Cálculo I

António J. G. Bento
bento@ubi.pt

Departamento de Matemática
Universidade da Beira Interior

Bibliografia principal:

- Apostol, T.M., *Cálculo*, Vol. 1, Reverté, 1993
- Stewart, J., *Calculus (International Metric Edition)*, Brooks/Cole Publishing Company, 2008
- Swokowski, E. W., *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol. 1 e 2, McGrawHill, 1983

Bibliografia secundária:

- Dias Agudo, F.R., *Análise Real*, Vol. I, Escolar Editora, 1989
- Demidovitch, B., *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*, McGrawHill, 1977
- Lang, S., *A First Course in Calculus*, Undergraduate texts in Mathematics, Springer, 5th edition
- Lima, E. L., *Curso de Análise*, Vol. 1, Projecto Euclides, IMPA, 1989
- Lima, E. L., *Análise Real*, Vol. 1, Colecção Matemática Universitária, IMPA, 2004
- Mann, W. R., Taylor, A. E., *Advanced Calculus*, John Wiley and Sons, 1983
- J. P. Santos, *Cálculo numa Variável Real*, IST Press, 2013
- Sarrico, C., *Análise Matemática – Leituras e exercícios*, Gradiva, 3ª Ed., 1999

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- O conjunto dos números reais
  - Operações com números reais
  - Ordem
  - Axioma do supremo
  - Naturais, inteiros, racionais e irracionais
- Generalidades sobre funções
- Funções polinomiais, funções racionais e função módulo
- Função inversa e composição de funções
- Função exponencial e função logarítmica
- Funções trigonométricas e suas inversas
- Funções hiperbólicas

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

3 Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$

4 Cálculo integral em $\mathbb{R}$

No conjunto dos números reais, que representaremos por $\mathbb{R}$, estão definidas duas operações:

– uma **adição**, que a cada par de números reais (a, b) faz corresponder um número $a + b$;

– uma **multiplicação**, que a cada par (a, b) associa um número representado por $a \cdot b$ (ou $a \times b$ ou simplesmente ab).

Propriedades da adição

$A1)$ Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$,
$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \text{(associatividade)}$$

$A2)$ Para cada $a, b \in \mathbb{R}$,
$$a + b = b + a \qquad \text{(comutatividade)}$$

$A3)$ Existe um elemento $0 \in \mathbb{R}$, designado por "zero", tal que para cada $a \in \mathbb{R}$
$$a + 0 = 0 + a = a \qquad \text{(elemento neutro)}$$

$A4)$ Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe um elemento $-a \in \mathbb{R}$ tal que
$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \qquad \text{(simétrico)}$$

Propriedades da multiplicação

$M1)$ Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a(bc) = (ab)c \qquad \text{(associatividade)}$$

$M2)$ Para cada $a, b \in \mathbb{R}$,

$$ab = ba \qquad \text{(comutatividade)}$$

$M3)$ Existe um elemento $1 \in \mathbb{R}$, diferente de zero e designado por "unidade", tal que para cada $a \in \mathbb{R}$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad \text{(elemento neutro)}$$

$M4)$ Para cada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe um elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \qquad \text{(inverso)}$$

Distributividade da multiplicação em relação à adição

$D1)$ Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a(b + c) = (b + c)a = ab + ac \qquad \text{(distributividade)}$$

Associadas a estas operações estão duas outras operações, a **subtracção** e a **divisão**. A subtracção entre dois números reais a e b representa-se por $a-b$ e é definida por

$$a-b=a+(-b).$$

A divisão entre dois números reais a e b com $b\neq 0$ representa-se por $\dfrac{a}{b}$ (ou $a\div b$ ou a/b) e é definida por

$$\frac{a}{b}=ab^{-1}.$$

A $\dfrac{a}{b}$, com $b\neq 0$, também se chama **fracção** entre a e b.

Operações com fracções

Sejam a, b, c e d números reais tais que $b\neq 0$ e $d\neq 0$. Então

- $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bd}+\dfrac{bc}{bd}=\dfrac{ad+bc}{bd}$;
- $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bd}-\dfrac{bc}{bd}=\dfrac{ad-bc}{bd}$;
- $\dfrac{a}{b}\,\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$;
- $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$ onde $c\neq 0$.

Lei do corte da adição

Sejam a, b e c números reais. Então

$$a + c = b + c$$

se e só se

$$a = b.$$

Lei do corte da multiplicação

Sejam a, b e c números reais com $c \neq 0$. Então

$$ca = cb$$

se e só se

$$a = b.$$

Lei do anulamento do produto

Dados números reais a e b tem-se

$$ab = 0$$

se e só se

$$a = 0 \quad \text{e/ou} \quad b = 0.$$

Casos notáveis da multiplicação

Se a e b são números reais, então

i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

iii) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Ordem

No conjunto dos números reais está definida uma relação de ordem, relação essa que denotamos por $<$ e que verifica, para quaisquer a, b, $c \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades:

$O1)$ apenas uma das seguintes condições é verdadeira:

$$\text{ou} \quad a = b, \quad \text{ou} \quad a < b, \quad \text{ou} \quad b < a;$$

$O2)$ se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;

$O3)$ se $a < b$, então $a + c < b + c$;

$O4)$ se $0 < a$ e $0 < b$, então $0 < ab$;

Quando $a < b$ é uma proposição verdadeira, dizemos que a é **menor do que** b.

Diz-se que a é **menor ou igual do que** b, e escreve-se

$$a \leqslant b, \quad \text{se} \quad a < b \quad \text{ou} \quad a = b.$$

Dizemos que a é **maior do que** b, e escreve-se

$$a > b, \quad \text{se} \quad b < a.$$

Obviamente, diz-se que a é **maior ou igual do que** b, e escreve-se

$$a \geqslant b, \quad \text{se} \quad b \leqslant a.$$

Das quatro propriedades de ordem mencionadas atrás é possível deduzir as seguintes propriedades:

Propriedades de ordem

Para quaisquer números reais a, b, c e d, tem-se

a) se $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$, então $a = b$;

b) se $a \neq 0$, então $a^2 > 0$;

c) se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;

d) se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$;

e) se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$;

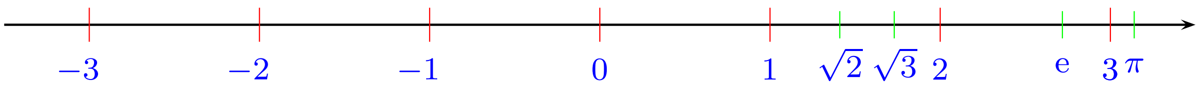
f) se $a > 0$, então $a^{-1} > 0$;

g) se $a < 0$, então $a^{-1} < 0$;

h) se $a < b$, então $a < \dfrac{a+b}{2} < b$;

i) $ab > 0$ se e só se ($a > 0$ e $b > 0$) ou ($a < 0$ e $b < 0$).

A relação de ordem permite-nos representar os números reais numa recta ou num eixo.

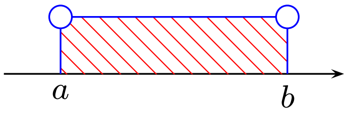


As relações de ordem que definimos previamente permitem-nos definir vários subconjuntos de $\mathbb{R}$ chamados **intervalos**. Dados dois números reais tais que $a \leqslant b$, temos os seguintes conjuntos:

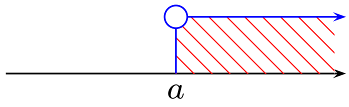
$$\begin{aligned}
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}\,; \\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}\,; \\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}\,; \\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}\,; \\
]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}\,; \\
[a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}\,; \\
]-\infty,b[&= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}\,; \\
]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}\,; \\
]-\infty,+\infty[&= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Representação geométrica dos intervalos

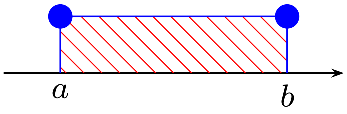
$]a, b[$



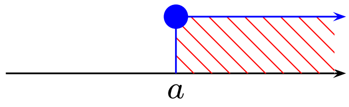
$]a, +\infty[$



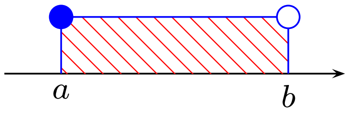
$[a, b]$



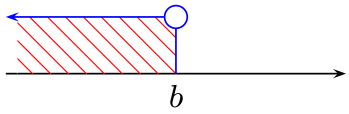
$[a, +\infty[$



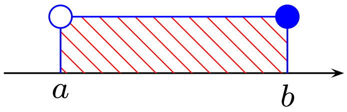
$[a, b[$



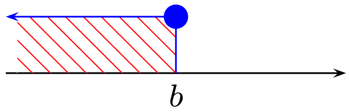
$]-\infty, b[$



$]a, b]$



$]-\infty, b]$



Sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e a número real. Dizemos que a é um **majorante** de A se

$$x \leqslant a \text{ para todo o } x \in A.$$

Um subconjunto de $\mathbb{R}$ diz-se **majorado**, **limitado superiormente** ou **limitado à direita** se tiver majorantes.

Sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e b um número real. Dizemos que b é um **minorante** de A se

$$b \leqslant x \text{ para todo o } x \in A.$$

Os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que têm minorantes dizem-se **minorados**, **limitados inferiormente** ou **limitados à esquerda**.

Os subconjuntos de $\mathbb{R}$ simultaneamente majorados e minorados dizem-se **limitados**. Os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que não são limitados designam-se por **ilimitados**.

Dizemos que $A \subseteq \mathbb{R}$ tem **supremo** se existir um elemento $a \in \mathbb{R}$ tal que

i) a é um majorante de A, isto é, $x \leqslant a$ para todo o $x \in A$;

ii) A não tem majorantes menores do que a, isto é, se a' é um majorante de A, então $a \leqslant a'$.

Dizemos que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ tem **ínfimo** se existir um elemento $b \in \mathbb{R}$ tal que

i) b é um minorante de A, isto é, $b \leqslant x$ para todo o $x \in A$;

ii) A não tem minorantes maiores do que b, isto é, se b' é um minorante de A, então $b' \leqslant b$.

Os elementos a e b referidos atrás designam-se por **supremo** e **ínfimo** de A, respectivamente.

Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é o **máximo** de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se é o supremo de A e se pertence ao conjunto A.

Um número real b diz-se **mínimo** de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se é o ínfimo de A e se pertence ao conjunto A.

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. O conjunto dos majorantes de A e o conjunto dos minorantes de A denotam-se, respectivamente, por

$$\operatorname{Maj} A \quad \text{e} \quad \operatorname{Min} A.$$

Caso existam, o supremo e o ínfimo de A representam-se, respectivamente, por

$$\sup A \quad \text{e} \quad \inf A$$

e o máximo e o mínimo de A denotam-se, respectivamente, por

$$\max A \quad \text{e} \quad \min A.$$

Exemplos

a) Dados dois números reais a e b tais que $a \leqslant b$, consideremos o intervalo

$$I = [a, b].$$

Então

$$\operatorname{Maj} I = [b, +\infty[\quad \text{e} \quad \operatorname{Min} I =]-\infty, a]$$

Além disso,

$$\sup I = b \quad \text{e} \quad \inf I = a.$$

Como $a, b \in I$, temos que

$$\max I = b \quad \text{e} \quad \min I = a.$$

Exemplos (continuação)

b) Consideremos o intervalo

$$I_1 =]a, b[,$$

onde $a < b$. Então

$$\operatorname{Maj} I_1 = [b, +\infty[\quad \text{e} \quad \operatorname{Min} I_1 =]-\infty, a]$$

e

$$\sup I_1 = b \quad \text{e} \quad \inf I_1 = a.$$

Repare-se que o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo e o ínfimo de I_1 coincidem com os do intervalo I do exemplo anterior. Só que neste caso, como a e b não pertencem a I_1, o intervalo I_1 não tem máximo, nem mínimo.

Exemplos (continuação)

c) Dado um número real b, consideremos o intervalo

$$I_2 =]-\infty, b].$$

Para este intervalo tem-se

$$\operatorname{Maj} I_2 = [b, +\infty[, \quad \sup I_2 = b \quad \text{e} \quad \max I_2 = b.$$

O intervalo I_2 não tem minorantes, isto é,

$$\operatorname{Min} I_2 = \varnothing,$$

pelo que também não tem ínfimo, nem mínimo.

Exemplos (continuação)

d) Seja

$$I_3 =]a, +\infty[,$$

onde a é um número real. O intervalo I_3 não tem majorantes, ou seja,

$$\operatorname{Maj} I_3 = \varnothing,$$

e, portanto, I_3 não tem supremo e não tem máximo. No entanto, tem-se

$$\operatorname{Min} I_3 =]-\infty, a] \quad \text{e} \quad \inf I_3 = a.$$

Atendendo a que $a \notin I_3$, o intervalo I_3 não tem mínimo.

Uma das propriedades mais importantes que supomos válida nos números reais é a do axioma do supremo.

Axioma do supremo

Todo o subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente tem supremo.

Do axioma do supremo pode-se mostrar o seguinte:

Todo o subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente tem ínfimo.

Intuitivamente, poderíamos construir os **números naturais** da seguinte forma:

1 é um número natural;

$1 + 1$ que representamos por 2 é um número natural;

$1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 3$ é um número natural;

etc.

Assim,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

A partir dos números naturais podemos definir os números inteiros e os números racionais.

Um número real diz-se um **número inteiro** se for um número natural, ou se o seu simétrico for um número natural ou se for zero, isto é, o conjunto dos números inteiros é o conjunto

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{m \in \mathbb{R} : -m \in \mathbb{N}\}.$$

Um **número racional** é um número real que pode ser representado como o quociente entre dois números inteiros, isto é, o conjunto dos números racionais é o conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Os números racionais também podem ser definidos através da representação decimal. Um número real é racional se no sistema decimal tiver uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica.

Assim, o número

$$0,3333333...$$

é um número racional, que também se representa por

$$0,3(3)$$

Além disso, este número também pode ser representado por

$$\frac{1}{3}.$$

Aos números reais que não são racionais chamamos de **números irracionais**.

Os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π e e são números irracionais.

As inclusões seguintes são óbvias:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Uma função f é definida à custa de três coisas:

- um conjunto A a que se chama **domínio** da função;
- um conjunto B chamado de **conjunto de chegada** da função;
- uma **regra** que a cada elemento de $x \in A$ faz corresponder um e um só elemento de B, elemento esse que se representa por $f(x)$.

Nestas condições usa-se a notação

$$f\colon A \to B.$$

Assim, duas funções

$$f\colon A \to B$$

e

$$g\colon C \to D$$

são iguais se tiverem o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e a regra for a mesma, ou seja, $f = g$ se

- $A = C$,
- $B = D$ e
- $f(x) = g(x)$ para qualquer $x \in A = C$.

Dada

$$f\colon A \to B,$$

referimo-nos a $x \in A$ como um **objecto** e a $f(x) \in B$ como a sua **imagem por** f.

Também usamos a expressão valor de f em x para nos referirmos à imagem $f(x)$.

Ao conjunto das imagens chamamos **contradomínio** de f, ou seja, o contradomínio é o conjunto

$$f(A) = \{f(x) \in B\colon x \in A\}\,.$$

A natureza da regra associada a

$$f\colon A \to B,$$

e que nos permite determinar o valor de $f(x)$ quando é dado $x \in A$, é inteiramente arbitrária, tendo apenas que verificar duas condições:

- não pode haver excepções, isto é, para que o conjunto A seja o domínio de f a regra deve fornecer $f(x)$ para todo o $x \in A$;
- não pode haver ambiguidades, ou seja, a cada $x \in A$ a regra deve fazer corresponder um único $f(x) \in B$.

As funções f que nós vamos estudar são **funções reais de variável real**, ou seja, o domínio da função f é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e o conjunto de chegada é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. O domínio costuma representar-se por D ou D_f e usa-se a seguinte notação

$$f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

ou, de forma mais abreviada,

$$f\colon D \to \mathbb{R}.$$

Primeira Lei de Ohm

A primeira lei de Ohm diz que a intensidade I da corrente eléctrica é dada pelo quociente entre a diferença de potencial V e a resistência eléctrica R do condutor:

$$I = \frac{V}{R}.$$

Assim, a intensidade da corrente pode ser vista como uma função da diferença de potencial.

Consideremos função real de variável real definida por

$$f(x) = x.$$

Quando o domínio de uma função real de variável real não é referido, apenas é dada a regra que define a função, considera-se como domínio o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ a que se pode aplicar a regra. No exemplo que estamos a considerar, a regra pode-se aplicar a todos os números reais e, portanto, o domínio de f é $\mathbb{R}$.
O contradomínio de f é $\mathbb{R}$.

A função definida por

$$f(x) = x^2$$

tem como domínio $\mathbb{R}$ e como contradomínio $[0, +\infty[$.

Consideremos agora a função real de variável real dada por

$$g(x) = \frac{1}{x}.$$

Como a divisão por zero não é possível, o seu domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e o seu contradomínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dada uma função real de variável real $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o conjunto

$$\mathscr{G}(f) = \{(a, f(a)) : a \in D\}$$

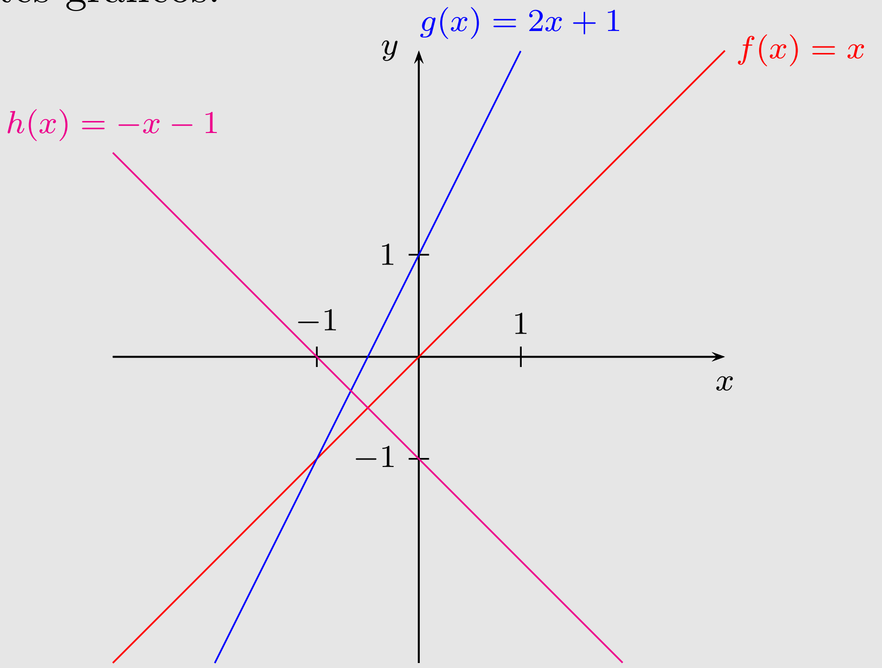
designa-se por **gráfico de f**. Obviamente, este conjunto pode ser representado no plano e a essa representação geométrica também se chama gráfico.

Exemplo

As funções $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g(x) = 2x + 1 \quad e \quad h(x) = -x - 1$$

tem os seguintes gráficos:

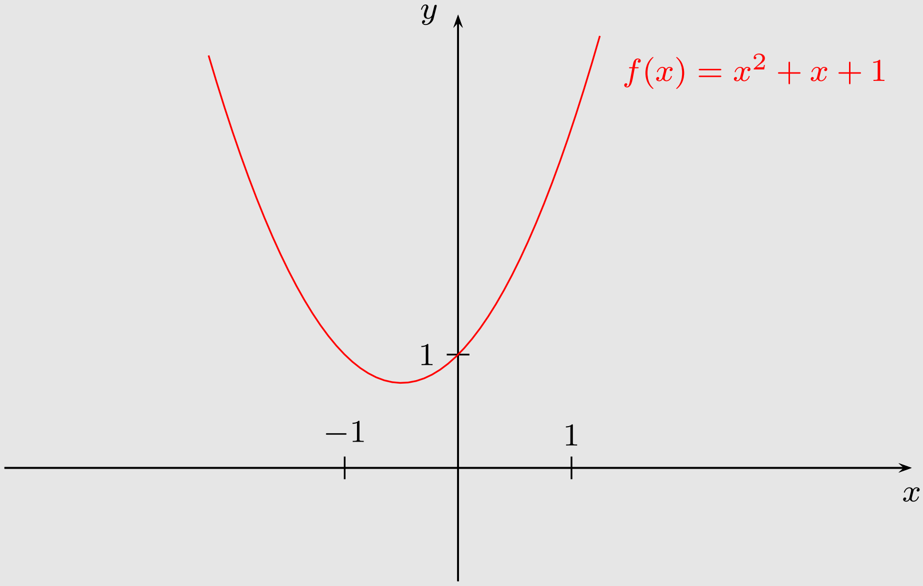


Exemplo

A função dada por

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

tem o seguinte gráfico

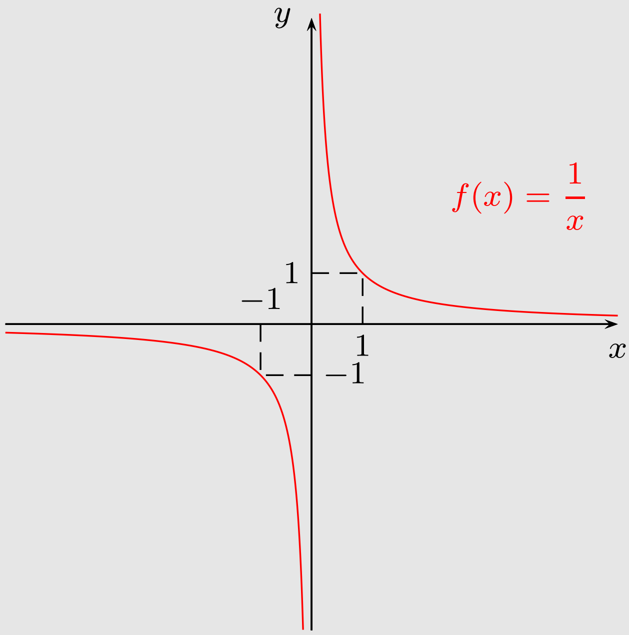


Exemplo

As função dada por

$$f(x) = 1/x$$

cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tem o seguinte gráfico



Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.
Dizemos que f é uma **função par** se para qualquer $x \in D$ tivermos

$$-x \in D \quad \text{e} \quad f(-x) = f(x).$$

As funções f tais que para qualquer $x \in D$ se tem

$$-x \in D \quad \text{e} \quad f(-x) = -f(x)$$

designam-se por **funções ímpares**.

Recordemos que o gráfico das funções pares apresenta uma simetria em relação ao eixo dos yy, enquanto que o gráfico das funções ímpares apresenta uma simetria em relação à origem.

Exemplos

Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^3.$$

Como

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

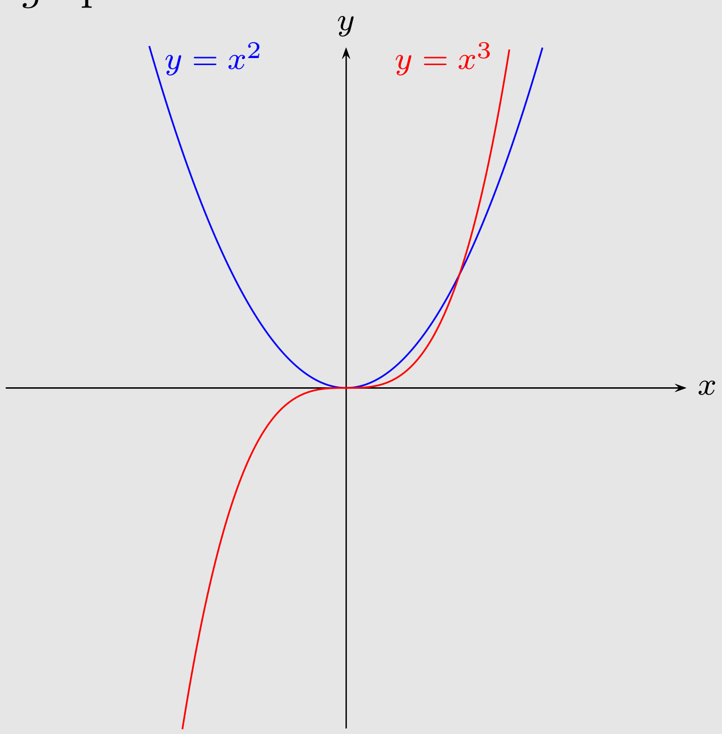
a função f é uma função par. Em relação à função g temos

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x),$$

pelo que a função g é uma função ímpar.

Exemplos (continuação)

Os gráficos de f e g apresentam as simetrias referidas anteriormente.



Dados um subconjunto D de $\mathbb{R}$ e uma função $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que $a \in D$ é um **zero de f** se

$$f(a) = 0.$$

O conjunto dos zeros de f representa-se por Z_f. É óbvio que

$$Z_f = \{x \in D\colon f(x) = 0\}.$$

Por exemplo, para a função dada por $f(x) = x^2 - 1$, cujo domínio é $\mathbb{R}$, como

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

tem-se

$$Z_f = \{-1, 1\}.$$

Sejam

$$f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

duas funções reais de variável real.

A **soma de f com g** é a função

$$f+g\colon D_f \cap D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

e o **produto de f por g** é a função

$$fg\colon D_f \cap D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Dadas duas funções reais de variável real

$$f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

define-se o **quociente de f por g** como sendo a função

$$\frac{f}{g}\colon D_{\frac{f}{g}} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

e onde

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g\colon g(x) \neq 0\}\,.$$

Se

$$f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

é uma função real de variável real e α um número real, define-se o **produto de f pelo escalar α** como sendo a função

$$\alpha f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

As funções dadas por

$$f(x) = ax + b,$$

onde a e b são dois números reais fixos, designam-se por **funções afim**.

O domínio de uma função afim é sempre o conjunto dos números reais. O contradomínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, excepto no caso em que $a = 0$. Quando $a = 0$ o contradomínio é o conjunto singular $\{b\}$.

O gráfico de uma função afim é sempre uma recta não vertical que quando $a = 0$ é uma recta horizontal.

Quando $b = 0$, a expressão da função afim reduz-se a

$$f(x) = ax$$

e exprime que entre as variáveis x e $y = f(x)$ existe proporcionalidade directa, visto que o quociente dos dois valores correspondentes é constante:

$$\frac{y}{x} = a.$$

Nestas condições, dizemos que a função f é **linear**.

Quando $a = 0$, a expressão da função afim reduz-se a

$$f(x) = b,$$

ou seja, temos uma **função constante**.

Resolução de equações de primeiro grau

Sejam a e b números reais. Então

i) $a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$;

ii) $ax = b \Leftrightarrow x = \dfrac{b}{a}$ onde $a \neq 0$;

Resolução de inequações de primeiro grau

Sejam a e b números reais. Então

i) $a + x < b \Leftrightarrow x < b - a$;

ii) $ax < b \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{b}{a} & \text{se } a > 0; \\ x > \dfrac{b}{a} & \text{se } a < 0. \end{cases}$

Os casos de inequações de primeiro grau com $\leqslant$, $>$ ou $\geqslant$ são análogos.

As funções definidas por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

designam-se por **funções quadráticas**.

O seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}$.

Como

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a},
\end{aligned}
$$

o contradomínio é o intervalo

$$\left[c-\frac{b^2}{4a},+\infty\right[= \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right),+\infty\right[\qquad \text{se } a>0$$

e é o intervalo

$$\left]-\infty,c-\frac{b^2}{4a}\right] = \left]-\infty,f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right] \text{ se } a<0.$$

Além disso, de

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

também se obtém a fórmula resolvente.

Fórmula resolvente (de equações de segundo grau)

Sejam a, b e c números reais, com $a\neq 0$. Então

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Inequações de segundo grau

Consideremos a inequação

$$ax^2 + bx + c < 0, \qquad a \neq 0.$$

a) Se $a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$, então o conjunto solução da inequação é o intervalo

$$]x_1, x_2[,$$

onde x_1 e x_2 são as soluções de $ax^2 + bx + c = 0$, com $x_1 < x_2$.

b) Se $a > 0$ e $b^2 - 4ac \leqslant 0$, então a inequação não tem soluções.

c) Se $a < 0$ e $b^2 - 4ac < 0$, então o conjunto solução da inequação é $\mathbb{R}$.

d) Se $a < 0$ e $b^2 - 4ac \geqslant 0$, então o conjunto solução da inequação é o intervalo

$$]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_2, +\infty[,$$

onde x_1 e x_2 são as soluções de $ax^2 + bx + c = 0$, com $x_1 \leqslant x_2$.

Inequações de segundo grau (continuação)

Consideremos a inequação

$$ax^2 + bx + c \leqslant 0, \qquad a \neq 0.$$

a) Se $a > 0$ e $b^2 - 4ac \geqslant 0$, então o conjunto solução da inequação é o intervalo

$$[x_1, x_2],$$

onde x_1 e x_2 são as soluções de $ax^2 + bx + c = 0$, com $x_1 \leqslant x_2$.

b) Se $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$, então a inequação não tem soluções.

c) Se $a < 0$ e $b^2 - 4ac \leqslant 0$, então o conjunto solução da inequação é $\mathbb{R}$.

d) Se $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$, então o conjunto solução da inequação é o intervalo

$$]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[,$$

onde x_1 e x_2 são as soluções de $ax^2 + bx + c = 0$, com $x_1 \leqslant x_2$.

Para as inequações

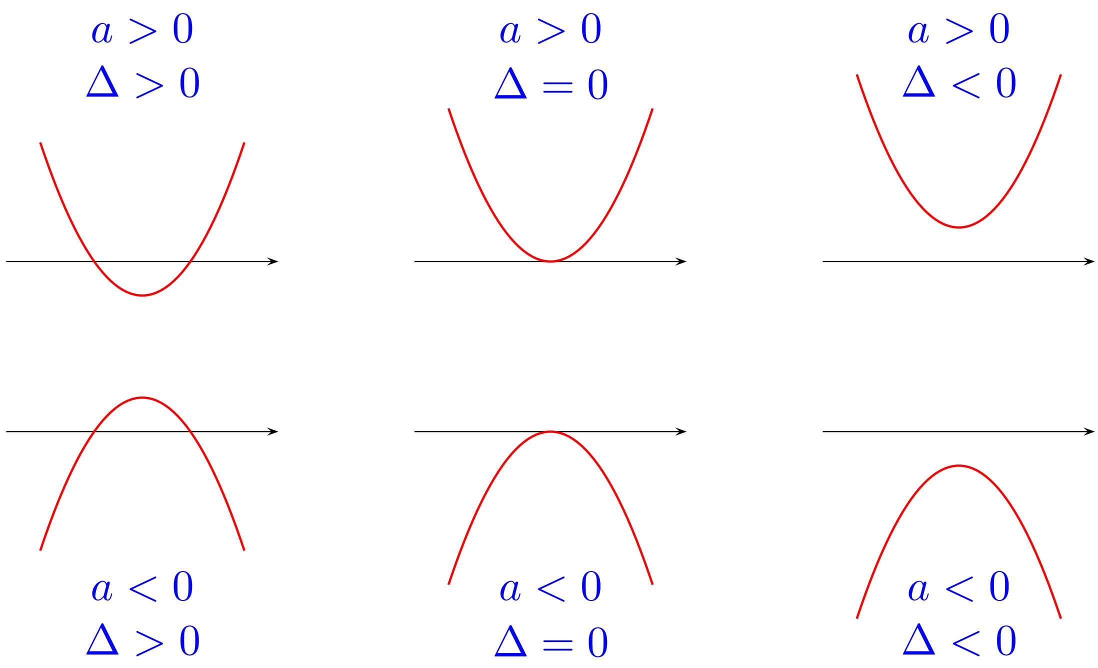
$$ax^2 + bx + c > 0, \qquad a \neq 0,$$

e

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0, \qquad a \neq 0,$$

temos algo semelhante aos dois casos anteriores.

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, a figura seguinte ajuda-nos a resolver as inequações de segundo grau.



As funções

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definidas por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ e $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ designam-se por **funções polinomiais**.

Obviamente, as funções afim e as funções quadráticas são funções polinomiais.

As **funções racionais** são as funções definidas como o quociente entre duas funções polinomiais, ou seja, são as funções dadas por

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ e $a_n, b_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

O seu domínio é o conjunto

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \colon b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \neq 0\right\}.$$

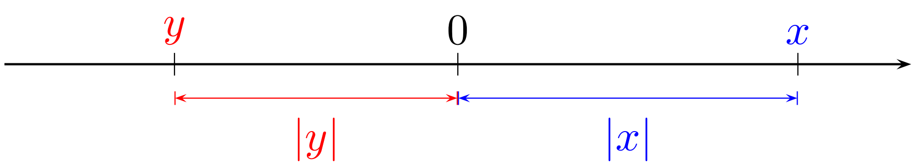
Por **valor absoluto** ou **módulo** de um elemento $x \in \mathbb{R}$ entende-se o número real $|x|$ definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0; \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Uma forma equivalente de definir o módulo de um número real x é a seguinte

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

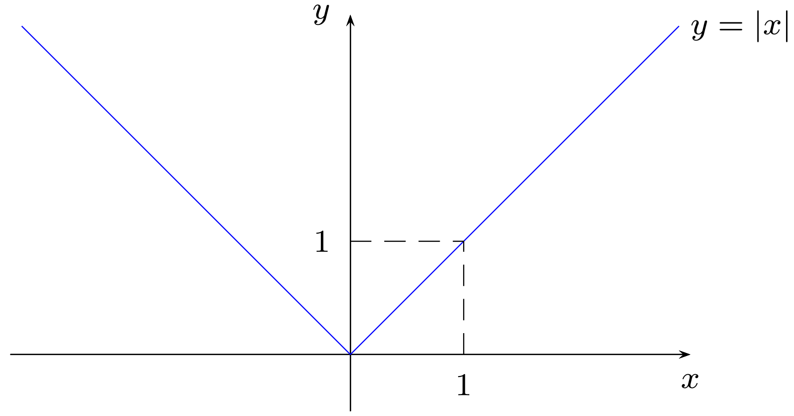
Geometricamente, o módulo de um número dá-nos a distância desse número à origem.



A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x|\,,$$

cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ e tem por contradomínio o conjunto $[0, +\infty[$. O seu gráfico tem representação geométrica que se segue.



Propriedades do módulo

Para quaisquer números reais a, b tem-se

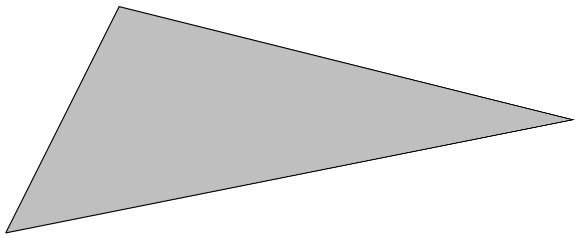
a) $|a| = 0$ se e só se $a = 0$;

b) $|a| \geqslant 0$;

c) $|ab| = |a|.|b|$;

d) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$; **(desigualdade triangular)**

A propriedade $d)$ denomina-se **desigualdade triangular** pelo facto de num triângulo o comprimento de qualquer lado ser menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.



$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

Propriedades do módulo (continuação)

$a)$ $|x| = a \;\Leftrightarrow\; x = a \;\vee\; x = -a$ onde $a \geqslant 0$;

$b)$ $|x| < a \;\Leftrightarrow\; x < a \;\wedge\; x > -a$

$c)$ $|x| \leqslant a \;\Leftrightarrow\; x \leqslant a \;\wedge\; x \geqslant -a$

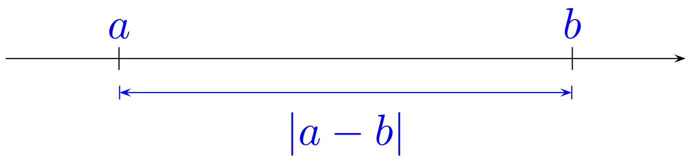
$d)$ $|x| > a \;\Leftrightarrow\; x > a \;\vee\; x < -a$

$e)$ $|x| \geqslant a \;\Leftrightarrow\; x \geqslant a \;\vee\; x \leqslant -a$

Podemos usar o módulo para calcular a distância entre dois números reais. A distância entre dois números reais a e b é dada por

$$|a-b|\,.$$

Geometricamente,



Seja $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real. Dizemos que f é **injectiva** se

$$\text{para quaisquer } a, b \in D \text{ tais que } a \neq b \text{ se tem } f(a) \neq f(b),$$

o que é equivalente a verificar-se o seguinte

$$\text{para quaisquer } a, b \in D, \text{ se } f(a) = f(b), \text{ então } a = b.$$

A função f é **sobrejectiva** se

$$\text{para cada } b \in \mathbb{R}, \text{ existe } a \in D \text{ tal que } f(a) = b.$$

Obviamente, uma função real de variável real é sobrejectiva se o seu contradomínio for o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

As funções que são injectivas e sobrejectivas dizem-se **bijectivas**.

Exemplo

Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = 2x + 3.$$

Como

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Leftrightarrow 2a + 3 = 2b + 3 \\ &\Leftrightarrow 2a = 2b \\ &\Leftrightarrow a = b, \end{aligned}$$

a função f é injectiva. Além disso, dado $b \in \mathbb{R}$, fazendo $a = \dfrac{b-3}{2}$ temos

$$f(a) = f\left(\frac{b-3}{2}\right) = 2\,\frac{b-3}{2} + 3 = b - 3 + 3 = b,$$

o que mostra que f é sobrejectiva.

Exemplo

A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ não é injectiva porque

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1).$$

Além disso, também não é sobrejectiva porque o seu contradomínio é o intervalo $[0, +\infty[$.

A função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^3$ é injectiva pois

$$g(a) = g(b) \Leftrightarrow a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$$

e é sobrejectiva porque o contradomínio de g é $\mathbb{R}$.

