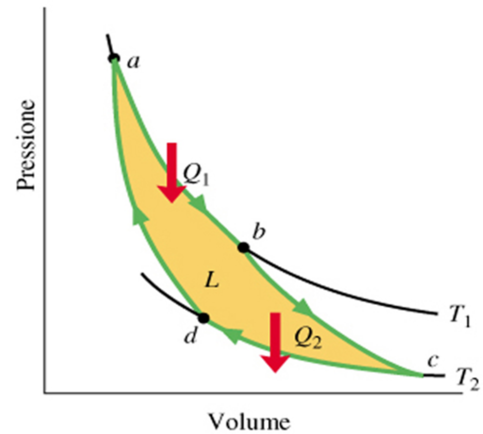
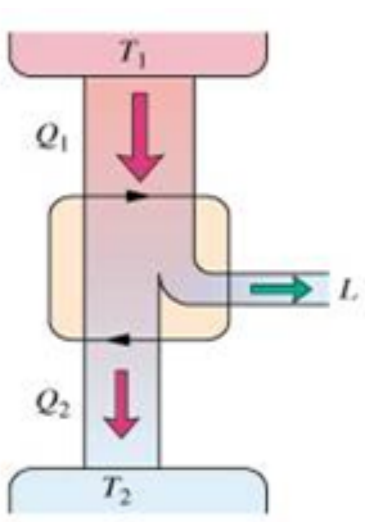
# Riassunto: macchina termica ideale (di Carnot)

La macchina di Carnot è formata da un ciclo in un gas perfetto, costituito da due trasformazioni isoterme ($ab$ e $dc$ in figura) e due adiabatiche ($bc$ e $da$ in figura).
E' il prototipo ideale della *macchina termica*, che trasforma cioè calore in lavoro. Le sue principali proprietà sono:




- è reversibile (le quattro trasformazioni lo sono)
- lavora fra due sole sorgenti a temperatura $T_2$ e $T_1 > T_2$
- per i calori scambiati vale $\frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{T_1}{T_2}$ (le temperature sono assolute)
- il lavoro prodotto in un ciclo è $L = |Q_1| - |Q_2|$
- il rendimento, definito come lavoro prodotto su calore assorbito, $\eta = \frac{L}{|Q_1|}$, vale $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ ed è sempre $\eta < 1$ ($\eta = 1$ solo per $T_2 = 0$ o $T_1 = \infty$).

# Rendimento di macchine termiche ed enunciato di Kelvin

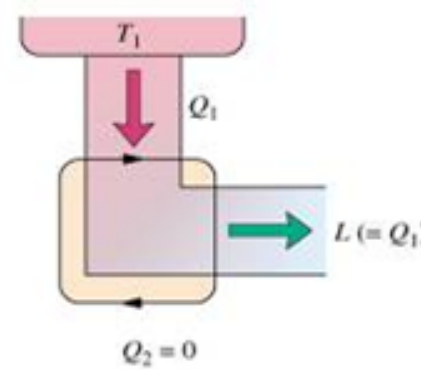



In una macchina termica viene fornito del calore $Q_1$ e prodotta energia meccanica come lavoro $L$. La qualità di tale trasformazione è misurata dal *rendimento* $\eta$ definito come

$$\eta = \frac{\text{energia ottenuta}}{\text{energia assorbita}} = \frac{L}{|Q_1|}$$

$\eta < 1$ sempre, anche per macchine ideali: parte del calore fornito alla macchina ($Q_1$) è *sempre* ceduto ($Q_2$) alla sorgente a temperatura più bassa; di conseguenza il lavoro prodotto $L$ potrà al più essere pari alla differenza tra i due.

Si arriva quindi alla conclusione che non potrà *mai* essere realizzato il motore perfetto (vedi schema qui accanto), in cui il calore prelevato da *un'unica sorgente* è completamente trasformato in lavoro. Tale conclusione porta in modo naturale al seguente enunciato alternativo della seconda legge della termodinamica (*enunciato di Kelvin*):




*Non esiste un ciclo termodinamico avente come unico risultato l'acquisizione di calore da un'unica sorgente termica e la sua totale trasformazione in lavoro*

# Entropia come funzione di stato ed enunciato di Kelvin

Consideriamo un ciclo $S$ in cui si scambiano i calori $Q_i, i = 1, .., n$ con $n$ sorgenti a temperatura $T_i$. Dimostriamo la seguente disuguaglianza:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0,$$

dove l'uguaglianza vale se il ciclo è reversibile, la disuguaglianza altrimenti.

