HOMOLA

$10+8+10+10+2=40$

SKÚŠKA Z LA, TERMÍN 1, LETO 2020

- Píšte, prosím, čitateľne.
- Na každý papier napíšte hore svoje priezvisko a meno, aby som to nemohol doplieSť.
- O 13:00 dávam `git pull`. Hodnotiť budem to, čo v tej chvíli je vo Vašom repozitári.
- Otázky k zadaniu mi pošlite emailom na `jenca@stuba.sk`. Odpovedať budem buď Vám osobne, alebo celej skupine, podľa toho čo to bude za otázku.

---

(1) Uvažujme vektorový priestor $\mathbb{R}^3$ vybavený geometrickým skalárnym súčinom.
  - Nájdite ortonormálnu bázu podpriestoru $\mathcal{U} = \mathrm{Lo}\{(1,1,1),(3,1,-1)\}$, nazvime ju X.
  - Nájdite ortonormálnu bázu podpriestoru $\mathcal{U}^\perp$, nazvime ju X'.
  - Nájdite maticu lineárnej transformácie $\mathrm{proj}_\mathcal{U} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
    (a) v kanonickej báze
    (b) v báze vzniknutej zreťazením báz X a X', ktoré ste našli vyššie.

(2) Nech pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $A_\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineárna transformácia vektorového priestoru $\mathbb{R}^3$, ktorej matica v kanonickej báze $\mathbb{R}^3$ je

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

  - Zistite, pre ktoré $\alpha \in \mathbb{R}$ má lineárna transformácia A_α diagonálnu maticu $[A_\alpha]_{XX}$ v nejakej báze X.
  - Zistite pre ktoré $\alpha \in \mathbb{R}$ má lineárna transformácia vlastnú hodnotu $\sqrt{2}$.

(3) Dokážte, že na priestore so skalárnym súčinom platí, že

$$\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \frac{1}{2}(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2),$$

pre všetky vektory $\vec{x}, \vec{y}$.

(4) Nech P je lineárna transformácia na konečnorozmernom priestore so skalárnym súčinom taká, že $P^2 = P = P^*$. Dokážte, že ak $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(P)$ a $\vec{y} \in \mathrm{Im}(P)$, potom $\vec{x} \perp \vec{y}$.

(5) Nech A, B sú lineárne transformácie na konečnorozmernom vektorovom priestore také, že $AB = BA$ a zároveň $B^2 = 0$. Dokážte, že λ je vlastnou hodnotou A práve vtedy, keď λ je vlastnou hodnotou $A + B$.

ÚLOHA (1) Tomáš Homola

- vektorový priestor $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ s geometrickým skalárnym súčinom

 - podpriestor $U = Lo\{\overbrace{(1,1,1)}^{\vec{u}_1}, \overbrace{(3,1,-1)}^{\vec{u}_2}\}$; je $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$? $\rightarrow$ spravíme $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$

 - $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = (1,1,1)\cdot(3,1,-1) = 3+1-1 = 3 \rightarrow \vec{u}_1 \not\perp u_2$, takže môžme spraviť napr. GRAM-SCHMIDTOV ORTOGONALIZAČNÝ PROCES, to nám dá ortogonálnu bázu U, ktorú potom ešte znormalizujeme a dostaneme hľadanú bázu X
 - nech $Y = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ (iba ortogonálna báza), potom:

$$\vec{y}_1 = \vec{u}_1 = (1,1,1)$$

$$\vec{y}_2 = \vec{u}_2 - proj_{\vec{y}_1}(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 - \frac{\langle \vec{y}_1, \vec{u}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}\vec{y}_1 = (3,1,-1) - \frac{3}{3}(1,1,1) = (3,1,-1) - (1,1,1) = (2,0,-2) \rightarrow (1,0,-1)$$

↳ aj tento vektor je $\perp$ na y_1, len je kratší

$Y = ((1,1,1),(1,0,-1))$, $\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle = 1 + 0 - 1 = 0$, čiže $\vec{y}_1 \perp \vec{y}_2$

$(1,0,-1)$

- teraz ešte znormalizovať:

$\|\vec{y}_1\|^2 = 3 \rightarrow \|\vec{y}_1\| = \sqrt{3}$

$\|\vec{y}_2\|^2 = 2 \rightarrow \|\vec{y}_2\| = \sqrt{2}$

, nech $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \left(\frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|}, \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right) = \boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1), \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)\right) = X}$

