



Folhas de Apoio e Exercícios de  
**Matemática Discreta**

Nuno Correia

2020/2021



# Índice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Funções e Aplicações</b>                                 | <b>1</b>  |
|          | Semana 6 . . . . .  | 1         |
|          | Semana 7 . . . . .  | 8         |
|          | 1.1 Exercícios Propostos . . . . .                          | 11        |
| <b>2</b> | <b>Indução Matemática</b>                                   | <b>15</b> |
|          | Semana 8 . . . . .  | 23        |
|          | 2.1 Exercícios Propostos . . . . .                          | 24        |
| <b>3</b> | <b>Introdução à Combinatória</b>                            | <b>27</b> |
|          | 3.1 Princípios Gerais de Contagem . . . . .                 | 27        |
|          | 3.2 Arranjos, Permutações e Combinações . . . . .           | 29        |
|          | Semana 9 . . . . .  | 32        |
|          | 3.3 Arranjos, Permutações e Combinações Completas . . . . . | 35        |
|          | 3.4 Exercícios Propostos . . . . .                          | 38        |
| <b>4</b> | <b>Grafos</b>   | <b>41</b> |
|          | Semana 10 . . . . .   | 41        |
|          | 4.1 Conceitos e Resultados Fundamentais . . . . .           | 41        |
|          | 4.1.1 Grafos Isomorfos . . . . .                            | 45        |
|          | Semana 11 . . . . .   | 46        |
|          | 4.1.2 Passeios, Circuitos, Caminhos e Ciclos . . . . .      | 46        |
|          | 4.1.3 Subgrafos . . . . .                                   | 48        |
|          | 4.2 Grafos Especiais . . . . .                              | 51        |
|          | 4.2.1 Grafos Completos . . . . .                            | 52        |

|  |    |
|--|----|
| 4.2.2 Grafos Regulares . . . . .                   | 53 |
| 4.2.3 Grafos Bipartidos . . . . .                  | 53 |
| Semana 12 . . . . .                                | 55 |
| 4.3 Grafos Conexos . . . . .                       | 55 |
| 4.4 Árvores . . . . .                              | 60 |
| Semana 13 . . . . .                                | 65 |
| 4.5 Grafos Eulerianos . . . . .                    | 65 |
| 4.6 Grafos Hamiltonianos . . . . .                 | 69 |
| Semana 14 . . . . .                                | 71 |
| 4.7 Grafos Valuados . . . . .                      | 71 |
| 4.8 Coloração de Grafos . . . . .                  | 75 |
| Fim do Semestre . . . . .                          | 80 |
| 4.9 Os Teoremas das Quatro e Cinco Cores . . . . . | 82 |
| 4.10 Exercícios Propostos . . . . .                | 87 |
| Fim do Semestre . . . . .                          | 93 |

# Capítulo 1

## Funções e Aplicações

### Semana 6

**Definição 1.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos e  $f$  uma relação  $f$  de  $X$  para  $Y$ . Dizemos que  $f$  é função de  $X$  para  $Y$  se para qualquer  $x \in X$  existe no máximo um  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in f$ .

Se  $(x, y) \in f$ , dizemos que  $y$  é a *imagem* de  $x$  e escrevemos  $f(x) = y$ .

Ao conjunto  $X$  chamamos *conjunto de partida*, e ao conjunto  $Y$  chamamos *conjunto de chegada*.

As funções são representadas por letras minúsculas:  $f, g, h$ .

*Exemplo 1.2.* Dados os conjuntos  $X = \{1, 2, 3\}$  e  $Y = \{1, 2\}$ .

A relação  $R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$  é uma função.

A relação  $R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$  não é função, pois para  $x = 2$  temos  $(2, 1) \in R_2$  e  $(2, 2) \in R_2$ .

A relação  $R_3 = \{(3, 1)\}$  é uma função.

**Definição 1.3.** Chamamos *domínio da função*  $f$  aos elementos de  $X$  que têm alguma imagem em  $Y$ , ou seja,

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in X : (x, y) \in f \text{ para algum } y \in Y\} \\ &= \{x \in X : f(x) = y \text{ para algum } y \in Y\}. \end{aligned}$$

Chamamos *contradomínio da função*  $f$  aos elementos de  $Y$  que são a imagem de algum

elemento de  $X$ , ou seja,

$$\begin{aligned} CD_f &= \{y \in Y : (x, y) \in f \text{ para algum } x \in X\} \\ &= \{y \in Y : f(x) = y \text{ para algum } x \in X\}. \end{aligned}$$

*Exemplo 1.4.* Considere os conjuntos  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$  e a função  $f$  com conjunto de partida  $X$  e conjunto de chegada  $Y$  dada por  $f = \{(1, 2), (3, 2)\}$ .

Temos que  $D_f = \{1, 3\}$  e  $CD_f = \{2\}$ .

*Exemplo 1.5.* Seja  $f$  a função com conjunto de partida  $\mathbb{R}$  e conjunto de chegada  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ .

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $CD_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Definição 1.6.** Consideremos os conjuntos  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$  e a função  $f$  de  $X$  para  $Y$ . Definimos o conjunto *imagem de  $A$  por  $f$*  como

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}$$

e o conjunto *imagem recíproca de  $B$  por  $f$* , ou *imagem inversa de  $B$  por  $f$*  como

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

*Exemplo 1.7.* Consideremos o conjunto  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  e a função  $f$  de  $X$  para  $X$  dada por  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ , isto é  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 1$ ,  $f(3) = 3$  e  $f(4) = 2$ .

Dado  $A = \{1, 2\}$  temos  $f(A) = \{f(1), f(2)\} = \{1, 1\} = \{1\}$ .

Dado  $B = \{1, 2\}$  temos  $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in \{1, 2\}\} = \{1, 2, 4\}$ .

Dado  $B = \{1\}$  temos  $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in \{1\}\} = \{1, 2\}$ .

**Exercício 1.1.** Considere os conjuntos  $A_1, A_2 \subseteq X$ ,  $B_1, B_2 \subseteq Y$  e  $f$  uma função de  $X$  para  $Y$ . Mostre que:

- a)  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- b)  $f(A_1 \cap A_2) \supseteq f(A_1) \cap f(A_2)$  nem sempre é verdadeira
- c)  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- d)  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- e)  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

**Resolução:** Tomemos  $y \in f(A_1 \cap A_2)$ , por definição existe  $x \in A_1 \cap A_2$  tal que  $f(x) = y$ . Como  $x \in A_1$  temos que  $y = f(x) \in f(A_1)$ , por outro lado, como  $x \in A_2$  temos que  $y = f(x) \in f(A_2)$ . Assim,  $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ , e concluimos que  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ , o que prova a).

Consideremos a função  $f$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$  e os conjuntos  $A_1 = [0, 2]$  e  $A_2 = [-2, 0]$ . Por um lado temos  $f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{f(0)\} = \{0\}$ , por outro lado temos  $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 4] \cap [0, 4] = [0, 4]$ ; o que prova b).

Tomemos  $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ , o que prova c).

Tomemos  $y \in f(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow y = f(x)$  para algum  $x \in A_1 \cup A_2 \Leftrightarrow y = f(x)$  para algum  $x \in A_1 \vee x \in A_2 \Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ , o que prova d).

Tomemos  $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ , o que prova e).  $\square$

**Definição 1.8.** Duas funções  $f$  e  $g$  dizem-se iguais,  $f = g$ , se têm o mesmo conjunto de partida, o mesmo conjunto de chegada, o mesmo domínio e a mesma acção (isto é, associam o mesmo elemento a cada elemento do seu domínio).

*Exemplo 1.9.* A função  $f$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  que a cada  $x$  associa  $\sqrt{x}$  e a função  $g$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}_0^+$  que a cada  $x$  associa  $\sqrt{x}$  não são iguais,  $f \neq g$ .

**Definição 1.10.** Sejam  $f$  uma função de  $X$  para  $Y$  e  $g$  uma função de  $Y$  para  $Z$ . Chamamos *composição de  $f$  com  $g$ , ou  $g$  após  $f$* , à função  $g \circ f$  de  $X$  para  $Z$  dada por  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ , com domínio

$$D_{g \circ f} = \{x \in X : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}.$$

*Exemplo 1.11.* Sejam  $f$  a função de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x + 1$  e  $g$  a função de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  dada por  $g(x) = x^2$ . Temos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2) = (x^2)^2 = x^4$$

**Exercício 1.2.** Considere as funções  $f$  e  $g$  dadas por  $f(x) = 1 + \sqrt{2-x}$  e  $g(x) = \ln(4-x)$  com conjuntos de partida e de chegada  $\mathbb{R}$ . Defina a função  $g \circ f$ .

**Resolução:** O domínio de  $f$  é dado por  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x \geq 0\} = ]-\infty, 2]$  e o domínio de  $g$  é dado por  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x > 0\} = ]-\infty, 4[$ .

A função  $g \circ f$  é dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 + \sqrt{2-x}) = \ln(4 - 1 - \sqrt{2-x}) = \ln(3 - \sqrt{2-x}),$$

cujo domínio é

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in ]-\infty, 2] \wedge 1 + \sqrt{2-x} \in ]-\infty, 4[ \},$$

ou seja,  $1 + \sqrt{2-x} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} < 3 \Leftrightarrow 2-x < 9 \Leftrightarrow x > -7$ , assim

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \wedge x > -7\} = ]-7, 2].$$

□

**Definição 1.12.** A uma função  $f$  de  $X$  para  $Y$  cujo domínio coincide com o conjunto de partida  $X$ , chamamos *aplicação de  $X$  para  $Y$*  e indicamos  $f : X \rightarrow Y$ .

*Exemplo 1.13.* A função  $f$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sqrt{x}$  não é uma aplicação.

A função  $g$  de  $\mathbb{R}_0^+$  para  $\mathbb{R}$  dada por  $g(x) = \sqrt{x}$  é uma aplicação, pois  $D_g = \mathbb{R}_0^+$ .

**Definição 1.14.** Dado um conjunto  $X$ , definimos a *aplicação identidade em  $X$*  como

$$\begin{aligned} \text{Id}_X : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto \text{Id}_X(x) = x \end{aligned}$$

**Definição 1.15.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação. Dizemos que  $f$  é *aplicação injectiva* ou *uma injeção* se quaisquer elementos distintos de  $X$  têm imagens distintas, isto é,

$$\forall_{x_1, x_2 \in X} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

ou equivalentemente

$$\forall_{x_1, x_2 \in X} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Dizemos que  $f$  é *aplicação sobrejectiva* ou *uma sobrejecção* se qualquer elemento do conjunto de chegada  $Y$  for a imagem de algum elemento de  $X$ , isto é,

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} : f(x) = y.$$

Dizemos que  $f$  é *aplicação bijectiva* ou *uma bijecção* se for injectiva e sobrejectiva.



*Exemplo 1.16.* Consideremos a aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   

$$x \mapsto x^2$$
.

A aplicação  $f$  não é injectiva, pois  $1 \neq -1$ , mas  $f(1) = 1 = f(-1)$ .

A aplicação  $f$  não é sobrejectiva, pois  $-2 \in \mathbb{R}$  o conjunto de chegada, mas não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = -2$ .

*Exemplo 1.17.* Consideremos a aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$   

$$x \mapsto x^2$$
.

A aplicação  $f$  não é injectiva, pois  $1 \neq -1$ , mas  $f(1) = 1 = f(-1)$ .

A aplicação  $f$  é sobrejectiva, pois para qualquer  $y \in \mathbb{R}_0^+$  o conjunto de chegada, podemos tomar  $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$  ou  $x = -\sqrt{y} \in \mathbb{R}$  e temos  $f(x) = y$ .

*Exemplo 1.18.* Consideremos a aplicação  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$   

$$x \mapsto x^2$$
.

A aplicação  $f$  é injectiva, mas não é sobrejectiva.

*Exemplo 1.19.* Consideremos a aplicação  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$   

$$x \mapsto x^2$$
.

A aplicação  $f$  é injectiva e sobrejectiva, logo é bijectiva.

**Exercício 1.3.** Prove que a aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = e^{x+1}$  é injectiva, mas não sobrejectiva.

**Resolução:** Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Logo  $e^{x_1+1} = e^{x_2+1} \Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ , o que prova que a aplicação  $f$  é injectiva.

Dado  $y \in \mathbb{R}$  queremos encontrar  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y \Leftrightarrow e^{x+1} = y \Leftrightarrow x + 1 = \ln y$ , impossível para  $y \leq 0$ , por exemplo a aplicação  $f$  nunca toma o valor  $y = 0$ . Assim, a aplicação  $f$  não é sobrejectiva.  $\square$

**Exercício 1.4.** Prove que a aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3 - x$  é sobrejectiva, mas não injectiva.

**Resolução:** Observemos que podemos escrever  $f(x) = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$  e é fácil concluir que  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 1$ . Logo a aplicação  $f$  não é injectiva.

Para provar a sobrejectividade usamos um argumento um pouco diferente: primeiro observemos que a função é contínua, além disso  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ; o que prova que  $f$  toma todos os valores de  $\mathbb{R}$ . Portanto, a aplicação  $f$  é sobrejectiva.  $\square$

**Exercício 1.5.** Prove que a aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 3x - 2$  é uma bijecção.

**Resolução:** Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Logo  $3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ , o que prova que a aplicação  $f$  é injectiva.

Dado  $y \in \mathbb{R}$  queremos encontrar  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y \Leftrightarrow 3x - 2 = y \Leftrightarrow 3x = y + 2 \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3} \in \mathbb{R}$ , assim, a aplicação  $f$  é sobrejectiva. Portanto, a aplicação  $f$  é bijectiva.  $\square$

**Definição 1.20.** Dada uma aplicação bijectiva  $f : X \rightarrow Y$ , definimos a *aplicação inversa* de  $f$ ,  $f^{-1}$ , como  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  em que  $f^{-1}(y) = x$  se e só se  $f(x) = y$ , ou seja

$$f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in f\}.$$

*Exemplo 1.21.* Consideremos a aplicação 
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x + 1 \end{array}.$$

Então  $y = 2x + 1 \Leftrightarrow y - 1 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$  e a aplicação inversa é dada por

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2} \end{array}.$$

**Teorema 1.22.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma bijecção. Então  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  é uma bijecção,  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$  e  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y$ .*

**Prova:** Sejam  $y_1, y_2 \in Y$  com  $y_1 \neq y_2$ . Como  $f$  é sobrejectiva existem  $x_1, x_2 \in X$  tais que  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ . Como  $f$  é injectiva e  $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2)$ , logo  $x_1 \neq x_2$ . Por definição de aplicação inversa  $x_1 = f^{-1}(y_1)$  e  $x_2 = f^{-1}(y_2)$ , logo  $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ , ou seja,  $f^{-1}$  é injectiva.

Seja  $x \in X$ , como  $f$  é aplicação existe  $y \in Y$  tal que  $f(x) = y$ . Por definição de aplicação inversa  $x = f^{-1}(y)$ . Assim, para todo o  $x \in X$  existe  $y \in Y$  tal que  $f^{-1}(y) = x$ , ou seja,  $f^{-1}$  é sobrejectiva.

Então  $f^{-1}$  é uma aplicação bijectiva.

O conjunto de partida e de chegada de  $f \circ f^{-1}$  e de  $\text{Id}_Y$  é  $Y$ . Seja  $y \in Y$ , como  $f$  é sobrejectiva existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Por definição de aplicação inversa temos que  $f^{-1}(y) = x$ . Assim,

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) \Leftrightarrow \text{Id}_Y(y) = (f \circ f^{-1})(y),$$

ou seja,  $\text{Id}_Y = f \circ f^{-1}$ .

O conjunto de partida e de chegada de  $f^{-1} \circ f$  e de  $\text{Id}_X$  é  $X$ . Seja  $x \in X$ , como  $f^{-1}$  é sobrejectiva existe  $y \in Y$  tal que  $f^{-1}(y) = x$ . Por definição de aplicação inversa temos que  $f(x) = y$ . Assim,

$$x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) \Leftrightarrow \text{Id}_X(x) = (f^{-1} \circ f)(x),$$

ou seja,  $\text{Id}_X = f^{-1} \circ f$ . □

*Exemplo 1.23.* A aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  dada por  $f(x) = e^x$  é uma bijecção. A aplicação inversa  $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f^{-1}(x) = \ln x$  é uma bijecção. Além disso, dado  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(e^x) = \ln(e^x) = x = \text{Id}_{\mathbb{R}}(x),$$

e dado  $x \in \mathbb{R}^+$  temos

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\ln x) = e^{\ln x} = x = \text{Id}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

**Teorema 1.24.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  aplicações, temos que*

- a) *se  $f$  e  $g$  são injectivas, então  $g \circ f$  é injectiva*
- b) *se  $f$  e  $g$  são sobrejectivas, então  $g \circ f$  é sobrejectiva*
- c) *se  $f$  e  $g$  são bijectivas, então  $g \circ f$  é bijectiva e temos  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$*

**Prova:** Sejam  $x_1, x_2 \in X$  tais que  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$  e supomos que  $f$  e  $g$  são injectivas. Então

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

ou seja,  $g \circ f$  é injectiva e provamos a).

Seja  $z \in Z$ , como  $g$  é sobrejectiva existe  $y \in Y$  tal que  $g(y) = z$ . Como  $f$  é sobrejectiva existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Assim, existe  $x \in X$  tal que  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ , ou seja,  $g \circ f$  é sobrejectiva e provamos b).

Se  $f$  e  $g$  são bijectivas, da a) e b) concluímos que  $g \circ f$  também é bijectiva. Dado  $z \in Z$ , vimos no parágrafo anterior que existe  $x \in X$  tal que  $(g \circ f)(x) = z$ , e por definição de aplicação concluímos que  $(g \circ f)^{-1}(z) = x$ . Por outro lado, como  $g(f(x)) = z$ , por definição de aplicação inversa  $g^{-1}$  temos que  $f(x) = g^{-1}(z)$ ; e por definição de aplicação inversa de  $f^{-1}$  temos que  $x = f^{-1}(g^{-1}(z))$ . Assim,  $(g \circ f)^{-1}(z) = x = f^{-1}(g^{-1}(z))$ , de onde concluímos que  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ . □

**Teorema 1.25.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  aplicações tais que  $g \circ f = \text{Id}_X$ . Então  $f$  é injectiva e  $g$  é sobrejectiva.*

**Prova:** Sejam  $x_1, x_2 \in X$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Aplicando  $g$  temos que

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Leftrightarrow \text{Id}_X(x_1) = \text{Id}_X(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

de onde concluímos que  $f$  é injectiva.

Seja  $x \in X$ , então  $x = \text{Id}_X(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ , logo existe  $y = f(x) \in Y$  tal que  $g(y) = x$ , ou seja,  $g$  é sobrejectiva.  $\square$

## Semana 7

**Definição 1.26.** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  tais que  $A \subseteq B$  definimos a *aplicação inclusão* como  $\text{inc}_A : A \rightarrow B$  dada por  $\text{inc}_A(x) = x$ .

**Proposição 1.27.** *Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  tais que  $A \subseteq B$ , a aplicação inclusão  $\text{inc}_A : A \rightarrow B$  é injectiva.*

**Prova:** Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $\text{inc}_A(x_1) = \text{inc}_A(x_2)$ , logo  $x_1 = x_2$ , ou seja,  $\text{inc}_A$  é injectiva.  $\square$

*Exemplo 1.28.* Sejam  $A = ]1, 2] \subset B = [0, 3]$ , a aplicação inclusão  $\text{inc}_{]1,2]} : ]1, 2] \rightarrow [0, 3]$  é injectiva, mas não sobrejectiva.

**Exercício 1.6.** Dados os conjuntos  $A \subseteq B$ . Determine uma condição de modo que a aplicação inclusão  $\text{inc}_A : A \rightarrow B$  seja sobrejectiva.

**Resolução:** Para a aplicação  $\text{inc}_A : A \rightarrow B$  ser sobrejectiva, dado  $b \in B$  existe  $a \in A$  tal que  $\text{inc}_A(a) = b$ , o que equivale a  $a = b$ , logo  $b \in A$ . Ou seja,  $B \subseteq A$ , portanto  $A = B$ .  $\square$

**Teorema 1.29 (Cantor-Schröder-Bernstein).** *Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos tais que existe uma aplicação injectiva de  $A$  para  $B$  e uma aplicação injectiva de  $B$  para  $A$ . Então existe uma aplicação bijectiva entre  $A$  e  $B$ .*

**Exercício 1.7.** Prove que existe uma bijecção entre os conjuntos  $]0, 1[$  e  $[0, 1]$ .

**Resolução:** Pela Proposição 1.27 a aplicação inclusão  $\text{inc}_{]0,1[} : ]0,1[ \rightarrow [0,1]$  é injectiva.

Agora, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\rightarrow ]0,1[ \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tomemos  $x_1, x_2 \in [0,1]$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ , então  $\frac{x_1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x_2}{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$  e concluímos que a aplicação  $f$  é injectiva.

Como  $\text{inc}_{]0,1[} : ]0,1[ \rightarrow [0,1]$  é injectiva e  $f : [0,1] \rightarrow ]0,1[$  é injectiva, pelo Teorema 1.29 existe uma bijecção  $g : ]0,1[ \rightarrow [0,1]$ .  $\square$

**Exercício 1.8.** Mostre que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0,1[$  dada por  $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$  é uma aplicação injectiva. Justifique que existe uma bijecção entre  $\mathbb{R}$  e  $]0,1[$ .

**Resolução:** Começamos por observar que

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 + e^{-x} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x} \neq -1\} = \mathbb{R}$$

coincide com o conjunto de partida de  $f$ , e portanto  $f$  é uma aplicação.

Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^{-x_1}} &= \frac{1}{1+e^{-x_2}} \Rightarrow 1+e^{-x_1} = 1+e^{-x_2} \Rightarrow e^{-x_1} = e^{-x_2} \\ &\Rightarrow \ln(e^{-x_1}) = \ln(e^{-x_2}) \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

e concluímos que  $f$  é injectiva.

Como a aplicação inclusão  $\text{inc}_{]0,1[} : ]0,1[ \rightarrow \mathbb{R}$  é injectiva, pelo Teorema 1.29 concluímos que existe uma bijecção entre  $\mathbb{R}$  e  $]0,1[$ .  $\square$

**Definição 1.30.** Se existir uma bijecção entre dois conjuntos dizemos que os conjuntos têm a *mesma cardinalidade* ou que são *equipotentes*. Intuitivamente os conjuntos “têm o mesmo número de elementos”.

No caso de  $X$  ter a mesma cardinalidade de  $\mathbb{N}$ , dizemos que  $X$  é um *conjunto enumerável*.

**Exemplo 1.31.** A aplicação  $f : [0,1] \rightarrow [0,2]$  dada por  $f(x) = 2x$  é uma bijecção, assim os conjuntos  $[0,1]$  e  $[0,2]$  são equipotentes.

*Exemplo 1.32.* Os conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{N}_0$  são equipotentes, ou seja,  $\mathbb{N}_0$  é um conjunto enumerável, visto que a aplicação  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$  dada por  $f(n) = n - 1$  é bijetiva.<sup>1</sup>

*Exemplo 1.33.* Os conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$  são equipotentes, ou seja,  $\mathbb{Z}$  é conjunto enumerável.<sup>2</sup> Consideramos a aplicação  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  bijetiva dada por

$$\begin{aligned} f(1) = 0 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = -1 \quad f(4) = 2 \quad f(5) = -2 \\ f(6) = 3 \quad f(7) = -3 \quad \dots \end{aligned}$$

Mais formalmente a bijecção  $f$  pode ser definida do seguinte modo

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \text{ se } n \text{ é par} \\ -\frac{n-1}{2} & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

*Exemplo 1.34.* Os conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Q}$  são equipotentes, ou seja,  $\mathbb{Q}$  é conjunto enumerável.

*Exemplo 1.35.* O conjunto  $\mathbb{R}$  não é enumerável. Começamos por mostrar que o conjunto  $]0, 1[$  não é enumerável, para isso vamos supor que  $]0, 1[$  é um conjunto enumerável e iremos obter uma contradição.

Se  $]0, 1[$  é conjunto enumerável, então existe uma aplicação bijetiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow ]0, 1[$  tal que

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} \dots \\ f(2) &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}x_{24} \dots \\ f(3) &= 0, x_{31}x_{32}x_{33}x_{34} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

e todos os elementos do conjunto  $]0, 1[$  estão nesta lista.

Mas o elemento  $y \in ]0, 1[$  dado por  $y = 0, y_1y_2y_3y_4 \dots$  em que  $y_1 \neq x_{11}$ ,  $y_2 \neq x_{22}$ ,  $y_3 \neq x_{33}$ ,  $\dots$ ,  $y_i \neq x_{ii}$ ,  $\dots$  não está nessa lista e pertence ao intervalo  $]0, 1[$ , o que é absurdo.

---

<sup>1</sup>**Hotel de Hilbert:** Um hotel tem infinitos quartos todos ocupados, como é que o gerente pode hospedar um novo cliente? Coloca o hóspede do quarto 1 no quarto 2, o do quarto 2 no quarto 3, ... e o novo cliente ocupa o quarto 1.

<sup>2</sup>**Hotel de Hilbert:** Um hotel tem infinitos quartos todos ocupados, como é que o gerente pode hospedar um número infinito de novos clientes? Coloca o hóspede do quarto 1 no quarto 2, o do quarto 2 no quarto 4, ... ou seja, os que estavam hospedados ocupam os quartos pares e os novos clientes ocupam os quartos ímpares.

Portanto,  $]0, 1[$  não é conjunto enumerável. Por outro lado, existe uma bijecção entre  $\mathbb{R}$  e  $]0, 1[$ , isto é, são equipotentes. Assim,  $\mathbb{R}$  não é conjunto enumerável.

**Definição 1.36.** Dizemos que  $A \neq \emptyset$  é um *conjunto infinito* se for equipotente a uma sua parte própria, ou seja, se for equipotente a  $B \subsetneq A$ .

*Exemplo 1.37.* Como  $\mathbb{N}$  é equipotente com  $\mathbb{N}_0$ , concluímos que  $\mathbb{N}_0$  é infinito; logo  $\mathbb{N}$  também é infinito.

**Exercício 1.9.** Prove que o conjunto  $[-1, 1]$  é um conjunto infinito.

**Resolução:** Consideremos a aplicação  $f[0, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = 2x - 1$ . Tomemos  $x_1, x_2 \in [0, 1]$  tais que  $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$  e concluímos que  $f$  é injectiva. Seja  $y \in [-1, 1]$  e queremos encontrar  $x \in [0, 1]$  tal que  $f(x) = y$ , ou seja,  $2x - 1 = y \Leftrightarrow 2x = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$ ; como  $-1 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y+1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{y+1}{2} \leq 1$ , concluímos que  $f$  é sobrejectiva.

