Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 1

1)

a) $\operatorname{Maj} A = [3, +\infty[, \sup A = 3, \max A = 3, \operatorname{Min} A =]-\infty, 0], \inf A = 0, \min A = 0$

b) $\operatorname{Maj} B = [2, +\infty[, \sup B = 2, \nexists \max B, \operatorname{Min} B =]-\infty, -2], \inf B = -2, \nexists \min B$

c) $\operatorname{Maj} C = \mathbb{R}, \nexists \sup C, \nexists \max C, \operatorname{Min} C = \mathbb{R}, \nexists \inf C, \nexists \min C$

d) $\operatorname{Maj} D = [2, +\infty[, \sup D = 2, \max D = 2, \operatorname{Min} D =]-\infty, -\frac{2}{3}], \inf D = -\frac{2}{3}, \nexists \min D$

e) $\nexists \operatorname{Maj} E, \sup E, \max E, \operatorname{Min} E, \inf E, \min E$

f) $\operatorname{Maj} F = [3, +\infty[, \sup F = 3, \max F = 3, \operatorname{Min} F =]-\infty, -1], \inf F = -1, \min F = -1$

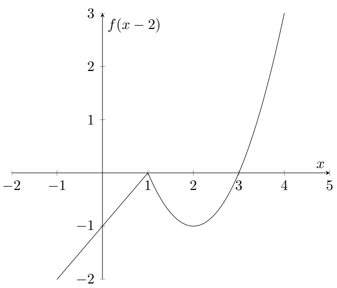
g) $\operatorname{Maj} G = [3, +\infty[, \sup G = 3, \max G = 3, \operatorname{Min} G =]-\infty, -1], \inf G = -1, \min G = -1$

h) $\nexists \operatorname{Maj} H, \sup H, \max H, \operatorname{Min} H, \inf H, \min H$

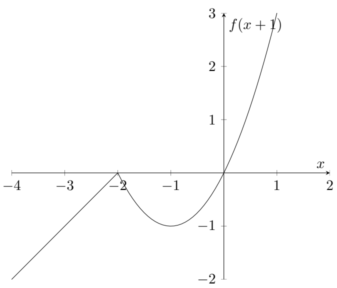
i) $\operatorname{Maj} I = [1, +\infty[, \sup I = 1, \max I = 1, \operatorname{Min} I =]-\infty, 0], \inf I = 0, \nexists \min I$

j) $\operatorname{Maj} J = [3, +\infty[, \sup J = 3, \max J = 3, \operatorname{Min} J =]-\infty, 2], \inf J = 2, \nexists \min J$

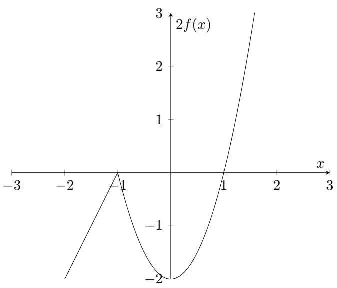
2)



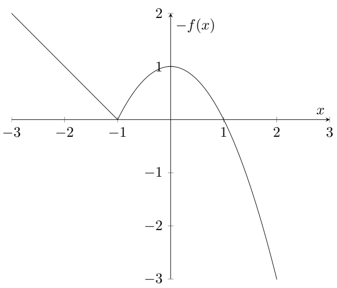
a)



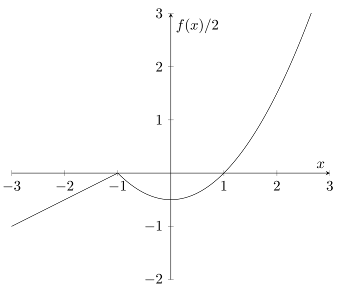
b)



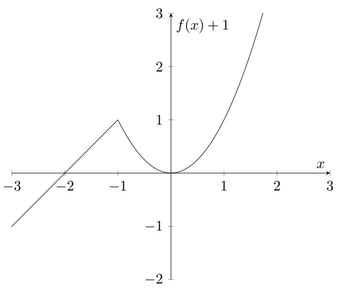
c)



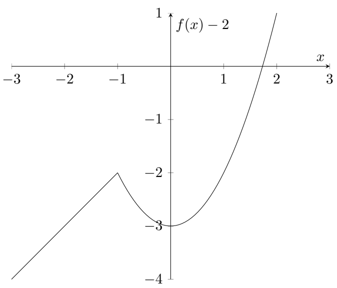
d)



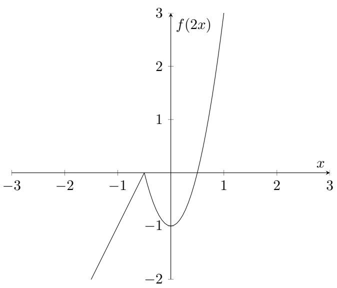
e)



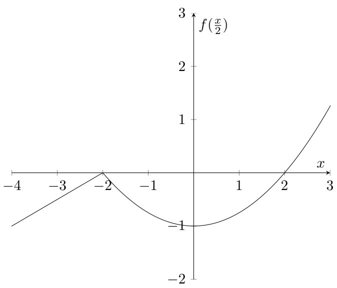
f)



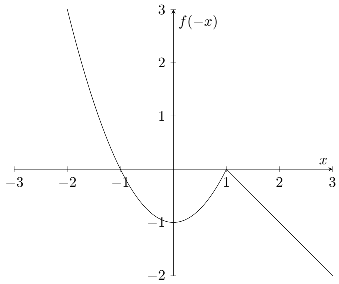
g)

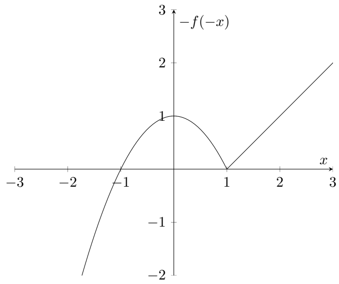


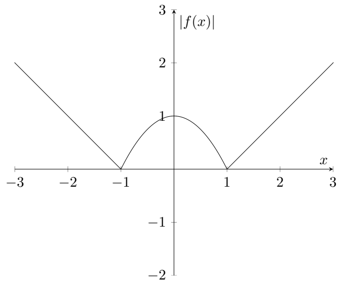
h)



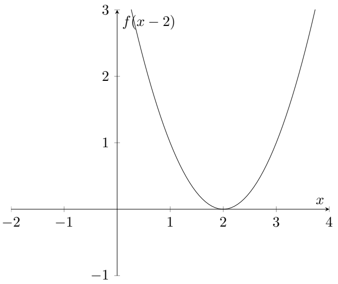
i)

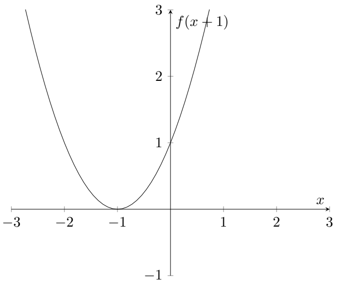
$j)$ 

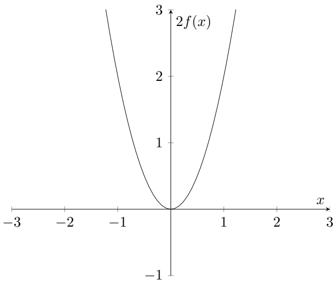
$k)$ 

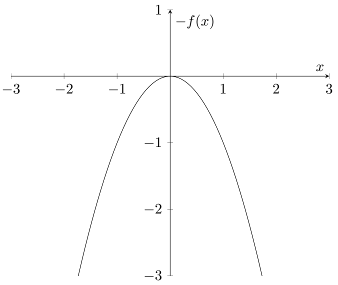
$l)$ 

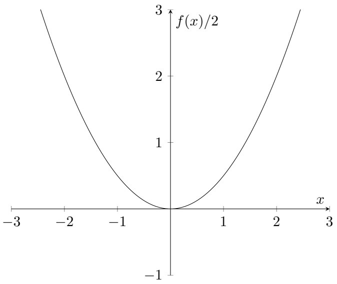
3) (i) $f(x) = x^2$

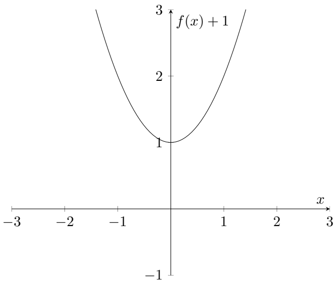
$a)$ 

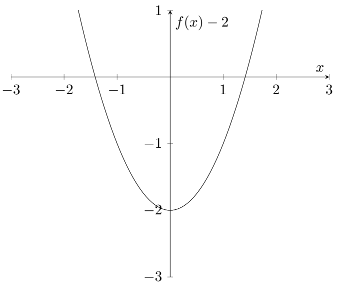
$b)$ 

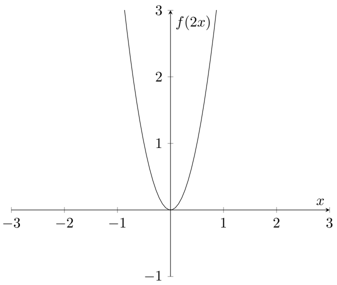
$c)$ 

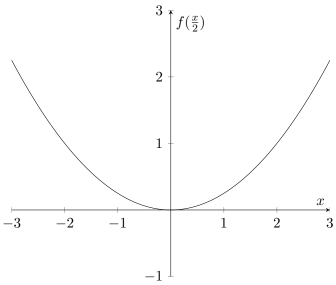
$d)$ 

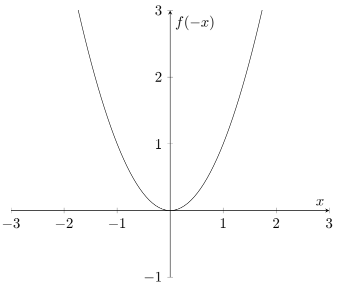
$e)$ 

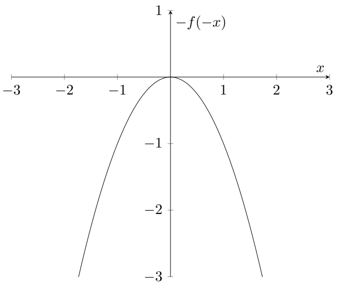
$f)$ 

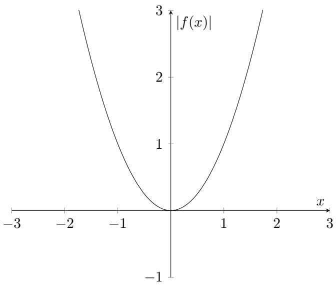
$g)$ 

$h)$ 

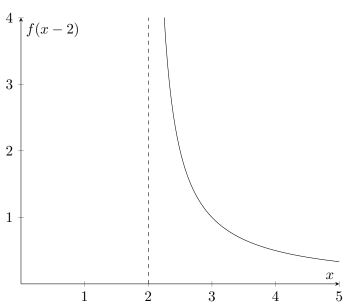
$i)$ 

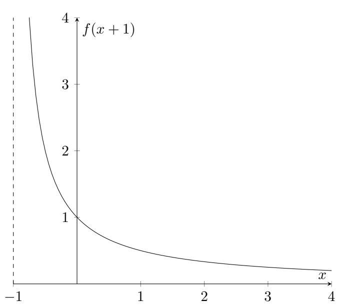
$j)$ 

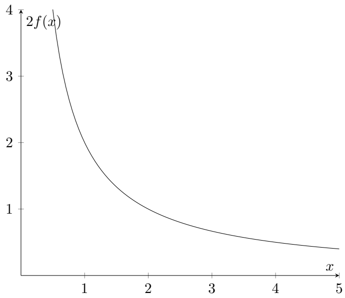
$k)$ 

$l)$ 

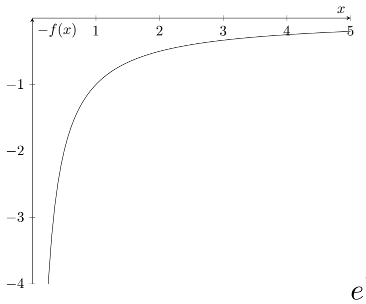
(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$a)$ 

