Thomas Le Varlet

le 30 avril 2018

1XM01 - Méthodologie du travail universitaire
Mémoire Mathematica

Devoir n°1 : Études de fonctions

Questions de cours

1. Enoncer le théorème des accroissements finis (on donnera une illustration graphique).

Soient a et c deux réels tels que a < c, et f une fonction définie et continue sur l'intervalle [a , c], dérivable sur l'intervalle]a , c[. Alors, il existe un nombre b de l' intervalle]a , c[tel que :

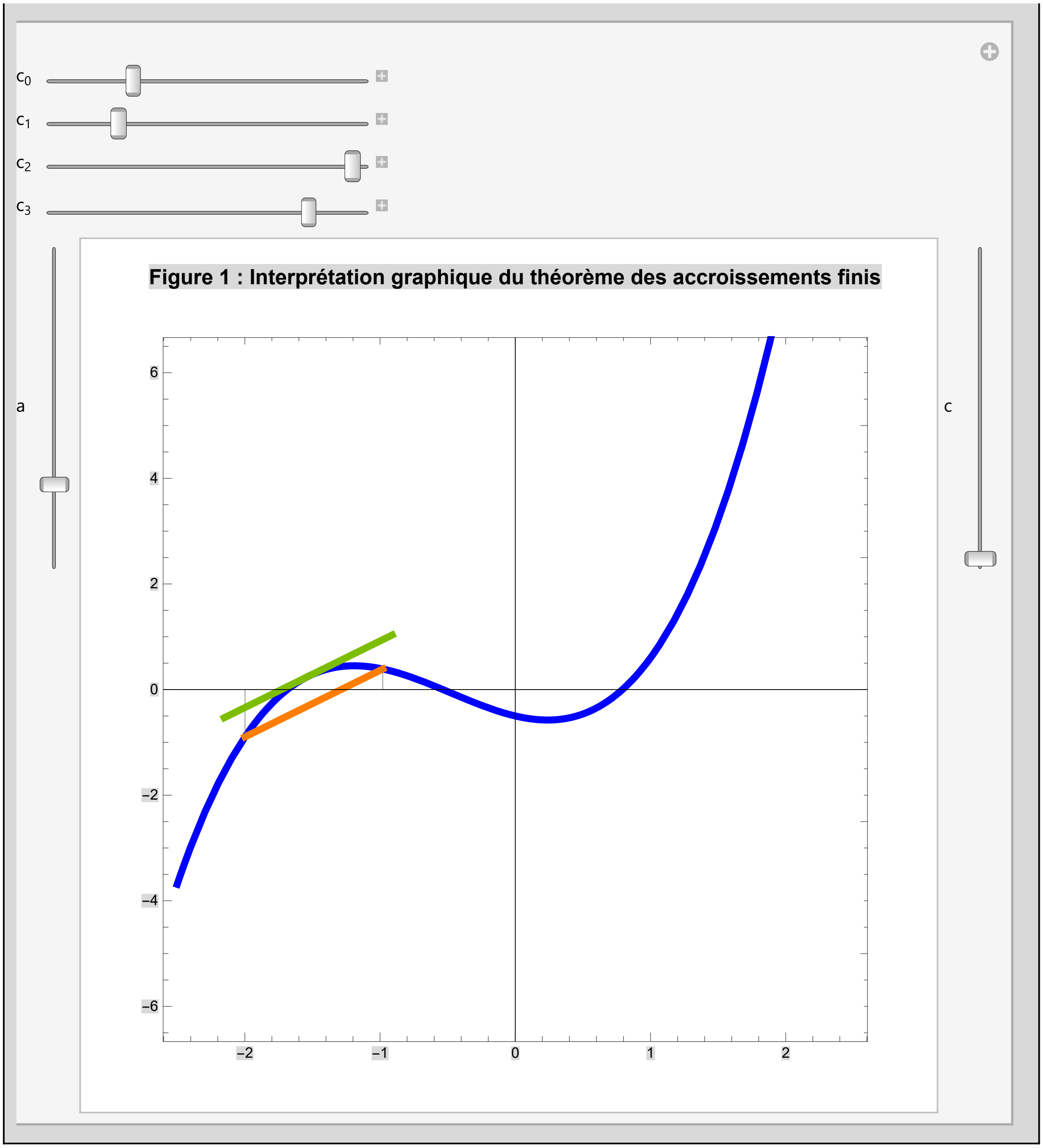
$$f(c) - f(a) = (c - a) f'(b)$$

Le théorème des accroissements finis traduit, tout simplement, le fait que la courbe représentative de f possède, en b, une tangente parallèle à la corde joignant les points (a, f(a)) et (c, f(c)).

In[386]:=

```
rollePointb[poly_, x_, {a_, c_}] :=
 Module[{sol},
  sol = x /. N[Solve[(poly /. x → c) - (poly /. x → a) == (c - a) D[poly, x], x], 20];
  Select[sol, Im[#] == 0 && Min[a, c] ≤ # ≤ Max[a, c] &][[1]]]
meanValueGraphics[{a0_, a1_, a2_, a3_}, {a_, c_}] :=
 Module[{Δ, Δ1, fa, fb, fc, b},
        Δ = Abs[c - a]; Δ1 = 2; ac = {a, c};
         poly[x_] = {a0, a1, a2, a3}.x^(Range[0, 3]);
        fa = poly[a]; fc = poly[c];
         b = rollePointb[poly[x], x, {a, c}] ;
         fb = poly[b]; α = ArcTan[poly'[b]];
        Show[{Plot[poly[x], {x, -2.5, 2.5}, PlotStyle → {Blue, Thickness[0.01]},
      PlotRange → All],
     Graphics[
      {{Thickness[0.01], RGBColor[1.0, 0.492, 0.0], Line[{{a, fa}, {c, fc}}]},
       {Black, PointSize[0.01], Point[{b, fb}]},
       {Gray, Thickness[0.001], Line[{{a, 0}, {a, fa}}], Line[{{c, 0}, {c, fc}}]},
       {Thickness[.01], RGBColor[0.492, 0.740, 0.0],
        Line[{{b - Cos[α] Δ1/2, fb - Sin[α] Δ1/2},
          {b + Cos[α] Δ1/2, fb + Sin[α] Δ1/2}}]}}]},
    PlotRange → {{-2.5, 2.5}, {-6, 6}}, Axes → True, Frame → True,
    PlotLabel → Style[
      "Figure 1 : Interprétation graphique du théorème des accroissements finis",
      Bold, Black, FontSize → 13],
    AspectRatio → 1, ImageSize → {500, 510}, ImagePadding → {{30, 20}, {30, 30}}] // N
 ]
Manipulate[If[a == c, If[c == 2, c = c - 0.001, c = c + 0.001]];
 Quiet@meanValueGraphics[{c0, c1, c2, c3}, {a, c}] ,
 {{a, -2, "a"}, -2, 2, ControlType → VerticalSlider},
 {{c, -2, "c"}, -2, 2, ControlType → VerticalSlider},
 {{c0, -0.5, "c0"}, -1, 1},
 {{c1, -0.6, "c1"}, -1, 1},
 {{c2, 1, "c2"}, -1, 1},
 {{c3, 0.7, "c3"}, -1, 1},
 ControlPlacement → {Left, Right, Top, Top, Top, Top},
 SaveDefinitions → True, AutorunSequencing → {3, 4, 5, 6}]
```

