Óptica Segundo Examen Parcial

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

16 de septiembre de 2020

1. Un láser emite unos pulsos UV que dura cada uno unos $2ns$ y cuyo haz tiene un diámetro de $2{,}5mm$. Suponiendo que la potencia de cada pulso tiene una energía de $6J$: a) Calcule la extensión espacial de cada tren de ondas, b) Calcule la energía media por unidad de volumen que tiene cada pulso.

a) La duración de cada haz es de $\Delta t = 2ns = 2 \times 10^{-9}s$. La extensión espacial del haz la podemos obtener calculando la distancia que recorre la luz en este tiempo, ya que sería la distancia a la que llega el 'principio' del haz cuando el 'final' a penas está seliendo del láser. Esta distancia se calcula sencillamente con la relación entre distancia, velocidad y tiempo, en la que supongo que el haz se encuentra en el vacío por lo que viaja a velocidad c.
$l = c\Delta t = (3 \times 10^8 m/s)(2 \times 10^{-9}s) = \mathbf{0{,}6m}$

b) Primero calculamos el volumen que tiene cada pulso. Por el inciso anterior, cada pulso tiene una longitud de $l = 0{,}6m$. El pulso se puede ver como un cilindro con esta longitud y cuyo radio viene dado por el problema $R = \frac{2{,}5mm}{2} = 1{,}25mm = 1{,}25 \times 10^{-3}m$.
Luego, el volumen del haz se calcula como el volumen de este cilindro, que es:
$V = l\pi R^2 = (0{,}6m)(\pi)(1{,}25 \times 10^{-3}m)^2 = 2{,}945 \times 10^{-6}m^3$

Entonces, la energía media por unidad de volumen es igual a la energía total del haz ($E = 6J$) entre su volumen. Con lo que obtenemos:
Energía media $= \dfrac{E}{V} = \dfrac{6J}{2{,}945 \times 10^{-6}m^3} = \mathbf{2{,}037 \times 10^6 J/m^3}$

2. Una onda electromagnética viaja a través de un medio dieléctrico homogéneo con una frecuencia de $\omega = 4{,}6 \times 10^{15} rad/s$ y $k = 2{,}2 \times 10^7 rad/m$. El campo eléctrico de la onda es $\vec{E} = (210V/m)\widehat{j}e^{i(kx-\omega t)}$. a) Determinar la dirección del campo $\vec{B}$. b) la velocidad de la onda. c) el índice de refracción del medio, e) la permitividad y f) la irradiancia de la onda

a) Como vimos en clase, la expresión general para una onda plana armónica como ésta es: $\vec{E}_0 \ \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_0)]$
Comparando con la expresión del problema, notamos que $\vec{k}\cdot\vec{r}=kx$, donde $\vec{r}=(x,y,z)$
Entonces, podemos ver que $\vec{k}=(k,0,0)$. Y entonces, la onda se mueve en la dirección $\widehat{x}$.
Por otro lado, por el problema, tenemos que $\vec{E}$ apunta en la dirección $\vec{y}$.
Por la teoría, sabemos que el vector $\vec{E}\times\vec{B}$ debe de apuntar en la dirección de propagación (dirección $\widehat{x}$). Pero como $\vec{E}$ apunta en la dirección $\widehat{y}$, para que se cumpla la relación, debemos de tener que $\vec{B}$ apunta en la dirección $\widehat{z}$.

b) La velocidad de la onda es sencillamente $v=\omega/k$. Estos datos ya nos los dan en el problema y podemos calcular directamente que:

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{4{,}6\times10^{15}rad/s}{2{,}2\times10^{7}rad/m}=\mathbf{2{,}09\times10^{8}m/s}$$

c) El índice de refracción lo calculamos sencillamente con su definición $n=\dfrac{c}{v}$:

$$n=\frac{c}{v}=\frac{3\times10^{8}m/s}{2{,}09\times10^{8}m/s}=\mathbf{1{,}435}$$

e) Por lo visto en clase, al obtener la ecuación de onda a partir de las ecuaciones de Maxwell, la velocidad de una onda electromagnética en un medio con permitividad ϵ y permeabilidad μ es de $v=\sqrt{\dfrac{1}{\epsilon\mu}}$.
Sin embargo, en clase estudiamos principalmente medios sin propiedades magnéticas, con $\mu\simeq\mu_0$. Asumiendo que esto es válido para el medio del problema, tenemos que $v=\sqrt{\dfrac{1}{\epsilon\mu_0}}$.
O bien, que $\epsilon=\dfrac{1}{v^2\mu_0}$

