Fonctions

Les fonctions

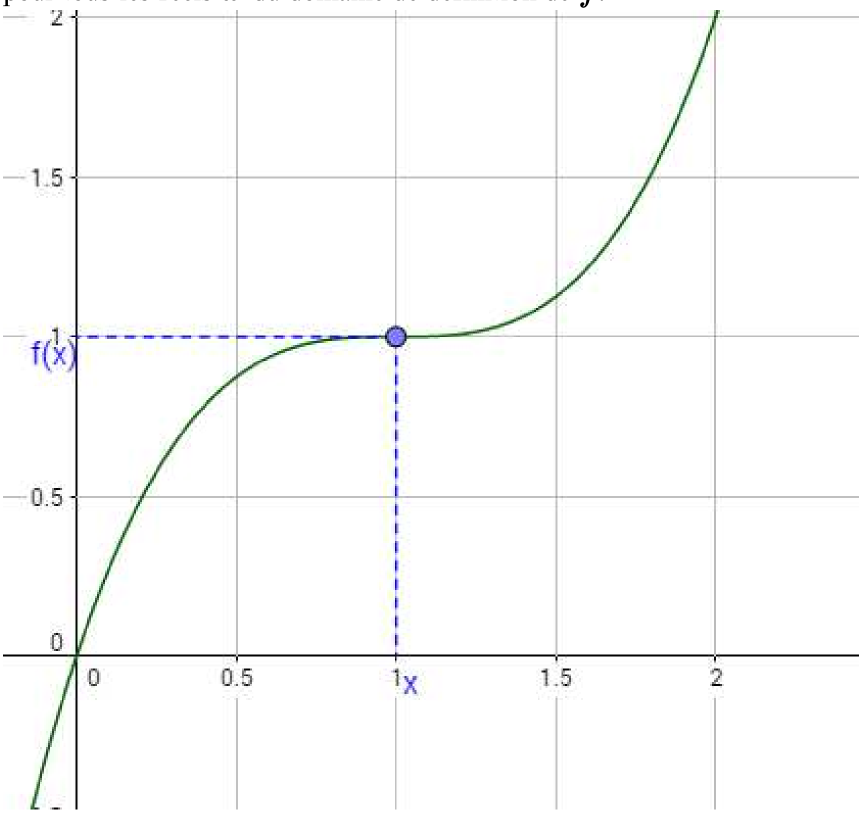
Domaine de définition

Le domaine de définition D_f d'une fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.
Exemple :

- *L'ensemble de définition de la fonction* f *d'expression* $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 1$ *est* $D_f = \mathbb{R}$.

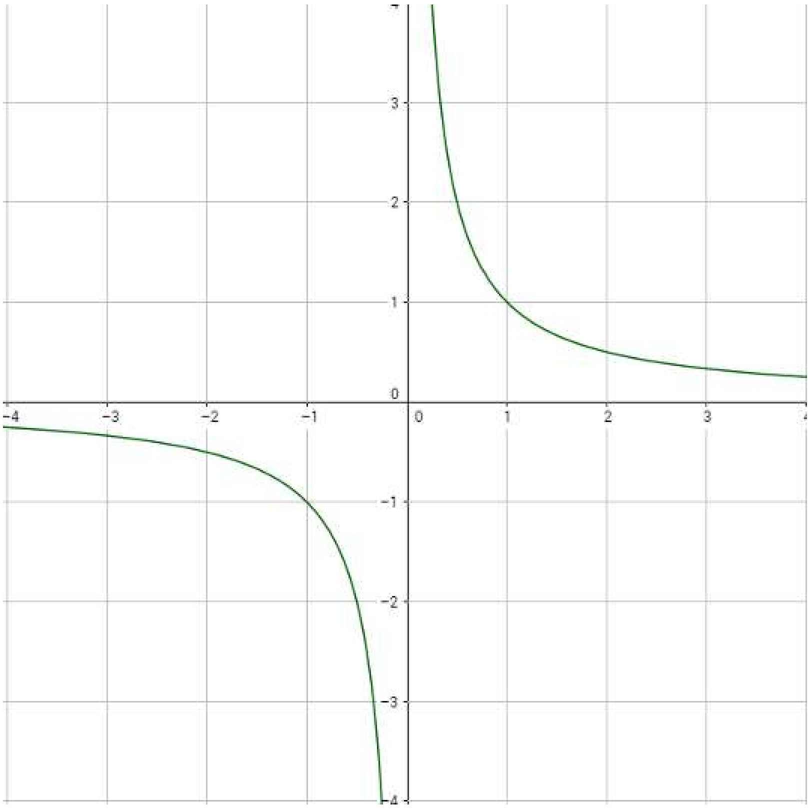
La courbe représentative

La courbe représentative C_f d'une fonction f dans un repère du plan est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, pour tous les réels x du domaine de définition de f.

