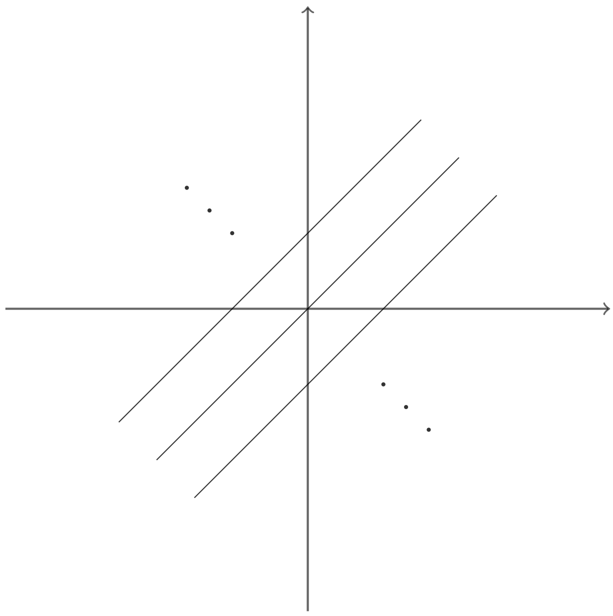


Matemática Discreta

Conjuntos, relações, relações de equivalência e relações de ordem

Saturday 28^{th} March, 2020

Referências:

Discrete Mathematics and Its Applications, 7th edition. Kenneth Rosen.

Apontamentos de Matemática Discreta. Henrique Cruz, Silvério Rosa.

Ten Chapters of the Algebraical Art. Peter Cameron.

Notes on Combinatorics. Peter Cameron.

A imagem da capa é uma representação das classes de equivalência da relação R definida em $\mathbb{R}^2$ através de $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow b - a = d - c$. (Exercício proposto na aula 4).

Elementos de Teoria de conjuntos

Aula 1

[1]Este capítulo serve para introduzir algumas notações e definições importantes em toda a disciplina. O conceito de conjunto já é conhecido do secundário, por exemplo os conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$, números inteiros $\mathbb{Z}$, números reais $\mathbb{R}$ são já familiares. Começamos, com uma definição um pouco informal:

Definição 1. *Um **conjunto** é uma colecção de objectos de natureza qualquer.*

Há duas maneiras de apresentar um conjunto. Quando se enumeram todos os elementos do conjunto, dizemos que estamos a apresentar o conjunto por extenso, ou por **extensão**. Por exemplo, o conjunto constituído pelos elementos 1,2,3,4 pode ser representado por extensão por $\{1, 2, 3, 4\}$. Usualmente referimo-nos ao conjunto usando letras maiúsculas. Assim, poderíamos ter escrito $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Certas vezes é mais cómodo apresentar o conjunto enunciando uma propriedade que caracterize todos os seus elementos. Nesse caso dizemos que o conjunto foi apresentado por **compreensão**. Um exemplo é o conjunto dos números pares. Tipicamente escrevemos $B = \{n \text{ é natural tal que } n \text{ é par}\}$, ou, mais formalmente, $B = \{n \text{ é natural tal que existe } y \text{ natural e } n = 2y\}$ Outra possibilidade de descrever o conjunto seria $B = \{2, 4, 6, 8, \cdots, 2n, \cdots\}$ onde se enumeram alguns elementos, assim como a regra para gerar todos os elementos. Quando não há o menor resquício de dúvida podemos optar pela representação $B = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$. Um conceito fundamental é o de pertença. Quando um elemento x **pertence** a um conjunto C escrevemos $x \in C$. Caso contrário, se um elemento y não pertence a um conjunto C escrevemos $y \notin C$. Assim, por exemplo, com referência ao conjunto A podemos dizer que $2 \in A$ mas $7 \notin A$. Já para o conjunto B temos $10 \in B$ mas $1 \notin B$. O conceito de pertença leva-nos à seguinte definição:

Definição 2. *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A está **contido** em B se todo o elemento de A pertence a B*

Outra forma de dizer a mesma coisa é, por exemplo, "A é uma parte de B", ou "A é um subconjunto de B". Sempre que A esteja contido em B escrevemos $A \subset B$. Quando A não está contido em B escrevemos $A \not\subset B$. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ temos $A \subset B$. Por outro lado temos $B \not\subset A$. Observamos que para qualquer conjunto A temos que $A \subset A$. Naturalmente surge a próxima definição.

Definição 3. *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A é **igual** a B se $A \subset B$ e $B \subset A$*

Um conjunto fundamental na teoria dos conjuntos é o seguinte:

Definição 4. *Um conjunto **vazio** é um conjunto que não tem elementos. Representamos por $\varnothing$.*

Podemos descrever o conjunto vazio por compreensão da seguinte forma

$$\varnothing = \{n \in \mathbb{N} : n = n + 1\}$$

[1] 16:36

mas o mais usual é representar $\varnothing$ por $\{\}$. Uma propriedade fundamental do conjunto vazio é a seguinte.

Proposição 1. *O conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto, i.e., temos sempre $\varnothing \subset A$ para qualquer conjunto A.*

Algumas operações entre conjuntos já são familiares. Temos

Definição 5. *Sejam A, B conjuntos. Definimos*

1. *a* ***intersecção*** *de A e B como o conjunto formado pelos elementos comuns a A e B. Representamos por $A \cap B$;*

2. *a* ***união*** *de A e B como o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B. Representamos por $A \cup B$.*

Por exemplo, se $A = \{1, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$ temos $A \cap B = \{4\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$. Claramente pode acontecer que dois conjuntos não tenham elementos comuns. Por exemplo se $C = \{1, 2\}$ e $D = \{3, 4\}$ a interesecção $C \cap D$ não contém elementos, pelo que é o conjunto vazio, i.e., $C \cap D = \varnothing$. Neste caso dizemos que os conjuntos são **disjuntos**. É interessante notar que as definições de intersecção e de união podem ser generalizadas a qualquer colecção de conjuntos, no seguinte sentido.

Definição 6. *Seja I um conjunto de índices. Seja $(A)_{i \in I}$ uma colecção de conjuntos indexada em I. Definimos*

1. *a* ***intersecção*** *de todos os A_i como o conjunto formado pelos elementos comuns a todos os A_i. Representamos por*
$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

2. *a* ***união*** *de todos os A_i como o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A_i. Representamos por*
$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

Por exemplo, seja $I = \mathbb{N}_o$ e consideremos $A_i = \{0, 1, 2, \cdots i\}$. Temos

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{0\}, \quad \bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{N}_o$$

Definição 7. *Sejam A, B conjuntos. Definimos* ***diferença*** *entre os conjuntos A e B, ou* ***complementar*** *de B em A ao conjunto dos elementos de A que não pertencem a B. Representamos por $A \setminus B$.*

Temos assim $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$. Em certas situações é conveniente fixar um conjunto que contenha todos os conjuntos que serão necessários considerar. Este conjunto chama-se **conjunto universal** e representamos por Ω ou por $\mathcal{U}$. O conjunto $\Omega \setminus A$ representa-se por $\overline{A}$ ou por A^c. Por exemplo se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{1, 5\}$ temos

$$\overline{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\} = \{2, 3, 4\}$$

As operações intersecção e união verificam a seguinte propriedade fundamental

Proposição 2. *Propriedade distributiva. Sejam A, B, C conjuntos de Ω. Tem-se*

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Demonstração. *Ver exercícios.*

Os próximos quatro exercícios vão permitir estabelecermos as famosas leis de de Morgan

Exercício 1. *Seja $A \subset \Omega$. Mostre que*

a) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

b) $A \cup \overline{A} = \Omega$

Resolução. *a) Mostramos a primeira identidade por absurdo. Suponhamos que existe $x \in A \cap \overline{A}$. Nesse caso temos que x pertence aos dois conjuntos que constituema intersecção, isto é, $x \in A$ e $x \in \overline{A}$, ou seja, $x \in A$ e $x \notin A$, o que é absurdo. Assim a proposição inicial "Suponhamos que existe $x \in A \cap \overline{A}$" é falsa, isto é, não existe x tal que $x \in A \cap \overline{A}$ e portanto $A \cap \overline{A}$ é vazio.*

b) Para a segunda identidade notamos que, por definição, uma identidade é uma dupla inclusão. No caso em concreto, mostrar que $A \cup \overline{A} = \Omega$ corresponde a mostrar que $A \cup \overline{A} \subset \Omega$ e que $\Omega \subset A \cup \overline{A}$. A primeira inclusão é automática, no sentido em que por definição de conjunto universal Ω este contém qualquer conjunto. Assim, em particular $A \cup \overline{A} \subset \Omega$. Para estabelecer a segunda inclusão basta notar que se $x \in \Omega$ e se A é um subconjunto de Ω temos que ou $x \in A$ ou $x \notin A$, isto é, ou $x \in A$ ou $x \in \overline{A}$. De qualquer forma temos sempre $x \in A \cup \overline{A}$.

Exercício 2. *Sejam $A, B \subset \Omega$. Mostre que se A e B são tais que $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \varnothing$ então $A = B^c$ e $B = A^c$*

Resolução. *Vejamos que nas condições dadas temos $A = B^c$. A prova da outra identidade é exactamente igual. Assim comecemos por observar que $A \subset \overline{B}$ pois se $x \in A$, como $A \cap B = \varnothing$ terá de ser $x \notin B$ (pois se x pertencesse a B, como pertence a A a intersecção não seria vazia). Mas dizer que $x \notin B$ é o mesmo que dizer que $x \in \overline{B}$, logo $A \subset \overline{B}$. Para ver a outra inclusão ($\overline{B} \subset A$). Seja $x \in \overline{B}$. Portanto $x \notin B$. Mas como $\Omega = A \cup B$, x só pode pertencer a A, isto é, $x \in A$. Fica assim provada a segunda inclusão.*

Exercício 3. *Seja $A \subset \Omega$. Mostre que $A = \overline{\overline{A}}$*

Resolução. *Já sabemos (pelo 1º exercício) que $A \cap \overline{A} = \varnothing$ e $A \cup \overline{A} = \Omega$. Assim, usando o exercício 2, e escolhendo $B := \overline{A}$ concluímos que $A = \overline{\overline{A}}$ e $\overline{A} = \overline{A}$, e portanto $A = \overline{\overline{A}}$*

Proposição 3. *Leis de de Morgan. Sejam $X, Y \subset \Omega$. Tem-se*

a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$

b) $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$

Resolução. *a) Sejam* $A := X \cup Y$ *e* $B := \overline{X} \cap \overline{Y}$. *Vamos ver que, com estas definições, temos* $A \cap B = \varnothing$ *e* $A \cup B = \Omega$. *Já vimos então, que nesta situação temos* $A = \overline{B}$ *e* $B = \overline{A}$*, ou seja,* $X \cup Y = \overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}$ *e* $\overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$*, respectivamente. Esta última identidade é já o queremos provar (corresponde à primeira lei de De Morgan). Acidentalmente a penúltima identidade não traz mais informação, pois aplicando o exercício 2 à penúltima identidade obtemos o que já tínhamos:*

$$\overline{X \cup Y} = \overline{\overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}} = \overline{X} \cap \overline{Y}$$

Falta então ver que $A \cap B = \varnothing$ *e* $A \cup B = \Omega$*. Temos*

$$\begin{aligned}
A \cap B &= (X \cup Y) \cap (\overline{X} \cap \overline{Y}) \\
&\stackrel{a}{=} (X \cap (\overline{X} \cap \overline{Y})) \cup (Y \cap (\overline{X} \cap \overline{Y})) \\
&\stackrel{b}{=} ((X \cap \overline{X}) \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap (Y \cap \overline{Y})) \\
&\stackrel{c}{=} (\varnothing \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap \varnothing) \\
&= \varnothing \cup \varnothing = \varnothing
\end{aligned}$$

onde a identidade "a" resulta de aplicar a distributividade da intersecção em relação à união, a identidade "b" resulta da associatividade da intersecção e a identidade "c" resulta do facto de D *e* D^c *serem disjuntos, para qualquer conjunto* D*. Quanto à identidade* $A \cup B = \Omega$*. Temos*

$$\begin{aligned}
A \cup B &= (X \cup Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y}) \\
&\stackrel{a}{=} ((X \cup Y) \cup \overline{X}) \cap ((X \cup Y) \cup \overline{Y}) \\
&\stackrel{a}{=} (Y \cup (X \cup \overline{X})) \cap (X \cup (Y \cup \overline{Y})) \\
&\stackrel{a}{=} (Y \cup \Omega) \cap (X \cup \Omega) \\
&\stackrel{a}{=} \Omega \cap \Omega = \Omega
\end{aligned}$$

b) Para obtermos a segunda lei de De Morgan, podemos simplesmente aplicar a primeira lei (uma vez que esta já está provada) aos conjuntos $x := \overline{X}$ *e* $y := \overline{Y}$*. Temos* $\overline{x} = \overline{\overline{X}} = X$ *e* $\overline{y} = \overline{\overline{Y}} = Y$*. Assim, aplicando a primeira lei, temos*

$$\begin{aligned}
\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y} \quad &\Rightarrow \quad \overline{\overline{x} \cup \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \cap \overline{\overline{y}} \Rightarrow \\
\Rightarrow \overline{\overline{x} \cup \overline{y}} = x \cap y \quad &\Rightarrow \quad \overline{x} \cup \overline{y} = \overline{x \cap y}
\end{aligned}$$

Exercícios

Exercício 4. *Sejam* $X, Y, Z \subset \Omega$. *Mostre que tem-se*

a) $X \cap Y \subset X \subset X \cup Y$

b) $X \cap Y \subset Y \subset X \cup Y$

c) $X, Y \subset Z \Rightarrow X \cup Y \subset Z$

d) $Z \subset X$ *e* $Z \subset Y \Rightarrow Z \subset X \cap Y$

Exercício 5. *Sejam* $A, B \subset \Omega$. *Mostre que* $A = A \cup (A \cap B)$.

Resolução. *Temos* $A \subset A$ *e* $A \cap B \subset A$. *Resulta, pela alínea c) do exercício anterior, que* $A \cup (A \cap B) \subset A$. *Por outro lado, pela alínea a) temos* $A \subset A \cup Y$, *para qualquer* Y. *Em particular, tomando* $Y = A \cap B$, *obtemos* $A \subset A \cup (A \cap B)$. *Temos assim* $A \cup (A \cap B) \subset A \subset A \cup (A \cap B)$, *logo* $A = A \cup (A \cap B)$.

Aula 2

O próximo exercício coloca em evidência que nem todas as operações usuais entre conjuntos são associativas.

Exercício 6. *Sejam $A, B, C \subset \Omega$. Mostre que não é verdade que a operação diferença entre conjuntos seja associativa, isto é, mostre que não é verdade que* $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

Resolução. *Para mostrar que uma identidade entre conjuntos não é válida basta apresentar um caso onde essa suposta identidade falhe. Consideremos então $A = B = C \neq \varnothing$. Temos*

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \setminus C &= (A \setminus A) \setminus A \\ &= \varnothing \setminus A \\ &= \varnothing\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}A \setminus (B \setminus C) &= A \setminus (A \setminus A) \\ &= A \setminus \varnothing \\ &= A\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $A \neq \varnothing$ resulta que ambos os lados da identidade são diferentes, logo o resultado do enunciado é falso.

Por outro lado, temos

Exercício 7. *Sejam $A, B, C \subset \Omega$. Mostre que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$*

Definição 8. *Seja X um conjunto. O conjunto constituído por todos os subconjuntos de X diz-se o conjunto* ***potência*** *de X, ou conjunto das partes de X. Representamos por $\mathcal{P}(X)$.*

Nota: Observe que os elementos do conjunto $\mathcal{P}(X)$ são eles próprios conjuntos. $\mathcal{P}(X)$ é um "conjunto de conjuntos", ou uma colecção de conjuntos. É por esse facto que se usa a letra maiúscula caligráfica $\mathcal{P}$.

