UNIDAD 4:

GEOMETRÍA ANALÍTICA

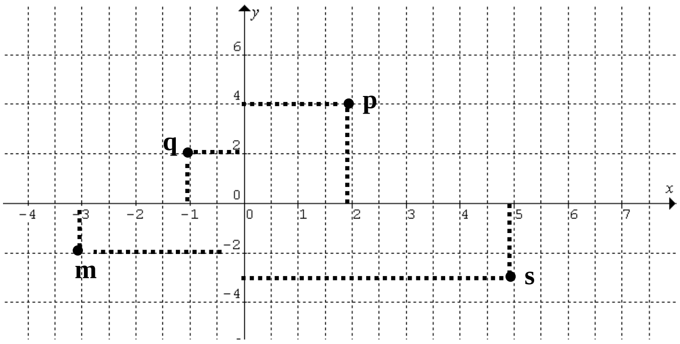
RECTA

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1) Sistema de coordenadas cartesianas

Para situar un punto en una recta (unidimensional), se emplea un solo número. Pero para ubicar un punto en el plano (bidimensional), se emplea un par ordenado de números reales (x, y). La primera componente se llama abscisa y la segunda ordenada. Para ello se trazan dos rectas ortogonales que al intersectarse determinan cuatro semirrectas.

Sobre el eje horizontal se marcan los valores de abscisa y sobre el eje vertical se marcan los valores de ordenada.



$p\ (2,4)$
$q\ (-1,2)$
$m\ (-3,-2)$
$s\ (5,-3)$

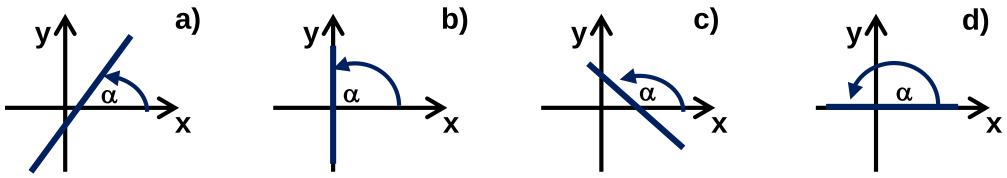
2) Ángulo de inclinación de una recta.

Se llama ángulo de inclinación de una recta, al ángulo formado por la parte positiva del eje de abscisa, y la recta, tomado en sentido contrario a las agujas del reloj. El ángulo de inclinación varía entre 0° y 180°.

3) Pendiente de una recta

Se llama pendiente de una recta a la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación. Se simboliza con la letra m.

$$m = tg\alpha$$



a) Si $\alpha < 90°$ entonces $\text{tg}\,\alpha > 0$

b) Si $\alpha = 90°$ entonces $\text{tg}\,\alpha$ es infinito (no existe)

c) Si $\alpha > 90°$ entonces $\text{tg}\,\alpha < 0$

d) Si $\alpha = 180°$ entonces $\text{tg}\,\alpha = 0$

I. Dado el ángulo de inclinación encontrar su pendiente.

Ejemplos:

$\alpha = 20°30'40''$ su pendiente $m = tg\,20°30'40''$

$m = 0{,}3741...$

$\alpha = 120°15'50''$ su pendiente $m = tg\,120°15'50''$

$m = -1{,}7137...$

II. Dada la pendiente encontrar su ángulo de inclinación.

Ejemplos:

$m = 1$ entonces $\alpha = \text{arc tg}\,1 = 45°$

$m = -1$ entonces $\alpha = \text{arc tg}\,\text{-}1 = \text{-}45°$ **(*)**

(*) Como el ángulo de inclinación no puede ser negativo se debe sumar 180° para encontrar el ángulo de inclinación. Por lo tanto: *Si* $\alpha = -45° + 180° = 135°$

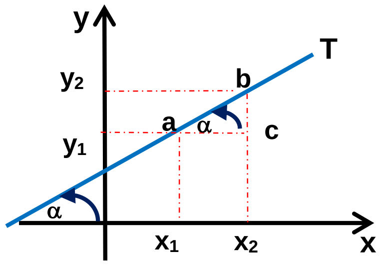
III) Cálculo de la pendiente de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos.

Por definición:

$$\text{m} = \text{tg}\,\alpha$$

Por trigonometría:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. adyasc.}}$$



Luego:

$$tg\,\alpha = \frac{\overline{bc}}{\overline{ca}}$$

Por lo tanto:

$$tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Reemplazando:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

<u>Ejemplo:</u> Dado los puntos a(-3,2) y b(1,5) encontrar su pendiente.

