Ostatni raz wygenerowano: 13 czerwca 2023. Kontakt: thasiow(at)onet.pl

1 Egzamin z 15 grudnia 2008

Zadanie 1.1 Liczba szkód w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu równa jest:

$$N = M_1 + \ldots + M_K$$

gdzie:

- $K, M_1, M_2, M_3, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, zaś $M_1, M_2, M_3, \ldots$ mają identyczny rozkład prawdopodobieństwa
- K oznacza liczbę wypadków, i ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ,
- M_i jest liczbą szkód z i-tego wypadku, i ma rozkład określony na liczbach naturalnych (bez zera).

O rozkładzie liczby szkód z jednego wypadku wiemy, że:

$$Pr(M_1 = 1) = p, \qquad Pr(M_1 > 1) = 1 - p$$

Prawdopodobieństwo warunkowe iż w danym roku doszło jedynie do jednego wypadku pod warunkiem, iż wystąpiła więcej niż jedna szkoda:

$$Pr(K = 1|N > 1)$$

przy założeniach liczbowych $\lambda = \frac{1}{5}$, $p = \frac{4}{5}$ wynosi z dobrym przybliżeniem: ?

Rozwiązanie 1.1 ***Rozkład Poissona***

$$P(K = k) = f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

Prawdopodbieństwo warunkowe:

$$Pr(K = 1|N > 1) = \frac{Pr(K = 1 \wedge N > 1)}{Pr(N > 1)}$$

Prawdopodobieństwo $P(N > 1)$ to suma dwóch przypadków: zdarzył się jeden wypadek z którego jest więcej niż jedna szkoda, czyli $Pr(K = 1 \wedge M_1 > 1)$ oraz prawdopodobieństwa, że zdarzył się więcej niż jeden wypadek (wtedy N automatycznie większe od 1), czyli $Pr(K > 2)$. Mamy:

$$Pr(N > 1) = Pr(K = 1 \wedge M_1 > 1) + \underbrace{Pr(K > 1)}_{1-Pr(K=0)-Pr(K=1)} =$$

$$= Pr(K = 1)Pr(M_1 > 1) + Pr(K > 1) =$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1} \cdot (1 - p) + (1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda} \cdot \lambda) =$$

$$= \frac{1}{5}e^{-1/5} \cdot \frac{1}{5} + \left(1 - e^{-1/5} - \frac{1}{5}e^{-1/5}\right) = 0.05027$$

$$Pr(K = 1 \wedge N > 1) = P(K = 1 \wedge M_1 > 1) = P(K = 1) \cdot P(M_1 > 1) = 0.03275$$

$$Pr(K = 1|N > 1) \approx 0.65$$

Zadanie 1.2 *O roozkładzie zmiennej losowej X wiemy, że:*

- $Pr(X \in [0, 10]) = 1$
- $E(X) = 2$
- $Pr(X < 2) \leqslant \frac{1}{2}$

Przy tych załozeniach o rozkładzie wariancja zmiennej X może przyjmować różne wartości. Kres górny zbioru tych wartości równy jest:?

Rozwiązanie 1.2 *Rysujemy rysunek pomocniczy z 0, 2 i 10 na osi. Wariancja to klasyczna miara zmienności. Intuicyjnie utożsamiana ze zróżnicowaniem zbiorowości; jest średnią arytmetyczną kwadratów odchyleń (różnic) poszczególnych wartości cechy od wartości oczekiwanej.*

Gdyby pominąć trzeci warunek, to można by pomyśleć o tym jak o rozkładzie dwupunktowym gdzie cześć prawdopodobieństwa idzie w 0, część 10 (wtedy wariancja byaby największa, części p-p muszą być takie, żeby $EX = 2$*). Przy takim założeniu* $P(X = 0) = 8/10$ *oraz* $P(X = 10) = 2/10$ *i* $EX = 2$*.*

Teraz musimy uwzględnić warunek trzeci czyli, że prawdopodobieństwo $Pr(X < 2) \leqslant 1/2$*. Zachowując powyższą logikę chcemy aby jak najwięcej prawdopodobieństwa było w* $X = 0$*, stąd ustalamy* $P(X = 0) = 1/2$*. Dodatkowo chcemy, żeby było jak najwięcej prawdopobieństwa w 10, ale nie możemy tam wrzucić 1/2 bo wartość oczekiwana byłaby wtedy 5. Dlatego musimy wrzucić możliwie najwięcej w 10 a potem możliwie najmniej w 2, tak aby wartość oczekiwana była 2 stąd:*

$$P(X = 2) \cdot 2 + P(X = 10) \cdot 10 = 2$$

$$P(X = 2) + P(X = 10) = 1/2$$

stąd

$$P(X = 2) = 3/8$$

$$P(X = 10) = 1/8$$

Czy to jest maksimum? Tak, bo gdybym miał dokonać przesunięcia prawdopodobieństwa pomiędzy 2 i 10 musiałbym zachować wartość oczekiwaną 4 pomiędzy *tymi dwoma (tak, żeby zachować $EX = 2$), a to oznacza powtórzenie początkowego rozumowania. Mamy:*

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 10^2 \cdot \frac{1}{8} - 2^2 = 14 - 4 = 10$$

Maksymalna wartość wariancji wynosi 10.

Zadanie 1.3 Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, \ldots, T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajscia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,..., N-tego (numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa, nie wynika więc z chronologii ich zgłaszania).

Załóżmy, że:

- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, \ldots$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, \ldots$ mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1 (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc)
- zmienna losowa N ma rozkład logarytmiczny dany wzorem:

  $$Pr(N = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \frac{c^k}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

  z parametrem $c \in (0, 1)$

Niech A oznacza zdarzenie, iż w ciągu pierwszych 2 miesięcy od zajścia wypadku zgłoszono dokładnie jedno roszczenie, a więc iż dokładnie jedna liczba ze zbioru liczb $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$, jest mniejsza lub równa 2. Prawdopodobieństwo tego, że więcej roszczen z tego wypadku już nie będzie, a więc:

$$Pr(N = 1|A) = ?$$

Rozwiązanie 1.3 *Mamy:*

$$Pr(N = 1|A) = \frac{Pr(N = 1 \wedge A)}{P(A)}$$

$P(A) = ?$. *Policzmy prawdopobieństwa dla poszczególnych T_i*

$$Pr(T_i < 2) = \int_0^2 e^{-x} dx = 1 - e^{-2}$$

$$Pr(T_i > 2) = e^{-2}$$

Przypominamy, że dla rozkładów ciągłych p-p, że $T_i = 2$ równe zero. Teraz prawdopodobieństwo, że dokładnie jedno $T_i < 2$ wynosi:

$$N(1-e^{-2})e^{-2(N-1)}$$

biorąc pod uwagę, że to p-p jest równe powyższej wartości przy ustalonym N (z rozkładu logarytmicznego), musimy skorzystać z prawdopobieństwa całkowitego:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A|N=k)P(N=k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-e^{-2})e^{-2(k-1)} \frac{1}{-\ln(1-c)} \frac{c^k}{k} = \frac{(1-e^{-2})e^2}{-\ln(1-c)} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}(e^{-2}c)^k}_{=\frac{e^{-2}c}{1-e^{-2}c}}$$

Szereg w powyższym równaniu to zwykły szereg geometryczny. Licznik prawdopobieństwa warunkowego:

$$P(A \wedge N=1) = P(A|N=1) \cdot P(N=1) = \frac{c}{-\ln(1-c)}(1-e^{-2})$$

Odpowiedź:

$$P(N=1|A) = 1 - ce^{-2}$$

Zadanie 1.4 Niech θ będzie dodatnią liczbą rzeczywistą. Rozważmy parę zmiennych losowych T_θ i D, oznaczających odpowiednio:

- T_θ - moment czasu, w którym zaszła szkoda,
- D - czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do jej likwidacji.

Jednostką pomiaru czasu jest jeden rok. Załóżmy, ze T_θ oraz D są niezależne, przy czym:

- T_θ ma rozkład jednostajmy na odcinku $(0, \theta)$
- D ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej jeden.

Sumę $(T_\theta + D)$ interpretujemy jako moment czasu, w którym zlikwidowano szkodę.

Warunkową wartość oczekiwaną $E(D|T_\theta + D.\theta)$ interpretujemy jako oczekiwany odstęp w czasie pomiędzy momentem zajścia a momentem likwidacji szkody, pod warunkiem iż szkoda, do której doszło na odcinku czasu $(0, \theta)$, do końca tego odcinka czasu zachowała status szkody niezlikwidowanej. Granica:

$$\lim_{\theta \to \infty} E(D|T_\theta + D > \theta)$$

wynosi:?.

Rozwiązanie 1.4 *Wykonujemy rysunek pomocniczy dla $T_\theta + D > \theta$.*

Rozkład jednostajny ciągły na przedziale $[a, b]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$VAR(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Rozkład wykładniczy

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}$$

$$E(X) = \frac{1}{\beta}$$

$$VAR(X) = \frac{1}{\beta^2}$$

W klasycznym przypadku warunkowa wartość oczekiwana:

$$E(X|A) = \frac{1}{P(A)} \int\limits_A X(\omega) dP$$

Rozpisana:

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}$$

W naszym przypadku musimy użyć całki podwojnej bo mamy obszar. I tak mianownik:

$$Pr(T_\theta + D > \theta) = \int_0^\theta \int_{\theta - T}^{\infty} \frac{1}{\theta} \cdot e^{-D} \cdot dD \cdot dT =$$

$$= \int_0^\theta \frac{1}{\theta} e^{-\theta} e^T dT = \frac{1 - e^{-\theta}}{\theta}$$

Licznik:

$$\int_0^\theta \int_{\theta - T}^{\infty} D \cdot \frac{1}{\theta} e^{-D} dD dT = \frac{1}{\theta} \left[(1 + \theta)(1 - e^{-\theta}) - (\theta - 1 + e^{-\theta}) \right]$$

Stąd

$$E(D|T_\theta + D > \theta) = \frac{(1 + \theta)(1 - e^{-\theta}) - (\theta - 1 + e^{-\theta})}{1 - e^{-\theta}}$$

$$\lim_{\theta \to \infty} \frac{(1 + \theta)(1 - e^{-\theta}) - (\theta - 1 + e^{-\theta})}{1 - e^{-\theta}} = 2$$

2 Egzamin z 15 marca 2010

Zadanie 2.1 Liczba szkod N z pojedycznej umowy w pewnym ubezpieczeniu jest zmienną losową o rozkładzie danym wzorem:

$$Pr(N = 0) = p$$

$$Pr(N = k) = \frac{(1-p) \cdot \lambda^k}{(e^\lambda - 1) \cdot k!}$$

dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ z nieznanymi parametrami $p \in [0, 1]$, $\lambda > 0$. Mamy próbkę $N_1, N_2, \ldots, N_{1000}$ obserwacji z 1000 takich umów ubezpieczeniowych. Zakładamy niezależność tych obserwacji.

Niech $(\hat{p}, \hat{\lambda})$ oznaczają estymatory parametrów (p, λ) uzyskane metodą największej wiarygodności. Jeśli wiadomo, że w próbce zaobserwowaliśmy łącznie 463 szkody, przy czym wszystkie te szkody powstały z 400 umów (pozostałe 600 okazało się bezszkodowe), to wartość estymatora λ z dobrym przybliżeniem wynosi:

Rozwiązanie 2.1 *Funkcja wiarygodności przedstawia się następująco:*

$$L = \prod_{i=1}^{600} p \cdot \prod_{i=1}^{400} \frac{(1-p) \cdot \lambda^k}{(e^\lambda - 1) \cdot k!} =$$

$$= p^{600} \frac{(1-p)^{400} \lambda^{\sum_{i=1}^{400} k_i}}{(e^\lambda - 1)^{400} \prod k!}$$

Logarytm funkcji wiarygodności:

$$\ln L = 600 \ln p + 400 \ln(1-p) + \underbrace{\sum_{i=1}^{400} k_i}_{=463} \cdot \ln \lambda - 400 \ln(e^- \lambda - 1) + \ln \prod k!$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 463 \cdot \frac{1}{\lambda} - 400 \frac{1}{e^\lambda - 1} \cdot e^\lambda = 0$$

$$\hat{\lambda} = 0.3$$

Zadanie 2.2 Rozważmy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne, przy czym:

- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem o intensywności λ,
- wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej rownej 1
- $c = (1+\theta)\cdot\lambda\cdot E(Y_1), \qquad \theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa

$$L := \sup_{t>0}\{u - U(t)\}$$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym

$$L = l_1 + l_2 + \ldots + l_N$$

($L = 0$ gdy $N = 0$),
gdzie składnik l_1 jest zmienną określoną w przypadku, gdy nadwyżka spadnie poniżej u, i równy jest wtedy:

$$l_1 = u - U(t)$$

, gdzie t_1 jest tym momentem czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Warunkowa wartość oczekiwana liczby takich spadków, pod warunkiem, że nastąpiła ruina:

$$E(N|L > u) =?$$

Dana jest wzorem: ?.

Rozwiązanie 2.2 ***Bardzo ważny typ zadania. Wzory: patrz Otto rozdział 9.6 strona 234.***

Wzory

Klasyczny model procesu nadwyżki:

$$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$$

Prawdopodobieństwo ruiny:

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(t)}|T < \infty)}$$

gdzie T - moment ruiny, R - współczynnik dopasowania. R to dodatnie rozwiązanie równania:

$$M_W(r) = e^{cr}$$

czyli

$$E(e^{rW}) = e^{cr}$$

gdzie W można traktować jako wysokość pojedycznej szkody.

Wykładniczy rozkład wartości przyszłej szkody:

$$f(y) = \beta \cdot e^{-\beta y}$$

jeżeli intensywność składki jest równa

$$c = \frac{\lambda(1+\theta)}{\beta}$$

to przy wykładiczym rozkładzie wysokości szkód oraz procesie $N(t)$ (liczby szkód) będącym procesem Poissona mamy:

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{1+\theta}$$

$$R = \frac{\beta\theta}{1+\theta}$$

Ogólny wzór na prawdopodobieństwo, że dojdzie do ruiny, a głębokość będzie większa równa h:

$$G(0,h) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{E((Y-h)_+)}{E(Y)}$$

Rozwiązanie:

Co obliczyć? $E(N|L > u)$, czyli wartość oczekiwaną liczby spadków w procesach gdzie doszło do ruiny. Patrz rysunek z załącznika.

Jak podejść do zadania? Najlepiej rozdzielić na dwie części:

1. Oczekiwana liczba spadków razem z momentem ruiny

2. Oczekiwana liczba spadków po momencie ruiny.

Zaczynamy od części 2. To jest to samo co liczba spadków w ogóle tylko trzeba zrozumieć, że proces startuje w innym momencie (głębokość nas nie interesuje). Wobec tego jakie jest prawdopodobieństwo spadku?

