ESBOÇO DA CORRECÇÃO DA 1ª FREQUÊNCIA

1. (a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{xy}}{x^2+y^4} < 0$, logo as soluções da eq. diferencial são decrescentes

Afirmação verdadeira.

(b) $y = f(x) = -\frac{1}{x}$ $\quad y' = f'(x) = \frac{1}{x^2}$

$x^2 y' + 2x^2 y^2 = \cancel{x^2}\left(\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) + 2\cancel{x^2}\left(-\frac{1}{x}\right)^2 = 1 + 2 = 3 \neq 1$

$\therefore$ $f(x)$ não é solução da equação diferencial.

Afirmação falsa.

(c) $f \in C^2(D)$ $\qquad f_y = x \ln(xy)$ $\quad f_x = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$

$f_{yx} = (x \ln(xy))_x = \ln(xy) + x \frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1$

$$f_{xy} = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right)_y = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = -\frac{x}{y^2+x^2}$$

Ora $f_{yx} \neq f_{xy}$.

Mas $f \in C^2(D)$, logo pelo T. de Schwarz ter-se-ia $f_{yx} = f_{xy}$.

Logo a afirmação é falsa.

2. (a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x-y}}{1+e^x} \iff e^y\, dy = \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$$

$$e^y = \ln(1+e^x) + c \iff y = \ln(\ln(1+e^x)+c),$$

com $\underline{\underline{c}}$ constante

(b) $y' + \operatorname{sen} x\, y = x\, e^{\cos x}$

$I(x) = e^{\int \operatorname{sen} x\, dx} = e^{-\cos x}$

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{-\cos x}\right) = x\, e^{\cos x} \cdot e^{-\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{-\cos x}\right) = x$$

$$y \cdot e^{-\cos x} = \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow y = e^{\cos x}\left(\frac{x^2}{2} + c\right),$$

com $\underline{\underline{c}}$ constante.

3. $y'' - 2y' + 2y = 0$

Eq. característica: $r^2 - 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$

$\Leftrightarrow r = 1 \pm i$

$y = e^{x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$

$y' = e^{x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + e^{x}(-c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x)$

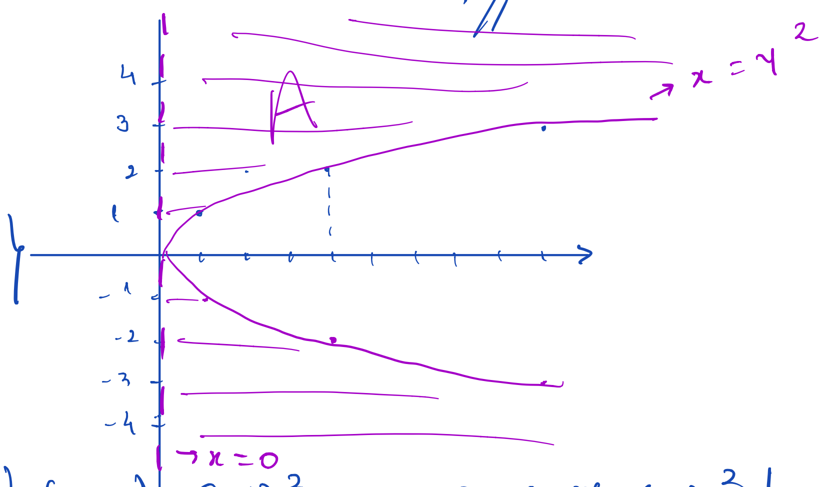
$y' = e^{x}\left((c_1 + c_2)\cos x + (c_2 - c_1)\operatorname{sen} x\right)$

$$\begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = +1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -1 /\!/ \\ c_1 + c_2 = +1 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ c_2 = 2 /\!/ \end{cases}$$

$\therefore\ y = e^{x}(-\cos x + 2 \operatorname{sen} x) /\!/$

4. **(a)**

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq y^2\}$



(b) $\operatorname{Int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y^2\}$

$\operatorname{fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee x = y^2\}$

(c) A não é aberto porque $\text{int}(A) \neq A$.

A não é fechado porque $A \not\supset \text{fr}(A)$. Por ex-lo, $(0,1) \in \text{fr}(A)$ e $(0,1) \notin A$.

5.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+2y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Ora,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{2y^4} = 0$$

Mas

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+2y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+2y^4} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{y^4}}{3\cancel{y^4}} = \frac{1}{3}$$

$\neq$

Logo não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e portanto f não é contínua em $(0,0)$.

(b) Para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy^2}{x^2+2y^4}\right) = \frac{y^2(x^2+2y^4) - xy^2\, 2x}{(x^2+2y^4)^2}$$

$$= \frac{2y^6 - x^2y^2}{(x^2+2y^4)^2}$$

Para $(x,y) = (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\frac{0}{h^2} - 0}^{=0}}{h}$$

$= 0$ //

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2y^6 - x^2y^2}{(x^2+2y^4)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ //

6. (a) $Df = \mathbb{R}^3$; $CDf = \mathbb{R}$, for que

$Df = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2 \geq 0}_{\text{Cond. universal}}\} = \mathbb{R}^3$

e $CDf = \{x^3\sqrt{y^2+z^2} : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}$

$$-\infty < x^3\underbrace{\sqrt{y^2+z^2}}_{\geq 0} < +\infty$$

(b) $f(x,y,z) = x^3\sqrt{y^2+z^2}$ $(1,2,-2)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\sqrt{y^2+z^2}$ $\frac{\partial f}{\partial x}(1,3,4) = 15$ //

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y\,x^3}{\sqrt{y^2+z^2}}$ $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3,4) = \frac{3}{5}$ //

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z\,x^3}{\sqrt{y^2+z^2}}$ $\frac{\partial f}{\partial z}(1,3,4) = 4/5$ //

$f(1,3,4) = 5$ //

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ existem e são contínuas em $(1,3,4)$ (porque são quocientes e composição de funções contínuas), logo f é diferenciável em $(1,3,4)$.

(c) $$f(x,y,z) \approx \overbrace{f(1,3,4)}^{=5} + f_x(1,3,4)(x-1) + f_y(1,3,4)(y-3) + f_z(1,3,4)(z-4)$$

$$f(x,y,z) \approx 5 + 15(x-1) + \frac{3}{5}(y-3) + \frac{4}{5}(z-4)$$

$$f(1.01, 3.05, 3.95) \approx 5 + 15\frac{1}{100} + \frac{3}{\cancel{5}}\frac{\cancel{5}}{100} - \frac{4}{\cancel{5}}\frac{\cancel{5}}{100}$$

$$\approx 5 + \frac{14}{100} = 5{,}14 \,//$$