מטלת מחשב 3 – אינטרפולציה ואינטגרציה

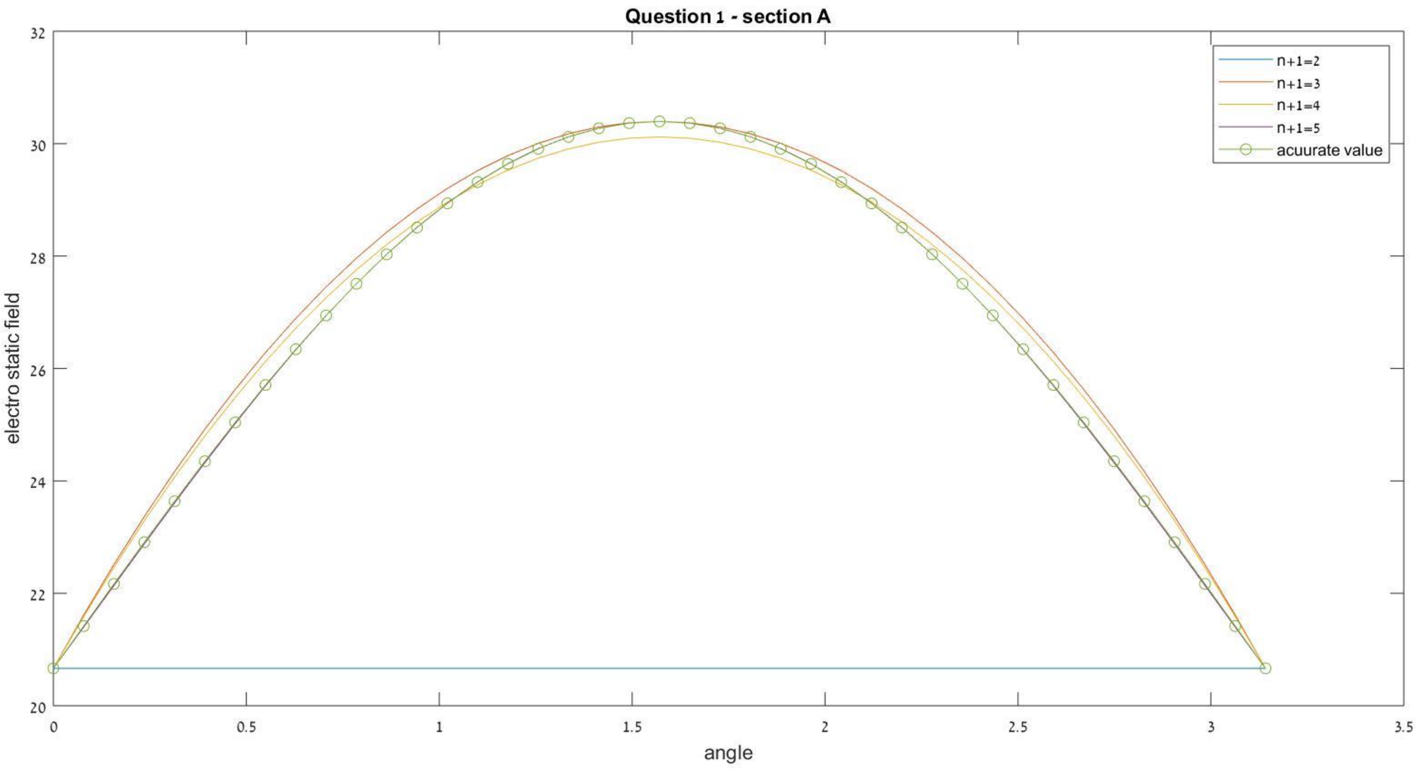
שם: תום קיסוס	מס' ת.ז.: 206018749
שם: דן בן עמי	מס' ת.ז.: 316333079

שאלה 1:

השגרה לחישוב אינטרפולציית לגרנג' מצורפת בסוף העבודה.

סעיף א:

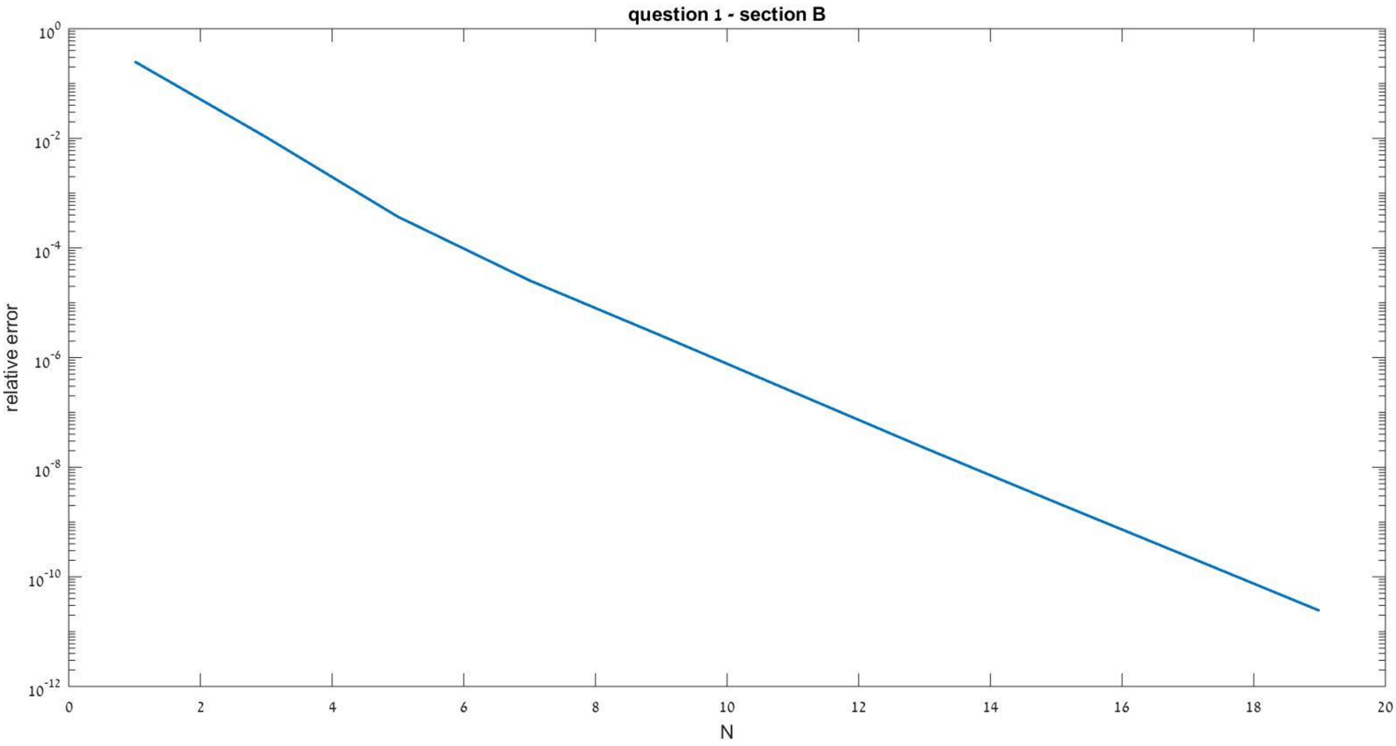
בסעיף זה, נתון לנו המרחק (r) והיה עלינו לחשב את הפוטנציאל המקורב ב41 נק' שונות כאשר נתונות לנו כל פעם כמות נק' דגימה שונות במרווחים קבועים (2,3,4,5), ולהציג את 41 נק' אלה בגרף לצד ערכי הפוטנציאל האמיתי.



