# Cálculo Tensorial Tarea 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

9 de noviembre de 2020

1. **Escriba las siguientes expresiones en notación de índices**

a) $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \\
&= \mathbf{v} \cdot (\partial^j v^i) \quad \text{por cómo vimos que se ve el gradiente de un vector} \\
&= (v^k) \cdot (\partial^j v^i) \\
&= v^j \partial^j v^i
\end{aligned}
$$

Esto último porque como vimos en clase, al hacer el producto punto entre dos tensores, hay que igualar el último índice del primero y el primer índice del segundo.

b) $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$

Calculamos primero el producto punto de $\mathbf{v}$ con $\nabla$.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= \\
&= (v^j \partial^j)\mathbf{v} \\
&= (v^j \partial^j) v^i \quad \text{representamos las coordenadas de } \mathbf{v} \text{ con el índice libre i} \\
&= v^j \partial^j v^i
\end{aligned}
$$

c) $\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}$

Primero sabemos que el gradiente de un vector $\nabla\mathbf{v}$ es un tensor de rango 2 dado por $\partial^j v^i$ que se puede representar en una matriz como:
$$\nabla\mathbf{v} = \partial^j v^i = \begin{pmatrix} \partial^1 v^1 & \partial^1 v^2 & \partial^1 v^3 \\ \partial^2 v^1 & \partial^2 v^2 & \partial^2 v^3 \\ \partial^3 v^1 & \partial^3 v^2 & \partial^3 v^3 \end{pmatrix}$$
Luego, para multiplicar por el vector $\mathbf{v}$ a la izquierda, hay que representarlo como un arreglo horizontal $\mathbf{v} = (v^1 \;\; v^2 \;\; v^3)$
Entonces, el resultado será:

$$\mathbf{v}\nabla\mathbf{v} = (v^1 \;\; v^2 \;\; v^3)\begin{pmatrix} \partial^1 v^1 & \partial^1 v^2 & \partial^1 v^3 \\ \partial^2 v^1 & \partial^2 v^2 & \partial^2 v^3 \\ \partial^3 v^1 & \partial^3 v^2 & \partial^3 v^3 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} v^1\partial^1 v^1 + v^2\partial^2 v^1 + v^3\partial^3 v^1 & v^1\partial^1 v^2 + v^2\partial^2 v^2 + v^3\partial^3 v^2 & v^1\partial^1 v^3 + v^2\partial^2 v^3 + v^3\partial^3 v^3 \end{pmatrix}$$

Vemos que el iésimo componente de este resultado es $v^1\partial^1 v^i + v^2\partial^2 v^i + v^3\partial^3 v^i = v^j\partial^j v^i$

Entonces, la notación de índices es:

$$\mathbf{v}\nabla\mathbf{v} = v^j\partial^j v^i$$

d) $A : A$

Empezamos expresando a $A$ en la base como $A = A^{ij}(e^i \otimes e^j)$ o equivalentemente como $A = A^{kl}(e^k \otimes e^l)$

Y recordamos que el producto : entre dos diadas se define como

$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) : (\mathbf{w} \otimes \mathbf{s}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{s})$ (1), entonces:

$$\begin{aligned}
A : A &= A^{ij}(e^i \otimes e^j) : A^{kl}(e^k \otimes e^l) \\
&= [(A^{ij}e^i) \otimes e^j] : [(A^{kl}e^k) \otimes e^l] \\
&= [(A^{ij}e^i) \cdot (A^{kl}e^k)][e^j \cdot e^l] \quad \text{por la def. (1) , con } \mathbf{v} = A^{ij}e^i, \mathbf{u} = e^j, \mathbf{w} = A^{kl}e^k, \mathbf{s} = e^l \\
&= A^{ij}A^{kl}[e^i \cdot e^k][e^j \cdot e^l] \\
&= A^{ij}A^{kl}\delta^{ik}\delta^{jl} \\
&= A^{ij}A^{il}\delta^{jl} \;\; \text{Usamos la primera delta para cambiar la k por i} \\
&= A^{ij}A^{ij} \;\; \text{Usamos la delta para cambiar l por j}
\end{aligned}$$

Este resultado lo podemos expresar sin la notación de Einstein como $A^{ij}A^{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(A^{ij})^2$.

