

# Propriétés Métriques des Courbes. 28 avril 2020.

---

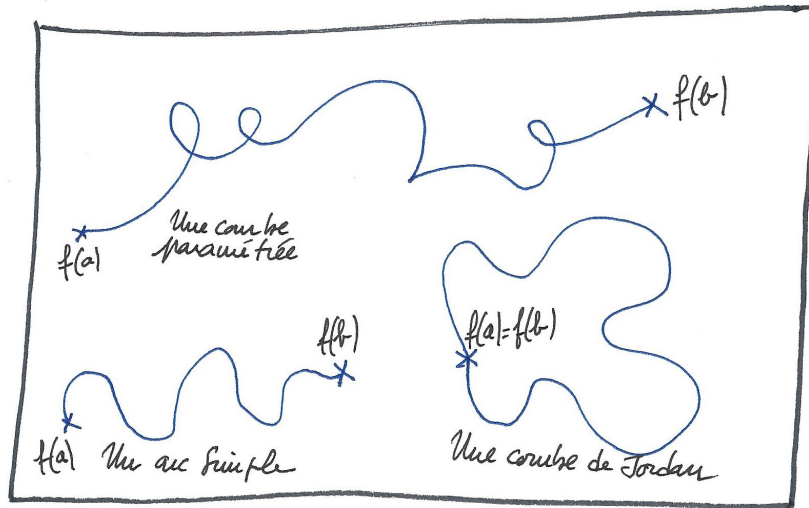
## TABLE DES MATIÈRES

1. Préliminaires : définitions, propriétés générales	1
2. L'abscisse curviligne.	8
2.1. Abscisse curviligne	8
2.2. Repère de Serret-Frenet, Courbure	9
2.3. Calculs pratiques : courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes.	12
2.4. Exemples.	13
2.5. Calculs pratiques : courbes paramétrées en coordonnées polaires.	14
2.6. Exemples.	14
3. Exercices d'application	15
4. Applications aux Problèmes de plus court chemin (géodésiques)	15
5. Longueur du graphe d'une fonction monotone ou convexe.	18
6. L'Inégalité Isopérimétrique	23
7. Autour d'une Ellipse.	25
8. Quelques autres courbes classiques.	27
9. Parabole contre le Cercle	28
10. En vrac.....	32
Références	32

## 1. PRÉLIMINAIRES : DÉFINITIONS, PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Ma référence favorite est le livre de Dixmier : cours de mathématiques de premier cycle, seconde année chez Gauthier Villard, chapitre LIII), page 313. Mais pour rester sur des textes accessibles je suis surtout le livre de Monier (Géométrie, Dunod).

Un **arc ou courbe paramétrée**  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^d$  (ou un espace Euclidien) est la donnée d'un intervalle  $I = [a, b]$  de  $\mathbb{R}$  et d'une application  $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$ . L'ensemble  $\gamma(I) = \{f(t), t \in I\}$  s'appelle la **trace de l'arc**  $\gamma$ . Lorsque  $f$  est de classe  $C^1$  on parle d'arc ou de courbe **régulière** ou de classe  $C^1$ . Lorsque  $f$  est injective sur  $I$ , on parle de **courbe simple** et si de plus  $f(a) = f(b)$  on parlera de **courbe fermée ou courbe de Jordan**.

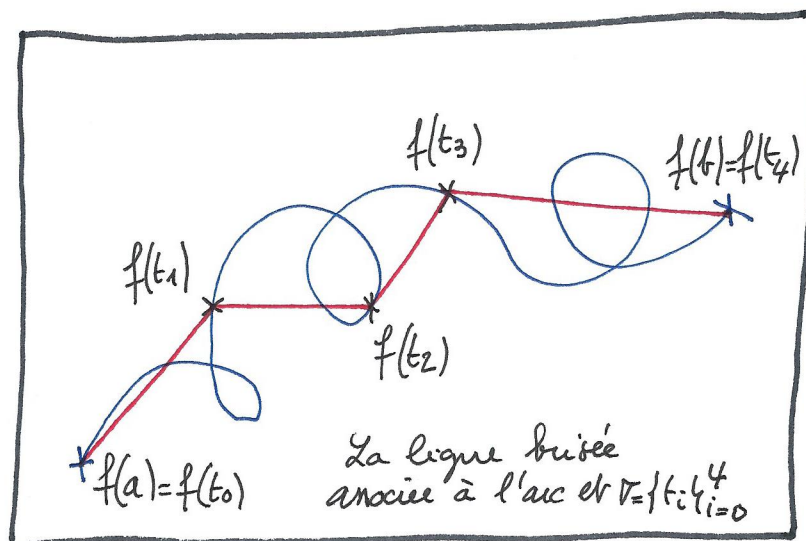


Par analogie avec la longueur d'un segment puis d'une ligne brisée, on définit la longueur  $L(\gamma)$  d'un arc par

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} l(\gamma, f)$$

où  $\mathcal{S}([a,b])$  est l'ensemble de toutes les subdivisions de l'intervalle  $[a,b]$  et pour une subdivision  $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\} \in \mathcal{S}_{[a,b]}$ ,  $l(\sigma, f)$  est la longueur de la ligne brisée de sommets  $f(t_i)$   $i = 0, 1, \dots, n$ . Autrement dit :

$$l(\sigma, f) = \sum_{k=1}^n \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|.$$



( $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^d$ ). On dira que la courbe est **rectifiable** si cette borne supérieure est finie.

On peut penser à ce stade que la notion de longueur d'une courbe dépend de sa paramétrisation  $f$ , il n'est pas difficile de montrer que ce n'est pas le cas lorsque l'on passe d'une paramétrisation à une autre par un  $C^1$  difféo (on parle alors de courbe ou d'arc **équivalents**) voir plus loin. Commençons par quelques propriétés sur la longueur d'une courbe rectifiable.

**Propriété 1.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une courbe paramétrée.

- (1) Si  $\gamma$  est dérivable et bornée sur  $I$ , alors  $\gamma$  est rectifiable.
- (2) Soit  $a < c < b$ . On désigne par  $\gamma_1, \gamma_2$  les restrictions de  $\gamma$  à  $[a, c]$  et  $[c, b]$ . Alors si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont rectifiables, il en est de même de  $\gamma$  et  $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$  (cette propriété permet de prouver que les courbes usuelles (ligne polygonale, courbe paramétrée par une fonction  $C^1$  par morceaux...) possédant des points anguleux sont rectifiables).

### Démonstration :

- (1) Dans une base orthonormée de  $\mathbb{R}^d$  :  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_d(t))$ . vu les hypothèses, il existe une constante  $C > 0$  vérifiant  $|f'_i(t)| \leq C$  pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Alors pour toute subdivision  $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$  de  $[a, b]$  le théorème des accroissements finis (ou mieux l'inégalité) donne :

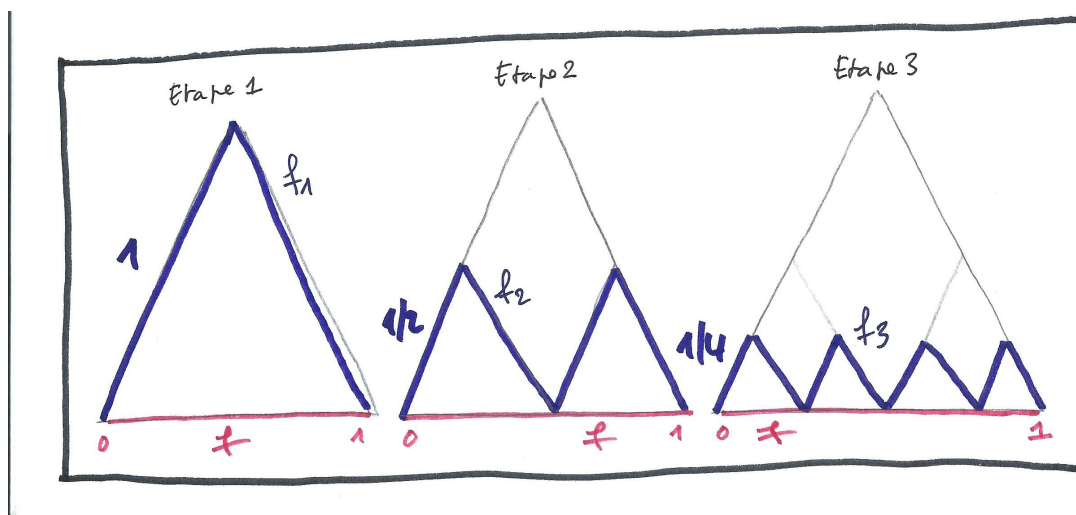
$$\|f(t_i) - f(t_{i-1})\|^2 = |f_1(t_i) - f_1(t_{i-1})|^2 + \dots + |f_d(t_i) - f_d(t_{i-1})|^2 \leq C^2(t_i - t_{i-1})^2$$

si bien que

$$l(\sigma) \leq C \cdot (t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + \dots + t_n - t_{n-1}) = C(b - a).$$

- (2) Exercice.  
C.Q.F.D. ■

**Remarques :** • Il faut faire attention : une suite de courbe  $(\mathcal{C}_n)_n$  peut converger uniformément vers une courbe  $\mathcal{C}$  (au sens où la suite  $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $I$  vers  $f$  sans que la suite des longueurs converge vers la longueur de  $f$  :  $\lim_n L(f_n) \neq L(f)$ ). L'exemple canonique est le suivant : on part d'un triangle équilatéral de longueur de cotés 1 et on subdivise l'arc polygonal reliant 0 à 1 comme le suggère la figure ci-dessous. On vérifie sans peine que pour tout  $n \geq 1$  :  $L(f_n) = 2$ , que  $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $I$  vers  $f$  sur  $[0, 1]$  (le voyez vous ?) alors que  $L(f) = 1 \neq 2 = \lim_n L(f_n)$ .



Le théorème ci-dessous reliant la longueur d'une courbe avec la dérivée de sa paramétrisation explique le phénomène observé : il s'agit de justifier un échange « limite-intégrale » où n'intervient que la dérivée, alors que notre seule information est la convergence uniforme des paramétrisations  $f_n$  alors que l'on ne sait rien sur les  $f'_n$ ...

Lorsque la courbe est de classe  $C^1$ , ( $f$  est  $C^1$  sur  $I$ ) le vecteur vitesse  $f'(t)$  est tangent à la courbe au point  $f(t)$  et sa norme  $v(t) := \|f'(t)\|$  est la vitesse au temps  $t$ . Dans ce cas, on a une formule simple pour calculer sa longueur :

**Théorème 1.** La longueur d'un arc paramétré régulier  $f = (f_1, f_2, \dots, f_d) \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^d)$  est donné par :

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}[a, b]} l(\gamma) = \int_a^b v(t) dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t) + \dots + f_d^2(t)} dt.$$

**Remarques :**

- En particulier, pour toute courbe rectifiable  $\gamma$ , sa longueur  $L(\gamma)$  ne dépend pas de la paramétrisation  $f$  (de classe  $C^1$ ) (ce qui est la moindre des choses). Voir aussi avant la preuve du théorème 2 une autre démonstration.
- Cette définition se prolonge naturellement aux courbes  $C^1$  par morceaux.
- Physiquement, il semble tout à fait naturel qu'intégrer la vitesse par rapport au temps nous donne la longueur de la trajectoire.

**Démonstration :** • Pour toute subdivision  $\sigma = (t_i)_{i=0}^n \in \mathcal{S}([a, b])$  de l'intervalle  $[a, b]$  on appelle pas de la subdivision le réel

$$p(\sigma) = \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i),$$

On note si  $M_i = f(t_i)$ , ( $i = 0 \dots n$ )

$$l(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|$$

la longueur de la ligne polygonale  $M_0, M_1, \dots, M_n$ .

- Comme pour tout  $i = 0, \dots, n-1$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt \geq \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right| = \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| = M_i M_{i+1}$$

on en déduit que

$$\int_a^b \|f'(t)\| dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt \geq \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} = l(\sigma).$$

pour toute subdivision  $\sigma = (t_i)_{i=0}^n \in \mathcal{S}([a, b])$ . Par conséquent on a déjà

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}[a, b]} l(\sigma) \geq \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

- D'autre part, comme pour tout  $i = 0, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t_i)\| dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\|f'(t)\| - \|f'(t_i)\|) dt \\ &= (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\|f'(t)\| - \|f'(t_i)\|) dt \\ &\leq \|(t_{i+1} - t_i) f'(t_i)\| + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\| dt \\ &= \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_i) dt \right\| + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\| dt \\ &\leq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right\| + \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_i) - f'(t) dt \right\| + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\| dt \\ &\leq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right\| + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\| dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\| dt \\ &= \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| + 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\| dt \\ &= M_{i+1} M_i + 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\| dt. \end{aligned}$$

Maintenant, comme  $f'$  est continue sur le segment  $[a, b]$ , elle y est uniformément continue. donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $|x - y| \leq \eta$  implique  $\|f'(x) - f'(y)\| \leq \varepsilon$ .

