Definição: Seja $f: x \to y$. Se o domínio de f coincide com o conjunto de partida x chamamos aplicação de x para y

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \sqrt{x}$$
Não é aplicação pois $Df = \mathbb{R}_0^+ \neq X = \mathbb{R}$

$$g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \to \sqrt{x}$$
É aplicação

Definição: Seja X um conjunto. Aplicação identidade de X é definida por:

$$Id_X : x \to x \quad , Id(x) = x$$

Definição: Seja $f: x \to y$ uma aplicação dizemos que:

- f é injetiva se quaisquer 2 elementos de x têm imagem distintas, isto é, $\forall x_1 x_2 \in x$ com $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

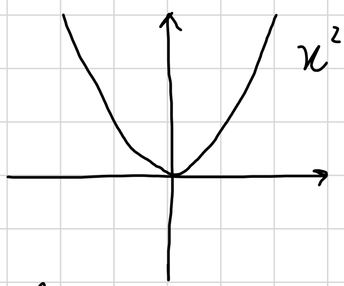
- f é sobrejetiva se qualquer elemento do conjunto de chegada Y, for imagem de algum elemento de x:

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X : y = f(x)$$

- f é bijetiva se, f for injetiva e sobrejetiva

Exemplo

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^2$$



$(-1, 1) \in X = R$, $-1 \neq 1$. Mas $f(-1) = f(1) = 1$ logo f não é injetiva

$-2 \in Y$ mas $\nexists$ $-2 = f(x)$, pois $f(x) \geq 0$

Exemplo

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$
$x \mapsto x^2$

Não é injetiva mas é sobrejetiva

$\sqrt{x^2} = |x|$
$\sqrt{x^2} = x$

Exemplo

$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

Já é injetiva. Não é sobrejetiva

$f(x_1) = f(x_2)$
$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$
$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^{\cancel{2}}} = \sqrt{x_2^{\cancel{2}}}$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$

Exercício

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 3x - 2$

é bijetiva

f é injetiva? $f(x_1) = f(x_2)$
$\Leftrightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$
$\Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$, f é injetiva

f é sobrejetiva? $y = 3x - 2$
$\Leftrightarrow y + 2 = 3x$
$\Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3}$

$\forall y \in Y = \mathbb{R}$ existe $x \in X = \mathbb{R}$, x dado por $\frac{y+2}{3}$: $y = f(x)$. Logo f é bijetiva.

Definição: Dada uma aplicação bijetiva $f: x \to y$ definimos a aplicação inversa f^{-1} como $f^{-1}: y \to x$ cuja ação é dada por

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

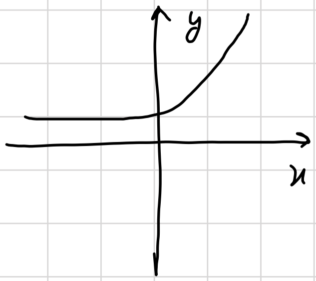
$f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in f\}$

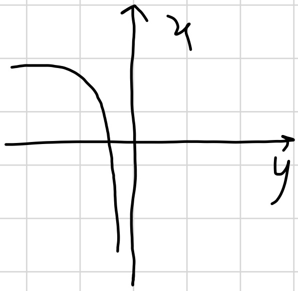
Teorema: Seja $x \to y$ uma bijeção. Então $f^{-1}: y \to x$ também é uma bijeção $f \circ f^{-1} = Id_x$ e $f \circ f^{-1} = Id_y$

Exemplo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
$x \to e^x$

$f^{-1} = \ln y$





$f \circ f^{-1} = Id_{y}$
$\Leftrightarrow f \circ f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^+}$
$\Leftrightarrow f \circ f^{-1}(x) = Id_{\mathbb{R}^+}(x)$
$\Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = x$
$\Leftrightarrow f(\ln(x)) = x$
$\Leftrightarrow e^{\ln x} = x$

$f^{-1} \circ f = Id_x$
$\Leftrightarrow f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}}$
$\Leftrightarrow f^{-1} \circ f(x) = Id_{\mathbb{R}}(x)$
$\Leftrightarrow f^{-1}(e^x) = x$
$\Leftrightarrow \ln(e^x) = x$

Teorema: Sejam $f: x \to y$ e $g: y \to x$. Temos

a) f, g injetivas $\Rightarrow g \circ f$ é injetiva
b) f, g sobrejetiva $\Rightarrow g \circ f$ é sobrejetiva
c) f, g bijetiva $\Rightarrow g \circ f$ é bijetiva

Teorema: Seja $f: x \to y$, $g: y \to x$ aplicações tais que $g \circ f = Id_x$
Então f é injetiva e g é sobrejetiva

Definição: Sejam A, B conjuntos, $A \subset B$. Definimos a aplicação inclusão como $inc_A: A \to B$

Exemplo

$inc_{]0,1[} :]0,1[\longrightarrow [0,1]$

Como $]0,1[\subset [0,1]$ $inc_{]0,1[}$ é injetiva

$$f_1 : [0,1] \longrightarrow]0,1[$$
$$x \longrightarrow \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

f é injetiva pois $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x_2}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Então as aplicações são injetivas logo, existe uma aplicação $g :]0,1[\rightarrow [0,1]$ que é bijetiva