



**Laboratorio de Mecánica.  
Semestre 2019-2.  
Facultad de Ciencias.**

**Dr. Martín Romero Martínez.  
Fis. José Abarca Munguía.**

**Práctica 7  
Tiro parabólico**

**T. Basile.  
J. Gallegos.  
I. Santiago.  
R. Rangel.**

**Grupo: 8074.**

**Universidad Nacional Autónoma de México.**

**Fecha de elaboración: 1, 3 de abril de 2019 2019.**

**Fecha de entrega: 10 de abril, 2019.**

***Resumen:***

El trabajo muestra los resultados experimentales de realizar 10 tiros parabólicos para distintos ángulos usando dos pelotas diferentes. Los resultados se obtuvieron con videos e imágenes estroboscópicas para después ser analizados con el programa tracker para obtener la posición horizontal y vertical del movimiento como funciones del tiempo. Finalmente se obtuvieron las ecuaciones de la trayectoria de cada proyectil y el alcance de cada lanzamiento para obtener así el ángulo de máximo alcance.

## I. Introducción.

### Marco teórico.

Un proyectil es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y que sigue una trayectoria determinada por la aceleración gravitacional. Para analizar este movimiento, se tratan por separado la coordenada horizontal y la vertical.[1] Primero supondremos que la resistencia del aire se puede considerar como insignificante y proponemos un sistema de coordenadas con el eje y positivo verticalmente hacia arriba y el eje x positivo horizontalmente a la derecha.

Entonces podemos obtener las ecuaciones paramétricas en cada uno de los ejes, en el eje x se sigue un MRU, ya que no existe ninguna aceleración en esta dirección. Como además la velocidad en “x” viene dada por la componente horizontal de la velocidad inicial, entonces se tiene la función siguiente:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos(\theta) t \quad \text{ecuación(1)}$$

Por otro lado, para la ecuación paramétrica en el eje y, se tiene que sigue un MRUA ya que el proyectil tiene la aceleración constante de la gravedad. Además su velocidad inicial en el eje “y” viene dada por la componente vertical de la velocidad inicial. Por lo tanto “y” tiene la función siguiente:

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{ecuación(2)}$$

Si se elige como origen el punto en el cual el proyectil comienza su vuelo, entonces  $x_0 = y_0 = 0$ . Y por lo tanto las ecuaciones paramétricas del movimiento quedan de la siguiente forma:

$$x(t) = v_0 \cos(\theta) t \quad \text{ecuación(3)}$$

$$y(t) = v_0 \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{ecuación (4)}$$

Con esta consideración, se puede despejar “t” de la ecuación paramétrica de “x”, para obtener  $t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)}$ . Ahora se puede sustituir este tiempo en la ecuación de “y” para obtener a “y” como función de “x”:

$$y(x) = x \tan(\theta) - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \quad \text{ecuación(5)}$$

Con estas últimas tres ecuaciones se puede describir el movimiento del proyectil para cualquier ángulo y velocidad inicial, ya sea con las ecuaciones paramétricas o con la ecuación que relaciona directamente “x” y “y”.

Finalmente, haciendo  $y=0$  en la ecuación (4), podemos encontrar el tiempo de vuelo del proyectil hasta volver al suelo, que es:  $t_m = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$ . [2]

Luego, sustituyendo este tiempo en la ecuación (3), se encuentra que el alcance del proyectil es  $x_m = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{2g}$ . Podemos notar que esta ecuación para el alcance llega a su máximo cuando  $\theta=45$  ya que entonces el seno vale 1. [3] Lo cual significa que éste es el ángulo de máximo alcance para un tiro parabólico.

### Objetivos

El objetivo general de la práctica es hacer un análisis gráfico del tiro parabólico para el lanzamiento de dos pelotas a 10 ángulos distintos. Esto con la meta de encontrar el ángulo que permite el alcance mínimo y el que permite el alcance máximo.

El primer objetivo es grabar un video de cada tiro y crear las gráficas de las funciones paramétricas usando el programa Tracker para analizar el movimiento. Usando la información dada y un ajuste de mínimos cuadrados, obtener las ecuaciones paramétricas de cada eje. (ecuaciones 3 y 4)

Posteriormente, tenemos el objetivo de comparar los valores de “x” y “y” a diferentes tiempos para cada lanzamiento y encontrar así la ecuación de la trayectoria del proyectil. (ecuación 5)

Finalmente, tomar una fotografía estroboscópica con la frecuencia adecuada para observar todo el movimiento de la pelota en una sola imagen, usar esta imagen para medir la distancia alcanzada por el proyectil y así determinar el ángulo de mayor alcance.

## II. Desarrollo experimental

### Material

- Cañón
- Pelota de Golf
- Pelota de Ping Pong
- Reglas de madera de 1 metro y de 2 metros
- Estroboscopio con frecuencia ajustable.
- 2 prensas
- Transportador.

### Montaje experimental y procedimiento

1) Colocamos en la mesa la regla de dos metros horizontalmente y la regla de un metro perpendicular a ésta sobre el borde de la mesa, creand así un eje de coordenadas con el origen en su intersección.

2) Colocamos el transportador en la intersección de las reglas y el cañón al lado de éste, para sujetar todo en orden usamos las dos prensas.

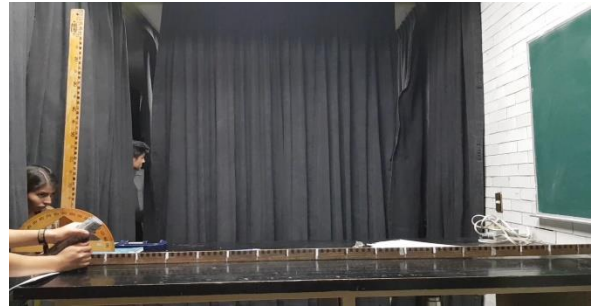
3) Ponemos la pelota de golf en el cañón y lo inclinamos un ángulo de 30 grados, lanzamos la pelota con el cañón y grabamos el movimiento con la cámara de un celular. Repetimos el tiro asegurándonos de lanzar la pelota con la misma velocidad inicial pero ahora a 35 grados. Repetimos de nuevo el lanzamiento pero aumentando la inclinación de 5 en 5 grados, hasta tener un total de 10 tiros, grabando cada uno. Posteriormente repetimos el desarrollo pero para la pelota de ping pong.

4) Para cada lanzamiento tomamos una foto estroboscópica, colocando el estroboscopio a una distancia adecuada y con una frecuencia de 1200 RPM.

5) Analizamos los videos con el programa Tracker para obtener las tablas de posición en “x” y en “y” con respecto al tiempo y usamos un ajuste de mínimos cuadrados para obtener las ecuaciones paramétricas.

6) Posteriormente comparamos las posiciones en “x” y en “y” para obtener la ecuación de la trayectoria del proyectil.

7) Finalmente analizamos las imágenes estroboscópicas también en Tracker para obtener el alcance de la pelota para cada ángulo, y así determinar cuál fue el ángulo de máximo alcance.



*Arreglo experimental*

### III Resultados

Para cada tiro se obtuvieron los datos y gráficas con el uso de Tracker a partir de los videos.

En el movimiento del proyectil se tomó el primer punto en el que se ve la pelota en el video como el origen, esto para tener que  $x_0 = y_0 = 0$  y poder usar así las ecuaciones 3, 4 y 5, que se pueden linealizar con un cambio de variable.

Primero se graficaron los puntos de posición en  $x$  para cada tiempo y con el método de mínimos cuadrados se obtuvo la relación entre estas dos variables, de la forma  $x = at + b$

Posteriormente, se graficaron los puntos  $(t,y)$  que deben de seguir la *ecuación (4)* y por lo tanto tener la forma:  $y = at^2 + bt$ , sin embargo para obtener estos coeficientes, primero se divide entre  $t$  y se usa la ecuación  $\frac{y}{t} = at + b$ . Ahora los puntos de la gráfica  $y/t$  vs  $t$  tienen un comportamiento lineal y por lo tanto se pueden obtener los coeficientes  $a$  y  $b$  con regresión lineal y posteriormente regresar a la ecuación original.

Finalmente, se graficaron los puntos  $(x,y)$  que deben de seguir la *ecuación (5)* y por lo tanto tener la forma:  $y = px^2 + qx$ , sin embargo para obtener estos coeficientes, primero se divide entre  $x$  y se usa la ecuación  $\frac{y}{x} = px + q$ . Ahora los puntos de la gráfica  $y/x$  vs  $x$  tienen un comportamiento lineal y por lo tanto se pueden obtener los coeficientes  $p$  y  $q$  con regresión lineal y posteriormente regresar a la ecuación original.

### Pelota de Golf

#### 30 grados

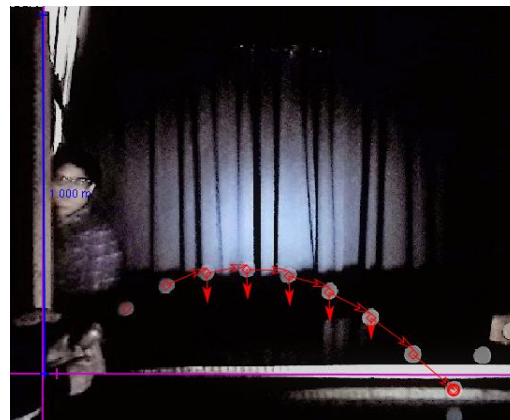


Imagen 1: Trayectoria del proyectil (con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 1.1.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  $x(t) = (3.16 \pm 0.01)t + (-0.004 \pm 0.003)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 3.16 \pm 0.01$ .

A partir de la *gráfica 1.1.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-4.82 \pm 0.08)t + (2.23 \pm 0.02)$ , entonces:  $y = (-4.82 \pm 0.08)t^2 + (2.23 \pm 0.02)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  $v_{0y} = (2.23 \pm 0.02)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-4.82 \pm 0.08)$ .

Finalmente, de la *gráfica 1.1.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-0.492 \pm 0.003)x + (0.717 \pm 0.003)$ , entonces  $y = (-0.492 \pm 0.003)x^2 + (0.717 \pm 0.003)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

#### 35 grados



Imagen 2: Trayectoria del proyectil (con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 1.2.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:

$x(t) = (2.204 \pm 0.007)t + (-0.006 \pm 0.002)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 2.204 \pm 0.007$ .

A partir de la *gráfica 1.2.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-4.98 \pm 0.015)t + (1.65 \pm 0.004)$ , entonces:

$y = (-4.98 \pm 0.015)t^2 + (1.65 \pm 0.004)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  $v_{0y} = (1.65 \pm 0.004)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-4.98 \pm 0.015)$ .

Finalmente, de la *gráfica 1.2.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-0.991 \pm 0.005)x + (0.729 \pm 0.003)$ , entonces,  $y = (-0.991 \pm 0.005)x^2 + (0.729 \pm 0.003)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

#### 40 grados

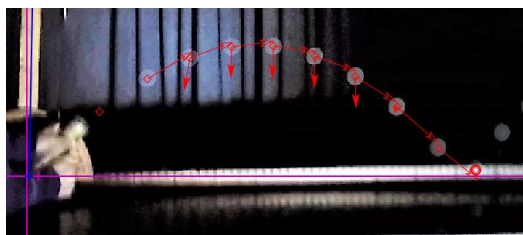


Imagen 3: Trayectoria del proyectil (con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 1.3.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:

$x(t) = (2.512 \pm 0.007)t + (-0.006 \pm 0.002)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 2.512 \pm 0.007$ .

A partir de la *gráfica 1.3.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-4.88 \pm 0.018)t + (2.273 \pm 0.005)$ , entonces:

$y = (-4.88 \pm 0.015)t^2 + (2.273 \pm 0.005)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  $v_{0y} = (2.273 \pm 0.005)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-4.88 \pm 0.015)$ .

Finalmente, de la *gráfica 1.3.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-0.757 \pm 0.002)x + (0.891 \pm 0.002)$ , entonces,  $y = (-0.757 \pm 0.002)x^2 + (0.891 \pm 0.002)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

#### 45 grados

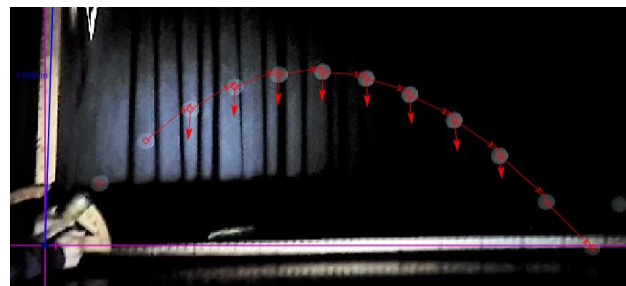


Imagen 4: Trayectoria del proyectil (con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 1.4.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:

$x(t) = (2.268 \pm 0.006)t + (0.008 \pm 0.002)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 2.268 \pm 0.006$ .

A partir de la *gráfica 1.4.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-4.92 \pm 0.012)t + (2.246 \pm 0.004)$ , entonces:

$y = (-4.92 \pm 0.012)t^2 + (2.246 \pm 0.004)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  $v_{0y} = (2.246 \pm 0.004)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-4.92 \pm 0.012)$ .

Finalmente, de la *gráfica 1.4.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-0.906 \pm 0.007)x + (0.952 \pm 0.005)$ , entonces,  $y = (-0.906 \pm 0.007)x^2 + (0.952 \pm 0.005)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

#### 50 grados

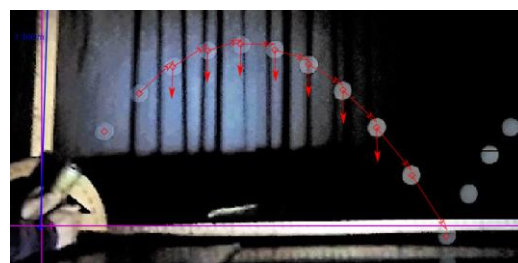


Imagen 5: Trayectoria del proyectil (con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 1.5.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:

$x(t) = (2.200 \pm 0.006)t + (0.001 \pm 0.002)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 2.200 \pm 0.006$ .

A partir de la *gráfica 1.5.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-4.862 \pm 0.014)t + (2.68 \pm 0.005)$ , entonces:

$y = (-4.862 \pm 0.01)t^2 + (2.68 \pm 0.005)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  $v_{0y} = (2.68 \pm 0.005)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-4.862 \pm 0.014)$ .



