# Zestaw zadań do skryptu z
# Teorii miary i całki

**Katarzyna Lubnauer**
**Hanna Podsędkowska**

## Ciała, $\sigma$ - ciała

1. Zbadaj, czy rodzina A jest ciałem w przestrzeni X=[0,2]

a) $A = \left\{ \emptyset, X, \left[0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right] \right\}$

b) $A = \left\{ \emptyset, X, \left[0, \frac{1}{3}\right), \left[\frac{1}{3}, 2\right] \right\}$

c) $A = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1\}, \{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

Uzupełnij w sposób minimalny rodziny nie będące ciałami do ciała.

2. Zbadaj, czy rodzina A jest ciałem w przestrzeni X={0,1,2}

$A = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1\}, \{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$.

3. Czy następujące rodziny są $\sigma$-ciałami w przestrzeni $\Omega$=[0,3]

$R_1 = \{\emptyset, X, [0,1], (1,3]\}$,

$R_2 = \{\emptyset, X, [0,2), [2,3]\}$,

$R_3 = \quad R_1 \cup R_2$.

Wypisz zbiory należące do $R_3$.

4. Niech $\Omega = R$. Podać przykład takich $\sigma$-ciał $R_1$, $R_2$, żeby rodzina

   $R_3 = R_1 \cup R_2$ była $\sigma$-ciałem w $\Omega$.

5. Rozważmy X=N oraz $A$ rodzina wszystkich zbiorów skończonych lub o skończonych dopełnieniach. Zbadaj czy $A$ jest ciałem i czy jest $\sigma$-ciałem.

6. Niech X będzie dowolnym zbiorem nieprzeliczalnym oraz $F$ rodziną taką, że A$\in F$ wtedy i tylko wtedy gdy A jest przeliczalny lub A' jest przeliczalny. Zbadaj czy $F$ jest $\sigma$-ciałem

7. Pokaż, że w przestrzeni skończonej każde ciało jest $\sigma$-ciałem.

8. Niech $A$ będzie skończoną rodziną zbiorów $\{X_1,...,X_n\}$ parami rozłącznych oraz niech $X = X_1 \cup ... \cup X_n$.Znajdź $F$ najmniejsze $\sigma$-ciało w przestrzeni $X$ zawierające rodzinę $A$.Jaka jest liczebność $\sigma$-ciała $F$.

9. Zbadaj czy istnieje $\sigma$-ciało o liczebności n=1,2,3,4,5,6.

10. Udowodnij, że dowolne skończone ciało ($\sigma$-ciało) zbiorów ma $2^n$ elementów gdzie n jest pewną liczbą naturalną.

11. Niech n będzie liczbą naturalną. Skonstruować przykład ciała zbiorów zawierającego $2^n$ elementów, jeżeli

a) $X \subset N$

b) $X \subset R$

12. Niech dane będą dwie przestrzenie $X$ i $Y$ oraz odwzorowanie $f : X \to Y$. Niech $F$ będzie $\sigma$-ciałem na przestrzeni $Y$, a $A$ $\sigma$-ciałem na przestrzeni $X$.

Zbadaj strukturę rodzin

a) $f^{-1}(F)$

b) $f(A)$.

13. Zbadaj $\sigma$-ciało generowane przez zbiory jednopunktowe gdy

a) $X$ jest skończone lub przeliczalne

b) $X$ jest nieprzeliczalne.

14. Wykaż, że na to aby rodzina $F$ była ciałem w $X$ potrzeba i wystarcza by $X \in F$ i dla każdego A,B$\in F$ był spełniony warunek:

A\B$\in F$ i A$\cap$B$\in F$.

15. Zbadaj granice dolną i górną następujących ciągów zbiorów:

a) $A_n = [-n, n]$

b) $B_n = \left[ (-1)^n \frac{1}{n}, 2 \right]$

c) $C_n = \left( 0 , 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n} \right)$

16. Pokaż, że dla dowolnego $A_n$ mamy $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Podaj przykład rodziny $A_n$ takiej, że $\liminf A_n \neq \limsup A_n$.