Introduciamo $n$ cicli di Carnot $C_i$ che lavorano fra ogni $T_i$ e un $T_0$ arbitrario, scambiando calore $-Q_i$ con ogni sorgente a temperatura $T_i$. Il calore scambiato da ogni ciclo con la sorgente a $T = T_0$ sarà $Q_{0i} = \frac{T_0}{T_i} Q_i$.

Consideriamo il ciclo $S$ e tutti i cicli $C_i$. La sorgente a $T = T_0$ scambia un calore $Q_0 = \sum_{i=1}^{n} -Q_{0i} = -T_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i}$. Le altre sorgenti scambiano in totale un calore nullo.

Se $Q_0 < 0$, *l'unico* risultato finale è che la sorgente a $T_0$ cede calore che è trasformato in lavoro, ma ciò *non è possibile* secondo l'enunciato di Kelvin. Necessariamente, $Q_0 \geq 0$, da cui la dimostrazione della disuguaglianza.

Se il ciclo è reversibile, basta farlo girare in senso opposto per trovare che $Q_0 = 0$.

# Entropia ed enunciato di Kelvin

Se un ciclo è reversibile, le temperature del sistema e della sorgente di calore sono uguali. Su tale ciclo

$$\Delta S = \oint_{rev} \frac{dQ}{T} = 0.$$

Ciò equivale ad affermare che la $S$ come l'abbiamo definita:

$$S_B - S_A = \int_{A,rev}^{B} \frac{dQ}{T}$$

è una funzione dello stato del sistema. Se il ciclo è irreversibile, si ha invece

$$0 = \Delta S > \oint_{irr} \frac{dQ}{T},$$

da cui, supponendo che il ciclo abbia una parte irreversibile da A a B e una parte reversibile da B ad A:

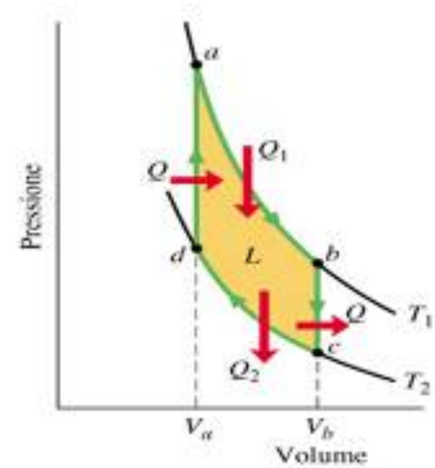
$$S_{AB} > \int_{A,irr}^{B} \frac{dQ}{T}.$$

Se $dQ = 0$, riotteniamo l'enunciato "entropico" del secondo principio.

# Rendimento di altre macchine termiche I

Tutte le trasformazioni sono assunte reversibili e su di un gas ideale.

*Ciclo di Stirling* - costituito da due isoterme e due isocore.
Il calore è scambiato in tutte e quattro le trasformazioni. Per le due isoterme,




$$Q_1 = nRT_1 \log \frac{V_b}{V_a}, \qquad Q_2 = nRT_2 \log \frac{V_a}{V_b}$$

Notare che $Q_1 = -\frac{T_2}{T_1} Q_2$ come per il ciclo di Carnot.

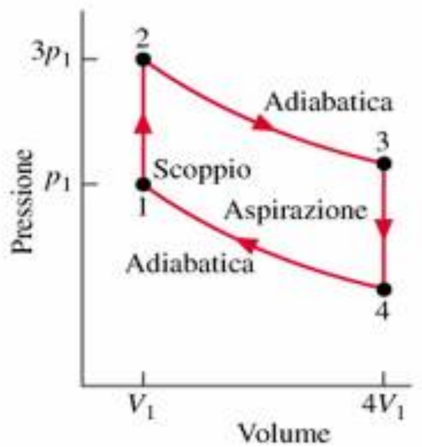
Per le due isocore, il calore scambiato è lo stesso in valore assoluto:

$$Q = nc_v(T_1 - T_2)$$

Il rendimento $\eta_s$ di tale ciclo è inferiore a quello del ciclo di Carnot $\eta_c$:

$$\eta_s = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1| + |Q|} = \frac{(|Q_1| - |Q_2|)/|Q_1|}{(|Q_1| + |Q|)/|Q_1|} = \frac{\eta_c}{1 + |Q|/|Q_1|} < \eta_c$$