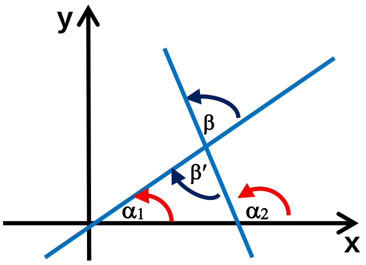
$x_1 = -3 \quad y_1 = 2 \quad x_2 = 1 \quad y_2 = 5$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{1-(-3)} = \frac{3}{4}$$

4) <u>Ángulo formado por dos rectas</u>

<u>Definición:</u>

Se llama ángulo formado por dos rectas, al ángulo tomado en sentido contrario a las agujas del reloj, cuyo lado inicial es la recta de menor pendiente y cuyo lado final es la recta de mayor pendiente.



$\beta \quad$ áng. entre dos rectas

$$\boxed{\beta = \alpha_2 - \alpha_1}$$

<u>RECTAS PARALELAS</u>:

<u>Conclusión:</u> Dos rectas A y B son paralelas sí y solo sí sus pendientes son iguales.

$$\boxed{A // B \Leftrightarrow m_f = m_i}$$

RECTAS PERPENDICULARES:

Conclusión: Dos rectas son perpendiculares sí y solo sí sus pendientes son recíprocas y cambiadas de signo.

$$\boxed{A \perp B \Leftrightarrow m_f = -\frac{1}{m_i}}$$

6) Lugar geométrico. Ecuaciones.

a) Un lugar geométrico es un subconjunto de puntos en el plano (o en el espacio) que cumplen con determinadas condiciones.

Estas condiciones se expresan generalmente en palabras.

b) Ecuación de un lugar geométrico:

Llamaremos así a una ecuación de la forma f(x, y) = *O,* cuyas soluciones reales para valores correspondientes *a x e y* son todas las coordenadas de aquellos puntos que satisfagan la condición o condiciones geométricas dadas que determinan el lugar geométrico.

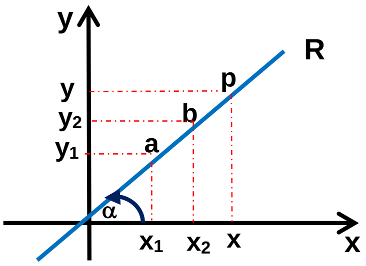
RECTA

Definición:

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma pendiente.

ECUACIONES DE LA RECTA EN COORDENADAS CARTESIANAS

a) Recta que pasa por el origen.



Sea R la recta que pasa por el origen en un sistema de coordenadas cartesianas. Consideremos sobre ella los puntos a (x_1, y_1); b (x_2, y_2) y un punto genérico p (x, y).

Se forman los triángulos

$$o\overset{\Delta}{x_1}a \sim o\overset{\Delta}{x_2}b \sim o\overset{\Delta}{x}p$$

Aplicando $tg\alpha$ a cada triángulo nos queda:

$$tg\alpha = \frac{\overline{x_1a}}{\overline{\overline{ox_1}}} = \frac{\overline{x_2b}}{\overline{\overline{ox_2}}} = \frac{\overline{xp}}{\overline{\overline{op}}}$$

Reemplazando:

$$tg\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y}{x}$$

Sabiendo que $tg\alpha = m$ (pendiente), nos queda:

$$m = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y}{x}$$

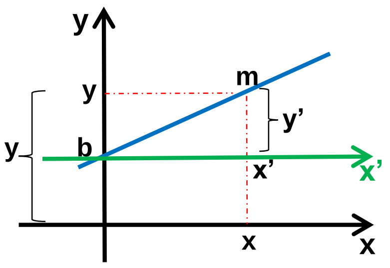
Por lo tanto

$$m = \frac{y}{x}$$

Entonces despejando y:

$$\boxed{y = m.x}$$ Ecuación de la recta que pasa por el origen.

b) Recta que no pasa por el origen.

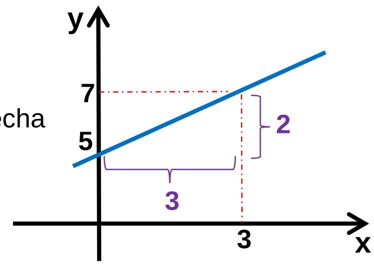


$$\boxed{y = m.x + b}$$

Esta ecuación es la **ecuación normal** o **explícita** *de* la recta: donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen. Este último indica el punto donde la recta intersecta al eje de las ordenadas.

Ejemplo: Grafico de una recta dado su ecuación explícita.

$$y = \frac{2}{3}.x + 5$$



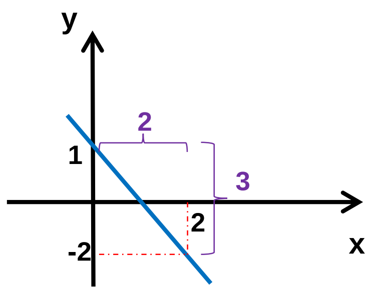
1° paso: Ubico la ordenada al origen (5) en el eje de las ordenadas.

2° paso: A partir de la ordenada al origen se corren tantos lugares a la derecha como indica el denominador de la pendiente (3).

