Definição: Seja X um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência. Chamamos **conjunto quociente** de X segundo R ao conjunto formado pelas classes de equivalência de todos os elementos de X. Representamos por X/R

$$X/R = \{[x] : x \in X\}$$

Exemplo:

$X = \{1, 2, 3\}$ $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$

R é relação de equivalência

Vimos que $[1] = \{1,2\}, [3] = \{3\}, [2] = \{2,1\}$

$X/R = \{[1] \overset{=}{=} [2], [3]\} = \{[1], [3]\} = \{\{1,2\}, \{3\}\} \Rightarrow$ partição de X

Exercício:

1. Considere em $\mathbb{R}^2$ a relação definida por $(a,b) R (c,d)$ se, e só se, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

a) Mostre que R é uma relação de equivalência.
b) Determine $[(0,1)]$
c) Determine $[(0,0)]$
d) Mostre que $(0,1)$ e $(1,0)$ estão na mesma classe
e) Determine $[(a,b)]$ para um ponto genérico $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
f) Descreve analítica e geometricamente o conjunto quociente $\mathbb{R}^2/R$

a)

R é reflexiva e transitiva? (TPC)

R é simétrica?

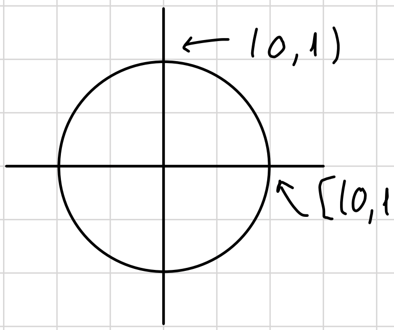
Sejam $(a,b)(c,d) \in \mathbb{R}^2$ com $(a,b) R (c,d)$. Isto quer dizer que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Leftrightarrow c^2 + d^2 = a^2 + b^2$

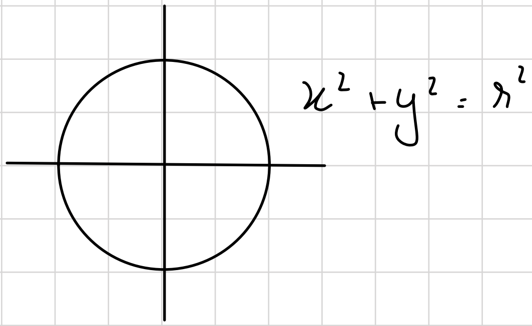
Como R é reflexiva, transitiva e simétrica, R é uma relação de equivalência.

b) $[(0,1)] = ? = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\, R\, (0,1)\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$(x,y)\, R\, (0,1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0^2 + 1^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$





c) $[(0,0)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\, R\, (0,0)\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } y = 0\} = \{(0,0)\}$

$(x,y)\, R\, (0,0) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$

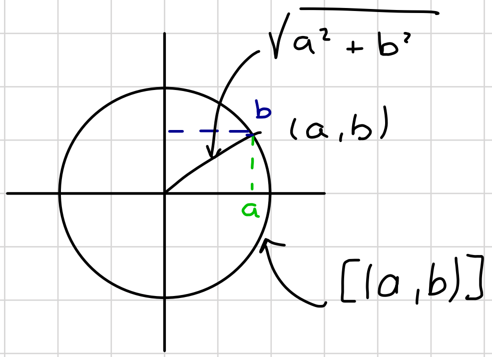
d)

Temos $(0,1) \in [(0,1)]$. Temos também $(1,0) \in [(0,1)]$ pois $(1,0)\, R\, (0,1) \Leftrightarrow 1 + 0^2 = 0^2 + 1^2$ o que é verdade

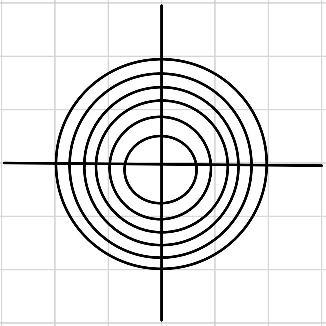
e) $[(a,b)] = ? = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\, R\, (a,b)\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2 + b^2\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2\}$



f) $\mathbb{R}^2/R = ?$ $\{[a,b] : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ = circunferência centrada na origem



$= \{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = r^2$ com $r \in]0,+\infty[\}$

$= \{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = r^2$ com $r \in [0,+\infty[$

→ é uma partição de $\mathbb{R}^2$ e cada circunferência é um átomo

Proposição: Seja A um conjunto mas vazio, R uma relação de equivalência definida em A. O conjunto de A/R é uma partição de A. (é a chamada partição induzida em A pela relação R)

Queremos mostrar que A/R é uma partição de A. Escrevendo os elementos de A/R como A_i queremos mostrar que:

a) Os A_i não são vazios
b) Os A_i são disjuntos dois a dois
c) A união dos A_i dá o espaço total de A

a) Seja $A_i \in A/R$. Temos $A_i = [a_i]$ onde a_i é algum ponto de A
Mas por a) a proposição anterior $[a_i] \neq 0$. Assim $A_i \neq 0$

b) Sejam A_i A_j dois elementos distintos de A/R. Assim $A_i = [a_i]$ e $A_j = [a_j]$ para alguns $a_i, a_j \in A$. Temos duas possibilidades:

. $(a_i, a_j) \in R$
ou
. $(a_i, a_j) \notin R$

Se $(a_i, a_j) \in R$ então por b) da proposição anterior $[a_i] = [a_j]$, isto é, $A_i = A_j$ o que contraria a nossa hipotese

Assim temos que ter $(a_i, a_j) \notin R$. $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset$, isto é $A_i \cap A_j = \emptyset$ logo, A_i e A_j são disjuntos.

c) $\bigcup A_i = A \Leftrightarrow \bigcup_{A_i \in A/R} A_i = A$

$B_1 \subset D_1$
$B_2 \subset D_2$
$\Big\{ B_1 \cup B_2 \subset D_1 \cup D_2$

Temos $a \in [a] \Leftrightarrow \{a\} \subset [a] \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{a \in A} \{a\} \subset \bigcup_{a \in A} [a]$; $[a] \subset A \Rightarrow \bigcup_{a \in A} [a] \subset A$

Assim $\bigcup_{a \in A} \{a\} \subset \bigcup_{a \in A} [a] \subset A$

Mas $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$

Temos então,

$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subset \bigcup [a] \subset A$

$5 = x \leq y \leq 5$

Ou seja $A = \bigcup_{a \in A} [a] = \bigcup_{A_i \in A/R} A_i$

A, R relação equivalência $\Rightarrow$ A/R é partição de A

A, $\mathcal{A}$ partição $\Rightarrow$ existe uma maneira de gerar um equivalência de R

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{A} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$
Em A definimos a relação R através de: $(x, y) \in R$ se, e só se, $x, y \in A_i$ para algum $A_i \in \mathcal{A}$. Determine os pares da relação R

$A_1 = \{1, 3\}$ $A_2 = \{2\}$

Temos $1, 3 \in A_1 \Rightarrow (1, 3) \in R$. assim como $(3, 1), (1, 1), (3, 3) \in R$

Temos $2 \in A_2 \Rightarrow (2, 2) \in R$

Logo, $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\} \Rightarrow$ relação de eq.