Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 10

Úloha 1. Formalizujte v jazyku logiky prvého rádu a dokážte rezolvenciou, že z teórie obsahujúcej formuly $A_{1\text{–}4}$ vyplýva cieľ X.

A_1: Každý kojot naháňa nejakého roadrunnera.
A_2: Každý roadrunner, ktorý robí „beep-beep“, je múdry.
A_3: Žiadny kojot nechytí roadrunnera, ktorý je múdry.
A_4: Kojot, ktorý naháňa roadrunnera, a nechytí ho, je frustrovaný
X: Ak všetky roadrunnery robia „beep-beep“, tak všetky kojoty sú frustrované.

Úloha 2. Dokážte v tablovom kalkule pre logiku prvého rádu s rovnosťou:

a) V jazyku s binárnym funkčným symbolom $\circ$ z teórie $\{A_1, A_2, A_3\}$ vyplýva X, kde

A_1: $\forall x \forall y\ (x \circ (y \circ z)) \doteq ((x \circ y) \circ z)$
A_2: $\exists v \forall x\ (v \circ x) \doteq x$
A_3: $\exists w \forall x\ (x \circ w) \doteq x$
X: $\exists u \forall x \big((u \circ x) \doteq x \land (x \circ u) \doteq x\big)$

Neformálne: A_2 a A_3 hovoria, že existujú v a w, ktoré sú ľavým, resp. pravým neutrálnym prvkom operácie $\circ$ (ako napr. 0 pre sčítanie, 1 pre násobenie, `""` pre zreťazenie reťazcov). X hovorí, že existuje neutrálny prvok (je súčasne ľavým aj pravým neutrálnym prvkom).

Pomôcka: Odvoďte, že ľavý a pravý neutrálny prvok sú si rovné.

b) V jazyku s binárnym funkčným symbolom $\circ$ a symbolom konštanty e z teórie $\{B_1, \dots, B_4\}$ vyplýva Y, kde

B_1: $\forall x \forall y\ (x \circ (y \circ z)) \doteq ((x \circ y) \circ z)$
B_2: $\forall x\ (x \circ e) \doteq x$
B_3: $\forall x \exists u\ (u \circ x) \doteq e$
B_4: $\forall x \exists v\ (x \circ v) \doteq e$
Y: $\forall x \exists y \big((y \circ x) \doteq e \land (x \circ y) \doteq e\big)$

Neformálne: B_2 hovorí, že e je pravý neutrálny prvok operácie $\circ$. B_3 a B_4 hovoria, že ku každému prvku x existuje ľavý, resp. pravý inverzný prvok (ako napr. $-x$ pre sčítanie celých čísel, $1/x$ pre násobenie racionálnych čísel). Y hovorí, že ku každému prvku x existuje inverzný prvok (je súčasne ľavým aj pravým inverzným prvkom pre x).

Pomôcka: Odvoďte, že pre zvolený prvok x sú si jeho ľavý a pravý neutrálny prvok rovné. Dá sa to pomocou asociativity (B_1).

c) V jazyku s binárnym funkčným symbolom $\circ$ a symbolom konštanty e z teórie $\{C_1, C_2, C_3\}$ vyplýva Z, kde

C_1: $\forall x \forall y\ (x \circ (y \circ z)) \doteq ((x \circ y) \circ z)$
C_2: $\forall x\ (x \circ e) \doteq x$
C_3: $\forall x \exists y\ ((x \circ y) \doteq e \land (y \circ x) \doteq e)$
Z: $\forall x \forall y \forall z \big((x \circ z) \doteq (y \circ z) \to x \doteq y\big)$

Neformálne: Z je zákon pravého krátenia.

Pomôcka: Pravidlom (Fsub) „vynásobte“ obe strany rovnosti v antecedente Z vhodným prvkom.

Domáca úloha `du05`. Riešenie domácej úlohy odovzdajte najneskôr v pondelok **23. mája 2016** jedným z nasledujúcich spôsobov:

- v **čitateľnej** papierovej podobe **medzi 11:30 a 13:00** v kancelárii **I-16**;
- elektronicky najneskôr **o 23:59:59** cez svoj repozitár na `github.com` ako pull-request do vetvy (base) `du05` repozitára (base fork) `FMFI-UK-1-AIN-412/`*`váš-AIS-login`*`.`

  Odovzdávaný dokument uložte do súboru `du05.pdf` v adresári `du05` vo vetve `du05`. Dokument **musí byť vo formáte PDF**. Vytvorte ho podľa svojich preferencií (TEXom, textovým procesorom, tlačou do PDF z webového prehliadača, ...), **nesmie** však obsahovať obrázky rukou písaného textu ani screeshoty.

Úloha má hodnotu **4 body** [po 1 bode za každú z častí a), b), c), d)]. Plné hodnotenie môže získať iba riešenie so **zrozumiteľným a zdôvodneným postupom**.

a) Formalizujte v jazyku logiky prvého rádu:

A_1: Každý, kto sa cíti teplo, je buď opitý alebo každý jeho odev je teplý.
A_2: Každý odev, ktorý je teplý, je kožušinový.
A_3: Každý študent informatiky je študent.
A_4: Každý študent informatiky vlastní robotický kostým.
A_5: Každý robotický kostým je odev a žiadny robotický kostým nie je kožušinový.
X: Ak sa každý študent cíti teplo, tak každý študent informatiky je opitý.

b) Dokážte rezolvenčným kalkulom pre formalizáciu v časti a), že z teórie pozostávajúcej z formúl $A_{1\text{–}5}$ vyplýva formula X.

c) Formalizujte v logike prvého rádu s rovnosťou v jazyku s unárnym funkčným symbolom f a binárnym predikátovým symbolom R nasledujúce tvrdenia:

B_1: Funkcia (označená funkčným symbolom) f je injekcia.
B_2: Relácia (označená predikátovým symbolom) R je reflexívna.
B_3: Relácia R je symetrická.
B_4: Relácia R je tranzitívna.
B_5: Relácia R obsahuje iba dvojice prvkov, ktoré sú si navzájom rovné (teda R je identita na nejakej podmnožine domény).
B_6: Pre každé dva prvky x a y, x a y sú v relácii R vtt hodnoty funkcie f pre x a y sú si rovné.

Dokážte v tablovom kalkule pre logiku prvého rádu s rovnosťou:

(i) Z B_6 vyplýva konjunkcia B_2, B_3, B_4, teda že R je relácia ekvivalencie.
(ii) Z $\{B_1, B_6\}$ vyplýva B_5.

d) Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení a svoju odpoveď neformálne zdôvodnite:

(i) Nech A je prvorádová formula bez kvantifikátorov, rovnosti, premenných a funkčných symbolov (môže obsahovať konštanty). Výrokovú formulu F vytvoríme tak, že všetky predikáty tvaru $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ v A nahradíme výrokovou premennou $P\_a_1\_a_2\_ \dots \_a_n$.
F je výrokovologicky splniteľná vtt A je prvorádovo splniteľná.

(ii) Ak je prvorádová formula pravdivá v nejakej štruktúre s dvojprvkovou doménou, tak je pravdivá aj v nejakej štruktúre s trojprvkovou doménou.

(iii) Ak vo výrokovologickej tautológii nahradíme všetky výrokové premenné prvorádovými formulami (tak, že za tú istú premennú vždy dosadíme tú istú formulu), dostaneme platnú prvorádovú formulu.