UNIVERSIDADE
BEIRA INTERIOR

Cálculo II

Ficha 2

---

1. Considere a função
$$f(x,y)=\ln\big(x^2+y-1\big).$$
   (a) Calcule $f(1,e)$ e $f(1,1)$.
   (b) Determine e esboce o seu domínio.
   (c) -4 está no conjunto imagem de $f(x,y)$?
   (d) Esboce algumas curvas de nível.

2. Considere a função
$$f(x,y)=e^{2x-y+1}.$$
   (a) Calcule $f(0,1)$ e $f(0,0)$.
   (b) Indique o seu domínio e o seu conjunto imagem.
   (c) Esboce algumas curvas de nível.

3. Considere a função
$$f(x,y,z)=\ln\big(25-x^2-y^2-z^2\big).$$
   (a) Calcule $f(2,-2,4)$.
   (b) Determine e esboce o seu domínio.
   (c) 5 está no conjunto imagem de $f(x,y,z)$?
   (d) Esboce algumas superfícies de nível.

4. Determine e faça o esboço do domínio da função.

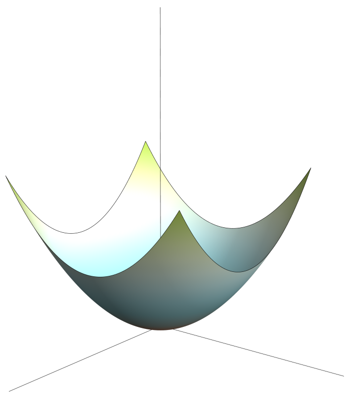
(a) $f(x,y) = \sqrt{yx}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{y+x}\ln\left(9 - x^2 - y^2\right)$

(c) $f(x,y) = \frac{\ln(yx-1)}{2y-x}$

(d) $f(x,y) = \arcsin\left(x^2 + 2y^2 - 4\right)$

5. Considere o gráfico da função $f(x,y)$.



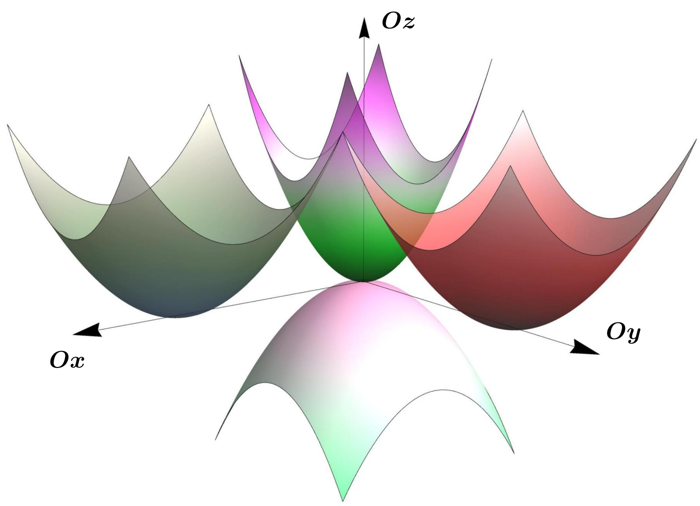
Na figura seguinte, identifique o gráfico da função $g(x,y)$. Justifique a escolha.

