



Folhas de Apoio e Exercícios de  
**Matemática Discreta**

Nuno Correia

2022/2023



# Índice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Funções e Aplicações</b>                                 | <b>1</b>  |
|          | Semana 6 . . . . .  | 1         |
|          | 1.1 Exercícios Propostos . . . . .                          | 11        |
| <b>2</b> | <b>Indução Matemática</b>                                   | <b>15</b> |
|          | Semana 7 . . . . .  | 15        |
|          | 2.1 Princípio de Indução Matemática . . . . .               | 15        |
|          | 2.2 Segundo Princípio de Indução Matemática . . . . .       | 20        |
|          | 2.3 Princípio de Indução Generalizada . . . . .             | 26        |
|          | 2.4 Exercícios Propostos . . . . .                          | 27        |
| <b>3</b> | <b>Introdução à Combinatória</b>                            | <b>31</b> |
|          | Semana 8 . . . . .  | 31        |
|          | 3.1 Princípios Gerais de Contagem . . . . .                 | 31        |
|          | 3.2 Arranjos, Permutações e Combinações . . . . .           | 34        |
|          | Semana 9 . . . . .  | 39        |
|          | 3.3 Arranjos, Permutações e Combinações Completas . . . . . | 40        |
|          | 3.4 Exercícios Propostos . . . . .                          | 43        |
| <b>4</b> | <b>Grafos</b>   | <b>47</b> |
|          | Semana 10 . . . . .   | 47        |
|          | 4.1 Conceitos e Resultados Fundamentais . . . . .           | 47        |
|          | 4.1.1 Grafos Isomorfos . . . . .                            | 52        |
|          | Semana 11 . . . . .   | 53        |
|          | 4.1.2 Passeios, Circuitos, Caminhos e Ciclos . . . . .      | 53        |
|          | 4.1.3 Subgrafos . . . . .                                   | 55        |

|                 |  |     |
|-----------------|--|-----|
| 4.2             | Grafos Especiais . . . . .                     | 58  |
| 4.2.1           | Grafos Completos . . . . .                     | 59  |
| 4.2.2           | Grafos Regulares . . . . .                     | 60  |
| 4.2.3           | Grafos Bipartidos e $k$ -partidos . . . . .    | 61  |
| Semana 12       | . . . . .                                      | 63  |
| 4.3             | Grafos Conexos . . . . .                       | 63  |
| 4.4             | Árvores . . . . .                              | 69  |
| Semana 13       | . . . . .                                      | 75  |
| 4.5             | Grafos Eulerianos . . . . .                    | 75  |
| 4.5.1           | Algoritmo de Fleury . . . . .                  | 78  |
| 4.6             | Grafos Hamiltonianos . . . . .                 | 80  |
| Semana 14       | . . . . .                                      | 83  |
| 4.7             | Grafos Valuados . . . . .                      | 83  |
| 4.8             | Coloração de Grafos . . . . .                  | 88  |
| Fim do Semestre | . . . . .                                      | 94  |
| 4.9             | Os Teoremas das Quatro e Cinco Cores . . . . . | 97  |
| 4.10            | Exercícios Propostos . . . . .                 | 101 |
| Fim do Semestre | . . . . .                                      | 108 |

# Capítulo 1

## Funções e Aplicações

### Semana 6

**Definição 1.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos e  $f$  uma relação  $f$  de  $X$  para  $Y$ . Dizemos que  $f$  é função de  $X$  para  $Y$  se para qualquer  $x \in X$  existe no máximo um  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in f$ .

Se  $(x, y) \in f$ , dizemos que  $y$  é a *imagem* de  $x$  e escrevemos  $f(x) = y$ .

Ao conjunto  $X$  chamamos *conjunto de partida*, e ao conjunto  $Y$  chamamos *conjunto de chegada*.

As funções são representadas por letras minúsculas:  $f, g, h$ .

*Exemplo 1.2.* Dados os conjuntos  $X = \{1, 2, 3\}$  e  $Y = \{1, 2\}$ .

A relação  $R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$  é uma função.

A relação  $R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$  não é função, pois para  $x = 2$  temos  $(2, 1) \in R_2$  e  $(2, 2) \in R_2$ .

A relação  $R_3 = \{(3, 1)\}$  é uma função.

**Definição 1.3.** Chamamos *domínio da função*  $f$  aos elementos de  $X$  que têm alguma imagem em  $Y$ , ou seja,

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in X : (x, y) \in f \text{ para algum } y \in Y\} \\ &= \{x \in X : f(x) = y \text{ para algum } y \in Y\}. \end{aligned}$$

Chamamos *contradomínio da função*  $f$  aos elementos de  $Y$  que são a imagem de algum

elemento de  $X$ , ou seja,

$$\begin{aligned} CD_f &= \{y \in Y : (x, y) \in f \text{ para algum } x \in X\} \\ &= \{y \in Y : f(x) = y \text{ para algum } x \in X\}. \end{aligned}$$

*Exemplo 1.4.* Considere os conjuntos  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$  e a função  $f$  com conjunto de partida  $X$  e conjunto de chegada  $Y$  dada por  $f = \{(1, 2), (3, 2)\}$ .

Temos que  $D_f = \{1, 3\}$  e  $CD_f = \{2\}$ .

*Exemplo 1.5.* Seja  $f$  a função com conjunto de partida  $\mathbb{R}$  e conjunto de chegada  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ .

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $CD_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Definição 1.6.** Consideremos os conjuntos  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$  e a função  $f$  de  $X$  para  $Y$ . Definimos o conjunto *imagem de  $A$  por  $f$*  como

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}$$

e o conjunto *imagem recíproca de  $B$  por  $f$* , ou *imagem inversa de  $B$  por  $f$*  como

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

*Exemplo 1.7.* Consideremos o conjunto  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  e a função  $f$  de  $X$  para  $X$  dada por  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ , isto é  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 1$ ,  $f(3) = 3$  e  $f(4) = 2$ .

Dado  $A = \{1, 2\}$  temos  $f(A) = \{f(1), f(2)\} = \{1, 1\} = \{1\}$ .

Dado  $B = \{1, 2\}$  temos  $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in \{1, 2\}\} = \{1, 2, 4\}$ .

Dado  $B = \{1\}$  temos  $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in \{1\}\} = \{1, 2\}$ .

**Exercício 1.1.** Considere os conjuntos  $A_1, A_2 \subseteq X$ ,  $B_1, B_2 \subseteq Y$  e  $f$  uma função de  $X$  para  $Y$ . Mostre que:

- a)  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- b)  $f(A_1 \cap A_2) \supseteq f(A_1) \cap f(A_2)$  nem sempre é verdadeira
- c)  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- d)  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- e)  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

**Resolução:** Tomemos  $y \in f(A_1 \cap A_2)$ , por definição existe  $x \in A_1 \cap A_2$  tal que  $f(x) = y$ . Como  $x \in A_1$  temos que  $y = f(x) \in f(A_1)$ , por outro lado, como  $x \in A_2$  temos que  $y = f(x) \in f(A_2)$ . Assim,  $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ , e concluímos que  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ , o que prova a).

Consideremos a função  $f$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$  e os conjuntos  $A_1 = [0, 2]$  e  $A_2 = [-2, 0]$ . Por um lado temos  $f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{f(0)\} = \{0\}$ , por outro lado temos  $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 4] \cap [0, 4] = [0, 4]$ ; o que prova b).

Tomemos  $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ , o que prova c).

Tomemos  $y \in f(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow y = f(x)$  para algum  $x \in A_1 \cup A_2 \Leftrightarrow y = f(x)$  para algum  $x \in A_1 \vee x \in A_2 \Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ , o que prova d).

Tomemos  $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ , o que prova e).  $\square$

**Definição 1.8.** Duas funções  $f$  e  $g$  dizem-se iguais,  $f = g$ , se têm o mesmo conjunto de partida, o mesmo conjunto de chegada, o mesmo domínio e a mesma acção (isto é, associam o mesmo elemento a cada elemento do seu domínio).

*Exemplo 1.9.* A função  $f$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  que a cada  $x$  associa  $\sqrt{x}$  e a função  $g$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}_0^+$  que a cada  $x$  associa  $\sqrt{x}$  não são iguais,  $f \neq g$ .

**Definição 1.10.** Sejam  $f$  uma função de  $X$  para  $Y$  e  $g$  uma função de  $Y$  para  $Z$ . Chamamos *composição de  $f$  com  $g$ , ou  $g$  após  $f$* , à função  $g \circ f$  de  $X$  para  $Z$  dada por  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ , com domínio

$$D_{g \circ f} = \{x \in X : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}.$$

*Exemplo 1.11.* Sejam  $f$  a função de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x + 1$  e  $g$  a função de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  dada por  $g(x) = x^2$ . Temos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2) = (x^2)^2 = x^4$$

**Exercício 1.2.** Considere as funções  $f$  e  $g$  dadas por  $f(x) = 1 + \sqrt{2 - x}$  e  $g(x) = \ln(4 - x)$  com conjuntos de partida e de chegada  $\mathbb{R}$ . Defina a função  $g \circ f$ .

**Resolução:** O domínio de  $f$  é dado por  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x \geq 0\} = ]-\infty, 2]$  e o domínio de  $g$  é dado por  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x > 0\} = ]-\infty, 4[$ .

A função  $g \circ f$  é dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 + \sqrt{2 - x}) = \ln(4 - 1 - \sqrt{2 - x}) = \ln(3 - \sqrt{2 - x}),$$

cujo domínio é

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in ]-\infty, 2] \wedge 1 + \sqrt{2 - x} \in ]-\infty, 4[\},$$

ou seja,  $1 + \sqrt{2 - x} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2 - x} < 3 \Leftrightarrow 2 - x < 9 \Leftrightarrow x > -7$ , assim

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \wedge x > -7\} = ]-7, 2].$$

□

**Definição 1.12.** A uma função  $f$  de  $X$  para  $Y$  cujo domínio coincide com o conjunto de partida  $X$ , chamamos *aplicação de  $X$  para  $Y$*  e indicamos  $f : X \rightarrow Y$ .

*Exemplo 1.13.* A função  $f$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sqrt{x}$  não é uma aplicação.

A função  $g$  de  $\mathbb{R}_0^+$  para  $\mathbb{R}$  dada por  $g(x) = \sqrt{x}$  é uma aplicação, pois  $D_g = \mathbb{R}_0^+$ .

**Definição 1.14.** Dado um conjunto  $X$ , definimos a *aplicação identidade em  $X$*  como

$$\begin{aligned} \text{Id}_X : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto \text{Id}_X(x) = x \end{aligned}$$

**Definição 1.15.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação. Dizemos que  $f$  é *aplicação injectiva* ou *uma injecção* se quaisquer elementos distintos de  $X$  têm imagens distintas, isto é,

$$\forall_{x_1, x_2 \in X} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

ou equivalentemente

$$\forall_{x_1, x_2 \in X} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Dizemos que  $f$  é *aplicação sobrejectiva* ou *uma sobrejecção* se qualquer elemento do conjunto de chegada  $Y$  for a imagem de algum elemento de  $X$ , isto é,

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} : f(x) = y.$$

Dizemos que  $f$  é *aplicação bijectiva* ou *uma bijecção* se for injectiva e sobrejectiva.



*Exemplo 1.16.* Consideremos a aplicação 
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

A aplicação  $f$  não é injectiva, pois  $1 \neq -1$ , mas  $f(1) = 1 = f(-1)$ .

A aplicação  $f$  não é sobrejectiva, pois  $-2 \in \mathbb{R}$  o conjunto de chegada, mas não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = -2$ .

*Exemplo 1.17.* Consideremos a aplicação 
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

A aplicação  $f$  não é injectiva, ver Exemplo 1.16.

A aplicação  $f$  é sobrejectiva, pois para qualquer  $y \in \mathbb{R}_0^+$  o conjunto de chegada, podemos tomar  $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$  ou  $x = -\sqrt{y} \in \mathbb{R}$  e temos  $f(x) = y$ .

*Exemplo 1.18.* Consideremos a aplicação 
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_0^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

A aplicação  $f$  é injectiva, visto que dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$  temos que  $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$ .

A aplicação não é sobrejectiva, ver Exemplo 1.16.

*Exemplo 1.19.* Consideremos a aplicação 
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_0^+ & \rightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

A aplicação  $f$  é injectiva, ver Exemplo 1.18. A aplicação  $f$  é sobrejectiva, ver Exemplo 1.17. Assim, a aplicação  $f$  é bijectiva.

**Exercício 1.3.** Prove que a aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = e^{x+1}$  é injectiva, mas não sobrejectiva.

**Resolução:** Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Logo  $e^{x_1+1} = e^{x_2+1} \Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ , o que prova que a aplicação  $f$  é injectiva.

Dado  $y \in \mathbb{R}$  queremos encontrar  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y \Leftrightarrow e^{x+1} = y \Leftrightarrow x + 1 = \ln y$ , impossível para  $y \leq 0$ , por exemplo a aplicação  $f$  nunca toma o valor  $y = 0$ . Assim, a aplicação  $f$  não é sobrejectiva.  $\square$

**Exercício 1.4.** Prove que a aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3 - x$  é sobrejectiva, mas não injectiva.

**Resolução:** Observemos que podemos escrever  $f(x) = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$  e é fácil concluir que  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 0$ . Logo a aplicação  $f$  não é injectiva.

Para provar a sobrejectividade usamos um argumento um pouco diferente: primeiro observemos que a função é contínua, além disso  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ; o que prova que  $f$  toma todos os valores de  $\mathbb{R}$ . Portanto, a aplicação  $f$  é sobrejectiva.  $\square$

**Exercício 1.5.** Prove que a aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 3x - 2$  é uma bijecção.

**Resolução:** Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Logo  $3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ , o que prova que a aplicação  $f$  é injectiva.

Dado  $y \in \mathbb{R}$  queremos encontrar  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y \Leftrightarrow 3x - 2 = y \Leftrightarrow 3x = y + 2 \Leftrightarrow x = \frac{y + 2}{3} \in \mathbb{R}$ , assim, a aplicação  $f$  é sobrejectiva. Portanto, a aplicação  $f$  é bijectiva.  $\square$

**Definição 1.20.** Dada uma aplicação bijectiva  $f : X \rightarrow Y$ , definimos a *aplicação inversa* de  $f$ ,  $f^{-1}$ , como  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  em que  $f^{-1}(y) = x$  se e só se  $f(x) = y$ , ou seja

$$f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in f\}.$$

*Exemplo 1.21.* Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 1 \end{aligned}.$$

Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$  e concluímos que  $f$  é injectiva.

Dado  $y \in \mathbb{R}$  a aplicação  $f$  é sobrejectiva se existir  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y$ , ou seja  $2x + 1 = y \Leftrightarrow 2x = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y - 1}{2} \in \mathbb{R}$ , o que é verdade.

Assim,  $f$  é aplicação bijectiva, logo existe a aplicação inversa  $f^{-1}$  dada por

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{2} \end{aligned}.$$

**Teorema 1.22.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma bijecção. Então  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  é uma bijecção,  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$  e  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y$ .*

**Prova:** Sejam  $y_1, y_2 \in Y$  com  $y_1 \neq y_2$ . Como  $f$  é sobrejectiva existem  $x_1, x_2 \in X$  tais que  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ . Como  $f$  é injectiva e  $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2)$ , logo  $x_1 \neq x_2$ . Por definição de aplicação inversa  $x_1 = f^{-1}(y_1)$  e  $x_2 = f^{-1}(y_2)$ , logo  $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ , ou seja,  $f^{-1}$  é injectiva.

Seja  $x \in X$ , como  $f$  é aplicação existe  $y \in Y$  tal que  $f(x) = y$ . Por definição de aplicação inversa  $x = f^{-1}(y)$ . Assim, para todo o  $x \in X$  existe  $y \in Y$  tal que  $f^{-1}(y) = x$ , ou seja,  $f^{-1}$  é sobrejectiva.

Então  $f^{-1}$  é uma aplicação bijectiva.

O conjunto de partida e de chegada de  $f \circ f^{-1}$  e de  $\text{Id}_Y$  é  $Y$ . Seja  $y \in Y$ , como  $f$  é sobrejectiva existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Por definição de aplicação inversa temos que  $f^{-1}(y) = x$ . Assim,

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) \Leftrightarrow \text{Id}_Y(y) = (f \circ f^{-1})(y),$$

ou seja,  $\text{Id}_Y = f \circ f^{-1}$ .

O conjunto de partida e de chegada de  $f^{-1} \circ f$  e de  $\text{Id}_X$  é  $X$ . Seja  $x \in X$ , como  $f^{-1}$  é sobrejectiva existe  $y \in Y$  tal que  $f^{-1}(y) = x$ . Por definição de aplicação inversa temos que  $f(x) = y$ . Assim,

$$x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) \Leftrightarrow \text{Id}_X(x) = (f^{-1} \circ f)(x),$$

ou seja,  $\text{Id}_X = f^{-1} \circ f$ . □

*Exemplo 1.23.* A aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  dada por  $f(x) = e^x$  é uma bijecção. A aplicação inversa  $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f^{-1}(x) = \ln x$  é uma bijecção. Além disso, dado  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(e^x) = \ln(e^x) = x = \text{Id}_{\mathbb{R}}(x),$$

e dado  $x \in \mathbb{R}^+$  temos

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\ln x) = e^{\ln x} = x = \text{Id}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

**Teorema 1.24.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  aplicações, temos que*

- a) se  $f$  e  $g$  são injectivas, então  $g \circ f$  é injectiva*
- b) se  $f$  e  $g$  são sobrejectivas, então  $g \circ f$  é sobrejectiva*
- c) se  $f$  e  $g$  são bijectivas, então  $g \circ f$  é bijectiva e temos  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$*

**Prova:** Sejam  $x_1, x_2 \in X$  tais que  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$  e supomos que  $f$  e  $g$  são injectivas. Então

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

ou seja,  $g \circ f$  é injectiva e provamos a).

Seja  $z \in Z$ , como  $g$  é sobrejectiva existe  $y \in Y$  tal que  $g(y) = z$ . Como  $f$  é sobrejectiva existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Assim, existe  $x \in X$  tal que  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ , ou seja,  $g \circ f$  é sobrejectiva e provamos b).

Se  $f$  e  $g$  são bijectivas, da a) e b) concluímos que  $g \circ f$  também é bijectiva. Dado  $z \in Z$ , vimos no parágrafo anterior que existe  $x \in X$  tal que  $(g \circ f)(x) = z$ , e por definição de aplicação concluímos que  $(g \circ f)^{-1}(z) = x$ . Por outro lado, como  $g(f(x)) = z$ , por definição de aplicação inversa  $g^{-1}$  temos que  $f(x) = g^{-1}(z)$ ; e por definição de aplicação inversa de  $f^{-1}$  temos que  $x = f^{-1}(g^{-1}(z))$ . Assim,  $(g \circ f)^{-1}(z) = x = f^{-1}(g^{-1}(z))$ , de onde concluímos que  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .  $\square$

**Teorema 1.25.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  aplicações tais que  $g \circ f = \text{Id}_X$ . Então  $f$  é injectiva e  $g$  é sobrejectiva.*

**Prova:** Sejam  $x_1, x_2 \in X$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Aplicando  $g$  temos que

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Leftrightarrow \text{Id}_X(x_1) = \text{Id}_X(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

de onde concluímos que  $f$  é injectiva.

Seja  $x \in X$ , então  $x = \text{Id}_X(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ , logo existe  $y = f(x) \in Y$  tal que  $g(y) = x$ , ou seja,  $g$  é sobrejectiva.  $\square$

**Definição 1.26.** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  tais que  $A \subseteq B$  definimos a *aplicação inclusão* como  $\text{inc}_A : A \rightarrow B$  dada por  $\text{inc}_A(x) = x$ .

**Proposição 1.27.** *Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  tais que  $A \subseteq B$ , a aplicação inclusão  $\text{inc}_A : A \rightarrow B$  é injectiva.*

**Prova:** Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $\text{inc}_A(x_1) = \text{inc}_A(x_2)$ , logo  $x_1 = x_2$ , ou seja,  $\text{inc}_A$  é injectiva.  $\square$

*Exemplo 1.28.* Sejam  $A = ]1, 2] \subset B = [0, 3]$ , a aplicação inclusão  $\text{inc}_{]1, 2]} : ]1, 2] \rightarrow [0, 3]$  é injectiva, mas não sobrejectiva.

**Exercício 1.6.** Dados os conjuntos  $A \subseteq B$ . Determine uma condição de modo que a aplicação inclusão  $\text{inc}_A : A \rightarrow B$  seja sobrejectiva.

**Resolução:** Para a aplicação  $\text{inc}_A : A \rightarrow B$  ser sobrejectiva, dado  $b \in B$  existe  $a \in A$  tal que  $\text{inc}_A(a) = b$ , o que equivale a  $a = b$ , logo  $b \in A$ . Ou seja,  $B \subseteq A$ , portanto  $A = B$ .  $\square$

**Teorema 1.29. (Cantor-Schröder-Bernstein)** *Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos tais que existe uma aplicação injectiva de  $A$  para  $B$  e uma aplicação injectiva de  $B$  para  $A$ . Então existe uma aplicação bijectiva entre  $A$  e  $B$ .*

**Exercício 1.7.** Prove que existe uma bijecção entre os conjuntos  $]0, 1[$  e  $[0, 1]$ .

**Resolução:** Pela Proposição 1.27 a aplicação inclusão  $\text{inc}_{]0,1[} : ]0, 1[ \rightarrow [0, 1]$  é injectiva.

Agora, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow ]0, 1[ \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tomemos  $x_1, x_2 \in [0, 1]$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ , então  $\frac{x_1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x_2}{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$  e concluímos que a aplicação  $f$  é injectiva.

Como  $\text{inc}_{]0,1[} : ]0, 1[ \rightarrow [0, 1]$  é injectiva e  $f : [0, 1] \rightarrow ]0, 1[$  é injectiva, pelo Teorema 1.29 existe uma bijecção  $g : ]0, 1[ \rightarrow [0, 1]$ .  $\square$

**Exercício 1.8.** Mostre que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, 1[$  dada por  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$  é uma aplicação injectiva. Justifique que existe uma bijecção entre  $\mathbb{R}$  e  $]0, 1[$ .

**Resolução:** Começamos por observar que

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 + e^{-x} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x} \neq -1\} = \mathbb{R}$$

coincide com o conjunto de partida de  $f$ , e portanto  $f$  é uma aplicação.

Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + e^{-x_1}} &= \frac{1}{1 + e^{-x_2}} \Rightarrow 1 + e^{-x_1} = 1 + e^{-x_2} \Rightarrow e^{-x_1} = e^{-x_2} \\ &\Rightarrow \ln(e^{-x_1}) = \ln(e^{-x_2}) \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

e concluímos que  $f$  é injectiva.

Como a aplicação inclusão  $\text{inc}_{]0,1[} : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  é injectiva, pelo Teorema 1.29 concluímos que existe uma bijecção entre  $\mathbb{R}$  e  $]0, 1[$ .  $\square$

**Definição 1.30.** Se existir uma bijecção entre dois conjuntos dizemos que os conjuntos têm a *mesma cardinalidade* ou que são *equipotentes*. Intuitivamente os conjuntos “têm o mesmo número de elementos”.

No caso de  $X$  ter a mesma cardinalidade de  $\mathbb{N}$ , dizemos que  $X$  é um *conjunto enumerável*.

*Exemplo 1.31.* A aplicação  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$  dada por  $f(x) = 2x$  é uma bijecção, assim os conjuntos  $[0, 1]$  e  $[0, 2]$  são equipotentes.

*Exemplo 1.32.* Os conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{N}_0$  são equipotentes, ou seja,  $\mathbb{N}_0$  é um conjunto enumerável, visto que a aplicação  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$  dada por  $f(n) = n - 1$  é bijectiva.<sup>1</sup>

*Exemplo 1.33.* Os conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$  são equipotentes, ou seja,  $\mathbb{Z}$  é conjunto enumerável.<sup>2</sup> Consideramos a aplicação  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  bijectiva dada por

$$\begin{aligned} f(1) = 0 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = -1 \quad f(4) = 2 \quad f(5) = -2 \\ f(6) = 3 \quad f(7) = -3 \quad \dots \end{aligned}$$

Mais formalmente a bijecção  $f$  pode ser definida do seguinte modo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \text{ se } n \text{ é par} \\ -\frac{n-1}{2} & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{aligned}$$

*Exemplo 1.34.* Os conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Q}$  são equipotentes, ou seja,  $\mathbb{Q}$  é conjunto enumerável.

*Exemplo 1.35.* O conjunto  $\mathbb{R}$  não é enumerável. Começamos por mostrar que o conjunto  $]0, 1[$  não é enumerável, para isso vamos supor que  $]0, 1[$  é um conjunto enumerável e iremos obter uma contradição.

Se  $]0, 1[$  é conjunto enumerável, então existe uma aplicação bijectiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow ]0, 1[$  tal que

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} \dots \\ f(2) &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}x_{24} \dots \\ f(3) &= 0, x_{31}x_{32}x_{33}x_{34} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

e todos os elementos do conjunto  $]0, 1[$  estão nesta lista.

---

<sup>1</sup>**Hotel de Hilbert:** Um hotel tem infinitos quartos todos ocupados, como é que o gerente pode hospedar um novo cliente? Coloca o hóspede do quarto 1 no quarto 2, o do quarto 2 no quarto 3, ... e o novo cliente ocupa o quarto 1.

<sup>2</sup>**Hotel de Hilbert:** Um hotel tem infinitos quartos todos ocupados, como é que o gerente pode hospedar um número infinito de novos clientes? Coloca o hóspede do quarto 1 no quarto 2, o do quarto 2 no quarto 4, ... ou seja, os que estavam hospedados ocupam os quartos pares e os novos clientes ocupam os quartos ímpares.

Mas o elemento  $y \in ]0, 1[$  dado por  $y = 0, y_1 y_2 y_3 y_4 \dots$  em que  $y_1 \neq x_{11}$ ,  $y_2 \neq x_{22}$ ,  $y_3 \neq x_{33}$ ,  $\dots$ ,  $y_i \neq x_{ii}$ ,  $\dots$  não está nessa lista e pertence ao intervalo  $]0, 1[$ , o que é absurdo.

Portanto,  $]0, 1[$  não é conjunto enumerável, ou seja, não existe nenhuma bijecção entre  $]0, 1[$  e  $\mathbb{N}$ .

Se  $\mathbb{R}$  fosse conjunto enumerável,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{N}$  seriam equipotentes e existiria uma bijecção entre eles. Por outro lado, como  $R$  e  $]0, 1[$  são equipotentes existe uma bijecção entre eles, e logo existia uma bijecção entre  $]0, 1[$  e  $\mathbb{N}$ , o que é absurdo. Assim,  $\mathbb{R}$  não é conjunto enumerável.

**Definição 1.36.** Dizemos que  $A \neq \emptyset$  é um *conjunto infinito* se for equipotente a uma sua parte própria, ou seja, se for equipotente a um conjunto  $B \subsetneq A$ , isto é, existe uma bijecção entre  $A$  e  $B$ .

*Exemplo 1.37.* Como  $\mathbb{N}$  é equipotente com  $\mathbb{N}_0$ , concluímos que  $\mathbb{N}_0$  é infinito; logo  $\mathbb{N}$  também é infinito.

**Exercício 1.9.** Prove que o conjunto  $[-1, 1]$  é um conjunto infinito.

**Resolução:** Consideremos a aplicação  $f[0, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = 2x - 1$ . Tomemos  $x_1, x_2 \in [0, 1]$  tais que  $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$  e concluímos que  $f$  é injectiva. Seja  $y \in [-1, 1]$  e queremos encontrar  $x \in [0, 1]$  tal que  $f(x) = y$ , ou seja,  $2x - 1 = y \Leftrightarrow 2x = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$ ; como  $-1 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y+1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{y+1}{2} \leq 1$ , concluímos que  $f$  é sobrejectiva.

Como  $f$  é uma aplicação bijectiva entre  $[0, 1]$  e  $[-1, 1]$  e  $[0, 1] \subseteq [-1, 1]$  temos que o conjunto  $[-1, 1]$  é infinito.  $\square$

## 1.1 Exercícios Propostos

**Exercício 1.10.** Decida se as seguintes relações  $R$  definidas de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  são ou não funções. Justifique.

a)  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$

b)  $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$

c)  $xRy \Leftrightarrow x + y = 1$

d)  $xRy \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

e)  $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

**Exercício 1.11.** Considere as funções  $f(x) = 2x - 5$  e  $g(x) = x^2 + 2$ . Obtenha as expressões de  $g \circ f$  e de  $f \circ g$  e os respectivos domínios.

**Exercício 1.12.** Considere as funções  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  e  $g(x) = \ln x$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$ .

a) Determine o domínio da função  $f$ .

b) Determine o domínio da função  $g$ .

c) Determine o domínio da função  $g \circ f$ .

**Exercício 1.13.** Sabendo que  $f(x) = 2 - x$  e  $(g \circ f)(x) = 2x + 1$ , determine a expressão de  $g(x)$ .

**Exercício 1.14.** Considere as aplicações  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{x-2}$  e  $h(x) = 3x$ . Mostre que  $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$ .

**Exercício 1.15.** Dê exemplos de aplicações de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  que sejam:

a) bijectivas

b) injectivas, mas não sobrejectivas

c) sobrejectivas, mas não injectivas

d) nem injectivas, nem sobrejectivas.

**Exercício 1.16.** Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2 + 3$ .

a) Verifique se  $f$  é injectiva.

b) Verifique se  $f$  é sobrejectiva.

c) Determine  $f^{-1}(7)$ ,  $f^{-1}(3)$  e  $f^{-1}(2)$ .

**Exercício 1.17.** Analise a injectividade, sobrejectividade e bijectividade das seguintes aplicações

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) = 2x$



b)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) = \frac{1}{x}$

c)  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  com  $f(x) = x^2 + 2$

**Exercício 1.18.** Justifique que as seguintes aplicações admitem inversa e obtenha a expressão da aplicação  $f^{-1}$ .

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(x) = 3x + 5$

b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]3, +\infty[$ , com  $f(x) = e^{2x} + 3$

c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(x) = x^3 + 1$

d)  $f : ]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , com  $f(x) = (x - 1)^2$

e)  $f : \mathbb{R}^- \rightarrow [-1, +\infty[$ , com  $f(x) = x^2 - 1$

**Exercício 1.19.** Mostre que os conjuntos  $[0, 1]$  e  $[a, b]$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , são equipotentes.

**Exercício 1.20.** Mostre que os conjuntos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^+$  são equipotentes. Justifique que  $\mathbb{R}$  é um conjunto infinito.

**Exercício 1.21.** Prove que o conjunto dos números pares é enumerável.

**Exercício 1.22.** Prove que o conjunto dos números ímpares é enumerável.

**Exercício 1.23.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos enumeráveis. Prove que  $A \cup B$  é um conjunto enumerável.

**Exercício 1.24.** Dados dois conjuntos quaisquer  $A$  e  $B$ , definimos a relação  $\sim$  como  $A \sim B$  se e só se  $A$  e  $B$  são equipotentes. Mostre que  $\sim$  é uma relação de equivalência.



## Capítulo 2

# Indução Matemática

### Semana 7

A indução matemática permite estabelecer a veracidade de uma proposição  $P(n)$  que depende de  $n \in \mathbb{N}$  para  $n \geq n_0$ , com  $n_0 \in \mathbb{N}$ .<sup>1</sup>

## 2.1 Princípio de Indução Matemática

Consiste em dois passos:

- 1) **Passo básico:** Verificar a veracidade da proposição  $P(n_0)$  para o primeiro elemento, em geral  $n_0 = 1$
- 2) **Passo indutivo:** Admitindo que  $P(k)$  é verdade, mostrar que  $P(k + 1)$  também é verdade para qualquer  $k$  natural maior ou igual do que  $n_0$ , isto é, mostrar que  $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ .

Fica assim mostrado que  $P(n)$  é verdade para todo o  $n \geq n_0$ .

Chamamos *hipótese de indução* à condição  $P(k)$  ser verdadeira e *tese de indução* à condição  $P(k + 1)$  ser verdadeira.

**Exercício 2.1.** Verifique que  $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

---

<sup>1</sup>O caso tipo é  $n_0 = 1$ , mas podemos ter  $n_0 \in \mathbb{N}_0$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $P(1) : 1 + 2^1 = 2^{1+1} - 1 \Leftrightarrow 1 + 2 = 4 - 1$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$ .

Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k+1} &= 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2 \times 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1, \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Exercício 2.2.** Mostre, usando indução matemática, que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) &= 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1) \left( \frac{k}{2} + 1 \right) = (k+1) \frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Exercício 2.3.** Mostre, usando indução matemática, que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $P(1) : 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1) \left( \frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right) \\ &= \frac{k+1}{6} (2k^2 + k + 6k + 6) \\ &= \frac{k+1}{6} (2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{k+1}{6} (k+2)(2k+3), \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Exercício 2.4.** Mostre, usando indução matemática, que  $n! > 2^n$  para todo  $n \geq 4$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : n! > 2^n$ , para todo  $n \geq 4$ .

Antes de responder, observemos que:

$$P(1) : 1! > 2^1 \Leftrightarrow 1 > 2 \text{ é falso}$$

$$P(2) : 2! > 2^2 \Leftrightarrow 2 > 4 \text{ é falso}$$

$$P(3) : 3! > 2^3 \Leftrightarrow 6 > 8 \text{ é falso}$$

Passo básico: para  $n = 4$  temos  $P(4) : 4! > 2^4 \Leftrightarrow 24 > 16$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $k! > 2^k$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $(k+1)! > 2^{k+1}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} (k+1)! &= (k+1) \times k! \\ &> (k+1) \times 2^k, \text{ como } k \geq 4 \text{ temos } k+1 > 2 \\ &> 2 \times 2^k = 2^{k+1} \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq 4$ . □

**Exercício 2.5.** Mostre, usando indução matemática, que  $n^3 - n$  é divisível por 3 para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : n^3 - n = 3r$  para algum  $r \in \mathbb{Z}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $P(1) : 1^3 - 1 = 0 = 3 \times 0$  e  $0 \in \mathbb{Z}$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $k^3 - k = 3r$  para algum  $r \in \mathbb{Z}$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $(k+1)^3 - (k+1) = 3s$  para algum  $s \in \mathbb{Z}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 2k \\ &= k^3 - k + 3k^2 + 3k = 3r + 3(k^2 + k) \\ &= 3(r + k^2 + k) = 3s, \text{ com } s = r + k^2 + k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Exercício 2.6.** Mostre, usando indução matemática, que  $n^2(n^2 - 1)$  é divisível por 12 para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : n^2(n^2 - 1) = 12r$  para algum  $r \in \mathbb{Z}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $P(1) : 1^2(1^2 - 1) = 0 = 12 \times 0$  e  $0 \in \mathbb{Z}$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $k^2(k^2 - 1) = 12r$  para algum  $r \in \mathbb{Z}$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $(k+1)^2[(k+1)^2 - 1] = 12s$  para algum  $s \in \mathbb{Z}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} (k+1)^2[(k+1)^2 - 1] &= (k^2 + 2k + 1)(k^2 + 2k) \\ &= k^4 + 2k^3 + 2k^3 + 4k^2 + k^2 + 2k \\ &= k^4 + 4k^3 + 5k^2 + 2k = k^4 - k^2 + 4k^3 + 6k^2 + 2k \\ &= 12r + 4k^3 + 6k^2 + 2k, \end{aligned}$$

se mostrarmos que  $4k^3 + 6k^2 + 2k$  é múltiplo de 12 obtemos o desejado. Tomemos  $Q(n) : 4n^3 + 6n^2 + 2n = 12t$  para algum  $t \in \mathbb{Z}$ , e vamos usar a indução para mostrar que é verdade para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $Q(1) : 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 2 \times 1 = 12 = 12 \times 1$  e  $1 \in \mathbb{Z}$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $Q(k)$  é verdade, isto é  $4k^3 + 6k^2 + 2k = 12t$  para algum  $t \in \mathbb{Z}$ , e queremos mostrar que  $Q(k+1)$  é verdade, isto é  $4(k+1)^3 + 6(k+1)^2 + 2(k+1) = 12u$  para algum  $u \in \mathbb{Z}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} 4(k+1)^3 + 6(k+1)^2 + 2(k+1) &= 4(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 6(k^2 + 2k + 1) + 2k + 2 \\ &= 4k^3 + 18k^2 + 26k + 12 \\ &= 4k^3 + 6k^2 + 2k + 12k^2 + 24k + 12 \\ &= 12t + 12(k^2 + 2k + 1) \\ &= 12u, \text{ com } u = t + k^2 + 2k + 1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ou seja,  $Q(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $Q(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Então  $(k+1)^2 [(k+1)^2 - 1] = 12r + 12u = 12s$  com  $s = r + u \in \mathbb{Z}$ , o que torna  $P(k+1)$  verdade; mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Exercício 2.7.** Mostre, usando indução matemática, a desigualdade de Bernoulli, isto é

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall_{x \geq -1},$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $P(1) : (1+x)^1 \geq 1+1 \times x \Leftrightarrow 1+x \geq 1+x$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $(1+x)^k \geq 1+kx$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$ .

Temos que

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) \\ &= 1+x+kx+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \\ &\geq 1+(k+1)x \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## 2.2 Segundo Princípio de Indução Matemática

Consiste em dois passos:

- 1) Verificar a veracidade da proposição  $P(n_0)$  para o primeiro elemento, em geral  $n_0 = 1$
- 2) Admitindo que  $P(n_0), P(n_0 + 1), P(n_0 + 2), \dots, P(k)$  é verdade mostrar que  $P(k+1)$  também é verdade para qualquer  $k$  natural maior ou igual do que  $n_0$ , isto é, mostrar que

$$P(n_0) \wedge P(n_0 + 1) \wedge P(n_0 + 2) \wedge \dots \wedge P(k) \Rightarrow P(k + 1).$$

Fica assim mostrado que  $P(n)$  é verdade para todo o  $n \geq n_0$ .

**Exercício 2.8.** Mostre que todo o número natural  $n \geq 2$  pode ser escrito como um produto de números primos.

*Um produto de números primos pode ter um número qualquer de factores, inclusive um factor.*

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n)$ :  $n$  pode ser escrito como um produto de números primos, para todo o  $n \geq 2$ .

- 1) Para  $n = 2$  temos  $P(2)$ : 2 é número primo, portanto é um produto de números primos, o que é verdade.
- 2) Admitindo que  $P(2), P(3), \dots, P(k)$  são verdade queremos mostrar que  $P(k + 1)$  é verdade, isto é  $k + 1$  pode ser escrito como produto de números primos.

No caso em que  $k + 1$  é número primo  $P(k + 1)$  é verdade, pois é um produto de números primos com um único factor.

No caso em que  $k + 1$  não é primo, o mesmo é divisível por outro natural que não 1 e o próprio  $k + 1$ , assim existem  $a, b \in \{2, 3, \dots, k\}$  tais que  $k + 1 = a \times b$ . Como  $P(a)$  e  $P(b)$  são verdadeiras temos que  $a = a_1 a_2 \dots a_r$  e  $b = b_1 b_2 \dots b_s$  onde  $a_i$  e  $b_i$  são números primos. Então  $k + 1 = a_1 a_2 \dots a_r b_1 b_2 \dots b_s$  pode ser escrito como um produto de números primos, ou seja  $P(k + 1)$  é verdade.

Mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \geq 2$ . □



**Exercício 2.9.** Considere a sucessão  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, \text{ para todo } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre que  $u_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n)$ :  $u_n = 3 \times 2^{n-1} - 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1) Para  $n = 1$  temos  $P(1)$ :  $u_1 = 3 \cdot 2^0 - 1 = 3 - 1 = 2$ , o que é verdade.
- 2) Admitindo que  $P(0), P(1), P(2), \dots, P(k)$  são verdade queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é,  $u_{k+1} = 3 \cdot 2^k - 1$ .

Temos

$$u_{k+1} = 2u_k + 1 = 2(3 \cdot 2^{k-1} - 1) + 1 = 3 \cdot 2^k - 2 + 1 = 3 \cdot 2^k - 1,$$

ou seja  $P(k+1)$  é verdade.

Mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

Na verdade, no exemplo anterior bastou usar o Princípio de Indução Matemática, algo que não acontece nos exemplos seguintes.

**Exercício 2.10.** Considere a sucessão  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por

$$\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_1 = 16 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \text{ para todo } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre que  $a_n = 5 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n)$ :  $a_n = 5 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- 1) Para  $n = 0$  temos  $P(0)$ :  $a_0 = 5 \cdot 2^0 + 2 \cdot 3^0 = 7$ , o que é verdade.
- 2) Admitindo que  $P(0), P(1), P(2), \dots, P(k)$  são verdade queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é,  $a_{k+1} = 5 \cdot 2^{k+1} + 2 \cdot 3^{k+1}$ .

Para  $k = 0$  temos  $a_1 = 5 \cdot 2^1 + 2 \cdot 3^1 = 10 + 6 = 16$ , o que é verdade.

Para  $k \geq 1$  temos

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} &= 5a_k - 6a_{k-1} = 5(5 \cdot 2^k + 2 \cdot 3^k) - 6(5 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1}) \\
 &= 25 \cdot 2^k + 10 \cdot 3^k - 30 \cdot 2^{k-1} - 12 \cdot 3^{k-1} \\
 &= 25 \cdot 2^k - 15 \cdot 2^k + 10 \cdot 3^k - 4 \cdot 3^k \\
 &= 10 \cdot 2^k + 6 \cdot 3^k = 5 \cdot 2^{k+1} + 2 \cdot 3^{k+1},
 \end{aligned}$$

ou seja  $P(k+1)$  é verdade.

Mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ . □

**Exercício 2.11.** Considere a sucessão  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por

$$\begin{cases} a_0 = -3 \\ a_1 = 2 \\ a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2}, \text{ para todo o } n \geq 2 \end{cases} .$$

Mostre que  $a_n = 3(-1)^{n+1} + n(-1)^n$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n)$ :  $a_n = 3(-1)^{n+1} + n(-1)^n$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- 1) Para  $n = 0$  temos  $P(0)$ :  $a_0 = 3(-1)^1 + 0 = -3$ , o que é verdade.
- 2) Admitindo que  $P(0), P(1), P(2), \dots, P(k)$  são verdade queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é,  $a_{k+1} = 3(-1)^{k+2} + (k+1)(-1)^{k+1}$ .

Para  $k = 0$  temos  $a_1 = 3(-1)^2 + (-1)^1 = 3 - 1 = 2$ , o que é verdade.

Para  $k \geq 1$  temos

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} &= -2a_k - a_{k-1} = -2(3(-1)^{k+1} + k(-1)^k) - (3(-1)^k + (k-1)(-1)^{k-1}) \\
 &= (-1)^{k+1}(-6 + 3) + (-1)^k(-2k + k - 1) \\
 &= 3(-1)^{k+2} + (k+1)(-1)^{k+1},
 \end{aligned}$$

ou seja  $P(k+1)$  é verdade.

Mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ . □

**Exercício 2.12.** Considere a sucessão  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ u_n = 6u_{n-1} - 8u_{n-2} + 2^n + 1, \text{ para todo } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre que  $u_n = \frac{4^n}{6} - (2n-1)2^{n-1} + \frac{1}{3}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n)$ :  $u_n = \frac{4^n}{6} - (2n-1)2^{n-1} + \frac{1}{3}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- 1) Para  $n = 0$  temos  $P(0)$ :  $u_0 = \frac{1}{6} + 2^{-1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$ , o que é verdade.
- 2) Admitindo que  $P(0), P(1), P(2), \dots, P(k)$  são verdade queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é,  $u_{k+1} = \frac{4^{k+1}}{6} - (2k+1)2^k + \frac{1}{3}$ .

Para  $k = 0$  temos  $u_1 = \frac{4^1}{6} - 2^0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 0$ , o que é verdade.

Para  $k \geq 1$  temos

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 6u_k - 8u_{k-1} + 2^{k+1} + 1 \\ &= 6 \left( \frac{4^k}{6} - (2k-1)2^{k-1} + \frac{1}{3} \right) - 8 \left( \frac{4^{k-1}}{6} - (2k-3)2^{k-2} + \frac{1}{3} \right) + 2^{k+1} + 1 \\ &= 4^k - 6k2^k + 3 \cdot 2^k + 2 - \frac{2 \cdot 4^k}{6} + 4k2^k - 6 \cdot 2^k - \frac{8}{3} + 2^{k+1} + 1 \\ &= 4^k \left( 1 - \frac{2}{6} \right) - 2^k(6k-3-4k+6-2) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{4^{k+1}}{6} - 2^k(2k+1) + \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

ou seja  $P(k+1)$  é verdade.

Mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ . □

**Exercício 2.13.** Considere a sucessão  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = 9 \\ v_2 = 15 \\ v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2} - 6v_{n-3}, \text{ para todo } n \geq 3 \end{cases}.$$

Mostre que  $v_n = 3^n + 2 \times (-1)^{n+1} + 2^{n+1}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n)$ :  $v_n = 3^n + 2 \times (-1)^n + 2^{n+1}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- 1) Para  $n = 0$  temos  $P(0)$ :  $v_0 = 3^0 + 2 \times (-1)^1 + 2^1 = 1$ , o que é verdade.
- 2) Admitimos que  $P(0), P(1), P(2), \dots, P(k)$  são verdade, queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é,  $v_{k+1} = 3^{k+1} + 2 \times (-1)^{k+2} + 2^{k+2}$ .

Para  $k = 0$  temos  $v_1 = 3^1 + 2 \times (-1)^2 + 2^2 = 9$ , o que é verdade.

Para  $k = 1$  temos  $v_2 = 3^2 + 2 \times (-1)^3 + 2^3 = 15$ , o que é verdade.

Para  $k \geq 2$  temos

$$\begin{aligned}
 v_{k+1} &= 4v_k - v_{k-1} - 6v_{k-2} \\
 &= 4 \left( 3^k + 2 \times (-1)^{k+1} + 2^{k+1} \right) - \left( 3^{k-1} + 2 \times (-1)^k + 2^k \right) \\
 &\quad - 6 \left( 3^{k-2} + 2 \times (-1)^{k-1} + 2^{k-1} \right) \\
 &= 3^{k-1}(12 - 1 - 2) + (-1)^{k+2}(-8 - 2 + 12) + 2^k(8 - 1 - 3) \\
 &= 3^{k-1} \times 9 + (-1)^{k+2} \times 2 + 2^k \times 4 \\
 &= 3^{k+1} + 2 \times (-1)^{k+2} + 2^{k+2},
 \end{aligned}$$

ou seja  $P(k+1)$  é verdade.

Mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ . □

**Exercício 2.14. (Sucessão de Fibonacci)** Considere a sucessão  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por recorrência como

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ para } n \geq 2 \end{cases} .$$

- a) Calcule  $f_2, f_3, f_4, f_5$  e  $f_6$ .
- b) Seja  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Mostre que  $\alpha$  é uma solução de  $x^2 - x - 1 = 0$ .
- c) Mostre que  $\alpha^{k-1} = \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3}$ .
- d) Mostre que  $f_3 > \alpha$  e  $f_4 > \alpha^2$ .
- e) Mostre que  $f_n > \alpha^{n-2}$ , para todo o  $n \geq 3$ .

**Resolução:** a)

$$f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$$

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$$

$$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$$

$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$$

$$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$$

b) Substituindo  $\alpha$  na equação temos  $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$  o que equivale a

$$\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} - 4 = 0,$$

o que é uma proposição verdadeira, logo  $\alpha$  é solução da equação.

c) Da alínea anterior sabemos que  $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$  e logo temos  $\alpha^{k-3}\alpha^2 = \alpha^{k-3}(\alpha + 1) \Leftrightarrow \alpha^{k-1} = \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3}$ .

d) Como  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  podemos fazer a seguinte construção

$$4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 3 < 1 + \sqrt{5} < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} < \alpha < 2 = f_3.$$

Como  $\alpha^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  podemos fazer a seguinte construção

$$4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 5 < 3 + \sqrt{5} < 6 \Rightarrow \frac{5}{2} < \alpha^2 < 3 = f_4.$$

e) Temos a proposição  $P(n) : f_n > \alpha^{n-2}$ , para todo o  $n \geq 3$ .

1) Para  $n = 3$  temos  $P(3) : f_3 > \alpha^{3-2} \Leftrightarrow f_3 > \alpha$ , que vimos ser verdade na alínea anterior.

2) Admitindo que  $P(3), P(4), \dots, P(k)$  são verdade, vamos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $f_{k+1} > \alpha^{k-1}$ .

Temos que

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} > \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3} = \alpha^{k-1},$$

onde usámos a definição da sucessão de Fibonacci, a hipótese de indução e a alínea c); ou seja  $P(k+1)$  é verdade.

Mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \geq 3$ .

□

## 2.3 Princípio de Indução Generalizada

Agora pretendemos estender estas ideias a conjuntos diferentes de  $\mathbb{N}$ , para isso começamos por estabelecer a seguinte definição.

**Definição 2.1.** Seja  $(S, \leq)$  um conjunto totalmente ordenado, dizemos que  $(S, \leq)$  é *conjunto bem ordenado* se qualquer subconjunto não vazio de  $S$  tem mínimo.

*Exemplo 2.2.* O conjunto  $(\mathbb{N}, \leq)$ , onde  $\leq$  é a ordem usual, é bem ordenado.

*Exemplo 2.3.* O conjunto  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_l)$ , onde  $\leq_l$  é a ordem lexicográfica definida por

$$(m, n) \leq_l (m', n') \Leftrightarrow m < m' \vee (m = m' \wedge n \leq n'),$$

é bem ordenado.

### Princípio de Indução Generalizada

Sejam  $(S, \leq)$  um conjunto bem ordenado e  $P(x)$  uma proposição que depende de  $x \in S$ . Se tivermos que:

- 1)  $P(x_0)$  é verdade, onde  $x_0$  é o mínimo de  $S$ .
- 2) dado  $x \in S$  com  $x_0 < x$ , admitindo que  $P(y)$  é verdade para todo o  $y < x$ , mostrarmos que  $P(x)$  é verdade.

Então,  $P(x)$  é verdade para todo o  $x \in S$ .

**Exercício 2.15.** Considere  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  com a ordem lexicográfica e a função

$$f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(m, n) \mapsto f(m, n) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } m = n = 0 \\ f(m-1, n) + 1 & , \text{ se } m > 0 \wedge n = 0 \\ f(m, n-1) + n & , \text{ se } n > 0 \end{cases}.$$

- a) Calcule  $f(1, 1)$ ,  $f(1, 2)$  e  $f(3, 0)$ .
- b) Mostre que  $f(m, n) = m + \frac{n(n+1)}{2}$  para todo o  $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

**Resolução:** a)

$$f(1, 1) = f(1, 0) + 1 = f(0, 0) + 1 + 1 = 2$$

$$f(1, 2) = f(1, 1) + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$f(3, 0) = f(2, 0) + 1 = f(1, 0) + 1 + 1 = f(0, 0) + 1 + 2 = 3$$

b) Temos a proposição  $P(m, n) : f(m, n) = m + \frac{n(n+1)}{2}$ , para todo o  $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

- 1) O elemento mínimo de  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  é  $(0, 0)$  e temos  $P(0, 0) : f(0, 0) = 0 + \frac{0 \times (0+1)}{2} = 0$ , o que é verdade.
- 2) Seja  $(u, v) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  com  $(0, 0) <_l (u, v)$ , admitindo que  $P(s, t)$  é verdade para todo o  $(s, t) <_l (u, v)$ , isto é,

$$f(s, t) = s + \frac{t(t+1)}{2} \text{ para todo o } (s, t) <_l (u, v),$$

vamos mostrar que  $P(u, v)$  é verdade, isto é,  $f(u, v) = u + \frac{v(v+1)}{2}$ .

Se  $v = 0$  temos  $u > 0$  e assim

$$f(u, v) = f(u-1, v) + 1 = u-1 + \frac{v(v+1)}{2} + 1 = u + \frac{v(v+1)}{2} = u,$$

onde usámos a hipótese com  $(u-1, 0) <_l (u, 0)$ . Logo  $P(u, v)$  é verdadeira para  $v = 0$ .

Se  $v > 0$  temos

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f(u, v-1) + v = u + \frac{(v-1)v}{2} + v = u + \frac{v^2 - v + 2v}{2} \\ &= u + \frac{v^2 + v}{2} = u + \frac{v(v+1)}{2}, \end{aligned}$$

onde usámos a hipótese com  $(u, v-1) <_l (u, v)$ . Logo  $P(u, v)$  é verdadeira para  $v > 0$ .

Mostramos assim que  $P(m, n)$  é verdadeira para todo o  $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

□

## 2.4 Exercícios Propostos

**Exercício 2.16.** Mostre, usando indução matemática, que a soma dos primeiros  $n$  números ímpares é  $n^2$ , isto é,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

**Exercício 2.17.** Mostre, usando indução matemática, que

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

**Exercício 2.18.** Mostre, usando indução matemática, que  $n^2 < n!$ , para todo o  $n \geq 4$ .

**Exercício 2.19.** Mostre, usando indução matemática, que  $n! > 3^n$ , para todo o  $n \geq 7$ .

**Exercício 2.20.** Mostre, usando indução matemática, que  $n! > 4^n$ , para todo o  $n \geq 9$ .

**Exercício 2.21.** Seja  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Mostre que para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$  temos

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

**Exercício 2.22.** Mostre, usando indução matemática, que  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq n$ , para todo o  $n \geq 3$ .

**Exercício 2.23.** Seja  $H_j$  o número harmónico definido por  $H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{j}$ . Mostre que  $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Exercício 2.24.** Considere a sucessão  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 5u_{n-1}, \text{ para todo o } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre, usando indução matemática, que  $u_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 2.25.** Considere a sucessão  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por

$$\begin{cases} u_0 = 200 \\ u_1 = 220 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, \text{ para todo o } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre, usando indução matemática, que  $u_n = 5 \times 2^{n+2} + 180$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Exercício 2.26.** Considere a sucessão  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = 1 \\ v_n = 4v_{n-1} - 4v_{n-2}, \text{ para todo o } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre, usando indução matemática, que  $v_n = 2^n - n2^{n-1}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Exercício 2.27.** Prove que  $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \leq_l)$  é um conjunto bem ordenado.



**Exercício 2.28.** Considere  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  com a ordem lexicográfica e a função

$$a : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(m, n) \mapsto a(m, n) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } m = n = 0 \\ a(m-1, n) + 1 & , \text{ se } m > 0 \wedge n = 0 \\ a(m, n-1) + 1 & , \text{ se } n > 0 \end{cases}.$$

Mostre, usando indução generalizada, que  $a(m, n) = m + n$  para todo o  $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

**Exercício 2.29.** Considere  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  com a ordem lexicográfica e a função

$$a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(m, n) \mapsto a(m, n) = \begin{cases} 5 & , \text{ se } m = n = 1 \\ a(m-1, n) + 2 & , \text{ se } m > 1 \wedge n = 1 \\ a(m, n-1) + 2 & , \text{ se } n > 1 \end{cases}.$$

Mostre, usando indução generalizada, que  $a(m, n) = 2(m + n) + 1$  para todo o  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .



## Capítulo 3

# Introdução à Combinatória

### Semana 8

Neste Capítulo pretendemos estudar algumas técnicas para efectuar a contagem do número de formas que existem para realizar um certo procedimento.

### 3.1 Princípios Gerais de Contagem

**Princípio da Multiplicação:** Se um procedimento pode ser decomposto numa sequência de  $k$  tarefas  $T_1, T_2, \dots, T_k$  e há  $n_i$  formas de realizar a tarefa  $T_i$ , então há  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  formas de realizar o procedimento.

*Exemplo 3.1.* Usando o alfabeto  $\{a, b, c\}$  podemos formar  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$  palavras com 4 letras.

**Exercício 3.1.** Sejam  $M$  um conjunto com  $m$  elementos e  $N$  um conjunto com  $n$  elementos. Quantas aplicações  $f : M \rightarrow N$  existem?

**Resolução:** Sejam  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  e  $N = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , como  $f$  é uma aplicação cada elemento  $x \in M$  tem uma imagem  $y \in N$ , ou seja, para a imagem de cada  $x$  existem  $n$  possibilidades. Assim, existem  $n \times n \times \dots \times n = n^m$  aplicações de  $M$  em  $N$ .  $\square$

**Princípio da Soma:** Se um procedimento pode ser feito de  $n_1$  ou de  $n_2$  formas e não há sobreposições, isto é, se nenhuma das  $n_1$  formas é igual a qualquer uma das  $n_2$  formas possíveis, então há  $n_1 + n_2$  formas de realizar o procedimento.

*Exemplo 3.2.* Usando o alfabeto  $\{a, b, c\}$  podemos formar 3 palavras com uma letra,  $3 \times 3 = 9$  palavras com duas letras e  $3 \times 3 \times 3 = 27$  palavras com três letras; assim, existem  $3 + 9 + 27 = 39$  palavras com no máximo 3 letras, usando este alfabeto.

**Exercício 3.2.** Até Março de 2020 quantas matrículas de automóvel podiam existir em Portugal?

**Resolução:** Até Março de 2020 as matrículas dos veículos nacionais eram formadas por duas letras (L), onde era considerado o alfabeto português de 23 letras, e quatro números (N); havendo assim  $23 \times 23 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 23^2 \times 10^4$  escolhas possíveis; num dos seguintes formatos:  $LL - NN - NN$ ,  $NN - LL - NN$  ou  $NN - NN - LL$ . Assim, podiam existir  $23^2 \times 10^4 + 23^2 \times 10^4 + 23^2 \times 10^4 = 3 \times 23^2 \times 10^4 = 15870000$  matrículas.  $\square$

**Princípio da Inclusão-Exclusão:** Se um procedimento pode ser feito de  $n_1$  ou de  $n_2$  formas, mas em que há sobreposição, isto é, existem  $n_3$  formas que estão incluídas nas  $n_1$  e nas  $n_2$  formas, então há  $n_1 + n_2 - n_3$  formas de realizar o procedimento.

*Exemplo 3.3.* Usando o alfabeto  $\{a, b, c\}$  podemos formar  $5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$  palavras de cinco letras com exactamente uma letra  $a$  e podemos formar  $5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$  palavras de cinco letras com exactamente uma letra  $b$ . E existem  $5 \times 4 = 20$  palavras de cinco letras com exactamente uma letra  $a$  e uma letra  $b$ . Assim, temos  $80 + 80 - 20 = 140$  palavras de cinco letras com exactamente uma letra  $a$  ou uma letra  $b$ , usando este alfabeto.

**Exercício 3.3.** Sabendo que de um total de 50 alunos estão 23 matriculados a Matemática e 42 matriculados a Física, sendo que todos os alunos estão inscritos a pelo menos uma disciplina, quantos estão matriculados nas duas disciplinas?

**Resolução:** Consideremos que  $A$  é o conjunto dos alunos inscritos a Matemática e  $B$  o conjunto dos alunos inscritos a Física, do enunciado sabemos que  $|A \cup B| = 50$ ,  $|A| = 23$  e  $|B| = 42$ . Pelo Princípio de Inclusão-Exclusão temos que  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ , ou seja  $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 23 + 42 - 50 = 15$  alunos estão inscritos nas duas disciplinas.  $\square$

**Exercício 3.4.** Determine quantos números naturais menores ou iguais a 100 são múltiplos de 6 ou múltiplos de 7.

**Resolução:** Seja  $A$  o conjunto dos múltiplos de 6 menores ou iguais a 100, e  $B$  o conjunto dos múltiplos de 7 menores ou iguais a 100. É fácil confirmar que  $|A| = 16$  e  $|B| = 14$

(basta retirar a parte inteira da divisão de 100 por 6 e 7, respectivamente). Além disso, os números menores ou iguais a 100 que são simultaneamente múltiplos de 6 e de 7 são o 42 e o 84, ou seja,  $|A \cap B| = 2$ . Então, existem  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 16 + 14 - 2 = 28$  números menores ou iguais a 100 que são múltiplos de 6 ou múltiplos de 7.  $\square$

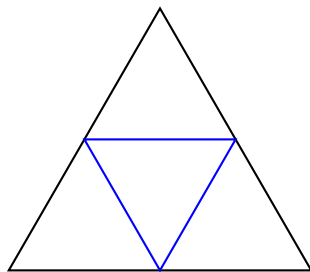
*Nota 3.4.* O Princípio da Soma é o caso particular do Princípio da Inclusão-Exclusão em que  $A \cap B = \emptyset$ .

*Nota 3.5.* O Princípio da Inclusão-Exclusão pode ainda ser generalizado ao caso em que temos  $n$  conjuntos, mas não vamos abordar esse assunto.

**Princípio da Gaiola dos Pombos:** Se em  $n$  gaiolas tivermos  $n + 1$  pombos, então pelo menos uma das gaiolas tem 2 pombos ou mais.

**Exercício 3.5.** Coloque cinco pontos aleatoriamente num triângulo equilátero de lado  $L$ . Mostre que existe pelo menos dois pontos cuja distância entre eles é menor ou igual a  $\frac{L}{2}$ .

**Resolução:** Dividimos o triângulo inicial em quatro triângulos equiláteros de lado  $\frac{L}{2}$  (gaiolas).



Ao distribuir os cinco pontos (pombos), pelo princípio da Gaiola dos Pombos, pelo menos dois pontos estarão no mesmo triângulo equilátero de lado  $\frac{L}{2}$ , e portanto a distância entre eles é menor ou igual a  $\frac{L}{2}$ .  $\square$

**Exercício 3.6.** Considere o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  e escolha 5 números. Mostre que há uma soma de dois desses números que dá 9.

**Resolução:** Do conjunto dado as somas de pares de números que dão 9 são:  $(1, 8)$ ,  $(2, 7)$ ,  $(3, 6)$  e  $(4, 5)$  (gaiolas). Ao escolhermos cinco números (pombos) do conjunto inicial, pelo princípio da Gaiola dos Pombos, pelo menos dois números estarão no mesmo par, e portanto a sua soma dá 9.  $\square$

**Exercício 3.7.** Mostre que escolhendo quatro números inteiros quaisquer há sempre dois cuja diferença é um múltiplo de 3.

**Resolução:** Quando se divide um número por 3, há três restos possíveis: 0, 1 ou 2 (gaiolas). Quando escolhemos quatro números (pombos), pelo princípio da Gaiola dos Pombos, há pelo menos dois deles que têm o mesmo resto; sejam  $n_1 = 3k_1 + r$  e  $n_2 = 3k_2 + r$ . Então  $n_1 - n_2 = 3k_1 + r - 3k_2 - r = 3(k_1 - k_2)$ , ou seja, é um múltiplo de 3.  $\square$

## 3.2 Arranjos, Permutações e Combinações

**Definição 3.6.** Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto com  $n$  elementos. Chamamos *arranjo de  $n$  elementos com comprimento  $k$*  a uma sequência de  $k$  elementos extraídos do conjunto  $\mathcal{U}$ , sem reposição. Indicamos o número de arranjos de  $n$  elementos com comprimento  $k$  por  $A_k^n$ .

Para a primeira posição da sequência temos  $n$  elementos disponíveis, para a segunda posição apenas temos  $n - 1$  elementos disponíveis, para a terceira posição apenas temos  $n - 2$  elementos disponíveis, até que quando chegamos à posição  $k$  apenas temos  $n - k + 1$  elementos disponíveis; assim  $A_k^n = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$ .

