Prednášky z Matematiky (4) – Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2015/2016

12. prednáška

Prvorádová rezolvencia

16. mája 2016

Obsah 12. prednášky

Organizácia skúškového obdobia

- Final test:
  - piatok 27. 5. o 9:00 v A
- Opravný final test:
  - utorok 31. 5. o 13:00 v F2
- Ústna skúška:
  - utorok 31. 5. o 9:30 v I-16

Výrokové pravidlo rezolvencie

Rezolvencia — odvodzovacie pravidlo pre klauzuly:

$$\frac{A \lor C \qquad \neg A \lor D}{C \lor D}$$

Význam je jasnejší pri zápise pomocou implikácie:

$$\frac{\neg C \to A \qquad A \to D}{\neg C \to D}$$

Výsledkom rezolvencie môže byť prázdna klauzula: $\Box = \bigvee_{i=1}^{0} L_i$
(niekedy sa namiesto $\Box$ používa $\bot$)

Prvorádová CNF

CNF v logike prvého rádu — podobne ako vo výrokovej logike:

- Literál je atomická formula $P(t_1, \ldots, t_a)$ alebo jej negácia $\neg P(t_1, \ldots, t_a)$.
- Klauzula je disjunkcia literálov $L_1 \vee \cdots \vee L_k$ (skr. $\bigvee_{i=1}^{k} L_i$); môže byť tvorená aj jedným literálom L, alebo prázdna ($\square$). Prázdna klauzula je nesplniteľná.
- CNF je konjunkcia klauzúl $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$ (skr. $\bigwedge_{i=1}^{n} C_i$); môže byť tvorená aj jednou klauzulou C, alebo prázdna. Prázdna CNF je platná.

Formula $X = \bigwedge_{i=1}^{n} C_i$ v CNF môže mať voľné premenné. Stotožňujeme ju so všeobecným uzáverom $\forall x_1 \cdots \forall x_m \bigwedge_{i=1}^{n} C_i$ (teda uzavretou formulou, v ktorej sú všetky voľné premenné X všeobecne kvantifikované).

Konverzia do CNF

Definícia 2.1

Štruktúra $\mathcal{M}$ je *modelom* formuly X (množiny formúl S) vtt $\mathcal{M} \models X$ ($\mathcal{M} \models S$).

Definícia 2.2

Formuly X a Y sú ekvisplniteľné vtt X je splniteľná vtt Y je splniteľná.

Veta 2.3

Ku každej uzavretej prvorádovej formule existuje ekvisplniteľná formula v CNF (všeobecne uzavretá).

Konverzia do CNF

Dôkaz/algoritmus

1. Formulu X upravíme na X_1 nahradením všetkých implikácií ekvivalentnými disjunkciami.
2. X_1 upravíme na ekvivalentnú X_2 v negačnom norm. tvare (NNF)
   - negácie presunieme k atómom
3. X_2 skolemizujeme na ekvisplniteľnú formulu X_3
   - všetky existenčne kvantifikované premenné nahradíme termami z nových funkčných symbolov
   - odstránime existenčné kvantifikátory
4. X_3 upravíme do prenexného normálneho tvaru (PNF) X_4
   - všetky všeobecné kvantifikátory presunieme na začiatok formuly
5. Maticu X_4 (t.j. najväčšiu podformulu bez kvantifikátorov) upravíme do konjunktívneho normálneho tvaru (CNF) X_5
   - distributívne zákony pre konjunkciu a disjunkciu

Konverzia do NNF

Definícia 2.4

Formula X je v negačnom normálnom tvare (NNF) vtt
neobsahuje implikáciu
a pre každú jej podformulu $\neg A$ platí, že A je atomická formula.

Formulu bez implikácií do NNF upravíme pomocou

- de Morganovych zákonov:

$$\neg(A \land B) \rightsquigarrow \neg A \lor \neg B \qquad \neg(A \lor B) \rightsquigarrow \neg A \land \neg B$$

- pravidla dvojitej negácie:

$$\neg\neg A \rightsquigarrow A$$

- pravidiel pre negáciu kvantifikátorov:

$$\neg\exists x\, A \rightsquigarrow \forall x \neg A \qquad \neg\forall x\, A \rightsquigarrow \exists x \neg A$$

Tieto úpravy sú ekvivalentné.

Skolemizácia

Skolemizácia je úprava formuly X v NNF, pri ktorej:

- každý výskyt podformuly $\exists y A$, ktorý sa nachádza v X v oblasti platnosti všeobecných kvantifikátorov premenných $x_1, \ldots, x_n$

  $$X = \cdots \forall x_1 (\cdots \forall x_2 (\cdots \forall x_n (\cdots \exists y A \cdots) \cdots) \cdots) \cdots$$

  nahradíme formulou

  $$A(y / f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

  pre *nový* funkčný symbol f,
- každý výskyt podformuly $\exists y A$, ktorý sa nachádza v X mimo oblasti všeobecných kvantifikátorov nahradíme formulou

  $$A(y/c)$$

  pre *nový* symbol konštanty c.

Táto úprava nie je ekvivalentná, ale
skolemizovaná formula je ekvisplniteľná s pôvodnou formulou.

Skolemizácia — príklad

Príklad 2.5

$$\exists z\Big(R(z,z) \land \forall x\big(\neg R(x,z) \lor \exists u(R(x,u) \land R(u,z)) \lor \forall y \exists v(\neg R(y,v) \land R(x,v))\big)\Big)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\ldots?$$

Konverzia do PNF

Definícia 2.6

Formula X je v prenexnom normálnom tvare (PNF) vtt má tvar $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n A$, kde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, x_i je premenná a A je formula bez kvantifikátorov.

Skolemizovanú formulu v NNF do PNF upravíme opakovanou aplikáciou nasledujúcich transformácií:

- ak sa x nemá voľný výskyt v B,

$$\forall x A \wedge B \rightsquigarrow \forall x (A \wedge B) \qquad B \wedge \forall x A \rightsquigarrow \forall x (B \wedge A)$$
$$\forall x A \vee B \rightsquigarrow \forall x (A \vee B) \qquad B \vee \forall x A \rightsquigarrow \forall x (B \vee A)$$

- ak sa x má voľný výskyt v B a y je nová premenná,

$$\forall x A \wedge B \rightsquigarrow \forall y A(x/y) \wedge B \qquad B \wedge \forall x A \rightsquigarrow B \wedge \forall y A(x/y)$$
$$\forall x A \vee B \rightsquigarrow \forall y A(x/y) \vee B \qquad B \vee \forall x A \rightsquigarrow B \vee \forall y A(x/y)$$

Tieto úpravy sú ekvivalentné.

Unifikátory

Definícia 2.7

Nech t, u sú termy, A, B sú prvorádové formuly, σ je substitúcia.

- σ je *unifikátorom* t a u (resp. A a B) vtt $t\sigma = u\sigma$ $(A\sigma = B\sigma)$.
- σ je všeobecnejšia ako θ vtt existuje subst. γ taká, že $\theta = \sigma\gamma$.
- σ je *najvšeobecnejším unifikátorom* t a u (resp. A a B) vtt
  - σ je unifikátorom t a u (resp. A a B) a zároveň
  - pre každý unifikátor θ t a u (resp. A a B) je σ všeobecnejšia ako θ.

Príklad 2.8

- $A = R(c, x)$, $B = R(y, g(z))$, $\sigma = \{x \mapsto g(z), y \mapsto c\}$
- $\theta_1 = \{x \mapsto g(u), y \mapsto c, z \mapsto u\}$, $\gamma_1 = \{z \mapsto u\}$
  $\theta_2 = \{x \mapsto g(g(c)), y \mapsto c, z \mapsto g(c)\}$, $\gamma_2 = \{z \mapsto g(c)\}$

Prvorádová rezolvencia — pravidlá

Definícia 2.9

Nech C a D sú prvorádové klauzuly, nech A a B sú atómy, nech L a K sú literály, σ je substitúcia.
Pravidlo *rezolvencie* (angl. resolution) je

$$\frac{A \lor C \qquad \neg B \lor D}{(C \lor D)\sigma} \quad \sigma \text{ je unifikátor } A \text{ a } B.$$

Pravidlo *faktorizácie* (angl. factoring) je

$$\frac{L \lor K \lor C}{(L \lor C)\sigma} \quad \sigma \text{ je unifikátor } L \text{ a } K.$$

Zamietnutie

Definícia 2.10

Nech T je množina (prvorádových) klauzúl.
Zamietnutím T (angl. refutation) je každá konečná postupnosť klauzúl $\mathcal{Z} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$, kde $C_n = \Box$ a každá klauzula C_i, $1 \leq i \leq n$, je:

- prvkom T, alebo
- odvodený pravidlom rezolvencie z klauzúl C_j a C_k, ktoré sa v $\mathcal{Z}$ nachádzajú pred C_i, alebo
- odvodený pravidlom faktorizácie z klauzuly C_j, ktorá sa v $\mathcal{Z}$ nachádza pred C_i.

Korektnosť a úplnosť rezolvencie a vyplývanie

Veta 2.11 (Korektnosť a úplnosť rezolvencie)

Nech $X = \forall x_1 \cdots \forall x_n \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$ *je formula v CNF.*
Potom existuje zamietnutie $\{C_1, \ldots, C_n\}$ *vtt* X *je nesplniteľná.*

Dôsledok 2.12

Nech T *je konečná teória, nech* X *je uzavretá formula.*
Nech $Y = \forall x_1 \cdots \forall x_n \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$ *je formula v CNF ekvisplniteľná s* $\bigwedge_{Y \in T} Y \land \neg X$.
Potom existuje zamietnutie $\{C_1, \ldots, C_n\}$ *vtt* X *vyplýva z* T.

Rezolvencia a zamietnutie — príklad

Príklad 2.13

Dokážme platnosť

$$\exists x(\forall y Q(x,y) \to \forall y Q(f(y),x) \land \forall y Q(x,f(y)))$$

Zákerné otázky

Cvičenie 2.14

- Nech X je prvorádová formula bez kvantifikátorov.
  Ak v X nahradíme všetky premenné za konštanty, dostaneme výrokovú formulu.
- Zostrojte prvorádovú formulu,
  ktorá je splnená iba v nekonečných štruktúrach
  (teda ktorej *modelmi* sú iba nekonečné štruktúry).
- Ak je formula v logike prvého rádu *bez rovnosti* splnená
  v konečnej štruktúre s k prvkami,
  je splnená aj v štruktúre s $k+1$ prvkami.
- Nech F je splniteľná výroková formula. Nech F_1 je prvorádová formula, ktorá vznikne nahradením výrokovej premennú p za unárny predikát $p(x)$ a uzavretím formuly kvantifikátorom $\forall x$. Potom F_1 je tiež splniteľná formula.

Literatúra

SMULLYAN, R. M. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

ŠVEJDAR, V. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.