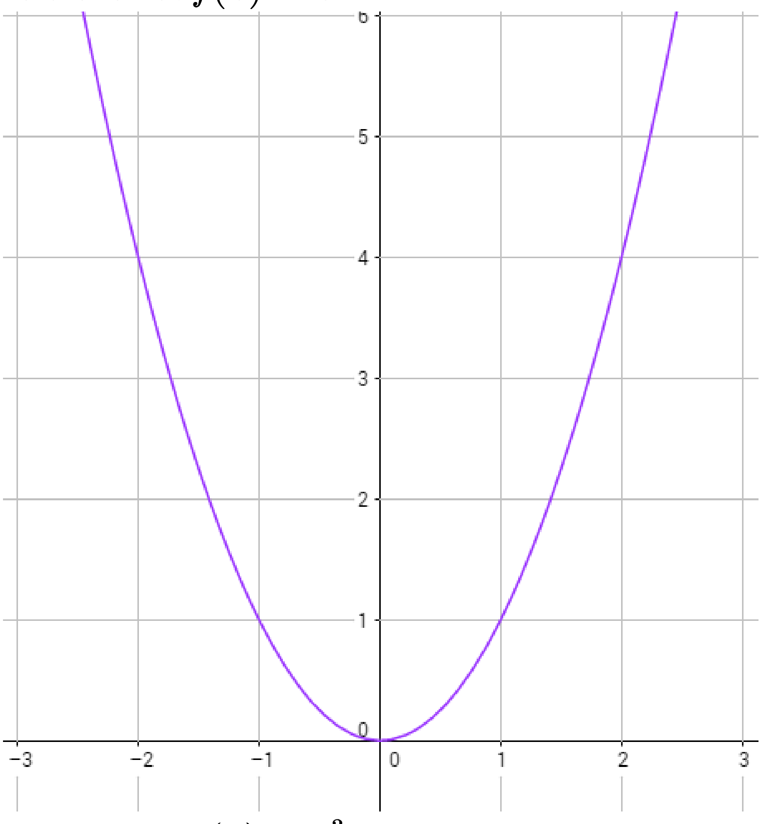


Représentation graphique de fonctions usuelles

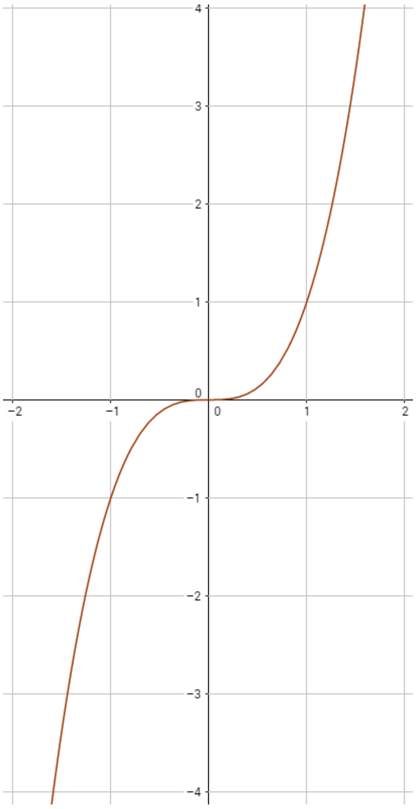
- Fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$



