IFC Tarea 2 Tomás Ricardo Basile Álvarez

1. Encuentre la longitud de onda de De Broglie para:

Recordamos que la longitud de onda de un objeto de masa m y velocidad v es

$$\lambda = \frac{h}{\gamma m v} = \frac{h}{p}$$

a) Un electrón de rapidez 2.0×10^8 m/s

Su rapidez es muy cercana a la de la luz, por lo que hay que usar la fórmula relativista:

$$\lambda = \frac{h}{\gamma m_e v} = \frac{h}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m_e v} = \frac{h\sqrt{1-v^2/c^2}}{m_e v}$$

Unidades: $\frac{J \cdot s}{Kg\, m/s} = \frac{Kg \frac{m^2}{s^2} s}{Kg \frac{m}{s}} = m$

Sustituimos: $$\frac{6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s \sqrt{1-\frac{(2\times10^8)^2}{(3\times10^8)^2}}}{(9.109\times10^{-31} Kg)(2\times10^8 m/s)} = 2.711 \times 10^{-12} m$$

b) Un electrón de 40 KeV de energía cinética

Un electrón tiene energía de Reposo 511 KeV que es mucho más grande que los 40 KeV

Por lo que podemos usar una aproximación no relativista

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mKE}}$$

En la aproximación no relativista, el momento y la KE se relacionan por $p = \sqrt{2mKE}$

Unidades: $\frac{J \cdot s}{\sqrt{J\, Kg}} = \frac{Kg \frac{m^2}{s^2} \cdot s}{\sqrt{Kg^2 \frac{m^2}{s^2}}} = \frac{Kg \frac{m^2}{s}}{Kg \frac{m}{s}} = m$

Sustituimos $$= \frac{6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s}{\sqrt{2(9.109 \cdot 10^{-31} kg)(40{,}000 eV)(1.602\times10^{-19} \frac{J}{eV})}}$$

$$= 6.1325\times10^{-12} m$$

Sólo para comprobar que era válida la aproximación no relativista, veamos cuanto vale en el relativista.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

pero tenemos que $(pc)^2 = E_{Tot}^2 - (mc^2)^2$

$$\rightarrow p = \frac{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}}{c}$$

pero $E_{Tot} = KE + mc^2$

$$\rightarrow p = \frac{\sqrt{(KE + mc^2)^2 - (mc^2)^2}}{c}$$

$$= \sqrt{KE^2 + 2KEmc^2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\sqrt{KE^2 + 2KEmc^2}}$$

Sustituimos:

Unidades: $\frac{J \cdot s (m/s)}{\sqrt{J^2}} = m$

$$\lambda = \frac{(6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s)(3 \cdot 10^8 m/s)}{\sqrt{\left(40 keV\left(1.602\times10^{-19}\frac{J}{eV}\right)\right)^2 + 2\left(40 keV\left(1.602\times10^{-19}\frac{J}{eV}\right)\right)(9.109\times10^{-31} kg)(3 \cdot 10^8 m/s)^2}}$$

$$= 6.01 \times 10^{-12} m$$

Vemos que el cálculo no relativista tenía un error pequeño como de 2%

c) Un protón de 500 MeV de energía cinética.

Un protón tiene energía en reposo de 938 MeV, por lo que 500 MeV es bastante considerable.
Por tanto, usamos ecuaciones relativistas.

Usamos la expresión del inciso pasado para calcular λ a partir de KE en el caso relatinsta:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{KE^2 + 2KE\, mc^2}}$$ y sustituimos:

$$\lambda = \frac{(6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s)(3 \cdot 10^{8} m/s)}{\sqrt{\left((500 \times 10^{6} eV)(1.602 \cdot 10^{-19} \frac{J}{eV})\right)^2 + 2(500 \cdot 10^{6} eV)(1.602 \cdot 10^{-19} \frac{J}{eV})(9.109 \cdot 10^{-31} kg)(3 \cdot 10^{8})^2}}$$

