UNIDAD 2:

MATRICES

INTRODUCCIÓN

En numerosas aplicaciones de la matemática, y especialmente en economía, es conveniente representar mediante un único símbolo una información suministrada a través de datos numéricos. Con el propósito de exhibir, organizar y realizar una más rápida manipulación de la información.

Las matrices son herramientas muy útiles para la sistematización de cálculos pues proveen de un notación compacta para almacenar información y describir relaciones complicadas.

INTERPRETACIÓN Y ORGANIZACIÓN DE LOS DATOS

Ejemplo 1:

La siguiente tabla muestra información sobre los resultados del censo 2001.

Población censada por conciliación censal al 17-11-2001

Por sexo y grandes grupos de edades.

	Varones	Mujeres
Grupos de edad	Población censal (17-11- 01)	Población censal (17-11-01)
0-14	5202593	5045102
15-64	10999587	11425228
65 y más	1456892	2130728

Fuente: INDEC, Censo Nacional de Población, Hogares y Viviendas 2001

Otra manera de organizar e identificar los datos que figuran en el cuerpo de la tabla es encerrándolos entre paréntesis de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 5202593 & 5045102 \\ 10999587 & 11425228 \\ 1456892 & 2130728 \end{pmatrix}$$

Llamaremos ***matriz*** a esta forma de disponer los datos. Cada número de una línea horizontal representa la población censal para ambos sexos, varones y mujeres correspondiente a un rango de edad. La línea vertical de la izquierda corresponde a la población censal para todos los rangos de edades de varones y la línea vertical de la derecha corresponde a la población censal para todos los rangos de edades de mujeres.

Observemos que no es la única manera de ordenar estos datos. Se puede hacer corresponder a las líneas horizontales la clasificación varones y mujeres y a las líneas verticales los rangos de edades. De esta manera obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 5202593 & 10999587 & 1456892 \\ 5045102 & 11425228 & 2130728 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 9x - 6y + 2z = 0 \end{cases}$$

Las particularidades que caracterizan este sistema son los coeficientes numéricos en las ecuaciones junto con sus posiciones relativas.
Por ello el sistema puede describirse mediante un arreglo rectangular o matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 9 & -6 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

En economía, con frecuencia resulta conveniente utilizar matrices para plantear problemas y mostrar datos.

DEFINICIÓN DE MATRIZ

Llamaremos matriz real, o simplemente matriz, a una distribución en filas y columnas de números reales sometidos a un álgebra particular.

Dados dos números enteros positivos m y n, definimos **matriz** de orden mxn (léase m por n) a una disposición rectangular de m.n números reales (o símbolos que representan números) encerrados entre paréntesis.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Se llama **orden** o **tamaño** de una matriz al número de filas y de columnas. Las filas se enumeran de arriba hacia abajo y las columnas de izquierda a derecha.

Los números o símbolos que se encuentran dentro de la matriz se llaman **elementos** o **términos**; para nombrarlos se emplea una sola letra junto con un doble subíndice para indicar su posición.

En general, un elemento cualquiera es a_{ij}, donde i indica la fila y j la columna a la cual pertenece el término.

Por ejemplo: a_{32} → este término se encuentra en la 3° fila, 2° columna

Abreviadamente, podemos indicar una matriz de la siguiente manera:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{mxn} \text{ donde } a_{ij} \text{ es el término genérico}$$

IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices A y B son iguales si y sólo si cumplen las siguientes condiciones:

- A y B tienen el mismo orden
- Todos los elementos correspondientes son iguales, es decir $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i=1,…, m y para todo j= 1,…, n.

En símbolos:

$$\text{Sea } A = \|a_{ij}\|_{mxn} \quad \text{y} \quad B = \|b_{ij}\|_{mxn}$$

Diremos que:

$$A = B \Leftrightarrow \forall i, \forall j \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \; donde \; i = 1,2,...,m$$
$$j = 1,2...,n$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1+1 & 2/2 \\ 2.3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+1 & 2/2 \\ 2.3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

CLASIFICACIÓN DE MATRICES: MATRICES ESPECIALES

MATRIZ RECTANGULAR:

Dada una matriz $A = \|a_{ij}\|_{mxn}$

Si **m ≠ n**, (las cantidades de filas y columnas son distintas), la matriz recibe el nombre de **rectangular.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Hay dos casos:

Si **m > n**, (número de filas mayor que el de columnas), la matriz es **rectangular vertical**.

Por ejemplo:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Si **m < n**, (número de filas menor que el de columnas) la matriz es **rectangular horizontal.**

Por ejemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{2x4}$$

MATRIZ COLUMNA O VECTOR COLUMNA:

Es una matriz rectangular vertical, de orden mx1

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{mx1}$$

Por ejemplo:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\mathrm{X}1}$$

MATRIZ FILA O VECTOR FILA:

Es una matriz rectangular horizontal, de orden 1xn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}_{1xn}$$

Por ejemplo:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{1\mathrm{x}3}$$

MATRIZ CUADRADA

Dada una matriz $A = \|a_{ij}\|_{mxn}$

Si **m = n**, (la cantidad de filas es igual a la cantidad de columnas), la matriz recibe el nombre de **matriz cuadrada.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}_{mxm}$$

<u>Por ejemplo</u>:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$$

<u>MATRIZ NULA:</u>

Dada una matriz $N = \|a_{ij}\|_{mxn}$, se dice que es una matriz nula, si todos sus elementos son ceros.

$$N\ es\ una\ matriz\ nula \Leftrightarrow a_{ij} = 0\ \forall i\ \forall j$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{mxn}$$

<u>Por ejemplo</u>:

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Dada una matriz cuadrada $A = \|a_{ij}\|_{mxm}$ diremos que es una matriz triangular inferior si y sólo si los $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}_{mxm}$$

Por ejemplo:

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Dada una matriz cuadrada $A = \|a_{ij}\|_{mxm}$ diremos que es una matriz triangular superior si y sólo si los $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}_{mxm}$$

Por ejemplo:

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{3x3}$$

MATRIZ DIAGONAL

Dada una matriz cuadrada $D = \|a_{ij}\|_{mxm}$ diremos que es diagonal si y solo si todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son iguales a cero. Es decir cuando es triangular superior e inferior a la vez.

$$D \text{ es matriz diagonal} \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}_{mxm}$$

Por ejemplo:

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{3x3}$$

MATRIZ UNIDAD

Dada una matriz cuadrada $I = \|a_{ij}\|_{mxm}$ es unidad si y solo si es una matriz diagonal que tiene todos sus elementos de la diagonal principal iguales a uno y los restantes elementos iguales a cero.