Exercício 8. *Seja $X = \{1, 2\}$. Determine $\mathcal{P}(X)$.*

Resolução. *Já sabemos que para qualquer conjunto A temos $\varnothing \subset A$ e também $A \subset A$. Assim tanto o conjunto vazio como o conjunto $\{1, 2\}$ são subconjuntos do conjunto $\{1, 2\}$. Naturalmente que $\{1\} \subset \{1, 2\}$ e $\{2\} \subset \{1, 2\}$. Temos assim que*

$$\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Exercício 9. *Seja $X = \{a, b, c\}$. Determine $\mathcal{P}(X)$.*

Resolução. *Já sabemos que tanto o conjunto vazio como o conjunto "total" $\{a, b, c\}$ são subconjuntos do conjunto X. Naturalmente que $\{a\}$,$\{b\}$,$\{c\}$ são os subconjuntos de X que contêm apenas um elemento, e $\{a, b\}$, $\{b, c\}$,$\{a, c\}$ são os subconjuntos de X que contêm dois elementos. Resulta que*

$$\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}$$

Exercício 10. *Seja $X = \varnothing$. Determine $\mathcal{P}(\varnothing)$.*

Resolução. *Já sabemos que tanto o conjunto vazio como o conjunto total X são subconjuntos do conjunto X. Neste caso, como $X = \varnothing$ resulta que na realidade estes dois casos extremos são o mesmo conjunto. Naturalmente que X não contém subconjuntos que contenham elementos e portanto resulta que*

$$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

Definição 9. *Sejam $A, B \subset \Omega$. Define-se a **diferença simétrica** entre os conjuntos A e B como o conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ e representa-se por $A\Delta B$.*

Exemplo 1. *Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$. Temos*

$$A\Delta B = (\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4\}) \cup (\{3, 4\} \setminus \{1, 2, 3\}) = \{1, 2\} \cup \{4\} = \{1, 2, 4\}$$

A diferença simétrica é uma operação fundamental e verifica muitas propriedades importantes. Antes de enunciarmos algumas dessas propriedades indicamos um resultado que pode ser encarado como uma definição alternativa.

Proposição 4. *Sejam $A, B \subset \Omega$. Tem-se $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$*

Demonstração. *Sejam $A, B \subset \Omega$. Temos*

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\
&= [A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \cup [B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \\
&= [(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})] \cup [(B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B})] \\
&= [\varnothing \cup (A \cap \overline{B})] \cup [(B \cap \overline{A}) \cup \varnothing] \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
&= A\Delta B
\end{aligned}$$

Exemplo 2. *Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$. Temos*

$$A\Delta B = (\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\}) \setminus (\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3\} = \{1, 2, 4\}$$

Proposição 5. *Sejam $A, B, C \subset \Omega$. Temos:*

a) $A\Delta\varnothing = A$

b) $A\Delta A = \varnothing$

c) $A\Delta B = B\Delta A$ *(A diferença simétrica é comutativa)*

d) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$ *(A intersecção é distributiva em relação à diferença simétrica)*

e) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ *(A diferença simétrica é associativa)*

Demonstração. *a* $A\Delta\varnothing = (A \cup \varnothing) \setminus (A \cap \varnothing) = A \setminus \varnothing = A$

b) $A\Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

c) Exercício

d) Temos

$$\begin{aligned} A\cap(B\Delta C) &= A\cap[(B\setminus C)\cup(C\setminus B)) \\ &= [A\cap(B\setminus C)]\cup[A\cap(C\setminus B)] \\ &= [A\cap B\cap\overline{C}]\cup[A\cap C\cap\overline{B}] \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} (A\cap B)\Delta(A\cap C) &= [(A\cap B)\setminus(A\cap C)]\cup[(A\cap C)\setminus(A\cap B)] \\ &= [(A\cap B)\cap\overline{A\cap C}]\cup[(A\cap C)\cap\overline{A\cap B}] \\ &= [(A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})]\cup[(A\cap C)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})] \\ &= [(A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C})]\cup[(A\cap C\cap\overline{A})\cup(A\cap C\cap\overline{B})] \\ &= [\varnothing\cup(A\cap B\cap\overline{C})]\cup[\varnothing\cup(A\cap C\cap\overline{B})] \end{aligned}$$

e, portanto, ambos os resultados são iguais.

e) Exercício(**)

O próximo exercício é bastante interessante. Por um lado, pode ser resolvido sem recurso ao caminho exaustivo que escolhemos. Por outro lado, ao fazermos esta escolha, evidenciamos uma situação típica em matématica: estruturas ou objectos essencialmente diferentes podem, sob certas condições, ser considerados como sendo emanações de uma mesma ideia/entidade.

Exercício 11. *Se a diferença simétrica entre A e B for igual à diferença simétrica entre A e C poderá concluir-se que se tem $B = C$?*

Para respondermos à questão colocada, notamos o seguinte. Se em vez de conjuntos, estivéssemos a pensar em números inteiros, a questão anterior podia ser escrita da seguinte forma. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $a + b = a + c$ podemos concluir que $b = c$? Claro que sim, uma vez que o "a corta". É instrutivo lembrar algumas propriedades que as operações soma e produto verificam em $\mathbb{Z}$ de forma a perceber exactamente o que significa o termo "corta".

Proposição 6. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Em $\mathbb{Z}$ a soma $(+)$ e o produto $(\cdot)$ verificam*

S_1 $a + b \in \mathbb{Z}$ *(Fecho da soma)*

S_2 $a + (b + c) = (a + b) + c$ *(Associatividade da soma)*

S_3 *Existe* $0 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a + 0 = 0 + a = a$ *(Existência de zero)*

S_4 *Para cada* $a \in \mathbb{Z}$ *existe* $b \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a + b = 0$ *e* $b + a = 0$ *(Existência de inverso aditivo, ou simétrico* $(b := -a)$*)*

S_5 $a + b = b + a$ *(Comutatividade da soma)*

P_1 $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ *(Fecho do produto)*

P_2 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *(Associatividade do produto)*

D $\begin{cases} a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c) \\ (a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c) \end{cases}$ *(Distributividade do produto em relação à soma)*

Agora já estamos na posse da terminologia que nos permitirá perceber exactamente o que representa a expressão "corta". Voltando ao exercício em $\mathbb{Z}$ temos

$$\begin{aligned} a+b=a+c &\overset{S_4}{\Rightarrow} -a+(a+b)=-a+(a+c) \\ &\overset{S_2}{\Rightarrow} (-a+a)+b=(-a+a)+c \\ &\overset{S_4}{\Rightarrow} 0+b=0+c \\ &\overset{S_3}{\Rightarrow} b=c \end{aligned}$$

Essencialmente quando "cortamos" um número numa equação estamos a executar este raciocínio. Em matemática, sucede frequentemente que um conjunto suporta duas operações que verificam estas propriedades. Mais precisamente temos

Definição 10. *Qualquer conjunto S onde esteja definida uma soma e um produto que verifiquem as propriedades $S_1, \cdots, S_5, P_1, P_2$ e D diz-se um anel. Dizemos que $(S, +, \cdot)$ é um anel.*

Assim, poderíamos resumir toda a informação contida na proposição anterior dizendo simplesmente que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um anel. A pertinência desta definição no nosso contexto é revelada pelo seguinte resultado:

Proposição 7. *Seja Ω um conjunto universal. O conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ com a soma definida por $A + B := A\Delta B$ e com o produto definido por $A \cdot B = A \cap B$ é um anel, isto é, $(\mathcal{P}(\Omega), + \equiv \Delta, \cdot \equiv \cap)$ é um anel.*

Demonstração. *Para fazer a demostração basta reescrever os itens $S_1, \ldots, D$ neste novo contexto e perceber que essencialmente todos os pontos já foram provados anteriormente. Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$. Em $\mathcal{P}(\Omega)$ a soma $(+ := \Delta)$ e o produto $(\cdot := \cap)$ verificam*

S_1 $A\Delta B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *(Fecho da soma)*

S_2 $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ *(Associatividade da soma)*

S_3 *Existe* $\varnothing \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tal que* $A\Delta\varnothing = \varnothing\Delta A = A$ *(Existência de zero)*

S_4 *Para cada* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ *existe* $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tal que* $A\Delta B = \varnothing$ *e* $B\Delta A = \varnothing$ *(Existência de inverso aditivo* $(B := A)$*)*

S_5 $A\Delta B = B\Delta A$ *(Comutatividade da soma)*

P_1 $A \cap B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *(Fecho do produto)*

P_2 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(Associatividade do produto)*

$$D \begin{cases} A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C) & \textit{(Distributividade do produto em} \\ (A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C) & \textit{relação à soma)} \end{cases}$$

Assim, para respondermos ao nosso exercício, que, recorde, era $A\Delta B = A\Delta C \quad \Rightarrow B = C$ basta notar que

$$\begin{aligned} A\Delta B = A\Delta C &\stackrel{S_4}{\Rightarrow} A\Delta(A\Delta B) = A\Delta(A\Delta C) \\ &\stackrel{S_2}{\Rightarrow} (A\Delta A)\Delta B = (A\Delta A)\Delta C \\ &\stackrel{S_4}{\Rightarrow} \varnothing\Delta B = \varnothing\Delta C \\ &\stackrel{S_3}{\Rightarrow} B = C \end{aligned}$$

Exercícios

Exercício 12. *Sejam* $A = [0,3]$, $B =]1,2[$. *Determine* $A\Delta B$.

Exercício 13. *Considere os conjuntos* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$, $C = \{2,4,6\}$. *Determine* $(A\Delta C) \cup \overline{B}$

Exercício 14. *Seja* Ω *um conjunto universal e* $A, B, D \subset \Omega$ *com* $A \subset B \subset D$. *Simplifique* $A \cap (B\Delta D)$

Exercício 15. *Seja* Ω *um conjunto universal e* $A, B \subset \Omega$ *com* $B \subset A$. *Simplifique* $A\Delta(A\Delta B)$

Exercício 16. *Seja* $X = \mathcal{P}(\varnothing)$. *Determine* $\mathcal{P}(X)$.

Exercício 17. *Sejam* $A, B, C \subset \Omega$. *Mostre que:*

a) A união (da definição de diferença simétrica) é uma união disjunta

b) $A\Delta\Omega = \overline{A}$

c) $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$

Resolução. *a) Basta notar que*

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cap (B \setminus A) &= (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) \\ &= A \cap (\overline{B} \cap B) \cap \overline{A} \\ &= A \cap \varnothing \cap \overline{A} \\ &= \varnothing\end{aligned}$$

b) $A\Delta\Omega = (A \cup \Omega) \setminus (A \cap \Omega) = \Omega \setminus A = \overline{A}$

c)

$$\begin{aligned}\overline{A}\Delta\overline{B} &= (\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{A}) \\ &= (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{B} \cap \overline{\overline{A}}) \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) \\ &= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= A\Delta B\end{aligned}$$

Exercício 18. *Mostre que a união não é distributiva em relação à diferença simétrica, isto é, mostre que não é verdade que* $A \cup (B\Delta C) = (A \cup B)\Delta(A \cup C)$

Resolução. *Para mostrar que uma identidade entre conjuntos não é válida basta apresentar um caso onde essa suposta identidade falhe. Consideremos então* $A = B = C \neq \varnothing$. *Temos*

$$\begin{aligned}A \cup (B\Delta C) &= A \cup (A\Delta A) \\ &= A \cup \varnothing \\ &= A\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)\Delta(A \cup C) &= (A \cup A)\Delta(A \cup A) \\
&= A\Delta A \\
&= \varnothing
\end{aligned}
$$

Como, por hipótese, $A \neq \varnothing$ resulta que ambos os lados da identidade são diferentes, logo o resultado do enunciado é falso.

Exercício 19. *Sejam $A, B \subset \Omega$.*

a) Mostre que $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

b) É verdade que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?

c) É verdade que $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Resolução. *a) Seja $A \subset B$. Se $X \in \mathcal{P}(A)$, $X \subset A$. Mas como $A \subset B$, $X \subset B$, ou, o que é o mesmo, $X \in \mathcal{P}(B)$.*

b) Exercício.

c) Como $A, B \subset A \cup B$ pela alínea 1 temos que $\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ e portanto $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.Para analisar a outra inclusão poderíamos tentar o seguinte raciocínio: se $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ então $X \subset A \cup B$. Podíamos ser tentados a afirmar que, neste caso, $X \subset A$ ou $X \subset B$, o que seria equivalente a ter $X \in \mathcal{P}(A)$ ou $X \in \mathcal{P}(B)$ e portanto $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. É fácil de perceber que o raciocínio é falacioso, pois não é verdade que $X \subset A \cup B \Rightarrow X \subset A$ ou $X \subset B$. Basta pensar nos conjuntos $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}, X = \{0, 2\}$. Temos $X \subset A \cup B = \{0, 1, 2\}$ mas $X \not\subset A$ e $X \not\subset B$. Assim, somos inclinados a acreditar que a inclusão $\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ não é verdadeira. Os conjuntos A, B agora definidos bastam para estabelecer o pretendido. E temos $\{0, 1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, mas $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}\}$.

Aula 3

Exercício 20. *Se a diferença simétrica entre os conjuntos A e B for igual a B o que se pode dizer sobre os conjuntos A e B*

Resolução. *Se $A\Delta B = B$ temos, pela existência de simétrico de B, $(A\Delta B)\Delta B = B\Delta B$. Usando associatividade temos $A\Delta(B\Delta B) = B\Delta B$. Como B é o simétrico de B resulta que $B\Delta B = \varnothing$ logo obtemos $A\Delta\varnothing = \varnothing$. Por definição de zero temos $A = \varnothing$.*

Exercício 21. *Será verdade que $A\Delta(B\cap C) = (A\Delta B)\cap(A\Delta C)$*

Resolução. *A identidade análoga em $\mathbb{Z}$ é $a + (b.c) = (a + b).(a + c)$ o que claramente não é verdade para todos os elementos $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Isto já dá uma pista para a resposta à questão. Tentemos então, por exemplo, $A = B$ e vejamos se conseguimos mostrar que a identidade é falsa. Temos*

$$\begin{aligned}
A\Delta(B\cap C) &= A\Delta(A\cap C) = \\
&= [A\setminus(A\cap C)]\cup[(A\cap C)\setminus A] \\
&= [A\cap(\overline{A}\cup\overline{C})]\cup[A\cap C\cap\overline{A}] \\
&= [(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{C})]\cup\varnothing \\
&= \varnothing\cup(A\cap\overline{C}) = A\setminus C
\end{aligned}$$

Por outro lado temos $(A\Delta B)\cap(A\Delta C) = (A\Delta A)\cap(A\Delta C) = \varnothing\cap(A\Delta C) = \varnothing$. Assim, à condição $A = B$ precisamos de adicionar as condições $A \neq \varnothing$ e $C \neq A$. Com estas opções garantimos que a identidade é falsa.

Relações

A matéria que constitui este capítulo -relações- é absolutamente fundamental em matématica. É difícil encontrar uma definição de matemática em que todos os seus praticantes acordem. Mas certamente que todos estão de acordo em afirmar que a matemática estuda objectos e como estes se relacionam entre si. Para esse estudo a conceito de relação é fulcral. Permite categorizar elementos, definir o próprio conceito de função, dar o enquadramento para o conceito de ordem, etc. É esse estudo que iniciamos agora. Começamos por referir um conceito já conhecido. O par ordenado. Por exemplo, a função $y = \cos x$ no ponto $x = 0$ vale $y = 1$, e usualmente dizemos que a função passa no ponto $(0, 1)$. Este objecto, escrito desta forma, diz-se um par ordenado. Ao contrário do que acontecia em conjuntos, a ordem aqui é essencial. $(0, 1)$ é diferente de $(1, 0)$, mas $\{0, 1\}$ é igual a $\{1, 0\}$.

Definição 11. *Sejam A, B conjuntos. O conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$ diz-se o **produto cartesiano** de A por B e representamos por $A \times B$. Mais sucintamente temos*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$$

Exemplo 3. *Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$. Temos*

$$A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$$

Note que $A \times B \neq B \times A$

No caso em que $B = A$ escrevemos $A \times B = A \times A = A^2$. De forma análoga estendemos estas definições. Por exemplo, se tivermos três conjuntos A, B, C o produto cartesiano é definido por $A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A,\, b \in B,\, c \in C\}$. No caso de todos os conjuntos serem iguais, i.e, se $A = B = C$ escrevemos $A \times B \times C = A \times A \times A = A^3$. Assim, por exemplo, o cubo unitário $[1, 2] \times [1, 2] \times [1, 2]$ pode ser escrito como $[1, 2]^3$ A definição central deste capítulo é a seguinte:

Definição 12. *Sejam A, B conjuntos. Chamamos* ***relação binária*** *de A para B a qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Representamos esse subconjunto por R.*

No caso em que $A = B$, dizemos que R é uma relação binária definida em A.

