

# Tarea 11: Física Atómica y Materia Condensada

Tomás Ricardo Basile Álvarez  
316617194

June 5, 2022

## Problema 1

El antimoniuro de indio ( $InSb$ ) tiene una brecha  $E_g = 0.23eV$ , una constante dieléctrica de  $\varepsilon = 18$  y una masa electrónica efectiva  $m = 0.015m_0$ . Calcular a) La energía de ionización de donores; b) el radio de la órbita en el estado base. c) ¿A qué concentración mínima de donores se tendrá un traslape apreciable entre las órbitas de impurezas contiguas?

En clase vimos que el electrón de una impureza en un semiconductor se comporta como si se encontrara en un átomo de hidrógeno, pero hay que cambiar la masa por la masa efectiva (que en este caso es  $m = 0.015m_e$ ) y usar la constante dieléctrica  $\varepsilon = 18\varepsilon_0$ . Según la ecuación 2.63 de las notas, la energía del átomo de hidrógeno es:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2}$$

Si cambiamos la masa  $m_e$  por la masa reducida  $0.015m_e$  y la constante dieléctrica  $\varepsilon_0$  por  $18\varepsilon_0$  entonces nos queda:

$$E_n = -\frac{(0.015m_e)e^4}{32\hbar^2\pi^2(18\varepsilon_0)^2} \frac{1}{n^2}$$

Ésta es la energía del electrón de la impureza. Entonces, la energía de del primer estado es:

$$E_1 = -\frac{0.015m_e e^4}{10368\hbar^2\pi^2\epsilon_0^2}$$

Para ionizar estos átomos, hay que darles esta cantidad de energía. Calculamos esta energía reemplazando las constantes (con unidades SI) en Mathematica como se ve en la siguiente imagen:

```
In[94]:= hbar = 1.054571817 * 10^(-34);  
me = 9.1093837015 * 10^(-31);  
c = 2.998 * 10^8;  
e = 1.60217663 * 10^(-19);  
eps0 = 8.8541878176 * 10^(-12);  
  
-0.015 * me * e^4 / (10368 * hbar^2 * Pi^2 * eps0^2)  
  
Out[99]= -1.0092 * 10^-22
```

Entonces nos queda que la energía de ionización es  $1.0092 \times 10^{-22}J$ . Si convertimos a eV multiplicando por  $6.242 \times 10^{18}eV/J$ , nos queda que la energía de ionización es:

$$0.0006299eV \simeq \boxed{0.63meV}$$

---

### b) El radio de la órbita en el estado base

Nuevamente, el electrón de la impureza se comporta como el de un átomo de hidrógeno pero con masa  $m = 0.015m_e$  en vez de la masa del electrón y constante dieléctrica  $\epsilon = 18\epsilon_0$ . Según la ecuación 2.62 de las notas, el radio de órbita en el estado base es:

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$$

Por lo tanto, el radio de órbita en la impureza es:

$$R = \frac{4\pi(18\epsilon_0)\hbar^2}{0.015m_e e^2}$$

Sustituimos las constantes en Mathematica como se ve en la siguiente imagen y nos queda:

```
In[106]:= hbar = 1.054571817 * 10^(-34);  
me = 9.1093837015 * 10^(-31);  
e = 1.60217663 * 10^(-19);  
eps0 = 8.8541878176 * 10^(-12);  
  
4 * Pi * 18 * eps0 * hbar^2 / (0.015 me * e^2)  
Out[110]= 6.35013 * 10^-8
```

Por lo tanto, nos queda que el radio de la primera órbita es:

$$R = 6.35013 \times 10^{-8} m$$

### c) ¿A qué concentración mínima de donores se tendrá un traslape apreciable entre las órbitas de impurezas contiguas?

Los donores van a tener un traslape apreciable si el radio atómico de uno se superpone con el de otro. Como vimos en el inciso anterior, el radio atómico es  $R = 6.35 \times 10^{-8} m$ , por lo que la distancia mínima entre los donores es de  $2R = 12.7 \times 10^{-8} m$ .

