École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2024
Prof. Laurent Villard
Dr Giovanni Di Giannatale

Physique Numérique – Exercice 2

A rendre jusqu'au mardi 19 mars 2024 sur le site Moodle
https://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=1173427

2 Pendule de longueur variable. Excitation paramétrique. Sections de Poincaré. Chaos.

On considère le mouvement d'un pendule simple, de masse m, avec un fil de masse négligeable de longueur variable

$$l(t) = L + \alpha t + d \sin(\omega t) \tag{1}$$

avec $L = 0.2$m, et α, d et ω donnés (voir plus bas). Le fil est attaché à un point fixe O dans un référentiel d'inertie $\mathcal{R}$. Le mouvement du pendule est restreint au plan vertical. On négligera toute force de frottement. On prend $g = 9.81\text{m/s}^2$.

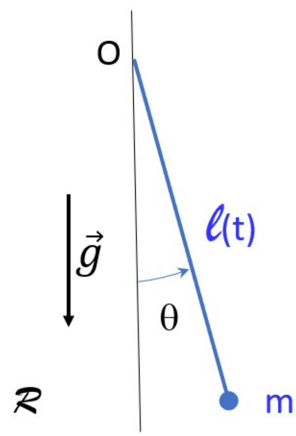

Figure 1 – Pendule simple avec longueur de fil variable $l(t)$.

Le but de cet exercice, du point de vue physique, est d'étudier les grands mouvements du pendule, pour illustrer plusieurs phénomènes de physique non-linéaire. Du point de vue numérique, on implémentera le schéma symplectique de Verlet, modifié pour inclure des forces dépendant à la fois de la position et du temps, et des forces dépendant à la fois de la vitesse et du temps. Voir Notes de Cours, Section 2.7, en particulier les Eqs. (2.125)(2.126) (2.127).

2.1 Calculs analytiques [8 pts]

(a) **[2 pts]** Ecrire le système d'équations différentielles du mouvement du pendule sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{2}$$

avec $\mathbf{y} = (\theta, \dot{\theta})$.

(b) **[3 pts]** Ecrire l'expression de l'énergie mécanique. Est-elle conservée ? (justifier) Si non, écrire l'expression de la puissance des forces non-conservatives.

(c) **[3 pts]** Trouver la solution analytique pour le cas $\alpha = 0$, $d = 0$, pour de petits mouvements ($\theta \ll 1$), après linéarisation des équations du mouvement. Calculer la fréquence propore ω_0.

2.2 Implémentation en C++

Télécharger le fichier Exercice2_2024_student.zip du site Moodle. Dans le code, il faut en particulier implémenter l'algorithme de Verlet modifié, le calcul de l'énergie mécanique et celui de la puissance des forces non-conservatives.

Important : il vous faut au moins une fois sur les deux sessions d'exercices montrer votre code à votre assistant.

2.3 Simulations et Analyses [37 pts]

On effectue des simulations avec le programme que l'on vient d'écrire et de compiler. Si l'éxécutable est `Exercice2`, taper à la ligne de commande d'un Terminal :

`> ./Exercice2  configuration.in`

La visualisation des résultats numériques se fait avec Python (ou `Matlab`).

(a) **[9 pts]** *Cas sans excitation*

On considère $\alpha = 0$, $d = 0$.

(i) **[5 pts]** Simuler des petits mouvements, i.e. prendre une condition initiale $\theta_0 = 10^{-10}$, $\dot{\theta} = 0$, et prendre un temps final t_{fin} égal à 3 périodes du mouvement (voir la partie analytique correspondante). Vérifier la convergence numérique avec Δt, et déterminer son ordre, de la position finale et de la vitesse angulaire finale.

(ii) **[4 pts]** Simuler des grands mouvements, i.e. effectuer une série de simulations avec des conditions initiales $\theta_0 \in]0, \pi[$, $\dot{\theta}_0 = 0$. Pour chacune des simulations, mesurer la période d'oscillation T. Représenter la fréquence angulaire $\Omega = 2\pi/T$ en fonction de θ_0.

(b) **[8 pts]** *On rétracte lentement le fil*

On considère maintenant $\alpha = -0.02$m/s, $d = 0$. On simule un temps $t_{\text{fin}} = 0.96L/|\alpha|$. On prend la condition initiale $\theta_0 = 0.5$, $\dot{\theta}_0 = 0$.

