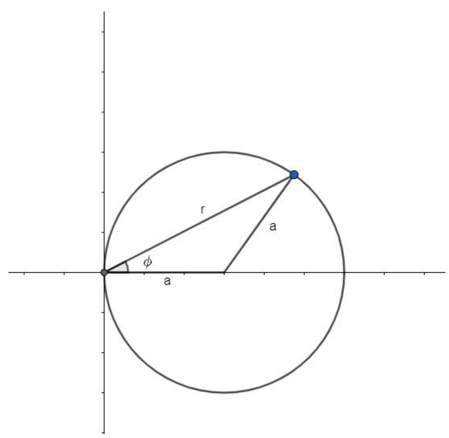
Mecánica analítica: Tarea 4

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

14 de diciembre de 2020

1) **Ejercicio 7.1: Una partícula sigue una órbita circular bajo la acción de una fuerza central de atracción que está dirigida hacia un punto de la circunferencia. Demuestra que la magnitud de la fuerza varía con el inverso de la quinta potencia de la distancia**

Primero hacemos un dibujo de lo que se nos pide. Tenemos una partícula que se mueve en una órbita circular bajo una fuerza central. Pero la fuerza central tiene su origen en un punto de la propia órbita circular. Por lo que dibujamos un sistema coordenado con una órbita circular que cruce el origen.



Escogemos los ejes de tal forma que el círculo tenga su centro en el eje x. Y denotamos por a al radio del círculo.

Primero encontraremos la ecuación de esta órbita en coordenadas polares. Para ello, tomamos un punto en la circunferencia con coordenadas r, ϕ. Posteriormente usamos la ley de cosenos para relacionar r con ϕ usando el triángulo que se muestra en el dibujo:

$$a^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\phi$$
$$\Rightarrow \quad 0 = r^2 - 2ar\cos\phi$$
$$\Rightarrow \quad r = 2a\cos\phi$$

Y esta es la ecuación de la órbita.
Ahora hay que encontrar la fuerza correspondiente a esta órbita.
Para ello, empezamos con la expresión que habíamos encontrado en clase para la energía potencial de una fuerza central:

$$\begin{aligned}
U(r) &= E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \\
&= E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \qquad \text{Regla de la cadena} \\
&= E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\phi}\frac{L}{mr^2}\right)^2 \qquad \text{Como } L = mr^2\dot{\phi} \;\Rightarrow\; \dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \\
&= E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2
\end{aligned}$$

Luego obtenemos la fuerza central derivando esto:

$$\begin{aligned}
f(r) &= -\frac{dU}{dr} \\
&= \frac{d}{dr}\left[-E + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2\right] \\
&= -\frac{L^2}{mr^3} - \frac{2L^2}{mr^5}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^4}\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \\
&= -\frac{L^2}{mr^3} - \frac{2L^2}{mr^5}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^4}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \cdot \frac{d\phi}{dr} \qquad \text{regla de la cadena} \\
&= -\frac{L^2}{mr^3} - \frac{2L^2}{mr^5}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^4} \cdot 2\frac{d}{d\phi}\left(\frac{dr}{d\phi}\right) \cdot \frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dr} \\
&= -\frac{L^2}{mr^3} - \frac{2L^2}{mr^5}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{mr^4} \cdot \frac{d^2r}{d\phi^2}
\end{aligned}$$

Ahora usamos la expresión de la órbita que habíamos obtenido antes.
Teníamos que $r = 2a\cos\phi \;\Rightarrow\; \dfrac{dr}{d\phi} = -2a\sin\phi \;\Rightarrow\; \dfrac{d^2r}{d\phi^2} = -2a\cos\phi$.

Y sustituimos esto en la expresión para la fuerza central:

$$
\begin{aligned}
f(r) &= -\frac{L^2}{mr^3} - \frac{2L^2}{mr^5}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{mr^4}\cdot\frac{d^2r}{d\phi^2} \\
&= -\frac{L^2}{mr^3} - \frac{2L^2}{mr^5}(-2a\sin\phi)^2 + \frac{L^2}{mr^4}(-2a\cos\phi) \\
&= -\frac{L^2}{mr^3} - \frac{8L^2a^2}{mr^5}\sin^2\phi - \frac{2aL^2}{mr^4}\cos\phi \\
&= -\frac{L^2}{mr^3} - \frac{8L^2a^2}{mr^5}(1-\cos^2\phi) - \frac{2aL^2}{mr^4}\cos\phi \\
&= -\frac{L^2}{mr^3} - \frac{8L^2a^2}{mr^5}\left(1-\frac{r^2}{4a^2}\right) - \frac{2aL^2}{mr^4}\frac{r}{2a} \qquad \text{usamos } r = 2a\cos\phi \\
&= -\frac{L^2}{mr^3} - \frac{8L^2a^2}{mr^5} + \frac{2L^2}{mr^3} - \frac{L^2}{mr^3} \\
&= -\frac{8L^2a^2}{mr^5}
\end{aligned}
$$

Que es una fuerza que varía con el inverso de la quinta potencia de r.

