FORMULARIO PIÙ
ESERCIZI SVOLTI
TEORIA DEI SEGNALI
2018/2019
PROVE D'ESAME

Proprietà dei segnali determinati

Energia, potenza e valor medio di un segnale

Segnali tempo continui

$$E_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

SERIE GEOMETRICA: $\sum_{m=0}^{+\infty} q^m = \frac{1}{1-q}$ $|q|<1$

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

SOMMA DELLE N+1 POTENZE: $\sum_{m=0}^{N} q^m = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$

$$x_m \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \, dt$$

Segnali tempo discreti

$$E_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$P_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$x_m \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]$$

Sviluppo in serie di Fourier

Definizione

Un segnale $x(t)$ periodico, di periodo $T_0 = \frac{1}{T_0}$ è sviluppabile in *serie di Fourier*. Le possibili espressioni per la serie di Fourier sono:

Forma reale polare

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)$$

Forma esponenziale o complessa [2]

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \qquad \text{con} \qquad X_k = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

[2] Tale sviluppo vale anche se il segnale $x(t)$ è complesso

Forma reale rettangolare

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(2\pi k f_0 t) - b_k \sin(2\pi k f_0 t)\right]$$

Relazioni tra i coefficenti di Fourier

$a_0 = A_0 = X_0$ valor medio del segnale

$X_k = A_k e^{j\vartheta_k} \qquad X_{-k} = A_k e^{-j\vartheta_k}$

$$a_k = A_k \cos\vartheta_k = A_k \frac{e^{j\vartheta_k} + e^{-j\vartheta_k}}{2} = \frac{X_k + X_{-k}}{2} = \Re\{X_k\}$$

$$b_k = A_k \sin\vartheta_k = A_k \frac{e^{j\vartheta_k} - e^{-j\vartheta_k}}{2j} = \frac{X_k - X_{-k}}{2j} = \Im\{X_k\}$$

$$a_k + jb_k = \frac{X_k + X_{-k}}{2} + j\frac{X_k - X_{-k}}{2j} = X_k$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \vartheta_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

Proprietà

- **Linearità**

  $x(t)$ e $y(t)$ sono due segnali periodici di periodo T_0 aventi coefficenti di Fourier rispettivamente X_k e Y_k, allora si ha:

  $$z(t) = a\,x(t) + b\,y(t) \quad \Rightarrow \quad Z_k = a\,X_k + b\,Y_k$$

- **Simmetrie degli spettri**

  $$X_k = X^*_{-k} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases} \quad \text{con } x(t) \text{ reale}$$

  PARI: grafico simmetrico rispetto all'asse delle y

- **Segnali pari e dispari**

  DISPARI: grafico simmetrico rispetto all'origine (sta in tutti i 4 quad)

  $$x(t) \text{ reale e pari} \quad \Rightarrow \quad X_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)\,dt$$ $x(t) = X_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t)$

  $$x(t) \text{ reale e dispari} \quad \Rightarrow \quad X_k = -\frac{2j}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)\,dt$$ $x(t) = 2j\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \operatorname{sen}(2\pi k f_0 t)$

  Si nota immediatamente che nel caso in cui $x(t)$ sia reale e pari allora risulta $X_k = X_{-k}$, inoltre tali coefficenti sono reali. Se $x(t)$ è reale e dispari allora si ha $X_k = -X_{-k}$ e tali coefficenti risultano immaginari puri.

- **Traslazione nel tempo**

  $$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}} X_k \cdot e^{-j2\pi f_0 t_0}$$

I coefficienti della serie di Fourier decadono all'infinito con andamento $\frac{1}{k^{m+1}}$
m: numero dell'ordine della prima derivata discontinua
m = 0 → decadimento più lento $\frac{1}{k}$ il segnale è di per sé discontinuo.