(a) $g(x,y) = -f(x,y)$

(b) $g(x,y) = 2f(x,y)$

(c) $g(x,y) = f(x-2,y)$

(d) $g(x,y) = f(x,y-2)$



6. Faça a correspondência entre a função e a representação das suas curvas de nível. Justifique a escolha.

(a) $f(x,y) = |x| + |y|$

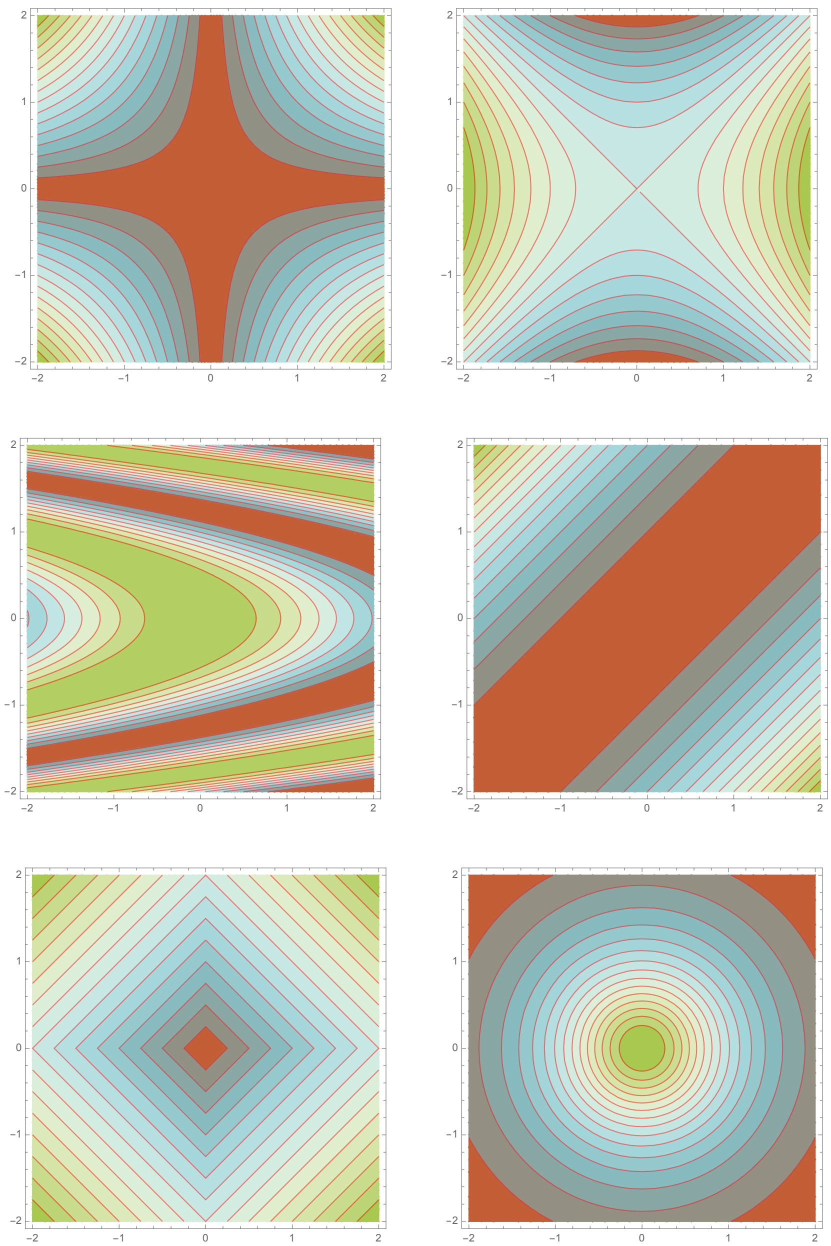
(b) $f(x,y) = |xy|$

(c) $f(x,y) = \cos\left(2y^2 + x\right)$

(d) $f(x,y) = (x-y)^2$

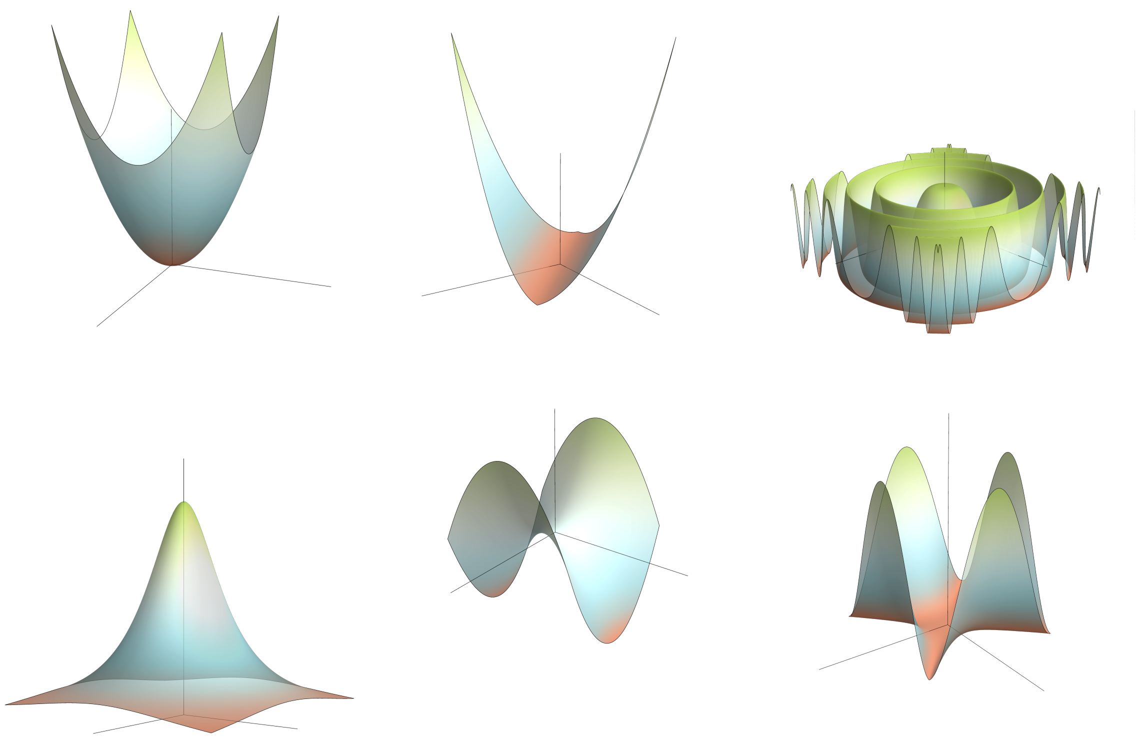
(e) $f(x,y) = x^2 - y^2$

(f) $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$



7. Faça a correspondência entre a função e o seu gráfico. Justifique a escolha.

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$
   (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$
   (c) $f(x, y) = \frac{1}{4+x^2+y^2}$
   (d) $f(x, y) = (x - y)^2$
   (e) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$
   (f) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$



8. Para cada uma das funções do exercício anterior, esboce algumas curvas de nível.

9. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x.y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   Verifique que $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0, 0)$ e determine $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$.

   (a) $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$
   (b) $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$
   (c) $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

