Teoría Cuántica de campos I: Tarea 3

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

29 de octubre de 2021

Problema 1

Considere las relaciones de campo y de momento canónico para un campo escalar real

$$\widehat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \widehat{a}^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x} \right) \Big|_{p_0 = \omega_{\vec{p}}}$$

$$\widehat{\pi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} - \widehat{a}^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x} \right) \Big|_{p_0 = \omega_{\vec{p}}}$$

a) Muestre que el operador de momento lineal asociado tiene la siguiente forma en términos de los operadores de ascenso y descenso

$$\widehat{\vec{P}} = -\int d^3x \; \widehat{\pi}(0, \vec{x}) \nabla \widehat{\phi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \, \widehat{a}^\dagger_{\vec{p}} \widehat{a}_{\vec{p}}$$

Por qué evaluamos en $t = 0$?

Primero calculamos $\nabla \widehat{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\nabla \hat{\phi} &= \nabla \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \widehat{a}^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} \nabla e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \nabla e^{ip\cdot x} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} (-i\vec{p}) e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} (i\vec{p}) e^{ip\cdot x} \right) \\
&= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \vec{p} \left(-\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x} \right)
\end{aligned}$$

Teniendo este resultado, podemos meter todo a la expresión de $\hat{P}$ del problema:

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{P}} &= -\int d^3x \; \hat{\pi}\nabla\hat{\phi} \\
&= -\int d^3x \; \left[\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\vec{q}}}{2}}\left(\hat{a}_{\vec{q}}e^{-iq\cdot x} - \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}e^{iq\cdot x}\right)\right]\left[i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\vec{p}\left(-\hat{a}_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}e^{ip\cdot x}\right)\right] \\
&= -\int d^3x \; d^3q \; d^3p \; \frac{\vec{p}}{(2\pi)^6}(-i)(i)\;\sqrt{\frac{\omega_{\vec{q}}}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left(\hat{a}_{\vec{q}}e^{-iq\cdot x} - \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}e^{iq\cdot x}\right)\left(-\hat{a}_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}e^{ip\cdot x}\right) \\
&= -\int d^3xd^3qd^3p \; \frac{\vec{p}}{2(2\pi)^6}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{q}}}{\omega_{\vec{p}}}}\left(\hat{a}_{\vec{q}}e^{-iq\cdot x} - \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}e^{iq\cdot x}\right)\left(-\hat{a}_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}e^{ip\cdot x}\right) \\
&= -\int d^3xd^3qd^3p\frac{\vec{p}}{2(2\pi)^6}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{q}}}{\omega_{\vec{p}}}}\left(-\hat{a}_q\hat{a}_p e^{i(-\vec{p}-\vec{q})\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}\hat{a}_{\vec{p}}e^{i(\vec{q}-\vec{p})\cdot x} + \hat{a}_{\vec{q}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}e^{i(-\vec{q}+\vec{p})\cdot x} - \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}e^{i(\vec{q}+\vec{p})\cdot x}\right)
\end{aligned}$$

Ahora hacemos la integración con respecto a x en cada uno de los términos, recordando que $\int d^3x \; e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot x} = (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})$.

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{P}} &= -\int d^3qd^3p\frac{\vec{p}(2\pi)^3}{2(2\pi)^6}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{q}}}{\omega_{\vec{p}}}}\left(-\hat{a}_q\hat{a}_p \; \delta(-\vec{p}-\vec{q}) + \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}\hat{a}_{\vec{p}} \; \delta(\vec{q}-\vec{p}) + \hat{a}_{\vec{q}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \; \delta(-\vec{q}+\vec{p}) - \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \; \delta(\vec{q}+\vec{p})\right) \\
&= -\int d^3qd^3p\frac{\vec{p}}{2(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{q}}}{\omega_{\vec{p}}}}\left(-\hat{a}_q\hat{a}_p \; \delta(\vec{p}+\vec{q}) + \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}\hat{a}_{\vec{p}} \; \delta(\vec{q}-\vec{p}) + \hat{a}_{\vec{q}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \; \delta(\vec{q}-\vec{p}) - \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \; \delta(\vec{q}+\vec{p})\right)
\end{aligned}$$