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=\dots=a_{mm}=1$$

$$I \text{ es matriz unidad} \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j \wedge a_{ij} = 1 \forall i = j$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{mxm}$$

Por ejemplo:

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

MATRIZ ESCALAR

Dada una matriz cuadrada $E = \|a_{ij}\|_{mxm}$ es escalar si y solo si es una matriz diagonal que tiene todos sus elementos de la diagonal principal iguales a una constante (distinta de 1 y de 0).

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=\ldots=a_{mm}=k$$

$$E\ es\ matriz\ escalar \Leftrightarrow a_{ij} = 0\ \forall i \neq j \wedge a_{ij} = k\ \forall i = j \quad (donde\ k \neq 0, \neq 1)$$

$$E = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & k \end{pmatrix}_{mxm}$$

Por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

MATRIZ OPUESTA

Dada la matriz $A = \|a_{ij}\|_{mxn}$ llamaremos matriz opuesta de A a una matriz del mismo orden que A, que se obtiene multiplicando todos los elementos de A por -1 y la indicaremos $-A = \|-a_{ij}\|_{mxn}$

Ejemplo:

$$Sea\ A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, la\ opuesta\ es\ -A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

ADICIÓN

Dadas dos matrices $A = \|a_{ij}\|_{mxn}$ y $B = \|b_{ij}\|_{mxn}$ del **mismo orden**, la adición que indicaremos como **A + B** da por resultado una nueva matriz tal que cada elemento se obtiene sumando a cada elemento de A el correspondiente elemento de B.

$$A + B = \|a_{ij}\|_{mxn} + \|b_{ij}\|_{mxn} = \|a_{ij} + b_{ij}\|_{mxn}$$

Es decir, se suman todos los elementos que se encuentran en la misma fila y la misma columna.

La condición para sumar dos o más matrices es que deben tener el mismo orden.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{2x3} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & -1 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -2+3 & \frac{1}{2}-1 & 3+0 \\ 0+\frac{1}{2} & -1+3 & 4-1 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Propiedades

Suponemos que en cada propiedad las matrices tienen un orden de manera que todas las operaciones sean posibles.

La adición de matrices verifica las siguientes propiedades:

a) Asociativa: A + (B + C) = (A + B) + C

b) Conmutativa: A + B = B + A

c) <u>Existencia de elemento neutro</u>: Existe la matriz nula N de orden mxn tal que para toda matriz A de orden mxn se cumple que A más la matriz N es igual a la matriz N más A, y esta suma es igual a la matriz A.

<u>En símbolos</u>:

$$\exists\, N, \forall\, A : A + N = N + A = A$$

d) <u>Existencia de matriz opuesta</u>: Para toda matriz A de orden mxn existe la opuesta −A tal que A más su opuesta es igual a la matriz nula.

<u>En símbolos</u>:

$$\forall\, A, \exists - A : A + (-A) = (-A) + A = N$$

<u>NOTA:</u> Restar a la matriz A la matriz B, es lo mismo que sumar a la matriz A la opuesta de la matriz B, es decir:

A – B = A + (- B)

<u>Ejemplo</u>:

$$\mathcal{S}i\ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathit{resulta}:$$

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{A} + (-\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+(-2) & 3+1 \\ 2+3 & 0+(-2) \\ 4+(-1) & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR</u>

Sea la matriz $A = \|a_{ij}\|_{mxn}$ y k un número real ($k \in IR$), el producto del escalar k por la matriz, que indicaremos **k.A**, dará como resultado una nueva matriz del mismo orden que la dada, donde cada elemento queda multiplicado por el escalar k.

$$k \cdot A = k \cdot \|a_{ij}\|_{mxn} = \|k.a_{ij}\|_{mxn}$$

Ejemplo:

$$k = -2 \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$k.A = -2.\begin{pmatrix} -3 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} -2.(-3) & -2.2 & -2.\frac{1}{2} \\ -2.0 & -2.5 & -2.(-1) \\ -2.2 & -2.1 & -2.3 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 \\ 0 & -10 & 2 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Propiedades

Sean A, B matrices de orden mxn y k, s números reales entonces se verifica:

a) (k + s).A = k.A + s.A

b) k.(s.A) = (k.s).A

c) k. (A + B) = k.A +k.B

d) (-1). A = -A

e) 0. A = N , 0 Є IR

f) k.N = N (N es la matriz nula)

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Dadas las matrices:

$$A = \|a_{ij}\|_{mxn} \quad y \quad B = \|b_{ij}\|_{nxp}$$

La condición para poder multiplicar 2 matrices es que el número de columnas de la primera debe ser **igual** al número de filas de la segunda matriz. El resultado es una matriz que tiene igual cantidad de filas que la primera matriz e igual cantidad de columnas que la segunda matriz.

$$A_{m\underbrace{xn} \, . \, B_{n}xp} = C_{mxp}$$

Donde:

$$C_{mxp} = \|c_{ij}\|_{mxp} \qquad siendo \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . b_{kj} \quad \forall i = 1,2,...,m; \quad \forall j = 1,2,...,p \quad \forall k = 1,2...,n$$

O sea se multiplica cada fila por cada columna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{2x4}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{2x4} =$$

$$\mathrm{A \cdot B} = \begin{pmatrix} 1.1 + 0.2 & 1.3 + 0.1 & 1.0 + 0.(-1) & 1.2 + 0.4 \\ -1.1 + 3.2 & -1.3 + 3.1 & -1.0 + 3.(-1) & -1.2 + 3.4 \\ 2.1 + 1.2 & 2.3 + 1.1 & 2.0 + 1.(-1) & 2.2 + 1.4 \end{pmatrix}_{3x4}$$

$$\mathrm{A \cdot B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & 10 \\ 4 & 7 & -1 & 8 \end{pmatrix}_{3x4}$$

En general, cuando se hace el producto de una matriz A por una matriz B se multiplican los elementos de izquierda a derecha de cada fila de A por los elementos de arriba hacia abajo de cada columna de B, y los elementos deben agotarse al mismo tiempo.