- ďalej nech $\vec{u}' \in U^\perp$ a $u \in U$, pre $\vec{u}', \vec{u}$ má platiť, že $\langle \vec{u}', \vec{u} \rangle = 0$
 vieme, že $\vec{u}$ je lineárnou kombináciou $\vec{x}_1, \vec{x}_2$, čiže $\vec{u} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, a nech $\vec{u}' = (u_1', u_2', u_3')$
- tu som začal niečo počítať, potom mi napadlo, že U je vlastne nejaká rovina v priestore, a ak $\vec{u}' \perp \vec{u}$, tak potom zrejme $\vec{u}' \perp \vec{x}_1 \wedge \vec{u}' \perp \vec{x}_2$, tu ak spravíme vektorový súčin $\vec{x}_1 \times \vec{x}_2$, tak dostaneme vektor $\vec{u}'$, ktorý bude $\perp$ na U

$$\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left|\begin{array}{ccc|cc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{array}\right|$$

$$\overset{23\ \ 32,\ 31\ \ 13,\ 12\ \ 21}{=} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} - 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 - \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{-\sqrt{6}}{6}, 2\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}\right)$$

čiže $U' = \{(-t, 2t, -t) : t \in \mathbb{R}\}$, teraz ešte nájsť taký $\vec{u}'$, aby $\|\vec{u}'\| = 1$, napr. $\|(-1,2,-1)\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

takže $\boxed{X' = (\vec{x}') = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}(-1,2,-1)\right)}$

- zobrazenie $proj_U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 (a) v kanonickej báze $K = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$
 - tu použijeme vedomosť, že $proj_U(\vec{v}) = proj_{\vec{x}_1}(\vec{v}) + proj_{\vec{x}_2}(\vec{v})$, kde $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ sú vektory bázy U

$$proj_U((1,0,0)) = \frac{\vec{x}_1\cdot(1,0,0)}{\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_1}_{\|\vec{x}_1\|^2=1}}\vec{x}_1 + \frac{\vec{x}_2\cdot(1,0,0)}{\underbrace{\vec{x}_2\cdot\vec{x}_2}_{\|\vec{x}_2\|^2=1}}\vec{x}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{6}\right)$$

Tomáš Homola

$$proj_u((0,1,0)) = \frac{\vec{x}_1 \cdot (0,1,0)}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1}\vec{x}_1 + \frac{\vec{x}_2 \cdot (0,1,0)}{\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_2}\vec{x}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)\right) + 0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$proj_u((0,0,1)) = \frac{\vec{x}_1 \cdot (0,0,1)}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1}\vec{x}_1 + \frac{\vec{x}_2 \cdot (0,0,1)}{\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_2}\vec{x}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$$

$$\boxed{- [proj_u]_{KK} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}}$$

✓

(b) nech $H = XX' = \left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)}_{\vec{h}_1 = \vec{x}_1}, \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)}_{\vec{h}_2 = \vec{x}_2}, \underbrace{\frac{\sqrt{6}}{6}(-1,2,-1)}_{\vec{h}_3}\right)$

$proj_u(\vec{h}_1) = \frac{\vec{h}_1 \cdot \vec{x}_1}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1}\vec{x}_1 + \underbrace{\frac{\vec{h}_1 \cdot \vec{x}_2}{\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_2}\vec{x}_2}_{0\text{, lebo } \vec{h}_1 = \vec{x}_1 \perp \vec{x}_2} = \frac{\|\vec{x}_1\|^2}{\|\vec{x}_1\|^2}\vec{x}_1 + 0 = \vec{x}_1 \rightarrow$ vlastne projekcia na seba

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ bude v báze $H \rightarrow 1 \cdot \vec{h}_1 + 0 \cdot \vec{h}_2 + 0\vec{h}_3 \rightarrow (1,0,0)$

$proj_u(\vec{h}_2) = \vec{x}_2$, rovnako ako výpočet vyššie

a v báze $H \rightarrow 0 \cdot \vec{h}_1 + 1 \cdot \vec{h}_2 + 0 \cdot \vec{h}_3 \rightarrow (0,1,0)$

$proj(\vec{h}_3) =$ by mal vyjsť $\vec{0}$, lebo $\vec{h}_3 \perp \vec{h}_2 = \vec{x}_2 \perp \vec{h}_1 = \vec{x}_1 \rightarrow$ v báze $H \rightarrow 0 \cdot \vec{h}_1 + 0 \cdot \vec{h}_2 + 0 \cdot \vec{h}_3 \rightarrow (0,0,0)$

$$\boxed{\text{- matica } [proj_u]_{HH} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

✓

10

Úloha (2) Tomáš Homola

- $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\chi(A_\alpha) = \det(A_\alpha - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & \alpha-\lambda \\ 0 & 1 \end{matrix} = (\alpha-\lambda)^3 - (\alpha-\lambda) - (\alpha-\lambda) = (\alpha-\lambda)\left[(\alpha-\lambda)^2 - 2\right]$$

