Exercício :

1. Se $A \Delta B = B$ o que se pode dizer sobre A e B?

$$\text{Se } A \Delta B = B \Rightarrow A \Delta (A \Delta B) = A \Delta B$$
$$\Rightarrow (A \Delta A) \Delta B = A \Delta B$$
$$\Rightarrow \emptyset \Delta B = A \Delta B \qquad (\text{Inconclusivo})$$

$$\text{Se } (A \Delta B) \Delta B = B \Delta B \Rightarrow A \Delta (B \Delta B) = \emptyset$$
$$\Rightarrow A \Delta \emptyset = \emptyset$$
$$\Rightarrow A = \emptyset$$

Como não há restrições para B, B é qualquer

2. É verdade que $A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$?

$\boxed{A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \ \checkmark}$

Em $\mathbb{Z}$: $\Delta \longrightarrow +$; $\cap \longrightarrow \cdot$

$$a + (b \cdot c) \overset{!}{=} (a+b) \cdot (a+c)$$
$$\overset{!}{=} a^2 + ac + ba + bc$$

↳ FALSO

Seja $A = B$ $\quad L.H.S = A \Delta (A \cap C) = [A \setminus (A \cap C)] \cup [(A \cap C) \setminus A]$

$$= [A \cap (\overline{A \cap C})] \cup \underbrace{[\bar{A} \cap C \cap \bar{A}]}_{\emptyset}$$
$$= A \cap (\bar{A} \cup \bar{C})$$
$$= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{C})$$
$$= \emptyset \cup (A \cap \bar{C})$$
$$= A \setminus C$$

$$R.H.S = (A \Delta A) \cap (A \Delta C)$$
$$= \emptyset \cap (A \Delta C)$$

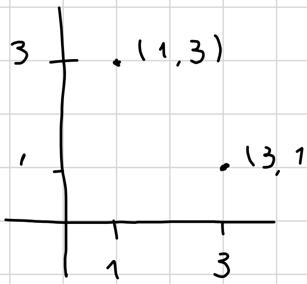
Escolhendo $A \neq \emptyset$, $C \neq A$ e $C \subset A$

obtemos

$$A \setminus C = L.H.S \neq R.H.S = \emptyset$$

Assim, para esta situação $L.H.S \neq R.H.S$ logo a suposta identidade é falsa

Relações



$(1,3) \neq (3,1)$

$\{1,3\} = \{3,1\}$

Definição: Sejam A, B conjuntos. O conjunto de todos os pares ordenados (a,b) com $a \in A$ e $b \in B$ diz-se o produto cartesiano de A por B representa-se por $A \times B$

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

No caso $B = A$ escrevemos $A \times A = A^2$

Exemplo:

$A = \{0,1\} \qquad B = \{a,b,c\}$

$A \times B = \{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}$

$B \times A = \{(a,0),(b,0),(c,0),(a,1),(b,1),(c,1)\}$

Definição: Sejam A, B conjuntos
chamamos RELAÇÃO BINÁRIA DE A PARA B a qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Notação: R

Quando $B = A$, dizemos que R é uma relação definida em A.

Exemplo:

$A\ \{0,1\} \quad B = \{a,b,c\}$

$A \times B = \dots$

$R_1 = \{(0,a),(0,b),(0,c)\}$. Temos $R_1 \subset A \times B$ logo R_1 é uma relação de A para B

$R_2 = \{(1,b)\}$ $R_2 \subset B \times A$ logo R_2 é uma relação de A para B

$R_3 = \{(1,f)\}$ $R_3 \not\subset B \times A$ logo R_3 não é uma relação de A para B

$(0,b) \in R_1 \Leftrightarrow 0 R_1 b$ (0 está em relação com b através de R_1)

$(1,b) \notin R_1 \Leftrightarrow 1 \not R_1 b$ (1 não se relaciona com b através de R_1)

$R_1 \cup R_2 = \{(0,a),(0,b),(0,c),(1,b)\}$

$(A \times B) \setminus R_1 = \overline{R_1} = \{(1,a),(1,b),(1,c)\}$

Definição: Sejam A, B conjuntos. Se R é uma relação binária de A para B definimos a relação inversa como o subconjunto $\{(b,a) : (a,b) \in R\}$

Representamos por R^{-1} e é uma relação de B para A.

Exemplo:

$R_1^{-1} = \{(a,0),(b,0),(c,0)\}$

Definição: Sejam A, B, C conjuntos.
Se R é uma relação de A para B e se S é uma relação de B para C, definimos a composição de R com S como a relação de A para C dada por:

$$\{(a,c) \in A \times C : \text{existe um } x \in B : (a,x) \in R \text{ e } (x,c) \in C\}$$

Representamos por $S \circ R$ e lê-se "S após R"

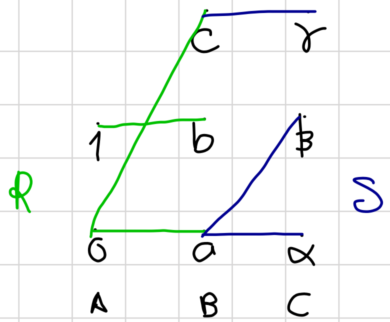
Exemplo:

$A = \{0,1\}$ $B\{a,b,c\}$ $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

Sejam $R = \{(0,a),(0,c),(1,b)\}$ e $S = \{(a,\alpha),(a,\beta),(c,\gamma)\}$

$(\underbrace{R \subset A \times B}_{\text{relação de A para B}}, \underbrace{S \subset B \times C}_{\text{relação de B para C}}$

$S \circ R$?



$(0,a)(a,\alpha) \Rightarrow (0,\alpha) \in S \circ R$
$\in R \quad \in S$

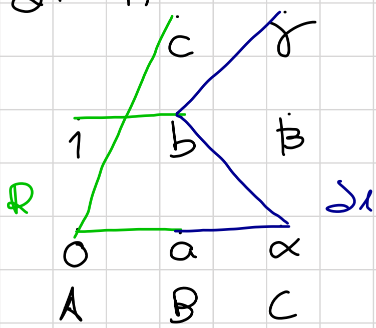
$(0,a)(a,\beta) \Rightarrow (0,\beta) \in S \circ R$

$S \circ R = \{(0,\alpha),(0,\beta),(0,\gamma)\}$ $\quad (0,c)(c,\gamma) \Rightarrow (0,\gamma) \in S \circ R$

Exemplo:

(anterior)
Sejam A, B, C, R iguais. Seja $S_1 = \{(a,\alpha),(b,\alpha),(b,\gamma)\}$

$S_1 \circ R$?



$(0,a)(a,\alpha) \Rightarrow (0,\alpha) \in S_1 \circ R$

$(1,b)(b,\beta) \Rightarrow (1,\beta) \notin S_1 \circ R$

$(1,b)(b,\gamma) \Rightarrow (1,\gamma) \in S_1 \circ R$

$(1,b)(b,\alpha) \Rightarrow (1,\alpha) \in S_1 \circ R$

$S_1 \circ R = \{(0,\alpha),(1,\alpha),(1,\beta),(1,\gamma)\}$

Propriedades das relações

Definição: Seja A um conjunto e R uma relação definida em A. Dizemos que R é:

→ REFLEXIVA se para cada $a \in A$ temos $(a,a) \in R$

→ SIMÉTRICA se para cada $a,b,c \in A$ com $(a,b) \in R$ temos $(b,a) \in R$

→ TRANSITIVA se para cada tripla $a,b,c \in A$ com $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$ temos $(a,c) \in R$

Exemplo:

Seja $A = \{0,1\}$ $A\times A = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$
Seja $R = \{(0,1),(1,0)\}$

R é reflexiva? É simétrica? É transitiva?

É reflexiva? (Seja $a\in A$. Será que $(a,a)\in R$?)

Temos $0\in A$. Será que $(0,0)\in R$? Não $(0,0)\notin R$ logo R não é reflexiva

É simetrica? (Seja $a,b\in A$ com $(a,b)\in R$. Será que $(b,a)\in R$??)

Temos $(0,1)\in R$. Quando trocamos a ordem obtemos $(1,0)$. Mas $(1,0)$ ainda pertence a R.
Temos $(1,0)\in R$. Quando trocamos a ordem obtemos $(0,1)$. Mas $(0,1)$ ainda pertence a R.

Assim, $\forall a,b\in A$ com $(a,b)\in R$. Temos também $(b,a)\in R$. Logo R é simétrica

É transitiva? (Sejam $a,b,c\in A$ com $(a,b)\in R$ e $(b,c)\in R$. Será que $(a,c)\in R$?)

Temos $(1,0)\in R$ e $(0,1)\in R$. Se R fosse transitiva $(1,1)$ teria de pertencer a R
Mas $(1,1)\notin R$ logo R não é transitiva

Exercício

$A = \{1,2,3\}$; $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,3)\}$

R é reflexiva? Simétrica? Transitiva?

R é reflexiva? Não pois $2\in A$ mas $(2,2)\notin R$

R é simétrica? Não pois $(2,3) \in R$ mas $(3,2) \notin R$

R é transitiva? Não pois $(2,1)(1,2) \in R$ mas $(2,2) \notin R$

Definição: Seja A um conjunto e R uma relação definida em A.
Dizemos que R é uma relação de EQUIVALÊNCIA em A se R é reflexiva, simétrica e transitiva

TPC: $A = \{0,1\}$ $R = \{(0,0),(1,1)\}$ É uma relação de equival?

Para ser uma relação de equivalência é preciso a relação ser transitiva, simétrica e reflexiva.

R é reflexiva? Sim porque $1 \in A$ e $(1,1) \in R$.

R é simétrica? Sim porque $(1,1) \in R$ e $(1,1) \in R$.

R é transitiva? Sim porque $(\underset{x}{0},\underset{y}{0}) \in R$ $(\underset{y}{0},\underset{z}{0})$. Logo $(\underset{x}{0},\underset{z}{0}) \in R$

Logo R não é uma relação de equivalência.