   O que conclui sobre a continuidade da função em $(0, 0)$?

10. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x.y) = \begin{cases} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verifique que $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$ e determine $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$.

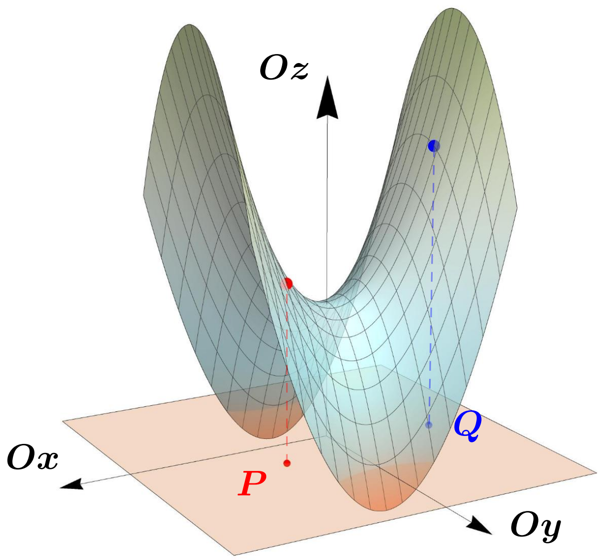
(a) $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ (b) $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0)$ (c) $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{n})$

O que conclui sobre a continuidade da função em $(0,0)$?

11. Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

(a) $f(x,y) = 3x^2y + y^3 + 1$
(b) $f(x,y) = xe^{3y^2}$
(c) $f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+2y}$
(d) $f(x,y) = \cos(x^2y)\sin(y+x)$
(e) $f(x,y,z) = xy\ln\left(z^2+y\right)$
(f) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z}$

12. Determine o sinal das derivadas para a função $f(x,y)$ cujo gráfico se encontra representado na figura seguinte.



(a) $f_x(P)$ (c) $f_x(Q)$ (e) $f_{xx}(P)$ (g) $f_{xx}(Q)$

(b) $f_y(P)$ (d) $f_y(Q)$ (f) $f_{yy}(P)$ (h) $f_{yy}(Q)$

13. Considere a função $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$.

    (a) Esboce o gráfico da função.

    (b) Esboce os gráficos das funções $g(x) = f(x, 2)$ e $h(y) = f(1, y)$.

    (c) Determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$; interprete geometricamente.

