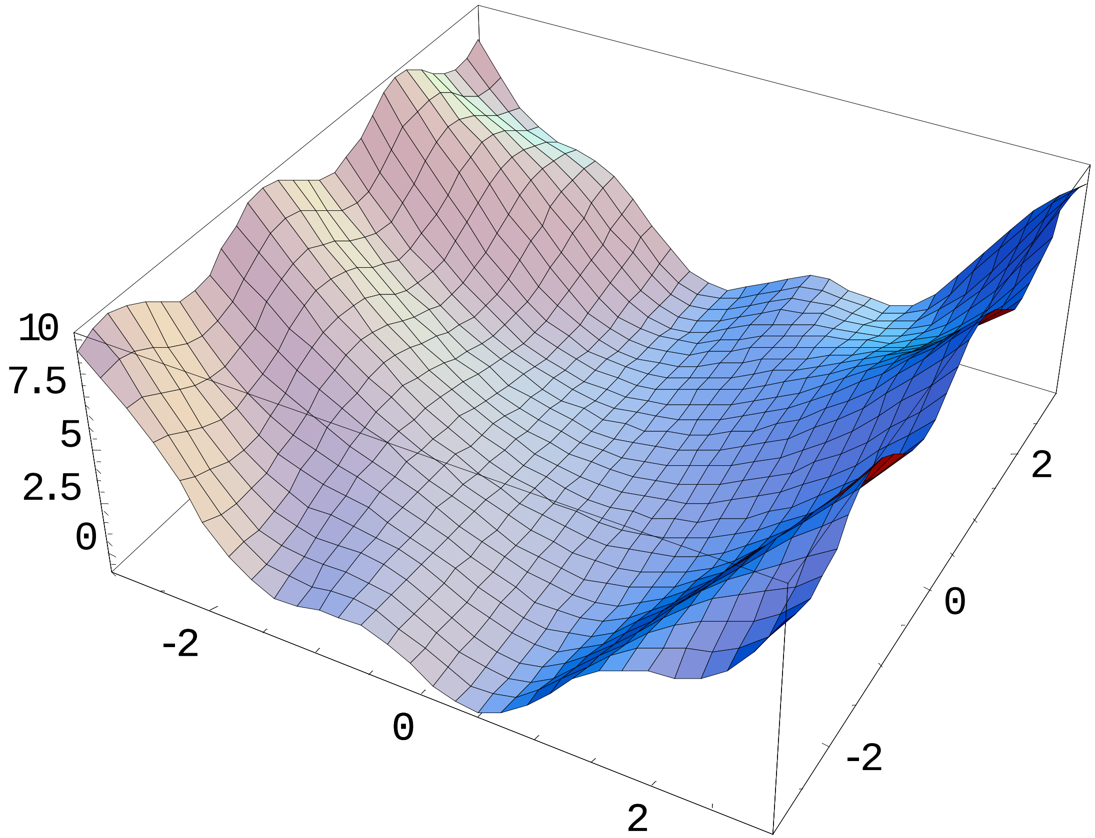
ANALISIS MATEMATICO II

Año 2012

Ing. Andrea Zucol

Unidad II
Funciones reales de varias variables reales



Dominio de una relación

Llamaremos así al conjunto de los elementos **x** pertenecientes a R y que figuran como primer componente de los pares **(xy)** pertenecientes a **R**

$$\mathbf{D_R=[\ x/x\ \varepsilon\ A\ \wedge(x,y)\ \varepsilon\ R\ ]}$$

Imagen de una relación

Si el par (x,y) ε a R entonces la llamaremos imagen de x a través de R .

A x la llamaremos antecedente o preimagen de y.

Llamaremos conjunto imagen a todos los elementos y del conjunto B que tengan antecedentes en A o bien a todos los elementos y de B que figuren como 2º conjunto en los pares xy de la relación

$$\mathbf{Img=[y/y\ \varepsilon\ B\ \wedge(x,y)\ \varepsilon\ R\ ]}$$

Definición de función de varias variables

La variable u se llama función de varias variables x,y,z,.....t (los argumentos), si para valores dados de estas variables, el valor **u** toma un valor determinado (función uniforme) o varios valores determinados (función multiforme) .

Designación

La función de dos variables $u=f(x,y)$,

la función de tres variables $u=F(x,y,z)$,

La función de n variables $u=\varphi(x,y,z,......t)$.

El conjunto de n números que representan los valores correspondientes de cada variable se llama sistema de valores de los argumentos

Ejemplos

La función de dos variable $u=f(x,y),\ xy^2$

para el sistema de valores

$x=2$

$y=3$

, toma el valor $f(2,3) = 2*3^2= 18$

La función de cuatro variables $u=\varphi(x,y,z,t)= x \ln (y-zt)$

Para el sistema de valores

$X= 3$; $y= 4$; $z= 3$;$t= 1$

Toma el valor $u=\varphi(3,4,3,1)= 3 \ln (4-3*1)= 0$

Representación gráfica

Representación gráfica del sistema de valores de los argumentos

•El sistema de dos variables **x** e **y** puede ser representado en el plano por un punto **P** de coordenadas cartesianas **x e y** .

•el sistema de valores de tres variables **x, y, z,** puede ser representado en el espacio por un punto **P** de coordenadas cartesianas **x, y, z**.

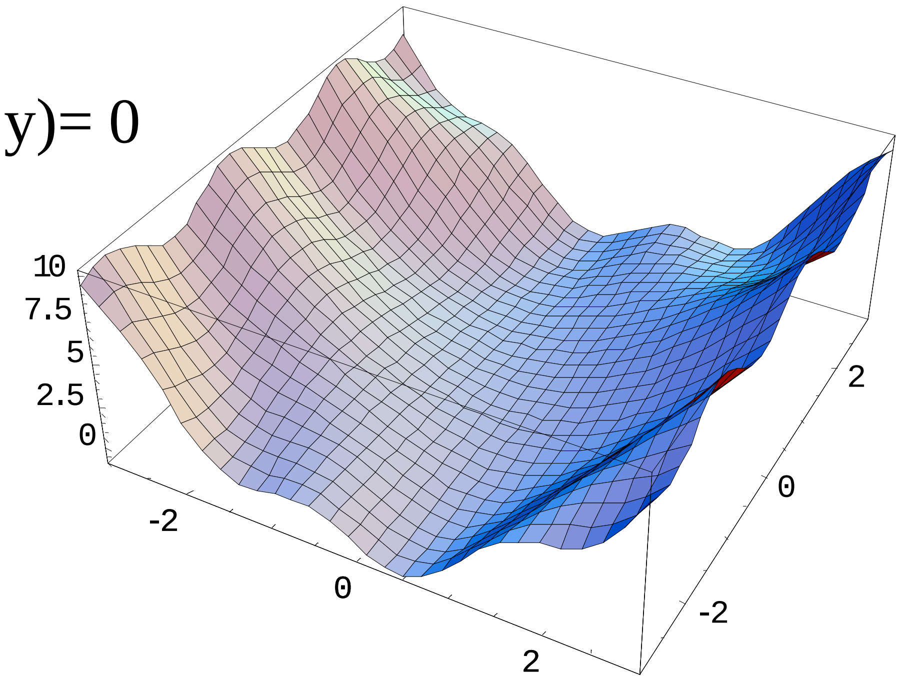
•Para un sistema de cuatro variables o de un número mayor de ellas tal representación es imposible; sin embargo por analogía se ha convenido llamar al sistema de *n* variables x, y, z, ...t, punto del espacio n-dimensional de coordenadas x, y, z, ...t.

Representación gráfica de una función de dos variables

La función de dos variables $u=f(x,y)$,

Análogamente a la función de una variable, la función de dos variables se representa gráficamente por una superficie cuya ecuación es

$$u=f(x,y)=0$$



Gráficos tridimensionales

Como es habitual, a medida que vamos dominando un tema, nos proponemos temas de mayor complejidad. Y a veces no los proponemos sino que debemos enfrentarnos con ellos, mal que nos pese. Y hemos estudiado funciones con una variable. Recordemos que una función de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado (x,y) perteneciente a un subconjunto D del plano ($D \subseteq R^2$) un número real : f(x,y).

El conjunto D es el dominio de f y su imagen es el conjunto de valores reales f(x, y).

La regla de asignación es $z = f(x,y)$ donde z es la variable dependiente y x e y, las variables independientes. La gráfica de la función es el conjunto de las ternas (x, y, f(x, y)) con $(x, y) \in D$. Llamaremos "superficie" a la gráfica, o bien simplemente gráfica

Llamaremos "superficie" a la gráfica, o bien simplemente gráfica

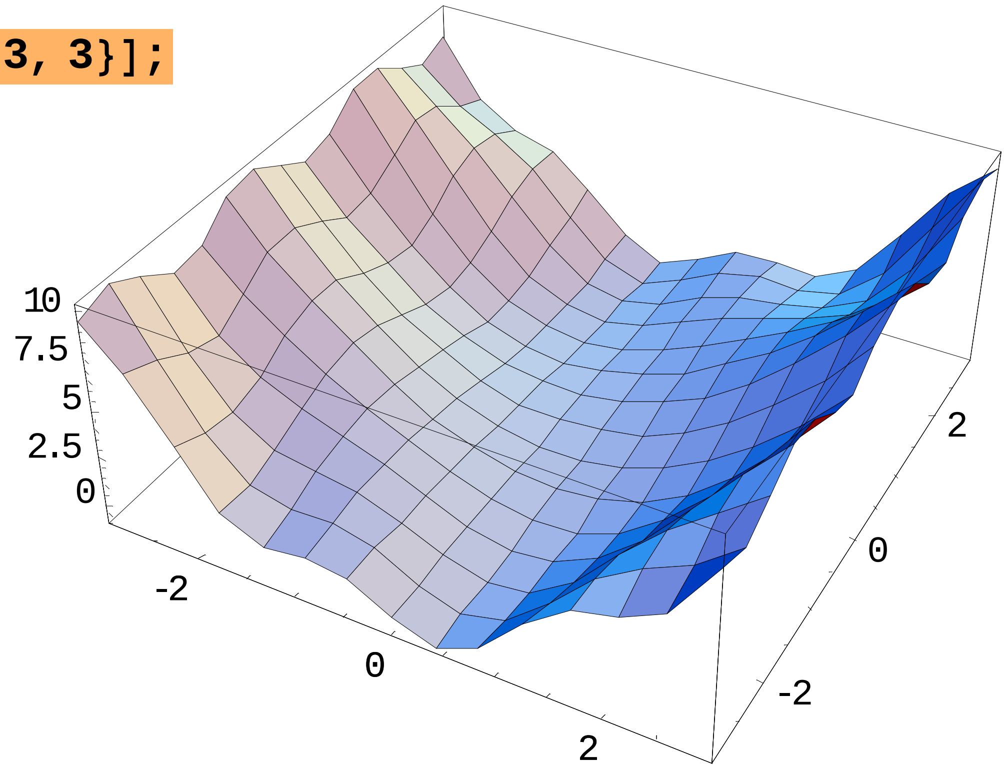
En *Mathematica 4*, en vez de poner **$f(xy)= x^2 + sen(xy)$** : se usa

```
Clear[f]
f[x_, y_] = x^2 + Sin[x y]
```

$x^2 + \mathrm{Sin}[x\, y]$

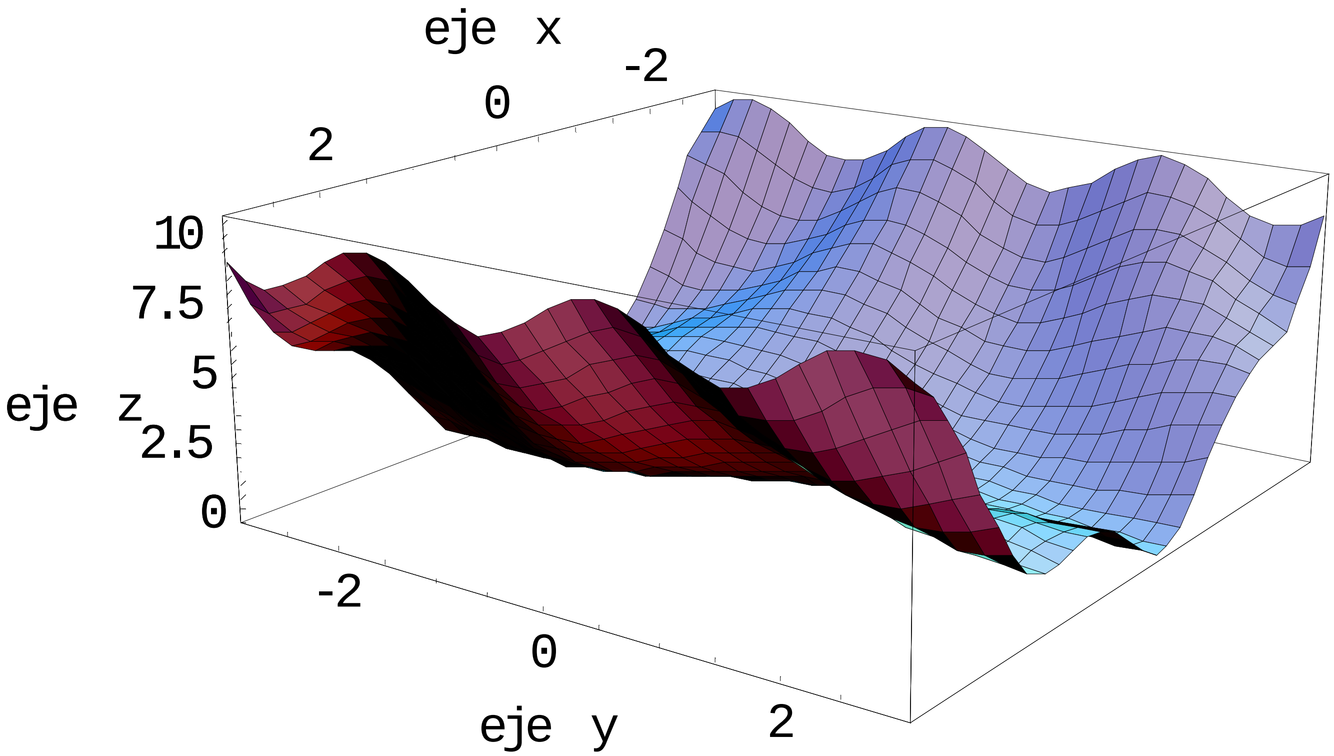
Queremos representar gráficamente esta función, usaremos el comando Plot3D

```
Plot3D[f[x, y], {x, -3, 3}, {y, -3, 3}];
```



También podemos mirar el gráfico desde otro punto con la opción ViewPoint

```
Plot3D[f[x, y], {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, PlotPoints → 30,
  AxesLabel → {"eje x", "eje y", "eje z"},
  ViewPoint -> {2.507, 1.772, 0.915}];
```



Secciones con planos verticales

Queremos mostrar secciones de la superficie z = f[x,y] con planos paralelos al eje z. Hay que graficar uno de esos planos.

recurriremos a la parametrización.

¿Recuerda cómo expresábamos una curva en el espacio?

Poníamos las coordenadas (x, y, z) en función de una tercera variable o parámetro t,

como x = f (t); y = g (t); z = h (t)

obteniendo las ecuaciones paramétricas de la curva considerada.

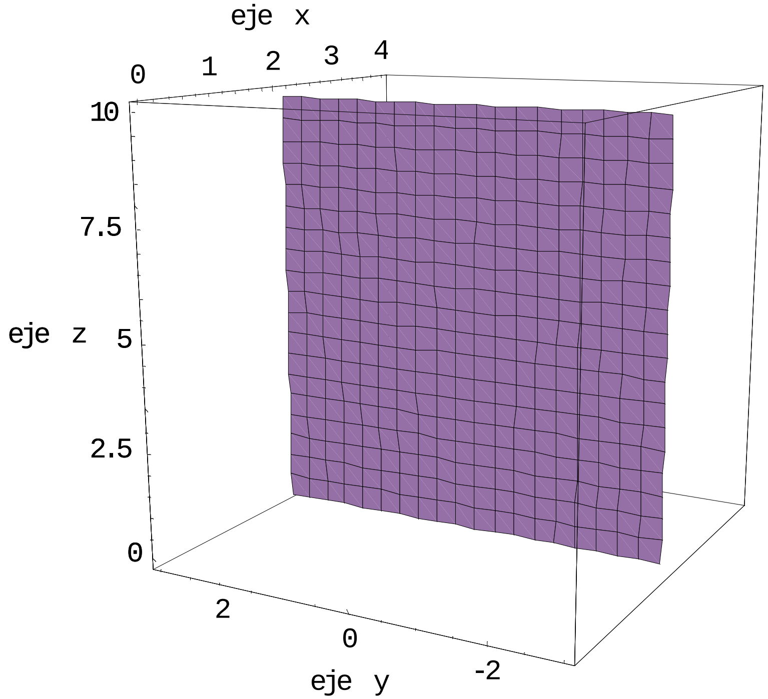
Análogamente se puede parametrizar una superficie, sólo que ahora se usarán dos parámetros u, v.

