast dla $k = 1, 2, \dots, n$ mamy

$${}_kV^{\gamma} \equiv 0$$

Ostatecznie więc:

$${}_kV^{br}_{x:\overline{n}|} = (1 + \alpha){}_kV_{x:\overline{n}|} - \alpha$$

W naszym zadaniu mamy:

$${}_kV^{br} = {}_kV + {}_kV^{\alpha}$$

$${}_kV^{\alpha} = -P^{\alpha} \cdot \ddot{a}_{x+k} = -\alpha \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} = -\alpha(1 - {}_kV_x)$$

Potrzebujemy ${}_kV$,

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

$$ {}_kV_x = A_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k} $$
$$ {}_{10}V_x = A_{x+10} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+10} $$
$$ {}_{10}V_x^{\alpha} = -\alpha(1 - {}_{10}V_x) $$
$$ {}_{10}V_{x+10} = A_{x+20} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+20} $$
$$ {}_{10}V_{x+10}^{\alpha} = -\alpha(1 - {}_{10}V_{x+10}) $$

Z warunków zadania:

$$ A_{x+20} - A_{x+10} = \frac{1}{2}(1 - A_{x+20}) \Rightarrow A_{x+10} = 1.5A_{x+20} - \frac{1}{2} $$

$$ A_{x+10} - A_x = \frac{1}{2}(1 - A_{x+20}) \Rightarrow A_x = 2A_{x+20} - 1 $$

$$ {}_{10}V_x = A_{x+10} - \frac{dA_x}{1 - A_x} \cdot \frac{1 - A_{x+10}}{d} = 1.5A_{x+20} - 1/2 - \frac{(2A_{x+20} - 1)(1 - 1.5A_{x+20} + 1/2)}{2(1 - A_{x+20})} = $$
$$ = \ldots = \frac{1}{4} $$
$$ {}_{10}V_{x+10} = \frac{1}{3} $$

Mamy

$$ {}_{10}V_{x+10}^{\alpha} = -\alpha(1 - \frac{1}{3}) = -2/3\alpha $$
$$ {}_{10}V_x^{\alpha} = -\frac{3}{4}\alpha $$
$$ {}_{10}V_{x+10}^{\alpha} - {}_{10}V_x^{\alpha} = 1/12\alpha $$
$$ \alpha \cdot 1/12 = 18.75 \Rightarrow \alpha = 225 \Rightarrow \alpha/10000 = 2.25\% $$

Zadanie 18.7 Emerytura małżeńska EM dla niej (x) i dla niego (y) wypłaca według wzorca:

- 36 000 zł na poczatku każdego roku aż do pierwszej śmierci,
- potem 24 000 zł na początku roku, aż do drugiej smierci
- ponadto, na koniec roku drugiej śmierci, uposażeni dostaną jednorazowo 1/3 składki jednorazowej netto SJN.

Składka SJN została zapłacona przez nich w chwili 0. W tej tez chwili zaczyna się wypłata emerytur EM. Dane są:

$$ i = 4\%, \quad \ddot{a}_x = 15, \quad \ddot{a}_y = 11, \quad \ddot{a}_{x:y} = 8 $$

Oblicz SJN. Wskaż odpowiedź najbliższą

Rozwiązanie 18.7 *Dla przypomnienia* $\ddot{a}_{\overline{x:y}}$ *- renta płatna aż do wyjścia ze statusu ostatniego przeżywającego. Jeśli u jest statusem przeżyciowym, to:*

$$\bar{A}_u + \delta\bar{a}_u = 1$$

$$\bar{A}_u + d\ddot{a}_u = 1$$

Wiemy:

$$\ddot{a}_{x:y} + \ddot{a}_{\overline{x:y}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y$$

$$A_{x:y} + A_{\overline{x:y}} = A_x + A_y$$

Mamy:

$$SJN = 36000 \cdot \ddot{a}_{x:y} + 24000 \cdot (\ddot{a}_{\overline{x:y}} - \ddot{a}_{x:y}) + \frac{1}{3} \cdot SJN \cdot A_{\overline{x:y}} =$$

$$= 36000 \cdot \ddot{a}_{x:y} + 24000 \cdot (\ddot{a}_x + \ddot{a}_y - 2\ddot{a}_{x:y}) + \frac{1}{3} \cdot SJN \cdot A_{\overline{x:y}}$$

$$A_{\overline{x:y}} = 1 - d\ddot{a}_{\overline{x:y}} = 1 - d(\ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x:y}) = 0.30769$$

