Phép đếm

Khoa CNTT

Trường Đại học Phenikaa

Phép đếm (8 tiết)

1. Cơ sở của phép đếm
2. Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp
3. Nguyên lý lồng chim bồ câu
4. Xác suất rời rạc
5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

1. Cơ sở của phép đếm

- Lý thuyết tổ hợp là một phần quan trọng của toán rời rạc, chuyên nghiên cứu sự sắp xếp các đối tượng.
- Liệt kê, đếm các đối tượng có những tính chất nào đó.
- Bài toán đếm các phần tử xuất hiện nhiều trong toán học cũng như tin học.
  Ví dụ:
  Cần đếm số cách khác nhau đặt mật khẩu thỏa mãn các điều kiện sau:
  - Độ dài ít nhất 6 ký tự và không vượt quá 8 ký tự.
  - Mỗi ký tư lấy từ tập [‘0’...’9’,’a’...’z’].

1.1. Quy tắc cộng

- Giả sử có hai công việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách, khi đó có $n_1 + n_2$ cách làm một trong hai công việc đó.
  Ví dụ:
  Cần chọn một đại biểu là nam sinh viên có điểm trung bình từ 8.0 trở lên hoặc là nữ sinh viên có điểm trung bình từ 7.5 trở lên. Biết rằng có 20 sinh viên nam thỏa mãn tiêu chuẩn, 25 nữ sinh viên thỏa mãn tiêu chuẩn. Như vậy có $20 + 25$ cách chọn đại biểu.
- Quy tắc này có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau: Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập rời nhau, khi đó số phần tử của hợp các tập này bằng tổng số các phần tử của các tập thành phần.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n|$$

1.2. Quy tắc nhân

- Giả sử một nhiệm vụ có thể tách thành hai công việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách, khi đó có $n_1 \times n_2$ cách làm nhiệm vụ đó.
  Ví dụ:
  Cần chọn hai đại biểu, một là nam sinh viên có điểm trung bình từ 8.0 trở lên và một là nữ sinh viên có điểm trung bình từ 7.5 trở lên. Biết rằng có 20 sinh viên nam thỏa mãn tiêu chuẩn, 25 nữ sinh viên thỏa mãn tiêu chuẩn. Như vậy có 20×25 cách chọn đại biểu.
- Quy tắc này có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau: Chọn một phần tử của tích Đề-các $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ được tiến hành bằng cách chọn lần lượt từng phần tử của A_1, một phần tử của $A_2, \ldots$, một phần tử của A_n.

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times |A_3| \times ... \times |A_n|$$

1.3. Nguyên lý bù trừ

- Quy tắc cộng có thể dẫn đến trùng lặp vì một số trường hợp bị tính hai lần. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ, ta cộng số cách làm mỗi nhiệm vụ trong hai nhiệm vụ rồi trừ đi số cách làm bị tính hai lần $\Longrightarrow$ Nguyên lý bù trừ.

  Ví dụ:

  Đếm số lượng xâu nhị phân độ dài 8, bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00.

1.3. Nguyên lý bù trừ

- Quy tắc cộng có thể dẫn đến trùng lặp vì một số trường hợp bị tính hai lần. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ, ta cộng số cách làm mỗi nhiệm vụ trong hai việc rồi trừ đi số cách làm bị tính hai lần $\Longrightarrow$ Nguyên lý bù trừ.

  Ví dụ:
  Đếm số lượng xâu nhị phân độ dài 8, bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00.
  Đáp án:
  Có 128 xâu bắt đầu bằng 1.
  Có 64 xâu kết thúc bằng 00.
  Tuy nhiên, trong 2 loại xâu kể trên đều chứa các xâu vừa bắt đầu bằng 1 và vừa kết thúc 00.
  Có 32 xâu bắt đầu bằng 1 và kết thúc 00.
  $\Longrightarrow$ Có 128 + 64 - 32 = 160 xâu cần tìm.

