Prednášky z Matematiky (4) – Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2015/2016

6. prednáška

Korektnosť a úplnosť tablového kalkulu

4. apríla 2016

Obsah 6. prednášky

Označené formuly

Definícia

Nech X je formula výrokovej logiky. Postupnosti symbolov $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}X$ nazývame *označenými formulami*.

Definícia

Nech v je ohodnotenie výrokových premenných a X je formula. Potom v spĺňa $\mathbf{T}X$ vtt v spĺňa X; v spĺňa $\mathbf{F}X$ vtt v nespĺňa X.

Dohoda

Pre označené formuly budeme používať veľké písmená zo začiatku a konca abecedy s horným indexom $+$ a prípadne s dolnými indexmi, napr. A^+, X_7^+.
Pre množiny označených formúl budeme používať písmená S, T s horným indexom $+$ a prípadne s dolnými indexmi, napr. S^+, T_3^+.

Jednotný zápis označených formúl — α

Definícia (Jednotný zápis označených formúl typu α)

Označená formula A^+ je typu α, ak má jeden z tvarov v ľavom stĺpci nasledujúcej tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly budeme označovať písmenom α;
α_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca a α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \wedge Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}Y$
$\mathbf{F}(X \vee Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{F}(X \rightarrow Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{T}\neg X$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}X$
$\mathbf{F}\neg X$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}X$

Jednotný zápis označených formúl — β

Definícia (Jednotný zápis označených formúl typu β)

Označená formula B^+ je typu β, ak má jeden z tvarov v ľavom stĺpci nasledujúcej tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly budeme označovať písmenom β;
β_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca a β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{T}Y$

Splĺňanie a priame podformuly — stručne

Pozorovanie (Zostručnené vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.

1. *Ak v splĺňa α, tak v splĺňa α_1 a v splĺňa α_2.*
2. *Ak v splĺňa β, tak v splĺňa β_1 alebo v splĺňa β_2.*

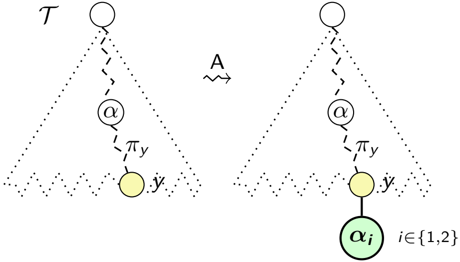
Tablo pre množinu označených formúl

Definícia

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre* S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných rekurzívnych pravidiel:

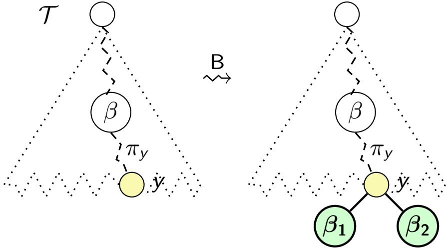
- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* $\mathcal{T}$ ktoroukoľvek z operácií:
  - A: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - B: Ak sa na vetve π_y vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme dva nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.
  - Ax: Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Tablá, tablové pravidlá, operácie rozšírenia



$$\begin{array}{c}\alpha\\ \hline \alpha_1\\ \alpha_2\end{array}$$

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{T}\neg X$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}X$
$\mathbf{F}\neg X$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}X$



$$\begin{array}{c|c}\multicolumn{2}{c}{\beta}\\ \hline \beta_1 & \beta_2\end{array}$$

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{T}Y$

y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia

Vetvou tabla $\mathcal{T}$ je každá cesta od koreňa $\mathcal{T}$ k niektorému listu $\mathcal{T}$.
Označená formula X^+ sa *vyskytuje na vetve* π v $\mathcal{T}$ vtt sa nachádza v niektorom vrchole na π.

Definícia

Vetva π tabla $\mathcal{T}$ je *uzavretá* vtt sa na nej vyskytujú označené formuly $\mathbf{F}X$ a $\mathbf{T}X$ pre nejakú formulu X. Inak je π *otvorená*.

Tablo $\mathcal{T}$ je *uzavreté* vtt každá jeho vetva je uzavretá.
Naopak, $\mathcal{T}$ je *otvorené* vtt aspoň jedna jeho vetva je otvorená.

Korektnosť

Korektnosť (angl. *soundness*) kalkulu neformálne znamená, že vždy, keď sa nám podarí v kalkule niečo dokázať, tak to aj skutočne platí.

Veta (Korektnosť tablového kalkulu)

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+. Potom je množina S^+ nesplniteľná.

Dôsledok

Nech S je množina formúl a X je formula.
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{T}A \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{F}X\}$ (skr. $S \vdash X$), tak X vyplýva z S ($S \vDash X$).

Dôsledok

Nech X je formula a existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{F}X\}$ (skr. $\vdash X$). Potom X je tautológia ($\vDash X$).

