Tarea 1
Física Nuclear y Subnuclear Tarea 2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

April 1, 2022

Problema 1. Desintegración

Se ha encontrado que una muestra de óxido de uranio (U_3O_8), recién preparado a partir de un mineral de uranio, emite 20.5 partículas α por mg y por segundo. Si tenemos que $\lambda_{238} = 4.8 \times 10^{-18} s^{-1}$, ¿Es posible una muestra de $1mg$?

Para empezar, tomaremos el valor de λ que nos dan y la actividad que nos dicen que tiene la muestra para calcular el número de moléculas de óxido de uranio que debe de tener una muestra de $1mg$. Para ello, usamos la ecuación vista en clase que relaciona la actividad A con el número de núcleos radiactivos:

$$A = \lambda N_U.$$

La actividad A es la cantidad de decaimientos por segundo que tiene la muestra y el problema nos dice que tiene un valor de 20.5, mientras que N_U es la cantidad de átomos de uranio en la muestra. Por lo tanto, concluimos que la cantidad de átomos de uranio que debe de tener la muestra para producir esta actividad es de

$$N_U = \frac{A}{\lambda} = \frac{20.5}{4.8 \times 10^{-18} s^{-1}} = 4.27083 \times 10^{18}$$

Luego, podemos calcular la cantidad de moléculas que hay en la muestra de óxido. Cada molécula tiene 3 átomos de uranio, por lo que la cantidad de moléculas es:

$$N_m = N_U/3 = 1.42361 \times 10^{18}$$

Sin embargo, este dato contradice el hecho de que tenemos una muestra de $1mg$. Pues si calculamos la masa que tienen $N_m = 1.42361 \times 10^{18}$ moléculas de U_3O_8, obtendremos un resultado mayor. Esto se puede ver considerando que la masa de cada molécula es $(238u)(3) + (16u)(8) = 842u$. Y por lo tanto, la masa de N_m moléculas es $1.42361 \times 10^{18}(842u) = 1.19868 \times 10^{21}u$. Sustituyendo el valor de u, esto nos da una masa de $1.19868 \times 10^{21}(1.66054 \times 10^{-27}kg) = \boxed{1.99mg}$.

Es decir, para que una muestra de U_3O_8 produzca 20.5 partículas α, se requieren $1.99mg$, casi el doble del $1mg$ mencionado. Esto puede significar que la muestra que se menciona es más activa de lo esperado por alguna razón, como podría ser que no sea U_3O_8 puro, sino que siga incluyendo átomos libres de U.

Problema 2. Radiactividad

Un pequeño edificio se ha contaminado accidentalmente con radiactividad. El material más longevo del edificio es el estroncio-90. ($^{90}_{38}Sr$ tiene una masa atómica de $89.9077u$ y su vida media es de 29.1 años, es particularmente peligroso porque sustituye al calcio en los huesos). Suponga que el edificio inicialmente contenía $5.00kg$ de esta sustancia uniformemente distribuida por todo el edificio y que el nivel seguro se define como menos de 10 decaimientos / min (para ser pequeño en comparación con la radiación de fondo). ¿Cuánto tiempo será inseguro el edificio?

Para empezar, en clase vimos que si $N(t)$ es el núero de núcleos radiactivos a un tiempo t, se sigue la ecuación diferencial:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

donde A es la **actividad** (número de decaimientos por unidad de tiempo) y λ es una constante conocida como **constate de decaimiento.** Esta ecuación diferencial se puede resolver directamente, pues es fácil ver que la solución tiene que ser una exponencial negativa y en clase llegamos a que esta solución es:

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}.$$

Por lo tanto, nos queda que la actividad como función del tiempo es:

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N(0)e^{-\lambda t} \qquad (1)$$

Queremos calcular el tiempo t para el cual la actividad es de 10 decaimientos por minuto (es decir, 1/6 decaimientos por segundo). Para ello, vamos a necesitar despejar t en función de A en la expresión (1), lo cual se consigue fácilmente como sigue:

$$\begin{aligned} A &= \lambda N(0)e^{-\lambda t} \\ \Rightarrow\ \frac{A}{\lambda N(0)} &= e^{-\lambda t} \\ \Rightarrow\ \ln\left(\frac{A}{\lambda N(0)}\right) &= -\lambda t \\ \Rightarrow\ t &= -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{A}{\lambda N(0)}\right) \qquad (2) \end{aligned}$$

