



1.ª Frequência

ATENÇÃO: Apresente na sua folha de teste todos os cálculos e justificações.

1. Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \ln(5 - y^2)$ .
  - (a) Determine e esboce o domínio  $D$  da função  $f$ .
  - (b) Defina o interior de  $D$  e conclua se  $D$  é aberto.
  - (c) Determine  $\nabla f(1, 2)$  (vector gradiente de  $f$  em  $(1, 2)$ ).
  - (d) Determine o contradomínio da função  $h$  definida por  $h(x, y) = \ln(5 - y^2)$ .
2. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
  - (a) A curva em  $\mathbb{R}^2$  definida por  $x^2 + y^2 = 1$  é uma curva de nível da função  $f$  dada por  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$ .
  - (b) A superfície em  $\mathbb{R}^3$  definida por  $x^2 + y^2 = 3$  é a superfície de nível 4 da função  $g$  dada por  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ .
  - (c) Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ . Todos os limites direccionais da função  $f$ , no ponto  $(0, 0)$ , existem e são iguais a 0.
  - (d) Não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y^2}{x^4 + y^2}$ .
  - (e) Seja  $\vec{u}$  um vector unitário em  $\mathbb{R}^2$ . Se  $f(x, y) = \sin x + \sin y$  então a derivada direcciona  $D_{\vec{u}}f$  verifica  $-\sqrt{2} \leq D_{\vec{u}}f(x, y) \leq \sqrt{2}$ , para todo o  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
3. Mostre que a função  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por
$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
é contínua em  $(0, 0)$ .
4. Escreva as equações
  - (a) do plano tangente
  - (b) da recta normalà superfície dada por  $\sin(xyz) = x + 2y + 3z$  no ponto  $P_0 = (2, -1, 0)$ .
5. Se  $v = x^2 \operatorname{tg}(3y) + ye^{xy}$ , onde  $x = s + 2t$  e  $y = st$ , use a Regra da Cadeia para encontrar  $\frac{\partial v}{\partial s}$  quando  $s = 0$  e  $t = 1$ .
6. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2xy + 5x + y .$$