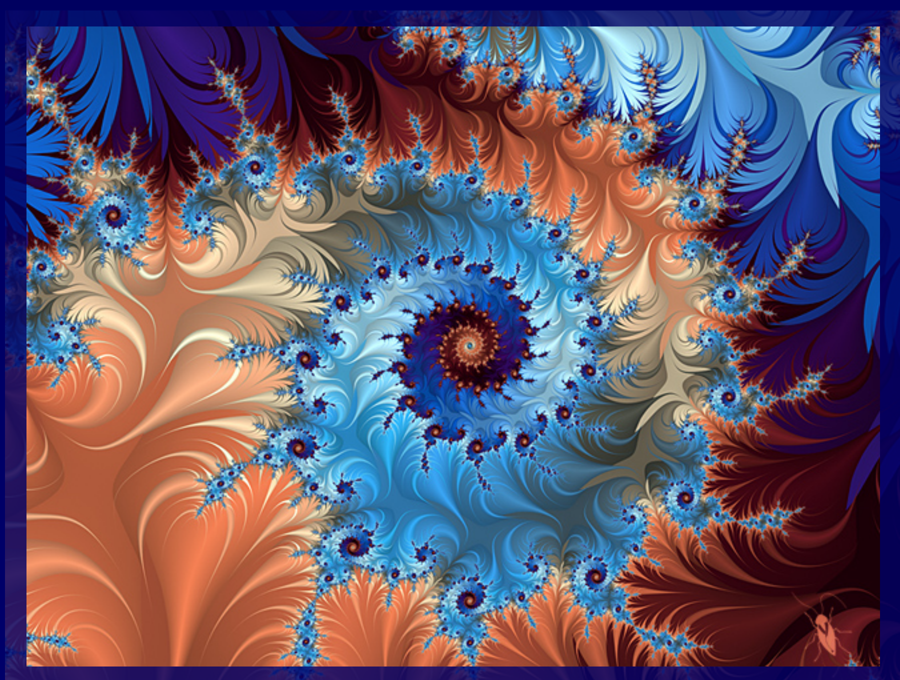
Álgebra Linear

Rogério SERÔDIO

November 6, 2023



Contents

Capítulo 1

Álgebra Matricial

Neste primeiro capítulo vamos introduzir o conceito de matrizes e as suas operações. Veremos mais adiante que este conceito matemático servirá de suporte fundamental para o estudo de sistemas de equações lineares.

1.1 Matrizes

As matrizes têm uma vasta aplicação na Matemática e são a base no estudo da álgebra linear. No entanto, a sua importância vai para além da matemática, sendo utilizadas na Física, na Química e na Computação, entre outras.

Definição 1.1.1 (Matrizes)

Uma **matriz** $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ é uma tabela de mn elementos (geralmente números) dispostos em m linhas e n colunas, onde a_{ij} é o *elemento genérico* ou *entrada genérica* da matriz A na posição (i, j), i.e., na linha i e coluna j. As matrizes são geralmente representadas por letras maiúsculas e delimitadas por parêntesis retos ou curvos, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Neste caso, dizemos que a matriz é do **tipo** $m \times n$ (e lê-se m por n). Também podemos dizer **tamanho**, **ordem** ou **dimensão** no lugar de tipo.

De agora em diante, quando não houver dúvidas, sempre que tivermos uma matriz representada por uma letra maiúscula, os seus elementos serão representados pela respectivo letra minúscula, ou seja, para a matriz A os seus elementos serão a_{ij}, para a matriz B os elementos serão b_{ij}, e assim por diante. Denotamos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes do tipo $m \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$. De um modo geral, sendo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ representa o conjunto de todas as matrizes do tipo $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$.

Exemplo 1.1.1

Considere as seguintes matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A, B, C e D são do tipo 2×2, 3×3, 1×3 e 3×1, respectivamente. Além disso, temos por exemplo, $a_{21} = -3$, $b_{13} = 0$, $c_{12} = 3$ e $d_{31} = 2$.

Exercício 1.1.1

Considere as seguintes matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Determine o tamanho de cada uma das matrizes.

b) Identifique, caso existam, o elementos: a_{23}, a_{21}, b_{11}, b_{12}, c_{13}, c_{22}, d_{31} e d_{13}.

Exercício 1.1.2

Invente uma matriz de cada um dos seguintes tamanhos:

$$2 \times 3, \qquad 3 \times 4, \qquad 4 \times 2 \quad \text{e} \quad 5 \times 3.$$

Definição 1.1.2 (Submatrizes)

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Denotamos por $A(i|j)$ a **submatriz** do tipo $(m-1) \times (n-1)$ obtida da matriz A removendo a linha i e a coluna j. Caso não queiramos remover a linha i ou a coluna j substituímos o índice por um ponto. Por exemplo, para a submatriz $A(\cdot|j)$ removemos apenas a coluna j da matriz A e mantemos todas as linhas. Generalizando, $A(i_1, \ldots, i_k|j_1, \ldots, j_\ell)$ representa a submatriz de A depois de removidas as linhas $i_1, \ldots, i_k$ e as colunas $j_1, \ldots, j_\ell$. De modo semelhante, $A[i_1, \ldots, i_k|j_1, \ldots, j_\ell]$ representa a submatriz de A formada pelas linhas $i_1, \ldots, i_k$ e pelas colunas $j_1, \ldots, j_\ell$. Caso queiramos todas as linhas/colunas da matriz A, podemos indicar todas as linhas/colunas ou simplesmente utilizar também um ponto. Por exemplo, se $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{K})$, $A[\cdot|1,2] \equiv A[1,\ldots,4|1,2]$ é formada por todas as linhas e pelas colunas 1 e 2 da matriz A.

Assim, dada uma matriz A do tipo $m \times n$, a matriz **linha** i de A é da forma:

$$A_{i\cdot} = A[i|1,\ldots,n] = A[i|\cdot] = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

para cada $i = 1, \ldots, m$. A matriz **coluna** j de A é da forma:

$$A_{\cdot j} = A[1, \ldots, m|j] = A[\cdot|j] = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

para cada $j = 1, \ldots, n$. As entradas cujos índices de linha e coluna são iguais formam a chamada **diagonal principal** de A. Se $m = n$, dizemos-se que A é uma **matriz quadrada** de ordem m.

Exemplo 1.1.2

Considere as seguintes matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

As únicas matrizes quadradas são a A e a D, sendo a A de ordem 3 e a D de ordem 2. Por exemplo, a diagonal da matriz A é formada pelos elementos 1, 2 e 3 e a matriz C tem um único elemento na diagonal: o número 1. Além disso, temos

$$A(1|1) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A(1|2,3) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A[1,2|3] = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$B(1|\cdot) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C[1|1] = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \qquad D[\cdot|1] = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.1.3

Considere as seguintes matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Quais matrizes são quadradas?

b) Determine a diagonal das matrizes quadradas.

c) Determine as seguintes submatrizes: $A(1,3|2)$, $A[1,2|2,3]$, $B(1|2)$, $B[2|1]$, $C(\cdot|1)$, $C[1|1,3]$, $D(1,3|2)$ e $D[\cdot|2]$.

d) Identifique as seguintes submatrizes das matrizes A, B, C e D, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dizemos que as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e matriz $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são iguais, se forem do mesmo tipo e $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i, j.

Existem matrizes para as quais o elemento genérico é conhecido através de uma expressão mais ou menos simples. Vejamos alguns casos.

1 Se $a_{ij} = 0$, i.e., todos os elementos da matriz A forem nulos, então temos a chamada **matriz nula**. Denotamos uma matriz nula do tipo $m \times n$ por 0 a menos que seja importante especificar o seu tamanho, caso em que denotaremos a matriz nula por $0_{m\times n}$. Se a matriz for quadrada de ordem n, então denotaremos a matriz nula apenas por 0_n. Vejamos alguns exemplos de matrizes nulas de vários tamanhos.

$$0_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ 0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ 0_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2 Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é uma matriz quadrada e $a_{ij} = 0$ para todos os elementos à exceção do elemento $a_{rs} = 1$, então representaremos esta matriz por E_{rs}. Vejamos alguns exemplos destas matrizes e de vários tamanhos.

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_{41} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3 Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é uma matriz quadrada e

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j \end{cases},$$

ou seja, todos os elementos são nulos à exceção da diagonal principal, então temos a chamada **matriz identidade**. Representaremos a matriz identidade pela letra I. Se for importante enfatizar o tamanho, escreveremos I_n para a matriz de identidade de ordem n. Vejamos alguns exemplos de matrizes identidade.

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observação:

Observe que, de um modo geral, não se pretende encontrar o elemento genérico de toda e qualquer matriz. O que acontece é que se tivermos esse elemento genérico, então a representação dessa matriz fica mais compacta!

Exemplo 1.1.3

Seja $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$, onde o elemento genérico é dado por $a_{ij} = i + j$. Como a dimensão da matriz A é 2×3, esta matriz será da forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Como o elemento genérico é $a_{ij} = i + j$, para determinar cada um dos elementos da matriz A basta somar os índices correspondentes. Assim, temos:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 + 1 = 2 & a_{12} = 1 + 2 = 3 & a_{13} = 1 + 3 = 4 \\ a_{21} = 2 + 1 = 3 & a_{22} = 2 + 2 = 4 & a_{23} = 2 + 3 = 5. \end{array}$$

Logo, a matriz A é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.1.4

Construa as seguintes matrizes:

a) $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$, onde $a_{ij} = (-1)^i + j^2 - 2i$.

b) $B = [b_{ij}]_{3\times 3}$, onde $b_{ij} = |i - j|$.

c) $C = [c_{ij}]_{4\times 2}$, onde $c_{ij} = \begin{cases} i^j, & \text{se } i \leq j \\ (-j)^i + 1, & \text{se } i > j \end{cases}.$

Existem outras matrizes especiais pela sua estrutura.

1 Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, então temos a chamada matriz **diagonal**.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Observe que não há restição nos valores da diagonal. Em particular, as matrizes identidade e as matrizes quadradas nulas também são matrizes diagonais.

2 Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e os elementos da diagonal são todos iguais, i.e., $a_{ii} = \alpha \in \mathbb{K}$, para $i = 1, \ldots, n$, então temos a chamada matriz **escalar**.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Observe que as matrizes identidade e as matrizes nulas quadradas também são matrizes escalares.

3 Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $a_{ij} = 0$, se $i > j$ $(i < j)$, então temos a chamada **matriz triangular superior** (**matriz triangular inferior**). Observe que a condição é apenas que os elementos abaixo (acima) da diagonal principal sejam nulos.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 9 & 2 & \mathbf{0} \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que as matrizes diagonais são simultaneamente triangulares superiores e inferiores. Em particular, as matrizes identidade e as matrizes nulas quadradas são simultaneamente triangulares superiores e inferiores!

1.2 Operações com Matrizes

Nesta secção vamos ver algumas operações envolvendo matrizes. Vamos definir a adição e a multiplicação. A subtração $A - B$ não é mais do que a adição de A com o simétrico de B, ou seja, $A - B = A + (-B)$, onde $-B = -1.B$ é uma das três multiplicações que iremos definir: a multiplicação por um escalar, a multiplicação usual entre matrizes e a multiplicação de Hadamard. Desde já salientamos que NÃO EXISTE a divisão de matrizes.

Vamos começar pela adição de duas matrizes.

Definição 1.2.1 (Adição de matrizes)

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. A **soma** $C = A + B$, com $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, existe e é obtida somando as entradas homólogas, i.e., as entradas que ocupam as mesmas posições. Ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Matrizes de tamanhos diferentes não podem ser somadas.

Vejamos um exemplo de adição de matrizes.

Exemplo 1.2.1

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

As operações $A + C$ e $B + C$ não estão definidas, visto que as matrizes não são do mesmo tipo. No entanto,

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+2 & 4+4 \\ -1+2 & -3+6 & 2+5 \\ 3+4 & 1+2 & 6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \\ 7 & 3 & 12 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.2.1

Considere as seguintes matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & -9 \end{bmatrix} \;\text{ e }\; D = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Efetue as somas possíveis entre estas matrizes.

Vamos agora definir a multiplicação escalar que associa um escalar e uma matriz, resultando noutra matriz.

Definição 1.2.2 (Multiplicação escalar)

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. O **produto escalar** $C = \lambda A$, com $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, é a matriz obtida multiplicando cada entrada da matriz A por λ. Ou seja,

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

A matriz λA é considerada um múltiplo escalar de A. Em particular, $-A = -1.A$.

Vamos ver que as propriedades da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ são as mesmas que em $\mathbb{K}$.

Teorema 1.2.1 (Propriedades da adição e da multiplicação escalar)

Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Temos:

1. $A + B = B + A$ (Comutatividade da soma)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associatividade da soma)
3. $A + 0_{m\times n} = A$ (Elemento neutro da soma)
4. Para cada matriz A, $\exists\, B$ tal que $A + B = 0_{m\times n}$ (Elemento simétrico)
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (Distributividade da soma)
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (Distributividade da multiplicação escalar)
7. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (Associatividade da multiplicação escalar)
8. $0A = 0_{m\times n}$
9. Se $\alpha A = 0_{m\times n}$, então $\alpha = 0$ ou $A = 0_{m\times n}$.

A demonstração deste teorema é um exercício simples porque a soma é feita elemento a elemento. Para as matrizes pertencendo ao conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, é como se tivéssemos a efetuar mn operações independentes em simultâneo. É por esta razão que as propriedades da soma e da multiplicação dos escalares se estendem à soma de matrizes e à multiplicação escalar. Deixamos esta demonstração como um exercício para o leitor.

Exemplo 1.2.2

Considere as seguintes matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8\\ -2 & 1 & 0 & -5\\ -4 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7\\ 3 & 7 & 4 & 0\\ -5 & 3 & 4 & 2\end{bmatrix}.$$

Temos, por exemplo,

$$3A=\begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 & 24\\ -6 & 3 & 0 & -15\\ -12 & 9 & 6 & 3\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad -2B=\begin{bmatrix} -2 & -6 & -10 & -14\\ -6 & -14 & -8 & 0\\ 10 & -6 & -8 & -4\end{bmatrix}.$$

As propriedades apresentadas no teorema anterior permitem resolver o seguinte problema. Considreando as matrizes A e B, pretende-se descobrir a matriz X tal que

$$A-B+X=2(X-A)+B.$$

Ou seja, temos uma equação em que a incógnita é uma matriz. A resolução é idêntica à resolução das equações com escalares. Assim, aplicando as propriedades necessárias para isolar a incógnita, temos

$$\begin{aligned} A-B+X &= 2(X-A)+B\\ A-B+X &= 2X-2A+B\\ X-2X &= -2A+B-A+B\\ -X &= -3A+2B\\ X &= 3A-2B. \end{aligned}$$

Aproveitando as matrizes acima calculadas, $3A$ e $-2B$, temos

$$X = 3A+(-2B).$$

ou seja,

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 & 24\\ -6 & 3 & 0 & -15\\ -12 & 9 & 6 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & -6 & -10 & -14\\ -6 & -14 & -8 & 0\\ 10 & -6 & -8 & -4\end{bmatrix}\\ X &= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 10\\ -12 & -11 & -8 & -15\\ -2 & 3 & -2 & -1\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exercício 1.2.2

Considere as seguintes matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & -9 \end{bmatrix}.$$

Determine:

a) $A + B - C$.

b) $2(A - B) + 3C$.

c) $B + 2(A - B) - (A + B + 2C)$.

d) X, tal que $2(X + A - B) = A + B + 3X$.

e) X, tal que $X + 3(A + C) = B + 5X$.

f) X e Y, tal que $\begin{cases} X + Y & = & A \\ X + 2Y & = & B \end{cases}$.

Uma vez que a soma de matrizes é feita somando as entradas homólogas, seria natural definir a multiplicação de matrizes também pela multiplicação das entradas homólogas.

Definição 1.2.3 (Multiplicação de Hadamard)

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. O **produto de Hadamard** $C = A \circ B$, com $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, é a matriz onde as entradas são os produtos das entradas homólogas de A e B. Ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} b_{ij},$$

para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$.

A multiplicação definida desta maneira não é a que mais nos interessa. Como veremos, e por mais estranha que possa parecer neste momento, a seguinte definição de multiplicação de matrizes é mais útil.

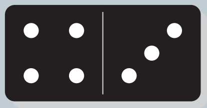
Definição 1.2.4 (Multiplicação de matrizes)

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$. O produto $C = AB$ existe e é uma matriz do tipo $m \times n$. A entrada (i, j) desta matriz C é determinada multiplicando a linha i da matriz A pela coluna j da matriz B. Esta multiplicação é feita da seguinte forma: multiplique o primeiro elemento da linha pelo primeiro elemento da coluna, o segundo da linha pelo segundo da coluna e assim sucessivamente até ao último elemento; o elemento pretendido será a soma todos estes produtos. Ou seja,

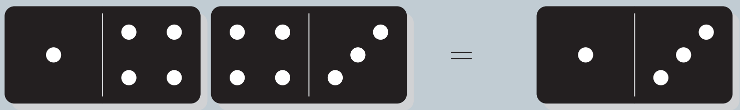
$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ir} b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}.$$

Observação:

Uma mnemónica para saber quando podemos multiplicar matrizes e determinar o tamanho da matriz produto é associar a cada matriz uma peça de dominó, onde os números na peça correspondem ao número de linhas e ao número de colunas dessa matriz. Por exemplo, a uma matriz do tipo 4×3 associaríamos a peça



Multiplicar duas matrizes equivale a juntar as duas peças correspondentes. Por outro lado, as duas peças correspondem a uma única peça cujos números são os das extremidades das duas peças. Por exemplo, dadas duas matrizes, A e B, do tipo 1×4 e 4×3, respectivamente, então o produto AB existe porque as peças correspondentes encaixam.



