École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2024
Prof. Laurent Villard
Dr Giovanni Di Giannatale

Physique Numérique I – Exercice 1

A rendre jusqu'au mardi 5 mars 2024 sur le site http://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=835967

1 Trajectoires d'une balle de tennis en rotation dans un fluide, dans l'espace et sur terre. Schémas d'Euler explicite, semi-implicite et implicite

On considère le mouvement d'une balle sphérique de masse m, rayon R, en rotation à la vitesse $\vec{\omega}$, en mouvement dans un fluide de densité de masse ρ, soumis aux effets combinés des forces de la pesanteur, $m\vec{g}$, et de la portance aérodynamique (effet Magnus) :

$$\vec{F}_p = \mu R^3 \rho \vec{\omega} \times \vec{v}, \tag{1}$$

avec μ un coefficient sans dimension donné. Voir Fig. 1. La théorie correspondante est présentée à la section 2.2.3 des notes de cours. Dans un premier temps, on ne considèrera pas la force de traînée aérodynamique. Cela ne se fera qu'en dernière partie de l'exercice (2.3(b)(iii)).

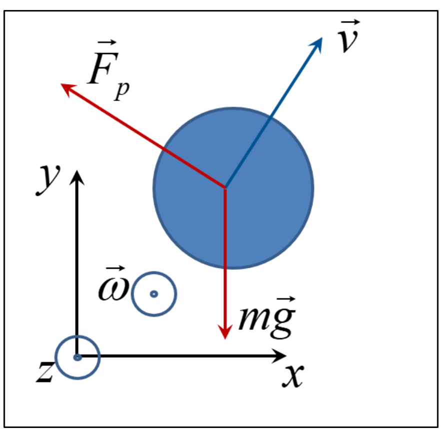

Figure 1 – Balle en translation et rotation soumis à la force de portance de Magnus et à la pesanteur.

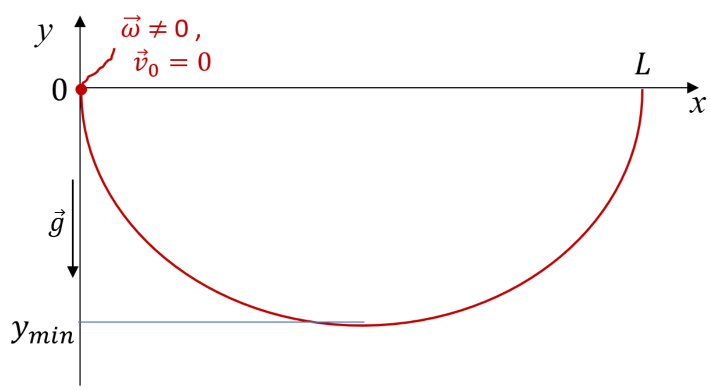

Figure 2 – Balle lancée à vitesse initiale nulle.

Le but de cet exercice, du point de vue physique, est d'étudier les trajectoires de la balle lorsqu'elle est lancée avec une vitesse initale $\vec{v_0}$ et une rotation $\vec{\omega}$. Pour simplifier, on examinera le cas de trajectoires dans le plan vertical (x, y). On prendra $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ et $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ et on supposera ω constante.

Du point de vue numérique, le but est d'étudier les propriétés de stabilité et de convergence de trois schémas différents : Euler explicite, semi-implicite et implicite. On peut décrire ces trois schémas de façon unfiée ainsi :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + (\alpha \mathbf{f}(\mathbf{y}_n) + (1-\alpha)\mathbf{f}(\mathbf{y}_{n+1}))\Delta t \tag{2}$$

— Le schéma d'Euler explicite, Eq.(2.12) des Notes de Cours, s'obtient avec $\alpha = 1$.

— Le schéma d'Euler implicite, section 2.5 des Notes de Cours, s'obtient avec $\alpha = 0$.
— Le schéma d'Euler semi-implicite s'obtient avec $\alpha = 0.5$. Voir présentation Semaine 1.

1.1 Calculs analytiques [12 pts]

(a) **[2 pts]** Ecrire le système d'équations différentielles du mouvement de la balle sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{3}$$

avec $\mathbf{y} = (x, y, v_x, v_y)$.

(b) **[2 pts]** Ecrire l'expression de l'énerige mécanique. Est-elle conservée ? (justifier)

(c) **[3 pts]** Trouver la solution analytique pour le cas $\vec{g} = 0$, avec la condition initiale $\vec{x}(0) = 0$, $\vec{v}(0) = v_0\vec{e}_x$. Montrer que le mouvement est circulaire uniforme, dont on calculera la rayon et la fréquence angulaire. *Indication : résoudre d'abord pour pour* (v_x, v_y).

(d) **[5 pts]** Trouver la solution analytique pour le cas $\vec{g} \neq 0$, avec la condition initiale $\vec{x}(0) = 0$, $\vec{v}(0) = 0$. *Indication : considérer le mouvement dans un référentiel* $\mathcal{R}'$ *en translation uniforme à la vitesse* $\vec{v}_E = \frac{m}{\omega^2 \mu R^3 \rho}\vec{\omega} \times \vec{g}$ *par rapport au référentiel du sol* $\mathcal{R}$. Montrer que les équations du mouvement dans $\mathcal{R}'$ sont identiques au cas $\vec{g} = 0$ dans $\mathcal{R}$ (cas (c)) . Montrer que la balle remonte jusqu'à la hauteur de lancement ($y = 0$), après un temps t_{fin} que l'on calculera, à une distance horizontale L que l'on calculera également.

