Exercício:

1. Considere o conjunto $\mathbb{Z}$. Em $\mathbb{Z}$ definimos a relação R por (x,y) se, e só se $x-y$ é multiplo de 4.

Mostre que R é uma relação de equivalência

R é reflexiva? [$\forall a \in A$ será que $(a,a) \in R$?]

Seja $x \in \mathbb{Z}$. Será que $(x,x) \in R$?

Isto é, será que $x-x$ é multiplo de 4? $x-x = 4 \cdot 0$

Logo é reflexiva.

R é simétrica? [$\forall a,b \in A$ com $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$]

Sejam $x,y \in \mathbb{Z}$ com $(x,y) \in R$. Será que $(y,x) \in R$?

Por hipotese $(x,y) \in R \Leftrightarrow x-y = 4m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$
Multiplicando por (-1) a identidade obtemos $-(x-y) = -4m$

$\Leftrightarrow y-x = \underbrace{4(-m)}_{\text{onde } -m \in \mathbb{Z}}$

Logo R é simétrico

R é transitiva? [$\forall a,b,c \in A$ com $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$. Será que $(a,c) \in R$?]

Sejam $x,y,z \in \mathbb{Z}$ com $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$. Temos:

$(x,y) \in R \Leftrightarrow x-y = 4m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$

$(y,z) \in R \Leftrightarrow y-z = 4m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$

Somando as duas identidades $(x-y)+(y-z) = 4m + 4m' \Leftrightarrow x-z = 4(m+m')$
$\Leftrightarrow x-z = 4m''$ onde $m'' \in \mathbb{Z}$

Logo R é transitiva.

Como R é simétrica, transitiva e reflexiva, é uma relação de equivalência

2.

Seja $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$
Considere em A a relação R dada por $(a,b) R (c,d)$ se, e só se, $ad = bc$
Mostre que R é uma relação de equivalência

$((a,b),(c,d)) \in R \Leftrightarrow (a,b) R (c,d)$

R é reflexiva? [$\forall x \in X$ será que xRx?]

Logo $(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Será que $(a,b) R (a,b)$?
Mas $(a,b) R (a,b) \Leftrightarrow ab = ba$ o que é verdade.
Logo R é reflexiva

R é simétrica? [$\forall x, y \in X$ com xRy. Será que yRx?]

Sejam $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ com $(a,b) R (c,d)$
Será que $(c,d) R (a,b)$?
$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow (c,d) R (a,b)$

Logo é simétrica

R é transitiva? [$\forall x, y, z \in X$ com xRy e yRz. Será que xRz?]

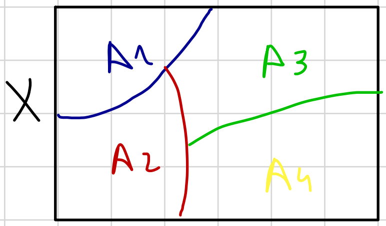
Sejam $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ com $(a,b) R (c,d)$ e $(c,d) R (e,f)$. Será que $(a,b) R (e,f)$?
$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$
$(c,d) R (e,f) \Leftrightarrow cf = ed$
$(a,b) R (e,f) \Leftrightarrow af = be$

Temos $b, d, f \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ logo $b, d, f \neq 0$
$$af = \left(\frac{bc}{d}\right) f = \frac{b}{d}(c \cdot f) = \frac{b}{\cancel{d}} \cdot \cancel{d}e = be$$
Logo é transitiva

Como R é simétrica, reflexiva e transitiva R é uma relação de equivalência

Definição: Seja X um conjunto não vazio
Uma partição de X é uma coleção de A formada por subconjunto $A_i \subset X$ que satisfaz:

a) $A_i \neq \emptyset \quad \forall i$
b) $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ sempre que $i \neq j$ ("Os A_i são conjuntos dois a dois")
c) A união dos A_i é X, isto é, $\bigcup_{A_i \in A} A_i = X$



Exemplo:

Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$

$A_1 = \{1\}$; $A_2 \{2\}$; $A_4 \{3, 4\}$

$A = \{A_1, A_2, A_3\}$ é uma partição de X pois:

a) $A_i \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3$

b) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; $A_1 \cap A_3 = \emptyset$; $A_2 \cap A_3 = \emptyset$

c) $\bigcup_{A_i \in A} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4\} = X$

NÃO Exemplo:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{B_1, B_2\}$
$B_1 = \{1, 2\} \quad B_2 = \{2, 3, 4\}$

a) $B_1 \neq \emptyset$; $B_2 \neq 0$ ✓
b) $B_1 \cap B_2 = \{2\} \neq 0$ ✗
c) $\bigcup B_i = \{1, 2, 3, 4\} = X$ ✓

Definição: Seja X um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência definida em X. Seja $b \in X$. O conjunto de todos os elementos de X que estão em relação com b diz-se a classe de equivalência de b e representa-se por $[b], [b]_R$

Exemplo:

Seja $X = \{1,2,3\}$ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$

$R \subset X.X \Rightarrow R$ é uma relação definida em X.

R é uma relação de equivalência (TPC)

$[1] = ? = \{x \in X : (x,1) \in R\} = \{1,2\}$

$[3] = ? = \{x \in X : (x,3) \in R\} = \{3\}$

$[2] = ? = \{x \in X : (x,2) \in R\} = \{1,2\}$

$[1] = \{1,2\}$ $[3] = \{3\}$ $[2] = \{1,2\}$

$\{\{1,2\}, \{3\}\} \Rightarrow$ é uma partição de $\{1,2,3\} = X$

Proposição: Seja A um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência definida em A. Sejam $a, b \in A$. Tem-se

a) $a \in [a]$
b) $(a,b) \in R \Leftrightarrow [a] = [b]$
c) $(a,b) \notin R \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

a) R é de equivalência, em particular R é reflexiva. Logo se $a \in A$ então $(a,a) \in R$. Logo $a \in \{x \in X : (x,a) \in R\} = [a]$, ou seja, $a \in [a]$

b) $(\Rightarrow)$ $(a,b) \in R \Rightarrow [a] = [b]$

$(a,b) \in R \Rightarrow [a] \subset [b]$ e $[b] \subset [a]$

Seja $y \in [a]$ logo $(y,a) \in R$. Por hipótese $(a,b) \in R$. Temos:

$(y,a) \in R$ e $(a,b) \in R$ mas R é transitiva logo $(y,b) \in R$

logo $y \in [b]$
Assim temos $(a,b) \in R \Rightarrow [a] \subset [b]$

Seja $(a,b) \in R$. R é simétrico logo $(b,a) \in R$. Usando o que acabamos de provar.

$[a] = b \Rightarrow (a,b) \in R$

Por a) $a \in [a]$. Mas por hipotese $[a] = [b]$ logo $a \in [b] =$
$= \} x \in X : (x,b) \in R \{$ logo $(a,b) \in R$