- **Derivazione**

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} \xrightarrow{\mathcal{F}} j2\pi k f_0 \cdot X_k$$

- **Segnale alternativo** : grafico opposto rispetto all'asse delle x in metà periodo

$x(t)$ periodico, di periodo T_0, è *alternativo* se risulta $x\left(t+\frac{T_0}{2}\right) = -x(t)$. Per tale segnale il coefficente X_k della serie di Fourier è *nullo* per tutti i valori *pari* dell'indice k. Infatti vale la formula semplificata:

$$X_k = \frac{1-(-1)^k}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt \underset{k\ \text{DISPARI}}{=} \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} \underbrace{x(t)}_{\text{segnale in metà periodo}} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

Sviluppi in serie di Fourier notevoli

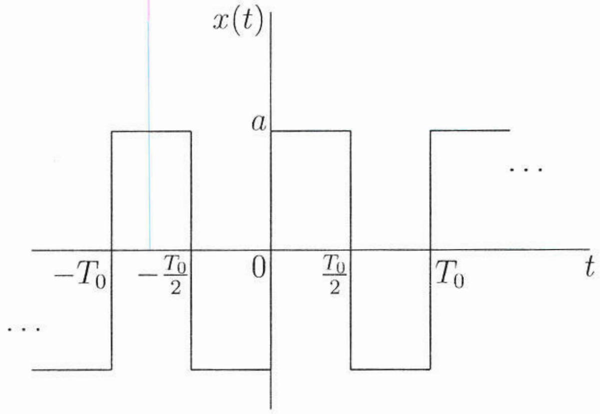
- **coseno**

$$x(t) = a\cos(2\pi f_0 t) \;\Rightarrow\; X_k = \begin{cases} \frac{a}{2} & k=\pm 1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases}$$

$x(t) = 1 + a\cos(2\pi f_0 t)$

$x(t) = 1 + \frac{a}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{a}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$

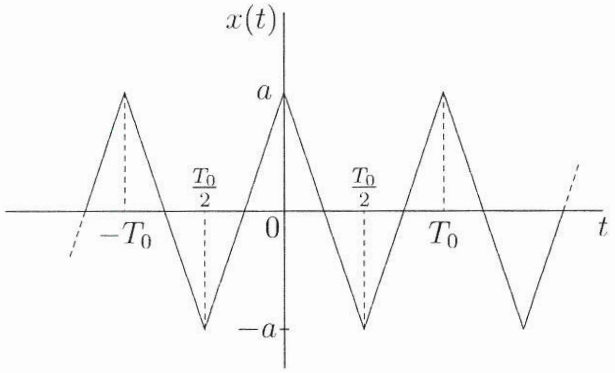
- **onda quadra**



Nel caso in cui $x(t)$ è l'onda quadra (dispari) rappresentata in figura allora i coefficenti X_k del suo sviluppo in serie di Fourier sono dati da:

$$X_k = \begin{cases} \frac{2a}{j\pi k} & k \text{ dispari} \\ 0 & k \text{ pari} \end{cases}$$

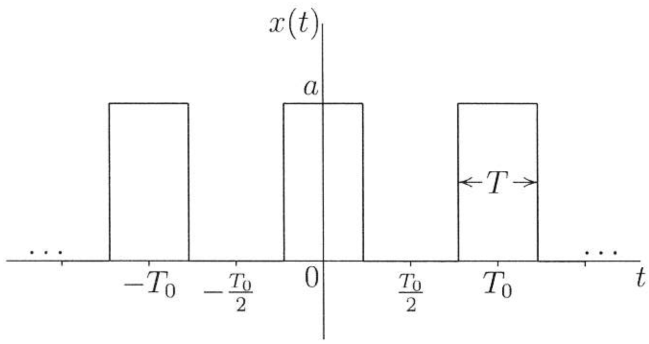
- **onda triangolare**



Per l'onda triangolare rappresentata in figura, i coefficenti dello sviluppo in serie di Fourier risultano pari a:

$$X_k = \begin{cases} \frac{4a}{(k\pi)^2} & k \text{ dispari} \\ 0 & k \text{ pari} \end{cases}$$

- **treno di impulsi** [3]



Nel caso in cui $x(t)$ è il treno di impulsi rappresentato in figura allora i coefficenti X_k sono dati da:

$$X_k = a\,\frac{T}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(k\frac{T}{T_0}\right)$$

Il rapporto $\frac{T}{T_0}$ viene detto *duty-cycle* o *duty-factor*.

Trasformata continua di Fourier

Definizione

Un segnale $x(t)$ può essere visto come la sovrapposizione di componenti sinusoidali di ampiezza *infinitesima* e di frequenza variabile *con continuità* su tutto l'asse reale. Le due equazioni relative alla rappresentazione del segnale $\underbrace{\text{aperiodico}}_{\text{DI ENERGIA}}$ sono:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t} d\,f} \qquad \boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} d\,t}$$

Proprietà

- **Simmetrie degli spettri**

$$X(f) = X^*(-f) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\} \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\} \end{cases} \quad \text{con } x(t) \text{ reale}$$

- **Segnali pari e dispari**

$$x(t) \text{ reale e pari} \quad \Rightarrow \quad X(f) = 2\int_0^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)\, dt$$

$$x(t) \text{ reale e dispari} \quad \Rightarrow \quad X(f) = -2j\int_0^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\, dt$$

Nel caso in cui $x(t)$ sia reale e pari allora $X(f)$ è anch'essa reale e pari; mentre, se $x(t)$ è reale e dispari allora $X(f)$ è immaginaria pura e dispari.