$$SJN\left(1 - \frac{1}{3} \cdot A_{\overline{x:y}}\right) = 528000$$

Stąd

$$SJN = 588342.8571 \approx 588300$$

Zadanie 18.8 Rozważamy ciągły przypadek 20-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie na sumę 100 000 zł ze składką płaconą przez cały okres ubezpieczenia ze stałą intensywnością $\bar{P}$. Ubezpieczony ma 50 lat i podchodzi z populacji de Moivre'a z parametrem $\omega = 100$. Ubezpieczyciel ocenia, że model de Moivre'a z parametrem $\omega^{(r)} = 200$ dobrze opisuje zachodzace w trakcie ubezpieczenia rezygnacje. Rezygnujący w pierwszych 5 latach ubezpieczenia ni eotrzymuje żadnego zwrotu wpłaconych składek, a rezygnujący później - zwrot połowy nominalnej wartości składek wpłaconych po piątym roku ubezpieczenia. Wyznacz intensywność rocznej składki $\bar{P}$ dla intensywności oprocentowania $\delta = 0.05$.

Rozwiązanie 18.8 Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki* $\omega = 100$ *lat. Rozkład* T_0 *jest jednostajny na przedziale* $[0, \omega]$. *Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Z wzorów dla ubezpieczeń wieloopcyjnych:

$$f_x(t,j) = {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}$$

$$ {}_tp_x^{\prime(j)} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{[x]+s}^{(j)} ds\right) $$

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x^{\prime(j)} $$

Mamy:

$$ \bar{P} \cdot \bar{a}_{50:\overline{20}|}^{(\tau)} = 100000 \int_0^{20} {}_tp_{50}^{(\tau)} \mu_{50+t}^{(s)} e^{-\delta t} dt+ $$

$$ + \int_5^{20} \left(\frac{\bar{P}}{2} \cdot (t-5)\right) {}_tp_{50}^{(\tau)} \mu_{50+t}^{(r)} e^{-\delta t} dt + 100000 {}_{20}p_{50}^{(\tau)} \cdot e^{-\delta t} $$

Mamy:

$$ \mu_{50+t}^{(\tau)} = \mu_{50+t}^{(s)} + \mu_{50+t}^{(r)} = \frac{1}{50-t} + \frac{1}{150-t} $$

$$ {}_tp_{50}^{(\tau)} = \frac{50-t}{50} \cdot \frac{150-t}{150} $$

$$ \bar{a}_{50:\overline{20}|}^{(\tau)} = \int_0^{20} \frac{50-t}{50} \cdot \frac{150-t}{150} e^{-0.05t} = 9.995148902 $$

$$ 100000 \int_0^{20} {}_tp_{50}^{(\tau)} \mu_{50+t}^{(s)} e^{-\delta t} dt = 23875.53639 $$

$$ \int_5^{20} \left(\frac{\bar{P}}{2} \cdot (t-5)\right) {}_tp_{50}^{(\tau)} \mu_{50+t}^{(r)} e^{-\delta t} dt = \frac{\bar{P}}{2} \cdot 0.256730801 $$

Po przekształceniach dostajemy

$$ \bar{P} = 4358.29 \approx 4390 $$

Zadanie 18.9 Rozważamy następujace dwie polisy emerytalne dla pary małżeńskiej: ona (k) oraz on (m). Składki jednorazowe netto sa równe i wynoszą 200000 zł.

- W przypadku polisy EM1 połowa składki funduje emeryturę dożywotnią dla niej w formie renty życiowej ciągłej z odpowiednio dobraną intensywnością netto E_k. Podobnie, druga połowa składki funduje emeryturę dożytownią dla niego w formie renty życiowej ciągłej z odpowiednio dobraną intensywnością netto E_m.
- W przypadku polisy EM2 polowa składki ufunduje emeryturę wypłacaną w formie renty życiowej ciągłej do pierwszej śmierci z odpowiednio dobraną netto E_{dps}. Natomiast druga połowa składki ufunduje emeryturę wypłacaną w formie renty życiowej ciągłej do drugiej śmierci z odpowiednio dobraną intensywnością netto E_{dds}.

Dane są:

$$\frac{E_{dps} + E_{dds}}{E_m + E_k} = \frac{10}{9}$$

oraz

$$\frac{E_{dds}}{E_m} = \frac{5}{9}$$

Oblicz E_{dps}/E_k. Wskaż odpowiedź najbliższą.