Pondremos: $x = g(u, v)$; $y = h(u, v)$, $z = p(u, v)$

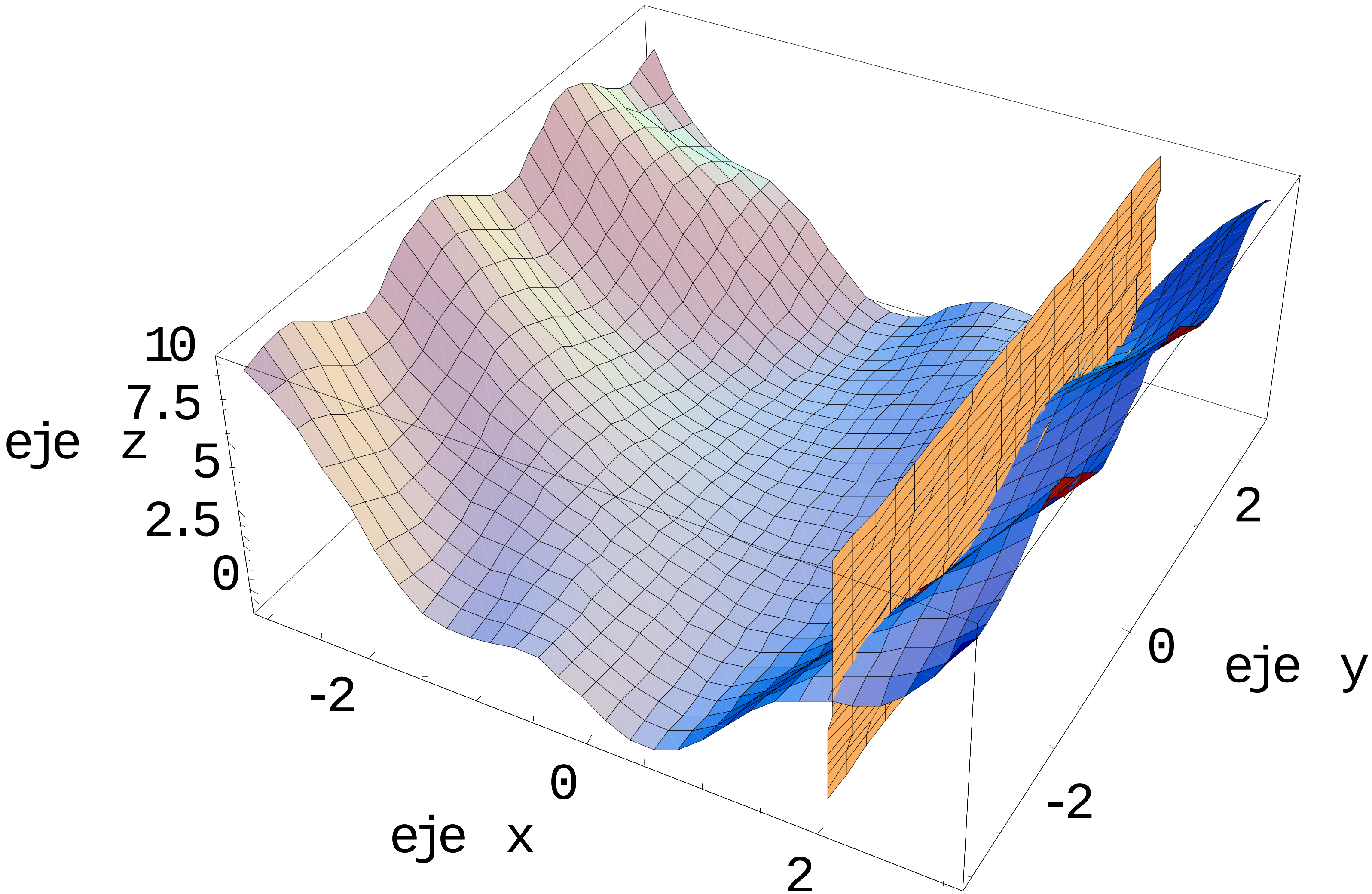
Sea el plano de ecuación $x = 2$.

Cada punto de ese plano es de la forma (2, y, z) para todo y,z.

Parametrizamos la superficie con $x = 2$; $y = u$; $z = v$; y visualizaremos



Mostramos juntos ambos gráficos (graf1 y graf2).
Observe la sección entre superficie y plano

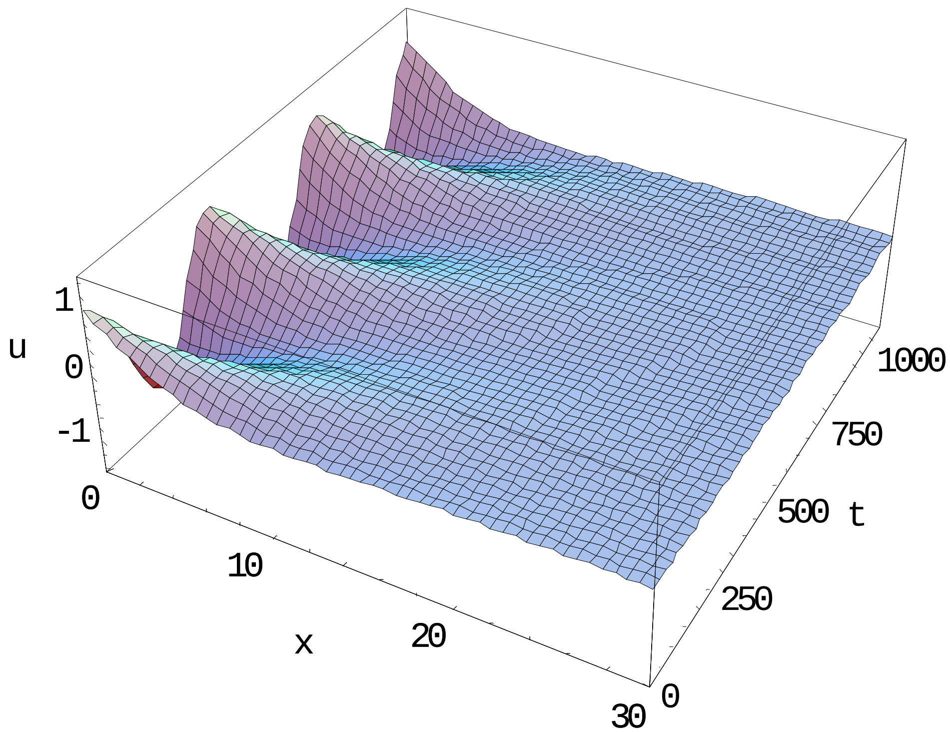


Otra función

No es necesario usar las letras (x, y, z) para indicar un punto de$R3$.
Supongamos que la función es

$$\mathbf{w\ (x,\ t) = cos[1.7\ t/100 - x/5]\ e^{[-(x/5)]}}$$

Usaremos (x, t, u) como nombre de los ejes cartesianos.



Para distintos valores de **x** la gráfica es bastante diferente. Queremos estudiar algunas secciones de la superficie con planos **x =k**,

k constante.

Una alternativa es proceder con gráficos tridimensionales como en el caso de la función f anteriormente visto.

Otra es hacer un gráfico bidimensional de la sección de la superficie de ecuación $\mathbf{u = w(x, t)}$

con el plano **x = constante.**

$$\mathbf{w(x, t) = \cos[1.7\, t/100 - x/5]\, e^{[-(x/5)]}}$$

Fijando x = 15, $0 \leq t \leq 3*365$, tenemos

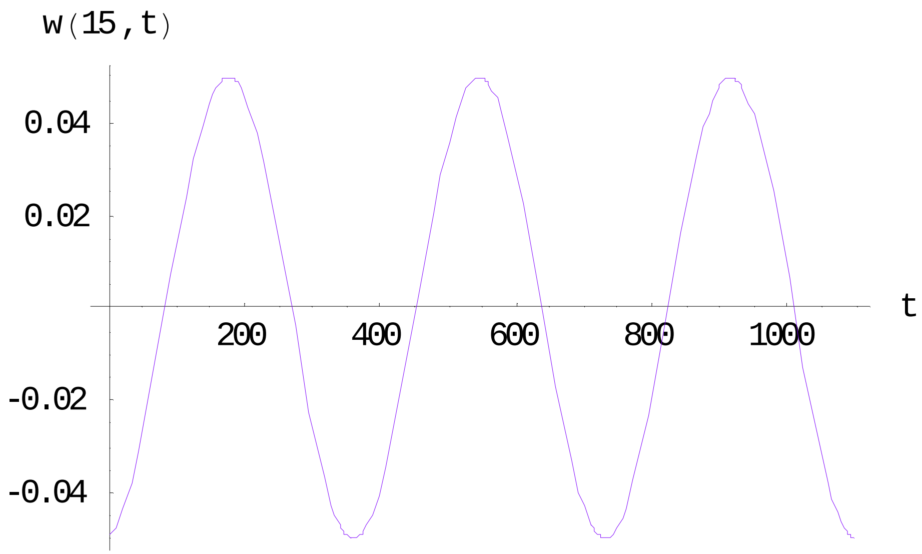
$$\mathbf{w[15, t] = \cos(1.7\, t/100 - 15/5)\, e^{(-15/5)}}$$

$$\mathbf{w\ (x,\ t) = \cos[1.7\ t/100 - x/5]\ e^{[-(x/5)]}}$$

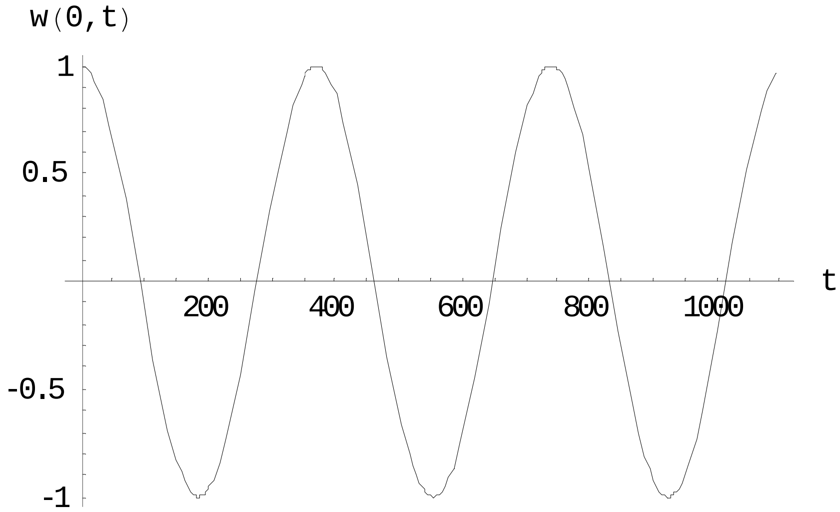
Fijando x = 15, $0 \leq t \leq 3*365$, tenemos

$$\mathbf{w[15,\ t] = \cos(\ 1.7\ t/100\ \ -\ 15/5\ )\ e^{(-15/5)}}$$

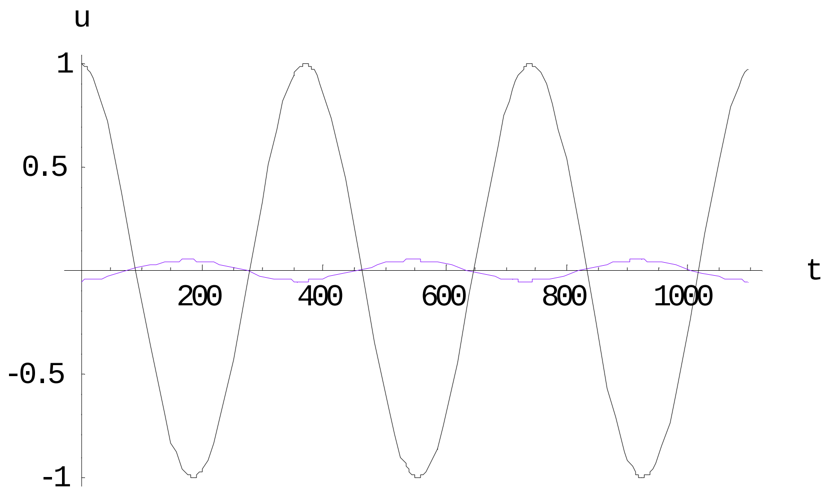
que graficamos como función de una variable

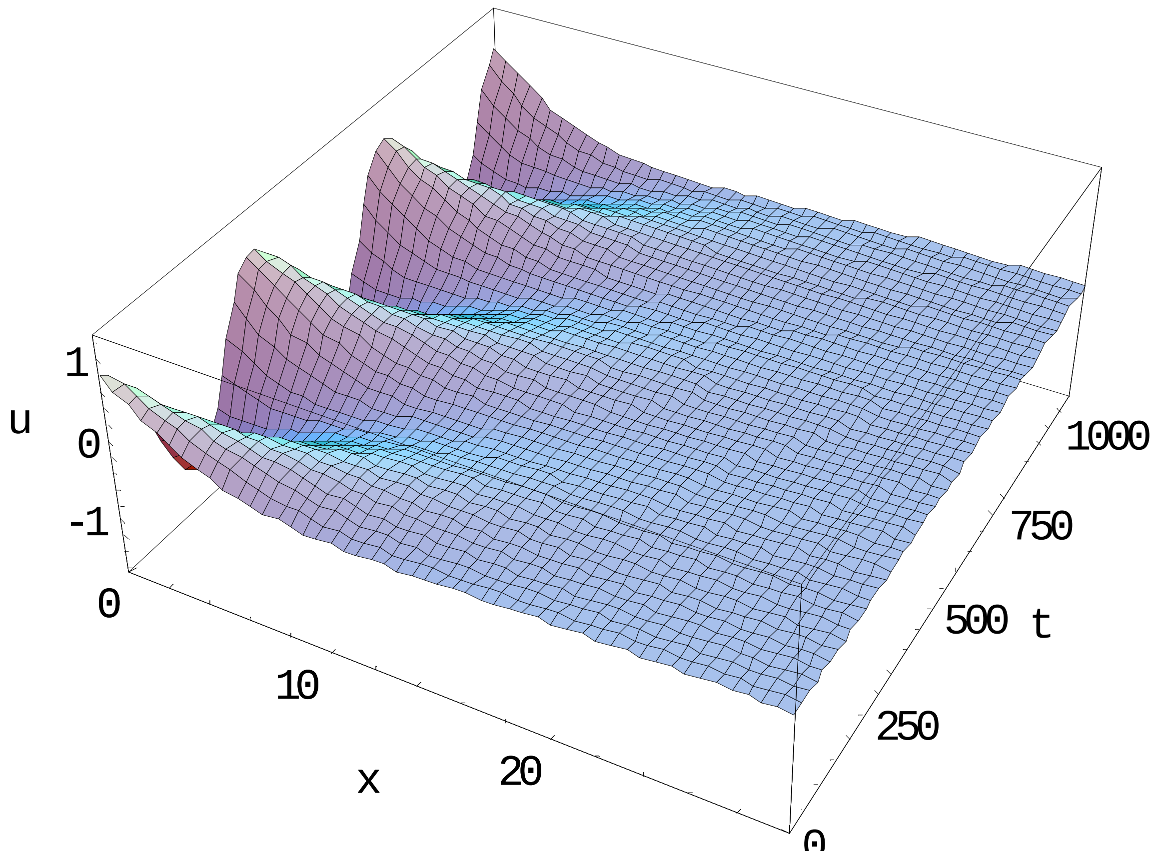


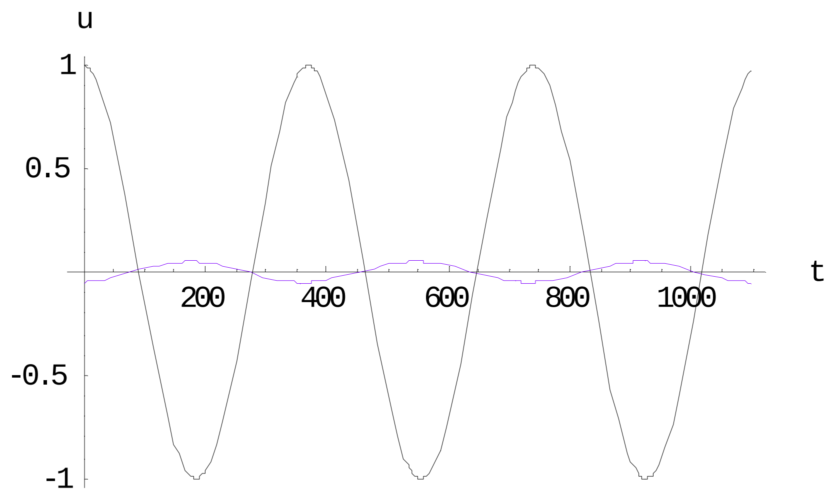
Y otra sección para comparar, con x = 0 y t en el intervalo anterior.



Comparamos ambas secciones mostrándolas juntas con el comando Show




u
1
0
-1
0
10
20
x
0
250
500
t
750
1000


u
1
0.5
-0.5
-1
200
400
600
800
1000
t

Consideremos ahora un fenómeno que nos interesa, pero cuya ocurrencia no depende de un solo factor. Por ejemplo, la cantidad de pintura que necesitamos en una pared depende del largo de la pared, y también de su altura.

O también , la Física nos dice que la resistencia equivalente, **R**, de dos resistores con resistencias $\mathbf{R_1}$ **y** $\mathbf{R_2}$, conectados en paralelo verifica $\mathbf{1/R=1/R_1 +1/R_2}$. En general se consideran resistencias positivas, y podemos expresar como

$$\mathbf{R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

función de $\mathbf{R_1}$ **y** $\mathbf{R_2}$ con dominio $\mathbf{R_1} > \mathbf{0}$**,** $\mathbf{R_2} > \mathbf{0}$. Es un ejemplo de una función de dos variables.

Curvas de nivel

Representar las superficies asociadas a funciones de dos variables es , en la mayoria de los casos, excesivamente complicado. Por ello es usual para determinadas funciones recurrir a curvas planas , llamadas curvas de nivel.