Seja $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real injectiva. Recordemos que o conjunto de todas as imagens por f de elementos de D, ou seja, o conjunto

$$f(D) = \{f(x) \in \mathbb{R} \colon x \in D\},$$

se designa por contradomínio de f. Como f é injectiva, dado $y \in f(D)$, existe um e um só $x \in D$ tal que

$$f(x) = y.$$

Nestas condições podemos definir a **inversa** da função f que a cada $y \in f(D)$ faz corresponder $x \in D$ tal que $f(x) = y$. Essa inversa representa-se por f^{-1} e é a função

$$f^{-1}\colon f(D) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$f^{-1}(y) = x \text{ se e só se } f(x) = y.$$

É evidente que para cada $x \in D$ e para cada $y \in f(D)$ se tem

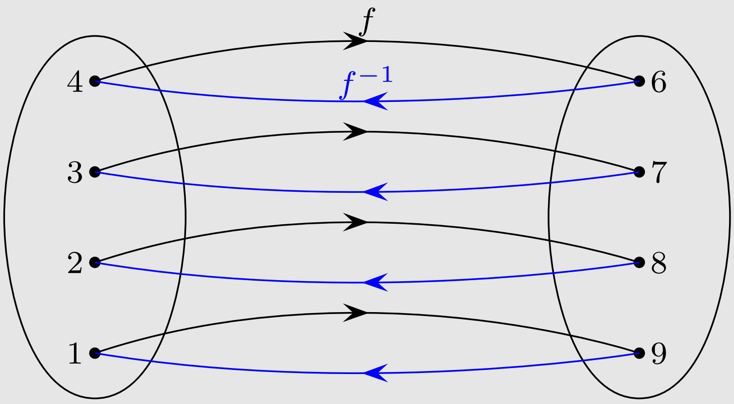
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{ e } \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Exemplo

A função $f\colon\ \{1,2,3,4\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(1) = 9,\ \ f(2) = 8,\ \ f(3) = 7 \text{ e } f(4) = 6$$

é injectiva e pode ser representada da seguinte forma:



e a sua inversa é a função $f^{-1}\colon\ \{6,7,8,9\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f^{-1}(6) = 4,\ \ f^{-1}(7) = 3,\ \ f^{-1}(8) = 2 \text{ e } f^{-1}(9) = 1.$$

Exemplo

Consideremos novamente a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x + 3.$$

Já vimos que esta função é injectiva e, consequentemente, tem inversa. Além disso, o contradomínio de f é $\mathbb{R}$ e, portanto,

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

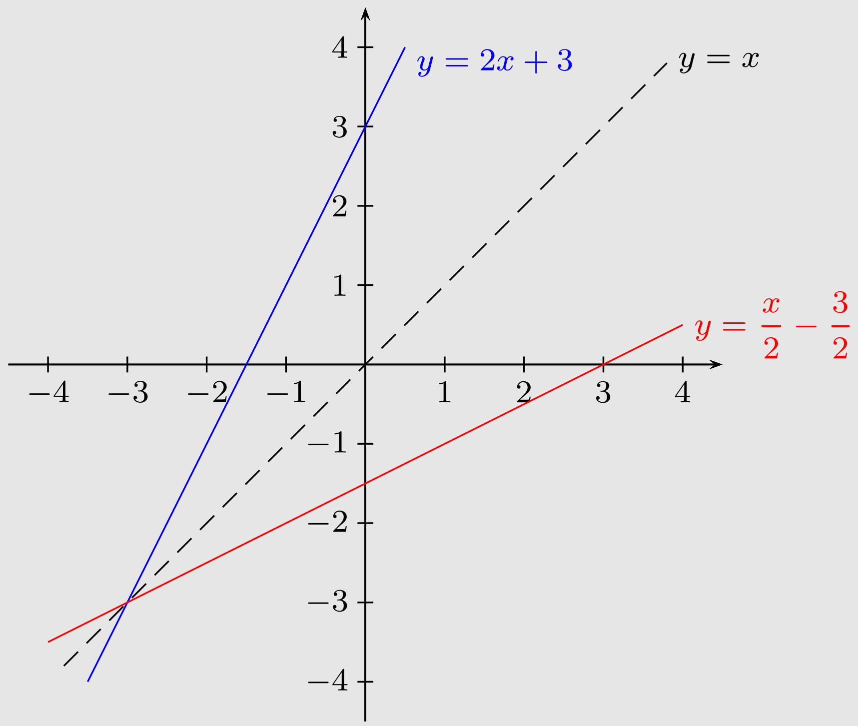
Como

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow -2x = -y + 3 \\ &\Leftrightarrow 2x = y - 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

f^{-1} é definida por

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}.$$

Exemplo (continuação)



Os gráfico de uma função e da sua inversa apresentam sempre uma simetria em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo

Já vimos que a função

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$f(x) = x^3$$

é injectiva. Também sabemos que o contradomínio de f é o conjunto $\mathbb{R}$. Assim, f é invertível e, como

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

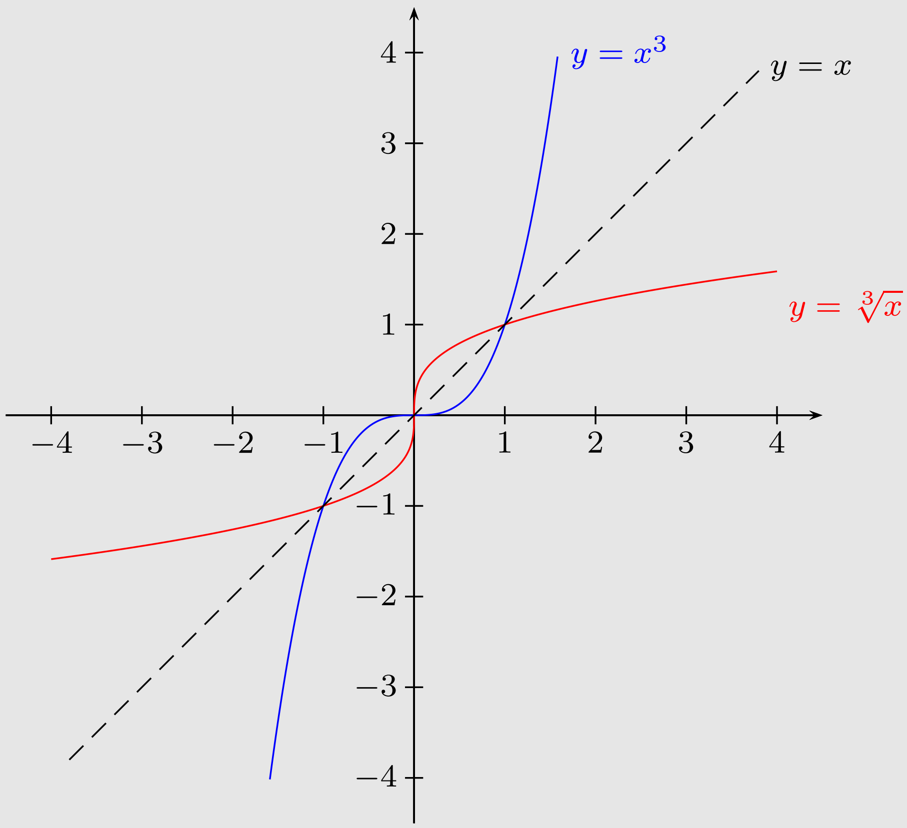
tem-se

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

é a função definida por

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Exemplo (continuação)



Exemplo

Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = x^2.$$

Esta função não é injectiva porque, por exemplo,

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1).$$

Assim, a função f não tem inversa. No entanto, se pensarmos na restrição desta função a $[0, +\infty[$, ou seja, se usarmos a função $g\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$, esta função já é injectiva pelo que podemos pensar na sua inversa. Como o seu contradomínio é $[0, +\infty[$ e

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y},$$

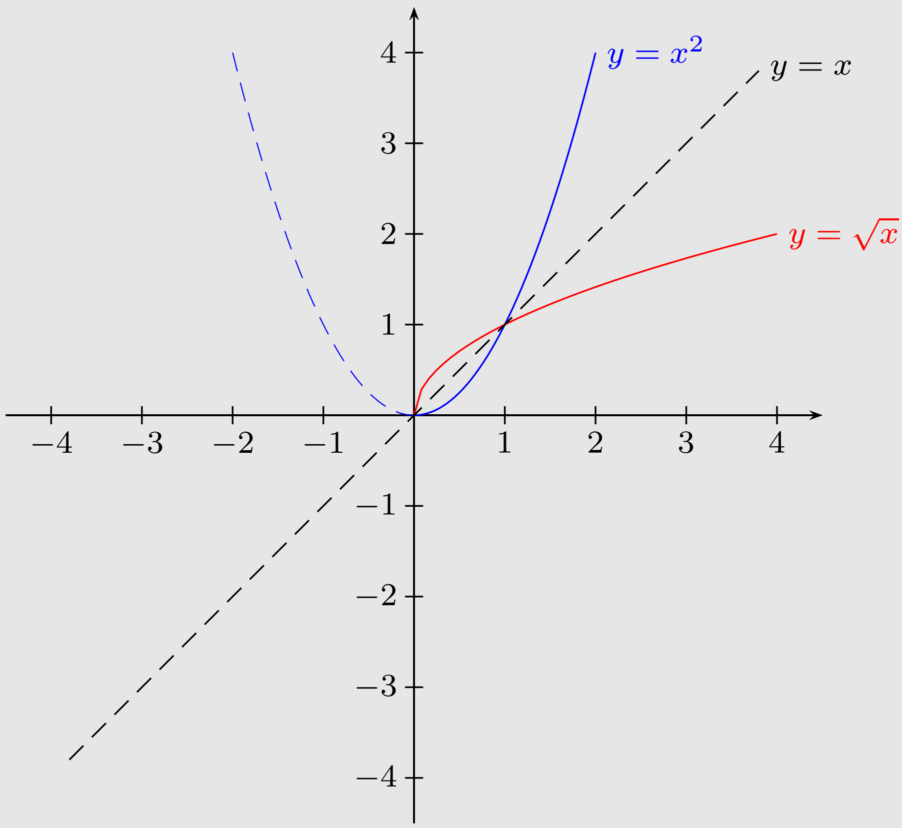
a função

$$g^{-1}\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

é definida por

$$g^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Exemplo (continuação)



Exemplo

Generalizando os exemplos anteriores, tem-se que a função

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$f(x) = x^n, \qquad \text{com } n \textbf{ um número natural par},$$

não é injectiva e, por isso, não tem inversa. No entanto, se considerarmos a restrição de f a $[0, +\infty[$, ou seja, se considerarmos a função

$$g\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

dada por

$$g(x) = x^n,$$

g já é injectiva, e como o seu contradomínio é $[0, +\infty[$, tem-se que

$$g^{-1}\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

é definida por

$$g^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Exemplo (continuação)

A função

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$f(x) = x^n \qquad \text{com } n \textbf{ um número natural ímpar},$$

é injectiva e o tem como contradomínio o conjunto $\mathbb{R}$. Assim,

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

é definida por

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Sejam

$$f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

duas funções reais de variável real. A **função composta de g com f** é a função

$$g \circ f\colon D_{g\circ f} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

de domínio

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \colon f(x) \in D_g\},$$

definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemplo

Sejam

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

as funções definidas por

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Então $g \circ f$ tem por domínio o conjunto

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x \in D_f \colon f(x) \in D_g\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 - 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{aligned}$$

e é definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Exemplo (continuação)

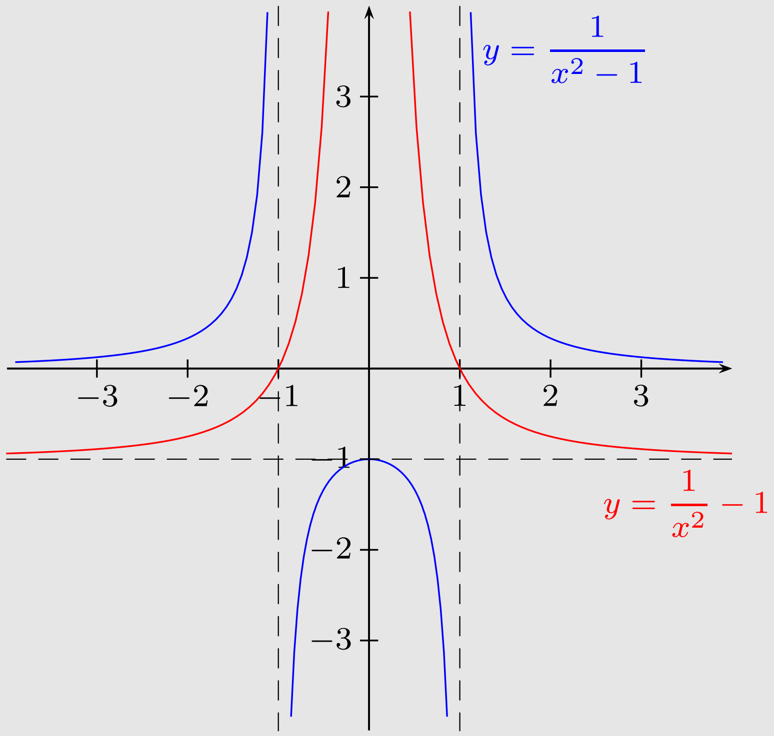
Se em vez de $g \circ f$ calcularmos $f \circ g$ temos

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \colon g(x) \in D_f\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{1}{x} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \frac{1}{x^2} - 1.$$

Exemplo (continuação)



1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- O conjunto dos números reais
- Generalidades sobre funções
- Funções polinomiais, funções racionais e função módulo
- Função inversa e composição de funções
- Função exponencial e função logarítmica
  - Função exponencial
  - Função logarítmica
- Funções trigonométricas e suas inversas
- Funções hiperbólicas

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

3 Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$

4 Cálculo integral em $\mathbb{R}$

Dado um número real positivo $a > 0$, pretendemos estudar a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$f(x) = a^x,$$

que se designa por **função exponencial de base a**.

Repare-se que quando $a = 1$ temos a função constante

$$f(x) = 1^x = 1.$$

Propriedades da função exponencial

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $a, b \in]0, +\infty[$. Então

a) $a^0 = 1$

b) $a^{x+y} = a^x \, a^y$

c) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

d) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

e) $(a^x)^y = a^{xy}$

f) $a^x b^x = (ab)^x$

g) se $x > y$ e $a > 1$, então $a^x > a^y$

h) se $x > y$ e $0 < a < 1$, então $a^x < a^y$

i) se $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ a função exponencial é injectiva

j) se $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ o contradomínio da função exponencial é $]0, +\infty[$

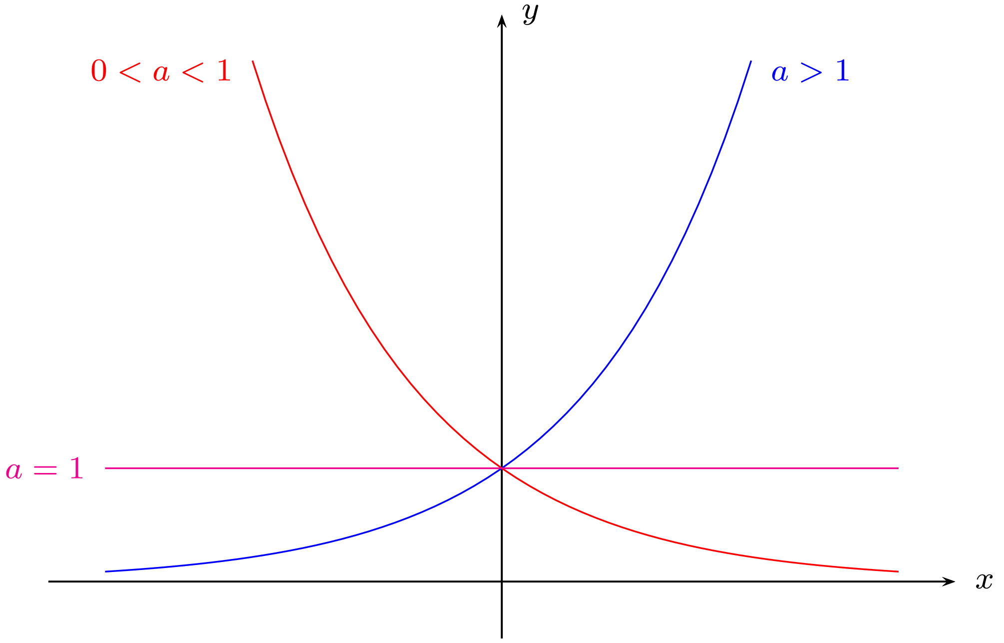


Gráfico da função exponencial

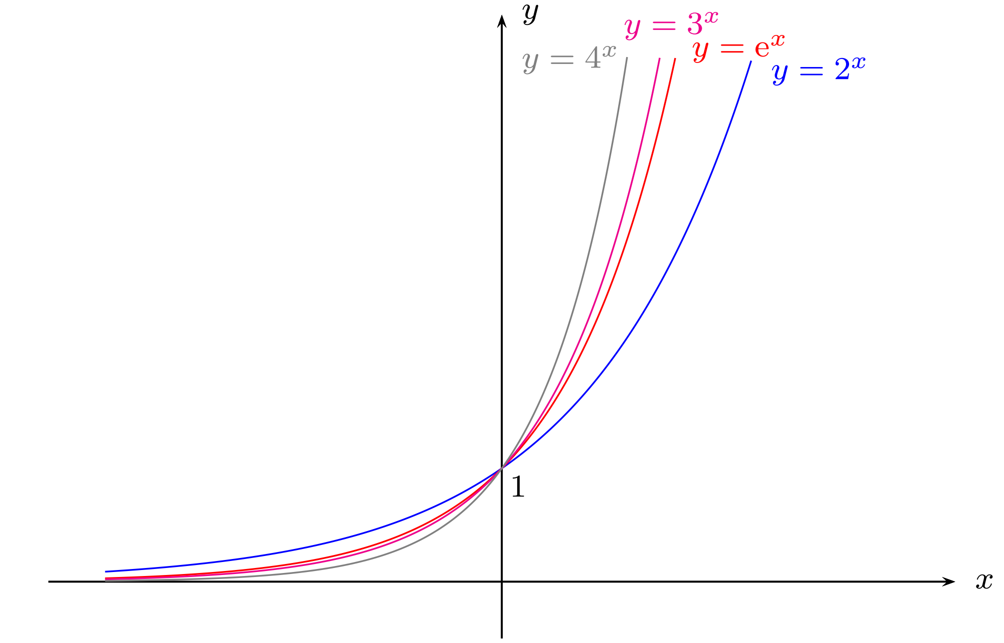


Gráfico de funções exponenciais

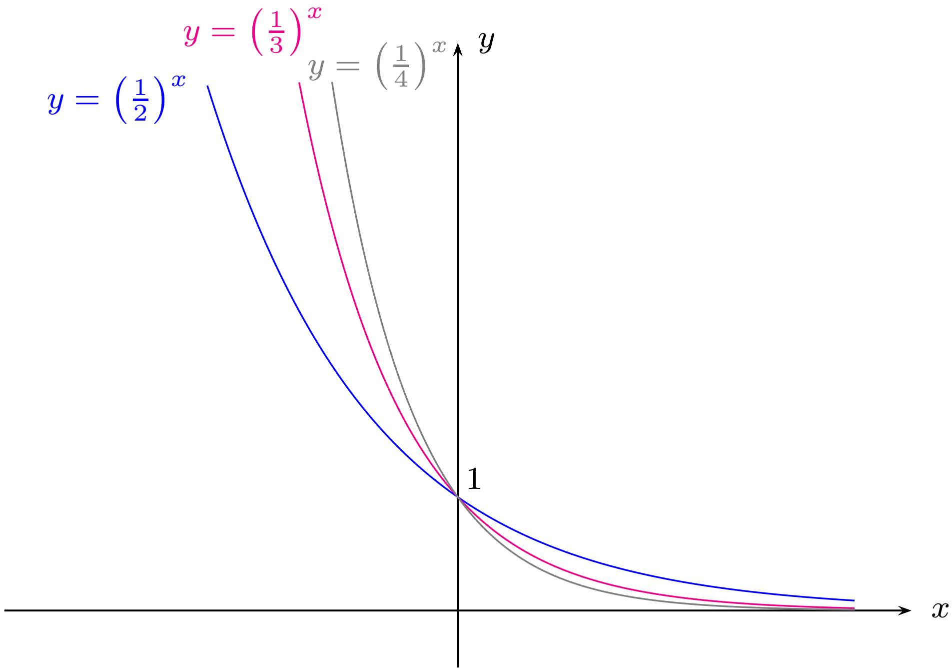
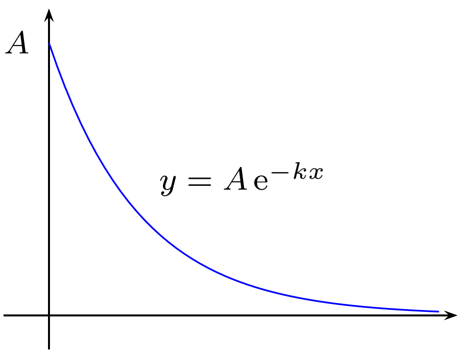


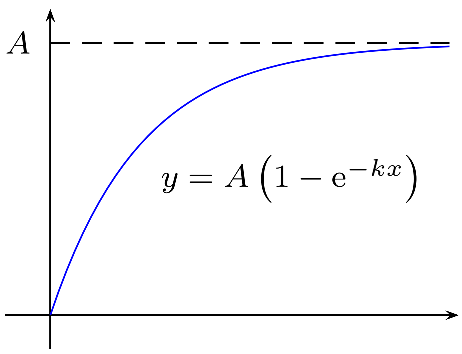
Gráfico de funções exponenciais

Na natureza aparecem frequentemente quantidades que estão relacionadas por leis de decrescimento e de crescimento exponenciais. As leis mais comuns são da forma

$$y = A\,\mathrm{e}^{-kx} \qquad \text{e} \qquad y = A\left(1 - \mathrm{e}^{-kx}\right)$$

onde A e k são constantes (positivas).





Vejamos alguns exemplos:

$a)$ Expansão linear $l = l_0\, \mathrm{e}^{\alpha\,\theta}$

$b)$ Variação da resistência eléctrica com a temperatura $R_\theta = R_0\, \mathrm{e}^{\alpha\,\theta}$

$c)$ Tensão em correias $T_1 = T_0\, \mathrm{e}^{\mu\,\theta}$

$d)$ Lei de Newton do arrefecimento $\theta = \theta_0\, \mathrm{e}^{-kt}$

$e)$ Crescimento biológico $y = y_0\, \mathrm{e}^{k\,t}$

$f)$ Descarga de um condensador $q = Q\, \mathrm{e}^{-t/CR}$

$g)$ Pressão atmosférica $p = p_0\, \mathrm{e}^{-h/c}$

$h)$ Decaimento radioactivo $N = N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda\,t}$

$i)$ Intensidade da corrente num circuito indutivo $i = I e^{-Rt/L}$

$j)$ Intensidade da corrente num circuito capacitivo $i = I\left(1 - e^{-t/CR}\right)$

Quando $a \in]0,1[\, \cup \,]1,+\infty[$, a função exponencial a^x é injectiva e, por conseguinte, tem inversa. Essa inversa chama-se **logaritmo na base a** e representa-se por $\log_a$.

Assim, tendo em conta que o contradomínio da função exponencial é o intervalo $]0,+\infty[$, temos que

$$\log_a :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$

é a função definida por

$$\log_a x = y \text{ se e só se } x = a^y.$$

Obviamente, quando $a = e$ temos a função **logaritmo natural** que representamos por ln.

Propriedades da função logarítmica

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$. Então

a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$

c) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

d) $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$

e) $\log_a x = \log_b x \, \log_a b$

f) $\log_a 1 = 0$

g) se $x > y$ e $a > 1$, então $\log_a x > \log_a y$

h) se $x > y$ e $0 < a < 1$, então $\log_a x < \log_a y$

i) a função logarítmica é injectiva;

j) o contradomínio da função logarítmica é $\mathbb{R}$

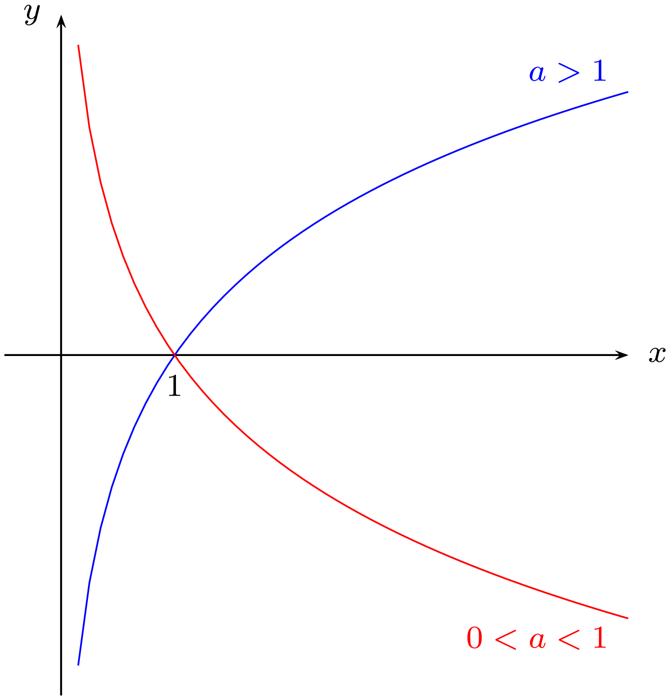


Gráfico da função logaritmo de base a

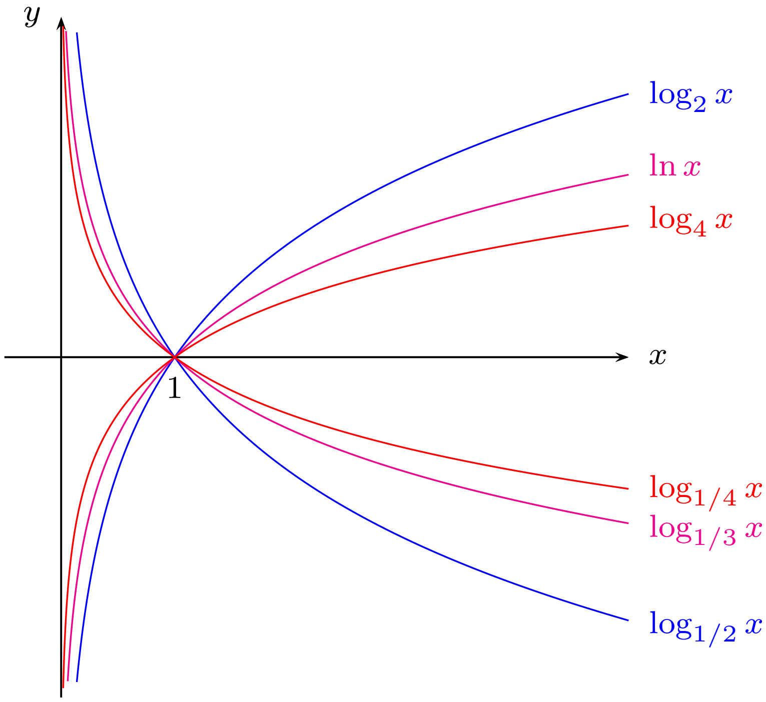


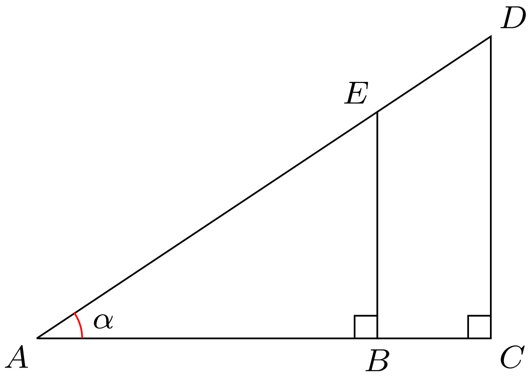
Gráfico de funções logarítmicas

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos
- O conjunto dos números reais
- Generalidades sobre funções
- Funções polinomiais, funções racionais e função módulo
- Função inversa e composição de funções
- Função exponencial e função logarítmica
- Funções trigonométricas e suas inversas
  - Funções seno e cosseno
  - Funções tangente e cotangente
  - Funções secante e cossecante
  - Propriedades das funções trigonométricas
  - Funções trigonométricas inversas
- Funções hiperbólicas

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

3 Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$

4 Cálculo integral em $\mathbb{R}$



$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$$

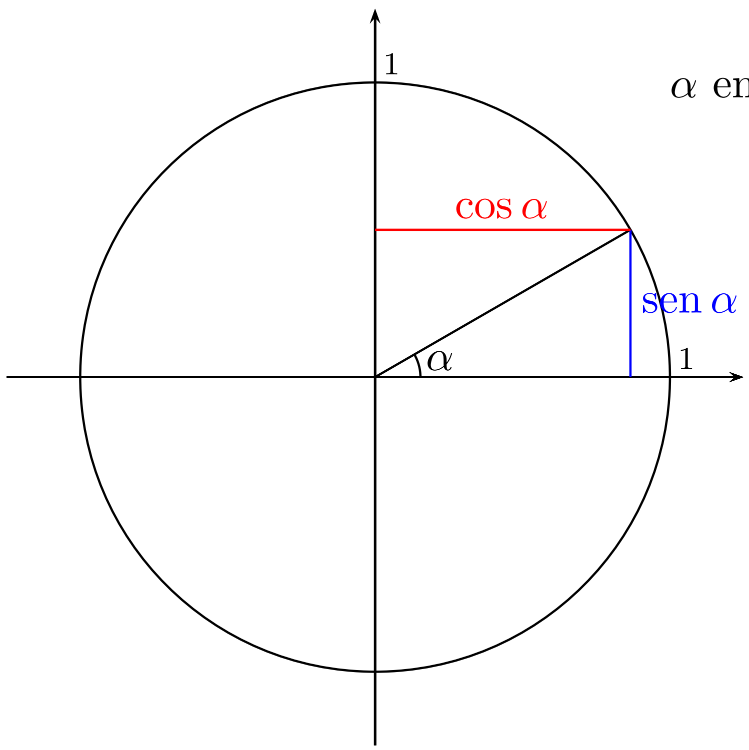
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

- seno:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{comprimento do cateto oposto}}{\text{comprimento da hipotenusa}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$$

- cosseno:

$$\cos\alpha = \frac{\text{comprimento do cateto adjacente}}{\text{comprimento da hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$



α em radianos

As funções **seno** e **cosseno**, cujo domínio é o conjunto dos números reais, fazem corresponder a cada $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \cos x,$$

respectivamente. O contradomínio destas duas funções é o intervalo $[-1, 1]$.

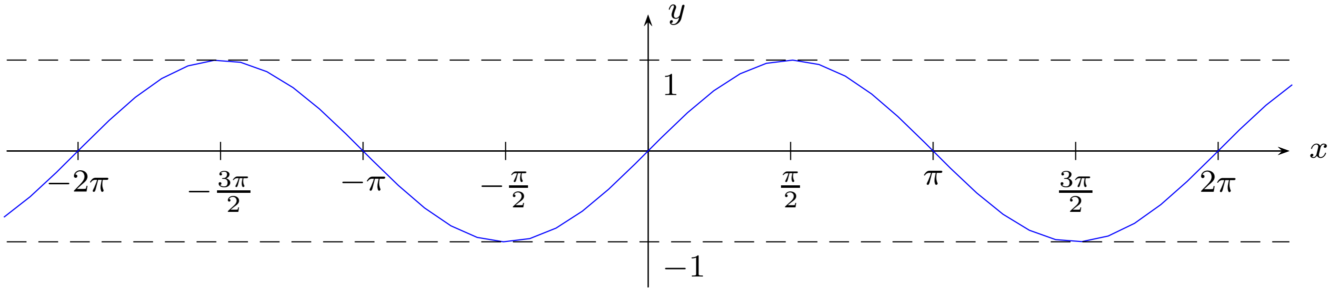


Gráfico da função seno

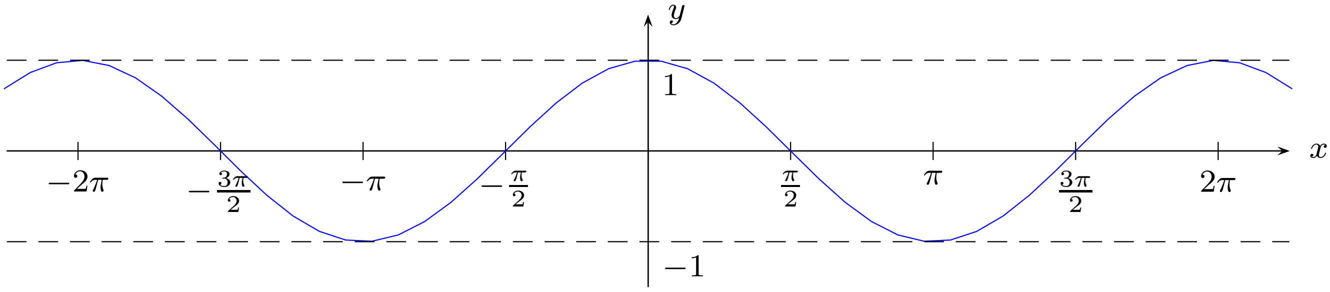


Gráfico da função cosseno

Outra função trigonométrica importante é a função **tangente**, definida pela fórmula

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

que está definida para todos os pontos x tais que $\cos x \neq 0$, ou seja, o domínio da função tangente é o conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

O seu contradomínio é o conjunto dos números reais.

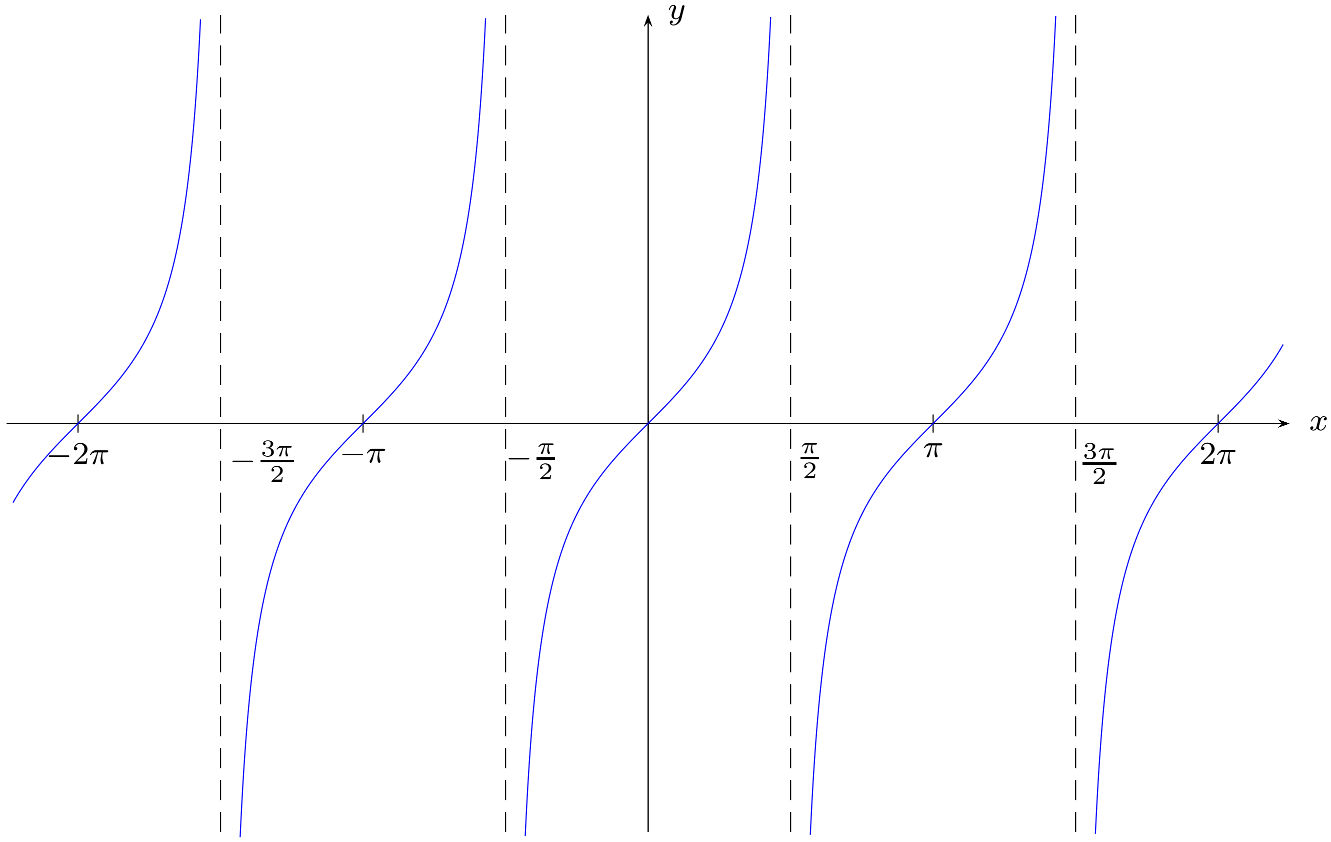


Gráfico da função tangente

A função **cotangente** é dada pela expressão

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

O seu domínio é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

e o contradomínio é o conjunto dos números reais.