$$= \underline{1.137 \times 10^{-15}\ m}$$

d) Un grano de arena de 1 mg con rapidez 20 m/s

como $20\ m/s \ll 3 \cdot 10^{8} m/s \Rightarrow \gamma \approx 1$

Tenemos que $\lambda = \frac{h}{\gamma m v} = \frac{h}{mv}$

$1 mg = 1 \cdot 10^{-3} g = 1 \cdot 10^{-6} kg$

$$= \frac{6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s}{(1 \cdot 10^{-6} kg)(20 m/s)}$$

$$= \underline{3.313 \cdot 10^{-29}\ m}$$

2. Demuestre que la longitud de onda de de Broglie de una partícula de masa m y energía cinética T está dada por:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}$$

Sabemos que la longitud de onda es $\lambda = \frac{h}{p}$, ...(1)

Para una partícula relativista, el momento es $(pc)^2 = E^2 - (mc^2)^2$ ← con E la energía Total

Entonces $pc = \sqrt{E^2-(mc^2)^2} \rightarrow p = \frac{\sqrt{E^2-(mc^2)^2}}{c}$

Pero la energía total es $E = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Energía cinética}}}{T} + mc^2$ ← Energía en reposo

Entonces, $p = \frac{\sqrt{E^2-(mc^2)^2}}{c} = \frac{\sqrt{(T+mc^2)^2-(mc^2)^2}}{c} = \frac{\sqrt{T^2+2Tmc^2}}{c}$

Entonces, al reemplazar (1) me queda:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\frac{\sqrt{T^2+2Tmc^2}}{c}} = \frac{hc}{\sqrt{T^2+2Tmc^2}} = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}$$

3. a) ¿Por qué la función de onda Ψ no puede ser una cantidad observable?

Porque Ψ puede tomar valores negativos e incluso complejos.

No tiene sentido que esto se pueda asociar con alguna medida física directa pues no tiene sentido hablar de probabilidades negativas o complejas.

b) ¿Qué representa la cantidad $|\Psi|^2$ y quién propuso esta interpretación?

Lo propuso Max Born.

$|\Psi|^2$ es una función de x, y, z, t, que se interpreta como la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en una posición (x,y,z) a tiempo t.

Es decir, $|\Psi|^2$ evaluado en x, y, z, t es proporcional a la probabilidad de encontrar al cuerpo con ecuación de onda Ψ en el tiempo t y posición (x,y,z).

4 Encuentre la velocidad de fase y de grupo para ondas de de Broglie de:

a) Un electrón cuya rapidez es de 0.900c

Como vimos en clase, la velocidad de fase es $v_p = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{0.9c} = \frac{c}{0.9} = 1.11c$

La velocidad de grupo es: $v_g = v = 0.9c$

b) Un electrón con energía cinética 500keV ← comparable con energía en reposo ∴ Relativista

Primero calculamos su velocidad.

Si tiene energía total $E_{tot} = \gamma m c^2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} m c^2$

Entonces podemos calcular la velocidad como:

$$E_T^2 = \frac{1}{1-v^2/c^2} m^2 c^4 \Rightarrow \frac{m^2c^4}{E_T^2} = 1 - v^2/c^2 \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2c^4}{E_T^2}$$

$$\Rightarrow v^2 = c^2 - \frac{m^2c^6}{E_T^2} \Rightarrow v = \sqrt{c^2\left(1-\frac{m^2c^4}{E_T^2}\right)} = c\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{E_T^2}}$$

Pero la energía total es Energía de reposo + energía cinética = mc^2+T

Entonces: $v = c\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{(mc^2+T)^2}}$

Entonces, la velocidad de grupo es $v_g = c\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{(mc^2+T)^2}}$

y la de fase es $v_p = \frac{c^2}{v} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{(mc^2+T)^2}}}$

Entonces, para este problema tenemos

Velocidad grupo: $v_g = c\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{(mc^2+T)^2}} = (3\cdot10^8 m/s)\sqrt{1-\frac{(9.109\cdot10^{-31}kg)^2(3\cdot10^8 m/s)^2}{\left((9.109\cdot10^{-31}kg)(3\cdot10^8 m/s)^2+(500\cdot10^3 eV)(1.602\cdot10^{-19}\frac{J}{eV})\right)^2}}$