Finalmente, de la *gráfica 1.5.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-0.981 \pm 0.006)x + (1.196 \pm 0.004)$ , entonces,  $y = (-0.981 \pm 0.006)x^2 + (1.196 \pm 0.004)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 55 grados

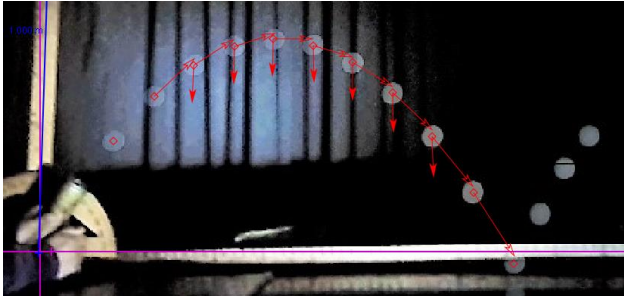


Imagen 6: Trayectoria del proyectil(con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 1.6.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  $x(t) = (1.964 \pm 0.004)t + (0.005 \pm 0.001)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 1.964 \pm 0.004$ .

A partir de la *gráfica 1.6.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-5.14 \pm 0.03)t + (2.52 \pm 0.01)$ , entonces:  $y = (-5.14 \pm 0.03)t^2 + (2.52 \pm 0.01)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  $v_{0y} = (2.52 \pm 0.01)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-5.14 \pm 0.03)$ .

Finalmente, de la *gráfica 1.6.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-1.270 \pm 0.004)x + (1.240 \pm 0.003)$ , entonces,  $y = (-1.270 \pm 0.004)x^2 + (1.240 \pm 0.003)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 60 grados

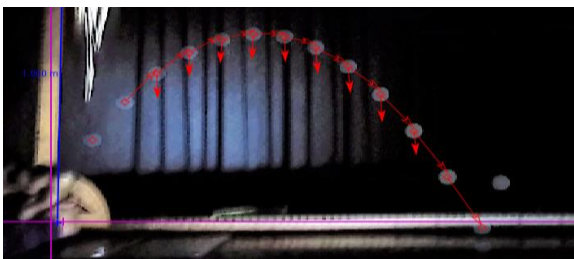


Imagen 7: Trayectoria del proyectil(con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 1.7.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  $x(t) = (1.615 \pm 0.006)t + (0.010 \pm 0.002)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 1.615 \pm 0.006$ .

A partir de la *gráfica 1.7.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-5.06 \pm 0.019)t + (2.401 \pm 0.006)$ , entonces:  $y = (-5.06 \pm 0.019)t^2 + (2.401 \pm 0.006)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  $v_{0y} = (2.401 \pm 0.006)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-5.06 \pm 0.019)$ .

Finalmente, de la *gráfica 1.7.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-1.819 \pm 0.01)x + (1.420 \pm 0.005)$ , entonces,  $y = (-1.819 \pm 0.01)x^2 + (1.420 \pm 0.005)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 65 grados

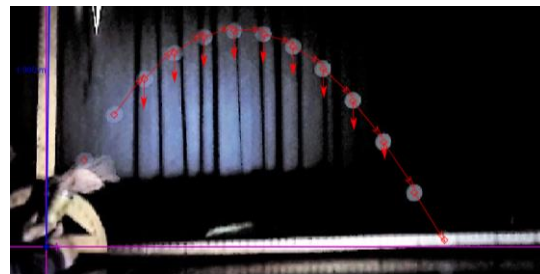


Imagen 8: Trayectoria del proyectil(con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 1.8.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  $x(t) = (1.558 \pm 0.008)t + (0.016 \pm 0.003)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 1.558 \pm 0.008$ .

A partir de la *gráfica 1.8.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-5.14 \pm 0.04)t + (2.82 \pm 0.014)$ , entonces:  $y = (-5.14 \pm 0.04)t^2 + (2.82 \pm 0.014)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  $v_{0y} = (2.82 \pm 0.014)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-5.14 \pm 0.04)$ .

Finalmente, de la *gráfica 1.8.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-1.88 \pm 0.015)x + (1.666 \pm 0.008)$ , entonces,  $y = (-1.88 \pm 0.015)x^2 + (1.666 \pm 0.008)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 70 grados

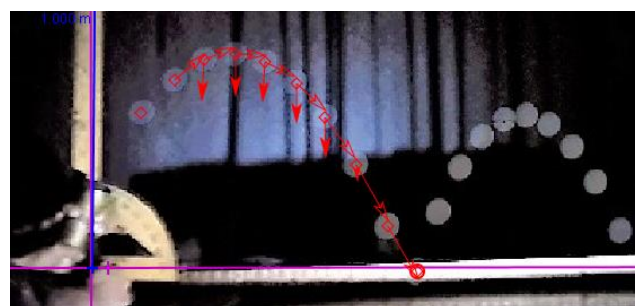


Imagen 9: Trayectoria del proyectil(con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 1.9.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  
 $x(t) = (0.877 \pm 0.006)t + (0.006 \pm 0.001)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 0.877 \pm 0.006$ .

A partir de la *gráfica 1.9.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-5.13 \pm 0.028)t + (3.057 \pm 0.009)$ , entonces:  
 $y = (-5.13 \pm 0.028)t^2 + (3.057 \pm 0.009)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  
 $v_{0y} = (3.057 \pm 0.009)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-5.13 \pm 0.028)$ .

Finalmente, de la *gráfica 1.9.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-6.313 \pm 0.028)x + (3.359 \pm 0.008)$ , entonces,  
 $y = (-6.313 \pm 0.028)x^2 + (3.359 \pm 0.008)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

## 75 grados

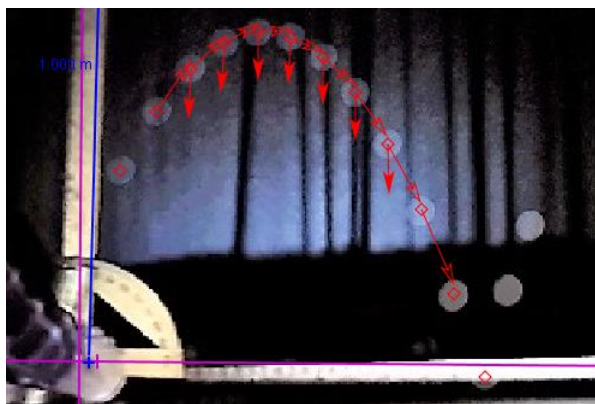


Imagen 10: Trayectoria del proyectil (con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 1.10.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  
 $x(t) = (0.619 \pm 0.006)t + (0.011 \pm 0.002)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 0.619 \pm 0.006$ .

A partir de *gráfica 1.10.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-5.10 \pm 0.039)t + (2.75 \pm 0.013)$ , entonces:  
 $y = (-5.10 \pm 0.039)t^2 + (2.75 \pm 0.013)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  
 $v_{0y} = (2.75 \pm 0.013)$  y que  $-\frac{g}{2} = (5.10 \pm 0.013)$ .

Finalmente, de la *gráfica 1.10.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-11.1 \pm 0.244)x + (3.91 \pm 0.054)$ , entonces,  
 $y = (-11.1 \pm 0.244)x^2 + (3.91 \pm 0.054)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

Para obtener el ángulo con el que se tiene el mayor alcance, comparamos las distancias obtenidas de alcance para cada uno de los 10 ángulos. Con esto creamos la tabla siguiente:

Tabla 1: ángulo y alcance, Pelota de golf

Ángulo	Alcance [m]
30	1.115
35	1.183
40	1.255
45	1.302
50	1.208
55	1.149
60	1.127
65	1.076
70	0.686
75	0.658

Según estos datos, se puede observar que el ángulo para el cual se tuvo el mayor alcance fue de 45 grados, con un alcance de 1.302m. Por otro lado, de los ángulos usados, el de menor alcance fue el de 75 grados, con apenas 0.658m.

## Pelota de Ping Pong

### 30 grados

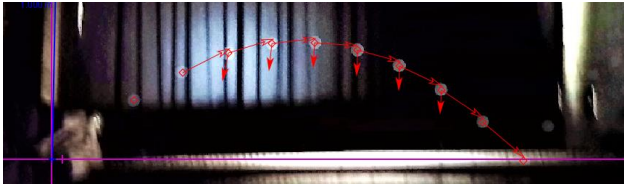


Imagen 11 Trayectoria del proyectil (con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 2.1.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  
 $x(t) = (2.30 \pm 0.014)t + (0.013 \pm 0.003)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 2.30 \pm 0.014$ .

A partir de *gráfica 2.1.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-4.86 \pm 0.049)t + (1.95 \pm 0.013)$ , entonces:  
 $y = (-4.86 \pm 0.049)t^2 + (1.95 \pm 0.013)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  
 $v_{0y} = (1.95 \pm 0.013)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-4.86 \pm 0.049)$ .

Finalmente, de la *gráfica 2.1.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-0.86 \pm 0.011)x + (0.809 \pm 0.007)$ , entonces,  
 $y = (-0.86 \pm 0.011)x^2 + (0.809 \pm 0.007)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 35 grados

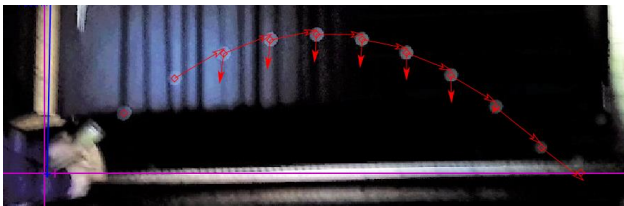


Imagen 12 Trayectoria del proyectil (con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 2.2.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  
 $x(t) = (2.15 \pm 0.019)t + (0.018 \pm 0.005)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 2.15 \pm 0.019$ .

A partir de *gráfica 2.2.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-5.19 \pm 0.04)t + (2.04 \pm 0.01)$ , entonces:  
 $y = (-5.19 \pm 0.04)t^2 + (2.04 \pm 0.01)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  
 $v_{0y} = (2.04 \pm 0.01)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-5.19 \pm 0.04)$ .

Finalmente, de la *gráfica 2.2.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-0.99 \pm 0.014)x + (0.875 \pm 0.008)$ , entonces,

$y = (-0.99 \pm 0.014)x^2 + (0.875 \pm 0.008)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 40 grados

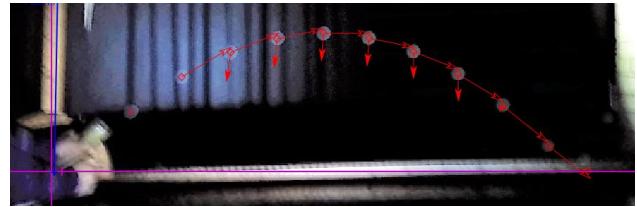


Imagen 13 Trayectoria del proyectil (con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 2.3.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  
 $x(t) = (2.079 \pm 0.008)t + (0.010 \pm 0.002)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 2.079 \pm 0.008$ .

A partir de *gráfica 2.3.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-5.13 \pm 0.014)t + (1.799 \pm 0.004)$ , entonces:  
 $y = (-5.13 \pm 0.014)t^2 + (1.799 \pm 0.004)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  
 $v_{0y} = (1.799 \pm 0.004)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-5.13 \pm 0.014)$ .

Finalmente, de la *gráfica 2.3.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-1.11 \pm 0.010)x + (0.826 \pm 0.006)$ , entonces,  
 $y = (-1.11 \pm 0.010)x^2 + (0.826 \pm 0.006)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 45 grados

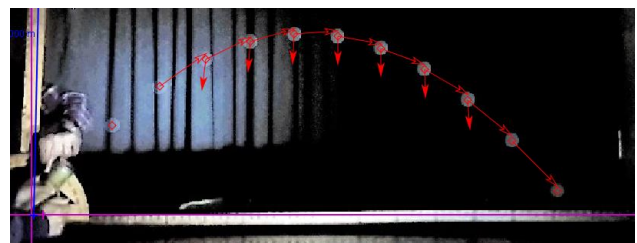


Imagen 14 Trayectoria del proyectil (con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 2.4.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  
 $x(t) = (2.17 \pm 0.01)t + (0.009 \pm 0.003)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 2.17 \pm 0.01$ .

A partir de *gráfica 2.4.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-5.89 \pm 0.013)t + (2.307 \pm 0.004)$ , entonces:  
 $y = (-5.89 \pm 0.013)t^2 + (2.307 \pm 0.004)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  
 $v_{0y} = (2.307 \pm 0.004)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-5.89 \pm 0.013)$ .



Finalmente, de la *gráfica 2.4.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-1.21 \pm 0.010)x + (1.037 \pm 0.006)$ , entonces,  $y = (-1.21 \pm 0.010)x^2 + (1.037 \pm 0.006)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 50 grados

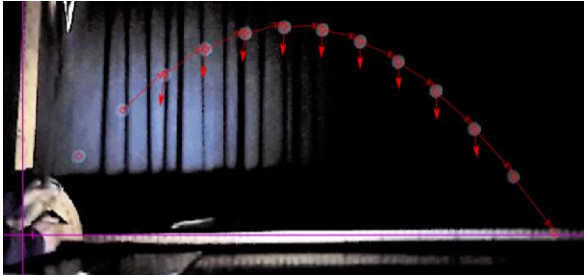


Imagen 15 Trayectoria del proyectil(con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 2.5.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  $x(t) = (1.697 \pm 0.002)t + (0.001 \pm 0.001)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 1.697 \pm 0.002$ .

A partir de *gráfica 2.5.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-4.62 \pm 0.065)t + (1.86 \pm 0.018)$ , entonces:  $y = (-4.62 \pm 0.065)t^2 + (1.86 \pm 0.018)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  $v_{0y} = (1.86 \pm 0.018)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-4.62 \pm 0.065)$ .

Finalmente, de la *gráfica 2.5.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-1.60 \pm 0.02)x + (1.096 \pm 0.01)$ , entonces,  $y = (-1.60 \pm 0.02)x^2 + (1.096 \pm 0.01)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 55 grados

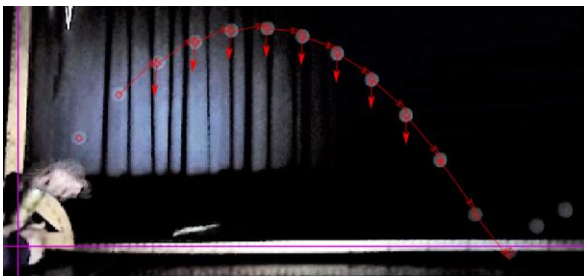


Imagen 16 Trayectoria del proyectil(con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 2.6.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  $x(t) = (1.504 \pm 0.003)t + (0.002 \pm 0.001)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 1.504 \pm 0.003$ .

A partir de *gráfica 2.6.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-4.81 \pm 0.04)t + (1.70 \pm 0.008)$ , entonces:  $y = (-4.81 \pm 0.04)t^2 + (1.70 \pm 0.008)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  $v_{0y} = (1.70 \pm 0.008)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-4.81 \pm 0.04)$ .

