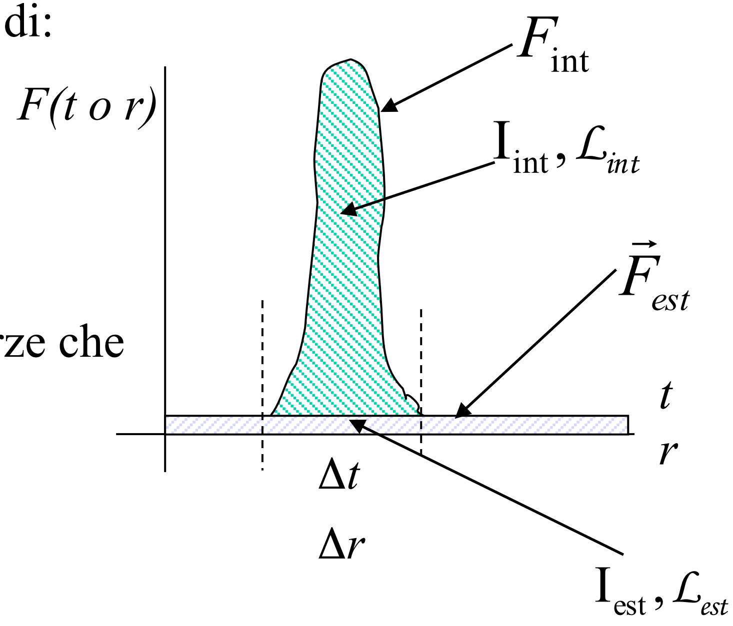
Urti Serve, anzitutto, rilevare alcune caratteristiche communi agli urti.
Gli urti sono molto brevi ed e' dunque difficile tener conto esplicitamente delle forze che intervengono nell'urto. Se ne ricava informazione a partire dalle proprieta' di moto dei costituenti nello stato inizale e quello finale, o, piu' precisamente dalla loro variazione.
L'effetto delle forze d'interazione e' quantificabile intermini di:

Impulso $\vec{I}_{\text{int}} = \int_{\Delta t} \vec{F}_{\text{int}} dt$

o di lavoro $\mathcal{L}_{\text{int}} = \int_{\Delta r} \vec{F}_{\text{int}} \cdot d\vec{r}$



corrispondono all'effetto delle forze interne, e siccome le forze che si sviluppano nel corso dell'urto sono grandi, questo effetto predomina su quello delle forze esterne (es. *peso, attrito)*

$$\vec{I}_{est} = \int_{\Delta t} \vec{F}_{est} dt << \text{I}_{\text{int}}\ , \quad \mathcal{L}_{est} = \int_{\Delta r} \vec{F}_{est} \cdot d\vec{r} << \mathcal{L}_{int}$$

a tal punto che l'effetto delle forze esterne puo' generalmente essere *trascurato:*

$$\sum_{i,est} \vec{F}_i \cong 0, \qquad \mathcal{L}_{est} \cong 0$$

e il sistema puo' essere trattato come se fosse *isolato.* Allora, a buona approssimazione segue che':

$$\frac{d\vec{P}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \;\rightarrow\; P \text{ costante}$$

e che

$$K_{cm} = \frac{P_{cm}^2}{2M} = \frac{P^2}{2M} \qquad \text{costante}$$

Per gli urti, dunque,

$\vec{P}$ e K_{cm} vengono sempre conservati.

Pero' l'energia interna meccanica E_{mecc}* (e quindi l'energia meccanica totale E_{mecc}) puo' variare, e questo serve a distinguere tra:

Urti elastici: dove l'enegia meccanica viene conservata,
Urti anelastici (o inelastici): dove l'energia meccanica *non* viene conservata, e
Urti completamente inelastici: dove il corpi si fondono (cioe', l'energia meccanica interna e' *completamente* annullata)

