

Termodinámica: Tarea 4

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

15 de diciembre de 2021

Problema 1

¿La temperatura en la desigualdad de Clausius tiene que ser la temperatura absoluta? ¿Por qué?

Sí es necesario utilizar temperatura absoluta.

Esto se debe a que para probar la desigualdad de Clausius, se parte de utilizar que $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ para un ciclo de Carnot entre las temperaturas T_1 y T_2 . Esta relación es justamente la que se utiliza para definir la temperatura absoluta, y a partir de ella se obtiene la desigualdad de Clausius. Es por ello que dicha desigualdad solamente tiene sentido si las temperaturas son absolutas.

Problema 2

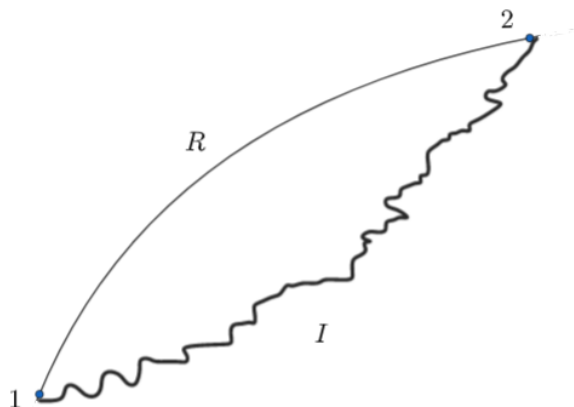
¿Un proceso isotérmico necesariamente es reversible internamente? Explique su respuesta con un ejemplo.

No necesariamente. Se pueden tener procesos isotérmicos que sean irreversibles internamente. Un ejemplo de un proceso isotérmico que no es reversible es la mezcla de dos gases ideales. Digamos que tenemos dos gases de distintas sustancias a la misma temperatura contenidos en un recipiente y separados por algún tipo de puerta o válvula. Luego abrimos la válvula y dejamos que los gases se mezclen. Como la temperatura de los gases es la misma y es también la del recipiente, la mezcla sucederá a esa temperatura, por lo que es un proceso isotérmico. Sin embargo, el proceso no es reversible, ya que los gases se mezclan espontáneamente, aumenta la entropía del sistema y no se separarán de nuevo de forma espontánea.

Problema 3

¿Cómo se comparan los valores de la integral $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$ para un proceso reversible e irreversible entre los mismos puntos finales?

Sean 1 y 2 los dos estados de equilibrio del sistema entre los que haremos la integral. Consideramos ahora dos trayectorias que van del punto 1 al punto 2: una trayectoria R que sea reversible y una I que sea irreversible como se ve en la siguiente figura.



Ahora digamos que hacemos un ciclo en el que empezamos en 1, nos movemos a 2 a través del proceso irreversible y luego nos movemos de 2 a 1 a través de la trayectoria reversible (es válido movernos en este sentido para la trayectoria R ya que es reversible).

Consideramos ahora este ciclo completo y le aplicaremos la desigualdad de Clausius, que nos dice que $\int_{Ciclo} \frac{dQ}{T} \leq 0$. Como el ciclo completo es irreversible (porque una parte lo es), entonces se cumple estrictamente la desigualdad de Clausius $\int_{Ciclo} \frac{dQ}{T} < 0$. Donde la integral se realiza a lo largo del ciclo mencionado antes. Por lo tanto, tenemos que:

$$\int_{Ciclo} \frac{dQ}{T} < 0$$

Separamos la integral del ciclo en los dos procesos que lo conforman

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dQ}{T} \Big|_{(I)} + \int_2^1 \frac{dQ}{T} \Big|_{(R)} < 0$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dQ}{T} \Big|_{(I)} < - \int_2^1 \frac{dQ}{T} \Big|_{(R)}$$

Volteamos los límites de la integral del lado derecho, lo que elimina el signo -

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dQ}{T} \Big|_{(I)} < \int_1^2 \frac{dQ}{T} \Big|_{(R)}$$

Por lo que concluimos que la integral en el camino irreversible es menor que la del camino reversible.

b) Para determinar el cambio de entropía para un proceso irreversible entre los estados 1 y 2, ¿Debería realizarse la integral $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$ a lo largo de la ruta del proceso real o una ruta reversible imaginaria? Explique.

Se tendría que hacer a lo largo de una ruta reversible imaginaria con el mismo punto inicial y final. Esto es porque la diferencia de entropía entre dos estados A y B se define como $S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{dQ}{T}$ donde el proceso tiene que ser reversible.

Se define de esta forma porque sabemos que el teorema de Clausius para ciclos reversibles nos dice que $\oint_{rev} \frac{dQ}{T} = 0$.

