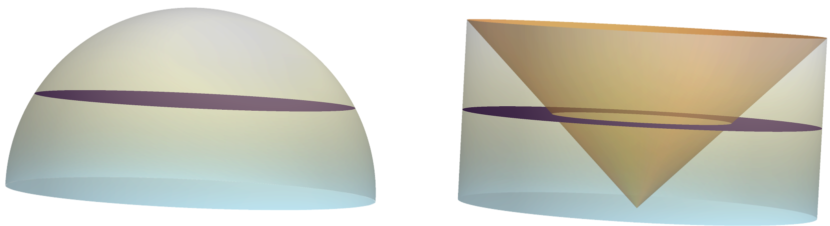
UNIVERSIDADE
BEIRA INTERIOR

Cálculo II

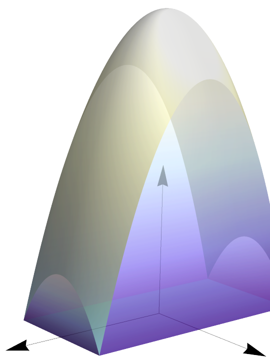
Ficha 3

1. Use o princípio de Cavalieri para provar que o volume de uma semiesfera de raio r é igual ao volume do sólido definido por um cilindro de raio r e altura r ao qual foi retirado um cone de igual altura e igual raio da base.



2. (a) Use uma soma de Riemann relativa a uma decomposição de $D = [-2, 2]\times[-1, 1]$ em n^2 retângulos iguais, com $n = 2, 3$, para estimar o volume do sólido limitado pelo gráfico da função $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$ em D.

   (b) Calcule o volume exato desse sólido.

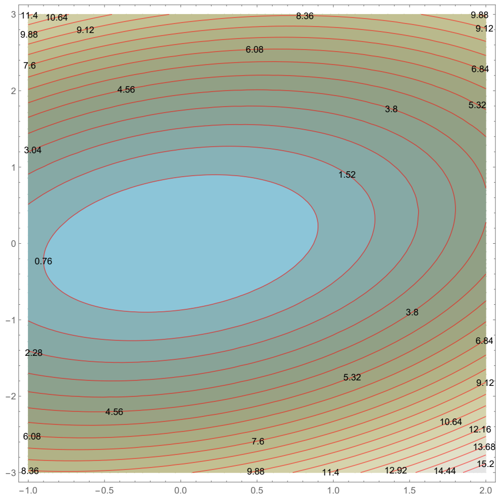


3. (a) Use uma soma de Riemann relativa à decomposição de $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ em n^2 quadrados iguais, com $n = 2, 3$, para estimar o valor do integral

$$\iint_D \sin(x + y)dA.$$

   (b) Calcule o valor exato do integral.

4. A figura seguinte exibe algumas curvas de nível de uma certa função $f(x, y)$ definida no retângulo $D = [-1, 2] \times [-3, 3]$.



Considerando uma decomposição de D em 9 retângulos iguais, estime o valor médio de $f(x, y)$ em D.

5. Calcule a temperatura média numa lâmina em forma de quadrado de lado a, sabendo que a temperatura é proporcional ao quadrado da distância a um dos vértices.

6. Calcule o integral iterado.

(a) $$\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\, dx dy$$

(b) $$\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y}\, dy dx$$

(c) $$\int_1^2 \int_0^1 (x + 2y)^{-2}\, dx dy$$

(d) $$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 5} e^{2x-y}\, dx dy$$

(e) $$\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\, dy dx$$

(f) $$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y)\, dy dx$$

(g) $$\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x}\, dx dy$$

(h) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} e^{\operatorname{sen}\theta}\, dr d\theta$$

7. Esboce a região D e calcule o integral duplo $\displaystyle\iint_D f(x,y)dA$.

   (a) $f(x,y) = 6x^2y^3 - 5y^4$; $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1\}$

   (b) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+1}$; $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ -3 \leq y \leq 3\}$

   (c) $f(x,y) = xye^{x^2y}$; $D = [0,1] \times [0,2]$

   (d) $f(x,y) = x^3y^2$; $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ -x \leq y \leq x\}$

   (e) $f(x,y) = \frac{2y}{1+x^2}$; $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

   (f) $f(x,y) = e^{y^2}$; $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\}$

   (g) $f(x,y) = x\sqrt{y^2 - x^2}$; $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\}$

   (h) $f(x,y) = x\cos y$; D é limitada por $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$

   (i) $f(x,y) = y^3$; D é a região triangular com vértices $(0,2)$, $(1,1)$ e $(3,2)$

8. Esboce a região de integração e calcule o integral invertendo a ordem de integração.

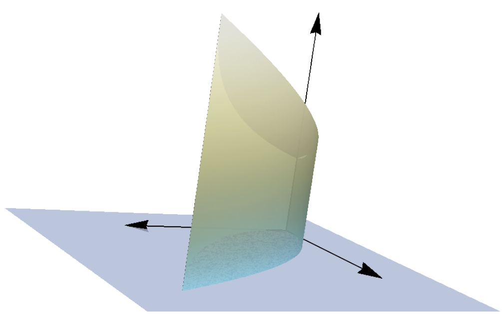
   (a) $$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dxdy$$

   (b) $$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\, dxdy$$

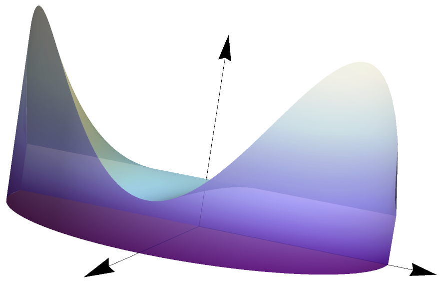
   (c) $$\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos\left(x^2\right) dxdy$$

   (d) $$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin\left(y^3\right) dydx$$

9. Calcule o volume do sólido limitado lateralmente pelas superfícies $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$, superiormente pelo plano $z = \frac{1+x+y}{3}$ e inferiormente pelo plano $z = 0$.



