Université Gustave Eiffel

INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE ET D'INFORMATIQUE GASPARD-MONGE

Master Informatique 1

TD Infographie n°2

Transformations & Coordonnées Homogènes

Mise en place de la réprésentation des objets par Forme Canonique *et* Matrices de Transformations

---

Les transformations sont, de manière générale, des opérateurs permettant d'agir de manière globale sur la forme, la position, l'orientation d'un objet.

Dans le cadre de ce cours, elle sont au nombre de trois : translation, rotation, homothétie. Elles agissent sur les primitives de base que sont les points et les vecteurs.

1. **Translation** (de vecteur $\vec{\mathsf{u}}$) : $\mathcal{T}_{\vec{\mathsf{u}}}$
   - action sur un point : $\mathsf{P}\left|\begin{matrix}\mathsf{x}\\\mathsf{y}\end{matrix}\right. \longrightarrow \mathcal{T}_{\vec{\mathsf{u}}}(P) = P + \vec{\mathsf{u}} = \left|\begin{matrix}\mathsf{x}+\mathsf{u_x}\\\mathsf{y}+\mathsf{u_y}\end{matrix}\right.$
   - action sur un vecteur : $\vec{\mathsf{V}}\left|\begin{matrix}\mathsf{x}\\\mathsf{y}\end{matrix}\right. \longrightarrow \mathcal{T}_{\vec{\mathsf{u}}}(\vec{\mathsf{V}}) = \vec{\mathsf{V}}$ (les vecteurs sont **invariants** par translation)
2. **Rotation** (d'angle θ autour de l'origine) : $\mathcal{R}_\theta$
   - action sur un point : $\mathsf{P}\left|\begin{matrix}\mathsf{x}\\\mathsf{y}\end{matrix}\right. \longrightarrow \mathcal{R}_\theta(P) = \left|\begin{matrix}\mathsf{x}.\cos(\theta) - \mathsf{y}.\sin(\theta)\\\mathsf{x}.\sin(\theta) + \mathsf{y}.\cos(\theta)\end{matrix}\right.$
   - action sur un vecteur : $\vec{\mathsf{V}}\left|\begin{matrix}\mathsf{x}\\\mathsf{y}\end{matrix}\right. \longrightarrow \mathcal{R}_\theta(\vec{\mathsf{V}}) = \left|\begin{matrix}\mathsf{x}.\cos(\theta) - \mathsf{y}.\sin(\theta)\\\mathsf{x}.\sin(\theta) + \mathsf{y}.\cos(\theta)\end{matrix}\right.$
3. **Homothétie** (de rapports (a, b) le long des axes) : $\mathcal{H}_{(a,b)}$
   - action sur un point : $\mathsf{P}\left|\begin{matrix}\mathsf{x}\\\mathsf{y}\end{matrix}\right. \longrightarrow \mathcal{H}_{(a,b)}(P) = \left|\begin{matrix}\mathsf{a.x}\\\mathsf{b.y}\end{matrix}\right.$
   - action sur un vecteur : $\vec{\mathsf{V}}\left|\begin{matrix}\mathsf{x}\\\mathsf{y}\end{matrix}\right. \longrightarrow \mathcal{H}_{(a,b)}(\vec{\mathsf{V}}) = \left|\begin{matrix}\mathsf{a.x}\\\mathsf{b.y}\end{matrix}\right.$

La **Rotation** et l'**Homothétie** présentent une forme *matricielle* simple et naturelle :

- $\mathsf{P}\left|\begin{matrix}\mathsf{x}\\\mathsf{y}\end{matrix}\right. \longrightarrow \mathcal{R}_\theta(P) = \left|\begin{matrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\mathsf{x}.\cos(\theta) - \mathsf{y}.\sin(\theta)\\\mathsf{x}.\sin(\theta) + \mathsf{y}.\cos(\theta)\end{matrix}\right.$
- $\mathsf{P}\left|\begin{matrix}\mathsf{x}\\\mathsf{y}\end{matrix}\right. \longrightarrow \mathcal{H}_{(a,b)}(P) = \left|\begin{matrix}a & 0\\0 & b\end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\mathsf{a.x}\\\mathsf{b.y}\end{matrix}\right.$

L'avantage de cette représentation est que l'enchaînement d'une homothétie, puis d'une rotation se représente simplement par un produit matriciel :

$$\mathsf{P_0}\left|\begin{matrix}\mathsf{x}\\\mathsf{y}\end{matrix}\right. \longrightarrow \mathcal{H}_{(a,b)}(P_0) = \left|\begin{matrix}a & 0\\0 & b\end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right| = \mathsf{P_1}\left|\begin{matrix}\mathsf{a.x}\\\mathsf{b.y}\end{matrix}\right. \longrightarrow \mathcal{R}_\theta(P_1) = \left|\begin{matrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix}a.x\\b.y\end{matrix}\right| = \mathsf{P_2}\left|\begin{matrix}\mathsf{a.x}.\cos(\theta) - \mathsf{b.y}.\sin(\theta)\\\mathsf{a.x}.\sin(\theta) + \mathsf{b.y}.\cos(\theta)\end{matrix}\right.$$

$$\text{soit : } P_2 = \left(\left|\begin{matrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix}a & 0\\0 & b\end{matrix}\right| \right) \times P_0 = \left|\begin{matrix}a.\cos(\theta) & -b.\sin(\theta)\\a.\sin(\theta) & b.\cos(\theta)\end{matrix}\right| \times P_0$$

On peut ainsi enchaîner autant de rotations et d'homothéties que l'on veut, la transformation *globale* reste entièrement définie par une simple matrice (2x2).

