Projet 2021

Tom Redon

May 2021

1 Introduction

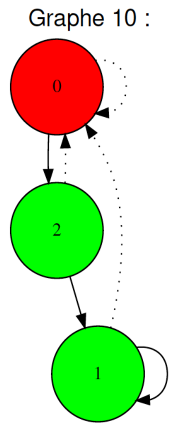
(À compléter)

2 Génération des graphes

(À compléter)

3 Chaînes de Markov

Après avoir générer tous les graphes, nous associons des probabilités aux arêtes pour en faire des chaînes de Markov.
On obtient donc des matrices d'adjacences, telles qu'une matrice M possédant des probabilités P_{AB} d'aller dans un état B en étant dans l'état A, tel que l'on a dans M au croisement de la ligne A et de la colonne B, la valeur P.
Pour être sûr de considérer toutes les valeurs possibles que l'on pourrait avoir pour P, on ne lui définit que deux valeurs, qui seront les suivantes :
- p, pour les branches "Taken".
- 1 - p, pour les branches "Not Taken".
En possédant ce type de matrice, cela nous donne donc la possibilité de calculer des probabilités stationnaires Π_i pour chaque état Q de la matrice M.



Exemple 1

Servons nous donc du graphe ci-dessus, pour donner un exemple de la matrice d'adjacence que l'on obtiendrait :

$$\begin{pmatrix} 1-p & 0 & p \\ 1-p & p & 0 \\ 1-p & p & 0 \end{pmatrix}$$

4 Calcul de probabilités stationnaires

Il existe donc deux moyens d'observer des probabilités stationnaires :
On peut donc soit étudier la probabilité de se retrouver dans chaque état après chaque changement :

$$X^{(n)} = X^{(n-k)} P^{(k)}$$

Exemple 2 *En reprenant l'exemple ci-dessus, on peut choisir X, telle que :*

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pourra donc calculer les probabilités d'être dans les prochains états à la prochaine prise de branche :

$$X^{(1)} = X^{(0)} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & 0 & p \\ 1-p & p & 0 \\ 1-p & p & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & p \end{pmatrix}$$

Ou alors, on peut considérer avec la loi des grands nombres que l'on peut établir tel que :

$$q = \lim_{n \to \infty} x^{(n)}$$

Considérons donc la matrice M, tel qu'il existe une matrice q on peut donc établir l'égalité suivante :

$$\begin{gathered} qP = q \\ \Leftrightarrow qP = qI \\ \Leftrightarrow q(I - P) = 0 \end{gathered}$$

Exemple 3 *En reprenant l'exemple ci-dessus, on peut établir la matrice q, telle que :*

$$q = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} q(I-P) &= \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-p & 0 & p \\ 1-p & p & 0 \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & -p \\ p-1 & 1-p & 0 \\ p-1 & -p & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p\pi_1 + (p-1)\pi_2 + (p-1)\pi_3 & (1-p)\pi_2 - p\pi_3 & \pi_3 - p\pi_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtiendra donc le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} p\pi_1 + (p-1)\pi_2 + (p-1)\pi_3 = 0 \\ (1-p)\pi_2 - p\pi_3 = 0 \\ \pi_3 - p\pi_1 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Ce qui établira les prochaines égalités :

$$\begin{cases} \pi_1 = 1 - p \\ \pi_2 = p^2 \\ \pi_3 = p * (1-p) \end{cases}$$

Par la suite, pour déterminer le statut des états, on appliquera les calculs d'intégrales suivants, pour tous les états π_i du graphe donné :

$$\begin{gathered} \int_0^1 (\pi_i * (1-p))\, dp \\ \int_0^1 (\pi_i * p)\, dp \end{gathered}$$

On choisira la valeur inférieure entre les deux intégrales calculées pour déterminer si l'état est "Taken" ou "Not Taken".

Exemple 4 *En reprenant les calculs effectués précédemment, on obtient :*

Les calculs d'intégrales de π_1 *:*
$x = \int_0^1 ((1-p)*(1-p))\,dp = 0.33333$
$y = \int_0^1 ((1-p)*p)\,dp = 0.16667$
Comme $x \geq y$*, alors l'état est "Not Taken".*

Les calculs d'intégrales de π_2 *:*
$x = \int_0^1 (p^2*(1-p))\,dp = 0.08333$
$y = \int_0^1 (p^2*p)\,dp = 0.25$
Comme $x \leq y$*, alors l'état est "Taken".*

Les calculs d'intégrales de π_3 *:*
$x = \int_0^1 ((p*(1-p))*(1-p))\,dp = 0.08333$
$y = \int_0^1 ((p*(1-p))*p)\,dp = 0.08333$
Comme $x \leq y$*, alors l'état est "Taken".*

Pour calculer le "score" des graphes, on additionne juste les résultats obtenus.

Exemple 5 *On aura donc, pour ce graphe :*

$$\mathit{score} = 0.16667 + 0.08333 + 0.08333 = 0.33333$$