3° paso: A partir de allí se sube si es positivo o se baja si es negativo tantos lugares como indica el numerador de la pendiente (2).

Otro ejemplo:

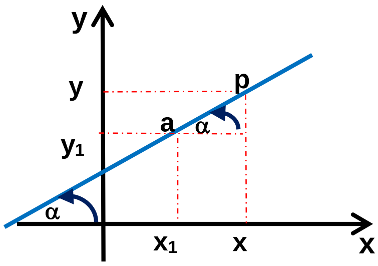
$$y = -\frac{3}{2}.x + 1$$



c) Ecuación de la recta que pasa por un punto con pendiente conocida.

Tenemos la recta de pendiente m que pasa por el punto a (x_1, y_1). Sea p (x, y) un punto genérico cualquiera de la recta. Aplicamos la ecuación de la pendiente de una recta:

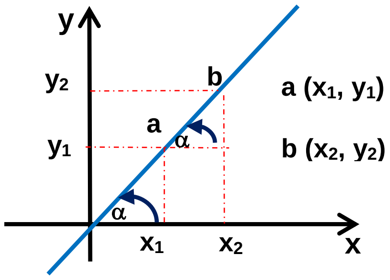
$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$



Despejando nos queda:

$$\boxed{y - y_1 = m.(x - x_1)}$$

d) <u>Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.</u>



Aplicamos la ecuación de la recta que pasa por un punto:

$$y - y_1 = m.(x - x_1)$$

Sabiendo que $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, reemplazamos:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1)}$$

e) <u>Ecuación general de la recta.</u>

La ecuación de primer grado de la forma $\boxed{Ax+By+C=0}$

Se llama ecuación **general** de la recta o también ecuación **implícita.**

<u>Ejemplo 1:</u>

$$y = \frac{3}{2}.x + 2$$

$y - \dfrac{3}{2}.x - 2 = 0$ Ecuación general de la recta.

Ejemplo 2: Dada la ecuación general encontrar la ecuación explícita.

$$2.x - 3.y + 6 = 0$$

$$-3.y = -2.x - 6 \quad (multiplicando\ por\ -1)$$

$$3.y = 2.x + 6$$

$$y = \frac{2.x + 6}{3} \quad (distribuyendo\ el\ denominador)$$

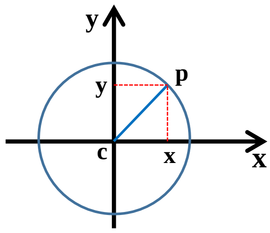
$$y = \frac{2}{3}.x + 2$$

CIRCUNFERENCIA

1) Definición:

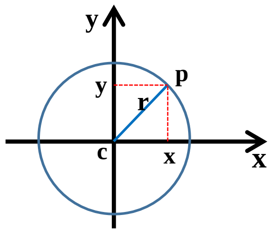
Es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo del mismo, llamado centro.

La distancia constante *de los* puntos de la misma al centro se llama radio.



2) Ecuación normal de la circunferencia:

a) Centrada



C (0, 0) r = radio

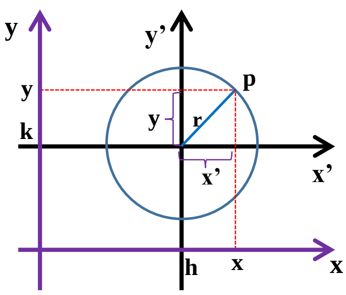
Si tomamos un punto genérico p (x, y), *la* distancia del mismo al centro es "r". Trazamos las coordenadas de p y nos queda formado un triángulo rectángulo. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$r^2 = x^2 + y^2$

Ordenando:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

b) Descentrada

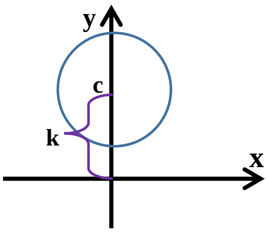


C (h, k) r = radio

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

3) Casos particulares:

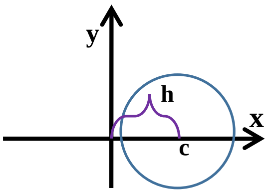
a) Si h = 0 la ecuación nos queda:



$$\boxed{x^2+(y-k)^2=r^2}$$

El centro de la circunferencia esta sobre el eje de ordenadas

b) Si k = 0 la ecuación nos queda:



$$\boxed{(x-h)^2+y^2=r^2}$$

El centro de la circunferencia esta sobre el eje de abscisas

4) Ecuación general de la circunferencia:

a) Centrada

Partimos de la ecuación normal $x^2+y^2=r^2$

Igualamos a cero: $\boxed{x^2+y^2-r^2=0}$

b) Descentrada

Partimos de la ecuación normal

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Resolvemos aplicando cuadrado de un binomio, nos queda:

$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$

Igualando a cero:

$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2-r^2=0$

Ordenando:

$x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0$

En general:

$$\boxed{x^2+y^2+Cx+Dy+F=0}$$

Donde:

$$C = -2h \qquad D = -2k \qquad F = h^2 + k^2 - r^2$$

5) Posiciones relativas de un recta y una circunferencia:

Una recta y una circunferencia pueden presentar tres posiciones relativas:

a) La recta es exterior a la circunferencia
b) La recta es tangente a la circunferencia
c) La recta es secante a la circunferencia

Dada la ecuación de la recta y la ecuación de una circunferencia para determinar su posición relativa resolveremos el sistema formado por la ecuación de la recta y la ecuación de la circunferencia.

