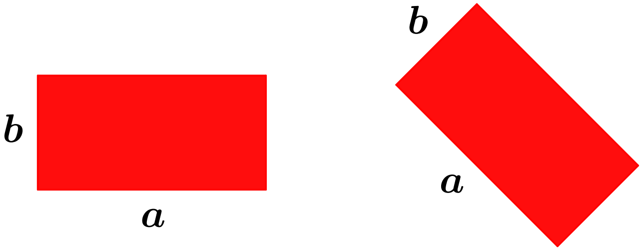
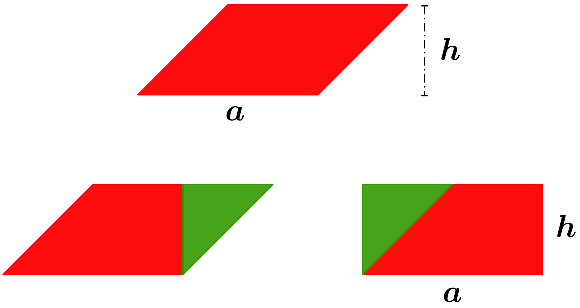
Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$ (Parte 1)

Área de um retângulo



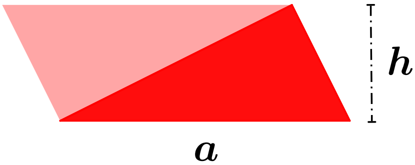
$\boxed{\text{Área do retângulo} = a \times b}$

Área de um paralelogramo



$\boxed{\text{Área do paralelogramo} = a \times h}$

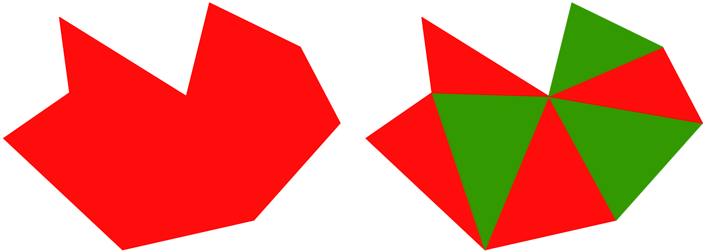
Área de um triângulo



$$\boxed{\text{Área do triângulo} = \frac{a \times h}{2}}$$

Área de um polígono

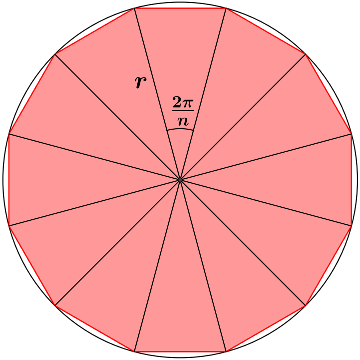
Para calcular a área de um polígono, podemos construir uma triangulação do polígono e somamos as áreas dos triângulos da triangulação.

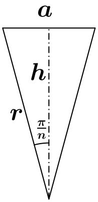


Qualquer polígono admite uma triangulação!

Área do círculo

Consideremos uma circunferência de raio r. Para cada n, denotamos por A_n a área do polígono regular de n lados inscrito na circunferência.





$$h = r\cos\tfrac{\pi}{n}$$
$$a = 2r\sin\tfrac{\pi}{n}$$

Temos

$$A_n = n\frac{ah}{2} = nr^2\cos\tfrac{\pi}{n}\sin\tfrac{\pi}{n}$$

Área do círculo

Pela aproximação dos pequenos ângulos,

$$\cos\frac{\pi}{n} \simeq 1, \quad \sin\frac{\pi}{n} \simeq \frac{\pi}{n},$$

logo, quando n é muito grande,

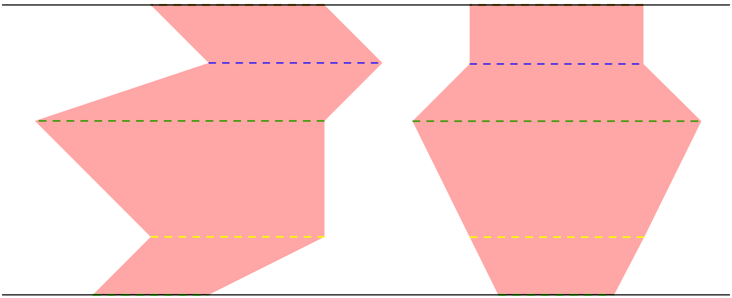
$$A_n = nr^2 \cos\frac{\pi}{n} \sin\frac{\pi}{n} \simeq \pi r^2.$$

