1 Reelle Zahlen

1.1 Definiton und Axiome

Die Menge $\mathbb{R}$ ist mit zwei Operatoren versehen:
Addition $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \to x + y$

Axiome der Addition

A1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$
A2 $\exists 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}$
A3 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$
A4 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$

Multiplikation $\cdot$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \to x \cdot y$

Axiome der Multiplikation

A1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
A2 $\exists 1 \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$
A3 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$
A4 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$

$\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper.

Ordnungsaxiome

O1 $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$
O2 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$
O3 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$
O4 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ oder $y \leq x$
Die Ordnung ist konsistent mit Addition und Multiplikation.
K1: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \implies x + z \leq y + z$
K2: $\forall x \in \mathbb{R}^+$ und $\forall y \geq 0$

Ordnungsvollständigkeit

Seien A und B Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass
(i) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
(ii) $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt: $a \leq b$
Dann gibt es (mindestens) ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $\forall a \in A : a \leq c$ und $\forall b \in B : c \leq b$

Archimedisches Prinzip

(1) Sei $x \in \mathbb{R}, x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$
(2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n + 1$

Betragsrechenregeln

$$\begin{array}{lll} (i) & |x| \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ (ii) & |xy| = |x||y| & \forall x, y \in \mathbb{R} \\ (iii) & |x + y| \leq |x| + |y| & \forall x, y \in \mathbb{R} \\ (iv) & |x + y| \geq ||x| - |y|| & \forall x, y \in \mathbb{R} \end{array}$$

Young'sche Ungleichung

$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $2 \cdot |x \cdot y| \leq \varepsilon \cdot x^2 + \frac{1}{\varepsilon} \cdot y^2$
Beweisidee: $(\sqrt{\varepsilon} \cdot |x| - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot |y|)^2 \geq 0$

Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$:

- $c \in \mathbb{R}$ ist eine **obere (untere) Schranke** von A falls $\forall a \in A : a \leq (\geq) c$
- Ein Element $M \in \mathbb{R}$ ist ein **Maximum (Minimum)** von A falls $M \in A, \forall a \in A : a \leq (\geq) M$
- Sei A nach oben beschränkt. Die kleinste obere Schranke von A ist das **Supremum** von A.
- Sei A nach unten beschränkt. Die grösste untere Schranke von A ist das **Infimum** von A.
- $\sup(A \bigcup B) = \max(\sup A, \sup B)$
- $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$
- $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup(A),\ c > 0$
- $\sup(c \cdot A) = c \cdot \operatorname{Inf}(A),\ c < 0$

1.2 Euklidischer Raum

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad ||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Norm

1. $||x|| \geq 0$ mit Gleichheit bei $x = 0$.
2. $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x|| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

1.3 Imaginäre Zahlen

$$i^2 = -1$$
$$z := x + iy \qquad \overline{z} := x - iy$$
$$\operatorname{Re}(z) := x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{Im}(z) := y \in \mathbb{R}$$

Eigenschaften

1. $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}$
2. $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
3. $z\overline{z} = x^2 + y^2 = ||z||^2$

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{||z||^2}$$

Polarform: $z = (\cos\phi + i \sin\phi)$, wobei $r = ||z||$ der *Absolutbetrag* und ϕ das *Argument* von z.

Fundamentalsatz Algebra

$n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$ und

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_o \quad a_j \in \mathbb{C}$$

Dann gibt es $z_1, \ldots, z_n$ in $\mathbb{C}$, sodass

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

Eulersche Formel: $e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$

2 Folgen

2.1 Konvergenz

Defintion Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen L
$\iff \lim_{n \to \infty} a_n = L$
$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n \geq N_\varepsilon :\ |a_n - L| < \varepsilon$
$\iff \forall \varepsilon > 0$ ist die Menge $n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ endlich.
Es gibt für eine konvergente Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ höchstens ein $L \in \mathbb{R}$, dass diese Bedingungen erfüllt.
Wir dürfen (o.B.d.A.) annehmen, dass ε durch eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Es gilt ausserdem:

- konvergent $\implies$ beschränkt, aber nicht umgekehrt
- (a_n) konvergent $\iff$ (a_n) beschränkt **und** $\liminf a_n = \limsup a_n$

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ konvergente Folgen. mit $\lim_{n \to \infty} a_n = a, \lim_{n \to \infty} b_n = b$ dann gilt:

- $(a_n \pm b_n)_{n \ \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $(a_n \cdot b_n)_{n \ \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $(a_n \div b_n)_{n \ \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n \to \infty} (a_n \div b_n) = a \div b$ $(b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, b \neq 0)$
- Falls $\exists K \geq 1$ mit $a_n \leq b_n\ \forall n \geq K$ folgt $a \leq b$

Limes superior & inferior

$\lim_{n \to \infty} \inf x_n = \lim_{n \to \infty} \left(\inf_{m \geq n} x_m\right)$
$\lim_{n \to \infty} \sup x_n = \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{m \geq n} x_m\right)$

Einschliessungskriterium (Sandwich-Theorem)

Wenn $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \to \infty} b_n = \alpha$ und $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \geq k$, dann $\lim_{n \to \infty} c_n = \alpha$.

Weierstrass $(a_n) \forall n \geq N$

Wenn a_n monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann konvergiert a_n mit Grenzwert $\lim_{n \to \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq N\}$.
Wenn a_n monoton fallend und nach unten beschränkt ist, dann konvergiert a_n mit Grenzwert $\lim_{n \to \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq N\}$.

Grenzwerte ausrechnen

Tipp: umschreiben $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$ und Grenzwert im Exponent berechnen (l'Hopital).

Bernoulli Ungleichung

$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \qquad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$

Cauchy-Kriterium

Die Folge a_n ist genau dann konvergent, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$.

Berechne $\lim_{x \to 0+} x^{\sin(x)}$.

$\lim_{x \to 0+} x^{\sin(x)} = \lim_{x \to 0+} e^{\ln\left(x^{\sin(x)}\right)} = \lim_{x \to 0+} e^{\sin(x)\ln(x)}$
e^x ist stetig $\Rightarrow$ Limes in Exponent.
$\lim_{x \to 0+} \sin(x)\ln(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}}$
$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x \to 0+} \frac{-\sin^2(x)}{x\cos(x)}$
$= \lim_{x \to 0+} \frac{-\sin x}{x} \cdot \frac{\overset{\to 0}{\sin x}}{\underset{\to 1}{\cos x}} = 0$
Daraus folgt: $\lim_{x \to 0+} e^{\sin(x)\ln(x)} = e^0 = 1$

2.1.1 Teilfolge

Eine Teilfolge von a_n ist eine Folge b_n wobei $b_n = a_{l(n)}$.
l ist eine Funktion mit $l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$ (z.B. $l = 2n$ für jedes gerade Folgenglied).

Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Wenn 2 Teilfolgen nicht den gleichen Grenzwert haben, impliziert das Divergenz.

2.2 Strategie - Konvergenz von Folgen

1. Bei Brüchen: Grösste Potenz von n kürzen. Alle Brüche der Form $\frac{a}{n^a}$ streichen, da diese nach 0 gehen.
2. Bei Wurzeln in Summe im Nenner: Multiplizieren des Nenners und Zählers mit der Differenz der Summe im Nenner. (z.B. $(a + b)$ mit $(a - b)$ multiplizieren)
3. Bei rekursiven Folgen: Anwendung von Weierstrass zur monotonen Konvergenz

4. Einschliessungskriterium (Sandwich-Theorem) anwenden.
5. Mit bekannter Folge vergleichen.
6. Grenzwert durch einfaches Umformen ermitteln.
7. Limit per Definition der Konvergenz zeigen.
8. Anwendung des Cauchy-Kriteriums.
9. **Suchen eines konvergenten Majorant.**

2.3 Strategie - Divergenz von Folgen

1. Suchen einer divergenten Vergleichsfolge.
2. Alternierende Folgen: Zeige, dass Teilfolgen nicht gleich werden, also $\lim_{n\to\infty} a_{p_1(n)} \neq \lim_{n\to\infty} a_{p_2(n)}$ (mit z.B. gerade/ungerade als Teilfolgen).

2.4 Tricks für Grenzwerte

2.4.1 Binome

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-2}) = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+4)-(x-2)}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-2}}$$

2.4.2 Substitution

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1-\cos(\frac{1}{x}))$$

Substituiere nun $u = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(u)}{u^2} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{2u} = \lim_{u\to 0}\frac{\cos(u)}{2} = \frac{1}{2}$$

2.4.3 Induktive Folgen (Induktionstrick)

1. Zeige monoton wachsend / fallend
2. Zeige beschränkt
3. Nutze Satz von Weierstrass, d.h. Folge muss gegen Grenzwert konvergieren
4. Verwende Induktionstrick (um den Grenzwert zu finden):

Wenn die Folge konvergiert, hat jede Teilfolge den gleichen Grenzwert. Betrachte die Teilfolge $l(n) = n+1$ für $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2}$:

$$d = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} d_{n+1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 3d_n - 2} = \sqrt{3d-2}$$

Forme um zu $d^2 = 3d-2 \to d \in 1, 2$. Nun können wir $d = 2$ nehmen und die Beschränktheit mit $d = 2$ per Induktion zeigen.

3 Reihen

Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \geq 1$ mit $|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon,\ \forall m \geq n \geq N$.

