Combinatória

Princípio da Multiplicação: Se para realizar um procedimento tendo de fazer K tarefas $T_1, T_2, \dots, T_K$ e a tarefa T_i pode ser realizada de m_i formas diferentes então, o procedimento pode ser realizado de $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_K$ modos diferentes

Exemplo

Sejam M e N conjuntos com m e n elementos respetivamente, quantas aplicações $f: M \to N$ existem?

O domínio de f é igual ao conjunto de partida
Sejam $x_1, x_2, \dots, x_m$ os elementos de M.

$$f(x_1) = \underset{\text{opções}}{n} \qquad f(x_2) = n \qquad f(x_3) = n \quad \dots \quad f(x_m) = n$$

Então existem $n \times n \times \dots n = n^m$ aplicações $f: M \to N$

Princípio da soma: Se um procedimento pode ser realizado de n_1 formas ou n_2 formas, em que não há repetição, então o procedimento pode ser feito de $n_1 + n_2$ formas

Exemplo

Quantas matrículas podiam existir até março /2020?

$$LL - NN - NN + NN - NN - LL + NN - LL - NN$$

$$15\,870\,000$$

Princípio da Inclusão - Exclusão: Se um procedimento pode ser realizado de n formas ou n_2 formas em que n_3 delas se repetem, então existem $n_1 + n_2 - n_3$ formas de realizar o procedimento

Exemplo

Quantos multiplos de 6 ou de 7 menores ou iguais a 100, existem?

Seja A o conjunto dos multiplos de $6 \leq 100$
Seja A o conjunto dos multiplos de $7 \leq 100$

$\#A = 16 \quad \#B = 14 \qquad \#(A \cap B) = \#\{42, 84\} = 2$

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 16 + 14 - 2 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Exemplo

50 alunos inscritos
- → 23 inscritos a matemática
- → 42 inscritos a física

$|mat| = 23 \quad |fis| = 42 \qquad |mat \cup fis| = 50$

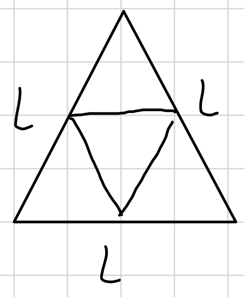
então $|mat \cup fis| = |mat| + |fis| - |mat \cap fis|$

$(=) \; |mat \cap fis| = 23 + 42 - 50$
$= 15$

Princípio da gaiola dos Pombos: Se tivermos $n+1$ pombos em n gaiolas, então pelo menos uma das gaiolas tem dois ou mais pombos

Exemplo

Considere um triângulo equilatero de lado 2. Se colocarmos 5 pontos no triângulo, prove que existem dois pontos cuja distância é $\leq \frac{L}{2}$



Dividindo o triângulo em quatro triangulos equilateros de lado $\frac{L}{2}$
Quando coloco 5 pontos, existem pelo menos 2 no mesmo triângulo, logo a sua distância é $\leq \frac{L}{2}$

Exemplo

Dados 4 inteiros, existem 2 cuja diferença é multiplo de 3

2 14 37 48

O resto só pode ser: 0, 1, 2 (gaiolas)
Logo temos 4 inteiros (pombos), pelo principio existem n_1 e n_2 com o mesmo resto, sejam

$$n_1 = 3K_1 + r \qquad n_2 = 3K_2 + r$$

Logo
$$n_1 - n_2 = 3K_1 + \cancel{r} - 3K_2 - \cancel{r}$$
$$= 3(K_1 - K_2) \text{ é multiplo}$$

Arranjos, Permutações e Combinações

Definição: Chamamos arranjo de n elementos com comprimento k, a uma sequência de k elementos retirados de U, sem repetição.
O número de arranjos de n elementos com comprimento k é dado por A^n_k.

$$\underbrace{n, n-1, n-2, \dots, n-k+1}_{k \text{ elementos}} \qquad A^n_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemplo

Saco com bolas numeradas de 1 a 7. Quantos números de 4 digitos podemos retirar com todos os algarismos diferentes

$\underline{7} \times \underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} \qquad A^7_4 = 840$

Definição: Chamamos permutação de n elementos a um arranjo de n elementos com comprimento n. O número de permutações de n elementos é indicado por P_n

$$\underbrace{n, n-1, \dots, 3, 2, 1}_{n \text{ posições}}$$

$$P_n = n!$$

Exemplo

Quatro pessoas vão fazer o pagamento numa fila. Quantas filas podemos fazer

$$P_n = 4! = 24$$

Definição: Chamamos combinações de n elementos tomados K a K a um subconjunto de K elementos retirados em U. O número de combinações de n elementos tomados K a K é indicado por $\binom{n}{k}$ ou C^n_k

Proposição: O número de arranjos de n elementos com comprimento K é igual ao produto do número de permutações de K elementos pelo número de n elementos tomados K a K, ou seja, $A^n_k = P_k \times C^n_k$

Exemplo

Bananas, maçãs, peras, morangos, Kiwi, manga, uva pêssego
Quantas saladas de frutas podemos fazer com 3 frutas diferentes?

$$C^8_3 = \frac{8!}{3!5!} = 56$$