Con lo que vemos sencillamente que se trata de sumar cada una de las componentes de $A^{ij}$ elevada al cuadrado.

e) $A : A^T$

Empezamos expresando a $A$ en la base como $A = A^{ij}(e^i \otimes e^j)$ o equivalentemente como $A = A^{kl}(e^k \otimes e^l)$

Y recordamos que el producto : entre dos diadas se define como

$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) : (\mathbf{w} \otimes \mathbf{s}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{s})$ (1)

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
A : A^T &= A^{ij}(e^i \otimes e^j) : [A^{kl}(e^k \otimes e^l)]^T \\
&= A^{ij}(e^i \otimes e^j) : A^{lk}(e^k \otimes e^l) \quad \text{Hacemos la transpuesta de las componentes} \\
&= [(A^{ij}e^i) \otimes e^j] : [(A^{lk}e^k) \otimes e^l] \\
&= [(A^{ij}e^i) \cdot (A^{lk}e^k)][e^j \cdot e^l] \quad \text{por la def. (1) , con } \mathbf{v} = A^{ij}e^i, \mathbf{u} = e^j, \mathbf{w} = A^{lk}e^k, \mathbf{s} = e^l \\
&= A^{ij}A^{lk}(e^i \cdot e^k)(e^j \cdot e^l) \\
&= A^{ij}A^{lk}\delta^{ik}\delta^{jl} \\
&= A^{ij}A^{li}\delta^{jl} \quad \text{usamos la primera delta para cambiar k por i} \\
&= A^{ij}A^{ji} \quad \text{usamos la delta para cambiar l por j}
\end{aligned}$$

Entonces, $A : A^T = A^{ij}A^{ji}$

f) $\nabla \times \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}))$

Primero que nada, tenemos que $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \epsilon_{ijk}v^j u^k$ donde $i$ es el índice libre de este vector.
Luego, hay que hacerle el producto punto con $\nabla = \partial^l$.
Para hacer este producto punto, hay que igualar el índice libre de $\epsilon_{ijk}v^j u^k$ con el índice libre de $\nabla = \partial^l$.
Entonces, $\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \partial^i(\epsilon_{ijk}v^j u^k)$.
Esto último no tiene índices libres (es un escalar) y ahora hay que aplicarle el gradiente. Por lo que tenemos sencillamente:
$\nabla(\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})) = \partial^l\partial^i(\epsilon_{ijk}v^j u^k)$.
Donde ahora $l$ es el índice libre.

Finalmente, hay que aplicarle el rotacional a esta expresión. Para ello, recordamos que si tenemos un vector $\mathbf{w}$ que escribimos como $w^l$, entonces como vimos en clase, su rotacional es $\nabla \times \mathbf{w} = \epsilon_{hml}\partial^m w^l$.
Nosotros queremos calcular el rotacional del vector $\nabla(\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})) = \partial^l\partial^i(\epsilon_{ijk}v^j u^k)$ que tiene a $l$ como índice libre. Por lo que la situación es la misma que la mencionada para $w^l$ y el resultado es:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla(\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})) = \epsilon_{hml}\partial^m\partial^l\partial^i(\epsilon_{ijk}v^j u^k) \\
\epsilon_{hml}\epsilon_{ijk}\partial^m\partial^l\partial^i(v^j u^k)
\end{aligned}$$

Y este es el resultado, que es un vector cuyo índice libre es $h$. Como los símbolos de Levi Civita no comparten un índice, no podemos usar la expresión que vimos en clase de productos de deltas de Kronecker y dejamos el resultado así.

2. **Diga si la expresión $\nabla \times (\mathbf{v} \cdot (\nabla\phi))$ tiene sentido. Justifique se respuesta**

No, no tiene sentido. Esto porque si calculamos la expresión entre paréntesis, tenemos que $\mathbf{v} \cdot (\nabla \phi) = v^i \cdot (\partial^j \phi) = v^i \partial^i \phi$. Esto último porque el producto punto contrae los índices de $\mathbf{v}$ y de $\nabla \phi$.
Entonces, $\mathbf{v} \cdot (\nabla \phi) = v^i \partial^i \phi$ es un escalar (no tiene índices libres).