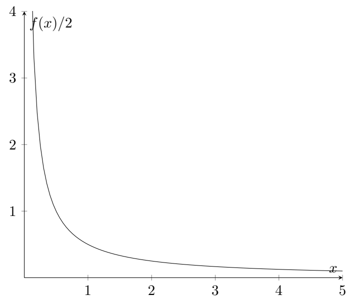
$b)$ 



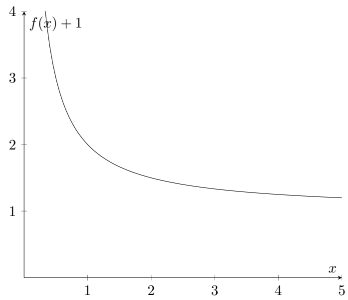
$c)$



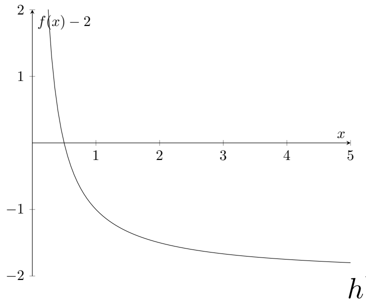
$d)$



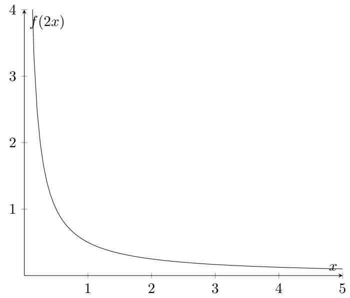
$e)$



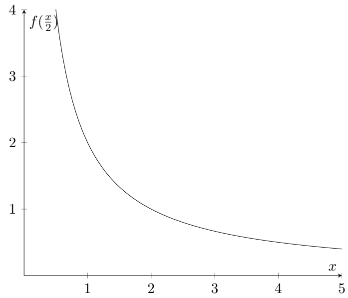
$f)$



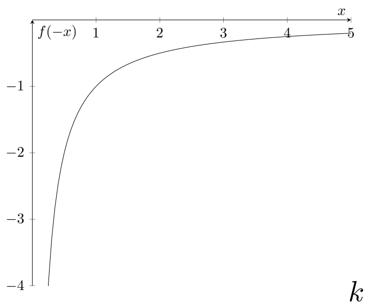
$g)$



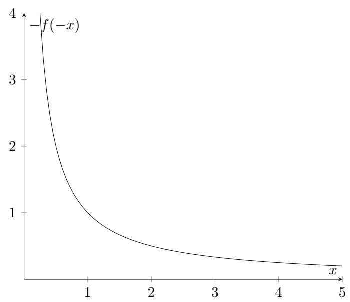
$h)$



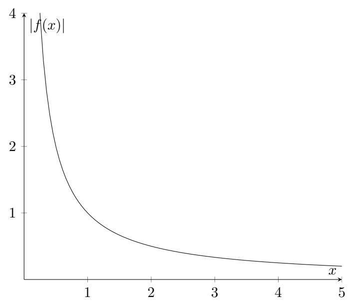
$i)$



$j)$



$k)$



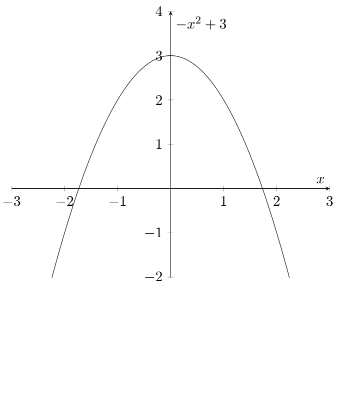
$l)$

4)

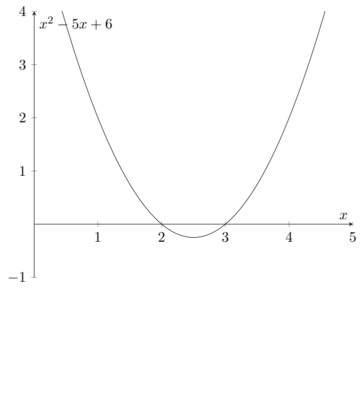
$a)$ ímpar $\quad b)$ par $\quad c)$ não ímpar e não par $\quad d)$ não ímpar e não par

5)

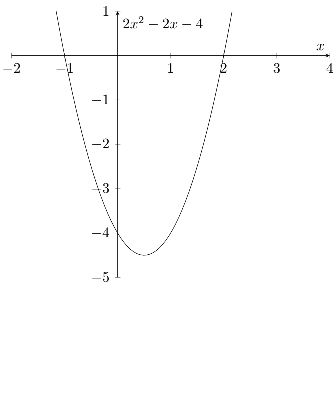
$a)$ $D_f = \mathbb{R}$
$CD_f =]-\infty, 3]$
zeros: $\{\pm\sqrt{3}\}$



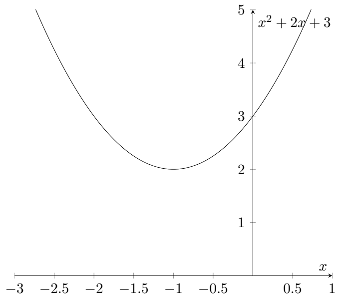
$b)$ $D_f = \mathbb{R}$
$CD_f = [-\frac{1}{4}, +\infty[$
zeros: $\{2, 3\}$



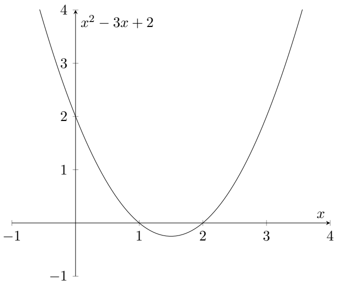
$c)$ $D_f = \mathbb{R}$
$CD_f = [-\frac{9}{2}, +\infty[$
zeros: $\{-1, 2\}$



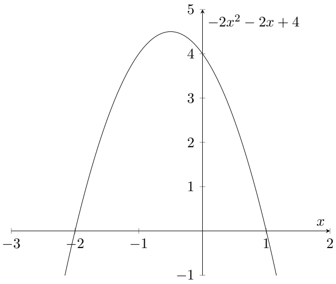
$d)$ $D_f = \mathbb{R}$
$CD_f = [2, +\infty[$
zeros: $\{\}$



$e)$ $D_f = \mathbb{R}$
$CD_f = [-\frac{1}{4}, +\infty[$
zeros: $\{1, 2\}$

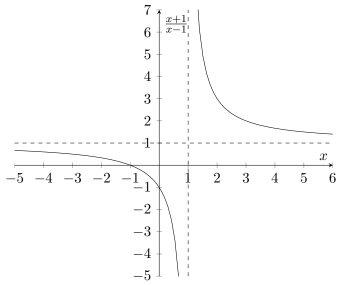


$f)$ $D_f = \mathbb{R}$
$CD_f =]-\infty, \frac{9}{2}]$
zeros: $\{-2, 1\}$

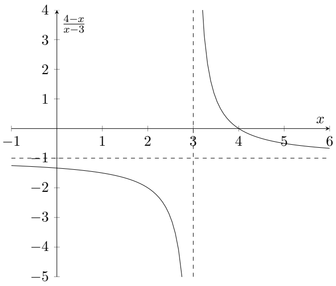


6)

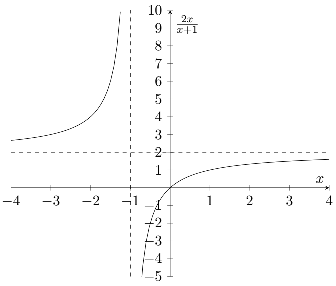
$a)$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$CD_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
zeros: $\{-1\}$



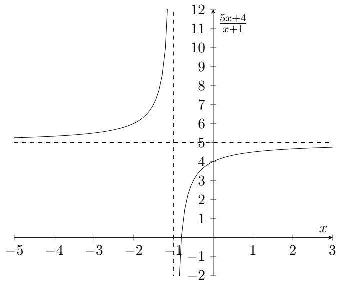
$b)$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
$CD_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
zeros: $\{4\}$



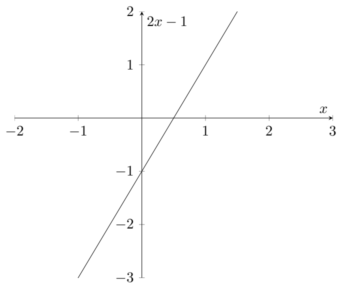
$c)$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$CD_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
zeros: $\{0\}$



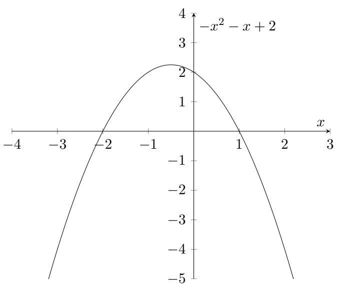
$d)$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$CD_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$
zeros: $\left\{\frac{4}{5}\right\}$



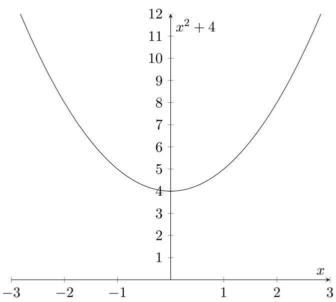
7)