## Zbiory borelowskie

17. Udowodnij, że następujące zbiory są borelowskie w $\boldsymbol{R}$ (t.z. należą do $B(\boldsymbol{R})$)

    a) $(-\infty, a)$
    b) $(-\infty, a]$
    c) $(a, +\infty)$
    d) $[a, +\infty)$
    e) zbiory jednopunktowe
    f) $[a, b]$
    g) $\boldsymbol{N}$
    h) $\boldsymbol{Q}$
    i) zbiór liczb niewymiernych
    j) zbiór Cantora

18. Wykaż, że następujące zbiory należą do $B(\boldsymbol{R}^2)$

- prosta
- zbiór jednopunktowy

19. Niech $\{f_n\}$ będzie rodziną funkcji ciągłych na $\boldsymbol{R}$. Zbadaj czy zbiory $A, B, C$ są borelowskie w $\boldsymbol{R}$

$A = \{x \in \boldsymbol{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\}$,

$B = \{x \in \boldsymbol{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \; istnieje\}$,

$C = \{x \in \boldsymbol{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = a\}$, $a \in \boldsymbol{R}$.

## Miara

1. Wykazać, że $\mu \equiv 0$ jest miarą na dowolnym $\sigma$-ciele.

2. Niech $(X, F)$ przestrzeń z $\sigma$-ciełem i niech $x_0 \in X$, sprawdź, że $\mu$ określona na $F$ wzorem

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$$

jest miarą unormowaną.

3. Niech $X = \{x_1, ..., x_n\}$ i niech $\mu$ będzie odwzorowaniem określonym na $F = 2^X$ o wartościach w $\boldsymbol{R}_+$ w następujący sposób:

$$\mu(\Phi) = 0,$$

$$\mu(\{x_k\}) = \frac{1}{n}; \quad k = 1, ..., n$$

$$\mu(\{x_1, ..., x_{k_m}\}) = \frac{m}{n}$$

Wykaż, że $\mu$ jest miarą skończoną.

4. Niech $X$ będzie zbiorem przeliczalnym (nieskończonym), a $\mu$ określone następująco:

$$\mu(\varnothing) = 0,$$

$$\mu(\{x_k\}) = \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, ...$$

$$\mu(\{x_1, ..., x_{k_m}\}) = \frac{m}{2}$$

Sprawdzić, czy $\mu$ jest miarą skończoną.

5. Niech $A \subset \boldsymbol{N}$. Połóżmy

$$\forall A \subset \mathbf{N}; \quad \mu(A) = \begin{cases} 0, & A \ skonczony \\ \infty, & A \ nieskonczony \end{cases}$$

Pokaż, że $\mu$ jest skończenie addytywną funkcją, ale nie jest miarą.

6. Niech $X$ będzie zbiorem nieskończonym, $F - \sigma$-ciałem na X
$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & A \ skonczony \\ \infty, & A \ nieskonczony \end{cases}, \ c \in \boldsymbol{R}.$$

Pokaż, że $\mu$ jest addytywną funkcją zbioru oraz, że $\mu$ jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy $X$ jest skończony.

7. Wzór $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}$, $A \subset \boldsymbol{N}$ określa miarę na $\sigma$-ciele wszystkich podzbiorów zbioru $\boldsymbol{N}$.

Uzasadnij, że zbiór wartości miary $\mu$ pokrywa się z przedziałem $[0,1]$. Czy z tego, że $\mu(A) = \mu(B)$ wynika, iż $A = B$.

8. Niech $(x_n),(c_n)$ będą danymi ciągami o wyrazach w $N$ i $\bar{R}_+$ odpowiednio.

   Sprawdź, że wzór:
$$\mu(A) = \sum_{x_n \in A} c_n \ , \quad A \subset \mathbf{R}$$
określa miarę na $\sigma$-ciele podzbiorów $\mathbf{R}$.

9. Niech $\mu$ będzie miarą skończoną na przestrzeni $(X, M)$. Pokaż,że jeżeli $C \in M$ jest takim zbiorem, iż $\mu(C) = \mu(X)$, to $\mu(A) = \mu(A \cap C)$ dla dowolnego $A \in M$. Czy powyższe jest prawdziwe dla miary nieskończonej?
10. Niech $\mu$ będzie miarą skończoną na przestrzeni $(X, M)$ oraz dla $A_j \in M$ , $j = 1,2,...$ mamy , $\mu(A_j) = \mu(X)$ to $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu(X)$.