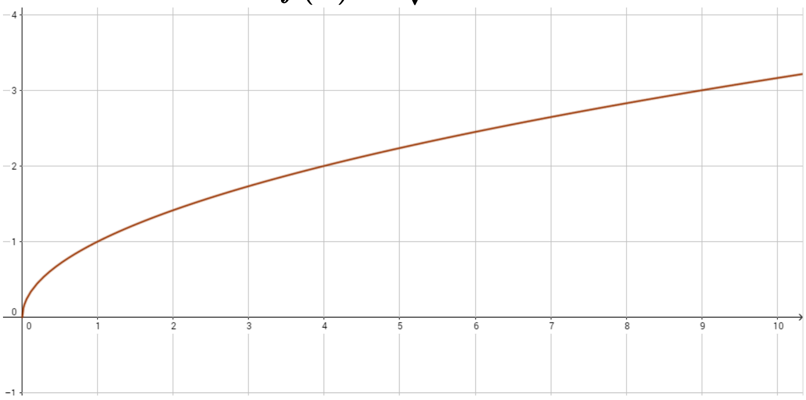
- Fonction carré : $f(x) = x^2$



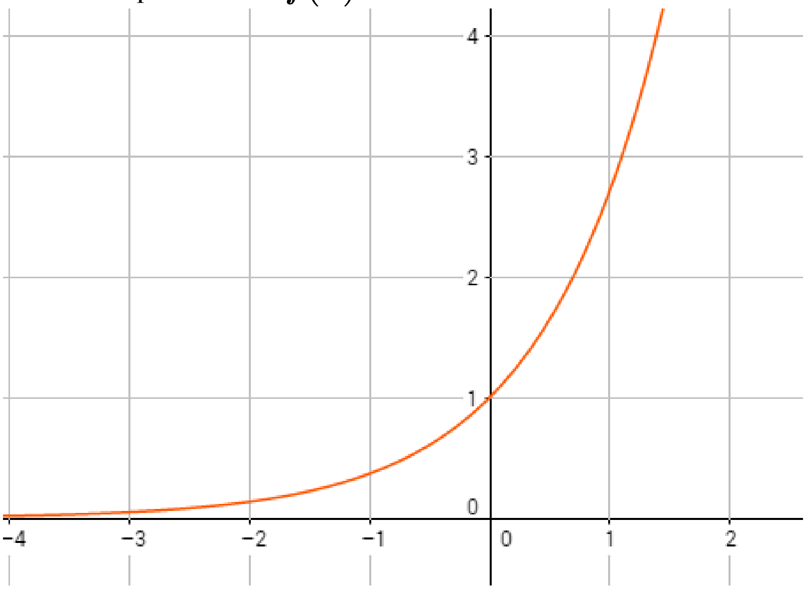
- Fonction cube : $f(x) = x^3$



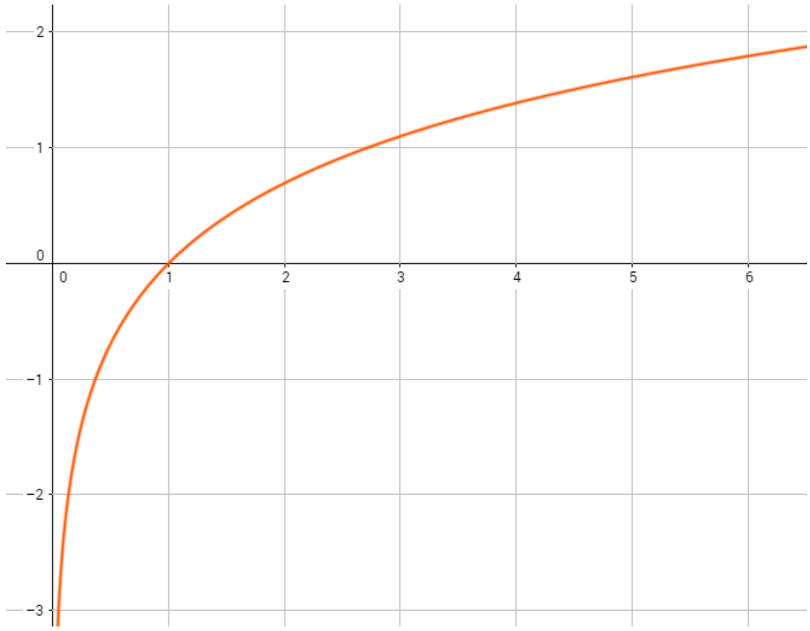
- Fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$



- Fonction exponentielle : $f(x) = e^x$



- Fonction logarithme népérien : $f(x) = \ln(x)$



Les limites

Limite d'une fonction en l'infini

Limite finie

Une fonction f tend vers le réel L quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, pour tout intervalle ouvert centré en L, il existe un réel x_0 tel que pour tous les réels x supérieurs (resp. inférieurs) à x_0, $f(x)$ appartient à cet intervalle. On note :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x-1} + 2\right) = 2$

Quand elle existe, la limite d'une fonction en l'infini est unique.

Limite infinie

Une fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, pour tout réel A, il existe un réel x_0 tel que pour tous les x supérieurs (resp. inférieurs) à x_0, $f(x) > A$.
Une fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, pour tout réel A, il existe un réel x_0 tel que pour tous les x supérieurs (resp. inférieurs) à x_0, $f(x) < A$.
On note :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+5) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Limite d'une fonction en un réel a

Limite finie

Une fonction f tend vers le réel L quand x tend vers le réel a si, pour tout intervalle ouvert J centré en L, il existe un intervalle ouvert I centré en a tel que, pour tous les réels x appartenant à I, $f(x)$ appartient à J. On note :
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.
Exemples :

- $\lim\limits_{x\to 0} (x+9) = 9$
- $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^2 - 1\right) = 0$

Quand elle existe, la limite d'une fonction en un réel est unique.