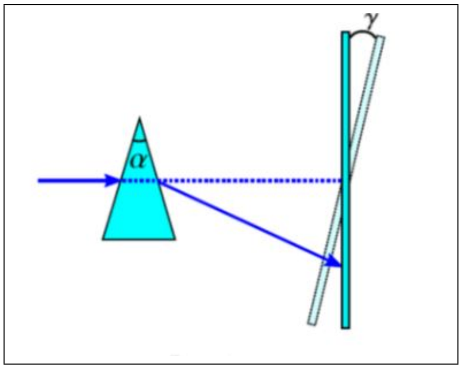
$$\begin{aligned}\epsilon=\frac{1}{v^2\mu_0}&=\frac{1}{(2{,}09\times10^{8}m/s)^2(4\pi\times10^{-7}TmA^{-1})}=1{,}822\times10^{-11}\frac{As^2}{Tm^3}\\&=1{,}822\times10^{-11}\frac{As^2}{\frac{Ns}{mC}m^3}=1{,}822\times10^{-11}\frac{AsC}{Nm^2}\\&=1{,}822\times10^{-11}\frac{C^2}{Nm^2}\end{aligned}$$

f) Como vimos en clase, la irradiancia se puede calcular como $I=\dfrac{\epsilon v}{2}E_0^2$. Entonces, juntando los resultados anteriores y usando que la amplitud de $\vec{E}$ es de $210V/m$ por lo que dice el problema, tenemos:

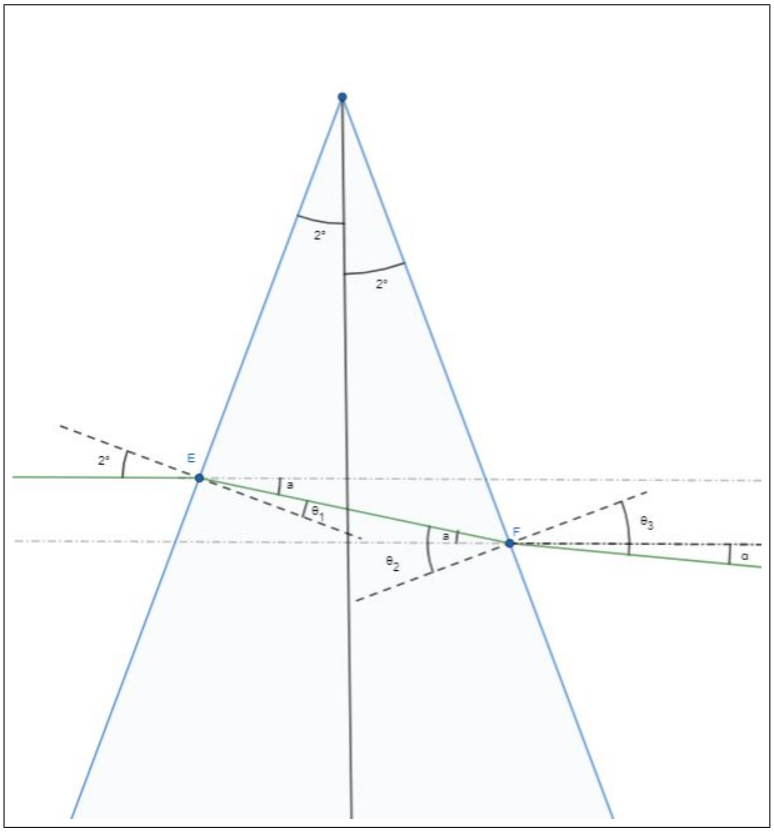
$$\begin{aligned}I=\frac{\epsilon v}{2}|E_0|^2&=\frac{(1{,}822\times10^{-11}\frac{C^2}{Nm^2})(2{,}09\times10^{8}m/s)}{2}(210V/m)^2\\&=83{,}97\frac{C^2V^2}{Nm^3s}=83{,}97\frac{J^2}{Jm^2s}=83{,}97\frac{J}{m^2s}=\mathbf{83{,}97\frac{W}{m^2}}\end{aligned}$$

.

3. Un rayo de luz viaja de forma horizontal y pasa a través de un prisma de índice de refracción $n_t = 1{,}5$ (el ángulo ápice es de $4°$) después se regleja en un espejo vertical. ¿Cuál debe de ser el ángulo γ que debe de ser rotado el espejo para que el rayo reflejado sea horizontal?



Primero, necesito conocer el ángulo con el que sale el rayo al salir del prisma (con respecto a la horizontal)



En el dibujo se ve el camino del rayo (de color verde) en el prisma. El rayo impacta en el punto E con un ángulo de 2° con respecto a la perpendicular a la superficie (lo que se puede ver porque este ángulo es semejante a medio ángulo del ápice). Luego, se refracta y forma un ángulo θ_1 con respecto a la perpendicular. Luego llega hasta un punto F con un ángulo de θ_2 respecto a la perpendicular en ese punto y se vuelve a refractar, ahora con un ángulo θ_3. Finalmente, el ángulo de salida del rayo con respecto a la horizontal es el ángulo α.