Si por ejemplo una función F de dos variables está dada por la expresión

$$\mathbf{z = F(xy)}$$

Y se considera **F(xy) =k,** esta ecuación corresponde a los puntos de la superficie que se obtiene seccionándola con el plano de ecuación

$$\mathbf{z = k}$$

Paralelo al plano de coordenadas **z =0** o sea al determinado por los ejes cartesianos **x** e **y**

Definición

Dados una función escalar de dos variables por la expresión

$$\mathbf{z = F(xy)}$$

La curva de nivel k es el conjunto de puntos (x,y) del dominio para las cuales es **F(xy)=k**

O sea la curva de nivel **k** es el conjunto [(x,y)/F(xy)=k]

El sistema

z = F(xy)

z =k

se puede representar en tres dimensiones haciendo los gráficos de la superficie y del plano.

Ejemplo

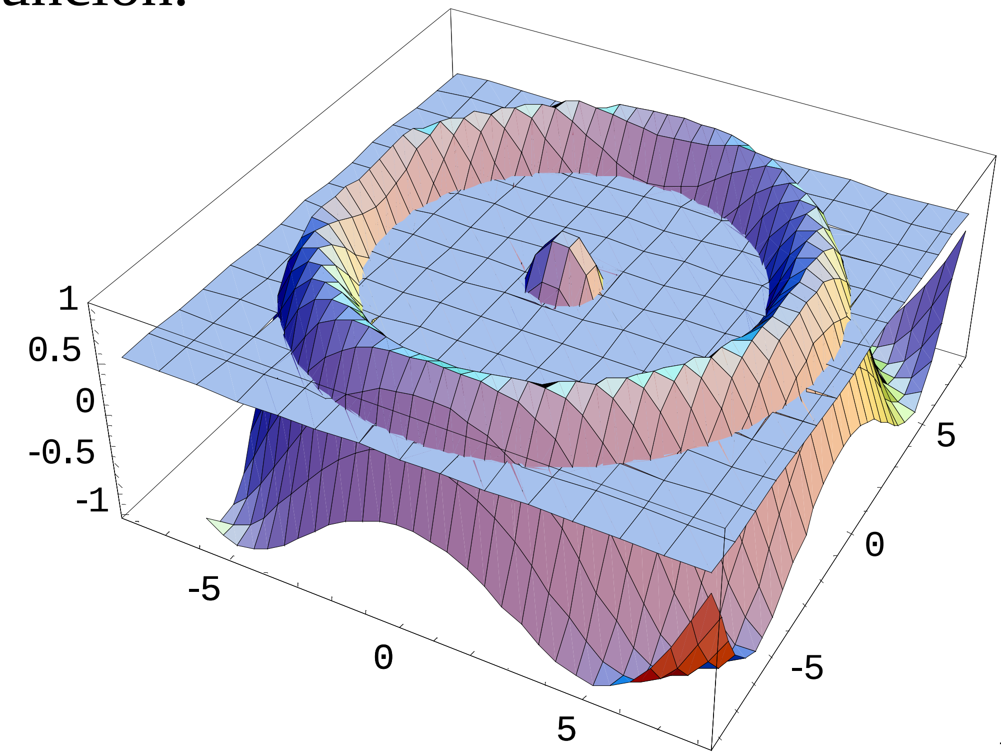
$$z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = 0.5$$

Podemos proyectar la intersección de superficie y plano (que generalmente son curvas) en el plano xy llamándola curva de nivel de nuestra función.

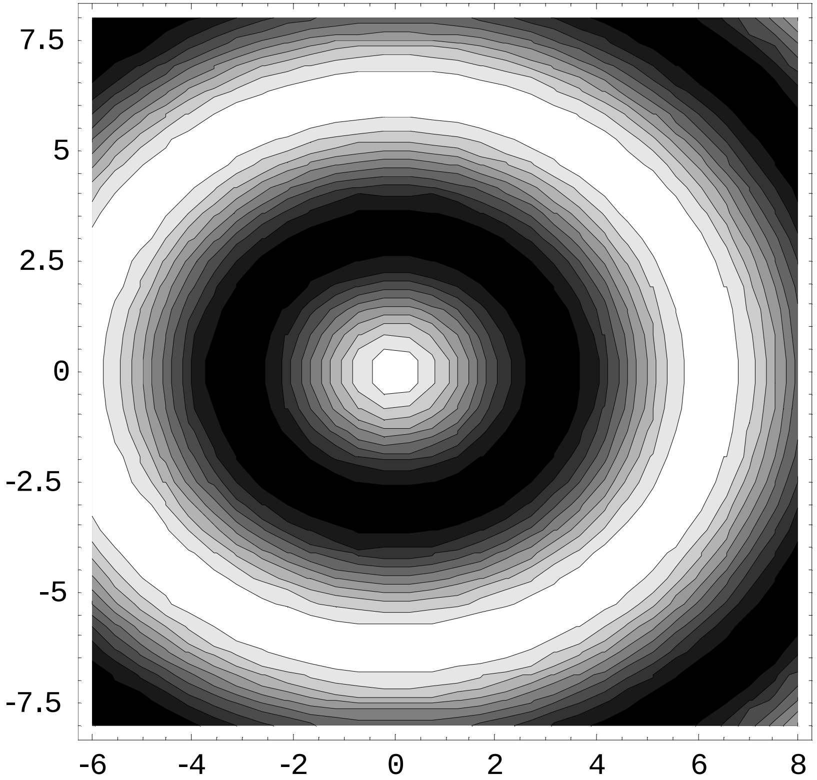
Su ecuación es

$$z = \cos\sqrt{x^2 + y^2} = 0.5$$



Mathematica ofrece el comando Countour Plot [f[x, y] ,{x , x mín , x máx },{y, y mín ,y máx}] que muestra varias curvas de nivel de f, para 10 valores de k en z = k.

```
ContourPlot[Cos[Sqrt[x^2 + y^2]], {x, -6, 8}, {y, -8, 8},
  PlotPoints → 30];
```



Observe el gráfico, la parte más clara es la más saliente en la superficie en el espacio y la más oscura la más hundida.

Límite de una función de dos variables

Definición :

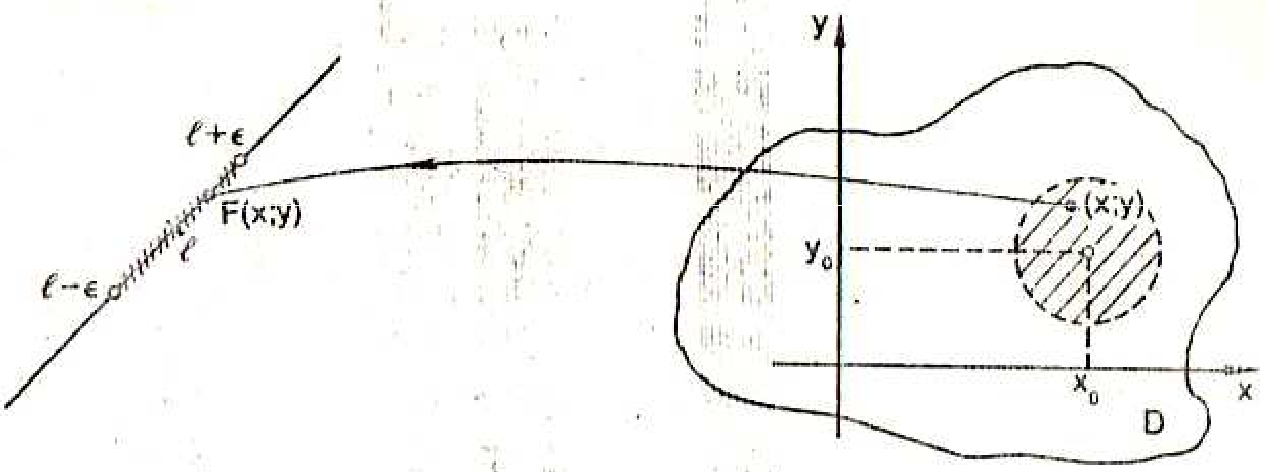
Sea el número real ℓ el límite de la función **F** en el punto **a = $(x_0;y_0)$** de acumulación de su dominio, si y solo si, para cualquier número positivo ε , existe un número positivo δ (en general dependiente de ε) tal que, para todo punto **(x;y)** que pertenece simultáneamente al dominio de **F** y al entorno reducido del centro **a** y de radio **δ,** el valor **F(xy)** pertenece al entorno de centro ℓ y de radio ε prefijado.

Lim $_{(x,y)\to(x0;y0)}$ **F (xy) =** ℓ $\Leftrightarrow$ para todo ε **>0** existe $\delta(\varepsilon)>0;$

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |F(x)-\ell| < \varepsilon$$

Gráficamente :

Elegido un entorno cualquiera de centro $\boldsymbol{\ell}$ y radio ε , es posible hallar un entorno reducido de centro **a** y de radio $\boldsymbol{\delta}$, tal que si **(xy)** pertenecen al dominio y al entorno **(a; δ),** entonces **F(xy)** pertenece al entorno (**ℓ ; ε)**



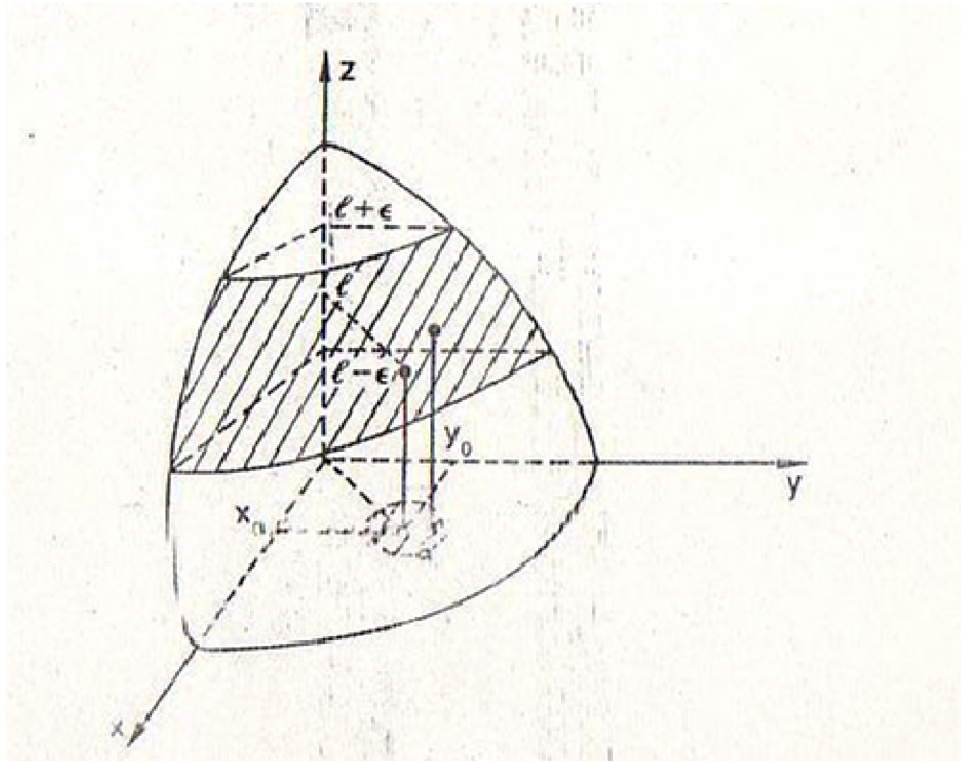
Lim $_{(x,y)\to(x0;y0)}$ **F (xy) = ℓ** ⇔ para todo ε **>0** existe $\delta(\varepsilon)>0$;

$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |F(x)-\ell| < \varepsilon$

En el espacio la idea anterior significa que la porción de superficie correspondiente a los valores de F para los puntos del entorno reducido hallado, se encuentran ubicados entre los planos de ecuaciones

$$z = \ell - \varepsilon$$

$$z = \ell + \varepsilon$$



Ejemplo 1 y 2

Obsérvese que, igual que en una variable, el radio $\boldsymbol{\delta}$ encontrado no es único, pues cualquier otro número positivo menor que $\boldsymbol{\delta}$ tambíen satisface la definición.
Debe entenderse que el único método que permite asegurar la existencia de límite finito para una función, es demostrar que se cumple la definición. Ello no es simple, salvo para funciones determinadas por reglas sencillas. Daremos algunos ejemplos de este tipo.
En general , usamos la notación

$$\lim_{(x0;y0)} F\,(xy) = \ell$$

Si en la expresión aparecen otras letras, a fin de evitar confusiones sobre cuáles son las variables, puede recurrirse a

$$\lim_{(x,y)\to(x0;y0)} F\,(xy) = \ell$$

Límites reiterados o sucesivos

El concepto de límite doble para una función escalar de dos variables es análogo al de límite simple para una función escalar de una variable. Tampoco acá interesa si el punto **(x_0;y_0)** pertenece o no al dominio de la función considerada.

$\lim_{x\text{->}x1}$f(x)= limit [f(x), x=>x_1] para funciones de una variable.

Para calcular límite de funciones de dos variables podemos aplicarlo reiteradamente.

lim [lim [`F (x,y), x=>x_1]; y=>y_1]

Funciones continuas de varias variables

Una función de dos variables **u = f(xy)** se llama continua para un sistema de valores **x=a, y=b** (en el punto **P(a,b)**) si :

1- **P(a,b)** pertenece al campo de definición de la función

2- l**im** $_{\mathbf{(x,y)\to(x0;y0)}}$ **f(xy)** existe y es igual a **f(a,b) ;** en caso contrario , la función es discontinua para **x=a, y=b** .

Si la función está dada y es continua en todos los puntos de un recinto conexo, entonces se llama **continua en este recinto**.

De forma análoga se define la continuidad de una función de varias variables.

Propiedades de las funciones continuas de varias variables

1- **El paso por el cero (Teorema de Cauchy)**

Si una función f(xy) está dada y es continua en un recinto conexo, y en dos puntos de este recinto $P_1(x_1y_1)$; $P_2(x_2y_2)$ tiene signos distintos, entonces en esta región existe por lo menos un punto $P_3(x_3y_3)$ tal que f(xy) se anula en el mismo:

$$f_3(x_3y_3) = 0 \text{ si } f_1(x_1y_1) > 0 \text{ y } f_2(x_2y_2) < 0$$

2- **Teorema del valor intermedio**

Si una función f(xy) está dada y es continua en un recinto conexo, y en dos puntos de este recinto $P_1(x_1y_1)$; $P_2(x_2y_2)$ toma valores distintos A y B , $f_1(x_1y_1) = A$ y $f_2(x_2y_2) = B$ entonces, cualquiera que sea el número C entre A y B , en la región considerada existe por lo menos un punto $P_3(x_3y_3)$ tal que

$$f_3(x_3y_3) = C \quad (A<C<B \text{ ó } B<C<A)$$

3- **Teorema de la acotación de la función**

Si una función **f(xy)** está dada y es continua en dominio (recinto cerrado) acotado entonces está acotado en este dominio; existen los números **m** y **M** tales que para todo punto **P(xy)** ;perteneciente al dominio

m<=f(xy)< =M

4- **La existencia de valores máximos y mínimos**

Si una función **f(xy)** está dada y es continua en un dominio (recinto cerrado) acotado entonces existe en este dominio por lo menos un punto **P´(x´y´)** tal que el valor **f(x´y´)** es el máximo entre todos los valores de **f(xy)** que toma la función en este dominio y existe por lo menos un punto **P¨(x¨y¨)** tal que el valor **f(x¨y¨)** es el mínimo entre todos los valores **f(xy)** que toma la función en este dominio:

f(x´y´)>f(xy)>f(x¨y¨)

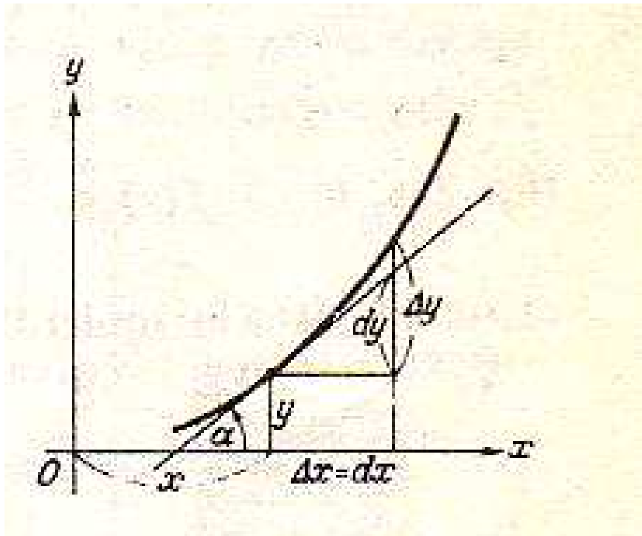
Derivadas

La derivada de una función de una variable y = f(x) es una nueva función de x que para cada valor de x es igual al límite de la razón entre el incremento de la función Δy y el incremento correspondiente del argumento Δx cuando Δx tiende a cero:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Interpretación geométrica de la Derivadas

La derivada de una función de una variable y = f(x) está representada por su gráfica , o sea por una curva en coordenadas cartesianas entonces f´(x) = tg α , donde α es el ángulo formado por el eje Ox y la tangente a la curva en su punto dado; el ángulo se considera desde la dirección positiva del eje Ox en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj



Derivadas Parciales

Derivada parcial de funciones de dos variables

Recordemos la definición de derivada parcial. Si f es una función real de dos variables definida por z = f(x,y) y mantenemos fija una de las variables, por ejemplo y = 2, z resulta función de x únicamente y su derivada con respecto a x puede calcularse como el límite del cociente incremental ,

$$\frac{f(x+h,\ 2) - f(x,\ 2)}{h}$$

cuando h tiende a cero. Este límite, cuando existe, recibe el nombre de derivada parcial de f con respecto a x en cada punto (x, 2).

