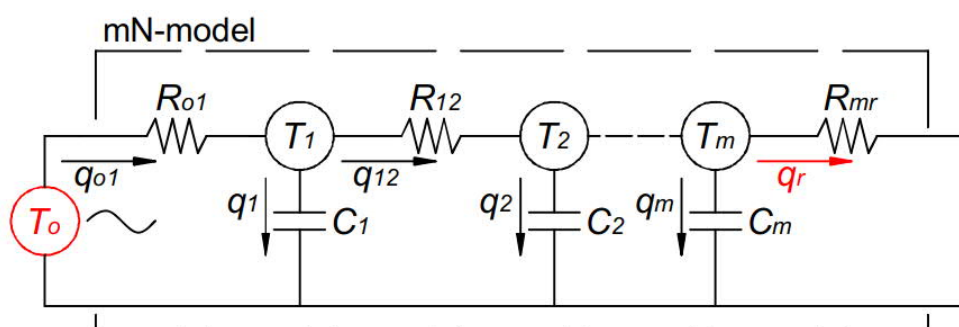

EFFECTIEVE WARMTECAPACITEIT VAN EEN VLAK BOUWDEEL

1. Een vlak bouwdeel, zoals een muur of wand, kunnen we opvatten als een lineair thermisch netwerk. Het bouwdeel kunnen we daartoe denkbeeldig in dunne lagen verdelen. Elke laag komt overeen met een knoop van het thermisch netwerk waaraan de (statische) thermische capaciteit van de laag wordt gekoppeld. De knopen zijn met elkaar verbonden door de thermische weerstand van de laag tussen elke twee opeenvolgende knopen. Zodoende komen we tot een lineair multiknoopenmodel (mN -model) van het vlakke bouwdeel. Een mN -model met m temperatuurknopen hoort samen met een stelsel van m differentiaalvergelijkingen.

Het doel van de bepaling van de 'effectieve warmtecapaciteit' houdt in dat het mN -model wordt vereenvoudigd tot een 'evenwaardig' $1N$ -model.



2. Daartoe beschouwen we de volgende situatie: een vlakke wand met een sinusoidaal variërende buitentemperatuur T_o aan de ene kant en een constante binnentemperatuur T_r aan de andere kant, waarbij de gemiddelde waarde van de sinusvormig variërende buitentemperatuur samenvalt met de constante waarde van de binnentemperatuur. In die bijzondere situatie is het lineair thermisch netwerk van de wand met m knooppunten vanuit wiskundig oogpunt volkomen analoog aan een elektrisch wisselstroomnetwerk bestaande uit weerstanden en condensatoren. De netwerkoplosmethoden uit de elektriciteitsleer kunnen hier nu evengoed aangewend worden om de warmtestromen tussen de knooppunten en de temperaturen van de knooppunten te bepalen.

De luswet van Kirchhoff toegepast op de buitenste lus (zie schema hierboven) levert de vergelijking:

$$-R_{o1}\hat{q}_{o1} - \frac{\hat{q}_1}{j\omega C_1} = -\hat{T}_o \quad (1)$$

De 'hoedjes' duiden aan dat de sinusoidaal variërende grootheden warmtestroom q en temperatuur T in complexe notatie zijn uitgedrukt.

De luswet van Kirchhoff toegepast op een intermediaire lus in het netwerk levert de vergelijking:

$$\frac{\hat{q}_i}{j\omega C_i} - R_{i(i+1)} \cdot \hat{q}_{i(i+1)} - \frac{\hat{q}_{i+1}}{j\omega C_{i+1}} = 0 \quad (2)$$

$R_{i(i+1)}$ is de thermische weerstand tussen knooppunt i en het volgende knooppunt $i+1$ in het netwerk; $q_{i(i+1)}$ is de warmtestroom die tussen deze knopen vloeit.

