

# Quaderno di Teoria dei Segnali

a cura di  
Nicola Auricchio



### Lezione 01

- Cos'è un segnale?
- Come si classificano i segnali in base alla variabile dipendente e ai valori assunti?
- Quando un segnale si dice periodico?
- Quando un segnale si dice deterministico? Quando aleatorio?
- Quando un segnale si dice di energia?
- Quando un segnale si dice di potenza?
- Cos'è la componente continua?
- Che relazione di implicazione c'è tra l'essere segnali di potenza e essere di energia
- Dimostrare la formula veloce per calcolare la potenza o la componente continua di un segnale periodico

### Lezione 02

- Definizioni e proprietà dei segnali notevoli (gradino, esponenziale monolatero, segnale sinusoidale, esponenziale complesso, funzione segno, esponenziale monolatero a tempo discreto)
- Esprimere la rappresentazione in forma polare di un segnale periodico reale
- Esprimere la rappresentazione in forma complessa di un segnale periodico passando per la forma polare
- Dimostrare l'equazione di sintesi della rappresentazione in forma complessa (  $X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$  )
- Esprimere la rappresentazione in forma rettangolare di un segnale periodico passando per la forma polare
- Dimostrare le relazioni che legano i coefficienti degli sviluppi in serie in forma complessa e rettangolare
- Esprimere le condizioni di Dirichlet
- Convergenza in Media Quadratica
- Dimostrare che sotto ipotesi di convergenza in media quadratica la potenza è uguale al modulo quadro dei coefficienti

### Lezione 03

- Simmetria Hermitiana
- Linearità
- L'andamento dei coefficienti per  $k \rightarrow \infty$  varia come...
- Dimostrare che se  $x(t)$  è pari,  $X_k$  è pari
- Se  $x(t)$  è reale e pari allora...
- Dimostrare le formule semplificate nel caso in cui il  $x(t)$  è pari
- Se  $x(t)$  è reale e pari a cosa somiglia la formula di sintesi semplificata?
- Se  $x(t)$  è dispari...?
- Dimostrare le formule semplificate nel caso in cui il  $x(t)$  è dispari
- Se  $x(t)$  è reale e dispari allora...
- Se  $x(t)$  è dispari e reale a cosa somiglia la formula di sintesi semplificata?
- Quando un segnale si dice Alternativo?
- Dimostrare l'espressione dei coefficienti dello sviluppo in serie di un segnale Alternativo

### Lezione 04

- Intro Trasformata di Fourier
- Definizione Antitrasformata di Fourier
- Definizione Trasformata di Fourier
- Convergenza in Media Quadratica
- Condizioni di Dirichlet
- Proprietà di Simmetria degli Spettri

### Lezione 05

- Teo Linearità
- Teo Dualità
- Teo Ritardo
- Teo Modulazione (interpretazione)
- Teo Derivazione (interpretazione)

- Teo Integrazione Incompleto (vedere bene quando è applicabile)
- Definizione, interpretazione e proprietà della Convoluzione
- Teorema Prodotto
- Teorema Convoluzione

## Lezione 06

- Intro alla  $\delta$
- Proprietà di Campionamento
- $x(t)\delta(t-t_0) = \dots?$
- Dimostrare che la  $\delta$  è pari
- Dimostrare che la  $\delta$  è l'elemento neutro rispetto alla convoluzione
- $\int_a^b \delta(t) dt = \dots?$
- Cambiamento di scala della  $\delta$
- Trasformata della  $\delta$
- Trasformata di  $\frac{1}{t}$
- Trasformata di  $\text{sgn}(t)$
- Trasformata di  $u(t)$
- Teorema di integrazione Completo
- Trasformata di segnali periodici
- Trasformata del Pettine di Dirac
- Enunciare e dimostrare la 1^ Formula di Poisson
- Enunciare e dimostrare la 2^ Formula di Poisson