Donde usamos que $\delta(-y) = \delta(y)$.
Luego, podemos realizar la integración respecto a q utilizando la delta de dirac. Simplemente en los términos con $\delta(\vec{p}+\vec{q})$, intercambiamos las q por $-p$ y en los términos con $\delta(\vec{q}-\vec{p})$ intercambiamos las q por p.

$$\hat{\vec{P}} = -\int d^3p \; \frac{\vec{p}}{2(2\pi)^3}\left(-\left(\sqrt{\frac{\omega_{-\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}}}}\right)\hat{a}_{-\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \left(\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}}}}\right)\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \left(\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}}}}\right)\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} - \left(\sqrt{\frac{\omega_{-\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}}}}\right)\hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\right)$$

Sin embargo, $\omega_{-\vec{p}} = \omega_{\vec{p}}$ por cómo se define $\omega_p = \vec{p}^{\,2} + m^2$. Entonces, todos los términos de la forma $\sqrt{\omega_{\pm\vec{p}}}/\sqrt{\omega_{\vec{p}}}$ valen 1.

$$\hat{\vec{P}} = -\int d^3p\frac{\vec{p}}{2(2\pi)^3}\left(-\hat{a}_{-\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} - \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\right)$$

El primer término $\vec{p}\hat{a}_{-\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}$ es impar, pues si intercambiamos $\vec{p}$ por $-\vec{p}$, el resultado es el mismo pero con un signo negativo (tomando en cuenta que podemos conmutar $\hat{a}_{\vec{p}}$ y $\hat{a}_{-\vec{p}}$). Luego, como estamos integrando respecto a todo el espacio, el resultado de la integral de este término impar es 0. Similarmente con el último término $\hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$ que también es impar. Por lo que nos queda solamente:

$$\hat{\vec{P}} = -\int d^3p \; \frac{\vec{p}}{2(2\pi)^3}(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \tilde{a}_{\vec{p}}\tilde{a}^\dagger_{\vec{p}})$$

El segundo término no tiene el orden normal, por lo que lo ordenamos como hemos hecho en clase:

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{P}} &= -\int d^3p \; \frac{\vec{p}}{2(2\pi)^3}(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}) \\
&= \boxed{-\int d^3p \; \frac{\vec{p}}{(2\pi)^3} \; \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}}
\end{aligned}$$

Al principio evaluamos los operadores en $t = 0$ porque estamos trabajando en el punto de vista de Schrodinger, en los que los operadores no dependen del tiempo, sino que la dependencia temporal está contenida en los estados.

b) Encuentre la forma del operador de momento angular orbital asociado en términos de los operadores de ascenso y descenso

$$\widehat{J}_{ij} = \int d^3x \; (T^0_{\ i} x_j - T^0_{\ j} x_i)$$

Donde T^μ_ν es el tensor de energía momento canónico

Antes que nada, vemos que por definición de $\hat{J}$, si $i = j$ tendremos $\hat{J}_{ii} = \int d^3x \; 0 = 0$. Por lo tanto, sólo calcularemos en el caso en que $i \neq j$.

Primero calculamos los componentes que nos interesan del tensor de energía momento para la densidad lagrangiana de un campo escalar $\mathcal{L} = (\partial_\nu \phi)(\partial^\nu \phi) + m^2\phi^2$ a partir de la definición que vimos en clase:

$$\begin{aligned}
T^0_{\ i} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_i \phi - \eta^0_i \mathcal{L} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_i \phi \qquad \text{Porque } \eta^0_i = 0 \text{, ya que } i \neq 0 \\
&= \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \phi)} \left((\partial_\nu \phi)(\partial^\nu \phi) + m^2 \phi^2 \right) \partial_i \phi \\
&= \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \phi)} \left(\partial_0 \phi \partial^0 \phi + \partial_1 \phi \partial^1 \phi + \partial_2 \phi \partial^2 \phi + \partial_3 \phi \partial^3 \phi + m^2 \phi^2 \right) \partial_i \phi \\
&= \partial^0 \phi \partial_i \phi \\
&= \boxed{\dot{\phi} \partial_i \phi}
\end{aligned}$$