Ahora sólo pensemos "y es constante", escribimos el cociente incremental

$$\frac{f(x+h,\ y) - f(x,\ y)}{h}$$

y su límite se llama la derivada parcial de f con respecto a x en (x, y).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

En este caso solo una de las variables independientes obtiene incremento. Una función de n variables derivadas parciales de primer orden :

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial u}{\partial t}$$

La derivada parcial se halla según las reglas de derivación de la función de una variable, en el caso dado las variables restantes se consideran como constantes

Por ejemplo

$$u = \frac{x^2 y}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x^2 y}{z^2}$$

Elegimos la función g y calculamos la derivada parcial aplicando la definición

```
Clear[g]
```

$$g[x\_, y\_] = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$$

$$g[x + h, y]$$

$$(g[x + h, y] - g[x, y]) / h$$

$$\text{Limit}\left[\frac{g[x + h, y] - g[x, y]}{h}, h \to 0\right]$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$$

$$\frac{1}{4}(h + x)^2 - \frac{y^2}{9}$$

$$\frac{-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}(h + x)^2}{h}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{2}$$

Interpretación geométrica de la derivada parcial de una función de dos variables

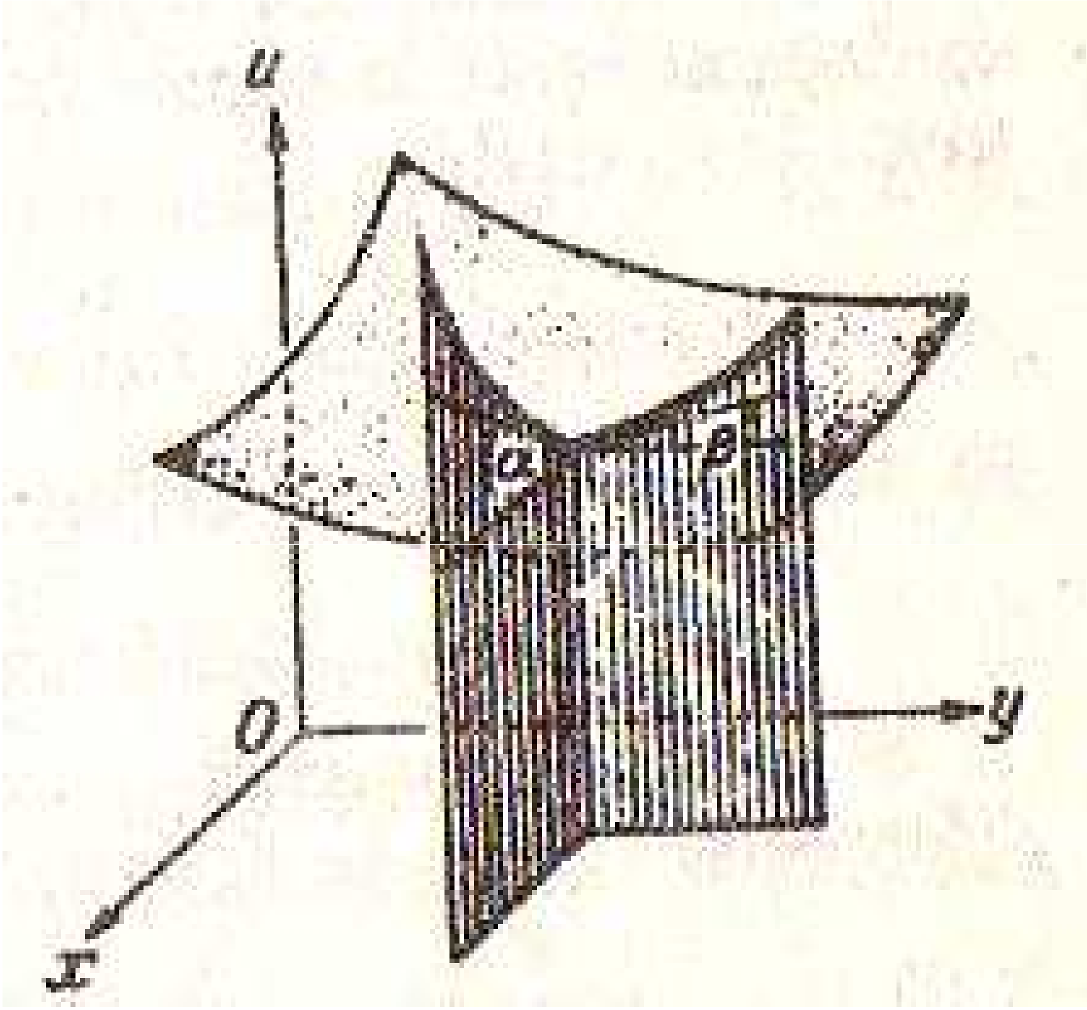
Si la función u = f(xy) está representada por una superficie en coordenadas cartesianas , entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = tg\,\alpha$$

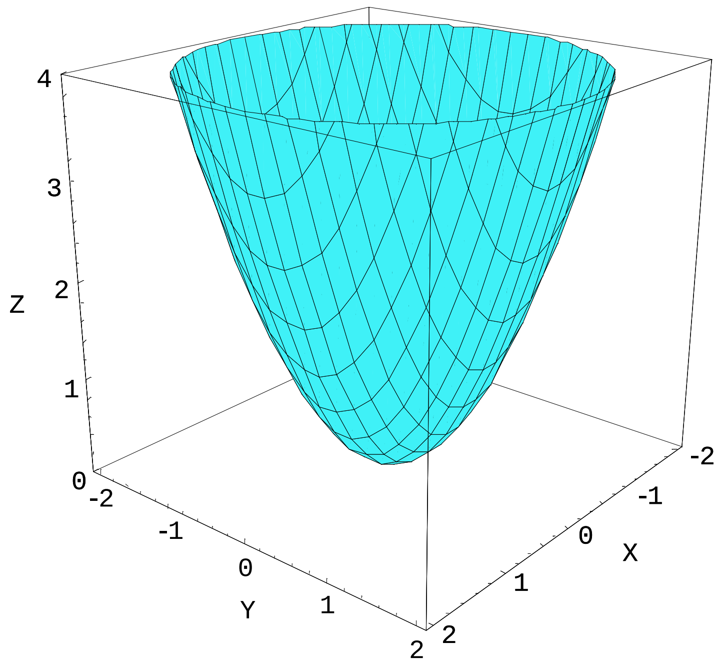
Donde α es el ángulo entre la dirección positiva del eje Ox y la tangente a la sección de la superficie en su punto dado que es paralela al plano xOu (α se considera desde el eje Ox en la dirección positiva , o sea en el sentido de las agujas del reloj, al mirar desde el lado positivo del eje Oy) . Análogamente

$$\frac{\partial u}{\partial y} = tg\,\beta$$

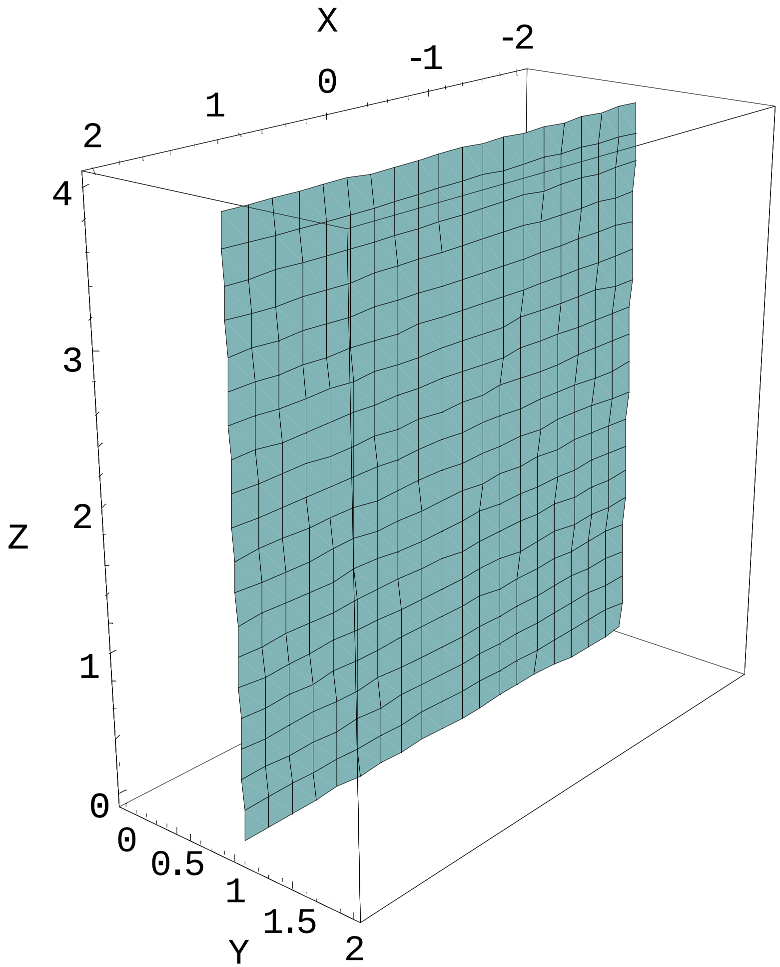
β se considera en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, en este dibujo ambos ángulos α y β son positivos.


u
a
e
O
y
x

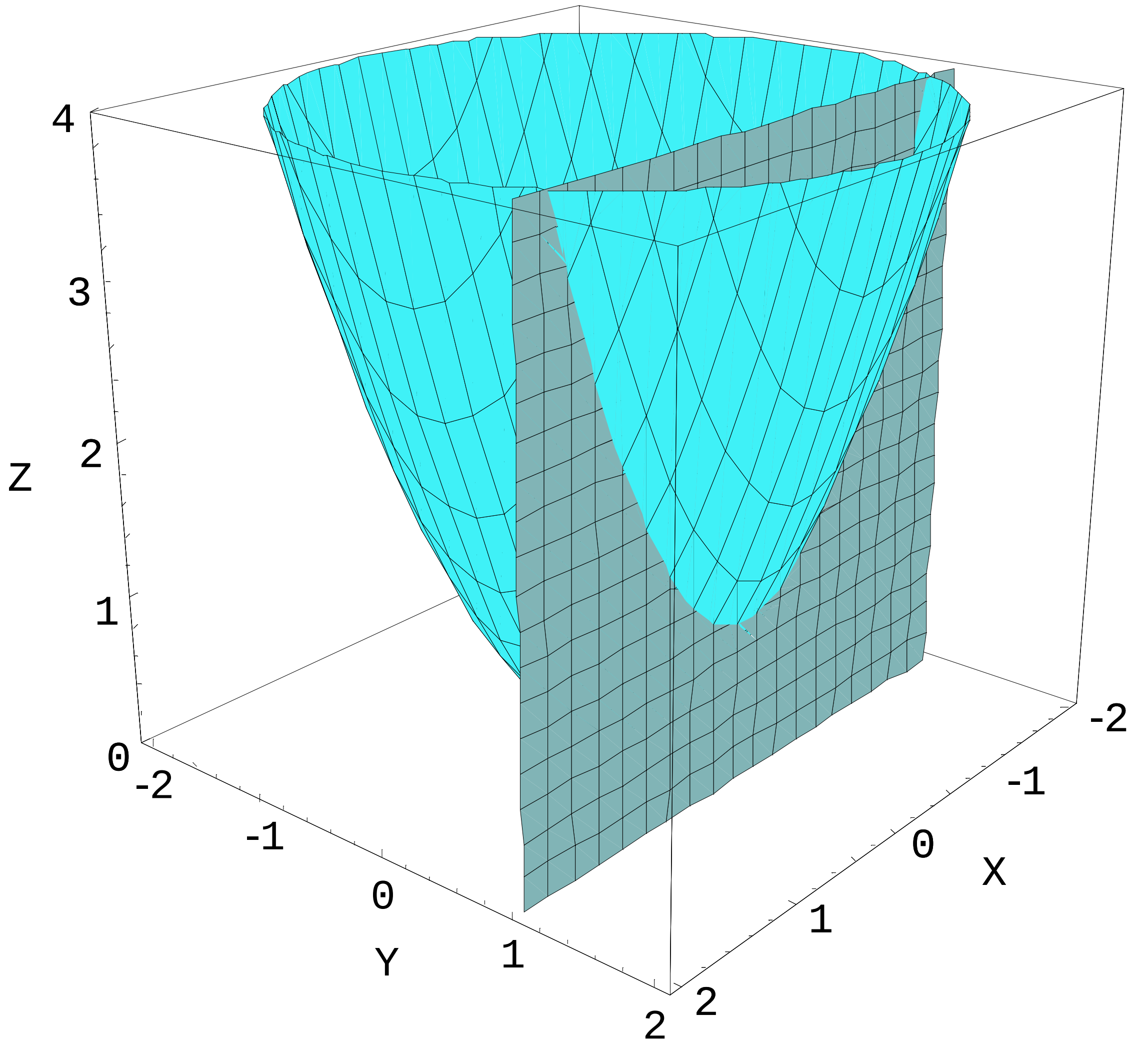
Cuando en una función de varias variables mantenemos fijas todas las variables independientes menos una y derivamos respecto de ésta obtenemos una derivada parcial.
Queremos dar una interpretación geométrica de la derivada parcial de una función de dos variables en un punto **(x, y)** determinado.
Por ejemplo, la gráfica de la función definida por **f[x, y] = x^2+y^2** es un paraboloide que representamos a continuación. Tenga presente que cada punto del paraboloide es de la forma **(x, y, x^2 + y^2)**



Seccionando el paraboloide **z = x^2 + y^2** con el plano **y = 1** tendremos la parábola **z = f[x,1] = x^2 + 1**. Primero representaremos el plano **y = 1**. Observe que cada punto de ese plano es de la forma (x, 1, z) para todo par de valores (x, z).



Ahora mostraremos juntos paraboloide y plano. La parábola sección se ve claramente

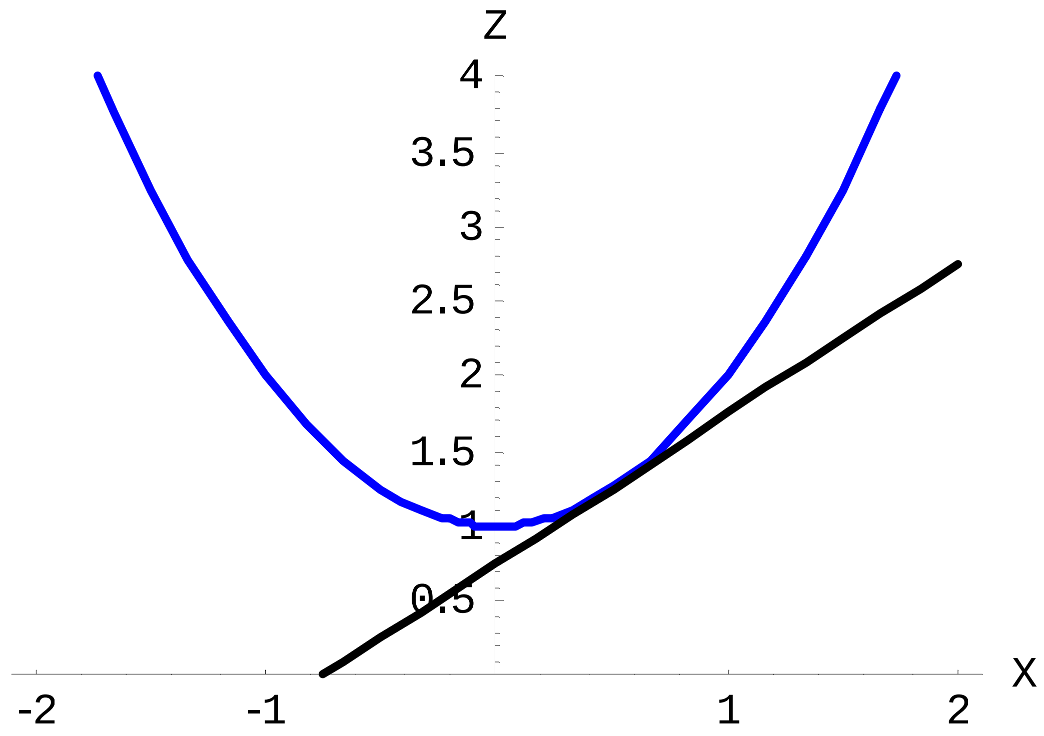


Volviendo a nuestra parábola.