Além disso, o produto corresponde a uma matriz do tipo 1×3. O produto BA neste caso não existe porque não é possível encaixar as duas peças de dominó!

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.2.3

Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

O produto $C = AB$ existe porque o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B. Assim, por exemplo, o elemento c_{23} é o número que resulta de multiplicar a segunda **linha** da matriz A pela terceira **coluna** da matriz B. Assim, temos

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & \boxed{2} & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \boxed{2} & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 20 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

$$c_{23} = 4 \cdot 1 + \boxed{2} \cdot \boxed{2} + 3 \cdot 4 = 4 + \boxed{4} + 12 = 20$$

Os restantes elementos podem ser calculados de modo semelhante, obtendo

$$C = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 15 & 4 \\ 17 & 9 & 20 & 7 \\ 13 & 8 & 13 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.2.3

Considere as seguintes matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & -9 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Determine, caso exista,

a) AD e DA.

b) CD e DC.

c) BD e DB.

d) $A(1|1)B$ e $C[1|1,3]B$.

Exercício 1.2.4

Prove as seguintes afirmações.

a) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $A_{i\cdot} = \alpha A_{j\cdot}$, então qualquer que seja a matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$, a matriz $C = AB$ também verifica a condição $C_{i\cdot} = \alpha C_{j\cdot}$.

b) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é tal que a linha i é nula, então qualquer que seja a matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$, a matriz AB também tem a linha i nula.

c) Se $B \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$ é tal que $B_{\cdot i} = \alpha B_{\cdot j}$, então qualquer que seja a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a matriz $C = AB$ também verifica a condição $C_{\cdot i} = \alpha C_{\cdot j}$.

d) Se $B \in \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{K})$ é tal que a coluna i é nula, então qualquer que seja a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a matriz AB também tem a coluna i nula.

Exercício 1.2.5

Prove as seguintes afirmações.

a) Se A, B, C são matrizes quadradas tais que $AB = BA$ e $AC = CA$, então $A(B + C) = (B + C)A$.

b) Se A e B são matrizes escalares, então AB também é uma matriz escalar.

c) Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ são matrizes diagonais, então $C = AB = BA$ também é diagonal e $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$.

Exercício 1.2.6

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Prove que se $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ são tais que $AB = BA$ e $AC = CA$, então $BC = CB$.

Para explicar o papel das matrizes identidade na aritmética de matrizes, consideremos o efeito da multiplicação da matriz identidade I_3 à direita de uma matriz $A_{2\times 3}$. Temos

$$AI_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Se tivéssemos multiplicado a matriz A à esquerda pela matriz identidade I_2 obteríamos o mesmo resultado. Ou seja, a matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

Teorema 1.2.2 (Propriedades da multiplicação de matrizes)

Assumindo que os tamanhos das matrizes A, B, C e D são tais que as operações indicadas podem ser realizadas, as seguintes regras da aritmética de matrizes são válidas com α e β escalares:

1 $A(BC) = (AB)C$ (Associatividade do produto de matrizes)

2 $A(B + C) = AB + AC$ (Distributividade à esquerda)

3 $(B + C)D = BD + CD$ (Distributividade à direita)

4 $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

A demonstração do teorema anterior pode ser encontrado na maioria dos livros de Álgebra Linear.

Exemplo 1.2.4

Neste exemplo vamos ilustrar como funciona a propriedade associativa da multiplicação.

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 13 & 26 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

e

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 39 \\ 11 & 26 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 13 & 26 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 104 \\ 65 & 234 \\ 16 & 78 \end{bmatrix}$$

e

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 39 \\ 11 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 104 \\ 65 & 234 \\ 16 & 78 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.2.7

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine, caso existam, as seguintes matrizes:

a) ABC.

b) $(A+B)C$.

c) $A(B+C)$.

d) $3B(A-I_2)C$.

As propriedades da aritmética real não podem ser transferidas para a aritmética de matriz. Por exemplo, sabemos que na aritmética real é sempre verdade que $ab = ba$, que é chamada de propriedade comutativa para a multiplicação. Na aritmética da matriz, no entanto, a igualdade entre AB e BA pode falhar por três motivos:

1 AB pode estar definido e BA não (por exemplo, se $A_{2\times3}$ e $B_{3\times4}$).

2 AB e BA podem estar definidos, mas podem ter tamanhos diferentes (por exemplo, se $A_{2\times3}$ e $B_{3\times2}$).

3 AB e BA podem estar definidos e ter o mesmo tamanho, mas os dois produtos podem ser diferentes.

Quando $AB = BA$, dizemos que as matrizes **comutam**.

Exemplo 1.2.5

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Multiplicando temos,

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 39 \\ 11 & 26 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 15 & 23 \\ 22 & 19 \end{bmatrix},$$

ou seja, as matrizes A e B não comutam.

Já foi dito que a multiplicação de matrizes não é comutativa em geral. No entanto, não é a única propriedade que é válida na aritmética real e que falha na aritmética matricial. Existem outras propriedades que também falham. Por exemplo, considere as seguintes duas propriedades da aritmética real:

- Se $ab = ac$ e $a \neq 0$, então $b = c$. (Lei de cancelamento)

- Se $ab = 0$, então pelo menos um dos factores à esquerda é 0. (Lei do anulamento)

Os próximos dois exemplos ilustram a falha destas propriedades na aritmética de matrizes.

Exemplo 1.2.6 (Falha na lei do cancelamento)

Considere as matrizes seguintes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Fazendo as multiplicações AB e AC temos

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 54 & 72 \end{bmatrix}$$

e, no entanto, $B \neq C$.

Embora $A \neq 0$, cancelar A de ambos os lados da equação $AB = AC$ levaria à conclusão incorreta de que $B = C$. Assim, a lei de cancelamento não se ajusta, em geral, para a multiplicação de matrizes (embora possa haver casos particulares onde é verdade).

Exemplo 1.2.7 (Falha na lei do anulamento)

Neste exemplo, vamos mostrar que o produto de duas matrizes pode ser a matriz nula, sem que nenhuma delas seja a matriz nula. Por exemplo, basta considerar as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e ver que $AB = 0$.

Exercício 1.2.8

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Verifique que:

a) $AB = 0$, mas $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

b) $AB \neq BA$.

c) $BA = CA$, mas $A \neq 0$ e $B \neq C$.

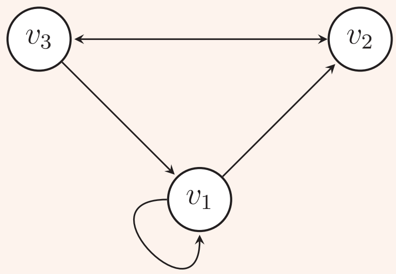
Definição 1.2.5 (Potência de uma matriz)

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Chamamos de **potência de expoente** k da matriz A, com $k \in \mathbb{N}$, ao produto de k matrizes A. Representamos da maneira usual A^k.

Vejamos um exemplo onde a potência tem grande relevância.

Exemplo 1.2.8

Um grafo direcionado consiste num conjunto de vértices ligados por arestas direcionadas. Se um grafo direcionado tiver n vértices, $v_1, \ldots, v_n$, a matriz de adjacência A é tal que $a_{ij} = 1$ se existe uma aresta a ligar o vértice v_i ao vértice v_j e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Um caminho de comprimento k do vértice i para o vértice j é uma sequência de k arestas a ligar o vértice i ao j. Para $B = A^k$, o elemento b_{ij} indica o número de caminhos de comprimento k a ligar o vértice i ao j. Consideremos o seguinte grafo direcionado.



A matriz de adjacência é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se multiplicarmos A por ela mesma, ou seja, A^2, temos

$$\begin{aligned} A.A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por exemplo, o zero nesta matriz significa que não existe qualquer caminho de comprimento 2 a ligar o vértice v_2 ao vértice v_3.

Calculando A^3, temos

$$\begin{aligned} A^3 \equiv A^2A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

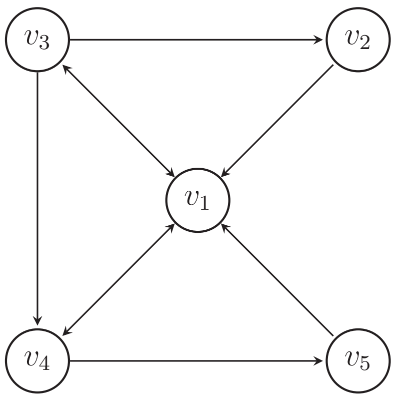
Por exemplo, o elemento $(1, 2)$ desta matriz é igual a 2. Isto significa que existem apenas dois caminhos de comprimento 3 a ligar o vértice v_1 ao vértice v_2: $v_1 - v_2 - v_3 - v_2$ e $v_1 - v_1 - v_1 - v_2$.

Exercício 1.2.9

Para cada um dos seguintes grafos, determine o número de caminhos de comprimento k a ligar o vértice i ao j.

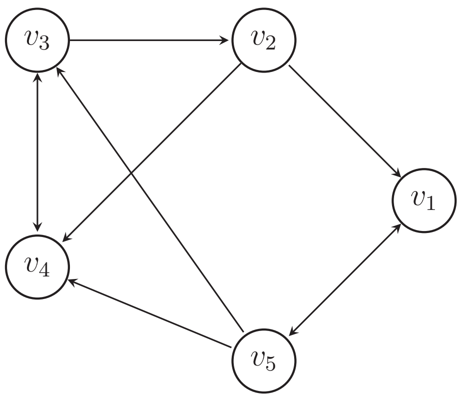
a) $k = 3$, $i = 1$, $j = 4$

b) $k = 4$, $i = 2$, $j = 5$



c) $k = 4$, $i = 4$, $j = 4$

d) $k = 4$, $i = 1$, $j = 3$



Exercício 1.2.10

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verifique que:

a) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

b) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

Exercício 1.2.11

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prove que A comuta com qualquer potência dela mesma.

Exercício 1.2.12

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prove que A comuta todo o polinómio em A, ou seja, com qualquer combinação linear de potências de A.

Exercício 1.2.13

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Mostre que $A^2 = 3A - I$.

As últimas operações que vamos apresentar são a *transposição* e a *conjugação*.

Definição 1.2.6 (Transposição de matrizes)

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. A **transposta** da matriz A é a matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$, tal que $b_{ij} = a_{ji}$. Denotamos a transposta da matriz A por A^T.

Observação:

Observe que transpor uma matriz é uma operação sempre possível e que corresponde a trocar as linhas pelas colunas ou as colunas por linhas. Ou seja, a primeira linha passa a ser a primeira coluna; a segunda linha passa a ser a segunda coluna, e assim por diante até à última linha.

Definição 1.2.7 (Conjugação e transconjugação de matrizes)

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. A **conjugada** da matriz A é a matriz $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, tal que $b_{ij} = \overline{a}_{ij}$. Denotamos a conjugada da matriz A por $\overline{A}$.

A **transconjugada** da matriz A é a matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, tal que $c_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Denotamos a transconjugada da matriz A por $\overline{A}^T = \overline{A^T} = A^*$.

Relacionadas com a transposição e a conjugação, temos as seguintes propriedades.

Teorema 1.2.3 (Propriedades da transposição e da conjugação)

Assumindo que os tamanhos das matrizes A, B, C e D são tais que as operações indicadas podem ser realizadas, as seguintes regras da aritmética de matrizes são válidas com α e β escalares:

1 $(A^T)^T = A$.

2 $(A+B)^T = A^T + B^T$.

3 $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

4 $(AB)^T = B^T A^T$.

5 $\overline{\overline{A}} = A$.

6 $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$.

7 $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\overline{A}$.

8 $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.2.9

Neste exemplo vamos ilustrar a última propriedade, nomeadamente que a transposta do produto de duas matrizes é igual ao produto das transpostas, mas pela ordem inversa. Considere as seguintes matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 20 \\ 13 & -18 & 23 \\ 18 & -13 & 30 \end{bmatrix}$$

e

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 6 & 13 & 18 \\ -8 & -18 & -13 \\ 20 & 23 & 30 \end{bmatrix}$$

Agora,

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 13 & 18 \\ -8 & -18 & -13 \\ 20 & 23 & 30 \end{bmatrix}.$$

Concluímos que $(AB)^T = B^T A^T$.

Exemplo 1.2.10

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+\boldsymbol{i} & -3 \\ -\boldsymbol{i} & -3 & 4-2\boldsymbol{i} \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2-\boldsymbol{i} & -3 \\ \boldsymbol{i} & -3 & 4+2\boldsymbol{i} \end{bmatrix}$$

e

$$3A^* = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{i} \\ 2-\boldsymbol{i} & -3 \\ -3 & 4+2\boldsymbol{i} \end{bmatrix}.$$

Com base na transposição e na conjugação temos algumas definições importantes que vão permitir caracterizar matrizes.

Definição 1.2.8

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Dizemos que a matriz A é **simétrica** se $A = A^T$ e **anti-simétrica** se $A = -A^T$.

Dizemos que a matriz A é **hermítica** se $A^* = A$ e **hemi-hermítica** se $A^* = -A$.

Definição 1.2.9

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Dizemos que a matriz A é **ortogonal** se $AA^T = I_n$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.2.11

Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 1 \\ -6 & -16 & 16 \\ 1 & 16 & -11 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 19 \\ 10 & 0 & 2 \\ -19 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3-\boldsymbol{i} & 6 \\ 3+\boldsymbol{i} & 6 & 2-3\boldsymbol{i} \\ 6 & 2+3\boldsymbol{i} & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é simétrica porque $A^T = A$. A matriz B é antisimétrica porque $B^T = -B$. A matriz C é hermítica porque $C^* = C$.

Exemplo 1.2.12

Como encontrar uma matriz 2×2 ortogonal com elementos reais?

Seja $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Então
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$
Como A tem de ser ortogonal, temos que $AA^T = I_2$. Ou seja,
$$AA^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}.$$
Assim, temos
$$\begin{cases} a^2+b^2 & = & 1 \\ c^2+d^2 & = & 1 \\ ac+bd & = & 0 \end{cases}.$$
Escolhendo, por exemplo, a, b, c e d todos iguais em módulo a $\frac{1}{\sqrt{2}}$, pela última equação, basta que um deles seja negativo. Portanto, uma matriz ortogonal é
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.2.14

Dê um exemplo de uma matriz que seja:

a) simétrica de ordem 4.

b) antisimétrica de ordem 3.

c) hermítica de ordem 2.

d) anti hermítica de ordem 3.

e) ortogonal, com elementos pertencentes ao conjunto $\{0, 1\}$ e que não seja a matriz identidade.

Exercício 1.2.15

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prove que $B = A + A^T$ é uma matriz simétrica.

Exercício 1.2.16

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prove que $B = AA^T$ é uma matriz simétrica.

Exercício 1.2.17

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prove que $B = A - A^T$ é uma matriz antisimétrica.

Exercício 1.2.18

Prove que toda a matriz quadrada pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma antisimétrica.

Exercício 1.2.19

Considere as seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

Verifique se são ortogonais.

Exercício 1.2.20

Prove que a matriz identidade é ortogonal.

Exercício 1.2.21

Prove que não existe uma matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ortogonal e antisimétrica.

Finalmente, e embora seja uma função e não uma operação, vamos apresentar o último conceito desta secção. Esta função será muito útil no capítulo dos vetores e valores próprios.

Definição 1.2.10 (Traço de uma matriz)

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À soma dos elementos da diagonal da matriz A chamamos **traço** de A. Denotamos o traço da matriz A por $\operatorname{tr}(A)$. Ou seja,

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in \mathbb{K}.$$

Esta função é uma função linear e voltaremos a vê-la como uma transformação no capítulo das transformações lineares. Para já vejamos as suas propriedades que derivam deste mesmo facto de ser uma função linear.

Teorema 1.2.4 (Propriedades do traço)

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Temos

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
2. $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$.
3. $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$.
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Demostração:

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Temos

1 Aplicando a definição de traço à matriz do membro esquerdo, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A+B) &= \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(a_{ii})+\sum_{i=1}^{n}(b_{ii}) \\
&= \operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B).
\end{aligned}$$

2 Aplicando novamente a definição de traço ao membro esquerdo, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\alpha A) &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii}) \\
&= \alpha\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}) \\
&= \alpha \operatorname{tr}(A).
\end{aligned}$$

3 Na transposição de uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, o elemento que ocupa a posição (i, j) passa a ocupar a posição (j, i) na matriz transposta. Como o traço só envolve elementos da diagonal da matriz A, e esses elementos não mudam de lugar, concluímos imediatamente que

$$\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$$

.

