Análise de Complexidade dos Algoritmos

Análise de algoritmos

Objetivos

- Provar que um algoritmo está correto
- Determinar os recursos exigidos pelo algoritmo (tempo, espaço, ...)
  - geralmente existem vários algoritmos para o mesmo problema
    - como escolher o "melhor"
  - comparar os recursos exigidos pelos diferentes algoritmos
    - um algoritmo mais eficiente exige menos recursos para resolver o mesmo problema
  - prever o crescimento dos recursos exigidos por um algoritmo, à medida que a quantidade de dados de entrada (tamanho de entrada) cresce (taxa de crescimento)

Tipos de análise

- Pormenorizada
  - mais exacta e direta, mas em geral menos útil
  - expressa em segundos
  - resultado da avaliação da eficiência (por ex: tempo gasto):
    - único
    - dependente da velocidade e características do processador
- Através de ordens de grandeza
  - ignora as constantes multiplicativas
  - é uma análise **assintótica** (ignora os valores pequenos, considera os valores grandes)
    - expressa em ordens de grandeza (ordens assintóticas)
    - resultado da avaliação da eficiência:
      - paramétrico (uma função da quantidade de dados de entrada)
      - independente da velocidade e características do processador

Recursos

- A eficiência de um algoritmo é medida pela quantidade de recursos gastos durante a sua execução, como função da quantidade de dados de entrada
- O que são recursos?
  - tempo de execução do algoritmo (o mais usual)
  - espaço de memória necessário para guardar os dados

Tempo de execução de um algoritmo, T(n)

- A quantidade de dados de entrada depende do problema
  - normalmente é um só número
    - em algoritmos que envolvem arrays de 1D (ordenação, pesquisa, ...), a quantidade de dados é o número de elementos do array
  - mas podem ser mais
    - em algoritmos que envolvem grafos (caminho mais curto, ..), a quantidade de dados é geralmente expresso por duas quantidades: o número de nós e o número de arcos (temática a estudar mais tarde)

Tempo de execução de um algoritmo, T(n)

- Normalmente, o tempo exato não é importante
- Normalmente, o tempo é medido pelo número de operações primitivas do algoritmo que são executadas
  - operações primitivas: atribuições, comparações, ...
  - cada operação do algoritmo requer tempo constante
    - independente da quantidade de dados
  - operações diferentes podem requerer tempos diferentes
  - chamadas de módulos (subprogramas/funções) também têm tempo constante
    - mas a execução do módulo (subprograma/função) poderá não ter

Ordem de crescimento

- O tempo de execução de um algoritmo é expresso como função da quantidade de dados de entrada do problema (em geral um número inteiro positivo)
- Para quantidades de dados elevadas, simplifica-se para se concentar no essencial
  - eliminam-se os termos de ordem inferior
  - ignoram-se as constantes multiplicativas, como o coeficiente do termo de ordem superior
- Exemplo
  - tempo de execução: $T(n) = a \times n^2 + b \times n + c$
  - eliminam-se os termos de ordem inferior $\Rightarrow$ $\mathbf{a \times n^2}$
  - ignora-se o coeficiente do termo de ordem superior $\Rightarrow$ $\mathbf{n^2}$
- Aspeto importante
  - não se pode dizer que $T(n) = n^2$
  - mas pode-se dizer que T(n) "cresce" de modo proporcional a n^2
- Diz-se que $T(n) = O(n^2)$ para capturar a noção de que a ordem de crescimento é proporcional a n^2 (chama-se a isto **análise assintótica**)

Análise assintótica

- Apenas a ordem de crescimento do tempo de execução é relevante
  - só se analisa o comportamento assintótico dos algoritmos:

    se o algoritmo A1 é assintoticamente melhor que o algoritmo A2, então

    A1 será melhor escolha do que A2, exceto para pequenas quantidades de dados
- Para valores enormes de **n**, as seguintes funções são da mesma ordem assintótica, por terem todas a mesma "taxa de crescimento" (são todas "equivalentes")
  - n^2
  - $1000 \times n^2$
  - $1/1000 \times n^2$
  - $n^2 + 100 \times n$
  - ...