Finalmente, de la *gráfica 2.6.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-1.68 \pm 0.03)x + (1.11 \pm 0.01)$ , entonces,  $y = (-1.68 \pm 0.03)x^2 + (1.11 \pm 0.01)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 60 grados

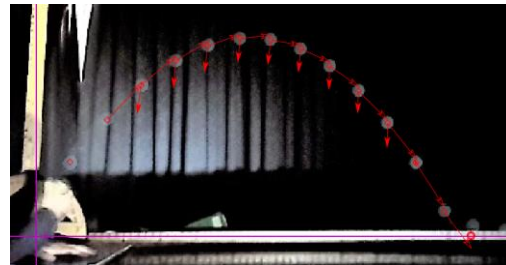


Imagen 17 Trayectoria del proyectil(con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 2.7.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  $x(t) = (1.415 \pm 0.004)t + (0.003 \pm 0.002)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 1.415 \pm 0.004$ .

A partir de *gráfica 2.7.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-4.92 \pm 0.005)t + (2.14 \pm 0.009)$ , entonces:  $y = (-4.92 \pm 0.005)t^2 + (2.14 \pm 0.009)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  $v_{0y} = (2.14 \pm 0.009)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-4.92 \pm 0.005)$ .

Finalmente, de la *gráfica 2.7.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-2.21 \pm 0.04)x + (1.35 \pm 0.021)$ , entonces,  $y = (-2.21 \pm 0.04)x^2 + (1.35 \pm 0.021)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 65 grados

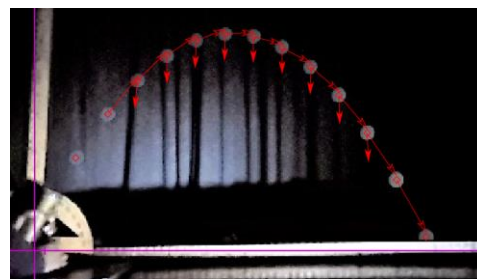


Imagen 18 Trayectoria del proyectil(con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 2.8.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  
 $x(t) = (1.303 \pm 0.009)t + (0.016 \pm 0.003)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 1.303 \pm 0.009$ .

A partir de *gráfica 2.8.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-5.19 \pm 0.03)t + (2.58 \pm 0.01)$ , entonces:  
 $y = (-5.19 \pm 0.03)t^2 + (2.58 \pm 0.01)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  
 $v_{0y} = (2.58 \pm 0.01)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-5.19 \pm 0.03)$ .

Finalmente, de la *gráfica 2.8.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-2.66 \pm 0.04)x + (1.79 \pm 0.018)$ , entonces,  
 $y = (-2.66 \pm 0.04)x^2 + (1.79 \pm 0.018)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 70 grados

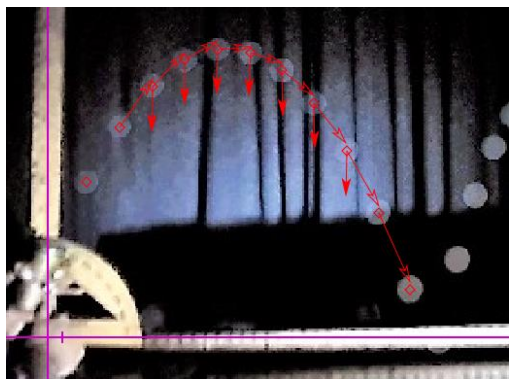


Imagen 19 Trayectoria del proyectil (con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 2.9.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  
 $x(t) = (0.892 \pm 0.003)t + (0.005 \pm 0.001)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 0.892 \pm 0.003$ .

A partir de *gráfica 2.9.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-5.01 \pm 0.076)t + (2.67 \pm 0.026)$ , entonces:  
 $y = (-5.01 \pm 0.076)t^2 + (2.67 \pm 0.026)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  
 $v_{0y} = (2.67 \pm 0.026)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-5.01 \pm 0.076)$ .

Finalmente, de la *gráfica 2.9.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-5.74 \pm 0.064)x + (2.80 \pm 0.02)$ , entonces,  
 $y = (-5.74 \pm 0.064)x^2 + (2.80 \pm 0.02)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento.

### 75 grados

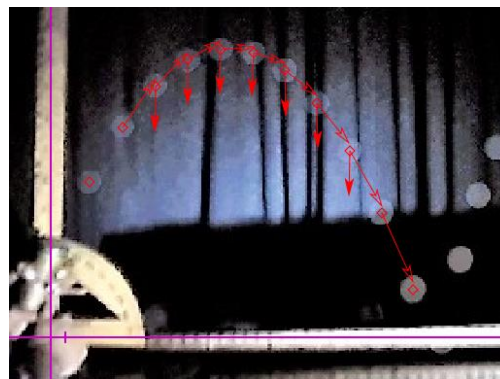


Imagen 20 Trayectoria del proyectil (con aceleración y velocidad)

A partir de los datos de la *gráfica 2.10.1* del anexo y con el método de mínimos cuadrados, se obtiene:  
 $x(t) = (0.482 \pm 0.002)t + (0.001 \pm 0.001)$ , lo cual según el marco teórico, significa que  $v_{0x} = 0.482 \pm 0.002$ .

A partir de *gráfica 2.10.3* del anexo, se obtiene que  $y/t = (-4.89 \pm 0.017)t + (2.463 \pm 0.006)$ , entonces:  
 $y = (-4.89 \pm 0.017)t^2 + (2.463 \pm 0.006)t$ , por lo que según la *ecuación (3)* de la hipótesis, se tiene que:  
 $v_{0y} = (2.463 \pm 0.006)$  y que  $-\frac{g}{2} = (-4.89 \pm 0.017)$ .

Finalmente, de la *gráfica 2.10.5* del anexo, se tiene que  $y/x = (-4.89 \pm 0.017)x + (2.463 \pm 0.006)$ , entonces,  
 $y = (-4.89 \pm 0.017)x^2 + (2.463 \pm 0.006)x$ . Que es la ecuación de la parábola para este movimiento

Para obtener el ángulo con el que se tiene el mayor alcance, comparamos las distancias obtenidas de alcance para cada uno de los 10 ángulos. Con esto creamos la tabla siguiente:

Tabla 2: ángulo y alcance, Pelota de golf

Ángulo	Alcance [m]
30	1.544
35	1.594
40	1.619
45	1.658
50	1.593
55	1.398
60	1.302
65	1.263
70	0.021
75	0.752

Según estos datos, se puede observar que el ángulo para el cual se tuvo el mayor alcance fue de 45 grados, con un alcance de 1.658 m. Por otro lado, de los ángulos usados, el de menor alcance fue el de 75 grados, con un alcance de 0.752m.

#### IV. Observaciones

Para todas las relaciones medidas encontramos los resultados esperados según el marco teórico, ya que encontramos que la relación “x” vs “t” se puede linealizar directamente, mientras que la relación “y” vs “t” y “y” vs “x” requieren de un cambio de variable ya que son ecuaciones cuadráticas.

Esto se debe a que como se vio en el marco teórico, la relación “x” vs “t” es la de un MRU y por lo tanto es una relación lineal, sin embargo la relación “y” vs “t” es la de un MRUA que por lo tanto sigue una relación cuadrática y forma una parábola.

Como observación vale la pena destacar que encontramos ciertas dificultades al cambiar el ángulo del cañón, ya que éste está fijo. Por lo que tuvimos que ponerle cartones por debajo para ir aumentando el ángulo poco a poco. Mientras tanto era necesario asegurarse de que la pelota saliera disparada desde la misma posición en cada lanzamiento y que el cañón disparara con la misma velocidad inicial, esto para que la única variable fuese el ángulo del cañón que es lo que nos interesa.

Además, fue necesario realizar varios lanzamientos de prueba para tomar las fotografías estroboscópicas ya que es necesario asegurarse de que la frecuencia sea la necesaria para que en cada imagen se aprecien muchas posiciones del movimiento. Sin embargo, en algunas de las primeras fotografías que tomamos, no se apreciaban suficientes puntos del movimiento del proyectil por lo que es imposible analizarlas correctamente por lo que tuvimos que volver a tomar ciertas fotografías.

#### V. Conclusión

Cumplimos con todos los objetivos planteados, ya que para cada ángulo grabamos un video y obtuvimos una foto estroboscópica que posteriormente analizamos. Y así obtuvimos todas las ecuaciones necesarias para cada tiro parabólico.

Además, según el marco teórico, en la ecuación (4) se dice que el coeficiente de la  $t^2$  es igual a  $g/2$ . Experimentalmente calculamos este coeficiente para cada uno de los veinte tiros parabólicos. Y obtuvimos como resultado valores muy cercanos al esperado de  $4.905\text{m/s}^2$ . Lo cual nos hace pensar que las medidas fueron obtenidas de forma correcta y que entonces las ecuaciones encontradas interpretan correctamente la realidad.

Además, se llegó a que para ambas pelotas se cumple que el ángulo de mayor alcance es el de 45 grados y el ángulo de mínimo alcance fue el más alejado a 45 grados de los que medimos, lo cual concuerda con lo descrito en el marco teórico y las ecuaciones descritas.

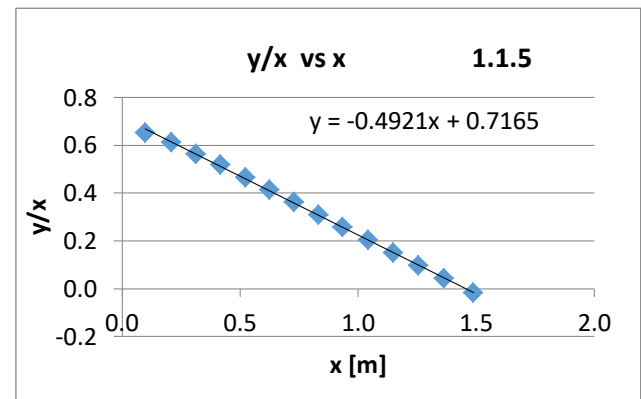
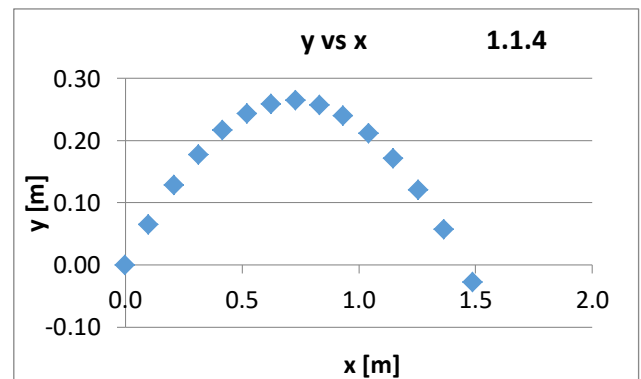
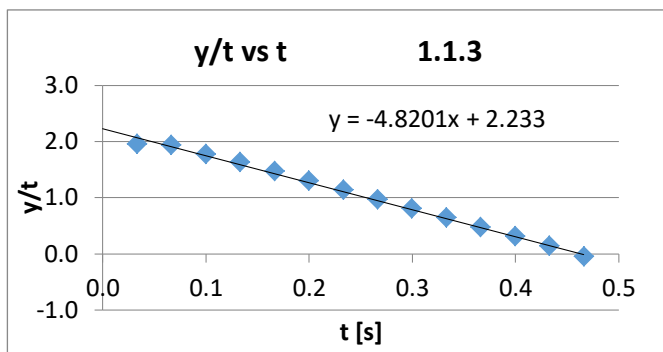
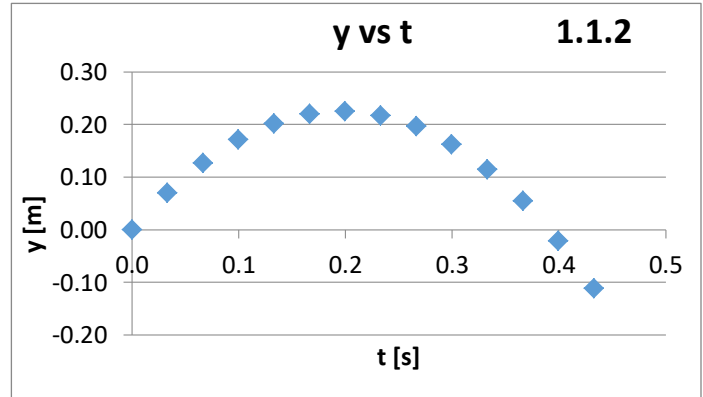
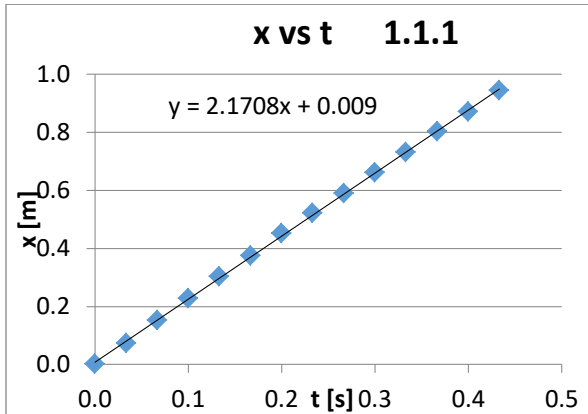
Además, en cada movimiento obtuvimos la velocidad inicial en “x” y en “y”, estas no son posibles de comparar con datos teóricos ya que dependen totalmente de la fuerza con la que realizamos los lanzamientos. Sin embargo, el hecho de que la aceleración de la gravedad medida se acerque tanto a la realidad, nos da la seguridad de que estos datos de velocidad son muy cercanos a la realidad.