14. Considere a função $f(x, y) = e^x \cos y$. A tabela seguinte mostra alguns valores de $f(x, y)$.

	$x = 0$	$x = 0.01$	$x = 0.1$
$y = -0.1$	0.99500	1.00500	1.09965
$y = -0.01$	0.99995	1.01000	1.10512
$y = 0$	1.0	1.01005	1.10517

    (a) Use os valores da tabela para obter dois valores aproximados para $f_x(0, 0)$.

    (b) Use os valores da tabela para obter dois valores aproximados para $f_y(0, 0)$.

    (c) Determine de forma exata $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.

15. O quadro seguinte apresenta alguns valores de uma certa função $f(x, y)$.

	$x = 5$	$x = 10$	$x = 15$	$x = 20$	$x = 25$	$x = 30$
$y = 30$	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
$y = 32$	0.8	0.9	1	1.2	1.4	1.5
$y = 34$	1.0	1.2	1.5	1.8	1.7	1.6
$y = 36$	1.0	1.2	1.5	1.8	1.7	1.6
$y = 38$	0.8	1	1.4	1.3	1.2	1.3
$y = 40$	0.5	0.8	1.3	1.3	1	1.1

    Estime o valor das seguintes derivadas.

    (a) $f_x(15, 30)$ (b) $f_y(20, 36)$ (c) $f_y(25, 36)$ (d) $f_x(10, 38)$

16. Verifique que o Teorema de Clairaut–Schwarz é válido, isto é, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

    (a) $f(x, y) = x \cos(2x - y)$ (b) $f(x, y) = x^2 y e^{2y}$

17. Determine as derivadas parciais indicadas.

    (a) $f(x,y) = 3xy^4 - x^3y^2$; f_{xxy}, f_{yyy}

    (b) $f(x,y,z) = \cos(4x + 2y - 3z)$; f_{xyz}, f_{yzz}

18. Determine a equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y)$ no ponto P.

    (a) $f(x,y) = x^3 + 2y^2$; $P = (-1,2)$

    (b) $f(x,y) = x^2e^y + x$; $P = (1,0)$

19. Determine a aproximação linear da função no ponto indicado.

    (a) $f(x,y) = \ln(x + y^2)$; $P = (0,1)$

    (b) $f(x,y) = e^{x+2y}$; $P = (0,0)$

20. O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respetivamente, com um erro de medida máximo de 0.1 cm. Use uma aproximação linear adequada para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

21. As dimensões de uma caixa retangular fechada foram medidas como 85 cm, 60 cm e 45 cm, com erro máximo de 0.2 cm em cada medição. Estime o erro máximo no cálculo da área da superfície da caixa.

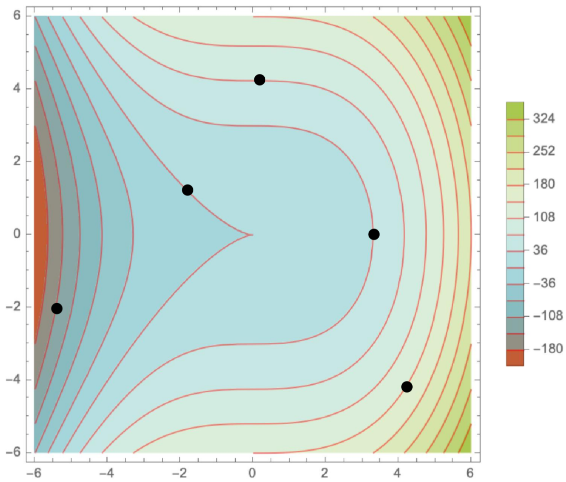
22. Um dos catetos de um triângulo retângulo é medido com 3 cm, com um erro máximo de 0.1 cm, e o outro cateto é medido como 4 cm, com um erro máximo de 0.2 cm. Use uma aproximação linear adequada para estimar o erro máximo no cálculo do comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo.

23. Quatro números positivos, cada um menor que 50, são arredondados até a primeira casa decimal e depois multiplicados. Use uma aproximação linear adequada para estimar o máximo erro possível no cálculo do produto que pode resultar do arredondamento.

24. Encontre um valor aproximado da função $f(x,y) = \sin(\pi xy + \ln y)$ no ponto $(0.01, 1.05)$ sem usar calculadora ou computador.