מהתרשים ניתן לראות כי כאשר חוזרים על חישוב **עבור סדר אינטרפולצייה הולך וגדל**, כלומר ככל שניקח יותר נק' דגימה, **כך פולינום האינטרפולצייה מדוייק יותר** ו"קרוב" יותר לפונקציה המקורית של הפוטנציאל המדוייק.

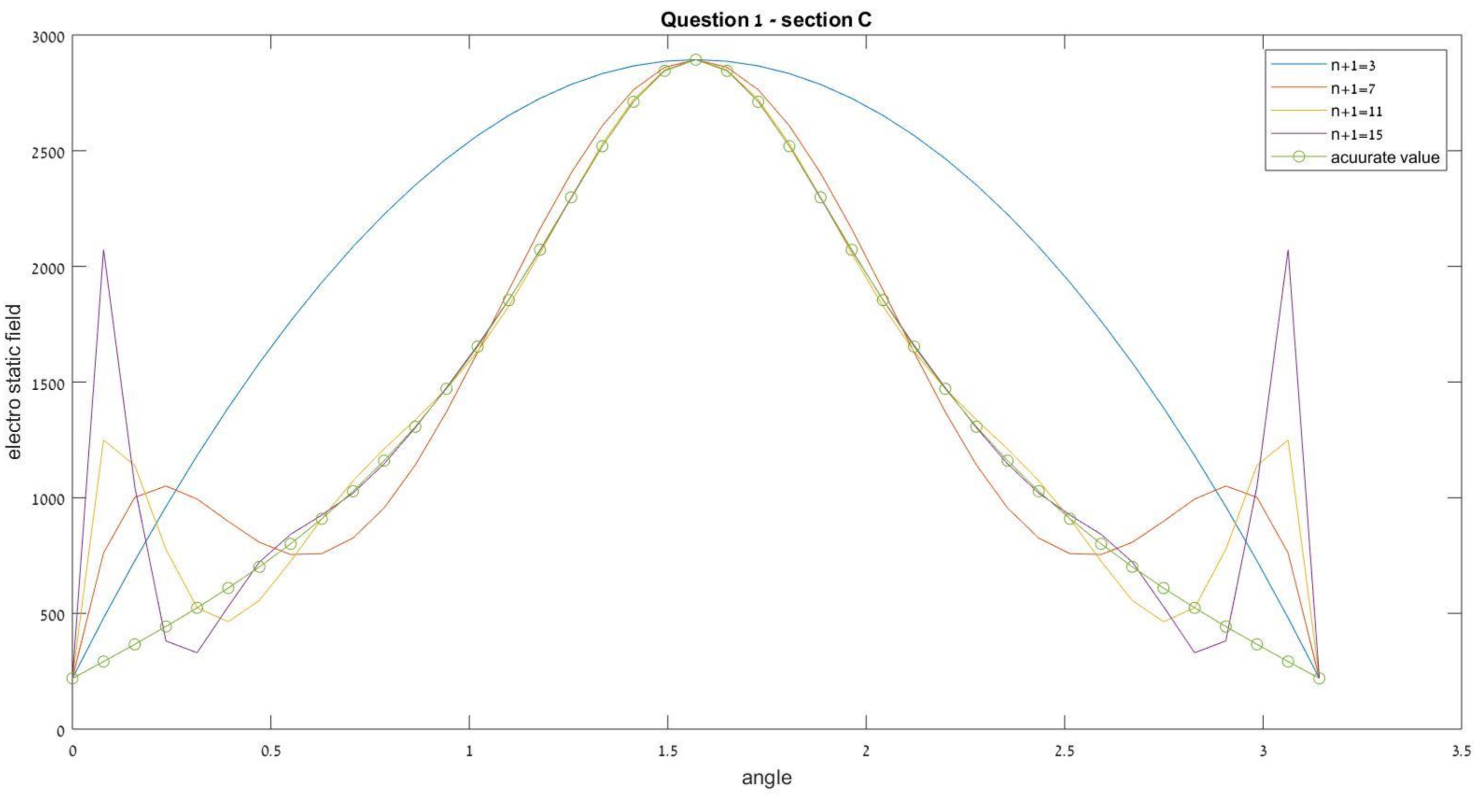
סעיף ב:

כעת נתבקשנו להציג גרף המתאר את השגיאה היחסית כפונק' שלסדר הפולינום, כלומר כפונקציה של כמות נק' הדגימה עבור 20 ,...,6 ,4 ,2 נק' דגימה.



ניתן לראות בתרשים ש**ככל שסדר הפולינום האינטרפולציה גדל** (כלומר ככל שדוגמים יותר נק' דגימה) **כך השגיאה היחסית קטנה** (כצפוי). לכן ניתן לדעת (עפ"י משפט שהוכח בכיתה) שהנגזרות מסדרים גבוהים חסומות.