Assim,

$$\text{Área da circunferência} = \lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2.$$

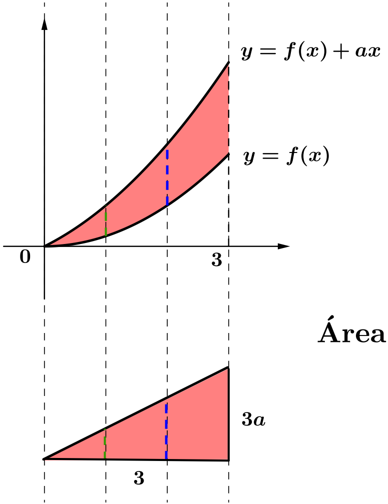
Príncipio de Cavalieri no plano

Dadas duas regiões planas incluídas entre um par de retas paralelas, se qualquer reta paralela ao par de retas intersectar as regiões em dois segmentos cujos comprimentos são iguais entre si, então as áreas das regiões são iguais.



Príncipio de Cavalieri no plano

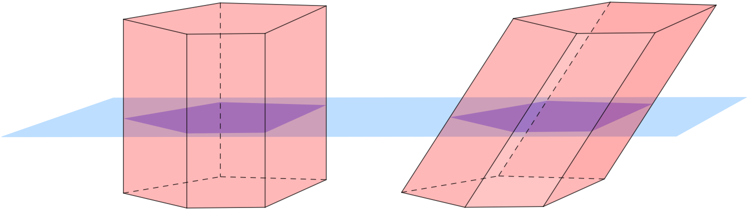
Qual é a área da região compreendida entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x) = f(x) + ax$, com $a > 0$, no intervalo $[0, 3]$?



$$\textbf{Área} = \frac{3 \times 3a}{2} = \frac{9a}{2}$$

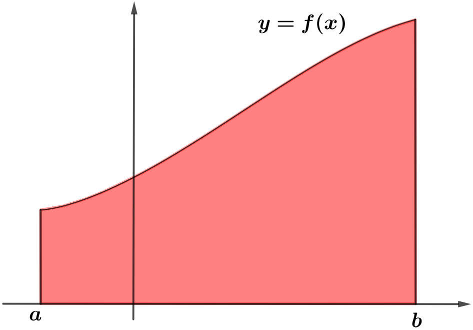
Príncipio de Cavalieri no espaço

Dadas duas regiões planas incluídas entre um par de planos paralelos, se qualquer plano paralelo ao par de planos intersectar as regiões em duas superfícies planas cujas áreas são iguais entre si, então os volumes das regiões são iguais.



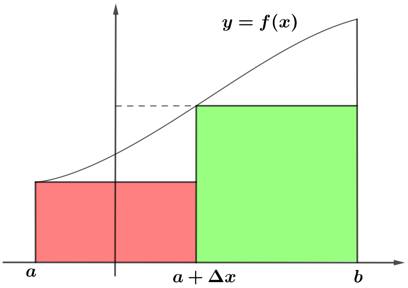
Integrais: revisão

Como calcular a área de uma região limitada pelo gráfico de uma função $f(x) \geq 0$ no intervalo $a \leq x \leq b$?



Integrais: revisão

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em dois intervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{2}$ e consideramos os dois retângulos da figura:

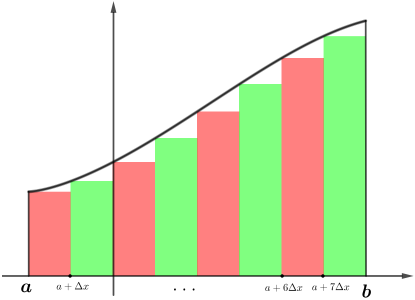


Como primeira aproximação (grosseira) para a área limitada pelo gráfico, tomamos a soma das áreas dos retângulos:

$$\text{Área} \simeq f(a)\Delta x + f(a + \Delta x)\Delta x.$$

Integrais: revisão

Para obter uma melhor aproximação, dividimos o intervalo $[a, b]$ num número maior de intervalos. Por exemplo, podemos tomar $n = 8$ divisões de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{8}$.



