

תרגיל מחשב 2:

הערות:

- לכל הטבלאות שיוצגו במהלך העבודה שמות המשתנים הם:

מס' איטרציה – Iteration

השגיאה בין זוג איברים עוקבים $(X_n - X_{(n-1)})$ – error

אפסילון (שגיאה מוחלטת) – E_n

איברי הסדרה – X_n

- לכל הסעיפים הנוגעים לבחינת סדר התכנסות וקבוע התכנסות מתוך הגרף נציין כי

הפונקציה בגרף נתונה ע"י המשוואה: $E_n = (\eta) \cdot \log(E_{n+1}) + \log A$ נראה כי השיפוע והקבוע הם

אכן סדר ההתכנסות (η) וקבוע ההתכנסות (A) :

$$\log(E_n) = \log(E_{n-1}) \cdot (\eta) + A$$

$$E_n = (E_{n-1}^\eta) \cdot A$$

$$E_n / ((E_{n-1})^\eta) = A$$

כלומר, זאת אכן הדרך בעזרתה נמצא את סדר ההתכנסות ואת קבוע ההתכנסות.

שאלה 1:

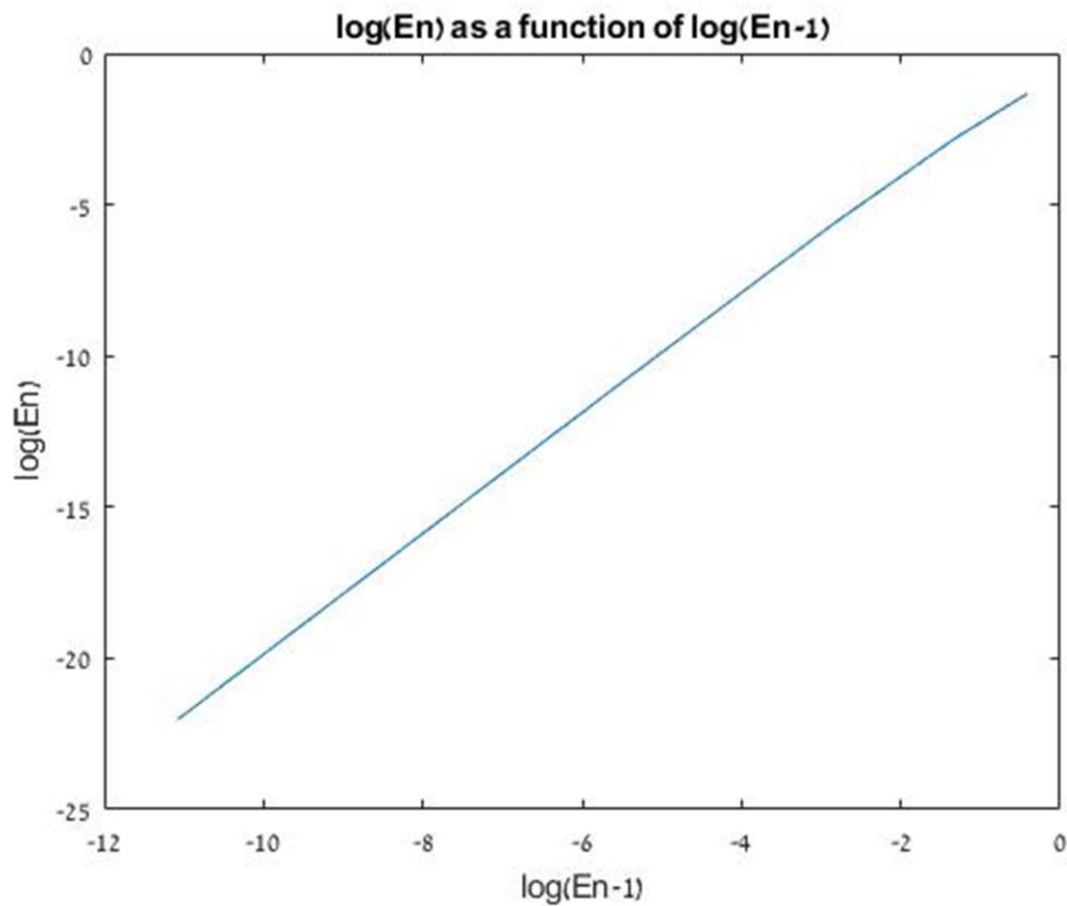
סעיף א:

מצורף כנספח בסוף העבודה.

סעיף ב:

נדרשו 8 איטרציות להתכנסות לפתרון s עם סיבולת של 12 ספרות משמעותיות.

Iteration	Xn	En	error
0	2.5776	1.2616	1
1	1.977	0.66094	0.60061
2	1.5798	0.26374	0.39719
3	1.3751	0.059002	0.20474
4	1.3198	0.00369	0.055312
5	1.3161	1.5447e-05	0.0036746
6	1.3161	2.7195e-10	1.5447e-05
7	1.3161	0	2.7195e-10
8	1.3161	0	0



קיבלנו ששיפוע הגרף, סדר ההתכנסות, הוא: 1.98, ואילו הגרף חותך את ציר ה γ בנקודה 0.01196 כלומר קבוע ההתכנסות הוא $A = 1.012$.