Propiedades

Sean A, B y C matrices conformables para el producto.

a) **Propiedad Asociativa** A. (B. C) = (A. B). C

b) **Propiedad Distributiva**

→Distributiva a derecha

A .(B + C) = A. B + A. C (se dice que A premultiplica a B + C)

→Distributiva a izquierda

(A + B). C = A. C + B. C (se dice que C posmultiplica a A + B)

c) c.(A. B) = (c. A). B = A. (c. B) ; c Є IR

Nota: la multiplicación de matrices **NO** verifica la propiedad conmutativa.

POTENCIA DE MATRICES

En función de la operación multiplicación de matrices definimos la potencia enésima de una matriz

Sean A una matriz cuadrada y n Є Z^+ definimos

$$A^0 = I$$

$$A^1 = A$$

$$A^{n+1} = A^n A^1$$

Ejemplo:

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \quad \Rightarrow$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Resolviendo la multiplicación se llega:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & -1 \\ -7 & -3 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Propiedades

Si A es una matriz cuadrada: A.A =A^2

Puede suceder que A^2=A, en este caso la matriz A es **idempotente.**

Por ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 0.(-1) & 1.0 + 0.0 \\ -1.1 + 0.(-1) & -1.0 + 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{A}$$

Puede suceder que A^2=I, en este caso la matriz A es **involutiva.**

Por ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 0.0 & 1.0 + 0.(-1) \\ 0.1 + (-1).0 & 0.0 + (-1).(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Sea A una matriz de orden nxn, verifica que: A^m. A^n=A^{m+n}=A^n.A^m n, m Є Z^+

Esta propiedad se demuestra teniendo en cuenta que m+n =n+m. podemos expresarla diciendo que las potencias de A conmutan entre sí.

MATRIZ TRANSPUESTA

Una operación matricial que no tiene un análogo en la aritmética de los números es la de obtener la **matriz transpuesta** de una matriz de orden mxn. La idea básica consiste en crear una nueva matriz cuyas filas sean las columnas de la original, y donde sus columnas sean las filas de la original, cambio que debe efectuarse de acuerdo al orden en que aparecen las filas y columnas en la matriz original.

Sea $A = \|a_{ij}\|_{mxn}$ una matriz de orden mxn. La transpuesta de A, que se simboliza con **A'** es una matriz de orden nxm que se obtiene intercambiando las filas y las columnas de A ordenadamente (la primera fila de A se convierte en la primera columna de A', la segunda fila de A se transforma en la segunda columna de A' y así sucesivamente).

$$A' = \|a_{ij}\|'_{mxn} = \|a_{ji}\|_{nxm}$$

Nota: Para transponer una matriz debemos cambiar filas por columnas o columnas por filas.

Ejemplo:

$$Si\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}_{2x3} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Propiedades

Al enunciar estas propiedades estamos pensando, como es usual, que los órdenes de las matrices dadas son tales que las operaciones algebraicas indicadas tienen sentido.

a) (A')' = A

b) (A + B)' = A' + B'

c) (c A)' = c A' siendo c un número real

d) (A B)' = B' A'

MATRIZ SIMÉTRICA

Dada la matriz cuadrada $A = \|a_{ij}\|_{mxm}$ Si A' = A, diremos que A es una matriz simétrica.

Resulta entonces:

$$a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, \forall j$$
$$Si\ a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow A' = A \Rightarrow A\ es\ simétrica$$

Ejemplo:

$$Si\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} = A \Rightarrow A\ es\ simétrica$$

DETERMINANTE

Dada una matriz cuadrada $A = \|a_{ij}\|_{nxn}$, a ella se le hace corresponder un número que se llama determinante de la matriz dada.

Si A es la matriz, su determinante lo indicaremos: $|A| \quad o \quad \det(A)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{nxn} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Si la matriz es de orden nxn ➔ el determinante es de orden **n.**

El determinante se calcula de acuerdo con una fórmula que indica las operaciones a realizarse con los números dispuestos en sus filas y columnas.

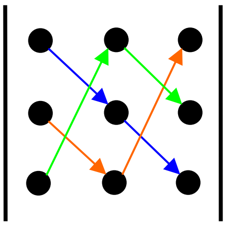
- Si la matriz es de orden 2x2:

Definimos el determinante de la matriz, como el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

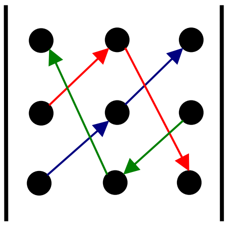
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2x2} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

- Si la matriz es de orden 3x3:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{31}.a_{12}.a_{23} - (a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{21}.a_{12}.a_{33} + a_{11}.a_{32}.a_{23})$$



A SUMAR



A RESTAR

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1).(-5) - 2.3 = 5 - 6 = -1$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathcal{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1).0.1 + (-2).(-1).0 + 3.2.1 - [3.0.0 + (-2).2.1 + (-1).(-1).1] =$$

$$= 0 + 0 + 6 - [0 + (-4) + 1] = 6 + 4 - 1 = 9$$

Dada una matriz A:

Si $|A| = 0$ se dice que la matriz es **singular**.

Si $|A| \neq 0$ se dice que la matriz es **no singular o regular**.

Regla de Sarros: (para determinantes de 3er. Orden)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Consiste en utilizar una disposición auxiliar en la que escribimos la matriz A seguida de sus dos primeras columnas (o sus dos primeras filas).

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad o \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Para calcular el determinante de la matriz A hacemos seis productos: es de los elementos de la diagonal principal de A y dos productos que los obtenemos de multiplicar los elementos que se encuentran en las líneas paralelas a dicha diagonal; los resultados de estos tres productos se suman.

