Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 9

Rozcvička. Tablovým kalkulom s pravidlami pre rovnosť dokážte kvázitautológiu:

$$Q(b, a) \land x \doteq a \land f(y) \doteq c \land \neg Q(f(y), x) \to b \not\doteq c\,.$$

Úloha 1. Formalizujte v naznačenom jazyku logiky prvého rádu nasledujúce tvrdenia:

a) Bez práce nie sú koláče. (má(kto, $čo$), práca(x), koláč(x)).

b) Pomôž iným, pomôžeš aj sebe.

c) Kto druhému jamu kope, sám do nej spadne.

d) Aký otec, taký syn. (má_vlastnosť(kto, $vlastnosť$), je_syn(kto, $koho$)).

e) Nepriatelia mojich nepriateľov sú mojimi priateľmi. (priateľ(kto, $koho$))

Úloha 2. Nech symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ sú: symbol konštanty c, unárny funkčný symbol f, unárny predikátový symbol P a binárny predikátový symbol Q.
Pre každú z nasledujúcich formúl vždy doplňte štruktúru $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ tak, aby formula bola v $\mathcal{M}$ i) splnená, ii) nesplnená, alebo dokážte, že to nie je možné.

a) $\exists x\, P(x) \to \forall y\, P(y)$

b) $\forall x\, \exists y\, Q(x, f(y))$

c) $\forall x\, P(f(x)) \land \exists x\, \neg P(x)$

d) $\forall x\, \big(P(x) \land \exists y\, \big(P(f(y)) \to Q(x, y)\big)\big)$

e) $\forall x\, \exists y\, Q(x, y) \to \exists y\, \forall x\, Q(x, y)$

f) $\forall x\, \big(P(x) \to \exists y\, \big(P(f(y)) \land Q(x, y)\big)\big)$

$\mathcal{M} = (M, i)$, kde:

- $M = \{0, 1, 2\}$,
- $i(c) =$ __________,
- $i(f) = \{0 \mapsto 0,$ __________$\}$,
- $i(P) = \{$__________$\}$,
- $i(Q) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2),$ __________$\}$.

Úloha 3. Uvažujme nasledovné znalosti z oblasti univerzitného vzdelávania:

> Každý učiteľ učí aspoň, jeden predmet. Predmet je aktívny, ak sú naň zapísaní aspoň dvaja študenti, alebo ak je naň zapísaný hoc aj len jeden študent a je to dievča. Učiteľ, ktorý je profesor musí byť školiteľom aspoň jedného študenta. Každý študent má nejakého školiteľa. Janko a Ferko sú študenti. Ferkov školiteľ je prof. Krhlička, ktorý učí predmet Úvod do teórie ničoho.

a) Formalizujte tieto znalosti ako teóriu v logike prvého rádu.

b) Nájdite dve štruktúry, ktoré túto teóriu spĺňajú, a jednu, ktorá ju nespĺňa.

Úloha 4. Nájdite formulu vo vhodnom jazyku, ktorá je splnená iba v štruktúrach, ktorých domény majú

a) aspoň 2 prvky; b) aspoň 3 prvky; c) najviac 3 prvky.

Vo všetkých prípadoch nájdite najprv formulu s rovnosťou a potom formulu bez rovnosti.

Úloha 5. Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné:

a) $\neg\exists x\, P(x) \to \forall x\, \neg P(x)$

b) $\exists y(P(y) \to \forall x\, P(x))$

c) $\exists x\, \forall y\, Q(x,y) \to \forall y\, \exists x\, Q(x,y)$

d) $\neg\exists y\, P(y) \to \forall y(\exists x\, P(x) \to P(y))$

e) $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$

f) $\forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y)$

g) $\exists x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$

h) $\forall x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$

i) $\forall y(\forall x\, P(x) \to P(y))$

j) $\neg\forall x\, P(x) \to \exists x\, \neg P(x)$

k) $\forall x(P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$

l) $\exists x(P(x) \land Q(x)) \to \exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)$

m) $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$

n) $\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x) \to \forall x(P(x) \lor Q(x))$

o) $\neg\forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$

p) $\neg\exists x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$

q) $\exists x(P(x) \lor R(y)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \lor R(y)$

r) $\forall x(P(x) \lor R(y)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \lor R(y)$

s) $\forall x(P(x) \land R(y)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \land R(y)$

t) $\exists x(P(x) \land R(y)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \land R(y)$