(i) **[4 pts]** Faire une étude de convergence de la position finale avec Δt.

(ii) **[4 pts]** Illustrer le mouvement obtenu. Vérifier le théorème de l'énergie mécanique : $\mathrm{d}E_{\text{mec}}/\mathrm{dt} = P_{\text{nc}}$. *Indication : prendre les différences finies centrées pour calculer* $\mathrm{d}E_{\text{mec}}/\mathrm{d}t$.

(c) **[20 pts]** *Cas avec oscillation de la longueur du fil*

On considère maintenant $\alpha = 0$, $d = 0.01$m, et une fréquence d'excitation $\omega = 2\omega_0$, avec ω_0 la fréquence propre calculée analytiquement en 2.1(c).

(i) **[5 pts]***Excitation paramétrique.* Prendre la condition initiale $\theta_0 = 0.01$, $\dot{\theta}_0 = 0$ et simuler jusqu'à un temps t_{fin} égal à 200 périodes d'excitation. Illuster et décrire le mouvement obtenu. Donnez une interprétation physique aux résultats.

(ii) **[5 pts]***Mouvement chaotique.* Prendre la condition initiale $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 15\text{s}^{-1}$. Simuler jusqu'à un temps final t_{fin} égal à 10 périodes d'excitation. Faire une étude de convergence de la position finale avec Δt. Refaire de même, mais pour un temps final t_{fin} égal à 20 périodes d'excitation.

(iii) **[5 pts]** *Mouvement chaotique.* Pour un même Δt, faire deux simulations jusqu'à un temps final t_{fin} égal à 40 périodes d'excitation, l'une avec la condition initiale $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 15\text{s}^{-1}$, et l'autre avec une position initiale très proche, $\theta_0 = 10^{-6}$, $\dot{\theta}_0 = 15\text{s}^{-1}$.

Calculer la distance dans l'espace de phase entre les deux orbites obtenues

$$\delta(t) = \sqrt{\omega_0^2(\theta_1(t) - \theta_2(t))^2 + (\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t))^2}. \tag{3}$$

Représenter ensuite cette distance en fonction du temps sur un diagramme semi-logarithmique. Estimer (graphiquement) l'exposant de Lyapounov.

(iv) [**5 pts**] *Sections de Poincaré.* Dans cette partie, on choisit un nombre entier n_{per} de pas de temps par période d'excitation. On effectue de très longues simulations, i.e. un temps final t_{fin} de l'ordre de 10000 périodes d'excitation. On n'écrit pas tous les points de l'orbite, mais seulement **un par période**, dans le plan de phase $(\theta, \dot{\theta})$, sans les relier entre eux. C'est ce qu'on appelle une section de Poincaré. Effectuer quelques simulations pour des conditions initiales différentes et illustrer les sections de Poincaré obtenues.

(d) [**max 5pts**] **Facultatif.** Le but de cette section est de stimuler votre créativité. On donne ci-dessous quelques pistes possibles pour aller plus loin, mais n'hésitez pas à vous lancer si vous avez d'autres idées.

  (i) Rajouter une force de viscosité $\vec{F}_v = -\kappa\vec{v}$. Etudier les petits mouvements amortis. Etudier les grands mouvements avec excitation sinusoidale de grande amplitude d. Essayer de trouver des attracteurs étranges.

  (ii) Programmer le schéma d'Euler semi-implicite (cf Exercice 1) et comparer ses propriétés numériques avec le schéma de Verlet.

2.4 Rédaction du rapport en LaTeX, soumission du rapport en pdf et du code source C++

(a) Rédiger un rapport **de maximum 12 pages figures incluses** dans lequel les résultats des simulations ainsi que les réponses aux questions ci-dessous sont présentées et analysées. On peut partir du fichier source sur Moodle LaTeX(SqueletteRapport.tex) sur "Moodle". Voir aussi le dossier ressources sur Moodle : Dossier LaTeX.

(b) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` portant le nom `RapportExercice2_Nom1_Nom2.pdf`.

(c) Préparer le fichier source C++ `Exercice2_Nom1_Nom2.cpp`.

(d) Le lien de soumission est ici.

En plus des points mentionnés ci-dessus, [**5 pts**] *sont attribués pour la participation en classe : montrez et discutez vos résultats avec votre assistant.*