## Lezione 07

- Cos'è un sistema?
- Quando un sistema si dice Stazionario?
- Quando un sistema si dice Causale? (tempo reale, fisica realizzabilità e tempo virtuale)
- Quando un sistema è con o senza Memoria?
- Quando un sistema si dice Stabile?
- Quando un sistema si dice Invertibile?
- Quando un sistema si dice Lineare?
- Cos'è la Risposta Impulsiva di un SLS?
- Dimostrare che l'uscita di un SLS è la convoluzione tra  $h(t)$  e l'ingresso
- Dimostrare che un SLS è Causale  $\Leftrightarrow h(t)$  è un segnale causale
- Dimostrare che un SLS è Stabile  $\Leftrightarrow h(t)$  è Sommabile
- Cos'è la Risposta in Frequenza? (3 definizioni)
- Come è detta  $e^{j2\pi ft}$  nell'ambito dei SLS?
- Se in ingresso a un SLS metto  $x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \phi)$  qual è l'uscita in termini della  $H(f)$ ? (o anche seno)
- Un SLS non crea frequenze infatti...
- Introdurre il Decibel e la Frequenza di Taglio a 3 dB

## Lezione 08

- SLS in cascata
- SLS in parallelo
- Filtro Passa-Basso Ideale?
- Spiegare perchè sono detti "filtri ideali" (...nella pratica...?). Quali sono i problemi dei filtri quando sono ideali?
- Filtro Passa-Alto Ideale
- Filtro Passa-Banda Ideale (...diversi parametri attraverso cui si caratterizza...fattore di merito...)
- Filtro Elimina-Banda Ideale (...filtro notch)
- Criterio di Paley-Wiener
- (Intro durata e banda) Limite di Banda a 3 dB e Durata a Metà Ampiezza
- Banda Efficace, Durata Efficace (+ Disuguaglianza che le mette in relazione)
- Quando un filtro LS NON è distorcente? (guarda esempi all'inizio della lezione dopo)

## Lezione 09

- Equalizzatore
- Teorema di Parseval
- Cos'è la Densità Spettrale di Energia? Quali sono le sue 3 proprietà? Come si ricava  $E_y(f)$  noti  $E_x(f)$  e  $H(f)$ ? Giustificazione del nome di "densità".
- Banda al 99% dell'Energia
- Definizione e Interpretazione della Funzione di Autocorrelazione per segnali di energia (sia reali che complessi)
- Teorema di Wiener-Khintchine (sia caso reale che caso complesso)
- Enunciare e Dimostrare le 3 Proprietà della Funzione di Autocorrelazione per segnali di energia
- Cos'è la Densità Spettrale di Potenza? Quali sono le sue 3 proprietà?
- Definizione della Funzione di Autocorrelazione per segnali di potenza (sia reali che complessi)
- Enunciare e Dimostrare le 3 Proprietà della Funzione di Autocorrelazione per segnali di potenza

## Lezione 10

- Spiegare la definizione della funzione di Autocorrelazione per segnali periodici a partire da quella per segnali in generale di potenza
- Densità di potenza e Potenza di un segnale periodico a partire dalla funzione di autocorrelazione (scrivere la potenza anche in forma polare e fare le necessarie considerazioni)
- Di quali sistemi ci occupiamo nell'ambito del "non lineare"?
- Introdurre le Distorsioni NonLineari (fino al fenomeno di intermodulazione)
- Nonlinearità Parassita (esempio amplificatore)
- Nonlinearità Essenziale (esempio sistema sinusoidale -> segnale costante)
- (Introduzione misura delle distorsioni) Distorsione di k-esima armonica
- Coefficiente di Distorsione di k-esima armonica
- Coefficiente di Distorsione Armonica Totale