Análise assintótica

- Uma função f é **assintoticamente não-negativa** se

  $\exists$ M : f(n) $\geq$ 0, $\forall$ n > M (para todo o **n** suficientemente grande)

- Dadas duas funções assintoticamente não-negativas, **T** e **f**, diz-se que **T** está na ordem **Ó** de **f** e escreve-se **T(n) = O(f(n))** se existem constantes **c > 1** e **m > 0** tais que **T(n) ≤ c** $\times$ **f(n),** $\forall$ **n > m**

Complexidade dos Algoritmos

Trata da eficiência computacional dos algoritmos

- Complexidade temporal
  - exigências de tempo de processamento (tempo de execução)
- Complexidade espacial
  - exigências do espaço de armazenamento

Eficiência dos algoritmos

- A dimensão do problema será denotada por **n** (inteiro positivo)
- Na análise de um algoritmo
  - interessa o seu comportamento no caso geral, e não num caso específico
  - questão principal:
    - qual o desempenho do algoritmo à medida que **n** cresce e se torna muito elevado

Complexidade espacial de um algoritmo

- Espaço de memória necessário para executar até ao fim, **S(n)**
  - espaço de memória exigido em função da quantidade de dados de entrada **n**

Complexidade temporal de um algoritmo

- Tempo que demora a executar (tempo de processamento), **T(n)**
  - tempo de execução em função da quantidade de dados de entrada **n**

Complexidade vs. Eficiência

- À medida que a complexidade aumenta a eficiência diminui

Por vezes estima-se a complexidade para

- O "melhor caso" (pouco útil)
- O "pior caso" (mais útil)
- O "caso médio" (igualmente útil)

Complexidade temporal

Objetivo do estudo da complexidade

- Caracterizar o tempo de execução necessário para a resolução de um problema em função da quantidade de dados de entrada
  - interessa o caso mais difícil (a pior situação, o pior caso)
- Complexidade temporal, **T(n)**, significa que a computação de qualquer algoritmo de dimensão **n** pode ser completada em não mais de T(n) operações

Complexidade asintótica

- Normalmente diz-se que um algoritmo é mais eficiente do que outro, se o seu tempo de execução **no pior caso** tiver uma menor ordem de crescimento (menor complexidade assintótica)

Crescimento de funções

- Ter um modo de descrever a **escalabilidade** de algoritmos
- Exemplo

  quando se duplica a quantidade de dados de entrada de um problema, o que é que acontece ao tempo de execução?
- Na prática, é difícil (ou mesmo impossível) prever com rigor o tempo de execução de um algoritmo
- Pretende-se obter o tempo de execução a menos de
  - constantes multiplicativas (são tempos de execução de operações primitivas)
  - parcelas menos significativas para valores grandes de **n**
- Para tal,
  - identificam-se as operações primitivas dominantes: mais frequentes ou mais demoradas
  - determina-se o número de vezes que são executadas
    - e não o tempo de cada execução, que seria uma constante multiplicativa
  - exprime-se o resultado com a notação de "O grande"

O tempo de execução em geral depende de um único parâmetro n

- Ordem de um polinómio
- Tamanho de um ficheiro a ser processado, ordenado, etc.
- Medida abstrata do tamanho do problema a considerar
  - normalmente relacionado com a quantidade de dados

Quando há mais do que um parâmetro

- Procura-se exprimir todos os parâmetros em função de um só
- Faz-se uma análise em separado para cada parâmetro

Notação de “O grande” (Big-O)

Definição

- **T(n) = O(f(n))** (lê-se T(n) é de ordem f(n))
  - o tempo de execução T(n) de um algoritmo com **n** dados de entrada é de ordem f(n) se existem constantes **c > 1** e **m > 0** tais que $T(n) \leq c \times f(n)$, $\forall\ n > m$
  - ou seja, se um algoritmo é O(f(n)), então há um ponto **m** a partir do qual o desempenho do algoritmo é limitado a um múltiplo de f(n)
    - f(n) é assintoticamente um limite superior para T(n), a menos de um fator constante
- Exemplos

1) $3 \times n^2 = O(n^2)$

- fazer c = 3 e m = 1: $3 \times n^2 \leq 3 \times n^2$, $\forall\ n > 1$

2) $3 \times n^2 = O(n^3)$

- fazer c = 3 e m = 1: $3 \times n^2 \leq 3 \times n^3$, $\forall\ n > 1$

2) $1000 \times n^2 + 1000 \times n = O(n^2)$

- fazer c = 1200 e m = 5: $1000 \times n^2 + 1000 \times n \leq 1200 \times n^2$, $\forall\ n > 5$

Esta notação é usada com três objetivos

- Limitar o erro que é feito ao ignorar os termos de ordens menores nas fórmulas matemáticas
- Limitar o erro que é feito na análise ao desprezar parte do algoritmo que contribui de forma mínima para o tempo de execução (complexidade) total
- Permitir classificar algoritmos de acordo com limites superiores do seu tempo de execução