---

[3] La funzione $\mathrm{sinc}(\cdot)$ è definita nel modo seguente:

$$\mathrm{sinc}(t) \triangleq \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

- **Linearità**

$$x(t) = a\, x_1(t) + b\, x_2(t) \quad \Rightarrow \quad X(f) = a\, X_1(f) + b\, X_2(f)$$

- **Dualità**

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \quad \Rightarrow \quad X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$$

- **Traslazione nel tempo**

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = X(f)\, e^{-j2\pi f t_0} \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- **Traslazione in frequenza**

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\right\} = X(f-f_0) \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- **Cambiamento di scala**

$$\mathcal{F}\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right) \quad (\alpha \neq 0) \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- **Trasformata di un segnale coniugato**

$$\mathcal{F}\{\overline{x}(t)\} = \overline{X}(-f) \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- **Teorema della *modulazione***

sen$(2\pi f_0 t)$

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{X(f-f_0) \overset{-}{+} X(f+f_0)}{2} \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- **Teoremi di *derivazione e integrazione***

FORMA INCOMPLETA

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right\} = j2\pi f\, X(f) \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{d\,X(f)}{d\,f}\right\} = -j2\pi t\, x(t) \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

se è soddisfatta l'ipotesi per cui: $X(0)=0$ se è a quadrato sommabile

FORMA COMPLETA

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} X(0) \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

$X(0) \neq 0$

il secondo termine aggiuntivo ci vuole quando il segnale $x(t)$ non sottende area nulla, cioè quando $X(0) \neq 0$.

- **Teorema del *prodotto*** [4]

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot y(t)\} = X(f) * Y(f)$$

- **Teorema della *convoluzione***

$$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f) \cdot Y(f)$$

[4] L'asterisco indica l'operazione di *convoluzione*, definita nel modo seguente:

$$\varphi(t) * \psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)\, \psi(t-\tau)\, d\tau$$

tale operazione gode della *proprietà commutativa*.

Trasformate di Fourier generalizzate

- **Proprietà della δ di Dirac**

CAMPIONAMENTO $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0)$$ GENERALIZZATA $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)$$ ELEMENTO UNITARIO RISPETTO ALLA CONVOLUZIONE

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau = x(t-t_0)$$

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

$$\delta(a\,t) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t)$$ CAMBIAMENTO DI SCALA

- **altre proprietà**

$$\mathfrak{F}\{\delta(t)\} = 1 \qquad \mathfrak{F}\{1\} = \delta(f)$$ FUNZIONE PARI: $\delta(t)=\delta(-t)$

$$U(f) = \mathfrak{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\,\delta(f)$$ TRASFORMATA DEL GRADINO UNITARIO

$$\mathfrak{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} \qquad \mathfrak{F}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \delta(f-f_0)$$ TRASFORMATA ESPONENZIALE COMPLESSO

Trasformata continua di un segnale periodico

$$\mathfrak{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$$

$$\mathfrak{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{\delta(f-f_0)-\delta(f-f_0)}{2j}$$

$$\mathfrak{F}\{\cos(2\pi f_0 t+\varphi)\} = \frac{1}{2}\,\delta(f-f_0)\,e^{j\varphi} + \frac{1}{2}\,\delta(f+f_0)\,e^{-j\varphi}$$

$$x\,(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad \Rightarrow \quad X\,(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta\,(f-kf_0) \quad \text{con } f_0 = \frac{1}{T_0}$$ TRASFORMATA DEL SEGNALE PERIODICO

$$X_k = f_0 \mathfrak{F}\{x_{T_0}(t)\}\Big|_{f=kf_0}$$

Quest'ultima formula consente di calcolare i coefficenti dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale $x(t)$ periodico a partire dalla trasformata di Fourier del segnale $x_{T_0}(t)$ ottenuto troncando $x(t)$ in un periodo T_0.

