Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 2

Rozcvička. Napíšte rekurzívnu definíciu pre funkciu lpcount(A), ktorej hodnotou je počet ľavých zátvoriek „(“ vo formule A.

Úloha 1. Majme danú množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p, q, r, \ldots\}$ a jej ohodnotenie $v = \{p \mapsto t, q \mapsto f, r \mapsto f, \ldots\}$. Zistite, či ohodnotenie v spĺňa nasledovné formuly:

a) $\neg((\neg p \to q) \wedge (\neg q \to p))$
b) $((\neg p \to q) \wedge (\neg q \to (q \vee \neg(q \to r))))$
c) $((\neg(q \vee \neg r) \vee q) \to (r \to ((p \vee \neg p) \wedge \neg(q \to r))))$
d) $((((p \wedge \neg p) \vee \neg r) \vee q) \leftrightarrow (r \to ((p \vee \neg p) \vee \neg(r \wedge q))))$

Úloha 2. O každej z nasledujúcich formúl nad $\mathcal{V} = \{p, q, r, \ldots\}$ rozhodnite, či je (i) tautológia, (ii) splniteľná, alebo (iii) nesplniteľná:

a) $((p \wedge \neg p) \vee (p \vee \neg p))$
b) $((p \wedge q) \to (\neg p \wedge q))$
c) $(\neg(q \wedge \neg q) \to ((p \vee \neg p) \to (p \wedge \neg p)))$
d) $((\neg(q \vee \neg r) \vee q) \to (r \to ((p \vee \neg p) \wedge \neg(q \to r))))$

Definícia 1. Ohodnotenie výrokových premenných v *spĺňa* množinu formúl S (skrátene $v \models S$) vtt v spĺňa každú formulu X z S.

Definícia 2. Množina formúl S je *(súčasne) splniteľná* vtt existuje ohodnotenie v, ktoré spĺňa S.

Úloha 3. Vyriešte nasledovnú slovnú úlohu pomocou výrokovej logiky (úloha podľa [1]).

V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých A, B, C. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Ak je A vinný a B nevinný, je vinný C.
b) C nikdy nepracuje sám.
c) A nikdy nepracuje s C.
d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem A, B, C a aspoň jeden z nich je vinný.

Neodporujú si tieto zistenia?

Návod: Zapíšte tvrdenia ako množinu formúl vo výrokovej logike a zistite, či je súčasne splniteľná.

Úloha 4. Zistite, či nasledujúce dvojice formúl sú ekvivalentné:

a) $(p \to (q \to r))$ a $((p \to q) \to (p \to r))$
b) $((p \wedge q) \to r))$ a $((p \to r) \wedge (q \to r))$
c) $(p \to (q \vee r))$ a $(\neg r \to (p \to q))$

Úloha 5. Definujte, kedy ohodnotenie v spĺňa formuly vytvorené z výrokových premenných pomocou nulárnych spojok $\top$, $\bot$ a ternárnej spojky $(A \mathbin{\textbf{?}} B \mathbin{\textbf{:}} C)$ (ak …, tak …, inak …).

Úloha 6. Dokážte:

a) Formula A je tautológia vtt keď $\neg A$ je nesplniteľná.
b) Formuly A a B sú ekvivalentné vtt $(A \leftrightarrow B)$ je tautológia.

c) Formula $(A \to B)$ je nesplniteľná vtt A je tautológia a B je nesplniteľná.

Domáca úloha `du01`. Riešenie domácej úlohy odovzdajte najneskôr v pondelok **14. marca 2016**:

- v **čitateľnej papierovej** podobe na začiatku prednášky **o 11:30**;
- elektronicky cez Váš repozitár na github.com ako pull-request do vetvy `du01` najneskôr **o 24:00**. Odovzdávaný dokument uložte do súboru `du01.pdf`/`du01.txt`/`du01.md` v adresári `du01` vo vetve `du01`. Dokument musí byť v jednom z formátov:
  - **PDF** z TeXu alebo textového procesora, **nie** obrázok rukou písaného textu,
  - hladký text v kódovaní UTF-8, alebo
  - text vo formáte Markdown v kódovaní UTF-8.

Úloha má hodnotu 2 body [po 1 bode za každú časť a), b)].

a) *Shefferova spojka* (NAND), značka $\uparrow$, je binárna logická spojka s nasledovným významom:

   $A \uparrow B$ je pravdivé vtt aspoň jedno z A alebo B je nepravdivé.

   Vybudujte teóriu výrokovej logiky používajúcej iba túto spojku, teda zadefinujte pojem: (i) formuly, (ii) vytvárajúcej postupnosti pre formulu, (iii) vytvárajúceho stromu pre formulu, (iv) splnenia formuly pri ohodnotení výrokových premenných.

b) Hovoríme, že binárna logická spojka α je definovateľná zo spojok $\beta_1, \beta_2, \ldots$, ak existuje formula, obsahujúca iba spojky $\beta_1, \beta_2, \ldots$, a výrokové premenné p a q, ekvivalentná s formulou $(p \, \alpha \, q)$.

   Hovoríme, že unárna logická spojka α je definovateľná zo spojok $\beta_1, \beta_2, \ldots$, ak existuje formula, obsahujúca iba spojky $\beta_1, \beta_2, \ldots$, a výrokovú premennú p, ekvivalentná s formulou $\alpha \, p$.

   Napríklad $\to$ je definovateľná z $\neg$ a $\vee$ pretože $(p \to q)$ je ekvivalentná s $(\neg p \vee q)$ (samozrejme ekvivalenciu tých dvoch formúl by bolo treba ešte dokázať).

   Dokážte, že:

   (i) $\uparrow$ je definovateľná zo spojok $\neg$, $\wedge$ a $\vee$;

   (ii) $\neg$, $\wedge$ a $\vee$ sú definovateľné z $\uparrow$.

Literatúra

[1] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles.* Prentice-Hall, 1978.