11. Wykaż, że dla $(A_j)_{j=1,2,...}$ gdzie dla każdego $j$ mamy $A_j \in M$ zachodzi:

a) $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$

b)jeśli $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \prec \infty$ to $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \ge \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$

12. Niech $\mu$ będzie nieujemną funkcją skończenie addytywną na $\sigma$-ciele $M$. Załóżmy ponadto, że dla każdego ciągu zstępującego $(A_n)$ zbiorów z $M$, takiego że $\bigcap_n A_n = \varnothing$ mamy $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Wykaż, że $\mu$ jest miarą na $\sigma$-ciele $M$.

13. Wykaż, że jeśli $(\mu_n)$ jest ciągiem miar na $\mu$-ciele $M$ to $\mu = \sum_n \mu_n$ jest miarą na $M$.

14. Niech $\mu_n$ będzie miarą określoną na $\sigma$-ciele $M_n$ w przestrzeni $X_n$, $n = 1,2,3\ldots$, $X_n \cap X_k = \phi$, $k \neq n$ oraz niech $X = \bigcup_n X_n$. Wykaż, że klasa $M$ wszystkich zbiorów $A \subset X$ takich, że $A \cap X_n \in M_n$ jest $\sigma$-ciałem a funkcja $\mu$ określona wzorem $\mu(A) = \sum_n \mu(A \cap X_n)$, $A \in M$ jest miarą na $M$.

15. Niech $X = [a,b]$, $M$ $\sigma$-ciało podzbiorów w $X$ takie, że $\forall_{x\in X} \{x\} \in M$. Niech $\mu$ będzie miarą skończoną, taką że $\forall_{x,y\in X} \ \mu(\{x\}) = \mu(\{y\})$. Wykaz, że $\mu(\mathbf{Q} \cap [a,b]) = 0$.

16. Niech $\mu$ będzie miarą skończoną i $A_j$, $j \in J$ rodziną zbiorów parami rozłącznych. Wykaż, że zbiór $I = \{j \in J : \mu(A_j) \neq 0\}$ jest przeliczalny.

17. Niech dana będzie przestrzeń z miarą $(Y, N, \nu)$ oraz odwzorowanie $f : X \to Y$. Oznaczmy $M = \{f^{-1}(B) : B \in N\}$ oraz dla każdego $A \in M$ połóżmy $\mu(A) = \inf\{\nu(B) : B \in N,\ A = f^{-1}(B)\}$. Wykaż iż $\nu$ jest miarą.

18. Niech $Y$ będzie dowolnym zbiorem zaś $(X, M, \mu)$ przestrzenią z miarą, niech funkcja $f : X \to Y$ oraz połóżmy $N = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in M\}$. Określmy $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$. Wykaż, że $\nu$ jest miarą.

19. Niech $(X, M, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą oraz niech $M'$ oznacza klasę wszystkich zbiorów $A$ postaci $A = B \cup C$, gdzie $B \in M$ a $C$ jest podzbiorem pewnego zbioru mierzalnego $D$ miary $\mu$ zero.

Pokaż, że:

a) $M'$ jest $\sigma$-ciałem

b) $\mu' : M' \to \mathbf{R}_+$ określone następująco $\mu'(A) = \mu(B)$, gdzie $A = B \cup C$, $A, B$ j.w. jest miarą zupełną.

20. Dla dowolnej skończonej miary na $\sigma$-ciele $M$ podzbiorów przestrzeni $X$ istnieje taki rozkład $X$ na dwa zbiory rozłączne i mierzalne $B$ i $C$ $(X = B \cup C; \quad B, C \in M; \quad B \cap C = \phi)$, że $\mu/_B$ jest bezatomowa zaś $\mu/_A$ jest czysto atomowa tzn. każdy podzbiór mierzalny zbioru $C$ miary dodatniej jest sumą skończonej lub przeliczalnej liczby atomów.

