École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2024
Prof. Laurent Villard
Dr Giovanni Di Giannatale

Physique Numérique – Exercice 4

A rendre jusqu'au mardi 30 avril 2024 sur le site Moodle
https://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=1174654

4 Equation de la chaleur stationnaire dans un cylindre. Elements finis.

Un cylindre de rayon R, de matière inhomogène, coefficient de conductivité thermique $\kappa(\vec{x})$, chauffé par une source de chaleur $S(\vec{x})$, est placé en contact avec un bain thermique à la température T_R constante. Le but de l'exercice est de calculer le profil de température stationnaire $T(\vec{x})$, en utilisant la méthode des éléments finis.

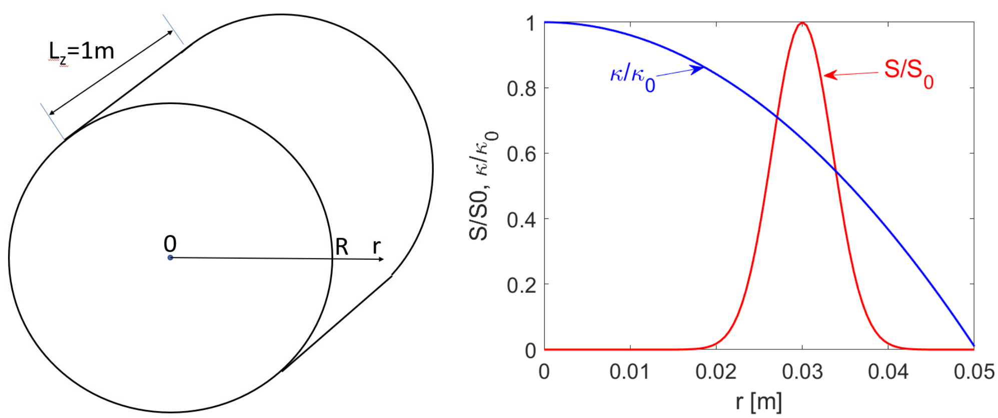

Figure 1 – Cylindre avec source de chaleur $S(r)$ et conductivité thermique $\kappa(r)$.

La distribution de température est déterminée par l'équation de continuité avec source :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q(\vec{x}) = S(\vec{x}) \tag{1}$$

où le flux de chaleur $\vec{j}_Q$ est donné par :

$$\vec{j}_Q(\vec{x}) = -\kappa(\vec{x})\ \vec{\nabla} T(\vec{x}) \tag{2}$$

4.1 Calculs analytiques [20 pts]

On conseille de suivre la démarche de la section 3.3 du cours.

(a) **[2 pts]** Écrire l'équation différentielle pour $T(\vec{x})$.

(b) **[4 pts]** Écrire la forme variationnelle faible. *Intégrer sur le volume, puis intégrer par parties en utilisant le théorème de Gauss.*

(c) **[2 pts]** Expliciter la forme variationnelle obtenue en coordonnées cylindriques, en supposant une symétrie cylindrique, i.e. $\partial/\partial\varphi = 0, \partial/\partial z = 0, \Rightarrow T(\vec{x}) = T(r)$.

(d) **[8pts]** Appliquer les éléments finis linéaires $\Lambda_i(r)$ (Fig. 3.10 du cours) sur un maillage quelconque $\{r_i\}_{i=1\ldots N}$. Calculer les éléments de la matrice A et du vecteur membre de droite b, en utilisant la structure tridiagonale, Eq.(3.77). Appliquer la condition au bord en $r = R$, $T(R) = T_R$. *Indication : choisir la règle du point milieu (Annexe B du cours, Eq. (B.2)) pour calculer les intégrales. On conseille fortement d'utiliser l'algorithme par* **boucle sur les intervalles** *expliqué par les expressions (3.67)-(3.71) en le modifiant pour le problème considéré.*

(e) **[4pts]** Écrire l'équation différentielle pour $T(r)$ en coordonnées cylindriques. Trouver la solution analytique $T(r)$, ansi que $j_Q(r)$, pour $S(\vec{x}) = S_0$, $\kappa(\vec{x}) = \kappa_0$, avec S_0 et κ_0 des constantes données, et une condition au bord $T(R) = T_R$ donné.

N.B. : On considère une unité de longueur du cylindre, $L_z = 1$***m.***

4.2 Implémentation en C++

Télécharger le fichier Exercice4_2024_student.zip du site Moodle. Vous êtes libres d'utiliser ou non ce squelette, ou de partir d'un de vos exercices précédents, ou de tout récrire du début. Vous pouvez aussi réutiliser, en les modifiant, les scripts `ParameterScan.py` ou `ParameterScan.m` des exercices précédents.

Implémenter le calcul des éléments de la matrice A et du membre de droite b tels que calculés dans la partie analytique.

Implémenter aussi le calcul du flux de chaleur $j_Q(r)$ et le calcul de la puissance totale

$$P_{\text{tot}} = \int_0^R S(r) 2\pi r \mathrm{d}r \;, \tag{3}$$

ainsi que du flux de chaleur au bord du cylindre,

$$\Gamma_Q(R) = 2\pi R j_Q(R) \;. \tag{4}$$

On a n intervalles. Considérer deux cas pour les points de maillage $\{r_i\}_{i=0}^{n}$: (1) un maillage uniforme en r, i.e. $r_i = (i/n)R$; (2) un maillage non-uniforme en r, équidistant en r^2, i.e. $r_i = \sqrt{i/n}R$.