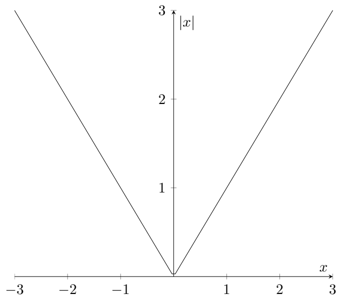
$a)$

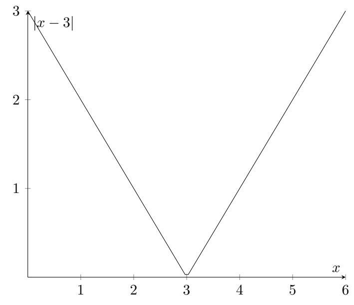


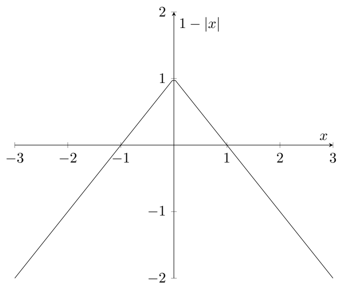
$b)$



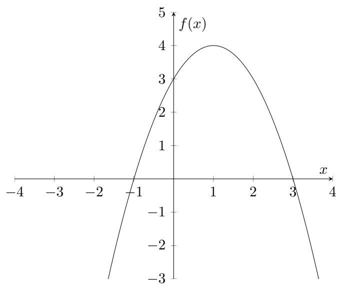
$c)$

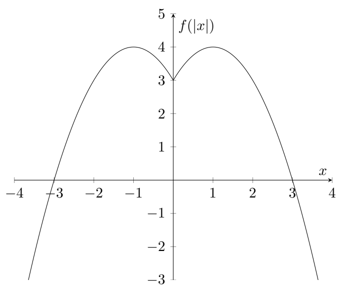
$d)$ 

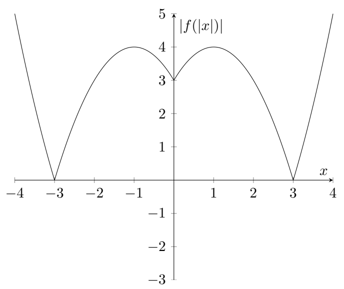
$e)$ 

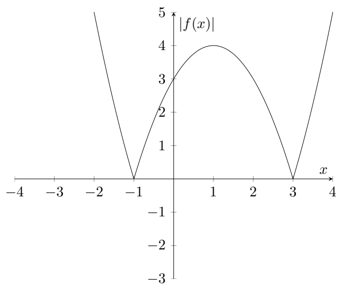
$f)$ 

8)

$a)$ 

$b)$ 

$c)$ 

$d)$ 

9)

$a)$ $D_f = [-4, +\infty[$
$CD_f =]-\infty, 5]$

$b)$ $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
$CD_f = \mathbb{R}_0^+$

$c)$ $D_f = \mathbb{R}_0^+$
$CD_f = [-1, +\infty[$

$d)$ $D_f = \mathbb{R}$
$CD_f = \{-1, 1\}$

$e)$ $D_f = \mathbb{R}$
$CD_f =]0, 2]$

$f)$ $D_f =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$
$CD_f = \mathbb{R}^+$

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 2

1)

a) 18 *b)* -18 *c)* π *d)* $\pi - 2$

e) $5-\sqrt{5}$ *f)* 1 *g)* $2-x$ *h)* $x-2$

i) $\begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$ *j)* $\begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases}$ *k)* x^2+1 *l)* $\begin{cases} 1-2x^2 & \text{se } x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \\ 2x^2-1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \end{cases}$

2)

a) $\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$ *b)* $\{-2, -\frac{4}{3}\}$ *c)* $\{-3, 1\}$ *d)* $\{-\frac{4}{3}, 2\}$

e) $\{-2\}$ *f)* $]3,5[$ *g)* $]-\infty,-4] \cup [2,+\infty[$ *h)* $]-6,0[$

i) $]\frac{3}{2}, \frac{7}{2}[$ *j)* $]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [0,+\infty[$ *k)* $]-\infty,-3[\cup]2,+\infty[$ *l)* $]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$

m) $[-2,0]$ *n)* $\{\}$ *o)* $[-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}]$ *p)* $]-\infty, -\frac{7}{6}] \cup]\frac{1}{6}, +\infty[$

q) $[-4,-1] \cup [1,4]$ *r)* $[-4,-3[\cup]3,4]$ *s)* $[-2,-1[\cup]3,4]$ *t)* $]\frac{9}{2}, 5[\cup]5, \frac{11}{2}[$

3)

a) $]-\infty,0[\cup]2,3[\cup]5,+\infty[$ *b)* $[0,2] \cup [3,5]$ *c)* $]-\infty,-1] \cup [0,1] \cup [2,+\infty[$

d) $]-1,0[\cup]1,2[$ *e)* $[-2,-1] \cup [0,1]$ *f)* $[-\sqrt{3}-1,-2] \cup [0, \sqrt{3}-1]$

4)

a) $\{-4, -\frac{2}{5}\}$ *b)* $\{-2\}$ *c)* $[-3, -\frac{1}{3}] \setminus \{-1\}$ *d)* $\left]\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}, \frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{3\sqrt{5}-7}{2}, \frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right[$

e) $[-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}] \setminus \{-1\}$ *f)* $\left]-\infty, \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{10}}{3}, +\infty\right[$ *g)* $[-3,-1[\cup]-\frac{1}{7}, \frac{1}{3}]$ *h)* $]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{3}{5}, +\infty[$

5)

a) $|x| < 1$ *b)* $|x| < \frac{1}{2}$ *c)* $|x - \frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2}$

d) $|x+2| < 1$ *e)* $|x + \frac{1}{4}| \leq \frac{1}{4}$ *f)* $|x| \leq 0$

6)

a) $|x| > 1$ *b)* $|x-1| > 1$ *c)* $|x-2| \geq 1$

d) $|x+2| \geq 1$ *e)* $|x + \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$ *f)* $|x| \geq 0$

7)

a) $-\frac{1}{4}$ *b)* $\frac{6}{37}$ *c)* $\frac{3}{4}$ *d)* $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \frac{x+1}{2}$ *e)* $\frac{x^2+x+1}{2}$

f) $\frac{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 + \frac{x}{x^2+1} + 1}{2}$ *g)* -1 *h)* 2 *i)* 5 *j)* $\frac{1}{2}$

8)

a) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}; f^{-1}(x) = 10-5x$ *b)* $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{3\}; f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{3-x}$ *c)* $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+; f^{-1}(x) = 3+x^2$

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR
Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 3

1)

a) $\left\{\frac{7}{5}\right\}$	*b)* $\left\{\frac{5}{4}\right\}$	*c)* $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$	*d)* $\{-2,2\}$
e) $\{2,3\}$	*f)* $\{0,2\}$	*g)* $\left\{\frac{1}{4}\right\}$	*h)* $\{-3,0\}$
i) $\{0\}$	*j)* $\{0\}$	*k)* $\{-1\}$	*l)* $\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

2)

a) População 2	*b)* População 3	*c)* Sim, populações 2 e 4	*d)* $t=0.047h$

3)

a) 5	*b)* $\frac{1}{8}$	*c)* $16e^3$	*d)* 5
e) 9	*f)* 0	*g)* 2	*h)* 0
i) -1	*j)* $-\frac{3}{2}$	*k)* $\frac{1}{2}$	*l)* $\frac{3}{4}$

4)

a) $\left\{\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$	*b)* $\{\pm 4\}$	*c)* $\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$
d) $\left[0,\frac{1}{2}\right]$	*e)* $]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$	*f)* $[-1,2]$
g) $[0,9]$	*h)* $]-\infty,5[$	*i)* $]-1,0[$
j) $]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$	*k)* $]0,4^{-7}]$	*l)* $]-1,0[$
m) $\left]-\frac{1}{3},0\right[$	*n)* $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$	*o)* $]5,6[$
p) $]1,3]$	*q)* $\left]0,\frac{15}{8}\right[$	

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 4

1)

a) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) $\mathbb{R}$

c) $\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$

d) $]4,5[\cup]6,+\infty[$

e) $[-2,1[\setminus\{0\}$

f) $\mathbb{R}^-$

g) $]-1,1[$

h) $\mathbb{R}^+$

i) $\left]\frac{5-\sqrt{4e+1}}{2},2\right[\cup\left]3,\sqrt{e+\frac{1}{4}},\frac{5}{2}\right[$

2)

a) $D_f=\mathbb{R}$
$CD_f=]-\infty,1[$

b) $D_f=]-2,2[$
$CD_f=[0,+\infty[$

3)

a) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$
$CD_f=\mathbb{R}$

b) $\{-\frac{4}{3},2\}$

c) $]-\infty,0[\cup\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$

4)

a) $D_f=\mathbb{R}$
$CD_f=]-1,+\infty[$

b) $f^{-1}:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$
$f^{-1}(x)=\ln(x+1)-3$

5)

a) $D_f=\mathbb{R}$
$CD_f=]-2,+\infty[$

$D_g=]-1,+\infty[$
$CD_g=\mathbb{R}$

b) zeros de f: $\left\{\frac{\log_3 2+1}{2}\right\}$

zeros de g: $\{-\frac{8}{9}\}$

d) $f^{-1}:]-2,+\infty[\to\mathbb{R}$
$f^{-1}(x)=\frac{\log_3(x+2)+1}{2}$

$g^{-1}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$g^{-1}(x)=3^{x-2}-1$

6)

a) $D_f=]-3,3[$
$CD_f=]-\infty,\log_2 9]$

b) f não é injectiva

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR
Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica
Ano Lectivo 2020/2021
Cálculo I
Soluções dos exercícios - Ficha 5

1)

a) $\{x \in \mathbb{R} : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

2)

a) $\{-\frac{2}{3}\pi, 0, \frac{2}{3}\pi, \pi\}$

b) $\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\}$

c) $\{-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi\}$

4) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

5) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

6) $\{x \in \mathbb{R} : x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{9} + \frac{4}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{9}\pi + \frac{4}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

7)

a) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $]2^5, +\infty[$

8)

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$CD_f = [0, 1]$

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$CD_f = \left]0, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty[$

c) $D_f = \mathbb{R}$
$CD_f = [2, 4]$

d) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$CD_f = \mathbb{R}$

9)

a) $\frac{2\sqrt{2}+3}{2}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \pm\frac{\pi}{30} + \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

10)