To jest prawdopobieństwo ruiny przy przy zerowym kapitale początkowym

Ze wzorów:

$$R = \frac{\theta}{1+\theta}$$

$$\Psi(u) = \frac{e^{-R\cdot u}}{1+\theta} = \frac{e^{-\frac{\theta u}{1+\theta}}}{1+\theta}$$

$$\Psi(0) = \frac{e^{-R\cdot 0}}{1+\theta} = \frac{1}{1+\theta}$$

co ciekawe powyższe zachodzi przy każdym rozkładzie, nie tylko wykładniczym (Patrz otto strona 239).

*Jakie jest prawdopobieństwo, że dojdzie do 1 spadku? P-p, że doszło do 1 spadku * p-p że nie doszło do spadku.*

$$\frac{1}{1+\theta} \cdot (1 - \frac{1}{1+\theta}) =$$

Wytłumaczenie: po spadku jestem na 'nowym' poziomie zero, więc od tego momentu określam prawdopobieństwo, że nigdy nie doszło do ruiny (od nowego poziomu zero).

$$= \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta}{1+\theta}$$

Prawdopobieństwo, że będą dokładnie dwa spadki:

$$\frac{1}{1+\theta}\frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{\theta}{1+\theta}$$

Prawdopobieństwo, że będzie n-spadków:

$$\frac{1}{(1+\theta)^n} \cdot \frac{\theta}{1+\theta}$$

Wartość oczekiwana liczby spadków po ruinie (dygresja: po zmianie oznaczeń można traktować jako rozkład geometryczny):

$$\int_0^\infty n\frac{1}{(1+\theta)^n} \cdot \frac{\theta}{(1+\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p^n(1-p) =$$

$$= (1-p)\sum_{n=0}^{\infty} np^n = (1-p)\frac{p}{(1-p)^2} = \frac{1}{\theta}$$

Dla przypomnienia:

$$I_0(v) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n = \frac{1}{1-v}$$

$$I_1(v) = \sum_{n=1}^{\infty} nv^n = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$I_2(v) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2v^n = \frac{v(v+1)}{(1-v)^3}$$

Liczba spadków ma rozkład gemetryczny. W szczególności, gdyby nie było żadnych warunków mielibyśmy oczekiwaną liczbę spadków równą

$$\frac{1}{\theta}$$

Rozważmy dwie firmy A i B mające takie same procesy nadwyżki, gdy nic nie wiemy o ruinie to oczekiwana liczba spadków wynosi:

$$\frac{1}{\theta}$$

dla kazdej firmy.
Natomiast gdy wiemy, że do ruiny doszło to tak jakbyśmy wykluczyli z procesu wszystkie ścieżki bez ruiny (które zaniżają oczekiwaną wartość liczby spadków). Stąd wniosek, że $1/\theta$ to za mało. θ mówi o tym, o ile wyższa jest składka od średniej wartości szkody. Im wyższa θ to mniej spadków (co widzimy w wartości oczekiwanej $1/\theta$)

Ruina zależy również od u (im więcej mam na początku, tym do większej liczby szkód może dojść do momentu ruiny). Liczba spadków pod warunkiem, że doszło do ruiny będzie tym większa im większy był kapitał początkowy.

Widzę, że moja wartość oczekiwana jest zbyt mała więc muszę doliczyć jeszcze spadki do spowodowania ruiny (pod warunkiem, że do niej doszło). Teraz wchodzi w grę głębokość spadków bo ruina zależy od u. Korzystam ze wzoru na prawdopodobieństwo, że dojdzie do ruiny, a głębokość będzie większa równa h:

$$G(0,h) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{E((Y-h)_+)}{E(Y)}$$

W naszym przykładzie:

$$\frac{E((Y-h)_+)}{EY} = \frac{\int_0^h 0\beta e^{-\beta t}dt + \int_h^\infty (t-h)\beta e^{-\beta t}dt}{1/\beta} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty t\beta e^{-\beta(t+h)}dt}{1/\beta} = \frac{e^{-\beta h}\int_0^\infty t\beta e^{-\beta t}dt}{1/\beta} =$$

$$= \frac{e^{-\beta h}\cdot 1/\beta}{1/\beta} = e^{-\beta h}$$

W zadaniu wartość oczekiwana rozkładu to 1, stąd rozkład głębokości spadku (pod warunkiem, że do niego doszło):

$$f(h) = 1 \cdot e^{-h\cdot 1}$$

Więc gdybym wiedział, że doszło 1 spadku to ma on rozkład e^{-h}, gdybym widział, że doszło do N spadków miałbym

$$h_1 + \ldots + h_N \sim G(N,1)$$

funkcja gęstości rozkładu gamma:

$$f(h) = \frac{h^{N-1}}{\Gamma(N)}e^{-h}$$

Policzmy prawdopodobieństwo, że ta suma przekroczy pewną wartość u

$$P(H > u) = \int_u^\infty \frac{h^{N-1}}{(N-1)!e^{-h}} dh =$$

$$= \frac{u^{N-1}e^{-u}}{(N-1)!} + \frac{u^{N-2}e^{-u}}{(N-2)!} + \ldots + \frac{ue^{-u}}{1} + e^{-u}$$

wiemy, że prawdopodobieństwo, że w dokładnie jednym spadku osiągniemy (lub przekroczymy u) jest równe:

$$P(h > u) = \int_u^\infty e^{-h} dh = e^{-u}$$

dla sumy dwóch zmiennych losowych $h_1 + h_2$ mielibyśmy zmienną o rozkładzie $G(2,1)$ i wtedy:

$$P(h' > u) = \int_u^\infty xe^{-x} dx = ue^{-u} + e^{-u}$$

skoro e^{-u} to prawdopodobieństwo, że dokładnie w 1 spadku, to ue^{-u} jest prawdopodobieństwem, że dokładnie w drugim spadku. Stąd elementy $P(H > u)$ to prawdopodobieństwa, że do ruiny dojdzie za dokładnie i-tym razem, $i = 1, \ldots, N$

Wobec tego wartość oczekiwana liczby spadków do momentu ruiny (wraz ze spadkiem powodującym ruinę):

$$E(N|h_1 + \ldots + h_n > u) = \frac{E_1}{\textit{prawdopodobieństwo, że do ruiny doszło}}$$

$$E_1 = 1 \cdot Pr(N = 1 \wedge h_1 > u) + 2 \cdot Pr(N = 2 \wedge h_1 < u \wedge h_1 + h_2 > u) + \ldots =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1+\theta} e^{-u} + 2 \frac{1}{(1+\theta)^2} \frac{ue^{-u}}{1} + \ldots + N \frac{1}{(1+\theta)^N} \cdot \frac{u^{N-1}e^{-u}}{(N-1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{(1+\theta)^n} \frac{u^{n-1}e^{-u}}{(n-1)!} = (*)$$

Widzimy analogię do rozkładu Poissona

Rozkład Poissona

$$f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$(*) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{1}{(1+\theta)^{k+1}} \frac{u^k e^{-u}}{k!} =$$

$$= \frac{1}{1+\theta} e^{-u} \cdot e^{\frac{u}{1+\theta}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{(\frac{u}{1+\theta})^k e^{-\frac{u}{1+\theta}}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{u}{1+\theta})^k e^{-\frac{u}{1+\theta}}}{k!} \right) =$$

W powyższym $\lambda' = \frac{u}{1+\theta}$, czyli mamy wartość oczekiwaną i gęstość:

$$= \frac{e^{\frac{-u\theta}{1+\theta}}}{1+\theta} \left(\frac{u}{1+\theta} + 1 \right)$$

Czyli mamy wartość oczekiwaną po momencie ruiny+wartość oczekiwaną do momentu ruiny

$$E = \frac{1}{\theta} + \frac{E_1}{\Psi(u)} =$$

Dla przypomnienia (wyprowadzone wyżej):

$$\Psi(u) = \frac{e^{-R \cdot u}}{1+\theta} = \frac{e^{-\frac{\theta u}{1+\theta}}}{1+\theta}$$

$$= \frac{1}{\theta} + \frac{\frac{e^{\frac{-u\theta}{1+\theta}}}{1+\theta} \left(\frac{u}{1+\theta} + 1 \right)}{\frac{e^{-\frac{\theta u}{1+\theta}}}{1+\theta}} = \frac{u}{1+\theta} + \frac{1+\theta}{\theta}$$

Zadanie 2.3 Liczby szkód $N_1, \ldots, N_t, N_{t+1}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $\Lambda = \lambda$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej λ. Niech $N = N_1 + \ldots + N_t$. Parametr ryzka Λ jest zmienną losową o rozkładzie gamma o gęstości:

$$f_\Lambda(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

gdzie $\alpha, \beta > 0$. Jeśli przyjmiemy wartości parametrów $\alpha = 2, \beta = 10, t = 10$, wtedy warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła nierówność:

$$Var(N_{t+1} | N_1, \ldots, N_t) > Var(N_{t+1})$$

jest postaci: $N >?$

Rozwiązanie 2.3 *Analogiczne zadanie do zadania z 23 marca 2015.*

Rozkład Poissona

$$f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$
$$E(X) = \lambda$$
$$Var(X) = \lambda$$

Jeżeli $X \sim P(\lambda)$ i $Y \sim P(\mu)$ to $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$

Rozklad Gamma

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \qquad x > 0$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

W zadaniu mamy: $t = 10$*, więc* $N_1, \ldots, N_{11}$ *oraz*

$$f_\Lambda(x) = \frac{10^2}{\Gamma(2)} x \cdot e^{-10x} = 100xe^{-10x}$$

Rozpatrujemy warunek

$$Var(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10}) > Var(N_{11})$$

czyli

$$E(N_{11}^2|N_1, \ldots, N_{10}) - E(N_{t+1}|N_1, \ldots, N_t)^2 > \underbrace{Var(N_{11})}_{=?}$$

$$Var(N_{11}) = E(N_{11}^2) - E(N_{11})^2 = E(E(N_{11}^2|\Lambda = \lambda)) - E(E(N_{11}|\Lambda = \lambda))^2 = (*)$$

bo

$$E(N_{11}) = E(E(N_{11}|\Lambda = \lambda))$$

$$(*) = E(Var(N_{11}|\Lambda = \lambda) + E(N_{11}^2|\Lambda = \lambda)) - E(E(N_{11}|\Lambda = \lambda))^2 =$$
$$= E(Var(N_{11}|\Lambda = \lambda)) + Var(E(N_{11}|\Lambda = \lambda)) =$$
$$= E(\lambda) + Var(\lambda) = (*)$$

tutaj doszliśmy po drodze do często używanego wzoru (tzw. Law of total variance):

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{H})) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(X \mid \mathcal{H}))$$

wartość oczekiwana z λ

$$E(\lambda) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

wariancja z λ

$$Var(\lambda) = \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{2}{100}$$

Czyli mamy:

$$E(N_{11}^2|N_1, \ldots, N_{10}) - E(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10})^2 > 0.22$$

Dlaczego $E(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10})$ *jest warunkowe? Bo* $N_1, \ldots, N_{10}$ *wskazuje na wartość* λ*. Możemy zapisać*

$$E(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10}) = E(N_{11}|N)$$

bo suma uchwyci wszystko. W tym wypadku to będzie liczba szkód do momentu $t = 10$*. Dalej*

$$E(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10}) = E(N_{11}|N) = E(E(N_{11}|N)|\Lambda = \lambda) =$$

$$= E(\underbrace{E(N_{11}|\Lambda = \lambda)}_{=\lambda}|N) = E(\lambda|N)$$

Skoro mamy $E(\lambda|N)$ to potrzebujemy 'gęstość' $f(\lambda|N)$

$$f(\lambda|N) = \frac{f(\lambda, N)}{\int_0^\infty f(\lambda, n)d\lambda}$$

suma $N_1 + \ldots + N_{10}$ ma rozkład Poissona z parametrem 10λ.

$$f(\lambda, N) = Pr(N_1 + \ldots + N_{10} = N \wedge \Lambda = \lambda) =$$

$$= \frac{(10\lambda)^N e^{-\lambda}}{N!} \cdot \frac{10^2}{\Gamma(2)}\lambda e^{-10\lambda} = 100\frac{10^N}{N!}\lambda^{N+1}e^{-20\lambda}$$

$$\int_0^\infty 100\frac{10^N}{N!}\lambda^{N+1}e^{-20\lambda}d\lambda = 100\frac{10^N}{N!}\int_0^\infty \lambda^{N+1}e^{-20\lambda}d\lambda = (*)$$

Z własności rozkładu Gamma, dla którego $\alpha - 1 = N + 1 \rightarrow \alpha = N + 2$ oraz $\beta = 20$ i całkowania gęstości do jedynki:

$$\frac{\Gamma(N+2)}{20^{N+2}} \cdot \underbrace{\int_0^\infty \lambda^{N+1}e^{-20\lambda} \cdot \frac{20^{N+2}}{\Gamma(N+2)}d\lambda}_{=1}$$

stąd

$$(*) = 100\frac{10^N}{N!} \cdot \frac{\Gamma(N+2)}{20^{N+2}}$$

Dalej

$$f(\lambda|N) = \frac{f(\lambda, N)}{\int_0^\infty f(\lambda, n)d\lambda} = \frac{100\frac{10^N}{N!}\lambda^{N+1}e^{-20\lambda}}{100\frac{10^N}{N!} \cdot \frac{\Gamma(N+2)}{20^{N+2}}} =$$

$$= \frac{\lambda^{N+1}e^{-20\lambda}}{\Gamma(N+2)}20^{N+2}$$

szukamy

$$E(\lambda|N) = \int_0^\infty \lambda \cdot \frac{\lambda^{N+1}e^{-20\lambda}}{\Gamma(N+2)}20^{N+2}d\lambda =$$

$$= \frac{20^{N+2}}{\Gamma(N+2)}\int_0^\infty \lambda^{N+2}e^{-20\lambda}d\lambda = (*)$$

analogicznie jak wyżej $\alpha - 1 = N + 2 \rightarrow \alpha = N + 3$, $\beta = 20$

$$(*) = \frac{20^{N+2}}{\Gamma(N+2)} \cdot \frac{\Gamma(N+3)}{20^{N+3}} = \frac{1}{20}\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(n+2)}{20}$$

Teraz

$$E(N_{11}^2|N) = E(E(N_{11}^2|\Lambda = \lambda)|N) = E(\lambda + \lambda^2|N) = E(\lambda|N) + E(\lambda^2|N)$$

$$E(\lambda^2|N) = \int_0^\infty \lambda^2 \cdot \frac{\lambda^{N+1}e^{-20\lambda}}{\Gamma(N+2)} 20^{N+2} d\lambda =$$

$$= \frac{20^{N+2}}{\Gamma(N+2)} \int_0^\infty \lambda^{N+3} e^{-20\lambda} d\lambda =$$

widzimy, że całka przypomina rozkład Gamma z $\alpha - 1 = N + 3 \to \alpha = N + 4$, $\beta = 20$

$$= \frac{20^{N+2}}{\Gamma(N+2)} \frac{\Gamma(N+4)}{20^{N+4}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{20^{N+4}}{\Gamma(N+4)} \lambda^{N+3} e^{-20\lambda} d\lambda}_{=1} =$$

$$\frac{20^{N+2}}{\Gamma(N+2)} \frac{\Gamma(N+4)}{20^{N+4}} = \frac{(n+2)(n+3)}{20^2}$$

Wracamy do naszej początkowej nierówności, zapisujemy ją jako:

$$E(N_{11}^2|N) - E(N_{11}|N)^2 > 0.22$$

$$E(\lambda|N) + E(\lambda^2|N) - E(\lambda|N)^2 > 0.22$$

$$\frac{n+2}{20} + \frac{(n+2)(n+3)}{20^2} - \frac{(n+2)^2}{20^2} > 0.22$$

Po przekształceniach

$$N > 2.19047619$$

czyli

$$N > 2$$

Zadanie 2.4 W pewnym systemie bonus-malus mamy 4 klasy ponumerowane liczbami 1,2,3,4, oraz odpowiadające im poziomy składki $\Pi, \frac{8}{9}\Pi, (\frac{8}{9})^2\Pi, (\frac{8}{9})^3\Pi$. Zasady ruchu pomiędzy klasami są następujące:

- Kierowca przesuwa się do klasy 1 po każdym roku, w którym zgłosił jedną lub więcej szkód.
- Po roku bez zgłoszeń szkód w klasie i kierowca przesuwa się do klasy o numerze $\min\{i+1, 4\}$

Niech liczby szkód zgłaszanych przez pewnego kierowcę w kolejnych latach będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi, że prawdopodobieństwo zgłoszenia zera szkód w ciągu roku wynosi 0.9. Wartość oczekiwana składki płaconej przez tego kierowcę w piątym roku ubezpieczenia równa jest:?