Out[388]=



2. Présenter la fonction arctangente (avec ses principales propriétés, son graphe).

La restriction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ de la fonction tangente à l' intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. D' après le théorème “des fonctions réciproques” :

$$\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]\lim_{x\to\frac{-\pi+}{2}}\tan(x),\ \lim_{x\to\frac{\pi-}{2}}\tan(x)\right[=\mathbb{R}$$

En outre, cette restriction établit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est appelée "fonction arctangente", et notée

"arctan". C'est une bijection de ℝ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Pour tout réel x, arctan(x) est donc l'unique élément de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui a pour tangente le réel x :

```
Tan[ArcTan[x]] == x
```

```
True
```

Par définition :

```
ArcTan[1] == π/4
```

```
True
```

Cependant, il faut noter qu'il existe une infinité de réels dont la tangente est égale à 1. Mais parmis ces réels, seul $\frac{\pi}{4}$ appartient à *l'* intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Les propriétés de la fonction arctangente sont les suivantes :
i. La fonction arctangente est continue et strictement croissante sur ℝ. C'est une conséquence directe du théorème des fonctions réciproques. De plus,

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = \frac{-\pi}{2}, \text{ et } \lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

In[91]:=
```
{Limit[ArcTan[x], x → -∞], Limit[ArcTan[x], x → ∞]}
```

Out[91]=
$\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

ii. La fonction arctangente est impaire. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, la courbe représentative de la fonction arctangente est la courbe obtenue par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe représentative de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
iii. On rappelle que la fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, de dérivée : $x \to 1 + \tan^2(x)$. Cette dérivée *n'* est jamais nulle. Par suite, ℝ, sa dérivée étant donnée par :
la fonction arctangente est donc dérivable sur

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

iv. Pour tout réel strictement positif x :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

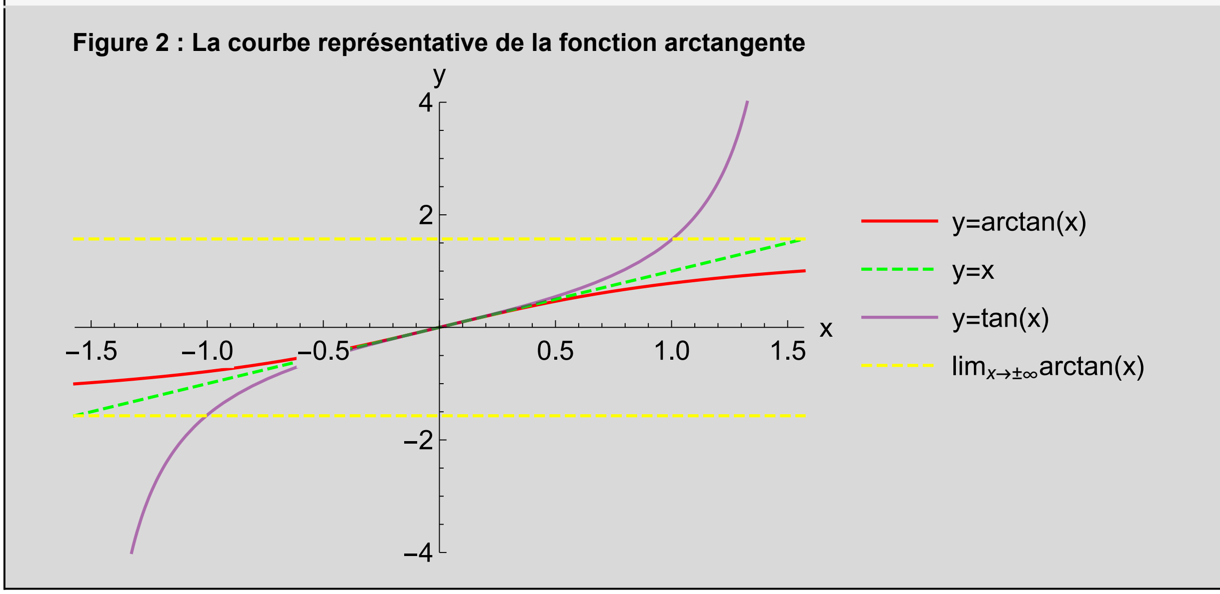
et pour tout réel strictement négatif x :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

In[389]:=

```
Plot[
 {ArcTan[x], f[x] = x, Tan[x], y = -π/2, y = π/2}, {x, -π/2, π/2},
 PlotRange → {{-π/2, π/2}, {-4, 4}},
 PlotStyle → {Red, {Dashed, Green}, {Purple, Opacity[0.5]},
   {Dashed, Yellow, Opacity}, {Dashed, Yellow, Opacity}},
 PlotLegends → {"y=arctan(x)", "y=x", "y=tan(x)", "lim_{x→±∞}arctan(x)"},
 AxesLabel → {"x", "y"},
 LabelStyle → {FontSize → 14, Black},
 PlotLabel → Style["Figure 2 : La courbe représentative de la fonction arctangente",
   Bold, Black, FontSize → 13],
 ImageSize →
  400]
```

Out[389]=



Continuité - Dérivabilité

1. Montrer que, pour tout réel positif m : $e^m \geq 1 + m + \frac{m^2}{2}$ (on pourra étudier une fonction judicieusement choisie).

À cet effet, on introduit la fonction h, définie, pour tout réel m, par :

In[1]:=

```
h[m_] := e^m - 1 - m - m^2/2
```

h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; pour tout réel m :

In[5]:=

```
{h'[m], h''[m]}
```

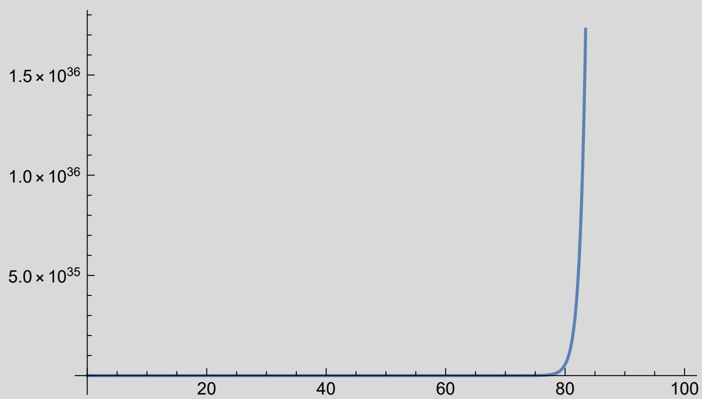
Out[5]=

$\{-1 + e^m - m, -1 + e^m\}$

On a :

In[53]:=
```
Simplify[h''[m] ≥ 0, m ≥ 0]
```
Out[53]=
```
True
```

In[198]:=
```
Plot[h''[m], {m, 0, 10^2}, PlotRange → Automatic]
```
Out[198]=



On obtient alors, pour h', le tableau de variations suivant :

$m \geq 0$	0	$+\infty$
$h''(m) = -1 + e^m$	+	
$h'(m) = -1 + e^m - m$	0 ↗	$+\infty$