Como  $f$  é uma aplicação bijectiva entre  $[0, 1]$  e  $[-1, 1]$  e  $[0, 1] \subseteq [-1, 1]$  temos que o conjunto  $[-1, 1]$  é infinito.  $\square$

## 1.1 Exercícios Propostos

**Exercício 1.10.** Decida se as seguintes relações  $R$  definidas de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  são ou não funções. Justifique.

a)  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$

b)  $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$

c)  $xRy \Leftrightarrow x + y = 1$

d)  $xRy \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$

e)  $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

**Exercício 1.11.** Considere as funções  $f(x) = 2x - 5$  e  $g(x) = x^2 + 2$ . Obtenha as expressões de  $g \circ f$  e de  $f \circ g$  e os respectivos domínios.

**Exercício 1.12.** Considere as funções  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  e  $g(x) = \ln x$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$ .

a) Determine o domínio da função  $f$ .

b) Determine o domínio da função  $g$ .

c) Determine o domínio da função  $g \circ f$ .

**Exercício 1.13.** Sabendo que  $f(x) = 2 - x$  e  $(g \circ f)(x) = 2x + 1$ , determine a expressão de  $g(x)$ .

**Exercício 1.14.** Considere as aplicações  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{x-2}$  e  $h(x) = 3x$ . Mostre que  $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$ .

**Exercício 1.15.** Dê exemplos de aplicações de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  que sejam:

- a) bijectivas
- b) injectivas, mas não sobrejectivas
- c) sobrejectivas, mas não injectivas
- d) nem injectivas, nem sobrejectivas.

**Exercício 1.16.** Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2 + 3$ .

- a) Verifique se  $f$  é injectiva.
- b) Verifique se  $f$  é sobrejectiva.
- c) Determine  $f^{-1}(7)$ ,  $f^{-1}(3)$  e  $f^{-1}(2)$ .

**Exercício 1.17.** Analise a injectividade, sobrejectividade e bijectividade das seguintes aplicações

- a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) = 2x$
- b)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) = \frac{1}{x}$
- c)  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  com  $f(x) = x^2 + 2$

**Exercício 1.18.** Justifique que as seguintes aplicações admitem inversa e obtenha a expressão da aplicação  $f^{-1}$ .

- a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(x) = 3x + 5$
- b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]3, +\infty[$ , com  $f(x) = e^{2x} + 3$



c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(x) = x^3 + 1$

d)  $f : ]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , com  $f(x) = (x - 1)^2$

e)  $f : \mathbb{R}^- \rightarrow [-1, +\infty[$ , com  $f(x) = x^2 - 1$

**Exercício 1.19.** Mostre que os conjuntos  $[0, 1]$  e  $[a, b]$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , são equipotentes.

**Exercício 1.20.** Mostre que os conjuntos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^+$  são equipotentes. Justifique que  $\mathbb{R}$  é um conjunto infinito.

**Exercício 1.21.** Prove que o conjunto dos números pares é enumerável.

**Exercício 1.22.** Prove que o conjunto dos números ímpares é enumerável.

**Exercício 1.23.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos enumeráveis. Prove que  $A \cup B$  é um conjunto enumerável.

**Exercício 1.24.** Dados dois conjuntos quaisquer  $A$  e  $B$ , definimos a relação  $\sim$  como  $A \sim B$  se e só se  $A$  e  $B$  são equipotentes. Mostre que  $\sim$  é uma relação de equivalência.



## Capítulo 2

# Indução Matemática

A indução matemática permite estabelecer a veracidade de uma proposição  $P(n)$  que depende de  $n \in \mathbb{N}$  para  $n \geq n_0$ , com  $n_0 \in \mathbb{N}$ .<sup>1</sup>

### Princípio de Indução Matemática

Consiste em dois passos:

- 1) **Passo básico:** Verificar a veracidade da proposição  $P(n_0)$  para o primeiro elemento, em geral  $n_0 = 1$
- 2) **Passo indutivo:** Admitindo que  $P(k)$  é verdade, mostrar que  $P(k + 1)$  também é verdade para qualquer  $k$  natural maior ou igual do que  $n_0$ , isto é, mostrar que  $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ .

Fica assim mostrado que  $P(n)$  é verdade para todo o  $n \geq n_0$ .

Chamamos *hipótese de indução* à condição  $P(k)$  ser verdadeira e *tese de indução* à condição  $P(k + 1)$  ser verdadeira.

**Exercício 2.1.** Verifique que  $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $P(1) : 1 + 2^1 = 2^{1+1} - 1 \Leftrightarrow 1 + 2 = 4 - 1$ , o que é verdade.

---

<sup>1</sup>O caso tipo é  $n_0 = 1$ , mas podemos ter  $n_0 \in \mathbb{N}_0$ .

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$ .

Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k+1} &= 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2 \times 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1, \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Exercício 2.2.** Mostre, usando indução matemática, que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) &= 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1) \left( \frac{k}{2} + 1 \right) = (k+1) \frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Exercício 2.3.** Mostre, usando indução matemática, que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $P(1) : 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ .

Temos que

$$\begin{aligned}
 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \\
 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
 &= (k+1) \left( \frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right) \\
 &= \frac{k+1}{6} (2k^2 + k + 6k + 6) \\
 &= \frac{k+1}{6} (2k^2 + 7k + 6) \\
 &= \frac{k+1}{6} (k+2)(2k+3),
 \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Exercício 2.4.** Mostre, usando indução matemática, que  $n! > 2^n$  para todo o  $n \geq 4$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : n! > 2^n$ , para todo o  $n \geq 4$ .

Antes de responder, observemos que:

$$P(1) : 1! > 2^1 \Leftrightarrow 1 > 2 \text{ é falso}$$

$$P(2) : 2! > 2^2 \Leftrightarrow 2 > 4 \text{ é falso}$$

$$P(3) : 3! > 2^3 \Leftrightarrow 6 > 8 \text{ é falso}$$

Passo básico: para  $n = 4$  temos  $P(4) : 4! > 2^4 \Leftrightarrow 24 > 16$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $k! > 2^k$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $(k+1)! > 2^{k+1}$ .

Temos que

$$\begin{aligned}
 (k+1)! &= (k+1) \times k! \\
 &> (k+1) \times 2^k, \text{ como } k \geq 4 \text{ temos } k+1 > 2 \\
 &> 2 \times 2^k = 2^{k+1}
 \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \geq 4$ .  $\square$

**Exercício 2.5.** Mostre, usando indução matemática, que  $n^3 - n$  é divisível por 3 para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : n^3 - n = 3r$  para algum  $r \in \mathbb{Z}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $P(1) : 1^3 - 1 = 0 = 3 \times 0$  e  $0 \in \mathbb{Z}$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $k^3 - k = 3r$  para algum  $r \in \mathbb{Z}$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $(k+1)^3 - (k+1) = 3s$  para algum  $s \in \mathbb{Z}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 2k \\ &= k^3 - k + 3k^2 + 3k = 3r + 3(k^2 + k) \\ &= 3(r + k^2 + k) = 3s, \text{ com } s = r + k^2 + k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Exercício 2.6.** Mostre, usando indução matemática, que  $n^2(n^2 - 1)$  é divisível por 12 para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : n^2(n^2 - 1) = 12r$  para algum  $r \in \mathbb{Z}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $P(1) : 1^2(1^2 - 1) = 0 = 12 \times 0$  e  $0 \in \mathbb{Z}$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $k^2(k^2 - 1) = 12r$  para algum  $r \in \mathbb{Z}$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $(k+1)^2[(k+1)^2 - 1] = 12s$  para algum  $s \in \mathbb{Z}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} (k+1)^2[(k+1)^2 - 1] &= (k^2 + 2k + 1)(k^2 + 2k) \\ &= k^4 + 2k^3 + 2k^3 + 4k^2 + k^2 + 2k \\ &= k^4 + 4k^3 + 5k^2 + 2k = k^4 - k^2 + 4k^3 + 6k^2 + 2k \\ &= 12r + 4k^3 + 6k^2 + 2k, \end{aligned}$$

se mostrarmos que  $4k^3 + 6k^2 + 2k$  é múltiplo de 12 obtemos o desejado. Tomemos  $Q(n) : 4n^3 + 6n^2 + 2n = 12t$  para algum  $t \in \mathbb{Z}$ , e vamos usar a indução para mostrar que é verdade para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $Q(1) : 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 2 \times 1 = 12 = 12 \times 1$  e  $1 \in \mathbb{Z}$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $Q(k)$  é verdade, isto é  $4k^3 + 6k^2 + 2k = 12t$  para algum  $t \in \mathbb{Z}$ , e queremos mostrar que  $Q(k+1)$  é verdade, isto é  $4(k+1)^3 + 6(k+1)^2 + 2(k+1) = 12u$  para algum  $u \in \mathbb{Z}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} 4(k+1)^3 + 6(k+1)^2 + 2(k+1) &= 4(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 6(k^2 + 2k + 1) + 2k + 2 \\ &= 4k^3 + 18k^2 + 26k + 12 \\ &= 4k^3 + 6k^2 + 2k + 12k^2 + 24k + 12 \\ &= 12t + 12(k^2 + 2k + 1) \\ &= 12u, \text{ com } u = t + k^2 + 2k + 1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ou seja,  $Q(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $Q(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Então  $(k+1)^2 [(k+1)^2 - 1] = 12r + 12u = 12s$  com  $s = r + u \in \mathbb{Z}$ , o que torna  $P(k+1)$  verdade; mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Exercício 2.7.** Mostre, usando indução matemática, a desigualdade de Bernoulli, isto é

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall x \geq -1,$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Passo básico: para  $n = 1$  temos  $P(1) : (1+x)^1 \geq 1+1 \times x \Leftrightarrow 1+x \geq 1+x$ , o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é  $(1+x)^k \geq 1+kx$ , e queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$ .

Temos que

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) \\ &= 1+x+kx+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \\ &\geq 1+(k+1)x \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k+1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Segundo Princípio de Indução Matemática**

Consiste em dois passos:

- 1) Verificar a veracidade da proposição  $P(n_0)$  para o primeiro elemento, em geral  $n_0 = 1$
- 2) Admitindo que  $P(n_0), P(n_0 + 1), P(n_0 + 2), \dots, P(k)$  é verdade mostrar que  $P(k+1)$  também é verdade para qualquer  $k$  natural maior ou igual do que  $n_0$ , isto é, mostrar que

$$P(n_0) \wedge P(n_0 + 1) \wedge P(n_0 + 2) \wedge \dots \wedge P(k) \Rightarrow P(k + 1).$$

Fica assim mostrado que  $P(n)$  é verdade para todo o  $n \geq n_0$ .

**Exercício 2.8.** Mostre que todo o número natural  $n \geq 2$  pode ser escrito como um produto de números primos.

*Um produto de números primos pode ter um número qualquer de factores, inclusive um factor.*

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n)$ :  $n$  pode ser escrito como um produto de números primos, para todo o  $n \geq 2$ .

- 1) Para  $n = 2$  temos  $P(2)$ : 2 é número primo, portanto é um produto de números primos, o que é verdade.
- 2) Admitimos que  $P(2), P(3), \dots, P(k)$  são verdade, queremos mostrar que  $P(k + 1)$  é verdade, isto é  $k + 1$  pode ser escrito como produto de números primos.

No caso em que  $k + 1$  é número primo  $P(k + 1)$  é verdade, pois é um produto de números primos com um único factor.

No caso em que  $k + 1$  não é primo, o mesmo é divisível por outro natural que não 1 e o próprio  $k + 1$ , assim existem  $a, b \in \{2, 3, \dots, k\}$  tais que  $k + 1 = a \times b$ . Como  $P(a)$  e  $P(b)$  são verdadeiras temos que  $a = a_1 a_2 \dots a_r$  e  $b = b_1 b_2 \dots b_s$  onde  $a_i$  e  $b_i$  são números primos. Então  $k + 1 = a_1 a_2 \dots a_r b_1 b_2 \dots b_s$  pode ser escrito como um produto de números primos, ou seja  $P(k + 1)$  é verdade.

Mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \geq 2$ . □



**Exercício 2.9.** Considere a sucessão  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por

$$\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_1 = 16 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \text{ para todo } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre que  $a_n = 5 \times 2^n + 2 \times 3^n$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Resolução:** Temos a proposição  $P(n)$ :  $a_n = 5 \times 2^n + 2 \times 3^n$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- 1) Para  $n = 0$  temos  $P(0)$ :  $a_0 = 5 \times 2^0 + 2 \times 3^0 = 7$ , o que é verdade.
- 2) Admitimos que  $P(0), P(1), P(2), \dots, P(k)$  são verdade, queremos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é,  $a_{k+1} = 5 \times 2^{k+1} + 2 \times 3^{k+1}$ .

Temos

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 5a_k - 6a_{k-1} \\ &= 5(5 \times 2^k + 2 \times 3^k) - 6(5 \times 2^{k-1} + 2 \times 3^{k-1}) \\ &= 25 \times 2^k + 10 \times 3^k - 30 \times 2^{k-1} - 12 \times 3^{k-1} \\ &= 25 \times 2^k - 15 \times 2^k + 10 \times 3^k - 4 \times 3^k \\ &= 10 \times 2^k + 6 \times 3^k = 5 \times 2^{k+1} + 2 \times 3^{k+1}, \end{aligned}$$

ou seja  $P(k+1)$  é verdade.

Mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ . □

**Exercício 2.10 (Sucessão de Fibonacci).** Considere a sucessão  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por recorrência como

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ para } n \geq 2 \end{cases}.$$

- a) Calcule  $f_2, f_3, f_4, f_5$  e  $f_6$ .
- b) Seja  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Mostre que  $\alpha$  é uma solução de  $x^2 - x - 1 = 0$ .
- c) Mostre que  $\alpha^{k-1} = \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3}$ .

d) Mostre que  $f_3 > \alpha$  e  $f_4 > \alpha^2$

e) Mostre que  $f_n > \alpha^{n-2}$ , para todo o  $n \geq 3$ .

**Resolução:** a)

$$f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$$

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$$

$$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$$

$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$$

$$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$$

b) Substituindo  $\alpha$  na equação temos  $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$  o que equivale a

$$\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} - 4 = 0,$$

o que é uma proposição verdadeira, logo  $\alpha$  é solução da equação.

c) Da alínea anterior sabemos que  $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$  e logo temos  $\alpha^{k-3}\alpha^2 = \alpha^{k-3}(\alpha + 1) \Leftrightarrow \alpha^{k-1} = \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3}$ .

d) Como  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  podemos fazer a seguinte construção

$$4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 3 < 1 + \sqrt{5} < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} < \alpha < 2 = f_3.$$

Como  $\alpha^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  podemos fazer a seguinte construção

$$4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 5 < 3 + \sqrt{5} < 6 \Rightarrow \frac{5}{2} < \alpha^2 < 3 = f_4.$$

e) Temos a proposição  $P(n) : f_n > \alpha^{n-2}$ , para todo o  $n \geq 3$ .

1) Para  $n = 3$  temos  $P(3) : f_3 > \alpha^{3-2} \Leftrightarrow f_3 > \alpha$ , que vimos ser verdade na alínea anterior.

2) Admitindo que  $P(3), P(4), \dots, P(k)$  são verdade, vamos mostrar que  $P(k+1)$  é verdade, isto é  $f_{k+1} > \alpha^{k-1}$ .

Temos que

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} > \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3} = \alpha^{k-1},$$

onde usámos a definição da sucessão de Fibonacci, a hipótese de indução e a alínea

c); ou seja  $P(k+1)$  é verdade.

Mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \geq 3$ .

□

## Semana 8

Para o Princípio da Indução Generalizada começamos por estabelecer a seguinte definição.

**Definição 2.1.** Dizemos que  $(S, \leq)$  tem uma *boa ordem* se  $(S, \leq)$  é um conjunto totalmente ordenado e qualquer subconjunto não vazio de  $S$  tem mínimo.

*Exemplo 2.2.*  $(\mathbb{N}, \leq)$ , onde  $\leq$  é a ordem usual, tem boa ordem.

*Exemplo 2.3.*  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_l)$ , onde  $\leq_l$  é a ordem lexicográfica definida por

$$(m, n) \leq_l (m', n') \Leftrightarrow m < m' \vee (m = m' \wedge n \leq n'),$$

tem boa ordem.

### Princípio de Indução Generalizada

Supomos que  $(S, \leq)$  tem boa ordem e  $P(x)$  é uma proposição que depende de  $x \in S$ . Para mostrar que  $P(x)$  é verdade para todo o  $x \in S$  basta ver que:

- 1) para  $x = x_0$ ,  $P(x_0)$  é verdade, onde  $x_0$  é o mínimo de  $S$ .
- 2) para  $x \in S$  com  $x_0 < x$ , se  $P(y)$  é verdade para todo o  $y < x$ , então  $P(x)$  é verdade.

Assim,  $P(x)$  é verdade para todo o  $x \in S$ .

**Exercício 2.11.** Considere  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  com a ordem lexicográfica e a função

$$a : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(m, n) \mapsto a(m, n) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } m = n = 0 \\ a(m-1, n) + 1 & , \text{ se } m > 0 \wedge n = 0 \\ a(m, n-1) + n & , \text{ se } n > 0 \end{cases}.$$

a) Calcule  $a(1, 1)$ ,  $a(1, 2)$  e  $a(3, 0)$ .

b) Mostre que  $a(m, n) = m + \frac{n(n+1)}{2}$  para todo o  $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

**Resolução:** a)

$$a(1, 1) = a(1, 0) + 1 = a(0, 0) + 1 + 1 = 2$$

$$a(1, 2) = a(1, 1) + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$a(3, 0) = a(2, 0) + 1 = a(1, 0) + 1 + 1 = a(0, 0) + 1 + 2 = 3$$

b) Temos a proposição  $P(m, n) : a(m, n) = m + \frac{n(n+1)}{2}$ , para todo o  $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

1) Para  $(m, n) = (0, 0)$  temos  $P(0, 0) : a(0, 0) = 0 + \frac{0 \times (0+1)}{2} = 0$ , o que é verdade.

2) Para  $(0, 0) <_l (m, n)$ , admitindo que  $P(s, t)$  é verdade para todo o  $(s, t) <_l (m, n)$ , isto é,

$$a(s, t) = s + \frac{t(t+1)}{2} \text{ para todo o } (s, t) <_l (m, n),$$

vamos mostrar que  $P(m, n)$  é verdade, isto é,  $a(m, n) = m + \frac{n(n+1)}{2}$ .

Se  $n = 0$  temos  $m > 0$  e assim

$$a(m, 0) = a(m-1, 0) + 1 = m-1 + \frac{0 \times (0+1)}{2} + 1 = m,$$

usando a hipótese com  $(m-1, 0) <_l (m, 0)$ , o que é verdade.

Se  $n > 0$  temos

$$\begin{aligned} a(m, n) &= a(m, n-1) + n = m + \frac{(n-1) \times n}{2} + n = m + \frac{n^2 - n + 2n}{2} \\ &= m + \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

usando a hipótese com  $(m, n-1) <_l (m, n)$ , o que é verdade.

Mostramos assim que  $P(m, n)$  é verdadeira para todo o  $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

□

## 2.1 Exercícios Propostos

**Exercício 2.12.** Mostre, usando indução matemática, que a soma dos primeiros  $n$  números ímpares é  $n^2$ , isto é,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

**Exercício 2.13.** Mostre, usando indução matemática, que

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

**Exercício 2.14.** Mostre, usando indução matemática, que  $n^2 < n!$ , para todo o  $n \geq 4$ .

**Exercício 2.15.** Seja  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Mostre que para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$  temos

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

**Exercício 2.16.** Mostre, usando indução matemática, que  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq n$ , para todo o  $n \geq 3$ .

**Exercício 2.17.** Considere a sucessão  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por

$$\begin{cases} u_0 = 200 \\ u_1 = 220 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, \text{ para todo o } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre, usando indução matemática, que  $u_n = 5 \times 2^{n+2} + 180$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Exercício 2.18.** Considere a sucessão  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = 1 \\ v_n = 4v_{n-1} - 4v_{n-2}, \text{ para todo o } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre, usando indução matemática, que  $v_n = 2^n - n2^{n-1}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Exercício 2.19.** Prove que  $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \leq_l)$  é um conjunto bem ordenado.

**Exercício 2.20.** Considere  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  com a ordem lexicográfica e a função

$$a : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(m, n) \mapsto a(m, n) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } m = n = 0 \\ a(m-1, n) + 1 & , \text{ se } m > 0 \wedge n = 0 \\ a(m, n-1) + 1 & , \text{ se } n > 0 \end{cases}.$$

Mostre, usando indução generalizada, que  $a(m, n) = m + n$  para todo o  $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

**Exercício 2.21.** Considere  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  com a ordem lexicográfica e a função

$$a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(m, n) \mapsto a(m, n) = \begin{cases} 5 & , \text{ se } m = n = 1 \\ a(m-1, n) + 2 & , \text{ se } m > 1 \wedge n = 1 \\ a(m, n-1) + 2 & , \text{ se } n > 1 \end{cases}.$$

Mostre, usando indução generalizada, que  $a(m, n) = 2(m + n) + 1$  para todo o  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

## Capítulo 3

# Introdução à Combinatória

### 3.1 Princípios Gerais de Contagem

**Princípio da Multiplicação:** Se um procedimento pode ser decomposto numa sequência de  $k$  tarefas  $T_1, T_2, \dots, T_k$  e há  $n_i$  maneiras de realizar a tarefa  $T_i$ , então há  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  maneiras de realizar o procedimento.

*Exemplo 3.1.* Usando o alfabeto  $\{a, b, c\}$  podemos formar  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$  palavras com 4 letras.

**Exercício 3.1.** Sejam  $M$  um conjunto com  $m$  elementos e  $N$  um conjunto com  $n$  elementos. Quantas aplicações  $f : M \rightarrow N$  existem?

**Resolução:** Consideremos que  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , então cada  $f(x_i) = y_j$ , onde  $N = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Assim, existem  $n \times n \times \dots \times n = n^m$  aplicações de  $M$  em  $N$ .  $\square$

**Princípio da Soma:** Se um procedimento pode ser feito de  $n_1$  ou de  $n_2$  maneiras e não há sobreposições, isto é, se nenhuma das  $n_1$  maneiras é igual a qualquer uma das  $n_2$  maneiras possíveis, então há  $n_1 + n_2$  maneiras de realizar o procedimento.

**Exercício 3.2.** Quantas matrículas de automóvel podem ser feitas em Portugal?

**Resolução:** Anteriormente a Março de 2020 as matrículas dos veículos nacionais eram formadas por duas letras (L), onde era considerado o alfabeto português de 23 letras, e quatro números (N); havendo assim  $23 \times 23 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 23^2 \times 10^4$  escolhas possíveis. Mas cada matrícula pode ter uma das seguintes sequências:  $LL - NN - NN$

ou  $NN - LL - NN$  ou  $NN - NN - LL$ . Assim, podem ser atribuídas  $23^2 \times 10^4 + 23^2 \times 10^4 + 23^2 \times 10^4 = 3 \times 23^2 \times 10^4 = 15870000$ .  $\square$

**Princípio da Inclusão-Exclusão:** Se um procedimento pode ser feito de  $n_1$  ou de  $n_2$  maneiras, mas em que há sobreposição, isto é, existem  $n_3$  maneiras que estão incluídas nas  $n_1$  e nas  $n_2$  maneiras, então há  $n_1 + n_2 - n_3$  maneiras de realizar o procedimento.

**Exercício 3.3.** Sabendo de um total de 50 alunos estão 23 matriculados a Matemática e 42 matriculados a Física, sendo que todos os alunos estão inscritos a pelo menos uma disciplina, quantos estão matriculados nas duas disciplinas?

**Resolução:** Consideremos que  $A$  é o conjunto dos alunos inscrito a Matemática e  $B$  o conjunto dos alunos inscritos a Física, do enunciado sabemos que  $|A \cup B| = 50$ ,  $|A| = 23$  e  $|B| = 42$ . Pelo Princípio de Inclusão-Exclusão temos que  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ , ou seja  $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 23 + 42 - 50 = 15$  alunos estão inscritos nas duas disciplinas.  $\square$

**Exercício 3.4.** Determine quantos números naturais menores ou iguais a 100 são múltiplos de 6 ou múltiplos de 7.

**Resolução:** Seja  $A$  o conjunto dos múltiplos de 6 menores ou iguais a 100, e  $B$  o conjunto dos múltiplos de 7 menores ou iguais a 100. É fácil confirmar que  $|A| = 16$  e  $|B| = 14$  (basta retirar a parte inteira da divisão de 100 por 6 e 7, respectivamente). Além disso, os números menores ou iguais a 100 que são simultaneamente múltiplos de 6 e de 7 são apenas o 42 e 84, ou seja,  $|A \cap B| = 2$ . Então a quantidade de números menores ou iguais a 100 que são múltiplos de 6 ou múltiplos de 7 é dada por  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 16 + 14 - 2 = 28$ .  $\square$

*Nota 3.2.* O Princípio da Soma é o caso particular do Princípio da Inclusão-Exclusão em que  $A \cap B = \emptyset$ .

*Nota 3.3.* O Princípio da Inclusão-Exclusão pode ainda ser generalizado ao caso em que temos  $n$  conjuntos, mas não vamos abordar esse assunto.

**Princípio da Gaiola dos Pombos:** Se em  $n$  gaiolas tivermos  $n + 1$  pombos, então pelo menos uma das gaiolas tem 2 pombos ou mais.



**Exercício 3.5.** Coloque cinco pontos aleatoriamente num triângulo equilátero de lado 2. Mostre que existe pelo menos dois pontos cuja distância entre eles é menos do que 1.

**Resolução:** Dividimos o triângulo inicial em quatro triângulos equiláteros de lado um (gaiolas). Ao distribuir os cinco pontos (pombos), pelo princípio da Gaiola dos Pombos, pelo menos dois pontos estarão no mesmo triângulo equilátero de lado um, e portanto a distância entre eles é menor ou igual a 1.  $\square$

**Exercício 3.6.** Considere o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  e escolha 5 números. Mostre que há uma soma de dois desses números que dá 9.

**Resolução:** Do conjunto dado as somas de pares de números que dão 9 são:  $(1, 8)$ ,  $(2, 7)$ ,  $(3, 6)$  e  $(4, 5)$  (gaiolas). Ao escolhermos cinco números (pombos) do conjunto inicial, pelo princípio da Gaiola dos Pombos, pelo menos dois números estarão no mesmo par, e portanto a sua soma dá 9.  $\square$

**Exercício 3.7.** Mostre que escolhendo quatro números inteiros quaisquer há sempre dois cuja diferença é um múltiplo de 3.

**Resolução:** Quando se divide um número por 3, há três restos possíveis: 0, 1 ou 2 (gaiolas). Quando escolhemos quatro números (pombos), pelo princípio da Gaiola dos Pombos, há pelo menos dois deles que têm o mesmo resto; sejam  $n_1 = 3k_1 + r$  e  $n_2 = 3k_2 + r$ . Então  $n_1 - n_2 = 3k_1 + r - 3k_2 - r = 3(k_1 - k_2)$ , ou seja, é um múltiplo de 3.  $\square$

## 3.2 Arranjos, Permutações e Combinações

**Definição 3.4.** Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto com  $n$  elementos. Chamamos *arranjo de comprimento  $k$*  a uma sequência de comprimento  $k$  extraída do conjunto  $\mathcal{U}$ , sem reposição; e indicamos o número de arranjos de  $n$  elementos com comprimento  $k$  por  $A_k^n$ .