# Rendimento di altre macchine termiche II




*Ciclo Otto (motore a 4 tempi)* – Non contiene isoterme ma due isocore e due adiabatiche. Il calore è assorbito nella trasformazione $1 \to 2$: $Q_{1,2} = \Delta E_{int,12} = nc_V(T_2 - T_1)$, ceduto nella trasformazione $3 \to 4$: $Q_{3,4} = nc_V(T_4 - T_3)$. Il lavoro è svolto nelle trasformazioni $2 \to 3$ e $4 \to 1$: $L = L_{23} + L_{41}$.

$$L = -(\Delta E_{int,23} + \Delta E_{int,41}) = -nc_V(T_3 - T_2) - nc_V(T_1 - T_4)$$

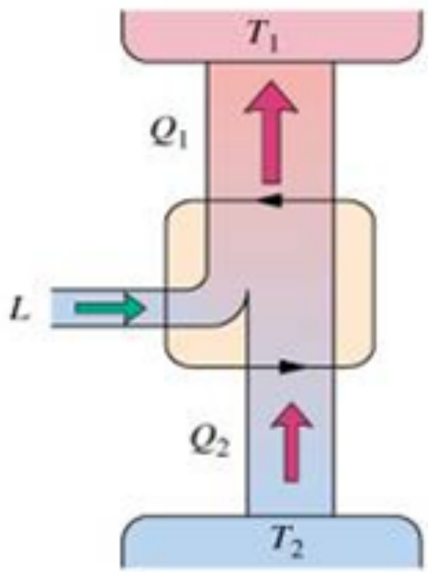
Il rendimento è dunque $\eta_o = \dfrac{L}{|Q_{1,2}|} = \dfrac{nc_V(T_2 - T_1 + T_4 - T_3)}{nc_V(T_2 - T_1)} = 1 - \dfrac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1}$

Ricordando che per una trasformazione adiabatica $TV^{\gamma-1}$=cost., si trova $T_1V_1^{\gamma-1} = T_4V_4^{\gamma-1}$, $T_2V_2^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1}$, ma $V_1 = V_2$, $V_3 = V_4$, da cui $(T_1 - T_2)V_2^{\gamma-1} = (T_4 - T_3)V_3^{\gamma-1}$ e infine

$$\eta_o = 1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\frac{c_p}{c_V}-1}$$

Il rapporto $V_2/V_3$ è detto *rapporto di compressione*.

# Macchine frigorifere




Una macchina termica che trasferisce calore da una sorgente fredda ad una sorgente calda costituisce una *macchina frigorifera* (o *frigorigena*). Una macchina di Carnot che funziona “al contrario” è una macchina frigorifera. Lo schema a lato precisa le relazioni tra il lavoro che si deve fornire alla macchina frigorifera e i calori scambiati con le sorgenti termiche.
L'*efficienza* di una macchina frigorifera è misurata dal parametro

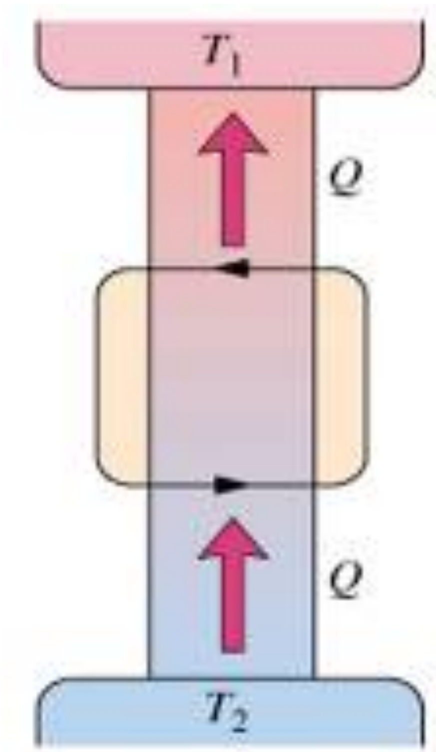
$$\boxed{\varepsilon = \frac{\text{energia utile}}{\text{energia assorbita}} = \frac{|Q_2|}{L}}$$

Per il frigorifero di Carnot abbiamo

$$\varepsilon_c = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{T_2/T_1}{1 - (T_2/T_1)} = \frac{1 - \eta_c}{\eta_c} = \frac{1}{\eta_c} - 1$$

dove $\eta_c$ è il rendimento della macchina di Carnot quando funziona nel verso usuale.
$\varepsilon_c > 0$ sempre. Notare che $\varepsilon_c$ è tanto maggiore quanto minore è $\eta_c$.