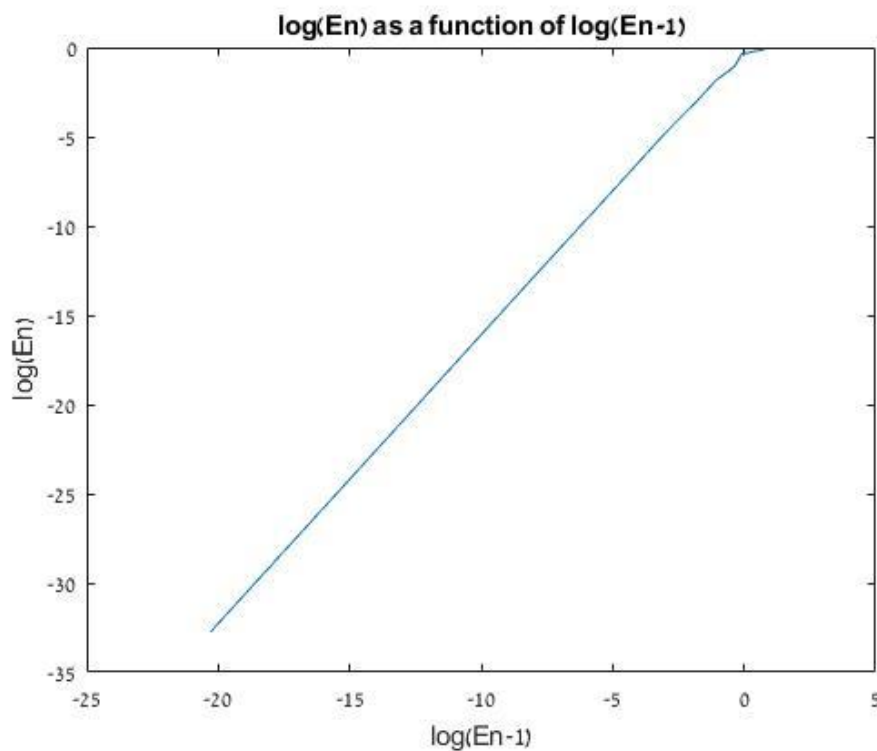
סדר ההתכנסות כמעט זהה לסדר שנידון בכיתה (כלומר לסדר ריבועי כפי שמצופה בשיטת ניוטון-רפסון), כלומר סדר 1.98 לעומר 2 וזאת מכיוון שעבדנו (המחשב עבד) עם מספרים סופיים ולכן קיימת שגיאה, אמנם קטנה אך מצטברת.

שאלה 2: (שיטת המיתר)

סעיף א:

נדרשו 12 איטרציות להתכנסות לפתרון s עם סיבולת של 12 ספרות משמעותיות.

Iteration	X_n	E_n	error
0	2.5776	1.2616	0
1	3.533	2.217	0.9554
2	2.2256	0.90951	1.3074
3	2.0111	0.69503	0.21448
4	1.6607	0.34461	0.35042
5	1.4763	0.16021	0.1844
6	1.3633	0.047229	0.11298
7	1.3237	0.0076017	0.039627
8	1.3165	0.00039535	0.0072064
9	1.3161	3.408e-06	0.00039194
10	1.3161	1.5353e-09	3.4065e-06
11	1.3161	5.9952e-15	1.5353e-09
12	1.3161	0	5.9952e-15



כעת קיבלנו ששיפוע הגרף, סדר ההתכנסות, הוא: 1.619 , ואילו הגרף חותך את ציר ה y בנקודה:
0.0932 כלומר קבוע ההתכנסות הוא $A = 1.097$.

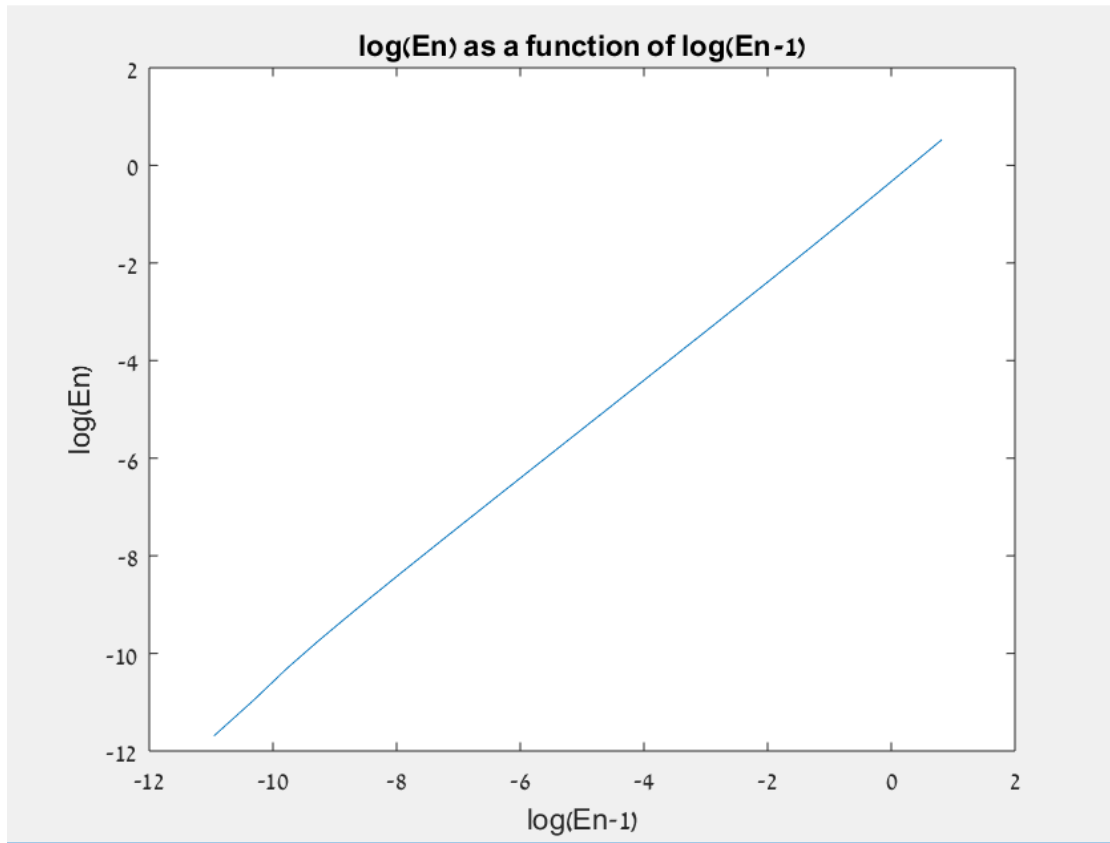
סדר ההתכנסות כמעט זהה לסדר שנידון בכיתה, כלומר לסדר אשר מזוהה בשיטת המיתר והוא 1.618 לעומת הסדר שקיבלנו: 1.619, וזאת מכיוון שעבדנו (המחשב עבד) עם מספרים סופיים ולכן קיימת שגיאה, אמנם קטנה אך מצטברת