Para a primeira posição da sequência temos  $n$  elementos disponíveis, para a segunda posição apenas temos  $n - 1$  elementos disponíveis, para a terceira posição apenas temos  $n - 2$  elementos disponíveis, até que quando chegamos à posição  $k$  apenas temos  $n - k + 1$  elementos disponíveis; assim  $A_k^n = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$ .

*Exemplo 3.5.* Consideremos  $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$ , temos que  $abd$ ,  $adb$ ,  $cda$  e  $edc$  são arranjos de comprimento 3. Podemos formar  $A_3^5 = \frac{5!}{(5 - 3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$  arranjos de 5 elementos com comprimento 3.

**Exercício 3.8.** Dado um saco com bolas numeradas de 1 a 7, pretende-se sortear um número de 4 dígitos todos diferentes, de quantas formas o podemos fazer?

**Resolução:** Quando retiramos o primeiro número temos 7 bolas à disposição, para o segundo temos apenas 6, depois 5 e finalmente apenas 4; ou seja temos um arranjo  $A_4^7 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ .  $\square$

**Definição 3.6.** Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto com  $n$  elementos. Chamamos *permutação de  $n$  elementos* a um arranjo com comprimento  $n$ , e indicamos o número de permutações de  $n$  elementos por  $P_n$ .

Como uma permutação de  $n$  elementos é um arranjo de  $n$  elementos com comprimento  $n$  temos  $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ .

*Exemplo 3.7.* Consideremos  $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$ , temos que  $abcde$ ,  $becda$ ,  $bcead$  e  $abdec$  são permutações de  $\mathcal{U}$ . Podemos formar  $P_5 = A_5^5 = 5! = 120$  permutações de 5 elementos.

**Exercício 3.9.** Depois do jantar quatro amigos dividem a conta e vão para a fila fazer o pagamento, de quantas maneiras diferentes podem formar a fila?

**Resolução:** Para a primeira posição da fila temos 4 pessoas, para a segunda temos 3, para a penúltima 2 e por fim apenas uma; ou seja, temos uma permutação  $P_4 = 4! = 24$ , isto é, podem formar 24 filas diferentes.  $\square$

**Definição 3.8.** Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto com  $n$  elementos. Chamamos *combinação de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$*  a um subconjunto de  $k$  elementos extraído do conjunto  $\mathcal{U}$ , e indicamos o número de combinações de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$  por  $\binom{n}{k}$  ou  $C_k^n$ .

**Proposição 3.9.** *Seja  $\mathcal{U}$  é um conjunto com  $n$  elementos. O número de arranjos de  $n$  elementos com comprimento  $k$  é igual ao produto do número de combinações de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$  pelo número de permutações de  $k$  elementos, isto é,  $A_k^n = \binom{n}{k} P_k$ . Ou seja, considerar os arranjos de  $n$  elementos com comprimento  $k$  é equivalente a considerar as combinações de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $K$  e depois fazer a permutação desses  $k$  elementos.*

$$\text{Assim, } A_k^n = \binom{n}{k} P_k \Leftrightarrow \binom{n}{k} = \frac{A_k^n}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

*Exemplo 3.10.* Consideremos  $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$ , temos que  $\{a, b, c\}$ ,  $\{c, d, e\}$  e  $\{b, c, d\}$  são combinações de 5 tomados 3 a 3. No total é possível formar  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$  combinações de 5 elementos tomados 3 a 3.

**Exercício 3.10.** Se tivermos bananas, maçãs, peras, morangos, uvas, kiwis, mangas e pêssegos, quantas saladas de frutas podemos fazer se usarmos apenas três frutas?

**Resolução:** Como temos 8 frutas e queremos retirar apenas 3, onde não importa a ordem, temos uma combinação  $C_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$ ; ou seja 56 saladas de fruta diferentes.  $\square$

**Proposição 3.11.** *Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto com  $n$  elementos. Temos as seguintes propriedades dos coeficientes  $C_k^n$ :*

$$1) \binom{n}{0} = 1$$

$$2) \binom{n}{n} = 1$$

$$3) \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}, \text{ o que é equivalente a ter } \binom{r+s}{r} = \binom{r+s}{s}$$

$$4) \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

**Prova:** 1)  $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!} = 1$

$$2) \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$3) \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

4)

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} \\ &= (n-1)! \left( \frac{k}{(n-k)!k!} + \frac{n-k}{(n-k)!k!} \right) \\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$\square$

**Observação 3.12.** Recordemos a construção do Triângulo de Pascal: a primeira linha tem o elemento 1, a linha  $n$  tem mais um elemento do que a linha anterior, os extremos de todas as linhas são 1 e um elemento é dado pela soma dos dois elementos acima dele. Temos que

$$\begin{array}{rcccccc}
n = 0: & & & & & & 1 \\
n = 1: & & & & 1 & & 1 \\
n = 2: & & & 1 & & 2 & & 1 \\
n = 3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
n = 4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
n = 5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
& & & \vdots & & & & & & & & 
\end{array}$$

ou seja, a linha  $n$  posição  $k$  coincide precisamente com  $\binom{n}{k}$  e podemos escrever o Triângulo de Pascal como

$$\begin{array}{rcccccccc}
n = 0: & & & & & & \binom{0}{0} \\
n = 1: & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} \\
n = 2: & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
n = 3: & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
n = 4: & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
n = 5: & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
& & & \vdots & & & & & & & & 
\end{array}$$

**Exercício 3.11.** Descreva as propriedades da Proposição anterior em termos do Triângulo de Pascal.

## Semana 9

**Teorema 3.13 (Teorema Binomial).** Para  $x, y \in \mathbb{R}$  temos que

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad , \text{ para todo } n \in \mathbb{N} .$$

**Prova:** Vamos mostrar por indução que

$$P(n) : (x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad , \text{ com } x, y \in \mathbb{R}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} .$$

Para  $n = 1$  temos  $P(1)$ :

$$(x + y)^1 = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} x^i y^{1-i} \Leftrightarrow x + y = \binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1} \Leftrightarrow x + y = y + x,$$

o que é verdade.

Passo indutivo: Admitimos que  $P(k)$  é verdade, isto é

$$(x + y)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k-i},$$

e queremos mostrar que  $P(k + 1)$  é verdade, isto é

$$(x + y)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^i y^{k+1-i}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} (x + y)^{k+1} &= (x + y)(x + y)^k = (x + y) \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{i+1} y^{k-i} + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k+1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^{i+1} y^{k-i} + \binom{k}{k} x^{k+1} y^0 + \binom{k}{0} x^0 y^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^i y^{k+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} x^i y^{k-i+1} + \binom{k}{k} x^{k+1} y^0 + \binom{k}{0} x^0 y^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^i y^{k+1-i} \\ &= \binom{k}{0} x^0 y^{k+1} + \sum_{i=1}^k \left[ \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right] x^i y^{k-i+1} + \binom{k}{k} x^{k+1} y^0 \\ &= \binom{k+1}{0} x^0 y^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} x^i y^{k-i+1} + \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} y^0 \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^i y^{k+1-i} \end{aligned}$$

ou seja,  $P(k + 1)$  também é verdade, e mostramos assim que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Observação 3.14.** No Teorema Binomial, no caso particular  $y = 1$  temos que

$$\begin{aligned} (x + 1)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i 1^{n-i} \\ &= \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n \\ &= 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \dots + x^n \end{aligned}$$

e se tivermos ainda  $x = 1$  temos a igualdade

$$2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}. \quad (3.1)$$

Se  $A$  for um conjunto com  $n$  elementos, no lado direito da igualdade (3.1) temos a soma do número de subconjuntos com  $0, 1, 2, \dots, n$  elementos, ou seja, temos o número total de subconjuntos de  $A$ ; isto é, o conjunto das partes de  $A$ ,  $\mathcal{P}(A)$ . Além disso, podemos identificar cada subconjunto de  $A$  com uma sequência de comprimento  $n$  de 0 e 1, sendo que a sequência na posição  $i$  é 1 se o elemento  $i$  está no subconjunto e é 0 caso contrário; assim, o número de elementos de  $\mathcal{P}(A)$  coincide com o número de sequências de 0 e 1 de comprimento  $n$ .

*Exemplo 3.15.* Seja  $A$  um conjunto com 4 elementos, então o conjunto das partes de  $A$ ,  $\mathcal{P}(A)$ , tem  $2^4 = 16$  elementos.

**Teorema 3.16 (Convolução de Vandermonde).** *Dados  $m, n, k \in \mathbb{N}$  tais que  $k \leq m, n$ , temos a seguinte igualdade*

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

**Prova:** Usando o Teorema Binomial com  $y = 1$  temos que

$$(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n} \Leftrightarrow \left( \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \right) \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k.$$

Igualando os coeficientes de  $x^k$  e de  $x^{i+j}$  com  $i+j=k$  temos

$$\binom{m}{0} \binom{n}{k} + \binom{m}{1} \binom{n}{k-1} + \binom{m}{2} \binom{n}{k-2} + \dots + \binom{m}{k} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{k},$$

ou seja, temos a igualdade desejada.  $\square$

**Corolário 3.17.** *Dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos*

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

**Prova:** Tendo em conta a Convolução de Vandermonde, basta fazer  $k = m = n$  e recordar que  $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ .  $\square$

**Exercício 3.12.** Mostre que

$$\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = n 2^{n-1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

**Resolução:** Começamos por observar que

$$\begin{aligned} i \binom{n}{i} &= i \frac{n!}{(n-i)!i!} = \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} = \frac{n!}{((n-1)-(i-1))!(i-1)!} \\ &= n \frac{(n-1)!}{((n-1)-(i-1))!(i-1)!} = n \binom{n-1}{i-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^n n \binom{n-1}{i-1} = n \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n 2^{n-1},$$

onde usámos a equação (3.1) para  $n-1$ , na última igualdade.  $\square$

### 3.3 Arranjos, Permutações e Combinações Completas

**Definição 3.18.** Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto com  $n$  elementos. Chamamos *arranjo completo de comprimento  $k$*  a uma sequência de comprimento  $k$  extraída do conjunto  $\mathcal{U}$ , com reposição, e indicamos o número de arranjos completos de  $n$  elementos com comprimento  $k$  por  $\overline{A}_k^n$ .

Para a primeira posição da sequência temos  $n$  elementos disponíveis, para a segunda posição voltamos a ter  $n$  elementos disponíveis, em geral para a posição  $i$  temos  $n$  elementos disponíveis; assim  $\overline{A}_k^n = n^k$ .

*Exemplo 3.19.* Consideremos  $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$ , temos que  $abd$ ,  $acc$ ,  $aaa$  e  $dae$  são arranjos completos de comprimento 3. Podemos formar  $\overline{A}_3^5 = 5^3 = 125$  arranjos completos de 5 elementos com comprimento 3.

**Exercício 3.13.** Num determinado país as matrículas das viaturas são uma sequência de quatro letras e três números. Quantas matrículas podem existir?

**Resolução:** Considerando o alfabeto completo com 26 letras, para cada uma das quatro primeiras posições temos 26 possibilidades, ou seja  $\overline{A}_4^{26}$ ; para cada uma das três posições seguintes temos 10 possibilidades, ou seja  $\overline{A}_3^{10}$ . Assim, podem existir  $\overline{A}_4^{26} \cdot \overline{A}_3^{10} = 26^4 \times 10^3 = 456976000$  matrículas.  $\square$

**Definição 3.20.** Seja  $\mathcal{U}$  uma colecção de  $n$  objectos, não necessariamente todos distintos. Chamamos *permutação completa* a uma sequência de todos os objectos da colecção, não necessariamente distintos. Se em  $\mathcal{U}$  tivermos uma colecção de  $n$  objectos, em que

$n_1, n_2, \dots, n_k$  são elementos idênticos, ou seja,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ , indicamos o número de permutações completas por  $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ .

O número de permutações de  $n$  elementos é  $P_n = n!$ , mas agora temos  $n_i$  elementos idênticos, pelo que se os permutarmos ( $P_{n_i} = n_i!$ ) obtemos a mesma sequência, assim  $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ .

**Exemplo 3.21.** Consideremos a palavra CRECHE, vamos determinar quantas palavras distintas podemos formar com essas letras. Ao todo temos 6 letras, logo seis posições. Mas desses 6 elementos, temos duas letras C, duas letras E, uma letra R e uma letra H. Assim, existem  $P_6^{2,2,1,1} = \frac{6!}{2!2!1!1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{2} = 180$  palavras diferentes.

**Exercício 3.14.** Quantas palavras distintas podemos formar com as letras da palavra MISSISSIPI?

**Resolução:** Ao todo temos 10 letras, sendo quatro I, quatro S, um M e um P, assim existem  $P_{10}^{4,4,1,1} = \frac{10!}{4!4!1!1!} = \frac{10!}{4!4!} = 10 \times 9 \times 2 \times 7 \times 5 = 6300$  palavras.  $\square$

**Exercício 3.15.** De quantas formas distintas podemos arrumar numa prateleira 3 livros de Matemática, 4 livros de Programação e 2 livros de Física?

**Resolução:** Ao todo temos 9 livros, sendo quatro de Programação, três de Matemática e dois de Física, assim existem  $P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!3!2!} = 9 \times 4 \times 7 \times 5 = 1260$  formas distintas de arrumar os livros.  $\square$

**Definição 3.22.** Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto com  $n$  elementos. Chamamos *combinação completa de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$*  a uma colecção de  $k$  elementos extraído do conjunto  $\mathcal{U}$ , com reposição, e indicamos o número de combinações completas de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$  por  $\overline{C}_k^n$ .

Como a ordem não importa, dado  $\mathcal{U} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  as colecções  $a_1 a_1 a_5 a_2 a_5$  e  $a_2 a_5 a_5 a_1 a_1$  são iguais, por exemplo. Assim, começamos por ordenar todos os elementos dentro da colecção, no caso do exemplo dado escrevemos  $a_1 a_1 a_2 a_5 a_5$ . Agora usamos o símbolo  $|$  para separar os elementos idênticos e o símbolo  $-$  para indicar os elementos escolhidos; a colecção usada para exemplo é representada por  $--| - || - |\dots|$ .

Assim, do número de posições total  $k + (n - 1)$  da colecção escolhemos  $k$  posições para colocar  $-$ , o que é equivalente (pela propriedade 3) da Proposição 3.11) a escolher  $n - 1$  posições para colocar  $|$ ; portanto  $\overline{C}_k^n = \binom{k + n - 1}{k} = \binom{k + n - 1}{n - 1}$ .



*Exemplo 3.23.* Consideremos o conjunto formado por  $\{a, b, c\}$ , vamos determinar quantas colecções de 5 elementos podemos formar. Como a ordem da colecção não importa temos, por exemplo, as seguintes igualdades entre colecções

$$aabbcc = ababc = cbbaa$$

$$aaaab = aabaa = baaaa$$

$$abccc = bacc = cccba$$

Ordenando os elementos dentro da colecção, os exemplos anteriores são vistos como:

$$\begin{array}{c} - - | - - | - \\ - - - - | - | \\ - | - | - - - \end{array}$$

em que antes da primeira  $|$  colocamos todos os  $a$ , depois da primeira  $|$  e antes da segunda colocamos todos os  $b$  e depois da segunda  $|$  colocamos todos os  $c$ .

Ou seja, das  $5 + (3 - 1) = 7$  posições totais escolhemos 5 posições para colocar  $a$ ,  $b$  ou  $c$  (as que estiverem em posições adjacentes têm a mesma letra), o que é equivalente a escolher  $3 - 1 = 2$  posições para colocar as  $|$  (uma vez que antes da primeira escolha colocamos o  $a$ , entre a primeira e a segunda escolha colocamos o  $b$  e depois da segunda escolha colocamos o  $c$ ); portanto, existem  $\overline{C}_5^3 = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$  colecções.

**Proposição 3.24.** Temos que  $\overline{C}_k^n = P_{k+n-1}^{k, n-1}$ .

**Prova:** Tendo em conta a explicação acima, uma combinação completa de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$  é equivalente a uma permutação de  $k + n - 1$  elementos, em que  $k$  são idênticos  $(-)$  e  $n - 1$  são também idênticos  $(|)$ . Algebricamente, basta atender a que  $\overline{C}_k^n = \binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{(k+n-1-k)!k!} = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!}$ .  $\square$

**Exercício 3.16.** Supondo que uma geladaria tem três sabores de gelado: chocolate, morango e nata. Quantas taças de gelado conseguimos fazer com quatro bolas de gelado?

**Resolução:** Como é indiferente a ordem e podemos repetir, estamos perante uma combinação completa de 3 elementos tomados 4 a 4, ou seja temos  $\overline{C}_4^3 = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$  formas diferentes para compor uma taça com quatro bolas de três sabores.  $\square$

**Observação 3.25.** As combinações completas podem ser usadas para determinar o número de soluções inteiras não-negativas possíveis de uma dada equação linear. Dada a equação  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , pretendemos saber quantas soluções existem com  $x_i \in \mathbb{N}_0$ . Este problema equivale a escolher no conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  uma quantidade de  $k$  elementos, ou seja uma combinação completa de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$ . Assim, existem  $\overline{C}_k^n$  soluções inteiras não-negativas da equação dada.

*Exemplo 3.26.* A equação  $x + y + z = 13$  tem exactamente  $\overline{C}_{13}^3 = \binom{13+3-1}{13} = \binom{15}{13} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{15 \times 14}{2} = 105$  soluções inteiras não-negativas.

**Exercício 3.17.** Quantas soluções em  $\mathbb{N}$  tem a equação  $x + y = 6$ ?

**Resolução:** Como queremos soluções em  $\mathbb{N}$  tomamos  $x = a + 1$  e  $y = b + 1$  e substituindo na equação ficamos com a equação  $a + b = 4$ , onde queremos obter o número de soluções não negativas, ou seja em  $\mathbb{N}_0$ . Ora, esse número de soluções é dado por  $\overline{C}_4^2 = \binom{4+2-1}{4} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!1!} = 5$ .  $\square$

### 3.4 Exercícios Propostos

**Exercício 3.18.** Considere todos os números de telefone com o indicativo 275, quantos números existem com todos os algarismos diferentes?

**Exercício 3.19.** Dada uma urna com bolas numeradas de 1 a 9, quantas sequências de 6 números podemos extrair, sem reposição?

**Exercício 3.20.** Sabendo que um PIN de multibanco com todos os dígitos diferentes tem um 5 na primeira posição e um 6 numa das outras posições, quantas possibilidades temos?

**Exercício 3.21.** Numa prova de atletismo com oito participantes de quantas formas diferentes podem ser entregues as medalhas de ouro, prata e bronze?

**Exercício 3.22.** Seis amigas vão ao cinema, de quantas formas diferentes podem ficar sentadas na mesma fila?

**Exercício 3.23.** Quantas palavras com as letras da palavra NARIZ podem ser formadas?

**Exercício 3.24.** Se fosse possível alterar a ordem das cores do arco-íris, quantos diferentes podíamos criar?

**Exercício 3.25.** Um fotógrafo vai tirar uma fotografia a um grupo de cinco rapazes e cinco raparigas numa escada com cinco degraus. Quantas fotos diferentes pode tirar de modo que em cada degrau esteja um rapaz e uma rapariga?

**Exercício 3.26.** Num torneio de xadrez estão inscritos 12 participantes. De quantas formas podemos formar as duplas para a primeira partida?

**Exercício 3.27.** O António tem 15 camisas, mas na mala de viagem apenas cabem 6 camisas. De quantas formas diferentes pode o António arrumar a mala?

**Exercício 3.28.** Nas sandes de uma cadeia de fast-food o cliente pode escolher entre três tipos de pão: normal, integral ou sementes; e cinco ingredientes: frango, atum, queijo, fiambre ou ovo. Quantas sandes diferentes podem os clientes fazer, sendo que a sandes tem de ter pelo menos um ingrediente?

**Exercício 3.29.** Numa determinada assembleia existem 105 deputados do partido A e 80 do partido B. É necessário formar uma comissão com 90 deputados do partido A e 65 do partido B, de quantas maneiras o podemos fazer?

**Exercício 3.30.** Quantas chaves do Euromilhões existem?

**Exercício 3.31.** Quantas chaves do Totoloto existem?

**Exercício 3.32.** Quantos códigos com sete algarismo podem ser formados apenas com dígitos que sejam números primos?

**Exercício 3.33.** Durante um exame com nove questões cuja resposta tem quatro opções: A, B, C ou D; um aluno responde de forma aleatória, de quantas formas o pode fazer?

**Exercício 3.34.** Uma pessoa tem três métodos para fazer as viagens de ida e volta do trabalho: a pé, de transporte público ou de carro. Durante uma semana de quantas formas diferentes pode realizar estas deslocações?

**Exercício 3.35.** Considere um código de seis dígitos.

a) Quantos códigos podemos formar?

b) Quantos códigos podemos formar com dois e apenas dois dígitos iguais a 7?

**Exercício 3.36.** Depois de arrumar a árvore de Natal é necessário arrumar sete bolas vermelhas, cinco bolas azuis, três bolas verdes e duas bolas amarelas num tubo. De quantas formas o podemos fazer?

**Exercício 3.37.** Quantas palavras podemos formar com as letras da palavra MATEMÁTICA?

**Exercício 3.38.** Num campeonato de futebol com 34 jornadas uma equipa obteve 25 vitórias, 7 empates e duas derrotas. De quantas formas diferentes podem ter ocorrido estes resultados?

**Exercício 3.39.** Numa prova de avaliação com 20 perguntas de Verdadeiro ou Falso as respostas correctas são 12 Verdadeiros e 8 Falsos. De quantas formas diferentes pode o professor ordenar as perguntas?

**Exercício 3.40.** Suponha que num supermercado são vendidas cinco marcas distintas de refrigerantes. De quantas formas diferentes podemos comprar três latas de refrigerantes, possivelmente iguais?

**Exercício 3.41.** Suponha que num supermercado são vendidas três marcas distintas de refrigerantes. De quantas formas diferentes podemos comprar cinco latas de refrigerantes, possivelmente iguais?

**Exercício 3.42.** Dadas sete bolas, vamos distribuí-las entre o Gabriel, o Pedro, o Rodrigo e Simão. Sabendo que algum deles pode ficar com várias bolas, de quantas formas o podemos fazer?

**Exercício 3.43.** Quantas soluções inteiras não-negativas, ou seja em  $\mathbb{N}_0$ , tem a equação  $w + x + y + z = 9$ ?

**Exercício 3.44.** Uma fábrica de brinquedos pretende fazer sacos com dez pequenos carrinhos de madeira pintados de vermelho, azul, amarelo ou verde.

a) Quantos sacos diferentes é possível formar?

b) Se pretendermos que todos os sacos tenham pelo menos um carrinho de cada cor, quantos sacos diferentes é possível formar?

# Capítulo 4

## Grafos

### Semana 10

#### 4.1 Conceitos e Resultados Fundamentais

**Definição 4.1.** Dizemos que um terno  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  é um *grafo*, onde  $V = V(G)$  é um conjunto não vazio, se

- a)  $E = E(G)$  é um conjunto disjunto de  $V$
- b)  $\psi_G$  é uma função em que, para cada  $e \in E$ ,  $\psi_G(e)$  denota um par não ordenado de elementos de  $V$  (não necessariamente distintos).

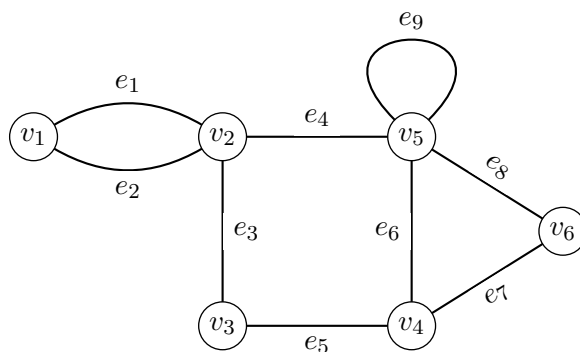
Chamamos a  $V$  conjunto dos *vértices*, a  $E$  o conjunto das *arestas* e a  $\psi_G$  *função de incidência*.

Também denotaremos uma aresta  $e \in E$  pela respectiva imagem  $\psi_G(e) = uv$ , onde  $uv$  é um par não ordenado de vértices em  $V$ . Neste caso, dizemos que:  $u$  e  $v$  são os *vértices extremos* da aresta  $e$ ; a aresta  $e$  é *incidente* nos vértices  $u$  e  $v$ ;  $u$  e  $v$  são *vértices adjacentes*. Ao conjunto dos vértices adjacentes de um vértice  $v \in V(G)$  chamamos *vizinhança* de  $v$ .

Se duas arestas são incidentes no mesmo vértice, dizemos que são *arestas adjacentes*. Se duas arestas têm os mesmos vértices extremos dizemos que são *arestas paralelas*. Se  $e$  é uma aresta com vértices extremos no mesmo vértice, isto é  $\psi_G(e) = uu$ , dizemos que  $e$  é um *lacete*.

*Exemplo 4.2.* Consideremos o grafo  $G$  da Figura 4.1.

Temos que

Figura 4.1: Grafo  $G$ 

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  é o conjunto dos vértices
- $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$  é o conjunto das arestas
- A função incidência  $\psi$  está definida da seguinte forma:  $\psi(e_1) = v_1v_2$ ,  $\psi(e_2) = v_1v_2$ ,  $\psi(e_3) = v_2v_3$ ,  $\psi(e_4) = v_2v_5$ ,  $\psi(e_5) = v_3v_4$ ,  $\psi(e_6) = v_4v_5$ ,  $\psi(e_7) = v_4v_6$ ,  $\psi(e_8) = v_5v_6$ ,  $\psi(e_9) = v_5v_5$
- $v_2$  e  $v_5$  são os vértices extremos da aresta  $e_4$
- $e_6$  é uma aresta incidente em  $v_4$  e  $v_5$
- $v_5$  e  $v_6$  são vértices adjacentes
- a vizinhança de  $v_4$  é  $\{v_3, v_5, v_6\}$
- $e_4$  e  $e_8$  são arestas adjacentes
- $e_1$  e  $e_2$  são arestas paralelas
- $e_9$  é um lacete

**Definição 4.3.** Dizemos que  $G$  é um *grafo simples* se não tiver arestas paralelas nem lacetes. A um grafo simples com um único vértice chamamos *grafo trivial*.

*Exemplo 4.4.* Na Figura 4.2 temos um exemplo de um grafo simples.

**Observação 4.5.** Quando o grafo é simples as arestas ficam completamente determinadas pelos respectivos vértices extremos, assim a função de incidência é redundante, ou seja, num grafo simples basta indicar a aresta  $e$  por  $uv$ , onde  $u$  e  $v$  são os vértices extremos da aresta  $e$ .

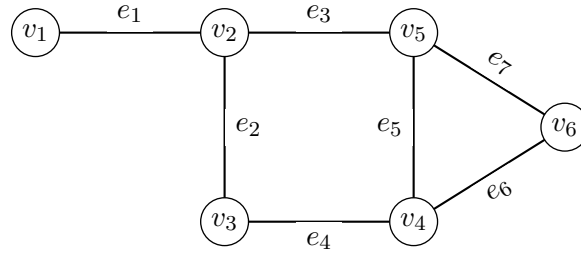


Figura 4.2: Grafo Simples

**Definição 4.6.** Dizemos que  $G$  é um *grafo finito* se  $V(G)$  e  $E(G)$  forem conjuntos finitos; caso contrário dizemos que  $G$  é um *grafo infinito*.