Para calcular θ_1, usamos la ley de Snell (supongo que el medio exterior es aire, con $n = 1$) que nos dice $1 \sin(2°) = 1{,}5 \sin(\theta_1)$. Y así,

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}5}\sin(2°)\right) = 1{,}333°$$

Calcular θ_2: Definimos el ángulo a como el ángulo del rayo dentro del prisma con respecto a la horizontal. Fijándonos todavía en el punto E, sabemos que el ángulo desde la línea perpendicular (punteada) hasta la línea horizontal vale 2° tanto afuera como dentro del prisma. Pero dentro del prisma, este ángulo se parte en dos, θ_1 (ángulo de la línea perpendicular respecto al rayo) y a (ángulo del rayo respecto a la horizontal). Por lo tanto, $2° = \theta_1 + a$ y por el resultado anterior, tenemos que $a = 0{,}666°$.

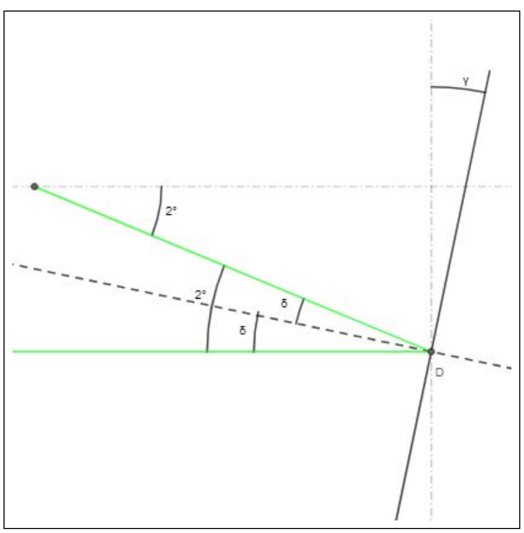
Luego, fijándonos en el punto F, tenemos nuevamente al ángulo a. Y ahora tenemos el ángulo θ_2 desde el rayo hasta la perpendicular. La diferencia entre estos dos ángulos es $\theta_2 - a$ y es el ángulo entre la perpendicular y la horizontal, que nuevamente es igual a 2° (porque es similar a medio ángulo del ápice). Entonces, $\theta_2 - a = 2°$ y por tanto $\theta_2 = 2° + a = 2° + 0{,}666° = 2{,}666°$.

Luego, en F sucede otra refracción, por lo que la ley de Snell nos dice que $1{,}5 \sin \theta_2 = 1 \sin \theta_3$ y por tanto, $\theta_3 = \arcsin(1{,}5 \sin 2{,}66°) = 3{,}99°$

Finalmente, queremos el ángulo α que se mide con respecto a la horizontal. Entonces, hay que restarle a θ_3 el ángulo entre la horizontal y la línea perpendicular (que nuevamente es 2°) como se ve en el dibujo.
Entonces, $\alpha = \theta_3 - 2° = 3{,}99° - 2° \simeq 2°$

Por lo que el ángulo con el que sale el rayo respecto a la horizontal es de 2°.

Ahora vemos lo que pasa cuando llega al espejo:



Como ya vimos, el ángulo del rayo con respecto a la horizontal (ángulo con el que salió del prisma) es de 2°. Luego se refleja en un espejo con ángulo γ respecto a la vertical y queremos que el rayo rebote horizontal como en el dibujo.
Trazamos la recta perpendicular al espejo y definimos los ángulos δ incidente y reflejado (que tienen el mismo valor por la ley de reflexión). Además, vemos que la suma de estos dos ángulos (2δ) es el ángulo entre el rayo de incidencia y el de reflexión. Pero el de reflexión es una recta horizontal, por lo que esta suma $2\ \delta$ es igual al ángulo entre el rayo y la horizontal, que es 2°. Por lo tanto, $\delta = 1°$.

Luego, podemos ver que el ángulo γ es igual a δ. Se puede ver fácilmente si nos fijamos en el δ dibujado abajo (que se encuentra entre una línea horizontal y la línea perpendicular al espejo). Si nos imaginamos que rotamos estas líneas 90 grados en sentido horario, la línea perpendicular al espejo se convierte en el espejo y la línea horizontal se convierte en la

vertical. Y entonces estas dos líneas (la vertical y la del espejo) tienen un ángulo de δ entre ellas. Pero este ángulo entre estas rectas es el que habíamos definido como γ.
Por tanto, $\gamma = \delta = 1°$

4. El ángulo crítico para reflexión total interna en cierta substancia es exactamente 45°. ¿Cuál es el ángulo de Brewster para reflexión externa en dicha substancia en el aire?

