ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
Semestre de printemps 2024
Prof. Laurent Villard
Micol Bassanini

Physique Numérique – Exercice 3

A rendre jusqu'au mardi 16 avril 2024 sur le site Moodle
https://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=1174651

3 Orbite du téléscope spatial James Webb. Point de Lagrange. Schéma Runge-Kutta d'ordre 4. Pas de temps adaptatif.

Le téléscope spatial James Webb a été placé en orbite autour du soleil et de la terre au point de Lagrange "L2" du système soleil-terre.

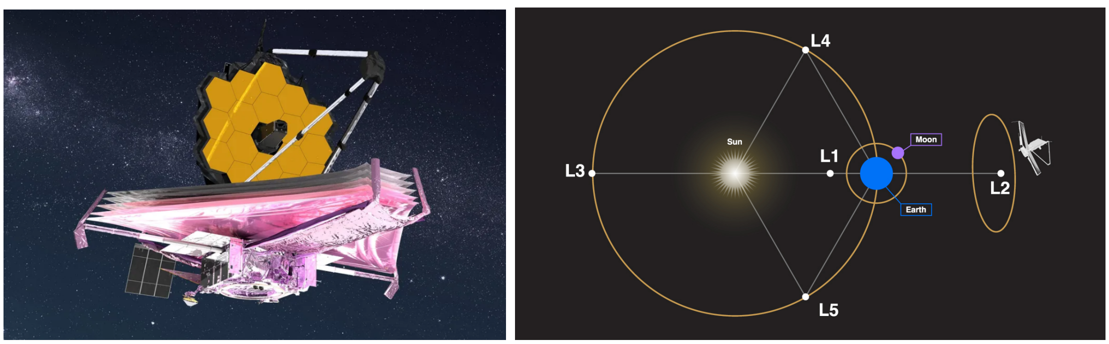

FIGURE 1 – Le télécope Webb (à gauche) et les points de Lagrange du système soleil-terre (à droite, vue schématique, pas à l'échelle)

On se propose d'étudier les orbites possibles de Webb sur le long terme. Dans une premiìre partie, on étudiera, sans tenir compte du soleil ni d'aucun autre corps céleste que la terre, comment passer d'un point sur une orbite basse (400 km de la surface terrestre) à la distance requise par L2 (1.5 milloins de km de la terre).

Dans un deuxième temps, on aborde le problème du système {soleil, terre, Webb} en faisant l'approximation du problm̀e à 3 corps "réduit", i.e. considérant que la masse de Webb est très inférieure à celles de la terre et du soleil. On découple ainsi le mouvement du système double {soleil, terre} du mouvement de Webb.

On étudiera le mouvement de Webb dans le référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel le soleil et la terre sont fixes. Pour simplifier, on considèrera le mouvement dans un plan.

Du point de vue numérique, le but est de programmer un algorithme avec un pas de temps variable, automatiquement ajustable en fonction d'un paramètre de contrôle. Le schéma numérique de base est celui de Runge-Kutta d'ordre 4. Voir les Notes de Cours, Sections 2.8 et 2.10 (en particulier 2.10.3 pour le schéma adaptatif).

Dans tout l'exercice, on prend la constante universelle de gravitation $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \mathrm{m}^3/\mathrm{kg\,s}^2$.

3.1 Calculs analytiques [15 pts]

(a) **[3 pts]** Calcul de l'orbite de transfert, en ne tenant compte que de la gravitation de la terre.

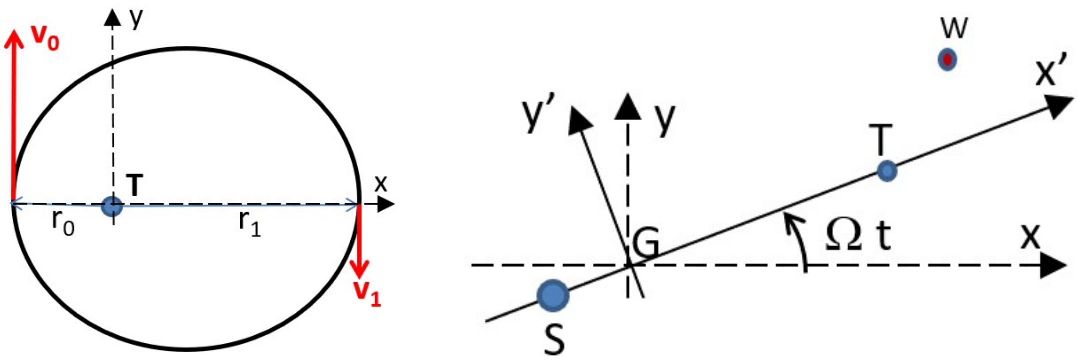

FIGURE 2 – A gauche : Orbite de transfert et coordonnées cartésiennes centrées sur la Terre $T(x, y)$. A droite : Soleil, Terre et Webb, référentiels d'inertie $\mathcal{R}$ de coordonnées $G(x, y)$ et référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation avec le système Soleil-Terre de coordonnées $G(x', y')$, avec G le centre de masse.

