Grafos

Definição: Dizemos que $G = (V(G), E(G), \psi(G))$ é um grafo se:

1) $V(G) \neq 0$
2) Os conjuntos $V(G)$ e $E(G)$ são disjuntos
3) ψ_G é uma função que a cada $e \in E(G)$ associa um par não ordenado de elementos de $V(G)$; isto é $\psi_G(e)\, uv$

A $v(G)$ chamamos conjunto dos vertices de G
A $E(G)$ " " das arestas
A ψ_G " de função de incidência

Se $\psi_G(e) = uv$ dizemos que

A aresta e tem vertices extremos u e v
A aresta e incide nos vertices u e v
u e v são vertices adjacentes

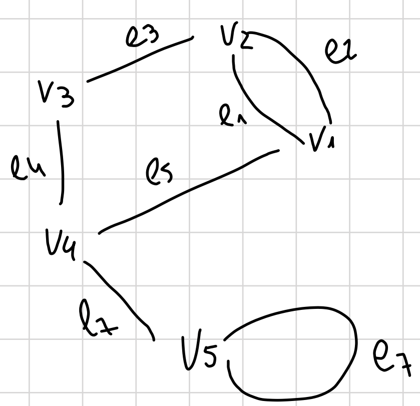
Ao conjunto dos vertices adjacentes a v chamamos vizinhança de v

Se $e_1, e_2 \in E(V)$ são incidentes num mesmo vertice, isto é, $\psi_G(e_1) = uv$ e $\psi_G(e_2) = vw$ dizemos que e_1 e e_2 são arestas paralelas

Se $e \in E(G)$ tem vertices extremos no mesmo vertice, isto é, $\psi_G(e) = uv$ dizemos que e é um lacete

Se ψ_G é uma função injetiva, então não existem arestas paralelas

Exemplo



$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

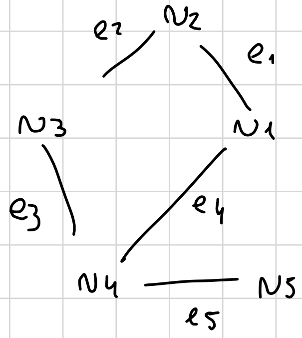
$\psi_G(e_1) = v_1v_2$ $\quad\quad$ $\psi_G(e_5) = v_1v_4$
$\psi_G(e_2) = v_1v_2$ $\quad\quad$ $\psi_G(e_6) = v_4v_5$
$\psi_G(e_3) = v_2v_3$ $\quad\quad$ $\psi_G(e_7) = v_5v_5$
$\psi_G(e_4) = v_3v_4$

A aresta e_6 tem vértices extremos em v_4 e v_5
A aresta e_5 tem índice nos vértices v_1 e v_4
e_4 e e_6 são arestas adjacentes

Vizinhança de v_4 é $\{v_1, v_3, v_5\}$
v_1 e v_4 são vértices adjacentes
e_1 e e_2 são arestas paralelas
e_7 é um lacete

Definição: Dizemos que G é grafo simples se não tiver arestas paralelas nem lacetes.
Neste caso, a função de incidência é redundante, ou seja se $\psi_G(e) = uv$. Podemos identificar a aresta e por uv

Exemplo



G é simples

Definição: Se $V(G)$ é um conjunto finito, dizemos G é grafo finito

Definição: Dizemos que que $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ e $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ se $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ e $\psi_G = \psi_H$; e escrevemos $G = H$
Neste caso, G e H admitem a mesma representação

Definição: Dado G um grafo e $v \in V(G)$, chamamos grau de v ao número de arestas que incidem em v, e indicamos por $d_G(v)$

Indicamos o maior dos graus de G por $\Delta(G)$ e o menor por $\delta(G)$

Exemplo:

Usando o grafo do 1º exemplo

$d_G(v_1) = 3$ $\quad \Delta(G) = 3$
$d_G(v_2) = 3$ $\quad \delta(G) = 2$
$d_G(v_3) = 2$
$d_G(v_4) = 3$
$d_G(v_5) = 3$

Nota:
Um laçete conta x2 para o grau do vertice

Nota:
Se G é um grafo simples, o grau do vertice coincide com a cardinalidade da sua vizinhança

Exemplo

Usando o grafo B

$d_G(v_1) = 2$ $\quad d_G(v_3) = 2$ $\quad d_G(v_5) = 1$
$d_G(v_2) = 2$ $\quad d_G(v_4) = 3$

Definição: Dado G um grafo com $|V(G)| = v$ e $|E(G)| = \varepsilon$ definimos a matriz de incidência $M_G \in M_{v \times \varepsilon}$ que a entrada m_{ij} é dada por:

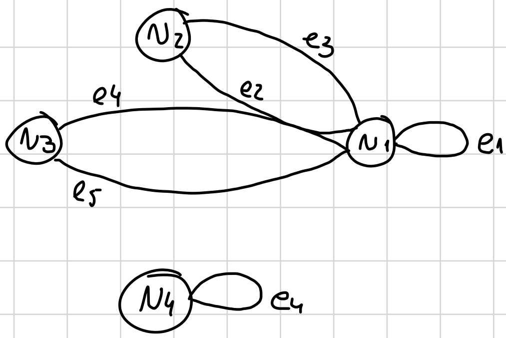
$$m_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } & \psi_G(e_j) = v_p v_q \quad \text{com } p \text{ e } q \neq i \\ 1, \text{ se } & \psi_G(e_j) = v_i v_q \quad \text{com } q \neq i \\ 2, \text{ se } & \psi_G(e_j) = v_i v_i \quad \text{é um laçete} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

OBS: A soma de cada coluna é igual a 2 pois cada aresta incide em 2 vértices. A soma da linha i é igual ao grau do vértice N_i

Nota: Dada uma matriz com entradas 0, 1 ou 2 em que a soma de cada coluna é 2, podemos recuperar o grafo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



Definição: Dado um grafo G com V vértices
Definimos a matriz adjacência $A_G \in M_{V\times V}$ em que a entrada a_{ij} é o número de arestas com vértices extremos v_i e v_j.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$