On a donc, pour tout réel positif m :

$$e^m - m - 1 \geq 0$$

soit :

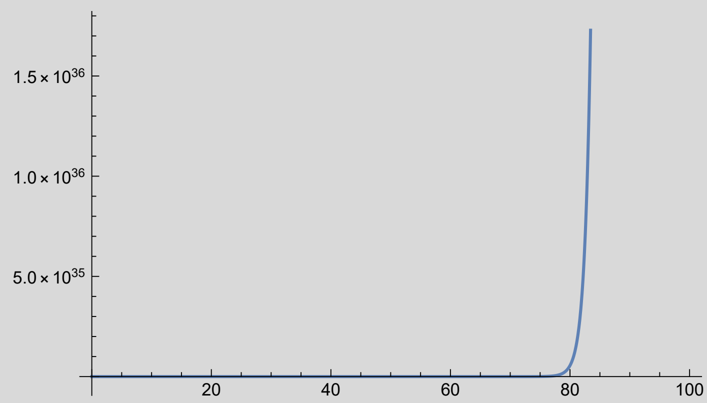
$$e^m \geq 1 + m$$

In[54]:=
```
Simplify[e^m ≥ 1 + m, m ≥ 0]
```
Out[54]=
```
True
```

In[60]:=

```
Plot[h'[m], {m, 0, 10^2}, PlotRange → Automatic]
```

Out[60]=



On en déduit, pour h, le tableau de variation suivant :

$m \geq 0$	$0 \qquad\qquad +\infty$
$h'(m) = -1 + e^m - m$	$+$
$h(m) = e^m - 1 - m - \frac{m^2}{2}$	$0 \quad \nearrow \quad +\infty$

On a donc, pour tout réel positif m :

In[63]:=

```
Reduce[e^m ≥ 1 + m + m^2/2, m]
```

Out[63]=

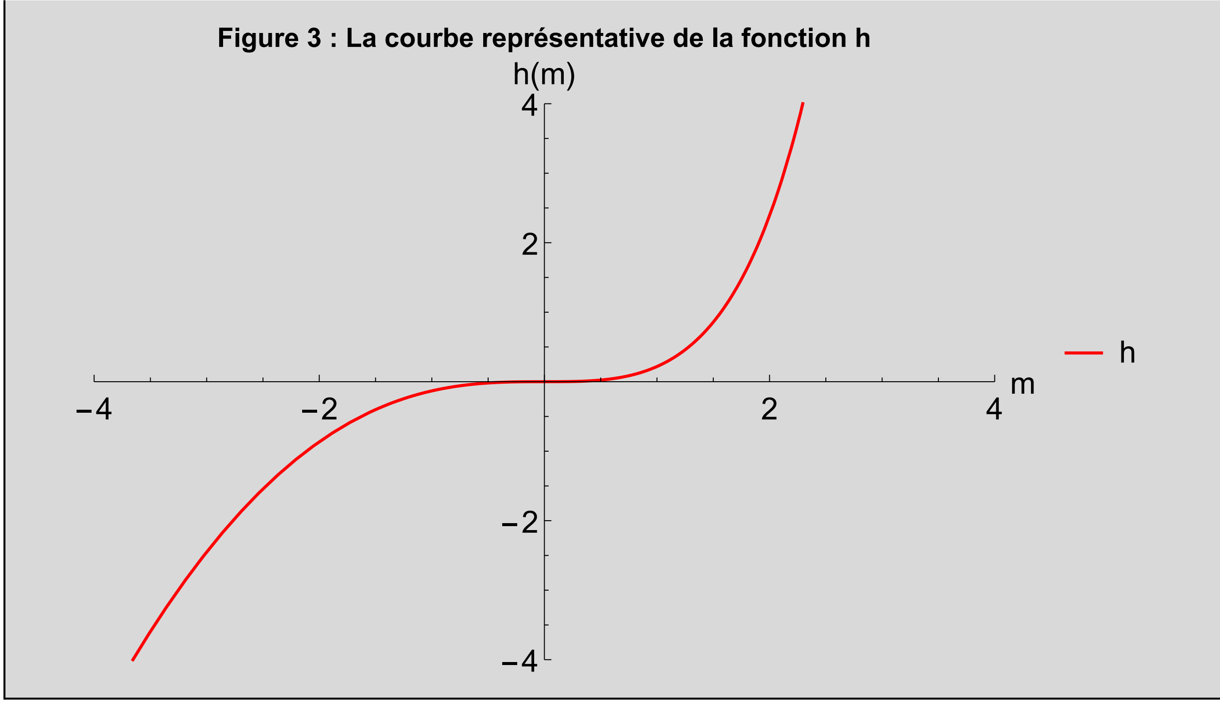
```
m ≥ 0
```

$$e^m \geq 1 + m + \frac{m^2}{2}$$

In[392]:=

```
Plot[
 h[m] = ⅇ^m - 1 - m - m^2/2, {m, -4, 4},
 PlotRange → {{-4, 4}, {-4, 4}},
 PlotStyle → {Red},
 AxesLabel → {"m", "h(m)"},
 LabelStyle → {FontSize → 16, Black},
 PlotLegends → {"h"},
 PlotLabel → Style["Figure 3 : La courbe représentative de la fonction h",
   Bold, Black, FontSize → 14],
 ImageSize →
  500]
```

Out[392]=



2. On considère la fonction f qui, à tout réel x non nul, associe $x^5 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Montrer que la fonction *f* peut être prolongée par continuité sur ℝ par une fonction que l'on précisera.

Pour tout réel non nul x :

$$\left| \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \right| \leq 1$$

Et donc :

$$\left| x^5 \right| * \left| \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \right| \leq \left| x^5 \right|$$

Comme :

In[92]:=
```
Limit[Abs[x^5], x → 0]
```
Out[92]=
```
0
```

on en déduit :

$$\lim_{x\to 0} \left| x^5 \right| \left| \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \right| = 0$$

La fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$, peut donc être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$ par la fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} x^5 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. On considère la fonction Ψ définie, pour tout réel v, par : Ψ(v)↦ $\begin{cases} 3 + e^{\frac{-1}{(v-4)^2}} & \text{si } v \neq 4 \\ 3 & \text{si } v = 0 \end{cases}$. Étudier la continuité et la dérivabilité de Ψ.