Exemplo 4. *Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$. Já vimos que*

$$A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$$

Como exemplos de relações binárias de A para B temos, $R = \{(0, b), (1, b)\}$, ou $R_1 = \{(1, a), (1, b), (1, c)\}$. O próprio conjunto $A \times B$ é também uma relação binária de A para B. Já o conjunto $R_2 = \{(2, b), (2, c)\}$ não é uma relação binária de A para B pois o conjunto R_2 não está contido em $A \times B$. Por outro lado

$$A^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

e $R_3 = \{(1, 1)\}$ é uma relação binária definida em A.

Com referência a este exemplo, a notação e nomenclatura que se usa é a seguinte. Como $(1, b) \in R$ dizemos que 1 se relaciona com b através de R. Representamos também por $1Rb$. Como $(0, b) \notin R_1$ dizemos que 0 não se relaciona com b através de R_1. Podemos também representar por $0 \not R_1\, b$. Como as relações são conjuntos podemos aplicar todas as operações que vimos nas aulas anteriores. Assim, se R, S são relações binárias de A para B, estão bem definidas as relações $R \cap S$, $R \cup S$, $R \setminus S$. $(A \times B) \setminus R$ será naturalmente representada por $\overline{R}$ e diz-se a relação **complementar**. Outras relações que serão muito úteis são apresentadas nas próximas definições.

Definição 13. *Sejam A, B conjuntos. Se R é uma relação binária de A para B, definimos a* ***relação inversa*** *de R como o subconjunto*

$$\{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

É uma relação binária de B para A, e naturalmente representa-se por R^{-1}

Exemplo 5. *Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$. Já sabemos que*

$$A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$$

Considerando $R = \{(0, b), (1, b)\}$ e $R_1 = \{(1, a), (1, b), (1, c)\}$ temos

$$\begin{aligned} R \cap R_1 &= \{(1, b)\} \\ R \cup R_1 &= \{(0, b), (1, a), (1, b), (1, c)\} \\ \overline{R_1} &= \{(0, a), (0, b), (0, c)\} \\ R^{-1} &= \{(b, 0), (b, 1)\} \end{aligned}$$

Definição 14. *Sejam A, B, C conjuntos. Se R é uma relação binária de A para B, e S é uma relação binária de B para C , definimos a **composição** como a relação de A para C dada por*

$$\{(a, c) \in A \times C : \text{ existe } x \in B \text{ tal que } (a, x) \in R \text{ e } (x, c) \in S\}$$

Representamos por $S \circ R$ e diz-se "S após R".

Exemplo 6. *Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Considerando*

$$R = \{(1, a), (1, c), (2, b)\}, \quad S = \{(a, \alpha), (a, \beta), (c, \gamma)\}$$

temos $S \circ R = \{(1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma)\}$. Se, por outro lado, considerarmos

$$R = \{(1, a), (1, c), (2, b)\}, \quad S_1 = \{(a, \beta), (b, \gamma)\}$$

obtemos $S_1 \circ R = \{(1, \beta), (2, \gamma)\}$.

As relações podem ter certas propriedades. Começamos por enunciar algumas.

Definição 15. *Seja A um conjunto e R uma relação definida em A. Dizemos que R é*

- ***reflexiva*** *se para cada $a \in A$ temos $(a, a) \in R$;*
- ***simétrica*** *se para cada $a, b \in A$ com $(a, b) \in R$ também $(b, a) \in R$;*
- ***transitiva*** *se para cada $a, b, c \in A$ com $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ também $(a, c) \in R$*

Exemplo 7. *Seja $A = \{1, 2\}$. Já sabemos que $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. Seja*

$$R = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

R não é reflexiva pois, por exemplo, $1 \in A$ mas $(1, 1) \notin R$ e portanto não é verdade que para qualquer $a \in A$ seja $(a, a) \in R$. R é simétrica pois o elemento $(1, 2) \in R$ e também $(2, 1) \in R$. Por outro lado o elemento $(2, 1) \in R$ e também $(1, 2) \in R$, e portanto R cumpre a definição de relação simétrica. Quanto à transitividade. R não é transitiva pois, por exemplo, $(2, 1) \in R$ e $(1, 2) \in R$, mas o elemento $(2, 2) \notin R$.

Exemplo 8. *Seja $A = \{1, 2\}$. Seja*

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$$

Temos $(1, 1), (2, 2) \in S$, logo para qualquer $a \in A$ temos $(a, a) \in S$ e S é reflexiva. S não é simétrica pois o elemento $(1, 2) \in S$ mas $(2, 1) \notin S$. Para ver que S é transitiva temos de inspeccionar vários casos.
Comecemos por determinar todos os pares com $b = 1$. Temos $(a, 1) \in S$ e $(1, c) \in S$. Será que $(a, c) \in S$? Para este caso temos duas opções: $(1, 1) \in S$, $(1, 1) \in S$ e trivialmente $(1, 1) \in S$, $(1, 1) \in S$, $(1, 2) \in S$, e também trivialmente $(1, 2) \in S$. Não há outros casos admissíveis com $b = 1$.
No caso $b = 2$, temos $(a, 2) \in S$ e $(2, c) \in S$. Será que $(a, c) \in S$?. Novamente temos dois casos $(1, 2) \in S$, $(2, 2) \in S$, mas trivialmente $(1, 2) \in S$, e o segundo caso $(2, 2) \in S$, $(2, 2) \in S$, mas trivialmente $(2, 2) \in S$. Assim, vimos que sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ também $(a, c) \in R$.

Exemplo 9. *Seja* $A = \{1, 2, 3\}$*. Seja*

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 3)\}$$

Como $(2, 2) \notin R$*,* R *não é reflexiva.* R *não é simétrica pois o elemento* $(2, 3) \in R$ *mas* $(3, 2) \notin R$*.* R *não é transitiva pois* $(1, 2) \in R$*,* $(2, 3) \in R$ *e deveríamos ter* $(1, 3) \in R$*, mas tal não acontece.*

Definição 16. *Seja* A *um conjunto e* R *uma relação definida em* A*. Dizemos que* R *é uma* ***relação de equivalência*** *em* A *se* R *é reflexiva, simétrica e transitiva.*

Exemplo 10. *Seja* $A = \{1, 2\}$*. Seja*

$$R = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

R *é reflexiva pois* $1 \in A$ *e* $(1, 1) \in R$*, assim como* $2 \in A$ *e* $(2, 2) \in R$ *. É simétrica pois o elemento* $(1, 1) \in R$ *e quando trocamos a ordem das coordenadas temos também* $(1, 1) \in R$*. O mesmo vale para o elemento* $(2, 2)$*. É trivialmente transitiva. Assim,* R *é uma relação de equivalência.*

Exercícios

Exercício 22. *Seja $A = \{1, 2\}$. Determine:*

a) *Todas as relações reflexivas definidas em A.*

b) *Todas as relações transitivas definidas em A.*

Exercício 23. *Seja R a relação definida em $\mathbb{Z}$ por nRm se, e só se $nm > 0$. Mostre que a relação é simétrica, transitiva mas não reflexiva.*

Exercício 24. *Considere o conjunto $\mathbb{Z}$. Seja*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x - y \text{ é inteiro}\}$$

Mostre que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

Resolução. *A condição que define os pares ordenados do conjunto R pode ser escrita como $x - y = m$, para algum $m \in \mathbb{Z}$.*

a) *R é reflexiva?* $[\, a \in A \Rightarrow (a, a) \in R?\,]$
Com a notação deste exercício a pergunta que queremos responder é

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x, x) \in R?$$

Mas se $x \in \mathbb{Z}$ temos $x - x = 0$. Como $0 \in \mathbb{Z}$ resulta que $(x, x) \in R$.

b) *R é simétrica?* $[\, a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R?\,]$
Com a notação deste exercício a pergunta que queremos responder é

$$x, y \in \mathbb{Z} : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R?$$

Se $x, y \in \mathbb{Z} : (x, y) \in R$ resulta que $x - y = m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Multiplicando a última igualdade por -1 obtemos $y - x = -m$, isto é, $y - x \in \mathbb{Z}$, logo $(y, x) \in R$

c) *R é transitiva?* $[\, a, b, c \in A : (a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R?\,]$
Com a notação deste exercício a pergunta que queremos responder é

$$x, y, z \in \mathbb{Z} : (x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R?$$

Por hipótese temos $x - y = m$ e $y - z = n$ com $m, n \in \mathbb{Z}$. Somando as duas identidades temos $(x - y) + (y - z) = m + n$, ou seja $x - z = m + n$ e $m + n \in \mathbb{Z}$. Assim $(x, z) \in R$.

Como R é reflexiva, simétrica e transitiva, R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

Exercício 25. *Sejam R e S relações definidas num conjunto A.*

a) *Defina $R \circ R$.*

b) *Mostre que se S é transitiva e contém R então $R \circ R \subset S$.*

c) *Mostre que se S é transitiva e contém R então $R \circ R \circ R \subset S$.*

Aula 4

Exemplo 11. *Consideremos o conjunto $\mathbb{Z}$. Seja*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x - y \text{ é múltiplo de } 4\}$$

Mostre que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

Resolução. *A condição que define os pares ordenados do conjunto R pode ser convenientemente escrita como $x - y = 4m$, para algum $m \in \mathbb{Z}$.*

a) R é reflexiva? $[\, a \in A \Rightarrow (a, a) \in R? \,]$
Com a notação deste exercício a pergunta que queremos responder é

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x, x) \in R?$$

Mas se $x \in \mathbb{Z}$ temos $x - x = 0$. Mas $0 = 4.0$, logo $x - x$ é multiplo de 4 e $(x, x) \in R$.

b) R é simétrica? $[\, a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R? \,]$
Com a notação deste exercício a pergunta que queremos responder é

$$x, y \in \mathbb{Z} : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R?$$

Se $x, y \in \mathbb{Z} : (x, y) \in R$ resulta que $x - y = 4m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Multiplicando a última igualdade por -1 obtemos $y - x = -4m = 4(-m)$, isto é, $y - x$ é multiplo de 4, logo $(y, x) \in R$.

c) R é transitiva? $[\, a, b, c \in A : (a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R? \,]$
Com a notação deste exercício a pergunta que queremos responder é

$$x, y, z \in \mathbb{Z} : (x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R?$$

Por hipótese temos $x - y = 4m$ e $y - z = 4n$ com $m, n \in \mathbb{Z}$. Somando as duas identidades temos $(x - y) + (y - z) = 4m + 4n = 4(m + n)$, ou seja $x - z$ é multiplo de 4. Assim $(x, z) \in R$.

Como R é reflexiva, simétrica e transitiva, R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

Exercício 26. *Seja $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Considere em A a relação R dada por $(a, b)R(c, d)$ se, e só se $ad = bc$. Mostre que R é uma relação de equivalência.*

Resolução. *a) R é reflexiva?* $[\, x \in X \Rightarrow xRx? \,]$
Usando a notação deste exercício seja $(a, b) \in A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Temos $ab = ba$ logo $(a, b)R(a, b)$ e R é reflexiva.

b) R é simétrica? $[\, x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx? \,]$
Com a notação deste exercício sejam então $(a, b), (c, d) \in A$. A pergunta que queremos responder é se $(a, b)R(c, d) \Rightarrow (c, d)R(a, b)$? Como $(a, b)R(c, d)$ temos $ad = bc$. Mas esta igualdade pode trivialmente ser escrita como $cb = da$ o que pode ser reescrito como $(c, d)R(a, b)$

c) *R é transitiva?* $[x, y, z \in A : xRy, yRz \Rightarrow xRz?]$
Com a notação deste exercício a pergunta que queremos responder é

$$(a,b),(c,d),(e,f) \in A : (a,b)R(c,d),(c,d)R(e,f) \Rightarrow (a,b)R(e,f)?$$

Por hipótese temos $ad = bc$ *e* $cf = de$ *e sabemos que* b, d, f *são não nulos. Temos*

$$af = \left(\frac{bc}{d}\right) f = \frac{b(cf)}{d} = \frac{bde}{d} = be$$

Assim verificamos que $af = be$*, ou seja,* $(a,b)R(e,f)$.

Como R *é reflexiva, simétrica e transitiva,* R *é uma relação de equivalência em* A.

Definição 17. *Seja* X *um conjunto não vazio. Uma* ***partição*** *de* X *é uma colecção* $\mathcal{A}$ *formada por subconjuntos* $A_i \subset X$ *que satisfaz*

a) *Os conjuntos* A_i *são não vazios*

b) *Os conjuntos* A_i *são disjuntos dois a dois, isto é,* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *para todo* $i \neq j$

c) *A união dos conjuntos* A_i *é* X*, isto é,*

$$\bigcup_{A_i \in \mathcal{A}} A_i = X$$

Os conjuntos A_i (que são os elementos da família de conjuntos $\mathcal{A}$) dizem-se os **átomos** ou **células** da partição.

Exemplo 12. *Seja* $X = \{1,2,3,4\}$*. Definindo* $A_1 = \{1\}$*,* $A_2 = \{2\}$*,* $A_3 = \{3,4\}$ *o conjunto* $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ *é uma partição de* X *pois*

a) *Os conjuntos* A_i *são não vazios*

b) *Os conjuntos* A_i *são disjuntos dois a dois, isto é,* $A_1 \cap A_2 = \{1\} \cap \{2\} = \varnothing$*,* $A_1 \cap A_3 = \{1\} \cap \{3,4\} = \varnothing$*,* $A_2 \cap A_3 = \varnothing$.

c) *A união dos conjuntos* A_i *é* X*, isto é,* $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3,4\} = X$

Exemplo 13. *No mesmo conjunto* $X = \{1,2,3,4\}$*, os conjuntos* $B_1 = \{1,2,3\}$*,* $B_2 = \{3,4\}$*, não formam uma partição de* X*, pois apesar de serem não vazios e "gerarem" o conjunto* X *não são disjuntos.* $B_1 \cap B_2 = \{3\} \neq \varnothing$.

Definição 18. *Seja* X *um conjunto não vazio e* R *uma relação de equivalência definida em* X*. Seja* $b \in X$*. O conjuntos de todos os elementos de* X *que estão em relação com* b *diz-se a* ***classe de equivalência*** *de* b *e representa-se por* $[b]$*, ou por* $[b]_R$*, se for necessário evidenciar qual a relação de equivalência considerada. De forma mais sucinta temos*

$$[b] = \{x \in X : xRb\}$$

O elemento b *diz-se o* ***representante*** *da classe* $[b]$

Exemplo 14. *Seja $X = \{1, 2, 3\}$. Neste conjunto consideremos a relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Esta relação é uma relação de equivalência [prove!], e por isso faz sentido determinar as classes de equivalência dos seus elementos. Comecemos por determinar $[1]$. Temos, por definição,*

$$[1] = \{x \in X : xR1\}$$

Como $1R1$ resulta que $1 \in [1]$. Temos também que $(2, 1) \in R$, logo $2R1$, ou seja $2 \in [1]$. Por outro lado não é verdade que 3 esteja em relação com 1, pois $(3, 1) \notin R$. Assim $3 \notin [1]$ e portanto $[1] = \{1, 2\}$. De forma análoga temos

$$[2] = \{x \in X : xR2\}$$

Ora $(1, 2) \in R$ e $1 \in [2]$. Também $(2, 2) \in R$ logo $2 \in [2]$. Por outro lado $(3, 2) \notin [2]$ e $3 \notin [2]$. Concluímos que $[2] = \{1, 2\}$. Quanto à classe de equivalência de 3 temos

$$[3] = \{x \in X : xR3\}$$

Temos $(1, 3) \notin R$ e também $(2, 3) \notin R$, logo $1, 2 \notin [3]$. Já $(3, 3) \in R$ logo $3 \in [3]$. Em conclusão

$$[1] = [2] = \{1, 2\}, \quad [3] = \{3\}$$

Há vários comentários que se podem fazer ao resultado deste exercício. Primeiro, podemos notar que todas as classes são não vazias, pois todas contém pelo menos um elemento [qual a razão de isto acontecer?]. Segundo, há duas classe iguais: a classe do elemento 1 e a do elemento 2 são o mesmo conjunto. Tal acontece porque $2R1$ e como a relação é simétrica também $1R2$. Em terceiro lugar as classes de 1 e de 3 são disjuntas. Se a intersecção de $[1]$ e de $[3]$ fosse não vazia existiria um elemento x que pertencia a ambas. Nesse caso teríamos $(x, 1) \in R$ e $(x, 3) \in R$. Como R é simétrica isso obrigava a que também tivéssemos $(1, x) \in R$ e $(x, 3) \in R$. Mas R é transitiva, logo isso obrigaria a que $(1, 3)$ pertencesse a R. Mas $(1, 3) \notin R$.