Por lo tanto, en un volumen de  $(2R)^3 = (12.7 \times 10^{-8} m)^3 = 2.048 \times 10^{-21} m^3$  debe de haber a lo mucho un donador. Por lo tanto, la concentración de donores es de  $\frac{1}{2.048 \times 10^{-21} m^3} = \boxed{4.8819 \times 10^{20}}$  donores por  $m^3$ .

## Problema 2

El comportamiento de la brecha de la aleación semiconductor  $Al_xGa_{1-x}As$  se puede aproximar bastante bien por

$$E_g(x) = 1.42 + 1.087x + 0.438x^2$$

La brecha es directa para  $x \leq 0.43$ . Calcular a) la aleación para obtener un semiconductor que emita a  $780nm$  y b) el intervalo de longitudes de onda que pueden ser cubiertas de manera eficiente (brecha directa) por esta familia de aleaciones semiconductoras.

Primero obtenemos la energía que tiene un fotón de  $780nm$ . La energía en función de la longitud de onda es  $E = \frac{hc}{\lambda}$ , que sustituyendo los valores nos da lugar a  $E = \frac{(6.62607015 \times 10^{-34} Js)(2.997925 \times 10^8 m/s)}{780 \times 10^{-9} m} = 2.5467 \times 10^{-19} J = 1.58954 eV$ .

Para que se produzca luz con esta energía, es necesario que el salto en la brecha tenga esta energía, para que así los electrones que hacen este salto emitan luz con dicha energía. Entonces, necesitamos crear una aleación con  $E_g = 1.58954 eV$ , para lo cual hay que buscar el valor de  $x$  tal que  $E_g(x) = 1.58954 eV$ :

$$\begin{aligned} E_g(x) &= 1.58954 eV \\ \Rightarrow 1.42 + 1.087x + 0.438x^2 &= 1.58954 \\ \Rightarrow 0.438x^2 + 1.087x - 0.16954 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos resolver para  $x$  usando la fórmula cuadrática y queda:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1.087 \pm \sqrt{1.087^2 - 4(0.438)(-0.16954)}}{2(0.438)} \\ &= -2.62897, 0.147235 \end{aligned}$$

Tomamos la solución positiva, que es la que tiene sentido físico, por lo que se tiene que  $x = 0.147235$ . Entonces la aleación es 14.72% aluminio y 85.28% Galio.

### b) El intervalo de longitudes de onda que pueden ser cubiertas de manera eficiente.

Para ello hay que ver el intervalo de energías de brecha que son accesibles por la aleación para distintos valores de  $x$ . Por el enunciado, sabemos que los valores de  $x$  para una brecha directa se encuentran desde  $x = 0$  hasta  $x = 0.43$ , por lo que hay que encontrar el rango de energías  $E_g$  para este rango de valores de  $x$ .

Para  $x$  en el rango  $[0, 0.43]$ , la función  $E_g(x) = 1.42 + 1.087x + 0.438x^2$  es monótona (ya que el mínimo de  $E_g(x)$  se encuentra cuando la derivada es 0, que es  $E'_g(x_{min}) = 1.087 + (2)(0.438)x_{min} = 0 \Rightarrow x_{min} = -1.24$ , y como la función  $E_g$  es una parábola, es monótona en intervalos que no incluyan este valor). Entonces, el mínimo y máximo de  $E_g$  dentro del rango  $[0, 0.43]$  se encuentran justo cuando  $x = 0$  y cuando  $x = 0.43$  y son:

$$\begin{aligned} E_g(x = 0) &= 1.42 + 1.087(0) + 0.438(0)^2 = 1.42 eV \\ E_g(x = 0.43) &= 1.42 + 1.087(0.43) + 0.438(0.43)^2 = 1.9684 eV \end{aligned}$$

