Test overenia vedomostí 9
22. apríl 2020

Meno a priezvisko: Tomáš Homola Získané body: ____ / 5 ________

Milí študenti, v nasledujúcej úlohe za A dosaďte deň Vášho narodenia a za B dosaďte mesiac Vášho narodenia (viem si to skontrolovať, nepodvádzajte). Riešenia zašlite (najlepšie ako sken alebo foto) na mail `seliga@math.sk` do nedele 26. apríla 2020 do 23:59.

Úloha. Nech $\mathcal{V} = \left\{ f \in \mathcal{C}_{[-1,1]} \colon f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x, \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R} \right\}$ je vektorový priestor[1] nad $\mathbb{R}$. Uvažujte lineárny funkcionál

$$\varphi \colon \mathcal{V} \to \mathbb{R},$$

ktorý polynóm $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ zobrazí na číslo $\varphi(f) = A\alpha_0 + B\alpha_1$. Na priestore $\mathcal{V}$ uvažujte štandardný skalárny súčin daný predpisom

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Nájdite taký prvok $h \in \mathcal{V}$, pre ktorý platí

$$\varphi(f) = \langle f, h \rangle$$

pre všetky $f \in \mathcal{V}$.

- $V = \{ f \in C_{[-1,1]} : f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x : \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R} \}$

  $\text{báza}(\mathbb{R}[x]) = X = (\underset{\vec{x}_1}{1}, \underset{\vec{x}_2}{x})$

  $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$; $\varphi(f) = 21\alpha_0 + 9\alpha_1$

  štandardný skalárny súčin: $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, dx$

- tušíme sa nám tu hodí mať ortonormálnu bázu, čiže najprv si podíme skontrolovať tú, čo je napísaná vyššie

$$\langle 1, x \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow 1 \perp x$$

- ortogonálnu bázu už máme, ešte ju znormalizujeme, nazvem ju Y

$$\|1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1 \, dx = \left[x \right]_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 2 \longrightarrow \|1\| = \sqrt{2}$$

$$\|x\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \longrightarrow \|x\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$Y = \left(\frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|}, \frac{\vec{x}_2}{\|\vec{x}_2\|} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\frac{\sqrt{6}}{3}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{6}x}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}x}{2} \right) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$$

- na nájdenie vektora h použijeme:

$$\vec{v} = \varphi(\vec{x}_1)\vec{x}_1 + \dots + \varphi(\vec{x}_n)x_n$$

Čiže vektor $h = \varphi(\vec{y}_1)\vec{x}_1 + \varphi(\vec{y}_n)\vec{x}_n$

$$\varphi(\vec{y}_1) = \varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 21 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9 \cdot 0 = \frac{21\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi(\vec{y}_2) = \varphi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) = 21 \cdot 0 + 9\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$$

$$h = \frac{21\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} x = \frac{21 \cdot 2}{4} + \frac{9 \cdot 6}{4} x = \frac{21}{2} + \frac{27}{2} x$$

- test, či to funguje:

$f = 1 + x$

$\varphi(f) = 21 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 30$

$$\langle f, h \rangle = \int_{-1}^{1} (1+x)\left(\frac{21}{2} + \frac{27}{2}x\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{21}{2} + \frac{27}{2}x + \frac{21}{2}x + \frac{27}{2}x^2 \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{21}{2} + 24x + \frac{27}{2}x^2 \right) dx = \left[\frac{21}{2}x + 12x^2 + \frac{9}{2}x^3 \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{21}{2} + 12 + \frac{9}{2} - \left(-\frac{21}{2} + 12 - \frac{9}{2} \right) =$$

$$= \frac{30}{2} + 12 - 12 + \frac{30}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

[1] Nejde o nič iné ako o priestor $\mathbb{R}^1[x]$, pričom ale definičný obor tých polynómov je zúžený na interval $[-1, 1]$.