Đồ thị

Khoa CNTT

Trường Đại học Phenikaa

Đồ thị (8 tiết)

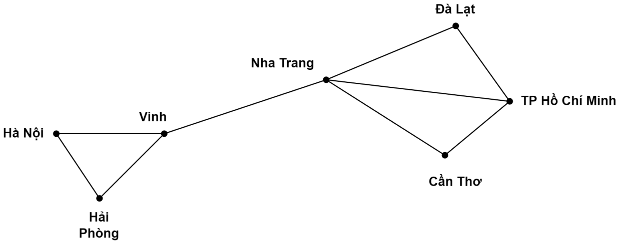
1. Đồ thị và phân loại đồ thị
2. Các thuật ngữ về đồ thị
3. Biểu diễn đồ thị
4. Đường đi, chu trình
5. Đồ thị có trọng số
6. Đồ thị phẳng và Tô màu đồ thị
7. Ôn tập

1. Đồ thị và phân loại đồ thị

- Lý thuyết đồ thị là ngành khoa học được phát triển từ lâu nhưng lại có nhiều ứng dụng hiện đại.
- Đồ thị được dùng để giải các bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau (mạch điện, cấu trúc của hợp chất hóa học, mạng máy tính,. . .).
- **Định nghĩa:**
  Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các **đỉnh** và các **cạnh** nối các đỉnh đó.
- **Phân loại:**
  Đồ thị được phân loại dựa theo đặc tính của cạnh nối các cặp đỉnh của đồ thị.

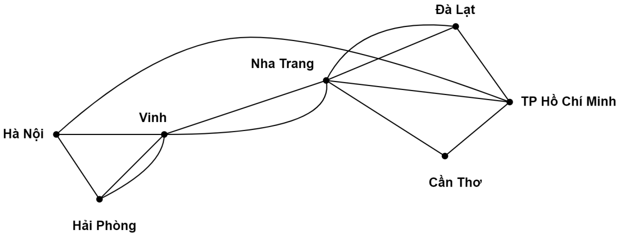
1. Đồ thị và phân loại đồ thị

- **Phân loại:**
  Cho đồ thị $G = (V, E)$, trong đó: tập không rỗng V là tập các đỉnh và tập E là tập các cạnh.
  - *Đơn đồ thị:*
    Với mỗi cặp đỉnh $i, j \in V$, có nhiều nhất một cạnh nối i và j.



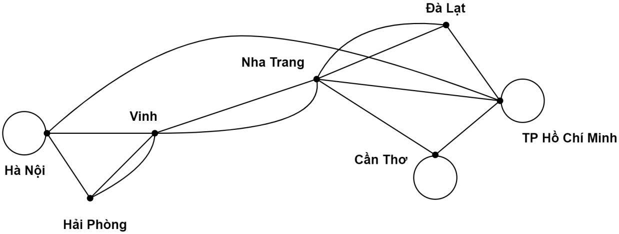
1. Đồ thị và phân loại đồ thị

- **Phân loại:**
  Cho đồ thị $G = (V, E)$, trong đó: tập không rỗng V là tập các đỉnh và tập E là tập các cạnh.
  - *Đa đồ thị:*
    Với mỗi cặp đỉnh $i, j \in V$, có thể có nhiều hơn một cạnh nối i và j.

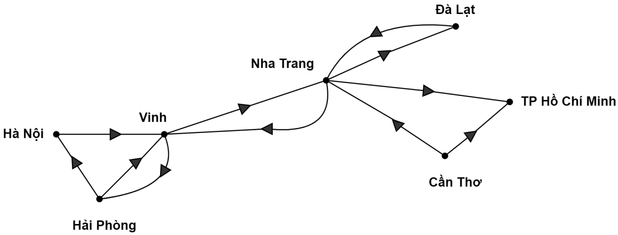


Đơn đồ thị là một trường hợp riêng của đa đồ thị.

- **Phân loại:**
  Cho đồ thị $G = (V, E)$, trong đó: tập không rỗng V là tập các đỉnh và tập E là tập các cạnh.
  - *Đồ thị khuyên:*
    Tồn tại ít nhất một đỉnh $i \in V$ và một cạnh nối i với chính nó.

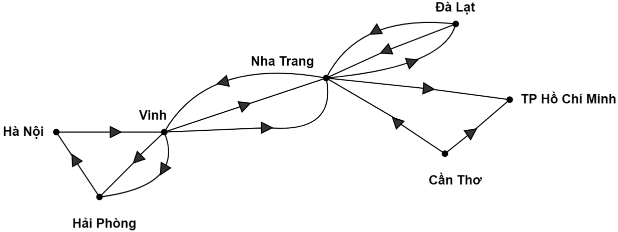


- **Phân loại:**
  Cho đồ thị $G = (V, E)$, trong đó: tập không rỗng V là tập các đỉnh và tập E là tập các cạnh.
  - *Đơn đồ thị có hướng:*
    Với mỗi cặp đỉnh $i, j \in V$, có duy nhất một cạnh $e \in E$ sao cho: $e = (i, j)$. Trong đó, (i, j) thể hiện cạnh e có chiều từ i đến j.



1. Đồ thị và phân loại đồ thị

- **Phân loại:**
  Cho đồ thị $G = (V, E)$, trong đó: tập không rỗng V là tập các đỉnh và tập E là tập các cạnh.
  - *Đa đồ thị có hướng:*
    Với mỗi cặp đỉnh $i, j \in V$, có thể có nhiều hơn một cạnh $e \in E$ sao cho: $e = (i, j)$. Trong đó, (i, j) thể hiện cạnh e có chiều từ i đến j.



Ví dụ:
Đồ thị "lấn tổ" trong sinh thái học:

- Mỗi loài vật được biểu diễn bằng một đỉnh.
- Một cạnh nối hai đỉnh nếu hai loài vật cùng chung nguồn thức ăn.

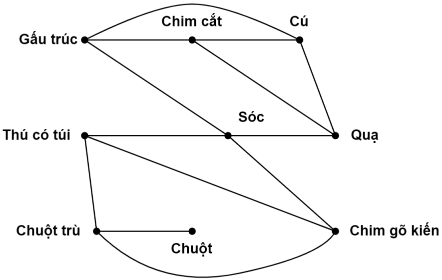
Thảo luận

Đồ thị này là loại đồ thị gì?

Ví dụ:

Đồ thị "lấn tổ" trong sinh thái học:

- Mỗi loài vật được biểu diễn bằng một đỉnh.
- Một cạnh nối hai đỉnh nếu hai loài vật cùng chung nguồn thức ăn.



Ví dụ:

Đồ thị ảnh hưởng:

- Mỗi người được biểu diễn bằng một đỉnh.
- Một cạnh nối hai đỉnh thể hiện khả năng ảnh hưởng của người này lên suy nghĩ của người kia.