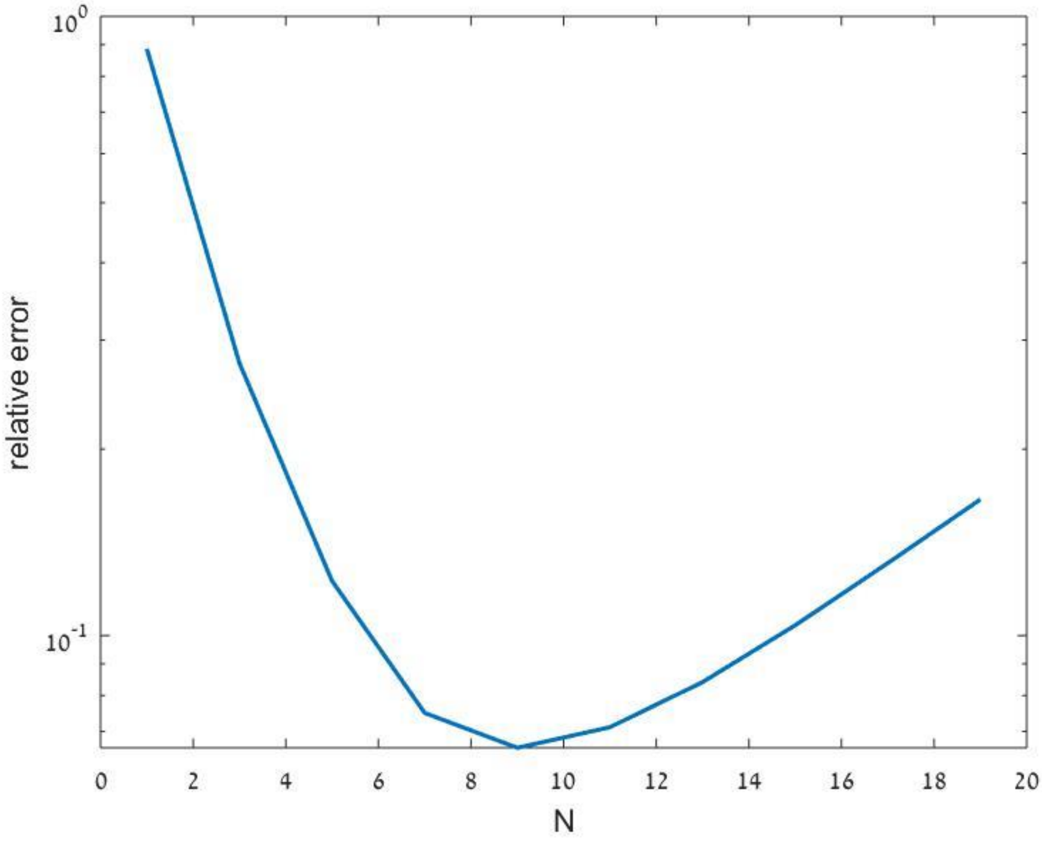
סעיף ג:



כעת חזרנו על החישוב מהסעיפים הקודמים, אך עבור מרחק קצר (r=0.004 m) וכמות נק' דגימה שונה (3,7,11,15).

ניתן לראות מהתרשים כי **ככול שעולה סדר פולינום האינטרפולציה** (ככול שלקחנו יותר נקודות דגימה) **אז התקבלו שגיאות גדולות יותר בקצוות** (פונקציית האינטרפולציה בקצוות "רחוקה" יותר מהפונקציה המקורית). **הסיבה להבדלים בתוצאות לעומת סעיף א' היא תופעת "רונגה".** לפי תופעה זו, העלאת סדר האינטרפולציה אינה מובילה להתכנסות לפונקציית המקור אלה לשגיאה משמעותית יותר בקצוות.

ההבדל בתוצאות נובע משינוי במרחק r, ניתן לראות שטווח הפונק' בסעיף א הוא בין 20 ל30 בעוד הטווח בפונק' בסעיף זה הוא בין 100 ל3000. ולכן ההבדלים בין ערכי הפוטציאל האמיתיים לערכים המקורבים יהיו גדולים יותר בסעיף זה, ולכן נוצרה לנו תופעת רונגה.

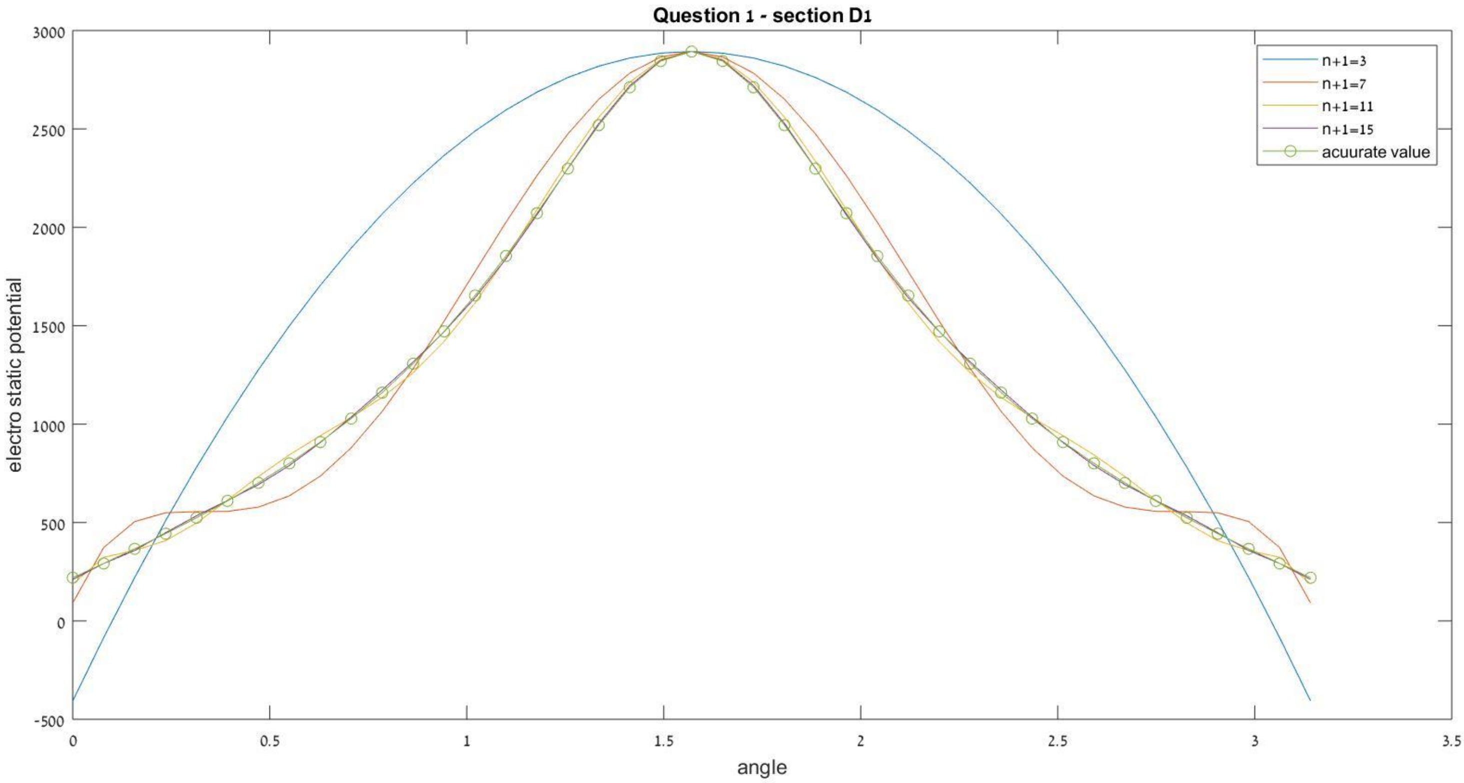


כצפוי, קיבלנו כי **השגיאה הולכת וקטנה ככל שעולה סדר האינטרפולצייה אך עד סדר מסויים**