7.3) **Una partícula se mueve bajo la acción de la fuerza central que se desprende de la función de energía potencial**:

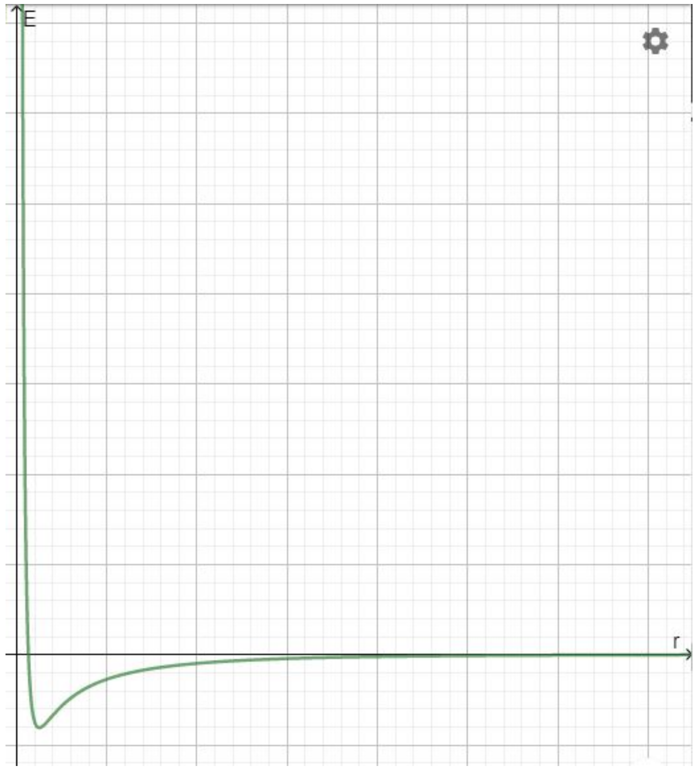
$$U(r) = -\frac{k}{r}e^{-ar}$$

Analizar cualitativamente la naturaleza de las órbitas e investigar la existencia de órbitas estables

Primero calculamos la energía potencial efectiva:

$$
\begin{aligned}
U_{ef} &= U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \\
&= -\frac{k}{r}e^{-ar} + \frac{L^2}{2mr^2} \\
&= \frac{k}{r^2}\left[\frac{L^2}{2mk} - re^{-ar}\right]
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, para darnos una idea, graficamos este potencial para los valores de los parámetros $k = 2, L = 1, m = 1, a = 0{,}2$



El eje vertical indica la energía y el eje horizontal la posición r.
Sabemos que si la energía total es E, sólo serán accesibles los valores de r para los cuales $U_{ef}(r)$ es menor que E (Y el resto de la energía será la energía cinética).

Notamos primero que nada que:

$$\lim_{r\to\infty} U_{ef}(r) = \lim_{r\to\infty} \frac{k}{r^2}\left[\frac{L^2}{2mk} - re^{-ar}\right] = \lim_{r\to\infty} -\frac{k}{r}e^{-ar} + \frac{L}{2mr^2} = 0$$

Justo como se ve en la gráfica.
Entonces, para tener una órbita limitada (órbita en la que los valores accesibles de r están acotados), necesitamos que la energía total E sea menor que 0, para que los velores de r muy altos en los que $U_{ef} \simeq 0$ no sean accesibles por la partícula.

Entonces, para que existan órbitas con esta condición, necesitamos que la función U_{ef} sea negativa en algún punto. Para que así la partícula tenga posiciones r accesibles.

Veamos entonces la condición para que U_{ef} sea negativa en algún punto r:

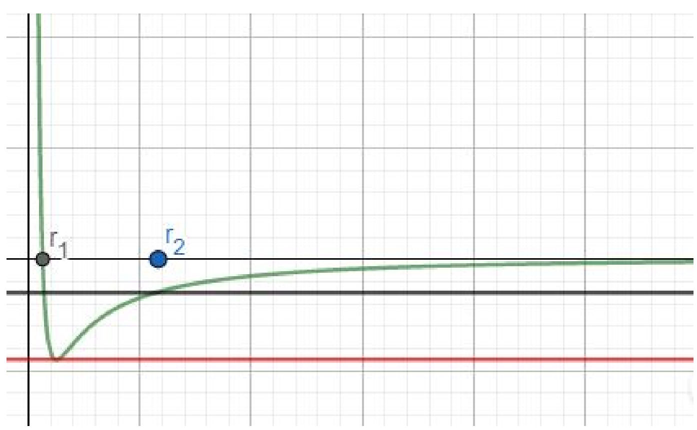
$$\begin{aligned}
&U_{ef} < 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{k}{r^2}\left[\frac{L^2}{2mk} - re^{-ar}\right] < 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{L^2}{2mk} - re^{-ar} < 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{L^2}{2mk} < re^{-ar}
\end{aligned}$$

Esto se cumple en algún punto si el valor máximo de re^{-ar} es mayor a $\dfrac{L^2}{2mk}$.
El valor máximo de re^{-ar} se obtiene cuando $\dfrac{d}{dr}(re^{-ar}) = 0 \Rightarrow -are^{-ar} + e^{-ar} = 0 \Rightarrow r = 1/a$
Y entonces el máximo de re^{-ar} se encuentra en $r = 1/a$ y por tanto tiene un valor de $\dfrac{1}{ae}$.