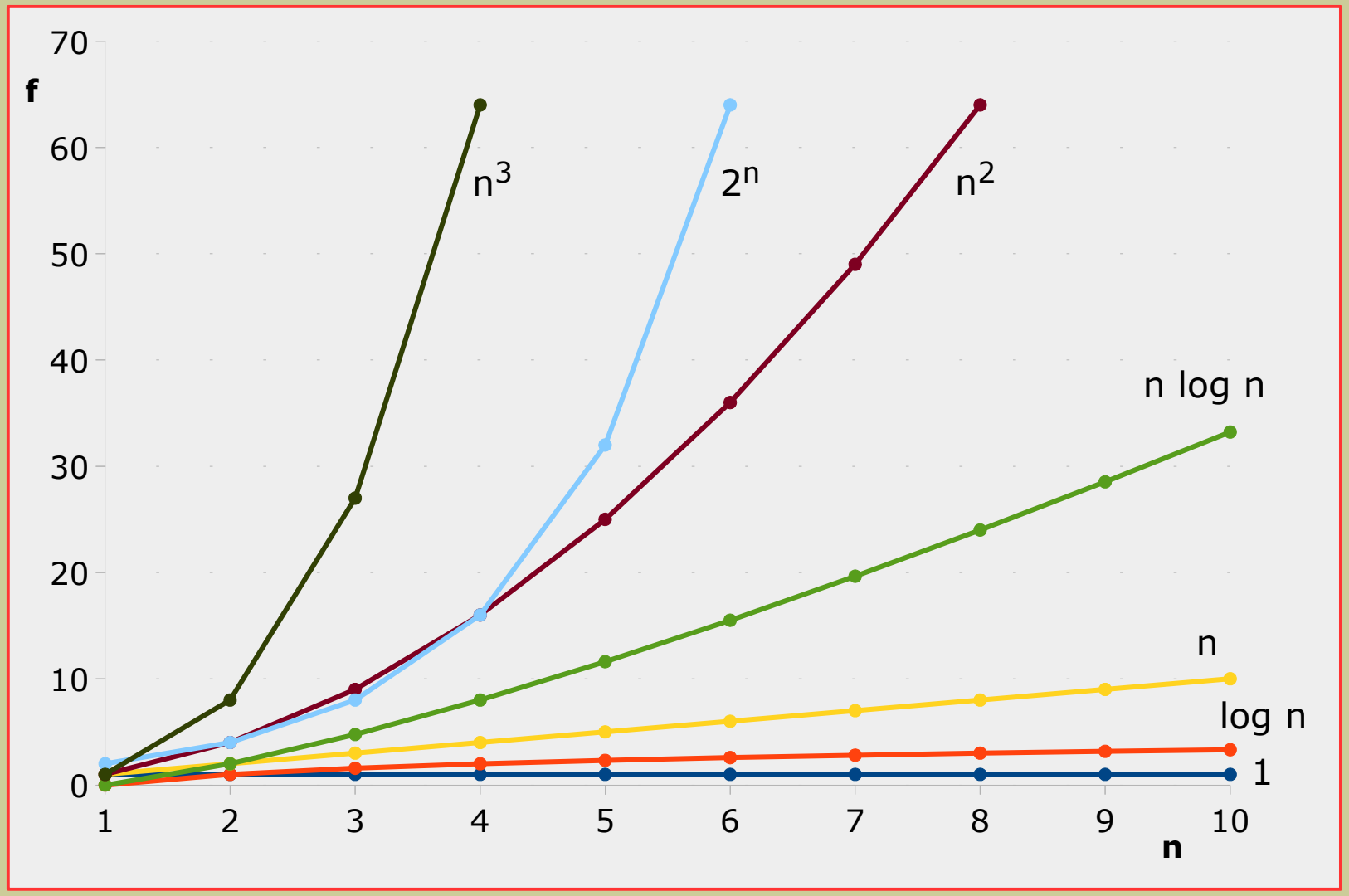
Ordens mais comuns

- **1**: tempo de execução constante
  - muitas operações são executadas uma só vez ou poucas vezes
    - se isto acontece para todo o algoritmo, então o tempo de execução é constante
- **log n**: tempo de execução logarítmico
  - cresce ligeiramente à medida que **n** cresce:
    - quando **n** duplica, **log n** aumenta mas muito pouco
- **n**: tempo de execução linear
  - típico quando algum processamento é feito para cada dado de entrada
  - situação ótima quando é necessário
    - processar **n** dados de entrada, ou
    - produzir **n** dados na saída