$= 2.587\cdot10^8 m/s$ ✗ $\simeq 0.863c$

Vel de fase: $v_p = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{v_g} = \frac{(3\cdot10^8 m/s)^2}{(2.587\cdot10^8 m/s)} = 3.478\cdot10^8 m/s$ ✗ $\simeq 1.16c$

c) Un protón con energía cinética 40 keV

40 keV << 938 MeV ← energía en reposo de protón ∴ Usamos No relativista

Entonces, la energía cinética es $T = \frac{1}{2} m v^2$ ← fórmula no relativista

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2T}{m}}$

∴ velocidad de grupo: $v_g = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (40{,}000\ eV)(1.602 \cdot 10^{-19} J)}{1.672 \cdot 10^{-27}\ kg}} = 2.769 \times 10^6\ m/s$

La velocidad de fase: $v_c = \frac{c^2}{v_g} = \frac{(3 \cdot 10^8)^2}{2.769 \cdot 10^6 m/s} = 3.25 \cdot 10^{10}\ m/s$

d) Un protón de rapidez 1.0×10^8 m/s

Velocidad de grupo: $V_g = v = 1.0 \times 10^8\ m/s = \frac{1}{3} c$

Velocidad de Fase $V_f = c^2 / v = (3 \cdot 10^8)^2 / 1.0 \cdot 10^8 = 900{,}000{,}000 = 3c$

5) Demuestre que la velocidad de fase v_p de las ondas de de Broglie de una partícula de masa m y longitud λ es $v_p = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc\lambda}{h}\right)^2}$

Sabemos que la longitud de onda es $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma m v}$ ← con v la velocidad de la partícula.

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma m v} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\ \frac{h}{mv}$ ← por la def. de γ

$\Rightarrow \lambda = \sqrt{1 - v^2/c^2}\ \frac{h}{mv}$

Elevamos al cuadrado $\rightarrow \lambda^2 = (1 - v^2/c^2) \frac{h^2}{m^2 v^2} = \frac{h^2}{m^2 v^2} - \frac{h^2}{m^2 c^2}$

$\rightarrow \lambda^2 = \frac{h^2}{m^2 v^2} - \frac{h^2}{m^2 c^2} \rightarrow \frac{h^2}{m^2 v^2} = \lambda^2 + \frac{h^2}{m^2 c^2}$

$\rightarrow v^2 = \frac{h^2}{m^2 (\lambda^2 + h^2/m^2 c^2)} \Rightarrow v = \frac{h}{m\sqrt{\lambda^2 + h^2/m^2c^2}}$

Pero la velocidad de fase es:

$$v_p = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{\frac{h}{m\sqrt{\lambda^2 + h^2/m^2c^2}}} = \frac{mc^2 \sqrt{\lambda^2 + h^2/m^2c^2}}{h} = \frac{mc^2 \sqrt{\left(\frac{h^2}{m^2c^2}\right)\left[\frac{\lambda^2 m^2 c^2}{h^2} + 1\right]}}{h}$$

$$= \frac{\left(\frac{h}{mc}\right) mc^2 \sqrt{\frac{\lambda^2 m^2 c^2}{h^2} + 1}}{h} = c\sqrt{\frac{\lambda^2 m^2 c^2}{h^2} + 1}$$

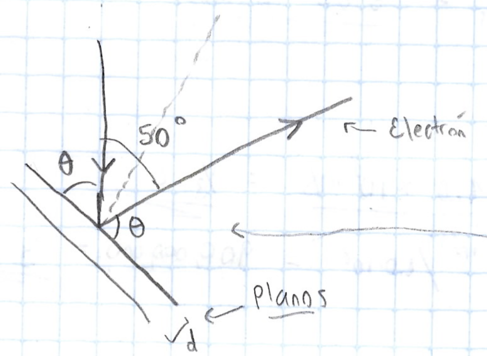
$$= c\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda mc}{h}\right)^2}$$

6. Un haz de electrones de 50 keV se dirige hacia un cristal y se observan electrones difractados a un ángulo de 50°. ¿Cuál es el espaciamiento entre estos planos atómicos del cristal?