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

11)

a) $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\frac{3}{4}$

1)

a) $\frac{\pi}{6}$ *b)* $\frac{5}{6}\pi$ *c)* $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *e)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *f)* $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *h)* $\frac{1}{2}$ *i)* $\frac{\pi}{4}$

j) $\frac{3}{5}$ *k)* $\frac{12}{13}$ *l)* $\frac{3\sqrt{7}}{7}$

m) $\frac{5}{12}$ *n)* $\frac{24}{25}$ *o)* $\frac{24}{7}$

p) $\frac{3+\sqrt{105}}{16}$ *q)* $\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{15}}{16}$

2)

a) $-\sqrt{1-x^2}$ *b)* $\frac{x+1}{2}$ *c)* $\sqrt{1-x^2}$

3)

a) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ *b)* $\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$ *c)* $\{\pm 1\}$

4)

a) $D_f = [-3,-1] \cup [1,3]$
$CD_f = [0,\pi]$

b) $D_f = [0,1]$
$CD_f = \left[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$

c) $D_f = \mathbb{R}$
$CD_f = \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$

d) $D_f = [-1,0]$
$CD_f = \left[1-\frac{\pi}{2}, 1\right[$

e) $D_f =]-\infty,-3] \cup [-1,+\infty[$
$CD_f = \left[\frac{1}{2}-\pi, \frac{1}{2}+\pi\right]$

f) $D_f = [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \setminus \{0\}$
$CD_f =]-\infty, \ln\pi]$

5)

a) $D_f = \left[-\frac{2}{3}, 0\right]$
$CD_f = \left[2-\frac{\pi}{2}, 2+\frac{\pi}{2}\right]$
zeros: $\nexists$

b) $f(0) = 2+\frac{\pi}{2}$
$f\left(-\frac{1}{6}\right) = 2+\frac{\pi}{6}$

c) $\left\{\frac{\sqrt{3}-2}{6}\right\}$

d) $f^{-1} : \left[2-\frac{\pi}{2}, 2+\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$
$f^{-1}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x-2)-1}{3}$

6)

a) $D_g = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$
$CD_g = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$

b) $\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{6}\right\}$

c) $g^{-1} : \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right] \to \mathbb{R}$
$g^{-1}(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{3}$

7)

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ *c)* $CD_g = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 7

1)

a) $\operatorname{int} A =]0,2[\cup]3,5[\neq A$, logo A é não aberto
$\operatorname{ext} A =]-\infty,0[\cup]2,3[\cup]5,+\infty[$
$\operatorname{fr} A = \{0,2,3,5,6,7\}$
$\overline{A} = [0,2]\cup[3,5]\cup\{6,7\} \neq A$, logo A é não fechado
$A' = [0,2]\cup[3,5]$

b) $\operatorname{int} B =]1,3[\neq B$, logo B é não aberto
$\operatorname{ext} B =]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$
$\operatorname{fr} B = \{1,3\}$
$\overline{B} = [1,3] \neq B$, logo B é não fechado
$B' = [1,3]$

c) $\operatorname{int} C =]-\infty,-2[\cup]3,+\infty[= C$, logo C é aberto
$\operatorname{ext} C =]-2,3[$
$\operatorname{fr} C = \{-2,3\}$
$\overline{C} =]-\infty,-2]\cup[3,+\infty[\neq C$, logo C é não fechado
$C' =]-\infty,-2]\cup[3,+\infty[$

d) $\operatorname{int} D =]-\infty,-1[\cup\left]\frac{5}{2},+\infty\right[= D$,
logo D é aberto
$\operatorname{ext} D = \left]-1,\frac{5}{2}\right[$
$\operatorname{fr} D = \left\{-1,\frac{5}{2}\right\}$
$\overline{D} =]-\infty,-1]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right[\neq D$,
logo D é não fechado
$D' =]-\infty,-1]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$

e) $\operatorname{int} E =]-1,0[\cup]1,+\infty[= E$, logo E é aberto
$\operatorname{ext} E =]-\infty,-1[\cup]0,1[$
$\operatorname{fr} E = \{-1,0,1\}$
$\overline{E} = [-1,0]\cup[1,+\infty[\neq E$, logo E é não fechado
$E' = [-1,0]\cup[1,+\infty[$

f) $\operatorname{int} F =]1,+\infty[\neq F$, logo F é não aberto
$\operatorname{ext} F =]-\infty,1[$
$\operatorname{fr} F = \{1\}$
$\overline{F} = [1,+\infty[= F$, logo F é fechado
$F' = [1,+\infty[$

g) $\operatorname{int} G =]-2,-1[\cup]1,2[\neq G$, logo G é não aberto
$\operatorname{ext} G =]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]2,+\infty[$
$\operatorname{fr} G = \{-2,-1,1,2\}$
$\overline{G} = [-2,-1]\cup[1,2] \neq G$, logo G é não fechado
$G' = [-2,-1]\cup[1,2]$

h) $\operatorname{int} H =]-\infty,-3[\cup]2,3[= H$,
logo H é aberto
$\operatorname{ext} H =]-3,2[\cup]3,+\infty[$
$\operatorname{fr} H = \{-3,2,3\}$
$\overline{H} =]-\infty,-3]\cup[2,3] \neq H$,
logo H é não fechado
$H' =]-\infty,-3]\cup[2,3]$

i) $\operatorname{int} I =]-3,-2[\cup]0,1[\neq I$, logo I é não aberto
$\operatorname{ext} I =]-\infty,-3[\cup]-2,0[\cup]1,+\infty[$
$\operatorname{fr} I = \{-3,-2,0,1\}$
$\overline{I} = [-3,-2]\cup[0,1] = I$, logo I é fechado
$I' = [-3,-2]\cup[0,1]$

j) $\operatorname{int} J =]-\sqrt{2},\sqrt{2}[\neq J$, logo J é não aberto
$\operatorname{ext} J =]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$
$\operatorname{fr} J = \left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$
$\overline{J} = [-\sqrt{2},\sqrt{2}] = J$, logo J é fechado
$J' = [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

k) $\operatorname{int} K = \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\neq K$, logo K é não aberto
$\operatorname{ext} K = \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$
$\operatorname{fr} K = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
$\overline{K} = \left[\frac{1}{2},+\infty\right[= K$, logo K é fechado
$K' = \left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

l) $\operatorname{int} L = \left]\frac{7}{6},\frac{5}{2}\right[\setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} = L$, logo L é aberto
$\operatorname{ext} L = \left]-\infty,\frac{7}{6}\right[\cup\left]\frac{5}{2},+\infty\right[$
$\operatorname{fr} L = \left\{\frac{7}{6},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right\}$
$\overline{L} = \left[\frac{7}{6},\frac{5}{2}\right] \neq L$, logo L não é fechado
$L' = \left[\frac{7}{6},\frac{5}{2}\right]$

m) $\operatorname{int} M =]-\infty,-4[\neq M$, logo M é não aberto
$\operatorname{ext} M =]-4,+\infty[$
$\operatorname{fr} M = \{-4\}$
$\overline{M} =]-\infty,-4] = M$, logo M é fechado
$M' =]-\infty,-4]$

n) $\operatorname{int} N = \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[= N$, logo N é aberto
$\operatorname{ext} N = \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$
$\operatorname{fr} N = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
$\overline{N} = \left]-\infty,\frac{1}{2}\right] \neq N$, logo N é não fechado
$N' = \left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$

2)

a) Min $A =]-\infty, 0]$, $\inf A = 0$, $\nexists \min A$
Maj $A = [7, +\infty[$, $\sup A = 7$, $\max A = 7$
A é limitado

b) Min $B =]-\infty, 1]$, $\inf B = 1$, $\min B = 1$
Maj $B = [3, +\infty[$, $\sup B = 7$, $\nexists \max B$
B é limitado

c) $\nexists$ Min C, $\nexists \inf C$, $\nexists \min C$
$\nexists$ Maj C, $\nexists \sup C$, $\nexists \max C$
C não é limitado

d) $\nexists$ Min D, $\nexists \inf D$, $\nexists \min D$
$\nexists$ Maj D, $\nexists \sup D$, $\nexists \max D$
D não é limitado

e) Min $E =]-\infty, -1]$, $\inf E = -1$, $\nexists \min E$
$\nexists$ Maj E, $\nexists \sup E$, $\nexists \max E$
E não é limitado

f) Min $F =]-\infty, 1]$, $\inf F = 1$, $\min F = 1$
$\nexists$ Maj F, $\nexists \sup F$, $\nexists \max F$
F não é limitado

g) Min $G =]-\infty, -2]$, $\inf G = -2$, $\nexists \min G$
Maj $G = [2, +\infty[$, $\sup G = 2$, $\nexists \max G$
G é limitado

h) $\nexists$ Min H, $\nexists \inf H$, $\nexists \min H$
Maj $H = [3, +\infty[$, $\sup H = 3$, $\nexists \max H$
H não é limitado

i) Min $I =]-\infty, -3]$, $\inf I = -3$, $\min I = -3$
Maj $I = [1, +\infty[$, $\sup I = 1$, $\max I = 1$
I é limitado

j) Min $J =]-\infty, -\sqrt{2}]$, $\inf J = -\sqrt{2}$,
$\min J = -\sqrt{2}$
Maj $J = [\sqrt{2}, +\infty[$, $\sup J = \sqrt{2}$, $\max J = \sqrt{2}$
J é limitado

k) Min $K =]-\infty, \frac{1}{2}]$, $\inf K = \frac{1}{2}$, $\min K = \frac{1}{2}$
$\nexists$ Maj K, $\nexists \sup K$, $\nexists \max K$
K não é limitado

l) Min $L = \left]-\infty, \frac{7}{6}\right]$, $\inf L = \frac{7}{6}$, $\nexists \min L$
Maj $L = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$, $\sup L = \frac{5}{2}$, $\nexists \max L$
L é limitado

m) $\nexists$ Min M, $\nexists \inf M$, $\nexists \min M$
Maj $M = [-4, +\infty[$, $\sup M = -4$, $\max M = -4$
M não é limitado

n) $\nexists$ Min N, $\nexists \inf N$, $\nexists \min N$
Maj $N = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $\sup N = \frac{1}{2}$, $\nexists \max N$
N não é limitado

3)

a) 1

b) -1

c) -2

d) 6

e) 4

f) -2

g) 1, se $a = 0$; 0, se $a \neq 0$

h) $\frac{1}{4}$

i) $\frac{1}{2}$

j) $\frac{\sqrt{30}}{6}$

k) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

l) 1

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 8

1)

a) 1	*b*) $-\frac{1}{8}$	*c*) 7
d) e^4	*e*) $\frac{1}{3}$	*f*) -1
g) -1	*h*) -6	*i*) 0
j) 3	*k*) 0	*l*) -1
m) $\frac{1}{2}$	*n*) $\frac{3}{8}$	*o*) $\frac{1}{3}$