Os resultados patentes neste exercício são válidos mais geralmente, e esse é o conteúdo da próxima proposição:

Proposição 8. *Seja A um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência definida em A. Sejam $a, b \in A$. Tem-se*

a) $a \in [a]$

b) $(a, b) \in R \Longleftrightarrow [a] = [b]$

c) $(a, b) \notin R \Longleftrightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$

Nota: O item a), em particular, indica-nos que o conjunto $[a]$ é não vazio. Por outro lado, os dois últimos resultados têm a seguinte leitura: dados dois elementos $a, b \in A$ só podemos ter uma de duas situações: ou $(a, b) \in R$ ou o contrário. Dessa forma duas classes de equivalência ou intesectam-se e, nesse caso, são iguais ou não se intersectam.

Demonstração. *A relação R é uma relação de equivalência em A, logo é reflexiva, simétrica e transitiva.*

a) *Seja* $a \in A$. *Por reflexividade de* R *resulta que* $(a, a) \in R$, *logo, por definição de classe de equivalência,* $a \in [a]$

b) *Comecemos por ver que* $(a, b) \in R \Longrightarrow [a] = [b]$.
Por hipótese $(a, b) \in R$. *Temos de mostrar que* $[a] \subset [b]$ *e que* $[b] \subset [a]$.*Comecemos por estabelecer a primeira inclusão. Seja* $x \in [a]$. *Por definição de classe de equivalência temos* $(x, a) \in R$. *Mas por hipótese* $(a, b) \in R$. *Assim, por transitividade, resulta que* $(x, b) \in R$ *e portanto* $x \in [b]$.
Assim mostrámos que $(a, b) \in R \Longrightarrow [a] \subset [b]$. *Podemos usar este resultado para mostrar a inclusão que falta. Basta notar que se* $(a, b) \in R$, *por simetria resulta que* $(b, a) \in R$. *Usando para o par ordenado* (b, a) *o resultado que já demonstrámos concluímos que* $[b] \subset [a]$, *e portanto* $[a] = [b]$.
Falta ainda ver que $[a] = [b] \Longrightarrow (a, b) \in R$. *Seja então* $[a] = [b]$. *Já sabemos que* $a \in [a]$, *mas como os conjuntos* $[a]$ *e* $[b]$ *são iguais resulta que* $a \in [b]$, *isto é,* $(a, b) \in R$.

c) *Comecemos por ver a implicação* $(a, b) \notin R \Longrightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$. *Para isso provamos o contra-recíproco desta implicação, isto é,* $[a] \cap [b] \neq \varnothing \Longrightarrow (a, b) \in R$. *Seja então* $x \in [a] \cap [b]$. *Por definição de intersecção* $x \in [a]$ *e* $x \in [b]$, *isto é,* $(x, a) \in R$ *e* $(x, b) \in R$. *Mais uma vez, por simetria de* R *temos* $(a, x) \in R$ *e* $(x, b) \in R$. *Por transitividade temos* $(a, b) \in R$.
Para ver a implicação que falta, $[a] \cap [b] = \varnothing \Longrightarrow (a, b) \notin R$, *trabalhamos novamente com a sua contra-recíproca:* $(a, b) \in R \Longrightarrow [a] \cap [b] \neq \varnothing$. *Mas já sabemos que se* $(a, b) \in R$, $[a] = [b]$. *Assim* $[a] \cap [b] = [a] \cap [a] = [a]$. *Mas o conjunto* $[a]$ *é não vazio logo a intersecção é não vazia.*

Definição 19. *Seja* X *um conjunto não vazio e* R *uma relação de equivalência definida em* X. *Chama-se conjunto* ***quociente*** *de* X *segundo* R *ao conjunto formado pelas classes de equivalências de todos os elementos de* X. *Representa-se por* X/R, *isto é,*

$$X/R = \{[x] : x \in X\}$$

Com referência ao último exercício temos

Exemplo 15. *Seja* $X = \{1, 2, 3\}$ *o conjunto do exercício anterior. Considerando a relação de equivalência dada,* R, *já tínhamos visto que* $[1] = [2] = \{1, 2\}$, $[3] = \{3\}$. *Portanto* $X/R = \{[1], [2], [3]\} = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{3\}\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

Notamos que neste exercício o conjunto A/R constitui uma partição do espaço X. Mais uma uma vez este é um resultado que vale com toda a generalidade, o que é o conteúdo da primeira proposição da próxima aula.

Exercícios

Exercício 27. *Seja $A = \mathbb{R}^2$. Considere, em A, a relação R dada por $(a, b)R(c, d)$ se, e só se $b - a = d - c$.*

a) Mostre que R é uma relação de equivalência.

b) Determine $[(1, 2)]$.

c) Determine $[(a, b)]$ para $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

d) Determine $\mathbb{R}^2/R$. Interprete geometricamente o resultado.

Exercício 28. *Seja $A = \mathbb{R}^2$. Considere, em A, a relação R dada por $(a, b)R(c, d)$ se, e só se $b = d$.*

a) Mostre que R é uma relação de equivalência.

b) Determine $[(1, 2)]$.

c) Determine $[(a, b)]$ para um elemento genérico $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

d) Determine $\mathbb{R}^2/R$. Interprete geometricamente o resultado.

Exercício 29. *Considere em $\mathbb{R}^2$ a relação R definida por $(a, b)R(c, d)$ se, e só se, $b + a^2 = d + c^2$*

a) Mostre que R é uma relação de equivalência.

b) Determine duas classes de equivalência distintas desta relação.

c) Determine $[(a, b)]$ para um elemento genérico $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

d) Determine o conjunto quociente $\mathbb{R}^2/R$. Interprete geometricamente o resultado.

Exercício 30. *Considere em $\mathbb{Z}$ a relação R definida por: aRb se, e só se, $2a + 5b = 7k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.*

a) Mostre que R é uma relação de equivalência.

b) Determine $[0]$.

Aula 5

Exercício 31. *Considere em* $\mathbb{R}$ *a relação* T*, definida por* $(x, y) \in T$ *se, e só se,* $y \geq x$*. Verifique se* T *é uma relação de equivalência.*

Resolução. *Por definição* T *é uma relação de equivalência se verifica cumulativamente as três propriedades: reflexividade, simetria e transitividade. Assim basta que uma destas propriedades não se verifique para mostrar que* T *não é uma relação de equivalência.* T *seria simétrica se para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$ *com* $(x, y) \in T$ *também temos* $(y, x) \in T$*. Mais uma vez, basta que a propriedade não se verifique para um par de elementos para estabelecer que* T *não é simétrica. Para isso basta considerar os elementos* $0, 1 \in \mathbb{R}$*. Temos* $1 \geq 0$*, logo* $(0, 1) \in T$ *mas claramente* $0 \ngeq 1$*, i.e.,* $(1, 0) \notin T$*.*

Exercício 32. *Considere em* $\mathbb{R}^2$ *a relação* R *definida por* $(a, b)R(c, d)$ *se, e só se* $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

a) Mostre que R *é uma relação de equivalência.*

b) Determine $[(0, 1)]$

c) Determine $[(0, 0)]$

d) Mostre que $(0, 1)$ *e* $(1, 0)$ *pertencem à mesma classe de equivalência*

e) Represente no plano a classe de equivalência de um elemento genérico $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

f) Descreva geometricamente o conjunto quociente $\mathbb{R}^2/R$

Resolução. *a) Exercício.*

b) Recorde que, se X *é um conjunto de base e* R *uma relação de equivalência então a classe de equivalência de um elemento* $b \in X$ *é*

$$[b] = \{x \in X : xRb\}$$

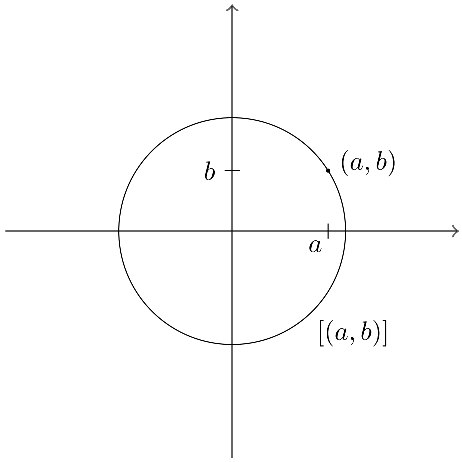
Assim $[(0, 1)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)R(0, 1)\}$*. Mas* $(x, y)R(0, 1)$ *é o mesmo que* $x^2 + y^2 = 0^2 + 1^2 = 1$ *logo* $[(0, 1)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$*,i.e., a classe de equivalência de* $(0, 1)$ *é a circunferência centrada na origem e de raio* 1*.*

c) Temos $[(0, 0)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)R(0, 0)\}$*. Ora* $(x, y)R(0, 0)$ *é o mesmo que* $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$*. Como* x^2, y^2 *são sempre maiores ou iguais a zero, a condição* $x^2 + y^2 = 0$ *é equivalente a* $x = 0$ *e* $y = 0$*. Assim a classe de equivalência da origem contém apenas um ponto: a própria origem.* $[(0, 0)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } y = 0\} = \{(0, 0)\}$*.*

d) Para responder a esta questão podemos simplesmente determinar a classe de equivalência de $(1, 0)$*. Como* $(x, y)R(1, 0)$ *é equivalente a* $x^2 + y^2 = 1$ *temos que* $[(1, 0)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)R(1, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$*. Assim* $[(1, 0)] = [(0, 1)]$*, e os pontos dados, que como já sabemos pertencem à sua própria classe pertencem afinal à mesma classe. Resumindo* $(1, 0), (0, 1) \in [(0, 1)] = [(1, 0)]$*.*

e) $[(a,b)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)R(a,b)\}$. $(x,y)R(a,b)$ *é equivalente a* $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$, *e portanto a classe de equivalência de um ponto genérico* (a,b) *é a circunferência de centro na origem e raio* $\sqrt{a^2+b^2}$. *Assim*

$$[(a,b)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\}$$



f) *Recorde que dado um conjunto de base* X *e uma relação de equivalência* R *o conjunto quociente* X/R *é a colecção de todas as classes de equivalência, isto é*

$$X/R = \{[x] : x \in X\}$$

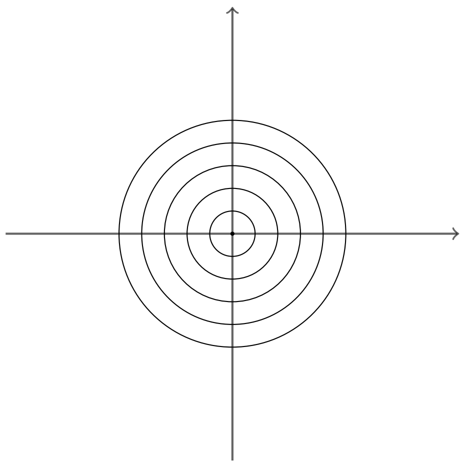
Assim $\mathbb{R}^2/R = \{[(a,b)] : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ *o que pode ser escito como*

$$\mathbb{R}^2/R = \{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r\} : r \in [0,+\infty[\,\}$$

ou, de forma mais explícita

$$\mathbb{R}^2/R = \{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r\} : r \in]0,+\infty[\,\} \cup \{(0,0)\}$$

ou seja, os elementos que constituem o conjunto quociente são as circunferências centradas na origem e a própria origem.



Mais uma vez notamos que, neste exercício, o conjunto X/R constitui uma partição do espaço X. Esse é um resultado que vale com toda a generalidade, o que é o conteúdo do próximo resultado.

Proposição 9. *Seja A um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência definida em A. O conjunto quociente de A por R é uma partição de A.*

Esta partição de A é a chamada partição **induzida** em A pela relação R.

Demonstração. *Temos de mostrar que a colecção A/R é uma partição do conjunto A. Designando os elementos de A/R como A_i temos portanto de ver que os conjuntos A_i são não vazios, "geram" o espaço todo e são disjuntos dois a dois.*

1. *Seja A_i um átomo da partição A/R. $A_i = [a]$ para algum $a \in A$ e já sabemos que a classe de equivalência de a é não vazia.*

2. *Sejam A_i, A_j dois átomos distintos da partição. Temos $A_i = [a_i]$, $A_j = [a_j]$ para certos a_i, a_j e, à partida apenas pode acontecer uma de duas situações: ou $(a_i, a_j) \in R$ ou não. Se fosse $(a_i, a_j) \in R$ teríamos $[a_i] = [a_j]$ e portanto os dois átomos não seriam distintos. Só podemos ter $(a_i, a_j) \notin R$, mas, como já sabemos, neste caso $[a_i] \cap [a_j] = \varnothing$. E portanto os átomos A_i, A_j são disjuntos.*

3. *Temos $\{a\} \subset [a]$. E por definição de classe de equivalência $[a] \subset A$. Resulta então que*
$$\bigcup_{a \in A} \{a\} \subset \bigcup_{a \in A} [a] \subset A$$
Mas naturalmente que $A = \cup_{a \in A}\{a\}$, e portanto as últimas inclusões são na realidade identidades.

Vimos assim que dada uma relação de equivalência num conjunto ela naturalmente induz uma partição nesse mesmo conjunto. Inversamente, dada uma partição de um conjunto podemos definir de forma canónica uma relação de equivalência nesse conjunto. O próximo exercício ilustra esta última situação.

Exercício 33. *Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e considere a partição $\mathcal{A} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$. Em A definimos uma relação R da seguinte forma: dizemos que $(x, y) \in R$ se, e só se $x, y \in A_i$ para algum $A_i \in \mathcal{A}$. Obtenha todos os pares da relação R.*

Resolução. *Sejam $A_1 = \{1, 3\}$, $A_2 = \{2\}$ os dois átomos da partição. Temos, por exemplo, $1, 3 \in A_1$. Por definição desta relação R, temos $(1, 3) \in R$ e também $(3, 1) \in R$. Naturalmente que também $(1, 1), (3, 3) \in R$. Já, por exemplo, como $1 \in A_1$ e $2 \notin A_1$ resulta que $(1, 2) \notin R$. Por outro lado como $2 \in A_2$ temos $(2, 2) \in R$. Assim $R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2)\}$.*

Esta relação R, definida em A, é a chamada relação **induzida** em A pela partição $\mathcal{A}$. Neste caso vê-se rapidamente que esta relação R é uma relação de equivalência. Mais uma vez esta situação vale com toda a generalidade, o que constitui o primeiro resultado que veremos na próxima aula.

Exercícios

Exercício 34. *Seja* $A = \{1, 2, 3\}$ *e considere a partição* $\mathcal{A} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$. *Mostre que a relação induzida em* A *pela partição* $\mathcal{A}$ *é uma relação de equivalência.*

Exercício 35. *Seja* $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. *Já vimos que a relação* R *dada por* $(a, b)R(c, d)$ *se, e só se* $ad = bc$ *é de facto uma relação de equivalência.*

a) Determine $[(1, 1)]$

b) Determine $[(1, 2)]$

c) Determine $[(c, d)]$ *para um elemento genérico* $(c, d) \in A$.

Exercício 36. *Seja* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e considere a partição* $\mathcal{A} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$.

a) Determine a relação induzida em A *pela partição* $\mathcal{A}$.

b) Mostre que a relação obtida na alínea anterior é uma relação de equivalência.

Aula 6

Conforme referido na última aula temos o seguinte resultado:

Proposição 10. *Seja A um conjunto não vazio, e $\mathcal{A}$ uma partição de A. Em A definimos a relação R dizendo que $(x, y) \in R$ se, e só se $x, y \in A_i$ para algum $A_i \in \mathcal{A}$. R assim definida é uma relação de equivalência.*

Demonstração. *R é reflexiva, pois se $a \in A$ então, por definição de partição, $a \in A_i$ para algum $A_i \in \mathcal{A}$. Naturalmente que $a, a \in A_i$ e portanto $(a, a) \in R$. R é simétrica pois se $a, b \in A$ com $(a, b) \in R$ temos que existe $A_i \in \mathcal{A}$ com $a, b \in A_i$. Naturalmente que $b, a \in A_i$ e portanto $(b, a) \in R$. R também é transitiva pois se $a, b, c \in A$ com $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ temos que existem $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ com $a, b \in A_i$ e $b, c \in A_j$. Resulta assim que $b \in A_i$ e também $b \in A_j$. Assim $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. Como $\mathcal{A}$ é uma partição, as intersecções de átomos distintos são vazias, logo os dois átomos A_i, A_j têm de ser iguais. Assim, resulta que $a, b, c \in A_i = A_j$ logo, em particular $a, c \in A_i$ e $(a, c) \in R$. Como R é reflexiva, simétrica e transitiva, R é uma relação de equivalência.*

Fecho de uma relação

Para ilustrarmos o próximo conceito começamos com um exercício simples.