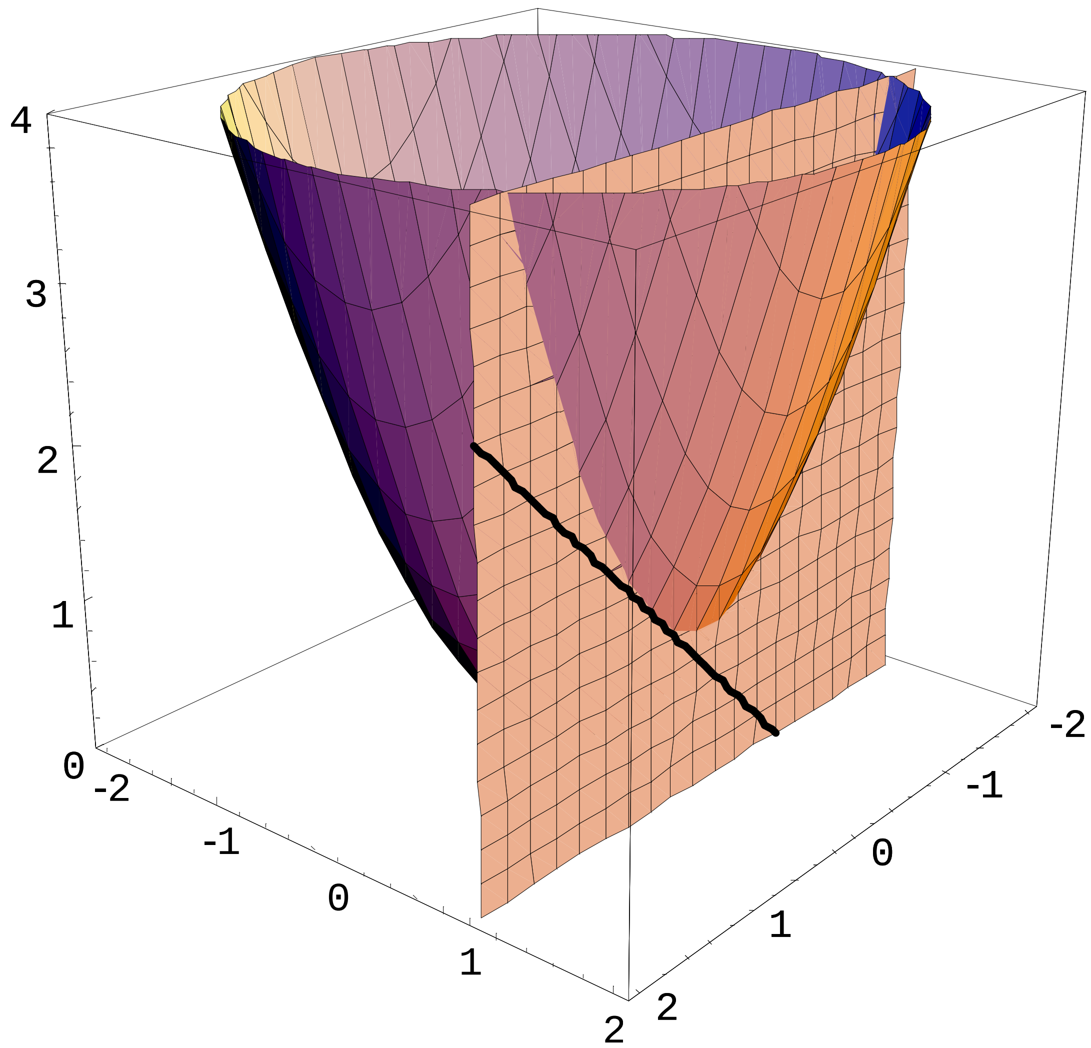
La derivada de **f(x,1) = x^2 + 1**, en el punto x = 1/2 nos dá la pendiente de la recta tangente a ella en **(x, z) = (1/2, 5/4),** que es 1. Dicha recta responde a la ecuación

$$\mathbf{z - 5/4 = x - ½}$$

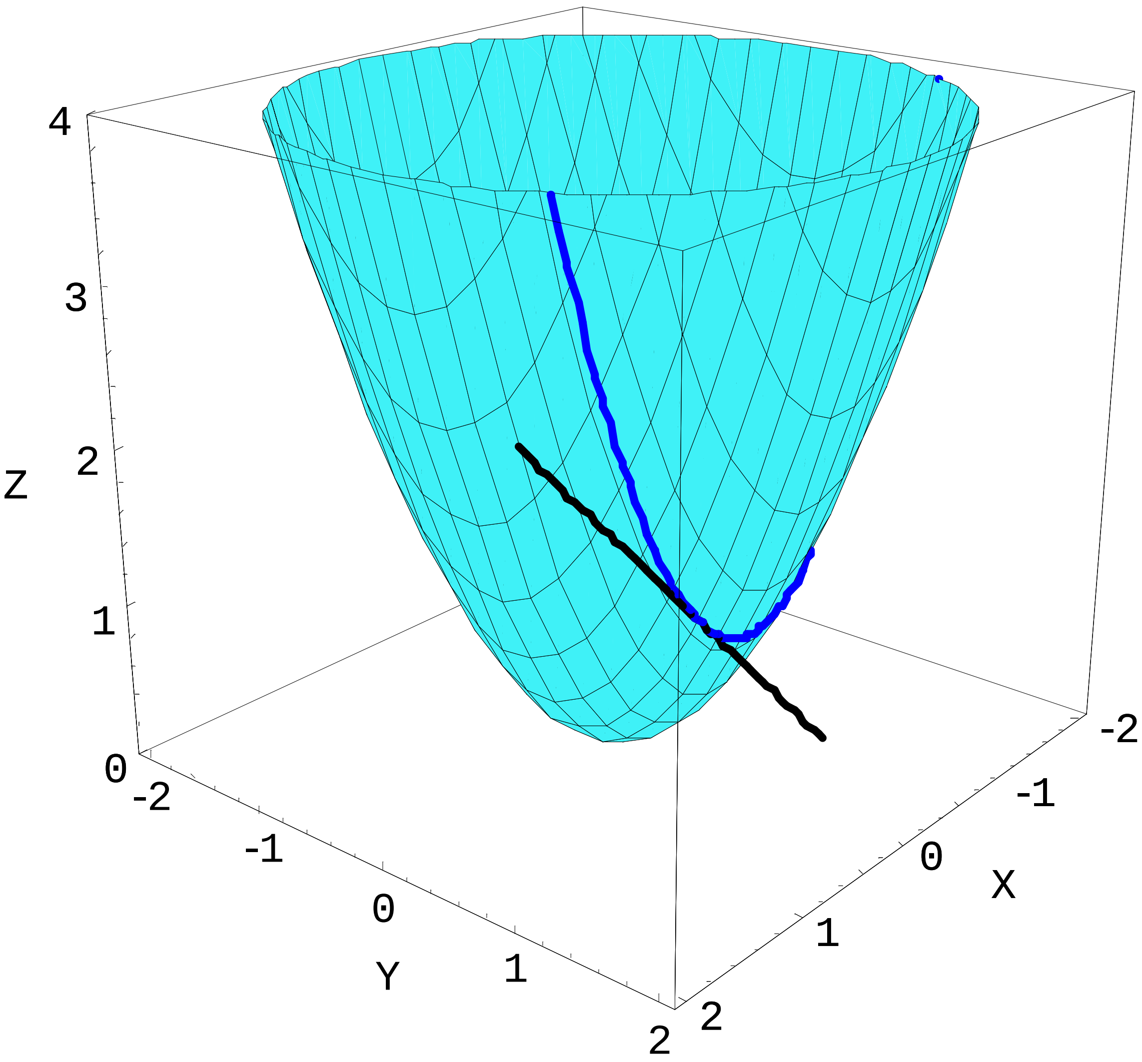
Tanto la parábola como su recta tangente están en el plano **y = 1**. Podemos graficarlas en dos o en tres dimensiones. Hagámoslo en dos dimensiones



Ahora representamos en tres dimensiones. Primero la recta tangente y a continuación recta, plano y paraboloide.



Suprimiendo el plano, mostramos el paraboloide, la parábola **z = x^2 + 1 , y = 1** y la recta tangente



Derivada parcial de función de n variables

La idea básica en la definición de la derivada parcial que revisamos es mantener fija una variable y establecer el límite de la razón (cociente) de los incrementos como se hace en una derivada ordinaria. Esa idea se aplica para definir la derivada parcial respecto de y en **z = f(x, y),** y se extiende a funciones de n variables. Para derivar parcialmente una función de n variables procedemos como en la derivación ordinaria respecto de una de las variables independientes dejando fijas las demás

Y en todos los casos una derivada parcial expresa la razón de cambio de la variable dependiente respecto de una de las variables independientes, dejando fijas las demás.

El comando para calcular derivadas parciales es

D[f [x, y, z,u,v, ...], u]

Aprovéchelo para calcular las derivadas parciales de la función definida por .

$$p(r, t, s) = \cos\left(r^4 - 2t^3\sqrt{s}\right)$$

Diferencial de funciones de dos variables

Para una función de una variable

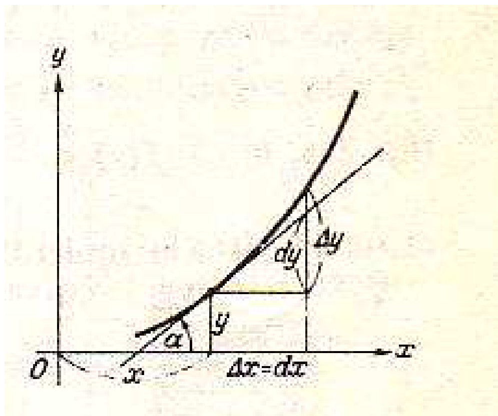
$$\mathbf{y = f(x)}$$

definimos el incremento de **y** como **Δy = f(x +Δx) - f(x),**

y la diferencial de **y** como **dy = f '(x) Δx**.

El incremento **Δy** representa el cambio de la altura en la curva

y = f(x), mientras que **dy** representa el cambio de la altura en la recta tangente cuando **x** cambia a **(x + Δx), dx = Δx** (incremento arbitrario de x), y **dy = df ≈ Δy**.



Para una función de dos variables,

$$\mathbf{z = f(x, y)}$$

el incremento de **z** cuando **x** e **y** se incrementan, respectivamente, en **Δx** y **Δy** es

$$\mathbf{\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)}$$

El incremento **Δz** representa el cambio en **f** cuando **(x, y)** cambia a

(x + Δx, y + Δy). Los incrementos de las variables independientes son arbitrarios (cuidando no salir del dominio de f) e independientes.

Si **$z = f(xy) = yx^2+3yx-y^2$** , calcular el incremento de **z** cuando

$2< x <2.05$

$3> y >2.96$

Los incrementos de **x** e **y** son

$$\Delta x = 2.05 - 2 = 0.05$$

$$\Delta y = 2.96 - 3 = - 0.04$$

Calculemos el incremento de z

En general, el incremento de la función es

```
f[x + Δx, y + Δy] - f[x, y]
```

$$-3\,x\,y - x^2\,y + y^2 + 3\,(x + \Delta x)\,(y + \Delta y) + (x + \Delta x)^2\,(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2$$

```
f[2.05, 2.96] - f[2, 3]
```

```
0.8818
```

Sean **dx, dy** dos variables independientes, es decir pueden tomar cualquier valor (podríamos llamarlas de otra forma) la diferencial (o diferencial total) de la función de dos variables

$$\mathbf{z = f(x, y)}$$

es $$\mathbf{dz = df = f_x(x,y)\, dx + f_y(x,y)\, dy}$$

Observe que la diferencial de **f** está definida como una combinación lineal de las nuevas variables, **dx** y **dy**, cuyos coeficientes son las derivadas parciales de **f**. Para nuestra función, **dz** en **(x, y)** es

$$z = 3\,x\,y + x^2\,y - y^2$$

$$dy\,(3\,x + x^2 - 2\,y) + dx\,(3\,y + 2\,x\,y)$$

y en el punto (2,3) vale

$$21\,dx + 4\,dy$$

$$21\,dx + 4\,dy$$

Si también reemplazamos las variables independientes: dx = 0.05, dy = - 0.04,

dz = 0.89

Comparemos $\Delta z = 0.8818$ y $dz = 0.89$, resulta $\Delta z \approx dz$(diap 48)

Esto no es casual. Para cualquier función con derivadas parciales continuas su diferencial es una buena aproximación de su incremento, el error $\epsilon\,(\Delta x, \Delta y) = \Delta z - dz$ de la aproximación verifica

$$\frac{\epsilon\,(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \text{ cuando } (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$$

En nuestro ejemplo calcularemos el error en (x, y) para incrementos dx, dy y a continuación verificaremos que tiende a cero " más rápido " que $\sqrt{dx^2 + dy^2}$,

distancia entre los puntos **(x, y) y (x+dx, y+dy)**

$$-3\,x\,y - x^2\,y + y^2 + 3\,(dx + x)\,(dy + y) + (dx + x)^2\,(dy + y) - (dy + y)^2$$

$$dy\,(3\,x + x^2 - 2\,y) + dx\,(3\,y + 2\,x\,y)$$

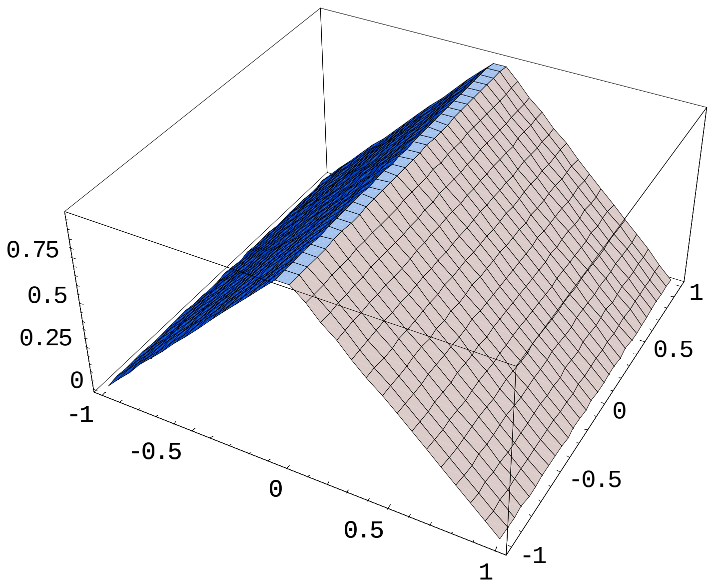
$$-dy^2 + dx\,dy\,(3 + 2\,x) + dx^2\,(dy + y)$$

$$0$$

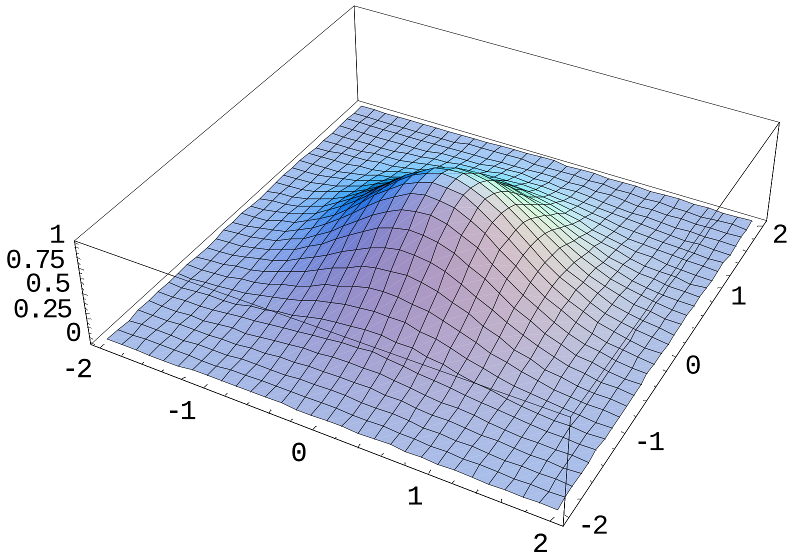
Para funciones de una variable, la recta tangente es una buena aproximación, local, de la curva. Para funciones de dos variables el plano tangente es una buena aproximación, local, de la superficie. Veremos la gráfica de una función diferenciable en el origen y de otra que no lo es. ¿Cuál le parece diferenciable en el origen?

f(xy) = $1 - \text{Abs}[x]$

g(xy) = $e^{-x^2-y^2}$



f(xy)



g(xy)

Regla de la cadena

Imagine una placa plana ubicada en el **plano xy.** Supongamos que la densidad del material en el **punto (x,y)** está dado por **f(x,y), f** función real de dos variables. Queremos averiguar cómo varía la densidad a lo largo de alguna línea ,una parábola o la que usted prefiera, en la placa.

Para lograrlo expresamos la densidad en cada punto de la línea como función de una variable, digamos **t,** y determinamos la razón de cambio o derivada, de f respecto de t. Matemáticamente hay que construir la función **g(t) = f(x(t), y(t)),** función compuesta que nos dá la densidad en cada punto de la curva **(x, y) = (x(t), y(t))** en la placa y calcular su derivada,supuesto que tal derivada exista.

A veces esta sustitución directa resulta sencilla, pero no siempre. Conviene extender la regla de la cadena que en el primer curso de cálculo le permitió derivar funciones compuestas.

Caso 1: z=f(x,y), función de dos variables reales a valores reales, con x=g(t) e y=h(t), funciones reales de una variable real.

Sea z = f(x, y) con x = g(t) e y = h(t). Supongamos que se puede realizar la composición para definir la nueva función de t,

z = f (g (t), h (t)).

Para derivar z respecto de t usamos la regla de la cadena siempre que f, g, h sean funciones diferenciables. Entonces:

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

La expresión anterior se puede abreviar como producto escalar del **vector gradiente de f y el vector tangente a la curva (x, y) = (x (t), y(t))**

$$\nabla f \,.\, r'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} ; \frac{\partial f}{\partial y} \right) . \left(x'(t), y'(t) \right)$$

Consideremos un ejemplo.
Sea **z = f(x, y) = x^2y+3xy^4**, en donde **x =t^2** e **y = sen t**, encontrar las derivadas primera y segunda de z respecto de t.

