**ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, C.d.L. in Matematica**

**Elena Rubei**

**Consiglio: prima di fare qualsiasi esercizio cercate di capire bene la teoria.**

**Notazioni.** $M(m \times n, \mathbf{R})$ è lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbf{R}$.
$\mathbf{R}_d[x]$ denota lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile $x$ a coefficienti in $\mathbf{R}$ di grado minore o uguale a $d$.
Se $V$ è uno spazio vettoriale su un campo $K$, $V^\vee := Hom(V, K)$. Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali su uno stesso campo $K$ e $\varphi : V \to W$ un'applicazione lineare; $\varphi^\vee : W^\vee \to V^\vee$ è l'applicazione lineare così definita:

$$\varphi^\vee(f) = f \circ \varphi \quad \forall f \in W^\vee$$

PRODOTTI DI MATRICI, BASI, SOTTOSPAZI VETTORIALI....

**Esercizio.** i) Verificate che i tre seguenti vettori costituiscono una base di $\mathbf{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ii) Esprimete il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 45 \\ 7 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $v_1$, $v_2$, $v_3$.

**Esercizio.** Sia $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Scrivere il vettore $\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ come prodotto di una matrice $4 \times 4$ per $v$.

**Esercizio.** Nell'immenso paese di Matlandia, abitato esclusivamente dai matematici, sono stati sbagliati tutti gli orari dei treni, precisamente è stato previsto che tutti i treni viaggino sempre alla stessa velocità media $c$, ma in realtà sulla linea Geometry City - Algebra Town (su cui ci sono 7 città) le velocità medie (a causa delle montagne) sono le seguenti:
nel tratto Geometry City - Algebraic Geometry Town $v_1$
nel tratto Algebraic Geometry Town - Differential Geometry Town $v_2$
nel tratto Differential Geometry Town - Topology city $v_3$
nel tratto Topology City - Rings Town $v_4$
nel tratto Rings Town - Groups Village $v_5$
nel tratto Groups Village - Algebra Town $v_6$
Sia $v = (v_1, ...., v_6)$. Sia $w \in \mathbf{R}^7$ il vettore con gli orari previsti sbagliati.

Una giovane matematica, stufa di non sapere mai quando si arriva veramente in una certa città, ha trovato una formula per ricavare i veri orari da $v$ e dal vettore $w$ dei vecchi orari: ovviamente $w' = (w_2 - w_1, w_3 - w_2, ..., w_7 - w_6)$ è il vettore il cui coefficiente $i$-esimo è il tempo di percorrenza previsto sbagliato sul tratto $i$-esimo della linea Geometry City - Algebra Town; quindi il vettore $w'' = cw'$ è il vettore il cui coefficiente $i$-esimo è la lunghezza del tratto $i$-esimo; quindi $(v_i)^{-1}w''_i$ è il tempo di percorrenza vero del tratto $i$-esimo della linea; quindi il vero orario sulla linea Geometry City - Algebra Town è

$$\begin{array}{l} w_1 \\ w_1 + (v_1)^{-1}w''_1 \\ w_1 + (v_1)^{-1}w''_1 + (v_2)^{-1}w''_2 \\ .... \end{array}$$

In realtà tale formula può essere espressa come il prodotto di una certa matrice per il vettore $w$. Trovate tale matrice (lasciatela pure espressa come somma e prodotto di matrici). (Sugg: esprimete prima $w''$ come prodotto di una matrice per $w$...)

**Esercizio .** i) Dimostrare che

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$$

è una base di $M(2 \times 2, \mathbf{R})$.
ii) Esprimere $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$.

**Esercizio.** Siano $v_h = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h^2 - 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ due vettori di $\mathbf{R}^4$ dipendenti dal parametro reale $h$. Per ogni valore del parametro $h$, estendere l'insieme $\{v_h, u_h\}$ ad una base di $\mathbf{R}^4$.

**Esercizio.** Sia $D$ una matrice diagonale con elementi sulla diagonale $d_1, ..., d_n$. Dimostrare che $D$ è invertibile se e solo se $d_i \neq 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$. Dire chi è in tal caso la matrice inversa.

**Esercizio.** La somma di due matrici ortogonali è ortogonale? Motivare la risposta.

**Esercizio.** Sia $S$ il seguente sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$:

$$S = \{(ab, b, 0) : a, b \in \mathbf{R}\}.$$

$S$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$? Motivare la risposta.

