Proposição: (Lema de conexão e ligação)

Sejam $(A, \leq)$ um reticulado e $a, b \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $a \leq b$

ii) $a \wedge b = a$

iii) $a \vee b = b$

i) $\Rightarrow$ ii) Temos $a \leq a$. Por hipotese $a \leq b$. Assim a é minorante de $\{a, b\}$. Por definição de infimo, $a \wedge b$ é minorante e é o maior dos minorantes. Logo $a \leq a \wedge b$

Por outro lado, $a \wedge b$ é minorante de $\{a, b\}$ logo em particular $a \wedge b \leq a$. Por anti-simetria de $\leq$ resulta que $a = a \wedge b$

ii) $\Rightarrow$ i) $a = a \wedge b$. Mas $a \wedge b$ é infimo, logo minorante de $\{a, b\}$, logo $a \wedge b \leq b$

Assim $a = a \wedge b \leq b \Rightarrow a \leq b$

i) $\Rightarrow$ iii)

Proposição: Seja $(A, \leq)$ um reticulado. $\forall a, b, c \in A$, $\vee, \wedge$ verificam:

i) $a \vee b = b \vee a$; $a \wedge b = b \wedge a$ (Comutatividade)

ii) $a \vee a = a$; $a \wedge a = a$ (Idempotência)

iii) $a \wedge (a \vee b) = a$; $a \vee (a \wedge b)$ (Absorção)

iv) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ } Associatividade

$$\boxed{\begin{array}{c}(\mathcal{P}(\Omega), \subset) \\ \vee \longrightarrow \cup \\ \wedge \longrightarrow \cap\end{array}}$$

ii) $a \leq a \overset{LC}{\Rightarrow} a \wedge a = a$; $a \vee a = a$

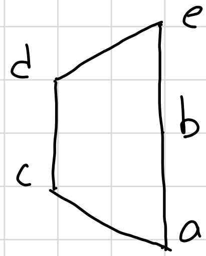
iii) $a \vee b$ é o supremo logo, por definição, é majorante de $\{a, b\}$ logo em particular é "maior" que a, isto é, $a \leq a \vee b \underset{LC}{\Rightarrow} a \wedge (a \vee b) = a$

LC

$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$
$\Leftrightarrow x \wedge y = y$

Exemplo:

Considere o c.p.o dado



a) Mostre que é um reticulado

b) Verifique que $(d \wedge c) \vee (d \wedge b) < d \wedge (c \wedge b)$

$\Downarrow$

$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$

a)

	a,b	a,c	a,d	a,e	b,c	b,d	b,e	c,d	c,e	d,e
$\vee$	b	c	d	e	e	e	e	d	e	e
$\wedge$	a	a	a	a	a	a	b	c	c	d
LC	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✓

c,d $\quad c \vee d = ? \quad c \wedge d?$ $\qquad$ a,e $\quad a \vee e = e \quad a \wedge e = a$

$c \leq d \Rightarrow c \wedge d = c \quad c \vee d = d$

b,c $\quad b \vee c = ? \quad \{b, c\}^u = \{e\} \quad b \vee e = e$

Mínimo $= \{e\}$

$b \wedge c = ? \quad \{b, c\}^L = \{a\} \quad b \wedge e = a$

Máximo $= \{a\}$

b,d $\quad b \vee d = ? \quad \{b, d\}^u = \{e\} \quad b \vee e = e$

Mínimo $= \{e\}$

Com $\forall x, y$ $x \vee y$ e $x \wedge y$ existem a estrutura é um reticulado

b)

L.H.S $= (d \wedge c) \vee (d \wedge b) = c \vee a = c$

R.H.S $= d \wedge (c \vee b) = d \wedge e = d$

Temos L.H.S $= c < d =$ R.H.S

Proposição: Seja $(A, \leq)$ um reticulado $a, b, c \in A$. Tem-se

i) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

ii) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Definição: Um reticulado $(A, \leq)$ diz-se um reticulado distributivo se $\forall a, b, c \in A$ temos:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Proposição: Seja $(A, \leq)$ um reticulado. São equivalentes

i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

i) $\Rightarrow$ ii)
$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &\overset{i)}{=} [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= a \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \\ &= [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (b \wedge c)\end{aligned}$$

Notação: $(A, \leq)$ reticulado $\longrightarrow$ R reticulado

Máximo $\rightarrow 1, \top$ (Top)