25. Encontre um valor aproximado da função $f(x,y) = \ln(x + y^2)$ no ponto $(0.02, 0.98)$ sem usar calculadora ou computador.

26. A figura apresenta algumas curvas de nível de uma função $f(x, y)$. Esboce o vetor gradiente de $f(x, y)$ nos pontos indicados.



27. Calcule o gradiente da função $f(x, y)$ no ponto indicado.

   (a) $f(x, y) = x^2y^3 + \sqrt{xy}$; $P = (1, 4)$

   (b) $f(x, y) = e^{x-y}xy$; $P = (2, 2)$

   (c) $f(x, y, z) = x^3 + yz^2 - xyz$; $P = (1, -2, -1)$

28. Encontre um vetor unitário perpendicular à superfície no ponto indicado.

   (a) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; $P = (-1, 2, 2)$

   (b) $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$; $P = (1, 0, 2)$

29. A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ e o elipsoide $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$ intersetam-se no ponto $(2, -1, 1)$. Encontre o ângulo formado pelos planos tangentes nesse ponto.

30. Calcule a derivada direcional de $f(x, y)$ no ponto P, na direção do versor de $\vec{u}$.

   (a) $f(x, y) = x\cos(2x - y)$; $P = (1, 2)$ e $\vec{u} = (2, -1)$

   (b) $f(x, y) = x^2ye^{2y}$; $P = (2, 0)$ e $\vec{u} = (1, 3)$

31. No ponto $(2, 0)$, em que direções a função $f(x, y) = 2xy + x^2y^2$ apresenta a taxa de variação indicada?

   (a) -1 (b) -2 (c) -3

32. Suponha que $f(x, y)$ é uma função diferenciável e consideremos os versores

$$\vec{u} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(1, 2), \quad \vec{v} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Suponha que o ponto $P = (2, -1)$ está no interior do domínio de $f(x, y)$ e, nesse ponto,

$$D_{\vec{u}}f(P) = 0, \quad D_{\vec{v}}f(P) = 1.$$

Encontre o gradiente de $f(x, y)$ em P.

33. Suponha que a temperatura num ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}.$$

(a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P = (2, -1, 2)$, no sentido de P para $Q = (3, -3, 3)$.

(b) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto Q, no sentido de Q para P.

(c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P.

(d) Encontre a taxa máxima de crescimento em Q.

34. Use a regra da cadeia para determinar $\frac{dw}{dt}$.

(a) $w = x^2y + xy^2; \quad x = 2 + t^5,\ y = 1 - t^3$

(b) $w = \frac{\ln y}{x}; \quad x = e^{-2t},\ y = t^2$

(c) $w = xye^{\frac{y}{z}}; \quad x = t^2 - 1,\ y = 2t,\ z = 1 - 2t$

35. Use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial w}{\partial t}$ e $\frac{\partial w}{\partial s}$.

(a) $w = x^2y^5; \quad x = s\cos t,\ y = 2st^2$

(b) $w = \sin x \cos y; \quad x = s + t,\ y = s - t$

(c) $w = \frac{y-x^2}{x+y^2}; \quad x = s^2 - 2t,\ y = t^3$

36. Considere uma caixa de dimensões $x \times y \times z$. Suponha que x e y aumentam a uma taxa de 2 cm/s, enquanto z diminui a uma taxa de 4 cm/s. Quando $x = 10$ cm, $y = 12$ cm e $z = 12$ cm, o volume aumenta ou diminui com o tempo? E a que taxa?

37. (*Derivação implícita.*) Dizemos que uma função $y(x)$ é definida *implicitamente* pela equação $f(x, y) = 0$ se $f(x, y(x)) = 0$ para qualquer x. Prove que

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}$$

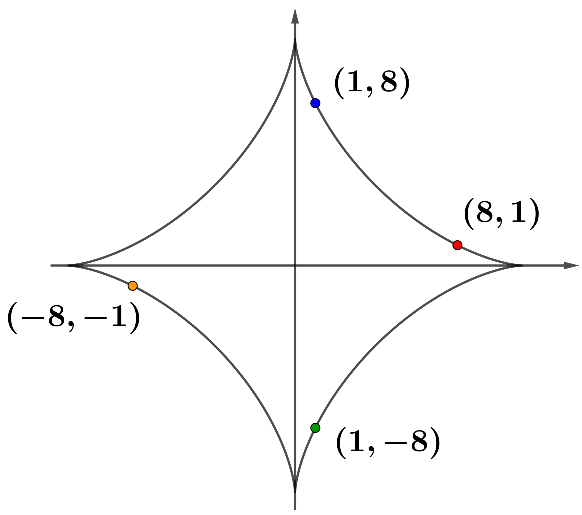
nos pontos em que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$.