Vamos a necesitar escribir $\dot{\phi}$ y $\partial_i \phi$ en términos de los operadores de creación y anhilicación partiendo de las expresiones del enunciado:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} = \partial_0 \phi &= \partial_0 \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \widehat{a}^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x} \right) \right] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}} \, \partial_0 e^{-ip\cdot x} + \widehat{a}^\dagger_{\vec{p}} \, \partial_0 e^{ip\cdot x} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}} \, (-i\omega_p) e^{-ip\cdot x} + \widehat{a}^\dagger_{\vec{p}} \, (i\omega_p) e^{ip\cdot x} \right) \\
&= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}} \, e^{-ip\cdot x} - \widehat{a}^\dagger_{\vec{p}} \, e^{ip\cdot x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_i \phi &= \partial_i \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \widehat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right) \right] \\
&= \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}}\, \partial_i e^{-ip\cdot x} + \widehat{a}_{\vec{p}}^\dagger\, \partial_i e^{ip\cdot x} \right) \right] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}}\, (-ip_i) e^{-ip\cdot x} + \widehat{a}_{\vec{p}}^\dagger\, (ip_i) e^{ip\cdot x} \right) \\
&= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p_i}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} - \widehat{a}_{\vec{p}}^\dagger\, e^{ip\cdot x} \right)
\end{aligned}$$

Ahora ya podemos calcular J_{ij}. Primero vamos a calcular solamente el primer término de la integral:

$$\begin{aligned}
\int d^3x\, T^0{}_i x_j &= \int d^3x\, \dot{\phi}\partial_i\phi\, x_j \\
&= \int d^3x\, \left[-i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} - \widehat{a}_{\vec{p}}^\dagger\, e^{ip\cdot x} \right) \right] \left[-i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q_i}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \left(\widehat{a}_{\vec{q}}\, e^{-iq\cdot x} - \widehat{a}_{\vec{q}}^\dagger\, e^{iq\cdot x} \right) \right] x_j \\
&= \int d^3x d^3q d^3p \frac{q_i x_j}{2(2\pi)^6} (-i)(-i) \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_q}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} - \widehat{a}_{\vec{p}}^\dagger\, e^{ip\cdot x} \right) \left(\widehat{a}_{\vec{q}}\, e^{-iq\cdot x} - \widehat{a}_{\vec{q}}^\dagger\, e^{iq\cdot x} \right) \\
&= -\int d^3x d^3q d^3p \frac{q_i x_j}{2(2\pi)^6} \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_q}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} - \widehat{a}_{\vec{p}}^\dagger\, e^{ip\cdot x} \right) \left(\widehat{a}_{\vec{q}}\, e^{-iq\cdot x} - \widehat{a}_{\vec{q}}^\dagger\, e^{iq\cdot x} \right) \\
&= -\int d^3x d^3q d^3p \frac{q_i x_j}{2(2\pi)^6} \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_q}} \left(\hat{a}_p \hat{a}_q e^{i(-\vec{p}-\vec{q})\cdot x} - \hat{a}_p \hat{a}_q^\dagger e^{i(-\vec{p}+\vec{q})\cdot x} - \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_q e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot x} + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_q^\dagger e^{i(\vec{p}+\vec{q})\cdot x} \right)
\end{aligned}$$

Ahora vamos a integrar respecto a x. Sin embargo, esto no será tan fácil como en el inciso pasado, ya que ahora tenemos la x_j dentro del integrando, por lo que vamos a necesitar integrar términos de la forma $\int d^3x\, x_j e^{i(\vec{p}\pm\vec{q})\cdot x}$.

Podemos reescribir esta integral para que no incluya a la x_j si notamos que $\frac{\partial}{\partial q_j} e^{i(\vec{p}\pm\vec{q})\cdot x} = \pm i x_j e^{i(\vec{p}\pm\vec{q})\cdot x}$
(y se tiene exactamente el mismo resultado sin importar el signo de $\vec{p}$, por lo que no nos importará su signo)

Por lo tanto, tenemos que $x_j e^{i(\vec{p}\pm\vec{q})\cdot x} = \frac{1}{\pm i} \frac{\partial}{\partial q_j} e^{i(\vec{p}\pm\vec{q})\cdot x} = \mp i \frac{\partial}{\partial q_j} e^{i(\vec{p}\pm\vec{q})\cdot x}$.
Con esto, ya podemos realizar la integral en cuestión de manera más sencilla:

$$\int d^3x\, x_j e^{i(\vec{p}\pm\vec{q})\cdot x} = \mp i \int d^3x\, \frac{\partial}{\partial q_j} e^{i(\vec{p}\pm\vec{q})\cdot x} = \mp i \frac{\partial}{\partial q_j} \int d^3x e^{i(\vec{p}\pm\vec{q})\cdot x} = \mp i (2\pi)^3 \frac{\partial}{\partial q_j} \delta(\vec{p}\pm\vec{q})$$