In[86]:=
```
Ψ[v_] := 3 + e^(-1/(v-4)^2)
```

On calcule :

In[185]:=
```
Limit[3 + e^(-1/(v-4)^2), v → 4] == 3 + Limit[e^(-1/(v-4)^2), v → 4] ==
 3 + Limit[e^(-1/v^2), v → 0] == 3 + Limit[e^-X, X → Infinity] == 3 == Limit[Ψ[v], v → 4]
```
Out[185]=
```
True
```

$$\lim_{v\to 4} \left\{3 + e^{\frac{-1}{(v-4)^2}}\right\} = 3 + \lim_{v\to 4} e^{\frac{-1}{(v-4)^2}} = 3 + \lim_{X\to +\infty} e^{-X} = 3 = \Psi(4)$$

La fonction Ψ est donc bien continue sur $\mathbb{R}$ (le seul problème se posait en 4, partout ailleurs, par composition de fonctions continues, la continuité de Ψ ne pose pas de problèmes). Pour étudier la dérivabilité de Ψ, on calcule, pour tout réel v≠4 :

In[149]:=
```
Ψ'[v]
```
Out[149]=

$$\frac{2\, e^{-\frac{1}{(-4+v)^2}}}{(-4+v)^3}$$

On a alors, par croissances comparées :

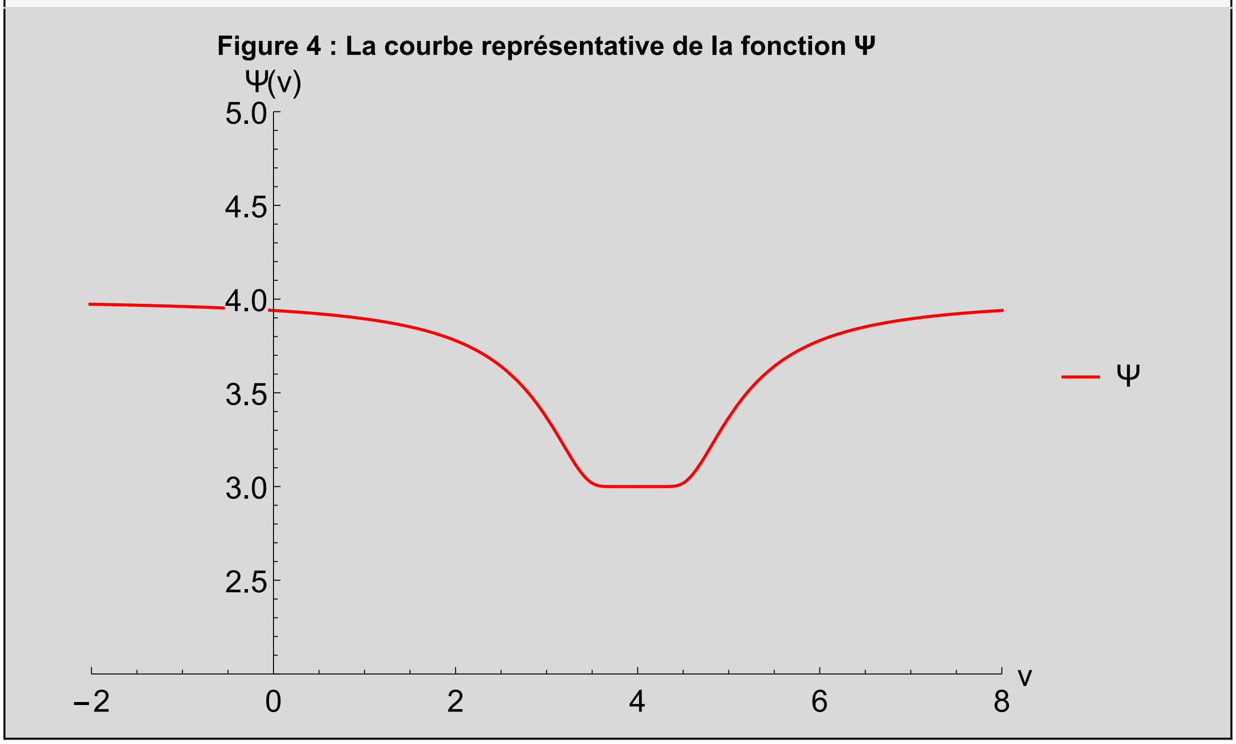
In[150]:=
```
Limit[Ψ'[v], v → 4] == 0
```
Out[150]=
```
True
```

En repassant à la définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement, on en déduit que la courbe représentative de la fonction Ψ admet une tangente horizontale en 0.

In[393]:=

```
Plot[
 Ψ[v], {v, -10, 10},
 PlotRange → {{-2, 8}, {2, 5}},
 PlotStyle → {Red},
 PlotLegends → {"Ψ"},
 AxesLabel → {"v", "Ψ(v)"},
 LabelStyle → {FontSize → 16, Black},
 PlotLabel → Style["Figure 4 : La courbe représentative de la fonction Ψ",
   Bold, Black, FontSize → 14],
 ImageSize →
  500]
```

Out[393]=



4. Donner le domaine de définition D_g de la fonction g qui, à tout x de D_g, associe : $\ln(\frac{1}{\arctan(4x)})$

La fonction ln(u) admet un domaine de définition lorsque u>0, soit lorsque $\frac{1}{\arctan(4x)} > 0$, et arctan(0)=0 et la fonction arctangente est strictement croissante et définie sur ℝ. Le domaine de définition de la fonction g a donc pour minimum x solution de l'inéquation 4x>0, soit :

In[193]:=

```
Reduce[4 x == 0, x]
```

Out[193]=

```
x == 0
```

Avec 0 exclu. On peut également procéder directement à l'aide de Mathematica :

In[188]:=
```
FunctionDomain[Log[1/ArcTan[4 x]], x]
```

Out[188]=
```
x > 0
```

Le domaine de définition de g est donc :]0, +∞[

Devoir n°2 : Fonctions - Équations différentielles

Questions de cours

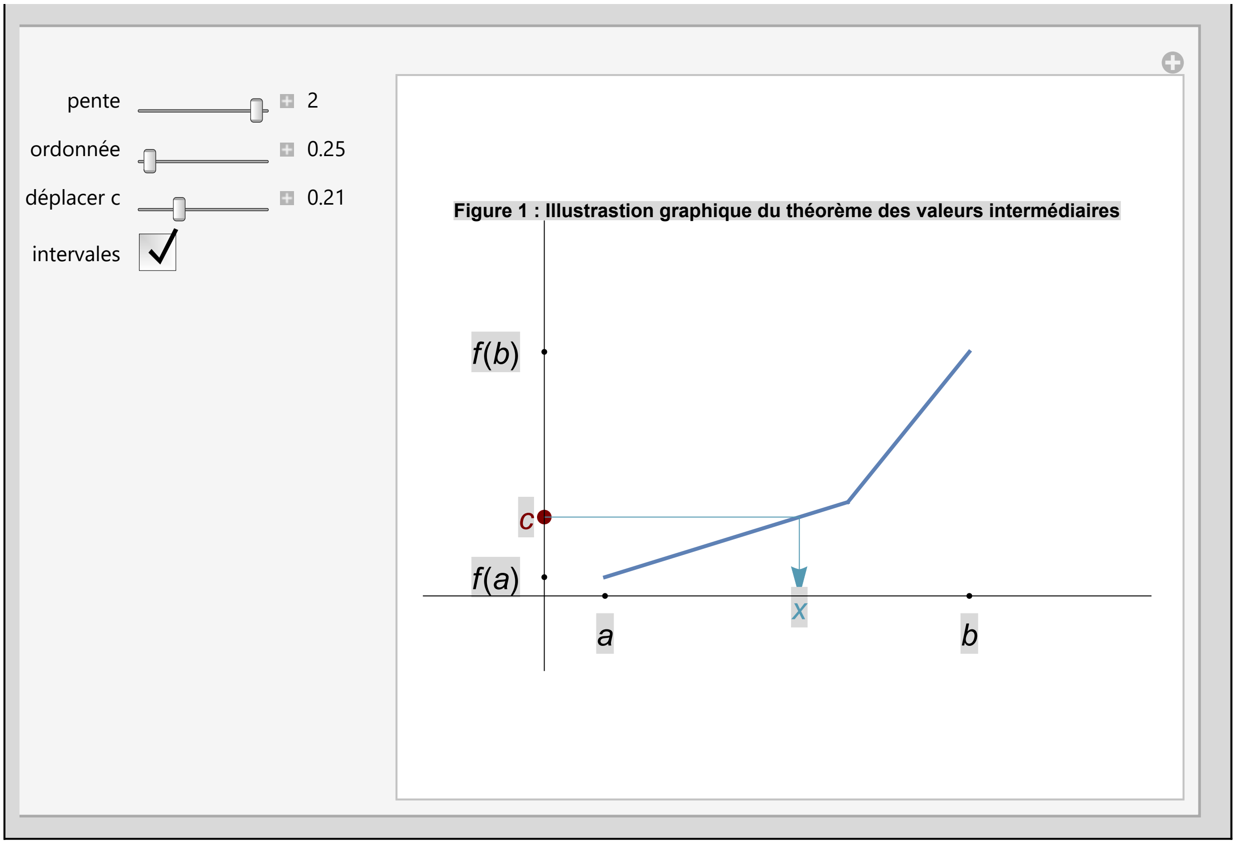
1. Énoncer le théorème des valeurs intermediaires (on donnera une illustration graphique).

