

D1. Torsion élastique des solides

1 But de l'expérience

Mesure du module de cisaillement G de divers matériaux par méthodes statique et dynamique. Discussion des avantages et inconvénients de chaque méthode.

2 Introduction : élasticité

Lorsqu'un corps solide est soumis à des contraintes extérieures, il se déforme. Si la déformation est réversible on dit qu'elle est élastique. On considère habituellement trois types de déformation élastique : la déformation uniaxiale, le cisaillement simple et la compression.

Déformation uniaxiale :

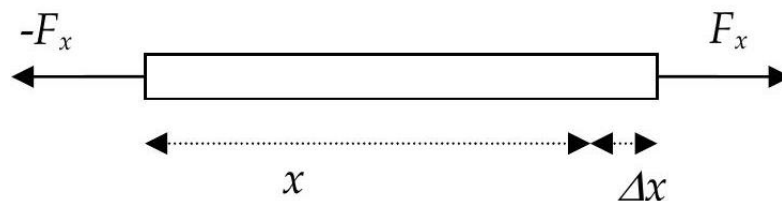


FIGURE 1 – Essai de traction simple.

Appliquant une force de traction F_x dans la direction x , un échantillon de matière (métal, polymère, céramique) s'allonge de Δx . On définit la déformation selon la direction x comme

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$$

où Δx est la variation de longueur d'une éprouvette de longueur x (voir Fig.1).

En définissant la contrainte de traction dans la direction x comme : $\sigma_x = \frac{F_x}{S}$
où S est la section de l'échantillon, on peut écrire la loi de Hooke,

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

où E est le module d'élasticité, aussi appelé module de Young. L'allongement de l'éprouvette dans le sens de la traction s'accompagne généralement d'une contraction latérale et donc les déformations perpendiculaires à l'axe de traction s'écrivent

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y} \text{ et } \varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z}.$$

Pour des raisons évidentes de symétrie, $\varepsilon_y = \varepsilon_z$.

Le **coefficient de Poisson** ν est défini par

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

Comme la variation de volume ΔV pour de faibles déformations est donnée par

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x \cdot (1 - 2\nu)$$

on voit que ν doit être compris entre 0 et 0.5 . Dans les métaux, $\nu \approx 0.35$.

Cisaillement simple (voir Fig.2) :

Un exemple de déformation par cisaillement est représenté sur la Figure 2, où la déformation vaut $\alpha = \frac{\delta x}{z_0}$ et la contrainte de cisaillement vaut $\tau = \frac{F_t}{S_0}$.

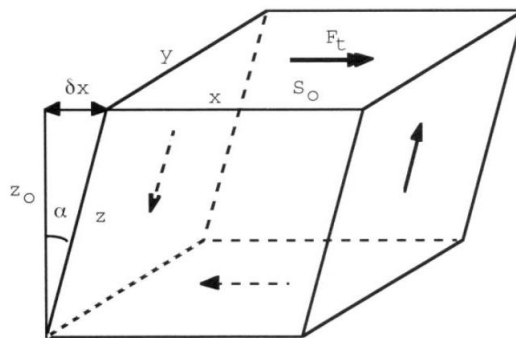


FIGURE 2 – Cisaillement simple

Les conditions d'équilibre d'un parallélépipède imposent que les contraintes tangentielles sur les quatre faces soient égales.

Le **module de cisaillement** G est défini par

$$\tau = G \cdot \alpha$$

et la compression hydrostatique (uniforme) est

$$P = -k \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

où P désigne la pression hydrostatique et k le **module de compressibilité**.

Les quatre constantes E, G, k et le coefficient de Poisson ν sont reliés par les expressions

$$E = \frac{9kG}{G + 3k} = 3k(1 - 2\nu) = 2G(1 + \nu)$$

Ainsi, parmi les quatre constantes élastiques, il n'en existe que deux qui soient indépendantes.

3 Torsion de barres cylindriques

3.1 Théorie

Considérons un échantillon cylindrique solide de rayon r , de longueur l , d'axe OO' , soumis à l'action d'un couple ou moment de torsion M_z parallèle à l'axe OO' (voir Fig.3).