Como dijimos antes, se va a tener una órbita limitada si y sólo si este valor es mayor a $\dfrac{L^2}{2mk}$. Es decir, condición para tener una órbita limitada:

$$\frac{L^2}{2mk} < \frac{1}{ae}$$

Vemos ahora de nuevo la gráfica de antes pero ahora con líneas que indican la energía total de la partícula.



Para la energía total marcada por la línea negra, la partícula puede tomar cualquiera de los valores entre r_1 y r_2.

Para una órbita circular, necesitamos que solamente un valor de r sea accesible, que será la correspondiente al mínimo de U_{ef}. Y será el único radio accesible si la energía total es la línea roja del dibujo.

Para encontrar esta órbita estable, necesitamos calcular los valores extremos de la función $U_{ef}(r)$. Por lo que derivamos e igualamos a cero.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}U_{ef} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\frac{k}{r^2}\left[\frac{L^2}{2mk} - re^{-ar}\right] = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{k}{r^2}\left[-e^{-ar} + are^{-ar}\right] - \frac{2k}{r^3}\left[\frac{L^2}{2mk} - re^{-ar}\right] = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{k}{r^2}e^{-ar} + \frac{ka}{r}e^{-ar} - \frac{L^2}{mr^3} = 0
\end{aligned}$$

Entonces, la órbita estable se encontrará para los valores de r tales que se cumpla la ecuación de arriba.

7.10 **Hállese la velocidad de escape de una partícula de la superficie de la Tierra, dado que la constante gravitacional es** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{Kg^2}$

La partícula empieza con cierta energía cinética KE_i en la superficie de la tierra y con una energía potencial $U_i = -G\frac{Mm}{R}$ (Con R el radio de la tierra, que es la distancia respecto al centro de la Tierra a la que se encuentra la partícula).

Por otro lado, para que la velocidad de escape sea la mínima posible, queremos que la partícula 'a penas' llegue al infinito. Es decir, que llegue con 0 energía cinética (Y también con 0 energía potencial porque $U(r) = \left.\frac{-GMm}{r}\right|_{r=\infty} = 0$).
Entonces, por la conservación de energía tenemos:

$$\begin{aligned}
&KE_i + U_i = KE_f + U_f \\
&\Rightarrow \quad KE_i - \frac{GMm}{R} = 0 \\
&\Rightarrow \quad KE_i = \frac{GMm}{R} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R} \\
&\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}
\end{aligned}$$

Entonces, el valor de la velocidad es:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2(6{,}674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-1})(5{,}972 \times 10^{24} kg)}{6{,}371 \times 10^6 m}} = 11186 m/s$$

.

8.1 **Una partícula estacionaria de masa $3mKg$ estalla en tres piezas iguales, dos de las cuales vuelan en direcciones perpendiculares entre sí, una con velocidad de $2a\ m/s$ y la otra de $3a\ m/s$. ¿Cuál es la magnitud, dirección y sentido de la cantidad de movimiento del tercer fragmento? La explosión tiene lugar en $10^{-5}s$. Hállese la fuerza media que actúa sobre cada pieza durante la explosión**

Cada una de las tres piezas tiene masa m.
Digamos que la partícula empieza en el origen.
Elegimos los ejes de tal forma que el primer fragmento sale en la dirección $\widehat{i}$ con una velocidad $2a\widehat{i}$
Y que el segundo fragmento sale con una velocidad perpendicular de $3a\widehat{j}$.

Como la partícula empieza en el reposo, su momento inicial es 0.
La explosión se debe a fuerzas internas, como no hay fuerzas externas, el momento total se debe de conservar.

El primer fragmento tiene momento $m\vec{v}_1 = 2am\widehat{i}$.
El segundo fragmento tiene un momento de $m\vec{v}_2 = 3am\widehat{j}$.
Y el tercer fragmento tiene un momento de $m\vec{v}_3$.
La suma de estos momento debe de ser igual al momento inicial de 0:

$$\begin{aligned}
&0 = 2am\widehat{i} + 3am\widehat{j} + m\vec{v}_3 \\
&\Rightarrow\ 0 = 2am\widehat{i} + 3am\widehat{j} + m(v_{3x}\widehat{i} + v_{3y}\widehat{j} + v_{3z}\widehat{k}) \quad v_{3x}, v_{3y}, v_{3z} \text{ son los componentes de } \vec{v} \\
&\Rightarrow\ \begin{cases} 2a + v_{3x} = 0 \\ 3a + v_{3y} = 0 \\ v_{3z} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Entonces, la velocidad de la partícula es $\vec{v}_3 = v_{3x}\widehat{i} + v_{3y}\widehat{j} + v_{3z}\widehat{k} = -2a\widehat{i} - 3a\widehat{j}$
Por lo que el momento del tercer fragmento es $m\vec{v}_3$:

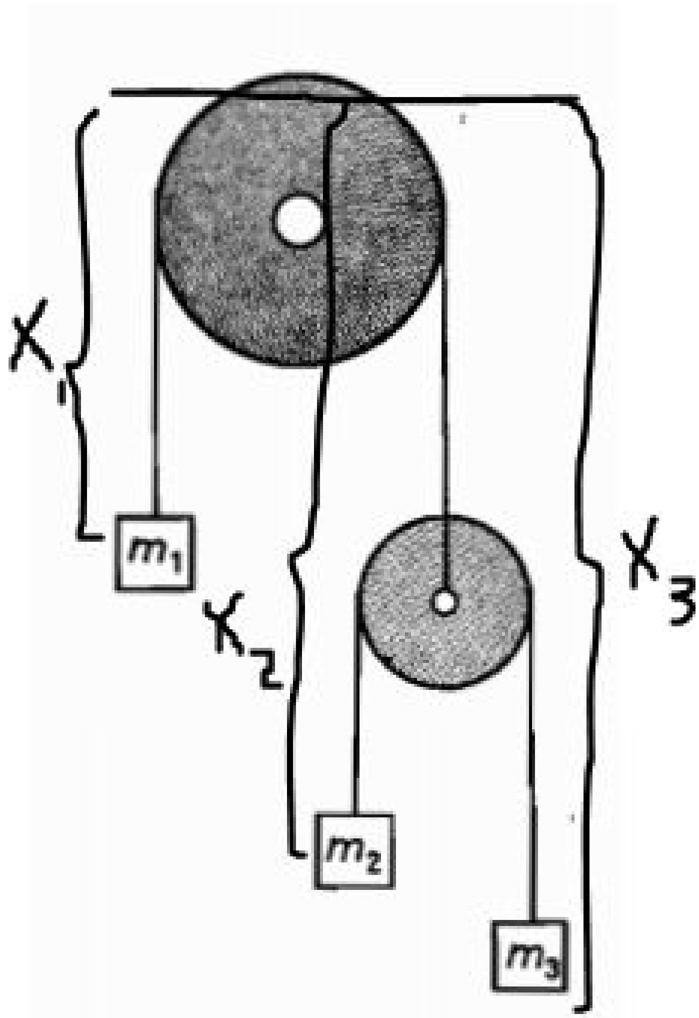
$$m\vec{v}_3 = -2am\widehat{i} - 3am\widehat{j}$$

Por lo que la dirección de este momento es $-2\widehat{i} - 3\widehat{j}$.
Y tiene una magnitud de $|\vec{p}_3| = \sqrt{4a^2m^2 + 9a^2m^2} = \sqrt{13}\ am$

Calcular la fuerza:
La $i-$ésima partícula empieza con un momento de 0 (cuando la partícula está en reposo). Después de los $10^{-5}s$, esta partícula termina con cierto momento que ya calculamos.
Para cada partícula se cumple que $\vec{F_i} = \frac{d\vec{p_i}}{dt}$.
Donde esa fuerza $\vec{F_i}$ indica la fuerza instantánea. Tomamos la fuerza promedio como el cambio total del momento entre el tiempo total $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$.
Para cada una de las partículas se tiene:

- $\vec{F_1} = \frac{\Delta\vec{p_1}}{\Delta t} = \frac{2am\widehat{i} - \vec{0}}{10^{-5}} = 2 \times 10^5 am\,\widehat{i}$
- $\vec{F_2} = \frac{\Delta\vec{p_2}}{\Delta t} = \frac{3am\widehat{j} - \vec{0}}{10^{-5}} = 3 \times 10^5 am\,\widehat{j}$
- $\vec{F_3} = \frac{\Delta\vec{p_3}}{\Delta t} = \frac{-2am\widehat{i} - 3am\widehat{j} - \vec{0}}{10^{-5}} = -2 \times 10^5 am\,\widehat{i} - 3 \times 10^5 am\,\widehat{j}$

8.11) **Establecer las ecuaciones de Lagrange para la máquina de Atwood compuesta, de la figura 8-13. Despréciese el efecto de las poleas en el movimiento.**



Denotamos por l_1 a la longitud del hilo superior y l_2 a la del hilo inferior.
Como se puede ver, a cada una de las partículas le asignamos las coordenadas x_1, x_2, x_3 respectivamente. Donde esta longitud se mide en todos los casos respecto a la polea fija. Por lo que las velocidades y aceleraciones también se medirán respecto a la polea fija.

