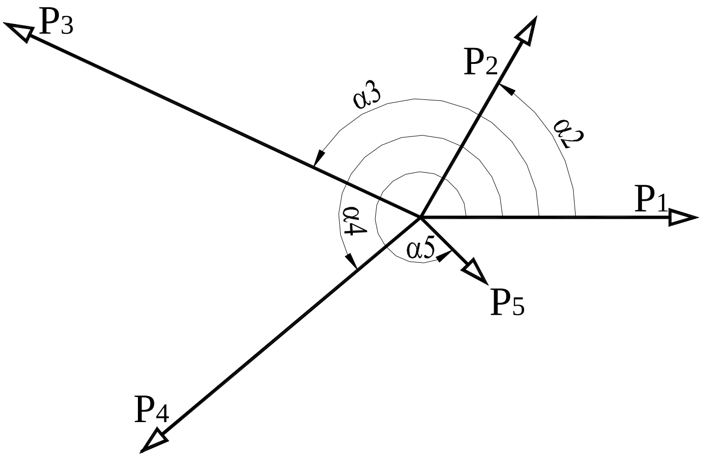
TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

- Composición de Fuerzas

Ejercicio 1-1: Dado un sistema de 5 fuerzas concurrentes a un punto. Determinar su resultante, trabajando con los siguientes métodos:

a) - Métodos gráficos:
   - a_1- Método del paralelogramo
   - a_2- Método del triángulo
   - a_3- Método del polígono de fuerzas

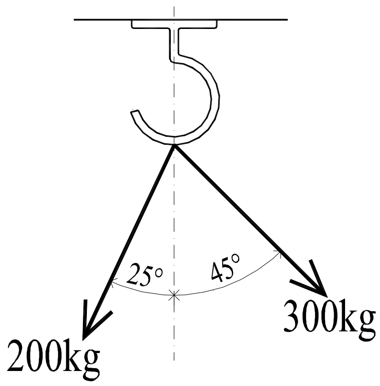
Trabajar con regla y transportador sin olvidar indicar la escala de trabajo.



b) Métodos analíticos:
   - b_1- Ecuaciones de proyección
   - b_2- Trigonometría.
   (Utilizar teorema del seno y teorema del coseno)

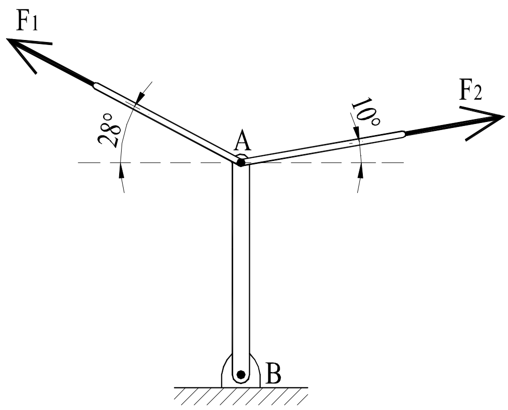
P_1 = 30kg α_1 = 0°
P_2 = 25kg α_2 = 60°
P_3 = 50kg α_3 = 155°
P_4 = 40kg α_4 = 220°
P_4 = 10kg α_5 = 315°

Ejercicio 1-2: Determinar la magnitud y dirección de la resultante de las dos fuerzas que actúan en el gancho de la figura.



Ejercicio 1-3: Dos varillas de control están unidas en *A* a la palanca *AB*. Aplique trigonometría y, sabiendo que la fuerza en la varilla de la izquierda es $F_1 = 30kg$, determine:

a) la fuerza F_2 requerida en la varilla derecha si la resultante ***R*** de las fuerzas ejercidas por las varillas sobre la palanca es vertical
b) la magnitud correspondiente de ***R***.

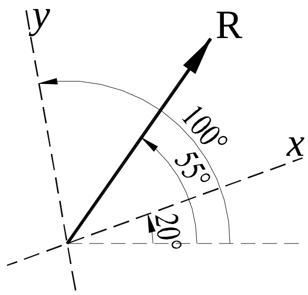


TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

- *Descomposición de una Fuerza en dos direcciones*

Ejercicio 1-4: Dada una fuerza resultante y dos direcciones *(x;y)* concurrentes sobre su línea de acción, descomponer la resultante (*R*) por el método del paralelogramo y el del triángulo.

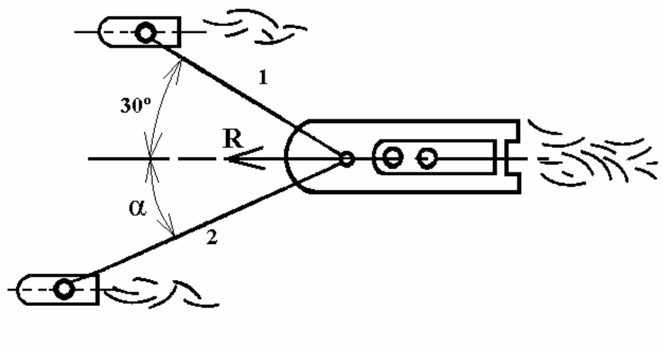
$$R = 55kg$$



Ejercicio 1-5: Una balsa es arrastrada por dos remolcadores. Si la resultante de las fuerzas es $R = 6000kg$, en la dirección de la balsa, hallar:

a) - la fuerza en cada cable sabiendo que $\alpha = 50°$

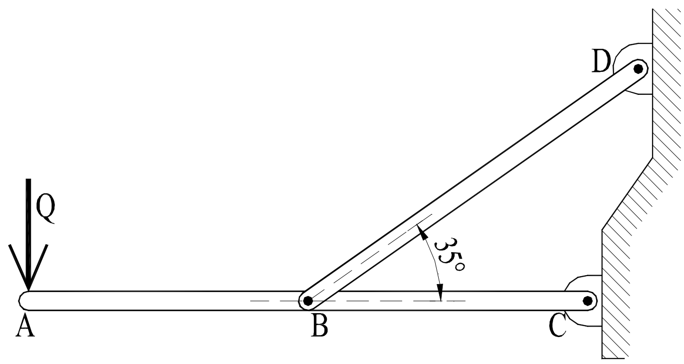
b) - el valor de α tal que el valor de la fuerza en el cable 2 sea mínima.



Ejercicio 1-6: El elemento *BD* ejerce sobre el miembro *ABC* una fuerza *P* dirigida a lo largo de la línea *BD*. Si *P* debe tener una componente vertical de *960kg*, determine:

a) la magnitud de la fuerza *P*,

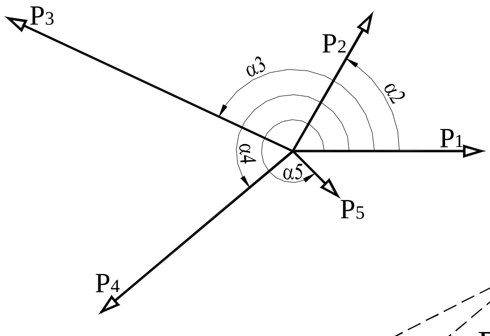
b) su componente horizontal.



TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

- Composición de Fuerzas: ➔ SOLUCIONES

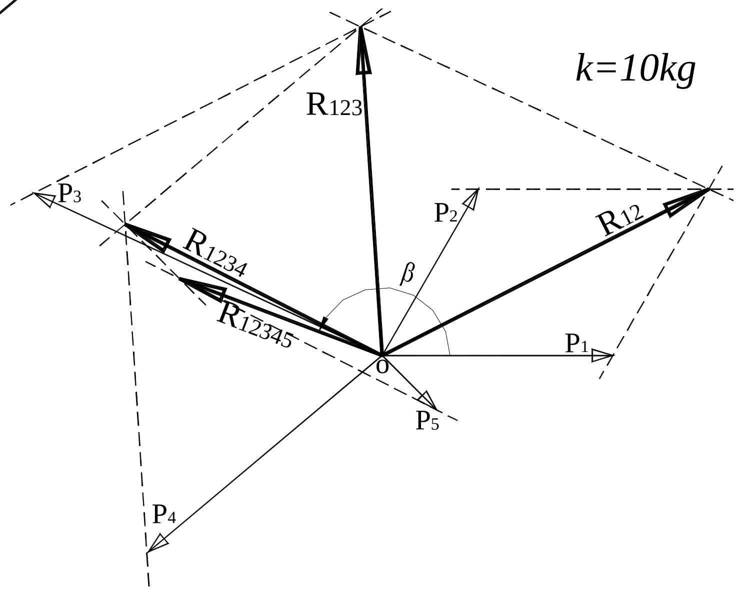
Ejercicio 1-1:
l



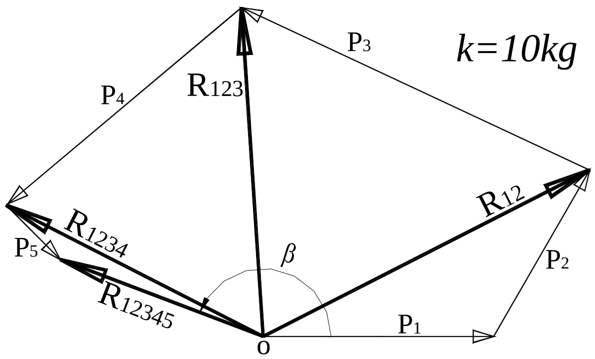
$P_1 = 30kg$	$\alpha_1 = 0°$
$P_2 = 25kg$	$\alpha_2 = 60°$
$P_3 = 50kg$	$\alpha_3 = 155°$
$P_4 = 40kg$	$\alpha_4 = 220°$
$P_4 = 10kg$	$\alpha_5 = 315°$

a)-Métodos gráficos de composición de fuerzas:

- *Método del paralelogramo*:

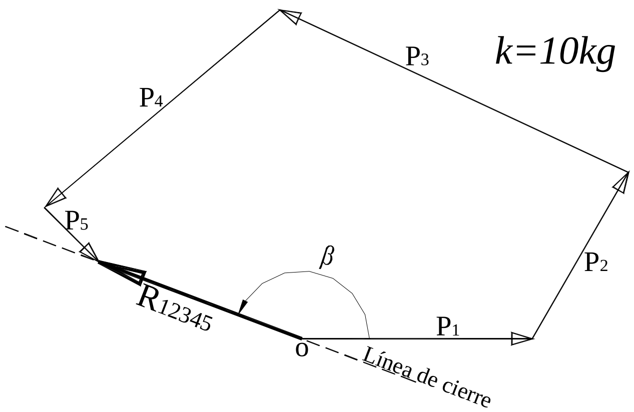


- *Método del triángulo*:



$$\boxed{\begin{array}{l} R_{1234} = 2{,}8cm \cdot k = 28kg \\ \beta = 159° \end{array}}$$

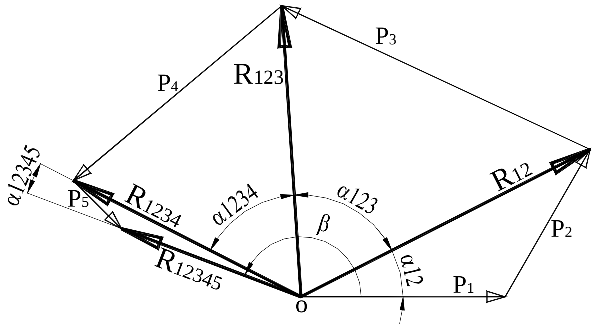
- *Método del polígono de fuerzas*:



TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

b)-Métodos analíticos de composición de fuerzas:

- *<u>Trigonometría</u>:* Obtenemos la resultante mediante la resolución por trigonometría de los sucesivos triángulos generados a partir del método del triángulo.



$P_1 = 30kg \qquad \alpha_1 = 0°$

$P_2 = 25kg \qquad \alpha_2 = 60°$

$P_3 = 50kg \qquad \alpha_3 = 155°$

$P_4 = 40kg \qquad \alpha_4 = 220°$

$P_4 = 10kg \qquad \alpha_5 = 315°$

$$R_{12}\begin{cases} R_{12} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2\cdot P_1\cdot P_2\cdot\cos[180-(\alpha_2-\alpha_1)]} \\ R_{12} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\cdot P_1\cdot P_2\cdot\cos(\alpha_2-\alpha_1)} = 47{,}67kg \\ \\ \dfrac{\sin(\alpha_{12})}{P_2} = \dfrac{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{R_{12}} \qquad \alpha_{12} = 26{,}99° \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Teorema del Coseno

$\Rightarrow$ Teorema del Seno

$$R_{123}\begin{cases} R_{123} = \sqrt{R_{12}^2 + P_3^2 - 2\cdot R_{12}\cdot P_3\cdot\cos[180-(\alpha_3-\alpha_{12})]} \\ R_{123} = \sqrt{R_{12}^2 + P_3^2 + 2\cdot R_{12}\cdot P_3\cdot\cos(\alpha_3-\alpha_{12})} = 42{,}87kg \\ \\ \dfrac{\sin(\alpha_{123})}{P_3} = \dfrac{\sin(\alpha_3-\alpha_{12})}{R_{123}} \qquad \alpha_{123} = 66{,}77° \end{cases}$$

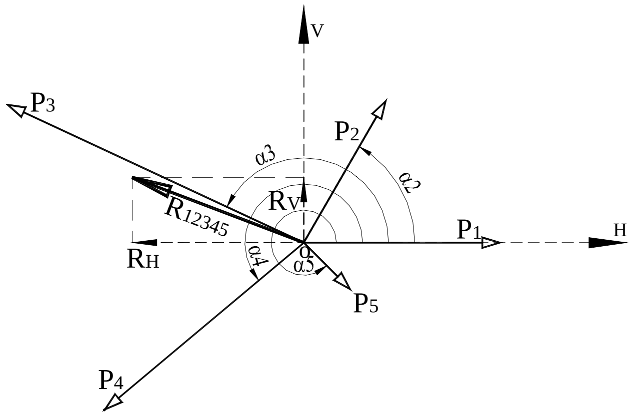
$$R_{1234}\begin{cases} R_{1234} = \sqrt{R_{123}^2 + P_4^2 - 2\cdot R_{123}\cdot P_4\cdot\cos[180-(\alpha_4-\alpha_{123}-\alpha_{12})]} \\ R_{1234} = \sqrt{R_{123}^2 + P_4^2 + 2\cdot R_{123}\cdot P_4\cdot\cos(\alpha_4-\alpha_{123}-\alpha_{12})} = 37{,}56kg \\ \\ \dfrac{\sin(\alpha_{1234})}{P_4} = \dfrac{\sin(\alpha_4-\alpha_{123}-\alpha_{12}))}{R_{1234}} \qquad \alpha_{1234} = 59{,}20° \end{cases}$$

$$R_{12345}\begin{cases} R_{12345} = \sqrt{R_{1234}^2 + P_5^2 - 2\cdot R_{1234}\cdot P_5\cdot\cos[180-(\alpha_5-\alpha_{1234}-\alpha_{123}-\alpha_{12})]} \\ R_{12345} = \sqrt{R_{1234}^2 + P_5^2 + 2\cdot R_{1234}\cdot P_5\cdot\cos(\alpha_5-\alpha_{1234}-\alpha_{123}-\alpha_{12})} = \boxed{28{,}21kg} \\ \\ \dfrac{\sin(\alpha_{12345})}{P_5} = \dfrac{\sin(\alpha_5-\alpha_{1234}-\alpha_{123}-\alpha_{12}))}{R_{12345}} \qquad \alpha_{12345} = 6{,}27° \end{cases}$$

$$\boxed{\beta = \alpha_{12345} + \alpha_{1234} + \alpha_{123} + \alpha_{12} = 159{,}24°}$$

TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

- *Ecuaciones de proyección:*



P_1 = 30kg α_1 = 0°
P_2 = 25kg α_2 = 60°
P_3 = 50kg α_3 = 155°
P_4 = 40kg α_4 = 220°
P_4 = 10kg α_5 = 315°

Proyección Horizontal:

$$R_H = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + P_4 \cos\alpha_4 + P_5 \cos\alpha_5 = -26{,}386kg$$

Proyección Vertical:

$$R_V = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + P_3 \sin\alpha_3 + P_4 \sin\alpha_4 + P_5 \sin\alpha_5 = 9{,}996kg$$

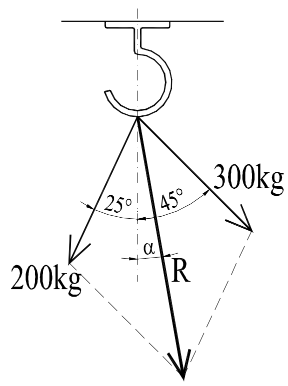
Magnitud de la Resultante: $\boxed{R_{12345} = \sqrt{R_H^{\ 2} + R_V^{\ 2}} = 28{,}21kg}$

Dirección y sentido de la Resultante: $\boxed{\beta = arctg\,\frac{R_V}{R_H} = 159{,}24°}$

Ejercicio 1-2: *Respuesta:*

R =413,575kg

α *=17,97°*



Ejercicio 1-3: *Respuesta:*

F_2 *=26,89kg*

R =18,75kg

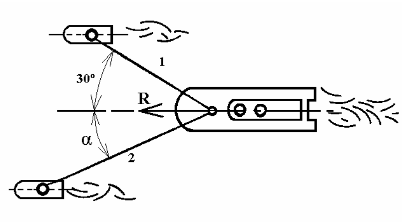
TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

- Descomposición de una Fuerza en dos direcciones: ➔ SOLUCIONES

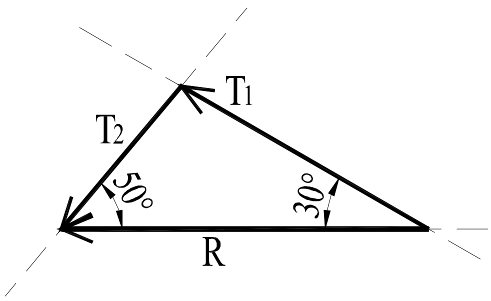
Ejercicio 1-4: <u>*Respuesta*</u>*:*

$R_x = 39{,}5kg \quad R_y = 32{,}0kg$

Ejercicio 1-5:



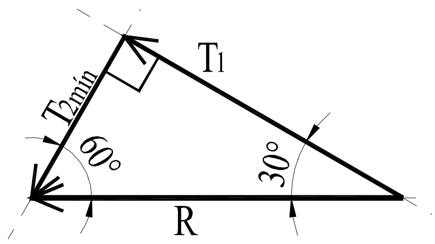
a) Descomposición de fuerzas si $\alpha = 50°$



Por trigonometría:

$$\begin{cases} \dfrac{T_1}{\sin 50°} = \dfrac{T_2}{\sin 30°} = \dfrac{R}{\sin 100°} \\ T_1 = R \cdot \dfrac{\sin 50°}{\sin 100°} = 4667kg \\ T_2 = R \cdot \dfrac{\sin 30°}{\sin 100°} = 3046kg \end{cases}$$

b) α para que T_2 sea mínima:



- T_2 es mínima si su dirección es perpendicular a la dirección de T_1

Por trigonometría:

$$\begin{cases} T_1 = R \cdot \sin 60° = 5196kg \\ T_{2mín} = R \cdot \sin 60° = 3000kg \end{cases}$$

Ejercicio 1-6: <u>*Respuesta*</u>*:* $P = 1673{,}70kg$

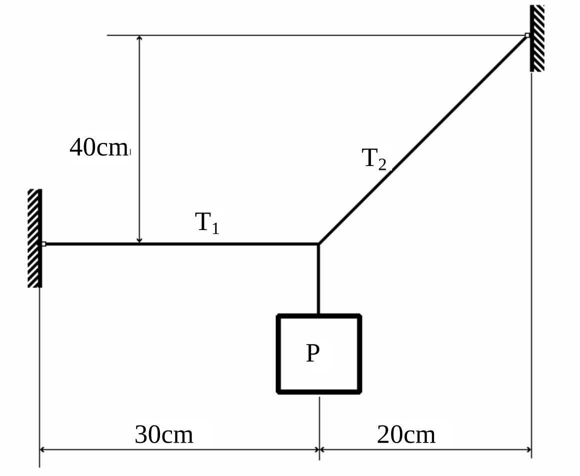
$P_H = 1371{,}02kg$

TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

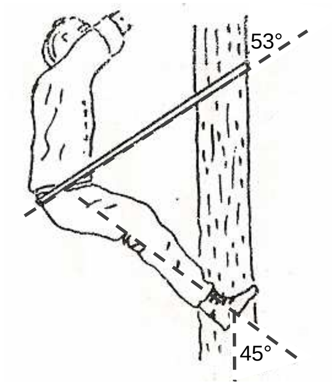
- Equilibrio de Fuerzas

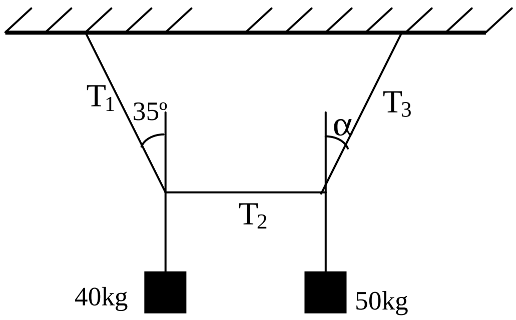
Ejercicio 1-7: Un peso P cuelga de dos cables como está indicado. Calcular los esfuerzos T_1 y T_2 en los cables.

P = 40kg



Ejercicio 1-8: Un electricista pesa *82,5kg*. Suponiendo que su pie transmite fuerza sólo a lo largo del gancho clavado en el poste, hallar la tensión en la cuerda que lo ata al poste y el esfuerzo en el gancho donde apoya el pie.





Ejercicio 1-9: Dado el sistema que se indica en la figura, se pide:

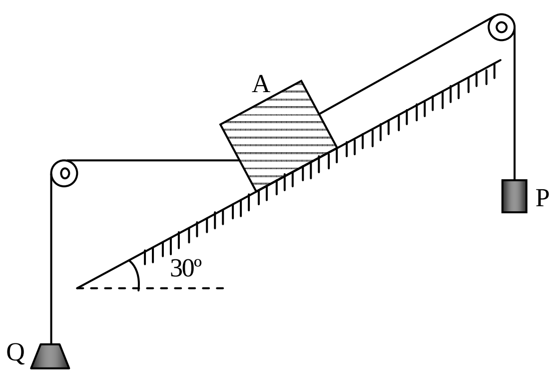
a) Determinar el ángulo α

b) Determinar la tensión en cada cuerda

Resolver el ejercicio en forma gráfica, y en forma analítica planteando las dos ecuaciones de proyección de las fuerzas en dos direcciones (no olvidar realizar el diagrama de cuerpo libre de cada elemento analizado para realizar las proyecciones).

Ejercicio 1-10: Calcular el peso *P* necesario para mantener el equilibrio en el sistema en el cual *A* pesa *100kg* y *Q 10kg* El plano y las poleas son lisas. La cuerda *AC* es horizontal y la cuerda *AB* es paralela al plano. Calcular también la reacción del plano sobre *A*.

Resolver el ejercicio en forma gráfica, y en forma analítica planteando las dos ecuaciones de proyección de las fuerzas en dos direcciones (no olvidar realizar el diagrama de cuerpo libre de cada elemento analizado para realizar las proyecciones).

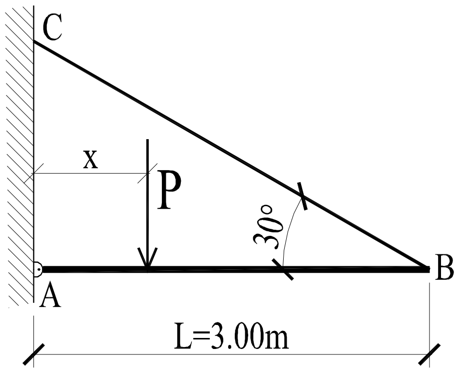


TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

Ejercicio 1-11: Una barra horizontal de peso despreciable y longitud "*L*" está articulada a una pared vertical en *A* y sostenida por un alambre delgado *BC* que forma un ángulo de *30°* con la horizontal. Sobre la barra hay un bloque de peso *P*. Calcular la fuerza en el alambre (*T*) y la reacción en la articulación (R_A).

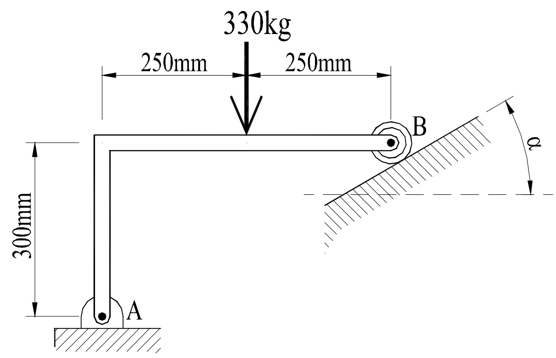
P=1500kg ; x = 1,00m

Resolver el ejercicio en forma gráfica, y en forma analítica planteando las dos ecuaciones de proyección de las fuerzas en dos direcciones (no olvidar realizar el diagrama de cuerpo libre de cada elemento analizado para realizar las proyecciones).