10. Calcule o volume do sólido limitado pelo gráfico da função $f(x,y) = \frac{1}{4} + 2xy^2$ definida na região $D = \{(x,y) : -1 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$.



11. Calcule o integral duplo $\iint_D f(x,y)\, dA$ utilizando coordenadas polares.

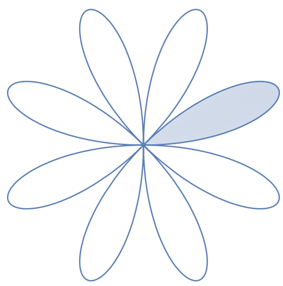
    (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; D é o disco com centro na origem e raio 3

    (b) $f(x,y) = x + y$; D é a região que está à esquerda do eixo dos yy e entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

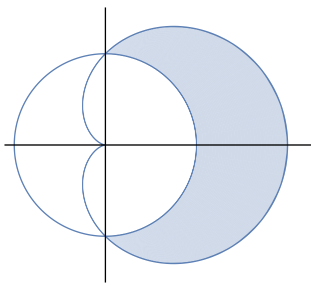
    (c) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq x\}$

    (d) $f(x,y) = ye^x$; $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$

12. A curva em forma de flor exibida na figura seguinte tem equação (em coordenadas polares) $r = |\sin(4\theta)|$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Encontre a área de uma das pétalas.



13. Encontre a área da região compreendida entre a circunferência $r = 2$ e o cardióide $r = 2(1 + \cos\theta)$.



14. Considere o integral
$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{0} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

   (a) Esboce a região de integração.

   (b) Inverta a ordem de integração.

   (c) Utilize coordenadas polares para calcular o integral.

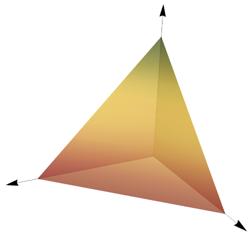
15. Calcule o integral triplo $\iiint_D f(x,y,z)\,dV$.

   (a) $f(x,y,z) = 2x + 3y^2 + 4z^3$; $D = [0,1]\times[0,2]\times[0,3]$

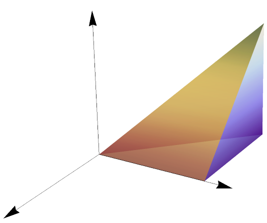
   (b) $f(x,y,z) = 2x$; $D = \{(x,y,z) : 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le \sqrt{4-y^2},\ 0 \le z \le y\}$

   (c) $f(x,y,z) = yz\cos(x^5)$; $D = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ x \le z \le 2x\}$

   (d) $f(x,y,z) = y$; D o tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + 2y + z = 4$.



   (e) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$; D a região limitada pelos planos $y = 1$, $y = -x$, $z = 0$ e $z = -x$.



16. Calcule o integral, fazendo a transformação para coordenadas cilíndricas:

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dzdydx$

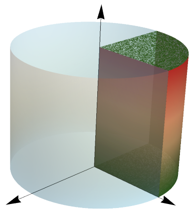
   (b) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\,dzdxdy.$

17. Use coordenadas cilíndricas para calcular o integral $\iiint_D f(x,y,z)\,dV$:

    (a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$; D é a região limitada pelo cilindro $x^2+y^2 = 16$ e os planos $z=-5$ e $z=4$

    (b) $f(x,y,z) = yz$; D é o quarto de cilindro definido pelas condições

    $$x \leq 0, y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 3,\ x^2+y^2 \leq 4.$$



18. Use coordenadas esféricas para calcular o integral $\iiint_D f(x,y,z)\,dV$:

    (a) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$; D é a bola unitária $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

    (b) $f(x,y,z) = z$; D é a semiesfera $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \leq 0$.

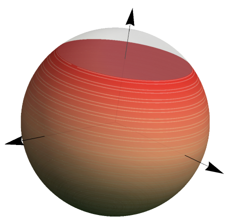
19. Calcule o integral, fazendo a transformação para coordenadas esféricas:

    (a) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx$

    (b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,dzdxdy.$

20. Use integrais triplos para provar que o volume de uma esfera de raio R é dado pela fórmula $\frac{4\pi R^3}{3}$.

21. Calcule o volume da parte da esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ limitada superiormente pelo plano $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



22. Calcule a temperatura média num corpo em forma de cilindro de altura h e raio R, sabendo que a temperatura é proporcional à distância ao eixo do cilindro.

23. Calcule a massa de um cone de altura h e raio R, assumindo que a densidade de massa é proporcional à altura em relação à base do cone.

24. Calcule a massa de uma esfera de raio R, sabendo que a densidade em cada ponto é proporcional à distância entre esse ponto e:

    (a) o centro da esfera

    (b) um plano que contenha o centro da esfera

25. Determine o volume do sólido que está tanto dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ como da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.