Somando as áreas dos $n = 8$ retângulos, obtemos:

$$\text{Área} \simeq \sum_{k=0}^{7} f(a + k\Delta x)\Delta x.$$

Integrais: revisão

Repetindo esta construção para valores maiores de n, no limite obtemos o valor exato da área limitada pelo gráfico da função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$:

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)\Delta x, \quad \Delta x = \tfrac{b-a}{n}.$$

O método descrito sugere a seguinte definição:

Definição

Integral de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)\Delta x,} \quad \Delta x = \tfrac{b-a}{n}.$$

Integrais: revisão

Observação

1. Se $f(x)$ é uma função seccionalmente contínua em $[a, b]$, então o limite na definição de integral certamente existe e é finito.
2. Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então o integral de $f(x)$ nesse intervalo é precisamente a área da região limitada pelo seu gráfico.
3. Se $f(x) \leq 0$ em $[a, b]$, então o integral de $f(x)$ nesse intervalo tem valor negativo, mas em valor absoluto é precisamente a área da região limitada pelo gráfico de $f(x)$.

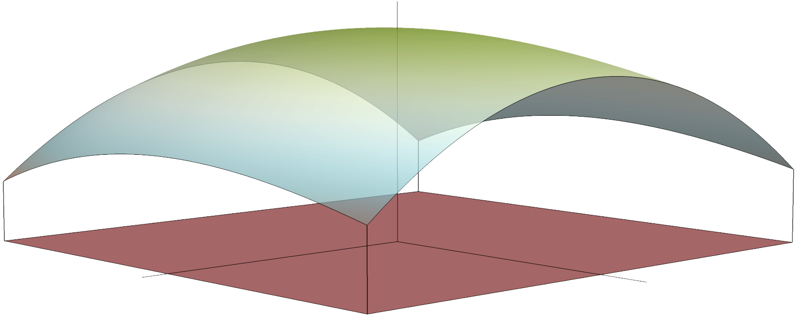
Integrais: revisão

Fórmula de Barrow. Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

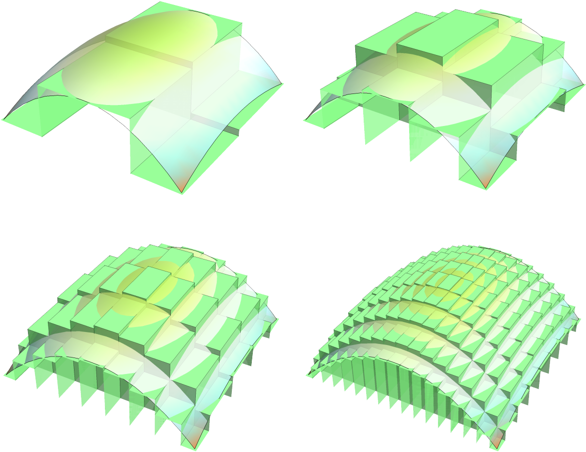
Integrais duplos

Como calcular o volume da região no espaço limitada pelo gráfico da função $f(x,y) \geq 0$ no retângulo $[a,b] \times [c,d]$?



Integrais duplos

A ideia é dividir o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ num número cada vez maior de retângulos menores e aproximar o volume por somas finitas de volumes de paralepípedos.



Integrais duplos

No limite obtemos o valor exato do volume limitado pelo gráfico da função $f(x, y)$ no retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Então:

$$\text{Volume} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(a + i\Delta x, c + j\Delta y)\Delta A,$$

com

$$\Delta A = \Delta x \Delta y, \quad \Delta x = \tfrac{b-a}{n}, \quad \Delta y = \tfrac{d-c}{n}.$$

Integrais duplos

O método descrito para o cálculo do volume sugere a seguinte definição:

Definição

Integral duplo de $f(x,y)$ **no retângulo** $R = [a,b] \times [c,d]$:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(a+i\Delta x, c+j\Delta y)\Delta A,}$$

com

$$\Delta A = \Delta x \Delta y, \quad \Delta x = \tfrac{b-a}{n}, \quad \Delta y = \tfrac{d-c}{n}.$$

A quantidade infinitesimal

$$dA = dxdy$$

designa-se por **elemento de área.**

Integrais duplos

Observação

1. Se $f(x,y) \geq 0$ em $[a,b] \times [c,d]$, então o integral de $f(x,y)$ nesse retângulo é precisamente o volume da região limitada pelo seu gráfico.
2. Se $f(x,y) \leq 0$ em $[a,b] \times [c,d]$, então o integral de $f(x,y)$ nesse retângulo tem valor negativo, mas em valor absoluto é precisamente o volume da região limitada pelo gráfico de $f(x,y)$.
3. Se $f(x,y)$ é uma função contínua em $[a,b] \times [c,d]$, então o limite na definição de integral certamente existe e é finito.