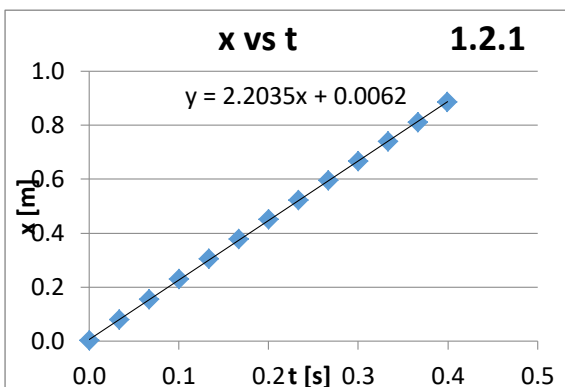
## ANEXO

### Pelota de Golf

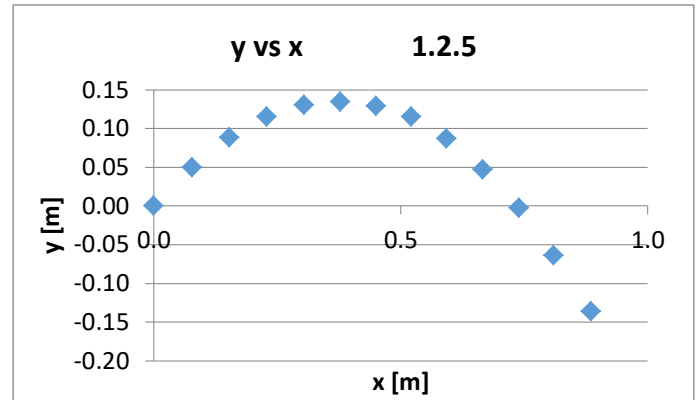
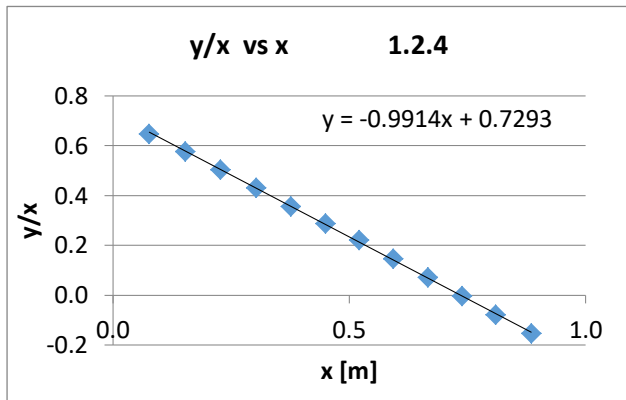
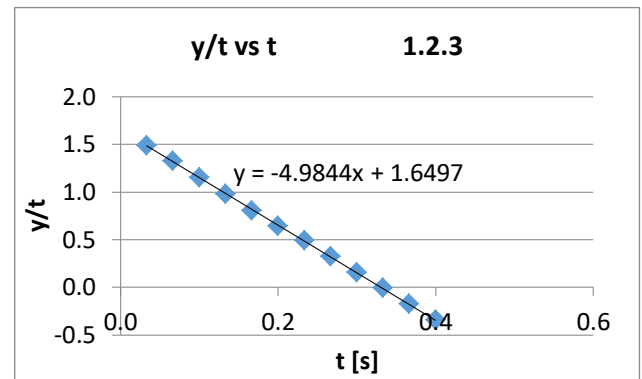
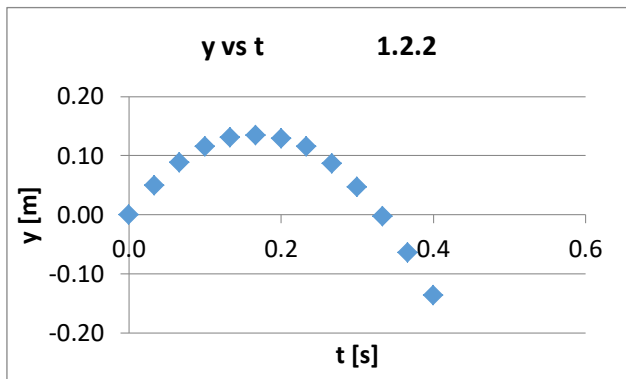
30 grados



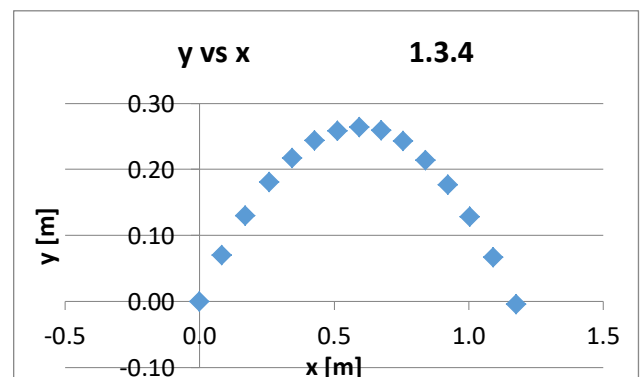
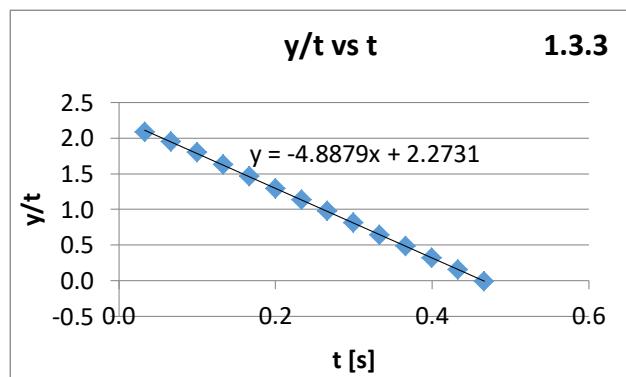
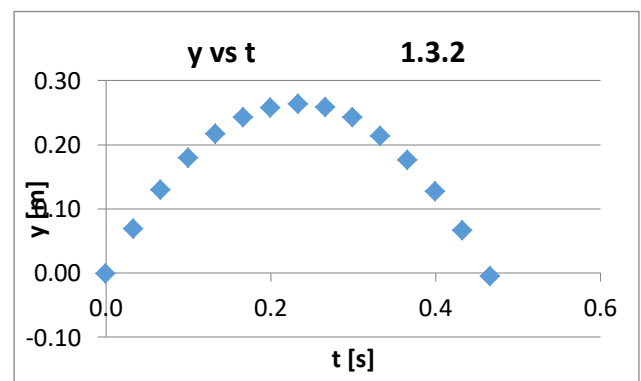
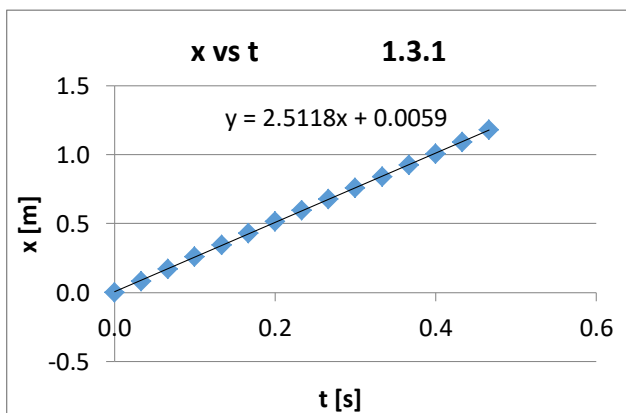
35 grados

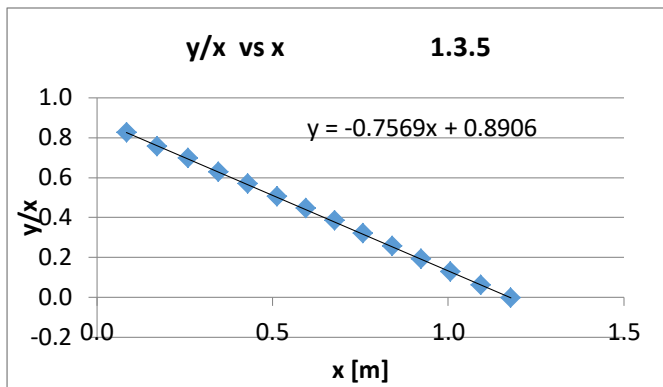




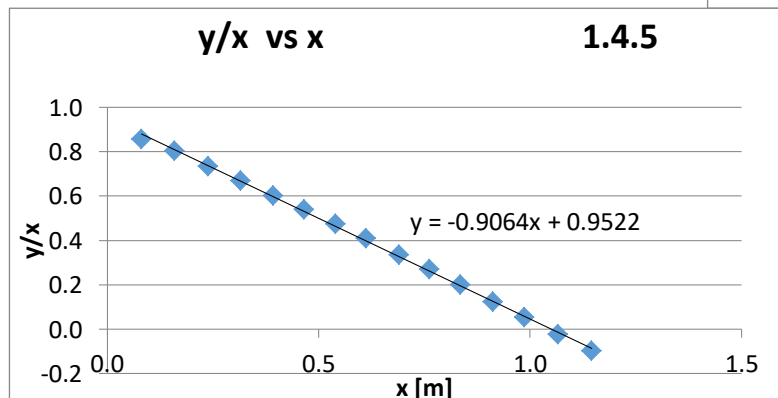
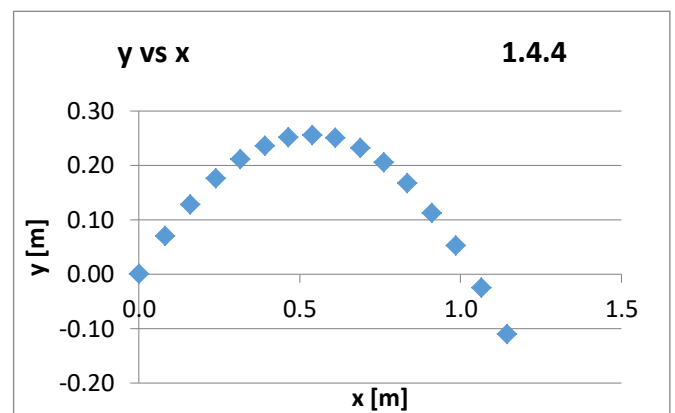
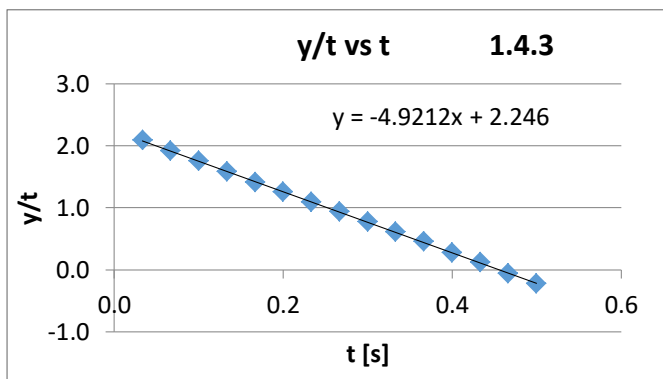
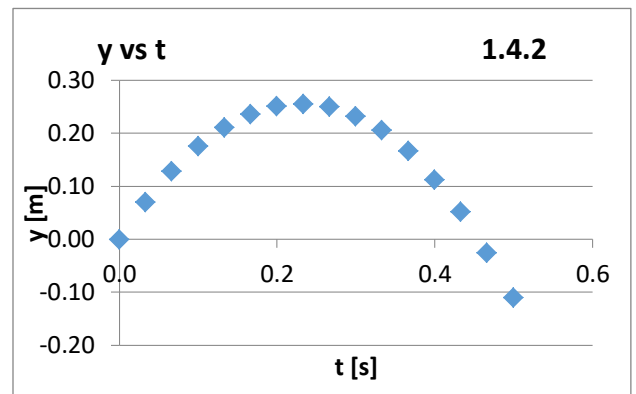
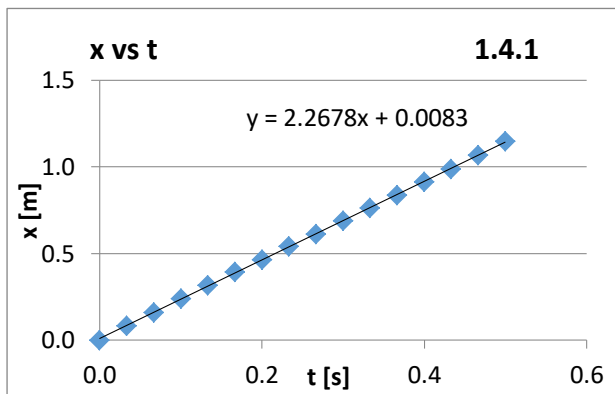


40 grados

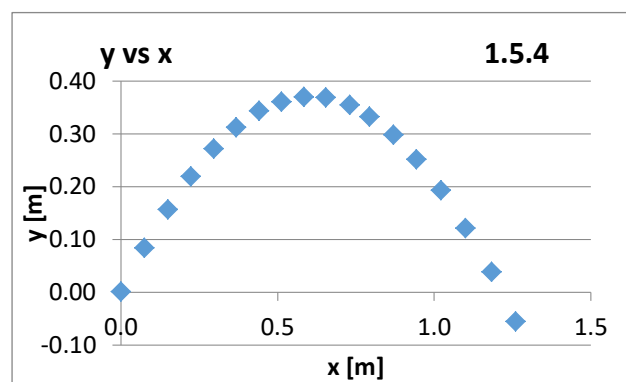
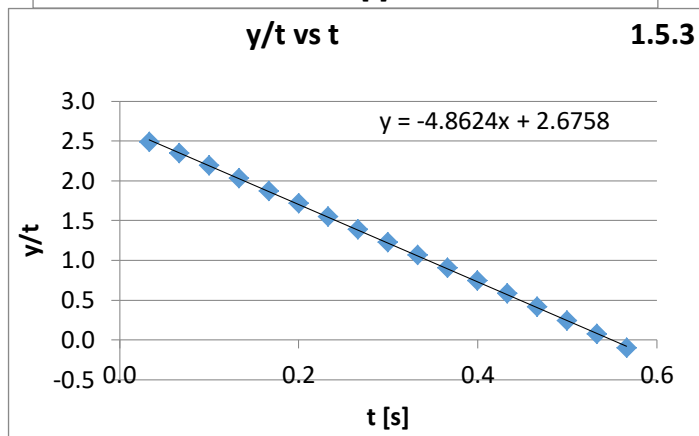
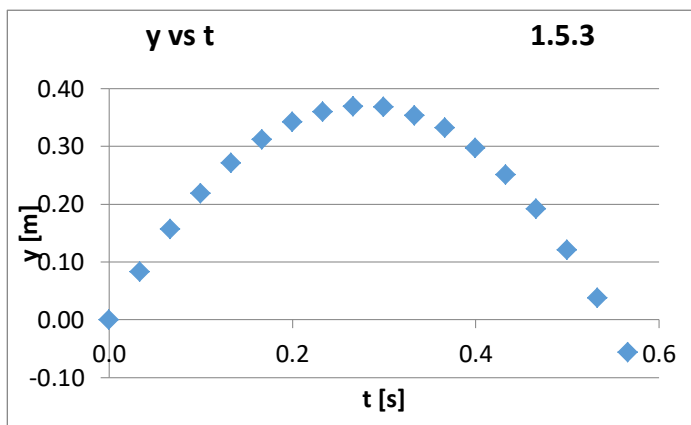
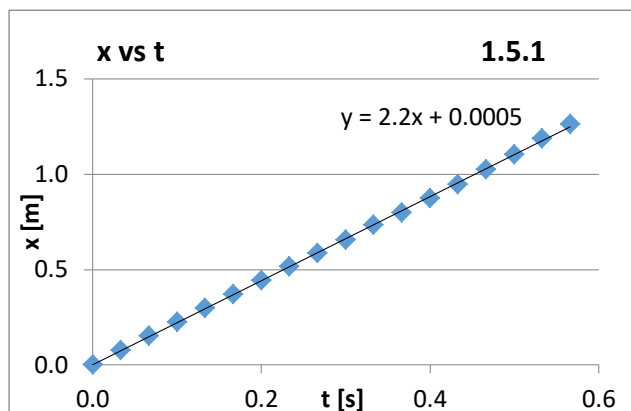