Exercício 37. *Seja $A = \{1, 2\}$. Considere em A a relação $R = \{(1, 2)\}$. Quais as relações definidas em A que são simétricas e que contêm R?*

Resolução. *R não é simétrica, mas, por exemplo, a relação*

$$S_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

está definida em A, é simétrica e contém R. Claro que há outras relações que verificam as mesmas condições. Como o conjunto A tem apenas dois elementos podemos facilmente enumerar todas as relações procuradas:

$$S_2 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}, S_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}, S_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

S_4 está definida em A, é simétrica e contém R. Tem contudo uma propriedade adicional, que em certas situações é fundamental: S_4 é a mais pequena relação que verifica as três propriedades. Apenas precisámos de adicionar um elemento a R para obter S_4. De forma mais formal temos:

Definição 20. *Seja R uma relação definida num conjunto A. O **fecho** da relação R com respeito a uma propriedade P é a relação que se obtém de R adicionando o menor número de elementos de modo que a nova relação tenha a propriedade P. O fecho de R com relação à proprieadade P representa-se por $cl_P(R)$ (de "closure").*

Assim, com referência ao último exercício, temos $cl_{Sim}(R) = S_4$, isto é, o **fecho simétrico** de R é S_4. Quando a propriedade P é a simetria, também é costume usar a notação $s(R)$. De forma análoga, quando a propriedade P é a reflexividade representamos o **fecho reflexivo** por $cl_{Ref}(R)$, ou por $r(R)$, e, se a propriedade P é a transitividade representamos o **fecho transitivo** por $cl_{Tra}(R)$, ou por $t(R)$.

A definição anterior pode ser ainda apresentada da seguinte forma (ainda mais formal, e mais manejável)

Definição 21. *Seja R uma relação definida num conjunto A. O* ***fecho*** *da relação R com respeito a uma propriedade P é uma relação $cl_P(R)$ que verifica*

a) $R \subset cl_P(R)$ *(o fecho contém a relação R)*

b) $cl_P(R)$ *verifica a propriedade P*

c) se S é qualquer relação que contém a relação R e verifica a propriedade P então $cl_P(R) \subset S$ ($cl_P(R)$ é a mais pequena relação que contém R e verifica P).

Dada uma relação R e uma propriedade P estaremos interessados em determinar o fecho de R em relação a P. O fecho reflexivo e o fecho simétrico são de caracterização simples. Antes de indicarmos os resultados pertinentes apresentamos uma definição.

Definição 22. *Seja A um conjunto. A relação $\{(a,a) : a \in A\}$ diz-se a relação identidade, ou relação diagonal. Representamos por Δ_A.*

Assim, se, por exemplo $A = \{1,2,3\}$, temos $\Delta_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

Proposição 11. *Seja R uma relação definida em A. O fecho reflexivo de R é a relação $R \cup \Delta_A$.*

Demonstração. *Vamos verificar que a relação $R \cup \Delta_A$ cumpre as três condições de fecho reflexivo de R. Isto é, contém R, é reflexiva e é a menor relação que verifica as duas propriedades anteriores.*

a) $R \subset R \cup \Delta_A$, pois R é um dos conjuntos que constitui a união.

b) Seja $a \in A$. Por definição de Δ_A temos $(a,a) \in \Delta_A$ logo $(a,a) \in R \cup \Delta_A$, e portanto $R \cup \Delta_A$ é reflexiva.

c) Seja S uma qualquer relação que contenha R e que seja reflexiva. Temos $R \subset S$ e, por reflexividade de S, $\Delta_A \subset S$. Assim também $R \cup \Delta_A \subset S$.

Exemplo 16. *No conjunto $A = \{1,2,3\}$ consideremos a relação $R = \{(1,2)\}$. Qual o fecho reflexivo de R? Como $r(R) = R \cup \Delta_A$, temos*

$$r(R) = \{(1,2)\} \cup \{(1,1),(2,2),(3,3)\} = \{(1,2),(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

Exercícios

Exercício 38. *No conjunto* $A = \{1, 2, 3\}$ *considere a relação* $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$. *Qual o fecho reflexivo de* R, $r(R)$*?*

Aula 7

Proposição 12. *Seja R uma relação definida em A. O fecho simétrico de R é a relação $R \cup R^{-1}$.*

Demonstração. *Vamos verificar que a relação $R \cup R^{-1}$ cumpre as três condições de fecho simétrico de R. Isto é, contém R, é simétrica e é a menor relação que verifica as duas propriedades anteriores.*

a) $R \subset R \cup R^{-1}$, *pois R é um dos conjuntos que constitui a união.*

b) *Seja $a, b \in A$ com $(a, b) \in R \cup R^{-1}$. Temos $(a, b) \in R$ ou $(a, b) \in R^{-1}$. Por definição de relação inversa estas duas últimas condições são equivalentes a $(a, b) \in R$ ou $(b, a) \in R$, ou ainda, equivalentes a $(b, a) \in R^{-1}$ ou $(b, a) \in R$. Assim temos $(b, a) \in R \cup R^{-1}$, ou seja, $R \cup R^{-1}$ é simétrica.*

c) *Seja S uma qualquer relação que contenha R e que seja simétrica. Queremos mostrar que $R \cup R^{-1} \subset S$. Seja então $(a, b) \in R \cup R^{-1}$. Portanto (a, b) pertence a algum dos conjuntos R, R^{-1} (ou a ambos, claro). Se $(a, b) \in R$, como R está contido em S, $(a, b) \in S$. Se temos $(a, b) \in R^{-1}$ então $(b, a) \in R$. Como $R \subset S$ resulta que $(b, a) \in S$. Mas S é simétrica logo $(a, b) \in S$.*

Exemplo 17. *No conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ consideremos a relação $R = \{(1, 2)\}$. Qual o fecho simétrico de R? Já sabemos que $s(R) = R \cup R^{-1}$ e como $R^{-1} = \{(2, 1)\}$ temos*

$$s(R) = \{(1, 2)\} \cup \{(2, 1)\} = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

Como vimos as expressões que permitem determinar os fechos reflexivo e simétrico são elementares. Já para o fecho transitivo a situação não é assim tão simples. Antes de apresentarmos o resultado respectivo notamos que a operação composição é associativa, isto é, temos o seguinte resultado que deixamos como exercício:

Exercício 39. *Sejam A, B, C, D conjuntos. Se R é uma relação binária de A para B, S uma relação binária de B para C e T uma relação binária de C para D então $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.*

Resolução. *Exercício.*

No caso em que R é uma relação definida em A este resultado indica-nos que $R \circ (R \circ R) = (R \circ R) \circ R$. Assim a expressão $R \circ R \circ R$ só tem um resultado possível. Como seria de esperar representaremos esta expressão como R^3. Da mesma forma escrevemos R^n para representar a composição da relação R com ela própria, n vezes.

Exercício 40. *Considere, no conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, a relação*

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$$

a) *Determine R^2.*

b) *Determine R^3.*

Resolução. *Começamos por recordar a definição de composição:*

$$S \circ R = \{(a,c) \in A \times C : \ \textit{existe } x \in B \textit{ tal que } (a,x) \in R \textit{ e } (x,c) \in S\}$$

Temos

a) $R^2 = \{(a,c) \in A \times A : \ \textit{existe } x \in A \textit{ tal que } (a,x) \in R \textit{ e } (x,c) \in R\}$. *Por inspecção (fazendo* x *percorrer todos os elementos do conjunto* A*, por exemplo) obtemos*

$$R^2 = \{(1,1),(1,3),(2,2)\}$$

b) $R^3 = R^2 \circ R = \{(a,c) \in A \times A : \ \textit{existe } x \in A \textit{ tal que } (a,x) \in R \textit{ e } (x,c) \in R^2\}$. *Por inspecção obtemos*

$$R^3 = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$$

Estamos finalmente em condições de enunciar o resultado que permite construir o fecho transitivo de uma relação:

Proposição 13. *Seja* R *uma relação definida em* A*. O fecho transitivo de* R *é a relação*

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} R^k = R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \cdots$$

Demonstração. *Sem demonstração*

Apesar de a última união conter infinitos termos, e portanto, ser de difícil aplicação, pode mostrar-se que se o conjunto de base A tem um número finito de elementos vale o seguinte resultado:

Proposição 14. *Seja* A *um conjunto com* n *elementos. Seja* R *uma relação definida em* A*. O fecho transitivo de* R *é a relação*

$$\bigcup_{k=1}^{n} R^k$$

Demonstração. *Sem demonstração*

Exercício 41. *Considere, no conjunto* $A = \{1,2,3\}$*, a relação*

$$R = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}.$$

Determine o fecho transitivo de R*.*

Resolução. *Como o conjunto* A *tem 3 elementos sabemos que*

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3.$$

Por outro lado, as relações R^2*,* R^3 *já foram determinadas no exercício anterior:*

$$R^2 = \{(1,1),(1,3),(2,2)\}, \quad R^3 = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}.$$

Assim

$$\begin{aligned} t(R) &= \{(1,2),(2,1),(2,3)\} \cup \{(1,1),(1,3),(2,2)\} \cup \{(1,2),(2,1),(2,3)\} \\ &= \{(1,2),(2,1),(2,3),(1,1),(1,3),(2,2)\} \end{aligned}$$

Exercícios

Exercício 42. *Considere, no conjunto* $A = \{1, 2, 3\}$, *a relação*

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}.$$

Determine o fecho transitivo de R.

Exercício 43. *Considere em* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *a relação*

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 1), (4, 3)\}.$$

a) Determine o fecho simétrico de R, $s(R)$.

b) Determine o fecho transitivo de R, $t(r)$.

Exercício 44. *Sejam* R, S *relações definidas num conjunto* A. *Mostre que* $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

Exercício 45. *Seja* A *um conjunto. Mostre que* $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$

Exercício 46. *Seja* R *uma relação definida num conjunto* A. *Mostre que*

a) $s(r(R)) = r(s(R))$ *(os dois exercícios anteriores podem dar uma ajuda).*

b) $s(t(R)) \neq t(s(R))$

Resolução. *a)*

$$\begin{aligned} s(r(R)) &= s(R \cup \Delta_A) \\ &= (R \cup \Delta_A) \cup (R \cup \Delta_A)^{-1} \\ &= (R \cup \Delta_A) \cup (R^{-1} \cup \Delta_A^{-1}) \\ &= (R \cup \Delta_A) \cup (R^{-1} \cup \Delta_A) \\ &= (R \cup R^{-1}) \cup \Delta_A \cup \Delta_A \\ &= (R \cup R^{-1}) \cup \Delta_A \\ &= s(R) \cup \Delta_A \\ &= r(s(R)) \end{aligned}$$

b) Para provar o pretendido basta encontrar uma relação R *definida num conjunto* A *onde* $s(t(R)) \neq t(s(R))$. *Seja* $A = \{1, 2\}$ *e* $R = \{(1, 2)\}$. *Temos* $s(R) = \{(1, 2), (2, 1)\}$. *Pode ver-se facilmente que* $t(s(R)) = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)\}$. *Por outro lado* R *já é transitiva, logo* $t(R) = R$ *e portanto* $s(t(R)) = s(R) = \{(1, 2), (2, 1)\}$. *Assim* $s(t(R)) \neq t(s(R))$.

Relações de ordem

Aula 8

Definição 23. *Seja A um conjunto e R uma relação definida em A. Dizemos que R é* ***anti simétrica*** *se para cada $a, b \in A$ com $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ temos $a = b$.*

Definição 24. *Seja A um conjunto e R uma relação definida em A. Dizemos que R é uma* ***relação de ordem parcial*** *em A se R é reflexiva, anti simétrica e transitiva.*

Uma relação de ordem parcial R é usualmente representada por $\preccurlyeq$ (símbolo semelhante a $\leqslant$). Assim, se a está em relação com b por meio da relação R, i.e., se $(a, b) \in R$, podemos escrever $(a, b) \in \preccurlyeq$ ou $a \preccurlyeq b$. Usaremos sempre esta última representação.

Definição 25. *Um conjunto A munido com uma relação de ordem parcial $\preccurlyeq$, $(A, \preccurlyeq)$, diz-se um* ***conjunto parcialmente ordenado****. Abreviamos por c.p.o.. (Também se usa o acrónimo inglês, "poset", de partially ordered set).*

O primeiro exemplo não trivial de conjunto parcialmente ordenado que vemos é o indicado no próximo exercício:

Exercício 47. *Seja Ω um conjunto não vazio. Em $\mathcal{P}(\Omega)$ definimos a relação $\preccurlyeq$ por $A \preccurlyeq B$ se, e só se, $A \subset B$. Mostre que $(\mathcal{P}(\Omega), \preccurlyeq)$ é um c.p.o..*

Resolução. *a) $\preccurlyeq$ é reflexiva?. Temos $A \subset A$, logo por definição desta relação temos $A \preccurlyeq A$ e $\preccurlyeq$ é reflexiva.*

b) $\preccurlyeq$ é anti simétrica? Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ com $A \preccurlyeq B$ e $B \preccurlyeq A$. Mas estas duas desigualdades são $A \subset B$ e $B \subset A$, o que, por definição de igualdade de conjuntos, significa que $A = B$.

c) $\preccurlyeq$ é transitiva? Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ com $A \preccurlyeq B$ e $B \preccurlyeq C$. Temos $A \subset B$ e $B \subset C$, logo $A \subset C$, ou seja $A \preccurlyeq C$ e a relação é transitiva. Como a relação é reflexiva, anti simétrica e transitiva $(\mathcal{P}(\Omega), \preccurlyeq)$ é um c.p.o..

Definição 26. *Sejam $(A, \preccurlyeq)$ um poset e $a, b \in A$. Os elementos a e b dizem-se* ***comparáveis*** *se $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$. Por outro lado, se a e b são elementos tais que nem $a \preccurlyeq b$ e nem $b \preccurlyeq a$ então a e b dizem-se* ***incomparáveis****.*

Vejamos já um exemplo de cada uma destas situações.

Exemplo 18. *Em $(\mathbb{R}, \leqslant)$, onde $\leqslant$ é a ordem usual de $\mathbb{R}$, dois quaisquer elementos são comparáveis. Não provamos este resultado, mas intuitivamente se considerarmos os elementos 5 e 3 temos que uma das duas desigualdades é verdadeira: ou $5 \leqslant$ ou $3 \leqslant 5$.*

Exemplo 19. *Seja $\Omega = \{1, 2\}$ e consideremos o poset $(\mathcal{P}(\Omega), \preccurlyeq)$. Recorde que*

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Pela definição de $\preccurlyeq$ temos, por exemplo, $\{1\} \preccurlyeq \{1, 2\}$ pois $\{1\} \subset \{1, 2\}$. Para perceber que neste poset há elementos incomparáveis basta considerar os elementos $\{1\}$ e $\{2\}$. É falso que $\{1\} \preccurlyeq \{2\}$ pois $\{1\}$ não está contido em $\{2\}$ e também é falso que $\{2\} \preccurlyeq \{1\}$ pois $\{2\}$ também não está contido em $\{1\}$.

Definição 27. *Seja* $(A, \preccurlyeq)$ *um c.p.o.. Se quaisquer dois elementos são comparáveis,* $(A, \preccurlyeq)$ *diz-se um* ***conjunto totalmente ordenado*** *ou* ***cadeia*** *e a relação de ordem diz-se* ***total****.*

Um exemplo fundamental de c.p.o. é o seguinte.

