Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 11

Úloha 1. Dokážte v tablovom kalkule pre logiku prvého rádu s rovnosťou:

a) V jazyku s binárnym funkčným symbolom $\circ$ z teórie $\{A_1, A_2, A_3\}$ vyplýva X, kde

A_1: $\forall x \forall y \forall z\, (x \circ (y \circ z)) \doteq ((x \circ y) \circ z)$

A_2: $\exists v \forall x\, (v \circ x) \doteq x$

A_3: $\exists w \forall x\, (x \circ w) \doteq x$

X: $\exists u \forall x \big((u \circ x) \doteq x \land (x \circ u) \doteq x\big)$

Neformálne: A_2 a A_3 hovoria, že existujú v a w, ktoré sú ľavým, resp. pravým neutrálnym prvkom operácie $\circ$ (ako napr. 0 pre sčítanie, 1 pre násobenie, "" pre zreťazenie reťazcov). X hovorí, že existuje neutrálny prvok (je súčasne ľavým aj pravým neutrálnym prvkom).

Pomôcka: Odvoďte, že ľavý a pravý neutrálny prvok sú si rovné.

b) V jazyku s binárnym funkčným symbolom $\circ$ a symbolom konštanty e z teórie $\{B_1, \dots, B_4\}$ vyplýva Y, kde

B_1: $\forall x \forall y \forall z\, (x \circ (y \circ z)) \doteq ((x \circ y) \circ z)$

B_2: $\forall x\, (x \circ e) \doteq x$

B_3: $\forall x \exists u\, (u \circ x) \doteq e$

B_4: $\forall x \exists v\, (x \circ v) \doteq e$

Y: $\forall x \exists y ((y \circ x) \doteq e \land (x \circ y) \doteq e\big)$

Neformálne: B_2 hovorí, že e je pravý neutrálny prvok operácie $\circ$. B_3 a B_4 hovoria, že ku každému prvku x existuje ľavý, resp. pravý inverzný prvok (ako napr. $-x$ pre sčítanie celých čísel, $1/x$ pre násobenie racionálnych čísel). Y hovorí, že ku každému prvku x existuje inverzný prvok (je súčasne ľavým aj pravým inverzným prvkom pre x).

Pomôcka: Odvoďte najprv využitím asociativity (B_1), že pre zvolený prvok x, jeho ľavý inverzný prvok u a pravý inverzný prvok v platí $u \doteq (e \circ v)$. Odtiaľ ľahko dostanete, že u je aj pravým inverzným prvkom pre x.

c) V jazyku s binárnym funkčným symbolom $\circ$ a symbolom konštanty e z teórie $\{C_1, C_2, C_3\}$ vyplýva Z, kde

C_1: $\forall x \forall y \forall z\, (x \circ (y \circ z)) \doteq ((x \circ y) \circ z)$

C_2: $\forall x\, (x \circ e) \doteq x$

C_3: $\forall x \exists y ((x \circ y) \doteq e \land (y \circ x) \doteq e)$

Z: $\forall x \forall y \forall z ((x \circ z) \doteq (y \circ z) \to x \doteq y\big)$

Neformálne: Z je zákon pravého krátenia.

Pomôcka: Pravidlom (Fsub) „vynásobte“ obe strany rovnosti v antecedente Z vhodným prvkom.

Úloha 2. Majme nasledujúcu množinu formúl v CNF:

A_1: $\neg L(z) \lor \neg I(y,z) \lor P(f(z,y),y) \lor K(f(z,y),y)$

A_2: $\neg L(z) \lor \neg I(y,z) \lor G(f(z,y))$

A_3: $\neg L(z) \lor \neg I(y,z) \lor R(y)$

A_4: $\neg G(x) \lor \neg K(x,y) \lor E(y,x)$

A_5: $\neg G(x) \lor \neg K(x,y) \lor A(y,x)$

A_6: $\neg G(x) \lor \neg E(y,x) \lor \neg A(y,x) \lor K(x,y)$

A_7: $\neg G(x) \lor \neg R(y) \lor E(y,x)$

A_8: $L(a)$

A_9: $I(b,a)$

A_{10}: $G(c)$

A_{11}: $A(b,c)$.

Dokážte pomocou rezolvencie, že z teórie $\{A_1, \dots, A_{11}\}$ vyplýva:

a) $K(c,b)$,

b) $P(c,b)$.