

A4. Oscillations libres et forcées

1 Introduction et buts de la manipulation

Les cours de physique sont usuellement divisés en chapitres : mécanique, thermodynamique, électrodynamique, etc. Une particularité intéressante peut cependant être mise en évidence : les équations qui apparaissent dans les différents chapitres de la physique ou des sciences en général sont souvent exactement les mêmes et ainsi, un phénomène donné a des "analogues". À titre d'exemple, citons la propagation de la lumière dans le vide ou dans la matière et la propagation des ondes acoustiques ; la loi d'Ohm en électricité, la loi de Fick (conduction de la chaleur) en thermodynamique et la loi de Darcy (diffusion d'eau dans un matériel poreux) en technique de l'ingénieur. Dès lors, une étude effectuée sur un phénomène et les lois qui le régissent conduit à des interprétations qui peuvent être transposées aux cas de phénomènes obéissant à des équations de même forme. On peut aussi "simuler" des conditions techniques et expérimentales jugées difficiles sur un système à l'aide d'un système "analogue" plus simple à ce point de vue. Très souvent, l'établissement d'une théorie se fait à partir de modèles et d'approximations, les deux notions pouvant se recouvrir. Un modèle est une représentation schématique de ce que l'on croit être la réalité (modèle boule de billard pour un gaz parfait par exemple). À partir du modèle, des calculs sont effectués et conduisent à des résultats plus ou moins en accord avec l'expérience. Au cours des calculs, il est parfois judicieux de recourir à des approximations, c'est-à-dire de laisser de côté certains aspects du problème.

C'est dans cet esprit qu'il faut aborder la manipulation proposée, consacrée à l'étude des oscillations mécaniques.

2 Le modèle : disque oscillant

Le système envisagé dans la manipulation est un disque de moment d'inertie I pouvant tourner autour de son axe vertical (voir Fig.1). Son mouvement est décrit par l'angle de rotation θ . Il est soumis à des forces de frottement qu'on suppose de type visqueux et laminaire (donc proportionnel à la vitesse) et il peut être excité par un couple de force extérieure fonction du temps $G(t)$.

En utilisant les équations de la dynamique du solide indéformable (théorème du moment cinétique), on obtient l'équation du mouvement suivante.

$$I \cdot \ddot{\theta} + N \cdot \dot{\theta} + k \cdot \theta = G(t) \quad (1)$$

avec $I[\text{kg}/\text{m}^2]$ le moment d'inertie du disque par rapport à son axe, $k[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2]$ la constante du couple de rappel et $N[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$ le coefficient du couple de frottement.

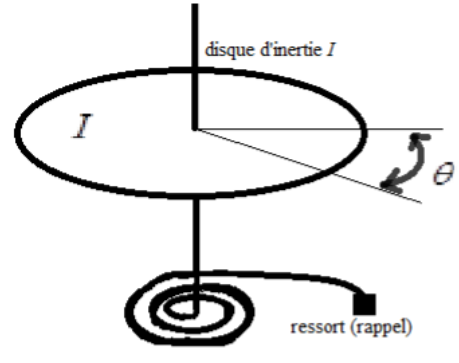


FIGURE 1 – Schéma du principe expérimental.

La résolution de l'Équation (1) est classique. Elle peut être trouvée dans les cours et traités de mécanique générale ou dans les cours de mathématiques. Nous en donnons ici les résultats principaux et les interprétations correspondantes dans le cas de la manipulation envisagée (pendule de torsion).

On définit

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{N}{2I} && \text{le coefficient d'amortissement } [s^{-1}], \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{I}} && \text{la pulsation de l'oscillateur harmonique } [s^{-1}], \\ \frac{G(t)}{I} &= p \sin(\Omega t) && \text{une perturbation sinusoïdale de fréquence } \Omega \text{ et d'amplitude } p. \end{aligned} \quad (2)$$

L'Équation différentielle (1) devient :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda \cdot \dot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \theta = p \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad (3)$$

2.1 Oscillations libres

Le couple forçant n'est pas appliqué : $p = 0$.

Comme condition initiale, on choisit de lâcher le disque sans vitesse initiale, ($\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = 0$), d'une position $\theta(0) = \theta_0$ par rapport à sa position d'équilibre.

Trois cas sont à distinguer (voir Fig.2) :

(a) $\lambda^2 < \omega_0^2$: amortissement faible (sous-critique)

L'équation du mouvement est

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t - \varphi) \quad (4a)$$

avec $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$.

On définit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ la pseudo-période et $\Delta = \lambda \cdot T$ le décrement logarithmique.