Por esta razón, no le podemos aplicar el rotacional, ya que para aplicar el rotacional a algo, se necesita que tenga un índice libre (que sea un vector) y no un escalar.

3. **Muestre que si $Q$ es un tensor simétrico y $R$ es un tensor antisimétrico, entonces** $Q : R = R : Q = 0$

Expresamos $Q$ y $R$ en la base usual como $Q^{ij}(e^i \otimes e^j)$ , $R^{kl}(e^k \otimes e^l)$
Luego, como $Q$ es simétrico y $R$ es antisimétrico, tenemos que:

$$Q^{ij} = Q^{ji} \quad (1)$$
$$R^{kl} = -R^{lk} \quad (2)$$

Ahora realizamos el producto : entre estos tensores. Para eso, recordamos que la definición de : entre dos diadas es:

$$(v \otimes u) : (w \otimes s) = (v \cdot w)(u \cdot s) \quad (3)$$

Ahora sí hacemos el producto entre $Q$ y $R$:

$$\begin{aligned} Q : R &= (Q^{ij} e^i \otimes e^j) : (R^{lk} e^l \otimes e^k) \\ &= (Q^{ij} e^i \cdot R^{lk} e^l)(e^j \cdot e^k) \quad \text{Por la def. 3 con } v = Q^{ij} e^i, u = e^j, w = R^{lk} e^l, s = e^k \\ &= Q^{ij} R^{lk} (e^i \cdot e^l)(e^j \cdot e^k) \text{ Porque el producto punto saca los escalares } Q^{ij}, R^{lk} \\ &= Q^{ij} R^{lk} \delta^{il} \delta^{jk} \\ &= Q^{ij} R^{ik} \delta^{jk} \quad \text{usamos la primera delta para cambiar l por i} \\ &= Q^{ij} R^{ij} \text{ usamos la delta para cambiar k por j} \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que $Q : R = Q^{ij} R^{ij} \quad (4)$
Ahora usamos las relaciones (1) y (2) para tener:

$$\begin{aligned} Q : R &= Q^{ij} R^{ij} \quad \text{por (4)} \\ &= Q^{ji}(-R^{ji}) \quad \text{por 1 y 2} \\ &= -Q^{ij} R^{ji} \\ &= -Q^{ij} R^{ij} \quad * \\ &= -Q : R \quad \text{Por (4)} \end{aligned}$$

* Para llegar a este paso, $-Q^{ij} R^{ji} = -Q^{ij} R^{ij}$ es cierto porque de ambos lados $i, j$ son índices mudos y simplemente les cambiamos de nombre.

Entonces, como $Q : R$ es un elemento de los reales y cumple que $Q : R = -Q : R$, debe de ser 0. Por lo tanto, $Q : R = 0$.

Para la prueba de que $R : Q = 0$, notamos que $R : Q = R^{ij}Q^{ij}$ (por el mismo procedimiento para el que llegamos a 4, pero con $Q$ y $R$ simplemente intercambiados). Pero entonces $R : Q = R^{ij}Q^{ij} = Q^{ij}R^{ij}$ (Es decir, el producto : es conmutativo). Pero ya probamos que este último número es 0, por lo que $R : Q = 0$.

4. **Muestra que $A_{ijkl}B_{jklm} = 0$ si $A$ es simétrico con respecto a los índices $j, k$ y $B$ es antisimétrico respecto con $j, k$**

Como $A$ es simétrico con respecto a $j, k$ y $B$ es antisimétrico con respecto a $j, k$, entonces por definición tenemos que:

$$A_{ijkl} = A_{ikjl} \quad (1)$$
$$B_{jklm} = -B_{kjlm} \quad (2)$$

Luego, vemos que:

$$\begin{aligned} A_{ijkl}B_{jklm} &= A_{ikjl}B_{jklm} \quad \text{por (1)} \\ &= A_{ikjl}(-B_{kjlm}) \quad \text{por (2)} \\ &= -A_{ikjl}B_{kjlm} \\ &= -A_{ijkl}B_{jklm} \; * \end{aligned}$$

* En el último paso usamos que en $-A_{ikjl}B_{kjlm}$ los índices $j, k$ son mudos, por lo que podemos cambiarles de nombre sin problema. En este caso, escogemos cambiarle el nombre a $j$ por $k$ y viceversa, para obtener así que es igual a $-A_{ijkl}B_{jklm}$