A esta suma le restamos los productos de los elementos de la diagonal secundaria de A y de los elementos que se encuentran en las líneas paralelas a ésta. De esta forma obtenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{31}.a_{12}.a_{23} - (a_{21}.a_{12}.a_{33} + a_{11}.a_{32}.a_{23} + a_{31}.a_{22}.a_{13})$$

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1).0.1 + (-2).(-1).0 + 3.2.1 - [(-2).2.1 + (-1).(-1).1 + 3.0.0] =$$

$$= 0 + 0 + 6 - [(-4) + 1 + 0] = 6 + 4 - 1 = 9$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1) Dada la matriz A, es:

$|A| = |A'|$ "El determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta".

Esta propiedad permite que, dado un determinante, las propiedades dadas para sus filas sean válidas para las columnas.

Hablaremos de **hileras** para referirnos a filas y/o columnas.

2) "Si un determinante tiene **una hilera nula**, es **nulo**".

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo:

$$|\mathcal{B}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 0$$

3) "Si un determinante tiene **dos hileras iguales**, el determinante es **nulo**".

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo:

$$|\mathcal{B}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 0 + (-12) - [12 + 0 + (-12)] = 0$$

4) "Si en un determinante **un hilera se traslada 'p'** lugares, el nuevo determinante tiene como signo **$(-1)^p$**".

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3ra. Fila se trasladó 2 lugares.
$\therefore$ El signo del det es $(-1)^2$

Ejemplo:

$$|B| = (-1)^p.|A|$$

$$|\mathcal{A}| = \begin{vmatrix} -6 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 0 + 9 - [-\frac{3}{8} + 0 + 0] = 15 + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}$$

$$\Rightarrow |\mathcal{B}| = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ -6 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 9 + 6 + 0 - [0 + 0 - \frac{3}{8}] = 15 + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}$$

$$|B| = (-1)^p.|A|$$

$$|B| = (-1)^2.\frac{27}{8}$$

$$|B| = 1.\frac{27}{8} = \frac{27}{8}$$

La tercera fila se trasladó 2 lugares.

5) "Si en un determinante se **permutan dos hileras**, el determinante **cambia el signo**".

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{1n} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{11} \\ a_{2n} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{21} \\ a_{3n} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{31} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n1} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$|\mathcal{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - (0 + (-3) + 0) = 5$$

Si permutamos la 1ra fila con la 3ra.

$$|\mathcal{B}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + (-3) + 0 - (0 + 2 + 0) = -5$$

$$|A| = 5 \wedge |B| = -5$$

6) "Para multiplicar un determinante por un escalar basta multiplicar por él una hilera"

$$si\ |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow k.|A| = \begin{vmatrix} k.a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ k.a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k.a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Ejemplo:</u>

$$Si\ |\mathcal{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow -2.|\mathcal{A}| = -2.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2.\left[4+0+(-60)-[(-24)+0+10]\right] = -2.(-42) = 84$$

Multiplicando la 1ra columna por (-2).

$$\Rightarrow -2.|\mathcal{A}| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ -8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-8)+0+120-[48+0+(-20)] = 112-28 = 84$$

7) "Un determinante no varía si a una hilera se le suma otra multiplicada por un escalar" O sea reemplazando una hilera por una combinación lineal de ella con otra hilera.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+k.a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+k.a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}+k.a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Ejemplo:</u>

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1+3.2 & 0 \\ 1 & -1+3.1 & 3 \\ -3 & 0+3.(-3) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{8}{[(-2)+0+9]-[0+(-1)+0]=} \quad = \quad \underset{8}{[4+0+(-45)]-[0+5+(-54)]=}$$

8) "Si en un determinante una hilera está expresada como adición de dos términos, el determinante puede expresarse como adición de dos determinantes desdoblando dicha hilera".

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+m_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+m_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}+m_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & m_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & m_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & m_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$|\mathcal{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2+1 & 2 \\ 2 & 3+4 & -1 \\ -1 & 1+2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= [(0+4+2)-(-6-1+0)] + [(0+8+1)-(-8-2+0)] \\ &= [6-(-7)] + [9-(-10)] \\ &= 13+19 \\ &= 32 \end{aligned}$$

$$|\mathcal{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = [0+12+3]-[(-14)+0+(-3)] = 15-(-17) = 32$$

9) "El determinante de la **matriz unidad** es igual a **uno**".

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

MENOR COMPLEMENTARIO

Dado un determinante A de orden n, el determinante de orden n-1 que se obtiene suprimiendo la fila y la columna a que pertenece un término cualquiera se denomina **menor complementario** o simplemente, **menor**.

Si la fila y la columna suprimidas corresponden al término $\mathbf{a_{11}}$, el menor obtenido lo indicaremos $\mathbf{|A_{11}|}$

Sea: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow |A_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Ejemplo:

El menor complementario del término a_{32} del $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ es:

$$|\mathcal{A}_{32}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$$

ADJUNTO O COFACTOR

Denominaremos adjunto o cofactor de un elemento a_{ij} de un determinante, al número que indicaremos C_{ij}, que se obtiene:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}.|A_{ij}|$$

Es decir que el cofactor es el menor complementario al que se le ha asignado un signo.

De acuerdo con la definición:

$$C_{11} = (-1)^2.|A_{11}| = |A_{11}| \qquad C_{12} = (-1)^3.|A_{12}| = -|A_{12}|$$

Ejemplo:

Sea $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; el cofactor del a_{23} es:

$$C_{23} = (-1)^5.\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1).(2-3) = (-1).(-1) = 1$$

MATRIZ ADJUNTA

Se define así a la matriz de los cofactores traspuesta.

Ejemplo:

Dada una matriz 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Teniendo en cuenta que el adjunto cofactor de cada elemento se calcula:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} . |A_{ij}|$$

Nos queda:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA HILERA.

El uso de los cofactores permite calcular un determinante de otra forma.

