UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

Cálculo I
Ficha 1

1) Indique, caso existam, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos seguintes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 - 3x \leqslant 0\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x^2 < 4\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 1 \wedge x \leqslant -2\}$;

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \colon \dfrac{2-x}{2x+3} \geqslant 0\right\}$;

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-5}{4-x} \leqslant 0\right\}$;

f) $F = \{x \in \mathbb{R} : (x^2-1)(x^2-4x+3) \leqslant 0\}$;

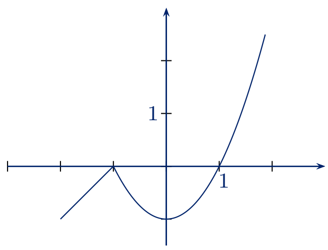
g) $G = E \cap F$;

h) $H = E \cup F$;

i) $I = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

j) $J = \left\{\dfrac{2n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

2) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representada no gráfico ao lado. Esboce o gráfico de cada uma das funções seguintes:



a) $f(x-2)$ *b)* $f(x+1)$ *c)* $2f(x)$

d) $-f(x)$ *e)* $f(x)/2$ *f)* $f(x)+1$

g) $f(x)-2$ *h)* $f(2x)$ *i)* $f(x/2)$

j) $f(-x)$ *k)* $-f(-x)$ *l)* $|f(x)|$

3) Resolva o exercício anterior para as funções $f(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$ definida em $]0, +\infty[$.

4) Estude a paridade das funções $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

a) $f(x) = x^3 - 2x$; *b)* $f(x) = x^4 - 2x^2$; *c)* $f(x) = x^2 - x$; *d)* $f(x) = 3x^3 + x^2 + 3$.

5) Determine o domínio, o contradomínio, os zeros e esboce o gráfico das seguinte funções quadráticas:

a) $f(x) = -x^2 + 3$; *b)* $f(x) = x^2 - 5x + 6$; *c)* $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$;

d) $f(x) = x^2 + 2x + 3$; *e)* $f(x) = x^2 - 3x + 2$; *f)* $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$.

6) Determine o domínio, o contradomínio, os zeros e esboce o gráfico das funções definidas por

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ *b)* $f(x) = \dfrac{4-x}{x-3}$ *c)* $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ *d)* $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+1}$

7) Esboce os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x - 1$ *b)* $f(x) = -x^2 - x + 2$ *c)* $f(x) = x^2 + 4$

d) $f(x) = |x|$ *e)* $f(x) = |x-3|$ *f)* $f(x) = 1 - |x|$

8) Seja $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Desenhe os gráficos das funções abaixo indicadas.

a) $f(x)$ *b)* $f(|x|)$ *c)* $|f(|x|)|$ *d)* $|f(x)|$

9) Determine o domínio e o contradomínio das seguintes funções:

a) $f(x) = 5 - \sqrt{x+4}$ *b)* $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ *c)* $f(x) = \sqrt{x} - 1$

d) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ *e)* $f(x) = \dfrac{2}{1+x^4}$ *f)* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x-2|-1}}$

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

Cálculo I
Ficha 2

1) Reescreva a expressão, sem usar o símbolo de valor absoluto:

a) $|5-23|$; *b*) $|5|-|-23|$; *c*) $|-\pi|$; *d*) $|\pi-2|$;
e) $|\sqrt{5}-5|$; *f*) $||-2|-|-3||$; *g*) $|x-2|$ se $x<2$; *h*) $|x-2|$ se $x>2$;
i) $|x+1|$; *j*) $|2x-1|$; *k*) $|x^2+1|$; *l*) $|1-2x^2|$.

2) Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das seguintes condições:

a) $|2x|=3$; *b*) $|3x+5|=1$; *c*) $|x+1|=2$; *d*) $|x+3|=|2x+1|$;
e) $|x+3|=|x+1|$; *f*) $|x-4|<1$; *g*) $|x+1|\geqslant 3$; *h*) $|x-3-2x|<3$;
i) $|2x-5|<2$; *j*) $|3x+1|\geqslant 1$; *k*) $|2x+1|>5$; *l*) $|1-2x|<2$;
m) $2+|x+1|\leqslant 3$; *n*) $1-|2x+1|>1$; *o*) $3|x+2|\leqslant 1$; *p*) $3\,|x+1/2|>2$;
q) $1\leqslant |x|\leqslant 4$; *r*) $3<|x|\leqslant 4$; *s*) $2<|x-1|\leqslant 3$; *t*) $0<|x-5|<1/2$.

3) Escreva em extensão ou na forma de um intervalo ou de uma reunião de intervalos o conjuntos dos números $x\in\mathbb{R}$ tais que

a) $|x^2-5x+3|>3$; *b*) $|x^2-5x+3|\leqslant 3$; *c*) $|x^2-x-1|\geqslant 1$;
d) $|x^2-x-1|<1$; *e*) $|x^2+x-1|\leqslant 1$; *f*) $3\geqslant |x^2+2x+1|\geqslant 1$.

4) Escreva em extensão ou na forma de um intervalo ou de uma reunião de intervalos o conjuntos dos números $x\in\mathbb{R}$ tais que

a) $\left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right|=3$; *b*) $\left|\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}\right|=1$; *c*) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\geqslant 2$; *d*) $\left|\dfrac{x^2+x-2}{2x+1}\right|<3$;
e) $\left|\dfrac{2x-2}{x^2-1}\right|\geqslant 3$; *f*) $\left|\dfrac{x^2-3}{x^2-x}\right|\leqslant 2$; *g*) $1\leqslant\left|\dfrac{x-2}{2x+1}\right|<3$; *h*) $-1\leqslant\left|\dfrac{x-1}{2x+2}\right|<2$.

5) Escreva uma inequação da forma $|x-a|<\delta$ ou $|x-a|\leqslant\delta$ cujo conjunto solução seja

a) $]-1,1[$; *b*) $]-1/2,1/2[$; *c*) $[-1,2]$;
d) $]-3,-1[$; *e*) $[-1/2,0]$; *f*) $\{0\}$.

6) Escreva uma inequação da forma $|x-a|>\delta$ ou $|x-a|\geqslant\delta$ cujo conjunto solução seja

a) $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$; *b*) $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$; *c*) $]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$;
d) $]-\infty,-3]\cup[-1,+\infty[$; *e*) $]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$; *f*) $\mathbb{R}$.

7) Considere as funções $f,g,h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por

$$f(x)=x^2+x,\qquad g(x)=\frac{x}{x^2+1}\qquad\text{e}\qquad h(x)=\frac{x+1}{2}.$$

Calcule:

a) $(f\circ g)(-1)$ *b*) $(g\circ f)(2)$ *c*) $(f\circ g\circ h)(1)$ *d*) $(f\circ h)(x)$ *e*) $(h\circ f)(x)$
f) $(h\circ f\circ g)(x)$ *g*) $h^{-1}(0)$ *h*) $(h(0))^{-1}$ *i*) $h^{-1}(3)$ *j*) $(h(3))^{-1}$

8) Determine as expressões que definem as inversas das seguintes funções e indique os respectivos domínios:

a) $f(x)=-\dfrac{x}{5}+2$ *b*) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$ *c*) $f(x)=\sqrt{x-3}$

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

Cálculo I
Ficha 3

1) Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $2^{5x} = 128$; *b)* $3^{4x-1} = 81$; *c)* $5^{4x} = 1/25$; *d)* $10^{x^2} = 100^2$;

e) $2^{x^2-5x} = 1/64$; *f)* $4^{2x-x^2} = 1$; *g)* $8^{2x+1} = 16\ 2^{2x}$; *h)* $x^2 \mathrm{e}^x + 3x \mathrm{e}^x = 0$;

i) $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 0$; *j)* $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} = 0$; *k)* $4 \times 2^x = 10 \times 5^x$; *l)* $x^2 5^{-x} - 3 \times 5^{-x} = 0$.

