Tomás Ricardo Basile Álvarez — Física Estadística — Tarea 3

1. La densidad de energía por unidad de volumen emitida por un cuerpo negro en el intervalo $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ es $u(\lambda,T)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT}-1}$

a) ¿A qué λ_{max} es $u(\lambda,T)$ máxima?

Para encontrar este valor, simplemente derivamos $u(\lambda,T)$ respecto a λ e igualamos a 0

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}\right) = 8\pi hc\left[\left(-\frac{5}{\lambda^6}\right)\left(\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}\right) + \frac{1}{\lambda^5}\left(\frac{-1}{(e^{hc/\lambda kT}-1)^2}\left(\frac{hc}{kT}\right)\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{hc/\lambda kT}\right)\right]$$

igualamos a 0 para encontrar λ_m, el valor de λ cuando u es máxima.

$$\rightarrow -\frac{5}{\lambda_m^6}\frac{1}{e^{hc/\lambda_m kT}-1} + \frac{1}{\lambda_m^5(e^{hc/\lambda kT}-1)^2}\left(\frac{hc}{kT\lambda_m^2}\right)e^{hc/\lambda_m kT} = 0$$

$$\rightarrow -5 + \frac{hc}{kT\lambda_m}\frac{e^{hc/\lambda_m kT}}{e^{hc/\lambda_m kT}-1} = 0$$ ← Cancelamos el término $\frac{1}{\lambda_m^6}\frac{1}{e^{hc/\lambda_m kT}-1}$

Definimos $x \equiv \frac{hc}{\lambda_m kT}$ y entonces nos queda $-5 + \frac{xe^x}{e^x-1} = 0$

$$\rightarrow xe^x = 5e^x - 5 \quad \rightarrow \quad (x-5)e^x + 5 = 0$$

Esta ecuación no se puede resolver analíticamente, pero se puede llegar a una expresión más sencilla si ponemos $y \equiv x-5$ y multiplicamos por e^{-5}

$$\rightarrow y e^{y+5} + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad ye^y + 5e^{-5} = 0 \quad \rightarrow \quad ye^y = -5e^{-5}$$

$$\rightarrow y = W(-5e^{-5})$$

Donde W es la función de Lambert, que cumple que si $ye^y = k \rightarrow y = W(k)$, pues es la inversa de la función ye^y.

$$\rightarrow y = -0.03488$$

Deshacemos los cambios de variable:

$$\Rightarrow x = y + 5 = 4.96511$$

$$\Rightarrow \lambda_m = \frac{hc}{kTx} = \frac{(6.626\cdot 10^{-34}\,J\cdot s)(3\cdot 10^8\,m/s)}{(1.3806\cdot 10^{-23}\,m^2\,kg\,K^{-1}s^{-2})(4.96511)\,T} = \frac{0.00289\,m\cdot K}{T}$$

b) Si la radiación del sol se considera como radiación de cuerpo negro con un máximo de $u(\lambda, T)$ a $\lambda_{max} = 480 nm$ ¿cuál es la temperatura del sol?

Usamos el resultado del inciso pasado $\lambda_m = \frac{0.00289 \text{ m} \cdot K}{T} \rightarrow T = \frac{0.00289 \text{ m} K}{\lambda_m}$

$$\Rightarrow T = \frac{0.00289 \text{ m} \cdot K}{480 \cdot 10^{-9} \text{ m}}$$

$$\approx \underline{6000 \text{ K}}$$

2. Considera un gas cuántico de Fermi a temperatura T. a) Escriba la función de partición de una partícula

La función de partición se define como:

$$\Xi = \sum_j e^{-(E_j - \mu N_j)/kT}$$

ε es la ener[gía] del esta[do]

Si se tiene un estado de una partícula, o bien no está ocupado (en cuyo caso $E_j = 0$, $N_j = 0$) o está ocupado por una partícula (en cuyo caso $E_j = \varepsilon$, $N_j = 1$)