Limite infinie

Une fonction f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers le réel a si, pour tout réel A, il existe un intervalle I cenntré en a tel quel, pour tout réel x appartenant à I, $f(x) > A$ (resp. $f(x) < A$). On note :

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Limite à gauche et à droite

On peut étudier la limite d'une fonction en un réel a :

- Par valeurs inférieures à ce réel (on parle de limite à gauche en a)
- Par valeurs supérieurs à ce réel (on parle de limite à droite en a)

On note :

- $\lim\limits_{x\to a^-}$ pour la limite à gauche en a
- $\lim\limits_{x\to a^+}$ pour la limite à droite en a

Exemples : On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
Alors que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

La fonction f admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à gauche en a et une limite à droite en a et que ces deux limites sont égales.
Exemple : la fonction inverse n'admet pas de limite en 0 car ses limites à droite et à gauche de 0 sont différentes.

Les règles d'opérations

Les limites des fonctions usuelles

Les fonctions polynômes, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, sinus et cosinus admettent une limite finie en tout réel a de leur ensemble de définition, qui est égale à leur valeur en a.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

La limite d'une somme

On désigne par α un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. On désigne par L et L' deux réels. Les fonctions f, g et $f+g$ sont définies au voisinage de α.

Limite de f en α	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g en α	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $f+g$ en α	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$?$

Le symbole " $?$" représente une forme indéterminée.

La limite d'un produit

On désigne par α un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. On désigne par L et L' deux réels. Les fonctions f, g et $f \times g$ sont définies au voisinage de α.

Limite de f en α	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Limite de g en α	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Limite de $f \times g$ en α	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$?$

Le symbole " $?$" représente une forme indéterminée.

La limite d'un quotient

On désigne par α un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. On désigne par L et L' deux réels. Les fonctions f, g et $\dfrac{f}{g}$ sont définies au voisinage de α.

Limite de f en α	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$	$L>0$ ou $+\infty$		$L<0$ ou $-\infty$	
Limite de g en α	$L' \neq 0$	$\pm\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	0	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-

Limite de $\frac{f}{g}$ en α	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Le symbole " ?" représente une forme indéterminée.

Les formes indéterminées

Il existe 4 formes indéterminées :

$$" +\infty - \infty";" 0 \times \infty"; \frac{\infty}{\infty}";" \frac{0}{0}"$$

Les formes indéterminées sont les configurations pour lesquelles les règles opératoires sur les limites ne permettent pas de conclure. Il faut alors modifier l'expression pour en déterminer la limite.

Méthodes pour lever l'indétermination

- Forme indéterminée de la forme $\infty - \infty$: factoriser par le terme prépondérant

Exemple :
On cherche la limite en $+\infty$ *de* $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$.
Dans une fonction polynôme, le terme prépondérant au voisinage de l'infini est le terme de plus haut degré.
Ici, le terme prépondérant est donc $2x^3$.
On a donc : $f(x) = 2x^3(1 - \frac{5}{2x^2} + \frac{1}{2x^3})$ *pour* $x \neq 0$.
On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{2x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^3} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - \frac{5}{2x^2} + \frac{1}{2x^3}) = 1$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$. *Alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Plus généralement, il est possible de démontrer que la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynôme est la même que celle de son terme de plus haut degré.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3 - 5x^2 + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$.

- Forme indéterminée de type $0 \times \infty$: développer l'expression.

Exemples :
On cherche la limite en $+\infty$ *de* $f(x) = \frac{1}{x}(1 + \sqrt{x})$.
Développons : pour $x>0$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.
On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

- Forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$: simplifier par le facteur qui tend vers 0, ou faire apparaître des limites connues

Exemple :

On cherche la limite en 1 *de* $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Pour faire apparaître le facteur $x-1$ *au numérateur, multiplions et divisons* $f(x)$ *par la quantité conjuguée du numérateur :*

Pour $x>0$ *et* $x \neq 1$, $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

Or, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$, *donc* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

- Forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$: factoriser par le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur puis simplifier

Exemple :

On cherche la limite en $-\infty$ *de* $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{5x+4}$.

NB : f *est une fonction rationnelle, c'est à dire un quotient de fonctions polynômes.*

Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{2x^2(1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{2x^2})}{5x(1+\frac{4}{5x})} = \frac{2x}{5}\frac{(1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{2x^2})}{1+\frac{4}{5x}}$.