38. Encontre a derivada da função definida implicitamente por

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$$

no ponto indicado. Interprete geometricamente.

(a) $(1, 8)$ (b) $(1, -8)$ (c) $(8, 1)$ (d) $(-8, -1)$



39. Use a fórmula da derivação implícita para encontrar a derivada $\frac{dy}{dx}$.

(a) $x^3y^3 + xy^2 - 2xy - 1 = 0$ (b) $yx^4 + x^3y^2 - 2x = 0$

40. A temperatura num ponto (x, y) do plano é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. A posição de um inseto que rasteja pelo plano no instante t (onde o tempo é medido em segundos) é dada por

$$x = \sqrt{1+t}, \quad y = 9 - 2t,$$

onde as coordenadas x e y são medidas em centímetros. A função temperatura satisfaz

$$T_x(2,3) = 4, \quad T_y(2,3) = -3.$$

Quão rápido o inseto percepciona o aumento (ou diminuição) da temperatura ao longo do seu caminho no instante $t = 3$?

41. Considere a função

$$f(x, y) = (y^2 - x^2)^2.$$

(a) Faça um esboço das curvas de nível $C = 0$, $C = 1$ e $C = 16$.

(b) Verifique que $(0, 0)$ é um ponto crítico de $f(x, y)$ e, tendo em conta a alínea anterior ou a expressão da função, indique se $(0, 0)$ é um ponto de sela, ponto de máximo local ou ponto de mínimo local.

(c) Podemos aplicar o critério da hessiana para classificar o ponto crítico $(0, 0)$?