Teorema de Fubini

O teorema seguinte estabele uma fórmula para o cálculo de integrais duplos que evita o uso direto da definição.

Teorema de Fubini. Seja $f(x,y)$ uma função contínua no retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Então,

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\, dA &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy.\end{aligned}$$

Integrais duplos: exemplo

Vamos calcular o integral da função contínua $f(x,y) = xy^2$ no retângulo $R = [-2,1] \times [-1,2]$ pelas duas ordens possíveis.

1. Integrando primeiro em ordem a y e depois em ordem a x:

$$\begin{aligned}\iint_R xy^2 dA &= \int_{-2}^{1} \left(\int_{-1}^{2} xy^2 dy \right) dx = \int_{-2}^{1} \left[\frac{xy^3}{3} \right]_{y=-1}^{y=2} dx \\ &= \int_{-2}^{1} \frac{x\,2^3}{3} - \frac{x\,(-1)^3}{3} dx = \int_{-2}^{1} \frac{8x}{3} + \frac{x}{3} dx \\ &= 3 \int_{-2}^{1} x dx = 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{1} = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2} \right) = -\frac{9}{2}\end{aligned}$$

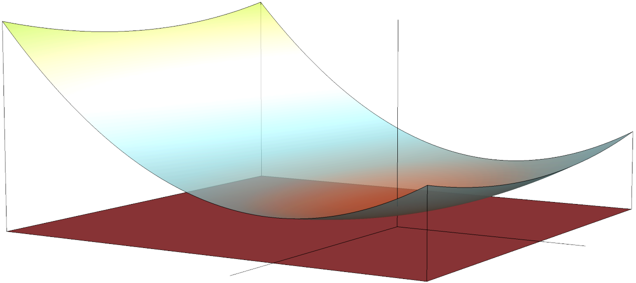
Integrais duplos: exemplo

2. Integrando primeiro em ordem a x e depois em ordem a y:

$$\begin{aligned}\iint_R xy^2 dA &= \int_{-1}^{2}\left(\int_{-2}^{1} xy^2 dx\right) dy = \int_{-1}^{2}\left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{x=-2}^{x=1} dy \\ &= \int_{-1}^{2} \frac{y^2}{2} - \frac{4y^2}{2} dy = -\int_{-1}^{2} \frac{3y^2}{2} dy \\ &= -\left[\frac{y^3}{2}\right]_{-1}^{2} = -\frac{8}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}\end{aligned}$$

Integrais duplos: exemplo

Qual é o volume do sólido limitado pelo gráfico da função $f(x,y) = 1 + x^2 + 2y^2$ no retângulo $R = [-1,1] \times [-2,1]$?



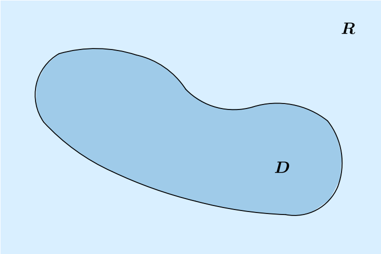
Integrais duplos: exemplo

Temos:

$$
\begin{aligned}
\text{Volume} &= \iint_R 1 + x^2 + 2y^2 \, dA = \int_{-2}^{1} \left(\int_{-1}^{1} 1 + x^2 + 2y^2 dx \right) dy \\
&= \int_{-2}^{1} \left[x + \frac{x^3}{3} + 2y^2 x \right]_{x=-1}^{x=1} dy = \int_{-2}^{1} \frac{8}{3} + 4y^2 dy \\
&= \left[\frac{8y}{3} + \frac{4y^3}{3} \right]_{-2}^{1} = 20
\end{aligned}
$$

Integrais duplos em regiões gerais

Seja D uma região limitada do plano. Para definir o integral da função $f(x, y)$ em D, escolhemos um qualquer retângulo R contendo D.