Nullfolgenkriterium

Wenn für eine Folge $\lim_{n\to\infty}|a_n| \neq 0$ ist, dann divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

3.1 Reihenarithmetik

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent sind, dann gilt:

- $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{k=1}^{\infty} b_k)$
- $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha a_k = \alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Vergleichssatz

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit $0 \leq a_k \leq b_k, \forall k \geq K \geq 1$ sind, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Als Vergleichsreihe (Majorant / Minorant) eignet sich oft eine Reihe der folgenden Kategorien:

3.1.1 Geometrische Reihe

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergiert für $|q| \geq 1$ und konvergiert zu $\frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$
(Beweis per Teleskopidee: $S_n - q\cdot S_n = (1-q)\cdot S_n = 1 - q^n$)

3.1.2 Zeta-Funktion

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ divergiert für $s \leq 1$ und konvergiert für $s > 1$.

3.1.3 Teleskop Reihe

Sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k+1}$ eine Reihe. Dann gilt $S_n = a_1 - a_{n+1}$ und $\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$

3.2 Absolute Konvergenz

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ konvergiert. Es gilt $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$.
Falls eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe mit dem selben Grenzwert.

Falls die Reihe hingegen nur konvergiert, so gibt es immer eine Anordnung, so dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} = x,\ \forall x \in \mathbb{R}, \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (Bijektion).

Leibnizkriterium

Wenn $a_n \geq 0,\ \forall n \geq 1$ monoton fallend ist und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, dann konvergiert $S = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ und $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$. (Geht auch für monton fallend $\forall n \geq N, N \in \mathbb{N}$, dann muss aber bei der Abschätzung alle Terme mit Index $k \leq N$ vorkommen)

Quotientenkriterium

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0, \forall n \geq 1$.
Falls $\lim_{n\to\infty}\sup\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.
Falls $\lim_{n\to\infty}\inf\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

Wurzelkriterium

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0, \forall n \geq 1$. Sei $q = \lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}$.

- $q < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.
- $q = 1 \implies$ keine Aussage.
- $q > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ divergieren.

3.3 Wichtige Reihen

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$$

3.4 Cauchy-Produkt

Definition Cauchy-Produkt

Das Cauchy-Produkt von zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist definiert als

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(a_{n-j}\cdot b_j) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \dots$$

Es konvergiert, falls beide Reihen absolut konvergieren.

3.5 Strategie - Konvergenz von Reihen

1. Ist Reihe ein bekannter Typ? (Teleskopieren, Geometrische/Harmonische Reihe, Zetafunktion, ...)
2. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? Wenn nein, divergent.
3. Quotientenkriterium & Wurzelkriterium anwenden
4. Vergleichssatz anwenden, Vergleichsreihen suchen
5. Leibnizkriterium anwenden
6. Integral-Test anwenden (Reihe zu Integral)

3.6 Funktionenfolge

Für jedes n, sei $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge. $(f_n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge der Folgen. Wir nehmen an, dass

1. $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$
2. Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{N} \to [0, \infty[$, so dass
   a) $|f_n(j)| \leq g(j), \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$
   b) $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert.

$$exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$$

4 Funktionen

4.1 Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}^d, x \to f(x)$ eine Funktion in $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definition Stetigkeit

f ist in $x_0 \in D$ stetig, $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.d. $|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
f ist stetig, falls sie in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

Äquivalente Definitionen:

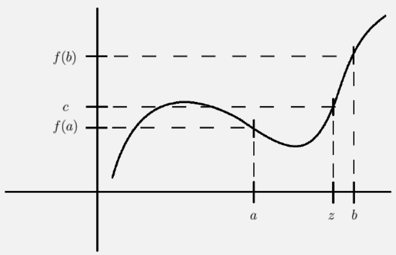
- $\forall (a_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$

Polynomielle Funktionen sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

- Falls f und g den gleichen Definitions- /Bildbereich haben und in x_0 stetig sind, dann sind auch
$$f+g, \lambda\cdot f, f\cdot g, \frac{f}{g}, |f|, \max(f,g), \min(f,g)$$
stetig in x_0.
- Seien P, Q zwei Polynomielle Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $x_1, ..., x_m$ Nullstellen von Q. Dann ist $\frac{P}{Q}$ stetig $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{x_1, ..., x_m\}$
- $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ $f : D_1 \to D_2, g : D_2 \to \mathbb{R}$ mit f, g stetig. Dann ist $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D_1$ stetig.

Zwischenwertsatz

Wenn $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $a, b \in I$ ist, dann gibt es für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $a \leq z \leq b$ mit $f(z) = c$.



Wird häufig verwendet um zu zeigen, das eine Funktion einen gewissen Wert (z.B. Nullstelle) annimmt.

Daraus folgt, dass ein Polynom mit ungeradem Grad mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.

4.1.1 Kompaktes Intervall

Ein Intervall $I \in \mathbb{R}$ ist kompakt, falls es von der Form $I = [a, b]$ mit $a \leq b$ ist. Dann ist Bild $f = f(I)$ ist auch ein kompaktes Intervall J = $[\min f, \max f]$.

Min-Max-Satz

Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u, v \in I$ mit $f(u) \leq f(x) \leq f(v), \forall x \in I$. Insbesondere ist f beschränkt.

Satz über die Umkehrabbildung

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton und sei $J = f(I) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $f^{-1} : J \to I$ stetig und streng monoton.

Die reelle Exponentialfunktion

$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Auch die Umkehrfunktion $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ hat diese Eigenschaften.

4.2 Funktionenfolgen

Eine Funktionenfolge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \{f : D \to \mathbb{R}\}$.

Punktweise Konvergenz

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ falls für alle $x \in D$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

- $\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq \mathbb{N}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Gleichmässige Konvergenz

Die Folge (f_n) konvergiert gleichmässig in D gegen f falls gilt:

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1$, so dass $\forall n \geq N,\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 1$, so dass $\forall n, m \geq \mathbb{N}$ und $\forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Die Funktionenfolge (g_n) ist gleichmässig konvergent, falls für alle $x \in D$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ existiert und die Folge (g_n) gleichmässig gegen g konvergiert.

Sei eine Funktionsfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ stetig, dann ist die dazugehörige Funktion f genau dann stetig, wenn f_n gleichmässig konvergiert. Punktweise Konvergenz ist nicht ausreichend.

Beispiel: $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $x \to x^n$ konvergiert punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ if } x < 1 \\ 1 \text{ if } x = 1 \end{cases}$
$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig $\forall n \in \mathbb{N}$ aber die Grenzwertfunktion $f(x)$ ist nicht stetig.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig, falls die durch $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Sei f_n eine Folge stetiger Funktionen. Ausserdem ist $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig und deren Grenzwert ist eine in D stetige Funktion.

4.3 Potenzreihen

Definition Potenzreihe

Potenzreihen sind Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 wird als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ definiert.

Konvergenzradius

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe um einen Entwicklungspunkt x_0 ist die grösste Zahl r, so dass die Potenzreihe für alle x mit $|x - x_0| < r$ konvergiert. Falls die Reihe für alle x konvergiert, ist der Konvergenzradius r unendlich. Sonst:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert absolut für alle $|x| < r$ und divergiert für alle $|x| > r$. **Der Fall $|x| = r$ ist unklar und muss geprüft werden.**

4.3.1 Definitionen per Potenzreihen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad r = \infty$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad r = \infty$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad r = \infty$$

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \qquad r = 1$$

Aus dem Leibnizkriterium und der Potenzreihenentwicklung von $\sin(x)$ folgt $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ für $0 \leq x \leq \sqrt{6}$.

4.4 Grenzwerte von Funktionen

Häufungspunkt

$x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D falls $\forall \delta > 0 : (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash\{x_0\}) \cap D \neq \varnothing$.

Grenzwert - Funktionen

Wenn $f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D ist, dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ ($\lim_{x\to x_0} f(x) = A$), falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass $\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash\{x_0\}) : |f(x) - A| < \varepsilon$.

Eine Funktion f ist in x_0 stetig $\iff \lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$.

Die Stetigkeit einer abschnittweise definierten Funktion hängt auch vom Verhalten(links-/rechtsseitiger Grenzwert) an den Grenzen von Abschnittsintervallen ab.

Satz von L'Hôpital

Seien f, g stetig und differenzierbar auf $]a, b[$. Wenn $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ oder $\pm\infty$ und $g'(x) \neq 0\ \forall x \in I\backslash\{c\}$, dann gilt

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Grenzwerte der Form ∞^0 und 1^∞ können meist mit $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$ und dann Bernoulli (nur Exponenten betrachten da e stetig) anwenden oder vereinfachen berechnet werden.

Sandwichsatz für Grenzwerte

$D = \mathbb{R}\backslash\{0\}, f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ Wir beweisen $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ per Sandwichsatz: Wir haben schon gesehen, dass für $0 \leq x \leq \sqrt{6}$ $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x$. Daraus folgt $1 - \frac{x^2}{3!} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1, \forall x \in]0, \sqrt{6}[$.
Da $1 - \frac{x^2}{3!}, 1 \to 1$ für $x \to 0$ gilt per Sandwichsatz $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$.

4.5 Beweisideen

Injektivität

- Zeigen, dass f^{-1} surjektiv ist.
- Zeigen, dass gilt $y_1 = y_2 \implies x_1 = x_2$.
- Annehmen, dass es zwei verschiedene Punkte gibt, dann Widerspruch herbeiführen (Norm hilfreich?).
- Zeigen, dass die Ableitung $\neq 0$ ist, die Funktion also streng monoton wachsend/fallend.

Surjektivität

- Zeigen, dass gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- Zeigen, dass f^{-1} keine Lücken im Definitionsbereich hat.

4.5.1 Gerade/Ungerade

Für eine gerade Funktion gilt $f(x) = f(-x)$, sie ist symmetrisch zur Y-Achse.
Eine ungerade Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, es gilt also $f(-x) = -f(x)$.

