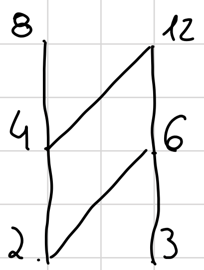
Definição: Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o e $x, y, z \in A$. Dizemos que x é coberto por y se $x \leq y$ existe $z \in A \setminus \{x, y\}$ tal que $x \leq z$ e $z \leq y$. Notação $x \vdash y$

Exemplo

$B = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$



$2 \vdash 12$ pois $\exists y \; z \leq y$; $4 \leq 12$

$2 \vdash 6$ pois $\nexists z \in B \setminus \{2, 6\}$; $2 \leq z$ e $z \leq 6$

Algoritmo para construir o Diagrama de Hasse

1) A cada elemento $x \in A$ associamos um ponto $p(x) \in \mathbb{R}^2$

2) Se $x \leq y$ o ponto $p(x)$ tem 2° coordenada inferior à 2° coordenada de $p(y)$

3) Se $x \vdash y$ então $p(x)$ é unido a $p(y)$ através de um segmento $l(x, y)$

4) Se z é tal que $z \neq x$ e $z \neq y$ então $p(z)$ não pertence a $l(x, y)$

Exemplo

Determine o diagrama de Hasse de $(P(\{1, 2, 3\}), \subset)$

$P(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$\{1\} \leq \{1, 3\}$ $\quad \{1\} \longmapsto \{1, 3\}$

$\{1\} \longmapsto \{1, 2, 3\}$

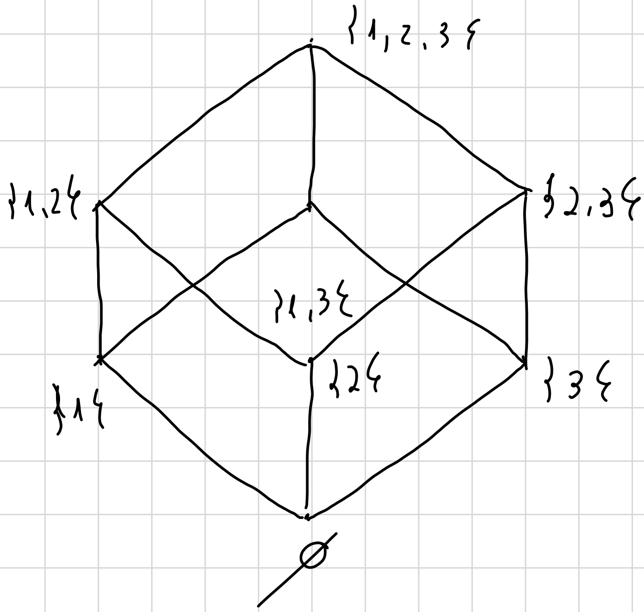
$\emptyset \vdash \{1\}, \{2\}, \{3\}$

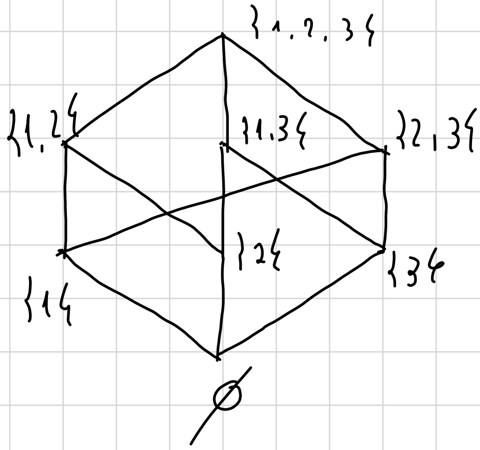
$\{1\} \vdash \{1,2\}, \{1,3\}$

$\{2\} \vdash \{1,2\}, \{2,3\}$

$\{3\} \vdash \{1,3\}, \{2,3\}$

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \vdash \{1,2,3\}$





Máximo, mínimo, elementos máximos e mínimos

Definição: Seja $(A, \leq)$ um c.p.o

Um elemento $a \in A$ dizemos um máximo de A se $\forall x \in A$ $x \leq a$

Um elemento $b \in A$ dizemos um mínimo de A se $\forall x \in A$ $b \leq a$

Máximo é um elemento que se compara a todos os outros e é maior ou igual a todos.

Exemplo

$(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subset)$ $\forall x \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ $X \leq \{1,2,3\}$

$\emptyset \leq X$

$\{1,2,3\}$ é o Máximo

$\emptyset$ é o mínimo

Exemplo:

$(\mathbb{N}, \leq)$ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\leq$ ordem usual

1 é mínimo pois $1 \leq x \ \forall x \in \mathbb{N}$

Não há máximo

Proposição: Seja $(A, \leq)$ um cpo. O máximo, quando existe, é único (o mesmo para o mínimo)

Demonstração: TPC (lol)

Definição: Seja $(A, \leq)$ um cpo

Um elemento $a \in A$ diz-se um elemento maximal se $\forall x \in A$ temos $x \leq a$ ou x e a são incompatíveis.

