Óptica Tarea 8

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

13 de septiembre de 2020

Ejercicio 8.2: Considere la perturbación dada por la expresión $E(z,t) = [\widehat{i}\cos\omega t + \widehat{j}\cos(\omega t - \pi/2)]E_0 \sin kz$. **¿Qué clase de onda es? Trace un esquema aproximado mostrando sus características principales.**

Usando que $\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$, podemos reescribir la perturbación como:

$$(\widehat{i}\cos\omega t + \widehat{j}\sin\omega t)E_0 \sin kz$$

Si dejamos $t = t_0$ fijo, podemos darnos una idea de cómo se ve la onda en un instante dado. En este momento, la curva se ve como $(\widehat{i}\cos\omega t_0 + \widehat{j}\sin\omega t_0)E_0 \sin kz$.
El vector $(\widehat{i}\cos\omega t_0 + \widehat{j}\sin\omega t_0)$ es un vector en el plano xy y para este tiempo t_0 es un vector fijo.
Luego, se multiplica por $E_0 \sin kz$, lo que crea una curva sinusoidal en el plano dado por el vector $(\widehat{i}\cos\omega t_0 + \widehat{j}\sin\omega t_0)$ y el eje z. En la figura 1 se ve este vector $(\widehat{i}\cos\omega t_0 + \widehat{j}\sin\omega t_0)$ para un tiempo arbitrario t_0 fijo y la curva correspondiente, es decir, se muestra el perfil de onda para un tiempo t_0 fijo.

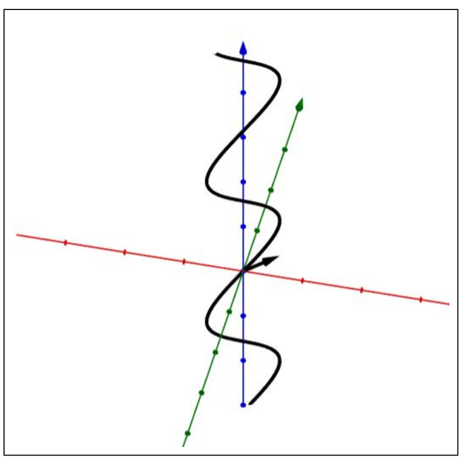

Figura 1: Curva en un instante t_0

Luego, conforme pasa el tiempo, el vector $(\widehat{i}\cos\omega t_0 + \widehat{j}\sin\omega t_0)$ gira en sentido antihorario en el plano xy (porque $(\cos\omega t, \sin\omega t)$ parametriza un círculo en dirección antihoraria). Y entonces, conforme pasa el tiempo, el perfil de onda como se ve en la figura 1 irá rotando con respecto al eje z.

Por tanto, se tiene una onda con polarización circular en sentido antihorario.

Además, es una onda estacionaria, ya que en la expresión $(\widehat{i}\cos\omega t + \widehat{j}\sin\omega t)E_0 \sin kz$ vemos que la variable z y t están "separadas". Y que los puntos z en los que la onda tiene un mínimo (aquéllos con $kz = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$), permanecen fijos conforme pasa el tiempo. Y como se dijo antes, la onda se ve como en la figura 1 y conforme pasa el tiempo, lo único que hace es rotar con respecto al eje z.

Ejercicio 8.5: Escriba una expresión para una onda luminosa de estado P con frecuencia angular ω y amplitud E_0 propagándose a lo largo de una línea en el plano xy a 45^o respecto al eje x, cuyo plano de vibración esté en el plano xy. En $t = 0, y = 0, x = 0$ el campo es cero.

Primero nos fijamos en la dirección de propagación, como es de 45^o con respecto al eje x, la dirección de propagación unitaria es de $\cos 45^o \widehat{i} + \sin 45^o \widehat{j} = (\widehat{i} + \widehat{j})/\sqrt{2}$
Luego, el vector $\vec{k}$ de propagación tiene esta dirección y tiene magnitud k, por tanto:

$$\vec{k} = k(\widehat{i} + \widehat{j})/\sqrt{2}$$

Donde $k = \omega/c$ es el número de propagación.

