Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 9

Úloha 1. Formalizujte v naznačenom jazyku logiky prvého rádu nasledujúce tvrdenia:

a) Bez práce nie sú koláče. (`má`(kto, $čo$), `práca`(x), `koláč`(x)).

b) Pomôž iným, pomôžeš aj sebe.

c) Kto druhému jamu kope, sám do nej spadne.

d) Aký otec, taký syn. (`má_vlastnosť`(kto, $vlastnosť$), `je_syn`(kto, $koho$)).

e) Nepriatelia mojich nepriateľov sú mojimi priateľmi. (`priateľ`(kto, $koho$))

Úloha 2. Nech symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ sú: symbol konštanty c, unárny funkčný symbol f, unárny predikátový symbol P a binárny predikátový symbol Q.
Pre každú z nasledujúcich formúl vždy doplňte štruktúru $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ tak, aby formula bola v $\mathcal{M}$ i) splnená, ii) nesplnená, alebo dokážte, že to nie je možné.

a) $\exists x\, P(x) \to \forall y\, P(y)$

b) $\forall x\, \exists y\, Q(x, f(y))$

c) $\forall x\, P(f(x)) \land \exists x\, \neg P(x)$

d) $\forall x\, \big(P(x) \land \exists y\, \big(P(f(y)) \to Q(x, y)\big)\big)$

e) $\forall x\, \exists y\, Q(x, y) \to \exists y\, \forall x\, Q(x, y)$

f) $\forall x\, \big(P(x) \to \exists y\, \big(P(f(y)) \land Q(x, y)\big)\big)$

$\mathcal{M} = (M, i)$, kde:

- $M = \{0, 1, 2\}$,
- $i(c) =$ __________,
- $i(f) = \{0 \mapsto 0,$ __________$\}$,
- $i(P) = \{$__________$\}$,
- $i(Q) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2),$ __________$\}$.

Úloha 3. Uvažujme nasledovné znalosti z oblasti univerzitného vzdelávania:

> Každý učiteľ učí aspoň, jeden predmet. Predmet je aktívny, ak sú naň zapísaní aspoň dvaja študenti, alebo ak je naň zapísaný hoc aj len jeden študent a je to dievča. Učiteľ, ktorý je profesor musí byť školiteľom aspoň jedného študenta. Každý študent má nejakého školiteľa. Janko a Ferko sú študenti. Ferkov školiteľ je prof. Krhlička, ktorý učí predmet Úvod do teórie ničoho.

a) Formalizujte tieto znalosti ako teóriu v logike prvého rádu.

b) Nájdite dve štruktúry, ktoré túto teóriu spĺňajú, a jednu, ktorá ju nespĺňa.

Úloha 4. Nájdite formulu vo vhodnom jazyku, ktorá je splnená iba v štruktúrach, ktorých domény majú

a) aspoň 2 prvky;

b) aspoň 3 prvky;

c) najviac 3 prvky.

Vo všetkých prípadoch nájdite najprv formulu s rovnosťou a potom formulu bez rovnosti.

Úloha 5. Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné:

a) $\neg\exists x\, P(x) \to \forall x\, \neg P(x)$

b) $\exists y (P(y) \to \forall x\, P(x))$

c) $\exists x\, \forall y\, Q(x, y) \to \forall y\, \exists x\, Q(x, y)$

d) $\neg\exists y\, P(y) \to \forall y (\exists x\, P(x) \to P(y))$

e) $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$

f) $\forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y)$

g) $\exists x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$

h) $\forall x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$

i) $\forall y(\forall x\, P(x) \to P(y))$

j) $\neg\forall x\, P(x) \to \exists x\, \neg P(x)$

k) $\forall x(P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$

l) $\exists x(P(x) \land Q(x)) \to \exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)$

m) $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$

n) $\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x) \to \forall x(P(x) \lor Q(x))$

o) $\neg\forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$

p) $\neg\exists x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$

q) $\exists x(P(x) \lor R(y)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \lor R(y)$

r) $\forall x(P(x) \lor R(y)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \lor R(y)$

s) $\forall x(P(x) \land R(y)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \land R(y)$

t) $\exists x(P(x) \land R(y)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \land R(y)$

u) $\exists x\, R(y) \leftrightarrow R(y)$

v) $\forall x\, R(y) \leftrightarrow R(y)$

w) $\exists x(P(x) \to R(y)) \leftrightarrow (\forall x\, P(x) \to R(y))$

x) $\forall x(P(x) \to R(y)) \leftrightarrow (\exists x\, P(x) \to R(y))$

y) $\forall x(R(y) \to P(x)) \leftrightarrow (R(y) \to \forall x\, P(x))$

z) $\exists x(R(y) \to P(x)) \leftrightarrow (R(y) \to \exists x\, P(x))$

Domáca úloha `du04`. Riešenie domácej úlohy odovzdajte najneskôr v pondelok **2. mája 2016** jedným z nasledujúcich spôsobov:

- v **čitateľnej** papierovej podobe na začiatku prednášky **o 11:30**;
- elektronicky najneskôr **o 23:59:59** cez svoj repozitár na `github.com` ako pull-request do vetvy (base) `du04` ~~`du03`~~ repozitára (base fork) `FMFI-UK-1-AIN-412/`*`váš-AIS-login`*.

  Odovzdávaný dokument uložte do súboru `du04.pdf` ~~`du03.pdf`~~ v adresári `du04` ~~`du03`~~ vo vetve `du04` ~~`du03`~~. Dokument **musí byť vo formáte PDF**. Vytvorte ho podľa svojich preferencií (TEXom, textovým procesorom, tlačou do PDF z webového prehliadača, ...), **nesmie** však obsahovať obrázky rukou písaného textu ani screeshoty.

Úloha má hodnotu **3 body** ~~4 body~~ [po 1 bode za každú z častí a), b), c)]. Plné hodnotenie môže získať iba riešenie so **zrozumiteľným a zdôvodneným postupom**.

a) Formalizujte nasledovný dopravný predpis do teórie v jazyku logiky prvého rádu. Vhodne si zvoľte predikátové a funkčné symboly podľa potreby, tak aby celá formalizácia dávala zmysel:

  (i) Predchádza sa vľavo. Vpravo sa predchádza vozidlo, ktoré dáva znamenie o zmene smeru jazdy vľavo.

  (ii) Vozidlo, ktoré predchádza, je povinné dávať znamenie o zmene smeru jazdy, pričom nesmie ohroziť vozidlá jazdiace za ním.

  (iii) Predchádzané vozidlo nesmie zvyšovať rýchlosť jazdy.

  (iv) Vozidlo nesmie predchádzať,
  - ak nemá pred sebou dostatočný rozhľad,
  - ak sa nemôže bezpečne zaradiť pred vozidlo, ktoré predchádza,
  - ak pred ním idúce vozidlo dáva znamenie o zmene smeru jazdy vľavo a ak ho nemožno predísť v ďalšom voľnom jazdnom pruhu vyznačenom na vozovke v tom istom smere jazdy.

b) Pre každú z nasledujúcich troch formúl A_1, A_2, A_3 *doplňte* štruktúru $\mathcal{M}$ tak, aby formula bola v $\mathcal{M}$ i) splnená, ii) nesplnená, alebo dokážte, že to nie je možné.
  - $A_1 = \big(\exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x, f(c))\big) \to \exists x\big(P(x) \land Q(x, f(c))\big)$
  - $A_2 = \forall x\, P(x) \land \exists x\, \neg P(f(x))$
  - $A_3 = \big(\neg\exists x\, P(x) \land \forall x\, \exists y\, \neg Q(x, f(y))\big) \to \forall x\big(\neg P(x) \land \neg\forall y\, Q(f(x), y)\big)$

  $\mathcal{M} = (M, i)$, kde
  - $M = \{1, 2, 3, 4\}$
  - $i(c) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$
  - $i(f) = \{1 \mapsto 1, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

- $i(P) = \{2, \underline{\hspace{2cm}}\}$
- $i(Q) = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (2,3), \underline{\hspace{2cm}}\}$

c) Dokážte, že nasledujúce formuly sú platné:

$$\text{(i)}\quad \forall u \forall v \forall w\big(R(u,v) \land R(v,w) \to R(u,w)\big) \\ \to \forall w \forall z\big(\exists x\big(R(w,x) \land \exists y(R(x,y) \land R(y,z))\big) \to R(w,z)\big)$$

$$\text{(ii)}\quad \exists x\big(Q(x,y) \to \forall y\, Q(f(y),x) \land \forall y\, Q(x, f(y))\big)$$