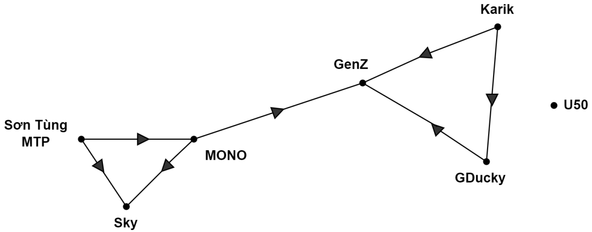
Thảo luận

Đồ thị này là loại đồ thị gì?

Ví dụ:

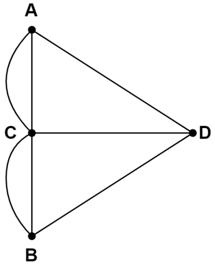
Đồ thị ảnh hưởng:

- Mỗi người được biểu diễn bằng một đỉnh.
- Một cạnh nối hai đỉnh thể hiện khả năng ảnh hưởng của người này lên suy nghĩ của người kia.



Ví dụ:

Bài toán 7 cây cầu:



Bài tập 5.1:
Đồ thị giao của các tập $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ là một đồ thị có một đỉnh biểu diễn mỗi tập và có cạnh nối các đỉnh biểu diễn các tập nếu các tập này giao khác rỗng. Hãy dựng đồ thị giao của các tập hợp sau:

a. $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
   $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
   $A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
   $A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
   $A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$

b. $A_1 = \{..., -4, -3, -2, -1, 0\}$
   $A_2 = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
   $A_3 = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$
   $A_4 = \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$
   $A_5 = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$

2. Các thuật ngữ về đồ thị

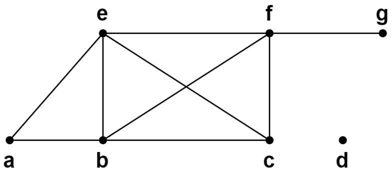
1. Bậc của đỉnh
2. Các dạng đồ thị đặc biệt

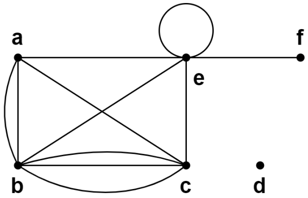
2.1. Bậc của đỉnh

Định nghĩa:

- Hai đỉnh u và v trong một đồ thị vô hướng G được gọi là **liền kề** (hay láng giềng) nếu $\{u, v\}$ là một cạnh của G.
- Nếu $e = \{u, v\}$ thì e gọi là **cạnh liên thuộc** với các đỉnh u và v. Cạnh e cũng được gọi là **cạnh nối** các đỉnh u và v. Cạnh u và v được gọi là **điểm đầu mút** của cạnh $\{u, v\}$.
- **Bậc** của một đỉnh trong đồ thị vô hướng là số các cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó. Người ta kí hiệu bậc của đỉnh v là $deg(v)$.

Bài tập 5.2:
Liệt kê bậc của các đỉnh trong đồ thị sau:





2.1. Bậc của đỉnh

Định lý 5.1: Định lý "bắt tay"

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có e cạnh. Khi đó:

$$2e = \sum_{v \in V} deg(v)$$

Bài tập 5.3:

a. Có bao nhiêu cạnh trong đơn đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5.
b. Có bao nhiêu cạnh trong đơn đồ thị có 99 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5.

2.1. Bậc của đỉnh

Bài tập 5.3:

a. Có bao nhiêu cạnh trong đơn đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5.
b. Có bao nhiêu cạnh trong đơn đồ thị có 99 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5.

Định lý 5.2

Đơn đồ thị có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ.

Bài tập 5.4:

Dựng và tính số cạnh của đơn đồ thị có bậc các đỉnh như sau:

a. 4, 3, 3, 2, 2
b. 3, 3, 3, 3, 2
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 4

2.1. Bậc của đỉnh

Định nghĩa:

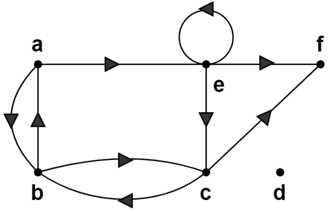
- Khi (u, v) là cạnh của đồ thị có hướng G, thì u được gọi là **nối tới** v, và v được gọi là **nối từ** u. Đỉnh u gọi là **đỉnh đầu**, đỉnh v gọi là **đỉnh cuối** của cạnh (u, v). Đỉnh đầu và đỉnh cuối của khuyên trùng nhau.
- Trong đồ thị có hướng **bậc vào** của đỉnh v ký hiệu là $deg^-(v)$ là số cạnh có đỉnh cuối là v. **Bậc ra** của đỉnh v, ký hiệu là $deg^+(v)$ là số cạnh có đỉnh đầu là v. Một khuyên sẽ góp 1 đơn vị vào và 1 đơn vị vào bậc ra của đỉnh này.

Định lý 5.3

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng có e cạnh. Khi đó:

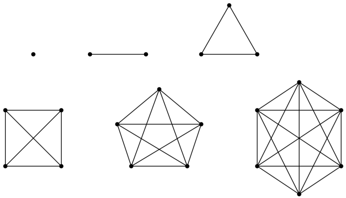
$$\sum_{v \in V} deg^-(v) = \sum_{v \in V} deg^+(v) = e$$

Bài tập 5.5:
Tính bậc của từng đỉnh trong đồ thị sau:

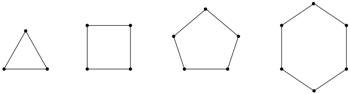


2.2. Các dạng đồ thị đặc biệt

- **Đồ thị đầy đủ** n đỉnh, ký hiệu là K_n là một đơn đồ thị mà mỗi cặp đỉnh phân biệt đều có cạnh nối.

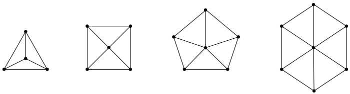


- **Đồ thị chu trình** n đỉnh, ký hiệu là $C_n (n \geq 3)$ là một đơn đồ thị có n đỉnh $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ và các cạnh $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, ..., \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\},.$

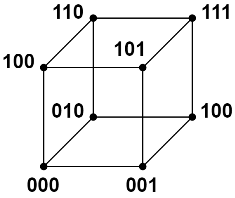


2.2. Các dạng đồ thị đặc biệt

- Thêm một đỉnh vào đồ thị C_n và nối đỉnh này với các đỉnh của C_n ra được **đồ thị bánh xe** W_n.

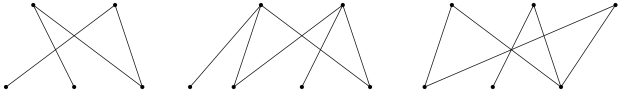


- **Đồ thị khối** n **chiều**, ký hiệu là Q_n là các đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng xâu nhị phân độ dài n. Hai đỉnh liền kề nếu và chỉ nếu các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng 1 bit.

