Exemplo

Qual a soma das primeiras potências de 2^n?

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = ?$$

$$2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^1 - 1$$
$$2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$$

Deve ser verdade que $2^0 + 2^1 + \text{———} + 2^n = 2^n \cdot 1$. Provamos por indução matemática que é verdade

$$P(n): 2^0 + 2^1 + \text{———} 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Passo básico: É verdade que para $n = 1$? $P(1)$ é verdade?

$$L.H.S = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$$
$$R.H.S = 2^{1+1} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Assim $L.H.S = 3 = R.H.S$ e, portanto $P(1)$ é verdade

Passo indutivo: Assumimos que $P(K)$ é verdade, isto é, assumimos que $2^0 + 2^1 + \text{———} 2^K = 2^{K+1} - 1$

Será que $P(K+1)$ é verdade? Isto é, será que $2^0 + 2^1 + \text{———} 2^{K+1} = 2^{K+2} - 1$

Temos
$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \text{———} 2^{K+1} &= 2^0 + 2^1 + \text{———} + 2^K + 2^{K+1} \\ &= 2^{K+1} - 1 + 2^{K+1} \\ &= 2 \times 2^{K+1} - 1 \\ &= 2^{K+2} - 1 \end{aligned}$$

Assim, $P(K+1)$ é verdade. Logo, $P(n)$ é verdade $\forall n \geq 1$

Exemplo

Mostre que $n! > 2^n$ $\forall n \geq 4$

$$P(n): n! > 2^n$$

Passo básico: $P(4)$ é verdade? $4! = 24 > 2^4 = 16$ é verdade

Passo indutivo: $P(K)$ é verdade, isto é, $K! > 2^K$

Será que $P(K-1)$ é verdade? Isto é $(K-1)! > 2^{K-1}$?

Temos $(K-1)! = K! > (K+1) + 2^K > 2 \times 2^1 = 2^{K+1}$

$P(K+1)$ é verdade
$P(n)$ é verdade $\forall n \geq 4$

Exemplo

Mostre que $n^3 - n$ é divisível por 3 $\forall n \in \mathbb{N}$

$P(n): n^3 - n = 3 \times n$ com $n \in \mathbb{Z}$

Passo básico: $P(1)$ é verdade?

L.H.S: $1^3 - 1 = 1 - 1 = 3 \times 0$ e $1^3 - 1$ é divisível por 3, isto é, $P(1)$ é verdade

Passo indutivo: Assumir $P(K): K^3 - K = 3s$, com $n \in \mathbb{Z}$

$P(K+1)$ é verdade? $(K+1)^3 - (K-1) = 3s$, com $s \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
\text{Temos } (K+1)^3 - (K+1) &= (K+1)((K+1)^2 - 1) \\
&= (K+1)(K^2 + 2K + \cancel{1} - \cancel{1}) \\
&= (K+1)(K^2 + 2K) \\
&= K^3 + 2K^2 + K^2 + 2K \\
&= K^3 + 3K^2 + 2K \\
&=
\end{aligned}
$$

Exemplo

Mostre que $n^2(n^2-1)$ é divisível por 12 $\forall n \in \mathbb{N}$

$P(n): n^2(n^2-1) = 12m$, com $m \in \mathbb{Z}$

Passo básico: $P(1)$ é verdade? $1^2(1^2-1) = 0 = 12 \times 0$ o é múltiplo de 12 e $P(1)$ é verdade

Passo indutivo: Assumir $P(K): K^2(K^2-1) = 12m$, $m \in \mathbb{Z}$

Será que $P(K+1)$ é verdade? $(K+1)^2((K+1)^2-1) = 12s$, $s \in \mathbb{Z}$?

$$
\begin{aligned}
(K+1)^2((K+1)^2-1) &= (K+1)^2(K^2+2K+\cancel{1}-\cancel{1}) \\
&= (K+1)^2(K^2+2K) \\
&= (K^2+2K+1)(K^2+2K) \\
&= K^4+4K^3+5K^2+2K \\
&= K^4-K^2+4K^3+5K^2+K^2+2K \\
&= 12s + 4K^3+6K^2+2K \\
&= {**}
\end{aligned}
$$

será que é múltiplo de 12?