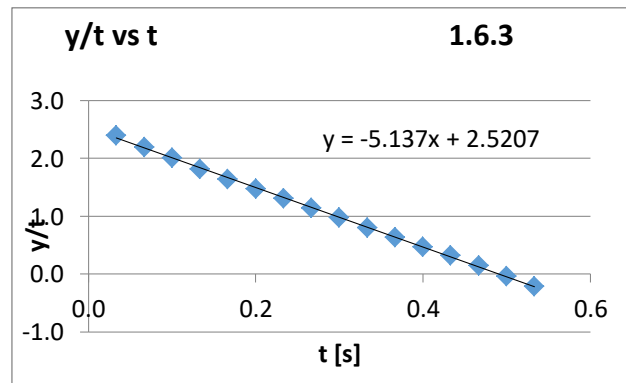
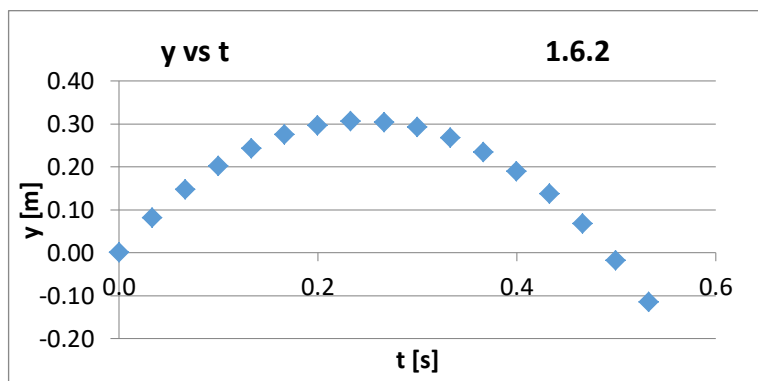
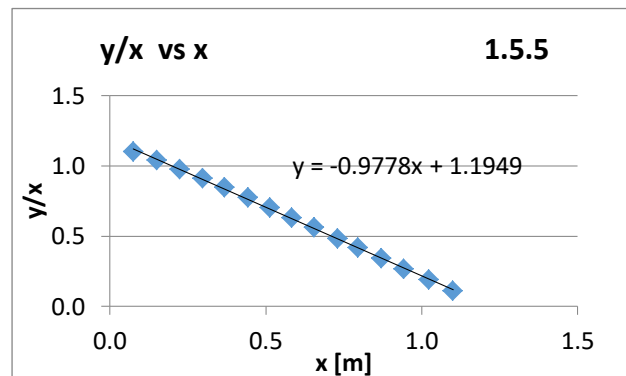
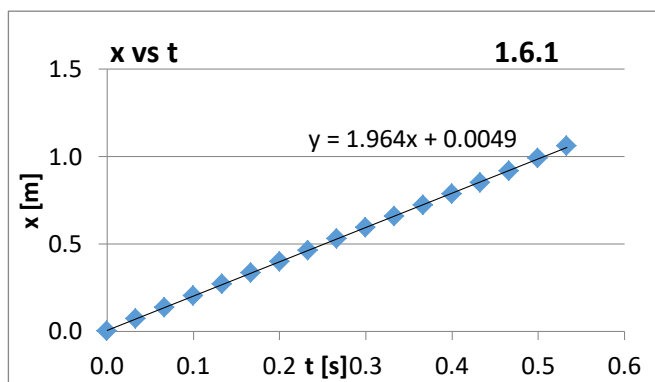
### 45 Grados

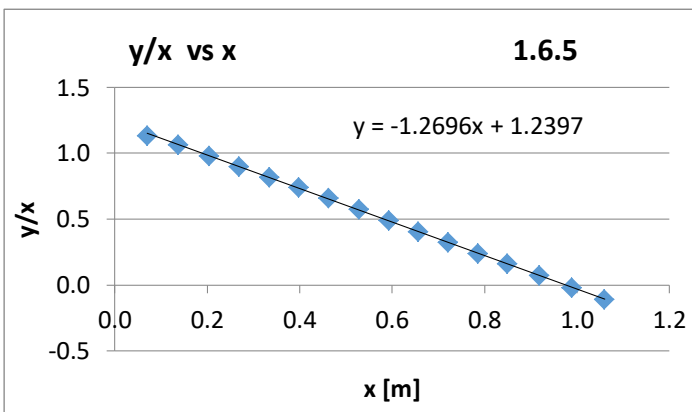
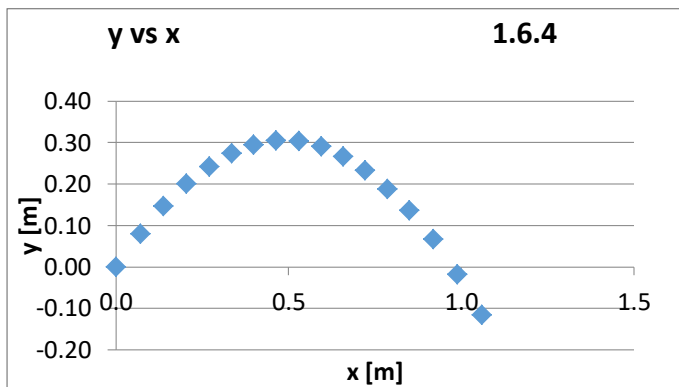


50 grados

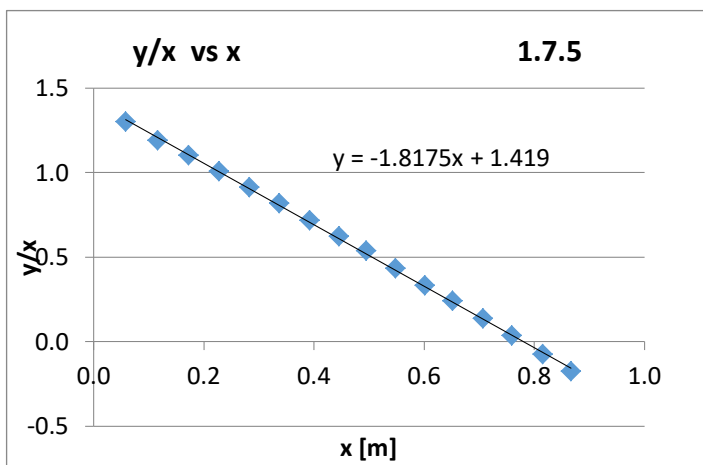
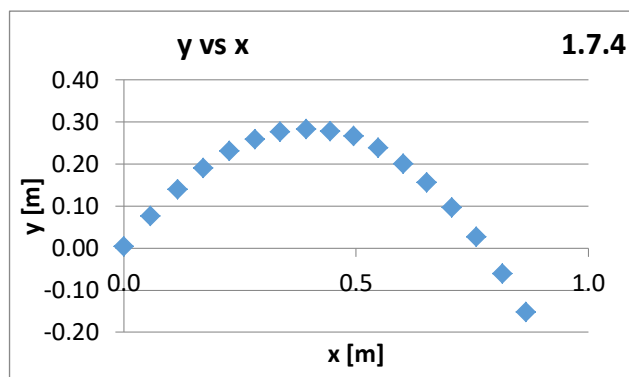
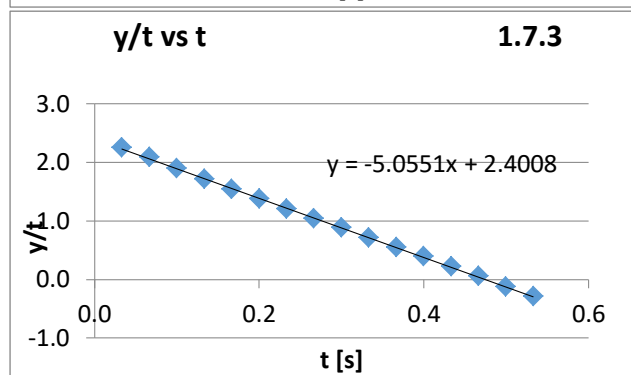
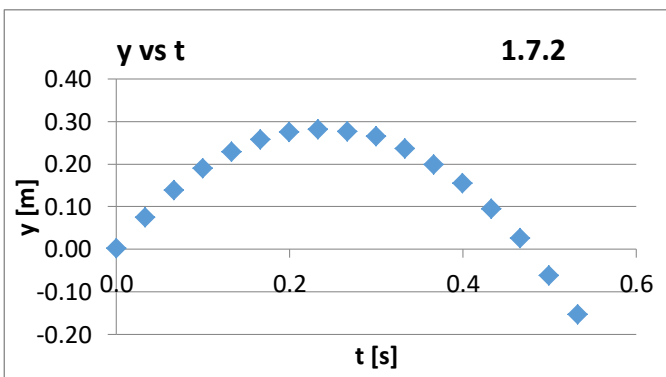
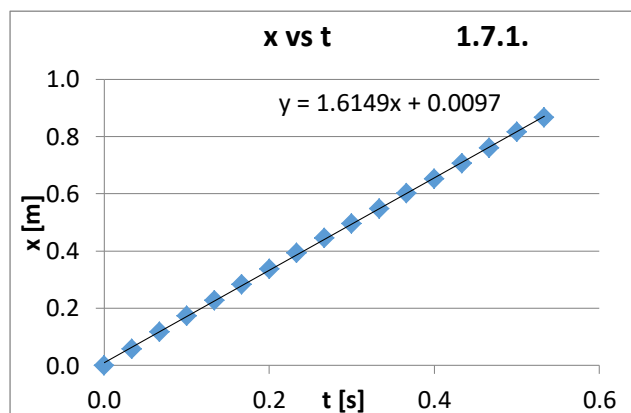


55 grados

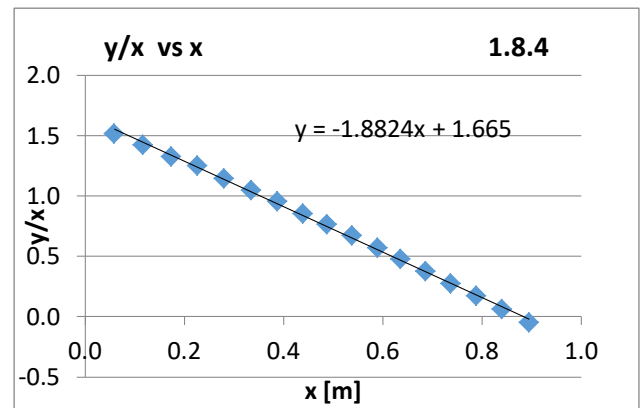
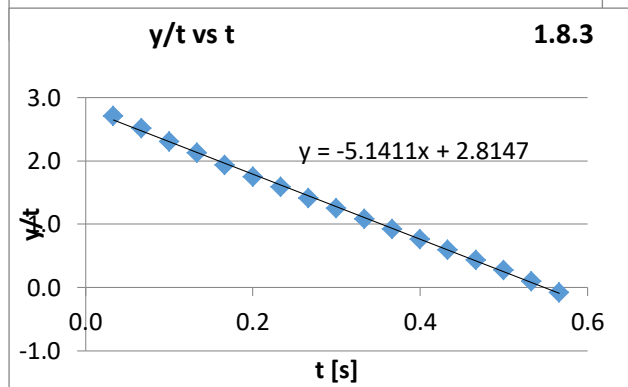
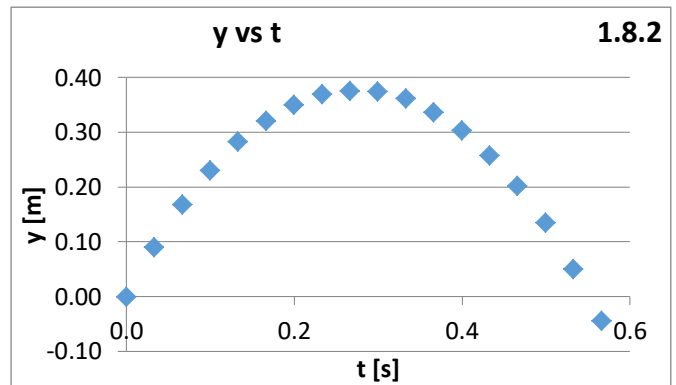
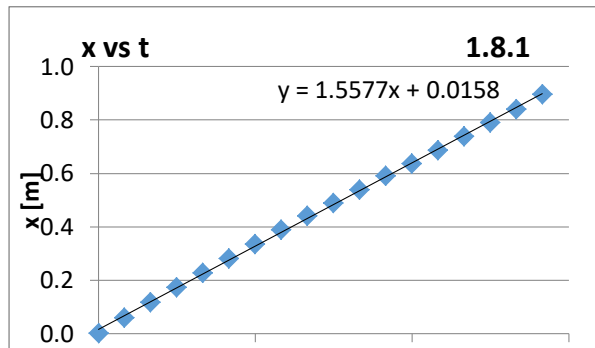




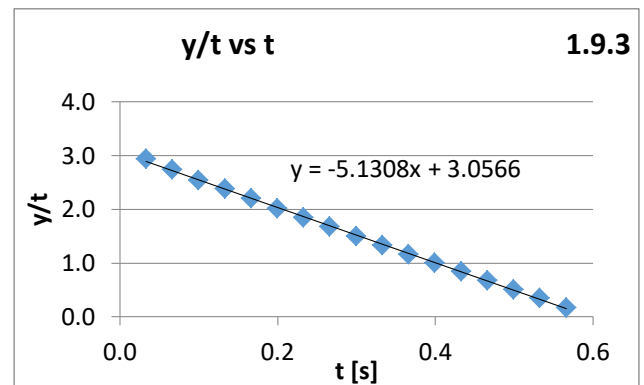
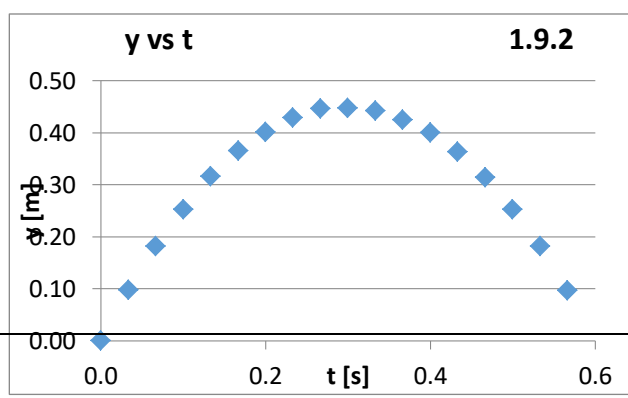
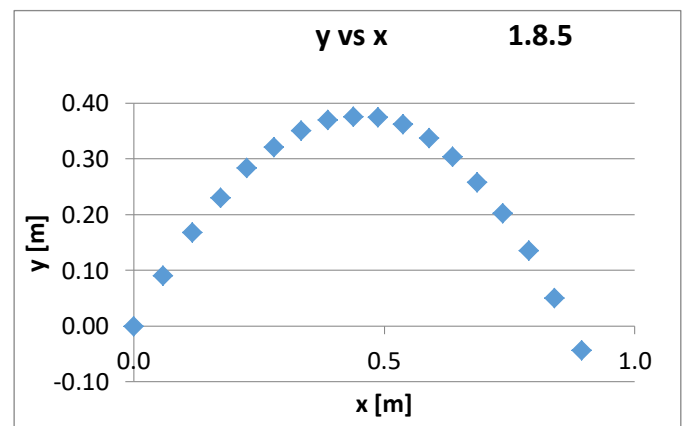
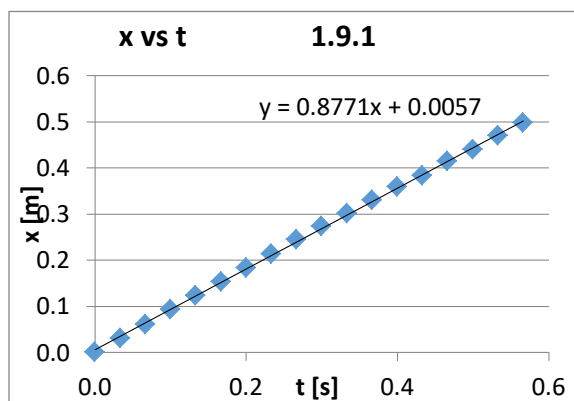
## 60 Grados



