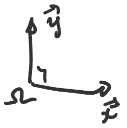
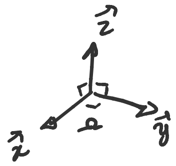
: Rappel repère orthonormé.



$\vec{x} \perp \vec{y}$
$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$

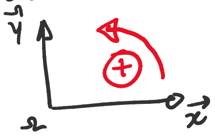


$\vec{x} \perp \vec{y}$
$\vec{y} \perp \vec{z}$
$\vec{z} \perp \vec{x}$

$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\| = 1$

→ 1: chose à faire en infograph : choisir son repère et s'y tenir !

⇒ le choix des axes oriente l'espace ⇒ defini un "sens" (+)

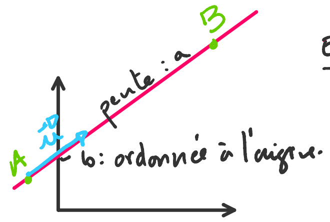


$(\Omega, \vec{x}, \vec{y})$
axes ordonnés !!

Arbitraire !

1 : Equations Cartesienne / Parametrique.

2D



Eq. Cartesienne : $y = ax + b$

⇒ Comment caractériser une dte de $\mathbb{R}^2$?

- 2 points (A, B)

$\mathcal{D} = \{ M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \vec{AM} = t\vec{AB},\ t \in \mathbb{R} \}$

- 1 point A + 1 vecteur $\vec{u}$
  (en gen. on choisit $\vec{u}$ tq $\|\vec{u}\| = 1$.

Alors $\boxed{\mathcal{D} = \{ M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \vec{AM} = t.\vec{u} \text{ où } t \in \mathbb{R} \}}$

c'est ça l'equation paramétrique.

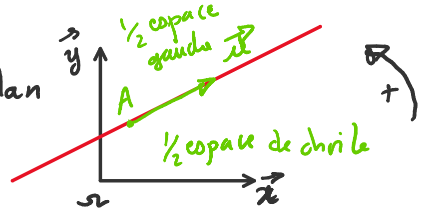
Pour nous : une droite sera toujours définie par son Eq. Param.

⇒ Bcp + simple à manipuler dans un prog.

Point : objet à 2 éléments typedef struct { double x,y; } Point, Vecteur;
Vecteur:

↳ droite : typedef struct { Point A; Vecteur u; } Droite.

⚠ 2 Une droite oriente le plan



De manière générale

. Eq. Cartésienne : 1 seule fonction qui lie les 2 coord $f(x,y) = 0$

. Eq. Param. : 2 équ. qui lient les 2 coord à 1 même param. $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ t \in [a,b] \end{cases}$

dans le cas de la dte : $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ $A \begin{vmatrix} x_a \\ y_a \end{vmatrix}$, $\vec{u} \begin{vmatrix} x_u \\ y_u \end{vmatrix}$

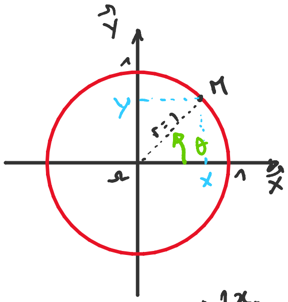
$\vec{AM} = t.\vec{u}$ ⇒ $\begin{cases} x - x_a = t.x_u \\ y - y_a = t.y_u \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} x = x_a + t.x_u \\ y = y_a + t.y_u \end{cases}$

$$\vec{AM} = t.\vec{u} \Rightarrow \begin{cases} x - x_a = t.x_u \\ y - y_a = t.y_u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_a + t.x_u \\ y = y_a + t.y_u \end{cases}$$

↳ écriture par abus : $\boxed{M = A + t\vec{u}}$

Cercle

. Cercle dit "canonique" : de centre Ω, de rayon 1.



⇒ Ensemble des points situés à la dist. 1 de Ω

$\mathcal{C}_0 = \{M(x,y), \text{ tq } d(\Omega M) = 1\}$

⇒ ok, mais quelle distance ?

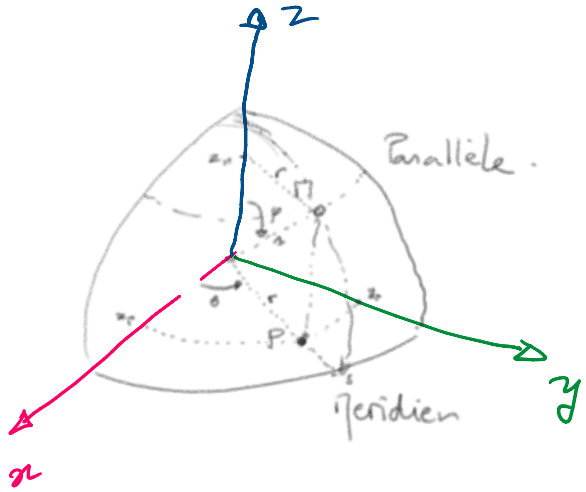
→ Dist euclidienne. (pas la seule).