On a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{2x^2} = 0$ *donc* $\lim\limits_{x \to -\infty} (1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{2x^2}) = 1$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{5x} = 0$ *donc* $\lim\limits_{x \to -\infty} (1+\frac{4}{5x}) = 1$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{5} = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

D'une manière générale, on démontre que la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la même que celle du quotien simplifié de ses termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{5x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{5} = -\infty$.

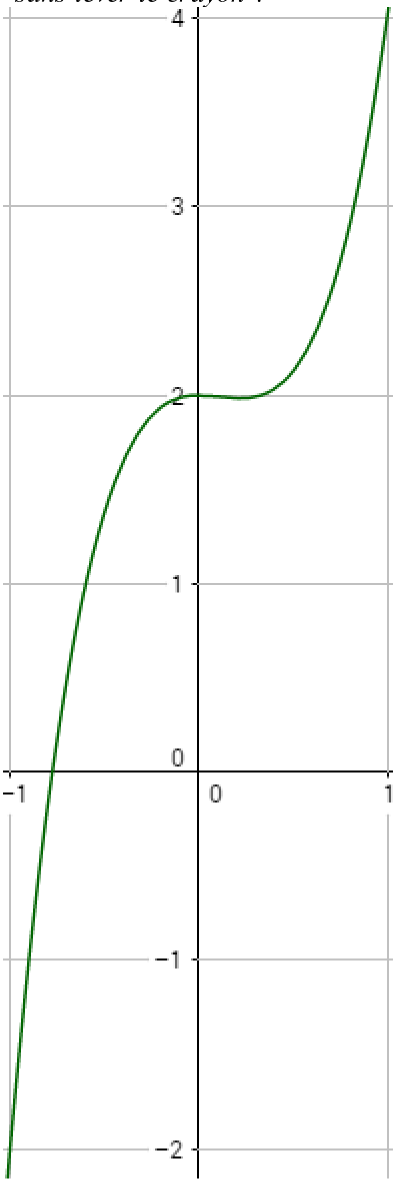
La continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I. f est dite continue en a lorsque :

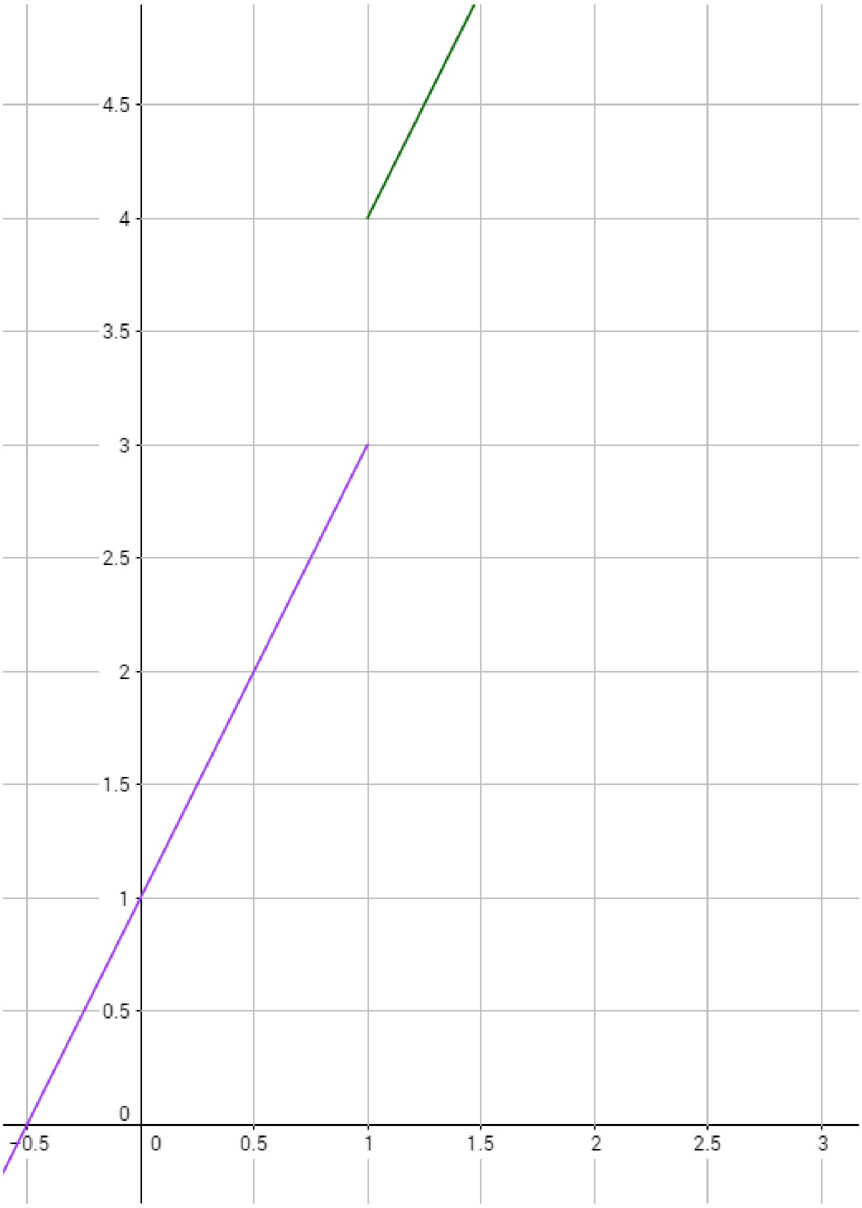
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