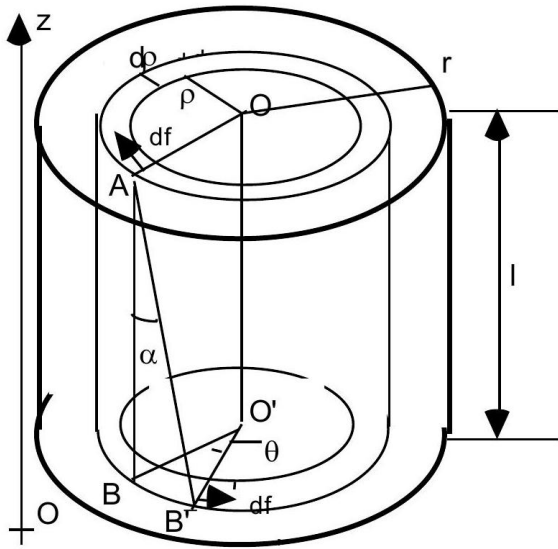


FIGURE 3 – Torsion d'une barre cylindrique.

Sous l'action du couple, chaque section droite (perpendiculaire à l'axe OO') tourne sans se déformer d'un angle θ , ce qui se traduit par une déformation de cisaillement des éléments de volume situés à une distance ρ de l'axe du cylindre.

La déformation en cisaillement s'exprime par l'angle α

$$\alpha = \frac{\rho\theta}{l}$$

Cette déformation de cisaillement est due à l'action de contraintes de cisaillement τ qui, à une distance ρ de l'axe du cylindre, valent

$$\tau = G\alpha = G\frac{\rho\theta}{l}$$

et les contraintes τ sont reliées au moment de torsion M_z par

$$M_z = \int_S \rho G \alpha dS = \int_0^r \rho G \alpha 2\pi \rho d\rho = \frac{2\pi G \theta}{l} \int_0^r \rho^3 d\rho$$

On obtient donc pour la valeur du couple de torsion en fonction de l'angle de torsion θ ,

$$M(\theta) = \frac{\pi G r^4}{2l} \theta = \frac{\pi G d^4}{32l} \theta$$

avec $d = 2r = \text{diamètre du cylindre de longueur } l$.

3.2 Méthode statique

Les tiges cylindriques à étudier (Fig. 4), solidaires d'une poulie (D), sont introduites entre les supports fixe (F) et mobile (M) d'une base rigide graduée (B). La tige qui peut tourner librement en (F), est encastrée en (M) à une distance l de (D) grâce à une vis de serrage (V). Le moment de torsion est exercé par l'intermédiaire d'un poids (P), $P = mg$, suspendu au disque (D) d'un diamètre D . L'angle de torsion est mesuré par la déviation d'un rayon lumineux incident sur le miroir (m) solidaire du disque (D).

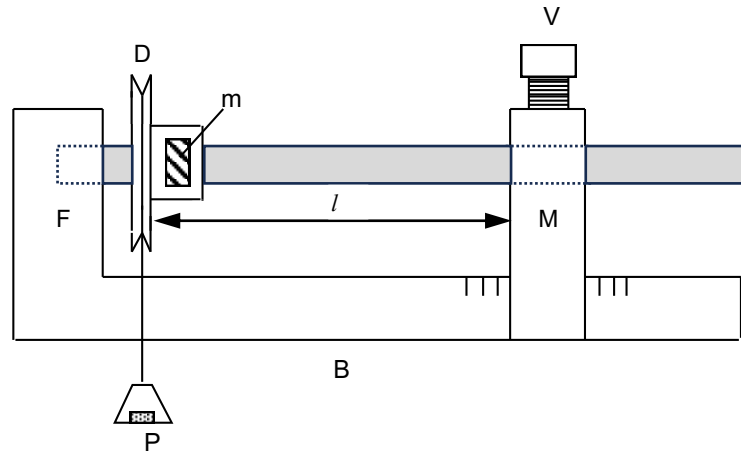


FIGURE 4 – Banc pour essais de torsion.

Le moment de torsion de la barre vaut donc

$$M(\theta) = \frac{\pi G d^4}{32l} \theta = mg \frac{D}{2}$$

et alors

$$G = \frac{16 l m g D}{\pi d^4 \theta}$$

3.3 Méthode dynamique

Si l'on suspend à l'extrémité libre d'un fil, fixé à son autre extrémité, un solide de moment d'inertie I , on constitue un pendule de torsion (voir Fig.5), dont l'équation du mouvement

s'écrit (voir cours de mécanique, théorème du moment cinétique)

