Prednášky z Matematiky (4) – Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2015/2016

8. prednáška

Logika prvého rádu

18. apríla 2016

Obsah 8. prednášky

Symboly jazyka logiky prvého rádu

Definícia

Symbolmi jazyka logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ sú:

- *symboly* (*indivíduových*) *premenných* z nejakej nekonečnej spočítateľnej množiny $\mathcal{V}$ (označujeme ich x, y, ...);
- *mimologické* symboly:
  - *symboly konštánt* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}$ (a, b, ...),
  - *funkčné symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{F}$ (f, g, ...),
  - *predikátové symboly* z nejakej spočít. množiny $\mathcal{P}$ (P, R, ...);
- *logické symboly*:
  - *logické spojky*: unárna $\neg$, binárne $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$,
  - *symbol rovnosti* $\doteq$,
  - *existenčný kvantifikátor* $\exists$ a *všeobecný kvantifikátor* $\forall$;
- *pomocné symboly* (,) a , (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ a $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \doteq, \exists, \forall, (,), ,\}$ sú vzáj. disjunktné.
Každému symbolu $S \in \mathcal{P} \cup \mathcal{F}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}(S) \in \mathbb{N}^+$.

Symboly jazyka logiky prvého rádu

Príklad

Záhada smrti tety Agáty z praktického cvičenia sa dá formalizovať v prvorádovom jazyku $\mathcal{L}_{\text{Agatha}}$ s mimologickými symbolmi:

- symbolmi konštánt Agatha, $\mathrm{Charles}$, Butler,
- žiadnymi funkčnými symbolmi,
- binárnymi predikátovými symbolmi $\mathrm{inDreadbury}$, killed, hates, richer.

Príklad

Jednoduchý opis planetárnych sústav sa dá vybudovať napríklad pomocou

- unárnych predikátových symbolov $\mathrm{Hviezda}$ a $\mathrm{Planéta}$,
- binárnych predikátových symbolov Obieha a $\mathrm{SvietiNa}$.

Symboly jazyka logiky prvého rádu

Predikátové symboly nahrádzajú (potenciálne nekonečne veľa) výrokových premenných.
Konkrétny prípad tvrdenia „Charles hates noone that Agatha hates.“ pre komorníka zapíšeme vo výrokovej logike

$$\mathrm{hates\_Agatha\_Butler} \rightarrow \neg \mathrm{hates\_Charles\_Butler}$$

a v jazyku logiky prvého rádu

$$\mathrm{hates}(\mathrm{Agatha}, \mathrm{Butler}) \rightarrow \neg \mathrm{hates}(\mathrm{Agatha}, \mathrm{Butler}).$$

Štruktúry

Definícia

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk logiky prvého rádu.
Štruktúrou pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (M, i)$, kde

- M je neprázdna množina, *doména* štruktúry $\mathcal{M}$;
- i je zobrazenie, *interpretačná funkcia* štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré
  - každému symbolu konštanty c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in M$;
  - každému funkčnému symbolu f jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje funkciu $i(f)\colon M^n \to M$;
  - každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq M^n$.

Dohoda

Štruktúry označujeme veľkými kaligrafickými písmenami $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, ...
Doménu označujeme rovnakým, ale tlačeným písmenom ako štruktúru.
Hodnotu $i(s)$ interpretačnej funkcie pre symbol s zapisujeme $s^{\mathcal{M}}$.

Štruktúry

Štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ je matematické vyjadrenie stavu sveta, o ktorom sa môžeme vyjadrovať v jazyku $\mathcal{L}$.
Je detailnejšia ako ohodnotenie výrokových premenných, ktoré opis sveta redukujú na pravdivosť a nepravdivosť výrokových premenných.

Príklad

Doménou M_1 štruktúry $\mathcal{M}_1 = (M_1, i_1)$ (jednej z mnohých) pre jazyk $\mathcal{L}_{\text{Agatha}}$ môže byť množina obyvateľov V. Británie v roku 1930, medzi nimi aj istí Agatha Gregsonová, Charles Wooster a James McIntire.
Interpretačná funkcia i_1 môže priraďovať významy takto:

$$i_1(\mathrm{Agatha}) = \text{Agatha Gregsonová} \quad i_1(\mathrm{Butler}) = \text{James McIntire}$$

$$i_1(\mathrm{Charles}) = \text{Charles Wooster}$$

$$i_1(\mathrm{inDreadbury}) = \{\text{Agatha Gregsonová}, \text{Charles Wooster}, \text{James McIntire}\}$$

$$i_1(\mathrm{hates}) = \left\{ \begin{array}{l} (\text{Agatha Gregsonová}, \text{Charles Wooster}), \\ (\text{James McIntire}, \text{Charles Wooster}), \\ (\text{Charles Wooster}, \text{Winston Churchil}) \end{array} \right\}$$

