
Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 8

Úloha 1. Formalizujte vo výrokovej logiky s rovnostou nasledujúce tvrdenia. Pre každé tvrdenie zvolte vhodný jazyk:

- a) Ak Danko a Janka sú dvojčičky, tak sú aj súrodenci.
- b) Ak Danko a Janka sú dvojčičky, a obe sú ženy, potom je jedna sestra tej druhej a naopak.
- c) Peter ľúbi Luciu, ale Lucia Petra nie.
- d) Elenin otec je dieťaťom Jurajovej matky.
- e) Ak je x dieťaťom y , tak je y otcom x alebo matkou x .
- f) Ak sú Danko a Ľuboš súrodenci, Dankina teta je aj Ľubošovou tetou.

Dohoda. Nech t_1 a t_2 sú termy. Formulu $\neg(t_1 \doteq t_2)$ budeme skráteno zapisovať $t_1 \neq t_2$.

Úloha 2. Nájdite dve štruktúry spĺňajúce nasledovnú množinu formúl *pre všetky ohodnotenia*.

$$\{ \quad S(x) \neq x, \quad S(x) \doteq S(y) \rightarrow x \doteq y \quad \}$$

Úloha 3. Nájdite množinu axióm rovnosti, z ktorej výrovkovologicky vyplýva kvázitautológia:

- a) $z \doteq y \wedge y \doteq x \rightarrow f(x) \doteq f(z);$
- b) $x \doteq y \rightarrow (P(f(x)) \rightarrow P(f(y))).$

Úloha 4. Tablovým kalkuľom s pravidlami pre rovnosť dokážte kvázitautológie:

- a) $x \doteq y \wedge g(y, v) \neq g(x, w) \rightarrow w \neq v;$
- b) $f(x) \doteq y \wedge x \doteq z \wedge f(z) \doteq v \rightarrow v \doteq y;$
- c) $f(f(f(x))) = x \wedge f(f(x)) = x \rightarrow f(x) = x;$
- d) $\neg(P(f(y)) \rightarrow P(x)) \rightarrow x \neq f(y);$
- e) $x \doteq y \wedge R(w, x) \wedge \neg R(v, y) \rightarrow v \neq w;$
- f) $f(f(f(f(f(x)))))) \doteq x \wedge f(f(x)) \doteq x \rightarrow f(x) \doteq x;$
- g) $f(f(f(f(f(x)))))) \doteq x \wedge f(f(f(x))) \doteq x \rightarrow f(x) \doteq x.$

Úloha 5. Ukážte, že nasledujúce formuly nie sú kvázitautológiami:

- a) $x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$
- b) $(x \doteq 0 \rightarrow +(x, y) \doteq y) \wedge v \doteq 0 \rightarrow +(v, y) \doteq y$
- c) $(P(x) \leftrightarrow P(y)) \rightarrow x \doteq y$

Tablové pravidlá pre rovnosť sú:

$$\begin{array}{c} \frac{}{\mathbf{T}t_1 \doteq t_1} \quad (\text{Refl}) \qquad \frac{\mathbf{T}t_1 \doteq t_2}{\mathbf{T}t_2 \doteq t_1} \quad (\text{Sym}) \qquad \frac{\mathbf{T}t_1 \doteq t_2 \quad \mathbf{T}t_2 \doteq t_3}{\mathbf{T}t_1 \doteq t_3} \quad (\text{Trans}) \\[10pt] \frac{\mathbf{T}t_1 \doteq s_1 \quad \dots \quad \mathbf{T}t_n \doteq s_n}{\mathbf{T}f(t_1, \dots, t_n) \doteq f(s_1, \dots, s_n)} \quad (\text{Fsub}) \qquad \frac{\mathbf{T}t_1 \doteq s_1 \quad \dots \quad \mathbf{T}t_n \doteq s_n \quad \mathbf{TP}(t_1, \dots, t_n)}{\mathbf{TP}(s_1, \dots, s_n)} \quad (\text{Psub}) \end{array}$$

Pravidlo možno použiť v liste tabla y , iba ak sa *všetky* premisy nachádzajú na vetve π_y .