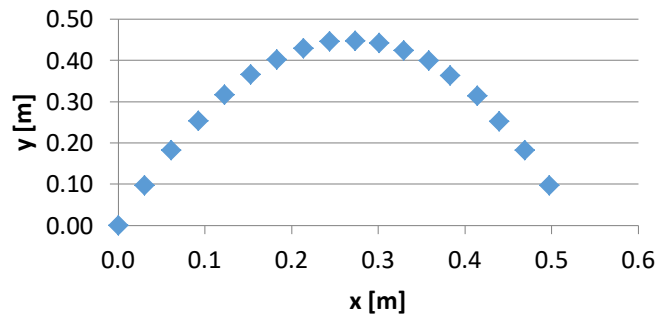
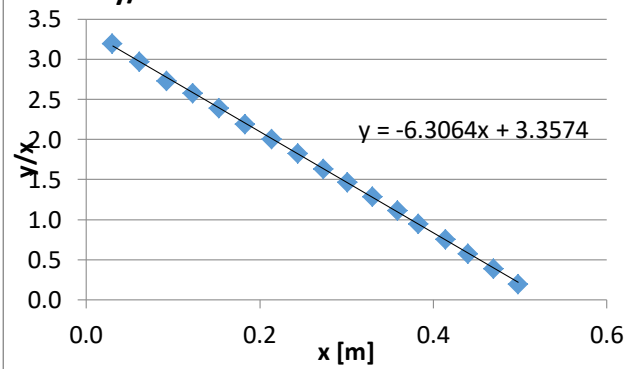
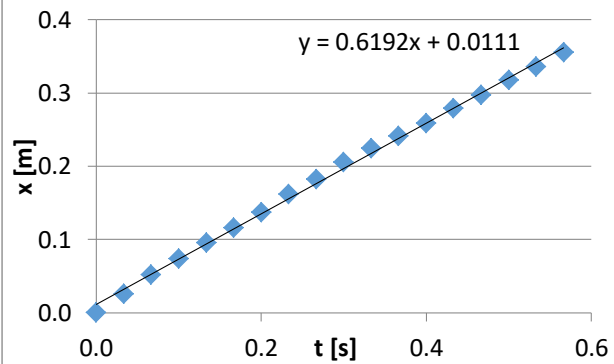
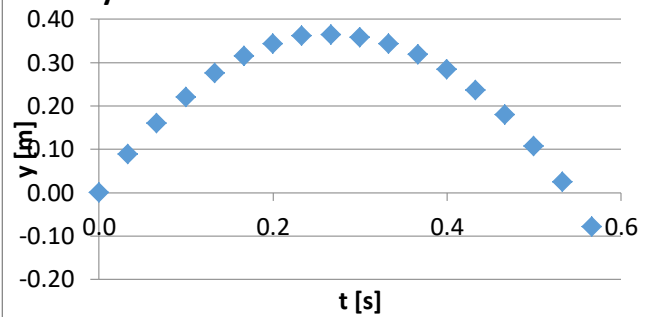
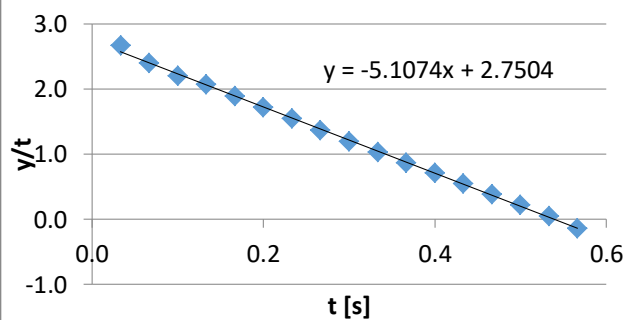
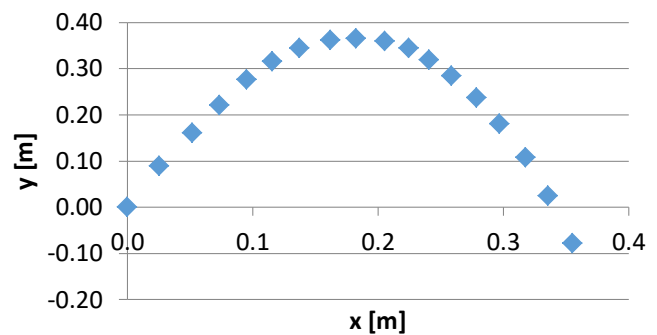
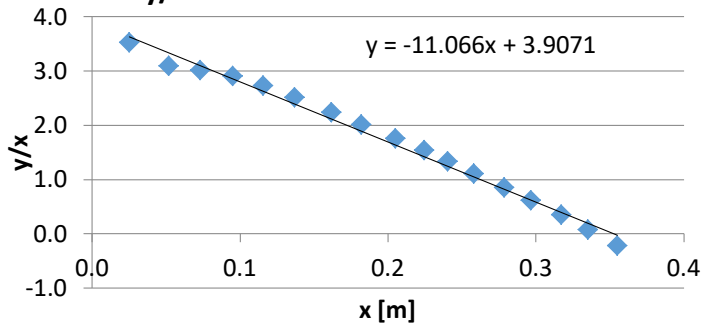
## 65 Grados



## 70 grados

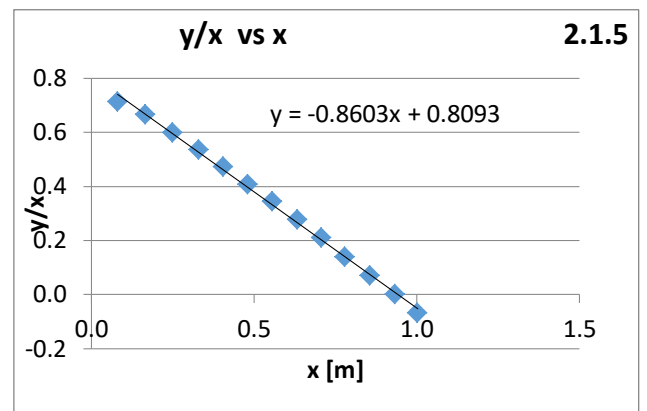
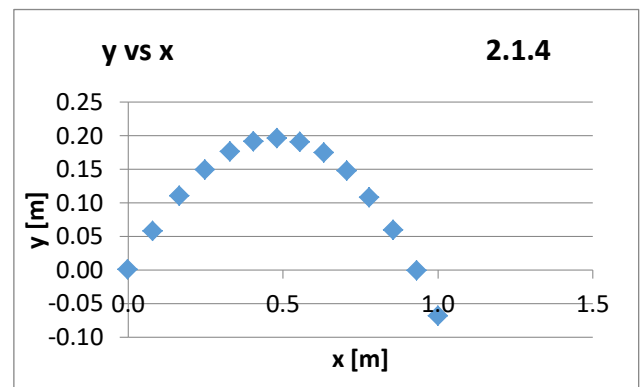
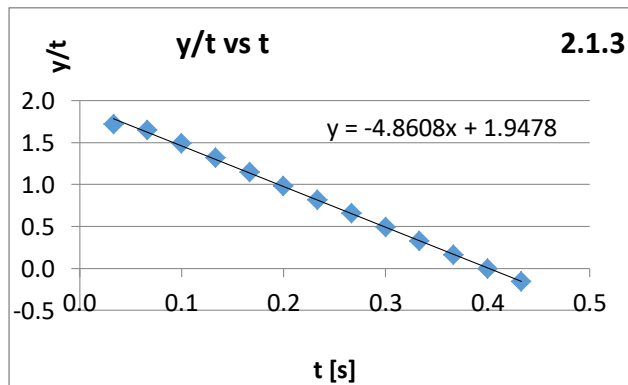
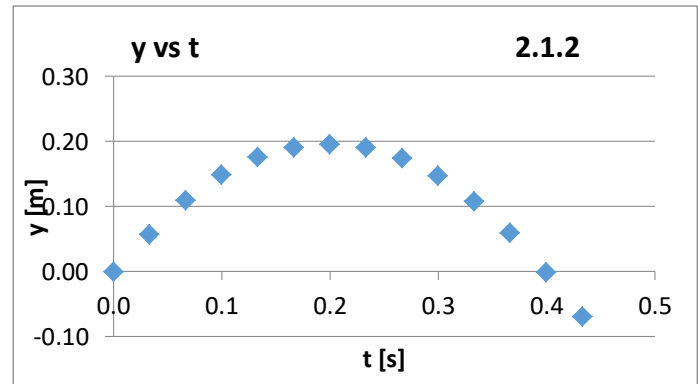
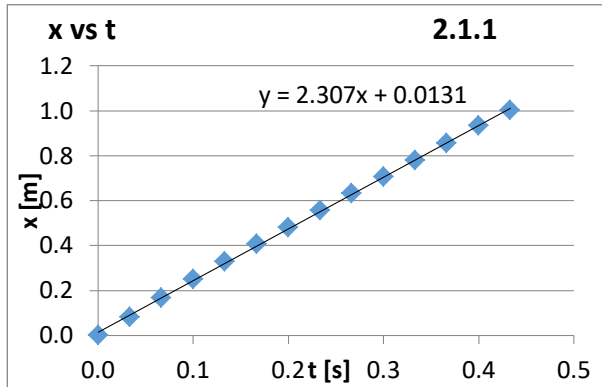




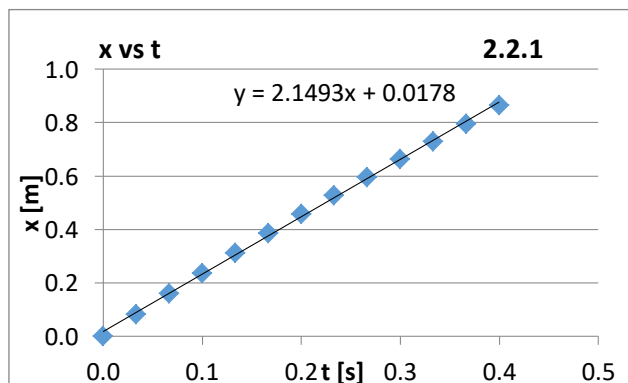
**y vs x****1.9.4****y/x vs x****1.9.5****75 grados****x vs t****1.10.1****y vs t****1.10.2****y/t vs t****1.10.3****y vs x****1.10.4****y/x vs x****1.10.5**

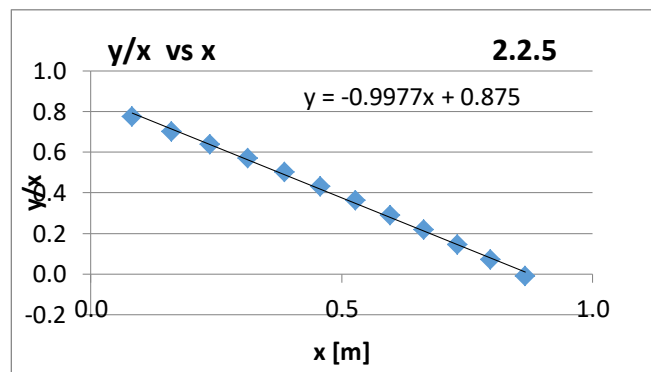
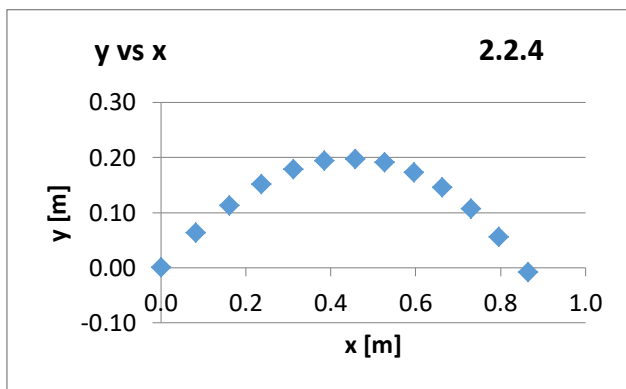
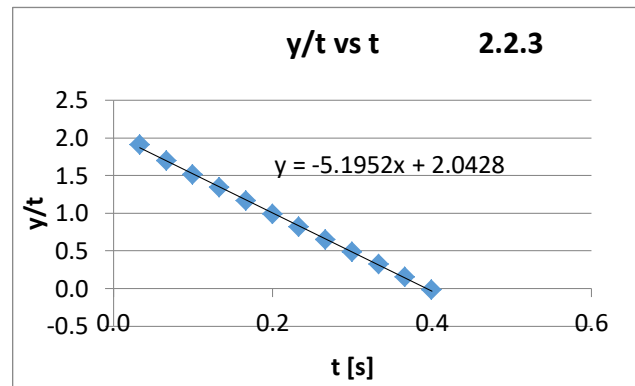
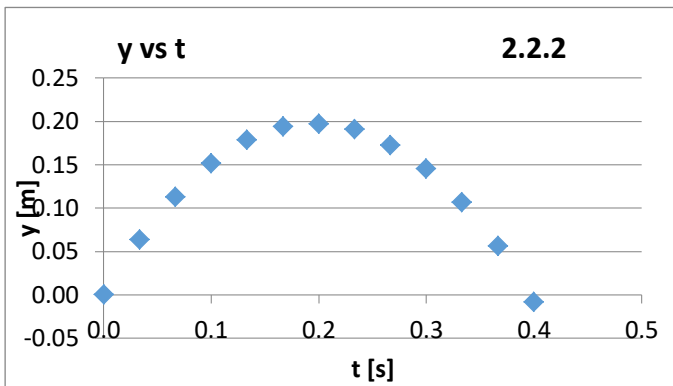
## Pelota de Ping Pong