Exemplo 20. *Em* $\mathbb{N}$ *definimos uma relação* R *por* $(x, y) \in R$ *se, e só se* x *divide* y*, isto é, se* $y/x \in \mathbb{N}$*. Representamos por* $x|y$*.*
Por exemplo, como $12/3 = 4$ *e* $4 \in \mathbb{N}$ *podemos escrever* $3|12$*. Por outro lado, como* $5/3 \notin \mathbb{N}$*,* 3 *não divide* 5*.*

Vale o seguinte resultado:

Proposição 15. $(\mathbb{N}, |)$ *é um c.p.o..*

Demonstração. *Temos de perceber se a relação divide "|" é reflexiva, anti simétrica*[2] *e transitiva.*

a) A relação é reflexiva pois se $x \in \mathbb{N}$ *temos* $x/x = 1$ *e* $1 \in \mathbb{N}$*, logo* x *divide* x*, i.e.,* $x|x$*.*

b) A relação é anti simétrica? Sejam $x, y \in \mathbb{N}$ *tais que* $x|y$ *e* $y|x$*. Se* x *divide* y *temos que* y *é múltiplo de* x*. Como* y *divide* x *também* x *é múltiplo de* y*. Ora se* y *é múltiplo de* x *temos de ter* $x \leqslant y$ *(onde agora* $\leqslant$ *é a ordem usual de* $\mathbb{N}$*). De forma análoga concluímos que* $y \leqslant x$*. Como a ordem usual é anti simétrica concluímos que* $x = y$*.*

c) A relação é transitiva pois se x, y, z *são tais que* $x|y$ *e* $y|z$ *temos* $y/x = m$ *e* $z/y = n$*, com* $m, n \in \mathbb{N}$*. Podemos escrever*

$$\frac{z}{x} = \frac{y}{x}\frac{z}{y} = mn$$

e como $mn \in \mathbb{N}$ *resulta que* $x|z$*.*

Como a relação é reflexiva, anti simétrica e transitiva, a estrutura $(\mathbb{N}, |)$ *é um c.p.o..*

O próximo resultado, simples, mas fundamental, oferece uma forma de construir conjuntos parcialmente ordenados a partir de c.p.o.'s já conhecidos. Antes, introduzimos uma definição.

Definição 28. *Sejam* $(A, \preccurlyeq_A)$ *um c.p.o. e* $B \subset A$*. Em* B *podemos considerar a* ***ordem induzida*** *pela ordem de* A*,* $\preccurlyeq_B$*, através de:*

$$\text{Dados } x, y \in B \text{ dizemos } x \preccurlyeq_B y \text{ se, e só se } x \preccurlyeq_A y.$$

Proposição 16. *Sejam* $(A, \preccurlyeq_A)$ *um c.p.o. e* $B \subset A$*.* $(B, \preccurlyeq_B)$ *é um c.p.o..*

Demonstração. *Vamos ver que* $\preccurlyeq_B$ *é reflexiva, anti simétrica e transitiva.*

a) Seja $x \in B$*. Como* $B \subset A$*,* $x \in A$*. Mas* $(A, \preccurlyeq_A)$ *é um c.p.o., logo* $\preccurlyeq_A$ *é reflexiva. Assim temos* $x \preccurlyeq_A x$*. Mas por definição de* $\preccurlyeq_B$ *temos também* $x \preccurlyeq_B x$ *e portanto* $\preccurlyeq_B$ *é reflexiva.*

[2] Esta demonstração foi feita pelo aluno Duarte Nuno

b) Sejam $x, y \in B$ tais que $x \preccurlyeq_B y$ e $y \preccurlyeq_B x$. Por definição de $\preccurlyeq_B$, isto é equivalente a ter $x \preccurlyeq_A y$ e $y \preccurlyeq_A x$. Mas $\preccurlyeq_A$ é anti simétrica, logo $x = y$.

c) Sejam $x, y, z \in B$ com $x \preccurlyeq_B y$ e $y \preccurlyeq_B z$. Isto é equivalente a ter $x \preccurlyeq_A y$ e $y \preccurlyeq_A z$. Mas $\preccurlyeq_A$ é transitiva, logo $x \preccurlyeq_A z$, ou seja, $x \preccurlyeq_B z$.

As duas últimas proposições permitem resolver o próximo exercício de uma forma elegante:

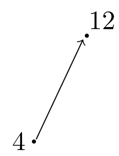
Exercício 48. *Seja $B = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. Mostre que $(B, |)$ é um c.p.o. (onde "$|$" é a ordem divide)*

Resolução. *$(B, |)$ é um c.p.o. pois $B \subset \mathbb{N}$ e a ordem em B é a ordem induzida pela ordem divide de $\mathbb{N}$.*

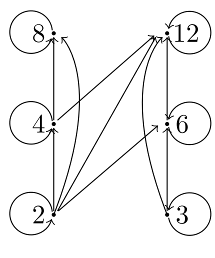
Usamos este exercício para introduzirmos uma representação gráfica de um c.p.o.. Com esse fim, começamos por representar numa tabela todos os pares que pertencem à estrutura $(B, |)$. Por exemplo, como 4 divide 12, o par $(4, 12)$ está na relação. Vamos dizer simplesmente que $4|12$. Por inspecção a tabela com todos os pares é a seguinte:

$2\|2$	$2\|4$	$2\|6$	$2\|8$	$2\|12$
$3\|3$	$3\|6$	$3\|12$		
$4\|4$	$4\|8$	$4\|12$		
$6\|6$	$6\|12$			
$8\|8$				
$12\|12$				

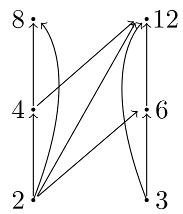
Para representar graficamente o facto de $4|12$ usamos uma seta que começa em 4 e termina em 12:



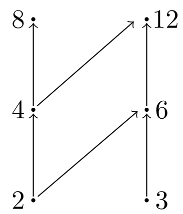
Usando esse esquema marquemos então todos os pontos e todas as relações da tabela:



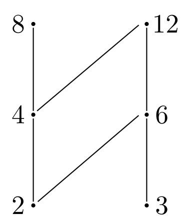
Fica uma confusão! Na realidade não é isto que se faz, porque é suposto estarmos a representar uma relação que sofre de certas propriedades. Em particular a relação é reflexiva e portanto temos sempre $a|a$ para qualquer $a \in A$. Por exemplo, 3|3, logo há uma seta que liga 3 a 3 e o mesmo vale para todos os elementos. Portanto, como a relação é reflexiva, para representá-la fazemos simplesmente:



Mas ainda é possível simplificar um pouco mais. Como a relação é transitiva todos os pares que resultem da transitividade podem ser excluídos. Por exemplo, como 2|4 e 4|8 resulta por transitividade que 2|8. Este "par", 2|8, é excluído da representação. Exemplo de tal situação são: 2|8 , 3|12 e 2|12. Ficamos então com a seguinte representação:



Há ainda mais uma simplificação que podemos fazer. Como optámos por representar os elementos mais pequenos em baixo ("mais pequenos" para a ordem divide) as setas são sempre de baixo para cima. Ora se são sempre de baixo para cima não precisamos de marcá-las, e finalmente obtemos a representação desejada:



A representação assim obtida diz-se o diagrama de Hasse do c.p.o. $(B, |)$. Recuperando a tabela podemos sintetizar a informação obtida da seguinte forma:

$\underline{2\vert 2}_r$	$\boxed{2\vert 4}$	$\boxed{2\vert 6}$	$\underline{2\vert 8}_T$	$\underline{2\vert 12}_T$
$\underline{3\vert 3}_r$	$\boxed{3\vert 6}$	$\underline{3\vert 12}_T$		
$\underline{4\vert 4}_r$	$\boxed{4\vert 8}$	$\boxed{4\vert 12}$		
$\underline{6\vert 6}_r$	$\boxed{6\vert 12}$			
$\underline{8\vert 8}_r$				
$\underline{12\vert 12}_r$				

onde os pares da 1ª coluna estão sublinhados e marcados com um pequeno r: são os pares que resultam da reflexividade. Outros pares estão sublinhados e marcados com um T: são os que resultam da transitividade. Os pares que estão dentro de pequenas caixas, são de alguma forma os pares essenciais e a sua representação permite obter todas as relações do c.p.o. dado. Esses pares têm um nome especial, o que é o conteúdo da próxima definição:

Definição 29. *Sejam $(A, \preccurlyeq)$ um c.p.o. e $x, y, z \in A$. Dizemos que x é* ***coberto*** *por y se $x \preccurlyeq y$ e não existe $z \in A$ tal que $x \preccurlyeq z$ e $z \preccurlyeq y$. Representamos por $x \vdash y$*

Portanto, com referência ao exercício anterior podemos escrever $2 \vdash 4$, $3 \vdash 6$, $4 \vdash 12$. Por exemplo, $4 \vdash 12$ pois não existe um elemento $z \in B$ tal que $4|z$ **e** $z|12$ (6 e 8 seriam bons candidatos, mas cumprem apenas uma condição, e não as duas condições).
Estando na posse desta terminologia, é usual descrever a forma de construir o diagrama de Hasse de um c.p.o. $(A, \preccurlyeq)$ através do seguinte algoritmo:

1. A cada elemento $x \in A$ associamos um ponto $p(x) \in \mathbb{R}^2$.
2. Se $x \preccurlyeq y$ o ponto $p(x)$ tem segunda coordenada inferior à segunda coordenada de $p(y)$.
3. Se $x \vdash y$ unimos os pontos $p(x)$ e $p(y)$ com um segmento $\ell(x, y)$.
4. Se z é tal que $z \neq x$ e $z \neq y$ então $p(z)$ não pertence ao segmento de recta $\ell(x, y)$.

Vemos mais um exemplo:

Exercício 49. *Seja $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$. Determine o diagrama de Hasse do c.p.o. $(A, |)$.*

Resolução. *Começamos por ver que pares é que estão na relação.* 2 *divide o próprio* 2*, mas também* 4, 10, 12, 20*. Fazemos o mesmo para todos os elementos e, com essa informação, preenchemos a tabela:*

2|2	2|4	2|10	2|12	2|20
4|4	4|12	4|20		
5|5	5|10	5|20	5|25	
10|10	10|20			
12|12				
20|20				
25|25				

Para simplificar, desta vez, apagamos as relações que resultam da reflexividade:

$$\begin{array}{cccc} 2|4 & 2|10 & 2|12 & 2|20 \\ 4|12 & 4|20 & & \\ 5|10 & 5|20 & 5|25 & \\ 10|20 & & & \end{array}$$

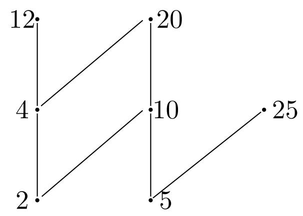
Marcamos as que são relações de cobertura:

$$\begin{array}{cccc} \boxed{2|4} & \boxed{2|10} & 2|12 & 2|20 \\ \boxed{4|12} & \boxed{4|20} & & \\ \boxed{5|10} & 5|20 & \boxed{5|25} & \\ \boxed{10|20} & & & \end{array}$$

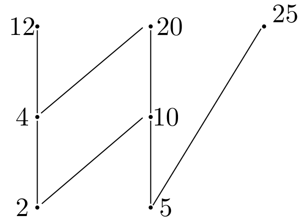
E confirmamos que as restantes resultam de facto da transitividade:

$$\begin{array}{cccc} \boxed{2|4} & \boxed{2|10} & \underline{2|12}_T & \underline{2|20}_T \\ \boxed{4|12} & \boxed{4|20} & & \\ \boxed{5|10} & \underline{5|20}_T & \boxed{5|25} & \\ \boxed{10|20} & & & \end{array}$$

O diagrama de Hasse pretendido é da forma



Poderia também ser a seguinte representação:

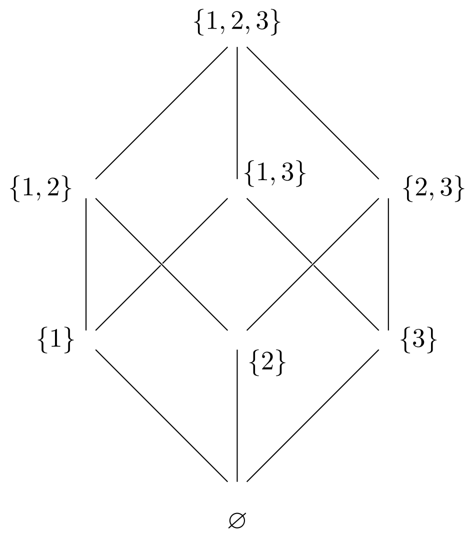


Ambos contêm a mesma informação mas é inegável que o primeiro é mais elegante, e portanto preferimos esse diagrama.

Fazemos mais um exercício.

Exercício 50. *Determine o diagrama de Hasse do c.p.o.* $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subset)$.

Resolução. *Temos* $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. *Desta vez, para obtermos o diagrama de Hasse, começamos por discriminar todas as relações de cobertura:* $\varnothing \vdash \{1\}$, $\varnothing \vdash \{2\}$, $\varnothing \vdash \{3\}$. *Mas também* $\{1\} \vdash \{1,2\}$, $\{1\} \vdash \{1,3\}$, $\{2\} \vdash \{1,2\}$, $\{2\} \vdash \{2,3\}$, $\{3\} \vdash \{1,3\}$, $\{3\} \vdash \{2,3\}$. *Finalmente temos* $\{1,2\} \vdash \{1,2,3\}$, $\{1,3\} \vdash \{1,2,3\}$ *e* $\{2,3\} \vdash \{1,2,3\}$.



Exercícios

Exercício 51. *Seja A o conjuntos dos divisores de 24, isto é,*

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n|24\}$$

Justifique que $(A, |)$ é um c.p.o. e represente o seu diagrama de Hasse.

Exercício 52. *Sejam Ω um conjunto finito e $Part(\Omega)$ o conjunto de todas as partições de Ω. Considere em $Part(\Omega)$ a relação de ordem definida da seguinte forma: se $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ e $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ são partições de Ω dizemos que $A \preccurlyeq B$ se, e só se, para cada átomo A_i de $\mathcal{A}$ existe um átomo B_j de $\mathcal{B}$ que o contém. Dizemos que $\mathcal{A}$ é um refinamento de $\mathcal{B}$.*

- *a) Mostre que $(Part(\Omega), \preccurlyeq)$ é um c.p.o..*
- *b) Seja $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Represente o diagrama de Hasse de $(Part(\Omega), \preccurlyeq)$.(Sugestão: esta estrutura tem 5 elementos. Quais são?)*
- *c) Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Represente o diagrama de Hasse de $(Part(\Omega), \preccurlyeq)$. (Sugestão/aviso: esta estrutura tem 15 elementos).*

Aula 9

Nesta aula abordaremos alguns conceitos já conhecidos do secundário no contexto dos números reais com a ordem usual: máximo, majorante e supremo (assim como o mínimo, minorante e ínfimo).

Máximo, mínimo, elementos maximais e minimais

Comecemos pela definição de máximo (e de mínimo):

Definição 30. *Seja $(A, \preccurlyeq)$ um poset.*
*Um elemento $a \in A$ diz-se um **máximo** se para qualquer $x \in X$ temos $x \preccurlyeq a$.*
*Um elemento $b \in A$ diz-se um **mínimo** se para qualquer $x \in X$ temos $b \preccurlyeq x$.*

Uma boa forma de ler a presente definição é "o **máximo** é um elemento que se compara a todos e é maior, ou igual, do que todos." Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 21. *O c.p.o. $(\mathbb{N}, \leqslant)$ onde "$\leqslant$" é a ordem usual tem mínimo mas não tem máximo. O elemento $m = 1$ é mínimo pois 1 é menor, ou igual, do que qualquer número natural. Naturalmente não existe máximo, pois não existe um número natural maior, ou igual, a todos os outros.*

Exemplo 22. *O c.p.o. $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subset)$ tem máximo e mínimo. Recorde que a colecção de conjuntos $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ é*

$$\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

O mínimo é o conjunto vazio pois $\varnothing \subset A$, para qualquer $A \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$; o máximo é o conjunto total $\{1,2,3\}$ pois $A \subset \{1,2,3\}$ para qualquer $A \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

Exemplo 23. *Seja $A = \{2,4,5,10,12,20,25\}$. O c.p.o. $(A, |)$, onde "$|$" é a ordem divide, não tem máximo nem mínimo. Uma boa forma de perceber que o máximo não existe é reparar que não existe nenhum elemento que se compare a todos (quanto mais que se compare e que seja maior). Por exemplo, nenhum dos elementos de $\{2,4,12,10,20\}$ é comparável, por exemplo, com o elemento 25. Já o 5 e o 25 não são comparáveis com 2. Um argumento análogo vale para o mínimo.*

O máximo nem sempre existe, mas quando existe é único. É o próximo resultado:

Proposição 17. *Seja $(A, \preccurlyeq)$ um poset. O máximo, se existe, é único. (Da mesma forma para o mínimo).*

Demonstração. *Suponha-se que p e p' são dois máximos de A. Como p é máximo sabemos que $x \preccurlyeq p$, para qualquer $x \in A$. Em particular, escolhendo x igual a p' obtemos $p' \preccurlyeq p$. De forma análoga, p' é máximo logo também temos $x \preccurlyeq p'$ para todo $x \in X$, e escolhendo agora x igual a p obtemos $p \preccurlyeq p'$. Assim obtivemos $p' \preccurlyeq p$ e $p \preccurlyeq p'$. Por anti simetria da relação de ordem obtemos $p' = p$.*

Vemos assim que o máximo pode existir, e pode não existir, mas sempre que existe é único. Quando não existe máximo, certos elementos podem ser usados para, em parte, substituí-los: os elementos maximais. Vejamos a definição:

Definição 31. *Seja $(A, \preccurlyeq)$ um poset.*
*Um elemento $a \in A$ diz-se um **elemento maximal** se para qualquer $x \in X$ temos $x \preccurlyeq a$ ou x e a são incomparáveis.*
*Um elemento $b \in A$ diz-se um **elemento minimal** se para qualquer $x \in X$ temos $b \preccurlyeq x$ ou x e b são incomparáveis.*

Uma forma de ler a definição é "um **elemento maximal** é um elemento que é maior ou igual a todos aqueles a que se compara".