21. Wykazać, że jeżeli $A, B$ są atomami miary $\mu$ to $B - A$ też jest atomem miary $\mu$.

**22.** * Wykaż, że jeżeli $\mu$ jest miarą bezatomową i $0 \prec x \prec \mu(A) \prec \infty,\ x \in \mathbf{R}$ to istnieje $B \subset A$ taki, że $\mu(B) = x$.

**Wsk.** Skorzystaj z lematu Kuratowskiego-Zorn'a.

## Miara zewnętrzna i miara Lebesgu'a

1. Niech $X$ będzie dowolną niepustą przestrzenią i niech dla $A \subset X$ :

$$\mu^*(A)=\begin{cases}0, & A=\varnothing\\ 1, & A\neq\varnothing\end{cases}$$

Dowiedź, że $\mu^*$ jest miarą zewnętrzną i wyznacz rodzinę zbiorów $\mu^*$ mierzalnych .

2. Niech $X$ będzie dowolną niepustą przestrzenią i niech dla $A\subset X$ :

$$\mu^*(A)=\begin{cases}0, & A=\varnothing\\ 1, & A\neq\varnothing \ \ i\ \ A\neq X\\ 2, & A=X\end{cases}$$

Dowiedź, że $\mu^*$ jest miarą zewnętrzną i wyznacz rodzinę zbiorów $\mu^*$ mierzalnych.

**Wsk.** Rozpatrz przypadki $cardX=2,\ cardX\neq 2$

3. Niech $X$ będzie dowolną niepustą przestrzenią i niech dla $A\subset X$ :

$$\mu^*(A)=\begin{cases}0, & A=\phi\\ 1, & A\ sk.\ i\ niepusty\\ \infty, & A\ niesk.\end{cases}$$

Sprawdź, czy $\mu^*$ jest miarą zewnętrzną i jeśli jest wyznacz rodzinę zbiorów $\mu^*$ mierzalnych.

4. Niech $X$ będzie dowolną niepustą przestrzenią i niech dla $A\subset X$ :

$$\mu^*(A)=\begin{cases}0, & A\ \ sk.\text{lub}\ \ przelicz.\\ 1, & A\ \ nieprzelicz.\end{cases}$$

Sprawdź czy $\mu^*$ jest miarą zewnętrzną i jeśli jest wyznacz rodzinę zbiorów $\mu^*$ mierzalnych.

5. Niech $X$ będzie dowolną niepustą przestrzenią oraz niech $a\in X$ i niech dla każdego $A\subset X$ :

$$\mu^*(A)=\begin{cases}0, & a\notin A\\ 1, & a\in A\end{cases}$$

Zbadaj czy $\mu^*$ jest miarą zewnętrzną i znajdź $\sigma$-ciało zbiorów $\mu^*$ mierzalnych.

6. Niech $X$ będzie dowolną niepustą przestrzenią oraz niech $a,b \in X$ i niech dla

każdego $A \subset X$ :

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & a \notin A \wedge b \notin A \\ 1, & a \in A \vee b \in A \end{cases}.$$

Zbadaj czy $\mu^*$ jest miarą zewnętrzną i znajdź $\sigma$-ciało zbiorów $\mu^*$ mierzalnych.

7. Niech $X = \mathbf{N}$ , oraz dla dowolnego $A \subset X$ :

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \dfrac{cardA}{1 + cardA}, & A - sk. \\ 1, & A - niesk. \end{cases}$$

Udowodnij iż $\mu^*$ jest miarą zewnętrzną i wyznacz $\sigma$-ciało zbiorów $\mu^*$ mierzalnych.

8. Niech $\mu^*$ będzie miarą zewnętrzną w X oraz $A_n \uparrow A$ $(A_n \subset X)$. Czy prawdziwe jest zdanie:

$$\forall_{A_n} \ \mu^*(A_n) \to \mu^*(A).$$

9. Wykaż, że jeżeli $\mu^*$ jest miarą zewnętrzną w $X$ oraz $A, B \subset X$ oraz $\mu^*(B) = 0$ ,to $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A - B) = \mu^*(A)$.