## Lezione 12

- Definizioni e proprietà delle sequenze
- Sequenze notevoli
- Quando un esponenziale complesso è periodico?
- Trasformata di Fourier di una sequenza periodica in termini della frequenza normalizzata e denormalizzata (qual è rispettivamente il loro periodo?)
- Antitrasformata di Fourier in termini della frequenza normalizzata e denormalizzata
- Dimostrare la definizione di antitrasformata
- Condizioni di convergenza
- Trasformata di  $\delta[n]$
- Trasformata della finestra rettangolare di durata N (fallo anche col teo della sequenza somma (inizio prox lez))
- Definizione di convoluzione tra sequenze
- Definizione di convoluzione periodica tra segnali a tempo continuo
- Teoremi di : linearità, ritardo, modulazione, somma di convoluzione, prodotto

## Lezione 13

- Teorema dell'incremento e teorema della sequenza somma
- Trasformata della finestra rettangolare di durata N tramite il teorema della sequenza somma
- Qual è la relazione che lega la trasformata del segnale campionato e la trasformata del segnale analogico originario
- In cosa consiste il fenomeno dell'aliasing?
- Cos'è la condizione di Nyquist?
- Come si "filtra più agevolmente"?
- Quando e perchè si pratica il filtraggio antialiasing?
- Trasformata di Fourier del segnale costante
- Trasformata di Fourier dell'esponenziale discreto
- Trasformata di Fourier di seno e coseno discreti
- Antitrasformata del treno di rect
- Cos'è l'interpolazione?
- In cosa consiste l'interpolazione di ordine 0? Quali distorsioni di ampiezza introduce? Come si risolve il problema in teoria e in pratica?
- In cosa consiste l'interpolazione cardinale? Perchè non è realizzabile?

- Enunciare il teorema di campionamento

#### Lezione 14

- In quale caso, campionando un segnale analogico periodico, si ottiene una sequenza periodica?
- Definizione della IDFT
- Definizione della DFT (periodica di periodo...?)
- Differenze ed analogie con la rappresentazione in serie di segnali analogici periodici
- Che complessità ha la FFT?
- Dimostrare l'equazione della DFT
- Convoluzione periodica di sequenze
- Enunciare e dimostrare il Teo del Prodotto
- Enunciare e dimostrare il Teo della Convoluzione
- Enunciare e Dimostrare la Periodicizzazione di sequenze aperiodiche
- Analogie tra DFT e Trasformata
- Convoluzione Veloce

#### Lezione 17

- Cos'è un esperimento aleatorio?
- Cos'è uno spazio campione?
- Cos'è la classe degli eventi? Descrive tutte le proprietà
- Cos'è una legge di probabilità?
- Cos'è lo spazio di probabilità (o esperimento aleatorio)?
- In cosa consiste l'approccio di Kolmogorov?
- Enunciare e dimostrare le proprietà che discendono direttamente dagli assiomi di Kolmogorov
- Definire la probabilità condizionata
- Quando due eventi sono indipendenti?
- Descrivere l'approccio frequentista
- Descrivere l'approccio classico
- Enunciare e dimostrare la legge di Bayes
- Enunciare e dimostrare il teo della Probabilità Totale
- Esperimento aleatorio composto
- Spiegare le prove di Bernoulli e la formula della Distribuzione Binomiale

#### Lezione 18

- Cos'è una Variabile Aleatoria?
- Cos'è una CDF?
- Quando una v.a. è completamente caratterizzata da un punto di vista statistico?
- Quali sono le proprietà della CDF?
- Quando una v.a. è continua, discreta o mista?
- Cos'è una PDF?
- Quali sono le proprietà della PDF?
- Interpretazione/ giustificazione del fatto che si chiama densità
- PDF di una v.a discreta
- v.a uniforme
- v.a esponenziale
- v.a di Poisson

#### Lezioni 19

- Trasformazione di una v.a (Teorema Fondamentale)
- Come si definisce la media di una v.a (anche caso discreto)
- Teorema della Media (+ proprietà di linearità della media)
- Valore Quadratico Medio (...Momento di ordine n)
- Definizione di varianza (e deviazione standard)
- Disuguaglianza di Markov
- Disuguaglianza di Cebyshev

