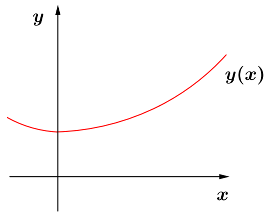
UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Cálculo II

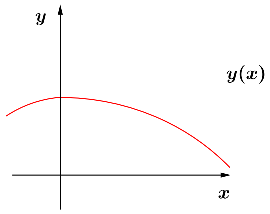
Ficha 4

1. Explique a razão pela qual a função $y(x)$ cujo gráfico é dado não pode ser uma solução da equação diferencial.

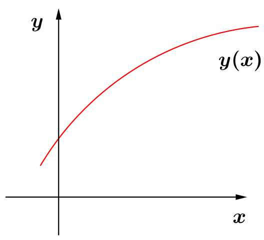
   (a) $y' = e^x y^2$



   (b) $y' = xe^{y^2}$



   (c) $y' = e^{xy}$



2. Verifique se a função $y(x)$ é uma solução da equação diferencial.

   (a) $y(x) = x - \frac{1}{x}$; $xy' + y = 2x$

   (b) $y(x) = 1$; $y'' + 2y' + y = x$

   (c) $y(x) = \ln x$; $xy'' + y' = 0$

   (d) $y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$; $y'' + 2y' + y = 0$

3. Verifique se $y(x) = x \ln x$ é uma solução para o problema de valor inicial

$$xy' = y + x, \qquad y(1) = 0$$

   em $x > 0$.

4. Verifique se $y(x) = \operatorname{sen} x \cos x - \cos x$ é uma solução para o problema de valor inicial

$$y' + (\operatorname{tg} x)y = \cos^2 x, \qquad y(0) = -1$$

no intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

5. Suponha que o número de indivíduos $P(t)$ de uma população satisfaz o *modelo logístico de crescimento populacional*,

$$\frac{dP}{dt} = 1{,}2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

   (a) Para que valores de P a população está a aumentar?

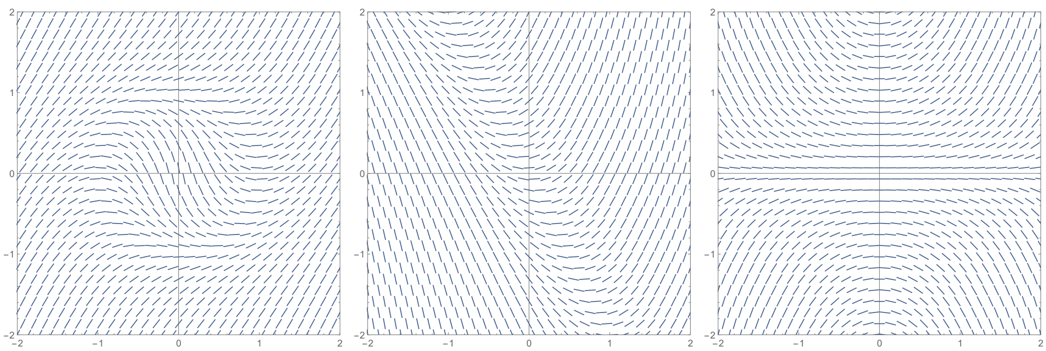
   (b) Para que valores de P a população está a diminuir?

   (c) Quais são as soluções de equilíbrio?

   (d) Esboce o gráfico de algumas soluções da equação diferencial.

6. Faça a correspondência entre as equações diferenciais de 1ª ordem e o campo de declives e, para cada um dos casos, esboce algumas curvas integrais.

   (a) $y' = xy$ (b) $y' = \ln(x^2 + y^2)$ (c) $y' = 2x + y$



7. Resolva as seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis.

   (a) $y' = xy$ (b) $y' = y^2x^3$ (c) $y' = \frac{x+1}{y^3+1}$

8. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares.

   (a) $y' - 2y = 4$ (b) $y' + \frac{y}{x} = x^4$ (c) $y' - 2xy = x$

9. Resolva o problema de valor inicial.

   (a) $y' = x + y; \quad y(0) = 2$

   (b) $y' = y(x^2 + 1); \quad y(-1) = 1$

   (c) $y' = \frac{x+1}{y^4+1}; \quad y(1) = 0$

   (d) $2xy' + y = 6x; \quad y(4) = 20$

10. Suponha que uma certa cultura de bactérias cresce a uma taxa proporcional à quantidade de células bacterianas existente. Após 1 hora, observam-se 1000 células bacterianas na cultura e, após 4 horas, 3000 células. Determine o número inicial de células bacterianas.

11. Use o método de Euler com o passo 0.2 para estimar $y(1)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial $y' = 1 - xy$, $y(0) = 0$.

12. Seja $y(x)$ a solução do problema de valor inicial

$$y' = x - xy; \quad y(1) = 0.$$

   (a) Use o método de Euler com o passo 0.2 para estimar $y(1.4)$

   (b) Use o método de Euler com o passo 0.1 para estimar $y(1.4)$

   (c) Resolva analiticamente o problema de valor inicial e compare o resultado com as estimativas anteriores.

13. Resolva a equação diferencial.

   (a) $y'' - 6y' + 8y = 0$

   (b) $y'' - 4y' + 8y = 0$

   (c) $y'' + 4y' + 4y = 0$

14. Resolva o problema de valores iniciais.

   (a) $2y'' + 5y' + 3y = 0; \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -4$

   (b) $y'' + 3y = 0; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

   (c) $4y'' - 4y' + y = 0; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -\frac{3}{2}$

15. Resolva o problema de contorno.

   (a) $4y'' + y = 0; \quad y(0) = 3,\ y(\pi) = -4$

   (b) $y'' + 2y' = 0; \quad y(0) = 1,\ y(1) = 2$

   (c) $y'' - 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1,\ y(3) = 0$