Exemplo 24. *No c.p.o. $(A, |)$, onde "$|$" é a ordem divide, e*

$$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$$

os elementos maximais são o $12, 20$ e o 25. O elemento 25 compara-se apenas a 5 e ao próprio 25 e é maior, ou igual, a estes dois. O elemento 12 compara-se apenas aos elementos do conjunto $\{2, 4, 12\}$ e é maior ou igual a qualquer um deles. Já o elemento 20 compara-se aos elementos do conjunto $\{2, 4, 5, 10, 20\}$ e é maior ou igual a qualquer um destes elementos. Um argumento análogo vale para os elementos minimais, que são o 2 e o 5.

Majorante, minorante, supremo e ínfimo

Os conceitos que acabámos de ver, o máximo, os elementos maximais, etc., referem-se ao c.p.o inteiro que estivermos a analisar. Se por outro lado estivermos a considerar subconjuntos do nosso c.p.o. a próxima definição faz todo o sentido.

Definição 32. *Seja $(A, \preccurlyeq)$ um poset. Seja B um subconjunto de A.*
*Um elemento $a \in A$ diz-se um **majorante** de B se $x \preccurlyeq a$ para qualquer $x \in B$.*
*Um elemento $b \in A$ diz-se um **minorante** se para qualquer $x \in X$ temos $b \preccurlyeq x$.*

Portanto um majorante do conjunto B é qualquer elemento do conjunto A que é maior (ou igual) do que todos os elementos de B.

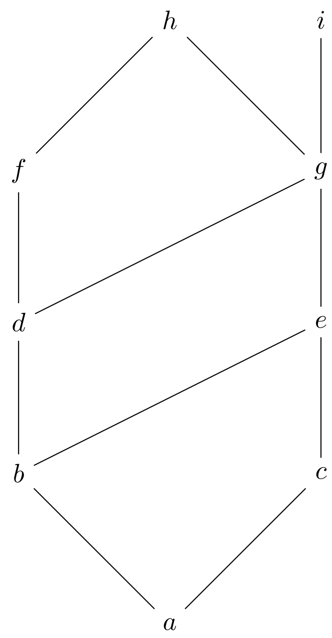
Usaremos a notação B^U para indicar o conjunto dos majorantes do conjunto B, e B^L para indicar o conjunto dos minorantes de B.

Exercício 53. *Considere o c.p.o. $(A \preccurlyeq)$ dado pelo diagrama de Hasse representado na figura. Determine o conjunto dos majorantes e dos minorantes dos seguintes conjuntos*

a) $B_1 = \{a, b, c\}$

b) $B_2 = \{i, h\}$

c) $B_3 = \{a, c, d, g\}$



Resolução. *a) O conjunto dos majorantes de $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c\}^U$, é constituído pelos elementos de A que são maiores ou iguais a todos os elementos de $\{a, b, c\}$. Assim, por exemplo, g é um majorante de $\{a, b, c\}$, pois g é um elemento de A que é maior do que qualquer elemento do conjunto dado. Por inspecção percebemos que e, h, i também são majorantes do conjunto dado. Já o elemento d é maior do que a e do que b mas não do que c: não é um majorante. Resumindo $\{a, b, c\}^U = \{g, e, h, i\}$.*
Quanto aos minorantes de $\{a, b, c\}$. O único elemento do c.p.o. que é menor ou igual a todos os elementos deste conjunto é o elemento a. Assim $\{a, b, c\}^L = \{a\}$.

b) Temos $\{h, i\}^L = \{a, b, c, d, e, g\}$ pois qualquer um dos elementos deste último conjunto é menor do que h e do que i.
Por outro lado como não existe nenhum elemento de A que seja maior do que h e do que i o conjunto dos majorantes do conjunto dado é vazio, isto é, $\{h, i\}^U = \varnothing$.

c) Por inspecção verificamos que os elementos g, h, i são majorantes do conjunto dado. assim $\{a, c, d, g\}^U = \{g, h, i\}$. Por outro lado o conjunto dos minorantes é constituído apenas por um elemento: a. Assim $\{a, c, d, g\}^L = \{a\}$

Já temos finalmente os elementos necessários para definir o supremo:

Definição 33. *Sejam $(A, \preccurlyeq)$ um poset e B um subconjunto de A.*
Se B^U tem elemento mínimo este elemento diz-se o ***supremo*** *de B. Se B^L tem elemento máximo este elemento diz-se o* ***ínfimo*** *de B.*

Assim podemos dizer que o supremo de B é um majorante de B que é o mais pequeno dos majorantes. Mais formalmente, z é supremo de B se z cumpre as duas condições:

i) z é majorante de B

ii) se y é outro majorante de B então $z \preccurlyeq y$

De forma inteiramente análoga temos que o ínfimo de B é um minorante de B que é o maior dos minorantes. Mais formalmente, z é ínfimo de B se:

i) z é minorante de B

ii) se y é outro minorante de B então $y \preccurlyeq z$

Exercício 54. *Com referência ao exercício anterior qual o supremo e o ínfimo de* $\{a, b, c\}$*? E de* $\{h, i\}$*?*

Resolução. *Já vimos que* $\{a, b, c\}^U = \{e, g, h, i\}$*. Este novo conjunto, encarado como c.p.o. (com a ordem induzida) tem mínimo (o elemento* e*). Resulta que o supremo de* $\{a, b, c\}$ *é o elemento* e*. Já para determinar o ínfimo do conjunto temos de considerar o máximo do conjunto dos minorantes. Ora como* $\{a, b, c\}^L = \{a\}$ *o máximo do conjunto* $\{a\}$ *é o próprio elemento* a*. Assim o ínfimo de* $\{a, b, c\}$ *é* a*.*
Quanto ao conjunto $\{h, i\}$*. Como o conjunto dos majorantes é vazio resulta que não existe supremo do conjunto. Por outro lado temos* $\{h, i\}^L = \{a, b, c, d, e, g\}$*. O máximo deste último conjunto é o elemento* g*, logo o supremo de* $\{h, i\}$ *é* g

A notação que vamos usar é a seguinte. Se $(A, \preccurlyeq)$ é um poset e B um subconjunto de A representamos o supremo de B por $\bigvee B$ e ínfimo de B por $\bigwedge B$. No caso em que B contém dois elementos x, y escrevemos $x \vee y$ para representar $\bigvee\{x, y\}$ e $x \wedge y$ para representar $\bigwedge\{x, y\}$.

Exercícios

Exercício 55. *Seja $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 12\}$. Considere em P a ordem divide, ”$|$”.*

a) Justifique que $(P, |)$ é um c.p.o..

b) Construa o diagrama de Hasse deste c.p.o..

c) Indique, se existirem, o máximo, o mínimo, os elementos maximais e os elementos minimais.

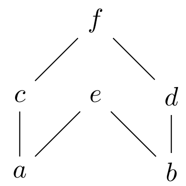
d) Seja $S = \{2,3,4\}$. Determine, caso existam, S^U, S^L, $\vee S$ e $\wedge S$.

Aula 10

Definição 34. *Um c.p.o. $(A, \preccurlyeq)$ diz-se um reticulado se para cada par de elementos $x, y \in A$ existe supremo e ínfimo.*

Vejamos um exemplo

Exemplo 25. *Verifique se o c.p.o. dado pelo diagrama de Hasse é um reticulado.*



Resolução. *O c.p.o. é um reticulado se existirem todos os supremos e ínfimos de todos os pares. É isso que temos de verificar. Por exemplo , se escolhermos o conjunto $\{a, c\}$. O conjunto dos seus majorantes, $\{a, c\}^U$, é $\{c, f\}$ O mínimo deste último conjunto é c, logo $a \vee c = c$. Quanto ao ínfimo: o conjuntos dos minorantes de $\{a, c\}$ é simplesmente $\{a\}$ e o máximo deste último conjunto é o elemento a. Assim $a \wedge c = a$ e portanto o par de elementos a, c tem supremo e ínfimo.*
Para perceber se a estrutura é um reticulado temos de fazer esta análise para todos os pares de elementos. A situação fica mais simples se algum par não tem supremo, ou ínfimo, porque assim a estrutura não é um reticulado. Essa situação é o que se passa neste exemplo. Basta pensar no conjunto $\{a, b\}$. Temos $\{a, b\}^U = \{e, f\}$, mas o mínimo de $\{e, f\}$ não existe logo $a \vee b$ não existe. $(A, \preccurlyeq)$ não é um reticulado.

Um exemplo de uma estrutura já familiar que é um reticulado é o conjunto das partes de um certo universo Ω, como vemos no próximo exercício:

Exercício 56. *Seja Ω um conjunto não vazio e considere o c.p.o. $(\mathcal{P}(\Omega), \subset)$. Mostre que se $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ o supremo de $\{A, B\}$ é dado por $A \cup B$ e o ínfimo é dado por $A \cap B$.*

a) $A \vee B = A \cup B$ *?*
Temos $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$ logo $A \cup B$ é um majorante de $\{A, B\}$. Seja C um qualquer majorante de $\{A, B\}$. Temos $A \preccurlyeq C$ e $B \preccurlyeq C$, ou seja, $A \subset C$ e $B \subset C$ logo $A \cup B \subset C$, isto é, $A \cup B \preccurlyeq C$. Assim $A \cup B$ é um majorante e é o "menor" dos majorantes de $\{A, B\}$: é o supremo de $\{A, B\}$, isto é, $A \cup B = A \vee B$.

a) $A \wedge B = A \cap B$ *?*
A prova é análoga e é deixada como exercício.

Um resultado simples mas fundamental no contexto dos reticulados é o seguinte:

Proposição 18. *(Lema da conexão) Sejam $(A, \preccurlyeq)$ um reticulado e $a, b \in A$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $a \preccurlyeq b$

2. $a \wedge b = a$

3. $a \vee b = b$

Demonstração. *Começamos por ver que* $1 \Rightarrow 2$. *Por reflexividade de* $\preccurlyeq$ *temos* $a \preccurlyeq a$ *e por hipótese temos* $a \preccurlyeq b$ *logo o elemento* a *é um minorante do conjunto* $\{a, b\}$. *Mas como* A *é um reticulado o ínfimo* $a \wedge b$ *existe e é o maior dos minorantes, logo obtemos* $a \preccurlyeq a \wedge b$. *Por outro lado, por* $a \wedge b$ *ser o maior dos minorantes, é em particular um minorante de* $\{a, b\}$, *isto é,* $a \wedge b \in \{a, b\}^L$ *logo* $a \wedge b \preccurlyeq a$. *Assim percebemos que* $a \preccurlyeq a \wedge b$ *e* $a \wedge b \preccurlyeq a$. *Resulta por anti simetria que* $a = a \wedge b$.
Para ver que $2 \Rightarrow 1$ *a situação é mais simples. Por hipótese* $a \wedge b = a$, *mas* $a \wedge b \preccurlyeq b$ *pois* $a \wedge b$ *é minorante de* $\{a, b\}$. *Assim* $a = a \wedge b \preccurlyeq b$ *logo* $a \preccurlyeq b$.
Para exercício ficam as restantes provas, sendo que ver que $1 \Rightarrow 3$ *e* $3 \Rightarrow 1$ *são semelhantes às anteriores.*

O lema da conexão é bastante útil e surge por toda a parte nos reticulados. Um exemplo é na prova dos seguintes resultados:

Proposição 19. *Seja* $(A, \preccurlyeq)$ *um reticulado. Para quaisquer* $a, b, c \in A$, $\vee$ *e* $\wedge$ *verificam:*

1. $a \vee b = b \vee a\,; \quad a \wedge b = b \wedge a$ *(Comutatividade)*

2. $a \vee a = a\,; \quad a \wedge a = a$ *(Idempotência)*

3. $a \wedge (a \vee b) = a\,; \quad a \vee (a \wedge b) = a$ *(Absorção)*

4. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ *(Associatividade)*
   $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ *(Associatividade)*

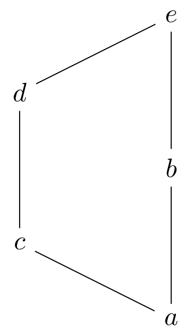
Demonstração. *Começamos pelo ponto* 2. *Pelo lema da conexão já sabemos que se* $a \preccurlyeq b$ *temos* $a \wedge b = a$. *Escolhendo* b *igual ao elemento* a, *como* $a \preccurlyeq a$ *obtemos* $a \wedge a = a$. *(De forma análoga percebemos que* $a \vee a = a$*).*
Quanto ao ponto 3. *Temos* $a \preccurlyeq a \vee b$ *por definição de supremo, logo pelo lema da conexão temos* $a \wedge (a \vee b) = a$. *(A outra identidade,* $a \vee (a \wedge b) = a$, *estabelece-se de forma análoga).*
O ponto 1 *resulta simplesmente de se notar que os majorantes do conjunto* $\{a, b\}$ *são os mesmos do que os do conjunto* $\{b, a\}$.
A demonstração em falta fica para exercício.

No contexto dos reticulados uma questão importante é a distributividade do supremo em relação ao ínfimo e vice versa. Essa questão surge já no próximo exercício.

Exercício 57. *Considere o c.p.o. representado pelo diagrama de Hasse.*

a) Mostre que é um reticulado

b) Verifique que $(d \wedge c) \vee (d \wedge b)$ *é estritamente menor do que* $d \wedge (c \vee b)$



Resolução. *a) Para mostrar que é um reticulado temos de perceber se existem sempre o supremo e o ínfimo de cada par de elementos distintos. Uma boa maneira de fazer isso é recorrer, sempre que possível ao lema da conexão, que recorde, dizia que se $x \preccurlyeq y$ é porque o ínfimo dos dois é o mais pequeno, o elemento x, e o supremo dos dois é o elemento maior, o y. Assim, por exemplo, com referência ao diagrama de Hasse dado, temos claramente $c \preccurlyeq e$ logo $c \vee e = e$ e $c \wedge e = c$, e portanto, para estes dois elementos existe o supremo e o ínfimo. Ou seja, sempre que um elemento está por baixo de outro (e ligado a este por um caminho apenas ascendente) podemos recorrer ao lema da conexão para garantir a existência de supremo e ínfimo. A informação que já temos pode ser colocada numa tabela (na primeira linha encontram-se todos os pares não triviais de elementos)*

	a,b	a,c	a,d	a,e	b,c	b,d	b,e	c,d	c,e	d,e
$x \vee y$									e	
$x \wedge y$									c	
L. conexão									✓	

Por inspecção do diagrama de Hasse percebemos que existem vários pares de elementos que são resolvidos pelo lema da conexão. Marcamos já esses pares:

	a,b	a,c	a,d	a,e	b,c	b,d	b,e	c,d	c,e	d,e
$x \vee y$									e	
$x \wedge y$									c	
L. conexão	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✓

E marcamos os valores dos supremos e ínfimos dos pares que são resolvidos pelo lema da conexão:

	a,b	a,c	a,d	a,e	b,c	b,d	b,e	c,d	c,e	d,e
$x \vee y$	b	c	d	e			e	d	e	e
$x \wedge y$	a	a	a	a			b	c	c	d
L. conexão	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✓

Faltam alguns valores na tabela e como estes não resultam do lema da conexão, têm de ser determinados recorrendo às definições. Por exemplo, *quanto ao par b, c: para determinar o supremo temos de perceber quem são os seus majorantes. Por inspecção percebemos que esse conjunto dos majorantes é $\{e\}$, logo o supremo $b \vee c$ é o mínimo do c.p.o. $\{e\}$, que é simplesmente o elemento e, i.e., $b \vee c = e$. De forma inteiramente análoga concluímos que também $b \vee d = e$. Quanto ao ínfimo de b, c: o seu conjunto dos minorantes é $\{a\}$ e portanto $b \wedge c = a$. De forma análoga $b \wedge d = a$. Em conclusão, obtemos*

	a,b	a,c	a,d	a,e	b,c	b,d	b,e	c,d	c,e	d,e
$x \vee y$	b	c	d	e	e	e	e	d	e	e
$x \wedge y$	a	a	a	a	a	a	b	c	c	d
L. conexão	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✓