42. Encontre os pontos críticos, pontos de sela, máximos locais e mínimos locais da função $f(x, y)$.

(a) $f(x, y) = xy - 2x - y$

(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

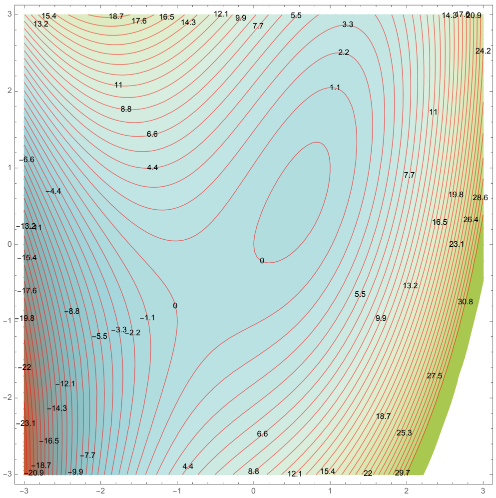
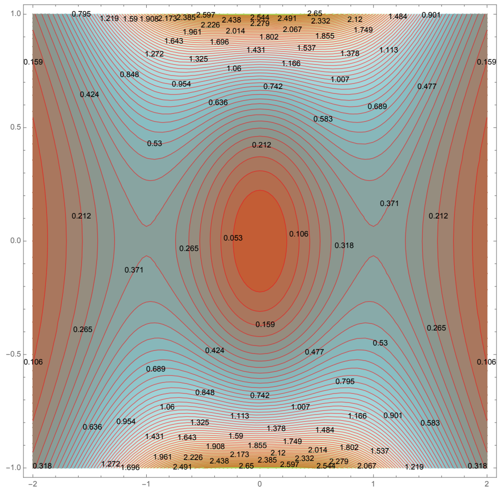
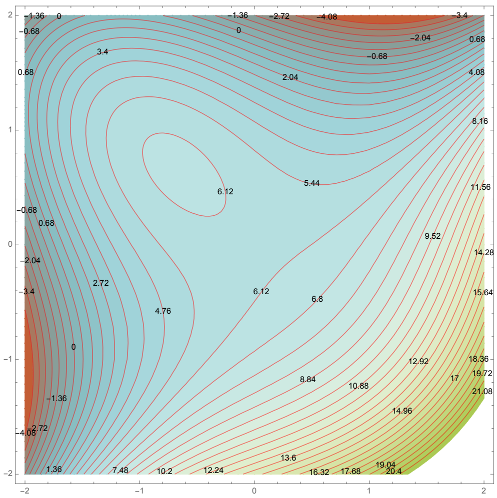
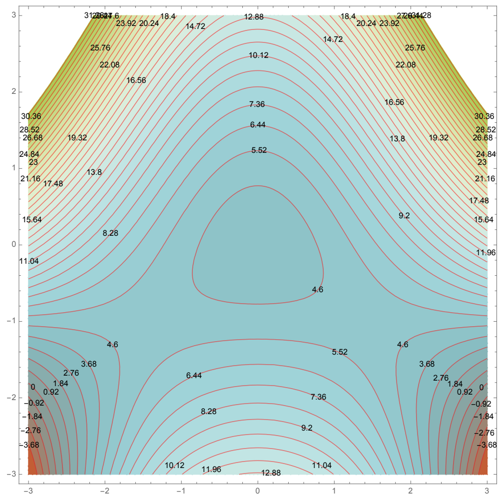
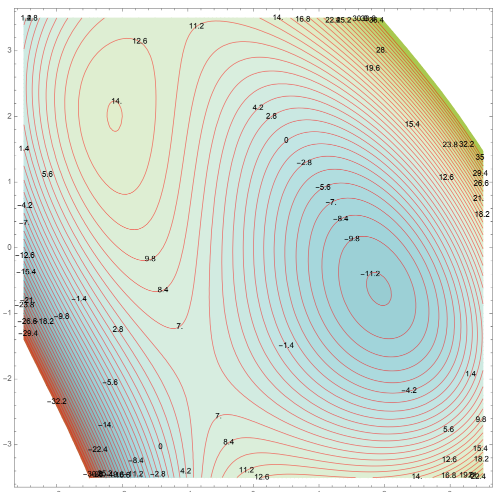
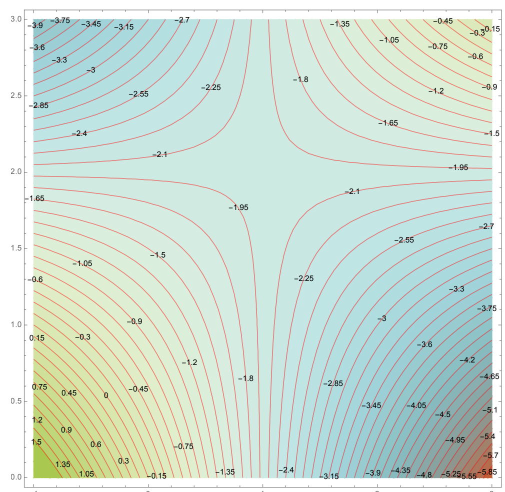
(c) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

(d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4$

(e) $f(x, y) = x(x^2 + xy + y^2 - 9)$

(f) $f(x, y) = x^3 + x^2 - 2xy + y^2 - x$

43. Faça a correspondência entre as funções da alínea anterior e as representações das suas curvas de nível, indicando os pontos críticos, pontos de sela, pontos de máximo local e pontos de mínimo local.

44. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

45. Encontre as dimensões de uma caixa com volume de 1.000 cm^3 cuja superfície tem área mínima.

46. Queremos construir um aquário de volume V. A base é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

47. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas arestas seja uma constante C.

48. Encontre os extremos absolutos da função $f(x,y)$ ou $f(x,y,z)$ sujeita à restrição indicada.

    (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $xy = 1$

    (b) $f(x,y) = 4x + 6y$; $x^2 + y^2 = 13$

    (c) $f(x,y) = xy$; $2x^2 + y^2 = 1$

    (d) $f(x,y) = x^2y$; $x^2 + 2y^2 = 16$

    (e) $f(x,y,z) = xyz$; $x^2+3y^2+2z^2 = 1$

    (f) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$; $x^2+y^2+z^2 = 4$

49. Encontre o ponto da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ que está mais longe do ponto $(2, 2, 4)$.

50. Encontre os extremos absolutos da função $f(x,y)$ na região indicada.

    (a) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^y$; $x^2 + y^2 \leq 1$

    (b) $f(x,y) = e^{-xy}$; $x^2 + 4y^2 \leq 1$

    (c) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$; $x^2 + y^2 \leq 16$