1.3. Nguyên lý bù trừ

- Quy tắc cộng có thể dẫn đến trùng lặp vì một số trường hợp bị tính hai lần. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ, ta cộng số cách làm mỗi nhiệm vụ trong hai việc rồi trừ đi số cách làm bị tính hai lần $\Longrightarrow$ Nguyên lý bù trừ.
- Theo nguyên lý tập hợp:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Bài tập 3.1:
Trong một trường đại học 18 sinh viên toán và 325 sinh viên tin học.

a. Có bao nhiêu cách chọn hai đại diện sao cho một là sinh viên toán còn người kia là sinh viên tin học?
b. Có bao nhiêu cách chọn một đại diện hoặc là sinh viên toán hoặc là sinh viên tin học?

Bài tập 3.2:
Từ New York đến Denver có 6 hãng hàng không và có 7 hãng bay từ Denver tới San Francisco. Có bao nhiêu khả năng khác nhau để bay từ New York đến San Francisco qua Denver?

Ôn tập

Bài tập 3.3:
Một phiếu trắc nghiệm đa lựa chọn gồm 10 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời.

a. Có bao nhiêu cách điền một phiếu trắc nghiệm nếu mọi câu hỏi đều được trả lời duy nhất một đáp án?
b. Có bao nhiêu cách điền một phiếu trắc nghiệm nếu có thể bỏ trống câu trả lời hoặc trả lời duy nhất một đáp án?
c. Có bao nhiêu cách điền một phiếu trắc nghiệm nếu có thể bỏ trống câu trả lời hoặc trả lời nhiều đáp án?

Bài tập 3.4:

a. Từ 1 đến 1000 có bao nhiêu số chia hết cho 6 và chia hết cho 9?
b. Từ 1 đến 1000 có bao nhiêu số chia hết cho 6 hoặc chia hết cho 9?
c. Từ 1 đến 1000 có bao nhiêu số chia hết cho 6 nhưng không chia hết cho 9?

2. Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

- **Định nghĩa:**
  - Tổ hợp là cách chọn một tập hợp các phần tử **không có thứ tự** từ một tập cho trước.
  - Hoán vị của một tập hợp các phần tử khác nhau là một cách **sắp xếp có thứ tự** của các phần tử này.
  - Chỉnh hợp là cách chọn và **sắp xếp có thứ tự** một tập hợp các phần tử từ một tập cho trước.

2. Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

- **Công thức:**
  - Số **chỉnh hợp** chập r của n phần tử ($r \leq n$), kí hiệu là $P(n, r)$, được tính bằng công thức:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

  - Số **hoán vị** của n phần tử chính là:

$$P(n, n) = n!$$

  - Số **tổ hợp** chập r của n phần tử ($r \leq n$), kí hiệu là $C(n, r)$, được tính bằng công thức:

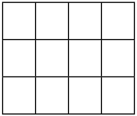
$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(n, r) = C(n, n-r)$$

2. Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Bài tập 3.5:
Có bao nhiêu cách xếp 8 người ngồi quanh một bàn tròn? Biết rằng, hai cách ngồi được gọi là giống nhau nếu cách này có thể nhận được từ cách kia bằng cách xoay bàn.

Bài tập 3.6:
Có bao nhiêu đường đi từ góc dưới cùng bên trái đến góc trên cùng bên phải của lưới ô vuông dưới đây? Biết rằng chỉ có thể đi lên trên hoặc sang phải.



Bài tập 3.7:
Một câu lạc bộ có 25 thành viên.

- a) Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào ủy ban thường trực?
- b) Có bao nhiêu cách chọn chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký và thủ quỹ?

Bài tập 3.8:
Có bao nhiêu cách lấy 5 quân bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 quân sao cho 5 quân bài lấy ra có 3 quân Át và 2 quân 10.

3. Nguyên lý lồng chim bồ câu

Định lý 3.1

Nếu có $k+1$ (hoặc nhiều hơn) đồ vật được đặt vào trong k hộp thì có ít nhất một hộp chứa chứa hai hoặc nhiều hơn hai đồ vật.

Ví dụ:

Một tập thể gồm 367 người, như vậy có ít nhất 2 người trùng ngày sinh.

Định lý 3.2

Nếu có k đồ vật được đặt vào trong b hộp, sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\lceil \frac{k}{b} \rceil$ vật.

Ví dụ:
Trong 100 người có ít nhất $\lceil 100/12 \rceil = 9$ người cùng tháng sinh.

