# Funções - Definições

Sejam $x$ e $y$ conjuntos e $f$ uma relação de $x$ para $y$. Dizemos que $f$ é uma função de $x$ para $y$ se para qualquer $x \in X$ existe no máximo um elemento $y \in Y$ tal que $(x,y) \in f$

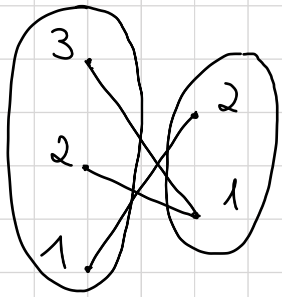
$(x,y) \in f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow$ "$y$ é a imagem de $x$ por $f$"

$x$ - conjunto de partida
$y$ - conjunto de chegada

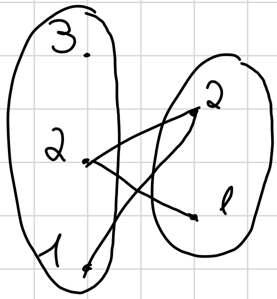
## Exemplo

$x = \{1, 2, 3\}$ $y = \{1, 2\}$

$R_1 = \{(1,2); (2,1); (3,1)\}$ é função $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$




$R_2 = \{(1,2), (2,1), (2,2)\}$ não é função $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$




$R_3 = \{(3,1)\}$ é função $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & 1 \end{pmatrix}$

**Domínio de $f$**: elementos de $X$ que têm alguma imagem em $Y$

$Df = \{x \in X : (x,y) \in f$ para algum $y \in Y\}$
$= \{x \in X : y = f(x)$ para algum $y \in Y$

**Contradomínio de $f$**: elementos de $Y$ que são a imagem de algum elemento de $X$

$CDf = \{y \in Y : (x,y) \in f$ para algum $x \in X\}$

$= \{ y \in Y : y = f(x)$ para algum $x \in X \}$

Exemplo

$X = \{1,2,3\}$ $\quad Y = \{1,2\}$

$f: X \to Y$ $\quad f = \{(1,2), (3,2)\}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & - & 2 \end{pmatrix}$

$D_f = \{1, 3\} \subset X$

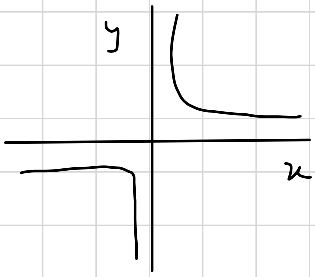
$CD_f = \{2\} \subset Y$

Exemplo

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

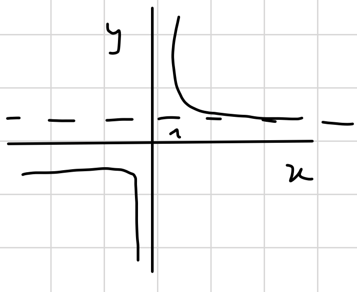
$f(x) = \frac{1}{x} + 1$ $\quad D_f, D'_f = ?$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = 0$




$\frac{1}{x} + 1$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\quad\quad\quad\;\; D'_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$




Definição: Seja $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Definimos:

- O conjunto imagem de A por f como $f(A) = \{ y \in Y : y = f(x)$ para algum $x \in A \subset Y \}$
- A imagem recíproca de B por f, ou imagem inversa de B por f como $f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \} \subset B$

## Exemplo:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ ; $f : X \to X \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$A = \{1,2\} \to f^{-1}(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{f(1), f(2)\} = \{1, 1\} = \{1\}$

$B = \{1,2\} \to f^{-1}(B) = \{f(x) : x \in B\} = \{x : f(x) \in \{1,2\}\} = \{1, 2, 4\}$

$B_1 = \{1\} \to f^{-1}(B_1) = \{x \in X : f(x) \in B_1\} = \{x \in X : f(x) \in \{1\}\} = \{1, 2\}$

## Exemplo

Sejam $f : X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$ ; $B_1, B_2 \subset Y$. Mostre que:

a) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

b) $f(A_1 \cap A_2) \supset f(A_1) \cap f(A_2)$ nem sempre é verdade

c) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

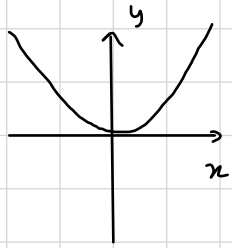
d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

e) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

a) Seja $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Por definição de imagem "direta" existe $x \in A_1 \cap A_2$ com $y = f(x)$. Assim, existe $x \in A_1$, com $y = f(x)$ e existe $x \in A_2$ com $y = f(x)$, ou seja $y \in f(A_1)$ e $y \in (A_2)$. Logo $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$

b)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ $\qquad A_1 = [0, 2]$, $A_2 = [-2, 0]$




$f(A_1) = f([0,2]) = [0, 4]$

Assim $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 4] \cap [0, 4] = [0, 4]$

Por outro lado $A_1 \cap A_2 = [0,2] \cap [-2,0] = \{0\}$

$f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{y : y = f(x) \text{ com } x \in \{0\}\} = \{f(0)\} = \{0\}$

Assim $f(A_1 \cap A_2) = \{0\} \not\supset [0,4] = f(A_1) \cap f(A_2)$

d)

$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Seja $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. Por definição $f(x) \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow f(x) \in B_1$ e $f(x) \in B_2 \Rightarrow$ (por definição de imagem recíproca) $x \in f^{-1}(B)$ e $x \in f^{-1}(B_2) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

**Definição**: Duas funções $f, g$ dizem-se iguais, $f = g$, se têm o mesmo conjunto de partida, chegada, o mesmo domínio e a mesma ação, isto é, associam o mesmo elemento a cada elemento do seu domínio

Exemplo

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto \sqrt{x} \qquad x \mapsto \sqrt{x}$$

$f \neq g$ pois $Df = Dg$; conjuntos de partida de $f$ e $g$ são iguais; ação é a mesma ($\sqrt{x}$); conjuntos de chegada diferentes

**Definição**: Sejam $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Definimos a composição de $f$ com $g$, $g$ após $f$, como a função $g \circ f : X \to Z$ dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ e com domínio $D_{g \circ f} = \{x \in X :$

Exemplo

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x+1 \qquad x \mapsto x^2$$

$g \circ f(x) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

$f \circ g(x) = 2x^2 + 1$

$f \circ f(x) = 2(2x+1)+1 = 4x+3$

$g \circ g(x) = (x^2)^2 = x^4$

1