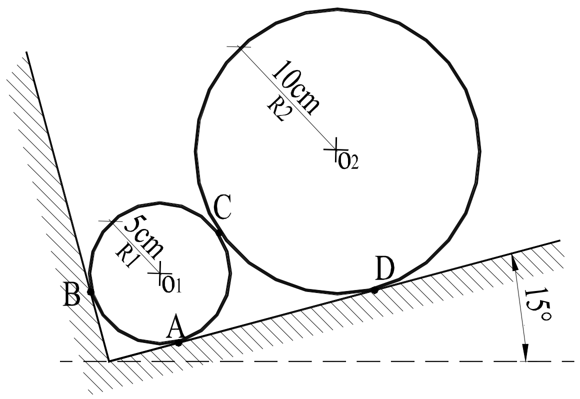
Ejercicio 1-12: Determinar las reacciones en *A* y *B* cuando:

a) $\alpha = 90°$,
b) $\alpha = 30°$



Ejercicio 1-13: El cilindro grande pesa *100kg*, y el pequeño *30kg*. Determinar la fuerza de contacto en el punto *A*.

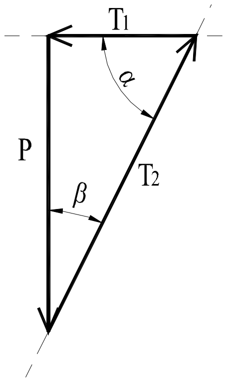
Resolver el ejercicio en forma gráfica, y en forma analítica planteando las dos ecuaciones de proyección de las fuerzas en dos direcciones (no olvidar realizar el diagrama de cuerpo libre de cada elemento analizado para realizar las proyecciones).



TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

- Equilibrio de Fuerzas ➔ SOLUCIONES

Ejercicio 1-7:



$$\alpha = arctg\left(\frac{40}{20}\right) = 63{,}43°$$

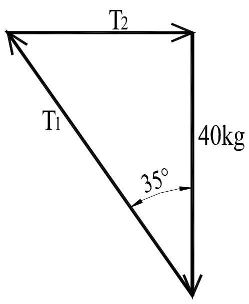
$$\beta = 90 - \alpha = 26{,}57°$$

$$T_1 = P \cdot tg\beta = 20kg$$

$$T_2 = \frac{P}{\sin\alpha} = 44{,}72kg$$

Ejercicio 1-8: <u>*Respuesta*</u>*:* ***T = 58.9kg***
R = 66,5kg

Ejercicio 1-9:
<u>Por trigonometría</u>:

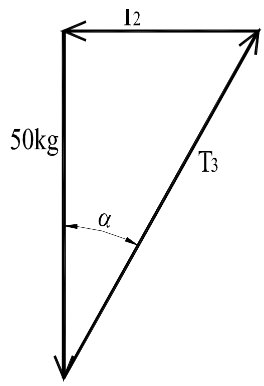


$$T_1 = \frac{40kg}{\cos 35°} = 48{,}83kg$$

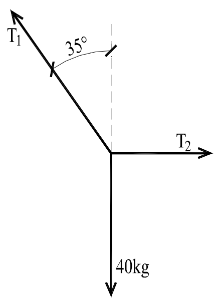
$$T_2 = 40kg \cdot tg35° = 28{,}00kg$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{T_2}{50kg}\right) = 29{,}25°$$

$$T_3 = \sqrt{50k^{2} + (T_2^{2}} = 57{,}31kg$$

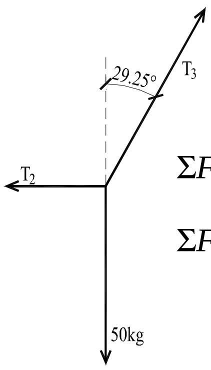


<u>Resolución analítica (2 ecuaciones de proyección)</u>:



$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_H \rightarrow T_2 - T_1 \cdot sen35° = 0 \\ \Sigma F_V \rightarrow T_1 \cdot \cos 35° - 40kg = 0 \end{array}\right\} \quad T_1 = \frac{40kg}{\cos 35°} = 48{,}8kg$$

$$T_2 = T_1 \cdot sen35° = 28{,}00kg$$



$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_H \rightarrow T_3 \cdot sen\alpha - T_2 = 0 \\ \Sigma F_V \rightarrow T_3 \cdot \cos\alpha - 50kg = 0 \end{array}\right\} \quad tg\alpha = \frac{T_2}{50kg} \rightarrow \alpha = 29{,}25°$$

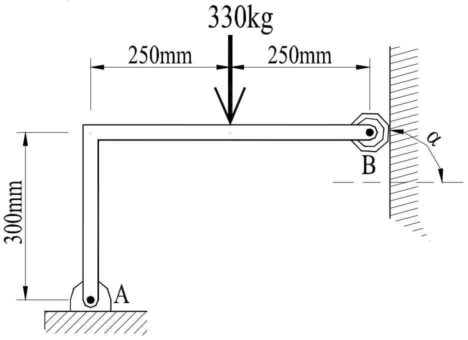
$$T_3 = \frac{50kg}{\cos\alpha} = 57{,}3kg$$

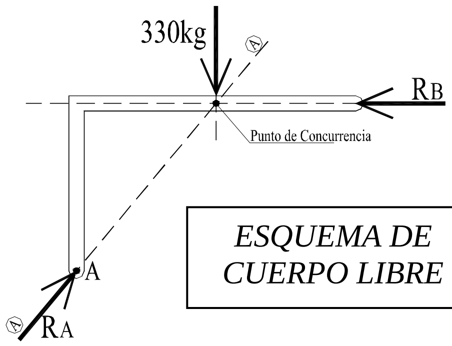
Ejercicio 1-10: Respuesta: *$P = 58{,}6kg$*
$R_A = 81{,}5kg$

Ejercicio 1-11: Respuesta: *$T = 1000kg$*
$R_A = 1322{,}9kg$

Ejercicio 1-12: a)-Buscamos reacciones en *A* y *B* cuando $\alpha = 90°$:

-Realizamos el ESQUEMA DE CUERPO LIBRE buscando el punto de concurrencia de las tres fuerzas:



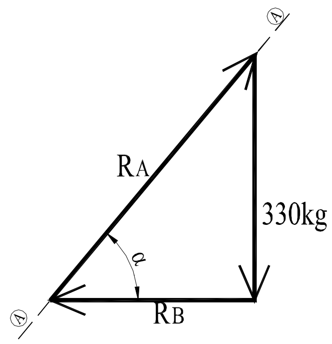


-Una vez obtenida la dirección de R_A, trazamos el polígono de fuerzas:

Trabajando en la escala adecuada podemos obtener la *solución gráficamente*.

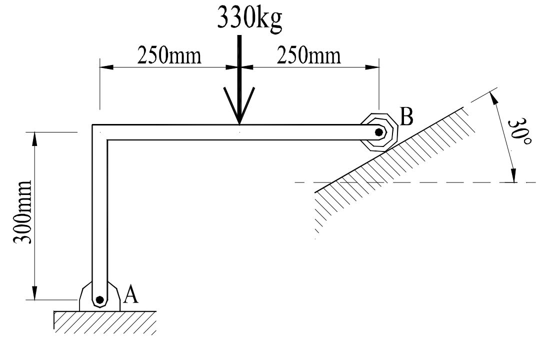
También es posible plantear las dos *ecuaciones de proyección* y despejar las incógnitas.

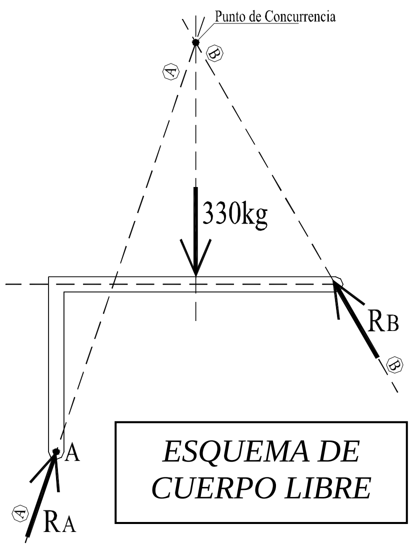
$R_A = 429{,}56kg \qquad \alpha = 50{,}19° \qquad R_B = 275{,}00kg$



b)-Buscamos reacciones en *A* y *B* cuando $\alpha = 30°$:

-Realizamos el ESQUEMA DE CUERPO LIBRE buscando el punto de concurrencia de las tres fuerzas:

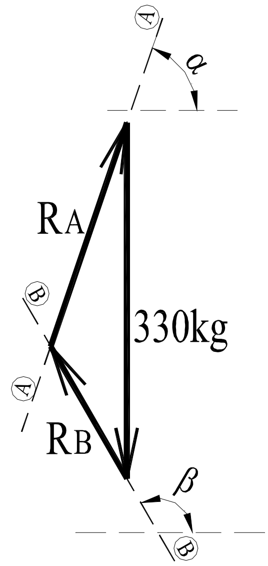




-Una vez obtenidas las direcciones de R_A y R_B trazamos el polígono de fuerzas:

Trabajando en la escala adecuada podemos obtener la *solución gráficamente*.

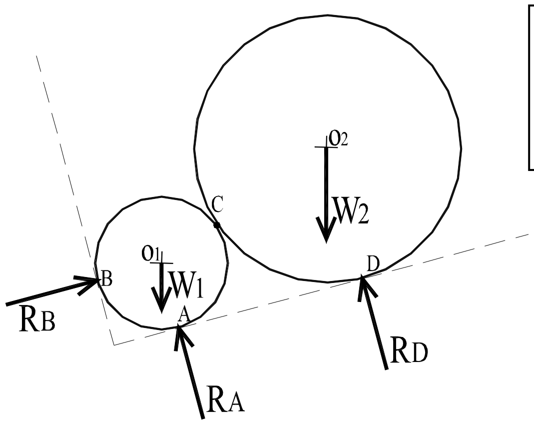
También es posible plantear las dos *ecuaciones de proyección* y despejar las incógnitas.



$$R_A = 219{,}18kg \qquad \alpha = 71{,}16°$$

$$R_B = 141{,}50kg \qquad \beta = 120{,}00°$$

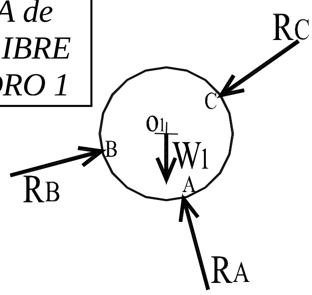
Ejercicio 1-13:

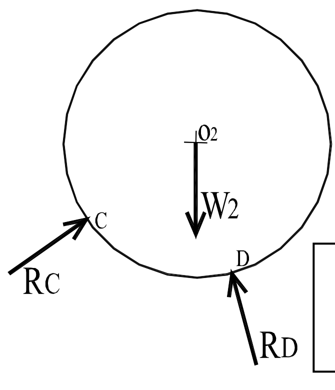


ESQUEMA de CUERPO LIBRE del CILINDRO 1 y2 JUNTOS

Para simplificar el problema reduciéndolo a un problema de fuerzas concurrentes conviene separar los cilindros, con lo cual se exterioriza además la reacción R_C del punto de contacto entre los cilindros. De este modo nos encontramos con dos problemas de fuerzas concurrentes como puede observarse en los siguientes ESQUEMAS de CUERPO LIBRE (Tener en cuenta que todas las reacciones sobre los cilindros son perpendiculares al punto de contacto):

ESQUEMA de CUERPO LIBRE del CILINDRO 1





ESQUEMA de CUERPO LIBRE del CILINDRO 2

TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

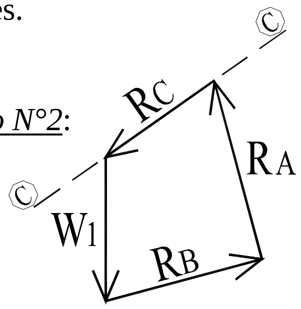
Una vez realizados los ESQUEMAS de CUERPO LIBRE, el problema puede solucionarse de la siguiente manera:

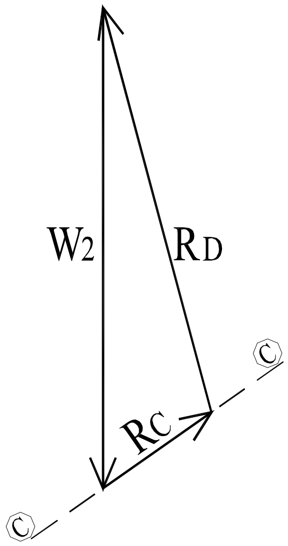
- *Gráficamente*, trazando los polígonos de fuerza correspondientes a cada esquema de cuerpo libre.
- *Analíticamente*, planteando las dos ecuaciones de proyección que corresponden a cada esquema de cuerpo libre (es decir, cuatro ecuaciones que nos permiten despejar cuatro incógnitas).

En cualquiera de los dos casos es recomendable comenzar a trabajar con el *Cilindro N°2*, pues como puede observarse en los esquemas de cuerpo libre trazados, tiene sólo dos incógnitas, en tanto que el *Cilindro N°1* tiene tres.

- *Solución gráfica:*

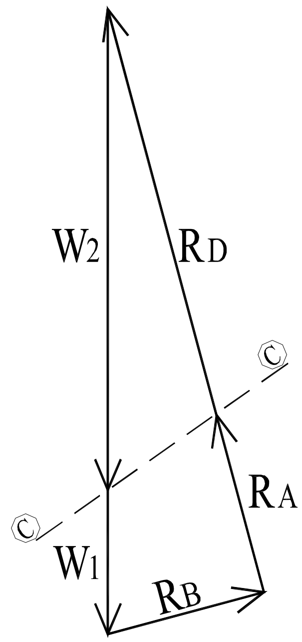
Trazado del polígono de fuerzas para el *Cilindro N°2*:





➔ Una vez obtenida la dirección de R_C, podemos trazar el polígono de fuerzas para el *Cilindro N°1*

Notemos que la superposición de los dos polígonos de fuerza trazados representa el polígono de fuerza general de los dos cilindros juntos. ➔



Trabajando en una escala adecuada podemos obtener las magnitudes de las cuatro incógnitas a partir de la medición de los correspondientes vectores.

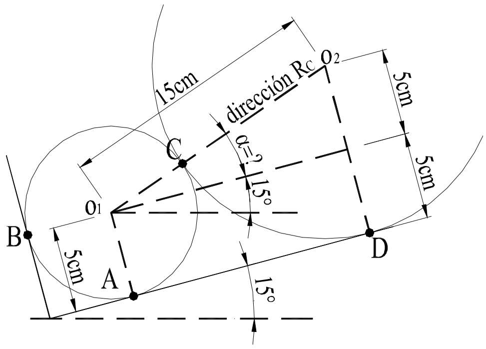
$R_A = 38{,}15kg$ $\qquad$ $R_C = 27{,}46kg$

$R_B = 33{,}64kg$ $\qquad$ $R_D = 87{,}41kg$

- *Solución analítica:*

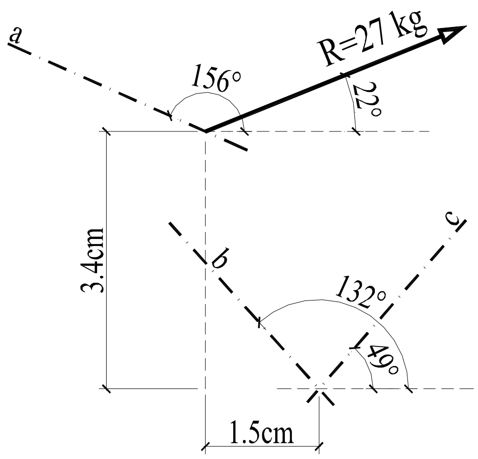
Puede trabajarse analíticamente planteando relaciones trigonométricas entre los vectores graficados en los polígonos de fuerzas; o bien mediante las dos ecuaciones de proyección planteadas a partir de los esquemas de cuerpo libre.

Para el desarrollo de la solución analítica es necesario conocer el ángulo que indica la dirección de cada reacción. Para obtener la dirección de R_C guiarse con la geometría del siguiente gráfico:

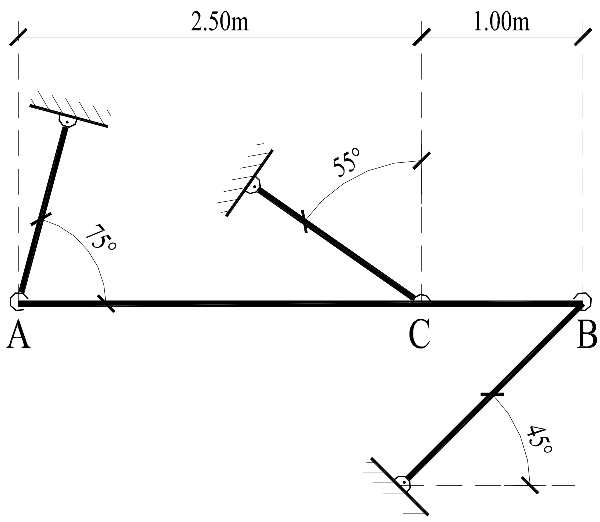


- Recta Auxiliar de Cullman

Ejercicio 1-14: Dada una fuerza y tres direcciones no concurrentes a un punto, hallar las ***componentes*** según esas tres direcciones (***a, b, c***). Resolver gráficamente, mediante el empleo de la Recta Auxiliar de Cullman.

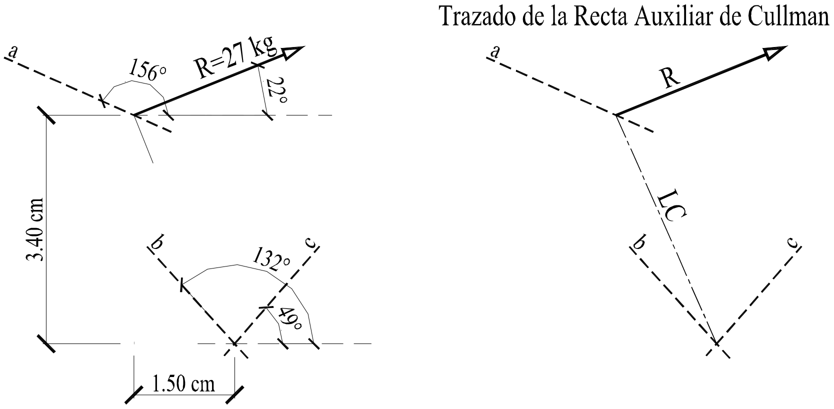


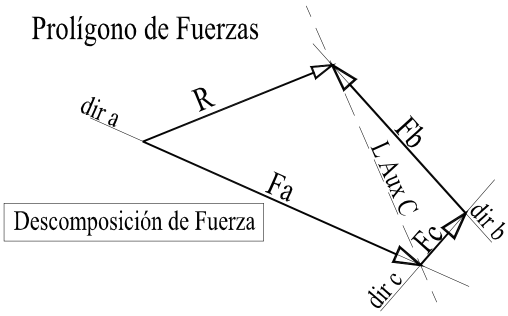
Ejercicio 1-15: Determinar la magnitud de las ***reacciones*** en los apoyos sabiendo que la barra *AB* pesa *10kg*. Resolver gráficamente, mediante el empleo de la recta auxiliar de Cullman.



- Recta Auxiliar de Cullman: ➔ SOLUCIONES

Ejercicio 1-14: Descomponemos una fuerza en tres direcciones dadas. Trabajamos con el método gráfico utilizando la Recta Auxiliar de Cullman:

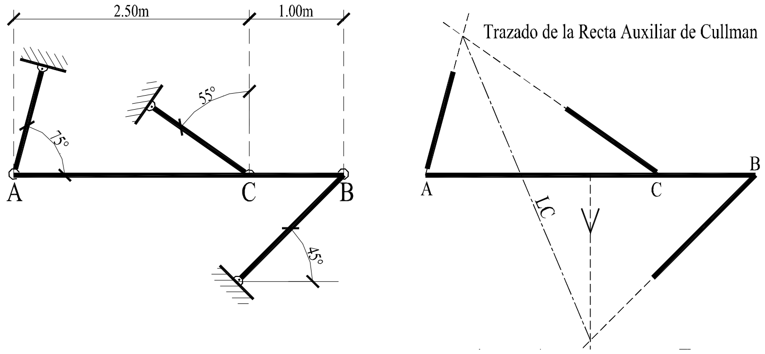


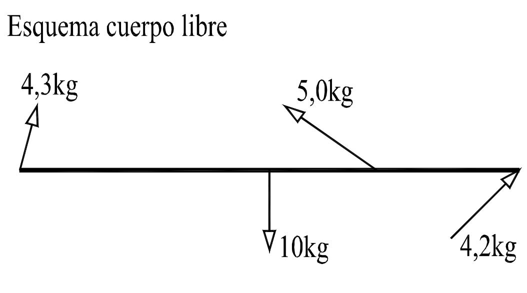


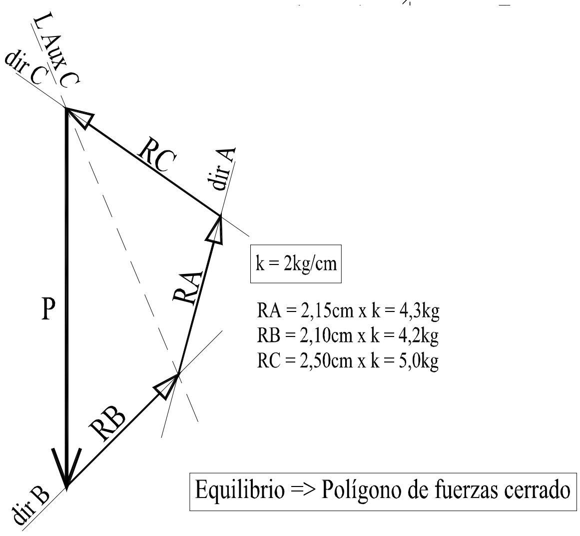
k=10kg/cm

F_a = *40,18kg*
R_b = *26,36kg*
R_c = *9,09kg*

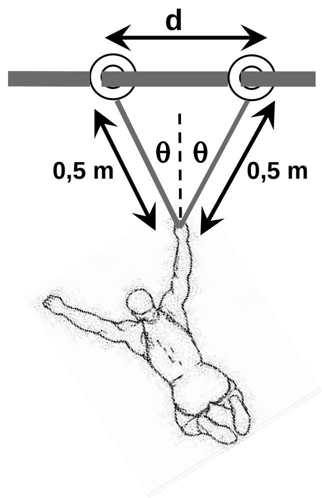
Ejercicio 1-15: Buscamos reacciones de un sistema en equilibrio. Conocemos la dirección de las reacciones y mediante el método gráfico que utiliza la Recta Auxiliar de Cullman queremos determinar la magnitud de dichas reacciones:







- *Rozamiento*

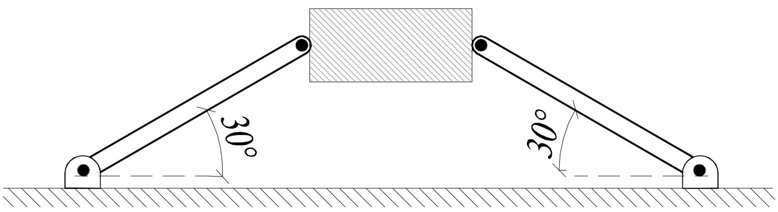


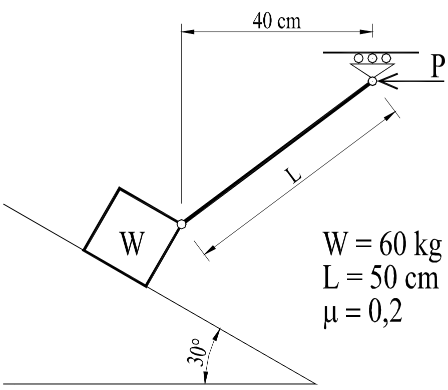
Ejercicio 1-16: Un atleta se cuelga del centro de una cuerda de *1m* de longitud, cuyos extremos poseen anillos que se pueden mover libremente sobre una barra horizontal. ¿Cuál es la distancia máxima "*d*" entre los anillos cuando el atleta está en reposo, si el coeficiente de rozamiento vale *0,35*?

Ejercicio 1-17: Dos brazos articulados en su base, mantienen apretado un bloque de *50kg* debido al rozamiento seco entre los brazos y el bloque. Determinar el coeficiente de rozamiento mínimo necesario para que el bloque esté en equilibrio

a) Si el peso propio de los brazos puede despreciarse

b) Si cada brazo tiene un peso de *40kg*.



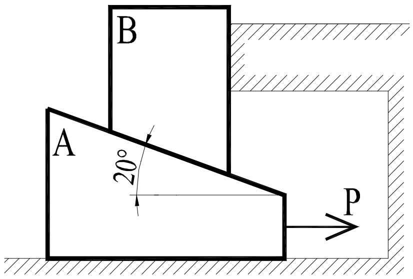


Ejercicio 1-18: Dar el valor P_{min} para hacer subir el peso ***W***. Trazar claramente los diagramas de cuerpo libre.

Ejercicio 1-19: Calcular el valor ***P*** para mover el bloque ***A*** hacia la derecha. Trazar claramente los diagramas de cuerpo libre.

$W_A = 2000kg$ $W_B = 100kg$

$\mu = 0,2$ (en todas las superficies)



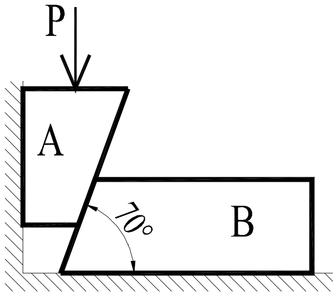
Ejercicio 1-20: Determinar μ_3 necesario para que se inicie el movimiento. Trazar claramente los diagramas de cuerpo libre.