Ahora regresamos al desarrollo en el que nos habíamos quedado y ya podremos integrar cada término respecto a x.

$$\int d^3x\, T^0{}_i x_j = -\int d^3x d^3q d^3p \frac{q_i x_j}{2(2\pi)^6}\sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_q}}\left(\hat{a}_p\hat{a}_q e^{i(-\vec{p}-\vec{q})\cdot x} - \hat{a}_p\hat{a}_q^\dagger e^{i(-\vec{p}+\vec{q})\cdot x} - \hat{a}_p^\dagger\hat{a}_q e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot x} + \hat{a}_p^\dagger\hat{a}_q^\dagger e^{i(\vec{p}+\vec{q})\cdot x}\right)$$

$$= -\int d^3q d^3p \frac{q_i(2\pi)^3}{2(2\pi)^6}\sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_q}}\left(i\hat{a}_p\hat{a}_q\partial_{q_j}\delta(-\vec{p}-\vec{q}) - (-i)\hat{a}_p\hat{a}_q^\dagger\partial_{q_j}\delta(-\vec{p}+\vec{q}) - i\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_q\partial_{q_j}\delta(\vec{p}-\vec{q}) + (-i)\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_q^\dagger\partial_{q_j}\delta(\vec{p}+\vec{q})\right)$$

$$= i\int d^3q d^3p \frac{q_i}{2(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_q}}\left(-\hat{a}_p\hat{a}_q\partial_{q_j}\delta(\vec{p}+\vec{q}) - \hat{a}_p\hat{a}_q^\dagger\partial_{q_j}\delta(\vec{p}-\vec{q}) + \hat{a}_p^\dagger\hat{a}_q\partial_{q_j}\delta(\vec{p}-\vec{q}) + \hat{a}_p^\dagger\hat{a}_q^\dagger\partial_{q_j}\delta(\vec{p}+\vec{q})\right)$$

Ahora integraremos respecto a q. Para hacerlo, necesitamos realizar muchas integrales del tipo $\int d^3q\; q_i\hat{a}_q\partial_{q_j}\delta(\vec{p}\pm\vec{q})$. Las cuales podemos realizar por partes:

$$\int d^3q\; \hat{a}_q q_i\partial_{q_j}\delta(\vec{p}\pm\vec{q}) = \hat{a}_q q_i\delta(\vec{p}\pm\vec{q})\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int d^3q\; \partial_{q_j}(\hat{a}_q q_i)\delta(\vec{p}\pm\vec{q}) = -\int d^3q\; \partial_{q_j}(\hat{a}_q q_i)\delta(\vec{p}\pm\vec{q})$$

$$= -\int d^3q\; q_i\; \partial_{q_j}(\hat{a}_q)\delta(\vec{p}\pm\vec{q}) \text{ Siempre y cuando } i\neq j\text{, para que } \partial_{q_j}q_i = 0$$

$$= \pm p_i\; \partial_{\mp p_j}(\hat{a}_{\mp p}) \quad \text{Por propiedad de la delta de Dirac}$$

Regresando al desarrollo que teníamos, podemos usar esto para hacer la integral respecto a q:

$$\int d^3x\, T^0{}_i x_j = i\int d^3q d^3p \frac{q_i}{2(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_q}}\left(-\hat{a}_p\hat{a}_q\partial_{q_j}\delta(\vec{p}+\vec{q}) - \hat{a}_p\hat{a}_q^\dagger\partial_{q_j}\delta(\vec{p}-\vec{q}) + \hat{a}_p^\dagger\hat{a}_q\partial_{q_j}\delta(\vec{p}-\vec{q}) + \hat{a}_p^\dagger\hat{a}_q^\dagger\partial_{q_j}\delta(\vec{p}+\vec{q})\right)$$

$$= i\int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_q}}\Bigg(-\hat{a}_p\int d^3q[q_i\hat{a}_q\partial_{q_j}\delta(\vec{p}+\vec{q})] - \hat{a}_p\int d^3q[q_i\hat{a}_q^\dagger\partial_{q_j}\delta(\vec{p}-\vec{q})]$$