TRENO DELLA DELTA DI DIRAC: $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{j2\pi}{T_0}kt}$
E SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER
TRASFORMATA DI FOURIER $\longrightarrow X(f) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-kf_0)$

dove $\delta(f-kf_0) \Leftrightarrow e^{j2\pi k f_0}$

$d\left(\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right) = \frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t+T/2}{T}\right) - \frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

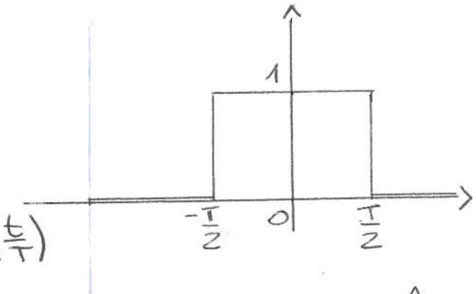
: x^2 $\quad d(u(t-T)) = \delta(t-T)$

: $-x^2$ $\quad$ rect+rect = rect totale
rect−rect = rect non in comune
rect·rect = rect in comune

DERIVATE NOTEVOLI

Trasformate di Fourier notevoli

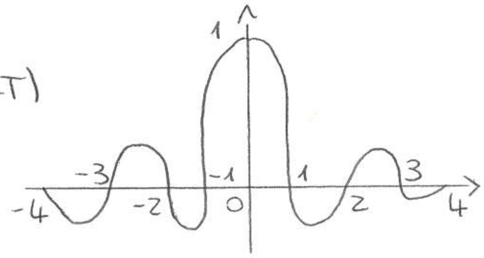
- **impulso rettangolare**[5] (PARI, ALTERNATIVO)



$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad X(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = T\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$

- **seno circolare** (PARI, ALTERNATIVO)



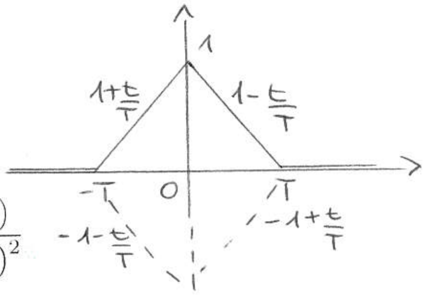
$$x(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad X(f) = T\,\mathrm{rect}(fT)$$

$\mathrm{sinc}^2(t) \Leftrightarrow \Lambda(f)$ $\rightarrow T\Lambda(fT)$

$$x(t) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad X(f) = T\,(1-|f|\,T)\,\mathrm{rect}\left(\frac{fT}{2}\right)$$

$\mathrm{sinc}\,x = 0$ per tutti i valori di x interi

- **impulso triangolare** (PARI, ALTERNATIVO)



$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow x(t) = \left(1-\frac{|t|}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \quad \Rightarrow \quad X(f) = T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x|<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- **impulso cosinusoidale**

$$x(t) = \cos\left(2\pi\frac{t}{2T}\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad X(f) = 2\,\frac{T}{\pi}\,\frac{\cos(\pi fT)}{1-(2fT)^2}$$

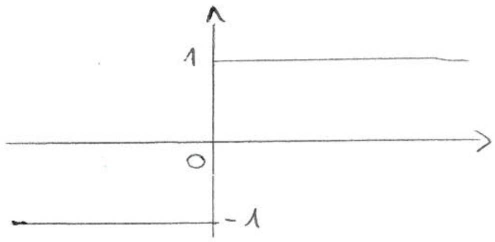
- **impulso cosinusoidale quadrato**

$$x(t) = \cos^2\left(2\pi\frac{t}{2T}\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \frac{T}{2}\,\frac{\mathrm{sinc}(fT)}{1-(fT)^2}$$

- **pettine (treno di impulsi di Dirac)**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_0}\,\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right)$$

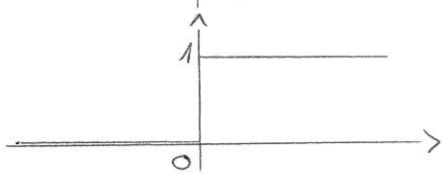
- **funzione segno**



$$\mathrm{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t>0 \\ -1 & \text{se } t<0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{\mathrm{sign}(t)\} = \frac{1}{j\pi f}$$

perche' $\frac{1}{t} \Leftrightarrow -j\pi\,\mathrm{sgn}(f)$

- **gradino unitario**



$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t\geqslant 0 \\ 0 & \text{se } t<0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\,\delta(f)$$