$A\begin{vmatrix} x_a \\ y_a \end{vmatrix}, B\begin{vmatrix} x_b \\ y_b \end{vmatrix}$ $\quad d(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

$\mathcal{C}_0 : \{M\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1\}$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{C}_0 = \{M\binom{x}{y} \text{ tq } \underbrace{x^2 + y^2 = 1}\}.}$

↳ Eq. Cartésienne de $\mathcal{C}_0$!!

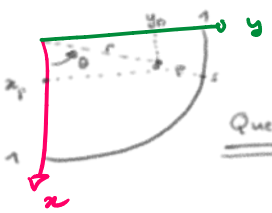


$M(x,y,z) \in \mathcal{S}$ $(\|\Omega M\| = 1)$

$P(x_P, y_P, 0)$: proj ⊥ de M sur $(z=0)$

$x_P = x_M$ / $y_P = y_M$.

↳ Calcul des coord. de P. (en 2d).



$x_P = r.\cos\theta$
$y_P = r.\sin\theta$

Que vaut r ?

→ Calcul de r } Dans le plan (Ω, M, P)

$z_M = \cos\varphi$
$r = \sin\varphi$

$\Rightarrow$ $\boxed{M \begin{vmatrix} x = \cos\theta . \sin\varphi \\ y = \sin\theta . \sin\varphi \\ z = \cos\varphi . \end{vmatrix}}$ Eq. Param. de $\mathcal{S}$

"Coordonnées Sphériques"

Généralisation

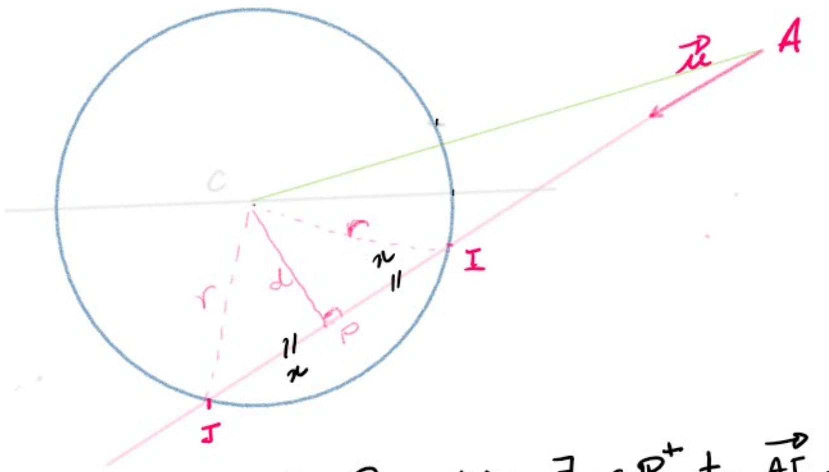
(a) sphère de centre $C \begin{vmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{vmatrix}$, de rayon r

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x = x_c + r . \cos\theta . \sin\varphi \\ y = y_c + r . \sin\theta . \sin\varphi \\ z = z_c + r . \cos\varphi . \end{vmatrix} \\ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2 \end{array} \right.$$

(b) Ellipsoïde quelconque $\mathcal{E}_{C, \begin{vmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{vmatrix}}$

$x = x_c + r_x . \cos\theta . \sin\varphi$

$$\boxed{\left(\frac{x - x_c}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y - y_c}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{z - z_c}{r_z}\right)^2 = 1 .}$$



Rayon $\begin{cases} A \begin{vmatrix} x_a \\ y_a \end{vmatrix} \\ \vec{u} \begin{vmatrix} x_u \\ y_u \end{vmatrix} \end{cases}$

Objet $\mathcal{C}\left(C \begin{vmatrix} x_c \\ y_c \end{vmatrix}, r\right)$

$I = R \cap \mathcal{C}$ $\quad I \in R_{A\vec{u}} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \vec{AI} = \alpha \vec{u}$

$I \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \|CI\| = r$

solution qui nous intéresse : $0 < \alpha \leq \beta$.

↳ 2° intersect° : $J \in R_{A\vec{u}} \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \vec{AJ} = \beta \vec{u}$

→ 1° Calculer P : project° orthogonale de C sur $[A\vec{u})$

$P \in [A\vec{u}) \Rightarrow \exists t \text{ tq } \vec{AP} = t\vec{u}$

$t = (\vec{AC} \cdot \vec{u}) \Rightarrow \boxed{P = A + t\vec{u}}$ et $d = \|\vec{CP}\| = \vec{AC} \wedge \vec{u}$

Par construction (CPI) rect. en P $\Rightarrow r^2 = d^2 + x^2 \Rightarrow x = \underbrace{\sqrt{r^2 - d^2}}_{\text{ssi } d<r}$

Quid si $d > r$?

↳ Pas de souci !! ça veut dire pas d'intersection. (le rayon passe à côté).

↳ donc a trouvé x (>0) et on a $\boxed{I = A + (t - x)\vec{u}}$

(et $J = A + (t+x)\vec{u}$).