Las velocidades de las partículas con respecto a la polea fija son entonces $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$. Por lo que la energía cinética total es:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2$$

Si medimos la energía potencial gravitacional respecto a la polea superior, cada una de las masas tienen una altura $-x_1, -x_2, -x_3$. Por lo que la energía potencial total es:

$$U = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 - m_3 g x_3$$

Por último vemos la restricción que se genera al considerar que los hilos tienen longitud fija.
Para ello, notamos primero que $x_2 + x_3$ es igual a la longitud completa del hilo inferior más dos veces la parte derecha del hilo superior.
Luego, si le sumamos $2x_1$ que es dos veces la parte izquierda del hilo superior, obtenemos $2x_1 + x_2 + x_3$ que será entonces 2 veces la suma de de las longitudes de ambos hilos.
Por tanto, la restricción es que:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = C$$

Con $C = 2l_1 + 2l_2$ una constante.
Luego, el lagrangiano del sistema es:

$$\begin{aligned}
L &= T - U \\
&= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 + m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \\
&= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(-2\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g(C - 2x_1 - x_2) \\
&= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + 2m_3\dot{x}_1^2 + 2m_3\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_2^2 + m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g C - 2m_3 g x_1 - m_3 g x_2
\end{aligned}$$

Luego, calculamos las ecuaciones de Lagrange para cada una de las coordenadas:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0 \\
&\Rightarrow \quad m_1 g - 2m_3 g - \frac{d}{dt}\left(m_1\dot{x}_1 + 4m_3\dot{x}_1 + 2m_3\dot{x}_2\right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad m_1 g - 2m_3 g - m_1\ddot{x}_1 - 4m_3\ddot{x}_1 - 2m_3\ddot{x}_2 = 0
\end{aligned}$$

Por lo que nos queda:

$$1) \quad (2m_3 - m_1)g + (4m_3 + m_1)\ddot{x}_1 + 2m_3\ddot{x}_2 = 0$$

Para la segunda coordenada tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0 \\
&\Rightarrow \quad m_2 g - m_3 g - \frac{d}{dt}\left(m_2\dot{x}_2 + m_3\dot{x}_2 + 2m_3\dot{x}_1\right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad m_2 g - m_3 g - m_2\ddot{x}_2 - m_3\ddot{x}_2 - 2m_3\ddot{x}_1 = 0
\end{aligned}$$

Por lo que nos queda:

$$2) \quad (m_3 - m_2)g + (m_2 + m_3)\ddot{x}_2 + 2m_3\ddot{x}_1 = 0$$

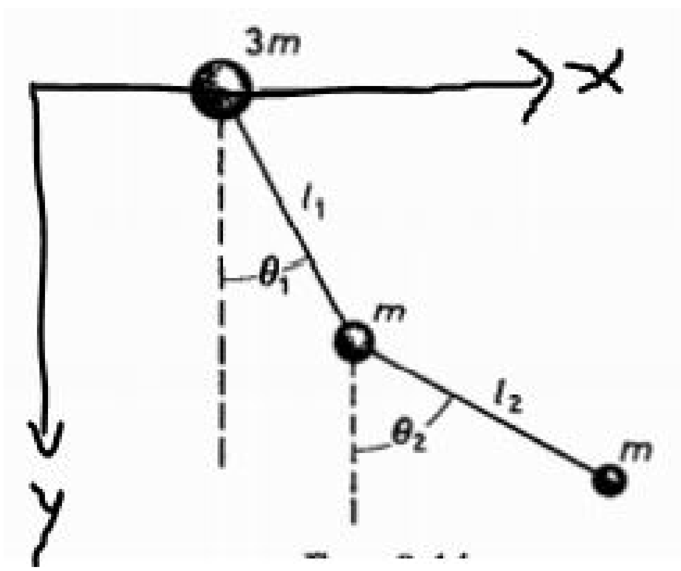
Y ya tenemos las dos ecuaciones de movimiento. Que forman un sistema de dos ecuaciones con variables $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2$.
El sistema se puede despejar de forma sencilla y se obtiene:

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1m_2 + m_1m_3 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_1m_2 - 3m_1m_3 + 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

Donde como dije antes, estas aceleraciones se toman respecto a la polea fija.

8.13 **Una cuenta de masa $3m$ puede deslizarse horizontalmente sin rozamiento por un alambre como se indica en la figura. Unido a la cuenta hay un péndulo doble. Si, en una posición cercana ala de su equilibrio, se deja al sistema en libertad, a partir del reposo, las masas oscilan en el plano de la figura a un lado y otro de la vertical. a) Esxríbanse las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema**



Primero que nada, llamamos x a la posición de la partícula $3m$ en la línea sobre la que se puede mover.
Y formamos un sistema de coordenadas como el que se muestra en la figura.
Vemos que la posición de la primera masa es:

$$x_1 = x \quad , \quad y_1 = 0$$

Y derivamos para obtener su velocidad en coordendas cartesianas:

$$\dot{x}_1 = \dot{x} \quad , \quad \dot{y}_1 = 0$$

Por lo que tiene una energía cinética de:

$$T_1 = \frac{1}{2}(3m)(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{3}{2}m\dot{x}^2$$

Y una energía potencial de:

$$U_1 = -mgy_1 = 0$$

.

Vemos que la posición de la segunda masa es:

$$x_2 = x + l_1 \sin\theta_1 \quad , \quad y_2 = l_1 \cos\theta_1$$

Y derivamos para obtener su velocidad en coordendas cartesianas:

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \quad , \quad \dot{y}_2 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$

Por lo que tiene una energía cinética de:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\cos\theta_1 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\cos\theta_1 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

Y una energía potencial de:

$$U_2 = -mgy_2 = -mgl_1\cos\theta_1$$

.

