UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

Unidade Curricular: Cálculo II | **Data:** 19 de Junho de 2023

1.º ciclo: Engenharia Informática | **Duração da Prova:** 3h

Exame Normal

1. Considere a função definida por $f(x,y) = \text{arcsen}(2x+y)$.

   (a) Defina e represente geometricamente o domínio de f.

   (b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, \frac{1}{2}, f(0, \frac{1}{2}))$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2+3y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

   (b) Utilize a definição para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

3. Calcule a derivada direccional de $h(x,y,z) = x^{y \ln z}$ no ponto $P = (e, 2, e)$ na direcção de P para $Q = (e+2, 1, e-2)$.

4. Encontre e classifique os pontos críticos da função definida por $f(x,y) = x\,\text{sen}(y)$.

5. Encontre o mínimo e o máximo de $f(x,y,z) = 4 - z$ na intersecção do cilindro $x^2+y^2 = 8$ com o plano $x+y+z = 1$.

6. Inverta a ordem de integração e calcule o integral
$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{x}{y} e^y \, dy\, dx.$$

7. Utilize coordenadas cilíndricas para calcular o volume do sólido dentro da esfera $x^2+y^2+z^2 = 6$, acima do parabolóide $z = x^2+y^2$.

8. Calcule o integral
$$\iiint_E \frac{x^2 z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \, dV$$
onde E está contido entre as esferas $\rho = 1$ e $\rho = 2$, acima do cone $\phi = \frac{\pi}{6}$.

9. Mostre que a equação $\dfrac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx$ é separável e resolva-a.

10. Calcule $\lim_{x\to+\infty} y(x)$, sabendo que $xy' = -2y + \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$.

11. Resolva o problema de valor inicial
$$y'' + 2y' + (1+\pi^2)y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = \pi.$$