Štruktúry

Príklad

Iná štruktúra $\mathcal{M}_2 = (M_2, i_2)$ pre $\mathcal{L}_{\text{Agatha}}$ môže mať rovnakú doménu $M_2 = M_1$, ale intepretovať symboly takto:

$$\mathrm{Agatha}^{\mathcal{M}_2} = \text{Agatha Gregsonová}$$

$$\mathrm{Butler}^{\mathcal{M}_2} = \mathrm{Charles}^{\mathcal{M}_2} = \text{Charles Wooster}$$

$$\mathrm{inDreadbury}^{\mathcal{M}_2} = \{\text{Agatha Gregsonová}, \text{Charles Wooster}\}$$

$$\mathrm{hates}^{\mathcal{M}_2} = \{\, (\text{Agatha Gregsonová}, x) \mid x \in M_2 \,\}$$

Ďalšia štruktúra $\mathcal{M}_3 = (M_3, i_3)$ pre $\mathcal{L}_{\text{Agatha}}$ môže mať doménu $M_3 = \mathbb{N}$ a intepretovať:

$$\mathrm{Agatha}^{\mathcal{M}_3} = 0 \quad \mathrm{Butler}^{\mathcal{M}_3} = 1 \quad \mathrm{Charles}^{\mathcal{M}_3} = 2$$

$$\mathrm{inDreadbury}^{\mathcal{M}_3} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

$$\mathrm{hates}^{\mathcal{M}_3} = \{(0,0), (1,1), (2,2), \ldots\}$$

Vo všetkých prípadoch sme vynechali interpretácie symbolov richer a killed.

Použili sme dohodnutý zápis $s^{\mathcal{M}_2}$ namiesto $i_2(s)$.

Termy jazyka logiky prvého rádu

Definícia

Termy jazyka logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ sú postupnosti symbolov jazyka $\mathcal{L}$ definované rekurzívne nasledujúcimi pravidlami:

- Každý symbol premennej x je termom.
- Každý symbol konštanty c je termom.
- Ak f je funkčný symbol s aritou n a $t_1, \ldots, t_n$ sú termy, tak aj $f(t_1, \ldots, t_n)$ je termom.
- Nič iné nie je termom.

Príklad

Predstavme si jazyk na popis vzťahov rodičov, detí a ich hračiek, pričom každé dieťa má *práve jednu* mamu, *práve jedného* otca a každá hračka patrí *práve jednému* dieťaťu. Pre tieto vzťahy sú vhodné funkčné symboly mama^1, otec^1, $\mathrm{majiteľ}^1$. Termami môžu potom byť $\mathrm{mama}(x)$ alebo $\mathrm{otec}(\mathrm{otec}(\mathrm{majiteľ}(\text{žltá\_ponorka})))$, ale aj $\mathrm{majiteľ}(\mathrm{otec}(\mathrm{barbie}))$.

Ohodnotenie premenných, hodnota termov

Definícia

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.
Ohodnotenie (indivíduových) premenných je ľubovoľná funkcia $e\colon \mathcal{V} \to M$ (priraďuje premenným prvky domény).

Zápisom $e(x/v)$ označíme ohodnotenie indivíduových premenných, ktoré priraďuje premennej x hodnotu v z domény M a všetkým ostatným premenným rovnakú hodnotu ako e.

Definícia

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných.
Hodnotou termu t v štruktúre $\mathcal{M}$ pri ohodnotení premenných e je prvok $t^{\mathcal{M}}[e]$ z M určený nasledovne:

- $x^{\mathcal{M}}[e] = e(x)$, ak x je premenná,
- $a^{\mathcal{M}}[e] = i(a)$, ak a je konštanta,
- $\big(f(t_1, \dots, t_n)\big)^{\mathcal{M}}[e] = i(f)(t_1^{\mathcal{M}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[e])$, ak $t_1, \dots, t_n$ sú termy.

Formuly jazyka logiky prvého rádu

Definícia

Formuly jazyka logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ sú postupnosti symbolov jazyka $\mathcal{L}$ definované rekurzívne nasledujúcimi pravidlami:

- Ak t_1 a t_2 sú termy, tak $t_1 \doteq t_2$ je formula (*rovnostný atóm*).
- Ak P je predikátový symbol s aritou n a t_1, ..., t_n sú termy, tak $P(t_1, \dots, t_n)$ je formula (*predikátový atóm*).
- Ak A je formula, tak aj $\neg A$ je formula (*negácia* A).
- Ak A a B sú formuly, tak aj $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$ sú formuly (*konjunkcia*, *disjunkcia*, *implikácia* A a B).
- Ak x je indivíduová premenná a A je formula, tak aj $\exists x A$ a $\forall x A$ sú formuly (*existenčná* a *všeobecná kvantifikácia* formuly A vzhľadom na x).
- Nič iné nie je formula.

Formuly jazyka logiky prvého rádu

Príklad

Sformalizujme fakty o záhade smrti tety Agáty pomocou formúl jazyka logiky prvého rádu $\mathcal{L}$:

1. *Someone in Dreadsbury Mansion killed Aunt Agatha.*
2. *Agatha, the butler, and Charles live in Dreadsbury Mansion, and are the only ones to live there.*
3. *A killer always hates, and is no richer than his victim.*
4. *Charles hates noone that Agatha hates.*
5. *Agatha hates everybody except the butler.*
6. *The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha.*
7. *The butler hates everyone whom Agatha hates.*
8. *Noone hates everyone.*

Who killed Agatha?

Formuly jazyka logiky prvého rádu

Príklad

Sformalizujme fakty o záhade smrti tety Agáty pomocou formúl jazyka logiky prvého rádu $\mathcal{L}$:

1. $\exists k(\mathrm{inDreadbury}(x) \land \mathrm{killed}(x, \mathrm{Agatha}))$
2. $\forall x(\mathrm{inDreadbury}(x)$
   $\leftrightarrow x = \mathrm{Agatha} \lor x = \mathrm{Butler} \lor x = \mathrm{Charles})$
3. $\forall k \forall v(\mathrm{killed}(k, v) \to \mathrm{hates}(k, v) \land \neg\mathrm{richer}(k, v))$
4. $\forall x(\mathrm{hates}(\mathrm{Agatha}, x) \to \neg\mathrm{hates}(\mathrm{Charles}, x))$
5. $\forall x(\neg\, x = \mathrm{Butler} \to \mathrm{hates}(\mathrm{Agatha}, x))$
6. $\forall x(\neg\mathrm{richer}(x, \mathrm{Agatha}) \to \mathrm{hates}(\mathrm{Butler}, x))$
7. $\forall x(\mathrm{hates}(\mathrm{Agatha}, x) \to \mathrm{hates}(\mathrm{Butler}, x))$
8. $\neg\exists h(\ \mathrm{inDreadbury}(h)$
   $\land \forall x(\mathrm{inDreadbury}(h) \to \mathrm{hates}(h, x))\ )$

Who killed Agatha?

Splnenie formuly v štruktúre

Definícia

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných. Relácia *formula A je splnená v štruktúre $\mathcal{M}$ pri ohodnotení e* (skrátene $\mathcal{M} \models A[e]$) má nasledovnú rekurzívnu definíciu:

- $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[e]$ vtt $t_1^{\mathcal{M}}[e] = t_2^{\mathcal{M}}[e]$,
- $\mathcal{M} \models P(t_1, \ldots, t_n)[e]$ vtt $\left(t_1^{\mathcal{M}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[e]\right) \in P^{\mathcal{M}}$,
- $\mathcal{M} \models \neg A[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ a zároveň $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models \exists x A[e]$ vtt pre nejaký prvok $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,
- $\mathcal{M} \models \forall y A[e]$ vtt pre každý prvok $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,

pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n, všetky termy t_1, t_2, ..., t_n, a všetky formuly A, B.

Splnenie formuly v štruktúre

Príklad

Zistime, či je formula $\mathrm{hates}(x, y) \to \neg\mathrm{hates}(y, x)$ splnená v štruktúre $\mathcal{M}_4 = (M_4, i_4)$, kde $M_4 = M_1$ a

$$\mathrm{Agatha}^{\mathcal{M}_4} = \text{Agatha G.} \quad \mathrm{Butler}^{\mathcal{M}_4} = \text{James McI.} \quad \mathrm{Charles}^{\mathcal{M}_4} = \text{Charles W.}$$

$$\mathrm{hates}^{\mathcal{M}_4} = \begin{Bmatrix} (\text{Agatha G.}, \text{Charles W.}), & (\text{James McI.}, \text{Charles W.}), \\ (\text{James McI.}, \text{Agatha G.}), & (\text{Charles W.}, \text{James McI.}) \end{Bmatrix}$$

pri ohodnoteniach

$$e_1 = \{x \mapsto \text{James McI.}, y \mapsto \text{Agatha G.}\}$$
$$e_2 = \{x \mapsto \text{James McI.}, y \mapsto \text{Charles W.}\}$$

Ako je na tom formula $\exists y(\mathrm{hates}(x, y) \to \neg\mathrm{hates}(y, x))$?

Voľné a viazané premenné formuly

Definícia (Voľné a viazané výskyty premenných)

- Každý výskyt premennej x v atomickej formule je *voľný*.
- Každý voľný (viazaný) výskyt premennej x vo formulách A a B je zároveň voľným (viazaným) výskytom premennej x vo formulách $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \rightarrow B)$ a $\neg A$.
- Každý výskyt premennej x vo formulách $\forall x A$ a $\exists x A$ je *viazaný*.

  Každý voľný (viazaný) výskyt premennej y inej ako x vo formule A je zároveň voľným (viazaným) výskytom premennej y vo formulách $\forall x A$ a $\exists x A$.

Príklad

$$\mathrm{hates}(x, y) \qquad \neg\mathrm{richer}(x, y) \land \mathrm{hates}(x, y)$$

$$\exists \underline{y}\, \mathrm{hates}(x, \underline{y}) \qquad \neg\mathrm{richer}(x, y) \land \exists \underline{y}\, \mathrm{hates}(x, \underline{y})$$

$$\forall \underline{x} \exists \underline{y}\, \mathrm{hates}(\underline{x}, \underline{y}) \qquad \exists \underline{y} (\neg\mathrm{richer}(x, \underline{y}) \land \mathrm{hates}(x, \underline{y}))$$

Otvorené a uzavreté formuly

Definícia (Uzavretá, otvorená formula)

Nech A je formula jazyka $\mathcal{L}$.
Formula A je *uzavretá* vtt neobsahuje žiadne voľné výskyty premenných.
Formula A je *otvorená* vtt neobsahuje žiadne kvantifikátory.

- *Neplatí*, že formula je uzavretá vtt nie je otvorená.
- Uzavretosť a otvorenosť formúl *nesúvisí* s tablami.

Definícia (Splnenie v štruktúre)

Nech X je formula jazyka $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$.
Formula X je *splnená v štruktúre* $\mathcal{M}$ (skrátene $\mathcal{M} \models X$) vtt X je splnená v štruktúre $\mathcal{M}$ pri každom ohodnotení e.

Tvrdenie

*Nech X je uzavretá formula jazyka $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$.
Potom $\mathcal{M} \models X$ vtt $\mathcal{M} \models X[e]$ pre aspoň jednom ohodnotenie e.*

Splnenie množiny formúl, teórie

Definícia

Nech S je množina formúl jazyka $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech e je ohodnotenie výrokových premenných.

- Množina S je *splnená v štruktúre* $\mathcal{M}$ *pri ohodnotení* e (skrátene $\mathcal{M} \models S[e]$) vtt pre všetky formuly Y z S platí $\mathcal{M} \models Y[e]$.
- Množina S je *splnená v štruktúre* $\mathcal{M}$ (skrátene $\mathcal{M} \models S$) vtt pre všetky formuly Y z S platí $\mathcal{M} \models Y$.

Definícia (Teória)

Množinu formúl T jazyka $\mathcal{L}$ nazývame *teória v jazyku* $\mathcal{L}$ vtt je spočítateľná a každá jej formula je uzavretá.

Tvrdenie

Nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$. Potom $\mathcal{M} \models T$ vtt $\mathcal{M} \models T[e]$ pre aspoň jedno ohodnotenie e.

Platné formuly a prvorádové vyplývanie

Definícia

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$. Formula X je *platná* (skrátene $\models X$) vtt X je splnená v každej štruktúre $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$.

Platné formuly sú prvorádovou analógiou tautológií,
ale nie každá platná formula je tautológia.

Definícia

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$, nech T je množina formúl v jazyku $\mathcal{L}$. Formula X *(prvorádovo) vyplýva z T* (skrátene $T \models X$) vtt pre každú štruktúru $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ a každé ohodnotenie e platí, že ak je každá formula Y z T splnená v $\mathcal{M}$ pri e, tak aj X je splnená v $\mathcal{M}$ pri e.

Platné formuly a prvorádové vyplývanie

Tvrdenie

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$. Potom X je platná ($\models X$) vtt X prvorádovo vyplýva z prázdnej množiny formúl ($\{\} \models X$).

Tvrdenie

Nech X je uzavretá formula jazyka $\mathcal{L}$, nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$. Potom X prvorádovo vyplýva z T vtt v každej štruktúre $\mathcal{M}$, v ktorej sú splnené všetky formuly z T, je splnená aj X.

Substituovateľnosť a substitúcia

Definícia (Substitúcia do termu)

Nech t je term, nech $x_1, \dots, x_n$ sú premenné a $t_1, \dots, t_n$ sú termy. Potom $t_{x_1,\dots,x_n}(t_1, \dots, t_n)$ je term, ktorý vznikne súčasným dosadením t_i za každý výskyt premennej x_i v t.

Definícia (Substituovateľnosť a substitúcia do formuly)

Nech A formula, nech $x_1, \dots, x_n$ sú premenné a $t_1, \dots, t_n$ sú termy. Nech pre všetky i, $1 \leq i \leq n$ platí, že sa žiaden voľný výskyt premennej x_i nenachádza v takej podformule $\exists y B$ ani $\forall y B$ formuly A, kde y je premenná vyskytujúca sa v t_i.
Potom sú termy $t_1, \dots, t_n$ *substituovateľné* za $x_1, \dots, x_n$ v A a $A_{x_1,\dots,x_n}(t_1, \dots, t_n)$ je formula, ktorá vznikne súčasným dosadením t_i za každý *voľný* výskyt premennej x_i v A.

Substituovateľnosť a substitúcia

Príklad

Nech

$$A = \neg \mathrm{richer}(x, y) \land \exists \underline{y}\, \mathrm{hates}(x, \underline{y})$$

$$B = \exists \underline{y} (\neg \mathrm{richer}(x, \underline{y}) \land \mathrm{hates}(x, \underline{y}))$$

Nájdime

$$A_x(\mathrm{Agatha}) \quad A_{x,y}(\mathrm{Charles}, z) \quad A_x(y)$$

$$B_x(\mathrm{Agatha}) \quad B_y(\mathrm{Butler}) \quad B_x(y)$$

Tvrdenie

Nech t je term a A formula jazyka $\mathcal{L}$, nech x je premenná a s je term. Nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a e ohodnotenie indivíduových premenných. Potom $(t_x(s))^{\mathcal{M}}[e] = t^{\mathcal{M}}[e(x/s^{\mathcal{M}}[e])]$.
Ak je s substituovateľný za x v A,
tak $\mathcal{M} \models A_x(s)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A_x(s)[e(x/s^{\mathcal{M}}[e])]$.

Tablové pravidlá pre logiky prvého rádu

Definícia

Pravidlami tablového kalkulu pre logiku prvého rádu sú pravidlá typu α a β pre výrokovú logiku, pravidlá (Refl), (Sym), (Trans), (Fsub), (Psub) pre rovnosť a pravidlá:

$$\gamma \qquad \frac{\mathbf{T}\forall x A}{\mathbf{T}A_x(t)} \qquad \frac{\mathbf{F}\exists x A}{\mathbf{F}A_x(t)}$$

$$\delta \qquad \frac{\mathbf{F}\forall x A}{\mathbf{F}A_x(y)} \qquad \frac{\mathbf{T}\exists x A}{\mathbf{T}A_x(y)}$$

kde A je formula, x je premenná, t je term substituovateľný za x v A, a y je premenná substituovateľná za x v A.
Pri operácii rozšírenia vetvy tabla π o dôsledok niektorého z pravidiel typu δ navyše musí platiť, že **premenná y nemá voľný výskyt v žiadnej formule na vetve π**.

Tablový kalkul pre logiku prvého rádu

Princíp tablových dôkazov ostáva nezmenený:

- Ak chceme dokázať, že formula X je platná, hľadáme uzavreté tablo pre $\mathbf{F}X$. Predpokladáme teda, že v nejakej štruktúre a nejakom ohodnotení je X nesplnená a ukážeme spor.
- Podobne pre prvorádové vyplývanie $T \models X$ predpokladáme, že v nejakej štruktúre a nejakom ohodnotení sú splnené všetky formuly z T ($\mathbf{T}Y$ pre $Y \in T$), ale X je nesplnená ($\mathbf{F}X$) a ukážeme spor.

Príklad

Dokážme, že nasledujúce formuly v jazyku s unárnym predikátovým symbolom P sú platné:

$$\forall x P(x) \to \exists x P(x) \qquad \neg\exists x \neg P(x) \to \forall x P(x)$$

Literatúra

SMULLYAN, R. M. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

ŠVEJDAR, V. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na `http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf`.