

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Scritto d'esame di Analisi Matematica I

Pisa, 8 Gennaio 1999

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{n^{\alpha}} - \sin \frac{1}{n^{2\alpha-1}} \right)$$

al variare del parametro $\alpha > 1/2$.

2. Sia

$$f(x) = \log \left(1 + \frac{\sin^3 x}{2} \right).$$

- (a) Determinare la derivata sesta e la derivata settima della funzione $f(x)$ nel punto $x = 0$.
- (b) Dire se esistono, ed in caso affermativo calcolare, il massimo ed il minimo di $f(x)$ al variare di x in \mathbb{R} .
- (c) Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{dx}{[f(x)]^{\alpha}}$$

converge.

3. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x^2 + x}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$4f^2(x) - 4f(x) + 1 > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrare che se $f(x_0) = 0$ per un qualche $x_0 \in \mathbb{R}$, allora f è limitata superiormente in \mathbb{R} .

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Scritto d'esame di Analisi Matematica I

Pisa, 11 Gennaio 1999

1. Dire se esiste, ed in caso affermativo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cosh x - 2}{\sin^2 x \cdot \ln^2(1 + x + x^2)}.$$

2. (a) Risolvere la disequazione

$$x^2 + |x|^5 \leq 2x$$

e determinare per quali valori di x si ha l'uguaglianza.

- (b) Studiare la successione definita per ricorrenza da

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + |a_n|^5}{2} \quad a_1 = \alpha$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (c) Nel caso particolare $\alpha = 1/2$, studiare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x} + 3 \arctan x$.

- (a) Calcolare estremo superiore ed inferiore di $f(x)$ al variare di x in $]0, +\infty[$, precisando se si tratta, rispettivamente, di massimo e minimo.
- (b) Stessa domanda al variare di x in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- (c) Calcolare (se esiste) il limite della successione

$$a_n = \frac{1}{n} \int_1^n f^2(t) dt.$$

4. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dimostrare che se f ammette derivata seconda strettamente positiva in $[a, b]$, allora f assume il valore massimo in uno degli estremi dell'intervallo. Vale lo stesso risultato se f'' è soltanto non-negativa?

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Scritto d'esame di Analisi Matematica I

Pisa, 1 Febbraio 1999

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 3^\alpha}{2^{\alpha n} + n^{2-\alpha}}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^5}{x^4 - 1}$$

e tracciarne un grafico approssimativo. Determinare in particolare il “dominio”, il segno, le zone di crescita/decrecenza, concavità/convessità, gli eventuali punti di massimo/minimo locale/globale e di flesso, le equazioni degli eventuali asintoti.

3. Dire se esiste (ed in caso affermativo calcolare) il

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} \int_x^1 \frac{\sqrt{e^t} - \cosh \sqrt{t}}{t^3} dt.$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che ammette derivata prima e seconda continue.

- (a) Dimostrare che se $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, allora f' si annulla in almeno due punti e f'' si annulla in almeno un punto.
- (b) Quale delle conclusioni del paragrafo (a) continua a valere se si assume che $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$?
- (c) Quale delle conclusioni del paragrafo (a) continua a valere se si assume che $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$?

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Scritto d'esame di Analisi Matematica I

Pisa, 15 Febbraio 1999

1. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x = \lambda x^2$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Studiare il comportamento della successione definita per ricorrenza da

$$a_{n+1} = \frac{1999 a_n}{\sqrt{n}}, \quad a_1 = 14.$$

Studiare quindi il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n.$$

3. Dire se esiste (ed in caso affermativo calcolare) il

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\arctan x} + \frac{1}{\sin x} - \frac{\alpha}{x} \right),$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Studiare il comportamento degli integrali impropri

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4 - 1} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 - 1} dx,$$

e, nel caso in cui convergano, determinarne il valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Scritto d'esame di Analisi Matematica I

Pisa, 31 Maggio 1999

1. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \sqrt{n^2 + 4} \right) \left(n^2 \sin \frac{1}{n} - n \sin \frac{1}{n^2} \right).$$