Alors pour toute subdivision  $\sigma = (t_i)_{i=0}^n \in \mathcal{S}([a, b])$  de pas  $p(\sigma) \leq \eta$ , l'inégalité précédente se transforme en

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt &= M_{i+1}M_i + 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\| dt \\ &\leq M_{i+1}M_i + 2(t_{i+1} - t_i)\varepsilon. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \int_a^b \|f'(t)\| dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} M_{i+1}M_i + 2(b-a)\varepsilon = l(\sigma) + 2(b-a)\varepsilon. \end{aligned}$$

- En résumé, pour toute subdivision  $\sigma = (t_i)_{i=0}^n \in \mathcal{S}([a, b])$  on a

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}[a, b]} l(\sigma) \geq \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que toute subdivision  $\sigma = (t_i)_{i=0}^n \in \mathcal{S}([a, b])$  de pas  $p(\sigma) \leq \eta$  vérifie

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}[a, b]} l(\sigma) \geq l(\sigma) \geq \int_a^b \|f'(t)\| dt - 2(b-a)\varepsilon.$$

CQFD. ■

Dans la pratique, voici les formules qu'on va utiliser

- pour une courbe plane  $\gamma$  admettant une représentation paramétrique  $f : [a, b] \ni t \mapsto f(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  :

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

- Dans le cas particulier où  $\gamma$  est paramétrée par une équation cartésienne (c'est le graphe d'une fonction)  $f : [a, b] \ni t \mapsto y = f(x)$ , on se ramène au cas précédent avec la paramétrisation  $x(t) = t, y(t) = f(x(t)), t \in [a, b]$  ce qui nous donne :

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt,$$

- Enfin, lorsque l'arc  $\gamma$  est défini en coordonnées polaires  $x(\theta) = \rho(\theta), y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$ , la formule s'écrit (vérifiez le calcul!)

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta.$$

Quelques exemples :

**Exercice 1. [Source : ?].**

- (1) **Longueur de la sinusoïde sur une période.** : Montrer que la longueur  $L$  de la courbe d'équation  $f(t) = \sin(t)$  lorsque  $t$  décrit l'intervalle  $[0, 2\pi]$  vérifie

$$(1) \quad L = \frac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\Gamma^2(1/4)} \simeq 7.64.$$

- (2) **Longueur de l'astroïde.** : Soit  $a > 0$ . Calculer la longueur de la courbe paramétrée :

$$f(t) = (x(t) = a \cos^3(t), y(t) = a \sin^3(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- (3) **Aire de l'astroïde.** : Calculer l'aire de la surface bornée délimitée par la courbe paramétrée :

$$f(t) = (x(t) = \cos^3(t), y(t) = \sin^3(t)).$$

**Solution :**

- (1) La longueur est donnée par

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + f'^2(t)} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2(t)} dt.$$

Il s'agit maintenant de traficoter cette intégrale en espérant voir apparaître la fonction Beta ou Gamma. On commence par le changement de variable  $u = \cos(t)$ .

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2(t)} dt = 4 \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (u = \cos(t))$$

puis

$$L = 4 \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = 4 \int_0^1 \frac{1 + u^2}{\sqrt{1 - u^4}} du.$$

Le changement  $v = u^4$  s'impose maintenant

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^1 \frac{1 + u^2}{\sqrt{1 - u^4}} du = 4 \int_0^1 \frac{1 + \sqrt{v}}{\sqrt{1 - v}} \cdot \frac{v^{-3/4}}{4} dv = \int_0^1 \frac{v^{-3/4}}{\sqrt{1 - v}} dv + \int_0^1 \frac{v^{-1/4}}{\sqrt{1 - v}} dv \\ &= \int_0^1 v^{-3/4}(1 - v)^{-1/2} dv + \int_0^1 v^{-1/4}(1 - v)^{-1/2} dv = B(1/4, 1/2) + B(3/4, 1/2). \end{aligned}$$

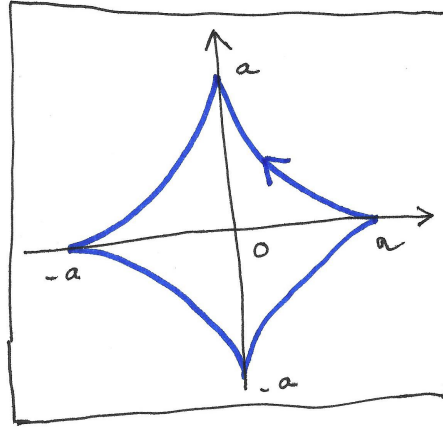
On tombe maintenant facilement le résultat désiré en exploitant les deux formules classiques d'Euler  $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$  et  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$  :

$$\begin{aligned} L &= B(1/4, 1/2) + B(3/4, 1/2) \\ &= \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)} + \frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/4)} = \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1-1/4)} + \frac{4\Gamma(1-1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4)} \\ &= \frac{\Gamma(1/4)^2 \sin(\pi/4)\Gamma(1/2)}{\pi} + \frac{4\pi\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4)^2 \sin(\pi/4)} = \frac{\Gamma(1/4)^2}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2}. \end{aligned}$$

- (2) (vous devez être capables d'étudier cette courbe et la nature de ses points singuliers). Pour des raisons de symétrie évidentes la longueur  $L_a$  est 4 fois la longueur de la portion de courbe située dans le premier quart de plan.

Pour calculer cette dernière longueur on applique la formule précédente :

$$\begin{aligned} L_a &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \sin^2(t) \cos^4(t) + 9a^2 \cos^2(t) \sin^4(t)} dt \\ &= 12a \int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos(t) dt = 6a. \end{aligned}$$

FIGURE 1. L'astroïde d'équation paramétrique  $x(t) = a \cos^3(t)$ ,  $y(t) = a \sin^3(t)$ .

(car  $\sin(t)\cos(t) \geq 0$  lorsque  $t \in [0, 2\pi]$ ). Vous pouvez aussi vous amuser à retrouver cette formule en paramétrisant en coordonnées polaires (c'est peut être plus délicat...).

- (3) On a affaire à l'astroïde. Vu son allure, on va calculer l'aire de la surface qu'elle délimite dans le quart de plan  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

Dans le quart de plan  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  correspondant à  $t \in [0, \pi/2]$  (i.e. la partie où la courbe est en noir sur la figure ci-dessus) on peut écrire  $\cos(t) = x(t)^{1/3}$  et  $\sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)}$  si bien que pour  $t \in [0, \pi/2]$  :

$$y(t) = \sin^3(t) = (1 - \cos^2(t))^{3/2} = (1 - x(t)^{2/3})^{3/2}.$$

Par conséquent, l'aire  $\mathcal{A}$  de l'astroïde est

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 4 \int_0^1 (1 - u^{2/3})^{3/2} du \underset{v=u^{2/3}}{=} 6 \int_0^1 v^{1/2} (1 - v)^{3/2} dv \\ &= 6B(3/2, 5/2) = \frac{6\Gamma(5/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(4)} = \frac{6 \cdot \frac{3}{4}\Gamma(1/2) \cdot \frac{1}{2}\Gamma(1/2)}{3!} = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

CQFD. ■

**Remarques :** • Par le même calcul, l'aire de l'astroïde de paramètre  $a > 0$  et d'équation

$$f(t) = (x(t) = a \cos^3(t), y(t) = a \sin^3(t))$$

vaut  $3\pi a^2/8$ .

- On peut bien entendu s'en sortir plus simplement (mais sans la fonction Gamma... c'est moins sportif!) avec la formule de Green-Riemann

$$\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{C}} dx dy = \oint x dy = \int_0^{2\pi} 3a^2 \cos^4(t) \sin^2(t) dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

**Exercice 2.** Déterminer la longueur de la cardioïde d'équation polaire  $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ .

**Solution :** ■

**Exercice 3.** Calculer la longueur d'une arche de cycloïde de paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Solution :

## Exercice 4.

Solution :

## 2. L'ABSCISSE CURVILIGNE.

**2.1. Abscisse curviligne.** Soit  $\gamma$  une courbe dans  $\mathbb{R}^2$  (tout se généralise immédiatement dans  $\mathbb{R}^d$ ) paramétrée par  $f : I \ni t \mapsto f(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$ . On appelle **abscisse curviligne** sur  $\gamma$  toute application  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $I$  telle que

$$s'(t) = \|f'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Autrement dit, une application  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  sera une **abscisse curviligne sur  $\gamma$**  si et seulement si il existe  $t_0 \in I$  tel que

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(t)\| dt, \quad \forall t \in [a, b].$$

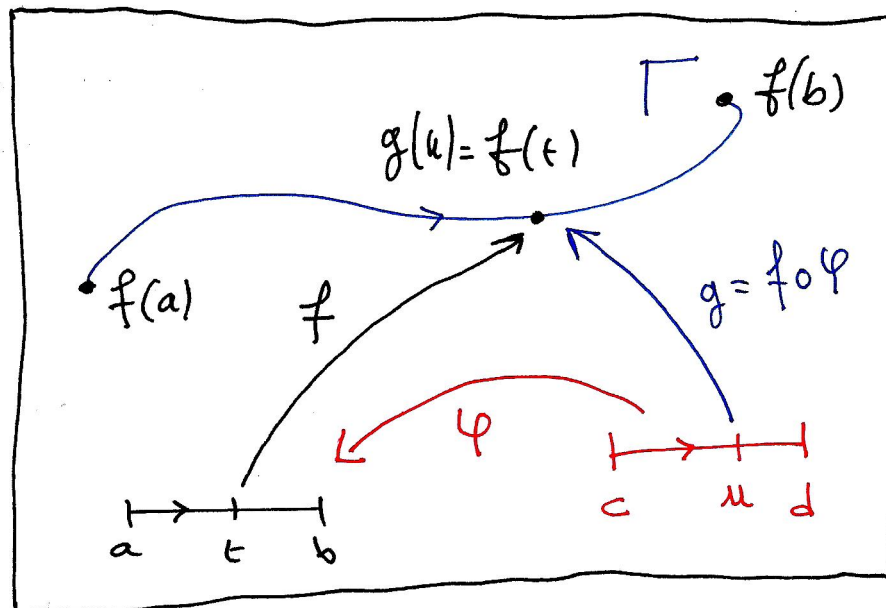
En particulier, toute courbe  $\gamma$  de classe  $C^1$  admet une infinité d'abscisses curvilignes qui se déduisent l'une de l'autre par l'ajout d'une constante.

Le calcul de l'abscisse curviligne  $s$  s'appelle la **rectification de  $\gamma$**  et lorsque l'on fait le choix d'un réel  $t_0 \in I$  pour définir une abscisse curviligne  $s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(t)\| dt$  on dit que l'on a fixé une origine  $M(t_0)$  sur  $\gamma$  ou que  $t_0$  est l'origine des abscisses curvilignes sur  $\gamma$ .

Vu le théorème 1,  $s(t)$  n'est rien d'autre que la longueur **orientée** de l'arc de courbe reliant les points  $M(t_0)$  et  $M(t)$  :

$$s(t) = \varepsilon \cdot L(\gamma, M(t_0), M(t)), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Il est enfin essentiel d'observer que la longueur d'une courbe tout comme l'abscisse curviligne ne dépendent pas du choix du paramétrage direct mais seulement de la courbe orientée  $\gamma$ . On a déjà fait cette observation dans la preuve du théorème 1. On peut aussi le justifier de la manière suivante : si  $f$  est une paramétrisation  $C^1$  d'un arc  $\Gamma$  de support  $[a, b]$ . Alors pour tout  $C^1$  difféomorphisme  $\varphi$  croissant entre  $[c, d]$  et  $[a, b]$





On a

$$\begin{aligned} \int_c^d \|(f \circ \varphi)'(v)\| dv &= \int_c^d \|f'(\varphi(v))\varphi'(v)\| dv \\ &= \int_c^d \|f'(\varphi(v))\| \varphi'(v) dv, \quad (\text{car } \varphi' > 0), \\ &= \int_a^b \|f'(t)\| dt = L(\Gamma), \quad (t = \varphi(u)). \end{aligned}$$

Ainsi,  $g = f \circ \varphi$  est encore une paramétrisation de  $\Gamma$  de support  $[c, d]$  et longueurs et abscisses curvilignes ne dépendent pas du choix de la paramétrisation  $C^1$ .

On peut donc, étant donné un arc paramétré  $(\Gamma, f)$ , chercher une nouvelle paramétrisation plus intéressante pour étudier les propriétés de  $\Gamma$ . C'est l'objet du théorème suivant :

**Théorème 2.** Soit  $f = (f_1, f_2, \dots, f_d) \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^d)$  un arc paramétré  $\Gamma$  **régulier** ( $\|f'(t)\| \neq 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ ). Alors  $\Gamma$  est équivalent à un arc paramétré parcouru à la vitesse constante 1. Cette nouvelle paramétrisation est souvent appelée paramétrisation par **longueur d'arc** ou par **abscisse curviligne**.

**Démonstration :** Notons  $L := L(\Gamma)$  et soit  $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, L]$  définie par

$$\sigma(t) = \int_a^t \|f'(v)\| dv$$

une abscisse curviligne. Par le théorème fondamental du calcul intégral, les hypothèses sur  $f$  assurent que  $\sigma$  est dérivable sur  $[a, b]$  avec  $\sigma'(t) = \|f'(t)\| > 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ .  $\sigma$  est donc un  $C^1$  difféomorphisme entre  $[a, b]$  et  $[0, L]$  et la courbe  $\tilde{\Gamma}$  paramétrée par  $g = f \circ \sigma^{-1} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^d$  est équivalente à  $\Gamma$  avec pour vitesse :

$$(2) \quad \|g'(s)\| = \|(f \circ \sigma^{-1})'(s)\| = |(\sigma^{-1})'(s)| \cdot \|f'(\sigma^{-1}(s))\| = \frac{\|f'(\sigma^{-1}(s))\|}{\sigma'(\sigma^{-1}(s))} = \frac{\|f'(t)\|}{\sigma'(t)} = \frac{\|f'(t)\|}{\|f'(t)\|} = 1$$

pour tout  $s = \sigma^{-1}(t) \in [0, L]$  (on a utilisé  $\sigma'(t) = \|f'(t)\| > 0$  sur  $[a, b]$ ). C.Q.F.D. ■

**2.2. Repère de Serret-Frenet, Courbure.** Soit  $f : I \ni t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^2$  une paramétrisation régulière ( $\|f'(t)\| \neq 0$ ) d'une courbe plane  $\Gamma$  et  $g : J \ni s \mapsto g(s) \in \mathbb{R}^2$  la paramétrisation de  $\Gamma$  par longueur d'arc (ou abscisse curviligne définie dans le théorème précédent).