Webb est initialement à une distance de $r_0 = 6800$km du centre de la terre, de masse $m_T = 5.9736 \cdot 10^{24}$kg. On aimerait calculer la vitesse v_0 que doit avoir Webb pour qu'il atteigne une distance de $r_1 = 1.5$ millons de km à l'apogée de l'orbite de transfert. Calculer aussi la vitesse finale v_1. Voir figure 2. Ecrire les équations du mouvement de Webb en coordonnées **cartésiennes** centrées sur la terre et les mettre sous la forme $\mathrm{d}\mathbf{y}/\mathrm{d}t = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, avec $\mathbf{y}(t) = (x(t), y(t), v_x(t), v_y(t))$.

(b) **[3 pts]** Soit le système {soleil, terre}, de masses $m_S = 1.98892 \cdot 10^{30}$kg et $m_T = 5.9736 \cdot 10^{24}$kg. En supposant des orbites circulaires et une distance terre-soleil constante $d = 149.598023$ millions de km, calculer les positions x'_S et x'_T du soleil et de la terre, l'axe x' étant selon l'axe soleil-terre, le centre de masse G du système étant en $x' = 0$. Calculer la vitesse angulaire Ω du mouvement.

(c) **[4 pts]** Soit $\mathcal{R}'$ le référentiel en rotation à la vitesse angulaire Ω (dans lequel le soleil et la terre sont immobiles). Montrer que les équations du mouvement de Webb dans ce référentiel, en utilisant les coordonnées cartésiennes (x', y') centrées en G peuvent s'écrire $\mathrm{d}\mathbf{y}/\mathrm{d}t = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, avec $\mathbf{y}(t) = (x'(t), y'(t), v'_x(t), v'_y(t))$, et

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} & v'_x & & \\ & v'_y & & \\ -\frac{Gm_S}{r_S^3}(x' + \alpha d) & -\frac{Gm_T}{r_T^3}(x' - \beta d) & +\Omega^2 x' & +2\Omega v'_y \\ -\frac{Gm_S}{r_S^3}y' & -\frac{Gm_T}{r_T^3}y' & +\Omega^2 y' & -2\Omega v'_x \end{pmatrix} \tag{1}$$

où on a posé $r_S = |\vec{r}' - \vec{r}'_S|$, $r_T = |\vec{r}' - \vec{r}'_T|$, $\alpha = m_T/(m_S + m_T)$, $\beta = m_S/(m_S + m_T)$, $\vec{r}'$ étant la position de Webb (x', y').

(d) **[1 pt]** L'énergie mécanique est-elle conservée ? Si oui, écrire son expression.

(e) **[4 pts]** Montrer que l'équation pour la position d'équlibre dans $\mathcal{R}'$ sur l'axe x' du point de Lagrange L2 peut s'écrire sous la forme de l'équation polynomiale :

$$\begin{aligned} &\Omega^2 x'^5 - 2\Omega^2(x'_S + x'_T)x'^4 + \Omega^2\left((x'_S + x'_T)^2 + 2x'_S x'_T\right)x'^3 \\ &-\left(G(m_S + m_T) + 2\Omega^2 x'_T x'_S(x'_T + x'_S)\right)x'^2 + \left(2G(m_S x'_T + m_T x'_S) + \Omega^2 {x'_T}^2 {x'_S}^2\right)x' \\ &-G(m_S {x'_T}^2 + m_T {x'_S}^2) = 0\ . \end{aligned} \tag{2}$$

On utilisera la méthode `roots` de `NumPy` pour trouver les racines de cette équation. Seule une des ces racines est à valeur réelle. (On peut aussi utiliser la fonction `roots` de `Matlab`.)

3.2 Implémentation en C++

Télécharger le fichier Exercice3_2024_student.zip du site Moodle. Vous êtes libres d'utiliser ou non ce squelette, ou de partir d'un de vos exercices précédents, ou de tout récrire du début. Vous pouvez aussi réutiliser, en les modifiant, les scripts `ParameterScan.py` ou `ParameterScan.m` des exercices précédents. Implémenter le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. Programmer deux options : un schéma à pas de temps Δt fixe et un schéma à pas de temps adaptatif. Considérer deux systèmes d'équations : (1) pour le problème de l'orbite de transfert dans un référentiel d'inertie (comme en 3.1(a)), et (2) pour le problème de Webb dans le référentiel en rotation $\mathcal{R}'$ (comme en 3.1(c)).