Cas particulier : $\lambda = 0$ (pas de frottement \implies oscillateur harmonique)

L'équation du mouvement est

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad (4b)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$ qui est bien la pulsation de l'oscillateur harmonique.

(b) $\lambda^2 = \omega_0^2$: amortissement critique

L'équation du mouvement est

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\lambda t} (1 + \lambda t) \quad (5)$$

(c) $\lambda^2 > \omega_0^2$: amortissement fort (sur-critique), mouvement apériododique

L'équation du mouvement est

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda t} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) \quad (6)$$

avec $\omega^2 = \lambda^2 - \omega_0^2$

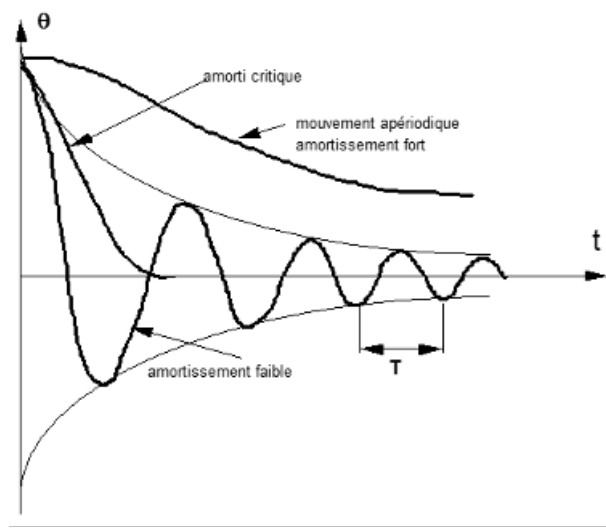


FIGURE 2 – Oscillations pour les différents types d'amortissement.

2.2 Oscillations forcées

On suppose le système à l'équilibre initialement ($\theta_0 = \dot{\theta}_0 = 0$) et on applique un couple sinusoïdal par rapport au temps, avec pulsation Ω . Rappelons l'équation différentielle (3) :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda \cdot \dot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \theta = p \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Ses solutions pour les différents types d'amortissements (voir Fig.2) sont données par

$$\begin{aligned} \theta(t) &= A(\Omega) \sin(\Omega t - \psi) + C e^{-\lambda t} \cos(\omega t - \varphi) & \text{si } \lambda^2 < \omega_0^2 \text{ (amortissement faible)} \\ \theta(t) &= A(\Omega) \sin(\Omega t - \psi) + e^{-\lambda t} (C_1 + C_2 t) & \text{si } \lambda^2 = \omega_0^2 \text{ (amortissement critique)} \\ \theta(t) &= A(\Omega) \sin(\Omega t - \psi) + e^{-\lambda t} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) & \text{si } \lambda^2 > \omega_0^2 \text{ (amortissement fort)} \end{aligned} \quad (7)$$

Le premier terme en sinus du membre de droite de chaque équation ci-dessus correspond au mouvement permanent et le deuxième terme correspond au mouvement transitoire. Les constantes qui y figurent sont définies par

$$\psi = \arctan\left(\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \quad \text{et} \quad A(\Omega) = \frac{p}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \quad (8)$$

Les constantes (C et φ) ou (C_1 et C_2) se déterminent dans chaque cas à l'aide des conditions initiales.

L'amplitude des oscillations forcées stationnaires $A(\Omega)$ ainsi que le déphasage $\psi(\Omega)$ dépendent de la valeur de Ω (Fig.3).

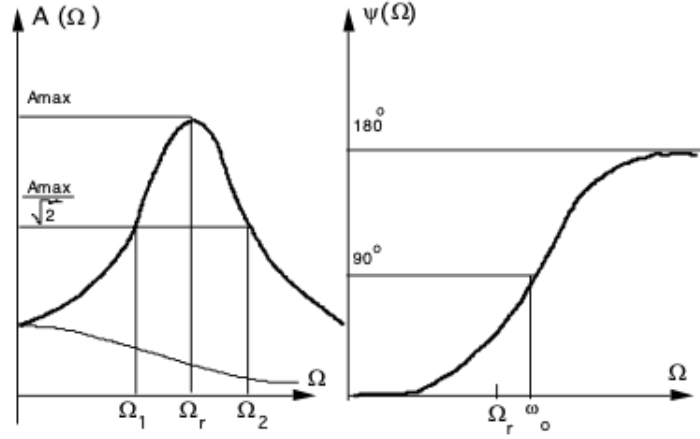


FIGURE 3 – Amplitude $A(\Omega)$ et déphasage $\psi(\Omega)$.

