UNIDAD 3:

VECTORES

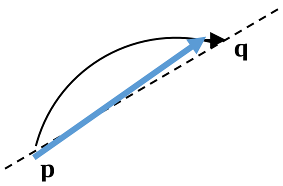
Muchas cantidades, tanto en geometría como en física, tales como el área, el volumen, la temperatura, la masa y el tiempo; pueden caracterizarse mediante un único número real en una escala de medición apropiada. Conocemos estas cantidades como **magnitudes escalares** y denominamos **escalar** al número real asociado con cada una de ellas.

Otras magnitudes tales como la fuerza y la velocidad, contienen ambas, magnitud y dirección y no pueden caracterizarse completamente mediante un único número real. Para representar tales magnitudes usaremos un **segmento orientado**.

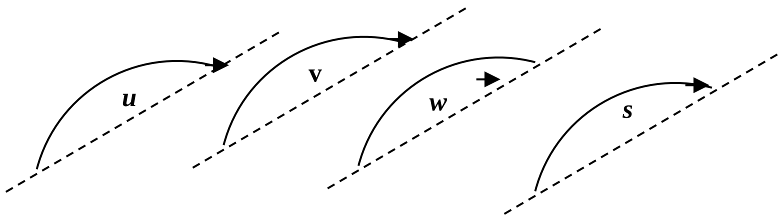
Se llama **vector** a todo **segmento orientado** $\left(\overrightarrow{pq}\right)$ que está determinado por un **par ordenado** de puntos

Los **elementos de un vector** son:

- El **punto de aplicación**, es el **origen** del vector
- La **dirección del vector** lo da su **recta de acción**
- El **sentido del vector** lo da la **flecha**
- El **módulo del vector** que lo da su **longitud** $\|v\|$



Dos segmentos orientados d la misma longitud y dirección se llaman **equivalentes**. Al conjunto de todos los segmentos orientados que son equivalentes a uno dado lo llamamos **vectores del plano o espacio**, los cuales se los denominan con las letras minúsculas ***u, v, w,*** ....



Un segmento orientado cuyo punto inicial está en el origen, (**se fija un punto "o"**), puede representarse de forma única por las coordenadas de su punto final. Se conoce esto como vector en forma de componentes y se escribe:

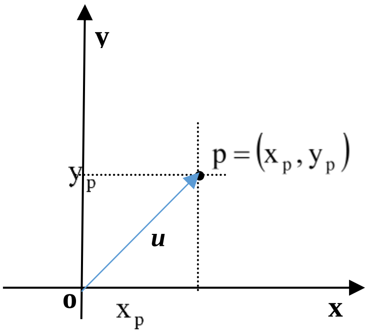
$$u=\left(u_x, u_y\right) \quad \text{en} \quad IR^2 \text{ (en el plano)} \quad \text{y} \quad u=\left(u_x, u_y, u_z\right) \quad \text{en} \quad IR^3 \quad \text{(en el espacio)}$$

donde $u_x, u_y, \ldots$ son las componentes del vector ***u.***

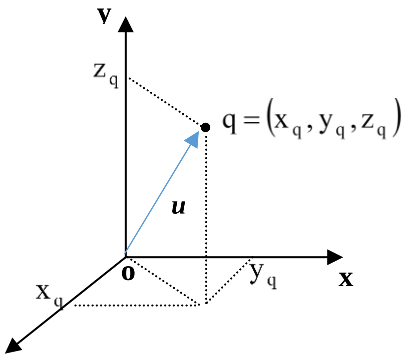
Si ambos puntos, el inicial y el final, son el origen, entonces a ***u*** se le llama vector nulo y se denota mediante $o=(x_0, y_0)$ en IR^2 y $o=(x_0, y_0, z_0)$ en IR^3

Componentes de un vector

Las componentes de un vector $u = \overrightarrow{op} = (u_x, u_y)$ en el plano IR^2, o bien $u = \overrightarrow{oq} = (u_x, u_y, u_z)$ en el espacio IR^3; se determinan a partir de esas coordenadas del siguiente modo



en el plano IR^2



en el espacio IR^3

$$\overrightarrow{op} = u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p - x_0 \\ y_p - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{oq} = u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_q - x_0 \\ y_q - y_0 \\ z_q - z_0 \end{pmatrix}$$

Nótese que si las coordenadas del punto “o” fueran **o = (0, 0)** en IR^2, o bien **o = (0, 0, 0)** en IR^3 las componentes de un vector $u = \overrightarrow{op}$ coincidirían con sus coordenadas