Sea n_s el índice de refracción de la sustancia y n_a el del aire. Consideramos ahora un rayo que se encuentra en el medio e incide con la superficie del aire.
Entonces, por la ley de Snell se tiene que $n_s \sin\theta_1 = n_a \sin\theta_2$.
Luego, el ángulo crítico es el ángulo $\theta_1 = \theta_c$ tal que la onda no sale de la sustancia y se queda en la superficie de ésta, es decir, tal que el ángulo de refracción es $\theta_2 = 90°$.
Sustituyendo esto en la ley de Snell nos da que: $n_s \sin\theta_c = n_a \sin 90 \quad \Rightarrow \quad n_s \sin\theta_c = n_a$

Y por tanto el ángulo crítico cumple que $\sin\theta_c = \dfrac{n_a}{n_s}$ (1)

Luego, como viene en las notas de clase y como se probó en el ejercicio 4.55 de la tarea 6, el ángulo de Brewster sigue la **Ley de Brewster** que dice que: $\tan\theta_p = \dfrac{n_t}{n_i}$
donde n_t es el índice del medio sobre el que incide la luz y n_i el índice del medio en el que se encuentra la luz antes de incidir. En este caso, nos piden el ángulo de Brewster para reflección externa (la luz se encuentra en el aire e incide sobre la sustancia). Entonces $n_i = n_a$ y $n_t = n_s$.

Por tanto, la ley de Brewster nos dice que $\tan\theta_p = \dfrac{n_s}{n_a}$ (2)

Entonces, juntando (1) y (2), tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\sin\theta_c = \frac{1}{\tan\theta_p} \\
\Rightarrow\ &\frac{1}{\sin\theta_c} = \tan\theta_p \\
&\Rightarrow\ \theta_p = \arctan\left(\frac{1}{\sin\theta_c}\right) \\
&\Rightarrow\ \theta_p = \arctan\left(\frac{1}{\sin 45°}\right) = \mathbf{54{,}735°}
\end{aligned}$$

.

5. Se hace incidir un haz de luz linealmente polarizado a 45° del plano de incidencia, sobre una interfaz con índices $n_1 = 1{,}0$ y $n_2 = 1{,}5$. Encuentra el plano de polarización para el haz reflejado y el transmitido, a incidencia externa para

los siguientes ángulos: $a)0°, b)30°, c)45°, d)60°, e)90°$

Partimos el campo $\vec{E}$ de la luz en su parte paralela al plano de incidencia y la parte perpendicular, es decir $E_{\parallel}, E_{\perp}$.

Como el ángulo de polarización de la luz es de 45° con respecto al plano de incidencia, entonces los componentes polarizados perpendicular y paralelo al plano de incidencia de $\vec{E_i}$ son iguales. Es decir, $E_{0i\parallel} = E_{0i\perp}$ (1).
Reflexión: Al llegar a la interfaz, parte del rayo es reflejado y otra parte es transmitida. Primero nos fijamos en la parte reflejada, que según la ley de Fresenel los coeficientes de reflexión se calculan como:

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad , \quad r_{\parallel} = +\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

Con θ_t el ángulo de transmisión y θ_i el de incidencia.

Ahora, separamos el vector E_i de llegada del rayo de luz en su componente paralelo y perpendicular al plano de incidencia, es decir $E_{0i\parallel}$, $E_{0i\perp}$

Despúes de la reflexión, el campo reflejado y polarizado perpendicular al plano de incidencia es $E_{0r\perp} = r_{\perp}E_{0i\perp}$ por como se define $r_{\perp}$.
De la misma forma, el campo reflejado y polarizado paralelo al plano de incidencia es $E_{0r\parallel} = r_{\parallel}E_{0i\parallel}$.

Entonces, por las fórmulas de Fresnel, se tiene que las componentes del campo reflejado paralelo y perpendicular al plano de incidencia son:

$$E_{0r\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}E_{0i\perp} \quad , \quad E_{0r\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}E_{0i\parallel}$$

Luego, definimos por θ_{pr} al ángulo de la polarización del rayo de reflejado con respecto al plano de incidencia (θ_{pr} vale 0 si el rayo reflejado está polarizado paralelo al plano de incidencia, y vale 90 si el rayo reflejado está polarizado perpendicular al plano de incidencia). Para calcular este ángulo usamos las componentes polarizadas paralela y perpendicular del rayo de reflexión. La tangente del ángulo θ_{pr} será igual a la componente polarizada perpendicularmente entre la componente polarizada paralelamente al plano, es decir: $\tan\theta_{pr} = \dfrac{E_{0r\perp}}{E_{0r\parallel}}$
Por las ecuaciones anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned}\tan\theta_{pr} &= \frac{E_{0r\perp}}{E_{0r\parallel}} = \frac{-\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)}E_{0i\perp}}{\frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}E_{0i\parallel}} = \frac{-\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)}}{\frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}} \quad \text{por (1)} \\ &= -\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)} \quad (2)\end{aligned}$$

Transmisión: Al llegar a la interfaz, parte del rayo es reflejado y otra parte es transmitida. Ahora nos fijamos en la parte transmitida, que según la ley de Fresenel los coeficientes de transmisión se calculan como:

$$t_\perp = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)} \quad , \quad t_\parallel = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}$$

Con θ_t el ángulo de transmisión y θ_i el de incidencia.