*Exemplo 3.7.* Consideremos  $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$ , temos que  $abd$ ,  $adb$ ,  $cda$  e  $edc$  são arranjos de 5 elementos com comprimento 3. Podemos formar  $A_3^5 = \frac{5!}{(5 - 3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$  arranjos de 5 elementos com comprimento 3.

**Exercício 3.8.** Dado um saco com bolas numeradas de 1 a 7, pretende-se sortear um número com 4 algarismos todos diferentes, de quantas formas o podemos fazer?

**Resolução:** Quando retiramos o primeiro número temos 7 bolas à disposição, para o segundo temos apenas 6, depois 5 e finalmente apenas 4; ou seja temos um arranjo  $A_4^7 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ .  $\square$

**Definição 3.8.** Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto com  $n$  elementos. Chamamos *permutação de  $n$  elementos* a um arranjo de  $n$  elementos com comprimento  $n$ . Indicamos o número de permutações de  $n$  elementos por  $P_n$ .

Como uma permutação de  $n$  elementos é um arranjo de  $n$  elementos com comprimento  $n$  temos  $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ .

*Exemplo 3.9.* Consideremos  $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$ , temos que  $abcde$ ,  $becda$ ,  $bcead$  e  $abdec$  são permutações de  $\mathcal{U}$ . Podemos formar  $P_5 = A_5^5 = 5! = 120$  permutações de 5 elementos.

**Exercício 3.9.** Depois do jantar quatro amigos dividem a conta e vão para a fila fazer o pagamento, de quantas formas diferentes podem fazer a fila?

**Resolução:** Para a primeira posição da fila temos 4 pessoas disponíveis, para a segunda temos 3, para a penúltima 2 e por fim apenas uma; ou seja, temos uma permutação  $P_4 = 4! = 24$ , isto é, podem formar 24 filas diferentes.  $\square$

**Definição 3.10.** Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto com  $n$  elementos. Chamamos *combinação de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$*  a um subconjunto de  $k$  elementos extraído do conjunto  $\mathcal{U}$ . Indicamos o número de combinações de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$  por  $\binom{n}{k}$  ou  $C_k^n$ .

**Proposição 3.11.** *Seja  $\mathcal{U}$  é um conjunto com  $n$  elementos. O número de arranjos de  $n$  elementos com comprimento  $k$  é igual ao produto do número de combinações de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$  pelo número de permutações de  $k$  elementos, isto é,  $A_k^n = \binom{n}{k} P_k$ . Ou seja, considerar os arranjos de  $n$  elementos com comprimento  $k$  é equivalente a considerar as combinações de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$  e depois fazer a permutação desses  $k$  elementos.*

$$\text{Assim, } A_k^n = \binom{n}{k} P_k \Leftrightarrow \binom{n}{k} = \frac{A_k^n}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

**Exemplo 3.12.** Consideremos  $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$ , temos que  $\{a, b, c\}$ ,  $\{c, d, e\}$  e  $\{b, c, d\}$  são combinações de 5 tomados 3 a 3. No total é possível formar  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$  combinações de 5 elementos tomados 3 a 3.

**Exercício 3.10.** Se tivermos bananas, maçãs, peras, morangos, uvas, kiwis, mangas e pêssegos, quantas saladas de frutas podemos fazer se usarmos apenas três frutas?

**Resolução:** Como temos 8 frutas e queremos retirar apenas 3, onde não importa a ordem, temos uma combinação. Assim, podemos fazer  $\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$  saladas de fruta diferentes.  $\square$

**Nota 3.13.** Observemos que nos arranjos e combinações estudados até este momento, como não há reposição, temos de ter sempre  $k \leq n$ .

**Proposição 3.14.** *Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto com  $n$  elementos. Temos as seguintes propriedades dos coeficientes  $\binom{n}{k}$ :*

$$1) \binom{n}{0} = 1$$

$$2) \binom{n}{n} = 1$$

$$3) \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}, \text{ o que é equivalente a ter } \binom{r+s}{r} = \binom{r+s}{s}$$

$$4) \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

**Prova:** 1)  $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!} = 1$

$$2) \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$3) \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

4)

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} \\ &= (n-1)! \left( \frac{k}{(n-k)!k!} + \frac{n-k}{(n-k)!k!} \right) \\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

□

**Observação 3.15.** Recordemos a construção do Triângulo de Pascal: a primeira linha tem o elemento 1, a linha  $n$  tem mais um elemento do que a linha anterior, os extremos de todas as linhas são 1 e um elemento é dado pela soma dos dois elementos acima dele. Temos que

$$\begin{array}{ccccccc} n=0: & & & & & & 1 \\ n=1: & & & & 1 & & 1 \\ n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 \\ n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ n=5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & \vdots & & & & & & & & \end{array}$$

ou seja, a linha  $n$  posição  $k$  coincide precisamente com  $\binom{n}{k}$  e podemos escrever o Triângulo de Pascal como



$$\begin{array}{ccccccccccc}
n = 0 : & & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
n = 1 : & & & & & \binom{1}{0} & & & \binom{1}{1} & & \\
n = 2 : & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
n = 3 : & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n = 4 : & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n = 5 : & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & \\
& \vdots & & & & & & & & & 
\end{array}$$

**Exercício 3.11.** Descreva as propriedades da Proposição 3.14 em termos do Triângulo de Pascal.

**Teorema 3.16. (Teorema Binomial)** Para  $x, y \in \mathbb{R}$  temos que

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

**Prova:** Vamos mostrar por indução que

$$P(n) : (x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}, \text{ com } x, y \in \mathbb{R}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para  $n = 1$  temos  $P(1)$ :

$$(x + y)^1 = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} x^i y^{1-i} \Leftrightarrow x + y = \binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1} \Leftrightarrow x + y = y + x,$$

o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é

$$(x + y)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k-i},$$

e queremos mostrar que  $P(k + 1)$  é verdade, isto é

$$(x + y)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^i y^{k+1-i}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y)(x+y)^k = (x+y) \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{i+1} y^{k-i} + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k+1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^{i+1} y^{k-i} + \binom{k}{k} x^{k+1} y^0 + \binom{k}{0} x^0 y^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^i y^{k+1-i} \\
&= y^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} x^i y^{k-i+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^i y^{k+1-i} + x^{k+1} \\
&= y^{k+1} + \sum_{i=1}^k \left[ \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right] x^i y^{k-i+1} + x^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0} x^0 y^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} x^i y^{k-i+1} + \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} y^0 \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^i y^{k-i+1}
\end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Observação 3.17.** No Teorema Binomial, no caso particular  $y = 1$  temos que

$$\begin{aligned}
(x+1)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i 1^{n-i} \\
&= \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n \\
&= 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \dots + x^n
\end{aligned} \tag{3.1}$$

e se tivermos ainda  $x = 1$  temos a igualdade

$$2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}. \tag{3.2}$$

Se  $A$  for um conjunto com  $n$  elementos, no lado direito da igualdade (3.2) temos a soma do número de subconjuntos com  $0, 1, 2, \dots, n$  elementos, ou seja, temos o número total de subconjuntos de  $A$ ; isto é, o conjunto das partes de  $A$ ,  $\mathcal{P}(A)$ . Além disso, podemos identificar cada subconjunto de  $A$  com uma sequência de comprimento  $n$  de 0 e 1, sendo que a sequência na posição  $i$  é 1 se o elemento  $i$  está no subconjunto e é 0 caso contrário. Assim, o número de elementos de  $\mathcal{P}(A)$  coincide com o número de sequências de 0 e 1 de comprimento  $n$ , e com a soma da linha  $n$  do triângulo de Pascal.

*Exemplo 3.18.* Seja  $A$  um conjunto com 4 elementos, então o conjunto das partes de  $A$ ,  $\mathcal{P}(A)$ , tem  $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16$  elementos.

## Semana 9

**Teorema 3.19. (Convolução de Vandermonde)** Dados  $m, n, k \in \mathbb{N}$  tais que  $k \leq m, n$ , temos a seguinte igualdade

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

**Prova:** Usando a igualdade (3.1) temos que

$$(x+1)^m (x+1)^n = (x+1)^{m+n} \Leftrightarrow \left( \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \right) \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k.$$

Igualando os coeficientes de  $x^k$  e de  $x^{i+j}$  com  $i+j=k$  temos

$$\binom{m}{0} \binom{n}{k} + \binom{m}{1} \binom{n}{k-1} + \binom{m}{2} \binom{n}{k-2} + \dots + \binom{m}{k} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{k},$$

ou seja, temos a igualdade desejada.  $\square$

**Corolário 3.20.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

**Prova:** Tendo em conta a Convolução de Vandermonde, basta fazer  $k = m = n$  e recordar que  $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ .  $\square$

**Exercício 3.12.** Mostre que

$$\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = n 2^{n-1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

**Resolução:** Começamos por observar que

$$\begin{aligned} i \binom{n}{i} &= i \frac{n!}{(n-i)!i!} = \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} = \frac{n!}{((n-1)-(i-1))!(i-1)!} \\ &= n \frac{(n-1)!}{((n-1)-(i-1))!(i-1)!} = n \binom{n-1}{i-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^n n \binom{n-1}{i-1} = n \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n 2^{n-1},$$

onde usámos a equação (3.2) para  $n-1$ , na última igualdade.  $\square$

### 3.3 Arranjos, Permutações e Combinações Completas

**Definição 3.21.** Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto com  $n$  elementos. Chamamos *arranjo completo de  $n$  elementos com comprimento  $k$*  a uma sequência de  $k$  elementos extraídos do conjunto  $\mathcal{U}$ , com reposição. Indicamos o número de arranjos completos de  $n$  elementos com comprimento  $k$  por  $\overline{A}_k^n$ .

Para a primeira posição da sequência temos  $n$  elementos disponíveis, para a segunda posição voltamos a ter  $n$  elementos disponíveis, em geral para a posição  $i$  temos  $n$  elementos disponíveis; assim  $\overline{A}_k^n = n^k$ .

*Exemplo 3.22.* Consideremos  $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$ , temos que  $abd$ ,  $acc$ ,  $aaa$  e  $dae$  são arranjos completos de 5 elementos com comprimento 3. Podemos formar  $\overline{A}_3^5 = 5^3 = 125$  arranjos completos de 5 elementos com comprimento 3.

**Exercício 3.13.** Num determinado país as matrículas das viaturas são uma sequência de quatro letras e três algarismos. Quantas matrículas podem existir?

**Resolução:** Considerando o alfabeto completo com 26 letras, para cada uma das quatro primeiras posições temos 26 possibilidades, ou seja  $\overline{A}_4^{26}$ ; para cada uma das três posições seguintes temos 10 possibilidades, ou seja  $\overline{A}_3^{10}$ . Assim, podem existir  $\overline{A}_4^{26} \cdot \overline{A}_3^{10} = 26^4 \times 10^3 = 456976000$  matrículas.  $\square$

**Definição 3.23.** Seja  $\mathcal{U}$  uma colecção de  $n$  objectos, não necessariamente todos distintos, em que  $n_1, n_2, \dots, n_k$  são elementos idênticos, ou seja,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ . Chamamos *permutação completa de  $n$  elementos* a uma sequência de todos os objectos de  $\mathcal{U}$ , não necessariamente distintos. Indicamos o número dessas permutações completas de  $n$  elementos por  $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ .

O número de permutações de  $n$  elementos é  $P_n = n!$ , mas agora temos  $n_i$  elementos idênticos, pelo que se os permutarmos ( $P_{n_i} = n_i!$ ) obtemos a mesma sequência, assim 
$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

*Exemplo 3.24.* Consideremos a palavra CRECHE, vamos determinar quantas palavras distintas podemos formar com essas letras. Ao todo temos 6 letras, logo seis posições. Mas desses 6 elementos, temos duas letras C, duas letras E, uma letra R e uma letra H. Assim, existem  $P_6^{2,2,1,1} = \frac{6!}{2!2!1!1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{2} = 180$  palavras diferentes.

**Exercício 3.14.** Quantas palavras distintas podemos formar com as letras da palavra MISSISSIPPI?

**Resolução:** Ao todo temos 10 letras, sendo quatro I, quatro S, um M e um P, assim existem  $P_{10}^{4,4,1,1} = \frac{10!}{4!4!1!1!} = \frac{10!}{4!4!} = 10 \times 9 \times 2 \times 7 \times 5 = 6300$  palavras.  $\square$

**Exercício 3.15.** De quantas formas distintas podemos arrumar numa prateleira 3 livros de Matemática, 4 livros de Programação e 2 livros de Física?

**Resolução:** Ao todo temos 9 livros, sendo quatro de Programação, três de Matemática e dois de Física, assim existem  $P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!3!2!} = 9 \times 4 \times 7 \times 5 = 1260$  formas distintas de arrumar os livros.  $\square$

**Definição 3.25.** Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto com  $n$  elementos. Chamamos *combinação completa de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$*  a uma colecção de  $k$  elementos extraídos do conjunto  $\mathcal{U}$ , com reposição. Indicamos o número de combinações completas de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$  por  $\overline{C}_k^n$ .

Como a ordem não importa, dado  $\mathcal{U} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  as colecções  $a_1a_1a_5a_2a_5$  e  $a_2a_5a_5a_1a_1$  são iguais, por exemplo. Assim, começamos por ordenar todos os elementos dentro da colecção, no caso do exemplo dado escrevemos  $a_1a_1a_2a_5a_5$ . Agora usamos o símbolo  $|$  para separar os elementos idênticos e o símbolo  $-$  para indicar os elementos escolhidos; a colecção usada para exemplo é representada por  $--|-|||-|||\dots|$ .

Assim, do número de posições total  $k + (n - 1)$  da colecção escolhemos  $k$  posições para colocar  $-$ , o que é equivalente, pela propriedade 3) da Proposição 3.14, a escolher  $n - 1$  posições para colocar  $|$ . Assim,  $\overline{C}_k^n = \binom{n - 1 + k}{k} = \binom{n - 1 + k}{n - 1}$ .

*Exemplo 3.26.* Consideremos  $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$ , vamos determinar quantas combinações completas de 3 elementos tomados 5 a 5 podemos formar. Como a ordem da combinação não importa temos, por exemplo, as seguintes igualdades entre combinações

$$aabbcc = ababcc = cbbaa$$

$$aaaab = aabaa = baaaa$$

$$abccc = baccc = cccba$$

Ordenando os elementos dentro da combinação, os exemplos anteriores são vistos como:

$$\begin{array}{c} - - | - - | - \\ - - - - | - | \\ - | - | - - - \end{array}$$

em que antes da primeira  $|$  colocamos todos os  $a$ , depois da primeira  $|$  e antes da segunda colocamos todos os  $b$  e depois da segunda  $|$  colocamos todos os  $c$ .

Ou seja, das  $(3 - 1) + 5 = 7$  posições totais escolhemos 5 posições para colocar  $a$ ,  $b$  ou  $c$  (as que estiverem em posições adjacentes têm a mesma letra), o que é equivalente a escolher  $3 - 1 = 2$  posições para colocar as  $|$  (uma vez que antes da primeira escolha colocamos o  $a$ , entre a primeira e a segunda escolha colocamos o  $b$  e depois da segunda escolha colocamos o  $c$ ); portanto, existem  $\overline{C}_5^3 = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$  combinações completas de 3 elementos tomados 5 a 5.

**Proposição 3.27.** *Temos que  $\overline{C}_k^n = P_{n-1+k}^{n-1,k}$ .*

**Prova:** Tendo em conta a explicação acima, uma combinação completa de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$  é equivalente a uma permutação de  $n - 1 + k$  elementos, em que  $k$  são idênticos  $(-)$  e  $n - 1$  são também idênticos  $(|)$ . Algebricamente, basta atender a que  $\overline{C}_k^n = \binom{n-1+k}{k} = \frac{(n-1+k)!}{(n-1+k-k)!k!} = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!} = P_{n-1+k}^{n-1,k}$ .  $\square$

**Exercício 3.16.** Supondo que uma geladaria tem três sabores de gelado: chocolate, morango e nata. Quantas taças de gelado conseguimos fazer com quatro bolas de gelado?

**Resolução:** Como é indiferente a ordem e podemos repetir, estamos perante uma combinação completa de 3 elementos tomados 4 a 4, ou seja temos  $\overline{C}_4^3 = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$  formas diferentes para compor uma taça com quatro bolas de três sabores.  $\square$

*Nota 3.28.* Observemos que nos arranjos completos e combinações completas, como há reposição, o natural  $k$  pode ser maior do que o natural  $n$ , o número de elementos de  $\mathcal{U}$ .

**Observação 3.29.** As combinações completas podem ser usadas para determinar o número de soluções inteiras não-negativas possíveis de uma dada equação linear. Dada a equação  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , pretendemos saber quantas soluções existem com  $x_i \in \mathbb{N}_0$ . Este problema equivale a escolher no conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  uma quantidade

de  $k$  elementos, ou seja uma combinação completa de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$ . Assim, existem  $\overline{C}_k^n$  soluções inteiras não-negativas da equação dada.

*Exemplo 3.30.* A equação  $x + y + z = 13$  tem exactamente  $\overline{C}_{13}^3 = \binom{13+3-1}{13} = \binom{15}{13} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{15 \times 14}{2} = 105$  soluções inteiras não-negativas.

**Exercício 3.17.** Quantas soluções em  $\mathbb{N}$  tem a equação  $x + y = 6$ ?

**Resolução:** Como queremos soluções em  $\mathbb{N}$  tomamos  $x = a + 1$  e  $y = b + 1$  e substituindo na equação ficamos com a equação  $a + b = 4$ , onde queremos obter o número de soluções não negativas, ou seja em  $\mathbb{N}_0$ . Ora, esse número de soluções é dado por  $\overline{C}_4^2 = \binom{4+2-1}{4} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!1!} = 5$ .  $\square$

### 3.4 Exercícios Propostos

**Exercício 3.18.** Considere todos os números de telefone com o indicativo 275, quantos números existem com todos os algarismos diferentes?

**Exercício 3.19.** Dada uma urna com bolas numeradas de 1 a 9, quantas sequências de 6 números podemos extrair, sem reposição?

**Exercício 3.20.** Sabendo que um PIN de multibanco com todos os dígitos diferentes tem um 5 na primeira posição e um 6 numa das outras posições, quantas possibilidades temos?

**Exercício 3.21.** Numa prova de atletismo com oito participantes de quantas formas diferentes podem ser entregues as medalhas de ouro, prata e bronze?

**Exercício 3.22.** Seis amigas vão ao cinema.

- a) Numa fila com 6 cadeiras, de quantas formas diferentes se podem sentar?
- b) Numa fila com 10 cadeiras, de quantas formas diferentes se podem sentar?
- c) Numa fila com 10 cadeiras, de quantas formas diferentes se podem sentar, de modo que todas fiquem juntas?

**Exercício 3.23.** Quantas palavras com as letras da palavra NARIZ podem ser formadas?

**Exercício 3.24.** Se fosse possível alterar a ordem das cores do arco-íris, quantos diferentes podíamos criar?

**Exercício 3.25.** Um fotógrafo vai tirar uma fotografia a um grupo de cinco rapazes e cinco raparigas numa escada com cinco degraus. Quantas fotos diferentes pode tirar de modo que em cada degrau esteja um rapaz e uma rapariga?

**Exercício 3.26.** Num torneio de xadrez estão inscritos 12 participantes.

- a) De quantas formas podemos constituir a dupla para a primeira partida?
- b) De quantas formas podemos constituir as duplas para a primeira jornada, em que todos participam?

**Exercício 3.27.** O António vai viajar e tem 15 camisas, mas na mala de viagem apenas cabem 6 camisas. De quantas formas diferentes pode o António escolher as camisas para a viagem?

**Exercício 3.28.** Nas sandes de uma cadeia de fast-food o cliente pode escolher entre três tipos de pão: normal, integral ou sementes; e cinco ingredientes: frango, atum, queijo, fiambre ou ovo. Quantas sandes diferentes podem os clientes fazer, sendo que a sandes tem de ter pelo menos um ingrediente?

**Exercício 3.29.** Numa determinada assembleia existem 105 deputados do partido A e 80 do partido B. É necessário formar uma comissão com 90 deputados do partido A e 65 do partido B, de quantas maneiras o podemos fazer?

**Exercício 3.30.** Quantas chaves do Euromilhões existem?

**Exercício 3.31.** Quantas chaves do Totoloto existem?

**Exercício 3.32.** Quantos códigos com sete algarismos podem ser formados apenas com dígitos que sejam números primos?

**Exercício 3.33.** Durante um exame com nove questões cuja resposta tem quatro opções: A, B, C ou D; um aluno responde de forma aleatória, de quantas formas o pode fazer?

**Exercício 3.34.** Uma pessoa tem três métodos para fazer as viagens de ida e volta do trabalho: a pé, de transporte público ou de carro. Durante uma semana de quantas formas diferentes pode realizar estas deslocações?

**Exercício 3.35.** Considere um código de seis dígitos.

- a) Quantos códigos podemos formar?



- b) Quantos códigos podemos formar com exactamente dois dígitos iguais a 7?
- c) Quantos códigos podemos formar com no máximo dois dígitos iguais a 7?

**Exercício 3.36.** Depois de arrumar a árvore de Natal é necessário arrumar sete bolas vermelhas, cinco bolas azuis, três bolas verdes e duas bolas amarelas num tubo. De quantas formas o podemos fazer?

**Exercício 3.37.** Quantas palavras podemos formar com as letras da palavra MATEMÁTICA?

**Exercício 3.38.** Num campeonato de futebol com 34 jornadas uma equipa obteve 25 vitórias, 7 empates e duas derrotas. De quantas formas diferentes podem ter ocorrido estes resultados?

**Exercício 3.39.** Numa prova de avaliação com 20 perguntas de Verdadeiro ou Falso as respostas correctas são 12 Verdadeiros e 8 Falsos. De quantas formas diferentes pode o professor ordenar as repostas correctas?

**Exercício 3.40.** Suponha que num supermercado são vendidas cinco marcas distintas de refrigerantes. De quantas formas diferentes podemos comprar três latas de refrigerantes, possivelmente iguais?

**Exercício 3.41.** Suponha que num supermercado são vendidas três marcas distintas de refrigerantes. De quantas formas diferentes podemos comprar cinco latas de refrigerantes, possivelmente iguais?

**Exercício 3.42.** Dadas sete bolas, vamos distribuí-las entre o Gabriel, o Pedro, o Rodrigo e o Simão.

- a) De quantas formas o podemos fazer?
- b) Supondo que as bolas são numeradas, de quantas formas o podemos fazer?

**Exercício 3.43.** Quantas soluções inteiras não-negativas, ou seja em  $\mathbb{N}_0$ , tem a equação  $w + x + y + z = 9$ ?

**Exercício 3.44.** Uma fábrica de brinquedos pretende fazer sacos com dez pequenos carinhos de madeira pintados de vermelho, azul, amarelo ou verde.

- a) Quantos sacos diferentes é possível formar?

- b) Se pretendermos que todos os sacos tenham pelo menos um carrinho de cada cor, quantos sacos diferentes é possível formar?
- c) Se pretendermos que todos os sacos tenham exactamente um carrinho vermelho, quantos sacos diferentes é possível formar?

# Capítulo 4

## Grafos

### Semana 10

#### 4.1 Conceitos e Resultados Fundamentais

**Definição 4.1.** Dizemos que um terno  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  é um *grafo* se

- a)  $V(G) \neq \emptyset$
- b)  $E(G)$  é um conjunto disjunto de  $V(G)$
- c)  $\psi_G$  é uma função em que, para cada  $e \in E(G)$ ,  $\psi_G(e)$  denota um par não ordenado de elementos de  $V(G)$  (não necessariamente distintos).

Chamamos a  $V(G)$  conjunto dos *vértices* de  $G$ , a  $E(G)$  o conjunto das *arestas* de  $G$  e a  $\psi_G$  *função de incidência* de  $G$ . Indicamos a cardinalidade de  $V(G)$  por  $\nu(G)$  e a cardinalidade de  $E(G)$  por  $\varepsilon(G)$ .

Dada uma aresta  $e \in E$  tal que  $\psi_G(e) = uv$ , onde  $uv$  é um par não ordenado de vértices em  $V$ , dizemos que:  $u$  e  $v$  são os *vértices extremos* da aresta  $e$ ; a aresta  $e$  é *incidente* nos vértices  $u$  e  $v$ ;  $u$  e  $v$  são *vértices adjacentes*. Ao conjunto dos vértices adjacentes de um vértice  $v \in V(G)$  chamamos *vizinhança* de  $v$ .

Se as arestas  $e_1$  e  $e_2$  são incidentes num vértice  $v$ , isto é  $\psi_G(e_1) = uv$  e  $\psi_G(e_2) = wv$ , dizemos que  $e_1$  e  $e_2$  são *arestas adjacentes*. Se as arestas  $e_1$  e  $e_2$  têm os mesmos vértices extremos, isto é  $\psi_G(e_1) = uv$  e  $\psi_G(e_2) = uv$ , dizemos que  $e_1$  e  $e_2$  são *arestas paralelas*. Se  $e$  é uma aresta com vértices extremos no mesmo vértice, isto é  $\psi_G(e) = vv$ , dizemos que  $e$  é um *lacete*.

A função de incidência  $\psi_G$  é injectiva se e só se não existirem arestas paralelas, e nesse caso, se  $\psi_G(e) = uv$  podemos denotar a aresta  $e \in E(G)$  pela respectiva imagem  $uv$ .

*Exemplo 4.2.* Consideremos o grafo  $G$  em que:

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  é o conjunto dos vértices
- $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$  é o conjunto das arestas
- A função incidência  $\psi$  é dada por

$$\begin{aligned} \psi(e_1) &= v_1v_2 & \psi(e_2) &= v_1v_2 & \psi(e_3) &= v_2v_3 & \psi(e_4) &= v_2v_5 \\ \psi(e_5) &= v_3v_4 & \psi(e_6) &= v_4v_5 & \psi(e_7) &= v_4v_6 & \psi(e_8) &= v_5v_6 \\ \psi(e_9) &= v_5v_5 \end{aligned}$$

Então podemos representar o grafo  $G$  como na Figura 4.1.

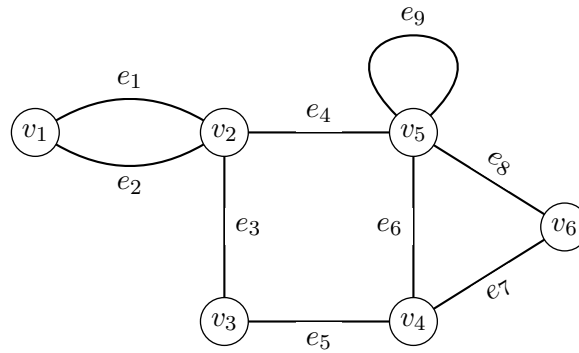


Figura 4.1: Grafo  $G$

Acerca do grafo  $G$  podemos dizer que

- $v_2$  e  $v_5$  são os vértices extremos da aresta  $e_4$
- $e_6$  é uma aresta incidente em  $v_4$  e  $v_5$
- $v_5$  e  $v_6$  são vértices adjacentes
- a vizinhança de  $v_4$  é  $\{v_3, v_5, v_6\}$
- $e_4$  e  $e_8$  são arestas adjacentes
- $e_1$  e  $e_2$  são arestas paralelas
- $e_9$  é um lacete

**Observação 4.3.** Daqui em diante indicamos o terno  $(V(G), E(G), \psi_G)$  apenas por  $G$ .

**Definição 4.4.** Dizemos que  $G$  é um *grafo simples* se não tiver arestas paralelas nem lacetes. A um grafo simples com um único vértice chamamos *grafo trivial*.

*Exemplo 4.5.* Na Figura 4.2 temos um exemplo de um grafo simples.

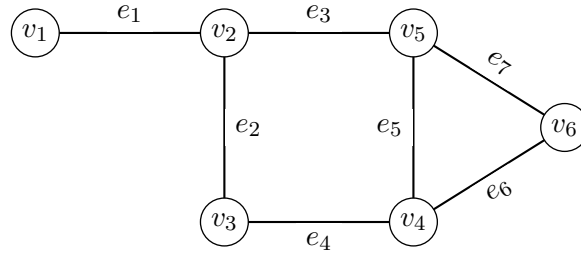


Figura 4.2: Grafo Simples

**Observação 4.6.** Quando o grafo é simples não existem arestas paralelas, a função de incidência é injectiva e as arestas ficam completamente determinadas pelos respectivos vértices extremos, assim a função de incidência é redundante, ou seja, num grafo simples basta indicar a aresta  $e$  por  $uv$ , onde  $u$  e  $v$  são os vértices extremos da aresta  $e$ .

**Definição 4.7.** Dizemos que  $G$  é um *grafo finito* se  $V(G)$  e  $E(G)$  forem conjuntos finitos; caso contrário dizemos que  $G$  é um *grafo infinito*.

*Nota 4.8.* Quando referirmos apenas grafo, estamos a considerar um grafo finito, e é este o caso que vamos estudar.

**Definição 4.9.** Dois grafos  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  e  $H = (V(H), E(H), \psi_H)$  dizem-se *iguais* se  $V(G) = V(H)$ ,  $E(G) = E(H)$  e  $\psi_G = \psi_H$ ; e escrevemos  $G = H$ .

Dois grafos iguais admitem a mesma representação.

**Definição 4.10.** Dado um grafo  $G$  e um vértice  $v \in V(G)$ , designamos por *grau* de  $v$  o número de arestas incidentes no vértice  $v$ , que indicamos por  $d_G(v)$ . Se  $d_G(v) = 0$ , dizemos que  $v$  é *vértice isolado*. Indicamos o maior grau dos vértices de  $G$  por  $\Delta(G)$  e o menor grau dos vértices de  $G$  por  $\delta(G)$ , ou seja,

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v) \quad \text{e} \quad \delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v).$$

*Nota 4.11.* Um lacete num vértice conta duas vezes para o grau desse vértice.

*Nota 4.12.* No caso de um grafo simples o grau de um vértice coincide com a cardinalidade da sua vizinhança.

**Exercício 4.1.** Determine o grau de todos os vértices do grafo  $G$  da Figura 4.1 e indique  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$ .

**Resolução:** Temos que  $d_G(v_1) = d_G(v_3) = d_G(v_6) = 2$ ,  $d_G(v_2) = 4$ ,  $d_G(v_4) = 3$  e  $d_G(v_5) = 5$ . Assim,  $\delta(G) = 2$  e  $\Delta(G) = 5$ .  $\square$

**Definição 4.13.** Seja  $G$  um grafo com  $\nu$  vértices e  $\varepsilon$  arestas, em que  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_\nu\}$  e  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_\varepsilon\}$ . Chamamos *matriz de incidência* de  $G$  à matriz  $M_G \in \mathcal{M}_{\nu \times \varepsilon}$ , isto é, uma matriz com  $\nu$  linhas e  $\varepsilon$  colunas, em que a entrada  $m_{ij}$  é dada por

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \psi_G(e_j) = v_p v_q \text{ e } i \neq p, q \\ 1 & , \text{ se } \psi_G(e_j) = v_i v_q \text{ e } i \neq q \\ 2 & , \text{ se } \psi_G(e_j) = v_i v_i \end{cases}.$$

**Observação 4.14.** Na matriz  $M_G$ , a soma das entradas de cada coluna é igual a 2, pois cada aresta incide em precisamente 2 vértices, e a soma das entradas da linha  $i$  é igual ao grau do vértice  $v_i$ ,  $d_G(v_i)$ , pois é o número de arestas incidentes em  $v_i$ .

*Nota 4.15.* Dada uma matriz  $M$  com entradas 0, 1 ou 2 em que a soma de cada coluna é igual a 2, podemos construir um único grafo cuja matriz de incidência é  $M$ .

