מבוא לשיטות חישוביות 361-1-2251

תרגיל מחשב I: אלגברה לינארית חישובית

סמסטר ב׳ תשע״ט

תאריך אחרון להגשה: 7.4.2019

הנחיות כלליות: מטרת מטלה זו לתרגל את פתרונן הנומרי של בעיות באלגברה לינארית, באמצעות שיטות החישוב שנלמדו בקורס, בעזרת תכנת MATLAB. יש להגיש **מסמך מסכם לעבודה, כקובץ PDF**, ובו כל התשובות לסעיפים השונים, כולל כל הפיתוחים והביטויים הסופיים, תרשימים ואיורים, הסברים, ניתוחים ופרשנות של התוצאות. יש לצרף את כל קבצי קוד ה- MATLAB שכתבתם במסגרת העבודה, **מתועדים במידה מספקת** המאפשרת הבנה של מה מומש. ניתן להגיש **מספר קבצי קוד**, אך יש להשמש **בקובץ MAIN יחיד**, שרק אותו יריץ הבודק, שיקרא לשאר הקבצים. עבודה שלא תאפשר שחזור של כלל התרשימים בה בקריאה לקובץ MATLAB יחיד או שהקוד בקבצים המצורפים לה אינו נהיר, לא תבדק ותחשב כלא הוגשה. על התרשימים להיות נוחים להבנה (לכלול מקרא, כותרות צירים, קווים וסמנים נוחים לקריאה) - יופחת ניקוד על תרשימים לא ברורים. למטלה משקל של 8% בציון הסופי וניתן לבצעה בזוגות.

רקע: המטריצה $\mathbf{A}$ מתארת את מדידות השפעתם המרחבית של אוסף גופים נקודתיים (למשל הפוטנציאל האלקטרוסטטי שיוצר אוסף גופים טעונים). נניח כי במערכת כלשהי ישנם N גופים בעלי משקלים (מטענים) $q_n, n\in[1,2,...,N]$ וכי השפעתם $v_m, m\in[1,2,...,M]$ נמדדת ב- M נקודות התבוננות. מטרתנו היא לבחון שיטות לחישוב המשקלים מתוך המדידות. לשם כך מנסחים את הבעיה כמערכת משוואות לינאריות בהצגה מטריצית $\mathbf{Aq}=\mathbf{v}$ כך ש:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}}$$

עבור המקרה בו כל הגופים הנקודתיים וכל נקודות המדידה מסודרים במרווחים קבועים $\Delta=0.1\text{m}$ לאורך שני קווים מקבילים, הנמצאים במרחק h כלשהו זה מזה, ניתן לכתוב את אברי המטריצה במפורש:

$$a_{mn}=\frac{1}{4\pi r_{mn}}=\frac{1}{4\pi\sqrt{h^2+(m-n)^2\Delta^2}}$$

הניחו כי הוקטור $\mathbf{q}$ מורכב מספרות מספרי ת.ז. שלכם משמאל לימין (ליחידים – השתמשו באותו מספר ת.ז. פעמיים)

שאלה 1: אלימיניציה גאוסית ופירוק LU (40 נק')

הניחו כי $M=N=18$ וכי $h=\Delta$. ענו על כל הסעיפים הבאים:

א. בנו את המטריצה $\mathbf{A}$. חשבו את המכפלה $\bar{\mathbf{v}}=\mathbf{Aq}$. חשבו את פירוק LU (עם Pivoting) ואת מספר המצב של $\mathbf{A}$, וכן את הנורמות $\|\mathbf{q}\|_2$, $\|\bar{\mathbf{v}}\|_2$ ו- $\|\mathbf{A}\|_F$.

ב. ממשו (ללא חישוב מטריצות הפכיות) שגרות לפתרון מערכות מהצורות 1) $\mathbf{Ly}=\mathbf{b}$ ו- 2) $\mathbf{Ux}=\mathbf{y}$. הפעילו שגרות אלה לחישוב פתרון $\bar{\mathbf{q}}$ למשוואה $\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}}=\bar{\mathbf{v}}$. חשבו השגיאה היחסית (בנורמה 2) של $\bar{\mathbf{q}}$ ביחס ל- $\mathbf{q}$.