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de ℝ, et a et b deux réels de I. Alors, tout réel compris entre f(a) et f(b) possède au moins un antécédant “x” par la fonction f.

In[394]:=

```
Manipulate[With[{f$ = If[x ≤ 0.5, x / 2, k * (x - 0.5) + b]},
  Show[Plot[f$, {x, 0.1, 0.7}, Ticks → None, PlotStyle → {Thick},
    Exclusions → {0.5}, PlotRange → {{-0.2, 1}, {-0.2, 1}}],
   Graphics[{{Point[{0, 0.05}], Point[{0, k * (0.7 - 0.5) + b}], Point[{0.1, 0}],
      Point[{0.7, 0}]}, {RGBColor[0.49, 0, 0], PointSize[0.02], Point[{0, y}]}, {If[
       0.05 ≤ y ≤ 0.25 || Inequality[b, Less, y, LessEqual, k * (0.7 - 0.5) + b], {RGBColor[
         0.33, 0.6, 0.7], Line[{{0, y}, {If[0.05 ≤ y ≤ 0.25, 2 * y, (y - b) / k + 0.5], y}}],
        Arrow[{{If[0.05 ≤ y ≤ 0.25, 2 * y, (y - b) / k + 0.5], y},
          {If[0.05 ≤ y ≤ 0.25, 2 * y, (y - b) / k + 0.5], 0}}], Text[
         Style["x", 16, Italic], {If[0.05 ≤ y ≤ 0.25, 2 * y, (y - b) / k + 0.5], -0.03}]},
       Text[Style[Row[{Style["x", Italic], " n'existe pas"}], 16], {0.2, y}]]},
     {RGBColor[0.49, 0, 0], Text[Style["c", 16, Italic], {-0.03, y}]},
     If[hint, {Text[Style["a", 16, Italic], {0.1, -0.1}],
       Text[Style["b", 16, Italic], {0.7, -0.1}], Text[Style[
         Row[{Style["f", Italic], "(", Style["a", Italic], ")"}], 16], {-0.08, 0.05}],
       Text[Style[Row[{Style["f", Italic], "(", Style["b", Italic], ")"}], 16],
        {-0.08, k * (0.7 - 0.5) + b}]}, {}]}], ImageSize → {380, 350},
   PlotLabel → Style["Figure 1 : Illustrastion graphique du théorème
       des valeurs intermédiaires", Bold, Black, FontSize → 10]]],
 {{k, 2, "pente"}, 0.5, 2, 0.01, Appearance → "Labeled", ImageSize → Tiny},
 {{b, 0.25, "ordonnée"}, 0.25, 0.5, 0.01,
  Appearance → "Labeled", ImageSize → Tiny},
 {{y, 0.11, "déplacer c"}, 0.05, Dynamic[k * (0.7 - 0.5) + b],
  0.01, ImageSize → Tiny, Appearance → "Labeled"},
 {{hint, True, "intervales"}, {False, True}},
 ControlPlacement → Left,
 ControllerLinking → True,
 Initialization :→ {Attributes[PlotRange] = {ReadProtected}}]
```

Out[394]=



2. Énoncer le théorème des fonctions réciproques.

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I de ℝ. Alors :

i. L’ensemble J = f(I) est un intervalle (de même nature que I), et dont les extrémités sont les limites de f aux bornes de I.

ii. La fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J.

iii. La fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J, de même sens de monotonie que f.

iv. Si la fonction f est dérivable en un point a de I et si f’(a)≠0, la fonction f^{-1} est dérivable au point b=f(a) et :

$$(f^{-1})(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

De façon équivalente :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Oscillateur harmonique électrique

Dans un circuit électrique RLC, constitué d’un resistor de résistance R>0, d’un condensateur de capacité électrique C>0, et d’une bobine d’inductance L>0,

l'équation différentielle (ε_{el}) vérifiée par la charge électrique q, qui est une fonction dépendant du temps t, t∈ $\mathbb{R}^+$, est : $q''(t) + \frac{Rq'(t)}{L} + \frac{q(t)}{LC} = 0$

Résoudre, sur $\mathbb{R}^+$, cette équation différentielle.

On distinguera les cas : $\frac{R^2}{L^2} > \frac{4}{LC}$, $\frac{R^2}{L^2} = \frac{4}{LC}$, $\frac{R^2}{L^2} < \frac{4}{LC}$

L'équation caracteristique est :

$$r^2 + \frac{Rr}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}$$

1. Premier cas : $\frac{R^2}{L^2} < \frac{4}{LC}$

Pour alléger les écritures, on pose :

$$\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} = -4\,\omega^2$$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$\frac{-R}{2L} - i\omega, \frac{-R}{2L} + i\omega$$

La solution générale de l'équation différentielle (ε_{el}) est de la forme :

$$t \mapsto e^{\frac{-Rt}{2L}} \{\lambda\cos(\omega t)+\mu\sin(\omega t)\}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$t \mapsto q_0\, e^{\frac{-Rt}{2L}} \sin(\omega t+\varphi), (q_0, \varphi) \in \mathbb{R}^2$$

On calcule :

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\frac{-Rt}{2L}} \{\lambda\cos(\omega t)+\mu\sin(\omega t)\}=0$$

(les fonctions sinus et cosinus sont bornées)

L'amplitude de la charge électrique, qui est la fonction $t \mapsto q_0\, e^{\frac{-Rt}{2L}}$, est une fonction décroissante du temps t. Elle oscille, en restant, pour tout t, comprise entre $q_0\, e^{\frac{-Rt}{2L}}$ et $-q_0\, e^{\frac{-Rt}{2L}}$. En physique, on parle de "système sous-amorti", ou "faiblement amorti".