Para usar esta expresión, necesitaremos calcular $N(0)$ y λ con los datos que nos dan:

- $N(0)$: Es la cantidad de núcleos radiactivos que hay al tiempo $t = 0s$. Nos dicen que se tienen $5kg$ de $^{90}_{38}Sr$ y que cada núcleo tiene una masa de $89.9077u = 89.9077(1.6605 \times 10^{-27}kg) = 1.49292 \times 10^{-25}kg$. Por lo tanto, por una simple regla de 3, la cantidad de núcleos a tiempo $t = 0s$ es:

$$N(0) = \frac{5kg}{1.49292 \times 10^{-25}kg} = 3.34915 \times 10^{25} \text{ Núcleos}$$

- λ: Nos dicen que la vida media es $t_{1/2} = 29.1$ años, lo cual es igual a $29.1 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 9.17698 \times 10^8 s$. Luego, usando la relación que vimos en clase entre la vida media y la constante de decaimiento, $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ podemos concluir que:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{9.17698 \times 10^8 s} = 7.55311 \times 10^{-10} s^{-1}$$

- A: El problema nos dice que queremos el tiempo para el cual A es de 1/6 decaimientos por segundo.

Sustituimos todo esto en la expresión (2) para obtener t:

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{A}{\lambda N(0)}\right) \\ &= -\frac{1}{7.55311 \times 10^{-10} s^{-1}} \ln\left(\frac{1/6\ s^{-1}}{(7.55311 \times 10^{-10} s^{-1})(3.34915 \times 10^{25})}\right) \\ &= \boxed{5.23774 \times 10^{10} s} \end{aligned}$$

Podemos convertir esta expresión a años dividiendo por $60 \times 60 \times 24 \times 365$ y nos queda que el tiempo es:

$$\boxed{t = 1660.88 \text{ años}}$$

Problema 3. Desintegración Radiactiva

1. **La cadena radiactiva del ^{232}Th conduce al ^{208}Pb estable. Se dispone de una roca que contiene $3.65g$ de ^{232}Th y $0.75g$ de ^{208}Pb. ¿Cuál será la edad de la roca deducida a partir de la relación Th/Pb? $T_{1/2} = 27$ días.**

   Primero suponemos que todos los átomos de plomo en la roca se deben al decaimiento del torio para así poder hacer el datamiento con sólo la información que se nos da. Luego, a tiempo $t = 0$ (cuando se creó la roca), la cantidad de átomos de Th era igual a $N_{0Th} = N_{Th} + N_{Pb}$, donde N_{Th} es igual a la cantidad de átomos de torio a tiempo t (que corresponde al presente, cuando estamos estudiando la roca) y N_{Pb} los de plomo. Se cumple que $N_{0Th} = N_{Th} + N_{Pb}$, porque como dijimos antes, suponemos que todos los átomos de plomo eran originalmente torio.

   Luego, por la ecuación de decaimiento que vimos en clase, la cantidad de núcleos de torio restantes a tiempo t (el tiempo en el que estamos observando la roca después de su creación) es igual a:

   $$N_{Th} = N_{0Th}e^{-\lambda t}$$

   En partitular, usando que $N_{0Th} = N_{Th} + N_{Pb}$, nos queda que:

   $$N_{Th} = (N_{Th} + N_{Pb})e^{-\lambda t}$$

   Luego, despejamos el tiempo t, para saber la edad de la roca:

   $$\begin{aligned} e^{\lambda t} &= \frac{N_{Th} + N_{Pb}}{N_{Th}} \\ \Rightarrow\ t &= \frac{1}{\lambda}\ln\left(1 + N_{Pb}/N_{Th}\right) \\ \Rightarrow\ t &= \frac{t_{1/2}}{\ln 2}\ln\left(1 + N_{Pb}/N_{Th}\right) \end{aligned}$$

   donde al final se usó la relación entre λ y tiempo de vida medio $t_{1/2}$ vista en clase. Con esto ya tenemos la edad de la roca a partir de la relación Th/Pb.