(a) amortissement faible :

On obtient pour $A(\Omega)$ une courbe de résonance typique caractérisée par

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \text{ (pulsation résonante) et } \Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{2\lambda\omega}{\Omega_r} \text{ (largeur de raie).}$$

Ω_1 et Ω_2 correspondent à la largeur du pic à mi-hauteur, c'est-à-dire à une valeur de l'amplitude de $\frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$ ou encore à une atténuation de 3 dB par rapport à la valeur maximale.

Le facteur de qualité de la résonance vaut $Q = \frac{\Omega_r}{\Delta\Omega} = \frac{\Omega_r^2}{2\lambda\omega}$.

Remarque : Les fréquences ω_0 , ω et Ω_r sont telles que $\omega_0^2 - \omega^2 = \omega^2 - \Omega_r^2 = \lambda^2$.

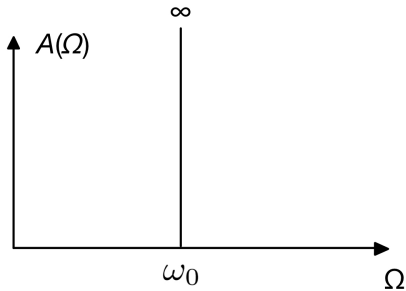


FIGURE 4 – Représentation de la singularité pour $\Omega = \omega_0$.

En l'absence de frottement ($\lambda = 0$), la courbe de résonance $A(\Omega)$ présente seulement une singularité pour $\Omega = \omega_0$ (voir Fig.4).

Régime transitoire : Le deuxième terme de (7) représente des oscillations propres amorties de pulsation ω . Lorsque t croît, il perd progressivement de son importance au profit du premier terme qui représente des oscillations forcées stationnaires de pulsation Ω et de déphasage ψ . Lorsque Ω et ω sont voisins, le système oscille (voir Fig.5) avec une **pulsation de battement** $\omega_B = |\omega - \Omega|$.

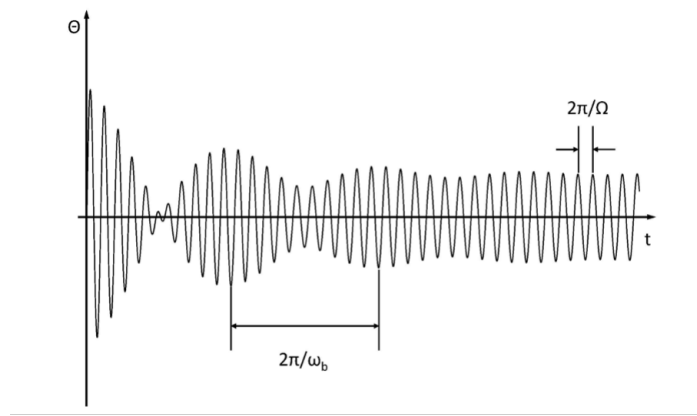


FIGURE 5 – Représentation de l'effet de battement lorsque Ω et ω sont voisins.

Remarquons que la période de battement est nulle lorsque $\Omega = \omega$.

(b) amortissement fort :

La courbe présente un maximum pour $\Omega = 0$: il n'y a pas d'oscillation forcée mais un déplacement fixe valant $\frac{p}{\omega_0}$.

3 Description des dispositifs expérimentaux

Le montage de la Figure 6 est constitué d'un système ad-hoc avec sécurité, d'un enregistreur x-y-t (PC) et d'un compteur de fréquence ou de temps. La Figure 7 présente une photo du système.

Légende :

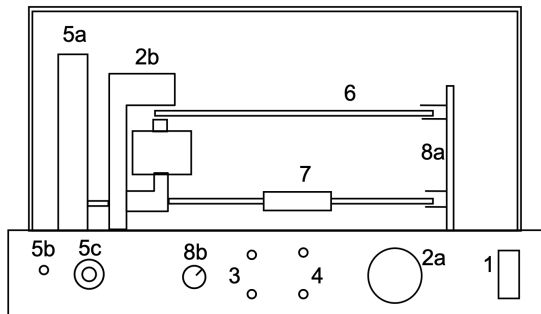


FIGURE 6 – Montage expérimental.

- 1 Interrupteur principal
- 2a Amortissement magnétique (commande)
- 2b Amortissement magnétique (système) : permet de modifier l'amortissement du disque.
- 3 Potentiomètre 1 : mesure l'amplitude des oscillations du disque → vers l'entrée x de l'enregistreur.
- 4 Potentiomètre 2 : mesure l'amplitude des oscillations de l'excitation → vers l'entrée y de l'enregistreur.