Ordens mais comuns

- **n log n**:
  - típico quando
    - se reduz um problema em subproblemas
    - se resolvem estes separadamente
    - se combinam as soluções
- $\mathbf{n^2}$: tempo de execução quadrático
  - típico quando é necessário processar todos os pares de dados de entrada
  - prático apenas em pequenos problemas (ex: produto de vetores)
- $\mathbf{2^n}$: tempo de execução exponencial
  - provavelmente de pouca aplicação prática
- $\mathbf{n^3}$: tempo de execução cúbico
  - para $\mathbf{n} = 100$, $\mathbf{n^3} = 1.000.000$ (ex: produto de matrizes)

Ordens mais comuns



Consequências da definição

- $O(n^3) + O(n^2) = O(n^3)$
- $O(n^2) + O(n) = O(n^2)$
- $O(\Sigma_{k=1,...,p}\ a_k\ n^k) = O(n^p)$
- O(1) indica um trecho de algoritmo com tempo constante

Exemplos genéricos

$c_k\ n^k + c_{k-1}\ n^{k-1} + ... + c_0 = O(n^k)$

(c_i - constantes)

$\log_2 n = O(\log n)$

(não se indica a base porque mudar de base é multiplicar por uma constante)

(mudança de base: $\log_a x = \log_b x\ /\ \log_b a$)

$4 = O(1)$

(usa-se 1 para ordem constante)

Metodologia para determinar a ordem de complexidade

Exemplo 1

- Considere-se a seguinte função em C (calcula a soma dos elementos dum array 1D)

```
int somaArray (int *A, int N)
{
  int  k, soma;
  soma = 0;
  k = 0;
  while (k < N) {
     soma = soma + A[k];
     k = k + 1;
  }
  return soma;
}
```

- Pior caso
  - não existe, pois todos os elementos do array têm de ser tratados (analisados)

Exemplo 1

- Contabilização do número de vezes que as operações primitivas são executadas

k	soma = 0	k = 0	k < N	soma = soma + A[k]	k = k + 1
0	1	1	1 (V)	1	1
1	0	0	1 (V)	1	1
2	0	0	1 (V)	1	1
...	...	...	...	...	...
N - 2	0	0	1 (V)	1	1
N - 1	0	0	1 (V)	1	1
N	0	0	1 (F)	0	0
	1	**1**	**N + 1**	**N**	**N**

- T(N): $1 + 1 + (N + 1) + N + N = 3 \times N + 3$

  T(N) = O(p(N)), em que p(N) é um polinómio de grau 1 em ordem a N

- Ordem de complexidade: **O(N)**

Exemplo 1

- Operação primitiva dominante (mais vezes executada): **k < N**
- Contabilização do número de vezes que a operação **dominante** é executada

k	k < N
0 (k = 0)	1 (V)
1 (k = k+1)	1 (V)
2 (k = k+1)	1 (V)
...	...
N - 1 (k = k+1)	1 (V)
N (k = k+1)	1 (F)
	N + 1

- T(N): N + 1

  T(N) = O(p(N)), em que p(N) é um polinómio de grau 1 em ordem a N

- Ordem de complexidade: **O(N)**

Exemplo 1

- Ordens de complexidade determinadas
  - contabilizando todas as operações: O(N)
  - contabilizando a operação dominante: O(N)
- Conclusão
  - o número de vezes que as operações que estão dentro do ciclo são realizadas não tem impacto no cálculo da ordem de complexidade
  - basta considerar a operação dominante, caso esta seja fácil de determinar

Exemplo 2

- Considere-se a seguinte função em C (determinar o maior elemento dum array 1D)

```
int maiorElementoArray (int *A, int N)
{
  int  k, maior;
  maior = A[0];
  k = 1;
  while (k < N) {
     if (A[k] > maior)
        maior = A[k];
     k = k + 1;
  }
  return  maior;
}
```

Exemplo 2

- Contabilização do número de vezes que as operações primitivas são executadas
  - Pior caso:
    - para a operação "maior = A[k]" ser executada o máximo de vezes, o array deve estar ordenado por ordem crescente
    - as restantes operação são sempre executadas o máximo de vezes

k	maior = A[0]	k = 1	k < N	A[k] > maior	maior = A[k]	k = k + 1
1	1	1	1 (V)	1	1	1
2	0	0	1 (V)	1	1	1
3	0	0	1 (V)	1	1	1
...	...	...	...	...	...	...
N - 1	0	0	1 (V)	1	1	1
N	0	0	1 (F)	0	0	0
	1	**1**	**N + 1**	**N**	**N**	**N**

Exemplo 2

- Contabilização do número de vezes que as operações primitivas são executadas
  - T(N): $1 + 1 + (N + 1) + N + N + N = 4 \times N + 3$

    T(N) = O(p(N)), em que p(N) é um polinómio de grau 1 em ordem a N
- Ordem de complexidade: **O(N)**

- Questão:
  - Como se define o melhor caso e o caso médio?

