Paraxial Approximation for Stormtroopers

Darth Vader

Abstract

We propose a new method to approximate the trajectory of a projectile expelled from a firearm. Empirical tests show that this new method is sufficient for targets located at a maximal distance of a single meter.

Die *paraxiale Approximation* ist lineare Approximation der Trajektorie, die besonders für kleine Winkel geeignet ist.

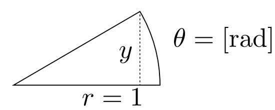

Figure 1: Geometrische Interpretation der Kleinwinkelnäherung. Für kleine Winkel ist $y \approx \theta$.

Anschaulich besagt diese, dass für kleine Winkel $|\theta|$, die Bogenlänge auf dem Einheitskreis kaum von der Höhe h des Steigungsdreiecks abweicht. Abbildung 1 demonstriert diesen Zusammenhang. Es gilt also $\sin(x) \approx x$ für $|x| \ll 1$.

Analytisch erhält man diesen Zusammenhang aus der Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, welche für die Sinusfunktion und die Entwicklungsstelle $a = 0$ zu

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$$

auswertet. Insbesondere sei angemerkt, dass alle Monome mit geradem Exponenten entfallen, da $(\pm sin(a := 0))' = 0$. Die Kleinwinkelnäherung ergibt sich, indem in der Taylorentwicklung alle Monome mit einem Grad $g > 1$ vernachlässigt werden.

Mittels des Quotientenkriterums folgt

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \middle/ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} x^2 \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} x^2 \right| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius der Taylorreihe für $\sin(x)$ ist also unendlich. Dies bedeutet, dass $\sin(x)$ ausgehend von jeder Entwicklungsstelle a beliebig durch Hinzunahme von Monomen höheren Grades in die Taylorreihe approximiert werden kann.