Consideramos a seguinte extensão de $f(x, y)$ a R:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Integrais duplos em regiões gerais

Definição

Integral duplo de $f(x,y)$ **sobre a região** D:

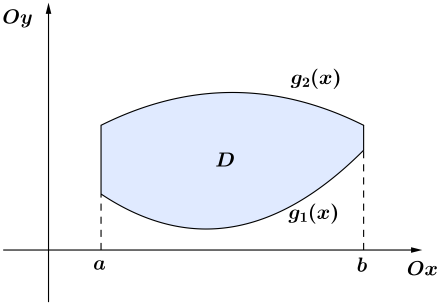
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA.}$$

Esta definição não depende do retângulo escolhido, uma vez que $F(x,y) = 0$ fora da região D.

Integrais duplos em regiões de tipo I

Dizemos que uma região D é de **tipo I** se for uma região limitada pelos gráficos de duas funções contínuas de x:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}.$$



Integrais duplos em regiões de tipo I

Dada uma região de tipo I

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\},$$

temos:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.}$$

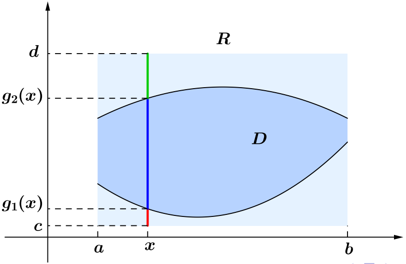
De seguida, vamos justificar esta fórmula.

Integrais duplos em regiões de tipo I

Sejam $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo contendo D e $F(x, y)$ a extensão de $f(x, y)$ que verifica $F(x, y) = 0$ se $(x, y) \notin D$. Temos:

$$\int_c^d F(x,y)dy = \underbrace{\int_c^{g_1(x)} F(x,y)dy}_{=0} + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)dy + \underbrace{\int_{g_2(x)}^{d} F(x,y)dy}_{=0}$$

$$= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$



Integrais duplos em regiões de tipo I

Assim,

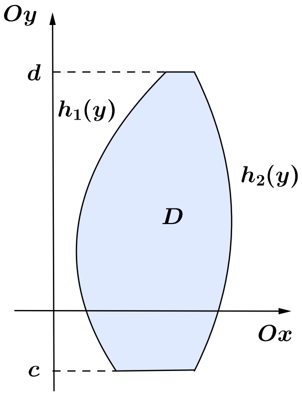
$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dA &= \iint_R F(x,y)\,dA \\
&= \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Integrais duplos em regiões de tipo II

Dizemos que uma região D é de **tipo II** se for a região limitada pelos gráficos de duas funções contínuas de y:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ c \leq y \leq d, \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\right\}.$$



Integrais duplos em regiões de tipo II

Analogamente:

Dada uma região do tipo II

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; c \leq y \leq d, \; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\right\},$$

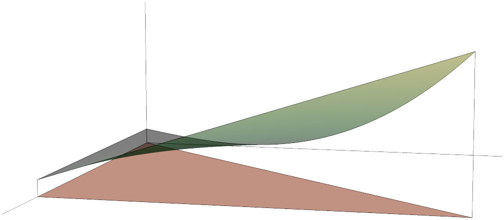
temos:

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.}$$

Integrais duplos em regiões gerais: exemplo

Qual é o volume do sólido definido pelas condições

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq z \leq 1 + x^2 y \ ?$$



Este sólido é a região limitada pelo gráfico da função $f(x, y) = 1 + x^2 y$ definida na região de tipo I

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq x\}.$$

Integrais duplos em regiões gerais: exemplo

Temos então:

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^2 \left(\int_0^x 1 + x^2 y\,dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left[y + \frac{x^2y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^2 x + \frac{x^4}{2} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10} \right]_0^2 = \frac{4}{2} + \frac{32}{10} = \frac{26}{5}\end{aligned}$$

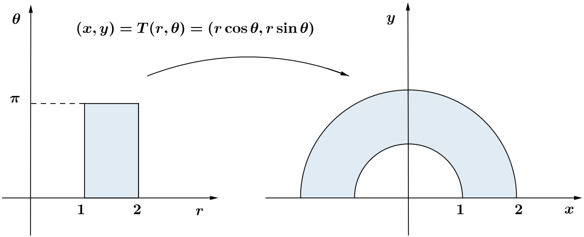
Integrais duplos: mudança de variáveis

Por vezes, as regiões de integração são mais facilmente descritas em outros sistemas de coordenadas. Por exemplo, a região definida em coordenadas retangulares por

