UNIDAD Nº 1

LOGICA PROPOSICIONAL

Proposición:

Es un enunciado, dado en cierto lenguaje, del cual puede establecerse un valor de verdad, es decir se puede determinar si es verdadero o si es falso.
Se suelen simbolizar con letras imprenta minúsculas: **p, q, . . .**

Negación: Dada una proposición **p**, siempre es posible determinar otra proposición negándola. Se simboliza – **p** o bien **~ p**, y se lee **"no p"**

Nota: Una proposición **p** y su negación no tienen el mismo valor de verdad, si **p** es verdadera, **~p** es falsa y viceversa.

Tablas de verdad: las tablas de verdad son cuadros que permiten visualizar todos los posibles valores de verdad de una proposición.

Ejemplo:

p	~p
v	f
f	v

Es posible a través del uso de conectivos como por ejemplo: $\wedge$ **(y),** $\vee$ **(o),** $\Rightarrow$ **(si, ... entonces),** $\Leftrightarrow$ **(si y sólo si)** obtener proposiciones denominadas compuestas:

- **Conjunción**: la conjunción de dos proposiciones p, q, es otra proposición y se anota:

  $\mathbf{p \wedge q}$

- **Disyunción**: la disyunción de dos proposiciones p, q, es otra proposición y se anota:

  $\mathbf{p \vee q}$

- **<u>Implicación simple o condicional simple</u>**: la implicación de las proposiciones p, q, es

  la proposición que se anota: $\mathbf{p \Rightarrow q}$, en este caso la proposición **p** recibe el nombre de antecedente y la proposición **q** de consecuente.

- **<u>Doble implicación o bicondicional</u>**: la doble implicación de las proposiciones p, q, es

  otra proposición que se anota: $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$

Las tablas de verdad que corresponden a estas proposiciones compuestas son las siguientes:

conjunción

p	$\wedge$	q
v	**v**	v
v	**f**	f
f	**f**	v
f	**f**	f

disyunción

p	$\vee$	q
v	**v**	v
v	**v**	f
f	**v**	v
f	**f**	f

implicación simple

p	$\Rightarrow$	q
v	**v**	v
v	**f**	f
f	**v**	v
f	**v**	f

doble implicación

p	$\Leftrightarrow$	q
v	**v**	v
v	**f**	f
f	**f**	v
f	**v**	f

<u>Nota</u>:

- La **conjunción** de dos proposiciones es verdadera sólo cuando ambas son verdaderas.
- La **disyunción** de dos proposiciones es falsa sólo cuando ambas son falsas.
- La **implicación simple** de dos proposiciones es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

➢ La **doble implicación** de dos proposiciones es verdadera sólo cuando ambas tienen el mismo valor de verdad.

La **implicación simple** de dos proposiciones **p, q**, es equivalente a la disyunción del antecedente negado con el consecuente: $\mathbf{p \Rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \vee q}$

Si realizamos la tabla de verdad correspondiente:

P	$\Rightarrow$	Q	$\Leftrightarrow$	~p	$\vee$	q
V	**v**	V	**v**	f	**v**	v
V	**f**	F	**v**	f	**f**	f
F	**v**	V	**v**	v	**v**	v
F	**v**	F	**v**	v	**v**	f

Observamos que todos los valores de verdad son verdaderos, es una verdad absoluta, en lógica esto se denomina una **tautología**.

Cuando todos los valores de verdad obtenidos son falsos se denomina una **contradicción**.

La **doble implicación** de dos proposiciones **p, q**, es equivalente a la conjunción de dos implicaciones simples en las cuales se intercambian el antecedente y el consecuente respectivamente: $\mathbf{p \Leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad [\ p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p\ ]}$

Si realizamos la tabla de verdad correspondiente:

p	$\Leftrightarrow$	q
v	**v**	v
v	**f**	f
f	**f**	v
f	**v**	f

$\Leftrightarrow$
V
V
V
V

p	$\Rightarrow$	q	$\wedge$	q	$\Rightarrow$	p
v	**v**	v	**v**	v	**v**	v
v	**f**	f	**f**	f	**v**	v
f	**v**	v	**f**	v	**f**	f
f	**v**	f	**v**	f	**v**	f

Nuevamente estamos frente a una tautología, o bien una verdad absoluta

LEYES Y PRINCIPIOS LÓGICOS:

Involución: la negación de una proposición negada es equivalente a la proposición.

$$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$$

Complemento: La disyunción de una proposición y su negación es una verdad absoluta.