•

## Lezione 20

- Media e varianza della variabile esponenziale
- Media e varianza della variabile uniforme
- V.a Gaussiana (Gaussiana standard, la CDF, la  $\phi$ , la Q-function)
- V.a Condizionate

## Lezione 21

- CDF Congiunta di una coppia di v.a.
- Proprietà della CDF Congiunta
- PDF Congiunta
- Giustificazione del nome di "densità congiunta"
- Proprietà della PDF Congiunta
- CDF e PDF Condizionate (Legge di Fattorizzazione)
- Analogo per le densità congiunte della Legge di Bayes
- Se le variabili sono indipendenti...
- Singola v.a. Funzione di coppia di v.a.
- Esempio classico:  $Z=X+Y$  (soma tra indie, somma tra Gaussiane indie)
- Tecnica della Variabile Ausiliaria
- Legge della Probabilità Totale per le Densità
- Analogo della Legge di Bayes modificata da quest ultimo risultato
- Teorema della Media Condizionata (...e se sono indie?)
- Trasformazione in "variabili polari"
- "quella cosa sullo jacobiano della trasformazione inversa"
- Trasformazione in "variabili polari" con X e Y indie, Gaussiane. con  $\eta$  nulla e stessa  $\sigma$

## Lezione 22

- Come si ottiene la caratterizzazione sintetica di una coppia di v.a.?
- Cos'è la Correlazione?
- Come si dicono le variabili quando  $R_{XY}=0$  ?
- Dimostrare che  $|E[XY]| \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$
- Cos'è l'Indice di Correlazione?
- Cos'è la Covarianza? (Interpretazione)
- Come si dicono due variabili quando  $C_{XY}=0$  ?
- Come si scrive la Covarianza in relazione alla Correlazione?
- Dimostrare che Indipendenza  $\Rightarrow$  Incorrelazione
- Da cosa è maggiorata la Correlazione?
- Dimostrare che la Varianza di una somma è uguale alla somma delle varianze più il doppio della covarianza
- $|\rho_{XY}| \Leftrightarrow \dots$ ?
- Stima Lineare di una v.a. a partire da un'altra
- Stima Costante di una v.a. a partire da un'altra
- Stima Non Lineare di una v.a. a partire da un'altra
- Tutto il discorso su n variabili aleatorie

## Lezione 23

- Quando n variabili aleatorie si dicono congiuntamente gaussiane?
- Spiegare tutte le proprietà sulle v.a.c.g.
- Enunciare e spiegare il Teorema Centrale del Limite
- Cos'è un Processo Aleatorio?
- Cos'è un Processo Parametrico?
- Caratterizzazione di un Processo Aleatorio
- Indici Statistici Sintetici del primo ordine per i p.a.

## Lezione 24

- Indici Statistici Sintetici del 2° ordine
- Le varie stazionarietà con le rispettive conseguenze
- Proprietà dell'Autocorrelazione
- Filtraggio di un p.a

## **Lezione 25**

- Tutti i cuoli di cazzo riguardanti la Densità Spettrale di potenza
- Filtraggio e Densità Spettrale di potenze
- Giustificazione del nome di "densità"
- Rumore Bianco
- Banda Equivalente di Rumore
- Processi Gaussiani



27/02/12

1

- Se due **SEGNALI** ma qualunque grandezza fisica variabile cui è associata un'informazione

Possono essere rappresentati mediante una funzione matematica di una o più variabili

- Una prima classificazione dei segnali può essere fatta in base al valore assunto dalle variabili indipendenti.  
Distinguiamo infatti tra:

- segnali **A TEMPO CONTINUO**, per i quali il dominio della funzione ha la cardinalità di  $\mathbb{R}$  (non numerabile).  
La variabile indipendente può assumere con continuità tutti i valori compresi entro un certo intervallo, eventualmente illimitato.  
Il simbolo usato per la variabile indipendente è  $t$  (tempo)  
e i segnali saranno  $x(t)$ ,  $y(t)$ ...

