Teorema: $G$ simples $v - cc(G) \leq \varepsilon \leq \binom{v - cc(G) + 1}{2}$

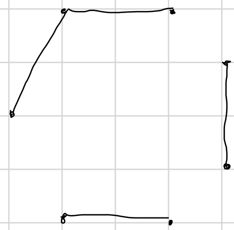
Exemplo:

$G$ simples com $v = 7$ vertices e $cc(G) = 3$. Qual o número mínimo e máximo de arestas? Represente esses grafos

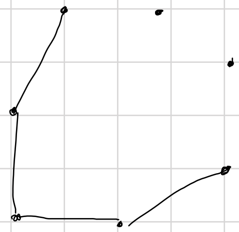
pelo teorema, $4 \leq \varepsilon \leq \binom{5}{2} \iff 4 \leq \varepsilon \leq \frac{5!}{3!\,2!}$

$\iff 4 \leq \varepsilon \leq 10$

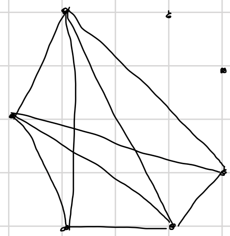
$\varepsilon = 4$



ou



$\varepsilon = 10$



$K_5$

Definição: Dado um grafo e $e \in E(G)$. Dizemos que $e$ é uma ponte de $G$ se $cc(G - e) > cc(G)$

Exemplo: No ex. anterior com $\varepsilon = 4$, todas as arestas são pontes

Teorema: Dado o grafo e $uv \in E(G)$. São equivalentes as seguintes afirmações:

a) $u, v$ é ponte de $G$

b) $cc(G - uv) = cc(G) + 1$

c) $u$ e $v$ não são vertices conexos em $G - uv$

d) A aresta $uv$ não está contida em nenhum ciclo de $G$

Prova:

a) $\Rightarrow$ b) se $uv$ é ponte, então $cc(G-uv) > cc(G)$

Do lema anterior, $cc(G-uv) \leq cc(G)+1$

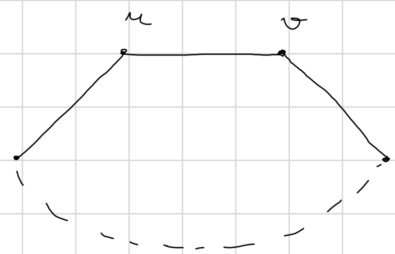
$\therefore$ $cc(G-uv) = cc(G)+1$

b) $\Rightarrow$ c) Supomos, com vista a absurdo, que $u$ e $v$ são vertices conexos em $G-uv$. Logo, $u$ e $v$ estão na mesma componente conexa de $G-uv$

$\therefore$ $cc(G-uv) = cc(G)$ ABSURDO!!

c) $\Rightarrow$ d) Supomos, com vista a absurdo, que $uv$ está contido num ciclo de $G$, dizemos $C$. Logo, $C - uv$ é um caminho em $G-uv$ entre os vértices $u$ e $v$, então $u$ e $v$ são vertices conexos em $G-uv$ $\Rightarrow$ ABSURDO!


d) $\Rightarrow$ a) Supomos, com vista a absurdo, que $uv$ não é ponte de $G$. Logo, $cc(G-uv) = cc(G)$. Então, $u$ e $v$ estão no mesmo componente conexa de $G-uv$. Assim, existe um caminho em $G-uv$ entre $u$ e $v$

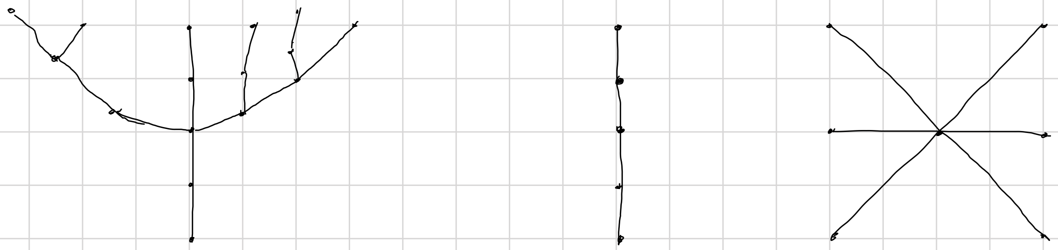



Assim, juntando a aresta $uv$ obtemos um ciclo em $G$ que contém $uv$ $\Rightarrow$ ABSURDO

# Arvores

Definição: Dizemos que o grafo $G$ é uma floresta se não tiver ciclos. Se além disso, $G$ é conexo, dizemos que $G$ é uma árvore. Se $v \in V$ e $d_G(v) = 1$, dizemos que $v$ é uma folha.

Exemplo



Se $G$ é floresta, então $G$ é simples

Teorema: Seja $G$ grafo simples com $v$ vértices. São equivalentes as seguintes afirmações:

a) $G$ é árvore
b) $G$ não tem ciclos e tem $v-1$ arestas
c) $G$ é conexo e tem $v-1$ arestas
d) $G$ é conexo e todas as arestas são pontes
e) Todos os vértices são ligados por um único caminho
f) $G$ não tem ciclos, mas adicionando uma aresta temos um ciclo