Étude mathématique et implémentation du modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein appliqué à la valorisation des options

Thomas Saurel

22 février 2026

Table des matières

1 Introduction

2 Cadre théorique et principe de non-arbitrage

Dans cette partie, nous nous attarderons sur les notions et concepts théoriques nécessaires à la compréhension de la finance.

2.1 Espace probabilisé filtré

On considère le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ formant un univers probabilisé avec :

- l'univers Ω représentant les états possibles d'un marché financier
- une tribu $\mathcal{F}$ sur l'univers Ω
- une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{F}$

Soit l'ensemble des temps discret $I = \{0, 1, ..., T\}$, $T < \infty$ où T est la date de maturité de l'option.
On introduit la notion de **filtration** de $\mathcal{F}$ qui est une famille croissante $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in I} \subseteq \mathcal{F}$ de tribus, ainsi :

$$\forall (t_\alpha, t_\beta) \in I \times I, \qquad t_\alpha \leq t_\beta \implies \mathcal{F}_{t_\alpha} \subseteq \mathcal{F}_{t_\beta} \subseteq \mathcal{F}$$

On définit alors l'**espace probabilisé filtré** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$

Remarque. Se placer dans cet espace permet de modéliser les évolutions d'un marché financier. En effet, chaque tribu de la filtration permet de représenter les informations connues à l'instant t. Ainsi un observateur se trouvant à l'instant t_α a accès à toutes les informations issues d'un temps précédent t_β tant que $t_\beta \leq t_\alpha$. Les variables aléatoires devront être $\mathcal{F}_t$-mesurables afin de pouvoir être observées sans anticipation.

On peut maintenant définir les variables aléatoires servant à modéliser les processus financiers du modèle. Considérons les variables aléatoires suivantes :

$$\begin{aligned} \text{la quantité d'actifs :} \quad & \Delta_t : \Omega \to \mathbb{R} \\ \text{l'actif risqué :} \quad & S_t : \Omega \to \mathbb{R}^+ \\ \text{l'actif sans risque :} \quad & B_t : \Omega \to \mathbb{R}^+, t \mapsto (1+r)^t \end{aligned}$$

avec $r > -1$ le taux sans risque.
On suppose que les variables aléatoires Δ_t,S_t et B_t sont $\mathcal{F}_t$-mesurables pour tout $t \in I$.
Remarque. Pour chaque $t \in I$, la variable aléatoire B_t est constante sur Ω $(\forall \omega \in \Omega, B_t(\omega) = (1+r)^t$. C'est donc une variable aléatoire déterministe.
S_t représente l'incertitude du marché financier, Δ_t est un stratégie adaptée à la filtration (donc adaptée aux informations connues à l'instant t) et B_t représente l'évolution déterministe d'un placement sans risque.

2.2 Portefeuille d'autofinancement

On introduit la notion de **stratégie d'investissement** à l'aide du couple (Δ_t, B_t), représentant respectivement la quantité d'actifs et la valeur courante du compte sans risque détenu au temps t.

On définit un **portefeuille discret** Π_t au temps t par la valeur :

$$\Pi_t = \Delta_t S_t + B_t$$

Ainsi, Π_t se décompose en deux parties : $\Delta_t S_t$ qui représente la partie risquée du portefeuille et B_t qui représente la valeur du compte au taux sans risque.

Notation. Bien que le modèle évolue en temps discret, nous distinguerons par la suite, au temps $t+1$, deux états infinitésimaux : l'instant $t+1^-$ correspondant à l'observation du nouveau prix de l'actif avec l'ancienne stratégie, et l'instant $t+1^+$ correspondant à la mise en place de la nouvelle.

Remarque. Soit r le taux sans risque et un instant t.
A l'instant $t+1^-$, $\Pi^-_{t+1} = \Delta_t S_{t+1} + (1+r)B_t$ car la valeur de l'actif risqué S_t est mise à jour et l'actif sans risque B_t a produit des intérêts. La quantité d'actifs Δ ne varie pas.
A l'instant $t+1^+$, $\Pi^+_{t+1} = \Delta_{t+1} S_{t+1} + B_{t+1}$ car on met à jour les quantités Δ_t et B_t en achetant/vendant.
Afin de pouvoir utiliser ce portefeuille, nous imposerons que $\Pi^+_{t+1} = \Pi^-_{t+1}$ afin d'assurer une continuité du modèle (propriété d'autofinancement).

Propriété d'autofinancement

Un portefeuille discret est dit d'**autofinancement** si

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad \Pi_{t+1} = \Delta_t S_{t+1} + (1+r)B_t = \Delta_{t+1} S_{t+1} + B_{t+1}$$

où $r > -1$ est le taux sans risque.