Bài tập 3.9:
Chứng minh rằng: Trong $n + 1$ số nguyên dương đôi một khác nhau không vượt quá $2n$, luôn tồn tại hai số nguyên tố cùng nhau.
Gợi ý: Hai số nguyên tố cùng nhau là hai số không cùng chia hết cho số nào khác 1.

Bài tập 3.10:
Chứng minh rằng: Trong $n + 1$ số nguyên dương đôi một khác nhau không vượt quá $2n$, luôn tồn tại hai số chia hết cho nhau.

4. Xác suất rời rạc

1. Phép thử và biến cố
2. Định nghĩa xác suất
3. Quan hệ giữa các biến cố
4. Xác suất tổ hợp các biến cố

4.1. Phép thử và biến cố

- Để quan sát các hiện tượng ngẫu nhiên, người ta cho các hiện tượng này xuất hiện nhiều lần. Việc thực hiện một quan sát về một hiện tượng ngẫu nhiên nào đó, để xem hiện tượng này có xảy ra hay không được gọi là một **phép thử**.
- Khi thực hiện một phép thử, ta không thể dự đoán được kết quả xảy ra. Tuy nhiên, ta có thể liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra.
    - Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là **không gian mẫu** của phép thử đó. Ký hiệu là Ω.
    - Mỗi $\omega \in \Omega$ được gọi là một **biến cố sơ cấp**.
    - Mỗi tập $A \subset \Omega$ được gọi là một **biến cố**.
- Trong một phép thử, biến cố mà chắc chắn sẽ xảy ra được gọi là **biến cố chắc chắn**. Ký hiệu là Ω.
- Biến cố không thể xảy ra được gọi là biến cố **rỗng**. Ký hiệu là $\emptyset$.

4.1. Phép thử và biến cố

Ví dụ:

- Gieo một quân xúc xắc, đây là một phép thử.
- Tập hợp tất cả mặt trên của xúc xắc (mỗi mặt được đặc trưng bằng số chấm trên mặt) là không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Các phần tử $\omega_1 = 1 \in \Omega, \omega_2 = 2 \in \Omega, \ldots, \omega_6 = 6 \in \Omega$ là các biến cố sơ cấp.
- Các tập con của Ω là các biến cố.

4.2. Định nghĩa xác suất (cổ điển)

Giả thiết tính đồng khả năng của các biến cố sơ cấp (đồng khả năng của các trường hợp có thể xảy ra), khi đó:

Xác suất của một biến cố A là một số không âm, ký hiệu P(A), biểu thị khả năng xảy ra biến cố A và được định nghĩa như sau:

$$P(A) = \frac{\text{Số trường hợp thuận lợi cho } A}{\text{Số trường hợp có thể xảy ra khi thực hiện phép thử}}$$

Những khả năng hoặc biến cố sơ cấp nếu chúng xảy ra thì A xảy ra gọi là những trường hợp thuận lợi cho A.

Theo đó, $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1, 0 \leq P(A) \leq 1$.

Bài tập 3.11:
Một hộp kín đựng 4 quả bóng màu xanh và 5 quả bóng màu đỏ. Tính xác suất lấy ngẫu nhiên được một quả bóng màu xanh ra khỏi hộp.

Bài tập 3.12:
Rút ngẫu nhiên 8 quân bài từ cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài. Tìm xác suất sao cho trong 8 quân bài rút ra có:

a. 3 quân Át, 2 quân 10, 1 quân 2, 1 quân K, 1 quân J.
b. 2 quân Cơ, 1 quân Rô, 2 quân Pic, 3 quân Nhép.
c. 5 quân màu đỏ, 3 quân màu đen.

Bài tập 3.13:
Có 5 tấm bìa vuông, trên các tấm bìa lần ghi chữ cái A, I, H, O, N. Xếp ngẫu nhiên 5 tấm bìa thành 1 hàng ngang. Tìm xác suất để nhận được chữ HANOI.