Va ricordato che, a causa della loro brevita' gli urti sono osservabili solo nello stato iniziale, prima dell'interazione, e in quello finale, dopo l'interazione. In entrambi i casi, le forze d'interazione si sono ridotte a zero. Segue che si possono trascurare i relativi potenziali e che l'energia meccanica "lontano" dal punto d'interazione e' unicamente energia cinetica , cioe:

$$E = K = K_{cm} + K^*$$

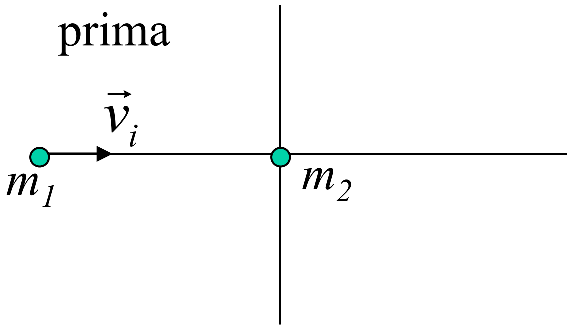
E siccome K_{cm} e' costante, la misura di inelasticita' e data dalla variazione di K^*
E prassi definire un parametro Q definito:

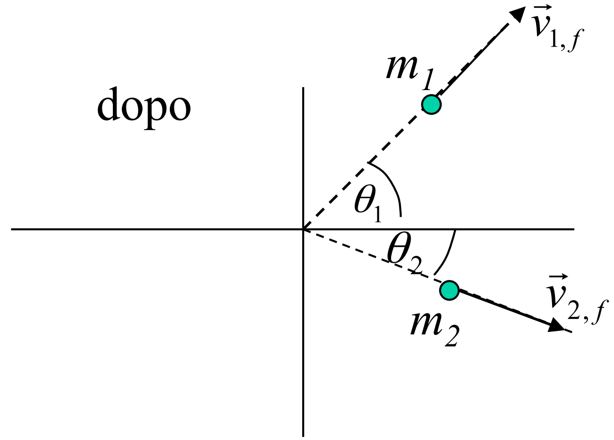
$$Q = \Delta K^* = \Delta K = K_f - K_i$$

Se Q < 0 , l'urto e' detto *endotermico*
Se Q > 0 , l'urto e' detto *esotermico*

Si noti che $Q = -K^*$ per interazioni completamente anelastiche

Si consideri ora la generalizzazione degli urti tra due corpi. Per semplificare, supponiamo che uno dei due corpi sia stazionario (si noti che, considerando le velocita' relative, ogni urto tra due corpi e' riducibile ad un urto a bersaglio fisso).





Se il piano delle velocita' finali viene imposto (es' il piano del tavolo dei biliardi), questo tipo di problema si riduce ad un problema bidimensionale. Allora, la conservazione della q.d.m .:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

corrisponde a due equazioni

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \qquad (1)$$

$$0 = m_1 v_{1f} sen\theta_1 + m_2 v_{2f} sen\theta_2 \qquad (2)$$

Se l'urto e' elastico: l'energia meccanica e' conservata:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 \qquad (3)$$

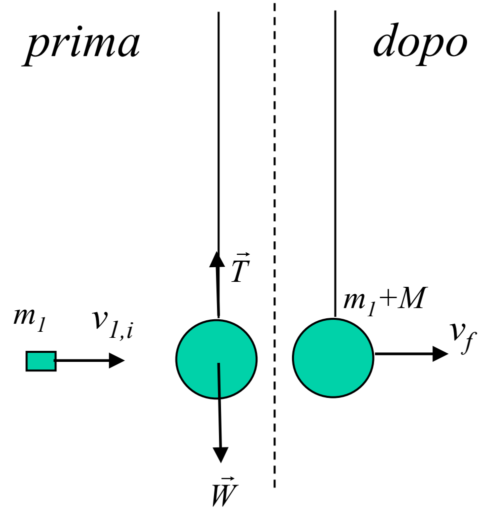
NB! tre equazioni per *quattro* incognite: lo stato finale *non* e' definito. Per definirlo e' sufficiente specificare *una* delle incognite..

Se l'urto e' *anelastico,* la terza equazione diventa:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 \ + Q = \frac{1}{2}m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2 \qquad (3)$$

Anche supponendo Q dato, sono sempre 4 le incognite per 3 equazioni, e serve specificarne una per risolvere il problema cinematico.