*Nota 4.7.* Quando referirmos apenas grafo, estamos a considerar um grafo finito, e é este o caso que vamos estudar.

**Definição 4.8.** Dois grafos  $G$  e  $H$  dizem-se *iguais* se  $V(G) = V(H)$ ,  $E(G) = E(H)$  e  $\psi_G = \psi_H$ ; e escrevemos  $G = H$ .

Dois grafos iguais admitem a mesma representação gráfica.

**Definição 4.9.** Dado um grafo  $G$  e um vértice  $v \in V(G)$ , designamos por *grau* de  $v$  o número de arestas incidentes no vértice  $v$ , que indicamos por  $d_G(v)$ . Indicamos o maior grau dos vértices de  $G$  por  $\Delta(G)$  e o menor grau dos vértices de  $G$  por  $\delta(G)$ , ou seja,

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v) \quad \text{e} \quad \delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v).$$

*Nota 4.10.* Um lacete num vértice conta duas vezes para o grau desse vértice.

*Nota 4.11.* No caso de um grafo simples o grau de um vértice coincide com a cardinalidade da sua vizinhança.

**Exercício 4.1.** Determine o grau de todos os vértices do grafo  $G$  da Figura 4.1 e indique  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$ .

**Resolução:** Temos que  $d_G(v_1) = d_G(v_3) = d_G(v_6) = 2$ ,  $d_G(v_2) = 4$ ,  $d_G(v_4) = 3$  e  $d_G(v_5) = 5$ . Assim,  $\delta(G) = 2$  e  $\Delta(G) = 5$ .  $\square$

**Definição 4.12.** Seja  $G$  um grafo com  $\nu$  vértices e  $\varepsilon$  arestas, em que  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_\nu\}$  e  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_\varepsilon\}$ . Chamamos *matriz de incidência* de  $G$  à matriz  $M_G \in \mathcal{M}_{\nu \times \varepsilon}$

em que a entrada  $m_{ij}$  é dada por

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } e_j = v_p v_q \text{ e } i \neq p, q \\ 1 & , \text{ se } e_j = v_i v_q \text{ e } i \neq q \\ 2 & , \text{ se } e_j = v_i v_i \end{cases}.$$

**Nota 4.13.** O número de linhas da matriz  $M_G$  é igual ao número de vértices de  $G$ ,  $\nu$ , e o número de colunas da matriz  $M_G$  é igual ao número de arestas de  $G$ ,  $\varepsilon$ . Mais, a soma dos elementos de cada uma das colunas da matriz  $M_G$  é igual a 2, pois cada aresta incide em precisamente 2 vértices, e a soma dos elementos da linha  $i$  da matriz  $M_G$  é igual ao grau do vértice  $v_i$ ,  $d_G(v_i)$ , pois é o número de arestas incidentes em  $v_i$ .

**Definição 4.14.** Seja  $G$  um grafo com  $\nu$  vértices, em que  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_\nu\}$ . Chamamos *matriz de adjacência* de  $G$  à matriz  $A_G \in \mathcal{M}_{\nu \times \nu}$  em que a entrada  $a_{ij}$  é dada pelo número de arestas entre os vértices  $v_i$  e  $v_j$ .

**Nota 4.15.** A matriz de adjacência de um grafo  $G$  é simétrica.

**Nota 4.16.** Quando  $G$  é um grafo simples a diagonal da matriz de adjacência é nula e todas as entradas são 0 ou 1.

**Exemplo 4.17.** O grafo  $G$  da Figura 4.1 tem as seguintes matrizes

$$M_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Exercício 4.2.** Determine a matriz de incidência e a matriz de adjacência do grafo  $G$  da Figura 4.2.

**Resolução:** O grafo da Figura 4.2 tem 6 vértices e 7 arestas, a matriz de incidência



$M_G \in \mathcal{M}_{6 \times 7}$  e a matriz de adjacência  $A_G \in \mathcal{M}_{6 \times 6}$  são as seguintes

$$M_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

**Teorema 4.18.** *Seja  $G$  um grafo. A soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, isto é,*

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2\varepsilon(G).$$

**Prova:** Na matriz  $M_G$  a soma das entradas da linha relativa ao vértice  $v$  é igual a  $d_G(v)$ , logo a soma de todas as entradas da matriz  $M_G$  é igual a  $\sum_{v \in V(G)} d_G(v)$ .

Por outro lado, como a soma das entradas de cada coluna da matriz  $M_G$  é igual a 2, podemos concluir que a soma de todas as entradas da matriz  $M_G$  é igual a  $2\varepsilon(G)$ , uma vez que a matriz  $M_G$  tem  $\varepsilon(G)$  colunas. □

**Corolário 4.19.** *Qualquer grafo tem um número par de vértices com grau ímpar.*

#### 4.1.1 Grafos Isomorfos

**Definição 4.20.** Dados dois grafos  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  e  $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ , dizemos que  $G$  e  $H$  são *isomorfos*,  $G \cong H$ , se existirem duas bijecções  $\zeta : V(G) \rightarrow V(H)$  e  $\theta : E(G) \rightarrow E(H)$  tais que

$$\psi_G(e) = uv \iff \psi_H(\theta(e)) = \zeta(u)\zeta(v).$$

Assim, dois grafos dizem-se isomorfos se existe uma bijecção entre os conjuntos dos vértices e uma bijecção entre os conjuntos das arestas que preservem as relações de adjacência e de incidência.

No caso de grafos simples as arestas ficam determinadas pelos respectivos vértices extremos, por isso, o isomorfismo entre grafos simples reduz-se a uma bijecção entre os conjuntos dos vértices que preserva a adjacência. Assim, no caso de grafos simples, a definição anterior pode ser escrita da seguinte forma.

**Definição 4.21.** Dados dois grafos  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  e  $H = (V(H), E(H), \psi_H)$  simples, dizemos que  $G$  e  $H$  são *isomorfos*,  $G \cong H$ , se existir uma bijecção  $\zeta : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que

$$uv \in E(G) \iff \zeta(u)\zeta(v) \in E(H).$$

*Exemplo 4.22.* Os grafos  $G_1$  e  $G_2$  da Figura 4.3 são isomorfos, pois temos uma bijecção  $\zeta : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  dada por  $\zeta(v_1) = v_4$ ,  $\zeta(v_2) = v_2$ ,  $\zeta(v_3) = v_3$  e  $\zeta(v_4) = v_1$  que preserva a adjacência.

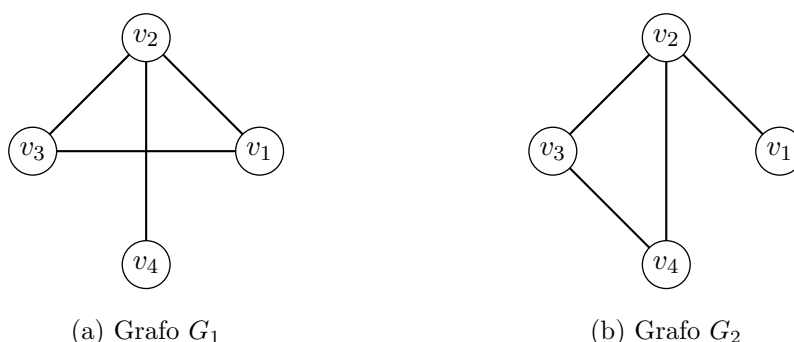


Figura 4.3: Grafos Isomorfos

## Semana 11

### 4.1.2 Passeios, Circuitos, Caminhos e Ciclos

**Definição 4.23.** Seja  $G$  um grafo. Chamamos *passeio* em  $G$  a toda a sequência não vazia  $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k$ , em que  $v_0, v_1, \dots, v_k \in V(G)$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$  e os vértices  $v_{i-1}$  e  $v_i$  são extremos da aresta  $e_i$ , para todo o  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Se  $P$  é um passeio em que todas as arestas são distintas, dizemos que  $P$  é um *trajecto*. No caso dos vértice inicial e final coincidirem, dizemos que o trajecto  $P$  é um *circuito*.

Se  $P$  é um trajecto em que todos os vértices são distintos (excepto possivelmente o primeiro e o último), dizemos que  $P$  é um *caminho*. No caso dos vértice inicial e final do caminho  $P$  coincidirem, dizemos que  $P$  é um *ciclo*.

*Nota 4.24.* Das definições decorre que: um ciclo é um caminho, um caminho é um trajecto, um ciclo é um circuito e um circuito é um trajecto.

*Exemplo 4.25.* Dado um lacete  $e$  no vértice  $v$  temos um ciclo dado por  $vev$ .

*Exemplo 4.26.* Dadas duas arestas paralelas  $e_1$  e  $e_2$  incidentes nos vértices  $v_1$  e  $v_2$  temos um ciclo dado por  $v_1e_1v_2e_2v_1$ .

*Exemplo 4.27.* Consideremos o grafo  $G$  da Figura 4.1 temos que

- o passeio  $P_1 = v_6e_8v_5e_6v_4e_7v_6e_8v_5$  não é trajecto pois tem arestas repetidas
- o passeio  $P_2 = v_5e_4v_2e_2v_1e_1v_2e_3v_3$  é um trajecto pois não tem arestas repetidas, mas não é circuito pois o vértice inicial e final não coincidem
- o passeio  $P_3 = v_5e_4v_2e_2v_1e_1v_2e_3v_3e_5v_4e_6v_5$  é um circuito pois não tem arestas repetidas e o vértice inicial e final coincidem
- o passeio  $P_4 = v_5e_4v_2e_2v_1e_1v_2e_3v_3$  não é um caminho pois tem vértices repetidos
- o passeio  $P_5 = v_1e_1v_2e_3v_3$  é um caminho pois não tem vértices repetidos, mas não é ciclo pois o vértice inicial e final não coincidem
- o passeio  $P_6 = v_2e_3v_3e_5v_4e_6v_5e_4v_2$  é um ciclo pois não tem vértices repetidos e o vértice inicial e final coincidem

*Nota 4.28.* No caso de um grafo simples, as arestas são determinadas pelos vértices extremos, logo para indicar um passeio basta indicar os vértices.

**Definição 4.29.** Dado um passeio  $P$ , chamamos *comprimento* de  $P$ ,  $\text{comp}(P)$ , ao número de arestas (contando as repetições) que constituem o passeio.

*Nota 4.30.* Da definição anterior podemos concluir que uma aresta é um passeio de comprimento 1 e um vértice é um passeio de comprimento 0.

*Nota 4.31.* Quando  $P$  é um trajecto, o comprimento coincide com o número de arestas do trajecto.

*Exemplo 4.32.* Recordando o Exemplo 4.27 temos que  $\text{comp}(P_1) = 4$  e  $\text{comp}(P_3) = 6$ .

**Definição 4.33.** Dados dois vértices  $u, v \in V(G)$ , sendo  $\mathcal{P}_{uv}$  o conjunto de todos os caminhos entre  $u$  e  $v$  de  $G$ , definimos a *distância* entre os vértices  $u$  e  $v$  como

$$\text{dist}_G(u, v) = \begin{cases} \min_{P \in \mathcal{P}_{uv}} \text{comp}(P) & , \text{ se } \mathcal{P}_{uv} \neq \emptyset \\ \infty & , \text{ se } \mathcal{P}_{uv} = \emptyset \end{cases}.$$

**Exemplo 4.34.** Considerando o grafo  $G$  da Figura 4.1 temos, por exemplo:  $\text{dist}_G(v_1, v_4) = 3$ ,  $\text{dist}_G(v_2, v_6) = 2$  e  $\text{dist}_G(v_3, v_4) = 1$ .

**Teorema 4.35.** *Seja  $G$  um grafo simples com  $\delta(G) \geq 2$ . Então existe um caminho  $P$  e um ciclo  $C$  tais que  $\text{comp}(P) \geq \delta(G)$  e  $\text{comp}(C) \geq \delta(G) + 1$ .*

**Prova:** Seja  $P = v_0v_1 \dots v_k$  um caminho de comprimento máximo em  $G$ .

Assim, todos os vértices vizinhos de  $v_k$  estão em  $P$ , caso contrário o caminho  $P$  poderia ser estendido a esse vértice e deixaria de ter comprimento máximo. Logo  $\text{comp}(P) = k \geq d_G(v_k) \geq \delta(G)$ .

Por outro lado, seja  $v_i$  o primeiro vértice do caminho  $P$  tal que  $v_iv_k \in E(G)$ , e consideremos o ciclo  $C = v_iv_{i+1} \dots v_kv_i$ . Como o conjunto  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_k\}$  contém todos os vértices adjacentes a  $v_k$  temos que  $\text{comp}(C) \geq d_G(v_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$ .  $\square$

### 4.1.3 Subgrafos

**Definição 4.36.** Dados dois grafos  $G$  e  $H$ , dizemos que  $H$  é um *subgrafo* de  $G$ ,  $H \subseteq G$ , se  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  e a função de incidência de  $G$ ,  $\psi_G$ , restringida ao conjunto  $E(H)$  coincide com a função de incidência de  $H$ ,  $\psi_H$ . Se  $H \subseteq G$  e  $H \neq G$ , dizemos que  $H$  é um *subgrafo próprio* de  $G$ ,  $H \subset G$ .

No caso em que  $H \subseteq G$  e  $V(H) = V(G)$ , dizemos que  $H$  é um *subgrafo gerador* de  $G$ .

**Exemplo 4.37.** Os grafos  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  da Figura 4.4 são subgrafos do grafo  $G$  da Figura 4.1, mas apenas o grafo  $H_2$  é um subgrafo gerador do grafo  $G$ .

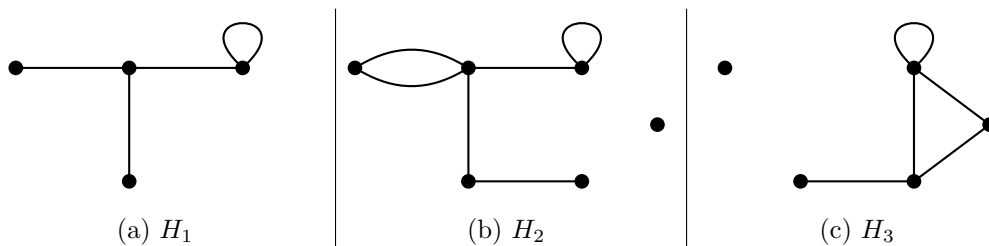


Figura 4.4: Subgrafos do grafo da Figura 4.1

**Exercício 4.3.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.5. Represente todos os subgrafos geradores de  $G$ .

**Resolução:** Qualquer subgrafo gerador de  $G$  tem de ter os mesmos 4 vértices que tem o grafo  $G$ . Podemos construir os subgrafos geradores representados na Figura 4.6.  $\square$

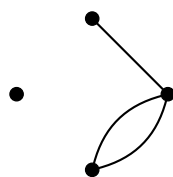


Figura 4.5

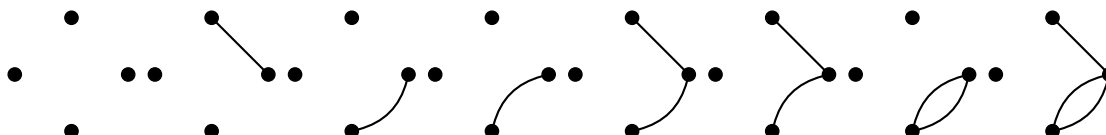


Figura 4.6: Sugrafos geradores do grafo da Figura 4.5

**Exercício 4.4.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.7. Determine quantos subgrafos geradores tem o grafo  $G$ .

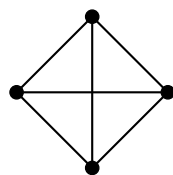


Figura 4.7

**Resolução:** Como o grafo  $G$  da Figura 4.7 tem 4 vértices, todos os subgrafos geradores têm de ter 4 vértices. Como  $G$  tem todas as arestas entre os 4 vértices, para ter um subgrafo podemos escolher qualquer número de arestas entre as existentes. Assim, existem  $\binom{6}{i}$  formas de escolher  $i$  arestas. No total existem  $\sum_{i=0}^6 \binom{6}{i} = 2^6 = 64$  subgrafos geradores de  $G$ .  $\square$

**Definição 4.38.** Dado um grafo  $G$ , eliminando todos os lacetes e substituindo cada conjunto de arestas paralelas por uma única aresta obtemos um subgrafo gerador de  $G$  ao qual chamamos *subgrafo de suporte das arestas*.

*Nota 4.39.* Da definição decorre que o subgrafo de suporte das arestas de qualquer grafo é um grafo simples. Assim, um grafo simples coincide com o seu subgrafo de suporte das arestas.

*Exemplo 4.40.* O grafo da Figura 4.2 é o subgrafo de suporte das arestas do grafo da Figura 4.1.

**Exercício 4.5.** Obtenha o subgrafo de suporte das arestas do grafo da Figura 4.5.

**Resolução:** Como temos duas arestas paralelas, passamos a ter apenas uma entre esses dois vértices e temos o subgrafo de suporte das arestas da Figura 4.8.  $\square$

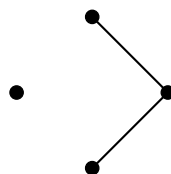


Figura 4.8

**Definição 4.41.** Dados um grafo  $G$  e um subconjunto não vazio  $K \subseteq V(G)$ , definimos o *subgrafo de  $G$  induzido por  $K$*  como sendo o terno  $G[K] = (K, E(G[K]), \psi_{G[K]})$ , em que  $E(G[K]) = \{uv \in E(V) : u, v \in K\}$  e  $\psi_{G[K]}$  coincide com  $\psi_G$  no conjunto  $E(G[K])$ ; isto é, eliminamos em  $G$  todos os vértices que não estão em  $K$  e todas as arestas que não têm ambos os extremos em  $K$ .

*Exemplo 4.42.* Considerando o grafo  $G$  da Figura 4.1 e  $K = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ , o subgrafo  $H_3$  da Figura 4.4 é o subgrafo induzido por  $K$ , ou seja,  $H_3 = G[K]$ .

**Exercício 4.6.** Considerando o grafo  $G$  da Figura 4.2 e  $K = \{v_1, v_3, v_5\}$ , identifique o grafo  $G[K]$ .

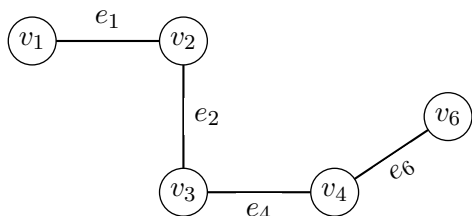
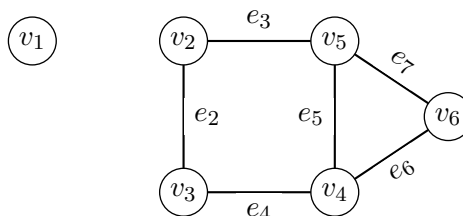
**Resolução:** Como no grafo  $G$  não existe nenhuma aresta em que ambos os vértices extremos pertençam a  $K$  temos um grafo sem arestas e com três vértices isolados.  $\square$

**Definição 4.43.** Sejam  $G$  um grafo,  $v \in V(G)$  e  $e \in E(G)$ . Indicamos por  $G - v$  o subgrafo de  $G$  induzido por  $K = V(G) \setminus \{v\}$ , ou seja, o grafo obtido a partir de  $G$  onde eliminamos o vértice  $v$  e todas as arestas com algum extremo em  $v$ . Por outro lado, dada uma aresta  $e \in E(G)$ , indicamos por  $G - e$  o grafo obtido a partir de  $G$  onde eliminamos a aresta  $e$ , mas mantemos todos os vértices e restantes arestas.

*Exemplo 4.44.* Considerando o grafo  $G$  da Figura 4.1 e o subgrafo  $H_3$  da Figura 4.4 temos  $H_3 = G - v_2$ .

**Exercício 4.7.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.2. Represente os grafos  $G - v_5$  e  $G - e_1$ .

**Resolução:** Para o grafo  $G - v_5$  retiramos o vértice  $v_5$  e todas as arestas que lhe são incidentes, ver Figura 4.9. Para o grafo  $G - e_1$  retiramos apenas a aresta  $e_1$  e mantemos todos os vértices, ver Figura 4.10.

Figura 4.9: Grafo  $G - v_5$ Figura 4.10: Grafo  $G - e_1$ 

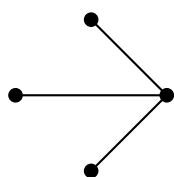
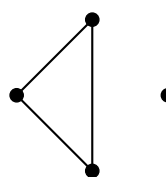
Em ambas as figuras mantivemos as numerações originais dos vértices e das arestas para que seja mais fácil comparar com o grafo  $G$  original.  $\square$

## 4.2 Grafos Especiais

Nesta Secção apresentamos alguns tipos de grafos especiais que se aplicam a determinados problemas.

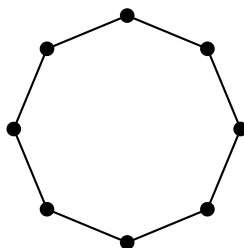
**Definição 4.45.** Seja  $G$  um grafo simples. Definimos o *grafo complementar* de  $G$ ,  $G^C$ , como o grafo simples em que o conjunto dos vértices coincide com  $V(G)$  e dois vértices são adjacentes em  $G^C$  se e só se não são adjacentes em  $G$ .

*Exemplo 4.46.* Na Figura 4.11 temos um grafo  $G$  e o seu complementar  $G^C$ .

(a) Grafo  $G$ (b) Grafo  $G^C$ Figura 4.11: Grafo  $G$  e o seu complementar

**Definição 4.47.** Quando temos um grafo simples com  $n > 1$  vértices formado por um único ciclo de comprimento  $n$ , indicamos esse grafo por  $C_n$ .

*Exemplo 4.48.* Na Figura 4.12 temos um grafo formado apenas por um ciclo de comprimento 8, que indicamos por  $C_8$ .

Figura 4.12: Ciclo  $C_8$ 

### 4.2.1 Grafos Completos

**Definição 4.49.** Seja  $G$  um grafo simples com  $n > 1$  vértices. Dizemos que  $G$  é um *grafo completo* quando todos os vértices são adjacentes. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo de ordem  $n$ , que indicamos por  $K_n$ .

*Exemplo 4.50.* Na Figura 4.13 temos os grafos completos  $K_n$ , com  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

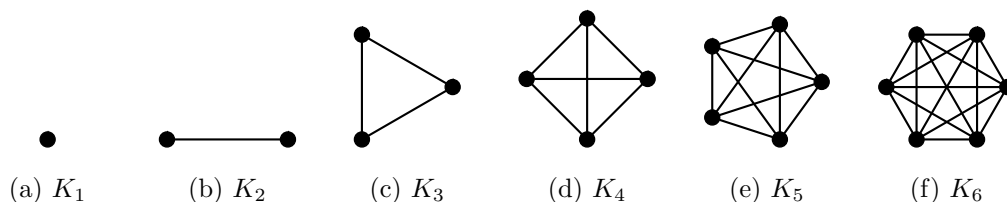


Figura 4.13: Grafos Completos

**Observação 4.51.** O grafo completo  $K_n$  tem precisamente  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  arestas.

**Observação 4.52.** Consideremos  $\mathcal{G}$  o conjunto de todos os grafos simples com  $\nu$  vértices. Tomando  $G \in \mathcal{G}$ , temos o seguinte:

1.  $G$  é um subgrafo de  $K_\nu$ , logo  $E(G) \subseteq E(K_\nu)$ . Assim,

$$\varepsilon = |E(G)| \leq |E(K_\nu)| = \binom{\nu}{2} = \frac{\nu(\nu-1)}{2}.$$

2.  $G$  é um subgrafo gerador de  $K_\nu$ , o qual é determinado por um subconjunto de  $E(K_\nu)$  de cardinalidade  $\varepsilon$ . Assim, o número de grafos simples com  $\nu$  vértices e  $\varepsilon$  arestas é dado por

$$\binom{\binom{\nu}{2}}{\varepsilon}.$$



3. Cada grafo  $G$  em  $\mathcal{G}$  é um subgrafo gerador de  $K_\nu$ ; logo o número de grafos em  $\mathcal{G}$  é igual ao número de subconjuntos de  $E(K_\nu)$ , ou seja, é  $2^{\binom{\nu}{2}}$ . Por outro lado, usando o que vimos no ponto anterior, basta somar os grafos que existem com  $\varepsilon$  arestas, assim, obtemos a igualdade

$$\sum_{\varepsilon=0}^{\binom{\nu}{2}} \binom{\binom{\nu}{2}}{\varepsilon} = 2^{\binom{\nu}{2}}.$$

### 4.2.2 Grafos Regulares

**Definição 4.53.** Dizemos que  $G$  é um *grafo  $k$ -regular* ou *regular de grau  $k$*  se todos os seus vértices têm grau  $k$ .

*Nota 4.54.* Quando  $G$  é um grafo  $k$ -regular temos que  $\delta(G) = \Delta(G) = k$ .

*Exemplo 4.55.* O grafo completo  $K_n$  é um grafo  $(n-1)$ -regular.

*Exemplo 4.56.* Qualquer ciclo  $C_n$  é um grafo 2-regular.

*Exemplo 4.57.* Na Figura 4.14 temos um grafo 2-regular.

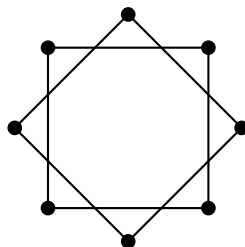


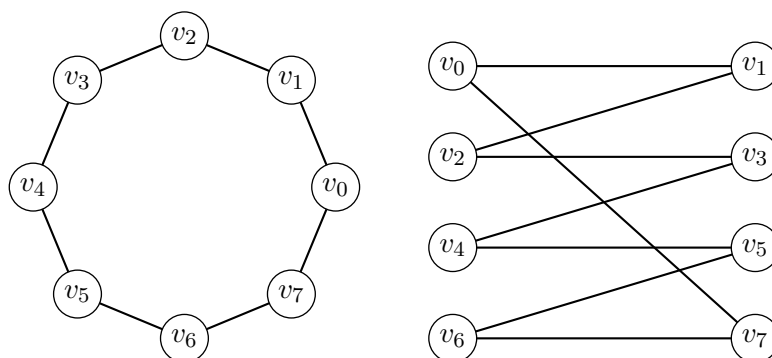
Figura 4.14: Grafo 2-regular

### 4.2.3 Grafos Bipartidos

**Definição 4.58.** Dizemos que  $G$  é um *grafo bipartido* se existir uma partição do conjunto  $V(G) = X \dot{\cup} Y$  tal que não existem vértices adjacentes em  $X$  nem em  $Y$ , ou seja, toda a aresta de  $G$  tem um extremo em  $X$  e o outro em  $Y$ .