De luswet van Kirchhoff toegepast op de binnenste lus levert de vergelijking:

$$\frac{\hat{q}_m}{j\omega C_m} - R_{mr}\hat{q}_r = 0 \quad (3)$$

Daarnaast is er nog de knooppuntwet van Kirchhoff. In elk knooppunt i moet gelden dat de som van de toekomstende warmtestromen nul is (vertrekkende warmtestromen krijgen dan een negatief teken):

$$\hat{q}_{(i-1)i} - \hat{q}_i - \hat{q}_{i(i+1)} = 0 \quad (4)$$

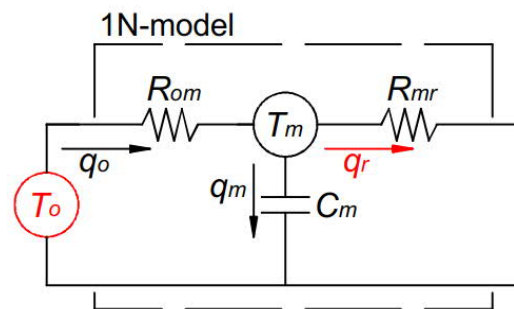
$q_{(i-1)i}$ is de warmtestroom die toekomt in knooppunt i , q_i is de warmtestroom die naar de thermische capaciteit van knooppunt i vloeit en $q_{i(i+1)}$ is de warmtestroom die vanuit knooppunt i naar het volgende knooppunt vloeit.

M.b.v. de luswet en knooppuntwet van Kirchhoff kunnen we $2m+1$ vergelijkingen in $2m+1$ onbekenden opstellen, die we m.b.v. matrixalgebra kunnen oplossen (bv. m.b.v. de Gauss eliminatie methode). Het eenvoudigste is natuurlijk om de computer al het rekenwerk te laten verrichten.

De tabel in bijlage 1 geeft de algemene matrixstructuur van de coëfficiëntenmatrix (A) weer voor een 10N-model (wandmodel met 10 temperatuur-knooppunten). Deze matrixstructuur kan eenvoudig uitgebreid worden naar een willekeurig aantal knooppunten. De kolom 'X' is de vector met onbekende warmtestromen en de kolom 'B' is de zgn. 'inputvector'.

$$[A] \times [X] = [B] \quad (5)$$

3. Een 1N-model van de vlakke wand kan 'evenwaardig' genoemd worden als voor eenzelfde amplitude van de sinusoidale buitentemperatuur dezelfde warmteflux wordt veroorzaakt aan de binnenzijde van de wand als in het *mN*-model. Het is deze warmteflux, die in de wand verdwijnt of uit de wand in de ruimte stroomt, die de thermische belasting t.a.v. de klimaatinstallatie zal uitmaken. Het komt er nu op aan de thermische capaciteit te vinden in het 1N-model, zodat de bovenstaande voorwaarde is vervuld.



In het 1N-model zijn volgende elementen reeds bekend:

- De vooraf gegeven sinusvormig variërende buitentemperatuur. In complexe notatie geldt algemeen:

$$\hat{T}_o = T_o e^{j\tau_o} \quad (6)$$

T_o is de amplitude en τ_o de fasehoek van de buitentemperatuur. De precieze fasehoek is hier feitelijk niet van belang, enkel de amplitude.

- De sinusoidale warmtestroom aan de binnenzijde van de wand:

$$\hat{q}_r = q_r e^{j\theta_r} \quad (7)$$

Deze warmtestroom werd berekend uit het *mN*-netwerk cf. randnr. 2. q_r is de amplitude en θ_r de fasehoek van de warmtestroom.

- De thermische weerstand R_{mr} is de som van de convectieweerstand vanwege de luchtlaag aan de binnenzijde van de wand en de helft van de totale thermische weerstand van de wand, indien de beschouwde wand homogeen zou samengesteld zijn.
- De thermische weerstand R_{om} is de som van de convectieweerstand vanwege de luchtlaag aan de buitenzijde van de wand en de helft van de totale thermische weerstand van de wand, indien de beschouwde wand homogeen zou samengesteld zijn.

Indien de wand niet homogeen is opgebouwd, d.w.z. uit verschillende bouwmaterialen is samengesteld (bv. gevelsteen, luchtpouw, isolatie, snelbouwsteen, pleisterlaag), kan de bepaling van de weerstanden R_{mr} en R_{om} wat meer rekenwerk vereisen. In ieder geval situeert het 'bouwmassaknooppunt' zich in het midden van de wand.