Calcularemos ∇f , que es el vector cuyas componentes son las derivadas parciales de f respecto de x e y.

$$\{2\,x\,y + 3\,y^4,\; x^2 + 12\,x\,y^3\}$$

Calcularemos además el vector cuyas componentes son las derivadas de g y de h respecto de t, respectivamente.

$$\{2\,t,\; \text{Cos}[t]\}$$

Realizaremos el producto escalar: **`gradientef.tangente`**

$$2\,t\,(2\,x\,y + 3\,y^4) + (x^2 + 12\,x\,y^3)\,\text{Cos}[t]$$

Reemplazaremos x e y por g(t) y h(t), respectivamente para obtener z'(t) que llamaremos derivada, en vez de z'[t] pues ' es un comando de *Mathematica*

```
derivada = gradientef.tangente /. {x → t^2, y → Sin[t]}
```

$$\text{Cos}[t]\,(t^4 + 12\,t^2\,\text{Sin}[t]^3) + 2\,t\,(2\,t^2\,\text{Sin}[t] + 3\,\text{Sin}[t]^4)$$

Podemos hacer el cálculo, en forma breve, usando el comando Dt que deriva f considerando x e y como funciones de la variable que se indique. En general

$$2\,x[t]\,y[t]\,x'[t] + 3\,y[t]^4\,x'[t] + x[t]^2\,y'[t] + 12\,x[t]\,y[t]^3\,y'[t]$$

$$t^4\,\text{Cos}[t] + 4\,t^3\,\text{Sin}[t] + 12\,t^2\,\text{Cos}[t]\,\text{Sin}[t]^3 + 6\,t\,\text{Sin}[t]^4$$

Derivada segunda

Queremos calcular la derivada segunda de z = f º(g, h) respecto de t dos veces:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\frac{\partial x(t)}{\partial t}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right)}{\partial t}$$

Se puede hacer aplicando la regla de la cadena a ambas derivadas parciales de f, que dejamos para usted,o aprovechar el comando Dt[f[x,y],{t,2}]

```
Dt[f[g[t],h[t]],{t,2}]//Simplify
```

$$8\,\mathrm{Cos}[t]\,(t^3+6\,t\,\mathrm{Sin}[t]^3)+\frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}[t]\,(-2\,t^2\,(-12+t^2)+9\,\mathrm{Sin}[t]+(-3+24\,t^2)\,\mathrm{Sin}[3\,t])$$

Caso 2: z = f(x, y) con x = g(t, s), y = h(t, s)

Si z = f(x,y) es una función diferenciable, y además x e y son a su vez funciones diferenciables, x=g(t,s), y = h(t,s), al componer se tiene z = f [g(t, s), h (t, s)] que se puede derivar parcialmente, respecto de s o de t. Considerando una variable por vez, estamos en el primer caso.

Usando la regla de la cadena obtenemos los pasos que habríamos de seguir con lápiz y papel para calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} ; \frac{\partial f}{\partial y} \right) . \left(\frac{\partial g}{\partial t} ; \frac{\partial g}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} ; \frac{\partial f}{\partial y} \right) . \left(\frac{\partial g}{\partial s} ; \frac{\partial g}{\partial s} \right)$$

Cuando z = x y + 5 x^2, con x = ln (t s), y = t s^3, puede seguir los pasos que haría con lápiz y papel o usar Dt. Veamos el uso de Dt

```
Clear[f, g, h]
f[x_, y_] := x y + 5 x^2
g[t_, s_] := Log[t s]
h[t_, s_] := t s^3
```

```
paso1 = Dt[f[g[t, s], h[t, s]], s]
```

$$s^2 (t + s\,\mathrm{Dt}[t, s]) + 3 s^2 t\,\mathrm{Log}[s t] + s^3\,\mathrm{Dt}[t, s]\,\mathrm{Log}[s t] + \frac{10 (t + s\,\mathrm{Dt}[t, s])\,\mathrm{Log}[s t]}{s t}$$

El comando Dt da la derivada total de f respecto de la variable que se indique, s en este caso, y presupone todas las demás en función de s. Como t y s son nuestras variables independientes, Dt[s,t] = Dt[t,s]=0. Entonces la derivada parcial de z con respecto a s, que es la que buscamos, se obtiene haciendo una sustitución adicional

```
paso2 = paso1 /. Dt[t, s] → 0 /. Dt[s, t] → 0
```

$$s^2 t + \frac{10\, \mathrm{Log}[s\, t]}{s} + 3\, s^2\, t\, \mathrm{Log}[s\, t]$$

Ahora usemos la regla de la cadena, como a mano. Paso a paso obtendríamos lo que, de una vez, tenemos ahora

```
d1=D[f[x, y], x]*D[g[t, s], s] +    D[f[x, y], y]*D[h[t, s], s] /.
    x -> Log[t*s] /. y -> t*s^3
```

$$3\, s^2\, t\, \mathrm{Log}[s\, t] + \frac{s^3\, t + 10\, \mathrm{Log}[s\, t]}{s}$$

Comparemos con el resultado anterior

Haga usted la otra derivada

Derivada direccional y gradiente

Derivada Direccional

Si en una habitación hay una estufa, cerca de ella hace más calor que lejos, de modo que la temperatura es función de la posición. Si la temperatura varía mucho de un lugar a otro, la distribución de calor no es muy eficiente, de modo que el conocimiento de esta distribución es importante. Pero es muy importante también la variación del calor de un lugar a otro. A poco de pensar, uno se da cuenta que esta variación del calor depende de la dirección en que se la piensa. Por ejemplo, si nos movemos sobre una circunferencia con centro en la estufa, es razonable esperar que haya poca variación. En cambio, si nos alejamos o acercamos, esperamos que la variación sea más acentuada.

Si las variaciones son muy grandes, y pasamos de una región fría a una región de mucha temperatura, la estufa no parece tener un buen diseño para la distribución del calor.

De modo que las variaciones pueden servir como medida del diseño de una estufa. Existen muchos casos donde se nos pueden plantear problemas en los que una función y sus variaciones son importantes. Tomemos este ejemplo, pero recordemos que no es el único caso donde podremos aplicar el desarrollo matemático que sigue.

Supongamos que **f (x,y,z),** (f función real de tres variables), representa la temperatura que usted mide cuando se ubica en **(x,y,z).**

Queremos estudiar con qué rapidez cambia la temperatura, a medida que usted se mueve en una determinada dirección.

Sea **u = (u[1],u[2],u[3])**

un vector unitario y **(a, b, c)** un punto de **R^3**; entonces el conjunto de puntos **R^3** de la forma

" (a, b, c) + t (u[1],u[2],u[3]) para t ϵ R "

es la recta **L** que pasa por **(a,b,c)** y es paralela al vector

u = (u[1],u[2],u[3])

Cuando usted se mueve a lo largo de esta recta con velocidad **u** su posición es

"(a, b, c) + t (u[1],u[2],u[3])"

en el instante **t,** la función real de una variable

g[t] = f[(a,b,c) + t (u[1],u[2],u[3])]

es la temperatura que usted siente en el tiempo **t.**

Podemos preguntar ¿ con qué rapidez están cambiando los valores de f a lo largo de la recta L en el punto (a,b,c)?

Como la razón de cambio de una función es su derivada, podemos contestar que la rapidez es la derivada de esta función de **t** en **t=0.** Cuando **t = 0, (a,b,c) + t (u[1],u[2],u[3])** se reduce a **(a,b,c)).**

La llamaremos la derivada de **f** en el punto **(a,b,c)** en la dirección de la recta **L**, es decir, en la dirección del vector **u**.

Antes de precisar el concepto mediante una definición contruiremos la función g en un ejemplo para una función sencilla f como

f (x,y,z) = x^2*y + z

f está definida en todo punto de R^3; y podemos considerar **(a,b,c) = (1,2,3)** y el vector

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

```
Clear[f, g, u, a, b, c]
f[x_, y_, z_] := x^2 y + z
```

definimos también el vector unitario u y el punto (a, b, c)

(a,b,c) = (1,2,3) y el vector $u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

{1, 2, 3}

entonces cada punto de la recta L es de la forma

```
{a, b, c} + t u
```

$\left\{1 + \frac{t}{\sqrt{3}}, 2 + \frac{t}{\sqrt{3}}, 3 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right\}$

y entonces la función g(t), f en cada punto de la recta L, resultará

$g[t\_] = f\left[1 + \frac{t}{\sqrt{3}}, 2 + \frac{t}{\sqrt{3}}, 3 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right]$

$$g(t) = 3 + \frac{t}{\sqrt{3}} + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(2 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$

Conocida g se puede calcular su derivada en t = 0

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}{\sqrt{3}} + \frac{2\left(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)\left(2 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$g'(0) = 2\sqrt{3}$$

Definición de derivada direccional

Definimos la derivada direccional de f en el punto (a, b, c) y en la dirección del vector unitario u como

$$D_u f(a, b, c) = \left(\frac{d}{dt} \left(f\left(a + tu_1, b + tu_2, c + tu_3\right)\right)_{t=0}\right)$$

Si f es diferenciable la derivada anterior se puede calcular aplicando la regla de la cadena. Obtendremos

$$D_u f(a, b, c) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + u_2 \frac{\partial f}{\partial y} + u_3 \frac{\partial f}{\partial z}$$

ya que las derivadas de x = a + , y = b + , z = c + son, respectivamente u_1 , u_2 ,u_3 . Las derivadas parciales de f deben calcularse en (a, b, c)

Si f es una función diferenciable de dos variables, su derivada direccional en (x, y) en la dirección de cualquier vector unitario $u = (u_1 , u_2)$ se reduce a:

$$D_u\ f(a,\ b) = u_1 \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x} + u_2 \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}$$

En ambos casos podemos escribir la fórmula de cálculo de la derivada direccional como el producto escalar entre el vector cuyas componentes son las derivadas parciales de la función real f y el vector u que determina la dirección en que se busca la razón de cambio de f.

Sea la función x*y + x^2 - y^2; y calculemos su derivada direccional a lo largo de la recta que divide el primer cuadrante en tercios, a partir del punto (1, 1/2)

```
f[x_, y_] := x*y + x^2 - y^2
```

La recta que divide en tercios el primer cuadrante, pasa por (0,0) y el punto (1,1/2). La dirección estará dada por el vector de componentes (1, 1/2) y por tanto

```
v := {1, 1/2}
```

y normalizado será

```
norma = Sqrt[v.v]
```

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

```
u = v/norma
```

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$$

La derivada direccional de f en (x, y) será

```
derivdirec = u[[1]] * D[f[x, y], x] +
  u[[2]] * D[f[x, y], y]
```

$$\frac{x - 2 y}{\sqrt{5}} + \frac{2 (2 x + y)}{\sqrt{5}}$$

y en (1, 2)

```
derivdirec /. x → 1 /. y → 1/2
```

$\sqrt{5}$

Gradiente de un Campo Escalar

El gradiente de una función f real de tres variables y diferenciable, se define como el vector en el espacio , cuyas componentes, en el sistema cartesiano ortogonal, son las derivadas parciales de la función escalar f . Lo simbolizamos

$$\mathbf{grad}\,(f) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Análogamente el gradiente de una función real de dos variables, diferenciable, se define, en el sistema cartesiano ortogonal, como el vector en el plano,R^2 , dado por

$$\mathbf{grad}\,(f) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Así el gradiente de

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

será

```
f[x_, y_, z_] := Sqrt[x^2 + y^2 + z^2]
```

```
gradientef = {D[f[x, y, z], x], D[f[x, y, z], y],
  D[f[x, y, z], z]}
```

$$\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right\}$$

que en el punto (2,3,4) se obtiene reemplazando x por 2, y por 3, z por 4, con el operador de reemplazo de *Mathematica*.

```
gradientef /. x → 2 /. y → 3 /. z → 4
```

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}\right\}$$

Ahora calculemos el gradiente de $g(x, y) = x y^2$ en $(-2, 3)$

```
Clear[gradienteg]
g[x_, y_] := x y^2
```

$\{y^2, 2 x y\}$

```
gradienteg /. x → -2 /. y → 3
```

$\{9, -12\}$

Gradiente y curvas de nivel

Sea la función **c(x, y) = x^2 - 2*y^2 + 4** y deseamos visualizar la posición relativa del vector gradiente de **c(x, y),** calculado en **(a, b**) y por otro lado estudiaremos la curva donde la función c(x, y) toma un valor constante. Es decir, usaremos el lugar geométrico de los puntos para los cuales **c(x, y) = c(a, b).** Tal lugar geométrico lo llamaremos Curva de Nivel. Por ejemplo, podemos hacer la representación gráfica de **c(x, y) = c(a, b).**

```
Clear[a, b, c]
```

```
c[x_,y_]:=4-x^2-2 y^2
c[1,Sqrt[3/2]]
c[x,y]==c[1,Sqrt[3/2]]
```

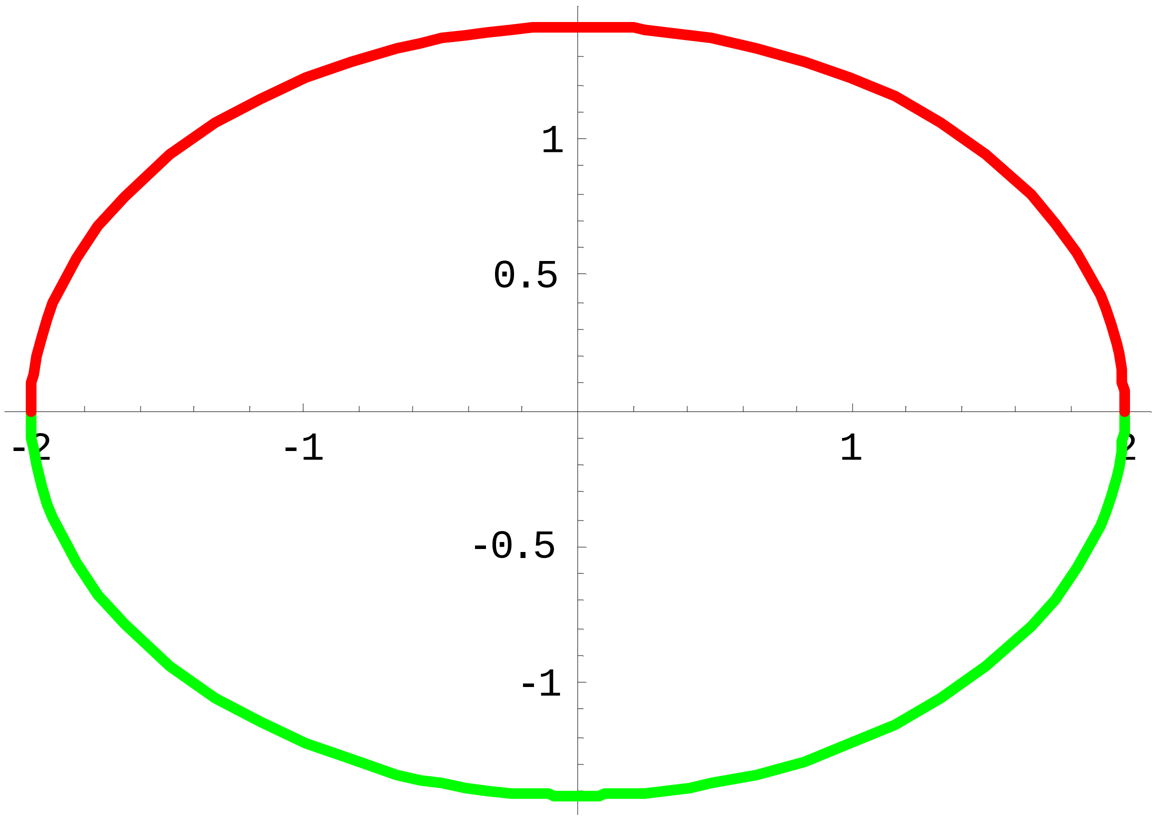
Determinamos la curva de nivel $c\left[1,\ \sqrt{3/2}\right]$

$$\left\{\left\{y \to -\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}\right\},\ \left\{y \to \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

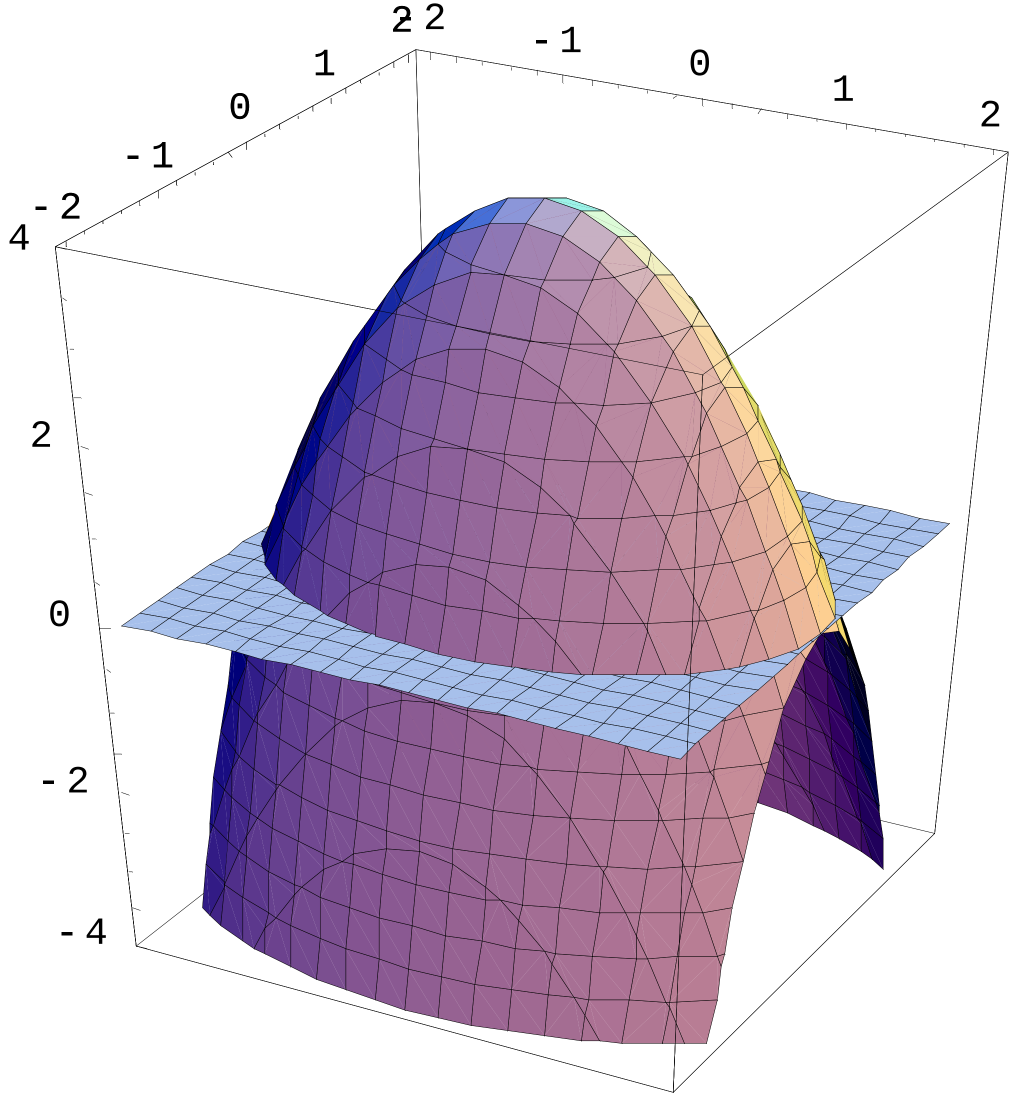
$$-\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}$$