2) As funções

$$N_1(t) = 12 \times (1.03)^t, \quad N_2(t) = 13 \times (0.19)^t, \quad N_3(t) = 4 \times (1.28)^t \quad \text{e} \quad N_4(t) = 9 \times (0.38)^t$$

descrevem a evolução do número de bactérias (em milhões por mililitro) em quatro colónias distintas ao longo do tempo (em horas), a partir de um certo instante inicial $t = 0$.

a) Qual das populações tem mais bactérias no instante inicial?

b) Qual das populações tem a maior taxa de crescimento relativo?

c) Algumas das populações de bactérias estão a decrescer no que diz respeito ao número de indivíduos. Concorda com esta afirmação?

d) Caso exista, determine o instante no qual as populações descritas por $N_1(t)$ e $N_2(t)$ têm o mesmo número de indivíduos.

e) Esboce os gráficos de N_1, N_2, N_3 e N_4.

3) Calcule

a) $\mathrm{e}^{\ln 5}$; *b)* $\mathrm{e}^{-3\ln 2}$; *c)* $\mathrm{e}^{3+4\ln 2}$; *d)* $\log_2 32$;

e) $5^{2\log_5 3}$; *f)* $\ln(\ln \mathrm{e})$; *g)* $\log_{0,1} 0,01$; *h)* $\log_{\sqrt{5}}\left(\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5}\right)$;

i) $\log_7 \dfrac{1}{7}$; *j)* $\log_4 \dfrac{1}{8}$; *k)* $\log_{16} 4$; *l)* $\log_9 \left(3\sqrt{3}\right)$.

4) Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações e inequações:

a) $\dfrac{4\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x - 3}{\mathrm{e}^x + 5} = 0$; *b)* $\log_2 x^2 = 4$; *c)* $2^{1-x} < \sqrt{2^x}$;

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2} \geqslant \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^x$; *e)* $5^{3-x^2} < 25^x$; *f)* $(0,1)^{x^2-x} \geqslant 0,01$;

g) $\dfrac{1}{2^{x^2}} \geqslant \left(\dfrac{1}{8}\right)^{3x}$; *h)* $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} < 4^{2-x}$; *i)* $x\,\mathrm{e}^{x+1} - x < 0$;

j) $\mathrm{e}^{\frac{x^2-5x}{x^2+1}} > 1$; *k)* $\log_4 x \leqslant -7$; *l)* $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 0$;

m) $\log_{\frac{1}{\mathrm{e}}}(3x+1) > 0$; *n)* $\log_2\left(x^2 - 3\right) > 0$; *o)* $1 + \log_{\frac{1}{6}} x > -\log_{\frac{1}{6}}(x-5)$;

p) $2\ln(x-1) - \ln(x+1) \leqslant 0$; *q)* $\log_{\frac{1}{2}}(2x) < 2 - \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)$.

1) Determine o domínio das seguintes funções

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^x}}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x^2+x-3}}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2+x-3}}$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}\right)$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}$

f) $f(x) = \ln(|x| - x)$

g) $f(x) = 3 + \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$

i) $f(x) = \ln(1 - \ln(x^2 - 5x + 6))$

2) Determine o domínio e contradomínio das seguintes funções

a) $f(x) = 1 - 10^{2x-1}$

b) $f(x) = 2 + \log_{\frac{1}{2}}\left(4 - x^2\right)$

3) Seja f a função dada por

$$f(x) = \ln(9x^2 - 6x + 1).$$

a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

b) Calcule o conjunto solução da equação $f(x) = f(2)$.

c) Calcule o conjunto solução da equação $f(x) > 0$.

4) Considere a função $f(x) = \mathrm{e}^{x+3} - 1$.

a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

b) Defina a função inversa de f.

5) Considere as funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = -2 + 3^{2x-1} \qquad \text{e} \qquad g(x) = 2 + \log_3(x+1)\,.$$

a) Calcule o domínio e o contradomínio de cada uma das funções.

b) Determine, se existirem, os zeros das funções f e g.

c) Mostre que as funções f e g são injectivas.

d) Caracterize f^{-1} e g^{-1}.

6) Seja f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \log_2\left(9 - x^2\right).$$

a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

b) Justifique que a função não admite inversa.

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

Cálculo I
Ficha 5

1) Resolva as equações

   a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x) = 0$ *b)* $\operatorname{tg}(2x) = 2\cos x$ *c)* $\operatorname{tg}(2x) = 3\operatorname{tg} x$

2) Resolva as equações do exercício anterior no intervalo $]-\pi, \pi]$.

3) Se $x = \cos\alpha + \cos(2\alpha)$ e $y = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(2\alpha)$, mostre que

$$x^2 + y^2 = 2 + 2\cos\alpha.$$

4) Sendo x um valor que verifica a condição

$$\operatorname{tg}(5\pi + x) = 3/4 \qquad \wedge \qquad \pi < x < \frac{3\pi}{2},$$

calcule a expressão $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

5) Sabendo que $\operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{9}$ e que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule o valor de $\cos\frac{x}{2}$.

6) Use a fórmula $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ para resolver a equação

$$\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x = \cos\frac{x}{2}.$$

7) Resolva as seguintes equações e inequações

   a) $e^{2\cos x+1} = 1$ *b)* $e^{\cos(2x)} > 1$ *c)* $\dfrac{\cos x - 2}{\log_{\frac{1}{2}} x + 5} > 0$

8) Determine o domínio e o contradomínio das seguintes funções

   a) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ *b)* $f(x) = 2^{1/\operatorname{sen} x}$

   c) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$ *d)* $f(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + 3\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

9) Considere a função real de variável real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |\operatorname{sen}(6x) + \operatorname{sen}(4x)|.$$

   a) Calcule $f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(-\frac{\pi}{24}\right)$.

   b) Resolva a equação $f(x) = |\cos x|$.

10) Considere a função dada por $f(x) = \dfrac{2\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{cotg} x}$.

   a) Determine o domínio e os zeros de f.

   b) Mostre que a função é par.

   c) Resolva a equação $|f(x)| = |2\operatorname{sen} x|$.

11) Considere as funções dadas por $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ e $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

   a) Determine o domínio de $g \circ f$.

   b) Mostre que $(g \circ f)(x) = \operatorname{sen}^2 x$, para todo o x pertencente ao domínio de $g \circ f$.

   c) Calcule $(g \circ f)\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

UNIVERSIDADE
BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

Cálculo I
Ficha 6

1) Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões

a) $\operatorname{arc sen}(1/2)$ *b)* $\operatorname{arc cos}(-\sqrt{3}/2)$ *c)* $\pi/3 - \operatorname{arc tg}(-\sqrt{3}/3)$

d) $\operatorname{sen}(\operatorname{arc cos}(-1/2))$ *e)* $\cos(\operatorname{arc sen}(-\sqrt{2}/2))$ *f)* $\operatorname{tg}(\operatorname{arc sen}(-1/2))$

g) $\operatorname{sen}(\operatorname{arc tg} 1)$ *h)* $\cos(\operatorname{arc tg}(-\sqrt{3}))$ *i)* $\operatorname{arc cos}(\cos(-\pi/4))$

j) $\cos(\operatorname{arc sen}(4/5))$ *k)* $\operatorname{sen}(\operatorname{arc cos}(-5/13))$ *l)* $\operatorname{tg}(\operatorname{arc sen}(3/4))$

m) $\operatorname{cotg}(\operatorname{arc sen}(12/13))$ *n)* $\operatorname{sen}(2\operatorname{arc sen}(4/5))$ *o)* $\operatorname{tg}(2\operatorname{arc cos}(-3/5))$

p) $\operatorname{sen}(\operatorname{arc sen}(3/4) + \operatorname{arc cos}(1/4))$ *q)* $\cos(\operatorname{arc cos}(1/4) + \operatorname{arc sen}(3/4))$