**Definição 4.16.** Seja  $G$  um grafo com  $\nu$  vértices, em que  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_\nu\}$ . Chamamos *matriz de adjacência* de  $G$  à matriz  $A_G \in \mathcal{M}_{\nu \times \nu}$  em que a entrada  $a_{ij}$  é dada pelo número de arestas com vértices extremos  $v_i$  e  $v_j$ .

*Nota 4.17.* Dado  $G$  um grafo, a matriz  $A_G$  é simétrica.

*Nota 4.18.* Dado  $G$  um grafo simples, as entradas das matrizes  $M_G$  e  $A_G$  são 0 ou 1, e a diagonal principal da matriz  $A_G$  é nula.

*Exemplo 4.19.* O grafo  $G$  da Figura 4.1 tem as seguintes matrizes

$$M_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Exercício 4.2.** Determine a matriz de incidência e a matriz de adjacência do grafo  $G$  da Figura 4.2.

**Resolução:** O grafo da Figura 4.2 tem 6 vértices e 7 arestas, a matriz de incidência  $M_G \in \mathcal{M}_{6 \times 7}$  e a matriz de adjacência  $A_G \in \mathcal{M}_{6 \times 6}$  são as seguintes

$$M_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

**Teorema 4.20.** *Seja  $G$  um grafo. A soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, isto é,*

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2\varepsilon(G).$$

**Prova:** Recordemos a Observação 4.14. Na matriz  $M_G$  a soma das entradas da linha relativa ao vértice  $v$  é igual a  $d_G(v)$ , logo a soma de todas as entradas da matriz  $M_G$  é igual a  $\sum_{v \in V(G)} d_G(v)$ .

Por outro lado, como a soma das entradas de cada coluna da matriz  $M_G$  é igual a 2, podemos concluir que a soma de todas as entradas da matriz  $M_G$  é igual a  $2\varepsilon(G)$ , uma vez que a matriz  $M_G$  tem  $\varepsilon(G)$  colunas. □

**Corolário 4.21.** *Qualquer grafo tem um número par de vértices com grau ímpar.*

### 4.1.1 Grafos Isomorfos

**Definição 4.22.** Dados dois grafos  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  e  $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ , dizemos que  $G$  e  $H$  são *isomorfos*,  $G \cong H$ , se existirem duas bijecções  $\lambda : V(G) \rightarrow V(H)$  e  $\theta : E(G) \rightarrow E(H)$  tais que

$$\psi_G(e) = uv \iff \psi_H(\theta(e)) = \lambda(u)\lambda(v).$$

Assim, dois grafos dizem-se isomorfos se existe uma bijecção entre os conjuntos dos vértices e uma bijecção entre os conjuntos das arestas que preservem as relações de adjacência e de incidência.

**Observação 4.23.** Dois grafos isomorfos admitem a mesma representação se não tivermos em conta a numeração dos vértices e arestas.

*Exemplo 4.24.* Os grafos  $G_1$  e  $G_2$  da Figura 4.3 são isomorfos, pois temos uma bijecção entre os conjuntos dos vértices  $\lambda : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  dada por

$$\begin{array}{lll} \lambda(v_1) = v_2 & \lambda(v_2) = v_5 & \lambda(v_3) = v_6 \\ \lambda(v_4) = v_1 & \lambda(v_5) = v_4 & \lambda(v_6) = v_3 \end{array}$$

e uma bijecção entre os conjuntos das arestas  $\theta : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$  dada por

$$\begin{array}{llll} \theta(e_1) = e_5 & \theta(e_2) = e_6 & \theta(e_3) = e_7 & \theta(e_4) = e_1 \\ \theta(e_5) = e_2 & \theta(e_6) = e_4 & \theta(e_7) = e_3 & \end{array}$$

que preservam a adjacência e a incidência. No Exercício 4.24 é referido que um isomorfismo

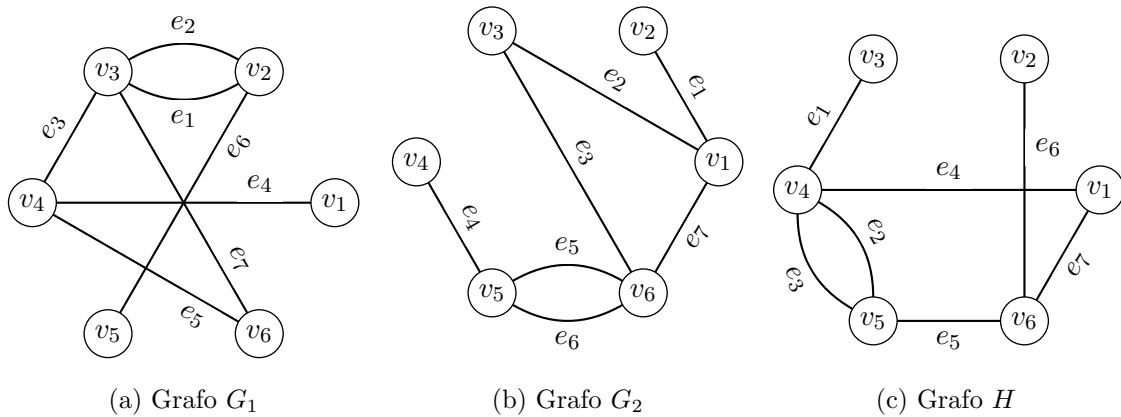


Figura 4.3: Grafos Isomorfos e não Isomorfos

entre grafos preserva o grau dos vértices. No entanto, esta condição não é suficiente para



que os grafos sejam isomorfos, pois o grafo  $H$  apesar de ter vértices com os mesmos graus dos vértices do grafo  $G_1$  não é isomorfo ao grafo  $G_1$ .

No caso de grafos simples as arestas ficam determinadas pelos respectivos vértices extremos, por isso, o isomorfismo entre grafos simples reduz-se a uma bijecção entre os conjuntos dos vértices que preserva a adjacência. Assim, no caso de grafos simples, a definição anterior pode ser escrita da seguinte forma.

**Definição 4.25.** Dados dois grafos  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  e  $H = (V(H), E(H), \psi_H)$  simples, dizemos que  $G$  e  $H$  são *isomorfos*,  $G \cong H$ , se existir uma bijecção  $\lambda : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que

$$uv \in E(G) \iff \lambda(u)\lambda(v) \in E(H).$$

*Exemplo 4.26.* Os grafos simples  $G_1$  e  $G_2$  da Figura 4.4 são isomorfos, pois temos uma bijecção  $\lambda : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  dada por  $\lambda(v_1) = v_4$ ,  $\lambda(v_2) = v_2$ ,  $\lambda(v_3) = v_3$  e  $\lambda(v_4) = v_1$  que preserva a adjacência.

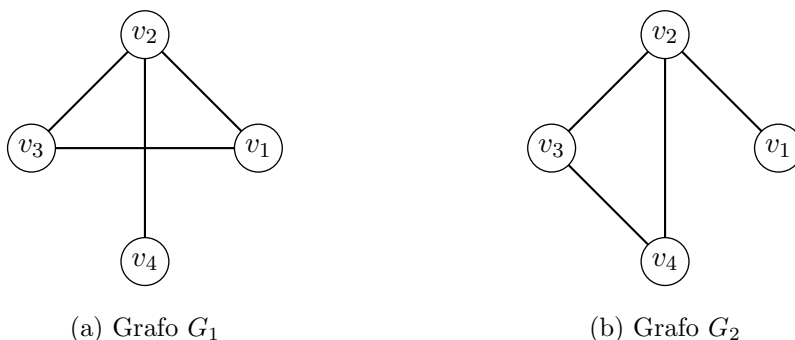


Figura 4.4: Grafos Isomorfos

## Semana 11

### 4.1.2 Passeios, Circuitos, Caminhos e Ciclos

**Definição 4.27.** Seja  $G$  um grafo. Chamamos *passeio* em  $G$  a toda a sequência não vazia  $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k$ , em que  $v_0, v_1, \dots, v_k \in V(G)$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$  e os vértices  $v_{i-1}$  e  $v_i$  são extremos da aresta  $e_i$ , para todo o  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Se  $P$  é um passeio em que todas as arestas são distintas, dizemos que  $P$  é um *trajecto*. No caso dos vértice inicial e final coincidirem, dizemos que o trajecto  $P$  é um *circuito*.

Se  $P$  é um trajecto em que todos os vértices são distintos (excepto possivelmente o primeiro e o último), dizemos que  $P$  é um *caminho*. No caso dos vértice inicial e final do caminho  $P$  coincidirem, dizemos que  $P$  é um *ciclo*.

*Nota 4.28.* Das definições decorre que: um ciclo é um caminho, um caminho é um trajecto, um ciclo é um circuito e um circuito é um trajecto.

*Exemplo 4.29.* Dado um lacete  $e$  no vértice  $v$  temos um ciclo dado por  $vev$ .

*Exemplo 4.30.* Dadas duas arestas paralelas  $e_1$  e  $e_2$  incidentes nos vértices  $v_1$  e  $v_2$  temos um ciclo dado por  $v_1e_1v_2e_2v_1$ .

*Exemplo 4.31.* Consideremos o grafo  $G$  da Figura 4.1 temos que

- o passeio  $P_1 = v_6e_8v_5e_6v_4e_7v_6e_8v_5$  não é trajecto pois tem arestas repetidas
- o passeio  $P_2 = v_5e_4v_2e_2v_1e_1v_2e_3v_3$  é um trajecto pois não tem arestas repetidas, mas não é circuito pois o vértice inicial e final não coincidem
- o passeio  $P_3 = v_5e_4v_2e_2v_1e_1v_2e_3v_3e_5v_4e_6v_5$  é um circuito pois não tem arestas repetidas e o vértice inicial e final coincidem
- o passeio  $P_4 = v_5e_4v_2e_2v_1e_1v_2e_3v_3$  não é um caminho pois tem vértices repetidos
- o passeio  $P_5 = v_1e_1v_2e_3v_3$  é um caminho pois não tem vértices repetidos, mas não é ciclo pois o vértice inicial e final não coincidem
- o passeio  $P_6 = v_2e_3v_3e_5v_4e_6v_5e_4v_2$  é um ciclo pois não tem vértices repetidos e o vértice inicial e final coincidem

*Nota 4.32.* No caso de um grafo simples, as arestas são determinadas pelos vértices extremos, logo para indicar um passeio basta indicar os vértices.

**Definição 4.33.** Dado um passeio  $P$ , chamamos *comprimento* de  $P$ ,  $\text{comp}(P)$ , ao número de arestas (contando as repetições) que constituem o passeio.

*Nota 4.34.* Da definição anterior podemos concluir que uma aresta é um passeio de comprimento 1 e um vértice é um passeio de comprimento 0.

*Nota 4.35.* Quando  $P$  é um trajecto, o comprimento coincide com o número de arestas do trajecto.

*Exemplo 4.36.* Recordando o Exemplo 4.31 temos que  $\text{comp}(P_1) = 4$  e  $\text{comp}(P_3) = 6$ .

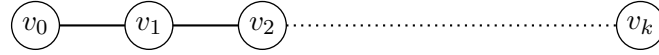
**Definição 4.37.** Dados dois vértices  $u, v \in V(G)$ , sendo  $\mathcal{P}_{uv}$  o conjunto de todos os caminhos entre  $u$  e  $v$  de  $G$ , definimos a *distância* entre os vértices  $u$  e  $v$  como

$$\text{dist}_G(u, v) = \begin{cases} \min_{P \in \mathcal{P}_{uv}} \text{comp}(P) & , \text{ se } \mathcal{P}_{uv} \neq \emptyset \\ \infty & , \text{ se } \mathcal{P}_{uv} = \emptyset \end{cases}.$$

*Exemplo 4.38.* Considerando o grafo  $G$  da Figura 4.1 temos, por exemplo:  $\text{dist}_G(v_1, v_4) = 3$ ,  $\text{dist}_G(v_2, v_6) = 2$  e  $\text{dist}_G(v_3, v_4) = 1$ .

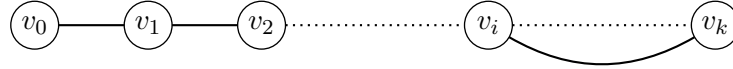
**Teorema 4.39.** *Seja  $G$  um grafo simples com  $\delta(G) \geq 2$ . Então existe um caminho  $P$  e um ciclo  $C$  tais que  $\text{comp}(P) \geq \delta(G)$  e  $\text{comp}(C) \geq \delta(G) + 1$ .*

**Prova:** Seja  $P = v_0v_1 \dots v_k$  um caminho de comprimento máximo, temos  $\text{comp}(P) = k$ .



Todos os vértices adjacentes a  $v_k$  estão em  $P$ , caso contrário o caminho  $P$  poderia ser estendido a esse vértice e deixaria de ter comprimento máximo, logo  $k \geq d_G(v_k)$ . Assim,  $\text{comp}(P) = k \geq d_G(v_k) \geq \delta(G)$ .

Por outro lado, seja  $v_i$  o primeiro vértice do caminho  $P$  tal que  $v_iv_k \in E(G)$  (como  $\delta(G) \geq 2$  temos de ter  $v_i \neq v_{k-1}$ ), e consideremos o ciclo  $C = v_iv_{i+1} \dots v_kv_i$ .



Como o conjunto  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_k\}$  contém todos os vértices adjacentes a  $v_k$  temos que  $\text{comp}(C) \geq d_G(v_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$ . □

### 4.1.3 Subgrafos

**Definição 4.40.** Dados dois grafos  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  e  $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ , dizemos que  $H$  é um *subgrafo* de  $G$ , e escrevemos  $H \subseteq G$ , se  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  e a função de incidência de  $G$ ,  $\psi_G$ , restringida ao conjunto  $E(H)$  coincide com a função de incidência de  $H$ ,  $\psi_H$ . Se  $H \subseteq G$  e  $H \neq G$ , dizemos que  $H$  é um *subgrafo próprio* de  $G$ ,  $H \subset G$ .

No caso em que  $H \subseteq G$  e  $V(H) = V(G)$ , dizemos que  $H$  é um *subgrafo gerador* de  $G$ .

*Exemplo 4.41.* Os grafos  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  da Figura 4.5 são subgrafos do grafo  $G$  da Figura 4.1, mas apenas o grafo  $H_2$  é um subgrafo gerador do grafo  $G$ .

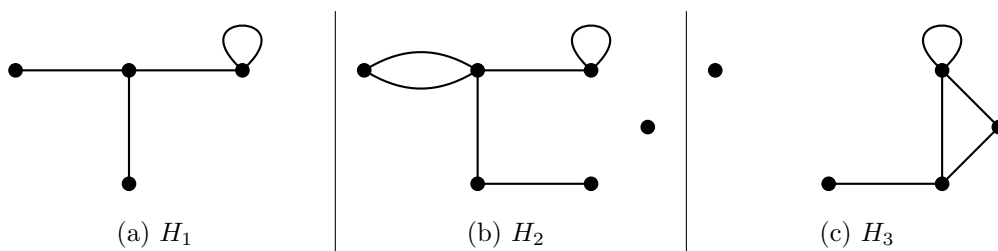


Figura 4.5: Subgrafos do grafo da Figura 4.1

**Exercício 4.3.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.6. Represente todos os subgrafos geradores de  $G$ .

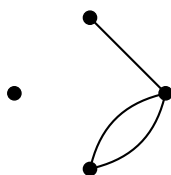


Figura 4.6

**Resolução:** Qualquer subgrafo gerador de  $G$  tem de ter os mesmos 4 vértices que tem o grafo  $G$ . Podemos construir os subgrafos geradores representados na Figura 4.7.  $\square$

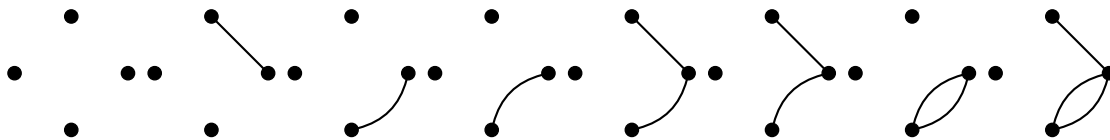


Figura 4.7: Sugrafos geradores do grafo da Figura 4.6

**Exercício 4.4.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.8. Determine quantos subgrafos geradores tem o grafo  $G$ .

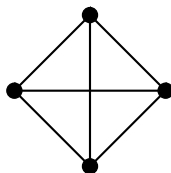


Figura 4.8

**Resolução:** Como o grafo  $G$  da Figura 4.8 tem 4 vértices, todos os subgrafos geradores têm de ter 4 vértices. Como  $G$  tem todas as arestas entre os 4 vértices, para ter um subgrafo

podemos escolher qualquer número de arestas entre as existentes. Assim, existem  $\binom{6}{i}$  formas de escolher  $i$  arestas. No total existem  $\sum_{i=0}^6 \binom{6}{i} = 2^6 = 64$  subgrafos geradores de  $G$ .  $\square$

**Definição 4.42.** Dado um grafo  $G$ , eliminando todos os lacetes e substituindo cada conjunto de arestas paralelas por uma única aresta obtemos um subgrafo gerador de  $G$  ao qual chamamos *subgrafo de suporte das arestas*.

**Observação 4.43.** Da definição decorre que o subgrafo de suporte das arestas de qualquer grafo é um grafo simples. Assim, um grafo simples coincide com o seu subgrafo de suporte das arestas.

*Exemplo 4.44.* O grafo da Figura 4.2 é o subgrafo de suporte das arestas do grafo da Figura 4.1.

**Exercício 4.5.** Obtenha o subgrafo de suporte das arestas do grafo da Figura 4.6.

**Resolução:** Como temos duas arestas paralelas, passamos a ter apenas uma entre esses dois vértices e temos o subgrafo de suporte das arestas na Figura 4.9.  $\square$

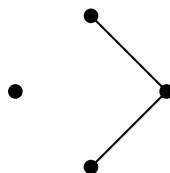


Figura 4.9

**Definição 4.45.** Dados um grafo  $G$  e um subconjunto não vazio  $U \subseteq V(G)$ , definimos o *subgrafo de  $G$  induzido por  $U$*  como sendo o terno  $G[U] = (U, E(G[U]), \psi_{G[U]})$ , em que  $E(G[U]) = \{uv \in E(V) : u, v \in U\}$  e  $\psi_{G[U]}$  coincide com  $\psi_G$  no conjunto  $E(G[U])$ ; isto é, eliminamos em  $G$  todos os vértices que não estão em  $U$  e todas as arestas que não têm ambos os extremos em  $U$ .

*Exemplo 4.46.* Considerando o grafo  $G$  da Figura 4.1 e  $U = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ , o subgrafo  $H_3$  da Figura 4.5 é o subgrafo induzido por  $U$ , ou seja,  $H_3 = G[U]$ .

**Exercício 4.6.** Considerando o grafo  $G$  da Figura 4.2 e  $U = \{v_1, v_3, v_5\}$ , identifique o grafo  $G[U]$ .

**Resolução:** Como no grafo  $G$  não existe nenhuma aresta em que ambos os vértices extremos pertençam a  $U$  temos um grafo sem arestas e com três vértices isolados.  $\square$

**Definição 4.47.** Sejam  $G$  um grafo,  $v \in V(G)$  e  $e \in E(G)$ . Indicamos por  $G - v$  o subgrafo de  $G$  induzido por  $U = V(G) \setminus \{v\}$ , ou seja, o grafo obtido a partir de  $G$  onde eliminamos o vértice  $v$  e todas as arestas incidentes no vértice  $v$ . Por outro lado, dada uma aresta  $e \in E(G)$ , indicamos por  $G - e$  o grafo obtido a partir de  $G$  onde eliminamos a aresta  $e$ , mas mantemos todos os vértices e restantes arestas.

*Exemplo 4.48.* Considerando o grafo  $G$  da Figura 4.1 e o subgrafo  $H_3$  da Figura 4.5 temos  $H_3 = G - v_2$ .

**Exercício 4.7.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.2. Represente os grafos  $G - v_5$  e  $G - e_1$ .

**Resolução:** Para o grafo  $G - v_5$  retiramos o vértice  $v_5$  e todas as arestas que lhe são incidentes, ver Figura 4.10. Para o grafo  $G - e_1$  retiramos apenas a aresta  $e_1$  e mantemos todos os vértices, ver Figura 4.11.

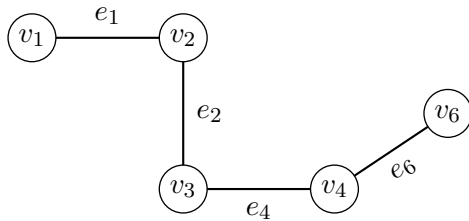


Figura 4.10: Grafo  $G - v_5$

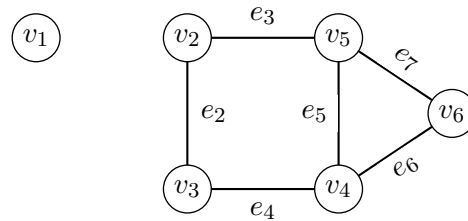


Figura 4.11: Grafo  $G - e_1$

Em ambas as figuras mantivemos as numerações originais dos vértices e das arestas para que seja mais fácil comparar com o grafo  $G$  original.  $\square$

## 4.2 Grafos Especiais

Nesta Secção apresentamos alguns tipos de grafos especiais que se aplicam a determinados problemas.

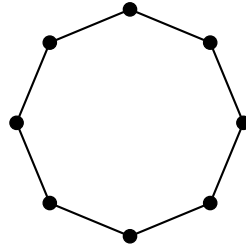
**Definição 4.49.** Seja  $G$  um grafo simples. Definimos o *grafo complementar* de  $G$ ,  $G^C$ , como o grafo simples em que o conjunto dos vértices coincide com  $V(G)$  e dois vértices são adjacentes em  $G^C$  se e só se não são adjacentes em  $G$ .

*Exemplo 4.50.* Na Figura 4.12 temos um grafo  $G$  e o seu complementar  $G^C$ .

Figura 4.12: Grafo  $G$  e o seu complementar

**Definição 4.51.** Quando temos um grafo simples com  $n \geq 3$  vértices formado por um único ciclo de comprimento  $n$ , indicamos esse grafo por  $C_n$ .

*Exemplo 4.52.* Na Figura 4.13 temos um grafo formado apenas por um ciclo de comprimento 8, que indicamos por  $C_8$ .

Figura 4.13: Ciclo  $C_8$ 

### 4.2.1 Grafos Completos

**Definição 4.53.** Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu$  vértices. Dizemos que  $G$  é um *grafo completo* quando todos os vértices são adjacentes. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo com  $\nu$  vértices, que indicamos por  $K_\nu$ .

*Exemplo 4.54.* Na Figura 4.14 temos os grafos completos  $K_\nu$ , com  $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

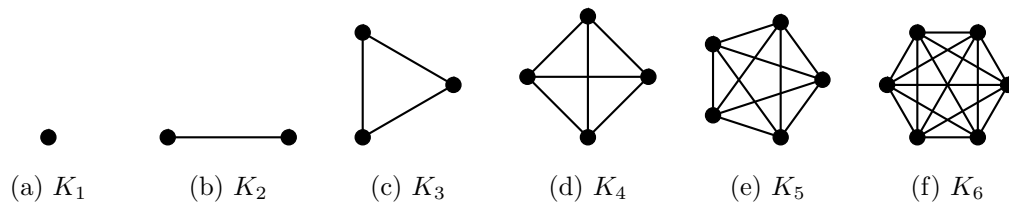


Figura 4.14: Grafos Completos

**Observação 4.55.** O grafo completo  $K_\nu$ , com  $\nu \geq 2$ , tem precisamente  $\binom{\nu}{2} = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$  arestas.

**Observação 4.56.** Consideremos  $\mathcal{G}$  o conjunto de todos os grafos simples com  $\nu$  vértices. Tomando  $G \in \mathcal{G}$ , temos o seguinte:

1.  $G$  é um subgrafo de  $K_\nu$ , logo  $E(G) \subseteq E(K_\nu)$ . Assim,

$$\varepsilon = |E(G)| \leq |E(K_\nu)| = \binom{\nu}{2} = \frac{\nu(\nu-1)}{2}.$$

2.  $G$  é um subgrafo gerador de  $K_\nu$ , o qual é determinado por um subconjunto de  $E(K_\nu)$  de cardinalidade  $\varepsilon$ . Assim, o número de grafos simples com  $\nu$  vértices e  $\varepsilon$  arestas é dado por

$$\binom{\binom{\nu}{2}}{\varepsilon}.$$

3. Cada grafo  $G$  em  $\mathcal{G}$  é um subgrafo gerador de  $K_\nu$ ; logo o número de grafos em  $\mathcal{G}$  é igual ao número de subconjuntos de  $E(K_\nu)$ , ou seja, é  $2^{\binom{\nu}{2}}$ . Por outro lado, usando o que vimos no ponto anterior, basta somar os grafos que existem com  $\varepsilon$  arestas, assim, obtemos a igualdade

$$\sum_{\varepsilon=0}^{\binom{\nu}{2}} \binom{\binom{\nu}{2}}{\varepsilon} = 2^{\binom{\nu}{2}}.$$

### 4.2.2 Grafos Regulares

**Definição 4.57.** Dizemos que  $G$  é um *grafo  $k$ -regular* ou *regular de grau  $k$*  se todos os seus vértices têm grau  $k$ .

*Nota 4.58.* Quando  $G$  é um grafo  $k$ -regular temos que  $\delta(G) = \Delta(G) = k$ .

*Exemplo 4.59.* O grafo completo  $K_n$  é um grafo  $(n-1)$ -regular.

*Exemplo 4.60.* Qualquer ciclo  $C_n$  é um grafo 2-regular.

*Exemplo 4.61.* Na Figura 4.15 temos um grafo 2-regular.

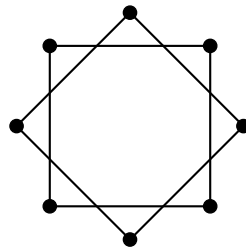


Figura 4.15: Grafo 2-regular



### 4.2.3 Grafos Bipartidos e $k$ -partidos

**Definição 4.62.** Dizemos que  $G$  é um *grafo bipartido* se existir uma partição do conjunto  $V(G) = X \dot{\cup} Y$  tal que não existem vértices adjacentes em  $X$  nem em  $Y$ , ou seja, toda a aresta de  $G$  tem um extremo em  $X$  e o outro em  $Y$ .

*Exemplo 4.63.* Um grafo  $C_{2n}$  é um grafo bipartido. Na Figura 4.16 temos o ciclo  $C_8$  e a sua representação em termos de grafo bipartido com  $X = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$  e  $Y = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$ .

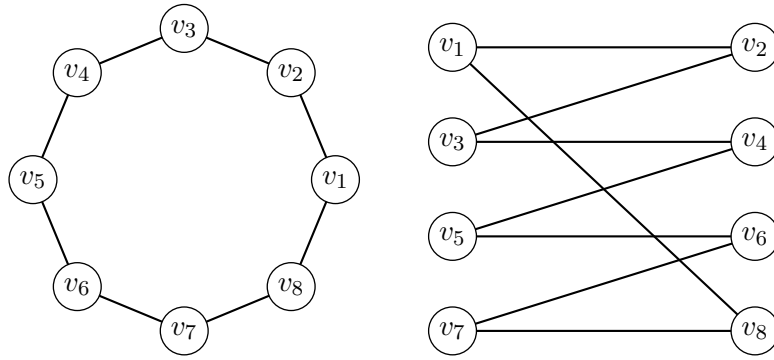


Figura 4.16: Grafo  $C_8$  Bipartido

**Teorema 4.64.** Um grafo é bipartido se e só se não tem circuitos de comprimento ímpar.

**Prova:** Seja  $G$  um grafo bipartido com uma partição  $X$  e  $Y$ . Começando um circuito num vértice em  $X$  a aresta tem extremo num vértice em  $Y$ , para que seja fechado temos de voltar a  $X$ , logo qualquer circuito tem comprimento par.

Supomos agora que  $G$  não tem circuitos de comprimento ímpar. Fixemos um vértice  $u \in V(G)$  e seja

$$X = \{v \in V(G) : \text{dist}_G(u, v) \text{ é ímpar}\}.$$

Assim, não existem arestas com ambos os extremos em  $X$ , pois se tivéssemos uma aresta  $e$  com extremos  $v_1, v_2 \in X$  teríamos um circuito de comprimento  $\text{dist}_G(u, v_1) + 1 + \text{dist}_G(u, v_2)$  que é ímpar.

Por outro lado, como todos os vértices de  $V(G) \setminus X$  estão a uma distância par de  $u$ , se existissem arestas adjacentes com ambos extremos em  $V(G) \setminus X$ , isso implicaria que existiriam circuitos de comprimento ímpar (como vimos no caso anterior). Assim, tomando  $Y = V(G) \setminus X$  obtemos uma partição dos vértices  $V(G) = X \dot{\cup} Y$  e o grafo  $G$  é bipartido.  $\square$

**Definição 4.65.** Quando temos um grafo bipartido cuja partição dos vértices  $V(G) = X \dot{\cup} Y$  é tal que cada vértice em  $X$  é adjacente a todos os vértices em  $Y$ , dizemos que  $G$  é um grafo bipartido completo. Se  $|X| = m$  e  $|Y| = n$ , indicamos o grafo bipartido completo por  $K_{m,n}$ .

*Exemplo 4.66.* Na Figura 4.17 temos o grafo bipartido completo  $K_{4,2}$ .

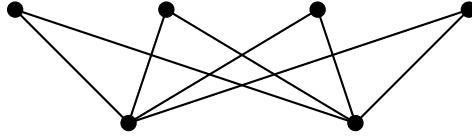


Figura 4.17: Grafo Bipartido Completo  $K_{4,2}$

Mais geralmente temos as seguintes definições.

**Definição 4.67.** Se tivermos uma partição  $V(G) = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$ , dizemos que  $G$  é um grafo  $k$ -partido se para todas as arestas  $uv \in E(G)$  tivermos  $u \in V_i$  e  $v \in V_j$ , com  $i \neq j$ .

Se além disso, para quaisquer  $u \in V_i$  e  $v \in V_j$ , com  $i \neq j$ , temos  $uv \in E(G)$  dizemos que  $G$  é um grafo  $k$ -partido completo. Indicamos este grafo  $k$ -partido completo por  $K_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}$ , onde  $\nu_i = |V_i|$ .

*Exemplo 4.68.* O grafo  $C_{2n+1}$  é um grafo 3-partido. Na Figura 4.18 temos o grafo  $C_7$  que é 3-partido, com  $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ ,  $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$  e  $V_3 = \{v_7\}$ .

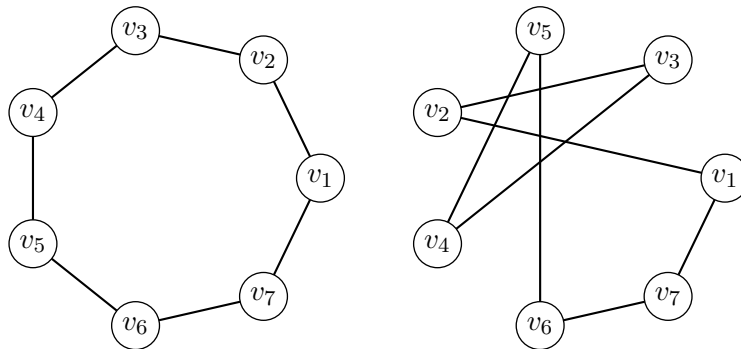
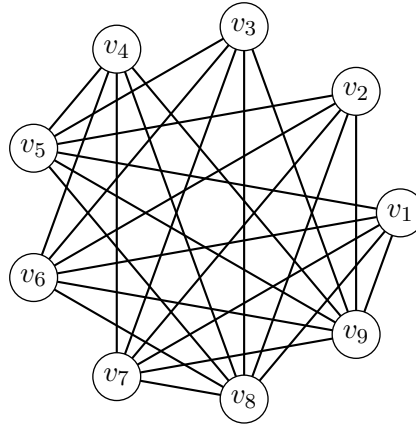


Figura 4.18: Grafo  $C_7$  3-partido

*Exemplo 4.69.* Na Figura 4.19 temos o grafo 3-partido completo  $K_{4,3,2}$ , com  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $V_2 = \{v_5, v_6, v_7\}$  e  $V_3 = \{v_8, v_9\}$ .

