3° Examen Parcial   Tomás Basile Álvarez

1) Sistema de ecuaciones entre el tigre T, tigre S y las presas P:

$$\frac{dP}{dt} = a_1 P - b_1 PS - b_2 PT \qquad \frac{dT}{dt} = a_2 T + c_1 PT - \delta_1 TS \qquad \frac{dS}{dt} = a_3 S + c_2 PS - \delta_2 TS$$

Suponemos que $b = b_1 = b_2$, $c = c_1 = c_2$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ $\Rightarrow$ El sistema linearizado en el punto de eq. (P_0, T_0, S_0) fuera del origen es:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} P \\ T \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - bS_0 - bT_0 & -bP_0 & -bP_0 \\ cT_0 & a_2 + cP_0 - \delta S_0 & -\delta T_0 \\ cS_0 & -\delta S_0 & a_3 + cP_0 - \delta T_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ T \\ S \end{pmatrix}$$

$a_1 = 0.8$ $\quad b = 0.04$ $\quad c = 0.02$ $\quad \delta = 0.01$ $\quad a_2 = 0.06$ $\quad a_3 = 0.12$

a) Encuentre el punto fijo (P_0, T_0, S_0) fuera del origen.

Es decir, hay que resolver el sistema
$$\begin{cases} bS_0 + \delta T_0 = a_1 & \dots (1) \\ cP_0 - \delta S_0 = -a_2 & \dots (2) \\ cP_0 - \delta T_0 = -a_3 & \dots (3) \end{cases}$$

Si restamos (3) − (2) obtenemos $\rightarrow (cP_0 - \delta T_0) - (cP_0 - \delta S_0) = -a_3 + a_2$
$\rightarrow \delta(S_0 - T_0) = a_2 - a_3 \quad \dots (4)$

Pero de (1) tenemos que $S_0 + T_0 = a_1/b \rightarrow S_0 = a_1/b - T_0 \quad \dots (5)$

Sustituimos en 4 $\rightarrow \left(\frac{a_1}{b} - T_0 - T_0\right) = \frac{a_2 - a_3}{\delta} \rightarrow -2T_0 = \frac{a_2 - a_3}{\delta} - \frac{a_1}{b}$

$$\Rightarrow \underline{T_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{b} - \frac{a_2 - a_3}{\delta}\right)}$$

De (5) tenemos $S_0 = a_1/b - T_0 = a_1/b - \frac{1}{2}\frac{a_1}{b} + \frac{a_2 - a_3}{\delta} = \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2 - a_3}{\delta}\right)}$

Finalmente, de (3) tenemos que $P_0 = \frac{-a_3 + \delta T_0}{c}$

Sustituimos $T_0 \Rightarrow P_0 = -\frac{a_3}{c} + \frac{\delta}{c}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{b} - \frac{a_2 - a_3}{\delta}\right)\right] = \underline{-\frac{a_3}{c} + \frac{\delta}{2c}\left(\frac{a_1}{b} - \frac{a_2 - a_3}{\delta}\right)}$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{b} - \frac{a_2 - a_3}{\delta}\right) \\ S_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2 - a_3}{\delta}\right) \\ P_0 &= -\frac{a_3}{c} + \frac{\delta}{2c}\left(\frac{a_1}{b} - \frac{a_2 - a_3}{\delta}\right) \end{aligned}}$$

b) Sustituya a 2) junto con los valores de los parámetros y resuelva

$a_1 = 0.8 \qquad b = 0.04 \qquad c = 0.02 \qquad \delta = 0.01 \qquad a_2 = 0.06 \qquad a_3 = 0.12$

Sustituyendo en las expresiones para T_0, S_0, P_0, se obtiene: $\underline{S_0 = 7, \quad T_0 = 13 \quad P_0 = 1/2}$

Sustituimos todo en el sistema Lineal:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} P \\ T \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8-(0.04)(7)-(0.04)13 & -(0.04)(1/2) & -(0.04)(1/2) \\ (0.02)\,13 & 0.06+(0.02)1/2-(0.01)7 & -(0.01)(13) \\ (0.02)\,7 & -(0.01)(7) & 0.12+(0.02)(1/2)-(0.01)(13) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ T \\ S \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} P \\ T \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.02 & -0.02 \\ 0.26 & 0 & -0.13 \\ 0.14 & -0.07 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ T \\ S \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{X} = \mathbb{A}\bar{X}$$

