Complexes

Les nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes

On admet qu'il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$ tel que :

- $\mathbb{C}$ contient un nombre *imaginaire* noté *i* tel que $i^2 = -1$
- Tous les éléments de $\mathbb{C}$ s'écrivent sous la forme $a + ib$ où a et b sont des nombres réels.

$\mathbb{C}$ est appelé l'ensemble des nombres complexes.
Les opérations dans $\mathbb{C}$ obéissent aux mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.

Exemple : $(3+4i)+(6-2i) = 9+2i$
Exemple 2 : $(2+i)(3+2i) = 2\times 3 + i\times 3 + 2\times 2i + i\times 2i = 6+3i+4i-2 = 4+7i$

La forme algébrique

L'écriture $z = x + iy$ (avec x et y deux réels) est appelée forme algébrique de z. Elle est unique.

- On appelle partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, le réel x.
- On appelle partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}(z)$, le réel y.

Exemple : Soit le nombre complexe $z = 12 - 4i$ *:*

- *La partie réelle de* z *est :* $\mathrm{Re}(z) = 12$
- *La partie imaginaire de* z *est :* $\mathrm{Im}(z) = -4$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
A noter : Si $\mathrm{Im}(z) = 0$*,* z *est un réel.*

Le conjugué et le module

Conjugué

Soit un nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont deux réels.
On appelle conjugué de z, noté $\bar{z}$, le complexe : $\bar{z} = x - iy$
Exemples :

- $\overline{2-2i} = 2+2i$
- $\overline{4i} = -4i$
- $\bar{2} = 2$

Propriétés du conjugué :
Soient z et $\bar{z}$ deux nombres complexes. On a :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$
- Si z' est non nul :
  $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

Module

Soit un nombre complexe $z = x + iy$ où x et y sont des réels.
On appelle module z, noté $|z|$, le réel :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemples :

- $|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- $|-3i| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{0 + 9} = \sqrt{9} = 3$

Remarque : le module est une généralisation de la notion de valeur absolue. En effet, le module d'un réel est égal à sa valeur absolue.

Propriétés du module
Soient z et z' deux nombres complexes. On a :

- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z| = |-z|$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- Si z' est non nul :
  $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

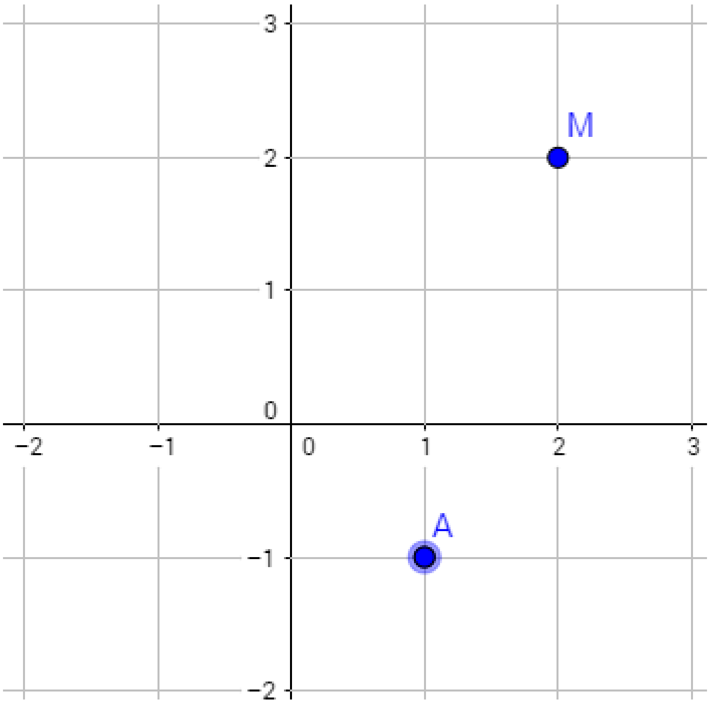
Représentation Graphique

Affixe

Soit un repère orthonormal direct du plan $(O;\vec{u};\vec{v})$. A tout point de M de coordonnées $(x;y)$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$:

- Le nombre complexe z est appelé affixe du point M (et du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$) et le note généralement z_M.
- Le point M est appelé image du nombre complexe z.

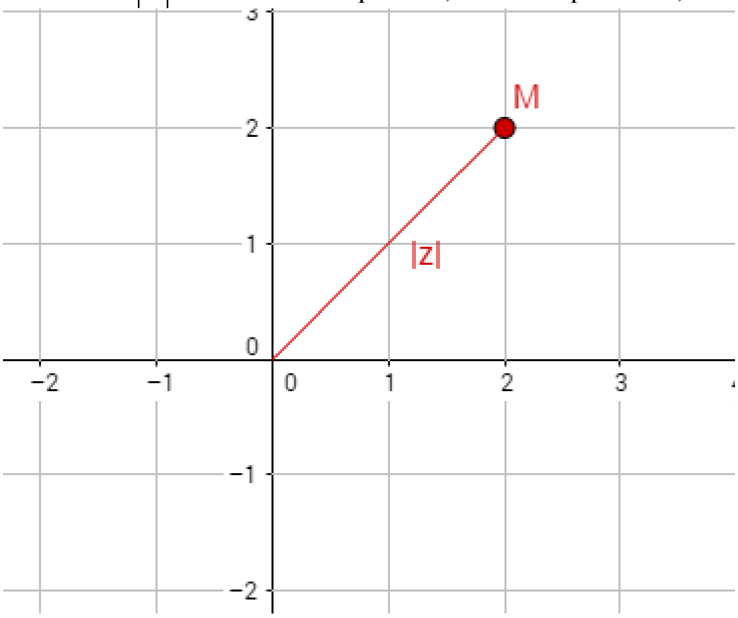
On définit ainsi le plan complexe :



Ici, M *est le point d'affixe* $z_1 = 2 + 2i$
et A *est le point d'affixe* $z_2 = 1 - i$.