4 Seja $C = AB$. Da definição de traço e de produto matricial, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(C) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n} d_{ii},
\end{aligned}$$

onde $D = [d_{ij}]_{n\times n} = BA$. Logo, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

$\square$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.2.13

Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & -3 \\ 6 & 4 & 0 & 5 & -5 \\ 8 & 3 & 2 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & 3 & 7 & -6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Temos, $\mathrm{tr}(A) = 9+8+2 = 19$, $\mathrm{tr}(B) = 9+5+0+3-6 = 11$. O traço da matriz C não está definido, visto que C não é quadrada.

Exercício 1.2.22

Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Determine:

a) $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{tr}(B)$ e $\mathrm{tr}(C)$.

b) $\mathrm{tr}\left(AB - A^T B^T\right)$.

c) $\mathrm{tr}(ABC)$.

d) $\mathrm{tr}(A^2 - 3A + 5I)$.

e) I_8.

f) E_{25}.

Exercício 1.2.23

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Verifique que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A - I$.

Exercício 1.2.24

Prove que se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $C = AB - BA$, então $C \neq I_n$.

Exercício 1.2.25

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal. Prove que $\mathrm{tr}(AA^T) = n$.

1.3 Matriz Inversa

Deve ter notado, aquando das operações com matrizes, que não definimos a divisão de matrizes. Não foi esquecimento nem deixado para mais tarde. É que a divisão de matrizes não existe! Vejamos o que se passa com os escalares. Se virmos bem, também não podemos dividir quaisquer dois números. É necessário que o divisor seja diferente de zero. Além disso, dividir por um escalar não nulo é equivalente a multiplicar pelo inverso desse número. Por exemplo, dividir por 2 é o mesmo que multiplicar pelo seu inverso, 1/2, e esta multiplicação pode ser feita por qualquer ordem, já que a multiplicação de escalares é comutativa. Ora, nas matrizes, embora não exista a divisão, em alguns casos é possível encontrar um "inverso" que de certo modo jogue o papel de divisor.

Definição 1.3.1 (Matriz Invertível)

Uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é **invertível** ou **não singular**, se existe uma matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

em que I_n é a matriz identidade. Neste caso, a matriz B é chamada de **inversa** de A e denotaremos por A^{-1}. Se A não tem inversa, dizemos que A é **não invertível** ou **singular**.

Exemplo 1.3.1

A matriz nula não é invertível porque o produto da multiplicação da matriz nula por outra qualquer é sempre a matriz nula e não a identidade. Por outro lado a matriz identidade é invertível e a inversa é ela própria porque $I_n \cdot I_n = I_n$.

Exemplo 1.3.2

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -9 & -16 & 13 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

É fáci verificar que $AB = I_3$, donde concluímos que A tem inversa e que $A^{-1} = B$.

Exercício 1.3.1

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -9 & -3 & -13 \\ 1 & 0 & 1 \\ 11 & 4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Verifique se B é a inversa de A.

Exercício 1.3.2

Sejam $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tais que $ABCD = I$. Determine:

a) A^{-1} b) $(AB)^{-1}$ c) $(ABC)^{-1}$.

O caso de existência e cálculo de inversas de matrizes do tipo 2×2 é bastante simples. O próximo teorema determina quando uma matriz quadrada de ordem 2 tem inversa e qual é essa inversa.

Teorema 1.3.1 (Inversa de matrizes quadradas de ordem 2)

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

é invertível se $ad - bc \neq 0$, caso em que a inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Demostração:

Basta multiplicar a matriz A pela inversa dada. Ou seja,

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.3.3

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Como $1 \times 7 - 3 \times 2 = 1 \neq 0$, a matriz A é invertível. Aplicando a fórmula temos

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \times 7 - 3 \times 2} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que a matriz obtida é a inversa da matriz A. Basta verificar que $AA^{-1} = I_2$.

Exercício 1.3.3

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Verifique se são invertíveis e, em caso afirmativo, determine a inversa.

O Teorema 1.3.1 sugere que a inversa de uma matriz quadrada de ordem 2 é única. Esta unicidade estende-se a todas as matrizes quadradas conforme veremos no teorema seguinte.

Teorema 1.3.2 (Unicidade da Inversa)

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se a matriz A possui inversa, então a inversa é única.

Demostração:

Vamos supor que A tem duas inversas, D e E. Então

$$AD = DA = I_n = AE = EA$$

e assim,

$$D = DI_n = D(AE) = (DA)E = I_nE = E.$$

$\square$

Teorema 1.3.3 (Propriedades da Inversa)

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Se A é invertível, então A^{-1} também é invertível e

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

2. Se A e B são matrizes invertíveis, então AB também é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3. Se A é invertível, então A^T também é invertível e

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

4. Se A é invertível, então A^k, $k \in \mathbb{N}$, também é invertível[a] e

$$\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k.$$

[a] É comum ver escrito A^{-k}, mas é um abuso de linguagem. Na verdade deveríamos escrever $\left(A^{-1}\right)^k$ ou $\left(A^k\right)^{-1}$ ao invés de A^{-k}. Não esquecer que A^{-1} não significa "A elevado a -1", mas apenas a *inversa* de A.

Demostração:

Se queremos mostrar que uma matriz é a inversa de uma outra, temos que mostrar que os produtos das duas matrizes são iguais à matriz identidade.

1. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tais que $B = A^{-1}$. Se B é a inversa de A, então, por definição, A também é a inversa de A. Ou seja, $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Temos que mostrar que a inversa de AB é $B^{-1}A^{-1}$, ou seja, mostrar que o produto $(AB)(B^{-1}A^{-1})$ é a matriz identidade.

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AI_nA^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

3 Queremos mostrar que a inversa de A^T é $\left(A^{-1}\right)^T$, ou seja, mostrar que o produto $A^T\left(A^{-1}\right)^T$ é a matriz identidade. Temos,

$$A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I_n^T = I_n,$$

4 Caso particular da segunda alínea e demonstrável por indução.

$\square$

Exemplo 1.3.4

Considere uma matriz A invertível 2×2 e a sua transposta:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Como A é invertível, $ad - bc \neq 0$. Mas para A^T também temos a mesma condição, de onde concluímos que A^T é invertível. Segue-se do Teorema 1.3.1 que

$$\left(A^T\right)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

que é a mesma matriz que resulta se A^{-1} for transposta. Portanto,

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T,$$

conforme o Teorema 1.3.3 **3**.

No próximo teorema veremos que se A e B forem quadradas, bastaria que $AB = I$ para dizer que B é a inversa de A. A multiplicação invertida, $BA = I$ seria uma implicação. Vamos deixar a sua demonstração para a próxima secção.

Teorema 1.3.4

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se $AB = I_n$, então $BA = I_n$.

Observação:

Se A não for quadrada e $AB = I$, então não teremos $BA = I$. Basta considerar as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, observe que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{mas} \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, quando temos uma matriz B que é candidata a inversa de A, basta fazer um dos produtos AB ou BA e verificar se um deles é igual a I_n. O próximo exemplo ilustra este facto.

Exemplo 1.3.5

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz tal que $A^3 = 0$ (A pode não ser a matriz nula!). Vamos mostrar que a inversa de $I_n - A$ é $I_n + A + A^2$. Para provar isto, basta multiplicar a matriz $I_n - A$, pela matriz candidata a inversa, aqui $I + A + A^2$, e verificar que o produto das duas é igual à matriz identidade I_n.

$$\begin{aligned}(I_n - A)(I_n + A + A^2) &= I_n(I_n + A + A^2) - A(I_n + A + A^2)\\ &= I_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3\\ &= I_n.\end{aligned}$$

Logo, $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$.

Exercício 1.3.4

Sejam $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tais que $ABCD = I$. Determine:

a) $(CD)^{-1}$ b) B^{-1} c) C^{-1}
d) $(DA)^{-1}$ e) $(DAB)^{-1}$ f) $(BC)^{-1}$.

Exercício 1.3.5

Sejam $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tais que $ABCD = I$. Encontre uma expressão para $(AD)^{-1}$ envolvendo as matrizes A, B, C e D.

Exercício 1.3.6

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A^2 + A - I = 0$. Prove que A é invertível encontrando uma expressão para a inversa.

Exercício 1.3.7

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 5\end{bmatrix}.$$

Verifique que a matriz A satisfaz a equação $A^3 - 9A^2 + 7A - I = 0$. Prove que A é invertível e encontre a inversa.

Teorema 1.3.5

Sejam A é uma matriz invertível e α um escalar não nulo. Então, αA, também é invertível e,

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}.$$

Demostração:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e α um escalar não nulo. Para provar que $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$, basta provar que $(\alpha A)\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right) = I_n$. Como os escalares comutam com as matrizes, concluímos que

$$\begin{aligned} \alpha A \frac{1}{\alpha} A^{-1} &= \alpha \frac{1}{\alpha} A A^{-1} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Ou seja, $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$. $\square$

Estamos em condições de enunciar as leis do anulamento e do cancelamento.

Teorema 1.3.6 (Lei do anulamento)

Seja A é uma matriz invertível. Se $AB = 0$, então $B = 0$.

Demostração:

Se A é invertível e

$$AB = 0, \tag{1.3}$$

multiplicando ambos os membros de (1.3) à esquerda pela inversa de A, obtemos

$$\begin{aligned} A^{-1}AB &= A^{-1}0 \\ IB &= 0 \\ B &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.3.7 (Lei do cancelamento)

Seja A é uma matriz invertível. Se $AB = AC$, então $B = C$.

Demostração:

Se $AB = AC$, então $AB - AC = A(B - C) = 0$. Como A é invertível, pelo Teorema anterior concluímos que $B - C = 0$, ou seja, $B = C$. $\square$

Exemplo 1.3.6

No Exemplo 1.3.2 vimos que as seguintes matrizes são inversa uma da outra

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -9 & -16 & 13 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, a primeira linha da matriz A, $[1 \quad 4 \quad 3]$, multiplicada pela primeira coluna da matriz B, $[-9 \quad 1 \quad 2]^T$, é igual a 1 e multiplicada pelas outras duas, $[-16 \quad 1 \quad 4]^T$ e $[13 \quad -1 \quad -3]^T$, dá zero! De modo similar, a linha segunda linha de A multiplicada pela segunda coluna de B dá 1 e multiplicada pelas outras duas colunas sá zero. Algo semelhante poderíamos dizer em relação à multiplicação da terceira linha de A pelas colunas de B. Assim, é fácil verificar que alterarmos a posição das linhas da matriz A teremos de alterar de modo igual as colunas de B para que este novo par de matrizes continuem a ser inversa uma da outra.

Por exemplo, é fácil verificar que as inversas da matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -16 & 13 & -9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

são inversa uma da outra.

Exercício 1.3.8

Considere as matrizes invertíveis

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 11 & 2 \\ 5 & 5 & 16 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -54 & -77 & -55 & 59 \\ 94 & 133 & 95 & -102 \\ -12 & -17 & -12 & 13 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $AB = I$ e determine:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 11 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 16 & 8 \end{bmatrix}^{-1}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -54 & -77 & -55 & 59 \\ 94 & 133 & 95 & -102 \\ -12 & -17 & -12 & 13 \end{bmatrix}^{-1}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 5 & 8 & 5 & 16 \end{bmatrix}^{-1}$

d) $\begin{bmatrix} 54 & 77 & 55 & -59 \\ 94 & 133 & 95 & -102 \\ -12 & -17 & -12 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 16 & 5 & 8 \\ 1 & 11 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$

f) $\begin{bmatrix} -54 & -77 & -55 & 59 \\ 94 & 133 & 95 & -102 \\ -12 & -17 & -12 & 13 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$

Exercício 1.3.9

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prove que se A é ortogonal, então A for invertível e $A^{-1} = A^T$.

1.4 Matrizes Elementares

As matrizes elementares estão intrinsecamente relacionadas com a inversão de matrizes. Nesta subsecção iremos ver como podemos obter a inversa de uma matriz, caso exista, utilizando apenas as matrizes elementares.

As matrizes elementares representam, na álgebra das matrizes, as operações elementares.

Definição 1.4.1 (Operações Elementares sobre linhas)

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Existem três **operações elementares sobre as linhas** de A:

1. Permutação de linhas;
2. Multiplicação de uma linha por um escalar não nulo;
3. Somar a uma linha um múltiplo de outra linha.

Para cada uma das operações elementares sobre as linhas de uma matriz vamos adotar as seguintes notações:

1. L_π, representa a permutação π das linhas;
2. αL_i, representa a linha L_i multiplicada pelo escalar não nulo α;
3. $L_i + \beta L_j$, representa a adição à linha L_i a linha L_j previamente multiplicada pelo escalar β, com $i \neq j$.

Para representarmos a transformada da matriz A por cada uma das três operações elementares vamos utilizar a seguinte notação:

$$A \xrightarrow{\quad L_\pi \quad} B, \qquad A \xrightarrow{\quad \alpha L_i \quad} B' \quad \text{e} \quad A \xrightarrow{\quad L_i+\beta L_j \quad} B''.$$

Antes de avançarmos, convém esclarecermos o que queremos dizer com uma permutação π.

Definição 1.4.2 (Permutação π)

Uma **permutação** π de m elementos é uma função bijetiva

$$\pi \;:\; \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, m\},$$

que representamos por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(m) \end{pmatrix},$$

que muda a ordem $12\ldots m$ para a nova ordem $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(m)$. Por uma questão de simplificação, representaremos esta permutação simplesmente por $\pi = (\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(m))$.
Como a permutação é uma função bijetiva existe a permutação μ que reverte a sequência $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(m)$ para a ordem inicial $12\ldots m$, isto é, $\mu(\pi(i) = i$, para $i = 1, \ldots, m$. Chamaremos esta permutação de **permutação inversa** de π e representaremos por π^{-1}.

Exemplo 1.4.1

A permutação $\pi = (312)$ permuta segundo a seguinte regra: o terceiro passa para primeiro, o primeiro para segundo e o segundo para terceiro. Ou seja, é um ciclo!

Observação:

Dada uma permutação $\pi = (\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(m))$, a operação de permutação sobre linhas por L_π será representada simplesmete por $L_\pi = L_{\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(m)}$.

Além disso, quando numa permutação um determinado inteiro não mude, iremos representar essa permutação omitindo esse inteiro. Por exemplo, na permutação $\pi = (213)$ o número 3 ocupa o terceiro lugar e por isso não vai muda. Portanto, podemos dizer simplesmente que $\pi = (21)$, e representaremos a operação de permutação sobre linhas L_{213} simplesmente por L_{21}.

Por outro lado, se $\pi = (123)$, os três números não vão mudar e $L_{123} = L_.$, que corresponde à operação elementar NÃO alterar a matriz!

Vejamos um exemplo onde aplicamos as três operações elementares sobre linhas a uma matriz.

Exemplo 1.4.2

Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Vamos aplicar três operações elementares sobre linhas a esta matriz. Temos:

- operação de permutação de linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad L_{21} \quad} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- operação de multiplicação de uma linha por um escalar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad 2L_1 \quad} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- Operação de adição um múltiplo de linha a outra linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad L_2 - 4L_1 \quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.4.1

Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Efetue as seguintes operações elementares sobre a matriz A:

a) $-L_3$ b) $L_2 - L_3$ c) L_{32} d) $L_1 - 2L_2$ e) L_{231} f) $3L_2$.

Definição 1.4.3 (Equivalência por linhas)

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Dizemos que B é **equivalente por linhas** a A se, partindo de A, for possível obter a matriz B efetuando operações elementares sobre linhas.

As operações elementares são fundamentais na inversão de matrizes e nas resoluções de sistemas de equações lineares. Como veremos no próximo capítulo, podemos representar os sistemas de equações lineares utilizando matrizes. A importância das operações elementares reside no facto delas não alterarem o conjunto solução do sistema de equações. Isto significa que sempre que efetuarmos uma operação elementar, existe outra operação elementar que desfaz a primeira ação. É isto que vem traduzido no seguinte teorema.

Teorema 1.4.1

As operações elementares sobre linhas são reversíveis.

Demostração:

Como existem apenas três operações elementares, basta analisar uma de cada vez.

Comecemos com a operação de permutação L_π, onde $\pi = (\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(m))$. Da definição de permutação, concluímos que a operação elementar que reverte esta operação é $L_{\pi^{-1}}$.

Quanto à operação de multiplicar a linha i por um número não nulo α, $L_i(\alpha)$, se multiplicarmos a mesma linha i por $1/\alpha$ obteremos a matriz inicial. Ou seja, esta operação também é reversível e a operação elementar inversa de $L_i(\alpha)$ é $L_i(1/\alpha)$. Daqui vemos a importância de $\alpha \neq 0$!