La propriété d'autofinancement permet donc d'assurer que l'évolution de Π_t est entièrement déterminée par la stratégie (Δ_t, B_t) et la dynamique de S_t sans modifications externes. On considérera par la suite que tous les portefeuilles sont autofinancés.

Absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A.)

L'absence d'arbitrage signifie qu'il n'existe pas de portefeuille auto-finançant de valeur initiale nulle et de valeur finale positive presque sûrement :

$$\nexists \Pi, \Pi_0 = 0,\ \mathbb{P}(\Pi_T \geq 0) = 1,\ \mathbb{P}(\Pi_T > 0) > 0$$

Remarque. La propriété d'A.O.A empêche donc l'existence théorique d'actif sans risque et sans investissement initial. Ainsi tout gain potentiel nécessite un mise de départ ou comporte un risque. Sans cette condition, chaque acheteur

exploiterait les opportunités d'arbitrage entraînant la chute des marchés. Cette propriété est une condition nécessaire à la cohérence des marchés.
En pratique, il existe de petites opportunités d'arbitrage créées lors des fluctuations des marchés qui sont corrigées par des arbitragistes.

2.3 Stratégie de réplication

Réplication

Un payoff H est dit **réplicable** si : $\exists \Pi,\ \Pi_T = H \quad \mathbb{P}$-p.s.
On appelle Π le **portefeuille de réplication de H**.

Complétude de marché

Un marché est dit **complet** si tout payoff est réplicable.

Remarque. On déduit naturellement que la complétude d'un marché implique qu'il existe un portefeuille de réplication pour chaque payoff. On peut cependant aller plus loin et montrer l'unicité du portefeuille pour chaque payoff.

Considérons un marché complet, alors pour tout payoff H, il existe un **unique** portefeuille de réplication pour H.

Démonstration.
Soit Π^1 et Π^2 deux portefeuilles autofinancés de réplication pour un certain payoff H.
à $t = T,\ \Pi^1_T = \Pi^2_T = H \quad$ (maturité de l'option)
à $t = 0,\ \Pi^1_0 = \Pi^2_0 \quad$ (A.O.A.)
$\forall t \in \{1, .., T-1\},\ \Pi^1_t = \Pi^2_t$ (propriété d'autofinancement)
Ainsi $\forall t \in \{0, .., T\},\ \Pi^1_t = \Pi^2_t \implies \Pi^1 = \Pi^2$.

2.4 Mesure de probabilité risque-neutre

Théorèmes Fondamentaux de l'évaluation d'actifs

Premier Théorème : Un marché financier sur un espace probabilisé discret $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est sans opportunité d'arbitrage si est seulement si il existe au moins une mesure de probabilité **risque-neutre** qui est équivalente à la mesure de probabilité originale $\mathbb{P}$.

Second Théorème : Un marché sans arbitrage est complet si et seulement s'il existe une mesure risque-neutre unique, équivalente à $\mathbb{P}$ dont le **numéraire** (actif de référence pour exprimer les prix) est l'actif sans risque

Remarques : On a précédemment imposé que les marchés respectent l'A.O.A. Ainsi, on considérera l'existence de la mesure risque-neutre. De plus, si le marché est complet, la mesure risque-neutre est **unique**, ce qui permet d'évaluer tous les actifs de manière cohérente. Ce théorème est la base des modèles d'évaluation d'options et de produits dérivés.
Le second théorème affirme qu'un marché discret est complet si et seulement si le nombre de scénarios futurs est égal au nombre d'actifs à chaque étape. Ainsi, le modèle vu jusque ici contient deux types d'actifs (risqués et sans risque) et on ne peut considérer que deux scénarios possibles à chaque étape (hausse ou baisse). Cela justifie l'implémentation de modèle binomiaux qui est le plus simple des modèles complets, comparé à un modèle trinomial qui serait incomplet.

Martingale

$M := (M_t)_{t\in I}$ est une $\mathbb{F}$-martingale si :
- $\forall t \in I, M_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable
- $\forall t \in I, M_t$ est intégrable
- $\forall t_\alpha \leq t_\beta$, $M_{t_\alpha} = \mathbb{E}(M_{t_\beta}|\mathcal{F}_{t_\alpha})$ p.s.

Ainsi le concept de martingale est très utile pour représenter un marché financier. Intuitivement, l'espérance future d'une martingale en prenant compte le passé est égale à la valeur actuelle ($\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_t) = M_n$).

Soit un marché discret avec un actif risqué S_t et un actif sans risque B_t. On définit le **prix actualisé** de l'actif risqué par :

$$\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}.$$

Remarque. On voit bien ici que le prix est exprimé en fonction de B_t qui devient ainsi le numéraire.
D'après le premier théorème fondamental de l'évaluation des actifs, si le marché est **sans arbitrage**, il existe au moins une mesure $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que :

$$\tilde{S}_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big(\tilde{S}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\big)$$

Autrement dit, sous $\mathbb{Q}$, le prix actualisé devient une $\mathbb{F}$-martingale.