- segnali **A TEMPO DISCRETO**, per i quali il dominio della funzione ha la cardinalità dell'insieme discreto  $\mathbb{N}$  (numerabile).  
In matematica vengono chiamati successioni, nelle descrizioni dei segnali sono **SEQUENZE** e indicati con espressioni del tipo  $x[n]$ ,  $y[n]$ , ...

- Una classificazione analogica può essere condotta sulla base dei valori assunti dal segnale stesso:

- segnali **AD AMPIEZZA CONTINUA** che possono assumere con continuità tutti i valori reali di un intervallo (eventualmente illimitato)

- segnali **AD AMPIEZZA DISCRETA**, avendo come supporto un insieme numerabile eventualmente illimitato.

- Se hanno quindi quattro tipologie di segnali:

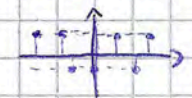
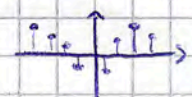
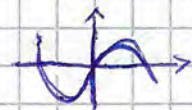
- segnali a tempo e ampiezza continui detti **ANALOGICI**

- segnali a tempo continuo e ampiezza discreta detti **QUANTIZZATI**

- segnali a tempo discreto e ampiezza continua (sequenze a valori reali)

- segnali a tempo e ampiezza discreti detti **NUMERICI** o **DIGITALI**

(in realtà c'è bisogno che il supporto sia limitato oltre che discreto, così che sia un insieme finito, o almeno)



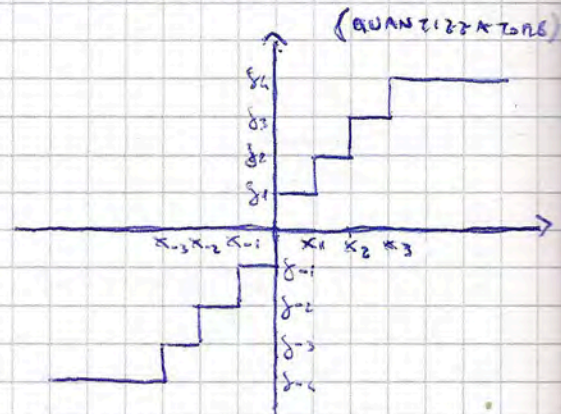


- La trasformazione di un segnale analogico in un segnale digitale porta attraverso due fasi:

1) **CAMPIONAMENTO**: Si considera il segnale analogico solo in certi istanti, costruendo la sequenza (a valori reali)  
 $x[n] = x(nT_c)$ .  $T_c$  è detto PERIODO DI CAMPIONAMENTO

2) **QUANTIZZAZIONE**: Si riduce il valore di  $x[n]$  a un numero finito di intervalli, a ciascuno dei quali viene associato un valore  $y$  pari al valore medio di  $x[n]$  nell'intervallo

(I valori  $y$  sono detti LIVELLI)



Quindi otteniamo una sequenza  $y[n]$  a tempo continuo e ampiezza discreta (finita) cioè un segnale numerico.

- Se il segnale va codificato in binario ovvero binary di un numero di bit:

$n = 2^M \geq$  numero livelli

Esempio:

segnale telefonico: 8000 campioni al secondo  
256 livelli

↓  
8 bit  $\Rightarrow$  64 Kb/s

- Ci chiediamo se nella trasformazione analogico  $\rightarrow$  digitale esiste PERDITA DI INFORMAZIONI.

Il concetto è legato a quello di **REVERSIBILITÀ**, e questo, qualora sia possibile ottenere il segnale di partenza, significa che non c'è stata perdita di informazioni.

Durante la fase di campionamento, sotto certe ipotesi, può non perdere l'informazione (stendere più eventi e tempi)

e in questo caso, da un segnale campionato si può ottenere il segnale di partenza. Questo procedimento si sotto il nome di **INTERPOLAZIONE**

La quantizzazione è irreversibile.