De plus, f est dite continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

D'un point de vue pratique, f est continue sur I si et seulement s'il est possible de tracer sa courbe représentative sur I "sans lever le crayon".



La fonction représentée ci-dessus est continue sur l'intervalle $[-1;1]$.



La fonction représentée ci-dessus n'est pas continue en 1.
Soit a un réel.
On dit que f est continue à droite en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
On dit que f est continue à gauche en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
Une fonction est continue en un point si et seulement si elle est continue à gauche et à droite de ce point.
Remarque : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle. Attention, l'inverse n'est pas vrai.

Les dérivées

Dans cette partie, on considère une fonction f dont l'ensemble de définition est D_f.

Le taux d'accroissement

Soit un réel a appartenant à D_f.
Pour tout réel h non nul tel que $(a+h)$ appartienne à D_f, on appelle taux d'accroissement ou taux de variation de f entre a et $(a+h)$ le quotient :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

En posant $x = a+h$, le taux d'accroissement entre x et a s'écrit :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Soit a un réel de D_f. La fonction f est dérivable en a si et seulement si son taux d'accroissement en a admet une limite finie quand h tend vers 0 (ou quand x tend vers a dans la deuxième écriture). Cette limite, si elle existe et est finie, est appelée nombre dérivé de f en a, et est notée $f'(a)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

La tangente à une courbe d'une fonction en un point

Soit a un réel de D_f. Si f est dérivable en a, sa courbe représentative admet une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(a; f(a))$, de coefficient directeur $f'(a)$, dont une équation est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

La dérivée sur un intervalle

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout réel de cet intervalle. On appelle alors fonction dérivée de f sur I la fonction notée f' qui, a tout réel x de I, associe $f'(x)$.

A noter : Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.
Attention, la réciproque est fausse.

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. Si f' est également dérivable sur I, la dérivée de f' sur I, notée f'', est appelée dérivée seconde de f ou dérivée d'ordre 2 de f sur I.

Les dérivées des fonctions usuelles

Soient un réel λ et un entier naturel n; on désigne par D_f le domaine de définition de f et par $D_{f'}$ son domaine de dérivabilité.

$f(x)$	$f'(x)$	D_f	$D_{f'}$
λ	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x^n (n\geq 1)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}(n\geq 1)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^*$

Les opérations sur les dérivées

Soit un réel λ, on désigne par u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

f	f'
λu	$\lambda u'$

$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$1/v$ (si v ne s'annule par sur I)	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$(si v ne s'annule pas sur I)	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Les dérivées de fonctions composées

Formule générale : Soient f et g deux fonction dérivables sur I. On a :

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$$

Soit u une fonction dérivable sur I.

f	f'
$u^n(\, n\geq 1)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$(si $u(x>0)$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$

Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

- Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
- Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I

Les extremums locaux d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I :

- Si f admet un extremum local en un réel a de I, alors $f'(a)=0$ et f' change de signe en a.
- Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors $f(a)$ est un extremum local de f.

Si f' s'annule en a et y passe d'un signe négatif à un signe positif, alors cet extremum est un minimum.
Si f' s'annule en a et y passe d'un signe positif à un signe négatif, alors cet extremum est un maximum.

Les primitives

Primitives d'une fonction continue

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I qui vérifie, pour tout réel X de I :

F'(x)=f(x)

Tout fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F(x)+k$, où k est un réel quelconque.
Une fonction continue sur un intervalle Iadmet donc une infinité de primitives sur I.

Les primitives des fonctions usuelles

Soit un entier n et un réel k. La fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I.