Sea el determinante A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Desarrollando por definición:

$$|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{31}.a_{12}.a_{23} - a_{21}.a_{12}.a_{33} - a_{11}.a_{32}.a_{23} - a_{31}.a_{22}.a_{13}$$

Se elige convenientemente un hilera (nosotros tomaremos la 1° fila) y se extrae factor común dichos elementos.

$$|A| = a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{32}.a_{23}) + a_{12}(a_{23}.a_{31} - a_{21}.a_{33}) + a_{13}.(a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}) =$$

Cambiando el signo del segundo término, para poderlo expresar como determinante, nos queda:

$$|A| = a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{32}.a_{23}) - a_{12}(a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31}) + a_{13}.(a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}) =$$

Expresando las diferencias obtenidas como determinantes, queda:

$$|A| = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Se observa en esta expresión que cada término está formado por el producto de un elemento de la primera fila por el respectivo cofactor:

Es decir:

$$|\mathcal{A}| = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + a_{13}.C_{13}$$

En general

$$|\mathcal{A}| = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + ... + a_{1n}.C_{1n}$$

En los que i puede ser 1, o bien 2, o bien n, es decir i = 1, i =2,…, i = n según la fila que se elija para desarrollar el determinante.

Podemos escribir abreviadamente

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.C_{ik} \qquad con \quad i = 1,2,...,n$$

Esta fórmula nos permite calcular determinantes de 4to orden en adelante. También puede aplicarse a determinantes de 3er orden.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$, desarrollándolo por la 3ra columna.

$$|\mathcal{A}| = (-1).(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1).(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\mathcal{A}| = (-1).(5-0) + 1.(-2+3) + 0 = -5 + 1 = 4$$

MATRIZ INVERSA

Dada una matriz cuadrada $A = \left\| a_{ij} \right\|_{mxm}$, si existe una matriz que indicaremos A^{-1} con la condición de que verifique:

$$\mathbf{A.\ A^{-1} = A^{-1}.\ A = I}$$

A^{-1} es la matriz inversa de A o viceversa.

Si existe A^{-1} , decimos que A es inversible o invertible (como sinónimos suele usarse decir que A regular o no singular)

La condición necesaria, pero NO suficiente, para que una matriz tenga inversa es que sea cuadrada.

La condición suficiente, es que su determinante tiene que ser distinto de cero.

Sea A una matriz cuadrada. Si A tiene inversa entonces ésta es única.

CALCULO DE LA MATRIZ INVERSA

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{detA} . adj(A)} \quad \textbf{; det A} \neq \mathbf{0}$$

Ejemplo:

Calcular la Matriz Inversa de A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

1°) Se calcula el determinante de A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 3 + 0 - (-4 + 4 + 0) = 7 \neq 0$$

2°) Luego se busca el adjunto cofactor de cada elemento

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & -14 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3°) Se arma la matriz Adjunta

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 7 & -14 & 0 \end{pmatrix}$$

4°) Se divide por el det A; obteniendo la matriz inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades

Sean A y B matrices inversibles entonces:

a) La inversa de A B es igual a la inversa de B por la inversa de A.

En símbolos: $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

b) La inversa de la inversa de la matriz A es igual a la matriz A.

En símbolos: $(A^{-1})^{-1} = A$

c) La inversa de A' es igual a la transpuesta de la inversa de A.

En símbolos: $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES (SEL)

Ecuaciones lineales con n incógnitas

Una ecuación lineal con n incógnita es una expresión de la siguiente forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots + a_nx_n = b$$

Siendo x_1, x_2, x_3, x_4,..... , x_n las incógnitas, los a_1, a_2, a_3, a_4,.....a_n
Son números reales llamados coeficientes de la ecuación y b el término independiente.

Ejemplo:

$3x_1 + x_2 = 6$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$

Conjunto solución

El conjunto solución está formado por las infinitas **n – uplas** que satisfacen la ecuación.

En los ejemplos:

Para $3x_1 + x_2 = 6$

Si $x_1 = 2$ entonces $x_2 = 0$

Si $x_1 = 1$ entonces $x_2 = 3$

Es decir : **S = { (2 , 0) , (1 , 3) .... }**

Para $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$

Si $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ entonces $x_3 = 10$

Si $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$ entonces $x_3 = 4$

Es decir : **S = { (2.1 , 10) , (0 , 3.4) .... }**

Sistema de ecuaciones lineales

Cuando tenemos dos o más ecuaciones lineales con n incógnitas, estas constituyen un sistema de ecuaciones lineales que abreviaremos (SEL).

Simbólicamente un sistema de **m** ecuaciones con **n** incógnitas, se expresa de la siguiente manera:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Observe que los coeficientes de cada ecuación se expresan con dos subíndices, el primero indica la ecuación y el segundo indica a qué incógnita está multiplicando. Por ejemplo $\mathbf{a}_{\mathbf{23}}$ representa el coeficiente de la segunda ecuación que multiplica a la tercera incógnita.

Notación matricial:

Si definimos la matriz de coeficientes **A**, de orden m x n de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Si definimos la matriz **X** (columna de orden n x 1), con las incógnitas de la siguiente manera:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1}$$

Si definimos la matriz **B** (columna de orden m x 1), con los términos independientes, de la siguiente manera:

$$x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}_{mx1}$$

El sistema se podría expresar como producto matricial de la siguiente manera:

A . X = B

Conjunto solución de un SEL

El conjunto solución de un SEL está formado por las soluciones comunes a todas las ecuaciones.

Pueda que el sistema tenga o no solución. Si tiene solución se dice que el sistema es **COMPATIBLE**, si no tiene solución el sistema es **INCOMPATIBLE**.

En el caso de ser compatible el sistema puede tener solución única **o infinitas soluciones. Si tiene solución única el sistema es COMPATIBLE** DETERMINADO, si tiene infinitas soluciones el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

El Problema es ahora determinar si existe el conjunto solución, y encontrarlo.

REGLA DE CRAMER (para sistemas de ecuaciones cuadrados)

La Regla de Cramer se utiliza para resolver sistemas de n ecuaciones con n incógnitas, es decir sistemas cuadrados.