Rozwiązanie 18.9 *Z tresci zadania:*

$$100000 = E_k \cdot \bar{a}_k$$

$$100000 = E_m \cdot \bar{a}_m$$

$$100000 = E_{dps} \cdot \bar{a}_{k:m}$$

$$100000 = E_{dds} \cdot \bar{a}_{\overline{k:m}}$$

Z zależności

$$\frac{E_{dps} + E_{dds}}{E_m + E_k} = \frac{10}{9}$$

mamy:

$$\frac{\frac{100000}{\bar{a}_{k:m}} + \frac{100000}{\bar{a}_{\overline{k:m}}}}{\frac{100000}{\bar{a}_k} + \frac{100000}{\bar{a}_m}} = \frac{10}{9}$$

stąd

$$\frac{1}{\bar{a}_{k:m}} + \frac{1}{\bar{a}_{\overline{k:m}}} = \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{\bar{a}_k} + \frac{1}{\bar{a}_m} \right)$$

$$\frac{\bar{a}_{\overline{k:m}} + \bar{a}_{k:m}}{\bar{a}_{k:m} \cdot \bar{a}_{\overline{k:m}}} = \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{\bar{a}_m + \bar{a}_k}{\bar{a}_k \cdot \bar{a}_m} \right)$$

Wiemy, że

$$\bar{a}_{x:y} + \bar{a}_{\overline{x:y}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y$$

Stąd, po podstawieniu:

$$9(\bar{a}_k \cdot \bar{a}_m) = 10(\bar{a}_{k:m} \cdot \bar{a}_{\overline{k:m}}) \qquad (*)$$

Z treści:

$$\frac{E_{dds}}{E_m} = \frac{\frac{100000}{\bar{a}_{\overline{k:m}}}}{\frac{100000}{\bar{a}_m}} = \frac{\bar{a}_m}{\bar{a}_{\overline{k:m}}} = \frac{5}{9}$$

szukamy:

$$\frac{E_{dps}}{E_k} = \frac{\bar{a}_k}{\bar{a}_{k:m}} = ?$$

Z $(*)$ mamy:

$$\frac{\bar{a}_k}{\bar{a}_{k:m}} = \frac{10\bar{a}_{\overline{k:m}}}{9\bar{a}_m} = \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{5} = 2$$

czyli

$$\frac{E_{dps}}{E_k} = 2$$

19 Egzamin z 23 marca 2015

Zadanie 19.1 Rozważamy (25), wylosowanego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym ω, który za pomocą renty życiowej ciągłej będzie płacił składkę emerytalną ze stałą intensywnością netto $\bar{P}$ aż do wieku p, kiedy zacznie otrzymywać emeryturę w formie renty dożywotniej z intensywnością netto $\bar{E}$.
Wiadomo, że dożyje on emerytury z prawdopodobieństwem 3/4. Ponadto wiadomo, że średni czas przebywania na emeryturze (tych, którzy na nią przeszli) wynosi 18 lat.
Oblicz $\bar{E}/\bar{P}$. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.05$. Wskaż najbliższą odpowiedź.

Rozwiązanie 19.1 Prawo de Moivre'a *Maksymalny wiek jednostki* $\omega = 100$ *lat. Rozkład* T_0 *jest jednostajny na przedziale* $[0, \omega]$. *Mamy:*

$$s(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$$

$$\mu_t = \frac{1}{\omega - t}$$

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Wartość oczekiwana przyszłego czasu życia x latka:

$$\mathring{e}_x = \int_0^{\infty} {_tp_x} dt$$

Niech

$$p = 25 + k$$

gdzie k to liczba lat pozostałych do dożycia wieku p przez 25-latka.

Mamy:

$$\bar{P} \cdot \bar{a}_{25:\overline{k}|} = \bar{E} \cdot e^{-\delta k} \underbrace{_kp_{25}}_{=3/4} \cdot \bar{a}_{25+k}$$

Wiadomo, że

$$\mathring{e}_p = \int_0^{\omega - p} {_tp_p} dt = \int_0^{\omega - p} 1 - \frac{t}{\omega - p} dt = \omega - p - \frac{(\omega - p)^2}{2(\omega - p)} =$$

$$= w - p - \frac{\omega - p}{2} = 18$$

stąd

$$\omega - p = 36 \rightarrow \omega - 25 - k = 36$$

wiemy, że $_kp_{25} = 3/4$ *wtedy*

$$1 - \frac{k}{\omega - 25} = \frac{3}{4} \rightarrow k = \frac{1}{4}(\omega - 25)$$