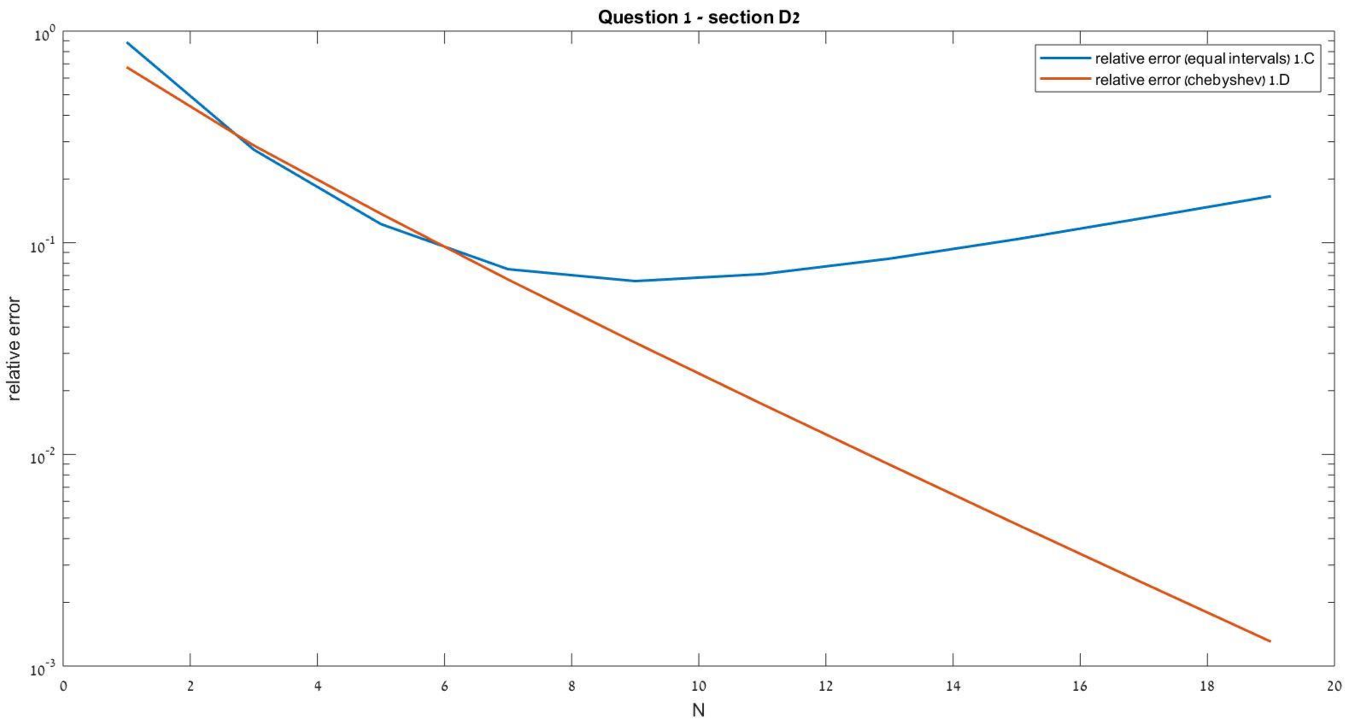
(n = 9) שהחל ממנו (כלומר כאשר מס' נקודות הדגימה במרווחים קבועים היה גדול מ 9) החלה להתקיים תופעת רונגה, ולכן **השגיאה הלכה וגדלה** ככל שסדר האינטרפולצייה עלה.

<u>סעיף ד:</u>

כעת בחרנו נקודות דגימה ע"י שורשי פולינום צ'בישב (לעומת בחירת נק' במרווחים קבועים בסעיפים הקודמים) וחזרנו שוב על החישוב מהסעיפים הקודמים. להלן הגרף שמוצר מבחירת נקודות הדגימה החדשות:



כצפוי **בחירת נקודות בצורה הזאת הביאה לריסון השגיאה בקצוות.** לכן קיבלנו פולינום אינטרפולציה מדוייק יותר (ביחס לפונקצייה המקורית) מאשר פולינום האינטרפולציה שחושב ע"י בחירת נקודות במרווחים שווים.



ניתן לראות מהתרשים שתחילה ככול שמספר הדגימות (סדר האינטרפולציה) עלה, השגיאה היחסית של שני פולינומי האינטרפולציה (מרווחים שווים וצ'בישב) ירדה, אך החל מסדר מסויים השגיאה היחסית בפולינום האינטרפולציה של המרווחים השווים עלה, כתוצאה מתופעת רונגה,

ואילו, **בחירת נקודות עם שורשי פולינום צ'בישב, מפצה על תופעת הרונגה** ולכן השגיאה היחסית של פולינום האינטרפולציה המשיכה לרדת וקטנה ככול שסדר האינטרפולציה עלה.

שאלה 2:

סעיף א:

ביטוי אנליטי כללי למערכת המשוואות הדרושה למציאת המקדמים α, β, γ מצורפת בסוף העבודה.

