Les suites

Etude globale d'une suite

Suite numérique

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
On note :

- (u_n) pour désigner la suite u.
- u_n pour désigner le terme de rang n de la suite u.

Modes de génération d'une suite

Il existe trois façons de définir une suite.

- **Définition explicite :** La suite (u_n) est définie directement par son terme général : $u_n = f(n)$ où f est une fonction au moins définie sur $\mathbb{N}$.
- **Définition par récurrence :** Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et un réel a, une suite (u_n) peut être définie par récurrence par :
  - $u_0 = a$
  - pour tout entier n : $u_{n+1} = f(u_n)$
- **Définition implicite :** La suite (u_n) est définie par une propriété géométrique, économique, ... au sein d'un problème.

Les suites majorées, minorées, bornées

La suite (u_n) est majorée si et seulement s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n pour lequel la suite est définie :

$$u_n \leq M$$

La suite (u_n) est minorée si et seulement s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n pour lequel la suite est définie :

$$u_n \geq m$$

La suite (u_n) est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

Le sens de variation

La suite (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout entier naturel n pour lequel la suite est définie :

$$u_{n+1} \geq u_n$$

La suite (u_n) est décroissante si et seulement si, pour tout entier naturel n pour lequel la suite est définie :

$$u_{n+1} \leq u_n$$

La suite (u_n) est constante si et seulement si, pour tout entier naturel n pour lequel la suite est définie :

$$u_{n+1} = u_n$$

La suite (u_n) est monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante (sans changer de sens de variation).

Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n pour lequel elle est définie :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

r est alors la raison de la suite arithmétique.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, la suite est strictement croissante.
- Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, définie à partir du rang p.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, son terme général est égal à :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En particulier, si (u_n) est définie dès le rang 0, alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Soit (u_n) une suite arithmétique. La somme S des termes consécutifs de cette suite est égale à :

$$S = \frac{(\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}) \times (\text{Nombre de termes})}{2}$$

En particulier :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

A noter : le nombre de termes entre les entiers naturels a et b vaut $(b - a + 1)$.

Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique si et seulement s'il existe un réel q tel que, pour tout entier n pour lequel elle est définie :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

q est alors appelé raison de la suite.

Exemple : Soit q un réel strictement positif, et la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = q^n$.

- *Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.*
- *Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.*
- *Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.*

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, définie à partir du rang p. Pour tout entier n supérieur ou égal à p, son terme général est égal à :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, si (u_n) est définie dès le rang 0, alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. La somme S des termes consécutifs de cette suite vaut :

$$S = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

En particulier, si la suite est définie dès le rang 0, alors, pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Limites

Limite finie ou infinie

Remarque : La limite d'une suite ne peut être étudiée qu'en $+\infty$.
(u_n) tend vers le réel L quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert (aussi petit que l'on veut) contenant L contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
Le réel L est appelé limite (finie) de la suite (u_n). On note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L$$

Si elle existe, la limite L de la suite (u_n) est unique.

(u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout réel A (aussi grand que l'on veut), tous les termes u_n sont supérieurs à A à partir d'un certain rang. On note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

(u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout réel A (aussi grand que l'on veut), tous les termes u_n sont inférieurs à A à partir d'un certain rang. On note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Les suites convergentes

La suite (u_n) est convergente si et seulement si elle admet une limite finie.
Toute suite convergente est bornée
Le suite (u_n) est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$ ou si elle n'admet pas de limite.

Limite d'une suite géométrique

Soit un réel q :

- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) a pour limite 0.
- Si $1 < q$, alors la suite (q^n) a pour limite $+\infty$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'admet pas de limite.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) a pour limite 1.

Opérations sur les limites

Dans cette sous-partie, L et L' désignent des réels.

Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) a pour limite	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors (u_n+v_n) a pour limite	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si (v_n) a pour limite	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $(u_n\times v_n)$ a pour limite	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Le symbole "?" signifie qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

Limite d'un quotient

Cas 1 : Si la limite de v_n n'est pas nulle.

Si (u_n) a pour limite	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et si (v_n) a pour limite	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Cas 2 : Si la limite de v_n est nulle.

Si (u_n) a pour limite	$L>0$ ou $+\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
et si (v_n) a pour limite	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Le symbole "?" signifie qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

Comparaison et encadrement

Soit une suite (u_n) convergente vers L et un réel m tels qu'à partir d'un certain rang $m \leq u_n$, alors :

$$m \leq L$$

Soit une suite (u_n) convergente vers L et un réel M tels qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq M$, alors :

$$L \leq M$$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.
Si (u_n) converge vers le réel L et (v_n) converge vers le réel L', alors :

$$L \leq L'$$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$:

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $u_n \geq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Théorème des gendarmes ou d'encadrement

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et un entier naturel p.
Si :

- $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout entier n plus grand que p
- (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel L

Alors (v_n) converge également vers L.

Limite monotone

- Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
- Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.