Rozwiązanie 2.4 *Zadanie zagadka logiczna.*

1. Szukamy p-p, że będzie w 1 klasie w 5 roku. Bez zależności w której był klasie p-p żeby trafił do klasy 1, to p-p, że zgłosił przynajmniej jedną szkodę czyli $P_1 = 0.1$

2. Prawdopodobieństwo, że będzie w drugiej klasie? to oznacza, że w 4 roku musiał zgłosić szkodę i trafił do pierwszej razy p-p, że w 5tym roku nie zgłosił szkody czyli

$$P_1 = 0.1 \cdot 0.9$$

3. Prawdopodbieństwo, że będzie w trzeciej klasie: czyli w trzecim roku musiał być w klasie 1 wszej, a potem nie zgłaszać szkód

$$P_3 = 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.9$$

4. Prawdopobieństwo, że był w czwartej klasie i został oraz p-p, że przeszedł z trzeciej. Można to przez różnicę obliczyć (1 odjąć p-p, że jest w pozostałych klasach)

$$P_4 = 1 - 0.1 - 0.1 \cdot 0.9 - 0.1 \cdot 0.9^2 = 0.729$$

Wartość oczekiwana:

$$EX = P_1 \cdot \Pi + P_2 \cdot 8/9\Pi + P_3 \cdot (8/9)^2\Pi + P_4 \cdot (8/9)^3\Pi = 0.756\Pi$$

Zadanie 2.5 Szkody, od których doszło przed momentem czasu $t = 0$ u pewnego ubezpieczyciela charakteryzuje para zmiennych losowych (T, D) oznaczających odpowiednio:

- T - czas zajścia szkody,
- D - odstęp czasu pomiędzy zajściem szkody a jej likwidacją.

Jednostką pomiary obu zmiennych jest 1 rok. Załóżmy, że

- zmienne T i D są niezależne,
  ich rozkład prawdopodobieństwa dane są gęstościami, określonymi odpowiednio na półosi ujemnej:
- $f_T(t) = r \cdot exp(rt)$ dla $t \in (-\infty, 0)$, gdzie $r > 0$,
  i dodatniej:
- $f_D(x) = \beta \cdot exp(-\beta x)$ dla $x \in (0, \infty)$, gdzie $\beta > 0$

Stosunek oczekiwanej liczby szkód zaszłych przed dniem bilansowym do oczekiwanej liczby szkód zaszłych w ciągu roku poprzedzającego dzień bilansowy, który przy przyjętych oznaczeniach wyraża się w prosty sposób jako:

$$\frac{Pr(T + D > 0)}{Pr(T \in (-1, 0))}$$

wynosi: ?.

Rozwiązanie 2.5 *W pierwszej kolejności rysujemy rysunek pomocniczy. Mamy:*

$$\frac{Pr(T + D > 0)}{Pr(T \in (-1, 0))} = \frac{Pr(T > -D)}{Pr(-1 < T < 0)} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty \int_{-x}^0 f_T(t) \cdot f_D(x) dt dx}{\int_{-1}^0 f_T(t) dt} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty \int_{-x}^0 r \cdot e^{rt} \cdot \beta \cdot e^{-\beta x} dt dx}{\int_{-1}^0 r \cdot e^{rt} dt} = \frac{\frac{r}{r+\beta}}{1 - e^{-r}} = \frac{r}{(r+\beta)(1-e^{-r})}$$

Zadanie 2.6 Ubezpieczony generuje szkody zgodnie z Procesem Poissona o parametrze intensywności λ rocznie, i wszystkie szkody, które mu się przydarzą, zgłasza ubezpieczycielowi.
Składka Π_t płacona przez ubezpieczonego w roku t wyznaczana jest następująco:

- wynosi M dla $t = 1$, a więc w pierwszym roku ubezpieczenia, zaś dla $t = 2, 3, 4, \ldots$:
- wynosi $\Pi_t = m + w(\Pi_{t-1} - m)$, jeśli rok $t - 1$ był bezszkodowy,
- wynosi $\Pi_t = M + W(\Pi_{t-1} - M)$, jesli w roku $t - 1$ zdarzyła się co najmniej jedna szkoda.

Jeśli przyjmiemy wartości liczbowe parametrów formuły składki na poziomie: $M = 100$, $W = 0.4$, $m = 20$, $w = 0.8$, to dla ubezpieczonego o wartości parametru λ równej $\ln(10/9)$ oczekiwana składka w długim okresie:

$$\lim_{t \to \infty} E(\Pi_t)$$

wynosi?

Rozwiązanie 2.6 ***Rozkład Poissona***

$$f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

Mamy: 1. $E(\Pi_1)$*=100 z treści*

2. Gdy poprzedni rok bezszkodowy:

$$\Pi_t = 20 + 0.8(\Pi_{t-1} - 20)$$

3. Gdy w poprzednim roku zdarzyła się co najmniej jedna szkoda:

$$\Pi_t = 100 + 0.4(\Pi_{t-1} - 100)$$

Jakie jest prawdopobieństwo, że nie zdarzyła się żadna szkoda?

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} = 9/10$$

Czyli prawdopobieństwo, że zdarzyła się przynajmniej jedna szkoda wynosi 1/10. *Jakie wartości może przyjmować* Π_t*?*

$$\Pi_t = \begin{cases} 20 + 0.8(\Pi_{t-1} - 20) & z\ p\text{-}p\ 9/10, \\ 100 + 0.4(\Pi_{t-1} - 100) & z\ p\text{-}p\ 1/10 \end{cases}$$

Można zapisać:

$$E(\Pi_t) = \begin{cases} 20 + 0.8(E(\Pi_{t-1}) - 20) & z\ p\text{-}p\ 9/10, \\ 100 + 0.4(E(\Pi_{t-1}) - 100) & z\ p\text{-}p\ 1/10 \end{cases}$$

czyli mamy:

$$E(\Pi_t) = 0.9 \cdot (20 + 0.8(E(\Pi_{t-1}) - 20)) + 0.1 \cdot (100 + 0.4(E(\Pi_{t-1}) - 100))$$

stąd

$$E(\Pi_t) = 9.6 + 0.76 \cdot \Pi_{t-1}$$

$$\lim_{t\to\infty} (E(\Pi_t) - 0.76E(\Pi_{t-1})) = 9.6$$

Biorąc pod uwagę własności granic to w nieskończonosci

$$\lim_{t\to\infty} E(\Pi_t) = \lim_{t\to\infty} E(\Pi_{t-1})$$

$$\lim_{t\to\infty} (E(\Pi_t)) = 40$$

3 Egzamin z 29 września 2014

Zadanie 3.1 *Zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne i mają rozkład z atomami:*

$$P(X_1 = 0) = 3/8$$

$$P(X_1 = 1) = 1/8$$

i gęstością $f(x) = x$ na przedziale $(0, 1)$. Wobec tego $Pr(X_1 + X_2 \leqslant 1)$ wynosi:?

Rozwiązanie 3.1 *Rysujemy rysunek pomocniczy dla $X_1 + X_2 \leqslant 1$. W pierwsyzm kroku liczymy:*

$$Pr(X_1 = 0 \vee X_2 = 0) = Pr(X_1 = 0) + Pr(X_2 = 0) - Pr(X_1 = 0 \wedge X_2 = 0) = \frac{117}{192}$$

Czy istnieje przypadek, że musimy rozważyć $X_1 = 1$? Nie bo wtedy $X_2 = 0$ i przypadek ten jest zawarty w obliczonym wcześniej prawdopodobieństwie. Liczymy obszar:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_1 x_2 dx_2 dx_1 = \frac{1}{24}$$

Intepretacja geometryczna (przejście w 3 wymiar): jaka masa prawdopodobieństwa znajduje się nad intresującym nas obszarem? Odpowiedź to:

$$\frac{1}{24} + \frac{117}{192} = \frac{125}{192}$$

Zadanie 3.2 Pewne ryzyko generuje w kolejnych czterech kwatałach roku szkody o łacznej wartości odpowiednio X_1, X_2, X_3, X_4. Zmienne losowe X_i mają identyczny rozkład wykładniczy i są nawzajem niezależne.
Ubezpieczyciel pokrywa łączną wartość szkód za caly rok, ceduje jednak na reasekuratora łączną wartość szkód z jednego, wybranego przez siebie ex post kwartału (oczywiście wybierze najgorszy z nich). Jaki jest udział składki reasekuracyjnej w składce ubezpieczeniowej (obie składki policzone są według ich wartości oczekiwanej)?

Rozwiązanie 3.2 *Mamy składkę ubezpieczeniową:*

$$E(X_1 + \ldots + X_4) = 4 \cdot E(X_1) = \frac{4}{\beta}$$

bo X_i mają rozkład wykładniczy $f(x) = \beta \cdot e^{-\beta x}$ Dystrybuanta:

$$F(x) = \int_0^t \beta e^{-\beta x} = 1 - e^{-\beta t}$$

Składka reasekuracyjna:

$$E(\max\{X_1, \ldots, X_4\}) = ?$$

Rozkład maksimum:

$$P(\max\{X_1,\ldots,X_4\} < t) = P(X_1 < t)^4 = (1-e^{-\beta t})^4$$

$$f(t) = 4(1-e^{-\beta t})^3 \cdot e^{-\beta t} \cdot \beta$$

Liczymy:

$$E(\max\{X_1,\ldots,X_4\}) = \int_0^\infty t \cdot 4(1-e^{-\beta t})^3 \cdot e^{-\beta t} \cdot \beta \cdot dt = (*)$$

Tutaj niestety trzeba podnieść ten nawias do potęgi trzeciej i obliczać całkę

$$(*) = 4\beta\left(\frac{1}{\beta^2} - 3\frac{1}{4\beta^2} + 3\frac{1}{9\beta^2} - \frac{1}{16\beta^2}\right) = 4 \cdot \frac{25}{48\beta}$$

Liczymy udział składki reasekuracyjnej w składce ubezpieczeniowej:

$$ODP = \frac{4 \cdot \frac{25}{48\beta}}{\frac{4}{\beta}} = \frac{25}{48}$$

Zadanie 3.3 Liczba szkód N z pewnego ryzyka ma rozkład Poissona z wartościa oczekiwaną równą λ, a wartości kolejnych szkód $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ są zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie. Zmienne N oraz $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ są niezależne.
Rozkład wartości pojedycznej szkody określony jest na przedziale $(0, 1]$ i ma wartość oczekiwaną równą $\mu \in (0, 1)$

Ubezpieczyciel wystawia na to ryzyko polisę z sumą ubezpieczenia 1, z pokryciem każdej kolejnej szkody proporcjonalnym do 'nieskonsumowanej do tej pory' części sumy ubezpieczenia, a więc:

- za (ewentualną) szkodę Y_1 wypłaca odszkodowanie w pełnej wysokości Y_1, po czym suma ubezpieczenia kurczy się do kwoty $(1 - Y_1)$
- za (ewentualną) szkodę Y_2 wypłaca odszkodowanie w wysokości $(1-Y_1)\cdot Y_2$, po czym aktualna suma ubezpieczenia kurczy się do kwoty $(1-Y_1)\cdot(1-Y_2)$
- za (ewentualną) szkodę Y_3 wypłaca odszkodowanie w wysokości $(1 - Y_1) \cdot (1 - Y_2) \cdot Y_3$, po czym aktualna suma ubezpieczenia kurczy się do kwoty $(1 - Y_1)(1 - Y_2)(1 - Y_3)$, itd

Skladka netto za to ubezpieczenia wynosi: ?.

Rozwiązanie 3.3 *Niech W_i oznacza wartość i-tej wypłaty, mamy:*

$$SJN = E(W_1 + \ldots W_N) =$$

$$E(Y_1 + (1 - Y_1) \cdot Y_2 + \ldots + (1 - Y_1)(1 - Y_2) \cdot \ldots \cdot (1 - Y_{n-1}) \cdot Y_N)$$

Tego bezpośrednio nie policzymy, wobec tego należy rozpatrzyć ile zostaje nam z sumy ubezpieczenia po wypłacie N szkód:

Przy 1 szkodzie zostaje

$$1 - Y_1$$

Przy 2 szkodach zostaje

$$1 - Y_1 - (1 - Y_1)Y_2 = (1 - Y_1)(1 - Y_2)$$

Widać zasadę, wobec tego przy 3 szkodach zostaje

$$(1 - Y_1)(1 - Y_2)(1 - Y_3)$$

a przy N szkodach:

$$(1 - Y_1)(1 - Y_2)(1 - Y_3) \cdot \ldots \cdot (1 - Y_n)$$

Suma wypłat jest oczywiście równa: suma ubezpieczenia - reszta z sumy ubezpieczenia po N wypłatach wobec tego rozpatrujemy:

$$JSN = E(E(1 - (1 - Y_1)(1 - Y_2)(1 - Y_3) \cdot \ldots \cdot (1 - Y_N)|N)) =$$

$$= E(1 - E(1 - Y_1)^N) = E(1 - (1 - \mu)^N) = 1 - E((1 - \mu)^N) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \mu)^n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1 - e^{-\lambda} e^{(1-\mu)\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1 - \mu)\lambda)^n e^{-(1-\mu)\lambda}}{n!}}_{=1} =$$

powyższe $= 1$ z rozkładu Poissona.

$$= 1 - e^{-\lambda} e^{\lambda(1-\mu)} = 1 - e^{-\lambda\mu}$$

$$JSN = 1 - e^{-\lambda\mu}$$

Zadanie 3.4 W pewnym rodzaju ubezpieczenia każde ryzyko generuje szkodę (co najwyzej jedną) z takim samym prawdopodobieństwem. Jeśli do szkody z pewnego ryzyka dojdzie, a wartość parametru B dla tego ryzyka wynosi β, to wartość tej szkody jest zmienną losową o gęstości:

$$f_{Y|B=\beta}(y) = \beta \cdot e^{-\beta \cdot y}.$$

Populacja ryzyk charaktryzuje się dużym zróżnicowaniem. Parametr ryzyka B ma w tej populacji rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$. Rozkład wartości szkody z losowo wybranego ryzyka z tej populacji, pod warunkiem, że to ryzyko wygenerowało szkodę, dany jest gęstością: ?