Ahora, separamos el vector E_i de llegada del rayo de luz en su componente polarizado paralelo y perpendicular al plano de incidencia, es decir $E_{0i\,\parallel}$, $E_{0i\,\perp}$

Despúes de la transmisión, el campo transmitido y polarizado perpendicular al plano de incidencia es $E_{0t\perp} = t_\perp E_{0i\perp}$ por como se define $t_\perp$.
De la misma forma, el campo transmitido y polarizado paralelo al plano de incidencia es $E_{0t\,\parallel} = t_\parallel E_{0i\parallel}$.

Entonces, por las fórmulas de Fresnel, se tiene que las componentes del campo transmitido polarizado paralelo y perpendicular al plano de incidencia son:

$$E_{0t\perp} = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)}E_{0i\perp} \quad , \quad E_{0t\parallel} = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}E_{0i\parallel}$$

Luego, definimos por θ_{pt} al ángulo de la polarización del rayo transmitido con respecto al plano de incidencia (θ_{pt} vale 0 si el rayo transmitido está polarizado paralelo al plano de incidencia, y vale 90 si el rayo transmitido está polarizado perpendicular al plano de incidencia). Para calcular este ángulo usamos las componentes polarizadas paralela y perpendicular del rayo de transmisión. La tangente del ángulo θ_{pt} será igual a la componente polarizada perpendicularmente entre la componente polarizada paralelamente al plano, es decir: $\tan\theta_{pt} = \dfrac{E_{0t\perp}}{E_{0t\parallel}}$
Por las ecuaciones anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned}\tan\theta_{pt} &= \frac{E_{0t\perp}}{E_{0t\parallel}} = \frac{\frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)}E_{0i\perp}}{\frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}E_{0i\parallel}} = \frac{\frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)}}{\frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}} \quad \text{(por 1)}\\ &= cos(\theta_i-\theta_t) \quad (3)\end{aligned}$$

.

Por otro lado, por la ley de Snell, $n_1\sin\theta_i = n_2\sin\theta_t$, entonces: $\theta_t = \arcsin\left(\dfrac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)$ (4).

Ahora sí calculamos la polarización del haz reflejado y transmitido en cada uno de los 5 incisos:

a) $\theta_i = 0$**:**
Por (4) tenemos que $\theta_t = \arcsin\left(\dfrac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right) = \arcsin\left(\dfrac{1}{1{,}5}\sin 0\right) = \arcsin(0) = 0$

Reflexión: Por (2), el ángulo del campo E_r con respecto al plano de incidencia (es decir, la polarización de E_r) es:
$\theta_{pr} = \arctan\left(-\dfrac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)}\right) = \arctan\left(-\dfrac{\cos(0-0)}{\cos(0+0)}\right) = \arctan(-1) = \mathbf{-45^o}$
Es decir, el rayo reflejado se polariza formando un ángulo de -45 grados con respecto al plano de incidencia (el menos es porque el campo E cambia de sentido en la reflexión).

Transmisión: Por (3), el ángulo del campo E_t con respecto al plano de incidencia (es decir, la polarización de E_t) es:
$\theta_{pt} = \arctan\cos(\theta_i - \theta_t) = \arctan(\cos(0-0)) = \mathbf{45^o}$
Es decir, el rayo transmitido se polariza formando un ángulo de 45 grados con respecto al plano de incidencia.

b) $\theta_i = 30^o$**:**
Por (4) tenemos que $\theta_t = \arcsin\left(\dfrac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right) = \arcsin\left(\dfrac{1}{1{,}5}\sin 30^o\right) = \arcsin(1/3) = 19{,}47^o$

Reflexión: Por (2), el ángulo del campo E_r con respecto al plano de incidencia (es decir, la polarización de E_r) es:
$\theta_{pr} = \arctan\left(-\dfrac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)}\right) = \arctan\left(-\dfrac{\cos(30-19{,}47)}{\cos(30+19{,}47)}\right) = \arctan(-1{,}513) = \mathbf{-56{,}53^o}$
Es decir, el rayo reflejado se polariza formando un ángulo de -56.53 grados con respecto al plano de incidencia (el menos es porque el campo E cambia de sentido en la reflexión).

Transmisión: Por (3), el ángulo del campo E_t con respecto al plano de incidencia (es decir, la polarización de E_t) es:
$\theta_{pt} = \arctan\cos(\theta_i - \theta_t) = \arctan(\cos(30-19{,}47)) = \mathbf{44{,}51^o}$
Es decir, el rayo transmitido se polariza formando un ángulo de 44.51 grados con respecto al plano de incidencia.

c) $\theta_i = 45^o$**:**
Por (4) tenemos que $\theta_t = \arcsin\left(\dfrac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right) = \arcsin\left(\dfrac{1}{1{,}5}\sin 45^o\right) = \arcsin(0{,}4714) = 28{,}12^o$

Reflexión: Por (2), el ángulo del campo E_r con respecto al plano de incidencia (es decir, la polarización de E_r) es:
$\theta_{pr} = \arctan\left(-\dfrac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)}\right) = \arctan\left(-\dfrac{\cos(45-28{,}12)}{\cos(45+28{,}12)}\right) = \arctan(-3{,}296) = \mathbf{-73{,}12^o}$
Es decir, el rayo reflejado se polariza formando un ángulo de -73.12 grados con respecto al plano de incidencia (el menos es porque el campo E cambia de sentido en la reflexión).