u) $\exists x\, R(y) \leftrightarrow R(y)$

v) $\forall x\, R(y) \leftrightarrow R(y)$

w) $\exists x(P(x) \to R(y)) \leftrightarrow (\forall x\, P(x) \to R(y))$

x) $\forall x(P(x) \to R(y)) \leftrightarrow (\exists x\, P(x) \to R(y))$

y) $\forall x(R(y) \to P(x)) \leftrightarrow (R(y) \to \forall x\, P(x))$

z) $\exists x(R(y) \to P(x)) \leftrightarrow (R(y) \to \exists x\, P(x))$

Domáca úloha `du04`. Riešenie domácej úlohy odovzdajte najneskôr v pondelok **2. mája 2016** jedným z nasledujúcich spôsobov:

- v **čitateľnej** papierovej podobe na začiatku prednášky **o 11:30**;
- elektronicky najneskôr **o 23:59:59** cez svoj repozitár na `github.com` ako pull-request do vetvy (base) `du03` repozitára (base fork) `FMFI-UK-1-AIN-412/`*`váš-AIS-login`*.

  Odovzdávaný dokument uložte do súboru `du03.pdf` v adresári `du03` vo vetve `du03`. Dokument **musí byť vo formáte PDF**. Vytvorte ho podľa svojich preferencií (TEXom, textovým procesorom, tlačou do PDF z webového prehliadača, . . .), **nesmie** však obsahovať obrázky rukou písaného textu ani screeshoty.

Úloha má hodnotu **4 body** [po 1 bode za každú z častí a), b), c)]. Plné hodnotenie môže získať iba riešenie so **zrozumiteľným a zdôvodneným postupom**.

a) Formalizujte nasledovný dopravný predpis do teórie v jazyku logiky prvého rádu. Vhodne si zvoľte predikátové a funkčné symboly podľa potreby, tak aby celá formalizácia dávala zmysel:

   (i) Predchádza sa vľavo. Vpravo sa predchádza vozidlo, ktoré dáva znamenie o zmene smeru jazdy vľavo.

   (ii) Vozidlo, ktoré predchádza, je povinné dávať znamenie o zmene smeru jazdy, pričom nesmie ohroziť vozidlá jazdiace za ním.

   (iii) Predchádzané vozidlo nesmie zvyšovať rýchlosť jazdy.

   (iv) Vozidlo nesmie predchádzať,
   - ak nemá pred sebou dostatočný rozhľad,
   - ak sa nemôže bezpečne zaradiť pred vozidlo, ktoré predchádza,
   - ak pred ním idúce vozidlo dáva znamenie o zmene smeru jazdy vľavo a ak ho nemožno predísť v ďalšom voľnom jazdnom pruhu vyznačenom na vozovke v tom istom smere jazdy.

b) Pre každú z nasledujúcich troch formúl A_1, A_2, A_3 *doplňte* štruktúru $\mathcal{M}$ tak, aby formula bola v $\mathcal{M}$ i) splnená, ii) nesplnená, alebo dokážte, že to nie je možné.
   - $A_1 = \big(\exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x, f(c))\big) \to \exists x\big(P(x) \land Q(x, f(c))\big)$
   - $A_2 = \forall x\, P(x) \land \exists x\, \neg P(f(x))$
   - $A_3 = \big(\neg\exists x\, P(x) \land \forall x\, \exists y\, \neg Q(x, f(y))\big) \to \forall x\big(\neg P(x) \land \neg\forall y\, Q(f(x), y)\big)$

   $\mathcal{M} = (M, i)$, kde

- $M = \{1, 2, 3, 4\}$
- $i(c) =$ __________
- $i(f) = \{1 \mapsto 1,$ __________$\}$
- $i(P) = \{2,$ __________$\}$
- $i(Q) = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (2, 3),$ __________$\}$

c) Dokážte, že nasledujúce formuly sú platné:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \ \forall u \forall v \forall w \big(R(u, v) \land R(v, w) \to R(u, w)\big) \\
&\qquad \to \forall w \forall z \big(\exists x \big(R(w, x) \land \exists y (R(x, y) \land R(y, z))\big) \to R(w, z)\big)
\end{aligned}$$

$$\text{(ii)}\ \ \exists x \big(Q(x, y) \to \forall y\, Q(f(y), x) \land \forall y\, Q(x, f(y))\big)$$