2) Simplifique as expressões:

a) $\operatorname{sen}(\pi + \operatorname{arc cos} x)$ *b)* $\cos^2\left(\frac{\operatorname{arc cos} x}{2}\right)$ *c)* $\cos(\operatorname{arc sen} x)$

3) Resolva as seguintes equações e inequações

a) $\frac{1}{2}\operatorname{arc sen}(3x-2) = 0$ *b)* $\operatorname{arc sen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x$ *c)* $\cos(\operatorname{arc tg} x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) Determine o domínio e o contradomínio das seguintes funções

a) $f(x) = \operatorname{arc cos}(|x| - 2)$ *b)* $f(x) = 3\operatorname{arc sen}(2x-1)$

c) $f(x) = \pi + \operatorname{arc tg}(x^2 - 2x)$ *d)* $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{arc cos}(2x+1)$

e) $f(x) = \cos\frac{\pi}{3} + 2\operatorname{arc sen}\frac{1}{x+2}$ *f)* $f(x) = \ln\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc sen}(x^2-1)\right)$

5) Considere a função dada por $f(x) = 2 + \operatorname{arc sen}(3x+1)$.

a) Determine o domínio, o contradomínio e os zeros de f.

b) Calcule $f(0)$ e $f\left(-\frac{1}{6}\right)$.

c) Determine as soluções da equação $f(x) = 2 + \frac{\pi}{3}$.

d) Caracterize a função inversa de f.

6) Seja g a definida por $g(x) = \frac{\pi}{3} - \operatorname{arc sen}(3x)$.

a) Determine o domínio e o contradomínio de g.

b) Resolva a equação $\operatorname{sen}(g(x)) = 0$.

c) Caracterize a função inversa de g.

7) Considere as funções f e g definidas por

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arc tg}\left(\frac{1}{1-2x}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad g(x) = \pi - \operatorname{arc sen}\left(x^2 + 2x + 1\right).$$

a) Determine o domínio de f, D_f.

b) Mostre que $f(x) = \frac{x-1}{x}$ para $x \in D_f$.

c) Determine o contradomínio de g.

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

Cálculo I
Ficha 7

1) Determine o interior, o exterior, a fronteira, a aderência e o derivado de cada um dos conjuntos seguintes e indique quais são abertos e quais são fechados.

a) $A =]0,2] \cup [3,5[\cup \{6,7\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \colon -1 \leqslant x-2 < 1\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 - x - 6 > 0\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \colon 2x^2 - 3x > 5\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \colon x^3 > x\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2(x-1) \geqslant 0\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 \leqslant x^2 - 1 < 3\}$

h) $H = \left\{x \in \mathbb{R} \colon \dfrac{x-1}{x+3} > \dfrac{x}{x-2}\right\}$

i) $I = \{x \in \mathbb{R} \colon 1 \leqslant |x+1| \leqslant 2\}$

j) $J = \{x \in \mathbb{R} \colon |x^2 - 1| \leqslant 1\}$

k) $K = \{x \in \mathbb{R} \colon |x+2| \geqslant |x-3|\}$

l) $L = \left\{x \in \mathbb{R} \colon \left|\dfrac{1-2x}{2x-3}\right| > 2\right\}$

m) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \colon \sqrt{x^2 - 16} < 2 - x\right\}$

n) $N = \{x \in \mathbb{R} \colon x + |x| < 1\}$

2) Calcule, caso existam, os majorantes, os minorante, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos conjuntos do exercício anterior. Indique ainda se os conjunto são limitados.

3) Calcule os seguintes limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3-x}{x^2-3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{15x^3+1}{30x^7-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{3x^3+x^2+x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-a^2}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{30}}{x-5}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

1) Calcule os seguintes limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\mathrm{e}^{x-4}-1}{16-x^2}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{7x}-1}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+4}-\mathrm{e}^{4}}{x}$ *e)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{e}^{3x}-1}$ *f)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\mathrm{e}^{x^3}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}}{x}$ *h)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{8x}}{x}$ *i)* $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{5(x-1)^3}{\mathrm{e}^{2(x-1)}-1}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$ *k)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$ *l)* $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$ *n)* $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\ln(3x+2)-\ln 8}{x-2}$ *o)* $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln(6+2h)-\ln 6}{h}$

2) Calcule os seguintes limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(7x)}{x}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{sen}\left(x^2-1\right)}{x-1}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\mathrm{sen}\,x)}{x^2}$ *e)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(2x)}{\mathrm{sen}\,x}$ *f)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{sen}\,x}{x^3}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,\mathrm{sen}(1/x)}{\mathrm{sen}\,x}$ *h)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(5x)-\mathrm{sen}(3x)}{x}$ *i)* $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}\,x\right]$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left[\left(x^2-4\right)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)\right]$ *k)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\left(x^2\right)}{\mathrm{sen}^2\,x}$ *l)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{sen}(2x)}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arc\,sen}(2x)}{x}$ *n)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arc\,sen}(2x)}{\mathrm{arc\,sen}(3x)}$ *o)* $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(\mathrm{arc\,cos}x)^2}{x-1}$

p) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2}\frac{2x-1}{\mathrm{arc\,cos}(2x)}$ *q)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arc\,tg}(3x)}{\mathrm{arc\,tg}(7x)}$ *r)* $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{arc\,tg}(x-1)}{\mathrm{sen}(1-x)}$

3) Calcule os limites laterais das seguintes funções no ponto x_0 indicado. O que pode concluir sobre a existência de $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)$?

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{se } x\leqslant 1\\ (x-1)^2 & \text{se } x>1\end{cases},\quad x_0=1$

b) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{se } |x|\leqslant 2\\ 2 & \text{se } |x|>2\end{cases},\quad x_0=2$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x-a}{1-x} & \text{se } x\leqslant 0\\[2mm] \dfrac{x-a}{x+1} & \text{se } x>0\end{cases},\quad x_0=0$

d) $f(x)=\begin{cases} 8\sqrt{x-1} & \text{se } x<5\\ (x-1)^2 & \text{se } x\geqslant 5\end{cases},\quad x_0=5$

e) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{se } x>0\\ 0 & \text{se } x=0\\ \dfrac{1-\mathrm{e}^{x}}{x} & \text{se } x<0\end{cases},\quad x_0=0$

f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos(3x)-\cos x}{x^2} & \text{se } x>0\\ 1 & \text{se } x=0\\ x^2+3x-4 & \text{se } x<0\end{cases},\quad x_0=0$

1) Estude a continuidade das funções seguintes:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

c) $f(x) = \dfrac{2+\cos x}{2-\cos x}$

d) $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|+x}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 2 & \text{se } x = 0, \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \ln(\mathrm{e}^x+1) & \text{se } x \geqslant 0, \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x < 0, \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 2\,(x+2)\,\mathrm{e}^{2(x+2)} & \text{se } x < -2, \\ x\ln(x+3) & \text{se } x \geqslant -2, \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{1-x} & \text{se } x \neq 1, \\ -3 & \text{se } x = 1, \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x+2}-\mathrm{e}^2 & \text{se } x \geqslant 0, \\ x+\operatorname{senh}(2x) & \text{se } x < 0, \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}+\ln(\mathrm{e}-x) & \text{se } x \leqslant 0, \\ \dfrac{-3x}{1-\mathrm{e}^{2x}} & \text{se } x > 0, \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x-1)}{x^2-x-2} & \text{se } x > 2, \\ -1/3 & \text{se } x = 2, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{x-2}-1}{3x-6} & \text{se } x < 2. \end{cases}$