2. Second cas : $\frac{R^2}{L^2} = \frac{4}{LC}$

L'équation caractéristique admet pour racine double :

$$\frac{-R}{2L}$$

La solution générale de l'équation différentielle (ε_{el}) est de la forme :

$$t \mapsto e^{\frac{-Rt}{2L}} \{\lambda t+\mu\}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Par croissances comparées :

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\frac{-Rt}{2L}} \{\lambda t+\mu\}=0$$

La charge q tend vers zéro sans oscillations lorsque le temps t tend vers l'infini.

3. Troisième cas : $\frac{R^2}{L^2} > \frac{4}{LC}$

Pour alléger les écritures, on pose :

$$\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} = 4\,\omega^2$$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$\frac{-R}{2L} - \omega\,,\ \frac{-R}{2L} + \omega$$

La solution générale de l'équation différentielle (ε_{el}) est de la forme :

$$t \mapsto e^{\frac{-Rt}{2L}}\{\lambda \mathrm{ch}(\omega t) + \mu \mathrm{sh}(\omega t)\},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Devoir n°3 : Sujet d'examen type

I. Première partie

1. Questions de cours

(a) Soit n un entier naturel non nul. Rappeler le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction qui, à tout réel x≠-1, associe $\frac{1}{1+x}$.

Pour tout réel x tendant vers 0 :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + x^n + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Soit :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

Soit :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

(b) Soit n un entier naturel. Rappeler le développement limité à l'ordre 2n au voisinage de 0 de la fonction qui, à tout réel x, associe cos(x).

Pour tout réel x tendant vers 0 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

Soit :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

Soit :

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

(c) Soit n un entier naturel. Rappeler le développement limité à l'ordre 2n+1 au voisinage de 0 de la fonction qui, à tout réel x, associe sin(x).

Pour tout réel x tendant vers 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\, \varepsilon(x)$$

Soit :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

Soit :

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

2. L'effet dynamo

En 1955, le géophysicien Bullard a proposé un modèle simple de dynamo auto-entretenue permettant d'expliquer la génération spontanée du champ magnétique terrestre. Un disque conducteur, de masse $M > 0$, tourne à une vitesse angulaire $\Omega > 0$ autour d'un axe. L'effort génère un courant électrique, dont l'intensité I, qui est une fonction du temps $t > 0$, vérifie l'équation differentiable suivante : $L \frac{dI}{dt} + RI(t) = M\Omega I(t)$, où L et R sont deux constantes strictement positives, qui correspondent respectivement à un coefficient d'autoinduction, et à une résistance électrique.

Résoudre, sur $\mathbb{R}^+$, cette équation différentielle, avec la condition initiale : $I(0) = I_0 > 0$

L'équation différentielle s'écrit aussi :

$$L \frac{dI}{dt} = (M\Omega - R) I(t)$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène.

In[30]:=
```
DSolve[L * I'[t] == (MΩ - R) I[t], I[t], t]
```

Out[30]=
$$\left\{\left\{I[t] \to e^{\frac{M\Omega t}{L} - \frac{R t}{L}} C[1]\right\}\right\}$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions qui, à tout réel $t > 0$, associent :

$$C e^{\frac{(M\Omega - R)}{L} t}$$

où C est une constante réelle.

La condition initiale :

$$I(0) = I_0 > 0$$

conduit à :

$$C = I_0$$

On en déduit, pour tout t≥0 :

$$I(t) = I_0 e^{\frac{(M\Omega - R)}{L} t}$$

Il faut alors envisager les cas suivants :

1. Premier car : MΩ-R<0 :

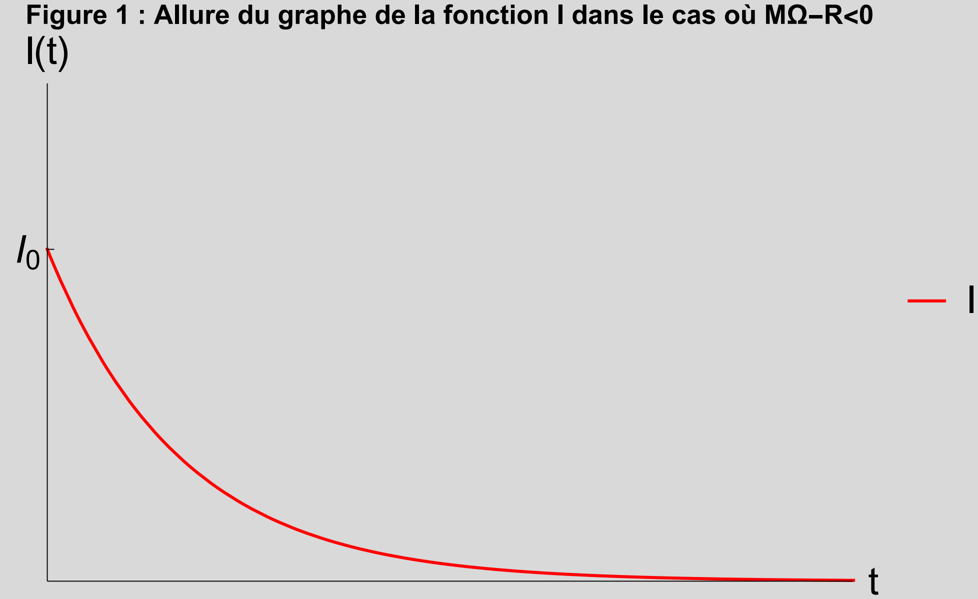
In[99]:=
```
Limit[I[t] = I0 e^((MΩ - R)/L t), t → Infinity, Assumptions → {MΩ - R < 0, L > 0, I0 > 0}]
```

Out[99]=
```
0
```

In[381]:=
```
Plot[I[t] = e^-t, {t, 0, 10},
 PlotRange → {{0, 6}, {0, 1.5}},
 Axes → True,
 Ticks → {None, {{1, "I0"}}},
 TicksStyle → Directive[Black],
 Ticks → None,
 AxesLabel → {"t", "I(t)"},
 PlotLegends → {"I"},
 LabelStyle → {FontSize → 20, Black},
 PlotStyle → {Red, Bold},
 PlotLabel →
  Style["Figure 1 : Allure du graphe de la fonction I dans le cas où MΩ-R<0",
   Bold, Black, FontSize → 14],
 ImageSize →
  450]
```