łącząc informacje:

$$w - 25 - \frac{1}{4}(\omega - 25) = 36 \to \omega = 73$$

stąd

$$k = 12$$

$$p = 37$$

$$\bar{a}_{25:\overline{25|}} = \int_0^{12} \left(1 - \frac{t}{73-25}\right) \cdot e^{-0.05t} dt = 8.0079$$

$$\frac{3}{4} \cdot e^{-0.05 \cdot 12} \cdot \int_0^{36} \left(1 - \frac{t}{36}\right) \cdot e^{-0.05t} dt = 4.41473$$

stąd

$$\frac{\bar{E}}{P} = 1.813911$$

Zadanie 19.2 Rozważmy dwie polis Pol_1 oraz Pol_2, które mogą być wystawione na (40) wylosowanego z populacji wykładniczej z $\mu \equiv 0.02$. Oblie polisy są aktuarialnie równoważne tzn. składki jednorazowe są identyczne. W przypadku Pol_1 suma ubezpieczenia rośnie liniowo w pierwszym roku od 0 do 1 i później wynosi 1. W przypadku Pol_2 suma ubezpieczenia rośnie liniowo przez pierwsze dwa lata od wartosci α do 1 i później wynosi 1. Obie polisy sa bezterminowe i wypłacają świadczenia w chwili śmierci. Oblicz α. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.05$

Rozwiązanie 19.2 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że T_x ma rozkład wykładniczy z gęstością $\mu e^{-\mu t}$. Wtedy*

$${}_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

Mamy:

$$A_x^{(1)} = \int_0^1 t {}_tp_x \mu_{x+t} e^{-\delta t} dt + \int_1^\infty {}_tp_x \mu_{x+t} e^{-\delta t} dt =$$

$$= \int_0^1 t e^{-0.07t} 0.02 dt + \int_1^\infty e^{-0.07t} 0.02 dt \approx 0.275943$$

Dla drugiej polisy $c(t) = m \cdot t + k$:

$$(1) \qquad \alpha = m \cdot 0 + k$$

$$(2) \qquad 1 = m \cdot 2 + k$$

więc $k = \alpha$, $m = \frac{1-\alpha}{2}$ więc mamy funkcję liniową $c(t) = \frac{1-\alpha}{2} \cdot t + \alpha$

$$A_x^{(2)} = \int_0^2 \left(\frac{1-\alpha}{2} \cdot t + \alpha\right) {}_tp_x \mu_{x+t} e^{-\delta t} dt + \int_2^\infty {}_tp_x \mu_{x+t} e^{-\delta t} dt =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1-\alpha}{2} \cdot t + \alpha \right) e^{-0.07t} 0.02dt + \int_2^\infty e^{-0.07t} 0.02dt$$

Najłatwiej jest nie obliczać tylko podstawić odpowiedzi. Wtedy mamy, że

$$\alpha = 0.49$$

Zadanie 19.3 *Osoba 40-letnia kupiła za 99 040 zł ubezpieczenie, które zacznie wypłacać po 25 latach ciągłą rentę z intensywnością 50 000 zł na rok przez następne 20 lat. Osoba o 10 dni starsza kupiła taką samą rentę, która zacznie po 25 latach i 1 miesiącu wypłacać świadczenia, także przez 20 lat. Podaj, o ile zł mniej zapłaci osoba starsza. Dane są:* $\delta = 0.05$, $\mu_{40} = 0.0085$, ${}_{25}p_{40} = 0.73625$, ${}_{20}p_{65} = 0.25034$. *Wskaż najbliższą wartość.*

Rozwiązanie 19.3 *UWAGA! W odpowiedziach z egzaminu nie ma odpowiedzi poprawnej.Mamy:*

$$99040 = 50000 \underbrace{\cdot e^{-\delta 25} {}_{25}p_{40} \cdot \bar{a}_{65:\overline{20|}}}_{{}_{25|20}\bar{a}_{40}} \to \bar{a}_{65:\overline{20|}} = 9.39038$$

gdzie ${}_{m|n}\bar{a}_x$ *- odroczona renta terminowa (odroczona o m lat renta na n lat). Szukamy*

$$JSN = 50000 \cdot \underbrace{\bar{a}_{65+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}} v^{25+1/12} {}_{25+\frac{1}{12}}p_{40+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}}}_{{}_{25+\frac{1}{12}|20}\bar{a}_{x+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}}}$$

Dla przypomnienia wzory:

$${}_{m|n}\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{m+n|}} - \bar{a}_{x:\overline{m|}}$$

$${}_{m|}\bar{a}_x = {}_{m}p_x v^m \cdot \bar{a}_{x+m}$$

Z powyższego

$${}_{25|20}\bar{a}_{40} = \frac{99040}{50000} = 1.9808$$

Wzór Taylora dla funkcji 2 zmiennych:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + \dots$$