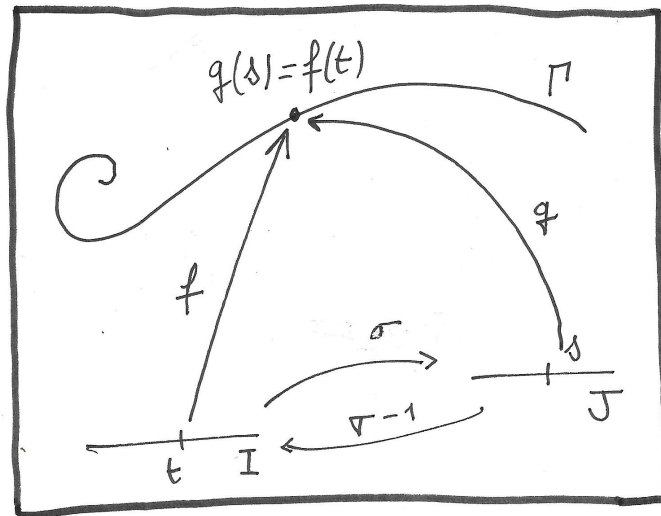


FIGURE 2. Les paramétrisations  $(I, f)$  et  $(J, g = f \circ \sigma^{-1})$ .

- Pour tout  $t \in I$ , la tangente à la courbe  $\Gamma$  au point  $f(t)$  est dirigée par le vecteur  $f'(t)$ . Traditionnellement on désigne par

$$\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

le vecteur unitaire dirigeant la tangente orientée au point  $M(t)$  et par  $\vec{N}(t)$  le vecteur unitaire directement perpendiculaire à  $\vec{T}(t)$ , c'est à dire le vecteur tel que  $(\vec{T}(t), \vec{N}(t))$  soit une base orthonormée directe du plan. Le repère  $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$  est appelé **repère de Frénet** de l'arc orienté  $(I, f)$  en  $M(t)$ .

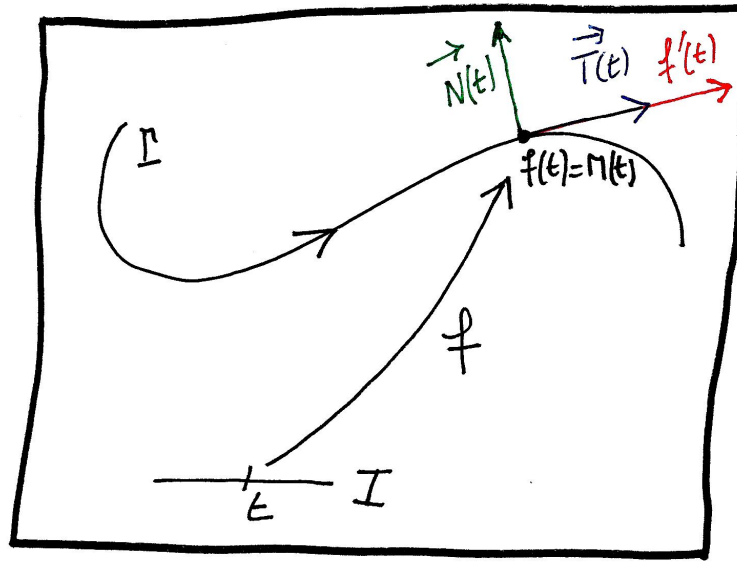


FIGURE 3. Le repère de Frénet au point  $M(t) = f(t)$ .

- En coordonnées curvilignes on a avec (2)

$$\vec{T}(s) = \frac{f'(\sigma^{-1}(s))}{\sigma'(\sigma^{-1}(s))} = \frac{f'(\sigma^{-1}(s))}{\|f'(\sigma^{-1}(s))\|}.$$

- Si maintenant on paramètre la courbe par son abscisse curviligne  $(g, J)$ . Soit  $M(s)$  un point de paramètre  $s$  de l'arc  $(J, g)$ , alors il existe un unique réel, noté  $\gamma(s)$  et appelé **courbure** de l'arc au point  $M(s)$  tel que

$$\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \gamma(s)\vec{N}(s).$$

**Démonstration :** Si on dérive

$$\|\vec{T}(s)\|^2 = \langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle = 1$$

il vient

$$2\left\langle \frac{d\vec{T}(s)}{ds}, \vec{T}(s) \right\rangle = 0.$$

$\frac{d\vec{T}(s)}{ds}$  est donc orthogonal à  $\vec{T}(s)$  donc colinéaire à  $\vec{N}(s)$ . CQFD ■

- Le point  $M(s)$  de paramètre  $s$  de l'arc  $(J, g)$  est birégulier<sup>1</sup> si et seulement si  $\gamma(s) \neq 0$ . On appelle alors **rayon de courbure** au point  $M(s)$  le réel

$$R(s) = \frac{1}{\gamma(s)}.$$

1. On dit qu'un arc  $(I, f)$  de classe  $C^2$  est **birégulier** au point  $f(t)$  si les vecteurs  $f'(t), f''(t)$  ne sont pas colinéaires (on montre sans peine que cette définition ne dépend pas du paramétrage).

**Démonstration :** Nous avons

$$g'(s) = \vec{T}(s), \quad g''(s) = \gamma(s)\vec{N}(s).$$

Donc

$$\det(g'(s), g''(s)) = \det_{\vec{T}(s), \vec{N}(s)}(g'(s), g''(s)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma(s) \end{vmatrix} = \gamma(s).$$

CQFD ■

- On appelle **centre de courbure** en un point birégulier  $M(s)$  le point  $C(s)$  tel que

$$\overrightarrow{M(s)C(s)} = R(s)\vec{N}(s).$$

Le lieu des centres de courbure d'une courbe birégulière  $\Gamma$  est appelé la **développée** de  $\Gamma$ .

- **Effets du changement d'orientation** sur une courbe birégulière :

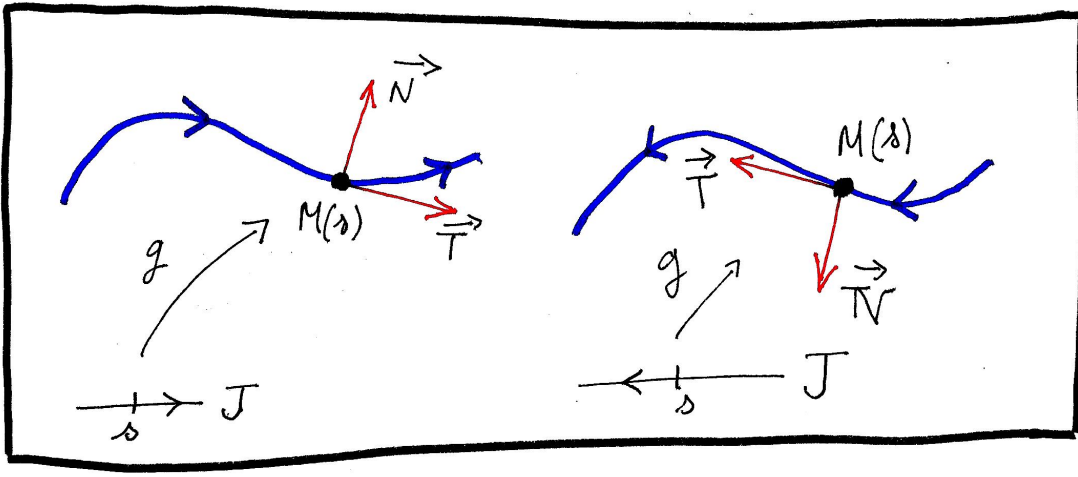


FIGURE 4. Changement d'orientation et repère de Frénet .

- L'abscisse curviligne est changée en son opposée.
- Le vecteur  $\vec{T}$  est changé en son opposé, il en est donc de même pour le vecteur  $\vec{N}$ .
- Le vecteur  $d\vec{T}/ds$  est inchangé (on dérive deux fois) et la formule  $g''(s) = \gamma(s)\vec{N}(s)$  assure que courbure et donc rayon de courbure sont changés en leurs opposés.
- Le centre de courbure ne dépend donc pas de l'orientation choisie sur l'arc.

- Les formules de Frenet : Sous les hypothèses précédentes, si  $g \in \mathcal{C}^k(J)$  alors il existe une fonction  $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(J)$  telle que pour tout  $s \in J$  :

$$\vec{T}(s) = \cos(\alpha(s))\vec{e}_1 + \sin(\alpha(s))\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(s)) \\ \sin(\alpha(s)) \end{pmatrix}.$$

**Démonstration :** L'application  $s \mapsto \vec{T}(s) = g'(s)$  est de classe  $C^{k-1}$  sur  $J$  et vérifie

$$\|\vec{T}(s)\| = 1.$$

L'existence de  $\alpha$  et sa régularité sont donc une conséquence du théorème du relèvement. ■

- On en déduit que

$$\vec{N}(s) = -\sin(\alpha(s))\vec{e}_1 + \cos(\alpha(s))\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(s)) \\ \cos(\alpha(s)) \end{pmatrix}.$$

- En tout point d'un arc paramétré on a (ce sont les formules de Frénet)

$$\frac{d\alpha(s)}{ds} = \gamma(s), \quad \frac{d\vec{N}(s)}{ds} = -\gamma(s)\vec{T}(s).$$

**Démonstration :** Si on dérive la relation  $\vec{T}(s) = \cos(\alpha(s))\vec{e}_1 + \sin(\alpha(s))\vec{e}_2$  il vient :

$$\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds} (-\sin(\alpha(s))\vec{e}_1 + \cos(\alpha(s))\vec{e}_2) = \frac{d\alpha(s)}{ds} \vec{N}(s).$$

Par définition de la courbure on a bien  $\frac{d\alpha(s)}{ds} = \gamma(s)$ .

Maintenant, si on dérive  $\vec{N}(s) = -\sin(\alpha(s))\vec{e}_1 + \cos(\alpha(s))\vec{e}_2$  :

$$\frac{d\vec{N}(s)}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds} (-\cos(\alpha(s))\vec{e}_1 - \sin(\alpha(s))\vec{e}_2) = -\frac{d\alpha(s)}{ds} \vec{T}(s) = -\gamma(s)\vec{T}(s).$$

CQFD. ■

Si on suppose l'arc  $(J, g)$  birégulier alors  $\alpha'(s) = d\alpha(s)/ds = -\gamma(s) \neq 0$ .  $\alpha$  est donc une bijection strictement monotone de  $J$  sur  $\alpha(J)$  de classe  $C^{k-1}$  ainsi que sa réciproque  $\alpha^{-1}$ . On peut donc définir  $s$  comme une fonction dérivable de  $\alpha$  (ie  $s = \alpha^{-1}(\alpha(s)) = \alpha^{-1}(u) \dots$ ) ce qui permet d'écrire

$$R(s) = \frac{1}{\gamma(s)} = \frac{1}{\alpha'(s)} = (\alpha^{-1})'(\alpha(s))'$$

que l'on écrit classiquement

$$R(s) = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Alors,  $C(s)$  étant le centre de courbure au point  $M(s)$  :

$$\overrightarrow{M(s)C(s)} = R(s)\vec{N}(s) = \frac{ds}{d\alpha} \vec{N}(s) = \frac{ds}{d\alpha} \left( -\frac{dy(s)}{ds} \vec{e}_1 + \frac{dx(s)}{ds} \vec{e}_2 \right).$$

On en déduit les coordonnées du centre de courbure  $C(s)$  au point  $M(s) = (x(s), y(s))$  :

$$C(s) = \begin{pmatrix} x(s) - \frac{ds}{d\alpha} \frac{dy(s)}{ds} \\ y(s) + \frac{ds}{d\alpha} \frac{dx(s)}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{dy}{d\alpha} \\ y + \frac{dx}{d\alpha} \end{pmatrix}.$$

### 2.3. Calculs pratiques : courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes.

- Soit  $(I, f)$  un arc orienté et  $s$  une abscisse curviligne. Des formules précédentes on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM(t)} &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \\ s'(t) &= \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}, \\ \vec{T} &= \frac{dt}{ds} \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2, \\ \vec{N} &= -b\vec{e}_1 + a\vec{e}_2 \end{aligned}$$

avec  $a = \cos(\alpha)$ ,  $b = \sin(\alpha)$  et  $(\vec{T}, \vec{N})$  est une base directe.

- Pour  $\alpha$  :

$$\cos(\alpha) = a = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}},$$

et

$$\sin(\alpha) = b = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

- Pour la courbure, si on peut déterminer une expression simple de  $\alpha$  en fonction de  $t$ , on a

$$\gamma(t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds}.$$

- S'il n'existe pas d'expression simple de  $\alpha$  en fonction de  $t$ , il est préférable de dériver lorsqu'elle à un sens l'expression

$$\tan(\alpha) = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

ce qui permet d'obtenir  $d\alpha/dt$  pour ensuite utiliser la formule précédente.