Ejemplo:

- En el **plano** IR^2: sea el vector u con origen en o = (2, 4) y el extremo p = (5, 8) para obtener el **vector** ***u*** según sus **componentes** se debe hacer:

  u = (5 –2, 8 –4) = **(3, 4)**

- En el **espacio** IR^3: sea el vector u con origen en o = (1, -2, 3) y el extremo q = (4, 5, 1) para obtener el **vector** ***u*** según sus **componentes** se debe hacer:

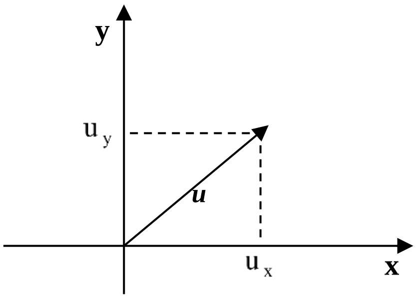
  u = (4 – 1, 5 – (-2), 1 – 3) = **(3 , 7, -2)**

Módulo, longitud o norma de un vector

El **módulo**, **longitud** o **norma** de un **vector** se denota. $\|u\|$ y se calcula aplicando el teorema de Pitágoras a las componentes del vector dado

Si $u = (u_x, u_y)$

$$\boxed{\|u\| = \sqrt{u_x^{\,2} + u_y^{\,2}}}$$



Ejemplo:

Dado el vector u = (2, -4) , su módulo o longitud se calcula del siguiente modo

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 4{,}47 \qquad \text{en el plano } IR^2$$

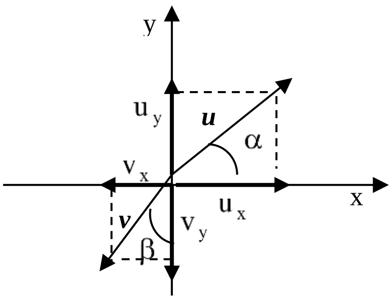
Se pueden dar también a partir de sus coordenadas; por ejemplo: dado el vector ***u***, cuyo origen es o = (3, -7) y su extremo p = (-2, 5), su módulo o longitud se calcula del siguiente modo:

$$\|u\| = \left\|\overrightarrow{op}\right\| = \sqrt{(-2-3)^2 + [5-(-7)]^2} = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{169} = 13 \qquad \text{en el plano } IR^2$$

Se trabaja de igual manera en el espacio, por lo tanto si se tiene el vector u = (3, -2, 4) , su módulo o longitud se calcula del siguiente modo

$$\|u\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29} = 5{,}38 \qquad \text{en el espacio } IR^3$$

- Nótese que las componentes de un vector fijo del plano IR^2, también pueden expresarse, si se tiene como dato el módulo del vector y el ángulo que éste forma con uno de sus ejes, por ejemplo:



$u_x = u.cos(\alpha)$ y $u_y = u.sen(\alpha)$

$v_x = v.cos(270° - \beta)$ y $v_y = v.\text{sen}(270° - \beta)$

Obsérvese que las componentes de cada vector se expresan, según él ángulo que se toma respecto del eje x positivo hasta la fuerza, medido en sentido antihorario.

Vectores normados

Se denominan vectores normados a aquellos cuya norma es uno, es decir: $\|u\| = 1$ por lo tanto ***u*** es un **vector normado**

Si un vector, no nulo, tiene norma distinta de 1, es posible normalizarlo, lo que significa obtener otro vector que depende de él pero que tenga norma uno, para ello es suficiente con multiplicar el vector por el real inverso de su norma, es decir:

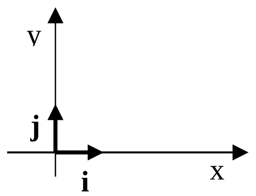
$$u \neq \vec{0} \quad \|u\| \neq 1,\ \text{entonces}:\ u_1 = \frac{1}{\|u\|}.u \quad \text{y} \quad \|u_1\| = 1$$, lo que implica que u_1 es normado

Ejemplo:

Sea u = (2, -4) el vector normado será: $u_1 = \dfrac{(2,-4)}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{20}}.(2,-4) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{20}}, \dfrac{-4}{\sqrt{20}}\right)$

<u>Vectores unitarios canónicos</u>

Los vectores unitarios (1, 0) y (0, 1) se conocen con el nombre de vectores unitarios canónicos del plano IR^2, y se denotan por:



i = (1, 0) y **j** = (0, 1)

como se muestra en la figura, estos vectores pueden usarse para representar cualquier vector del plano es decir:

$$u = (u_x, u_y) = u_x.(1,0) + u_y.(0,1) = u_x.i + u_y.j \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = u_x.i + u_y.j}$$