Ahora nos fijamos en su vibración. La dirección de la vibración se encuentra en el plano xy por lo que dice el problema. Y esta dirección de vibración también debe de ser perpendicular a $\vec{k}$ porque las ondas electromagnéticas son transversales.
Entonces, necesitamos el vector perpendicular a $(\widehat{i}+\widehat{j})/\sqrt{2}$ y que se encuentre en el plano xy. El vector con estas propiedades es $(\widehat{i} - \widehat{j})/\sqrt{2}$. Se puede ver que este vector es perpendicular a $(\widehat{i} + \widehat{j})/\sqrt{2}$ al calcular el producto punto y ver que vale 0.

Entonces, el vector que indica la dirección de vibración es:

$$\vec{E}_0 = E_0(\widehat{i} - \widehat{j})/\sqrt{2}$$

Finalmente, por la expresión general de una onda, la ecuación es:

$$\begin{aligned} &\vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon) = \\ &\qquad = E_0(\widehat{i} + \widehat{j})/\sqrt{2} \sin[(k(\widehat{i} + \widehat{j})/\sqrt{2}) \cdot (x, y, z) - \omega t + \epsilon] \\ &\qquad = E_0 \frac{\widehat{i} + \widehat{j}}{\sqrt{2}} \;\; \sin\left[k\frac{x+y}{\sqrt{2}} - \omega t + \epsilon\right] \end{aligned}$$

Para que se cumpla la condición de que el campo es 0 en $t = 0, y = 0, x = 0$, vemos por la expresión anterior, que se debe de cumplir que $\sin(\epsilon) = 0$, con lo cual, tenemos que $\epsilon = 0$.

Entonces, la expresión final es:

$$E_0 \frac{\widehat{i} + \widehat{j}}{\sqrt{2}} \;\; \sin\left[k\frac{x+y}{\sqrt{2}} - \omega t\right]$$

Ejercicio 8.7: Un haz de luz polarizada linealmente con su campo eléctrico vertical incide perpendicularmente en un polarizador lineal con un eje de transmisión vertical. Si la irradiancia del haz incidente es de 200 W/m^2, ¿Cuál es la irradiancia del haz transmitido?

Por la ley de Malus, si una onda polarizada linealmente incide en un polarizador cuyo eje de transmisión forma un ángulo θ con respecto a la polarización de la onda, entonces la irradiancia despúes de pasar por el polarizador es de:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2(\theta)$$

Donde I_0 es la irradiancia antes de pasar por el polarizador y $I(\theta)$ es la irradiancia final.
En este caso, la polarización de la onda entrante es igual al eje del polarizador y por tanto $\theta = 0$.
Por lo tanto, la irradiancia final es:
$I(0) = I_0 \cos^2(0) = I_0 = 200W/m^2$.

Ejercicio 8.11: La irradiancia de un haz de luz natural es de $400W/m^2$. Incide en el primero de dos polarizadores lineales ideales consecutivos cuyos ejes de transmisión están a una distancia de 40^o. ¿Cuánta luz emergerá de los dos?

Antes del primer polarizador, la onda incidente es natural, lo que significa que no está polarizada en ninguna dirección en particular. Luego, al pasar por el primer polarizador, la luz natural no tiene ninguna preferencia de polarización por lo que intuitivamente, la mitad de la luz atraveserá el polarizador y la otra mitad no, con lo que la intensidad después del primer polarizador es de $400W/m^2/2 = \mathbf{200W/m^2}$.

Otra forma de obtener este resultado, es imaginar a la luz natural como una combinación de todas las posibles polarizaciones lineales. Es decir, la luz natural está formada por todas las polarizaciones con ángulo θ respecto al eje de polarización del primer polarizador.
Al pasar por el primer polarizador, cada una de estas componentes sale con una energía proporcional a $\cos^2\theta$ según la ley de Malus y sale orientada paralela al eje de polarización del primer polarizador.
Luego, al juntar todas las componentes que forman a la luz natural, la intensidad resultante será proporcional al promedio de todas estas componentes, es decir $\langle\cos^2\theta\rangle_{\theta\in[0,2\pi]}$. Como hemos visto antes en clase, este promedio es 1/2 y por tanto, la intensidad despúes del primer polarizador es la mitad de la original y el valor es por tanto $400W/m^2/2 = \mathbf{200W/m^2}$.