2) Determine, se possível, a constante k que torna as seguintes funções contínuas.

a) $f(x) = \begin{cases} k+x\ln x & \text{se } x \geqslant 1, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{x-1}-1}{2x-2} & \text{se } x < 1, \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x}{k^2+1/\mathrm{e}} & \text{se } x \geqslant k, \\ \mathrm{e}^{k+1} & \text{se } x < k, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}^{1-x}}{1-x} & \text{se } x \neq 1, \\ k & \text{se } x = 1, \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\operatorname{sen}(3x)} & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \setminus \{0\}, \\ k & \text{se } x = 0, \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-x^3}{x^2+k\,x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 1/3 & \text{se } x = 0, \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 2-(x-2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x-2} & \text{se } x \neq 2, \\ k & \text{se } x = 2. \end{cases}$

3) Sejam f e g as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x-1}} & \text{se } x > 1, \\ \mathrm{e}^k & \text{se } x = 1, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{x+k^2-1}-\mathrm{e}^{k^2}}{x-1} & \text{se } x < 1, \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos(2\pi x)}}{x} & \text{se } x < 0, \\ k\pi & \text{se } x = 0, \\ \dfrac{\cos x-\cos(5x)}{2\operatorname{sen}^2 x} & \text{se } 0 < x < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

a) Determine k de modo que f, em $x=1$, seja contínua à esquerda e descontínua à direita.

b) Determine k de modo que f seja contínua.

c) Prove que g é descontínua para $x=0$ para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

d) Determine k de modo que g seja contínua à esquerda, no ponto 0.

1) Seja h a função real de variável real definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2\,\text{sen}\,(x - 4\pi/3)}{x - \pi/3} & \text{se } x > \pi/3 \\ -6x/\pi & \text{se } x \leqslant \pi/3 \end{cases}$$

a) Prove que $\lim\limits_{x \to \pi/3} h(x) = -2$.

b) Considere o intervalo $[1, 5\pi/6]$. Mostre que $-5/\pi$ pertence ao contradomínio de h.

2) Mostre que

a) a função dada por $f(x) = \text{sen}^3\, x + \cos^3 x$ se anula, pelo menos uma vez, no intervalo $[\pi, 2\pi]$;

b) existe uma, e uma só, solução da equação $2\cos x - \cos(2x) = 0$ em $[\pi/2, \pi]$;

c) existe $x \in [0, 1]$ tal que $2x^3 - 5x + 4 = 2$;

d) a função dada por $f(x) = 2x^3 - 5x + 4$ admite pelo menos um zero no intervalo $[-2, 0]$;

e) a equação $x^7 - 3x^2 = 10$, tem, pelo menos, uma raiz real;

f) a equação $x^3 + 4x^2 + 2x + 5 = 0$ tem, pelo menos, uma solução real.

3) Seja f uma função contínua no intervalo $[0, 2]$ com

$$f(0) = \frac{5}{2} \qquad \text{e} \qquad f(2) = -1.$$

Qual é o número mínimo de zeros que f pode ter nesse intervalo?

4) Seja g uma função contínua em $[-2, 3]$ com

$$g(-2) = \frac{1}{2}, \qquad g(-1) = -1, \qquad g(0) = 2, \qquad g(1) = 1, \qquad g(2) = -2 \qquad \text{e} \qquad g(3) = 5.$$

Qual o número mínimo de zeros que g pode ter nesse intervalo.

5) Em modelos de queda livre, costuma-se supor que a aceleração gravitacional g é a constante $9,8m/s^2$. Na verdade, g varia com a latitude. Se θ é a latitude (em graus) então

$$g(\theta) = 9,78049\left[1 + 0,005264\,\text{sen}^2(\theta) + 0,000024\,\text{sen}^4(\theta)\right]$$

é uma fórmula que aproxima g. Usando a máquina de calcular para efectuar os cálculos, mostre que $g = 9,8$ em algum ponto entre as latitudes $35°$ e $40°$.

6) A temperatura T (em graus Celsius) na qual a água ferve é dada aproximadamente pela fórmula

$$T(h) = 100,862 - 0,0415\sqrt{h + 431,03}$$

onde h é a altitude (em metros acima do nível do mar). Usando a máquina de calcular para efectuar os cálculos, mostre que a água ferve a $98°C$ a alguma altitude entre $4000m$ e $4500m$.

1) Prove que a função

$$f\colon [-3,4] \to \mathbb{R}$$

definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{se } -3 \leqslant x < 2 \\ (3x-6)/x & \text{se } 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

admite máximo e mínimo.

2) Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x \leqslant 1 \\ \dfrac{2-4x}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

tem um máximo e um mínimo no intervalo $[-2, 2]$.

3) Seja

$$f\colon \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$$

a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} k}{x+1} & \text{se } x \geqslant 2 \\ \dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} & \text{se } -\dfrac{5}{2} \leqslant x < 2 \end{cases}$$

a) Determine k de modo que f seja contínua para $x = 2$.

b) A função f atinge máximo e mínimo em $[-1, 0]$? Justifique.

4) Considere-se a função real de variável real dada por

$$f(x) = \begin{cases} x - 2\operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \\ k^2 & \text{se } x = 0 \\ (x+1)^{1/x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f no ponto $x = 0$.

b) Determine k de modo que f seja contínua à direita no ponto $x = 0$.

c) Prove que em $[-\pi, -\pi/2]$ existe uma, e uma só, solução da equação $f(x) = 0$.

d) Pode concluir-se que f é uma função limitada em $[-\pi, -\pi/2]$, atingindo aí os seus extremos? Justifique.

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

Cálculo I
Ficha 12

1) Calcule os seguintes limites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x}{2x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{1+x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{1+x^4}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-2x^4+3x^2+1\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{(x-a)(x-b)}-x\right]$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(\mathrm{e}^{1/x}-1\right)\right]$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right]$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2-1}{x^4-1}+\dfrac{4}{\ln\left(x^2+1\right)}\right]$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[(x+1)\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)\right]$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2+3x)}{\ln x}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\cosh x-\mathrm{senh}\, x)$

2) Calcule os seguintes limites laterais.

a) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^3}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to1^-} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^3}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\pi/2^+} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{tg}\,x}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{tg}\,x}+1}$

f) $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{tg}\,x}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{tg}\,x}+1}$

g) $\lim\limits_{x\to0^+} 2^{-1/x}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to0^-} 2^{-1/x}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to3^+} 3^{1/(x-3)}$

j) $\lim\limits_{x\to1^-} \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{1}{x-1}$

3) Escreva as equações das assímptotas das funções definidas por

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x-6}$

b) $f(x)=\dfrac{2x}{(x-1)^2}$

c) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-x}$

e) $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x-2}$

f) $f(x)=\dfrac{3x^2-2x+2}{x+2}$

g) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

h) $f(x)=2\,\mathrm{e}^{-1/x}$

i) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sen}\,x$

j) $f(x)=\ln\left|\dfrac{2+x}{2-x}\right|$

1) Calcule, sempre que possível, as derivadas das funções seguintes nos pontos indicados utilizando a definição e, quando possível, escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f nesses pontos.

a) $f(x) = \sqrt{x^2+9}, \quad x = 4$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x = 2$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{2x+5}, \quad x = 2$

d) $f(x) = x^2 - 3x, \quad x = 3$

e) $f(x) = \ln x, \quad x = a \in D_f$

f) $f(x) = \sqrt{x+1} - 4, \quad x = a \in D_f$

g) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad x = 0$

h) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \left(\dfrac{2x}{\pi}\right)^2 & \text{se } x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}, \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

2) As funções f e g são diferenciáveis e f é invertível, verificando as condições:

$$f(2) = 3, \qquad g(2) = -5, \qquad f'(2) = -1, \qquad f'(-5) = 3, \qquad g'(2) = 2 \qquad \text{e} \qquad g'(3) = 5.$$

Determine

a) $(f+g)'(2)$

b) $(4f)'(2)$

c) $(-2g)'(2)$

d) $(f \cdot f)'(2)$

e) $(g \cdot g)'(2)$

f) $(f \cdot g)'(2)$

g) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$

h) $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(2)$

i) $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(2)$

j) $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(2)$

k) $(g \circ f)'(2)$

l) $(f \circ g)'(2)$

m) $\left(f^4\right)'(2)$

n) $\left(g^5\right)'(2)$

o) $(f^{-1})'(3)$

3) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por
$$f(x) = x^4\,\mathrm{e}^{-x}$$
e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Calcule
$$(g \circ f)'(x).$$

4) Seja f a função definida por
$$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x+1).$$
Determine $(f^{-1}(x))'$ dos seguintes modos:

a) calcule a função inversa e de seguida a respectiva derivada;

b) directamente.