---

[5] La funzione impulso rettangolare $\mathrm{rect}(t)$ è definita nella maniera seguente:

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t|<1/2 \\ 1/2 & \pm 1/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad \mathrm{Sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad u(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \\ 1/2 & x=0 \end{cases}$$

ANTITRASFORMATE

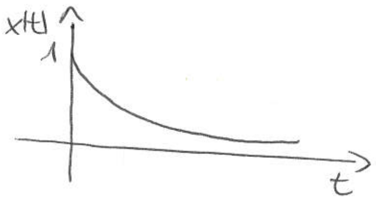
$\mathrm{sinc}^2(fT) \rightarrow \frac{1}{T}\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$; $\mathrm{sinc}^2(fT)\cos(2\pi f t_0) \rightarrow \left(\frac{1}{T}\Lambda\left(\frac{t+t_0}{T}\right) + \frac{1}{T}\Lambda\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}$

$2T\,\mathrm{rect}(2fT) \rightarrow \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2T}\right)$; $\Lambda\left(\frac{f}{T}\right) \rightarrow T\,\mathrm{sinc}^2(Tt)$

FORMULARIO DI TEORIA DEI SEGNALI $e^{-|t|} = e^{-t}\cdot u(t) + e^{t}\cdot u(-t) \Rightarrow \frac{1}{1+2\pi j f} + \frac{1}{1-2\pi j f}$

- **esponenziale unilatero**

$$x(t) = e^{-t/T}\cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \frac{T}{1+j2\pi f T}$$



- **segnale**

$$x(t) = t\,e^{-t/T}\cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \frac{T^2}{(1+j2\pi f T)^2}$$

- **sinusoide smorzata**

$$x(t) = e^{-t/T_1}\sin\left(2\pi\frac{t}{T_2}\right)\cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \frac{2\pi\frac{T_1^2}{T_2}}{\left(2\pi\frac{T_1}{T_2}\right)^2 + (1+j2\pi f T_1)^2}$$

- **segnale gaussiano**

$$x(t) = e^{-t^2/(2T^2)} \quad \Rightarrow \quad X(f) = T\sqrt{2\pi}e^{-2(\pi f T)^2}$$

- **esponenziale bilatero**

$$x(t) = a\,e^{-|t|/T} \quad \Rightarrow \quad X(f) = 2a\frac{\frac{1}{T}}{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + (2\pi f)^2}$$

- **coseno rettificato**

Il segnale *coseno rettificato* $y(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$ é periodico di periodo $\frac{T_0}{2}$, con $T_0 = \frac{1}{f_0}$; tale segnale puó essere visto come la *ripetizione* del *segnale base* $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0/2}\right)$, allora, per la *prima formula di Poisson*, si ha:

$$Y_k = \frac{2}{T_0}X\left(\frac{2k}{T_0}\right) = \frac{\mathrm{sinc}(k+1/2)+\mathrm{sinc}(k-1/2)}{2}$$

- **ripetizione**[6]

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{rept}_T\big(y(t)\big)\right\} = F\,\mathrm{comb}_F\big(Y(f)\big) \qquad \text{con } F = \frac{1}{T} \text{ e } Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\}$$

[6] L'operatore *ripetizione* è definito nella seguente maniera :

$$\mathrm{rept}_{T_0}\big(x(t)\big) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0)$$

e avendo posto:

$$\text{comb}_F\Big(Y(f)\Big) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(kF)\,\delta(f-kF)$$

Vale anche la formula *duale*:

$$\mathcal{F}\Big\{\text{comb}_T\Big(y(t)\Big)\Big\} = F\,\text{rept}_F\Big(Y(f)\Big)$$

Periodicizzazione e formule di somma di Poisson

per determinare lo sviluppo in serie di Fourier

Dato il segnale $\underbrace{\text{aperiodico}}_{\text{DI ENERGIA}}$ $x(t)$, costruiamo il segnale $y(t)$ periodico di periodo T_0:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0)$$

Tale segnale é sviluppabile in serie di *Fourier*, cioé si ha:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

La *prima formula di somma di Poisson* ci dá il legame tra Y_k e la trasformata $X(f)$ del segnale aperiodico $x(t)$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)}_{y_k} e^{j2\pi k \frac{1}{T_0} t}$$

La *seconda formula di somma di Poisson* é:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,e^{-j2\pi nfT} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