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 + Cx + Dy + F = 0 \end{cases}$$

Para resolver el sistema despejamos una de las variables de la recta *y la reemplazamos en* la ecuación de la circunferencia.
Llegamos a una ecuación de segundo grado en "x", se resuelve mediante:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

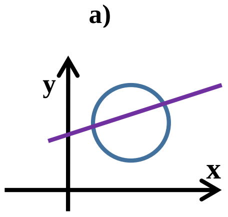
Y podemos obtener, si el discriminante es:

a) $b^2 - 4.a.c > 0$ ➔ Dos soluciones reales distintas (recta secante)

b) $b^2 - 4.a.c = 0$ ➔ Una solución doble (recta tangente)

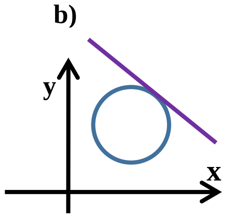
c) $b^2 - 4.a.c < 0$ ➔ No tiene solución real. (recta exterior)

a)



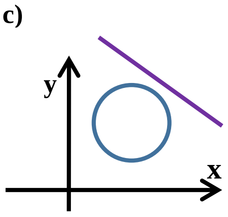
SECANTE

b)



TANGENTE

c)



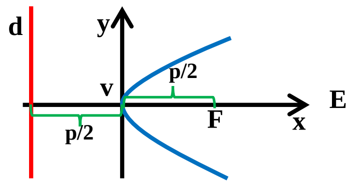
EXTERIOR

PARÁBOLA

1) Definición:

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta, llamada **directriz** y de un punto fijo llamado **foco**.

La distancia del foco a la directriz se llama "**parámetro**" y 'se indica con la letra "**p**". El punto medio **V** de esa distancia que pertenece a la parábola se llama **vértice** de la misma.



2) Elementos asociados de una parábola:

Directriz: es la recta fija y se simboliza "**d**"

Foco: es el punto fijo y se simboliza "**F**"

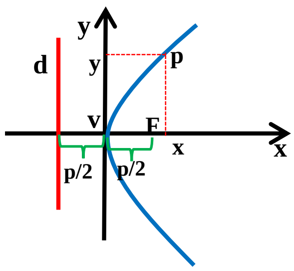
Eje focal: es la recta que contiene al foco y es perpendicular a la directriz.

Vértice: es el punto medio del segmento de perpendicularidad entre el foco y la directriz. Se simboliza "**V**".

Lado Recto: Es el segmento perpendicular al eje focal que pasa por el foco y corta a la parábola en dos puntos. Se simboliza "**LR**". Su fórmula es: $LR = |2p|$

3) Ecuación de la parábola centrada:

a) Que abraza al eje x (abscisas)

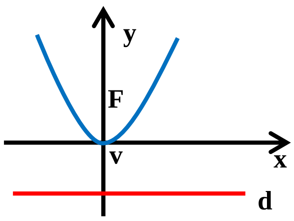


$F\ (p/2,0)$
$V\ (0,0)$
$d: x = -p/2$
$p\ (x,y)$ *pto genérico*
$m\ (-p/2, y)$

$$\boxed{2px = y^2}$$

Esta es la ecuación normal de la parábola centrada con eje focal coincidente con el eje de las x.

b) **<u>Que abraza al eje y (ordenada)</u>**



$F\ (0, p/2)$

$V\ (0,0)$

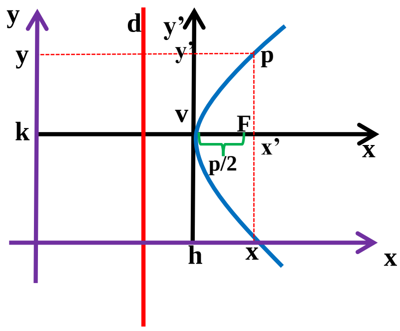
$d: y = -p/2$

De forma análoga al desarrollo anterior se demuestra que la fórmula es:

$$\boxed{2py = x^2}$$

4) **<u>Ecuación de la parábola descentrada:</u>**

a) Eje focal paralelo al eje x.



Las coordenadas del vértice V son ahora (h, k).