Mamy:

$${}_{25+\frac{1}{12}|20}\bar{a}_{40+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}} = {}_{25|20}\bar{a}_{40} + \frac{1}{12}\frac{\partial_{m|n}\bar{a}_x}{\partial m} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}\frac{\partial_{m|n}\bar{a}_x}{\partial x}$$

mamy

$$\frac{\partial}{m}({}_{m|n}\bar{a}_x) = \frac{\partial}{m}(\bar{a}_{x:\overline{m+n|}} - \bar{a}_{x:\overline{m|}}) = \underbrace{v^{m+n} {}_{m+n}p_x}_{=A_{x:\overline{m+n|}}^{\ \ 1}} - \underbrace{v^m {}_m p_x}_{=A_{x:\overline{m|}}^{\ \ 1}} = -0.191513$$

gdzie $v = e^{-\delta}$ *Ze wzoru:*

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}_{x:\overline{n}|}) = (\mu_x + \delta)\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1})$$

mamy:

$$\frac{\partial}{\partial x}({}_{m|n}\bar{a}_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}_{x:\overline{m+n}|} - \bar{a}_{x:\overline{m}|})$$

gdzie

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}_{x:\overline{m+n}|})(40;45) = (\mu_{40} + \delta)\bar{a}_{40:\overline{45}|} - \left(1 - A_{40:\overline{45}|}^{\ \ 1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}_{x:\overline{m}|})(40;25) = (\mu_{40} + \delta)\bar{a}_{40:\overline{25}|} - \left(1 - A_{40:\overline{25}|}^{\ \ 1}\right)$$

Po dokonaniu obliczeń wychodzi, że

$${}_{25+\frac{1}{12}|20}\bar{a}_{40+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}} = 1.96274$$

$$JSN = 50000 \cdot 1.96274 = 98136.9804$$

$$ODP = 99040 - 98136.9804 = 903.0195994$$

Nie ma takiej odpowiedzi w egzaminach, ale było przeliczane niezależnie z podobnym wynikiem. Prawdopodobnie błąd w odpowiedziach.

Zadanie 19.4 Rozważamy ciągły typ ubezpieczenia z jednorazową składką netto dla osoby z populacji o wykładniczym rozkładzie trwania życia z parametrem $\mu = 0.02$. Na osobę 60-letnią wystawiono ubezpieczenie na dożycie do wieku 80 lat z sumą ubezpieczenia 100 000 zł. W dowolnym momencie $t < 20$ ubezpieczony ma prawo zmienić warunki ubezpieczenia w taki sposób, że jego świadczenie za dożycie zostanie zredukowane do 60 000 zł, a od momentu t rozpoczną się ze stałą intensywnośćią $r(t)$ wypłaty z renty życiowej do wieku 80 lat.
Podaj roczną intensywność wypłat z renty, jeżeli zmiana warunków ubezpieczenia dokonana zostanie w wieku 75 lat. Oprocentowanie techniczne $\delta = 0.03$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 19.4 Wykładniczy rozkład śmiertelności *Przypuśćmy, że* T_x *ma rozkład wykładniczy z gęstością* $\mu e^{-\mu t}$. *Wtedy*

$${}_tp_x = e^{-\mu t}$$

$$\mu_{[x]+t} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

Mamy:

$$JSN = 100000 \cdot A_{60:\overline{20}|}^{\ \ 1}$$

Przy uwzględnieniu opcji zmiany warunków w wieku 75 lat:

$$JSN = 60000 \cdot A_{60:\overline{20}|}^{\ \ 1} + r(75) \cdot e^{-0.03 \cdot 15} \cdot {}_{15}p_{60} \cdot \bar{a}_{75:\overline{5}|}$$

$$A_{60:\overline{20|}}^{\;\;1} = e^{-0.03 \cdot 20} \cdot e^{-0.02 \cdot 20} = e^{-0.05 \cdot 20} = 0.36788$$

Stąd

$$JSN = 36787.9441$$

Mamy:

$$e^{-0.03 \cdot 15}\,{}_{15}p_{60} \cdot \bar{a}_{75:\overline{5|}} = e^{-0.05 \cdot 15} \cdot \int_0^5 e^{-0.05 \cdot t} dt = 2.08974$$

$$r(75) = \frac{JSN - 60000 \cdot A_{60:\overline{20|}}^{\;\;1}}{2.08974} = 7041.6148 \approx 7042$$