Volgende elementen in het 1N-model zijn nu nog onbepaald:

- De 'bouwmassatemperatuur' T_m :

$$\hat{T}_m = T_m e^{j\tau_m} \quad (8)$$

T_m is de amplitude en τ_m de fasehoek van de 'bouwmassatemperatuur'.

- De warmtestroom q_m is de warmtestroom die als het ware in de knooppuntcapaciteit C_m stroomt en resulteert in de temperatuurverandering van het 'bouwmassaknooppunt'. Het is het verschil tussen de toegevoerde warmtestroom en de afgevoerde warmtestroom van het 'bouwmassaknooppunt'.

$$\hat{q}_m = q_m e^{j\theta_m} \quad (9)$$

q_m is de amplitude en θ_m de fasehoek van de warmtestroom.

4. De thermische capaciteit C_m komt voor in de differentiaalvergelijking van het 'bouwmassaknooppunt':

$$C_m \frac{dT_m}{dt} = q_o - q_r = q_m \quad (10)$$

In complexe notatie wordt deze vergelijking:

$$j\omega C_m \hat{T}_m = \hat{q}_o - \hat{q}_r = \hat{q}_m \quad (11)$$

Daaruit volgt:

$$j\omega C_m = \frac{\hat{q}_m}{\hat{T}_m} = \frac{\hat{q}_o - \hat{q}_r}{\hat{T}_m} \quad (12.a)$$

$$\Leftrightarrow \omega C_m e^{j\pi/2} = \frac{\hat{q}_m}{\hat{T}_m} = \frac{q_o e^{j\vartheta_o} - q_r e^{j\vartheta_r}}{T_m e^{j\tau_m}} \quad (12.b)$$

$$\Leftrightarrow \omega C_m e^{j\pi/2} = \frac{\hat{q}_m}{\hat{T}_m} = \frac{q_o \cos \vartheta_o - q_r \cos \vartheta_r + j(q_o \sin \vartheta_o - q_r \sin \vartheta_r)}{T_m e^{j\tau_m}} \quad (12.c)$$

Uit vgl. (12.c) volgt dat de amplitude en de fasehoek van de warmtestroom q_m worden bepaald door respectievelijk:

$$q_m = \sqrt{(q_o \cos \vartheta_o - q_r \cos \vartheta_r)^2 + (q_o \sin \vartheta_o - q_r \sin \vartheta_r)^2} \quad (12.d)$$

$$\vartheta_m = \arctan \frac{q_o \sin \vartheta_o - q_r \sin \vartheta_r}{q_o \cos \vartheta_o - q_r \cos \vartheta_r} \quad (12.e)$$

Daarmee kunnen we nu noteren:

$$\omega C_m e^{j\pi/2} = \frac{q_m}{T_m} e^{j(\vartheta_m - \tau_m)} \quad (12.f)$$

5. De warmtestroom q_o aan de buitenzijde van de wand, die we nodig hebben om vgl. (12.d) en (12.e) op te lossen, volgt uit:

$$\hat{q}_o = q_o e^{j\vartheta_o} = \frac{T_o - T_m}{R_{om}} e^{j\vartheta_o} \quad (13)$$

We kennen echter ook de temperatuur T_m nog niet.

6. Voor de warmtestroom q_r aan de binnenzijde van de wand geldt de betrekking:

$$\hat{T}_m = R_{mr} \hat{q}_r \quad (14.a)$$

$$\Leftrightarrow T_m e^{j\tau_m} = R_{mr} q_r e^{j\vartheta_r} \quad (14.b)$$

Vgl. (14.b) legt de amplitude en de fasehoek van de 'bouwmassatemperatuur' vast:

$$T_m = R_{mr} q_r \quad (15.a)$$

$$\tau_m = \vartheta_r \quad (15.b)$$

Daarmee is nu ook de amplitude van de warmtestroom q_o in vgl. (13) bepaald:

$$q_o = \frac{T_o - R_{mr} q_r}{R_{om}} \quad (16)$$

7. We ontbreken evenwel nog de fasehoek ϑ_o om de amplitude q_m in vgl. (12.d) en (12.e) en daarmee de gezochte capaciteit C_m in vgl. (12.f) te kun-