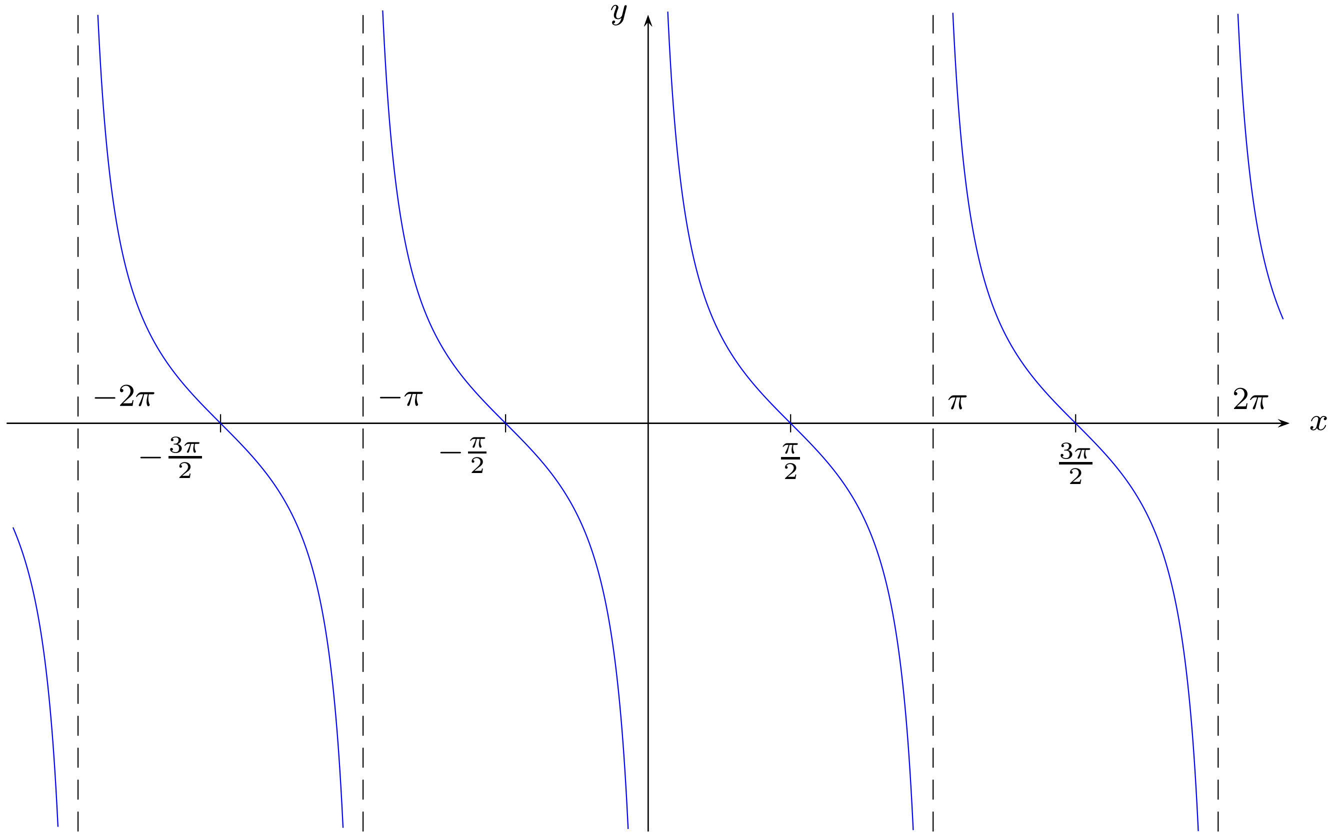
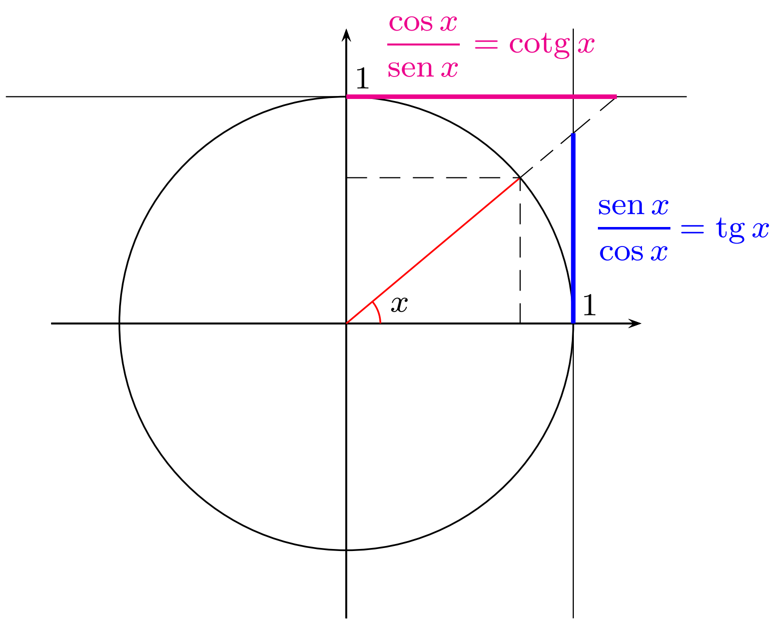


Gráfico da função cotangente



A função **secante** é definida por

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

o seu domínio é o conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

e o seu contradomínio é o conjunto

$$]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

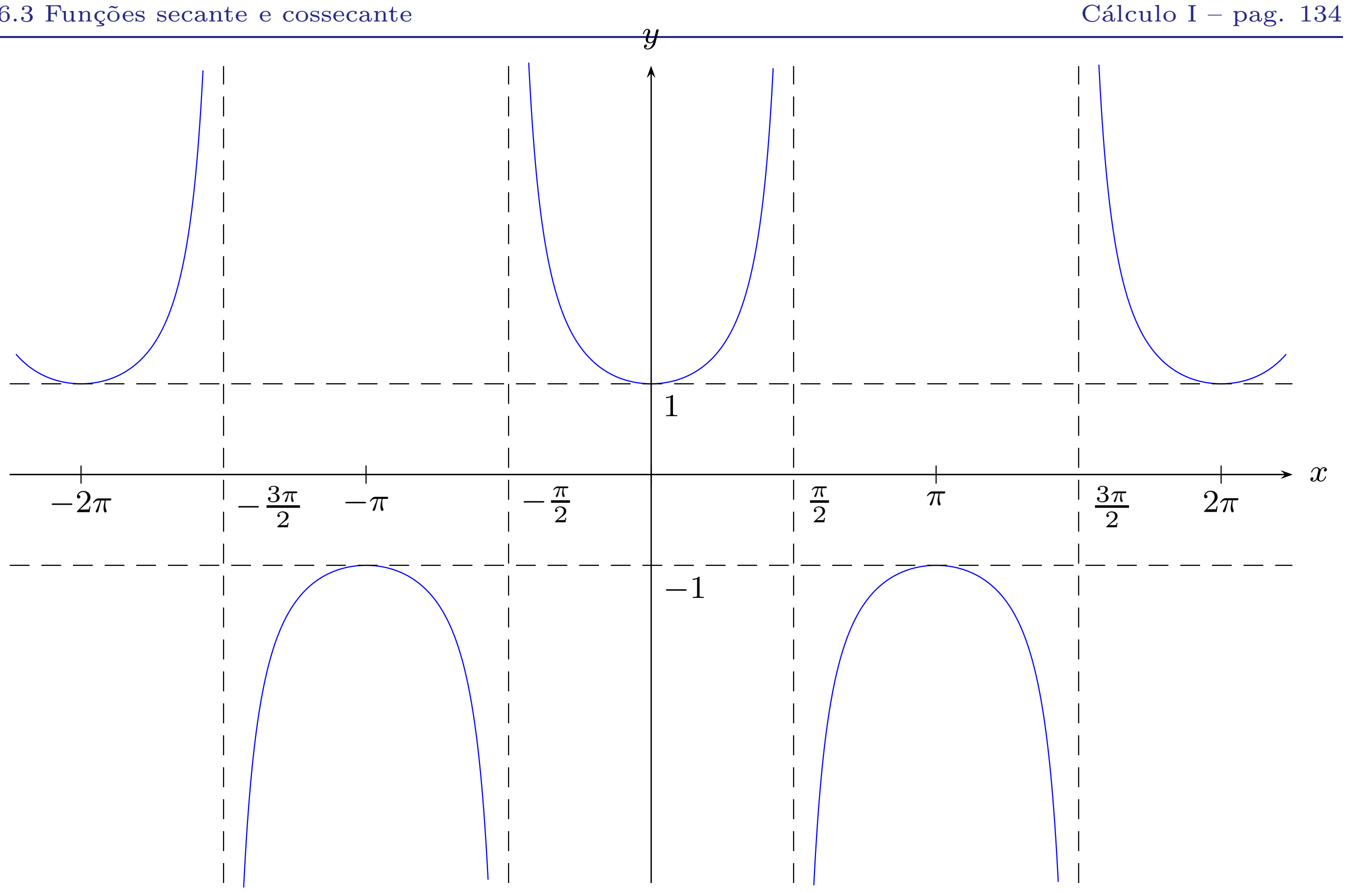


Gráfico da função secante

A função **cossecante** é definida por

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

o seu domínio é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

e o seu contradomínio é o conjunto

$$]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

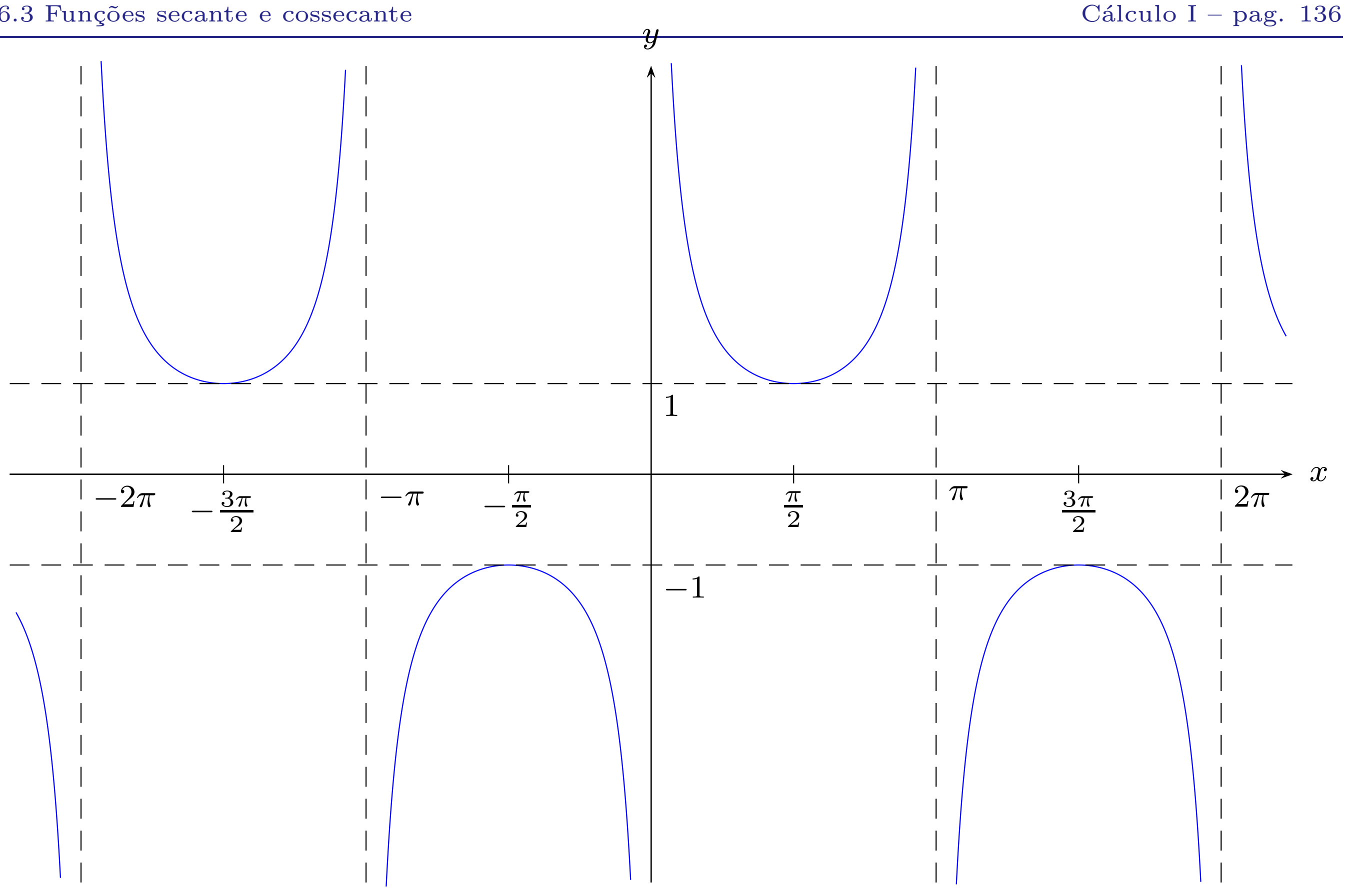


Gráfico da função cossecante

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	0	n.d.
cotangente	n.d.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	n.d.	0

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Desta fórmula resultam imediatamente as seguintes fórmulas

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{e} \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

que podem ser reescritas da seguinte forma

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \qquad \text{e} \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Reduções ao primeiro quadrante

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$

$\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen}(\pi/2 + x) = \cos x$

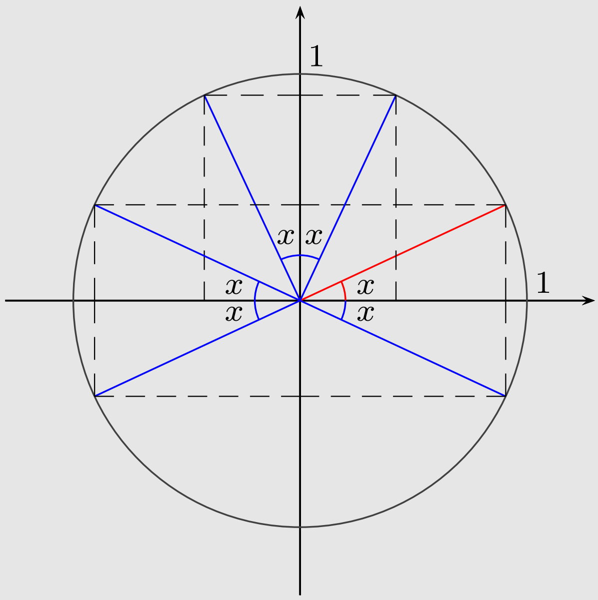
$\cos(\pi/2 + x) = -\operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$



Reduções ao primeiro quadrante (continuação)

$\operatorname{sen}(3\pi/2 - x) = -\cos x$

$\cos(3\pi/2 - x) = -\operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen}(3\pi/2 + x) = -\cos x$

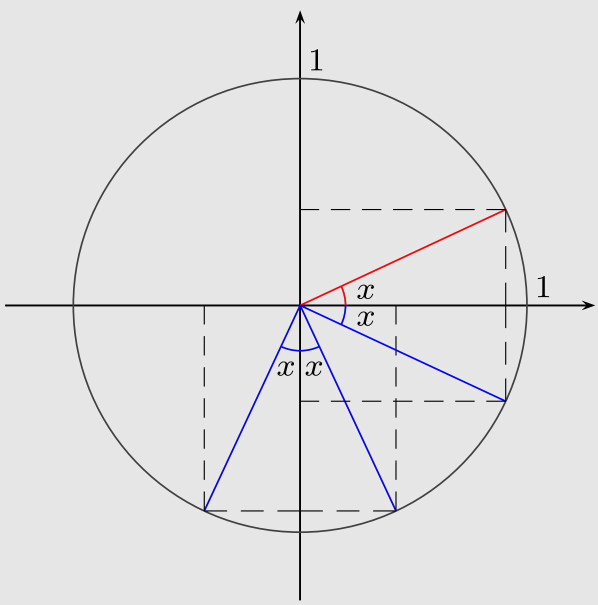
$\cos(3\pi/2 + x) = \operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x$

$\cos(2\pi - x) = \cos x$

$\operatorname{sen}(2\pi + x) = \operatorname{sen} x$

$\cos(2\pi + x) = \cos x$



Reduções ao primeiro quadrante (continuação)

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$

$\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg}(x)$

$\operatorname{tg}(\pi/2 - x) = \operatorname{cotg} x$

$\operatorname{cotg}(\pi/2 - x) = \operatorname{tg} x$

$\operatorname{tg}(\pi/2 + x) = -\operatorname{cotg} x$

$\operatorname{cotg}(\pi/2 + x) = -\operatorname{tg} x$

$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$

$\operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg} x$

$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$

$\operatorname{cotg}(\pi + x) = \operatorname{cotg} x$

Resolução de equações trigonométricas

$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$$

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

A função seno não é injectiva pelo que não tem inversa. No entanto, considerando a restrição da função seno ao intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, a que se chama **restrição principal**, ou seja, considerando a função

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},$$

definida por

$$f(x) = \operatorname{sen} x,$$

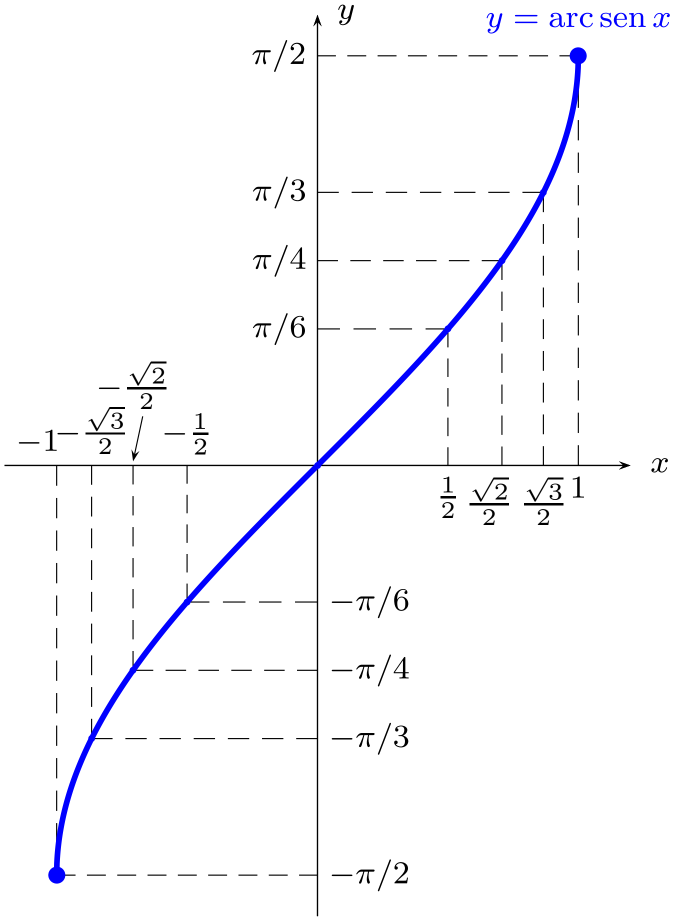
tem-se que a função f é injectiva. À inversa desta função chama-se **arco seno** e representa-se por arc sen. Assim,

$$\operatorname{arc\,sen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

e é definida da seguinte forma

$$\operatorname{arc\,sen} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} y \ \wedge \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

x	$\operatorname{arc\,sen} x$
0	0
1	$\pi/2$
-1	$-\pi/2$
$1/2$	$\pi/6$
$-1/2$	$-\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$



Considerando a restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$, ou seja, a função

$$g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$$

definida por

$$g(x) = \cos x,$$

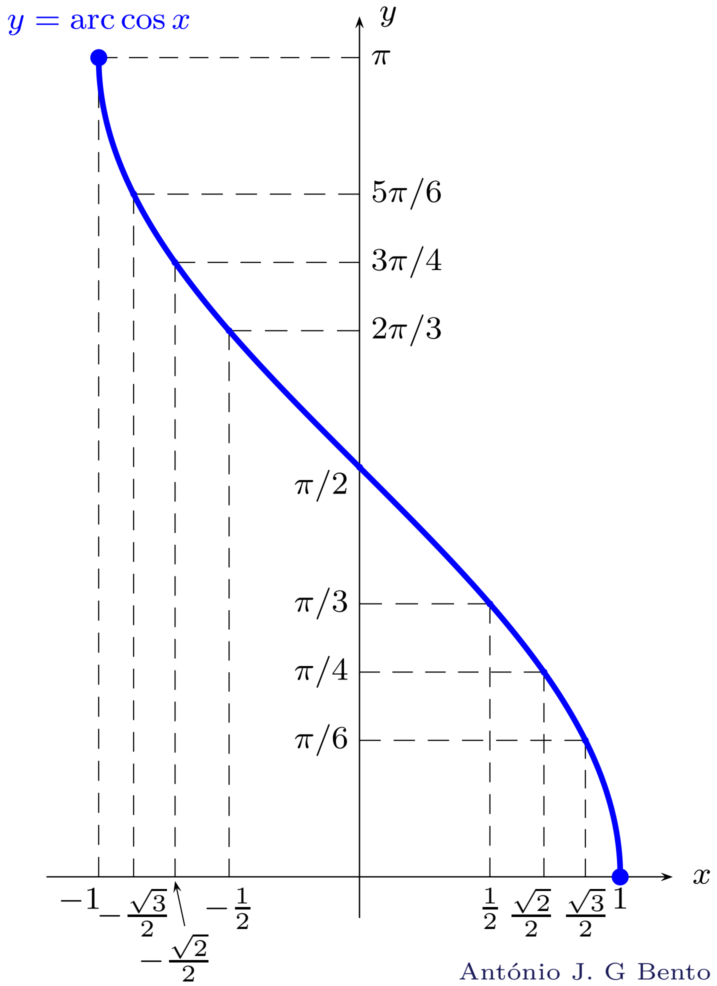
tem-se que g é uma função injectiva. A inversa desta função representa-se por $\operatorname{arc}\cos$ e chama-se **arco cosseno**. Assim,

$$\operatorname{arc}\cos : \ [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

é a função definida por

$$\operatorname{arc}\cos x = y \Leftrightarrow x = \cos y \ \wedge \ y \in [0, \pi] \, .$$

x	$\operatorname{arc}\cos x$
0	$\pi/2$
1	0
-1	π
$1/2$	$\pi/3$
$-1/2$	$2\pi/3$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$-\sqrt{2}/2$	$3\pi/4$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$
$-\sqrt{3}/2$	$5\pi/6$



Seja

$$h : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

a função definida por

$$h(x) = \operatorname{tg} x.$$

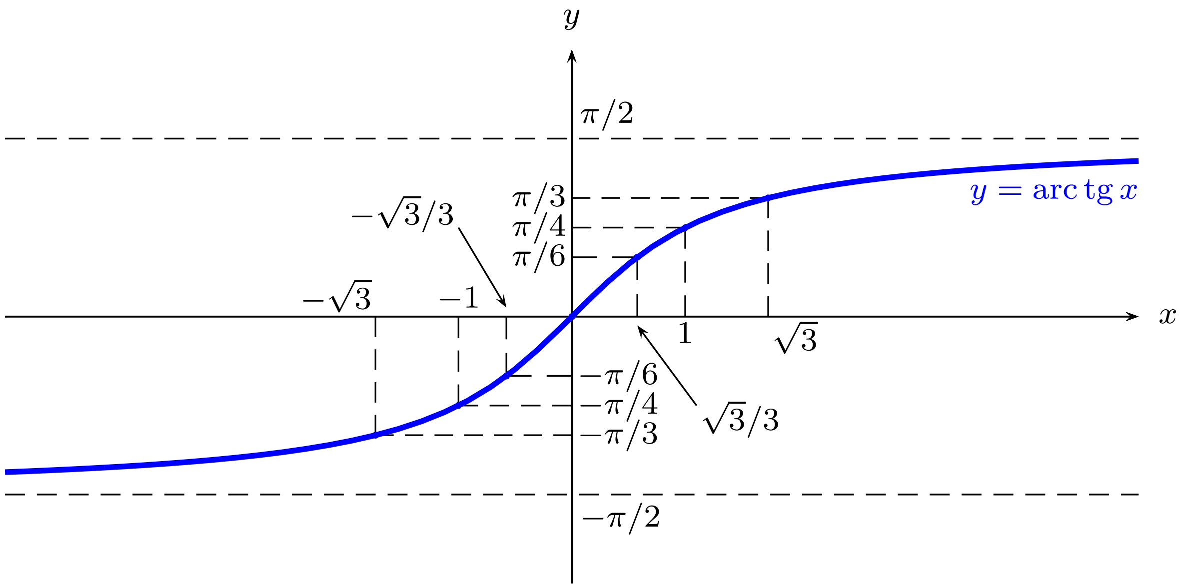
A função h é injectiva, pelo que h tem inversa. A inversa desta função representa-se por $\operatorname{arc\,tg}$ e chama-se **arco tangente**. Assim

$$\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

é a função definida por

$$\operatorname{arc\,tg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \;\wedge\; y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

x	0	1	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{arc\,tg} x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$



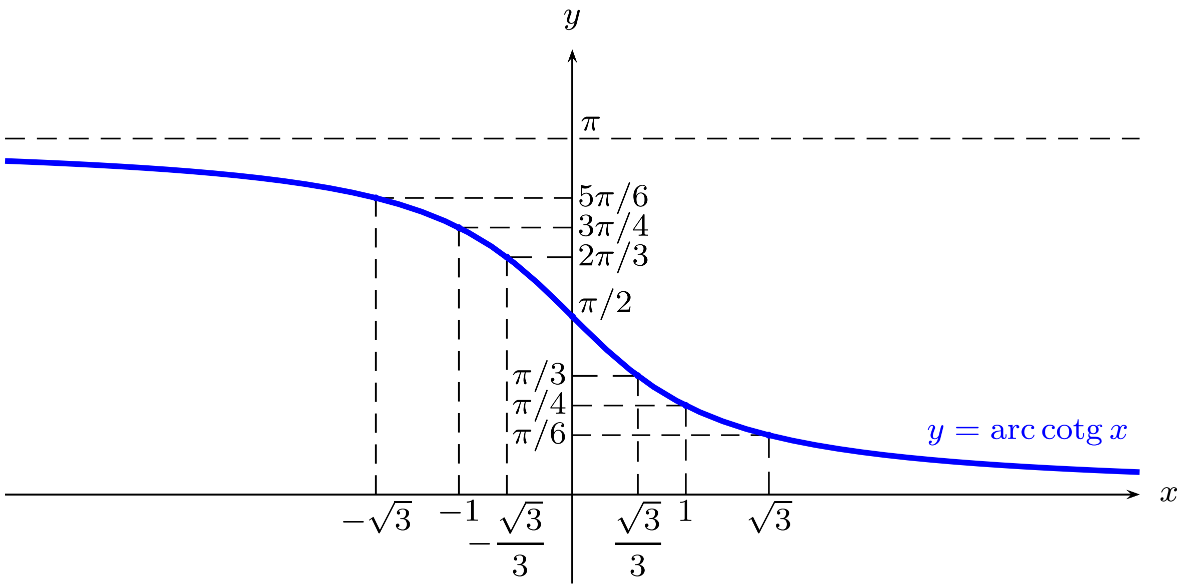
À inversa da restrição ao intervalo $]0,\pi[$ da função cotangente chamamos **arco cotangente** e representamos essa função por $\operatorname{arc\,cotg}$. Assim,

$$\operatorname{arc\,cotg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

é a função definida por

$$\operatorname{arc\,cotg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{cotg} y \ \wedge \ y \in \,]0,\pi[\,.$$

x	0	1	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{arc\,cotg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$



	Domínio	Contradomínio	Regra
arc sen	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$\operatorname{arc\,sen} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} y \ \wedge \ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
arc cos	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y \ \wedge \ y \in [0,\pi]$
arc tg	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$	$\operatorname{arc\,tg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \ \wedge \ y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
arc cotg	$\mathbb{R}$	$]0,\pi[$	$\operatorname{arc\,cotg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{cotg} y \ \wedge \ y \in]0,\pi[$

As funções

$$\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definidas por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

designam-se por **seno hiperbólico** e por **cosseno hiperbólico**, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh} x = y &\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\
&\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \\
&\Leftrightarrow e^x - e^{-x} - 2y = 0 \\
&\Leftrightarrow e^{2x} - 2y\, e^x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} \ \vee\ \cancel{e^x = \frac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2}} \\
&\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1} \\
&\Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)
\end{aligned}$$

Logo o contradomínio do seno hiperbólico é $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
\cosh x = y \;&\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = y\\
&\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2y\\
&\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2y = 0\\
&\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^x + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2-4}}{2} \;\vee\; \mathrm{e}^x = \frac{2y - \sqrt{4y^2-4}}{2}\\
&\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2-1} \;\vee\; \mathrm{e}^x = y - \sqrt{y^2-1}\\
&\Leftrightarrow\; x = \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \;\vee\; x = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right)
\end{aligned}
$$

Assim, o contradomínio de cosh é o intervalo $[1, +\infty[$.

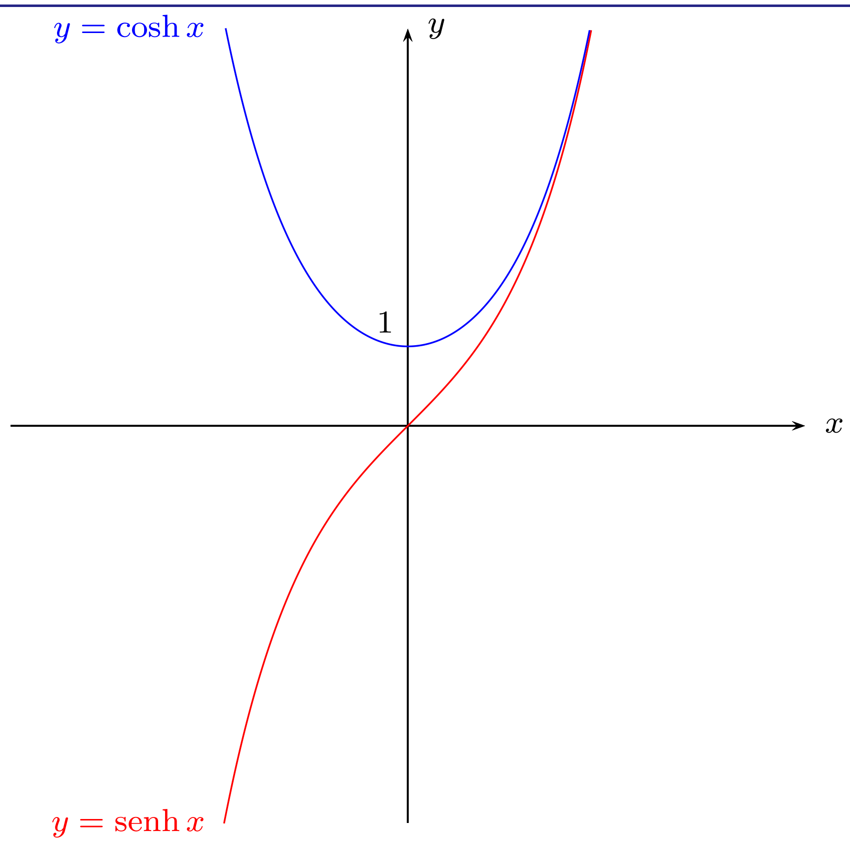


Gráfico das funções seno e cosseno hiperbólico

Associada a estas funções está a função **tangente hiperbólica**. A tangente hiperbólica é a função

$$\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tgh} x = y \ &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = y \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 1 = y\,\mathrm{e}^{2x} + y \\
&\Leftrightarrow (1 - y)\,\mathrm{e}^{2x} = y + 1 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = \frac{y + 1}{1 - y} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y + 1}{1 - y}\right)
\end{aligned}$$

Assim, temos de ter $\dfrac{y+1}{1-y} > 0$, o que é equivalente a $-1 < y < 1$. Logo o contradomínio da tangente hiperbólica é o intervalo $]-1, 1[$.

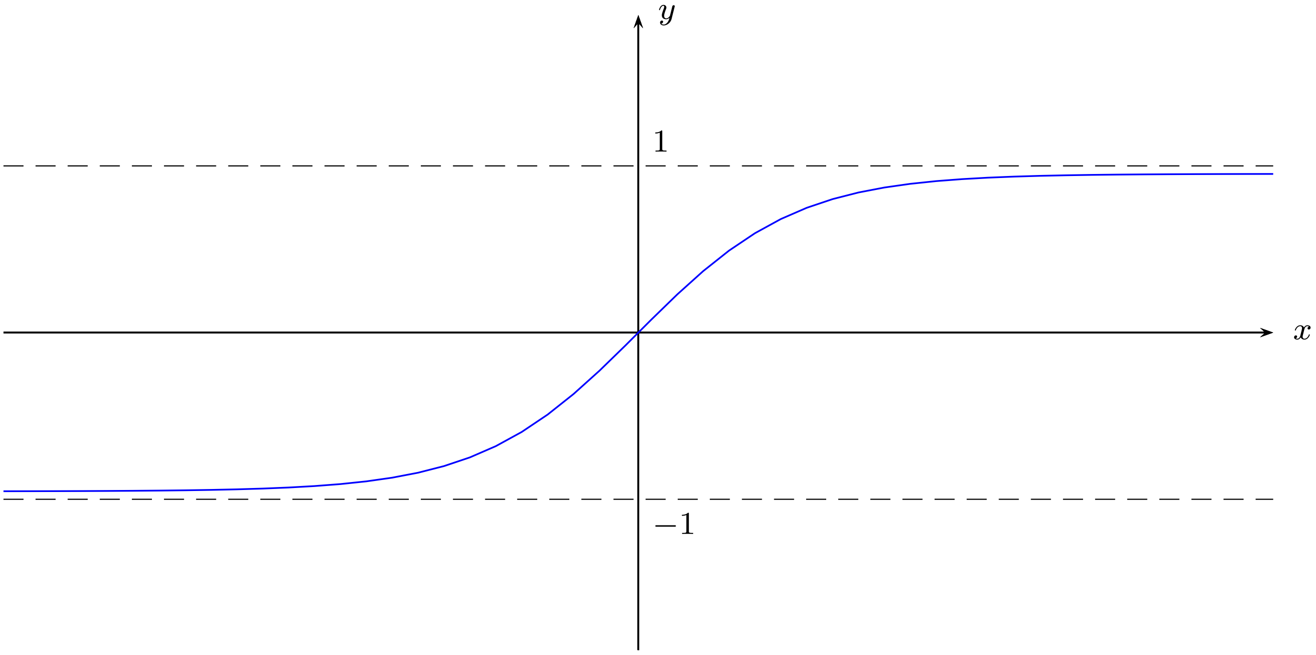


Gráfico da função tangente hiperbólica

É fácil mostrar que as seguintes igualdades são válidas:

a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

b) $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

c) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \operatorname{senh} y \cosh x$

d) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade
- Breves noções de topologia em $\mathbb{R}$
- Limites de funções reais de variável real
- Funções contínuas
- Limites infinitos, limites no infinito e assímptotas

3 Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$

4 Cálculo integral em $\mathbb{R}$

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se **interior** a A

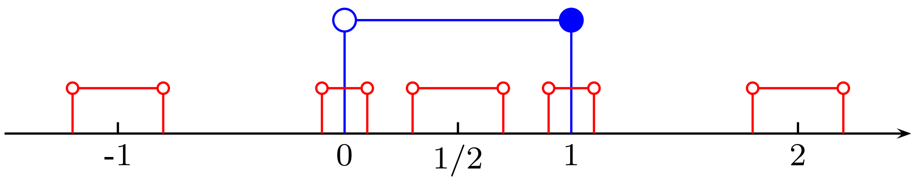
$$\text{se existir } \varepsilon > 0 \text{ tal que }]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq A.$$

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se **exterior** a A

$$\text{se existir } \varepsilon > 0 \text{ tal que }]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A = \varnothing$$
$$(\text{ou seja, }]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq \mathbb{R} \setminus A).$$

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se **fronteiro** a A se não for interior, nem exterior, isto é, a é um ponto fronteiro de A

se para cada $\varepsilon > 0$, $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing$ e $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \varnothing$.



Seja A o conjunto $]0,1]$. Então

$\frac{1}{2}$ é um ponto interior a A,

2 é um ponto exterior a A,

-1 é um ponto exterior a A,

0 é um ponto fronteiro a A e

1 é um ponto fronteiro a A.

O conjunto dos pontos interiores a A designa-se por **interior** de A e representa-se por

$$\operatorname{int} A \quad \text{ou} \quad A^\circ,$$

o conjunto dos pontos exteriores a A chama-se **exterior** de A e representa-se por

$$\operatorname{ext} A$$

e o conjunto dos pontos fronteiros a A diz-se a **fronteira** de A e representa-se por

$$\operatorname{fr} A.$$

Exemplos

a) Para o intervalo $A =]0,1]$ temos

$$\operatorname{int} A =]0,1[, \quad \operatorname{ext} A =]-\infty, 0[\,\cup\,]1,+\infty[\;\text{ e }\; \operatorname{fr} A = \{0,1\}\,.$$

b) Considerando o intervalo $I =]a,b[$, com $a < b$, verifica-se imediatamente que

$$\operatorname{int} I =]a,b[, \quad \operatorname{ext} I =]-\infty, a[\,\cup\,]b,+\infty[\;\text{ e }\; \operatorname{fr} I = \{a,b\}\,.$$

c) Os intervalos $]a,b]$, $[a,b[$ e $[a,b]$, onde $a < b$, têm o mesmo interior, o mesmo exterior e a mesma fronteira que o intervalo $]a,b[$.

d) Tem-se $\operatorname{int} \mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\operatorname{ext} \mathbb{R} = \varnothing$ e $\operatorname{fr} \mathbb{R} = \varnothing$.

e) Além disso, $\operatorname{int} \varnothing = \varnothing$, $\operatorname{ext} \varnothing = \mathbb{R}$ e $\operatorname{fr} \varnothing = \varnothing$.

a) Da definição resulta imediatamente que

$$\operatorname{int} A, \qquad \operatorname{ext} A \qquad \text{e} \qquad \operatorname{fr} A$$

são conjuntos disjuntos dois a dois e que

$$\mathbb{R} = \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \operatorname{fr} A.$$

b) Outra consequência imediata da definição é o seguinte

$$\operatorname{ext} A = \operatorname{int}\, (\mathbb{R} \setminus A) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{fr} A = \operatorname{fr}\, (\mathbb{R} \setminus A)\,.$$

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se **aderente** a um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\text{se para cada } \varepsilon > 0,\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing.$$

O conjunto dos pontos aderentes de um conjunto A designa-se por **aderência** ou **fecho** de A e representa-se por

$$\overline{A}.$$

Das definições resulta que

$$\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A$$

e

$$\operatorname{int} A \subseteq A \subseteq \overline{A}.$$

Exemplos

a) Se $A =]0,1[$, então $\overline{A} = [0,1]$.

b) Dado $I = [a,b]$, com $a < b$, temos

$$\overline{I} = [a,b].$$

c) Os intervalos $]a,b[$, $[a,b[$ e $]a,b]$, onde $a < b$, têm a mesma aderência que o intervalo $[a,b]$.

d) Seja $A = [1,2[\cup \{3,4\}$. Então

$$\overline{A} = [1,2] \cup \{3,4\}.$$

e) Obviamente, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ e $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e a um número real. Diz-se que a é um **ponto de acumulação** de A

$$\text{se para cada } \varepsilon > 0,\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap (A \setminus \{a\}) \neq \varnothing.$$

O conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto A representa-se por

$$A'$$

e designa-se por **derivado**. Os pontos de A que não são pontos de acumulação de A designam-se por **pontos isolados**.

Exemplos

a) O derivado do intervalo $I = [a, b[$, com $a < b$, é o conjunto

$$I' = [a, b]$$

b) Os intervalos $]a, b[$, $]a, b]$ e $[a, b]$, onde $a < b$, têm o mesmo derivado que o intervalo $[a, b[$.

c) Seja $A =]0, 2] \cup \{3\}$. Então

$$\operatorname{int} A =]0, 2[,$$

$$\operatorname{ext} A =]-\infty, 0[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[,$$

$$\operatorname{fr} A = \{0, 2, 3\},$$

$$\overline{A} = [0, 2] \cup \{3\} \text{ e}$$

$$A' = [0, 2].$$

d) $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$ e $\varnothing' = \varnothing$.

Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ diz-se **aberto** se

$$A = \operatorname{int} A$$

e diz-se **fechado** se

$$A = \overline{A}.$$

Exemplos

a) Como

$$\operatorname{int} \left]0,1\right[\; = \left]0,1\right[,$$

temos que $]0,1[$ é um conjunto aberto. Por outro lado,

$$\overline{\left]0,1\right[} \; = [0,1]$$

e, por conseguinte, $]0,1[$ não é fechado.

b) O intervalo $[0,1]$ é um conjunto fechado porque

$$\overline{[0,1]} = [0,1]$$

e não é um conjunto aberto porque

$$\operatorname{int} [0,1] = \left]0,1\right[.$$

c) Os conjuntos $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ são simultaneamente abertos e fechados.

Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, a um ponto de acumulação de D e $b \in \mathbb{R}$. Diz-se que b é o **limite (de f) quando x tende para a**, e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Simbolicamente, tem-se o seguinte

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D \, (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

Tendo em conta que

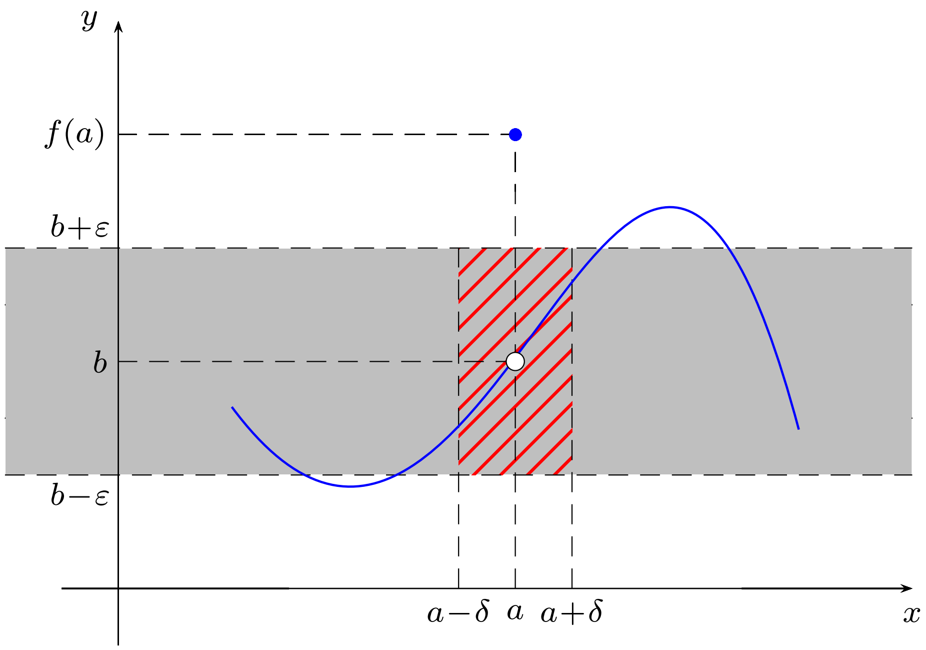
$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow x \in \,]a - \delta, a + \delta[\, \setminus \{a\}$$

e que

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in \,]b - \varepsilon, b + \varepsilon[,$$

tem-se o seguinte

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D \ (x \in \,]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in \,]b - \varepsilon, b + \varepsilon[) \, .$$



Interpretação geométrica do conceito de limite de uma função

Propriedades dos limites

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D. Suponhamos que existem $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Então

a) existe $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ e

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x);$$

b) existe $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)]$ e

$$\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right] . \left[\lim_{x\to a} g(x)\right];$$

c) se $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Propriedades dos limites (continuação)

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D. Suponhamos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

e que g é uma função limitada em $D \cap]a-\delta, a+\delta[$ para algum $\delta > 0$, isto é, existe $c > 0$ tal que

$$|g(x)| \leqslant c \text{ para qualquer } x \in]a-\delta, a+\delta[\cap D.$$

Então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

Propriedades dos limites (continuação)

Sejam

$$f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

duas funções reais de variável real. Suponhamos que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de D_f e que $b \in D_g$ é um ponto de acumulação de D_g. Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to b} g(x) = g(b),$$

então

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to a} g(f(x)) = g(b).$$

Um dos limites mais conhecidos é o seguinte

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.}$$

A partir deste limite podemos calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$. Fazendo a mudança de variável $\ln(1+x) = y$, tem-se $x = \mathrm{e}^y - 1$ e quando $x \to 0$ tem-se $y \to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{e}^y - 1} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^y - 1}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Logo

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.}$$

Outro limite bastante importante é o seguinte:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.}$$

Usando este limite podemos calcular vários outros limites. Por exemplo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{1}\cdot 1 = 1.$$

Portanto

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.}$$

Provemos que

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x} = 1} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = 1}.$$

No primeiro limite fazemos a mudança de variável $\operatorname{arc\,sen} x = y$ e obtemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{sen} y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Para o segundo limite fazemos a mudança de variável $y = \operatorname{arc\,tg} x$ e vem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{tg} y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Sejam A um subconjunto de $D \subseteq \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação de A e

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

Chama-se **limite de f no ponto a relativo a A** (ou **limite quando x tende para a no conjunto A**) ao limite em a (quando exista) da restrição de f a A e usa-se a notação

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x).$$

É evidente que se existe

$$\lim_{x \to a} f(x),$$

então também existe

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$$

para qualquer subconjunto A de D do qual a é ponto de acumulação de A e

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \lim_{x \to a} f(x).$$

Assim, se existirem dois limites relativos distintos, o limite não existe.

Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Então

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = 1$$

e

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} f(x) = 0$$

qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. Logo não existe

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e consideremos os conjuntos

$$D_a^+ = \{x \in D : x > a\} = D \cap]a, +\infty[$$

e

$$D_a^- = \{x \in D : x < a\} = D \cap]-\infty, a[.$$

Definem-se, respectivamente, os **limites laterais à direita** e **à esquerda** da seguinte forma

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D_a^+}} f(x)$$

e

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D_a^-}} f(x),$$

desde que a seja ponto de acumulação de D_a^+ e de D_a^-, respectivamente.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Esta função é conhecida por **função de Heaviside**. É óbvio que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in]0,+\infty[}} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

e

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in]-\infty,0[}} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$$

Observações

a) É óbvio que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$ é equivalente a

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A\ \ (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)\,.$$

b) Como

$$x \in D_a^- \quad \text{e} \quad 0 < |x-a| < \delta$$

é equivalente a

$$x \in D \quad \text{e} \quad -\delta < x - a < 0$$

e, portanto, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$ é equivalente a

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D\ \ (-\delta < x-a < 0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)\,.$$

Analogamente, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$ é equivalente a

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D\ \ (0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)\,.$$

Propriedade dos limites laterais

Sejam

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

a um ponto de acumulação de D_a^+ e D_a^- e $b \in \mathbb{R}$. Então

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

se e só se existem e são iguais a b os limites laterais no ponto $x = a$, ou seja,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$. Diz-se que f é **contínua no ponto** a se para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

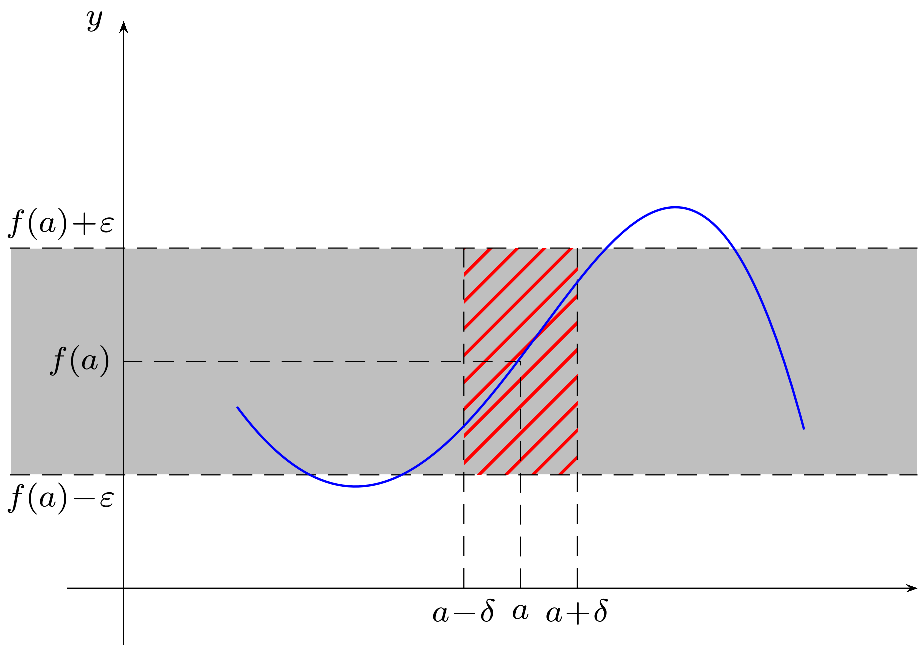
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } |x - a| < \delta.$$

Simbolicamente,

$$f \text{ é contínua em } a$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$

Dizemos que $a \in D$ é um **ponto de descontinuidade** de f se f não é contínua em a.

Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é **contínua** se for contínua em todos os pontos de D.



Interpretação geométrica do conceito de função contínua num ponto

Observações

a) Ao contrário do que acontece na definição de limite, só faz sentido considerar pontos do domínio D quando estamos a investigar a continuidade de uma função.

b) Se a é um ponto isolado de D, então a função $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua em a. De facto, dado $\varepsilon > 0$, basta escolher $\delta > 0$ tal que

$$]a-\delta, a+\delta[\cap D = \{a\}\,.$$

Assim, a condição $x \in D \wedge |x-a| < \delta$ é equivalente a $x = a$ e, por conseguinte,

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon.$$

c) Se $a \in D$ é um ponto de acumulação de D, então $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua em a se e só se

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Propriedades da continuidade

a) Sejam $f, g \colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $a \in D$. Então

$$f+g,\ f-g \text{ e } fg \text{ são contínuas em } a$$

e se $g(a) \neq 0$ então

$$\frac{f}{g} \text{ é contínua em } a.$$

b) Sejam $f \colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g \colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Se f é contínua em $a \in D_f$ e g é contínua em $f(a) \in D_g$, então

$$g \circ f \text{ é contínua em } a.$$

Exemplos

a) As funções **constante** são contínuas.

b) A função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ é contínua. Esta função designa-se por **identidade**.

c) As funções **polinomiais**, ou seja, as funções $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$, são funções contínuas.

d) As funções **racionais**, ou seja, as funções dadas por

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{m-1} \in \mathbb{R}$ e $a_n, b_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, são funções contínuas.

Exemplos (continuação)

e) A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é contínua.

f) As funções definidas por $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, são contínuas.

g) As funções exponencial e logarítmica são funções contínuas.

h) As funções trigonométricas são funções contínuas.

i) As inversas das funções trigonométricas são funções contínuas.

j) A função definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(e^{x^2-x} + \frac{\ln(x-2)}{\operatorname{arc\,tg}(x-5)}\right)$$

é uma função contínua pois é a composição de funções contínuas.

Exemplos (continuação)

k) A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

não é contínua em $x = 0$ porque não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Obviamente, a função é contínua em qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

l) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Então f não é contínua em $x = 0$ porque

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq f(0) = 0.$$

É claro que a função é contínua em qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in D$. Diz-se que a função f é **contínua em a à direita** se

a restrição de f a $D \cap [a, +\infty[$ é contínua em a.

A função diz-se **contínua em a à esquerda** se

a restrição de f a $D \cap]-\infty, a]$ é contínua em a.

Assim, f é contínua à direita em a se e só se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ (0 \leqslant x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,,$$

e é contínua à esquerda em a se e só se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ (-\delta < x - a \leqslant 0 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$

Obviamente, se a é um ponto de acumulação de $D \cap]a, +\infty[$, então

$$f \text{ é contínua à direita em } a \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e caso a seja um ponto de acumulação de $D \cap]-\infty, a[$ temos

$$f \text{ é contínua à esquerda em } a \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Propriedade

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$. Então f é contínua em a se e só se é contínua à esquerda e à direita em a.

Teorema de Bolzano ou dos valores intermédios

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e

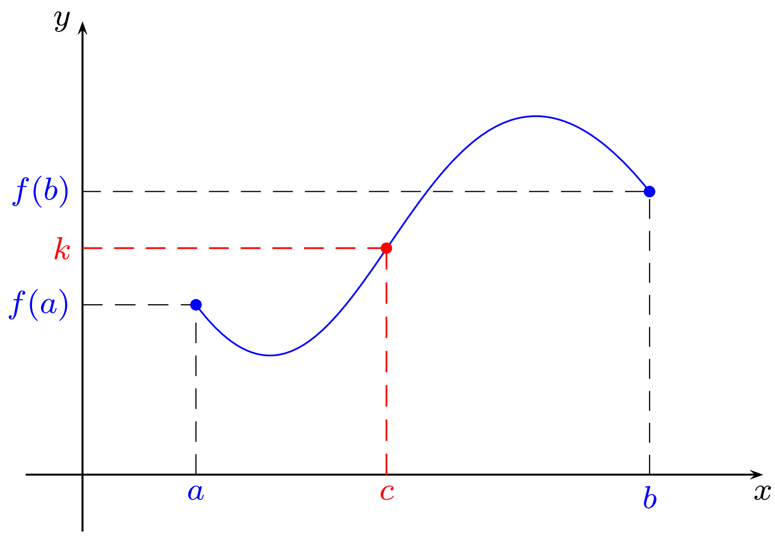
$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

uma função contínua tal que

$$f(a) \neq f(b).$$

Então para qualquer valor k entre $f(a)$ e $f(b)$, existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = k.$$



Interpretação geométrica do Teorema de Bolzano

Corolário do Teorema de Bolzano

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e seja

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

uma função contínua tal que

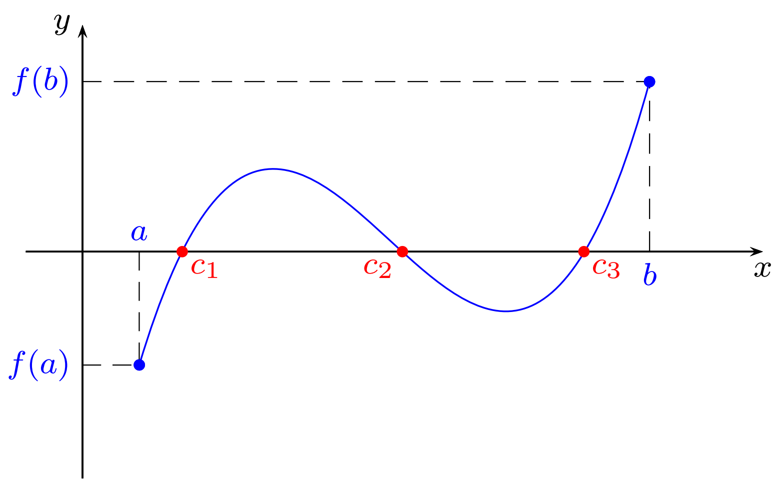
$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Então existe

$$c \in \,]a, b[$$

tal que

$$f(c) = 0.$$



Interpretação geométrica do Corolário do Teorema de Bolzano

Exemplo

Provemos que a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - x^2$$

tem (pelo menos) um zero em $[0,1]$. Obviamente, esta função é contínua pois é a composição de funções contínuas. Como

$$f(0)f(1) = \left(\cos(0) - 0^2\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1^2\right) = 1(-1) = -1,$$

pelo (Corolário do) Teorema de Bolzano, f tem de ter pelo menos um zero no intervalo $]0,1[$.

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida num subconjunto não vazio D.

Dizemos que f tem um **máximo (absoluto)** no ponto $a \in D$ ou que $f(a)$ é um **máximo (absoluto)** de f se

$$f(x) \leqslant f(a) \text{ para todo o } x \in D.$$

Quando

$$f(x) \geqslant f(a) \text{ para todo o } x \in D,$$

dizemos que f tem um **mínimo (absoluto)** no ponto $a \in D$ ou que $f(a)$ é um **mínimo (absoluto)** de f.

Os máximos e mínimos (absolutos) de f dizem-se **extremos absolutos** de f.

Teorema de Weierstrass

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, fechado e limitado e

$$f : D \to \mathbb{R}$$

uma função contínua. Então f tem máximo e mínimo absolutos.

Corolário

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

uma função contínua. Então f tem máximo e mínimo absolutos.

Exemplo

Seja $f\colon [1,5] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in [1,3], \\ \dfrac{\mathrm{e}^{2x-6} - 1}{x-3} & \text{se } x \in \,]3,5]. \end{cases}$$

Como

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x - 1 = 2$$

e

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{\mathrm{e}^{2x-6} - 1}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{\mathrm{e}^{2(x-3)} - 1}{2(x-3)}\, 2 = 1 \cdot 2 = 2,$$

temos $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2 = f(3)$. Assim, f é contínua no ponto $x = 3$. Além disso, em $[1,5] \setminus \{3\}$ a função é contínua pois é a composição de funções contínuas. Pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo absolutos em $[1,5]$.

Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D. Diz-se que

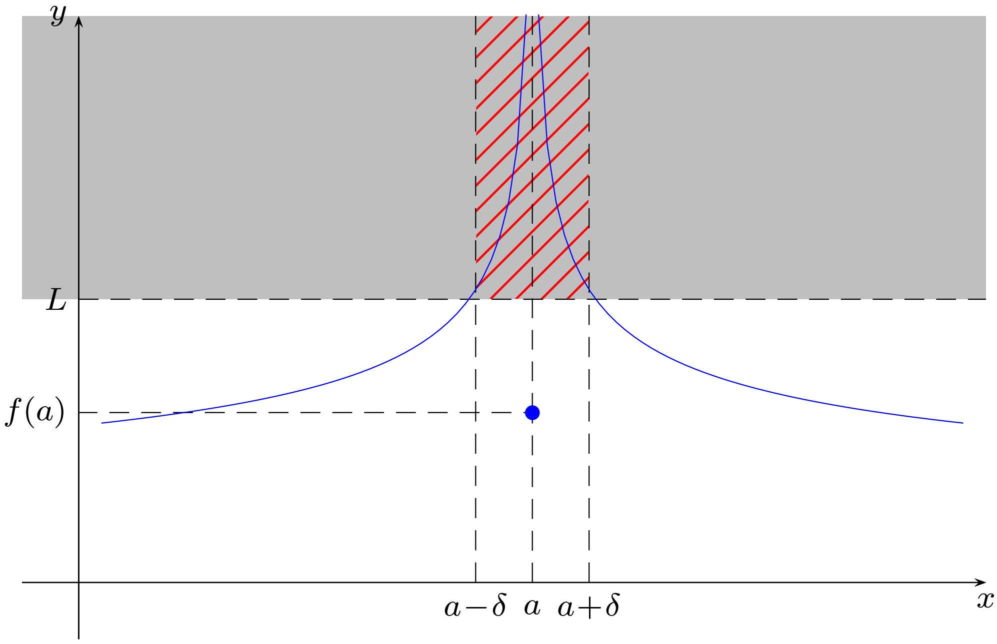
f tende para $+\infty$ quando x tende para a,

e escreve-se
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$
se para cada $L > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > L \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Simbolicamente,

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\, (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > L)\,.$$



Interpretação geométrica de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}$ não majorado, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $b \in \mathbb{R}$. Dizemos que

f tende para b quando x tende para $+\infty$,

e escreve-se

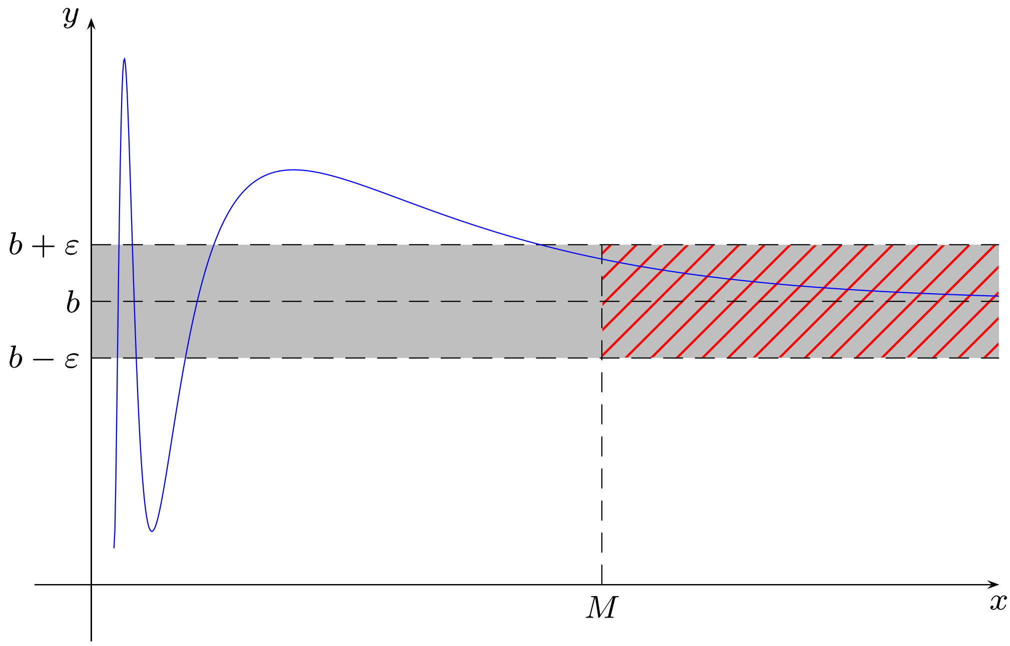
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b,$$

se para cada $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } x > M.$$

Simbolicamente,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x \in D\ \ (x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$



Interpretação geométrica de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$

Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}$ não majorado e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que

f **tende para** $+\infty$ **quando** x **tende para** $+\infty$,

e escreve-se

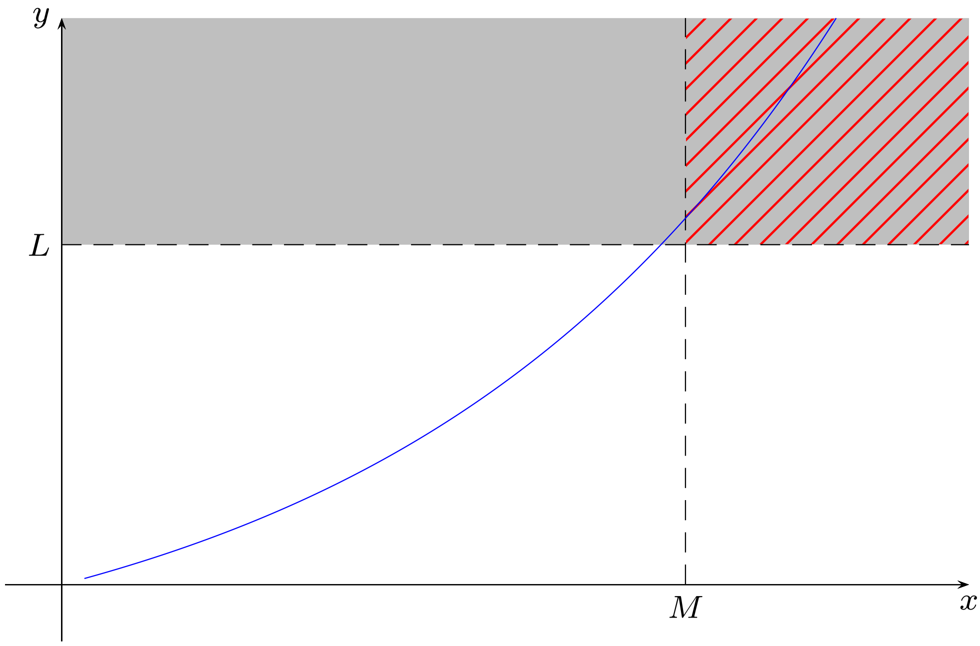
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

se para cada $L > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$f(x) > L \text{ para qualquer } x \in D \text{ tal que } x > M.$$

Formalmente,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0\ \exists M > 0\ \forall x \in D\ \ (x > M \Rightarrow f(x) > L)\,.$$



Interpretação geométrica de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

A partir dos três limites anteriores podemos definir os restantes casos. Assim,

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ se $\lim\limits_{x \to a} -f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = b$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se $\lim\limits_{x \to +\infty} -f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se $\lim\limits_{x \to +\infty} -f(-x) = +\infty$

Nos limites infinitos podemos usar a regra do limite da soma desde que se adoptem as convenções

$$
\begin{aligned}
&(+\infty) + a = +\infty = a + (+\infty)\\
&(-\infty) + a = -\infty = a + (-\infty)\\
&(+\infty) + (+\infty) = +\infty\\
&(-\infty) + (-\infty) = -\infty
\end{aligned}
$$

onde a é um número real qualquer.

Adoptando as convenções que se seguem, podemos usar a regra do limite do produto:

$$
\begin{aligned}
&(+\infty) \times a = +\infty = a \times (+\infty) \text{ onde } a \in \mathbb{R}^+\\
&(-\infty) \times a = -\infty = a \times (-\infty) \text{ onde } a \in \mathbb{R}^+\\
&(+\infty) \times a = -\infty = a \times (+\infty) \text{ onde } a \in \mathbb{R}^-\\
&(-\infty) \times a = +\infty = a \times (-\infty) \text{ onde } a \in \mathbb{R}^-\\
&(+\infty) \times (+\infty) = +\infty = (-\infty) \times (-\infty)\\
&(+\infty) \times (-\infty) = -\infty = (-\infty) \times (+\infty)
\end{aligned}
$$

A regra do limite do quociente mantém-se se se adoptarem as seguintes convenções

$$\begin{aligned} \frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} &= 0, \quad a \in \mathbb{R} \\ \frac{a}{0^+} &= +\infty, \quad a > 0 \\ \frac{a}{0^+} &= -\infty, \quad a < 0 \\ \frac{a}{0^-} &= -\infty, \quad a > 0 \\ \frac{a}{0^-} &= +\infty, \quad a < 0 \end{aligned}$$

onde 0^+ significa que

$f(x) \to 0$ e $f(x) > 0$ na intersecção do domínio com um intervalo aberto que contém o ponto em que estamos a calcular o limite

e 0^- significa que

$f(x) \to 0$ e $f(x) < 0$ na intersecção do domínio com um intervalo aberto que contém o ponto em que estamos a calcular o limite.

Não se faz nenhuma convenção para os símbolos

$$(+\infty) + (-\infty),$$

$$0 \times (+\infty), \quad 0 \times (-\infty),$$

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{+\infty}, \quad \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

pois são símbolos de indeterminação.

Exemplos

a) É óbvio que

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$

b) Seja $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Exemplos (continuação)

c) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1} & \text{se } x \geqslant 0, \\[2ex] \dfrac{-2x^2+3}{3x^2+8} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Então

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2+3}{3x^2+8} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(-2+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\dfrac{8}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2+\dfrac{3}{x^2}}{3+\dfrac{8}{x^2}} = -\frac{2}{3}.$$

Vejamos

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}}.$$

Comecemos por observar que

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}$$

e que fazendo a mudança de variável $y = 1/x$ temos

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}\,.$$

Outros limites importantes são os seguintes

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}}$$

e

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}}.$$

Destes limites resulta que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\ln x = -\infty}.$$

Exemplo

Consideremos uma função polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$a_n \neq 0$, de grau ímpar, ou seja, n é um número natural ímpar. Como

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = +\infty \cdot a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0, \\ -\infty & \text{se } a_n < 0, \end{cases}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = -\infty \cdot a_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } a_n > 0, \\ +\infty & \text{se } a_n < 0, \end{cases}$$

existem números reais a e b tais que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$. A continuidade de p implica, pelo Teorema de Bolzano, que p tem de ter um zero entre a e b. Assim, todos os polinómios de grau ímpar têm pelo menos um zero (real)!

Também existem limites laterais para limites infinitos:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$
$$\Leftrightarrow \forall L > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ \ (-\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) > L)$$

caso a seja um ponto da acumulação de D_a^- e

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$
$$\Leftrightarrow \forall L > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ \ (0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > L)$$

quando a é um ponto de acumulação de D_a^+.

Usando os limites anteriores podemos definir os seguintes limites:

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ se $\lim\limits_{x\to a^-} -f(x) = +\infty$;

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ se $\lim\limits_{x\to a^+} -f(x) = +\infty$.

Propriedade dos limites laterais

Sejam
$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
e a um ponto de acumulação de D_a^+ e D_a^-. Então
$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$
onde $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ ou $b = -\infty$, se e só se existem e são iguais a b os limites laterais no ponto $x = a$, ou seja,
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b.$$

Exemplos

a) É evidente que
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
e que
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

b) Também se tem
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
e
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Vejamos que

$$\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty}.$$

De facto,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

De forma análoga temos

$$\boxed{\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty}.$$

De

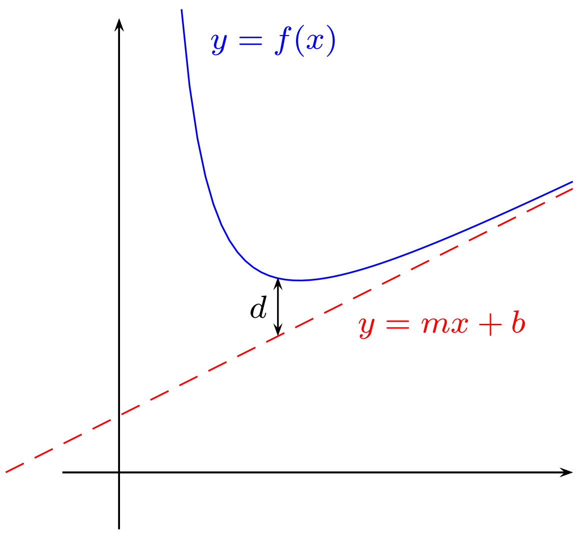
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

conclui-se imediatamente que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}}$$

e

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}}.$$



$$d = f(x) - (mx + b)$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto não majorado e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. A recta de equação

$$y = mx + b$$

diz-se uma **assímptota não vertical à direita do gráfico de f** se

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Se $D \subseteq \mathbb{R}$ é um subconjunto não minorado e $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função, diz-se que a recta de equação

$$y = mx + b$$

é uma **assímptota não vertical à esquerda do gráfico de f** se

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Assímptotas não verticais à direita

Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}$ não majorado e

$$f : D \to \mathbb{R}$$

uma função. Para que o gráfico de f tenha uma assímptota não vertical à direita é necessário e suficiente que existam e sejam finitos os limites

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$
(que designaremos por m),

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$.

Verificadas estas condições, e designando por b o segundo limite, a assímptota à direita do gráfico de f tem a equação

$$y = mx + b.$$

Assímptotas não verticais à esquerda

Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}$ não minorado e

$$f : D \to \mathbb{R}$$

uma função. Para que o gráfico de f tenha uma assímptota não vertical à esquerda é necessário e suficiente que existam e sejam finitos os limites

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$
(que designaremos por m),

$b)$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx]$.

Verificadas estas condições, e designando por b o segundo limite, a assímptota à esquerda do gráfico de f tem a equação

$$y = mx + b.$$

Assim, para calcularmos uma assímptota não vertical à direita temos de calcular os seguintes limites

$$\boxed{m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{e} \quad \boxed{b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]}$$

e se estes limites existirem e forem finitos, a assímptota é a recta de equação

$$y = mx + b.$$

Para as assímptotas não verticais à esquerda temos de calcular os limites

$$\boxed{m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{e} \quad \boxed{b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx]}$$

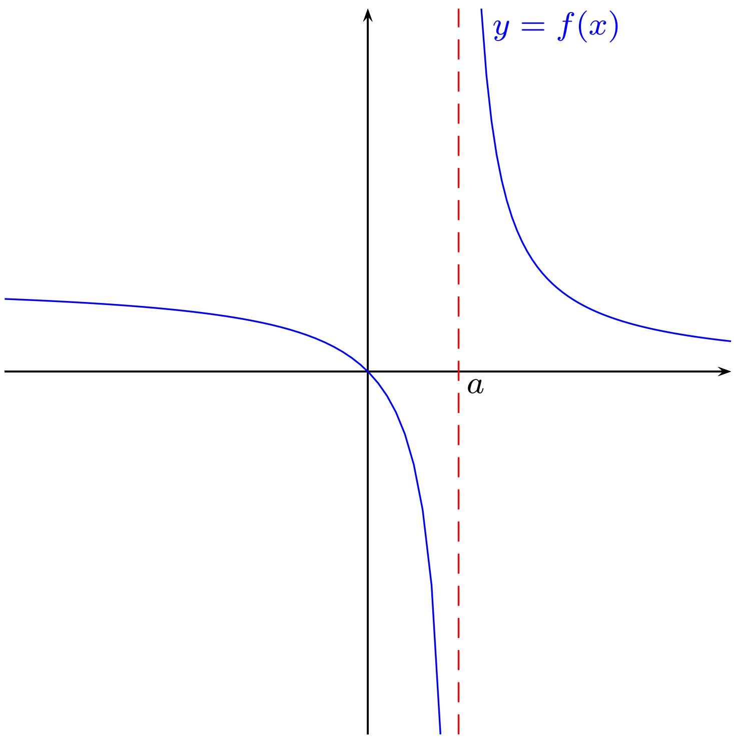
e caso existam e sejam finitos ambos os limites, a assímptota é a recta de equação

$$y = mx + b.$$

Diz-se que a recta de equação $x = a$ é uma **assímptota vertical do gráfico de f** se pelo menos umas das seguintes condições se verificar:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$



A recta de equação $x = a$ é uma assímptota vertical do gráfico de f

Exemplos

a) Consideremos a função definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}.$$

Como o domínio de f é o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e f é uma função contínua, pois é uma função racional, a única possibilidade a assímptota vertical do gráfico de f é a recta de equação $x = 0$. De facto, como

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

a recta de equação $x = 0$ é uma assímptota vertical do gráfico de f.

Exemplos (continuação)

a) (continuação) Como

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 1 + \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{(+\infty)^2} = 1 + 0 + 0 = 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1,\end{aligned}$$

concluímos que a recta de equação $y = x + 1$ é uma assímptota não vertical à direita do gráfico de f.

Exemplos (continuação)

a) (continuação) Por outro lado, atendendo a que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 1+\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{(-\infty)^2} = 1+0+0=1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\\ &= 1+\frac{1}{-\infty} = 1+0=1,\end{aligned}$$

também se verifica que a recta de equação $y = x+1$ é uma assímptota não vertical à esquerda do gráfico de f.

Exemplos (continuação)

a) (continuação) Assim, as assímptotas da função dada por

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$$

são as rectas de equação

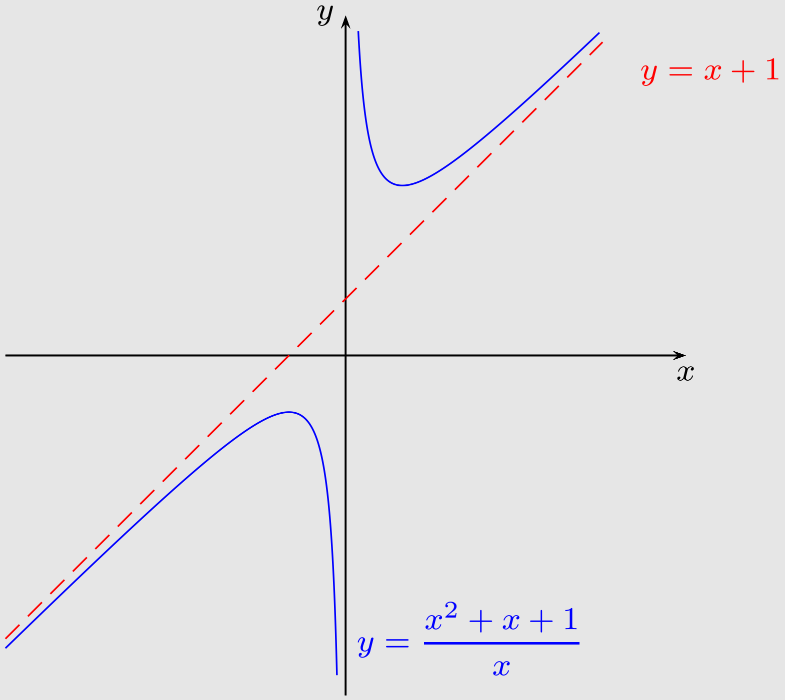
$$y = x+1$$

e

$$x = 0.$$

Exemplos (continuação)

a) (continuação) Vejamos o gráfico da função f.



Exemplos (continuação)

b) Calculemos as assímptotas da função dada por

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

O domínio desta função é o intervalo $]0, +\infty[$ e f é uma função contínua, pois é o quociente de duas funções contínuas. Assim, a única possibilidade de assímptota vertical é a recta de equação $x = 0$. Obviamente, atendendo a que o domínio de f é $]0, +\infty[$, apenas devemos fazer $x \to 0^+$. Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty,$$

pelo que $x = 0$ é assímptota vertical do gráfico de f.

Exemplos (continuação)

b) (continuação) Também só faz sentido calcular a assímptota não vertical à direita pois o domínio de f é o intervalo $]0,+\infty[$. Como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

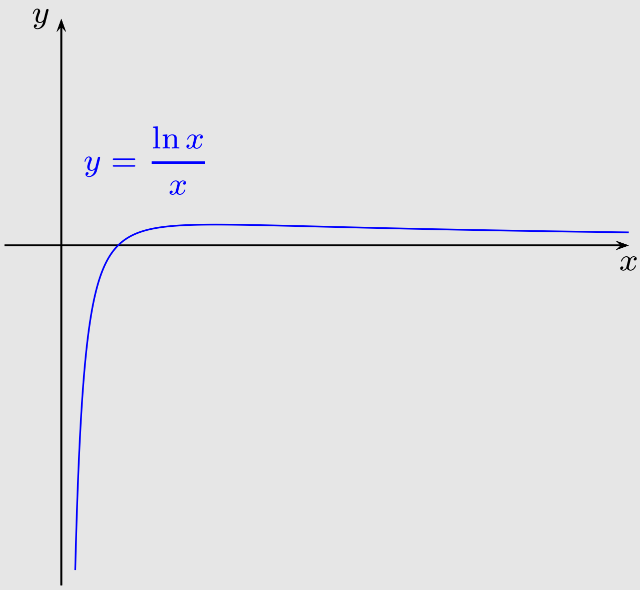
e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

a recta de equação $y = 0$ é uma assímptota não vertical (horizontal) à direita do gráfico de f.

Exemplos (continuação)

b) (continuação) Vejamos o gráfico da função.



Exemplos (continuação)

c) Seja f a função dada por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Como o domínio desta função é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f é uma função contínua (é o quociente de duas funções contínuas) e

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

a função não tem assímptotas verticais.

Exemplos (continuação)

c) (continuação) Calculemos as assímptotas não verticais. Como

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \operatorname{sen} x = 0$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x = 0,$$

a recta de equação $y = 0$ é assímptota à direita do gráfico de f. É evidente que também é assímptota à esquerda do gráfico de f pois

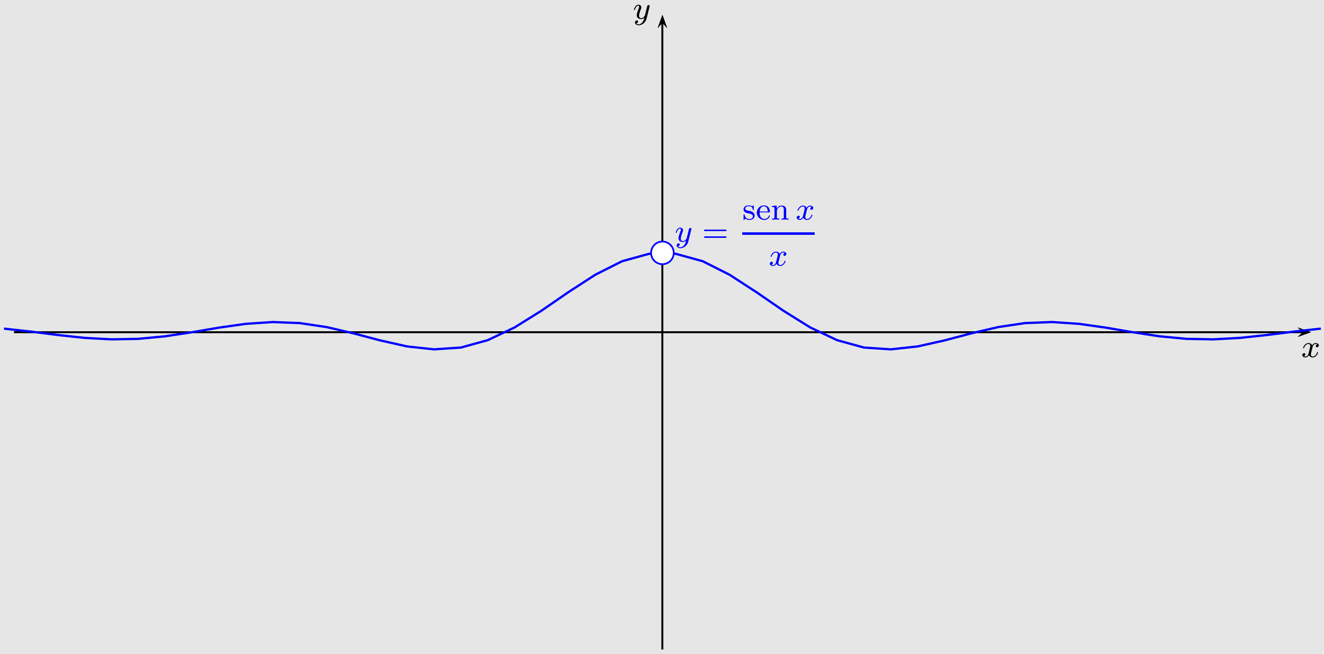
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \operatorname{sen} x = 0$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x = 0.$$

Exemplos (continuação)

c) (continuação) Vejamos o gráfico de f.