Out[381]=

Figure 1 : Allure du graphe de la fonction I dans le cas où MΩ–R<0



2. Deuxième cas : MΩ-R>0

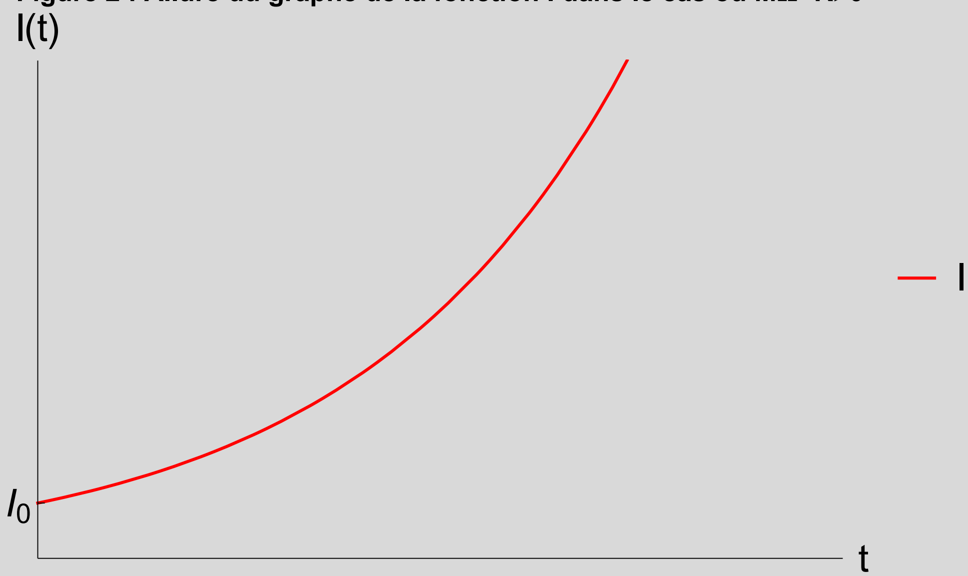
In[100]:=
```
Limit[I[t] = I0 e^((MΩ-R)/L t), t → Infinity, Assumptions → {MΩ - R > 0, L > 0, I0 > 0}]
```

Out[100]= ∞

In[382]:=
```
Plot[I[t] = ⅇ^t, {t, 0, 10},
 PlotRange → {{0, 3}, {0, 9}},
 Axes → True,
 Ticks → {None, {{1, "I₀"}}},
 TicksStyle → Directive[Black],
 AxesLabel → {"t", "I(t)"},
 PlotLegends → {"I"},
 LabelStyle → {FontSize → 20, Black},
 PlotStyle → {Red, Bold},
 PlotLabel →
  Style["Figure 2 : Allure du graphe de la fonction I dans le cas où MΩ−R>0",
   Bold, Black, FontSize → 14],
 ImageSize →
  450]
```

Out[382]=

Figure 2 : Allure du graphe de la fonction I dans le cas où MΩ−R>0



3. Nombres complexes

(a) Résoudre dans ℂ l'équation : z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0

In[227]:=
```
Solve[z² - (5 - 14 ⅈ) z - 2 (5 ⅈ + 12) == 0, z]
```

Out[227]=
```
{{z → -2 ⅈ}, {z → 5 - 12 ⅈ}}
```

Les solutions sont donc :

$$Z_1 = -2i \text{ et } Z_2 = 5 - 12i$$

(b) Déterminer les racines carrées complexes de -2i et 5-12i

On les recherche respectivement sous la forme :

$$a+ib,\ c+id$$

où a, b, c, d sont des réels à déterminer. On écrit :

$$(a+ib)^2=-2i\text{ , et }(c+id)^2=5-12i$$

On a donc :

$$a^2+2iab-b^2=-2i\text{ , et }c^2+2icd-d^2=5-12i$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{cases} a^2-b^2 = & 0 \\ 2\,ab \quad = & -2 \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} c^2-d^2 = & 5 \\ 2\,cd \quad = & -12 \end{cases}$$

In[252]:=

```
Clear[a, b]
Solve[{a^2 - b^2 == 0, 2 a * b == -2}, {a, b}, Reals]
```

Out[253]=

```
{{a → -1, b → 1}, {a → 1, b → -1}}
```

In[254]:=

```
Clear[c, d]
Solve[{c^2 - d^2 == 5, 2 c * d == -12}, {c, d}, Reals]
```

Out[255]=

```
{{c → -3, d → 2}, {c → 3, d → -2}}
```

On obtient donc :

a=-1 et b=1, ou a=1 et b=-1

Et :

c=-3 et d=2, ou c=3 et d=-2

Les racines carrées complexes de -2i sont donc :

$$1-i,\ -1+i$$

Les racines carrées complexes de 5-12i sont donc :

$$3-2i\text{ , }-3+2i$$

(c) Résoudre dans ℂ l'équation : $2\,z^4+(28\,i-10)\,z^2-20i-48=0$

In[256]:=

```
Solve[2 z^4 + (28 i - 10) z^2 - 20 i - 48 == 0, z]
```

Out[256]=

```
{{z → -3 + 2 i}, {z → -1 + i}, {z → 1 - i}, {z → 3 - 2 i}}
```

Les solutions sont donc les racines carrées complexes de -2i et 5-12i, i.e. :

