Proposição: Seja A um conjunto não vazio e $\mathcal{A}$ uma partição de A.
Em A definimos a relação R dizendo que $(x,y) \in R$ se, e só se, $x, y \in A_i$, para algum $A_i \in \mathcal{A}$.
R assim definido é uma relação de equivalência

Fecho de uma relação

Exemplo:

Seja $A = \{1,2\}$. Considere em A a relação $R = \{(1,2)\}$.
Quais as relações definidas em A que são simétricas e que contém R?

$S_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ S_1 contem R e é simétrica

$S_2 = \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$ S_2 contem R e é simétrica

$S_3 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ S_3 contem R e é simétrica

$S_4 = \{(1,2),(2,1)\}$ S_4 contem R e é simétrica

Definição (1): Seja R uma relação definida em A
O FECHO da relação R com respeito a uma propriedade é a relação que se obtém de R adicionando o menor numero de elementos de modo a que a nova relação tenha a propriedade P

Notação: $cl_P(R)$

$cl_{sim}(R) = S_4$

$cl_{sim}(R) \overset{def}{=} s(R)$

$cl_{ref}(R) \overset{def}{=} r(R)$

$cl_{tran}(R) \overset{def}{=} t(R)$

Definição (2): Seja R uma relação definida num conjunto A. O fecho da relação R com respeito a uma propriedade P é uma relação de $cl_P(R)$ que verifica:

a) $R \subset cl_P(R)$

b) $Cl_P(R)$ tem a propriedade P

c) Se S é qualquer relação que contém R e verifica a propriedade $cl_P(R) \subset S$

Fecho reflexivo

Definição: Seja A um conjunto. A relação $\{(a,a) : a \in A\}$ diz-se a relação diagonal, ou identidade. Notação: ΔA

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3\}$

$\Delta A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

Proposição: Seja R uma relação definida em A. O fecho reflexivo de R é $R \cup \Delta A$

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $R = \{(1,4), (2,2), (3,1)\}$

$cl\,ref(R) = ?$

Temos $\Delta A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

Demonstração da proposição: Queremos ver que $R \cup \Delta A$ cumpre as 3 propriedades:

a) Contém R

b) É reflexiva

c) É a menor relação que contém R e é reflexiva

a) $R \subset R \cup \Delta_A$? Sim, pois R é ele próprio um dos conjuntos que constituem a união

b) [$\forall x \in X$: $(x, y) \in$ relação??] Seja $a \in A$. Temos $(a, a) \in \Delta_A$. Mas $\Delta_A \subset R \cup \Delta_A$ e portanto $(a, a) \in R \cup \Delta_A$

c) Seja S uma qualquer relação que contém R e é reflexiva. Será que $R \cup \Delta_A \subset S$?
Temos $R \subset S$, e como S é reflexiva $\Delta_A \subset S$. Assim $R \cup \Delta_A \subset S$

Logo $R \cup \Delta_A$ é o fecho reflexivo de R, isto é, $\text{clref}(R) = R \cup \Delta_A$

Fecho simétrico

Proposição: Seja R uma relação definida em A.
O fecho simétrico de R é uma relação $R \cup R^{-1}$

Exemplo:

$A = \{1, 2, 3\}$ $R = \{(1,1), (1,3)\}$

$S(R)$?

$R^{-1} = \{(1,1), (3,1)\}$

Assim $S(R) = R \cup R^{-1} = \{(1,1), (1,3), (3,1)\}$

Demonstração da proposição: Queremos que $R \cup R^{-1}$ cumpra as 3 condições:

a) Contém R (TPC)

b) É simétrico

c) É a mais pequena e simétrica relação que contém R (TPC)

b) Sejam $a, b \in A$ com $(a,b) \in R \cup R^{-1}$. Será que $(b,a) \in R \cup R^{-1}$

Se $(a,b) \in R \cup R^{-1}$ é porque $(a,b) \in R$ ou $(a,b) \in R^{-1}$. Por definição de R^{-1}, isto é equivalente, $(b,a) \in R^{-1}$ ou $(b,a) \in R$, logo $(b,a) \in R \cup R^{-1}$

Fecho transitivo

Exemplo:

Sejam A, B, C, D conjuntos. Se R é uma relação de A para B, S uma relação de B para C e T uma relação de C para D temos:

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

$$A = B = C = D, \quad R = S = T$$

$$R \circ (R \circ R) = (R \circ R) \circ R = R \circ R \circ R = R^3$$

$$\underbrace{R \circ R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n\ R's} = R^n$$

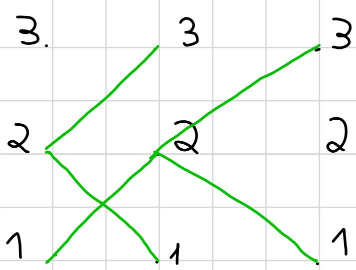
Exercício

1- Considere um conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e a relação $R = \{(1,2), (2,1), (2,3)\}$. Determine

a) R^2

b) R^3

a)

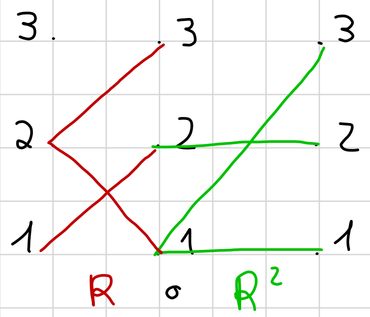


$(1,3)$

$(2,2)$ $\quad R^2 = \{(1,1), (1,3), (2,2)\}$

$(1,1)$

b)



(1, 2)

(2, 1) $\qquad R^3 = \{(1,2), (2,1), (2,3)\}$

(2, 3)

Proposição: Seja R uma relação definida em A. O fecho transitivo de R é a relação:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n \cup \dots$$

Proposição: Seja A um conjunto com n elementos. Seja R uma relação definida em A. O fecho transitivo de R é a relação:

$$\bigcup_{k=1}^{n} R^k = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$$

Exercícios:

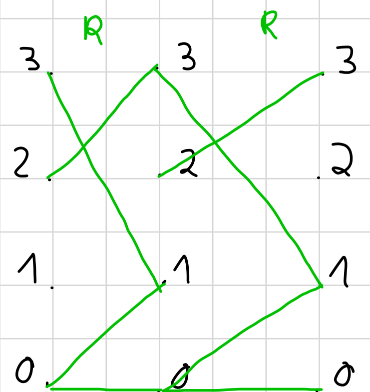
2 - Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1,2), (2,1), (2,3)\}$

$tr(R) = ?$

Como $\#A = 3$ e portanto $tr(A) = \bigcup_{k=1}^{3} R^k = R \cup R^2 \cup R^3 = \{(1,2), (2,1), (2,3), (1,1), (2,2), (1,3)\}$

3- Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $R = \{(0,0), (0,1), (2,3), (3,1)\}$, $tr(A) = ?$

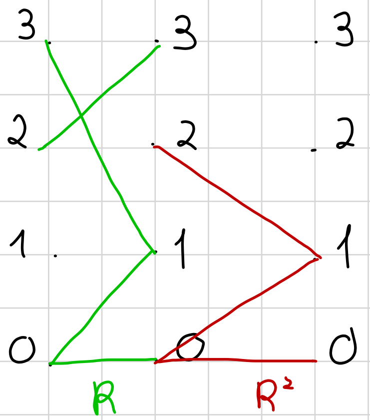
$\#A = 4 \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{4} R^k = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$



(0, 1)

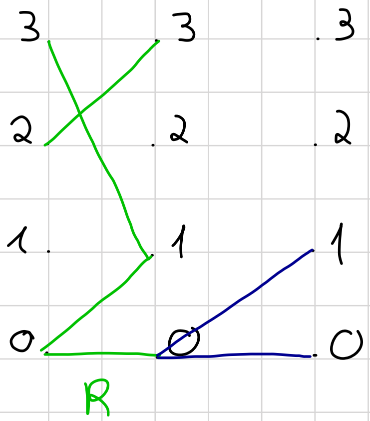
(0, 0)

(2, 1)



(0,0)

(0,1)



(0,1)

(0,0)

Assim $tr\ R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{(0,0), (0,1), (2,3), (3,1)\}$