Zadanie 19.5 rozważamy polise ciągłą wypłacającą 1 w chwili śmierci, wystawioną na (30) wylosowanemu z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_m = 80$. Niech Z_m oznacza wartość obecną świadczenia na moment wystawienia polisy. Podobnie, rozwazamy polisę ciągłą wypłacającą 1 w chwili śmierci, wystawioną (25) wylosowanej z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_k = 100$. Niech Z_k oznacza wartość obecną świadczenia na moment wystawienia polisy. Załóżmy dodatkowo, że obie polisy wystawiono jednoczesnie oraz, że ich życia są niezależne.
Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.05$
Oblicz

$$Pr\left(\frac{Z_m}{Z_k} \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)\right)$$

Rozwiązanie 19.5 *Z de Moivre'a wiemy, że:*

$$f(T_m) = \frac{1}{50}$$

$$f(T_k) = \frac{1}{75}$$

Z treści:

$$Z_m = e^{-\delta T_m}$$

$$Z_k = e^{-\delta T_k}$$

$$\frac{Z_m}{Z_k} = e^{-\delta(T_m - T_k}$$

Szukamy

$$Pr\left(\frac{1}{2} < e^{-\delta(T_m - T_k)} < 2\right) =?$$

Po pierwsze mamy:

$$e^{-\delta(T_m - T_k)} < 2$$

stąd

$$T_m > T_k - 25 \ln(2)$$

nanosimy na rysunek pomocniczy.

Po drugie mamy:
$$e^{-\delta(T_m - T_k)} > \frac{1}{2}$$
stąd
$$T_m < T_k + 25\ln(2)$$
nanosimy na rysunek pomocniczy. Korzystając z rysunku pomocnicznego dostajemy:
$$\frac{533.708 + 1250 + 383.5666}{50 \cdot 75} = 0.578$$
$$ODP = 1 - 0.578 = 0.422$$

Zadanie 19.6 Rozważmy ciągły kontrakt ogólnego typu, dotyczący (x) wylosowanego z populacji Weibulla $\mu_x = 0.0001x$ dla $x > 0$. O funkcji $c(t)$ zakładamy, że jest ciągła; natomiast $\pi(t) \equiv 1.23$ dla $t > 0$. Kontrakt bezterminowy, ale jego parametry są tak dobrane, że
$$\delta V(t) = 1.25(c(t) - V(t))\mu_{x+t}$$
dla $t \in [0; 30]$. Oblicz $V(20)$. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.05$. Podaj najbliższą odpowiedź.

Rozwiązanie 19.6 Równanie Thielego
$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = \bar{\pi}(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})_t\bar{V} - b(t)\mu_{[x]+t}$$
stąd
$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = \pi(t) + \delta V(t) - \underbrace{(c(t) - V(t))\mu_{x+t}}_{\frac{1.25}{\delta}V(t)}$$
czyli
$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = 1.23 + 0.2\delta V(t) = 1.23 + 0.01V(t)$$
Niech $f(V) = 1.23 + 0.01V(t)$ *wtedy*
$$\frac{1}{1.23 + 0.01V(t)}dV = dt$$
całkujemy i mamy
$$\frac{\ln(1.23 + 0.01V(t))}{0.01} = t + c$$
$$1.23 + 0.01V(t) = e^{0.01t} \cdot c$$
$$V(t) = \frac{e^{0.01t} \cdot c - 1.23}{0.01}$$

Z warunku początkowego $V(0) = 0$ mamy, ze $c = 1.23$ wtedy:

$$V(t) = \frac{e^{0.01t} \cdot 1.23 - 1.23}{0.01}$$

$$V(20) = 27.2325 \approx 27.23$$

Zadanie 19.7 Rozważamy dyskretny typ 30-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł. Składka jest płatna przez cały okres ubezpieczenia i wynosi 4 789 zł rocznie w ujęciu brutto, w tym 2 594 zł to składka netto. Oprócz stałych kosztów inkasa składki ubezpieczyciel poniósł jednorazowe koszty akwizycji oraz ponosi przez cały okres ważności ubezpieczenia stałe koszty administracyjne (na początku każdego roku). W pierwszym roku wydatki akwizacyjne oraz administracyjne wyniosły 5 150 zł.
Wiadomo, że po 15 latach ubezpieczenia rezerwa brutto osiągnęła poziom 37 983 zł, a rezerwa netto 39 993 zł. Przyjmując oprocentowanie techniczne $i = 3\%$, wyznacz wysokość kosztów inkasa składki (w punktach procentowych skladki brutto)