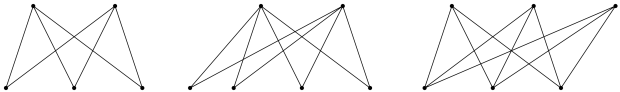


2.2. Các dạng đồ thị đặc biệt

- Một đồ thị G được gọi là **đồ thị phân đôi** nếu tập đỉnh V có thể phân làm hai tập con không rỗng, rời nhau V_1, V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2.



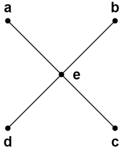
- Giả sử tập V_1 có m đỉnh và tập V_2 có n đỉnh, **đồ thị phân đôi đầy đủ** trên tập đỉnh $V = V_1 \cup V_2$, ký hiệu là $K_{m,n}$, là đồ thị mà mỗi đỉnh ở tập V_1 nối với tất cả các đỉnh của tập V_2.

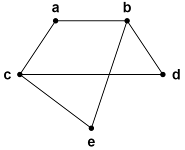


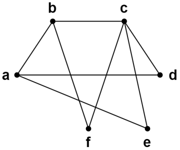
Bài tập 5.6:
Các đồ thị sau có bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh:

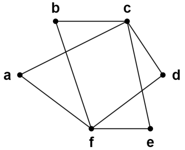
a. K_9
b. C_{15}
c. W_{15}
d. $K_{3,4}$
e. Q_7

Bài tập 5.7:
Trong các đồ thị sau, đồ thị nào là đồ thị phân đôi?









2.2. Các dạng đồ thị đặc biệt

Thảo luận

Làm thế nào để xác định một đồ thị có phải đồ thị phân đôi hay không?

2.2. Các dạng đồ thị đặc biệt

Thảo luận

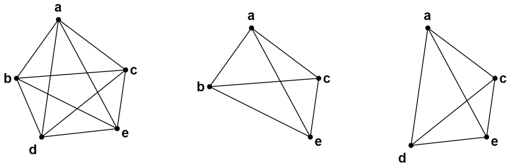
Làm thế nào để xác định một đồ thị có phải đồ thị phân đôi hay không?

Định lý 5.4

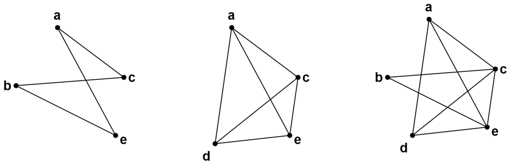
Một đồ thị là đồ thị phân đôi khi và chỉ khi G không có chu trình lẻ.

2.2. Các dạng đồ thị đặc biệt

- **Đồ thị con** của đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị $G' = (V', E')$, trong đó $v' \in V$ và $E' \in E$.



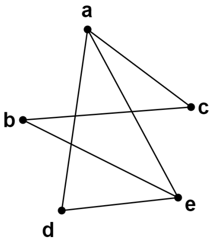
- **Hợp** của hai đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đơn đồ thị có tập các đỉnh là $V_1 \cup V_2$ và tập các cạnh là $E_1 \cup E_2$. Ta ký hiệu hợp của hai đồ thị G_1 và G_2 là $G_1 \cup G_2$.



3. Biểu diễn đồ thị

- Trong đời sống, đồ thị có thể được biểu diễn bằng các đỉnh, các cạnh trên một hình vẽ. Tuy nhiên, chương trình máy tính không thể hiểu được hình vẽ, không thể trích xuất ra tập đỉnh và tập cạnh từ một hình vẽ, cũng như không thể vẽ được đồ thị bằng cách nối các đỉnh cho trước để tạo thành các cạnh.
  $\Longrightarrow$ Cần có cách chuyển đổi từ hình vẽ sang dạng số để có thể sử dụng đồ thị trong các chương trình máy tính.
- Các cách biểu diễn đồ thị thường gặp trong Khoa học máy tính:
  1. Danh sách cạnh
  2. Danh sách liền kề
  3. Ma trận liền kề

3.1. Danh sách cạnh, danh sách kề



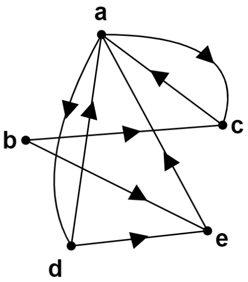
Danh sách cạnh:

- $\{a, c\}$
- $\{a, d\}$
- $\{a, e\}$
- $\{b, c\}$
- $\{b, e\}$
- $\{d, e\}$

Danh sách liền kề:

Đỉnh	Đỉnh liền kề
a	c,d,e
b	c,e
c	a,b
d	a,e
e	a,b,d

Bài tập 5.8:
Viết danh sách cạnh, danh sách liền kề của đồ thị:



3.2. Ma trận liền kề

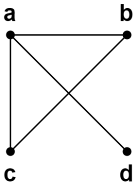
Giả sử $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị, trong đó $|V| = n$ và các đỉnh được liệt kê một cách tùy ý $v_1, \dots, v_n$.

Ma trận liền kề A (hay A_G) của G ứng với danh sách các đỉnh này là ma trận 0-1 cấp $n \times n$ có phần tử hàng i cột j bằng 1 nếu v_i và v_j liền kề nhau, và bằng 0 nếu chúng không được nối với nhau. Nói cách khác, ma trận liền kề của đồ thị là ma trận $A = [a_{ij}]$, trong đó:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } \{v_i, v_j\} \text{ là một cạnh của} G \\ 0, & \text{nếu không có cạnh nối đỉnh } v_i \text{ với đỉnh } v_j \end{cases}$$

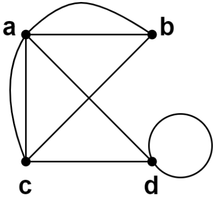
3.2. Ma trận liền kề

Ví dụ:



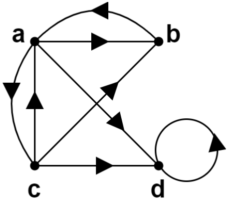
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài tập 5.9:



$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

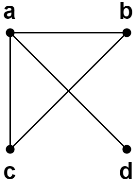
Bài tập 5.10:



$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

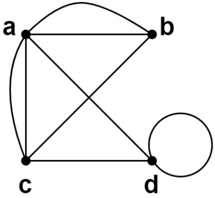
3.2. Ma trận liền kề

Ví dụ:



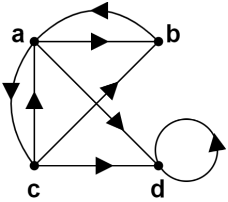
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài tập 5.9:



$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 5.10:

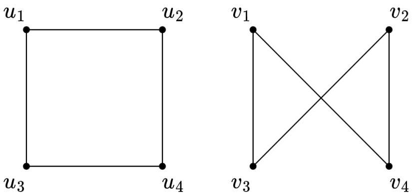


$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3. Sự đẳng cấu của hai đồ thị

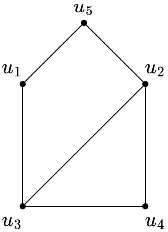
- Hai đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là **đẳng cấu** nếu có một hàm song ánh f từ V_1 lên V_2 sao cho các đỉnh a, b liền kề trong G_1 khi và chỉ khi $f(a), f(b)$ liền kề trong G_2 với mọi $a, b \in V_1$. Hàm f như thế được gọi là một đẳng cấu.
- Nói cách khác, khi hai đơn đồ thị là đẳng cấu, sẽ tồn tại một phép tương ứng 1-1 giữa các đỉnh của hai đồ thị để bảo toàn quan hệ liền kề.