1) Determine a derivada de cada uma das seguintes funções.

a) $f(x) = (x+3)^5$

b) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+2} + 2x$

c) $f(x) = \left(\dfrac{ax-1}{x-b}\right)^2, \quad a, b \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \operatorname{sen}^4(5x) - \cos^4(5x)$

e) $f(x) = \operatorname{tg}(3x^2 - 1)$

f) $f(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x + \mathrm{e}^{1/x}$

g) $f(x) = \dfrac{1-3^x}{\cos x}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(\cosh(2x))$

i) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\ln x)$

j) $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x} + x \operatorname{sen} x$

k) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)}$

l) $f(x) = x^3 \operatorname{arc\,cos}\sqrt{x^2-1}$

m) $f(x) = \log_5(\operatorname{arc\,tg} x)$

n) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

o) $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$

p) $f(x) = \dfrac{x^5+1}{\mathrm{e}^x - 2}$

q) $f(x) = x \cosh x$

r) $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos}(x^2))$

2) A posição de uma partícula é dada pela equação do movimento $s = f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ onde t é medido em segundos e s em metros. Encontre a velocidade da partícula após 2 segundos.

3) Um balão meteorológico é solto e sobe verticalmente de modo que a sua distância $s(t)$ ao solo durante os 10 primeiros segundos de voo é dada por $s(t) = 6 + 2t + t^2$ na qual $s(t)$ é expressa em metros e t em segundos. Determine a velocidade do balão quando $t = 1$, $t = 4$, $t = 8$ e quando o balão está a $50m$ do solo.

4) Analise a diferenciabilidade das seguintes funções.

a) $f(x) = |x^2 - 2x|$

b) $f(x) = |x|^3$

c) $f(x) = x|x-1|$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} (1-x)\ln(x-1) & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{1-x^2}{2x+1} & \text{se } x \leqslant 1, \ x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{x+1} & \text{se } x \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^{x/(x+1)} - 1 & \text{se } x < 0, \ x \neq -1 \\ -1 & \text{se } x = -1 \end{cases}$

1) Determine uma equação da recta tangente à função dada por $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x-1}{2}$, no ponto de intersecção da função com o eixo das abcissas.

2) Determine uma equação da recta tangente à função $f(x) = \sqrt{x}$, no ponto de abcissa $x = 4$.

3) Considere a função $f(x) = 1 + 3\,\mathrm{e}^{x+3}$ definida em $\mathbb{R}$.

   a) Calcule $f'(-3)$.

   b) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f cujo declive é $3\,\mathrm{e}$.

4) Mostre que a recta de equação $y - 3x + \dfrac{2\pi}{3} = 0$ é a recta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{\pi}{3} - 2\operatorname{arc\,cos}\frac{3x}{2}$$

e determine o ponto de tangência.

5) Considere a função definida por $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x+3}} + \ln(\operatorname{arc\,tg} x)$.

   a) Calcule o domínio de g.

   b) Calcule a derivada de g no ponto $x = 1$.

   c) Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto $x = 1$.

6) Sejam $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções dadas por

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{ax+b} & \text{se } x < 1, \\ 1 + x\ln x & \text{se } x \geqslant 1, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{1+\mathrm{e}^{1/(x-1)}} & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

   a) Determine a e b de modo que g seja diferenciável no ponto $x = 1$.

   b) Prove que h é contínua no ponto $x = 1$, mas não é diferenciável nesse ponto.

7) Determine a derivada de segunda ordem das funções seguintes.

   a) $f(x) = \operatorname{sen}(x^3 + 1)$ *b*) $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$ *c*) $f(x) = \ln(x^3 + 1)$

   d) $f(x) = \log_{10}(x^2 + 1)$ *e*) $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x^3+1)}$ *f*) $f(x) = \operatorname{sen}(\mathrm{e}^x)$

   g) $f(x) = x \operatorname{sen} x$ *h*) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ *i*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

   j) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+3}\right)$ *k*) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(3x)}$ *l*) $f(x) = \dfrac{x+1}{\cos(2x)}$

1) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 3.$$

Mostre que a função f no intervalo $[1, 3]$ verifica as condições do Teorema de Rolle e calcule $c \in]1, 3[$ tal que $f'(c) = 0$.

2) Seja $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se } x \in [0, \pi/2[\,, \\ 1 & \text{se } x = \pi/2. \end{cases}$$

a) Verifique que $f(\pi/2) = f(\pi/4)$.

b) Mostre que f é contínua e diferenciável no intervalo $]\pi/4, \pi/2[$.

c) No intervalo $]\pi/4, \pi/2[$, a derivada f' não tem zeros. Isto contradiz o Teorema de Rolle? Justifique a resposta.

3) Prove que

a) a equação

$$\ln\left(x^2 + 1\right) = x$$

tem no máximo duas soluções em $\mathbb{R}$.

b) a função definida por

$$f(x) = x^3 + 3x - 2$$

tem um só zero em $\mathbb{R}$; mais precisamente em $]0, 1[$;

c) o polinómio

$$p(x) = x^n + px + q$$

não pode ter mais do que duas raízes se n for par e não pode ter mais do que três raízes se n for ímpar $(p, q \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

4) Mostre que a equação

$$\ln x^2 = x - 1$$

tem exactamente duas raízes em $]0, +\infty[$ e localize essas soluções.

5) Mostre que a equação

$$\mathrm{e}^{x-1} = x$$

admite apenas a solução $x = 1$.

6) Localize os zeros da função definida por

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2.$$

1) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3x^2 + 1.$$

Mostre que a função f no intervalo $[-1, 2]$ verifica as condições do Teorema de Lagrange e calcule $c \in]-1, 2[$ a que se refere o Teorema de Lagrange.

2) Aplique o Teorema de Lagrange à função definida por

$$f(x) = \sqrt{x}$$

no intervalo $[225, 226]$ para calcular um valor aproximado de $\sqrt{226}$.

3) Mostre que

a) $8 + \frac{1}{18} < \sqrt{65} < 8 + \frac{1}{16}$;

b) $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \operatorname{arc\,sen} 0,6 < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$.

4) Sejam a e b dois números reais tais que $0 < a < b$. Use o Teorema de Lagrange para provar que

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

e que

$$\frac{b-a}{1+b^2} + \operatorname{arc\,tg} a < \operatorname{arc\,tg} b < \frac{b-a}{1+a^2} + \operatorname{arc\,tg} a$$

e use estes resultado para estimar $\ln 1,1$ e $\operatorname{arc\,tg} 1,1$.

