UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Exame de Matemática Computacional 1

Ano Letivo: 2017/2018
Semestre: Primeiro
Época: Normal
Data: 29-01-2018

Cursos: Engenharia Informática | Duração: 2h

Nome: ______________________ Número: ________ ★ Classificação: ________

O uso de telemóveis ou de outros aplicativos móveis durante a realização do Exame implica a **anulação** do mesmo. Deverá responder **no próprio enunciado** no espaço atribuído. Resolva primeiro na folha de rascunho e escreva no enunciado apenas os cálculos essenciais.

Parte I Nas questões seguintes, indique a opção correta, indicando a sua escolha com uma cruz no quadrado associado a essa opção. Uma resposta certa vale **1 valor**, uma resposta errada vale **-0,3 valores** e uma ausência de resposta vale **0 valores**.

1) A função $f(x) = \ln(\sin|x|)$ tem como domínio:
☐ $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ onde $k \in \mathbb{Z}$. ☐ $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ onde $k \in \mathbb{Z}$. ☐ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. ☒ nenhuma das anteriores.

2) A derivada de $f(x) = e^{\arctan x^2}$ em $x = 1$ é: ☐ 0. ☒ $e^{\frac{\pi}{4}}$. ☐ $e^{\frac{\pi}{3}}$. ☐ nenhuma das anteriores.

3) $\int \frac{5x-4}{x^2-x-2}\,dx$ é igual a:
☐ $\frac{\int 5x-4\,dx}{\int x^2-x-2\,dx}$. ☐ $5x\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx - 4\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$. ☒ $\int \frac{3}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx$. ☐ nenhuma das anteriores.

4) A função inversa, no domínio adequado, da função $f(x) = \frac{\pi}{3} - 2\arccos(x+1)$ é:
☒ $f^{-1}(x) = \cos(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}) - 1$. ☐ $f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{3} - 2\arccos(x+1)}$. ☐ $f^{-1}(x) = \cos(\frac{\pi}{6} - \frac{y}{2}) - 1$. ☐ nenhuma das anteriores.

5) A derivada da função $f(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\,dt$ é: ☐ $e^x - 1$. ☒ e^x. ☐ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. ☐ nenhuma das anteriores.

6) Uma solução de $\int_0^\eta 5x^4\,dx = \frac{2}{e-1}\int_0^1 e^x\,dx$ é: ☐ $\eta = \sqrt{5}$. ☐ $\eta = 2$. ☐ $\eta = 1$. ☒ nenhuma das anteriores.

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cosh t\,dt}{\int_0^x 1\,dt}$ é igual a: ☒ 1. ☐ $+\infty$. ☐ 0. ☐ nenhuma das anteriores.

8) O intervalo de convergência da série de potências dada por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}x^n$ é igual a:
☐ $]-3,3]$. ☒ $]-3,3[$. ☐ $[-3,3[$. ☐ nenhuma das anteriores.

9) As séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ são:
☒ convergentes. ☐ divergentes. ☐ respetivamente convergente e divergente. ☐ respetivamente divergente e convergente.

10) Os integrais impróprios $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ são:
☒ convergentes. ☐ divergentes. ☐ respetivamente convergente e divergente. ☐ respetivamente divergente e convergente.

Parte II Nas seguintes afirmações deverá responder se são *Verdadeiras* ou *Falsas*. Seguidamente, indique de forma sucinta a razão da sua escolha. Uma resposta certa vale **1 valor** e uma resposta sem justificação correta vale **0 valores**.

1) A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^x$ no ponto $(1, e)$ é $y = ex$. V☒ F☐

Sabemos que $f'(x) = (e^x)' = e^x$, logo $f'(1) = e$. A reta tangente tem equação $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - e = f'(1)x - f'(1) \Leftrightarrow y - e = ex - e \Leftrightarrow y = ex$.

2) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que f' é contínua em todo o seu domínio. Se $f'(a).f'(b) < 0$ (onde $a < b$), então existe necessariamente pelo menos um zero da derivada em $]a,b[$. V☒ F☐

É o teorema do valor intermédio aplicado a f'.

3) Dado $xy - x - 3y - 4 = 0$ temos que $\frac{dy}{dx} \neq \frac{1-y}{x-3}$. V☐ F☒

Derivemos a expressão $xy - x - 3y - 4 = 0$ implicitamente (em ordem a x). $y + xy' - 1 - 3y' = 0$. Resolvendo a equação em ordem a y' temos: $y - 1 + (x-3)y' = 0 \Leftrightarrow (x-3)y' = 1 - y \Leftrightarrow y' = \frac{1-y}{x-3}$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \cos x e^{\sin^2 x}\, dx = e - 1$. V☒ F☐

Façamos a substituição $y = \sin^2 x$, donde $dy = 2\sin x \cos x\, dx$. Quando $x = 0$ temos $y = 0$ e quando $x = \frac{\pi}{2}$ temos $y = 1$. Logo $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \cos x e^{\sin^2 x}\, dx = \int_0^1 e^y\, dy = e^y\Big|_0^1 = e - 1$.

5) O comprimento da curva que define o gráfico da função $f(x) = \cosh(x)$ entre os pontos de abcissas $x = 0$ e $x = 1$ é igual a $\sinh(1)$. (Dica: recorde as fórmulas $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ e $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$). V☒ F☐

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + (\cosh'(x))^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (\sinh(x))^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\cosh^2(x)}\, dx \\ &= \int_0^1 \cosh x\, dx = \sinh x\Big|_0^1 = \sinh 1 - \sinh 0 = \sinh 1\end{aligned}$$

6) A derivada de $h(x) = \int_0^x e^{t^3}\, dt$ em $x = \sqrt[3]{2}$ é igual a e^2. V☒ F☐

Seja $F(t)$ uma antiderivada de $f(t) = e^{t^3}$ i.e. $F'(t) = f(t)$ pelo TFC temos $h(x) = F(t)\Big|_0^x = F(x) - F(0)$. Então $h'(x) = F'(x) - F'(0) = f(x) = e^{x^3}$. Logo $h'(\sqrt[3]{2}) = e^2$.

Parte III Nas duas questões que se seguem responda no espaço atribuído após o enunciado. Cada questão é classificada com **2 valores**.

---

1) Calcule $\int_e^{e^2} x^2 \ln x\, dx$.

Façamos integração por partes com $u = \ln x$ e $dv = x^2\, dx$, logo $du = \frac{1}{x}\, dx$ e $v = \frac{x^3}{3}$. Assim temos

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} x^2 \ln x\, dx &= \left(\frac{x^3}{3}\ln x\right)\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\, dx = \left(\frac{e^6}{3}\ln e^2 - \frac{e^3}{3}\ln e\right) - \int_e^{e^2} \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{e^3}{3}(2e^3 - 1) - \frac{x^3}{9}\Big|_e^{e^2} \\ &= \frac{e^3}{3}(2e^3 - 1) - \frac{e^6}{9} + \frac{e^3}{9} = \frac{e^3}{3}(2e^3 - 1) + \frac{e^3}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{e^3}{3}\right) = \frac{e^3}{9}\left(5e^3 - 2\right).\end{aligned}$$

2) Determine justificando uma aproximação da série numérica $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2}$ com um erro inferior a $0,01$.

Estamos em presença de uma série alternada e convergente pelo critério de Leibniz. Sabemos que o erro de truncatura é sempre menor ou igual ao módulo do primeiro termo ignorado. Logo temos que determinar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{100}$ ou seja $n^2 \geq 25$ isto é $n \geq \sqrt{25} = 5$. Escolhemos portanto 4 termos da série obtendo

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{36} - \frac{1}{64}$$