Enunciado:

Dado un SEL de n ecuaciones con n incógnitas en forma matricial: A. X = B

Con det A ≠0, se verifica que la única solución del sistema es

$X^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n]$ (está traspuesta para mayor comodidad de escritura)

Con

$$\boxed{x_i = (\det A_i) / \det A}$$

Donde A_i es la matriz de orden n que se obtiene a partir de A sustituyendo su columna i – ésima por los elementos de la matriz columna B de términos independientes.

Del enunciado se desprende que la condición para que el sistema sea determinado el det A debe ser no nulo.

Para demostrar la regla de manera más sencilla, lo haremos para un sistema de 3 x 3.

Sea el siguiente sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Si lo escribimos en la forma matricial sería:

$$A. X = B$$

Si multiplicamos miembro a miembro por la inversa de A (recuerde que el det A es ≠ 0):

$$A^{-1}. A. X = A^{-1}. B$$

Por definición de matriz inversa: $A^{-1}. A = I$ (matriz identidad)

$$I. X = A^{-1}. B$$

Pero I. X = X por ser I el elemento neutro de la multiplicación

Luego nos queda:

$$X = A^{-1}. B$$

Pero sabemos que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot Adj(A)$

(Recuerde que la matriz Adj (A) es la matriz de cofactores, por lo tanto:

$$A^{-1} = 1/\det A. \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el producto nos queda:

$$A^{-1} = 1/\det A. \begin{pmatrix} c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + c_{31}b_3 \\ c_{12}b_1 + c_{22}b_2 + c_{32}b_3 \\ c_{13}b_1 + c_{23}b_2 + c_{33}b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La primera fila corresponde al desarrollo del determinante de la matriz A_1 por los elementos de la 1ra. Columna, donde A_1 es la matriz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & c_{12} & c_{13} \\ b_2 & c_{22} & c_{23} \\ b_3 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \qquad \det A_1 = c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + c_{31}b_3$$

Por lo tanto podemos decir que

$x_1 = \det A_1 / \det A$

De igual manera se puede hacer con las otras dos filas, por lo tanto, podemos decir:

$x_2 = \det A_2 / \det A$

$x_3 = \det A_3 / \det A$

<u>Aclaración:</u>

Sea A . X = B un sistema de n ecuaciones con n incógnitas,

- **Si det A = 0 y det A_i = 0 ∀i = 1 , ... , n entonces el sistema es indeterminado**
- **Si det A = 0 y det A_i ≠ 0 ∀i = 1 , ... , n entonces el sistema es incompatible**
- **Si det A ≠ 0 entonces el sistema es compatible determinado**

La Regla de Cramer conviene usarla cuando el determinante de A es no nulo.

<u>Ejemplo</u>:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x - y + z = -7} \\ \boldsymbol{-x + 2y + 2z = 3} \\ \boldsymbol{3x + y - z = 2} \end{cases}$$

Primero sacamos el determinante principal, que es el determinante de los coeficientes de las incógnitas, en el orden que se encuentra)

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \big(-4 + (-1) + (-6)\big) - (6 + (-1) + 4) = -20 \neq 0$$

Para calcular cada incógnita se realiza el cociente entre el determinante de dicha incógnita, y el determinante general.

Para sacar el determinante de cada incógnita, se debe sustituir la columna de dicha incógnita por la columna de los términos independientes.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{\big(14 + 3 + (-4)\big) - \big(4 + 3 + (-14)\big)}{-20} = \frac{20}{-20} = -1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{\big(-6 + (-2) + (-42)\big) - (9 + (-7) + 8)}{-20} = \frac{-60}{-20} = 3$$

$$z = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -7 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{\big(8 + 7 + (-9)\big) - (-42 + 2 + 6)}{-20} = \frac{40}{-20} = -2$$

S={(-1,3;-2)}

<u>RANGO DE UNA MATRIZ</u>

Dada una matriz A $_{m \times n}$, no nula, llamaremos rango o característica de esa matriz al orden del determinante (de mayor orden) distinto de cero , que se puede formar. Se indica con la letra h.

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{2x2}$ det A = 15 - 4 = 11 ≠ 0 , por lo tanto **h = 2**

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3x4}$$

Formamos una submatriz cuadrada, y calculamos su determinante, por ejemplo:

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 20 - (8 + 0 - 10) = 28 + 2 = 30 \neq 0$$

por lo tanto la característica o rango de la matriz B es **3, h = 3**

Ejemplo:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 10 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 0 + 40 - (40 + 0 - 8) = 32 - 32 = 0$$

Formamos una submatriz cuadrada de dos por dos, y calculamos su determinante:

$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4 \neq 0$ luego el rango es dos, es decir h = 2.

Nota:

- Si la matriz A es de orden n x n, entonces el rango o característica de A puede ser menor o igual que n, es decir: h ≤ n.
- Si el rango de la matriz cuadrada coincide con el orden de la matriz (como en el caso de la matriz A) se dice que la matriz es **regular**

- Dos matrices del mismo tamaño m x n , se dice que son matrices **equivalentes** si tienen el mismo rango.
- Toda matriz cuadrada de orden n , regular, es equivalente a una matriz triangular superior de orden n

Propiedad del rango

Si en una matriz se efectúan operaciones elementales de filas o columnas, no se altera su rango o característica, es decir se obtiene una matriz equivalente a la dada.

Las operaciones elementales son las siguientes:

a) Multiplicar una hilera por un número no nulo

b) Permutar dos hileras.

c) Sumarle o restarle a una hilera un múltiplo de otra.