- On peut aussi utiliser les relations

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = \gamma \frac{ds}{dt} \vec{N}, \quad \text{où} \quad \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \vec{N} = \gamma \frac{ds}{dt}.$$

- On peut aussi écrire

$$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{T}, \quad \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \gamma \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N},$$

donc

$$\det\left(\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}, \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}\right) = \gamma \left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

ou encore

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

- On déduit de ces formules les coordonnées du centre de courbure :

$$X = x(t) - y'(t) \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}, \quad Y = y(t) + x'(t) \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}.$$

## 2.4. Exemples.

**Le cas de l'ellipse** d'équation paramétrée

$$x(t) = a \cos(t), \quad y(t) = b \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- On a  $s'(t) = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} > 0$ , l'arc est donc régulier.
- Repère de Frénet :

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = -\frac{a \sin(t)}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}} \vec{e}_1 + \frac{b \cos(t)}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}} \vec{e}_2, \\ \vec{N} &= -\frac{b \cos(t)}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}} \vec{e}_1 + \frac{a \sin(t)}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}} \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Puis (inutile de tout dériver dans  $\vec{T}$  car le terme orthogonal à  $\vec{N}$  va disparaître)

$$\frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \vec{N} = \frac{ab}{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}$$

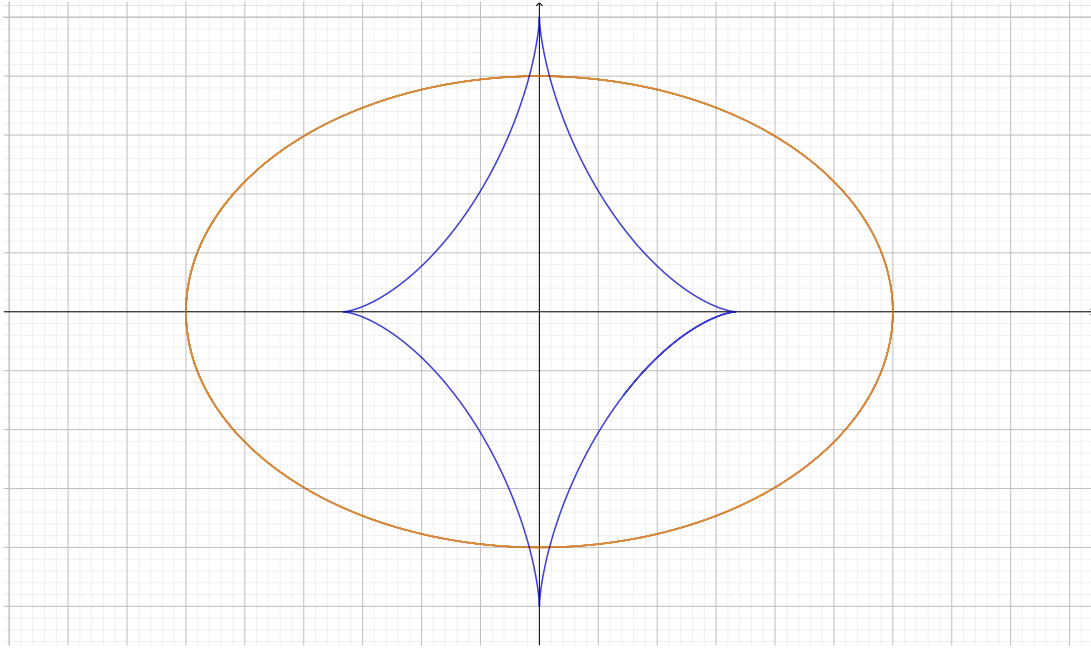
mais comme on a vu que

$$\frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \vec{N} = \gamma \frac{ds}{dt} = \frac{s'(t)}{R(t)}$$

il vient

$$R(t) = \frac{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}}{ab}.$$

On retrouve directement ce résultat en appliquant la formule  $\gamma = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$  vue plus haut.

FIGURE 5. L'ellipse  $x(t) = 3 \cos(t)$ ,  $y(t) = 2 \sin(t)$  et sa développée.

- Le centre de courbure  $C$  vérifie

$$\overrightarrow{MC} = \gamma(t) \overrightarrow{N} = \frac{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}}{ab} \overrightarrow{N}$$

soit

$$C(t) = \left( \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3(t), \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3(t) \right).$$

La développée d'une ellipse est donc (à une affinité près) une astroïde (voir la figure). ■

Pour l'ellipse d'équation paramétrée

$$x(t) = a \cos(t), \quad y(t) = b \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

**2.5. Calculs pratiques : courbes paramétrées en coordonnées polaires.** Pour une courbe définie en coordonnées polaires par  $r = \rho(\theta)$  il est plus judicieux au lieu d'appliquer les résultats précédents de faire les calculs dans le repère mobile ou de Frénet.

## 2.6. Exemples.

**Exercice 5.** Trouver le point de la courbe d'équation  $y = \ln(x)$  en lequel la valeur absolue du rayon de courbure est minimum.

**Solution :** Le courbe est paramétrée par  $f(t) = (t, \ln(t))$ ,  $t \in I = \mathbb{R}_+^*$ . Donc

$$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = f'(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/t \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix}$$

**Exercice 6.** Pour les courbes paramétrées suivantes, donner une détermination angulaire et en déduire la courbure en chaque point régulier :

- (1) la portion d'astroïde d'équation paramétrique  $(\cos^3 t, \sin^3 t)$ ,  $t \in [0, \pi/2]$  ;
- (2) l'arche de cycloïde d'équation paramétrique  $(t - \sin t, 1 - \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Solution :** ■

**Exercice 7.**

- (1) Donner un paramétrage normal du cercle de centre  $O$  et de rayon  $R > 0$ .
- (2) Déterminer les arcs de classe  $C^2$  dont la courbure est constante.

**Exercice 8.** Soit  $\Gamma = (I, f)$  un arc paramétré birégulier. Le centre de courbure au point  $M(t)$  est le point  $C(t)$  défini par  $\overrightarrow{M(t)C(t)} = \frac{1}{\gamma(t)} \vec{N}(t)$ , où  $\vec{N}(t)$  est le vecteur normal en  $M(t)$ . L'arc paramétré  $(I, C)$  s'appelle développée de  $\Gamma$ . Déterminer la développée d'une ellipse.

**Solution :** ■

**Exercice 9.**

**Solution :** ■

**Solution :** ■

### 3. EXERCICES D'APPLICATION

**Application 1 :**

**Première Démonstration :**

### 4. APPLICATIONS AUX PROBLÈMES DE PLUS COURT CHEMIN (GÉODÉSQUES)

**Application 1 :** Le plus court chemin (régulier) reliant deux points dans  $\mathbb{R}^d$  est la ligne droite.

**Première Démonstration :** [preuve à connaître, très simple, peu connue, super application de Cauchy-Schwarz avec le cas d'égalité et on peut la caser dans pas mal de leçons]. Soient  $A, B \in \mathbb{R}^d$ , trouver le plus court chemin revient à minimiser

$$L(f) = \int_0^1 \|f'(t)\| dt$$

parmi toutes les courbe  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_d(t))$ ,  $t \in [0, 1]$  de classe  $C^1$  reliant  $A = f(0)$  à  $B = f(1)$ . On note  $L_{\min}$  cet infimum.

Le segment  $[A, B]$  est paramétré par  $f_0(t) = (1-t)A + tB$ ,  $t \in [0, 1]$  i.e.

$$L_{\min} \leq L(f_0) = \int_0^1 \|A - B\| dt = \|A - B\|.$$

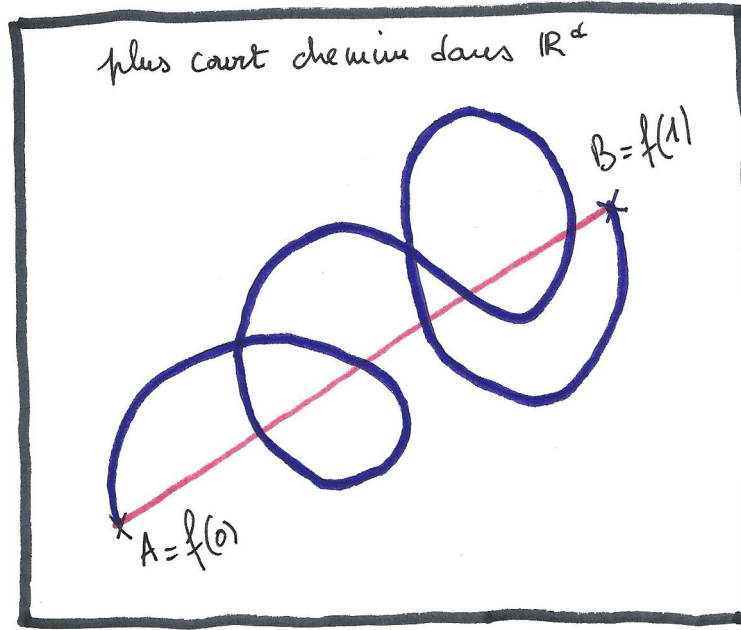


FIGURE 6. Le chemin le plus court.

Par conséquent, pour montrer que le plus court chemin est la ligne droite il faut montrer que

$$L(f) = \int_0^1 \|f'(t)\| dt \geq \|A - B\|$$

pour chemin  $f$  reliant  $A$  à  $B$ . Soit  $f$  un tel chemin, si  $B = A$  il n'y a rien à démontrer, sinon par le théorème fondamental du calcul intégral

$$B - A = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt$$

donc

$$\begin{aligned} \|A - B\|^2 &= \langle B - A, B - A \rangle \\ &= \langle B - A, \int_0^1 f'(t) dt \rangle \\ &= \int_0^1 \langle B - A, f'(t) \rangle dt \\ &\leq \int_0^1 \|A - B\| \cdot \|f'(t)\| dt \quad (\text{par Cauchy - Schwarz}) \\ &= \|A - B\| \cdot L(f) \end{aligned}$$

soit  $(B \neq A) : \|A - B\| \leq L(f)$  et le tour est joué.

On peut remarquer que le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz assure que  $L(f) = \|A - B\| = L_{min}$  si et seulement si  $f'(t)$  est colinéaire à  $B - A$  soit finalement  $f = f_0$ . ■

**Application 2 :** Le plus court chemin tracé sur la sphère de  $\mathbb{R}^3$  reliant deux points dans est un méridien

**Démonstration :** On localise un point  $P$  sur la sphère  $S(O_{\mathbb{R}^3}, R)$  par ses coordonnées sphériques  $(R, \theta, \phi)$  où

$$P = (R \cos(\theta) \sin(\phi), R \sin(\theta) \sin(\phi), R \cos(\phi)), \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad R > 0.$$

Donnons nous deux points  $A, B$  sur la sphère et cherchons le plus court chemin (toujours de classe  $C^1$ ) les reliant. Sans perdre de généralité on peut supposer que  $A = (R, 0, 0)$  (c'est le pôle nord  $\phi = 0$ ) et quitte à faire



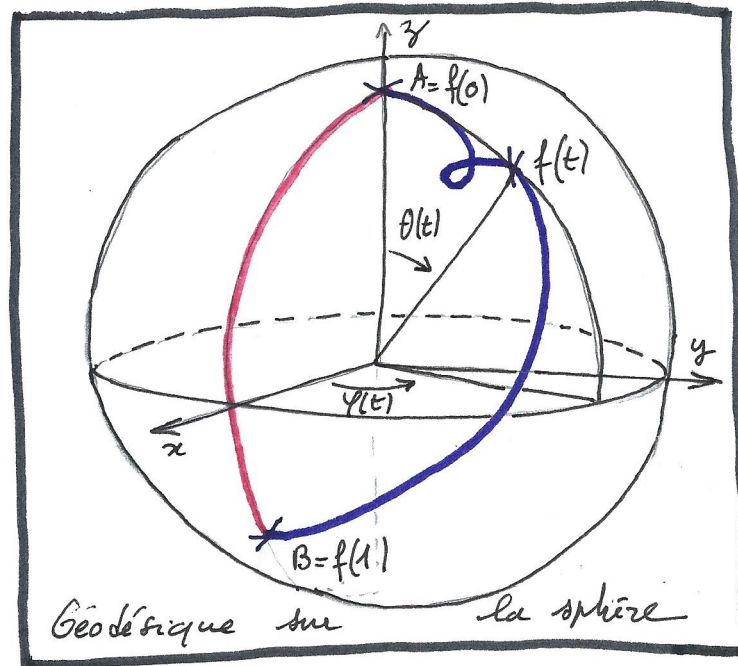


FIGURE 7. Le plus court chemin sur une sphère.

tourner la sphère autour de l'axe de ce pôle, supposons que  $B = (R, 0, \phi_1)$ . Alors un chemin reliant  $A$  et  $B$  sur la sphère aura la représentation paramétrique

$$f(t) = (R \cos(\theta(t)) \sin(\phi(t)), R \sin(\theta(t)) \sin(\phi(t)), R \cos(\phi(t))), \quad t \in [0, 1]$$

avec  $f(0) = A$  et  $f(1) = B$  soit  $0 = \phi(0) = \theta(1)$  et  $\phi(1) = \phi_1$ .

La longueur de la courbe est donnée par

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^1 \|f'(t)\| dt \\ &= R \int_0^1 \sqrt{\sin^2(\phi(t))\theta'(t)^2 + \phi'(t)^2} dt \\ &\geq R \int_0^1 \phi'(t) dt = R(\phi(1) - \phi(0)) = R\phi_1. \end{aligned}$$

et  $R\phi_1$  correspond à la longueur de la portion du plus petit arc de grand cercle reliant  $A$  à  $B$ . De plus  $L(f) = R\phi_1$  équivaut à  $\sin^2(\phi)\theta'^2 \equiv 0$  soit  $\theta' \equiv 0$  (car  $\sin^2(\phi(t)) = 0$  équivaut à  $f(t)$  est l'un des pôles) soit  $\theta \equiv \theta(1) = 0$  et le chemin le plus court n'est atteint que pour la portion du plus petit arc de grand cercle reliant  $A$  à  $B$ , c'est à dire le méridien passant par  $A$  et  $B$ . ■

Une dernière conséquence :

**Exercice 10.** Montrer qu'il n'existe pas de surjection de classe  $C^1$  de  $[0, 1]$  sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**Solution :** [RMS 119-4, exo 51].

Supposons par l'absurde qu'une telle surjection  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  existe.

On décompose alors le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  en  $n^2$  petits carrés de côté de longueur  $1/n$  et on désigne par  $m_i$ , ( $1 \leq i \leq n^2$ ) les centres de ces carrés. Alors pour tous  $1 \leq i < j \leq n^2$  on aura  $\|m_i - m_j\| \geq 1/n$ .