1 Funções reais de variável real: generalidades e exemplos

2 Funções reais de variável real: limites e continuidade

3 Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$
- Derivadas, regras de derivação e exemplos
  - Definição, interpretação geométrica e primeiros exemplos de derivada
  - Derivadas laterais
  - Regras de derivação
  - Derivada da função composta
  - Derivada da função inversa
  - Tabela de derivadas
  - Derivadas de ordem superior à primeira
- Teoremas fundamentais do cálculo diferencial
- Aplicações do cálculo diferencial

4 Cálculo integral em $\mathbb{R}$

Sejam D um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in D$ um ponto de acumulação de D. Diz-se que f é **derivável** ou **diferenciável** em a se existe (e é finito) o limite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Tal limite (quando existe) diz-se a **derivada de f no ponto a** e representa-se por $f'(a)$, $Df(a)$ ou ainda por $\dfrac{df}{dx}(a)$. Fazendo a mudança de variável $x = a + h$, temos

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}.$$

Aqui têm apenas de se considerar os valores de h tais que $a + h \in D$.

Diz-se que a função $f : D \to \mathbb{R}$ é **derivável** ou **diferenciável** em D se for derivável em todo o ponto de D e à nova função

$$f' : D \to \mathbb{R},$$

que a cada ponto $x \in D$ faz corresponder $f'(x)$, chama-se **derivada** de f e representa-se também por Df ou $\dfrac{df}{dx}$.

O quociente

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

representa o declive da recta que passa pelos pontos

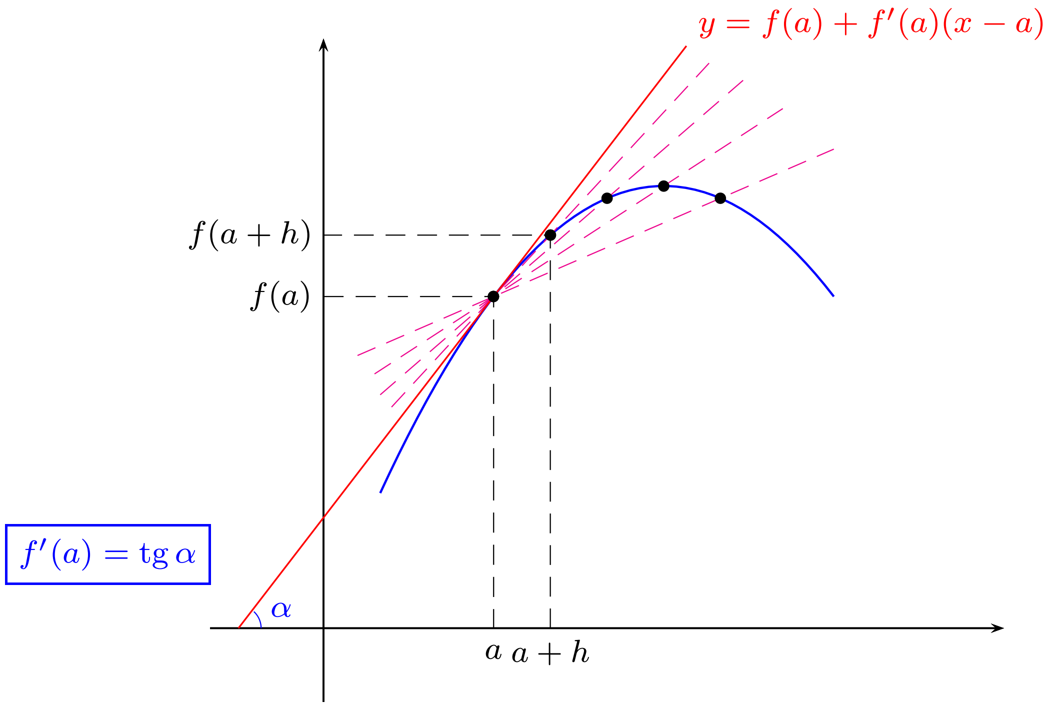
$$(a, f(a)) \text{ e } (a+h, f(a+h))\,.$$

Fazendo h tender para zero, a recta que passa nos pontos

$$(a, f(a)) \text{ e } (a+h, f(a+h))\,,$$

vai tender para a recta tangente ao gráfico de f e que passa no ponto $(a, f(a))$. Assim, geometricamente, a derivada de uma função num ponto do domínio é o declive da recta tangente ao gráfico da função no ponto considerado. Portanto, a recta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(a, f(a))$ é a recta de equação

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$



Interpretação geométrica do conceito de derivada

Exemplos – função constante

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = c,$$

onde c é um número real. Então

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Assim, f' é a função identicamente nula.

Exemplos – função identidade

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x.$$

Então, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

e, portanto, $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f'(x) = 1.$$

Exemplos – função exponencial

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \mathrm{e}^x .$$

Então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^x \, \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \\ &= \mathrm{e}^x . \end{aligned}$$

Exemplos – função logaritmo natural

Seja $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \ln x$. Então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln \dfrac{x+h}{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)}{h/x} \, \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Exemplos – função seno

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é derivável para qualquer $x \in \mathbb{R}$. De facto,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{x+h-x}{2} \cos \dfrac{x+h+x}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h/2}{h/2} \cos \frac{2x+h}{2} \\
&= \cos x,
\end{aligned}$$

o que mostra que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

Exemplos – função cosseno

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$. Atendendo a que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2 \operatorname{sen} \dfrac{x+h+x}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x+h-x}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} - \operatorname{sen} \frac{2x+h}{2} \, \frac{\operatorname{sen} h/2}{h/2} \\
&= -\operatorname{sen} x,
\end{aligned}$$

temos que $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in D$ tal que a é ponto de acumulação de

$$D_a^- = \{x \in D : x < a\} = D \cap]-\infty, a[.$$

Diz-se que f é **derivável (ou diferenciável) à esquerda em a** se existe e é finito o limite

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_e(a).$$

Se $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in D$ é um ponto de acumulação de

$$D_a^+ = \{x \in D : x > a\} = D \cap]a, +\infty[,$$

então diz-se que f é **derivável (ou diferenciável) à direita em a** se existe e é finito o limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f_d'(a).$$

Tendo em conta as propriedades dos limites, resulta imediatamente, para pontos $a \in D$ que são pontos de acumulação de D_a^- e de D_a^+, que f é derivável em a se e só se f é derivável à esquerda e à direita em a e

$$f_e'(a) = f_d'(a).$$

Exemplos

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = |x|.$$

Então

$$f_e'(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

e

$$f_d'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1,$$

o que mostra que f não é derivável no ponto 0.

Exemplos

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função não é diferenciável à direita, nem à esquerda do ponto 0, pois não existe

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \operatorname{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x},$$

nem

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x \operatorname{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Propriedades

Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $a \in D$, então f é contínua nesse ponto.

Observação

O recíproco desta propriedade é falso. A função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = |x|$$

é contínua no ponto 0, mas não é derivável nesse ponto.

Regras de derivação

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in D$ e $k \in \mathbb{R}$. Então

i) $f + g$ é derivável em a e

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$

ii) kf é derivável em a e

$$(kf)'(a) = kf'(a);$$

iii) $f \cdot g$ é derivável em a e

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)\ g(a) + g'(a)\ f(a);$$

iv) se $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ é derivável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\ g(a) - g'(a)\ f(a)}{g^2(a)}.$$

Demonstração das regras de derivação

i) Basta observar que

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right] \\
&= f'(a)+g'(a).
\end{aligned}$$

ii) Basta ter em conta que

$$\begin{aligned}
(kf)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(kf)(x)-(kf)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} k\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&= k\,f'(a).
\end{aligned}$$

Demonstração das regras de derivação (continuação)

iii) Basta atender a que

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right] \\
&= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).
\end{aligned}$$

Na última igualdade foi usado o facto de g ser contínua em a.

Demonstração das regras de derivação (continuação).

iv) Do mesmo modo temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \left[\frac{1}{g(x)g(a)} \; \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}\right] \\
&= \lim_{x\to a} \left[\frac{1}{g(x)g(a)} \; \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}\right] \\
&= \lim_{x\to a} \left[\frac{1}{g(x)g(a)} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\, g(a) - f(a)\, \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\right] \\
&= \frac{f'(a)\; g(a) - g'(a)\; f(a)}{g^2(a)}.
\end{aligned}$$

Na última igualdade usou-se o facto de g ser contínua em a. □

Exemplos – funções polinomiais

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^n$$

derivável em todos os pontos de $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Usando esta última igualdade, tem-se que a derivada da função definida por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

é dada por

$$p'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1.$$

Exemplos – tangente

A derivada da tangente pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - (\cos x)' \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x . \cos x - (-\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x .
\end{aligned}$$

Exemplos – cotangente

Do mesmo modo temos

$$\begin{aligned}
(\operatorname{cotg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' \\
&= \frac{(\cos x)' \operatorname{sen} x - (\operatorname{sen} x)' \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{-\operatorname{sen} x . \operatorname{sen} x - (\cos x) \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \\
&= -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \\
&= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \\
&= -\operatorname{cosec}^2 x .
\end{aligned}$$

Exemplos – seno e cosseno hiperbólicos

Atendendo a que

$$(\mathrm{e}^{-x})' = \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)' = \frac{1' \, \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x)' \, 1}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = -\frac{1}{\mathrm{e}^x} = -\mathrm{e}^{-x},$$

tem-se

$$(\operatorname{senh} x)' = \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{(\mathrm{e}^x)' - (\mathrm{e}^{-x})'}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x$$

e

$$(\cosh x)' = \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{(\mathrm{e}^x)' + (\mathrm{e}^{-x})'}{2} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x.$$

Derivada da função composta

Sejam D_f e D_g dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ e

$$f : D_f \to \mathbb{R} \text{ e } g : D_g \to \mathbb{R}$$

funções tais que

$$f(D_f) \subseteq D_g.$$

Suponhamos que $a \in D_f$ é um ponto de acumulação de D_f e $b = f(a)$ é um ponto de acumulação de D_g. Se f é derivável em a e g é derivável em b, então $g \circ f$ é derivável em a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\ f'(a) = g'(b)\ f'(a).$$

Exemplos

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \left(2x^2 + 5\right)^{100}$. Então, usando a derivada da função composta, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 100\left(2x^2+5\right)^{99}\left(2x^2+5\right)' \\ &= 100\left(2x^2+5\right)^{99} 4x \\ &= 400x\left(2x^2+5\right)^{99}. \end{aligned}$$

Consideremos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \operatorname{sen}(\mathrm{e}^x + 1)$. A sua derivada é dada por

$$g'(x) = \cos(\mathrm{e}^x + 1)\,(\mathrm{e}^x + 1)' = \cos(\mathrm{e}^x + 1)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x + 1).$$

A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \mathrm{e}^{3\cos\left(x^2\right)}$ tem derivada em todos os pontos de $\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} h'(x) &= \mathrm{e}^{3\cos\left(x^2\right)}\left(3\cos\left(x^2\right)\right)' = \mathrm{e}^{3\cos\left(x^2\right)}\left(-3\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)\left(x^2\right)' \\ &= \mathrm{e}^{3\cos\left(x^2\right)}\left(-3\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)\ 2x = -6x\ \operatorname{sen} x^2\, \mathrm{e}^{3\cos\left(x^2\right)}. \end{aligned}$$

Exemplos – função exponencial e função logarítmica

Para a função exponencial temos

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{\ln(a^x)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln a}\right)' = \mathrm{e}^{x\ln a}\,\ln a = a^x\,\ln a.$$

Para a função logarítmica usando a igualdade

$$\log_{\mathrm{e}} x = \log_a x\,\log_{\mathrm{e}} a$$

temos

$$\log_a x = \frac{\log_{\mathrm{e}} x}{\log_{\mathrm{e}} a} = \frac{\ln x}{\ln a},$$

o que implica

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{(\ln x)'}{\ln a} = \frac{1/x}{\ln a} = \frac{1}{x\,\ln a}.$$

Exemplos

Se f é uma função real de variável real diferenciável, então

$$\left[\mathrm{e}^{f(x)}\right]' = f'(x)\,\mathrm{e}^{f(x)},$$

$$[\operatorname{sen}(f(x))]' = f'(x)\cos(f(x))$$

e

$$[\cos(f(x))]' = -f'(x)\operatorname{sen}(f(x)).$$

Derivada da função inversa

Sejam f uma função diferenciável e injectiva definida num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in I$. Se

$$f'(a) \neq 0,$$

então f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Exemplos – raízes

A função $g\colon]0,+\infty[\,\to\,]0,+\infty[$ definida por

$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$

é a função inversa da função $f\colon]0,+\infty[\,\to\,]0,+\infty[$ definida por

$$f(y) = y^n.$$

Como $f'(y) = ny^{n-1} \neq 0$ para qualquer $y \in]0,+\infty[$ temos, fazendo $y = g(x)$,

$$g'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Exemplos – logaritmo natural

Do mesmo modo, a função $g\colon]0,+\infty[\,\to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \ln x$$

é a inversa da função $f : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ definida por

$$f(y) = \mathrm{e}^y.$$

Como $f'(y) = \mathrm{e}^y \neq 0$ para qualquer $y \in \mathbb{R}$ e $y = \ln x$ temos

$$g'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{x}.$$

Exemplos – arco seno

Consideremos a função $g\colon [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ definida por

$$g(x) = \operatorname{arc\,sen} x.$$

A função g é a função inversa da função $f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ dada por

$$f(y) = \operatorname{sen} y.$$

Além disso, $f'(y) = \cos y \neq 0$ para $y \in \,]-\pi/2, \pi/2[$. Assim, escrevendo $y = \operatorname{arc\,sen} x$, ou seja, $x = \operatorname{sen} y$, temos

$$g'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y}.$$

Tendo em conta que $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$ e que $y \in \,]-\pi/2, \pi/2[$, obtemos $\cos y = \sqrt{1-x^2}$ e, por conseguinte, para $x \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ temos

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nos pontos $x = -1$ e $x = 1$ a função não tem derivada lateral à direita, nem derivada lateral à esquerda, respectivamente.

Exemplos – arco cosseno

A função $g : [-1,1] \to [0,\pi]$ definida por

$$g(x) = \arccos x$$

é a inversa da função $f : [0,\pi] \to [-1,1]$ definida por

$$f(y) = \cos y.$$

Atendendo a que $f'(y) = -\operatorname{sen} y \neq 0$ para cada $y \in]0,\pi[$ vem

$$(\arccos x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{-\operatorname{sen} y}$$

e, como $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$ e $y \in \,]0,\pi[$, temos $\operatorname{sen} y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ o que implica

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exemplos – arco tangente

A função $g\colon \mathbb{R} \to \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ definida por

$$g(x) = \operatorname{arc\,tg} x$$

é a inversa da função $f\colon \left]-\pi/2, \pi/2\right[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(y) = \operatorname{tg} y.$$

Como $f'(y) = \dfrac{1}{\cos^2 y} \neq 0$ para $y \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ temos

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Exemplos – arco cotangente

Do mesmo modo tem-se

$$(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Tabela de derivadas

$$[\alpha u(x)]' = \alpha\, u'(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$$

$$[u(x)\, v(x)]' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$[(u(x))^\alpha]' = \alpha\, u'(x)\ [u(x)]^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\left[\sqrt{u(x)}\right]' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$\left[\mathrm{e}^{u(x)}\right]' = u'(x)\, \mathrm{e}^{u(x)}$$

$$[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\left[a^{u(x)}\right]' = u'(x) a^{u(x)}\ \ln a$$

$$[\log_a(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$$

Tabela de derivadas (continuação)

$$[\operatorname{sen}(u(x))]' = u'(x)\ \cos[u(x)]$$

$$[\cos(u(x))]' = -u'(x)\ \operatorname{sen}[u(x)]$$

$$[\operatorname{tg}(u(x))]' = \frac{u'(x)}{\cos^2[u(x)]}$$

$$[\operatorname{cotg}(u(x))]' = -\frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2[u(x)]}$$

$$[\operatorname{arc\,sen}(u(x))]' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$$

$$[\arccos(u(x))]' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$$

$$[\operatorname{arc\,tg}(u(x))]' = \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$$

$$[\operatorname{arc\,cotg}(u(x))]' = -\frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$$

$$[\operatorname{senh}(u(x))]' = u'(x)\ \cosh[u(x)]$$

$$[\cosh(u(x))]' = u'(x)\ \operatorname{senh}[u(x)]$$

Sejam D um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e

$$f\colon D \to \mathbb{R}$$

uma função diferenciável em D. Se f' é diferenciável em $a \in D$, então diz-se que f é **duas vezes diferenciável** em a e a derivada de f' em a designa-se por **segunda derivada** de f em a e representa-se por

$$f''(a) \text{ ou } \frac{d^2 f}{dx^2}(a) \text{ ou ainda } D^2 f(a)$$

e é dada por

$$f''(a) = \left(f'\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Mais geralmente, se existirem as derivadas de f até à ordem $n-1$ e as representarmos por

$$f', \quad f'', \dots, f^{(n-1)}$$

e $f^{(n-1)}$ é derivável em a, então diz-se que f tem **derivada de ordem n** em a e

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h}. \end{aligned}$$

Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se de **classe C^n**, e escreve-se

$$f \in C^n(D),$$

se f é n vezes diferenciável em D e a derivada de ordem n, $f^{(n)}$ é contínua em D.

Por extensão, escreve-se

$$f \in C^0(D) \text{ ou } f \in C(D)$$

para designar que f é contínua em D.

Se f admite derivadas de todas as ordens em D, então dizemos que f é **indefinidamente diferenciável** ou de **classe C^∞** e usa-se a notação

$$f \in C^\infty(D).$$

Exemplos

a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^m,$$

$m \in \mathbb{N}$, é uma função de classe C^∞. De facto

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} m\,(m-1)\dots(m-(n-1))\,x^{m-n} & \text{se } n < m; \\ m! & \text{se } n = m; \\ 0 & \text{se } n > m. \end{cases}$$

Mais geralmente, qualquer função polinomial $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

é de classe C^∞.

Exemplos (continuação)

b) Se

$$p, q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

são duas funções polinomiais, então, fazendo

$$D = \{x \in \mathbb{R}\colon\ q(x) \neq 0\}\,,$$

a função $f\colon D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

é de classe C^∞, ou seja,

$$f \in C^\infty(D).$$

Exemplos (continuação)

c) A função exponencial é de classe C^∞ pois fazendo

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

temos

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x\,.$$

Exemplos (continuação)

d) A função seno é uma função de classe C^∞. De facto, fazendo

$$f(x) = \operatorname{sen} x,$$

temos

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } n = 4k-3, \ k \in \mathbb{N}; \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k-2, \ k \in \mathbb{N}; \\ -\cos x & \text{se } n = 4k-1, \ k \in \mathbb{N}; \\ \operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k, \ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

o que mostra que a função seno pertence a $C^\infty(\mathbb{R})$.

Exemplos (continuação)

e) Do mesmo modo, a função cosseno é uma função de classe C^∞. De facto, se

$$f(x) = \cos x,$$

temos

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k-3, \ k \in \mathbb{N}; \\ -\cos x & \text{se } n = 4k-2, \ k \in \mathbb{N}; \\ \operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k-1, \ k \in \mathbb{N}; \\ \cos x & \text{se } n = 4k, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exemplos (continuação)

f) A função $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

é diferenciável, mas a primeira derivada não é contínua. Como

$$\left(x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)' = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x} = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

e

$$f_1'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0,$$

temos

$$f_1'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Exemplos (continuação)

f) (continuação) Vimos que

$$f_1'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como não existe

$$\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x},$$

a função f_1' não é contínua. Assim, f_1 é diferenciável, mas não é de classe C^1. Mais geral, a função $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} x^{2k} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

tem derivadas até à ordem k, mas não é de classe C^k.

Exemplos (continuação)

g) Se
$$f, g \colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
têm derivada até à ordem n, então os mesmo acontece com
$$f+g \quad \text{e} \quad fg$$
e
$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$
e
$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(x) g^{(n-j)}(x),$$
onde $f^{(0)} = f$ e $g^{(0)} = g$. Esta igualdade é conhecida por **fórmula de Leibnitz**.

Teorema de Rolle

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e seja

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Se

$$f(a) = f(b),$$

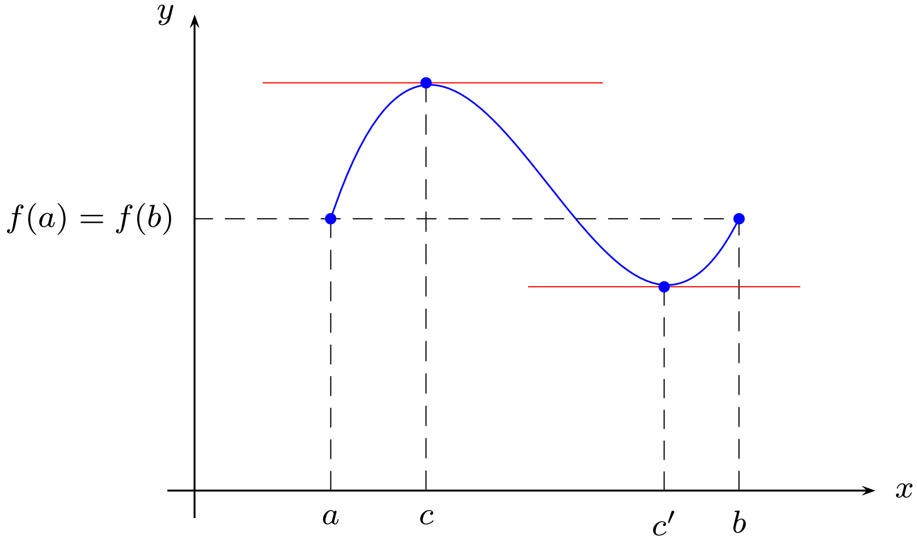
então existe

$$c \in\,]a,b[$$

tal que

$$f'(c) = 0.$$

A interpretação geométrica de $f'(c) = 0$ corresponde a que a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é horizontal. Tendo isto em conta, podemos interpretar geometricamente o Teorema de Rolle da seguinte forma.



Interpretação geométrica do Teorema de Rolle

Corolários do Teorema de Rolle

Sejam I um intervalo e

$$f\colon I \to \mathbb{R}$$

uma função diferenciável em I.

a) Entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f'.

b) Entre dois zeros consecutivos de f', existe, quando muito, um zero de f;

c) Se f' tem n zeros, então f tem no máximo $n + 1$ zeros.

Aplicação (dos Corolários) do Teorema de Rolle

Vejamos que a equação
$$e^x = 3x$$
tem exactamente duas soluções. Para isso consideremos a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = e^x - 3x.$$
A função f é contínua pois é a diferença de duas funções contínuas. Como
$$f(0) = e^0 - 3 \cdot 0 = 1 > 0 \quad \text{e} \quad f(1) = e^1 - 3 \cdot 1 = e - 3 < 0,$$
o Teorema de Bolzano permite-nos concluir que f tem pelo menos um zero em $]0, 1[$. Por outro lado, como
$$e^2 > (5/2)^2 = 25/4 > 24/4 = 6,$$
temos
$$f(2) = e^2 - 3 \cdot 2 = e^2 - 6 > 0,$$
pelo que, usando novamente o Teorema de Bolzano, f tem pelo menos um zero em $]1, 2[$.

Aplicação (dos Corolários) do Teorema de Rolle (continuação)

Por outro lado, a função f é diferenciável pois é a diferença de duas funções diferenciáveis e a sua derivada é dada por
$$f'(x) = (e^x - 3x)' = e^x - 3.$$
Assim,
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \ln 3, \end{aligned}$$
ou seja, f' tem apenas um zero e, aplicando o Corolário do Teorema de Rolle, f tem no máximo dois zeros.
Logo f tem exactamente dois zeros, isto é, a equação
$$e^x = 3x$$
tem exactamente duas soluções.

Teorema do valor médio de Lagrange

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Então existe

$$c \in \,]a,b[$$

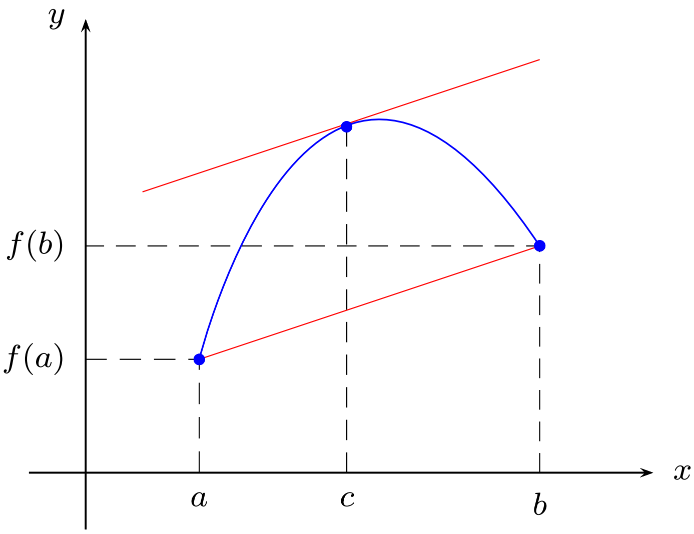
tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)\,,$$

ou seja,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Geometricamente, o quociente $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é o declive da recta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. O que o Teorema de Lagrange nos diz é que existe uma recta tangente ao gráfico de f paralela à recta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange

Aplicações do Teorema de Lagrange

a) Vejamos como o Teorema de Lagrange nos permite estimar $\sqrt{101}$. Seja $f\colon [100, 101] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Obviamente, a função verifica as hipóteses do Teorema de Lagrange pois é contínua em $[100, 101]$ e é diferenciável em $]100, 101[$ (aliás é diferenciável em $[100, 101]$) sendo

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Assim, pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]100, 101[$ tal que

$$\frac{f(101) - f(100)}{101 - 100} = f'(c),$$

ou seja,

$$\sqrt{101} - 10 = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

Aplicações do Teorema de Lagrange (continuação)

a) (continuação) Como

$$100 < c < 101,$$

resulta

$$10 = \sqrt{100} < \sqrt{c} < \sqrt{101} < 11,$$

e por conseguinte

$$\frac{1}{11} < \frac{1}{\sqrt{c}} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{22} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{20}.$$

Assim, de

$$\sqrt{101} - 10 = \frac{1}{2\sqrt{c}},$$

tem-se

$$\frac{1}{22} < \sqrt{101} - 10 < \frac{1}{20},$$

ou seja,

$$10 + \frac{1}{22} < \sqrt{101} < 10 + \frac{1}{20}.$$

Aplicações do Teorema de Lagrange (continuação)

b) Vejamos que

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

para qualquer $x > 0$. A estimativa anterior irá ser obtida através da aplicação do Teorema de Lagrange à função $f\colon [x, x+1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \ln t.$$

A função f verifica as hipóteses do Teorema de Lagrange pois é contínua em $[x, x+1]$ e é diferenciável em $]x, x+1[$. Atendendo a que

$$f'(t) = \frac{1}{t},$$

pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]x, x+1[$ tal que

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(c) = \frac{1}{c}.$$

Aplicações do Teorema de Lagrange (continuação)

b) (continuação) Atendendo a que

$$x < c < x+1$$

implica

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

e que

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\frac{x+1}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

da igualdade

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = \frac{1}{c},$$

obtida atrás, resulta

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

Corolários do Teorema de Lagrange

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em I.

a) Se

$$f'(x) = 0 \text{ para qualquer } x \in I,$$

então f é constante.

b) Se

$$f'(x) = g'(x) \text{ para qualquer } x \in I,$$

então a diferença $f - g$ é constante em I.

c) Se $f'(x) > 0$ para qualquer $x \in I$, então f é **estritamente crescente** em I, ou seja, para quaisquer $x, y \in I$,

$$\text{se } x < y, \text{ então } f(x) < f(y).$$

d) Se $f'(x) < 0$ para qualquer $x \in I$, então f é **estritamente decrescente** em I, ou seja, para quaisquer $x, y \in I$,

$$\text{se } x < y, \text{ então } f(x) > f(y).$$

Fórmula de Taylor de ordem n (com resto de Lagrange)

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$,

$$f\colon I \to \mathbb{R}$$

uma função de classe C^n, $n+1$ vezes diferenciável em $\operatorname{int} I$ e a um ponto de I. Para cada $x \in I \setminus \{a\}$ tem-se

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x),$$

onde

$$T_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

e

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},$$

com c um número estritamente entre a e x.

A

$$T_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

chamamos **polinómio de Taylor de ordem** n da função f em torno de $x = a$ e a

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

chamamos **resto de Lagrange de ordem** n da função f em torno de $x = a$.

Se $a = 0$ a fórmula de Taylor designa-se por **fórmula de Mac-Laurin** e o polinómio de Taylor designa-se por **polinómio de Mac-Laurin**.

Ao polinómio de Taylor de ordem um de uma função f em torno de $x = a$ chamamos **linearização** ou **aproximação linear** de f em torno de $x = a$, ou seja, a função dada por

$$L_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

é a linearização de f em torno de $x = a$. Nestas condições escrevemos

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a).$$

Ao polinómio de Taylor de ordem dois de uma função f em torno de $x = a$, isto é, à função dada por

$$Q_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2,$$

chamamos **aproximação quadrática** de f em torno de $x = a$ e escrevemos

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Exemplos

1) Seja f a função exponencial. Atendendo a que $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, o polinómio de Mac-Laurin de ordem n é dado por

$$\begin{aligned} T_{n,0}(x) &= f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\, x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

e, por conseguinte, temos a seguinte aproximação linear

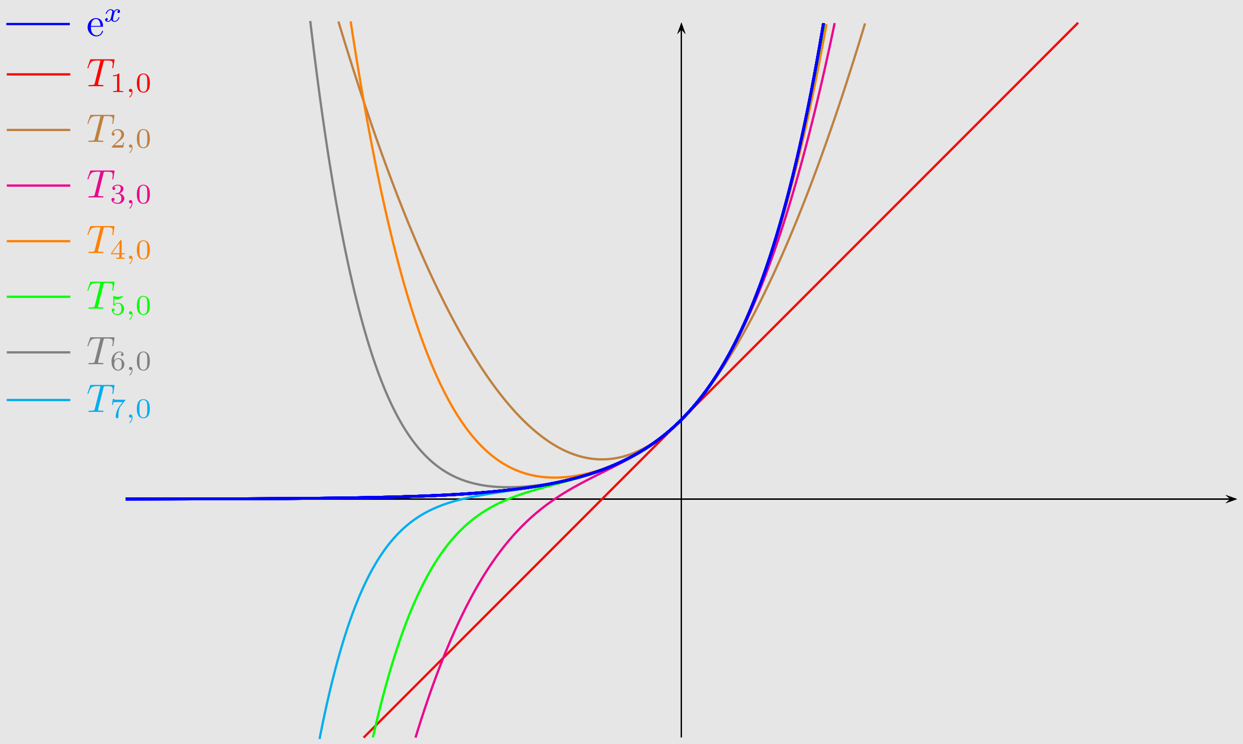
$$\mathrm{e}^x \approx 1 + x$$

e a seguinte aproximação quadrática

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Exemplos (continuação)

1) (continuação)



Exemplos (continuação)

2) Seja f a função seno. Como

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x, & f(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0,\\
f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= \cos 0 = 1,\\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x, & f''(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0,\\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -\cos 0 = -1,\\
f''''(x) &= \operatorname{sen} x, & f''''(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0,
\end{aligned}$$

tem-se

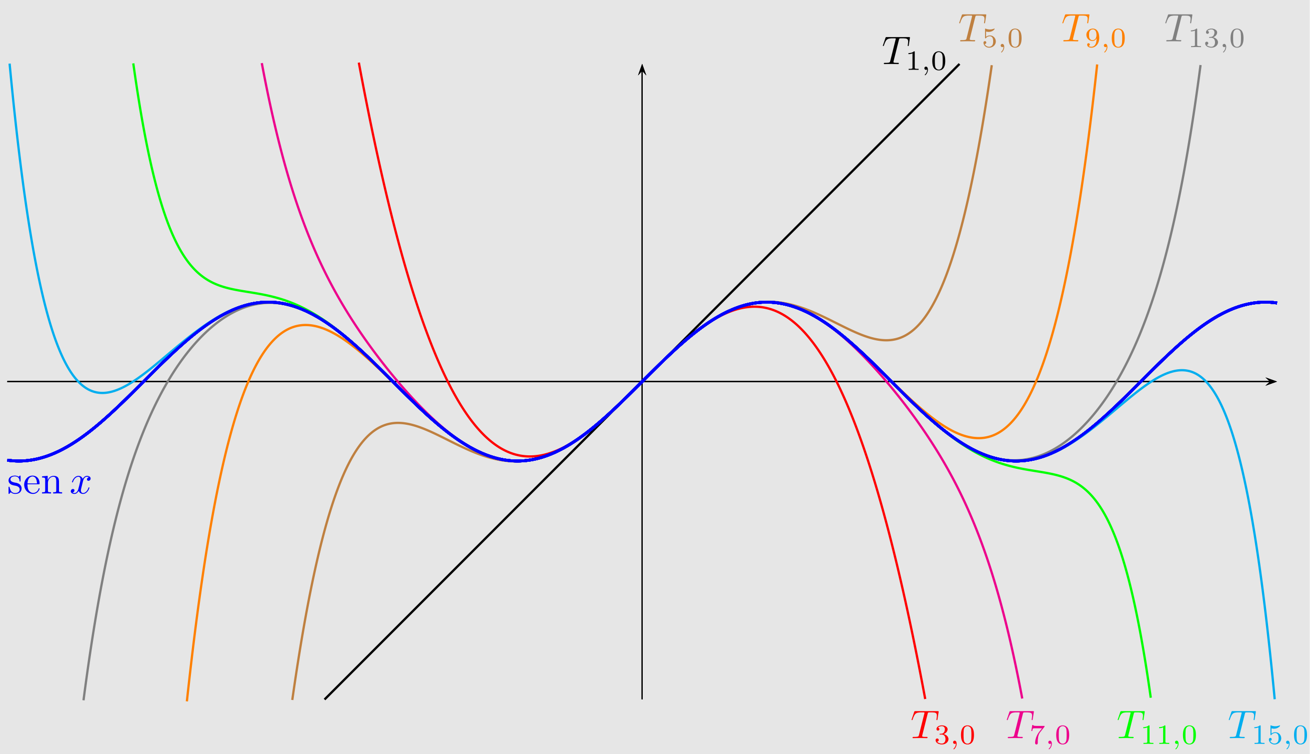
$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen} x\\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R_{2n+1,0}(x)\\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1,0}(x).
\end{aligned}$$

Assim, neste exemplos as aproximações linear e quadrática são iguais:

$$\operatorname{sen} x \approx x.$$

Exemplos (continuação)

2) (continuação)



Exemplos (continuação)

3) Se f é a função cosseno, então

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(0) &= \cos 0 = 1,\\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x, & f'(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0,\\ f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -\cos 0 = -1,\\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x, & f'''(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0,\\ f''''(x) &= \cos x, & f''''(0) &= \cos 0 = 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \cos x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n,0}(x)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n,0}(x), \end{aligned}$$

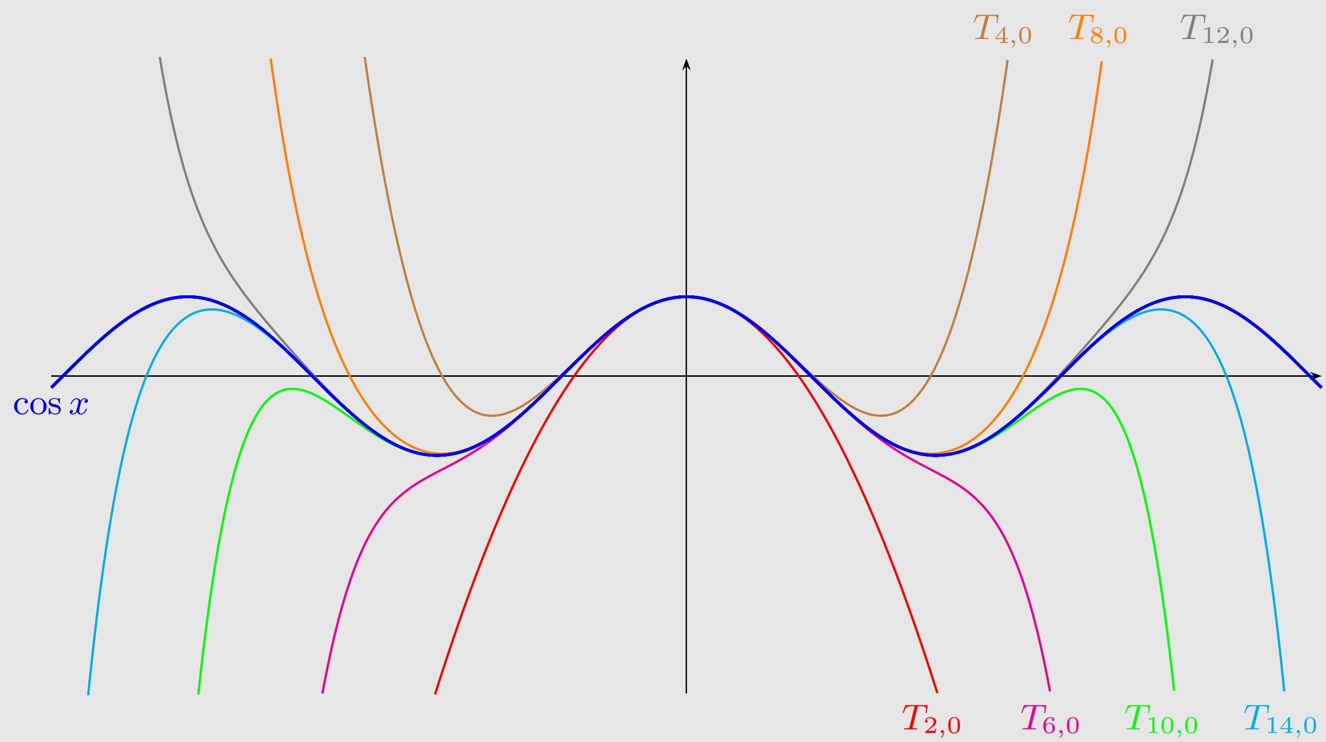
pelo que

$$\cos x \approx 1 \quad \text{e} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

são as aproximações linear e quadrática, respectivamente.