2)

a) 7	*b*) 2	*c*) $-\frac{1}{6}$
d) $\frac{1}{2}$	*e*) 2	*f*) $\frac{1}{2}$
g) 0	*h*) 2	*i*) 1
j) 0	*k*) 1	*l*) $-\frac{3}{2}$
m) 2	*n*) $\frac{2}{3}$	*o*) -2
p) 0	*q*) $\frac{3}{7}$	*r*) -1

3)

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$, logo $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -2$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$, logo $\nexists \lim_{x\to 2} f(x)$

c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -a$, logo $\lim_{x\to 0} f(x) = -a$

d) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = 16$, logo $\lim_{x\to 5} f(x) = 16$

e) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, logo $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$

f) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -4$, logo $\lim_{x\to 0} f(x) = -4$

1)

a) f é contínua em $D_f = \mathbb{R}$. De facto, a função polinomial $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x + 1$ é contínua em $\mathbb{R}$ e a função exponencial $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = e^t$ é contínua em $\mathbb{R}$. Como a composição de funções contínuas é uma função contínua, concluímos que a função dada por $f(x) = (h \circ g)(x) = e^{x+1}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

b) f é contínua em $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. De facto, a função polinomial $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$ é contínua em $\mathbb{R}$ e a função polinomial $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^2 - 4$ é contínua em $\mathbb{R}$. Como o quociente de funções contínuas é uma função contínua e $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, concluímos que a função dada por $f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{x}{x^2-4}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

c) f é contínua em $D_f = \mathbb{R}$. De facto, a função constante $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2$ é contínua em $\mathbb{R}$ e a função trigonométrica $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \cos(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, como a soma e a diferença de funções contínuas é uma função contínua, $i(x) = (g + h)(x)$ e $j(x) = (g - h)(x)$ são funções contínuas em $\mathbb{R}$. Como o quociente de funções contínuas é uma função contínua e $j(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, concluímos que a função dada por $f(x) = \left(\frac{i}{j}\right)(x) = \frac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

d) f é contínua em $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. De facto, a função polinomial $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2x$ é contínua em $\mathbb{R}$ e a função trigonométrica $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \operatorname{tg}(t)$ é contínua em $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Como a composição de funções contínuas é uma função contínua, concluímos que a função dada por $f(x) = (h \circ g)(x) = \operatorname{tg}(2x)$ é contínua em $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) Se $x > 0$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso, para cada $x > 0$, existe um intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x) = 2$, que é contínua em $\mathbb{R}$ por ser uma função constante. Em particular, f é contínua para $x > 0$.

Se $x < 0$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso para cada $x < 0$ existe um intervalo $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x) = 0$. Como a função constante é contínua em $\mathbb{R}$, concluímos que f é contínua para $x < 0$.

No ponto $x = 0$ temos $f(0) = 2$, mas $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq 2$. Logo f não é contínua no ponto $x = 0$.

Assim, conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

f) Se $x > 0$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso, para cada $x > 0$, existe um intervalo $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x) = \ln(e^x + 1)$. A função exponencial $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g_1(x) = e^x$ é contínua e a função constante $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g_2(x) = 1$ é contínua em $\mathbb{R}$. Como a soma de funções contínuas é uma função contínua, a função $g_1 + g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $(g_1 + g_2)(x) = g_1(x) + g_2(x) = e^x + 1$ é uma função contínua. Como a função logarítmica $g_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $g_3(t) = \ln t$ é contínua no seu domínio e a composição de funções contínuas é uma função contínua, concluímos que a função dada por $[g_3 \circ (g_1 + g_2)](x) = \ln(e^x + 1)$ é contínua em $\mathbb{R}$ (note que $e^x + 1 > 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$). Em particular, f é contínua para $x > 0$.

Se $x < 0$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso para cada $x < 0$ existe um intervalo $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x) = \operatorname{sen} x$. Como a função trigonométrica $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \operatorname{sen} x$ é contínua em $\mathbb{R}$ concluímos que f é contínua para $x < 0$.

No ponto $x=0$ temos $f(0)=\ln\left(e^0+1\right)=\ln 2$, mas $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} 0=0\neq \ln 2$.
Logo f não é contínua no ponto $x=0$.
Conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

g) Se $x<-2$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso, para cada $x<-2$, existe um intervalo $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ com $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x)=2(x+2)e^{2(x+2)}$. A função polinomial $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=2(x+2)$ é contínua e a função exponencial $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $h(t)=e^t$ é contínua em $\mathbb{R}$. Como a composição de funções contínuas é uma função contínua, concluímos que a função dada por $(h\circ g)(x)=e^{2(x+2)}$ é contínua em $\mathbb{R}$. Além disso, como o produto de funções contínuas é uma função contínua, a função $g\times(h\circ g):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $\left(g\times(h\circ g)\right)(x)=g(x)\times(h\circ g)(x)=2(x+2)e^{2(x+2)}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Em particular, f é contínua para $x<-2$.

Se $x>-2$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso para cada $x>-2$ existe um intervalo $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ com $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x)=x\ln(x+3)$. A função polinomial $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=x+3$ é contínua e a função logarítmica $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ dada por $h(t)=\ln t$ é contínua em $\mathbb{R}^+$. Como a composição de funções contínuas é uma função contínua, concluímos que a função dada por $(h\circ g)(x)=\ln(x+3)$ é contínua em $]-3,+\infty[$. Além disso, como a função polinomial $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $i(x)=x$ é contínua e o produto de funções contínuas é uma função contínua, a função $i\times(h\circ g):]-3,+\infty[\to\mathbb{R}$ dada por $\left(i\times(h\circ g)\right)(x)=i(x)\times(h\circ g)(x)=x\ln(x+3)$ é uma função contínua em $]-3,+\infty[$. Em particular, f é contínua para $x>-2$.

No ponto $x=-2$ temos $f(-2)=-2\ln(-2+3)=0$, e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ Logo f é contínua no ponto $x=-2$.

Conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R}$.

h) Se $x\neq 1$ a função é contínua no ponto x. De facto, para cada $x\neq 1$, existe um intervalo $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ com $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x)=\frac{x^3-1}{1-x}$. As funções polinomiais $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas respectivamente por $g(x)=x^3-1$ e $h(x)=1-x$são contínuas em $\mathbb{R}$. Como o quociente de funções contínuas é uma função contínua e $h(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, concluímos que a função dada por $\left(\frac{g}{h}\right)(x)=\frac{x^3-1}{1-x}$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

No ponto $x=1$ temos $f(1)=-3$. Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-3$, f é contínua no ponto $x=1$.

Conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R}$.

i) Se $x>0$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso, para cada $x>0$, existe um intervalo $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ com $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x)=e^{x+2}-e^2$. A função polinomial $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=x+2$ é contínua e a função exponencial $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $h(t)=e^t$ é contínua em $\mathbb{R}$. Como a composição de funções contínuas é uma função contínua, concluímos que a função dada por $(h\circ g)(x)=e^{x+2}$ é contínua em $\mathbb{R}$. Além disso, como a função constante $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $i(x)=e^2$ é contínua e a diferença de funções contínuas é uma função contínua, a função $(h\circ g)-i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $\left((h\circ g)-i\right)(x)=(h\circ g)(x)-i(x)=e^{x+2}-e^2$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Em particular, f é contínua para $x>0$.

Se $x<0$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso para cada $x<0$ existe um intervalo $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ com $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x)=x+\operatorname{senh}(2x)$. As funções polinomiais $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas respectivamente por $g(x)=x$ e $h(x)=2x$ são contínuas e a função hiperbólica $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $i(t)=\operatorname{senh} t$ é contínua em $\mathbb{R}$. Como a soma e a composição de funções contínuas é uma função contínua, concluímos que a função dada por $\left(g+(i\circ h)\right)(x)=g(x)+(i\circ h)(x)=x+\operatorname{senh}(2x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Em particular, f é contínua para $x<0$.

No ponto $x=0$ temos $f(0)=e^2-e^2=0$, e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ Logo f é contínua no ponto $x=0$.

Assim, conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R}$.

j) Se $x < 0$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso, para cada $x < 0$, existe um intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x) = \frac{1}{2} + \ln(e-x)$. A função polinomial $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = e - x$ é contínua e a função logarítmica $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \ln t$ é contínua em $\mathbb{R}^+$. Como a composição de funções contínuas é uma função contínua, concluímos que a função dada por $(h \circ g)(x) = \ln(e-x)$ é contínua em $]-\infty, e[$. Além disso, como a função constante $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $i(x) = \frac{1}{2}$ é contínua e a soma de funções contínuas é uma função contínua, a função $i + (h \circ g) :]-\infty, e[\to \mathbb{R}$ dada por $(i + (h \circ g))(x) = i(x) + (h \circ g)(x) = \frac{1}{2} + \ln(e-x)$ é uma função contínua em $]-\infty, e[$. Em particular, f é contínua para $x < 0$.

Se $x > 0$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso para cada $x > 0$ existe um intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x) = \frac{-3x}{1-e^{2x}}$. As funções polinomiais $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas respectivamente por $g(x) = -3x$ e $h(x) = 2x$ são contínuas, a função exponencial $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $i(t) = e^t$ é contínua em $\mathbb{R}$ e a função constante $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $j(t) = 1$ é contínua em $\mathbb{R}$. Como o quociente, a diferença e a composição de funções contínuas são funções contínuas e, além disso, $(j - (i \circ h))(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, concluímos que a função dada por $\left(\frac{g}{j-(i \circ h)}\right)(x) = \frac{-3x}{1-e^{2x}}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Em particular, f é contínua para $x > 0$.

No ponto $x = 0$ temos $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{3}{2}$, logo f é contínua no ponto $x = 0$.

Conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R}$.

k) Se $x > 0$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso, para cada $x > 0$, existe um intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. A função trigonométrica $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \operatorname{sen} x$ é contínua e a função polinomial $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x$ é contínua em $\mathbb{R}$. Como o quociente de funções contínuas é uma função contínua e $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função $\left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Em particular, f é contínua para $x > 0$.

Se $x < 0$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso, para cada $x < 0$, existe um intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{-x}$. A função trigonométrica $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \operatorname{sen} x$ é contínua e a função polinomial $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = -x$ é contínua em $\mathbb{R}$. Como o quociente de funções contínuas é uma função contínua e $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função $\left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{-x}$ é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Em particular, f é contínua para $x < 0$.

No ponto $x = 0$ temos $f(0) = 1$, mas $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq 1$. Logo f não é contínua no ponto $x = 0$.

