Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 2

Úloha 1. Majme danú množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p, q, r, \dots\}$ a jej ohodnotenie $v = \{p \mapsto t, q \mapsto f, r \mapsto f, \dots\}$. Zistite, či ohodnotenie v spĺňa nasledovné formuly:

a) $\neg((\neg p \to q) \land (\neg q \to p))$

b) $((\neg p \to q) \land (\neg q \to (q \lor \neg(q \to r))))$

c) $((\neg(q \lor \neg r) \lor q) \to (r \to ((p \lor \neg p) \land \neg(q \to r))))$

d) $((((p \land \neg p) \lor \neg r) \lor q) \leftrightarrow (r \to ((p \lor \neg p) \lor \neg(r \land q))))$

Úloha 2. O každej z nasledujúcich formúl nad $\mathcal{V} = \{p, q, r, \dots\}$ rozhodnite, či je (i) tautológia, (ii) splniteľná, alebo (iii) nesplniteľná:

a) $((p \land \neg p) \lor (p \lor \neg p))$

b) $((p \land q) \to (\neg p \land q))$

c) $(\neg(q \land \neg q) \to ((p \lor \neg p) \to (p \land \neg p)))$

d) $((\neg(q \lor \neg r) \lor q) \to (r \to ((p \lor \neg p) \land \neg(q \to r))))$

Definícia 1. Ohodnotenie výrokových premenných v *spĺňa* množinu formúl S (skrátene $v \models S$) vtt v spĺňa každú formulu X z S.

Definícia 2. Množina formúl S je *(súčasne) splniteľná* vtt existuje ohodnotenie v, ktoré spĺňa S.

Úloha 3. Vyriešte nasledovnú slovnú úlohu pomocou výrokovej logiky (úloha podľa [1]).

V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých A, B, C. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Ak je A vinný a B nevinný, je vinný C.

b) C nikdy nepracuje sám.

c) A nikdy nepracuje s C.

d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem A, B, C a aspoň jeden z nich je vinný.

Neodporujú si tieto zistenia?

Návod: Zapíšte tvrdenia ako množinu formúl vo výrokovej logike a zistite, či je súčasne splniteľná.

Úloha 4. Zistite, či nasledujúce dvojice formúl sú ekvivalentné:

a) $(p \to (q \to r))$ a $((p \to q) \to (p \to r))$

b) $((p \land q) \to r))$ a $((p \to r) \land (q \to r))$

c) $(p \to (q \lor r))$ a $(\neg r \to (p \to q))$

Úloha 5. Definujte, kedy ohodnotenie v spĺňa formuly vytvorené z výrokových premenných pomocou nulárnych spojok $\top$, $\bot$ a ternárnej spojky $(A \mathbin{\textbf{?}} B \mathbin{\textbf{:}} C)$ (ak ..., tak ..., inak ...).

Úloha 6. Dokážte:

a) Formula A je tautológia vtt keď $\neg A$ je nesplniteľná.

b) Formuly A a B sú ekvivalentné vtt $(A \leftrightarrow B)$ je tautológia.

c) Formula $(A \to B)$ je nesplniteľná vtt A je tautológia a B je nesplniteľná.

Domáca úloha `du01`. Riešenie domácej úlohy odovzdajte najneskôr v pondelok **14. marca 2016**:

- v **čitateľnej papierovej** podobe na začiatku prednášky **o 11:30**;
- elektronicky cez Váš repozitár na github.com ako pull-request do vetvy `du01` najneskôr **o 24:00**. Odovzdávaný dokument uložte do súboru `du01.pdf/du01.txt/du01.md` v adresári `du01` vo vetve `du01`. Dokument musí byť v jednom z formátov:
  - **PDF** z TeXu alebo textového procesora, **nie** obrázok rukou písaného textu,
  - hladký text v kódovaní UTF-8, alebo
  - text vo formáte Markdown v kódovaní UTF-8.

Úloha má hodnotu 2 body [po 1 bode za každú časť a), b)].

a) *Shefferova spojka* (NAND), značka $\uparrow$, je binárna logická spojka s nasledovným významom:

   $A \uparrow B$ je pravdivé vtt aspoň jedno z A alebo B je nepravdivé.

   Vybudujte teóriu výrokovej logiky používajúcej iba túto spojku, teda zadefinujte pojem: (i) formuly, (ii) vytvárajúcej postupnosti pre formulu, (iii) vytvárajúceho stromu pre formulu, (iv) splnenia formuly pri ohodnotení výrokových premenných.

b) Hovoríme, že binárna logická spojka α je definovateľná zo spojok β_1, β_2, …, ak existuje formula, obsahujúca iba spojky β_1, β_2, …, a výrokové premenné p a q, ekvivalentná s formulou $(p\,\alpha\,q)$.

   Hovoríme, že unárna logická spojka α je definovateľná zo spojok β_1, β_2, …, ak existuje formula, obsahujúca iba spojky β_1, β_2, …, a výrokovú premennú p, ekvivalentná s formulou $\alpha\,p$.

   Napríklad $\rightarrow$ je definovateľná z $\neg$ a $\vee$ pretože $(p \rightarrow q)$ je ekvivalentná s $(\neg p \vee q)$ (samozrejme ekvivalenciu tých dvoch formúl by bolo treba ešte dokázať).

   Dokážte, že:

   (i) $\uparrow$ je definovateľná zo spojok $\neg$, $\wedge$ a $\vee$;

   (ii) $\neg$, $\wedge$ a $\vee$ sú definovateľné z $\uparrow$.

Literatúra

[1] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles.* Prentice-Hall, 1978.