nen bepalen. Deze fasehoek kunnen we vinden uit de voorwaarde voor de fasehoeken die voortkomt uit vgl. (12.f), nl. dat er moet gelden dat:

$$\vartheta_m - \tau_m = \pi/2 \quad (17.a)$$

Met vgl. (15.b) volgt:

$$\vartheta_m = \pi/2 + \vartheta_r \quad (17.b)$$

Substitutie van θ_m door het rechterlid van vgl. (12.e) levert:

$$\arctan \frac{q_o \sin \vartheta_o - q_r \sin \vartheta_r}{q_o \cos \vartheta_o - q_r \cos \vartheta_r} = \pi/2 + \vartheta_r \quad (17.c)$$

$$\frac{q_o \sin \vartheta_o - q_r \sin \vartheta_r}{q_o \cos \vartheta_o - q_r \cos \vartheta_r} = \tan(\pi/2 + \vartheta_r) = \frac{\sin(\pi/2 + \vartheta_r)}{\cos(\pi/2 + \vartheta_r)}$$

$$\Leftrightarrow \sin \vartheta_o = \frac{\sin(\pi/2 + \vartheta_r) + q_r \sin \vartheta_r}{q_o}$$

$$\cos \vartheta_o = \frac{\cos(\pi/2 + \vartheta_r) + q_r \cos \vartheta_r}{q_o}$$

$$\Rightarrow \vartheta_o = \arctan \frac{\sin(\pi/2 + \vartheta_r) + q_r \sin \vartheta_r}{\cos(\pi/2 + \vartheta_r) + q_r \cos \vartheta_r} \quad (17.d)$$

8. Samengevat volgt de thermische capaciteit C_m van de bouwmasa in het 1N-model uit de toepassing van de volgende drie vergelijkingen:

$$C_m = \frac{q_m}{\omega T_m} = \frac{\sqrt{(q_o \cos \vartheta_o - q_r \cos \vartheta_r)^2 + (q_o \sin \vartheta_o - q_r \sin \vartheta_r)^2}}{\omega R_{mr} q_r} \quad (18.a)$$

$$q_o = \frac{T_o - R_{mr} q_r}{R_{om}} \quad (18.b)$$

$$\vartheta_o = \arctan \frac{\sin(\pi/2 + \vartheta_r) + q_r \sin \vartheta_r}{\cos(\pi/2 + \vartheta_r) + q_r \cos \vartheta_r} \quad (18.c)$$

Men kan nagaan dat deze 'effectieve warmtecapaciteit' beduidend minder zal bedragen dan de statische warmtecapaciteit van de volledige bouwmas-
sa, zoals die volgt uit:

$$C_{m,stat} = \rho_m c_m V_m \quad (19)$$

met:

- ρ_m = de massadichtheid van het bouw materiaal [kg/m^3]
- c_m = de specifieke warmtecapaciteit van het bouw materiaal [$\text{J}/(\text{kg.K})$]
- V_m = het volume van de bouw massa [m^3]

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	X	B											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
0	-R[0]	-X[0]																			q01	-To	
1		X[0]	-R[1]	-X[1]																	q1	0	
2				X[1]	-R[2]	-X[2]															q12	0	
3						X[2]	-R[3]	-X[3]													q2	0	
4								X[3]	-R[4]	-X[4]											q23	0	
5										X[4]	-R[5]	-X[5]									q3	0	
6											X[5]	-R[6]	-X[6]								q34	0	
7												X[6]	-R[7]	-X[7]							q4	0	
8													X[7]	-R[8]	-X[8]						q45	0	
9															X[8]	-R[9]	-X[9]				q5	0	
10																		X[9]	-R[10]		q56	0	
11	1	-1																			q6	0	
12			1	-1																	q67	0	
13					1	-1		-1													q7	0	
14							1	-1	-1												q78	0	
15										1	-1										q8	0	
16											1	-1									q89	0	
17													1	-1							q9	0	
18															1	-1	-1				q910	0	
19																		1	-1		q10	0	
20																			1	-1	-1	q10i	0