4.6 Algebraische und Analytische Eigenschaften

- Jedes Vielfache einer geraden bzw. ungeraden Funktion ist wieder gerade bzw. ungerade.
- Die Summe zweier gerader Funktionen ist wieder gerade.
- Die Summe zweier ungerader Funktionen ist wieder ungerade.
- Das Produkt zweier gerader Funktionen ist wieder gerade.
- Das Produkt zweier ungerader Funktionen ist gerade.
- Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade.
- Der Quotient zweier gerader Funktionen ist wieder gerade.
- Der Quotient zweier ungerader Funktionen ist gerade.
- Der Quotient einer geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade.
- Die Komposition einer beliebigen Funktion mit einer geraden Funktion ist gerade.
- Die Komposition einer ungeraden Funktion mit einer ungeraden Funktion ist ungerade.
- Die Ableitung einer geraden differenzierbaren Funktion ist ungerade, die Ableitung einer ungeraden differenzierbaren Funktion gerade.
- Das bestimmte Integral einer ungeraden stetigen Funktion ergibt 0, wenn die Integrationsgrenzen symmetrisch um den Nullpunkt liegen.

5 Ableitungen

5.1 Differenzierbarkeit

Differenzierbar

f ist **in x_0 differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert. Wenn dies der Fall ist, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{d}{dx}f(x_0)$ bezeichnet. f ist **differenzierbar**, falls f für jedes $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

Differenzierbarkeit nach Weierstrass

f ist in x_0 differenzierbar $\iff$

- Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + r(x)(x-x_0)$ und $r(x_0) = 0$, r stetig in x_0.
  - Falls f differenzierbar ist, dann ist $c = f'(x_0)$ und $r(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ eindeutig bestimmt.
- Variation: Sei $\phi(x) = f'(x_0) + r(x)$. Dann gilt f in x_0 differenzierbar, falls $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x-x_0)$, $\forall x \in D$ und ϕ in x_0 stetig ist. Dann gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

f differenzierbar $\implies$ f stetig

Dies folgt aus der Varation der Differenzierbarkeit nach Weierstrass.
Beweis: Sei $x_0 \in D$ beliebig und f differenzierbar. $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(f(x_0) + \phi(x)(x-x_0)) \overset{\phi(x) \text{ stetig}}{=} f(x_0) + \phi(x_0) \cdot \lim_{x\to 0}(x-x_0) = f(x_0)$.

Bmk: Es gibt stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ die an keiner Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind.
Sei $g(x) =< x >:= \min\{|x-m| | m \in \mathbb{Z}\}$ und dann ist $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(10^n x)}{10^n}$ stetig auf $\mathbb{R}$ doch in keinem Punkt differenzierbar.

Höhere Ableitungen

1. Für $n \geq 2$ ist f n-mal differenzierbar in D falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ die n-te Ableitung von f.
2. f ist n-mal stetig differenzierbar in D, falls sie n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ in D stetig ist.
3. f ist in D glatt, falls sie $\forall n \geq 1$ n-mal differenzierbar ist ("unendlich differenzierbar").

Glatte Funktionen: exp, sin, cos, sinh, cosh, tanh, ln, arcsin, arccos, arccot, arctan und alle Polynome. tan ist auf $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi\}$, cot auf $\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$ glatt.

Höhere Ableitungen: Regeln

Sei f, g n-mal differenzierbar. Dann sind

$$(f+g), f \cdot g, f \circ g, \frac{f}{g}$$

n-mal differenzierbar. ($g \neq 0$ für $\frac{f}{g}$)

- $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

5.2 Ableitungsregeln

- Linearität der Ableitung
$$(\alpha \cdot f(x) + g(x))' = \alpha \cdot f'(x) + g'(x)$$
- Produktregel
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
- Quotientenregel
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$
- Kettenregel
$$(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$
- Potenzregel
$$(c \cdot x^a)' = c \cdot a \cdot x^{a-1}$$
- Umkehrregel
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, f'(f^{-1}(x)) \neq 0$$
f muss bijektiv und differenzierbar sein. f^{-1} muss in x differenzierbar sein.

5.3 Implikationen der Ableitung

1. f besitzt ein lokales Minimum in x_0, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ oder falls das Vorzeichen von f' um x_0 von $-$ zu $+$ wechselt.
2. f besitzt ein lokales Maximum in x_0, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ oder falls das Vorzeichen von f' um x_0 von $+$ zu $-$ wechselt.
3. f besitzt ein lokales Extremum in x_0, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.
Wenn man den Vorzeichenwechsel benutzen will, um auf ein Extremum zu schliessen, dann muss f' stetig sein.
4. Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, ist x_0 nicht unbedingt ein Sattelpunkt.
Als Gegenbeispiel siehe $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ aber $x = 0$ ist ein Minimum von f.
5. f besitzt einen Wendepunkt in x_0, wenn $f''(x_0) = 0$.
6. f ist in x_0 konvex, wenn $f''(x_0) \geq 0$.
7. f ist in x_0 konkav, wenn $f''(x_0) \leq 0$.

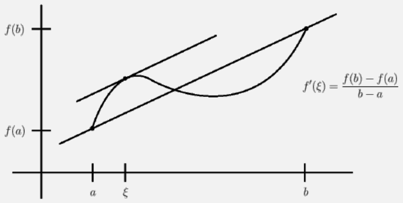
5.4 Sätze zur Ableitung

Satz von Rolle

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Wenn $f(a) = f(b)$, dann gibt es mindestens ein $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Mittelwertsatz (Lagrange)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Dann gibt es (mindestens ein) $\xi \in]a,b[$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.



5.5 Taylorreihen

Taylorreihen sind ein Weg, glatte Funktionen als Potenzreihen anzunähern.

Definition: Taylor-Polynom

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ (n+1)-mal differenzierbar.
Das n-te Talyor-Polynom $T_n f(x; a)$ an einer Entwicklungsstelle a ist definiert als:

$$T_n f(x; a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

$$= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2} \cdot (x-a)^2 + \ldots$$

Da eine Abschätzung mit dem Taylor-Polynom im allgemeinen Fall einen gewissen Fehler hat, definieren wir das Restglied $R_n(f, x, a)$.

Für jedes $a < x < b$ gibt es ein $\xi \in]a, x[$ mit:

$$f(x) = T_n f(x; a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Wobei

$$R_n(f, x, a) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Fehlerabschätzung des Taylor-Polynoms

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ der Fehler des Taylorpolynoms.

$$|\alpha| \leq \sup_{\xi \in [a,x]} |R_n(f, x, a)|$$

$$= \sup_{\xi \in [a,x]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)} \right|$$

Taylorreihe

Die unendliche Reihe

$$Tf(x; a) := T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

wird Taylorreihe von f an Stelle a genannt. (Dafür muss die Funktion f glatt sein.)

Differenzierbarkeit von Potenzreihen

Funktionen die durch Potenzreihen gegeben sind, sind als Polynome gliedweise differenzierbar. Innerhalb ihres Konvergenzbereichs sind sie glatte Funktionen.
Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ die Taylorreihe der Funktion f.
Dann kann man die j-te Ableitung wie folgt ausdrücken:

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot \frac{n!}{(n-j)!} \cdot (x-a)^{(n-j)}$$

Für eine allgemeine Potenzreihe gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-x_0)^k$$

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!}(x-x_0)^{k-j}$$

Beispiele Taylorreihen ($a = 0$):

- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!}$
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

5.6 Länge einer Kurve

Für eine Kurve $p(t) = (x(t), y(t))$ in der xy-Ebene gilt

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, \mathrm{d}t$$

6 Integrale

6.1 Riemann-Integral

Definition: Partition

Eine Partition von $I = [a, b]$ ist eine endliche Teilmenge $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\} \subsetneq I$, wobei $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $\{a, b\} \subseteq P$. ("Aufteilung")
Wir bezeichnen $\delta_i := x_i - x_{i-1}, \forall i \geq 1$ (Länge des Teilintervalls)
Die **Feinheit der Zerlegung** ist definiert als $\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i$.
Wir definieren $\mathcal{P}(I)$ als die Menge aller Partitionen von I.
$\mathcal{P}_\delta(I) := \{P \in \mathcal{P}(I) | \delta(P) \leq \delta\}$

Definition: Riemann-Summe

Sei $\xi_i \in I_i$ zwischen den Stützstellen: $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Ober- und Untersumme

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, d.h. $\exists M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$
Obersumme:

$$\overline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi_i \in I_i} f(\xi_i) \cdot \delta_i$$

Untersumme:

$$\underline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{\xi_i \in I_i} f(\xi_i) \cdot \delta_i$$

Bmk:
$-M \cdot (b-a) \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) \leq M \cdot (b-a)$

Seien P, Q Partitionen des gleichen Intervalls.

- Eine Vereinigung von zwei Partitionen ist wieder eine Partition.
- Eine Partition P ist eine Verfeinerung einer Partition Q, falls $Q \subset P$.
- $P \cup Q$ ist immer eine Verfeinerung von P und Q.
- $P \subset Q \implies \underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$
- Für P, Q beliebig gilt: $\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q)$
Insbesondere

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f, P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f, P)$$

Riemann-integrierbar

Wir definieren das untere Riemann Integral

$$\underline{S}(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f, P)$$

und das obere Riemann Integral von f

$$\overline{S}(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{S}(f, P)$$

Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$.
Dann ist

$$A := \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \underline{S}(f) = \overline{S}(f), A \in \mathbb{R}$$

6.2 Integrierbarkeit zeigen

Integrierbarkeitskriterien

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $A = \int_a^b f(x)dx$ falls f integrierbar.
f integrierbar
$\iff$
$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$
$\iff$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, so dass $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon, \forall P \in \mathcal{P}_\delta(I)$
$\iff$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, so dass $\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I)$ und $\xi_1, ..., \xi_n$ mit $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$
$|A - S(f, P, \xi)| < \varepsilon$
$\iff$
$lim_{\delta(P) \to 0} S(f, P, \xi)$ existiert. (Dann wäre $lim_{\delta(P) \to 0} S(f, P, \xi) = A$)

Gleichmässige Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist **gleichmässig stetig**, falls $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in D$:
$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
(Das δ hängt nur vom ε ab)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig aber nicht gleichmässig stetig.

