UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Informática

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I - 2º Teste - 27/01/2021

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1) (1 val.)Analise a diferenciabilidade da função

$$f(x) = \begin{cases} x + e^x + \operatorname{arcsen} x & \text{se} \quad x \leqslant 0 \\ (x+1)\,e^{2x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Se $x \in]-\infty, 0[$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que, no intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, temos $f(x) = x + e^x + \operatorname{arcsen} x$ que é soma de uma função exponencial com uma função trigonométrica inversa e uma função polinomial. Concluimos que f é diferenciável em $x \in]-\infty, 0[$. Se $x \in]0, +\infty[$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que, no intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, temos $f(x) = (x+1)\,e^{2x}$ que é produto de uma função polinomial por uma função exponencial. Logo f diferenciável em $]0, +\infty[$. No ponto $x = 0$ temos

$$\begin{aligned} f'_e(0) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h + e^h + \operatorname{arcsen} h - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \left(1 + \frac{e^h - 1}{h} + \frac{\operatorname{arcsen} h}{h}\right) = 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

e também

$$f'_d(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)\,e^{2h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \left[2\frac{e^{2h} - 1}{2h} + e^{2h}\right] = 2 + 1 = 3$$

e concluímos que f é diferenciável no ponto 0. Assim, concluímos que f é diferenciável em $\mathbb{R}$.

---

2) (1.5 val.) Mostre que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 - (2 + x^2)\,e^{-x^2}$ admite exatamente dois zeros, um dos quais se encontra no intervalo $]-2, 0[$ e o outro no intervalo $]0, 2[$.

Uma vez que a função g é uma função contínua em $[-2, 0]$ e que $g(-2)g(0) = (4 - 6 \times e^{-4})(-2) < 0$ (note que $6 \times e^{-4} < 6 \times 2^{-4} < 1$ e logo $4 - 6 \times e^{-4} > 3$), podemos concluir, de acordo com um corolário do Teorema de Bolzano, que g tem pelo menos um zero em $[-2, 0]$. Analogamente, sendo a função g uma função contínua em $[0, 2]$ e $g(0)g(2) = g(0)g(-2) < 0$, podemos novamente concluir, de acordo o resultado referido anteriormente, que g tem pelo menos um zero em $[0, 2]$. Consequentemente, g tem pelo menos dois zeros: pelo menos um zero em $[-2, 0]$ e pelo menos um zero em $[0, 2]$.

A função g é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ por ser soma de uma função polinomial com produto de uma função polinomial pela composição de uma função exponencial com uma função polinomial. Uma vez que

$$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2x\,e^{-x^2} + 2x(2 + x^2)\,e^{-x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(1 + e^{-x^2} + x^2\,e^{-x^2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

concluimos por um corolário do Teorema de Rolle que a função não pode ter mais do que dois zeros (pois caso contrário a derivada teria mais do que um zero).

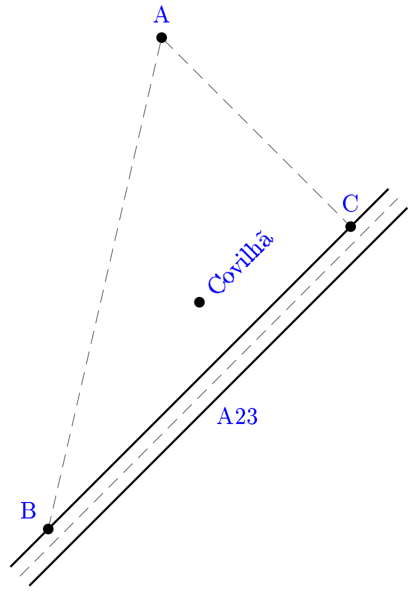
Assim, concluímos que g tem exatamente dois zeros, um dos quais se encontra no intervalo $[-2, 0]$ e o outro no intervalo $[0, 2]$.

3) (1 val.) Determine $\lim_{x\to 0} \frac{\text{arctg}\, x - \text{sen}\, x}{x^2}$.

Aplicando duas vezes a regra de Cauchy, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arctg}\, x - \text{sen}\, x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \text{sen}\, x}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

4) A Ecostrela pretende facultar aos seus clientes, hospedados no *Ecotel* (ponto B), um meio de transporte rápido e amigo do ambiente, que os conduzam ao maciço central do Parque Natural da Serra da Estrela (ponto A). Decidiu instalar um teleférico até este ponto, de modo a proporcionar aos seus hóspedes um passeio agradável, embora não saiba ainda em que lugar junto à A23 deverá montar o ponto de embarque. Ver figura seguinte.



Sabe-se que o teleférico irá circular a uma velocidade máxima de 50Km/h e que a distância entre os pontos A e B é de 65Km e entre A e o ponto mais próximo da A23 (ponto C) é de 33Km. Supõe-se ainda que na A23, entre os pontos B e C, a velocidade máxima é de 100Km/h.
Em que ponto da A23 deverá montar o ponto de embarque do teleférico de modo a tornar a viagem o mais breve possível?

Pretende-se minimizar o tempo de viagem desde B até ao ponto de embarque na A23, e desse ponto até A
Se a distância de B a A é 65km e de A a C 33km, então, pelo Teorema de Pitágoras, a distância de B a C é $\sqrt{65^2 - 33^2} = \sqrt{3136} = 56$km. Se x km for a distância de C até ao ponto de embarque, então, pelo Teorema de Pitágoras, a distância desse ponto até A é $\sqrt{33^2 + x^3}$.
Sabendo que o tempo que se demora a percorrer uma distância d km a uma velocidade v km/h é igual a d/v horas, então o tempo, em horas, de viagem, em função de x será

$$t(x) = \frac{(56 - x)}{100} + \frac{\sqrt{1089 + x^2}}{50} \quad x \in I = [0, 56]$$

Como t é diferenciável em I, então o x que minimiza t anula a derivada de primeira ordem, então, a derivada de t é:

$$t'(x) = -\frac{1}{100} + \frac{1}{50} \frac{x}{\sqrt{1089 + x^2}}$$

Os seus zeros são:

$$\begin{aligned}
t'(x)=0 &\Leftrightarrow \tfrac{x}{50\sqrt{1089+x^2}}-\tfrac{1}{100}=0\\
&\Leftrightarrow \tfrac{2x-\sqrt{1089+x^2}}{100\sqrt{1089+x^2}}=0 \qquad (\sqrt{1089+x^2}\neq 0)\\
&\Leftrightarrow 2x-\sqrt{1089+x^2}=0\\
&\Leftrightarrow \sqrt{1089+x^2}=2x \qquad (x\geq 0)\\
&\Leftrightarrow 1089+x^2=4x^2\\
&\Leftrightarrow 3x^2=1089\\
&\Leftrightarrow x=\sqrt{363}
\end{aligned}$$

Como à esquerda de $\sqrt{363}$, $t'<0$, o que implica que t é decrescente e à direita de $\sqrt{363}$, $t'>0$, o que implica que t é crescente, logo t atinge um mínimo para $x=\sqrt{363}$.
Logo o ponto de embarque deve ser construído a $\sqrt{363}$km do ponto C.

---

5) Determine as seguintes primitivas:

a) (1 val.) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\operatorname{arcsen}(e^{2x})}{\sqrt{1-e^{4x}}}\,dx.$

Temos

$$\int \frac{e^{2x}\operatorname{arcsen}(e^{2x})}{\sqrt{1-e^{4x}}}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2\,e^{2x}}{\sqrt{1-(e^{2x})^2}}\operatorname{arcsen}(e^{2x})\,dx=\frac{1}{2}\frac{(\operatorname{arcsen}(e^{2x}))^2}{2}=\frac{1}{4}(\operatorname{arcsen}(e^{2x}))^2+C.$$

---

b) (1 val.) $\displaystyle\int \cos(1+\ln x)\,dx.$

Primitivando por partes duas vezes temos

$$\begin{aligned}
\int \cos(1+\ln x)\,dx &= \int 1\times\cos(1+\ln x)\,dx\\
&= x\cos(1+\ln x)-\int -x\frac{1}{x}\operatorname{sen}(1+\ln x)\,dx\\
&= x\cos(1+\ln x)+\int 1\times\operatorname{sen}(1+\ln x)\\
&= x\cos(1+\ln x)+\left(x\operatorname{sen}(1+\ln x)-\int x\frac{1}{x}\times\cos(1+\ln x)\right)\\
&= x\cos(1+\ln x)+x\operatorname{sen}(1+\ln x)-\int\cos(1+\ln x).
\end{aligned}$$

Deste modo

$$\int \cos(1+\ln x)\,dx = x\cos(1+\ln x)+x\operatorname{sen}(1+\ln x)-\int\cos(1+\ln x)$$

e por conseguinte

$$\int \cos(1+\ln x)\,dx=\frac{x}{2}(\cos(1+\ln x)+\operatorname{sen}(1+\ln x))+C.$$

---

6) (1 val.) Calcule o seguinte integral $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^4 x+1}{x\ln^2 x+x}\,dx$ *(sugestão: faça a substituição $t=\ln x$).*

Uma vez que $x=e^t$ temos $x'=e^t$ e portanto

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x+1}{x\ln^2 x+x}\,dx=\int_{\ln 1}^{\ln e}\frac{t^4+1}{e^t(t^2+1)}\,e^t\,dt=\int_0^1\frac{t^4+1}{t^2+1}\,dt.$$

Uma vez que o grau do numerador não é inferior ao grau do denominador, temos que efectuar a divisão dos dois polinómios. O resultado dessa divisão é:

$$\frac{t^4+1}{t^2+1} = t^2 - 1 + \frac{2}{t^2+1}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t^4+1}{t^2+1}\,dt &= \int_0^1 t^2 - 1 + \frac{2}{t^2+1}\,dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} - t + 2\operatorname{arctg} t\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - 1 + 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

---

7) (1 val.) Calcule a área da região plana, no primeiro quadrante, limitada pelas curvas $x = y^2$ e $y = x - 2$.

Uma vez que $y + 2 = y^2 \Leftrightarrow\ y = -1 \vee y = 2$, área pedida é

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 \sqrt{x} - x + 2\,dx &= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4 \\
&= \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{16}{3} - 8 + 8 - (\frac{4}{3}\sqrt{2} - 2 + 4) \\
&= \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

ou

$$\int_0^2 y + 2 - y^2 dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 2 + 4 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

---

8) (1 val.) Determine o volume do sólido gerado por rotação em torno do eixo dos xx da região limitada pelas curvas $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$ e $x = 1$.

Uma vez que $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x}\ \Leftrightarrow\ x = -x\ \Leftrightarrow\ x = 0$, o volume pedido é dado por

$$\pi\int_0^1 (\mathrm{e}^x)^2 - (\mathrm{e}^{-x})^2\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 2\,\mathrm{e}^{2x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2} - 2).$$