Seja $a(m) = 4m^3+6m^2+2m$ é divisível por 12? $4m^3+6m^2+2m = 12t$
Admitindo que $a(m)$ é verdade obtemos

$$** = 12r + 12t = \underbrace{12(r+t)}_{\in \mathbb{Z}}$$

$P(K+1)$ é verdade
Assim $P(n)$ é verdade $\forall n \geq 1$
Falta perceber que $a(m) = 4m^3+6m^2+2m = 12t$, com $t \in \mathbb{Z}$

Segundo passo de Indução Matemática

1) Passo básico: Em geral, verificar a veracidade de $P(n)$ para primeiro(s) elemento(s), tipicamente $n_0 = 1$

2) Passo indutivo: Admitimos que $P(n_0), P(n_0+1), \text{——} P(K)$ são proposições verdadeiras, mostramos que $P(K+1)$ é verdade

Assim $P(n)$ é verdade

Exemplo

Mostre que todo o número natural $n \geq 2$ pode ser escrito como um produto de números primos

(Nota: Um produto de números primos pode conter um qualquer número de fatores, inclusive 1 fator apenas)

$P(n)$: n pode ser escrito como um produto de primos

Passo básico: $P(2)$ é verdade? Isto é, 2 pode ser escrito como um produto de primos? sim, pois 2 já é primo

Passo indutivo: Assumimos que $P(2), P(3), \ldots, P(\mathbb{N})$ são proposições verdadeiras. Será que $P(K+1)$ é verdade? Será que $K+1$ se escreve como um produto de primos?

- Se $K+1$ é primo, $K+1$ já está escrito como um produto de primos: $P(K+1)$ é verdade

- Se $K+1$ não é primo então existe $a \in \mathbb{N}$ com $a \neq 1$ e $a \neq K+1$: $\frac{K+1}{a} \in \mathbb{N}$. Seja b esse natural, isto é, $\frac{K+1}{a} = b \Rightarrow K+1 = a \times b$ com $a, b \notin \{1, K+1\}$. Assim $a, b \in \{2, \text{—}, K\}$. Por hipótese de indução, $P(a)$ é verdade e $P(b)$ é verdade

Assim, a e b escrevem-se como um produto de primos $a = a_1, \cdots, a_n$ $b = b_1, \cdots, b_n$ com a_i, b_i primos. Assim $K+1 = a \times b = a_1 \text{——} a_n \times b_1 \text{——} b_n$ e $K+1$ é um produto de primos. $P(K+1)$ é verdade

Exemplo

Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_1 = 16 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad , \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Mostre que $a_n = 5\times 2^n + 2\times 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$P_n : a_n = 5\times 2^n + 2\times 3^n$

Passo básico: $P(0)$ é verdade? $L.H.S = a_0 = 7 \quad R.H.S = 5\times 2^0 + 3\times 3^0 = 7$

$L.H.S = 7 = R.H.S \Rightarrow P(0)$ é verdade

Passo indutivo: $P(0)$, ———, $P(N)$ são proposições verdadeiras
Será que $P(K+1)$ é verdade? Isto é, será que, $a_{K+1} = 5\times 2^{K+1} + 2\times 3^{K+1}$

Temos
$$\begin{aligned} a_{K+1} &= 5\times a_K - 6\times a_{K-1} \\ &= 5(5\times 2^K + 2\times 3^K) - 6(5\times 2^{K-1} + 2\times 3^{K-1}) \\ &= 25\times 2^K + 10\times 3^K - 15\times 2^K - 4\times 3^K \\ &= 10\times 2^K + 6\times 3^K \\ &= 5\times 2^{K+1} + 2\times 3^{K+1} \end{aligned}$$

$P(K+1)$ é verdade
$P(n)$ é verdade $\forall n \geq 0$