Assim, conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

l) Se $x > 2$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso, para cada $x > 2$, existe um intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x^2-x-2}$. A função polinomial $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - 1$ é contínua e a função logarítmica $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \ln t$ é contínua em $\mathbb{R}^+$. Como a composição de funções contínuas é uma função contínua, concluímos que a função dada por $(h \circ g)(x) = \ln(x-1)$ é contínua em $]1, +\infty[$. Além disso, como a função polinomial $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $i(x) = x^2 - x - 2$ é contínua, o quociente de funções contínuas é uma função contínua e $i(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, a função $\frac{(h \circ g)}{i} :]1, +\infty[\setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por $\left(\frac{(h \circ g)}{i}\right)(x) = \frac{\ln(x-1)}{x^2-x-2}$ é uma função contínua em $]1, +\infty[\setminus \{2\}$. Em particular, f é contínua para $x > 2$.

Se $x < 2$ a função é contínua no ponto x. De facto, neste caso para cada $x < 2$ existe um intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde f é dada pela expressão $f(x) = \frac{e^{x-2}-1}{3x-6}$. As funções polinomiais $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas respectivamente por $g(x) = x - 2$ e $h(x) = 3x - 6$ são contínuas, a função exponencial $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $i(t) = e^t$ é contínua em $\mathbb{R}$ e a função constante $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $j(t) = 1$ é contínua em $\mathbb{R}$. Como a composição, a diferença e o quociente de funções contínuas são funções contínuas e, além disso, $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, concluímos que a função dada por $\left(\frac{(i \circ g)-j}{h}\right)(x) = \frac{e^{x-2}-1}{3x-6}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Em particular, f é contínua para $x < 2$.

No ponto $x = 2$ temos $f(2) = -\frac{1}{3}$, mas $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{1}{3} \neq -\dfrac{1}{3}$. Logo f não é contínua no ponto $x = 2$.

Assim, conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2)

a) $k = \dfrac{1}{2}$

b) $k = 0$

c) $k = -2$

d) $k = \dfrac{2}{3}$

e) $k = 8$

f) $k = 2$

3)

a) $k = 0$

b) $k = 1$

d) $k = -\sqrt{2}$

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 10

---

3) 1

4) 4

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 11

---

3)

a) $k = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

4)

a) f não é contínua em $x = 0$ pois $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq e = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

b) $\sqrt{e}$

d) Não, pois f também é contínua em $[1, 2]$, por exemplo, e pelo Teorema de Weierstrass ter nesse intervalo os seus extremos absolutos.

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 12

1)

$a)$ $\dfrac{1}{2}$

$b)$ $+\infty$

$c)$ 0

$d)$ $-\infty$

$e)$ $-\dfrac{a+b}{2}$

$f)$ 1

$g)$ 1

$h)$ 0

$i)$ 2

$j)$ 1

$k)$ 1

$l)$ $+\infty$

2)

$a)$ 1

$b)$ -1

$c)$ $-\infty$

$d)$ $+\infty$

$e)$ -1

$f)$ 1

$g)$ 0

$h)$ $\nexists$

$i)$ $+\infty$

$j)$ $-\dfrac{\pi}{2}$

3)

$a)$ $x = 3; y = 1$

$b)$ $x = 1; y = 0$

$c)$ $x = 1; y = 2$

$d)$ $x = 0; x = 1; y = 1$

$e)$ $x = 2; y = 2x + 1$

$f)$ $x = -2; y = 3x - 8$

$g)$ $x = 0$ (só à direita); $y = 0$

$h)$ $x = 0$ (só à esquerda); $y = 2$

$i)$ $y = 0$ (só à direita); $y = 0$

$j)$ $x = -2; x = 2; y = 0$

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 13

1)

a) $f'(4) = \dfrac{4}{5}$
$y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{9}{5}$

b) $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$
$y = -\dfrac{x}{4} + 1$

c) $f'(2) = 2e^9$
$y = 2e^9 x - 3e^9$

d) $f'(3) = 3$
$y = 3x - 9$

e) $f'(a) = \dfrac{1}{a}$
$y = \dfrac{x}{a} + \ln a - 1$

f) $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a+1}}$
$y = \dfrac{x}{2\sqrt{a+1}} + \dfrac{a+2+8\sqrt{a+1}}{2\sqrt{a+1}}$

g) $f'(0) = 0$
$y = 0$

h) f não é diferenciável em $x = \frac{\pi}{2}$

2)

a) 1

b) -4

c) -4

d) -6

e) -20

f) 11

g) $\dfrac{4}{25}$

h) $\dfrac{1}{9}$

i) $\dfrac{1}{9}$

j) $-\dfrac{2}{25}$

k) -5

l) 6

m) -108

n) 2×5^5

o) -1

3) $\left[g'\left(x^4 e^{-x}\right)\right] x^3 e^{-x} (4 - x)$

4) $\left(f^{-1}(x)\right)' = \cos x$

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 14

1) (Consultar regras e tabelas de derivação do formulário)

2) A velocidade após 2 segundos é $f'(2) = -\frac{1}{9}$ m/s

3) A velocidade do balão meteorológico no instante $t = 1,\ 4,\ 8,$ é, respectivamente 4, 10, 18 m/s. Quando está a 50m do solo, a velocidade do balão é $6\sqrt{5}$ m/s.

4)

a) f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$	*b*) f é diferenciável em $\mathbb{R}$
c) f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$	*d*) f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
e) f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	*f*) f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
g) f é diferenciável em $\mathbb{R}$	*h*) f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 15

1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

2) $y = \frac{1}{4}x - 1$

3)

a) $f'(-3) = 3$ *b*) $y = 3\,\mathrm{e}\,x + 9\,\mathrm{e} + 1$

4) O ponto de tangência é $(0, -\frac{2}{3}\pi)$

5)

a) $D_g = \mathbb{R}^+$ *b*) $g'(1) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^2 + \frac{2}{\pi}$ *c*) $y = \mathrm{e}^2 + \ln\frac{\pi}{4} + (\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^2 + \frac{2}{\pi})(x-1)$

6)

a) $a = 1, \;\; b = -1$

7) (Consultar regras e tabelas de derivação do formulário)

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 16

1) $c = 2$

2)

c) Não contradiz o Teorema de Rolle porque não se verificam todas as suas hipóteses: f não é contínuas em $\frac{\pi}{2}$.

6) $x = -2$ é um zero; $\exists^1$ zero no intervalo $]0, 1[$; $\exists^1$ zero no intervalo $]4, 5[$

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 17

1) $c = \frac{1}{2}$

2) $15 + \frac{1}{32} < \sqrt{226} < 15 + \frac{1}{30}$

4) $\frac{1}{11} < \ln 1.1 < \frac{1}{10}$ e $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{22.1} < \operatorname{arctg} 1.1 < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{20}$

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 18

1) $\sqrt{0.9} \approx \frac{19}{20}$ e $\sqrt{0.99} \approx \frac{199}{200}$

2)

a) $\sqrt{1+0.1} \approx \dfrac{21}{20}$ e $\sqrt{1+0.01} \approx \dfrac{201}{200}$

b) $\dfrac{1}{(1+2\times 0.1)} \approx \dfrac{2}{10}$ e $\dfrac{1}{(1+2\times 0.01)} \approx \dfrac{92}{100}$

c) $\mathrm{e}^{0.1} \approx \dfrac{11}{10}$ e $\mathrm{e}^{0.01} \approx \dfrac{101}{100}$

d) $\operatorname{tg} 0.1 \approx \dfrac{1}{10}$ e $\operatorname{tg} 0.01 \approx \dfrac{1}{100}$

3)

a) $Q_1(x) = 3x^2 - 3x + 1,\ f(1+0.01) \approx \frac{10303}{10000}$

b) $Q_1(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2,\ f(1+0.01) \approx \frac{199}{20000}$

c) $Q_0(x) = 2x^2 - 2x + 1,\ f(0+0.01) \approx \frac{9802}{10000}$

d) $Q_{-8}(x) = -2 + \frac{x+8}{12} + \frac{(x+8)^2}{288},\ f(-8+0.01) \approx -\frac{55199}{28800}$

4)

a) $T_{5,1}(x) = x^3 + 1$

b) $T_{5,1}(x) = 2 - x + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - (x-1)^5$

c) $T_{5,0}(x) = \ln 3 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{18}x^2 + \dfrac{x^3}{3\times 3^3} - \dfrac{x^4}{4\times 3^4} + \dfrac{x^5}{5\times 3^5}$

d) $T_{5,1}(x) = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \dfrac{\mathrm{e}}{2!}(x-1)^2 + \dfrac{\mathrm{e}}{3!}(x-1)^3 + \dfrac{\mathrm{e}}{4!}(x-1)^4 + \dfrac{\mathrm{e}}{5!}(x-1)^5$

e) $T_{5,0}(x) = -1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5$

5)

a) $T_{n,0}(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$

b) $T_{2n+1,0}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

c) $T_{2n,0}(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

d) $T_{n,0}(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$

e) $T_{n,0}(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n$

6)

a) $\mathrm{e}^{0.1} \approx 1.105170833$

b) $\operatorname{sen}(0.2) \approx 0.198666$

c) $\cos(0.1) \approx 0.99500$

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 19

1)

a) $-\frac{2}{3}$	*b)* $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	*c)* 0	*d)* 1	*e)* 0	*f)* 0
g) $\frac{1}{2}$	*h)* 0	*i)* -1	*j)* 0	*k)* $+\infty$	*l)* 0
m) 1	*n)* 1	*o)* $e^{-\frac{1}{2}}$	*p)* 1	*q)* e	*r)* 1

2)

a) f é crescente em $[-2,2]$ e decrescente em $]-\infty,-2]$ e em $[2,+\infty[$; $f(-2)$ é um máximo local e $f(2)$ é um mínimo local.

b) f é crescente em $]-\infty,1]$ e em $[3,+\infty[$ e decrescente em $[1,3]$; $f(1)$ é um máximo local e $f(3)$ é um mínimo local.

c) f é decrescente em $]-\infty,\sqrt[3]{2}]$ e crescente em $[\sqrt[3]{2},+\infty[$; $f(\sqrt[3]{2})$ é um mínimo local.

d) f é crescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos locais.

e) f é decrescente em $]-\infty,-1]$ e crescente em $[-1,+\infty[$; $f(-1)$ é um mínimo local.

f) f é crescente em $[0,2]$ e decrescente em $]-\infty,0]$ e em $[2,+\infty[$; $f(0)$ é um mínimo local e $f(2)$ é um máximo local.

g) f é decrescente em $]-\infty,e^{-1}]$ e crescente em $[e^{-1},+\infty[$; $f(e^{-1})$ é um mínimo local.

h) f é crescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos.