Satz von Heine

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in dem **kompakten Intervall** $[a, b]$. Dann ist f in $[a, b]$ gleichmässig stetig.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.

- f stetig in $[a, b] \implies f$ integrierbar über $[a, b]$
- f monoton in $[a, b] \implies f$ integrierbar über $[a, b]$

- Wenn f, g beschränkt und integrierbar sind, dann sind

$$f+g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f,g), \min(f,g), \frac{f}{g}$$

integrierbar

- Jedes Polynom ist integrierbar, auch $\frac{P(x)}{Q(x)}$ falls $P(x), Q(x)$ auf $[a,b]$ definiert sind und $Q(X)$ in $[a,b]$ keine Nullstellen besitzt

6.3 Sätze & Ungleichungen

- $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b] \to \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$
- $\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$
- $\left|\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\ \mathrm{d}x}$

Mittelwertsatz

Wenn $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

Daraus folgt auch, dass wenn $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ wobei f stetig, g beschränkt und integrierbar mit $g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ ist, dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.

6.4 Stammfunktionen

Definition: Stammfunktion

Eine Funktion $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von f, falls F (stetig) differenzierbar in $[a,b]$ ist und $F' = f$ in $[a,b]$ gilt.

“f integrierbar” impliziert *nicht*, dass eine Stammfunktion existiert. Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ 1, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

Sei $a < b$ und $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t,\ a \leq x \leq b$$

ist in $[a,b]$ stetig differenzierbar und $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$.

Fundamentalsatz der Analysis

Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

6.5 Integrationsregeln

Erweiterung der Definition eines Integrals

Wir erweitern die Definition, so dass

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)dx$$

und

$$\int_a^a f(x)dx := 0$$

Linearität

$$\int u \cdot f(x) + v \cdot g(x)\ \mathrm{d}x = u\int f(x)\ \mathrm{d}x + v\int g(x)\ \mathrm{d}x$$

Gebietsadditivität

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x,\ c \in [a,b]$$

Partielle Integration

Seien $a < b$ relle Zahlen und $f, g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b)$$

$$-f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- Grundsätzlich gilt: Polynome ableiten $(g(x))$, wo das Integral periodisch ist $(\sin, \cos, e^x, \ldots)$ integrieren $(f'(x))$
- Teils ist es nötig, mit 1 zu multiplizieren, um partielle Integration anwenden zu können (z.B. im Fall von $\int \log(x)\ \mathrm{d}x$)
- Muss eventuell mehrmals angewendet werden

Substitution

Um $\int_a^b f(g(x))\ \mathrm{d}x$ zu berechnen: Ersetze $g(x)$ durch u und integriere $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$.

- $g'(x)$ muss sich irgendwie herauskürzen, sonst nutzlos.
- Grenzen substituieren nicht vergessen.
- Alternativ kann auch das unbestimmte Integral berechnet werden und dann u wieder durch x substituiert werden.

Umformung von Faktoren und Summanden

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.
(1) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $a+c, b+c$ in I enthalten ist. Dann gilt:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx = \int_a^b f(t+c)dt$$

(2) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$ sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten ac, bc in I enthalten ist. Dann gilt:

$$\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx$$

Partialbruchzerlegung

Seien $p(x), q(x)$ zwei Polynome. $\int \frac{p(x)}{q(x)}$ wird wie folgend berechnet:

1. Falls $\deg(p) \geq \deg(q)$, führe eine Polynomdivision durch. Dies führt zum Integral $\int a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$.
2. Berechne die Nullstellen von $q(x)$.
3. Pro Nullstelle: Einen Partialbruch erstellen.
   - Einfach, reell: $x_1 \to \frac{A}{x-x_1}$
   - n-fach, reell: $x_1 \to \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$
   - Einfach, komplex: $x^2+px+q \to \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
   - n-fach, komplex: $x^2+px+q \to \frac{A_1x+b_1}{x^2+px+q} + \ldots$
4. Parameter $A_1, \ldots, A_n$ (bzw. $B_1, \ldots, B_n$) bestimmen. (x jeweils gleich Nullstelle setzen, umformen und lösen).

6.6 Integration konvergenter Reihen

Funktionsfolge integrieren

Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen, die gleichmässig gegen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt und integrierbar:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$$

(ohne gleichmässige Konvergenz dürfte man den lim und das Integral nicht tauschen!) Sei $\sum_{n=0}^\infty f_n$ auf $[a,b]$ gleichmässig konvergent. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^\infty\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^\infty f_n(x)\right)dx$$

Integration von Potenzreihen

Sei $f(x) := \sum_{k=0}^\infty c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist f auf $[-r,r]$ integrierbar $\forall r \in [0,\rho[$ und es gilt: $\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^\infty c_k\frac{x^{k+1}}{k+1}, \forall x \in]-\rho,\rho[$

Bmk: Im Allg. kann man Potenzreihen in ihrem Konvergenzbereich termweise differenzieren und integrieren.

6.7 Euler-McLaurin-Formel

Die Formel hilft Summen wie $1^l + 2^l + 3^l + \ldots + n^l$ abzuschätzen. Für die Formel brauchen wir die Bernoulli-Polynome $B_n(x)$, sowie die Bernoulli-Zahlen $B_n(0)$. Wir brauchen dafür Polynome, welche durch die folgenden Eigenschaften bestimmt sind:

1. $P_k' = P_{k-1}, k > 1$
2. $\int_0^1 P_k(x)\ \mathrm{d}x = 0, \forall k \geq 1$

Für das k-te Bernoulli-Polynom gilt: $B_k(x) = k!P_k(x)$. Wir definieren weiter $B_0 = 1$ und alle anderen Bernoulli-Zahlen rekursiv: $B_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}B_i = 0$.
Somit erhalten wir für das Bernoulli-Polynom folgende Definition:

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i x^{k-i}$$

Hier ein paar Bernoulli-Polynome: $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$. Nun definieren wir noch:

$$\tilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \forall x: 0 \leq x < 1 \\ B_k(x-n) & \forall x: n \leq x < n+1 \end{cases}$$

Euler-McLaurin-Summationsformel

Sei $f : [0, n] \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar. Dann gilt:
Für $k = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\ dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \tilde{B}_1(x) f'(x)\ dx$$

Für $k > 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\ dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j B_j}{j!}(f^{(j-1)}(n) + f^{(j-1)}(0)) + \tilde{R}_k$$

wobei

$$\tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x)\ dx$$

Beispiel für Euler-McLaurin

$$1^l + 2^l + 3^l + ... + n^l \text{ wobei } l \geq 1, l \in \mathbb{N}$$

Angewandt auf $f(x) = x^l$ und $k = l+1$ folgt für alle $l \geq 1$:

$$1^l + 2^l + 3^l + ... + n^l = \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^{l} (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j}$$

6.8 Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion wird gebraucht, um die Funktion $n \mapsto (n-1)!$ zu interpolieren. Für $s > 0$ definieren wir:

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\ dx = (s-1)!$$

Die Gamma-Funktion konvergiert für alle $s > 0$ und hat folgende weiter Eingeschaften:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
3. Γ ist logarithmisch konvex, d.h.:

$$\Gamma(\lambda x + (2-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

Die Gamma-Funktion ist die einzige Funktion $]0, \infty[\to]0, \infty[$, die (1), (2) und (3) erfüllt. Zudem gilt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)...(x+n)} \quad \forall x > 0$$

6.9 Stirling'sche Formel

Die Stirling'sche Formel ist eine Abschätzung der Fakultät. Mit der Euler-McLaurin-Formel kombiniert folgt

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \cdot \exp(\frac{1}{12n} + R_3(n))$$

wobei $|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \frac{1}{n^2}$ $\forall n \geq 1$

6.10 Uneigentliche Integrale

Definition: Uneigentliches Integral

Sei $f(x) : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ mit $\forall b > a$. Falls $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx$ existiert, ist $\int_a^\infty f(x)\ dx$ der Grenzwert und f ist auf $[a, \infty[$ integrierbar.

Diese Definition gilt auch für $f(x) :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$, wobei $\int_{-\infty}^b f(x)\ dx$ dann $\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\ dx$ ist.

Falls $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ auf $]a, b]$ nicht beschränkt ist, aber auf jedem Intervall $[a+\varepsilon, b], \varepsilon > 0$, beschränkt und integrierbar ist, ist f auf $]a, b]$ integrierbar falls $lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ existiert; in diesem Fall wird dieser Grenzwert mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.

Majoranten-/ Minorantenkriterium

Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar auf $[a, b], \forall b > a$.

1. $|f(x)| \leq g(x), \forall x \geq a$ und g auf $[a, \infty[$ integrierbar
   $\implies$ f auf $[a, \infty[$ integrierbar
2. $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)dx$ divergiert
   $\implies$ $\int_a^\infty f(x)dx$ divergiert

McLaurin-Satz (Integraltest für Reihen)

Sei $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ monoton fallend. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ genau, wenn $\int_1^\infty f(x)\ dx$ konvergiert. In diesem Fall gilt: $0 \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) - \int_1^\infty f(x)\ dx \leq f(1)$

6.11 Unbestimmte Integrale

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert. Wenn f stetig ist, gibt es eine Stammfunktion F. Wir schreiben dann

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral ist die Umkehroperation der Ableitung.

