UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

Unidade Curricular: Cálculo II **Data:** 3 de Maio 2021

1.º ciclo: Engenharia Informática **Duração da Prova:** 2h

1.ª Frequência

1. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) Todas as soluções da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{e^{xy}}{x^2+y^4}$ são funções decrescentes.

   (b) A função $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ é uma solução da equação diferencial $x^2y' + 2x^2y^2 = 1$.

   (c) Existe uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

   $$f_y = x\ln(xy) \qquad \text{e} \qquad f_x = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

2. Resolva as equações diferenciais:

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{x-y}}{1+e^x}$

   (b) $y' = xe^{\cos x} - y\,\mathrm{sen}\,x$

3. Encontre a solução do problema de valor inicial

   $$y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

4. Seja $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq y^2\right\}$.

   (a) Represente geometricamente o conjunto A.

   (b) Determine o interior de A e a fronteira de A.

   (c) O conjunto A é aberto? E fechado? Justifique.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+2y^4} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Mostre que f não é contínua em $(0,0)$.

   (b) Defina, nos pontos em que existe, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

6. Considere a função f definida por $f(x,y,z) = x^3\sqrt{y^2+z^2}$.

   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

   (b) Mostre que f é diferenciável em $(1,3,4)$.

   (c) Determine a aproximação linear de f no ponto $(1,3,4)$ e use-a para aproximar o número $(1,01)^3\sqrt{(3,05)^2+(3,95)^2}$.