**Esercizio.** Dimostrare che l'insieme delle matrici simmetriche $n \times n$ a coefficienti in $\mathbf{R}$ costituisce un sottospazio vettoriale di $M(n \times n, \mathbf{R})$ di dimensione $\frac{n^2+n}{2}$.

**Esercizio.** Sia $S = \{A \in M(2 \times 2, \mathbf{R}) | \ {}^tA + 2A = 0\}$. È un sottospazio vettoriale di $M(2 \times 2, \mathbf{R})$? Se sì, calcolarne la dimensione.

**Esercizio.** Dire se il seguente sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$:

$$S = \{(t^2, s, 0) : t, s \in \mathbf{R}\}.$$

**Esercizio.** Dire se $\{f \in \mathbf{R}_2[x] | f(1) + f(2) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$ ed eventualmente calcolarne la dimensione e trovarne una base.

**Esercizio.** Dire per quali valori del parametro $h \in \mathbf{R}$ il vettore $(1, 1, h)$ appartiene al sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(h^2, 0, 1)$, $(0, h + h^3, 0)$, $(0, h, 1)$.

**Esercizio.** Siano $U_h$ e $W_h$ i due seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$ (al variare del parametro reale $h$):

$$U_h = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >, \ W_h = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ h-1 \\ 0 \\ h-1 \end{pmatrix} >$$

i) Dire per quali valori del parametro $h$ si ha $U_h \cap W_h = \{0\}$
ii) Dire per quali valori del parametro $h$ si ha $U_h + W_h = \mathbf{R}^4$

**Esercizio.** Siano $v_1, ...., v_k \in \mathbf{C}^n$. Dite quali implicazioni valgono fra le seguenti affermazioni:
a) $v_1, ...., v_k$ sono vettori linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$ (cioè sono vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{C}^n$ spazio vettoriale su $\mathbf{C}$)
b) $v_1, ...., v_k$ sono vettori linearmente indipendenti su $\mathbf{R}$ (cioè sono vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{C}^n$ spazio vettoriale su $\mathbf{R}$)

**Esercizio.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dim $n$. Sia $T$ un sottopsazio vettoriale di $V$. Dimostrare che

$$T = \cap_{H \supseteq T,\ H\ iperpiano} H$$

**Esercizio.** Sia $A$ la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia

$$S = \{B \in M(3 \times 3, \mathbf{R})\} | \ AB = 0\}$$

Determinare la dimensione di $S$.

**Esercizio.** Sia $A \in M(m \times n, \mathbf{R})$. Sia $r$ il rango di $A$. Sia

$$S = \{B \in M(n \times k, \mathbf{R})\} | \ AB = 0\}$$

Determinare la dimensione di $S$.

**Esercizio.** Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ di dimensione $n$ e sia $U$ un suo sottospazio di dimensione $k$. Dimostrate che $V/U$ ha dimensione $n-k$.

**Esercizio.** Sia $A$ la seguente matrice $3 \times 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolate la dimensione di $\{B \in M(3\times 3) |\ AB = BA\}$ Deducete da ciò che, se $B$ è tale che $BA = AB$, allora $B$ può essere scritto come combinazione lineare di $I\ A\ A^2$.

**Esercizio.** Sia $V$ uno spazio vettoriale e $W$ sia un sottospazio di $V$; sia $Z$ un sottospazio di $W$. Quanto è la dimensione di $(V/Z)/(W/Z)$? (ovviamente in funzione delle dimensioni di $V, W, Z$). (Potete utilizzare l'enunciato di un altro esercizio.)

**Esercizio.** Siano $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbf{R}$. Calcolate il determinante della seguente matrice $C \in M((n+1) \times (n+1), \mathbf{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & a_1 & . & . & . & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & a_2 & . & . & . & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_3 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & . & . & . & a_n \end{pmatrix}$$

cioè $C$ è la matrice così definita:

$$C_{i,j} = \begin{cases} 1 & if \quad i = 1 \\ a_{i-1} & if \quad i > 1 \quad and \quad i \leq j \\ b_j & if \quad i > 1 \quad and \quad i > j \end{cases}$$

**Esercizio.** Siano

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 501 & 500 & 500 \\ 21 & 2 & 502 & 501 & 500 \\ 133 & 23 & 500 & 500 & 500 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2600 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 89 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 288 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 34 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i) Calcolare il determinante di $A$
ii) Calcolare il determinante di $B^{-1}AB$
iii) Calcolare il determinante di $CA$

**Esercizio.** i) Trovare, se esiste, un polinomio $p$ a coefficienti in $\mathbf{R}$ di grado $\leq 3$ tale che $p(1) = 1$, $p(2) = -5$, $p(0) = 0$, $p(-1) = 1$.
ii) Siano $x_1, ...., x_n$ numeri reali distinti. Siano $y_1, ..., y_n$ numeri reali. Esiste sempre un polinomio $p$ a coefficienti in $\mathbf{R}$ di grado $\leq n - 1$ tale che $p(x_i) = y_i$, per $i = 1, ..., n$? Motivare la risposta.