Notons  $t_i \in [0, 1]$  l'un des antécédents de  $m_i$  par  $\varphi$ , et quitte à réordonner la suite  $m_i$ , supposons la suite  $(t_i)_{i=1}^{n^2}$

croissante. On peut alors écrire :

$$\int_0^1 \|\varphi'(t)\| dt \geq \sum_{k=1}^{n^2-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\varphi'(t)\| dt \geq \sum_{k=1}^{n^2-1} \|m_i - m_{i+1}\| dt = \frac{n^2-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Mais cela est absurde car  $\int_0^1 \|\varphi'(t)\| dt$  est fini puisque  $\varphi'$  est continue sur le compact  $[0, 1]$ . Contradiction, CQFD. ■

## 5. LONGUEUR DU GRAPHE D'UNE FONCTION MONOTONE OU CONVEXE.

Après ces histoires de plus court chemin, on s'intéresse au problème inverse lorsque la fonction est monotone.

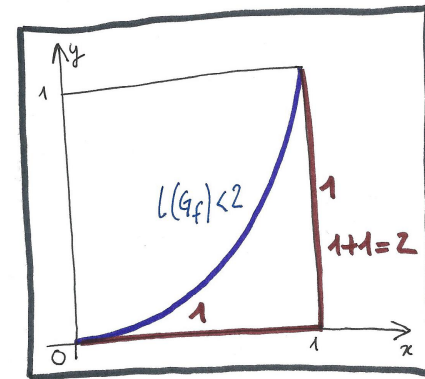
**Exercice 11.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et croissante alors

$$L(G_f) \leq b - a + f(b) - f(a).$$

En particulier, si  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  alors

$$L(G_f) \leq 2.$$

**Démonstration :** Si  $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  est une subdivision de  $[a, b]$  alors par l'inégalité  $\sqrt{s^2 + t^2} \leq |s| + |t|$  (où l'inégalité est stricte si et seulement si  $st \neq 0$ ) on a comme  $f$  est croissante :  $\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \leq \sum_{i=1}^n x_i - x_{i-1} + f(x_i) - f(x_{i-1}) = b - a + f(b) - f(a)$  si bien que  $L(G_f) = \sup_{\sigma} l(\sigma_f) \leq b - a + f(b) - f(a)$ . En particulier  $a = 0$  et  $b = 1$  donnent  $L(G_f) \leq 2$ . ■

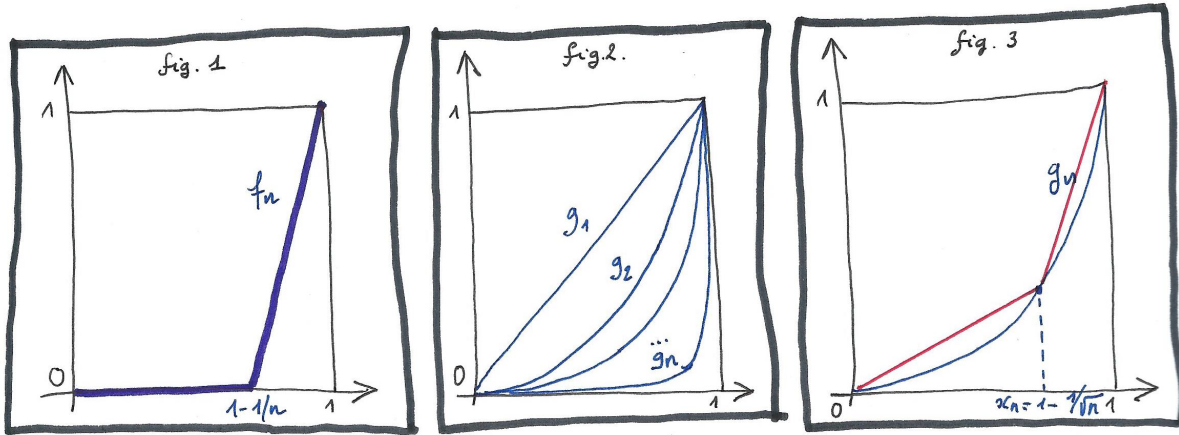


Il n'est pas difficile d'approcher 2 par des fonction :

**Exercice 12.** Construire une suite  $(f_n)_n \subset \mathcal{C}^1([0, 1], [0, 1])$  vérifiant

$$\lim_n L(G_{f_n}) = 2.$$

**Démonstration :** On peut choisir les fonctions  $f_n$  continues affines par morceaux (figure 1) reliant les trois points  $(0, 0)$ ,  $(0, 1 - 1/n)$ ,  $(1, 1)$ , on a immédiatement  $L(G_{f_n}) = 1 - 1/n + \sqrt{1 + 1/n^2} \rightarrow_n 2$ . Si on désire des fonctions dérivable, on pense immédiatement au fonctions  $g_n(x) = x^n$  dont la longueur des graphes semble (figure 2) bien tendre vers 2.



Pour calculer  $L(G_n)$  on doit se ramener à la définition de la longueur d'une courbe car on ne sait évaluer les intégrales du type  $\int_0^1 \sqrt{1 + g_n'^2(t)} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2 x^{2n-2}} dt$ . Les fonctions  $g_n$  étant convexes  $L(g_n)$  sera supérieur ou égal (voir aussi le paragraphe 6) à la ligne brisée reliant les points  $(0,0)$ ,  $(1 - 1/\sqrt{n}, g_n(1 - 1/\sqrt{n}))$  et  $(1,1)$ . Elle est de longueur  $\sqrt{(1 - 1/\sqrt{n})^2 + (1 - 1/\sqrt{n})^{2n}} + \sqrt{(1/\sqrt{n})^2 + (1 - (1 - 1/\sqrt{n})^n)^2}$  qui tends bien vers 2 avec  $n$  (attention au bon choix de  $x_n$  ! par exemple, si vous choisissez  $x = 1 - 1/n$  ça ne marche pas). C.Q.F.D. ■

Toutefois la borne supérieure 2 ne peut être atteinte pour une fonction régulière, on s'en persuade vite avec une feuille de papier et un crayon.... et plus précisément :

**Exercice 13.** Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0,1], [0,1])$  croissante. Alors

$$1 \leq L(G_f) < 2,$$

ces bornes ne peuvent être améliorées et  $L(G_f) = 1$  si et seulement si  $f$  est constante..

**Démonstration :** • Pour une telle fonction

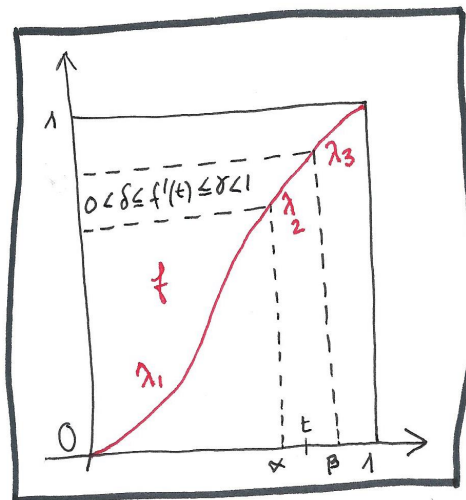
$$L(G_f) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'^2(t)} dt \geq \int_0^1 \sqrt{1 + 0} dt = 1$$

et par continuité de  $f'$  sur  $[0,1]$  l'inégalité est stricte dès que  $f'$  n'est pas identiquement nulle sur  $[0,1]$ .

• Pour la seconde inégalité : sans perdre de généralité on suppose que  $f(0) = 0, f(1) = 1$ .  $f$  n'est donc pas constante :  $f'$  n'est pas identiquement nulle. On ne peut aussi avoir  $f'(x) < 1$  pour tout  $x \in [0,1]$ . en effet si tel était le cas :  $f(x) = \int_0^x f'(t) dt < x$  mais vu les hypothèses, le théorème des accroissements finis assure qu'il existe  $0 < c < 1$  tel que  $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1 = f'(c)$ . Pour les mêmes raisons on ne peut aussi avoir  $f'(x) > 1$  pour tout  $x \in [0,1]$ .

Par continuité de  $f'$  il existe alors  $[\alpha, \beta] \subset ]0,1[$  et  $[\delta, \gamma] \subset ]0,1[$  tels que :

$$0 < \delta \leq f'(x) \leq \gamma < 1, \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$



Désignons par  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les longueurs du graphe de  $f$  sur les segments  $[0, \alpha]$ ,  $[\alpha, \beta]$  et  $[\beta, 1]$ . On a donc  $L(G_f) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ . En raisonnant comme dans l'exercice 1 on a

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\leq \alpha + f(\alpha), \\ \lambda_2 &\leq \beta - \alpha + f(\beta) - f(\alpha), \\ \lambda_1 &\leq 1 - \beta + f(1) - f(\beta) = 2 - \beta - f(\beta).\end{aligned}$$

Si on somme ces trois inégalités il vient :  $L(G_f) \leq 2$  ce qui n'est pas suffisant. On va en fait améliorer la seconde en montrant qu'il existe  $0 < A < 1$  tel que  $\lambda_2 \leq A(\beta - \alpha + f(\beta) - f(\alpha))$  ce qui fournira cette fois le résultat désiré. Pour cela il faut être plus délicat : on commence par observer que comme  $|f'| < 1$  sur  $[\alpha, \beta]$  on peut écrire pour tous  $x < y \in [\alpha, \beta]$  :

$$\begin{aligned}\sqrt{(y-x)^2 + (f(y) - f(x))^2} &= (y-x)\sqrt{1 + f'(\zeta)^2} \\ &= (y-x) \cdot \frac{1 + f'(\zeta)^2}{\sqrt{1 + f'(\zeta)^2}} < (y-x) \cdot \frac{1 + f'(\zeta)}{\sqrt{1 + \delta^2}} \\ &= A \cdot (y-x)(1 + f'(\zeta)) = A \cdot (y-x + f(y) - f(x)).\end{aligned}$$

où  $A = \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \in ]0, 1[$  et où  $\zeta \in ]x, y[$  vérifie par le théorème des accroissements finis  $f(y) - f(x) = f'(\zeta)(y - x)$ . Cette inégalité nous assure que pour toute subdivision  $\sigma = \{x_0 = \alpha < x_1 < \dots < x_n = \beta\}$  :

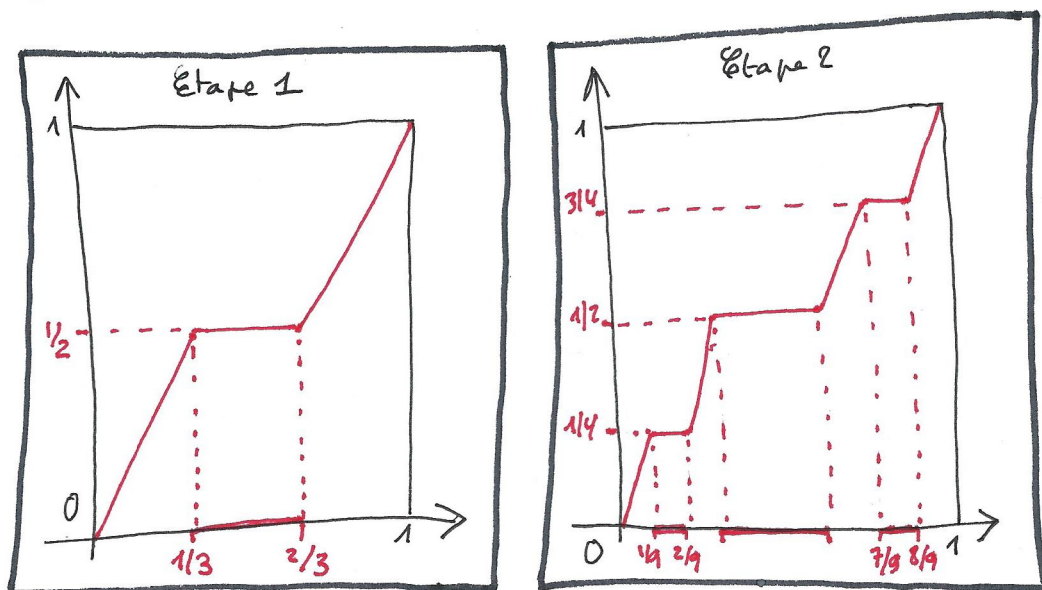
$$\begin{aligned}l(\sigma, f) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &\leq A \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1} + f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= A \cdot (\beta - \alpha + f(\beta) - f(\alpha))\end{aligned}$$

soit  $\lambda_2 \leq A \cdot (\beta - \alpha + f(\beta) - f(\alpha)) < \beta - \alpha + f(\beta) - f(\alpha)$ . et finalement  $L(G_f) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 2$ . C.Q.F.D. ■

Plus surprenant, il existe des fonctions  $f$  continues (mais plus régulières au vu de l'exercice précédent) vérifiant  $L(G_f) = 2$  :

**Exercice 14.** *Il existe  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue croissante et telle que  $L(G_f) = 2$ .*

**Démonstration :** On ne va pas donner de démonstration (trop technique à présenter le jour de l'oral), toutefois il est bon de connaître l'existence d'un tel objet : on part de la construction de l'ensemble de Cantor : De l'intervalle  $[0, 1]$  on retire son tiers médian à qui on associe la ligne brisée  $f_1$  égale à  $1/2$  et on réitère l'opération :



On construit ainsi une suite  $\mathcal{C}_{f_n}$  de courbes. La longueur la  $n$ -ième étant