La conjunción de una proposición y su negación es una falsedad absoluta.

$$p \vee \sim p \Leftrightarrow v \qquad\qquad p \wedge \sim p \Leftrightarrow f$$

Idempotencia: La conjunción, o la disyunción, de una proposición consigo misma es equivalente a dicha proposición.

$$p \vee p \Leftrightarrow p \qquad\qquad p \wedge p \Leftrightarrow p$$

Identidad: La disyunción de una proposición y una falsedad es equivalente a dicha proposición. La conjunción de una proposición y una verdad es equivalente a dicha proposición.

$$p \vee f \Leftrightarrow p \qquad\qquad p \wedge v \Leftrightarrow p$$

Una consecuencia de esta ley es lo siguiente:

$$\mathbf{p \lor v \Leftrightarrow v} \qquad\qquad \mathbf{p \land f \Leftrightarrow f}$$

Conmutatividad: si se cambia el orden de las proposiciones en conjunción, o en disyunción se obtiene una proposición equivalente.

$$\mathbf{p \lor q \Leftrightarrow q \lor p} \qquad\qquad \mathbf{p \land q \Leftrightarrow q \land p}$$

Asociatividad: Cualesquiera sean las proposiciones p, q, r, se verifican las siguientes equivalencias:

$$(p \lor q) \lor r \Leftrightarrow p \lor (q \lor r) \qquad\qquad (p \land q) \land r \Leftrightarrow p \land (q \land r)$$

Distributividad: Cualesquiera sean las proposiciones p, q, r, se verifican las siguientes equivalencias:

$$\mathbf{p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)} \qquad\qquad \mathbf{p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)}$$

Leyes de De Morgan:

La negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de las dos proposiciones negadas.

$$\mathbf{\sim (p \lor q) \Leftrightarrow \sim p \land \sim q}$$

La negación de una conjunción es equivalente a la disyunción de ambas proposiciones negadas.

$$\mathbf{\sim (p \land q) \Leftrightarrow \sim p \lor \sim q}$$

Condición necesaria y suficiente:

Si la implicación simple $\mathbf{p \Rightarrow q}$ es verdadera, entonces **p** es condición suficiente para **q**, y q es condición necesaria para p

IMPLICACIONES ASOCIADAS:

Dada una implicación simple: $\mathbf{p \Rightarrow q}$ existen tres implicaciones asociadas a ella que son:

recíproca: $\mathbf{q \Rightarrow p}$	**contraria:** $\mathbf{\sim p \Rightarrow \sim q}$	**contrarecíproca:** $\mathbf{\sim q \Rightarrow \sim p}$

Nota1: Las implicaciones contrarecíprocas son equivalentes:

$$\mathbf{p \Rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \sim q \Rightarrow \sim p} \qquad\qquad \mathbf{\sim p \Rightarrow \sim q \quad \Leftrightarrow \quad q \Rightarrow p}$$

Nota 2:La negación de una implicación simple es equivalente a la conjunción del antecedente con el consecuente negado.

$$\boxed{\mathbf{p \Rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge \sim q}}$$

FUNCIONES O ESQUEMAS PROPOSICIONALES:

Un enunciado en el cual figura al menos una variable, del cual no es posible establecer un valor de verdad, no constituye una proposición, hasta que no se especifique a la misma. Estos enunciados reciben el nombre de **esquemas proposicionales** y se los suele simbolizar así:

$$\mathbf{P(x)\ ,\ P(x, y)\ ,\ etc.}$$

A partir de **esquemas proposicionales** es posible obtener una proposición mediante un procedimiento denominado **cuantificación**, para ello recurriremos a dos conceptos:

- Los cuantificadores, existen dos tipos de cuantificadores:

  El cuantificador **existencial**: $\exists$ (se lee existe al menos un ...)

  El cuantificador **universal**: $\forall$ (se lee para todo ...)

- El conjunto de referencia, es decir el que contiene las posibles especificaciones de la variable.

NEGACIÓN DE UNA PROPOSICIÓNCUANTIFICADA:

Se tiene una proposición obtenida por una función proposicional cuantificada:

por ejemplo **$(\forall\ x \in R) : P(x)$ o $(\exists\ x \in R) : P(x)$**

negar dichas proposiciones equivale a negar el cuantificador y la función proposicional respectiva.

Negar un cuantificador universal equivale a obtener un cuantificador existencial y viceversa.