$f(x)$	$F(x)$	I
k	kx	$\mathbb{R}$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	si $n \geq 1$: $\mathbb{R}$ si n≤ 2 :]-∞;0] et]0;+∞[
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	]0;+∞[
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	]0;+∞[
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(\mathrm{ax}+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(\mathrm{ax}+b)$	$\mathbb{R}$, avec $a \neq 0$
$\cos(\mathrm{ax}+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(\mathrm{ax}+b)$	$\mathbb{R}$, avec $a \neq 0$

Opérations et primitives

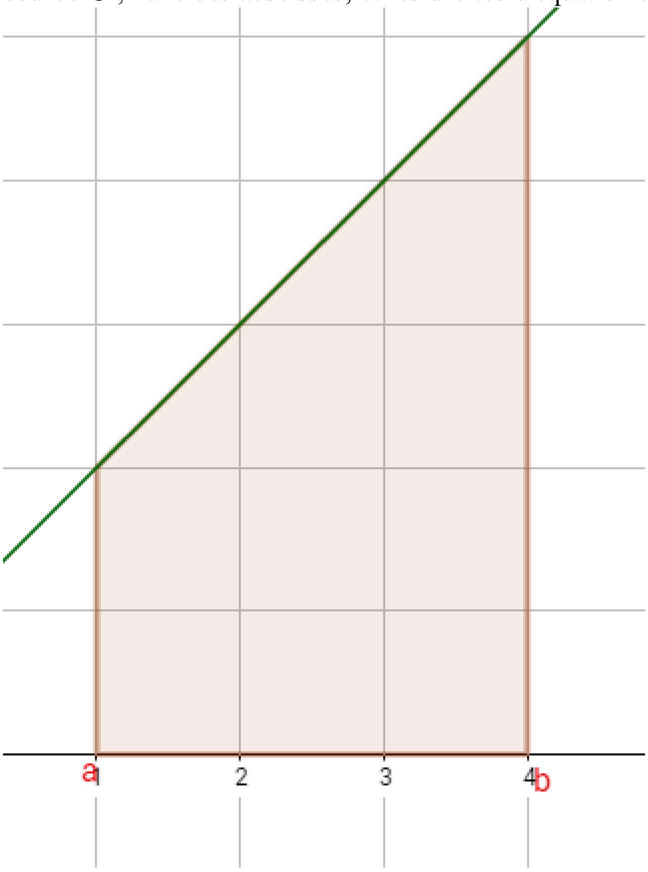
Soit un entier n différent de 0 et -1. On désigne par u une fonction dérivable sur l'intervalle I; la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I.

f	F	**Conditions**
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n \leq -2, u(x) \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$	u>0
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u>0
$u'e^u$	e^u	
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$	

Les intégrales

Intégrale d'une fonction continue positive

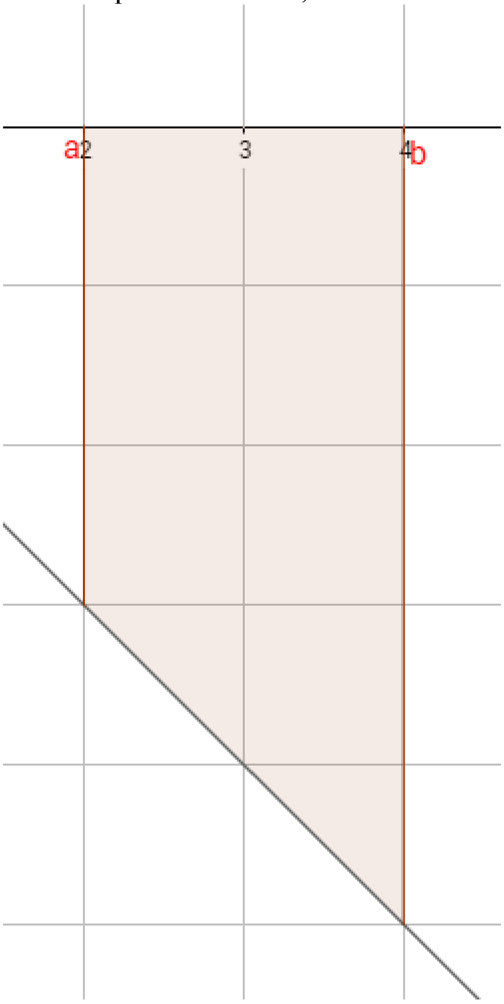
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ $(a < b)$, et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ de la fonction f sur $[a;b]$ est égale à l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Intégrale d'une fonction continue négative