Este vector lo llamamos combinación lineal de ***i*** y de ***j***. Los escalares u_x y u_y son las **componentes horizontales** (en el eje "x") y **verticales** (en el eje "y") de ***u*** respectivamente

Ejemplo:

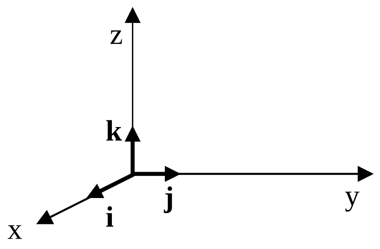
Sea ***u*** el vector cuyo punto inicial es (2, -5) y extremo o punta (-1, 3) y sea ***v*** = (2, -1) se expresa ambos vectores como combinación lineal de los vectores unitarios canónicos de la siguiente manera:

$$u = \overrightarrow{op} = \left(x_p - x_0\ ,\ \ y_p - y_0\right) = (-1-2\ ,\quad 3-(-5)\ \ ) = (-3,\ 8) = -3.i + 8j$$

$$v = (2,-1) = 2.i - 1.j$$

En el espacio IR^3 se trabaja de manera similar, siendo los vectores unitarios canónicos:
$i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 1)$

como se muestra en la figura, estos vectores pueden usarse para representar cualquier vector del espacio es decir:



$$u = (u_x, u_y, u_z) = u_x.(1,0,0) + u_y.(0,1,0) + u_z.(0,0,1) = u_x.i + u_y.j + u_z.k$$

por lo tanto $\boxed{u = u_x.i + u_y.j + u_z.k}$

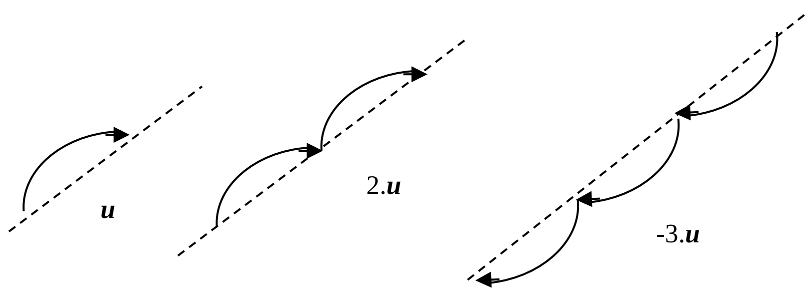
Ejemplo:

Si u = (2, -1, 3) se expresa según los vectores unitarios canónicos del espacio como:

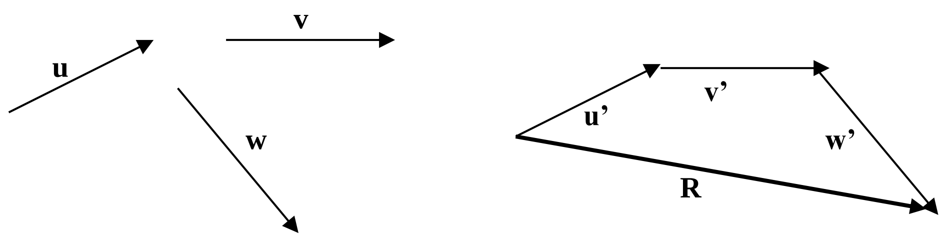
u = (2, -1, 3) = 2.i – 1.j + 3k

<u>Operaciones con vectores</u>

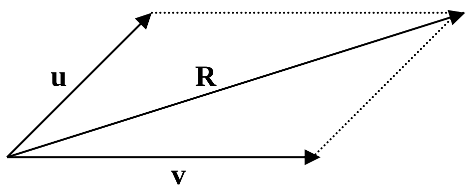
Las dos operaciones básicas con vectores son la **suma de vectores** y la **multiplicación de un vector por un escalar**. Geométricamente, el producto de un vector ***u*** por un escalar "**c**", es un vector que es "**c**" veces la longitud de ***u***. Si c es positivo, entonces **c**. ***u*** tiene el mismo sentido que ***u***, y si **c** es negativo, entonces **c**. ***u*** tiene sentido opuesto a ***u***



