Master Informatique 1

Correction TD Infographie n°1

Géométrie Elémentaire

Révision de quelques notions de géométrie élémentaire

▸ **Exercice 1.** **(Une droite dans $\mathbb{R}^2$...)**
On travaille en dimension 2, dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{R}(O, x, y)$.
On part du principe que les seuls "objets" que l'on peut manipuler sont le **Point** et le **Vecteur** :

- Le point, défini par 2 coordonnées $P(x, y)$
- Le vecteur, défini par 2 coordonnées $\vec{u}(x, y)$

Ces "primitives" sont très faciles à représenter par un objet (ou structure) informatique.

☞ A partir de ces primitives, donner plusieurs façons de caractériser une droite du plan.

☞ De là, caractériser, par des équations simples, le fait qu'un point $P(x, y)$ appartienne à une droite.

✂ -

☞
- 2 points $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$
- 1 point$A(x_a, y_a)$ et un vecteur $\vec{u}(x_u, y_u)$

Ces deux représentations sont bien sûr équivalentes : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $B = A + \vec{u}$.

☞
- $P(x, y) \in (AB) \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $y = a.x + b$
  Les coeff. a et b, carctéristiques de la droite, s'exprimant à partir des coord. de A et B
- $P(x, y) \in (AB) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ *tels que* $\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$
  $P(x, y) \in (A, \vec{u}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ *tels que* $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$

Rappel : (quelle que soit la dimension n de l'espace de travail – pour nous, ça sera 2 ou 3)

- équation cartésienne : une seule équation liant les n coordonnées (ex. $f(x, y) = 0$)
  ☞pour la droite dans $\mathbb{R}^2$: $f(x, y) = y - a.x + b = 0$.
- équation paramétrique : $n - 1$ paramètres liants les n coordonnées dans un système à n équation.
  ☞pour la droite dans $\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u} \Leftrightarrow M = A + t.\vec{u} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = x_a + t.x_u \\ y = y_a + t.y_u \end{array} \right.$.

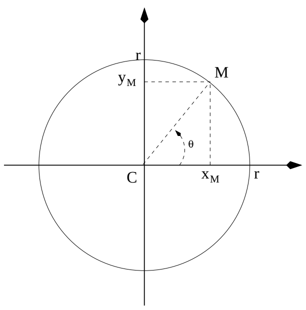
Quelques points importants :

- Les 2 représentations (cartésienne et paramétrique) co-existent toujours et sont interchangeables
- Selon la situation, on préférera l'une ou l'autre, mais...
- ... pour la droite c'est **toujours** la représentation paramétrique !!!
- La représentation paramétrique est plus "proche" d'une représentation géométrique intuitive des objets.

- ✂

▸ **Exercice 2. (changement de repère)**

1. Donner, dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{R}(O, x, y)$, les équations cartésienne et paramétrique d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre C(x_c, y_c) et de rayon r.
2. Même question dans $\mathbb{R}^3$ pour un ellipsoïde $\mathcal{E}$ de centre C(x_c, y_c, z_c) et de rayons axiaux (ou demis grands axes) r_x, r_y et r_z.

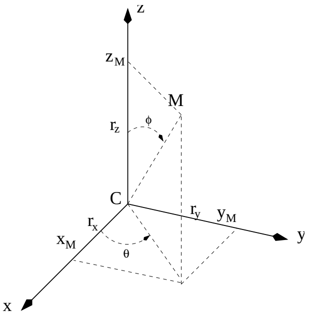


Equation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_{(C,r)}$:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_{(C,r)} \Leftrightarrow (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Equation paramétrique :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_{(C,r)} \Leftrightarrow \exists\theta \in [0, 2\pi[\ \textit{tel que} \begin{cases} x = x_c + r\cos(\theta) \\ y = y_c + r\sin(\theta) \end{cases}$$



Equation cartésienne de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{(C,r_x,r_y,r_z)}$:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_{(C,r_x,r_y,r_z)} \Leftrightarrow \left(\frac{x - x_c}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y - y_c}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{z - z_c}{r_z}\right)^2 = 1$$

Equation paramétrique :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_{(C,r_x,r_y,r_z)} \Leftrightarrow \exists \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi[\\ \phi \in [0, \pi[\end{cases} \textit{tels que} \begin{cases} x = x_c + r_x\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y = y_c + r_y\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = z_c + r_z\cos(\phi) \end{cases}$$

Rappel : (quelle que soit la dimension n de l'espace de travail)

- équation cartésienne : une seule équation liant les n coordonnées.
- équation paramétrique : $n - 1$ paramètres liants les n coordonnées dans un système à n équation.