10. Wykaż równoważność warunków (1) i (2):

$$(1) \quad \forall_{\substack{W,Z \subset X \\ W \subset A, Z \subset X - A}} \quad \mu^*(W \cup Z) = \mu^*(W) + \mu^*(Z),$$

$$(2) \quad \forall_{K \subset X} \mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K - A).$$

11. * Niech $\mu$ będzie miarą na $\sigma$-ciele $M$ w $X$. Dla każdego $A \subset X$ położmy $\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : A \subset B, \ B \in M\}$.

Wykaż, że

jeżeli $A \in M$ to $\mu^*(A) = \mu(A)$

jeżeli $A \subset B$ i $\mu(B) = 0$ to $\mu^*(A) = 0$

$\mu^*$ miara zewnętrzna

$M \subset M^*$, gdzie $M^*$ rodzina wszystkich zbiorów spełniających warunek Caratheodory'ego

12. Niech $P$ będzie taką rodziną podzbiorów przestrzeni $X$, że $\phi \in P$ oraz dla dowolnego $A \subset X$ istnieją zbiory $A_1, A_2, A_3 ... \in P$, takie że $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Niech $\tau$ będzie nieujemną monotoniczną funkcją na $P$ taką, że $\tau(\phi) = 0$, ponadto dla $A \subset X$ połóżmy $\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \tau(A), A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in P\right\}$

(infimum bierzemy po wszystkich rodzinach zbiorów $A_1, A_2, A_3 ... \in P$ takich, że $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ). Pokaż, że $\mu^*$ jest miarą zewnętrzną.

**Uwaga.**

Niech $P$ rodzina wszystkich prostokątów w $\mathbf{R}^n$, zaś $B \in P$. Wtedy $\mu^*$ jest miarą Lebesgua.

13. Wykaż, że
    a) iloczyn mnogościowy przedziałów (prostokątów) k wymiarowych jest przedziałem (prostokątem) k wymiarowym.
    b) dopełnienie przedziału (prostokąta) k wymiarowego jest sumą przedziałów (prostokątów) k wymiarowych.

14. Wykaż, że miara Lebesgua jest niezmiennicza ze względu na przesunięcie: $\underset{\alpha \in \mathbf{R}^k}{\forall} \lambda(A) = \lambda(A - \alpha)$.

15. Jeżeli $P \subset \bigcup_{n=1}^{m} P_n$ , gdzie $P, P_1, P_2, P_3, ..., P_m$ prostokąty k wymiarowe ograniczone to zachodzi :

$$|P| \leq \sum_{n=1}^{m} |P_n|$$

16. Pokaż, że jeżeli $A \subset \bigcup_{n=1}^{m} A_n$ oraz $A, A_1, A_2, A_3, ... \in B(\mathbf{R}^k)$ to

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

17. Wykaż, że zbiór liczb wymiernych ma w $\mathbf{R}$ miarę Lebesgua równą 0.

Policz miarę Lebesgua zbioru $A = \{x \in \mathbf{R} : x \notin \mathbf{Q} \;\; i \;\; 0 \leq x \leq 1\}$.

18. Pokaż, że prosta $l$ ma w $\mathbf{R}^2$ miarę Lebesgua równą 0.

a) $l = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = a\}, \; a \in \mathbf{R}$

b) $l = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x\}$

c) $l = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = ax + b\}, \; a, b \in \mathbf{R}, \; a, b \neq 0, \; a \succ 0.$

19. Pokaż, że wykres funkcji ciągłej określonej na $\mathbf{R}$ ma w $\mathbf{R}^2$ miarę Lebesgua równą 0.

20. Pokaż, że wykres funkcji ciągłej określonej na R (na przedziale ) ma w $\mathbf{R}^2$ miarę Lebesgua równą 0.

21. Wykaż, że zbiór A ma w $\mathbf{R}^2$ miarę Lebesgua równą 0:

a) $A = \{(x, y) : y - x \in \mathbf{Q}\}$

b) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r \;\;\; gdzie \;\; r \in \mathbf{Q}\}.$

22. Wykaż iż dowolny zbiór miary zewnętrznej Lebesgua 0 jest mierzalny względem miary Lebesgua.

23. Policz miarę Lebesgua w $\mathbf{R}$ zbioru Cantora .

24. Policz z definicji miarę Lebesgua zbioru:
$\{(x,y): 0 \le y \le 3x \wedge 0 \le x \le 1\}$.

25. Wykaż, że dla każdego $A \subset \mathbf{R}^n$ $\lambda$-mierzalnego takiego, że. $\lambda(A) = p \succ \varepsilon$ i dla każdego $q$ takiego, że $0 \prec q \prec p$ istniej $B \subset A,\ B$ który jest $\lambda$-mierzalny i $\lambda(B) = q$.