Luego, tenemos que $A_{ijkl}B_{jklm} = -A_{ijkl}B_{jklm}$.
Pero entonces $A_{ijkl}B_{jklm}$ es igual a su propio inverso aditivo. La única forma de que esto sea cierto es que $A_{ijkl}B_{jklm} = 0$ (para cada una de las combinaciones posibles de índices libres $i, m$ )

5) **Resuelva solamente 6 de los siguientes incisos. Muestre que las siguientes identidades se cumplen.**

b) $v^i\partial_j v^i = \nabla(\frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$

Empezamos con la expresión del lado derecho:

$$\begin{aligned}
\nabla(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) &= \nabla(\frac{1}{2}v^iv^i) \quad \text{por cómo se calcula el producto punto} \\
&= \frac{1}{2}\nabla(v^iv^i) \\
&= \frac{1}{2}\partial_j(v^iv^i) \quad \text{por la definición de}\nabla \\
&= \frac{1}{2}\left[v^i\partial_j(v^i) + v^i\partial_j(v^i)\right] \quad \text{Usamos que la derivada de un producto} \\
&\qquad \text{es igual al primero por la derivada del segundo más el segundo} \\
&\qquad \text{segundo por la derivada del primero} \\
&= \frac{1}{2}[2v^i\partial_jv^i] \\
&= v^i\partial_jv^i
\end{aligned}$$

Y queda probado lo que queríamos probar.

c) $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$
Partimos de que el gradiente de $\phi$ es $\nabla\phi = \partial^k\phi$.
Que es un vector cuyo índice libre es $k$.
Luego hay que aplicarle el rotacional a esto, pero sabemos que el rotacional de un vector $\vec{w}$ es $\nabla \times \mathbf{w} = \epsilon_{ijk}\partial^jw^k$. Por lo que en nuestro caso , poniendo a $w$ como $\mathbf{w} = \partial^k\phi$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla\phi) &= \nabla \times (\partial^k\phi) \\
&= \epsilon_{ijk}\partial^j(\partial^k\phi)
\end{aligned}$$

Pero en esta expresión $\epsilon_{ijk}\partial^j(\partial^k\phi)$ podemos cambiar los índices mudos $j$ por el $k$ y el $k$ por $j$.
Lo que nos da que $\epsilon_{ijk}\partial^j\partial^k\phi = \epsilon_{ikj}\partial^k\partial^j\phi$.
Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\partial^j\partial^k\phi &= \epsilon_{ikj}\partial^k\partial^j\phi \\
&= \epsilon_{ikj}\partial^j\partial^k\phi \quad \text{Si } \phi \text{ es lo suficientemente regular} \\
&\qquad \text{podemos cambiar el orden de derivación} \\
&= -\epsilon_{ijk}\partial^j\partial^k\phi \quad \text{Si cambiamos el orden de dos índices de} \\
&\qquad \epsilon, \text{ se le cambia el signo}
\end{aligned}$$

Entonces, $\epsilon_{ijk}\partial^j\partial^k\phi$ es igual a su propio inverso aditivo. La única forma de que esto sea posible es que $\epsilon_{ijk}\partial^j\partial^k\phi = 0$ para cada una de las entradas del índice libre $i$.
Entonces, $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$

d) $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{w}$

Empezamos por el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) &= \epsilon_{ijk} v^j (\mathbf{u} \times \mathbf{w})^k \quad \text{por la expresión del producto cruz entre } \mathbf{v} \; y \; \mathbf{u} \times \mathbf{w} \\
&= \epsilon_{ijk} v^j (\epsilon_{klm} u^l w^m) \quad \text{porque ésta es la expresión del componente k de } \mathbf{u} \times \mathbf{w} \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} v^j u^l w^m \\
&= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} v^j u^l w^m \quad \text{porque } \epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} \text{ por ser una permutación par de índices} \\
&= (\delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l) v^j u^l w^m \quad \text{por la expresión en delta de la contracción de } \epsilon \\
&= \delta^i_l \delta^j_m v^j u^l w^m - \delta^i_m \delta^j_l v^j u^l w^m \\
&= \delta^i_l v^m u^l w^m - \delta^i_m v^l u^l w^m \quad \text{usamos las deltas para cambiar} \\
&\qquad\qquad \text{j por m y cambiar j por l} \\
&= v^m u^i w^m - v^l u^l w^i \quad \text{usamos las deltas para cambiar} \\
&\qquad\qquad \text{l por i y cambiar m por i} \\
&= v^m w^m u^i - v^l u^l w^i \\
&= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) u^i - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) w^i \\
&= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{w}
\end{aligned}$$

