Anfang:

* Ich heiße Sie herzlichst Willkommen.
* Mein Name ist Tom-Christian Riemer
* Digitale Verteidigung Masterarbeit.

Contents:

* Kurze Einführung weshalb man sich das anschauen sollte.
* Einige Definitionen und Beschreibung des Approximationsproblems.
* Vorstellung eines Ansatzes physics informed neural networks zur Approximation der Lösung zu verwenden.
* Betrachten Einsatz von expliziten Ableitungen.
* Und zum Schluss fasse ich nochmal die Ergebnisse zusammen und gebe einen kurzen Ausblick!

Introduction:

* Ich heize in 2 Wochen mit Gas
* Gas-Pipeline von den Jamal-Halbinseln nach Europa
* Druck mit der Länge der Leitung ab.
* Druck sollte stabil bleiben, d.h. in einem bestimmten Fenster bewegen.
* Dafür werden differential pressure transmitter und Verdichtungsmaschinen in verschiedenen Abständen verwendet
* Die Transmitter senden Daten an eine zentrale Stelle
* Die zentrale Stelle reguliert dann die Verdichtungsmaschinen.
* Wie wird das modelliert bzw. wie kommt man auf die richtigen Regulationsfaktoren?
* Wie viele Netzwerke in der realen Welt wird auch dieses mathematisch mit einem Graphen modelliert, doch weil die Länge der Pipeline eine entscheidende Größe ist, wird diese mit hinzu genommen. Man spricht dann von einem metrischen Grafen.
* Auf so einen Graphen kann man den Druck durch eine partielle Differentialgleichung modellieren.
* Ich bin kein Analytiker, deswegen habe ich keine Ahnung wie man auf eine analytische Lösung kommt.
* Aber ich bin ein bisschen in der Numerik bewandert und da gibt es verschiede Methoden die Lösung einer partiellen Differentialgleichung zu approximieren
* Eine recht frische Idee sind physics informed neural networks, in welchen die Information der Differentialgleichung in der Lernphase mit verwendet wird.
* Wir haben uns gefragt: Klappt das auch in dem Setup, wenn partielle Differentialgleichung auf einem metrischen Graphen definiert ist?

Graphen:

* Kombinatorische Graphen kennt jeder. Ein Tupel aus einer Knotenmenge und einer Kantenmenge
* Gerichteter Graph, jeder Kante ist eine Richtung zugeordnet, d.h. eindeutige Darstellung einer Kante mit einem Tupel von Knoten, ein Anfangsknoten ein Endknoten.
* Die Umkehrung einer Kante ist eine Kante mit entgegen gesetzter Richtung.
* Die Umkehrung ist reflexiv!
* Bei einem metrischen Graphen wird jeder gerichteten Kante eine positive Länge zugeordnet.
* Man kann sogenannte Koordinaten auf dem Intervall einer Kante betrachten, welche mit der Richtung wachsen.
* Definition einer Metrik ist möglich, hier für zwei Knoten, aber das ist auch auf zwei Koordinaten auf zwei unterschiedlichen Kanten erweiterbar.

Funktion spaces:

* Mit dieser Metrik ist man in der Lage verschiedene Funktionenräume zu definieren.
* Die Menge Lagrange-quadrat-integrierbaren Funktionen auf einer Kante.
* Lagrange-quadrat-integrierbaren Funktionen auf dem gesamten Graphen ist dann die Orthogonale Summe der Räume.
* Der Sobolev-Raum auf einer einzelnen Kante ist wie man ihn im Normalfall kennt.
* Beim Sobolev-Raum fordern wir nur noch, dass die Funktionen stetig aus dem gesamten Graphen sind, damit jede Funktion aus diesem Raum an einem Knoten auf allen an diesen Knotenpunkt angrenzenden Kanten denselben Wert an einem Knoten annimmt und somit eindeutig definiert ist.

Traffic flow:

* Karte vom Kaßberg
* Ein kompaktes Straßennetzwerk, welches aus einer endlichen Anzahl an Straßen endlicher Länge und einer endlichen Anzahl an Kreuzungen besteht.
* Das können wir mit einem sog. Kompakten metrischen Graphen modellieren. Endliche Anzahl Kanten mit endlicher Länge und endlicher Anzahl an Knoten.
* In den Fünfziger haben Herr Lighthill und Herr William und dazu unabhängig Herr Richards den Verkehrsfluss mit Gleichungen die den Fluss von Wasser beschreiben verknünpft.
* Die Grundidee dieses Ansatzes besteht darin, große Maßstäbe anzulegen, d. h. einzelne Autos als kleine Teilchen zu betrachten, eine Gruppe von Autos als Masse und ihre Dichte als die wichtigste zu berücksichtigende Größe.
* Dem Ansatz folgen wir auch.
* Es ist sinnvoll, von der Erhaltung der Anzahl der Autos auszugehen, was durch die folgende Kontinuitätsgleichung für jede einzelne Kante ausgedrückt werden kann, wobei J\_e den Strom von Autos beschreibt.