שאלה 3:

NRO

סעיף א:

Iteration	X_n	E_n	error
0	5	3	1
1	4.2703	2.2703	0.72973
2	3.6967	1.6967	0.57356
3	3.2503	1.2503	0.44641
4	2.9075	0.90744	0.34284
5	2.6485	0.64852	0.25892
6	2.4567	0.45671	0.19181
7	2.3174	0.31743	0.13928
8	2.2182	0.21822	0.099214
9	2.1487	0.14872	0.069503
10	2.1007	0.10069	0.04803
11	2.0679	0.067842	0.032844
12	2.0456	0.045556	0.022286
13	2.0305	0.030517	0.015039
14	2.0204	0.020409	0.010109
15	2.0136	0.013632	0.0067767
16	2.0091	0.0090972	0.0045347
17	2.0061	0.0060665	0.0030307
18	2.0041	0.0040426	0.0020239
19	2.0027	0.0026918	0.0013508
20	2.0018	0.0017907	0.00090119
21	2.0012	0.0011896	0.00060109
22	2.0008	0.00078869	0.00040086
23	2.0005	0.00052139	0.0002673
24	2.0004	0.00034317	0.00017823
25	2.0002	0.00022435	0.00011882
26	2.0002	0.00014511	7.9239e-05
27	2.0001	9.2229e-05	5.2878e-05
28	2.0001	5.6998e-05	3.5231e-05
29	2	3.3391e-05	2.3607e-05
30	2	1.7494e-05	1.5897e-05
31	2	8.3672e-06	9.1265e-06
32	2	0	8.3672e-06
33	2	0	0



כעת קיבלנו ששיפוע הגרף, סדר ההתכנסות, הוא: 1.022 , ואילו הגרף חותך את ציר ה γ בנקודה -0.35 כלומר קבוע ההתכנסות הוא $A = 0.704$.

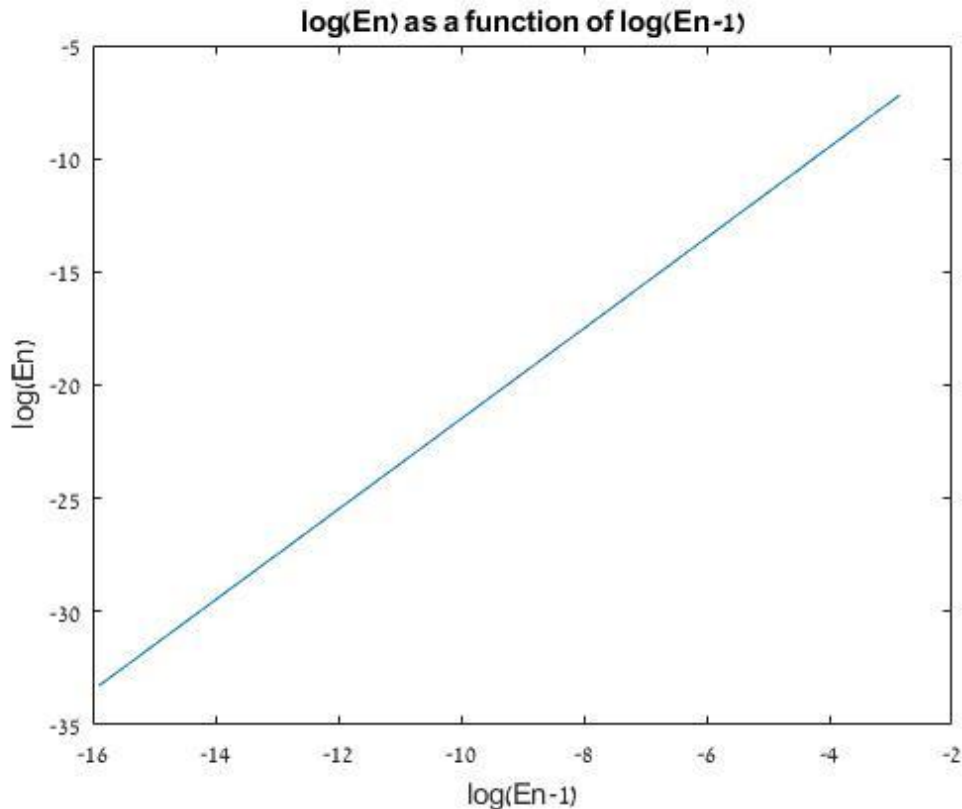
כעת קיבלנו קצב התכנסות לינארי (כמעט) וזאת כיוון שלשורש S היה ריבוי $q > 1$.