26. Niech $A_1,...,A_n \subset [0,1]$ takie, że $\lambda(A_1) + ... + \lambda(A_n) \succ n-1$. Wykaż, że $\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \succ 0$.

27. Czy istnieje w przedziale $[a,b]$ podzbiór właściwy, domknięty o mierze Lebesgua równej $b-a$. Odpowiedź uzasadnij.

28. Wykaż, że istnieją zbiory $E_1 \supset E_2 \supset ...$ mierzalne w sensie Lebesgue'a takie, że $\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) \ne \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k)$.

29. Wykaż, że jeżeli $E \subset \mathbf{R}$ i $\lambda(E) \succ 0$ ,to istnieją takie punkty $x, y \in \mathbf{R}$, że $x - y \in \mathbf{Q}$.

30. Pokaż, ze istnieje zbiór niemierzalny w sensie Lebesgue'a.
**Wsk.** Zbadaj zbiór Vitaliego.

## Funkcje mierzalne

1. Wykaż, że jeżeli f i g są mierzalne, to
   a) max(f,g) jest mierzalne
   b) min(f,g) jest mierzalne

2. Wykaż, że jeżeli f i g są mierzalne i skończone, to
   a) f+g jest mierzalne
   b) $f \cdot g$ jest mierzalne.

3. Wykaż, że jeżeli $f_1$, $f_2$, ... są mierzalne, to
   a) $\sup\limits_n (f_n)$ jest mierzalne
   b) $\inf\limits_n (f_n)$ jest mierzalne.

4. Niech $X = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ oraz $A_i \in \boldsymbol{M}$, gdzie $\boldsymbol{M}$ – σ-ciało. Przypuśćmy, że dla każdego i=1, 2, ..., n $f / A_i$ jest funkcją mierzalną. Pokaż, że f jest funkcją mierzalną.

5. Pokaż, że jeśli $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}$ jest mierzalna, to funkcja $h : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}$ określona następująco:
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in \boldsymbol{A} \\ 0 & , x \in \boldsymbol{X} / \boldsymbol{A} \end{cases} \qquad , \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{X}$$
też jest mierzalna.

6. Niech $\boldsymbol{M} = \sigma\left(\left\{\left[0, \tfrac{3}{4}\right], \left[\tfrac{1}{4}, 1\right]\right\}\right)$ , $\boldsymbol{X} = [0,1]$. Które z poniższych funkcji są $\boldsymbol{M}$-mierzalne:
   a) $f(t) = t \quad , t \in [0,1]$
   b) $g = 2\chi_{[0, \frac{3}{4}]} - \chi_{[\frac{1}{4}, 1]}$
   c) $h = \chi_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}$ ?

7. Wskaż wszystkie funkcje mierzalne względem następujących $\sigma$-ciał:

   a) $\boldsymbol{M}_1 = \sigma(\{A_1, A_2, ..., A_n\})$ ; gdzie $A_1, A_2, ..., A_n$ stanowią rozbicie przestrzeni $\boldsymbol{X} \neq \varnothing$, (tzn. $\bigcup_i A_i = X, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \; i \neq j$)

   b) $\boldsymbol{M}_2$ = σ-ciało generowane przez wszystkie przeliczalne podzbiory przestrzeni **X**

   c) $\boldsymbol{M}_3 = \{\boldsymbol{X}, \varnothing\}$

   d) $\boldsymbol{M}_4 = \sigma(\{A\})$ , $A \subset \boldsymbol{X}$ .

8. Pokaż, że jeżeli $f : (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{R}$ jest $\boldsymbol{M}$-mierzalne, to dla dowolnego $B \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})$ $f^{-1}(B) \in \boldsymbol{M}$ .