Korektnosť — dôkaz

Definícia

Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a v je ohodnotenie množiny výrokových premenných.
Hovoríme, že v *spĺňa vetvu* π v table $\mathcal{T}$ vtt v spĺňa všetky označené formuly obsiahnuté vo vrcholoch na vetve π.
Hovoríme, že v *spĺňa tablo* $\mathcal{T}$, ak spĺňa niektorú jeho vetvu.

Lema (K1)

*Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a v je ohodnotenie množiny výrokových premenných.
Ak v spĺňa S^+ a v spĺňa $\mathcal{T}$, tak v spĺňa aj každé priame rozšírenie $\mathcal{T}$.*

Dôkaz lemy K1.

Nech $v \models S^+$. Nech v spĺňa $\mathcal{T}$ a v ňom vetvu π. Nech $\mathcal{T}_1$ je rozšírenie $\mathcal{T}$. Nastáva jeden z prípadov:

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ operáciou A, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje α_1 alebo α_2 pre nejakú formulu α na vetve π_y. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π a teda je splnené.
  Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa aj α, pretože spĺňa π. Potom v musí spĺňať aj α_1 a α_2. Spĺňa teda vetvu π_z v table $\mathcal{T}_1$, ktorá rozširuje splnenú vetvu π o vrchol z obsahujúci splnenú ozn. formulu α_1 alebo α_2. Preto v spĺňa tablo $\mathcal{T}_1$.
- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ operáciou B, pridaním detí z_1 a z_2 nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z_1 obsahuje β_1 a z_2 obsahuje β_2 pre nejakú formulu β na vetve π_y. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π a teda je splnené.
  Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa aj β, pretože spĺňa π. Potom ale v musí spĺňať aj β_1 alebo β_2. Ak v spĺňa β_1, tak spĺňa aj vetvu π_{z_1} v table $\mathcal{T}_1$, a preto v spĺňa tablo $\mathcal{T}_1$. Ak v spĺňa β_2, spĺňa aj π_{z_2}, a teda aj $\mathcal{T}_1$.
- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ operáciou Ax, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje formulu $X^+ \in S^+$. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π a teda je splnené.
  Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa vetvu π_z v table $\mathcal{T}_1$, pretože je rozšírením splnenej vetvy π o vrchol z obsahujúci splnenú formulu X (pretože $v \models S^+$). Preto v spĺňa tablo $\mathcal{T}_1$.

$\square$

Lema (K2)

Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a v je ohodnotenie. Ak v splĺňa S^+, tak v splĺňa $\mathcal{T}$.

Dôkaz lemy K2.

Nech S^+ je množina označených formúl, nech v je ohodnotenie a nech $v \models S^+$.
Úplnou indukciou na počet vrcholov tabla $\mathcal{T}$ dokážeme, že v splĺňa $\mathcal{T}$.
Ak má $\mathcal{T}$ jediný vrchol, tento vrchol obsahuje formulu $X^+ \in S^+$, ktorá je splnená pri v. Preto je splnená jediná vetva v $\mathcal{T}$, teda aj $\mathcal{T}$.
Ak $\mathcal{T}$ má viac ako jeden vrchol, je priamym rozšírením nejakého tabla $\mathcal{T}_0$, ktoré má o 1 alebo o 2 vrcholy menej ako $\mathcal{T}$. Podľa indukčného predpokladu teda v splĺňa $\mathcal{T}_0$. Podľa predchádzajúcej lemy potom v splĺňa aj $\mathcal{T}$. □

Dôkaz vety o korektnosti.

Sporom: Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+. Nech v je ohodnotenie, ktoré splĺňa S^+. Potom podľa lemy K2 v splĺňa tablo $\mathcal{T}$, teda v splĺňa niektorú vetvu π v $\mathcal{T}$. Pretože $\mathcal{T}$ je uzavreté, aj vetva π je uzavretá, teda π obsahuje označené formuly $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}X$ pre nejakú formulu X. Ale $v \models \mathbf{T}X$ vtt $v \models X$ a $v \models \mathbf{F}X$ vtt $v \not\models X$, čo je spor. □

Otvorené tablo a splniteľnosť

Čo ak nevieme nájsť uzavreté tablo pre nejakú množinu ozn. formúl?

Definícia (Úplná vetva a úplné tablo)

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+.
Vetva π v table $\mathcal{T}$ je *úplná* vtt má všetky nasledujúce vlastnosti:

- pre každú ozn. formulu α, ktorá sa vyskytuje na π, sa aj obidve α_1 a α_2 vyskytujú na π,
- pre každú ozn. formulu β, ktorá sa vyskytuje na π, sa aspoň jedna z ozn. formúl β_1 alebo β_2 vyskytuje na π.
- každá $X^+ \in S^+$ sa vyskytuje na π.

Tablo $\mathcal{T}$ je *úplné* vtt každá vetva je buď úplná alebo uzavretá.

Príklad

Vybudujme úplné tablo pre $\mathbf{F}X$, kde
$X = (((p \lor q) \land (r \lor p)) \to (p \land (q \lor r)))$.

Lema (o existencii úplného tabla)

Nech S^+ je konečná množina označených formúl.
Potom existuje úplné tablo pre S^+.

Dôkaz.

Vybudujme tablo $\mathcal{T}_0$ pre S^+ tak, že do koreňa vložíme niektorú formulu z S^+ a opakovaním operácie Ax postupne doplníme ostatné.
Potom tablo postupne rozširujeme tak, že vyberieme ľubovoľný list y tabla $\mathcal{T}_i$, ktorého vetva π_y je otvorená a nie je úplná. Potom nastane aspoň jedna z možností:

- Na π_y sa nachádza nejaká formula α, ale nenachádza sa niektorá z formúl α_1 a α_2.
- Na π_y sa nachádza nejaká formula β, ale nenachádza sa ani jedna z formúl β_1 a β_2.

Ak platí prvá alebo obe možnosti, aplikujeme operáciu A. Ak platí druhá možnosť, aplikujeme operáciu B. Získame tablo $\mathcal{T}_{i+1}$, s ktorým proces opakujeme. Tento proces po konečnom počte krokov (prečo?) vytvorí nejaké tablo $\mathcal{T}_n$, v ktorom už neexistuje vetva, ktorá by bola otvorená a nebola úplná. Teda každá vetva v $\mathcal{T}_n$ je buď uzavretá alebo úplná, čiže $\mathcal{T}_n$ je úplné. □

Nadol nasýtené množiny a Hintikkova lemma

Definícia

Množina označených formúl S^+ sa nazýva *nadol nasýtená* vtt platí:

(H$_0$) v S^+ sa nevyskytujú naraz $\mathbf{T}p$ a $\mathbf{F}p$ pre žiadnu výrokovú premennú p;

(H$_1$) ak $\alpha \in S^+$, tak $\alpha_1 \in S^+$ a $\alpha_2 \in S^+$;

(H$_2$) ak $\beta \in S^+$, tak $\beta_1 \in S^+$ alebo $\beta_2 \in S^+$.

Pozorovanie

Nech π je úplná otvorená vetva nejakého tabla $\mathcal{T}$.
Potom množina všetkých formúl na π je nadol nasýtená.

Lema (Hintikkova)

Každá nadol nasýtená množina S^+ je splniteľná.

Dôkaz Hintikkovej lemy.

Chceme vytvoriť ohodnotenie v, ktoré splní všetky formuly z S^+.
Definujme v pre každú výrokovú premennú p takto:

- ak $\mathbf{T}p \in S^+$: $v(p) = t$,
- ak $\mathbf{F}p \in S^+$: $v(p) = f$,
- ak ani $\mathbf{T}p$ ani $\mathbf{F}p$ nie sú v S^+, tak $v(p) = t$.

v je korektne definované vďaka H_0.
Indukciou na stupeň formuly dokážeme, že v spĺňa všetky formuly z S^+:

- v očividne spĺňa všetky označené premenné z S^+.
- $X^+ \in S^+$ je buď α alebo β:
  - Ak X^+ je α, potom obidve α_1, $\alpha_2 \in S^+$ (H_1), sú nižšieho stupňa X^+, a teda podľa indukčného predpokladu sú splnené pri v, preto v spĺňa aj α.
  - Ak X^+ je β, potom aspoň jedna z β_1, β_2 je v S^+ (H_2). Nech je to ktorákoľvek, je nižšieho stupňa ako X^+, teda podľa IP ju v spĺňa, a preto v spĺňa β. $\square$

Úplnosť

Úplnosť kalkulu neformálne znamená, že je dostatočne silný, aby sa v ňom dali dokázať všetky platné formuly.

Veta (o úplnosti)

Nech S^+ je konečná nesplniteľná množina označených formúl. Potom existuje uzavreté tablo pre S^+.

Dôsledok

Nech S je konečná množina formúl a X je formula. Ak $S \models X$, tak $S \vdash X$.

Dôsledok

Nech X je formula. Ak $\models X$, tak $\vdash X$.

Úplnosť platí aj pre nekonečné množiny, ale dôkaz je ťažší.

Dôkaz vety o úplnosti.

Podľa lemy o existencii úplného tabla vieme pre S^+ nájsť úplné tablo $\mathcal{T}$, teda také, že každá vetva je buď uzavretá alebo úplná.
Ak by niektorá vetva bola otvorená, potom musí byť úplná, a teda nadol uzavretá. Podľa Hintikkovej lemy by bola splniteľná. Pretože obsahuje všetky formuly z S^+, bola by aj S^+splniteľná, čo je spor s nesplniteľnosťou S^+.
Preto musia byť všetky vetvy tabla $\mathcal{T}$ uzavreté. $\square$

Literatúra

SMULLYAN, R. M. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

ŠVEJDAR, V. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na `http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf`.