Para **sumar vectores geométricamente**, los colocamos (sin cambiar su longitud sentido y dirección) de forma tal que el punto de aplicación de uno de ellos coincida con el extremo del otro. La suma de u + v se conoce como el vector resultante y se forma uniendo el punto de aplicación del segundo con el extremo o punta del primero y así sucesivamente. Este método se lo conoce como método de la poligonal o del polígono. Se representa de la siguiente manera:



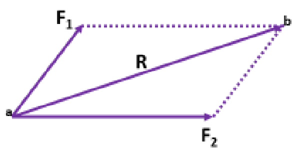
También se pueden sumar los vectores con el método del paralelogramo como indica la figura



2) Dadas dos fuerzas de 35 Kgf y 60 Kgf, encontrar la resultante gráficamente por el método del paralelogramo y analíticamente por el teorema del coseno, sabiendo que ellas forman un ángulo de 60°.

Gráficamente → **Método del paralelogramo**

Escala
10kgf → 1cm
F_1=35kgf → 3,5cm
F_2=60kgf → 6 cm



1cm → 10kgf
8,2 cm→ x= 82 kgf = R

Analíticamente → **Teorema del coseno**

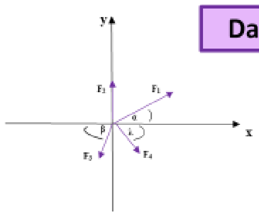
$$R = \sqrt{(F_1)^2 + (F_2)^2 + 2.F_1.F_2.\cos\alpha}$$

$$R = \sqrt{(35kgf)^2 + (60kgf)^2 + 2.35kgf.60kgf.\cos 60°}$$

$$R = 83{,}22kgf$$

Sistema de Fuerzas

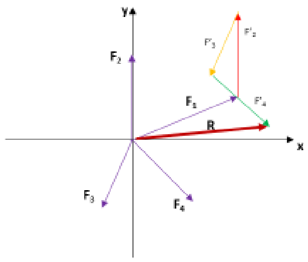
Dado Un sistema de Fuerzas



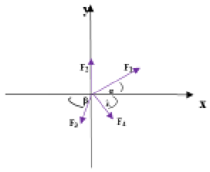
$$\begin{cases} F_1 = 30Kgf & \alpha = 30° \\ F_2 = 25Kgf & \beta = 60° \\ F_3 = 20Kgf & \lambda = 45° \\ F_4 = 20Kgf & \end{cases}$$

Gráficamente → **Método de la poligonal**

Escala
10 kgf → 1cm
F_1=30kgf→3 cm
F_2=25kgf→2,5 cm
F_3=20kgf→2 cm
F_4=20kgf→2 cm



Cálculo para sacar la resultante
1cm → 10kgf
3,1 cm→ x = 31 kgf=R



$$\begin{cases} F_1 = 30Kgf & \alpha = 30° \\ F_2 = 25Kgf & \beta = 60° \\ F_3 = 20Kgf & \lambda = 45° \\ F_4 = 20Kgf & \end{cases}$$

Analíticamente → **Descomposición de fuerzas**

$F_{1x} = F_1 .\cos \alpha$
$F_{1x} = 30\ Kgf .\cos 30°$
$\boxed{F_{1x} = 25{,}98\ Kgf}$

$F_{1y} = F_1 .sen\ \alpha$
$F_{1y} = 30\ Kgf .sen\ 30°$
$\boxed{F_{1y} = 15\ Kgf}$

$\boxed{F_{2y} = 25\ Kgf}$

$F_{3x} = F_3 .\cos \beta$
$F_{3x} = 20\ Kgf .\cos 240°$
$\boxed{F_{3x} = -10\ Kgf}$

$F_{3y} = F_3 .sen\ \beta$
$F_{3y} = 20\ Kgf .sen\ 240°$
$\boxed{F_{3y} = -17{,}32\ Kgf}$

$F_{4x} = F_4 .\cos \lambda$
$F_{4x} = 20\ Kgf .\cos 315°$
$\boxed{F_{4x} = 14{,}14\ Kgf}$

$F_{4y} = F_4 .sen\ \lambda$
$F_{4y} = 20\ Kgf .sen\ 315°$
$\boxed{F_{4y} = -14{,}14\ Kgf}$

$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$
$R = \sqrt{(30{,}12Kgf)^2 + (8{,}54Kgf)^2}$
$\boxed{R = 31{,}30Kgf}$

$tg\ \varphi = \dfrac{R_y}{R_x}$
$tg\ \varphi = \dfrac{8{,}54Kgf}{30{,}12Kgf}$
$\boxed{\varphi = 15°49'47''}$

$R_x = F_{1x} + F_{3x} + F_{4x}$
$R_x = 25{,}98Kgf - 10Kgf + 14{,}14Kgf$
$\boxed{R_x = 30{,}12Kgf}$

$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$
$R_y = 15Kgf + 25Kgf - 17{,}32Kgf - 14{,}14Kgf$
$\boxed{R_y = 8{,}54Kgf}$

La **suma de vectores** y la **multiplicación de un vector** por un escalar, pueden definirse mediante las componentes de los vectores, es decir que analíticamente podemos sumar dos o más vectores de la siguiente manera.

