1) 🛠️

jueves, 20 de abril de 2023 10:30

Ejercicio 1. Se baraja un conjunto de $n = 100$ cartas (numeradas consecutivamente del 1 al 100) y se extrae del mazo una carta por vez. Consideramos que ocurre un "éxito" si la i-ésima carta extraída es aquella cuyo número es i ($i = 1, \ldots, n$).

a) Calcule la probabilidad de que

(i) las primeras r cartas sean coincidencias y dé su valor para $r = 10$.

(ii) haya exactamente r coincidencias y estén en las primeras r cartas. Dé su valor para $r = 10$.

b) Pruebe que $E(X) = Var(X) = 1$ donde X es el nÃºmero de coincidencias obtenidas en una baraja de n cartas.

c) Escriba un programa de simulación para estimar la esperanza y la varianza del número total de éxitos, y de los eventos del inciso (a) con $r = 10$, y compare los resultados obtenidos con 100, 1000, 10000 y 100000 iteraciones.

Use el archivo "Problemas de coincidencias" para guiarse.

Probabilidad de que la i-ésima carta sea coincidencia
= Probabilidad de que la carta i no se elija antes y se elija en la i

$$\frac{1}{100 - i + 1} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{100 - j + 1}{100 - j}$$

Sean los eventos:

E_i hay coincidencia en la i carta
$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ hay al menos una coincindencia

$$E_{i_1, i_2, \ldots, i_r} = \bigcap_{j=1}^{r} E_{i_j}$$

A_i solo hay coincidencia en la i carta
$A_{i_1, i_2, \ldots, i_r}$ solo hay coincidencias en las cartas $i_1, i_2, \ldots, i_r$

a)
Por conteo:

$$E_{1,2,\ldots,r} = \frac{(n-r)!}{n!}$$

$$E_{1,2,\dots,10} = \frac{90!}{100!}$$

$$A_{1,2,\dots,r} =$$

8)

sábado, 29 de abril de 2023 15:43

Ejercicio 8.

a) Desarrolle el método de la Trasformada Inversa y el de Rechazo para generar una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X=i) = \frac{\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}}{\sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}} \quad (i=0,\ldots,k)$$

$$p_X(i) = \frac{\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}}{\sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}}$$

$$= \frac{\frac{\lambda^i}{i!}}{\sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}}$$

10)

sábado, 29 de abril de 2023 17:25

Ejercicio 10.

(a) Desarrolle un método para generar una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X=j)=\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)2^{j-1}}{3^j}\;,\;\; j=1,2,\ldots$$

(b) Estime $E(X)$ con 1000 repeticiones y compare con la esperanza exacta.

$$p_X(j)=\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}+\frac{2^{j-2}}{3^j}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-2}$$

$$E(X)$$
=
$$\sum_{j=1}^{\infty} j p_X(j)$$
=
$$\sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}+\frac{1}{9}\sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{2}{3}\right)^{j-2}$$
=
$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}+\frac{1}{9}\frac{3}{2}\sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}$$
= {Calculo extra}
$$\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{6}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}$$
=
$$\frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{4}}+\frac{1}{6}\frac{1}{\frac{1}{9}}$$
=
$$1+\frac{3}{2}$$
=
$$\frac{5}{2}$$

Cálculo extra:

$$\sum_{j=1}^{\infty} jx^{j-1}$$

=

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int \sum_{j=1}^{\infty} jx^{j-1}\,\mathrm{d}x$$

=

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j=1}^{\infty}\int jx^{j-1}\,\mathrm{d}x$$

= $\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^j = jx^{j-1}\}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j=1}^{\infty} x^j$$

=

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-x^0 + \sum_{j=0}^{\infty} x^j\right)$$

= {Seria geométrica: $\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}$}

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)$$

=

$$-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)}{(1-x)^2}$$

=

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

11)

sábado, 29 de abril de 2023 20:10

Ejercicio 11. Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es $P(X = j) = p_j$ con $j = 1, 2, \dots$. Sea:

$$\lambda_n = P(X = n | X > n-1) = \frac{p_n}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_j}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Las cantidades λ_n, son las tasas discretas de riesgo. Considerando a X como el tiempo (discreto) de vida de algún artículo, λ_n representa la probabilidad de que habiendo sobrevivido hasta el tiempo $n-1$, muera en el tiempo n.

a) Muestre que $p_1 = \lambda_1$ y que

$$p_n = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_{n-1})\lambda_n$$

Método de la tasa discreta de riesgo para simular variables aleatorias discretas: Se genera una sucesión de números aleatorios que termina cuando el n-ésimo número generado es menor que λ_n. El algoritmo puede escribirse como sigue:

```
Paso 1:  X = 1
Paso 2:  Generar U
Paso 3:  Si U < λX, terminar.
Paso 4:  X = X + 1
Paso 5:  Ir al Paso 2
```

b) Muestre que los valores de X que genera este proceso tienen la distribución de probabilidad deseada.

c) Suponga que X es una variable aleatoria geométrica con parámetro p:

$$P(X = n) = p(1-p)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Determine los valores de $\lambda_n, n \geq 1$. Explique cómo funciona el algoritmo anterior en este caso y por qué es evidente su validez.