ג. לוקטור המדידות $\bar{\mathbf{v}}$, נוסף בטעות וקטור שגיאת מדידה $\delta\mathbf{v}$ שאיבריו: $\delta v_m=10^{-2}\cdot\|\bar{\mathbf{v}}\|_2$. חזרו על סעיף ב' עבור המשוואה $\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}}=\bar{\mathbf{v}}+\delta\bar{\mathbf{v}}$. הסבירו את ההבדל בתוצאה.

ד. כעת, נפלה טעות במטריצה $\mathbf{A}$ ולכל איבר שלה נוספה שגיאה $\delta A_{mn}=10^{-2}\cdot\|\mathbf{A}\|_F$. חזרו על סעיף ב' עבור המשוואה $(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})\bar{\mathbf{q}}=\bar{\mathbf{v}}$. הסבירו את ההבדל בתוצאה.

ה. חזרו (ע"י לולאת for) על סעיפים א'-ד' עבור $h\in\{\Delta,2\Delta,5\Delta,10\Delta,20\Delta,50\Delta\}$. הדפיסו (ע"י פקודת loglog) את שגיאת החישוב היחסית בפתרון ואת מספר המצב, כפונקציה של h. הסבירו את ההתנהגות שהתקבלה.

<u>שאלה 2: פתרון מקורב בשיטות איטרטיביות (35 נק')</u>

עבור $M = N = 18$, ענו על הסעיפים הבאים:

א. עבור $h = \Delta/5$, בנו את המטריצה $\mathbf{A}$, חשבו את המכפלה $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{q}$ ופתרו את המשוואה $\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{v}}$ בשיטת Gauss-Seidel. השתמשו בסיבולת של 10^{-3} **(להתכנסות במובן שגיאה יחסית, לא מוחלטת)** ובניחוש התחלתי $\bar{\mathbf{q}}^{(0)} = \mathbf{0}$. שרטטו (ע"י שימוש ב- semilogy) את המרחק <u>היחסי</u> $\| \bar{\mathbf{q}}^{(k)} - \bar{\mathbf{q}}^{(k-1)} \| / \| \bar{\mathbf{q}}^{(k-1)} \|$ בין זוג פתרונות עוקבים כפונקציה של האינדקס k. לשם השוואה, הוסיפו לשרטוט גם את השגיאה <u>היחסית</u> האמיתית $\| \bar{\mathbf{q}}^{(k)} - \mathbf{q} \| / \| \mathbf{q} \|$. מה מספר האיטרציות שנדרש להתכנסות? מה השגיאה <u>היחסית</u> של $\bar{\mathbf{q}}$ הסופי ביחס ל- $\mathbf{q}$?

ב. חזרו על סעיף א' עבור $h = \Delta/2$ ו- $h = \Delta$. תארו את ההבדלים בתוצאות.

ג. חזרו על סעיף א', עבור שיטת Jacobi. דונו בתוצאות – האם השיטה מתכנסת? אם לא, מדוע?

ד. חזרו על סעיף ג' עבור מטריצה חדשה (לשימוש בסעיף זה בלבד) שאיבריה נתונים ע"י

$$a_{mn} = \frac{1}{4\pi r_{mn}^2} = \frac{1}{4\pi[h^2 + (m-n)^2\Delta^2]}.$$

תארו ונמקו את ההבדלים בתוצאות.

<u>שאלה 3: פתרון בשיטת Least Squares עבור מטריצה ריבועית (25 נק')</u>

עבור $M = N = 18$, ענו על הסעיפים הבאים:

א. בנו את המטריצה $\mathbf{A}$ עבור $h = 10\Delta$, חשבו את הדטרמיננטה של $\mathbf{A}$ ואת המכפלה $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{q}$. חשבו פתרון $\hat{\mathbf{q}}$ הממזער את השארית $\| \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{q}} \|_2$. חשבו את השגיאה היחסית של $\hat{\mathbf{q}}$ ביחס ל- $\mathbf{q}$.

ב. חזרו (ע"י לולאת for) על סעיף א', עבור $h \in \{\Delta/5, \Delta/2, \Delta, 2\Delta, 5\Delta, 10\Delta\}$. הדפיסו (ע"י פקודת loglog) את הדטרמיננטה ואת שגיאת החישוב היחסית בפתרון כפונקציה של h. הסבירו את ההתנהגות שהתקבלה.

פקודות MATLAB שימושיות לביצוע התרגיל: norm, diag, inv, cond, lu, meshgrid.

בהצלחה!