Vemos que la posición de la tercera masa es:

$$x_3 = x + l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2 \quad , \quad y_3 = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2$$

Y derivamos para obtener su velocidad en coordendas cartesianas:

$$\dot{x}_3 = \dot{x} + l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \quad , \quad \dot{y}_3 = -l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2$$

Por lo que tiene una energía cinética de:

$$\begin{aligned}
T_3 &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2 + \frac{1}{2}m(-l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}_2^2\cos^2\theta_2 + ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\dot{x}\cos\theta_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2 \\
&+ \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}_2^2\sin^2\theta_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_1\sin\theta_2 \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}_2^2 + ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\dot{x}\cos\theta_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}$$

Y una energía potencial de:

$$U_3 = -mgy_3 = -mg(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

.

Con esto podemos ya calcular la energía cinética total como la suma de las energías cinéticas y la energía potencial de manera análoga.
Y finalmente tenemos que el laplaciano es:

$$\begin{aligned}
L &= T - U = T_1 + T_2 + T_3 - U_1 - U_2 - U_3 \\
&= \frac{5}{2}m\dot{x}^2 + 2ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\dot{x}\cos\theta_2 + ml_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}_2^2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&+ 2mgl_1\cos\theta_1 + mgl_2\cos\theta_2
\end{aligned}$$

Ahora conseguimos la ecuación de Lagrange para cada una de las coordenadas:

- x:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \\
&\Rightarrow \quad -\frac{d}{dt}\Big(5m\dot{x} + 2ml_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\Big) = 0 \\
&\Rightarrow \quad 5m\dot{x} + 2ml_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 = cte
\end{aligned}$$

  Que es una expresión de la conservación del momento lineal en la coordenada x (el momento de la primera partícula es $3m\dot{x}$, de la segunda $m\dot{x} + ml_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1$ y de la tercera $m\dot{x} + ml_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2$).

- θ_1:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = 0 \\
&\Rightarrow \quad -2ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\sin\theta_1 - ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - 2mgl_1\sin\theta_1 \\
&\quad - \frac{d}{dt}\Big(ml_1\dot{x}\cos\theta_1 + 2ml_1^2\dot{\theta}_1 + ml_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\Big) = 0
\end{aligned}$$

.

- θ_2:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = 0$$
$$\Rightarrow \quad -ml_2\dot{\theta}_2\dot{x}\sin\theta_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - mgl_2\sin\theta_2$$
$$-\frac{d}{dt}\Big(ml_2\dot{x}\cos\theta_2 + ml_2^2\dot{\theta}_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\Big) = 0$$

Entonces las ecuaciones de Laplace son:

- $5m\dot{x} + 2ml_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 = cte$
- $-2ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\sin\theta_1 - ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - 2mgl_1\sin\theta_1$
  $-\frac{d}{dt}\Big(ml_1\dot{x}\cos\theta_1 + 2ml_1^2\dot{\theta}_1 + ml_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\Big) = 0$
- $-ml_2\dot{\theta}_2\dot{x}\sin\theta_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - mgl_2\sin\theta_2$
  $-\frac{d}{dt}\Big(ml_2\dot{x}\cos\theta_2 + ml_2^2\dot{\theta}_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\Big) = 0$

.

b) Hállense las aceleraciones cuando los desplazamientos y velocidades son pequeños

Reescribimos las ecuaciones de Laplace pero con las aproximaciones $\sin(y) \simeq y$, $\cos y \simeq 1 - \frac{1}{2}y^2$. Para ambos ángulos θ_1, θ_2.
Por lo que nos quedan las ecuaciones:

- $5m\dot{x} + 2ml_1\dot{\theta}_1(1-\frac{1}{2}\theta_1^2) + ml_2\dot{\theta}_2(1-\frac{1}{2}\theta_2^2) = cte$
- $-2ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\theta_1 - ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\theta_1-\theta_2) - 2mgl_1\theta_1$
  $-\frac{d}{dt}\Big(ml_1\dot{x}(1-\frac{1}{2}\theta_1^2) + +2ml_1^2\dot{\theta}_1 + ml_1l_2\dot{\theta}_2[1-\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)^2]\Big) = 0$
- $-ml_2\dot{\theta}_2\dot{x}\theta_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\theta_1-\theta_2) - mgl_2\theta_2$
  $-\frac{d}{dt}\Big(ml_2\dot{x}(1-\frac{1}{2}\theta_2^2) + ml_2^2\dot{\theta}_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1[1-\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)^2]\Big) = 0$

Estas ecuaciones siguen siendo muy difíciles de resolver explícitamente para x, θ_1, θ_2. Sin embargo, podemos expresar las aceleraciones en términos de θ_1, θ_2, x como sigue:

Para la primera partícula, su posición es:

$$x_1 = x \quad , \quad y = 0$$

Por lo que su velocidad y aceleración en coordenadas cartesianas es:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}$$
$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}$$

.