סעיף ב:

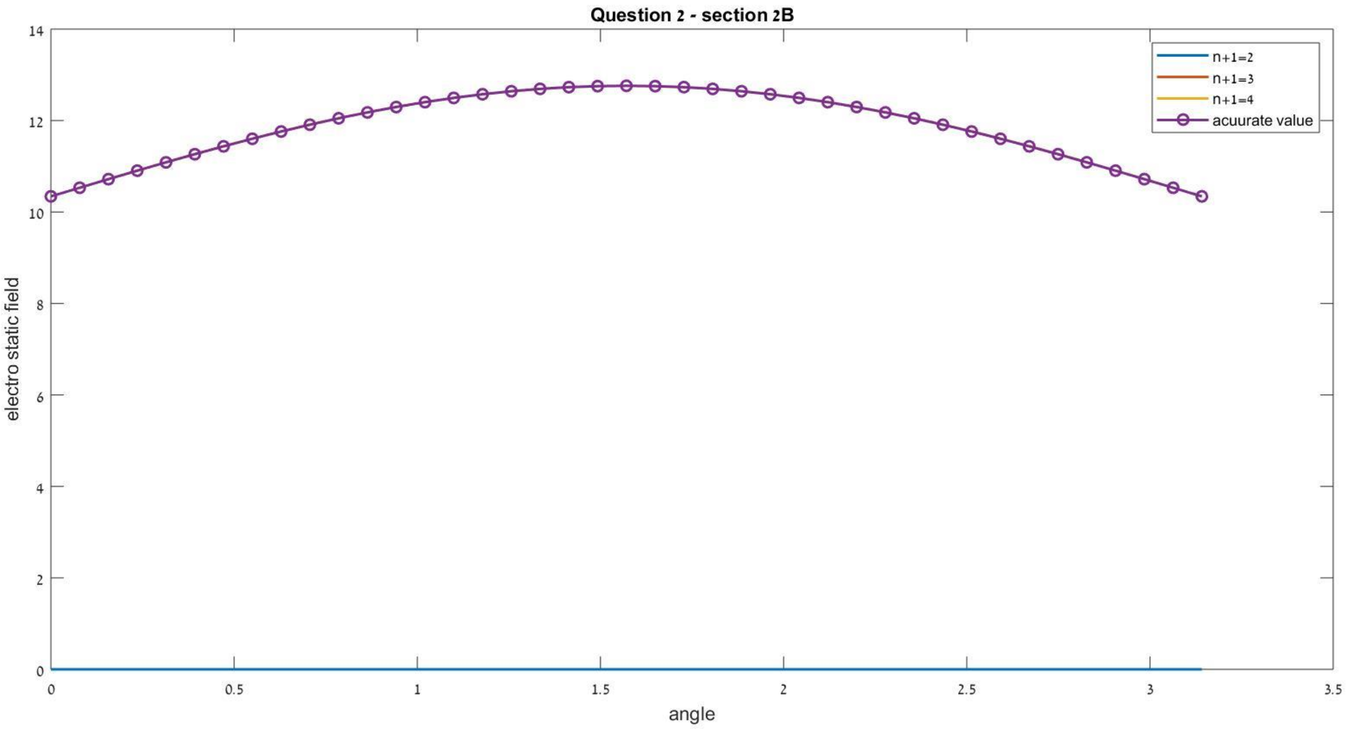
כעת נתון לנו כי r = 0.1 [m] . ונתבקשנו לחשב את המקדמים α, β, γ, כאשר נתונות כמות נק' דגימה שונה (2,3,4). להלן ערכי המקדמים בטבלה:

α	β	γ	n+1
0	0	0	2
10.3418399807941	2.41842500005704	8.88178419700125e-16	3
10.3418399807941	2.41617997390103	6.17363051063538e-16	4

ניתן לראות **שעבור n + 1 = 2 קיבלנו שכל המקדמים (אלפא, בטא, גמא) מתאפסים משום שהחישוב הנומרי מאבד משמעות** בפעולת החישוב של inv(v'*v)*v' עבור ערכים קטנים מאוד, וזאת כי המטריצה המתקבלת מהחישוב קרובה מאוד להיות סינגולרית.

ניתן לראות בטבלה **שהמקדם γ של $f3(\theta) = \cos(\theta)$ שואף ל0** ולפי כך **ניתן לדעת שלפונקציה** שלנו (phi) **אין** (כמעט) **חלק שמתנהג כמו פונקציית cos** ולכן מתבטל (כלומר המקדם מתאפס).

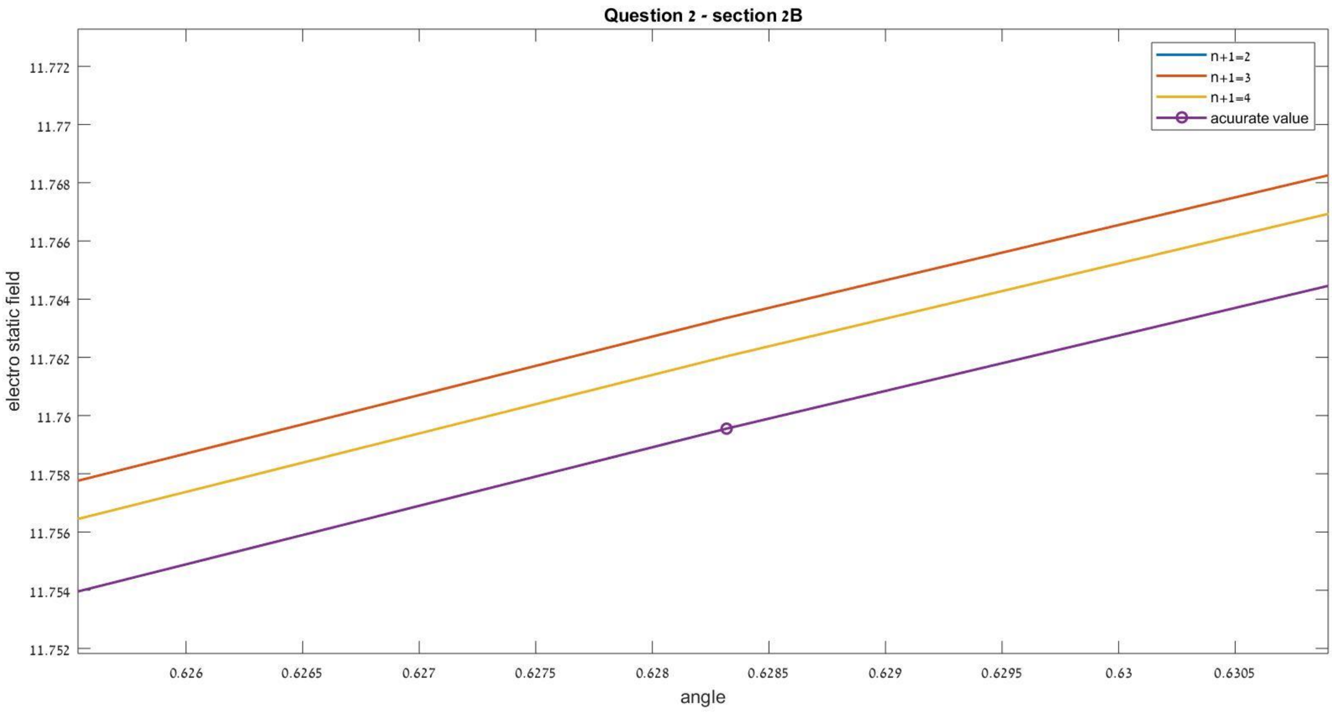
לאחר מכן נתבקשנו להציג את ערכי הפוטנציאל המקורב ב41 נק' שונות כפונקציה של הזווית, בור כמות נק דגימה שונות. להלן הגרף:



כמובן, יש גרף אחד על הישר phi = 0 (כחול), וזאת כיוון שתחילה כל המקדמים הם אפסים. עבור שאר הגרפים השגיאה מאוד נמוכה ולכן לא ניתן לראות אותם ללא zoom in .

מקירבת הגרפים זה לזה ניתן לראות שגם עבור מס' נמוך מאוד של נק' דגימה (עד 4) **יכולנו לשחזר במידת דיוק גבוהה** (יחסית לסעיף א בשאלה 1) **את הפונקצייה המקורית.**

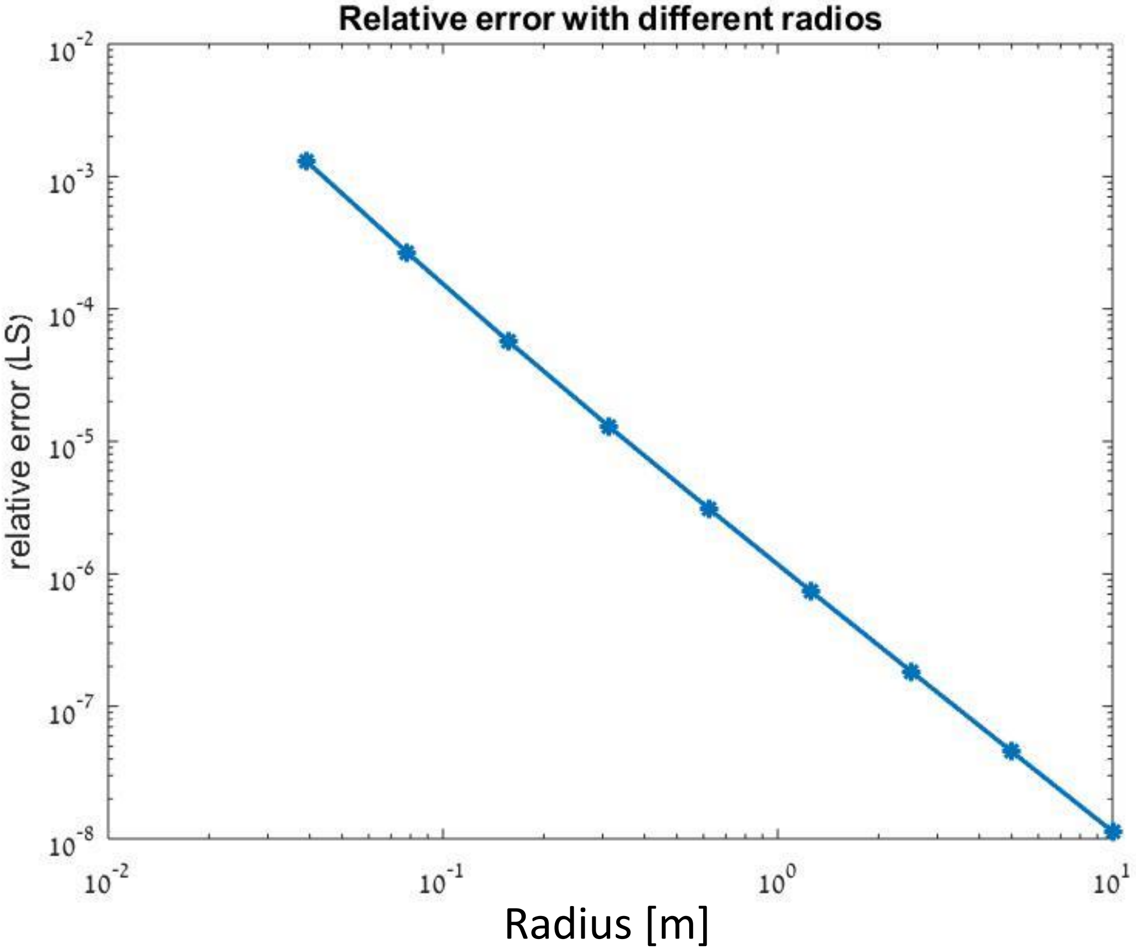
להלן תקריב:



ניתן לראות מהתקריב כי **ככל שסדר האינטרפולציה עלה** (כלומר ככל שלקחנו יותר נק' דגימה), **כך פולינום האינטרפולציה "קרוב" יותר לפונקציה המקורית.**

בהשוואה לסעיף א בשאלה 1, **ניתן לראות שעל פי שיטה זו (LS) רמת הדיוק גבוהה יותר** בסדר גודל **מאשר בשיטת פולינום לגראנג'**, ולכן ניתן לדעת שהפונקצייה המקורית ניתנת לתיאור בצורה די מדוייקת על ידי פונקציות הבסיס (sin ,α).

<u>סעיף ג:</u>



בסעיף זה הקטנו בכל פעם את הרדיוס. $r \in \{r_0, \frac{r_0}{2}, \frac{r_0}{2^2}, \dots, \frac{r_0}{2^8}\}$, כאשר $r_0 = 10m$.