No puede estar ocupado por más, pues son fermiones. Entonces:

$$\Xi = e^{-(0-\mu(0))/kT} + e^{-(\varepsilon - \mu(1))/kT} = \underline{1 + e^{(\mu-\varepsilon)/kT}}$$

b) Escriba la expresión para el número de ocupación medio $\langle n \rangle$

Para obtenerla, usamos que $\langle n \rangle = kT \frac{\partial}{\partial \mu}(\ln \Xi)$ para el ensamble gran canónico

$$\rightarrow \langle n \rangle = kT \frac{\partial}{\partial \mu}\left[\ln\left(1 + e^{(\mu-\varepsilon)/kT}\right)\right] = \frac{kT\left(\frac{1}{kT}\right) e^{(\mu-\varepsilon)/kT}}{1 + e^{(\mu-\varepsilon)/kT}} = \underline{\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1}}$$

c) Escriba la proba. $p(n)$ de que haya n partículas en un estado dado de partícula independiente como función de $\langle n \rangle$

La probabilidad en el ensamble gran canónico se calcula dividiendo $e^{-(E_j - \mu N_j)/kT}$ por Ξ, es decir

$$p(n) = \frac{e^{-(E_j - \mu N_j)/kT}}{\Xi} = \frac{e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT}}{\Xi}$$

Si se tienen n partículas, la energía es $E_j = n\varepsilon$ con ε la energía del estado y $N_j = n$

$$= \underline{\frac{e^{-n(\varepsilon-\mu)/kT}}{1 + e^{(\mu-\varepsilon)/kT}}}$$

Ahora bien, usando el resultado b) $\langle n \rangle = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1}$, tenemos $\rightarrow e^{(\varepsilon-\mu)/kT} = \frac{1}{\langle n \rangle} - 1 = \frac{1 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}$

Entonces, $$p(n) = \frac{e^{-n(\varepsilon-\mu)/kT}}{1 + e^{(\mu-\varepsilon)/kT}} = \frac{\left(\frac{1-\langle n \rangle}{\langle n \rangle}\right)^{-n}}{1 + \left(\frac{1-\langle n \rangle}{\langle n \rangle}\right)^{-1}} = \frac{\left(\frac{1-\langle n \rangle}{\langle n \rangle}\right)^{-n}}{1 + \frac{\langle n \rangle}{1-\langle n \rangle}} = \frac{\left(\frac{1-\langle n \rangle}{\langle n \rangle}\right)^{-n}}{\frac{1}{1-\langle n \rangle}} = \frac{\langle n \rangle^n (1 - \langle n \rangle)}{(1-\langle n \rangle)^n}$$

$$= \underline{\frac{\langle n \rangle^n}{(1-\langle n \rangle)^{n-1}}}$$

$1/2$

d) Calcule la fluctuación cuadrática media $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle^{1/2}$, en el número de ocupación de un estado de partícula independiente como función del número de ocupación $\langle n \rangle$

Para calcular $\langle (n-\langle n \rangle)^2 \rangle$ usamos la identidad que relaciona varianza con valores esperados de n y n^2

$$\langle (n-\langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$$

Escrita en el lenguaje típico de proba., es la identidad $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Necesitamos calcular $\langle n^2 \rangle$, que se define como $\langle n^2 \rangle = \sum n^2 p(n)$

En general, esta cantidad tiene una expresión conocida en el ensemble gran canónico, que es $\frac{1}{\beta^2 \Xi} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \mu^2}$

(El valor esperado del número de partículas al cuadrado)

Para probar que eso es cierto, calculamos esto:

- $$\frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\Xi}\frac{\partial^2 \Xi}{\partial \mu^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\Xi}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\left[\sum_j e^{-(E_j - \mu N_j)\beta}\right]$$ ← por la def. de Ξ en general

$$= \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\Xi}\sum_j (N_j \beta)^2 e^{-(E_j - \mu N_j)\beta}$$

$$= \frac{1}{\Xi}\sum_j N_j^2 e^{-(E_j - \mu N_j)\beta}$$

Pero $e^{-(E_j - \mu N_j)\beta}/\Xi$ es la probabilidad de estar en un estado particular en el ensemble gran canónico

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\Xi}\frac{\partial^2 \Xi}{\partial \mu^2} = \sum_j N_j^2 P(j) \equiv \underline{\langle N_j^2 \rangle}$$