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0;$$

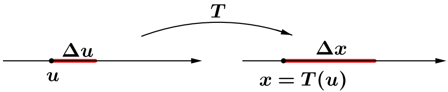
em coordenadas polares, é dada por

$$1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$



Integrais duplos: mudança de variáveis

No caso unidimensional, dada uma transformação $x = T(u)$, um pequeno segmento sobre o eixo u de comprimento Δu é transformado num pequeno segmento de comprimento Δx:



Por aproximação linear em torno de u, temos

$$\Delta x \simeq T'(u)\Delta u,$$

assumindo $T'(u) > 0$.

Integrais duplos: mudança de variáveis

Passando a quantidades infinitesimais,

$$dx = T'(u)du.$$

É este o fator que surge na fórmula para a mudança de variável no integral unidimensional:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f\left(T(u)\right) T'(u)du,}$$

com $a = T(c)$ e $b = T(d)$.

De seguida, vamos estudar a fórmula análoga para a mudança de variáveis em integrais duplos.

Integrais duplos: mudança de variáveis

Consideremos uma transformação

$$(x, y) = T(u, v) = (T_1(u, v), T_2(u, v)) \, .$$

Variações $\Delta u, \Delta v$ nas variáveis u, v induzem variações $\Delta x, \Delta y$ nas variáveis x, y. Por aproximação linear em torno do ponto (u, v), temos:

$$\begin{cases} \Delta x \simeq \frac{\partial T_1}{\partial u}(u, v)\Delta u + \frac{\partial T_1}{\partial v}(u, v)\Delta v \\ \Delta y \simeq \frac{\partial T_2}{\partial u}(u, v)\Delta u + \frac{\partial T_2}{\partial v}(u, v)\Delta v \end{cases} .$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial T_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial T_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial T_2}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}$$

Integrais duplos: mudança de variáveis

A matriz

$$J_T(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial T_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial T_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial T_2}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}$$

designa-se por **matriz Jacobiana** da transformação

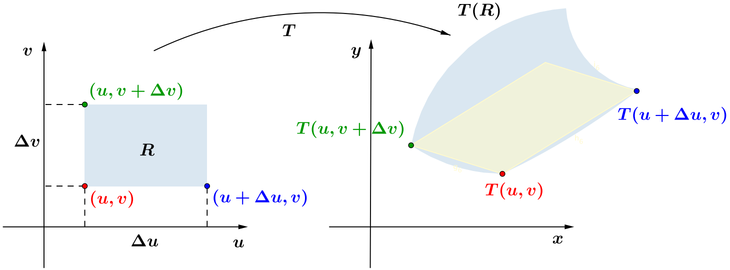
$$(x,y) = T(u,v)$$

no ponto (u,v).

Qual o significado do determinante desta matriz?

Integrais duplos: mudança de variáveis

Seja R um pequeno retângulo no plano Ouv com lados Δu e Δv.



Se R é um retângulo e ΔA é a área de $T(R)$, então

$$\boxed{\Delta A \simeq |\det J_T(u, v)| \ \Delta u \Delta v.}$$

Integrais duplos: mudança de variáveis

Passando a quantidades infinitesimais, temos

$$dA = |\det J_T(u, v)|dudv.$$

Este é o fator que surge na fórmula para a mudança de variáveis em integrais duplos:

Dada uma transformação

$$(x, y) = T(u, v) = (T_1(u, v), T_2(u, v))$$

que transforma o conjunto S no conjunto $D = T(S)$, temos

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dA = \iint_S f\left(T_1(u, v), T_2(u, v)\right)|\det J_T(u, v)|dudv}.$$

Integrais duplos: mudança de variáveis

Prova-se que a fórmula para a mudança de variáveis é válida sob as seguintes condições:

1. S é uma união finita de regiões do tipo I e tipo II;
2. a transformação $T(u, v)$ é injetiva no interior de S;
3. $\det J_T(u, v) \neq 0$ no interior de S;
4. a função $f(x, y)$ é contínua.