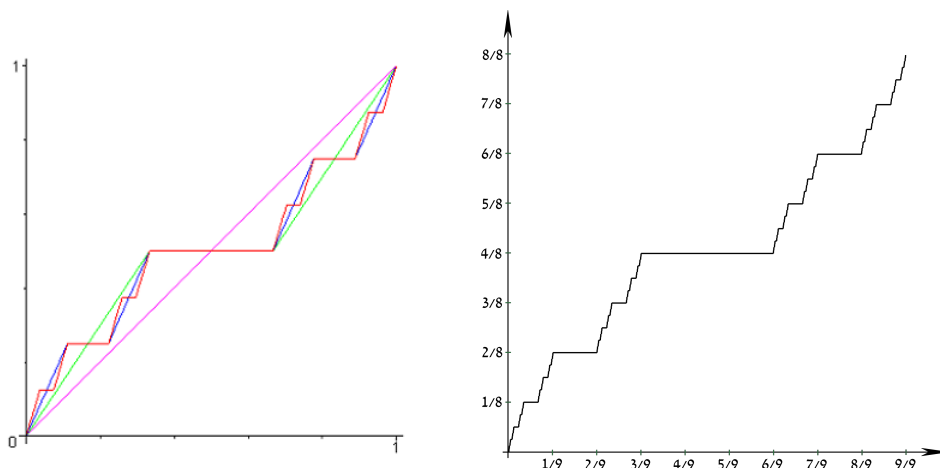
$$L(\mathcal{C}_{f_n}) = 1 - (2/3)^n + \sqrt{1 + (2/3)^{2n}}$$

on aura

$$\lim_n L(\mathcal{C}_{f_n}) = 2.$$

On vérifie aussi que la suite  $(f_n)_n$  des paramétrisations associées converge uniformément sur  $[0,1]$  vers une fonction  $f$  qui est donc continue et croissante. La courbe  $\mathcal{C}_f$  associé est bien définie et aura donc une longueur inférieure ou égale à 2. D'un autre côté, la définition par les subdivisions de la longueur d'une courbe implique que  $L(\mathcal{C}_{f_n}) \leq L(\mathcal{C}_f)$  soit finalement  $L(\mathcal{C}_f) = 2$ . ■

**Remarques :** • Dans les deux illustrations ci dessous vous avez d'abord quelques étapes supplémentaires dans la construction puis une idée de la fonction  $f$  limite : elle plus connue sous le nom d'**escalier de Cantor** ou même d'**escalier du diable**. elle mérite bien cette dernière appellation car observez que vous avez une fonction croissante sur  $[0,1]$  qui vaut 0 en  $x = 0$  et 1 en  $x = 1$  alors qu'elle est constante sur l'ensemble de Cantor qui lui même est de longueur 1 !



- Pour celui qui connaît plus en profondeur l'intégrale de Riemann on a ici un exemple des limites du théorème fondamental de l'analyse car  $f(1) - f(0) = 1 \neq \int_0^1 f'(t)dt = 0$ .
- On peut voir l'escalier de Cantor comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'ensemble de Cantor.

Dans le même esprit une légère variante convexe :

**Exercice 15.** Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], [0, 1])$ . Si  $f$  est concave sur  $[0, 1]$  et satisfait à  $f(0) = f(1)$  alors  

$$L(G_f) \leq 3.$$

**Démonstration :** Si  $f$  est concave, sa dérivée  $f'$  décroît sur  $[0, 1]$  et s'annule en au moins un point  $c \in ]0, 1[$  (car  $f(0) = f(1)$ ).  $f'$  est donc positive sur  $[0, c]$  et négative sur  $[c, 1]$ . Comme  $f$  est  $C^1$  sur  $[0, 1]$  la longueur du graphe de  $f$  est donnée par

$$\begin{aligned} L(G(f)) &= \int_0^1 \sqrt{1 + f'^2(t)} dt \leq \int_0^1 (1 + |f'(t)|) dt \\ &= \int_0^c (1 + f'(t)) dt + \int_c^1 (1 - f'(t)) dt = 1 + 2f(c) - f(0) - f(1) \\ &\leq 1 + 2 - 0 - 0 = 3, \end{aligned}$$

puisque  $f$  est à valeur dans  $[0, 1]$ .

Comme pour les exemples précédents, la constante 3 ne peut être améliorée. Pour s'en convaincre, considérer pour  $h \in ]0, 1/2[$  la fonction continue concave  $g_h$  affine sur les intervalles  $[0, h]$ ,  $[h, 1 - h]$ ,  $[1 - h, 1]$  nulle sur  $[h, 1 - h]$  vérifiant  $g_h(0) = 1 = g_h(1)$ . ■

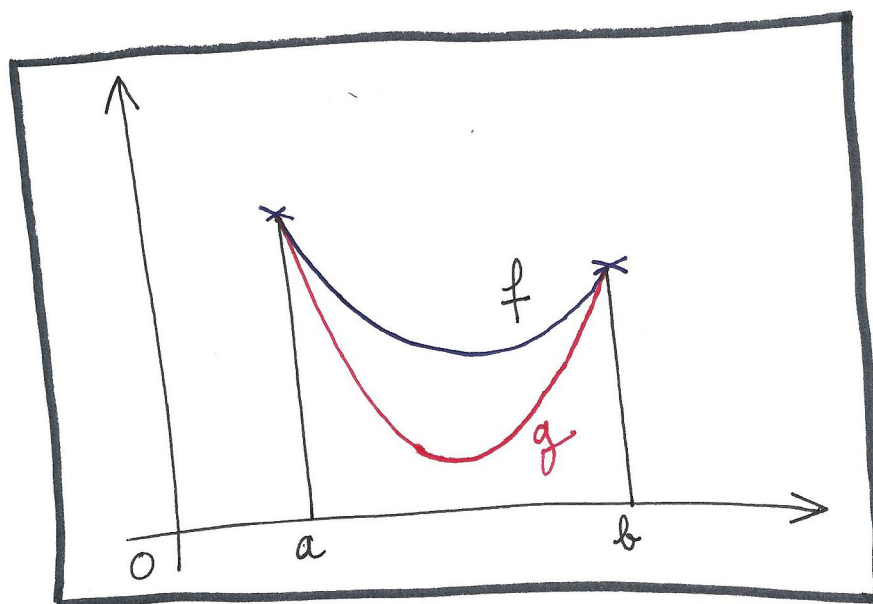
**Exercice 16.** Soient  $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b])$  deux fonctions convexes telles que  

$$f(a) = g(a), \quad f(b) = g(b), \quad \forall t \in [a, b] : g(t) \leq f(t).$$

Montrer que

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt \leq \int_a^b \sqrt{1 + g'^2(t)} dt.$$

**Démonstration :** Sur une figure, (voir ci-dessous) les choses sont claires : si  $f$  et  $g$  sont convexes et coïncident aux extrémités de  $[a, b]$  alors  $g \leq f$  assure que la longueur du graphe de  $f$  est plus petite que celle du graphe de  $g$ .



Établissons rigoureusement ce résultat : soit  $\psi(t) = (1 + t^2)^{1/2}$ , comme  $\psi''(t) = (1 + t^2)^{-3/2} > 0$ ,  $\psi$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  et par Taylor-Lagrange :

$$\psi(t) = \psi(s) + (t - s)\psi'(s) + \frac{(t - s)^2}{2}\psi''(\zeta) \geq \psi(s) + (t - s)\psi'(s), \quad \forall s, t \in \mathbb{R},$$

avec égalité si et seulement si  $t = s$ . En particulier, pour tout  $t \in [a, b]$  :

$$(1 + g'(t)^2)^{1/2} \geq (1 + f'(t)^2)^{1/2} + (g'(t) - f'(t))\psi'(f'(t))$$

et si on intègre ces inégalités :

$$\int_a^b (1 + g'(t)^2)^{1/2} dt \geq \int_a^b (1 + f'(t)^2)^{1/2} dt + \int_a^b (g'(t) - f'(t))\psi'(f'(t)) dt$$

avec égalité si, et seulement si  $f' = g'$ , soit vu les conditions initiales  $f = g$ . Pour établir le résultat il est suffisant de montrer que

$$\int_a^b (g'(t) - f'(t))\psi'(f'(t)) dt \geq 0.$$

C'est facile si on suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$  (ce qui p suffit pour l'oral...), en effet on peut alors faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^b (g'(t) - f'(t))\psi'(f'(t)) dt &= [(g(t) - f(t))\psi'(f'(t))]_a^b - \int_a^b (g(t) - f(t))(\psi'(f'(t)))' dt \\ &= 0 - \int_a^b (g(t) - f(t))\psi''(f'(t))f''(t) dt \geq 0 \end{aligned}$$

car  $g - f \leq 0$ ,  $\psi'' > 0$  et  $f'' \geq 0$ . Si  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  il faut être plus délicat et appliquer le second théorème de la moyenne<sup>2</sup> : il existe  $\zeta \in [a, b]$  tel que

$$\begin{aligned} \int_a^b (g'(t) - f'(t))\psi'(f'(t)) dt &= \psi'(f'(a)) \int_a^\zeta (g'(t) - f'(t)) dt + \psi'(f'(b)) \int_\zeta^b (g'(t) - f'(t)) dt \\ &= [\psi'(f'(b)) - \psi'(f'(a))] (f(\zeta) - g(\zeta)) \geq 0 \end{aligned}$$

car  $f \geq g$  et  $\psi'(f')$  croissante sur  $[a, b]$  car  $f$  et  $\psi$  sont convexes. CQFD. ■

## 6. L'INÉGALITÉ ISOPÉRIMÉTRIQUE

**L'inégalité isopérimétrique** dit que toute courbe plane fermée de longueur  $2\pi$  délimite une aire de longueur inférieure ou égale à  $\pi$  ; l'égalité n'ayant lieu que pour le cercle (il s'agit donc d'évaluer une aire de périmètre donné : on est donc aux frontières du thème).

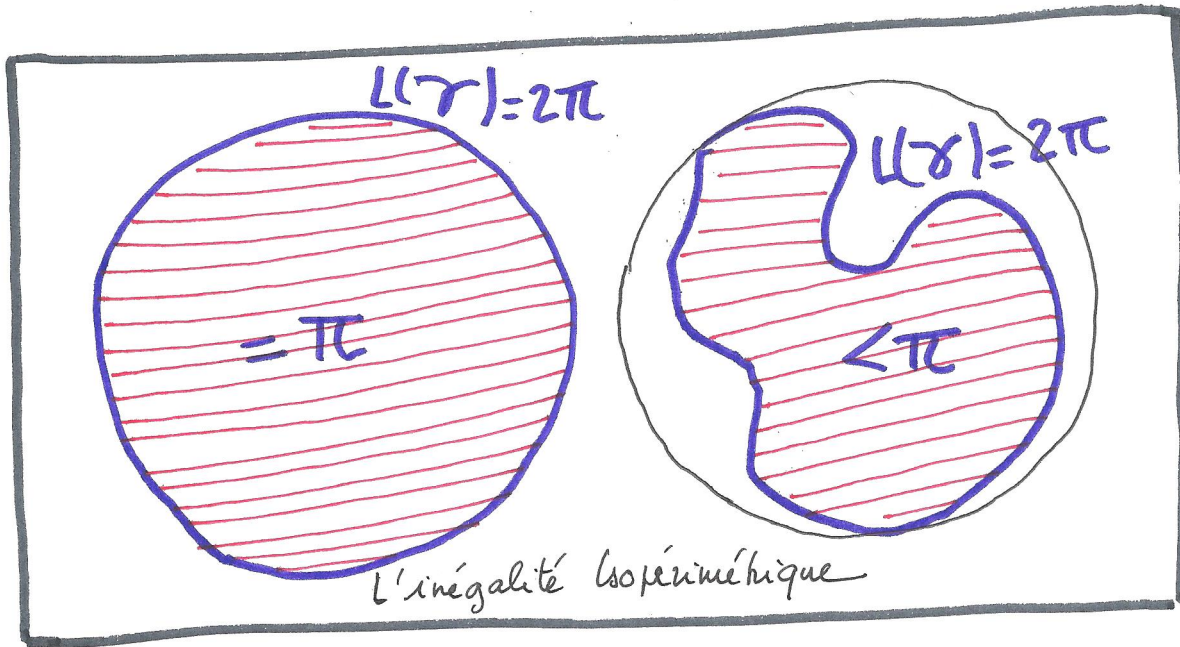
**Première démonstration :** Les démonstrations usuelles de l'inégalité isopérimétriques utilisent les séries de Fourier, celle-ci (P.D.Lax, Amer. Math. Monthly, 1995), est plus simple bien que la base soit la même. On suppose la courbe paramétrée par

$$\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2,$$

avec  $|\gamma'(t)|^2 = x'^2(t) + y'^2(t) = 1$  (i.e. la courbe est parcourue à vitesse constante, ou le paramétrage est normal (voir l'intro...)). On suppose aussi que l'on a positionné la courbe de telle sorte que les points  $(x(0), y(0))$  et  $(x(\pi), y(\pi))$  se trouvent sur l'axe des abscisses, i.e.  $y(0) = y(\pi) = 0$ .

