Álgebra Moderna I Tarea 2.4 Tomás Ricardo Basile Álvarez

a) Sea $m = p_1 p_2 \cdots p_n$ con $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ primos. Dibuja la retícula de $\mathbb{Z}_m$

Como vimos en clase, los subgrupos de $\mathbb{Z}_m$ son los cíclicos generados por los factores de m. En este caso, los factores son todos los posibles productos de las ps.

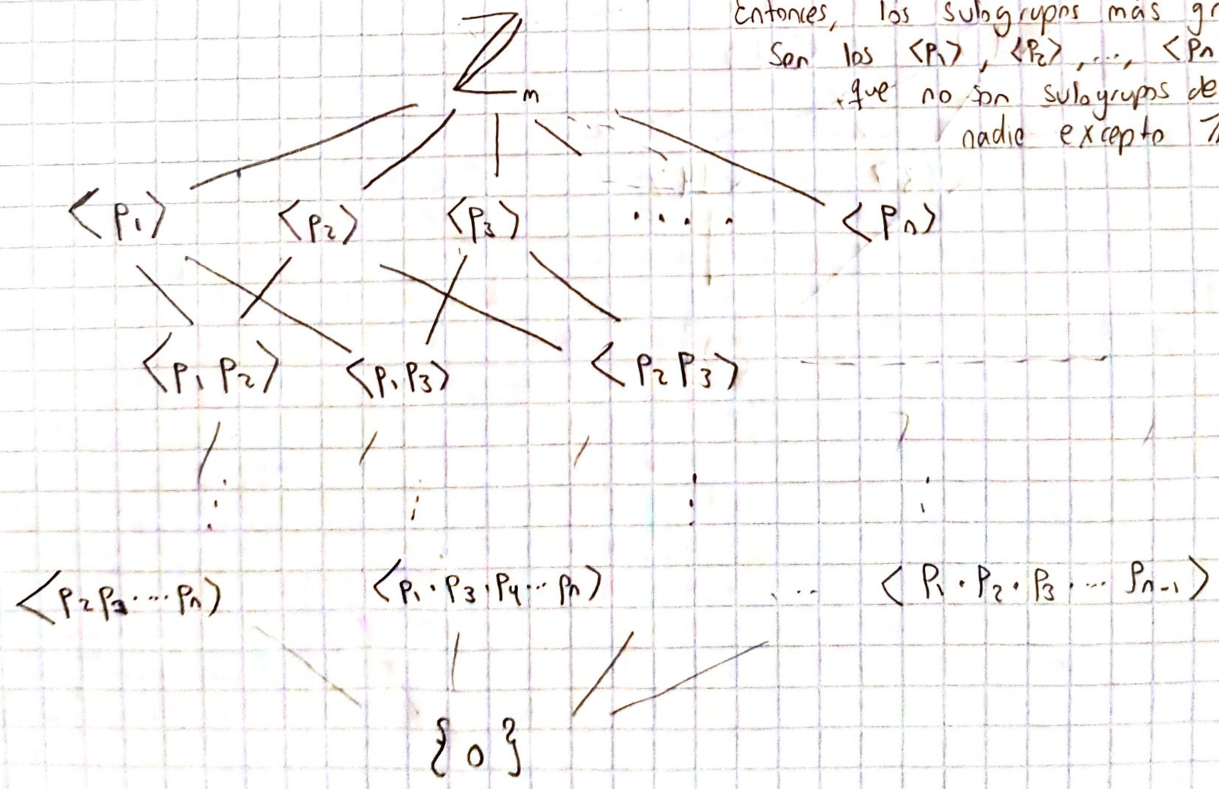
Entonces los subgrupos de $\mathbb{Z}_m$ son $\langle p_1 \rangle$, $\langle p_2 \rangle, \ldots, \langle p_n \rangle$, $\langle p_1 p_2 \rangle$, $\langle p_1 \cdot p_3 \rangle$, $\ldots$, $\langle p_{n-1} \cdot p_n \rangle$, $\ldots$ $\langle p_1 p_2 p_3 \rangle, \ldots, \langle p_1 p_2 \cdots p_{n-1} \rangle, \ldots$

Para un total de 2^n factores (porque todos los factores de m se ven como $p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_n^{i_n}$ con $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{0,1\}$, lo que nos da 2^n opciones).

