Elementos da teoria de conjuntos

Definição: Um conjunto é uma coleção de objetos de natureza qualquer

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

2 está em A $\Leftrightarrow$ $2 \in A$

Definição: Sejam A, B conjuntos. Dizemos que A está contido em B se todo o elemento de A é elemento de B. Repesentamos por $A \subset B$, dizemos que "A é uma parte de B" "A está contido em B"

$A = \{1, 2\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ $D = \{3, 4\}$

$A \subset B$ $D \not\subset B$

Definição: Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A é igual a B se $A \subset B$ e $B \subset A$

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$

Definição: Um conjunto vazio é um conjunto que não tem elementos.
Repesentamos por $\emptyset$, $\{\ \}$

Proposição: O conjunto vazio é o subconjunto de qualquer conjunto, isto é, temos sempre $\emptyset \subset A$ para qualquer conjunto A.

Definição: Sejam A e B conjuntos. Definimos a intreseção de A e B como o conjunto formado pelos elementos comuns em A e B $(A \cap B)$. A união é o conjunto formado pelos elementos que pertencem pelo menos a um dos conjuntos A e B $(A \cup B)$

$A = \{1, 4\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ $D = \{2, 3\}$

$A \cap B = \{1\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cap D = \{\ \}$ Como a intreseção de A com D é vazia dizemos que os conjuntos são DISJUNTOS.

Definição: Seja I um conjunto de índices. Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma coleção de conjuntos indexada em I.
Definimos:

* a intreseção de todos os A_i como o conjunto formado pelos elementos comuns a todos os A_i

** a união de todos os A_i como o conjunto formado pelos elementos que pertencem pelo menos a um dos A_i

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

$I = \mathbb{N} \quad A_i = \{0, 1, \dots, i\}$

$A_0 = \{0\} \quad A_1 = \{1\} \quad A_{1024} = \{0, 1, \dots, 1024\}$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$
$$= \{0\} \cap \{0, 1\} \cap \{0, 1, 2\} \cap \dots \{0, 1, 2, \dots n\} = \{0\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{0\} \cup \{0, 1\} \cup \{0, 1, 2\} \cup \dots \{0, 1, 2, \dots n\} = \mathbb{N}$$

Proposição: Sejam A, B, C conjuntos tem-se

$\begin{cases} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{cases}$ Comutatividade

$\begin{cases} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{cases}$ Idempotência

$A \cap A = A$

$\Leftrightarrow A \cdot A = A$

$\Leftrightarrow A^2 = A$

$\begin{cases} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{cases}$ Associatividade

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Distributividade

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Definição: Sejam A e B conjuntos. Definimos diferença entre os conjuntos A e B ou complementar de B em A como o conjunto dos elementos A que não estão em B

$\{x \in A : x \notin B\} =: A \setminus B$ "A tirando B"

Em certas situações fixa-se um conjunto que contém todos os subconjuntos que são necessários considerar. É chamado o conjunto universal Ω

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

$\Omega \setminus A =: \bar{A} = A^c$ "A complementar"

$\Omega \setminus A = \{4, 5, 6\}$

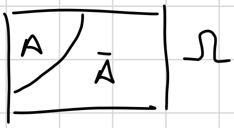
Exercicios:

1: Seja $A \subset \Omega$. Mostre que:

a) $A \cap \bar{A} = \emptyset$

(Por absurdo) Suponhamos que existe $x \in A \cap \bar{A}$. Por definição de $\cap$, $x \in A$ e $x \in \bar{A}$, isto é, $x \in A$ e $x \notin A$, o que é absurdo.
Assim, não existe x que esteja em $A \cap \bar{A}$. Logo $A \cap \bar{A} = \emptyset$

b) $A \cup \bar{A} = \Omega$



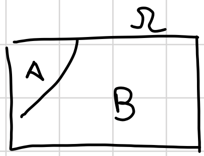
$A \cup \bar{A} = \Omega$

(=) $A \cup \bar{A} \subset \Omega$; $\Omega \subset A \cup \bar{A}$

$A \cup \bar{A} = \Omega$? $A \cup \bar{A}$ é um conjunto, e Ω por definição, contém todos os conjuntos. Em particular contém $A \cup \bar{A}$.

$x \in \Omega \subset A \cup \bar{A}$? Seja $x \in \Omega$ temos que $x \in A$ ou $x \notin A$, isto é, $x \in A$ ou $x \in \bar{A}$
logo $x \in A \cup \bar{A}$

2. Sejam $A, B \subset \Omega$. Mostre que se A e B são tais que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$ então $A = \bar{B}$ e $B = \bar{A}$



Vemos que $A = \bar{B}$

→ $A \subset \bar{B}$??? Sejam $x \in A$. Como $A \cap B = \emptyset$ x não pode estar em B. (Pois se $x \in B$ teríamos $x \in A \cap B$ logo $A \cap B \neq \emptyset$, o que é falso). Assim $x \in \bar{B}$

→ $\bar{B} \subset A$??? Seja $x \in \bar{B}$. Como $\Omega = A \cup B$ e $x \notin B$, temos que ter $x \in A$.

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A = \bar{B}$$
$$A \cup \bar{A} = \Omega \quad A \cup B = \Omega \qquad B = \bar{A}$$

3- Seja $A \subset \Omega$. Mostre que $A = \overline{\overline{A}}$

Escolhendo B como sendo $\overline{A}$ e usando o exercício 2 e as conclusões do ex 2, neste caso são 2:

$$A = \overline{B} = \overline{\overline{A}} \; ; \; B = \overline{A} \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

Proposição: (Leis de DeMorgan) Sejam $X, Y \subset \Omega$. Tem-se

a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$

b) $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$

a) $A = X \cup Y \; ; \; B = \overline{X} \cap \overline{Y}$

$A \cap B = \dots = \emptyset \; (???)$ $\left\{ \begin{array}{l} A = \overline{B} \leftarrow \quad \overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{X \cup Y} \\ B = \overline{A} \end{array} \right.$

$A \cup B = \dots = \Omega \; (???)$

$$\begin{aligned}
A \cap B &= (X \cup Y) \cap (\overline{X} \cap \overline{Y}) \\
&= [X \cap (\overline{X} \cap \overline{Y})] \cup [Y \cap (\overline{X} \cap \overline{Y})] \\
&= [(X \cap \overline{X}) \cap \overline{Y}] \cup [Y \cap (\overline{Y} \cap \overline{X})] \\
&= [\emptyset \cap \overline{Y}] \cup [(Y \cap \overline{Y}) \cap \overline{X}] \\
&= \emptyset \cup [\emptyset \cap \overline{X}] \\
&= \emptyset \cup \emptyset \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \cup B &= (X \cup Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y}) \\
&= ((X \cup Y) \cup \overline{X}) \cap ((X \cup Y) \cup \overline{Y}) \\
&= (Y \cup (X \cup \overline{X})) \cap (X \cup (Y \cup \overline{Y})) \\
&= (Y \cup \Omega) \cap (X \cup \Omega) \\
&= \Omega \cap \Omega \\
&= \Omega
\end{aligned}$$