9. Pokaż, że każda funkcja ciągła $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ jest mierzalna.

10. Niech $f : (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją mierzalną, zaś $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ borelowską. Wykaż, że $g \circ f$ jest $\boldsymbol{M}$-mierzalna.

11. Podaj przykład funkcji niemierzalnych *f*, *g*, takich, że:

    i. $|f|$ - mierzalne

    ii. $f + g$ - mierzalne.

12. Wykaż, że jeżeli $f$ jest funkcją mierzalną, to $\frac{1}{f}$ też jest funkcją mierzalną.

13. Niech $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ . Pokaż, że jeżeli $h = \exp f$ jest $\alpha_1$ - mierzalne to f także jest $\alpha_1$ - mierzalne. ($f$ jest $\alpha_1$ - mierzalne $\Leftrightarrow \underset{B \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})}{\forall} f^{-1}(B) \in \alpha_1(\boldsymbol{R})$)

14. Pokaż, że jeżeli $f$ jest funkcją mierzalną to funkcja sgn$f$ też jest mierzalna.

15. Niech $A \notin \alpha_1$, dla $x \in \boldsymbol{R}$ połóżmy $f(x) = x \cdot \chi_A(x) - x \cdot \chi_{A'}(x)$. Czy funkcja $f$ jest mierzalna?

16. Niech $A \notin \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M} - \sigma$-ciało. Pokaż, że funkcje:

a) $\chi_A$

b) $\chi_{A'}$

c) $a\chi_A + b\chi_{A'}$, $a,b \in \boldsymbol{R}$, $a \neq b$

nie są mierzalne.

17. Wykaż, że jeżeli ciąg $(f_n)$ jest ciągiem funkcji mierzalnych mających wspólną dziedzinę $A$ i o wartościach w $\overline{\boldsymbol{R}}$ to funkcje $\liminf\limits_n f_n$ oraz $\limsup\limits_n f_n$ są mierzalne oraz zbiór { $x \in A$ :istnieje granica $\lim\limits_n f_n \in \overline{\mathbf{R}}$ } też jest mierzalny.

18. Pokaż, że przy założeniu, że zbiór $A \subset \boldsymbol{R}$ nie jest borelowski (np. niemierzalny), to zbiór $\{(x,0), x \in A\} \subset \boldsymbol{R}^2$ nie jest borelowski (choć jest mierzalny miary zero).

19. Pokaż, że jeżeli $A \in B(\boldsymbol{R})$, to zbiór $\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 :\ x - y \in A\}$ jest borelowski.

20. Wykaż, że każdy ciąg funkcji zbieżny według miary spełnia warunek Cauchyego według miary. Warunek Cauchyego według miary dla ciągu $(f_n)$ : $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\eta>0}{\forall}\ \underset{N_0}{\exists}\ \underset{m,n>N_0}{\forall}\ \mu(\{|f_m(x) - f_n(x)| > \eta\}) < \varepsilon$.

21. Niech $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$, $f_n$ - wspólnie ograniczone przez $M \in \boldsymbol{R}$, $f_n, g_n$ mierzalne, prawie wszystkie skończone, $f_n, g_n$ określone na $A$, $\mu(A) < \infty$. Pokaż, że $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$ .

**Całka Lebesgue'a**

1. Oblicz na podstawie definicji całkę z funkcji prostej $f$ na zbiorze $E$ względem miary Lebesgue'a $\lambda$:

   a) $E = [0,2]$

   $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 1, & x = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right] \end{cases},$$

   b) $E = [-2,2]$

   $$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-2,0) \\ 0, & x \in \{0\} \\ 1, & x \in (0,2] \end{cases},$$

   c) $E = [-2,2] \times [-2,2]$

   $$f(x,y) = \begin{cases} 2, & x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0, & x^2 + y^2 \succ 4 \end{cases},$$

   d) $E = [0, \infty)$

   $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \chi_{[k,k+1)}(x),$$

   e) $E = [0,1] \times [0,1]$

   $$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ -1, & (x-1)^2 + (y-1)^2 \succ 1 \end{cases},$$

2. Niech $f$ będzie funkcją prostą $M$ -mierzalną na przestrzeni $(X, M, \mu)$ która na zbiorze $A \in M$ przyjmuje wartości $\{b_1, \ldots, b_m\}$. Podaj wzór na $\int_A f d\mu$.

