

---

## Matematika 5 – Logika pre informatikov

### Domáca úloha du05

---

Riešenie domácej úlohy odovzdajte najneskôr v pondelok **23. mája 2016** jedným z nasledujúcich spôsobov:

- v **čitateľnej** papierovej podobe **medzi 11:30 a 13:00** v kancelárii **I-16**;
- elektronicky najneskôr o **23:59:59** cez svoj repozitár na `github.com` ako pull-request do vetvy (base) **du05** repozitára (base fork) `FMFI-UK-1-AIN-412/váš-AIS-login`.

Odvzdávaný dokument uložte do súboru `du05.pdf` v adresári `du05` vo vetve `du05`. Dokument **musí byť vo formáte PDF**. Vytvorte ho podľa svojich preferencií (TeXom, textovým procesorom, tlačou do PDF z webového prehliadača, ...), **nesmie** však obsahovať obrázky rukou písaného textu ani screeshoty.

Úloha má hodnotu **4 body** [po 1 bode za každú z častí a), b), c), d)]. Plné hodnotenie môže získať iba riešenie so **zrozumiteľným a zdôvodneným postupom**.

a) Formalizujte v jazyku logiky prvého rádu:

- $A_1$ : Každý, kto sa cíti teplo, je buď opitý alebo každý jeho odev je teplý.
- $A_2$ : Každý odev, ktorý je teplý, je kožušinový.
- $A_3$ : Každý študent informatiky je študent.
- $A_4$ : Každý študent informatiky vlastní robotický kostým.
- $A_5$ : Každý robotický kostým je odev a žiadny robotický kostým nie je kožušinový.
- $X$ : Ak sa každý študent cíti teplo, tak každý študent informatiky je opitý.

b) Dokážte rezolvenčným kalkuľom pre formalizáciu v časti a), že z teórie pozostávajúcej z for-  
múl  $A_{1-5}$  vyplýva formula  $X$ .

c) Formalizujte v logike prvého rádu s rovnosťou v jazyku s unárnym funkčným symbolom  $f$  a binárnym predikátovým symbolom  $R$  nasledujúce tvrdenia:

- $B_1$ : Funkcia (označená funkčným symbolom)  $f$  je injekcia.
- $B_2$ : Relácia (označená predikátovým symbolom)  $R$  je reflexívna.
- $B_3$ : Relácia  $R$  je symetrická.
- $B_4$ : Relácia  $R$  je tranzitívna.
- $B_5$ : Relácia  $R$  obsahuje iba dvojice prvkov, ktoré sú si navzájom rovné (teda  $R$  je identita na nejakej podmnožine domény).
- $B_6$ : Pre každé dva prvky  $x$  a  $y$ ,  $x$  a  $y$  sú v relácii  $R$  vtt hodnoty funkcie  $f$  pre  $x$  a  $y$  sú si rovné.

Dokážte v tablovom kalkule pre logiku prvého rádu s rovnosťou:

- (i) Z  $B_6$  vyplýva konjunkcia  $B_2, B_3, B_4$ , teda že  $R$  je relácia ekvivalencie.
- (ii) Z  $\{B_1, B_6\}$  vyplýva  $B_5$ .

d) Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení a svoju odpoveď neformálne zdôvodnite:

- (i) Nech  $A$  je prvorádová formula bez kvantifikátorov, rovnosti, premenných a funkčných symbolov (môže obsahovať konštanty). Výrokovú formulu  $F$  vytvoríme tak, že všetky predikáty tvaru  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  v  $A$  nahradíme výrokovou premennou  $P\_a_1\_a_2\_ \dots \_a_n$ .  $F$  je výrokovologicky splniteľná vtt  $A$  je prvorádovo splniteľná.
- (ii) Ak je prvorádová formula pravdivá v nejakej štruktúre s dvojprvkovou doménou, tak je pravdivá aj v nejakej štruktúre s trojprvkovou doménou.
- (iii) Ak vo výrokovologickej tautológii nahradíme všetky výrokové premenné prvorádovými formulami (tak, že za tú istú premennú vždy dosadíme tú istú formulu), dostaneme platnú prvorádovú formulu.