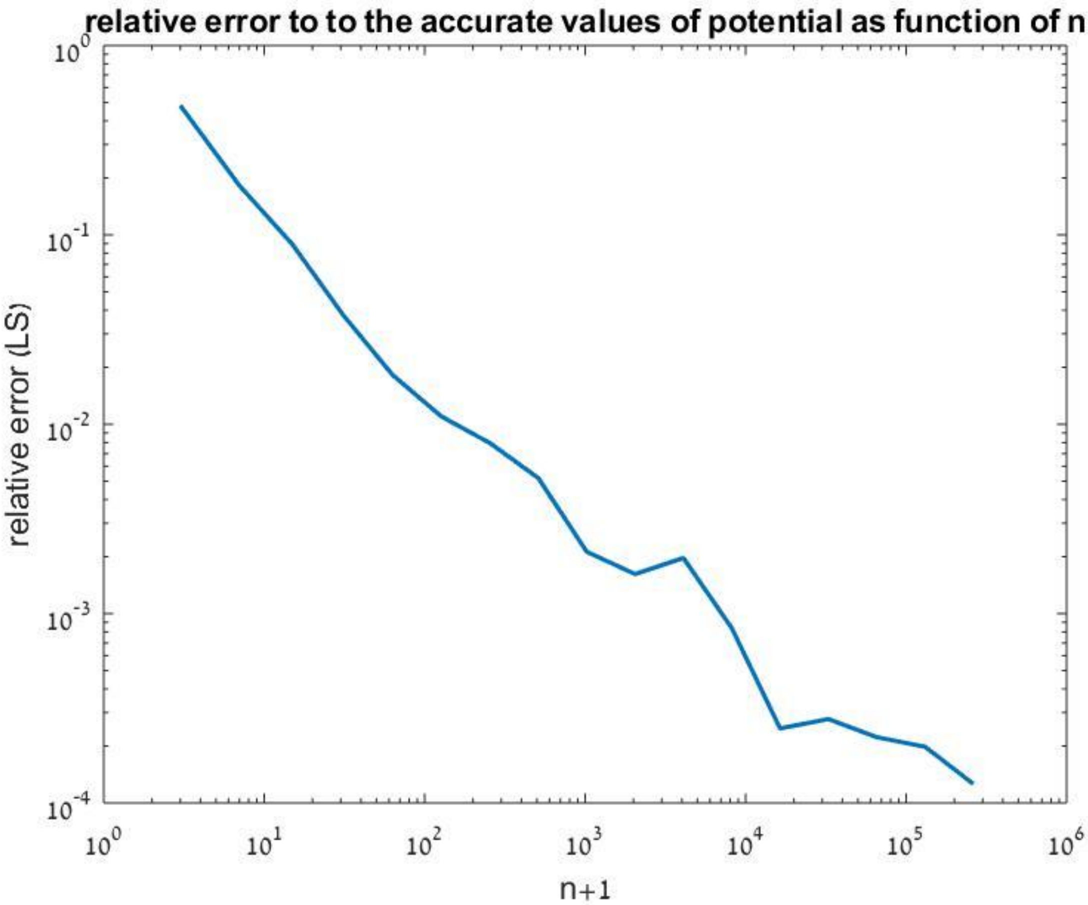
מהתרשים עולה כי **ככול שהרדיוס (r) הולך וקטן השגיאה היחסית הולכת וגדלה.**

לכן יכולת השיחזור של נקודות מדידה במרחקים קטנים מוגבלת ותסבול משגיאה יחסית גדולה, כלומר **ככל שהרדיוס קטן יכולת השחזור פוחתת (נקבל דיוק פחות טוב).**

<u>סעיף ד:</u>

כעת נוספה שגיאה אקראית למדידות עבור כל ערך מדוד, נתבקשנו לחזור על החישוב מסעיף ב

עבור $n+1 \in [4, 8, \dots 4*2^{16}]$ ולהדפיס את השגיאה היחסית ביחד לפוטנציאל המדוייק כפונקציה של n+1 .



הוספת שגיאה למדידות הפוטנציאל גורמת לשגיאה בשחזור ע"י פולינום האינטרפולציה. **השגיאה הולכת וקטנה ככול שסדר האינטרפולציה גדל (n גדל).**

מהתרשים הנ"ל ומהתרשים של סעיף ג עולה כי כבר **לאחר 1000 נקודות מדידה (n) השגיאה היחסית של נקודות השחזור עם השגיאה שווה בגודלה לשגיאה היחסית בחישוב ללא הוספת שגיאה למדידות**, ראה תרשים מסעיף ג, עבור רדיוס 10^-1 נקבל שגיאה יחסית בערך של 10^-3 זהה (בערך) לשגיאה היחסית עם שגיאה עבור 1000 נקודות דגימה שונות (תרשים נוכחי).

בנוסף, עבור הוספת שגיאה קטנה יותר למדידות ההתכנסות של השגיאה תהייה מהירה יותר, כלומר השגיאה היחסית תקטן מהר יותר.