Finalmente, vejamos a terceira operação elementar. Se somarmos à linha i um múltiplo da linha j, ou seja, $L_{ij}(\beta)$, é fácil de ver que podemos reverter esta operação subtraindo à mesma linha i o mesmo múltiplo da linha j. Ou seja, a operação inversa de $L_{ij}(\beta)$ é $L_{ij}(-\beta)$. $\square$

Exemplo 1.4.3

Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Se efetuarmos a operação elementar $L_3 - L_1$ na matriz A obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

A operação que reverte a operação elementar efetuada é $L_3 + L_1$. Com efeito, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} = A.$$

Exercício 1.4.2

Efetue a operação elementar que reverte a operação elementar indicada.

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 0 & 10 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{231}} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Uma consequência do Teorema 1.4.1 é que se B é equivalente por linhas a A, então A também é equivalente por linhas a B. Assim, dizemos apenas que A e B são equivalentes por linhas. Além disso, se B e C são equivalentes por linhas à matriz A, então B e C também são equivalentes por linhas. Vamos deixar este resultado e a sua demonstração para mais adiante quando apresentarmos as matrizes elementares.

Embora seja mais comum efetuar operações elementares sobre linhas, também podemos ter operações elementares sobre colunas.

Definição 1.4.4 (Operações Elementares sobre colunas)

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Existem três **operações elementares sobre as colunas** de A, a saber:

1. Permutação de colunas;
2. Multiplicação de uma coluna por um escalar não nulo;
3. Somar a uma coluna um múltiplo de outra coluna.

Agora, a cada uma das operações elementares sobre as colunas de uma matriz vamos adoptar as seguintes notações:

1 C_π, representa a permutação π das colunas;

2 αC_i, representa a coluna C_i multiplicada pelo escalar não nulo α;

3 $C_i + \beta C_j$, representa a adição à coluna C_i a coluna C_j previamente multiplicada pelo escalar β.

Depois do que já foi exposto o seguinte resultado é óbvio.

Teorema 1.4.2

As operações elementares sobre colunas são reversíveis.

Demostração:

Já vimos que as operações elementares sobre linhas são reversíveis. Como as operações elementares sobre colunas são operações elementares sobre linhas na transposta da matriz, concluímos que as operações elementares sobre colunas também são reversíveis. $\square$

Neste momento poderia parecer natural definirmos matrizes equivalentes por colunas. Mas vamos ver que tal não é necessário. Na realidade as operações elementares sobre colunas não são necessárias. Veremos que com as operações elementares sobre linhas conseguimos alcançar os nossos objetivos. Então por quê definimos? Veremos mais adiante a razão depois de definirmos matrizes elementares. Observe que as matrizes elementares são definidas à custa das operações elementares sobre LINHAS!

Definição 1.4.5 (Matrizes elementares)

Uma matriz quadrada de ordem n é chamada de **matriz elementar** se puder ser obtida a partir de uma matriz de identidade I_n executando uma única operação elementar sobre linhas. Existem três tipos de matrizes elementares:

P_π - Matriz de permutação $\pi = (\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n))$. Esta matriz é formada por 1's e 0's, onde cada linha tem apenas um 1. Estes elementos não nulos ocupam as posições $(1,\pi(1)),(2,\pi(2)),\dots,(n,\pi(n))$. A operação elementar sobre linhas associada a esta matriz é L_π.

$M_i(\alpha)$ - Matriz de multiplicação da linha i pelo escalar $\alpha \neq 0$. Esta matriz é uma matriz diagonal, onde todos os elementos são iguais a 1 e o i-ésimo elemento é igual a α. A operação elementar sobre linhas associada a esta matriz é $L_i(\alpha)$.

$E_{ij}(\beta)$ - Matriz soma de linhas, que à linha i soma β vezes a linha j. Esta matriz é igual à matriz identidade I_n, tenho mais um elemento β na posição (i,j). A operação elementar sobre linhas associada a esta matriz é $L_i + \beta L_j$.

Vejamos um exemplo de cada uma destas matrizes.

Exemplo 1.4.4

Por uma questão de conveniência, vamos considerar matrizes elementares do tipo 3×3.

- Consideremos as operações elementares L_{312} e L_{32}. Associadas a estas duas operações temos, respectivamente, as matrizes

$$P_{312} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad P_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Consideremos as operações elementares $5L_1$ e $-4L_2$. Associadas a estas duas operações temos, respectivamente, as matrizes $M_1(5)$ e $M_2(-4)$,

$$M_1(5) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad M_2(-4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Consideremos as operações elementares $L_2 - 7L_1$ e $L_1 + L_3$. Associadas a estas duas operações temos, respectivamente, as matrizes $E_{21}(-7)$ e $E_{13}(1)$,

$$E_{21}(-7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad E_{13}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.4.3

Identifique as matrizes que são elementares:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 1.4.4

Prove que toda a matriz elementar P_π é ortogonal.

Exercício 1.4.5

Calcule o traço das seguintes matrizes elementares:

a) $M_2(-1) \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$. b) $E_{26}(8) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$. c) $P_{3254} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

d) $M_6(3) \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$. e) $E_{51}(7) \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$. f) $P_{54} \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$.

A importância das matrizes elementares reside em certa maneira no facto de serem invertíveis. É isso que apresentamos no próximo teorema.

Teorema 1.4.3

Toda matriz elementar é invertível e sua inversa é também uma matriz elementar.

- A matriz de permutação é ortogonal, ou seja, a sua inversa é a sua transposta. Assim,
$$P_\pi^{-1} = P_\pi^T.$$
- $M_i(\alpha)^{-1} = M_i\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$, $\alpha \neq 0$.
- $E_{ij}(\beta)^{-1} = E_{ij}(-\beta)$.

Demostração:

Verificação direta. □

Observação:

É fácil verificar que:

- $(M_i(\alpha))^T = M_i(\alpha)$;
- $(E_{ij}(\beta))^T = E_{ji}(\beta)$;
- $M_i(\alpha)M_i(\beta) = M_i(\alpha\beta)$;
- $E_{ij}(\alpha)E_{ij}(\beta) = E_{ij}(\alpha+\beta)$.

O seguinte teorema vem nos esclarecer como é que as operações elementares, sobre linhas e sobre colunas, podem ser efetuadas utilizando as matrizes elementares.

Teorema 1.4.4

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se E é uma operação elementar sobre linhas e $M_E \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ a respectiva matriz elementar associada, então
$$A \xrightarrow{\quad E \quad} M_E A.$$

Demostração:

Vamos considerar separadamente cada uma das três operações elementares.

$\boxed{L_\pi}$ - A matriz elementar associada à operação elementar L_π é P_π. Seja $P_\pi A = B$ e consideremos o elemento genérico da matriz B. Tomando $P_\pi = [p_{ik}]$ e $A = [a_{kj}]$, e relembrando que $p_{ik} = 1$ apenas quando $k = \pi(i)$, temos
$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}a_{kj} = p_{i\pi(i)}a_{\pi(i)j} = a_{\pi(i)j}.$$
Ou seja, a linha i de B corresponde à linha $\pi(i)$ de A, de onde concluímos que a matriz A sofreu a permutação π nas suas linhas.

$\boxed{\alpha L_i}$ - A matriz elementar associada à operação elementar αL_i é $M_i(\alpha)$. Seja $M_i(\alpha)A = B$ e consideremos o elemento genérico da matriz B. Tomando $M_i(\alpha) = [m_{\ell k}]$ e $A = [a_{kj}]$, e relembrando que

$$m_{\ell k} = \begin{cases} 1, & \text{se } \ell = k \neq i \\ \alpha, & \text{se } \ell = k = i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

temos

$$b_{\ell j} = \sum_{k=1}^{n} m_{\ell k} a_{kj} = \begin{cases} a_{\ell j}, & \text{se } \ell \neq i \\ \alpha a_{ij}, & \text{se } \ell = i \end{cases}.$$

Ou seja, as linhas de B correspondem às linhas de A à exceção da linha i que vem multiplicada por α, de onde concluímos que a matriz A sofreu a operação $L_i(\alpha)$.

$\boxed{L_i + \beta L_j}$ - A matriz elementar associada à operação elementar $L_i + \beta L_j$ é $E_{ij}(\beta)$. Seja $E_{ij}(\beta)A = B$ e relembrando que $E_{ij}(\beta) = I_n + \beta E_{ij}$, temos $B = (I_n + \beta E_{ij})A = A + \beta E_{ij}A$. Mas

$$E_{ij} = [e_{rs}] = \begin{cases} 1, & \text{se } r = i \text{ e } s = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

ou seja, se $C = [c_{rs}] = \beta E_{ij})A$, então

$$c_{rs} = \sum_{k=1}^{n} c_{rk} a_{ks} = \begin{cases} a_{js}, & \text{se } r = i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Assim, verificamos que a matriz C é uma matriz em que todas as linhas são nulas à exceção da linha i que contém a linha j de A. Logo, a matriz $B = A + E_{ij}A$ tem as linhas iguais às da matriz A à exceção da linha i que tem a linha j adicionada à linha i. Concluímos que a matriz A sofreu a operação $L_i + \beta L_j$.

$\square$

Exercício 1.4.6

Para cada uma das seguintes operações elementares sobre linhas atuando na matriz A, indique a matriz elementar de tamanho conveniente associada.

a) L_{412} e $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{K})$

b) $L_2 + 3L_1$ e $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

c) $-3L_2$ e $A \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{K})$

d) L_{21} e $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$

Exercício 1.4.7

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Sem efetuar a multiplicação de matrizes, determine o produto EA para as seguintes matrizes E:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vejamos como as operações elementares sobre colunas podem ser realizadas recorrendo às matrizes elementares. Como as matrizes elementares são definidas à custa das operações elementares sobre linhas, é natural que alguma coisa possa mudar. É isso que vem expresso no seguinte teorema.

Teorema 1.4.5

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Para cada uma das três operações elementares sobre colunas temos uma matriz elementar associada multiplicada à direita de A.

$$A \xrightarrow{C_\pi} B \iff B = AP_\pi^T$$

$$A \xrightarrow{\alpha C_i} B \iff B = A\left(M_i(\alpha)\right)^T = M_i(\alpha)$$

$$A \xrightarrow{C_i+\beta C_j} B \iff B = \left(AE_{ij}(\beta)\right)^T = AE_{ji}(\beta).$$

Demostração:

Efetuar uma operação elementar sobre colunas na matriz A corresponde a efetuar a correspondente operação elementar sobre linhas na matriz A^T e depois transpor novamente. Assim, temos:

$\boxed{C_\pi}$ - Partindo de $B = AP_\pi^T$ e transpondo vem

$$\begin{aligned} B^T &= \left(AP_\pi^T\right)^T \\ &= \left(P_\pi^T\right)^T A^T \\ &= P_\pi A^T. \end{aligned}$$

Logo, uma vez que $P_\pi A^T$ efetua a permutação π sobre as linhas de A^T, que são as colunas de A, AP_π^T efetua a permutação das colunas de A. Portanto, a matriz elementar associada à operação elementar C_π é P_π^T e vem multiplicada à direita de A.

$\boxed{\alpha C_i}$ - Partindo de $B = AM_i(\alpha)$ e transpondo vem

$$\begin{aligned} B^T &= \left(AM_i(\alpha)\right)^T \\ &= \left(M_i(\alpha)\right)^T A^T. \end{aligned}$$

Como $\left(M_i(\alpha)\right)^T = M_i(\alpha)$, verificamos que $M_i(\alpha)A^T$ efetua a operação elementar αL_i sobre A^T, de onde concluímos que $AM_i(\alpha)$ efetua a operação elementar sobre colunas αC_i na matriz A. Portanto, a matriz elementar associada à operação elementar αC_i é $M_i(\alpha)$ e vem multiplicada à direita de A.

$\boxed{C_i + \beta C_j}$ - Partindo de $B = AE_{ji}(\beta)$ e transpondo vem

$$\begin{aligned} B^T &= \left(AE_{ji}(\beta)\right)^T \\ &= \left(E_{ji}(\beta)\right)^T A^T. \end{aligned}$$

Como $\left(E_{ji}(\beta)\right)^T = E_{ij}(\beta)$, verificamos que $E_{ij}(\beta)A^T$ efetua a operação elementar $L_i + \beta L_j$ sobre as linhas de A^T, de onde concluímos que $AE_{ji}(\beta)$ efetua a operação elementar sobre colunas $C_i + \beta C_j$ na matriz A. A matriz elementar associada à operação elementar $C_i + \beta C_j$ é $E_{ji}(\beta)$ e vem multiplicada à direita de A.

$\square$

Vejamos um exemplo de cada uma destas matrizes.

Exemplo 1.4.5

Por uma questão de conveniência, vamos considerar matrizes elementares do tipo 3×3.

- Consideremos as operações elementares C_{312} e C_{32}. Associadas a estas duas operações temos, respectivamente, as matrizes

$$P_{312}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$P_{32}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Consideremos as operações elementares $5C_1$ e $-4C_2$. Associadas a estas duas operações temos, respectivamente, as matrizes $M_1(5)$ e $M_2(-4)$,

$$M_1(5) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad M_2(-4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Consideremos as operações elementares $C_2 - 7C_1$ e $C_1 + C_3$. Associadas a estas duas operações temos, respectivamente, as matrizes $E_{12}(-7)$ e $E_{31}(1)$,

$$E_{21}(-7) = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad E_{13}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.4.8

Para cada uma das seguintes operações elementares sobre linhas atuando na matriz A, indique a matriz elementar de tamanho conveniente associada.

a) C_{412} e $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{K})$

b) $C_2 + 3C_1$ e $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

c) $-3C_2$ e $A \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{K})$

d) C_{21} e $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$

Exercício 1.4.9

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Sem efetuar a multiplicação de matrizes, determine o produto AE para as seguintes matrizes E:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Estamos em condições de enunciar o teorema referido na página 37 e de apresentar a sua demonstração.

Teorema 1.4.6

Sejam $B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ matrizes equivalentes por linha à matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então B é equivalente por linhas à matriz C.

Demostração:

Sejam $B, C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ matrizes equivalentes por linha à matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Então existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_r, F_1, \ldots, F_s$ tais que

$$E_r \cdots E_1 A = B$$

e

$$F_s \cdots F_1 A = C.$$

Como as operações elementares são invertíveis, temos

$$A = E_1^{-1} \cdots E_r^{-1} B.$$

Ou seja,

$$F_s \cdots F_1 E_1^{-1} \cdots E_r^{-1} B = C,$$

de onde concluímos que C é equivalente por linhas à matriz B. □

Exemplo 1.4.6

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

As matriz A e B são equivalentes por linhas, assim como as matrizes A e C. Com efeito, $A \xrightarrow{L_3 - L_1} B$ e $A \xrightarrow{L_2 - L_1} C$. Então as matrizes B e C também são equivalentes por linhas. Se começarmos com a matriz B temos.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = C.$$

Exercício 1.4.10

Suponhamos que se verificam as seguintes transformações

$$A \xrightarrow{L_2 + 3L_1} A_1 \xrightarrow{5L_1} A_2 \xrightarrow{L_3 - 2L_2} A_3$$

$$A_1 \xrightarrow{L_{42}} A_4 \xrightarrow{-L_3} A_5$$

$$A_2 \xrightarrow{\frac{1}{2}L_3} A_6 \xrightarrow{L_{231}} A_7.$$

Portanto, as matrizes são todas equivalentes. Ou seja, partindo de qualquer matriz é possível encontrar operações elementares que transformem em qualquer uma das restantes matrizes. Encontre essas operações elementares para os seguintes pares de matrizes:

a) A e A_6 b) A_3 e A_7 c) A_4 e A_6 d) A_5 e A_7

Exercício 1.4.11

Suponhamos que se verificam as seguintes transformações

$$A \xrightarrow{L_{423}} A_1 \xrightarrow{L_1-4L_3} A_2 \xrightarrow{3L_2} A_3$$

$$A_1 \xrightarrow{C_{42}} A_4 \xrightarrow{-4C_3} A_5$$

$$A_4 \xrightarrow{L_{32}} A_6 \xrightarrow{C_1-6C_2} A_7.$$

Ou seja, partindo de qualquer matriz é possível encontrar operações elementares que transformem em qualquer uma das restantes matrizes. Encontre essas operações elementares para os seguintes pares de matrizes:

a) A_1 e A_7 b) A e A_7 c) A_3 e A_5 d) A_7 e A_3

1.5 Forma Escalonada e Característica de uma Matriz

Enquanto que as operações elementares, e consequentemente as matrizes elementares, estão na base da inversão de matrizes, a escolha destas operações está intimamente relacionada com os seguintes conceitos chave.

Definição 1.5.1 (Pivô)

Ao primeiro elemento não nulo de cada linha de uma matriz designamos por **pivô**. Uma linha nula não tem pivô.

Exemplo 1.5.1

Consideremos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na matriz A podemos ver três pivôs, nomeadamente os elementos $2, 3$ e 4. Já a matriz B tem dois pivôs e são os dois elementos iguais a 1.

Exercício 1.5.1

Para cada uma das seguintes matrizes, identifique os pivôs.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Definição 1.5.2 (Matriz pivotada)

Dizemos que uma matriz está **pivotada** se os pivôs estiverem em colunas diferentes.