Alcuni integrali notevoli

$$\int t^2 e^{-\alpha t} dt = t^2\frac{e^{-\alpha t}}{(-\alpha)} - 2t\frac{e^{-\alpha t}}{(-\alpha)^2} + 2\frac{e^{-\alpha t}}{(-\alpha)^3} + C$$

$$\int t e^{-\alpha t} dt = t\frac{e^{-\alpha t}}{(-\alpha)} - \frac{e^{-\alpha t}}{(-\alpha)^2} + C$$

$$\int t\cos(\alpha t)\,dt = t\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} + \frac{\cos(\alpha t)}{\alpha^2} + C$$

$$\int t\sin(\alpha t)\,dt = -t\frac{\cos(\alpha t)}{\alpha} + \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha^2} + C$$

$$\int e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\,dt = \frac{\beta^2}{\beta^2+(-\alpha)^2}\,e^{-\alpha t}\left[\frac{1}{\beta}\sin(\beta t) + \frac{(-\alpha)}{\beta^2}\cos(\beta t)\right] + C$$

$$\int \text{sen}^2\beta x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\beta}\right)\text{sen}\,2\beta x$$

$$\int \cos^2\beta x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\beta}\right)\text{sen}\,2\beta x$$

$$\int \text{sen}\beta x \cos\beta x\,dx = -\frac{\cos^2\beta x}{2\beta}$$

INTEGRALE PER PARTI:

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

$$\int e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\,d\,t = \frac{\beta^2}{\beta^2+(-\alpha)^2}\,e^{-\alpha t}\left[-\frac{1}{\beta}\cos(\beta t)+\frac{(-\alpha)}{\beta^2}\sin(\beta t)\right]+C$$

$$\int \cos(\alpha t)\cos(\beta t)\,d\,t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+\beta}\sin(\alpha+\beta)t+\frac{1}{\alpha-\beta}\sin(\alpha-\beta)t\right]+C$$

$$\int \cos^2(\alpha t)\cos(\beta t)\,d\,t = \frac{\sin(\beta t)}{2\beta}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\alpha+\beta}\sin(2\alpha+\beta)t+\frac{1}{2\alpha-\beta}\sin(2\alpha-\beta)t\right]+C$$

Energia e potenza di segnali notevoli

$$x(t) = a\,\cos\left(2\pi f_0 t+\varphi\right) \quad\Rightarrow\quad P_x = \frac{a^2}{2}$$

$$x(t) = a\,\sin\left(2\pi f_0 t+\varphi\right) \quad\Rightarrow\quad P_x = \frac{a^2}{2}$$

$$x(t) = v_0 \quad\Rightarrow\quad P_x = v_0^2$$

$$x(t) = a\,e^{-t/T}\cdot u(t) \quad\Rightarrow\quad E_x = \frac{a^2}{2}T$$

$$x(t) = a\,e^{-|t|/T} \quad\Rightarrow\quad E_x = a^2\,T$$

Sistemi monodimensionali a tempo continuo

Definizione

Un sistema viene visto come *funzionale* dell'ingresso, cioè

$$y(t) = \tau\left[x(\alpha)\,;t\right]$$

oppure, se non ci sono ambiguità

$$y(t) = \tau\left[x(t)\right]$$

Proprietà

- **Stazionarietà**: caratteristiche del sistema non variano nel tempo

  Se $y(t) = \tau\left[x(t)\right] \quad\Rightarrow\quad \tau\left[x(t-t_0)\right] = y(t-t_0)$ con τ indipendente dal tempo (costante)

- **causalità**: l'uscita dipende dallo stesso istante o da istanti precedenti dell'ingresso.

  $y(t) = \tau\left[x(\alpha)\,,\alpha\leqslant t;t\right]$ oppure $y(t) = \tau\left[x(\alpha)\cdot u(t-\alpha)\,;t\right]$

- **memoria**

  Un sistema è senza memoria se: è un sistema istantaneo

  $$y(t) = \tau\left[x(\alpha)\,,\alpha = t;t\right]$$

- **stabilità**: ad un ingresso limitato corrisponde un'uscita limitata

  $|x(t)|\leqslant M \quad\Rightarrow\quad |y(t)|\leqslant K$ con $M, K < +\infty$

- **linearità**: il sistema è omogeneo e additivo

  $\tau\left[\alpha\,x_1(t)+\beta\,x_2(t)\right] = \alpha\,y_1(t)+\beta\,y_2(t)$ con $y_1(t) = \tau\left[x_1(t)\right]$ e $y_2(t) = \tau\left[x_2(t)\right]$