Rozwiązanie 3.4 *Wiemy, że*

$$f(y|\beta) = \beta \cdot e^{-\beta y} = \frac{f(y,\beta)}{f(\beta)} = (*)$$

Z treści zadania wiemy, że B *ma rozkład jednostajny i* $B \in (0,1)$, *wobec tego*

$$f(\beta) = 1$$

czyli $f_Y(y)$ *to rozkład brzegowy z*

$$f(y,\beta) = \beta \cdot e^{-\beta \cdot y} \cdot 1$$

czyli

$$f(y) = \int_0^1 \beta \cdot e^{-\beta \cdot y} d\beta = \frac{1}{y^2}\left(1 - e^{-y} - ye^{-y}\right)$$

Zadanie 3.5 Rozważmy portfel składający się z n jednakowych, niezależnych ryzyk. Dla każdego z tych ryzyk może wystąpić co najwyżej jedna szkoda, a prawdopodobieństwo jej wystąpienia wynosi q. Jesli do szkody dojdzie, to jej wartość jest zmienną losową o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & x > 0, \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

Niech M oznacza największą ze szkód z tego portfela (lub zero, jeśli łaczna liczba szkód wyniosła zero).
Jeśli przyjmiemy:
$n = 16$, oraz
$q = 0.424$,
to mediana zmiennej M w przybliżeniu wyniesie: ?

Rozwiązanie 3.5 *Wiemy, że*

$$\int_0^{med} f(x)dx = 0.5$$

W naszym przypadku mamy:

$$M = \max\{X_1, \ldots, X_{16}\}$$

Rozważmy rozkład maksimum

$$P(\max\{X_1, \ldots, X_{16}\} = P(X_1 < t)^{16} = (*)$$

Wiemy, że z prawdopodobieństwem $1 - q$ *szkoda nie występuje, a więc*

$$P(X_1 = 0) = q$$

Z prawdopodobieństwa całkowitego:

$P(A) = P(A|szkoda\ zaszła) \cdot P(szkoda\ zaszła) + P(A|szkoda\ nie\ zaszła) \cdot P(szkoda\ nie\ zaszła)$

a więc mamy:

$$P(X_1 < t) = q\int_0^t \frac{1}{(1+x)^2}dx + 1 \cdot (1-q) = q \cdot \frac{t}{1+t} + (1-q)$$

wracając

$$(*) = \left((1-q) + q\left(\frac{t}{1+t}\right)\right)^{16}$$

Wobec tego mamy

$$P(M < med) = \left((1-0.424) + 0.424\left(\frac{med}{1+med}\right)\right)^{16} = 0.5$$

Rozwiązujemy (kalkulator) stąd

$$med = 9$$

Zadanie 3.6 Dla rozkładu liczby szkód $N \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ spełnione jest równanie rekurencyjne:

$$Pr(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) Pr(N = n-1)$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Niech $p_0(1, b)$ wyraża prawdopodobieństwo iż nie zajdzie żadna szkoda jako funkcję parametrów równania a i b. Wobec tego $p_0(-2, 10)$ wynosi: ?

Rozwiązanie 3.6 *Oprócz rozwiązania dodatkowo patrz Otto strona 94, 95 (typy rozkładów zapamiętać).*

mamy znaleźć $p_0(-2, 10)$, wobec tego równanie rekurencyjne jest postaci:

$$Pr(N = n) = \left(-2 + \frac{10}{n}\right) Pr(N = n-1)$$

widać, że n musi być skończone bo przy $n = 5$ prawdopodobieństwo $P(N = 5) = 0$, a dalsze byłyby ujemne! Wobec tego rozpiszmy:

$$p_0 =?$$

$$p_1 = 8 \cdot p_0$$

$$p_2 = 3 \cdot p_1$$

$$p_3 = \frac{4}{3} p_2$$
$$p_4 = \frac{1}{2} p_3$$
$$p_5 = 0$$

Dalej

$$p_0 = ?$$
$$p_1 = 8 \cdot p_0$$
$$p_2 = 3 \cdot 8 \cdot p_0$$
$$p_3 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 8 \cdot p_0$$
$$p_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 8 \cdot p_0$$
$$p_5 = 0$$

oraz

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0$$

stąd po podstawieniu $p_0 = 1/81$

Zadanie 3.7 Liczby szkód $N_1, \ldots, N_t, N_{t+1}, N_{t+2}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $\Lambda = \lambda$, warunkowo niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną λ. Niech $N = N_1 + \ldots + N_t$. Parametr Λ jest zmienną losową o rozkładzie gamma o gęstości:

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta \cdot \lambda}, \qquad \lambda > 0$$

z parametrami (α, β) o wartościach dodatnich. Warunkowa kowariancja:

$$Cov(N_{t+1}, N_{t+2} | N_1, N_2, \ldots, N_t)$$

wynosi: ?.

Rozwiązanie 3.7 *Warunkowa kowariancja:*

$$Cov(N_{t+1}, N_{t+2} | N_1, N_2, \ldots, N_t) =$$

$$= E(N_{t+1} \cdot N_{t+2} | N_1, \ldots, N_t) - E(N_{t+1} | N_1, \ldots, N_t) \cdot E(N_{t+2} | N_1, \ldots, N_t) =$$

Możemy przepisać, że

$$= E(N_{t+1} \cdot N_{t+2} | N) - E(N_{t+1} | N) \cdot E(N_{t+2} | N)$$

dlatego, że nie jest dla nas istotne kiedy ile szkód się wydarzyło, ale jaka była ich suma (jeżeli było ich bardzo dużo w przeszłości, można spodziewać się, że wynika to z dużej λ). Będziemy chcieli policzyć

$$E(N_{t+1} | N) = \int_0^\infty \sum_{N_{t+1}} N_{t+1} f(N_{t+1}, \lambda | N) d\lambda$$

bo w ogólności gdy mamy np.$f(x,y,z,u,v)$ *to*

$$E(X) = \int\int\int\int\int x \cdot f(x,y,z,u,v)dxdydzdudv$$

zeby to zrobić potrzebujemy rozkład $f(N_{t+1},\lambda|N)$ *najpierw rozkład łączny*

$$f(N_{t+1},N,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{N_{t+1}}}{(N_{t+1})!} \cdot \frac{(\lambda t)^N e^{-\lambda t}}{N!} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta\alpha}$$

Teraz wyliczymy rozkład brzegowy

$$f(N) = \int_0^\infty \sum_{N_{t+1}} f(N_{t+1},N,\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^N e^{-\lambda t}}{N!} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta\alpha}d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha t^N}{\Gamma(\alpha)N!} \cdot \lambda^{N+\alpha-1} \cdot e^{-(\beta+t)\lambda}d\lambda =$$

po drodze korzystamy z gęstości rozkładu Gamma żeby zwinąć całkę do 1 i mamy:

$$= \frac{\beta^\alpha t^N}{\Gamma(\alpha)N!} \cdot \frac{\Gamma(N+\alpha)}{(\beta+t)^{N+\alpha}}$$

Wobec tego

$$f(N_{t+1},\lambda|N) = \frac{f(N_{t+1},N,\lambda)}{f(N)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{N_{t+1}}}{(N_{t+1})!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \lambda^{N+\alpha-1} \cdot e^{-\beta\lambda} \cdot \frac{(\beta+t)^{N+\alpha}}{\Gamma(N+\alpha)}$$

Możemy teraz policzyć

$$E(N_{t+1}|N) = \int_0^\infty \sum_{N_{t+1}} N_{t+1} f(N_{t+1},\lambda|N)d\lambda =$$

$$= E(N_{t+1}|N) = \int_0^\infty \sum_{N_{t+1}} N_{t+1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{N_{t+1}}}{(N_{t+1})!} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \lambda^{N+\alpha-1} \cdot e^{-\beta\lambda} \cdot \frac{(\beta+t)^{N+\alpha}}{\Gamma(N+\alpha)}d\lambda$$

widać, że suma zwinie się do wartości oczekiwanej czyli λ*, zostaje całka:*

$$= \int_0^\infty \lambda \cdot \frac{(\beta+t)^{N+\alpha}}{\Gamma(N+\alpha)} \cdot e^{-(\beta+t)\lambda}\lambda^{N+\alpha-1}d\lambda =$$

widać, że to jest po prostu rozkład Gamma$(N+\alpha,\beta+t)$

$$= \frac{N+\alpha}{\beta+t}$$

Dla

$$f(N_{t+1},N_{t+2},\lambda,N)$$

sytuacja byłaby analogiczna tzn:

$$f(N_{t+1}, N_{t+2}, \lambda, N) =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{N_{t+1}}}{(N_{t+1})!} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{N_{t+1}}}{(N_{t+1})!} \cdot e^{-\lambda(\beta+t)}\lambda^{N+\alpha-1} \cdot \frac{(\beta+t)^{N+\alpha}}{\Gamma(N+\alpha)}$$

$$E(N_{t+1} \cdot N_{t+2}|N) = \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda t}\lambda^{N+\alpha-1}e^{-\beta\lambda}\frac{(\beta+t)^{N+\alpha}}{\Gamma(N+\alpha)}d\lambda$$

$$Var(\lambda) = \frac{N+\alpha}{(\beta+t)^2}$$

$$E(\lambda^2) = \frac{N+\alpha}{(\beta+t)^2} + \frac{(N+\alpha)^2}{(\beta+t)^2}$$

$$Cov(N_{t+1}, N_{t+2}|N) = \frac{N+\alpha}{(\beta+t)^2}$$

Zadanie 3.8 W pewnym ubezpieczeniu liczba szkód, które w ciągu t lat wygeneruje ubezpieczony charakteryzujący się wartością λ paramteru ryzyka Λ jest procesem Poissona o intensywności λ (rocznie).
Zakładamy, że rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji wszystkich ubezpieczonych (tak naszych, jak i tych którzy ubezpieczają się u konkurentów) dany jest na półosi dodatniej gęstością:

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha-1}\exp(-\beta\lambda)}$$

gdzie $(\alpha, \beta) = (2, 9)$.

Załóżmy, że w pierwszym roku tak nasza firma, jak i firmy konkurencyjne proponowały wszystkim ubezpieczenie w zamian za tą samą składkę. W drugim roku nasza forma kontynuuje praktykę z roku poprzedniego, natomiast konkurenci wprowadzili składki nizsze od przeciętnej za bezszkodowy przebieg ubezpieczenia w pierwszym roku, zaś wyższe od przeciętnej odpowiednio dla ubezpieczonych, którzy mieli w pierwszym roku szkody. Zakładając, że wszyscy ubezpieczeni wybiorą tego ubezpieczyciela, który jest dla nich tańszy, oczekiwana wartość szkód w drugim roku (w przeliczeniu na jednego ubezpieczonego) w naszej firmie wzrośnie w stosunku do pierwszego roku o:

(poprawna odpowiedź to: wskaźnik mieszczący się pomiędzy 40% a 44%)

Rozwiązanie 3.8 *Mamy:*

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{9^2}{\Gamma(2)}\lambda e^{-9\lambda}$$

średnio szkód na osobę jest:

$$E(\lambda) = \frac{2}{9}$$

Wiemy, że kazdy człowiek ma dwie charakterystyki:

- N_1 *- liczba szkód w 1 roku*
- N_2 *- liczba szkód w 2 roku*

Powyższe potwierdza

$$E(N_1) = \int\int\int N_1 \cdot f(N_1, N_2, \lambda) dN_1 dN_2 d\lambda = \frac{2}{9}$$

Jaka jest gęstość łączna dla liczby szkód:

$$f(N_1, N_2, \lambda) =?$$

Mamy:

$$f(N_1, N_2, \lambda) = \frac{\lambda^{N_1} e^{-\lambda}}{N_1!} \cdot \frac{\lambda^{N_2 e^{-\lambda}}}{N_2!} \cdot \frac{9^2}{\Gamma(2)} \lambda e^{-9\lambda}$$

Będziemy chcieli obliczyć

$$E(N_2|N_1 = 0)$$

Potrzebujemy rozklad warunkowy

$$f(N_2, \lambda|N_1) =?$$

$$f(N_1 = 0) = \int \sum_{N_2} \frac{\lambda^{N_1} e^{-\lambda}}{N_1!} \cdot \frac{\lambda^{N_2 e^{-\lambda}}}{N_2!} \cdot \frac{9^2}{\Gamma(2)} \lambda e^{-9\lambda} d\lambda =$$

suma zwija się do 1

$$= \int \frac{\lambda^{N_1} e^{-\lambda}}{N_1!} \cdot \frac{9^2}{\Gamma(2)} \lambda e^{-9\lambda} d\lambda =$$

pamiętam, że $N_1 = 0$, zostanie składnik $e^{-\lambda}$ z rozkładu Poissona, wobec tego:

$$= \int \frac{9^2}{\Gamma(2)} \lambda e^{-10\lambda} d\lambda =$$

to po przekształceniu da rozkład Gamma (gęstość zcałkuje się do jedynki)

$$= \frac{81}{100}$$

od razu należy zwrócić uwagę, że prawdopodobieństwo, że liczba szkód w 1 roku wyniesie 0 to $81/100$ *to oznacza, że na 100 kierowców 81 nie miało szkody. Liczymy*

$$f(N_2, \lambda|N_1 = 0) = \frac{= \frac{\lambda^{N_1} e^{-\lambda}}{N_1!} \cdot \frac{\lambda^{N_2 e^{-\lambda}}}{N_2!} \cdot \frac{9^2}{\Gamma(2)} \lambda e^{-9\lambda}}{\frac{81}{100}} =$$

$$= 100 \cdot \frac{\lambda^{n_1} e^{-\lambda}}{n_1!} \cdot \frac{\lambda^{n_2} e^{-\lambda}}{n_2!} \lambda e^{-9\lambda}$$

Wobec tego

$$E(N_2|N_1=0)=\int\sum_{N_2}100\cdot\frac{\lambda^{n_1}e^{-\lambda}}{n_1!}\cdot\frac{\lambda^{n_2}e^{-\lambda}}{n_2!}\lambda e^{-9\lambda}d\lambda=$$

$$\int 100\lambda^2e^{-10\lambda}=\frac{1}{10}\Gamma(3)=0.2$$

powyżej ponownie zwinięcie do Gamma.

Czyli osoby które przejdą do konkurencji będą miały szkodowość 0.2*. Wobec tego mieliśmy w pierwszym roku szkodowość łączną* 2/9*, która podzieliła się na dwie grupy:*

$$\frac{2}{9}=0.2\cdot\frac{81}{100}+x\cdot\frac{19}{100}$$

stąd $x=0.317\%$ *to nasza szkodowość nowa! O ile wzrośnie?*

$$\frac{2}{9}\cdot(1+z\%)=0.317\%\rightarrow z=42.6\%$$

co daje odpowiedź

Zadanie 3.9 Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- M to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku
- K to liczba szkód które zostaną zgłoszone w ciągu lat nastepnych.

