Dossier - Théorie des Valeurs Extrêmes

Thomas Poinsignon

2017

1 Calculs Théoriques

1.1 Générateur et Copule de Gumbel

1.1.1 Copule associée à la distribution

Soit F la fonction de distribution continue de Gumbel défini tel que :

$$F(x, y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}$$

Afin de pourvoir calculer la copule associée à cette distribution, et d'après le théorème de Sklar, nous calculerons les marginales F_X,F_Y de F, tel que :

$$C(u, v) = C(F_X(x), F_Y(y)) = F(F_X^{-1}(u), F(F_X^{-1}(v)) = F(x, y)$$

Soit :

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) = (1 + e^{-x})^{-1}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y) = (1 + e^{-y})^{-1}$$

On calcul alors les marginales inverses tel que ;

$$U = (1 + e^{-x})^{-1}$$
$$\Leftrightarrow 1/U = (1 + e^{-x}) \Leftrightarrow x = -\ln(1/U - 1)$$

Ainsi on obtient :

$$F_X^{-1}(u) = -\ln(1/u - 1)$$
$$F_Y^{-1}(v) = -\ln(1/v - 1)$$

Et on en déduit la copule associée tel que :

$$C(u, v) = (1 + e^{\ln(1/u-1)} + e^{\ln(1/v-1)})^{-1} = (\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - 1)^{-1}$$

1.1.2 Calcul du générateur de la copule

La copule calculée fait partie des copules archimédiennes, et à ce titre nous savons par définition que :

$$C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$$

où ϕ est la fonction génératrice de la copule, tel que: $\phi\,:\,]0,1] \rightarrow [0,\infty)$, C^0 strictement décroissante convexe et :

$$\phi(0) = 1\ ,\ \lim_{t\to 0} \phi(t) = +\infty$$

En prenant $\phi(u) = \frac{1}{2}(\frac{1}{u} - 1)$, on constate que la définition précédente est vérifiée puisqu'en calculant son inverse on trouve :

$$\phi(u) = \frac{1}{2}(\frac{1}{u} - 1) = y \Leftrightarrow \frac{1}{u} - 1 = 2y \Leftrightarrow \phi(y)^{-1} = \frac{1}{2y+1}$$

Or :

$$\phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)) = (2[\frac{1}{2}(\frac{1}{u} - 1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{v} - 1)] + 1)^{-1} = (\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - 1)^{-1}$$

On retrouve bien la copule associée à la distribution F, ϕ est donc bien la génératrice de cette copule.

1.2 Calcul des dépendences de queues

1.2.1 Lower tail dependence

On sait que l'on a par définition le coefficient de dépendance en queue basse tel que :

$$\lambda_l = \lim_{\alpha\to 0} \frac{C(\alpha,\alpha)}{\alpha}$$

Soit l'équivalent pour la copule de Gumbel à :

$$\lambda_l = \lim_{\alpha\to 0} \frac{e^{-(2(-\ln(\alpha))^{\beta})^{1/\beta}}}{\alpha}$$

$$\lambda_l = \lim_{\alpha\to 0} \frac{e^{2^{1/\beta}\ln(\alpha)}}{\alpha}$$

$$\lambda_l = \lim_{\alpha\to 0} e^{2^{1/\beta}\ln(\alpha) - \ln(\alpha)} = \lim_{\alpha\to 0} \alpha^{2^{1/\beta - 1}} = 0$$

On retrouve bien une concentration nulle de la copule de gumbel dans sa queue inférieure.

1.2.2 Upper tail dependence

On sait que l'on a par définition le coefficient de dépendance en queue haute tel que :

$$\lambda_u = \lim_{\alpha \to 1} \frac{1 - 2\alpha + C(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha}$$

Soit l'équivalent pour la copule de Gumbel à :

$$\lambda_u = \lim_{\alpha \to 1} \frac{1 - 2\alpha + \exp\{-((-\ln \alpha)^\beta + (-\ln \alpha)^\beta)^{1/\beta}\}}{1 - \alpha}$$

$$\lambda_u = \lim_{\alpha \to 1} \frac{1 - 2\alpha + \exp\{2^{1/\beta} \ln \alpha\}}{1 - \alpha}$$

On pose alors $X = 1 - \alpha$, soit : $\alpha = 1 - X$, on obtient alors :

$$\lambda_u = \lim_{X \to 0} \frac{\exp\{2^{1/\beta} \ln(1 - X)\} - 2(1 - X) + 1}{X}$$

$$\overset{0}{\sim} \frac{\exp\{2^{1/\beta} X\} + 2X - 1}{X}$$

Or on peut calculer le développement suivant :

$$e^{2^{1/\beta} x} \overset{0}{=} 1 - 2^{1/\beta} x$$

Ainsi :

$$\lambda_u \overset{0}{\sim} \lim_{X \to 0} \frac{1 - 2^{1/\beta} X + 2X - 1}{X} = 2 - 2^{1/\beta}$$

On retrouve bien une concentration non nulle de la copule de Gumbel dans sa queue supérieure.

1.3 Calcul des limites de β

1.3.1 Cas où $\beta \to 1$

On a :

$$\lim_{\beta \to 1} e^{-((-\ln u_1)^\beta + (-\ln u_2)^\beta)^{1/\beta}} \Leftrightarrow e^{-((-\ln u_1 - \ln u_2))} = u_1 u_2$$

On retrouve bien la copule d'indépendance $C(u_1, u_2) = u_1 u_2$, lorsque β tend vers 1 dans le cadre d'une copule de Gumbel.

1.3.2 Cas où $\beta \to \infty$

On a :

$$\lim_{\beta \to \infty} \exp \{ e^{1/\beta \ln(-[(-\ln u_1)^\beta + (-\ln u_2)^\beta])} \}$$

Si $u_1 < u_2$, alors on a : $(-\ln u_1)^\beta \gg (-\ln u_2)^\beta$, et donc :

$$\Leftrightarrow \lim_{\beta \to \infty} \exp \{ e^{1/\beta \ln(-(-\ln u_1)^\beta))} \}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\beta \to \infty} \exp \{ -(-\ln u_1)^{\beta . 1/\beta} \} = \exp \{ \ln(u_1) \} = u_1$$

On établit un raisonnement similaire dans le cas $u_1 > u_2$, pour donc en déduire que :

$$\lim_{\beta \to \infty} \exp \{ e^{1/\beta \ln(-[(-\ln u_1)^\beta + (-\ln u_2)^\beta])} \} = \min (u_1, u_2)$$

Et retrouver ainsi la borne supérieure de Fréchet correspondant à la comonotonie parfaite.

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} p_i \parallel x_i - g \parallel_M^2$$

$$I_g = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p = p$$