Figura 4.19: Grafo 3-partido completo  $K_{4,3,2}$ 

## Semana 12

### 4.3 Grafos Conexos

**Definição 4.70.** Dado um grafo  $G$  e  $u, v \in V(G)$ , dizemos que  $u$  e  $v$  são *vértices conexos* se existir um caminho em  $G$  que une  $u$  e  $v$ .

Se  $V \subseteq V(G)$  é um subconjunto maximal de vértices conexos de  $G$ , no sentido em que todos os vértices de  $V$  são conexos entre si e para todo o  $u \in V(G) \setminus V$  temos que  $u$  não é conexo a todos os vértices de  $V$ , chamamos *componente conexa* de  $G$  ao subgrafo induzido  $G[V]$  e indicamos o número de componentes conexas de  $G$  por  $cc(G)$ .

Dizemos que  $G$  é um *grafo conexo* se todos os vértices de  $G$  são conexos entre si, ou seja, se  $cc(G) = 1$ .

**Observação 4.71.** Dado um grafo  $G$  tal que  $cc(G) = k$ , sejam  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$  as componentes conexas de  $G$ , logo os subgrafos induzidos  $G_i = G[V_i]$  são conexos e temos  $V(G) = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$ . Além disso, cada aresta de  $G$  está num dos subgrafos induzidos  $G_i$ , ou seja  $E(G) = E(G_1) \dot{\cup} E(G_2) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} E(G_k)$ , pois se existissem arestas com vértices extremos em  $V_i$  e  $V_j$ , com  $i \neq j$ ,  $V_i$  e  $V_j$  não seriam componentes conexas.

*Exemplo 4.72.* Na Figura 4.20 temos um grafo não conexo, com  $cc(G) = 2$ , e na Figura 4.21 temos um grafo conexo.

**Lema 4.73.** Dado um grafo conexo  $G$  e uma aresta  $uv \in E(G)$  temos  $cc(G - uv) \leq 2$ .

**Prova:** Se  $G - uv$  for um grafo conexo, então  $cc(G - uv) = 1$ , e temos o desejado.

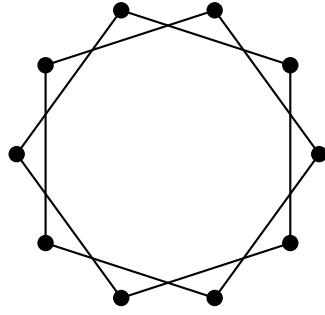


Figura 4.20: Grafo Não Conexo

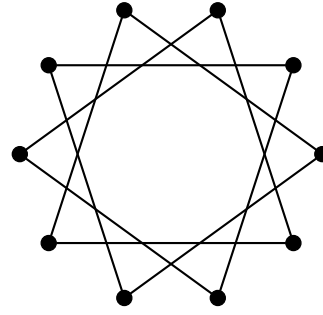


Figura 4.21: Grafo Conexo

Se  $G - uv$  não for conexo, então  $cc(G - uv) > 1$ , e vamos supor com vista a um absurdo que  $cc(G - uv) > 2$ .

Assim, existem vértices  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  pertencentes a três componentes conexas de  $G - uv$  distintas. Como  $v_1$  e  $v_2$  são conexos em  $G$ , mas não em  $G - uv$ , existe um caminho que liga  $v_1$  a  $v_2$  que contém a aresta  $uv$ , digamos  $C_{12} = v_1 \dots uv \dots v_2$ . Como  $v_2$  e  $v_3$  são conexos em  $G$ , mas não em  $G - uv$ , existe um caminho que liga  $v_2$  a  $v_3$  que contém a aresta  $uv$ . Se esse caminho for  $C_{23} = v_2 \dots uv \dots v_3$ , então existe um caminho de  $v_1$  para  $v_2$  e um caminho de  $v_2$  para  $v_3$  em  $G - uv$ , o que é absurdo pois os vértices pertencem a componentes conexas distintas. Se esse caminho for  $C_{32} = v_3 \dots uv \dots v_2$ , então existe um caminho de  $v_1$  para  $v_3$  em  $G - uv$ , o que é absurdo pois os vértices pertencem a componentes conexas distintas. Assim,  $cc(G - uv) \leq 2$ .  $\square$

**Lema 4.74.** Dado um grafo  $G$  e uma aresta  $uv \in E(G)$  temos

$$cc(G) \leq cc(G - uv) \leq cc(G) + 1.$$

**Prova:** Seja  $G' = G[V']$  a componente conexa de  $G$  tal que  $u, v \in V'$ . Consideremos o conjunto  $\bar{V} = V(G) \setminus V'$  e definimos o subgrafo induzido  $\bar{G} = G[\bar{V}]$ . Observemos que  $cc(G) = cc(G') + cc(\bar{G})$  e como  $G'$  é conexo temos  $cc(G') = 1$ ; logo  $cc(\bar{G}) = cc(G) - 1$ . Além disso, como  $uv$  é uma aresta em  $G'$  temos que

$$cc(G - uv) = cc(\bar{G}) + cc(G' - uv) = cc(G) - 1 + cc(G' - uv). \quad (4.1)$$

Aplicando o Lema 4.73 ao grafo conexo  $G'$  temos que: ou  $cc(G' - uv) = 1$  e a igualdade (4.1) fica  $cc(G - uv) = cc(G)$ ; ou  $cc(G' - uv) = 2$  e a igualdade (4.1) fica  $cc(G - uv) = cc(G) + 1$ . E obtemos o pretendido.  $\square$

**Exercício 4.8.** Represente um grafo com 5 vértices, 4 arestas e 3 componentes conexas.

**Prova:** No enunciado não é referido que o grafo é simples, por isso, podemos por exemplo representar o grafo da Figura 4.22.  $\square$

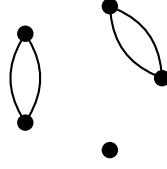


Figura 4.22

No entanto, como mostra o próximo teorema, o facto do grafo ser simples implica algumas restrições.

**Teorema 4.75.** *Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu$  vértices e  $\varepsilon$  arestas. Então*

$$\nu - cc \leq \varepsilon \leq \binom{\nu - cc + 1}{2},$$

onde  $cc = cc(G)$ .

**Prova:** Para provar a desigualdade  $\nu - cc \leq \varepsilon$  fixamos o número de vértices  $\nu$  e usamos indução no número de arestas.

Quando  $\varepsilon = 0$  temos que cada componente conexa é formada por um único vértice, logo  $cc = \nu$  e a desigualdade verifica-se.

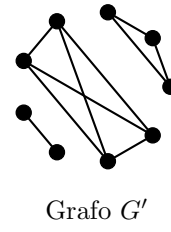
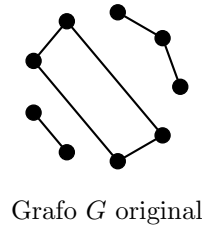
Para  $\varepsilon > 0$  vamos supor que a desigualdade  $\nu - cc(G') \leq \varepsilon(G')$  se verifica para todos os grafos  $G'$  com  $\nu$  vértices e  $\varepsilon(G')$  arestas, onde  $\varepsilon(G') < \varepsilon$ . Seja  $e \in E(G)$ , por hipótese, o grafo  $G - e$  verifica a desigualdade, ou seja,  $\nu - cc(G - e) \leq \varepsilon(G - e)$ . Por outro lado, pelo Lema 4.74 temos  $cc(G - e) \leq cc(G) + 1 \Leftrightarrow cc(G - e) - 1 \leq cc(G)$ , logo

$$\nu - cc(G) \leq \nu - cc(G - e) + 1 \leq \varepsilon(G - e) + 1 = \varepsilon(G),$$

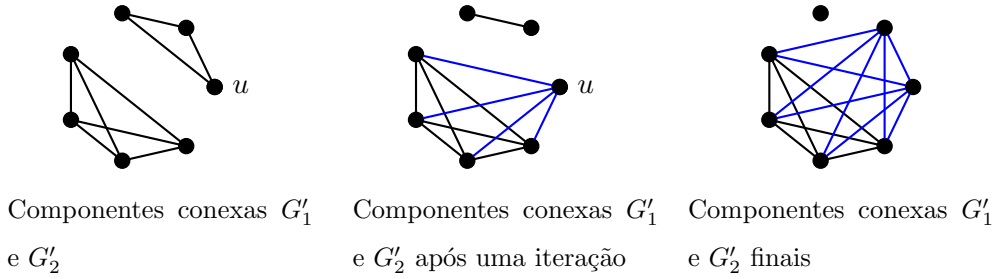
ou seja, obtemos a desigualdade desejada.

Para a outra desigualdade, consideremos  $G$  um grafo simples com  $\nu$  vértices e  $cc$  componentes conexas, e seja  $G'$  o grafo simples obtido a partir de  $G$  em que adicionamos arestas de modo que  $cc = cc(G')$  e cada componente conexa de  $G'$  é um subgrafo completo; logo  $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(G')$ .

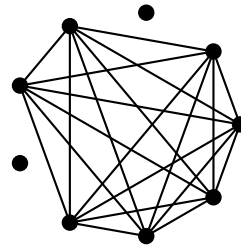
Sejam  $G'_i = G'[V_i]$  as componentes conexas de  $G'$  com  $n_i$  vértices, logo  $G'_i \cong K_{n_i}$ . Consideremos duas componentes conexas  $G'_1$  e  $G'_2$  tais que  $n_1, n_2 > 1$  e sem perda de generalidade assumimos que  $n_1 \leq n_2$ . Tomamos  $u \in V_1$  e eliminamos todas as arestas



que incidem em  $u$  e acrescentamos todas as arestas  $uv$  com  $v \in V_2$ . Assim, obtemos um novo grafo  $G'$  com o mesmo número de vértices e de componentes conexas, mas com mais arestas. Repetimos este processo até que  $V_1$  seja uma componente conexa trivial, ou seja, um vértice isolado.



Agora fazemos o mesmo processo com todas os pares de componentes conexas do grafo  $G'$  até obtermos um novo grafo  $G'$  constituído por uma componente conexa isomorfa a  $K_{\nu-cc+1}$  e por  $cc - 1$  componentes conexas triviais, isto é,  $cc - 1$  vértices isolados.



$$\text{Logo } \varepsilon(G) \leq \varepsilon(G') = \binom{\nu - cc + 1}{2}.$$

□

**Exercício 4.9.** Construa, caso seja possível, um grafo simples  $G$  com 6 vértices, 3 componentes conexas e:

- a) 2 arestas
- b) 7 arestas
- c) 5 arestas

**Resolução:** Como o grafo  $G$  é simples, pelo teorema anterior temos de ter

$$\nu - cc \leq \varepsilon \leq \binom{\nu - cc + 1}{2} \Leftrightarrow 6 - 3 \leq \varepsilon \leq \binom{6 - 3 + 1}{2} \Leftrightarrow 3 \leq \varepsilon \leq 6.$$

- a) O grafo  $G$  não existe, pois  $3 \leq 2 \leq 6$  é impossível.
- b) O grafo  $G$  não existe, pois  $3 \leq 7 \leq 6$  é impossível.
- c) Como  $3 \leq 5 \leq 6$  é possível, podemos construir, por exemplo, o grafo da Figura 4.26.

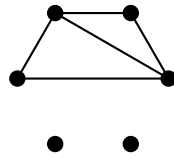


Figura 4.26

□

**Definição 4.76.** Dado um grafo  $G$  e uma aresta  $e \in E(G)$ , dizemos que a aresta  $e$  é *uma ponte* se  $cc(G - e) > cc(G)$ , ou seja, a aresta  $e$  é uma ponte se quando eliminamos a aresta  $e$  do grafo  $G$  aumentamos o número de componentes conexas de  $G$ .

*Exemplo 4.77.* O grafo  $G$  da Figura 4.2 é conexo, logo  $cc(G) = 1$ . Como o grafo  $G - e_1$  (ver Figura 4.11) tem  $cc(G - e_1) = 2 > cc(G) = 1$ , a aresta  $e_1$  é uma ponte de  $G$ .

*Exemplo 4.78.* Na Figura 4.27 temos um grafo em que não existem pontes, enquanto que na Figura 4.28 temos um grafo em que todas as arestas são pontes.

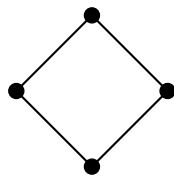


Figura 4.27: Grafo sem Pontes

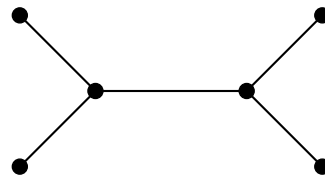


Figura 4.28: Grafo só com Pontes

**Exercício 4.10.** Indique o número de componentes conexas do grafo  $G$  da Figura 4.6 e as arestas que são pontes, caso existam.

**Resolução:** O grafo  $G$  da Figura 4.6 tem duas componentes conexas, uma formada pelo vértice isolado e outra pelos restantes vértices e todas as arestas, logo  $cc(G) = 2$ . Nenhuma

das arestas paralelas é ponte, uma vez que se eliminarmos uma delas temos as mesmas componentes conexas; mas a outra aresta é ponte, pois se a eliminarmos passamos a ter três componentes conexas.  $\square$

**Teorema 4.79.** *Dado um grafo  $G$  e uma aresta  $uv \in E(G)$ , são equivalentes as seguintes afirmações:*

- a) a aresta  $uv$  é uma ponte de  $G$
- b)  $cc(G - uv) = cc(G) + 1$
- c) os vértices  $u$  e  $v$  não são conexos em  $G - uv$
- d) a aresta  $uv$  não está contida em nenhum ciclo de  $G$ .

**Prova:**

- a)  $\Rightarrow$  b) Por definição, se  $uv$  é uma ponte de  $G$ , então  $cc(G - uv) > cc(G)$ . Tendo em conta o Lema 4.74 temos de ter  $cc(G - uv) = cc(G) + 1$ .
- b)  $\Rightarrow$  c) Supomos que os vértices  $u$  e  $v$  são conexos em  $G - uv$ , logo  $u$  e  $v$  estão na mesma componente conexa de  $G - uv$ . Assim,  $cc(G - uv) = cc(G)$ , o que contraria a hipótese.
- c)  $\Rightarrow$  d) Supomos que a aresta  $uv$  está contida num ciclo  $C$  de  $G$ . Logo  $C - uv$  é um caminho em  $G - uv$ , ou seja,  $u$  e  $v$  são conexos em  $G - uv$ , o que contraria a hipótese.
- d)  $\Rightarrow$  a) Supomos que  $uv$  não é uma ponte de  $G$ , logo  $cc(G - uv) = cc(G)$ , assim,  $u$  e  $v$  são conexos em  $G - uv$ . Então, existe um caminho em  $G - uv$  de  $u$  para  $v$ , e juntando a aresta  $uv$  obtemos um ciclo em  $G$  que contém a aresta  $uv$ , o que contraria a hipótese.

$\square$

*Exemplo 4.80.* Já vimos que a aresta  $e_1$  do grafo  $G$  da Figura 4.2 é uma ponte, o que equivale a dizer que  $cc(G - e_1) = cc(G) + 1$ , o que equivale a dizer que os vértices  $v_1$  e  $v_2$  não são conexos em  $G - e_1$ , o que equivale a dizer que a aresta  $e_1$  não está contida em nenhum ciclo de  $G$ .



## 4.4 Árvores

**Definição 4.81.** Dado um grafo  $G$ , dizemos que  $G$  é uma floresta se não contiver ciclos. Quando a floresta  $G$  é conexa, dizemos que  $G$  é uma árvore, ou seja, as componentes conexas de uma floresta são árvores. Dado um vértice  $v \in V(G)$ , dizemos que  $v$  é uma folha se  $d_G(v) = 1$ .

*Exemplo 4.82.* Na Figura 4.29 temos uma floresta com três componentes conexas, ou seja, três árvores.

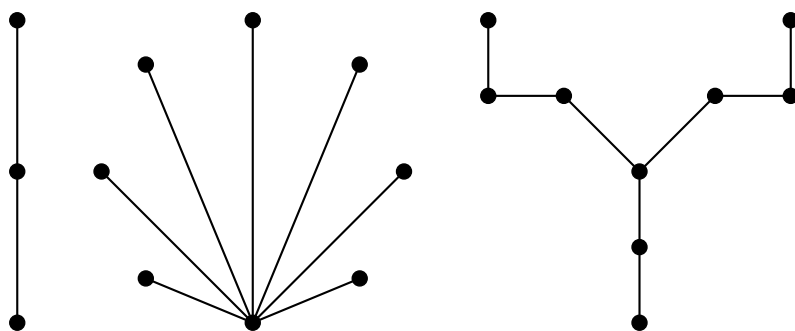


Figura 4.29: Floresta com 3 Árvores

*Nota 4.83.* Uma floresta (ou no caso particular de uma árvore) é sempre um grafo simples, uma vez que se existissem arestas paralelas ou lacetes teríamos um ciclo.

**Teorema 4.84.** Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu$  vértices. São equivalentes as seguintes afirmações:

- a)  $G$  é uma árvore
- b)  $G$  não tem ciclos e tem  $\nu - 1$  arestas
- c)  $G$  é conexo e tem  $\nu - 1$  arestas
- d)  $G$  é conexo e cada aresta é uma ponte
- e) quaisquer dois vértices de  $G$  estão ligados por um único caminho
- f)  $G$  não tem ciclos, mas acrescentando uma aresta obtemos um ciclo.

**Prova:**

a) $\Rightarrow$ b) Seja  $G$  uma árvore; logo  $G$  não tem ciclos. Vamos provar que  $G$  tem  $\nu - 1$  arestas, fazendo indução no número de vértices  $\nu$ .

Se  $\nu = 1$ , a única árvore é o grafo trivial que tem  $\nu - 1 = 0$  arestas.

Agora supomos que qualquer árvore com  $n$  vértices, onde  $n < \nu$ , tem  $n - 1$  arestas.

Seja  $G$  uma árvore com  $\nu$  vértices, como  $G$  não tem ciclos, se retirarmos uma aresta obtemos duas componentes conexas  $G_1 = G[V_1]$  e  $G_2 = G[V_2]$ , em que cada  $G_i$  é uma árvore. Sejam  $\nu_1$  e  $\nu_2$  a cardinalidade de  $V_1$  e de  $V_2$ , respectivamente, logo  $\nu = \nu_1 + \nu_2$ . Por hipótese, temos  $\varepsilon(G_1) = \nu_1 - 1$  e  $\varepsilon(G_2) = \nu_2 - 1$ , logo  $G$  tem  $\varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1 = \nu_1 - 1 + \nu_2 - 1 + 1 = \nu - 1$  arestas.

b) $\Rightarrow$ c) Seja  $G$  um grafo simples sem ciclos e com  $\nu - 1$  arestas. Supomos que  $G$  não é conexo, logo  $cc(G) = k \geq 2$  e sejam  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$  as componentes conexas de  $G$ , em que  $|V_i| = \nu_i$  e  $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = \nu$ . Como  $G$  não tem ciclos,  $G_i = G[V_i]$  não tem ciclos e logo  $G_i$  é uma árvore. Pela a),  $\varepsilon(G_i) = \nu_i - 1$ , logo o número de arestas de  $G$  é  $\varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + \dots + \varepsilon(G_k) = \nu_1 - 1 + \nu_2 - 1 + \dots + \nu_k - 1 = \nu - k \leq \nu - 2$ , o que contradiz a hipótese.

c) $\Rightarrow$ d) Seja  $G$  um grafo conexo com  $\nu - 1$  arestas. Para qualquer aresta  $e \in E(G)$ , o grafo  $G - e$  tem  $\nu$  vértices e  $\nu - 2$  arestas, pelo Teorema 4.75 o grafo  $G - e$  tem de verificar  $\nu - cc(G - e) \leq \nu - 2$ , ou seja,  $cc(G - e) \geq 2 > cc(G) = 1$ , isto é, a aresta  $e$  é uma ponte.

d) $\Rightarrow$ e) Seja  $G$  um grafo conexo, logo para quaisquer  $x, y \in V(G)$  existe um caminho  $C$  entre  $x$  e  $y$ . Seja  $uv$  uma aresta de  $C$ , logo  $cc(G - uv) = 2$ , pois por hipótese todas as arestas são pontes. Assim,  $u$  e  $v$  não estão na mesma componente conexa de  $G - uv$ . Se existisse outro caminho  $C'$  entre  $x$  e  $y$ , quando retiramos a aresta  $uv$  ao caminho  $C$  teríamos um caminho de  $u$  para  $v$  em  $G - uv$ , ou seja,  $u$  e  $v$  pertenciam à mesma componente conexa de  $G - uv$ , o que é absurdo.

e) $\Rightarrow$ f) Supomos que  $G$  tem um ciclo, logo, quaisquer dois vértices desse ciclo estariam ligados por pelo menos dois caminhos; o que contraria a hipótese, assim  $G$  não tem ciclos. Por outro lado, tomemos vértices  $u$  e  $v$  tais que  $uv$  não é aresta de  $G$ . Como  $u$  e  $v$  estão ligados por um único caminho, se acrescentarmos a aresta  $uv$  obtemos um ciclo.

f)⇒a) Como  $G$  não tem ciclos, para provar que  $G$  é uma árvore, falta apenas provar que  $G$  é conexo. Supomos que  $G$  não é conexo. Assim, existem pelo menos duas componentes conexas, se acrescentarmos uma aresta que une dois vértices pertencentes a componentes conexas distintas, como não existia nenhum caminho que unia esses vértices, não criamos nenhum ciclo, o que contraria a hipótese.

□

*Exemplo 4.85.* Na Figura 4.28 temos um grafo  $G$  com 6 vértices, que é uma árvore, o que equivale a dizer que  $G$  não tem ciclos e tem 5 arestas, ou seja,  $G$  é conexo e tem 5 arestas, o que é equivalente a que  $G$  é conexo e todas as arestas são pontes, ou seja, quaisquer dois vértices de  $G$  estão ligados por um único caminho, o que equivale a  $G$  não ter ciclos mas acrescentado uma aresta temos um ciclo; e podemos verificar que são todas afirmações verdadeiras.

**Teorema 4.86.** *Uma árvore, não trivial, tem pelo menos duas folhas.*

**Prova:** Seja  $G$  uma árvore não trivial com  $\nu$  vértices, pelo teorema anterior,  $G$  tem  $\nu - 1$  arestas. Pelo Teorema 4.20 temos que  $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2\nu - 2$ . Como qualquer árvore é conexa, então  $d_G(v) \geq 1$  para todo o  $v \in V(G)$ .

Se para todos os vértices  $v$  tivermos  $d_G(v) \geq 2$ , então  $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq 2\nu$ , o que é impossível.

Se tivermos  $u \in V(G)$  com  $d_G(u) = 1$  e  $d_G(v) \geq 2$  para todos os vértices  $v \neq u$ , então  $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq 2\nu - 1$ , o que é impossível.

Logo, existem pelo menos dois vértices  $u$  com  $d_G(u) = 1$ . □

*Exemplo 4.87.* Seja  $G$  uma árvore com 101 vértices em que precisamente 31 têm grau 4 e assumimos que os restantes vértices têm grau menor ou igual a 3.

Logo  $G$  tem 100 arestas e pelo Teorema 4.20 temos que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 200,$$

como  $G$  é árvore é um grafo conexo e logo  $d_G(v) > 0$  para todo o vértice  $v$ .

Sejam  $n_i$  o número de vértices com grau  $i$ , onde  $i = 1, 2, 3, 4$ ; logo  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 101$ , e das condições indicadas temos  $n_4 = 31$ . Do Teorema 4.86 temos  $n_1 \geq 2$  e obtemos

$n_1 + n_2 + n_3 = 70$ . Da igualdade do parágrafo anterior temos  $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 200$ , ou seja,  $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 76$ . Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 = 70 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 76 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} n_1 = 70 - n_2 - n_3 \\ 70 - n_2 - n_3 + 2n_2 + 3n_3 = 76 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} n_1 = 70 - n_2 - n_3 \\ n_2 + 2n_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 64 + n_3 \\ n_2 = 6 - 2n_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, na árvore  $G$  podemos ter o seguinte:

- Se  $n_3 = 0$  não temos vértices de grau 3, temos 6 vértices de grau 2 e 64 folhas
- Se  $n_3 = 1$  temos um vértice de grau 3, 4 vértices de grau 2 e 65 folhas
- Se  $n_3 = 2$  temos dois vértices de grau 3, 2 vértices de grau 2 e 66 folhas
- Se  $n_3 = 3$  temos três vértices de grau 3, nenhum vértice de grau 2 e 67 folhas

**Exercício 4.11.** Uma árvore  $G$  tem 45 vértices e precisamente 20 têm grau 3. Assumindo que os restantes vértices têm grau menor ou igual a 2 determine quantas folhas tem a árvore.

**Resolução:** Como  $G$  é árvore tem o número de arestas igual a  $45 - 1 = 44$ , e pelo Teorema 4.20 temos que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 88,$$

como  $G$  é árvore  $G$  é um grafo conexo e logo  $d_G(v) > 0$  para todo o vértice  $v$ .

Sejam  $n_i$  o número de vértices com grau  $i$ , onde  $i = 1, 2, 3$ ; logo  $n_1 + n_2 + n_3 = 45$ , e das condições indicadas temos  $n_3 = 20$ . Do Teorema 4.86 temos  $n_1 \geq 2$  e obtemos  $n_1 + n_2 = 25$ . Da igualdade do parágrafo anterior temos  $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 88$ , ou seja,  $n_1 + 2n_2 = 28$ . Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = 25 \\ n_1 + 2n_2 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 25 - n_2 \\ 25 - n_2 + 2n_2 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 22 \\ n_2 = 3 \end{cases}$$

Assim,  $G$  tem precisamente 22 folhas e necessariamente 3 vértices de grau 2.  $\square$

**Teorema 4.88.** *Seja  $G$  um grafo simples. Então, temos que  $G$  é uma floresta se e só se  $\varepsilon(G) = \nu(G) - cc(G)$ .*

**Prova:** Seja  $G$  uma floresta em que  $G_1, G_2, \dots, G_k$  são as componentes conexas, logo  $cc(G) = k$ . Como  $G_i$  é uma árvore, pelo Teorema 4.84,  $G_i$  tem  $\varepsilon(G_i) = \nu(G_i) - 1$  arestas.

Tendo em conta a Observação 4.71, temos que

$$\begin{aligned}\varepsilon(G) &= \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + \dots + \varepsilon(G_k) = \nu(G_1) - 1 + \nu(G_2) - 1 + \dots + \nu(G_k) - 1 \\ &= \nu(G) - k = \nu(G) - cc(G).\end{aligned}$$

Agora admitimos que a igualdade é válida e que o grafo simples  $G$  tem  $cc(G) = k$ . Sejam  $G_i = G[V_i]$ , com  $i = 1, 2, \dots, k$ , as componentes conexas de  $G$  e temos que

$$0 = \varepsilon(G) - \nu(G) + cc(G) = \varepsilon(G) - \nu(G) + k = \sum_{i=1}^k (\varepsilon(G_i) - \nu(G_i) + 1).$$

Além disso, como cada  $G_i$  é grafo simples e conexo, pelo Teorema 4.75 temos  $\varepsilon(G_i) \geq \nu(G_i) - cc(G_i) \Leftrightarrow \varepsilon(G_i) - \nu(G_i) + 1 \geq 0$ . Então, tendo em conta a igualdade acima temos de ter  $\varepsilon(G_i) - \nu(G_i) + 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon(G_i) = \nu(G_i) - 1$ , ou seja, pelo Teorema 4.84, cada  $G_i$  é uma árvore, e logo  $G$  é uma floresta.  $\square$

*Exemplo 4.89.* Na Figura 4.29 temos uma floresta com 20 vértices, 17 arestas e 3 componentes conexas, em que se verifica a igualdade do teorema anterior.

**Definição 4.90.** Seja  $G$  um grafo conexo. Chamamos *árvore geradora de  $G$*  a todo o subgrafo gerador de  $G$  que seja uma árvore, ou seja, todo o subgrafo que contém todos os vértices de  $G$  e é uma árvore.

*Nota 4.91.* Se  $G$  for uma árvore a única árvore geradora de  $G$  é ela própria.

*Exemplo 4.92.* Na Figura 4.30 os subgrafos  $H_1, H_2$  e  $H_3$  são árvores geradoras de  $G$ . O subgrafo  $H_4$  é subgrafo gerador de  $G$  mas não é árvore. O subgrafo  $H_5$  é subgrafo de  $G$  e é árvore, mas não é gerador.

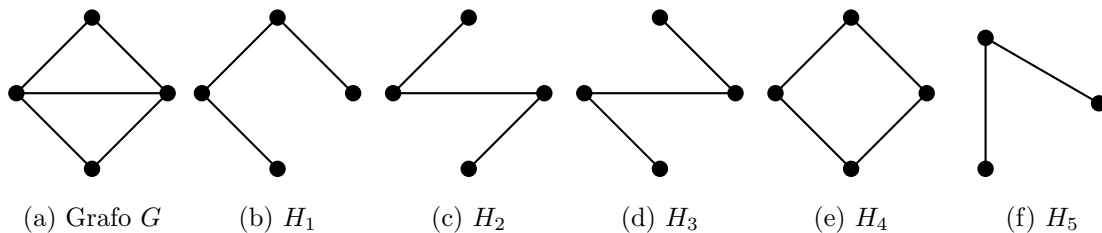


Figura 4.30: Grafo  $G$  e subgrafos

**Teorema 4.93.** *Todo o grafo conexo admite uma árvore geradora.*

**Prova:** Seja  $G$  um grafo conexo e  $H$  um subgrafo conexo gerador minimal de  $G$ , ou seja,  $cc(H) = 1$  e  $cc(H - e) > 1$  para toda a aresta  $e \in E(H)$ . Assim, todas as arestas de  $H$  são pontes, e pelo Teorema 4.84, temos que  $H$  é uma árvore.  $\square$

**Teorema 4.94.** *Seja  $G$  um grafo conexo e  $e \in E(G)$  uma aresta. A aresta  $e$  é uma ponte se e só se a aresta  $e$  pertence a todas as árvores geradoras de  $G$ .*

**Prova:** Sejam  $u$  e  $v$  os vértices extremos da ponte  $e$  e  $T$  uma árvore geradora de  $G$  e supomos, com vista a um absurdo, que  $e$  não é aresta de  $T$ . Mas, se  $T$  é árvore geradora logo é conexa e como possui todos os vértices de  $G$ , assim existe um caminho em  $T$  entre os vértices  $u$  e  $v$ , ou seja, a aresta  $uv$  está contida num ciclo de  $G$ , e pelo Teorema 4.79 a aresta  $e$  não é ponte, o que é absurdo.