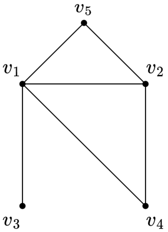
  Ví dụ:



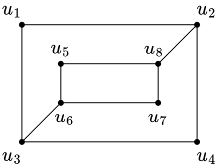
3.3. Sự đẳng cấu của hai đồ thị

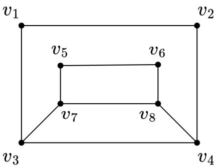
Bài tập 5.11:



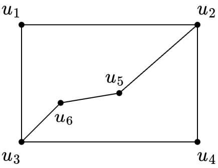


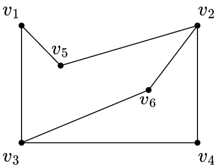
Bài tập 5.12:





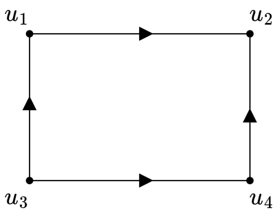
Bài tập 5.13:

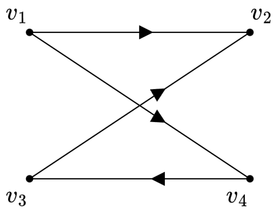




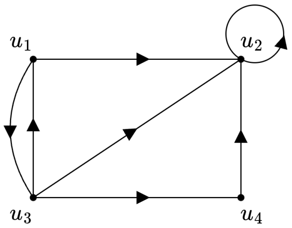
3.3. Sự đẳng cấu của hai đồ thị

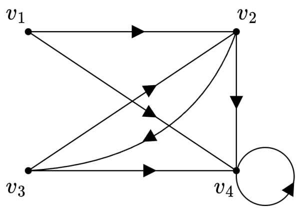
Bài tập 5.14:





Bài tập 5.15:



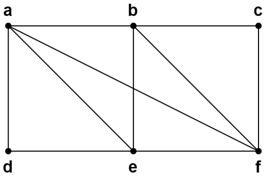


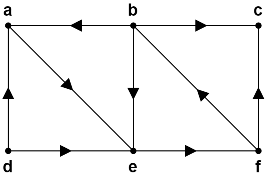
4. Đường đi, chu trình

- Đường đi độ dài s từ u đến v trong đơn đồ thị là một dãy các đỉnh $x_0, x_1, \ldots, x_s$ mà $x_0 = u, x_s = v$ và $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{s-1}, x_s)$ là các cạnh của đồ thị.
- Đường đi được gọi là chu trình nếu đường đi có bắt đầu và kết thúc tại một đỉnh.
- Đường đi (hay chu trình) trong đơn đồ thị được gọi là đường đi đơn (chu trình đơn) nếu nó không chứa một cạnh quá một lần.

Bài tập 5.16:

1. Tìm các đường đi đơn có độ dài 3 từ a đến f.
2. Tìm các chu trình đơn có độ dài 4 xuất phát từ b.





4. Đường đi, chu trình

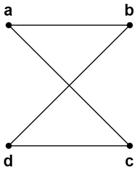
- Đường đi độ dài s từ u đến v trong đơn đồ thị là một dãy các đỉnh $x_0, x_1, \ldots, x_s$ mà $x_0 = u, x_s = v$ và $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{s-1}, x_s)$ là các cạnh của đồ thị.
- Đường đi được gọi là chu trình nếu đường đi có bắt đầu và kết thúc tại một đỉnh.
- Đường đi (hay chu trình) trong đơn đồ thị được gọi là đường đi đơn (chu trình đơn) nếu nó không chứa một cạnh quá một lần.

4.1. Số đường đi giữa các đỉnh

- Cho G là một đồ thị (có thể có cạnh bội, khuyên) với ma trận liền kề A, khi đó số đường đi khác nhau độ dài r từ i đến j bằng giá trị phần tử (i,j) của ma trận A^r.

  Ví dụ:

  Đếm số đường đi có độ dài bằng 4 từ a đến d trong đồ thị sau:

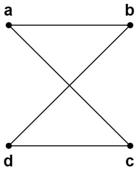


4.1. Số đường đi giữa các đỉnh

- Cho G là một đồ thị (có thể có cạnh bội, khuyên) với ma trận liền kề A, khi đó số đường đi khác nhau độ dài r từ i đến j bằng giá trị phần tử (i,j) của ma trận A^r.

  Ví dụ:

  Đếm số đường đi có độ dài bằng 4 từ a đến d trong đồ thị sau:



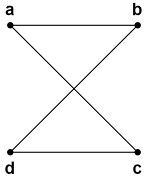
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.1. Số đường đi giữa các đỉnh

- Cho G là một đồ thị (có thể có cạnh bội, khuyên) với ma trận liền kề A, khi đó số đường đi khác nhau độ dài r từ i đến j bằng giá trị phần tử (i,j) của ma trận A^r.

  Ví dụ:

  Đếm số đường đi có độ dài bằng 4 từ a đến d trong đồ thị sau:

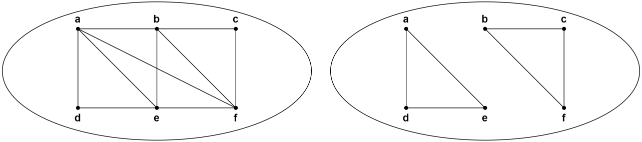


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

4.1. Số đường đi giữa các đỉnh

- Cho G là một đồ thị (có thể có cạnh bội, khuyên) với ma trận liền kề A, khi đó số đường đi khác nhau độ dài r từ i đến j bằng giá trị phần tử (i,j) của ma trận A^r.
- Chứng minh bằng quy nạp:
  - Dễ dàng thấy công thức đúng với $r = 1, 2$.
  - Giả sử phần tử (i, k) của ma trận $A^r, r \geq 2$ là số đường đi khác nhau với độ dài r từ i đến k.
    $\Longrightarrow$ cần chứng minh: phần tử (i, j) của ma trận $A^{r+1}, r \geq 2$ là số đường đi khác nhau với độ dài $r + 1$ từ i đến j.
  - Vì $A^{r+1} = A^r \times A$
    $\Longrightarrow a^{r+1}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a^r_{i,k}.a_{k,j} = a^r_{i,1}.a_{1,j} + a^r_{i,2}.a_{2,j} + ... + a^r_{i,n}.a_{n,j}$
  - Mà $a^r_{i,k}$ chính là số đường đi có độ dài r từ i đến k, còn $a_{k,j}$ xác định xem k có nối tới j hay không.
    $\Longrightarrow$ Hoàn thành chứng minh.