3. Niech dany będzie zbiór przeliczalny $K$ i niech $\mu$ będzie miarą na $\sigma$ -ciele wszystkich podzbiorów zbioru $K$ określoną wzorem:

   $$\mu(A) = \begin{cases} m, & A - m \text{ elementowy} \\ \infty, & A - \text{niesk.} \end{cases}.$$

Niech $f$ będzie funkcją nieujemną określoną na zbiorze $K$ w następujący sposób $\underset{k\in K}{\forall} f(k)=b_k$. Oblicz $\int\limits_K f d\mu$.

4. Oblicz korzystając z definicji
   a) $\int\limits_{[0,1)} x\lambda(dx)$,
   b) $\int\limits_{[0,1)} \sqrt{x}\lambda(dx)$,
   c) $\int\limits_{[0,1)} 2x\lambda(dx)$,
   d) $\int\limits_{[0,2)} 3x\lambda(dx)$.

5. Niech $f:[0,1)\to \mathbf{R}$ będzie funkcją mierzalną na $\mathbf{R}$. Oblicz $\int\limits_{[0,1)} f\lambda(dx)$ gdy
   a) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{p}, & x=\frac{q}{p}\in \mathbf{Q} \\ 0, & x\notin \mathbf{Q} \end{cases}$,
   b) $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in \mathbf{C} \\ 2, & x\notin \mathbf{C} \end{cases}$,
   c) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in \mathbf{C} \\ \sqrt{x}, & x\notin \mathbf{C} \end{cases}$,
   d) $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in \mathbf{C} \\ 3x, & x\notin \mathbf{C} \end{cases}$.

6. Oblicz całkę $\int\limits_{[-1,1)} f\lambda(dx)$ gdy

$$f(t)=\begin{cases} t^2, & t\in[-1,0] \\ 1, & t\in\left(0,\frac{1}{2}\right] \\ 2, & t\in\left(\frac{1}{2},1\right] \end{cases}.$$

7. Oblicz całkę $\int\limits_{[0,1]} f\lambda d(x)$, gdzie funkcja $f:[0,1]\to \mathbf{R}$ przyjmuje wartość $n\in \mathbf{N}$ na zbiorach o długości $\frac{1}{3^n}$ wyrzuconych przy konstrukcji zbioru Cantora oraz przyjmuje dowolne wartości dodatnie na zbiorze Cantora.

8. Niech $X=\mathbf{N}$, oraz $\mu(\{n\})=\frac{1}{2^n}, \forall_{n\in\mathbf{N}}$. Oblicz $\int\limits_X fd\mu$.

9. Zbadaj całkowalność funkcji $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ względem miary Lebesgue'a

$$f(t)=\begin{cases} 2^{-n}, & t\in[2n,2n+1) \\ -4^{-n}, & t\in[2n+1,2n+2) \end{cases}$$

gdzie $n=1,2,3....$

10. Niech $f(t)=\begin{cases} \frac{1}{t}, & t\neq 0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$. Zbadaj czy funkcja $f$ jest całkowalna na przedziale $[-1,1]$.

11. Pokaż, że jeżeli $f:(X,M,\mu)\to\mathbf{R}$ jest całkowalna to $\lim\limits_{n\to\infty} n\mu(\{x:|f(x)|\succ n\})=0$.

12. Niech ciąg $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ funkcji określonych na $(X,M,\mu)$ spełnia warunek $\int\limits_A |f_n| d\mu \leq M \prec \infty,\ M\in\mathbf{R},\ n=1,2,3,...$. Pokaż, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n\in\mathbf{R},\ n=1,2,3,...$ jest bezwzględnie zbieżny to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ jest prawie pewnie zbieżny bezwzględnie.

13. Niech $f$ będzie funkcją całkowalną na zbiorze $A$ względem miary $\mu$. Oznaczmy $S(\varepsilon)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} n\varepsilon\mu(A_n)$, gdzie $A_n=\{p\in A:\ n\varepsilon\leq f(p)\prec(n+1)\varepsilon\}$. Pokaż, że $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} S(\varepsilon)=\int\limits_A fd\mu$.