Flux of cars:

* Der Strom von Autos setzt sich zusammen einmal aus einem Diffussionsterm, welcher den Transport durch Diffusion beschreibt, der durch das erste Fick'sche Gesetz gegeben ist, Dafür braucht man noch einen typischerweise kleinen Diffussionskoeffizienten.
* Und der zweite Term ist ein Strömungsterm, welcher den Transport durch Strömung beschreibt. Dieser ist durch die Ableitung eines Potentials bzgl. der Ortskoordinate gegeben, dieses kann von Kante zu Kante unterschiedlich sein, und durch eine positive Mobilitätsfunktion.
* Wir wählen die Mobilität für unser Problem wie angegeben. Der Grund dafür ist, dass in vielen Anwendungen, wie auch die hier betrachtete, die Dichte aufgrund von Begrenzungseffekten eben begrenzt ist und wir mit dieser Wahl sicherstellen, dass die Lösung in diesem vorgegebenen Intervall bleibt.

Drift-Diffussion-equations on a metric graph.

* Die ausgangslage für unser Approximationsproblem ist, dass wir einen Metrischen Graphen haben auf jede Kante die Drift-Diffusion equation lösen möchten.
* Damit das ein wohlformuliertes Problem wird, brauchen wir noch Initial- und Randbedingungen.
* Die Initialbedingungen sind einfach, wir fordern, dass unsere Lösung zum Anfangszeit punkt gleich einer vorgegeben Langrange-quadrat-integrierbaren Funktion ist.
* Die Randbedingungen sind auf einem metrischen Graphen sogenannte Knotenbedingungen.
* Für die Definition müssen wir noch einen Normalenvektor für die Knoten einer Kante definieren. Dieser ist minus eins am Anfangsknoten und plus eins am Endknoten.

Conditions on interior vertices:

* Wir haben einmal Bedingungen für Knoten innerhalb eines Graphens, damit meinen wir knoten, die sowohl midenstens eine reinkommende wie auch eine rausgehende Kante anliegen haben.
* Wir fordern für diese Knoten einmal, dass sie Krichhoff\_neumann bedingung erfüllen, diese fordert, dass der aufaddierte Strom am Knoten gleich null ist.
* Das bedeutet, dass in einem Knoten genauso viel reinfließt wie auch rausfließt.
* Desweiteren wollen wir natürlich auch, dass die Lösungen stetig in den Knoten sind, dass heißt, dass die Lösungen welche in einem Knoten aufeinander treffen auch den gleichen Funktionswert dort haben.

Conditions on interior vertices:

* Was sind äußere Knoten – da haben Jan, Martin und ich des öfteren darüber diskutiert. Wir definieren diese nun so, dass nur entweder Kanten aus einem äußeren Knoten rausgehen oder Kanten in einen äußeren Knoten reingehen.
* Wir fordern auf diesen Knoten, dass die flux boundary condition gilt, welche durch den hier beschrieben Term definiert ist.
* Dabei sind beschreibt alpha die Einflussrate und beta die Ausflussrate des Systems.
* Die Kirchhoff-Neumann-Bedingungen sind die natürlichen Knotenbedingungen für die Differentialgleichung, da sie einerseits sicherstellen, dass in jeden inneren Knoten genau so viel Masse hineinfließt wie herausfließt, und andererseits zusammen mit den Fluss-Randbedingungen dafür sorgen, dass Masse nur über die äußeren Knoten, für die entweder alpha oder beta positiv ist, in das System eintritt oder es verlässt.
* Bisher ist noch keine analytische Lösung bekannt (dem Autoren zumindest).
* Deswegen ist das unser Approximationsproblem.

Artificial neurons:

* Das setzt die Ableitung der
* PINN Learning:
* Oft FNN werden verwendet.
* Diskussion über supervised oder unsupervised learning.
* Kombination aus ADAM und L-BFGS-B

Folie 21:

* Was ist eigentlich theta und theta\_e?