**Esercizio.** Dimostrate la formula per calcolare il determinante delle matrici triangolari, utilizzando lo sviluppo di Laplace.

**Esercizio.** Sbarrare le affermazioni giuste.
Sia $A$ una matrice.
a) Lo spazio generato dalle colonne di $A$ non cambia facendo operazioni elementari di righe.

b) Lo spazio generato dalle colonne di $A$ non cambia facendo operazioni elementari di colonne.

c) Lo spazio generato dalle righe di $A$ non cambia facendo operazioni elementari di righe.

d) Lo spazio generato dalle righe di $A$ non cambia facendo operazioni elementari di colonne

e) Il rango di $A$ non cambia facendo operazioni elementari di righe

f) Il rango di $A$ non cambia facendo operazioni elementari di colonne.

## APPLICAZIONI LINEARI

**Esercizio.** Sia $f : M(n \times n, \mathbf{R}) \to M(n \times n, \mathbf{R})$ l'applicazione così definita:

$$f(A) = A + {}^tA$$

$\forall A \in M(n \times n, \mathbf{R})$.
Dimostrare che è lineare e studiarne l'immagine e il nucleo.

**Esercizio.** Siano $V_1$ e $V_2$ due spazi vettoriali su uno stesso campo $K$. Costruire un isomorfismo fra $V_1 \times V_2$ e $V_2 \times V_1$.

**Esercizio.** Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali su un campo $k$ di dimensione rispettivamente $n$ e $m$ con $n \geq m$. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Dimostrare che la dimensione del nucleo di $f$ è $\geq n - m$.

**Esercizio.** Sia $f_k : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'applicazione così definita

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k & i & 3i \\ 0 & k^2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(al variare del parametro complesso $k$).
Dire per quali valori di $k$, $f_k$ è invertibile.

**Esercizio.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $K$.
Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f^2 = f$.
Dimostrare che
i) $f|_{Im(f)} = Id$
ii) $V = Ker(f) \oplus Im(f)$
iii) esiste una base di $V$ tale che la matrice associata a $f$ in tale base (in partenza e in arrivo) è

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $I_k$ è l'identità $k \times k$ e $k$ è la dimensione di $Im(f)$.

**Esercizio.** Sia $T : M(n \times n, \mathbf{R}) \to M(n \times n, \mathbf{R})$ l'applicazione così definita:

$$T(A) = {}^tA$$

$\forall A \in M(n \times n, \mathbf{R})$.
i) Dimostrare che è lineare, studiarne l'immagine e il nucleo e dimostrare che esiste una base di $M(n \times n, \mathbf{R})$ tale che la matrice associata a $T$ in tale base è

$$\begin{pmatrix} I_{\frac{n^2+n}{2}} & 0 \\ 0 & -I_{\frac{n^2-n}{2}} \end{pmatrix}$$

ii) Sia $n = 2$. Scrivere la matrice associata a $T$ nella base canonica.

**Esercizio.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ su un campo $K$. Sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base di $V$.
i) Dire se i seguenti sottoinsiemi di $Hom(V, V)$ sono dei sottospazi di $Hom(V, V)$ ed eventualmente calcolarne la dimensione:
$\mathcal{S} = \{f \in Hom(V, V)|\ f(v_1) = 0\ f(v_2) = 0\}$
$\mathcal{T} = \{f \in Hom(V, V)|\ f(v_1 + v_2) = 0\}$
$\mathcal{U} = \{f \in Hom(V, V)|\ f(v_1) = v_1\}$
$\mathcal{Z} = \{f \in Hom(V, V)|\ f(v_1) \in < v_1 >\}$
$\mathcal{Q} = \{f \in Hom(V, V)|\ f(v_1) \in < v_2 >\}$
$\mathcal{Y} = \{f \in Hom(V, V)|\ f(v_1) \in < v_1 >,\ f\ iniettiva\}$
$\mathcal{P} = \{f \in Hom(V, V)|\ f(v_1) \in < v_1 >,\ f(v_i) = 0\ per\ i = 2, .., n\}$
ii) Come sono fatte le matrici nella base $\{v_1, ..., v_n\}$ degli elementi di $\mathcal{T}$?
iii) Dire se esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(v_1) = v_1$ e $f(v_i) = 0$ per $i = 2, ..., n$ e scriverne eventualmente la matrice associata nella base $\{v_1, ..., v_n\}$.
iii) Dire se esiste un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 0$, $f(v_1 + v_2) = 0$
iv) Dire se esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(v_1) = v_1$ e $\dim\ker(f) = n-1$.

**Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}^3$ definita nel seguente modo

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0, a_1 + 4a_2, a_0)$$

i) Determinare un sottospazio $W$ di $\mathbf{R}_2[x]$ tale che $f|_W$ sia iniettiva.
ii) Determinare un'applicazione lineare non identicamente nulla $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $h \circ f = 0$

**Esercizio.** Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali su uno stesso campo $K$. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $Z$ un sottospazio di $W$. Dimostrare che

$$\dim(f^{-1}(Z)) \leq \dim(Z) + \dim(\ker f)$$

**Esercizio.** Siano $V$, $W$ e $U$ tre spazi vettoriali su uno stesso campo $K$. Siano $f : V \to W$ e $g : W \to U$ applicazioni lineari.
Dimostrare che

$$\dim(\ker(g \circ f)) \leq \dim(\ker g) + \dim(\ker f)$$

**Esercizio.** Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali su un campo $K$. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $W'$ un sottospazio di $W$.
Dimostrare che $f^{-1}(W')$ è un sottospazio di $V$.

**Esercizio.** Sia $K$ un campo e sia $A \in GL(2, K)$. Sia $\varphi_A : M(2 \times 2, K) \to M(2 \times 2, K)$ l'applicazione così definita

$$B \mapsto A^{-1}BA$$

$\forall B \in M(2 \times 2, K)$.

i) Dimostrare che $\varphi_A$ è lineare
ii) Dire se $\varphi_A$ è iniettiva e se è surgettiva
iii) Sia $K = \mathbf{C}$ e sia $A = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. Scrivere la matrice associata a $\varphi_A$ nella base canonica di $M(2 \times 2, K)$.

**Esercizio.** Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali su un campo $K$ e $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $V'$ un sottospazio di $V$. Dimostrare che $f|_{V'}$ è iniettiva se e solo se $V' \cap Ker(f) = \{0\}$

**Esercizio.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbf{R}$. Siano $T_1$ e $T_2$ due distinti sottospazi di dimensione 1 di $V$. Sia

$$\mathcal{S} = \{f \in Hom(V, V)|\ f(T_1) \subseteq T_1 \ \ f(T_2) \subseteq T_2\}$$

i) Dimostrare che $\mathcal{S}$ è un sottospazio di $Hom(V, V)$
ii) Calcolare la dimensione di $\mathcal{S}$.

**Esercizio.** Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali su un campo $K$. Supponiamo che abbiano dimensione finita. Sia $\varphi : V \to W$ un'applicazione lineare. Dimostrare che
i) $\varphi$ iniettiva $\Rightarrow \varphi^\vee$ surgettiva
ii) $\varphi$ surgettiva $\Rightarrow \varphi^\vee$ iniettiva.

**Esercizio.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ su un campo $K$. Sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base di $V$. Calcolare la dimensione di

$$\{f \in V^\vee|\ f(v_1) = 0, \ \ f(v_2) = -f(v_3)\}$$

**Esercizio.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $K$. Sia $U$ un sottospazio di $V$.
i) Dimostrare che l'applicazione $V \to V/U$

$$v \mapsto [v]$$

è lineare ed il suo nucleo è $U$. Utilizzando ciò, dimostrare che

$$dim(V/U) = dim(V) - dim(U)$$

Sia $W$ un sottospazio di $V$ tale che $V = W \oplus U$
ii) Dimostrare che l'applicazione $W \to V/U$

$$w \mapsto [w]$$

è un isomorfismo.
iii) Sia $\pi_W : V \to W$ l'applicazione così definita:
sia $v \in V$; sia $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$; definisco

$$\pi_W(v) = w$$

Dimostrare che $\pi_W$ è lineare e dire chi è il suo nucleo.