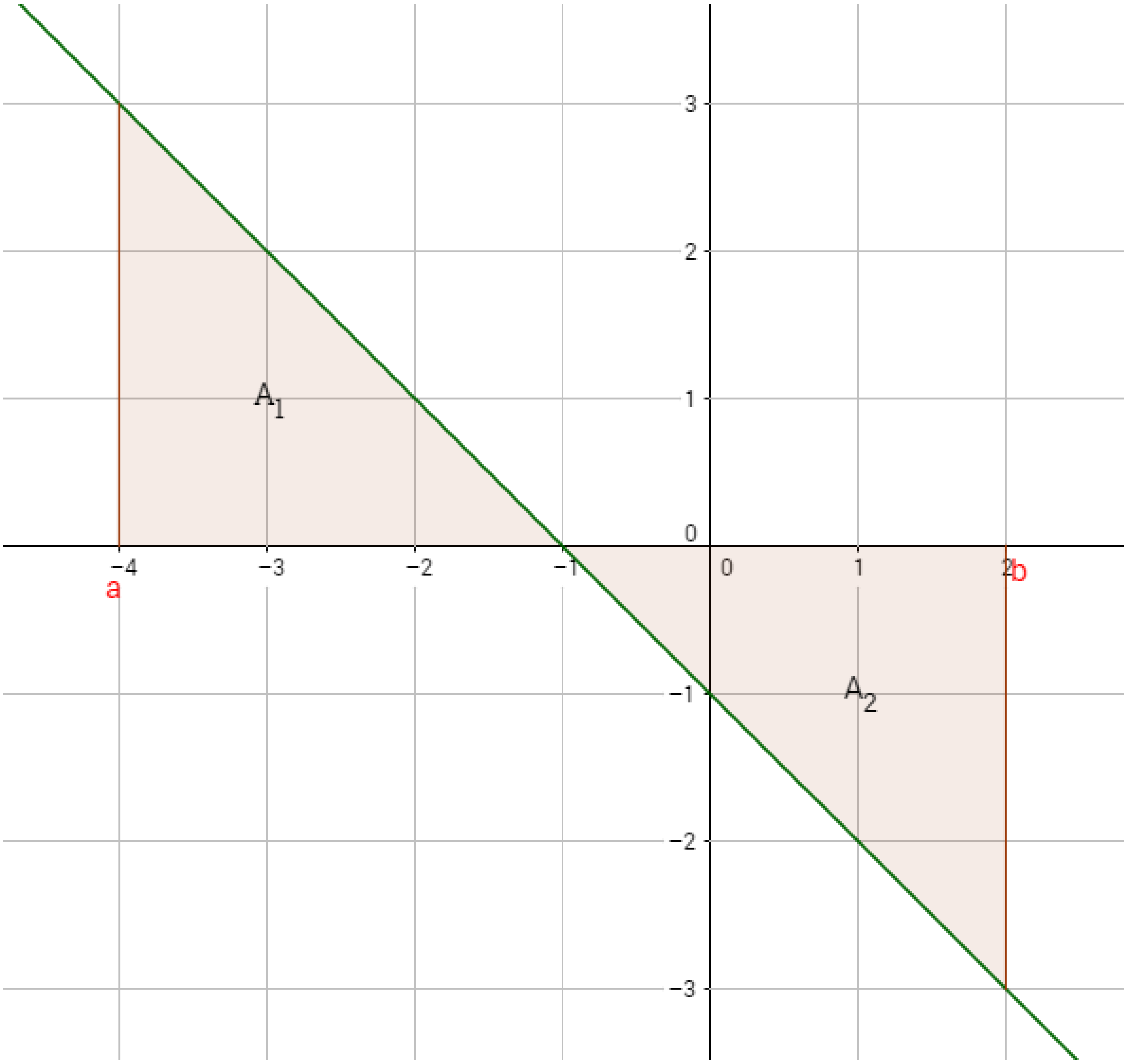
Soit f une fonction continue et négativesur un intervalle $[a;b]$ $(a < b)$, et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ de la fonction f sur $[a;b]$ est égale à l'opposé de l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan

délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ $(a < b)$, et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ de la fonction f sur $[a; b]$ est égale à la différence entre la somme des aires des surfaces comprises entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses lorsque f est positive, et la somme des aires des surfaces comprises entre la courbe et l'axe des abscisses lorsque f est négative.



Sur le schéma ci-dessus, on a :
$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$
SOit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I tels que $a<b$. Alors, on pose :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ avec $f>g$ sur $[a;b]$. L'aire située entre les courbes de f et g sur $[a;b]$ est égale à :

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ $(a < b)$ le réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Les propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c trois réels de I, et k, α et β trois réels quelconque. On a :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasles)
- $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ (Linéarité de l'intégrale)

Primitives et intégrales

Relation entre primitives et intégrales

Soient f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I, a et b deux réels de I :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

A noter : $F(b) - F(a)$ *se note aussi* $[F(x)]_a^b$

Primitive qui s'annule en a

Soit f une fonction continue sur I, et a a un réel de I. La fonction F définie ci-après pour tout x sur I est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$