Por outro lado, seja  $e$  uma aresta de todas as árvores geradoras de  $G$  com extremos em  $u$  e  $v$  e supomos, com vista a um absurdo, que  $e$  não é uma ponte de  $G$ . Então, pelo Teorema 4.79, os vértices  $u$  e  $v$  são conexos em  $G - e$  e podemos tomar uma árvore geradora  $T$  de  $G - e$ , logo  $T$  também é árvore geradora de  $G$ , da qual a aresta  $e$  não faz parte, o que é absurdo.  $\square$

**Exercício 4.12.** Obtenha todas as árvores geradoras do grafo  $G$  da Figura 4.31.

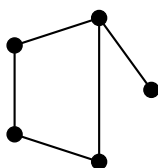


Figura 4.31

**Resolução:** O grafo  $G$  tem 5 vértices, e qualquer árvore geradora tem de ter os mesmos 5 vértices, e logo 4 arestas. A aresta que é ponte tem de pertencer a todas as árvores geradoras, por isso, falta escolher 3 arestas das restantes 4 arestas de modo a não termos um ciclo. O grafo  $G$  tem as árvores geradoras apresentadas na Figura 4.32.  $\square$

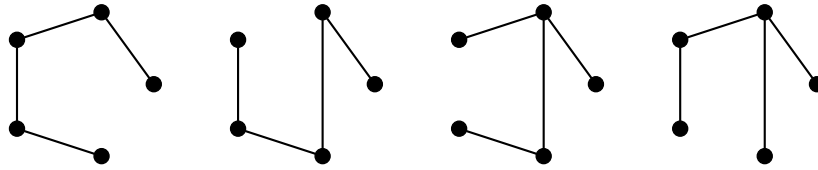


Figura 4.32

## Semana 13

### 4.5 Grafos Eulerianos

**Definição 4.95.** Um trajecto que contém todas as arestas de  $G$  diz-se um *trajecto euleriano*. Um circuito que contém todas as arestas de  $G$  diz-se um *circuito euleriano*. Se o grafo  $G$  tem um circuito euleriano, dizemos que  $G$  é um *grafo euleriano*.

*Nota 4.96.* Observemos que qualquer grafo euleriano  $G$  tem de ser um grafo conexo, ou no caso de termos  $cc(G) = k > 1$  então  $G$  tem  $k - 1$  componentes conexas isomorfas ao grafo trivial.

*Exemplo 4.97.* No grafo da Figura 4.28 não é possível indicar trajectos eulerianos.

*Exemplo 4.98.* No grafo da Figura 4.33 é possível indicar um trajecto euleriano, por exemplo  $e_4e_1e_2e_3e_5e_6$ .

*Exemplo 4.99.* No grafo da Figura 4.34 é possível indicar um circuito euleriano, por exemplo  $e_1e_2e_3e_4e_6e_5e_7$ , assim o grafo é euleriano.

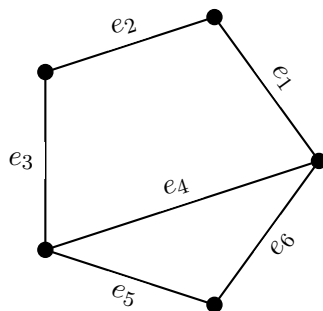


Figura 4.33: Grafo não euleriano

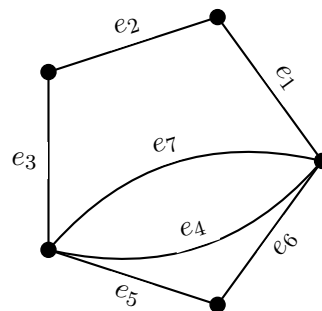


Figura 4.34: Grafo euleriano

**Lema 4.100.** *Seja  $G$  um grafo euleriano, então todos os vértices de  $G$  têm grau par.*

**Prova:** Seja  $C$  um circuito euleriano de  $G$  e escolhemos  $u$  como vértice inicial e final de  $C$ . Percorrendo o circuito  $C$ , de cada vez que passamos por um vértice  $v \neq u$  percorremos

duas novas arestas incidentes em  $v$ , como o circuito percorre todas as arestas, o grau de  $v$  é par. Por outro lado, cada vez que passamos no vértice  $u$  percorremos duas novas arestas incidentes, e juntando a aresta inicial e final, concluimos que  $u$  também tem grau par.  $\square$

*Exemplo 4.101.* Se o grafo da Figura 4.33 fosse euleriano, todos os vértices teriam grau par, o que não acontece, logo o grafo não é euleriano.

**Lema 4.102.** *Seja  $G$  um grafo com todos os vértices de grau par e  $\delta(G) \geq 2$ . Então,  $G$  tem um circuito.*

**Prova:** Se  $G$  tem um lacete ou duas arestas paralelas, logo tem um circuito de comprimento 1 ou 2. Se  $G$  for simples (não tem lacetes nem arestas paralelas) e não contiver nenhum circuito, logo não tem ciclos, então  $G$  é uma árvore. Pelo Teorema 4.86,  $G$  tem pelo menos duas folhas, isto é, vértices de grau 1, o que contraria a hipótese.  $\square$

**Lema 4.103.** *Sejam  $G$  um grafo,  $C$  um circuito de  $G$  e  $v \in V(G)$ . Então  $d_G(v)$  e  $d_{G-E(C)}(v)$  ou são ambos pares ou são ambos ímpares, onde  $G - E(C)$  é o grafo obtido através de  $G$  em que eliminamos todas as arestas do circuito  $C$ .*

**Prova:** Observemos que o grafo  $H = (V(G), E(C))$  é euleriano, logo pelo Lema 4.100, todos os vértices  $v$  têm grau par em  $H$ . Como  $d_G(v) = d_{G-E(C)}(v) + d_H(v)$  e  $d_H(v)$  é par concluimos que  $d_G(v)$  e  $d_{G-E(C)}(v)$  têm a mesma paridade.  $\square$

**Teorema 4.104.** *Seja  $G$  um grafo conexo não trivial. O grafo  $G$  é euleriano se e só se todos os vértices têm grau par.*

**Prova:** Já provámos no Lema 4.100 que se  $G$  é um grafo euleriano, então todos os vértices têm grau par.

Para a outra implicação temos que  $G$  é um grafo conexo, não trivial, com todos os vértices de grau par e com  $\varepsilon$  arestas e vamos fazer a prova fazendo indução no número de arestas.

Como  $G$  é não trivial tem pelo menos dois vértices, além disso, como  $G$  é conexo existe uma aresta que lhes incide. Mas se os vértices têm grau par temos de ter duas arestas paralelas, e é este o passo básico. Assim, temos um circuito euleriano formado por essas duas arestas paralelas e  $G$  é grafo euleriano.

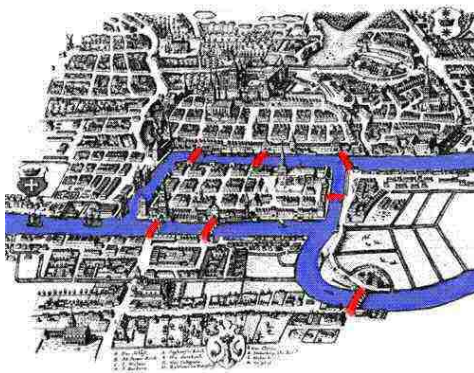
Por hipótese, qualquer grafo com menos de  $\varepsilon$  arestas em que todos os vértices têm grau par é um grafo euleriano. Supomos, com vista a um absurdo, que  $G$  não é euleriano.



Como  $G$  é conexo não tem vértices de grau zero, e como todos os vértices têm grau par, temos  $\delta(G) \geq 2$ . Pelo Lema 4.102 podemos concluir que  $G$  tem um circuito  $C$ .

Seja  $C$  um circuito de  $G$  com comprimento maximal, como  $G$  não é euleriano, o circuito  $C$  não é euleriano. Como os vértices de  $G$  têm grau par, pelo Lema 4.103 os vértices de  $G - E(C)$  têm grau par. Assim, por hipótese,  $G - E(C)$  é grafo euleriano, seja  $C'$  um circuito euleriano em  $G - E(C)$ ; logo  $C$  e  $C'$  têm todas as arestas de  $G$ . Como  $G$  é conexo, existe pelo menos um vértice comum a  $C$  e a  $C'$ , assim podemos prolongar o circuito  $C$ , o que é absurdo visto que  $C$  era circuito maximal.  $\square$

**Exercício 4.13 (Problema das Pontes de Königsberg).** A cidade de Königsberg (actual Kalininegrado) é banhada pelo rio Pregel que ao atravessar a cidade se ramifica como na imagem



em que a cidade ficava dividida em quatro zonas, ligadas por sete pontes. Os habitantes locais tentaram ao longo do tempo atravessar todas as pontes sem repetir nenhuma e voltar ao ponto inicial. Leonhard Euler provou que tal façanha seria impossível, porquê?

**Resolução:** O problema pode ser representado pelo grafo conexo da Figura 4.35.

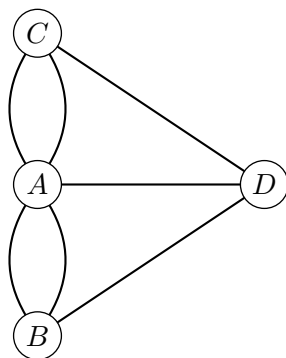


Figura 4.35: Grafo das Pontes de Königsberg

Pelo Teorema 4.104 o grafo é euleriano se e só se todos os vértices têm grau par; ora  $d_G(A) = 5$  e  $d_G(B) = d_G(C) = d_G(D) = 3$  são ímpares, logo o grafo é não euleriano.  $\square$

#### 4.5.1 Algoritmo de Fleury

Sabendo que um dado grafo é euleriano, o problema seguinte é encontrar um circuito euleriano. Um método para determinar um circuito euleriano  $C$  é o *Algoritmo de Fleury* cuja ideia consiste em evitar pontes, sempre que possível:

1. Escolher um vértice arbitrário,  $v_0$ , e adicionamos ao trajecto, obtendo  $C = v_0$
2. Escolher uma aresta  $e$ , do grafo actual, incidente no último vértice de  $C$
3. Se  $e$  não é ponte do grafo actual adicionamos a aresta  $e$  ao trajecto  $C$  e retiramos a aresta  $e$  do grafo actual
4. Se  $e$  é ponte do grafo actual, mas não existe mais nenhuma aresta incidente no último vértice de  $C$  adicionamos a ponte  $e$  ao trajecto  $C$  e retiramos a ponte  $e$  do grafo actual
5. Adicionamos ao trajecto  $C$  o outro vértice extremo da aresta  $e$
6. Voltar ao segundo passo até que o grafo actual não tenha arestas, ou seja, até que  $C$  seja um circuito euleriano.

*Exemplo 4.105.* Consideremos o grafo  $G$  da Figura 4.36 o qual é conexo e tem todos os vértices com grau par, sendo assim um grafo euleriano pelo Teorema 4.104. Vamos aplicar o algoritmo de Fleury para obter um circuito euleriano: observemos ainda que  $G$  é simples, pelo que basta indicar os vértices para definir a aresta. Começamos por tomar um vértice qualquer, por exemplo  $A$  e temos  $C = A$ . Podemos escolher a aresta  $AH$  pois não é ponte e ficamos com  $C = AH$  e com o grafo  $G - AH$ . Em seguida não podemos escolher a aresta  $HG$ , uma vez que é uma ponte do grafo  $G - AH$ , mas podemos escolher, por exemplo a aresta  $HI$  que não é ponte do grafo  $G - AH$  e ficamos com  $C = AHI$  e com o grafo  $G - \{AH, HI\}$ . Repetindo o processo do algoritmo podemos, por exemplo, construir o circuito euleriano  $C = AHIJHGFEDGABCD A$ .

**Exercício 4.14.** Determine, caso exista, um circuito euleriano do grafo da Figura 4.37.

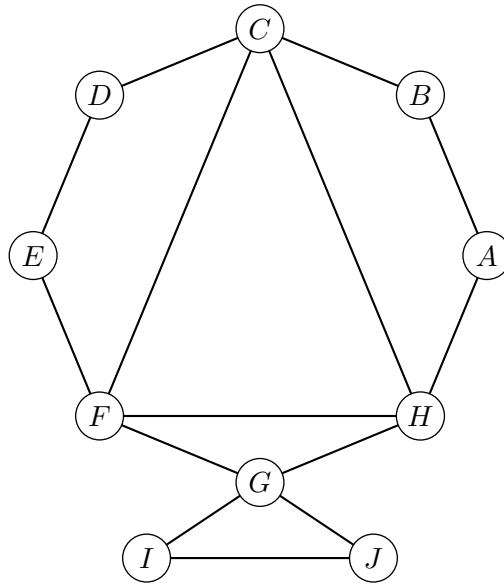
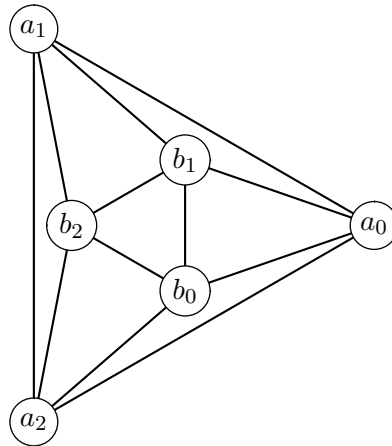
Figura 4.36: Grafo  $G$  euleriano: Algoritmo de Fleury

Figura 4.37

**Resolução:** O grafo é conexo e tem todos os vértices com grau par, no caso igual a 4, logo o grafo é euleriano, pelo Teorema 4.104. Como o grafo é simples, para determinar um circuito basta indicar os vértices. Tomemos o vértice  $a_0$  e a aresta  $a_0a_1$  que não é ponte, e podemos repetir até obter o trajecto  $a_0a_1a_2a_0$ . Em seguida podemos tomar as arestas  $a_0b_0$  e  $b_0b_1$  que não são pontes, ficando com o trajecto  $a_0a_1a_2a_0b_0b_1$ . Mas agora não podemos tomar a aresta  $b_1a_0$  por se tratar de uma ponte do grafo actual; podemos por exemplo tomar  $b_1a_1$  e depois  $a_1b_2$  que é uma ponte, mas em que não existe alternativa, e ficamos com o trajecto  $a_0a_1a_2a_0b_0b_1a_1b_2$ . Não podemos escolher a aresta  $b_2b_1$  pois é uma ponte do grafo actual, escolhemos  $b_2a_2$ , por exemplo. Agora, só temos pontes e

escolhemos as arestas na sequência  $a_2b_0$ ,  $b_0b_2$ ,  $b_2b_1$  e  $b_1a_0$ , formando o circuito euleriano  $a_0a_1a_2a_0b_0b_1a_1b_2a_2b_0b_2b_1a_0$ .  $\square$

## 4.6 Grafos Hamiltonianos

**Definição 4.106.** Um caminho que contém todos os vértices de  $G$  diz-se um *caminho hamiltoniano*. Um ciclo que contém todos os vértices de  $G$  diz-se um *ciclo hamiltoniano*. Se o grafo  $G$  tem um ciclo hamiltoniano, dizemos que  $G$  é um *grafo hamiltoniano*.

*Nota 4.107.* Observemos que qualquer grafo hamiltoniano tem de ser à partida um grafo conexo.

*Exemplo 4.108.* No grafo da Figura 4.28 não é possível indicar caminhos hamiltonianos.

*Exemplo 4.109.* No grafo da Figura 4.38 é possível indicar um caminho hamiltoniano, por exemplo  $v_1v_2v_3v_4v_5$ .

*Exemplo 4.110.* No grafo da Figura 4.39 é possível indicar um ciclo hamiltoniano, por exemplo  $v_1v_3v_2v_5v_4v_1$ , assim o grafo é hamiltoniano.

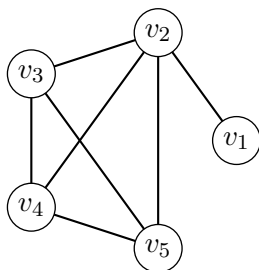


Figura 4.38: Grafo não hamiltoniano

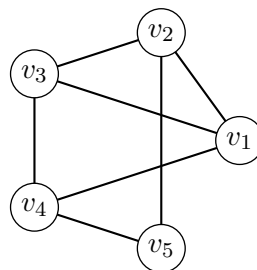


Figura 4.39: Grafo hamiltoniano

*Exemplo 4.111.* O grafo completo  $K_n$ , com  $n \geq 3$  é um grafo hamiltoniano. De facto, como existe a aresta entre cada par de vértices, podemos tomar o ciclo  $C = v_1v_2 \dots v_nv_1$ , o qual é ciclo hamiltoniano.

**Proposição 4.112.** *Sejam  $G$  um grafo hamiltoniano e  $v \in V(G)$ . Então  $G - v$  é um grafo conexo.*

**Prova:** Se  $G$  é grafo hamiltoniano, existe um ciclo que passa por todos os vértices. Retirando um vértice  $v$ , os restantes vértices continuam a ser ligados por um caminho, logo  $G - v$  é um grafo conexo.  $\square$

*Exemplo 4.113.* No grafo  $G$  da Figura 4.38 se considerarmos  $G - v_2$  obtemos um grafo não conexo, logo  $G$  não é grafo hamiltoniano.

**Teorema 4.114.** *Sejam  $G$  um grafo hamiltoniano,  $S \subseteq V(G)$  e indicamos por  $G - S$  o subgrafo induzido em  $G$  por  $V(G) \setminus S$ . Então  $cc(G - S) \leq |S|$ .*

**Prova:** Seja  $C$  um ciclo hamiltoniano de  $G$ . Para cada  $S \subseteq V(G)$  temos  $cc(C - S) \leq |S|$ , uma vez que ao eliminarmos  $k$  vértices de um ciclo obtemos no máximo  $k$  componentes conexas desse ciclo.

Como  $C - S$  é um subgrafo gerador de  $G - S$ , então  $cc(G - S) \leq cc(C - S) \leq |S|$ .  $\square$

*Nota 4.115.* O último Teorema é o caso geral da Proposição anterior, em que  $S = \{v\}$  e logo  $cc(G - S) \leq 1 \Leftrightarrow cc(G - v) = 1$ , ou seja,  $G - v$  é grafo conexo.

**Teorema 4.116.** *Sejam  $G$  um grafo simples com  $\nu(G) \geq 3$  e  $u, v \in V(G)$  dois vértices não adjacentes tais que  $d_G(u) + d_G(v) \geq \nu(G)$ . Então,  $G$  é grafo hamiltoniano se e só se  $G + uv$  é grafo hamiltoniano, onde  $G + uv$  é o grafo  $G$  em que adicionamos a aresta  $uv$ .*

**Prova:** Observemos que se  $G$  é grafo hamiltoniano, quando adicionamos uma aresta obtemos um grafo  $G + uv$  que é hamiltoniano.

Para a outra implicação temos que  $G + uv$  é grafo hamiltoniano e a desigualdade é válida. Supomos, com vista a um absurdo, que  $G$  não é hamiltoniano. Seja  $C'$  um ciclo hamiltoniano de  $G + uv$ , a aresta  $uv$  pertence a  $C'$ , pois se assim não fosse o ciclo hamiltoniano  $C'$  estaria em  $G$  e  $G$  seria hamiltoniano, o que é impossível. Assim, em  $G$  existe um caminho hamiltoniano  $C$  dado por  $u = v_1 v_2 \dots v_\nu = v$ , mas para qualquer  $i$  as arestas  $v_i v$  e  $uv_{i+1}$  não fazem parte do grafo  $G$ , caso contrário teríamos o ciclo hamiltoniano  $uv_2 \dots v_i v v_{i+1} \dots v_{i+1} u$  em  $G$ . Seja  $k = d_G(u)$  e  $\{v_2 = v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\}$  o conjunto dos vértices adjacentes a  $u$  em  $G$ , logo o conjunto dos vértices  $\{u = v_{j_1-1}, v_{j_2-1}, \dots, v_{j_k-1}\}$  não são adjacentes a  $v$  em  $G$ . Assim, existem  $d_G(u) + 1$  vértices que não são adjacentes a  $v$  (uma vez que  $v$  não é adjacente a ele próprio), ou seja,  $d_G(v) \leq \nu(G) - d_G(u) - 1 \Leftrightarrow d_G(u) + d_G(v) \leq \nu(G) - 1$ , o que contraria a hipótese.  $\square$

**Corolário 4.117. (Teorema de Ore)** *Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu(G) \geq 3$ . Se para todos os vértices não adjacentes  $u, v \in V(G)$  tivermos  $d_G(u) + d_G(v) \geq \nu(G)$ , então  $G$  é grafo hamiltoniano.*

**Prova:** Se todos os vértices de  $G$  fossem adjacentes,  $G$  seria isomorfo a um grafo completo e logo hamiltoniano.

Seja  $G$  um grafo não isomorfo a um grafo completo, isto é, com vértices não adjacentes. Supomos, com vista a um absurdo, que o grafo  $G$  não é hamiltoniano e que as restantes condições são verificadas.

Adicionamos a  $G$  todas as arestas possíveis, de modo que o novo grafo  $G'$  ainda seja não hamiltoniano, ou seja, se adicionarmos mais uma aresta a  $G'$  seria hamiltoniano. O grafo  $G'$  não é isomorfo a um grafo completo (se fosse seria hamiltoniano), logo existem dois vértices  $u$  e  $v$  que não são adjacentes em  $G'$ . Adicionando a aresta  $uv$  a  $G'$  obtemos o grafo hamiltoniano  $G' + uv$ . Como  $d_{G'}(u) + d_{G'}(v) \geq d_G(u) + d_G(v) \geq \nu(G) = \nu(G')$ , pelo Teorema 4.116, concluímos que  $G'$  também é hamiltoniano, o que é absurdo.  $\square$

*Nota 4.118.* No entanto, podemos ter um grafo hamiltoniano  $G$  em que a desigualdade  $d_G(u) + d_G(v) \geq \nu(G)$  não é válida para todo o  $u, v \in V(G)$ . De facto,  $C_8$  é grafo hamiltoniano e como  $d_G(u) + d_G(v) = 4$  temos  $d_G(u) + d_G(v) < 8$  para todo o  $u, v \in V(G)$ .

*Exemplo 4.119.* O grafo bipartido completo  $K_{n,n}$  é hamiltoniano, pois para todos os vértices não adjacentes  $u$  e  $v$  temos  $d_G(u) + d_G(v) = n + n = \nu(G)$  e pelo Teorema de Ore concluímos que  $K_{n,n}$  é hamiltoniano.

Mas o grafo bipartido completo  $K_{m,n}$  com  $m \neq n$  não é hamiltoniano, de facto para as partições  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  e  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  com  $m < n$  podemos formar o caminho  $u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_m v_m$ , mas nunca formamos um ciclo, pois  $m \neq n$ .

**Corolário 4.120. (Teorema de Dirac)** *Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu(G) \geq 3$ . Se  $2\delta(G) \geq \nu(G)$ , então  $G$  é grafo hamiltoniano.*

**Prova:** Se  $G$  fosse grafo completo, logo seria hamiltoniano. Sejam  $u, v \in V(G)$  vértices não adjacentes e temos  $d_G(u) + d_G(v) \geq \delta(G) + \delta(G) = 2\delta(G) \geq \nu(G)$ . Do Teorema de Ore concluímos que  $G$  é um grafo hamiltoniano.  $\square$

*Nota 4.121.* No entanto, podemos ter um grafo hamiltoniano  $G$  em que a desigualdade  $2\delta(G) \geq \nu(G)$  não é válida. De facto, o grafo  $G$  da Figura 4.40 é hamiltoniano, uma vez que  $C = v_1 v_4 v_3 v_2 v_5 v_1$  é ciclo hamiltoniano, e como  $\delta(G) = 2$  temos  $2\delta(G) < 5$ .

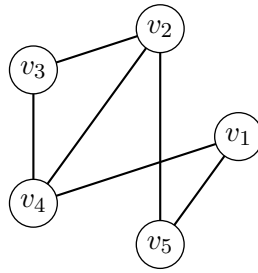


Figura 4.40: Grafo hamiltoniano

## Semana 14

### 4.7 Grafos Valuados

**Definição 4.122.** Chamamos *grafo valuado* a um grafo em que cada aresta  $e_i$  tem associado um valor  $\omega(e_i)$ , a que chamamos *peso* ou *valor*.

*Exemplo 4.123.* O grafo da Figura 4.41 é um grafo, valuado em que os vértices representam

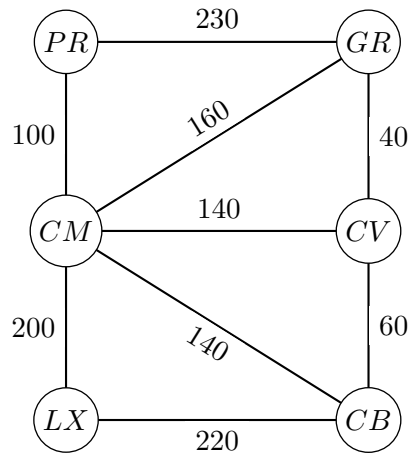
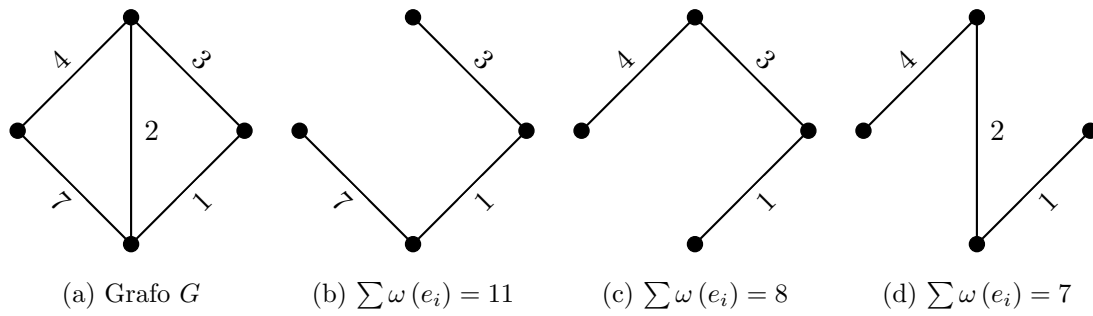


Figura 4.41: Grafo Valuado

as cidades de Castelo Branco (CB), Coimbra (CM), Covilhã (CV), Guarda (GR), Lisboa (LX) e Porto (PR) e as arestas representam algumas das ligações existentes cujos pesos são dados pelas distâncias em Km entre as cidades.

**Definição 4.124.** Chamamos *árvore minimal* de um grafo valuado  $G$  a uma árvore geradora de  $G$  em que a soma dos pesos seja mínima.

*Exemplo 4.125.* Na Figura 4.42 temos um grafo  $G$  e algumas árvores geradoras onde é

Figura 4.42: Grafo  $G$  e algumas árvores geradoras

indicada a soma dos respectivos pesos. É fácil concluir que a última é uma árvore minimal de  $G$ .

Dado um grafo valuado  $G$  com  $\nu$  vértices e  $\varepsilon$  arestas, qualquer árvore geradora de  $G$  tem precisamente  $\nu$  vértices e  $\nu - 1$  arestas. Para obter uma árvore minimal de  $G$ , a que chamamos  $T$ , escolhemos essas  $\nu - 1$  arestas usando o *Algoritmo de Kruskal* que consiste no seguinte:

1. Ordenamos as arestas numa sequência por ordem crescente dos respectivos pesos, em que o peso da aresta na posição  $i + 1$  é maior ou igual ao peso da aresta na posição  $i$
2. Retiramos a primeira aresta da sequência e obtemos uma nova sequência
3. Se ao adicionarmos essa aresta ao grafo  $T$  for formado um ciclo a aresta é rejeitada
4. Caso contrário adicionamos essa aresta ao grafo  $T$
5. Voltamos ao ponto 2. até que  $T$  tenha  $\nu - 1$  arestas.

**Teorema 4.126.** *O grafo que se obtém com o algoritmo de Kruskal é uma árvore minimal.*

*Exemplo 4.127.* Vamos aplicar o algoritmo de Kruskal para verificar que na Figura 4.42 a última árvore é árvore minimal do grafo  $G$ . Denotamos as arestas dadas de modo que  $\omega(e_1) = 7$ ,  $\omega(e_2) = 1$ ,  $\omega(e_3) = 3$ ,  $\omega(e_4) = 4$  e  $\omega(e_5) = 2$ . Qualquer árvore geradora de  $G$  tem os  $\nu = 4$  vértices e  $\nu - 1 = 3$  arestas e usamos o algoritmo para as escolher de modo que não existam ciclos. Formamos a sequência  $e_2e_5e_3e_4e_1$  e tomamos a aresta  $e_2$  para o grafo  $T$  e ficamos com a sequência  $e_5e_3e_4e_1$ . Tomamos agora a aresta  $e_5$ , que como não forma ciclo com a aresta  $e_2$  fica também a fazer parte do grafo  $T$  e ficamos com



a sequência  $e_3e_4e_1$ . Mas juntando a aresta  $e_3$  ao grafo  $T$  ficamos com um ciclo, por isso, rejeitamos a aresta  $e_3$  e ficamos com a sequência  $e_4e_1$ . Tomamos agora a aresta  $e_4$ , como não forma ciclo com as arestas  $e_2$  e  $e_5$  fica também a fazer parte do grafo  $T$ , que tem agora 3 arestas e por isso é uma árvore geradora de  $G$ ; logo uma árvore minimal de  $G$ , pelo Teorema anterior.

**Exercício 4.15.** Determine uma árvore minimal do grafo  $G$  da Figura 4.43, onde junto a cada aresta é indicado o respectivo peso.

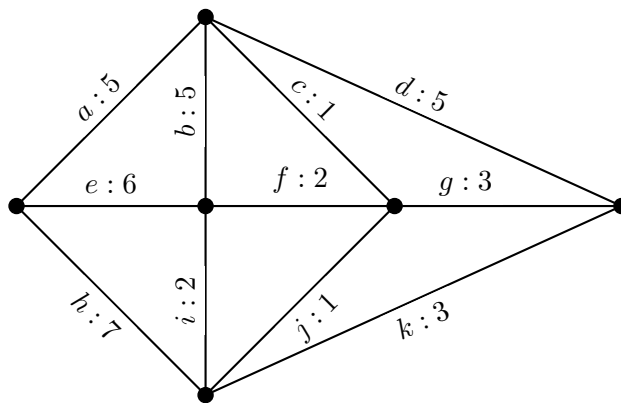
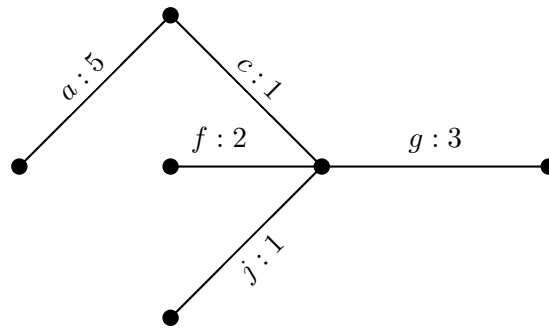


Figura 4.43: Grafo Valuado  $G$

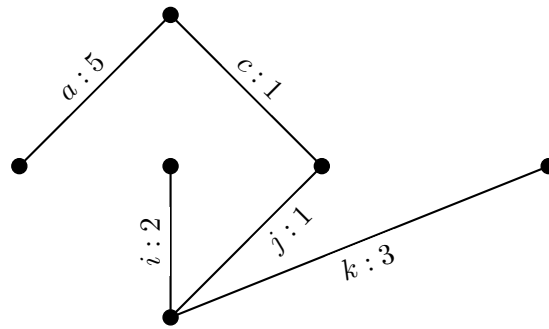
**Resolução:** Começamos por observar que qualquer árvore geradora de  $G$  tem  $\nu = 6$  vértices e  $\nu - 1 = 5$  arestas. Aplicando o algoritmo de Kruskal, ordenamos as arestas de  $G$  consoante os seus pesos e temos, por exemplo, a sequência  $cjfigkabdeh$ . Notemos que como temos arestas com pesos iguais a sequência não é única e podemos obter várias árvores minimais, como veremos mais adiante.

Tomemos a aresta  $c$  para a árvore  $T_1$  e podemos adicionar a aresta  $j$  pois não forma um ciclo. Podemos ainda adicionar a aresta  $f$ , mas já não podemos adicionar a aresta  $i$  pois ficaria formado um ciclo. Em seguida adicionamos a aresta  $g$  que não forma um ciclo, mas como a aresta  $k$  já forma um ciclo, adicionamos a aresta  $a$  e temos 5 arestas, assim obtemos a árvore  $T_1$  (ver Figura 4.44) cuja soma dos pesos é 12.