- **Định nghĩa:**
  Một đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.



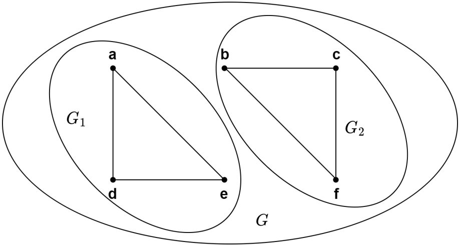
Định lý 5.5

Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông luôn có đường đi đơn.

Bài tập 5.17:

a. Chứng minh rằng đồ thị liên thông có n đỉnh thì có ít nhất $n-1$ cạnh.
b. Chứng minh rằng trong một đơn đồ thị luôn tồn tại đường đi từ một đỉnh bậc lẻ tới một đỉnh bậc lẻ khác.
c. Chứng minh rằng nếu đồ thị G có k thành phần liên thông và các thành phần liên thông này tương ứng có $n_1, n_2, ..., n_k$ đỉnh, khi đó số cạnh của G không vượt quá $\sum_{i=1}^{k} C(n_i, 2)$.

- **Các thành phần liên thông:**
  Một đồ thị không liên thông là hợp của nhiều đồ thị con liên thông (các đồ thị con không có đỉnh chung). Các đồ thị con liên thông rời nhau như vậy được gọi là các thành phần liên thông.

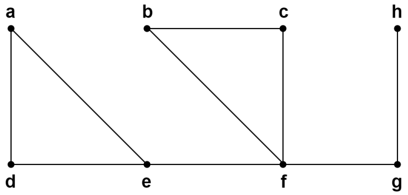


4.2. Tính liên thông trong đồ thị vô hướng

- **Đỉnh khớp:**
  Một đỉnh được gọi là đỉnh khớp nếu như việc xóa đi đỉnh này và tất cả các cạnh liên thuộc với nó sẽ tạo ra đồ thị mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị gốc.
- **Cầu (cạnh cắt):**
  Một cạnh được gọi là cầu nếu như việc xóa đi cạnh này sẽ tạo ra đồ thị mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị gốc.

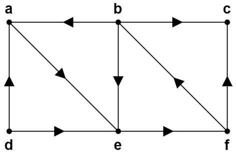
Bài tập 5.18:

Tìm đỉnh khớp, cầu trong đồ thị sau:



- Đồ thị có hướng gọi là **liên thông mạnh** nếu có đường đi từ a tới b và từ b đến a với mọi đỉnh a, b của đồ thị.
- Đồ thị có hướng gọi là **liên thông yếu** nếu luôn tồn tại đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ khi ta không quan tâm đến hướng của các cạnh. Đồ thị liên thông mạnh cũng là đồ thị liên thông yếu.

Bài tập 5.19:
Đồ thị sau có liên thông mạnh hay không?

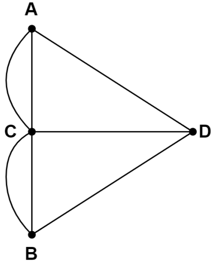


- **Định nghĩa:**
  - Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G được gọi là chu trình Euler.
  - Đường đi đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G được gọi là đường đi Euler.

Ví dụ:

Bài toán 7 cây cầu:

a. Có cách nào đi xuất phát từ vùng đất A, đi qua cả 7 cây cầu, mỗi cây cầu đi qua đúng 1 lần và quay lại A hay không?
b. Có cách nào đi xuất phát từ một vùng đất bất kỳ, đi qua cả 7 cây cầu, mỗi cây cầu đi qua đúng 1 lần hay không?

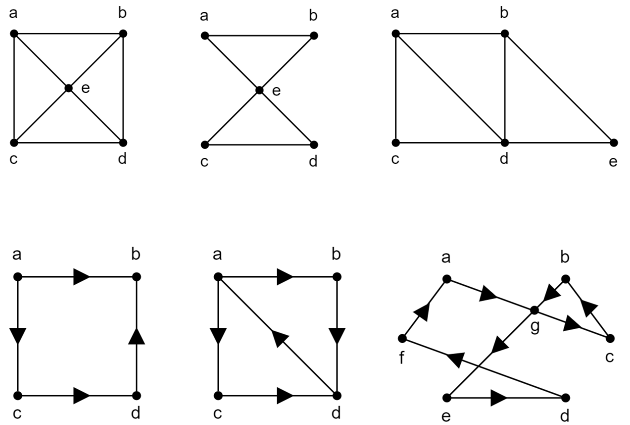


4.4. Chu trình Euler và đường đi Euler

- **Điều kiện cần và đủ để đồ thị có chu trình Euler:**
  Một đa đồ thị liên thông có chu trình Euler nếu và chỉ nếu **mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn**.
- **Điều kiện cần và đủ để đồ thị có đường đi Euler:**
  Một đa đồ thị liên thông có đường đi Euler nhưng không có chu trình nếu và chỉ nếu đồ thị có **đúng 2 đỉnh bậc lẻ**.

4.4. Chu trình Euler và đường đi Euler

Bài tập 5.20:
Các đồ thị sau có chu trình Euler, đường đi Euler (mà không có chu trình Euler) hay không?



4.5. Chu trình Hamilton và đường đi Hamilton

- Đường đi $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ trong đồ thị $G = (V, E), n = |V|$, được gọi là đường đi Hamilton nếu $x_i \neq x_j$ với $i \neq j$.
- Chu trình $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_1$ trong đồ thị $G = (V, E), n = |V|$, được gọi là chu trình Hamilton nếu $x_i \neq x_j$ với $i \neq j$.
- Đồ thị có chu trình Hamilton được gọi là đồ thị Hamilton.
- Đồ thị có đường đi Hamilton được gọi là đồ thị nửa Hamilton.
- **Lưu ý:** chu trình Hamilton không phải là đường đi Hamilton (do đỉnh xuất phát được thăm tới 2 lần), khác với chu trình Euler cũng chính là đường đi Euler.

Thảo luận

Có điều kiện cần và đủ để đồ thị có đường đi, chu trình Hamilton?

4.5. Chu trình Hamilton và đường đi Hamilton

Thảo luận

Có điều kiện cần và đủ để đồ thị có đường đi, chu trình Hamilton?

Đáp án: Không.