Calculamos los eigenvalores de $\mathbb{A}$ $\rightarrow$ $|\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1}| = 0$ $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} -\lambda & -0.02 & -0.02 \\ 0.26 & -\lambda & -0.13 \\ 0.14 & -0.07 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow -\lambda\left(\lambda^2 - 0.0091\right) + 0.02\left(-0.26\lambda + 0.0182\right) - 0.02\left(-0.0182 + 0.14\lambda\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 0.0091\lambda - 0.0052\lambda + 3.64\times10^{-4} + 3.64\times10^{-4} - 0.0028\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 0.0011\lambda + 7.28\times10^{-4} = 0$$

Que usando mathematica, tiene como raíces

$$\lambda_1 = 0.0936 \qquad \lambda_2 = -0.0468 + 0.0747i \qquad \lambda_3 = -0.0468 - 0.0747i$$

Ahora buscamos los eigenvectores: $\lambda_1 = 0.0936$

$$\Rightarrow (\mathbb{A}-\lambda_1\mathbb{I})\bar{v} = \bar{0} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} -0.0936 & -0.02 & -0.02 \\ 0.26 & -0.0936 & -0.13 \\ 0.14 & -0.07 & -0.0936 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

Se ve como un sistema bastante feo de resolver y con muchas cuentitas. Usando Mathematica llegamos a que:

$x_1 - 0.051x_3 = 0$ $\qquad$ x_3 es una variable libre, tenemos $x_3 = 1$

$x_2 + 1.241x_3 = 0$

$\rightarrow$ $x_1 = 0.051$, $x_2 = -1.241$ $\qquad \rightarrow$ el eigenvector es $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.051 \\ -1.241 \\ 1 \end{pmatrix}$

Entonces tenemos como solución: $\bar{X}(t) = \bar{v}_1 e^{\lambda_1 t} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.051 \\ -1.241 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0.0936t}$

Para los otros Eigenvalores $\lambda_2 = -0.0468 + 0.0747i$, $\lambda_3 = -0.0468 - 0.0747i$,

Sólo hace falta encontrar el eigenvector de λ_2 y luego sacar la parte real y la imaginaria.

$$(A - \lambda_2 I)\bar{v} = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.0468-0.0747i & -0.02 & -0.02 \\ 0.26 & 0.0468-0.0747i & -0.13 \\ 0.14 & -0.07 & 0.0468-0.0747i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

Que es un sistema de ec. muy feo, por lo que lo haré con Mathematica:
El eigenvector es:
$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 0.1427 + 0.2664i \\ 0.7642 \\ 0.5618 + 0.096i \end{pmatrix}$$

→ La solución compleja es: $e^{\lambda_2 t}\bar{v}$

$$= e^{(-0.0468 + 0.0747i)t}\begin{pmatrix} 0.1427 + 0.2664i \\ 0.7642 \\ 0.5618 + 0.096i \end{pmatrix} = e^{-0.0468t}\left[\cos(0.0747t) + i\,\mathrm{sen}(0.0747t)\right]\begin{pmatrix} 0.1427 + 0.2669i \\ 0.7642 \\ 0.5618 + 0.096i \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{e^{-0.0468t}\begin{pmatrix} 0.1427\cos(0.0747t) - 0.2669\,\mathrm{sen}(0.0747t) \\ 0.7642\cos(0.0747t) \\ 0.5618\cos(0.0747t) - 0.096\,\mathrm{sen}(0.0747t) \end{pmatrix}}_{\text{Parte Real}} + \underbrace{ie^{-0.0468t}\begin{pmatrix} 0.2669\cos(0.0747t) + 0.1427\,\mathrm{sen}(0.0747t) \\ 0.7642\,\mathrm{sen}(0.0747t) \\ 0.5618\,\mathrm{sen}(0.0747t) + 0.096\cos(0.0747t) \end{pmatrix}}_{\text{Parte Imaginaria}}$$