# Secondo principio, enunciato di Clausius




Così come il motore perfetto, anche il frigorifero perfetto (schematizzato qui a fianco) *non esiste*. Infatti, in tal caso la variazione di entropia complessiva del sistema (sorgenti termiche + gas) sarebbe pari a

$$\Delta S = -\frac{|Q|}{T_2} + \frac{|Q|}{T_1} < 0$$

in contrasto con la seconda legge della termodinamica (dato che il sistema è chiuso).

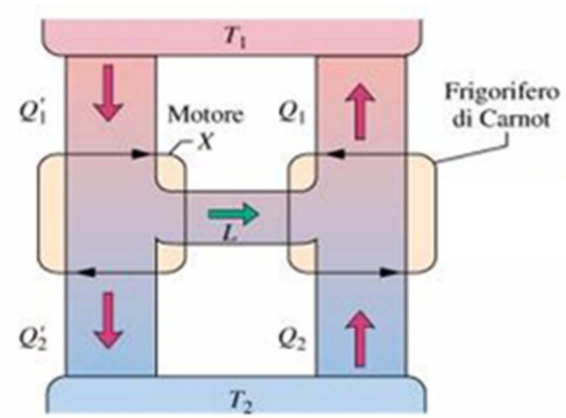
Questo porta al seguente enunciato alternativo (*di Clausius*) della seconda legge:

*Non esiste una trasformazione il cui unico risultato è il trasferimento di calore da una sorgente a temperatura più bassa ad una a temperatura più alta*

Gli enunciati di Clausius e di Kelvin sono equivalenti: è immediato dimostrare che l'uno implica l'altro.

# Rendimento delle macchine reali

Tra tutte le macchine termiche *che operano tra due sole temperature* $T_1$ e $T_2$ (con $T_1 > T_2$), la macchina di Carnot è quella con il rendimento più elevato.

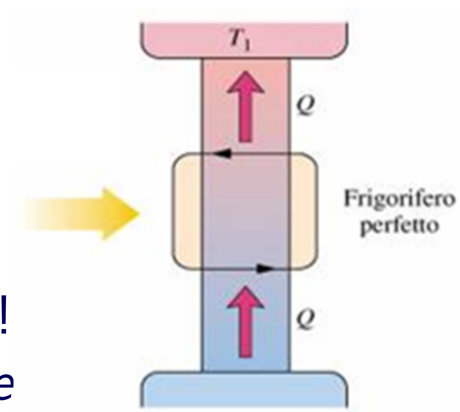



Supponiamo di avere una macchina di rendimento $\eta_x > \eta_c$. Accoppiamola a un frigorifero di Carnot operante tra le stesse temperature e che utilizza tutto il lavoro prodotto dalla nostra macchina. Otteniamo una macchina che: (1) non utilizza lavoro esterno e che, (2) scambia le quantità di calore $|Q_1'| - |Q_1|$ e $|Q_2'| - |Q_2|$ con le sorgenti alle temperature $T_1$ e $T_2$

Dato che il lavoro prodotto dalla macchina termica è pari a quello utilizzato dal frigorifero di Carnot, $|Q_1| - |Q_2| = |Q_1'| - |Q_2'|$, da cui $|Q_1| - |Q_1'| = |Q_2| - |Q_2'| = Q$.

Se $\eta_x > \eta_c$ abbiamo

$$\eta_x > \eta_c \quad \Rightarrow \quad \frac{|L|}{|Q_1'|} > \frac{|L|}{|Q_1|} \quad \rightarrow \quad Q = |Q_1| - |Q_1'| > 0$$




Ma in questo modo, avremmo costruito un frigorifero perfetto! *Nessuna macchina termica reale che lavora fra due temperature può avere un rendimento superiore a quella di Carnot.*