   Podemos encontrar el resultado numérico para este problema en particular. Primero calculamos el número de átomos de cada elemento según el enunciado:

   - Th: Nos dicen que hay $3.65g$ de torio. El torio tiene una masa atómica de $232u$, por lo tanto, convirtiendo u a kg, concluimos que cada átomo de torio pesa $3.85245 \times 10^{-25}kg$. Luego, para juntar $3.65g$ se requieren $N_{Th} = 9.4745 \times 10^{21}$ átomos.
   - Pb: Nos dicen que hay $0.75g$ de plomo. El plomo tiene una masa atómica de 208, por lo tanto, convirtiendo u a kg, concluimos que cada átomo de plomo pesa $3.45392 \times 10^{-25}kg$. Luego, para juntar $0.75g$ se requieren $N_{Pb} = 2.17144 \times 10^{21}$ átomos.

   Finalmente sustituimos en la ecuación a la que habíamos llegado para calcular t:

   $$\begin{aligned} t &= \frac{t_{1/2}}{\ln 2}\ln\left(1 + N_{Pb}/N_{Th}\right) \\ &= \frac{29 \text{ días}}{\ln 2}\ln\left(1 + 2.17144 \times 10^{21}/9.4745 \times 10^{21}\right) \\ &= 8.63347 \text{ días.} \end{aligned}$$

2. **Entre los productos radiactivos que se emiten en un accidente nuclear, están el ^{131}I ($T_i = 8$ días) y el ^{137}Cs (T_{Cs} =30 años). Hay unas 5 veces más átomos de ^{137}Cs que de ^{131}I producidos en la fisión**

   a) **¿Al cabo de cuánto tiempo a partir del accidente tendrán la misma actividad?**

   Usaremos la ecuación para la actividad que vimos en clase. Si una sustancia inicia consistiendo de N_0 átomos, después de un tiempo t su actividad será de:

   $$A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

   Escribimos esta actividad para el Cesio y el Yodo:

   $$A_{Cs}(t) = \lambda_{CS} N_{0Cs} e^{-\lambda_{CS} t} \quad , \quad A_I(t) = \lambda_I N_{0I} e^{-\lambda_I t}$$

   El enunciado nos pide buscar el tiempo en el que estas actividades sean iguales, por lo que igualamos ambas expresiones y despejamos el tiempo:

   $$\begin{aligned} A_{Cs}(t) &= A_I(t) \\ \Rightarrow \lambda_{Cs} N_{0Cs} e^{-\lambda_{Cs} t} &= \lambda_I N_{0I} e^{-\lambda_I t} \\ \Rightarrow \frac{\lambda_{Cs}}{\lambda_I} \frac{N_{0Cs}}{N_{0I}} &= e^{(-\lambda_I + \lambda_{Cs})t} \\ \Rightarrow t &= \frac{1}{\lambda_{Cs} - \lambda_I} \ln \left(\frac{\lambda_{Cs}}{\lambda_I} \frac{N_{0Cs}}{N_{0I}} \right) \\ \Rightarrow t &= \frac{1}{\lambda_{Cs} - \lambda_I} \ln \left(\frac{5\lambda_{Cs}}{\lambda_I} \right) \end{aligned}$$

   donde al final usamos que el número de átomos de Cesio al inicio era 5 veces más que el de Yodo. Finalmente, sustituimos las constantes de decaimiento, que como vimos en clase, se pueden conseguir a partir de la vida media como $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$, por lo que nos queda:

   $$\Rightarrow t = \frac{1}{\ln 2/t_{Cs} - \ln 2/t_I} \ln \left(\frac{5t_I}{t_{Cs}} \right)$$

   Sustituimos ahora los tiempos que nos dan en el enunciado (en segundos):

   $$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\ln 2(1/(9.46 \times 10^8 s) - 1/(6.91 \times 10^5 s))} \ln \left(\frac{5 \cdot 6.91 \times 10^5 s}{9.46 \times 10^8 s} \right) \\ &= \boxed{5.6005 \times 10^6 s} \end{aligned}$$

   Este resultado es aproximadamente igual a 65 días.

   b) **¿Qué isótopo contribuye con mayor actividad a la nube radiactiva, transcurrido el primer día? Suponer que el reactor está operando durante varios días antes de producirse el accidente.**

   Como se mencionó en el inciso anterior y vimos en clase, la actividad como función del tiempo se calcula usando la ecuación

   $$A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

con λ el coeficiente de decaimiento. Calculamos ahora la actividad para ambos isótopos después de un día:

$$A_{Cs}(1\text{día}) = \lambda_{Cs} N_{0Cs}\ e^{-\lambda_{Cs}(1\text{ día})}$$
$$A_I(1\text{día}) = \lambda_I N_{0I}\ e^{-\lambda_I(1\text{ día})}$$

Necesitamos calcular el coeficiente de desintegración de ambos isótopos, que se calcula como $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$, y nos da como resultado en cada caso: $\lambda_{Cs} = \frac{\ln 2}{30\text{años}} = 7.32652 \times 10^{-10} s^{-1}$ y $\lambda_I = \frac{\ln 2}{8\text{días}} = 1.0028 \times 10^{-6} s^{-1}$. Entonces nos queda que la actividad después de un día es:

$$A_{Cs}(1\text{día}) = (7.32652 \times 10^{-10} s^{-1}) N_{0Cs} e^{-(7.32652\times 10^{-10} s^{-1})(1\text{día})} = 7.32606 \times 10^{-10} s^{-1} N_{0Cs}$$
$$A_I(1\text{día}) = (1.0028 \times 10^{-6} s^{-1}) N_{0I} e^{-(1.0028\times 10^{-6} s^{-1})(1\text{día})} = 9.19572 \times 10^{-7} s^{-1} N_{0I}$$

Para ver cuál es mayor, podemos dividir la actividad de Cesio entre la del Yodo y usar que la cantidad de átomos de Cesio inicial es 5 veces la de Yodo y nos queda:

$$\frac{A_{Cs}(1\text{día})}{A_I(1\text{día})} = \frac{7.32606 \times 10^{-10} s^{-1} N_{0Cs}}{9.19572 \times 10^{-7} s^{-1} N_{0I}} = \frac{7.32606 \times 10^{-10} s^{-1}}{9.19572 \times 10^{-7} s^{-1}}(5) = 0.00398$$

Por lo tanto, la actividad del cesio después de un día es mucho menor a la del yodo (es aproximadamente un 0.4% de la del yodo).

c) **De los productos de fisión, aproximadamente el 1% es ^{131}I y cada fisión produce $200MeV$. Suponiendo el reactor con una potencia de $1000MW$, calcular la actividad del ^{131}I después de $24h$ de operación.**

Nos dicen que el reactor tiene una potencia de $1000MW$ y que cada fusión produce $200Mev$, con lo cual podemos calcular la cantidad de fisiones que suceden en 24 horas.
Para empezar, en 24 horas un reactor de $1000MW$ produce una cantidad de energía $1000MW(24\times 60\times 60s) = 8.64\times 10^{13}J$.

Por otro lado, nos dicen que cada fisión produce $200MeV = 3.204353\times 10^{-11}J$ de energía. Entonces, para generar los $8.64\times 10^{13}J$ que produce la planta, la cantidad de fisiones necesaria es:

$$\text{Número de Fisiones} = \frac{8.64\times 10^{13}J}{3.204353\times 10^{-11}J} = 2.69633\times 10^{24}$$

Luego, para calcular la cantidad de ^{131}I creado, usamos que el 1% de los productos de la fisión son yodo, por lo que el número de átomos de yodo creados en un día es:

$$N_I = 0.01(2.69633\times 10^{24}) = 2.69633\times 10^{22}$$

Finalmente, podemos calcular la actividad de este yodo usando la ecuación vista en clase $A = \lambda N$, con lo que concluimos que:

$$A = \lambda_I N_I = \frac{\ln 2}{8\text{días}}(2.69633\times 10^{22}) = \boxed{2.70393\times 10^{16} s^{-1}}$$

Problema 4. Ruptura del Núcleo

Suponga que un núcleo de uranio se rompe espontáneamente en dos partes aproximadamente iguales. Estime la reducción de la energía electrostática de los núcleos. ¿Cuál es la relación de esto con el cambio total de energía? (Suponga una distribución de carga uniforme; radio nuclear $= 1.2 \times 10^{-13} A^{1/3} cm$)

Sabemos que el núcleo de uranio tiene $Z_U = 92$ protones y $A_U = 238$ nucleones (tomando el isótopo más común según [3]). Si se separa en dos partes iguales, los núcleos resultantes tendrán $Z = \frac{1}{2} Z_U = 46$ y $A = \frac{1}{2} A_U = 119$.

