Prednášky z Matematiky (4) – Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2015/2016

11. prednáška

Prvorádové vyplývanie

9. mája 2016

Obsah 11. prednášky

Splnenie formuly v štruktúre

Definícia 1.1

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných. Relácia *formula A je splnená v štruktúre $\mathcal{M}$ pri ohodnotení e* (skrátene $\mathcal{M} \models A[e]$) má nasledovnú rekurzívnu definíciu:

- $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[e]$ vtt $t_1^{\mathcal{M}}[e] = t_2^{\mathcal{M}}[e]$,
- $\mathcal{M} \models P(t_1, \ldots, t_n)[e]$ vtt $\left(t_1^{\mathcal{M}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[e]\right) \in P^{\mathcal{M}}$,
- $\mathcal{M} \models \neg A[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ a zároveň $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models \exists x A[e]$ vtt pre nejaký prvok $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,
- $\mathcal{M} \models \forall y A[e]$ vtt pre každý prvok $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,

pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n, všetky termy t_1, t_2, $\ldots$, t_n, a všetky formuly A, B.

Splnenie množiny formúl, teórie

Definícia 1.2

Nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$.

- Nech e je ohodnotenie výrokových premenných. Množina S formúl jazyka $\mathcal{L}$ je *splnená v štruktúre* $\mathcal{M}$ *pri ohodnotení* e ($\mathcal{M} \models S[e]$) vtt pre všetky formuly Y z S platí $\mathcal{M} \models Y[e]$.
- Formula X jazyka $\mathcal{L}$ je *(súčasne) splnená v štruktúre* $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models X$) vtt X je splnená v štruktúre $\mathcal{M}$ pri každom ohodnotení e.
- Množina S formúl jazyka $\mathcal{L}$ je *splnená v štruktúre* $\mathcal{M}$ (skrátene $\mathcal{M} \models S$) vtt pre všetky formuly Y z S platí $\mathcal{M} \models Y$.

Definícia 1.3

Množinu formúl T jazyka $\mathcal{L}$ nazývame *teória v jazyku* $\mathcal{L}$ vtt je spočítateľná a každá jej formula je uzavretá.

Platné formuly a prvorádové vyplývanie

Definícia 1.4

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$. Formula X je *platná* (skrátene $\models X$) vtt X je splnená v každej štruktúre $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$.

Definícia 1.5

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$, nech S je množina formúl v jazyku $\mathcal{L}$. Formula X *(prvorádovo) vyplýva z S* (skrátene $S \models X$) vtt pre každú štruktúru $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ a každé ohodnotenie e platí, že ak je S splnená v $\mathcal{M}$ pri e, tak aj X je splnená v $\mathcal{M}$ pri e.

Prvorádová splniteľnosť a vyplývanie

Definícia 1.6

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$, nech S je množina formúl v jazyku $\mathcal{L}$.

- Formula X je *(prvorádovo) splniteľná* vtt
  existuje taká štruktúra $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ a také ohodnotenie indivíduových premenných e, že platí $\mathcal{M} \models X[e]$.
  Inak je X *(prvorádovo) nesplniteľná*.
- Množina S je *(súčasne prvorádovo) splniteľná* vtt
  existuje taká štruktúra $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ a existuje také ohodnotenie indivíduových premenných e, že $\mathcal{M} \models S[e]$.
  Inak je S *(súčasne prvorádovo) nesplniteľná*.

Tvrdenie 1.7

Nech X je formula a S je množina formúl v jazyku $\mathcal{L}$.
Formula X prvorádovo vyplýva z S vtt
množina $S \cup \{\neg X\}$ je prvorádovo súčasne nesplniteľná.

Splnenie označených formúl, vyplývanie

Definícia 1.8

Nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, nech e je ohodnotenie indivíduových premenných, nech X je formula jazyka $\mathcal{L}$.
Štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa označenú formulu $\mathbf{T}X$ pri ohodnotení e vtt $\mathcal{M} \models X[e]$.
Štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa označenú formulu $\mathbf{F}X$ pri ohodnotení e vtt $\mathcal{M} \not\models X[e]$.

Splnenie množiny ozn. formúl a *splniteľnosť* definujeme analogicky ako pre neoznačené formuly.

Tvrdenie 1.9

Nech X je formula a S je množina formúl v jazyku $\mathcal{L}$.
Formula X prvorádovo vyplýva z S vtt
množina $\{\,\mathbf{T}Y \mid Y \in S\,\} \cup \{\mathbf{F}X\}$ je prvorádovo súčasne nesplniteľná.

Jednotný zápis označených formúl — α

Definícia 1.10 (Jednotný zápis označených formúl typu α)

Označená formula A^+ je typu α, ~~ak~~ vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci nasledujúcej tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly označujeme písmenom α; α_1 označuje príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca a α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{T}\neg X$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}X$
$\mathbf{F}\neg X$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}X$

Jednotný zápis označených formúl — β

Definícia 1.11 (Jednotný zápis označených formúl typu β)

Označená formula B^+ je typu β vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci nasledujúcej tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly označujeme písmenom β;
β_1 označuje príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca a β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{T}Y$

Jednotný zápis označených formúl — γ a δ

Definícia 1.12 (Jednotný zápis označených formúl typov γ a δ)

Označená formula C^+ je typu γ vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci nasledujúcej tabuľky pre nejakú formulu A a indivíduovú premennú x. Takéto formuly označujeme písmenom γ;
$\gamma_x(t)$ označuje príslušnú označenú formulu z pravého stĺpca.