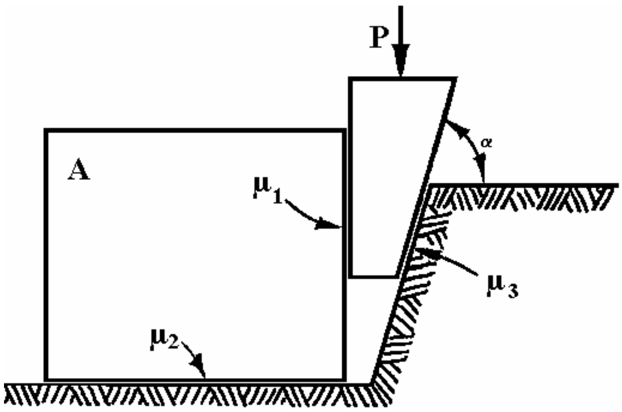
P = 150kg ***W_A = 100kg*** ***W_B = 500kg***

μ_1 ***= 0,2*** (entre *A* y *B*)

μ_2 ***= 0*** (entre *A* y pared)

μ_3 ***= ?*** (entre *B* y piso)



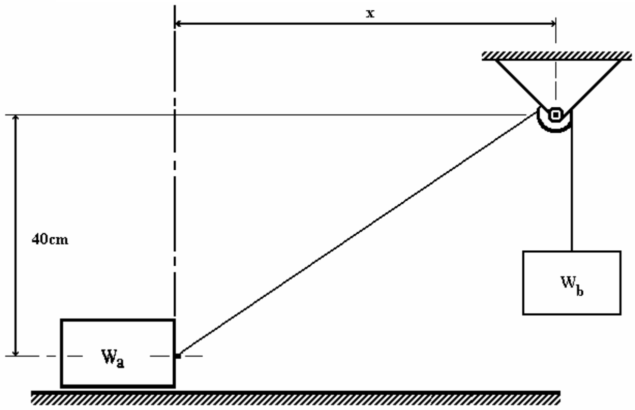


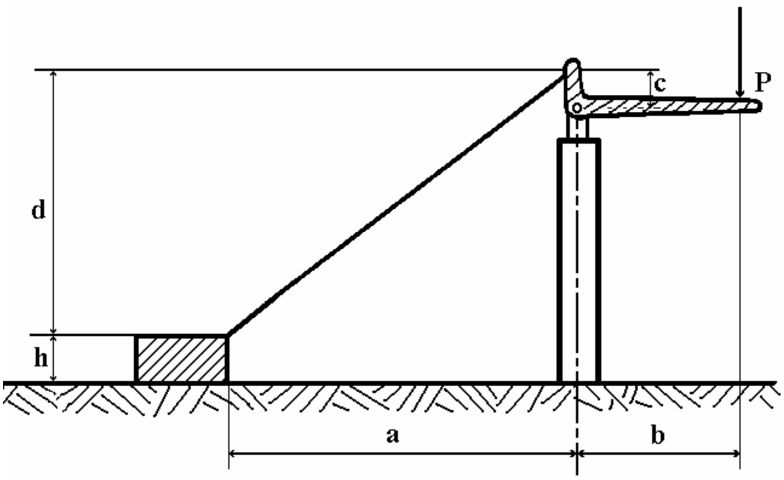
Ejercicio 1-21: Determinar la fuerza *P* necesaria para desplazar el bloque *A* hacia la izquierda. Solución analítica y gráfica.

μ_1 ***= 0,3*** ***W_A = 30kg***
μ_2 ***= 0,4*** α ***= 60°***
μ_3 ***= 0,3***

Ejercicio 1-22: Se utiliza el bloque de *40kg* para asegurar el cable de la figura. Calcular el intervalo de valores de *x* para los que no se moverá el sistema.

W_A = 40kg ***W_B = 25kg***
μ ***= 0,5***





Ejercicio 1-23: Determinar la fuerza necesaria para que el bloque, de peso *W*, se deslice sin levantarse, sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el suelo es μ *= 0,4*

a = 1,0m ***b = 0,5m***
c = 0,3m ***d = 1,5m***
h = 0,2m ***W = 100kg***

TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

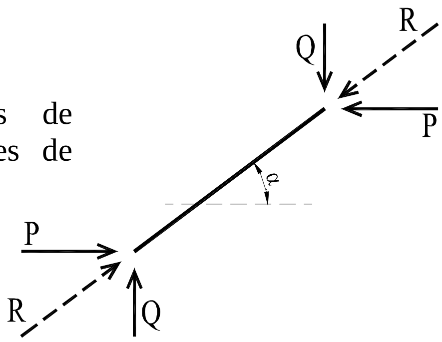
- *Rozamiento:* ➔ *SOLUCIONES*

Ejercicio 1-16: *Respuesta:* $tg\ \theta = \mu$

$d = l\ sen\ \theta = 0{,}33m$

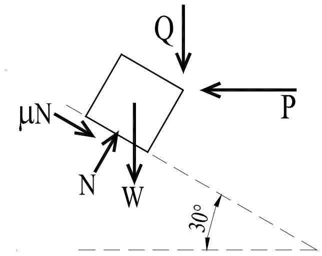
Ejercicio 1-17: *Respuesta:* a) $\mu \geq 0{,}577$

b) $\mu \geq 0{,}321$

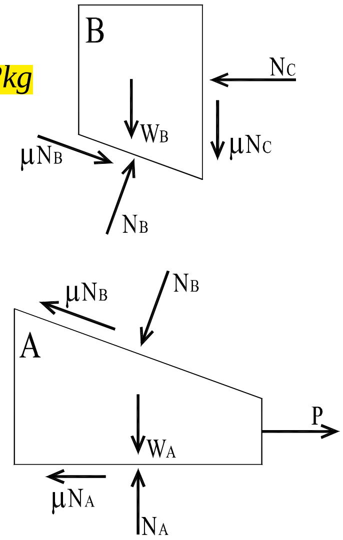


Ejercicio 1-18, 1-19, 1-20: Trazando los esquemas de cuerpo libre siguientes y planteando las ecuaciones de proyección correspondientes obtenemos:

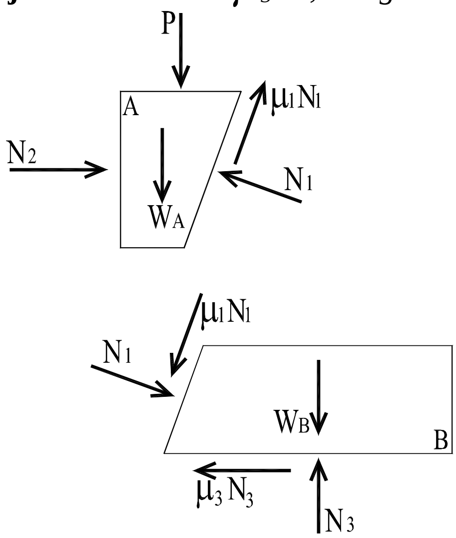
Ejercicio 1-18: $P_{mín}=154{,}68kg$



Ejercicio 1-19: $P_{mín}=492{,}02kg$



Ejercicio 1-20: $\mu_3=0{,}548kg$



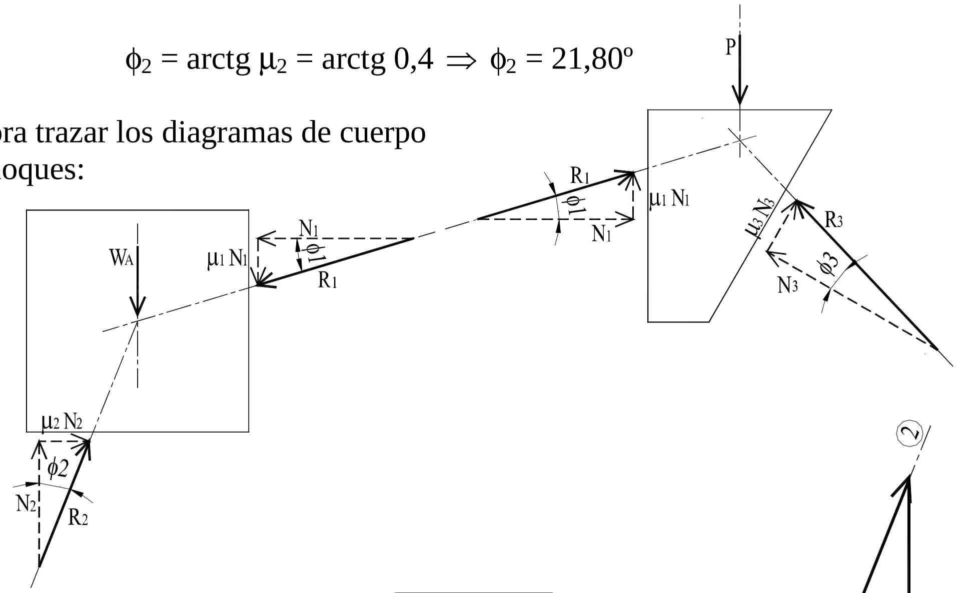
TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

Ejercicio 1-21: A partir de los valores del rozamiento μ calculamos los angulos ϕ:

$$\phi_1 = \phi_3 = \text{arctg}\ \mu_1 = \text{arctg}\ 0{,}3 \Rightarrow \phi_1 = \phi_3 = 16{,}70^\circ$$

$$\phi_2 = \text{arctg}\ \mu_2 = \text{arctg}\ 0{,}4 \Rightarrow \phi_2 = 21{,}80^\circ$$

Podemos ahora trazar los diagramas de cuerpo libre de los dos bloques:

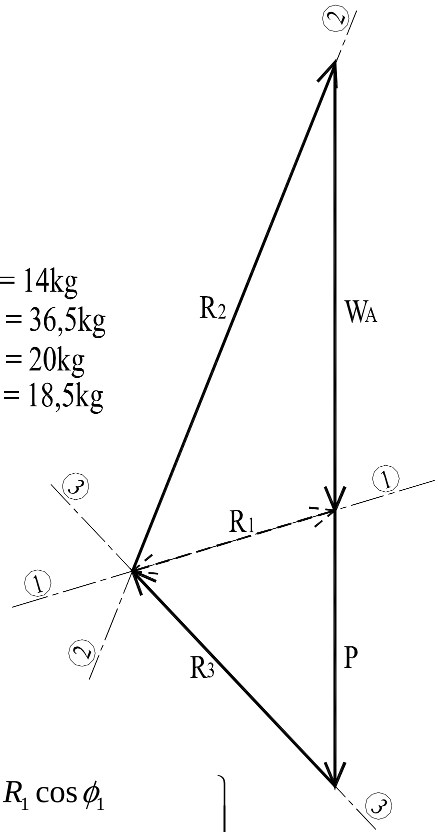


k = 5kg/cm

R1 =2,8cm x k = 14kg
R2= 7,3cm x k = 36,5kg
R3 = 4,0cm x k = 20kg
P = 3,7cm x k = 18,5kg

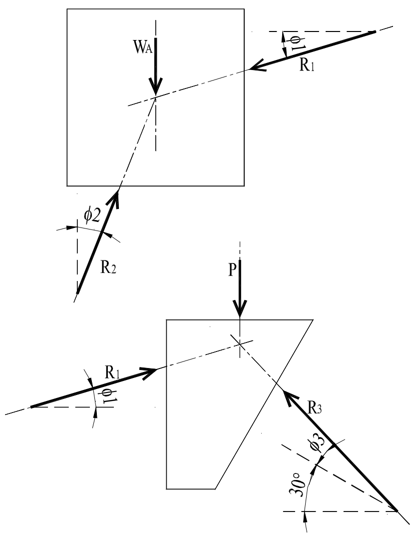
Solución Gráfica:

A partir de los esquemas de cuerpo libre, podemos trabajar gráficamente con el trazado del polígono de fuerzas en una escala adecuada.



Solución Analítica:

Se plantean las dos ecuaciones de proyección correspondientes a casos de fuerzas concurrentes para cada esquema de cuerpo libre:



$$\sum F_{Horiz} \rightarrow R_2 \sin\phi_2 = R_1 \cos\phi_1$$

$$\sum F_{Vert} \rightarrow R_2 \cos\phi_2 = R_1 \sin\phi_1 + P$$

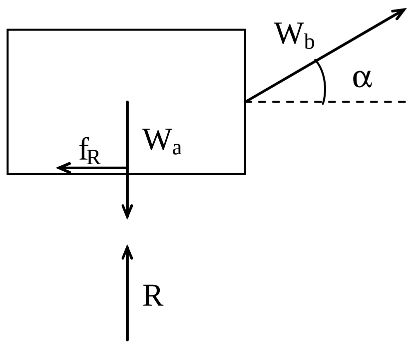
$$\sum F_{Horiz} \rightarrow R_1 \cos\phi_1 = R_3 \cos(\phi_3 + 30)$$

$$\sum F_{Vert} \rightarrow R_1 \sin\phi_1 + R_3 \sin(\phi_3 + 30) = P$$

$$R_1 = 14{,}23kg$$
$$R_2 = 36{,}71kg$$
$$R_3 = 19{,}88kg$$
$$P = 18{,}56kg$$

Ejercicio 1-22: sen (α) = $\dfrac{0{,}4}{\sqrt{0{,}4^2 + x^2}}$

cos (α) = $\dfrac{x}{\sqrt{0{,}4^2 + x^2}}$

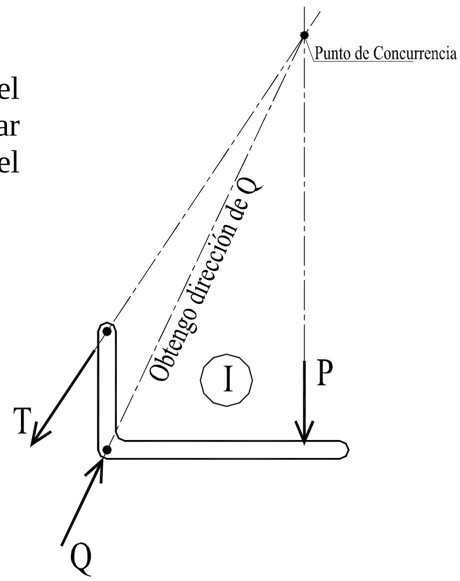


ΣF_{Vert} ==> $R = W_a - W_b$ sen (α)

ΣF_{Horiz} ==> $f_R = W_b$ cos (α)

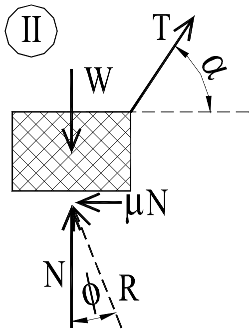
Condición de rozamiento máximo: $f_{Rmáx} \leq = \mu R$, reemplazando, elevando al cuadrado y solucionando una ecuación de segundo grado se obtiene : *0 < x < 0,138m.*

Ejercicio 1-23: Para poder evaluar el rango de *P* en el cual el bloque se **desliza sin levantarse**, debemos realizar dos análisis: el del deslizamiento, y el de la elevación del bloque.



1)- <u>Análisis del deslizamiento</u>:

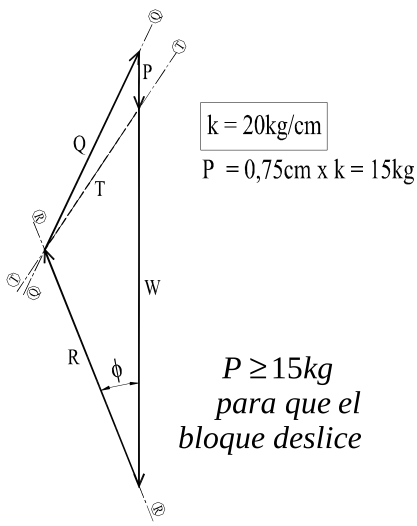
Realizamos los dos esquemas de cuerpo libre del sistema teniendo en cuenta la condición de deslizamiento:



Solución gráfica: Debemos tener en cuenta que es necesario trabajar con la resultante *R* de la normal y la fuerza de rozamiento, siendo: $\phi = \arctan(\mu) = 21{,}8°$

En el esquema de cuerpo libre *I*, buscamos el punto de concurrencia de fuerzas para obtener la dirección de *Q*.

Podemos entonces trazar el polígono de fuerzas en una escala adecuada y obtener así el valor de *P* a partir del cual comienza el deslizamiento.

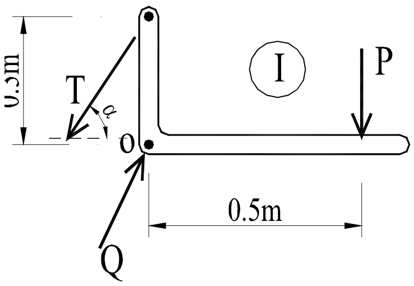


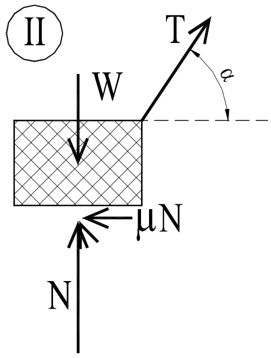
$P \geq 15kg$
para que el bloque deslice

Solución analítica: A partir de los esquemas de cuerpo libre planteamos las ecuaciones de la estática que más nos convengan.

Es un problema de cuatro incógnitas (*P*, *Q*, *N*, y *T*), de las cuales sólo nos interesa conocer una, (*P*). Si planteamos dos ecuaciones de proyección para cada esquema de cuerpo libre deberemos calcular reacciones que no nos hacen falta.

Proponemos entonces plantear en el esquema de cuerpo libre *I* sólo una ecuación de momento respecto del punto ***o***, la cual nos permitirá conocer el valor de *T* sin tener que averiguar *Q*.





$$I \quad \Rightarrow \left(\Sigma M_o \rightarrow P \cdot 0{,}5m = T\cos\alpha \cdot 0{,}3m \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P \cdot 0{,}5m}{\cos\alpha \cdot 0{,}3m} \right. \qquad (1)$$

$$II \quad \Rightarrow \left\{ \left(\begin{array}{ll} \Sigma F_H \rightarrow T\cos\alpha \geq \mu \cdot N & \Rightarrow \quad N \leq \dfrac{T\cos\alpha}{\mu} \\ \boxed{\textit{Condición de deslizamiento}} & \\ \Sigma F_V \rightarrow N + T\sin\alpha = W & \Rightarrow \quad N = W - T\sin\alpha \end{array} \right) \rightarrow W - T\sin\alpha \leq \frac{T\cos\alpha}{\mu} \right\} (2)$$

Trabajando con el sistema (2) y reemplazando (1) en (2):

$$T \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\mu} + \sin\alpha \right) \geq W$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{P \cdot 0{,}5m}{\cos\alpha \cdot 0{,}3m} \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\mu} + \sin\alpha \right) \geq W$$

$$\Downarrow \qquad \text{con } \tan\alpha = 1{,}5$$

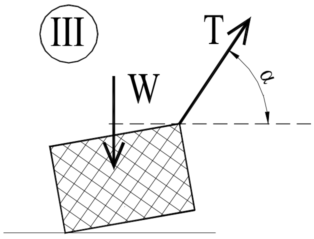
$$P \geq W \cdot \frac{0{,}3m}{0{,}5m} \cdot \frac{\mu}{1 + \mu \cdot \tan\alpha} = 100kg \cdot \frac{0{,}3m}{0{,}5m} \cdot \frac{0{,}4}{1 + 0{,}4 \cdot \tan\alpha} = 15kg$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P \geq 15kg \quad \Rightarrow \quad \textit{para que el bloque deslice}}$$

2)- <u>Análisis de elevación</u>:

En esta etapa la fricción se ha anulado pues el bloque se desliza. Y la reacción normal del suelo llegó a cero (*Esquema de Cuerpo Libre III*). Tengamos en cuenta que ya no estamos dentro de la ESTÁTICA pues el bloque está en movimiento. De igual modo podemos intentar realizar un *análisis aproximado* (pues el ángulo α varía si el bloque se desplaza) del instante en que comienza a elevarse



<u>Condición para que NO se LEVANTE</u>: $\sum F_{Vertical} \rightarrow \boxed{T \sin\alpha \leq W}$

Trabajamos con la expresión de T planteada en (1):

$$\frac{P \cdot 0{,}5m}{\cos\alpha \cdot 0{,}3m} \sin\alpha \leq W$$

$$\Downarrow$$

$$P \leq W \frac{0{,}3m}{0{,}5m \cdot \tan\alpha} = 100kg \frac{0{,}3m}{0{,}5m \cdot 1{,}5} = 40kg$$

$$\Downarrow$$

$P \leq 40kg \quad \Rightarrow \quad$ *para que el bloque no se levante*

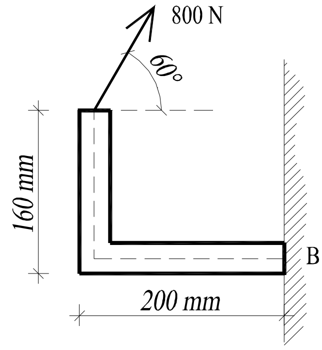
$$\Downarrow$$

<u>Condición para que el bloque DESLICE sin LEVANTARSE</u>: $\boxed{15kg \leq P \leq 40kg}$

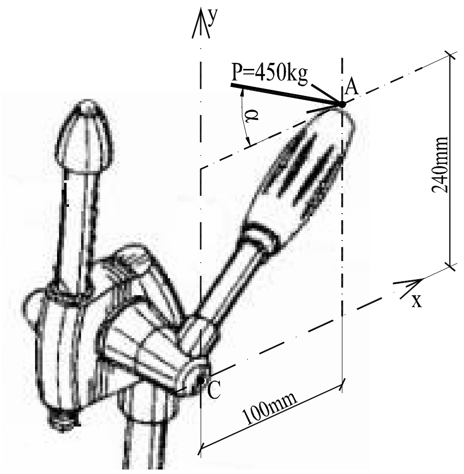
TRABAJO PRÁCTICO N°1
Fuerzas Concurrentes en el Plano

- Sistemas Equivalentes

Ejercicio 1-24: Determinar el momento de la fuerza *F* respecto a *B*.

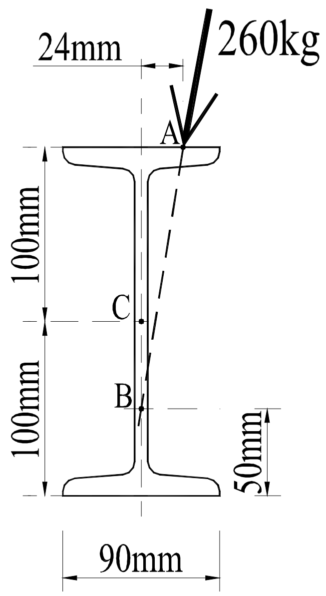


Respuesta: M=202,6 N.m



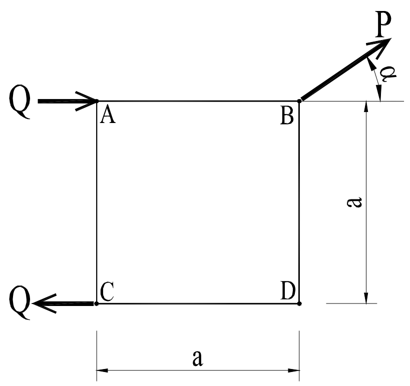
Ejercicio 1-25: Determinar el momento de la fuerza *P* respecto de *C*. El vector fuerza *P* se encuentra contenido en el plano *xy* (α = 30°)

Respuesta: M=116,03 kg.m



Ejercicio 1-26: Reemplazar la fuerza aplicada en *A* por un par equivalente aplicado en *C*.

Respuesta: M=205,4 kg.cm



Ejercicio 1-27: Reemplazar la cupla y fuerza del sistema de la figura por sólo una fuerza. Sabiendo que ***P = 2Q***.

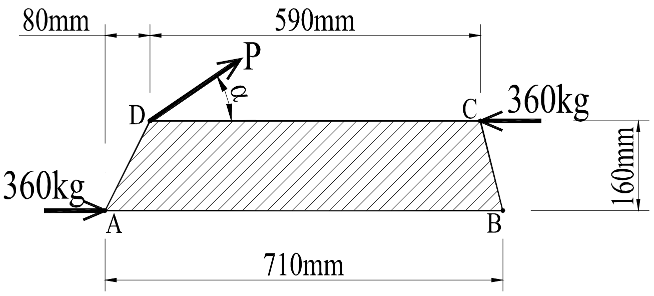
Determinar el valor del ángulo α si dicha fuerza resultante pasa por:

a) el punto *A*,
b) el punto *C*.

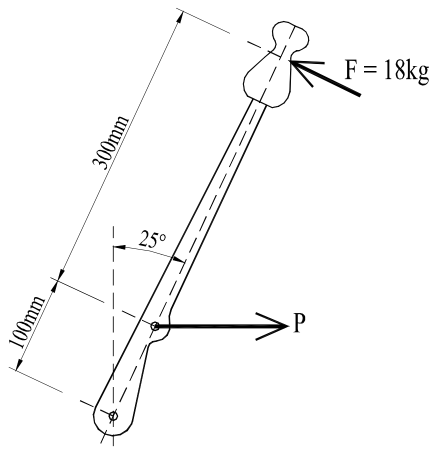
Respuesta a) α = 30°
b) α = 65.7°

Ejercicio 1-28: Una placa trapezoidal está sometida a la fuerza P y al par que se muestran en la figura. Determine:

a) el punto de aplicación sobre la placa de la fuerza *F* mínima equivalente al sistema dado,
b) la magnitud y la dirección de *F*.