Ejemplo:

Dada la matriz A obtener una matriz equivalente

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$ det A $\neq 0$ luego h = 2

Obtenemos una matriz equivalente a la dada si multiplicamos la primera fila por dos:

$B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$ det B = -22 por lo tanto h = 2

También se puede obtener otra matriz equivalente a la matriz A, si a la segunda fila le sumamos un múltiplo de la primera:

$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}_{2x2}$ en este caso a la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por 2

det C $\neq 0$ por lo tanto sigue siendo h = 2

Ejercitación:

1) Hallar una matriz equivalente a la matriz A, de orden 3, regular, que sea triangular superior.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

La idea es realizar operaciones elementales de fila para trasformar la matriz dada en una triangular superior, es decir, trasformarla en una matriz que tenga todas los elementos por debajo de la diagonal principal iguales a cero:

a) La primera fila se deja igual

b) La segunda se reemplaza por la suma de la fila 1 más la fila 2. es decir: $F_2 = F_2 + F_1$

c) La tercera fila se reemplaza por la fila 3 más el doble de la fila uno, es decir:

$F_3 = F_3 + 2 . F_1$

La matriz que nos queda es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Para que sea triangular superior nos queda por anular el elemento a_{32} , para ello hacemos lo siguiente:

A la fila 3 la reemplazamos por la fila 3 menos el doble de la fila 2, es decir: $F_3 = F_3 - 2 .F_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

La matriz así obtenida es triangular superior , y es equivalente a la matriz dada.

Observe que el determinante de la matriz obtenida es – 4, por lo tanto su rango es 3.

Quiere decir que el método usado nos permite calcular también el rango o característica de la matriz C.

2) Hallar una matriz equivalente a la matriz B, de orden 3 x 3, que sea triangular superior

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Los pasos son:

a) $\mathbf{F_2 = F_2 + 2 . F_1}$

b) $\mathbf{F_3 = F_3 + 3 . F_1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Ahora anulamos el elemento a $_{32}$, haciendo : F$_3$ = F $_3$ – F$_2$

Nos queda:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Vemos que en este caso, se ha obtenido una hilera llena de ceros, por lo tanto su determinante es cero, lo que indica que el rango de esa matriz es dos, y por ser equivalente a la matriz B, deducimos que el rango de B también es dos.

Forma de cálculo del rango de una matriz

El ejercicio anterior nos da un método práctico sencillo para calcular el rango o característica de una matriz, sea o no cuadrada.

La idea es aplicar operaciones elementales de fila para transformar a la matriz dada en una matriz que tenga todas las posiciones nulas por debajo de la diagonal que une los elementos a $_{ii}$. Obtenida esa matriz equivalente, el rango está dado por las filas no enteramente nulas.

En resumen:

Dada la matriz A de orden m x n,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Para calcular su rango se hacen los siguientes pasos:

a) Se traza la diagonal que une todos los elementos a $_{ii}$.

b) Se realizan operaciones elementales de fila para anular todas las posiciones por debajo de dicha diagonal.

c) El rango está dado por el número de filas no nulas de la matriz obtenida.

SISTEMA GENERAL DE m ECUACIONES CON n ICÓGNITAS

Analizaremos ahora el caso de tener un sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La matriz de coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

La matriz **ampliada del sistema** es la matriz de coeficientes a la que se le agrega una columna con los términos independientes:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}_{mx(n+1)}$$

Indicaremos con **h al rango de la matriz de coeficientes** y con **h' al rango de la matriz ampliada.**

Veremos ahora un teorema que nos permite analizar si el sistema es compatible o incompatible.

<u>TEOREMA DE ROUCHE – FROBENIUS:</u> (Condición de existencia de la solución)

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene solución si y solo si el rango de la matriz del sistema es igual al rango de la matriz ampliada.

Si además el rango de la matriz del sistema coincide con el número de incógnitas, el sistema es **determinado con una única solución**.

Si el número de incógnitas es mayor que el rango de la matriz del sistema, el sistema admite **infinitas soluciones**, es decir **indeterminado .**

<u>En símbolos</u>:

Incompatible: h ≠ h'

(sin solución)

SEL

Compatible: h = h' **(con solución)**

- **determinado si h = n** **(solución única)**
- **indeterminado si h < n** **(infinitas soluciones)**

<u>Sistemas de ecuaciones equivalentes</u>

Dos sistemas de ecuaciones lineales de igual tamaño son equivalentes, si y solo si tienen el mismo conjunto solución.

Las matrices de coeficientes de los dos sistemas son matrices equivalentes.

Propiedad

Si en un sistema de ecuaciones lineales **A.X=B** , se efectúan operaciones elementales entre sus ecuaciones, se obtiene un sistema equivalente al dado. Las operaciones elementales son:

- Intercambiar ecuaciones
- Multiplicar una ecuación por un número no nulo
- Sumar o restar a una ecuación un múltiplo de otra.

<u>Ejemplo</u>:

Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x -4y = 2 \\ -1x + 3y = 1 \end{cases}$$

Su conjunto solución es S = { (5 , 2) }

Un sistema equivalente al dado se puede obtener, por ejemplo si sumamos a la segunda ecuación, la primera:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ 1x -1y = 3 \end{cases}$$

Su conjunto solución también es : S = { (5 , 2) }

METODO PARA EL CÁLCULO DEL CONJUNTO SOLUCIÒN DE UN SEL
METODO DE GAUSS – JORDAN

La idea del método es transformar el sistema original en otro equivalente, cuya matriz de coeficientes sea triangular superior (si el sistema es cuadrado) o que por lo menos, todos los elementos por debajo de la diagonal que une los a_{ii} sean nulos.

De esta manera se puede resolver más fácilmente el sistema por despeje.

La forma de transformar el sistema original en otro equivalente, es efectuando las operaciones elementales vistas anteriormente entre las ecuaciones, las cuales eran:

- Intercambiar ecuaciones
- Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo (o dividir)
- Sumar o restar a una ecuación un múltiplo de otra

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución utilizando el método de Gauss – Jordan, y el Teorema de Rouché Frobenius.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -1x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Formamos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada en una sola matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trazamos la diagonal que une los elementos a_{ii}, y aplicamos operaciones elementales de fila para anular los elementos por debajo de la diagonal (matriz triangular superior). Esto no va a permitir encontrar h y h', y además encontrar una matriz equivalente.

a) Debemos hacer 0 el elemento a_{21}. Para realizarlo se toma la fila al cual pertenece el elemento (F_2) y por estar en la primera columna se toma la primera fila (F_1). Luego se multiplican ambas filas por el primer elemento de la otra para igualar dicho elemento. por último, si los signos de los elementos son iguales las filas se restan, si son contrarios se suman:

Nos queda: $F'_2 = 3.F_2 + F_1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$3.F_2$ +	-3	-3	3	-3
F_1	3	2	-1	2
F'_2=	0	-1	2	-1

b) Continuamos anulando el elemento a_{31}, se aplica el mismo procedimiento del elemento anterior, por lo tanto:

Nos queda: $F'_3 = 3.F_3 - F_1$

$3.F_3$ -	3	-6	-6	0
F_1	3	2	-1	2
F'_3=	0	-8	-5	-2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Luego se hace cero el elemento a_{32}.Se aplica el mismo procedimiento, pero por estar en la segunda columna se toma la segunda fila.