Mínimo $\rightarrow 0, \perp$ (bottom)

Definição: Seja R um reticulado com máximo e mínimo e $a \in R$. Um elemento $b \in R$ que significa $a \vee b = 1$; $a \wedge b = 0$ diz-se um complemento de a

$(\mathcal{P}(\Omega), \subset)$ É reticulado $\vee \rightarrow \cup$; $\wedge \rightarrow \cap$

Ω é máximo, pois $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $A \leq \Omega$ $\qquad \Omega = 1 = \top$

$\emptyset$ é mínimo, pois $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\emptyset \leq A$ $\qquad \emptyset = 0 = \perp$

$a \vee b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = \Omega \quad \Rightarrow$ B é o complemento (no sentido desta
$a \wedge b = 0 \qquad\quad A \cap B = \emptyset \qquad$ definição) de A

OBS: Seja R um reticulado com máximo e mínimo, $a \in R$. Temos

$$a \wedge 1 = a \qquad \text{l.c.} \qquad a \vee 0 = a$$

Proposição: Seja R um reticulado distributivo com máximo e mínimo. Seja $a \in R$.
Se a tem complemento, esse complemento é único

Seja b, c dois complementos de a

$$a \vee b = 1 \qquad a \vee c = 1$$
$$a \wedge b = 0 \qquad a \wedge c = 0$$

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) = b \wedge c$$

Como $b \wedge c$ é ínfimo é o maior dos minorantes de $\{b, c\}$ e é particular minorante de $\{b, c\}$

Logo $b \wedge c \leq c$

Assim $b \leq c$. Da mesma forma $c \leq b$. Por anti-simetria $b = c$

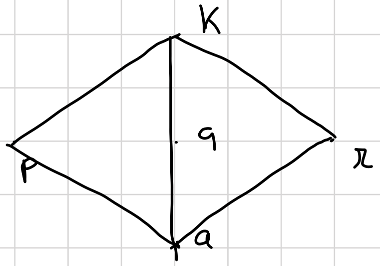
Exemplo:

Considere o cpo

a) Mostre que é um reticulado com máximo e mínimo

b) Mostre que p tem dois complementos distintos

c) É distributivo?



a)

	ap	aq	ar	ab	pq	pr	pb	qa	qb	rb
$\vee$	p	q	r	b	b	b	b	b	b	b
$\wedge$	a	a	a	a	q	a	p	a	q	r
L.C	✓	✓	✓	✓	×	×	✓	×	✓	✓

$p \wedge q$? $\{p,q\}^{\ell} = \{a\}$

$p \vee q$? $\{p,q\}^{L} = \{b\}$

Como $\forall x,y \in R$ entre $x \vee y$ e $x \wedge y$ R é reticulado temos também
$\top = b$ pois $x \leq b \ \forall x \in R$
$\bot = a$ pois $a \leq x \ \forall x \in R$

b)

$p \vee q = \top = b$
$p \wedge q = \bot = a$ $\Rightarrow$ q é um complemento de p

x, y $x \cup y = \top$
$x \wedge y = \bot$

$p \vee r = b$
$p \wedge r = a$ r é um complemento de p

Logo há 2 complementos distintos

c) Este reticulado tem máximo e mínimo. O elemento p tem um complemento. Pela proposição anterior, se R fosse distributivo, o complemento de p teria de ser único. Mas isso não acontece, logo R não é distributivo

Definição: B diz-se uma algebra de BOOLE se B é um reticulado distributivo com máximo, mínimo e se todo o elemento tiver complemento

Exemplo :

1. $(\mathcal{P}(\Omega), \subset)$ é reticulado, é distributivo, $\top = \Omega$, $\bot = \emptyset$

2. Seja B uma álgebra de Boole. Mostre que $0' = 1$ complemento

Em $(\mathcal{P}(\Omega), \subset)$ $0' = 1$? $\Leftrightarrow \overline{\emptyset} = \Omega$

$\bot \leq \top$ ($\top$ é máximo logo é maior ou igual que todos em particular $\bot$)

Pelo lema da conexão $\bot \vee \top = \top$ $\top$ é complemento de $\bot$
$\bot \wedge \top = \bot$

Mas B é álgebra de Boole logo o complemento é único e portanto $\bot' = \top$ (isto é $0' = 1$