Ejercicio 1-29: Calcular la fuerza *P* necesaria para equilibrar la fuerza *F*

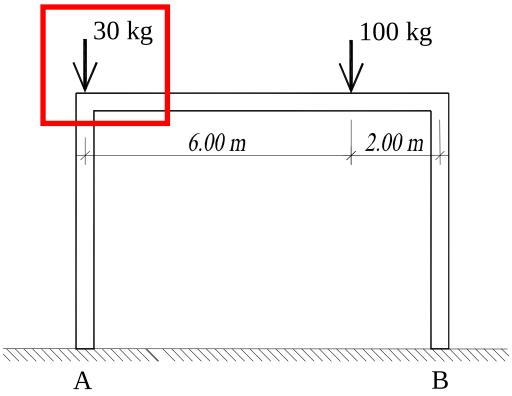


Respuesta: P=79,44 kg

TRABAJO PRÁCTICO N°2
Fuerzas Paralelas y Fuerzas Generales en el Plano

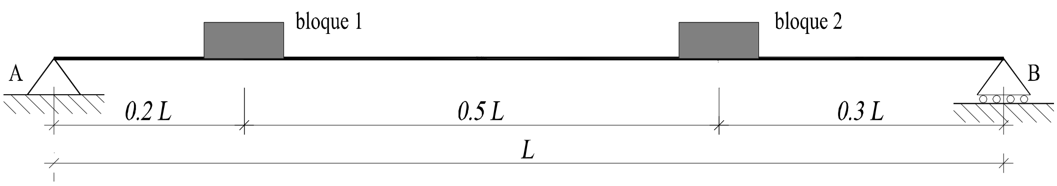
- Fuerzas Paralelas en el Plano

Ejercicio 2-1: Calcular las reacciones en las patas de una mesa que pesa *50kg* y cargada como lo indica la figura.

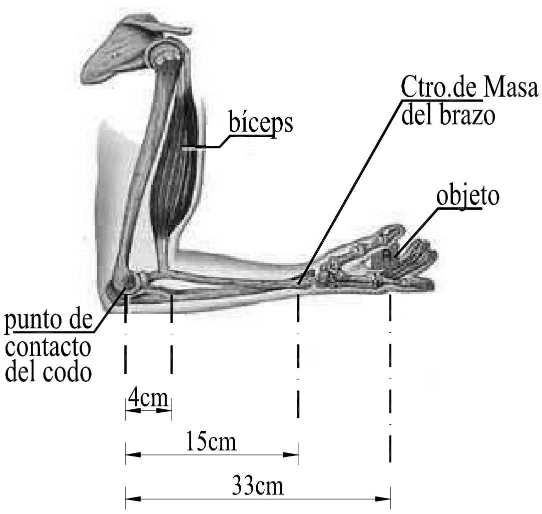


Ejercicio 2-2: Encontrar las reacciones en los apoyos de una tabla de *35kg*, sobre la cual se apoyan dos bloques como indica la figura, cuyos pesos son:

bloque 1 = 40kg *bloque 2 = 100kg*

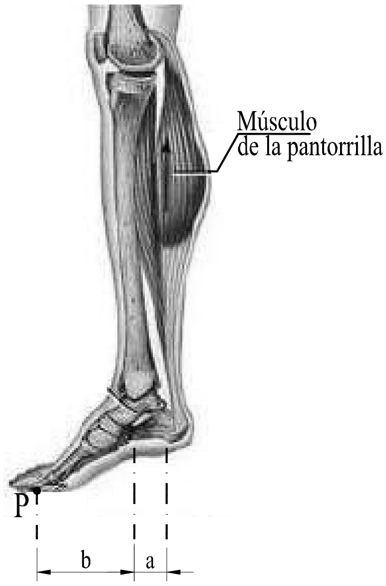


Ejercicio 2-3: Se sostiene un objeto de *10kg* con el antebrazo en posición horizontal. Calcular las fuerzas que ejercen el hueso y el bíceps, sabiendo que antebrazo y mano pesan *2kg*.

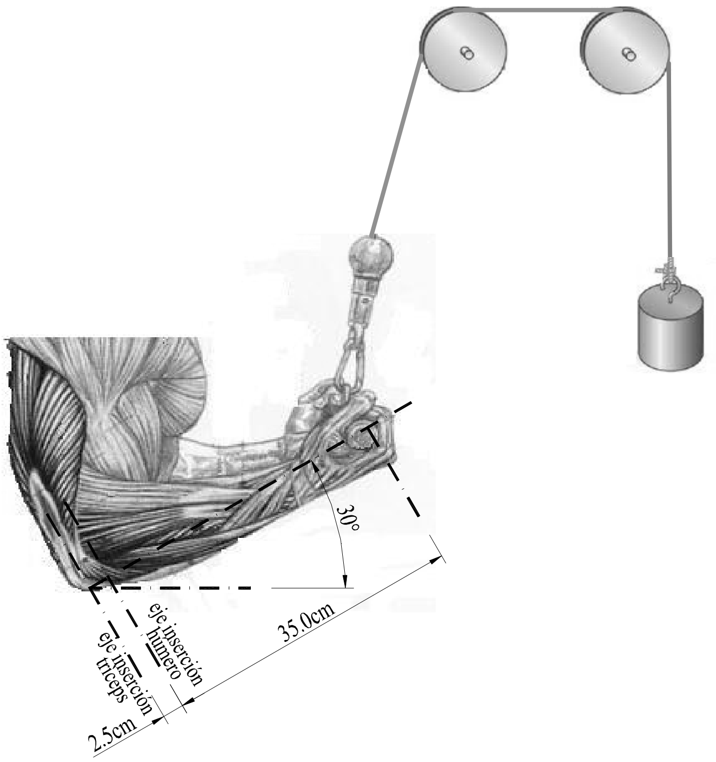


TRABAJO PRÁCTICO N°2
Fuerzas Paralelas y Fuerzas Generales en el Plano

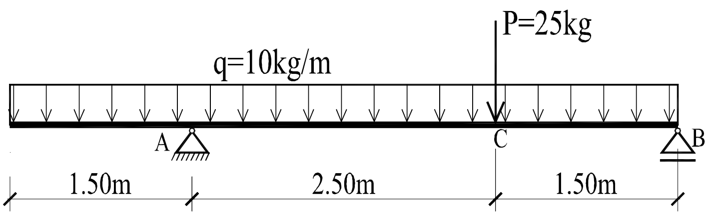
Ejercicio 2-4: La figura muestra las estructuras anatómicas en la pierna y el pie que intervienen cuando se levanta el talón del piso, de tal manera que el pie esté efectivamente en contacto con el piso en un punto solamente, indicado como *P* en la figura. Calcúlense las fuerzas que deben ejercer sobre el pie el músculo de la pantorrilla y los huesos de la pierna, cuando una persona de *65,3kg* está parada sobre la punta de un pie. Compare estas fuerzas con el peso de la persona. Suponga que *a* = 5cm y *b* = 15cm.



Ejercicio 2-5: Un peso de *15kg* se levanta por medio del sistema de poleas mostrado en la figura. El brazo se encuentra vertical, mientras que el antebrazo forma un ángulo de *30°* con la horizontal. ¿Qué fuerzas ejercen sobre el antebrazo el músculo tríceps y el hueso del brazo (húmero)? El antebrazo y la mano, combinados, tienen un peso de *2,0kg* con su centro de masa a *15cm* del punto donde los dos huesos están en contacto (medida a lo largo del antebrazo). El tríceps tira verticalmente hacia arriba en un punto que está a *2,5cm* atrás del punto de contacto.



Ejercicio 2-6: Calcular las reacciones en apoyos de la viga cargada como se indica.



TRABAJO PRÁCTICO N°2
Fuerzas Paralelas y Fuerzas Generales en el Plano

- Fuerzas Paralelas en el Plano: ➔ SOLUCIONES

Ejercicio 2-1: *Respuesta:*

$R_A = 80kg \qquad R_B = 100kg$

Ejercicio 2-2: *Respuesta:*

$R_A = 79,5kg \qquad R_B = 95,5kg$

Ejercicio 2-3: *Respuesta:*

F_{hueso},=78kg (hacia abajo)
$F_{músculo}$,=90kg (hacia arriba)

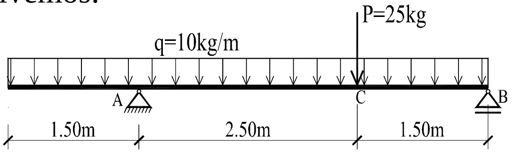
Ejercicio 2-4: *Respuesta:*

F_{hueso},=261,2kg (hacia abajo) es cuatro veces el peso.
$F_{músculo}$,=195,9kg (hacia arriba) es tres veces el peso.

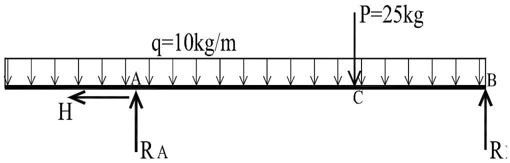
Ejercicio 2-5: *Respuesta:*

F_{hueso},=211kg (hacia abajo)
$F_{músculo}$,=198kg (hacia arriba)

Ejercicio 2-6: Se realiza en primer lugar el esquema de cuerpo libre, eliminando vínculos y exteriorizando las reacciones. Tenemos tres incógnitas: R_A, R_B y H. Planteamos las tres ecuaciones que propone la estática y resolvemos:



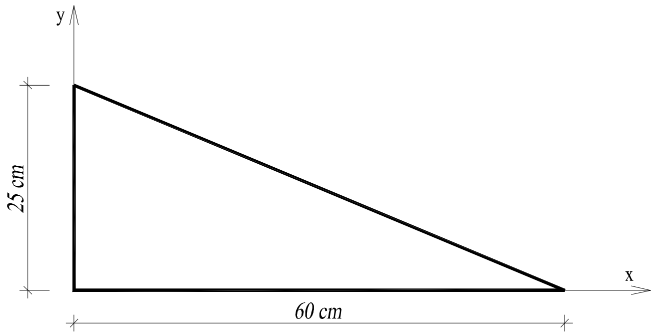
ESQUEMA DE CUERPO LIBRE ➔



3 *ECUACIONES*

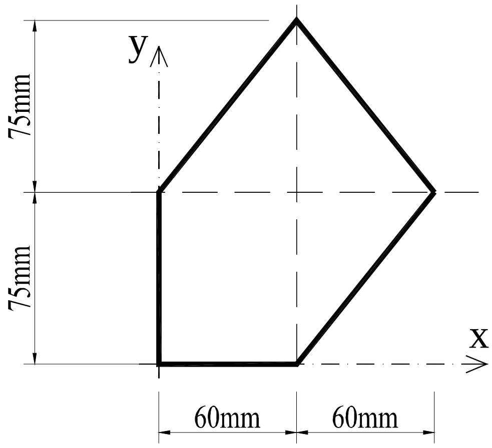
$$\begin{cases} \sum F_{Horiz} \rightarrow H = 0 \\ \sum M_B \rightarrow R_A \cdot 4m - q \cdot \dfrac{(5,5m)^2}{2} - P \cdot 1,5m = 0 \Rightarrow R_A = 47,19kg \\ \sum M_A \rightarrow R_B \cdot 4m - q \cdot 5,5m \cdot 1,25m - P \cdot 2,5m = 0 \Rightarrow R_B = 32,81kg \end{cases}$$

- Centro de Gravedad

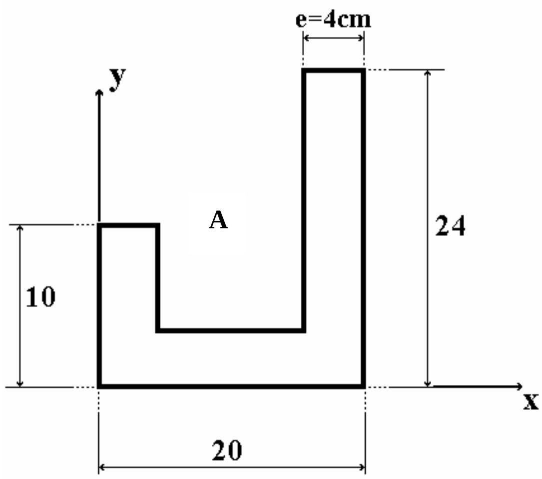


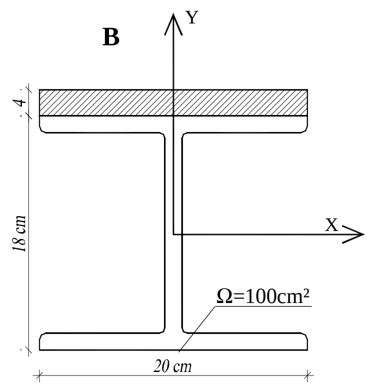
Ejercicio 2-7: Determinar el centro de gravedad de la estructura de alambre homogéneo.

Ejercicio 2-8: Determinar el centro de gravedad de la figura de alambre homogéneo.



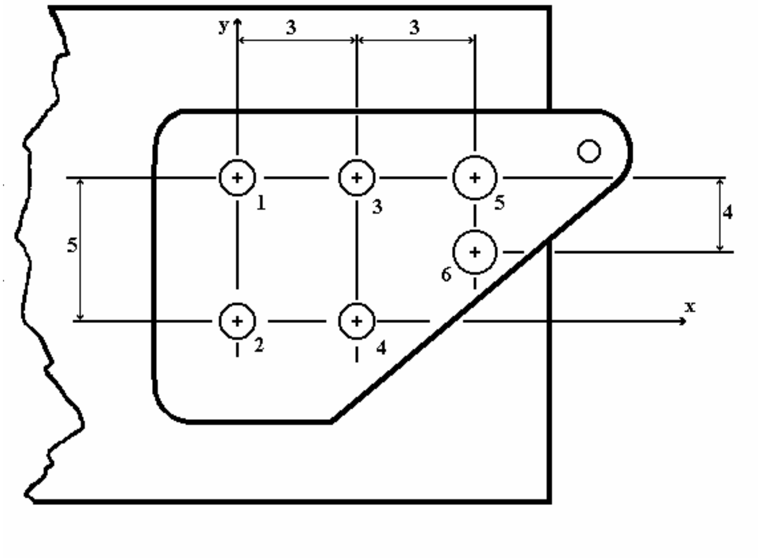
Ejercicio 2-9: Hallar el centro de gravedad de las superficies *A* y *B*.



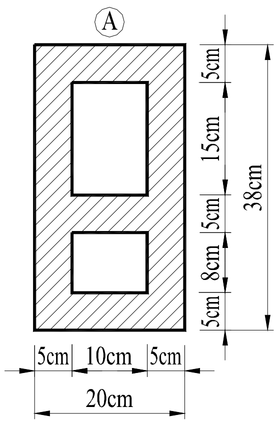


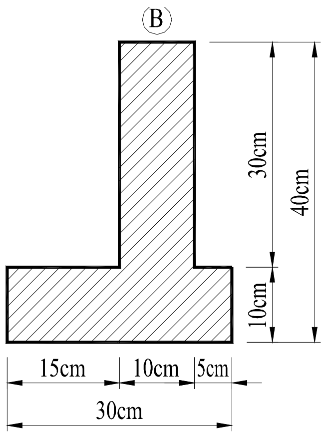
Ejercicio 2-10: Hallar el centro de gravedad de los remaches, en la unión remachada de la figura.

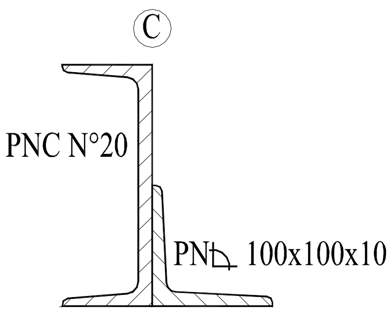
$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0{,}25cm^2$$
$$A_5 = A_6 = 0{,}32cm^2$$



Ejercicio 2-11: Hallar el centro de gravedad de las siguientes secciones.







TRABAJO PRÁCTICO N°2
Fuerzas Paralelas y Fuerzas Generales en el Plano

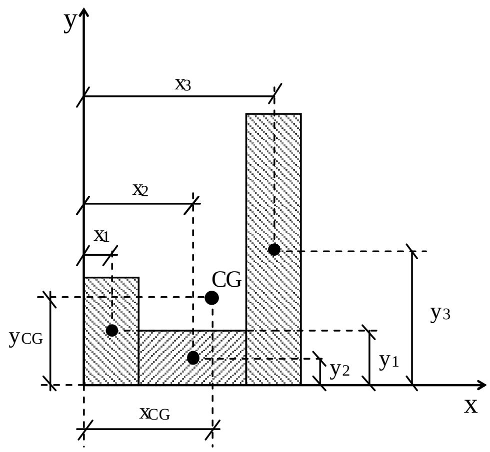
- Centro de Gravedad: ➔ SOLUCIONES

Ejercicio 2-7: <u>*Respuesta*</u>*:* *Coordenadas Centro de Gravedad del alambre:*
$x_G = 25cm$ $y_G = 7,5cm$

Ejercicio 2-8: <u>*Respuesta*</u>*:* *Coordenadas Centro de Gravedad del alambre:*
$x_G = 51,92cm$ $y_G = 66,23cm$

Ejercicio 2-9:

<u>*Superficie A*</u>*:*



$A_1 = 4cm \times 10cm = 40cm^2$ $x_1 = 2$ cm
$y_1 = 5$ cm

$A_2 = 12cm \times 4cm = 48$ cm^2 $x_2 = 10$ cm
$y_2 = 2$ cm

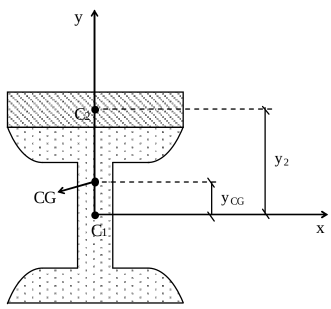
$A_3 = 4cm \times 24cm = 96cm^2$ $x_3 = 18$ cm
$y_3 = 12$ cm

$$x_{CG} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{40\times2 + 48\times10 + 96\times18}{40 + 48 + 96} \Rightarrow x_{CG} = 12,4cm$$

$$y_{CG} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{40\times5 + 48\times2 + 96\times12}{40 + 48 + 96} \Rightarrow y_{CG} = 7,8cm$$

<u>*SuperficieB*</u>*:*

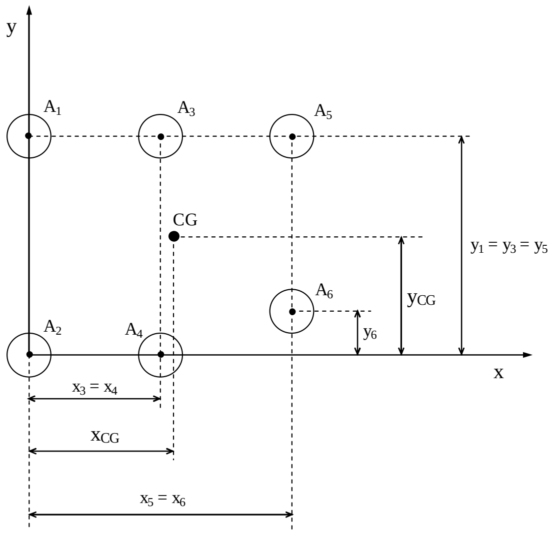
$A_1 = 100cm^2$	$A_2 = 20$ cm x 4 cm => A2 = $80cm^2$
$x_1 = 0cm$	$x_2 = 0cm$
$y_1 = 0cm$	$y_2 = 11cm$



$$x_{CG} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2}{A_1 + A_2} = \frac{100\times0 + 80\times0}{100 + 80} \Rightarrow x_{CG} = 0cm$$

$$y_{CG} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2}{A_1 + A_2} = \frac{100\times0 + 80\times11}{100 + 80} \Rightarrow y_{CG} = 4,88cm$$

Ejercicio 2-10:



$$x_{CG} = \frac{A_1 \times x_1 + A_2 \times x_2 + A_3 \times x_3 + A_4 \times x_4 + A_5 \times x_5 + A_6 \times x_6}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6}$$

$$= \frac{0{,}25 \times 0 + 0{,}25 \times 0 + 0{,}25 \times 3 + 0{,}25 \times 3 + 0{,}32 \times 6 + 0{,}32 \times 6}{0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}32 + 0{,}32}$$

$$x_{CG} = 3{,}256\text{cm}$$

$$y_{CG} = \frac{A_1 \times y_1 + A_2 \times y_2 + A_3 \times y_3 + A_4 \times y_4 + A_5 \times y_5 + A_6 \times y_6}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6}$$

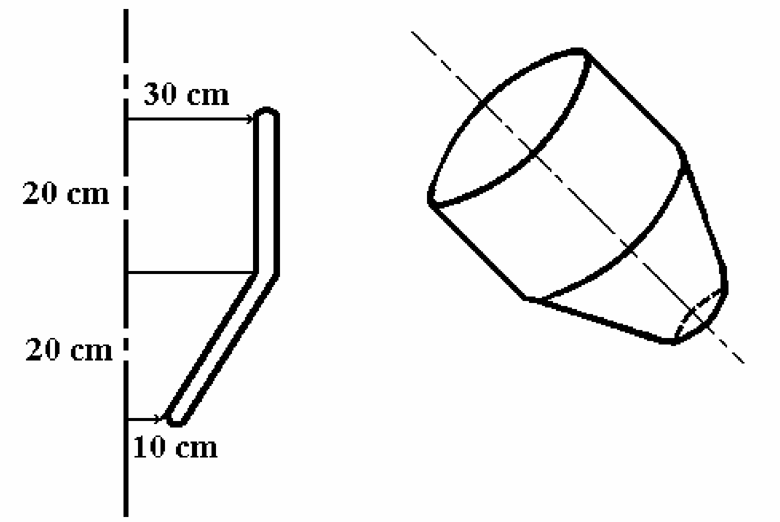
$$= \frac{0{,}25 \times 5 + 0{,}25 \times 0 + 0{,}25 \times 5 + 0{,}25 \times 0 + 0{,}32 \times 5 + 0{,}32 \times 1}{0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}32 + 0{,}32}$$

$$y_{CG} = 2{,}695\text{cm}$$

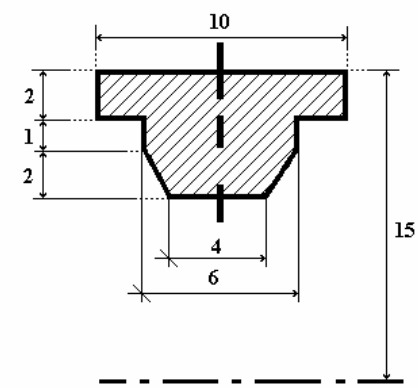
Ejercicio 2-11: *Respuesta:* *Ver solución en capítulo 7 (***Ejercicios 7-3** *y 7-8)*

- *Cálculo de superficies y volúmenes de revolución* ***(Teorema de Pappus o Teorema de Guldin)***

Ejercicio 2-12: Calcular el área lateral y el volumen de la tolva de la figura, utilizando el teorema de Pappus y Guldin.

