$f: A \to B$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ é injetiva} \\ f \text{ é sobrejetiva} \end{array}\right\}$ f é bijetiva

C.S.B $\quad A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ é injetiva} \\ g \text{ é injetiva} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ bijeção entre A e B

Exemplo

Mostre que $f: \mathbb{R} \to]0,1[$ dado por $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$ é injetiva
Justifique que existe uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $]0,1[$

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-x_1}} = \frac{1}{1+e^{-x_2}}$

$\Leftrightarrow \cancel{1}+e^{-x_1} = \cancel{1}+e^{-x_2}$

$\Leftrightarrow e^{-x_1} = e^{-x_2}$

$\Leftrightarrow \ln(e^{-x_1}) = \ln(e^{-x_2})$

$\Leftrightarrow -x_1 = -x_2$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ logo, é injetiva

$inc_{]0,1[} :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

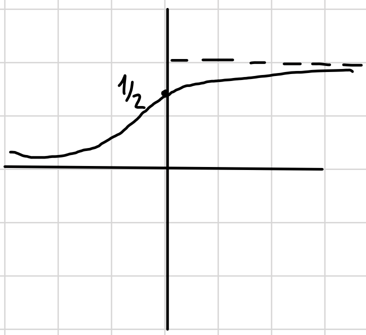
$x \longrightarrow inc_{]0,1[}(x) = x$

Como $]0,1[\subset \mathbb{R}$ $inc_{]0,1[}$ é injetiva

Assim, temos duas funções injetivas $f: \mathbb{R} \to]0,1[$, $inc_{]0,1[} :]0,1[\to \mathbb{R}$

Pelo Teorema C.S.B existe uma bijeção entre os dois conjuntos $\mathbb{R}$ e $]0,1[$

$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ $\quad f(0) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$ $\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 0$



Definição: Se existir uma bijeção entre dois conjuntos dizemos que os conjuntos têm a mesma cardinalidade ou que são equipotentes

Exemplo

$\mathbb{R}$ e $]0,1[$ são equipotentes

Definição: Quando X é equipotente a $\mathbb{N}$ dizemos que x é enumerável
$\neq$
inumerável

Exemplo

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ são equipotentes

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ m &\longrightarrow f(m) = m-1 \end{aligned}$$ $\longleftarrow$ é uma bijeção

$f(m) = f(m')$
$\Leftrightarrow m - \cancel{1} = m' - \cancel{1}$
$\Leftrightarrow m = m'$ (é injetiva)

Seja $m \in \mathbb{N}_0$. $\exists\, m \in \mathbb{N}\, (m = m+1): f(m) = f(m+1) = m$ (é sobrejetiva)

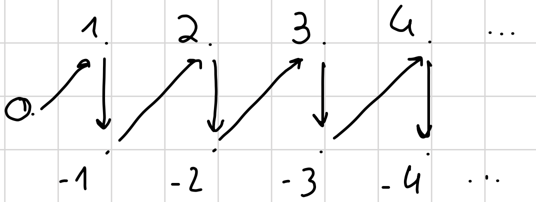
$\therefore$ é bijetiva

($\mathbb{N}_0$ é enumerável) $\Leftrightarrow$ ($\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_0$ equivalentes) $\Leftrightarrow$ (Há uma ligação entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_0$)

Às vezes apresenta-se a bijeção entre $\mathbb{N}$ e X listando todos os elementos de X, e apresentando uma enumeração desses elementos

Exemplo

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são equipotentes



Enumeramos $\mathbb{Z}$. Assim $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são equipotentes

$$f(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & m \text{ é par} \\ \dfrac{-(m-1)}{2} & m \text{ é ímpar} \end{cases}$$ ← a função obtida