Transmisión: Por (3), el ángulo del campo E_t con respecto al plano de incidencia (es decir, la polarización de E_t) es:
$\theta_{pt} = \arctan\cos(\theta_i - \theta_t) = \arctan(\cos(45-28{,}12)) = \mathbf{43{,}74^o}$

Es decir, el rayo transmitido se polariza formando un ángulo de 43.74 grados con respecto al plano de incidencia.

d) $\theta_i = 60^o$**:**

Por (4) tenemos que $\theta_t = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}5}\sin 60^o\right) = \arcsin(0{,}5773) = 35{,}26^o$

Reflexión: Por (2), el ángulo del campo E_r con respecto al plano de incidencia (es decir, la polarización de E_r) es:

$\theta_{pr} = \arctan\left(-\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)}\right) = \arctan\left(-\frac{\cos(60 - 35{,}26)}{\cos(60 + 35{,}26)}\right) = \arctan(9{,}906) = \mathbf{84{,}23^o}$

Es decir, el rayo reflejado se polariza formando un ángulo de 84.23 grados con respecto al plano de incidencia.

Transmisión: Por (3), el ángulo del campo E_t con respecto al plano de incidencia (es decir, la polarización de E_t) es:

$\theta_{pt} = \arctan\cos(\theta_i - \theta_t) = \arctan(\cos(60 - 35{,}26)) = \mathbf{42{,}24^o}$

Es decir, el rayo transmitido se polariza formando un ángulo de 42.24 grados con respecto al plano de incidencia.

e) $\theta_i = 90^o$**:**

Por (4) tenemos que $\theta_t = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}5}\sin 90^o\right) = \arcsin(2/3) = 41{,}81^o$

Reflexión: Por (2), el ángulo del campo E_r con respecto al plano de incidencia (es decir, la polarización de E_r) es:

$\theta_{pr} = \arctan\left(-\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)}\right) = \arctan\left(-\frac{\cos(90 - 41{,}81)}{\cos(90 + 41{,}81)}\right) = \arctan(1) = \mathbf{45^o}$

Es decir, el rayo reflejado se polariza formando un ángulo de 45 grados con respecto al plano de incidencia.

Transmisión: Por (3), el ángulo del campo E_t con respecto al plano de incidencia (es decir, la polarización de E_t) es:

$\theta_{pt} = \arctan\cos(\theta_i - \theta_t) = \arctan(\cos(90 - 41{,}81)) = \mathbf{33{,}69^o}$

Es decir, el rayo transmitido se polariza formando un ángulo de 33.69 grados con respecto al plano de incidencia.

6. Una onda electromagnética que tiene una amplitud de $10V/m$ incide con un ángulo de 60° respecto a la normal en una interfaz de aire-vidrio ($n_{vidrio} = 1{,}6$). El campo eléctrico de la onda es completamente perpendicular al plano de incidencia. Determine la amplitud de la onda reflejada.

Primero calculamos el ángulo de transmisión con la ley de Snell que lo vamos a necesitar después.
$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \quad \Rightarrow$
$\theta_t = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}6}\sin(60)\right) = \arcsin(0{,}5412) = 32{,}77^o.$

Luego, el campo está polarizado perpendicularmente al plano de incidencia, por lo que usaremos la ecuación de fresnel correspondiente a $r_\perp$ y sólo nos tenemos que preocupar por esta componente. Por como se define $r_\perp$, tenemos la siguiente relación entre la amplitud de la onda reflejada ($E_{0r\perp}$), la amplitud de la onda incidente ($E_{0i\perp}$) y la $r_\perp$:

$$\begin{aligned} E_{0r\perp} = r_\perp E_{0i\perp} &= \frac{-\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} E_{0i\perp} \quad \text{Por la ec. de Fresnel} \\ &= -\frac{\sin(60 - 32{,}77)}{\sin(60 + 32{,}77)}(10V/m) \\ &= -4{,}58 \end{aligned}$$

El signo menos solamente indica un cambio en el sentido del campo eléctrico. La amplitud de la onda reflejada es entonces de 4.58 V/m

7. Describa la diferencia entre un dieléctrico y un conductor en términos de la óptica y explique qué pasa cuando una onda electromagnética incide sobre cada uno de estos materiales.

La característica principal de los medios conductores es la presencia de cargas libres que pueden circular por todas partes dentro del material, mientras que en los dieléctricos no hay cargas libres y son todas cargas ligadas.
Cuando incide una onda electromagnética en un conductor, hace que se muevan sus electrones libres y se generen corrientes eléctricas. Algo que no sucede en el caso de los dieléctricos.

En el caso de un dieléctrico, los electrones están ligados a los átomos del material. Si se empuja un poco uno de estos electrones, aparece una fuerza restitutiva que jala al electón en la dirección opuesta. De esta manera, los átomos de un material dieléctrico se pueden modelar como osciladores armónicos. Estos osciladores que conforman el material tienen varias frecuencias de oscilación naturales ω_{0k}.
Cuando llega una onda electromagnética con frecuencia ω a un dieléctrico, el campo eléctrico de la onda ejerce una fuerza sobre los electrones de los átomos. Entonces esta fuerza actúa como una fuerza impulsora de la oscilación con frecuencia ω que hace que los electrones oscilen con esta misma frecuencia. Sin embargo, las oscilaciones de los electrones tendrán cierto desfase con respecto a la onda electromagnética y además tendrán una amplitud que será mayor cuando ω se encuentre muy cercana a una de las frecuencias naturales (a esto se le conoce como resonancia).

El electrón oscilante empieza a irradiar una onda con la frecuencia ω. Cuando la amplitud de estas oscilaciones es alta (porque ω es cercana a una de las frecuencias naturales), la energía excitadora se pierde en colisiones y energía térmica, por lo que la reemisión de ondas es menor y se dice que el material absorbe la energía electromagnética de estas frecuencias.

Por otro lado, para un conductor con conductividad de σ, según la ley de Ohm, un campo eléctrico (como el campo de una onda de luz incidente) genera una densidad de corriente de $\vec{J} = \sigma \vec{E}$.

En un conductor ideal, los electrones están libres. Por tanto, no forman osciladores armónicos como en los dieléctricos y no hay fuerzas restitutivas ni frecuencias naturales. Así, cuando llega una onda electromagnética con frecuencia ω, los electrones se moverán en sincronía con el campo eléctrico. Esto causará la reemisión de ondas de luz.
Sin embargo, no habrá absorción de ciertas frecuencias, porque el metal se comportará de la misma forma para todas las frecuencias por no tener frecuencias naturales.
En metales reales, cuando se mueven los electrones impulsados por el campo eléctrico de la luz, chocan y se agitan, perdiendo energía en forma de calor (este efecto de pérdida de energía debido a la conducción eléctrica se llama efecto Joule). Debido a esta absorción, la onda electromagnética no penetrará muy profundo en el conductor y se verá atenuada.

8. Describa qué es el índice de refracción y explique si éste es una propiedad de los materiales.

El índice de refracción para un material se define sencillamente como la razón entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en dicho material.
Esta diferencia de velocidad se debe a que cuando una onda electromagnética incide en un material, hace que los electrones oscilen a la misma frecuencia de la onda. Sin embargo, los electrones oscilan desfazados con respecto a la onda de luz (lo que se puede ver al resolver la ecuación diferencial de un oscilador forzado que describe este sistema). La cantidad de desfase depende de la relación de la frecuencia ω de la onda con respecto a la frecuencia natural de los átomos del material.

Como se menciona en el ejercicio anterior, la oscilación de los electrones crea una nueva onda irradiada por los átomos del material. La onda resultante que viaja por el material es la suma de la onda original con la onda irradiada. Debido al desfase de la onda irradiada, la onda total tendrá una longitud de onda distinta a la original, pero conserva la misma frecuencia. Debido a esto, la onda total se moverá a otra velocidad, lo que da origen al índice de refracción.
Como mencioné, el desfase de la onda reemitida depende de la frecuencia ω de la onda y su relación con las frecuencias naturales. Por tanto, como la velocidad de la onda resultante de-

pende de este desfase entre la onda original y la reemitida, resulta que el índice de refracción depende de la frecuencia de la onda de luz original (efecto que se conoce como dispersión).

El índice de refracción o más bien, la dependencia funcional del índice con la frecuencia de la luz (es decir, la función $n = n(\omega)$) es una propiedad de los materiales. Ya que depende de las frecuencias naturales que tiene el material, las cuales dependerán de la estructura atómica del material.
En un mismo material, el índice de refracción varía para distintas frecuencias. Y es esta relación funcional la que se puede ver como una propiedad del material.

9. Explique por qué al incidir luz blanca en un prisma, se puede observar que la luz que emerge, está constituida de los colores característicos del arcoíris

Primero hay que tomar en cuenta que la luz blanca es en realidad la combinación de ondas de luz con frecuencias en todo el espectro visible. Es decir, no es una onda de luz monocromática, sino que está constituida por ondas de diferentes frecuencias que viajan todas juntas.
Cuando la luz llega a un prisma, según la ley de refracción, la luz cambia su dirección y el ángulo por el que cambia la dirección está relacionado con el índice de refracción n.
Sin embargo, el índice de refracción no solamente depende del material del prisma, sino que tiene un valor que depende de la frecuencia de la luz incidente (fenómeno que se conoce como dispersión como se menciona en el ejercicio anterior).