5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x}.$$

Aplicando o Teorema de Lagrange à função f no intervalo $[0, x]$, mostre que, para qualquer $x > 0$,

$$x < \mathrm{e}^x - 1 < x\,\mathrm{e}^x.$$

6) Recorrendo ao Teorema de Lagrange, mostre que

a) $\mathrm{e}^x > x + 1$ para $x > 0$;

b) $\ln \frac{1+x}{x} < \frac{1}{x}$ para $x > 0$;

c) $\operatorname{sen} x < x$ para $x > 0$;

d) $\mathrm{e}^x < \frac{1}{1-x}$ para $x \in]0, 1[$;

e) $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

f) $1 - x \operatorname{sen} x < \cos x < 1$ para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

g) $\operatorname{tg} x > x$ para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

UNIVERSIDADE
BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

Cálculo I
Ficha 18

1) Encontre a aproximação linear da função

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{0,9}$ e $\sqrt{0,99}$.

2) Verifique que no ponto $a = 0$ as funções seguintes verificam a aproximação linear dada e use-a para aproximar o valor das funções em $0,1$ e em $0,01$.

a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$

b) $\frac{1}{(1+2x)^4} \approx 1 - 8x$

c) $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$

d) $\operatorname{tg} x \approx x$

3) Determine a aproximação quadrática da função f no ponto a e use-a para aproximar

$$f(a + 0,01)$$

quando

a) $f(x) = x^3$ e $a = 1$;

b) $f(x) = \ln(x)$ e $a = 1$;

c) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ e $a = 0$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $a = -8$.

4) Determine o polinómio de Taylor de ordem 5 de f em torno do ponto a para

a) $f(x) = x^3 + 1$ e $a = 1$;

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $a = 1$;

c) $f(x) = \ln(x+3)$ e $a = 0$;

d) $f(x) = \mathrm{e}^x$ e $a = 1$;

e) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ e $a = 0$.

5) Determine o polinómio de Mac-Laurin de ordem n associado às funções dadas por

a) $f(x) = \mathrm{e}^x$;

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$;

c) $f(x) = \cos x$;

d) $f(x) = \ln(1+x)$;

e) $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

6) Calcule

a) $\mathrm{e}^{0,1}$ com erro inferior a 10^{-6};

b) $\operatorname{sen}(0,2)$ com erro inferior a 10^{-4};

c) $\cos(0,1)$ com erro inferior a 10^{-5}.

1) Calcule

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{x^2-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x}-e^{\cos x}}{\operatorname{sen} x-\cos x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x^2-2}{x\,e^x-x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x-1)\ln x$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{\operatorname{arc tg}(x-1)}\right]$ $\frac{1}{2}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(\operatorname{arc tg} e^x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$ 0 i) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left[\operatorname{arc sen}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x\right]$ -1

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x\,e^{-x^2})$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^{-2}\,e^x)$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{x}\,2^x)$

m) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x)^{(x+1)/x^2}$; o) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

p) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ q) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x+x)^{1/x}$ r) $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$

2) Determine os extremos e os intervalos de monotonia das seguintes funções

a) $f(x)=x^3-12x+3$ b) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$ c) $f(x)=x^4-8x$

d) $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$ e) $f(x)=x\,e^x$ f) $f(x)=x^2\,e^{-x}$

g) $f(x)=x\ln x$ h) $f(x)=x-\operatorname{arc tg} x$

3) Estude as seguintes funções quanto ao sentido da concavidade e em relação aos pontos de inflexão:

a) $f(x)=x^4+1$ b) $f(x)=x^4-2x^2-3$ c) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ e) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ f) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+12}$

g) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ h) $f(x)=\left(1+x^2\right)e^x$ i) $f(x)=x^2\ln x$

j) $f(x)=x-\operatorname{arc tg} x$

4) Estude as seguintes funções quanto a zeros, paridade, extremos locais, monotonia, convexidade, pontos de inflexão e assímptotas e faça um esboço do seu gráfico:

a) $f(x)=x^3-3x^2$ b) $f(x)=x^4-2x^2-3$; c) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

d) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$; e) $f(x)=x-\sqrt{1-2x+x^2}$ f) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$;

g) $f(x)=\dfrac{5}{1+4\,e^{-x}}$ h) $f(x)=\ln(x^2-1)$ i) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

j) $f(x)=\operatorname{arc sen}\dfrac{2x}{x^2+1}$; k) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}+|x|$; l) $f(x)=\begin{cases} x\ln x & x>0 \\ \sqrt{1-x} & x\leqslant 0 \end{cases}$

m) $f(x)=x-\operatorname{sen} x$, para $x\in[0,2\pi]$ n) $f(x)=\begin{cases} x^2+e^2-1 & \text{se } x\geqslant 1, \\ \dfrac{x}{x^2-4} & \text{se } x<1\wedge x\neq -2; \end{cases}$

UNIVERSIDADE
BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

1) Uma droga é injectada na corrente sanguínea e a sua concentração após t minutos é dada por

$$C(t) = \frac{k}{a-b}(\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at})$$

para constantes positivas a,b e k, com $a \neq b$. Em que instante ocorre a concentração máxima? O que se pode dizer sobre a concentração após um longo período de tempo?

2) Um oleoduto deve ligar dois pontos A e B distantes $3Km$ um do outro e situados em margens opostas de um rio de $1Km$ de largura. Parte do oleoduto ficará submersa, de A a C estando C na margem oposta, e a restante parte acima do solo ligando C a B. Se o custo de operação do oleoduto sob água é quatro vezes o custo da operação no solo, determine a localização de C que minimize o custo da operação do oleoduto. (Desprezar a inclinação do leito do rio.)

3) Suponhamos que um peso é sustentado a 1 m da recta horizontal AB por meio de um arame em forma de Y. Se os pontos A e B estão separados por 0.8 m, qual é o menor comprimento total de arame que pode ser usado.

4) Uma bala de canhão é lançada do solo com velocidade v segundo um ângulo α. Em cada momento t a altura da bala relativamente ao solo é

$$y(t) = -4.9t^2 + (v \operatorname{sen} \alpha)\, t$$

e a distância percorrida na horizontal é

$$x(t) = (v \cos \alpha)\, t.$$

Verifique que a trajectória da bala é uma parábola e determine a inclinação α que permite lançar a bala mais longe.

5) Uma janela rectangular encabeçada por um semi-círculo tem 3 metros de perímetro. Determine o raio da parte semi-circular de modo que a área total da janela seja máxima.

6) Mostre que entre todos os rectângulos com um dado perímetro é o quadrado que tem área máximo e que entre todos os rectângulos com uma área dada é o quadrado o que tem o perímetro mínimo.

7) Qual é o triângulo de dois lados iguais e de área 1 com menor perímetro?

8) Calcule o volume máximo de uma caixa rectangular de base quadrada com superfície total de $48\,\mathrm{cm}^2$.

9) Pretende-se construir uma caixa com base rectangular de um rectângulo de cartolina com 16 cm de largura e 21 cm de comprimento cortando-se um quadrado em cada quina. Determine o lado desse quadrado para que a caixa tenha volume máximo.

10) Pretende-se construir em folha zincada um cilindro sem tampa com capacidade $1\ell (= 1\,\mathrm{dm}^3)$. Determine a mínima área de folha necessária.

11) Determine as dimensões do cilindro circular recto de maior volume que pode ser inscrito num cone circular com altura 12 cm e raio da base 5 cm.

12) Pretende-se fabricar um recipiente cilíndrico, de base circular, aberto no topo, com capacidade de $24\pi\,\mathrm{cm}^3$. Se o custo do material usado para a fabricação da base é o triplo do custo do material da superfície lateral, e se não há perda de material, determine as dimensões que minimizam o custo.