Exemplos (continuação)

3) (continuação)



Aplicação da fórmula de Taylor

Vejamos como aplicar a fórmula de Taylor para aproximar $\operatorname{sen}(0{,}1)$ com um erro inferior a 10^{-6}. Aplicando a fórmula de Taylor à função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em torno de $x = 0$, ou seja, aplicando a fórmula de MacLaurin à função $f(x) = \operatorname{sen} x$, temos

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen} x \\
&= T_{n,0}(x) + R_{n,0}(x) \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},
\end{aligned}$$

com c um número estritamente entre 0 e x. Assim,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(0{,}1) \\
&= T_{n,0}(0{,}1) + R_{n,0}(0{,}1) \\
&= f(0) + f'(0)\,0{,}1 + \frac{f''(0)}{2!}\,0{,}1^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,0{,}1^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,0{,}1^{n+1},
\end{aligned}$$

onde c é um número estritamente entre 0 e 0,1.

Aplicação da fórmula de Taylor (continuação)

Atendendo a que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0 \\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= \cos 0 = 1 \\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -\cos 0 = -1 \\
f''''(x) &= \operatorname{sen} x & f''''(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0
\end{aligned}$$

tem-se

$$|\operatorname{sen}(0{,}1) - T_{n,0}(0{,}1)| = |R_{n,0}(0{,}1)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\,0{,}1^{n+1} \leqslant \frac{1}{(n+1)!\;10^{n+1}}.$$

Como para $n = 4$ temos $|\operatorname{sen}(0{,}1) - p_{4,0}(0{,}1)| = |R_{4,0}(0{,}1)| \leqslant 10^{-6}$, para obtermos uma aproximação para $\operatorname{sen}(0{,}1)$ com erro inferior a 10^{-6}, basta usarmos o polinómio de MacLaurin de ordem 4:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(0{,}1) &\approx f(0) + f'(0)\,0{,}1 + \frac{f''(0)}{2!}\,0{,}1^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,0{,}1^3 + \frac{f''''(0)}{4!}\,0{,}1^4 \\
&= 0{,}1 - \frac{1}{3!}\,0{,}1^3 \\
&= 0.0998333333
\end{aligned}$$

Regra de Cauchy

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e sejam

$$f, g\colon]a, b[\to \mathbb{R}$$

funções diferenciáveis em $]a, b[$ tais que

$$g'(x) \neq 0 \text{ para cada } x \in]a, b[.$$

Suponhamos que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a^+} |f(x)| = \lim_{x \to a^+} |g(x)| = +\infty.$$

Se

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

com $L \in \mathbb{R}$, ou $L = +\infty$, ou $L = -\infty$, então

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Observações

a) O resultado continua válido se substituirmos

$$\lim_{x \to a^+}$$

por

$$\lim_{x \to b^-}.$$

b) O resultado também é válido quando calculamos o limite em pontos interiores do domínio das funções.

Regra de Cauchy quando $x \to +\infty$

Sejam a um número real e sejam

$$f, g\colon]a, +\infty[\to \mathbb{R}$$

funções diferenciáveis em $]a, +\infty[$ e tais que

$$g'(x) \neq 0 \text{ para cada } x \in]a, +\infty[.$$

Suponhamos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \lim_{x \to +\infty} |g(x)| = +\infty.$$

Se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

com $L \in \mathbb{R}$, ou $L = +\infty$, ou $L = -\infty$, então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Observação

O resultado continua válido se substituirmos

$$\lim_{x \to +\infty}$$

por

$$\lim_{x \to -\infty},$$

sendo neste caso o domínio das funções um intervalo do tipo $]-\infty, a[$.

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy

1) Como
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{0}{0},$$
temos pela regra de Cauchy
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot 1\\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

2) Como $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{\operatorname{sen} x - x} = \frac{0}{0}$, usando a regra de Cauchy temos
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{\operatorname{sen} x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{\operatorname{sen} x} - e^x)'}{(\operatorname{sen} x - x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\, e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{\cos x - 1} = \frac{0}{0}.$$
Aplicando novamente a regra de Cauchy vem
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{\operatorname{sen} x - x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x\, e^{\operatorname{sen} x} - e^x)'}{(\cos x - 1)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x\, e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x\, e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{-\operatorname{sen} x}\\
&= \frac{0}{0}.
\end{aligned}$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

2) (continuação) Temos de aplicar novamente a regra de Cauchy

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x}-e^x}{\operatorname{sen} x - x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\left(\cos^2 x-\operatorname{sen} x\right)e^{\operatorname{sen} x}-e^x\right]'}{[-\operatorname{sen} x]'}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(-2\operatorname{sen} x\cos x-\cos x)\,e^{\operatorname{sen} x}+\left(\cos^2 x-\operatorname{sen} x\right)\cos x\,e^{\operatorname{sen} x}-e^x}{-\cos x}\\
&=\frac{-1+1-1}{-1}=1.
\end{aligned}$$

Este limite podia ter sido calculado mais facilmente da seguinte forma

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x}-e^x}{\operatorname{sen} x - x}=\lim_{x\to 0} e^x\,\frac{e^{\operatorname{sen} x - x}-1}{\operatorname{sen} x - x}=e^0\cdot 1=1.$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

3) Vejamos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0,\ \ a>0.$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\frac{+\infty}{+\infty},$$

aplicando a regra de Cauchy temos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^a)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

4) Vejamos como calcular $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}\ \ln(\ln x) = 0 \times (-\infty)$. Como

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}\ \ln(\ln x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(\ln x)}{1/\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(\ln x)}{(x-1)^{-1/2}} = \frac{\infty}{\infty},$$

podemos usar a regra de Cauchy e temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}\ \ln(\ln x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{[\ln(\ln x)]'}{\left[(x-1)^{-1/2}\right]'}\\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1/x}{\ln x}}{-\frac{1}{2}(x-1)^{-3/2}}\\ &= \lim_{x\to 1^+} -\frac{2(x-1)^{3/2}}{x\ \ln x} = \frac{0}{0}.\end{aligned}$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

4) (continuação) Atendendo a que $\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^{3/2}}{\ln x} = \frac{0}{0}$, aplicando novamente a regra de Cauchy temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^{3/2}}{\ln x} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\left((x-1)^{3/2}\right)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{3(x-1)^{1/2}}{2}}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{3x(x-1)^{1/2}}{2} = 0,\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}\ \ln(\ln x) &= \lim_{x\to 1^+} -\frac{2(x-1)^{3/2}}{x\ \ln x}\\ &= \lim_{x\to 1^+} -\frac{2}{x}\ \frac{(x-1)^{3/2}}{\ln x} = 0.\end{aligned}$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

5) Calculemos agora $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = \infty - \infty$. Transformando esta indeterminação na seguinte

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0},$$

podemos aplicar a regra de Cauchy. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x \operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x - x\cos x)'}{(x \operatorname{sen} x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \\
&= \frac{0}{0}.
\end{aligned}$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

5) (continuação) Aplicando novamente a regra de Cauchy temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x \operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x \operatorname{sen} x)'}{(\operatorname{sen} x + x\cos x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{0}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

o que implica

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = 0.$$

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

6) Calculemos agora

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x .$$

Neste caso temos uma indeterminação do tipo 0^0. Atendendo a que

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln[(\operatorname{sen} x)^x]} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(\operatorname{sen} x)},$$

basta calcular

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x) .$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1/x} = \frac{-\infty}{+\infty},$$

podemos aplicar a regra de Cauchy.

Exemplos de aplicação da regra de Cauchy (continuação)

6) (continuação) Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(\operatorname{sen} x))'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x}(-x\cos x) = 1\cdot 0 = 0$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(\operatorname{sen} x)} = e^0 = 1.$$

Já vimos que para estudar a monotonia de uma função basta estudar o sinal da primeira derivada. Isso é consequência do Teorema de Lagrange.

Corolários do Teorema de Lagrange

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e

$$f\colon I \to \mathbb{R} \text{ uma função diferenciável em } I.$$

a) Se

$$f'(x) > 0 \text{ para qualquer } x \in I,$$

então f é **estritamente crescente** em I, ou seja,

$$\text{para quaisquer } x, y \in I, \text{ se } x < y, \text{ então } f(x) < f(y).$$

b) Se

$$f'(x) < 0 \text{ para qualquer } x \in I,$$

então f é **estritamente decrescente** em I, ou seja,

$$\text{para quaisquer } x, y \in I, \text{ se } x < y, \text{ então } f(x) > f(y).$$

Sejam D um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$.

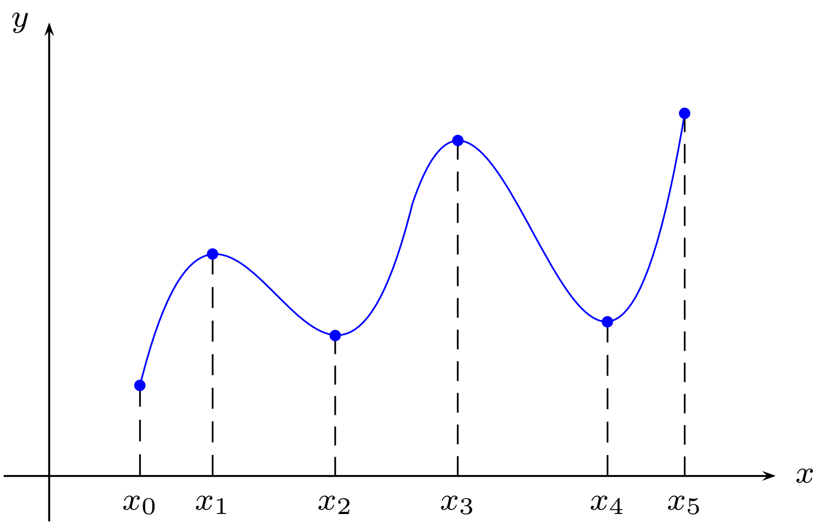
Diz-se que a função f tem um **máximo local ou relativo** no ponto a ou que $f(a)$ é um **máximo local ou relativo** da função f se existir um $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leqslant f(a) \text{ qualquer que seja } x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap D.$$

Do mesmo modo, diz-se que a função f tem um **mínimo local ou relativo** no ponto a ou que $f(a)$ é um **mínimo local ou relativo** da função f se existir um $\varepsilon > 0$ tal que

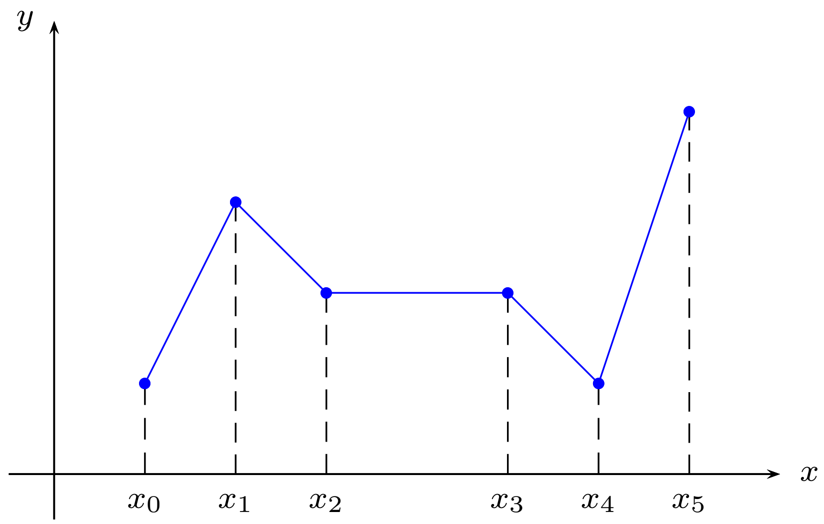
$$f(x) \geqslant f(a) \text{ qualquer que seja } x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap D.$$

Diz-se que f tem um **extremo local ou relativo** no ponto a ou que $f(a)$ é um **extremo local ou relativo** da função f se f tiver um máximo ou um mínimo local no ponto a.



Os pontos x_0, x_2 e x_4 são pontos onde a função tem mínimos locais, enquanto que a função tem máximos locais nos pontos x_1, x_3 e x_5.

A figura sugere que nos pontos x_1, x_2, x_3, x_4 a derivada da função é nula.



Para a função representada na figura anterior vê-se facilmente que nos pontos x_0, x_2 e x_4 a função tem mínimos locais e que nos pontos x_1, x_3 e x_5 a função tem máximos locais. Além disso, em qualquer $a \in]x_2, x_3[$ a função tem um máximo e um mínimo local.

Teorema de Fermat

Seja
$$f \colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
uma função diferenciável num ponto a interior a D. Se
$$f(a) \text{ é um extremo local}$$
de f, então
$$f'(a) = 0.$$

A condição

$$f'(a) = 0$$

não é suficiente para a existência de extremo. Por exemplo a função

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

definida por

$$f(x) = x^3,$$

tem derivada nula no ponto $x = 0$, mas $f(0) = 0$ não é extremo local pois

$$f(x) > 0 \text{ para qualquer } x > 0$$

e

$$f(x) < 0 \text{ para qualquer } x < 0.$$

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e

$$f : I \to \mathbb{R}$$

uma função m vezes diferenciável, $m > 1$, num ponto a interior ao intervalo I. Suponhamos que

$$f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \qquad \text{e} \qquad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Então

i) se m é ímpar, f não tem qualquer extremo local no ponto a;

ii) se m é par, f tem em a um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local, consoante

$$f^{(m)}(a) < 0 \quad \text{ou} \quad f^{(m)}(a) > 0.$$

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e

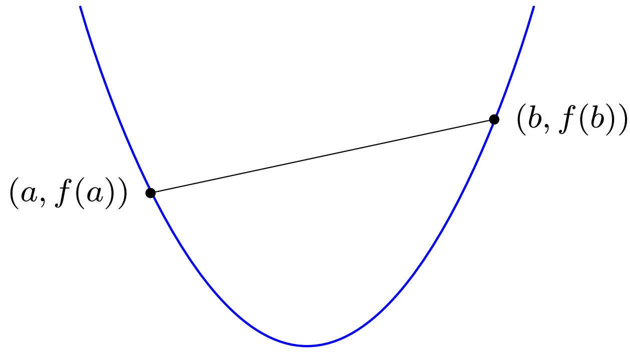
$$f : I \to \mathbb{R}$$

uma função duas vezes diferenciável num ponto a interior a I com

$$f'(a) = 0.$$

i) Se
$$f''(a) > 0,$$
então $x = a$ é um ponto de mínimo local.

ii) Se
$$f''(a) < 0,$$
então $x = a$ é um ponto de máximo local.

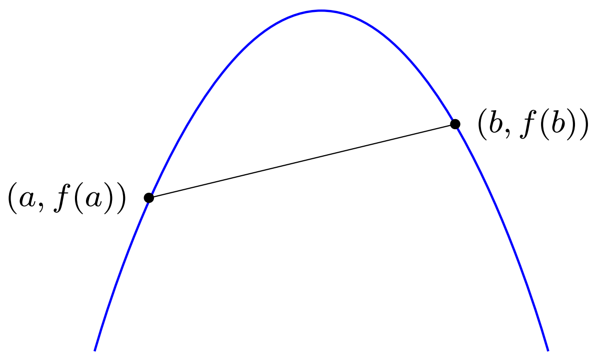


função convexa

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **convexa** ou que tem a **concavidade voltada para cima** em I se para quaisquer $a, b \in I$, com $a < b$, o gráfico de f em $[a, b]$ está abaixo da secante que une os ponto $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é,

$$f(x) \leqslant f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

para qualquer $x \in [a, b]$.



função côncava

A função f diz-se **côncava** ou que tem a **concavidade voltada para baixo** em I se para quaisquer $a, b \in I$, com $a < b$, o gráfico de f em $[a, b]$ está acima da secante que une os ponto $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é,

$$f(x) \geqslant f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

para qualquer $x \in [a, b]$.

Fazendo

$$x = (1-t)a + tb, \qquad t \in [0,1],$$

nas desigualdades que caracterizam as definições de função convexa e de função côncava temos as seguintes definições alternativas:

- a função f é **convexa** em I se

$$f\left((1-t)a + tb\right) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b)$$

  para cada $a, b \in I$ e para cada $t \in [0,1]$;
- a função f diz-se **côncava** em I se

$$f\left((1-t)a + tb\right) \geqslant (1-t)f(a) + tf(b)$$

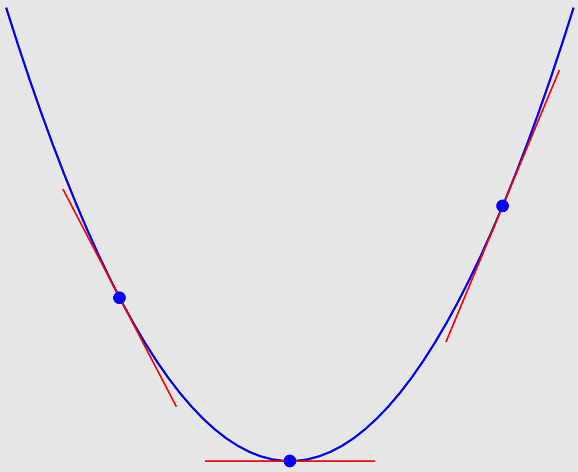
  para cada $a, b \in I$ e para cada $t \in [0,1]$.

Obviamente, uma função f é côncava se e só se $-f$ é convexa.

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e

$$f\colon I \to \mathbb{R}$$

uma função diferenciável. Então as seguintes afirmações são equivalentes:



a) f é convexa;

b) f' é monótona crescente;

c) para quaisquer $x, a \in I$ temos

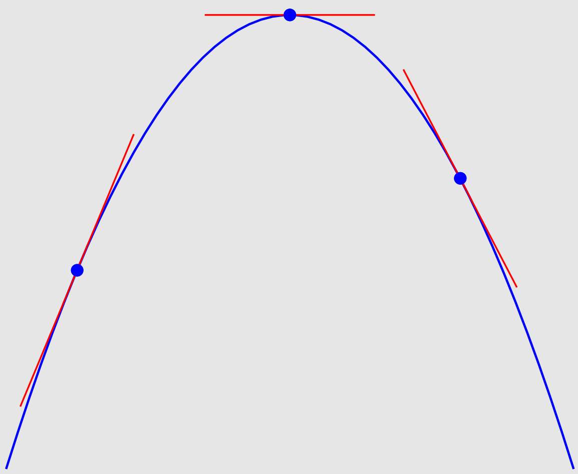
$$f(x) \geqslant f(a) + f'(a)\,(x-a)\,,$$

ou seja, o gráfico de f está acima das suas rectas tangentes.

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e

$$f\colon I \to \mathbb{R}$$

uma função diferenciável. Então as seguintes afirmações são equivalentes:



a) f é côncava;

b) f' é monótona decrescente;

c) para quaisquer $x, a \in I$ temos

$$f(x) \leqslant f(a) + f'(a)\,(x-a)\,,$$

ou seja, o gráfico de f está abaixo das suas rectas tangentes.

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e

$$f\colon I \to \mathbb{R}$$

uma função duas vezes diferenciável em I. Então

a) f é convexa em I se e só se

$$f''(x) \geqslant 0$$

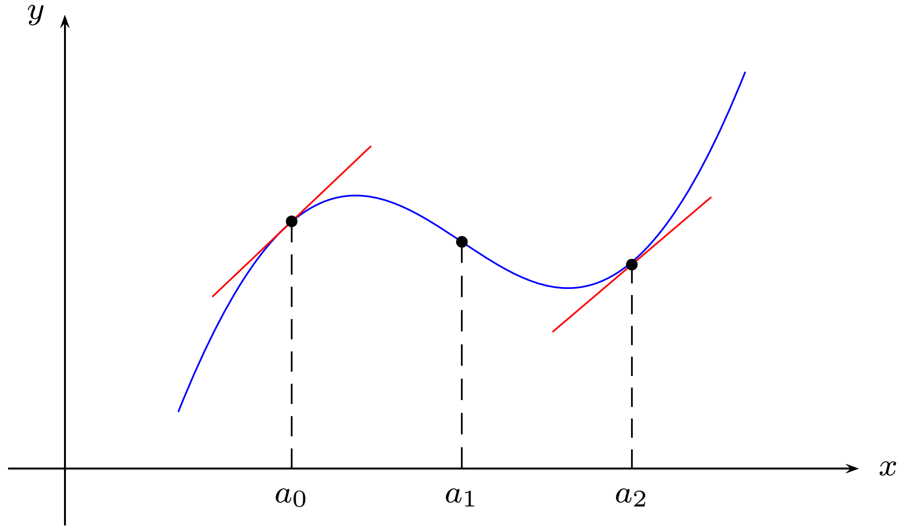
para qualquer $x \in I$;

b) f é côncava em I se e só se

$$f''(x) \leqslant 0$$

para qualquer $x \in I$.

Sejam I um intervalo, a um ponto interior a I e $f : I \to \mathbb{R}$. Diz-se que a é um **ponto de inflexão** de f se existe $\varepsilon > 0$ tal que num dos conjuntos $]a-\varepsilon, a[$ ou $]a, a+\varepsilon[$ a função é convexa e no outro é côncava.



Na figura anterior vemos que a função f é côncava à esquerda de a_1 e é convexa à direita de a_1. Logo a_1 é um ponto de inflexão.

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$,

$$f : I \to \mathbb{R}$$

uma função duas vezes diferenciável e $a \in I$. Se

$$a \text{ é um ponto de inflexão}$$

de f, então

$$f''(a) = 0.$$

Assim, podemos usar a informação que as derivadas nos fornecem para fazer o esboço do gráfico de uma função. Para tal devemos estudar

- o domínio da função;
- os zeros da função;
- a continuidade da função;
- a paridade da função;
- os intervalos de monotonia da função;
- os extremos relativos da função;
- as concavidades da função;
- os pontos de inflexão da função;
- as assímptotas da função.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$

Seja f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

Vamos fazer um estudo completo desta função. Esta função tem como domínio o seguinte conjunto

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \colon x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

e como

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq 1,$$

f tem apenas um zero no ponto $x = 0$. Além disso, a função é contínua pois é o quociente de duas funções polinomiais.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

Obviamente, esta função não é par nem é ímpar. A função é diferenciável em todo o domínio e primeira derivada é dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

Calculemos os zeros da primeira derivada

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \wedge (x-1)^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 2) \wedge x \neq 1. \end{aligned}$$

Atendendo a que o denominador de f' é sempre positivo, temos o seguinte quadro de sinal

x		0		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ND	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	ND	$\searrow$	m	$\nearrow$

Além disso, $f(0) = 0$ e $f(2) = 4$.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

A segunda derivada de f é dada por

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{\left(x^2-2x\right)'(x-1)^2 - \left[(x-1)^2\right]'\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^2 - 2\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

e, portanto, f não tem pontos de inflexão já que a segunda derivada não tem zeros.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

Fazendo um quadro temos

x		1	
$f''(x)$	$-$	ND	$+$
$f(x)$	$\cap$	ND	$\cup$

o que nos permite concluir que f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]1, +\infty[$.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

Quanto a assímptotas, uma vez que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2(1-1/x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-1/x} = 1$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x^2+x}{x-1} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x(1-1/x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-1/x} = 1\end{aligned}$$

a recta de equação

$$y = x + 1$$

é uma assímptota não vertical à direita do gráfico de f.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

Por outro lado,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2(1-1/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-1/x} = 1$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x^2+x}{x-1} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x(1-1/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-1/x} = 1,\end{aligned}$$

o que mostra que a recta de equação

$$y = x + 1$$

também é uma assímptota não vertical à esquerda do gráfico de f.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)

Por outro lado, tendo em conta que o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ e que f é uma função contínua, a única possibilidade para assímptota vertical ao gráfico de f é a recta de equação $x = 1$. Como

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

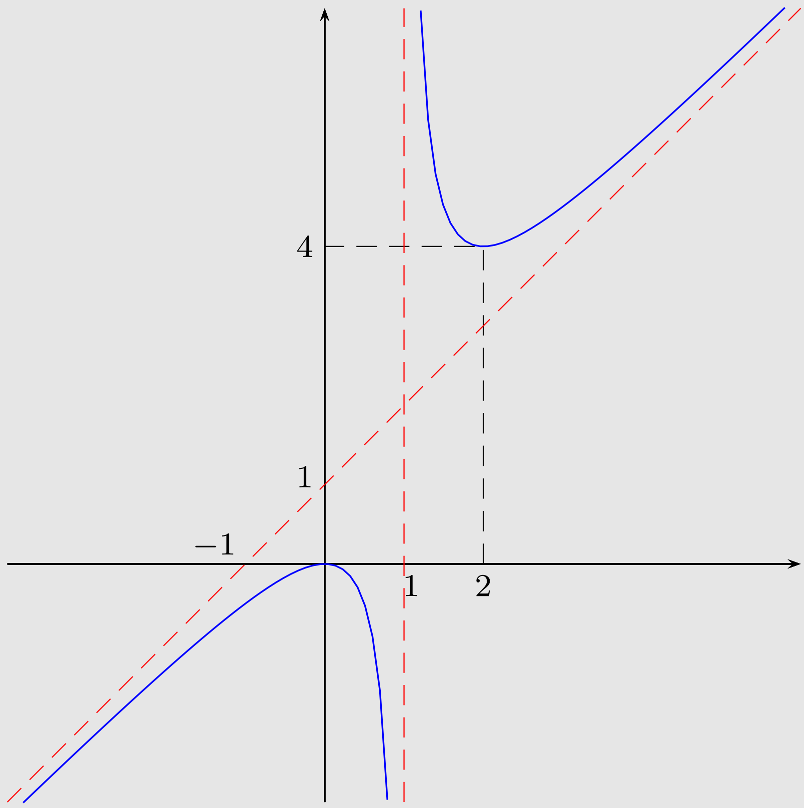
a recta de equação

$$x = 1$$

é de facto uma assímptota vertical ao gráfico de f.

Estamos em condições de esboçar o gráfico de f.

Exemplo – estudo da função $f(x) = x^2/(x-1)$ (continuação)



Problema 1

Pretende-se fabricar uma caixa, sem tampa, de base quadrada e com um volume de $27\,\text{cm}^3$. Se o custo do material usado para a fabricação da superfície lateral é metade do custo do material da base, e se não há perda de material, determine as dimensões que minimizam o custo.

Resolução do Problema 1

Sejam ℓ o comprimento do lado do quadrado da base do recipiente e h a sua altura. Se designarmos por a o preço de $1\,\text{cm}^2$ do material da base, o custo de cada recipiente é dado por

$$\begin{aligned} C &= \ell^2 a + 4\ell h \frac{a}{2} \\ &= \ell^2 a + 2\ell h a. \end{aligned}$$

Resolução do Problema 1 (continuação)

Como a capacidade do recipiente é $27\,\text{cm}^3$, temos

$$V = 27 \Leftrightarrow \ell^2 h = 27 \Leftrightarrow h = 27/\ell^2$$

e, por conseguinte, o custo é dado por

$$C = \ell^2 a + 2\ell h a = \ell^2 a + 2\ell \frac{27}{\ell^2} a = \ell^2 a + \frac{54a}{\ell}.$$

Para minimizarmos o custo temos de derivar (em ordem a ℓ)

$$C' = 2\ell a - \frac{54a}{\ell^2} = \frac{2\ell^3 a - 54a}{\ell^2}.$$

Resolução do Problema 1 (continuação)

Assim,

$$\begin{aligned}C' = 0 &\Leftrightarrow \frac{2\ell^3 a - 54a}{\ell^2} = 0\\ &\Leftrightarrow 2\ell^3 a - 54a = 0 \ \wedge\ \ell^2 \neq 0\\ &\Leftrightarrow \ell^3 = \frac{54a}{2a} \ \wedge\ \ell \neq 0\\ &\Leftrightarrow \ell^3 = \frac{54}{2} \ \wedge\ \ell \neq 0\\ &\Leftrightarrow \ell^3 = 27 \ \wedge\ \ell \neq 0\\ &\Leftrightarrow \ell = 3 \ \wedge\ \ell \neq 0\\ &\Leftrightarrow \ell = 3.\end{aligned}$$

Resolução do Problema 1 (continuação)

Fazendo um quadro de sinal temos

ℓ	0		3	
$2\ell^3 a - 54a$	N.D.	$-$	0	$+$
ℓ^2	N.D.	$+$	$+$	$+$
C'	N.D.	$-$	0	$+$
C	N.D.	$\searrow$	m	$\nearrow$

o que mostra que para $\ell = 3$ temos o custo mínimo. Ora se $\ell = 3$, então

$$h = \frac{27}{\ell^2} = \frac{27}{3^2} = \frac{27}{9} = 3.$$

Portanto, as dimensões que minimizam o custo são $\ell = 3$ e $h = 3$.

Problema 2

Uma bateria de voltagem fixa V e resistência interna fixa r está ligada a um circuito de resistência variável R. Pela lei de Ohm, a corrente I no circuito é

$$I = \frac{V}{R + r}.$$

Se a potência resultante é dada por $P = I^2 R$, mostre que a potência máxima ocorre se $R = r$.

Resolução do Problema 2

De $P = I^2 R$, temos $P = \left(\frac{V}{R+r}\right)^2 R = \frac{V^2 R}{(R+r)^2}$. Assim, o que temos de fazer é calcular os extremos locais da função

$$P(R) = \frac{V^2 R}{(R+r)^2}.$$

Resolução do Problema 2 (continuação)

Derivando a função $P(R) = \frac{V^2 R}{(R+r)^2}$ temos

$$\begin{aligned} P'(R) &= \frac{V^2 (R+r)^2 - 2(R+r) V^2 R}{(R+r)^4} \\ &= \frac{V^2 (R+r) - 2V^2 R}{(R+r)^3} \\ &= \frac{V^2 r - V^2 R}{(R+r)^3} \\ &= \frac{V^2 (r-R)}{(R+r)^3} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$P'(R) = 0 \Leftrightarrow R = r.$$

Resolução do Problema 2 (continuação)

Para verificarmos que

$$R = r$$

é um ponto de máximo local, atendendo a que

$$P'(R) = \frac{V^2\,(r-R)}{(R+r)^3},$$

podemos fazer o seguinte quadro

R		r	
$P'(R)$	$+$	0	$-$
$P(R)$	$\nearrow$	M	$\searrow$

Seja $[a, b]$ um intervalo de $\mathbb{R}$ com mais do que um ponto, ou seja, $a < b$. Chama-se **partição** de $[a, b]$ a todo o subconjunto

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

com

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Seja

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

uma função limitada. Para cada partição

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

de $[a, b]$, usa-se a notação

$$m_i = m_i(f, P) = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e

$$M_i = M_i(f, P) = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} ,$$

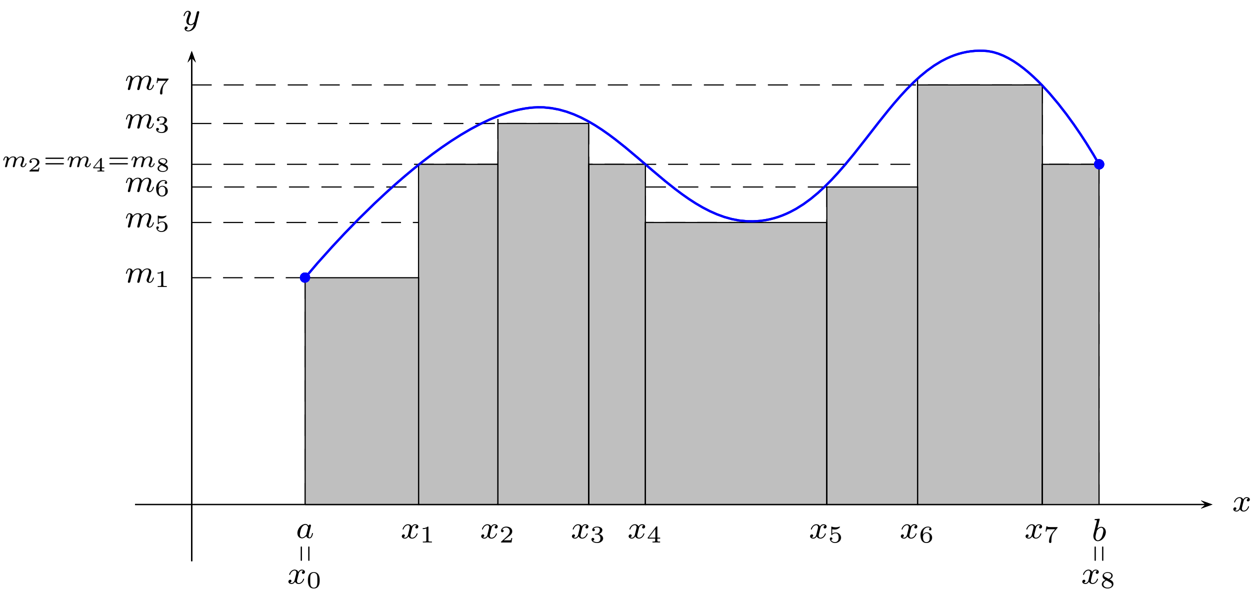
$i = 1, \ldots, n$.

Designa-se por **soma inferior** da função f relativa à partição P ao número

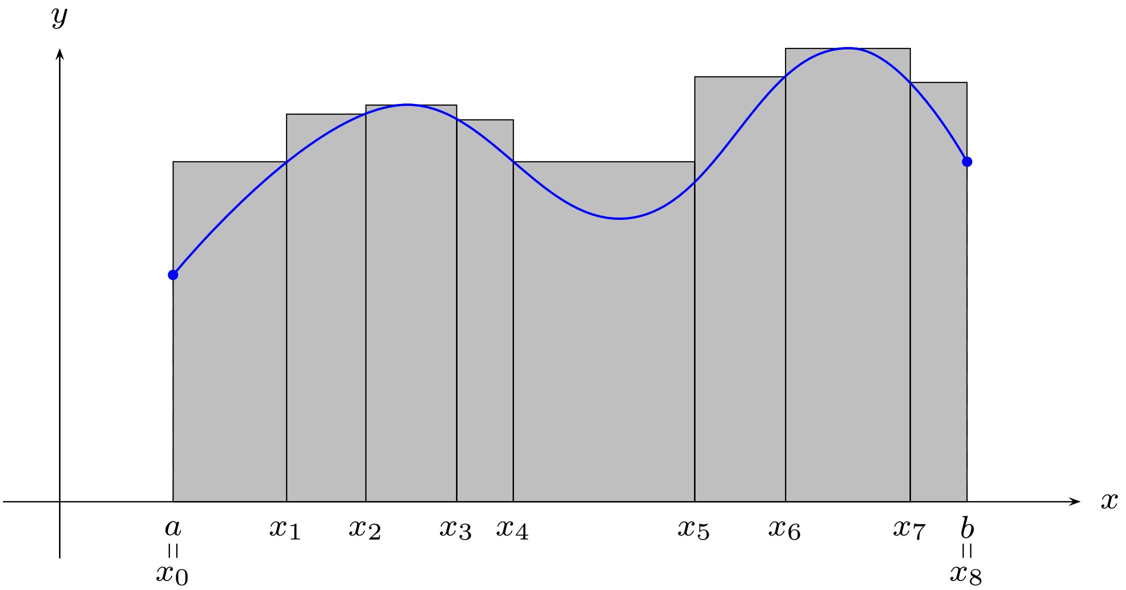
$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f, P) \, (x_i - x_{i-1}) \, .$$

Do mesmo modo, chamamos **soma superior** da função f relativa à partição P ao número

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f, P) \, (x_i - x_{i-1}) \, .$$



Interpretação geométrica das somas inferiores de uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$



Interpretação geométrica das somas superiores de uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

Exemplos de somas superiores e de somas inferiores

a) Consideremos a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Dada uma partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ de $[a, b]$, temos

$$m_i(f, P) = c \qquad \text{e} \qquad M_i(f, P) = c$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f, P)\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c\,(x_i - x_{i-1}) \\ &= c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c\,(b - a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f, P)\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c\,(x_i - x_{i-1}) \\ &= c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c\,(b - a). \end{aligned}$$

Exemplos de somas superiores e de somas inferiores (continuação)

b) Seja

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Dada uma partição P de $[0, 1]$, atendendo a que

$$m_i(f, P) = 0 \qquad \text{e} \qquad M_i(f, P) = 1,$$

temos que

$$s(f, P) = 0 \qquad \text{e} \qquad S(f, P) = 1.$$

Uma função

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

limitada diz-se **integrável à Riemann** em $[a, b]$ se e só se existir um e um só número A tal que

$$s(f, P) \leqslant A \leqslant S(f, P) \text{ para qualquer partição } P \text{ de } [a, b].$$

O único número A que verifica a desigualdade anterior designa-se por **integral de Riemann** de f em $[a, b]$ e representa-se por

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Exemplos do integral de Riemann

a) Consideremos novamente a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$. Já vimos que para qualquer partição P de $[a, b]$ tem-se

$$s(f, P) = c\,(b - a) = S(f, P).$$

Assim,

$$s(f, P) \leqslant c\,(b - a) \leqslant S(f, P) \text{ para qualquer partição } P \text{ de } [a, b]$$

e

$$c\,(b - a)$$

é o único número real que verifica as estas desigualdades. Logo f é integrável à Riemann em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\, dx = c\,(b - a).$$

Exemplos do integral de Riemann (continuação)

b) Já vimos que para a função
$$f : [0,1] \to \mathbb{R},$$
definida por
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \end{cases}$$
se tem
$$s(f,P) = 0 \qquad \text{e} \qquad S(f,P) = 1$$
qualquer que seja a partição P de $[0,1]$. Portanto, se $A \in [0,1]$ tem-se
$$0 = s(f,P) \leqslant A \leqslant S(f,P) = 1$$
para qualquer partição P de $[0,1]$, o que mostra que f não é integrável à Riemann em $[0,1]$.

Propriedades dos integrais

Sejam a e b números reais tais que $a < b$.

a) Se
$$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$$
são funções integráveis em $[a,b]$, então $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

b) Se λ é um número real e
$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$
é uma função integrável em $[a,b]$, então λf é integrável em $[a,b]$ e
$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx.$$

Propriedades dos integrais (continuação)

c) Se a, b e c são números reais tais que $a < c < b$ e

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

uma função limitada, então f é integrável em $[a, b]$ se e só se f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$. Além disso,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

d) Se

$$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

são duas funções integráveis em $[a, b]$ tais que

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ para cada } x \in [a, b],$$

então

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Propriedades dos integrais (continuação)

e) Seja

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

uma função integrável. Então $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

f) Toda a função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$.

g) Toda a função monótona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$.