Exemplos

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ são equipotentes

	1	2	3	4	5
1	$1/1$	$2/1$	$3/1$	$4/1$	$5/1$
2	$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$	$5/2$
3	$1/3$	$2/3$	$3/3$	$4/3$	$5/3$
4	$1/4$	$2/4$	$3/4$	$4/4$	$5/4$
5	$1/5$	$2/5$	$3/5$	$4/5$	$5/5$

$\mathbb{N}$ 1 2 3 4 5

$f \downarrow$

$\mathbb{Q}^+$

Temos uma enumeração de todos os racionais positivos

2º $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}^-$ são equipotentes

temos

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{Q}^-$	$-\frac{1}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{1}$	$-\frac{4}{1}$	$-\frac{3}{2}$	

g é uma enumeração dos racionais negativos

3º $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ são equipotentes

$$\begin{array}{ccccccccc} & & f(1) & & f(2) & & f(3) & & f(4) \\ 0 & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ & & g(1) & & g(2) & & g(3) & & g(4) \end{array}$$

Exemplo

$\mathbb{R}$ é não enumerável

1° $]0,1[$ não é enumerável

Assumindo que $]0,1[$ é enumerável. Se $]0,1[$ é enumerável, conseguimos listar todos os elementos de $]0,1[$. Temos um primeiro elemento x_1, um segundo x_2

$x_1 = 0, x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots$

$x_2 = 0, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots$

$\vdots$

Seja $y \in]0.1[$ dado por $y = 0, y_1, y_2, y_3, \dots$

Definimos y_1 como $y_1 \neq x_{11}$
Definimos y_2 como $y_2 \neq x_{22}$
Definimos y_m como $y_m \neq x_{mm}$

Por construção y não está na lista de todos os elementos de $]0,1[$.
Mas $y \in]0,1[$. Logo a lista não contém todos os números: Não é uma enumeração de $]0,1[$. Assim $]0,1[$ não é enumerável

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\nexists \text{ bijeção}"] \arrow[rr, bend right, "\times \nexists \text{ bijeção}"'] &]0,1[\arrow[r, "\exists \text{ bijeção}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}$ não está em bijeção com $\mathbb{N}$
$\mathbb{R}$ não é enumerável

$$\#(\mathbb{N}) < \#(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \#(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$$

Indução Matemática*

Não exemplo: Será que o polinómio $f(m) = m^2 - m + 41$ dá sempre primo para cada m?

$f(1) = 41$ é primo
$f(2) = 43$ ✓
$f(3) = 47$ ✓
$f(4) = 61$ ✓
⋮
$f(41) = 41 \times 41$ não é primo

* Permite estabelecer a veracidade de uma proposição $P(m)$ que depende de $m \in \mathbb{N}$
Consiste em dois passos:

Passo básico: Verificar a veracidade de $P(m)$ para o primeiro elemento m_0. (Em geral $m_0 = 1$).

Passo indutivo: Admitindo que $P(K)$ é verdade, mostrar que $P(K+1)$ também é verdade, isto é, $P(K) \Rightarrow P(K+1)$

Demonstrando estes dois passos conseguimos provar que $P(m)$ é verdade $\forall\, m \geq m_0$

Exemplo

É verdade que $1 + 2 + \_\_\_\_ + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$?

Passo básico:

P(1) é verdade? $L.H.S = 1$ $R.H.S = \frac{1+(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Assim $L.H.S = 1 = R.H.S$ e P(1) é verdade

Passo indutivo

Admitindo que P(K) é verdade, isto é, $1+2+ \_\_\_ + K = \frac{K(K+1)}{2}$

Será que P(K+1) é verdade? $1+2+ \_\_\_ K+1 = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$

$$1+2+ \_\_\_ K+1 = 1+2+ \_\_\_ K + K+1$$
$$= \frac{K(K+1)}{2} + K + K +$$
$$= K+1\left(\frac{K}{2}+1\right)$$
$$= (K+1)\left(\frac{K+2}{2}\right)$$

Assim P(K+1) é verdade. Logo Pn é verdade $\forall n \geq 1$