Vamos a calcular la energía electrostática del núcleo inicial de Uranio y la de los dos núcleos que salen como productos de su rompimiento. Para hacerlo, necesitaremos una expresión para la energía electrostática de un núcleo con radio R y carga Q. Como dice el enunciado, supondremos que la distribución de carga en el núcleo es uniforme, por lo que se puede aproximar como una esfera cargada uniformemente con carga Q y radio R. Calculamos ahora la energía de una esfera con estas características.

Para calcular esta energía, primero necesitamos utilizar que el campo eléctrico de esta esfera es de

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{r}{R^3}\,\hat{r} & (r < R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{1}{r^2}\,\hat{r} & (r > R) \end{cases}$$

Estos resultados se pueden comprobar sencillamente usando la ley de Gauss, que dice que el flujo de campo eléctrico en una superficie cerrada es igual a Q_{in}/ϵ_0 con Q_{in} la carga en el interior.
Para puntos $r < R$, proponemos como superficie Gaussiana una esfera de radio r, luego, como el campo eléctrico tiene que ser radial por simetría, su flujo en esta superficie es $|E(r)| \cdot \text{Área} = E(r) \cdot 4\pi r^2$. Por otro lado, dentro de esta superficie se tiene un volumen de $4\pi r^3/3$ ocupado por la distribución uniforma de carga de la esfera, que tiene una densidad de $\rho = Q/(4/3\pi R^3) = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}$. Por lo tanto, la carga contenida dentro de la superficie Gaussiana es $Q_{in} = \rho \cdot (4\pi r^3/3) = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}\dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{Qr^3}{R^3}$. Finalmente, por la ley de Gauss, el flujo $|E(r)| \cdot 4\pi r^2$ tiene que ser igual a Q_{in}/ϵ_0, que es $\dfrac{Qr^3}{R^3\epsilon_0}$. Igualando estas expresiones y despejando, llegamos a que $|E(r)| = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{r}{R^3}$.
Para puntos $r > R$, proponemos como superficie Gaussiana una esfera de radio r. Al igual que antes, por simetría radial del campo eléctrico debido a la simetría del problema, el flujo por esta superficie debe de ser $|E(r)| \cdot 4\pi r^2$. Por otro lado, esta superficie contiene a toda la esfera de carga, por lo que la carga contenida es $Q_{in} = Q$. Finalmente, usando la ley de Gauss tenemos que $|E(r)| \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow |E(r)| = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\hat{r}$.

Finalmente, para calcular la energía electrostática, usamos que ésta se puede calcular a partir del campo eléctrico como $U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{espacio} E^2 dV$ y sustituimos la expresión del campo a la que habíamos llegado:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_{espacio} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^\infty E^2(r)\, 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\left[\int_0^R \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr\right] \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left[\int_0^R \frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^2}\right] \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{5R} + \frac{1}{R}\right] = \boxed{\frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}} \end{aligned}$$

Teniendo ya la expresión para la energía electrostática de una esfera uniformemente cargada, podemos calcularla para el átomo de Uranio (que tiene $Z_u = 92$ protones y $A_u = 238$ nucleones) y tendremos que $U_u = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R_u} = \frac{3(Z_u e)^2}{20\pi\epsilon_0(1.2\times 10^{-15}A_u^{1/3}m)}$. Mientras que para cada uno de los dos átomos resultantes (que tienen $Z = 46$ protones y $A = 119$ nucleones) tienen energía electrostática de $U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R_u} = \frac{3(Ze)^2}{20\pi\epsilon_0(1.2\times 10^{-15}A^{1/3}m)}$. Por lo tanto, la diferencia entre estas energía es:

$$\begin{aligned}
\Delta U &= U_u - 2U \\
&= \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R_u} = \frac{3(Z_u e)^2}{20\pi\epsilon_0(1.2\times 10^{-15}A_u^{1/3}m)} - 2\frac{3(Ze)^2}{20\pi\epsilon_0(1.2\times 10^{-15}A^{1/3}m)} \\
&= \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0(1.2\times 10^{-15}m)}\left(\frac{Z_u^2}{A_u^{1/3}} - 2\frac{Z^2}{A_u^{1/3}}\right) \\
&= \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0(1.2\times 10^{-15}m)}\left(\frac{92^2}{238^{1/3}} - 2\frac{46^2}{119^{1/3}}\right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de e y ϵ_0 que se pueden consultar en [1], nos queda:

$$\begin{aligned}
\Delta U &= \frac{3(1.602176\times 10^{-19}C)^2}{20\pi(8.854187\times 10^{-12}C^2N^{-1}m^{-2})(1.2\times 10^{-15}m)}\left(\frac{92^2}{238^{1/3}} - 2\frac{46^2}{119^{1/3}}\right) \\
&= 5.82993\times 10^{-11}J \\
&= \boxed{364MeV}
\end{aligned}$$

Es decir, el átomo de Uranio tiene aproximadamente $364MeV$ más de energía que los dos átomos que se producen si se separa. Esta diferencia en energía es una de las razones por las que se libera energía cuando se fisiona el uranio. Sin embargo, si quisiéramos calcular la energía que se libera en la fisión, habría que considerar otras diferencias en energías entre el uranio y los dos productos, tal como el término superficial, el de emparejamiento y los otros que vimos en clase y se encuentran en [2].

Problema 5. Desintegración β

El tritio, el isótopo $3H$, sufre desintegración beta con una vida media de 12.5 años. Una muestra enriquecida de gas hidrógeno que contiene 0.1 gramos de tritio produce 21 calorías de calor por hora.

a) **Para estos datos, calcule la energía promedio de las partículas β emitidas.**

Primero calcularemos la cantidad de partículas beta que se producen en una hora, sabiendo que se tienen 0.1 gramos de tritio y que tiene una vida media de $t_{1/2} = 12.5$ años. Luego, sabemos que esta cantidad de partículas beta producen 21 calorías en una hora, con lo que podremos calcular la energía de cada partícula.

Para calcular la cantidad de partículas beta que se producen en una hora, necesitamos conocer la actividad (que es la cantidad de decaimientos por unidad de tiempo) y vimos en clase que se define como:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

donde λ es la constante de decaimiento y N el número de partículas. En general, a lo largo de la hora que estamos observando al Tritio, la actividad cambia (porque cambia el número N de partículas de Tritio). Sin embargo, como una hora es un tiempo mucho menor a la vida media, podemos aproximar que N es prácticamente constante a lo largo de la hora. Por lo tanto, para calcular A, necesitamos antes conocer λ y N:

- λ: La constante λ se relaciona con el tiempo de vida medio $t_{1/2}$ como vimos en clase según $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, por lo que tenemos que:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{(12.5\text{años})} = \frac{\ln 2}{3.942 \times 10^8 s} = 1.75836 \times 10^{-9} s^{-1}$$

- N: Tenemos que la masa de tritio es $0.1g = 1 \times 10^{-4} kg$. Además, la masa de cada núcleo del tritio se puede consultar en [3] y tiene un valor de $3.01605u = 3.01605(1.66054 \times 10^{-27} kg) = 5.00827 \times 10^{-27} kg$. Por lo tanto, la cantidad de núcleos de tritio en $0.1g$ es de:

$$N = \frac{10^{-4} kg}{5.00827 \times 10^{-27} kg} = 1.9967 \times 10^{22} \text{ núcleos}$$

Por lo tanto, la actividad es de:

$$A = \lambda N = (1.75836 \times 10^{-9} s^{-1})(1.9967 \times 10^{22}) = 3.5109 \times 10^{13} \text{ decaimientos / s}$$

En cada decaimiento se libera una partícula β, por lo tanto, la cantidad de partículas beta producidas en una hora es de:

$$3.51092 \times 10^{13} (60)(60) = 1.2639 \times 10^{17} \text{ partículas beta por hora}$$

Sabemos que la energía de estas partículas β genera 21 calorías de calor en una hora (que son $5.484 \times 10^{20} eV$). Por lo tanto, cada partícula β produce un calor de aproximadamente:

$$\text{Energía promedio de las partículas } \beta = \frac{5.484 \times 10^{20} eV}{1.2639 \times 10^{17}} = \boxed{4338.8 eV}$$

b) **Dar un análisis cuantitativo crítico de cómo se puede usar una medición cuidadosa del espectro beta del tritio para determinar (o poner un límite superior) la masa del neutrino del electrón.**

La desintegración beta del tritio sigue la reacción:

$$^{3}_{1}H \rightarrow ^{3}_{2}He + e^{-} + \overline{\nu}_e$$

Según el resultado

Problema 6. Desintegración β, 2.