- Si se **suman** dos o más **vectores**

en el plano IR^2

$$\text{si } u = (u_x, u_y) \quad y \quad v = (v_x, v_y) \qquad \text{entonces} \quad u + v = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

Ejemplo:

$$\text{si } u = (-2,3) \quad y \quad v = (4,1) \qquad \text{entonces} \quad u + v = (-2+4, 3+1) = (2,4)$$

en el espacio IR^3

$$\text{si } u = (u_x, u_y, u_z) \quad y \quad v = (v_x, v_y, v_z) \qquad \text{entonces} \quad u + v = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$$

Ejemplo:

$$\text{si } u = (-1,2,3) \quad y \quad v = (2,1,5) \qquad \text{entonces} \quad u + v = (-1+2,\ 2+1, 3+5) = (1,3,8)$$

- Si se **multiplica un escalar "c"** por un **vector** un vector ***u*** , analíticamente, se expresa:

$$c.u = c.(u_x, u_y) = (c.u_x, c.u_y)$$ **en el plano** IR^2

$$c.u = c.(u_x, u_y.u_z) = (c.u_x, c.u_y, c.u_z)$$ **en el espacio** IR^3

ejemplo:

$$\text{si} \quad c = 2 \quad y \quad u = (-3,4)$$

$$2.u = 2.(-3,4) = (2.(-3), 2.4) = (-6,8)$$ **en el plano** IR^2

$$\text{si} \quad c = 3 \quad y \quad u = (-1,2,5)$$

$$3.u = 3.(-1,2,5) = (3.(-1), 3.2, 3.5) = (-3,6,15)$$ **en el espacio** IR^3

- Para **calcular** el **módulo** del **vector resultante *R***, que resulta de la suma de dos vectores ***u*** y ***v,*** si se tiene como dato α , (el ángulo que forman ambos) , se puede utilizar el teorema del coseno aplicado de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{R} = \sqrt{\| u \|^2 + \| v \|^2 + 2\| u \| . \| v \| \cos(\alpha)}$$

Ejemplo:

$$\text{si } u=(2,3) \quad y \quad v=(4,1) \quad y \quad \alpha = 42^{\circ}16'25''$$

$$\|u\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \quad y \quad \|v\| = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \qquad \text{luego:}$$

$$\boldsymbol{R} = \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\sqrt{17}\right)^2 + 2.\sqrt{13}.\sqrt{17}.\cos(42^{\circ}16'25'')} \cong \sqrt{52} \cong 7{,}21$$

Producto escalar

Hasta aquí hemos estudiado dos operaciones con vectores, suma de vectores y producto por un escalar, cada uno de los cuales lleva a otro vector. Introduciremos otra operación entre vectores, conocida como **producto escalar**. Este producto nos conduce a un **escalar**, en vez de un vector

El **producto escalar de**

$u=(u_x,u_y)$ y $v=(v_x,v_y)$ **en el plano** IR^2 es:

$$\boxed{u \bullet v = u_x.v_x + u_y.v_y}$$

$u=(u_x,u_y,u_z)$ y $v=(v_x,v_y,v_z)$ **en el espacio** IR^3 es:

$$\boxed{u \bullet v = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z}$$

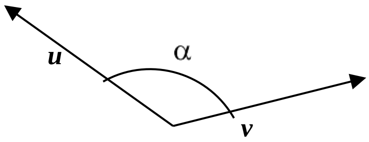
Ejemplo:

- si $u(-2,1)$ y $v=(3,5)$ entonces $u \bullet v = (-2).3+1.5 = -6+5 = -1$ **en el plano** IR^2
- si $u(-3,1,7)$ y $v=(2,4,2)$ entonces $u \bullet v = (-3).2+1.4+7.2 = -6+4+14 = 12$ **en el espacio** IR^3