3)

a) f é convexa em $\mathbb{R}$ e não tem pontos de inflexão.

b) f é convexa em $]-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}]$ e em $[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty[$ e côncava em $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$; f tem dois pontos de inflexão, em $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) f é côncava em $]-\infty,0[$ e convexa em $]0,+\infty[$; f não tem pontos de inflexão.

d) f é côncava em $]-\infty,-1[$ e convexa em $]-1,+\infty[$; f não tem pontos de inflexão.

e) f é convexa em $]-\infty,-1]$ e em $[1,+\infty[$ e côncava em $[-1,1]$; f não tem pontos de inflexão.

f) f é convexa em $]-\infty,-6]$ e em $[0,6]$ e côncava em $[-6,0]$ e em $[6,+\infty]$; f tem pontos de inflexão em $x=-6,\ x=0$ e $x=6$

g) f é convexa em $\mathbb{R}$ e não tem pontos de inflexão.

h) f é convexa em $]-\infty,-3]$ e em $[-1,+\infty[$ e côncava em $[-3,-1]$; f tem pontos de inflexão em $x=-3$ e $x=-1$.

i) f é côncava em $]0,e^{-3/2}]$ e convexa em $[e^{-3/2},+\infty[$; f tem um ponto de inflexão em $x=e^{-3/2}$

j) f é côncava em $]-\infty,0[$ e convexa em $]0,+\infty[$; f tem um ponto de inflexão em $x=0$

4) Para conferir o esboço do gráfico de cada uma das funções use uma qualquer aplicação (geogebra online, por exemplo).

a)

D_f	$\mathbb{R}$
Zeros	$x = 0$ e $x = 3$
Paridade	não é par nem ímpar
Monotonia	decrescente em $[0, 2]$; crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$
Extremos	$f(0)$ é máximo e $f(2)$ é mínimo
Concavidades	côncava em $]-\infty, 1]$ e convexa em $[1, +\infty[$
P.inflexão	$x = 1$
Assímptotas	não tem

b)

D_f	$\mathbb{R}$
Zeros	$x = \pm\sqrt{3}$
Paridade	par
Monotonia	decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[0, 1]$; crescente em $[-1, 0]$ e em $[1, +\infty[$
Extremos	$f(-1)$ e $f(1)$ são mínimos e $f(0)$ é máximo
Concavidades	convexa em $]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ e em $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[$; côncava em $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}[$
P.inflexão	$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
Assímptotas	não tem

c)

D_f	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
Zeros	$x = 0$
Paridade	par
Monotonia	crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, 0]$; decrescente em $[0, 1[$ e em $]1, +\infty[$
Extremos	$f(0)$ é máximo
Concavidades	convexa em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$; côncava em $]-1, 1[$
P.inflexão	não tem
Assímptotas	$x = \pm 1$; $y = 1$

d)

D_f	$\mathbb{R}$
Zeros	não tem
Paridade	não é par nem ímpar
Monotonia	decrescente em $]-\infty, -\frac{1}{2}]$; crescente em $[-\frac{1}{2}, +\infty[$
Extremos	$f(-\frac{1}{2})$ é mínimo
Concavidades	convexa em $\mathbb{R}$
P.inflexão	não tem
Assímptotas	$y = x + \frac{1}{2}$; $y = -x - \frac{1}{2}$

e)

D_f	$\mathbb{R}$
Zeros	$x = \frac{1}{2}$
Paridade	não é par nem ímpar
Monotonia	crescente em $\mathbb{R}$ (f é constante a partir de 1)
Extremos	$f(1)$ é máximo
Concavidades	côncava em $\mathbb{R}$
P.inflexão	não tem
Assímptotas	$y = 2x - 1$; $y = 1$

f)	D_f	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$
	Zeros	$x=0$
	Paridade	ímpar
	Monotonia	decrescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$
	Extremos	não tem
	Concavidades	côncava em $]-\infty,0[$; convexa em $]0,+\infty[$
	P.inflexão	não tem
	Assímptotas	$y=\pm 1$
g)	D_f	$\mathbb{R}$
	Zeros	não tem
	Paridade	não é par nem ímpar
	Monotonia	crescente em $\mathbb{R}$
	Extremos	não tem
	Concavidades	convexa em $]-\infty,\ln 4]$; côncava em $[\ln 4,+\infty[$
	P.inflexão	$x=\ln 4$
	Assímptotas	$y=0$ e $y=5$
h)	D_f	$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$
	Zeros	$x=\pm\sqrt{2}$
	Paridade	par
	Monotonia	decrescente em $]-\infty,-1[$; crescente em $]1,+\infty[$
	Extremos	não tem
	Concavidades	côncava em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$
	P.inflexão	não tem
	Assímptotas	$x=\pm 1$
i)	D_f	$\mathbb{R}^+$
	Zeros	$x=1$
	Paridade	não é par nem ímpar
	Monotonia	crescente em $]0,\mathrm{e}]$; decrescente em $[\mathrm{e},+\infty[$
	Extremos	$f(\mathrm{e})$ é máximo
	Concavidades	côncava em $]0,\mathrm{e}^{3/2}[$; convexa em $[\mathrm{e}^{3/2},+\infty[$
	P.inflexão	$x=\mathrm{e}^{3/2}$
	Assímptotas	$x=0$ e $y=0$
j)	D_f	$\mathbb{R}$
	Zeros	$x=0$
	Paridade	ímpar
	Monotonia	crescente em $]-1,1]$; decrescente em $[-\infty,-1[$ e em $[1,\infty[$
	Extremos	$f(1)$ é máximo e $f(-1)$ é mínimo
	Concavidades	côncava em $]-\infty,-1[$ e em $[0,1]$; convexa em $[-1,0]$ e em $[1,+\infty[$
	P.inflexão	$x=\pm 1$ e $x=0$
	Assímptotas	$y=0$

k)	D_f	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
	Zeros	não tem
	Paridade	par
	Monotonia	decrescente em $]-\infty,-1]$ e em $]0,1]$; crescente em $[-1,0[$ e em $[1,+\infty[$
	Extremos	$f(1)$ e $f(-1)$ são mínimos
	Concavidades	convexa em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$
	P.inflexão	não tem
	Assímptotas	$x=0$ e $y=\pm x$

l)	D_f	$\mathbb{R}$
	Zeros	$x=1$
	Paridade	não é par nem ímpar
	Monotonia	decrescente em $]-\infty,\mathrm{e}^{-1}]$; crescente em $[\mathrm{e}^{-1},+\infty[$
	Extremos	$f(\mathrm{e}^{-1})$ é mínimo
	Concavidades	côncava em $]-\infty,0]$; convexa em $[0,+\infty[$
	P.inflexão	$x=0$
	Assímptotas	não tem

m)	D_f	$[0,2\pi]$
	Zeros	$x=0$
	Paridade	não é par nem ímpar
	Monotonia	crescente em $[0,2\pi]$
	Extremos	$f(0)$ é mínimo e $f(2\pi)$ é máximo
	Concavidades	convexa em $]0,\pi]$; côncava em $[\pi,2\pi]$
	P.inflexão	$x=\pi$
	Assímptotas	não tem

n)	D_f	$\mathbb{R} \setminus \{-2\}$
	Zeros	$x=0$
	Paridade	não é par nem ímpar
	Monotonia	decrescente em $]-\infty,-2[$ e em $]-2,1[$; crescente em $[1,+\infty[$
	Extremos	não tem
	Concavidades	côncava em $]-\infty,-2[$ e em $]0,1[$; convexa em $]-2,0]$ e em $[1,+\infty[$
	P.inflexão	$x=0$
	Assímptotas	$x=-2$ e $y=0$

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 20

1) A concentração máxima ocorre no instante $t = \dfrac{\ln a - \ln b}{a-b}$ minutos. A concentração anula-se após um longo período.

2) C deve estar localizado a $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$km de B.

3) O comprimento mínimo é $\dfrac{2\sqrt{3}+5}{5}$m.

4) A inclinação deverá ser $\alpha = 45°$.

5) O raio da parte semi-circular deverá ser $\dfrac{3}{4+\pi}$m.

7) O triângulo é equilátero com lado igual a $\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$.

8) O volume máximo é $12\sqrt{2}$ cm^3.

9) O lado do quadrado deverá 3 cm.

10) A área mínima é $\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{\pi}}\right)^2 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}} = 3\sqrt[3]{\pi}$ dm^2

11) O cilindro deverá ter raio $\dfrac{10}{3}$ cm e altura 4 cm.

12) As dimensões que minimizam o custo são 2 cm de raio e 6 cm de altura.

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 21

1)

a) $\ln 2$ *b*) 0 *c*) 1 *d*) $\frac{1}{4}$ *e*) $e^e - e$

f) $\frac{\pi^2}{32}$ *g*) $\frac{4}{3}$ *h*) $\ln \frac{2}{3}$ *i*) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ *j*) $e^{-1} - e^{-3}$

k) 0 *l*) 4 *m*) $\frac{136}{3}$ *n*) $\ln 2 + \frac{3\pi\sqrt{2}}{8}$ *o*) $\frac{2}{3}$

p) $\frac{1}{3}\ln 2$ *q*) 0 *r*) $\frac{e - e^{-1}}{2}$ *s*) 0 *t*) $\frac{75}{2}$

2)

a) $x^3 + 5/2x^2 + x + c$ *b*) $x^5 + 1/2x^4 - x + c$ *c*) $\frac{x^7}{7} + \frac{3x^5}{5} + \frac{3x^2}{2} + x + c$

d) $\frac{2}{3}\sqrt{(5x+30)^3} + c$ *e*) $\frac{4}{5}x^{5/2} - 4x^{3/2} + 14x^{1/2} + c$ *f*) $\frac{3}{2x} + 5\ln|x| + 4x^{1/2} + c$

g) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2} + c$ *h*) $e^{x+3} + c$ *i*) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$

j) $-e^{1/x} + c$ *k*) $(\ln 2)^{-1}2^{x-1} + c$ *l*) $\frac{1}{2}\ln^2 x + c$

m) $\ln|\ln x| + c$ *n*) $\frac{1}{3}\ln^3 x + c$ *o*) $\ln(x^2+1) + c$

p) $\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + c$ *q*) $\operatorname{arctg} x^4 + c$ *r*) $\frac{1}{2}\ln|x^2+4x| + c$

s) $\ln|1+2\cos x|^{-\frac{1}{2}} - \operatorname{cotg} x + c$ *t*) $-\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos^2 x + c$ *u*) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + c$

v) $\operatorname{sen}(\ln x) + c$ *w*) $\operatorname{arctg} e^x + c$ *x*) $\frac{1}{2}\ln|e^{2x} + 3x + 1| + c$

y) $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}^3 x + c$ *z*) $\frac{3}{8}(1+5x^2)^{\frac{4}{5}} + c$ *A*) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x - \pi/4) + c$