Per un urto *completamente anelastico* invece, dal momento vi e' un unico corpo nello stato finale, questo e' completamente definito e la situazione e' definita . Un esempio classico di urto totalmente anelastico e' : **<u>Il Pendolo Balistico</u>**



prima

$$P_i = p_{1,i} = m_1 v_{1,i}$$

dopo

$$P_f = (m_1 + m_2)v_f$$

e siccome $T, W << F_{int}$, la q.d.m. viene conservata a buona approssimazione

$$P_i = p_{1,i} = P_f$$

$$m_1 v_{1,i} = (m_1 + m_2)v_f$$

$$v_f = m_1 v_{1,i} / (m_1 + m_2)$$

Prima dell'urto

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_{1,i}^2$$

Dopo l'urto

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_{1,i}}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2 v_{1,i}^2}{(m_1 + m_2)}$$

Segue che

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} - 1 \right)$$

$$\Delta K = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} \mu v_{1,i}^2$$

dove μ e' detta la "*massa ridotta*"

Si noti che, siccome i corpi so fondono, ogni loro componente si muove col c.m. nello stato finale. Non essendovi moto interno, segue che l'energia cinetica interna e' nulla nello stato finale

$$K_f^* = 0$$

e

$$K_f = K_{cm} + K_f^* = K_{cm}$$

mentre

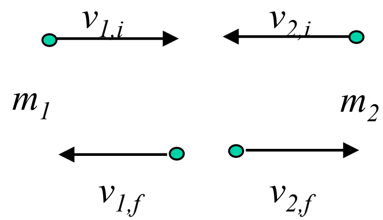
$$K_i = K_{cm} + K_i^*$$

E siccome K_{cm} *e'* conservata

$$\Delta K = K_f - K_i = K_i^* = \frac{1}{2} \mu v_{1,i}^2$$

Tutta l'enegia nel c.m. Viene dissipata nel corso dell'urto, il che spiega perche lo si chiama un urto *"completamente anelastico"*. E' importante notare che, a causa della conservazione della q.d.m., *non e' possibile dissipare tutta l'energia cinetica* nel corso di un urto anelastico – solamente quella parte corrispondente a K^*

Si consideri, ora, un urto elastico *frontale*. In tal caso, le velocita' finali sono collineari con quelle iniziali. Si tratta dunque sempre di un problema unidimensionale.



Vale sempre la consevazione della q.d.m totale:

$$P_i = m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = P_f = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2f} \qquad (1)$$

e, dal momento che l'urto e' elastico, si introduce un altro vincolo

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 \qquad (2)$$

Con due vincoli (equazioni) per due incognite (le due velocita' finali), lo stato finale e' definito:
da (1) si ottiene

$$m_1\left(v_{1,i} - v_{1,f}\right) = -m_2\left(v_{2,i} - v_{2,f}\right) \qquad (3)$$

e da (2)

$$m_1\left(v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2\right) = -m_2\left(v_{2,i}^2 - v_{2,f}^2\right)$$

$$m_1\left(v_{1,i} - v_{1,f}\right)\left(v_{1,i} + v_{1f}\right) = -m_2\left(v_{2,i} - v_{2,f}\right)\left(v_{2,i} + v_{2f}\right) \qquad (4)$$

(4)/(3)

$$v_{1,i} + v_{1,f} = v_{2,i} + v_{2,f}$$

$$v_{1,i} - v_{2,i} = -\left(v_{1,f} - v_{2,f}\right) \qquad (5)$$

Si noti che *le velocita' relative s'invertono,* e sostituendo per v_{2f} da (5) in (3), si ottiene, riordinando,

$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,i} + 2m_2 v_{2,i}}{(m_1 + m_2)} \qquad (6)$$

Analogamente, si ottiene

$$v_{2,f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,i} + 2m_1 v_{1,i}}{(m_1 + m_2)} \qquad (7)$$

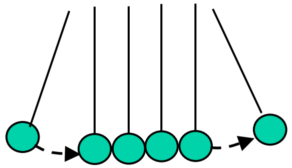
E' interessante considerare alcuni casi limite:

(a) $m_1 = m_2 = m$: allora

$$v_{1,f} = v_{2,i}$$

$$v_{2,f} = v_{i,i}$$

tutta l'energia cinetica viene scambiata

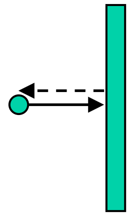


(b) $m_2 >> m_1$, $v_{21} = 0$: allora

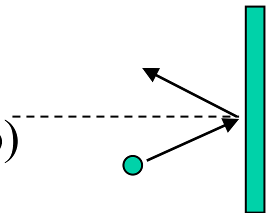
$$v_{1,f} = -v_{1,i}$$

$$v_{2,f} = 0$$

es. urto elastico con parete



Se la parete e' "liscia" la forza d'interazione e' normale alla parete e viene invertita solo la componente della velocita' normale alla parete (la componente orizzontale in questo caso)