Jest sumą składników, z których każdy przyjmuje wartość jeden gdy daną szkodę zgłoszono w ciągu roku, zaś zero, gdy zgłoszenie nastąpiło później. Przyjmujemy, że M ma rozkład złożony (a więc liczba składników oraz wartość każdego z nich to niezależne zmienne losowe, zaś wszystkie składniki mają ten sam rozkład).

Załóżmy, że liczba szkód zaszłych N ma rozkład dwumianowy o parametrach $(n,q)=(10,\frac{2}{5})$, z wartością oczekiwaną równą 4, zaś zmienna wskazująca na zgloszenie szkody w ciągu danego roku ma także rozkład dwumianowy o parametrach $(n,q)=\left(1,\frac{1}{2}\right)$, a więc prawdopodobieństwo zgłoszenia szkody w ciągu roku wynosi 1/2.
Wobec tego warunkowa wartość oczekiwana $E(K|M=3)$ wynosi: ?.

Rozwiązanie 3.9 *To zadanie wymaga tylko jednego tricku, liczymy p-p warunkowe:*

$$P(\textit{szkoda zaszła}|\textit{szkoda nie została zgłoszona})=\frac{P(\textit{zaszła i nie zgłoszona})}{P(\textit{szkoda nie została zgłoszona})}=$$

$$=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}}=\frac{1}{4}$$

Z rozkładu liczby szkód wiemy, że mamy 10 'potencjalnych' szkód, które mogą się zdarzyć i zgłosić, wobec tego

$$E(K|M=0) = 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4}$$

W naszym przypadku wiemy, że już się zgłosiły 3 więc mamy 7 potencjalnych szkód stąd:

$$E(K|M=3) = 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

4 Egzamin z 8 grudnia 2014

Zadanie 4.1 Zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne i mają taki sam rozkład z atomami:

$$Pr(X_1 = 0) = 6/10$$

$$Pr(X_1 = 1) = 1/10$$

i gęstością $f(x) = 3/10$ na przedziale $(0,1)$ Wobec tego $Pr(X_1 + X_2 \leqslant 5/3)$ wynosi:?

Rozwiązanie 4.1 *Rysujemy rysunek pomocniczy dla* $X_1 + X_2 \leqslant 5/3$ *z uwzględnieniem faktu, że gęstość istnieje na przedziale* $(0,1)$. *Następnie liczymy*

$$P(X_1 = 0 \vee X_2 = 0) = P(X_1 = 0) + P(X_2 = 0) - P(X_1 = 0 \wedge X_2 = 0) =$$

$$= 6/10 + 6/10 - 36/100 = 21/25$$

Doliczamy obszar:

$$\int_0^{2/3} \int_0^1 \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} dx_2 dx_1 + \int_{2/3}^1 \int_0^{5/3-x_1} \frac{3}{10}\frac{3}{10} dx_2 dx_1 = 0.06 + 0.025 = 0.085$$

Dodając te dwie części mamy 0.925 *i to jest jeszcze za mało bo musimy uwzględnić*

$$P(X_2 = 1 \wedge 0 < X_1 \leqslant 2/3) = \frac{1}{10} \cdot \int_0^{2/3} \frac{3}{10} dx_1 = 0.02$$

$$P(X_1 = 1 \wedge 0 < X_2 \leqslant 2/3) = 0.02$$

Razem: $Pr(X_1 + X_2 \leqslant 5/3) = 0.084 + 0.085 + 0.02 + 0.02 = 0.965$

Zadanie 4.2 Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w, i narażony jest na stratę X. Strata X jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym:

$$Pr(X = 1) = q, Pr(X = 0) = 1 - q$$

Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym jego funkcja użyteczności jest postaci:

$$u(x) = -exp(-x)$$

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty ubezpieczeniowe wypłacające αX za szkodę w wysokości X dla dowolonych $\alpha \in (0, 1]$, w zamian za składkę w wysokości $(1 + \theta)\alpha E(X)$.

Jeśli założymy, że $\theta = 25\%$, zaś $q = 20\%$ wtedy dla podmiotu, o którym mowa, optymalny poziom parametru α wynosi (wybierz najbliższe przybliżenie): ?

Rozwiązanie 4.2 *Co to funkcja użyteczności? Wstawiamy do niej wartość majątku i liczymy*

$$E(u(x))$$

chcemy aby ta wartość oczekiwana była maksymalna.

W zadaniu mamy majątek narażony na stratę X i tak:

1. Z prawdopodieństem 0.2 do szkody dochodzi (szkoda ma wartość 1), wtedy wartość majątku wynosi:

$$w - 1 + \alpha - 0.25\alpha$$

2. Z prawdopobieństwem 0.8 do szkody nie dochodzi, wtedy wartość majątku wynosi:

$$w - 0.25\alpha$$

Wartość oczekiwana

$$E(u(W)) = -e^{-(w-1+\alpha-0.25\alpha)} \cdot \frac{1}{5} - e^{-(w-0.25\alpha)} \cdot \frac{4}{5} = f(\alpha)$$

to chcemy maksymalizować po α

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\frac{1}{5}e^{-(w-1+0.75\alpha)} \cdot (-0.75) - \frac{4}{5}e^{-(w-0.25\alpha)} \cdot 0.25 = 0$$

Stąd

$$\alpha = 0.71232$$

Zadanie 4.3 Niech T oznacza moment zajścia szkody, zaś $T + X$ moment jej likwidacji. Zakładamy, że moment zajścia szkody T jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, t_0)$, zaś okres czasu X, jaki upłwa od zajścia do likwidacji szkody, jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 2. Zakładamy, że zmienne losowe T oraz X są niezależne.
Warunkową wartość oczekiwaną $E(X|X + T > t_0)$ intepretujemy jako oczekiwany całkowity czas likwidacji takiej szkody, która w momencie czasu t_0 wciąż oczekuje na likwidację. Granica

$$\lim_{t_0 \to \infty} E(X|X + T > t_0)$$

wynosi: ?.

Rozwiązanie 4.3 *To zadanie można rozwiązać standardowo tzn:*

W klasycznym przypadku warunkowa wartość oczekiwana:

$$E(X|A) = \frac{1}{P(A)} \int\limits_A X(\omega)dP$$

Rozpisana:

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx}$$

My mamy dwie zmienne losowe więc będzie całka podwójna:

$$E(X|X+T>t_0) = \frac{\int\int x \cdot f(x,t) dx dt}{\underbrace{\int\int f(x,t) dx dt}_{=P(X+T>t_0)}}$$

ważne jest określenie granic całkowania. Rysujemy rysunek pomocniczy. Mamy:

$$P(X+T>t_0) = \int_0^t \int_{-t+t_0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{t_0} dx dt = \frac{2}{t_0}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t_0}\right)$$

Licznik:

$$\int_0^{t_0} \int_{-t+t_0}^{\infty} x \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{t_0} dx dt = \frac{1}{t_0}(8 - 8e^{-\frac{1}{2}t_0 - 2t_0 e^{-\frac{1}{2}t_0}})$$

$$E(X|X+T>t_0) = \frac{\frac{1}{t_0}(8 - 8e^{-\frac{1}{2}t_0 - 2t_0 e^{-\frac{1}{2}t_0}})}{\frac{2}{t_0}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t_0}\right)} \xrightarrow{t_0 \to \infty} 4$$

Zadanie 4.4 W pewnym ubezpieczeniu proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona z oczekiwaną liczbą szkód w ciągu roku równą 2, a wartosci pojedynczych szkód (niezależne nawzajem i od procesu pojawiania się szkód) mają rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$.

Ubezpieczony stosuje następującą strategię zgłaszania szkód w ciągu roku:

- Nie zgłasza szkód, dopóki nie zdarzy mu się szkoda o wartości przekraczającej $1/2$
- Zgłasza pierwszą szkodę, która przekroczyła wartość $1/2$, po czym zgłasza ewentualnie następne szkody bez wzgledu na to, jaka jest ich wartość.

Charakter ubezpieczenia jest przy tym taki, że decyzja o niezgłoszeniu danej szkody jest nieodwałalna - nie ma więc możliwości zgłoszenia danej szkody dopiero wtedy, kiedy zajdzie któraś z następnych szkód.

Oczekiwana liczba szkód zgłoszonych w ciągu roku z tego ubezpieczenia wynosi (z dobrym przybliżeniem)

Rozwiązanie 4.4 *To zadanie jest troszkę trickowe. Trzeba je rozwiązać przy założeniu, że zaszło N szkód. Tzn. Niech K oznacza liczbę szkód zgłoszonych w ciągu roku z ubezpieczenia:*

$$E(K) = E(E(K|N))$$

Rozkład poissona:

$$P(X=n)=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

gdy $\lambda = 2$ *to*

$$P(X=n)=\frac{2^n e^{-2}}{n!}$$

Rozważmy prawdopobieństwa, niech X *oznacza wysokość szkody (rozkład jednostajny):*

$$P\left(X>\frac{1}{2}\right)=q=\frac{1}{2}$$

$$P\left(X<\frac{1}{2}\right)=1-q=\frac{1}{2}$$

Jeżeli załozymy, że było N *szkód to mamy następujące prawdopobieństwa zgłoszenia:*

1. Zgłosi się 0 szkód gdy: $(1-q)^N$ *(żadna nie przekroczy* $1/2$*)*

2. Zgłosi się 1 szkoda gdy: $(1-q)^{N-1}\cdot q$ *(*$N-1$ *pierwszych szkód mniejszych od* $1/2$ *ostatnia większa)*

3. Zgłoszą się 2 szkody gdy: $(1-q)^{N-2}\cdot q$ *(*$N-2$ *pierwszych szkód mniejszych od* $1/2$ *potem jedna większa, a dalej to już zgłaszają się wszystkie z p-p 1*

4. Zgłosi się k szkód pod warunkiem, że zaszło N szkód:

$$Pr(k|n)=\begin{cases}(1-q)^{n-k}\cdot q & dla\ k=1,2,\ldots,n,\\ (1-q)^n & dla\ k=0\end{cases}$$

Mamy:

$$E(k|N)=\sum_{i=1}^{N}k(1-q)^{N-k}\cdot q=q(1-q)^N=q(1-q)^N\sum_{k=1}^{N}k\left(\frac{1}{1-q}\right)^k$$

Dygresja: jak wysumować $\sum_{i=1}^{N}kx^k$*?. Weźmy*

$$g(x)=\sum_{k=0}^{N}x^k=\frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

$$g'(x)=\sum_{k=1}^{N}kx^k$$

$$\sum_{k=1}^{N}kx^k=xg'(x)=x\cdot\left(\frac{1-x^{N-1}}{1-x}\right)'=(*)$$

$$\left(\frac{1-x^{N+1}}{1-x}\right)' = \frac{(1-x^{N+1})'(1-x)-(1-x^{N+1})(1-x)'}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1-(N+1)x^N+Nx^{N+1}}{(1-x)^2}$$

$$(*) = \frac{x-(N+1)x^{N+1}+Nx^{N+2}}{(1-x)^2} =$$

wstawiamy za $x = \frac{1}{1-q}$ *i mamy*

$$E(k|N) = \frac{Nq-(1-q)+(1-q)^{N+1}}{q}$$

dla $q = 1/2$ *jest:*

$$E(k|N) = N-1+\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$E(N) = 2$$

$$E\left(\frac{1}{2^N}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k e^{-2}\frac{2^k}{k!} = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-1}\frac{1^k}{k!} = e^{-1}$$

Stąd

$$E(k) = E(E(k|N)) = 2-1+e^{-1} = 1.37$$

Zadanie 4.5 Warunkowy rozkład wartości szkód generowanych przez pojedyczne ryzko z pewnej populacji przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ jest złożonym rozkładem Poissona

- z oczekiwaną liczba szkód równą λ, oraz
- z wartością oczekiwaną pojedycnzje szkody równą $10+\lambda$

Rozkład parametru ryzyka Λ w populacji jest rozkładem Gamma o wartości oczekiwanej równej 3/10 oraz wariancji równej 3/100. Losujemy z tej populacji (całkowicie przypadkowo) n ryzyk, które następnie generują N_n szkód o łącznej wartości S_n. Rozważmy zachowanie się zmiennej losowej S_N/N_n określonej oczywiście o ile liczba szkód jest większa od zera. Granica

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{S_n}{N_n}|N_n>0\right)$$

wynosi: ?

Rozwiązanie 4.5 *Wartość szkody wygenerowana przez 1 ryzyko:*

$$\lambda_1\cdot(10+\lambda_1)$$

Wartości szkód wygenerowanych przez n ryzyk:

$$\lambda_1(10+\lambda_1)+\lambda_2(10+\lambda_2)+\lambda_3(10+\lambda_3)+\ldots+\lambda_n(10+\lambda_n) =$$

$$10\lambda_1 + \lambda_1^2 + \ldots + 10\lambda_n + \lambda_n^2$$

Liczba szkód wygenerowanych przez n ryzyk:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

Prawo wielkich liczb:

$$\Pr\Big(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu\Big) = 1.$$

czyli, średnia zbiega do wartości oczekiwanej!

Stąd w wartości oczekiwanej:

$$E\left(\frac{10\lambda_1 + \lambda_1^2 + \ldots + 10\lambda_n + \lambda_n^2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}\right) = 10 + E\left(\frac{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}\right) =$$

$$= 10 + E\left(\frac{\frac{\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2}{n}}{\frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}{n}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 10 + E\left(\frac{E(\lambda^2)}{E(\lambda)}\right) = (*)$$

$$E(\lambda) = 3/10$$

$$Var(\lambda) = 3/100$$

$$E(\lambda^2) = \frac{3}{100} + \frac{9}{100} = \frac{12}{100}$$

$$(*) = 10 + \frac{12}{100} \cdot \frac{10}{3} = 10.4$$

Zadanie 4.6 Rozważmy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód $S(t)$ jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi $\lambda = 300$, zaś rozkład wartości pojedycznej szkody dany jest na półosi dodaniej gęstością:

$$f_Y(x) = \frac{1}{12}[\exp(-x/4) + \exp(-x/8)]$$

- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi $c = 2500$

Wiadomo, że przy takich założeniach funkcja prawdopodobieństwa ruiny (jako funkcja wysokości nadwyżki początkowej u) jest postaci:

$$\Psi(u) = a_1 \exp(-r_1 \cdot u) + a_2 \exp(-r_2 \cdot u)$$

Suma parametrów tego wzoru ($a_1 + a_2$) wynosi: ?

