1 Podstawy

1. Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B , gdzie $P(B) > 0$ nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

2. Wzór Newtona

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

3. Szeregi

$$I_0(v) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n = \frac{1}{1-v}$$

$$I_1(v) = \sum_{n=1}^{\infty} n v^n = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$I_2(v) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 v^n = \frac{v(v+1)}{(1-v)^3}$$

4. Prawo wielkich liczb

$$\Pr\Big(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu\Big) = 1.$$

czyli, średnia zbiega do wartości oczekiwanej!

5. Prawdopodobieństwo całkowite

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|H_i) P(H_i)$$

2 Rozkłady

Rozkład zero-jedynkowy Rozkład zero-jedynkowy – dyskretny rozkład prawdopodobieństwa, szczególny przypadek rozkładu dwupunktowego, dla którego zmienna losowa przyjmuje tylko wartości: 0 i 1.

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie dwupunktowym. Wtedy suma:

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

ma rozkład dwumianowy.

Rozkład dwumianowy

Dyskretny rozkład prawdopodobieństwa opisujący liczbę sukcesów k w ciągu N niezależnych prób, z których każda ma stałe prawdopodobieństwo sukcesu równe p.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

dla $k=0,1,\dots,n$

$$E(X)=np$$

$$Var(X)=np(1-p)$$

Rozkład ujemny dwumianowy

$$P(X=k)=\binom{k+r-1}{k}\cdot(1-p)^r p^k,$$

$$EX=\frac{pr}{1-p}$$

$$VarX=\frac{pr}{(1-p)^2}$$

Rozkład ujemny dwumianowy 2 (W. Wołyński załącznik)

Zmienna losowa N ma rozkład ujemny dwumianowy z prametrami (r,q), (oznaczamy $NB(r,q)$), jeśli

$$Pr(N=k)=\binom{r+k-1}{k}p^r q^k$$

, $k=0,1,2,3,\dots$. Inaczej:

$$Pr(N=k)=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)\cdot k!}p^r q^k$$

Wartość oczekiwana i wariancja:

$$EN=\frac{r(1-p)}{p}$$

$$VarN=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

Rozkład jednostajny ciągły na przedziale $[a,b]$

$$f(x)=\frac{1}{b-a}$$

$$F(x)=\frac{x-a}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$VAR(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Rozkład wykładniczy

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}$$

$$E(X) = \frac{1}{\beta}$$

$$VAR(X) = \frac{1}{\beta^2}$$

Rozkład Poissona

$$f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

Jeżeli $X \sim P(\lambda)$ i $Y \sim P(\mu)$ to $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$

Rozkład Geometryczny

$$p_k = P(X = k) = (1-p)^k \cdot p$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Rozklad Gamma

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \qquad x > 0$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

(1) gdy $X \sim Gamma(a_1, b)$, $Y \sim Gamma(a_2, b)$ to $X+Y \sim Gamma(a_1+a_2, b)$

(2) gdy $\alpha = 1$ to mamy rozkład wykładniczy $Exp(\beta)$

(3) gdy $\alpha = \frac{n}{2}$ oraz $\beta = \frac{1}{2}$ to mamy rozkład ch-kwadrat z n stopniami swobody

(4) gdy $X \sim Gamma(a, b) \rightarrow 2 \cdot b \cdot X \sim \chi^2(n)$, $n = 2 \cdot a$

Dla przypomnienia $F(n) = (n-1)!$, $F(n+1) = n!$

3 Wartość oczekiwana

W klasycznym przypadku warunkowa wartość oczekiwana:

$$E(X|A) = \frac{1}{P(A)} \int\limits_A X(\omega) dP$$

Rozpisana:

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx}$$

4 Model ryzyka łącznego

Niech

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$$

wtedy

$$EX = E(Y_1 + \ldots + Y_N) = E(N) \cdot E(Y_1)$$

Ze wzoru na dekompozycję wariancji:

$$Var(X) = E(Var(X|N)) + Var(E(X|N))$$

mamy:

$$Var(X) = EN \cdot Var(Y) + Var(N) \cdot (EY)^2$$

5 Przypadek mieszaniny rozkładów wykładniczych

Rozkład wartości pojedynczej szkody dla mieszaniny portfeli (mieszanina rozkładów wykładniczych)

$$f_Y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n w \cdot \beta_i \cdot e^{-\beta_i \cdot x} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$$

gdzie $0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n$ oraz wagi w_i są dodatnie i sumują się do jedności. Wtedy prawdopodobieństwo ruiny wyraża się wzorem (p-p ruiny zakładu ubezpieczeń, n- liczba portfeli):

$$\Psi(u) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \exp(-r_i \cdot u)$$

gdzie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ to n największych (różnych) rozwiązań równania

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot \frac{\beta_i}{\beta_i - r} = 1 + (1+\theta) \cdot \mu \cdot r$$

gdzie $0 \leqslant r_1 < \beta_1 < \ldots < r_n < \beta_n$ oraz gdzie μ to wysokość średniej szkody w portfelu. Wartości $a_1, a_2, \ldots, a_n$ otrzymamy rozwiązując układ równań liniowych, który daje się zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{\beta_1 - r_1} & \frac{\beta_1}{\beta_1 - r_2} & \cdots & \frac{\beta_1}{\beta_1 - r_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_n}{\beta_n - r_1} & \frac{\beta_n}{\beta_n - r_2} & \cdots & \frac{\beta_n}{\beta_n - r_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

6 Prawdopodobieństwo ruiny

Rozważmy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem o intensywności λ,
- wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają ten sam rozkład (przy czym zazwyczaj jest to rozkład wykładniczy)
- $c = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot E(Y_1), \qquad \theta > 0$

Klasyczny model procesu nadwyżki:

$$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$$

Prawdopodobieństwo ruiny:

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(t)} | T < \infty)}$$

gdzie T - moment ruiny, R - współczynnik dopasowania. R to dodatnie rozwiązanie równania:

$$M_W(r) = e^{cr}$$

czyli

$$E(e^{rW}) = e^{cr}$$

gdzie W można traktować jako wysokość pojedycznej szkody.

Wykładniczy rozkład wartości przyszłej szkody:

$$f(y) = \beta \cdot e^{-\beta y}$$

jeżeli intensywność składki jest równa

$$c = \frac{\lambda(1+\theta)}{\beta}$$

to przy wykładiczym rozkładzie wysokości szkód oraz procesie $N(t)$ (liczby szkód) będącym procesem Poissona mamy:

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{1+\theta}$$

$$R = \frac{\beta\theta}{1+\theta}$$

Ogólny wzór na prawdopodobieństwo, że dojdzie do ruiny, a głębokość będzie większa równa h:

$$G(0,h) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{E((Y-h)_+)}{E(Y)}$$

Bardzo ważna uwaga, przy dowolnym rozkładzie pojedycznej szkody

$$\Psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$