Exemplo 1.5.2

As duas matrizes do exemplo anterior estão pivotadas porque os pivôs estão em colunas diferentes. Na matriz A os três pivôs estão nas colunas $1, 2$ e 3, enquanto que na matriz B os dois pivôs ocupam as colunas 1 e 4. A matriz que apresentamos a seguir não está pivotada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 7 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Repare que a matriz têm três pivôs, $1, 7$ e 9, mas o 1 e 7 estão ambos na primeira coluna.

Exercício 1.5.2

Identifique as matrizes que estão pivotadas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Definição 1.5.3 (Forma Escalonada)

Dizemos que uma matriz está na **forma escalonada**, ou simplesmente **escalonada**, se satisfizer os seguintes requisitos:

- estar pivotada;
- os pivôs estarem em "escada", isto é, comparando quaisquer dois pivôs, o mais à esquerda deverá estar mais acima;
- as linhas nulas, caso existam, deverão ser as últimas linhas da matriz.

Também podemos dizer que a matriz está na **forma de escada**.

Exemplo 1.5.3

Considere novamente as matrizes do Exemplo 5. Observe que a matriz A embora esteja pivotada, ela não está escalonada. Já a matriz B está na forma escalonada porque o pivô na coluna mais à esquerda está na primeira linha e o outro pivô que está na quarta coluna está na segunda linha.

A diferença entre uma matriz pivotada e uma escalonada é apenas a de uma permutação. É isso que vem expresso no seguinte toerema.

Teorema 1.5.1

Toda matriz pivotada está no máximo à distância de uma operação elementar sobre linhas (permutação) de uma escalonada.

Demostração:

Vamos supor que A é uma matriz pivotada. Se os pivôs estiverem em "escada" e as linhas nulas no final da matriz, então ela já está escalonada. Se tiver linhas com pivô abaixo de linhas nulas e os pivôs não estiverem em "escada", então é possível reordenar as linhas de modo a ficar com as linhas nulas abaixo das linhas com pivô e os pivôs fiquem ordenados em "escada". Esta transformação é uma operação elementar sobre linhas de permutação. Concluímos que precisamos no máximo de uma operação elementares de permutação sobre as linhas para escalonar uma matriz pivotada. $\square$

Exemplo 1.5.4

Consideremos as seguintes matrizes pivotadas:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A já está escalonada. As restantes matrizes estão pivotadas, mas não estão escalonadas. Para escalonar as matrizes B, C e D basta multiplicar à esquerda pelas matrizes elementares P_{32}, $P_{4132} = P_{412}$ e P_{32}, respectivamente.

Exercício 1.5.3

Identifique as matrizes que estão na forma escalonada.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 1.5.4

Relativamente às matrizes do Exercício 1.5.3 que estão pivotadas mas não estão escalonadas, determine a permutação que transforma a matriz na forma escalonada.

Veremos que ter uma matriz na forma escalonada vai ser muito importante para resolver sistemas de equações lineares e saber, no caso de ser quadrada, se uma matriz tem ou não inversa. Como vimos no teorema anterior, todas as matrizes pivotadas estão a uma operação elementar de estarem escalonadas. E se a matriz não estiver pivotada? O seguinte teorema trata desses casos.

Teorema 1.5.2

Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a uma matriz pivotada.

Demostração:

Vamos supor que A seja uma matriz que não esteja pivotada. Então existem pelo menos dois pivôs na mesma coluna k. Vamos supor que ocupam as linhas i e j. Sejam a_{ik} e a_{jk} esses pivôs. Como por definição são diferentes de zero, podemos efetuar, por exemplo, a operação elementar $L_j - \dfrac{a_{ik}}{a_{jk}} L_i$ e a nova linha j deixará de ter o pivô na coluna k e passará a tê-lo, caso exista, numa coluna $k' > k$. Portanto, os pivôs vão "migrando" para as colunas à direita. Procedemos desta maneira até deixar de existirem dois pivôs numa mesma coluna. Quando isto acontecer, a matriz resultante estará pivotada. $\square$

Corolário 1.5.1

Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a uma matriz escalonada.

Demostração:

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Pelo Teorema 5, a matriz A é equivalente por linhas a uma matriz pivotada. Como toda a matriz pivotada é equivalente por linhas a uma matriz escalonada, concluímos que toda a matriz A é equivalente por linhas a uma matriz escalonada. $\square$

Definição 1.5.4 (Pivotar/Escalonar)

O processo de transformar uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ numa matriz pivotada (escalonada) chamamos de **pivotar** (**escalonar**).

Como veremos, não existe um único caminho para pivotar uma matriz, mas independentemente das operações elementares escolhidas o número de pivôs é sempre o mesmo. Por este motivo, o número de pivôs de uma matriz pivotada é também um conceito muito importante.

Antes de continuar, vale a pena introduzir um conceito que vai estar presente em todos os capítulos deste livro e quanto mais cedo o introduzirmos melhor.

Definição 1.5.5 (Combinação linear)

Uma **combinação linear** dos "objetos matemáticos" $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ é dada por

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

onde $a_1, a_2 \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Se $n = 1$, dizemos que uma combinação linear de x_1 é um múltiplo de x_1.

Este conceito é muito simples, mas de uma importância central. Observe que os "objetos matemáticos" podem ser matrizes, linhas de uma matriz e como veremos no capítulo de sistemas de equações, podem ser incógnitas e até mesmo equações. A necessidade de introduzir agora o conceito prende-se com a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 1.5.3

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ duas matrizes pivotadas equivalentes por linhas. Então o número de pivôs de ambas as matrizes é igual e ocupam as mesmas colunas.

Demostração:

Vamos recorrer às matrizes elementares. Pivotar uma matriz corresponde a multiplicar à esquerda por matrizes elementares. Dos três tipos de matrizes elementares, as matrizes P_π e $M_i(\alpha)$, fazem aparecer novos pivôs. Quanto muito, as matrizes P_π podem alterar a posição dos pivôs em termos de linhas e as matrizes $M_i(\alpha)$ podem alterar o valor do pivô para outro valor não nulo. As matrizes $E_{ij}(\beta)$ alteram a linha i para uma combinação linear desta linha e da linha j, nomeadamente $L_i + \beta L_j$.

Vamos supor que A e B são duas matrizes pivotadas equivalentes por linhas tais que existe uma coluna k na qual a matriz A tem um pivô e a B não. Para fazer aparecer um pivô na coluna k da matriz B é no final fazer uma combinação linear com as restantes linhas. Mas as linhas que têm pivô em colunas mais à esquerda têm de vir multiplicadas por zero, caso contrário iria aparecer um pivô numa coluna $k' < k$. Mas também as colunas com os pivôs em colunas mais à direita não contribuem para a coluna k porque nessa coluna temos necessariamente zeros. Logo, é impossível fazer aparecer um pivô nesta coluna k. Portanto, não pode ser equivalente por linhas à matriz A, o que é uma contradição. Assim, os pivôs da matriz A têm de estar nas mesma colunas que os da matriz B, de onde concluímos que o número é igual. $\square$

Exemplo 1.5.5

Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que estão escalonadas. No entanto, as matrizes não podem ser equivalentes por linhas porque a posição dos pivôs não é a mesma para ambas. Portanto, se as matrizes forem equivalentes por linhas, então o número de pivôs é igual. Mas se o número de pivôs for igual, as matrizes não são necessariamente equivalentes por linhas. E mesmo que ocupassem as mesmas posições, não é condição suficiente para dizermos que são equivalentes por linhas, conforme veremos mais à frente!

Definição 1.5.6 (Característica de uma matriz)

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz pivotada obtida a partir da matriz A. Chamamos de **característica** de A, e representamos por $\text{Car}(A)$, ao número de pivôs de B.

Observação:

Só podemos determinar a característica de uma matriz depois dela estar pivotada. Observe que não é preciso escalonar, pois a única diferença entre uma matriz pivotada e a mesma escalonada é a ordenação dos pivôs.

Teorema 1.5.4

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Temos, $\text{Car}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Demostração:

Seja $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz pivotada de A. Por definição de pivô, só podemos ter um pivô por linha. Por definição de matriz pivotada, só podemos ter um pivô por coluna. Logo, não pode haver mais pivôs do que o mínimo entre o número de linhas e de colunas. $\square$

Teorema 1.5.5

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Temos, $\text{Car}(A^T) = \text{Car}(A)$.

Demostração:

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz qualquer. Para determinar a caracterísitica de A temos de pelo menos de a pivotar. Assim, existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_r$, tais que,

$B = E_r \dots E_1 A$ seja uma matriz escalonada. Transpondo esta matriz, temos

$$\begin{aligned} B^T &= (E_r \dots E_1 A)^T \\ &= A^T E_1^T \dots E_r^T. \end{aligned}$$

Agora, e de um modo geral, a matriz B deixará de estar pivotada. Mas se invertermos a ordem das colunas, reescrevendo da última para a primeira, ou seja, efetuando uma operação elementar de permutação das colunas $\pi = m(m-1)\cdots 21$, a matriz resultante terá os pivôs nas últimas colunas e um pivô por cada coluna não nula. Portanto, mesmo que não esteja pivotada, não poderá haver mais pivôs. Logo, $\operatorname{Car}(A^T) = \operatorname{Car}(A)$. $\square$

Se às matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ no Teorema 1.5.3 fizermos operações sobre colunas, elas deixaram naturalmente de ser equivalentes por linhas, mas o número de pivôs continuará a ser o mesmo. O máximo que iremos conseguir é mudar os pivôs de colunas. Assim, da Definição 1.5.6, do Teorema 1.5.3 e do Teorema 1.5.4 podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 1.5.6

As operações elementares não alteram a característica de uma matriz.

Demostração:

Do Teorema 1.5.3 todas as matrizes equivalentes por linha têm a mesma característica. Portanto, as operações elementares sobre linhas não alteram a característica. Por outro lado, fazer operações elementares sobre colunas numa matriz A é equivalente a fazer operações elementares sobre linhas na matriz A^T. Pelo Teorema 1.5.4 concluímos que as operações elementares sobre colunas também não alteram a característica. $\square$

Portanto, em suma, toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ pode ser escalonada. Mas qual é o processo para pivotar/escalonar uma matriz? Vamos mostrar um processo prático que permite transformar qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ numa matriz pivotada.

Considere uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

1 Começamos pela coluna com pivô mais à esquerda de A. Suponhamos que é a coluna k. Nesta coluna vamos escolher um dos elementos não nulos para pivô "principal", isto é, vamos escolher um pivô nesta coluna para eliminar os restantes. Vamos supor que escolhemos o que está na linha i.

2 Com este pivô escolhido na alínea anterior, efetuamos as operações elementares $L_j - \dfrac{a_{ik}}{a_{jk}} L_i$ sobre todas as linhas $j \neq i$ com pivô.

3 Repitimos os passos **1** e **2** com a próxima coluna com pivô.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.5.6

Vamos pivotar a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 \\ 5 & 15 & -10 & 40 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

A coluna mais à esquerda com pivôs é logo a primeira coluna. Temos dois pivôs, os números 1 e 5. Vamos escolher um deles para anular o outro. Por exemplo, escolhendo o número 1, vamos anular o 5.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 \\ 5 & 15 & -10 & 40 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 5L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

A próxima coluna com pivôs é a coluna 3. Temos dois pivôs, os números 3 e -5. Observe que podemos simplificar estes números dividindo a linha 1 por 3 e a linha 2 por -5. Assim, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{L_2}{-5}]{\frac{L_1}{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Portanto, escolhendo o pivô que está na primeira linha temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Neste momento vemos que a matriz já está pivotada. Portanto, podemos dizer que $\mathrm{Car}(A) = 2$. Se quisermos escalonar, basta permutar as linhas. Assim,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{312}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.5.7

Vamos escalonar a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \\ -2 & -7 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para isso, começamos pela primeira coluna que tem três pivôs. Vamos escolher o número 1 para anular os outros dois pivôs. Assim, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \\ -2 & -7 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 + 2L_1]{L_2 + 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & 7 & 10 \\ 0 & -11 & 7 & 10 \end{bmatrix}.$$

A partir deste momento não precisamos mais pensar na primeira linha pois o pivô dessa linha é o único na sua coluna. Temos de nos preocupar com as outras colunas, nomeadamente a segunda que tem dois pivôs. Vamos escolher ficar com o pivô da segunda linha e eliminar o da terceira linha. Assim, chegamos à matrz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & 7 & 10 \\ 0 & -11 & 7 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que está pivotada/escalonada.

Observação:

Não existe um único caminho para pivotar/escalonar uma matriz. Mas algumas dicas podem ajudar a simplificar as contas.

- Sempre que uma linha tenha um fator comum a todos os elementos, devemos dividir essa linha por esse fator. Foi o que fizemos no segundo passo no exemplo anterior.

- Sempre que possível devemos escolher o pivô igual a 1 ou -1 para anular os restantes. É claro que nem sempre o número 1 ou -1 é um pivô. Mas existem várias maneira de o alterar para ser o 1 ou -1. Uma delas é dividir pelo próprio pivô. O problema neste caso é ficar com frações nos restantes elementos dessa linha. Mas recorrendo à aritmética, é quase sempre possível passar o pivô a 1 ou -1.

Vejamos um exemplo onde aplicamos as dicas dadas.

Exemplo 1.5.8

Vamos pivotar a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & -9 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

A primeira coluna com pivôs é outra vez a primeira e nenhum dos pivôs é igual a 1. Qual é o pivô que devemos escolher. Observe que se dividirmos qualquer uma das linhas pelo pivô dessa linha, teremos um pivô igual a, mas ao mesmo tempo ficamos com frações. Para quem não tiver problemas de trabalhar com frações, este é um caminho. Mas para quem não quiser trabalhar com frações podemos "criar" um 1 de várias formas. Por exemplo, subtraindo à primeira linha a segunda. Assim, podemos fazer

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & -9 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 2L_2]{L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -12 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observe que aproveitámos para anular o pivô da linha 3 com o da linha 2. Agora já temos um pivô igual a 1. Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & -12 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 3 & -9 & 27 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Os próximos pivôs são o 3 e -7. Observe que a segunda linha é múltipla de 3. Assim, podemos dividir esta linha por 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 3 & -9 & 27 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{L_2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & -7 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+7L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -20 & 60 \end{bmatrix}.$$

Neste momento a matriz já está pivotada e até escalonada! Vemos que $\text{Car}(A) = 3$ e, se chamarmos de B a matriz escalonada, podemos escrever

$$E_{32}(7)M_2\left(\frac{1}{3}\right)E_{21}(-2)E_{12}(-1)E_{32}(-2)A = B.$$

Observe duas coisas: as matrizes elementares vêm do lado esquerdo (operações elementares sobre linhas) e as primeiras são as que estão mais próximas da matriz A; as duas primeiras operações são efetuadas independentemente uma da outra, e por este motivo, comutam. Ou seja, também poderíamos ter escrito

$$E_{32}(7)\left(\frac{1}{3}\right)E_{21}(-2)E_{32}(-2)E_{12}(-1)A = B.$$

Exercício 1.5.5

Considere as seguintes matrizes. Transforme cada uma delas numa matriz equivalente por linhas escalonada.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 11 & 12 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 5 \\ 3 & -9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & 8 \\ -4 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

Exercício 1.5.6

Determine a característica da seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.5.7

Encontre uma sequência de matrizes elementares $E_1, \ldots, E_r$ tais que a matriz $E_r \cdots E_1 A$ seja uma matriz escalonada, onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Um exercício típico em Álgebra Linear consistem e determinar a característica de uma matriz que depende de parâmetros. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.5.9

Vamos determinar a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ \alpha & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

em função do parâmetro α.
Como já vimos, para determinar a característica de uma matriz temos de obter uma equivalente por linhas que esteja pivotada. Vamos então pivotar a matriz começando pela primeira coluna. Na escolha do pivô para anular os restantes elementos, não convém escolher elementos com parâmetros. Observe que α só é um pivô se considerarmos que seja diferente de zero. Mas à partida não existe qualquer restrição!
Assim, vamos escolher o 1 que está na posição $(1, 2)$ para pivô. Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ \alpha & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - \alpha L_1]{L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 & 2 - \alpha \end{bmatrix}.$$

O próximo pivô que vamos escolher é o 1 na posição $(2, 2)$. Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha - 1 & 2 - 2\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 & 2 - \alpha \end{bmatrix}.$$

Neste momento temos dois pivôs nas posições $(1, 1)$ e $(2, 2)$, e um terceiro candidato a pivô. Dizemos que é candidato porque ainda vai depender do valor de α. Não pode haver mais!
Se $\alpha - 2 \neq 0$, ou seja, $\alpha \neq 2$, o terceiro elemento é um pivô e temos que a característica de A é 3. O que acontece quando $\alpha = 2$? Basta substituir na matriz pivotada e contar os pivôs. Assim, substituindo α por 2, temos,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e passamos a ter apenas dois pivôs. Resumindo, podemos dizer

$$\mathrm{Car}(A) = \begin{cases} 2, & \text{se } \alpha = 2 \\ 3, & \text{se } \alpha \neq 2 \end{cases}.$$

Exercício 1.5.8

Determine a característica das seguintes matrizes em função dos parâmetros α, β.

a) $\begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Como vimos, não existe uma única forma de escalonar uma matriz. No entanto, existe ainda outra forma mais "simples" e que está diretamente relacionada com a matriz inversa quando esta existe. Vejamos a sua definição.