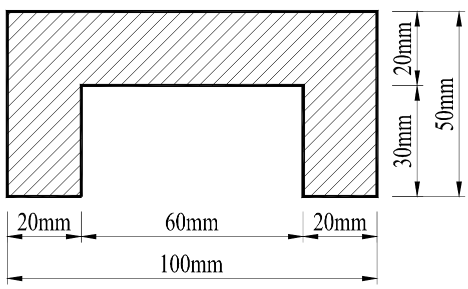


Ejercicio 2-13: Determinar el peso de la llanta del croquis cuyo radio exterior es R = 15 cm. y el peso específico $\gamma = 7{,}8$ gr/cm^3



Ejercicio 2-14: El diámetro exterior de una polea de acero es de *0,80m* y la sección transversal de su borde es la indicada en la figura. Determínese el peso de la polea si su peso específico es γ.

$$\gamma = 7{,}85x10^3\ kg/m^3$$

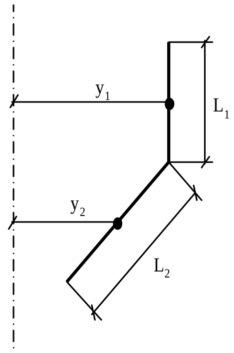


TRABAJO PRÁCTICO N°2
Fuerzas Paralelas y Fuerzas Generales en el Plano

- Teorema de Pappus o Teorema de Guldin ⇨ SOLUCIONES

Ejercicio 2-12:

Cálculo del Área Lateral: $A = 2 \times \pi \times \Sigma_i \, y_i \times L_i$

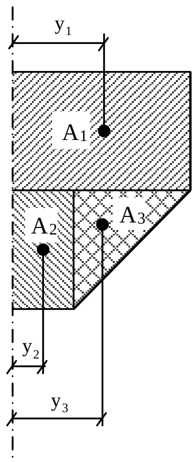


$L_1 = 20cm$ $\qquad L_2 = \sqrt{20^2 + 20^2} \Rightarrow L_2 = 28{,}28cm$

$y_1 = 30cm$ $\qquad y_2 = \dfrac{30+10}{2} \Rightarrow y_2 = 20cm$

$$A = 2 \times \pi \times (30 \times 20 + 20 \times 28{,}28) \Rightarrow A = 7323{,}7cm^2$$

Cálculo del Volumen: $V = 2 \times \pi \times \Sigma_i \, y_i \times A_i$



$A_1 = 30cm \times 20cm. \Rightarrow A_1 = 600cm^2$ $\qquad y_1 = 15cm$

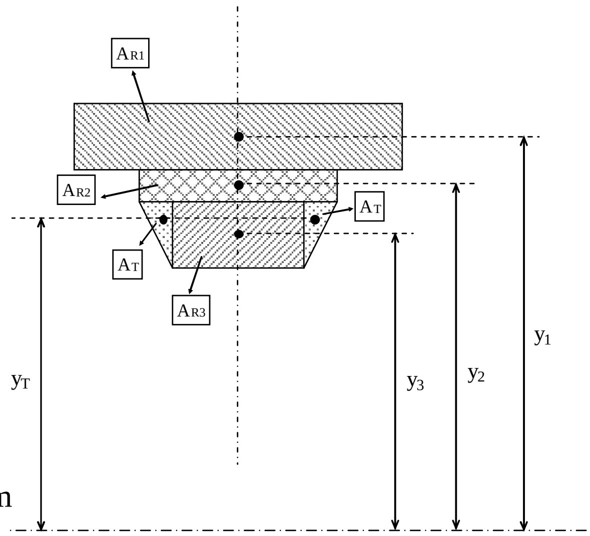
$A_2 = 10cm \times 20cm \Rightarrow A_2 = 200cm^2$ $\qquad y_2 = 5cm$

$A_3 = (20cm \times 20cm) / 2 \Rightarrow A_3 = 200cm^2$ $\qquad y_3 = 10cm + 1/3 \times 20cm = 16{,}67cm$

$$V = 2 \times \pi \times (600 \times 15 + 200 \times 5 + 200 \times 16{,}67) \Rightarrow V = 83780cm^3$$

Ejercicio 2-13:

Cálculo del Volumen de la llanta:



$V = 2 \times \pi \times \Sigma_i \, y_i \times A_i$

$A_{R1} = 10m \times 2cm \Rightarrow A_{R1} = 20cm^2$ $\qquad y_1 = 14cm$

$A_{R2} = 6cm \times 1cm \Rightarrow A_{R2} = 6cm^2$ $\qquad y_2 = 12{,}5cm$

$A_{R3} = 4cm \times 2cm \Rightarrow A_{R3} = 8cm^2$ $\qquad y_3 = 11cm$

$A_T = \dfrac{1\,cm \times 2\,cm}{2} \Rightarrow A_T = 1cm^2$ $\qquad y_T = 11{,}33cm$

$$V = 2 \times \pi \times (A_{R1} \times y_1 + A_{R2} \times y_2 + A_{R3} \times y_3 + 2 \times A_T \times y_T)$$

$$V = 2 \times \pi \times (20 \times 14 + 6 \times 12{,}5 + 8 \times 11 + 2 \times 1 \times 11{,}33)$$

$$\Rightarrow V = 2925{,}8cm^3$$

Cálculo del Peso de la llanta:

$$P = \gamma \times V \Rightarrow P = 7{,}8\ gr/cm^3 \times 2925{,}8\ cm^3 \Rightarrow P = 22{,}82kg$$

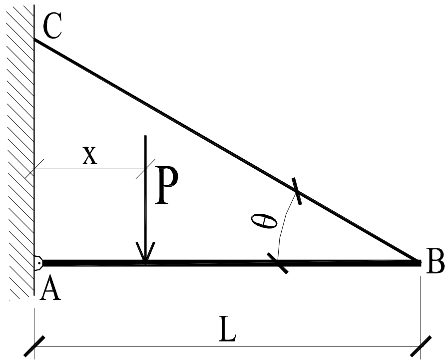
TRABAJO PRÁCTICO N°2
Fuerzas Paralelas y Fuerzas Generales en el Plano

- Fuerzas generales en el plano

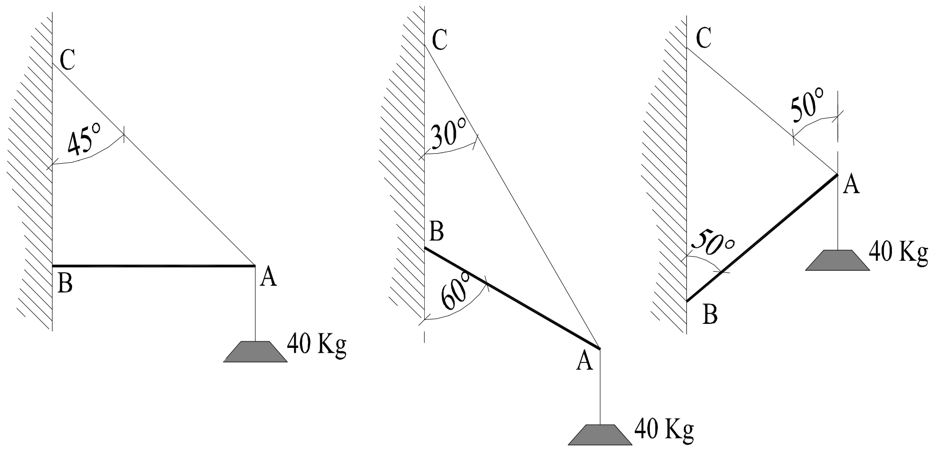
Ejercicio 2-15: Retomar el ejercicio **1-11,** considerando un ángulo θ entre la barra horizontal y el alambre y una distancia x entre la pared y el peso P. Encontrar, en función de x.

a) La fuerza T en el cable,

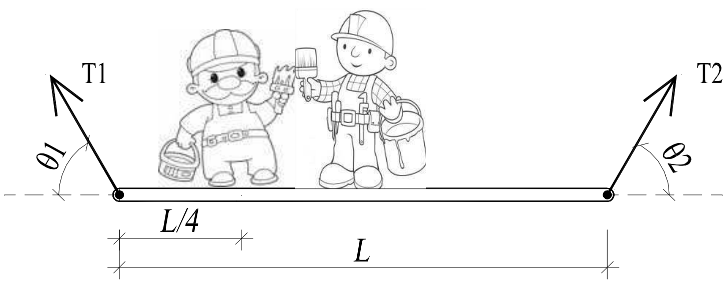
b) Las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la barra por la articulación en A.



Ejercicio 2-16: Calcular las componentes horizontal y vertical de la reacción en B y la fuerza en el cable AC suponiendo que la viga tiene un peso de $20kg$ y está articulada en B.

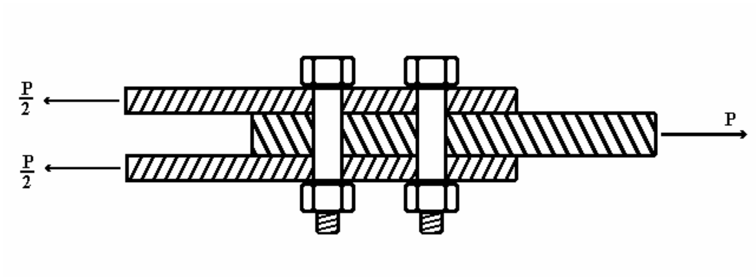


Ejercicio 2-17: Dos pintores con su material, pesan $160kg$ cada uno; se encuentran sobre una tabla de $80kg$ mantenida por dos cables. Uno de los pintores se encuentra a una distancia $L/4$ de un extremo de la tabla y el otro está en el centro. Encontrar los esfuerzos en los cables y el ángulo θ_2 si $\theta_1 = 60º$.



Ejercicio 2-18: Calcular la fuerza *T* con que debe traccionarse cada bulón para que la fuerza *P* sea totalmente transmitida por rozamiento, de forma que no se solicite a corte ninguno de los bulones.

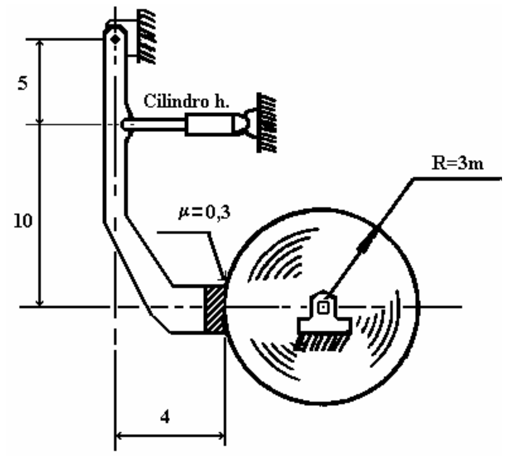
$$P = 150kg, \qquad \mu = 0,35$$



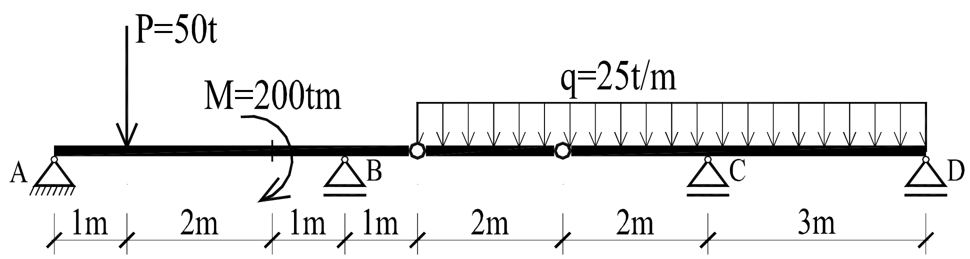
Ejercicio 2-19: El cilindro hidráulico ejerce una fuerza de *100kg* hacia la derecha. Dar el momento de frenado por rozamiento si el tambor gira en sentido:

a) horario

b) antihorario



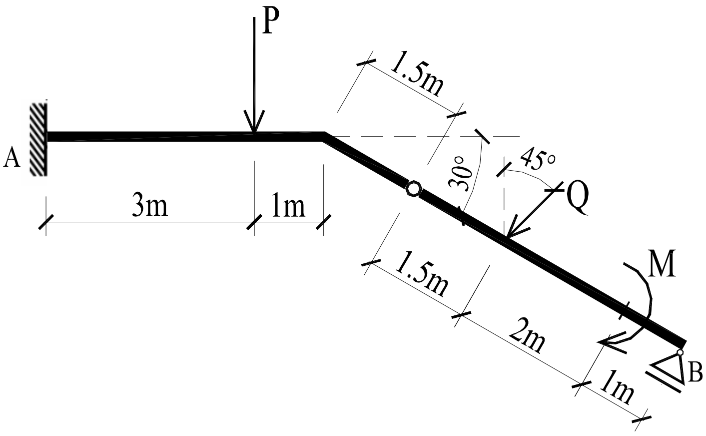
Ejercicio 2-20: Calcular las reacciones de apoyo.



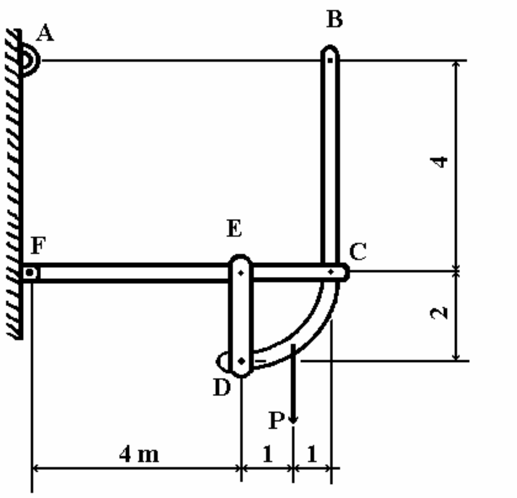
TRABAJO PRÁCTICO N°2
Fuerzas Paralelas y Fuerzas Generales en el Plano

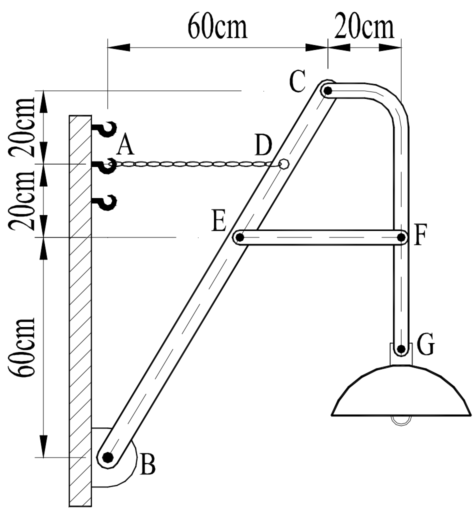
Ejercicio 2-21: Hallar las reacciones en *A* y en *B*, analíticamente.

P = 5t
Q = 10t
M = 300tm



Ejercicio 2-22: Los elementos de la estructura articulada de la figura, son de peso despreciable. Determinar las reacciones en los puntos *B, C, D, E* y *F*, con *P = 40kg*.





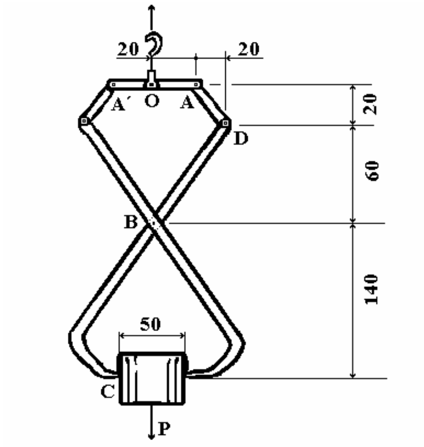
Ejercicio 2-23: Para la lámpara de la figura:

a) Trazar claramente los diagramas de cuerpo libre
b) Dar reacciones en *A* y *B* (GRÁFICA y ANALÍTICA-MENTE),
c) Calcular interacciones en *C*, *D*, *E* y *F*

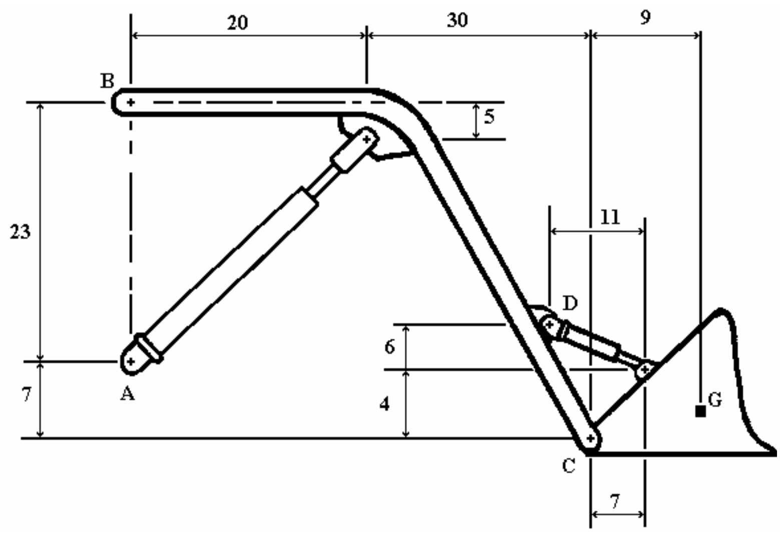
Peso de pantalla y dispositivo de iluminación fijados en ***G*** ==> ***2kg***

(No considerar el peso de los restantes elementos de la estructura articulada)

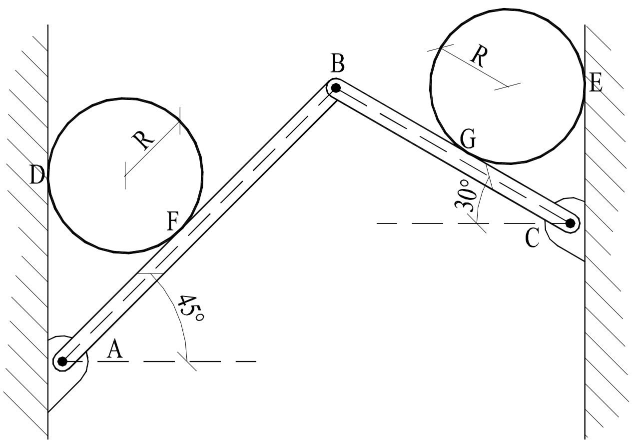
Ejercicio 2-24: Determinar las fuerzas de interacción y dar los diagramas de cuerpo libre para la barra *AA´* y para la pieza *DBC* de la figura.



Ejercicio 2-25: Calcular las interacciones en los puntos *A, B, C, D* de la cuchara mecánica de la figura, supuesta una carga *P = 2000kg*, la cual se considera concentrada en *G*.
Solucionar analítica y gráficamente.



Ejercicio 2-26: En el sistema de la figura, los cilindros de radio *R = 0,8m* pesan cada uno *400kg*. y las vigas *AB* y *BC* miden *4m* y *2,8m* respectivamente. Despreciando el rozamiento entre los cilindros y las vigas determinar las fuerzas en los apoyos *A* y *C*. Despreciar el peso propio de las vigas.



- Fuerzas generales en el plano ➔ SOLUCIONES

Ejercicio 2-15: *Respuesta:*

a) $T = P\,x / l \operatorname{sen}\theta$

b) $R_{AX} = P\,x / l \operatorname{tg}\theta$

$R_{AY} = P\,(1 - x)/ l$

Ejercicio 2-16: *Respuesta:*

a) $R_{BX} = 50{,}0kg$; $R_{BY} = 10{,}0kg$; $T_{AC} = 70{,}7kg$

b) $R_{BX} = 43{,}3kg$; $R_{BY} = 15{,}0kg$; $T_{AC} = 86{,}6kg$

c) $R_{BX} = 29{,}8kg$; $R_{BY} = 35{,}0kg$; $T_{AC} = 38{,}9kg$

Ejercicio 2-17: *Respuesta:*

$T_1 = 277kg$

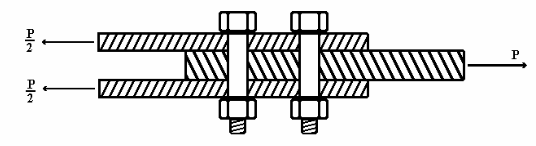
$T_2 = 212kg$

$\theta_2 = 49°$

Ejercicio 2-18:

$$F_R = P/2 = T_T \times \mu = 2 \times T \times \mu$$

$$\Rightarrow T = \frac{P}{4\mu} = \frac{150}{4 \times 0{,}35} = 107{,}14kg$$

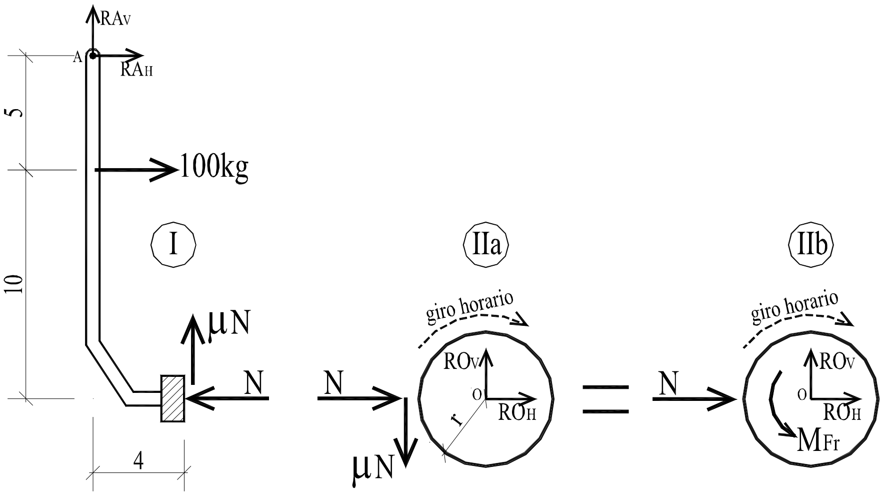


La fuerza *T* de tracción en cada bulón debe ser:

$$T \geq 107{,}14kg$$

Ejercicio 2-19:

a) Horario: Realizamos el esquema de cuerpo libre de las dos piezas del sistema, considerando que el disco gira en sentido horario.



Observando los sistemas equivalentes *IIa* y el *IIb* vemos claramente que la fuerza de rozamiento (μN) es la que ejerce el momento de frenado (M_{Fr}).

$$\Sigma M_o \rightarrow M_{Frenado} = \mu \cdot N \cdot r \qquad (1)$$

Tengamos en cuenta que para averiguar el momento de frenado, sólo nos interesa conocer la fuerza de rozamiento (μN). Por lo tanto al plantear las ecuaciones de la estática en el *esquema de cuerpo libre I* es conveniente trabajar con una ecuación de momento en *A* para que no intervengan en el cálculo las reacciones RA_H y RA_V .

$$I \quad \Rightarrow \begin{cases} \Sigma M_A \rightarrow N \cdot 15 - \mu \cdot N \cdot 4 - 100kg \cdot 5 = 0 \\ N(15 - \mu \cdot 4) = 500kg \\ N = 36{,}23kg \end{cases}$$

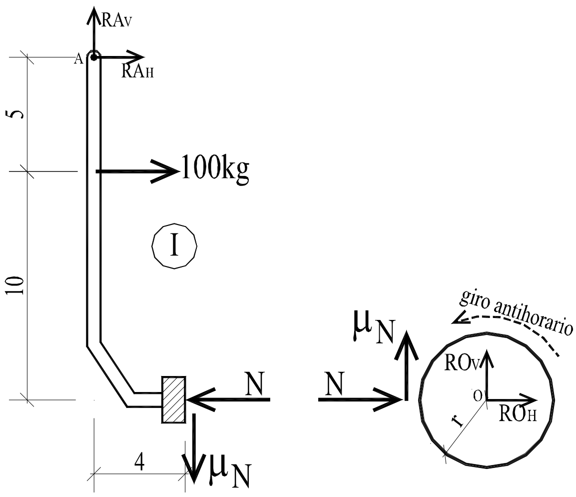
$$de\ (1) \Rightarrow M_{Frenado} = \mu \cdot N \cdot r = 32{,}60kgm$$

b) Antihorario: Realizamos el esquema de cuerpo libre de las dos piezas del sistema, considerando que el disco gira en sentido antihorario y luego trabajamos de forma análoga al caso de giro horario:

$$\Sigma M_o \rightarrow M_{Frenado} = \mu \cdot N \cdot r \qquad (1)$$

$$I \quad \Rightarrow \begin{cases} \Sigma M_A \rightarrow N \cdot 15 + \mu \cdot N \cdot 4 - 100kg \cdot 5 = 0 \\ N(15 + \mu \cdot 4) = 500kg \\ N = 30{,}86kg \end{cases}$$

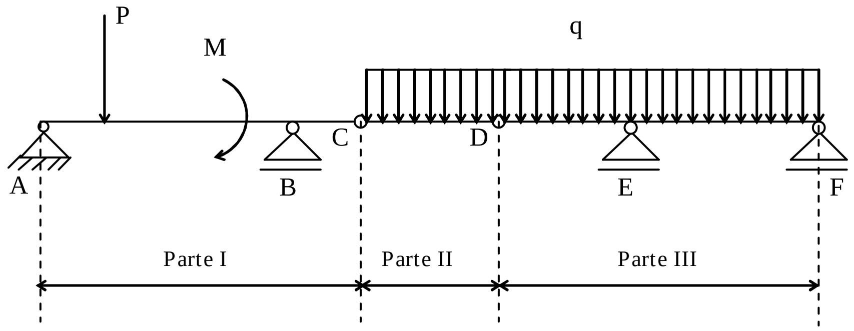
$$de\ (1) \Rightarrow M_{Frenado} = \mu \cdot N \cdot r = 27{,}77kgm$$

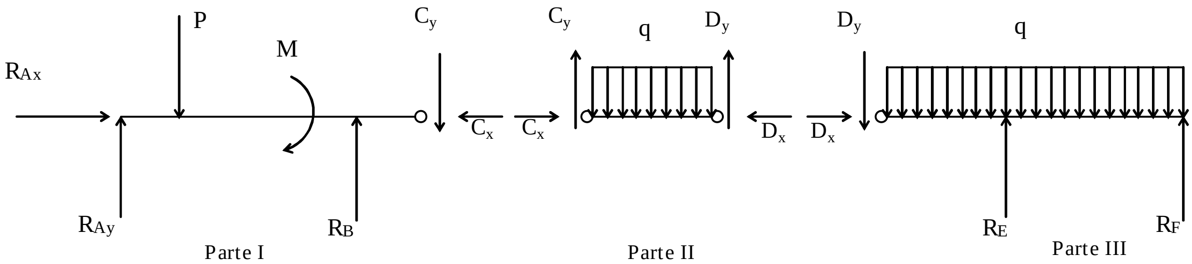


TRABAJO PRÁCTICO N°2
Fuerzas Paralelas y Fuerzas Generales en el Plano

Ejercicio 2-20:

Para resolver este ejercicio se divide a la viga en tres partes, y se realizan los esquemas de cuerpo libre de cada una de éstas, teniendo en cuenta todas las fuerzas intervinientes, tanto externas como internas.





Comenzaremos analizando la **parte II** por ser ésta la más sencilla.
Planteamos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales, fuerzas verticales y momentos:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_x - D_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow C_y + D_y - 25t/m \text{ x } 2m = 0$$
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 25t/m \text{ x } 2m \text{ x } 1m - D_y \text{ x } 2m = 0$$

De la tercera ecuación despejamos D_y y obtenemos: $D_y = \dfrac{25\times2\times1}{2} \Rightarrow D_y = 25t$

De la segunda ecuación despejamos C_y y obtenemos: $C_y = 25 \text{ x } 2 - 25 \Rightarrow C_y = 25t$

Teniendo en cuenta la primera ecuación podemos asegurar que $C_x = D_x$. Su magnitud será determinada tras el análisis de otra parte de la viga.