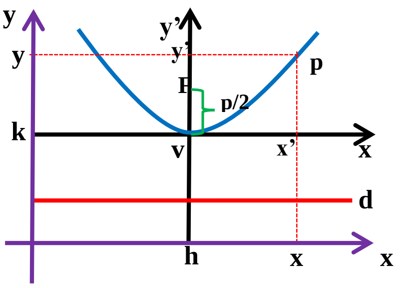
$$\boxed{(y-k)^2 = 2p(x-h)}$$

Esta es la ecuación normal de la parábola descentrada cuyo eje focal es paralelo al eje x.

Las coordenadas quedan:

$$V \quad (h,k) \quad ; \quad F \quad (h+p/2,k) \quad ; \qquad d: \quad x = h - p/2 \quad ; \quad LR = |2.p|$$

b) Eje focal paralelo al eje y.



Razonando de igual forma nos queda:

$$\boxed{(x-h)^2 = 2p(y-k)}$$

Esta es la ecuación de la parábola descentrada, cuyo eje focal es paralelo al eje y.

Sus coordenadas son:

$$V \quad (h,k) \quad ; \quad F \quad (h,k+p/2) \quad ; \qquad d: \quad y = k - p/2 \quad ; \quad LR = |2.p|$$

5) <u>Ecuación general de la parábola:</u>

a) Con eje focal paralelo al eje y:

$$(x-h)^2 = 2p(y-k)$$

Desarrollando cuadrado de un binomio y distributiva:

$$x^2 - 2xh + h^2 = 2py - 2pk$$

Igualando a cero nos queda:

$$x^2 - 2xh + h^2 - 2py + 2pk = 0$$

Ordenando:

$$x^2 - 2xh - 2py + h^2 + 2pk = 0$$

En general:

$$\boxed{x^2 + Ax + By + C = 0}$$

Donde:

$$A = -2h \qquad B = -2p \qquad C = h^2 + 2pk$$

b) Con eje focal paralelo al eje x:

$$(y-k)^2 = 2p(x-h)$$

$$y^2 - 2yk + k^2 = 2px - 2ph$$

$$y^2 - 2yk + k^2 - 2px + 2ph = 0$$

$$\boxed{y^2 + Ax + By + C = 0}$$

Donde:

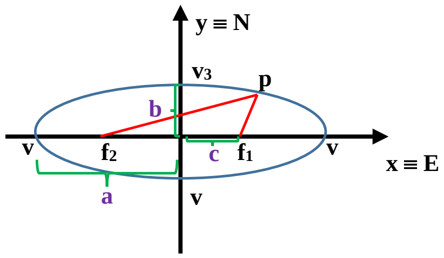
$$A = -2p \qquad B = -2k \qquad C = k^2 + 2ph$$

ELIPSE

1) Definición:

Es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos del plano llamados focos es una cantidad constante y mayor que la distancia entre los dos focos.

Dicha distancia es el valor entre los vértices principales. $\overline{V_1V_2} = 2.a$



2) Elementos asociados a una elipse:

Focos: dos puntos fijos llamados F_1 y F_2, cuya distancia al centro de la elipse es la misma. La distancia entre los focos se llama ***2 c***. $\overline{F_1F_2} = 2.c$

Eje focal: es *la* recta que pasa por los focos (**E**)

Vértices principales: El eje focal intersecta a la elipse en dos puntos V_1 y V_2, llamados vértices. La distancia entre los dos vértices la indicamos ***2 a***. $\overline{V_1V_2} = 2.a$

Centro: *es* el punto medio o del segmento $\overline{V_1V_2}$.

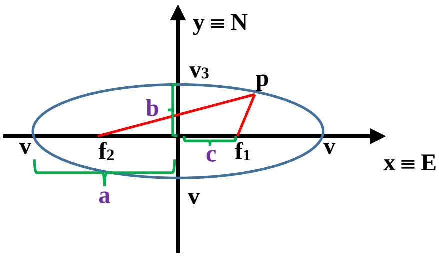
Eje normal: es la recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro. Se simboliza **N**.

Eje mayor: es el segmento determinado por los vértices V_1 y V_2.

Vértices secundarios: el eje normal intersecta a la elipse en dos puntos V_3 *y* V_4 llamados vértices secundarios.

Eje menor: es el segmento $\overline{V_3V_4}$. Su longitud se designa **2 b**. $\overline{V_3V_4} = 2.b$

Radios focales: Si p es un punto cualquiera de la elipse con focos F_1, F_2, los segmentos $\overline{F_1P}$ y $\overline{F_2P}$ se llaman radios focales. La suma de los radios es una constante llamada **2a**. $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$



$\overline{V_3V_4}$ *eje menor*

$\overline{V_1V_2}$ *eje mayor*

E *eje focal*

N *eje normal*

Vemos en el gráfico que la elipse es simétrica respecto del eje focal y del eje normal.

Excentricidad: Es la razón entre la distancia **c** (centro a uno de los focos) y la distancia **a** (centro a los vértices principales).