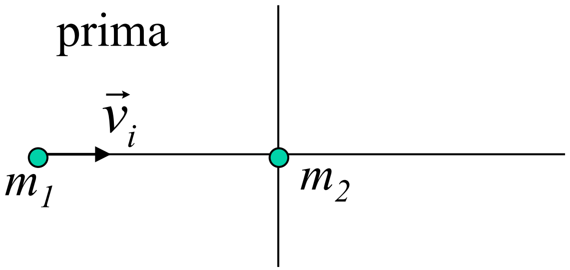


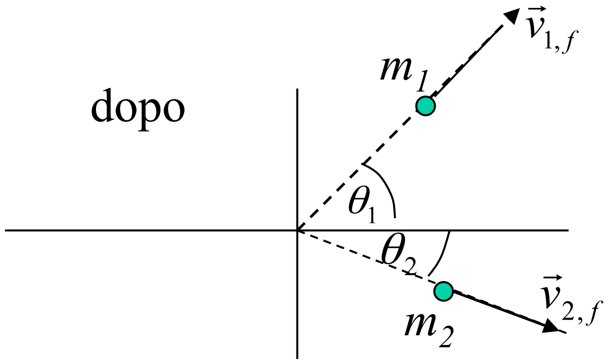
(c) $m_1 >> m_2$, $v_{21}=0$: allora

$$v_{1,f} = v_{1,i}$$

$$v_{2,f} = 2v_{1,i}$$

Quando l'urto *non* e' frontale, es:





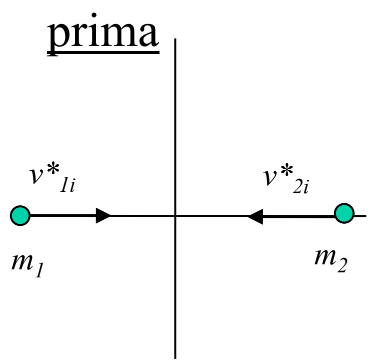
serve definire una delle variabili cinematiche nello stato finale e la soluzione non e', communque, altrettanto banale. Passando ad un sistema di riferimento solidale col c.m. semplifica la soluzione del problema perche, nel c.m.,

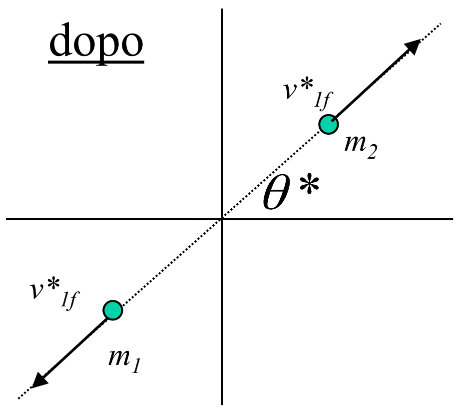
$\vec{P}_i^* = \vec{P}_f^* = 0$ da cui

$\vec{p}_{1i}^* = -\vec{p}_{2i}^*$ e

$\vec{p}_{1f}^* = -\vec{p}_{2f}^*$

il che implica un solo angolo θ^* nello stato finale





pero', si ha il compito aggiuntivo di trasformare tra sistemi di riferimento

Infine, e’ il caso di notare che gli urti possono essere utili per risalire alla natura delle forze d’interazione. A volte sono l’unico modo disponibile, es. collisioni tra particelle (protoni, elettroni) accelerate vengono utilizzate per risalire alla natura della interazioni fondamentali. In questo caso e’ necessario definre la cinematica degli stati iniziali e finali per risalire alle incognite

L'impulso $\vec{I}_{\text{int}} = \int_{\Delta t} \vec{F}_{\text{int}} dt = \Delta \vec{P}$

ed il lavoro $\mathcal{L}_{\text{int}} = \int_{\Delta r} \vec{F}_{\text{int}} \cdot d\vec{r} = \Delta K^{*}$

E quindi alla natura delle forze d’interazione.