Assim, conseguimos preencher a tabela e a estrutura dada é um reticulado pois todos os elementos têm supremo e ínfimo.

b) A pergunta era: "Verifique que $(d \wedge c) \vee (d \wedge b)$ é estritamente menor do que $d \wedge (c \vee b)$". Agora que temos a tabela preenchida podemos usá-la para concluir o pretendido. Temos

$$(d \wedge c) \vee (d \wedge b) = c \vee a = c$$

Por outro lado, temos

$$d \wedge (c \vee b) = d \wedge e = d$$

*Como $c \prec d$ obtivemos o pretendido. Aqui usámos um novo símbolo "$\prec$". O significado é o esperado: $x \prec y$ significa que $x \preccurlyeq y$ mas $x \neq y$, i.e., x é **estritamente** menor do que y.*

Exercícios

Exercício 58. *Seja* $P = \{1, 2, 3, 4, 12, 36\}$. *Considere em* P *a relação* $\preccurlyeq$ *dada por* $x \preccurlyeq y$ *se, e só se,* x *divide* y.

a) Justifique que $(P, \preccurlyeq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado.*

b) Construa o diagrama de Hasse.

c) Indique, se existirem, o máximo, o mínimo, os elementos maximais e os elementos minimais.

d) P *é um reticulado?*

e) Determine $4 \wedge (2 \vee 3)$.

f) P *é distributivo?*

Aula 11

A última alínea do último exercício da aula anterior aborda um assunto importante. Poderíamos pensar que num reticulado, a distributividade do supremo em relação ao ínfimo (e vice versa) verificava-se, mas como vimos no exercício referido isso não acontece. Ainda assim, há um lado da igualdade esperada que funciona. É o conteúdo da seguinte proposição:

Proposição 20. *Seja $(A, \preccurlyeq)$ um reticulado e $a, b, c \in A$. Tem-se*

a) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \wedge (b \vee c)$

b) $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Demonstração. *a) Como o ínfimo de dois elementos é menor ou igual do que os dois elementos envolvidos temos $a \wedge b \preccurlyeq a$. Da mesma forma temos $a \wedge c \preccurlyeq a$. Assim $a \in \{a \wedge b, a \wedge c\}^U$ logo, por definição de supremo (como o menor dos majorantes), obtemos*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \qquad (*)$$

Por outro lado temos $a \wedge b \preccurlyeq b \preccurlyeq b \vee c$ e também $a \wedge c \preccurlyeq c \preccurlyeq b \vee c$. Concluímos assim que $b \vee c \in \{a \wedge b, a \wedge c\}^U$. Pela definição de supremo temos

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq b \vee c \qquad (**)$$

Usando as duas desigualdades assinaladas, $(*)$ e $(**)$ percebemos que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \in \{a, b \vee c\}^L$, logo, pela definição de ínfimo, obtemos o pretendido:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \wedge (b \vee c)$$

b) Exercício.

Naturalmente surge a seguinte definição

Definição 35. *Um reticulado $(A, \preccurlyeq)$ diz-se um* ***reticulado distributivo*** *se para quaisquer $a, b, c \in A$ tem-se*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

A razão porque na definição anterior não é necessário explicitar as duas identidades é dada pelo próximo resultado.

Proposição 21. *Seja $(A, \preccurlyeq)$ um reticulado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

b) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Demonstração.

$(1 \Rightarrow 2)$ *Temos*

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &\overset{i}{=} [(a \vee b) \wedge a] \vee [a \vee b) \wedge c] \\ &\overset{ii}{=} a \vee [a \vee b) \wedge c] \\ &\overset{iii}{=} a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \\ &\overset{iv}{=} [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) \\ &\overset{v}{=} a \vee (b \wedge c)\end{aligned}$$

onde a primeira identidade resulta de usar a nossa hipótese, o ponto 1 *da proposição; a identidade ii) vem pela absorção; a identidade iii) resulta novamente de usar o ponto 1 do enunciado; a identidade iv) deve-se à associatividade de* $\vee$ *e finalmente a identidade v) resulta novamente da absorção.*

$(2 \Rightarrow 1)$ *Exercício.*

Introduzimos mais umas notações que serão úteis: Para simplificar, em vez de indicar um reticulado como $(A, \preccurlyeq)$, diremos simplesmente "seja R um reticulado". Além disso se o reticulado R tiver máximo representamos esse máximo por 1, ou pelo símbolo $\top$ (de "top"). Se tiver mínimo, representamos o mínimo por 0, ou pelo símbolo $\perp$ (que se lê "bottom", do oposto de "top"). Portanto, num reticulado R com máximo e mínimo faz sentido escrever $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq 1$. Usando estas notações temos a seguinte definição:

Definição 36. *Seja R um reticulado com máximo e mínimo e $a \in R$. Um elemento $b \in R$ que verifica $a \wedge b = 0$ e $a \vee b = 1$ diz-se um* ***complemento*** *de a.*

A palavra "complemento" já tinha surgido no contexto dos conjuntos e poderá parecer confuso aparecer agora noutro contexto. Não haverá esse problema, o que fica explícito neste próximo exemplo:

Exemplo 26. *No reticulado $(\mathcal{P}(\Omega), \subset)$ já vimos que $A \vee B = A \cup B$ e $A \wedge B = A \cap B$. O máximo é o elemento Ω, pois para qualquer $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ temos $A \subset \Omega$, i.e., $A \preccurlyeq \Omega$ (e temos $1 = \Omega$). O mínimo é o elemento $\varnothing$, pois para qualquer $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ temos $\varnothing \subset A$, i.e., $\varnothing \preccurlyeq A$ (e temos $0 = \varnothing$).*
Dado qualquer conjunto $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ temos $A \cup \overline{A} = \Omega$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Na linguagem dos reticulados, estas duas identidades escrevem-se como $A \vee \overline{A} = 1$ e $A \wedge \overline{A} = 0$. Assim $\overline{A}$ é um complemento (agora usando a palavra no sentido dos reticulados) de A. Não há portanto problema de confusão, pois neste contexto os dois significados são iguais.

Uma pequena observação que será usada já na próxima proposição é descrita no seguinte exemplo.

Exemplo 27. *Se R é um reticulado com máximo e mínimo e se $a \in R$ temos sempre $a \wedge 1 = a$ e $a \vee 0 = a$. Estas identidades resultam imediatamente do lema da conexão pois, para explicar a primeira, basta ver que por definição de máximo, temos $a \preccurlyeq 1$, logo $a \wedge 1 = a$. A outra igualdade resulta de notar que $0 \preccurlyeq a$ e portanto $a \vee 0 = a$.*

Em certas situações o complemento é único. Esse é o conteúdo do seguinte resultado.

Proposição 22. *Seja R um reticulado distributivo com máximo e mínimo. Seja $a \in R$. Se a tem complemento esse complemento é único.*

Demonstração. *Sejam b, c dois complementos de a. Por definição de complemento de a temos, $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$ e também $a \wedge c = 0$, $a \vee c = 1$. Pelo exemplo anterior sabemos que podemos sempre escrever $b = b \wedge 1$. Assim*

$$\begin{aligned} b &= b \wedge 1 \\ &\overset{i}{=} b \wedge (a \vee c) \\ &\overset{ii}{=} (b \wedge a) \vee (b \wedge c) \\ &\overset{iii}{=} 0 \vee (b \wedge c) \\ &\overset{iv}{=} b \wedge c \\ &\overset{v}{\preccurlyeq} c \end{aligned}$$

A igualdade i) resulta de c ser um complemento de a, $(1 = a \vee c)$; a igualdade ii) resulta de o reticulado ser distributivo; a iii) resulta de b ser um complemento de a, $(a \wedge b = 0)$; a identidade iv resulta do exemplo anterior (lema da conexão) e por fim a desigualdade v) resulta da definição de ínfimo.
A conclusão que tiramos é que $b \preccurlyeq c$. De forma análoga obtemos $c \preccurlyeq b$ e por anti simetria resulta que $c = b$.

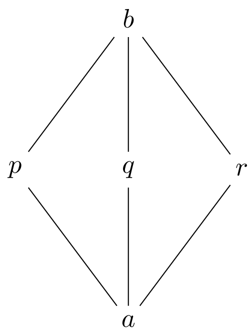
Este resultado, entre outras coisas, também fornece uma maneira de perceber se um reticulado com máximo e mínimo não é distributivo. Para não ser distributivo basta que algum elemento tenha dois complementos. É o que sucede no próximo exercício.

Exercício 59. *Considere o c.p.o. dado pelo diagrama de Hasse.*

a) Mostre que é um reticulado com máximo e mínimo.

b) Mostre que não é distributivo.

c) Mostre que p tem dois complementos distintos



Resolução. *a) Apresentamos a tabela. Primeiro começamos por perceber quais os elementos que resultam pelo lema da conexão, e depois percebemos o que se passa com os restantes. O resultado obtido é o seguinte:*

	a,p	a,q	a,r	a,b	p,q	p,r	p,b	q,r	q,b	r,b
$x \vee y$	p	q	r	b	b	b	b	b	b	b
$x \wedge y$	a	a	a	a	a	a	p	a	q	r
L. conexão	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✗	✓	✓

E portanto a estrutura dada é um reticulado pois para todos os pares dados existe o supremo e o ínfimo. O máximo é o elemento b pois temos $x \preccurlyeq b$ para todo o elemento x do c.p.o. dado. O mínimo é a pois temos $a \preccurlyeq x$ para todo o x do c.p.o. dado.

b) Para mostrar que não é distributivo podemos ver que a distributividade falha num caso particular. Vamos ver que

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \prec p \wedge (q \vee r) \qquad (*)$$

Consultando a tabela temos $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) = a \vee a = a$. Por outro lado $p \wedge (q \vee r) = p \wedge b = p$. Assim a desigualdade $(*)$ é de facto estrita, $(a \prec p)$ e o reticulado não pode ser distributivo.

c) Por observação da tabela verificamos que q é um complemento de p pois $p \vee q = 1$ e $p \wedge q = 0$. Mas também temos $p \vee r = 1$ e $p \wedge r = 0$ logo p tem dois complementos distintos, a saber: q e r.

Finalmente chegamos à última definição :-)

Definição 37. *B diz-se uma **álgebra de Boole** se B é um reticulado distributivo com máximo e mínimo e se todo o elemento tiver complemento.*

O exemplo paradigmático é o seguinte:

Exemplo 28. *Já vimos que $(\mathcal{P}(\Omega), \subset)$ é um reticulado distributivo com máximo e mínimo. Por outro lado, já sabemos que para qualquer conjunto $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ existe sempre o conjunto $\overline{A}$, o complemento de A. Por tudo isso, $(\mathcal{P}(\Omega), \subset)$ é uma álgebra de Boole.*

No contexto das álgebras de Boole o complemento do elemento a é representado por a'.

Exercícios

Exercício 60. *Seja B uma álgebra de Boole. Mostre que* $0' = 1$

Antes de fazer o exercício é boa ideia perceber como se lê esta pergunta no contexto da nossa álgebra de Boole favorita: $(\mathcal{P}(\Omega), \subset)$. Aqui o mínimo é o conjunto vazio, o máximo é o universo, o complemento é o complemento(!) logo, neste contexto, o que temos a provar é que $\overline{\varnothing} = \Omega$. Agora que estamos um bocadinho mais familiarizados com o exercício é tempo de resolvê-lo:

Resolução. *Temos $0 \preccurlyeq 1$ (por definição de mínimo, por exemplo) logo, pelo lema da conexão, $0 \vee 1 = 1$ e $0 \wedge 1 = 0$ e portanto 1 é um complemento de 0. Mas numa álgebra de Boole o complemento é único, logo $0' = 1$.*

Exercício 61. *Seja B uma álgebra de Boole e $a, b \in B$. Mostre que*

$$(a \wedge b)' = a' \vee b'$$

Mais uma vez é instrutivo considerar este exercício na nossa álgebra de Boole favorita: a expressão $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ em $(\mathcal{P}(\Omega), \subset)$, lê-se $\overline{a \cap b} = \overline{a} \cup \overline{b}$, ou, usando a convenção usual de escrever os conjuntos com letra maiúscula,

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

e, portanto, trata-se de provar uma das leis de Augustus de Morgan. No contexto dos conjuntos isso já foi feito, e o que temos de fazer agora segue, *mutatis mutandis*, essa demonstração:

Resolução. *Temos*

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') &\overset{i}{=} [(a \wedge b) \wedge a'] \vee [(a \wedge b) \wedge b'] \\
&\overset{ii}{=} [(a \wedge a') \wedge b] \vee [a \wedge (b \wedge b')] \\
&\overset{iii}{=} [0 \wedge b] \vee [a \wedge 0] \\
&\overset{iv}{=} 0 \vee 0 \\
&\overset{v}{=} 0
\end{aligned}$$

Onde i) vem por distributividade; ii) por associatividade e comutatividade; iii) notando que $y \wedge y' = 0$; iv) pela definição de mínimo e lema da conexão; v) por idempotência. De forma semelhante,

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (a' \vee b') &\overset{i}{=} [a \vee (a' \vee b')] \wedge [b \vee (a' \vee b')] \\
&\overset{ii}{=} [(a \vee a') \vee b'] \wedge [(b \vee b') \vee a'] \\
&\overset{iii}{=} [1 \vee b'] \wedge [1 \vee a'] \\
&\overset{iv}{=} 1 \wedge 1 \\
&\overset{v}{=} 1
\end{aligned}$$

Para simplificar chamemos x a $a' \vee b'$ Assim, vimos que existe um elemento x tal que $(a \wedge b) \wedge x = 0$ e $(a \wedge b) \vee x = 1$. Portanto x é um complemento de $a \wedge b$. Mas numa álgebra de Boole o complemento é único, logo $(a \wedge b)' = x = a' \vee b'$.

Exercício 62. *Seja R um reticulado e $a \in R$. Considere a função $f : R \to R$ dada por $f(x) = a \wedge x$. Mostre que se $x \preccurlyeq y$ então $f(x) \preccurlyeq f(y)$ (dizemos que f preserva a ordem)*

Resolução. *Temos $a \wedge x \preccurlyeq a$ e também $a \wedge x \preccurlyeq x$. Mas por hipótese $x \preccurlyeq y$ logo, por transitividade, $a \wedge x \preccurlyeq y$. Assim $a \wedge x \in \{a, y\}^L$. Finalmente, por definição de ínfimo $a \wedge y$ (como o maior dos minorantes) temos $a \wedge x \preccurlyeq a \wedge y$, i.e., $f(x) \preccurlyeq f(y)$.*

Exercício 63. *Seja B uma álgebra de Boole e $x, y \in B$. Mostre que*

$$y \preccurlyeq x' \Leftrightarrow x \wedge y = 0$$

Resolução.

1. *($\Rightarrow$) Seja $y \preccurlyeq x'$. Pelo exercício anterior temos $x \wedge y \preccurlyeq x \wedge x'$. Mas $x \wedge x' = 0$, logo $x \wedge y \preccurlyeq 0$. Por outro lado, por definição de mínimo temos $0 \preccurlyeq x \wedge y$. Por anti simetria resulta então que $x \wedge y = 0$*

2. *($\Leftarrow$) assumimos agora que $x \wedge y = 0$. Temos*

$$\begin{array}{rcl} x' \vee (x \wedge y) & = & x' \vee 0 \\ & = & x' \end{array}$$

mas por outro lado, também

$$\begin{array}{rcl} x' \vee (x \wedge y) & = & x' \vee 0 \\ & = & (x' \vee x) \wedge (x' \vee y) \\ & = & 1 \wedge (x' \vee y) \\ & = & x' \vee y \end{array}$$

Assim $x' \vee y = x'$, e pelo lema da conexão $y \preccurlyeq x'$.

Exercício 64. *Seja B uma álgebra de Boole e $a \in B$*

a) Considere a função $f : B \to B$ dada por $f(x) = a \vee x$. Mostre que f preserva a ordem, isto é, se $x \preccurlyeq y$ então $f(x) \preccurlyeq f(y)$.

b) Sejam $x, y \in B$. Mostre que $x' \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \vee y = 1$.