Luego, la luz llega al segundo polarizador con una intensidad de $200W/m^2$ y polarizada con un ángulo de 40^o respecto al segundo polarizador. Luego, según la ley de Malus, la irradiancia que sale del segundo polarizador es:

$$\begin{aligned} I(\theta) = I_0 \cos^2(40^o) = & \\ & = (200W/m^2)(0{,}5868) = \mathbf{117{,}36W/m^2} \end{aligned}$$

.

Ejercicio 8.13: La luz producida por una linterna normal se hace pasar a través de un polarizador lineal con eje de transmisión vertical. El haz resultante, con una irradiancia de $200W/m^2$, incide normalmente en un polarizador lineal vertical HN-50 cuyo eje está desplazado 30^o encima del plano horizontal. ¿Cuánta luz se transmite?

La denotación HN-50 se define como un polarizador que deja pasar el 50 % de la luz no polarizada que llega. Por lo visto en la primera parte del ejercicio 8.11, esto es también lo que hace un polarizador ideal. Entonces, un polarizador HN-50 es un polarizador ideal y podemos usar la ley de Malus para calcular la luz que pasa por el polarizador.

La luz entrante al HN-50 tiene intensidad de $200W/m^2$ y está polarizada verticalmente por haber pasado por el primer polarizador.
Luego, como el segundo polarizador hace un ángulo de 30^o respecto a la horizontal, el ángulo entre la luz que entrante (que es vertical) y el eje del segundo polarizador es de 60^o.
Entonces, según la ley de Malus, la intensidad resultante es:

$$I(60) = I_0 \cos^2(60) = 200W/m^2(1/2)^2 = \mathbf{50W/m^2}$$

.

Ejercicio 8.17: Imagine que dispone de dos polarizadores lineales perfectos idénticos y una funete de luz natural. Colóquelos uno tras otro, posicionando su eje a 0^o y a 50^o respectivamente. Ahora, inserte entre ellos dos un tercer polarizador cuyos ejes de transmisión se hallan a 25^o. Si incide una cantidad de luz de $1000W/m^2$, ¿Cuánta energía emergerá con y sin el polarizador del medio?

Sin el polarizador de enmedio:
Por el principio del ejercicio 8.11, cuando la luz no polarizada de intensidad I_0 llega al primer polarizador (que está a 0^o), sale con una intensidad $I_1 = I_0/2$ y polarizada a 0^o.
Luego, al llegar al segundo polarizador (que hace un águlo de 50^o respecto a la luz), la intensidad resultante se calcula por la ley de Malus como:

$$I_2 = I_1 \cos^2(50^o) = \frac{I_0}{2}\cos^2(50) = \frac{1000}{2}\cos^2(50) = \mathbf{206{,}58W/m^2}$$

Con el polarizador de enmedio:
La luz llega al primer polarizador con intensidad I_0, luego, al igual que en el ejercicio anterior, sale de este polarizador con potencia $I_1 = I_0/2$ y polarizada a 0^o.
Luego, llega al segundo polarizador (el de 25^o) y por la ley de Malus, sale con una intensidad de $I_2 = I_1 \cos^2(25^o) = I_0/2 \cos^2(25^o) \quad (1)$.
Luego, llega con una polarización a 25^o al tercer polarizador (el de 50^o) y por tanto con una

diferencia de ángulo de 25^o respecto al polarizador, por lo que la intensidad final es:

$$\begin{aligned} I_3 &= I_2 \cos^2(25^o) \\ &= I_0/2 \cos^2(25^o) \cos^2(25^o) \quad \text{por (1)} \\ &= \frac{I_0}{2} \cos^4(25^o) \\ &= \frac{1000W/m^2}{2}(0{,}9063)^4 = 337{,}34\ W/m^2 \end{aligned}$$