1-i, -1+i, 3-2i , -3+2i

Deuxième partie : Calculs

Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(6\,t)\,dt$

In[257]:=
```
Integrate[Cos[6 t], {t, 0, π/3}]
```
Out[257]=
```
0
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(6\,t)\,dt=0$$

Déterminer un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $m \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{-1}{2}\} \mapsto \frac{1}{1+2\,m}$:

In[259]:=
```
Series[1/(1 + 2 m), {m, 0, 2}]
```
Out[259]=
```
1 - 2 m + 4 m^2 + O[m]^3
```

$$1-2\,m+4\,m^2+o(m^2)$$

Calculer : $\int_0^{\pi} t\cos(t)\,dt$

In[260]:=
```
Integrate[t * Cos[t], {t, 0, π}]
```
Out[260]=
```
-2
```

$$\int_0^{\pi} t\cos(t)\,dt=-2$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on pose : $f(x,y)=(x+y)\ln(x+y)$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$:

In[265]:=
```
Clear[x]
Clear[y]
D[(x + y) * Log[x + y], x] - D[(x + y) * Log[x + y], y]
```
Out[267]=
```
0
```

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

Donner les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équations z^3=-8

In[273]:=
```
Clear[z]
Solve[z^3 == -8, z]
```

Out[274]=
$\{\{z \to -2\}, \{z \to 2 (-1)^{1/3}\}, \{z \to -2 (-1)^{2/3}\}\}$

On transforme les 3 solutions obtenues :

In[277]:=
```
ComplexExpand[-2]
```

Out[277]=
-2

In[276]:=
```
ComplexExpand[2 (-1)^(1/3)]
```

Out[276]=
$1 + i \sqrt{3}$

In[278]:=
```
ComplexExpand[-2 (-1)^(2/3)]
```

Out[278]=
$1 - i \sqrt{3}$

La deuxième et la troisième solution sont exprimés sous forme algébrique par Mathematica.

In[285]:=
$1 + i \sqrt{3} == 2 e^{\frac{i*\pi}{3}}$ // N

Out[285]=
True

In[286]:=
$1 - i \sqrt{3} == 2 e^{\frac{5 i*\pi}{3}}$ // N

Out[286]=
True

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équations z^3=-8 sont donc :

$$2 e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{3}},\ k\in\{0,1,2\} \text{ i.e. } 2 e^{\frac{i\pi}{3}},\ -2,\ 2 e^{\frac{5i\pi}{3}}$$

Déterminer une primitive de la fonction v$\in\mathbb{R}_+^*\mapsto$ln(2v) :

In[287]:=
```
Clear[v]
Integrate[Log[2 v], v]
```

Out[288]=
$-v + v \operatorname{Log}[2 v]$

$$u\in\mathbb{R}_+^*\mapsto v\ln(2v)-v$$

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction w $\in \mathbb{R} \mapsto e^{3w}$:

In[293]:=
```
Clear[w]
Series[ⅇ^(3 w), {w, 0, 3}]
```

Out[294]=

$$1+3\,w+\frac{9\,w^2}{2}+\frac{9\,w^3}{2}+O[w]^4$$

$$1+3\,w+\frac{9\,w^2}{2}+\frac{9\,w^3}{2}+o(w^4)$$

Donner la solution générale de l'équation différentielle y'+4y=0 :

In[309]:=
```
Clear[y]
Clear[t]
DSolve[y'[t] + 4 y[t] == 0, y[t], t]
```

Out[311]=

$$\{\{y[t]\to e^{-4\,t}\,C[1]\}\}$$

$$t\in\mathbb{R}\mapsto Ce^{-4\,t},\ C\in\mathbb{R}$$

Conclusion

Malgré quelques doutes qui persistent (I), mon bilan sur Mathematica est extrêmement positif (II).

I. Un logiciel imparfait

Au départ, la tâche m'intimidait. Je me disais : « 300 pages de méthodologie ?! ». J'avais également compris à tort qu'il fallait refaire tous les exercices « autocorrectifs ». Finalement, il m'aura tout de même fallu 18 jours complets pour réaliser le mémoire.

Ce mémoire m'a permis de comprendre que l'ordinateur et Mathematica ont leurs limites. Certains calculs font planter Mathematica. Parfois, il faut aider Mathematica à réarranger une expression. Les messages d'erreur de Mathematica ne sont pas toujours très clairs non plus. Il est frustrant de chercher la petite bête, la virgule oubliée, la majuscule manquée.

Je regrette de ne pas avoir absolument tout résolu à l'aide des lignes « Input » de Mathematica. Par exemple, Mathematica donne, sans trop de difficultés, la solution générale d'une équation différentielle. Cependant, par manque de temps, je n'ai pas pu regarder comment, en une cellule « Input » unique, aller jusqu'à la phase terminale de la résolution, utilisant les conditions initiales de cette équation différentielle. Cela témoigne du progrès qu'il me reste à faire.

Même si Mathematica m'a permis de revoir l'ensemble du programme de révision, il ne m'a pas permis de tout comprendre. Je me sens encore fébrile avec les développements limités. De plus, je vois en Mathematica un risque de me rendre fainéant et de me faire oublier les méthodes de résolution à la main.

Par ailleurs, j'ai remarqué ce qui me semble être des bugs, notamment lorsque je fais des copier-coller de mes formule. Le formatage se dérègle trop facilement. De plus, Mathematica étant une plateforme avec laquelle on communique par la programmation, je m'y sens moins libre que sur un logiciel intuitif comme « Paint », par exemple, qui fait appel à nos sens plus primaires : un pointeur, un clic, un résultat en direct. C'est pourquoi je continuerai d'utiliser Word, Excel, Powerpoint et Paint pour des tâches bénignes. De plus, j'ai bien compris que, même si c'est aujourd'hui mon outil de premier choix pour mes devoirs (et j'espère que ma licence sera active le plus longtemps possible), Mathematica ne permettait pas tout. Je compte bien apprendre Python, C, C++, Java et Javascript. J'aurai bientôt l'opportunité d'écrire un article sur LaTeX, que je ne maîtrise pas, ainsi que d'utiliser Matlab. Je pourrai comparer les logiciels et j'espère qu'ils collaborent en termes de compatibilité.

L'entraide sur des forums en ligne pour Mathematica est très appréciée. C'est la communauté qui fait souvent vivre ou mourir un logiciel, surtout lorsqu'on a Matlab comme concurrent. Peut-être qu'une plateforme participative plus développée pourrait être intégrée à Mathematica, où les utilisateurs peuvent partager en interactif leurs projets et d'autres s'en inspirer, voir travailler sur un même projet en même temps, un peu comme sur CircuitMaker ou Fusion360. Je suis justement curieux de voir ce que la version pro de Mathematica a de plus que la version étudiante. Peut-être également que des plug-ins sont disponibles. Je me demande également dans quelle mesure Mathematica est utilisé par les industriels. N'est-ce qu'un outil pour les chercheurs dans un cadre académique ?

II. Une expérience très positive

Ce qui peut me prendre 5 minutes à la main, Mathematica me le propose en 15 secondes. Je pense notamment à la résolution d'équation différentielles, à la recherche de primitives ou de domaine de définition. J'ai été très impressionné par la grande gamme de possibilités mathématiques et scientifiques accessible sur Mathematica. Je suis encore sidéré par le nombre de fonctions qui existent mais que je n'utilise pas encore, lorsque je fais une recherche sur l'onglet « Help ».

Combiné à la lecture recommandée de Michèle Audin, « Conseils aux auteurs de textes mathématiques » (1997), reprendre les formulations utilisées dans les corrigés m'a aidé à mieux comprendre ce qui est attendu en terme de rédaction en mathématiques. Donner une illustration graphique du théorème des accroissements finis ainsi que du théorème des valeurs intermédiaires m'a réellement permis de mieux les cerner. Ce travail sur Mathematica m'a également rafraîchi la mémoire sur le programme de mathématiques à réviser pour l'examen. Mes résultats justes ont été confirmés, mes erreurs lors de mes devoirs ont été reprises et rectifiées. Plus encore, à trois reprises, cela m'a permis de questionner des points des corrigés donnés par la professeure :

1. Corrigé du Devoir 1 de 2017/2018, partie II : Continuité - Dérivabilité, question 3 : $\lim_{v\to 4}\{2+e^{\frac{-1}{(v-4)^2}}\}$, ne devrait-il pas être : $\lim_{v\to 4}\{3+e^{\frac{-1}{(v-4)^2}}\}$?
2. Corrigé du devoir 3 de 2017/2018, partie I sur les complexes : a = b = 1 ou a = b = -1, ne devrait-il pas être : a=-1 et b=1 ou a=1 et b=-1 ? Cela a également des répercussions sur la réponse donnée à la question suivante.

3. Corrigé du devoir 3 de 2017/2018, partie II, calculs : $1 + 3\,w + \frac{9\,w^2}{2} + \frac{9\,w^3}{2} + O(w)^3$, ne devrait-il pas être : $1 + 3\,w + \frac{9\,w^2}{2} + \frac{9\,w^3}{2} + O(w)^4$?

Je suis fier de pouvoir dire comprendre un langage de programmation. Chaque thème et chaque exercice a ses défis sur Mathematica et en programmation en général. Il est très agréable de les relever. Je suis également fier de mon travail réalisé pour le mémoire. Je garde précieusement ce travail car si je reprends Mathematica dans 6 mois, je veux pouvoir me réorienter grâce à ce travail personnel.

Je suis reconnaissant envers Wolfram pour avoir développé ce logiciel. Je remercie mes professeurs qui m'ont permis de découvrir Mathematica qui est ma première expérience approfondie en programmation. Enfin, je remercie toutes les équipes du CNED et de l'UPMC (Sorbonne Université) pour leur travail logistique et leur dévouement à la science et à son enseignement.