7 Trigonometrie

Die Kreiszahl $\pi := \text{Inf}\{t > 0 | \sin t = 0\}$. Beweisidee: $\sin x > 0, \forall x \in]0, 2]$ und $\sin 4 < 0$. Da $\sin x$ stetig ist, gibt es per Zwischenwertsatz mindestens ein $x \in]2, 4[$ so dass $\sin x = 0$.

7.1 Hyperbelfunktionen

- $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to [1, \infty]$
- $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

7.2 Regeln

7.2.1 Periodizität

- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$ $\quad\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$ $\quad\cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha)$

7.2.2 Parität

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\quad\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ $\quad\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

7.2.3 Ergänzung

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ $\quad\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$ $\quad\cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$

7.2.4 Komplemente

- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$ $\quad\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\pi/2 - \alpha) = -\tan(\alpha)$ $\quad\cot(\pi/2 - \alpha) = -\cot(\alpha)$

7.2.5 Doppelwinkel

- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

7.2.6 Addition

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

7.2.7 Subtraktion

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

7.2.8 Multiplikation

- $\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}$

7.2.9 Potenzen

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$
- $\tan^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$

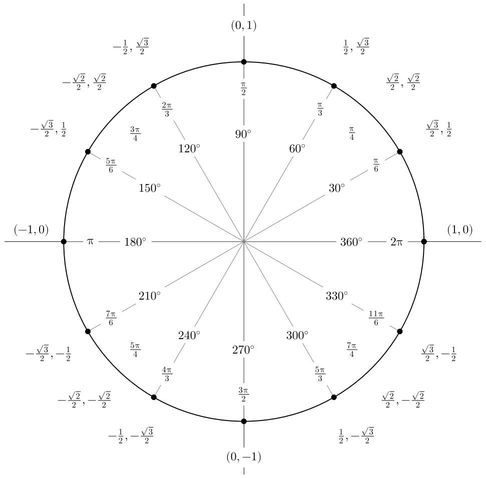
7.2.10 Diverse

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ und $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

  In der Serie 8 wurde gezeigt, dass:
- $\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Wichtige Werte

deg	0°	30°	45°	60°	90°	180°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0



8 Tabellen

8.1 Grenzwerte

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$
$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$	$\lim_{x\to0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^b = 1$	$\lim_{x\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$
$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$	$\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x+k})^x = e^{-k}$
$\lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a), \forall a > 0$	$\lim_{x\to\infty} x^a q^x = 0, \forall 0 \leq q < 1$
$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to0} \frac{\sin kx}{x} = k$
$\lim_{x\to0} \frac{1}{\cos x} = 1$	$\lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
$\lim_{x\to0} \frac{\log 1-x}{x} = -1$	$\lim_{x\to0} x\log x = 0$
$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to0} \frac{x}{\arctan x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$	$\lim_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x} = 0$

8.2 Ableitungen 1

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arctan^{-1}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$x^x\ (x > 0)$	$x^x \cdot (1 + \ln x)$

8.3 Ableitungen 2

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
$\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a\ (a \neq 1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k\ln(a)}a^{kx}$	a^{kx}	$ka^{kx}\ln(a)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3}x^{3/2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2\sin(x)\cos(x)$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2\sin(x)\cos(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c}\cdot e^{cx}$	e^{cx}	$c \cdot e^{cx}$
$x(\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{\ln(a)x}$

Integralformel

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)}dx = \frac{b-a}{2}$$

Beweis: $\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)}dx = I$
Substitution: $u = a+b-x, du = -dx$

$$I = \int_b^a \frac{f(a+b-u)}{f(u)+f(a+b-u)}(-du)$$

$$= \int_a^b \frac{f(a+b-u)}{f(u)+f(a+b-u)}du$$

$$2 \cdot I = \int_a^b \frac{f(x)+f(a+b-x)}{f(a+b-x)+f(x)}$$

$$2I = \int_a^b 1dx = b-a \implies I = \frac{b-a}{2}$$

8.4 Integrale

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
$\int f'(x)f(x)\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$	$\sqrt{\pi}$
$\int(ax+b)^n\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n\ \mathrm{d}x$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int(ax^p+b)^n x^{p-1}\ \mathrm{d}x$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int(ax^p+b)^{-1}x^{p-1}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{ap}\ln\lvert ax^p+b\rvert$
$\int \frac{ax+b}{cx+d}\ \mathrm{d}x$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int\sqrt{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2}\ln(x + f(x))$

9 Aufgaben

9.1 Tipps Für Multiple-Choice

- **Richtig lesen!!!**
- (Gegen-)Beispiele suchen.
- Monotonieverhalten bei verketteten/miteinander verrechneten Funktionen bleibt nicht umbedingt erhalten.
  - Sei $g : X \to Y$ streng monoton wachsend
    - $f : Y \to Z$ (streng) monoton wachsend $\implies f(g(x))$ (streng) monoton wachsend.
    - $f : Y \to Z$ (streng) monoton fallend $\implies f(g(x))$ (streng) monoton fallend.
  - Sei $g : X \to Y$ monoton wachsend
    - $f : Y \to Z$ (streng) monoton wachsend $\implies f(g(x))$ monoton wachsend.
    - $f : Y \to Z$ (streng) monoton fallend $\implies f(g(x))$ monoton fallend.
  - Die Inverse einer monoton wachsenden Funktion ist monoton wachsend.(Beweis mit Umkehrregel)
  - Die Multiplikation oder Division zweier monotonen Funktionen können monoton wachsend/fallend bleiben oder ihre Monotonie verlieren.
  - Monoton wachsende Funktion konvex(konkav) $\implies$ Inverse konkav(konvex).
  - Monoton fallende Funktion konvex(konkav) $\implies$ Inverse konvex(konkav).
- Verkettete Funktionen:
  - Falls äussere beschränkt $\implies$ Verkettung beschränkt.
  - Verkettung stetiger Funktionen ist stetig.
  - Verkettung (streng) konvexer Funktionen, muss nicht konvex sein.
- Schauen ob Funktionsfolge f_n gleichmässig und nicht nur punktweise gegen f konvergiert. $\implies$ Gewisse Eigenschaften (Stetigkeit) nur dann gültig.
- $f''(x_0) = 0 \not\Longrightarrow x_0$ ist ein Sattelpunkt von f.
- f stetig $\not\Longrightarrow f'$ stetig.
- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. $\implies f^{(i)}(0) = 0$ für i gerade.
- $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$, sodass $g \circ f : X \to Z$ bijektiv. $\implies f$ injektiv, g surjektiv
- Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ mit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. Falls f^2 und f^3 in $]a, b[$ differenzierbar und $f(x) \neq 0\ \forall x \in]a, b[\implies f$ in $]a, b[$ differenzierbar. (Da wir f^3 durch f^2 teilen).
- Im Allg. muss eine Grenzfunktion f nicht differenzierbar sein, und wenn sie es ist muss f' nicht gleich $\lim_{n\to\infty} f_n'$ sein.
- $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ monoton $\not\Longrightarrow f$ beschränkt. Der Logarithmus $\ln : (0, 1] \to \mathbb{R}$ ist monoton, aber nicht beschränkt.
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ist beschränkt.
- $f(x) = \lvert x\rvert \cdot \mathrm{sign}(x)$ ist stetig, da $\lvert x\rvert \cdot \mathrm{sign}(x) = x$ und $g(x) = x$ stetig.

9.2 Multiple Choice

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $f_n : [a, b] \to R, n \geq 1$ so dass die Funktionenfolge $(f_n)n \geq 1$ auf $[a, b]$ gleichmässig gegen f konvergiert. Geben Sie für jede folgender Aussagen an ob sie wahr oder falsch ist.

1. Sei $x_0 \in]a, b[$. Falls f_n für alle $n \geq 1$ in x_0 differenzierbar ist, so ist f in x_0 differenzierbar.
   (A) wahr.
   (B) falsch.
   Stetigkeit $\not\Longrightarrow$ Differenzierbarkeit
2. Falls f_n für alle $n \geq 1$ auf $[a, b]$ beschränkt ist dann folgt, dass für jede Partition P von $[a, b]$ der Grenzwert der Untersumme $\lim_{n\to\infty} s(f_n, P)$ existiert und $\lim_{n\to\infty} s(fn, P) = s(f, P)$.
   (A) wahr.
   (B) falsch. Sei $P = \{x_0, ..., x_m\}$ eine Partition

von $[a,b]$ mit $x_0 < \ldots < x_m$

$\lim_{n\to\infty} s(f_n, P) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \inf_{x_{i-1}\le x \le x_i} f_n(x)\delta_i =$
$\sum_{i=1}^{m} \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} \lim_{n\to\infty} (f_n(x))\,\delta_i$
$= \sum_{i=1}^{m} \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)\delta_i = \sum_{i=1}^{m} f_i\delta_i = s(f,P)$

3. Falls fn für alle $n \ge 1$ stetig ist, so ist f gleichmässig stetig.
   (A) wahr.
   (B) falsch.
   gleichmässige Konvergenz $\implies$ Stetigkeit von $f \implies$ gleichmässige Stetigkeit da kompaktes Intervall
4. Falls f_n für alle $n \ge 1$ konvex ist, so ist f konvex.
   (A) wahr.
   (B) falsch.