אך עם זאת לא קיבלנו $\eta = 1$ אלא $\eta = 1.022$ וזאת כיוון שעבדנו עם מספרים סופיים ולכן קיבלנו שגיאה מצטברת.

NR0

NR1

Iteration	Xn	En	error	V_xn	V_En	V_error
0	5	3	1	2.5776	0.57762	1
1	4.2703	2.2703	0.72973	1.9425	0.057547	0.63517
2	3.6967	1.6967	0.57356	1.9993	0.00074951	0.056797
3	3.2503	1.2503	0.44641	2	1.2487e-07	0.00074938
4	2.9075	0.90744	0.34284	2	3.5527e-15	1.2487e-07
5	2.6485	0.64852	0.25892	2	0	3.5527e-15
6	2.4567	0.45671	0.19181			
7	2.3174	0.31743	0.13928			
8	2.2182	0.21822	0.099214			
9	2.1487	0.14872	0.069503			
10	2.1007	0.10069	0.04803			
11	2.0679	0.067842	0.032844			
12	2.0456	0.045556	0.022286			
13	2.0305	0.030517	0.015039			
14	2.0204	0.020409	0.010109			
15	2.0136	0.013632	0.0067767			
16	2.0091	0.0090972	0.0045347			
17	2.0061	0.0060665	0.0030307			
18	2.0041	0.0040426	0.0020239			
19	2.0027	0.0026918	0.0013508			
20	2.0018	0.0017907	0.00090119			
21	2.0012	0.0011896	0.00060109			
22	2.0008	0.00078869	0.00040086			
23	2.0005	0.00052139	0.0002673			
24	2.0004	0.00034317	0.00017823			
25	2.0002	0.00022435	0.00011882			
26	2.0002	0.00014511	7.9239e-05			
27	2.0001	9.2229e-05	5.2878e-05			
28	2.0001	5.6998e-05	3.5231e-05			
29	2	3.3391e-05	2.3607e-05			
30	2	1.7494e-05	1.5897e-05			
31	2	8.3672e-06	9.1265e-06			
32	2	0	8.3672e-06			
33	2	0	0			



כעת קיבלנו ששיפוע הגרף, סדר ההתכנסות, הוא 1.998, ואילו הגרף חותך את ציר ה γ בנקודה -1.501 כלומר קבוע ההתכנסות הוא $A = 0.223$.

כעת קיבלנו קצב התכנסות ריבועי (כמעט) כפי שמצופה בשיטת ניוטון-רפסון, וזאת כיוון שתיקנו את הריבוי של השורש S להיות 1.

אך עם זאת לא קיבלנו $\eta = 2$ אלא $\eta = 1.998$ וזאת כיוון שעבדנו עם מספרים סופיים ולכן קיבלנו שגיאה מצטברת.

סעיף ג:

תחילה נחשב את הריבוי q באמצעות הקשר הנתון:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{((x-2)(x^2+2))/(5x^2-4x+6)}{(x-2)} \right\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ (x^2+2)/(5x^2-4x+6) \right\} = 1/3$$

לכן קיבלנו כי $q = 3$.

כעת עידכנו את האלגוריתם את האלגוריתם משאלה 1 כך שיאפשר התמודדות עם הריבוי q ולכן השיטה החדשה מתכנסת מהר יותר מאשר סעיף א אך עם זאת איטית יותר מסעיף ב ולכן ככל הנראה בקצב איטי מקצב ריבועי.