**Esercizio.** Sia $D : \mathbf{R}_3[x] \to \mathbf{R}_3[x]$ la seguente applicazione lineare

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

(la derivata). Scrivere la matrice associata a $D$ nella base $\{1, x, x^2, x^3\}$, studiare l'immagine e il nucleo, dire se è diagonalizzabile e dire se è nilpotente.

**Esercizio** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbf{R}$. Siano $H$ un sottospazio vettoriale di dimensione 2 in $V$ e $r$ un sottospazio vettoriale di dimensione 1 in $V$ tali che $r \cap H = \{0\}$.
i) Sia $\mathcal{S}$ il seguente sottospazio vettoriale di $Hom(V, V)$:

$$\mathcal{S} = \{f \in Hom(V, V) \mid f(H) \subset H, \ e \ f(r) \subset r\}$$

Calcolare la dimensione di $\mathcal{S}$.
iii) Sia

$$\mathcal{S}' = \{f \in Hom(V, V) \mid f(H) = H \ e \ f(r) = r\}$$

Dire se $\mathcal{S}'$ è un sottospazio vettoriale di $Hom(V, V)$; motivare la riposta.
iv) Scegliere una (opportuna) base di $V$ e trovare un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(r) = r$ e $\dim \ker f = 2$ (scrivere ad esempio la sua matrice nella base scelta o dire chi sono le immagini degli elementi della base scelta); trovare infine un'applicazine lineare $h : V \to V$ tale che $(h \circ f)(r) = \{0\}$ e $\dim \ker h = 1$.

**Esercizio.** Per quali valori di $a$ i due seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ rappresentano rette sghembe? Cosa succede per gli altri valori di $a$?

$$r = \{(x,y,z)|\ 2x+y-3z=4 \ \ e \ \ x+y-z=1\}$$

$$s = \{(x,y,z)|\ x+ay+az=1 \ \ e \ \ x+2ay-az=1\}$$

**Esercizio.** Si consideri al variare del parametro $t$ la seguente quaterna di punti di $\mathbf{R}^3$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_t = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}$$

Siano $s$ la retta passante per $P_1$ e $P_2$ e $r_t$ la retta passante per $P_3$ e $Q_t$.
i) Si dica per quali valori del parametro $t$ le rette $s$ e $r_t$ sono rette sghembe.
ii) Si trovino le equazioni parametriche e cartesiane delle rette $s$ e $r_t$.

**Esercizio.** Si consideri la seguente quaterna di punti di $\mathbf{R}^2$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Sia $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Il punto $P$ appartiene all'inviluppo convesso di $P_1, P_2, P_3, P_4$?

**Esercizio.** i) Scrivere l'equazione del piano $\pi$ passante per $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ii) Scrivere l'equazione del piano $\pi'$ parallelo a $\pi$ e passsante per $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**Esercizio.** Trovare $\lambda$ in modo tale che la retta $OP$, con $O = (0,0,0)$ e $P = (\lambda, -1, 0)$, sia parallela al piano di equazione $\lambda(x+y) - z = 0$

**Esercizio.** Scrivere l'equazione del piano che passa per la retta $r = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3|\ 3x-y+3 = x+z+1=0\}$ ed e' parallelo alla retta $s = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3|\ x = y-2 \ \ e \ \ x = 3z-5\}$.

**Esercizio.** Scrivere l'equazione del piano che passa per la retta $r = \{(4,,5,6) + t(6,7,8)|\ t \in \mathbf{R}\}$ e per il punto $P = (1,2,3)$.

**Esercizio.** i) Dimostrare che l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3|\ x \leq 1\}$ è convesso.

ii) Si consideri la seguente quaterna di punti di $\mathbf{R}^3$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sia $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il punto $P$ appartiene all'inviluppo convesso di $P_1, P_2, P_3, P_4$?

**Esercizio.** Per quali valori di $a$ i due seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ rappresentano rette sghembe? Cosa succede per gli altri valori di $a$?

$$r = \{(x, y, z) |\ 2x + y - 3z = 4 \ \ e \ \ x + y + z = 1\}$$

$$s = \{(x, y, z) |\ x + ay + az = 1 \ \ e \ \ x + 2ay - az = 1\}$$

**Esercizio.** Trovare un'espressione cartesiana della retta passante per $P = (1, 0, 9)$ e parallela ai due piani di equazioni rispettive $4x + 3y = 0$ e $z = 8$.