- vlastné hodnoty: $\chi(A_\alpha) = 0 \rightarrow (\alpha-\lambda)\left[(\alpha-\lambda)^2-2\right] = 0$: ak $(\alpha-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = \alpha$

$(\alpha-\lambda)^2 - 2 = 0 \rightarrow (\alpha-\lambda)^2 = 2 \rightarrow \alpha - \lambda = \pm\sqrt{2}$

$\lambda = \alpha \pm \sqrt{2}$

rôznych

- ak $\chi(A_\alpha)$ bude mať $n=3$ ~~nezávislých~~ koreňov, tak potom A_α bude diagonalizovateľná

$\alpha = \lambda \rightarrow 1$ koreň, a tu $(\alpha-\lambda)^2-2$ potrebujeme mať 2

$(\alpha-\lambda)^2 - 2 = \alpha^2 - 2\alpha\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2-2) \rightarrow D = b^2 - 4ac = (-2\alpha)^2 - 4\cdot 1\cdot(\alpha^2-2) = 4\alpha^2 - 4\alpha^2 + 8 = 8 > 0$

↳ diskriminant je vždy väčší ako 0, čiže to bude mať vždy 2 riešenia

- $sp(A_\alpha) = \{\alpha, \alpha+\sqrt{2}, \alpha-\sqrt{2}\}$, $[A_\alpha]_{xx}$ by mala byť diagonalizovateľná pre všetky $\alpha \in \mathbb{R}$

- vlastnú hodnotu $\lambda = \sqrt{2}$ bude mať A_α práve vtedy, keď $\alpha = 0$ $(\lambda = \alpha + \sqrt{2} \rightarrow \lambda = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2})$

↓

- alebo, keď $\alpha = \sqrt{2}$, že?

- alebo, keď $\alpha = 2\sqrt{2}$, že?

−2b

8

Úloha (3)

Tomáš Homola

$$\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)$$

- platí vzťah : $\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2}\left(\langle \vec{x}+\vec{y}, x+\vec{y} \rangle + \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} \rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle \vec{x}, \vec{x}+\vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{x}-\vec{y} \rangle + \langle -\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} \rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \overset{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle} + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \overset{-\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{x}, -\vec{y} \rangle} + \overset{-\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle -\vec{y}, \vec{x} \rangle} + \overset{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}{\langle -\vec{y}, -\vec{y} \rangle}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + 2\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\right)$$

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

- pôvodná rovnosť teda platí

10

Úloha (4)

Tomáš Homola

- P je lineárna transformácia, $P^2 = P = P^*$

$P : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ je konečnorozmerný priestor so skalárnym súčinom

$x \in Ker(P)$, $\vec{y} \in Im(P)$

- ak $P = P^*$, potom zrejme aj $Ker(P) = Ker(P^*)$ a kdesi sme mali napísané, že $Ker(A^*) = (Im(A))^{\perp}$, a teda ak $\vec{x} \in Ker(P)$, tak $\vec{x} \in Ker(P^*) \rightarrow \vec{x} \in (Im(P))^{\perp}$ a keďže $\vec{y} \in Im(P)$, čiže $\vec{x}$ je v množine takých vektorov, ktoré sú kolmé na všetky vektory z $Im(P)$, čiže platí $\vec{x} \perp \vec{y}$

10

Úloha (5) Tomáš Homola

– A, B sú lineárne transformácie, $AB = BA$ a $B^2 = 0$

$$AB = BA \quad / + A^2$$
$$AB + A^2 = BA + A^2$$
$$A(B+A) = A(B+A)$$
$$\downarrow$$
$$A(B+A)\vec{x} = A(B+A)\vec{x}$$
$$A\lambda\vec{x} = A\lambda\vec{x}$$

$$AB = BA \quad / + B^3$$
$$AB + B^3 = BA + B^3$$
$$B(A+B^2) = B(A+B^2)$$
$$BA = BA$$

$$AB = BA \quad / \text{sprava } B$$
$$ABB = BAB$$
$$AB^2 = BAB$$
$$0 = BAB$$

– toto je asi to podstatné:

$$\lambda\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$A\vec{x} = (A+B)\vec{x}$ → platí, ak λ je vlastnou hodnotou A aj $(A+B)$
$$A\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} \quad / - A\vec{x}$$
$$B\vec{x} = \vec{0} \quad / \text{zľava } B$$
$$BB\vec{x} = \vec{0}$$
$$B^2\vec{x} = \vec{0}$$
$$\vec{0} = \vec{0}$$

Toto nie je dobre.
Dokazujete

$V \Rightarrow$ pravda

Ale z toho vôbec nevyplýva, že
V je pravda.

2 za snahu