On définit les fonctions

$$\kappa(r) = \kappa_0 + (\kappa_R - \kappa_0)\left(\frac{r}{R}\right)^2 \tag{5}$$

$$S(r) = S_0 \exp\left(-\frac{(r - r_0)^2}{\sigma^2}\right) \tag{6}$$

avec κ_0, κ_R, S_0, r_0 et σ des constantes données en input.

Important : il vous faut au moins une fois sur les deux sessions d'exercices montrer votre code à votre assistant.

4.3 Simulations et Analyses [25 pts]

On effectue des simulations avec le programme que l'on vient d'écrire et de compiler. Si l'exécutable est `Exercice4.exe`, taper à la ligne de commande d'un Terminal :

```
> ./Exercice3.exe  configuration.in
```

La visualisation des résultats numériques se fait avec Python (ou `Matlab`).

Dans tout l'exercice, on prend $R = 0.05$m, $T_R = 293$K.

(a) **[11 pts]** *Cas $S = S_0$, $\kappa = \kappa_0$ constants.*
On choisit $S_0 = 1000\mathrm{W/m}^3$, $\sigma = 10^{10}$m, $\kappa_a = \kappa_b = 1 \cdot 10^{-3}$W/m/K.

(i) [**5 pts**] Prendre $n = 10$ intervalles. Calculer et illustrer la solution numérique pour $T(r)$ et $j_Q(r)$, (1) avec un maillage équidistant en r et (2) avec un maillage non-équidistant (équidistant en r^2) et comparer avec la solution analytique. Vérifer si la balance globale de puissance est bien satisfaite ($P_{\text{tot}} = \Gamma_Q(R)$).

(ii) [**6 pts**] Faire une étude de convergence, en variant le nombre d'intervalles n, de la température au centre du cylindre $T(0)$, du flux de chaleur au bord $j_Q(R)$ et de l'erreur sur la balance globale de puissance , (1) pour un maillage équidistant, (2) pour un maillage non-équidistant (équidistant en r^2). *Indication : Représenter les erreurs en fonction de $1/n$. Pour l'erreur sur $T(0)$, représenter aussi l'erreur en fonction de la taille du plus grand intervalle du maillage (dans ce cas, le premier).* Comparer et discuter les résultats.

(b) [**14 pts**] *Cas $S(r)$, $\kappa(r)$ non constants.*
On choisit $S_0 = 1000\text{W/m}^3$, $r_0 = 0.03\text{m}$, $\sigma = 0.005\text{m}$, $\kappa_a = 1{\cdot}10^{-3}\text{W/m/K}$, $\kappa_b = 1 \cdot 10^{-5}\text{W/m/K}$.

(i) [**5 pts**] Choisir un maillage équidistant, puis un mailage non-équidistant (équidistant en r^2). Calculer et illustrer les solutions numériques obtenues pour un même nombre d'intervalles $n = 10$. Prendre ensuite, avec un maillage équidistant en r^2, un grand nombre d'intervalles, de l'ordre de $n = 1000$. Vérifer si la balance globale de puissance est satisfaite ($P_{\text{tot}} = \Gamma_Q(R)$) pour $n = 10$. Comparer et discuter les résultats.

(ii) [**9 pts**] Faire une étude de convergence de la température au centre du cylindre $T(0)$ et du flux de chaleur au bord $j_Q(R)$, et de l'erreur sur la balance globale de puissance avec le nombre d'intervalles n, (1) pour un maillage équidistant, (2) pour un maillage non-équidistant (équidistant en r^2). Comparer et discuter les résultatss. Obtenir les valeurs convergées de $T(0)$ et de $j_Q(R)$. *Indication : prendre des nombres d'intervalles $n \geq 200$ pour faire ensuite un fit polynomial (par exemple d'ordre 4) des résultats en fonction de $\xi = 1/n$. La valeur du polynôme en $\xi = 0$ est la valeur convergée.* Vérifier si la balance de puissance totale, calculée avec les valeurs convergées, est bien satisfaite.

(c) [**max 5 pts**]*Facultatif. Ce ne sont que des suggestions. Si vous avez d'autres idées, allez-y, explorez !*

(i) Implémenter le schéma d'intégration ajustable donné par l'Eq.(3.56) des Notes de Cours. Examiner en particulier ce qui se passe lorsqu'on choisit le paramètre $p = 0.5$, pour le cas (a) où S et κ sont constants.

(ii) Faire des études physiques en variant les paramètres du système : conductivité thermique, rayon, position de la source, etc.

(iii) Changer la géométrie du problème : plane ou sphérique.

4.4 Rédaction du rapport en LaTeX, soumission du rapport en pdf et du code source C++

(a) Rédiger un rapport **de maximum 12 pages figures incluses** dans lequel les résultats des simulations et les réponses aux questions ci-dessus sont présentés et analysés.

(b) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` portant le nom `RapportExercice2_Nom1_Nom2.pdf`.

(c) Préparer le fichier source C++ `Exercice2_Nom1_Nom2.cpp`.

(d) Le lien de soumission est ici.

En plus des points mentionnés ci-dessus, [**5 pts**] *sont attribués pour la participation en classe (montrez et discutez votre code et vos résultats avec votre assistant) et pour la qualité générale de la présentation du rapport (clarté et lisibilité des figures, etc).*