Sei $(q_n)_{n\ge1}$ eine Folge rationaler Zahlen, sodass $|q_n - q_n + 1| \to 0$ für $n \to \infty$.
Dann ist $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Falsch: Sei $q_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Dann ist $q_n \in \mathbb{Q}$ und es gilt $|q_n - q_{n+1}| = |-\frac{1}{n+1}| \to 0$ für $n \to \infty$, aber $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge, denn

$$q_{2n} - q_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \ge \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Sei $(a_n)_{n\ge1}$ eine konvergente Folge, und σ eine Permutation von $\{1,2,3,\dots\}$ (d.h. eine Bijektion der Menge $\{1,2,3,\dots\}$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $b_n = a_{\sigma(n)}, \forall n \ge 1$.
Richtig. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge$(a_n)_{n\ge1}$. Es gilt $\forall \varepsilon < 0, \exists N_\varepsilon : |\alpha - a_n| < \varepsilon, \forall n \ge N_\varepsilon$.
Wir definieren $m_\varepsilon = \max(k : \sigma(k) \le n_\varepsilon)$. Es gilt $m_\varepsilon < \infty$, da $n_\varepsilon < \infty$ und σ eine Bijektion. Dann gilt:

$$|\alpha - b_n| = |\alpha - a_{\sigma(n)}| < \varepsilon, \forall n \ge m_\varepsilon$$

Somit folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

Sei $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $b_n = a_{\phi(n)}$.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent und ϕ surjektiv $\implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist konvergent.
   Falsch. Gegenbeispiel:
   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \ldots$$
   konvergiert, aber
   $$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1 + 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \ldots$$
   konvergiert nicht.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent und ϕ injektiv $\implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist konvergent.
   Falsch. Gegenbeispiel:
   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \ldots$$
   konvergiert, aber
   $$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$
   konvergiert nicht.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ surjektiv $\implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist konvergent.
   Falsch. Gegenbeispiel:
   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$
   konvergiert, aber
   $$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$$
   konvergiert nicht.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ injektiv $\implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist konvergent.
   Richtig. Eine Teilfolge oder eine Umordnung der absolut konvergenten Reihe ist auch absolut konvergent.

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent.

- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ konvergiert immer absolut.
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert immer absolut.
- Beweis: (a_k) und (b_k) sind beschränkt. Dann $\exists C > 0, |a_k| + |b_k| < C$ und $|a_k|^2 < C|a_k|, |a_k b_k| < C|a_k|$.

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion:

- I kompakt $\implies f(I)$ kompakt.
- $f(I)$ kompakt $\not\Longrightarrow I$ kompakt.
  Gegenbeispiel: Sei $I = (-\pi, \pi)$ und $f(x) = \sin x$. Dann ist $f(I) = [-1,1]$ kompakt, aber $(-\pi,\pi)$ ist nicht kompakt.

Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}, x \to (x^{\frac{1}{2}} + n^{-1})^2$$

- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\ge0}$
- Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.
  Falsch: Aus $|f_n(x) - x| = 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{n} + \frac{1}{n^2}$ folgt, dass für $x > n^2, |f_n(x) - x| > 2$. Folglich kann (f_n) nicht gleichmässig konvergieren.
- Für alle $M > 0$ gilt, dass $f_n|_{[0,M]} : [0,M] \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.
  Richtig: Es gilt $|f_n(x) - x| = 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{n} + \frac{1}{n^2} \le M^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n^2}, \forall x \in [0,M]$.
  Da $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2M^{\frac{1}{2}}}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 0$, konvergiert $(f_n|_{[0.M]})$ gleichmässig.

Falls f_n eine Funktionenfolge ist, wobei f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ einmal stetig differenzierbar ist und falls sowohl (f_n) als auch (f_n') gleichmässig konvergieren, mit $f_n \to f$ und $f_n' \to g$, dann ist f stetig differenzierbar mit $f' = g$.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen nicht richtig?

1. f hat eine Taylorreihe bei $x_o = 0$
2. Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0, aber nicht notwendig > 0
3. Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion f dar.
4. Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

Lösung: (3) ist falsch. Gegenbeispiel:
Sei f eine Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \ne 0$.
Diese ist beliebig oft stetig differenzierbar, aber ihre Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist immer gleich 0 und weicht daher von der Funktion f für $x \ne 0$ ab.

Seien $f, g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ nicht negative, zweimal differenzierbare Funktionen. Die Funktion h sei definiert durch $h(x) := g(f(x))$ für alle $x \ge 0$.

1. h ist zweimal differenzierbar.
   Wahr: $h''(x) = g''(f(x)) \cdot f'(x)^2 + g'(fx(x)) \cdot f''(x)$
2. Wenn f und g streng konvex sind, ist h konvex.
   Falsch: Gegenbeispiel mit $f(x) = g(x) = (x-1)^2$
3. Wenn $\int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$ und $\int_0^\infty g(x)\ \mathrm{d}x$ konvergieren, konvergiert $\int_0^\infty h(x)\ \mathrm{d}x$.
   Falsch: Gegenbeispiel $f(x) = g(x) = e^{-x}$.
   Dann gilt $\int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^\infty g(x)\ \mathrm{d}x = 1$.
   Da aber
   $$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} e^{(-e^{-x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{e^x}}} = 1$$
   divergiert $\int_0^\infty h(x)\ \mathrm{d}x$.

9.3 Versch. Aufgaben

Zeigen sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Reihenentwicklung: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\left(x^4\right)$ und $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}\left(x^2\right)$.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n &= \exp\left(n\log\left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(n\log\left(1 - \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(n\left(-\frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{t^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

Berechne $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\exp\left(-x^2\right) dx$
Wir wissen $\sin(x)$ ungerade und $\exp\left(-x^2\right)$ gerade.
Das Produkt einer ungeraden und geraden Funktion ist eine ungerade Funktion.
Für ungerade Funktionen gilt

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

Daraus folgt: $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\exp\left(-x^2\right)\ \mathrm{d}x = 0$

Sei x und θ reelle Zahlen mit $x + \frac{1}{x} = 2\cos(\theta)$. Zu zeigen: Für jede natürliche Zahl $n \ge 1$ gilt

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(n\theta)$$

IA

$$\begin{aligned}
n = 2:\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \\
= 4\cos^2(\theta) - 2 &= 2\left(2\cos^2(\theta) - 1\right) \\
&= 2\left(\cos^2(\theta) - \left(1 - \cos^2(\theta)\right)\right) \\
&= 2\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right) = 2\cos(2\theta)
\end{aligned}$$

IH
gilt für $n = k$ und $n = k+1$

IS

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} = \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$-\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) = 4\cos\left((n+1)\theta\right)\cos(\theta)$$

$$-2\cos(n\theta) \overset{(*)}{=} 4\cos\left((n+1)\theta\right)\cos(\theta)$$

$$-2\left(\cos\left((n+1)\theta\right)\cos(-\theta) - \sin\left((n+1)\theta\right)\sin(-\theta)\right)$$

$$= 2\cos\left((n+1)\theta\right)\cos(\theta) - 2\sin\left((n+1)\theta\right)\sin(\theta)$$

$$\overset{\text{Add.T.}}{=} 2\cos\left((n+2)\theta\right)$$

Der Schritt (∗) lässt sich folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \cos(n\theta+\theta-\theta)\\ &= \cos(n\theta+\theta)\cos(-\theta) - \sin(n\theta+\theta)\sin(-\theta)\end{aligned}$$

Manipulation für $f(x) = \sin(\arctan(x))$ (funktioniert ähnlich für $\cos(\arctan(x))$):

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\sin(\arctan(x))}{\sqrt{\sin^2(\arctan(x)) + \cos^2(\arctan(x))}}\\ &= \frac{\frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}}{\sqrt{\frac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}+1}}\\ &= \frac{\tan(\arctan(x))}{\sqrt{\tan^2(\arctan(x))+1}}\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

Manipulation für $f(x) = \tan(\arcsin(x))$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \tan(\arcsin(x))\\ &= \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))}\\ &= \frac{\sin(\arcsin(x))}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}}\\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

$$\int x \arcsin(x)\, dx$$

Substitution mit $x = \sin(u)$:

$$\begin{aligned}&= \int \sin(u)\cos(u)u\, du\\ &= \int \frac{1}{2} sin(2u)u\, du\\ &= \frac{1}{2}\int \sin(2u)u\, du\end{aligned}$$

Partielle Integration (u ableiten, $\sin(2u)$ integrieren):

$$\frac{1}{2}\int u\sin(2u)\, du$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\left[u\cos(2u)\left(-\frac{1}{2}\right) - \int\left(-\frac{1}{2}\right)\cos(2u)\, du\right]\\ &= -\frac{1}{4}u\cos(2u) + \frac{1}{4}\int\cos(2u)\, du\\ &= -\frac{1}{4}u\cos(2u) + \frac{1}{8}\sin(2u) + C\end{aligned}$$

$u = \arcsin(x)$ einsetzen liefert:

$$= -\frac{1}{4}\arcsin(x)\cos(2\arcsin(x)) + \frac{1}{8}\sin(2\arcsin(x)) + C$$

Let us take $k_0 \in \mathbb{N}$ large enough so that $\sqrt{|t|} < k_0$. Then there is $1 + t/k^2 > 0$ for all $k \geq k_0$. It is now sufficient to show that

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=k_0}^{n}\left(1+\frac{t}{k^2}\right)$$

exists because if it does, the original limit is this limit times

$$\prod_{k=1}^{k_0-1}\left(1+\frac{t}{k^2}\right),$$

which is a finite product (and thus a finite constant). Since e^x and $\ln(x)$ are continuous, showing that

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=k_0}^{n}\left(1+\frac{t}{k^2}\right)$$

exists is equivalent to showing that

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\prod_{k=k_0}^{n}\left(1+\frac{t}{k^2}\right)\right)$$

exists. Note that the ln here is well defined because the product is a product of positive numbers and thus positive itself. We have

$$\ln\left(\prod_{k=k_0}^{n}\left(1+\frac{t}{k^2}\right)\right) = \sum_{k=k_0}^{n}\ln\left(1+\frac{t}{k^2}\right),$$

so we just need to show that

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=k_0}^{n}\ln\left(1+\frac{t}{k^2}\right)$$

exists – in other words, that

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{t}{k^2}\right)$$

converges.