Cada parte por separado es una solución L.i., juntándolo con la solución 1), la solución completa es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} P(t) \\ T(t) \\ S(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 0.051 \\ -1.241 \\ 1 \end{pmatrix}e^{0.0936t} + C_2 e^{-0.0468t}\begin{pmatrix} 0.1427\cos(0.0747t) - 0.2669\,\mathrm{sen}(0.0747t) \\ 0.7642\cos(0.0747t) \\ 0.5618\cos(0.0747t) - 0.096\,\mathrm{sen}(0.0747t) \end{pmatrix} + C_3 e^{-0.0468t}\begin{pmatrix} 0.2669\cos(0.0747t) + 0.1427\,\mathrm{sen}(0.0747t) \\ 0.7642\,\mathrm{sen}(0.0747t) \\ 0.096\cos(0.0747t) + 0.5618\,\mathrm{sen}(0.0747t) \end{pmatrix}}$$

c) ¿Puede relacionar el resultado anterior con la extinción de Thylacosmilus?

En la solución al sistema tenemos un término multiplicado a $e^{0.0936t}$ y otro a $e^{-0.0468t}$,

Para tiempos grandes, predominará el primer término mientras que el otro se hará pequeño, por lo que podemos ver la solución aproximada como:

$$\begin{pmatrix} P(t) \\ T(t) \\ S(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.051 \\ -1.241 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0.0936t}$$

omitiendo los otros términos

Con esto observamos que $T(t) = -1241\, e^{0.0936t}$ tiene un comportamiento descendiente, mientras que $S(t) = e^{0.0936t}$ tiene un comportamiento ascendente.

2. Usando el método Lotka Volterra → $\frac{dT}{dt} = T(a_2 - \beta_1 T - \delta_1 S)$ $\quad \frac{dS}{dt} = S(a_3 - \delta_2 T - \beta_2 S)$

Supongamos que $\beta_1 = \beta_2 = 0$ Se tiene un punto fijo en $(a_3/\delta_2, a_2/\delta_1)$ con su sistema linealizado

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3\delta_1/\delta_2 \\ -\frac{a_2\delta_2}{\delta_1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix}$$

a) Con $a_1 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 1/5$, $a_2 = n > 1$. Determine la estabilidad lineal del punto fijo en función de n.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3\delta_1/\delta_2 \\ -\frac{a_2\delta_2}{\delta_1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{X} = \mathbb{A}\,\bar{X}$$

Encontremos los eigenvalores de $\mathbb{A}$: $\quad |\mathbb{A} - \lambda \mathbb{1}| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -a_3\delta_1/\delta_2 \\ -\frac{a_2\delta_2}{\delta_1} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\rightarrow \lambda^2 - \frac{a_2 a_3 \delta_1 \delta_2}{\delta_1 \delta_2} = 0 \rightarrow \lambda^2 - a_2 a_3 = 0$$

Sustituyendo los valores de a_2, a_3 $\rightarrow \lambda^2 - n = 0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{n}$

con $n > 1$

Entonces siempre hay un eigenvalor positivo $(\lambda_1 = +\sqrt{n})$ y uno negativo $(\lambda_2 = -\sqrt{n})$ por lo que la estabilidad del punto fijo es siempre un <u>Punto Silla.</u>

Podemos encontrar la solución al sistema linearizado

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3\delta_1/\delta_2 \\ -\frac{a_2\delta_2}{\delta_1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Sustituyendo}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores son como ya se dijo, $\lambda_1 = -\sqrt{n}$, $\lambda_2 = \sqrt{n}$

Eigenvectores:

$\lambda_1 = -\sqrt{n}$: $(A - \lambda_1 \bar{v}_1) = \bar{0} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -n \\ -1 & \sqrt{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0} \rightarrow \sqrt{n}\,x - ny = 0 \rightarrow y = +\frac{1}{\sqrt{n}}x$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = \sqrt{n}$: $(A - \lambda_2 \bar{v}_2) = \bar{0} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{n} & -n \\ -1 & -\sqrt{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0} \rightarrow -\sqrt{n}\,x - ny = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{n}}x$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ la solución general es $\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} = c_1 \bar{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{v}_2 e^{\lambda_2 t}$

$$\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix} = c_1 e^{-\sqrt{n}t}\begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\sqrt{n}t}\begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ -1 \end{pmatrix}$$

