
Matematika 4 – Logika pre informatikov: Riešenie 1

Úloha 12. Dokážte alebo vyvráťte nasledovné tvrdenia:

4. počet výskytov pravých zátvoriek v A plus počet negácií v A je menší alebo rovný stupňu A ;

Dôkaz 12.4. Označme počet výskytov prvých zátvoriek v X ako $\text{rpcount}(X)$ a počet negácií v X ako $\text{ncount}(X)$. Pripomeňme si, že stupeň X označujeme $\text{deg}(X)$. Máme dokázať: $\text{rpcount}(A) + \text{ncount}(A) \leq \text{deg}(A)$. Tvrdenie dokážeme indukciou na stupeň formuly A :

Báza indukcie. Nech $\text{deg}(A) = 0$. Potom podľa vety o jednoznačnosti rozkladu a definície stupňa má A tvar výrokovej premennej $p \in \mathcal{V}$. V takom prípade $\text{rpcount}(A) = \text{ncount}(A) = \text{deg}(A) = 0$. Tvrdenie teda v tomto prípade platí, keďže $0 + 0 \leq 0$.

Indukčný krok. Máme formulu A , $\text{deg}(A) \geq 1$. Máme indukčný predpoklad (IP), že tvrdenie platí pre všetky formuly X také, že $\text{deg}(X) < \text{deg}(A)$. Musíme dokázať, že tvrdenie platí pre A . Podľa vety o jednoznačnosti rozkladu rozlíšime tri prípady:

- A má tvar výrokovej premennej $p \in \mathcal{V}$. Potom $\text{deg}(A) = 0$, čo je v spore z predpokladom indukčného kroku. Tento prípad teda nenastáva.
- A je v tvare $\neg B$. Pretože $\text{deg}(B) < \text{deg}(B) + 1 = \text{deg}(A)$, IP platí pre B . Postupujeme nasledovne:
 - a) $\text{rpcount}(B) + \text{ncount}(B) \leq \text{deg}(B)$ (IP)
 - b) $\text{rpcount}(B) + \text{ncount}(B) + 1 \leq \text{deg}(B) + 1$ (pripočítame 1)
 - c) $\text{rpcount}(A) + \text{ncount}(A) \leq \text{deg}(A)$ (keďže $\text{rpcount}(A) = \text{rpcount}(B)$, $\text{ncount}(A) = \text{ncount}(B) + 1$ a $\text{deg}(A) = \text{deg}(B) + 1$)
- A je v tvare $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$, alebo $(B \rightarrow C)$. Pretože $\text{deg}(B) < \text{deg}(B) + \text{deg}(C) + 1 = \text{deg}(A)$ a podobne $\text{deg}(C) < \text{deg}(A)$, IP platí pre B aj C . Postupujeme nasledovne:
 - a) $\text{rpcount}(B) + \text{ncount}(B) \leq \text{deg}(B)$ (IP)
 - b) $\text{rpcount}(C) + \text{ncount}(C) \leq \text{deg}(C)$ (IP)
 - c) $\text{rpcount}(B) + \text{rpcount}(C) + \text{ncount}(B) + \text{ncount}(C) \leq \text{deg}(B) + \text{deg}(C)$ (sčítame (1) a (2))
 - d) $\text{rpcount}(B) + \text{rpcount}(C) + 1 + \text{ncount}(B) + \text{ncount}(C) \leq \text{deg}(B) + \text{deg}(C) + 1$ (pripočítame 1)
 - e) $\text{rpcount}(A) + \text{ncount}(A) \leq \text{deg}(A)$ (keďže $\text{rpcount}(A) = \text{rpcount}(B) + \text{rpcount}(C) + 1$, $\text{ncount}(A) = \text{ncount}(B) + \text{ncount}(C)$ a $\text{deg}(A) = \text{deg}(B) + \text{deg}(C) + 1$)

Q.E.D.