Rozwiązanie 19.7 *Ogólnie mamy:*

$$P^{br} = P + P^{\alpha} + P^{\beta} + P^{\gamma}$$

Składka brutto dla ubepieczenia na życie i dożycie spełnia na mocy przyjętej konwencji następujące równanie:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \cdot P^{br}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta \cdot P^{br}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$P^{br}_{x:\overline{n}|} = \underbrace{P_{x:\overline{n}|}}_{P} + \underbrace{\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}}_{P^{\alpha}} + \underbrace{\beta \cdot P^{br}_{x:\overline{n}|}}_{P^{\beta}} + \underbrace{\gamma}_{P^{\gamma}}$$

Rezerwy

$${}_kV^{br} = {}_kV + {}_kV^{\alpha} + {}_kV^{\gamma}$$

gdzie α - koszty akwizycji, β - koszty pobierania składki, γ - koszty administracyjne

Rezerwa brutto dla ubezpieczenia na życie i dożycie. Akwizycyjny składnik rezerwy ma postać:

$${}_kV^{\alpha}_{x:\overline{n}|} = -P^{\alpha} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} = -\alpha\frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = -\alpha(1 - {}_kV_{x:\overline{n}|})$$

natomiast dla $k = 1, 2, \ldots, n$ mamy

$${}_kV^{\gamma} \equiv 0$$

Ostatecznie więc:

$${}_kV^{br}_{x:\overline{n}|} = (1 + \alpha){}_kV_{x:\overline{n}|} - \alpha$$

Z treści zadania:

$$\alpha + \gamma = 5150$$
$$P^{br} = P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} + \gamma$$
$$P = 100000 \cdot \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = 100000 \cdot \frac{1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = 2594 \to \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \approx 18.16$$
$${}_kV^{br} = {}_kV + {}_kV^{\alpha} + \underbrace{{}_kV^{\gamma}}_{=0}$$

z wzoru:

$${}_kV^{br}_{x:\overline{n|}} = (1+\alpha){}_kV_{x:\overline{n|}} - \alpha$$

mamy (uwaga! wzory zostały wyznaczone dla przypadku gdy suma ubezpieczenia wynosi 1, w dalszym etapie należy wykonać poprawkę) po 15 latach:

$$37983 = (1+\alpha')39993 - \alpha' \to \alpha' = 0.03349609212$$

$$\alpha = 100000 \cdot \alpha' = 3349.609212$$

Z faktu, że

$$\alpha + \gamma = 5150 \to \gamma = 5150 - 3349.6092 = 1800.3908$$

Szukamy kosztów inkasa składki czyli β

$$P^{br}_{x:\overline{n|}} = \underbrace{P_{x:\overline{n|}}}_{P} + \underbrace{\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}}_{P^{\alpha}} + \underbrace{\beta \cdot P^{br}_{x:\overline{n|}}}_{P^{\beta}} + \underbrace{\gamma}_{P^{\gamma}}$$

mamy:

$$4789 = 2594 + \frac{3349.6092}{18.16} + \beta \cdot 4789 + 1800.3908$$

stąd

$$\beta = 0.04388 \approx 0.044$$

Zadanie 19.8 Rozważamy emeryturę małżeńską dla niej (x), wylosowanej z populcji wykładniczej z $\mu_x \equiv 0.02$. Po pierwsze, ubezpieczenie polega na tym, że przez najbliższe 35 lat (lub krócej) będą płacić składkę w formie renty życiowej ciągłej tylko wtedy, gdy żyją oboje. Niech $\bar{P}$ oznacza rozczną intensywność składki neeto. Po 35 latach zacznie być wypłacana emerytura, w formie renty życiowej ciągłej, która płaci z intensywnością 1 na rok, gdy żyje przynajmniej jedna osoba. Ponadto, w przypadku, gdy jedna z osób umrze w ciągu najbliższych 35 lat, druga owdowiała będzie pobierać rentę wdowią ciągłą z intensywnością 0.5 na rok, ale na pewno nie dłużej niż do końca pierwszych 35 lat (lub krócej w przypadku śmierci owdowiałej osoby).
Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.05$. Oblicz $\bar{P}$. Wskaż najbliższą odpowiedź.

Rozwiązanie 19.8 *Mamy:*

$$\bar{a}_{x:y:\overline{35|}} \cdot \bar{P} = {}_{35|}\bar{a}_{\overline{x+35:y+35}} + 0.5\left(\bar{a}_{y:\overline{35|}} - \bar{a}_{x:y:\overline{35|}}\right) + 0.5\left(\bar{a}_{x:\overline{35|}} - \bar{a}_{x:y:\overline{35|}}\right)$$

mamy

$$\bar{a}_{x:y:\overline{35|}} = \int_0^{35} {}_tp_x {}_tp_y e^{-\delta t} dt = \int_0^{35} e^{-0.08t} dt = 11.73987$$