B) $\frac{1}{4}\operatorname{senh}^2(2x) + c$ *C*) $\frac{1}{2}e^{x^2+2\operatorname{sen} x} + c$ *D*) $2\operatorname{sen}\sqrt{x} + c$

E) $-\cos(\operatorname{arctg} x) + c$ *F*) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\ln x^2) + c$ *G*) $-2\ln|\cos x^{\frac{1}{2}}| + c$

H) $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + c$ *I*) $\operatorname{tg}(x^2+1) + c$ *J*) $-\frac{1}{x+1} + c$

K) $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + c$ *L*) $\operatorname{arcsen}\frac{x}{3} + c$ *M*) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x^2-1}{\sqrt{7}} + c$

N) $\operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + c$ *O*) $\ln(e^{-x} + 1) + c$ *P*) $-\cos^{-1} + c$

Q) $\frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}\cos(5x-4) + c$ *R*) $\operatorname{tg}(\ln x) + c$ *S*) $\operatorname{arcsen}\frac{e^x}{3} + c$

T) $\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arcsen}\sqrt{5}x + c$ *U*) $-\frac{1}{4}(x^2+1)^{-2} + c$ *V*) $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arcsen} e^x - \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2e^{2x}}$

W) $-\frac{1}{2}\cos(\ln^2 x)$

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 22

1)

$a)$ $\frac{16-4\sqrt{2}}{3} - \ln 3$ $b)$ $\frac{28}{3}$ $c)$ $\frac{32}{3}$ $d)$ $\frac{8}{3}$

2)

$a)$ $\frac{26}{3}$ $b)$ 4 $c)$ $\frac{32}{3}$ $d)$ $\frac{1}{3}$

$e)$ $\frac{86}{3}$ $f)$ $\frac{4}{3}$ $g)$ $4 - 3\ln 3$

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 23

1)

a) $x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c$

b) $-2\,\mathrm{e}^{-1} + 1$

c) $\frac{2\,\mathrm{e}^2 - 3}{4}$

d) $x \ln\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + c$

e) $\ln 2 + \frac{\pi}{4} - 2$

f) $-\frac{2}{9}$

g) $\frac{1}{2}x \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}x + c$

h) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arc\,tg} x) + c$

i) $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

j) $x \operatorname{arc\,cotg} x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$

k) $\frac{x}{2}(\operatorname{sen}\ln x - \cos\ln x) + c$

l) $\frac{\mathrm{e}}{2}(\cos 1 + \operatorname{sen} 1) - \frac{1}{2}$

m) $\frac{1}{2}$

n) $-\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}(x^2 + 1) + c$

o) $\frac{\pi^2}{4} - 1$

p) $\frac{\mathrm{e}^x}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x) + c$

q) $\ln x(\ln(\ln x) - 1) + c$

r) $\mathrm{e} - 2$

s) $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + c$

t) $\frac{\pi}{4} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

u) $\frac{2}{3}\left(x + \frac{\sqrt{1+x^2}}{2}\right)\mathrm{e}^{\operatorname{arc\,sen} x} + c$

v) $\frac{1}{8}$

w) $-\sqrt{1 - x^2}\operatorname{arc\,sen} x + x + c$

x) $\frac{1}{8}\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{1}{2}$

2)

a) $\frac{2}{7}\left(\sqrt{x-1}\right)^7 + \frac{6}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + 2\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + 2\sqrt{x-1} + c$

b) $-2\left(\sqrt{1-x} - \frac{1}{3}(\sqrt{1-x})^3 + \mathrm{e}^{\sqrt{1-x}}\right) + c$

c) $\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + c$

d) $\frac{9}{2}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3} + \frac{x}{3}\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\right) + c$

e) $\frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}$

f) $\frac{8}{3}$

g) $\frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6}$

h) $1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}$

i) $\operatorname{arc\,cotg}(\cos x) + c$

j) $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{2}t) + c$

k) $\frac{\pi}{2}$

l) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} + 1| + c$

m) $\frac{\pi - 2}{2}$

n) $-\frac{1}{2}\ln|1 - \ln^2 x| + c$

o) $\ln|x| - \ln|1 - x| + c$

p) $2(\sqrt{2} - 1)$

q) $\ln 2 - \ln(\mathrm{e} + 1) + 1$

r) $\frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

s) $\frac{2}{15}(\sqrt{2} + 1)$

t) -4

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 24

1)

a) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + c$

b) $\frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{x+1}| - \frac{1}{2}(x+1)^{-1} + c$

c) $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + c$

d) $\ln(x^2+1) + \frac{3x+1}{2x^2+2} + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x + c$

e) $\operatorname{arc\,tg} 3 - \operatorname{arc\,tg} 2$

f) $\frac{1}{12}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln|x+2| - \frac{3}{4}\ln|x+3| + c$

g) $3\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c$

h) $\ln 2 + \frac{11}{8}$

i) $\frac{1}{18}\ln|(x-1)(x+5)| + \frac{1}{9}\ln|x+2| + c$

j) $\frac{1}{2} - \ln\sqrt{5}$

k) $\ln 3 + \frac{260}{3}$

l) $-\frac{1}{5}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{7}{60}\ln|x+5| + c$

m) $x + \frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{x+1}| - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + c$

n) $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 8\ln|x| - 8x^{-1} - 6\ln|x-1| + c$

o) $-x^{-1} - 2x^{-2} - (2x-4)^{-1} + \frac{1}{4}\ln|\frac{x}{x-2}| + c$

p) $\frac{1}{10}\ln 2 + \frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg} 2 - \frac{1}{10}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} - \frac{\pi}{10}$

q) $2\ln 3 - 3\ln 2$

r) $16\ln 3 - \frac{52}{3}$

2)

a) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + 2$ *b)* $f(x) = (\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x)\ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 3$

c) $f(x) = 2\ln|\ln x| + 1$ *d)* $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 3\cos x + 3x + 5$ *e)* $f(x) = \frac{4}{x+1} + 1$

3) Ao fim de 50 dias existem $\frac{20}{3}\,\mathrm{e}^{3\times 72000} + \frac{280}{3}$ bactérias.

4) Em 200 segundos, a distância percorrida é $700 + 100^4$ cm.

5) A posição do ponto no instante t é $d(t) = 10t - \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{9}cos^3 t + \frac{2}{9}$ m.

6) A posição do ponto no instante t é $d(t) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}(t+\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$ m.

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR
Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 25

1)

a) O volume é 27π.

b) O volume é: *i)* 16π; *ii)* $\frac{64}{5}\pi$; *iii)* $\frac{128}{15}\pi$.

c) O volume é $\pi\,\mathrm{e}^2(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2-2)+\frac{7}{2}\pi$.

2)

a) A área é $\frac{\pi}{27}(730\sqrt{730}-10\sqrt{10})$.

b) A área é 20π.

c) A área é $\frac{1}{2}\pi a^2(\frac{\mathrm{e}^2-e^{-2}}{2}+2)$.

d) A área é $32\sqrt{17}\pi$.

3)

a) A área é $\mathrm{e}(1-\mathrm{e}^{-2})+\frac{8}{3}$.

b) O volume é $\frac{3}{2}\pi$.

4)

a) O comprimento é $\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}$.

b) O comprimento é $\frac{a}{2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})$.

c) O comprimento é $\frac{8}{27}(37\sqrt{37}-1)$.

Departamento de Matemática

1º Ciclo em Engenharia Electromecânica

Ano Lectivo 2020/2021

Cálculo I

Soluções dos exercícios - Ficha 26

1)

a) $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-3x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-6x}-\ln(\mathrm{e}^{3x}+1))+c$

b) $-\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{3}\ln|2^x-1|-\frac{1}{6}\ln(\frac{3}{4}+(2^x+\frac{1}{2})^2)-\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arc\,tg}(\frac{2\sqrt{3}}{3}(2^x+\frac{1}{2}))\right)+c$

c) $\frac{\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}}{2}-\frac{1}{2}\ln(\frac{\mathrm{e}^2+1}{2})-\operatorname{arc\,tg}\mathrm{e}+\frac{\pi-6}{4}$

d) $\frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$ *e)* $\frac{5}{4}$ *f)* $-\frac{1}{3}\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}+\frac{1}{\operatorname{sen} x}+c$

g) $-\frac{152}{35}+\frac{3}{2}\pi$ *h)* $-\ln(\frac{\sqrt{3}-1}{2})$ *i)* $-\frac{1}{2}(1-\cos x)^{-2}+c$

j) $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2})+c$ *k)* $\frac{1}{5}x^5+\frac{3}{4}x^{8/3}+3x^{1/3}+c$ *l)* $\frac{1}{2}(1-\ln 2)+\frac{\pi}{4}$

m) $\frac{12}{\ln 3}\left(\ln|3^{x/12}+1|-\frac{1}{2}\ln(3^{x/6}-3^{x/12}+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}(\frac{2\sqrt{3}}{3}(3^{x/12}-1))\right)+c$

n) $-\ln|\operatorname{sen} x-\cos x|$ *o)* $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{arc\,sen}(2^x)+c$ *p)* $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-\ln 2)$

q) $\frac{\pi}{2}$ *r)* $-\operatorname{arc\,tg}(\cos x)+c$ *s)* $\frac{\mathrm{e}^{x-1}3^x}{\ln 3+1}+c$

t) $\frac{8}{15}$ *u)* $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x(\sec^2 x-\frac{2}{7}\operatorname{tg}^2 x)+c$ *v)* $4\sqrt[4]{x}+2\ln(\sqrt[4]{x}+1)-2\ln(\sqrt[4]{x}-1)+c$

w) $\frac{\sqrt{5}}{10}\ln\left|\frac{2\sqrt{5}\pm\sqrt{5+x^2}}{x}\right|+c$ *x)* $\left(x^{3/2}+x^{-1/2}\right)\operatorname{arc\,tg}x-\sqrt{x}+c$

y) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+4\sqrt{x}-4\ln|\sqrt{x}+1|+c$ *z)* $\ln|1+\sec x|+c$

A) $\frac{80}{3}+\ln 3$ *B)* $-\frac{1}{2}\ln 3$ *C)* -4

D) $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$ *E)* $4\ln(\frac{2}{\mathrm{e}+1})-\frac{5}{2}-\frac{\mathrm{e}^2-6\mathrm{e}}{2}$ *F)* $2\ln\frac{2}{3}-1$

G) $x\ln(1-x^2)-2x+2\operatorname{arc\,tg}x+c$ *H)* $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right|+c$

I) $\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+2\ln|\sqrt[4]{2x-1}-1|+c$

J) $\frac{\cos^2(2x)}{4}-\cos(2x)+\frac{1}{2}\ln|\cos(2x)+1|+c$