Definição 1.5.7 (Forma escalonada reduzida)

Dizemos que uma matriz está na **forma escalonada reduzida** se estiver na forma escalonada, os pivôs forem todos iguais a 1 e os restantes elementos nas colunas com pivô forem nulos. A **escalonada reduzida** de uma matriz A é uma matriz na forma escalonada reduzida equivalente por linhas a A. Vamos representar a escalonada reduzida de A por $\text{rref}(A)$[a].

[a] O nome desta função `rref` vem do inglês *row reduced echlon form* que significa naturalmente *forma escalonada reduzida por linhas*.

Exemplo 1.5.10

Considere novamente as matrizes do Exemplo 5. Como a matriz A não está na forma escalonada, também não pode estar na forma escalonada reduzida. Já a matriz B está na forma escalonada e mais ainda, também está na forma escalonada reduzida porque os pivôs são iguais a 1 e o outro elemento nas colunas com pivô, as colunas 1 e 4, é igual a zero.

Exercício 1.5.9

Identifique as matrizes que estão na forma escalonada reduzida.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vamos ver que escalonada reduzida de A é única porque recorrermos apenas a operações elementares sobre linhas.

Teorema 1.5.7

Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida.

Demostração:

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Vamos supor que existem duas matrizes distintas, $B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tais que $B = \operatorname{rref}(A)$ e $C = \operatorname{rref}(A)$. Portanto, devem existir duas sequências distintas de operações elementares

$$A \xrightarrow{\text{sequência 1}} B$$

e

$$A \xrightarrow{\text{sequência 2}} C.$$

Já sabemos que os pivôs de ambas as matrizes B e C têm de ser o mesmo em número e ocupar as mesmas colunas. Vamos provar que as colunas sem pivô de B e C têm de ser iguais.

Consideremos a matriz

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2m\times n}(\mathbb{R}).$$

É fácil ver que $\operatorname{Car}(\widetilde{A}) = \operatorname{Car}(A)$. Basta efetuar as operações elementares sobre linhas

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \xrightarrow[i=1,\dots,m]{L_{i+m}-L_i} \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, efetuando a sequência 1 nas primeiras m linhas de $\widetilde{A}$ e a sequência 2 nas últimas m linhas, obtemos

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{sequência 2}]{\text{sequência 1}} \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}.$$

Agora, subtraindo as linhas, temos

$$\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} \xrightarrow[i=1,\dots,m]{L_{i+m}-L_i} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}.$$

Como os pivôs de B e C estão na mesma coluna e o número dos pivôs de B é igual a $\operatorname{Car}(A)$, as colunas de D correspondentes aos pivôs de B deverão ser nulas. As restantes se não forem nulas, iríamos ter novos pivôs e $\operatorname{Car}(\widetilde{A}) > \operatorname{Car}(A)$, o que é impossível. Logo, $D = 0$, de onde concluímos que $B = C$ e a escalonada reduzida de A é única. $\square$

Para obter a forma escalonada reduzida de uma matriz é continuar o processo de escalonação. Isto é, cada pivô vai anular os restantes elementos não nulos na coluna desse pivô e se o pivô ainda não for igual a 1, no final temos de dividir a linha desse pivô pelo próprio pivô.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.5.11

Vamos retomar o Exemplo 1.5.8. Partindo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & -8 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

chegámos à matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -20 & 60 \end{bmatrix}.$$

Vamos continuar o processo para encontrar a $\text{rref}(A)$. Observe que a primeira coluna está bem, ou seja, o pivô é igual a 1 e os restantes elementos da coluna são iguais a zero. Passemos à segunda coluna. O pivô também já é igual a 1, mas ainda falta anular o elemento da posição $(1, 2)$. Assim, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -20 & 60 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -20 & 60 \end{bmatrix},$$

e ficamos também com a segunda coluna pronta. Mas ainda temos um pivô na terceira coluna. Neste caso o pivô não é igual a 1. Observe que é muito fácil passá-lo a 1. Basta dividir por -20. Assim, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -20 & 60 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{L_3}{-20}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

e agora fica fácil anular os restantes elementos desta coluna. Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 + 3L_3]{L_1 - 7L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Como já não há mais pivôs, o processo terminou e chegámos à escalonada reduzida de A,

$$\text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.5.12

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 6 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \beta & \alpha\beta & 5 \\ 2 & \beta & 2 \end{bmatrix}.$$

Vamos ver se existem valores para α e β tais que as matrizes A e B sejam equivalentes por linhas.

A maneira mais fácil de ver se são equivalentes por linhas é determinar as condições para que rref(A) = rref(B). Vamos determinar a escalonada reduzida de cada uma delas. Para a matriz A, temos as seguintes operações elementares:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 6 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-3L_1]{L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-L_2]{L_1+3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para a matriz B temos:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \beta & \alpha\beta & 5 \\ 2 & \beta & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-2L_1]{L_2-\beta L_1} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 5-\beta \\ 0 & \beta-2\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz ainda não está na forma escalonada reduzida. No entanto, é fácil verificar que para as escalonadas reduzidas das matrizes A e B sejam iguais, é necessário que $\alpha = 2$ e $\beta - 2\alpha = 0$, ou seja, $\alpha = 2$ e $\beta = 4$. Substituindo estes valores obtemos,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, rref(A) = rref(B) se $\alpha = 2$ e $\beta = 4$.

Exercício 1.5.10

Encontre a escalonada reduzida das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 5 & 5 & 10 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 8 & 1 & 16 \\ 2 & 4 & 3 & 18 \end{bmatrix}$

Exercício 1.5.11

Determine, caso existam, valores de α e β para os quais as matrizes A e B sejam equivalentes por linhas.

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 5 & 5 & 10 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -\alpha-2\beta+3 \\ 1 & 0 & \alpha+1 \\ -1 & -2 & -\alpha+2\beta-5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1+\alpha \\ \alpha-3 & \alpha^2-2\alpha-1 & -3-2\alpha \\ 3 & 3\alpha & \alpha^2+4\alpha+3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 8 & 1 & 16 \\ 2 & 4 & 3 & 18 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & 7 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 & 3\alpha+4 \\ \beta & 6 & \alpha & 3\beta+4\alpha \end{bmatrix}$

1.6 Critérios de invertibilidade

Na Seção 3 apresentámos a definição de inversa de uma matriz quadrada. Como vimos, nem todas as matrizes têm inversa. Mas há algumas em que é fácil reconhecer que não tem inversa. De um modo geral, nem sempre é imediato ver se é ou não invertível. Nesta seção vamos apresentar alguns critérios para que uma matriz tenha ou não inversa.

Vamos começar pelos critérios de invertibilidade. Temos o seguinte teorema muito importante que convém ter sempre presente.

Teorema 1.6.1 (Teorema da Invertibilidade)

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A^{-1} existe,
2. $\text{Car}(A) = n$,
3. $\text{rref}(A) = I_n$,
4. a matriz A é um produto de matrizes elementares.

Demostração:

Vamos demonstrar que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ Se A tem inversa, então $AA^{-1} = I_n$. Portanto $\text{Car}(AA^{-1}) = \text{Car}(I_n) = n$. Sejam $E_1, \ldots, E_r$ as matrizes elementares tais que $E_r \cdots E_1 A = \text{rref}(A)$. Como as matrizes elementares não alteram a característica de uma matriz, temos que $\text{Car}(AA^{-1}) = \text{Car}(E_r \cdots E_1 AA^{-1}) = \text{Car}(\text{rref}(A)A^{-1}) = n$. Se a matriz $\text{rref}(A)$ tiver uma linha sem pivô, ou seja nula, essa linha nula multiplicada por A^{-1} produziria uma linha nula. Mas isso não pode acontecer porque a característica de $\text{Car}(\text{rref}(A)A^{-1})$ é máxima. Logo, $\text{Car}(\text{rref}(A)) = n$, o que implica que $\text{Car}(A) = n$.

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ Se $\text{Car}(A) = n$, então a única hipótese que temos é $\text{rref}(A) = I_n$.

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{4}$ Se $\text{rref}(A) = I_n$, então existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_r$ tais que

$$E_r \cdots E_1 A = I_n.$$

Multiplicando a expressão anterior à esquerda pelas inversas das matrizes elementares, temos

$$\begin{aligned} E_1^{-1} \cdots E_r^{-1} E_r \cdots E_1 A &= E_1^{-1} \cdots E_r^{-1} I_n \\ A &= E_1^{-1} \cdots E_r^{-1}, \end{aligned}$$

de onde concluímos que A é um produto de matrizes elementares, já que a inversa de uma matriz elementar é ainda uma matriz elementar.

$\boxed{4} \Rightarrow \boxed{1}$ Se A é um produto de matrizes elementares, então temos

$$A = E_1 \cdots E_r.$$

Multiplicando à esquerda (ou à direita, tanto faz!) pelas inversas das matrizes elementares pela ordem conveniente, temos

$$\begin{aligned} AE_r^{-1}\cdots E_1^{-1} &= E_1\cdots E_r E_r^{-1}\cdots E_1^{-1} \\ &= I_n, \end{aligned}$$

de onde concluímos que A^{-1} existe e temos $A^{-1} = E_r^{-1}\cdots E_1^{-1}$.

$\square$

O teorema anterior não só nos dá critérios de invertibilidade, como também nos dá uma técnica para encontrar, caso exista, a inversa de uma matriz.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.6.1

Consideremos a seguinte matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vamos escrever a inversa de A como um produto de matrizes elementares. Para isso, vamos determinar as operações elementares sobre linhas necessárias para encontrar a rref(A). Temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-2L_1]{L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_2]{L_1+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Observe que neste momento já temos $\mathrm{Car}(A) = 3$ e portanto A^{-1} existe. Continuando o processo de obtenção da rref(A), temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{L_3}{5}]{-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+2L_3]{L_1-3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Traduzindo as operações elementares para matrizes elementares, obtemos

$$E_{23}(2)E_{13}(-3)M_3\left(\frac{1}{5}\right)M_2(-1)E_{32}(1)E_{12}(1)E_{31}(-2)E_{21}(-2)A = I_3,$$

de onde concluímos que

$$A^{-1} = E_{23}(2)E_{13}(-3)M_3\left(\frac{1}{5}\right)M_2(-1)E_{32}(1)E_{12}(1)E_{31}(-2)E_{21}(-2).$$

Se efetuarmos estas operações elementares, começando por exemplo da direita para a esquerda, vamos obter a inversa de A.

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= E_{23}(2)E_{13}(-3)M_3\left(\frac{1}{5}\right)M_2(-1)E_{32}(1)E_{12}(1)E_{31}(-2)E_{21}(-2)\\
&= E_{23}(2)E_{13}(-3)M_3\left(\frac{1}{5}\right)M_2(-1)E_{32}(1)E_{12}(1)E_{31}(-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= E_{23}(2)E_{13}(-3)M_3\left(\frac{1}{5}\right)M_2(-1)E_{32}(1)E_{12}(1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= E_{23}(2)E_{13}(-3)M_3\left(\frac{1}{5}\right)M_2(-1)E_{32}(1)\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= E_{23}(2)E_{13}(-3)M_3\left(\frac{1}{5}\right)M_2(-1)\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{bmatrix}\\
&= E_{23}(2)E_{13}(-3)M_3\left(\frac{1}{5}\right)\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{bmatrix}\\
&= E_{23}(2)E_{13}(-3)\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\\
&= E_{23}(2)\begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5}\\ 2 & -1 & 0\\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 2\\ -4 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

No próximo capítulo vamos mostrar um método mais prático de encontrar a inversa recorrendo também às operações elementares.

Vejamos outro exemplo, mas desta vez a envolvendo parâmteros.

Exemplo 1.6.2

Pretendemos determinar para que valores de α existe a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0\\ \alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 2\end{bmatrix}.$$

Para estudar a invertibilidade da matriz A, basta estudar a característica da matriz A em função de α. Escalonando a matriz A, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-L_1]{L_2-\alpha L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-2\alpha & 1 \\ 0 & \alpha-2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & \alpha-2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{L_2}{-3}}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & \alpha-2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-(\alpha-2)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5\alpha-4}{3} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz A vai ter inversa se $\mathrm{Car}(A) = 3$, ou seja, se $5\alpha - 4 \neq 0$. Assim, podemos afirmar que A^{-1} se $\alpha \neq \frac{4}{5}$.

Exercício 1.6.1

Sejam P uma matriz invertível e $A = PBP^{-1}$. Determine B em função de A e P.

Exercício 1.6.2

Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tais que $(B - C)D = 0$ e D invertível. Mostre que $D(B - C) = 0$.

Exercício 1.6.3

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tais que B e AB são matrizes invertíveis. Mostre que A também é invertível.

Exercício 1.6.4

Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrizes invertíveis. Mostre que ABC também é invertível e indique a inversa como produto das inversas de A, B e C.

Exercício 1.6.5

Prove que todas as matrizes quadradas de ordem n invertíveis são equivalentes por linhas.

Exercício 1.6.6

Verifique se as seguintes matrizes são invertíveis. Em caso afirmativo, indique a inversa na forma de produto de matrizes elementares.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 9 & 9 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 9 \\ 2 & -7 & 10 \\ -3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & -5 & 10 \\ 1 & 0 & -8 & -1 \end{bmatrix}$ f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

Exercício 1.6.7

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre uma matriz $D \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $AD = I_2$. Será que D é única? Será possível encontrar uma matriz $C \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $CA = I_4$? Justifique a sua resposta!

Exercício 1.6.8

Estude a invertibilidade das seguintes matrizes em função dos parâmetros.

a) $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5+\alpha \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 & \beta \\ 1 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vamos agora ver algumas situações em que é fácil concluir que a matriz não é invertível.

Teorema 1.6.2

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se alguma das condições seguintes se verificar, então a matriz A não é invertível:

1. a matriz A tem uma linha nula;
2. a matriz A tem duas linhas múltiplas;
3. a matriz A tem uma linha que é uma combinação linear das restantes.

Demostração:

1. Se A tem uma linha nula, então $\mathrm{Car}(A) < n$ e pelo Teorema da Invertibilidade concluímos que A não é invertível.

2. Se A tem duas linhas múltiplas, $L_j = \beta L_i$, então a operação elementar sobre linha $L_j - \beta L_i$ produz uma linha nula e pela alínea naterior concluímos que A não é invertível.

3 Se A tem uma linha que é uma combinação linear das restantes,

$$L_j = \sum_{k \neq j} \beta_k L_k,$$

então fazendo sucessivamente as operações elementares sobre linhas

$$L_j - \beta_k L_k,$$

para $k = 1 \ldots n$ e $k \neq j$, obtemos novamente uma linha nula, de onde concluímos que A não é invertível.

$\square$

Observação:

Relativamente ao teorema anterior, as duas primeiras condições são muito fáceis de observar. Já a terceira só em poucos casos é que é possível "advinhar" a combinação linear.
O teorema anterior também é válido se substituirmos a palavra <u>linha</u> por <u>coluna</u>, porque $\mathrm{Car}(A^T) = \mathrm{Car}(A)$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.6.3

Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & -6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

As três matrizes não são invertíveis. A matriz A não é invertível porque tem uma coluna nula. A matriz B não tem inversa porque a terceira linha é -2 vezes a primeira linha. Finalmente, e a mais difícil de vislumbrar, a matriz C não tem inversa porque, por exemplo, a terceira linha é a soma (combinação linear!) das outras duas, ou seja, $L_3 = L_1 + L_2$. Observe que também poderíamos ter argumentado que a primeira linha é uma combinação linear das outras duas, nomeadamente, $L_1 = L_3 - L_2$.