2. Arnaudies-Fraysse : Analyse, T2, page 368 : si  $u$  est monotone sur  $[a, b]$  et  $v$  bornée intégrable alors il existe  $\zeta \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b u(t)v(t) dt = u(a) \int_a^\zeta v(t) dt + u(b) \int_\zeta^b v(t) dt$$



L'aire du domaine délimité par la courbe  $\gamma$  est donnée par (voir votre manuel préféré) :

$$A = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = \int_0^{\pi} y(t)x'(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} y(t)x'(t)dt := A_1 + A_2.$$

Nous allons montrer que les deux quantités  $A_1$  et  $A_2$  sont majorées par  $\pi/2$ . Pour cela, en appliquant l'inégalité élémentaire  $ab \leq 2^{-1}(a^2 + b^2)$  (avec égalité si et seulement si  $a = b$ ) à  $a = y(t)$ ,  $b = x'(t)$  on tire

$$(1) \quad A_1 = \int_0^{\pi} y(t)x'(t)dt \leq 2^{-1} \int_0^{\pi} (y(t)^2 + x'(t)^2)dt$$

et comme  $x'^2(t) + y'^2(t) = 1$ , on peut aussi écrire

$$A_1 \leq 2^{-1} \int_0^{\pi} (y(t)^2 + 1 - y'(t)^2)dt.$$

Mais  $y(0) = y(\pi) = 0$  assure que  $y$  peut se factoriser sous la forme

$$y(t) = u(t) \sin(t)$$

sur  $[0, \pi]$  (il n'est pas difficile de montrer que  $u$  est dérivable sur  $[0, \pi]$ , en 0 et  $\pi$  bien sûr...). De là, l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned} A_1 &\leq 2^{-1} \int_0^{\pi} [u^2(t)(\sin^2(t) - \cos^2(t)) - 2u(t)u'(t)\sin(t)\cos(t) - u'^2(t)\sin^2(t) + 1] dt \\ &\leq 2^{-1} \int_0^{\pi} [(u^2(t)\sin(t)\cos(t))' + 1 - u'^2(t)\sin^2(t)] dt \\ &\leq 2^{-1} \int_0^{\pi} [1 - u'^2(t)\sin^2(t)] dt \stackrel{\star}{\leq} 2^{-1} \int_0^{\pi} 1 \cdot dt = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

soit  $A_1 \leq \pi/2$  comme convenu. L'égalité  $A_1 = \pi/2$  implique une égalité dans (★) qui équivaut à  $u' \sin \equiv 0$  sur  $[0, \pi]$ , soit  $u' \equiv 0$  et  $y(t) = C \cdot \sin(t)$ . L'égalité assure aussi une égalité dans (1), qui, comme nous l'avons remarqué équivaut à  $y(t) = x'(t) = \sqrt{1 - y'^2(t)}$ , soit finalement  $y(t) = \pm \sin(t)$ ,  $x(t) = \mp \cos(t) + \text{constante}$  sur  $[0, \pi]$ , c'est l'équation d'un demi-cercle. On procède de même pour  $A_2$  et le résultat suit en raccordant continuellement les deux solutions. ■



## 7. AUTOUR D'UNE ELLIPSE.

À la différence de son aire, il n'existe pas formule simple pour le périmètre d'une ellipse.

**Exercice 17.** Si  $L$  désigne la longueur du périmètre de l'ellipse d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad a > b > 1.$$

(1) Montrer que  $\pi(a+b) \leq L \leq \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$ .

(2) Montrer que

$$L = 2\pi a \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \frac{e^{2n}}{2n-1} \right)$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ étant l'excentricité de l'ellipse.}$$

(1) L'équation paramétrique de l'ellipse étant

$$\begin{cases} x(t) &= a \cos(t), \\ y(t) &= b \sin(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \end{cases}$$

sa longueur est

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt + 4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} \left( \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} + \sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} \right) dt \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement  $t = \pi/2 - s$  dans la seconde intégrale de la seconde ligne. Pour conclure, il suffit de remarquer que l'intégrande dans la dernière intégrale est une fonction croissante sur  $[0, \pi/4]$ .

(2) Nous avons

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 + (a^2 - b^2) \cos^2(t)} dt \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2(t)} dt \end{aligned}$$

Nous avons pour  $|u| < 1$

$$\sqrt{1-u} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n.$$

En posant  $u = e \cos(t) \in ]-1, 1[$ , on a par convergence normale de la série entière sur  $[0, \pi/2]$

$$L = 4a \left( \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2^{2n}(n!)^2} e^{2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt \right),$$

où l'on reconnaît l'intégrale de Wallis

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

le résultat suit. □

Suivent deux exercices autour des ellipses

**Exercice 18.** Déterminer parmi les ellipses pleines d'aires  $S > 0$  celles qui sont de périmètre minimal.

**Solution :**  $a, b$  désignent les longueurs des demi-axes de notre ellipse  $\mathcal{E}$  d'aire  $S$ . Dans un repère orthonormé rapporté aux axes de l'ellipse,  $\mathcal{E}$  a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) &= a \cos(t) \\ y(t) &= b \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

L'aire  $S$  et le périmètre  $P$  de  $\mathcal{E}$  sont donnés par

$$S = \pi ab, \quad P = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt.$$

Par concavité de  $v \mapsto \sqrt{v}$  on peut écrire

$$\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 [1 - \sin^2(t)]} \geq a \sin^2(t) + b(1 - \sin^2(t)).$$

Si bien que

$$P \geq \int_0^{2\pi} [a \sin^2(t) + b \cos^2(t)] dt = \pi(a + b).$$

Alors, l'inégalité arithmético-géométrique et son cas d'égalité donnent

$$P \geq \pi(a + b) \geq 2\pi\sqrt{ab} = 2\sqrt{\pi S}$$

avec égalité si et seulement si  $a = b = \sqrt{S/\pi}$ .

Conclusion : Parmi toutes les ellipses d'aire  $S > 0$  donnée, c'est le cercle de rayon  $\sqrt{S/\pi}$  qui possède le plus petit périmètre. ■

**Exercice 19.** Existe-t-il deux ellipses différentes (non isomorphes) possédant même aire et même périmètre.

**Solution :** On va montrer que deux ellipses non isomorphes de même aire ne peuvent posséder un même périmètre.

Comme toujours  $a \geq b > 0$  désignent les longueurs des demi-axes d'une ellipse  $\mathcal{E}$ . Elle est donc d'aire  $\pi ab$  et si on considère la famille des ellipses de même aire, disons  $\pi A$  il existe un réel  $c \geq 1$  tel que  $a = c\sqrt{A}$  et  $b = \sqrt{A}/c$ . La famille des ellipses de même aire  $\pi A$  peut donc être paramétrée par le réel  $c \geq 1$ . On la note  $(\mathcal{E}_c)_{c \geq 1}$ .

Dans un repère orthonormé rapporté aux axes de l'ellipse,  $\mathcal{E}_c$  a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) &= c\sqrt{A} \cos(t) \\ y(t) &= \frac{\sqrt{A} \sin(t)}{c}, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Son périmètre  $P(\mathcal{E}_c)$  est donné par

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}_c) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{c^2 A \sin^2(t) + \frac{A}{c^2} \cos^2(t)} dt \\ &= \sqrt{A} \int_0^{2\pi} \sqrt{c^2 \sin^2(t) + c^{-2} \cos^2(t)} dt = 4\sqrt{A} \int_0^{\pi/2} \sqrt{c^2 \sin^2(t) + c^{-2} \cos^2(t)} dt \\ &= 4\sqrt{A} \left( \int_0^{\pi/4} \sqrt{c^2 \sin^2(t) + c^{-2} \cos^2(t)} dt + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{c^2 \sin^2(t) + c^{-2} \cos^2(t)} dt \right) \\ &= 4\sqrt{A} \int_0^{\pi/4} \left( \sqrt{c^2 \sin^2(t) + c^{-2} \cos^2(t)} + \sqrt{c^2 \cos^2(t) + c^{-2} \sin^2(t)} \right) dt \\ &= 4\sqrt{A} \int_0^{\pi/4} F(c, t) dt. \end{aligned}$$

Mais  $[1, +\infty[ \ni c \mapsto F(c, t)$  est strictement croissante. Pour s'en convaincre sans trop de calculs immondes, on peut observer

$$\begin{aligned} F(c, t)^2 &= \left( \sqrt{c^2 \sin^2(t) + c^{-2} \cos^2(t)} + \sqrt{c^2 \cos^2(t) + c^{-2} \sin^2(t)} \right)^2 \\ &= c^2 + c^{-2} + 2\sqrt{(c^2 \sin^2(t) + c^{-2} \cos^2(t))(c^2 \cos^2(t) + c^{-2} \sin^2(t))} \\ &= c^2 + c^{-2} + 2\sqrt{(c^4 + c^{-4}) \sin^2(t) \cos^2(t) + \sin^4(t) + \cos^4(t)} \\ &= \varphi(c^2) + 2\sqrt{\varphi(c^4) \sin^2(t) \cos^2(t) + \sin^4(t) + \cos^4(t)} \end{aligned}$$

où  $\varphi(t) = t + t^{-1}$ .  $\varphi$  étant strictement croissante sur  $[1, +\infty[$  il en donc de même pour  $c \mapsto F^2(c, t)$  puis pour  $c \mapsto F(c, t)$  car  $F \geq 0$ .

Ainsi

$$c \mapsto P(\mathcal{E}_c) = 4\sqrt{A} \int_0^{\pi/4} F(c, t) dt$$

est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$  : les périmètres de deux ellipses  $\mathcal{E}_c, \mathcal{E}_{c'}$  de même aire  $\pi A$  avec  $1 \leq c < c'$  vérifient

$$P(\mathcal{E}_c) < P(\mathcal{E}_{c'}).$$

C.Q.F.D. ■

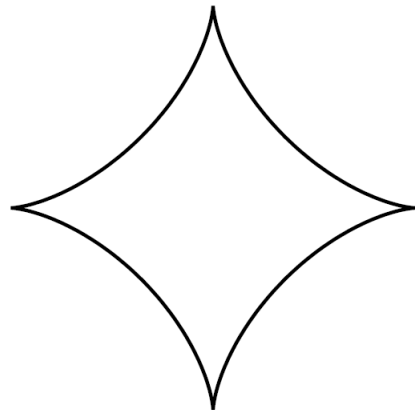
**Remarque :** Cette méthode assure aussi qu'à aire donnée  $\pi A$ , c'est l'ellipse  $\mathcal{E}_1$  qui possède le périmètre minimal : on retrouve le cercle de rayon  $\sqrt{A}$  obtenu dans l'autre exercice.

## 8. QUELQUES AUTRES COURBES CLASSIQUES.

**Exercice 20. L'astroïde.** C'est la courbe admettant la paramétrisation

$$\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

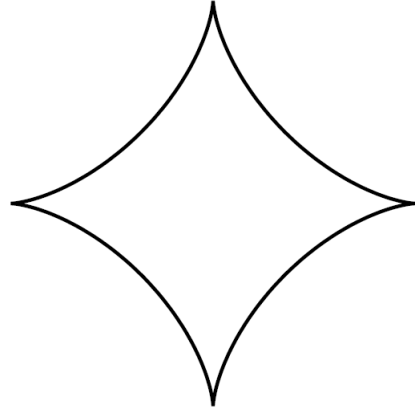
Elle est  $2\pi$  périodique son étude doit être classique (et présente dans tous les bons manuels). Montrer que sa longueur vaut 6.



**Exercice 21. La Spirale.** C'est la courbe admettant la paramétrisation polaire :

$$r(t) = t, \quad \theta(t) = \frac{2\pi}{t}, \quad 0 < t \leq 1$$

On peut ajouter à cette courbe l'origine  $O$  pour obtenir un ensemble fermé. Montrer que sa longueur est infinie.



## 9. PARABOLE CONTRE LE CERCLE

**Exercice 22.** Une parabole intersecte un disque de rayon 1. Est-il possible que la longueur de l'arc de parabole inscrit dans le disque soit supérieure ou égale à 4 ?

Sans perdre de généralité, on peut prendre comme cercle celui d'équation  $(\mathcal{C}) : x^2 + (y - 1)^2 = 1$  et comme parabole, celle d'équation  $(\mathcal{P}_k) : y = kx^2$  (si la parabole n'est pas tangente au cercle, on imagine bien qu'en « l'enfonçant » un peu plus, la longueur de l'arc inscrit ne peut qu'augmenter).  $(\mathcal{P}_k)$  est alors tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $(0, 0)$  et pour  $k > \frac{1}{2}$ , l'intersecte en les deux points

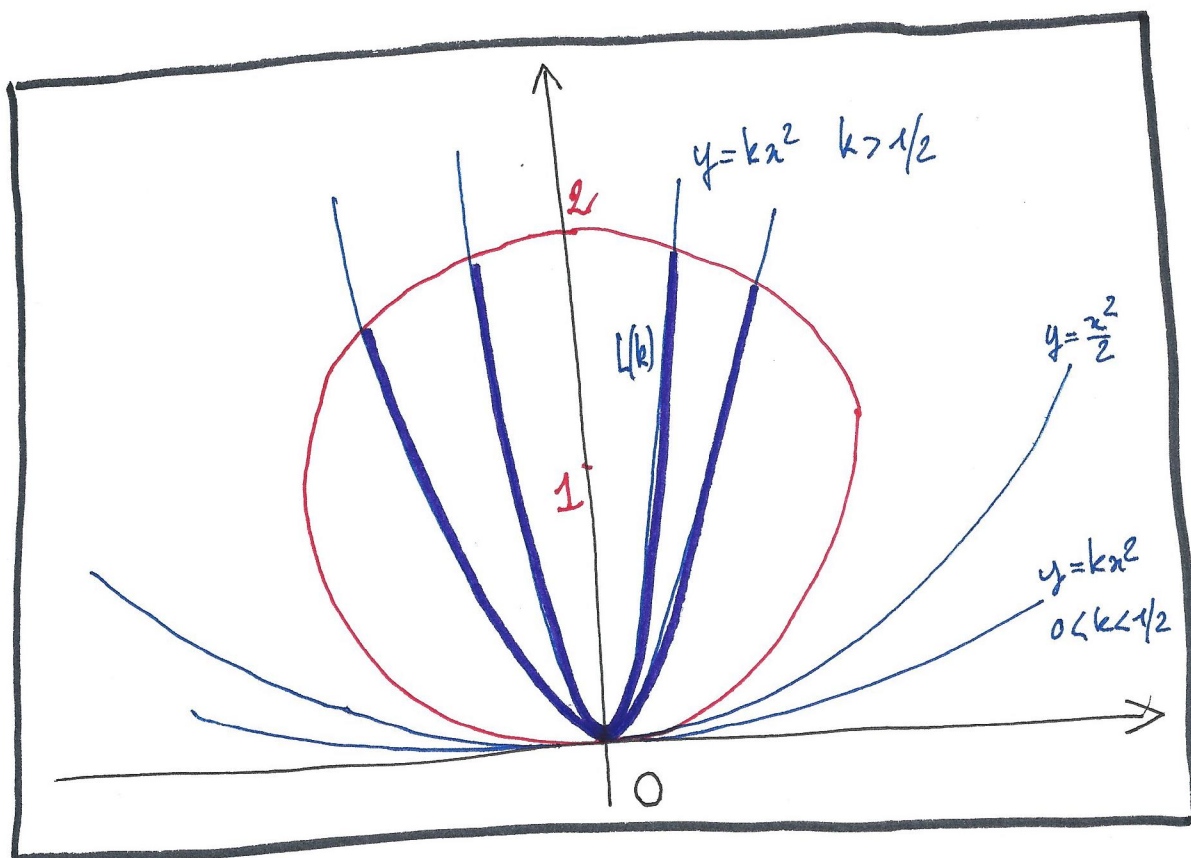
$$\left( \pm \frac{\sqrt{2k-1}}{k}, \frac{2k-1}{k} \right).$$