*Exemplo 4.59.* Um ciclo de comprimento par  $2m$ ,  $C_{2m}$ , é um grafo bipartido. Na Figura 4.15 temos o ciclo  $C_8$  e a sua representação em termos de grafo bipartido.

**Teorema 4.60.** Um grafo é bipartido se e só se não tem circuitos de comprimento ímpar.

Figura 4.15: Grafo  $C_8$  Bipartido

**Prova:** Seja  $G$  um grafo bipartido com uma partição  $X$  e  $Y$ . Começando um circuito num vértice em  $X$  a aresta tem extremo num vértice em  $Y$ , para que seja fechado temos de voltar a  $X$ , logo qualquer circuito tem comprimento par.

Supomos agora que  $G$  não tem circuitos de comprimento ímpar. Fixemos um vértice  $u \in V(G)$  e seja

$$X = \{v \in V(G) : \text{dist}_G(u, v) \text{ é ímpar}\}.$$

Assim, não existem arestas com ambos os extremos em  $X$ , pois se tivéssemos uma aresta  $e$  com extremos  $v_1, v_2 \in X$  teríamos um circuito de comprimento  $\text{dist}_G(u, v_1) + 1 + \text{dist}_G(u, v_2)$  que é ímpar.

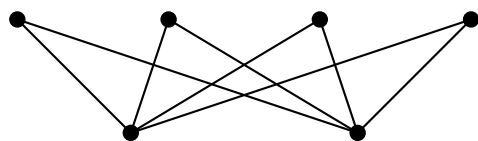
Por outro lado, como todos os vértices de  $V(G) \setminus X$  estão a uma distância par de  $u$ , se existissem arestas adjacentes com ambos extremos em  $V(G) \setminus X$ , isso implicaria que existiriam circuitos de comprimento ímpar (como vimos no caso anterior). Assim, tomando  $Y = V(G) \setminus X$  obtemos uma partição dos vértices  $V(G) = X \dot{\cup} Y$  e o grafo  $G$  é bipartido.  $\square$

**Definição 4.61.** Quando temos um grafo bipartido cuja partição dos vértices  $V(G) = X \dot{\cup} Y$  é tal que cada vértice em  $X$  é adjacente a todos os vértices em  $Y$ , dizemos que  $G$  é um grafo bipartido completo. Se  $|X| = m$  e  $|Y| = n$ , indicamos o grafo bipartido completo por  $K_{m,n}$ .

*Exemplo 4.62.* Na Figura 4.16 temos o grafo bipartido completo  $K_{4,2}$ .

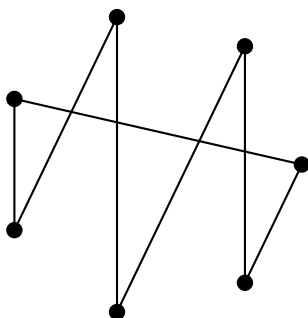
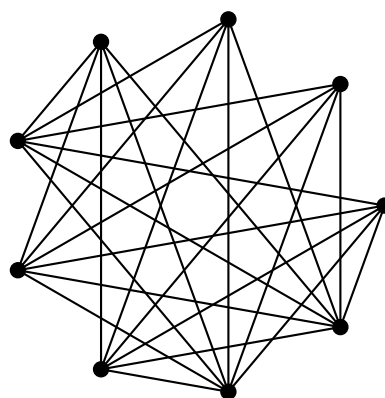
Mais geralmente temos as seguintes definições.

**Definição 4.63.** Se tivermos uma partição  $V(G) = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$ , dizemos que  $G$  é um grafo  $k$ -partido se para todas as arestas  $uv \in E(G)$  tivermos  $u \in V_i$  e  $v \in V_j$ , com  $i \neq j$ .

Figura 4.16: Grafo Bipartido Completo  $K_{4,2}$ 

Se além disso, para quaisquer  $u \in V_i$  e  $v \in V_j$ , com  $i \neq j$ , temos  $uv \in E(G)$  dizemos que  $G$  é um *grafo  $k$ -partido completo*. Indicamos este grafo  $k$ -partido completo por  $K_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}$ , onde  $\nu_i = |V_i|$ .

*Exemplo 4.64.* Na Figura 4.17 temos o grafo  $C_7$  que é 3-partido e na Figura 4.18 temos o grafo 3-partido completo  $K_{4,3,2}$ .

Figura 4.17: Grafo  $C_7$  3-partidoFigura 4.18: Grafo 3-partido completo  $K_{4,3,2}$ 

## Semana 12

### 4.3 Grafos Conexos

**Definição 4.65.** Dado um grafo  $G$  e  $u, v \in V(G)$ , dizemos que  $u$  e  $v$  são *vértices conexos* se existir um caminho em  $G$  que une  $u$  e  $v$ . A cada subconjunto de  $V(G)$  formado por todos os vértices conexos entre si chamamos *componente conexa* de  $G$  e indicamos o número de componentes conexas de  $G$  por  $cc(G)$ .

**Definição 4.66.** Dizemos que  $G$  é um *grafo conexo* se todos os  $u, v \in V(G)$  são vértices conexos, e nesse caso temos  $cc(G) = 1$ ; caso contrário temos  $cc(G) > 1$ .

*Exemplo 4.67.* Na Figura 4.19 temos um grafo não conexo, com  $cc(G) = 2$ , e na Figura 4.20 temos um grafo conexo.

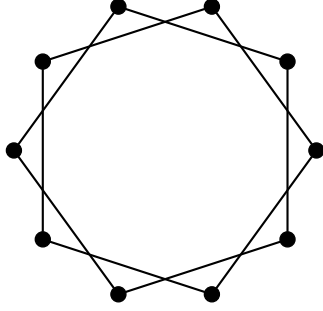


Figura 4.19: Grafo Não Conexos

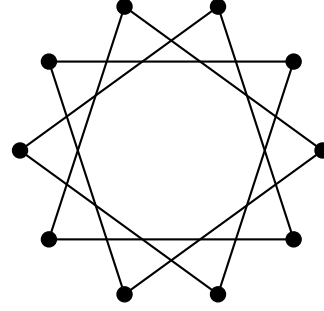


Figura 4.20: Grafo Conexos

**Lema 4.68.** Dado um grafo conexo  $G$  e uma aresta  $uv \in E(G)$  temos  $cc(G - uv) \leq 2$ .

**Prova:** Se  $G - uv$  for um grafo conexo, então  $cc(G - uv) = 1$ , e temos o desejado.

Se  $G - uv$  não for conexo, então  $cc(G - uv) > 1$ , e vamos supor com vista a um absurdo que  $cc(G - uv) > 2$ .

Assim, existem vértices  $v_1, v_2$  e  $v_3$  pertencentes a três componentes conexas de  $G - uv$  distintas. Como  $v_1$  e  $v_2$  são conexos em  $G$ , mas não em  $G - uv$ , existe um caminho que liga  $v_1$  a  $v_2$  que contém a aresta  $uv$ , digamos  $C_{12} = v_1 \dots uv \dots v_2$ . Como  $v_2$  e  $v_3$  são conexos em  $G$ , mas não em  $G - uv$ , existe um caminho que liga  $v_2$  a  $v_3$  que contém a aresta  $uv$ . Se esse caminho for  $C_{23} = v_2 \dots uv \dots v_3$ , então existe um caminho de  $v_1$  para  $v_2$  e um caminho de  $v_2$  para  $v_3$  em  $G - uv$ , o que é absurdo pois os vértices pertencem a componentes conexas distintas. Se esse caminho for  $C_{32} = v_3 \dots uv \dots v_2$ , então existe um caminho de  $v_1$  para  $v_3$  em  $G - uv$ , o que é absurdo pois os vértices pertencem a componentes conexas distintas. Assim,  $cc(G - uv) \leq 2$ .  $\square$

**Lema 4.69.** Dado um grafo  $G$  e uma aresta  $uv \in E(G)$  temos

$$cc(G) \leq cc(G - uv) \leq cc(G) + 1.$$

**Prova:** Seja  $V'$  a componente conexa de  $G$  que contém os vértices  $u$  e  $v$  e  $\bar{V} = V(G) \setminus V'$  o conjunto dos restantes vértices de  $G$  e definimos os grafos  $G' = G[V']$  e  $\bar{G} = G[\bar{V}]$ . Observemos que  $cc(G) = cc(G') + cc(\bar{G})$  e como  $G'$  é conexo temos  $cc(G') = 1$ ; logo  $cc(\bar{G}) = cc(G) - 1$ . Além disso, como  $uv$  é uma aresta em  $G'$  temos que

$$cc(G - uv) = cc(\bar{G}) + cc(G' - uv) = cc(G) - 1 + cc(G' - uv). \quad (4.1)$$

Aplicando o Lema 4.68 ao grafo conexo  $G'$  temos que: ou  $cc(G' - uv) = 1$  e a igualdade (4.1) fica  $cc(G - uv) = cc(G)$ ; ou  $cc(G' - uv) = 2$  e a igualdade (4.1) fica  $cc(G - uv) = cc(G) + 1$ . E obtemos o pretendido.  $\square$

**Exercício 4.8.** Represente um grafo com 5 vértices, 4 arestas e 3 componentes conexas.

**Prova:** No enunciado não é referido que o grafo é simples, por isso, podemos por exemplo representar o grafo da Figura 4.21.  $\square$

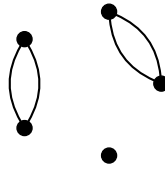


Figura 4.21

No entanto, como mostra o próximo teorema, o facto do grafo ser simples implica algumas restrições.

**Teorema 4.70.** *Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu$  vértices e  $\varepsilon$  arestas. Então*

$$\nu - cc \leq \varepsilon \leq \binom{\nu - cc + 1}{2},$$

onde  $cc = cc(G)$ .

**Prova:** Para provar a desigualdade  $\nu - cc \leq \varepsilon$  vamos usar indução no número de arestas.

Quando  $\varepsilon = 0$  temos que cada componente conexa é formada por um único vértice, logo  $cc = \nu$  e a desigualdade verifica-se.

Para  $\varepsilon > 0$  vamos supor que a desigualdade  $\nu - cc(G') \leq \varepsilon(G')$  se verifica para todos os grafos  $G'$  com  $\nu$  vértices e com menos do que  $\varepsilon$  arestas. Seja  $e \in E(G)$ , por hipótese, o grafo  $G - e$  verifica a desigualdade, ou seja,  $\nu - cc(G - e) \leq \varepsilon(G - e)$ . Por outro lado, pelo Lema 4.69 temos  $cc(G - e) \leq cc(G) + 1 \Leftrightarrow cc(G - e) - 1 \leq cc(G)$ , logo

$$\nu - cc(G) \leq \nu - cc(G - e) + 1 \leq \varepsilon(G - e) + 1 = \varepsilon(G),$$

ou seja, obtemos a desigualdade desejada.

Para a outra desigualdade, consideremos  $G$  um grafo simples com  $\nu$  vértices e  $cc$  componentes conexas, e seja  $G'$  o grafo obtido a partir de  $G$  em que adicionamos arestas

de modo que  $cc = cc(G')$  e cada componente conexa de  $G'$  é um subgrafo completo; logo  $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(G')$ .

Tomemos  $G'[V_1]$  e  $G'[V_2]$  duas componentes conexas de  $G'$  com  $n_1$  e  $n_2$  vértices respectivamente, logo  $G'[V_1] \cong K_{n_1}$  e  $G'[V_2] \cong K_{n_2}$ . Sem perda de generalidade assumimos que  $1 < n_1 \leq n_2$ , passando um vértice de  $V_1$  para  $V_2$ , eliminando todas as arestas que o ligavam a  $V_1$  e acrescentando todas as arestas que o ligam a todos os vértices de  $V_2$ , obtemos um novo grafo  $G'$  com o mesmo número de vértices e de componentes conexas, mas com mais arestas. Repetimos este processo até que  $V_1$  seja uma componente conexa trivial, ou seja, um vértice.

Agora fazemos o mesmo processo com todas os pares de componentes conexas até obtermos um grafo  $G'$  constituído por uma componente conexa isomorfa a  $K_{\nu-cc+1}$  e por  $cc-1$  componentes conexas triviais, isto é,  $cc-1$  vértices isolados. Logo  $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(G') = \binom{\nu-cc+1}{2}$ .  $\square$

**Exercício 4.9.** Construa, caso seja possível, um grafo simples  $G$  com 6 vértices, 3 componentes conexas e:

- a) 2 arestas
- b) 7 arestas
- c) 5 arestas

**Resolução:** Como o grafo  $G$  é simples, pelo teorema anterior temos de ter

$$\nu - cc \leq \varepsilon \leq \binom{\nu - cc + 1}{2} \Leftrightarrow 6 - 3 \leq \varepsilon \leq \binom{6 - 3 + 1}{2} \Leftrightarrow 3 \leq \varepsilon \leq 6.$$

- a) O grafo  $G$  não existe, pois  $3 \leq 2 \leq 6$  é impossível.
- b) O grafo  $G$  não existe, pois  $3 \leq 7 \leq 6$  é impossível.
- c) Como  $3 \leq 5 \leq 6$  é possível, podemos construir, por exemplo, o grafo da Figura 4.22.

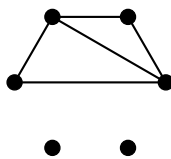


Figura 4.22

□

**Definição 4.71.** Dado um grafo  $G$  e uma aresta  $e \in E(G)$ , dizemos que a aresta  $e$  é *uma ponte* se  $cc(G - e) > cc(G)$ , ou seja, a aresta  $e$  é uma ponte se quando eliminamos a aresta  $e$  do grafo  $G$  aumentamos o número de componentes conexas de  $G$ .

*Exemplo 4.72.* O grafo  $G$  da Figura 4.2 é conexo, logo  $cc(G) = 1$ . Como o grafo  $G - e_1$  (ver Figura 4.10) tem  $cc(G - e_1) = 2 > cc(G) = 1$ , a aresta  $e_1$  é uma ponte de  $G$ .

*Exemplo 4.73.* Na Figura 4.23 temos um grafo em que não existem pontes, enquanto que na Figura 4.24 temos um grafo em que todas as arestas são pontes.

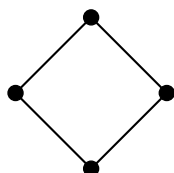


Figura 4.23: Grafo sem Pontes

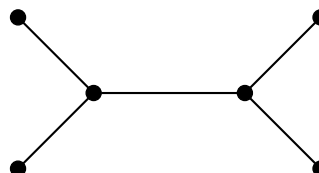


Figura 4.24: Grafo só com Pontes

**Exercício 4.10.** Indique o número de componentes conexas do grafo  $G$  da Figura 4.5 e as arestas que são pontes, caso existam.

**Resolução:** O grafo  $G$  da Figura 4.5 tem duas componentes conexas, uma formada pelo vértice isolado e outra pelos restantes vértices,  $cc(G) = 2$ . Nenhuma das arestas paralelas é ponte, uma vez que se eliminarmos uma delas temos as mesmas componentes conexas; mas a outra aresta é ponte, pois se a eliminarmos passamos a ter três componentes conexas.

□

**Teorema 4.74.** Dado um grafo  $G$  e uma aresta  $uv \in E(G)$ , são equivalentes as seguintes afirmações:

- a) a aresta  $uv$  é uma ponte de  $G$
- b)  $cc(G - uv) = cc(G) + 1$
- c) os vértices  $u$  e  $v$  não são conexos em  $G - uv$
- d) a aresta  $uv$  não está contida em nenhum ciclo de  $G$ .

**Prova:**

- a) $\Rightarrow$  b) Por definição, se  $uv$  é uma ponte de  $G$ , então  $cc(G - uv) > cc(G)$ . Tendo em conta o Lema 4.69 temos de ter  $cc(G - uv) = cc(G) + 1$ .
- b) $\Rightarrow$  c) Se os vértices  $u$  e  $v$  fossem conexos em  $G - uv$  existiria um caminho de  $u$  para  $v$  que não contem a aresta  $uv$ , mas isso implicaria que  $u$  e  $v$  estão na mesma componente conexa de  $G - uv$ . Logo  $cc(G - uv) = cc(G)$ , o que contraria a hipótese.
- c) $\Rightarrow$  d) Suponhamos que a aresta  $uv$  pertence a um ciclo  $C$  de  $G$ . Logo  $C - uv$  é um caminho em  $G - uv$ , ou seja,  $u$  e  $v$  são conexos em  $G - uv$ , o que contraria a hipótese.
- d) $\Rightarrow$  a) Suponhamos que  $uv$  não é uma ponte, logo  $cc(G - uv) = cc(G)$ , assim,  $u$  e  $v$  são conexos em  $G - uv$ . Assim, existiria um caminho em  $G - uv$  de  $u$  para  $v$ , e juntando a aresta  $uv$  obtemos um ciclo, o que contraria a hipótese.

□

*Exemplo 4.75.* Já vimos que a aresta  $e_1$  do grafo  $G$  da Figura 4.2 é uma ponte, o que equivale a dizer que  $cc(G - e_1) = cc(G) + 1$ , o que equivale a dizer que os vértices  $v_1$  e  $v_2$  não são conexos em  $G - e_1$ , o que equivale a dizer que a aresta  $e_1$  não está contida em nenhum ciclo de  $G$ .

## 4.4 Árvores

**Definição 4.76.** Dado um grafo  $G$ , dizemos que  $G$  é uma floresta se não contiver ciclos. Quando a floresta  $G$  é conexa, dizemos que  $G$  é uma árvore, ou seja, uma árvore é uma componente conexa da floresta. Dado um vértice  $v \in V(G)$ , dizemos que  $v$  é uma folha se  $d_G(v) = 1$ .

*Exemplo 4.77.* Na Figura 4.25 temos uma floresta com três componentes conexas, ou seja, três árvores.

*Nota 4.78.* Uma floresta (ou no caso particular de uma árvore) é sempre um grafo simples, uma vez que se existissem arestas paralelas ou lacetes teríamos um ciclo.

**Teorema 4.79.** *Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu$  vértices. São equivalentes as seguintes afirmações:*

- a)  $G$  é uma árvore



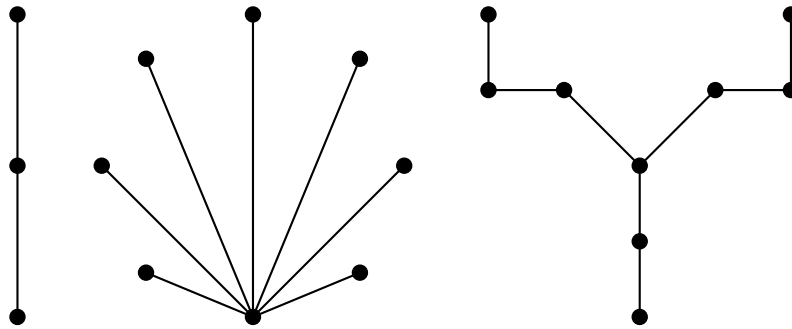


Figura 4.25: Floresta com 3 Árvores

- b)  $G$  não tem ciclos e tem  $\nu - 1$  arestas
- c)  $G$  é conexo e tem  $\nu - 1$  arestas
- d)  $G$  é conexo e cada aresta é uma ponte
- e) quaisquer dois vértices de  $G$  estão ligados por um único caminho
- f)  $G$  não tem ciclos, mas acrescentando uma aresta obtemos um ciclo.

**Prova:**

a) $\Rightarrow$ b) Como  $G$  é um grafo simples e uma árvore, logo  $G$  não tem ciclos. Vamos provar que  $G$  tem  $\nu - 1$  arestas, fazendo indução no número de vértices  $\nu$ . Se  $\nu = 1$ , a única árvore simples é o grafo trivial que tem  $\nu - 1 = 0$  arestas. Agora supomos que qualquer árvore com  $n$  vértices, em que  $n < \nu$ , tem  $n - 1$  arestas.

Seja  $G$  uma árvore com  $\nu$  vértices, como  $G$  não tem ciclos, se retirarmos uma aresta obtemos duas componentes conexas  $G_1$  e  $G_2$ , cada uma delas uma árvore. Sejam  $\nu_1$  e  $\nu_2$  o número de vértices de  $G_1$  e de  $G_2$ , respectivamente, logo  $\nu = \nu_1 + \nu_2$ . Por hipótese, temos  $\varepsilon(G_1) = \nu_1 - 1$  e  $\varepsilon(G_2) = \nu_2 - 1$ , logo  $G$  tem  $\varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1 = \nu_1 - 1 + \nu_2 - 1 + 1 = \nu - 1$  arestas.

b) $\Rightarrow$ c) Suponhamos que  $G$  não é conexo, logo  $cc(G) \geq 2$  e sejam  $G_1, G_2, \dots, G_k$  as componentes conexas de  $G$ , em que  $\nu(G_i) = \nu_i$  e  $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = \nu$ . Como  $G$  não tem ciclos,  $G_i$  não tem ciclos e logo  $G_i$  é uma árvore. Pela a),  $\varepsilon(G_i) = \nu_i - 1$ , logo o número de arestas de  $G$  é  $\varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + \dots + \varepsilon(G_k) = \nu_1 - 1 + \nu_2 - 1 + \dots + \nu_k - 1 = \nu - cc(G) \leq \nu - 2$ , o que contradiz a hipótese.

- c) $\Rightarrow$ d) Como  $G$  é conexo com  $\nu - 1$  arestas, para qualquer aresta  $e \in E(G)$ , o grafo  $G - e$  tem  $\nu$  vértices e  $\nu - 2$  arestas, pelo Teorema 4.70 o grafo  $G - e$  tem de verificar  $\nu - cc(G - e) \leq \nu - 2$ , ou seja,  $cc(G - e) \geq 2 > cc(G) = 1$ , isto é, a aresta  $e$  é uma ponte.
- d) $\Rightarrow$ e) Como  $G$  é conexo, para quaisquer  $x, y \in V(G)$  existe um caminho  $C$  entre  $x$  e  $y$ . Seja  $uv$  uma aresta de  $C$ , que por hipótese é uma ponte, logo  $cc(G - uv) = 2$  e temos  $G_1$  e  $G_2$  as componentes conexas de  $G - uv$  que contêm  $u$  e  $v$ , respectivamente. Se existisse outro caminho  $C'$  entre  $x$  e  $y$ , quando retiramos a aresta  $uv$  ao caminho  $C$  teríamos um caminho de  $u$  para  $v$  em  $G - uv$ , ou seja,  $u$  e  $v$  pertenciam à mesma componente conexa de  $G - uv$ , o que é absurdo.
- e) $\Rightarrow$ f) Suponhamos que  $G$  contém um ciclo, logo, quaisquer dois vértices desse ciclo estariam ligados por pelo menos dois caminhos; o que contraria a hipótese, logo  $G$  não contém ciclos. Por outro lado, acrescentando uma aresta entre dois vértices  $u$  e  $v$ , como já existia um caminho entre  $u$  e  $v$  obtemos um ciclo.
- f) $\Rightarrow$ a) Como  $G$  não contém ciclos, para provar que  $G$  é uma árvore, falta apenas provar que  $G$  é conexo. Suponhamos que  $G$  não é conexo. Se acrescentarmos uma aresta que une dois vértices pertencentes a componentes conexas distintas, como  $G$  não continha ciclos, não criamos nenhum ciclo, o que contraria a hipótese.

□

*Exemplo 4.80.* Na Figura 4.24 temos um grafo  $G$  com 6 vértices, que é uma árvore, o que equivale a dizer que  $G$  não tem ciclos e tem 5 arestas, ou seja,  $G$  é conexo e tem 5 arestas, o que é equivalente a que  $G$  é conexo e todas as arestas são pontes, ou seja, quaisquer dois vértices de  $G$  estão ligados por um único caminho, o que equivale a  $G$  não ter ciclos mas acrescentado uma aresta temos um ciclo; e podemos verificar que são todas afirmações verdadeiras.

**Teorema 4.81.** *Uma árvore, não trivial, tem pelo menos duas folhas.*

**Prova:** Seja  $G$  uma árvore não trivial com  $\nu$  vértices, logo tem  $\nu - 1$  arestas, então pelo Teorema 4.18 temos que  $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2\nu - 2$ . Como qualquer árvore é conexa, então  $d_G(v) \geq 1$  para todo o  $v \in V(G)$ . Assim, se para todos os vértices  $v$  tivermos

$d_G(v) \geq 2$ , então  $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq 2\nu$  (o que é impossível); se tivermos apenas um vértice  $v$  com  $d_G(v) = 1$ , então  $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq 2\nu - 1$  (o que é impossível). Logo, existem pelo menos dois vértices  $v$  com  $d_G(v) = 1$ .  $\square$

**Teorema 4.82.** *Um grafo  $G$  é uma floresta se e só se  $\nu(G) = \varepsilon(G) + cc(G)$ .*

**Prova:** Admitimos que  $G$  é uma floresta, logo cada componente conexa é uma árvore e cada aresta é uma ponte (Teorema 4.79). Vamos provar a igualdade por indução no número de arestas. Se  $\varepsilon(G) = 0$  cada componente conexa é formada por um vértice e logo temos a igualdade. Suponhamos que o resultado é válido para todas as florestas com menos do que  $\varepsilon(G)$  arestas. Seja  $G'$  o subgrafo de  $G$  obtido por eliminação de uma aresta, logo  $G'$  é uma floresta com  $\varepsilon(G) - 1$  arestas,  $\nu(G)$  vértices e  $cc(G) + 1$  componentes conexas (uma vez que todas as arestas das várias árvores são pontes, pelo Teorema 4.79). Aplicando a hipótese de indução a  $G'$  temos

$$0 = \varepsilon(G') - \nu(G') + cc(G') = \varepsilon(G) - 1 - \nu(G) + cc(G) + 1 = \varepsilon(G) - \nu(G) + cc(G).$$

Agora admitimos que a igualdade é válida e que  $G$  tem  $k$  componentes conexas,  $G_1, \dots, G_k$ , e logo temos

$$0 = \varepsilon(G) - \nu(G) + cc(G) = \varepsilon(G) - \nu(G) + k = \sum_{i=1}^k (\varepsilon(G_i) - \nu(G_i) + 1).$$

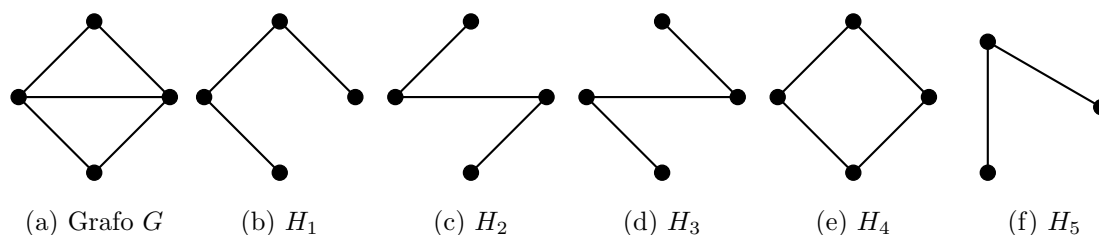
Mas, como cada  $G_i$  é conexo,  $\varepsilon(G_i) \geq \nu(G_i) - 1 \Leftrightarrow \varepsilon(G_i) - \nu(G_i) + 1 \geq 0$ , e então temos de ter  $\varepsilon(G_i) - \nu(G_i) + 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon(G_i) = \nu(G_i) - 1$ , ou seja, pelo Teorema 4.79, cada  $G_i$  é uma árvore, e logo  $G$  é uma floresta.  $\square$

*Exemplo 4.83.* Na Figura 4.25 temos uma floresta com 20 vértices, 17 arestas e 3 componentes conexas, em que se verifica a igualdade do teorema anterior.

**Definição 4.84.** Seja  $G$  um grafo conexo. Chamamos *árvore geradora de  $G$*  a todo o subgrafo gerador de  $G$  que seja uma árvore, ou seja, todo o subgrafo que contém todos os vértices de  $G$  e é uma árvore.

*Nota 4.85.* Se  $G$  for uma árvore a única árvore geradora de  $G$  é ela própria.

*Exemplo 4.86.* Na Figura 4.26 os subgrafos  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  são árvores geradoras de  $G$ . O subgrafo  $H_4$  é subgrafo gerador de  $G$  mas não é árvore. O subgrafo  $H_5$  é subgrafo de  $G$  e é árvore, mas não é gerador.

Figura 4.26: Grafo  $G$  e subgrafos

**Teorema 4.87.** *Todo o grafo conexo admite uma árvore geradora.*

**Prova:** Seja  $G$  um grafo conexo e  $H$  um subgrafo conexo gerador minimal de  $G$ , ou seja,  $cc(H) = 1$  e  $cc(H - e) > 1$  para toda a aresta  $e \in E(H)$ . Assim, todas as arestas de  $H$  são pontes, e pelo Teorema 4.79, temos que  $H$  é uma árvore.  $\square$

**Teorema 4.88.** *Seja  $G$  um grafo conexo e  $e \in E(G)$  uma aresta. A aresta  $e$  é uma ponte se e só se a aresta  $e$  pertence a todas as árvores geradoras de  $G$ .*

**Prova:** Consideremos que a ponte  $e$  tem extremos  $u$  e  $v$  e suponhamos que existe uma árvore geradora  $T$  tal que  $e \notin E(T)$ . Mas, por definição, se  $T$  é árvore geradora logo é conexa e  $V(T)$  possui todos os vértices de  $G$ , logo existe um caminho em  $T$  entre os vértices  $u$  e  $v$ , o que entra em contradição com o facto da aresta  $e = uv$  ser uma ponte.

Por outro lado, seja  $e$  uma aresta de todas as árvores geradoras de  $G$ , com extremos em  $u$  e  $v$ , e supomos que  $e$  não é uma ponte de  $G$ . Então, os vértices  $u$  e  $v$  são conexos em  $G - e$  e podemos tomar uma árvore geradora  $T$  de  $G - e$ , logo  $T$  também é árvore geradora de  $G$ , da qual a aresta  $e$  não faz parte, o que é absurdo.  $\square$

**Exercício 4.11.** Obtenha todas as árvores geradoras do grafo  $G$  da Figura 4.27.

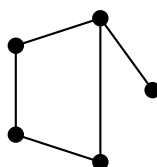


Figura 4.27

**Resolução:** O grafo  $G$  tem 5 vértices, e qualquer árvore geradora tem de ter os mesmos 5 vértices, e logo 4 arestas. A aresta que é ponte tem de pertencer a todas as árvores

geradoras, por isso, falta escolher 3 arestas das restantes 4 arestas de modo a não termos um ciclo. O grafo  $G$  tem as árvores geradoras apresentadas na Figura 4.28.  $\square$

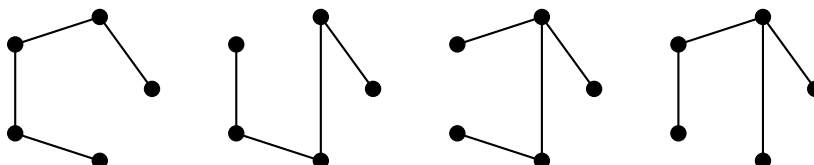


Figura 4.28

## Semana 13

### 4.5 Grafos Eulerianos

**Definição 4.89.** Um trajecto que contém todas as arestas de  $G$  diz-se um *trajecto euleriano*. Um circuito que contém todas as arestas de  $G$  diz-se um *circuito euleriano*. Se o grafo  $G$  tem um circuito euleriano, dizemos que  $G$  é um *grafo euleriano*.

*Nota 4.90.* Observemos que qualquer grafo euleriano tem de ser à partida um grafo conexo.

*Exemplo 4.91.* No grafo da Figura 4.24 não é possível indicar trajectos eulerianos.

*Exemplo 4.92.* No grafo da Figura 4.29 é possível indicar um trajecto euleriano, por exemplo  $e_4e_1e_2e_3e_5e_6$ , mas não é um grafo euleriano.

*Exemplo 4.93.* No grafo da Figura 4.30 é possível indicar um circuito euleriano, por exemplo  $e_1e_2e_3e_4e_6e_5e_7$ , assim o grafo é euleriano.

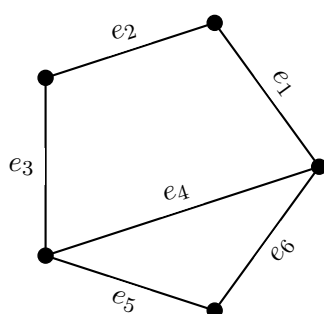


Figura 4.29: Grafo não euleriano

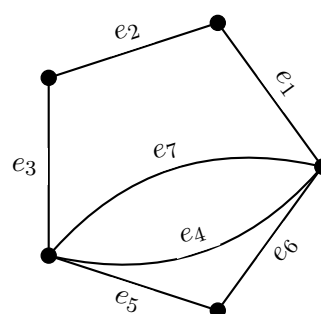


Figura 4.30: Grafo euleriano

**Lema 4.94.** *Seja  $G$  um grafo euleriano, então todos os vértices de  $G$  têm grau par.*

**Prova:** Seja  $C$  um circuito euleriano de  $G$  e escolhamos  $u$  como vértice inicial e final de  $C$ . Percorrendo o circuito  $C$ , de cada vez que passamos por um vértice  $v \neq u$  percorremos duas novas arestas incidentes em  $v$ , como o circuito percorre todas as arestas, o grau de  $v$  é par. Por outro lado, cada vez que passamos no vértice  $u$  percorremos duas novas arestas incidentes, e juntando a aresta inicial e final, concluímos que  $u$  também tem grau par.  $\square$

**Lema 4.95.** *Seja  $G$  um grafo com todos os vértices de grau par e  $\delta(G) \geq 2$ . Então,  $G$  ou tem um lacete, ou tem duas arestas paralelas, ou tem um circuito de comprimento maior do que 2.*

**Prova:** Se  $G$  tem um lacete ou duas arestas paralelas, a proposição é válida. Se  $G$  for simples (não tem lacetes nem arestas paralelas) e não contiver nenhum circuito, então  $G$  é uma árvore. Pelo Teorema 4.81,  $G$  tem vértices de grau 1, o que contraria a hipótese.  $\square$

**Lema 4.96.** *Sejam  $G$  um grafo,  $C$  um circuito de  $G$  e  $v \in V(G)$ . Então  $d_G(v)$  e  $d_{G-E(C)}(v)$  ou são ambos pares ou são ambos ímpares.*

**Prova:** Observemos que o grafo  $H = (V, E(C))$  é euleriano, logo pelo Lema 4.94, todos os vértices  $v$  têm grau par em  $H$ . Como  $d_G(v) = d_{G-E(C)}(v) + d_H(v)$  e  $d_H(v)$  é par concluímos que  $d_G(v)$  e  $d_{G-E(C)}(v)$  têm a mesma paridade.  $\square$

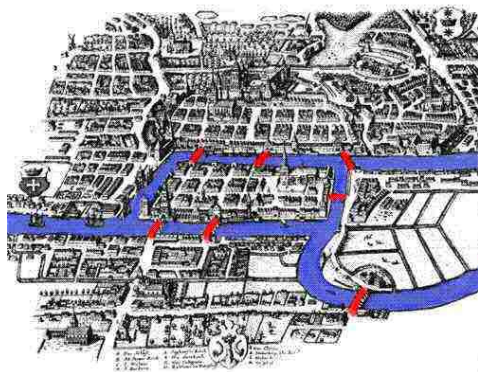
**Teorema 4.97.** *Seja  $G$  um grafo conexo não trivial. O grafo  $G$  é euleriano se e só se todos os vértices têm grau par.*

**Prova:** Já provámos no Lema 4.94 que se  $G$  é um grafo euleriano, então todos os vértices têm grau par.

Para a outra implicação supomos que  $G$  é um grafo conexo, não trivial, não euleriano com todos os vértices de grau par; e que todos os subgrafos de  $G$  (resultantes da eliminação de arestas) que têm todos os vértices de grau par são eulerianos. Como todos os vértices de  $G$  têm grau par (logo  $\delta(G) \geq 2$ ), pelo Lema 4.95 podemos concluir que  $G$  tem um circuito.

Seja  $C$  um circuito de  $G$  com comprimento maximal, como  $G$  não é euleriano, o circuito  $C$  não é euleriano. Como os vértices de  $G$  têm grau par, pelo Lema 4.96 os vértices de  $G - E(C)$  têm grau par. Da hipótese, concluímos que  $G - E(C)$  é euleriano, seja  $C'$  um circuito euleriano em  $G - E(C)$ . Como  $G$  é conexo, existe  $v \in V(C) \cap V(C')$  e  $C \cup C'$  é um circuito com mais arestas do que  $C$ , o que é absurdo.  $\square$

**Exercício 4.12 (Problema das Pontes de Königsberg).** A cidade de Königsberg (actual Kalininegrado) é banhada pelo rio Pregel que ao atravessar a cidade se ramifica como na imagem



em que a cidade ficava dividida em quatro zonas, ligadas por sete pontes. Os habitantes locais tentaram ao longo do tempo atravessar todas as pontes sem repetir nenhuma. Leonhard Euler provou que tal façanha seria impossível, porquê?

**Resolução:** O problema pode ser representado pelo grafo da Figura 4.31.

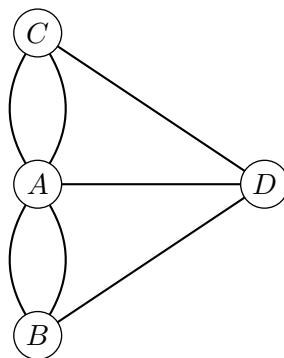


Figura 4.31: Grafo das Pontes de Königsberg

Pelo Teorema 4.97 o grafo é euleriano se e só se todos os vértices têm grau par; ora  $d_G(A) = 5$  e  $d_G(B) = d_G(C) = d_G(D) = 3$  são ímpares, logo o grafo é não euleriano.  $\square$

Sabendo que um dado grafo é euleriano, o problema seguinte é encontrar um circuito euleriano. Um método para determinar um circuito euleriano  $C$  é o *Algoritmo de Fleury* cuja ideia consiste em evitar pontes, sempre que possível:

1. Escolher um vértice arbitrário,  $v_0$ , e adicionamos ao trajecto, obtendo  $C = v_0$
2. Escolher uma aresta  $e$ , do grafo actual, incidente no último vértice de  $C$

3. Se  $e$  não é ponte adicionamos a aresta  $e$  ao trajecto  $C$  e retiramos a aresta  $e$  do grafo actual
4. Se  $e$  é ponte e não existir, no grafo actual, mais nenhuma aresta incidente no último vértice de  $C$  adicionamos a ponte  $e$  ao trajecto  $C$  e retiramos a ponte  $e$  do grafo actual
5. Adicionamos ao trajecto  $C$  o outro vértice extremo da aresta  $e$
6. Voltar ao segundo passo até que o grafo actual seja nulo, ou seja, até que  $C$  seja um circuito.

*Exemplo 4.98.* Consideremos o grafo  $G$  da Figura 4.32 o qual tem todos os vértices com

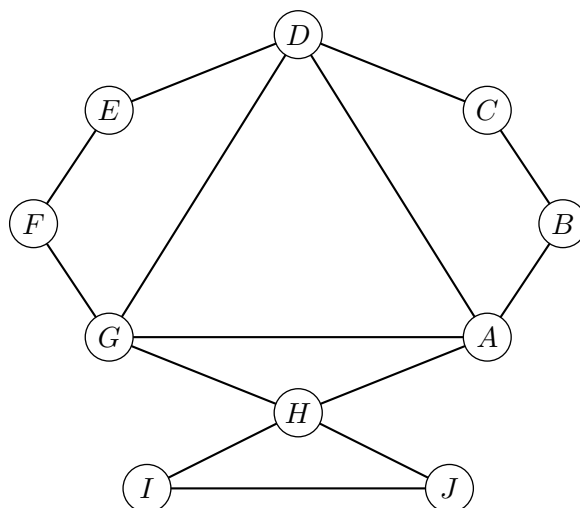


Figura 4.32: Grafo  $G$  euleriano: Algoritmo de Fleury

grau par, sendo assim um grafo euleriano pelo Teorema 4.97. Vamos aplicar o algoritmo de Fleury para obter um circuito euleriano: observemos ainda que  $G$  é simples, pelo que basta indicar os vértices para definir a aresta. Começamos por tomar um vértice qualquer, por exemplo  $A$  e temos  $C = A$ . Podemos escolher a aresta  $AH$  pois não é ponte e ficamos com  $C = AH$  e com o grafo  $G - AH$ . Em seguida não podemos escolher a aresta  $HG$ , uma vez que é uma ponte do grafo  $G - AH$ , mas podemos escolher, por exemplo a aresta  $HI$  que não é ponte do grafo  $G - AH$  e ficamos com  $C = AHI$  e com o grafo  $G - \{AH, HI\}$ . Repetindo o processo do algoritmo podemos, por exemplo, construir o circuito euleriano  $C = AHIJHGFEDGABCD A$ .

**Exercício 4.13.** Determine, caso exista, um circuito euleriano do grafo da Figura 4.33.



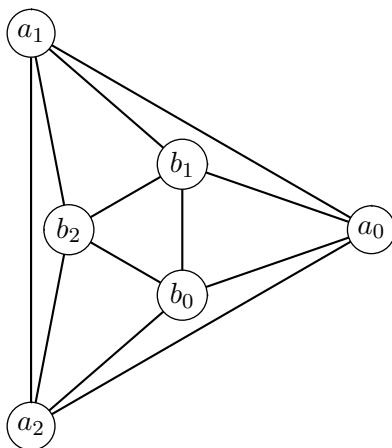


Figura 4.33

**Resolução:** Todos os vértices do grafo têm grau par, no caso igual a 4, logo o grafo é euleriano, pelo Teorema 4.97. Como o grafo é simples, para determinar um circuito basta indicar os vértices. Tomemos o vértice  $a_0$  e a aresta  $a_0a_1$  que não é ponte, e podemos repetir até obter o trajecto  $a_0a_1a_2a_0$ . Em seguida podemos tomar as arestas  $a_0b_0$  e  $b_0b_1$  que não são pontes, ficando com o trajecto  $a_0a_1a_2a_0b_0b_1$ . Mas agora não podemos tomar a aresta  $b_1a_0$  por se tratar de uma ponte do grafo actual; podemos por exemplo tomar  $b_1a_1$  e depois  $a_1b_2$  que é uma ponte, mas em que não existe alternativa, e ficamos com o trajecto  $a_0a_1a_2a_0b_0b_1a_1b_2$ . Não podemos escolher a aresta  $b_2b_1$  pois é uma ponte do grafo actual, escolhemos  $b_2a_2$ , por exemplo. Agora, só temos pontes e escolhemos as arestas na sequência  $a_2b_0$ ,  $b_0b_2$ ,  $b_2b_1$  e  $b_1a_0$ , formando o circuito euleriano  $a_0a_1a_2a_0b_0b_1a_1b_2a_2b_0b_2b_1a_0$ .  $\square$

## 4.6 Grafos Hamiltonianos

**Definição 4.99.** Um caminho que contém todos os vértices de  $G$  diz-se um *caminho hamiltoniano*. Um ciclo que contém todos os vértices de  $G$  diz-se um *ciclo hamiltoniano*. Se o grafo  $G$  tem um ciclo hamiltoniano, dizemos que  $G$  é um *grafo hamiltoniano*.

*Nota 4.100.* Observemos que qualquer grafo hamiltoniano tem de ser à partida um grafo conexo.

*Exemplo 4.101.* No grafo da Figura 4.24 não é possível indicar caminhos hamiltonianos.

*Exemplo 4.102.* No grafo da Figura 4.34 é possível indicar um caminho hamiltoniano, por

exemplo  $v_1v_2v_3v_4v_5$ , mas não é um grafo hamiltoniano.

*Exemplo 4.103.* No grafo da Figura 4.35 é possível indicar um ciclo hamiltoniano, por exemplo  $v_1v_3v_2v_5v_4v_1$ , assim o grafo é hamiltoniano.

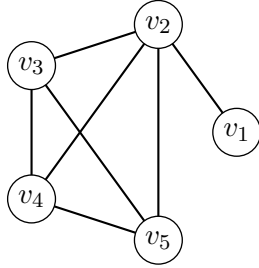


Figura 4.34: Grafo não hamiltoniano

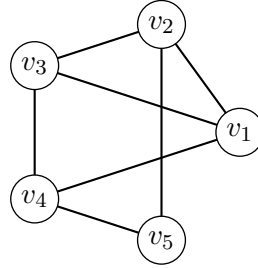


Figura 4.35: Grafo hamiltoniano

**Proposição 4.104.** *Seja  $G$  um grafo hamiltoniano e  $v \in V(G)$ , então  $G - v$  é um grafo conexo.*

**Prova:** Se  $G$  é grafo hamiltoniano, existe um ciclo que passa por todos os vértices. Retirando um vértice  $v$ , os restantes vértices continuam a ser ligados por um caminho, logo  $G - v$  é um grafo conexo.  $\square$

**Teorema 4.105.** *Seja  $G$  um grafo hamiltoniano. Para qualquer conjunto  $S \subseteq V(G)$  temos  $cc(G - S) \leq |S|$ .*

**Prova:** Seja  $C$  um ciclo hamiltoniano de  $G$ . Para cada  $S \subseteq V(G)$  temos  $cc(C - S) \leq |S|$ , uma vez que ao eliminarmos  $k$  vértices de um ciclo obtemos  $k$  componentes conexas desse ciclo. Como  $C - S$  é um subgrafo gerador de  $G - S$ , então  $cc(G - S) \leq cc(C - S) \leq |S|$ .  $\square$

**Teorema 4.106.** *Sejam  $G$  um grafo simples e  $u, v \in V(G)$  dois vértices não adjacentes tais que  $d_G(u) + d_G(v) \geq \nu(G)$ . Então,  $G$  é grafo hamiltoniano se e só se  $G + uv$  é grafo hamiltoniano.*

**Prova:** Observemos que se  $G$  é grafo hamiltoniano, quando adicionamos uma aresta obtemos um grafo  $G + uv$  que é hamiltoniano.

Agora suponhamos que  $G + uv$  é grafo hamiltoniano, que a desigualdade é válida, mas que  $G$  não é hamiltoniano. Dado  $C'$  um ciclo hamiltoniano de  $G + uv$ , a aresta  $uv$

pertence a  $C'$ , pois se assim não fosse o ciclo hamiltoniano  $C' - uv = C$  estaria em  $G$  e  $G$  seria hamiltoniano, o que é impossível. Assim, em  $G$  existe um caminho hamiltoniano  $C$  dado por  $u = v_1 v_2 \dots v_\nu = v$ , mas para qualquer  $i$  as arestas  $v_i v$  e  $uv_{i+1}$  não fazem parte do grafo  $G$ , caso contrário teríamos o ciclo hamiltoniano  $uv_2 \dots v_i v v_{i+1} \dots v_{i+1} u$  em  $G$ . Seja  $k = d_G(u)$  e  $\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\}$  o conjunto dos vértices adjacentes a  $u$ , logo o conjunto dos vértices  $\{u, v_{j_2-1}, \dots, v_{j_k-1}\}$  não são adjacentes a  $v$ . Assim, existem  $d_G(u) + 1$  vértices que não são adjacentes a  $v$  (uma vez que  $v$  não é adjacente a ele próprio), ou seja,  $d_G(v) \leq \nu(G) - d_G(u) - 1 \Leftrightarrow d_G(u) + d_G(v) \leq \nu(G) - 1$ , o que contraria a hipótese.  $\square$

**Corolário 4.107 (Teorema de Ore).** *Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu(G) \geq 3$ . Se para todos os vértices  $u, v \in V(G)$  tivermos  $d_G(u) + d_G(v) \geq \nu(G)$ , então  $G$  é grafo hamiltoniano.*

**Prova:** Com vista a um absurdo supomos que o grafo  $G$  não é hamiltoniano e que as restantes condições são verificadas.

Vamos adicionar a  $G$  todas as arestas possíveis, de modo que  $G$  ainda seja não hamiltoniano, ou seja, se adicionarmos mais uma aresta  $G$  seria hamiltoniano. Como  $G$  não é isomorfo a um grafo completo (se fosse seria hamiltoniano) existem dois vértices  $u$  e  $v$  que não são adjacentes. Adicionando a aresta  $uv$  a  $G$  obtemos o grafo hamiltoniano  $G + uv$ , e pelo Teorema 4.106, concluímos que  $G$  também é hamiltoniano, o que é absurdo.  $\square$

**Corolário 4.108 (Teorema de Dirac).** *Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu(G) \geq 3$ . Se  $2\delta(G) \geq \nu(G)$ , então  $G$  é grafo hamiltoniano.*

**Prova:** Como para quaisquer vértices  $u, v \in V(G)$  temos  $d_G(u) + d_G(v) \geq \delta(G) + \delta(G) \geq \nu(G)$ , do Corolário anterior concluímos que  $G$  é um grafo hamiltoniano.  $\square$

## Semana 14

### 4.7 Grafos Valuados

**Definição 4.109.** Chamamos *grafo valorado* a um grafo em que cada aresta  $e_i$  tem associado um valor  $\omega(e_i)$ , a que chamamos *peso* ou *valor*.

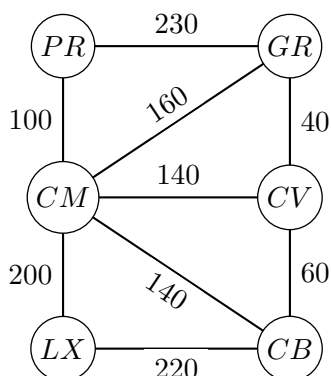
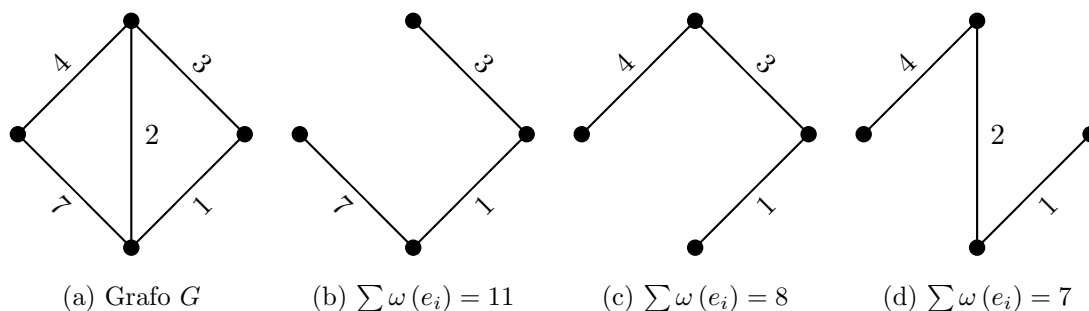


Figura 4.36: Grafo Valuado

*Exemplo 4.110.* O grafo da Figura 4.36 é um grafo, valuado em que os vértices representam as cidades de Castelo Branco (CB), Coimbra (CM), Covilhã (CV), Guarda (GR), Lisboa (LX) e Porto (PR) e as arestas representam algumas das ligações existentes cujos pesos são dados pelas distâncias em Km entre as cidades.

**Definição 4.111.** Chamamos *árvore minimal* de um grafo valuado  $G$  a uma árvore geradora de  $G$  em que a soma dos pesos seja mínima.

*Exemplo 4.112.* Na Figura 4.37 temos um grafo  $G$  e algumas árvores geradoras onde é

Figura 4.37: Grafo  $G$  e algumas árvores geradoras

indicada a soma dos respectivos pesos. É fácil concluir que a última é uma árvore minimal de  $G$ .

Dado um grafo valuado  $G$  com  $\nu$  vértices e  $\varepsilon$  arestas, uma árvore minimal  $T$  tem precisamente  $\nu$  vértices e  $\nu - 1$  arestas. Para escolher essas  $\nu - 1$  arestas usamos o *Algoritmo de Kruskal* que consiste no seguinte:

1. Ordenamos as arestas numa sequência por ordem crescente dos respectivos pesos,

em que o peso da aresta na posição  $i + 1$  é maior ou igual ao peso da aresta na posição  $i$

2. Retiramos a primeira aresta da sequência e obtemos uma nova sequência
3. Se ao adicionarmos essa aresta ao grafo  $T$  for formado um circuito a aresta é rejeitada
4. Caso contrário adicionamos essa aresta ao grafo  $T$
5. Voltamos ao ponto 2. até que  $T$  tenha  $\nu - 1$  arestas.

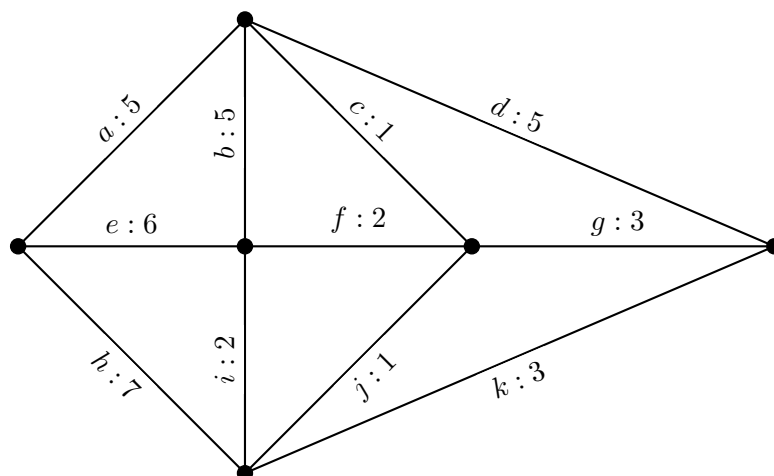
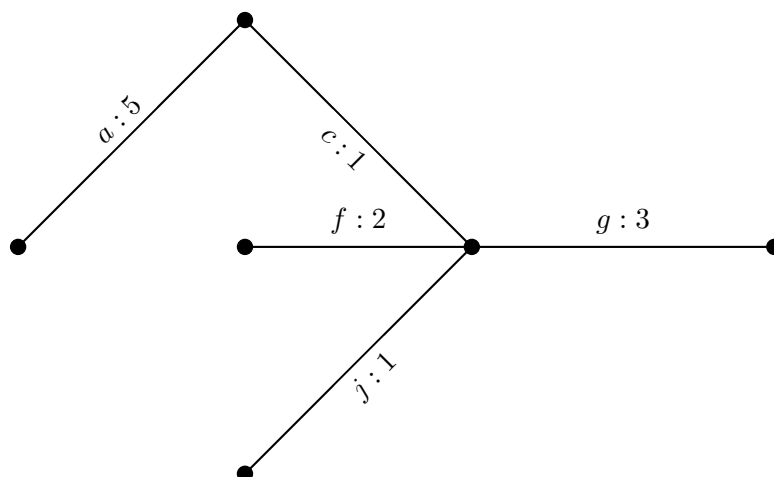
**Teorema 4.113.** *O grafo que se obtém com o algoritmo de Kruskal é uma árvore minimal.*

*Exemplo 4.114.* Vamos aplicar o algoritmo de Kruskal para verificar que na Figura 4.37 a última árvore é árvore minimal do grafo  $G$ . Denotamos as arestas dadas de modo que  $\omega(e_1) = 7$ ,  $\omega(e_2) = 1$ ,  $\omega(e_3) = 3$ ,  $\omega(e_4) = 4$  e  $\omega(e_5) = 2$ . Qualquer árvore geradora de  $G$  tem 3 arestas e usamos o algoritmo para as escolher de modo que não existam circuitos. Formamos a sequência  $e_2e_5e_3e_4e_1$  e tomamos a aresta  $e_2$  para o grafo  $T$  e ficamos com a sequência  $e_5e_3e_4e_1$ . Tomamos agora a aresta  $e_5$ , que como não forma circuito com a aresta  $e_2$  fica também a fazer parte do grafo  $T$  e ficamos com a sequência  $e_3e_4e_1$ . Mas juntando a aresta  $e_3$  ao grafo  $T$  ficamos com um circuito, por isso, rejeitamos a aresta  $e_3$  e ficamos com a sequência  $e_4e_1$ . Tomamos agora a aresta  $e_4$ , como não forma circuito com as arestas  $e_2$  e  $e_5$  fica também a fazer parte do grafo  $T$ , que tem agora 3 arestas e por isso é uma árvore geradora de  $G$ ; uma árvore minimal de  $G$ .

**Exercício 4.14.** Determine uma árvore minimal do grafo  $G$  da Figura 4.38, onde junto a cada aresta é indicado o respectivo peso.

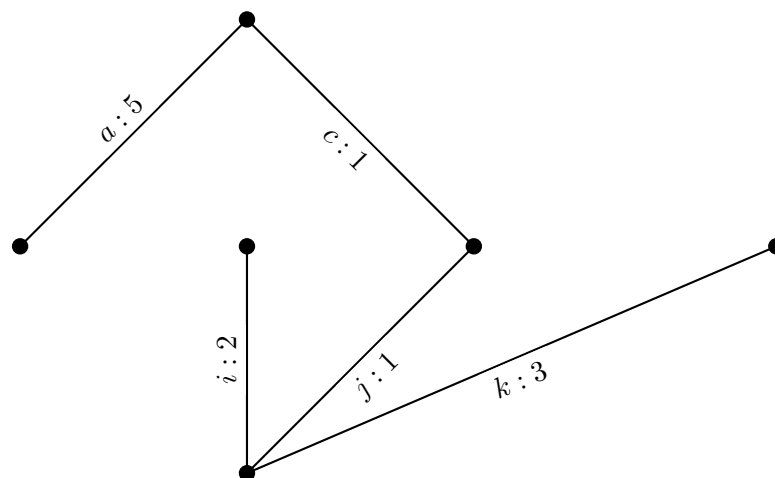
**Resolução:** Começamos por observar que qualquer árvore geradora de  $G$  tem 5 arestas. Aplicando o algoritmo de Kruskal, ordenamos as arestas de  $G$  consoante os seus pesos e temos, por exemplo, a sequência  $cjfigkabdeh$ . Notemos que como temos arestas com pesos iguais a sequência não é única e podemos obter várias árvores minimais, como veremos mais adiante.

Tomemos a aresta  $c$  para a árvore  $T_1$  e podemos adicionar a aresta  $j$  pois não forma um circuito. Podemos ainda adicionar a aresta  $f$ , mas já não podemos adicionar a aresta  $i$  pois ficaria formado um circuito. Em seguida adicionamos a aresta  $g$  que não forma

Figura 4.38: Grafo Valuado  $G$ Figura 4.39: Árvore Minimal  $T_1$ 

um circuito, mas como a aresta  $k$  já forma um circuito, adicionamos a aresta  $a$  e temos 5 arestas, assim obtemos a árvore  $T_1$  (ver Figura 4.39) cuja soma dos pesos é 12.

Mas escolhendo outra sequência de arestas (em que trocamos de posição arestas com o mesmo peso), por exemplo  $jci f h g d a b e h$ , obtemos outra árvore minimal. De facto, tomemos a aresta  $j$  para a árvore  $T_2$  e podemos adicionar a aresta  $c$  pois não forma um circuito. Podemos ainda adicionar a aresta  $i$ , mas não podemos adicionar a aresta  $f$  pois formamos um circuito. Em seguida adicionamos a aresta  $k$  que não forma um circuito, mas como a aresta  $g$  já forma um circuito, adicionamos a aresta  $a$  e temos as 5 arestas. Na Figura 4.40 temos a árvore minimal  $T_2$  cuja soma dos pesos é 12.  $\square$

Figura 4.40: Árvore Minimal  $T_2$ 

## 4.8 Coloração de Grafos

**Definição 4.115.** Dado um grafo  $G$ , dizemos que  $K \subseteq V(G)$  é uma *clique* de  $G$  se para quaisquer dois vértices  $u, v \in K$  tivermos  $uv \in E(V)$ ; ou seja, se o grafo induzido  $G[K]$  é um grafo completo. Dizemos que  $K$  é uma *clique maximal* se para todo o  $u \in V(G) \setminus K$  o conjunto  $K \cup \{u\}$  não é uma clique.

À clique de  $G$  com maior cardinalidade chamamos *clique máxima* e à sua cardinalidade *número de clique* de  $G$ , que indicamos por  $\omega(G)$ . Neste caso,  $G$  possui um subgrafo induzido isomorfo ao grafo completo  $K_{\omega(G)}$ .

*Exemplo 4.116.* O grafo da Figura 4.41 tem várias cliques, por exemplo:  $K_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $K_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e  $K_3 = \{v_1, v_4, v_5\}$  são cliques. As cliques  $K_2$  e  $K_3$  são cliques maximais, mas  $K_1$  não é maximal, uma vez que se adicionarmos o vértice  $v_4$  obtemos outra clique. A clique  $K_2$  é máxima, uma vez que é a que tem maior cardinalidade e  $\omega(G) = 4$ .

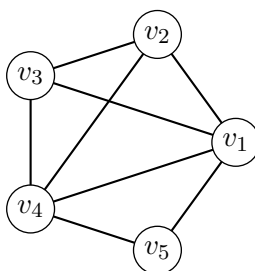


Figura 4.41: Grafo com cliques

**Definição 4.117.** Dado um grafo  $G$ , chamamos  $k$ -coloração dos vértices de  $G$  a uma função  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  em que para cada aresta  $\psi_G(e) = uv \in E(V)$  temos  $c(u) \neq c(v)$ .

*Nota 4.118.* Se o grafo  $G$  tiver um lacete, então  $G$  não admite nenhuma coloração dos vértices, uma vez que para o lacete  $\psi_G(l) = uu \in E(V)$  temos  $c(u) = c(u)$ .

*Exemplo 4.119.* Dado um grafo  $G$ , na Figura 4.42 temos um exemplo de uma não coloração, uma vez que existem arestas adjacentes com a mesma cor. No entanto, para o mesmo grafo é possível fazer uma 4-coloração como na Figura 4.43.

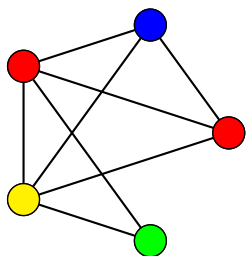


Figura 4.42: Não é coloração

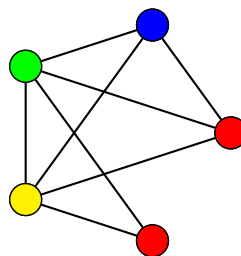


Figura 4.43: É uma 4-coloração

**Observação 4.120.** É evidente que um grafo sem lacetes admite uma  $k$ -coloração dos vértices se e só se o seu subgrafo de suporte das arestas admite uma  $k$ -coloração dos vértices. Assim, para problemas de coloração dos vértices basta considerar grafos simples.

**Observação 4.121.** Dado um grafo  $G$  sem lacetes com  $\nu$  vértices, facilmente conseguimos construir uma  $\nu$ -coloração (ver Figura 4.44): a cada  $v_i \in V(G)$  fazemos corresponder  $c(v_i) = i$ .

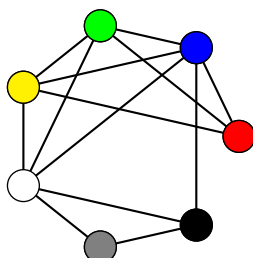


Figura 4.44: Grafo com 7 vértices e uma 7-coloração

**Observação 4.122.** Podemos ainda construir uma coloração em que vamos atribuindo a cada vértice  $v_i$  a primeira cor  $c_i$  que estiver disponível. A este processo chamamos



algoritmo “guloso”, na Figura 4.45 apresentamos um exemplo. Neste processo, no máximo, são usadas  $\Delta(G) + 1$  cores.

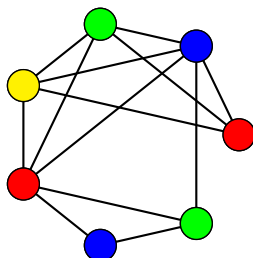


Figura 4.45: Grafo com uma 4-coloração (onde usámos o algoritmo “guloso”)

**Observação 4.123.** Uma  $k$ -coloração dos vértices de um grafo  $G$  sem lacetes é equivalente à partição do conjunto dos seus vértices em  $k$  subconjuntos disjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_k$  em que

$$V_i = \{u \in V(G) : c(u) = i\};$$

ou seja,  $G$  é um subgrafo de  $K_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}$ , onde  $\nu_i = |V_i|$ . No Exemplo 4.126, na Figura 4.48 temos o grafo 3-partido completo  $K_{4,3,2}$  com uma 3-coloração.

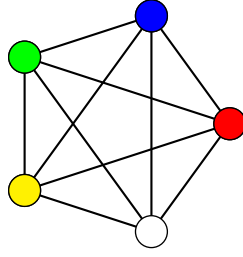
Em particular, o grafo  $G$  é bipartido se e só se admite uma 2-coloração dos seus vértices. No Exemplo 4.126, na Figura 4.47 temos o grafo bipartido completo  $K_{5,3}$  com uma 2-coloração.

No entanto, dado um valor fixo  $k$ , verificar se  $G$  admite uma  $k$ -coloração não é à partida uma tarefa fácil, mais ainda se pretendermos determinar o menor  $k$  para o qual  $G$  admite uma  $k$ -coloração.

**Definição 4.124.** Ao menor valor  $k$  para o qual o grafo  $G$  admite uma  $k$ -coloração chamamos *número cromático* de  $G$ , e indicamos  $\chi(G)$ .

*Exemplo 4.125.* Consideremos o grafo completo  $K_n$ , que já é uma clique, logo  $\omega(K_n) = n$ . Todos os seus vértices têm o mesmo grau, assim  $\Delta(K_n) = n - 1$ . Como quaisquer 2 vértices são adjacentes, todos têm de ter cores distintas, então  $\chi(K_n) = n$  (Na Figura 4.46 temos uma 5-coloração de  $K_5$ ). Assim, temos a seguinte relação

$$\omega(K_n) = \chi(K_n) = \Delta(K_n) + 1.$$

Figura 4.46: Grafo completo  $K_5$  com uma 5-coloração

*Exemplo 4.126.* Consideremos o grafo  $k$ -partido completo  $G = K_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}$ , logo  $\chi(G) = k$ , uma vez que a cada conjunto da partição dos vértices podemos atribuir a mesma cor, mas dois conjuntos da partição têm de ter cores diferentes (Na Figura 4.47 temos uma 2-coloração de  $K_{5,3}$  e na Figura 4.48 temos uma 3-coloração de  $K_{4,3,2}$ ). Para obter a clique máxima temos de tomar um vértice de cada um dos conjuntos  $V_i$  da partição, logo  $\omega(G) = k$ . Por outro lado,  $\Delta(G) \geq \sum_{j \neq i} |V_j| \geq k - 1$ . Assim

$$\omega(G) = \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

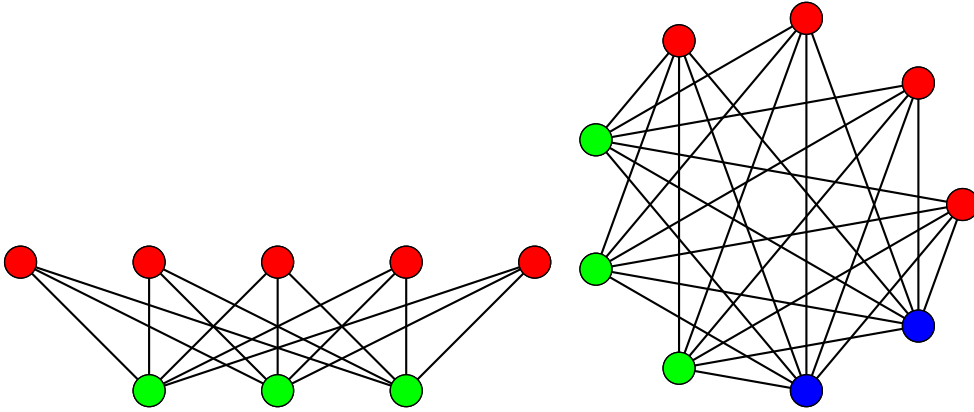
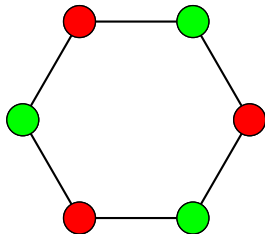


Figura 4.47: Grafo Bipartido Completo  $K_{5,3}$  com uma 2-coloração

Figura 4.48: Grafo 3-partido Completo  $K_{4,3,2}$  com uma 3-coloração

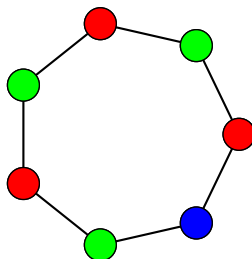
*Exemplo 4.127.* Consideremos o ciclo de comprimento par  $C_{2n}$ , logo  $\omega(C_{2n}) = 2$ , uma vez que se escolhermos 3 vértices já não temos uma clique. Todos os seus vértices têm grau 2, assim  $\Delta(C_{2n}) = 2$ . Como um ciclo  $C_{2n}$  é um grafo bipartido, então  $\chi(C_{2n}) = 2$  (Na Figura 4.49 temos uma 2-coloração de  $C_6$ ). Assim

$$\omega(C_{2n}) = \chi(C_{2n}) < \Delta(C_{2n}) + 1.$$

Figura 4.49: Ciclo  $C_6$  com uma 2-coloração

*Exemplo 4.128.* Consideremos o ciclo de comprimento ímpar  $C_{2n+1}$ , logo  $\omega(C_{2n+1}) = 2$ , uma vez que se escolhermos 3 vértices já não temos uma clique. Todos os seus vértices têm grau 2, assim  $\Delta(C_{2n+1}) = 2$ . Colorindo os vértices alternadamente, no final precisamos sempre de outra cor, então  $\chi(C_{2n+1}) = 3$  (Na Figura 4.50 temos uma 3-coloração de  $C_7$ ). Assim

$$\omega(C_{2n+1}) < \chi(C_{2n+1}) = \Delta(C_{2n+1}) + 1.$$

Figura 4.50: Ciclo  $C_7$  com uma 3-coloração

Mais geralmente temos o seguinte resultado.

**Teorema 4.129.** *Dado um grafo  $G$ , temos que  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*

**Prova:** O grafo  $G$  possui um subgrafo induzido isomorfo a  $K_{\omega(G)}$  para o qual são necessárias  $\omega(G)$  cores, logo  $\omega(G) \leq \chi(G)$ .

Por outro lado, usando o algoritmo “guloso” não são precisas mais do que  $\Delta(G) + 1$  cores para obter uma coloração de  $G$ , ou seja,  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .  $\square$

## Fim do Semestre

**Definição 4.130.** Dizemos que  $G$  é um *grafo perfeito* se para todo o  $K \subseteq V(G)$  tivermos  $\chi(G[K]) = \omega(G[K])$ .

**Teorema 4.131 (Lovász).** *Um grafo é perfeito se e só se o seu complementar é um grafo perfeito.*

**Definição 4.132.** Dizemos que  $G$  é um *grafo de Berge* se nem  $G$  nem  $G^C$  têm qualquer ciclo induzido de comprimento ímpar maior ou igual a 5.

**Teorema 4.133 (Conjectura de Berge).** *Um grafo  $G$  é perfeito se e só se  $G$  é um grafo de Berge.*

Alguns resultados com os quais podemos estimar o número cromático,  $\chi(G)$ .

**Teorema 4.134.** *Seja  $G$  um grafo, então  $\chi(G) \leq \max_{K \subseteq V(G)} \delta(G[K]) + 1$ .*

**Prova:** Seja  $G$  um grafo de ordem  $\nu$  e tomemos  $k = \max_{K \subseteq V(G)} \delta(G[K])$ .

Seja  $v_\nu \in V(G)$  tal que  $d_G(v_\nu) \leq k$  e  $H_{\nu-1} = G - \{v_\nu\}$ .

Por hipótese,  $H_{\nu-1}$  tem um vértice com grau menor ou igual a  $k$ . Seja  $v_{\nu-1}$  um desses vértices e tomemos  $H_{\nu-2} = H_{\nu-1} - \{v_{\nu-1}\} = G - \{v_\nu, v_{\nu-1}\}$ .

Continuando este processo, ordenamos os vértices de  $G$ ,  $v_\nu, \dots, v_1$  de modo que  $v_j$  é adjacente a um máximo de  $k$  vértices de entre os vértices  $v_{j-1}, \dots, v_1$ . Assim, para os colorir são necessárias  $k + 1$  cores no máximo.  $\square$

**Teorema 4.135.** *Seja  $G$  um grafo conexo. Se  $G$  não é completo nem um ciclo de comprimento ímpar, então  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

**Teorema 4.136.** *Para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe um grafo  $G_k$  tal que  $g(G_k) > 3$  e  $\chi(G_k) = k$ .*

**Prova:** Vamos provar por indução em  $k$ . Para  $k = 1$  o resultado é verdadeiro, basta considerar o grafo  $G$  com dois vértices sem arestas: temos que  $\chi(G) = 1$  e  $g(G) = \infty > 3$ .

Agora supomos que o resultado é verdadeiro para  $G_1, G_2, \dots, G_k$ . Consideremos cópias distintas dos grafos  $G_i$  e  $V$  um conjunto de vértices  $v_1, \dots, v_k$ , com  $v_i \in G_i$ . Construimos o grafo  $G_{k+1}$  constituído pelos vértices de  $G_1, \dots, G_k$  e de  $V$ , pelas arestas de  $G_1, \dots, G_k$  e pelas arestas que ligam cada vértice  $v_i$  de  $V$  aos correspondentes  $v_j \in G_j$ , com  $j \leq i$ . Assim,  $\chi(G_{k+1}) \leq k + 1$ .

Por outro lado, em  $G_1$  existe um vértice de cor  $c_1$ , em  $G_2$  existe outro vértice de cor  $c_2 \neq c_1$ , já que  $\chi(G_2) = 2$ . Em  $G_3$  existe um vértice de cor  $c_3 \notin \{c_1, c_2\}$ , pois  $\chi(G_3) = 3$  e continuando, existe em  $G_k$  um vértice de cor  $c_k$ , logo o vértice  $v$  de  $V$  adjacente a  $v_1, v_2, \dots, v_k$  tem de ter cor  $c_{k+1}$ , logo  $\chi(G_{k+1}) \geq k + 1$ . Então  $\chi(G_{k+1}) = k + 1$ .  $\square$

**Teorema 4.137.** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $\nu$ , então  $\chi(G) + \chi(G^C) \leq \nu + 1$ .*

**Prova:** Vamos provar por indução em  $\nu$ . Para um grafo  $G$  de ordem 1 temos  $\chi(G) = 1$  e  $\chi(G^C) = 0$  e a desigualdade verifica-se. Para um grafo  $G$  de ordem 2 temos  $\chi(G) = 1$  e  $\chi(G^C) = 2$  ou  $\chi(G) = 2$  e  $\chi(G^C) = 1$  e a desigualdade verifica-se.

Vamos supor que o resultado é verdadeiro para todos os grafos com menos vértices do que  $\nu$ . Seja  $v \in V(G)$  e consideremos  $G' = G - \{v\}$ , logo

$$\chi(G) \leq \chi(G') + 1 \quad \text{e} \quad \chi(G^C) \leq \chi(G'^C) + 1.$$

Se se verificarem as duas igualdades, temos que  $d_G(v) \geq \chi(G')$  e  $d_{G^C}(v) \geq \chi(G'^C)$ , assim

$$\chi(G) + \chi(G^C) = \chi(G') + \chi(G'^C) + 2 \leq d_G(v) + d_{G^C}(v) + 2 = \nu(G) + 1.$$

Se as duas igualdades não se verificarem, então

$$\chi(G) + \chi(G^C) \leq \chi(G') + \chi(G'^C) + 1 \leq \nu(G') + 1 + 1 = \nu(G) + 1.$$

$\square$

**Corolário 4.138.** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $\nu$ , então  $\chi(G)\chi(G^C) \leq \left\lfloor \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2 \right\rfloor$ .*

**Prova:** Usando o Teorema anterior podemos escrever

$$4\chi(G)\chi(G^C) \leq 4\chi(G)\chi(G^C) + (\chi(G) - \chi(G^C))^2 = (4\chi(G)\chi(G^C))^2 \leq (\nu + 1)^2.$$

$\square$

O próximo resultado estabelece um minorante e um majorante para o número cromático em função do número de vértices e de arestas.

**Teorema 4.139.** *Seja  $G$  um grafo conexo com  $\nu$  vértices e  $\varepsilon$  arestas, então*

$$\left\lceil \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon} \right\rceil \leq \chi(G) \leq \left\lfloor \sqrt{2\varepsilon} + 1 \right\rfloor$$

**Prova:** Seja  $\chi(G) = k$  e sejam  $S_1, \dots, S_k$  uma partição do conjunto dos vértices de modo que os vértices de  $S_i$  têm a cor  $c_i$  e  $|S_i| = \nu_i$ .

Para provar a primeira desigualdade, ordenamos os vértices de acordo com a ordem dos conjuntos  $S_i$ , a respectiva matriz de adjacência  $A_G$  é formada por blocos nulos na sua diagonal. Denotemos por  $N_0$  e  $N_1$  o número de entradas 0 e 1 da matriz  $A_G$ , respectivamente. Então (usando a desigualdade de Chebyshev) temos

$$N_0 \geq \sum_{i=1}^k \nu_i^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^k \nu_i\right)^2}{k} = \frac{\nu^2}{k}$$

e  $N_1 = 2\varepsilon$ , uma vez que cada aresta incide em dois vértices. Assim, o número total de entradas da matriz  $A_G$  é dado por

$$\nu^2 = N_0 + N_1 \geq \frac{\nu^2}{k} + 2\varepsilon \Leftrightarrow \chi(G) = k \geq \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}.$$

Para provar a segunda desigualdade, observemos que entre cada dois conjuntos  $S_i$  e  $S_j$ , com  $i \neq j$ , existe pelo menos uma aresta, logo

$$\varepsilon \geq \frac{\chi(G)(\chi(G) - 1)}{2} > \frac{(\chi(G) - 1)^2}{2} \Leftrightarrow 2\varepsilon > (\chi(G) - 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2\varepsilon} + 1 > \chi(G).$$

□

## 4.9 Os Teoremas das Quatro e Cinco Cores

**Definição 4.140.** Quando um grafo  $G$  admite uma representação numa superfície  $S$ , sem que existam arestas que se intersectam, dizemos que  $G$  é *realizável* em  $S$ .

Dizemos que  $G$  é um *grafo planar* se admitir uma realização no plano. Chamamos *face do grafo planar*  $G$  a cada uma das regiões do plano limitada por arestas; além disso, temos uma face ilimitada (“exterior” ao grafo). Indicamos o conjunto das faces de  $G$  por  $F(G)$ .

Chamamos *grau de uma face* ao número de arestas que a delimitam, sendo que uma aresta de corte conta duas vezes para o grau da face que corta.

*Nota 4.141.* Apesar de um qualquer grafo ser representado no plano com arestas que se cruzam, isso não significa que o mesmo não seja planar, uma vez que pode existir uma representação na qual as arestas não se cruzam.

**Teorema 4.142 (Fórmula de Euler).** *Se  $G$  é um grafo conexo planar, então para qualquer realização no plano temos*

$$|F(G)| + \nu(G) = \varepsilon(G) + 2.$$

**Prova:** Vamos provar por indução no número de arestas.

Se  $\varepsilon(G) = 0$ , como o grafo é conexo temos de ter  $\nu(G) = 1$  e  $|F(G)| = 1$ , logo  $1 + 1 = 0 + 2$ .

Se  $\varepsilon(G) = 1$ , como o grafo é conexo temos de ter  $\nu(G) = 2$  e  $|F(G)| = 1$ , logo  $1 + 2 = 1 + 2$ .

Seja  $\varepsilon > 1$ , por hipótese de indução, vamos supor que a fórmula de Euler é válida para grafos conexos planares com menos do que  $\varepsilon$  arestas.

Seja  $G_\varepsilon$  um grafo conexo planar com  $\varepsilon = \varepsilon(G)$  arestas. O grafo  $G_\varepsilon$  obtem-se de  $G_{\varepsilon-1}$  acrescentando uma aresta ao conjunto  $E(G_{\varepsilon-1})$ , ou seja,  $\varepsilon(G_\varepsilon) = \varepsilon(G_{\varepsilon-1}) + 1$ . Este passo de indução pode ser feito de duas formas diferentes:

1. a nova aresta incide em vértices já existentes, e nesse caso  $\nu(G_\varepsilon) = \nu(G_{\varepsilon-1})$
2. a nova aresta liga um vértice de  $V(G_{\varepsilon-1})$  a um novo vértice, e nesse caso  $\nu(G_\varepsilon) = \nu(G_{\varepsilon-1}) + 1$ .

No primeiro caso, a nova aresta origina uma nova face e temos  $|F(V(G_\varepsilon))| = |F(V(G_{\varepsilon-1}))| + 1$ . Assim

$$|F(V(G_\varepsilon))| + \nu(G_\varepsilon) = |F(V(G_{\varepsilon-1}))| + 1 + \nu(G_{\varepsilon-1}) = \varepsilon(G_{\varepsilon-1}) + 3 = \varepsilon(G_\varepsilon) + 2.$$

No segundo caso, a nova aresta não origina uma nova face e temos  $|F(V(G_\varepsilon))| = |F(V(G_{\varepsilon-1}))|$ . Assim

$$|F(V(G_\varepsilon))| + \nu(G_\varepsilon) = |F(V(G_{\varepsilon-1}))| + \nu(G_{\varepsilon-1}) + 1 = \varepsilon(G_{\varepsilon-1}) + 3 = \varepsilon(G_\varepsilon) + 2.$$

□

**Corolário 4.143.** *Seja  $G$  um grafo simples, conexo e planar com mais do que uma aresta, então  $\varepsilon(G) \leq 3\nu(G) - 6$ .*

**Prova:** Como cada face limitada tem grau maior ou igual a 3, logo a soma dos graus de todas as faces é maior ou igual a  $3|F(G)|$ . Por outro lado, a soma dos graus de todas as

faces é igual a  $2\varepsilon(G)$ , uma vez que cada aresta conta para o grau de duas faces, e as arestas de corte contam duas vezes, logo  $3|F(G)| \leq 2\varepsilon(G)$ . Assim,

$$3(\varepsilon(G) + 2 - \nu(G)) \leq 2\varepsilon(G) \Leftrightarrow \varepsilon(G) \leq 3\nu(G) - 6.$$

□

*Nota 4.144.* Do corolário anterior podemos concluir que o grafo completo  $K_5$  não é planar, uma vez que  $\varepsilon(K_5) = 10 > 9 = 3\nu(K_5) - 6$ .

**Corolário 4.145.** *Seja  $G$  um grafo simples, conexo, bipartido e planar com mais do que uma aresta, então  $\varepsilon(G) \leq 2\nu(G) - 4$ .*

**Prova:** Como  $G$  é um grafo bipartido, qualquer ciclo de  $G$  tem comprimento par (ver Teorema 4.60). Assim, cada face limitada tem grau maior ou igual a 4, logo a soma dos graus de todas as faces é maior ou igual a  $4|F(G)|$ . Por outro lado, a soma dos graus de todas as faces é igual a  $2\varepsilon(G)$ , uma vez que cada aresta conta para o grau de duas faces e as arestas de corte contam duas vezes, logo  $4|F(G)| \leq 2\varepsilon(G) \Leftrightarrow 2|F(G)| \leq \varepsilon(G)$ . Assim,

$$2(\varepsilon(G) + 2 - \nu(G)) \leq \varepsilon(G) \Leftrightarrow \varepsilon(G) \leq 2\nu(G) - 4.$$

□

*Nota 4.146.* Do corolário anterior podemos concluir que o grafo bipartido completo  $K_{3,3}$  não é planar, uma vez que  $\varepsilon(K_{3,3}) = 9 > 8 = 2\nu(K_{3,3}) - 4$ .

**Teorema 4.147.** *Seja  $G$  um grafo simples, conexo e planar, então  $\delta(G) \leq 5$ .*

**Prova:** Seja  $n_i$  o número de vértices com grau  $i$ , logo  $\delta(G) \leq i \leq \Delta(G)$ , e temos que

$$\sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i = \nu(G) \quad \text{e} \quad \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} in_i = 2\varepsilon(G),$$

uma vez que no segundo somatório estamos a contar as arestas duas vezes. Usando o Corolário 4.143 vem

$$\frac{1}{2} \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} in_i \leq 3 \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i - 6 \Leftrightarrow 6 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i(6 - i).$$

Se  $\delta(G) \geq 6$  teríamos  $6 \leq \frac{1}{2}(n_6 \cdot 0 + n_7 \cdot (-1) + n_8 \cdot (-2) + \dots)$ , o que é claramente impossível. Logo  $\delta(G) \leq 5$ . □



**Definição 4.148.** Dado um grafo planar  $G$  designamos por *grafo dual* de  $G$ , que indicamos por  $G^*$ , o grafo obtido a partir de  $G$  fazendo as seguintes operações:

1. a cada face de  $G$  corresponde um vértice de  $G^*$
2. a cada aresta de  $e \in E(G)$  corresponde uma aresta  $e^* \in E(G^*)$  que une duas faces vizinhas de  $G$ , cruzando a aresta  $e$ .

**Teorema 4.149.** *Seja  $G$  um grafo planar e  $G^*$  o seu dual. Temos que*

1.  $G^*$  é conexo
2. se  $G$  é conexo, então  $(G^*)^* = G$

**Prova:** 1. Como podemos passar de uma face  $f_i$  de  $G$  para qualquer outra face  $f_j$  de  $G$  através de arestas de  $G^*$ , concluímos que existe um caminho entre quaisquer dois vértices  $v_i^*$  (correspondente à face  $f_i$ ) e  $v_j^*$  (correspondente à face  $f_j$ ) de  $G^*$ , ou seja,  $G^*$  é conexo.

2. Por construção de  $G^*$  temos  $\nu(G^*) = |F(G)|$  e  $\varepsilon(G^*) = \varepsilon(G)$ . Como toda a aresta de cada face de  $F(G^*)$  é atravessada por uma aresta de  $G$ , é claro que cada face de  $G^*$  contém pelo menos um vértice de  $G$ . Como  $G$  e  $G^*$  são conexos, aplicando a fórmula de Euler temos

$$|F(G)| + \nu(G) = \varepsilon(G) + 2 = \varepsilon(G^*) + 2 = |F(G^*)| + \nu(G^*)$$

de onde concluímos que  $|F(G^*)| = \nu(G)$ , e logo cada face de  $G^*$  contém exactamente um vértice de  $G$ . Agora, aplicando o processo de construção do dual a  $G^*$  obtemos  $(G^*)^* = G$ .

□

*Nota 4.150.* Quando o grafo  $G$  não é conexo a igualdade  $(G^*)^* = G$  não se verifica.

**Teorema 4.151 (Teorema das 5 Cores).** *Seja  $G$  um grafo planar sem lacetes, então  $G$  admite uma 5-coloração.*

**Prova:** Vamos provar por indução no número de vértices de um grafo simples e planar (o facto de existirem arestas paralelas não altera a coloração em causa).

Seja  $G$  um grafo simples planar e supomos que o resultado é verdadeiro para todos os grafos com menos vértices do que  $\nu(G)$ .

Pelo Teorema 4.147 existe um vértice  $v \in V(G)$  tal que  $d_G(v) \leq 5$  e por hipótese o grafo  $G - v$  admite uma 5-coloração.

Se nos vértices adjacentes a  $v$  não usamos as 5 cores, então uma das que não é usada pode ser aplicada no vértice  $v$  e o resultado está provado.

Se nos vértices adjacentes a  $v$ , digamos  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ , usamos cinco cores distintas, a cor  $i$  para o vértice  $v_i$ , vamos supor que os vértices estão por essa ordem no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Indicamos por  $V_{ij}$  o conjunto dos vértices onde podemos chegar partindo de  $v_i$  (que tem cor  $i$ ) usando apenas as cores  $i$  e  $j$ , logo  $v_i \in V_{ij}$ .

Consideremos o conjunto  $V_{13}$ , se este conjunto for constituído apenas pelo vértice  $v_1$ , significa que  $v_1$  não tem vértices adjacentes com a cor 3 e podemos atribuir a cor 3 a  $v_1$  e a cor 1 a  $v$ . Observemos que se  $V_{13}$  tiver mais do que um vértice podemos trocar as cores 1 e 3 e continuamos a ter uma coloração. Se  $v_3 \notin V_{13}$  podemos trocar as cores 1 e 3 e atribuir a cor 1 a  $v$  e temos uma coloração.

Quando  $v_3 \in V_{13}$  consideramos um caminho  $v_1 w_1 \dots w_k v_3$  com cores 1 e 3 alternadas. Tomemos o ciclo  $C$ , que resulta de acrescentar o vértice  $v$  ao caminho  $V_{13}$ , o qual divide o plano em duas componentes conexas por caminhos, sendo que  $v_2$  e  $v_4$  se encontram em componentes distintas. Agora tomemos o conjunto  $V_{24}$  o qual tem de estar contido na componente conexa em que está  $v_2$ , logo  $v_4 \notin V_{24}$ . Agora trocamos as cores 2 e 4 no conjunto  $V_{24}$  e podemos atribuir a cor 2 ao vértice  $v$ .  $\square$

**Definição 4.152.** Uma coloração de faces de um grafo planar sem arestas de corte consiste em atribuir cores distintas a faces com uma aresta em comum.

**Observação 4.153.** Devido à Definição 4.148 a coloração de faces de um grafo planar  $G$  sem arestas de corte corresponde à coloração de vértices do grafo dual  $G^*$ .

**Teorema 4.154 (Tait).** *Seja  $G$  um grafo planar hamiltoniano, então  $G$  admite uma 4-coloração das suas faces.*

**Prova:** Seja  $G$  um grafo hamiltoniano e  $C$  um ciclo de Hamilton, recordemos em que  $C$  não existem arestas nem vértices repetidos, mas estão todos os vértices de  $G$ . As faces

que estão no interior da curva  $C$  podem ser coloridas com as cores 1 e 2 alternadamente, e as faces que estão no exterior da curva  $C$  podem ser coloridas com as cores 3 e 4 alternadamente.  $\square$

**Teorema 4.155 (Teorema das 4 Cores).** *Todo o grafo planar admite uma 4-coloração das suas faces.*

Este resultado foi provado por Appel e Haken em 1977.

## 4.10 Exercícios Propostos

**Exercício 4.15.** Faça uma representação do grafo  $G = (V, E, \psi)$  e do seu complementar  $G^C$  em que:

- a)  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$  e  $\psi(e_1) = v_1v_2$ ,  $\psi(e_2) = v_2v_3$ ,  $\psi(e_3) = v_3v_4$ ,  $\psi(e_4) = v_4v_5$ ,  $\psi(e_5) = v_2v_4$ ,  $\psi(e_6) = v_4v_5$ ,  $\psi(e_7) = v_2v_5$  e  $\psi(e_8) = v_2v_5$ .
- b)  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$  e  $\psi(e_1) = v_1v_2$ ,  $\psi(e_2) = v_2v_3$ ,  $\psi(e_3) = v_2v_5$ ,  $\psi(e_4) = v_3v_4$ ,  $\psi(e_5) = v_2v_4$ ,  $\psi(e_6) = v_4v_5$  e  $\psi(e_7) = v_1v_4$ .

**Exercício 4.16.** Dos grafos do Exercício 4.15 indique se algum é simples. Determine os graus de cada um dos seus vértices e indique  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$ .

**Exercício 4.17.** Mostre que em qualquer grafo simples existem dois vértices com o mesmo grau.

**Exercício 4.18.** Determine a matriz de incidência e a matriz de adjacência dos grafos do Exercício 4.15.

**Exercício 4.19.** Represente todos os grafos simples com  $\nu$  vértices, a menos de isomorfismo, em que  $\nu = 1, 2, 3, 4$ .

**Exercício 4.20.** Mostre que o isomorfismo entre grafos preserva os graus dos vértices.

**Exercício 4.21.** Seja  $G$  um grafo com vértices  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$ . Construa, caso seja possível, um grafo em que

- a)  $d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = d_G(v_4) = 1$
- b)  $d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = 3$  e  $d_G(v_4) = 2$

c)  $d_G(v_1) = d_G(v_2) = 5$  e  $d_G(v_3) = d_G(v_4) = 2$

**Exercício 4.22.** Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu(G) = 56$  e  $\varepsilon(G^C) = 80$ . Determine  $\varepsilon(G)$ .

**Exercício 4.23.** Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu$  vértices. Determine  $\delta(G^C)$  e  $\Delta(G^C)$  em função de  $\nu$ ,  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$ .

**Exercício 4.24.** Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular. Mostre que  $2\varepsilon(G) = k\nu(G)$ .

**Exercício 4.25.** Determine o número de arestas e represente um grafo  $G$ , caso exista, em cada um dos seguintes casos:

a)  $\nu(G) = 9$  e  $G$  é 3-regular

b)  $\nu(G) = 10$ , em que dois vértices têm grau 4 e os restantes têm grau 3.

**Exercício 4.26.** Seja  $G$  um grafo regular e bipartido, com partição dos vértices  $X$  e  $Y$ . Mostre que  $|X| = |Y|$ .

**Exercício 4.27.** Considere o grafo bipartido completo  $K_{3,3}$ . Quais dos ciclos  $C_i$  com  $i = 3, 4, 5, 6$  são subgrafos de  $K_{3,3}$ ?

**Exercício 4.28.** Represente todos os subgrafos induzidos pelo grafos

a)  $K_5$

b)  $K_{3,2}$

c)  $C_4$

d)  $C_5$

**Exercício 4.29.** Seja  $G$  um grafo não trivial. Mostre que  $G$  é conexo se e só se qualquer que seja a partição de  $V(G)$  em dois conjuntos não vazios  $V_1$  e  $V_2$  existe uma aresta com um extremo em  $V_1$  e outro extremo em  $V_2$ .

**Exercício 4.30.** Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu(G) \geq 3$ .

a) Mostre que, se  $\varepsilon(G) > \binom{\nu(G)-1}{2}$ , então  $G$  é conexo.

b) Indique um grafo simples com  $\varepsilon(G) = \binom{\nu(G)-1}{2}$  que não seja conexo.

**Exercício 4.31.** Seja  $G$  um grafo simples. Mostre que se  $G$  não é conexo, então  $G^C$  é um grafo conexo. Prove que a recíproca não é verdadeira.

**Exercício 4.32.** Mostre que se um grafo tem exactamente dois vértices de grau ímpar, então esses vértices pertencem à mesma componente conexa.

**Exercício 4.33.** Represente, caso seja possível, um grafo simples com 7 vértices, 5 arestas e 3 componentes conexas.

**Exercício 4.34.** Do grafo que representou no exercício anterior indique, justificando, todas as arestas que são pontes.

**Exercício 4.35.** Considere os grafos das Figuras 4.51 e 4.52.

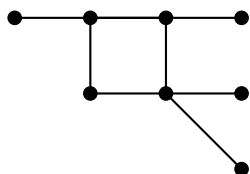


Figura 4.51

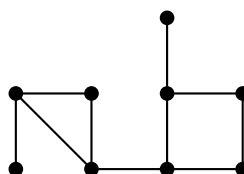


Figura 4.52

- Identifique as arestas que são pontes em cada um deles. Justifique.
- Se em cada um dos grafos eliminar todas essas pontes obtém um grafo com quantas componentes conexas?

**Exercício 4.36.** Represente, a menos de isomorfismo, todas as árvores com  $\nu$  vértices, em que  $\nu = 3, 4, 5$ .

**Exercício 4.37.** Seja  $T$  uma árvore com  $\nu$  vértices e  $G$  um grafo simples tal que  $\delta(G) \geq \nu - 1$ . Prove que  $G$  contém um subgrafo isomorfo a  $T$ .

**Exercício 4.38.** Represente todas as árvores geradoras dos grafos das Figuras 4.51 e 4.52.

**Exercício 4.39.** Justifique que o grafo da Figura 4.51 não é euleriano

**Exercício 4.40.** Indique os valores de  $n$  para os quais o grafo completo  $K_n$  é euleriano.

**Exercício 4.41.** Indique os valores de  $m$  e  $n$  para os quais o grafo bipartido completo  $K_{m,n}$  é euleriano.

**Exercício 4.42.** Encontre um circuito euleriano, caso exista, do grafo da Figura 4.53, usando o algoritmo de Fleury.

**Exercício 4.43.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.54.

- Mostre que o grafo  $G$  é euleriano.

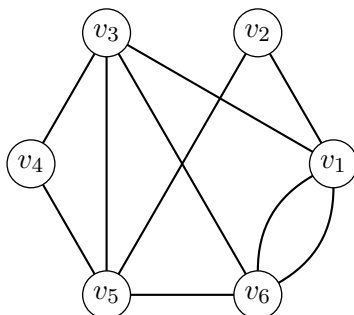


Figura 4.53

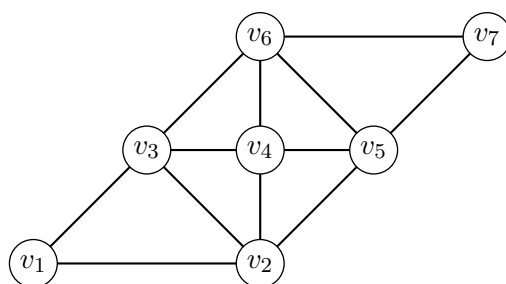


Figura 4.54

b) Aplique o algoritmo de Fleury para obter um circuito euleriano de  $G$ .

**Exercício 4.44.** Mostre que se  $G$  é um grafo bipartido com um número ímpar de vértices, então  $G$  é um grafo não hamiltoniano.

**Exercício 4.45.** Seja  $G$  um grafo simples com  $\nu$  vértices. Determine o menor e o maior número de arestas de modo que:

- $G$  seja conexo.
- $G$  seja não conexo.
- $G$  tenha exactamente  $k$  componentes conexas.
- $G$  seja hamiltoniano.
- $G$  seja não hamiltoniano.

**Exercício 4.46.** Aplique o algoritmo de Kruskal para obter uma árvore minimal do grafo da Figura 4.36.

**Exercício 4.47.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.55, onde em cada aresta é indicado o respectivo peso.

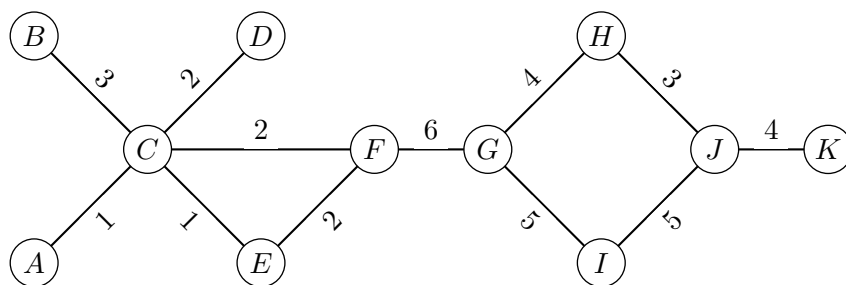


Figura 4.55

- a) Indique todas as arestas que pertencem a todas as árvores geradoras de  $G$ . Justifique.
- b) Aplique o algoritmo de Kruskal para obter uma árvore minimal do grafo  $G$ .

**Exercício 4.48.** Considere o grafo  $G$  da Figura 4.56, onde em cada aresta é indicado o respectivo peso.

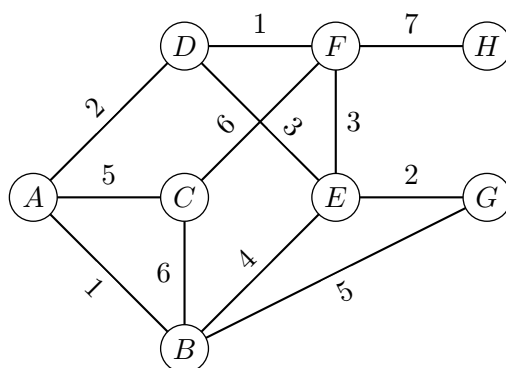


Figura 4.56

- a) Indique, justificando, quantas arestas têm as árvores geradoras de  $G$ .
- b) Indique, caso exista, uma aresta que pertença a todas as árvores geradoras de  $G$ . Justifique.
- c) Aplique o algoritmo de Kruskal para obter uma árvore minimal do grafo  $G$ .

**Exercício 4.49.** Aplique o algoritmo “guloso” para obter uma coloração dos grafos da Figura 4.57.

**Exercício 4.50.** Determine o número cromático  $\chi(G)$  dos grafos  $G$  da Figura 4.57.

**Exercício 4.51.** Determine o número cromático  $\chi(G)$  dos grafos  $G$  da Figura 4.58.

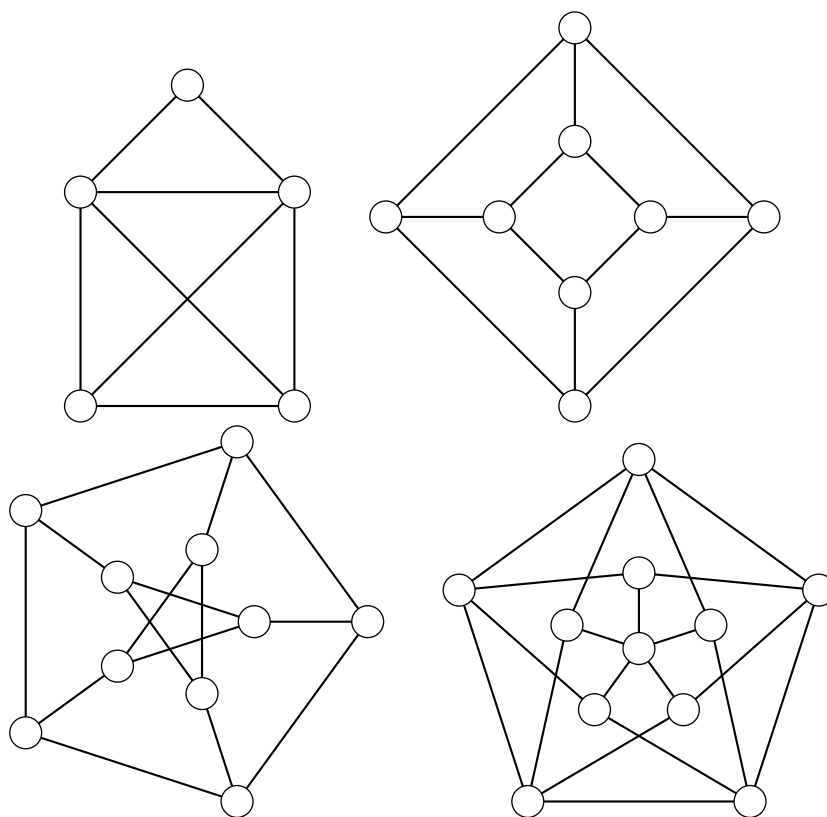


Figura 4.57: Grafos para fazer colorações

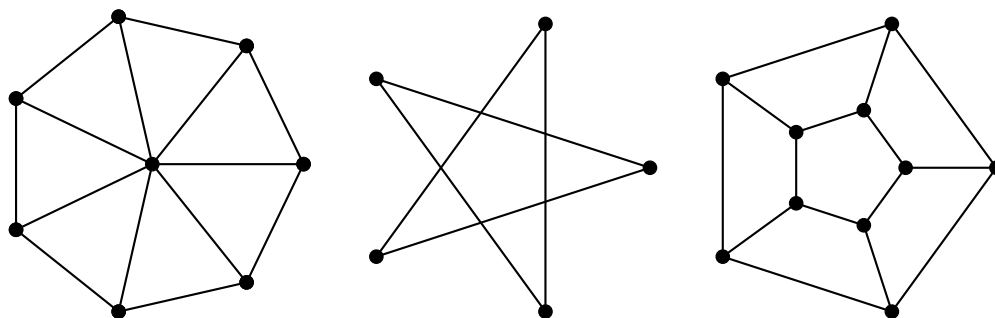


Figura 4.58: Grafos e Número Cromático

**Exercício 4.52.** Dado um grafo  $G$  com  $\nu$  vértices, para cada  $k \leq \nu$ , determine se é admissível uma  $k$ -coloração dos vértices de  $G$  nos seguintes casos.

- a)  $K_6$                       b)  $K_{5,1}$                       c)  $K_{n,1}$                       d)  $K_{n,2}$                       e)  $K_{n,3}$

**Exercício 4.53.** Mostre que um grafo  $G$  tem  $\chi(G) = 2$  se e só se não tem ciclos de comprimento ímpar.



## Fim do Semestre

**Exercício 4.54.** Prove que se  $G$  é um grafo bipartido e planar, então  $\delta(G) \leq 3$ .

**Exercício 4.55.** Seja  $G$  um grafo planar em que todas as faces têm grau 3 e seja  $n_i$  o número de vértice com grau  $i$ , onde  $i = \delta(G), \dots, \Delta(G)$ . Prove que

$$\sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} (6-i)n_i = 12.$$

**Exercício 4.56.** Existe algum grafo planar bipartido com 7 vértices e 11 arestas?

**Exercício 4.57.** Seja  $G$  um grafo, sem lacetes, conexo de ordem  $\nu \geq 11$ . Prove que ou  $G$  ou  $G^C$  é não planar.

**Exercício 4.58.** Seja  $G$  um grafo conexo planar e  $G^*$  o seu dual. Prove que  $|V(G^*)| = |F(G)|$ ,  $|E(G^*)| = |E(G)|$  e  $|F(G^*)| = |V(G)|$ .

# Índice

## Algoritmo

Fleury, 71

Kruskal, 76

## Aplicação, 4

Bijectiva, 4

Identidade, 4

Inclusão, 7

Injectiva, 4

Inversa, 5

Sobrejectiva, 4

## Arestas, 43

Adjacentes, 43

Incidente, 43

Paralelas, 43

Ponte, 62

## Arranjo, 29

Completo, 36

## Árvore, 63

Geradora, 66

Minimal, 76

## Combinação, 30

Completa, 37

## Conjuntos

Boa Ordem, 22

Equipotentes, 9

Infinitos, 10

## Convolução de Vandermonde, 35

## Floresta, 63

## Folha, 63

## Função, 1

Composição, 3

Conjunto de Chegada, 1

Conjunto de Partida, 1

Contradomínio, 2

Domínio, 1

Iguais, 3

Imagem, 2

Imagem Inversa, 2

Imagem Recíproca, 2

## Função de Incidência, 43

## Grafo, 43

Berge, 84

Bipartido, 56

Completo, 57

Caminho, 49

Hamiltoniano, 73

Ciclo, 49, 54

Hamiltoniano, 73

Circuito, 48

Euleriano, 68

Clique, 78

Máxima, 78

- Maximal, 78
- Número, 79
- Complementar, 54
- Completo, 54
- Componente Conexo, 58
- Conexo, 58
- Dual, 89
- Euleriano, 68
- Finito, 45
- Hamiltoniano, 73
- Iguais, 45
- Infinito, 45
- $k$ -regular, 55
- $k$ -partido, 57
  - Completo, 57
- Nulo, 55
- Número Cromático, 81
- Passeio, 48
  - Comprimento, 49
- Perfeito, 84
- Planar, 86
  - Face, 86
  - Grau da Face, 86
- Simples, 44
- Trajecto, 48
  - Euleriano, 68
- Trivial, 44
- Valuado, 75
  - Peso, 75
- Grafos
  - Isomorfos, 47, 48
- Indução Matemática
  - Generalizada, 22
  - Princípio, 13
  - Segundo Princípio, 18
- Lacete, 43
- Matriz
  - Adjacência, 46
  - Incidência, 46
- Permutação, 30
  - Completa, 36
- Subgrafo, 50
  - Gerador, 50
  - Induzido, 52
  - Próprio, 50
  - Suporte das Arestas, 52
- Sucessão
  - Fibonacci, 20
- Teorema
  - Binomial, 33
  - Cantor-Schröder-Bernstein, 8
  - Dirac, 75
  - Ore, 74
- Vértices, 43
  - Adjacentes, 43
  - Coloração, 79
  - Conexos, 58
  - Distância, 50
  - Extremos, 43
  - Grau, 45
  - Vizinhança, 43