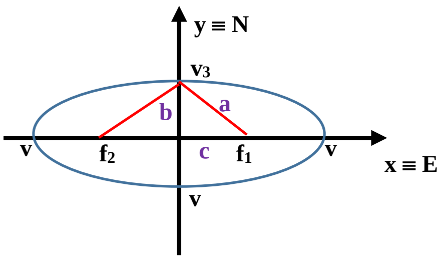
$$\underline{\underline{e = \frac{c}{a}}}$$

La excentricidad de la elipse siempre tiene que ser menor que 1.

$$\underline{\underline{e < 1}}.$$

Lado recto: Es el segmento perpendicular al eje focal que pasa por los focos e intersecta a la elipse en dos puntos. Se simboliza: $\underline{\underline{LR = \frac{2.b^2}{a}}}$

3) Relación de los parámetros a, b y c:



Por definición de elipse:

$$\overline{V_3F_1} + \overline{V_3F_2} = 2a$$

Luego como:

$$\overline{V_3F_1} = \overline{V_3F_2}$$

Tenemos que:

$$\overline{V_3F_1} = \overline{V_3F_2} = a$$

Si consideramos el triángulo $\overset{\Delta}{V_3 F_1 0}$ es rectángulo en 0.

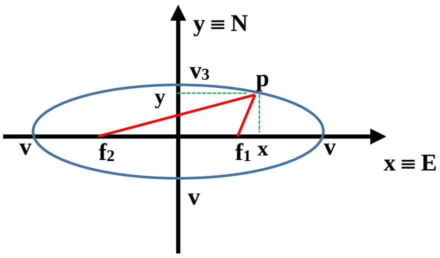
Luego por el Teorema de Pitágoras:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Donde: a > b y a > c

4) <u>Ecuación de la elipse centrada:</u>

a) El eje focal coincide con el eje x, y el centro "o" con el origen de coordenadas.



$p(x,y)$

$V_1(a,0)$ $V_2(-a,0)$

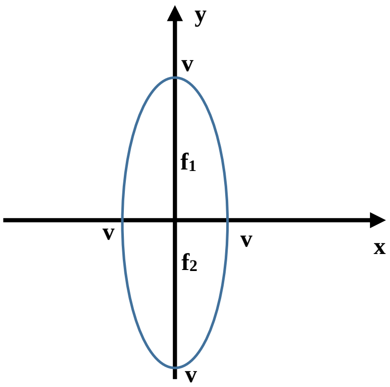
$F_1(c,0)$ $F_2(-c,0)$

$V_3(0,b)$ $V_4(0,-b)$

Esta es la ecuación normal de la elipse con eje focal coincidente con el eje x

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

b) El eje focal coincide con el eje y



$V_1(0,a)$ $V_2(0,-a)$

$F_1(0,c)$ $F_2(0,-c)$

$V_3(b,0)$ $V_4(-b,0)$

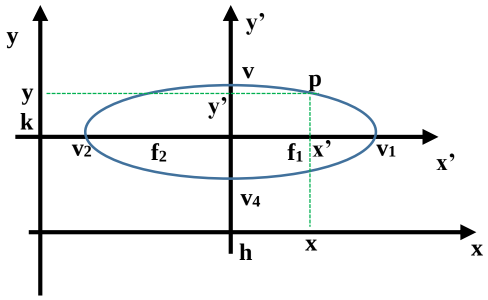
Esta es la ecuación normal de la elipse con eje focal coincidente con el eje y.

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

<u>Nota:</u> En elipse el parámetro "a" es el mayor por lo tanto debajo de la coordenada que se encuentre, es el eje a quien abraza.

5) <u>Ecuación de la elipse descentrada:</u>

a) Eje focal paralelo al eje x



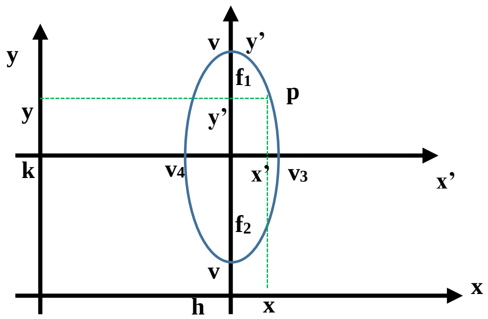
La elipse tiene ahora centro: C (h, k)

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

Observamos que las coordenadas son ahora:

$$V_1\left(h+a,k\right)\quad V_2\left(h-a,k\right)\quad F_1\left(h+c,k\right)\quad F_2\left(h-c,k\right)\quad V_3\left(h,k+b\right)\quad V_4\left(h,k-b\right)$$

b) Eje focal paralelo al eje y



Análogamente, la ecuación será:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$$

Las coordenadas son:

$$V_1\left(h,k+a\right)\quad V_2\left(h,k-a\right)\quad F_1\left(h,k+c\right)\quad F_2\left(h,k-c\right)\quad V_3\left(h+b,k\right)\quad V_4\left(h-b,k\right)$$