Indication : on donne en input le tenps final `tFin` *de la simulation, ainsi que le nombre de pas de temps* `nsteps`*. Pour le schéma Δt fixe, on est ainsi assuré de finir la simulation exactement à $t = t_{\text{fin}}$, en prenant* `dt = tFin/nsteps;`*. Mais, pour le schéma adaptatif,* `nsteps` *ne sert que pour l'estimation initiale de* `dt`*. L'algorithme va changer le* `dt` *utilisé, et généralement on ne finira pas exactement à $t = t_{\text{fin}}$. Pour ce faire, étant donné un* `dt` *proposé par l'algorithme, on choisit donc* `dt = min(dt, tFin-t);`*. Ce n'est pas grave si le dernier pas de temps est plus court que nécessaire.*

Important : il vous faut au moins une fois sur les deux sessions d'exercices montrer votre code à votre assistant.

3.3 Simulations et Analyses [30 pts]

On effectue des simulations avec le programme que l'on vient d'écrire et de compiler. Si l'exécutable est `Exercice3`, taper à la ligne de commande d'un Terminal :

```
> ./Exercice3  configuration.in
```

La visualisation des résultats numériques se fait avec Python (ou `Matlab`).

(a) **[15 pts]** *Orbite de transfert*

Initialiser la position et la vitesse de Webb comme calculé en 3.1(a). On fait des simulations en considérant un temps final t_{fin} égal au temps mis pour aller de r_0 à r_1. *Indication : la période du mouvement est donné par la 3e loi de Kepler : $T = 2\pi\sqrt{a^3/Gm_S}$.*

- (i) **[7 pts]** Faire une simulation avec le schéma à pas de temps fixe, $n_{\text{steps}} = 5000$, et illustrer la trajectoire obtenue, ainsi que l'évolution temporelle $E_{\text{mec}}(t)$. Faire ensuite une simulation avec le schéma adaptatif, en prenant une tolérance $\epsilon = 10^2$. Noter le nombre de pas de temps effectué. Illuster la trajectoire obtenue ainsi que l'évolution temporelle $E_{\text{mec}}(t)$. Comparer et discuter ces deux simulations.
- (ii) **[8 pts]** Vérifier la convergence numérique avec n_{steps} de l'erreur sur la position finale, définie comme la distance entre les positions finales théorique et numérique, ainsi que de l'erreur sur la conservation de l'énergie mécanique, définie comme $\max(E_{\text{mec}}) - \min(E_{\text{mec}})$, en utilisant le schéma à pas de temps fixe. Faire ensuite de même avec le schéma à pas de temps adaptatif. Pour cela, il faut faire une série de simulations avec des tolérances ϵ différentes. On enregistre, pour chaque simulation, le nombre de pas de temps n_{steps} effectué. Comparer et discuter les deux schémas (pas de temps fixe et pas de temps adaptatif).

(b) **[15 pts]** *Au voisinage de L2*

On considère maintenant le problème à 3 corps réduit, tel qu'en 3.1(c), i.e. le mouvement de Webb dans le référentiel en rotation $\mathcal{R}'$. On place Webb au point de Lagrange L2, avec une vitesse initiale $v'_x = 0, v'_y = -0.1\text{m/s}$.

- (i) **[8 pts]** Prendre un temps final $t_{\text{fin}} = 2$ ans. (On prend pour simplifier une année de 365 jours de 24 heures). Faire une étude de convergence avec n_{steps} de la position finale et de l'erreur sur la conservation de l'énerige mécanique, avec le schéma à pas de temps fixe, puis avec le schéma à pas de temps variable. Comparer les deux schémas.

(ii) **[7 pts]** Illustrer le mouvement obtenu. En particulier, illustrer comment Webb s'éloigne de L2 exponentiellement dans le temps, pour un certain intervalle de temps.

(c) **[max 5 pts]** *Facultatif. Ce ne sont que des suggestions. Si vous avez d'autres idées, allez-y, explorez !*

(i) Simuler des temps plus longs (20 ans, 50 ans, ...). Considérer des conditions initiales avec différents $v'_x(0), v'_y(0)$ au voisinage de L2.

(ii) Simuler des temps longs, pour des conditions initiales au voisinage des autres points de Lagrange. Examiner leur stabilité.

(iii) Que se passerait-il si la Terre était 1000 fois plus massique qu'en réalité ? Et 100'000 fois plus ?

(iv) Généraliser à des mouvements de Webb en dehors du plan (x', y').

(v) Etudier l'effet perturbateur de la lune.

3.4 Rédaction du rapport en LaTeX, soumission du rapport en pdf et du code source C++

(a) Rédiger un rapport **de maximum 12 pages figures incluses** dans lequel les résultats des simulations ainsi que les réponses aux questions ci-dessous sont présentées et analysées. On peut partir du fichier source sur Moodle LaTeX(SqueletteRapport.tex) sur "Moodle". Voir aussi le dossier ressources sur Moodle : Dossier LaTeX.

(b) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` portant le nom `RapportExercice2_Nom1_Nom2.pdf`.

(c) Préparer le fichier source C++ `Exercice2_Nom1_Nom2.cpp`.

(d) Le lien de soumission est ici.

En plus des points mentionnés ci-dessus, **[5 pts]** *sont attribués pour la participation en classe : montrez et discutez votre code et vos résultats avec votre assistant.*