NR0

NR2

NR1

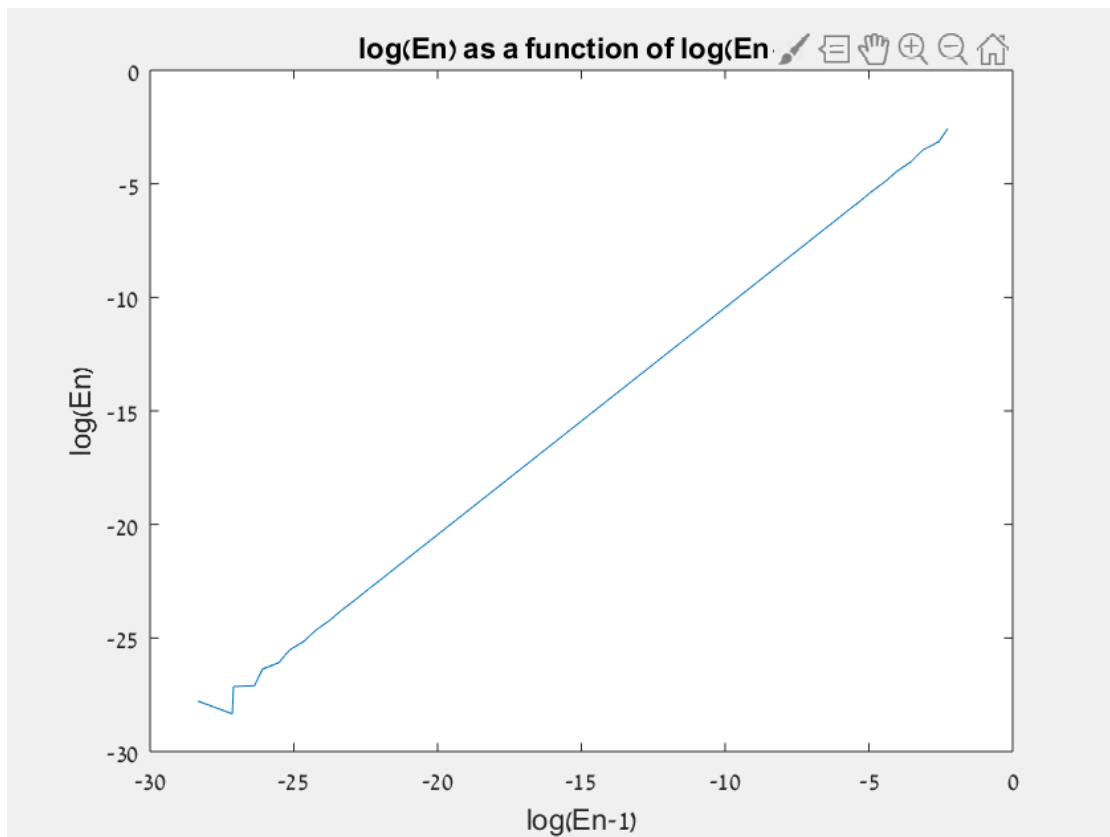
Iteration	Xn	En	error	Xn	En	error	V_xn	V_En	V_error
0	5	3	1	5	3	1	2.5776	0.57762	1
1	4.2703	2.2703	0.72973	2.8108	0.81081	2.1892	1.9425	0.057547	0.63517
2	3.6967	1.6967	0.57356	2.1079	0.10787	0.70294	1.9993	0.00074951	0.056797
3	3.2503	1.2503	0.44641	2.0025	0.0024781	0.10539	2	1.2487e-07	0.00074938
4	2.9075	0.90744	0.34284	2	1.242e-07	0.0024782	2	3.5527e-15	1.2487e-07
5	2.6485	0.64852	0.25892	1.9987	0.0012718	0.0012717	2	0	3.5527e-15
6	2.4567	0.45671	0.19181	2	1.1298e-06	0.0012707			
7	2.3174	0.31743	0.13928	2.0091	0.0090898	0.0090909			
8	2.2182	0.21822	0.099214	2	1.6813e-05	0.009073			
9	2.1487	0.14872	0.069503	2	1.147e-05	2.8283e-05			
10	2.1007	0.10069	0.04803	2	2.3359e-05	1.1889e-05			
11	2.0679	0.067842	0.032844	2	1.0733e-06	2.2285e-05			
12	2.0456	0.045556	0.022286	1.9863	0.0137	0.013699			
13	2.0305	0.030517	0.015039	2	4.0431e-05	0.01374			
14	2.0204	0.020409	0.010109	2	0	4.0431e-05			
15	2.0136	0.013632	0.0067767	2	0	0			
16	2.0091	0.0090972	0.0045347						
17	2.0061	0.0060665	0.0030307						
18	2.0041	0.0040426	0.0020239						
19	2.0027	0.0026918	0.0013508						
20	2.0018	0.0017907	0.00090119						
21	2.0012	0.0011896	0.00060109						
22	2.0008	0.00078869	0.00040086						
23	2.0005	0.00052139	0.0002673						
24	2.0004	0.00034317	0.00017823						
25	2.0002	0.00022435	0.00011882						
26	2.0002	0.00014511	7.9239e-05						
27	2.0001	9.2229e-05	5.2878e-05						
28	2.0001	5.6998e-05	3.5231e-05						
29	2	3.3391e-05	2.3607e-05						
30	2	1.7494e-05	1.5897e-05						
31	2	8.3672e-06	9.1265e-06						
32	2	0	8.3672e-06						
33	2	0	0						

שאלה 4:

סעיף א:

Iteration	Xn	En	error
0	1.5708	0.3247	1
1	2	0.10451	0.4292
2	1.8186	0.076899	0.18141
3	1.9389	0.043415	0.12031
4	1.866	0.029478	0.072893
5	1.9135	0.017982	0.04746
6	1.8837	0.011779	0.029762
7	1.9029	0.0073841	0.019163
8	1.8907	0.004763	0.012147
9	1.8985	0.0030175	0.0077805
10	1.8936	0.0019339	0.0049514
11	1.8967	0.0012304	0.0031643
12	1.8947	0.00078647	0.0020169
13	1.896	0.00050122	0.0012877
14	1.8952	0.00032004	0.00082126
15	1.8957	0.0002041	0.00052414
16	1.8954	0.00013027	0.00033437
17	1.8956	8.3099e-05	0.00021337
18	1.8954	5.3028e-05	0.00013613
19	1.8955	3.3831e-05	8.6859e-05
20	1.8955	2.1587e-05	5.5418e-05
21	1.8955	1.3773e-05	3.536e-05
22	1.8955	8.788e-06	2.2561e-05
23	1.8955	5.6071e-06	1.4395e-05
24	1.8955	3.5776e-06	9.1847e-06
25	1.8955	2.2827e-06	5.8603e-06
26	1.8955	1.4564e-06	3.7391e-06
27	1.8955	9.2927e-07	2.3857e-06
28	1.8955	5.9292e-07	1.5222e-06
29	1.8955	3.7831e-07	9.7123e-07
30	1.8955	2.4138e-07	6.1969e-07
31	1.8955	1.5401e-07	3.9539e-07
32	1.8955	9.8265e-08	2.5228e-07
33	1.8955	6.2698e-08	1.6096e-07
34	1.8955	4.0004e-08	1.027e-07
35	1.8955	2.5525e-08	6.5528e-08
36	1.8955	1.6285e-08	4.181e-08
37	1.8955	1.0391e-08	2.6677e-08
38	1.8955	6.6296e-09	1.7021e-08
39	1.8955	4.2305e-09	1.086e-08
40	1.8955	2.6987e-09	6.9293e-09
41	1.8955	1.7225e-09	4.4212e-09
42	1.8955	1.0985e-09	2.8209e-09
43	1.8955	7.0141e-10	1.7999e-09
44	1.8955	4.4698e-10	1.1484e-09
45	1.8955	2.8575e-10	7.3273e-10
46	1.8955	1.8177e-10	4.6751e-10
47	1.8955	1.1653e-10	2.983e-10
48	1.8955	7.3797e-11	1.9033e-10
49	1.8955	4.7639e-11	1.2144e-10
50	1.8955	2.9843e-11	7.7482e-11
51	1.8955	1.9594e-11	4.9437e-11
52	1.8955	1.1949e-11	3.1543e-11
53	1.8955	8.177e-12	2.0126e-11
54	1.8955	4.6645e-12	1.2842e-11
55	1.8955	3.529e-12	8.1934e-12
56	1.8955	1.6989e-12	5.2278e-12
57	1.8955	1.6369e-12	3.3358e-12
58	1.8955	4.9161e-13	2.1285e-12
59	1.8955	8.6664e-13	1.3582e-12
60	1.8955	0	8.6664e-13

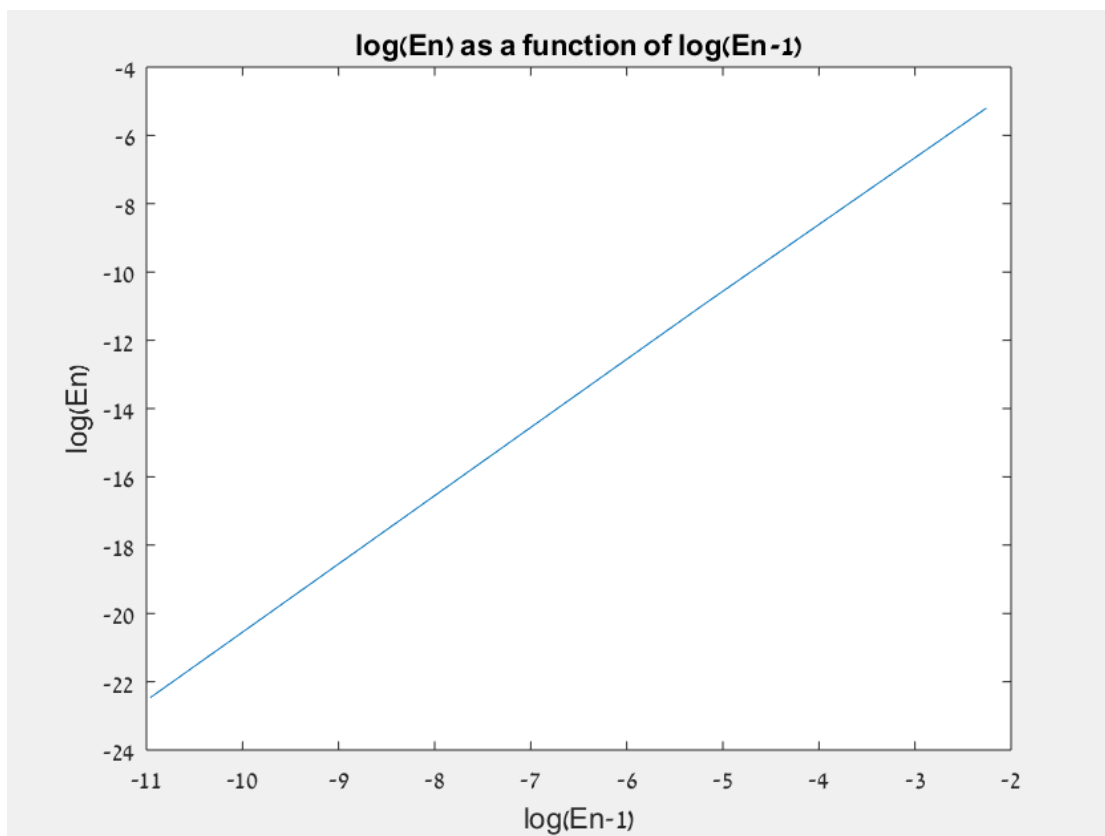
ניתן לראות שהשיטה התכנסה לפתרון $x = 1.8955$.