Y ahora graficamos la curva de nivel



Podemos visualizarla también en tres dimensiones. Para indicar la curva de nivel dibujaremos el plano $z = c\left(1, \sqrt{3/2}\right)$ que es 0, y veremos la curva de corte con la superficie c(x,y)



El vector gradiente de la función c en P $\left(1, \sqrt{3/2}\right)$ es

```
vectorgradiente = {D[c[x, y], x], D[c[x, y], y]}
```

```
c[x_,y_]:=4-x^2-2 y^2
```

$\{-2x, -4y\}$

```
vectorgradiente /. x → 1 /. y → Sqrt[3 / 2]
```

$\{-2, -2\sqrt{6}\}$

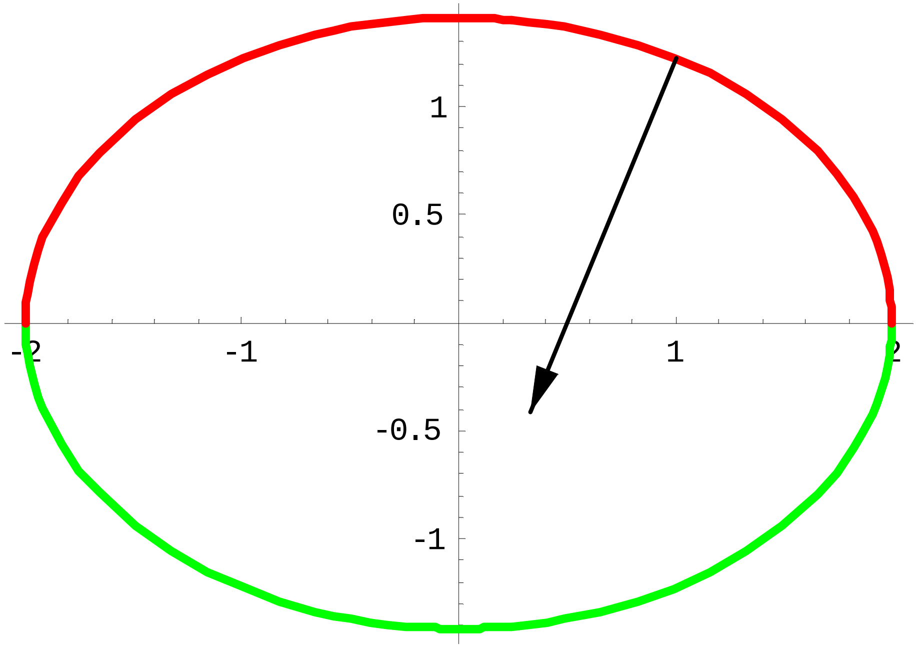
```
nivel[[2, 1, 2]]
```

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}$$

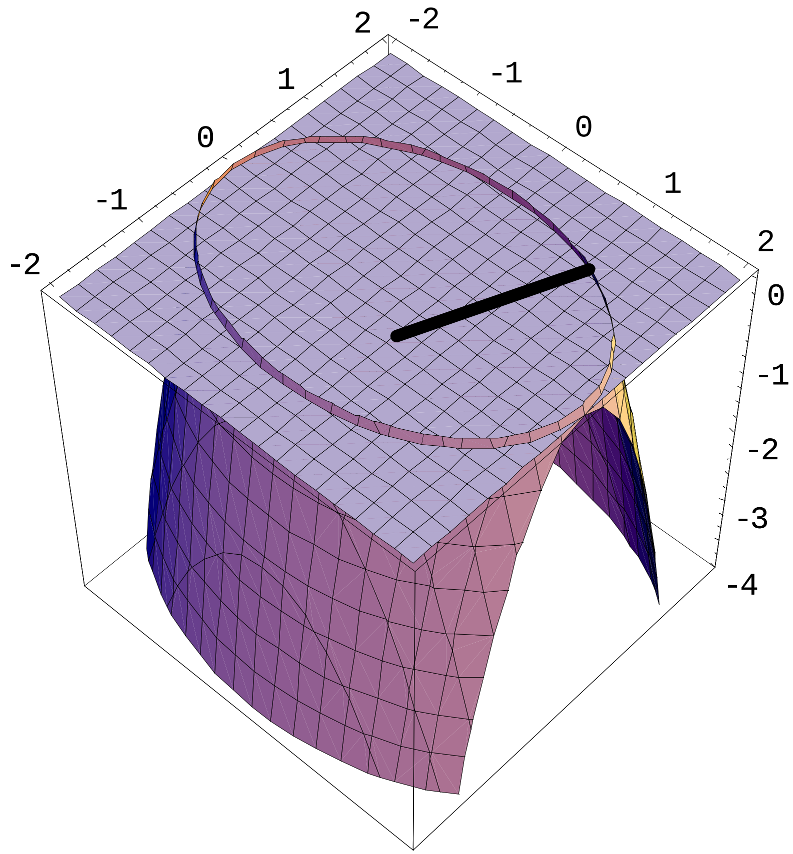
Para representar el gradiente, que es el vector (-2, -2), usaremos una flecha más corta dividiendo por 3 cada componente del gradiente. Previamente debemos cargar un paquete que habilitará el comando Arrow con el que dibujaremos la flecha que tiene la dirección del vector gradiente, con origen en $\left(1, \sqrt{3/2}\right)$ y extremo en (2/3, - 2* / 3)

```
{1, Sqrt[3 / 2]} + {-2 / 3, -2 * Sqrt[6] / 3}
```

$$\left\{\frac{1}{3}, -2\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$



Lo graficaremos asimismo en tres dimensiones, para ver su relación con c(x, y), pero no olvide que el vector gradiente, en este caso, tiene dos dimensiones. La tercera la agregamos a los comandos para la representación gráfica en tres dimensiones. Por ello es siempre cero. Reducimos la longitud de la flecha, dividiendo las componentes por 3, para darle mejor aspecto al dibujo.



Volvamos al plano. Si trazamos la recta tangente a la elipse (línea de nivel) en el punto en que aplicamos el vector gradiente resultará perpendicular a éste.Generar el gráfico llevaría tiempo,pero calcular un vector tangente es fácil.Retomando la ecuación del arco superior

```
nivel[[2, 1, 2]]
```

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}$$

podemos parametrizarla con x con lo que las ecuaciones paramétricas son (x, y) = (x,). Calculemos el vector tangente

$$\left\{1, -\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{4-x^2}}\right\} \qquad \left\{1, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

Hacemos ahora el producto escalar entre los vectores tangente y gradiente

```
(vectorgradiente /. x → 1 /. y → Sqrt[3 / 2]).
  D[r[x], x] /. x → 1
```

$$0$$

¿ Es esto casual? No lo es, trataremos de justificarlo en lo que sigue.

Perpendicularidad entre el vector gradiente y una línea de nivel

Volvamos al problema de la perpendicularidad entre el vector gradiente y una curva de nivel. Si nos movemos en una curva de nivel (de $z = f(x,y)$) z es constante, por lo que su razón de cambio en la dirección de dicha curva (dada por su vector tangente) será nula.Como la derivada direccional es el producto escalar del vector gradiente por el vector dirección (vector tangente normalizado) dicho producto es nulo y vector tangente y vector gradiente resultan perpendiculares.

Ejercicio

Supongamos que una colina tiene la forma del paraboloide elíptico **$z = 25 - x^2; \; -25\, y^2$**; x e y son las coordenadas este-oeste y norte-sur, z es la altura sobre el nivel del mar, **x, y, z** están medidas en metros.Un ingeniero debe construir un ferrocarril que suba la colina. Subir directamente es demasiado empinado para la fuerza de las máquinas.En el punto **(0.5, 0.5)** ¿en qué direcciones se puede colocar la vía de modo que suba un **3%,** esto es, un ángulo cuya tangente sea **3/100**?

Plano tangente a una superficie de nivel

Habíamos visto que el vector gradiente de z = f(x, y) es ortogonal en el punto P a la línea de nivel de f que pasa por P. En el espacio ocurre algo semejante. El vector gradiente de w = F(x, y, z) es ortogonal en el punto P a la superficie de nivel de F que pasa por P.

Sea S una superficie de ecuación F(x, y, z) = k, es decir la superficie de nivel k de la función w = F(x, y, z) y sea P(xo,yo,zo) un punto en S.

Si el gradiente de F en P(xo, yo, zo) es no nulo entonces se puede definir el plano tangente a la superficie de nivel como el plano que pasa por P y es normal al vector ∇F en P de la siguiente forma:

$$\frac{\partial F(P)}{\partial x}(x - \mathrm{xo}) + \frac{\partial F(P)}{\partial y}(y - \mathrm{yo}) + \frac{\partial F(P)}{\partial z}(z - \mathrm{zo}) = 0$$

Determine las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal en el punto (-2,1,-3) del elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

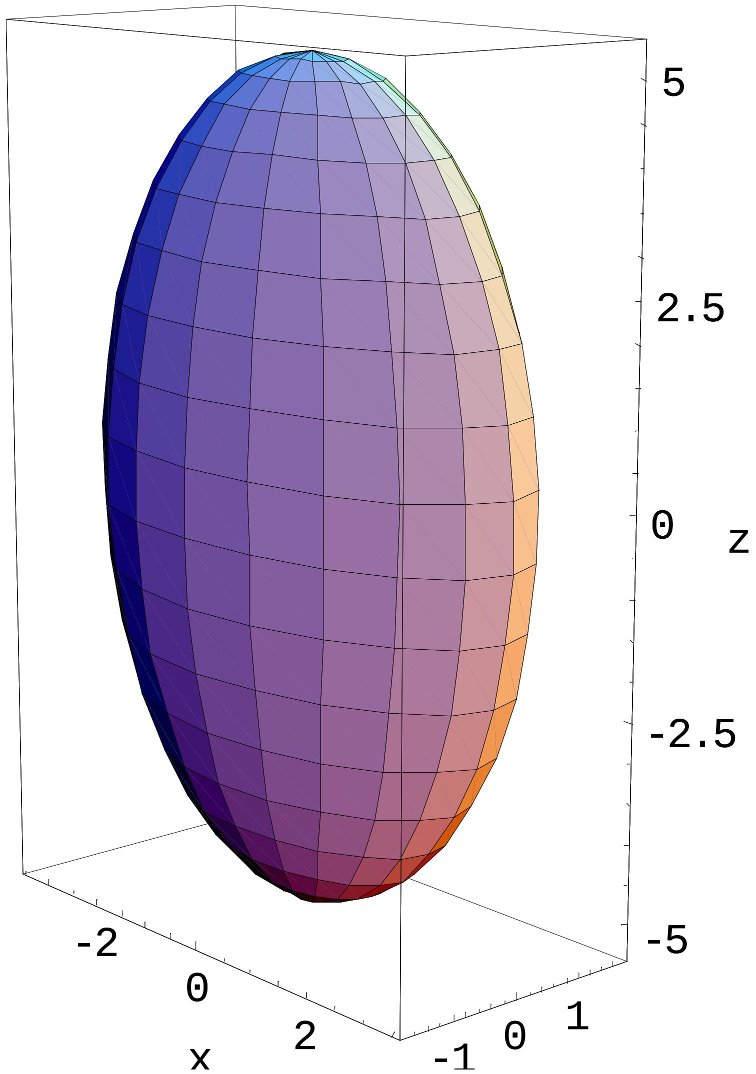
```
Clear[f]; f[x_, y_, z_] = x^2/4 + y + z^2/9 - 3
```

Representaremos el elipsoide parametrizándolo en la forma

$$x = 2\sqrt{3}\,\mathrm{Sin}[v]\,\mathrm{Cos}[u],\ y = \sqrt{3}\,\mathrm{Sin}[v]\,\mathrm{Sin}[u],\ z = 3\sqrt{3}\,\mathrm{Cos}[v]$$

Eliminando los parámetros resulta

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 3 = 0$$



Los coeficientes directores del plano tangente al elipsoide en (-2, 1, -3) son

```
{D[f[x, y, z], x], D[f[x, y, z], y], D[f[x, y, z], z]} /. x → -2 /. y → 1 /. z → -3
```

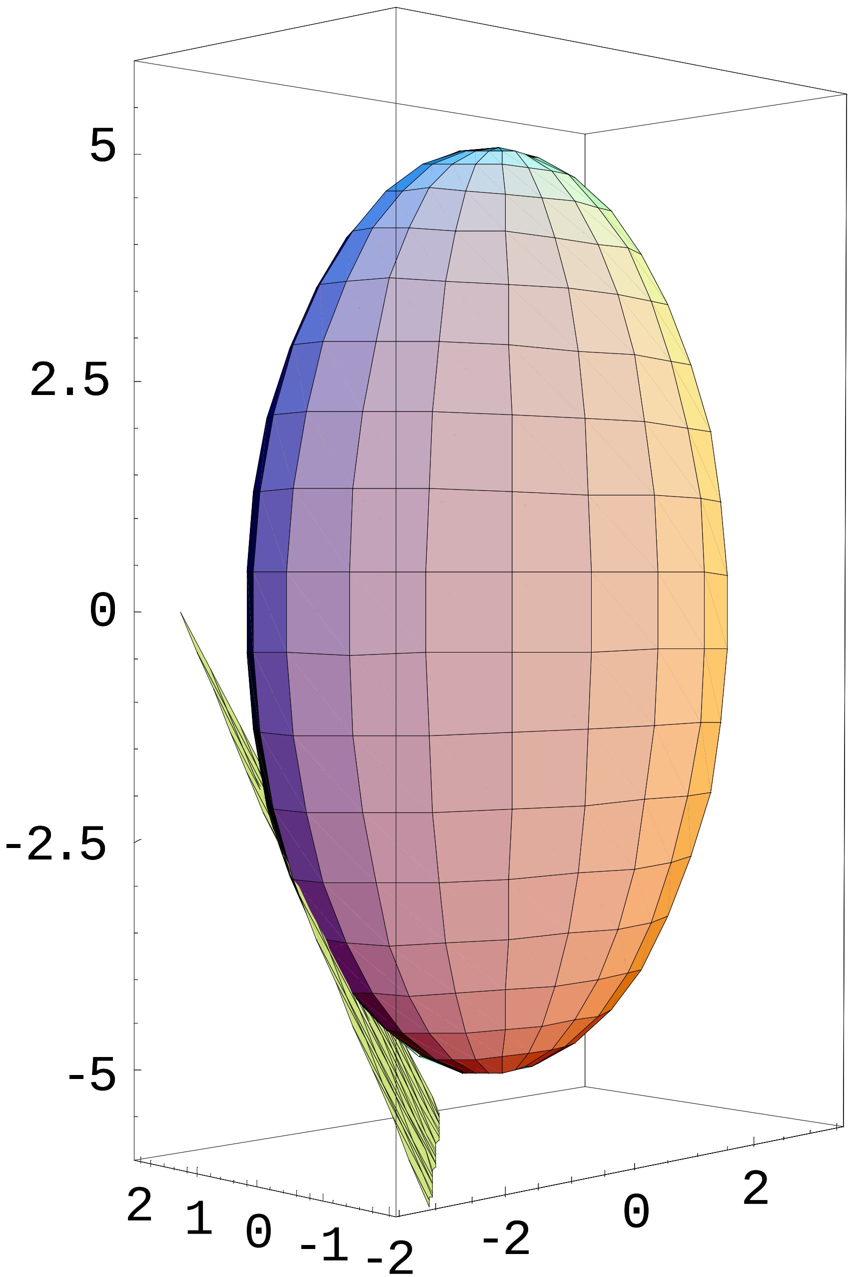
$$\left\{-1,\ 1,\ -\frac{2}{3}\right\}$$

y entonces la ecuación del plano tangente es

```
ecuacion = -(x + 2) + (y - 1) - 2 (z + 3) / 3 == 0
```

$$-3 - x + y - \frac{2\,(3 + z)}{3} == 0$$

Despejando z, tenemos z = -3 (5 + x - y)/2, y ahora se puede representar con Plot3D. Lo hacemos, y mostramos superficie y plano juntos con Show


5
2.5
0
-2.5
-5
2 1 0 -1 -2
-2 0 2

Máximos y Mínimos Locales

Se dice que una función de dos variables tiene un máximo local en (a,b) si $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo punto (x,y) perteneciente a algún disco con centro en (a,b).Al número f(a,b) se le llama valor máximo local. Si $f(x,y) \geq f(a,b)$ para todo (x, y) perteneciente a dicho disco, f(a, b) es un valor mínimo local.

Si f tiene un extremo local (esto es, un máximo o un mínimo) en (a,b) y las derivadas parciales existen en ese punto, entonces

$f'_x(a, b) = 0$ y $f'_y(a, b) = 0$, , es decir , el gradiente de la función es nulo.

El punto (a,b) en que las derivadas parciales son, ambas, nulas o no existen, se le llama punto crítico.