No que se segue vamos fazer as seguintes convenções

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

e

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e

$$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

uma função integrável. Então a função

$$F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

é contínua em $[a, b]$. Além disso, se f é contínua num ponto $c \in [a, b]$, então F é diferenciável em c e

$$F'(c) = f(c).$$

Corolário do Teorema Fundamental do Cálculo

Se a e b são números reais tais que $a < b$ e

$$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

é uma função contínua, então existe uma função real de variável real definida e diferenciável em $[a, b]$ e cuja derivada é a função f. Além disso, se

$$F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

é tal que

$$F'(x) = f(x) \text{ para qualquer } x \in [a, b],$$

então

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

A igualdade

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

designa-se por **fórmula de Barrow** e é costume usar a seguinte notação

$$\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b = F(b) - F(a),$$

ou seja,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_a^b = F(b) - F(a)},$$

onde, como vimos atrás,

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

é uma função diferenciável cuja derivada é a função contínua f.

A fórmula de Barrow é válida em condições mais gerais.

Fórmula de Barrow

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

uma função integrável à Riemann em $[a,b]$ e suponhamos que existe

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

tal que

$$F'(x) = f(x) \text{ para qualquer } x \in [a,b].$$

Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

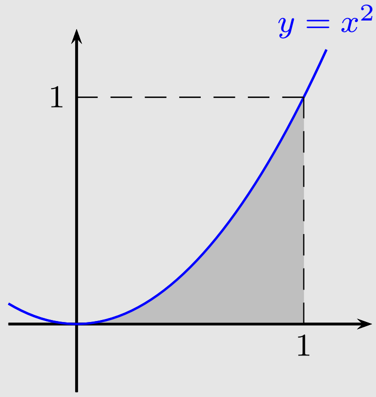
Exemplos

a) Calculemos

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

Pelo que vimos anteriormente, para calcularmos o integral dado, basta descobrir uma função cuja derivada seja a função

$$f(x) = x^2.$$



Como a derivada da função dada por

$$F(x) = \frac{x^3}{3},$$

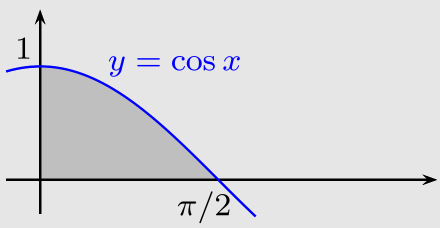
é a função f, temos

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Exemplos (continuação)

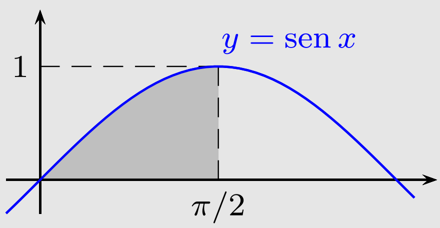
b) Calculemos agora $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$. Então

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx &= \big[\operatorname{sen} x\big]_0^{\pi/2}\\ &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0\\ &= 1 - 0\\ &= 1.\end{aligned}$$



c) Obviamente também se tem

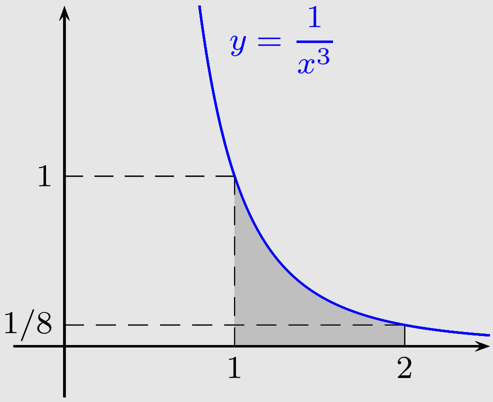
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx &= \big[-\cos x\big]_0^{\pi/2}\\ &= -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\\ &= 0 - (-1)\\ &= 1.\end{aligned}$$



Exemplos (continuação)

d)

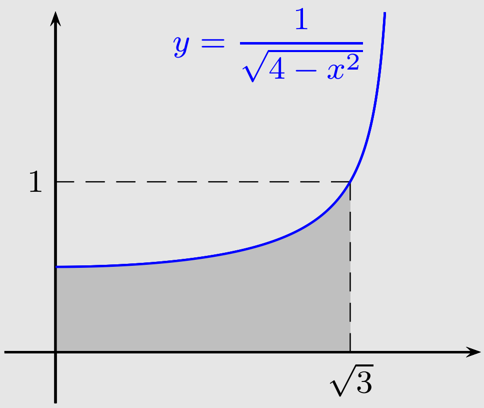
$$\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx = \int_1^2 x^{-3}\,dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{2\cdot 2^2} - \left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$



Exemplos (continuação)

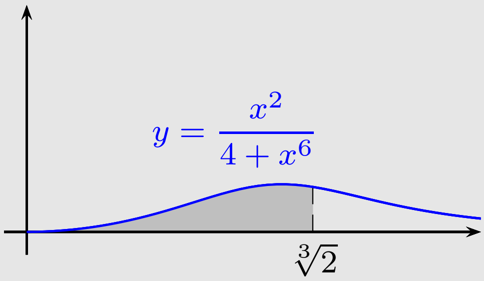
e)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2/4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1/2}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\,dx = \left[\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arc\,sen}\frac{0}{2} = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$



Exemplos (continuação)

f)
$$\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^2}{4+x^6}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^2}{1+x^6/4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^2}{1+(x^3/2)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\,\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3x^2/2}{1+(x^3/2)^2}\,dx = \frac{1}{6}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x^3}{2}\right]_0^{\sqrt[3]{2}}$$
$$= \frac{1}{6}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{(\sqrt[3]{2})^3}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{0^3}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{6}\left[\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0\right]$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{24}$$



Sejam I um intervalo e

$$f : I \to \mathbb{R}$$

uma função. Chama-se **primitiva** de f em I a toda a função

$$F : I \to \mathbb{R}$$

tal que

$$F'(x) = f(x) \text{ para qualquer } x \in I.$$

Diz-se que f é **primitivável** em I quando f possui pelo menos uma primitiva.

Exemplos

a) Uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x$$

é a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{x^2}{2}.$$

b) Dum modo mais geral, dado $n \in \mathbb{N}$, uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^n$$

é a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Sejam I um intervalo e
$$F : I \to \mathbb{R}$$
uma primitiva de uma função
$$f : I \to \mathbb{R}.$$
Então, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, a função
$$F + c$$
é também uma primitiva de f.

Reciprocamente, qualquer outra primitiva de f é da forma
$$F + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

O conjunto das primitivas de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ representa-se por
$$\int f(x)\,dx.$$
Tendo em conta o que vimos anteriormente, se $F : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f temos
$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}.$$
Por uma questão de simplicidade de escrita escrevemos apenas
$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$
Assim,
$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$
e de um modo mais geral
$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Se f e g são duas funções primitiváveis num intervalo I e $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então

$$\boxed{\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}$$

e

$$\boxed{\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx.}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\, dx \\ = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + c.\end{aligned}$$

Nem todas as funções são primitiváveis. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

não é primitivável em $\mathbb{R}$, pois se F fosse uma primitiva de f, a restrição de F ao intervalo $]0, +\infty[$ seria uma função da forma $x + c$ e a restrição de F ao intervalo $]-\infty, 0[$ seria da forma d. Assim a restrição de F a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ seria

$$F(x) = \begin{cases} x + c & \text{se } x > 0; \\ d & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

e independentemente do valor que se dê a $F(0)$, a função F não é derivável em $x = 0$, o que contradiz o facto de F ser uma primitiva de f.

Já sabemos que para qualquer $x > 0$ se tem

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

e se $x < 0$ tem-se

$$[\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Assim, uma primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é a função $\ln|x|$. No entanto, as funções do tipo

$$\ln|x| + c$$

não nos dão todas as primitivas de $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Para obtermos todas as primitivas de f temos de considerar todas as funções da forma

$$\begin{cases} \ln x + c_1 & \text{se } x > 0; \\ \ln(-x) + c_2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Por uma questão de simplicidade passamos a representar todas as funções da forma

$$\begin{cases} \ln x + c_1 & \text{se } x > 0; \\ \ln(-x) + c_2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

por

$$\ln|x| + c,$$

ou seja,

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c.$$

O que foi feito para esta função será feito relativamente a todas as funções cujo domínio é a reunião de dois ou mais intervalos e o fecho de cada um desses intervalos não intersecta o(s) outro(s) intervalo(s).

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$\alpha \neq -1$

$$\int u'(x) \, [u(x)]^\alpha \; dx = \frac{[u(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$\alpha \neq -1$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c \qquad \int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \ln|u(x)| + c$$

$$\int \mathrm{e}^x \; dx = \mathrm{e}^x + c \qquad \int u'(x) \, \mathrm{e}^{u(x)} \; dx = \mathrm{e}^{u(x)} + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0 \qquad \int u'(x) a^{u(x)} \, dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c \qquad \int u'(x) \operatorname{sen}[u(x)] \; dx = -\cos[u(x)] + c$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c \qquad \int u'(x) \cos[u(x)] \; dx = \operatorname{sen}[u(x)] + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c \qquad \int \frac{u'(x)}{\cos^2[u(x)]} \, dx = \operatorname{tg}[u(x)] + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c \qquad \int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2[u(x)]} \, dx = -\operatorname{cotg}[u(x)] + c$$

$$\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + c \qquad \int u'(x) \operatorname{senh}[u(x)] \; dx = \cosh[u(x)] + c$$

$$\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x + c \qquad \int u'(x) \cosh[u(x)] \; dx = \operatorname{senh}[u(x)] + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + c \qquad \int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2 - [u(x)]^2}} \, dx = \operatorname{arc\,sen} \frac{u(x)}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + c \qquad \int \frac{u'(x)}{a^2 + [u(x)]^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u(x)}{a} + c$$

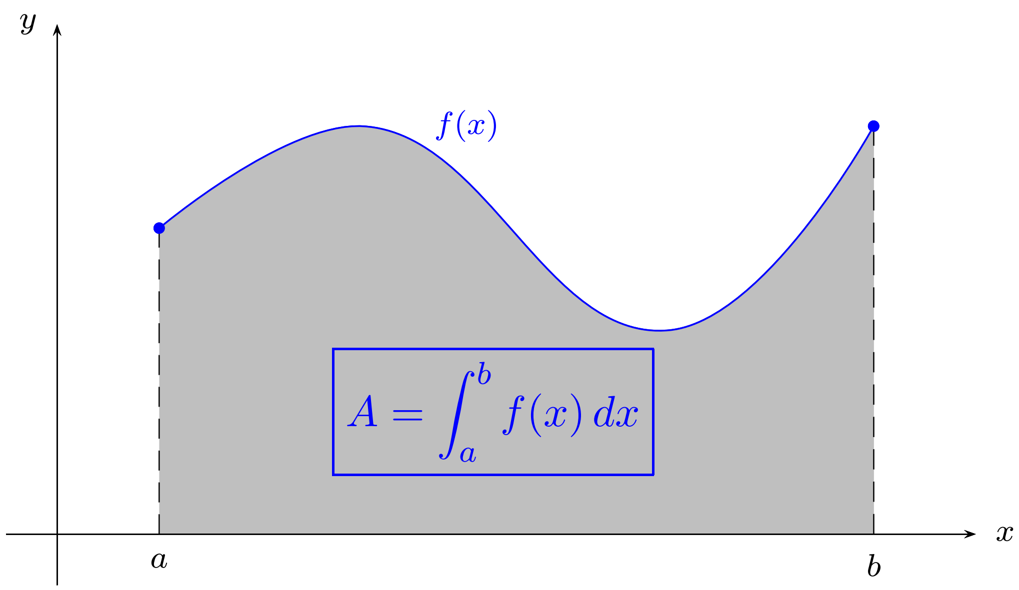
$$a \in \,]0, +\infty[$$

Seja

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ uma função integrável}$$

tal que

$$f(x) \geqslant 0 \text{ para qualquer } x \in [a,b].$$

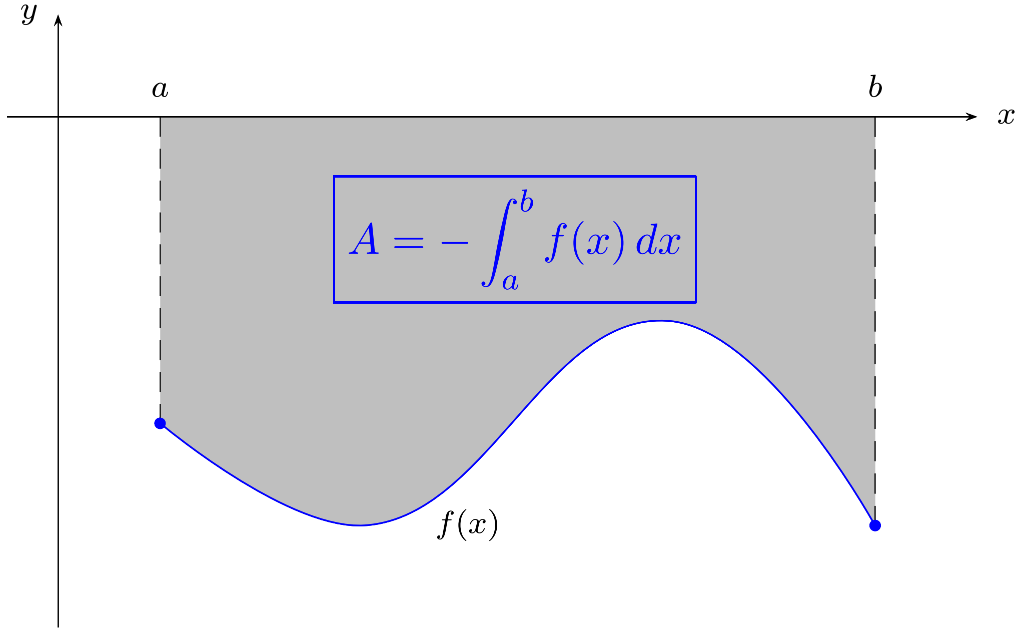


Seja

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ uma função integrável}$$

tal que

$$f(x) \leqslant 0 \text{ para qualquer } x \in [a,b].$$

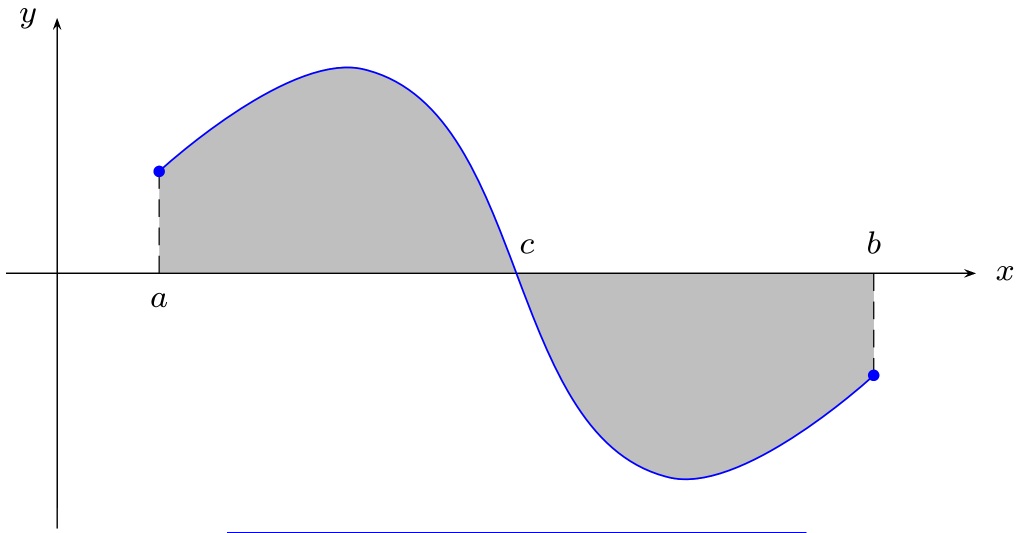


Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que existe $c \in \,]a,b[$ tal que

$$f(x) \geqslant 0 \text{ para qualquer } x \in [a,c]$$

e

$$f(x) \leqslant 0 \text{ para qualquer } x \in [c,b].$$



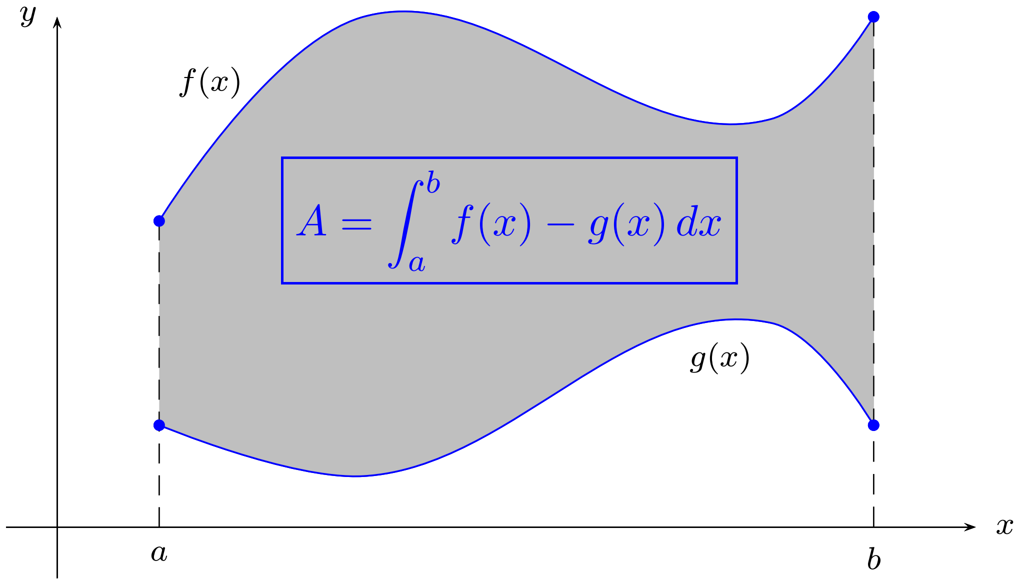
$$\boxed{A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx}$$

Sejam

$$f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ funções integráveis}$$

tais que

$$f(x) \geqslant g(x) \text{ para qualquer } x \in [a,b].$$

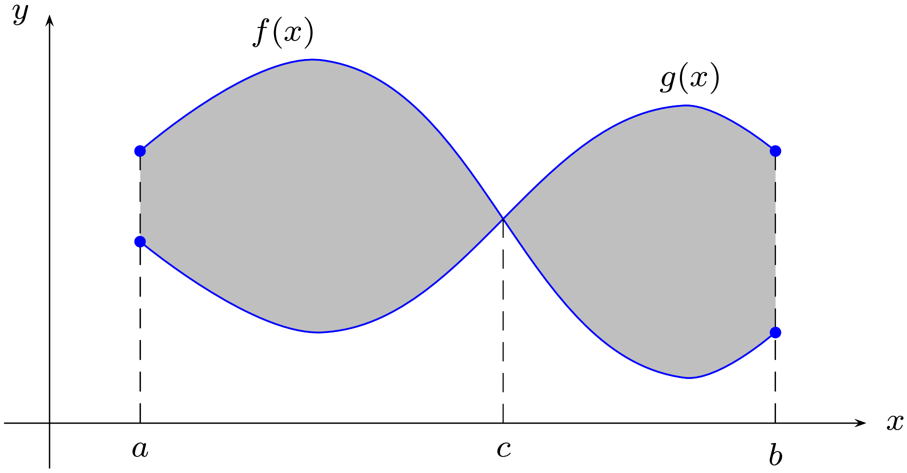


Sejam $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis e seja $c \in]a,b[$ tal que

$$f(x) \geqslant g(x) \text{ para qualquer } x \in [a,c]$$

e

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ para qualquer } x \in [c,b].$$



$$\boxed{A = \int_a^c f(x) - g(x)\,dx + \int_c^b g(x) - f(x)\,dx}$$

Exemplos do cálculo da área de regiões planas

a) Calculemos a área da região plana limitada pelas rectas de equação

$$y = x, \qquad y = 2 - x \qquad \text{e} \qquad x = 0.$$

Como nenhuma destas rectas é paralela às outras duas, a região plana de que queremos calcular a área é um triângulo. Calculemos os vértices desse triângulo. Para isso temos de resolver os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = x \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2x \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

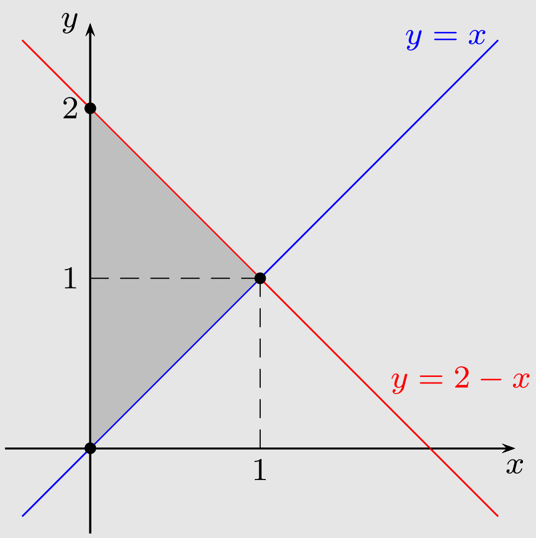
$$\begin{cases} y = x \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Assim, a região plana de que queremos calcular a área é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(0, 0)$ e $(0, 2)$.

Exemplos do cálculo da área de regiões planas

a) (continuação) Façamos a representação geométrica da região e calculemos a sua área.



Assim, a área do triângulo é

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 2 - x - x\,dx \\ &= \int_0^1 2 - 2x\,dx \\ &= \Big[2x - x^2\Big]_0^1 \\ &= 2 \cdot 1 - 1^2 - (2 \cdot 0 - 0^2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exemplos do cálculo da área de regiões planas (continuação)

b) Calculemos a área da região plana limitada pela recta de equação

$$y = x + 2$$

e pela parábola de equação

$$y = x^2.$$

Comecemos por calcular os pontos de intersecção das duas curvas:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x + 2 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ \text{———} \end{cases}$$

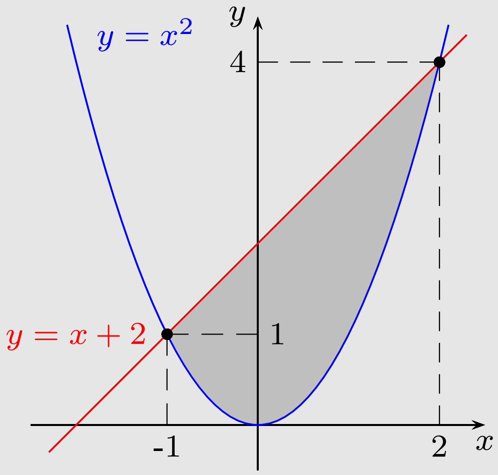
Como

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \lor x = -1,$$

os pontos de intersecção são $(2,4)$ e $(-1,1)$.

Exemplos do cálculo da área de regiões planas (continuação)

b) (continuação) Representemos geometricamente a região do plano de que queremos calcular a área.



Assim, a área é

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \\ &\qquad - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) \\ &= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Exemplos do cálculo da área de regiões planas (continuação)

c) Calculemos a área da região plana limitada pelas rectas de equação

$$y = 2x, \qquad y = \frac{x}{2} \qquad \text{e} \qquad y = -x + 3.$$

A região do plano de que queremos calcular a área é um triângulo pois é limitada por três rectas. Calculemos os seus vértices.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x/2 = 2x \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4x \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = 0 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

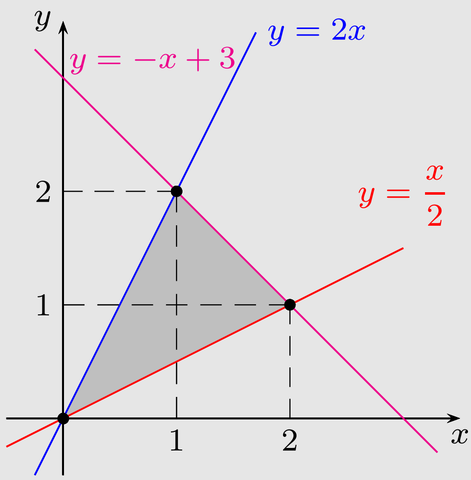
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3 = 2x \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -3 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x/2 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3 = x/2 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6 = x \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -6 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Assim, os vértices do triângulo são $(0, 0)$, $(1, 2)$ e $(2, 1)$.

Exemplos do cálculo da área de regiões planas (continuação)

c) (continuação) Representemos geometricamente o triângulo e calculemos a sua área.



$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 2x - \frac{x}{2}\,dx + \int_1^2 -x + 3 - \frac{x}{2}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{3x}{2}\,dx + \int_1^2 -\frac{3x}{2} + 3\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 x\,dx - \frac{3}{2}\int_1^2 x\,dx + 3\int_1^2 1\,dx \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 3\left[x\right]_1^2 \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) + 3\,(2 - 1) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{9}{4} + 3 \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Sejam I um intervalo e

$$f, g\colon I \to \mathbb{R}$$

duas funções diferenciáveis em I. Como

$$[f(x)\,g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

tem-se

$$f'(x)\,g(x) = [f(x)\,g(x)]' - f(x)\,g'(x).$$

Assim, $f'\,g$ é primitivável se e só se $f\,g'$ o é e

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = \int [f(x)\,g(x)]'\,dx - \int f(x)\,g'(x)\,dx,$$

ou seja,

$$\boxed{\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx}$$

que é a fórmula de primitivação por partes.

Exemplos de primitivação por partes: $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

a) Calculemos por partes $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\,dx$:

$$\int \overbrace{x}^{f'(x)}\ \overbrace{\operatorname{sen} x}^{g(x)}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} x - \int \frac{x^2}{2}\,(\operatorname{sen} x)'\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} x - \int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx.$$

A primitiva que agora temos de calcular é mais complicada do que a inicial. No entanto, trocando os papeis das funções temos

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen} x\,dx &= \int \overbrace{\operatorname{sen} x}^{f'(x)} \cdot \overbrace{x}^{g(x)}\,dx \\
&= (-\cos x)\ x - \int (-\cos x)\,x'\,dx \\
&= -x\cos x - \int (-\cos x)\ dx \\
&= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\
&= -x\cos x + \operatorname{sen} x + c.
\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por partes: $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

b) Para primitivarmos a função $\ln x$ temos de primitivar por partes:

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int \overbrace{1}^{f'(x)} \cdot \overbrace{\ln x}^{g(x)}\,dx \\ &= x\ln x - \int x\,(\ln x)'\,dx \\ &= x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx \\ &= x\ln x - \int 1\,dx \\ &= x\ln x - x + c\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por partes: $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

c) Vejamos como primitivar a função $\operatorname{arc\,tg} x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx &= \int \overbrace{1}^{f'(x)} \cdot \overbrace{\operatorname{arc\,tg} x}^{g(x)}\,dx \\ &= x\operatorname{arc\,tg} x - \int x\,\left(\operatorname{arc\,tg} x\right)'\,dx \\ &= x\operatorname{arc\,tg} x - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= x\operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\ &= x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por partes: $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

d) A primitiva de $\operatorname{arcsen} x$ calcula-se de forma semelhante:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arcsen} x\,dx &= \int \overbrace{1}^{f'(x)} \cdot \overbrace{\operatorname{arcsen} x}^{g(x)}\,dx \\
&= x \operatorname{arcsen} x - \int x\,(\operatorname{arcsen} x)'\,dx \\
&= x \operatorname{arcsen} x - \int x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\int -2x\left(1-x^2\right)^{-1/2}\,dx \\
&= x \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\,\frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{1/2} + c \\
&= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c
\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por partes: $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

e) Primitivando por partes a função $\operatorname{sen}^2 x$ temos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x\,dx &= \int \overbrace{\operatorname{sen} x}^{f'(x)}\ \overbrace{\operatorname{sen} x}^{g(x)}\,dx \\
&= -\cos x\ \operatorname{sen} x - \int -\cos x\,(\operatorname{sen} x)'\,dx \\
&= -\cos x\ \operatorname{sen} x - \int -\cos x\ \cos x\,dx \\
&= -\operatorname{sen} x\ \cos x + \int \cos^2 x\,dx \\
&= -\operatorname{sen} x\ \cos x + \int 1 - \operatorname{sen}^2 x\,dx \\
&= -\operatorname{sen} x\ \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx.
\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por partes: $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

e) (continuação) Fazendo $I = \displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ em

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x\ \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx$$

tem-se

$$I = -\operatorname{sen} x\ \cos x + x - I$$

o que implica

$$2I = -\operatorname{sen} x\ \cos x + x$$

e, portanto,

$$I = -\frac{\operatorname{sen} x\ \cos x}{2} + \frac{x}{2}.$$

Assim,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\frac{\operatorname{sen} x\ \cos x}{2} + \frac{x}{2} + c.$$

Exemplos de primitivação por partes: $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

f) Primitivemos por partes a função $e^x \operatorname{sen} x$:

$$\begin{aligned}
\int \overbrace{e^x}^{f'(x)}\ \overbrace{\operatorname{sen} x}^{g(x)}\,dx &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x (\operatorname{sen} x)'\,dx \\
&= e^x \operatorname{sen} x - \int \overbrace{e^x}^{f'(x)}\ \overbrace{\cos x}^{g(x)}\,dx \\
&= e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x - \int e^x (\cos x)'\,dx\right) \\
&= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + \int e^x (-\operatorname{sen} x)\,dx \\
&= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx
\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por partes: $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

f) (continuação) De

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,dx$$

concluímos que

$$2\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,dx = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x \cos x$$

e, portanto,

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{\mathrm{e}^x}{2}\left(\operatorname{sen} x - \cos x\right) + c.$$

Integração por partes

Sejam a e b números reais tais $a < b$ e

$$f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

funções diferenciáveis com derivadas integráveis. Então

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[\,f(x)g(x)\,\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.}$$

Exemplos de integração por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [\,f(x)g(x)\,]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

a) Calculemos $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,dx$. Então

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,dx &= \int_1^{\mathrm{e}} \overbrace{1}^{f'(x)} \cdot \overbrace{\ln x}^{g(x)}\,dx \\
&= \Big[\,x\ln x\,\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\;(\ln x)'\;dx \\
&= \mathrm{e}\cdot\ln\mathrm{e} - 1\cdot\ln 1 - \int_1^{\mathrm{e}} x\,\frac{1}{x}\,dx \\
&= \mathrm{e} - 0 - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,dx \\
&= \mathrm{e} - \Big[\,x\,\Big]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Exemplos de integração por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [\,f(x)g(x)\,]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x\cos x\,dx &= \int_0^{\pi} \overbrace{\cos x}^{f'(x)} \cdot \overbrace{x}^{g(x)}\,dx \\
&= \Big[\,(\operatorname{sen} x)\;x\,\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x)\;x'\,dx \\
&= (\operatorname{sen}\pi)\;\pi - (\operatorname{sen} 0)\;0 - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \int_0^{\pi} -\operatorname{sen} x\,dx \\
&= \Big[\,\cos x\,\Big]_0^{\pi} \\
&= \cos\pi - \cos 0 \\
&= -1 - 1 = -2.
\end{aligned}$$

Exemplos de integração por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [\,f(x)g(x)\,]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

c)

$$\int_0^2 x^2\,\mathrm{e}^x\;dx = \int_0^2 \overbrace{\mathrm{e}^x}^{f'(x)}\;\overbrace{x^2}^{g(x)}\;dx$$

$$= \Big[\mathrm{e}^x\;x^2\Big]_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^x\,(x^2)'\,dx$$

$$= \mathrm{e}^2\;2^2 - \mathrm{e}^0\;0^2 - 2\int_0^2 \overbrace{\mathrm{e}^x}^{f'(x)}\;\overbrace{x}^{g(x)}\;dx$$

$$= 4\,\mathrm{e}^2 - 2\left(\Big[\mathrm{e}^x\,x\Big]_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^x\;x'\,dx\right)$$

$$= 4\,\mathrm{e}^2 - 2\left(\mathrm{e}^2\;2 - \mathrm{e}^0\;0 - \int_0^2 \mathrm{e}^x\;dx\right)$$

$$= 2\Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^2 = 2\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^0\right) = 2\,\mathrm{e}^2 - 2$$

Exemplos de integração por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [\,f(x)g(x)\,]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

d) Calculemos $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\;\mathrm{e}^x\;dx$:

$$\int_0^{\pi/2} \overbrace{\cos x}^{f'(x)}\;\overbrace{\mathrm{e}^x}^{g(x)}\;dx = [\,\operatorname{sen} x\;\mathrm{e}^x\,]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\;(\mathrm{e}^x)'\;dx$$

$$= \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\;\mathrm{e}^{\pi/2} - \operatorname{sen} 0\;\mathrm{e}^0 - \int_0^{\pi/2} \overbrace{\operatorname{sen} x}^{f'(x)}\;\overbrace{\mathrm{e}^x}^{g(x)}\;dx$$

$$= \mathrm{e}^{\pi/2} - \left[[\,-\cos x\;\mathrm{e}^x\,]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos x\;(\mathrm{e}^x)'\;dx\right]$$

$$= \mathrm{e}^{\pi/2} - \left[-\cos\frac{\pi}{2}\;\mathrm{e}^{\pi/2} - \left(-\cos 0\;\mathrm{e}^0\right)\right] - \int_0^{\pi/2} \cos x\;\mathrm{e}^x\;dx$$

$$= \mathrm{e}^{\pi/2} - 1 - \int_0^{\pi/2} \cos x\;\mathrm{e}^x\;dx.$$

Exemplos de integração por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [\,f(x)g(x)\,]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

d) (continuação) Acabámos de ver que

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \ \mathrm{e}^x \ dx = \mathrm{e}^{\pi/2} - 1 - \int_0^{\pi/2} \cos x \ \mathrm{e}^x \ dx,$$

e, portanto,

$$2\int_0^{\pi/2} \cos x \ \mathrm{e}^x \ dx = \mathrm{e}^{\pi/2} - 1,$$

o que implica

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \ \mathrm{e}^x \ dx = \frac{\mathrm{e}^{\pi/2} - 1}{2}.$$

Dados intervalos I e J de $\mathbb{R}$, sejam

$$f : I \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \varphi : J \to I$$

funções tais que f é primitivável e φ é bijectiva, diferenciável e $\varphi'(t) \neq 0$ para cada $t \in J$. Seja $F : I \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Como

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\, \varphi'(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$$

$F \circ \varphi$ é uma primitiva de $(f \circ \varphi)\, \varphi'$.

