## Exemplo

Seja $A = \{0,1\}$ $\quad R = \{(0,1)\}$

Determine $\Delta(R)$, $r(R)$, $t(R)$

$$r(R) = R \cup \Delta_A = \{(0,1)\} \cup \{(0,0),(1,1)\} = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$$

$$\Delta(R) = R \cup R^{-1} = \{(0,1)\} \cup \{(1,0)\} = \{(0,1),(1,0)\}$$

$$t(R) = \bigcup_{k=1}^{2} = R \cup (R \circ R) = R \cup \emptyset = R = \{(0,1)\}$$

$\#A = 2$

## Relações de Ordem

**Definição**: Seja $A$ um conjunto e $R$ uma relação definida em $A$. Dizemos que $R$ é **anti-simétrica** se para cada $a, b \in A$ com $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$ temos $a = b$.

**Definição**: Seja $A$ um conjunto e $R$ uma relação definida em $A$. Dizemos que $R$ é uma relação de **ordem parcial** em $A$ se $R$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva

$$(a,b) \in R \qquad (a,b) \in \leqslant \qquad a \leqslant b$$

**Definição**: Um conjunto $A$ munido com uma relação de ordem parcial $\leqslant$, $(A, \leqslant)$ diz-se um **conjunto parcialmente ordenado**, **C.P.O**.

## Exercícios:

1. Seja $\Omega$ um conjunto não vazio. Em $P(\Omega)$ definimos $\leqslant$ por:

   $A \leqslant B$, se, e só se, $A \subset B$

   Mostre que $(P(\Omega), \leqslant)$ é um C.P.O.

$\Omega = \{0,1\}$

$P(\Omega) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

$\{0\} \leq \{0,1\}$ pois $\{0\} \subset \{0,1\}$

$\leq$ é reflexiva? $(\forall x \in X : xRx?)$

Seja $A \in P(\Omega)$. Será que $A \leq A$? Sim, pois por definição de "contido" $A \subset A$.

$\leq$ é anti-simétrico? $(\forall x,y \in X : xRy$ e $yRx$? Será que $x=y$?$)$

Sejam $A,B \in P(\Omega)$ : $A \leq B$ e $B \leq A$ (Será que $A=B$?)

$A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$; $B \leq A \Leftrightarrow B \subset A$. Assim, por hipotese temos $A \subset B$ e $B \subset A$. Por definição de igualdade do conjunto temos $A = B$

$\leq$ é transitiva?

Sejam $A,B,C \in P(\Omega)$ com $A \leq B$ e $B \leq C$. Isto significa $A \subset B$ e $B \subset C$. Logo $A \subset C$, isto é, $A \leq C$

Assim $\leq$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, logo $\leq$ é uma relação de ordem parcial.
Assim $(P(\Omega), \leq)$ é um C.P.O.

**Definição**: Sejam $(A, \leq)$ um C.P.O e $a,b \in A$. Os elementos $a,b$ dizem-se **comparáveis** se **$a \leq b$ ou $b \leq a$**. Por outro lado se $a$ e $b$ são tais que **nem $a \leq b$ e nem $b \leq a$** então dizem-se **incomparáveis**.

**Exemplo**:

$(P(\{0,1\}), \leq)$ Temos $\{0\}, \{0,1\}$ são comparáveis pois

$\{0\} \leq \{0,1\}$ ou $\{0,1\} \leq \{0\}$

$\Leftrightarrow$

$\{0\} \subset \{0,1\}$ ✓ $\quad$ $\{0,1\} \subset \{0\}$ ✗

$\{0\}$ e $\{1\}$ são comparáveis, pois $\{0\} \nleq \{1\}$ e $\{1\} \nleq \{0\}$

**Definição:** Seja $(A, \leq)$ um C.P.O. . Se quaisquer dois elementos de $A$ são comparáveis $(A, \leq)$ diz-se uma cadeia ou um conjunto totalmente ordenado. (e a ordem diz-se total)

$(\mathcal{P}(\{0,1\}), \leq)$ não é uma cadeia

$(\mathbb{R}, \leq)$ onde $\leq$ é a ordem usual, é uma cadeia

Em $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ definimos uma relação $R$ por $(x,y) \in R$ se, e só se, $x$ divide $y$, isto é, $\frac{y}{x} \in \mathbb{N}$

Notação: $x|y$ "$x$ divide $y$"

$3|15 \Leftrightarrow \frac{15}{3} = 5, \; 5 \in \mathbb{N}$

$3 \nmid 4 \Leftrightarrow \frac{4}{3} = 1{,}3(3) \notin \mathbb{N}$

**Proposição:** $(\mathbb{N}, I)$ é um C.P.O

"$I$" é reflexiva? $(\forall x \in X: xRx?)$

Seja $x \in \mathbb{N}$. Será que $x|x$? Sim pois $\frac{x}{x} = 1$ e $1 \in \mathbb{N}$

"$I$" é anti-simétrica? $(\forall x,y \in X: xRy$ e $yRx$. Será que $x=y$?$)$

Sejam $x, y \in \mathbb{N}$: $x|y$ e $y|x$ (Será que $x=y$?)

$x|y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = m, \; m \in \mathbb{N}$

$y|x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = m', \; m' \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{m'}, \; m' \in \mathbb{N}$

$\downarrow$

$\frac{y}{x} = m = \frac{1}{m'} \Rightarrow m = \frac{1}{m'}$

$\Rightarrow mm' = 1, \; m, m' \in \mathbb{N}$

Assim, isso obriga a que $m=1$, $m'=1$, ou seja $\frac{y}{x}=1 \Leftrightarrow y=x$

"I" é transitiva? ($\forall x,y \in X: xRy, yRz \Rightarrow xRz$?)

Sejam $x,y,z \in \mathbb{N}: x|y$ e $y|z$. (Será que $x|z$?)

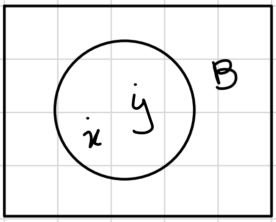
$x|y \Leftrightarrow \frac{y}{x}=m$, $m \in \mathbb{N}$

$y|z \Leftrightarrow \frac{z}{y}=m'$; $m' \in \mathbb{N}$

$\frac{z}{x} \Leftrightarrow \frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}=m\cdot m'$, $m\cdot m' \in \mathbb{N}$, resulta que $x|z$

**Definição:** Sejam $(A, \leq_A)$ um C.P.O e $B \subset A$. Em $B$ podemos considerar a ordem induzida pela ordem de $A$, $\leq_B$ através de:
Dados $x,y \in B$ dizemos que $x_B \leq y$ se, e só se, $x \leq_A y$.

**Proposição:** Sejam $(A, \leq_A)$ um C.P.O e $B \subset A$. $(B, \leq_B)$ é um C.P.O




$(A, \leq_A)$

$\leq_B$ é reflexiva? $\leq_B$ é anti-simétrica? → TPC

$\leq_B$ é transitiva?

Sejam $a,b,c \in B$ com $a \leq_B b$ e $b \leq_B c$. Será que $a \leq_B c$?

Temos $a \leq_B b \Leftrightarrow a \leq_A b$; $b \leq_B c \Leftrightarrow b \leq_A c$
Assim, $a \leq_A b$ e $b \leq_A c$. Mas $\leq_A$ é transitiva logo $a \leq_A c$
Mas, por definição de $\leq_B$, isto significa que $a \leq_B c$.

**Exercícios:**

2- Seja $B=\{2,3,4,6,8,12\}$
Mostre que $(B, I)$ é um C.P.O

$(\mathbb{N}, I)$ é um C.P.O. $B \subset \mathbb{N}$ e a ordem considerada em $B$ é a ordem "I" que é a mesma ordem $(\mathbb{N}, I)$

Pela proposição (B, I) é um C.P.O

3. Quais os pares de (B, I)? Como se representam gráficamente (B, I)?

$B = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

$4 | 12 \Leftrightarrow \frac{12}{4} = 3$, $3 \in \mathbb{N}$ $(4|12) \in \mathbb{N}$

$2|2$ $2|4$ $2|6$ $2|8$ $2|12$

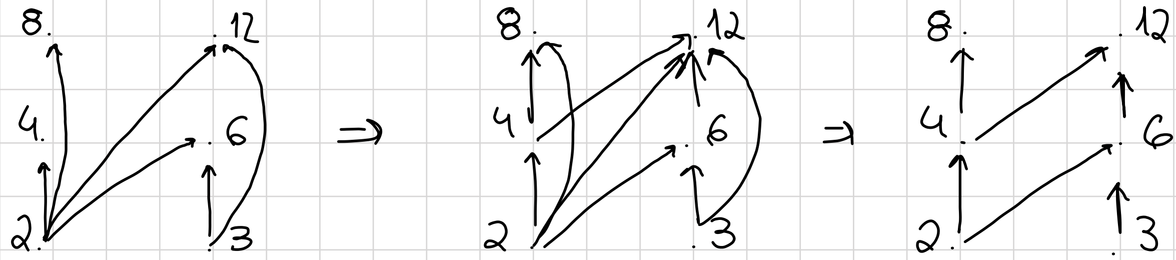
$3|3$ $3|6$ $3|12$

$4|4$ $4|8$ $4|12$

$6|6$ $6|12$

$8|8$

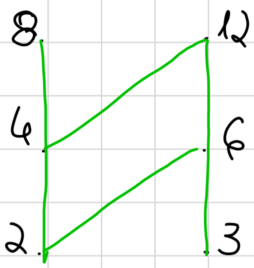
$12|12$




(excluindo as relações de reflexividade)

(excluindo as relações de transitividade)

Diagrama de Hasse do C.P.O. (B, I)



4. Diagrama de Hasse de $(A, \mid)$

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $2 \mid 2$ | $\boxed{2 \mid 4}$ | $\boxed{2 \mid 10}$ | $\underset{T}{\underline{2 \mid 12}}$ | $\underset{T}{\underline{2 \mid 20}}$ |
| $4 \mid 4$ | $\boxed{4 \mid 12}$ | $\boxed{4 \mid 20}$ | | |
| $5 \mid 5$ | $\boxed{5 \mid 10}$ | $\underset{T}{\underline{5 \mid 20}}$ | $\boxed{5 \mid 25}$ | |
| $10 \mid 10$ | $\boxed{10 \mid 20}$ | | | |
| $12 \mid 12$ | | | | |
| $20 \mid 20$ | | | | |
| $25 \mid 25$ | | | | |