Exercícios:

1. Sejam $A, B, C \subset \Omega$

Mostre que não é verdade que a operação diferença entre conjuntos seja associativa, isto é, mostre que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ é falso

$\cap$: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$\cup$: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Sejam $A = B = C$. Temos. $L.H.S = (A \setminus A) \setminus A = \emptyset \setminus A = \emptyset$
Por outro lado $R.H.S$ $A \setminus (A \setminus A) = A \setminus \emptyset = A$

Assim, sejam $A = B = C$ e $A \neq \emptyset$. Temos $L.H.S = \emptyset \neq A$ $R.H.S$ e portanto $L.H.S \neq R.H.S$ logo a suposta identidade é falsa

2. Sejam $A, B, C \subset \Omega$. Mostre que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \bar{B}) \setminus C = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C})$
$= A \cap (\overline{B \cup C}) = A \setminus (B \cup C)$

Definição: Seja X um conjunto. O conjunto constituído por todos os subconjuntos de X diz-se o conjunto potência de X, ou o conjunto das partes de X. Representamos por 2^X, $\mathcal{P}(X)$

Exercício:

3. Seja $X = \{1, 2\}$. Determine $\mathcal{P}(X)$

$\mathcal{P}(X) = \{\underbrace{\emptyset}_{1}, \underbrace{\{1\}, \{2\}}_{2}, \underbrace{\{1, 2\}}_{1}\}$

$\#\mathcal{P}(\{1,2\}) = 4$

\# — nº de elementos do conjunto

4. Seja $X = \{1, 2, 3\}$. Determine $\mathcal{P}(X)$

$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$\#\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = 8$

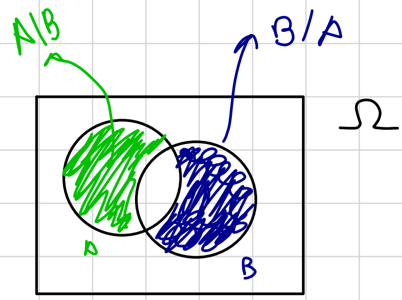
5. Seja $X = \emptyset$. Determine $\mathcal{P}(\emptyset)$

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset, \dots, \emptyset\}$

$\{1, 1, 1\} = \{1\}$ $\qquad \# \mathcal{P}(\emptyset) = 1$

Definição: Sejam $A, B \subset \Omega$. Define-se a DIFERENÇA SIMÉTRICA entre A e B como conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Representamos $A \Delta B$

Exercício:



6. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{3, 4\}$. $A \Delta B = ?$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$= \{1, 2\} \cup \{4\} = \{1, 2, 4\}$

Proposição: Sejam $A, B \in \Omega$
Temos $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$= [(A \cup B) \cap \bar{A}] \cup [(A \cup B) \cap \bar{B}]$$

$$= \underbrace{(A \cap \bar{A})}_{\emptyset} \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) \cup \underbrace{(B \cap \bar{B})}_{\emptyset}$$

$$= (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B})$$

$$= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B$$

Proposição: Sejam $A, B, C \subset \Omega$. Tem-se

a) $A \Delta \emptyset = A$
b) $A \Delta A = \emptyset$
c) $A \Delta B = B \Delta A$ (a diferença simétrica é comutativa)
d) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ (a intersecção é distinta em relação à Δ)
e) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ (Δ é associativa)

a) FAZER

b) $A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A)$

$= A \setminus A$

$= \emptyset$

c)

FAZER

d) L.H.S $= A \cap (B \Delta C)$

$= A \cap [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)]$

$= A \cap [(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})]$

$= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$

R.H.S $= (A \cap B) \Delta C$

$= [(A \cap B) \setminus (A \cap C)] \cup [(A \cap C) \setminus (A \cap B)]$

$= [(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})] \cup [(A \cap C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})]$

$= [[(A \cap B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}]] \cup [\underbrace{[(A \cap C) \cap \overline{A}]}_{\emptyset} \cup [(\overline{A} \cap C) \cap \overline{B}]]$

$= [A \cap B \cap \overline{C}] \cup [A \cap C \cap \overline{B}]$

Assim L.H.S = R.H.S