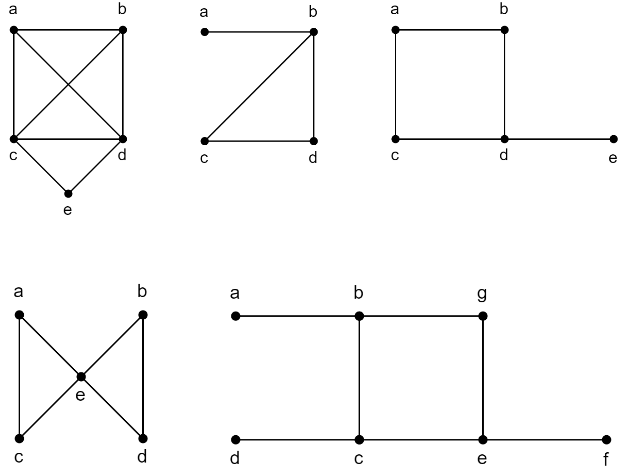
Tham khảo:

- Định lý Dirak, 1952
- Định lý Ghouila - Houiri, 1960
- Định lý Ore, 1960
- Định lý Meynie, 1973
- Định lý Bondy - Chvátal, 1972

4.5. Chu trình Hamilton và đường đi Hamilton

Bài tập 5.21:

Các đồ thị sau có chu trình Hamilton, đường đi Hamilton hay không?

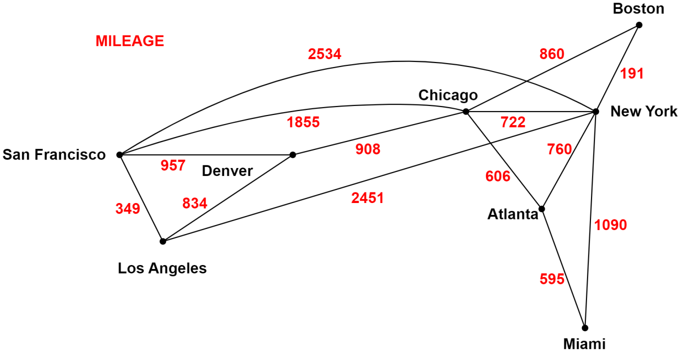


Bài tập 5.22:

a. Chứng minh rằng: K_n luôn có chu trình Hamilton.
b. Với giá trị nào của m, n thì $K_{m,n}$ có chu trình Euler, đường đi Euler?
c. Với giá trị nào của m, n thì $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton, đường đi Hamilton?

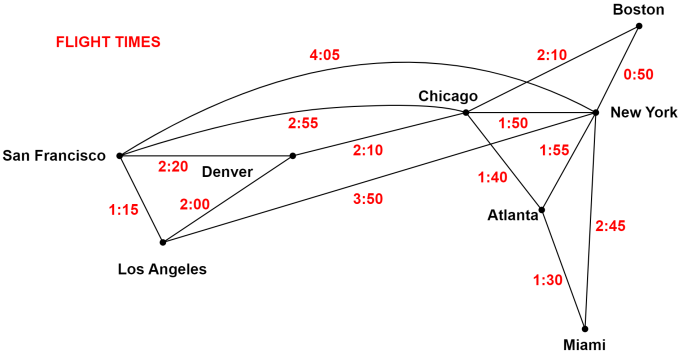
5. Đồ thị có trọng số

- Đồ thị mà mỗi cạnh của nó được gán một con số (nguyên hoặc thực), được gọi là trọng số ứng với cạnh đó.
- Nhiều bài toán có thể mô hình bằng đồ thị có trọng số.



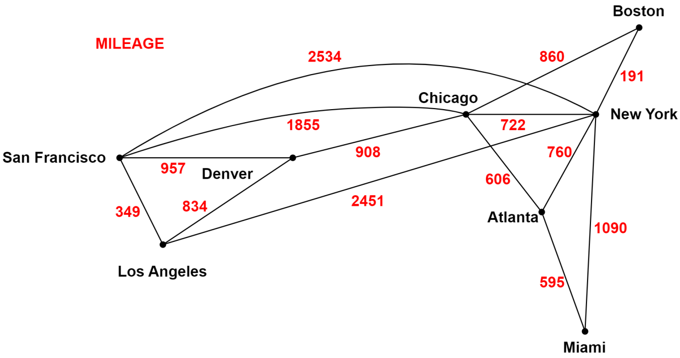
5. Đồ thị có trọng số

- Đồ thị mà mỗi cạnh của nó được gán một con số (nguyên hoặc thực), được gọi là trọng số ứng với cạnh đó.
- Nhiều bài toán có thể mô hình bằng đồ thị có trọng số.

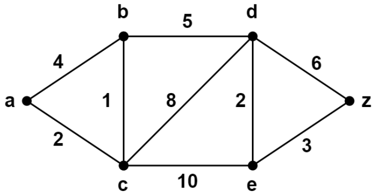


5.1. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

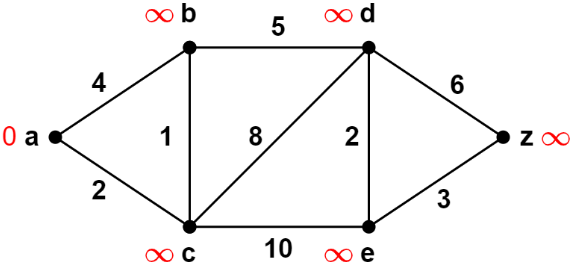
- Tìm đường đi có độ dài ngắn nhất giữa hai đỉnh của đồ thị.
  Ví dụ:
  Đường bay nào ngắn nhất từ San Francisco đến Miami?



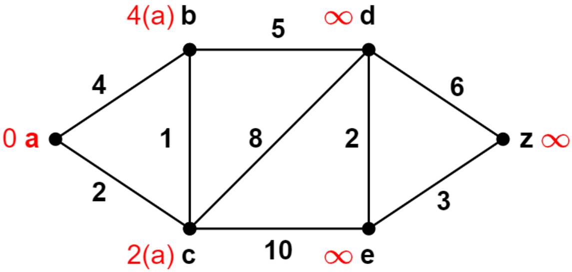
- Thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất:
  Ví dụ:
  Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến z.