1) Calcule os seguintes integrais.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(2x)\cos(2x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 e^{t+e^t}\,dt$ *f)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx$ *g)* $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 u\,du$ *h)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx$

i) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec^2\theta\,d\theta$ *j)* $\displaystyle\int_1^3 e^{-x}\,dx$ *k)* $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ *l)* $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx$

m) $\displaystyle\int_0^8 |x^2-6x+8|\,dx$ *n)* $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x+3}{x^2+2}\,dx$ *o)* $\displaystyle\int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt{25+3x}}\,dx$ *p)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$

q) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$ *r)* $\displaystyle\int_0^1 \cosh x\,dx$ *s)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$ *t)* $\displaystyle\int_{-2}^3 3x+|x^2-4x-5|\,dx$

2) Calcule as seguintes primitivas.

a) $\displaystyle\int (3x^2+5x+1)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int (5x^4+2x^3-1)\,dx$ *c)* $\displaystyle\int (x^2+1)^3\,dx$ *d)* $\displaystyle\int 5\sqrt{5x+30}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{2x^2-6x+7}{\sqrt{x}}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int -\frac{3}{2x^2}+\frac{5}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$ *g)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$ *h)* $\displaystyle\int e^{x+3}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ *j)* $\displaystyle\int x\,e^{-x^2}\,dx$ *k)* $\displaystyle\int 2^{x-1}\,dx$ *l)* $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ *n)* $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$ *o)* $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ *p)* $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$

q) $\displaystyle\int \frac{4x^3}{x^8+1}\,dx$ *r)* $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x}\,dx$ *s)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+2\cos x}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

t) $\displaystyle\int (\cos^2 x+2\cos x)\operatorname{sen} x\,dx$ *u)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx$ *v)* $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

w) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ *x)* $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+3/2}{1+3x+e^{2x}}\,dx$ *y)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,sen}^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

z) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt[5]{1+5x^2}}\,dx$ *A)* $\displaystyle\int \cos(2x-\pi/4)\,dx$ *B)* $\displaystyle\int \operatorname{senh}(2x)\cosh(2x)\,dx$

C) $\displaystyle\int e^{x^2+2\operatorname{sen} x}(x+\cos x)\,dx$ *D)* $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ *E)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x)}{1+x^2}\,dx$

F) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x^2)}{x}\,dx$ *G)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ *H)* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos^4 x\,dx$

I) $\displaystyle\int \frac{2x}{\cos^2(x^2+1)}\,dx$ *J)* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$ *K)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x\cos^3 x}}\,dx$

L) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ *M)* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{7-(x^4-2x^2+1)}}\,dx$ *N)* $\displaystyle\int \cos x\cos(2x)\,dx$

O) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ *P)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx$ *Q)* $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+9}+\operatorname{sen}(5x-4)\,dx$

R) $\displaystyle\int \frac{1}{x\cos^2(\ln x)}\,dx$ *S)* $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}\,dx$ *T)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}\,dx$

U) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ *V)* $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{2x}}{\sqrt{2-2e^{2x}}}\,dx$ *W)* $\displaystyle\int \frac{\ln x\,\operatorname{sen}(\ln^2 x)}{x}\,dx$

University Beira Interior header

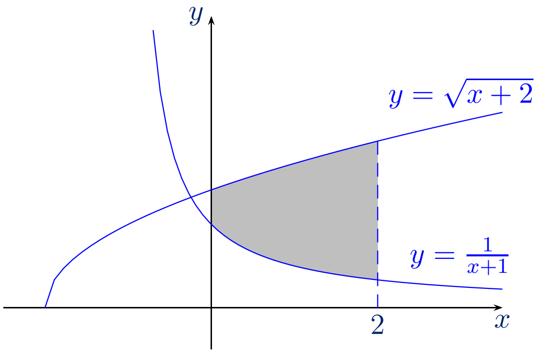
UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

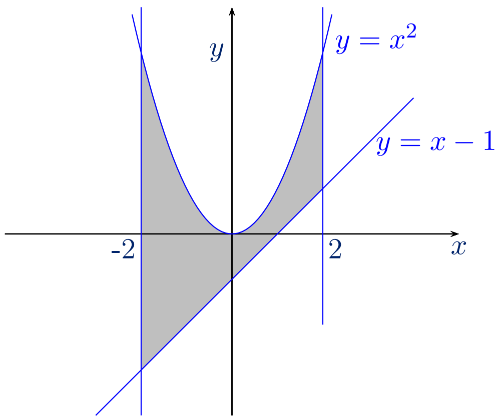
Cálculo I
Ficha 22

1) Calcule a área das regiões sombreadas

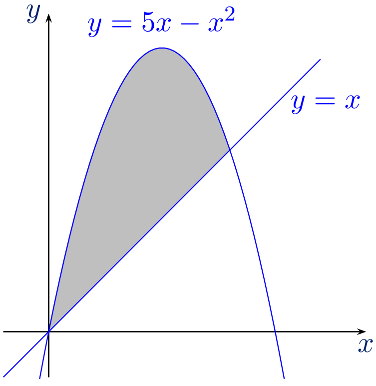
a)



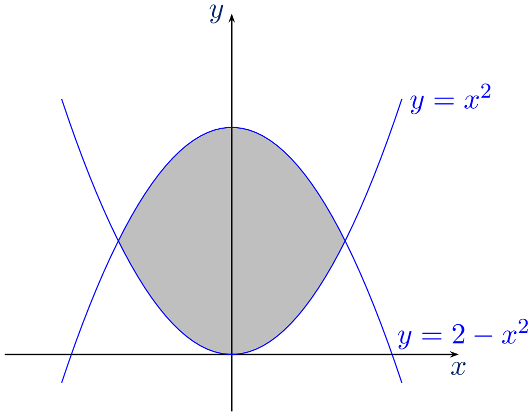
b)



c)



d)



2) Calcule a área da região do plano limitada

a) pela curva de equação $y = x^2$, o eixo das abcissas e as rectas de equação $x = 1$ e $x = 3$;

b) pelo sinusóide $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo das abcissas quando $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;

c) pela parábola de equação $y = -x^2 + 4x$ e o eixo das abcissas;

d) pelas curvas de equação $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$;

e) pela parábola de equação $y = -x^2 + 2x + 8$, o eixo das abcissas e as rectas de equação $x = -1$ e $x = 3$;

f) pela parábola com vértice no ponto $(0, 1)$ e que passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ e o eixo das abcissas.

g) pelas linhas de equação $xy = 3$ e $y + x - 4 = 0$;

1) Utilize a primitivação e a integração por partes para calcular as seguintes primitivas e integrais.

a) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$ *d)* $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt{x}\right)\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(3x)\,dx$ *g)* $\displaystyle\int x\operatorname{sen}x\cos x\,dx$ *h)* $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}x\,dx$

i) $\displaystyle\int_0^{1/2}\arccos x\,dx$ *j)* $\displaystyle\int \operatorname{arccotg}x\,dx$ *k)* $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$ *l)* $\displaystyle\int_1^e \cos\left(\ln x\right)\,dx$

m) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}x^3\,dx$ *n)* $\displaystyle\int e^{-x^2}x^3\,dx$ *o)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(x^2+1)\cos x\,dx$ *p)* $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$

q) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$ *r)* $\displaystyle\int_1^e \ln^2 x\,dx$ *s)* $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ *t)* $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

u) $\displaystyle\int e^{\operatorname{arcsen}x}\,dx$ *v)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\operatorname{arctg}x}{(1+x^2)^2}\,dx$ *w)* $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *x)* $\displaystyle\int_0^{1/2} x\operatorname{arcsen}\left(x^2\right)\,dx$

2) Calcule as seguintes primitivas e integrais utilizando a substituição indicada.