**Esercizio.** Siano dati in $\mathbf{R}^3$ i tre seguenti piani:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 |\ x + ky + z = -1\}$$

$$\pi' = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 |\ x + y - z = 1\}$$

$$\pi'' = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 |\ y + kz = 1\}$$

i) Dire per quali valori del parametro $k$ i tre piani hanno un sol punto in comune e determinare tale punto.
ii) Dire per quali valori del parametro $k$ i tre piani hanno in comune una retta e determinare tale retta.
iii) Dire per quali valori del parametro $k$ i tre piani non hanno nessun punto in comune.
iv) Possono i tre piani coincidere?

**Esercizio.** Sia $A \in M(n \times n, K)$, sia $\mathcal{P}(x) \in K[x]$. Sia $B \in GL(n, K)$ tale che $BAB^{-1}$ sia diagonale. Dimostrare che allora anche $B\mathcal{P}(A)B^{-1}$ è diagonale.

**Esercizio.** Sia $A \in M(n \times n, K)$. Supponiamo che $A$ sia nilpotente (cio è esista $k \in \mathbf{N}$ tale che $A^k = 0$) e diagonalizzabile. Dimostrare che allora $A = 0$.

**Esercizio.** Nello spazio affine $A^3_{\mathbf{R}}$ siano date due rette $r$ e $s$ e un piano $\pi$ tali che
$r \cap s \cap \pi = \emptyset$
$r \cap s \neq \emptyset$
$r \cap \pi \neq \emptyset$
$s \cap \pi \neq \emptyset$.
Scegliere un sistema di coordinate opportuno e determinare il gruppo

$$G = \{f : A^3_{\mathbf{R}} \to A^3_{\mathbf{R}} |\ f\ affinita'\ t.c.\ f(r) = r\ f(s) = s\ f(\pi) = \pi\}$$

**Esercizio.** Dire per quali valori del parametro reale $h$ la forma bilineare $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita come $b(x, y) = {}^t x A_h y$ dove

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-h \\ 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è simmetrica e per quali valori è non degenere; se $h = \frac{1}{2}$ calcolare la segnatura.

**Esercizio.** Sia $A \in M(n \times n, \mathbf{R})$ tale che $A = {}^t A$. Dimostrare che se $A^2 = 0$ allora $A = 0$.

**Esercizio.** i) Dimostrare che due matrici simmetriche reali $n \times n$ sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura.
ii) Quante sono le classi di equivalenza per la relazione di congruenza nell'insieme delle matrici simmetriche reali $3 \times 3$?

**Esercizio.** i) Determinare $\lambda$ e $\mu \in \mathbf{R}$ tali che i due seguenti vettori possano essere le prime due colonne di una matrice ortogonale $3 \times 3$.

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ (\lambda - 1)^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ -1 \end{pmatrix}$$

Siano adesso $\lambda$ e $\mu$ come al punto i).
ii) Determinare un terzo vettore di $\mathbf{R}^3$ tale che affiancato ai primi due dia una matrice ortogonale con determinante 1.
iii) Determinare un terzo vettore di $\mathbf{R}^3$ tale che affiancato ai primi due dia una matrice ortogonale con determinante $-1$.
iv) Determinare un terzo vettore di $\mathbf{R}^3$ tale che affiancato ai primi due dia una matrice ortogonale con un autovalore uguale a 1.

v) Determinare un terzo vettore di $\mathbf{R}^3$ tale che affiancato ai primi due dia una matrice ortogonale con un autovalore uguale a $-1$.

**Esercizio.** Sia $b : \mathbf{R}_1[x] \times \mathbf{R}_1[x] \to \mathbf{R}$ definita nel seguente modo:

$$b(p,q) = p(3)q(3)$$

Dimostrare che $b$ è bilineare simmmetrica, calcolare la segnatura e trovare, se esiste, un elemento non nullo di $\mathbf{R}_1[x]$ isotropo per $b$.
Sia $c \in \mathbf{R}$. Sia $b_c : \mathbf{R}_1[x] \times \mathbf{R}_1[x] \to \mathbf{R}$ definita nel seguente modo:

$$b_(p,q) = p(c)q(c)$$

Dimostrare che $b_c$ è bilineare simmmetrica, calcolare la segnatura e trovare, se esiste, un elemento non nullo di $\mathbf{R}_1[x]$ isotropo per $b_c$.