γ	$\gamma_x(t)$
$\mathbf{F}\exists x A$	$\mathbf{F} A_x(t)$
$\mathbf{T}\forall x A$	$\mathbf{T} A_x(t)$

Označená formula D^+ je typu δ vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci nasledujúcej tabuľky pre nejakú formulu A a indivíduovú premennú x. Takéto formuly označujeme písmenom δ;
$\delta_x(y)$ označuje príslušnú označenú formulu z pravého stĺpca.

δ	$\delta_x(y)$
$\mathbf{T}\exists x A$	$\mathbf{T} A_x(y)$
$\mathbf{F}\forall x A$	$\mathbf{F} A_x(y)$

Splňanie ozn. formúl v jednotnom zápise

Pozorovanie 1.13

Nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, nech e je ohodnotenie indivíduových premenných, nech α, β, γ, δ sú označené formuly príslušných typov v jazyku $\mathcal{L}$.

1. $\mathcal{M} \models \alpha[e]$ *vtt* $\mathcal{M} \models \alpha_1[e]$ *a* $\mathcal{M} \models \alpha_2[e]$.
2. $\mathcal{M} \models \beta[e]$ *vtt* $\mathcal{M} \models \beta_1[e]$ *alebo* $\mathcal{M} \models \beta_2[e]$.
3. $\mathcal{M} \models \gamma[e]$ *vtt* $\mathcal{M} \models \gamma_x(x)\,[e(x/a)]$ *pre ľubovoľné* $a \in M$. *Špeciálne, ak* $\mathcal{M} \models \gamma[e]$, *tak* $\mathcal{M} \models \gamma_x(t)\,[e]$ *pre ľubovoľný term* t *substituovateľný za* x *v* $\gamma_x(x)$.
4. *Nech* y *je premenná substituovateľná za* x *v* $\delta_x(x)$. $\mathcal{M} \models \delta[e]$ *vtt existuje* $a \in M$ *také, že* $\mathcal{M} \models \delta_x(y)\,[e(y/a)]$.

Tablo pre množinu označených formúl

Definícia 1.14

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre* S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných rekurzívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.

Tablo pre množinu označených formúl

Pokračovanie Def. 1.14

- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a ℓ je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* $\mathcal{T}$ ktoroukoľvek z operácií:
  - A: Ak sa na vetve π_ℓ (ceste z koreňa do ℓ) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa ℓ pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - B: Ak sa na vetve π_ℓ vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti ℓ pripojíme dva nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.
  - C: Ak sa na vetve π_ℓ vyskytuje nejaká označená formula γ, tak ako jediné dieťa ℓ pripojíme nový vrchol obsahujúci $\gamma_x(t)$ pre ľubovoľný term t substituovateľný za x v $\gamma_x(x)$.
  - D: Ak sa na vetve π_ℓ vyskytuje nejaká označená formula δ, tak ako jediné dieťa ℓ pripojíme nový vrchol obsahujúci $\delta_x(y)$ pre ľubovoľnú premennú y, ktorá je substitovateľná za x v $\delta_x(x)$ a nemá voľný výskyt v žiadnej formule na vetve π_ℓ.
  - Ax: Ako jediné dieťa ℓ pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Korektnosť prvorádových tabiel

Otvorené a uzavreté vetvy a tablá sú definované rovnako ako pri tablách pre výrokovú logiku.

Veta 1.15 (Korektnosť tablového kalkulu)

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+. Potom je množina S^+ nesplniteľná.

Dôkaz (nepriamy).

Nech S^+ je splniteľná. Úplnou indukciou na počet vrcholov tabla $\mathcal{T}$ pre S^+ dokážeme, že niektorá vetva $\mathcal{T}$ je splniteľná (a teda otvorená).

… $\square$

Tablové dôkazy prvorádového vyplývania

Príklad 1.16

A_1 Všetky psy v noci zavýjajú.

A_2 Každý, kto má nejakú mačku, nemá žiadne myši.

A_3 Ľahkí spáči nemajú nič, čo v noci zavýja.

A_4 Juro má buď mačku alebo psa.

X Ak je Juro ľahký spáč, tak Juro nemá žiadne myši.

Dokážme, že z teórie, ktorá vznikne formalizáciou tvrdení A_1 až A_4, vyplýva záver X.

Tablové dôkazy prvorádového vyplývania s rovnosťou

Príklad 1.17

Nech $\mathcal{L}$ obsahuje binárny funkčný symbol $\circ$.
Dohodnime sa, že termy $\circ(t_1, t_2)$ budeme skrátene zapisovať $(t_1 \circ t_2)$.

B_1 $\forall x \forall y\ (x \circ (y \circ z)) \doteq ((x \circ y) \circ z)$

B_2 $\exists u \forall x\ (u \circ x) \doteq x$

B_3 $\exists v \forall x\ (x \circ v) \doteq x$

Y $\exists w \forall x \big((w \circ x) \doteq x \land (x \circ w) \doteq x\big)$

Dokážme, že z teórie $\{B_1, B_2, B_3\}$ vyplýva záver Y.

Literatúra

SMULLYAN, R. M. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

ŠVEJDAR, V. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na `http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf`.