

Nome: _____ Número: _____ ☐ Classificação: _____

O uso de telemóveis ou de outros aplicativos móveis durante a realização do Exame implica a **anulação** do mesmo. Deverá responder **no próprio enunciado** no espaço atribuído. Resolva primeiro na folha de rascunho e escreva no enunciado apenas os cálculos essenciais.

Parte I Nas questões seguintes, indique a opção correta, indicando a sua escolha com uma cruz no quadrado associado a essa opção. Uma resposta certa vale **1 valor**, uma resposta errada vale **-0,3 valores** e uma ausência de resposta vale **0 valores**.

1) A função $f(x) = \ln(\sin |x|)$ tem como domínio:

☐ $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}$ onde $k \in \mathbb{Z}$. ☐ $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ onde $k \in \mathbb{Z}$. ☐ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. ☐ nenhuma das anteriores.

2) A derivada de $f(x) = e^{\arctan x^2}$ em $x = 1$ é: ☐ 0. ☐ $e^{\frac{\pi}{4}}$. ☐ $e^{\frac{\pi}{3}}$. ☐ nenhuma das anteriores.

3) $\int \frac{5x-4}{x^2-x-2} dx$ é igual a:

☐ $\frac{\int 5x-4 dx}{\int x^2-x-2 dx}$. ☐ $5x \int \frac{1}{x^2-x-2} dx - 4 \int \frac{1}{x^2-x-2} dx$. ☐ $\int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{2}{x-2} dx$. ☐ nenhuma das anteriores.

4) A função inversa, no domínio adequado, da função $f(x) = \frac{\pi}{3} - 2 \arccos(x+1)$ é:

☐ $f^{-1}(x) = \cos(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}) - 1$. ☐ $f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{3} - 2 \arccos(x+1)}$. ☐ $f^{-1}(x) = \cos(\frac{\pi}{6} - \frac{y}{2}) - 1$. ☐ nenhuma das anteriores.

5) A derivada da função $f(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} dt$ é: ☐ $e^x - 1$. ☐ e^x . ☐ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. ☐ nenhuma das anteriores.

6) Uma solução de $\int_0^\eta 5x^4 dx = \frac{2}{e-1} \int_0^1 e^x dx$ é: ☐ $\eta = \sqrt{5}$. ☐ $\eta = 2$. ☐ $\eta = 1$. ☐ nenhuma das anteriores.

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cosh t dt}{\int_0^x 1 dt}$ é igual a: ☐ 1. ☐ $+\infty$. ☐ 0. ☐ nenhuma das anteriores.

8) O intervalo de convergência da série de potências dada por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$ é igual a:

☐ $] - 3, 3[$. ☐ $] - 3, 3[$. ☐ $[-3, 3[$. ☐ nenhuma das anteriores.

9) As séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ são:

☐ convergentes. ☐ divergentes. ☐ respetivamente convergente e divergente. ☐ respetivamente divergente e convergente.

10) Os integrais impróprios $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ são:

☐ convergentes. ☐ divergentes. ☐ respetivamente convergente e divergente. ☐ respetivamente divergente e convergente.

Parte II Nas seguintes afirmações deverá responder se são *Verdadeiras* ou *Falsas*. Seguidamente, indique de forma sucinta a razão da sua escolha. Uma resposta certa vale **1 valor** e uma resposta sem justificação correta vale **0 valores**.

1) A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^x$ no ponto $(1, e)$ é $y = ex$.

V ☐ F ☐

2) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que f' é contínua em todo o seu domínio. Se $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ (onde $a < b$), então existe necessariamente pelo menos um zero da derivada em $]a, b[$.

V ☐ F ☐

3) Dado $xy - x - 3y - 4 = 0$ temos que $\frac{dy}{dx} \neq \frac{1-y}{x-3}$. V ☐ F ☐

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} dx = e - 1$. V ☐ F ☐

5) O comprimento da curva que define o gráfico da função $f(x) = \cosh(x)$ entre os pontos de abscissas $x = 0$ e $x = 1$ é igual a $\sinh(1)$. (Dica: recorde as fórmulas $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ e $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$). V ☐ F ☐

6) A derivada de $h(x) = \int_0^x e^{t^3} dt$ em $x = \sqrt[3]{2}$ é igual a e^2 . V ☐ F ☐

Parte III	Nas duas questões que se seguem responda no espaço atribuído após o enunciado. Cada questão é classificada com 2 valores .
------------------	---

1) Calcule $\int_e^{e^2} x^2 \ln x dx$.

2) Determine justificando uma aproximação da série numérica $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2}$ com um erro inferior a 0,01.