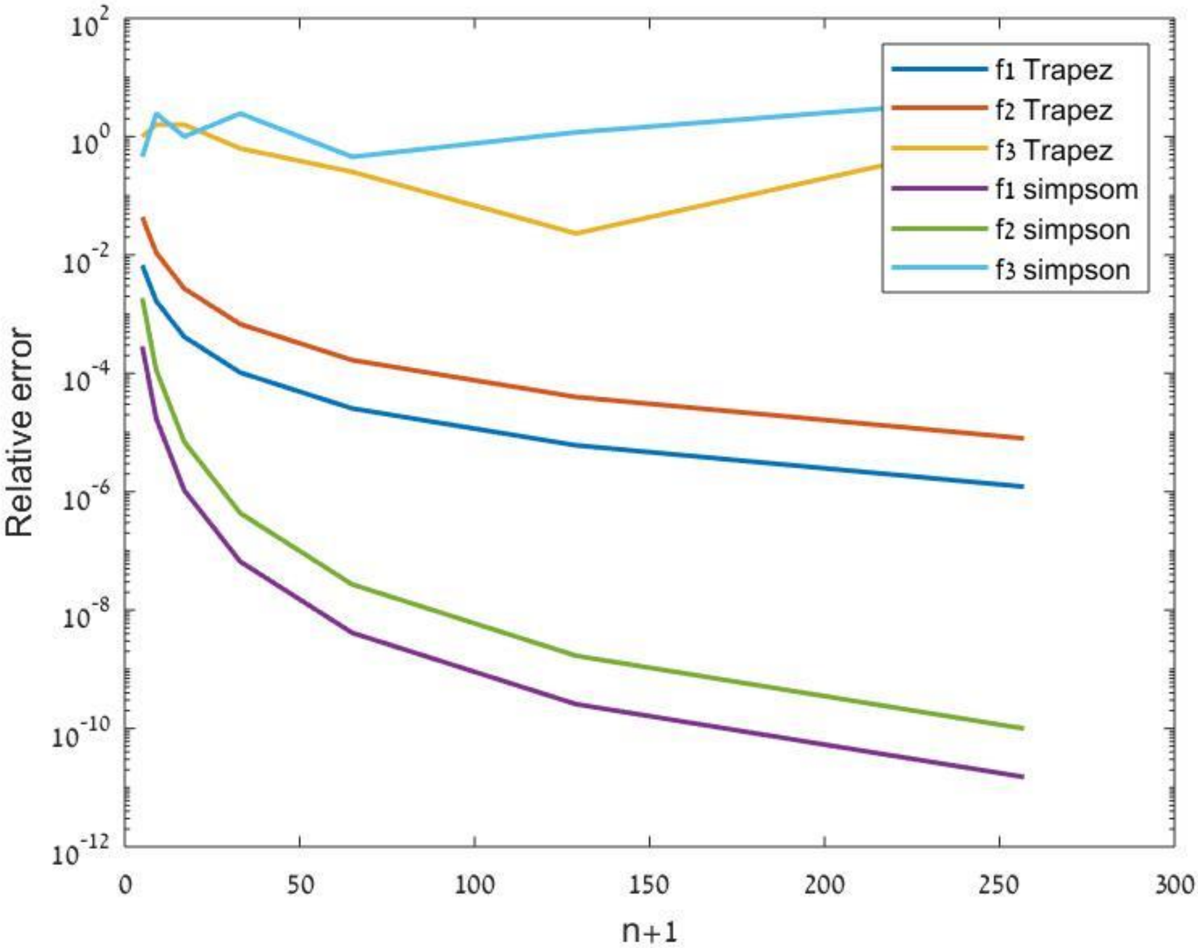
<u>שאלה 3:</u>

<u>סעיף א:</u>

שגרות בשיטת הטרפז ושיטת סימפסון לחשוב אינטגרל מסוים מצורפות בסוף העבודה.

<u>סעיף ב:</u>

כעת נתבקשנו לחשב קירוב לאינטגרל הנתון ע"י פונקציות הבסיס משאלה 2 ע"י נוסחאות אינטגרציה טרפז וסימפסון מצרפיות עבור $n+1 \in [5, 9, 17, \ldots, 513]$ נקודות במרווחים אחידים, ולהדפיס את השגיאה היחסית עבור שתי השיטות ביחס לחישוב האינטגרל בנקודה $n+1 = 513$.



מהתרשים עולה כי עבור שתי השיטות (טרפז וסימפסון) דיוק חישוב האינטגרל עולה עם הגדלת מספר הדגימות, כלומר **חישוב האינטגרל מתכנס ככול שמספר נקודות הדגימה עולה.**

בנוסף, ניתן לראות כי **עבור פונקציית הבסיס cos(x) (f3) נקבל שגיאה יחסית גדולה, ועבור מספר דגימות גדול מ 150 (בערך) השגיאה היחסית הולכת וגדלה ככול שמספר נקודות הדגימה עולה.**

לכן חישוב האינטגרל בשתי השיטות עבור פונקציית הבסיס cos(x) (f3) תסבול משגיאה יחסית גדולה.

מטלת מחשב 3

שאלה 1

יהי $n+1$ נק׳ דגימה $(\theta_0, y_0),(\theta_1, y_1),\dots,(\theta_n, y_n)$

כאשר: $0 \le j \le \pi$, $0 \le j \le n$

$$y_j = \frac{q^+}{4\pi r^+(\theta_j)} + \frac{q^-}{4\pi r^-(\theta_j)}$$

$$r^{\pm}(x) = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + \left(r\sin\theta \mp \frac{d}{2}\right)^2}$$

יהי $l_k(\theta)$ פולינום מהצורה הבאה

$$l_k(\theta) = \frac{\prod_{j\neq k}(\theta-\theta_j)}{\prod_{j\neq k}(\theta_k-\theta_j)}$$

פולינום אינטרפולציית לגראנז׳ ממעלה n יהיה:

$$P_n(\bar{\theta}) = y_0 l_0 + y_1 l_1 + \dots + y_n l_n = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(\bar{\theta})$$

שאלה ב:

א) הפולינום על גבי הקשת נתון ע"י:

$$\phi(\theta) \approx \alpha + \beta\sin(\theta) + \gamma\cos(\theta)$$

יהי $n+1$ נקודות דגימה של הקשת

$$(\theta_0, y_0), (\theta_1, y_1), \dots, (\theta_n, y_n)$$

למציאת פתרון Least-Squares נגדיר:

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_n)^T$$

$$f(x) = (1, \sin(\theta), \cos(\theta))$$

$$a = (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \sin(x_0) & \cos(x_0) \\ 1 & \sin(x_1) & \cos(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sin(x_n) & \cos(x_n) \end{pmatrix}$$

$$D = \left(y - \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \cdot a\right)^T \cdot \left(y - \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \cdot a\right)^T$$

נרצה למצוא את המטריצה D לקבלת שגיאה מינימלית.

לכן נפתור מע"ל $\bar{\bar{V}}\bar{a} = \bar{y}$ בשיטת LS והיא $\hat{a} = (V^TV)^{-1}V^Ty$

לכן הוקטור המקדמים יהיה $\hat{a}$.

שאלה 3

תחילה נממש בשיטת הטרפז שגרה לקירוב האינטגרל $\int_a^b g(t)\,dt$:

$$\frac{1}{2}(b-a)\left[g(a)+g(b)\right]$$

כעת נממש בשיטת סימפסון שגרה לקירוב האינטגרל $\int_a^b g(t)\,dt$:

$$\frac{b-a}{6}\left[g(a)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(b)\right]$$

יהי $g(t)=\frac{4}{\pi(1+t^2)}$ בקטע $t\in[0,1]$

תחילה נחשב פתרון אנליטי מדויק:

$$\int_0^1 g(t)\,dt=\int_0^1\frac{4}{\pi(1+t^2)}\,dt=\frac{4}{\pi}\arctan t\Big|_0^1=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=1$$

כעת נחשב קירוב ושגיאה לפי שיטת הטרפז:

$$\int_0^1 g(t)\,dt\approx\frac{1}{2}\cdot(1-0)\left[g(0)+g(1)\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\right)=\frac{3}{\pi}=$$

$$=0.9549296586$$

$$\varepsilon=\frac{1-0.9549296586}{1}=0.0450703414 5$$

כעת נחשב קירוב ושגיאה לפי שיטת סימפסון:

$$\int_0^1 g(t)\,dt\approx\frac{1-0}{6}\left[g(0)+4\cdot g\left(\frac{1+0}{2}\right)+g(1)\right]=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{\pi}+\frac{64}{5\pi}+\frac{2}{\pi}\right)=$$

$$=\frac{47}{15\pi}=0.9973709767$$

$$\varepsilon=\frac{1-0.9973709767}{1}=0.0026290233$$