Appliquée à un objet complexe (une ellipse, par exemple), cette matrice permet de définir entièrement la forme et l'orientation de l'objet par rapport à une forme de référence, que l'on appellera **forme canonique** (par exemple le **cercle unité** de centre $\Omega(0,0)$, de rayon 1).

Malheureusement la **Translation** ne peut pas s'écrire sous cette forme matricielle (2x2), ce qui "casse" le modèle de réprésentation des objets par une forme canonique et une matrice de transformation unique.

☞**La solution : la représentation en coordonnées homogènes** (cf. Cours: Espaces Projectifs)

Sans revenir sur la théorie, cette représentation consiste à ajouter une dimension "fictive" dans laquelle les points et les vecteurs adoptent des représentation différentes.

En 2D, on ajoute une 3^o coordonnée valant 1 pour les points ($P\begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$) et 0 pour les vecteurs ($\vec{V}\begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$).

Dans ce modèle, Rotations et Homothétie gardent une représentation matricielle simple (mais 3x3) :

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ et } \mathcal{H}_{(a,b)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Mais le principal intérêt est que la **Translation** trouve également une représentation matricielle :

$$\mathcal{T}_{\vec{u}(x_u,x_u)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_u \\ 0 & 1 & y_u \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Il est facile de vérifier que l'action de cet opérateur sur un point ou un vecteur le rend bien homogène à une translation de vecteur $\vec{u}$.

On peut ainsi caractériser entièrement la forme (*homotéhties*) l'orientation (*rotations*) et la position (*translations*) d'un objet par la référence à une référence canonique simple et le (pré-)calcul d'une unique matrice homogène 3x3.

Cette représentation s'étend à l'identique en dimension 3 :

$$\text{Point : } P\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \text{Vecteur : } \vec{V}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Homothétie : } \mathcal{H}_{(a,b,c)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{Translation : } \mathcal{T}_{\vec{u}(x_u,y_u,z_u)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_u \\ 0 & 1 & 0 & y_u \\ 0 & 0 & 1 & z_u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rotations (il y en a 3, une pour chaque axe) :

$$\mathcal{R}_{\vec{x},\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathcal{R}_{\vec{y},\beta} = \begin{vmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathcal{R}_{\vec{z},\gamma} = \begin{vmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A partir de maintenant, tout objet de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sera défini par sa référence à un objet canonique et une matrice de transformation globale précisant sa forme, son orientation et sa position dans l'espace.

Le choix de la référence canonique est arbitraire mais doit rester simple : le cercle et la sphére centrés sur l'origine et de rayon 1, le carré et le cube centrés sur l'origine, parallèles aux axes, de côté 2....)

Pour une même "forme", rien n'empêche de définir plusieurs objets canoniques.

▸ Exercice 1. (Transformations Inverses)

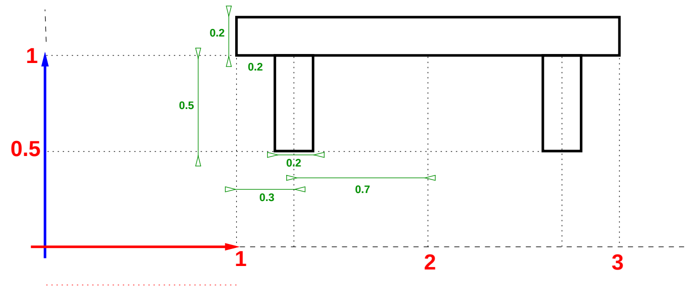
Toutes les matrices de transformations (en dimension 2 ou 3) sont *définies positives* donc inversibles. Ces transofrmations inverses permettent de revenir à l'objet canonique de référence, à partir d'une forme quelconque.

1. Définir (en 2D), pour chacune des trois transformations, la transformation inverse et sa matrice associée.

2. Pour un objet défini par un enchaînement de 3 transformations $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ de matrices M_1, M_2, M_3 (dans cet ordre), quelles sont les matrice de transformation globales *directe* et *inverse* ?

▸ Exercice 2. (Structuration hiérarchique - "héritage" de transformations)

On veut, en 2D, réaliser la scène suivante :



1. Pour chacun des objets formant la scène, définir le "bon" objet canonique ainsi que la suite de transformations.

2. Proposer une structuration hiérarchique de cette scène permettant de simplifier sa gestion.

3. Avec cette structure, intégrer un **cercle** de rayon 0.2, posé sur la table.

▸ Exercice 3. (Transformations et Produit Vectoriel - Transport des Normales)

1. Rappeler, en coordonnées cartésienne dans $\mathbb{R}^3$, l'expression du produit vectoriel de 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Comparer pour chacune des 3 transformations de base (translation, rotation, homotétie) les valeurs de $\mathcal{T}(\vec{u} \wedge \vec{v})$ et $\mathcal{T}(\vec{u}) \wedge \mathcal{T}(\vec{v})$ (où $\mathcal{T}$ est la transformation considérée, caractérisée par sa matrice en coordonnées homogènes).

3. En déduire plusieur façons de calculer la normale en un point P d'un ellipsoïde $\mathcal{E}$.