Un cierto número de núcleos pueden desintegrarse por emisión de un electrón, por emisión de un positrón o por captura electrónica. El ^{64}Cu es uno de tales núcleos. A partir de las masas atómicas, calcular:

a) **Las energías cinéticas máximas del β^+ y del β^-**

b) **La energía del neutrino en la captura del electrón**

Problema 7. Desintegración α

El ^{238}Pu se desintegra por emisión α según la reacción

$$^{238}Pu \rightarrow {}^{234}U + \alpha + 5.49Mev$$

con período de 128 años. Siendo el del ^{234}U de 2.5×10^5 años. Estimar la masa inicial de ^{238}Pu necesaria para suministrar un mínimo de $1kW$ de calor cuando hayan pasado 50 años.

Según la reacción, cada decaimiento de plutonio genera $5.49MeV$. Queremos que después de 50 años, estos decaimientos sigan generando suficiente energía como para tener una potencia de $1kW$. Como el tiempo de vida del uranio es mucho mayor a los 50 años, podemos considerar que el uranio que se genera por decaimiento del plutonio es estable en el periodo que nos interesa y no genera más energía.

Para empezar, si queremos una potencia de $1kW$, eso significa que pasados 50 años, debe de haber suficiente plutonio como para que sus decaimientos generen $1000J$ de energía por segundo. Esto es equivalente a querer generar $6.242 \times 10^{21} eV$ por segundo.

Como cada reacción genera $5.49MeV = 5.49 \times 10^6 eV$, para conseguir los 6.242×10^{21} en un segundo, necesitamos 1.13698×10^{15} reacciones por segundo.

Es decir, queremos que después de 50 años, la actividad del plutonio restante sea de $A(50 \text{ años}) = 1.13698 \times 10^{15}$ decaimientos por segundo. Usaremos ahora la ecuación para la acción como función del tiempo a la que llegamos en clase, la cual nos dice que:

$$A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

donde $A(t)$ es la acción a un tiempo t, N_0 el número de núcleos a tiempo $t = 0$ y λ la constante de decaimiento. De esta expresión podemos despejar la cantidad de núcleos a tiempo $t = 0$ y nos queda:

$$N_0 = \frac{1}{\lambda} A(t) e^{\lambda t}$$

Tenemos el dato que a tiempo $t = 50\text{años}$, queremos que la acción sea de 1.13698×10^{15} decaimientos por segundo. Además, sabiendo que el periodo es de $\tau = 128$ años, la constante de decaimiento es (según una de las ecuaciones vistas en clase para relacionar periodo con constante de decaimiento) $\lambda = \dfrac{1}{\tau} = 1/128 \ \text{años}^{-1}$. Sustituimos todo esto en la expresión para calcular N_0 y nos queda:

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{1}{\lambda} A(t) e^{-\lambda t} \\ &= 128 \text{ años}(1.13698 \times 10^{15} \text{ decaimientos/ seg}) \ \ e^{(1/128\text{años}^{-1})50\text{años}} \\ &= 4.0366 \times 10^9 s (1.13698 \times 10^{15} s^{-1}) \ e^{50/128} \\ &= \boxed{6.7829 \times 10^{24} \text{núcleos}} \end{aligned}$$

Es decir, la cantidad de átomos que se necesitan a tiempo $t = 0$ es 6.7829×10^{24}. Tomando en cuenta que la masa de ^{238}Pu es $238.05u = 3.95292 \times 10^{-25} kg$, tenemos que la cantidad de átomos calculada antes tiene es una masa de:

$$(6.7829 \times 10^{24})(3.95292 \times 10^{-25} kg) = \boxed{2.6812kg}$$

Referencias

[1] “The Nist Reference on Constants, Units, and Uncertainty.” Fundamental Physical Constants from NIST, Nist, https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html.

[2] Povh, Bogdan, et al. Particles and Nuclei. Springer, Fifth ed., S.n., 1995.

[3] “IUPAC Commission on Isotopic Abundances and Atomic Weights.” IUPAC Commission on Isotopic Abundances and Atomic Weights, https://www.ciaaw.org/.