Notação (Jacobiano de T):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det J_T(u, v)$$

Integrais duplos: coordenadas polares

Consideremos a transformação

$$T(r,\theta) = (\underbrace{r\cos\theta}_{T_1(r,\theta)}, \underbrace{r\sin\theta}_{T_2(r,\theta)})$$

Temos

$$\begin{aligned}
\det J_T(r,\theta) &= \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \\
&= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\
&= r.
\end{aligned}$$

Assim, a fórmula da mudança de coordenadas retangulares para coordenadas polares é dada por

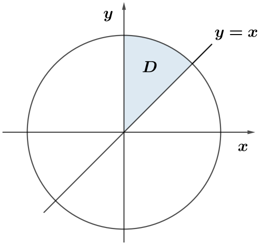
$$\boxed{\iint_{T(S)} f(x,y)\,dxdy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,drd\theta.}$$

Integrais duplos: coordenadas polares

Como exemplo, vamos calcular o integral da função

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

sobre a parte do círculo de raio 2 centrado na origem indicada na figura.



Em coordenadas polares, a região D corresponde ao retângulo S no plano $Or\theta$ dado por

$$0 \leq r \leq 2, \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Integrais duplos: coordenadas polares

Temos

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = e^{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = e^{r^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA &= \iint_S e^{r^2} r\, dr d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 e^{r^2} r\, dr \right) d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{r^2}}{2} \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^4 - 1}{2} d\theta \\
&= [\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^4 - 1}{2} = \frac{\pi}{4} \frac{e^4 - 1}{2}.
\end{aligned}$$

Integrais duplos: aplicações

Área. Se D é uma região no plano, então a sua área é dada por

$$\boxed{\text{Área}(D) = \iint_D 1\, dxdy.}$$

Probabilidade. Se $f(x,y)$ é a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y, a probabilidade de (X,Y) estar na região D é dada por

$$\boxed{P\left((X,Y) \in D\right) = \iint_D f(x,y)\, dxdy.}$$

Integrais duplos: aplicações

Massa total. Consideremos uma lâmina que ocupa uma região D no plano e seja $\rho(x,y)$ a densidade de massa (em unidade de massa por unidade de área) no ponto (x,y). Então, a massa total da lâmina é dada por

$$\text{Massa} = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy.$$

Integrais triplos

O integral triplo de uma função $f(x,y,z)$ numa região D do espaço,

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV,$$

define-se de forma análoga ao integral duplo, sendo agora o papel dos retângulos desempenhado por paralelepípedos.

Em coordenadas retangulares, o **elemento de volume** dV é dado por

$$dV = dxdydz$$

Integrais triplos

Para o cálculo do integral triplo num paralelepípedo podemos utilizar o seguinte resultado:

Teorema de Fubini (integrais triplos) Seja $f(x, y, z)$ uma função contínua no paralelepípedo $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Então,

$$\iiint_P f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

(existem mais cinco ordens possíveis de integração conduzindo ao mesmo resultado.)

Integrais triplos: exemplo

Calculemos o integral da função $f(x,y,z) = xyz^2$ no paralelepípedo

$$P = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\iiint xyz^2 dV &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_0^3 xyz^2 dz \right) dy \right) dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\int_{-1}^2 xy \left[z^3 \right]_{z=0}^{z=3} dy \right) dx \\
&= \frac{9}{2} \int_0^1 x \left[y^2 \right]_{y=-1}^{y=2} dx \\
&= \frac{27}{4} \left[x^2 \right]_0^1 = \frac{27}{4}.
\end{aligned}$$

Integrais triplos em regiões gerais

Se uma região D é descrita por condições do tipo

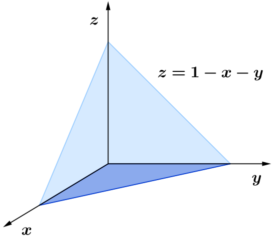
$$a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \quad h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y),$$

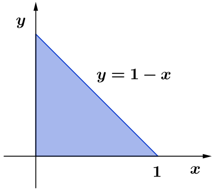
então

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx.}$$

Integrais triplos: exemplo

Calculemos o integral da função $f(x,y,z) = z$ no tetraedro D limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.