La longueur d'arc inscrite dans le disque est donc

$$L(k) = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2k-1}}{k}} \sqrt{1 + 4k^2 t^2} dt = \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \sqrt{1 + u^2} du,$$

(après le changement de variable  $u = 2kt$ ). Il s'agit donc d'étudier le maximum de

$$(\times) \quad L : k \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[ \mapsto L(k) = \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \sqrt{1 + u^2} du.$$



Commençons par quelques observations (voir la figure) : pour  $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$  la parabole se trouve à l'extérieur du disque et  $L(k) \equiv 0$  ; le cas  $k > \frac{1}{2}$  est celui qui nous intéresse puisque  $L(k) > 0$  d'après (X) ; enfin si  $k$  tends vers  $+\infty$  la parabole dégénère cette fois-ci en deux demi-droites confondues  $\{0\} \times \mathbb{R}_+$  ce qui donne comme intersection deux fois le segment  $\{0\} \times [0, 2]$  soit une longueur égale à 4. Il semble donc que notre fonction  $L$  croît strictement sur  $\mathbb{R}_+^*$  de 0 à 4. Mais il faut toutefois se méfier des impressions, en effet nous allons maintenant vérifier que  $L$  n'est pas strictement monotone et même prends des valeurs strictement plus grandes que 4. Justifions cette dernière affirmation :

$$\begin{aligned}
 L(k) &= \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \sqrt{1+u^2} du \\
 &= \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} (\sqrt{1+u^2} - u) du + \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} u du \\
 &= \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2} + u} + \frac{4(2k-1)}{2k} \\
 &= \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2} + u} + 4 - \frac{2}{k} \\
 &= \frac{1}{k} I(k) + 4 - \frac{2}{k},
 \end{aligned}$$

ainsi,

$$L(k) > 4 \iff \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2} + u} > 2$$

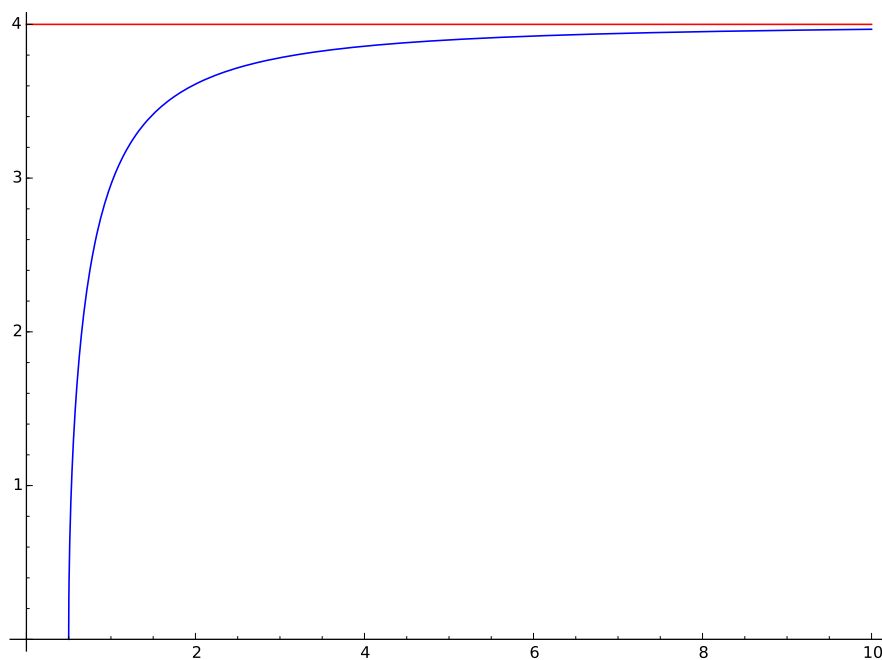
mais la fonction croissante  $I$  vérifie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2} + u} = +\infty$$

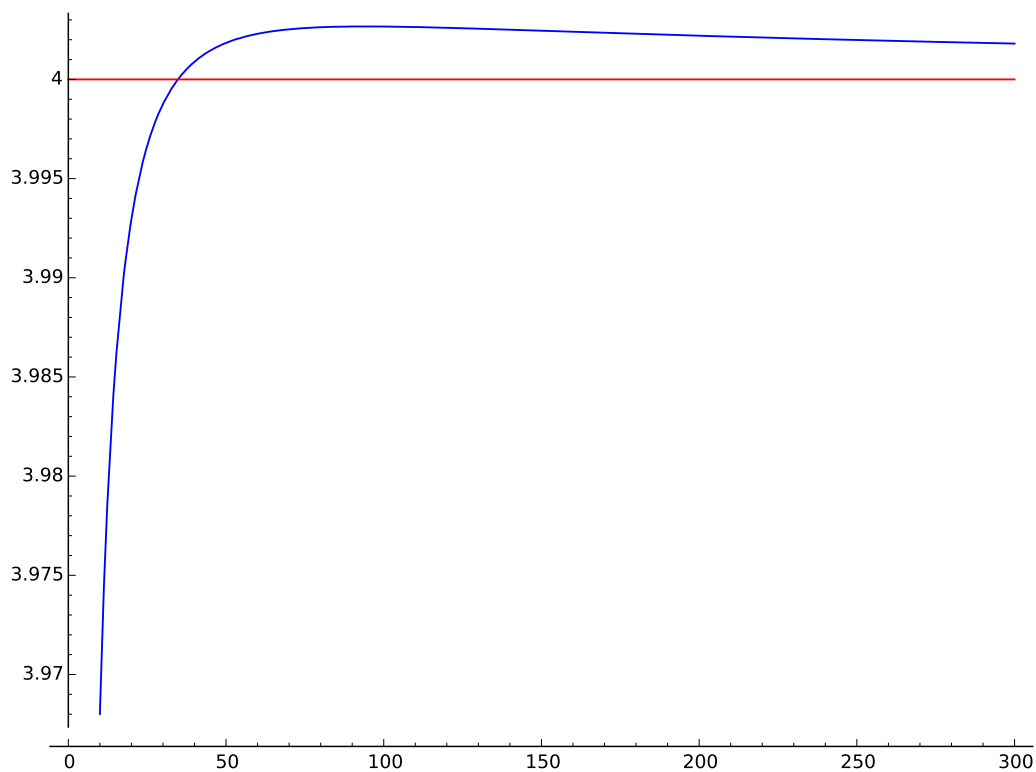
car la fonction intégrante est clairement non intégrable en  $+\infty$  : il existe donc  $k_0 > \frac{1}{2}$  tel que  $k > k_0 \Rightarrow I(k) > 1$  et par suite  $\exists k_0 > \frac{1}{2} : k > k_0 \Rightarrow L(k) > 4$ . ■

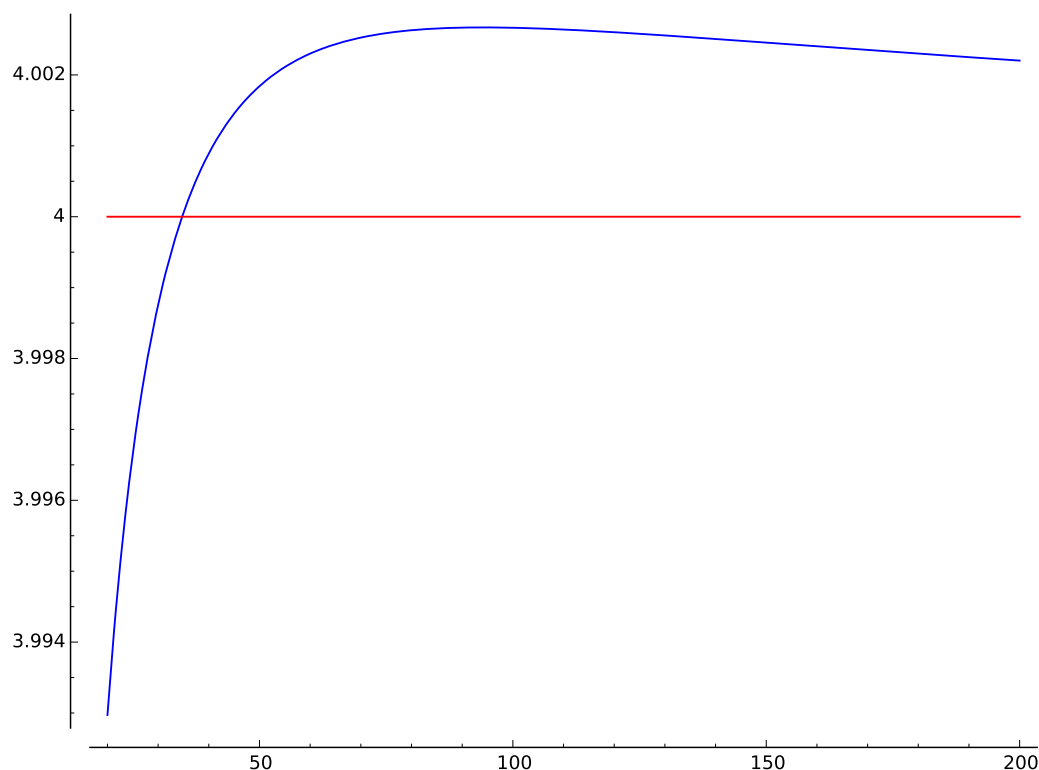
**Remarques :**

- (1) Si avec un logiciel on trace la courbe, à première vue elle semble croître vers 4 sur  $\mathbb{R}_+^*$  :



Mais sur la figure suivante en choisissant des échelle adéquates on observe le phénomène démontré plus haut à savoir que la fonction passe au dessus de 4 au voisinage de 30 pour atteindre un maximum proche de 4.002 vers 80.





- (2) La fonction continue  $L$  nulle en  $1/2$  tend vers tout de même vers 4 en  $+\infty$  car

$$L(k) = \frac{1}{k}I(k) + 4 - \frac{2}{k}$$

et

$$0 \leq \frac{1}{k}I(k) = \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} \leq \frac{2\sqrt{2k-1}}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

- (3) Vu les variations de  $L$ , notre fonction est bornée sur  $[1/2, +\infty[$  et atteint son maximum pour une valeur  $1/2 < m < +\infty$ . En utilisant un logiciel de calcul, on peut donner une valeur approchée de  $m$ .....autour de 4,001...semble-t-il.
- (4) On peut s'étonner que pour résoudre cet exercice on n'étudie pas la fonction  $L$ . En effet il n'est pas très difficile de trouver une primitive :

$$\int \sqrt{1+u^2} du = \frac{1}{2t\sqrt{2t-1}} + \frac{1}{2} \log(t + \sqrt{1+t^2})$$

mais son apparence peu sympathique nous enlève les dernières envies de calculer la dérivée de  $L$  pour étudier ses variations....

## 10. EN VRAC.....

**Exercice 23.** Une fourmi intelligente se trouve sur le bord du sommet d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ . Elle désire se rendre au point diamétralement opposé de la face inférieure du cylindre. Déterminer le chemin le plus court pour un tel déplacement.

**Exercice 24.** Une voiture roule la nuit le long d'une route dont le tracé est celui d'une parabole dont le sommet est l'origine des axes. La voiture démarre d'un point situé à 2km à l'ouest et à 8km au nord de l'origine et roule vers l'est (l'orientation est donnée par les axes). Le bâtiment de 1R2 du département de Mathématiques se trouve à 3km à l'est et 10km au nord de l'origine.

- (1) A quel point de la route les phares de la voiture vont-ils illuminer le bâtiment ?
- (2) Au moment où les phares illuminent le bâtiment 1R2, la voiture quitte la route et se dirige en ligne droite vers le bâtiment. Montrer **sans utiliser les calculs de la question précédente** que la distance  $l$  alors parcourue vérifie  $18,94 < l < 19,87$  km.
- (3) Vérifier l'encadrement précédent par le calcul explicite de l'intégrale dans (1) et vérifier le résultat avec votre calculatrice.

**Exercice 25.** On fixe un point  $P$  distinct de l'origine sur la parabole  $\mathcal{P} : y = x^2$ . Montrer que la normale à  $\mathcal{P}$  passant par  $P$  recoupe  $\mathcal{P}$  en un unique point  $Q$ . Déterminer  $P$  pour que l'arc de parabole reliant  $P$  et  $Q$  soit de longueur minimale.

## RÉFÉRENCES

- [1] Boas, R.P. « *A Primer of Real Functions* », The Carus Mathematical Monographs, Vol. 13, M.A.A. (1996).
- [2] Nadler, Sam B. Jr. « *A Proof of Darboux's Theorem* », The American Mathematical Monthly, Vol. 117, No. 2 (2010), pp. 174-175.
- [3] Rajwade, A.R. & Bhandari, A.K. « *Surprises and Conterexamples in Real Function Theory* », Texts and readings in mathematics, Vol. 42, Hindustan Book Agency. (2007).
- [4] Troutman J.L. « *Variational Calculus with elementary convexity* », Undergraduate Texts in Mathematics, Springer (1983).
- [5] Tricot, C. « *Courbes et dimension fractale* », Springer (1999).