3) La ecuación de Chevyshev es $(1-x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0$, con p cte

a) Encuentre dos soluciones en serie l.i. válidas para $|x|<1$

La ecuación es $y'' - \frac{x}{1-x^2}y' + \frac{p^2}{1-x^2}y = 0 \quad \rightarrow \quad P(x) = \frac{-x}{1-x^2} \quad Q(x) = \frac{p^2}{1-x^2}$

Que son analíticas en $x=0$ y sus expansiones en potencias son válidas en $|x|<1$ (pues $x=1$ es la singularidad más cercana)

$\therefore$ Podemos encontrar una solución válida en $|x|<1$. (Por Simmons capítulo 28 Teorema A)

Proponemos una solución $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\rightarrow y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

$\rightarrow y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

$\Rightarrow$ La ecuación queda como: $(1-x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0$

$$\rightarrow (1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + p^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}p^2 a_n x^n = 0$$

Igualamos a 0 el término de x^j:

Para eso, ponemos $n=j$ en la primera suma, $n=j-2$ en la segunda, $n=j-1$ en la tercera y $n=j$ en la cuarta:

$$\Rightarrow (j+2)(j+1)a_{j+2}x^j - (j-2+2)(j-2+1)a_{j-2+2}x^j - (j-1+1)a_{j-1+1}x^j + p^2 a_j x^j = 0$$

$$\rightarrow (j+2)(j+1)a_{j+2} - j(j-1)a_j - j a_j + p^2 a_j = 0$$

$$\Rightarrow a_{j+2} = \frac{j(j-1)+j-p^2}{(j+2)(j+1)}a_j = \frac{j^2-p^2}{(j+2)(j+1)}a_j$$

Fórmula de recurrencia.

Escribimos algunos términos (separando pares e impares)

a_0

$$a_2 = \frac{0^2-p^2}{(0+2)(0+1)}a_0 = \frac{-p^2}{2}a_0$$

$$a_4 = \frac{2^2-p^2}{(2+2)(2+1)}a_0 = \frac{(2^2-p^2)(-p^2)}{4(3)(2)} = \frac{(p^2-2^2)p^2}{4!}a_0$$

$$a_6 = \frac{4^2-p^2}{(4+2)(4+1)}a_4 = \frac{(4^2-p^2)(p^2-2^2)p^2}{30\cdot 4!}a_0 = \frac{-(p^2-4^2)(p^2-2^2)p^2}{6!}a_0$$

a_1

$$a_3 = \frac{1^2-p^2 a_1}{(1+2)(1+1)} = \frac{1^2-p^2}{3(2)}a_1 = \frac{1-p^2}{3!}a_1$$

$$a_5 = \frac{3^2-p^2}{(3+2)(3+1)}a_3 = \frac{(3^2-p^2)(1-p^2)}{20\cdot 6}a_1 = \frac{(3^2-p^2)(1-p^2)}{5!}a_1$$

$$a_7 = \frac{5^2-p^2}{(5+2)(5+1)}a_5 = \frac{(5^2-p^2)(3^2-p^2)(1-p^2)a_1}{7\cdot 6\cdot 5!} = \frac{(5^2-p^2)(3^2-p^2)(1-p^2)}{7!}a_1$$

Esta serie de potencias será solución a la ec. dif en $|x|<1$ para cualquier elección de a_0 y a_1 que son parámetros libres.

·) Para $a_0=1, a_1=0$:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 1 + \frac{-p^2}{2!}x^2 + \frac{(p^2-2^2)p^2}{4!}x^4 + \frac{-(p^2-4^2)(p^2-2^2)p^2}{6!}x^6 + \dots \\ y_2 &= x + \frac{1-p^2}{3!}x^3 + \frac{(3^2-p^2)(1-p^2)}{5!}x^5 + \frac{(5^2-p^2)(3^2-p^2)(1-p^2)}{7!}x^7 + \dots \end{aligned}}$$

··) Para $a_0=0, a_1=1$:

Que son dos soluciones l.i (pues una no es un múltiplo de la otra)

b) si $p = n$ con $n \in \mathbb{Z} \geq 0 \Rightarrow$ hay una solución polinomial de grado n.