Exemplo 2

- Operação primitiva dominante (mais vezes executada): **k < N**
- Contabilização do número de vezes que a operação dominante é executada
  - Pior caso: não existe, pois esta operação é sempre executada o máximo de vezes

k	k < N
1 (k = 1)	1 (V)
2 (k = k+1)	1 (V)
3 (k = k+1)	1 (V)
...	...
N - 1 (k ← k+1)	1 (V)
N (k ← k+1)	1 (F)
	N

  - T(N): N

    T(N) = O(p(N)), em que p(N) é um polinómio de grau 1 em ordem a N

- Ordem de complexidade: **O(N)**

Exemplo 3

- Considere-se a seguinte função em C (calcula a soma dos elementos dum array 2D)

```
int somaMatriz (int X[][], int M, int N)
{
  int k, soma;
  soma = 0;
  for (k = 0; k < M; k++)
     for (j = 0; j < N; j++){
        soma = soma + V[k][j];
     }
  return soma;
}
```

- Pior caso
  - não existe, pois todos os elementos do array têm que ser tratados (ou analisados)

Exemplo 3

- Operação primitiva dominante (mais vezes executada): **j < N**
- Contabilização do número de vezes que a operação dominante é executada

k	k < M	j	j < N
0 (k = 0)	1 (V)	0 (j = 0) 1 (j = j+1) ... N - 1 (j = j+1) N (j = j+1)	1(V) 1(V) ... 1(V) 1(F)
	1		**N + 1**
1 (k = k+1)	1 (V)	0 (j = 0) 1 (j = j+1) ... N - 1 (j = j+1) n (j = j+1)	1(V) 1(V) ... 1(V) 1(F)
	1		**N + 1**
...	...	...	...

Exemplo 3

- Contabilização do número de vezes que a operação dominante é executada

k	k < M	j	j < N
...	...	...	...
M - 1 (k = k+1)	1 (V)	0 (j = 0) 1 (j = j+1) ... n - 1 (j = j+1) n (j = j+1)	1(V) 1(V) ... 1(V) 1(F)
	1		**N + 1**
M (k = k+1)	1 (F)	–	–
	M + 1		**total**

Exemplo 3

- Contabilização do número de vezes que a operação dominante é executada
  - resultados da simulação:
    - k = 0 $\Rightarrow$ N + 1
    - k = 1 $\Rightarrow$ N + 1

      ...
    - k = M-1 $\Rightarrow$ N + 1
    - k = M $\Rightarrow$ 0
  - **total**: $M \times (N + 1) = M \times N + M$
  - fazendo **M = a** $\times$ **N**, em que **a** é uma constante
  - T(N): $M \times N + M = a \times N \times N + a \times N = a \times N^2 + a \times N$

    $T(N) = O(p_2(N))$, em que $p_2(N)$ é um polinómio de grau 2 em ordem a N
- Ordem de complexidade: **$O(N^2)$**

Exemplo 4

- Considere-se a seguinte função em C (pesquisa de um elemento num array 1D)

```
int pesquisaExaustiva (int E, int *A, int N)
{
  int  k;
  k = 0;
  while (k < N  &&  A[k] != E) {
     k = k + 1;
  }
  if (k == N)
     return -1;
  else
     return k;
}
```

- Operação dominante: ?
- Pior caso, melhor caso e caso médio: ?

Exemplo 4

- Operação primitiva dominante (mais vezes executada): **k < N && A[k] != E**
- Contabilização do número de vezes que a operação dominante é executada
  - Pior caso: o elemento E não está no array A

k	k < N && A[k] != E
0 (k = 0)	1 (V)
1 (k = k+1)	1 (V)
2 (k = k+1)	1 (V)
...	...
N - 1 (k ← k+1)	1 (V)
N (k ← k+1)	1 (F)
	N

  - T(N): N; T(N) = O(p(N)), em que p(N) é um polinómio de grau 1 em ordem a N
- Ordem de complexidade: **O(N)**