כעת באופן דומה, שיפוע הגרף, כלומר קצב ההתכנסות הוא 1.0022 כלומר לינארי (כמעט). ואילו נק' החיתוך בציר ה y היא -0.4174 ולכן הקבוע A הוא $e^{(-0.983)}$ כלומר 0.658.

כיוון שהשורש שאליו התכנסה השיטה הוא מריבוי 1 אזי גם באופן תיאורטי קצב ההתכנסות של השיטה הוא לינארי ולכן קיים הבדל מינורי בין קצב ההתכנסות שקיבלנו $\eta = 1.0022$ לקצב התיאורטי אותו היינו אמורים לקבל $\eta = 1$ וזאת כיוון שעבדנו (המחשב עבד) עם ייצוג מספרים סופי, ולכן קיבלנו שגיאה מצטברת.

Iteration	X_n	E_n	error
0	1.5708	0.3247	1
1	2	0.10451	0.4292
2	1.901	0.0055013	0.099004
3	1.8955	$1.7378e-05$	0.0054839
4	1.8955	$1.7473e-10$	$1.7378e-05$
5	1.8955	0	$1.7473e-10$
6	1.8955	0	0



כעת שיפוע הגרף, כלומר קצב ההתכנסות הוא 1.984 כלומר ריבועי (כמעט). ואילו נק' החיתוך בציר ה y היא -0.637 ולכן הקבוע A הוא $e^{(-0.637)}$ כלומר 0.528 .

כעת בשיטת NR קיבלנו קצב התכנסות ריבועי לעומת שיטת נק' השבת בסעיף א שבה קיבלנו קצב התכנסות לינארי כצפוי.

סעיף ג:

על מנת למצוא שורשים נוספים למשוואה $f(x)=0$ נמצא את התחום שבה שיטת נקודת השבת תתכנס ע"י דרישה של התנאי $|g'(x)| < 1$ כלומר, אי השוויון $|\cos(x)| < 1/2$.

כלומר קיבלנו שהשיטה תתכנס (בוודאות) עבור $2\pi/3 > x > \pi/3$, $2\pi/3 < x < -\pi/3$.

לכן כיוון שבחרנו x בתחום החיובי כעת נבחר x בתחום השלילי, לדוגמא: $-\pi/2$.

Iteration	X_n	E_n	error
0	-1.5708	0.3247	1
1	-2	0.10451	0.4292
2	-1.901	0.0055013	0.099004
3	-1.8955	1.7378e-05	0.0054839
4	-1.8955	1.7473e-10	1.7378e-05
5	-1.8955	0	1.7473e-10
6	-1.8955	0	0

השיטה התכנה לשורש השלילי -1.8955 (לעומת תנאי התחלתי $x=\pi/2$ בו השיטה התכנסה ל 1.8955).

קיים שורש נוסף למשוואה ב $x=0$ אך לא ניתן לקבוע תחום התכנסות אליו באמצעות הפונקציה הנתונה $g(x)$ מכיוון ש $x=0$ לא נמצא בתחום התכנסות.

סעיף ד:

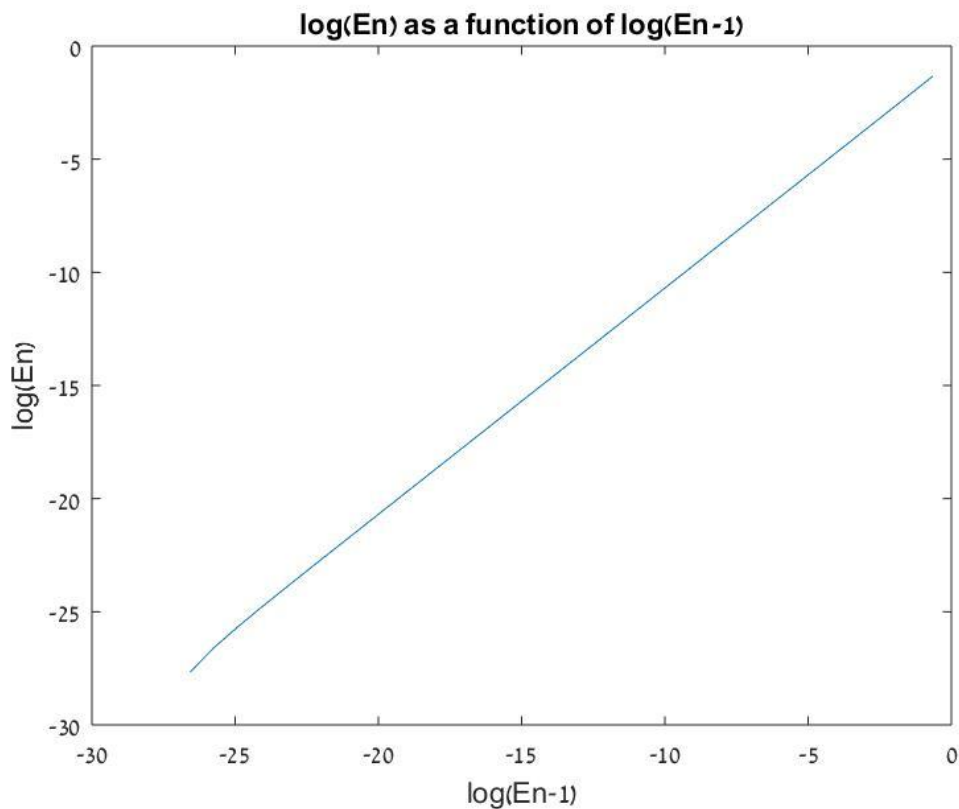
נמצא את התחום שבה שיטת נקודת השבת תתכנס ע"י דרישה של התנאי $|g'(x)| < 1$.