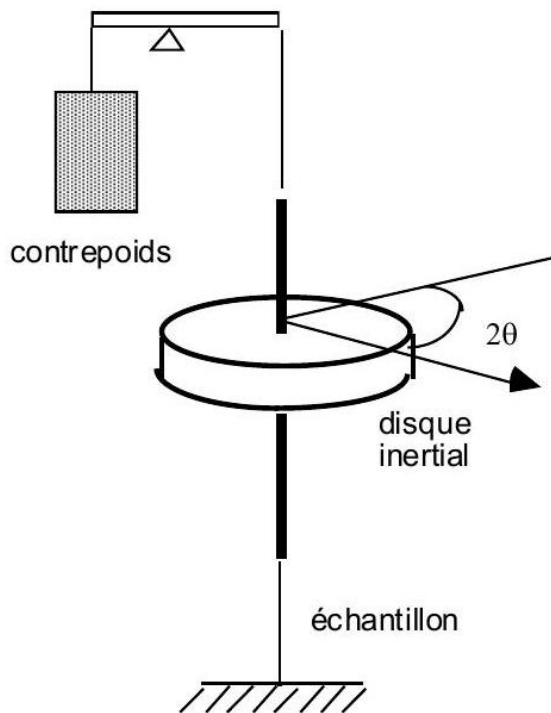
$$I\ddot{\theta} + M(\theta) = 0$$

c'est-à-dire, en remplaçant $M(\theta)$ par son expression,

$$\ddot{\theta} + \frac{\pi G d^4}{32 I \cdot l} \theta = 0$$

Sa solution est

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$



Le système oscille avec une pulsation caractéristique ω donnée par

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi G d^4}{32 I \cdot l}}$$

La mesure de la période d'oscillation $T = \frac{2\pi}{\omega}$ permet alors de mesurer le module G

$$G = \frac{128\pi I \cdot l}{d^4 T^2}$$

Pour une lame de section rectangulaire ($b \times c$), avec $b = 4c$:

$$G = \frac{140.5 I \cdot l}{b c^3 T^2}$$

FIGURE 5 – Pendule de torsion inversé. Le poids du disque d'inertie et de la tige rigide qui le relie à l'échantillon, est compensé par une balance et un contrepoids.

Oscillateur amorti :

En fait, on observe que les oscillations du pendule laissé à lui-même décroissent au cours du temps. Cette décroissance de l'amplitude des oscillations est en partie due aux frottements de l'air, mais aussi à la capacité d'amortissement propre du matériau. En effet, la décroissance des oscillations dépend du matériau.

On peut modifier l'équation du mouvement du pendule en introduisant un terme de frottement visqueux, qui représente l'amortissement interne au matériau étudié.

L'équation du mouvement s'écrit alors : $I \cdot \ddot{\theta} + C \cdot \dot{\theta} + M(\theta) = 0$, dont la solution est

$$\theta = \theta_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t) \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

avec $\lambda = C/2I$ coefficient d'amortissement qui représente la capacité d'amortissement *du* matériau. On peut déterminer λ par le décrement logarithmique des oscillations (à montrer)

$$\lambda = \frac{1}{nT} \ln \frac{\theta(t)}{\theta(t + nT)}$$

avec $\theta(t)$ et $\theta(t + nT)$ les amplitudes des oscillations à l'instant t et n périodes après l'instant t (instant $t + nT$).

4 Expériences à réaliser

Mesures du module de torsion G d'au moins deux matériaux et comparaison des valeurs obtenues.

1. Méthode statique (voir Fig.6a) :

- Mesurer le diamètre D du disque (D) utile au calcul du moment de torsion
- Mesurer le diamètre moyen d de la tige échantillon par exemple en mesurant le diamètre en 10 endroits différents.
- Insérer la tige échantillon entre les extrémités (F) et (M). Disposer le miroir (m) solidaire du disque (D) de manière à obtenir la marque lumineuse sur le bas de l'échelle graduée.
- Pour effectuer des mesures, mesurer la hauteur du point lumineux, ainsi que la distance de la règle graduée au miroir, et en déduire l'angle θ . Ne pas oublier que pour une rotation de α du miroir, le faisceau est dévié de 2α .
- Effectuer des mesures de torsion à longueur l constante en appliquant différents poids ($P = mg$). Dresser le graphique $\theta = \theta(P)$.
- Effectuer des mesures à moment constant en changeant l . Dresser le graphique $\theta = \theta(l)$.
- Déduire des mesures la valeur de G du matériau mesuré à partir des pentes des graphiques $\theta = \theta(P)$ et $\theta = \theta(l)$.