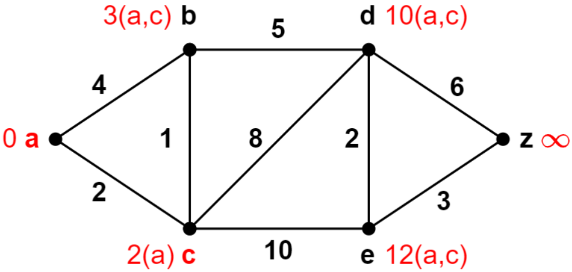


5.1. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

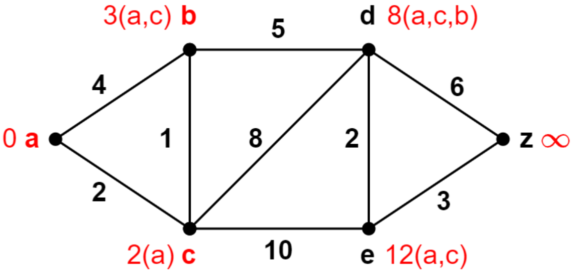


5.1. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

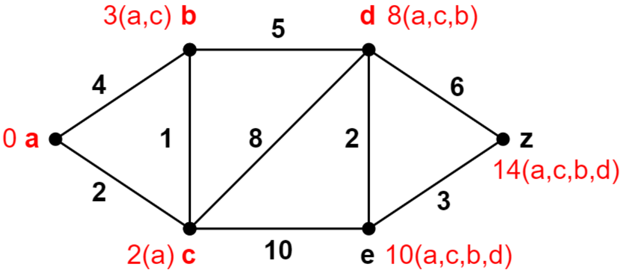



3(a,c) b
5
d 10(a,c)
4
6
0 a
1
8
2
z ∞
2
3
2(a) c
10
e 12(a,c)

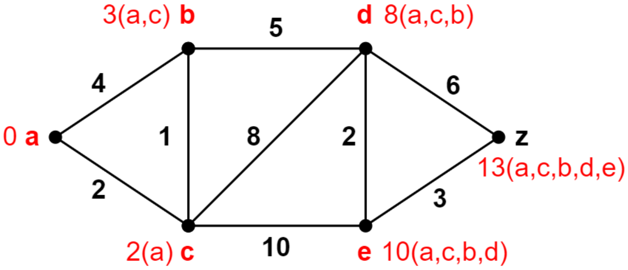
5.1. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất



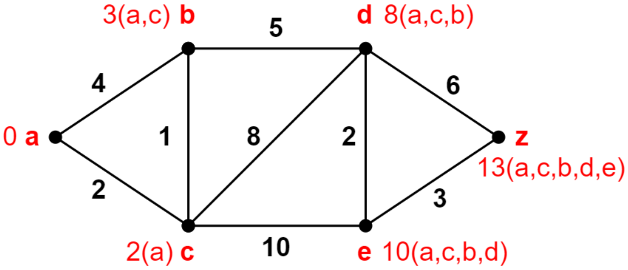
5.1. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất



5.1. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

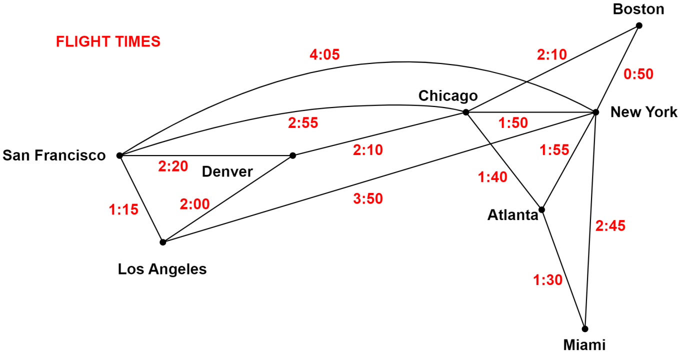


5.1. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất



	b	c	d	e	z
a	4(a)	**2(a)**	∞	∞	∞
a,c	**3(a,c)**	-	10(a,c)	12(a,c)	∞
a,c,b	-	-	**8(a,c,b)**	12(a,c)	∞
a,c,b,d	-	-	-	**10(a,c,b,d)**	14(a,c,b,d)
a,c,b,d,e	-	-	-	-	**13(a,c,b,d,e)**

Bài tập 5.23:
Tìm đường bay tốn ít thời gian nhất từ San Francisco đến Miami bằng thuật toán Dijkstra?

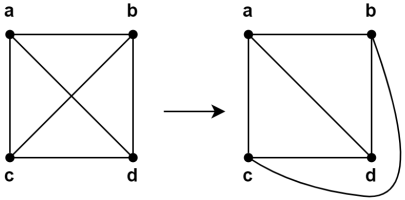


6. Đồ thị phẳng và Tô màu đồ thị

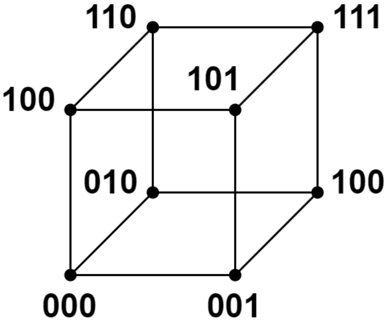
- **Đồ thị phẳng** là đồ thị có thể vẽ được trên mặt phẳng mà không có cạnh nào cắt nhau (ở một điểm không phải là điểm mút của các cạnh).

  Ví dụ:

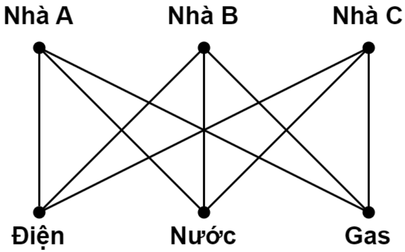
  K_4 là một đồ thị phẳng.



Bài tập 5.24:
Vẽ lại đồ thị Q_3 để xác định xem nó có là một đồ thị phẳng hay không?

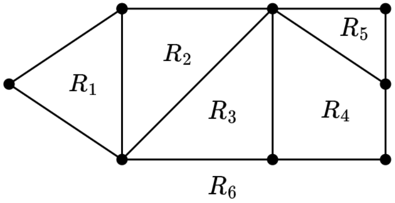


Bài tập 5.25:
Có 3 gia đình A, B, C và 3 đơn vị cung cấp: điện, nước, gas. Các gia đình đều cần điện, nước, gas và đều muốn đi dây riêng, do đó cần nối dây từ gia đình đến các nhà cung cấp sao cho không dây nào cắt dây nào. Liệu có cách nào để thực hiện được điều này hay không?



6. Đồ thị phẳng và Tô màu đồ thị

- Trong đồ thị phẳng, mỗi **miền** được bao bằng ít nhất 3 cạnh.



- **Công thức Euler:**
  G là đồ thị đơn phẳng liên thông có e cạnh và v đỉnh. Gọi r là số miền trong biểu diễn mặt phẳng của G, khi đó:

$$r = e - v + 2$$

Định lý 5.6

Giả sử G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có e cạnh, v đỉnh $(v \geq 3)$, khi đó: $e \leq 3v - 6$.

Chứng minh:
Trong đồ thị phẳng mỗi miền được bao bằng ít nhất 3 cạnh. Mặt khác, mỗi cạnh có thể nằm trên biên của tối đa hai miền.
$\Longrightarrow \frac{2e}{3} \geq r = e - v + 2$
$\Longrightarrow e \leq 3v - 6$.

Định lý 5.7

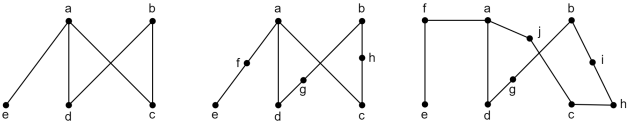
Giả sử G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có e cạnh, v đỉnh $(v \geq 3)$, và không có chu trình độ dài 3, khi đó: $e \leq 2v - 4$

Bài tập 5.26:
Chứng minh Định lý 5.7.