Nos queda: $F'_3 = F_3 - 8.F_2$

F_3 -	0	-8	-5	-2
$8.F_1$	0	-8	16	-8
F'_3=	0	0	-21	6

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -21 & 6 \end{pmatrix}$$

Vemos entonces que, si miramos solo la matriz A, su rango es 3, es decir h = 3

Si miramos la matriz ampliada su rango es 3, es decir h' = 3

Por lo tanto, el sistema es compatible, y como h es igual al número de incógnitas según Rouché Frobenius sabemos que tiene solución única, es decir **compatible determinado**.

Con la nueva matriz obtenida armamos un nuevo sistema equivalente al original:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ \quad -1x_2 + 2x_3 = -1 \\ \quad\quad -21x_3 = 6 \end{cases}$$

Este sistema es equivalente al anterior, por lo tanto tiene el mismo conjunto solución.

Si de la última ecuación despejamos x_3, nos queda $x_3 = -2/7$

Sustituyendo en la segunda, despejamos x_2: $-1x_2 - 4/7 = -1$

$x_2 = 3/7$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$3x_1 + 6/7 + 2/7 = 2$

$x_1 = 2/7$

Por lo tanto: **S = {(2/7; 3/7, -2/7)}**

<u>Otro ejemplo</u>:

$$\begin{cases} 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 1x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

Calculamos h y h ', formamos la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$ Trazamos la diagonal y anulamos las posiciones por debajo

$F'_2 = 2.F_2 - F_1$ $\qquad$ $F'_3 = 2.F_3 - 3.F_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -5 & 5 \\ 0 & -9 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Ahora anulamos el elemento a_{32}, para ello: $F'_3 = F_3 + F_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tener una fila nula h = 2 y h' = 2, por lo tanto es **determinado**. Pero como es menor al número de incógnitas, significa que hay infinitas soluciones, es decir el sistema es **compatible indeterminado.** Para hallar algunas soluciones, armamos con la matriz hallada un sistema equivalente al original:

$$\begin{cases} 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ 9x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Como **n - h = 1**, hay una variable que puede tomar cualquier valor Esa variable se llama libre. Se puede dar a x_3 un valor cualquiera, por ejemplo el valor **1**, y reemplazamos en el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 1x_2 + 1 = 1 \\ 9x_2 - 5 = 5 \end{cases}$$

Despejamos x_2: $\mathbf{x_2 = 10/9}$

Reemplazando en la primera ecuación: $2x_1 - 10/9 + 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 5/9}$

Luego si $\mathbf{x_3 = 1}$ entonces $\mathbf{x_2 = 10/9}$ $\mathbf{x_1 = 5/9}$

Esta sería una de las soluciones. Si queremos otra, se le da otro valor a x_3, y se procede de la misma manera.

Por lo tanto: S = {(5/9; 10/9, 1), ...}

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEO

Este es un sistema de ecuaciones lineales donde todas las ecuaciones están igualadas a cero, simbólicamente.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

En forma matricial: **A . X = O** donde **O** es la matriz nula.

Es evidente que si aplicamos el Teorema de Rouché Frobenius en este caso, vemos que SIEMPRE el rango de la matriz de coeficientes h y el rango de la matriz ampliada h' , son iguales. Por lo tanto podemos decir que:

Un SEL homogéneo es SIEMPRE COMPATIBLE, es decir siempre tiene solución.

Lo que puede ocurrir es que sea:

- **determinado** (única solución): si h es igual que el número de incógnitas. En este caso es evidente que la única solución es la **trivial**, es decir todas las incógnitas valen cero.
- **indeterminado** (infinitas soluciones): si h es menor que el número de incógnitas. En este caso además de la solución trivial, existen otras soluciones del sistema.

La forma de resolver un SEL homogéneo es aplicando también GAUSS - JORDAN.

Veremos ahora un ejemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 0 \\ 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 0 \\ -1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0 \end{cases}$$

Debemos calcular h para ver si es determinado o indeterminado

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$F'_2 = 3F_2 - F_1$

$F'_3 = 3F_3 + F_1$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

F' $_3$ = 7.F $_3$ – 2.F $_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -64 \end{pmatrix}$$

Nos queda que h = 3, por lo tanto el sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO** con solución trivial, es decir:

S = {(0; 0, 0)}

Otro ejemplo:

$$\begin{cases} 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 0 \\ 2x_1 - 1x_2 - 1x_3 = 0 \\ 3x_1 - 1x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Calculamos h

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

F'$_2$ = F$_2$ – 2 F$_1$ F'$_3$ = F$_3$ – 3 F$_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

F'$_3$ = F $_3$ – 2 F$_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso el rango es dos, por lo tanto el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**, quiere decir que además de la trivial hay otras soluciones.

Para hallar algunas, formamos el nuevo sistema equivalente al anterior:

$$\begin{cases} x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Le damos ahora a alguna de las incógnitas un valor cualquiera, por ejemplo a $\mathbf{x_3 = 1}$ (que no sea nunca cero por que se obtendría la solución trivial), y reemplazamos en el sistema

$$\begin{cases} x_1 - 1x_2 + 1 = 0 \\ x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Entonces $\mathbf{x_2 = 3}$

Y reemplazando en la primera ecuación nos queda:

$x_1 - 3 + 1 = 0$

$x_1 = 2$

S = {(2, 3, 1) , ... }