We can approximate $\ln\left(1+\frac{t}{k^2}\right) \approx \frac{t}{k^2}$. More precisely,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{t}{k^2}}{\ln\left(1+\frac{t}{k^2}\right)} = \lim_{\ell\to 0^+}\frac{t\ell}{\ln(1+t\ell)} = \lim_{\ell\to 0^+}\frac{t}{\frac{t}{1+t\ell}}$$

$$= \frac{t}{t} = 1.$$

Therefore, $\sum_{k=k_0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{t}{k^2}\right)$ converges if and only if $\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{t}{k^2}$ converges. However, we actually know that

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{t}{k^2} = t\left(\zeta(2) - \sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\right) = t\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\right)$$

does converge.

Berechnen Sie die Integral $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx$ per Definition.

Lösung: Sei $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

$P_n = \{x_k := 1 + \frac{k}{n} \mid k \in \{0,1,\ldots,n-1\}\}$,

$\xi = \{\xi_k := \sqrt{x_k \cdot x_{k+1}} \mid k \in \{0,1,\ldots,n-1\}\}$

Dann gilt

$$\begin{aligned}S(f,P_n,\xi) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k\cdot x_{k+1}}\cdot\frac{1}{n}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^2}{(k+n)(k+n+1)}\cdot\frac{1}{n}\\ &= n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+n)(k+n+1)}\\ &= n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+n}-\frac{1}{k+n+1}\right)\\ &= n\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\int_1^2\frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\xi) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Zeige $\int_1^{n+1}\frac{\sin(\pi x)}{\lfloor x\rfloor}\, dx = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

Sei

$$\int_1^{n+1}\frac{\sin(\pi x)}{\lfloor x\rfloor}\, dx = \sum_{k=1}^{n} I_k$$

mit

$$I_k = \int_k^{k+1}\frac{\sin(\pi x)}{\lfloor x\rfloor}\, dx$$

$$\begin{aligned}I_k &= \int_k^{k+1}\frac{\sin(\pi x)}{k}\, dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot(-\cos(\pi x))\,\Big|_k^{k+1}\\ &= \frac{\cos(k\pi)-\cos((k+1)\pi)}{k\pi} = \frac{2(-1)^k}{k\pi}\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_1^{n+1}\frac{\sin(\pi x)}{\lfloor x\rfloor}\, dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{2(-1)^k}{k\pi} = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Beweise die Konvergenz von $\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{3/2}}\, dx$

Mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int_a^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{3/2}}\, dx &= \int_a^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\cdot\sqrt{x}\, dx\\ &= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\sqrt{x}\Big|_a^1 - \int_a^1\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx\\ &= \cos(1) - \sqrt{a}\cos\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2}\int_a^1\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx\end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{a\to 0}\cos 1 - \sqrt{a}\cos\frac{1}{a} = \cos 1$. Also müssen wir nur noch die Konvergenz von $\int_a^1\frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\, dx$ zeigen. Da $\frac{-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ konvergiert, konvergiert dieses Integral.

Untersuche die Konvergenz von $\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$.

Substitution: $t = \frac{1}{u}$, $dx = \frac{1}{u^2}du$

Mittels Taylorentwicklung gilt: $\sin u = u - \frac{u^3}{6}\cos\tau$ für ein $\tau \in [0,u]$

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\sin u}{u^2}du &= \int_0^1\frac{1}{u} - \frac{\cos\tau}{6}u du = \ln u - \frac{\cos(\tau)u^2}{12}\Big|_0^1\\ &= \ln 1 - \frac{\cos(\tau)1^2}{12} - \lim_{a\to 0}\left(\ln a - \frac{\cos(\tau)a^2}{12}\right)\\ &= 0 - \frac{\cos(\tau)}{12} - \lim_{a\to 0}(\ln a) + 0\\ &= -\infty\end{aligned}$$

Demzufolge ist $\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$ divergent.

Bestimmen Sie mit Hilfe des linearen Taylorpolynoms um $t_0 = 8$ eine Näherung an $\sqrt[3]{7}$.

Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler dieser Näherung an.

Für $f(t) = \sqrt[3]{t}$ ist $f'(t) = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$.

$\Longrightarrow$

$$T_1(f,t,8) = f(8)+f'(8)(t-8) = 2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(t-8)$$

Näherung für $\sqrt[3]{7} = T_1(f,7,8) = 2 - \frac{1}{12} = \frac{23}{12}$

Fehlerabschätzung:

$$R_1(f,t,t_0) = \frac{f''(\xi)}{2!}(t-t_0)^2 = \frac{f''(\xi)}{2!}(7-8)^2 = \frac{f''(\xi)}{2}$$

für ein $\xi \in [7,8]$. Da $f''(t) = -\frac{2}{9}t^{-\frac{5}{3}}$ gilt:

$$|\text{Fehler}| \leq \frac{1}{2}\sup_{\xi\in[7,8]}|f''(\xi)| = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{7^{5/3}} = \frac{1}{9\cdot 7^{5/3}}.$$

10 Tricks & Formeln (Tom)

10.1 Formelsammlung:

Bernoulli Ungleichung

$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x, \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$

Wichtige (Un-)Gleichungen

i) $1 + x \leq e^x$, bzw. $1 - x \leq e^{-x}$
ii) $|a+b| \leq |a| + |b|$, bzw. $|a-b| \leq |a| + |b|$
iii) $|a^2 - b^2| = |(a+b)(a-b)| = |a+b||a-b|$
iv) $|ab| = |a||b|$
v) $|a| \geq 0$
vi) $|a+b| \geq ||a| - |b||$
vii) Young: $2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$, $\varepsilon > 0$

Formeln & Merksachen

(1) Trigonometrie:
i) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
ii) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
iii) $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}, x \in [0, \pi]$
$\sin(x) = -\sqrt{1 - \cos^2(x)}, x \in [\pi, 2\pi]$
iv) $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}, x \in [0\ \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$\cos(x) = -\sqrt{1 - \sin^2(x)}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
v) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
vi) $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
vii) $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
viii) $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
ix) $e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x)$
x) $\sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$
xi) $\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

(2) Konvexität:
i) f ist konvex (auf I) falls gilt:
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), x \leq y, x, y \in I, \lambda \in [0,1]$
ii) f ist streng-konvex (auf I) falls gilt:
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), x < y, x, y \in I, \lambda \in [0,1]$
iii) Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ in $]a,b[$ differenzierbar.
f ist (streng) konvex $\iff$ f' ist (streng) monoton wachsend

Taylorreihe

Die unendliche Reihe

$$Tf(x;a) := T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

wird Taylorreihe von f an Stelle a genannt. (Dafür muss die Funktion f glatt sein.)

Reihenentwicklungen

i) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
ii) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
iii) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$
iv) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{k+1}}{k+1}$
(*) Für arcsin und arccos siehe oben auf einer der früheren Seiten.

10.2 Grundwissen 😎

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Sei $f: A \to B$ eine Funktion.

(1) f ist injektiv $\overset{Def.}{\iff}$ $f(a) = f(b) \implies a = b$, bzw. $a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$

(2) f ist surjektiv $\overset{Def.}{\iff}$ $\forall b \in B: \exists a, s.t. f(a) = b$

(3) f ist bijektiv $\overset{Def.}{\iff}$ f ist injektiv (1) und surjektiv (2)

Betragsgleichung lösen

Aufgabe: *Für welche x gilt die folgende Ungleichung: $|x-a| < b$?*

Fallunterscheidung:
1. $x - a > 0 \iff x > a$:
$|x-a| < b \iff x - a < b \iff x < a + b \implies L_1 =]a, a+b[$
2. $x - a \leq 0 \iff x \leq a$:
$|x-a| < b \iff -x + a < b \iff x > a - b \implies L_2 =]a-b, a]$

Die Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 =]a, a+b[\cup]a-b, a] =]a-b, a+b[$

lim inf/sup

- $\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k$
- $\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k$

Implikationen

- Monoton & Bijektiv $\implies$ Stetig
- Streng monoton $\implies$ Injektiv
- Stetig & kompakt $\implies$ Gl. Stetig
- Stetig & kompakt $\implies$ beschränkt
- Stetig auf $]a,b[$ $\implies$ kann nur an den Rändern unbeschränkt sein
- Stetig $\implies$ Integrierbar
- Stetig $\not\implies$ Differenzierbar
- Monoton $\implies$ Integrierbar
- Polynom $\implies$ Integrierbar
- Kombinationen von beschränkten, integrierbaren Funktionen f, g, z.B. $f + g, \alpha f, fg, |f|, \max(f), f/g$ sind integrierbar
- Differenzierbar $\implies$ Stetig $\implies$ Integrierbar

10.3 Tipps & Tricks & MC-Hilfen

ϵ - δ Beweis Grenzwert Folge

Aufgabe: *Zeige, dass $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$ gegen 0 konvergiert.*
Gesucht ist ein $N(\epsilon)$.
Es soll gelten: $\frac{1}{N^2} \overset{!}{<} \epsilon$. Note: $N > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \implies N^2 > \frac{1}{\epsilon} \implies \epsilon > \frac{1}{N^2}$. Also ist $N := \lceil \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \rceil + 1$ zum Beispiel ein valides $N(\epsilon)$. Wir erreichen dieses Ergebnis durch Rückwärtsrechnen.