Bài tập 5.27:
Chứng minh $K_{3,3}$ và K_5 không phải đồ thị phẳng.

6. Đồ thị phẳng và Tô màu đồ thị

- Cho đồ thị phẳng G, mọi đồ thị nhận được từ đồ thị G bằng cách bỏ đi cạnh (u, v) và thêm vào đỉnh với w cùng hai cạnh (u, w) và (w, v) cũng là đồ thị phẳng và được gọi là **đồng phôi** với G.

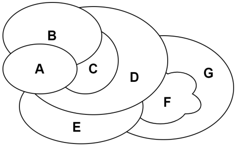


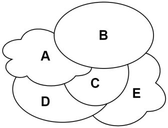
G $\quad$ G_1 $\quad$ G_2

Định lý 5.8: Định lý Kuratowski

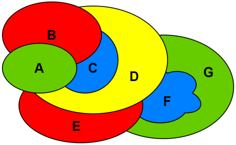
Đồ thị là không phẳng khi và chỉ khi nó chứa một đồ thị con đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$.

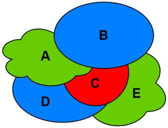
- **Tô màu đồ thị:**
  Ví dụ:
  Các vùng kề nhau tô bằng màu khác nhau và dùng ít màu nhất có thể.





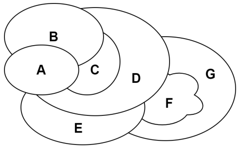
- **Tô màu đồ thị:**
  Ví dụ:
  Các vùng kề nhau tô bằng màu khác nhau và dùng ít màu nhất có thể.

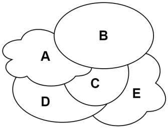


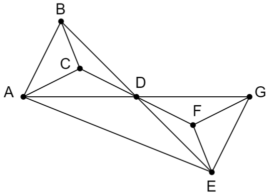


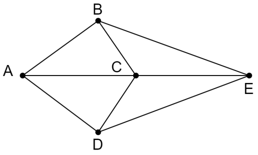
6. Đồ thị phẳng và Tô màu đồ thị

- **Tô màu đồ thị:**
  - *Tô màu* một đơn đồ thị là sự gán màu cho các đỉnh của đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh liền kề được gán cùng màu.
  - *Số màu* của đồ thị là số màu ít nhất cần thiết để tô màu đồ thị.

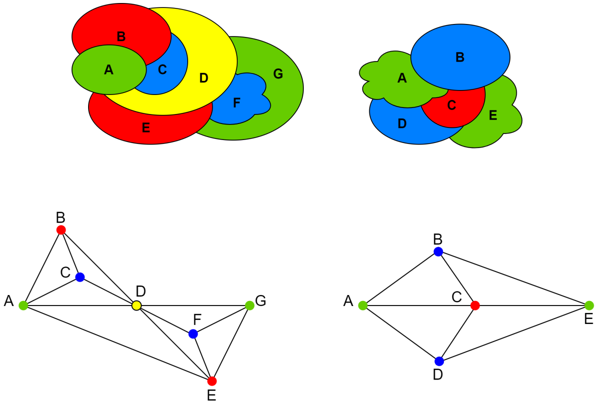








- **Tô màu đồ thị:**
  - *Tô màu* một đơn đồ thị là sự gán màu cho các đỉnh của đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh liền kề được gán cùng màu.
  - *Số màu* của đồ thị là số màu ít nhất cần thiết để tô màu đồ thị.

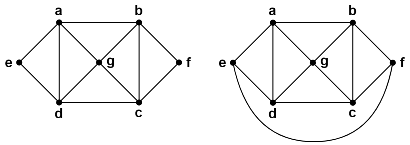


Định lý 5.9: Định lý Bốn màu

Số màu của một đồ thị phẳng là không lớn hơn 4.

Bài tập 5.28:

Tô màu các đồ thị sau:



Bài tập 5.29:

Số màu của các đồ thị sau là bao nhiêu?

a. K_n
b. $K_{m,n}$
c. C_n

6. Đồ thị phẳng và Tô màu đồ thị

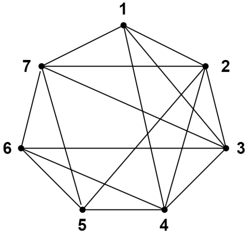
- **Tô màu đồ thị:**
  - Bài toán tô màu đồ thị có nhiều ứng dụng:
    Ví dụ:
    Ứng dụng lập lịch thi: Lập lịch thi sao cho không có sinh viên nào thi 2 môn cùng một lúc.
    - Các môn là đỉnh của đồ thị.
    - 2 môn có sinh viên phải thi cả 2 môn là cạnh.
    - Thời gian thi được biểu diễn bằng các màu khác nhau.

    $\Longrightarrow$ Việc lập lịch này tương đương với bài toán Tô màu đồ thị.

6. Đồ thị phẳng và Tô màu đồ thị

Ví dụ:

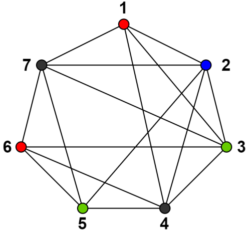
Ứng dụng lập lịch thi:



Ca thi	Môn thi
I	1,6
II	2
III	3,5
IV	4,7

Ví dụ:

Ứng dụng lập lịch thi:



Ca thi	Môn thi
I	1,6
II	2
III	3,5
IV	4,7

Ôn tập

Bài tập 5.30:
Gọi G là đồ thị có v đỉnh và e cạnh. M, m tương ứng là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của các đỉnh của G. chứng minh rằng:

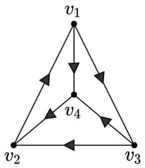
a. $\frac{2e}{v} \geq m$
b. $\frac{2e}{v} \leq M$

Bài tập 5.31:
Chứng minh rằng: nếu G là đồ thị phân đôi có v đỉnh và e cạnh, khi đó $e \leq \frac{v^2}{4}$.

Bài tập 5.32:
Chứng minh rằng: nếu G là đò thị đơn có n đỉnh, khi đó hợp của G và $\overline{G}$ là K_n.

Ôn tập

Bài tập 5.33:
Tính số đường đi có độ dài 4, độ dài 8 từ v_1 đến v_4 trong đồ thị sau:



Bài tập 5.34:

- a. Tìm ma trận kề của $K_{2,3}$.
- b. Tìm số đường đi độ dài 3 và 4 từ một đỉnh bậc 3 đến một đỉnh bậc 2.

Ôn tập

Bài tập 5.35:

- (a) Đồ thị nào trong các đồ thị K_n, C_n, W_n là đồ thị phân đôi?
- (b) Tính số miền của C_n, W_n.

Bài tập 5.36:

Tìm đường đi ngắn nhất giữa:

- (a) a và g
- (b) a và h