Rozwiązanie 4.6 *Klasyczny model procesu nadwyżki:*

$$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$$

ct - suma składek zgromadzonych do momentu t

$$c = (1+\theta)\lambda E(Y_1)$$

Wiemy, że dla dowolnego rozkładu

$$\Psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

$$\Psi(0) = a_1 \cdot e^{-r_1 \cdot 0} + a_2 \cdot e^{-r_2 \cdot 0} = a_1 + a_2$$

$$\frac{1}{1+\theta} = a_1 + a_2$$

Ile wynosi θ? z wzoru na c mamy:

$$2500 = (1+\theta) \cdot 300 \cdot E(Y_1)$$

$$E(Y_1) = \frac{1}{12}\int_0^\infty xe^{-x/4} + xe^{-x/8} = \frac{1}{12}(16+64) = \frac{20}{3}$$

$$\frac{2500}{300 \cdot \frac{20}{3}} = 1 + \theta$$

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{1.25} = \frac{4}{5}$$

Zadanie 4.7 Wiemy, że rozkład liczby szkód N określony na zbiorze $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ jest rozkładem niezdegenerowanym, a ciąg prawodopodobieństw tego rozkładu spełnia równanie:

$$Pr(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) Pr(N = n-1)$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wobec tego wariancja zmiennej losowej N dana jest wzorem:?

Rozwiązanie 4.7 *Mamy liczyć wariancję więc najpierw wartość oczekiwana:*

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} nP(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{an+b}{n}\right) Pr(N = n-1) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(an+b)Pr(N=n-1) = \sum_{n=0}^{\infty}(an+a+b)Pr(N=n) =$$

$$= aEN + a + b$$

$$EN = \frac{a+b}{1-a}$$

oczywiście $a \neq 1$. *Dalej*

$$EN^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(an+b)P(N=n-1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(an+a+b)P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(an+a+b)P(N=n) + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (an+a+b)P(N=n)}_{=aEN+a+b} =$$

$$= aE(N^2) + (a+b)EN + aEN + a + b = aE(N^2) + \frac{(a+b)(a+b+1)}{1-a}$$

$$E(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$$

$$Var(N) = E(N^2) - (EN)^2 = \frac{a+b}{(1-a)^2}$$

Zadanie 4.8 Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q, zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q, zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Jeśli kierowcę z tej populacji przypadkowo wylosujemy, to charakteryzującą go wartość parametru q traktujemy jako realizację zmiennej losowej Q. Populacja jest niejednorodna, w związku z czym $Var(Q) > 0$

Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 3-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, ląduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Ląduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Ląduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej lub trzeciej.

Na podstawie obserwacji ustaliliśmy, że fakcja kierowców z tej populacji przebywających w klasie pierwszej wynosi 20%, w klasie drugiej 8%, zaś w klasie trzeciej 72%. Oczywiście pominęliśmy przy tym obserwację z pierwszych paru lat funkcjonowanai systemu bonus-malus, kiedy przynależność do klasy zależała jeszcze od klasy startowej.
Jeśli przymiemy, że nasze oceny 20%, 8% oraz 72% nie są obarczone błędem to wynika z tego, że $Var(Q)$ wynosi: ?

Rozwiązanie 4.8 *Prawdopodobieństwo, że ktoś przebywa w klasie pierwszej:*

$$P_1 = q$$

Prawdopodobieństwo, że ktoś przebywa w klasie drugiej:

$$P_2 = q(1-q)$$

Prawdopodobieństwo, że ktoś przebywa w klasie trzeciej:

$$P_3 = 1 - q - q(1-q) = (1-q)^2$$

Z treści zadania widzimy, że frakcja kierowców przebywających w klasie 1 wynosi 20%, *powyżej wyliczyliśmy, że z jednego kierowcy spodziewamy się, że w klasie pierwszej będzie q, a że q jest realizacją zmiennej losowje Q to w wartości oczekiwanej z jednego kierowcy w klasie pierwszej spodziewam się:*

$$E(Q) = 0.2$$

Frakcja dla przebywających w klasie drugiej:

$$E(Q(1-Q)) = E(Q) - E(Q^2) = 0.08 \rightarrow E(Q^2) = 0.2 - 0.08 = 0.12$$

$$Var(Q) = 0.12 - 0.2^2 = 0.08$$

Zadanie 4.9 Modelujemy przebiegający w czasie proces ściągania należności regresowych przez ubezpieczyciela. Niech T oznacza zmienną losową o rozkładzie

- ciągłym na przedziale $(0, +\infty)$
- z pewną masą prawdopodobieństwa w punkcie $+\infty$

reprezentującą czas ściągnięcia należności regresowej (liczony od momenty powstania prawa do regresu). Niech f_T, F_T oraz h_T oznaczają odpowiednio funkcję gęstości, dystrybuantę oraz funkcję hazardu zamiennej T. Dystrybuancie oraz funkcji hazardu nadajemy następującą intepretację:

- $F_T(t) = \int_0^t f_T(s)ds$ to wskaźnik ściągalności do czasu t (oczywiście $F_T(0) = 0$)
- $\lim_{t\to\infty} F_T(t) = Pr(T < \infty)$ to wskaźnik ściągalności ostatecznej
- $h_T(t) = \frac{f_T(t)}{1-F_T(t)}$ dla $t > 0$ to natężenie procesu ściągania (gęstość ściągania należności, które do momentu t pozostają jeszcze nie ściągnięte)

Załóżmy, że natężenie procesu ściągania dane jest funkcją hazardu określoną na półosi dodaniej następujaco:

$$h_T(t) = \frac{2}{2 + \exp(t)}$$

Wtedy wskaźnik ściągalności ostatecznej

Rozwiązanie 4.9 *mamy:*

$$h_T(t) = \frac{2}{2+e^t} = \frac{f_T(t)}{1-F_t(t)}$$

$$h = \frac{F'}{1-F} \to F' \to h(1-F)$$

wiemy, że $F' = \frac{dF}{dt}$

$$\frac{1}{1-F}dF = h \cdot dt$$

całkujemy:

$$ln(1-F) = -\int h \cdot dt$$

$$1 - F = e^{\int hdt} \to F = 1 - e^{-\int h \cdot dt}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\int hdt + c}$$

całka dość sprytnie:

$$\int \frac{2}{2+e^t}dt = \int \frac{2+e^t-e^t}{2+e^t}dt =$$

$$\int \frac{2+e^t}{2+e^t} - \int \frac{e^t}{2+e^t} =$$

$$= t - \ln(2+e^t) + c$$

mamy

$$F(0) = 1 - e^{-\int hdt + c} = 0$$

czyli

$$0 = \int hdt = 0 - \ln(2+e^0) + c$$

stąd $c = \ln 3$ *mamy:*

$$F(t) = 1 - e^{-(t - \ln(2+e^t) + \ln 3)} = 1 - e^{-t}e^{\ln(2+e^t)}e^{-\ln 3} =$$

$$= 1 - e^{-t}(2+e^t))\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}(2e^{-t}+1) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{2}{3}$$

Zadanie 4.10 Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- M to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku,
- K to liczba szkod które zostaną zgłoszone w ciągu lat następnych,
- Zachodzi oczywiście $N = M + K$.

Liczba szkód zgłoszonych przed końcem roku:

$$M = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N$$

jest sumą składników, z których każdy przyjmuje wartość jeden gdy daną szkodę zgłoszono w ciągu roku, zaś zero, gdy zgłoszenie nastąpiło później. Przyjmujemy, że zmienne losowe $N, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ są niezależne, oraz iż $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ mają taki sam rozkład

$$Pr(Z_1 = 1) = 1/4$$

$$Pr(Z_1 = 0) = 3/4$$

Jeśli teraz założmy, że liczba szkód zaszłych w ciągu roku ma rozkład ujemny dwumianowy o postaci:

$$Pr(N = n) = (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, to prawdopodobieństwo warunkowe $Pr(K = 1|M = 1)$ wyniesie: ?

Rozwiązanie 4.10 *Dla przypomnienia:*

Rozkład ujemny dwumianowy

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} \cdot (1-p)^r p^k,$$

$$EX = \frac{pr}{1-p}$$

$$VarX = \frac{pr}{(1-p)^2}$$

W zadaniu mamy:

$$Pr(K = 1|M = 1) = \frac{Pr(K = 1 \wedge M = 1)}{P(M = 1)}$$

Rozważmy $Pr(K = 1 \wedge M = 1)$ to oznacza, że $N = 2$ i jednocześnie $M = Z_1 + Z_2$ skoro $K = 1$ to oznacza, że jedna z szkód Z_i się niezgłosiła (Zgłasza się Z_1 niezgłasza Z_2 lub odwrotnie). Stąd

$$P(K = 1 \wedge M = 1) = P(N = 1) \cdot (P(Z_1 = 1, Z_2 = 0) + P(Z_1 = 0, Z_2 = 1) =$$

$$= (2+1)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{18}$$

Teraz rozważmy $P(M = 1)$ jakie jest prawdopodoboieństwa całkowitego:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|H_i)P(H_i)$$

czyli

$$P(M=1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(M=1|N=k) \cdot P(N=k)$$

Rozważmy $P(M=1|N)$ *to oznacza, że wśród N szkód zgłosiła się przed końcem roku tylko 1. Mamy więc klasyczny przykład rozkładu dwumianowego*

$$P(M=1|N) = \binom{N}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{N-1}$$

dalej

$$P(M=1) = \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot (k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{3} \sum k(k+1)\frac{3^k}{4^k} \cdot \frac{1}{3^k} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{3} \sum k(k+1)\left(\frac{1}{4}\right)^k = (*)$$

Teraz trzeba skojarzyć, że można użyć rozkładu ujemnego dwumianowego:

$$\binom{k+r-1}{k} = \frac{(k+r-1)!}{k!(r-1)!}$$

przy r=2 daje:

$$= \frac{(k+1)!}{k!} = k+1$$

czyli jeżeli do powyższego zaaplikujemy jeszcze składnik

$$(1-p)^r = (1-1/4)^2 = (3/4)^2$$

$$(*) = \frac{4}{27}(4/3)^2 \sum k \cdot (k+1)(3/4)^2(1/4)^k = (*)$$

to mamy wartość oczekiwaną dla rozkładu o $p = 1/3$ *oraz* $r = 2$*, ze wzoru:*

$$EX = \frac{pr}{1-p} = \frac{(1/4)\cdot 2}{3/4} = 2/3$$

$$(*) = \frac{4}{27} \cdot \frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{128}{729}$$

Wobec tego:

$$Pr(K=1|M=1) = \frac{Pr(K=1 \wedge M=1)}{P(M=1)} = \frac{1/18}{128/729} = 81/256$$

5 Egzamin z 23 marca 2015

Zadanie 5.1 Pewne ryzyko generuje w kolejnych sześciu okresach dwu-miesięcznych szkody o łącznej wartości odpowiednio $X_1, \ldots, X_6$. Zmienne losowe X_i mają identyczny rozkład wykładniczy i są nawzajem niezależne.
Ubezpieczyciel pokrywa łączną wartość szkód za cląy rok, ceduje jednak na reasekuratora łączną wartość szkód z jednego, wybranego przez siebie ex post okresu (oczywiście wybierze najgorszy z nich). Jaki jest udział składki reasekuracyjnej w składce ubezpieczeniowej (obie składki policzone są według ich wartości oczekiwanej)?

Rozwiązanie 5.1 *Składka ubezpieczeniowa:*

$$E(X_1 + \ldots + X_6) = \frac{6}{\beta}$$

Składka reasekuracyjna:

$$E(\max(X_1, \ldots, X_6)) = ?$$

potrzebujemy rozkład maksimum:

$$F(X < t) = \int_0^t \beta e^{-\beta x} dx = 1 - e^{-\beta t}$$

$$f_{X_{6:6}}(t) = 6(1 - e^{-\beta t})^5 e^{-\beta t} \cdot \beta$$

$$E(X_{6:6}) = \int_0^\infty t \cdot 6(1 - e^{-\beta t})^5 e^{-\beta t} \cdot \beta \cdot dt = (*)$$

Wzór Newtona (kluczowy trick)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(1-e^{-\beta t})^5 = 1 \cdot 1^5 - 5 \cdot 1^4 \cdot e^{-\beta t} + 10 \cdot 1^3 \cdot e^{-2\beta t} - 10 \cdot 1^2 e^{-3\beta t} + 5 \cdot 1 \cdot e^{-4\beta t} - 1 \cdot 1^0 \cdot e^{-5\beta t}$$

$$(*) = 6\beta \int_0^\infty t e^{-\beta t}(1 - 5e^{-\beta t} + 10e^{-2\beta t} - 10e^{-3\beta t} + 5e^{-4\beta t} - e^{-5\beta t}) dt =$$

$$= \frac{6}{\beta}(49/120)$$

Udział:

$$ODP = \frac{6\beta \cdot 49/120}{6/\beta} = \frac{49}{120}$$

Zadanie 5.2 Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poissona z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1), (λ_2, F_2), oraz (λ_3, F_3). Wartości parametrów częstotliwości $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, oraz dystrybuanty F_1, F_2, F_3, dane są wzorami: Wobec tego $Pr(X = 4)$ wynosi: ?

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1,2)$	$F_i(x)$ dla $x \geqslant 2$
1	3/2	0	8/10	1
2	1	0	6/10	1
3	1/2	0	4/10	1

Rozwiązanie 5.2 *Pierwsza uwaga: rozkład złożony Poissona zawiera w sobie zarówno częstotliwość jak i wysokość szkód. X_i to suma wysokości szkód*

Druga uwaga: suma zmiennych o rozkładzie złożonym Poissona ma rozkład złożony Poissona z częstością = sumie częstości oraz prawdopodobieństwem wysokości będącym średnią ważoną prawdopodieństw (z częstościami jako wagami).

Trzecia uwaga: tabela wskazuje, że wysokości szkód mają rozkład dwupuntowy (szkody mogą być równe albo 1 albo 2.

Mamy:

$$P(X_1 = 1) = 8/10$$
$$P(X_1 = 2) = 2/10$$
$$P(X_2 = 1) = 6/10$$
$$P(X_2 = 2) = 4/10$$
$$P(X_3 = 1) = 4/10$$
$$P(X_3 = 2) = 6/10$$

Niech Z oznacza zmienną losową dotyczącą wysokości szkód po tym jakbyśmy 'kupili' trzech ubezpieczycieli mających szkody X_1, X_2, X_3. Zgodnie z uwagą trzecią częstość będzie miała rozkład $P(3)$ natomiast wysokość określa się przy pomocy następujących prawdopodobieństw:

$$P(Z = 1) = \frac{\lambda_1 P(X_1 = 1) + \lambda_2 P(X_2 = 1) + \lambda_3 P(X_3 = 1)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{2}{3}$$

Wobec tego

$$P(Z = 2) = 1/3$$

szukamy:

$$P(\underbrace{\quad X \quad}_{=suma\ szkód} = 4)$$

Rozkład poissona z $\lambda = 3$

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Prawdopodbieństwo, że suma szkód jest równa 4 jest równe: rozważmy przypadki:

- *4 szkody o wartości 1*

- *2 szkody o wartości 2 każda*
- *3 szkody z czego jedna o wartości 2 a dwie pozostałe o wartości 1 każda*

Zapisujemy:

$$e^{-3}\left(\frac{3^4}{4!}\cdot(2/3)^4+\frac{3^2}{2!}\cdot(1/2)^2+\frac{3^3}{3!}(1/3)(2/3)^2\cdot\underbrace{3}_{\text{bo mamy 3 przypadki}}\right)=\frac{19}{6}e^{-3}$$

co daje odpowiedź.