Module

Le module $|z|$ du nombre complexe z, affixe du point M, est égal à la distance OM.



Ici, M *est le point d'affixe* $z = 2 + 2i$. *On a donc* $\mathrm{OM} = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

Les équations complexes

On résout une équation dans $\mathbb{C}$ à l'aide des mêmes techniques de calcul que dans $\mathbb{R}$.

Les équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit un trinôme du second degré à coefficients réels $(a \neq 0)$ $az^2 + bz + c$*, de discriminant* $\Delta = b^2 - 4\mathrm{ac} < 0$.
Ce trinôme admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivant : $3z^2 + z + 8 = 0$.
$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times 8 = -95 < 0$.
L'équation possède deux solutions complexes conjuguées :

- $z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{95}}{6}$
- $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{95}}{6}$

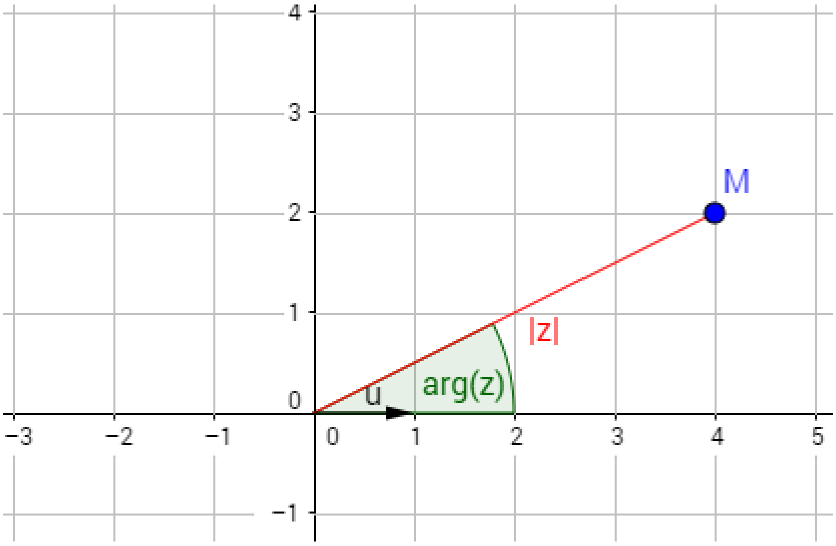
A noter : Si le trinôme du second degré a un discriminant $\Delta \geq 0$*, on retombe sur une équation du second degré classique.*

Formes trigonométrique et exponentielle

Forme trigonométrique

Argument
Soit z *un nombre complexe non nul et* M *le point d'affixe* z *du plan complexe.*
On appelle argument de z*, noté* $\arg(z)$*, une mesure en radians de l'angle orienté* $\left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ *:*

$$\arg(z) = \left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\ [2\pi]$$



Forme trigonométrique

Soit un nombre complexe z *non nul d'argument* θ*. On peut alors exprimer* z *sous forme trigonométrique :*

$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Réciproquement, si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$*, avec* $r > 0$ *et* θ *réel quelconque, alors :*

$$|z| = r$$
$$\arg(z) = \theta[2\pi]$$

Soit $z = x + iy$ *(avec* x *et* y *deux réels) un nombre complexe non nul. Soit* $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ *une forme trigonométrique de* z*.*
Alors :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement s'ils ont même module et même argument modulo 2π***.***
Propriétés de l'argument

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
- $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

Forme exponentielle

Exponentielle complexe
Pour tout réel θ*, on pose :*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Soit un nombre complexe z *non nul d'argument* θ*. On peut alors exprimer* z *sous forme exponentielle :*

$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

Réciproquement, si $z = \mathrm{re}^{i\theta}$*, avec* $r>0$ *et* θ *réel quelconque, alors :*

$$|z| = r$$

$$\arg(z) = \theta[2\pi]$$

Interprétation géométrique

Distance

Soient A *et* B *deux points d'affixes respectives* z_A *et* z_B *:*

$$\mathrm{AB} = |z_B - z_A|$$

Exemple :
Soient A *et* B *deux points d'affixes respectives* $z_A = 1 + 2i$ *et* $z_B = 5 + i$*.*

$$\mathrm{AB} = |z_B - z_A| = |5 + i - 1 - 2i| = |4 - i| = \sqrt{17}$$

Angle

Soient A *et* B *deux points d'affixes respectives* z_A *et* z_B *:*

$$\left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

Argument d'un quotient

Soient A*,* B *et* C *trois points distincts d'affixes respectives* z_A*,* z_B *et* z_C *(avec* $z_A \neq z_B$*):*

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$