נקבל כי עבור התחום: $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ - השיטה תתכנס (בוודאות).

לכן נבחר $x_0 = 1$.

Iteration	Xn	En	error
0	1	1	1
1	0.5236	0.5236	0.4764
2	0.26489	0.26489	0.25871
3	0.13283	0.13283	0.13205
4	0.066466	0.066466	0.066368
5	0.033239	0.033239	0.033227
6	0.01662	0.01662	0.016619
7	0.0083102	0.0083102	0.00831
8	0.0041551	0.0041551	0.0041551
9	0.0020776	0.0020776	0.0020776
10	0.0010388	0.0010388	0.0010388
11	0.00051939	0.00051939	0.00051939
12	0.0002597	0.0002597	0.0002597
13	0.00012985	0.00012985	0.00012985
14	6.4924e-05	6.4924e-05	6.4924e-05
15	3.2462e-05	3.2462e-05	3.2462e-05
16	1.6231e-05	1.6231e-05	1.6231e-05
17	8.1155e-06	8.1155e-06	8.1155e-06
18	4.0577e-06	4.0577e-06	4.0577e-06
19	2.0289e-06	2.0289e-06	2.0289e-06
20	1.0144e-06	1.0144e-06	1.0144e-06
21	5.0722e-07	5.0722e-07	5.0722e-07
22	2.5361e-07	2.5361e-07	2.5361e-07
23	1.268e-07	1.268e-07	1.268e-07
24	6.3402e-08	6.3401e-08	6.3402e-08
25	3.1701e-08	3.17e-08	3.1701e-08
26	1.5851e-08	1.585e-08	1.5851e-08
27	7.9253e-09	7.9243e-09	7.9253e-09
28	3.9626e-09	3.9617e-09	3.9626e-09
29	1.9813e-09	1.9803e-09	1.9813e-09
30	9.9066e-10	9.8969e-10	9.9066e-10
31	4.9533e-10	4.9436e-10	4.9533e-10
32	2.4766e-10	2.467e-10	2.4766e-10
33	1.2383e-10	1.2286e-10	1.2383e-10
34	6.1916e-11	6.0949e-11	6.1916e-11
35	3.0958e-11	2.9991e-11	3.0958e-11
36	1.5479e-11	1.4512e-11	1.5479e-11
37	7.7395e-12	6.7721e-12	7.7395e-12
38	3.8698e-12	2.9023e-12	3.8698e-12
39	1.9349e-12	9.6744e-13	1.9349e-12
40	9.6744e-13	0	9.6744e-13

כעת השיטה מתכנסת לפתרון $x = 0$.



שיפוע הגרף, כלומר קצב ההתכנסות הוא 0.998 כלומר לינארי (כמעט). ואילו נק' החיתוך בציר ה y היא -0.717 ולכן הקבוע A הוא $e^{(-0.693)}$ כלומר 0.488.

כיוון שהשורש שאליו התכנסה השיטה הוא מריבוי 1 אזי גם באופן תיאורטי קצב ההתכנסות של השיטה הוא לינארי ולכן קיים הבדל מינורי בין קצב ההתכנסות שקיבלנו $\eta = 0.9998$ לקצב התיאורטי אותו היינו אמורים לקבל $\eta = 1$. וזאת כיוון שעבדנו (המחשב עבד) עם ייצוג מספרים סופי, ולכן קיבלנו שגיאה מצטברת.

2 $f(x) = x^4 - 3$

פר: מר קיסר
ז"ח: 206018749

פר: דן בן עמר
ז"ח: 316333079

1 $f(x)$

$$f(x) = x^4 - 3 = 0$$

ל. נחנה המשוואה

3. קטע $[a, b]$ ובו נחיש הנחה שא שבתה התכנסה השל
נחל - רבסון. מן $b=5$

נבחר, האם חזית הנגזרת להתכנסות השל: עבור $[a, 5]$

1. $f'(x) = 4x^3 > 0, \forall x \in [a, 5] \ (a > 0)$

הנגזרת רציפה וחלופית ממש של $x \in [a, 5]$, ולכן הנוק' מונוטונית.

2. $f''(x) = 12x^2 \neq 0, \forall x \in [a, 5] \ (a > 0)$

כאשר הנגזרת השנייה רציפה וחלופית ממש, ולכן אין נק' כיתה בקטע.

3. $f(5) = 625 > 0 \Rightarrow f(a) < 0 \Rightarrow a^4 < 3 \Rightarrow a < \sqrt[4]{3} \approx 1.316 \Rightarrow \underline{a=1}$

4. $\left| \frac{f(5)}{f'(5)} \right| = \frac{625}{500} = \frac{5}{4} < 5 - 1 = 4$ $\left| \frac{f(1)}{f'(1)} \right| = \left| \frac{-2}{4} \right| = \frac{1}{2} < 5 - 1 = 4$

כאשר כל הנגזרות מתקיימים ולכן השל התכנסה בקטע $[1, 5]$

שורש המשוואה הם $s_{1,2} = \pm 3^{\frac{1}{4}}$ וכיוון שהקטע אינו בתוכו
חלופי ממש אזי בהכרח השל התכנס לשורש $s = 3^{\frac{1}{4}}$.