Um elemento $b \in A$ diz-se um elemento minimal se $\forall x \in A$ temos $b \leq a$ ou x e b são incompatíveis.

elemento racional: Elemento que é maior ou igual a todos os elementos que se compara

Exemplo

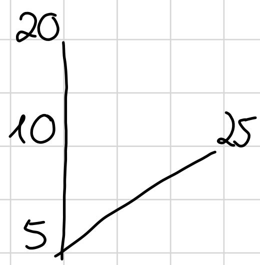
Seja $A = \{5, 10, 20, 25\}$. Determine, caso exista o máximo, o mínimo elemento máximo, mínimo de $(A, |)$

$5|5$ $\boxed{5|10}$ $5|20$ $\boxed{5|25}$

$10|10$ $\boxed{10|20}$

$20|20$

$25|25$



Mínimo : 5 pois $5 \mid x$, $\forall x \in A$

Máximo: Não tem máximo

Elemento máximo : 20, 25

20 é maximal pois $x \leq 20$ $\forall x \in \{10, 20\}$. Não se compara aos restantes

25 é maximal pois $x \leq 25$ $\forall x \in \{5, 25\}$. Não se compara aos restantes

Elementos minimais : 5

Majorantes, minorantes, supremos e ínfimos

Definição : Seja $(A, \leq)$ um cpo, $B \subseteq A$

Um elemento $a \in A$ diz-se um majorante do conjunto B se $x \leq a$ $\forall x \in B$

Um elemento $b \in A$ diz-se um minorante do conjunto B se $b \leq x$ $\forall x \in B$

Notação: Conjunto dos majorantes de B : B^u

Conjunto dos minorantes de B : B^l

Exemplo:

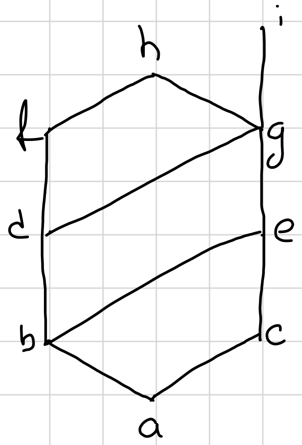
Considere o cpo dado na figura

Determine o B^u e o B^l nos seguintes casos:

a) $B_1 = \{a, b, c\}$

b) $B_2 = \{a, h\}$

c) $B_3 = \{a, c, d, g\}$



a)

$B_1 = \{a, b, c\}$

$B_1^u = \{e, g, h, i\}$

$B_1^l = \{a\}$

b)

$B_2 = \{a, h\}$

$B_2^l = \{a, b, c, d, e, g\}$

$B_2^u = \{0\}$

c)

$B_3 = \{a, b, c, d, e, g\}$

$B_3^u = \{h, i, g\}$

$B_3^l = \{a\}$

Definição: Seja $(A, \leq)$ um c.p.o e $B \subset A$

Se B^u tem elemento mínimo este elemento diz-se o SUPREMO de B

Se B^l tem elemento máximo este elemento diz-se o ÍNFIMO de B

Supremo de B – é um majorante que é o mais pequeno dos majorantes

Z é o supremo de B se:

a) Z é majorante de B

b) Se y é qualquer majorante de B então $z \leq y$

Z é ínfimo de B se

a) Z é minorante

b) se y é qualquer outro minorante então $y \leq z$

Exemplo

Com referência ao ex anterior, determine:
Supremo B, ínfimo B para B igual a B_1 e B_2

Supremo B_1 = ? $B_1^U = \{e, g, h, i\}$ Mínimo de B_1^U é a. Assim supremo

ínfimo B_1 = ? $B_1^L = \{a\}$. a Mínimo de B_1^L é a. Assim ínfimo

Supremo B_2 = ? $B_2^U = \emptyset$ Não há elemento mínimo em B_2^U logo existe sempre B_2

ínfimo B_2 = ? $B_2^L = \{a, b, c, d, e, g\}$ Máximo B_2^L é g $\Rightarrow$ ínfimo $B_2 = g$

Notação:

Supremo de B = $\vee B$

ínfimo de B = $\wedge B$

Se $B = \{x, y\}$

$\vee B = x \vee y$

$\wedge B = x \wedge y$

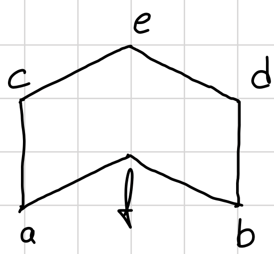
$\vee B_1 = e$

$\wedge B_1 = a$

Definição: Um c.p.o $(A, \leq)$ diz-se um **RETICULADO** se para cada par de elementos $x, y \in A$ existe supremo e ínfimo

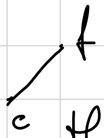
Exemplo

Verifique que $(A, \leq)$ não é um reticulado



a, c $\quad a \vee c = ?$

$\{a, c\}^{u} = \{e, f\}$



Mínimo $\{c, f\}$ é c

$\Rightarrow a \vee c = c$

$a \wedge c = ?$

$\{a, c\}^{l} = \{a\} = a$ $\quad$ Máximo $\{a\}$ é a $\quad a \wedge c = a$

a, b: $\quad a \vee b = ?$ $\quad \{a, b\}^{u} = \{a, f\}$ $\quad$ Não há mínimo d $\{e, f\}$ $\Rightarrow \nexists$ $a \vee b$

$(A, \leq)$ não é um reticulado pois existem x, y tais que não existe supremo entre x e y

Exemplo

Seja Ω não vazio. Considere o cpo $(P(\Omega), \subset)$
Mostre que $\forall A, B \in P(\Omega)$ o supremo de $\{A, B\}$ é $A \cup B$ e o ínfimo é $A \cap B$

$A \vee B = A \cup B$???

$A \cup B$ é majorante de $\{A, B\}$, E é o menor dos majorantes

$A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $A \leq A \cup B$, $B \leq A \cup B$

$A \cup B$ é majorante de $\{A, B\}$

Exemplo:

Seja C um qualquer majorante de $\{A,B\}$. Temos $A \leq C$, $B \leq C$, isto é, $A \subset C$, $B \subset C$. Assim $A \cup B \subset C$, isto é, $A \cup B \leq C$

Assim, $A \cup B$ é o supremo de $\{A,B\}$, isto é, $A \cup B = A \cup B$