Entonces, al llegar la luz blanca al prisma, los componentes que la forman tienen distintas frecuencias y por tanto distintos índices de refracción.
Así, el ángulo de refracción por el que se desvían los rayos de luz al cambiar de superficie es distinto para cada una de estas frecuencias.
Esto tiene el efecto de que las distintas frecuencias que forman a la luz blanca toman caminos ligeramente diferentes y por tanto se separan. Cada componente (que recordemos que los componentes son las frecuencias del espectro visible) toman un camino ligeramente distinto y así podemos ver a los colores del espectro visible por separado.

10. a) ¿A qué nos referimos cuando decimos que la luz está linealmente polarizada? b) ¿La luz natural del sol está polarizada?

a) Primero hay que recordar que la luz es una onda electromagnética, con un campo eléctrico y uno magnético que oscilan perpendicularmente. Y que la luz se propaga en la dirección perpendicular a estos dos campos.

Para la polarización, nos fijamos únicamente en la dirección del campo eléctrico. Si la luz se propaga en la dirección $\widehat{k}$, el campo eléctrico técnicamente podría apuntar en cualquier dirección del campo xy y se sigue cumpliendo que E es perpendicular a la dirección de propagación.

Sin embargo, se dice que la luz está polarizada linealmente si la dirección del campo eléctrico es constante, es decir, está restringido a oscilar en una sola dirección de todas las posibles direcciones perpendiculares a la dirección de propagación.
En el caso que mencionamos en el párrafo pasado, significa que el campo E solamente puede oscilar en una dirección del plano xy, que podría ser en la dirección $\widehat{i}, \widehat{j}$ o cualquier combinación de éstas, con tal de que permanezca fija esta dirección de polarización.

b) La luz natural no está polarizada. Un emisor de luz ordinario está compuesto por un gran número de átomos que se encuentran orientados de forma aleatoria.
Cuando cada átomo emite luz, lo hace en forma de una onda de poca duración y polarizada de alguna forma (dependiendo de hacia donde apunte el campo eléctrico). Sin embargo, todos los átomos del emisor emiten nuevas ondas de corta duración constantemente con polarizaciones aleatorias.
Esto resulta en que es imposible identificar un estado de polarización estable ya que las distintas polarización se suman y se terminan 'cancelando'.

11. Describa la transparencia de los materiales en términos de la profundidad de penetración.

Como ya se mencionó antes, cuando una onda de luz incide en un material, hace oscilar sus electrones. Lo que genera reemisión de ondas electromagnéticas pero también causa la pérdida de energía absorbida en forma de calor.

Esto hace que la amplitud de la onda se vea exponencialmente atenuada conforme atraviesa el medio.
Esta atenuación se puede escribir como sigue: $I(y) = I_0 e^{-\alpha y}$. Donde I_0 es la irradiancia de la luz al incidir en la superficie y $I(y)$ es la irradiancia tras recorrer una profundidad y. El coeficiente α se conoce como coeficiente de atenuación. Un mayor índice de atenuación indica que la onda pierde mucha energía rápidamente.

Con esto, se define a la profundidad de penetración como $y_p = 1/\alpha$. Y es la profundidad tal que la irradiancia de la onda disminuyó en $e^{-1} \simeq 1/3$.

Un material es transparente si deja atravesar a gran parte de la luz incidente sin absorberla. Para que esto sea posible, la profundidad de penetración debe de ser grande en comparación con el grosor del material. Lo que indica que al atravesar el grosor del material, la luz todavía no ha perdido mucha energía ya que ni siquiera ha llegado al punto al que queda 1/3 de la energía con la que se empezó.

12. Describe en qué consiste el fenómeno de dispersión y el de esparcimiento

Dispersión: Consiste en la dependencia que tiene el índice de refracción de un medio con respecto a la frecuencia de la onda incidente.
Este fenómeno ya se explicó en la pregunta 8. Pero básicamente se debe a que la amplitud y fase de la oscilación de los electrones en el material dependen de cuál sea la frecuencia de la onda de luz entrante y de qué tan parecida sea a las frecuencias naturales del material.
Como se menciona en el ejercicio 9, la dispersión es la causante de que los distintos colores se muevan por distintas trayectorias al atravesar un medio.

Esparcimiento: Como ya se mencionó con mayor detalle en los otros ejercicios, cuando un haz de luz llega a un material, hace que los átomos del material oscilen formando un oscilador armónico forzado por el campo eléctrico de la luz. Estos electrones en movimiento emiten ondas electromagnéticas ya que junto con los núcleos de sus átomos, forman dipolos oscilantes. Esta reemisión de luz por átomos expuestos a la luz es lo que recibe el nombre de esparcimiento.
Un mismo átomo recibe y reemite muchos fotones por segundo y lo hace en direcciones aleatorias (que dependerán de la orientación que tiene el átomo en ese momento).
Por esta razón, podemos imaginar que un átomo iluminado por un haz de luz se comporta como una fuente de un número muy alto de fotones que se irradian en todas direcciones, es decir, como una fuente puntual de ondas electromagnéticas esféricas.