Sea X una variable aleatoria de imagen $\mathbb{N}$

$\lambda_X(n) = P(X = n | X > n-1)$

El enunciado ademas dice que:

$$\lambda_X(n) = \frac{p_X(n)}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_X(j)}$$

a)

Para $n \in \mathbb{N}$

$$p_X(n) = \lambda_X(n) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \lambda_X(j))$$

Demostración por indución:

Caso base para $n = 1$:

$$\lambda_X(1)$$

=

$$\frac{p_X(1)}{1 - \sum_{j=1}^{1-1} p_X(j)}$$

=

$$\frac{p_X(1)}{1 - 0}$$

=

$$p_X(1)$$

Caso inductivo para $n + 1$ suponiendo que vale para n:

Primero muestro algunos resultados intermedios:

$$\lambda_X(n) = \frac{p_X(n)}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_X(j)}$$

$\Rightarrow$

$$p_X(n) = \lambda_X(n) \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_X(j) \right)$$

1

Por 1 y por HI:

$$\lambda_X(n) \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_X(j) \right) = \lambda_X(n) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \lambda_X(j))$$

$\Rightarrow$

$$1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_X(j) = \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \lambda_X(j))$$

2

Ahora hago la prueba en si:

$$p_X(n+1)$$

= {①}

$$\lambda_X(n+1)\left(1-\sum_{j=1}^{n} p_X(j)\right)$$

= {②}

$$\lambda_X(n+1)\prod_{j=1}^{n-1}(1-\lambda_X(j))$$

b)

El algoritmo general la siguente variable aleatoria Y:

Sean:

$U_1, U_2, \ldots \sim \mathcal{U}(0,1)$

$Y \sim \min\{k \in \mathbb{N} : U_k < \lambda_X(k)\}$

Lema:

$$Y \sim X$$

Demostración:

$$p_Y(j)$$

=

$$P\left(U_j < \lambda_X(j)\right)\prod_{i=1}^{j-1} P(U_i \geq \lambda_X(i))$$

=

$$\lambda_X(j)\prod_{i=1}^{j-1}(1-\lambda_X(i))$$

= {Ejercicio a}

$$P_X(j)$$

c)

$X \sim Geom(p)$

$$\lambda_{Geom(p)}(1) = \frac{p_X(1)}{1 - \sum_{j=1}^{1-1} p_{Geom(p)}(j)}$$
$$= \frac{p(1-p)^{1-1}}{1}$$
$$= p$$

$$\lambda_{Geom(p)}(n) = \frac{p_{Geom(p)}(n)}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_{Geom(p)}(j)}$$
$$= \frac{p(1-p)^{n-1}}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} p(1-p)^{j-1}}$$
$$= \frac{p(1-p)^{n-1}}{1 - p\sum_{j=0}^{n-2} (1-p)^{j}}$$
= {Demostración extra}
$$\frac{p(1-p)^{n-1}}{1 - p\dfrac{(1-p)^{n-1} - 1}{(1-p) - 1}}$$
$$= \frac{p(1-p)^{n-1}}{1 - p\dfrac{(1-p)^{n-1} - 1}{-p}}$$
$$= \frac{p(1-p)^{n-1}}{1 + (1-p)^{n-1} - 1}$$
$$= \frac{p(1-p)^{n-1}}{(1-p)^{n-1}}$$
$$= p$$

Demostración extra:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Demostración:

Caso base:

$$\sum_{i=0}^{0} x^i = x^0 = 1 = \frac{x-1}{x-1} = \frac{x^{0+1} - 1}{x - 1}$$

Caso inductivo:

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i$$
=

$$x^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x^i$$

= {HI}

$$x^{n+1} + \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

=

$$\frac{x^{n+1}(x-1) + x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

=

$$\frac{x^{n+2} - x^{n+1} + x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

=

$$\frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}$$

En este caso el algoritmo es equivalente a simular hasta tener un éxito, por lo tanto es evidente que es correcto

12) 🛠️

domingo, 30 de abril de 2023 13:39

Ejercicio 12. ¿Qué distribución tiene la variable simulada por el siguiente algoritmo?

```
def QueDevuelve(p1,p2):
    X = int(np.log(1-random())/np.log(1-p1))+1
    Y = int(np.log(1-random())/np.log(1-p2))+1
    return min(X,Y)
```

Escriba otro algoritmo que utilice un único número aleatorio (random()) y que simule una variable con la misma distribución que la simulada por QueDevuelve(0.05, 0.2).

Sean:

$U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$X \sim \left\lfloor \frac{\log(U_1)}{\log(1-p_1)} \right\rfloor + 1$$
$$Y \sim \left\lfloor \frac{\log(U_2)}{\log(1-p_2)} \right\rfloor + 1$$

$Z \sim \min\{X, Y\}$