Por lo tanto, regresando a nuestro problema particular, tenemos que:

$$\langle n^2 \rangle = \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\Xi}\frac{\partial^2 \Xi}{\partial \mu^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\Xi}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\left[1 + e^{(\mu - \varepsilon)\beta}\right]$$ ← Por la expresión de Ξ encontrada en a)

$$= \frac{1}{\cancel{\beta^2}}\frac{1}{\Xi}\cancel{\beta^2} e^{(\mu-\varepsilon)\beta}$$

$$= \frac{e^{(\mu-\varepsilon)\beta}}{1 + e^{(\mu-\varepsilon)\beta}}$$ ← Otra vez sustituyendo Ξ

$$= \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)\beta} + 1}$$

Pero en c) vimos que $e^{(\varepsilon-\mu)\beta} = \frac{1-\langle n \rangle}{\langle n \rangle}$, por lo que

$$\langle n^2 \rangle = \frac{1}{\frac{1-\langle n \rangle}{\langle n \rangle} + 1} = \frac{1}{\frac{1-\langle n \rangle + \langle n \rangle}{\langle n \rangle}} = \frac{1}{\frac{1}{\langle n \rangle}} = \underline{\langle n \rangle}\,!$$

Concluimos entonces, que:

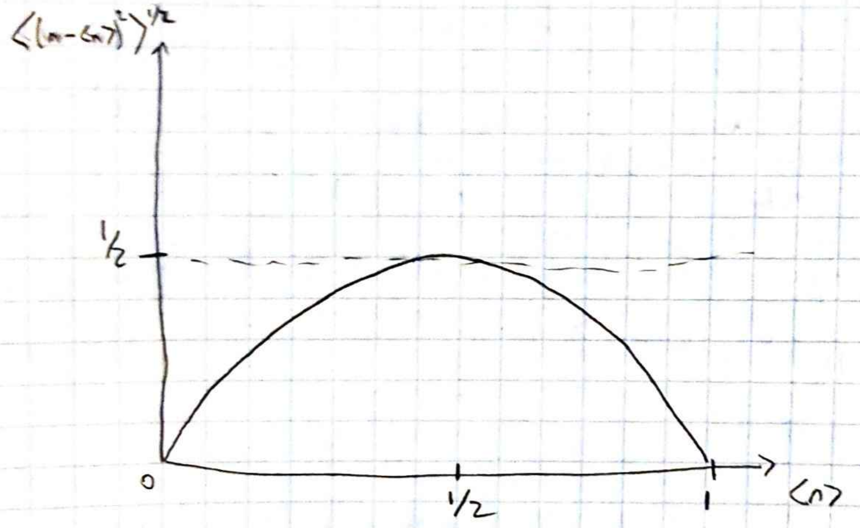
$$\langle (n-\langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle (1 - \langle n \rangle)$$

Y entonces $\boxed{\langle (n-\langle n \rangle)^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\langle n \rangle (1 - \langle n \rangle)}}$

e) Bosqueje gráficamente su resultado

Bosquejamos $\langle (n-\langle n\rangle)^2\rangle^{1/2}$ en función de $\langle n\rangle$, que como vimos es igual a

$\langle (n-\langle n\rangle)^2\rangle^{1/2} = \sqrt{\langle n\rangle(1-\langle n\rangle)}$. Graficamos esta función usando un graficador y resulta algo así:



En realidad, ni hace falta usar un graficador para graficarla, pues es la gráfica de la función $y = \sqrt{x(1-x)}$ (escrita con x, y en vez de $\langle n\rangle$ y $\langle (n-\langle n\rangle)^2\rangle^{1/2}$), por lo que $y^2 = x(1-x) \rightarrow y^2 = x - x^2 \rightarrow y^2 + x^2 - x = 0 \rightarrow y^2 + x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
$\rightarrow y^2 + (x-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Que es la ecuación de una circunferencia con centro $(\frac{1}{2}, 0)$ y radio $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Luego, $y = \sqrt{x(1-x)}$ representa la mitad superior de la circunferencia y eso es lo que se ve en el dibujo.

Vemos que si $\langle n\rangle = 0$ ó $\langle n\rangle = 1$, el número de partículas está determinado ya que su fluctuación es 0. Pero para $\langle n\rangle$ intermedios, la fluctuación crece hasta llegar a una fluctuación cuadrática media de $1/2$ cuando $\langle n\rangle = 1/2$.