Además, como vimos en clase, un grupo $\langle q \rangle$ es subconjunto de $\langle s \rangle$ si y sólo si s divide a q.

Entonces vemos que un conjunto $\langle p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r} \rangle$ es subconjunto de cualquier conjunto generado solamente por el producto de algunos números $p_{i_1}, \ldots p_{i_r}$. Por ejemplo, $\langle p_1 p_2 \rangle \leq \langle p_1 \rangle$ ó $\langle p_2 p_3 p_5 \rangle \leq \langle p_2 p_3 \rangle$

Entonces, los subgrupos "más grandes" son los $\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \ldots, \langle p_n \rangle$ que no son subgrupos de nadie excepto $\mathbb{Z}_m$.



b) Sea $m = 4 \times 7 \times 11$. Dibuja la retícula de $\mathbb{Z}_m$

Calculamos los subgrupos al ver los factores de $m = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11$
y con cada uno de estos factores, tomamos el generado:

$\langle 1 \rangle = \{1, 2, 3, \dots, m\} = \mathbb{Z}_m$

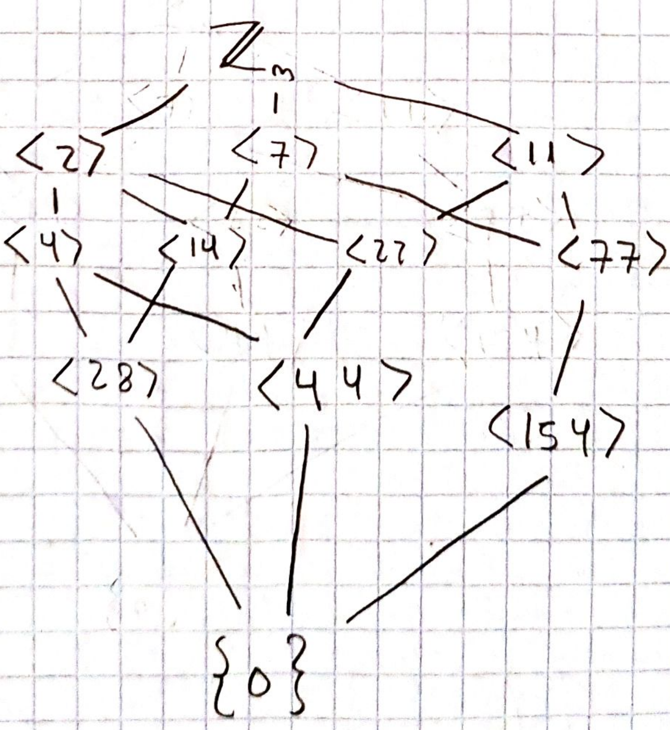
- $\langle 2 \rangle = \{2, 4, 6, \dots, m\}$
- $\langle 7 \rangle = \{7, 14, 21, \dots, m\}$
- $\langle 11 \rangle = \{11, 22, 33, \dots, m\}$

- $\langle 4 \rangle = \langle 2 \cdot 2 \rangle = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$
- $\langle 14 \rangle = \langle 2 \cdot 7 \rangle = \{14, 28, 42, \dots\}$
- $\langle 22 \rangle = \langle 2 \cdot 11 \rangle = \{22, 44, 66, \dots\}$
- $\langle 7 \cdot 11 \rangle = \langle 77 \rangle = \{77, 154, \dots\}$

- $\langle 28 \rangle = \langle 2 \cdot 2 \cdot 7 \rangle = \{28, 56, \dots\}$
- $\langle 44 \rangle = \langle 2 \cdot 2 \cdot 11 \rangle = \{44, 88, \dots\}$
- $\langle 154 \rangle = \langle 2 \cdot 7 \cdot 11 \rangle = \{154, 308\}$

Estos son todos los factores de m y por tanto todos los grupos cíclicos (y por tanto todos los grupos de $\mathbb{Z}_m$)

Formamos el diagrama recordando que $\langle p \rangle \leq \langle s \rangle$ sii s divide a p.
Por lo que los grupos "más grandes" son los primos y empezamos de ahí.