30 grados

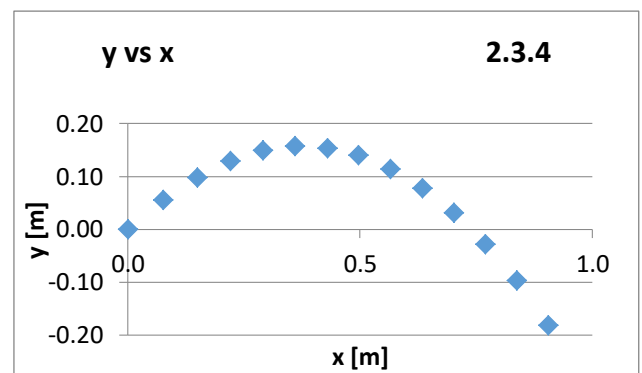
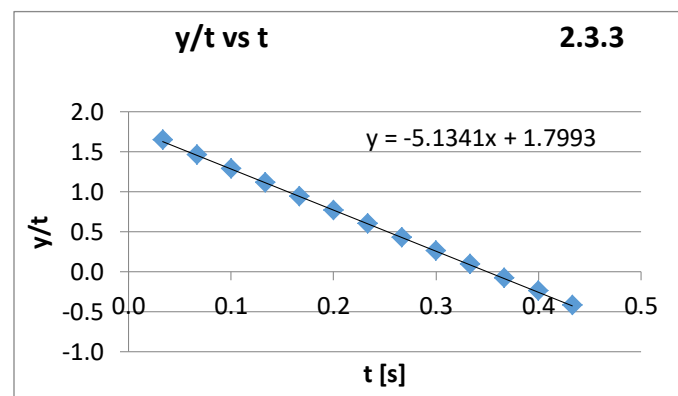
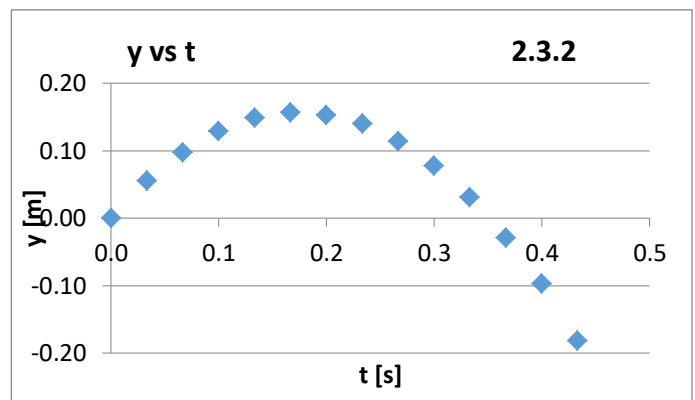
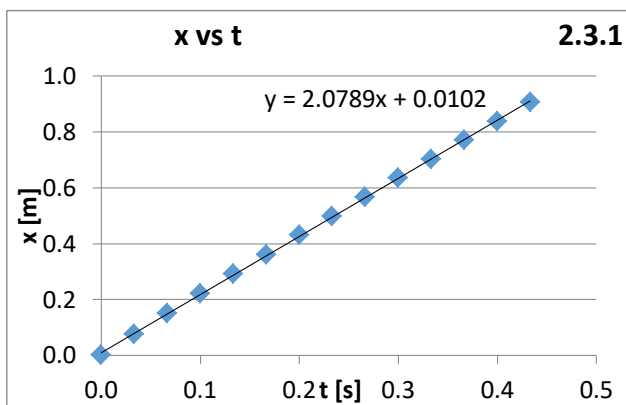


35 grados

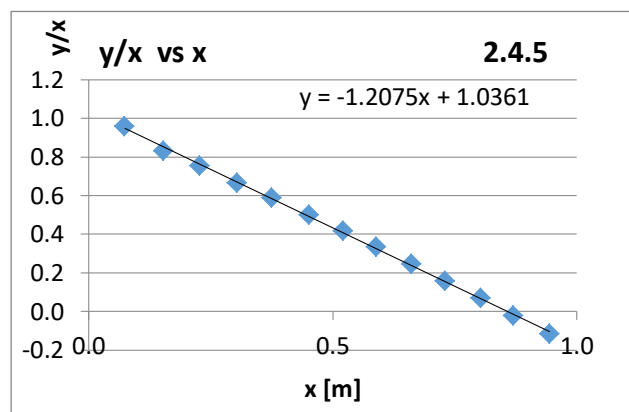
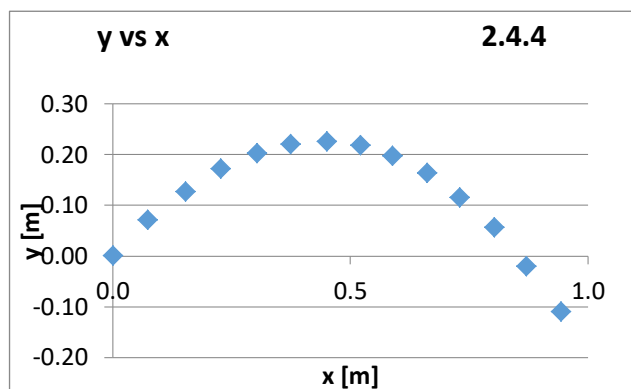
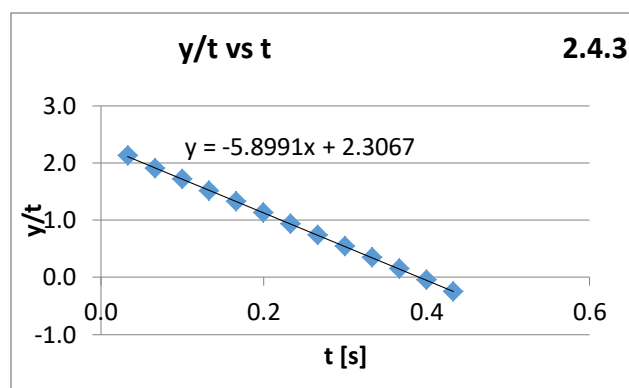
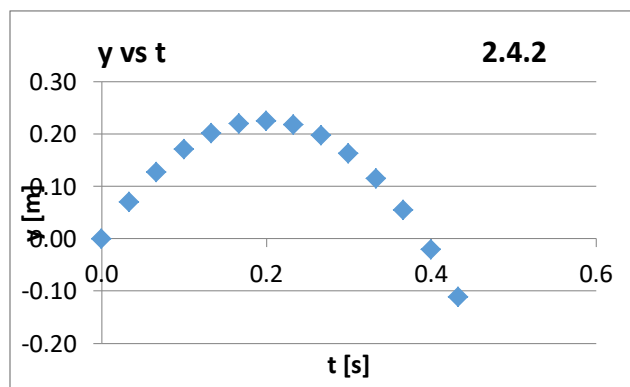
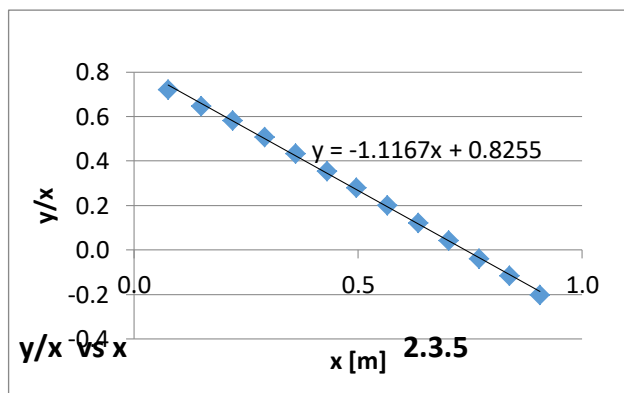
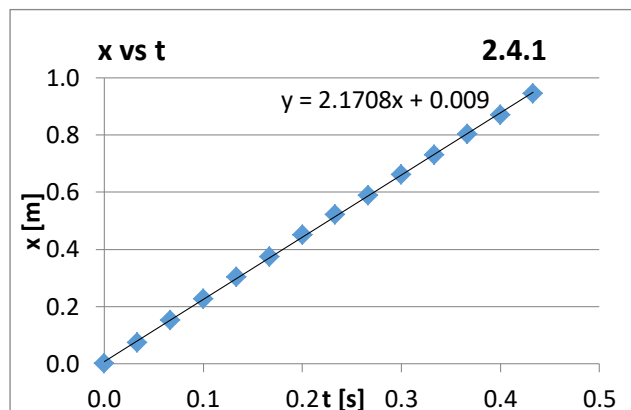




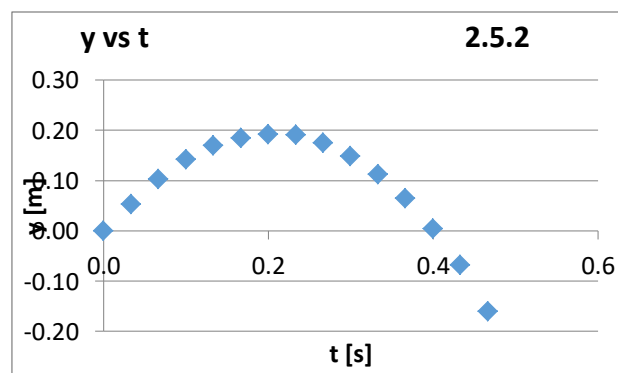
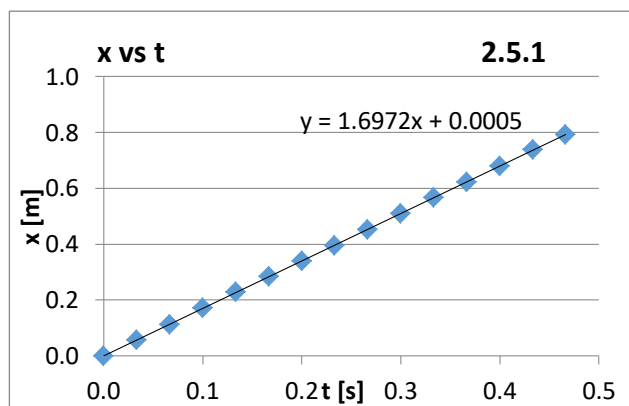
## 40 Grados

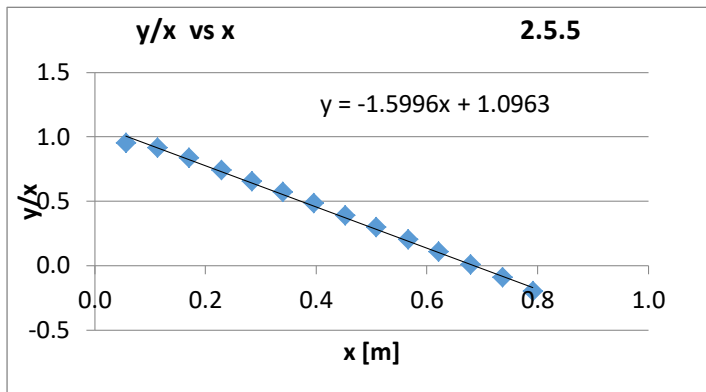
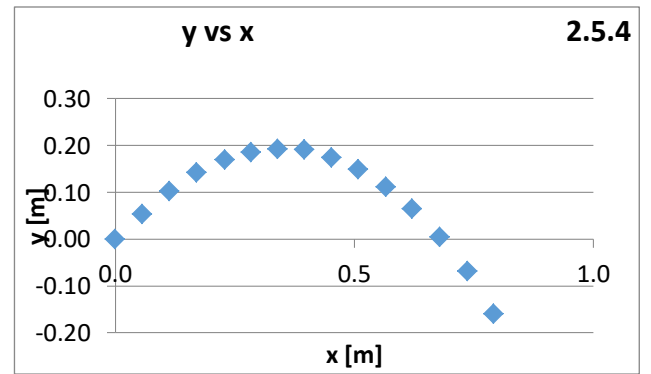
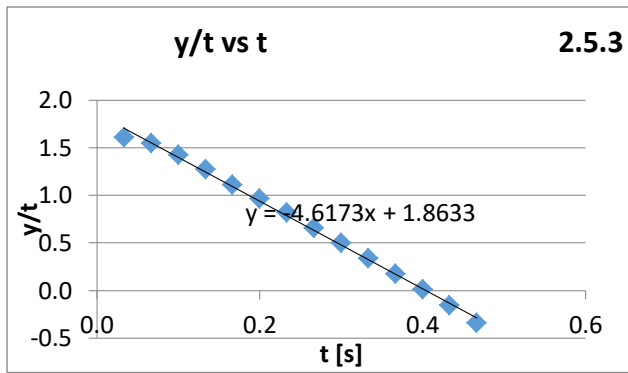


## 45 grados

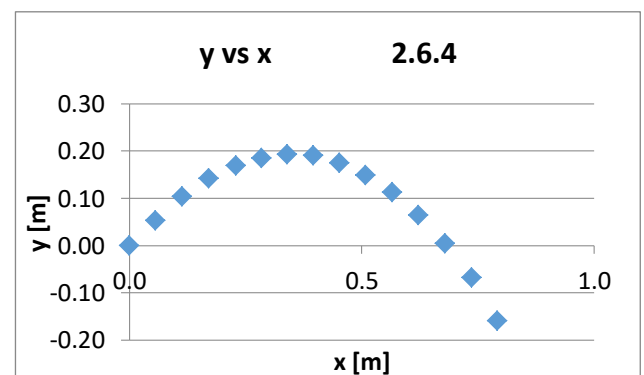
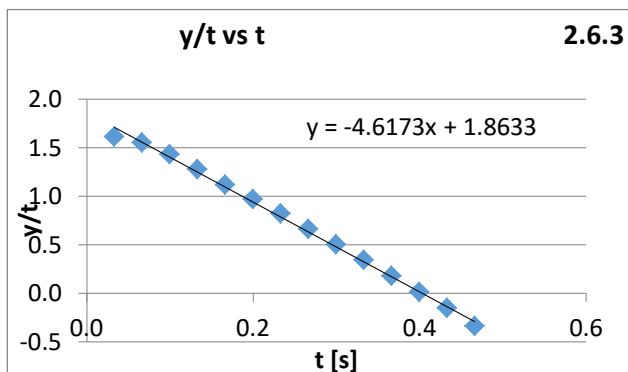
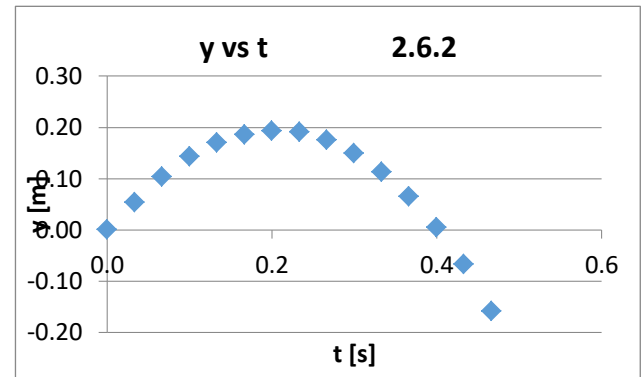
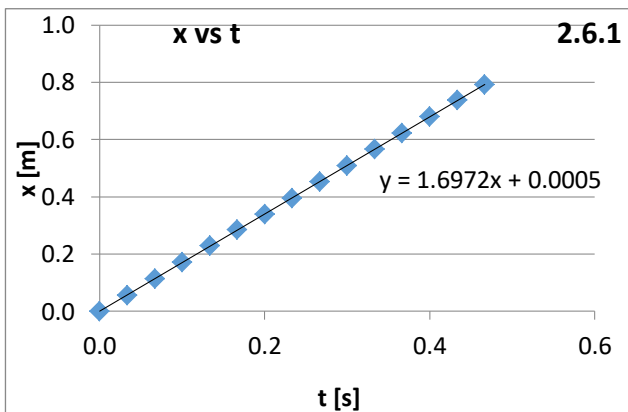