Assim, para calcular as primitivas de $f(x)$, basta calcular as primitivas de $f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$ e depois fazer a mudança de variável $t = \varphi^{-1}(x)$, ou seja,

$$\boxed{\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt \,\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.}$$

Para primitivarmos por substituição usamos as notações

$$x = \varphi(t) \quad \text{e} \quad dx = \varphi'(t) dt.$$

Exemplos de primitivação por substituição

a) Para calcularmos $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, $a > 0$, fazemos a substituição

$$x = a \operatorname{sen} t$$

e, portanto,

$$dx = (a \operatorname{sen} t)'\, dt = a \cos t\, dt$$

o que dá

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t}\; a \cos t\, dt \\
&= \int \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 t)}\; a \cos t\, dt \\
&= \int \sqrt{a^2 \cos^2 t}\; a \cos t\, dt \\
&= \int a \cos t\; a \cos t\, dt \\
&= a^2 \int \cos^2 t\, dt.
\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

a) (continuação) Primitivando por partes $\int \cos^2 t\, dt$ temos

$$\begin{aligned}\int \cos^2 t\, dt &= \int \overbrace{\cos t}^{f'(t)} \cdot \overbrace{\cos t}^{g(t)}\, dt\\ &= \operatorname{sen} t \cos t - \int \operatorname{sen} t\,(-\operatorname{sen} t)\ dt\\ &= \operatorname{sen} t \cos t + \int 1 - \cos^2 t\, dt\\ &= \operatorname{sen} t \cos t + t - \int \cos^2 t\, dt\end{aligned}$$

e, portanto,

$$2\int \cos^2 t\, dt = \operatorname{sen} t\ \cos t + t$$

o que implica

$$\int \cos^2 t\, dt = \frac{\operatorname{sen} t\ \cos t}{2} + \frac{t}{2} + c$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

a) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= a^2 \int \cos^2 t\, dt\\ &= a^2 \frac{\operatorname{sen} t\ \cos t}{2} + a^2 \frac{t}{2} + c\end{aligned}$$

e atendendo a que

$$x = a\ \operatorname{sen} t,$$

resulta

$$t = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}$$

o que dá

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \frac{ax}{2}\ \cos\left(\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + c\\ &= \frac{x}{2}\ \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + c\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

b) Para calcularmos a primitiva

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

fazemos a substituição

$$x = \operatorname{sen} t$$

o que dá

$$\begin{aligned} dx &= (\operatorname{sen} t)'\,dt \\ &= \cos t\,dt. \end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

b) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\cos t\,dt \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t\,\cos t}\cos t\,dt \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt \\ &= -\operatorname{cotg} t + c \\ &= -\operatorname{cotg}(\operatorname{arc\,sen} x) + c \\ &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c \end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

c) Se quisermos calcular a primitiva

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

fazemos a substituição $x = \operatorname{tg} t$ e, portanto, $dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt$, o que dá

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}\;\frac{1}{\cos^2 t}\,dt \\
&= \int \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 t}\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}}\;\frac{1}{\cos^2 t}\,dt \\
&= \int \cos t\,dt = \operatorname{sen} t + c \\
&= \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x) + c = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c
\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

d) Calculemos

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx,$$

usando a substituição

$$x = 2\operatorname{tg} t.$$

Então

$$dx = (2\operatorname{tg} t)'\,dt = \frac{2}{\cos^2 t}\,dt.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+4} &= \sqrt{(2\operatorname{tg} t)^2+4} = \sqrt{4\operatorname{tg}^2 t + 4} \\
&= \sqrt{4\,(\operatorname{tg}^2 t + 1)} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{2}{\cos t}
\end{aligned}$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

d) (continuação) Assim,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int \frac{1}{4\,\mathrm{tg}^2\,t\,\dfrac{2}{\cos t}}\,\frac{2}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\dfrac{\mathrm{sen}^2\,t}{\cos^2 t}}\,\frac{1}{\cos t}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos t\;\mathrm{sen}^{-2}\,t\,dt = \frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{sen}^{-1}\,t}{-1} + c$$

$$= -\frac{1}{4\,\mathrm{sen}\,t} + c = -\frac{1}{4\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{arc\,tg}\,x/2)} + c$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + c$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

e) Calculemos a seguinte primitiva

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx,$$

fazendo a substituição

$$x = \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

e, portanto,

$$dx = \left(\frac{1}{\cos t}\right)'\,dt = \frac{\mathrm{sen}\,t}{\cos^2 t}\,dt.$$

Além disso,

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\mathrm{tg}^2\,t} = \mathrm{tg}\,t.$$

Exemplos de primitivação por substituição (continuação)

e) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \int \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 t}\,\operatorname{tg} t}\,\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,dt \\
&= \int \cos t\,dt \\
&= \operatorname{sen} t + c \\
&= \operatorname{sen}\left(\arccos\frac{1}{x}\right) + c \\
&= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c
\end{aligned}$$

Integração por substituição

Sejam a, b, c e d números reais tais que $a < b$ e $c < d$,

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

uma função contínua e

$$g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$$

uma função diferenciável com derivada integrável e tal que

$$g([c,d]) \subseteq [a,b].$$

Então

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Exemplos de integração por substituição

a) Calculemos $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ fazendo a substituição $t=\sqrt{x}$. Então

$$x = t^2, \text{ pelo que } dx = (t^2)'\,dt = 2t\,dt.$$

Além disso, quando $x=0$ temos $t=\sqrt{0}=0$ e quando $x=4$ vem $t=\sqrt{4}=2$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int_0^2 \frac{1}{1+t}\,2t\,dt = 2\int_0^2 \frac{t}{1+t}\,dt\\ &= 2\int_0^2 \frac{1+t-1}{1+t}\,dt = 2\int_0^2 \frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t}\,dt\\ &= 2\left(\int_0^2 1\,dt - \int_0^2 \frac{1}{1+t}\,dt\right) = 2\left(\big[\,t\,\big]_0^2 - \big[\,\ln|1+t|\,\big]_0^2\right)\\ &= 2\,(2-0-(\ln 3-\ln 1)) = 4-2\ln 3.\end{aligned}$$

Exemplos de integração por substituição (continuação)

b) Calculemos $\displaystyle\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,dx$. Para isso fazemos a substituição

$$t=\sqrt{x+3},$$

isto é,

$$x = t^2-3$$

e, portanto,

$$dx = \left(t^2-3\right)'\,dt = 2t\,dt.$$

Além disso,

$$\text{quando } x=1 \text{ vem } t=\sqrt{1+3}=2$$

e

$$\text{quando } x=6 \text{ temos } t=\sqrt{6+3}=3.$$

Exemplos de integração por substituição (continuação)

$b)$ (continuação) Assim,

$$\begin{aligned}
\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,dx &= \int_2^3 \frac{t^2-3}{t}\,2t\,dt \\
&= 2\int_2^3 t^2-3\,dt \\
&= 2\left[\frac{t^3}{3}-3t\right]_2^3 \\
&= 2\left(\frac{27}{3}-9-\left(\frac{8}{3}-6\right)\right) \\
&= 2\left(6-\frac{8}{3}\right) \\
&= \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

Exemplos de integração por substituição (continuação)

$c)$ Para calcularmos $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,dx$ fazemos a substituição

$$\mathrm{e}^{-x} = t,$$

o que implica

$$x = -\ln t$$

e, portanto,

$$dx = -\left(\ln t\right)'\,dt = -\frac{1}{t}\,dt.$$

Além disso, quando

$$x = 0 \text{ temos } t = \mathrm{e}^{-0} = \mathrm{e}^0 = 1$$

e quando

$$x = 1 \text{ vem } t = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Exemplos de integração por substituição (continuação)

c) (continuação) Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,dx &= \int_1^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{1/t+1}\left(-\frac{1}{t}\right)\,dt \\
&= -\int_1^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{1+t}\,dt \\
&= -\Big[\ln|1+t|\Big]_1^{1/\mathrm{e}} \\
&= -\left[\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)-\ln 2\right] \\
&= \ln 2 - \ln\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}} \\
&= \ln\frac{2\,\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}.
\end{aligned}$$

Exemplos de integração por substituição (continuação)

d) Calculemos $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$. Para isso usamos a substituição

$$x=\operatorname{tg} t,\ \text{ o que implica }\ dx=(\operatorname{tg} t)'\,dt=\frac{1}{\cos^2 t}\,dt.$$

Obviamente, atendendo a que $t=\operatorname{arc\,tg} x$,

$$\text{quando } x=-1 \text{ tem-se } t=\operatorname{arc\,tg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

e

$$\text{quando } x=1 \text{ vem } t=\operatorname{arc\,tg}(1)=\frac{\pi}{4}.$$

Repare-se que

$$(1+x^2)^2=(1+\operatorname{tg}^2 t)^2=\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2=\frac{1}{\cos^4 t}.$$

Exemplos de integração por substituição (continuação)

d) (continuação) Assim,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{1/\cos^4 t}\,\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 t\,dt$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2t)+1\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + t\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

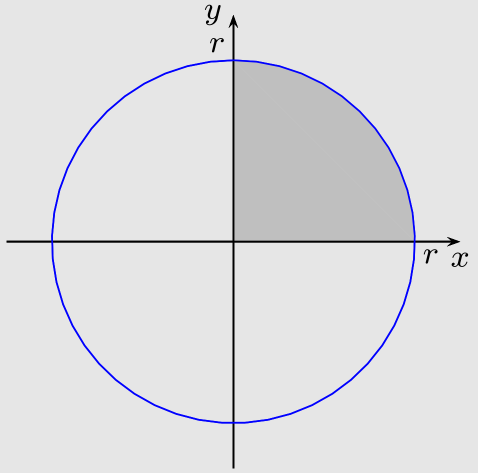
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{2} + \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\operatorname{sen}(-\pi/2)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi+2}{4}$$

Área de um círculo de raio r

Calculemos a área de um círculo de raio r. Por uma questão de simplicidade vamos considerar o centro do círculo a origem. Obviamente, basta calcular a área da parte do círculo que está no primeiro quadrante e multiplicar esse valor por quatro. Para isso temos encontrar a equação da curva que limita superiormente a zona sombreada da figura. Da equação da circunferência temos

$$x^2+y^2=r^2 \Leftrightarrow y^2=r^2-x^2$$
$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{r^2-x^2}$$



e, portanto, a curva que limita superiormente a zona sombreada é

$$y=\sqrt{r^2-x^2}.$$

Assim, a área do círculo de raio r é dada por

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Área de um círculo de raio r (continuação)

Para calcularmos $A = 4\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ temos de fazer a substituição

$$x = r\,\mathrm{sen}\,t$$

e, portanto,

$$dx = (r\,\mathrm{sen}\,t)'\;dt = r\cos t\,dt.$$

Além disso, como

$$t = \mathrm{arc\,sen}\,\frac{x}{r}$$

resulta que

$$\text{quando } x = 0 \text{ temos } t = \mathrm{arc\,sen}\,0 = 0$$

e

$$\text{quando } x = r \text{ temos } t = \mathrm{arc\,sen}\,1 = \frac{\pi}{2}.$$

Área de um círculo de raio r (continuação)

Assim,

$$\begin{aligned}
A &= 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - (r\,\mathrm{sen}\,t)^2}\,r\cos t\,dt \\
&= 4r\int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2\left(1 - \mathrm{sen}^2\,t\right)}\,\cos t\,dt = 4r\int_0^{\pi/2} r\cos t\,\cos t\,dt \\
&= 4r^2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 4r^2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt \\
&= 2r^2\int_0^{\pi/2} \cos(2t)+1\,dt = 2r^2\left[\frac{\mathrm{sen}(2t)}{2} + t\right]_0^{\pi/2} \\
&= 2r^2\left(\frac{\mathrm{sen}\,\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\mathrm{sen}\,0}{2} + 0\right)\right) = 2r^2\frac{\pi}{2} \\
&= \pi r^2.
\end{aligned}$$

Uma função racional é uma função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinómios e $D = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Assumimos que P e Q não têm zeros (reais ou complexos) comuns. Se o grau de P é maior ou igual do que o grau de Q, então fazendo a divisão de P por Q temos

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

e, portanto,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

onde D e R são polinómios e o grau de R é menor do que o grau de Q. Assim, para primitivarmos as funções racionais basta sabermos primitivar as funções racionais onde o grau do numerador é menor do que o grau do denominador.

Sejam P e Q dois polinómios com o grau de P menor do que o grau de Q e sem zeros (reais ou complexos) em comum. Então

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1} \ldots (x-a_k)^{n_k} \left[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2\right]^{m_1} \ldots \left[(x-\alpha_l)^2 + \beta_l^2\right]^{m_l}$$

onde os zeros reais de Q são

$$a_1, \ldots, a_k \quad \text{com multiplicidades} \quad n_1, \ldots, n_k,$$

respectivamente, e os zeros complexos de Q são

$$\alpha_1 + \beta_1 i, \ldots, \alpha_l + \beta_l i \quad \text{com multiplicidades} \quad m_1, \ldots, m_l,$$

respectivamente, e

$$\alpha_1 - \beta_1 i, \ldots, \alpha_l - \beta_l i \quad \text{com multiplicidades} \quad m_1, \ldots, m_l,$$

respectivamente.

Além disso, existem números reais $A's$, $B's$ e $C's$ tais que

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{1,n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \\ & + \cdots + \frac{A_{k,1}}{x-a_k} + \cdots + \frac{A_{k,n_k}}{(x-a_k)^{n_k}} + \\ & + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \cdots + \frac{B_{1,m_1}x + C_{1,m_1}}{\left[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2\right]^{m_1}} + \\ & + \cdots + \frac{B_{l,1}x + C_{l,1}}{(x-\alpha_l)^2 + \beta_l^2} + \cdots + \frac{B_{l,m_1}x + C_{l,m_l}}{\left[(x-\alpha_l)^2 + \beta_l^2\right]^{m_l}},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{i,j}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_l} \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{\left[(x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right]^j}.$$

Exemplos de primitivação de funções racionais

a) Calculemos

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx.$$

Fazendo a divisão de x^2 por x^2-1 temos

$$\begin{array}{rrr|lll}
x^2 & +0x & +0 & x^2 & +0x & -1 \\ \cline{4-6}
-x^2 & -0x & +1 & 1 & & \\ \cline{1-3}
 & +0x & +1 & & &
\end{array}$$

e, portanto,

$$\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1}.$$

Agora precisamos de factorizar o denominador. Para isso basta ter em conta que zeros do denominador que são 1 e -1.

Exemplos de primitivação de funções racionais (continuação)

a) (continuação) Então existem números reais A e B tais que

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)\,(x+1)},$$

pelo que

$$A(x+1)+B(x-1) = 1.$$

Fazendo $x=-1$ resulta que $B = -1/2$ e fazendo $x=1$ tem-se $A = 1/2$, ou seja,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}.$$

Exemplos de primitivação de funções racionais (continuação)

a) (continuação) Assim,

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int 1 + \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

$$= \int 1 + \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c.$$

Exemplos de primitivação de funções racionais (continuação)

b) Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3\left(x^2+1\right)}.$$

Então temos de ter

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

e, portanto,

$$\frac{A\left(x^2+1\right) + Bx\left(x^2+1\right) + Cx^2\left(x^2+1\right) + (Dx+E)\,x^3}{x^3\left(x^2+1\right)} = \frac{x+1}{x^3\left(x^2+1\right)},$$

o que implica

$$A\left(x^2+1\right) + Bx\left(x^2+1\right) + Cx^2\left(x^2+1\right) + (Dx+E)\,x^3 = x+1.$$

Exemplos de primitivação de funções racionais (continuação)

b) (continuação) Fazendo $x = 0$ em

$$A\left(x^2+1\right) + Bx\left(x^2+1\right) + Cx^2\left(x^2+1\right) + (Dx+E)\,x^3 = x+1.$$

temos $A = 1$ e fazendo $x = i$ tem-se

$$(Di+E)\,i^3 = i+1 \Leftrightarrow (Di+E)(-i) = 1+i \Leftrightarrow D - Ei = 1+i$$

o que implica $D = 1$ e $E = -1$. Fazendo $x = 1$ obtemos

$$2A + 2B + 2C + D + E = 2 \Leftrightarrow 2 + 2B + 2C + 1 - 1 = 2 \Leftrightarrow B + C = 0$$

e fazendo $x = -1$ resulta

$$\begin{aligned} 2A - 2B + 2C + D - E = 0 &\Leftrightarrow 2 - 2B + 2C + 1 - (-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2B + 2C = -4 \\ &\Leftrightarrow -B + C = -2, \end{aligned}$$

o que dá o sistema

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ -B + C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -C \\ C + C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$

Exemplos de primitivação de funções racionais (continuação)

b) (continuação) Assim,

$$\frac{x+1}{x^3\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

pelo que

$$\begin{aligned} &\int \frac{x+1}{x^3\left(x^2+1\right)}\,dx \\ &= \int \frac{1}{x^3}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx \\ &= \int x^{-3}\,dx + \int x^{-2}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-1}}{-1} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \operatorname{arc\,tg} x + c \\ &= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \operatorname{arc\,tg} x + c \end{aligned}$$

Tendo em conta a decomposição que obtivemos, para primitivarmos funções racionais basta sabermos calcular as seguintes primitivas

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx$$

e

$$\int \frac{Bx+C}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k}\,dx,$$

onde $A, B, C, a, \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N}$.

A primeira primitiva é bastante simples de calcular pois quando $k=1$ temos

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{x-a}\,dx &= A\int \frac{1}{x-a}\,dx\\ &= A\ln|x-a|+c\end{aligned}$$

e quando $k>1$ vem

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx &= A\int (x-a)^{-k}\,dx\\ &= A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+c\\ &= -\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+c.\end{aligned}$$

Para as funções do tipo

$$\frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

fazendo a mudança de variável $x=\alpha+\beta t$ tem-se $dx=\beta dt$ e

$$\begin{aligned}
\int \frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx &= \int \frac{B(\alpha+\beta t)+C}{\beta^2 t^2+\beta^2}\;\beta\;dt\\
&= \int \frac{\beta B t+\alpha B+C}{\beta^2(t^2+1)}\;\beta\;dt\\
&= \frac{B}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\;dt+\frac{\alpha B+C}{\beta}\int \frac{1}{t^2+1}\;dt\\
&= \frac{B}{2}\ln\left|t^2+1\right|+\frac{\alpha B+C}{\beta}\operatorname{arctg} t+c\\
&= \frac{B}{2}\ln\left|\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right|+\frac{\alpha B+C}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha}{\beta}+c
\end{aligned}$$

Usando a mesma mudança de variável $x=\alpha+\beta t$, pelo que $dx=\beta dt$, vem

$$\begin{aligned}
\int \frac{Bx+C}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k}\,dx &= \int \frac{B(\alpha+\beta t)+C}{(\beta^2 t^2+\beta^2)^k}\,\beta\,dt\\
&= \int \frac{\beta B t+\alpha B+C}{\beta^{2k}(t^2+1)^k}\,\beta\,dt\\
&= \frac{B}{2\beta^{2k-2}}\int \frac{2t}{(t^2+1)^k}\,dt+\frac{\alpha B+C}{\beta^{2k-1}}\int \frac{1}{(t^2+1)^k}\,dt\\
&= \frac{B}{2\beta^{2k-2}}\int 2t\left(t^2+1\right)^{-k}dt+\frac{\alpha B+C}{\beta^{2k-1}}\int \frac{1}{(t^2+1)^k}\,dt\\
&= \frac{B}{2\beta^{2k-2}}\,\frac{\left(t^2+1\right)^{-k+1}}{-k+1}+\frac{\alpha B+C}{\beta^{2k-1}}\int \frac{1}{(t^2+1)^k}\,dt
\end{aligned}$$

e, portanto, temos de saber calcular

$$I_k=\int \frac{1}{(t^2+1)^k}\,dt.$$

Para isso temos

$$\begin{aligned}
I_k = \int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^k}\,dt &= \int \frac{t^2+1-t^2}{\left(t^2+1\right)^k}\,dt = \int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^{k-1}}\,dt - \int \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^k}\,dt \\
&= I_{k-1} - \frac{1}{2}\int \overbrace{2t\left(t^2+1\right)^{-k}}^{f'(t)}\ \overbrace{t}^{g(t)}\ dt \\
&= I_{k-1} - \frac{1}{2}\left[\frac{\left(t^2+1\right)^{-k+1}}{-k+1}\,t - \int \frac{\left(t^2+1\right)^{-k+1}}{-k+1}\,1\,dt\right] \\
&= I_{k-1} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-k}\,\frac{t}{\left(t^2+1\right)^{k-1}} - \frac{1}{1-k}\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^{k-1}}\,dt\right] \\
&= I_{k-1} + \frac{1}{2k-2}\,\frac{t}{\left(t^2+1\right)^{k-1}} + \frac{1}{2-2k}\,I_{k-1} \\
&= \frac{3-2k}{2-2k}\,I_{k-1} + \frac{1}{2k-2}\,\frac{t}{\left(t^2+1\right)^{k-1}}
\end{aligned}$$

o que dá uma fórmula por recorrência para calcular primitivas do tipo

$$\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^k}\,dt.$$

Primitivação de funções racionais – resumo

Para primitivarmos uma função racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, com P e Q polinómios sem zeros (reais ou complexos) comuns, devemos fazer o seguinte:

1) se o grau de P é maior ou igual do que o grau de Q, fazemos a divisão de P por Q. Deste modo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ é igual à soma de um polinómio com uma função racional em que o grau do numerador é menor do que o grau do denominador;

2) factorizar $Q(x)$ como o produto de factores da forma

$$x-a \qquad \text{ou} \qquad (x-\alpha)^2+\beta^2,$$

agrupando os factores repetidos de modo que fiquemos com factores diferentes da forma

$$(x-a)^n \qquad \text{ou} \qquad \left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^m,$$

com $n, m \in \mathbb{N}$;

Primitivação de funções racionais – resumo (continuação)

3) decompor a função racional (a que obtivemos na divisão ou a inical, caso não tenha sido necessário fazer a divisão) numa soma de parcelas da forma
$$\frac{A_1}{(x-a)^n}+\frac{A_2}{(x-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_{n-1}}{(x-a)^2}+\frac{A_n}{(x-a)},$$
por cada factor
$$(x-a)^n, \quad n\in\mathbb{N}$$
que aparece na factorização de $Q(x)$, e da forma
$$\frac{B_1x+C_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}+\frac{B_2x+C_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}}+\cdots+\frac{B_{m-1}x+C_{m-1}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2}+\frac{B_mx+C_m}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$
por cada factor
$$\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^m, \quad m\in\mathbb{N}$$
que aparece na factorização de $Q(x)$ e onde cada A_k, cada B_k e cada C_k é um número real;

4) primitivar cada uma das parcelas obtidas na decomposição.

Exemplo de primitivação de uma função racional

Calculemos a primitiva
$$\int\frac{3x^5+3x^4+6x^3+6x^2+x+2}{x^2(x^2+1)^2}\,dx.$$
Pelo que vimos anteriormente temos de fazer a seguinte decomposição
$$\frac{3x^5+3x^4+6x^3+6x^2+x+2}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}.$$
Assim, temos
$$\begin{aligned}&A(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)^2+(Cx+D)x^2+(Ex+F)x^2(x^2+1)\\&=3x^5+3x^4+6x^3+6x^2+x+2\end{aligned}$$
donde
$$\begin{aligned}&A(x^4+2x^2+1)+B(x^5+2x^3+x)+Cx^3+Dx^2+E(x^5+x^3)+F(x^4+x^2)\\&=3x^5+3x^4+6x^3+6x^2+x+2\end{aligned}$$
e, portanto,
$$\begin{aligned}&(B+E)x^5+(A+F)x^4+(2B+C+E)x^3+(2A+D+F)x^2+Bx+A\\&=3x^5+3x^4+6x^3+6x^2+x+2.\end{aligned}$$

Exemplo de primitivação de uma função racional (continuação)

Assim, de

$$(B+E)x^5+(A+F)x^4+(2B+C+E)x^3+(2A+D+F)x^2+Bx+A$$
$$=3x^5+3x^4+6x^3+6x^2+x+2$$

resulta

$$\begin{cases} B+E=3 \\ A+F=3 \\ 2B+C+E=6 \\ 2A+D+F=6 \\ B=1 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E=2 \\ F=1 \\ C=2 \\ D=1 \\ B=1 \\ A=2 \end{cases}$$

pelo que

$$\frac{3x^5+3x^4+6x^3+6x^2+x+2}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Exemplo de primitivação de uma função racional (continuação)

Deste modo

$$\begin{aligned}
&\int \frac{3x^5+3x^4+6x^3+6x^2+x+2}{x^2(x^2+1)^2}\,dx \\
&=\int \frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}\,dx \\
&=2\int x^{-2}\,dx+\int \frac{1}{x}\,dx+\int 2x(x^2+1)^{-2}\,dx+\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&\qquad+\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&=2\frac{x^{-1}}{-1}+\ln|x|+\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}+\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx+\ln|x^2+1|+\operatorname{arc\,tg} x \\
&=-\frac{2}{x}+\ln|x|-\frac{1}{x^2+1}+\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx+\ln|x^2+1|+\operatorname{arc\,tg} x.
\end{aligned}$$

Falta calcular

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Exemplo de primitivação de uma função racional (continuação)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx &= \int \frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx \\
&= \int \frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \overbrace{2x\left(x^2+1\right)^{-2}}^{f'(x)}\ \overbrace{x}^{g(x)}\,dx \\
&= \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{-1}}{-1}\,x - \int \frac{\left(x^2+1\right)^{-1}}{-1}\,1\,dx\right] \\
&= \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right] \\
&= \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + c \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + c
\end{aligned}$$

Exemplo de primitivação de uma função racional (continuação)

Tendo em conta que

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + c,$$

tem-se

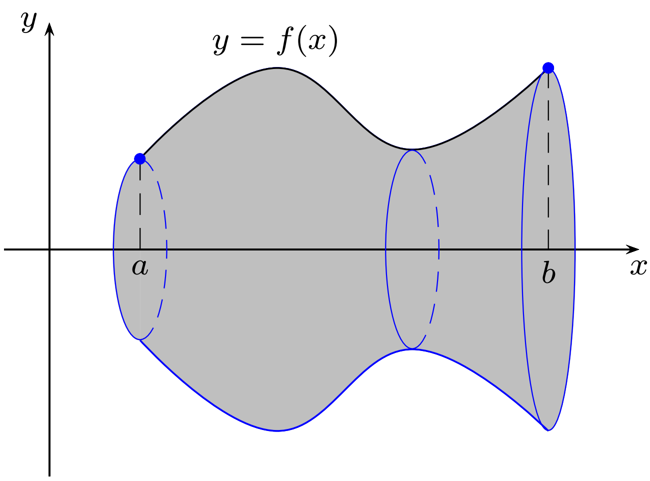
$$\begin{aligned}
&\int \frac{3x^5+3x^4+6x^3+6x^2+x+2}{x^2(x^2+1)^2}\,dx \\
&= -\frac{2}{x} + \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx + \ln|x^2+1| + \operatorname{arc\,tg} x \\
&= -\frac{2}{x} + \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \ln|x^2+1| + \operatorname{arc\,tg} x + c \\
&= -\frac{2}{x} + \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \ln|x^2+1| + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x + c
\end{aligned}$$

Exemplo de primitivação de uma função racional (continuação)

Fazendo a substituição $x = \operatorname{tg} t$, podemos calcular $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$ de outro modo. Assim, tendo em conta que $dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt$, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^2}\,\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{1}{(1/\cos^2 t)^2}\,\frac{1}{\cos^2 t}\,dt \\
&= \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int 2\cos(2t)\,dt + \frac{1}{2}\int 1\,dt \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t) + \frac{t}{2} + c = \frac{\operatorname{sen} t\,\cos t}{2} + \frac{t}{2} + c \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x)\,\cos(\operatorname{arc\,tg} x)}{2} + \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2} + c \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + c
\end{aligned}$$

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

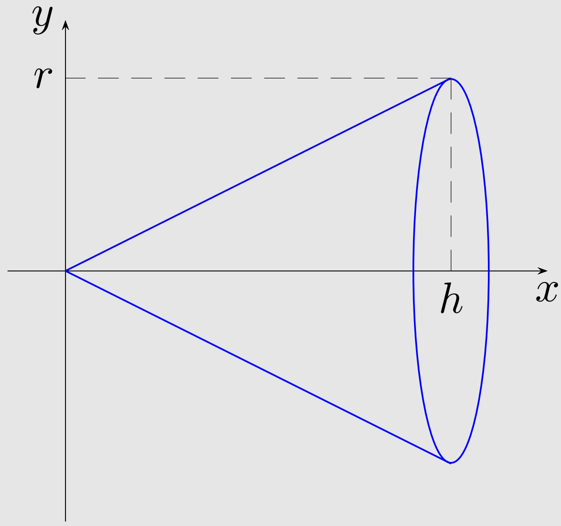


O volume do sólido de revolução que se obtém, rodando em torno do eixo dos xx, a região situada entre o gráfico de f e o eixo dos xx é dado por

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}.$$

Volume de um sólido de revolução

a) Calculemos o volume de um cone de altura h e raio da base r. Para obtermos este cone basta pormos a rodar em torno do eixo dos xx a área entre segmento de recta que une os pontos $(0,0)$ e (h,r) e o eixo dos xx:



É óbvio que a equação do segmento é $y = \dfrac{r}{h}x$ com $x \in [0,h]$

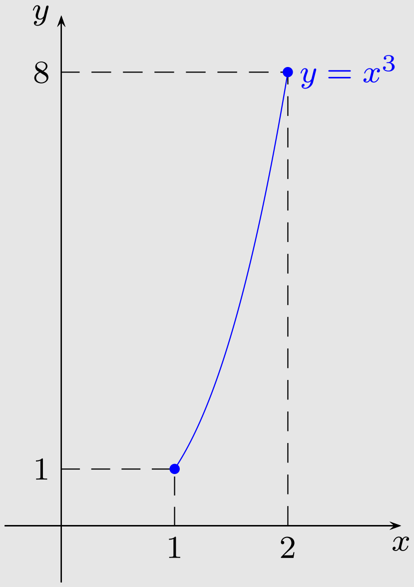
Volume um sólido de revolução (continuação)

a) (continuação) O volume do cone é dado por

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) \\ &= \frac{\pi r^2 h}{3} \end{aligned}$$

Volume de um sólido de revolução (continuação)

b) Seja $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x^3$, cujo gráfico é apresentado a seguir.



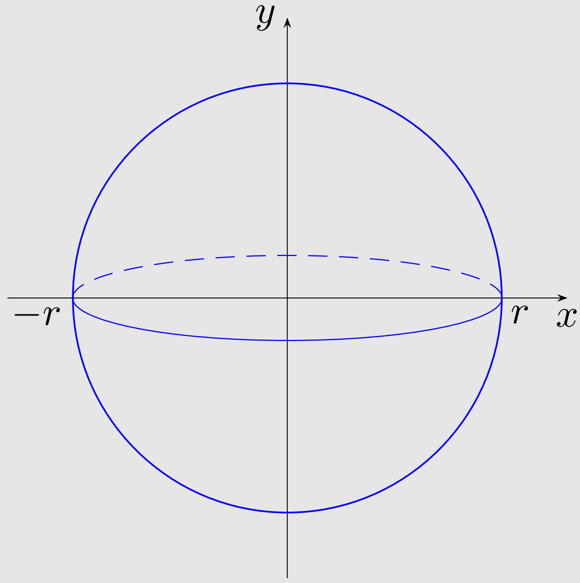
Volume de um sólido de revolução (continuação)

b) (continuação) Então o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo das abcissas, da área entre o gráfico da função $f(x) = x^3$ e o eixo dos xx e entre $x = 1$ e $x = 2$ é dado por

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 [f(x)]^2\, dx = \pi \int_1^2 \left(x^3\right)^2\, dx \\ &= \pi \int_1^2 x^6\, dx = \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_1^2 \\ &= \pi \left(\frac{2^7}{7} - \frac{1^7}{7}\right) = \pi \left(\frac{128}{7} - \frac{1}{7}\right) \\ &= \frac{127\pi}{7}. \end{aligned}$$

Volume de uma esfera de raio r

Calculemos o volume de uma esfera de raio r. Como habitualmente vamos centrar a esfera na origem. Uma esfera de raio r centrada na origem obtém-se rodando em torno do eixo dos xx um semicírculo de centro na origem e de raio r.



Volume de uma esfera de raio r (continuação)

Já sabemos que temos de a equação da semicircunferência é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, donde o volume da esfera de raio r é igual a

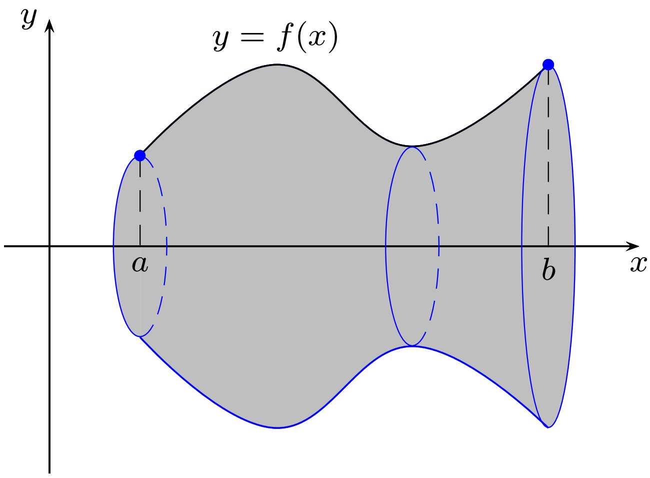
$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \, dx \\
&= \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx \\
&= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} \\
&= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right) \right) \\
&= \pi \left(2r^3 - 2\frac{r^3}{3} \right) \\
&= \frac{4}{3} \pi r^3 .
\end{aligned}$$

Se

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

é uma função não negativa e com derivada contínua, então a área de superfície do sólido de revolução que se obtém rodando em torno do eixo dos xx a região situada entre o gráfico de f e o eixo dos xx é dada por

$$\boxed{A_S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}.$$



Área de superfície de um sólido de revolução

a) A área de superfície do cone de altura h e raio da base r, e que se obtém rodando em torno do eixo dos xx a função $f\colon [0,h] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{r}{h}x$, é

$$\begin{aligned}
A_S &= 2\pi \int_0^h f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h}x\sqrt{1+\left[\left(\frac{r}{h}x\right)'\right]^2}\,dx \\
&= \frac{2\pi r}{h}\int_0^h x\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\,dx = \frac{2\pi r}{h}\int_0^h x\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\,dx \\
&= \frac{2\pi r}{h}\int_0^h x\sqrt{\frac{h^2+r^2}{h^2}}\,dx = \frac{2\pi r}{h^2}\sqrt{h^2+r^2}\int_0^h x\,dx \\
&= \frac{2\pi r}{h^2}\sqrt{h^2+r^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \frac{2\pi r}{h^2}\sqrt{h^2+r^2}\left(\frac{h^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right) = \pi r\sqrt{h^2+r^2}
\end{aligned}$$

Área de superfície de um sólido de revolução (continuação)

b) A área de superfície do sólido de revolução que se obtém rodando em torno do eixo dos xx a função $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3$$

é dada por

$$\begin{aligned}
A_S &= 2\pi \int_1^2 f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi \int_1^2 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx \\
&= 2\pi \int_1^2 x^3\left(1+9x^4\right)^{1/2}\,dx = \frac{2\pi}{36}\int_1^2 36x^3\left(1+9x^4\right)^{1/2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{18}\left[\frac{\left(1+9x^4\right)^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = \frac{\pi}{18}\left(\frac{\left(1+9\cdot 2^4\right)^{3/2}}{3/2}-\frac{\left(1+9\cdot 1^4\right)^{3/2}}{3/2}\right) \\
&= \frac{\pi}{18}\left(\frac{145^{3/2}-10^{3/2}}{3/2}\right) = \frac{\pi}{27}\left(145\sqrt{145}-10\sqrt{10}\right).
\end{aligned}$$

Área de superfície de uma esfera de raio r

Quanto à área da superfície esférica, temos de calcular

$$A_S = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

com $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ e como

$$f'(x) = \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

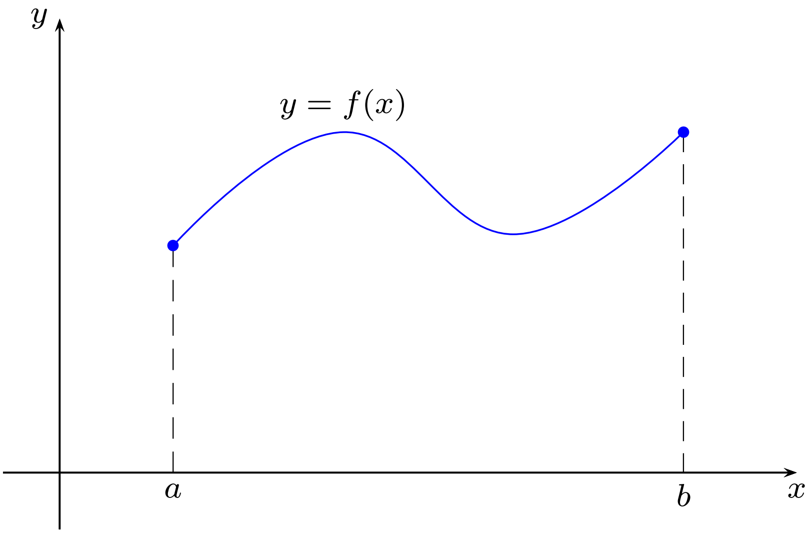
temos o problema de a derivada não estar definida em $x = r$ e em $x = -r$. Para contornarmos este problema vamos calcular o integral entre $-r+\varepsilon$ e $r-\varepsilon$, com $0 < \varepsilon < r$, e depois fazer ε tender para 0^+.

Área de superfície de uma esfera de raio r (continuação)

Assim,

$$\begin{aligned}
A_S &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\pi \int_{-r+\varepsilon}^{r-\varepsilon} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\pi \int_{-r+\varepsilon}^{r-\varepsilon} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\pi \int_{-r+\varepsilon}^{r-\varepsilon} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\pi \int_{-r+\varepsilon}^{r-\varepsilon} r\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\pi r \int_{-r+\varepsilon}^{r-\varepsilon} 1\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\pi r \left[\,x\,\right]_{-r+\varepsilon}^{r-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\pi r\,(r-\varepsilon-(-r+\varepsilon)) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\pi r\,(2r-2\varepsilon) = 4\pi r^2.
\end{aligned}$$

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua.



O comprimento do gráfico de f é dado por

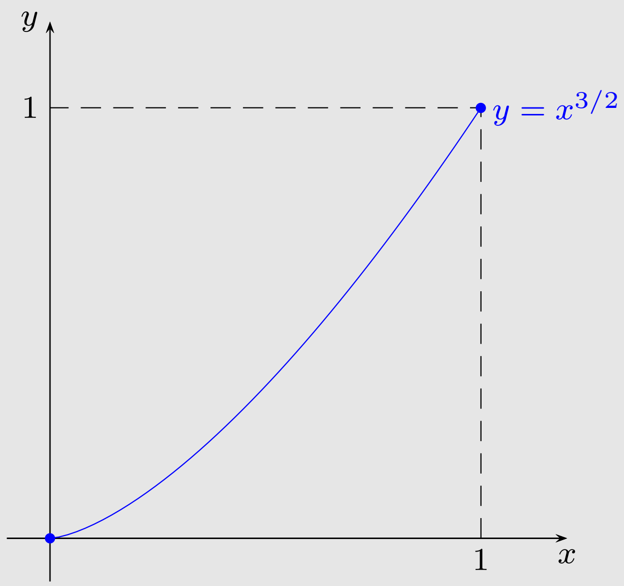
$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}.$$

Cálculo do comprimento de curvas planas

a) Calculemos o comprimento da curva

$$y = x^{3/2}$$

entre $x = 0$ e $x = 1$.



Cálculo do comprimento de curvas planas (continuação)

a) (continuação) Como

$$\left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x},$$

temos

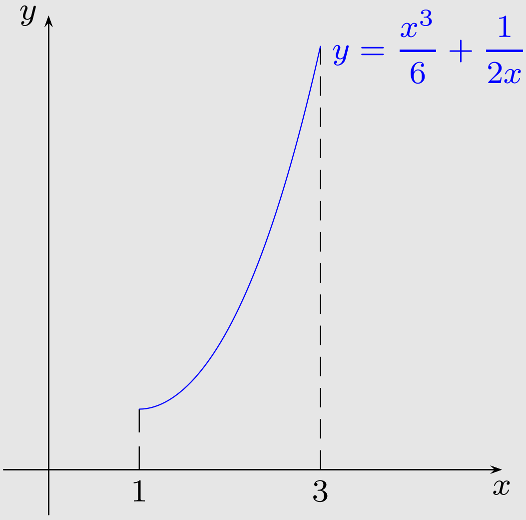
$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (3\sqrt{x}/2)^2}\,dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + 9x/4}\,dx = \frac{4}{9}\int_0^1 \frac{9}{4}\,(1 + 9x/4)^{1/2}\,dx \\
&= \frac{4}{9}\left[\frac{(1 + 9x/4)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\,1^{3/2}\right) \\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\,\frac{13\sqrt{13}}{4\sqrt{4}} - \frac{2}{3}\right) = \frac{13\sqrt{13}}{27} - \frac{8}{27}.
\end{aligned}$$

Cálculo do comprimento de curvas planas (continuação)

b) Calculemos o comprimento da curva

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

entre $x = 1$ e $x = 3$.



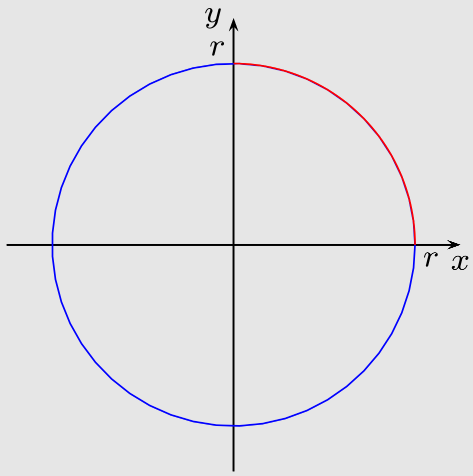
Cálculo do comprimento de curvas planas (continuação)

b) (continuação) Então

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_1^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \left[\left(\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}\right)'\right]^2}\,dx \\
&= \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}}\,dx \\
&= \int_1^3 \sqrt{\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}}\,dx = \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx \\
&= \int_1^3 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}\right]_1^3 \\
&= \frac{3^3}{6} - \frac{1}{2\cdot 3} - \left(\frac{1^3}{6} - \frac{1}{2\cdot 1}\right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

Perímetro de uma circunferência de raio r

Calculemos o perímetro de uma circunferência de raio r. Para isso consideremos como centro da circunferência a origem. Obviamente basta considerar a parte da circunferência situada no primeiro quadrante.



Perímetro de uma circunferência de raio r (continuação)

Da equação da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, resulta $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Como

$$\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

temos

$$\begin{aligned}\ell &= 4\int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = 4\int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx \\ &= 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4r\int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx,\end{aligned}$$

só que a função $\dfrac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ não está definida em $x = r$. Para ultrapassarmos este problema vamos calcular o integral entre 0 e $r - \varepsilon$ onde ε é tal que $0 < \varepsilon < r$ e em seguida fazer ε tender para 0^+.

Perímetro de uma circunferência de raio r (continuação)

Assim,

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 4\int_0^{r-\varepsilon} \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 4r\int_0^{r-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 4r\left[\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{r}\right]_0^{r-\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 4r\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{r-\varepsilon}{r} - \operatorname{arc\,sen} 0\right) \\
&= 4r\,(\operatorname{arc\,sen} 1 - 0) \\
&= 4r\frac{\pi}{2} \\
&= 2\pi r
\end{aligned}$$