e) $(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$

Empezamos desarrollando en el lado izquierdo los dos productos cruz. El producto cruz $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ se expresa como $\epsilon_{ijk} v^j u^k$, que es un vector cuyo índice libre es $i$.
Mientras que el producto $\mathbf{w} \times \mathbf{x}$ se puede expresar como $\epsilon_{plm} w^l x^m$, que es un vector cuyo índice libre es $p$.
Luego, para calcular el producto punto de estos vectores, hay que juntarlos e igualar sus índices libres. En este caso, cambiaremos $p$ por $i$.
Así, el lado izquierdo queda como:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) &= \epsilon_{ijk} v^j u^k \; \epsilon_{ilm} w^l x^m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} v^j u^k w^l x^m \\
&= (\delta^j_i \delta^k_m - \delta^j_m \delta^k_l) v^j u^k w^l x^m \\
&= \delta^j_l \delta^k_m v^j u^k w^l x^m - \delta^j_m \delta^k_l v^j u^k w^l x^m \\
&= \delta^j_l v^j u^m w^l x^m - \delta^j_m v^j u^l w^l x^m \quad \text{usamos las deltas para cambiar} \\
&\qquad\qquad \text{k por m y cambiar k por l} \\
&= v^l u^m w^l x^m - v^j u^l w^l x^j \quad \text{usamos las deltas para cambiar} \\
&\qquad\qquad \text{k por m y cambiar k por l} \\
&= v^l w^l u^m x^m - v^j x^j u^l w^l \\
&= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})
\end{aligned}$$

Y ya tenemos la identidad que se buscaba.

f) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$

Empezamos con $\nabla \times \mathbf{v} = \epsilon_{ijk}\partial^j v^k$, que es un vector con índice libre $i$. Luego queremos hacerle el producto punto con $\nabla = \partial^m$.
Para hacer el producto punto, juntamos los dos vectores y les igualamos su índice libre. Por lo tanto, nos queda:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) &= \partial^i(\epsilon_{ijk}\partial^j v^k) \\
&= \epsilon_{ijk}\partial^i\partial^j v^k \quad \text{porque } \epsilon \text{ es constante} \\
&= \epsilon_{ijk}\partial^j\partial^i v^k \quad \text{si } \mathbf{v} \text{ es lo suficientemente regular, se puede intercambiar las derivada} \\
&= -\epsilon_{jik}\partial^j\partial^i v^k \quad \text{cambiamos dos índices de } \epsilon \text{ con lo que cambia el signo} \\
&= -\partial^j(\epsilon_{jik}\partial^i v^k) \\
&= -\nabla^j(\nabla \times \mathbf{v})^j \quad * \\
&= -\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})
\end{aligned}$$

Porque $\epsilon_{jik}\partial^i v^k$ no es otra cosa que el j-ésimo componente del rotacional $\nabla \times \mathbf{v}$

Entonces, tenemos que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$. Como es un número real, esto implica que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$.

h) $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v})$

Empezamos del lado izquierdo. Notamos que $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \epsilon_{ijk}v^j u^k$. Luego, hay que aplicarle el rotacional. Para ello, recordamos que el rotacional de un vector $\mathbf{w} = w^i$ es $\epsilon_{mli}\partial^l w^i$. Entonces, en particular para el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \epsilon_{ijk}v^j u^k$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) &= \epsilon_{mli}\partial^l(\epsilon_{ijk}v^j u^k) \\
&= \epsilon_{mli}\epsilon_{ijk}\partial^l(v^j u^k) \\
&= \epsilon_{iml}\epsilon_{ijk}\partial^l(v^j u^k) \quad \text{permutamos los índices de la primera } \epsilon \\
&= (\delta^m_j\delta^l_k - \delta^m_k\delta^l_j)\partial^l(v^j u^k) \\
&= \delta^m_j\delta^l_k\partial^l(v^j u^k) - \delta^m_k\delta^l_j\partial^l(v^j u^k) \\
&= \delta^m_j\partial^k(v^j u^k) - \delta^m_k\partial^j(v^j u^k) \quad \text{usamos las } \delta \text{ para cambiar l por j y l por k} \\
&= \partial^k(\delta^m_j v^j u^k) - \partial^j(\delta^m_k v^j u^k) \\
&= \partial^k(v^m u^k) - \partial^j(v^j u^m) \quad \text{usamos las } \delta \text{ para cambiar j por m y k por m} \\
&= \partial^k(v^m u^k) - \partial^j(v^j u^m) \\
&= u^k\partial^k v^m + v^m\partial^k u^k - v^j\partial^j u^m - u^m\partial^j v^j \quad \text{regla del producto derivada} \\
&= (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v})
\end{aligned}$$