Ángulo entre dos vectores

El **ángulo entre dos vectores** no nulos es el ángulo α ; $0^{o} \leq \alpha \leq 180^{o}$ entre sus respectivos vectores, como indica la figura y se calculo mediante la fórmula:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{u \bullet v}{\|u\| . \|v\|}}$$



Ejemplo:

$$\text{si } u(-2,1) \quad y \quad v = (3,5) \quad \text{entonces} \quad u \bullet v = (-2).3 + 1.5 = -6 + 5 = -1$$

$$y \qquad \begin{array}{l} \|u\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ \|v\| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \end{array} \qquad \text{por lo tanto}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{u \bullet v}{\|u\| . \|v\|} = \frac{-1}{\sqrt{5}.\sqrt{34}} = 0{,}0076696 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 85^{o}36'5''$$

Debemos tener en cuenta las siguientes conclusiones:

- Podemos decir que **dos vectores** son **perpendiculares** u **ortogonales** cuando el **producto escalar** entre ellos es **cero**
- También podemos decir que **dos vectores** son **paralelos** cuando existe un escalar "**c**"distinto de cero tal que ***u*** = **c .** ***v***

Producto vectorial de vectores en el espacio

En muchas aplicaciones de la física, la ingeniería y la geometría se trata de encontrar un **vector** en el **espacio** que sea **ortogonal** (perpendicular) , a otros dos vectores dados. Para poder hallarlo se recurre al **producto vectorial (u x v)** de vectores y para ello se debe trabajar con los **vectores unitarios canónicos.**

Una manera conveniente de calcularlo consiste en usar el método de **determinantes** de la siguiente manera:

Dados los vectores: $u=(u_x, u_y, u_z)$ y $v=(v_x, v_y, v_z)$ el **producto vectorial** será:

$$\mathbf{u\ x\ v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}.i - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}.j + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}.k \quad \text{es decir que :}$$

$$\mathbf{u\ x\ v} = (u_y.v_z - u_z.v_y)i - (u_x.v_z - u_z.v_x).j + (u_x.v_y - u_y.v_x).k$$

Ejemplo:

si $\boldsymbol{u} = (2, -3, 4)$ y $\boldsymbol{v} = (4, 1, 3)$ su producto vectorial será:

$$\mathbf{u\ x\ v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = ((-3).3 - 4.1)i - (2.3 - 4.4)j + (2.1 - (-3).4)k = -13i + 10j + 14k$$

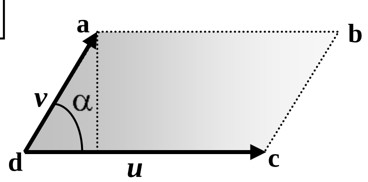
Nótese que el **producto vectorial entre dos vectores** da por resultado otro **vector,** perpendicular a los vectores dados

Aplicaciones del producto vectorial

Podemos calcular el área de un **paralelogramo** , de acuerdo como indica la figura

En el espacio IR^3**:**

$$\boxed{\text{área} \quad abcd = \| u\ x\ v \|}$$



o bien

$$\boxed{\text{área} \quad abcd = \| u \| . \| v \| . sen(\alpha)}$$

en consecuencia el área de un **triángulo** es :

$$\boxed{\text{área} \quad abc = \frac{1}{2}.\|u \times v\| = \frac{1}{2}\|u\|.\|v\|.\text{sen}(\alpha)}$$

En el plano IR^2

área del paralelogramo:

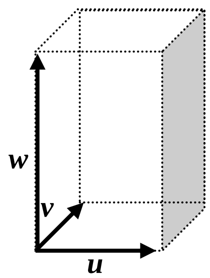
$$\boxed{\text{área} \quad abc = \|u\|.\|v\|.\text{sen}(\alpha)}$$

área del triángulo:

$$\boxed{\text{área} \quad abc = \frac{1}{2}\|u\|.\|v\|.\text{sen}(\alpha)}$$

Producto mixto:

El producto mixto entre vectores de IR^3 es el número real que se obtiene a través de la siguiente expresión: $u \bullet (v \times w) = (u \times v) \bullet w$



Este número real representa al volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores

Sea $u = (u_x, u_y, u_z)$, $v = (v_x, v_y, v_z)$ y $w = (w_x, w_y, w_z)$ el producto mixto en función de sus componentes es:

$$u \bullet (v \times w) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = u_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} + u_y \left(- \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} \right) + u_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$$

$$u \bullet (v \times w) = u_x.(v_y.w_z - v_z.w_y) - u_y.(v_x.w_z - v_z.w_x) + u_z.(v_x.w_y - v_y.w_x)$$