3. a) Considere un gas ideal con N partículas de masa m confinadas en un volumen V a la temperatura T. Suponiendo que las partículas son indistinguibles y usando la aproximación clásica para la función de partición, calcule el potencial químico del gas.

b) Si ahora el gas del inciso anterior se absorbe sobre una superficie de área A, forma un gas bidimensional a la temperatura T sobre la superficie. La energía de una partícula absorbida $\varepsilon = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} - \varepsilon_0$, $\vec{p} = (p_x, p_y)$. En donde ε_0 es la energía de amarre por partícula. Si las partículas obedecen la estadística MB, calcule el potencial químico del gas absorbido.

Primero calculamos z para el gas ideal, para una partícula, hay que sumar $e^{-\beta\varepsilon}$ para todos los estados posibles (todas las posiciones y momentos), esto es:

$$z = \underbrace{\iiint}_{\text{Volumen}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}}_{\text{Integral sobre momentos}} e^{-\beta E} \frac{d^3p\, d^3x}{h^3}$$

El diferencial es $\frac{d^3x\, d^3p}{h^3}$ como vimos en el capítulo 2, hay que agregar el $\frac{1}{h^3}$

$$= \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta E} d^3p$$

La integral sobre el volumen es V

$$= \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m}\right)} d^3p$$

La energía de una partícula de gas ideal es $E = \frac{p^2}{2m}$

$$= \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)} dp_x\, dp_y\, dp_z = \frac{V}{h^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2m}p_x^2} dp_x\right)^3$$

porque las 3 integrales son iguales y se están multiplicando

$$= \frac{V}{h^3}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta/2m}}\right)^3$$

Porque es una integral Gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$$= \frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}$$

Entonces, la función de partición para N partículas indistinguibles es $Z = \frac{z^N}{N!}$

$$Z = \frac{z^N}{N!} = \frac{1}{N!}\left[\frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right]^N$$

Luego, podemos calcular $F \equiv -KT \ln Z = -KT \ln\left[\frac{1}{N!}\left(\frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right)^N\right]$

$$= KT \ln N! - NKT \ln\left(\frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right) \underbrace{\simeq}_{\text{Stirling}} KTN\ln N - KTN - NKT\ln\left(\frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right)$$

Y con ello, podemos calcular μ como $\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}$

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N}\left[KTN\ln N - KTN - NKT\ln\left(\frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right)\right]$$

$$= KTN\left(\frac{1}{N}\right) + KT\ln N - KT - KT\ln\left(\frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right)$$

$$= KT\ln N - KT\ln\left(\frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right)$$

$$= KT\ln\left[\frac{Nh^3}{V}\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2}\right] = \underbrace{KT\ln\left[\frac{Ph^3}{KT}\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2}\right]}_{\text{usando } PV = NKT \Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{P}{KT}}$$

b) El gas se absorbe sobre una superficie A. La energía de una partícula absorbida es $\varepsilon = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} - \varepsilon_0$. Calcule el potencial químico del gas absorbido.

Calculamos primero la función de partición de una partícula, que se obtiene sumando $e^{-\beta\varepsilon}$ sobre todo el espacio fase:

$$z = \underbrace{\iint_{\text{Área}}}_{\text{integral en posición}} \underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty}}_{\text{integral en momentos}} e^{-\beta\varepsilon} \frac{d^2p\, d^2x}{h^2}$$ ← Se agrega el factor $1/h^2$ para que las unidades sean correctas, al igual que en 3D se agregaba $1/h^3$

$$= \frac{A}{h^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\left(\frac{p_x^2+p_y^2}{2m}-\varepsilon_0\right)} dp_x\, dp_y$$ ← La integral sobre posiciones es A

$$= \frac{A}{h^2} e^{\beta\varepsilon_0}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\left(\frac{p_x^2+p_y^2}{2m}\right)} dp_x\, dp_y = A e^{\beta\varepsilon_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta p_x^2}{2m}} dp_x\right)^2$$ ← Porque las 2 integrales son iguales

$$= \frac{A}{h^2} e^{\beta\varepsilon_0}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta/2m}}\right)^2$$ ← porque es una integral Gaussiana

$$= \frac{A}{h^2}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right) e^{\beta\varepsilon_0}$$