Para la segunda partícula, la posición está dada por:

$$x_2 = x + l_1 \sin\theta_1 \quad , \quad y_2 = l_1 \cos\theta_2$$

La velocidad está dada por:

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \quad , \quad \dot{y}_2 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$

Y la aceleración en coordenadas cartesianas es:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x} + l_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^{\,2} \sin\theta_1 \quad , \quad \ddot{y}_2 = -l_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_1\ddot{\theta}_1^2 \cos\theta_1$$

Usando la aproximación de ángulos pequeños nos queda:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x} + l_1\ddot{\theta}_1(1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2) - l_1\dot{\theta}_1^{\,2}\theta_1 \quad , \quad \ddot{y}_2 = -l_1\ddot{\theta}_1\theta_1 - l_1\ddot{\theta}_1^2(1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2)$$

.

Vemos que la posición de la tercera masa es:

$$x_3 = x + l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \quad , \quad y_3 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2$$

Y derivamos para obtener su velocidad en coordendas cartesianas:

$$\dot{x}_3 = \dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \quad , \quad \dot{y}_3 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2$$

Y de nuevo para obtener la aceleración en coordenadas cartesianas:

$$\ddot{x}_3 = \ddot{x} + l_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 + l_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2$$
$$\ddot{y}_3 = -l_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 - l_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2$$

Luego usamos la aproximación de ángulos pequeños:

$$\ddot{x}_3 = \ddot{x} + l_1\ddot{\theta}_1(1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2) - l_1\dot{\theta}_1^2\theta_1 + l_2\ddot{\theta}_2(1 - \tfrac{1}{2}\theta_2^2) - l_2\dot{\theta}_2^2\theta_2$$
$$\ddot{y}_3 = -l_1\ddot{\theta}_1\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2(1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2) - l_2\ddot{\theta}_2\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2(1 - \tfrac{1}{2}\theta_2^2)$$

.

8.16) **Analícese el movimiento del regulador del problema 8-15, si la velocidad angular del eje no está restringida a ω, sino que gira libremente sin que tenga ningún momento rotacional externo. a) Hállese la velocidad angular de rotación estacionaria para una altura dada z del manguito inferior. b) Hállese la frecuencia de las pequeñas vibraciones por encima y por debajo de este movimiento estacionario. c) ¿Cuáles son las diferencias entre este movimiento y el del problema 8-15?**

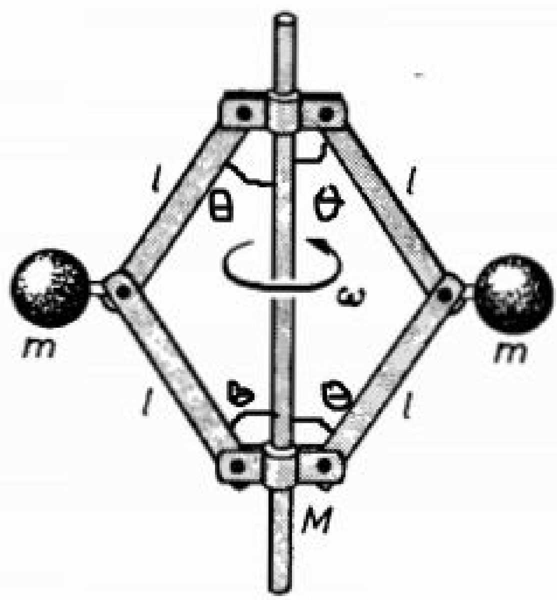


FIG. 8-16

Primero formamos un sistema de referencia centrado en el manguito superior del regular centrífugo. Usamos como coordenadas el ángulo θ dibujado y un ángulo ϕ que indica la rotación con respecto al plano vertical.
Encontramos las posiciones de las tres masas en términos de estas coordenadas

La masa izquierda tiene coordenadas $x_1 = -l\sin\theta\cos\phi$, $y_1 = l\sin\theta\sin\phi$, $z_1 = -l\cos\theta$. Por lo que esta partícula tiene una energía cinética de:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) \\
&= \frac{1}{2}m\left((-l\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi + l\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi)^2 + (l\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + l\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}m\big[l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\cos^2\phi + l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\sin^2\phi - 2l^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi \\
&\quad + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\sin^2\phi + l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\cos^2\phi + 2l^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\theta\ sin\phi\cos\phi + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\big] \\
&= \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right]
\end{aligned}$$

Y tiene una energía potencial de:

$$U_1 = mgz_1 = -mgl\cos\theta$$

La partícula derecha tiene las mismas coordenadas que la primera partícula pero con un signo distinto en la coordenada x y y. Sin embargo, al elevar al cuadrado para calcular la energía cinética, el resultado es el mismo. Y la energía potencial sólo depende de z, que es la misma en las dos partículas.