1.2 Implémentation en C++

Télécharger le fichier Exercice1_student.zip du site Moodle. Pour rendre le code plus élégant, nous utilisons un vecteur de type 'valarray', qui est implémenté dans la 'Standard Template Library' de C++. Voir la documentation sous www.cplusplus.com/reference/valarray/valarray/. Dans le code, il faut en particulier implémenter les schémas d'Euler, Eq.(2). Il faudra aussi implémenter le calcul de l'énergie mécanique.

Important : il vous faut au moins une fois sur les deux sessions d'exercices montrer votre code à votre assistant.

1.3 Simulations et Analyses [33 pts]

On effectue des simulations avec le programme que l'on vient d'écrire et de compiler. Si l'éxécutable est `Exercice2`, taper à la ligne de commande d'un Terminal :
`> ./Exercice2  configuration.in`
La visualisation des résultats numériques se fait avec Python (ou `Matlab`). Voir les fichiers Python : Analyse.py, PlotResults.py et SchemeAnalysisSuite.py, que vous modifierez selon les besoins. (On donne aussi les scripts Matlab : Analyse.m et ParameterScan.m).
La balle de tennis a une masse $m = 0.056$kg, un rayon $R = 0.033$m. La densité de l'air est $\rho = 1.2$kg/m^3. Le coefficient $\mu = 6$.

(a) **[15 pts]** *Cas sans gravitation mais avec rotation*
On prend une vitesse de rotation de 10 tours/s. La condition initiale est $\vec{x}(0) = 0$, $\vec{v}(0) = 5$m/s. Simuler jusqu'à un temps $t_{\text{fin}} = 60$s. .

  (i) **[8 pts]** Pour chacun des trois schémas numériques implémentés (Euler explicite, implicite et semi-implicite), effectuer des simulations avec des nombres de pas de temps (nsteps) différents, vérifier la convergence numérique de la position finale et déterminer l'ordre de convergence. *Indication : on définit l'erreur comme la distance entre les positions finales numérique et analytique (voir 1.1(c)).* Faire de même pour la conservation de l'énergie mécanique. *Indication : on définit l'erreur sur la conservation comme* $\max(E_{\text{mec}}) - \min(E\text{mec})$.

(ii) **[7 pts]** Pour chacun des trois schémas numériques implémentés (Euler explicite, implicite et semi-implicite), tracer l'énergie mécanique, E_{mec}, en fonction du temps pour des valeurs différentes de (nsteps) . Illustrer les proprétés de stabilité numérique : évaluer le taux de croissance (ou de décroissance) pour des valeurs différentes de (nsteps) .

(b) **[18 pts]** *Cas avec rotation et gravitation*
On considère maintenant $\vec{g} = 9.81\text{m/s}^2$, et la même vitesse de rotation de la balle (10 tours/s). La condition initiale est $\vec{x}(0) = 0$, $\vec{v}(0) = 0$. On simule un temps t_{fin} tel que calculé en 1.1(d).

(i) **[8pts]** Pour un même nombre de pas de temps nsteps, comparer les trois trajectoires obtenues avec les trois schémas (explicite, semi-implicite, implicite). Comparer l'énergie mécanique, E_{mec}, en fonction du temps. Illustrer ainsi la stabilité ou l'instabilité de ces trois schémas. Faire une étude de convergence avec le pas de temps de la position finale pour le schéma semi-implicite.

(ii) **[10 pts]** On considère maintenant le cas plus réaliste où on tient compte de la force de traînée aérodynamique :

$$\vec{F}_t = -\frac{1}{2} C_t \rho S v \vec{v} \,, \tag{4}$$

avec $v = |\vec{v}|$, $S = \pi R^2$ et un coefficient de traînée $C_t = 0.35$. Modifiez le code pour tenir compte de cette force additionnelle. Utilisez le meilleur des trois schémas numériques pour prédire la position finale. Faire une étude de convergence avec le pas de temps de cette position finale.

(c) **[max 5pts] Facultatif.** Le but de cette section est de stimuler votre créativité. On donne ci-dessous quelques pistes possibles pour aller plus loin, mais n'hésitez pas à vous lancer si vous avez d'autres idées.

(i) Tenir compte de la viscosité de l'air qui va ralentir la rotation du ballon : $d\omega/dt = -\gamma\omega$, avec un coefficient γ à choisir, par exemple $\gamma = 0.01\text{s}^{-1}$.

(ii) Généraliser le code à des trajectoires 3D et des directions de $\vec{\omega}$ quelconques. Simuler le tir d'un coup franc au football, ou des trajectoires de balles de golf ou autres.

1.4 Rédaction du rapport en LaTeX, soumission du rapport en pdf et du code source C++

(a) Rédiger un rapport dans lequel les résultats des simulations ainsi que les réponses aux questions ci-dessous sont présentées et analysées. On peut partir du fichier source sur Moodle LaTeX(SqueletteRapport.tex) sur "Moodle". Voir aussi le dossier ressources sur Moodle : Dossier LaTeX.

(b) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` portant le nom `RapportExercice1_Nom1_Nom2.pdf`.

(c) Préparer le fichier source C++ `Exercice1_Nom1_Nom2.cpp`.

(d) Le lien de soumission est ici.

En plus des points mentionnés ci-dessus, **[5 pts]** *sont attribués pour la participation en classe : montrez et discutez vos résultats avec votre assistant.*