Por lo tanto, el rango de energías de brecha  $E_g$  que podemos conseguir va desde  $1.42 eV$  hasta  $1.9684 eV$ . Para convertirlo en un intervalo de longitudes de onda, hay que convertir estas energías en longitudes de onda usando que  $E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{1.42 eV} &= \frac{hc}{1.42 eV} = \frac{(4.135667696 \times 10^{-15})(2.998 \times 10^8 m/s)}{1.42 eV} = 873.15 \times 10^{-9} m = 873.15 nm \\ \lambda_{1.9684 eV} &= \frac{hc}{1.9684 eV} = \frac{(4.135667696 \times 10^{-15})(2.998 \times 10^8 m/s)}{1.9684 eV} = 629.889 \times 10^{-9} m = 629.889 nm \end{aligned}$$

Por lo tanto, el rango de longitudes de onda va desde  $629.889 nm$  hasta  $873.15 nm$ .

### Problema 3

La relación de dispersión para ondas de una cadena lineal de dos átomos que obtuvimos en clase es:

$$\omega^2 = \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4 \sin^2(ka/2)}{Mm} \right]^{1/2}$$

- a) Demostrar que en el límite de longitud de onda grande los dos valores de  $\omega$  pueden ser aproximados por:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 2\kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \\ \omega^2 &= \frac{\kappa}{2(M+m)} (ka)^2 \end{aligned}$$

En el límite de longitud de onda grande, el número de onda  $k$  es pequeño (porque es inversamente proporcional a la longitud de onda) y por lo tanto  $ka/2$  es una cantidad pequeña y para su seno se puede usar la aproximación  $\sin(ka/2) \simeq ka/2$ . Entonces, la expresión de  $\omega^2$  queda como:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4(ka/2)^2}{Mm} \right]^{1/2} \\ &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{k^2 a^2}{Mm} \right]^{1/2} \\ &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 \left( 1 - \frac{k^2 a^2}{Mm \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2} \right) \right]^{1/2} \\ &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \left( 1 - \frac{k^2 a^2}{Mm \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Como  $k \simeq 0$ , entonces el término  $\frac{k^2 a^2}{Mm \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2}$  en la raíz cuadrada es pequeño. Por lo tanto, se puede usar la aproximación  $\sqrt{1-\epsilon} \simeq 1 - \frac{1}{2}\epsilon$  y nos queda:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \left( 1 - \frac{k^2 a^2}{2Mm \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2} \right) \\ &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \frac{k^2 a^2}{2Mm \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)} \right] \end{aligned}$$

Tomamos ahora las dos soluciones, empezando por la de signo +:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) + \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \frac{k^2 a^2}{2Mm \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)} \right] \\ &= 2\kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \kappa \frac{k^2 a^2}{2Mm \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)} \end{aligned}$$

Pero como  $k \simeq 0$ , entonces el segundo término es mucho menor que el primero y nos queda entonces:

$$\omega^2 = 2\kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)$$

Por otro lado, si tomamos la solución con signo  $-$ , nos queda:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \frac{k^2 a^2}{2Mm \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)} \right] \\
&= \kappa \frac{k^2 a^2}{2Mm \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)} \\
&= \kappa \frac{k^2 a^2}{2Mm \frac{M+m}{Mm}} \\
&= \kappa \frac{k^2 a^2}{2(M+m)}
\end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos las soluciones que se nos pedían.

b) **Demostrar que para  $k = \pi/a$  los dos valores de  $\omega$  son:**

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \frac{2\kappa}{M} \\
\omega^2 &= \frac{2\kappa}{m}
\end{aligned}$$

Partimos nuevamente de la relación de dispersión:

$$\omega^2 = \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4 \sin^2(ka/2)}{Mm} \right]^{1/2}$$

y ponemos  $k = \pi/a$ , con lo cual  $\sin^2(ka/2) = \sin^2((\pi/a)a/2) = \sin^2(\pi/2) = 1$ . Entonces nos queda:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4}{Mm} \right]^{1/2} \\
&= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left[ \frac{1}{M^2} + \frac{2}{Mm} + \frac{1}{m^2} - \frac{4}{Mm} \right]^{1/2} \\
&= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left[ \frac{1}{M^2} - \frac{2}{Mm} + \frac{1}{m^2} \right]^{1/2} \\
&= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{m} \right)^2 \right]^{1/2} \\
&= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{m} \right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si tomamos el signo  $+$ , el resultado es:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) + \kappa \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{m} \right) \\
&= \frac{2\kappa}{M}
\end{aligned}$$

y si tomamos el signo  $-$ , el resultado es:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \kappa \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{m} \right) \\
&= \frac{2\kappa}{m}
\end{aligned}$$

c) ¿Cómo son las amplitudes de oscilación relativas de los átomos en los casos a) y b)?

En clase vimos que la relación entre las amplitudes de oscilación de los átomos (que llamamos  $\alpha$ ) se calcula como (ecuación 14.24):

$$\alpha = \frac{2\kappa \cos(ka/2)}{2\kappa - m\omega^2}$$

Para el **caso a)**, obtuvimos que los valores de  $\omega$  son  $\omega^2 = 2\kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)$  y  $\omega^2 = \frac{\kappa}{2(M+m)}(ka)^2$ , por lo que nos queda que los valores de  $\alpha$  correspondientes son:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\kappa \cos(ka/2)}{2\kappa - m\omega^2} \\ &= \frac{2\kappa \cos(ka/2)}{2\kappa - m2\kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)} = \frac{2\kappa \cos(ka/2)}{2\kappa - \frac{2\kappa m}{M} - 2\kappa} \\ &= \frac{2\kappa \cos(ka/2)}{-\frac{2\kappa m}{M}} = -\frac{M}{m} \cos(ka/2) \end{aligned}$$

Como la longitud de onda es grande en el inciso a), tenemos que  $k$  es pequeña y entonces  $\cos(ka/2) \simeq 1$

$$= \boxed{-\frac{M}{m}}$$

El segundo valor de  $\alpha$  correspondiente a cuando tomamos  $\omega^2 = \frac{\kappa}{2(M+m)}(ka)^2$  es de:

$$\alpha = \frac{2\kappa \cos(ka/2)}{2\kappa - m\omega^2} = \frac{2\kappa \cos(ka/2)}{2\kappa - m \frac{\kappa}{2(M+m)}(ka)^2}$$

Nuevamente, como  $k$  es chiquito según las condiciones del inciso a),

el coseno es aproximadamente 1 y el segundo término del denominador es  $\simeq 0$

$$= \frac{2\kappa(1)}{2\kappa - 0} = \boxed{1}$$

Para el **caso b)**, se asume que  $k = \pi/a$ , por lo que en la expresión de  $\alpha = \frac{2\kappa \cos(ka/2)}{2\kappa - m\omega^2}$  el coseno queda como  $\cos(\pi/2)$ , que es igual a 0. Por lo tanto, para ambos valores de  $\omega^2$  en este caso, se tiene que  $\boxed{\alpha = 0}$ .

## Problema 4

**La frecuencia de máxima absorción en el infrarrojo para  $NaCl$  es de aproximadamente  $61\mu m$  (en el infrarrojo lejano). Con este valor estimar el valor de la constante elástica de la red. Calcular las frecuencias de corte para las ramas acústica y óptica.**

Para empezar, como vimos en el ejercicio 3 de esta tarea, la frecuencia para una cadena de dos átomos de masas  $M$ ,  $m$  se consigue como:

$$\omega^2 = \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4 \sin^2(ka/2)}{Mm} \right]^{1/2}$$

En el infrarrojo lejano,  $k$  es un valor muy pequeño, por lo que el seno  $\sin(ka/2) \simeq 0$ . Además, la frecuencia máxima se consigue con el signo positivo, por lo que entonces queda que:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) + \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= 2\kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \end{aligned}$$

Entonces, despejando la constante elástica nos queda que:

$$\kappa = \frac{\omega^2}{2 \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)} \quad (1)$$

Por otro lado, nos dicen que la frecuencia de máxima absorción es la correspondiente a longitud de onda  $\lambda = 61\mu m$ . Entonces, usando que la frecuencia y longitud de onda se relacionan por  $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}$ , nos queda que la frecuencia es de  $\omega = 2\pi \frac{2.998 \times 10^8}{61 \times 10^{-6} m} = 3.088 \times 10^{13} s^{-1}$ . Además, la masa del sodio es  $m = 22.99u$  y del cloro  $M = 35.45u$ , donde  $u = 1.66054 \times 10^{-27} kg$ , por lo que sustituyendo en (1) nos queda que:

$$\kappa = \frac{\omega^2}{2 \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)} = \frac{(3.088 \times 10^{13} s^{-1})^2}{2 \left( \frac{1}{35.45u} + \frac{1}{22.99u} \right)} = \boxed{11.042 \text{ } kg s^{-2}}$$

Calculamos ahora las frecuencias de corte de las ramas acústica y óptica. La rama óptica se obtiene cuando se toma el signo positivo en la relación de dispersión, por lo que la relación queda como:

$$\omega^2 = \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) + \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4 \sin^2(ka/2)}{Mm} \right]^{1/2}$$

La frecuencia de corte es la máxima frecuencia  $\omega$  que se puede conseguir para distintos valores de  $k$ . Claramente, el máximo se encuentra cuando  $k \simeq 0$  y entonces nos queda que la frecuencia de corte es:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) + \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= 2\kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \end{aligned}$$

Si sustituimos las masas y la constante  $\kappa$  obtenida antes, encontramos que esta frecuencia de corte es:

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{2(11.042 \text{ kgs}^{-2}) \left( \frac{1}{35.45u} + \frac{1}{22.99u} \right)} \\ &= \boxed{3.088 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}}\end{aligned}$$

La rama acústica se consigue cuando tomamos el signo negativo, por lo que la relación de dispersión queda como:

$$\omega^2 = \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4 \sin^2(ka/2)}{Mm} \right]^{1/2}$$

La frecuencia de corte se consigue cuando esta cantidad sea máxima. Como se está restando la raíz cuadrada, queremos que ésta sea lo más pequeña posible, por lo que el término  $-\frac{4 \sin^2(ka/2)}{Mm}$  tiene que ser lo más negativo posible. Esto se consigue cuando  $k = \pi/a$ , ya que así el seno es máximo y tiene un valor de 1. En este caso, la frecuencia es de:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4}{Mm} \right]^{1/2} \\ &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \kappa \left[ \frac{1}{M^2} + \frac{2}{Mm} \frac{1}{m^2} - \frac{4}{Mm} \right]^{1/2} \\ &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \kappa \left[ \frac{1}{M^2} - \frac{2}{Mm} \frac{1}{m^2} \right]^{1/2} \\ &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \kappa \left[ \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{m} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \kappa \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \kappa \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{m} \right) \\ &= \frac{2\kappa}{m}\end{aligned}$$

Sustituimos ahora la constante  $\kappa = 11.042 \text{ kgs}^{-2}$  y la masa  $m = 22.99u$  y nos queda:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{2(11.042 \text{ kgs}^{-2})}{22.99u}} = \boxed{2.4051 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}}$$



---

## Problema 5

**Demostrar que el operador  $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$  se puede escribir como**

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}[S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+}] + S_{1z}S_{2z}$$

Los operadores  $\vec{S}_1, \vec{S}_2$  se definen como  $\vec{S}_1 = (S_{1x}, S_{1y}, S_{1z})$  y  $\vec{S}_2 = (S_{2x}, S_{2y}, S_{2z})$ , por lo que su producto punto es:

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z} \quad (1)$$

Usamos ahora la definición de los operadores escalera de espín, que son  $S_+ = S_x + iS_y$  y  $S_- = S_x - iS_y$ . Por lo tanto, si sumamos estos dos operadores, obtenemos que  $S_+ + S_- = 2S_x \Rightarrow S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ . Mientras que si los restamos obtenemos  $S_+ - S_- = 2iS_y$  y entonces  $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ . Esto se cumple para los operadores con subíndice 1 y con subíndice 2. Por lo tanto, sustituyendo en (1) nos queda:

$$\begin{aligned} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 &= S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z} \\ &= \frac{1}{2}(S_{1+} + S_{1-})\frac{1}{2}(S_{2+} + S_{2-}) + \frac{1}{2i}(S_{1+} - S_{1-})\frac{1}{2i}(S_{2+} - S_{2-}) + S_{1z}S_{2z} \\ &= \frac{1}{4}(S_{1+}S_{2+} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+} + S_{1-}S_{2-}) - \frac{1}{4}(S_{1+}S_{2+} - S_{1+}S_{2-} - S_{1-}S_{2+} + S_{1-}S_{2-}) + S_{1z}S_{2z} \\ &= \frac{1}{4}(S_{1+}S_{2+} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+} + S_{1-}S_{2-} - S_{1+}S_{2+} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+} - S_{1-}S_{2-}) + S_{1z}S_{2z} \end{aligned}$$

Se cancelan muchos de los sumandos, por lo que nos queda:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}(2S_{1+}S_{2-} + 2S_{1-}S_{2+}) + S_{1z}S_{2z} \\ &= \frac{1}{2}[S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+}] + S_{1z}S_{2z} \end{aligned}$$

Este es el resultado al que queríamos llegar.

---

## Problema 5. Tarea 11

Calcular la densidad de portadores de carga en  $GaSb$  a  $T = 300K$  si a esa temperatura la energía de brecha es  $E_g = 0.68eV$ , y además  $m_e^*/m_e = 0.047$  y  $m_h^*/m_e = 0.06$ .

En la ecuación 13.17 de las notas vimos que la densidad de portadores de carga de un semiconductor intrínseco (como lo es el  $GaSb$ ) está dada por:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (m_e^* m_h^*)^{3/4} e^{-E_g/2k_B T},$$

según los datos que nos da el problema, tenemos que  $T = 300K$ ,  $E_g = 0.68eV$ ,  $m_e^* = 0.047m_e$  y  $m_h^* = 0.06m_e$ . Simplemente sustituimos estos datos para calcular  $I$ . A continuación hago eso en Mathematica, usando los valores de  $m_e$ ,  $k_B$  y  $\hbar$  en SI consultados en NIST y convirtiendo la energía  $E_g$  de eV a Joules.

```
In[26]:= me = 9.1093837015 * 10^(-31);  
T = 300;  
Eg = 0.68 * (1.602177 * 10^(-19));  
kB = 1.380649 * 10^(-23);  
hbar = 1.054571817 * 10^(-34);  
meast = 0.047 * me;  
mhast = 0.06 * me;  
  
1 / Sqrt[2] * (kB * T / (Pi * hbar^2))^(3/2) * (meast * mhast)^(3/4) *  
Exp[-Eg / (2 * kB * T)]  
  
Out[33]= 5.96361 * 10^17
```

Entonces, la densidad de portadores de carga es:

$$I = 5.96361 \times 10^{17} m^{-3}$$

## Referencias

- [1 ] “Indium Antimonide.” Wikipedia, Wikimedia Foundation, 25 Feb. 2022,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Indium\\_antimonide](https://en.wikipedia.org/wiki/Indium_antimonide).