Temos:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 - x, \ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Logo

$$\iiint_D z\, dV = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} z\, dz \right) dy \right) dx.$$

Integrais triplos: mudança de variáveis

Dada uma transformação

$$(x, y, z) = T(u, v, w) = (T_1(u, v, w), T_2(u, v, w), T_3(u, v, w))$$

que transforma a região S na região $D = T(S)$, temos

$$\boxed{\iiint_D f(x, y, z)dV = \iiint_S f\left(T(u, v, w)\right) |\det J_T(u, v, w)| dudvdw.}$$

Na fórmula anterior,

$$J_T(u, v, w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial T_1}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial T_1}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial T_2}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial T_2}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial T_2}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial T_3}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial T_3}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial T_3}{\partial w}(u, v, w) \end{bmatrix}$$

Integrais triplos: coordenadas cilíndricas

Consideremos a transformação:

$$T(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

Temos

$$\det J_T(r,\theta,z) = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r.$$

Assim, a fórmula da mudança de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas é dada por

$$\boxed{\iiint_{T(S)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,drd\theta dz.}$$

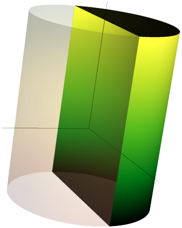
Integrais duplos: coordenadas cilíndricas

Como exemplo, vamos calcular o integral da função

$$f(x,y,z) = x$$

sobre a metade de cilindro definida pelas condições

$$x^2 + y^2 \leq 4, \ -2 \leq z \leq 3, \ x \leq 0.$$



Em coordenadas cilíndricas, a região D corresponde ao paralelepípedo S em $Or\theta z$ dado por

$$0 \leq r \leq 2, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}, \quad -2 \leq z \leq 3.$$

Integrais duplos: coordenadas cilíndricas

Assim, como $x = r\cos\theta$, aplicando a fórmula para a mudança de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\iiint_D x\, dV &= \iiint_S r^2 \cos\theta \, dr d\theta dz \\
&= \int_0^2 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_{-2}^{3} r^2 \cos\theta \; dz \right) d\theta \right) dr \\
&= \int_0^2 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[z\, r^2 \cos\theta \right]_{z=-2}^{z=3} d\theta \right) dr \\
&= 5 \int_0^2 \left[-r^2 \sin\theta \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} \, dr \\
&= 10 \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 = \frac{80}{3}.
\end{aligned}
$$

Integrais triplos: coordenadas esféricas

Consideremos a transformação:

$$T(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$$

Temos

$$\det J_T(\rho,\theta,\varphi) = \det\begin{bmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{bmatrix}$$
$$= -\rho^2\sin\varphi.$$

Assim,

$$\boxed{\iiint_{T(S)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_S f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\, d\rho d\theta d\varphi.}$$

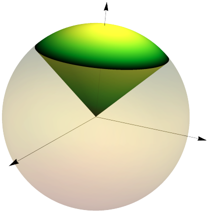
Integrais triplos: coordenadas esféricas

Como exemplo, vamos calcular o integral da função

$$f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$$

sobre a região D definida pelas condições

$$z^2 \geq x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0.$$



Em coordenadas esféricas,

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Integrais triplos: coordenadas esféricas

Como

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi,$$

temos

$$z(x^2+y^2) = \rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi.$$

Aplicando a fórmula para a mudança de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}
\iiint_D z(x^2+y^2)\,dV &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^5 \cos\varphi\sin^3\varphi \; d\varphi \right) d\theta \right) d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{4}\rho^5 \sin^4\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} d\theta \right) dr \\
&= \frac{\pi}{8} \int_0^1 \rho^5 d\rho = \frac{\pi}{8}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi}{48}
\end{aligned}$$

Integrais triplos: aplicações

Volume. Se D é uma região no espaço, então o seu volume é dado por

$$\boxed{\text{Volume}(D) = \iiint_D 1\, dxdydz.}$$

Probabilidade. Se $f(x,y,z)$ é a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X, Y e Z, a probabilidade de (X,Y,Z) estar na região D é dada por

$$\boxed{P\left((X,Y,Z) \in D\right) = \iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz.}$$

Integrais triplos: aplicações

Massa total. Um sólido ocupa uma região D no espaço. Seja $\rho(x, y, z)$ a densidade de massa (em unidade de massa por unidade de volume) no ponto (x, y, z). Então,

$$\text{Massa} = \iiint_D \rho(x, y, z)\,dxdydz.$$

Em muitas situações a densidade de massa $\rho(x, y, z)$ não é constante. Por exemplo, a densidade de massa na atmosfera depende, não só da temperatura, mas também da altitude: