

---

## Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 5

---

**Úloha 1.** Ukážte použitím vety o dedukcii, že v hilbertovskom kalkule sú nasledujúce formuly dokázateľné z prázdnej množiny predpokladov pre všetky formuly  $A, B, C$ :

- |  |  |
|--|--|
| a) $((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ | d) $(A \rightarrow \neg\neg A)$                                  |
| b) $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$  | e) $((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$ |
| c) $(\neg\neg A \rightarrow A)$  | f) $(A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)))$  |

Pri hľadaní dôkazov neskorších formúl využite dôkazy predchádzajúcich formúl.

**Úloha 2.** Dokážte formuly z úlohy 1 v tablovom kalkule.

**Úloha 3.** V tablovom kalkule dokážte nasledujúce tautológie:

- |  |   |
|--|---|
| a) $(q \rightarrow (p \rightarrow q))$   | d) $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$                |
| b) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$ | e) $(\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$                |
| c) $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \wedge (p \vee q) \rightarrow r$          | f) $((p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$ |

**Úloha 4.** Pripomeňme si slovnú úlohu z 2. a 3. teoretického cvičenia:

V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých  $A, B, C$ . Počas vyšetrovania sa zistilo:

- Ak je  $A$  vinný a  $B$  nevinný, je vinný  $C$ .
- $C$  nikdy nepracuje sám.
- $A$  nikdy nepracuje s  $C$ .
- Do prípadu nie je zapletený nikto okrem  $A, B, C$  a aspoň jeden z nich je vinný.

Dokážte pomocou tablového kalkulu, že  $B$  je vinný.

*Návod:* Formalizujte zistené fakty ako množinu formúl výrokovej logiky  $S$ . Vinu jednotlivých podozrivých formalizujte výrokovými premennými  $a, b, c$ . Dokážte v tablovom kalkule, že z  $S$  vyplýva  $b$ .

**Úloha 5.** Pripomeňme si slovnú úlohu z 1. prednášky a praktického cvičenia:

Chceme na párty pozvať niekoho z trojice Jim, Kim a Sára, bohužiaľ každý z nich má nejaké svoje podmienky: Sára nepôjde na párty, ak pôjde Kim. Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim. Sára nepôjde bez Jima.

Formalizujte úlohu vo výrokovej logike a dokážte v tablovom kalkule konjunkciu: na párty pôjde Kim a nepôjde Sára.

**Úloha 6.** Anka ide do práce autom vždy, keď prší. Ak neprší, ide do práce na bicykli. Keď ide do práce na bicykli, má celý deň dobrú náladu.

Formalizujte fakty o Ankinom dochádzaní do práce vo výrokovej logike a dokážte v tablovom kalkule, že ak Anka nejde do práce autom, má celý deň dobrú náladu.

**Úloha 7.** Ak by metalová kapela nemohla hrať alebo by občerstvenie nedodali načas, silvestrovská oslava by sa musela zrušiť a Rudy by zúril. Ak by sa oslava musela zrušiť, organizátori by vrátili vstupné. Organizátori vstupné nevrátili.

Formalizujte uvedené skutočnosti vo výrokovej logike a dokážte, že metalová kapela mohla hrať.

**Definícia 1.** *Hilbertovský kalkul* sa skladá z axióm vytvorených podľa nasledujúcich *schém axióm* pre všetky formuly  $A, B, C$ :

- (A1)  $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
- (A2)  $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
- (A3)  $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A))$
- (A4)  $((A \wedge B) \rightarrow A), ((A \wedge B) \rightarrow B)$
- (A5)  $(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$
- (A6)  $((A \rightarrow (A \vee B)), (B \rightarrow (A \vee B)))$
- (A7)  $((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)))$

a pravidla *modus ponens*:

$$(MP) \quad \frac{A \quad (A \rightarrow B)}{B}$$

pre všetky formuly  $A$  a  $B$ .

**Veta 1 (o dedukcii v hilbertovskom kalkule).** *Nech  $S$  je množina formúl a  $X$  a  $Y$  sú formuly. Potom  $S \cup \{X\} \vdash Y$  vtt  $S \vdash (X \rightarrow Y)$ .*

**Definícia 2.** Pre všetky formuly  $X, Y$  sú pravidlami tablového kalkulu:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathbf{T}(X \wedge Y)}{\mathbf{TX} \quad \mathbf{TY}} & \frac{\mathbf{F}(X \wedge Y)}{\mathbf{FX} \mid \mathbf{FY}} & \frac{\mathbf{T}\neg X}{\mathbf{FX}} \\ \frac{\mathbf{F}(X \vee Y)}{\mathbf{FX} \quad \mathbf{FY}} & \frac{\mathbf{T}(X \vee Y)}{\mathbf{TX} \mid \mathbf{TY}} & \frac{\mathbf{F}\neg X}{\mathbf{TX}} \\ \frac{\mathbf{F}(X \rightarrow Y)}{\mathbf{TX} \quad \mathbf{FY}} & \frac{\mathbf{T}(X \rightarrow Y)}{\mathbf{FX} \mid \mathbf{TY}} & \end{array}$$