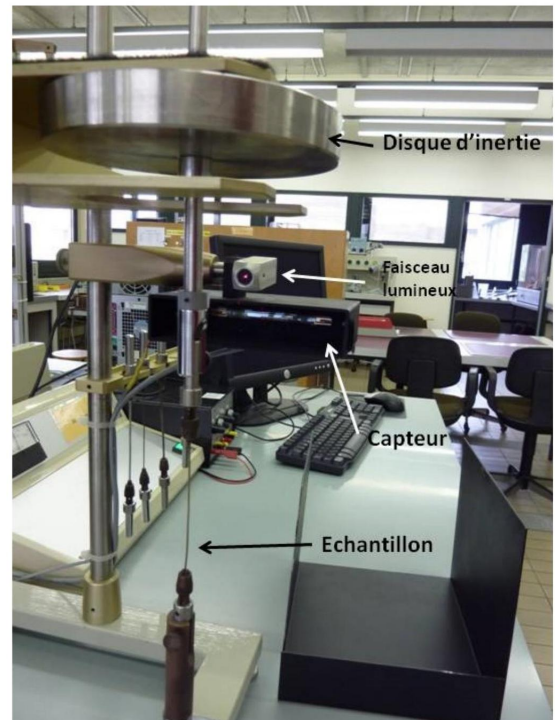
2. Méthode dynamique (voir Fig.6b) :

- Mesurer les dimensions et la masse du disque d'inertie et calculer le moment d'inertie I du pendule $\left(I = \int_{vol} r^2 \cdot dm = \frac{M \cdot r^2}{2} \right)$.

- Mesurer la longueur du fil échantillon et son diamètre d .
- Placer le disque d'inertie de sorte à ce que la réflexion du faisceau lumineux se trouve au milieu du capteur. L'aiguille du voltmètre doit être proche de 0 pour éviter une saturation pendant la mesure. Monter ensuite l'échantillon comme élément élastique du pendule.
- Exciter le pendule dans un "pur" mouvement de torsion. Ceci peut être fait en employant la tige au pied du pendule. Les oscillations sont enregistrées par ordinateur, à l'aide du programme "Plotter_Y1Y2_t". Replacer le cache avant de commencer les mesures, pour un meilleur signal et éviter de toucher la table pendant une mesure.
- Mesurer la durée de 10 oscillations pour en déduire la valeur de la période T des oscillations.
- Mesurer le décrément logarithmique pour obtenir une quantification de la capacité d'amortissement du matériau
- Répéter deux à trois fois l'expérience par échantillon.



(a)



(b)

FIGURE 6 – a) Installation de la méthode statique. b) Installation de la méthode dynamique.

Caractéristiques élastiques de certains métaux et alliages

Material 20 °C	$\frac{E}{\text{GPa}}$	$\frac{G}{\text{GPa}}$	ν	$\frac{K}{\text{GPa}}$
Aluminium	70.3	26.1	0.345	75.5
Bismuth	31.9	12.0	0.330	31.3
Cadmium	49.9	19.2	0.300	41.6
Chromium	279.1	115.4	0.210	160.1
Copper	129.8	48.3	0.343	137.8
Gold	78.0	27.0	0.44	217.0
Iron (soft)	211.4	81.6	0.293	169.8
Iron (cast) ⁺	152.3	60.0	0.27	109.5
Lead ⁺	16.1	5.59	0.44	45.8
Magnesium	44.7	17.3	0.291	35.6
Nickel (unmag., soft) ⁺	199.5	76.0	0.312	177.3
„ „ hard) ⁺	219.2	83.9	0.306	187.6
Niobium	104.9	37.5	0.397	170.3
Platinum	168.0	61.0	0.377	228.0
Silver	82.7	30.3	0.367	103.6
Tantalum	185.7	69.2	0.342	196.3
Tin	49.9	18.4	0.357	58.2
Titanium	115.7	43.8	0.321	107.7
Tungsten	411.0	160.6	0.280	311.0
Vanadium	127.6	46.7	0.365	158.0
Zinc	108.4	43.4	0.249	72.0
Brass (70 Zn, 30 Cu)	100.6	37.3	0.350	111.8
Constantan	162.4	61.2	0.327	156.4
Hidurax Special ⁺⁺	144.5	54.4	0.333	144.1
Invar (36 Ni, 63.8 Fe, 0.2 C)	144.0	57.2	0.259	99.4
Nickel Silver ^S	132.5	49.7	0.333	132.0
Steel (Mild)	211.9	82.2	0.291	169.2
„ (3% C)	210.0	81.1	0.293	168.7
„ (3% C hardened)	201.4	77.8	0.296	165.0
„ Tool ^{II}	211.6	82.2	0.287	165.3
„ Tool (hardened) ^{II}	203.2	78.5	0.295	165.2
„ Stainless ⁺⁺	215.3	83.9	0.293	166.0
Tungsten Carbide ⁺	534.4	219.0	0.22	319.0