Matrices

Les matrices

Définition et opérations

Les définitions

Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Une matrice A de taille ou de format (m, n) à coefficients réels est un tableau de réels composé de m ligne et n colonnes.
Le terme situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est appelé terme de position (i, j).

- Une matrice de taille $(1, n)$, c'est-à-dire ne possédant qu'une seule ligne, est appelée matrice ligne.
- Une matrice de taille $(n, 1)$, c'est-à-dire ne possédant qu'une seule colonne, est appelée matrice colonne.
- Une matrice de taille (n, n), c'est-à-dire possédant n lignes et n colonnes, est appelée matrice carrée d'ordre n.
- Les termes de positions (i, i) d'une matrice carrée sont appelés coefficients diagonaux, et on appelle diagonale d'une matrice carrée d'ordre n les n coefficients de position (i, i).

Exemple :
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 5,6 \end{pmatrix}$

- A *est une matrice de taille* $(2, 3)$.
- *Le terme de position* $(1, 3)$ *de* A *est égal à* 4.
- *Le terme de position* $(2, 3)$ *de* A *est égal à* $5, 6$.

On considère qu'une matrice composée d'une ligne et d'une colonne est un réel.
Deux matrices sont égales si et seulement si elles sont de même taille et leurs coefficients de même position sont tous deux à deux égaux.

Les propriétés opératoires

Somme de matrices

Soient A et B deux matrices de même taille. On appelle somme des matrices A et B, notée $A + B$, la matrice de même taille dont les coefficients sont obtenus en sommant deux à deux les coefficients de même position des matrices A et B.
Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -1 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-9 & 13+12 \\ 2-1 & 8+22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 25 \\ 1 & 30 \end{pmatrix}$$

Produit d'une matrice par un réel

Soient A une matrice et λ un réel quelconque. On appelle produit de la matrice A et du réel λ la matrice notée λA de même taille que A dont les coefficients sont obtenus en multipliant chaque coefficient A par λ.
Exemple :

$$2 \times \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -1 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 24 \\ -2 & 44 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel

Produit "matrice ligne x matrice colonne"

On considère une matrice ligne $L = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ et une matrice colonne $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Le produit $L \times C$, noté LC, est un réel égal à :

$$\mathrm{LC} = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times (-3) + 0 \times 8 + (-2) \times (-1) = -1$$

Produit matriciel

On considère une matrice A de taille (m, n) et une matrice B de taille (n, p).
Le produit AB est égal à la matrice C de taille (m, p) telle que le terme de position (i, j) de C est égal au produit de la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B.
Le produit de deux matrices n'existe que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde. Ce qui signifie que le produit matriciel n'est pas commutatif : l'ordre de multiplication est important.
Exemple :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & 2 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Détail du calcul : $1 = -1 \times 2 + 4 \times 0 + 3 \times 1$

Les matrices carrées et matrices inverses

Les matrices carrées remarquables

Matrice identité

On appelle matrice identité d'ordre n la matrice carrée I_n d'ordre n formée d'une diagonale de 1 et de coefficients nuls ailleurs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice identité joue le rôle de 1 dans le produit matriciel.

Matrice nulle

On appelle matrice nulle d'ordre n, notée O_n, la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls.

Matrice triangulaire supérieur

On appelle matrice triangulaire supérieure une matrice carrée dont tous les termes en dessous de la diagonale principale sont nuls.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 13 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire supérieure.*

Matrice diagonale

On appelle matrice diagonale une matrice carrée dont tous les coefficients qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

On note : $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$.

Les opérations

Soient A, B et C trois matrices carrées d'ordre n, et λ un réel.

- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- Associativité : $A(BC) = (AB)C$
- Distributivité : $A(B+C) = \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$ et $(B+C)A = \mathrm{BA} + \mathrm{CA}$
- $AI_n = I_n A = A$
- $O_n = O_n A = AO_n$

Commutativité

Deux matrices carrées A et B d'ordre n commutent si et seulement si :

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$$

Attention, cela est en général faux.

Produit de deux matrices diagonales

On considère deux matrices diagonales $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ et $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$. On a :

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n b_n \end{pmatrix}$$

Les puissances

Puissance d'une matrice

Soient A une matrice carrée d'ordre n et n un entier naturel non nul, on définit la puissance k-ième de A par :

$$A^k = \overbrace{A \times \ldots \times A}^{k \text{ fois}}$$

Par convention, $A^0 = I_n$.
Pour tous entiers naturels k et r :

$$A^k \times A^r = A^{k+r}$$

Puissance d'une matrice diagonale

On considère une matrice diagonale $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ et k un entier naturel non nul. On a :

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^k \end{pmatrix}$$

L'inverse d'une matrice

Matrice inverse

La matrice carrée A d'ordre n est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que :

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = I_n$$

La matrice B est alors appelée matrice inverse de A et est notée A^{-1}. Elle est unique.

Le déterminant d'une matrice

A toute matrice carrée A correspond une valeur appelée le déterminant de A, que l'on dénote par :

$$\det(A) \text{ ou encore } |A|$$

Calcul du déterminant pour une matrice 2×2

Considérons la matrice A de dimension 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice A est défini par la relation :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Trace d'une matrice

Soit une matrice carrée A d'ordre n. Sa trace, notée $\mathrm{Tr}(A)$ est égale à la somme des coefficients diagonaux de A :

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$