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$, $\sqrt{x-1}=t$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x+e^{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}\,dx$, $x=1-t^2$ *c)* $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$, $t=\sqrt{x-1}$ *d)* $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$, $x=3\operatorname{sen}t$

e) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$, $t=\sqrt{x+1}$ *f)* $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$, $x=t^2-1$ *g)* $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$, $x=2\operatorname{sen}t$ *h)* $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$, $x=e^t$

i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}x}{2-\operatorname{sen}^2 x}\,dx$, $\cos x=t$ *j)* $\displaystyle\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-2}}\,dx$, $x=1/t$ *k)* $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x=\operatorname{sen}^2 t$ *l)* $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$, $t=\sqrt{x}$

m) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, $x=2\operatorname{sen}t$ *n)* $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}\,dx$, $\ln x=t$ *o)* $\displaystyle\int \frac{1}{x(1-x)}\,dx$, $x=\operatorname{sen}^2 t$ *p)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$, $t=\operatorname{sen}x$

q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx$, $x=-\ln t$ *r)* $\displaystyle\int_1^{-\sqrt{2}} x\sqrt{4-x^2}\,dx$, $x=2\operatorname{sen}t$ *s)* $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$, $x=\operatorname{tg}t$ *t)* $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\cos\sqrt{x}\,dx$, $t=\sqrt{x}$

1) Calcule as seguintes primitivas e integrais de funções racionais.

a) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x+2)(x+3)}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4-2x^3+x^2}\,dx$ *h)* $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx$ *i)* $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x-2)(x+5)}\,dx$

j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2-4}{(2-x)^2(x^2+4)}\,dx$ *k)* $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^4}{x-1}\,dx$ *l)* $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x^3-x)(x+5)}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$ *n)* $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x^2}\,dx$ *o)* $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx$

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}\,dx$ *q)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$ *r)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^4}{x+2}\,dx$

2) Calcule $f(x)$ sabendo que

a) $f'(x)=\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$ e $f(0)=2$;

b) $f'(x)=(x^2-2x+3)\ln x$ e $f(1)=7/18$;

c) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln\sqrt{x}}$ e $f(\mathrm{e})=1$;

d) $f''(x)=x^2+3\cos x$, $f(0)=2$ e $f'(0)=3$;

e) $f''(x)=\dfrac{8}{(x+1)^3}$, $f'(1)=-1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

3) Seja $P(t)$ a população de uma bactéria numa colónia no tempo t (em minutos). Supondo que $P(0)=100$ e que $P(t)$ aumenta a uma taxa (variável) de $20\,\mathrm{e}^{3t}$, quantas bactérias existem ao fim de 50 dias?

4) Uma partícula parte da origem e movimenta-se sobre o eixo das abcissas com uma velocidade (em centímetros por segundo) dada por $v(t)=7+4t^3+6\,\mathrm{sen}(\pi t)$. Encontre a distância percorrida em 200 segundos.

5) A aceleração (no instante t) de um ponto em movimento sobre uma recta coordenada é dada por $a(t)=\mathrm{sen}^2 t\cos t$ (em ms^{-2}). Em $t=0$ o ponto está na origem e a sua velocidade é $10m/s$. Determine a sua posição no instante t.

6) A velocidade (no instante t) de um ponto que se move ao longo de uma recta é $v(t)=t/e^{2t}$ (em ms^{-2}). Se o ponto está na origem quando $t=0$, encontre a sua posição no instante t.

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

1) Calcule os volumes dos seguintes sólidos.

   a) Um cilindro de raio da base 3 e altura 3.

   b) O sólido gerado pela rotação da área, no primeiro quadrante, limitada pela parábola $y^2 = 8x$ e pela recta $x = 2$

      i) em torno do eixo das abcissas;

      ii) em torno do eixo das ordenadas;

      iii) em torno da recta $x = 2$.

   c) Gerado pela rotação da curva definida pelo gráfico da função $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \mathrm{e}^{x+1},$$

   em torno da recta $y = 1$.

2) Calcule a área de superfície

   a) do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo das abcissas da curva $y = x^3$ entre $x = 1$ e $x = 3$;

   b) do cone de altura 3 e raio da base 4;

   c) do sólido de revolução gerado pela curva de equação $y = \dfrac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{x/a} + \mathrm{e}^{-x/a}\right)$, com $a > 0$, de $x = 0$ a $x = a$.

   d) do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo das abcissas, do domínio plano

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 4x\right\}.$$

3) Seja D a região do plano definida por

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \leqslant \mathrm{e}^x,\ y \geqslant -x^2 - 1,\ |x| \leqslant 1\right\}.$$

   a) Calcule a área da região plana D.

   b) Seja D_1 a parte da região D que está no 3º quadrante. Calcule o volume do sólido de revolução que se obtém girando D_1 em torno do eixo dos yy.

4) Calcule os comprimentos das seguintes curvas planas.

   a) Curva C determinada pelo gráfico de função $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \cosh x.$$

   b) Arco da curva $y = \dfrac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{x/a} + \mathrm{e}^{-x/a}\right)$, com $a > 0$, de $x = 0$ a $x = a$.

   c) Arco da curva $x = t^2$, $y = t^3$, de $t = 0$ a $t = 4$.

UNIVERSIDADE
BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

Cálculo I
Ficha 26

1) Calcule as seguintes primitivas e integrais usando, sempre que indicada, a substituição sugerida.

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{12x}-\mathrm{e}^{6x}+1}{\mathrm{e}^{9x}+\mathrm{e}^{6x}}\,dx; \quad t=\mathrm{e}^{3x}$

b) $\displaystyle\int \frac{2^x}{1-8^x}\,dx; \quad t=2^x$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{-2x}+1}\,dx; \quad t=\mathrm{e}^{x}$

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^3 x+1}{x}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx; \quad t=\operatorname{sen} x$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/3}}\,dx; \quad x=t^6$

h) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\,dx; \quad t=\operatorname{tg} x$

i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^3}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{4-\mathrm{e}^{4x}}}\,dx$

k) $\displaystyle\int \left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$

l) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^3 x+1}{x\ln^2 x+x}\,dx; \quad t=\ln x$

m) $\displaystyle\int \frac{3^{x/3}}{3^{x/2}+3^{x/4}}\,dx; \quad 3^x=t^{12}$

n) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg} x+1}{\operatorname{cotg} x-1}\,dx; \quad t=\operatorname{cotg} x$

o) $\displaystyle\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx$

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\operatorname{arc\,tg} x\,dx$

q) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^5 x}\,dx$

r) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{2-\operatorname{sen}^2 x}\,dx; \quad t=\cos x$

s) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x-1}\,3^x\,dx$

t) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(2x)\cos(x/2)\,dx$

u) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 x\sec^4 x\,dx$

v) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{x-\sqrt{x}}\,dx; \quad x=t^4$

w) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{5+x^2}}\,dx; \quad x=\sqrt{5}\operatorname{tg} t$

x) $\displaystyle\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\operatorname{arc\,tg} x\,dx$

y) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx; \quad x=t^2$

z) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos^2 x}\,dx; \quad t=\cos x$

A) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx$

B) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$

C) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\,dx; \quad t=\sqrt{x}$

D) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln x\,dx$

E) $\displaystyle\int_1^0 \frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}-1)^2}{\mathrm{e}^{x}+1}\,dx; \quad t=\mathrm{e}^{x}$

F) $\displaystyle\int_4^1 \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}}\,dx; \quad t=x^{1/2}$

G) $\displaystyle\int \ln\left(1+x^2\right)\,dx$

H) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x\,(2+\operatorname{sen} x)}\,dx; \quad t=\operatorname{sen} x$

I) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}; \quad t^4=2x-1$

J) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3(2x)+\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)}{1+\cos(2x)}\,dx; \quad t=\cos(2x).$