
Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 4

Rozcvička. Je daná množina S výrokových formúl nad $\mathcal{V} = \{a, b, \dots, z\}^+$:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (p \wedge (q \vee r)) \\ (r \rightarrow q) \end{array} \right\}$$

Zistite, či z S vyplýva formula $(r \rightarrow (q \rightarrow p))$.

Úloha 1. Rozhodnite o nasledujúcich formulách, či sú literálmi, klauzulami, v disjunktívnom normálnom tvare, v konjunktívnom normálnom tvare. Pri formulách v konjunktívnom normálnom tvare určte, z koľkých klauzúl sa skladajú.

- | | |
|--|--|
| a) p | i) $((p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)) \wedge (\neg r \vee \neg p)$ |
| b) $\neg r$ | j) $((p \wedge q) \vee (q \vee \neg(r \wedge p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ |
| c) $\neg \neg q$ | k) $((p \wedge q) \vee (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ |
| d) $((p \vee q) \rightarrow r)$ | l) $((p \wedge q) \vee (q \vee (\neg r \wedge \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ |
| e) $((p \vee \neg q) \vee (q \vee \neg r))$ | m) $((p \wedge q) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ |
| f) $((p \wedge q) \wedge \neg(q \wedge \neg r))$ | n) $((p \vee q) \wedge (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \wedge (\neg r \vee \neg p)$ |
| g) $(p \wedge (q \wedge (\neg q \wedge \neg r)))$ | o) $((p \wedge q) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))) \vee \neg(r \wedge \neg p)$ |
| h) $((p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ | p) $((p \vee q) \vee (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \wedge (\neg r \wedge \neg p)$ |

Úloha 2. Pre každú formulu X z úlohy 1, ktorá je v disjunktívnom normálnom tvare, nájdite všetky ohodnotenia výrokových premenných vyskytujúcich sa v X , ktoré spĺňajú X .

Úloha 3. Pomocou algoritmu CNF_1 z prednášky nájdite k nasledujúcim formulám ekvivalentné formuly v CNF:

- a) $((p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r))$
b) $((r \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg p)) \rightarrow (\neg(q \wedge r) \wedge (p \vee s))$

Určte stupeň formuly vytvorenej algoritmom CNF_1 pre formulu z úlohy 1.1).

Úloha 4. Pomocou algoritmu CNF_2 z prednášky nájdite ekvivalentné formuly v CNF k formulám z úlohy 3.

Domáca úloha du02. V tejto verzii zadania sme oproti zadaniam rozdánym na cvičeniach:

- opravili formulu (1) v časti b),
- vyjasnili podúlohu (ii) v časti a),
- uviedli explicitne požiadavku na zdôvodnenie postupu,
- upresnili spôsob elektronického odovzdania,
- posunuli termín odovzdania z Veľkonočného pondelka na stredú.

Riešenie domácej úlohy odovzdajte najneskôr ~~v pondelok 28. marca 2016~~ v stredu **30. marca 2016** jedným z nasledujúcich spôsobov:

- v **čitateľnej** papierovej podobe na začiatku ~~prednášky o 11:30~~ cvičení **o 14:00** alebo **o 14:50**;
- elektronicky najneskôr **o 23:59:59** cez svoj repozitár na `github.com` ako pull-request do vetvy (base) `du02` repozitára (base fork) `FMFI-UK-1-AIN-412/váš-AIS-login`. Odovzdávaný dokument uložte do súboru v adresári `du02` vo vetve `du02`. Názov a formát súboru s dokumentom musia zodpovedať jednej z možností:

- du02.pdf – PDF z TeXu alebo textového procesora, **nie** obrázok rukou písaného textu,
- du02.txt – hladký text v kódovaní UTF-8, alebo
- du02.md – text vo formáte Markdown v kódovaní UTF-8.

Úloha má hodnotu **2 body** [po 1 bode za každú časť a), b)]. Plné hodnotenie môže získať iba riešenie so **zrozumiteľným a zdôvodneným postupom**.

- a) V prípade bankovej lúpeže inšpektor Nick Fishtrawn zaistil štyroch podozrivých W , X , Y , Z a zistil nasledujúce skutočnosti:
- (A_1) W a X sú súčasne vinní, iba ak je Y ich spolupáchatelom.
 - (A_2) Ak je W vinný, tak aspoň jeden z X , Y je jeho spolupáchatelom.
 - (A_3) Y nikdy nepracuje bez Z .
 - (A_4) Z je vinný, ak je W nevinný.

Vašou úlohou je:

- (i) Formalizovať uvedené skutočnosti ako množinu výrokových formúl. Vinu jednotlivých podozrivých formalizujte výrokovými premennými w , x , y , z .
 - (ii) Pojmami z výrokovej logiky (napr. tautológia, splnenie, splniteľnosť, vyplývanie, ...) vyjadriť nasledujúce 3 otázky:
 - (O_1) Kto z podozrivých je vinný?
 - (O_2) Kto z podozrivých je nevinný?
 - (O_3) Koho vinu ani nevinu nemožno určiť?
 - (iii) Zodpovedať otázky O_1 až O_3 a odpovede dokázať.
- b) Dokážte *nájdením postupnosti substitúcií* podľa pravidiel asociatívnosti, komutatívnosti, distributívnosti, de Morgana, dvojitej negácie, pravidiel idempotencie, identity, absorpcie a eliminácie implikácie, že formuly (1) a (2) nad $\mathcal{V} = \{p, q, r, s, t\}^+$ sú ekvivalentné:

$$\neg(((s \vee q) \wedge (p \vee q)) \vee t) \wedge (t \rightarrow (p \vee s)) \wedge (t \rightarrow (\neg s \rightarrow q)) \wedge (r \rightarrow s)) \quad (1)$$

$$(((s \vee q) \wedge (p \vee s)) \vee t) \wedge (t \rightarrow (p \vee s)) \wedge (t \rightarrow (\neg s \rightarrow q)) \wedge (r \rightarrow s)) \quad (1)$$

$$(((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow s) \quad (2)$$