Entonces, la función de partición para N partículas indistinguibles es:

$$Z = \frac{z^N}{N!} = \frac{1}{N!}\left[\frac{2A\pi m}{\beta h^2}\right]^N e^{\beta\varepsilon_0 N}$$

Luego, tenemos que $F = -KT\ln Z = -KT\ln\left\{\frac{1}{N!}\left[\frac{2A\pi m}{\beta h^2}\right]^N e^{\beta\varepsilon_0 N}\right\}$

$$= KT\cdot\ln N! - KTN\ln\left[\frac{2A\pi m}{\beta h^2}\right] - KT\beta\varepsilon_0 N$$

Aprox. de Stirling →

$$= KT\,N\ln(N) - KTN - KTN\ln\left[\frac{2A\pi m}{\beta h^2}\right] - KT\beta\varepsilon_0 N.$$

Con ello, podemos calcular μ

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \frac{\partial}{\partial N}\left[KTN\ln(N) - KTN - KTN\ln\left[\frac{2A\pi m}{\beta h^2}\right] - KT\beta\varepsilon_0 N\right]$$

$$= KT\ln(N) + \cancel{KT\frac{N}{N}} - \cancel{KT} - KT\ln\left[\frac{2A\pi m}{\beta h^2}\right] - KT\beta\varepsilon_0$$

$$= KT\ln(N) - KT\ln\left[\frac{2A\pi m}{\beta h^2}\right] - \cancel{KT\beta}\varepsilon_0$$

$$= -KT\ln\left(\frac{2A\pi m}{N\beta h^2}\right) - \varepsilon_0$$

c) Suponga ahora que el gas 2D está en contacto térmico con el vapor 3D y ambos alcanzan equilibrio a temp. T. En esta situación existe una relación entre los potenciales químicos. Use esta condición para determinar el número medio n de partículas absorbidas por unidad de área, cuando la presión media del gas tridimensional es p.

Primero escribimos los potenciales químicos para 2D y 3D

N es el número de partículas en el gas 2D

$$\mu_{3D} = KT \ln\left[\frac{ph^3}{KT}\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2}\right], \quad \mu_{2D} = -KT\ln\left(\frac{2A\pi m}{N\beta h^2}\right) - \varepsilon_0$$

Como el gas 3D y el gas 2D están en equilibrio, el intercambio de partículas entre ambos debe ser igual, por lo que $\mu_{3D} = \mu_{2D}$ ← condición de equilibrio químico.

$$\rightarrow \mu_{3D} = \mu_{2D} \rightarrow KT\ln\left[\frac{ph^3}{KT}\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2}\right] = -KT\ln\left(\frac{2A\pi m}{N\beta h^2}\right) - \varepsilon_0$$

$$\rightarrow \ln\left[\frac{ph^3}{KT}\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2}\right] = -\ln\left(\frac{2A\pi m}{N\beta h^2}\right) - \varepsilon_0/KT$$

$$\rightarrow \frac{ph^3}{KT}\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2} = \left(\frac{2A\pi m}{N\beta h^2}\right)^{-1} e^{-\varepsilon_0/KT}$$

Exponenciamos

$$\rightarrow \frac{ph^3}{KT}\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2} = \frac{N\beta h^2}{2A\pi m} e^{-\varepsilon_0/KT}$$

Pero como N es el número de partículas en el gas 2D y A el área, el número de partículas absorbidas por unidad de área es $n = N/A$. Entonces despejamos esto:

$$n = \frac{N}{A} = \frac{ph^3}{KT}\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2} \Big/ \frac{\beta h^2}{2\pi m} e^{-\varepsilon_0/KT} = \frac{ph^3\beta^{3/2}\cdot 2\pi m}{(2\pi m)^{3/2}\cdot KT\cdot \beta h^2} e^{\varepsilon_0/kT}$$

$$= \frac{ph\,\beta^{1/2}}{\sqrt{2\pi m}\cdot KT} e^{\varepsilon_0/KT} = \frac{ph}{KT}\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{1/2} e^{\varepsilon_0/KT}$$

$$\therefore\ n = \frac{p}{KT}\left(\frac{h^2}{2\pi m k T}\right)^{1/2} e^{\varepsilon_0/kT}$$