## 50 grados



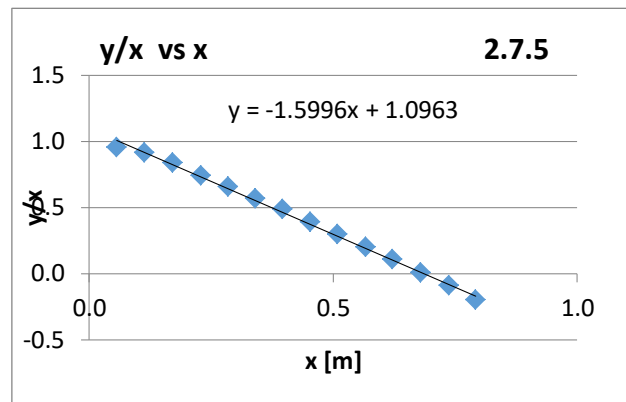
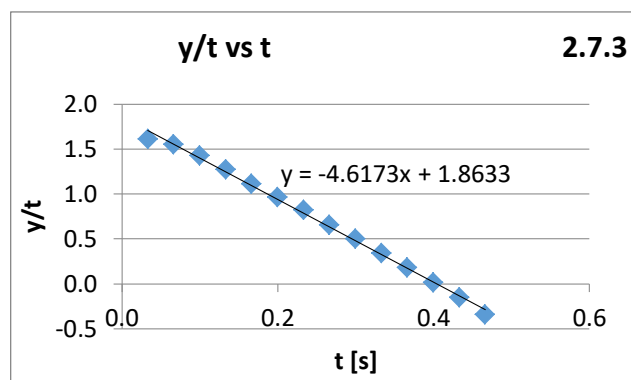
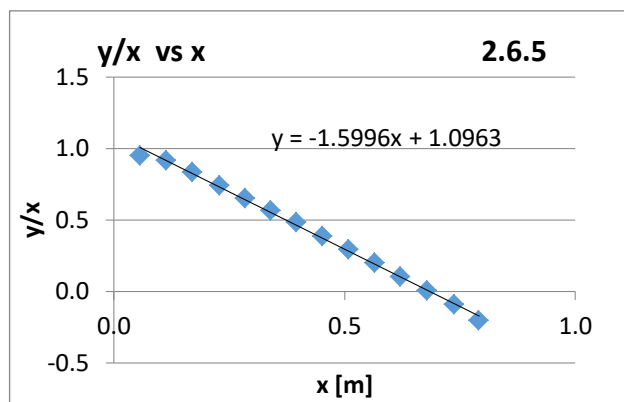
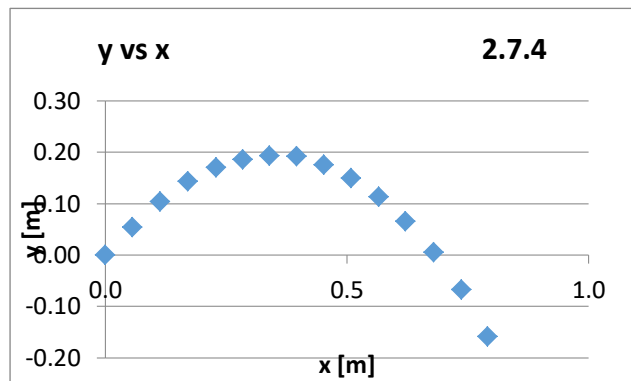
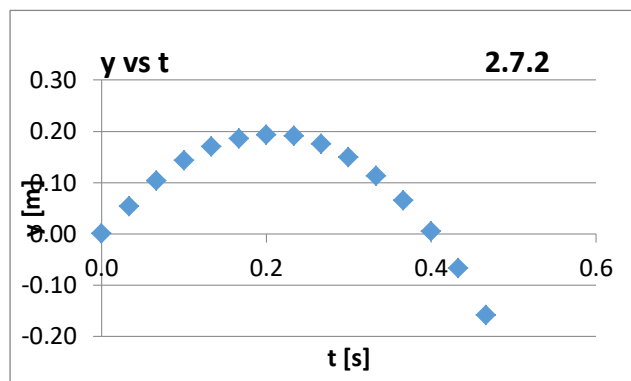
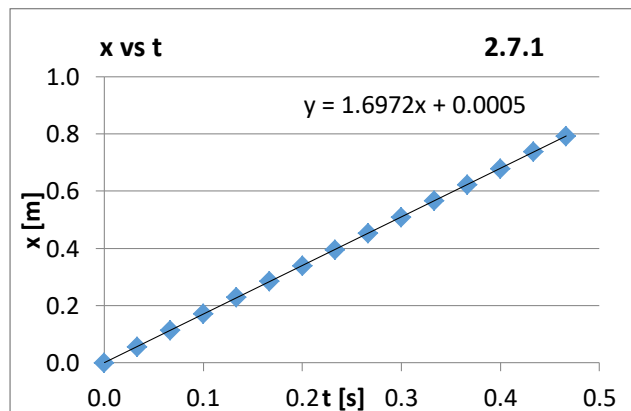


55 grados

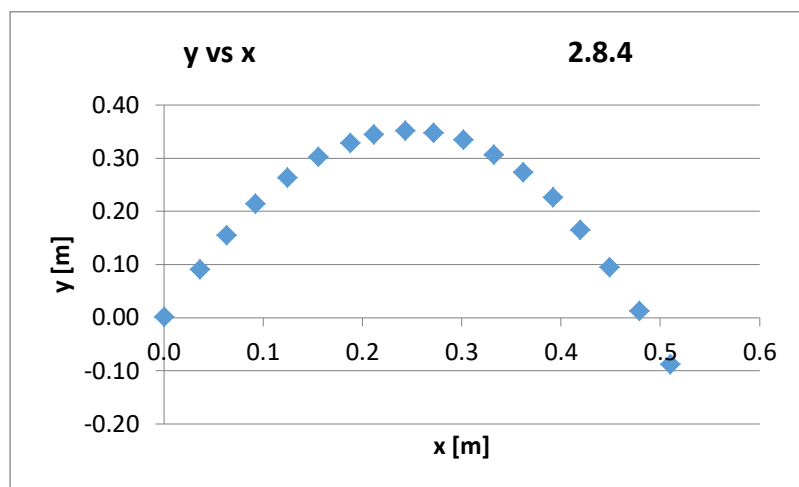
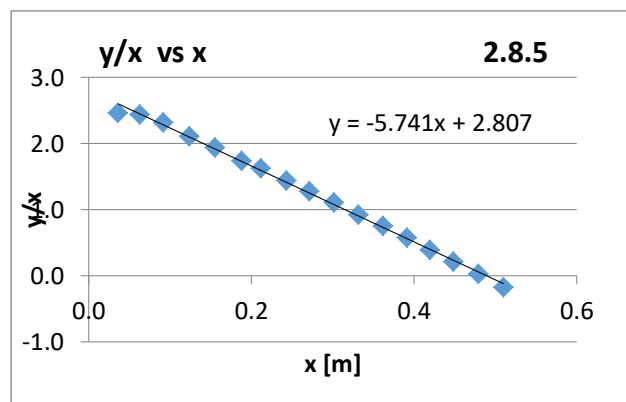
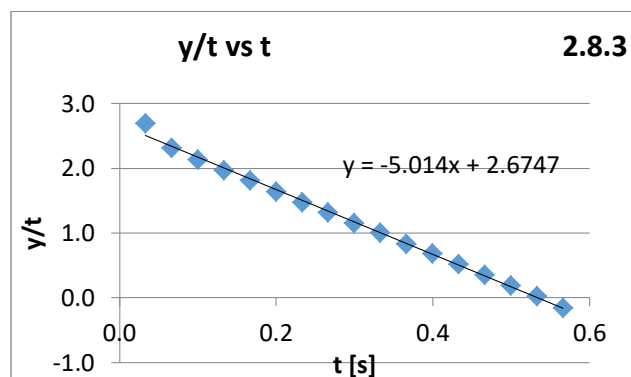
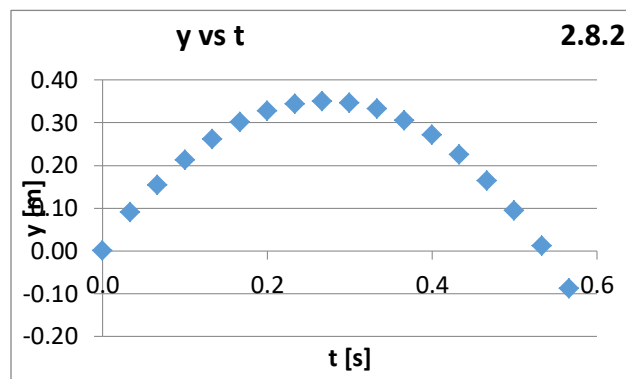
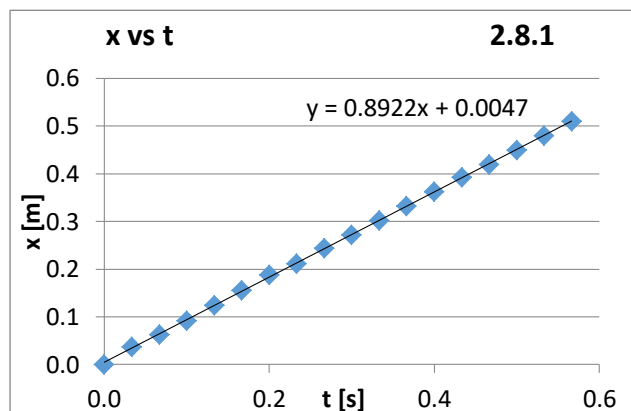




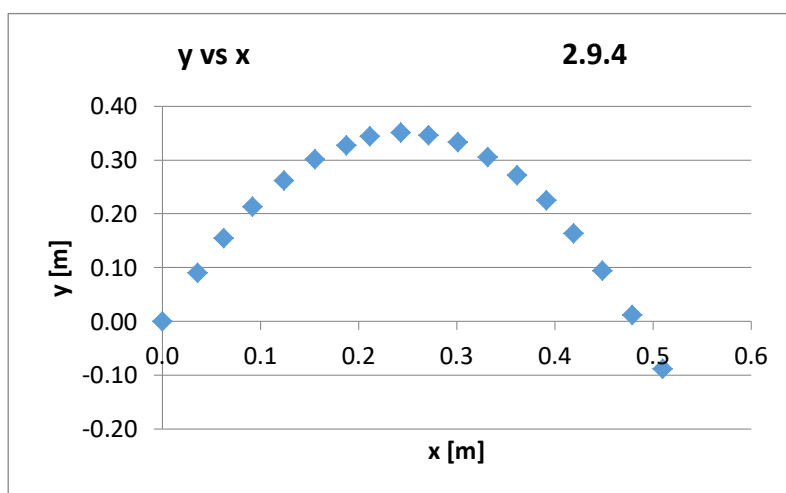
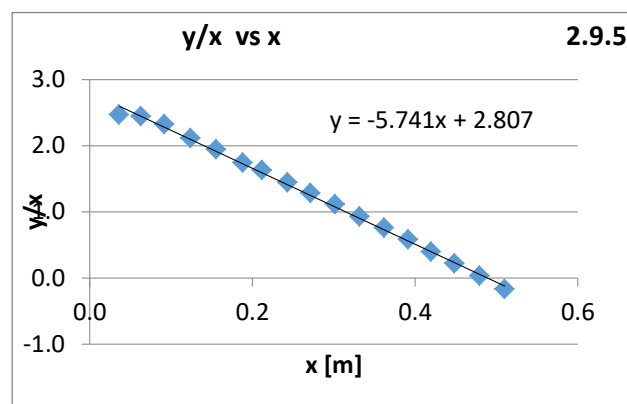
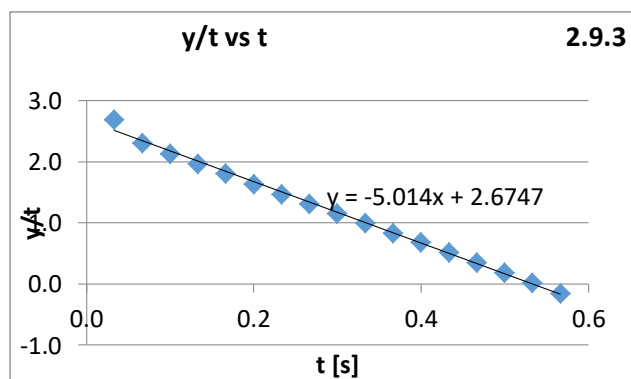
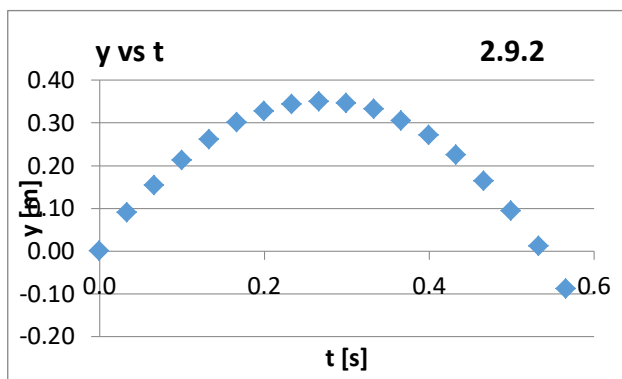
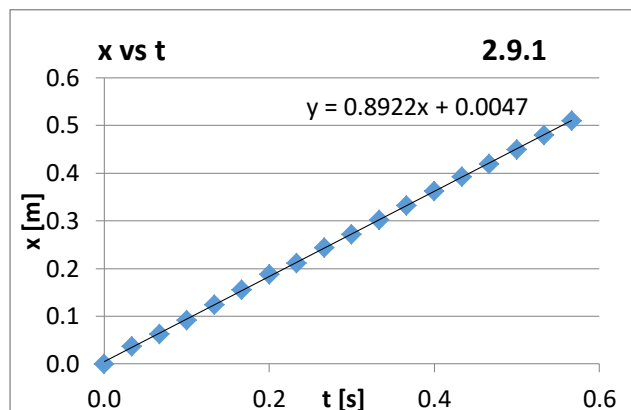
60 grados



## 70 Grados



70 Grados



75 Grados