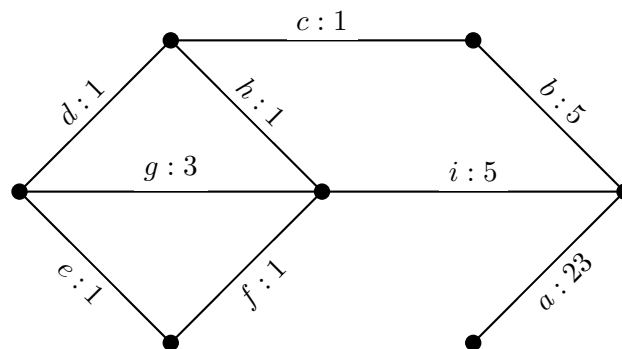
Mas escolhendo outra sequência de arestas (em que trocamos de posição arestas com o mesmo peso), por exemplo  $jci fhgdabeh$ , obtemos outra árvore minimal. De facto, tomemos a aresta  $j$  para a árvore  $T_2$  e podemos adicionar a aresta  $c$  pois não forma um ciclo. Podemos ainda adicionar a aresta  $i$ , mas não podemos adicionar a aresta  $f$  pois formamos um ciclo. Em seguida adicionamos a aresta  $k$  que não forma um ciclo, mas

Figura 4.44: Árvore Minimal  $T_1$ 

como a aresta  $g$  já forma um ciclo, adicionamos a aresta  $a$  e temos as 5 arestas. Na Figura 4.45 temos a árvore minimal  $T_2$  cuja soma dos pesos é 12.  $\square$

Figura 4.45: Árvore Minimal  $T_2$ 

**Exercício 4.16.** Determine uma árvore minimal do grafo  $G$  da Figura 4.46, onde junto a cada aresta é indicado o respectivo peso.

Figura 4.46: Grafo Valuado  $G$ 

**Resolução:** Começamos por observar que qualquer árvore geradora de  $G$  tem  $\nu = 7$  vértices e  $\nu - 1 = 6$  arestas.

Aplicando o algoritmo de Kruskal, ordenamos as arestas de  $G$  consoante os seus pesos e temos, por exemplo, a sequência  $cdefhgbia$ . Notemos que como temos arestas com pesos iguais a sequência não é única e podemos obter várias árvores minimais.

Tomemos a aresta  $c$  para a árvore  $T$  e podemos adicionar a aresta  $d$  pois não forma um ciclo. Podemos ainda adicionar a aresta  $e$  e a aresta  $f$  pois não forma um ciclo. No entanto, já não podemos adicionar a aresta  $h$  pois ficaria formado um ciclo. Também não podemos adicionar a aresta  $g$  pois teríamos um ciclo. Em seguida adicionamos a aresta  $b$  que não forma um ciclo, mas como a aresta  $i$  já forma um ciclo não a podemos adicionar. Finalmente, adicionamos a aresta  $a$  e temos 6 arestas, assim obtemos a árvore  $T$  (ver Figura 4.47) cuja soma dos pesos é 32.

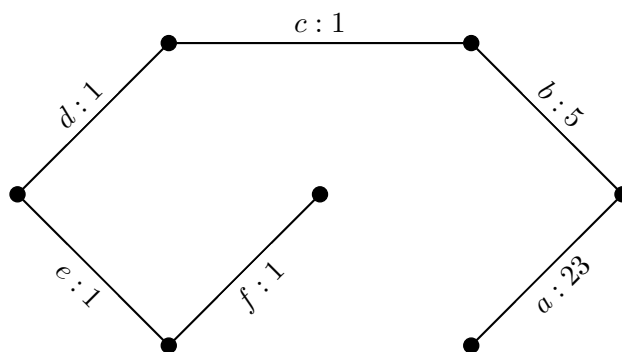
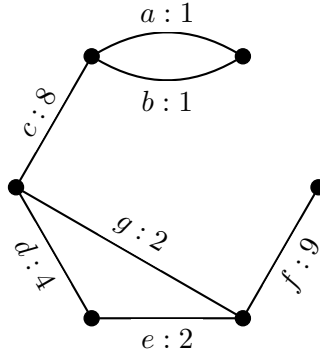
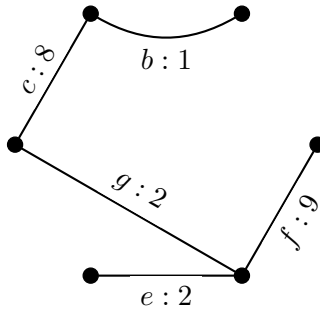


Figura 4.47: Árvore Minimal  $T$

Observemos que a aresta  $a$  é uma ponte, logo pelo Teorema 4.94 a aresta  $a$  tem de pertencer a todas as árvores geradoras, em particular a todas as árvores minimais, apesar de ter o maior peso associado.  $\square$

*Nota 4.128.* A existência de árvores geradoras e da utilização do Algoritmo de Kruskal pode ser aplicado a grafos não simples.

*Exemplo 4.129.* Para o grafo valuado  $G$  da Figura 4.48 obtemos uma árvore minimal da mesma forma, apesar do grafo não ser simples. Qualquer árvore geradora de  $G$  tem  $\nu = 6$  vértices e  $\nu - 1 = 5$  arestas. Podemos ordenar as arestas como  $baegdcf$  e começamos por adicionar a aresta  $b$ , mas rejeitamos a aresta  $a$  pois formaria uma ciclo. De seguida adicionamos as arestas  $e$  e  $g$ , mas não podemos adicionar a aresta  $d$  pois formaria um ciclo. Finalmente adicionamos as arestas  $c$  e  $f$  e obtemos a árvore minimal  $T$  da Figura 4.49. Observemos ainda que as arestas  $c$  e  $f$  são pontes, pelo que pertencem a todas as árvores geradoras de  $G$ , e logo às árvores minimais de  $G$ .

Figura 4.48: Grafo valuado  $G$  não simplesFigura 4.49: Árvore Minimal  $T$ 

## 4.8 Coloração de Grafos

**Definição 4.130.** Dado um grafo  $G$  e  $Q \subseteq V(G)$ , dizemos que  $Q$  é uma *clique* de  $G$  se para quaisquer dois vértices  $u, v \in Q$  tivermos  $uv \in E(G)$ ; ou seja, se o subgrafo induzido  $G[Q]$  é um grafo completo. Dizemos que  $Q$  é uma *clique maximal* de  $G$  se para todo o  $u \in V(G) \setminus Q$  o conjunto  $Q \cup \{u\}$  não é uma clique.

A uma clique maximal de  $G$  com cardinalidade máxima chamamos *clique máxima* de  $G$  e à sua cardinalidade *número de clique* de  $G$ , que indicamos por  $\omega(G)$ . Neste caso,  $G$  possui um subgrafo induzido isomorfo ao grafo completo  $K_{\omega(G)}$ .

*Exemplo 4.131.* O grafo da Figura 4.50 tem várias cliques, por exemplo:  $Q_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $Q_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e  $Q_3 = \{v_1, v_4, v_5\}$  são cliques. As cliques  $Q_2$  e  $Q_3$  são cliques maximais, mas  $Q_1$  não é maximal, uma vez que se adicionarmos o vértice  $v_4$  obtemos outra clique. A clique  $Q_2$  é máxima, uma vez que é a que tem maior cardinalidade e  $\omega(G) = 4$ .

**Definição 4.132.** Dado um grafo  $G$ , chamamos *k-coloração dos vértices* de  $G$  a uma

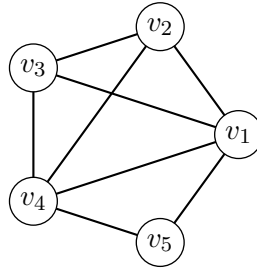


Figura 4.50: Grafo com cliques

função  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  em que para cada aresta  $\psi_G(e) = uv \in E(V)$  temos  $c(u) \neq c(v)$ .

*Nota 4.133.* Se o grafo  $G$  tiver um lacete  $l$ , então  $G$  não admite nenhuma coloração dos vértices, uma vez que  $\psi_G(l) = vv \in E(V)$  e temos  $c(v) = c(v)$ .

*Exemplo 4.134.* Dado um grafo  $G$ , na Figura 4.51 temos um exemplo de uma não coloração, uma vez que existem arestas adjacentes com a mesma cor. No entanto, para o mesmo grafo é possível fazer uma 4-coloração como na Figura 4.52.

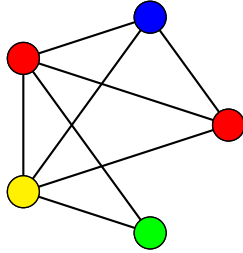


Figura 4.51: Não é coloração

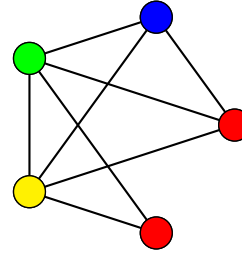


Figura 4.52: É uma 4-coloração

**Observação 4.135.** É evidente que um grafo sem lacetes admite uma  $k$ -coloração dos vértices se e só se o seu subgrafo de suporte das arestas admite uma  $k$ -coloração dos vértices. Assim, para problemas de coloração dos vértices basta considerar grafos simples.

**Observação 4.136.** Dado um grafo  $G$  sem lacetes com  $\nu$  vértices, facilmente conseguimos construir uma  $\nu$ -coloração (ver Figura 4.53): a cada  $v_i \in V(G)$  fazemos corresponder  $c(v_i) = i$ .

**Observação 4.137.** Podemos ainda construir uma coloração em que vamos atribuindo a cada vértice  $v_i$  a primeira cor  $c_i$  que estiver disponível, a este processo chamamos algoritmo “guloso”, no qual são usadas  $\Delta(G) + 1$  cores, no máximo. No entanto a coloração obtida não é única, além disso podemos até obter  $k$ -colorações para diferentes valores de  $k$ .

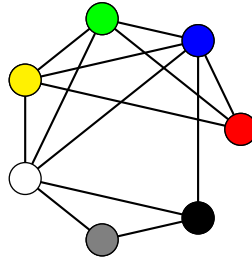


Figura 4.53: Grafo com 7 vértices e uma 7-coloração

Por exemplo, no grafo  $G$  representado na Figura 4.54a atribuímos a primeira cor ao vértice  $v_1$  e considerando a sequência dos vértices no sentido anti-horário, usando o algoritmo “guloso” obtemos uma 3-coloração. Para o mesmo grafo  $G$  representado na Figura 4.54b atribuímos a primeira cor ao vértice  $v_5$  e considerando a sequência dos vértices no sentido anti-horário, usando o algoritmo “guloso” obtemos uma 4-coloração.

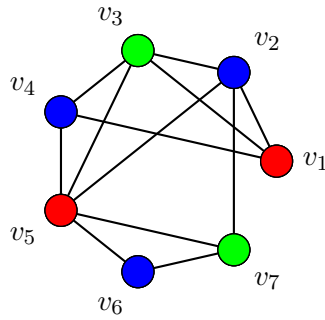
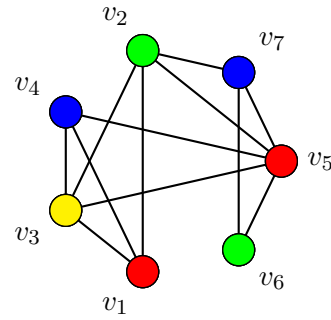
(a) Grafo  $G$  com uma 3-coloração(b) Grafo  $G$  com uma 4-coloração

Figura 4.54: Coloração usando o algoritmo “guloso”

**Observação 4.138.** Um grafo  $G$  sem lacetes é bipartido se e só se admite uma 2-coloração dos seus vértices. De facto, se  $G$  é bipartido temos  $V(G) = V_1 \dot{\cup} V_2$  em que não existem arestas com um extremo em  $V_1$  e outro em  $V_2$ , pelo que podemos fazer  $c(v) = i$  para todo o  $v \in V_i$ , e obtemos uma 2-coloração. Por outro lado, se  $G$  admite uma 2-coloração definimos  $V_i = \{v \in V(G) : c(v) = i\}$  e obtemos uma partição dos vértices  $V(G) = V_1 \dot{\cup} V_2$  em que todas as arestas incidem num vértice de  $V_1$  e noutro de  $V_2$ , logo  $G$  é bipartido.

Em particular, no Exemplo 4.141, Figura 4.56 temos o grafo bipartido completo  $K_{5,3}$  com uma 2-coloração.

Mais geralmente, um grafo  $G$  sem lacetes é  $k$ -partido se e só se admite uma  $k$ -coloração dos seus vértices. Em particular, no Exemplo 4.141, Figura 4.57 temos o grafo 3-partido

completo  $K_{4,3,2}$  com uma 3-coloração.

No entanto, dado um valor fixo  $k$ , verificar se  $G$  admite uma  $k$ -coloração não é à partida uma tarefa fácil, mais ainda se pretendermos determinar o menor  $k$  para o qual  $G$  admite uma  $k$ -coloração.

**Definição 4.139.** Ao menor valor  $k$  para o qual o grafo  $G$  admite uma  $k$ -coloração chamamos *número cromático* de  $G$ , e indicamos  $\chi(G)$ .

*Exemplo 4.140.* Consideremos o grafo completo  $K_n$ . Todos os seus vértices têm o mesmo grau, assim  $\Delta(K_n) + 1 = n$ . Como  $K_n$  é uma clique, temos  $\omega(K_n) = n$ . Quaisquer dois vértices são adjacentes, logo todos têm de ter cores distintas, então  $\chi(K_n) = n$  (Na Figura 4.55 temos uma 5-coloração de  $K_5$ ). Assim, temos a seguinte relação

$$\omega(K_n) = \chi(K_n) = \Delta(K_n) + 1.$$

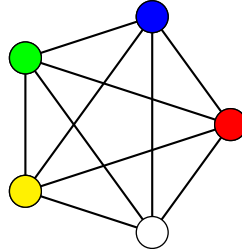


Figura 4.55: Grafo completo  $K_5$  com uma 5-coloração

*Exemplo 4.141.* Consideremos o grafo  $k$ -partido completo  $G = K_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}$ , com  $|V_i| = \nu_i$ . Seja  $\nu_i$  tal que  $\nu_i \leq \nu_j$  para todo o  $j \neq i$ , então  $\Delta(G) = \sum_{j \neq i} \nu_j$ , além disso, como  $|V_j| \geq 1$  temos que  $\Delta(G) \geq k - 1 \Leftrightarrow \Delta(G) + 1 \geq k$ . Para obter uma clique máxima basta tomar um vértice de cada um dos conjuntos  $V_i$  da partição, logo  $\omega(G) = k$ . Pela Observação 4.138 temos que  $\chi(G) = k$  (Na Figura 4.56 temos uma 2-coloração de  $K_{5,3}$  e na Figura 4.57 temos uma 3-coloração de  $K_{4,3,2}$ ). Assim

$$\omega(G) = \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

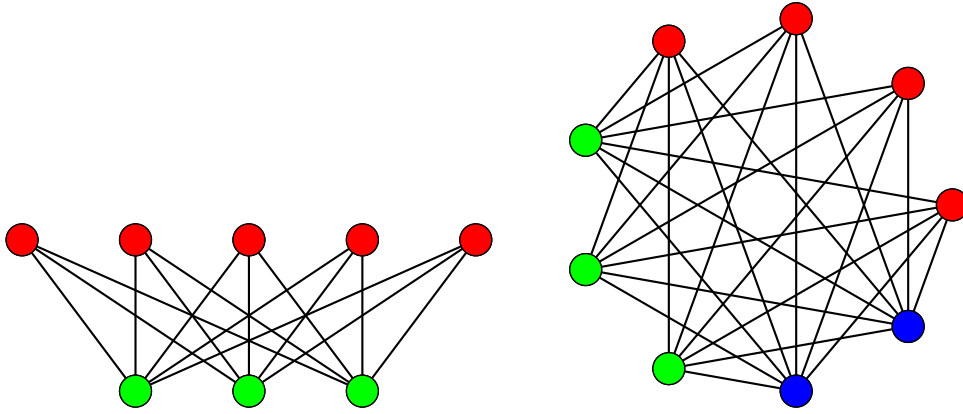


Figura 4.56: Grafo Bipartido Completo  $K_{5,3}$  com uma 2-coloração

Figura 4.57: Grafo 3-partido Completo  $K_{4,3,2}$  com uma 3-coloração

*Exemplo 4.142.* Consideremos o ciclo de comprimento par  $C_{2n}$ . Todos os seus vértices têm grau 2, assim  $\Delta(C_{2n}) + 1 = 3$ . Temos que  $\omega(C_{2n}) = 2$ , uma vez que se escolhermos 3 vértices já não temos uma clique. Como um ciclo  $C_{2n}$  é um grafo bipartido, pela Observação 4.138 temos que  $\chi(C_{2n}) = 2$  (Na Figura 4.58 temos uma 2-coloração de  $C_6$ ). Assim

$$\omega(C_{2n}) = \chi(C_{2n}) < \Delta(C_{2n}) + 1.$$

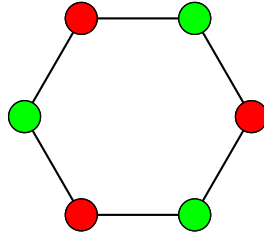
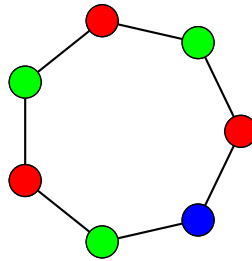


Figura 4.58: Ciclo  $C_6$  com uma 2-coloração

*Exemplo 4.143.* Consideremos o ciclo de comprimento ímpar  $C_{2n+1}$ , com  $n > 1$ . Todos os seus vértices têm grau 2, assim  $\Delta(C_{2n+1}) = 2$ . Temos que  $\omega(C_{2n+1}) = 2$ , uma vez que se escolhermos 3 vértices já não temos uma clique. Como um ciclo  $C_{2n+1}$  é um grafo 3-partido, pela Observação 4.138 temos que  $\chi(C_{2n+1}) = 3$  (Na Figura 4.59 temos uma 3-coloração de  $C_7$ ). Assim

$$\omega(C_{2n+1}) < \chi(C_{2n+1}) = \Delta(C_{2n+1}) + 1.$$



Figura 4.59: Ciclo  $C_7$  com uma 3-coloração

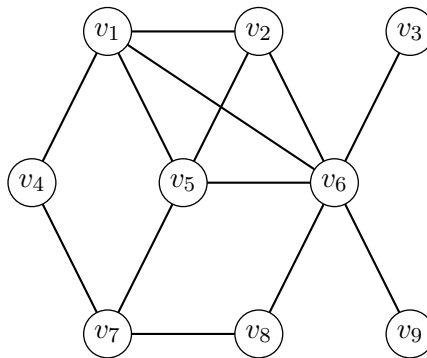
Mais geralmente temos o seguinte resultado.

**Teorema 4.144.** *Dado um grafo  $G$ , temos que  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*

**Prova:** O grafo  $G$  possui um subgrafo induzido isomorfo a  $K_{\omega(G)}$  para o qual são necessárias  $\omega(G)$  cores, logo  $\omega(G) \leq \chi(G)$ .

Por outro lado, usando o algoritmo “guloso” não são precisas mais do que  $\Delta(G) + 1$  cores para obter uma coloração de  $G$ , ou seja,  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .  $\square$

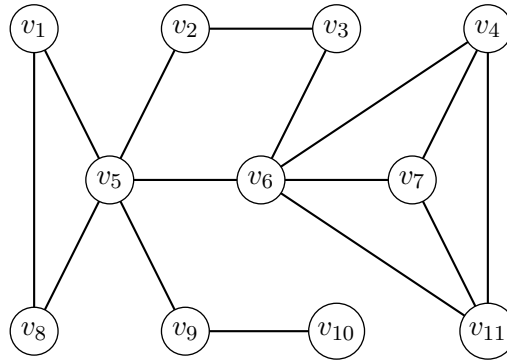
*Exemplo 4.145.* Dado o grafo  $G$  da Figura 4.60 observemos que  $\Delta(G) = d_G(v_6) = 6$  e  $\omega(G) = 4$ , uma vez que  $K = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$  é clique máxima. Assim, usando o teorema anterior temos  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  e podemos estimar que  $4 \leq \chi(G) \leq 7$ .

Figura 4.60: Grafo  $G$  com  $4 \leq \chi(G) \leq 7$ 

**Exercício 4.17.** Considere o grafo  $G$  representado na Figura 4.61.

- Indique  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$ . Justifique.
- Estime o número cromático de  $G$ .

**Resolução:** a) Calculando o grau de todos os vértices, temos que  $\delta(G) = d_G(v_{10}) = 1$  e  $\Delta(G) = d_G(v_6) = 5$ .

Figura 4.61: Grafo  $G$ 

- b) Pelo Teorema sabemos que  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ , logo  $\chi(G) \leq 6$ , pela a). Por outro lado,  $K = \{v_4, v_6, v_7, v_{11}\}$  é clique máxima e logo  $\omega(G) = 4$ . Assim, temos que  $4 \leq \chi(G) \leq 6$ .

□

## Fim do Semestre

**Definição 4.146.** Dizemos que  $G$  é um *grafo perfeito* se para todo o  $K \subseteq V(G)$  tivermos  $\chi(G[K]) = \omega(G[K])$ .

**Teorema 4.147 (Lovász).** Um grafo é perfeito se e só se o seu complementar é um grafo perfeito.

**Definição 4.148.** Dizemos que  $G$  é um *grafo de Berge* se nem  $G$  nem  $G^C$  têm qualquer ciclo induzido de comprimento ímpar maior ou igual a 5.

**Teorema 4.149 (Conjectura de Berge).** Um grafo  $G$  é perfeito se e só se  $G$  é um grafo de Berge.

Alguns resultados com os quais podemos estimar o número cromático,  $\chi(G)$ .

**Teorema 4.150.** Seja  $G$  um grafo, então  $\chi(G) \leq \max_{K \subseteq V(G)} \delta(G[K]) + 1$ .

**Prova:** Seja  $G$  um grafo de ordem  $\nu$  e tomemos  $k = \max_{K \subseteq V(G)} \delta(G[K])$ .

Seja  $v_\nu \in V(G)$  tal que  $d_G(v_\nu) \leq k$  e  $H_{\nu-1} = G - \{v_\nu\}$ .

Por hipótese,  $H_{\nu-1}$  tem um vértice com grau menor ou igual a  $k$ . Seja  $v_{\nu-1}$  um desses vértices e tomemos  $H_{\nu-2} = H_{\nu-1} - \{v_{\nu-1}\} = G - \{v_\nu, v_{\nu-1}\}$ .

Continuando este processo, ordenamos os vértices de  $G$ ,  $v_\nu, \dots, v_1$  de modo que  $v_j$  é adjacente a um máximo de  $k$  vértices de entre os vértices  $v_{j-1}, \dots, v_1$ . Assim, para os colorir são necessárias  $k + 1$  cores no máximo.  $\square$

**Teorema 4.151.** *Seja  $G$  um grafo conexo. Se  $G$  não é completo nem um ciclo de comprimento ímpar, então  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

**Teorema 4.152.** *Para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe um grafo  $G_k$  tal que  $g(G_k) > 3$  e  $\chi(G_k) = k$ .*

**Prova:** Vamos provar por indução em  $k$ . Para  $k = 1$  o resultado é verdadeiro, basta considerar o grafo  $G$  com dois vértices sem arestas: temos que  $\chi(G) = 1$  e  $g(G) = \infty > 3$ .

Agora supomos que o resultado é verdadeiro para  $G_1, G_2, \dots, G_k$ . Consideremos cópias distintas dos grafos  $G_i$  e  $V$  um conjunto de vértices  $v_1, \dots, v_k$ , com  $v_i \in G_i$ . Construimos o grafo  $G_{k+1}$  constituído pelos vértices de  $G_1, \dots, G_k$  e de  $V$ , pelas arestas de  $G_1, \dots, G_k$  e pelas arestas que ligam cada vértice  $v_i$  de  $V$  aos correspondentes  $v_j \in G_j$ , com  $j \leq i$ . Assim,  $\chi(G_{k+1}) \leq k + 1$ .

Por outro lado, em  $G_1$  existe um vértice de cor  $c_1$ , em  $G_2$  existe outro vértice de cor  $c_2 \neq c_1$ , já que  $\chi(G_2) = 2$ . Em  $G_3$  existe um vértice de cor  $c_3 \notin \{c_1, c_2\}$ , pois  $\chi(G_3) = 3$  e continuando, existe em  $G_k$  um vértice de cor  $c_k$ , logo o vértice  $v$  de  $V$  adjacente a  $v_1, v_2, \dots, v_k$  tem de ter cor  $c_{k+1}$ , logo  $\chi(G_{k+1}) \geq k + 1$ . Então  $\chi(G_{k+1}) = k + 1$ .  $\square$

**Teorema 4.153.** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $\nu$ , então  $\chi(G) + \chi(G^C) \leq \nu + 1$ .*

**Prova:** Vamos provar por indução em  $\nu$ . Para um grafo  $G$  de ordem 1 temos  $\chi(G) = 1$  e  $\chi(G^C) = 0$  e a desigualdade verifica-se. Para um grafo  $G$  de ordem 2 temos  $\chi(G) = 1$  e  $\chi(G^C) = 2$  ou  $\chi(G) = 2$  e  $\chi(G^C) = 1$  e a desigualdade verifica-se.

Vamos supor que o resultado é verdadeiro para todos os grafos com menos vértices do que  $\nu$ . Seja  $v \in V(G)$  e consideremos  $G' = G - \{v\}$ , logo

$$\chi(G) \leq \chi(G') + 1 \quad \text{e} \quad \chi(G^C) \leq \chi(G'^C) + 1.$$

Se se verificarem as duas igualdades, temos que  $d_G(v) \geq \chi(G')$  e  $d_{G^C}(v) \geq \chi(G'^C)$ , assim

$$\chi(G) + \chi(G^C) = \chi(G') + \chi(G'^C) + 2 \leq d_G(v) + d_{G^C}(v) + 2 = \nu(G) + 1.$$

Se as duas igualdades não se verificarem, então

$$\chi(G) + \chi(G^C) \leq \chi(G') + \chi(G'^C) + 1 \leq \nu(G') + 1 + 1 = \nu(G) + 1.$$

$\square$

**Corolário 4.154.** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $\nu$ , então  $\chi(G)\chi(G^C) \leq \left\lfloor \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2 \right\rfloor$ .*

**Prova:** Usando o Teorema anterior podemos escrever

$$4\chi(G)\chi(G^C) \leq 4\chi(G)\chi(G^C) + (\chi(G) - \chi(G^C))^2 = (4\chi(G)\chi(G^C))^2 \leq (\nu+1)^2.$$

□

O próximo resultado estabelece um minorante e um majorante para o número cromático em função do número de vértices e de arestas.

**Teorema 4.155.** *Seja  $G$  um grafo conexo com  $\nu$  vértices e  $\varepsilon$  arestas, então*

$$\left\lceil \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon} \right\rceil \leq \chi(G) \leq \left\lfloor \sqrt{2\varepsilon} + 1 \right\rfloor$$

**Prova:** Seja  $\chi(G) = k$  e sejam  $S_1, \dots, S_k$  uma partição do conjunto dos vértices de modo que os vértices de  $S_i$  têm a cor  $c_i$  e  $|S_i| = \nu_i$ .

Para provar a primeira desigualdade, ordenamos os vértices de acordo com a ordem dos conjuntos  $S_i$ , a respectiva matriz de adjacência  $A_G$  é formada por blocos nulos na sua diagonal. Denotemos por  $N_0$  e  $N_1$  o número de entradas 0 e 1 da matriz  $A_G$ , respectivamente. Então (usando a desigualdade de Chebyshev) temos

$$N_0 \geq \sum_{i=1}^k \nu_i^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^k \nu_i\right)^2}{k} = \frac{\nu^2}{k}$$

e  $N_1 = 2\varepsilon$ , uma vez que cada aresta incide em dois vértices. Assim, o número total de entradas da matriz  $A_G$  é dado por

$$\nu^2 = N_0 + N_1 \geq \frac{\nu^2}{k} + 2\varepsilon \Leftrightarrow \chi(G) = k \geq \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}.$$

Para provar a segunda desigualdade, observemos que entre cada dois conjuntos  $S_i$  e  $S_j$ , com  $i \neq j$ , existe pelo menos uma aresta, logo

$$\varepsilon \geq \frac{\chi(G)(\chi(G) - 1)}{2} > \frac{(\chi(G) - 1)^2}{2} \Leftrightarrow 2\varepsilon > (\chi(G) - 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2\varepsilon} + 1 > \chi(G).$$

□

## 4.9 Os Teoremas das Quatro e Cinco Cores

**Definição 4.156.** Quando um grafo  $G$  admite uma representação numa superfície  $S$ , sem que existam arestas que se intersectam, dizemos que  $G$  é *realizável* em  $S$ .

Dizemos que  $G$  é um *grafo planar* se admitir uma realização no plano. Chamamos *face do grafo planar*  $G$  a cada uma das regiões do plano limitada por arestas; além disso, temos uma face ilimitada (“exterior” ao grafo). Indicamos o conjunto das faces de  $G$  por  $F(G)$ .

Chamamos *grau de uma face* ao número de arestas que a delimitam, sendo que uma aresta de corte conta duas vezes para o grau da face que corta.

*Nota 4.157.* Apesar de um qualquer grafo ser representado no plano com arestas que se cruzam, isso não significa que o mesmo não seja planar, uma vez que pode existir uma representação na qual as arestas não se cruzam.

**Teorema 4.158 (Fórmula de Euler).** *Se  $G$  é um grafo conexo planar, então para qualquer realização no plano temos*

$$|F(G)| + \nu(G) = \varepsilon(G) + 2.$$

**Prova:** Vamos provar por indução no número de arestas.

Se  $\varepsilon(G) = 0$ , como o grafo é conexo temos de ter  $\nu(G) = 1$  e  $|F(G)| = 1$ , logo  $1 + 1 = 0 + 2$ .

Se  $\varepsilon(G) = 1$ , como o grafo é conexo temos de ter  $\nu(G) = 2$  e  $|F(G)| = 1$ , logo  $1 + 2 = 1 + 2$ .

Seja  $\varepsilon > 1$ , por hipótese de indução, vamos supor que a fórmula de Euler é válida para grafos conexos planares com menos do que  $\varepsilon$  arestas.

Seja  $G_\varepsilon$  um grafo conexo planar com  $\varepsilon = \varepsilon(G)$  arestas. O grafo  $G_\varepsilon$  obtem-se de  $G_{\varepsilon-1}$  acrescentando uma aresta ao conjunto  $E(G_{\varepsilon-1})$ , ou seja,  $\varepsilon(G_\varepsilon) = \varepsilon(G_{\varepsilon-1}) + 1$ . Este passo de indução pode ser feito de duas formas diferentes:

1. a nova aresta incide em vértices já existentes, e nesse caso  $\nu(G_\varepsilon) = \nu(G_{\varepsilon-1})$
2. a nova aresta liga um vértice de  $V(G_{\varepsilon-1})$  a um novo vértice, e nesse caso  $\nu(G_\varepsilon) = \nu(G_{\varepsilon-1}) + 1$ .