Sea **f1** $(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

determinar, si existen,los extremos locales.

Puntos críticos

$14 - 2x + x^2 - 6y + y^2$

```
{D[f1[x, y], x] D[f1[x, y], y]}
```

$\{(-2 + 2x)\ (-6 + 2y)\}$

Resolveremos el sistema

Utilizaremos el comando Solve

Solve resuelve ecuaciones o sistemas: a = Solve[ecuación, variable]; Solve[{ecuac1,ecuac2,...},{var1,var2,...}].
Las soluciones se pueden extraer de la siguiente forma
{a [[1, 1, 2]], a [[1]] }.

```
Solve[{-2 + 2 x == 0, -6 + 2 y == 0}, {x, y}]
```

$\{\{x \to 1, y \to 3\}\}$

El punto P(1,3) es el punto crítico en donde puede haber un extremo, para ello estudiaremos los valores de la función cerca de (1, 3) con el comando Table

Table permite construir tablas de valores usando listas.

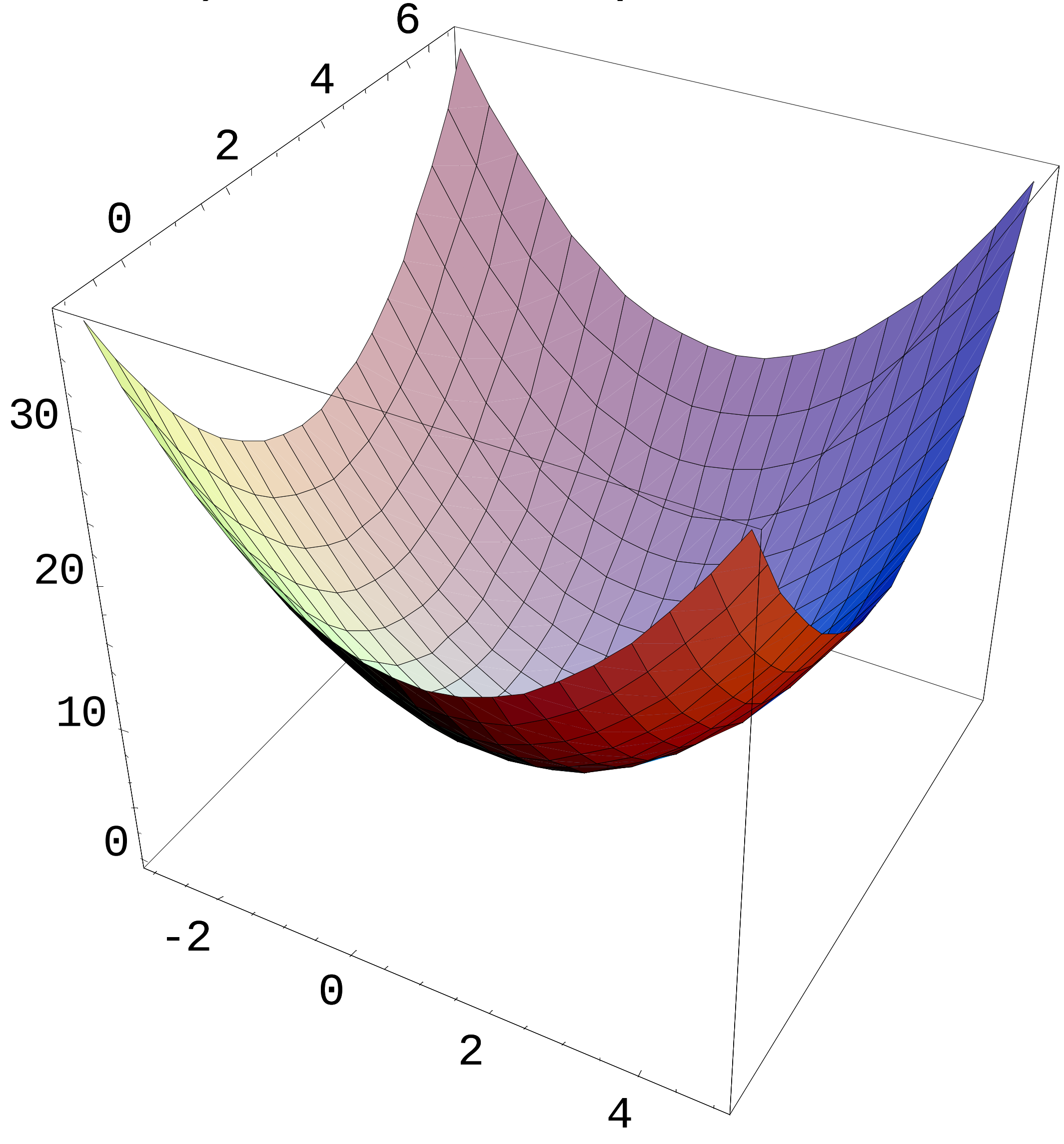
TableForm da los datos en forma de tablas

Con el siguiente comando se obtendrán los valores de f1[x, y] en forma de tabla

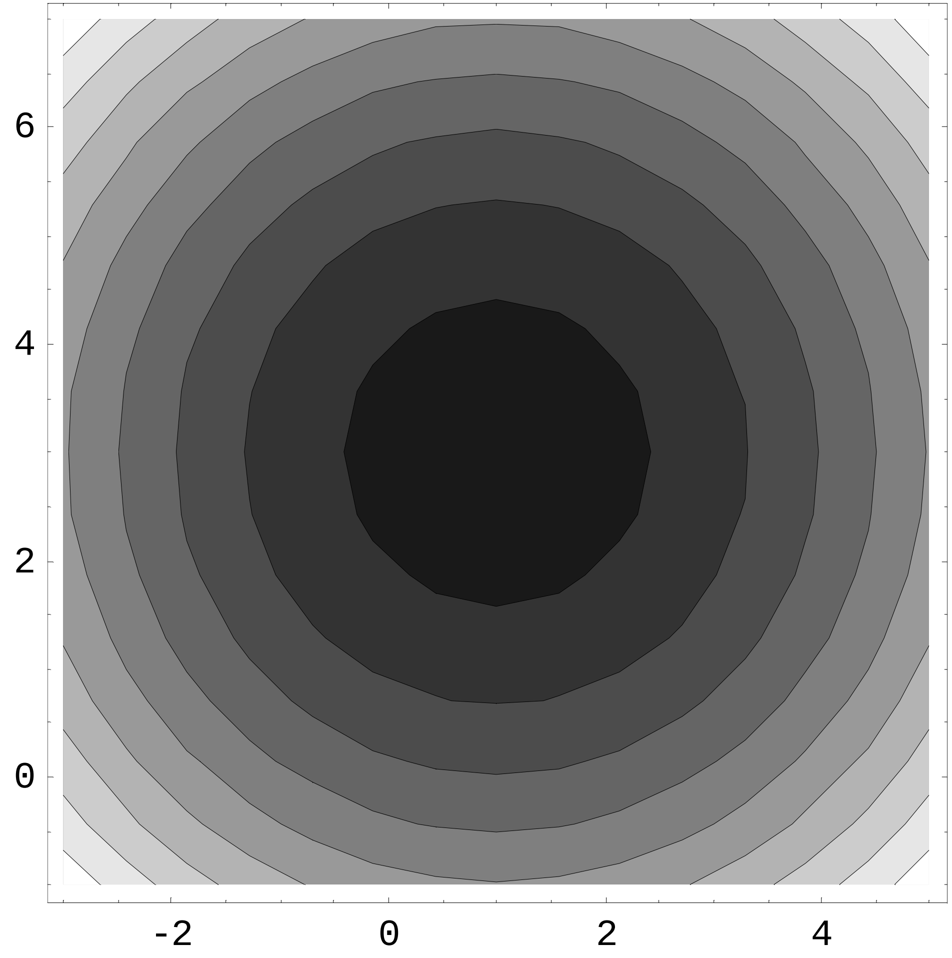
```
Table[f1[x, y], {x, 0, 2, .5}, {y, 2, 4, .5}] //
 TableForm
```

6	5.25	5.	5.25	6.
5.25	4.5	4.25	4.5	5.25
5.	4.25	4.	4.25	5.
5.25	4.5	4.25	4.5	5.25
6.	5.25	5.	5.25	6.

Podemos observar que en los puntos elegidos el valor de la función es mayor que 4 siendo f(1, 3) = 4 por lo tanto en dicho punto la función presenta posiblemente, un mínimo.Representémosla.

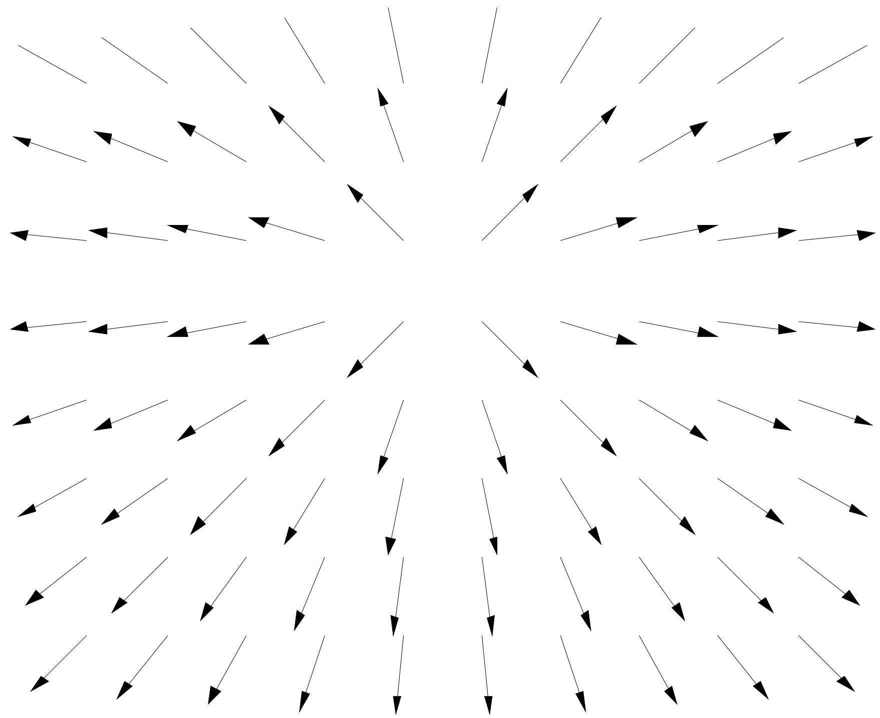


Aprovecharemos el comando ContourPlot que entrega un gráfico de las curvas de nivel con sombreado gradual de negro a blanco, blanco para las cumbres y negro para las simas. Recordar que el punto crítico es (1,3)

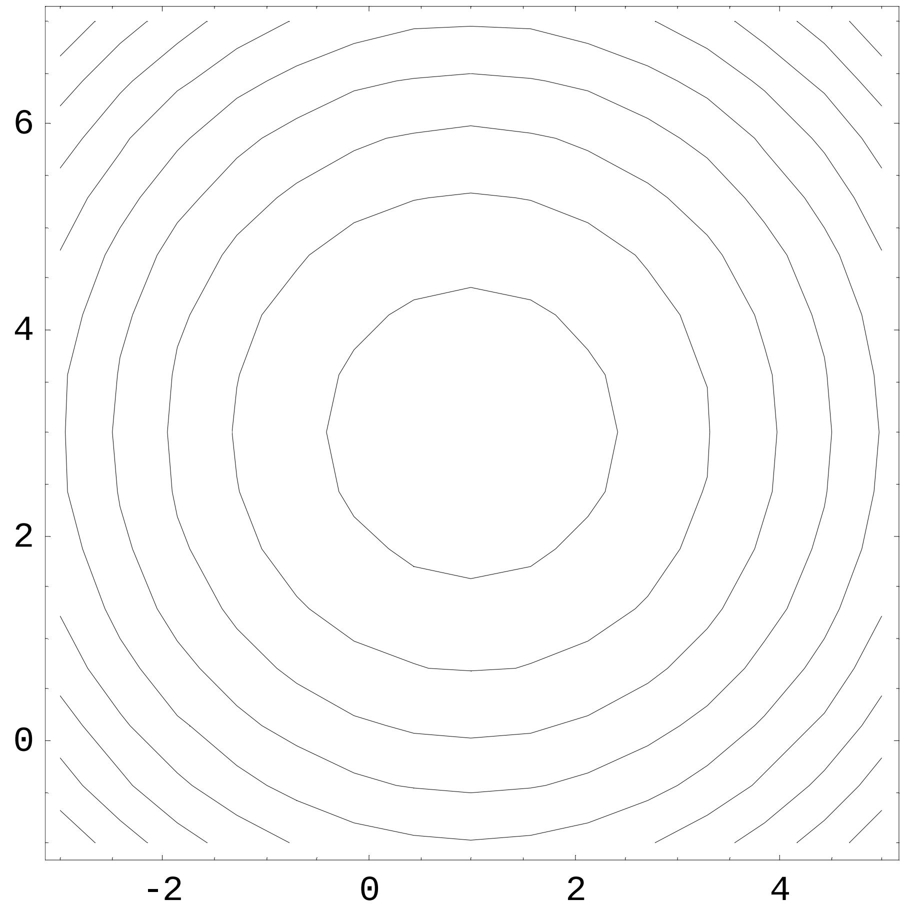


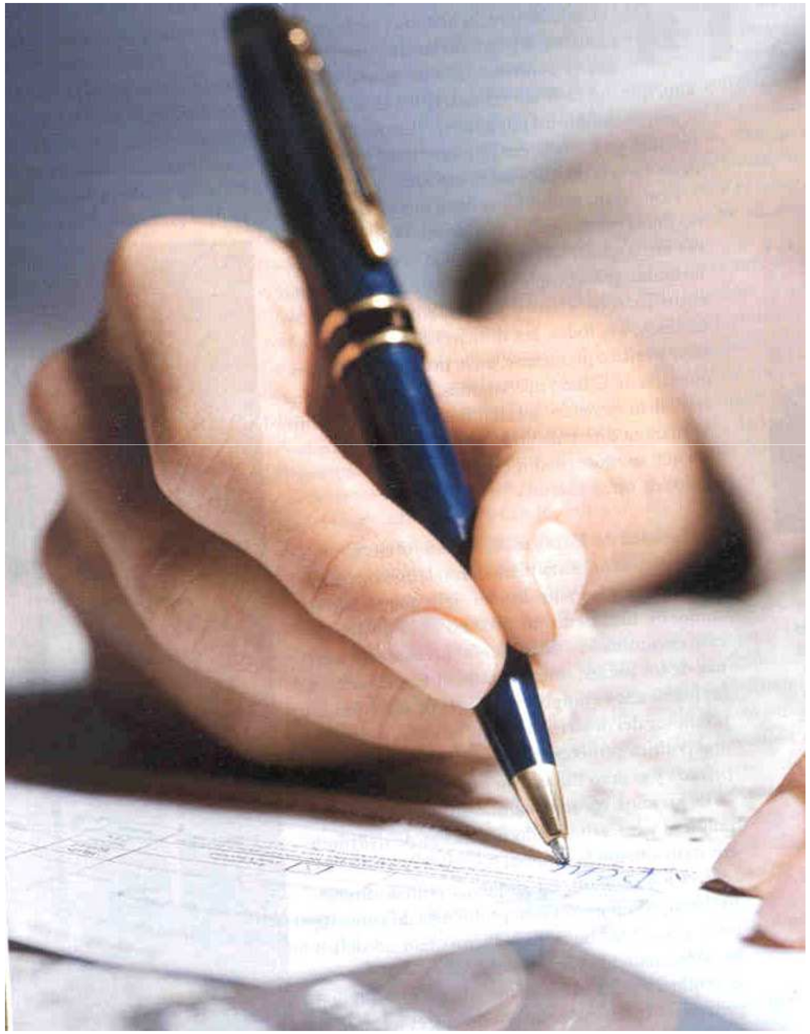
Ahora haremos un análisis gráfico, teniendo en cuenta que en cada punto (a,b) el gradiente de f dá la dirección de máximo crecimiento.

Primero representaremos el campo de gradiente y para ello necesitaremos cargar el paquete "Graphics`PlotField`"



Como dijimos el gradiente en un punto da la dirección de máximo crecimiento de la función, el análisis de la gráfica campo1 da suficiente información pero se puede mejorar. Para ello representaremos las curvas de nivel, con el comando ya usado, pero suprimiendo el sombreado con la opción ContourShading->False





Me gusta la gente que vibra, que no hay que empujarla, que no hay que decirle que haga las cosas, sino que sabe lo que hay que hacer y que lo hace en menos tiempo de lo esperado.

Me gusta la gente con capacidad para medir las consecuencias de sus acciones, la gente que no deja las soluciones al azar.

Me gusta la gente estricta con su gente y consigo misma,pero que no pierda de vista que somos humanos y nos podemos equivocar.

Me gusta la gente que piensa que el trabajo en equipo entre amigos, produce más que los caóticos esfuerzos individuales.

Me gusta la gente que sabe la importancia de la alegría.

Me gusta la gente sincera y franca, capaz de oponerse con argumentos serenos y razonables a las decisiones de un jefe.

Me gusta la gente de criterio, la que no traga entero, la que no se avergüenza de reconocer que no sabe algo o que se equivocó.

Me gusta la gente que al aceptar sus errores, se esfuerza genuinamente por no volver a cometerlos.

Me gusta la gente capaz de criticarme constructivamente y de frente, a estos los llamo mis amigos.

Me gusta la gente fiel y persistente, que no fallece cuando de alcanzar objetivos e ideas se trata.

Me gusta la gente que trabaja por resultados,

Con gente como esa, me comprometo a lo que sea, ya que con haber tenido esa gente a mi lado me doy por bien retribuido.

Mario Benedetti