3 przypadki możliwe do wylosowania w ostatnim wyrazie bo: DDM, DMD, MDD, gdize D- duża szkoda, M- mała szkoda.

Zadanie 5.3 Niech T_n oznacza moment zajścia n-tej szkody, w procesie pojawiania się szkód, który startuje w momencie $T_0 = 0$. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \ldots$
Likwidacja n-tej szkody następuje w momencie $T_n + D_n$.
Załóżmy, że zmienne losowe $T_1, D_1, (T_2 - T_1), D_2, (T_3 - T_2), D_3, \ldots$

- są niezależne
- mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1/2no

Niech $N(t)$ oznacza liczbę szkód zlikwidowanych do momentu t. Wobec tego oczekiwana liczba szkód zlikwidowana na odcinku czasu $1 < t \leqslant 2$, a więc

$$E[N(2) - N(1)]$$

wynosi:?.

Rozwiązanie 5.3 ***WAŻNE ZADANIE!*** *Rozkład wykładniczy:*

$$f(x) = \beta \cdot e^{-\beta x} = 2e^{-2x}$$

$$P(X < t) = \int_0^t \beta e^{-\beta x} dx = 1 - e^{-\beta \cdot t}$$

W zadaniu:

$$f_D(x) = \beta e^{-\beta x}$$

$$f_{T_{i+1}-T_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Stąd wynika, że prawdopodobieństwo, że czas od zgłoszenia do likwidacji będzie mniejszy niż t jest równe:

$$1 - e^{-\beta x}$$

W pierwszym roku zgłoszą się szkody, które zostaną zlikwidowane w pierwszym roku, oraz takie których likwidacja przejdzie na następny rok. Jeżeli szkoda powstała w momencie T to p-p, że zostanie zlikwidowana do do momentu 1 wynosi:

$$1 - e^{-\beta(1-T)}$$

Informacyjnie Jeśli liczba zajść zdarzenia w danym przedziale czasu $[0,t]$ *jest zgodna z rozkładem Poissona, ze średnią* $= \lambda t$ *, wtedy długość okresu oczekiwania pomiędzy zajściami zdarzenia ma rozkład wykładniczy ze średnią* $1/\lambda$.

W zadaniu mamy: wartość oczekiwana szkód, które zdążą się zlikwidować do momentu 1:

$$\int_0^1 \lambda(1 - e^{-\beta(1-T)})dT = 1.135335$$

gdzie λ *- należy traktować jako 'intensywność' zachodzenia szkód. Wartość oczekiwana szkód, które nie zdażą się zlikwidować:*

$$\int_0^1 \lambda \cdot e^{-\beta(1-T)} = 0.86466$$

Teraz chcemy policzyć ile z tych szkód zlikwiduje się w trakcie drugiego roku. P-p, że czas życia szkód mniejszy niż rok wynosi:

$$1 - e^{-2\cdot 1}$$

Stad

$$0.86466 \cdot (1 - e^{-2}) = 0.7477641$$

Wiemy, że w kolejnym roku powstanie i zostaie zlikwidowanych 1.135335*, stąd wartość oczekiwana zlikwidowanych w trakcie 2 roku:*

$$0.7477641 + 1.135335 = 1.882975994$$

Zadanie 5.4 *W klasycznym modelu procesu nadwyżki* $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$

- *u jest nadwyżką początkową,*
- *ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,*
- *$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ jest sumą wypłat,*
- *proces $N(t)$ i pojedyczne wypłaty $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne*

Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrubantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u. Wiadomo, że zachodzi:

$$F_L(u) = 1 - \Psi(u) = Pr(\forall t \geqslant 0, U(t) \geqslant 0)$$

Załóżmy, że wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ, oraz iż parametr intensywności c składki wynosi $110\%\lambda\mu$.

Wartość funkcji $\Psi(u)$ w punkcie $u = E(L) + 1.645\sqrt{Var(L)}$ wynosi: ?.

Rozwiązanie 5.4 ***Wzory z teorii ruiny:***

Prawodpodbieństwo ruiny:

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)})|T < \infty}$$

T - moment ruiny, R - współczynnik dopasowania.

Przy wykładniczym rozkładzie pojedynczej szkody:

$$c = \frac{\lambda(1+\theta)}{\beta}$$

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{1+\theta}$$

$$R = \frac{\beta\theta}{1+\theta}$$

W zadaniu mamy: Y_i mają rozkład wykładniczy $\frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}y}$ wiemy, że $c = 1.1\lambda\mu$, obliczymy θ z powyższych wzorów:

$$1.1\lambda\mu = \frac{\lambda(1+\theta)}{\frac{1}{\mu}} \rightarrow \theta = 0.1$$

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{1+\theta} = \frac{e^{-Ru}}{1.1}$$

$$R = \frac{\beta\theta}{1+\theta} = \frac{1}{11\mu}$$

$$\Psi(u) = \frac{e^{-u\frac{1}{11\mu}}}{1.1}$$

$$F_L(u) = 1 - \Psi(u) = 1 - \frac{e^{-u\frac{1}{11\mu}}}{1.1}$$

$$f(l) = \frac{1}{1.1} \cdot \frac{1}{11\mu} \cdot e^{-l \cdot \frac{1}{11\mu}}$$

widać, że gęstość jest podobna do gęstości rozkładu wykladniczego, ale należy zwrócić uwagę, że l nie należy do przedziału $(0, \infty)$ (nie wycałkuje się do 1)!. ***Trzeba uświadomić sobie, że z pewnym prawdopobieństwem punktowym*** *$L = 0$.*

$$P(L \leqslant 0) = 1 - \Psi(u) = 1 - \frac{1}{1.1} = \frac{1}{1.1}$$

L nie może być mniejsze niż zero więc $P(L = 0) = \frac{1}{11}$, dalej liczymy

$$E(L) = E(L|L = 0) \cdot P(L = 0) + E(L|L > 0)P(L > 0) =$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{11} + \frac{\int_0^\infty l \cdot \frac{1}{1.1}\frac{1}{11\mu}e^{-\frac{l}{11\mu}}dl}{P(L>0)} \cdot P(L>0) = 10\mu$$

$$Var(L) = E(L^2) - (EL)^2$$

Z wariancji rozkładu wykładniczego (poniższe uwzględnia już warunki na L):

$$E(L^2) = \frac{10}{11}\left(\frac{1}{(\frac{1}{11\mu})^2} + \frac{1}{(\frac{1}{11\mu})^2}\right) = 220\mu^2$$

$$Var(L) = 220\mu^2 - 100\mu^2 = 120\mu^2$$

$$\Psi(u) = \frac{e^{-\frac{1}{11\mu}}(10\mu + 1.645\sqrt{120}\mu)}{1.1} \approx 7.1\%$$

Można też skorzystać ze wzorów Otto strona 267.

Zadanie 5.5 Liczby szkód $N_1, \ldots, N_{10}, N_{11}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $Q = q$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym z parametrami $(1, q)$, a więc przyjmują wartość 1 z prawdopodobieństwem q, zaś wartość 0 z prawdopodobieństwem $(1-q)$. Niech $N = N_1 + \ldots + N_{10}$. Parametr ryzyka Q jest zmienną losową o gęstości na przedziale $(0, 1)$ określonej wzorem:

$$f_Q(x) = 4 \cdot (1-x)^3$$

Warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła nierówność:

$$Var(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10}) > Var(N_11)$$

jest postaci

$$N > ?$$

Rozwiązanie 5.5 *PODOBNE DO 30.11.2009.*

Wzór na wariancję warunkową:

$$Var(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10}) = E(N_{11}^2|N_1, \ldots, N_{10}) - E(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10})^2$$

czyli mamy sprawdzić:

$$E(N_{11}^2|N_1, \ldots, N_{10}) - E(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10})^2 > E(N_{11}^2) - (E(N_{11}))^2$$

Mamy:

$$E(N_{11}|Q = q) = q$$

oraz

$$E(N_{11}^2|Q = q) = 1^2 \cdot q$$

pod warunkiem, że q. Oczywiście $E(N_{11}) = E(E(N_{11}|Q = q))$*, czyli musimy jeszcze policzyć wartość oczekiwaną:*

$$E(q) = \int_0^1 4(1-x)^3 \cdot x \cdot dx = 0.2$$

stąd

$$E(N_{11}) - E(N_{11}^2) = 0.16$$

czyli mamy:

$$E(N_{11}^2|N_1, \ldots, N_{10}) - E(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10})^2 > 0.16$$

Dlaczego $E(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10})$ *jest warunkowe? Bo* $N_1, \ldots, N_{10}$ *wskazuje na wartość* q*.*

$$E(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10}) = E(N_{11}|N)$$

bo suma uchwyci wszystko co nas interesuje. Dalej

$$E(N_{11}|N_1, \ldots, N_{10}) = E(N_{11}|N) = E(E(N_{11}|N)|Q = q) =$$

$$= E(\underbrace{E(N_{11}|Q = q)}_{=q}|N) = E(q|N)$$

Powyższe wynika z własności warunkowej wartości oczekiwanej (tzw. iteracyjność)

$$E(X|Y) = E(E(X|Y)|Z) = E(E(X|Z)|Y)$$

Skoro mamy $E(q|N)$ *to potrzebujemy 'gęstość'* $f(q|N)$

$$f(q|N) = \frac{f(q,N)}{f(N)} = \frac{f(q,N)}{\int_0^1 f(q,n)dq}$$

$$f(q,N) = Pr(N_1 + \ldots + N_{10} = N \wedge Q = q) =$$

suma $N_1 + \ldots N_{10}$ *ma rozkład dwumianowy z prawdopodobieństwem* q*. Czyli:*

$$= \binom{10}{N} q^N (1-q)^{10-N} \cdot 4(1-q)^3 = 4\binom{10}{N} q^N (1-q)^{13-N}$$

Powyższe wynika z faktu, że

$$Pr(N_1 + \ldots + N_{10}|Q = q) = \frac{Pr(N_1 + \ldots + N_{10} \wedge Q = q)}{Pr(Q = q)}$$

Żeby otrzymać:

$$\int_0^1 f(q,n)dq = \int_0^1 4\binom{10}{N} q^N (1-q)^{13-N} dq$$

Przeanalizujemy całkę

$$\int_0^1 q^N(1-q)^{13-N}dq = ?$$

Mamy:

1.

$$\int_0^1 (1-q)^K dq = \frac{1}{K+1}$$

2.

$$\int_0^1 q(1-q)^K dq = -q\frac{(1-q)^{K+1}}{K+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-q)^{K+1}}{K+1}dq =$$

$$= \frac{1}{K+1}\frac{1}{K+2}$$

3.

$$\int_0^1 q^2(1-q)^K dq = \ldots = \int_0^1 2q\frac{(1-q)^{K+1}}{K+1}dq = \frac{2}{K+1}\frac{1}{K+2}\frac{1}{K+3} =$$

$$= \frac{2!K!}{(K+N+1)!}$$

co nasuwa wniosek, że:

$$\int_0^1 q^N(1-q)^K = \frac{N!\cdot K!}{(K+N+1)!}$$

Stąd

$$\int_0^1 q^N(1-q)^{13-N}dq = \frac{N!(13-N)!}{14!}$$

Dalej:

$$f(q|N) = \frac{f(q,N)}{f(N)} = \frac{f(q,N)}{\int_0^1 f(q,n)dq} = \frac{4\binom{10}{N}q^N(1-q)^{13-N}}{4\binom{10}{N}\frac{N!(13-N)!}{14!}} =$$

$$= \frac{q^N(1-q)^{13-N}\cdot 14!}{N!(13-N)!}$$

Jak już do tego doszliśmy, to Potrzebujemy obliczyć to czego szukaliśmy czyli $E(q|N)$*. Mamy:*

$$E(q|N) = \int_0^1 q\frac{q^N(1-q)^{13-N}14!}{N!(13-N)!}dq = \frac{14!}{N!(13-N)!}\int_0^1 q^{N+1}(1-q)^{13-Ndq} =$$

$$= \ldots = \frac{N+1}{15}$$

Teraz

$$E(N_{11}^2|N) = E(E(N_{11}^2|Q = q)|N) = E(q|N) = \frac{N+1}{15}$$

Czyli wracając do początkowej nierówności:

$$\frac{N+1}{15} - \frac{(N+1)^2}{15^2} > 0.16$$

$$-(N-11)(N-2) > 0$$

stąd

$$N > 2$$

6 Egzamin z 15 czerwca 2015

Zadanie 6.1 Mamy dany ciąg liczb $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ z przedziału $(0,1)$. Rozważmy dwie zmienne losowe.

- Y o rozkładzie dwumianowym i parametrach $(n, \bar{q})$, gdzie $\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i$
- Z, której warunkowy rozkład (przy danej wartości Q) jest ozkładem dwumianowym z parametrami (n, Q), zaś zmienna Q ma rozkład n-punktowy taki, że $Pr(Q = q_i) = \frac{1}{n}$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$

Wariancje tych dwóch zmiennych związane są równością:

$$Var(Z) = Var(Y) + a\sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2$$

Stała a występująca w tej równości wynosi: ?

Rozwiązanie 6.1 *Z rozkładu dwumianowego o parametrach (n, p):*

$$Var(X) = np(1-p)$$

mamy

$$Var(Y) = n\bar{q}(1-\bar{q})$$

Dalej

$$Var(Z) = E(Z^2) - (EZ)^2$$

$$E(Z) = E(E(Z|Q))$$

$$E(Z|Q) = nQ$$

$$E(nQ) = n\bar{q} \rightarrow E(Z) = n\bar{q}$$

$$E(Z^2|Q) = Var(Z|Q) + (E(Z|Q))^2 = nQ(1-Q) + (nQ)^2$$

$$E(nQ(1-Q) + (nQ)^2) = E(nQ - nQ^2 + (nQ)^2) = n\bar{q} - \sum_{i=1}^{n} q_i^2 + n\sum_{i=1}^{n} q_i^2$$

Stąd

$$Var(Z) = n\bar{q} - \sum_{i=1}^{n} q_i^2 + n\sum_{i=1}^{n} q_i^2 - n^2\bar{q}^2$$

Wstawiamy do równania z zadania i mamy:

$$n\bar{q} - \sum_{i=1}^{n} q_i^2 + n\sum_{i=1}^{n} q_i^2 - n^2\bar{q}^2 = n\bar{q}(1-\bar{q}) + a\sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2$$

Przekształcamy, po drodze zauważając, że $\sum_{i=1}^{n} \bar{q}^2 = n\bar{q}^2$ i dostajemy:

$$(n-1)(\sum q_i^2 - n\bar{q}^2) = a(\sum q_i^2 - nq^2)$$

stąd

$$a = n - 1$$

Zadanie 6.2 Pary zmiennych losowych (N_1, X_1) oraz (N_2, X_2) są niezależne, i oznaczają odpowiednio liczbę i wartość szkód dla dwóch ryzyk. Wartość szkód w obu przypadkach ma złożony rozkład Poissona z parametrami odpowiednio λ_1, F_1 oraz λ_2, F_2. Oczekiwane liczby szkód λ_1, λ_2 oraz dystrybuanty F_1, F_2 dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1, 2)$	$F_i(x)$ dla $x \geqslant 2$
1	3	0	7/10	1
2	1	0	3/10	1

Wobec tego:

$$E(N_1 + N_2 | X_1 + X_2 = 3)$$

wynosi: ?.