2. Dimostrare che $x^4 - 1 \leq x^{12}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Determinare quindi la più piccola costante $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$x^4 - 1 \leq \lambda x^{12}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da:

$$a_{n+1} = \frac{a_n(\sin a_n + 3)}{\sqrt{n}}, \quad a_1 = 1999.$$

- (a) Dimostrare che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Calcolare il limite di a_n .
- (c) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} a_n$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Studiare il comportamento dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{|x|^3 + x^4}} dx.$$

Nel caso in cui converga, calcolarne il valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Scritto d'esame di Analisi Matematica I

Pisa, 21 Giugno 1999

1. Studiare il comportamento dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{3\alpha}} dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^4 + 1} - 1}{\sqrt[n]{n^3 + 1} - 1}.$$

3. (a) Studiare il comportamento della successione definita per ricorrenza da:

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n, \quad a_1 = \alpha,$$

nei due casi particolari $\alpha = -3$ e $\alpha = 1/3$.

- (b) Dire se esistono (ed in caso affermativo determinare) dei valori di α per cui $a_n \rightarrow 0$.

4. Consideriamo l'equazione

$$n \arctan x = \frac{1}{x^2}.$$

- (a) Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, tale equazione ammette un'unica soluzione x_n strettamente positiva.
- (b) Dimostrare che la successione x_n è monotona e calcolarne il limite.
- (c) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Scritto d'esame di Analisi Matematica I

Pisa, 12 Luglio 1999

1. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione

$$f(x) = \arctan(x - 50 \arctan x)$$

al variare di x in $[0, +\infty[$, precisando se si tratta, rispettivamente, di massimo e minimo.

2. Determinare per quali valori reali dei parametri α, β, γ , il

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\alpha x} + \beta \cos \sqrt{x} + \gamma \sin^2 x}{x^3}$$

esiste ed è reale.

3. (a) Risolvere la disequazione

$$\ln(1 + x^2) \leq x$$

e determinare per quali valori di x si ha l'uguaglianza.

- (b) Studiare la successione definita per ricorrenza da

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n^2) \quad a_1 = 1999.$$

- (c) Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. Studiare il comportamento degli integrali impropri

$$\int_0^5 \frac{dx}{x\sqrt{|x-3|}}, \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{|x-3|}},$$

e, nel caso in cui convergano, determinarne il valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Scritto d'esame di Analisi Matematica I

Pisa, 6 Settembre 1999

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^{\alpha} + 1} - n^2)$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sin^3 x - \sin x^3.$$

Calcolare $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{IV}(0)$, $f^V(0)$. Stabilire se nel punto $x = 0$ la funzione data ha un massimo relativo, un minimo relativo, oppure un flesso.

3. (a) Determinare la più piccola costante $\lambda > 0$ tale che

$$4x^4 + 3 \leq \lambda e^{x^2}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ (se serve, utilizzare il fatto che $e\sqrt{e} \sim 4,48$).

- (b) Determinare la più grande costante $\mu > 0$ tale che

$$4x^4 + 3 \geq \mu e^{x^2}$$

per ogni $x \in [0, 1]$.

4. Calcolare il valore degli integrali

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} |x \sin x| dx, \quad \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin x \cdot |x \sin x| dx.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Scritto d'esame di Analisi Matematica I

Pisa, 20 Settembre 1999

1. Sia $f(x) = \arctan |x^4 - 3|$.

(a) Determinare estremo inferiore ed estremo superiore di f al variare di x in $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

(b) Determinare per quali valori $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$f(x) = \lambda$$

ammette esattamente tre soluzioni.

2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \cos^3 x - \cos x^3.$$

Calcolare $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{IV}(0)$, $f^V(0)$. Stabilire se nel punto $x = 0$ la funzione data ha un massimo relativo, un minimo relativo, oppure un flesso.

3. (a) Risolvere la disequazione

$$x^3 - x - 24 \geq 0$$

e determinare per quali valori di x si ha l'uguaglianza.

(b) Studiare la successione definita per ricorrenza da

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{24 + a_n} \quad a_1 = 1999.$$

4. Calcolare il valore degli integrali

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} |x \cos x| dx, \quad \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin x \cdot |x \cos x| dx.$$