- 5a Moteur : permet de forcer l'oscillation du disque.
- 5b Interrupteur du moteur 5a
- 5c Potentiomètre de commande du moteur 5a : règle la vitesse du moteur.
- 6 Disque
- 7 Ressort de rappel et système de transmission de l'excitation
- 8a Système de détection du déphasage entre excitation (moteur) et réponse (disque).
Ce système se compose de deux cellules permettant de détecter un passage donné de l'excitation et de la réponse. Des impulsions électriques sont envoyées sur des compteurs de temps (chronomètres électroniques).
On peut mesurer sur le compteur HP 5315 A :
 - la fréquence ou la période d'excitation
 - la fréquence ou la période du disque (réponse)
 - et le déphasage (voir plus loin).
- 8b Commutateur pour choix de sortie vers le compteur HP 5315 A. Un diagramme du signal envoyé selon la position du commutateur est disponible ci-dessous. Les réglages appropriés du compteur pour mesurer les différents signaux envoyés par le montage sont décrits en détail sur la documentation disponible sur place.

4 Travail demandé

1) En appliquant les équations de la dynamique du solide indéformable, montrer que l'équation du mouvement du disque oscillant est bien l'Équation (1).

2) Déterminer le coefficient d'amortissement λ et la pulsation ω dans le cas des oscillations libres.

Pour cela, on règle le freinage électromagnétique sur le maximum. On utilise l'enregistreur avec les échelles y,t convenablement choisies. Avant de commencer la mesure, s'assurer que la position d'équilibre du disque soit à 0° . Si ce n'est pas le cas, ceci peut être accompli en déplaçant le bras du moteur d'excitation. L'angle θ_0 en $t = 0$ sera choisi d'environ 135° .

Peut-on déterminer la pulsation ω_0 de l'oscillateur idéal sans frottement ?

Effectuer la même observation dans le cas où le freinage électromagnétique est nul. Peut-on tirer une valeur de ω et de λ ? Discuter.

3) Dans le cas d'un amortissement faible, mettre en évidence les battements qui interviennent lorsqu'on considère l'oscillateur forcé. On pourra déterminer expérimentalement les pulsations ω, Ω et ω_B respectivement de l'oscillateur, de la perturbation et des battements, et vérifier la relation $\omega_B = |\omega - \Omega|$.

Les pulsations ω_0, ω et Ω_r peuvent être mesurées à l'aide du fréquencemètre ou de l'enregistreur. ω_B est mesurable à partir des enregistrements.

4) Dans le cas d'un amortissement électromagnétique non nul (pour diminuer les phénomènes transitoires de battements), étudier l'amplitude $A(\Omega)$ et le déphasage $\psi(\Omega)$ du mouvement permanent.

Donner les valeurs de la fréquence de résonance, du facteur de qualité et de la largeur de raie. Le disque peut être muni de "masses" dans le but de modifier son moment d'inertie. Attention

à bien équilibrer les masses autour du disque pour éviter d'endommager le matériel.

5) À partir des résultats obtenus, discuter des paramètres qui permettent d'agir sur une résonance mécanique.

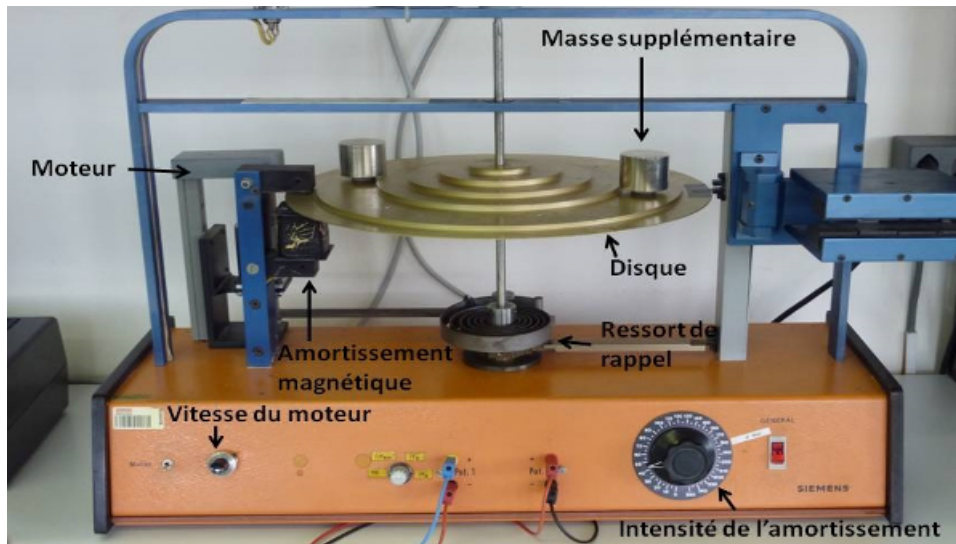


FIGURE 7 – Image du dispositif expérimental de la Figure 6.