De la fórmula de recurrencia, tenemos $a_{j+2} = \frac{j^2 - p^2}{(j+2)(j+1)} a_j$

pero, si $p = n$, entonces vemos que $a_{n+2} = \frac{n^2 - p^2}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{n^2 - n^2}{(n+2)(n+1)} a_n = \underline{0}$

y por lo tanto, $a_{n+4} = \frac{(n+2)^2 - p^2}{(n+2+2)(n+2+1)} a_{n+2} = \underline{0}$

y así, todos los términos de la forma a_{n+2k} con $k \in \mathbb{N}$ serán igual a 0.

Es decir, si n es par, eventualmente todos los coeficientes pares se vuelven 0

si n es impar, eventualmente todos los coeficientes impares se vuelven 0.

En cualquier caso, una de las soluciones en serie de potencias (ya sea y_1 que contiene potencias pares o y_2 que tiene impares) se cortan al llegar a $a_n x^n$

y la solución es en realidad un polinomio de grado n.

4. Encuentre la solución usando transformada de Laplace.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \cos(2t) \qquad y(0) = -2 \quad y'(0) = 0$$

Aplicamos la transformada $\rightarrow \mathcal{L}[y''+4y] = \mathcal{L}[\cos(2t)]$

$\rightarrow \mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\cos(2t)]$ (1); pero tenemos que:

integral por partes

.) $\mathcal{L}[y'] = \int_0^\infty e^{-px} y'\,dx = ye^{-px}\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} y\,dx = -y(0) + p\mathcal{L}[y]$

..) $\mathcal{L}[y''] = \int_0^\infty e^{-px} y''\,dx = y'e^{-px}\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} y\,dx = -y'(0) + p\mathcal{L}(y') = -y'(0) - py(0) + p^2\mathcal{L}[y]$

...) $\mathcal{L}[\cos(2t)] = \frac{p}{p^2+2^2} = \frac{p}{p^2+4}$ ← usando las Tablas de transformadas vistas en clase

Sustituimos en (1) $\Rightarrow -y'(0) - py(0) + p^2\mathcal{L}[y] + 4\mathcal{L}[y] = \frac{p}{p^2+4}$

Usando las condiciones iniciales $\Rightarrow 2p + p^2\mathcal{L}[y] + 4\mathcal{L}[y] = \frac{p}{p^2+4}$

$(p^2+4)\mathcal{L}[y] = \frac{p}{p^2+4} - 2p = \frac{p-2p^3-8p}{p^2+4} \rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{-p(2p^2+7)}{(p^2+4)^2} = \frac{-2p(p^2+4)+p}{(p^2+4)^2} = \frac{-2p}{p^2+4} + \frac{p}{(p^2+4)^2}$

Ahora hay que encontrar la inversa

$$y = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2p}{p^2+4} + \frac{p}{(p^2+4)^2}\right] = -2\mathcal{L}^{-1}\underbrace{\left[\frac{p}{p^2+4}\right]}_{(2)} + \mathcal{L}^{-1}\underbrace{\left[\frac{p}{(p^2+4)^2}\right]}_{(3)}$$

Viendo las tablas de Laplace, notamos que nos podría ser útil:

.) $\mathcal{L}[t\,\mathrm{sen}(\omega t)] = \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$

..) $\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$

con esto, vemos que el término (2) es igual a la transformada de $\cos(2t)$

El término (3) requiere un poco más de trabajo: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{(p^2+4)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4p}{4(p^2+4)^2}\right]$

$= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4p}{(p^2+4)^2}\right]$

ahora sí es igual a la transformada .) cuando $\omega = 2$

$\rightarrow = \frac{1}{4}t\,\mathrm{sen}(2t)$

$\rightarrow y = -2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{(p^2+4)^2}\right]$

$= -2\cos(2t) + \frac{1}{4}t\,\mathrm{sen}(2t)$