La tercer partícula tiene una coordenada z que se puede obtener viendo el dibujo como $z_3 = -2l\cos\theta$.
Por lo que tiene una energía cinética de:

$$T_3 = \frac{1}{2}M\left[\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2\right] = \frac{1}{2}M(2l\dot{\theta}\sin\theta)^2 = 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

Y tiene una energía potencial de:

$$U_3 = Mgz_3 = -2Mlg\cos\theta$$

Por tanto, se tiene que el Lagrangiano es:

$$\begin{aligned} L &= T - U = 2T_1 + T_3 - 2U_1 - U_3 \\ &= ml^2\dot{\theta}^2 + ml^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta + 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2mgl\cos\theta + 2Mgl\cos\theta \end{aligned}$$

Vemos que el Lagrangiano no depende explícitamente de ϕ, por lo que el momento generalizado en la coordenada ϕ es igual a una constante C, esto es:

$$\begin{aligned} p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} &= C \\ \Rightarrow\ \ 2ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta &= C \end{aligned}$$

Ahora calculamos la ecuación para θ:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = 0 \\ &\Rightarrow\ \ 2ml^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + 4Ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - 2mgl\sin\theta - 2Mgl\sin\theta - \frac{d}{dt}\left(2ml^2\dot{\theta} + 4Ml^2\dot{\theta}\sin^2\theta\right) = 0 \\ &\Rightarrow\ 2ml^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + 4Ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - 2mgl\sin\theta - 2Mgl\sin\theta \\ &\ \ - 2ml^2\ddot{\theta} - 4Ml^2\ddot{\theta}\sin^2\theta - 8Ml^2\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta = 0 \\ &\Rightarrow\ \ ml^2\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta - 2Ml^2\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta - (m+M)gl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} - 2Ml^2\ddot{\theta}\sin^2\theta = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo a la pregunta, digamos que la partícula M se encuentra a una altura h respecto al mangutio superior. Viendo el dibujo, tenemos que $z = 2l\cos\theta$. Por tanto, para que esta altura z sea constante, θ tiene que se constante.
Entonces $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, lo cual sustituimos en la última ecuación:

$$
\begin{aligned}
ml^2\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta - (m+M)gl\sin\theta = 0 \\
\Rightarrow \quad \dot{\phi} = \sqrt{\frac{(m+M)g}{ml\cos\theta}} \\
= \sqrt{\frac{2(m+M)g}{mz}}
\end{aligned}
$$

.

b) Hállese la frecuencia de las pequeñas vibraciones por encima y por debajo de este movimiento estacionario

Consideramos la ecuación de Lagrange para θ calculada antes y usamos las aproximaciones $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$

$$
\begin{aligned}
& ml^2\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta - 2Ml^2\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta - (m+M)gl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} - 2Ml^2\ddot{\theta}\sin^2\theta = 0 \\
& \Rightarrow\ ml^2\dot{\phi}^2\theta - 2Ml^2\dot{\theta}^2\theta - (m+M)gl\theta - ml^2\ddot{\theta} - 2Ml^2\ddot{\theta}\theta^2 = 0 \\
& \Rightarrow\ ml^2\dot{\phi}^2\theta - (m+M)gl\theta - ml^2\ddot{\theta} = 0 \qquad \text{nos quedamos con los términos lineales porque } \theta << 1 \\
& \Rightarrow\ (ml^2\dot{\phi}^2 - (m+M)gl)\theta = ml^2\ddot{\theta} \\
& \Rightarrow\ \ddot{\theta} = \left(\dot{\phi}^2 - \frac{(m+M)g}{ml}\right)\theta \\
& \Rightarrow\ \ddot{\theta} = \left(\frac{2(m+M)g}{mz} - \frac{(m+M)g}{ml}\right)\theta
\end{aligned}
$$

Es una ecuación de oscilador armónico simple con una frecuencia de:

$$
\omega^2 = \frac{2(m+M)g}{mz} - \frac{(m+M)g}{ml}
$$

.

c) ¿Cuáles son las diferencias entre este movimiento y el del problema 8-15?

Notamos que L no depende explícitamente del tiempo, por lo que el Hamiltoniano $H = p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - L$ es igual a una constante.

$$
\begin{aligned}
H &= p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - L \\
&= \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - L \\
&= (2ml^2\dot{\theta} + 4Ml^2\dot{\theta}\sin^2\theta)\dot{\theta} + \left(2ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right)\dot{\phi} \\
&\quad - (ml^2\dot{\theta}^2 + ml^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta + 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2mgl\cos\theta + 2Mgl\cos\theta) \\
&= ml^2\dot{\theta}^2 + 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + ml^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta - 2mgl\cos\theta - 2Mgl\cos\theta
\end{aligned}
$$

Viendo las expresiones anteriores, notamos que H es la energía total $2T_1+T_3+2U_1+U_3$. Esto coincide con lo visto en clase que siempre que no haya fuerzas externas no conservativas, si L no depende del tiempo, H es igual a la energía total y se conserva.

Entonces, nos quedan como ecuaciones:

$$
\begin{gathered}
C = 2ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta \\
E = ml^2\dot{\theta}^2 + 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + ml^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta - 2mgl\cos\theta - 2Mgl\cos\theta
\end{gathered}
$$

Por tanto, vemos que se conserva el momento angular total respecto al ángulo ϕ y se conserva la energía total.
Esto último es una diferencia con respecto al problema visto en clase, ya que en el problema en clase no se conservaba la energía total.
En el problema en clase el regulador estaba restringido a girar con una velocidad angular ω todo el tiempo. Esta restricción requería agregar energía al sistema para mantener este movimiento.