$$+ \hat{a}_p^\dagger\int d^3q[q_i\hat{a}_q\partial_{q_j}\delta(\vec{p}-\vec{q})] + \hat{a}_p^\dagger\int d^3q[q_i\hat{a}_q^\dagger\partial_{q_j}\delta(\vec{p}+\vec{q})]\Bigg)$$

$$= i\int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_q}{\omega_q}}\left(-\hat{a}_p[p_i\partial_{-p_j}(\hat{a}_{-p})] - \hat{a}_p[-p_i\partial_{p_j}(\hat{a}_p^\dagger)] + \hat{a}_p^\dagger[-p_i\partial_{p_j}(\hat{a}_p)] + \hat{a}_p^\dagger[p_i\partial_{-p_j}(\hat{a}^\dagger_{-p})]\right)$$

$$= i\int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3}\left[-p_i\hat{a}_p\partial_{-p_j}(\hat{a}_{-p}) + p_i\hat{a}_p\partial_{p_j}(\hat{a}_p^\dagger) - p_i\hat{a}_p^\dagger\partial_{p_j}(\hat{a}_p) + p_i\hat{a}_p^\dagger\partial_{-p_j}(\hat{a}^\dagger_{-p})\right]$$

No veo como simplificar este término.

Podemos encontrar un resultado similar para la segunda integral de la definición de $\hat{J}_{ij} = \int d^3x(T^0_i x_j - T^0_j x_i)$. Para encontrarlo, simplemente intercambiamos los índices i y j. Por lo que tenemos:

$$\int d^3x T^0_j x_i = i\int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3}\left[-p_j\hat{a}_p\partial_{-p_i}(\hat{a}_{-p}) + p_j\hat{a}_p\partial_{p_i}(\hat{a}_p^\dagger) - p_j\hat{a}_p^\dagger\partial_{p_i}(\hat{a}_p) + p_j\hat{a}_p^\dagger\partial_{-p_i}(\hat{a}^\dagger_{-p})\right]$$

Juntando las dos integrales obtenidas, podemos escribir el resultado completo:

$$\hat{J}_{ij} = \int d^3x(T^0_i x_j - T^0_j x_i)$$

$$= i\int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3}\left[-p_i\hat{a}_p\partial_{-p_j}(\hat{a}_{-p}) + p_i\hat{a}_p\partial_{p_j}(\hat{a}_p^\dagger) - p_i\hat{a}_p^\dagger\partial_{p_j}(\hat{a}_p) + p_i\hat{a}_p^\dagger\partial_{-p_j}(\hat{a}^\dagger_{-p})\right]$$

$$- i\int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3}\left[-p_j\hat{a}_p\partial_{-p_i}(\hat{a}_{-p}) + p_j\hat{a}_p\partial_{p_i}(\hat{a}_p^\dagger) - p_j\hat{a}_p^\dagger\partial_{p_i}(\hat{a}_p) + p_j\hat{a}_p^\dagger\partial_{-p_i}(\hat{a}^\dagger_{-p})\right]$$

$$= i\int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3}\Bigg[- p_i\hat{a}_p\partial_{-p_j}(\hat{a}_{-p}) + p_i\hat{a}_p\partial_{p_j}(\hat{a}_p^\dagger) - p_i\hat{a}_p^\dagger\partial_{p_j}(\hat{a}_p) + p_i\hat{a}_p^\dagger\partial_{-p_j}(\hat{a}^\dagger_{-p})$$

$$+ p_j\hat{a}_p\partial_{-p_i}(\hat{a}_{-p}) - p_j\hat{a}_p\partial_{p_i}(\hat{a}_p^\dagger) + p_j\hat{a}_p^\dagger\partial_{p_i}(\hat{a}_p) - p_j\hat{a}_p^\dagger\partial_{-p_i}(\hat{a}^\dagger_{-p})\Bigg]$$

Me rindo ☹

Problema 2

considere la teoría de un campo escalar complejo. En la tarea anterior mostraron que la acción es invariante ante la transformación

$$\phi \to \phi' = e^{i\theta}\phi$$

Para θ un parámetro real. Si factorizamos un número q de la variable θ, la corriente conservada está dada por

$$\mathcal{J}^\mu(\mathbf{x}) = -iq\phi\partial^\mu\phi^* + iq\phi^*\partial^\mu\phi$$

a) Muestre que la carga asociada se puede escribir como

$$Q = iq\int d^3x\ (\phi^*\pi^* - \phi\pi)$$

Donde π y π^* representan los momentos canónicos asociados al campo ϕ y ϕ^* respectivamente

