Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 8

Rozcvička. Pomocou tablového kalkulu nájdite ohodnotenie výrokových premenných $\{p, q, r, u, v\}$ spĺňajúce množinu formúl S. Vyznačte časť tabla, ktorá dokazuje vašu odpoveď a zdôvodnite ju.

$$S = \left\{ \begin{array}{c} (q \land (p \lor r)), \\ (\neg u \to v), \\ (v \to (q \land p)) \end{array} \right\}$$

Rozcvička. Pomocou tablového kalkulu nájdite ohodnotenie výrokových premenných $\{p, q, r, u, v\}$ spĺňajúce množinu formúl S. Vyznačte časť tabla, ktorá dokazuje vašu odpoveď a zdôvodnite ju.

$$S = \left\{ \begin{array}{c} (\neg u \to (p \land q)), \\ (u \to v), \\ ((p \to r) \land q) \end{array} \right\}$$

Rozcvička. Pomocou tablového kalkulu nájdite ohodnotenie výrokových premenných $\{p, q, r, u, v\}$ spĺňajúce množinu formúl S. Vyznačte časť tabla, ktorá dokazuje vašu odpoveď a zdôvodnite ju.

$$S = \left\{ \begin{array}{c} (\neg p \to q), \\ (v \land (u \lor r)), \\ (q \to (v \land u)) \end{array} \right\}$$

Úloha 1. Formalizujte vo výrokovej logiky s rovnosťou nasledujúce tvrdenia. Pre každé tvrdenie zvoľte vhodný jazyk:

a) Ak Danka a Janka sú dvojičky, tak sú aj súrodenci.
b) Ak Danka a Janka sú dvojičky, a obe sú ženy, potom je jedna sestra tej druhej a naopak.
c) Peter ľúbi Luciu, ale Lucia Petra nie.
d) Elenin otec je dieťaťom Jurajovej matky.
e) Ak je x dieťaťom y, tak je y otcom x alebo matkou x.
f) Ak sú Danka a Ľuboš súrodenci, Dankina teta je aj Ľubošovou tetou.

Dohoda. Nech t_1 a t_2 sú termy. Formulu $\neg(t_1 \doteq t_2)$ budeme skrátene zapisovať $t_1 \not\doteq t_2$.

Úloha 2. Nájdite dve štruktúry spĺňajúce nasledovnú množinu formúl *pre všetky ohodnotenia.*

$$\{ \quad S(x) \not\doteq x, \quad S(x) \doteq S(y) \to x \doteq y \quad \}$$

Úloha 3. Nájdite množinu axióm rovnosti, z ktorej výrokovologicky vyplýva kvázitautológia:

a) $z \doteq y \land y \doteq x \to f(x) \doteq f(z)$;
b) $x \doteq y \to \big(P(f(x)) \to P(f(y))\big)$.

Úloha 4. Tablovým kalkulom s pravidlami pre rovnosť dokážte kvázitautológie:

a) $x \doteq y \land g(y, v) \not\doteq g(x, w) \to w \not\doteq v$;
b) $f(x) \doteq y \land x \doteq z \land f(z) \doteq v \to v \doteq y$;
c) $f(f(f(x))) = x \land f(f(x)) = x \to f(x) = x$;

d) $\neg(P(f(y)) \to P(x)) \to x \not\doteq f(y)$;

e) $x \doteq y \land R(w,x) \land \neg R(v,y) \to v \not\doteq w$;

f) $f(f(f(f(f(x))))) \doteq x \land f(f(x)) \doteq x \to f(x) \doteq x$;

g) $f(f(f(f(f(x))))) \doteq x \land f(f(f(x))) \doteq x \to f(x) \doteq x$.

Úloha 5. Ukážte, že nasledujúce formuly nie sú kvázitautológiami:

a) $x \not\doteq y \to f(x) \not\doteq f(y)$

b) $(x \doteq 0 \to +(x,y) \doteq y) \land v \doteq 0 \to +(v,y) \doteq y$

c) $(P(x) \leftrightarrow P(y)) \to x \doteq y$

Tablové pravidlá pre rovnosť sú:

$$\frac{}{\mathbf{T} t_1 \doteq t_1}\ \text{(Refl)} \qquad \frac{\mathbf{T} t_1 \doteq t_2}{\mathbf{T} t_2 \doteq t_1}\ \text{(Sym)} \qquad \frac{\mathbf{T} t_1 \doteq t_2 \quad \mathbf{T} t_2 \doteq t_3}{\mathbf{T} t_1 \doteq t_3}\ \text{(Trans)}$$

$$\frac{\mathbf{T} t_1 \doteq s_1 \quad \cdots \quad \mathbf{T} t_n \doteq s_n}{\mathbf{T} f(t_1,\ldots,t_n) \doteq f(s_1,\ldots,s_n)}\ \text{(Fsub)} \qquad \frac{\mathbf{T} t_1 \doteq s_1 \quad \cdots \quad \mathbf{T} t_n \doteq s_n \quad \mathbf{T} P(t_1,\ldots,t_n)}{\mathbf{T} P(s_1,\ldots,s_n)}\ \text{(Psub)}$$

Pravidlo možno použiť v liste tabla y, iba ak sa *všetky* premisy nachádzajú na vetve π_y.