ϵ - δ Beweis Gleichmässige Stet.

Aufgabe: *Zeige, dass x^2 auf dem Intervall $I = [-r, r]$ gleichmässig stetig ist.*

$\delta := \frac{\epsilon}{2r} \implies |x-y| < \delta \implies |x^2 - y^2| = |x+y||x-y| < 2r \cdot \delta = \epsilon$

Konvergenz von Reihen Vorgehensweise/ Möglichkeiten

(0) Überprüfen ob a_n in $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Nullfolge ist!

(1) Reihe hat eine bekannte Form:
i) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \to \frac{1}{1-q}, |q|$ ¡ 1
ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, konvergiert für $s > 1$
iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \to e^x$

(2) Normale Herangehensweisen:
i) Quotientenkriterium (QK), Polynome, Fakultät
ii) Wurzelkriterium (WK), Potenzen
iii) Minoranten/ Majoranten finden
z.B.: $a_n := \frac{n+1}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to$ divergiert!

(3) Andere hilfreiche Methoden:
i) Leibnitz (oft mit $(-1)^n$)
z.B.: $b_n := (-1)^n a_n, a_n = \frac{1}{n}, a_n >= 0$ und $a_{n+1} < a_n$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \overset{Leibnitz}{\implies} b_n$ konvergiert
ii) Teleskopreihen (mit PBZ oder umschreiben finden)
z.B.: $a_n := \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(*) Nützliche Tricks:
i) $\sin(\ldots)$ und $\cos(\ldots)$ mit ± 1 abschätzen
ii) ...

Konvergenzradius

(i) Bei normalen Reihen, wobei a_n in Abhängigkeit von x oder einem anderen Parameter steht, wird der Konvergenzradius mit Quotienten-/ oder Wurzelkriterium ermittelt, sodass die Reihe für x im Konvergenzradius konvergiert.

(ii) Bei Potenzreihen gilt:
$r = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$
(*) !!! WICHTIG, nicht vergessen: Für einen Konvergenzradius r muss der Fall x = r immer noch zusätzlich betrachtet werden. !!!

Grenzwerte

(1) Brüche:
i) $\mathcal{O}$(Zähler) vs. $\mathcal{O}$(Nenner)
ii) Zähler $\to$ Nenner $\to$ $0/\infty_+/\infty_-$, L'Hospital

(2) Potenzen:
i) $\lim_{n\to\infty} f(n)^{g(n)} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(f(n)^{g(n)})} = \lim_{n\to\infty} e^{g(n)\ln(f(n))}$

(3) Besondere Formen:
i) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$
z.B.: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^2 = \lim_{n\to\infty}((1+\frac{x}{n})^2)^{\frac{n}{2}\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty}((1+\frac{x}{n})^n)^{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty}(e^x)^{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2x}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^0 = 1$

Taylorentwicklung ausnutzen

Beim überprüfen der Konvergenz einer Reihe, oder dem ausrechnen eines Grenzwertes ist bei Termen wie $\sin(1/n)$ oder $\cos(1/n)$ eine Abschätzung wie $\sin(1/n) = 1/x - 1/6x^3 + \ldots = \mathcal{O}(1/x)$, bzw. $\cos(1/n) = 1 - 1/2x^2 + 1/24x^4 - \ldots = \mathcal{O}(-1/x^2)$ extrem nützlich.

Begrifflichkeiten

- Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, wenn $\lim_{x\to x_0^+} = \lim_{x\to x_0^-} = \mathcal{L}$
- Unbestimmtes Integral ëxistiert”, wenn es nicht gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Gleichmässige Konvergenz $f_n \to f$

Wenn für alle $f_n, n \in \mathbb{N}$ folgende Eigenschaften gelten, dann gelten diese auch für die Grenzfunktion:

- Stetigkeit
- Konvexität
- Integrierbarkeit

Über die Differenzierbarkeit lässt sich im Allgemeinen nichts sagen. Konvergiert die Folge (f_n') jedoch gleichmässig gegen g, wobei alle f_n differenzierbar sind dann konvergiert f_n punktweise gegen ein f und es gilt $f' = g$

Stetigkeit in einem Punkt zeigen

(1) Funktion ist überall stetig, nur auf einem Punkt x_0 muss die Stetigkeit überprüft werden.
Dann überprüft man ob $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
(2) Weiß man nichts über die Funktion, gibt es zwei Möglichkeiten:
i) Über die ϵ-δ-Definition direkt Beweisen.
ii) Man zeigt Stetigkeit in Punkt x_0 indem man eine beliebige Folge (y_n) als gegeben nimmt, welche gegen x_0 konvergiert. Nun zeigt man $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(\lim_{n\to\infty} y_n)$.

Hyperbol-Funktionen

- $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -i\sin(ix)$; $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(ix)$; $\mathbb{R} \to [1, \infty]$
- $\tanh(x) := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -i\tan(ix)$; $\mathbb{R} \to [-1, 1]$
- $x := \frac{1}{\sinh x} = i\csc(ix)$
- $x := \frac{1}{\cosh x} = \sec(ix)$
- $\coth x := \frac{1}{\tanh x} = i\cot(ix)$

Hyperbol-Identitäten

- $\cosh x + \sinh x = e^x$
- $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- ${}^2 x = 1 - \tanh^2 x$
- ${}^2 x = \coth^2 x - 1$

Doppel-Winkel:
- $\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x = 2\sinh^2 x + 1 = 2\cosh^2 x - 1$
- $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$
- $\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$

Inverse Funktionen als log:
- $x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$
- $x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$
- $x = \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x})$
- $x = \log(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1})$
- $x = \log(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1})$
- $x = \frac{1}{2}\log(\frac{x+1}{x-1})$

Trig-Identitäten

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$
- $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
- $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$
- $\sin(z \pm w) = \sin(z)\cos(w) \pm \cos(z)\sin(w)$
- $\cos(z \pm w) = \cos(z)\cos(w) \mp \sin(z)\sin(w)$
- $\tan(z \pm w) = \frac{\tan z \pm \tan w}{1 \mp \tan z \cdot \tan w}$

Doppel-Winkel:
- $\sin 2x = 2\sin x\cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$
- $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$; $\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$
- $\sec 2x = \frac{\sec^2 x}{2 - \sec^2 x}$
- $\csc 2x = \frac{\sec x \csc x}{2}$

Produkt zu Summe:
- $\cos(\theta)\cos(\phi) = \frac{1}{2}(\cos(\theta-\phi) + \cos(\theta+\phi))$
- $\sin(\theta)\sin(\phi) = \frac{1}{2}(\cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi))$
- $\sin(\theta)\cos(\phi) = \frac{1}{2}(\sin(\theta+\phi) + \sin(\theta-\phi))$
- $\cos(\theta)\sin(\phi) = \frac{1}{2}(\sin(\theta+\phi) - \sin(\theta-\phi))$
- $\tan(\theta)\tan(\phi) = \frac{\cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi)}{\cos(\theta-\phi) + \cos(\theta+\phi)}$

Inverse Funktionen:
- $\arccos\frac{1}{x} = x$; $\frac{1}{x} = \arccos x$
- $\arcsin\frac{1}{x} = x$; $\frac{1}{x} = \arcsin x$
- $\frac{\pi}{2} = \arcsin x + \arccos x = \arctan x + x = x + x$

Trig-Kombinationen

col(row(x))	sin	cos	tan
arcsin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
arctan	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x
$\sec^{-1}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$
$\cot^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$

Riemannsumme

Die Existenz eines Integrals wird mittels Obersumme (O) = Untersumme (U) bewiesen (im Grenzwert).
Aufgabe: *Ist x^2 für $x \in [0, 5]$ integrierbar?*

Breite eines Rechtecks: $B = 5/n$ Höhe eines Rechtecks: $HO_i = f(\frac{5i}{n}), HU_i = f(\frac{5(i-1)}{n})$
O: $\sum_{i=1}^n B * HO_i = \sum_{i=1}^n \frac{5}{n}\frac{5^2 i^2}{n^2} = \frac{5^3}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2 \to 125/3$, für $n \to \infty$
U: $\sum_{i=1}^n B * HU_i = \sum_{i=1}^n \frac{5}{n}\frac{5^2(i-1)^2}{n^2} = \frac{5^3}{n^3}\sum_{i=1}^n (i-1)^2 \to 125/3$, für $n \to \infty$

Da O = U, existiert das Integral für x^2 in $[0, 5]$ und hat den Wert 125/3

$\epsilon - \delta$ Beweise

- Konvergenz Folge: $N(\epsilon)$
- Stetigkeit: $\delta(\epsilon, x_0)$
- Gl. Stetigkeit: $\delta(\epsilon)$
- Konvergenz Funktionenfolge: $N(\epsilon, x)$
- Gl. Konvergenz Funktionenfolge: $N(\epsilon)$
- Grenzwert-Funktionen $\delta(\epsilon)$

11 Quellen

Dieses Cheat-Sheet ist eine abgewandelte Version des Cheat-Sheets von Nicolas Wehrli (Vielen Dank!). Es folgen die ursprünglichen Quellen, die Nicolas Wehrli angegeben hat:

“Dieses Cheatsheet wurde von verschiedenen schon vorhandenen Zusammenfassungen inspiriert (Julian Steinmann, Danny Camenisch, Andrej Scheuer etc.).

Lösungen sind entweder meine eigenen, offizielle Lösungen (Assignments & Prüfungen) oder veröffentlichte Lösungen auf der VIS Comsol. Vielen Dank an alle Beteiligten!

Die Definitionen sind meistens dem Skript “Analysis 1” von Mark Burger und den Vorlesungsnotizen von Analysis 1 im Frühlingssemester 2022 entnommen”