Ahora analizaremos la **parte III**.
Planteamos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales, fuerzas verticales y momentos:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_E + R_F - 25t - 25t/m \text{ x } 5m = 0$$
$$\Sigma M_F = 0 \Rightarrow R_E \text{ x } 3m - 25t \text{ x } 5m - 25t/m \text{ x } 5m \text{ x } 2{,}5m = 0$$

De la tercera ecuación despejamos R_E y obtenemos: $R_E = \dfrac{25\times5+25\times5\times2{,}5}{3} \Rightarrow R_E = 145{,}83t$

De la segunda ecuación despejamos R_F y obtenemos: $R_F = 25 + 25 \text{ x } 5 - 145{,}83 \Rightarrow R_F = 4{,}17t$

De la primera ecuación concluimos que $D_x = 0$, por ser ésta la única fuerza horizontal interviniente. Al analizar la parte II, vimos que $C_x = D_x$, en consecuencia $C_x = 0$

Ahora analizaremos la **parte I** de la viga.

Planteamos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales, fuerzas verticales y momentos:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} - 0 = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_B - 50t - 25t = 0$$
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 50t \text{ x } 1m + 200tm - R_B \text{ x } 4m + 25tn \text{ x } 5m = 0$$

De la primera ecuación obtenemos: $R_{Ax} = 0$

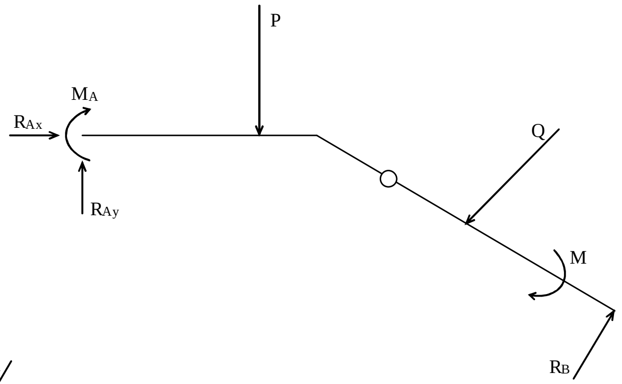
Despejamos R_B de la tercera ecuación y obtenemos: $R_B = \dfrac{50 \times 1 + 200 + 25 \times 5}{4} \Rightarrow R_B = 93{,}75t$

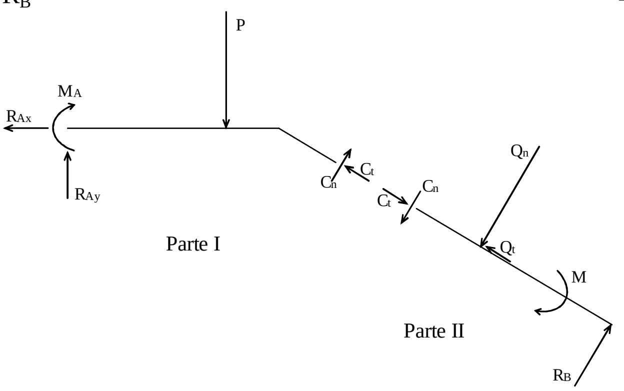
De la segunda ecuación despejamos R_{Ay} y obtenemos: $R_{Ay} = 50 + 25 - 93{,}75 \Rightarrow R_{Ay} = -18{,}75t$

El signo negativo en el valor de la reacción R_{Ay}, nos indica que el sentido de ésta es contrario al que habíamos supuesto, por lo tanto R_{Ay} actúa de arriba hacia abajo y no de abajo hacia arriba como se indicó en el dibujo.

Ejercicio 2-21:

Realizamos un diagrama de cuerpo libre de la viga, indicando en el mismo las incógnitas a determinar: R_{Ax} y R_{Ay} (componentes horizontal y vertical respectivamente de la reacción en A), M_A y R_B





Para realizar el análisis dividiremos en dos partes a la viga y tendremos en cuenta la participación de las fuerzas internas en la articulación (nudo "C"), quedando como se ve a continuación:

Comenzamos analizando la Parte II, en la cual hemos llamado "n" a la dirección normal al eje de la viga y "t" a la dirección tangencial (coincidente con el eje de la viga)

La línea de acción de la fuerza Q forma un ángulo de 15º con respecto a la dirección "n", por lo tanto:

$$Q_n = Q \text{ x } \cos(15º) = 10tn \text{ x } \cos(15º) \Rightarrow Q_n = 9{,}66t$$
$$Q_t = Q \text{ x } \operatorname{sen}(15º) = 10tn \text{ x } \operatorname{sen}(15º) \Rightarrow Q_t = 2{,}59t$$

Planteamos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en las direcciones "n" y "t" y la ecuación de equilibrio de momentos con respecto al nudo "C":

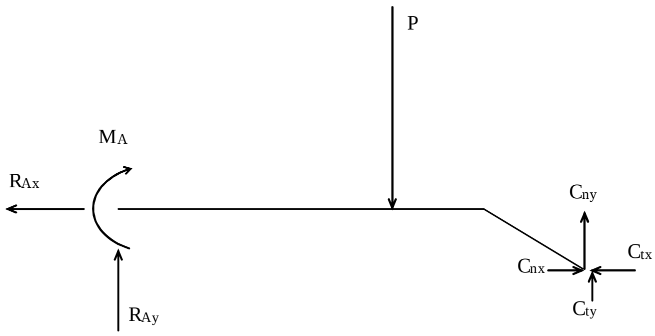
$$\Sigma F_n = 0 \Rightarrow R_B - C_n - Q_n = 0$$
$$\Sigma F_t = 0 \Rightarrow C_t - Q_t = 0$$
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow Q_n \text{ x } 1{,}5m + M - R_B \text{ x } 4{,}5m = 0$$

De la segunda ecuación obtenemos: $C_t = Q_t \Rightarrow C_t = 2{,}59t$

Despejamos R_B de la tercera ecuación y obtenemos:

$$R_B = \frac{Q_n \text{ x } 1{,}5m + M}{4{,}5m} =$$

$$\frac{9{,}66 \times 1{,}5 + 300}{4{,}5} \Rightarrow R_B = 69{,}87t$$



Despejamos C_n de la primera ecuación y obtenemos:

$$C_n = R_B - Q_n = 69{,}87tn - 9{,}66tn$$
$$\Rightarrow C_n = 60{,}21t$$

Ahora analizaremos la Parte I, teniendo en cuenta las componentes horizontales y verticales de las reacciones internas de la viga en el nudo "C". De este modo llamaremos C_{tx} y C_{ty} a las componentes horizontal y vertical de C_t; y C_{nx} y C_{ny} a las componentes horizontal y vertical de C_n, respectivamente.

Las líneas de acción de las fuerzas C_t y C_n forman un ángulo de 30º con respecto a las direcciones x e y, por lo tanto:

$$C_{tx} = C_t \text{ x } \cos(30º) = 2{,}59tn \text{ x } \cos(30º) \Rightarrow C_{tx} = 2{,}24t$$
$$C_{ty} = C_t \text{ x } \text{sen}(30º) = 2{,}59tn \text{ x } \text{sen}(30º) \Rightarrow C_{ty} = 1{,}29t$$
$$C_{nx} = C_n \text{ x } \text{sen}(30º) = 60{,}21tn \text{ x } \text{sen}(30º) \Rightarrow C_{nx} = 30{,}10t$$
$$C_{ny} = C_n \text{ x } \cos(30º) = 60{,}21tn \text{ x } \cos(30º) \Rightarrow C_{ny} = 52{,}14t$$

Planteamos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en las direcciones "x" e "y" y la ecuación de equilibrio de momentos con respecto al nudo "C":

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_{nx} - R_{Ax} - C_{tx} = 0$
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - P + C_{ny} + C_{ty} = 0$
$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_A + R_{Ay}$ x (4m + 1,5m x cos (30º)) – R_{Ax} x 1,5m x sen (30º) – P x (1m + 1,5m x cos (30º)) = 0

Despejamos RAx de la primera ecuación y obtenemos: RAx = Cnx – Ctx = 30,10t – 2,24tn $\Rightarrow$ RAx = 27,86t

Despejamos RAy de la segunda ecuación y obtenemos:
RAy = P – Cny – Cty = 5tn – 52,14t – 1,29t $\Rightarrow$ RAy = – 48,43t

(el signo negativo nos indica que el sentido de la reacción RAy es contrario al que habíamos supuesto)

Despejamos MA de la tercera ecuación y obtenemos:
MA = R_{Ax} x 1,5m x sen (30º) + P x (1m + 1,5m x cos (30º)) – R_{Ay} x (4m + 1,5m x cos (30º))
= 27,86 x 1,5 x sen (30º) + 5 x (1 + 1,5 x cos (30º)) + 48,43 x (4 + 1,5 x cos (30º))
$\Rightarrow$ MA = 289,02tm

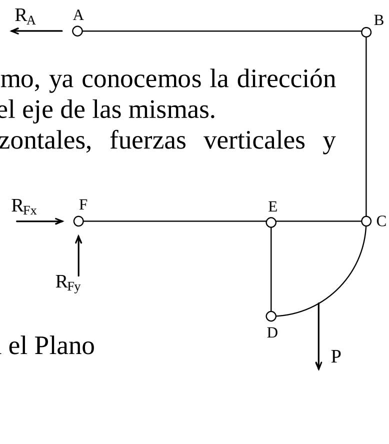
Ejercicio 2-22:

Trazamos el diagrama de cuerpo libre:

Como AB y DE son barras biarticuladas que no poseen carga en su tramo, ya conocemos la dirección de las respectivas fuerzas en dichas barras, las cuales son coincidentes con el eje de las mismas.

Ahora plantearemos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales, fuerzas verticales y momentos con respecto al nudo "F" para el esquema planteado:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Fx} - R_A = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Fy} - P = 0$$
$$\Sigma M_F = 0 \Rightarrow P \text{ x } 5m - R_A \text{ x } 4m = 0$$

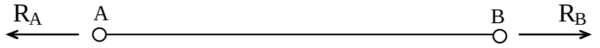


De la tercera ecuación despejamos R_A y obtenemos: $R_A = \dfrac{P \times 5}{4} = \dfrac{40 \times 5}{4} \Rightarrow R_A = 50kg$

De la primera ecuación despejamos R_{Fx} y obtenemos: $R_{Fx} = R_A \Rightarrow R_{Fx} = 50kg$

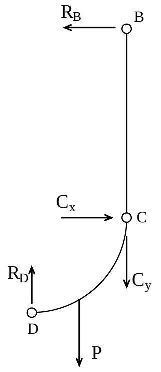
De la segunda ecuación despejamos R_{Fy} y obtenemos: $R_{Fy} = P \Rightarrow R_{Fy} = 40kg$

Resuelto este primer esquema, continuaremos analizando las otras partes del sistema. Trazamos el diagrama de cuerpo libre de la barra AB:



Tal como se explicó antes, al ser AB una barra biarticulada sin cargas en su tramo, la dirección de la fuerza coincide con el eje de la barra, y, por equilibrio de fuerzas horizontales se deduce que $R_A = R_B$

$\Rightarrow R_B = 50kg$



A continuación, trazamos el esquema de cuerpo libre de otra parte del sistema:

Planteamos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales, fuerzas verticales y momentos con respecto al nudo "C":

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_x - R_B = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_D - C_y - P = 0$$
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow R_D \text{ x } 2m - P \text{ x } 1m - R_B \text{ x } 4m = 0$$

De la tercera ecuación despejamos R_D y obtenemos:

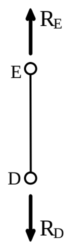
$$R_D = \frac{P \text{ x } 1m + R_B \text{ x } 4m}{2m} = \frac{40 \text{ x } 1m + 50 \text{ x } 4m}{2m} \Rightarrow R_D = 120kg$$

De la primera ecuación despejamos C_x y obtenemos: $C_x = R_B \Rightarrow C_x = 50kg$

De la segunda ecuación despejamos C_y y obtenemos:

$$C_y = R_D - P = 120 - 40 \Rightarrow C_y = 80kg$$

Ahora analizaremos la barra DE:

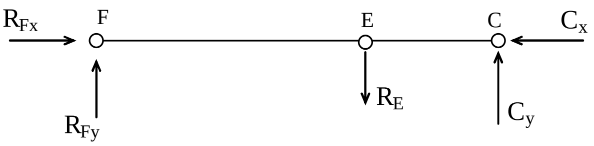


Este caso, al igual que el de la barra AB, es el de una barra biarticulada sin cargas en su tramo, por lo tanto la dirección de la fuerza coincide con el eje de la barra, y por equilibrio de fuerzas verticales, se deduce que $R_E = R_D$

$\Rightarrow R_E = 120kg$

Con esto quedan resueltas todas las incógnitas planteadas. No obstante, analizaremos la última parte del sistema con el fin de verificar que se cumplan las ecuaciones de equilibrio.

Trazamos el diagrama de cuerpo libre:



Planteamos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales, fuerzas verticales y momentos con respecto al nudo "F":

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Fx} - C_x = 0 \Rightarrow 50kg - 50kg = 0$

$\Rightarrow$ Se cumple la condición de equilibrio de fuerzas horizontales

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Fy} - R_E + C_y = 0 \Rightarrow 40kg - 120kg + 80kg = 0$

$\Rightarrow$ Se cumple la condición de equilibrio de fuerzas verticales

$\Sigma M_F = 0 \Rightarrow R_E \text{ x } 4m - C_y \text{ x } 6m = 0 \Rightarrow 120kg \text{ x } 4m - 80kg \text{ x } 6m = 0$

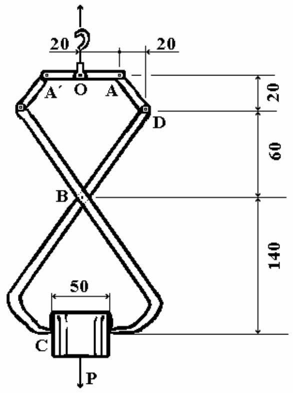
$\Rightarrow$ Se cumple la condición de equilibrio de momentos

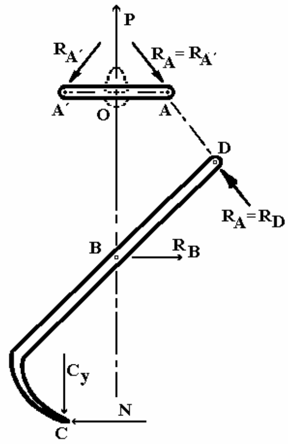
Ejercicio 2-23: *Respuesta:*

$R_A = 2.0$ Kg
$R_{BX} = 2.0$ Kg
$R_{BY} = 2.0$ Kg
$F_{CX} = 1.0$ Kg
$F_{CY} = 2.0$ Kg
$F_D = 2.0$ Kg
$F_E = 1.0$ Kg
$F_F = 1.0$ Kg

Ejercicio 2-24:

Según los esquemas libres indicados:
$R_A = 0{,}707P$;
$R_B = 0{,}946P$
$N = 0{,}446P$
$C_Y = 0{,}5P$
La barra inclinada, traccionada con 0,707P



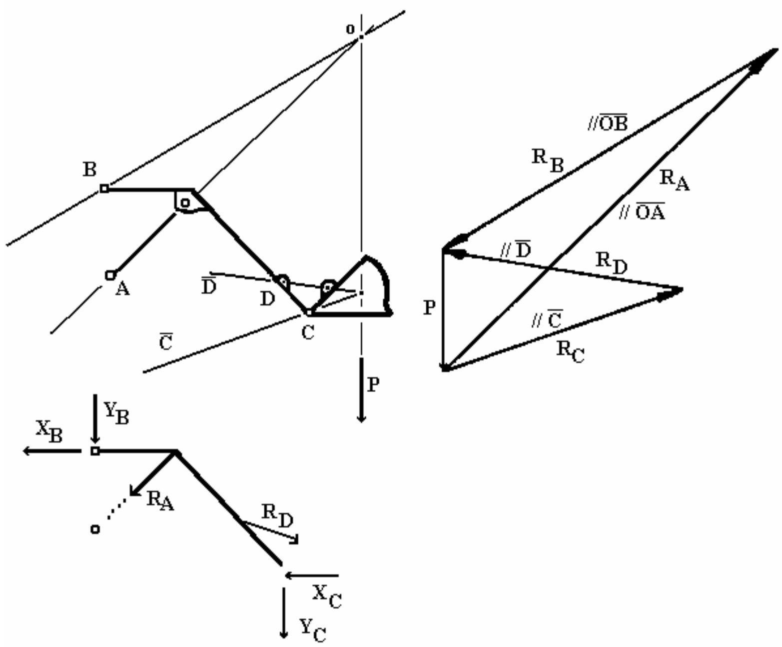


Ejercicio 2-25:

Gráficamente por los triángulo de fuerza realizados a escala:
$R_A = 6902{,}29$kg; $R_B = 5759{,}5$kg, $R_C = 2419{,}61$kg; $R_D = 2622{,}5$kg

Analíticamente: Según el esquema libre: Falta agregar el esquema libre de la cuchara. Las ecuaciones dan:

$R_A = 6902{,}29$kg;
$X_B = 5130{,}43$kg;
$Y_B = 2617{,}39$kg;
$X_C = 2302{,}32$kg;
$Y_C = 744{,}18$kg;
$R_D = 2622{,}55$kg



Ejercicio 2-26: *Respuesta:*

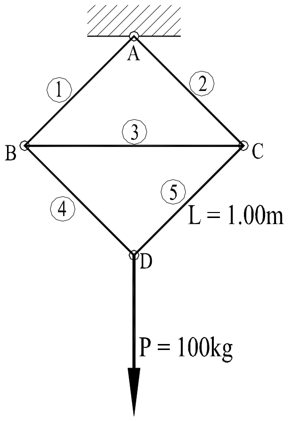
Deben realizarse cuatro diagramas de cuerpo libre. Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$A_x = 12kg$ $\quad$ $A_y = 426kg$
$C_x = 180kg$ $\quad$ $C_y = 374kg$

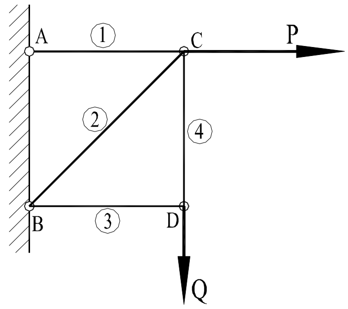
TRABAJO PRÁCTICO N°3
Enrejados Articulados

Ejercicio 3-1: Dar los esfuerzos en las barras de los reticulados siguientes:

a) -

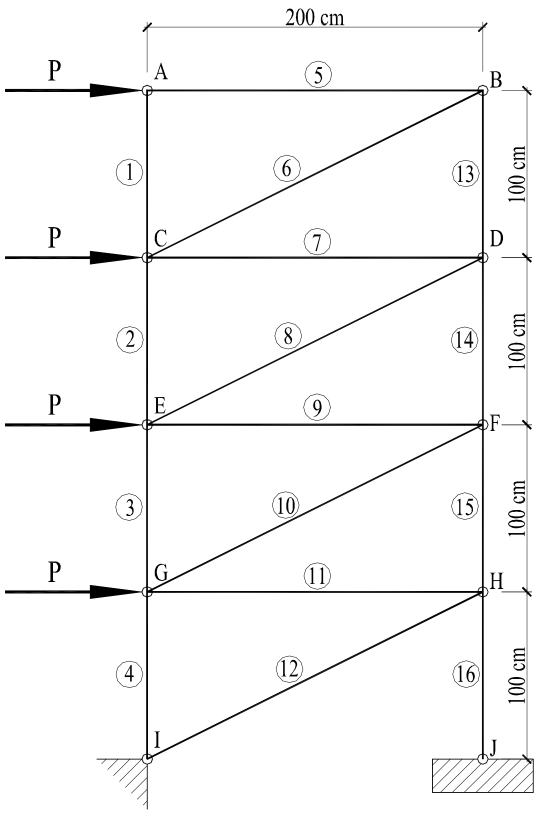


b) -

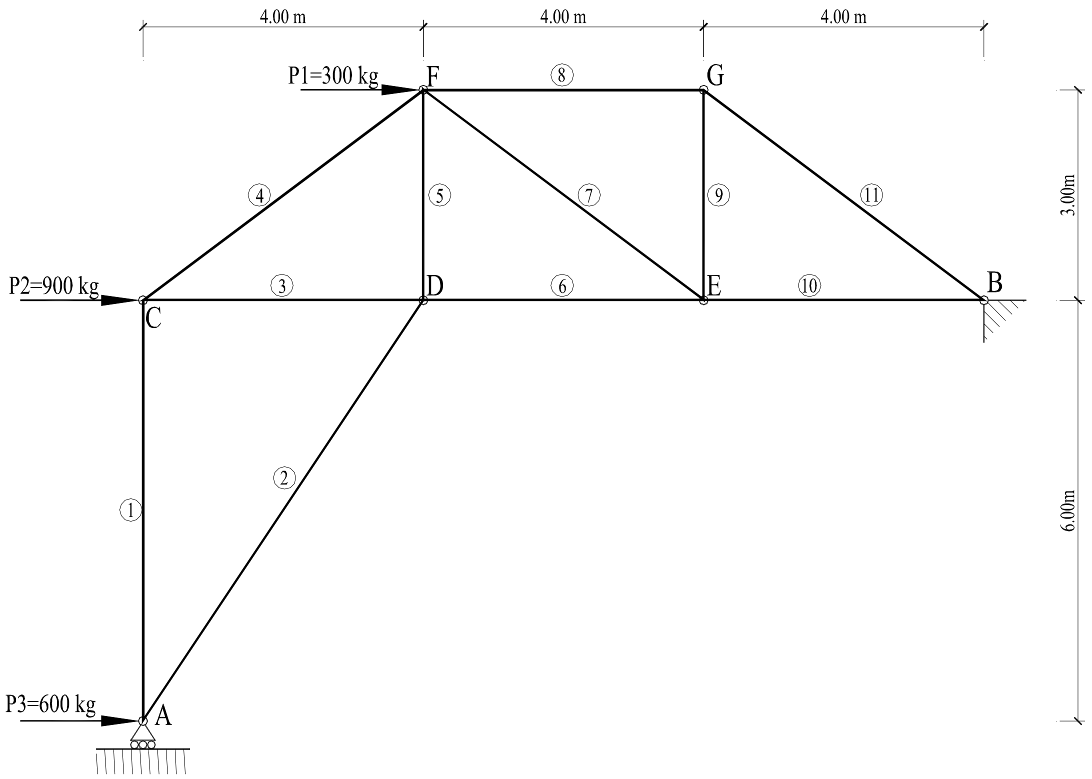


Ejercicio 3-2: Calcular las reacciones en los apoyos y dar los esfuerzos en las barras del reticulado de la figura :

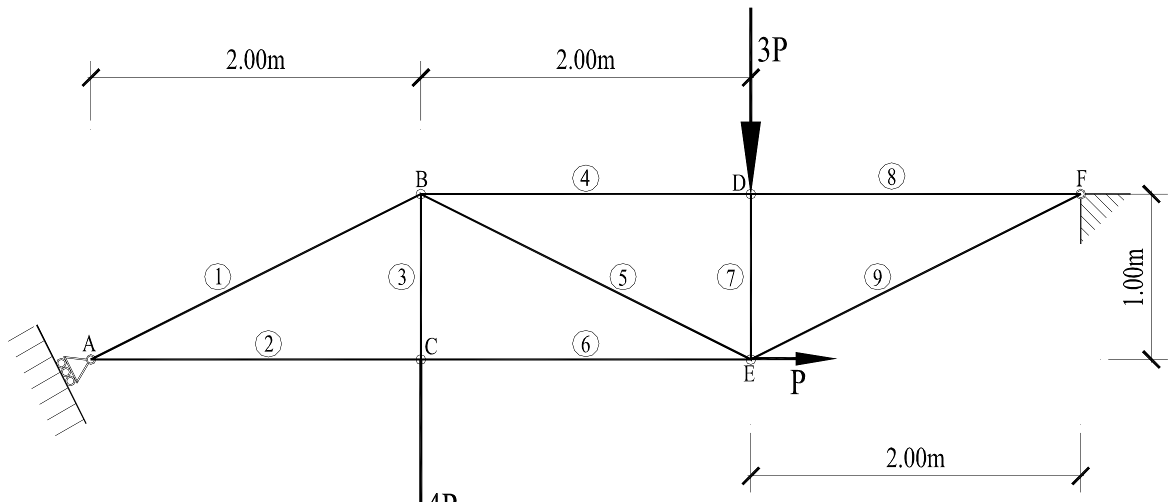
P = 200kg



Ejercicio 3-3: Encontrar las reacciones en los apoyos y calcular los esfuerzos en cada barra del siguiente reticulado sometido a tres fuerzas horizontales:

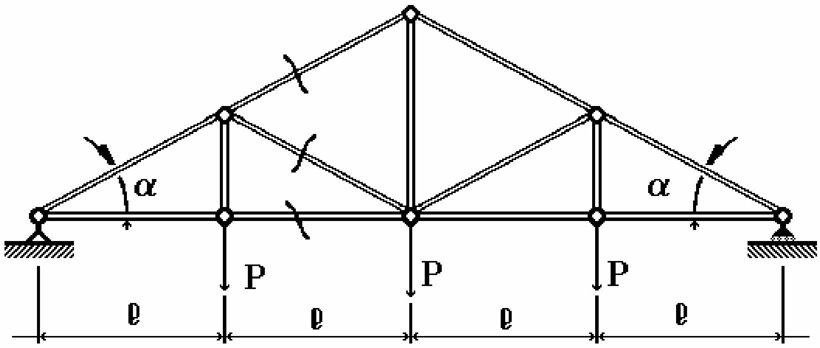


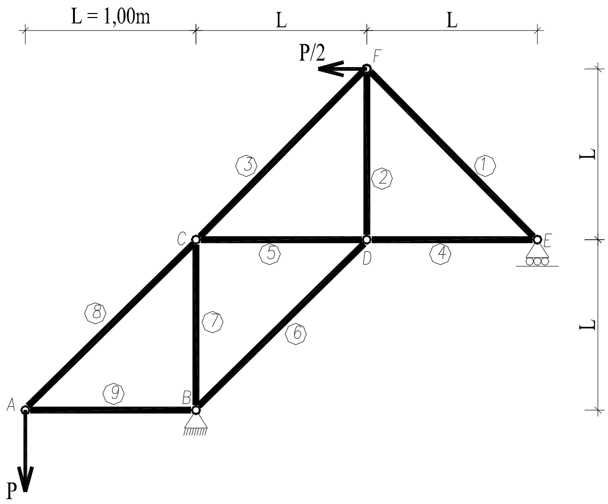
Ejercicio 3-4: Encontrar las reacciones en los apoyos y calcular los esfuerzos en cada barra del siguiente reticulado sometido a tres fuerzas:



TRABAJO PRÁCTICO N°3
Enrejados Articulados

Ejercicio 3-5: Dar los esfuerzos en las barras indicadas.