Exercício 1.6.9

Observe as seguintes matrizes e justifique o porquê de não serem invertíveis.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & -2 \\ -4 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & -3 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -8 & -1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Capítulo 1 - Exercícios Suplementares

Para os Exercícios **1**-**5**, considere a seguinte matriz

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 6 & 4 & -4 & -3 & -2 & -2 & -4 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & -3 & 5 & -5 & 4 & 6 & 9 & -5 \\ 1 & 5 & -1 & -4 & 6 & -2 & -4 & 0 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & -6 & 8 & 5 & 10 & 2 & -5 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & -2 & 3 & -5 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ -5 & 4 & 5 & -4 & -1 & -1 & 5 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & 0 & 6 & 6 & 9 & 6 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 2 & -3 & 9 & 1 & 1 & 10 & -5 \\ 7 & 5 & -3 & 9 & 8 & 4 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 3 & 5 & -5 & 7 & 6 & -4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

1 Determine os seguintes elementos da matriz A:

a) a_{12} b) a_{25} c) a_{53} d) a_{37} e) a_{66}
f) a_{74} g) a_{59} h) $a_{10,2}$ i) $a_{9,10}$ j) a_{98}

2 Determine as seguintes matrizes:

a) $A_1 = G[1,3,5|2,4]$
b) $B_1 = G(1,\ldots,5,7|2,6,\ldots,10)$
c) $C_1 = G[2,7|5,9]$
d) $A_2 = G[8,9|2,4,6]$
e) $B_2 = G[4,7,10|1,5,10]$
f) $C_2 = G[1|1,3,6,9]$
g) $A_3 = G(.|2,\ldots,9)$
h) $B_3 = G[1|1,\ldots,10]$
i) $C_3 = G[3,6,8|1,2]$
j) $A_4 = G(6,7,9|2,\ldots,8)$

3 Determine o tamanhos das matrizes do Exercício **5**.

4 Identifique as matrizes quadradas do Exercício **5**.

5 Efetue, caso seja possível, as seguintes operações:

a) $A_1 + C_3$ b) B_1C_2 c) C_2B_1
d) $B_3 + C_3A_1$ e) $2C_1 - 4I_2$ f) A_3B_3
g) B_3A_3 h) $2A_2C_3 + C_1$ i) $A_2B_2C_3$

6 Construa as matrizes com base no elemento genérico:

a) $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}), \quad a_{ij} = 1 + ij$
b) $A \in \mathcal{M}_{2}(\mathbb{R}), \quad a_{ij} = j^2 \mod (i+1)$
c) $A \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R}), \quad a_{ij} = i(1+j)$
d) $A \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{R}), \quad a_{ij} = (j+\frac{1}{2})^{(}i-1)$
e) $A \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R}), \quad a_{ij} = \begin{cases} i+1 & \text{, se } i \leq j \\ j-1 & \text{, se } i > j \end{cases}$

f) $A \in \mathcal{M}_{5\times 6}(\mathbb{R}), \quad a_{ij} = \begin{cases} i-j+1 & , \text{ se } i \text{ ímpar} \\ |2i-5j| & , \text{ caso contrário} \end{cases}$

g) $A \in \mathcal{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}), \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j+1 \\ -1 & , \text{ se } i \neq j+1 \end{cases}$

h) $A \in \mathcal{M}_{4}(\mathbb{R}), \quad a_{ij} = \begin{cases} ij - i^{j-1} & , \text{ se } i+j \text{ par} \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$

7 Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$. Prove que para calcular o produto AB são necessárias mnp multiplicações e $m(n-1)p$ adições.

8 Sejam $A \in \mathcal{M}_{6\times 5}$, $B \in \mathcal{M}_{5\times 7}$ e $C \in \mathcal{M}_{7\times 4}$. Vamos supor que A tem três linhas iguais e que B tem uma coluna nula. Tendo em conta que para linhas iguais não é necessário repetir as operações e que para colunas não há contas a fazer, determine o número de multiplicações e adições para calcular o produto ACB. E se fosse BA?

9 Mostre que se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz escalar e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, então $AB = BA$.

10 Mostre que se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ e $\operatorname{tr}(A) = 0$, então A^2 é uma matriz escalar.

11 Mostre que se $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, então $(AB - BC)^2 C = C(AB - BC)^2$.

12 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Prove que é impossível que $AB - BA = I$.

13 Simplifique as seguintes expressões onde A, B, C são matrizes:

a) $5\,[2(A + C - B) - 3(B + 2C)] - [-3(3A + 2B - C) + 4(2A + B - 3C)]$

b) $-\,[3(A - C) - 4(A + B - 3C)] + [-2(2A + 3B - 2C) + 5(A + 2B - C)]$

c) $A(3B{-}C) + (A{-}2B)C + 2B(C + 2A)$

d) $(A + B)(B{-}2C) + (3A{-}B)B + B(2C - 3A)$

14 Encontre a matriz A para cada equação seguinte:

a) $\left(A - 2\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 2A^T$

b) $2A + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \left(A^T + A + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + I\right)^T$

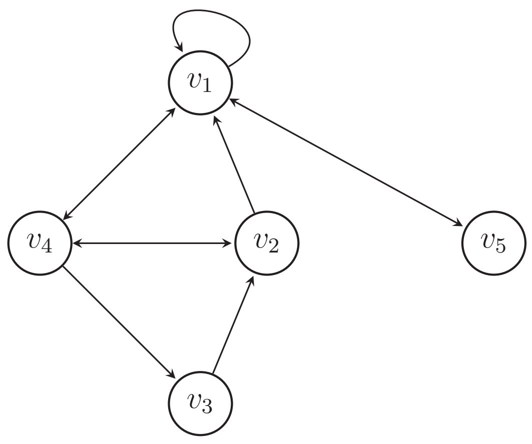
c) $2\left(3A + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\right)^T = 0$

d) $\left(A + \left(A^T + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right)^T\right)^T = A^T + \begin{bmatrix} 7 & -6 & 8 \end{bmatrix}$

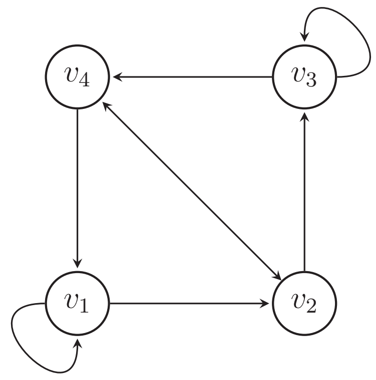
e) $\left(2A + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^T = A^T + 3I$

15 Para cada um dos seguintes grafos, determine o número de caminhos de comprimento k a ligar o vértice i ao j.

a) $k = 3$, $i = 2$, $j = 5$ b) $k = 4$, $i = 1$, $j = 1$



c) $k = 4$, $i = 4$, $j = 4$ d) $k = 4$, $i = 1$, $j = 3$



16 Encontre a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} k+7 & k+6 \\ k+8 & k+7 \end{bmatrix}$.

Capítulo 2

Sistemas de Equações Lineares

Muitos problemas em várias áreas do conhecimento recorrem à resolução de sistemas de equações. Alguns sistemas de equações são tão simples que podem ser resolvidos de várias formas. À medida que os sistemas se complicam, quer pelo número de equações, quer pelo número de incógnitas, ou ambos, é importante termos um método de resolução que seja compacto e sistemático.

Neste capítulo, vamos estudar alguns métodos para resolve um sistema de equações lineares. Existem vários métodos de resolução: o *método da substituição*, provavelmente o mais familiar para o aluno, remonta a tempos longínquos; o *método da eliminação*, embora já exista há muitos séculos foi sistematizado por Karl Fredrich Gauss ($1777-1855$) e Camile Jordan ($1838-1922$). Este último método conduziu, de uma maneira natural, ao *método matricial*, muito utilizado nos computadores para resolver sistemas de grande dimensão.

Veremos que o método matricial é o mais importante, porque permite resolver e classificar os sistemas de equações de uma maneira compacta e sistemática.

2.1 Definições

A resolução de sistemas de equações lineares é um problema central em Álgebra Linear. Esta problemática vai aparecer nos capítulos referentes aos espaços vetoriais, às transformações lineares e valores e vetores próprios.

Comecemos por introduzir os conceitos básicos.

Definição 2.1.1 (Equação linear)

Uma **equação linear** com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$, é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{2.1}$$

onde que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são escalares pertencentes a $\mathbb{K}$. Aos escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ chamamos de **coeficientes** e a b chamamos **termo independente**.

Uma **solução** da equação (2.1) é um *n-úplo*, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$, que verifica a equação, isto é, tal que

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_nx\beta_n = b.$$

Definição 2.1.2 (Sistema de equações lineares)

Um **sistema de equações lineares** sobre $\mathbb{K}$, ou simplesmente **sistema de equações**, com n incógnitas, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. é conjunto finito de m equações lineares, $m \geq 1$, que podemos escrever na forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. . \tag{2.2}$$

Se os termos independentes forem todos iguais a zero, dizemos que o sistema de equações é **homogéneo**.

Uma **solução** do sistema de equações (2.2) é um n-*úplo*, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$, que verifica em simultâneo as m equações. Ao conjunto de todas as soluções chamamos **conjunto solução**.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.1.1

Seja

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Trata-se de um sistema de 3 equações e 4 incógnitas. É fácil verificar que $(1, 1, 1, 1)$ é uma solução, pois $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ satisfaz em simultâneo as três equações.

Exercício 2.1.1

Verifique se o n-úplo dado é solução do respectivo sistema de equações:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} 7x_1 + x_2 & = & 4 \\ 9x_1 + 2x_2 & = & -2 \end{array}\right.$ e $(2, -10)$.

b) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_3 & = & -1 \end{array}\right.$ e $(0, 0, 0)$.

c) $\left\{\begin{array}{rcl} x + y - z & = & 2 \\ x + 2y - z & = & 6 \\ y + z & = & 4 \end{array}\right.$ e $(4, 2, 2)$.

d) $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 3 \\ 2x - y & = & 5 \\ 3x + y & = & 9 \end{array}\right.$ e $(4, 2)$.

Usando a multiplicação de matrizes é possível escrever qualquer sistema de equações na forma de uma equação matricial.

Definição 2.1.3 (Notação matricial)

Seja (S) o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. . \tag{2.3}$$

A **forma matricial** de (S) é $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

À matriz A chamamos **matriz dos coeficientes**, à matriz X **matriz das incógnitas** e à matriz B **matriz dos termos independentes**.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.1.2

Seja

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

A forma matricial deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.1.2

Escreva a forma matricial de cada um dos seguintes sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} 7x_1 + x_2 & = & 4 \\ 9x_1 + 2x_2 & = & -2 \end{array}\right. .$

b) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_3 & = & -1 \end{array}\right. .$

c) $\left\{\begin{array}{rcl} x + y - z & = & 2 \\ x + 2y - z & = & 6 \\ y + z & = & 4 \end{array}\right. .$

d) $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 3 \\ 2x - y & = & 5 \\ 3x + y & = & 9 \end{array}\right.$

Observação:

A partir deste momento, temos de ter presente que TODO sistema pode ser escrito na forma matricial $AX = B$. Reciprocamente, sempre que tivermos uma equação matricial $AX = B$, temos também de ter presente que tal equação representa um sistema de equações.

Os sistemas de equações podem ser classificados em função do número de soluções. Como veremos a seguir, só existem três possibilidades.

Definição 2.1.4 (Classificação de sistemas de equações)

Seja (S) um sistema de m equações com n incógnitas. Dizemos que o sistema de equações (S) é **impossível** se não existe solução, ou seja, se não existe qualquer n-úplo que verifique em simultâneo as m equações. Ou seja, o conjunto solução é vazio. Neste caso classificamos de **sistema impossível** e utilizamos a abreviatura **SI**.

Caso exista pelo menos uma solução, dizemos que o sistema é **possível**. Se o conjunto solução tiver apenas uma solução, classificamos de **sistema possível determinado** e utilizamos a abreviatura **SPD**. Caso contrário, existirão infinitas soluções e classificamos de **sistema possível indeterminado**. A abreviatura neste caso será **SPI**.

Veremos mais adiante que a classificar dos sistemas está intimamente relacionada com os pivôs das matrizes.

Da Definição 2.1.3 pode parecer que a matriz B tem sempre uma única coluna. Ora isso não é necessariamente verdadeiro, embora seja sempre possível escrever nessa forma. Basta pensarmos no problema de determinação da inversa de uma matriz. Seja X a inversa de uma matriz A quadrada de ordem n. Neste momento esta matriz é desconhecida, e portanto uma incógnita. No entanto, sabemos que $AX = I_n$. Observem que estamos com um problema do tipo $AX = B$, e portanto estamos perante um sistema de equações onde a matriz B tem mais do que uma coluna! Isto leva-nos à seguinte definição.

Definição 2.1.5 (Sistemas de equações acoplados)

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$ a matriz dos coeficientes e dos termos independentes, respectivamente, de um sistema de equações lineares, ou seja, $AX = B$ para algum X. Dizemos que o sistema é **acoplado** se puder ser escrito tal que $r > 1$, ou seja, se a matriz B tiver mais do que uma coluna.

Observação:

Vejamos mais em pormenor o motivo para esta definição. Consideremos novamente o problema de encontrar a inversa de uma matriz. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

onde X é a inversa (desconhecida neste momento!) de A. Portanto, $AX = I$ e temos

$$\begin{aligned} AX &= I \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+5c & 2b+5d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde tiramos o sistema

$$\begin{cases} a+2c &= 1 \\ 2a+5c &= 0 \\ b+2d &= 0 \\ 2b+5d &= 1 \end{cases}.$$

Trata-se de um sistema de quatro equações e quatro incógnitas. Mas observe que é um sistema "especial" porque as incógnitas não se misturam. É como se tivéssemos dois sistemas de duas equações e duas incógnitas cada um,

$$\begin{cases} \begin{cases} a+2c &= 1 \\ 2a+5c &= 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b+2d &= 0 \\ 2b+5d &= 1 \end{cases} \end{cases},$$

acoplados pela mesma matriz dos coeficientes A.

Se observarmos com atenção, podemos ainda ir mais longe na simplificação da representação matricial. Desde que saibamos quais são as incógnitas e em que ordem aparecem na matriz X, esta matriz é desnecessária. Cada coluna da matriz dos coeficientes A representa uma ou mais dessas incógnitas, consoante o sistema seja ou não acoplado. Assim, surge naturalmente a seguinte definição.

Definição 2.1.6 (Matriz ampliada do sistema)

Seja $AX = B$ a forma matricial de um sistema de equações, tal que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$. A **matriz ampliada** do sistema é

$$[A|B]\,,$$

onde a barra vertical indica apenas a separação entre as duas matrizes.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.1.3

Seja

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-3x_3+x_4 & = & 1 \\ 2x_1-x_2-x_3+3x_4 & = & 3 \\ 3x_1+x_2-2x_3-2x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Como vimos no Exemplo 2.1.2, a forma matricial deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz ampliada do sistema é

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Exercício 2.1.3

Escreva a matriz ampliada de cada um dos seguintes sistemas, tendo em conta a ordem lexicográfica das incógnitas:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} 7x_1+x_2 & = & 4 \\ 9x_1+2x_2 & = & -2 \end{array}\right. .$

b) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3 & = & 0 \\ x_1+2x_2-x_3 & = & 0 \\ 2x_1-3x_3 & = & -1 \end{array}\right. .$

c) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 2 \\ x+2y-z & = & 6 \\ y+z & = & 4 \end{array}\right. .$

d) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 3 \\ 2x-y & = & 5 \\ 3x+y & = & 9 \end{array}\right.$

Observação:

Se tivermos um sistema com, por exemplo, três incógnitas, x, y e z, e as colunas da matriz dos coeficientes do respectivo sistema esteja associadas às incógnitas e por esta ordem, então, dada a matriz ampliada do sistema, somos capazes de obter o sistema. Por exemplo, se a matriz ampliada for

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

podemos facilmente verificar que o sistema em causa é

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 0 \\ -2x+2y & = & -1 \\ 3x+3y+z & = & 2 \end{array}\right. .$$

Neste caso, cada linha da matriz ampliada representa uma equação do sistema em causa.

Observação:

No caso de uma matriz ampliada de um sistema acoplado, temos de ter em conta que cada linha corresponde a mais do que uma equação. Por exemplo, se a matriz ampliada for

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

então iremos ter quatro equações e quatro incógnitas. É como se tivéssemos dois sistemas com as seguintes matrizes ampliadas

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{array}\right].$$

Se as incógnitas forem a e c para o primeiro sistema e b e d para o segundo, as equações são

$$\begin{cases} a + 2c &= 1 \\ 2a + 5c &= 0 \\ b + 2d &= 0 \\ 2b + 5d &= 1 \end{cases}.$$

Exercício 2.1.4

Sejam $A \in \mathcal{M}_{8\times5}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{8\times7}(\mathbb{R})$ a matriz dos coeficientes e dos termos independentes, respectivamente, do sistema $AX = B$. Determine o número de incógnitas e de equações deste sistema.

Exercício 2.1.5

Considere a seguinte matriz ampliada de algum sistema

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Determine o número de incógnitas e de equações deste sistema.

As operações elementares apresentadas na Definição 1.4.1 foram definidas sobre linhas. Mas como cada linha de uma matriz ampliada representa uma ou mais equações, podemos estender a definição às equações.

Definição 2.1.7 (Operações elementares sobre equações)

Existem três **operações elementares sobre equações**:

1. Permutação de equações;
2. Multiplicação de uma equação por um escalar não nulo;
3. Somar a uma equação um múltiplo de outra equação.

A demonstração do seguinte teorema é imediata.

Teorema 2.1.1

As operações elementares sobre as equações de um sistema de equações não alteram o conjunto solução.

Para simplificar a escrita introduzimos mais uma definição.

Definição 2.1.8 (Sistemas equivalentes)

Dois sistemas são **equivalentes** se têm o mesmo conjunto solução.

Assim, para encontrar o conjunto solução de um sistema de equações, aquilo que fazemos é manipular as equações recorrendo a estas três operações elementares até obtermos um sistema equivalente na forma mais simples possível, ou seja, na forma escalonada reduzida. Nessa altura teremos a solução do sistema.