6) **<u>Ecuación general de la elipse:</u>**

Con eje focal paralelo al eje x

Dada la ecuación normal de la elipse descentrada:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Multiplicando el denominador y efectuando la suma de fracciones:

$$\frac{b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1$$

Desarrollando los cuadrados y pasando el denominador al otro miembro, se obtiene:

$$b^2(x^2 - 2xh + h^2) + a^2(y^2 - 2yk + k^2) = a^2b^2$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$b^2x^2 - 2b^2xh + b^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Ordenando:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2xh - 2a^2yk + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

En general:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0}$$

Donde:

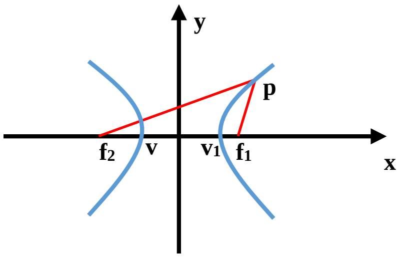
- A y B deben tener el mismo signo.
- Si A > B el eje focal es paralelo al eje y.
- Si A < B el eje focal es paralelo al eje x.

HIPÉRBOLA

1) Definición:

Es el lugar geométrico *de* los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es una cantidad constante mayor que cero y menor que la distancia entre los focos.

Una hipérbola consta de dos partes separadas, llamadas ramas y como veremos, cada una se prolonga indefinidamente. La hipérbola es simétrica respecto de los dos ejes.



2) Elementos asociados a una hipérbola:

Focos: los puntos fijos F_1 y F_2.

Eje focal: la recta " E " que pasa por los focos.

Vértices: las intersecciones del *eje* focal y la hipérbola, o sea los puntos V_1, V_2

Eje transverso: es el segmento $\overline{V_1V_2}$. Su medida es **2 a**

Centro: el punto medio **c** del segmento $\overline{V_1V_2}$.

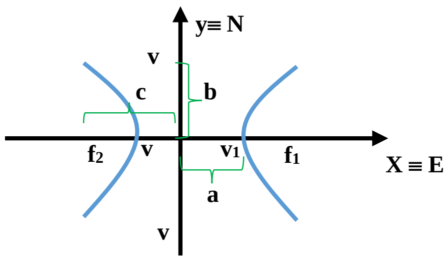
Eje normal: la recta " **N** " que pasa por c y es perpendicular al eje focal.

Eje conjugado: es el segmento $\overline{V_3V_4}$. Su medida es **2 b**

Distancia focal: es el segmento $\overline{F_1F_2}$. Su medida es **2 c**

Radios focales: Si p es un punto cualquiera de la hipérbola con focos F_1 y F_2, los segmentos $\overline{F_1p}$ y $\overline{F_2p}$ se llaman radios focales, tal que:

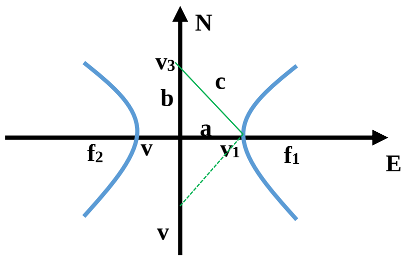
$$d(F_1p)-d(F_2p)=2a$$



Aclaración:

Si trazamos, con centro en V_1 o V_2, una circunferencia con radio igual a la mitad de la distancia focal, esta corta al eje normal en dos puntos V_3 y V_4.

De la figura podemos ver que:



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Excentricidad: Es la razón entre la distancia **c** (centro a uno de los focos) y la distancia **a** (centro a los vértices principales).

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

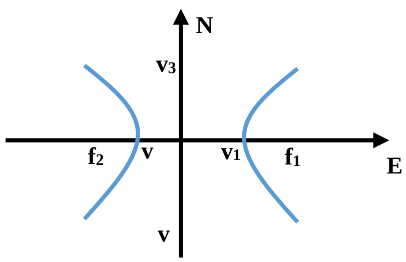
La excentricidad de la hipérbola siempre tiene que ser mayor que 1.

$$\boxed{e > 1}.$$

Asíntotas: Son rectas que crecen indefinidamente, aproximándose sin tocar a la hipérbola.

3) Ecuación de la hipérbola centrada:

a) Con eje focal coincidente con el eje x, y el centro de la hipérbola con el origen de coordenadas.



$V_1\,(a,0) \qquad V_2\,(-a,0)$

$F_1\,(c,0) \qquad F_2\,(-c,0)$

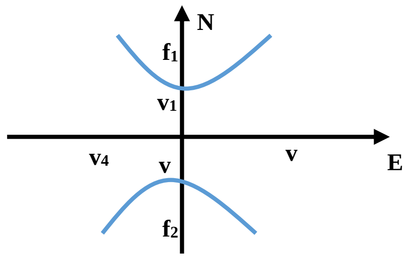
$V_3\,(0,b) \qquad V_4\,(0,-b)$

$LR = \dfrac{2b^2}{a} \qquad e = \dfrac{c}{a}$

Ecuación de la hipérbola centrada cuyo eje focal es el eje x

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

b) Con eje focal coincidente con el eje y.