Afin de mieux comprendre ce concept regardons un exemple :
Considérons un marché avec :

$$S_0 = 100, \quad S_1 = \begin{cases} 100 \text{ avec probabilité } p \\ 50 \text{ avec probabilité } 1-p \end{cases} \qquad \text{avec } r = 5\%$$

On cherche p tel que le prix actualisé soit une martingale sous $\mathbb{Q}$:

$$\tilde{S}_0 = \frac{S_0}{1+r} = \frac{100p}{1+r} + \frac{50(1-p)}{1+r} = \frac{100p + 50(1-p)}{1+r}$$

La solution p correspond à la **probabilité risque-neutre** de hausse de l'actif. Sous cette probabilité, le prix actualisé $\tilde{S}_t$ est une martingale et sert à valoriser tous les produits dérivés.

Soit Π_T le **payoff** d'un actif à maturité T. Si le marché est **sans arbitrage**, le premier théorème fondamental garantit l'existence d'une mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$.

On définit le prix initial Π_0 de l'actif comme l'espérance actualisée de son payoff sous $\mathbb{Q}$:

$$\Pi_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\frac{\Pi_T}{B_T}\Big) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Pi_T)}{B_T} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Pi_T)}{(1+r)^T}$$

Exemple : On considère une option européenne d'achat (call) avec strike $K = 100$, maturité $T = 1$ période, et actif sous-jacent S_T tel que :

$$S_T = \begin{cases} 120 \text{ avec probabilité } p \\ 50 \text{ avec probabilité } 1-p \end{cases} \qquad \text{avec } r = 5\%.$$

L'option étant un call, son payoff est : $\Pi_T = \max(S_T - K, 0)$.

Le prix initial est :

$$\Pi_0 = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Pi_T)}{1+r} = \frac{1}{1+r}\big(20p + (1-p)\cdot 0\big) = \frac{20p}{1+r}$$

p est ici la probabilité risque-neutre de hausse de l'actif. Sous cette probabilité, le prix actualisé de l'option est cohérent avec le marché sans arbitrage.

3 Analyse du modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Dans cette partie, nous nous intéresserons à la théorie du modèle de Cox-Ross-Rubinstein afin de l'implémenter dans la prochaine partie.

3.1 Discrétisation du temps

Le modèle **binomial** ou de **Cox-Ross-Rubinstein** est un modèle de prédiction discret contrairement au modèle de **Black-Scholes** qui est continu. Les principaux intérêts de travailler en temps discret sont la facilité de modélisation ainsi que l'implémentation algorithmique. En effet, le modèle binomial est facilement compréhensible intuitivement en représentant l'évolution des actifs sur les branches d'une arbre pondérées par les probabilités de montée et descente des prix. C'est cette modélisation qui va nous intéresser dans la suite de cette section.
Pour discrétiser la période de temps du call, on considère une subdivision de la période de validité de l'option en N périodes de même longueur, ainsi on obtient chaque division :

$$t_n = \frac{nT}{N}, \forall \in 0, .., N$$

Remarque. Faire tendre N vers des valeurs très grandes revient à se rapprocher d'un modèle continu.

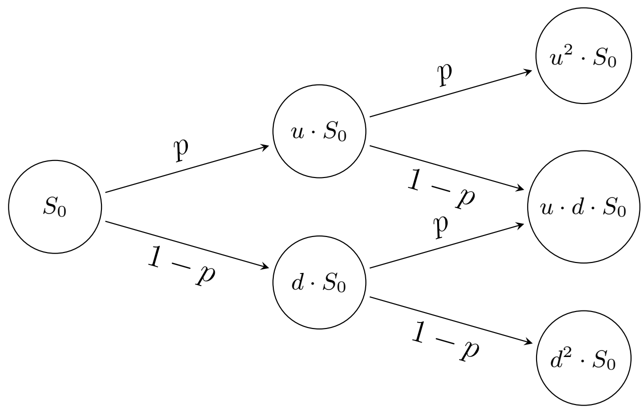
Sur chaque subdivision, on définit deux facteurs :

u : le facteur de hausse de l'actif (up)
d : le facteur de baisse de l'actif (down)

Ces deux facteurs correspondent respectivement à la hausse et à la baisse du prix de l'actif. Sur un arbre, on adoptera la convention évidente qui place le facteur de hausse sur la branche la plus haute et vice-versa.

Remarque. Nous ne nous attarderons pas, dans un premier temps, sur la manière dont sont calculés ces deux facteurs.

