Teorema Binomial: Dados $x, y \in \mathbb{R}$ temos

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Prova (por indução)

$$P(n) = (x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

$$P(1): (x+y)^1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} x^1 y^{n-i}$$

$$(=) \; x+y = \binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^0 = y+x \quad \text{P.V}$$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Tese:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{i+1} y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^{i+1} y^{n-i} + \binom{n}{n} x^{i+1} y^0 + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n+1-i}$$

$$= y^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} x^{i+1} - y^{n+1-i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n+1-i} + x^{n+1}$$

$$= y^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] - x^i + y^{n+i} + x^{n+1}$$

$$= y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}$$

Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

A soma da linha n do triângulo de pascal é 2^n.
Se A é conjunto com n elementos, à direita temos a soma do número de todos os subconjuntos de A, ou seja

$$\#\mathcal{P}(A) = |\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

Teorema (Convolução de Vandermonde)

Temos

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Exemplo

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = n^{2n-1}, \; n \in \mathbb{N}$$

$$i\binom{n}{i} = i \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!} = \frac{n!}{(i-1)!(n-1-(i-1)!)}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-1(i-1)!} = n \cdot \binom{n-1}{i-1}$$

Então

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = \sum$$

Exemplo

PIN multibanco
- Todos os digitos diferentes
- 5 na primeira posição
- 6 numa das outras posições

$1 \times C_1^3 \times 8 \times 7 = 168$

5	6	8	7
5	8	6	7
5	8	7	6

Exemplo

8 atletas como posso distribuir 3 medalhas

$A_3^8 = 8 \times 7 \times 6 = 336$

Exemplo

6 pessoas no cinema

a) Numa fila com 6 cadeiras como as podemos sentar?

$6! = 720$

b) Numa fila com 10 lugares

$C_6^{10} \times 6!$

c) Com 10 lugares como sentar todos juntos

$5 \times 6!$

Definição: Seja U um conjunto com n elementos chamamos arranjos completos de n elementos com comprimento K a uma sequência com K elementos retirados de U com reposição.

Indicamos o número de arranjos completos de n elementos com comprimento K por A'^n_K

Exemplo

Matrículas automóvel com 4 letras e 3 algarismos
Quantas existem?

$26 \times 10^3 =$

Definição: Seja uma relação de n objetos, não necessáriamente distintos, ou seja, $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$ onde n_i é o número de objetos idênticos. Chamamos permutações completas de n elementos a uma sequência de todos os objetos de U

Exemplo

3 livros matemática
4 livros programação
2 livros física

Como podemos arrumar a prateleira?

$9!$

Definição: Seja U um conjunto com n elementos. Chamamos combinação completa de n elementos tomados k a k a uma coleção de k elementos extraídos do conjunto U com reposição.

	Com ordem	Sem ordem
Sem reposição	Arranjos ou Permutações	Combinações
Com reposição	Arranjos ou Permutações Completas	Combinações Completas