4.3. Quan hệ giữa các biến cố

- **Quan hệ kéo theo:** Biến cố A gọi là kéo theo biến cố B và ký hiệu $A \subset B$, khi và chỉ khi A xảy ra thì suy ra B xảy ra (A là tập con của B).
- **Quan hệ tương đương:** Biến cố A gọi là tương đương với biến cố B và ký hiệu $A = B$, khi và chỉ khi $A \subset B$ và $B \subset A$.
- **Tổng của hai biến cố A, B:** là một biến cố, ký hiệu là $A \cup B$, sao cho biến cố tổng $A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra hoặc B xảy ra (một trong hai A, B xảy ra).
- **Tích của hai biến cố A, B:** là một biến cố, ký hiệu là $A \cap B$ hoặc AB, sao cho biến cố tích AB xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra và B xảy ra.
- **Biến cố xung khắc:** A, B là hai biến cố xung khắc nếu biến cố tích $AB = \emptyset$.
- **Biến cố đối lập (biến cố bù)** của A là biến cố $\overline{A}$, sao cho $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

4.3. Quan hệ giữa các biến cố

Ví dụ:
Hai người cùng bắn, mỗi người bắn 1 viên vào bia. Gọi
$A_i = \{\text{người thứ } i \text{ bắn trúng bia}\}, i = 1, 2.$

a. Chỉ có người thứ nhất bắn trúng:
$$A_1\overline{A_2}$$

b. Chỉ có một người bắn trúng:
$$A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2$$

c. Có ít nhất một người bắn trúng:
$$A_1 \cup A_2$$

d. Cả 2 cùng bắn trúng:
$$A_1A_2$$

e. Không ai bắn trúng:
$$\overline{A_1A_2}$$

Định lý 3.3

Giả sử E là một biến cố trong không gian mẫu Ω. Khi đó xác suất của biến cố $\overline{E}$(biến cố bù của E):

$$p(\overline{E}) = 1 - p(E)$$

Bài tập 3.14:

Một xâu 10 bit nhị phân được tạo ra một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để nhận được xâu có ít nhất một bit 0.

Định lý 3.4

Giả sử E_1, E_2 là hai biến cố trong không gian mẫu Ω, khi đó:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

Bài tập 3.14:

Tính xác suất để một số nguyên dương được chọn ngẫu nhiên từ tập các số nguyên dương không lớn hơn 100, chia hết cho 2 hoặc cho 5.

Định lý 3.5

Giả sử E_1, E_2 là hai biến cố độc lập trong không gian mẫu Ω, khi đó:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \times p(E_2)$$

Bài tập 3.15:

Hai người cùng bắn, mỗi người bắn 1 viên vào bia. Gọi $A_i = \{\text{người thứ } i \text{ bắn trúng bia}\}, i = 1, 2$. Biết $P(A_1) = 0.9, P(A_2) = 0.8$. Tính các xác suất sau:

a. Chỉ có người thứ nhất bắn trúng.
b. Chỉ có một người bắn trúng.
c. Có ít nhất một người bắn trúng.
d. Cả 2 cùng bắn trúng.
e. Không ai bắn trúng.

Bài tập 3.16:

a. Tính xác suất để một quân bài được chọn từ cỗ bài là con Át.
b. Tính xác suất để một số nguyên được chọn ngẫu nhiên từ 100 số nguyên dương đầu tiên là một số lẻ.
c. Tính xác suất của biến cố "tổng các số trên hai con xúc xắc khi gieo đồng thời là một số chẵn".

Bài tập 3.17:
Một xạ thủ có 5 viên đạn, bắn từng viên một vào bia với xác suất trúng 0.9.

a. Nếu bắn 3 viên **liên tiếp** trúng hoặc hết đạn thì dừng, tính xác suất chỉ bắn 3 viên, 4 viên, 5 viên đạn.
b. Nếu có 3 viên trúng thì dừng, tính xác suất chỉ bắn 3 viên, 4 viên, 5 viên đạn.

Bài tập 3.17:

Một xạ thủ có 5 viên đạn, bắn từng viên một vào bia với xác suất trúng 0.9.

a. Nếu bắn 3 viên **liên tiếp** trúng hoặc hết đạn thì dừng, tính xác suất chỉ bắn 3 viên, 4 viên, 5 viên đạn.
b. Nếu có 3 viên trúng thì dừng, tính xác suất chỉ bắn 3 viên, 4 viên, 5 viên đạn.

Gợi ý:

a	3	4	5
P	0.9^3	?	?

b	3	4	5
P	0.9^3	?	?

Bài tập 3.17:
Một xạ thủ có 5 viên đạn, bắn từng viên một vào bia với xác suất trúng 0.9.

