
Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 3

Úloha 1. Je daná množina S výrokových formúl nad $\mathcal{V} = \{a, b, \dots, z\}^+$:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (p \rightarrow (q \wedge r)) \\ (\neg u \wedge (v \vee w)) \\ ((v \rightarrow p) \wedge (w \rightarrow q)) \end{array} \right\}$$

Zistite, či z S vyplývajú nasledovné formuly:

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) p | e) $((u \wedge w) \rightarrow r)$ |
| b) q | f) $((u \vee w) \rightarrow r)$ |
| c) r | g) $(\neg w \rightarrow r)$ |
| d) $((u \wedge v) \rightarrow q)$ | |

Úloha 2. Pripomeňme si slovnú úlohu z minulého cvičenia:

V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých A , B , C . Počas vyšetrovania sa zistilo:

- a) Ak je A vinný a B nevinný, je vinný C .
- b) C nikdy nepracuje sám.
- c) A nikdy nepracuje s C .
- d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem A , B , C a aspoň jeden z nich je vinný.

Rozhodnite, koho vina a nevina vyplýva z vami formalizovanej množiny formúl S a koho vina a nevina je od množiny S nezávislá.

Úloha 3. Dokážte:

- a) Formuly X a Y sú ekvivalentné vtt $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.
- b) Formula $(X \rightarrow Y)$ je nespĺniteľná vtt X je tautológia a Y je nespĺniteľná.
- c) $\{\} \models X$ vtt X je tautológia.
- d) Formula je nezávislá od $\{\}$ vtt je splniteľná, ale nie je tautológia.
- e) Ak formula X logicky nevyplýva z S a ani nie je nezávislá od S , tak S je splniteľná a vyplýva z nej negácia X .
- f) $S \models (A \rightarrow B)$ vtt $S \cup \{A\} \models B$.

Tvrdenie 1. Nech A a B sú ľubovoľné formuly, T je tautológia a F je nespĺniteľná formula. Nasledujúce dvojice formúl sú ekvivalentné:

$(A \vee A) \quad a \quad A$	pravidlá idempotencie	$(A \vee F) \quad a \quad A$	pravidlá identity
$(A \wedge A) \quad a \quad A$		$(A \wedge T) \quad a \quad A$	
$(A \vee \neg A) \quad a \quad T$	pravidlá inverzie	$(A \vee (A \wedge B)) \quad a \quad A$	pravidlá absorpcie
$(A \wedge \neg A) \quad a \quad F$		$(A \wedge (A \vee B)) \quad a \quad A$	
$(A \rightarrow B) \quad a \quad (\neg A \vee B) \quad \text{eliminácia implikácie}$			

Úloha 4. Dokážte nájdením postupnosti substitúcií podľa pravidiel asociatívnosti, komutatívnosti, distributívnosti, de Morgana, dvojitej negácie, pravidiel idempotencie, identity, absorpcie a eliminácie implikácie, že nasledujúce dvojice formúl sú ekvivalentné:

- a) $((p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q))$ a p
b) $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee q$ a $(p \vee q)$
c) $((p \rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q)))$ a $\neg(q \vee p)$
d) $((p \vee (q \vee r)) \wedge (p \vee (t \vee \neg q))) \wedge (p \vee (\neg t \vee r))$ a $(p \vee (r \wedge (t \vee \neg q)))$

Úloha 5. Rozhodnite o nasledujúcich formulách, či sú literálmi, klauzulami, v disjunktívnom normálnom tvare, v konjunktívnom normálnom tvare:

- | | |
|--|--|
| a) p | i) $((p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)) \wedge (\neg r \vee \neg p)$ |
| b) $\neg r$ | j) $((p \wedge q) \vee (q \vee \neg(r \wedge p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ |
| c) $\neg\neg q$ | k) $((p \wedge q) \vee (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ |
| d) $((p \vee q) \rightarrow r)$ | l) $((p \wedge q) \vee (q \vee (\neg r \wedge \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ |
| e) $((p \vee \neg q) \vee (q \vee \neg r))$ | m) $((p \wedge q) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ |
| f) $((p \wedge q) \wedge \neg(q \wedge \neg r))$ | n) $((p \vee q) \wedge (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \wedge (\neg r \vee \neg p)$ |
| g) $(p \wedge (q \wedge (\neg q \wedge \neg r)))$ | o) $((p \wedge q) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))) \vee \neg(r \wedge \neg p)$ |
| h) $((p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ | p) $((p \vee q) \vee (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \wedge (\neg r \wedge \neg p)$ |

Pri formulách v konjunktívnom normálnom tvare určte, z koľkých klauzúl sa skladajú.

Úloha 6. Pre každú formulu X z úlohy 5, ktorá je v disjunktívnom normálnom tvare, nájdite všetky ohodnotenia výrokových premenných vyskytujúcich sa v X , ktoré spĺňajú X .