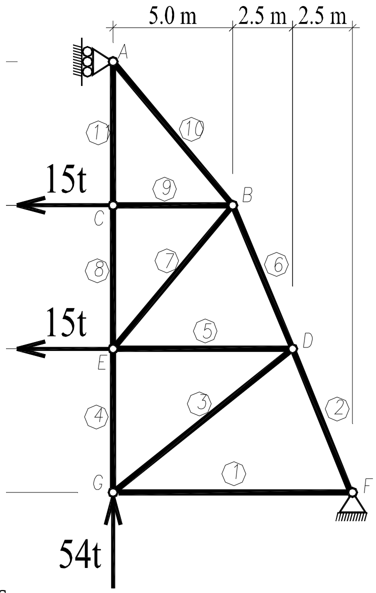




Ejercicio 3-6: En el reticulado de la figura, dar el valor del esfuerzo en las barras ***2*** y ***5***.

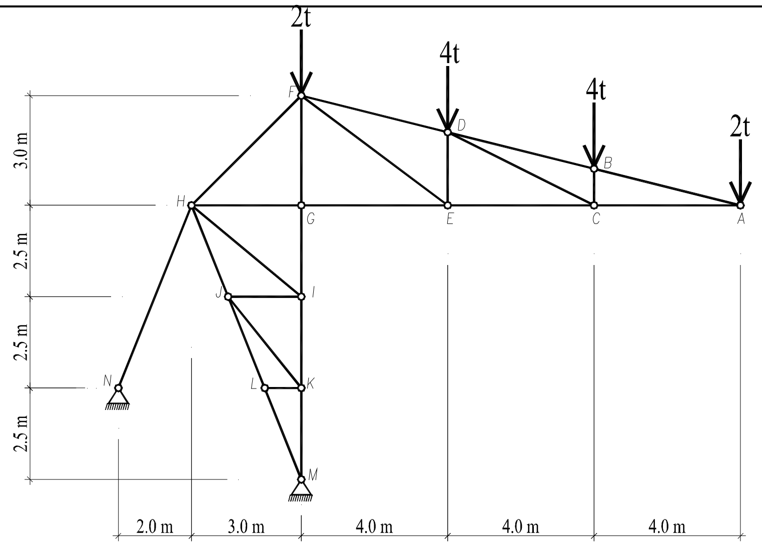
P=1000kg

Ejercicio 3-7: En la estructura reticulada de la figura, determinar los esfuerzos en las barras ***4, 6*** y ***7***. Aplicar método de Ritter.

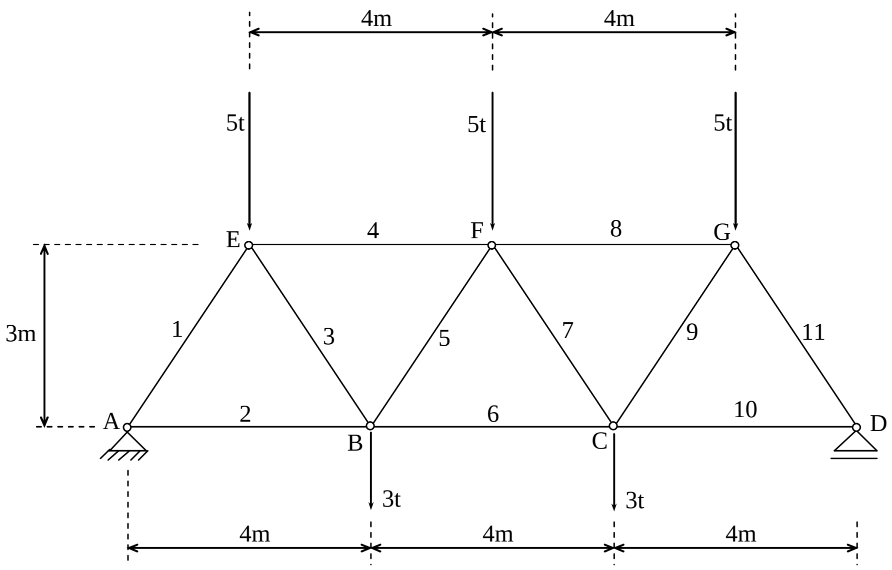


TRABAJO PRÁCTICO N°3
Enrejados Articulados

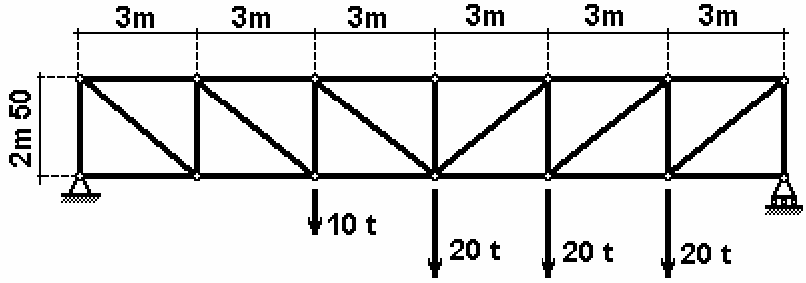
Ejercicio 3-8: En la estructura reticulada de la figura, determinar los esfuerzos en las barras ***DE, DF*** y ***CE***. Aplicar método de Ritter.



Ejercicio 3-9: Deter minar los esfuerzos en las barras del reticulado de la figura mediante el método de equilibrio de los nudos.



Ejercicio 3-10: Determinar por el método de los cortes los esfuerzos en las barras del larguero de la figura:



- Enrejados Articulados: ➔ SOLUCIONES

Ejercicio 3-1:

a)-

$$N_1 = N_2 = N_4 = N_5 = \frac{P \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$N_3 = -P$$

b)-

$$N_1 = P + Q \qquad (tracción)$$

$$N_2 = \sqrt{2} \cdot Q \qquad (compresión)$$

$$N_3 = 0$$

$$N_4 = Q$$

Ejercicio 3-2:

Reacciones: $R_{IH} = 800kg \leftarrow$ $\quad R_{IV} = 1000kg \downarrow$ $\quad R_{JV} = 1000kg \uparrow$

Esfuerzos en barras:
$$\begin{cases} N_1 = 0kg & N_5 = -200kg & N_9 = -600kg & N_{13} = -100kg \\ N_2 = 100kg & N_6 = \ 223{,}6kg & N_{10} = \ 670{,}8kg & N_{14} = -300kg \\ N_3 = 300kg & N_7 = -400kg & N_{11} = -800kg & N_{15} = -600kg \\ N_4 = 600kg & N_8 = \ 447{,}2kg & N_{12} = \ 894{,}4kg & N_{16} = -1000kg \end{cases}$$

Ejercicio 3-3:

Reacciones: $R_{AV} = 225kg \uparrow$ $\quad R_{BV} = 225kg \downarrow$ $\quad R_{BH} = 1800kg \leftarrow$

Esfuerzos en barras:
$$\begin{cases} N_1 = \ 675kg & N_4 = \ 1125kg & N_7 = \ 375kg & N_{10} = -2100kg \\ N_2 = -1081{,}66kg & N_5 = -900kg & N_8 = \ 300kg & N_{11} = \ 375kg \\ N_3 = -1800kg & N_6 = -2400kg & N_9 = -225kg & \end{cases}$$

TRABAJO PRÁCTICO N°3
Enrejados Articulados

Ejercicio 3-4: $\alpha = 26{,}56°$

Reacciones: $R_{AH} = \dfrac{23P}{4tg\alpha} \rightarrow$ $R_{AV} = \dfrac{23P}{4} \uparrow$ $R_{FH} = P\dfrac{4tg\alpha + 23}{4tg\alpha} \leftarrow$ $R_{FV} = \dfrac{5P}{4} \uparrow$

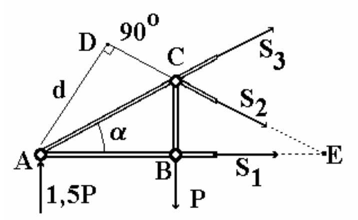
Esfuerzos en barras:
$$\begin{cases} N_1 = -\dfrac{23P}{4\cdot\sin\alpha} & N_4 = -\dfrac{15P}{2\cdot\tan\alpha} & N_7 = -3P \\ N_2 = 0 & N_5 = \dfrac{7P}{4\cdot\sin\alpha} & N_8 = -\dfrac{15P}{2\cdot\tan\alpha} \\ N_3 = 4P & N_6 = 0 & N_9 = \dfrac{5P}{4\cdot\sin\alpha} \end{cases}$$

Ejercicio 3-5: Según el esquema libre de la parte izquierda: Momentos en C y después en A y después en E:

$S_1 = \dfrac{3.P}{2.tg\alpha}$ *tracción*;

$S_2 = -\dfrac{P.\ell}{d} = -\dfrac{P.\ell}{2.\ell.sen\alpha}$ *compresión*;

$S_3 = -\dfrac{2.P.\ell}{d} = -\dfrac{2.P.\ell}{2.\ell.sen\alpha}$ *compresión*



Ejercicio 3-6:

Reacciones: $R_{BV} = 2P \uparrow$ $R_{BH} = \dfrac{P}{2} \rightarrow$ $R_{EV} = P \downarrow$

Esfuerzos en barras:
$$\begin{cases} N_2 = -\dfrac{3P}{2} \\ N_5 = \dfrac{P}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 3-8:

Esfuerzos en barras:
$$\begin{cases} N_{DE} = -6t \\ N_{DF} = 16{,}49t \\ N_{CE} = -16t \end{cases}$$

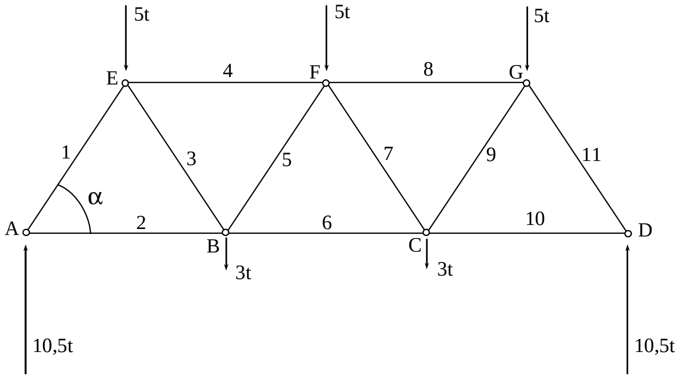
Ejercicio 3-9:

Cálculo de las reacciones de apoyos:

Por tratarse de un reticulado simétrico tanto en geometría como en cargas, las reacciones verticales en los apoyos A y D son iguales y valen:

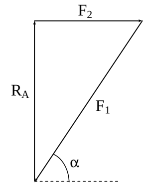
$$R_A = R_D = \frac{3\times 5 + 2\times 3}{2}$$

$$\Rightarrow\ R_A = R_D = 10{,}5\text{t.}$$



Determinación de los esfuerzos en las barras 1 y 2:

Equilibrio del nudo “A” :
$$\begin{cases} \sum Fx \rightarrow F_2 - F_1\cdot\cos\alpha = 0 \\ \sum Fy \rightarrow R_A - F_1\cdot sen\alpha = 0 \end{cases}$$



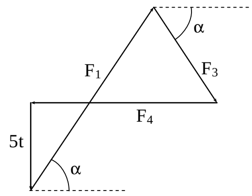
$$\alpha = \text{arctg } (3/2) \Rightarrow \alpha = 56{,}3^\circ$$

$$R_A = F_1 \text{ x sen } (\alpha) \Rightarrow F_1 = \frac{R_A}{\text{sen }(\alpha)} = \frac{10{,}5\text{t}}{\text{sen }(56{,}3^\circ)} \Rightarrow F_1 = 12{,}62\text{t.}$$

$$F_2 = F_1 \text{ x cos } (\alpha) = 12{,}62 \text{ x cos } (56{,}3^\circ) \Rightarrow F_2 = 7\text{t}$$

Determinación del esfuerzo en la barra 3:

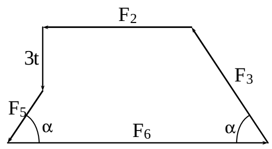
Equilibrio del nudo “E” :



$$\begin{cases} \sum Fy \rightarrow F_1\cdot sen\alpha - F_3\cdot sen\alpha - 5t = 0 \\ \qquad F_3 = \dfrac{F_1\cdot sen\alpha - 5t}{sen\alpha} = 6{,}61t \\ \sum Fx \rightarrow F_1\cdot\cos\alpha + F_3\cdot\cos\alpha - F_4 = 0 \\ \qquad F_4 = F_1\cdot\cos\alpha + F_3\cdot\cos\alpha = 10{,}67t \end{cases}$$

Determinación de los esfuerzos en las barras 5 y 6:

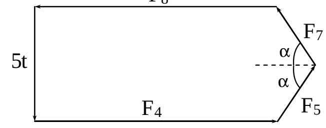
Equilibrio del nudo “B” :



$$\begin{cases} \sum Fy \rightarrow F_3\cdot sen\alpha - F_5\cdot sen\alpha - 3t = 0 \\ \qquad F_5 = \dfrac{F_3\cdot sen\alpha - 3t}{sen\alpha} = 3t \\ \sum Fx \rightarrow F_6 - F_3\cdot\cos\alpha - F_2 - F_5\cdot\cos\alpha = 0 \\ \qquad F_6 = F_3\cdot\cos\alpha + F_2 + F_5\cdot\cos\alpha = 12{,}33t \end{cases}$$

Determinación de los esfuerzos en las barras 7 y 8:

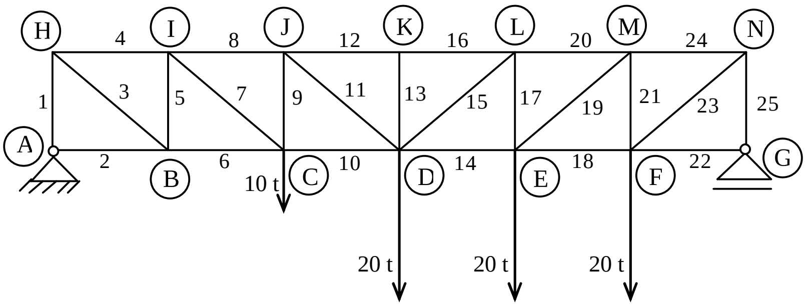
Equilibrio del nudo “F” :



Observando el polígono de fuerzas y teniendo en cuenta la existencia de simetría tanto en la geometría como en las cargas, se deduce que el esfuerzo en la barra 8 es igual al de la barra 4 y el esfuerzo en la barra 7 es igual al de la barra 5, con lo cual queda terminado el problema.

TRABAJO PRÁCTICO N°3
Enrejados Articulados

Ejercicio 3-10:



Cálculo de reacciones en los apoyos:

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow$ $10t \times 6m + 20t \times 9m + 20t \times 12m + 20t \times 15m - R_G \times 18m = 0$

$R_A = 10t + 20t + 20t + 20t - R_G = 10t + 20t + 20t + 20t - 43{,}33t \Rightarrow R_A = 26{,}67t$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow$ $R_A + R_G - 10t - 20t - 20t - 20t = 0$

$$R_G = \frac{10t \times 6m + 20t \times 9m + 20t \times 12m + 20t \times 15m}{18m} \Rightarrow R_G = 43{,}33t$$

Análisis del nudo "A":

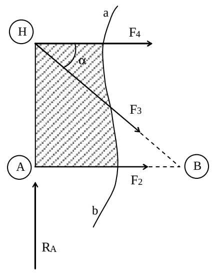
A dicho nudo concurren las barras 1 y 2 y la reacción de apoyo R_A. Dado que la barra 1 posee la misma dirección que la reacción R_A, queda claro que el esfuerzo en la barra 1 será de compresión y la magnitud será el valor de R_A. La barra 2 tendrá esfuerzo nulo.

$\Rightarrow F_1 = -26{,}67t$ $\qquad\qquad$ $\Rightarrow F_2 = 0$

Cálculo del esfuerzo en las barras 3 y 4:

Realizamos el corte "ab" que pasa por las barras 2, 3 y 4, quedando el sistema como se ve en la figura:

Planteamos la ecuación de equilibrio de momentos con respecto al punto "B":



$M_B = 0 \Rightarrow R_A \times 3m + F_4 \times 2{,}50m = 0$

$$F_4 = -\frac{R_A \times 3m}{2{,}50m} \Rightarrow F_4 = -\frac{26{,}67t \times 3m}{2{,}50m} \Rightarrow F_4 = -32t \quad \text{compresión}$$

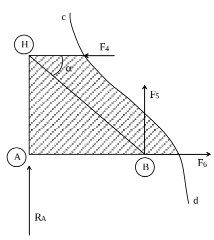
Para determinar el esfuerzo en la barra 3 planteamos la ecuación de equilibrio a fuerzas verticales:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A - F_3 \times \text{sen}(\alpha) = 0$ $\qquad$ $\alpha = \text{arctg}\left(\frac{2{,}5}{3}\right) \Rightarrow \alpha = 39{,}8º$

$$F_3 = \frac{R_A}{sen(\alpha)} = \frac{26{,}67}{sen(39{,}8º)} \Rightarrow F_3 = 41{,}66t \qquad \text{tracción.}$$

Cálculo del esfuerzo en las barras 5 y 6:

Realizamos el corte "cd" que pasa por las barras 4, 5 y 6, quedando el sistema como se ve en la figura:

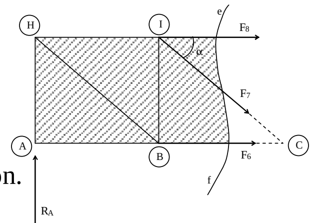


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + F_5 = 0$ $\qquad$ $F_5 = -R_A \Rightarrow F_5 = -26{,}67t$ $\qquad$ compresión

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_6 - F_4 = 0$ $\qquad$ $F_6 = F_4 \Rightarrow F_6 = 32t$ $\qquad$ tracción

Cálculo del esfuerzo en las barras 7 y 8:

Realizamos el corte "ef" que pasa por las barras 6, 7 y 8, quedando el sistema como se ve en la figura:



$$M_C = 0 \Rightarrow R_A \text{ x } 6m + F_8 \text{ x } 2{,}50m = 0$$

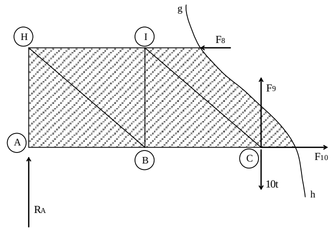
$$F_8 = -\frac{R_A \text{ x } 6m}{2{,}50m} \Rightarrow F_8 = -\frac{26{,}67t \text{ x } 6m}{2{,}50m} \Rightarrow F_8 = -64t \quad \text{compresión.}$$

Para determinar el esfuerzo en la barra 7 planteamos la ecuación de equilibrio a fuerzas verticales:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A - F_7 \text{ x sen } (\alpha) = 0 \qquad F_7 = \frac{R_A}{sen(\alpha)} = \frac{26{,}67}{sen(39{,}8^o)} \Rightarrow F_7 = 41{,}66t \quad \text{tracción.}$$

Cálculo del esfuerzo en las barras 9 y 10:

Realizamos el corte "gh" que pasa por las barras 8, 9 y 10, quedando el sistema como se ve en la figura:



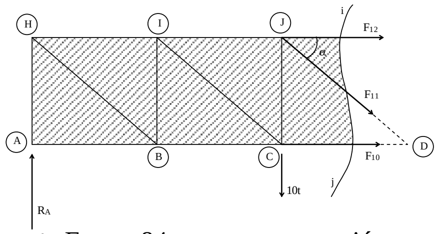
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + F_9 - 10t = 0$$

$$F_9 = 10t - R_A = 10t - 26{,}67t \Rightarrow F_9 = -16{,}67t \quad \text{compresión}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{10} - F_8 = 0 \qquad F_{10} = F_8 \Rightarrow F_{10} = 64t \quad \text{tracción}$$

Cálculo del esfuerzo en las barras 11 y 12:

Realizamos el corte "ij" que pasa por las barras 10, 11 y 12, quedando el sistema como se ve en la figura:



$$M_D = 0 \Rightarrow R_A \text{ x } 9m - 10t \text{ x } 3m + F_{12} \text{ x } 2{,}50m = 0$$

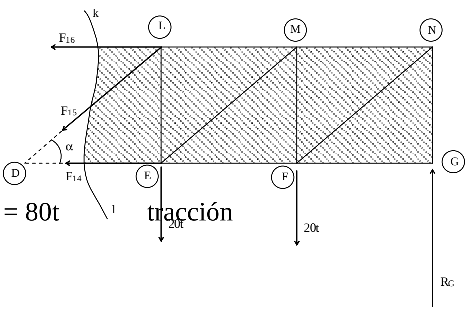
$$F_{12} = \frac{10t \text{ x } 3m - R_A \text{ x } 9m}{2{,}50m} \Rightarrow F_{12} = \frac{10t \text{ x } 3m - 26{,}67t \text{ x } 9m}{2{,}50m} \Rightarrow F_{12} = -84t \quad \text{compresión.}$$

Para determinar el esfuerzo en la barra 11 planteamos la ecuación de equilibrio a fuerzas verticales:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A - F_{11} \text{ x sen } (\alpha) - 10t = 0 \qquad F_{11} = \frac{R_A - 10t}{sen(\alpha)} = \frac{26{,}67 - 10}{sen(39{,}8^o)} \Rightarrow F_{11} = 26{,}04t \quad \text{tracción}$$

Cálculo del esfuerzo en las barras 14, 15 y 16:

Realizamos el corte "kl" que pasa por las barras 14, 15 y 16, quedando el sistema como se ve en la figura:



$$M_L = 0 \Rightarrow F_{14} \text{ x } 2{,}50m + 20t \text{ x } 3m - R_G \text{ x } 6m = 0$$

$$F_{14} = \frac{R_G \times 6 - 20 \times 3}{2{,}50} = \frac{43{,}33 \times 6 - 20 \times 3}{2{,}50} \Rightarrow F_{14} = 80t \quad \text{tracción}$$

$$M_D = 0 \Rightarrow 20t \text{ x } 3m + 20t \text{ x } 6m - R_G \text{ x } 9m - F_{16} \text{ x } 2{,}50m = 0$$

$$F_{16} = \frac{20 \times 3 + 20 \times 6 - R_G \times 9}{2{,}50} = \frac{20 \times 3 + 20 \times 6 - 43{,}33 \times 9}{2{,}50} \Rightarrow F_{16} = -84t \quad \text{compresión}$$

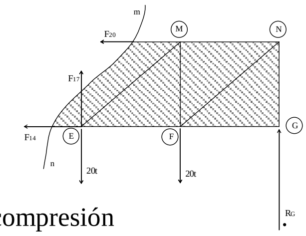
Para determinar el esfuerzo en la barra 15 planteamos la ecuación de equilibrio a fuerzas verticales:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_G - 20t - 20t - F_{15} \text{ x sen } (\alpha) = 0$$

$$F_{15} = \frac{R_G - 20t - 20t}{sen(\alpha)} = \frac{43{,}33 - 20 - 20}{sen(39{,}8^o)} \Rightarrow F_{15} = 5{,}20t \text{ tracción}$$

Cálculo del esfuerzo en las barras 17 y 20:

Realizamos el corte "mn" que pasa por las barras 14, 17 y 20, quedando el sistema como se ve en la figura:



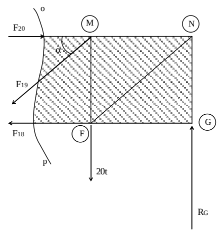
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_G + F_{17} - 20t - 20t = 0$

$F_{17} = 20t + 20t - R_G = 20t + 20t - 43{,}33t \Rightarrow F_{17} = -3{,}33t$ compresión

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_{14} - F_{20} = 0$ $F_{20} = -F_{14} \Rightarrow F_{20} = -80t$ compresión

Cálculo del esfuerzo en las barras 18 y 19:

Realizamos el corte "op" que pasa por las barras 18, 19 y 20, quedando el sistema como se ve en la figura:



$M_M = 0 \Rightarrow F_{18} \text{ x } 2{,}50m - R_G \text{ x } 3m = 0$

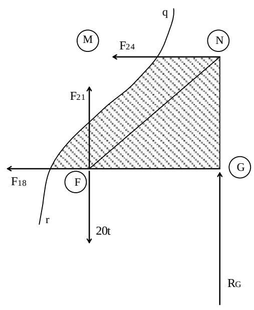
$$F_{18} = \frac{R_G \text{ x } 3m}{2{,}50m} \Rightarrow F_{18} = \frac{43{,}33t \text{ x } 3m}{2{,}50m} \Rightarrow F_{18} = 52t \text{ tracción}$$

Para determinar el esfuerzo en la barra 19 planteamos la ecuación de equilibrio a fuerzas verticales:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_G - 20t - F_{19} \text{ x sen}(\alpha) = 0$ $$F_{19} = \frac{R_G - 20t}{sen(\alpha)} = \frac{43{,}33 - 20}{sen(39{,}8^o)} \Rightarrow F_{19} = 36{,}45t \text{ tracción.}$$

Cálculo del esfuerzo en las barras 21 y 24:

Realizamos el corte "qr" que pasa por las barras 18, 21 y 24, quedando el sistema como se ve en la figura:



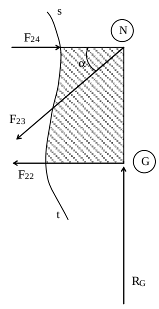
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_G + F_{21} - 20t = 0$

$F_{21} = 20t - R_G = 20t - 43{,}33t \Rightarrow F_{21} = -23{,}33t$ compresión

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_{18} - F_{24} = 0$ $F_{24} = -F_{18} \Rightarrow F_{24} = -52t$ compresión

Cálculo del esfuerzo en la barra 23:

Realizamos el corte "st" que pasa por las barras 22, 23 y 24, quedando el sistema como se ve en la figura:



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_G - F_{23} \text{ x sen}(\alpha) = 0$

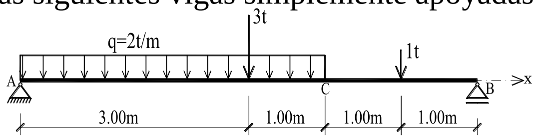
$$F_{23} = \frac{R_G}{sen(\alpha)} = \frac{43{,}33}{sen(39{,}8^o)} \Rightarrow F_{23} = 67{,}70t \text{ tracción.}$$

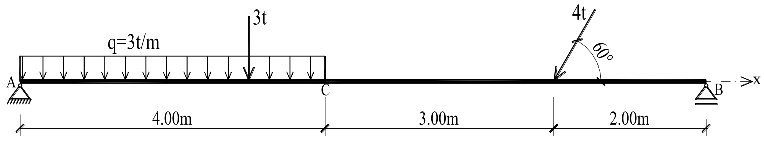
Resumen de resultados:

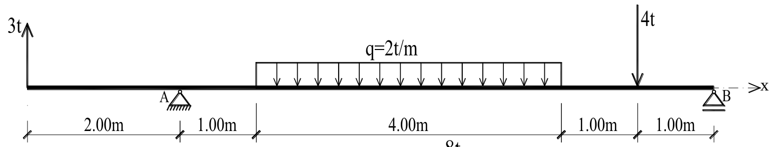
Cordón superior	-32	-64	-84	-84	-80	-52	
Cordón inferior	0	32	64	80	52	0	
Montantes	-26.27	-26.27	-16.67	0	-3.33	-23.23	-43.33
Diagonales	41.66	41.66	26.04	5.20	36.44	67.88	

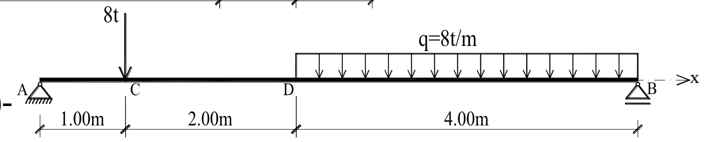
TRABAJO PRÁCTICO N°4
Estudio de vigas sometidas a flexión

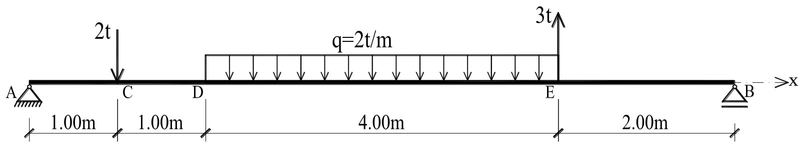
Ejercicio 4-1: Calcular reacciones y trazar diagramas de esfuerzos característicos (M, T, N) de las siguientes vigas simplemente apoyadas cargadas como se indica.

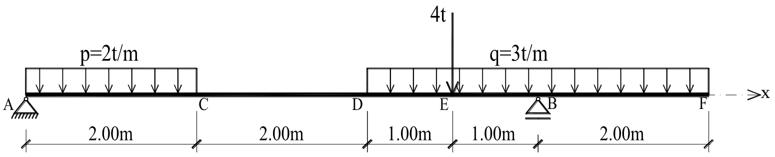
a)-


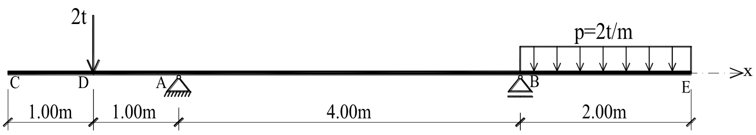
b)-


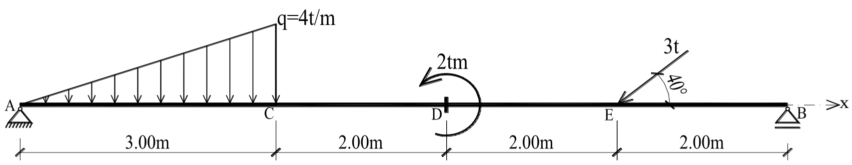
c)-


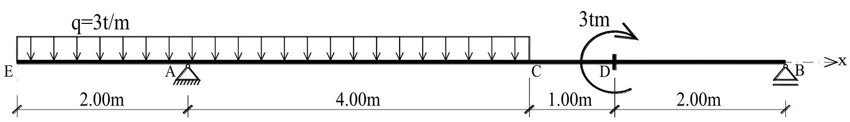
d)-


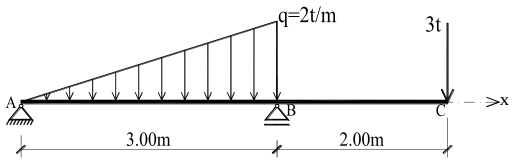
e)-


f)-


g)-


h)-


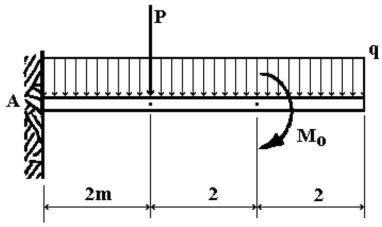
i)-


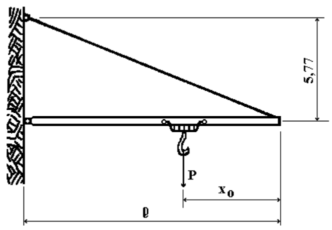
j)-


Ejercicio 4-2: Trazar los diagramas de los esfuerzos característicos (M, T, N) correspondientes a la viga presentada en el **Ejercicio 2-6**

TRABAJO PRÁCTICO N°4
Estudio de vigas sometidas a flexión

Ejercicio 4-3: Trazar los diagramas de los esfuerzos característicos (M, T, N) en la viga en voladizo.
(P = 20 kg ; q = 10 kg/m ; Mo = 40 kg.m)

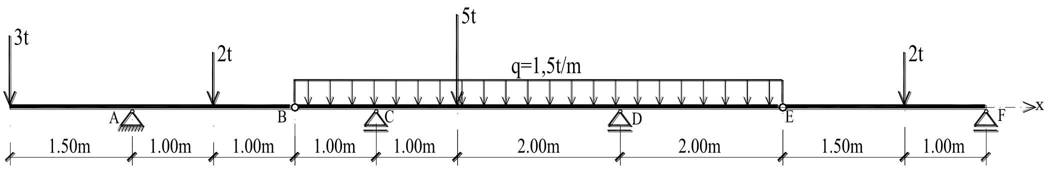




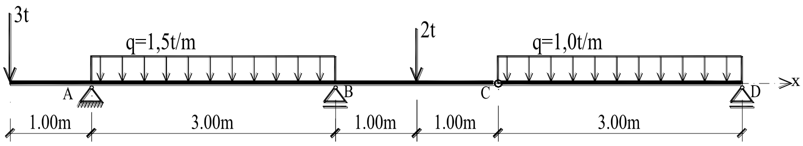
Ejercicio 4-4: Hallar los diagramas en el soporte articulado:
(P = 100 kg ; L = 10 m)

Ejercicio 4-5: Calcular reacciones y trazar diagramas de esfuerzos característicos (M, T, N) de las siguientes vigas GERBER indicadas:

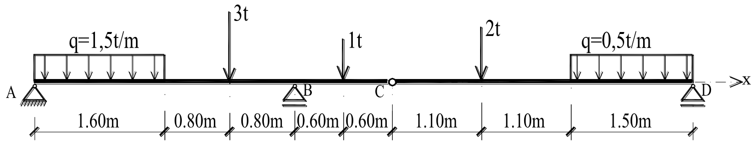
a)-



b)-



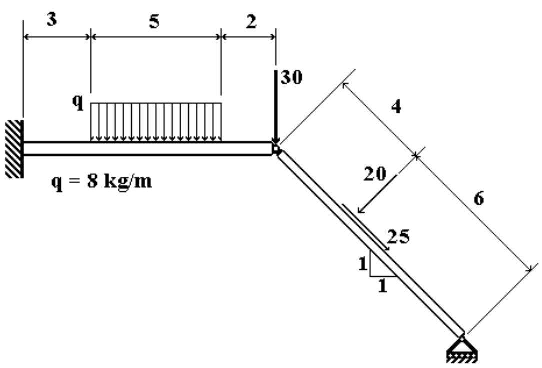
c)-



Ejercicio 4-6: Trazar los diagramas de los esfuerzos característicos (M, T, N) correspondientes a la viga presentada en el **Ejercicio 2-20**.

Ejercicio 4-7: Trazar los diagramas de los esfuerzos característicos (M, T, N) correspondientes a la estructura aporticada presentada en el **Ejercicio 2-21**.

Ejercicio 4-8: Trazar los diagramas característicos en el pórtico siguiente:



TRABAJO PRÁCTICO N°4
Estudio de vigas sometidas a flexión

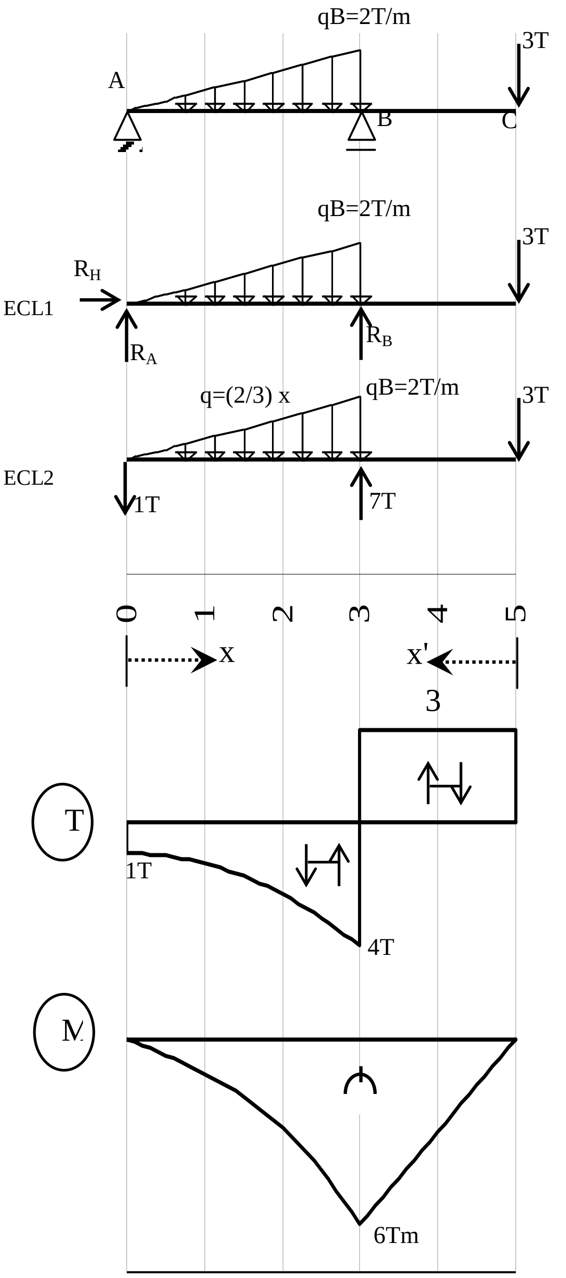
- Vigas a Flexión: ➔ SOLUCIONES

Ejercicio 4-1:

j) -

A partir del ***ECL1:***

$$\begin{cases} \sum M_B \to R_A \cdot 3m - 2\dfrac{T}{m} \cdot 3m \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1m + 3T \cdot 2m = 0 \\ \qquad R_A = -1T \\ \sum M_A \to R_B \cdot 3m - 2\dfrac{T}{m} \cdot 3m \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2m - 3T \cdot 5m = 0 \\ \qquad R_B = 7T \\ \sum F_H \to R_H = 0 \end{cases}$$



<u>*Ecuación de la carga triangular:*</u>

Tomando el origen de ***x*** donde lo indica la figura, la ecuación lineal de la carga será de la forma:

$$q = ax + b$$

<u>Cálculo de valores particulares:</u>

$$en \quad x = 0 \quad \to \quad q = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$en \quad x = 3m \quad \to \quad q = 2\frac{T}{m} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}$$

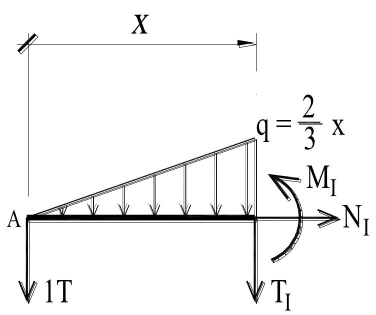
La ecuación queda entonces:

$$\boxed{q = \frac{2}{3}x}$$

TRABAJO PRÁCTICO N°4
Estudio de vigas sometidas a flexión

Planteo de las ecuaciones tramo a tramo:

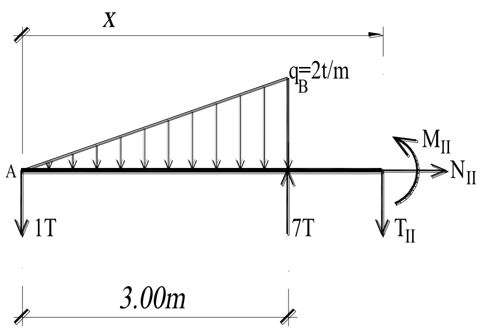
$\underline{Tramo \quad I} \qquad 0 < x < 3m$

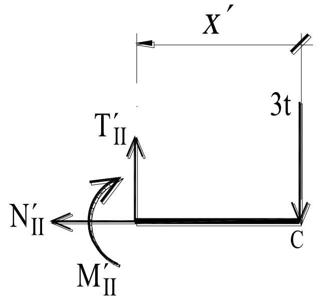


$$\begin{cases} \sum F_H \rightarrow N_I(x) = 0 \\ \sum F_V \rightarrow T_I + 1 + \dfrac{2}{3} x \cdot x \cdot \dfrac{1}{2} = 0 \\ \qquad T_I(x) = -\dfrac{x^2}{3} - 1 \\ \sum M_o \rightarrow M_I + 1 \cdot x + \dfrac{2}{3} x \cdot x \cdot \dfrac{x}{3} = 0 \\ \qquad M_I(x) = -\dfrac{x^3}{9} - x \end{cases}$$

$\underline{Tramo \quad II} \qquad 3m < x < 5m$

$$\begin{cases} \sum F_H \rightarrow N_{II}(x) = 0 \\ \sum F_V \rightarrow T_{II} + 1T + 2\dfrac{T}{m} \cdot 3m \cdot \dfrac{1}{2} - 7T = 0 \\ \qquad T_{II}(x) = 3T \\ \sum M_o \rightarrow M_{II} + 1 \cdot x + 2\dfrac{T}{m} \cdot 3m \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (x - 2m) - 7T \cdot (x - 3m) = 0 \\ \qquad M_{II}(x) = 3x - 15 \end{cases}$$



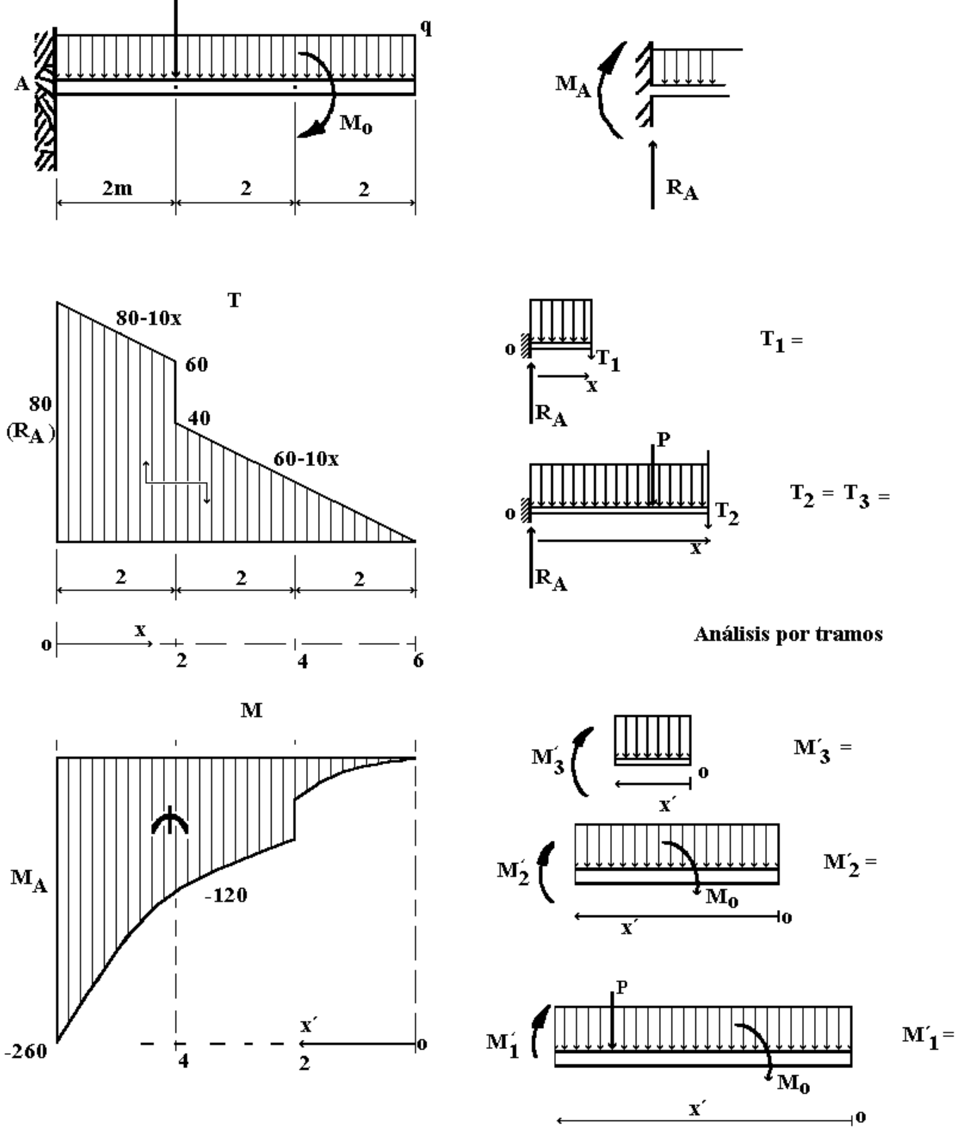


$\underline{Tramo \quad II´} \qquad 0 < x´ < 2m$

$$\begin{cases} \sum F_H \rightarrow N´_{III}(x´) = 0 \\ \sum F_V \rightarrow T´_{III}(x´) = 3T \\ \sum M_o \rightarrow M´_{III} = -3x´ \end{cases}$$

TRABAJO PRÁCTICO N°4
Estudio de vigas sometidas a flexión

Ejercicio 4-3:



Reacciones en A: $R_A = (20+10.6) = 80kg$
$M_A = P.2 + M_o + q.6.3 = 260kgm$

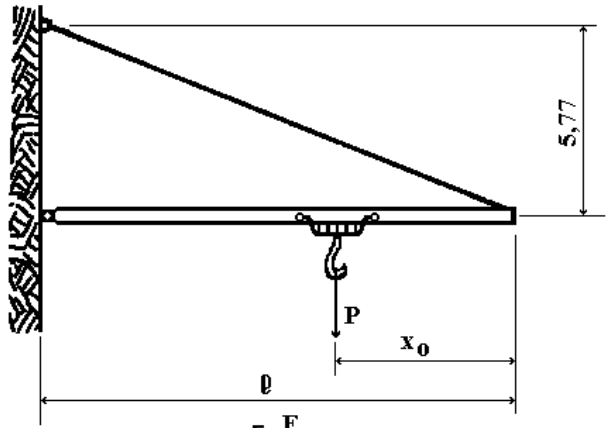
Como no existen fuerzas en la dirección de la barra, el esfuerzo normal N = 0
Diagrama de corte por tramos indicados:

$T_1 = R_A – qx = 80 – 10x \quad 0<x<2m$
$T_2 = T_3 = R_A – P –qx = 60 – 10x \quad 2<x<6m$

Diagrama de momentos flectores por tramos:

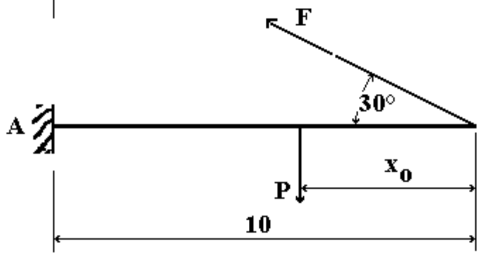
$M´_3 = -qx´^2/2 = -5x´^2 \qquad 0<x´<2m$
$M´_2 = M´_1 – M_o = - 5x´^2 – 40 \qquad 2<x´<4m$
$M´_1 = M´_2 –P(x´- 4) = -5x´2 – 20(x´- 4) –40 \qquad 4<x´<6m$

Ejercicio 4-4:



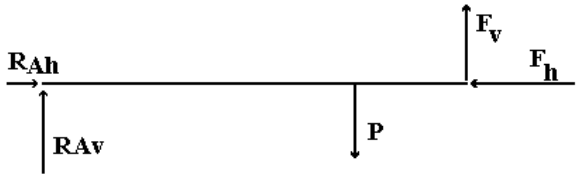
Se realizan dos esquemas libres, uno con F, el otro con sus componentes y las reacciones en A exteriorizadas.

$$F_v = F sen 30°;\ F_h = F\cos 30°$$



Por momento en A:

$$F_v = \frac{P.(10 - x_o)}{10} = 100 - 10x_o$$

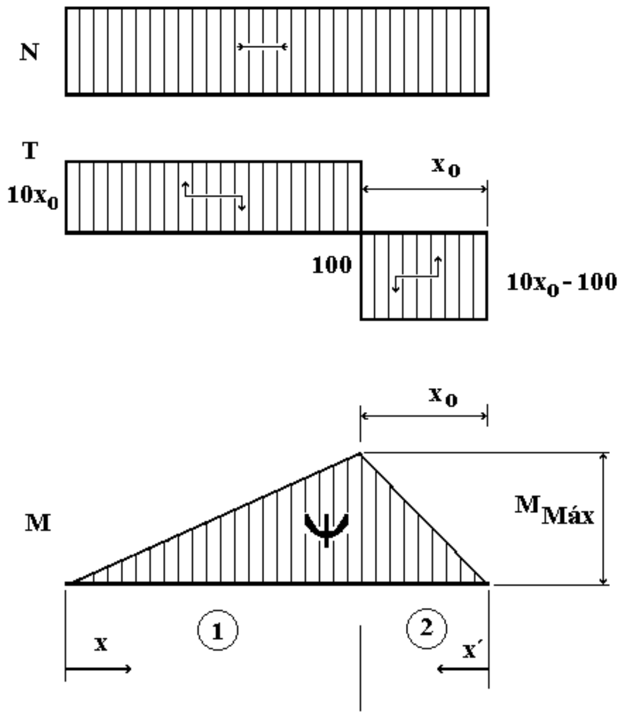


Notamos que si x_o tiende a cero, F_v tiende a 100 y si x_o tiende a 10, F_v tiende a cero.

$$F = \frac{F_v}{sen30°} = 2.F_v$$

$$F_h = R_{Ah} = 2.F_v \cos 30° =$$

$$F_v\sqrt{3} = 173{,}2 - 17{,}32x_o$$



$$R_{Av} = P - F_v = 10x_o$$

Los diagramas se trazan fácilmente.

Es conveniente utilizar los símbolos en vez de signos.

$$M_1 = R_{Av}x = 10x_o.x$$

$$M´_2 = F_v.x´ = (100 - 10x_o)x´$$

$$M_{Máx.} = x_o(100 - 10x_o)$$

Ejercicio 4-8: