Nota: O grafo K_v tem $\binom{v}{2} = \frac{v(v-1)}{2}$ arestas

OBS.: Seja $\mathcal{G}$ o conjunto de todos os grafos simples com v vertices, fixos.
Dado $G \in \mathcal{G}$ temos:

a) $G \subseteq K_v$ e logo

$$|E(G)| \leq |E(K_v)| = \binom{v}{2}$$

b) Além disso, G é subgrafo gerador de K_v e fixados ε arestas existem

$\binom{\binom{v}{2}}{\varepsilon}$ grafos com ε arestas

c) Então, o conjunto $\mathcal{G}$ tem

$$\sum_{\varepsilon=0}^{\binom{v}{2}} \binom{\binom{v}{2}}{\varepsilon} = 2^{\binom{v}{2}} \text{ grafos}$$

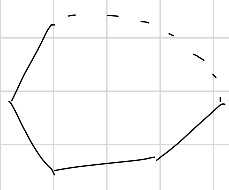
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Grafos regulares

Definição: dizemos que G é K-regular ou regular de grau K se todos os vertices tem grau K

Exemplo:

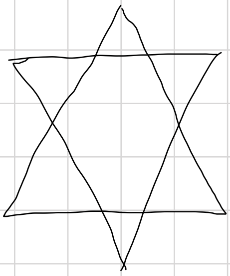
Os grafos C_n são 2-regular



Exemplo

O grafo K_v é $(v-1)$ regular

Exemplo



É um grafo 2-regular

Nota: Num grafo K-regular temos $\Delta(G) = \delta(G) = K$

Grafos Bipartidos e K-partidos

Definição: Dado um grafo G com $V(G) = X \dot{\cup} Y$ em que

$V(G) = X \cup Y$

$X \cap Y = \emptyset$

Todas as arestas de G têm um vértice extremo em X e o outro em Y, dizemos que é bipartido

Exemplo

C_{2n} são bipartidos.

Teorema: G é grafo bipartido se e só se não existem circuitos de comprimento ímpar

Prova:

$\Rightarrow$ Se G é bipartido todas as arestas são um vértice extremo em X e outro em Y

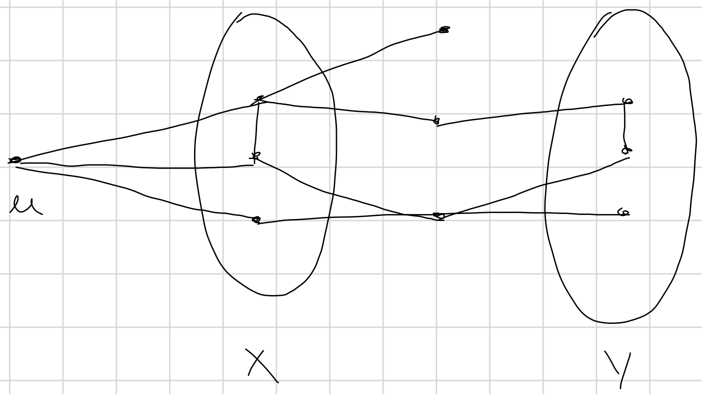
Vamos construir um circuito e tomamos $u \in X$ para vértice inicial

Quando tomo uma aresta, ficamos em Y, mas como quero um circuito tenho de X, para isso tenho de ou seja, temos sempre um número par de arestas o circuito tem comprimento par.

$\Leftarrow$ Supomos que não existem circuitos de comprimento ímpar

Fixemos $u \in V(G)$. Consideremos

$$X = \{v \in V(G) : dist(u, v) \text{ é ímpar}\}$$



Não existem arestas com ambos os vértices extremos de X

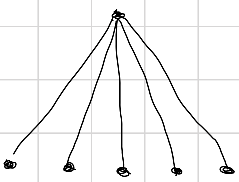
Se existissem, teríamos um circuito de comprimento $dist(u, v_1) + 1 + dist(u, v_2)$ que é ímpar. ABSURDO!

Seja

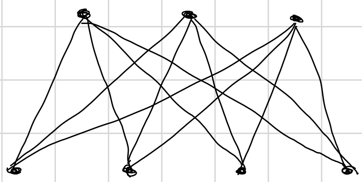
Definição: Se G é grafo bipartido e cada vértice de X é adjacente a todos os vértices de Y, dizemos que G é grafo bipartido completo. Se $|X| = m$ e $|Y| = n$, A

Exemplo

$K_{1,5}$

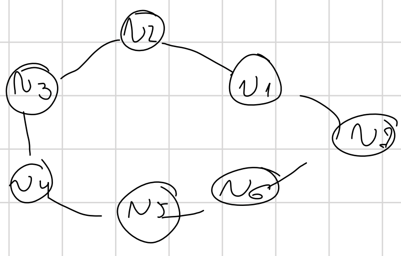


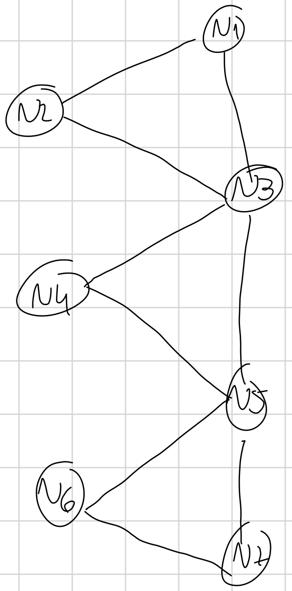
$K_{3,4}$



Definição: Seja G um grafo com $V(G) = V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup \dots \dot\cup V_k$ em que todas as arestas de G têm um vértice extremo em V_i e outro em V_j com $i \neq j$, dizemos que G é um grafo k-partido.
Se além disso, cada vértice de V_i é adjacente a todos os vértices de V_j com $j \neq i$, dizemos que G é grafo k-partido completo. Se $|V_i| = \sigma_i$, então indicamos este grafo por $K_{\sigma}, K_{\sigma_1}, \dots K$

Exemplo





$V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$
$V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$
$V_3 = \{v_7\}$

$V_1 = \{v_1\}$
$V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$
$V_3 = \{v_3, v_5, v_7\}$

Grafos Conexos

Def.: Dado G um grafo $u, v \in V(G)$. Dizemos que u e v são vértices conexos se existe um caminho entre u e v.

Se $V \subseteq V(G)$ é um conjunto maximal de vértices conexos, ou seja, todos os vértices de V são conexos e dado $u \notin V$ ele não é conexo a nenhum vértice de V, definimos componente conexa como o grafo induzido de

OBS.: Se $cc(G) = k$, $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$ componentes conexas, $V(G) = V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup \cdots \dot\cup V_k$ e $E(G) = E(G[V_1]) \dot\cup E(G[V_2]) \dot\cup \cdots \dot\cup E(G[V_k])$

Lema: G conexo e $e \in E(G)$ então $cc(G - e) \leq 2$

Lema: G grafo e $e \in E(G)$ então $cc(G) \leq cc(G-e) \leq cc(G) + 1$

Teorema: Se G é grafo simples com υ vértices e ε arestas então

$$\upsilon - cc(G) \leq \varepsilon \leq \binom{\upsilon - cc(G) + 1}{2}$$