Représentons l'évolution d'un call ayant pour cours initial S_0, qui a une probabilité p d'augmenter de u et qui a une probabilité $1-p$ de baisser de d à chaque période :



Remarque. On remarque que cet arbre est recombinant grâce à la commutativité sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que les évolutions sont invariantes par permutations de facteurs de hausse et baisse.
Plus formellement, soit un mot $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ de longueur n sur l'alphabet $\{u, d\}$. Si l'on note $|w|_u = k$ le nombre de hausses et $|w|_d = n - k$ le nombre de baisses, alors pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, le prix final est identique :

$$S_n = S_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} w_i = S_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} w_{\sigma(i)} = S_0 u^k d^{n-k}$$

L'intérêt de la discrétisation apparaît ainsi. En effet, pour un arbre binaire non recombinant, l'étape $N = 10$ sera représenté par $2^{10} = 1024$ feuilles (nœuds terminaux) alors que pour un arbre recombinant, le nombre de feuilles de l'arbre sera de $N + 1$. Pour résumer, la recombinaison de l'arbre permet de transformer l'évolution exponentielle du nombre de feuilles en évolution linéaire.

L'idée du modèle de Cox-Ross-Rubinstein (et de celui de Black-Scholes) est d'utiliser la réplication de portefeuilles pour simuler l'évolution d'un actif. En effet, on a supposé l'A.O.A donc le marché est complet et ainsi tout payoff est réplicable comme vu précédemment.
Représentons l'évolution d'un portefeuille afin de trouver des relations entre les différents coefficients du modèle.
Soit $\Pi = \Delta S + B$ avec B au taux sans risque r.
On définit le facteur sans risque $R \coloneqq 1 + r$.
Soient u, d les facteurs d'évolution du modèle et p la probabilité de hausse. On considère un call C qui peut voir son prix augmenter (C_u) ou baisser (C_d) et on construit alors notre modèle afin de répliquer ce call.

$$
\begin{tikzcd}
 & \Delta uS + BR \\
\Delta S + B \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\
 & \Delta dS + BR
\end{tikzcd}
$$

Ainsi, comme le portefeuille réplique C, on obtient :

$$\begin{cases} \Delta uS + BR &= C_u \\ \Delta dS + BR &= C_d \end{cases} \implies \Delta S(u-d) = C_u - C_d \implies \Delta = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)}$$

De plus,

$$\begin{cases} \Delta uS + BR = C_u \\ \Delta dS + BR = C_d \end{cases} \iff \begin{cases} -\Delta udS - dBR &= -dC_u \\ \Delta udS + uBR &= uC_d \end{cases}$$
$$\implies RB(u-d) = uC_d - uC_d \implies B = \frac{uC_d - dC_u}{R(u-d)}$$

En remplaçant,

$$\begin{aligned} C = \Delta S + B &= \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} S + \frac{uC_d - dC_u}{R(u-d)} = \frac{R(C_u - C_d) + uC_d - dC_u}{R(u-d)} \\ &= \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d} C_u + \frac{u-R}{u-d} C_d\right) \\ &= \frac{1}{R}(pC_u + (1-p)C_d), \text{ avec } p = \frac{R-d}{u-d} \text{ et } 1-p = \frac{u-R}{u-d} \end{aligned}$$

Remarque. On a bien $1 = p + (1-p) = \dfrac{R-d+u-R}{u-d} = 1$.
On a aussi nécessairement $d < R < u$. En effet,

Si $R \leq d < u$ **:** On emprunte au taux sans risque
- En cas de baisse : $dS_0 - RS_0 = S_0(d-R) \geq 0$
- En cas de hausse : $uS_0 - RS_0 = S_0(u-R) \geq 0$

Si $d < u \leq R$ **:** On vend à découvert
- En cas de hausse : $RS_0 - uS_0 = S_0(R-u) \geq 0$
- En cas de baisse : $RS_0 - dS_0 = S_0(R-d) \geq 0$

Dans les quatre cas, on obtient un arbitrage ce qui contredit l'A.O.A. Ainsi, le rendement sans risque est strictement compris entre les meilleurs et pires rendements risqués.
On peut réécrire la formule en utilisant la probabilité risque neutre

Formule d'évaluation risque-neutre

Soient u et d les facteurs d'évolution avec $d < R < u$, R le facteur sans risque, et C_u, C_d les flux futurs de l'option.

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{R}(pC_u + (1-p)C_d), \text{ avec } p = \frac{R-d}{R-d} \text{ et } 1-p = \frac{u-R}{u-d} \\ &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(C_1)}{R}, \text{ avec } \mathbb{Q} \text{ la mesure de probabilité risque-neutre} \end{aligned}$$

4 Conclusion