Usamos la relación demostrada en (2) para calcular λ (longitud de onda del electrón)

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}$$ con T la energía cinética

Veremos el ángulo de entrada del electrón respecto a los planos:



Queremos calcular el ángulo de incidencia θ

Por la ley de reflexión, el ángulo de entrada es igual al de salida

Entonces, $\theta + 50° + \theta = 180° \rightarrow \theta = 65°$

Luego, por la ley de Bragg, tenemos que $n\lambda = 2d\,\text{sen}\theta$ con d el espaciamiento entre planos

Nos interesa el primer máximo del patrón de difracción (para $n=1$)

$\rightarrow \lambda = 2d\,\text{sen}\theta$

sustituimos λ

$$\rightarrow d = \frac{\lambda}{2\,\text{sen}\theta} = \frac{hc}{2\,\text{sen}\theta\sqrt{T(T+2mc^2)}}$$

reemplazamos

$$= \frac{(6.626\cdot10^{-34}\,J\cdot s)(3\cdot10^{8}\,m/s)}{2\,\text{sen}(65)\sqrt{(50{,}000\,eV)(1.602\cdot10^{-19}\tfrac{J}{eV})\left[(50{,}000\,eV)(1.602\cdot10^{-19}\tfrac{J}{eV}) + 2(9.109\cdot10^{-31}kg)(3\cdot10^{8}m/s)^2\right]}}$$

$$= \boxed{2.95\cdot10^{-12}\,m}$$

Unidades $\frac{(J\cdot s)(m/s)}{\sqrt{J[J]}} = \frac{J\cdot m}{J} = m$

7. La energía más baja posible para cierta partícula confinada en una caja unidimensional es 1.00 eV

a) ¿Cuáles son las dos siguientes energías mayores que podría tener?

Las energías vienen dadas por $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

La primera energía es $E_1 = \frac{1 \cdot h^2}{8mL^2} = 1eV$

Las siguientes energías son:

$$E_2 = \frac{2^2 h^2}{8mL^2} = 4\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) = 4(1eV) = \underline{4eV}$$

$$E_3 = \frac{3^2 h^2}{8mL^2} = 9\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) = 9(1eV) = \underline{9eV}$$

b) Si la partícula es un electrón, ¿cuál es el ancho de la caja?

Tenemos que la primera energía es $E_1 = \frac{1 h^2}{8mL^2} = 1eV$

$$\Rightarrow L^2 = \frac{h^2}{8m(1eV)}$$

$$\rightarrow L = \sqrt{\frac{h^2}{8m_e(1eV)}}$$

Sustituimos: $$L = \sqrt{\frac{(6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s)^2}{8(9.109 \cdot 10^{-31} kg)(1eV)(1.602 \cdot 10^{-19} J/eV)}}$$

$$= \underline{6.133 \times 10^{-10} m}$$

Unidades: $\sqrt{\frac{J^2 s^2}{kg\, J}} = \sqrt{\frac{J s^2}{kg}} = \sqrt{\frac{kg \frac{m^2}{s^2} s^2}{kg}} = \sqrt{m^2} = m$

8. Un protón confinado dentro de una caja unidimensional tiene energía de 400 keV en su primer estado excitado. ¿De qué tamaño es la caja?