$${}_{35|}\bar{a}_{\overline{x+35:y+35}} = \int_{35}^{\infty} \underbrace{{}_tp_{\overline{x+35:y+35}}}_{{}_tp_{x+35} + {}_tp_{y+35} - {}_tp_{x+35}\,{}_tp_{y+35}} \cdot e^{-\delta t} dt = 2.51358$$

bo np. $\int_{35}^{\infty} {}_tp_{x+35} e^{-\delta t} dt = \frac{e^{-(\mu+\delta)35}}{\delta+\mu} = 2.04094$

$$\bar{a}_{x:\overline{35|}} = 14.6257$$

$$\bar{a}_{y:\overline{35|}} = 13.0529$$

stąd

$$\bar{P} = 0.3929 \approx 0.39$$

Zadanie 19.9 Program aktywizacji zawodowej bezrobotnych trwa 7 lat i składa się z 3-letniego etapu szkolenia oraz 4 -letniego etapu wspierania uczestników w poszukiwaniu pracy. Przystępujący do programu są objęci ubezpieczeniem, które wypłaca świadczenie jedynie tym, którzy przeszli do drugiego etapu i tylko za zdarzenia w okresie trwania drugiego etapu. Ubezpieczenie wypłaca 100 000 zł w przypadku śmierci uczestnika lub 50 000 w przypadku znalezienia pracy. Świadczenie jest wypłacane w momencie zdarzenia u ważność ubezpieczenia wygasa.
W etapie szkolenia ubytki uczestników są wywołane śmiercią lub rezygnacją. Dane na temat ubytków w tej fazie pochodzą z tablic niezależnych ubytków. Intensywność śmiertelności wynosi $\mu^{(d_1)} = 0.01$ na rok, a średnia (centralna) stopa rezygnacji $m^{(w)} = 0.15$ rocznie. Rezygnacje mają jednostajny rozkład w ciągu roku. Dane na temat drugiego etapu uwzględniają wykluczanie się ubytków. Intensywność śmiertelności wynosi $\mu^{(d_2)} = 0.02$ rocznie, a intensywność znalezienia pracy $\mu^{(e)} = 0.20$ rocznie.
Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie dla intensywności oprocentowania $\delta = 0.05$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 19.9 *Mamy:*

$$JSN = e^{-0.05\cdot 3} \cdot {}_3p_x^{(d_1)} \cdot \left(p_x^{(w)}\right)^3 \cdot$$

$$\cdot\left(100000 \cdot \int_0^4 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(d_2)} e^{-0.05\cdot t} dt + 50000 \int_0^4 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(e)} e^{-0.05\cdot t} dt\right) = (*)$$

wiemy, że centralna stopa:

$$m^{(w)} = \frac{q_x^{(w)}}{1 - \frac{q_x^{(w)}}{2}} = 0.15 \rightarrow q_x^{(w)} = 0.13953$$

gdzie $\left(p_x^{(w)}\right)^3$ *- prawdopodobieństwo, że nie zrezygnował w ciągu 3 lat.*

$$(*) = e^{-0.05\cdot 3} \cdot e^{-0.01\cdot 3} \cdot (1 - q_x^{(w)})^3 \cdot$$

$$\cdot \left(100000 \int_0^4 e^{-0.22t} \cdot 0.02 \cdot e^{-0.05t} dt + 50000 \int_0^4 e^{-0.22t} 0.2 \cdot e^{-0.05t} dt\right) =$$

$$= 15619,0382 \approx 15620$$

Zadanie 19.10 Otwarty plan emerytalny oferuje osobom, które przechodzą na emeryturę, natychmiastowe świadczenie emerytalne wypłacane dożytownio w formie renty ciągłej. Umowa z zakładem emerytalnym gwarantuje, że w przypadku śmierci wypłaty będą trwać tak długo, aż przekroczą połowę wpłaconego kapitału. Wyznacz długość okresu gwarancyjnego (w latach), jeśli ubezpieczeni mają 67 lat i pochodzą z populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem 92 lata. Techniczne oprocentowanie wynosi $\delta = 0.02$. Wskaż najbliższą wartość.

Rozwiązanie 19.10 *Niech P oznacza intensywność emerytury. Mamy:*

$$P \cdot n = \frac{1}{2} K \rightarrow K = 2P \cdot n$$

dalej

$$K = \underbrace{\int_0^n P e^{-\delta t} dt}_{gwarantowane} + e^{-\delta n} {}_n p_x \int_0^{\omega - x - n} P \cdot {}_t p_{x+n} e^{-\delta t}$$

Można rozpisać i podstawiać odpowiedzi, co daje

$$n = 5.62$$