La carga conservada se define como $Q = \int d^3x\mathcal{J}^0$, que es igual a:

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x\ \left(-iq\phi\partial^0\phi^* + iq\phi^*\partial^0\phi\right) \\ &= -iq\int d^3x\ \left[(\partial^0\phi^*)\phi - (\partial^0\phi)\phi^*\right] \\ &= -iq\int d^3x\ (\dot{\phi}^*\phi - \dot{\phi}\phi^*) \end{aligned}$$

Donde hemos escrito $\partial^0\phi := \dot{\phi}$ y $\partial^0\phi^* := \dot{\phi}^*$

Ahora notamos que $\dot{\phi}$ es el momento conjugado a ϕ^* pues:

$$\begin{aligned} \pi^* &:= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^*)} \qquad \text{Definición de momento conjugado} \\ &= \frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi^*)}\left[\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi\right] \qquad \text{Por el } \mathcal{L} \text{ del campo escalar complejo} \\ &= \frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi^*)}\left(\partial_0\phi^*\partial^0\phi + \partial_1\phi^*\partial^1\phi + \partial_2\phi^*\partial^2\phi + \partial_3\phi^*\partial^3\phi - m^2\phi^*\phi\right) \\ &= \partial^0\phi = \dot{\phi} \end{aligned}$$

Y similarmente para el momento conjugado a ϕ:

$$\begin{aligned}
\pi &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \quad \text{Definición del momento conjugado } \pi \\
&= \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \phi)} \left[\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \phi)} \left(\partial_0 \phi^* \partial^0 \phi + \partial_1 \phi^* \partial^1 \phi + \partial_2 \phi^* \partial^2 \phi + \partial_3 \phi^* \partial^3 \phi - m^2 \phi^* \phi\right) \\
&= \partial^0 \phi^* = \dot{\phi}^*
\end{aligned}$$

Entonces, la carga Q a la que habíamos llegado antes se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
Q &= -iq \int d^3x \; (\dot{\phi}^* \phi - \dot{\phi} \phi^*) \\
&- iq \int d^3x \;\; (\pi \phi - \pi^* \phi^*) \\
&= \boxed{iq \int d^3x \; (\phi^* \pi^* - \phi \pi)}
\end{aligned}$$

b) El operador cuántico asociado a esta carga está dado por

$$\widehat{Q} = iq \int d^3x \ :(\widehat{\phi}^\dagger \widehat{\pi}^\dagger - \widehat{\phi}\widehat{\pi}):$$

Donde :: representa el orden normal de los operadores de creación y aniquilación, es decir, que los operadores de aniquilación (los que no tienen †) estén hasta la derecha. Muestre que

$$\widehat{Q} = q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ (\widehat{a}^\dagger_{\vec{p}}\widehat{a}_{\vec{p}} - \widehat{b}^\dagger_{\vec{p}}\widehat{b}_{\vec{p}})$$

Primero escribimos el operador $\widehat{\phi}$ en su expansión:

$$\widehat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \widehat{b}^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x}\right)$$

Y conjugando tenemos la expresión para $\widehat{\phi}^\dagger$:

$$\widehat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x} + \widehat{b}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x}\right)$$

También podemos obtener una expresión para $\widehat{\pi}$, que como vimos en el inciso pasado, es igual a $\partial_t \widehat{\phi}^\dagger$

$$\begin{aligned}
\widehat{\pi} &= \partial_t \ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x} + \widehat{b}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x}\right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}^\dagger_{p} \partial_t e^{ip\cdot x} + \widehat{b}_{\vec{p}} \partial_t e^{-ip\cdot x}\right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}^\dagger_{p} (i\omega_p) e^{ip\cdot x} + \widehat{b}_{p} (-i\omega_p) e^{-ip\cdot x}\right) \\
&= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\widehat{a}^\dagger_{p} e^{ip\cdot x} - \widehat{b}_{p} e^{-ip\cdot x}\right) \\
&= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \left(\widehat{a}^\dagger_{p} e^{ip\cdot x} - \widehat{b}_{p} e^{-ip\cdot x}\right)
\end{aligned}$$