Donde la integral se realiza sobre un ciclo reversible. Como la integral es 0 para cualquier ciclo reversible, concluimos que la integral de $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ para un proceso reversible depende solamente del punto inicial A y del punto final B y no de la trayectoria. Esto es lo que nos anima a definir la diferencia de entropía como $\Delta S_{A \rightarrow B} = \int_A^B \frac{dQ}{T}$ y nos asegura que esta definición no depende de la trayectoria y por tanto S es una función de estado. Es por eso que es importante que la entropía de un proceso se calcule usando una trayectoria reversible.

Problema 4

Durante el proceso de adición de calor isotérmico de un ciclo de Carnot, se agregan $900kJ$ de calor al fluido de trabajo desde una fuente a $40^{\circ}C$. Determina (a) el cambio de entropía del fluido de trabajo, (b) el cambio de entropía de la fuente y (c) el cambio de entropía total para el proceso.

El fluido de trabajo recibe una cantidad de calor $Q_{fluido} = 900kJ$ y se encuentra a una temperatura constante de $T = 313K$ a lo largo de todo el proceso (porque está en contacto con la fuente a esta temperatura). Luego, el cambio de entropía del fluido es por definición de:

$$\begin{aligned}\Delta S_{fluido} &= \int_i^f \frac{dQ_{fluido}}{T} \\ &= \frac{1}{T} \int_i^f dQ_{fluido} \quad \text{Porque } T \text{ es constante a lo largo del proceso} \\ &= \frac{1}{T} Q_{fluido} \\ &= \frac{1}{313K} 900KJ \\ &= \boxed{2875,4 \text{ J/K}}\end{aligned}$$

b) Por otro lado, calculamos ahora el cambio de entropía de la fuente. La fuente expulsa una cantidad de calor $Q_{fuente} = -900KJ$ (negativo porque la fuente pierde calor y se lo da al fluido de trabajo). La fuente se encuentra a temperatura constante de $T = 313K$. Calculamos ahora el cambio de entropía de la fuente:

$$\begin{aligned}\Delta S_{fuente} &= \int_i^f \frac{dQ_{fuente}}{T} \\ &= \frac{1}{T} \int_i^f dQ_{fuente} \quad \text{Porque } T \text{ es constante a lo largo del proceso} \\ &= \frac{1}{T} Q_{fuente} \\ &= \frac{1}{313K} (-900KJ) \\ &= \boxed{-2875,4 \text{ J/K}}\end{aligned}$$

c) Calculamos ahora el cambio total de entropía del proceso, sumando los cambios del sistema y de la fuente:

$$\begin{aligned}\Delta S_{total} &= \Delta S_{fluido} + \Delta S_{fuente} \\ &= 2875,4J/K - 2875,4J/K \\ &= \boxed{0 \text{ J/K}}\end{aligned}$$

Problema 5

El calor, en la cantidad de $100kJ$, se transfiere directamente de un reservorio caliente a $1200K$ a un reservorio frío a $600K$. Calcule el cambio de entropía de los dos depósitos y determine si se satisface el principio de aumento de entropía.

Primero calculamos el cambio en entropía de la fuente caliente. Esta fuente se encuentra a una temperatura de $T = 1200K$ (que se considera constante por ser una fuente) y pierde un calor de $-100kJ$ (se toma negativo porque esta fuente pierde calor). Entonces, calculamos el cambio de entropía de la fuente a partir de la definición:

$$\begin{aligned}\Delta S_{fuente\ cal} &= \int_i^f \frac{dQ_{fuente\ cal}}{T} \\ &= \frac{1}{T} \int_i^f dQ_{fuente\ cal} \quad \text{Porque la temperatura es constante} \\ &= \frac{Q}{T} \\ &= \frac{-100kJ}{1200K} \\ &= \boxed{-83,33\ J/K}\end{aligned}$$

Ahora calculamos el cambio de entropía para la fuente fría. Esta fuente se encuentra a una temperatura de $T = 600K$ (que se considera constante por ser una fuente) y gana un calor de $100kJ$ (es positivo porque esta fuente gana calor). Entonces, calculamos el cambio de entropía de la fuente a partir de la definición:

$$\begin{aligned}\Delta S_{fuente\ fria} &= \int_i^f \frac{dQ_{fuente\ fria}}{T} \\ &= \frac{1}{T} \int_i^f dQ_{fuente\ fria} \quad \text{Porque la temperatura es constante} \\ &= \frac{Q}{T} \\ &= \frac{100kJ}{600K} \\ &= \boxed{166,66\ J/K}\end{aligned}$$

Entonces, el cambio total de entropía del universo es la suma de estos dos cambios de entropía:

$$\begin{aligned}\Delta S_{Total} &= \Delta S_{fuente\ cal} + \Delta S_{fuente\ fria} \\ &= -83,333\ J/K + 166,666\ J/K \\ &= \boxed{83,333\ J/K}\end{aligned}$$

Por lo que vemos que la entropía total aumenta. Esto coincide con el principio de aumento de entropía, pues el proceso estudiado es la transmisión de calor de una fuente caliente a una fría, lo cual es físicamente válido. Si hiciéramos el proceso al revés (con calor fluyendo de la fuente fría a la caliente), el cambio de entropía del universo sería negativo, indicando que es un proceso que no sucede espontáneamente, lo cual ya lo sabemos por la postulación de Clausius de la segunda ley.