Que es lo que se nos pedía probar.

6) **Punto Extra**

a) **Muestre que** $\nabla \times [\nabla(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})] = \nabla\times(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})$

Primero calculamos algunos de los términos que necesitaremos:

- $\nabla(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = v^m\partial^i v^m$
  Lo que ya probamos en el inciso b) del ejercicio anterior.
- $\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) &= \epsilon_{ijk}v^j(\nabla\times\mathbf{v})^k \\
&= \epsilon_{ijk}v^j(\epsilon_{klm}\partial^l v^m) \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}v^j\partial^l v^m \\
&= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}v^j\partial^l v^m \quad \text{permutación par de los índices de la primera } \epsilon \\
&= (\delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l)v^j\partial^l v^m \\
&= \delta^i_l\delta^j_m v^j\partial^l v^m - \delta^i_m\delta^j_l v^j\partial^l v^m \\
&= \delta^i_l v^m\partial^l v^m - \delta^i_m v^l\partial^l v^m \quad \text{usamos las deltas para cambiar j por m y j por l} \\
&= v^m\partial^i v^m - v^l\partial^l v^i \quad \text{usamos las deltas para cambiar l por i y m por i}
\end{aligned}
$$

Entonces, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\nabla(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) &= v^m\partial^i v^m - (v^m\partial^i v^m - v^l\partial^l v^i) \\
&= v^l\partial^l v^i
\end{aligned}
$$

Esto es el lado izquierdo antes de aplicar el rotacional.
Por otro lado, el lado derecho de la igualdad que buecamos antes de aplicar el rotacional es $\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$, pero eso ya lo calculamos en el ejercicio 1a) y vimos que es igual a $v^j\partial^j v^i$.
Esto es igual a lo que habíamos obtenido para el lado izquierdo (pero con el índice mudo con otro nombre).
Entonces, ambos lados de lo que buscamos demostrar son iguales antes de aplicarle el rotacional:

$$\nabla(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$$

Luego, al aplicar el rotacional de ambos lados recuperamos la igualdad buscada.

b) **Use esto para probar que:**

$$\nabla\times(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\nabla(\nabla\times\mathbf{v}) + (\nabla\cdot\mathbf{v})(\nabla\times\mathbf{v}) - (\nabla\times\mathbf{v})\cdot(\nabla\mathbf{v})$$

Por la identidad del punto a), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= \nabla \times [\nabla(\frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \\
&= \nabla \times \nabla(\frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \\
&= 0 - \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \quad \text{por el 5c} \\
&= -\nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]
\end{aligned}$$

Ahora usaremos el ejercicio 5h) para simplificar esta expresión, que nos dice que:
$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v})$
Pero en vez de $\mathbf{u}$ , los sustituiremos por $\nabla \times \mathbf{v}$. Entonces, retomando el desarrollo que teníamos, tenemos ahora que:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= -\nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \\
&= -\mathbf{v}(\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})) - (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \times \mathbf{v})(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\
&= 0 - (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \times \mathbf{v})(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{por (5f)} \\
&= -(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \times \mathbf{v})(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\
&= \mathbf{v} \cdot \nabla(\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \times \mathbf{v})(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} \\
&= \mathbf{v} \cdot \nabla(\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{v})(\nabla \times \mathbf{v}) - (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot (\nabla \mathbf{v})
\end{aligned}$$

Que es justo lo que se quería probar