$V_1\,(0,a)$ $V_2\,(0,-a)$
$F_1\,(0,c)$ $F_2\,(0,-c)$
$V_3\,(b,0)$ $V_4\,(-b,0)$

$$LR=\frac{2b^2}{a} \qquad e=\frac{c}{a}$$

La ecuación normal es:

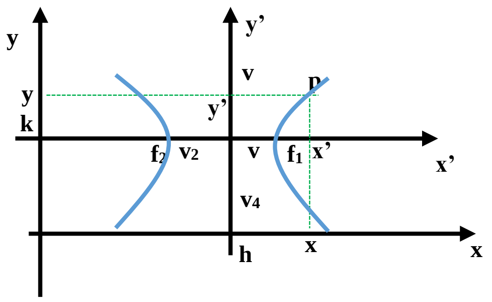
$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$$

Nota:

- El término positivo corresponde siempre a la variable coincidente con el eje.
- el coeficiente **a** siempre va en el término positivo.

4) **Ecuación de la hipérbola descentrada:**

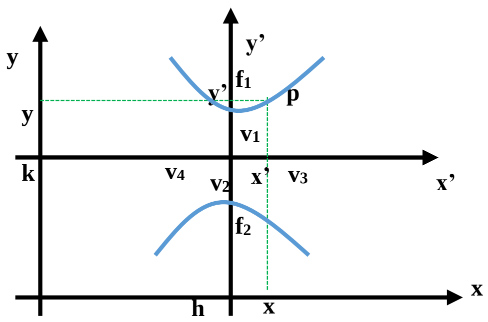
a) Con eje focal paralelo al eje x



$sus\ coordenadas\ son:$
$V_1\,(h+a,k)$ $V_2\,(h-a,k)$
$F_1\,(h+c,k)$ $F_2\,(h-c,k)$
$V_3\,(h,k+b)$ $V_4\,(h,k-b)$
$c(h,k)$

Su ecuación es: $$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

b) Con eje focal paralelo al eje y



$sus\ coordenadas\ son:$

$V_1\ (h, k+a) \qquad V_2\ (h, k-a)$

$F_1\ (h, k+c) \qquad F_2\ (h, k-c)$

$V_3\ (h+b, k) \qquad V_4\ (h-b, k)$

$C(h,k)$

Su ecuación es: $\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$

5) **<u>Asíntotas de la hipérbola:</u>**

<u>Definición</u>: Si para una curva dada, existe una recta de manera que la abscisa de un punto crece indefinidamente, aproximadamente, dicha recta se llama **" asíntota"** de la curva. La hipérbola tiene dos asíntotas.

Las ecuaciones de la hipérbola centrada son:

$$y_1 = \frac{b}{a}x \qquad y_2 = \frac{-b}{a}x \qquad eje\ \ focal\ el\ eje\ x$$

$$y_1 = \frac{a}{b}x \qquad y_2 = \frac{-a}{b}x \qquad eje\ \ focal\ el\ eje\ y$$

Las ecuaciones de la hipérbola descentrada son:

$$(y-k) = \frac{b}{a}(x-h);\ (y-k) = \frac{-b}{a}(x-h)$$

$$(y-k) = \frac{a}{b}(x-h);\ (y-k) = \frac{-a}{b}(x-h)$$

6) **<u>Ecuación general de la hipérbola descentrada:</u>**

a) Con eje focal paralelo al eje x

Si partimos de la ecuación de la hipérbola descentrada

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Multiplicando el denominador y efectuando la suma de fracciones:

$$\frac{b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1$$

Desarrollando los cuadrados y pasando el denominador al otro miembro, se obtiene:

$$b^2(x^2 - 2hx + h^2) - a^2(y^2 + 2ky - k^2) = a^2b^2$$

Aplicando distributiva en el primer miembro:

$$b^2x^2 - 2hb^2x + b^2h^2 - a^2y^2 + 2ka^2y - a^2k^2 = a^2b^2$$

Ordenando:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2hb^2x + 2ka^2y + b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

En general:

$$\boxed{Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + F = 0}$$

Donde A y B difieren en signo, y el eje lo indica el término cuadrático positivo.

b) Si el eje focal es paralelo al eje y

$$\boxed{Ay^2 - Bx^2 + Cx + Dy + F = 0}$$

7) <u>Hipérbola equilátera:</u>

Si a = b, la hipérbola recibe el nombre de **equilátera**.

La ecuación de la hipérbola centrada es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En nuestro caso quedaría:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Se puede expresar:

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$$