No primeiro caso, a nova aresta origina uma nova face e temos  $|F(V(G_\varepsilon))| = |F(V(G_{\varepsilon-1}))| +$

1. Assim

$$|F(V(G_\varepsilon))| + \nu(G_\varepsilon) = |F(V(G_{\varepsilon-1}))| + 1 + \nu(G_{\varepsilon-1}) = \varepsilon(G_{\varepsilon-1}) + 3 = \varepsilon(G_\varepsilon) + 2.$$

No segundo caso, a nova aresta não origina uma nova face e temos  $|F(V(G_\varepsilon))| = |F(V(G_{\varepsilon-1}))|$ . Assim

$$|F(V(G_\varepsilon))| + \nu(G_\varepsilon) = |F(V(G_{\varepsilon-1}))| + \nu(G_{\varepsilon-1}) + 1 = \varepsilon(G_{\varepsilon-1}) + 3 = \varepsilon(G_\varepsilon) + 2.$$

□

**Corolário 4.159.** *Seja  $G$  um grafo simples, conexo e planar com mais do que uma aresta, então  $\varepsilon(G) \leq 3\nu(G) - 6$ .*

**Prova:** Como cada face limitada tem grau maior ou igual a 3, logo a soma dos graus de todas as faces é maior ou igual a  $3|F(G)|$ . Por outro lado, a soma dos graus de todas as faces é igual a  $2\varepsilon(G)$ , uma vez que cada aresta conta para o grau de duas faces, e as arestas de corte contam duas vezes, logo  $3|F(G)| \leq 2\varepsilon(G)$ . Assim,

$$3(\varepsilon(G) + 2 - \nu(G)) \leq 2\varepsilon(G) \Leftrightarrow \varepsilon(G) \leq 3\nu(G) - 6.$$

□

*Nota 4.160.* Do corolário anterior podemos concluir que o grafo completo  $K_5$  não é planar, uma vez que  $\varepsilon(K_5) = 10 > 9 = 3\nu(K_5) - 6$ .

**Corolário 4.161.** *Seja  $G$  um grafo simples, conexo, bipartido e planar com mais do que uma aresta, então  $\varepsilon(G) \leq 2\nu(G) - 4$ .*

**Prova:** Como  $G$  é um grafo bipartido, qualquer ciclo de  $G$  tem comprimento par (ver Teorema 4.64). Assim, cada face limitada tem grau maior ou igual a 4, logo a soma dos graus de todas as faces é maior ou igual a  $4|F(G)|$ . Por outro lado, a soma dos graus de todas as faces é igual a  $2\varepsilon(G)$ , uma vez que cada aresta conta para o grau de duas faces e as arestas de corte contam duas vezes, logo  $4|F(G)| \leq 2\varepsilon(G) \Leftrightarrow 2|F(G)| \leq \varepsilon(G)$ . Assim,

$$2(\varepsilon(G) + 2 - \nu(G)) \leq \varepsilon(G) \Leftrightarrow \varepsilon(G) \leq 2\nu(G) - 4.$$

□

*Nota 4.162.* Do corolário anterior podemos concluir que o grafo bipartido completo  $K_{3,3}$  não é planar, uma vez que  $\varepsilon(K_{3,3}) = 9 > 8 = 2\nu(K_{3,3}) - 4$ .

**Teorema 4.163.** *Seja  $G$  um grafo simples, conexo e planar, então  $\delta(G) \leq 5$ .*

**Prova:** Seja  $n_i$  o número de vértices com grau  $i$ , logo  $\delta(G) \leq i \leq \Delta(G)$ , e temos que

$$\sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i = \nu(G) \quad \text{e} \quad \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} in_i = 2\varepsilon(G),$$

uma vez que no segundo somatório estamos a contar as arestas duas vezes. Usando o Corolário 4.159 vem

$$\frac{1}{2} \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} in_i \leq 3 \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i - 6 \Leftrightarrow 6 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i(6-i).$$

Se  $\delta(G) \geq 6$  teríamos  $6 \leq \frac{1}{2} (n_6 \cdot 0 + n_7 \cdot (-1) + n_8 \cdot (-2) + \dots)$ , o que é claramente impossível. Logo  $\delta(G) \leq 5$ .  $\square$

**Definição 4.164.** Dado um grafo planar  $G$  designamos por *grafo dual* de  $G$ , que indicamos por  $G^*$ , o grafo obtido a partir de  $G$  fazendo as seguintes operações:

1. a cada face de  $G$  corresponde um vértice de  $G^*$
2. a cada aresta de  $e \in E(G)$  corresponde uma aresta  $e^* \in E(G^*)$  que une duas faces vizinhas de  $G$ , cruzando a aresta  $e$ .

**Teorema 4.165.** *Seja  $G$  um grafo planar e  $G^*$  o seu dual. Temos que*

1.  $G^*$  é conexo
2. se  $G$  é conexo, então  $(G^*)^* = G$

**Prova:** 1. Como podemos passar de uma face  $f_i$  de  $G$  para qualquer outra face  $f_j$  de  $G$  através de arestas de  $G^*$ , concluímos que existe um caminho entre quaisquer dois vértices  $v_i^*$  (correspondente à face  $f_i$ ) e  $v_j^*$  (correspondente à face  $f_j$ ) de  $G^*$ , ou seja,  $G^*$  é conexo.

2. Por construção de  $G^*$  temos  $\nu(G^*) = |F(G)|$  e  $\varepsilon(G^*) = \varepsilon(G)$ . Como toda a aresta de cada face de  $F(G^*)$  é atravessada por uma aresta de  $G$ , é claro que cada face

de  $G^*$  contém pelo menos um vértice de  $G$ . Como  $G$  e  $G^*$  são conexos, aplicando a fórmula de Euler temos

$$|F(G)| + \nu(G) = \varepsilon(G) + 2 = \varepsilon(G^*) + 2 = |F(G^*)| + \nu(G^*)$$

de onde concluímos que  $|F(G^*)| = \nu(G)$ , e logo cada face de  $G^*$  contém exactamente um vértice de  $G$ . Agora, aplicando o processo de construção do dual a  $G^*$  obtemos  $(G^*)^* = G$ .

□

*Nota 4.166.* Quando o grafo  $G$  não é conexo a igualdade  $(G^*)^* = G$  não se verifica.

**Teorema 4.167 (Teorema das 5 Cores).** *Seja  $G$  um grafo planar sem lacetes, então  $G$  admite uma 5-coloração.*

**Prova:** Vamos provar por indução no número de vértices de um grafo simples e planar (o facto de existirem arestas paralelas não altera a coloração em causa).

Seja  $G$  um grafo simples planar e supomos que o resultado é verdadeiro para todos os grafos com menos vértices do que  $\nu(G)$ .

Pelo Teorema 4.163 existe um vértice  $v \in V(G)$  tal que  $d_G(v) \leq 5$  e por hipótese o grafo  $G - v$  admite uma 5-coloração.

Se nos vértices adjacentes a  $v$  não usamos as 5 cores, então uma das que não é usada pode ser aplicada no vértice  $v$  e o resultado está provado.

Se nos vértices adjacentes a  $v$ , digamos  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ , usamos cinco cores distintas, a cor  $i$  para o vértice  $v_i$ , vamos supor que os vértices estão por essa ordem no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Indicamos por  $V_{ij}$  o conjunto dos vértices onde podemos chegar partindo de  $v_i$  (que tem cor  $i$ ) usando apenas as cores  $i$  e  $j$ , logo  $v_i \in V_{ij}$ .

Consideremos o conjunto  $V_{13}$ , se este conjunto for constituído apenas pelo vértice  $v_1$ , significa que  $v_1$  não tem vértices adjacentes com a cor 3 e podemos atribuir a cor 3 a  $v_1$  e a cor 1 a  $v$ . Observemos que se  $V_{13}$  tiver mais do que um vértice podemos trocar as cores 1 e 3 e continuamos a ter uma coloração. Se  $v_3 \notin V_{13}$  podemos trocar as cores 1 e 3 e atribuir a cor 1 a  $v$  e temos uma coloração.

Quando  $v_3 \in V_{13}$  consideramos um caminho  $v_1 w_1 \dots w_k v_3$  com cores 1 e 3 alternadas. Tomemos o ciclo  $C$ , que resulta de acrescentar o vértice  $v$  ao caminho  $V_{13}$ , o qual divide



o plano em duas componentes conexas por caminhos, sendo que  $v_2$  e  $v_4$  se encontram em componentes distintas. Agora tomemos o conjunto  $V_{24}$  o qual tem de estar contido na componente conexa em que está  $v_2$ , logo  $v_4 \notin V_{24}$ . Agora trocamos as cores 2 e 4 no conjunto  $V_{24}$  e podemos atribuir a cor 2 ao vértice  $v$ .  $\square$

**Definição 4.168.** Uma coloração de faces de um grafo planar sem arestas de corte consiste em atribuir cores distintas a faces com uma aresta em comum.

**Observação 4.169.** Devido à Definição 4.164 a coloração de faces de um grafo planar  $G$  sem arestas de corte corresponde à coloração de vértices do grafo dual  $G^*$ .

**Teorema 4.170 (Tait).** *Seja  $G$  um grafo planar hamiltoniano, então  $G$  admite uma 4-coloração das suas faces.*

**Prova:** Seja  $G$  um grafo hamiltoniano e  $C$  um ciclo de Hamilton, recordemos em que  $C$  não existem arestas nem vértices repetidos, mas estão todos os vértices de  $G$ . As faces que estão no interior da curva  $C$  podem ser coloridas com as cores 1 e 2 alternadamente, e as faces que estão no exterior da curva  $C$  podem ser coloridas com as cores 3 e 4 alternadamente.  $\square$

**Teorema 4.171 (Teorema das 4 Cores).** *Todo o grafo planar admite uma 4-coloração das suas faces.*

Este resultado foi provado por Appel e Haken em 1977.

## 4.10 Exercícios Propostos

**Exercício 4.18.** Faça uma representação do grafo  $G = (V, E, \psi)$  e do seu complementar  $G^C$  em que:

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$  e  $\psi(e_1) = v_1v_2$ ,  $\psi(e_2) = v_2v_3$ ,  $\psi(e_3) = v_3v_3$ ,  $\psi(e_4) = v_3v_4$ ,  $\psi(e_5) = v_2v_4$ ,  $\psi(e_6) = v_4v_5$ ,  $\psi(e_7) = v_2v_5$  e  $\psi(e_8) = v_2v_5$ .
- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$  e  $\psi(e_1) = v_1v_2$ ,  $\psi(e_2) = v_2v_3$ ,  $\psi(e_3) = v_2v_5$ ,  $\psi(e_4) = v_3v_4$ ,  $\psi(e_5) = v_2v_4$ ,  $\psi(e_6) = v_4v_5$  e  $\psi(e_7) = v_1v_4$ .

**Exercício 4.19.** Dos grafos do Exercício 4.18 indique se algum é simples. Determine os graus de cada um dos seus vértices e indique  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$ .

**Exercício 4.20.** Mostre que em qualquer grafo simples existem dois vértices com o mesmo grau.

**Exercício 4.21.** Determine a matriz de incidência e a matriz de adjacência dos grafos do Exercício 4.18.

**Exercício 4.22.** Considere a matriz de incidência do grafo  $G$

$$M_G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Represente o grafo  $G$ .

b) Determine a matriz de adjacência de  $G$ .

**Exercício 4.23.** Represente, a menos de isomorfismo, todos os grafos simples com  $\nu$  vértices, com  $\nu = 1, 2, 3, 4$ .

**Exercício 4.24.** Mostre que o isomorfismo entre grafos preserva os graus dos vértices.

**Exercício 4.25.** Seja  $G$  um grafo com vértices  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$ . Construa, caso seja possível, um grafo em que

a)  $d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = d_G(v_4) = 1$

b)  $d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = 3$  e  $d_G(v_4) = 2$

c)  $d_G(v_1) = d_G(v_2) = 5$  e  $d_G(v_3) = d_G(v_4) = 2$

**Exercício 4.26.** Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu(G) = 56$  e  $\varepsilon(G^C) = 80$ . Determine  $\varepsilon(G)$ .

**Exercício 4.27.** Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu$  vértices. Determine  $\delta(G^C)$  e  $\Delta(G^C)$  em função de  $\nu$ ,  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$ .

**Exercício 4.28.** Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular. Mostre que  $2\varepsilon(G) = k\nu(G)$ .

**Exercício 4.29.** Determine o número de arestas e represente um grafo  $G$ , caso exista, em cada um dos seguintes casos:

- a)  $\nu(G) = 9$  e  $G$  é 3-regular
- b)  $\nu(G) = 10$ , em que dois vértices têm grau 4 e os restantes têm grau 3.

**Exercício 4.30.** Seja  $G$  um grafo regular e bipartido, com partição dos vértices  $X$  e  $Y$ . Mostre que  $|X| = |Y|$ .

**Exercício 4.31.** Considere o grafo bipartido completo  $K_{3,3}$ . Quais dos ciclos  $C_i$  com  $i = 3, 4, 5, 6$  são subgrafos de  $K_{3,3}$ ?

**Exercício 4.32.** Represente, a menos de isomorfismo, todos os subgrafos induzidos pelo grafos

- a)  $K_5$                       b)  $K_{3,2}$                       c)  $C_4$                       d)  $C_5$

**Exercício 4.33.** Sejam  $u$  e  $v$  vértices do grafo  $G$ , definimos a relação  $R$  por  $uRv$  se e só se  $u$  e  $v$  são vértices conexos em  $G$ . Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência e obtenha as classes de equivalência.

**Exercício 4.34.** Seja  $G$  um grafo não trivial. Mostre que  $G$  é conexo se e só se qualquer que seja a partição de  $V(G)$  em dois conjuntos não vazios  $V_1$  e  $V_2$  existe uma aresta com um extremo em  $V_1$  e outro extremo em  $V_2$ .

**Exercício 4.35.** Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu(G) \geq 3$ .

- a) Mostre que, se  $\varepsilon(G) > \binom{\nu(G)-1}{2}$ , então  $G$  é conexo.
- b) Indique um grafo simples com  $\varepsilon(G) = \binom{\nu(G)-1}{2}$  que não seja conexo.

**Exercício 4.36.** Seja  $G$  um grafo simples. Mostre que se  $G$  não é conexo, então  $G^C$  é um grafo conexo. Prove que a recíproca não é verdadeira.

**Exercício 4.37.** Mostre que se um grafo tem exactamente dois vértices de grau ímpar, então esses vértices pertencem à mesma componente conexa.

**Exercício 4.38.** Represente, caso seja possível, um grafo simples com 7 vértices, 5 arestas e 3 componentes conexas.

**Exercício 4.39.** Do grafo que representou no exercício anterior indique, justificando, todas as arestas que são pontes.

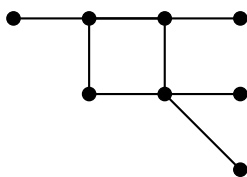


Figura 4.62

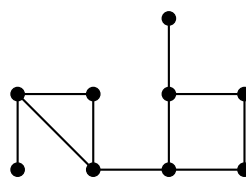


Figura 4.63

**Exercício 4.40.** Considere os grafos das Figuras 4.62 e 4.63.

- Identifique as arestas que são pontes em cada um deles. Justifique.
- Se em cada um dos grafos eliminar todas essas pontes obtém um grafo com quantas componentes conexas?

**Exercício 4.41.** Represente, a menos de isomorfismo, todas as árvores com  $\nu$  vértices, em que  $\nu = 3, 4, 5$ .

**Exercício 4.42.** Seja  $T$  uma árvore com  $\nu$  vértices e  $G$  um grafo simples tal que  $\delta(G) \geq \nu - 1$ . Prove que  $G$  contém um subgrafo isomorfo a  $T$ .

**Exercício 4.43.** Represente todas as árvores geradoras dos grafos das Figuras 4.62 e 4.63.

**Exercício 4.44.** Uma árvore tem 45 vértices e precisamente 20 têm grau 3. Assumindo que os restantes vértices têm grau menor ou igual a 2 determine quantas folhas tem a árvore.

**Exercício 4.45.** Considere uma árvore  $G$  com 201 vértices em que precisamente 61 têm grau 4 e assuma que os restantes vértices têm grau menor ou igual a 3.

- Determine quantas folhas, no máximo, pode ter a árvore  $G$ .
- Determine quantos vértices de grau 2, no máximo, pode ter a árvore  $G$ .
- Determine quantos vértices de grau 3, no máximo, pode ter a árvore  $G$ .

**Exercício 4.46.** Seja  $G$  uma árvore com  $\nu$  vértices tal que  $\delta(G) = \nu - 1$ . Quantas folhas tem a árvore  $G$ ?

**Exercício 4.47.** Justifique que o grafo da Figura 4.62 não é euleriano

**Exercício 4.48.** Indique os valores de  $n$  para os quais o grafo completo  $K_n$  é euleriano.

**Exercício 4.49.** Indique os valores de  $m$  e  $n$  para os quais o grafo bipartido completo  $K_{m,n}$  é euleriano.

**Exercício 4.50.** Encontre um circuito euleriano, caso exista, do grafo da Figura 4.64, usando o algoritmo de Fleury.

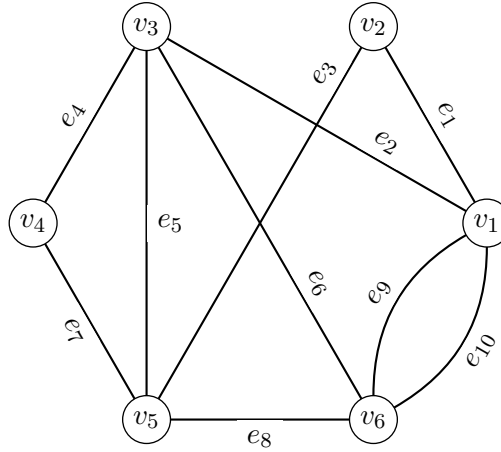


Figura 4.64

**Exercício 4.51.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.65.

- Mostre que o grafo  $G$  é euleriano.
- Aplice o algoritmo de Fleury para obter um circuito euleriano de  $G$ .

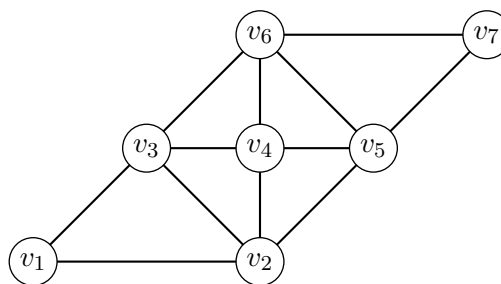


Figura 4.65

**Exercício 4.52.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.66. Justifique que  $G$  é grafo euleriano e obtenha um circuito euleriano de  $G$ .

**Exercício 4.53.** Mostre que se  $G$  é um grafo bipartido com um número ímpar de vértices, então  $G$  é um grafo não hamiltoniano.

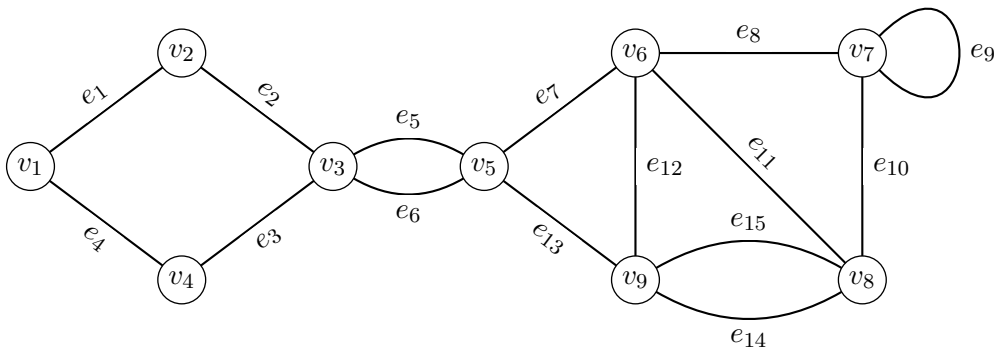


Figura 4.66

**Exercício 4.54.** Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu$  vértices. Determine o menor e o maior número de arestas de modo que:

- $G$  seja conexo.
- $G$  seja não conexo.
- $G$  tenha exactamente  $k$  componentes conexas.
- $G$  seja hamiltoniano.
- $G$  seja não hamiltoniano.

**Exercício 4.55.** Aplique o algoritmo de Kruskal para obter uma árvore minimal do grafo da Figura 4.41.

**Exercício 4.56.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.67, onde em cada aresta é indicado o respectivo peso.

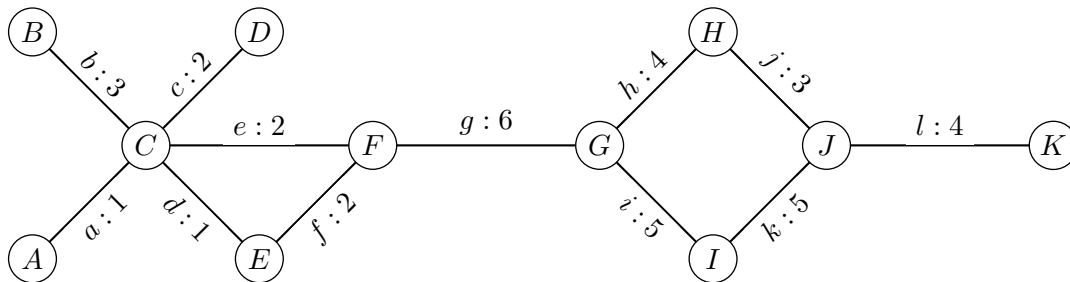


Figura 4.67

- a) Indique todas as arestas que pertencem a todas as árvores geradoras de  $G$ . Justifique.
- b) Aplique o algoritmo de Kruskal para obter uma árvore minimal do grafo  $G$ .

**Exercício 4.57.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.68, onde em cada aresta é indicado o respectivo peso.

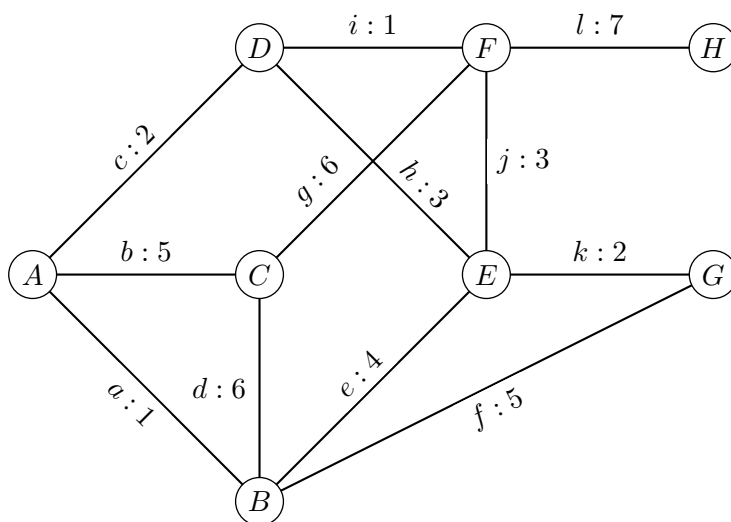


Figura 4.68

- a) Indique, justificando, quantas arestas têm as árvores geradoras de  $G$ .
- b) Indique, caso exista, uma aresta que pertença a todas as árvores geradoras de  $G$ . Justifique.
- c) Aplique o algoritmo de Kruskal para obter uma árvore minimal do grafo  $G$ .

**Exercício 4.58.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.68, onde em cada aresta é indicado o respectivo peso. Aplique o algoritmo de Kruskal para obter uma árvore minimal do grafo  $G$ .

**Exercício 4.59.** Aplique o algoritmo “guloso” para obter uma coloração dos grafos da Figura 4.70.

**Exercício 4.60.** Estime o número cromático  $\chi(G)$  dos grafos  $G$  da Figura 4.70.

**Exercício 4.61.** Estime o número cromático  $\chi(G)$  dos grafos  $G$  da Figura 4.71.

**Exercício 4.62.** Seja  $G$  um grafo com  $\nu$  vértices. Para cada  $k \leq \nu$ , determine se é admissível uma  $k$ -coloração dos vértices de  $G$  nos seguintes casos.

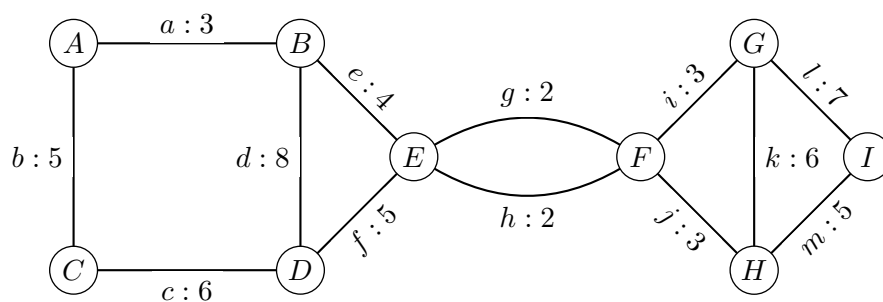


Figura 4.69

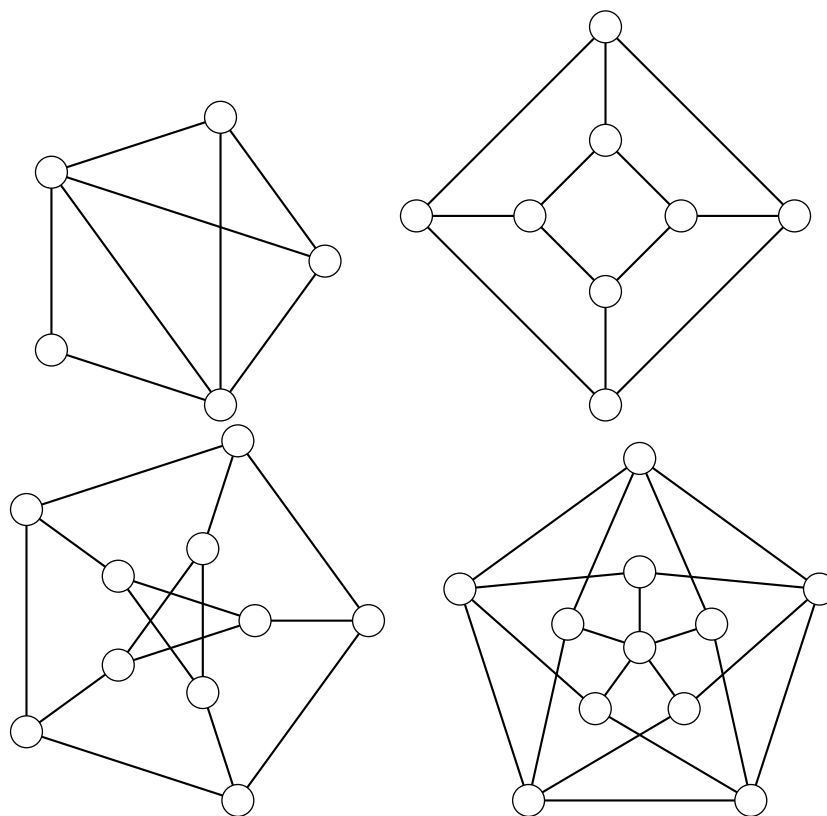


Figura 4.70: Grafos para fazer colorações

a)  $K_6$ b)  $K_{5,1}$ c)  $K_{n,1}$ d)  $K_{n,2}$ e)  $K_{n,3}$ 

**Exercício 4.63.** Mostre que um grafo  $G$  tem  $\chi(G) = 2$  se e só se não tem ciclos de comprimento ímpar.

## Fim do Semestre

**Exercício 4.64.** Prove que se  $G$  é um grafo bipartido e planar, então  $\delta(G) \leq 3$ .



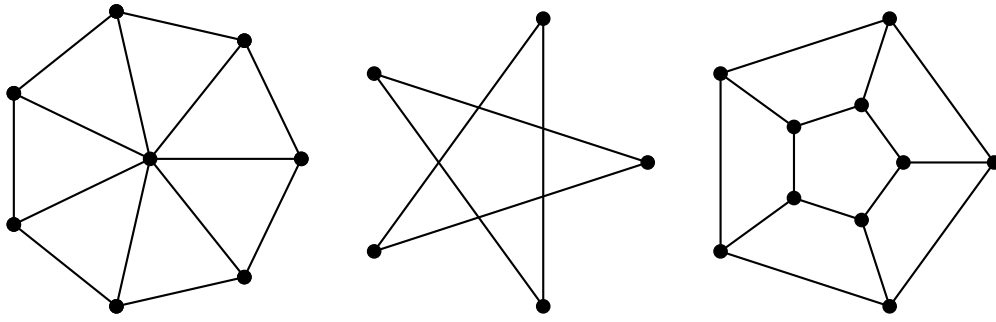


Figura 4.71: Grafos e Número Cromático

**Exercício 4.65.** Seja  $G$  um grafo planar em que todas as faces têm grau 3 e seja  $n_i$  o número de vértice com grau  $i$ , onde  $i = \delta(G), \dots, \Delta(G)$ . Prove que

$$\sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} (6-i)n_i = 12.$$

**Exercício 4.66.** Existe algum grafo planar bipartido com 7 vértices e 11 arestas?

**Exercício 4.67.** Seja  $G$  um grafo, sem lacetes, conexo de ordem  $\nu \geq 11$ . Prove que ou  $G$  ou  $G^C$  é não planar.

**Exercício 4.68.** Seja  $G$  um grafo conexo planar e  $G^*$  o seu dual. Prove que  $|V(G^*)| = |F(G)|$ ,  $|E(G^*)| = |E(G)|$  e  $|F(G^*)| = |V(G)|$ .

# Índice

## Algoritmo

Fleury, 78

Kruskal, 84

## Aplicação, 4

Bijectiva, 4

Identidade, 4

Inclusão, 8

Injectiva, 4

Inversa, 6

Sobrejectiva, 4

## Arestas, 47

Adjacentes, 47

Incidente, 47

Paralelas, 47

Ponte, 67

## Arranjo, 34

Completo, 40

## Árvore, 69

Geradora, 73

Minimal, 83

## Caminho, 54

Hamiltoniano, 80

## Ciclo, 54

Hamiltoniano, 80

## Circuito, 53

Euleriano, 75

## Combinação, 35

Completa, 41

## Conjunto

Bem Ordenado, 26

Infinito, 11

## Conjuntos

Equipotentes, 9

Convolução de Vandermonde, 39

## Floresta, 69

## Folha, 69

## Função, 1

Composição, 3

Conjunto de Chegada, 1

Conjunto de Partida, 1

Contradomínio, 1

Domínio, 1

Iguais, 3

Imagem, 1, 2

Imagem Inversa, 2

Imagem Recíproca, 2

Função de Incidência, 47

## Grafo, 47

Berge, 94

Bipartido, 61

Completo, 62

Ciclo, 59

Clique, 88

- Máxima, 88
- Maximal, 88
- Número, 88
- Complementar, 58
- Completo, 59
- Componente Conexa, 63
- Conexo, 63
- Dual, 99
- Euleriano, 75
- Finito, 49
- Hamiltoniano, 80
- Infinito, 49
- $k$ -regular, 60
- $k$ -partido, 62
  - Completo, 62
- Número Cromático, 91
- Perfeito, 94
- Planar, 97
  - Face, 97
  - Grau da Face, 97
- Simples, 49
- Trivial, 49
- Valuado, 83
  - Peso, 83
- Grafos
  - Iguais, 49
  - Isomorfos, 52, 53
- Indução Matemática
  - Generalizada, 26
  - Princípio, 15
  - Segundo Princípio, 20
- Lacete, 47
- Matriz
  - Adjacência, 50
  - Incidência, 50
- Passeio, 53
  - Comprimento, 54
- Permutação, 34
  - Completa, 40
- Subgrafo, 55
  - Gerador, 55
  - Induzido, 57
  - Próprio, 55
  - Suporte das Arestas, 57
- Sucessão
  - Fibonacci, 24
- Teorema
  - Binomial, 37
  - Cantor-Schröder-Bernstein, 9
  - Dirac, 82
  - Ore, 81
- Trajecto, 53
  - Euleriano, 75
- Vértices, 47
  - Adjacentes, 47
  - Coloração, 88
  - Conexos, 63
  - Distância, 55
  - Extremos, 47
  - Grau, 49
  - Isolados, 49
  - Vizinhança, 47