Y la expresión para $\widehat{\pi}^\dagger$ se obtiene conjugando:

$$\widehat{\pi}^\dagger = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \left(\widehat{a}_{p} e^{-ip\cdot x} - \widehat{b}^\dagger_{p} e^{ip\cdot x}\right)$$

Ahora sí, sustituimos estos términos en la expresión de $\widehat{Q} = iq \int d^3x \ (\hat{\phi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger - \hat{\phi}\hat{\pi}) = iq(\int d^3x \ \hat{\phi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger - \int d^3x \ \hat{\phi}\hat{\pi})$

Vemos que necesitamos calcular dos integrales, las cuales calcularemos por separado. Empezamos con $\int d^3x\ \hat{\phi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger$:

$$\int d^3x\ \hat{\phi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger = \int d^3x\ \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}e^{ip\cdot x}+\hat{b}_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x}\right)\right]\left[-i\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_q}{2}}\left(\hat{a}_q e^{-iq\cdot x}-\hat{b}^\dagger_q e^{iq\cdot x}\right)\right]$$
$$= \int d^3x d^3p d^3q\ \frac{1}{2(2\pi)^6}\sqrt{\frac{\omega_q}{\omega_p}}(-i)\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}e^{ip\cdot x}+\hat{b}_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x}\right)\left(\hat{a}_q e^{-iq\cdot x}-\hat{b}^\dagger_q e^{iq\cdot x}\right)$$
$$= \int d^3x d^3p d^3q\ \frac{1}{2(2\pi)^6}\sqrt{\frac{\omega_q}{\omega_p}}(-i)\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{q}}e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot x}-\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{q}}e^{i(\vec{p}+\vec{q})\cdot x}+\hat{b}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{q}}e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot x}-\hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{q}}e^{i(\vec{q}-\vec{p})\cdot x}\right)$$

Realizamos la integral con respecto a x, utilizando que $\int d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot x} = (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})$ en cada término.

$$\int d^3x\ \hat{\phi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger = \int d^3p d^3q \frac{(2\pi)^3}{2(2\pi)^6}\sqrt{\frac{\omega_q}{\omega_p}}(-i)\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{q}}\delta(\vec{p}-\vec{q})-\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{q}}\delta(\vec{p}+\vec{q})+\hat{b}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{q}}\delta(\vec{p}+\vec{q})-\hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{q}}\delta(\vec{q}-\vec{p})\right)$$

Esto nos permite ahora integrar con respecto a $\vec{q}$ usando las deltas de Dirac. En los términos con $\delta(\vec{p}-\vec{q})$ simplemente reemplazamos $\vec{q}$ por $\vec{p}$ y en los términos con $\delta(\vec{p}+\vec{q})$ reemplazamos $\vec{q}$ por $-\vec{p}$:

$$\int d^3x\ \hat{\phi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger = \int d^3p \frac{(2\pi)^3}{2(2\pi)^6}\sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_p}}(-i)\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}-\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{-\vec{p}}+\hat{b}_{\vec{p}}\hat{a}_{-\vec{p}}-\hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\right)$$
$$= -i\int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}-\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{-\vec{p}}+\hat{b}_{\vec{p}}\hat{a}_{-\vec{p}}-\hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\right) \qquad (1)$$

Notar que reemplazamos ω_q por ω_p en el término que se encuentra factorizado sin importar que para algunos términos había que reemplazarla por ω_{-p}, esto porque $\omega_{-p} = \omega_p$ por cómo se define $\omega_p := \vec{p}^{\,2} + m^2$

Ahora podemos realizar la otra integral que necesitaremos para resolver el problema, que es $\int d^3x\ \hat{\phi}\hat{\pi}$. Esta integral se resuelve de forma totalmente análoga como se ve en el siguiente procedimiento:

$$\int d^3x\ \hat{\phi}\hat{\pi} = \int d^3x\ \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left(\hat{a}_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x}+\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}e^{ip\cdot x}\right)\right]\left[i\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_q}{2}}\left(\hat{a}^\dagger_q e^{iq\cdot x}-\hat{b}_q e^{-iq\cdot x}\right)\right]$$
$$= \int d^3x d^3p d^3q\ \frac{1}{2(2\pi)^6}\sqrt{\frac{\omega_q}{\omega_p}}(i)\left(\hat{a}_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x}+\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}e^{ip\cdot x}\right)\left(\hat{a}^\dagger_q e^{iq\cdot x}-\hat{b}_q e^{-iq\cdot x}\right)$$
$$= \int d^3x d^3p d^3q\ \frac{1}{2(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_q}{\omega_p}}(i)\left(\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{q}}e^{i(-\vec{p}+\vec{q})\cdot x}-\hat{a}_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{q}}e^{i(-\vec{p}-\vec{q})\cdot x}+\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{q}}e^{i(\vec{p}+\vec{q})\cdot x}-\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{q}}e^{i(-\vec{q}+\vec{p})\cdot x}\right)$$
$$= \int d^3p d^3q\ \frac{1}{2(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_q}{\omega_p}}(i)\left(\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{q}}\delta(-\vec{p}+\vec{q})-\hat{a}_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{q}}\delta(-\vec{p}-\vec{q})+\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{q}}\delta(\vec{p}+\vec{q})-\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{q}}\delta(-\vec{q}+\vec{p})\right)$$
$$= \int d^3p\ \frac{1}{2(2\pi)^6}\sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_p}}(i)\left(\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}-\hat{a}_{\vec{p}}\hat{b}_{-\vec{p}}+\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}-\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}}\right)$$
$$= i\int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3}\left(\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}-\hat{a}_{\vec{p}}\hat{b}_{-\vec{p}}+\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}-\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}}\right) \qquad (2)$$

Juntando el resultado (1) y el (2), tenemos que la expresión de $\widehat{Q}$ del enunciado es igual a

$$\begin{aligned}
\widehat{Q} &= iq \int d^3x \; (\hat{\phi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger - \hat{\phi}\hat{\pi}) \\
&= iq \int d^3x \; \hat{\phi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger - iq \int d^3x \; \hat{\phi}\hat{\pi} \\
&= iq \left[-i \int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3} \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{-\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \right) \right] - iq \left[i \int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3} \left(\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} - \hat{a}_{\vec{p}} \hat{b}_{-\vec{p}} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}} - \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \right) \right] \\
&= q \int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3} \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{-\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \right) + q \int d^3p \frac{1}{2(2\pi)^3} \left(\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} - \hat{a}_{\vec{p}} \hat{b}_{-\vec{p}} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}} - \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \right) \\
&= \frac{q}{2(2\pi)^3} \int d^3p \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{-\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} - \hat{a}_{\vec{p}} \hat{b}_{-\vec{p}} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}} - \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \right) \\
&= \frac{q}{2(2\pi)^3} \int d^3p \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} - \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \right) + \frac{q}{2(2\pi)^3} \int d^3p \; \left(-\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{-\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}} - \hat{a}_{\vec{p}} \hat{b}_{-\vec{p}} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}} \right)
\end{aligned}$$

La segunda integral es 0 debido a que el integrando es impar y estamos integrando sobre todos los valores de p. Vemos que el integrando es impar pues partiendo de $\left(-\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{-\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}} - \hat{a}_{\vec{p}} \hat{b}_{-\vec{p}} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}} \right)$, si reemplazamos $-\vec{p}$ por $\vec{p}$ nos queda $\left(-\hat{a}^\dagger_{-\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} + \hat{b}_{-\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}^\dagger_{-\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \right)$, que podemos reordenar para obtener: $\left(\hat{b}^\dagger_{-\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{-\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \right)$ conmutamos todos los términos (lo cuál es válido pues $\hat{a}$ y $\hat{b}$ conmutan) $= \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{-\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{b}_{-\vec{p}} - \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}} \right)$. Lo cual es igual al integrando original pero multiplicado por -1. Lo que prueba que el integrando es impar y esta integral vale 0.

Por lo tanto, el resultado final es:

$$\widehat{Q} = \frac{q}{2(2\pi)^3} \int d^3p \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} - \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \right)$$

Aplicamos el orden normal de los operadores:

$$\begin{aligned}
\widehat{Q} &= \frac{q}{2(2\pi)^3} \int d^3p \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \right) \\
&= \frac{q}{2(2\pi)^3} \int d^3p \left(2\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} - 2\hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \right) \\
&= \frac{q}{(2\pi)^3} \int d^3p \; \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \right)
\end{aligned}$$

Que es el resultado al que queríamos llegar.