Por la ecuación vista en clase, tenemos $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$

El primer estado excitado corresponde a $n=2$ (porque corresponde al primer estado luego del estado base $n=1$)

$$\Rightarrow E_2 = \frac{4h^2}{8mL^2} \quad \Rightarrow \quad E_2 = \frac{1}{2}\frac{h^2}{mL^2}$$

$$\rightarrow L^2 = \frac{1}{2}\frac{h^2}{mE_2} \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{h^2}{mE_2}}$$

Sustituimos: $m_p = 1.672 \cdot 10^{-27}\ kg$

$E_2 = 400{,}000\ eV$

$$\rightarrow L = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s)^2}{(1.672 \cdot 10^{-27} kg)(400{,}000 eV)(1.602 \cdot 10^{-19} J/eV)}}$$

$$= 4.52 \times 10^{-14} m$$

9. a) ¿Qué indica el principio de incertidumbre respecto a la posición y momento de una partícula? ¿Quién lo formuló?

Indica que es imposible saber la posición exacta y momento exacto de un objeto al mismo tiempo.

Más precisamente, indica que si Δx es la indeterminación de la posición y Δp es la indeterminación del momento, entonces:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Es decir, si la indeterminación en la posición Δx es chica, entonces la indeterminación en el momento es muy grande, para que $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ y vice versa

Lo propuso Werner Heisenberg en 1927

9b) ¿La posición y el momento de un electrón de 1 keV son determinadas simultáneamente. Si su posición está ubicada dentro de 0.1 nm ¿Cuál es el porcentaje de incertidumbre en momento?

El momento (no relativista porque $1\ keV << 511\ keV$ ← Energía en reposo) es de $p = \sqrt{2mKE}$

Por el principio de incertidumbre $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, la indeterminación del momento es por lo menos $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$ con $\Delta x = 0.1\,nm$

El porcentaje de incertidumbre en el momento es $\frac{\Delta p}{p}$, que es por lo menos:

$$\rightarrow \frac{\Delta p}{p} \geq \frac{\hbar}{2\Delta x\, p} = \frac{\hbar}{2\,\Delta x \sqrt{2mKE}} = \frac{(1.054 \times 10^{-34}\ J\cdot s)}{2\,(0.1\,nm)\sqrt{2(9.109\cdot 10^{-31}\,kg)(1\,keV)(1.6021\ J/keV)}}$$

$$= 0.031$$

$\Rightarrow$ Incertidumbre del 3.1 %

10 a, ¿Cuánto tiempo se requiere para medir la energía cinética de un electrón, cuya rapidez es 10.0 m/s, con incertidumbre no mayor al 0.100 %.? ¿Cuánta distancia habrá recorrido en ese tiempo?

Por el principio de incertidumbre Energía - Tiempo $\Delta E \, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t}$

Pero la incertidumbre porcentual es de por lo menos $\frac{\Delta E}{E} \geq \frac{\hbar}{2E\Delta t} = 0.001$

Incertidumbre de 0.1%

$\Rightarrow \frac{\hbar}{2E\Delta t} = 0.001 \rightarrow \Delta t = \frac{\hbar}{2E(0.001)}$

$\rightarrow \Delta t = \frac{\hbar}{2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)(0.001)} = \frac{\hbar}{mv^2(0.001)}$ Como $10 \, m/s << 3\cdot10^8 \, m/s$, $\Rightarrow$ sin relatividad $\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2$

Sustituimos: $\Delta t = \frac{(1.054\times10^{-34} \, J\cdot s)}{(9.109\cdot10^{-31} \, kg)(10 \, m/s)^2 (0.001)} = 1.16\times10^{-3} \, s$

Y la distancia que recorre en ese tiempo $v\Delta t = (10 \, m/s)(1.16\cdot10^{-3} \, s) = 1.16\cdot10^{-2} \, m$

b) Repita los cálculos del inciso anterior para un insecto de 1.00 g y misma rapidez.

Por los cálculos de antes, tenemos que $\Delta t = \frac{\hbar}{mv^2(0.001)}$

Sustituimos $\Delta t = \frac{(1.054\cdot10^{-34} \, J\cdot s)}{(1\times10^{-3} \, kg)(10 \, m/s)^2(0.001)} = 1.06\times10^{-30} \, s$

Y la distancia que recorre es este tiempo es $v\Delta t = (10 \, m/s)(1.06\cdot10^{-30} \, s) = 1.06\cdot10^{-29} \, s$