c) Dibuja la retícula del subgrupo de D_8 generado por s y sr^2

Primero veamos quién es el grupo $\langle s, sr^2\rangle$

Vemos que s tiene orden 2 porque $s^2 = 1$
y también sr^2 tiene orden 2 porque

$$
\begin{aligned}
(sr^2)^2 = (sr^2)(sr^2) &= s\,r\,r\,s\,r\,r \\
&= (sr)(rs)\,r^2 \\
&= sr\,(s\,r^{-1})\,r^2 && \leftarrow \text{porque } rs = sr^{-1} \\
&= sr\,s\,(r^{-1}r^2) = srsr \\
&= s\,(rs)\,r \\
&= s\,(s\,r^{-1})\,r && \leftarrow \text{porque } rs = sr^{-1} \\
&= s^2\,r^0 \\
&= 1 && \leftarrow \text{porque } s^2 = 1
\end{aligned}
$$

Además, s y sr^2 son conmutativos porque:

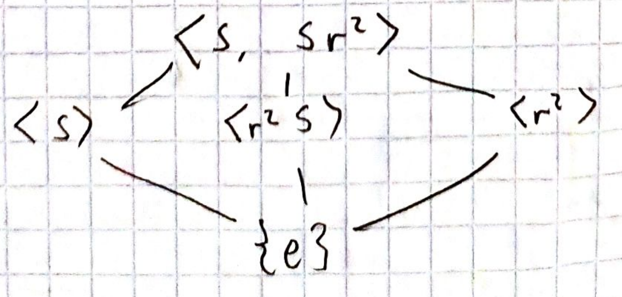
$$
\begin{aligned}
s(sr^2) &= s^2r^2 = r^2 \\
(sr^2)s &= s(r^2s) = sr(rs) = sr(sr^{-1}) = s(rs)r^{-1} = s(sr^{-1})r^{-1} \\
&= s^2r^{-2} = r^{-2} \\
&= (r^{-1})^2 = (r^3)^2 && \leftarrow \text{en } D_8,\ r^{-1} = r^3 \\
&= r^6 = r^4r^2 = r^2
\end{aligned}
$$

Pero sabemos que el generado por dos elementos de orden 2 y que conmutan es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Por lo que sus únicos elementos son el neutro, los dos elementos y su producto

$\rightarrow \langle s, sr^2\rangle = \{1, s, sr^2, r^2\}$

y sus subgrupos son $\{1\}$, $\langle s\rangle = \{1, s\}$, $\langle sr^2\rangle = \{1, sr^2\}$, $\langle r^2\rangle = \{1, r^2\}$
y no hay más (por teorema de Lagrange, todos los subgrupos son de orden 2 y estos mencionados son los únicos posibles)

$\rightarrow$ Retícula:



Dibuja la retícula del subgrupo de $GL_2(K)$ con K un campo, generado por elementos $\begin{bmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1\end{bmatrix}$

El conjunto en cuestión es $A = \left\langle \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix} \right\rangle$

Checamos los generados por un solo elemento:

$$\left\langle \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \right\} \longleftarrow \text{Neutro}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \right\}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}} \right\}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}} \right\}$$

Además, notamos que el producto de dos elementos de $\left\{ \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix} \right\}$ es nuevamente un elemento de este conjunto, pues:

$$\begin{bmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\pm 1)(\pm 1) & 0\\ 0 & (\pm 1)(\pm 1)\end{bmatrix}$$

es una matriz de éstas.

Por lo que $\left\{ \begin{bmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1\end{bmatrix} \right\}$ ya es un grupo y su generado A es el propio grupo.

Como grupo de orden 4, A sólo tiene subgrupos de orden 2 y ya consideramos todos en la lista (porque los subgrupos de orden 2 son necesariamente cíclicos generados por un solo elemento).

Entonces ya tenemos todos los subgrupos y la retícula es:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\left\langle \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \right\rangle \arrow[dr, no head] & \left\langle \begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix} \right\rangle \arrow[d, no head] & \left\langle \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix} \right\rangle \arrow[dl, no head] \\
 & \left\{ \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \right\} &
\end{tikzcd}$$