Observação:

Seja $AX = B$ um sistema de equações. Já vimos que podemos transformar um sistema acoplado de tal forma que a matriz B tenha apenas uma coluna. Assim, e sem perda de generalidade, vamos supor que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Ao juntarmos à A a matriz B, de modo a obtermos a matriz ampliada $[A|B]$, a característica nunca poderá ser inferior à caracterísitca da própria matriz A. Para a matriz ampliada, a característica ou mantêm-se ou aumenta. Caso aumente é porque irão aparecer pivôs no lado da matriz B. Ora, isso significa que teremos uma equação com todos os coeficientes nulos, mas com termo independente não nulo que poderá sempre ser o número 1 (basta dividir o pivô por ele mesmo!),

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = 1.$$

Esta é uma equação impossível! Portanto, sempre que aparecer um pivô no lado direito da barra que separa as matrizes A e B, o sistema será impossível.
Caso não apareça um pivô no lado direito, o sistema não mais será impossível e naturalmente será possível. Vamos supor que a característica de A é igual ao número de colunas de A, ou seja, rref(A) terá um pivô por coluna. Neste caso, a escalonada reduzida da matriz ampliada será

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right],$$

onde $*$ podem ser quaisquer números. Portanto, cada uma das linhas não nulas da matriz anterior equivale a uma equação com o valor de uma das incógnitas. Caso uma das colunas de A não tenha pivô, iremos ter linhas do tipo $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha & * \end{array}\right]$, que corresponderá à equação $x_{n-1} + \alpha x_n = *$ que admite uma infinidade de soluções.

Esta observação é o princípio da demonstração do seguinte teorema.

Teorema 2.1.2

Seja $AX = B$ um sistema de equações, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$. Se

- $\mathrm{Car}\,([A|B]) > \mathrm{Car}(A)$, então o sistema é impossível (SI);
- $\mathrm{Car}\,([A|B]) = \mathrm{Car}(A)$ e
    - $\mathrm{Car}(A) =$ número de colunas de A, então o sistema é possível determinado (SPD);
    - $\mathrm{Car}(A) <$ número de colunas de A, então o sistema é possível indeterminado (SPI).

Quando estamos a escalonar uma matriz ampliada para encontrar a solução de um sistema de equações, se durante o processo aparecer um pivô no lado dos termos independentes, ou seja, à direita da barra divisória, não precisamos continuar o processo de escalonamento porque o sistema é impossível. Caso contrário, podemos continuar até chegar à escalonada reduzida porque corresponde a forma mais simples do sistema.

Definição 2.1.9 (Graus de liberdade ou indeterminação)

Seja $AX = B$ um sistema de equações, tal que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$. Se o sistema for possível, o **grau de liberdade** ou **grau de indeterminação** é igual $nr - \mathrm{Car}(A)r = (n - \mathrm{Car}(A))\, r$.

Definição 2.1.10 (Incógnitas básicas e livres)

Seja $AX = B$ um sistema de equações, tal que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$. Quando o sistema é possível indeterminado, o grau de indeterminação é maior do que zero. Neste caso, às incógnitas a que correspondem os pivôs chamamos de **básicas** e às que não têm pivô chamamos **livres**.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.1.4 (Sistema possível determinado)

Pretendemos encontrar a solução do sistema

$$\begin{cases} x + y &= 5 \\ x - y &= 7 \end{cases}.$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

cuja matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{array}\right].$$

A solução é mais fácil de obter se tivermos o sistema na sua forma mais simples e que corresponde à forma escalonada reduzida da matriz ampliada. Assim, temos

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{L_2}{-2}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - L_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Portanto, a escalonada reduzida tem dois pivôs. Como não estão no lado dos termos independentes concluímos que o sistema é possível. Além disso, como a matriz dos coeficientes tem um pivô por coluna, não existem variáveis livres, ou seja, o grau de indeterminação é zero o que significa que o sistema é possível determinado (SPD). A solução é dada pelas equações desta última matriz, isto é,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 6 \\ y & = & -1 \end{array}\right. .$$

Exemplo 2.1.5 (Sistema possível indeterminado)

Pretendemos encontrar a solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 5 \\ 2x + 2y & = & 10 \end{array}\right. .$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix},$$

cuja matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 10 \end{array}\right].$$

Escalonamos a matriz ampliada para obter o sistema equivalente na forma mais simples e daí a solução. Assim, temos

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Neste exemplo, a escalonada reduzida tem apenas um pivô no lado esquerdo e portanto concluímos que o sistema é possível. Porém, como a matriz dos coeficientes tem uma coluna sem pivô, vamos ter uma variável livre, ou seja, o grau de indeterminação é um e o sistema é possível indeterminado (SPI). A solução passa por transcrever as equações não triviais (as que não são $0 = 0$) e às incógnitas livres atribuir uma letra grega. Assim, temos

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5 - \alpha \\ y & = & \alpha \end{array}\right. , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.1.6 (Sistema impossível)

Pretendemos encontrar a solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 5 \\ 2x+2y &=& 11 \end{array}\right. .$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix},$$

cuja matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 11 \end{array}\right].$$

Escalonamos a matriz ampliada para obter o sistema equivalente na forma mais simples e daí a solução. Assim, temos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2-2L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Neste exemplo, a escalonada reduzida dois pivôs, mas um deles no lado dos termos independentes. Portanto, concluímos que o sistema é impossível, o sistema não tem solução o que significa que o conjunto solução é vazio.

Exemplo 2.1.7 (Sistema possível determinado)

Pretendemos encontrar a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ recorrendo a um sistema de equações adequado.

A inversa é neste momento uma matriz desconhecida, ou seja, uma matriz incógnita. O sistema adequado é $AX = I$. Assim, a resolução passa por encontrar a escalonada reduzida da matriz ampliada do sistema, ou seja, da matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Escalonando, temos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2-4L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-2L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

A escalonada reduzida tem dois pivôs no lado da matriz dos coeficientes. Portanto o sistema é possível. Além disso, como a matriz dos coeficientes tem duas colunas, não vamos ter incógnitas livres (nem nunca poderíamos, pois isso significaria que existiriam infinitas matrizes inversas!). Ou seja, o sistema é SPD. A solução pode ser obtida passando da matriz ampliada para a respectiva forma matricial, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \iff X = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a inversa da matriz A é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.1.8 (Sistema impossível)

Pretendemos encontrar a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ recorrendo a um sistema de equações adequado. É fácil verificar que não existe a inversa de A porque as linhas são múltiplas e, portanto, $\mathrm{Car}(A) = 1 < 2$. Mas tentemos aplicar o método de Gauss-Jordan. O sistema adequado é novamente $AX = I$. Escalonada a matriz ampliada do sistema, obtemos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - 4L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

A escalonada reduzida tem dois pivôs, mas um deles no lado dos termos independentes. Portanto o sistema é impossível e concluímos que não existe a matriz inversa de A.

Exemplo 2.1.9 (Sistema possível indeterminado)

Pretendemos encontrar o conjunto solução do sistema de equações $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz B é do tipo 3×2, este sistema tem 6 equações. Por outro lado, a matriz X também tem de ser do tipo 2×3 e, portanto, temos 6 incógnitas. Para encontrar a solução deste sistema, vamos escalonar a matriz ampliada. Assim, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 7L_1]{L_2 - 4L_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{L_3}{-6}]{\frac{L_2}{-3}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - L_2]{L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A escalonada reduzida tem dois pivôs, ambos do lados dos coeficientes. Como a terceira coluna da matriz dos coeficientes não tem pivô, concluímos que o sistema é possível indeterminado com dois graus de liberdade, um por cada uma das colunas da matriz dos termos independentes. Ou seja, se

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

as incógnitas correspondentes à terceira coluna da matriz A, z_1 e z_2, são livres. Reescrevendo o sistema de equações na forma matricial, eliminando as equações triviais, temos

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ \hdashline z_1 & z_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Particionando as matrizes conforme indicado acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z_1 & -z_2 \\ 2z_1 & 2z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -z_1 & -z_2 \\ 2z_1 & 2z_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1+z_1 & z_2 \\ -2z_1 & 1-2z_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, a solução é

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha & \beta \\ -2\alpha & 1-2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exercício 2.1.6

Classifique os sistemas de equações e resolva os que forem possíveis.

a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ -8x - 2y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4x + 10y + 10z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 2y + 2z + 3w = 3 \\ x + y + z + w = 1 \\ 3x + 3y + 3z + 2w = 2 \end{cases}$.

Exercício 2.1.7

Sempre que possível, encontre a inversa das seguintes matrizes resolvendo o sistema de equações adequado.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício 2.1.8

Seja (S_1) o sistema de equações $AX = B$. Prove que se P é uma matriz invertível, então o sistema de equações (S_2), dado por $PAX = PB$, é equivalente ao sistema (S_1).

Exercício 2.1.9

Seja $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz triangular superior dada por

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Prove que para toda a matriz A, o sistema $AX = B$ nunca será possível indeterminado.

Para finalizar este capítulo, vamos ver uns exemplos onde o sistema de equações depende de parâmetros. O objetivo será classificar o sistema em função dos parâmetros.

Exemplo 2.1.10

Consideremos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x + y + 3z &= \alpha \\ 2x + 2y - z &= \beta \\ 4x + 4y + 5z &= \alpha + 2\beta \end{cases}.$$

Pretendemos classificar em função dos parâmetros α e β. Para isso, basta escalonar a matriz ampliada do sistema. Assim, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \alpha \\ 2 & 2 & -1 & \beta \\ 4 & 4 & 5 & \alpha + 2\beta \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 4L_1]{L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & -7 & \beta - 2\alpha \\ 0 & 0 & -7 & 2\beta - 3\alpha \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - L_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & -7 & \beta - 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta - \alpha \end{array}\right].$$

A matriz ampliada está escalonada e estamos em condições de classificar o sistema. Se o elemento na terceira linha da última coluna for um pivô, ou seja, se $\beta - \alpha \neq 0$, então o sistema é impossível. Caso contrário, o sistema é possível indeterminado com um grau de indeterminação.

Vejamos outro exemplo.

Exemplo 2.1.11

Consideremos o seguinte sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha x - y - z + (-2\alpha+1)w & = & 1 \\ -x + y + z + w & = & \alpha \\ (\alpha-1)x + y + (\alpha-2)z + 2\alpha w & = & \alpha - 2 \end{array}\right. .$$

Para classificar, basta escalonar a matriz ampliada do sistema. Assim, temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & -1 & -1 & -2\alpha+1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ \alpha-1 & 1 & \alpha-2 & 2\alpha & \alpha-2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-(\alpha-1)L_2]{L_1+\alpha L_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & -\alpha+1 & 1+\alpha^2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1 & \alpha+1 & -\alpha^2+2\alpha-2 \end{array}\right] \xrightarrow{C_{32}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & -\alpha+1 & 1+\alpha^2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & 2-\alpha & \alpha+1 & -\alpha^2+2\alpha-2 \end{array}\right]$$

Observe que na última operação trocámos as colunas para termos um pivô na segunda coluna que não dependesse de α. Esta operação é possível. O que fizemos no sistema foi trocar as incógnitas y e z de posição.
Poderíamos ter adicionado à linha 3 a linha 1 e ficaríamos também com um pivô independente de α.
Continuando o processo de escalonamento, temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & -\alpha+1 & 1+\alpha^2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & 2-\alpha & \alpha+1 & -\alpha^2+2\alpha-2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+(\alpha-1)L_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -\alpha^2+4\alpha-3 & \alpha^2-\alpha & -\alpha^3+4\alpha^2-4\alpha+3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & 2-\alpha & \alpha+1 & -\alpha^2+2\alpha-2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+(\alpha-1)L_3}$$

A matriz ampliada está pivotada. Por isso, é possível classificar porque é possível estudar a característica. Assim , se $-\alpha^2+4\alpha-3 \neq 0$, ou seja, se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 3$, o sistema é possível indeterminado com um grau de indeterminação. Falta ver o que acontece quando $\alpha = 1$ e quando $\alpha = 3$. Para $\alpha = 1$, substituindo na matriz ampliada, temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right],$$

ou seja, o sistema é impossível. Para $\alpha = 3$, temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -5 \end{array}\right],$$

e o sistema é possível indeterminado. Portanto, o sistema é SPI se $\alpha 1$ e SI se $\alpha = 1$.

Exercício 2.1.10

Classifique, em função dos parâmetros, os seguintes sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} x+4y+3z & = & 10 \\ 2x+7y-2z & = & 10 \\ x+5y+\alpha z & = & \beta \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & -6\beta \\ \alpha x+3y+2z & = & 2\beta \\ 2x+y+(\alpha+1)z & = & 4 \end{array}\right.$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & \beta \\ 4 & 3\beta \end{bmatrix}$ d) $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & \alpha & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 3\alpha & 2 & \beta \\ 4 & 7 & \beta & \alpha & 2\beta-1 \end{array}\right]$

Exercício 2.1.11

Seja A uma matriz de coeficientes de um sistema de equações. Se X for a matriz das incógnitas, então AX é uma matriz cujos elementos são combinações lineares das incógnitas (convença-se!). Do mesmo modo, XA também é uma matriz com elementos que são combinações lineares das incógnitas. Assim, $AX = XA$ é um sistema de equações. Prove que o sistema é sempre SPI independentemente da matriz A, indicando pelo menos duas soluções.

Exercício 2.1.12

Prove que se o sistema de equações $AX = B$ e a matriz A for invertível, então o sistema é possível determinado.

Se num sistema $AX = B$ a matriz dos coeficientes A for invertível, então, conhecendo a inversa de A, podemos encontrar a solução do sistema. Com efeito, se A for invertível, pelo Teorema da Invertibilidade, A é um produto de matrizes elementares. Assim, podemos multiplicar à esquerda ambos os membros da equação $AX = B$, pela inversa de A, sem alterar o conjunto solução, obtendo

$$\begin{array}{rcl} AX & = & B \\ A^{-1}AX & = & A^{-1}B \\ IX & = & A^{-1}B \\ X & = & A^{-1}B. \end{array}$$

Ou seja, a solução é $X = A^{-1}B$.

Exemplo 2.1.12

Seja $A=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. Sabendo que $A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ 10 & -7 & 19 \end{bmatrix}$, pretendemos encontrar a solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-5y+4z & = & 6 \\ y+3z & = & -7 \\ -x+3y-z & = & 1 \end{array}\right. .$$

Primeiro temos de reescrever o sistema de modo a que a matriz A seja a matriz dos coeficientes. Observando o sistema e a matriz A, é fácil verificar que a forma matricial do sistema é

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução é

$$\begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ 10 & -7 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 38 \\ 128 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 \\ 38 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 2 - Exercícios Suplementares

1 Escreva o seguinte sistema de equações na forma matricial.

$$\begin{cases} x+3y &= 2x-z+1 \\ y-4z+6 &= -2+x+y+z \\ z+5y-x &= 2 \\ 4 &= 3z-2x \end{cases}.$$

2 Considere a seguinte matriz ampliada do sistema $AX = B$, onde $X = [c\ b\ a]^T$. Escreva as equações do respectivo sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right].$$

3 Classifique os seguintes sistemas de equações e resolva os que forem possíveis.

a) $\begin{cases} 4x+5y &= 1 \\ 12x+15y &= 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y &= 1 \\ x+y &= 1 \\ -2x+3y &= -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y &= 1 \\ 3x-y &= 2 \\ x-y &= 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x+2z &= 1 \\ x+2y &= -1 \\ 2y+2z &= 0 \\ x-2z &= -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3 &= 1 \\ x_1+2x_2+x_3 &= 0 \\ x_1-x_2+x_3 &= 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+x_2+x_3 &= 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2a+b+c+d &= 1 \\ 2a+b-c+d &= 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+z+2w &= 0 \\ 2x+3z+3w &= 0 \\ y+2w &= 2 \\ x+2z+w &= 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2a-b+c &= -1 \\ a+2b+c &= 0 \\ a-3b &= -1 \\ 4a-2b+2c &= -2 \\ -2a+b-c &= 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x_1+x_3+2x_4 &= 0 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4 &= 1 \\ x_2+2x_4 &= 8 \\ x_1+2x_3+x_4 &= 0 \end{cases}$

4 Encontre, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5 Classifique os seguintes sistemas em função dos parâmetros.

a) $\begin{cases} \alpha x+2y &= 1 \\ x+y &= \beta \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y &= 0 \\ 4x+3y &= 5 \\ x+\alpha y &= \alpha \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y+\alpha z &= 1 \\ x-y-z &= 2 \\ -x+2y-2z &= \beta \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+\alpha^2 y+z &= \alpha^2 \\ 2x+2y+(3-\alpha)z &= \beta \end{cases}$

e) $\begin{cases} -y+\alpha z &= -2 \\ \alpha x-2y+4z &= -5 \\ x+y+z &= \alpha \end{cases}$

f) $\begin{cases} -3x+2y &= 3-\alpha \\ 4x-2z &= 2 \\ -4y+3z &= 1 \end{cases}$