Rozwiązanie 6.2 *1.* $X_1 + X_2$ *ma rozkład złożony Poissona. Prawdopodobieństwa są następujące:*

$$P(X_1 = 1) = 7/10$$
$$P(X_1 = 2) = 3/10$$
$$P(X_2 = 1) = 3/10$$
$$P(X_2 = 2) = 7/10$$

Dla złozonego Poissona wysokość szkód pozostaje ta sama, ale prawdopodobieństwa liczymy następująco:

$$P(Z = 1) = \frac{\lambda_1 P(X_1 = 1) + \lambda_2 P(X_2 = 1)}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0.6$$

$$P(Z = 2) = 0.4$$

Więc teraz prawdopodobieństwo, że suma szkod jest równa 3: rozważamy przypadki:

- *3 szkody o wartości 1*
- *2 szkody z czego 1 o wartości 1 a druga o wartości 2 (DM, MD)*

Złozony Poisson ma częstość: $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$

$$P(X_1 + X_2 = 3) = e^{-4}\left(\frac{4^3}{3!} \cdot (0.6)^3 + \frac{4^2}{2!}(0.6) \cdot (0.4) \cdot 2\right) = e^{-4} \cdot 6.144$$

Wiemy, że $N_1 + N_2$ *ma rozkład Poissona z częstością* $\lambda = 1 + 3 = 4$ *i może przyjmować wartości 2 lub 3*

$$E(N_1+N_2|X_1+X_2 = 3) = 2 \cdot P(N_1+N_2 = 2|X_1+X_2 = 3) + 3 \cdot P(N_1+N_2 = 3|X_1+X_2 = 3)$$

$$= 2 \cdot \frac{\cdot P(N_1 + N_2 \wedge X_1 + X_2 = 3)}{P(X_1 + X_2 = 3)} + 3 \cdot \frac{P(N_1 + N_2 = 3 \wedge X_1 + X_2 = 3)}{P(X_1 + X_2 = 3)} =$$

$$= \frac{3 \cdot e^{-4} \frac{4^3}{3!} 0.6^3 + 2 \cdot e^{-4} \frac{4^2}{2!} \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 2}{P(X_1 + X_2 = 3)} =$$

$$= \frac{3 \cdot e^{-4} \frac{4^3}{3!} 0.6^3 + 2 \cdot e^{-4} \frac{4^2}{2!} \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 2}{e^{-4} \cdot 6.144} = 2.375 = \frac{19}{8}$$

Zadanie 6.3 Łączna wartość szkód X ma złożony rozkład ujemny dwumianowy. Liczba szkód ma wartość oczekiwaną równą $1/2$ i wariancję równą $2/3$. Rozkład wartości pojedynczej szkody:

- ma na przedziale $(0, 5)$ gęstość daną wzorem $f(x) = 0.25 - 0.03x$,
- oraz w punkcie 5 masę prawdopodobieństwa równą 0.125

Wariancja zmiennej X wynosi:

Rozwiązanie 6.3 ***Model ryzyka łącznego*** *Niech*

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$$

wtedy

$$EX = E(Y_1 + \ldots + Y_N) = E(N) \cdot E(Y_1)$$

Ze wzoru na dekompozycję wariancji:

$$Var(X) = E(Var(X|N)) + Var(E(X|N))$$

mamy:

$$Var(X) = EN \cdot Var(Y) + Var(N) \cdot (EY)^2$$

W zadaniu mamy:

$$EN = 1/2$$

$$VarN = 2/3$$

$$X = W_1 + \ldots + W_N$$

$$VarX = EN \cdot VarW_1 + VarN \cdot (EW_1)^2 = (*)$$

$$EW_1 = \int_0^5 (0.25 - 0.03x) \cdot x \cdot dx + 5 \cdot 0.125 = 2.5$$

$$E(W_1^2) = \int_0^5 (0.25 - 0.03x) \cdot x^2 \cdot dx + 5^2 \cdot 0.125 = 425/48$$

$$VarW_1 = 125/48$$

$$(*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{48} + \frac{2}{3} 2.5^2 = \frac{25 \cdot 21}{98}$$

Stąd:

Zadanie 6.4 Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q, zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q, zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Rozkład parametru ryzyka Q w populacji kierowców jest na przedziale $(0, 1)$ dany gęstością:

$$f_Q(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 4-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, ląduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Ląduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Ląduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej;
- Ląduje w klasie czwartej, o ile w danym roku był w klasie trzeciej lub czwartej.

Wiadomo, że rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni klas dla dowolonego kierowcy w takim systemie bonus-malus stabilizuje się (przestaje zależeć od klasy startowej) po upływaie kilku pierwszych lat. Oznaczmy przez p_4 wartość oczekiwaną udziału kierowców przebywających w klasie czwartej w całkowitej liczebności kierówców w tej populacji, po osiągnięciu ww. stabilizacji.
Przyjmijmy, ze parametry $(\alpha, \beta) = (2, 8)$. Wobec tego p_4 wynosi: ?

Rozwiązanie 6.4 *Jakie jest prawdopodobieństwo przebywania w klasie 4? Rozważmy pozostałe prawdopodobieństwa:*

1. Przebywanie w klasie 1: q (zgłosił szkodę rok temu)

2. Przebywanie w klasie 2: $q \cdot (1 - q)$ *zgłosił szkodę dwa lata temu i rok temu nie zgłosił*

3. Przebywanie w klasie 3: $q \cdot (1 - q) \cdot (1 - q)$ *zgłosił szkodę trzy lata temu i przez następne dwa lata nie zgłosił*

4. Przebywanie w klasie 4: $1 - q - q(1 - q) - q(1 - q)(1 - q) = (1 - q)^3$ *Mamy policzyć wartość oczekiwaną:*

$$E((1-q)^3) = \int_0^1 (1-q)^3 \frac{\Gamma(10)}{\Gamma(2)\Gamma(8)} q^1 (1-q)^7 dq = 72/132 = 30/55$$

Zadanie 6.5 Ubezpieczyciel prowadzi dwa portfele ubezpieczeń. W każdym z portfeli pojedyncze ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem

Poissona z taką samą intensywnością λ. Portfele różnią się rozkładem wartości pojedycznej szkody i liczbą ryzyk w portfelu (n_1 i n_2 odpowiednio). Stosunkowy narzut na składkę netto dla ryzyk w obu portfelach jest ten sam i wynosi θ. W rezultacie parametry modelu są następujące:

1. Portfel:
intensywność łączna $n_1\lambda$, rozkład wartości pojedycznej szkody o gęstości $f(y) = 2\exp(-2y)$, składka za jedno ryzyko $(1+\theta)\frac{\lambda}{2}$;

2. Portfel:
intensywność łącnza $n_2\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 5\exp(-5y)$, składka za jedno ryzyko $(1+\theta)\frac{\lambda}{5}$.

Jeśli wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela jest postaci:

$$\Psi(u) = \frac{2}{3}\exp(-u) + \frac{1}{12}\exp\left(-\frac{5}{2}u\right),$$

to wartości parametrów modelu $\left(\theta, \frac{n_1}{n_1+n_2}\right)$ wynoszą: ?.

Rozwiązanie 6.5 *To typowe zadanie na wzór (można analogiczną teorię zastosować do zadania 6 z 8 grudnia 2014). Teoria: Otto strona 260 (uwaga mogą być błędy w książce we wzorach, w zależności od wydania).*

Przypadek mieszaniny rozkładów wykładniczych

Rozkład wartości pojedynczej szkody dla mieszaniny portfeli (mieszanina rozkładów wykładniczych)

$$f_Y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w \cdot \beta_i \cdot e^{-\beta_i \cdot x} & dla\ x > 0, \\ 0 & dla\ x \leqslant 0 \end{cases}$$

gdzie $0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n$ *oraz wagi* w_i *są dodatnie i sumują się do jedności. Wtedy prawdopodobieństwo ruiny wyraża się wzorem (p-p ruiny zakładu ubezpieczeń, n- liczba portfeli):*

$$\Psi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \exp(-r_i \cdot u)$$

gdzie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *to n największych (różnych) rozwiązań równania*

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \frac{\beta_i}{\beta_i - r} = 1 + (1+\theta)\cdot\mu\cdot r$$

gdzie $0 \leqslant r_1 < \beta_1 < \ldots < r_n < \beta_n$ *oraz gdzie* μ *to wysokość średniej szkody w portfelu. Wartości* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *otrzymamy rozwiązując układ równań linio-*

wych, który daje się zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{\beta_1-r_1} & \frac{\beta_1}{\beta_1-r_2} & \cdots & \frac{\beta_1}{\beta_1-r_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_n}{\beta_n-r_1} & \frac{\beta_n}{\beta_n-r_2} & \cdots & \frac{\beta_n}{\beta_n-r_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

W zadaniu mamy $\lambda_1 = \lambda_2$*:*

$$w_1 = \frac{n_1\lambda_1}{n_1\lambda_2 + n_2\lambda_2} = \frac{n_1}{n_1+n_2}$$

$$w_2 = \frac{n_2\lambda_2}{n_1\lambda_2 + n_2\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1+n_2}$$

F-cja p-p ruiny ubezpieczyciela z zadania:

$$\Psi(u) = \frac{2}{3}e^{-u} + \frac{1}{12}e^{-\frac{5}{2}u}$$

Z teorii:

$$\Psi(u) = a_1 e^{-r_1 \cdot u} + a_2 e^{-r_2 \cdot u}$$

W portfelu 1: $\beta_1 = 2$*, w portfelu 2:* $\beta_2 = 5$*, czyli*

$$r_1 = 1 < \beta_1 = 2 < r_2 = \frac{5}{2} < \beta_2 = 5$$

natomiast

$$a_1 = \frac{2}{3} \qquad a_2 = \frac{1}{12}$$

Mamy r_1 *i* r_2 *czyli rozwiązania teoretycznego równania (patrz wyżej). Stąd:*

$$w_1\frac{\beta_1}{\beta_1 - r_1} + w_2\frac{\beta_2}{\beta_2 - r_1} = 1 + (1+\theta)r_1$$

$$w_1\frac{\beta_1}{\beta_1 - r_2} + w_2\frac{\beta_2}{\beta_2 - r_2} = 1 + (1+\theta)r_2$$

możemy zapisać $w_2 = 1 - w_1$*. Mamy:*

$$w_1\frac{2}{2-1} + (1-w_1)\frac{5}{5-1} = 1 + (1+\theta)\mu \cdot 1$$

$$w_1\frac{2}{2-5/2} + (1-w_1)\frac{5}{5-5/2} = 1 + (1+\theta)\mu \cdot \frac{5}{2}$$

Rozwiązujemy równanie (pierwsze razy 5 drugie razy 2) i mamy:

$$\omega_1 = \frac{1}{21}$$

co daje odpowiedź. Ale możemy kontynuować μ to średnia szkoda w portfelu czyli

$$\mu = E(Z) = \frac{n_1 \cdot \lambda_1 \cdot E(X_1)}{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2} + \frac{n_2 \cdot \lambda_2 \cdot E(X_2)}{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2} = \frac{3}{14}$$

Podstawiając do jednego z równań mamy:

$$\frac{1}{21} \cdot 2 + \frac{20}{21} \cdot \frac{5}{4} = 1 + (1+\theta) \cdot \frac{3}{14} \rightarrow \theta = \frac{1}{3}$$

Można też inaczej: wiemy, że prawdopodobieństwo ruiny przy $u = 0$ wynosi zawsze:

$$\Psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

z treści zadania

$$\Psi(u) = \frac{2}{3}e^{-u} + \frac{1}{12}e^{-\frac{5}{2}u}$$

przy $u = 0$

$$\psi(u) = a_1 + a_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} = \frac{1}{1+\theta} \rightarrow \theta = \frac{1}{3}$$

Zadanie 6.6 Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- M to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku,
- K to liczba szkód które zostaną zgłoszone w ciągu lat następnych,
- Zachodzi oczywiście $N = M + K$

Liczba szkód zgłoszonych przed końcem roku:

$$M = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N$$

jest sumą składnikow, z których każdy przyjmuje wartość jeden gdy daną szkodę zgłosozno w ciągu roku zaś zero, gdy zgłoszenie nastąpiło później. Przejmujemy, że zmienne losowe $N, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ są niezależne, oraz iż $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ mają taki sam rozkład:

$$Pr(Z_1 = 1) = 1/2 \qquad Pr(Z_1 = 0) = 1/2$$

Jeśli teraz założymy, że liczba szkód zaszłych w ciągu roku ma rozkład dwumianowy o postaci:

$$Pr(N = n) = \binom{10}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{10-n}$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$ to warunkowa wartość oczekiana $E(K|M = 0)$ wyniesie?

Rozwiązanie 6.6 *Prawdopodobieństwo, że szkoda zajdzie:* $p_1 = 1/5$ *z rozkładu dwumianowego. Prawdopodobieństwo, że szkoda się zgłosi:* $p = 1/2$. *Warunek* $M = 0$ *z treści zadania sugeruje, że skoro w pierwszym roku zgłosiło się mało, to w kolejnych latach będzie mniej. Tutaj należy uważnie rozważyć sytuację. Jest ona następująca: mamy momenty czasu:*

$$[], [], [], \ldots, []$$

z prawdopodobieństwem $1/5$ *do szkody zajdzie* (X), *a z p-p* $4/5$ *szkoda nie zajdzie* (0)*:*

$$[X], [X], [0], \ldots$$

Z tych szkód część się zgłosi do końca roku, a część później

$$[Z], [0], [0], \ldots$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że szkoda nie jest zgłoszona? To suma prawdopodobieństwa, że szkoda nie zaistniała i prawdopodobieństwa że szkoda zainstniała ale nie została zgłoszona:

$$P(\textit{szkoda nie zgłosiła się}) = (1 - p_1) + p_1(1 - p_2)$$

My szukamy wartości oczekiwanej $E(K|M = 0)$ *widać, z rozkładu dwumianowego, że może zajść 10 szkód w ciągu roku. Teraz wiemy, że każda z tych szkód jeżeli zajdzie to kiedyś się zgłosi. Jakie jest więc prawdopodobieństwo, że szkoda zaszła pod warunkiem, że się nie zgłosiła?*

$$P(\textit{A: szkoda zaszła}|\textit{B: szkoda nie zgłosiła się}) =$$

$$= \frac{p_1(1 - p_2)}{(1 - p_1) + p_1(1 - p_2)} = \frac{1/5 \cdot (1 - 1/2)}{4/5 + 1/5 \cdot 1/2} = 1/9$$

Więc mam potencjalnie 10 szkód, każda ma prawdopodobieństwo zajścia warunkowe $1/9$ *wobec tego*

$$E(K|M = 0) = 10 \cdot \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

Zadanie 6.7 *Zadanie 10 jest analogiczne do zadania 2 z marca 2010.*