- a. Nếu bắn 3 viên **liên tiếp** trúng hoặc hết đạn thì dừng, tính xác suất chỉ bắn 3 viên, 4 viên, 5 viên đạn.
- b. Nếu có 3 viên trúng thì dừng, tính xác suất chỉ bắn 3 viên, 4 viên, 5 viên đạn.

Gợi ý:

a	3	4	5
P	0.9^3	0.1×0.9^3	?

b	3	4	5
P	0.9^3	$C_3^1 \times 0.1 \times 0.9^3$	?

5. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

1. Chỉnh hợp lặp
2. Tổ hợp lặp
3. Hoán vị lặp

Ví dụ:
Tính xác suất lấy liên tiếp 3 quả bóng đỏ ra khỏi bình kín chứa 5 quả bóng đỏ và 7 quả bóng xanh, nếu sau mỗi lần lấy một quả bóng ra lại bỏ nó trở lại bình.

Ví dụ:
Tính xác suất lấy liên tiếp 3 quả bóng đỏ ra khỏi bình kín chứa 5 quả bóng đỏ và 7 quả bóng xanh, nếu sau mỗi lần lấy một quả bóng ra lại bỏ nó trở lại bình.

Định lý 3.6

Số chỉnh hợp lặp chập r của n phần tử bằng n^r.

Ví dụ:

a. Giả sử trong một đĩa hoa quả có táo, cam, lê, mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa hoa quả nếu thứ tự lấy là không quan trọng, các quả thuộc cùng một loại là không phân biệt.

Ví dụ:

a. Giả sử trong một đĩa hoa quả có táo, cam, lê, mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa hoa quả nếu thứ tự lấy là không quan trọng, các quả thuộc cùng một loại là không phân biệt.
$\Longrightarrow$ 15 cách

b. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 tờ giấy bạc từ két đựng tiền gồm những tờ 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 đô nếu thứ tự lấy là không quan trọng, các tờ thuộc cùng một loại là không phân biệt.

5.2. Tổ hợp lặp

Ví dụ:

- (a) Giả sử trong một đĩa hoa quả có táo, cam, lê, mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa hoa quả nếu thứ tự lấy là không quan trọng, các quả thuộc cùng một loại là không phân biệt.
- (b) Có bao nhiêu cách chọn ra 5 tờ giấy bạc từ két đựng tiền gồm những tờ 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 đô nếu thứ tự lấy là không quan trọng, các tờ thuộc cùng một loại là không phân biệt.

100	50	20	10	5	2	1
*	*	**		*		
*			**		*	*

$$* \mid * \mid ** \mid \quad \mid * \mid \quad \mid$$

$$* \mid \quad \mid \quad \mid ** \mid \quad \mid * \mid *$$

5.2. Tổ hợp lặp

Ví dụ:

a. Giả sử trong một đĩa hoa quả có táo, cam, lê, mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa hoa quả nếu thứ tự lấy là không quan trọng, các quả thuộc cùng một loại là không phân biệt.
b. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 tờ giấy bạc từ két đựng tiền gồm những tờ 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 đô nếu thứ tự lấy là không quan trọng, các tờ thuộc cùng một loại là không phân biệt.

Định lý 3.7

Số tổ hợp lặp chập r của n phần tử bằng $C(n+r-1, r)$.

Bài tập 3.18:
Một cửa hàng bánh bích quy có 4 loại khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn 6 hộp bánh? Giả sử ta chỉ quan tâm tới loại bánh mà không quan tâm tới hộp bánh cụ thể nào và thứ tự chọn chúng.

Bài tập 3.19:
Phương trình: $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Bài tập 3.20:
Phương trình: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm sao cho:

a. $x_i \geq 1$ với $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
b. $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3, x_4 \geq 4, x_5 > 5, x_6 \geq 6$.

Bài tập 3.21:
Bất đẳng thức: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Bài tập 3.22:
Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$ sao cho: $x_1 \leq 3, x_2 \geq 2, x_3 > 4$.

5.3. Hoán vị lặp

Xét một tập hợp có các phần tử **giống nhau**.

Số hoán vị của n phần tử, trong đó có n_1 phần tử giống nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử giống nhau thuộc loại 2,. . . , và n_k phần tử giống nhau thuộc loại k bằng:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Ví dụ:
Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ ABBA?