Problema 6

Un bloque de cobre de $50kg$ inicialmente a $140^\circ C$ se deja caer en un tanque aislado que contiene $90L$ de agua a $108^\circ C$. Determine la temperatura de equilibrio final y el cambio de entropía total para este proceso.

Primero calculamos la temperatura de equilibrio del sistema (agua + cobre). Para hacerlo, observamos que el calor cedido por el cobre tiene que ser igual al calor recibido por el agua ya que es un sistema cerrado. Suponiendo que la capacidad calorífica de ambas sustancias es constante, tenemos que el calor cedido por el cobre es de:

$$Q_{cu} = m_{cu}c_{cu}\Delta T_{cu}$$

Con m_{cu} la masa de cobre, c_{cu} su calor específico a presión constante y ΔT_{cu} la diferencia de temperaturas entre el estado inicial y final del cobre.

Mientras que el calor recibido por el agua es de:

$$Q_{agu} = m_{agu}c_{agu}\Delta T_{agu}$$

Donde m_{agu} es la masa de agua, c_{agu} es su calor específico a presión constante del agua y ΔT_{agu} es su diferencia en temperatura entre el punto inicial y el final.

Ahora bien, como la energía total del sistema (agua + cobre) es constante, el calor total tiene que ser 0:

$$\begin{aligned} Q_{cu} + Q_{agu} &= 0 \\ -Q_{cu} &= Q_{agu} \\ \Rightarrow -m_{cu}c_{cu}T_{cu} &= m_{agu}c_{agu}\Delta T_{agu} \\ \Rightarrow -m_{cu}c_{cu}(T - T_{i\ cu}) &= m_{agu}c_{agu}(T - T_{i\ agu}) \end{aligned}$$

Donde al final hemos escrito que la temperatura inicial del cobre es $T_{i\ cu}$ y la del agua es $T_{i\ agu}$. Además, la temperatura final de ambas sustancias es la misma (porque llegan al equilibrio) y es la variable ' T ' que buscamos determinar.

Siguiendo con el desarrollo, tenemos que:

$$\begin{aligned} -m_{cu}c_{cu}T + T_{i\ cu}m_{cu}c_{cu} &= m_{agu}c_{agu}T - T_{i\ agu}m_{agu}c_{agu} \\ \Rightarrow (-m_{cu}c_{cu} - m_{agu}c_{agu})T &= -T_{i\ cu}m_{cu}c_{cu} - T_{i\ agu}m_{agu}c_{agu} \\ \Rightarrow T &= \frac{T_{i\ cu}m_{cu}c_{cu} + T_{i\ agu}m_{agu}c_{agu}}{m_{cu}c_{cu} + m_{agu}c_{agu}} \end{aligned}$$

Ahora podemos sustituir los datos para determinar T . El bloque de cobre tiene una masa de $m_{cu} = 50kg$ y el agua de $m_{agu} = 90kg$ (porque son 90 litros). Las temperaturas iniciales son $T_{i\ cu} = 140^\circ C = 413K$ y $T_{i\ agu} = 98^\circ C = 371K$.

Finalmente, los calores específicos se pueden buscar y tienen valores de $c_{agu} = 4,2kJ/kgK$ y $c_{cu} = 0,385kJ/kgK$. Por lo que tenemos que:

$$T = \frac{(413K)(50kg)(0,385kJ/kgK) + (371K)(90kg)(4,2kJ/kgK)}{(50kg)(0,385kJ/kgK) + (90kg)(4,2kJ/kgK)} = \boxed{373,0K}$$

El agua llega justo a la temperatura a la que se empieza a evaporar, pero como no la sobrepasa en los cálculos, no tenemos que preocuparnos por la evaporación ni por el calor latente de evaporación.

Calculamos ahora el cambio de entropía total. Para hacerlo, primero calculamos el cambio de cada sustancia, usando la definición $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$. Empezamos con el cobre:

$$\begin{aligned} \Delta S_{cu} &= \int_i^f \frac{dQ}{T} \\ &= \int_i^f \frac{m_{cu}c_{cu}dT}{T} \quad \text{Porque el calor es } dQ = mcdT \\ &= m_{cu}c_{cu} \int_i^f \frac{dT}{T} \quad \text{suponiendo que el calor específico es constante} \\ &= m_{cu}c_{cu} \log \left(\frac{T_f}{T_i} \right) \end{aligned}$$

La temperatura final es la que calculamos $T_f = 373K$ y su temperatura inicial era $413K$. Por lo que el cambio de entropía del cobre es de:

$$\Delta S_{cu} = m_{cu}c_{cu} \log \left(\frac{T_f}{T_i} \right) = (50kg)(0,385kJ/kgK) \log \left(\frac{373,0K}{413K} \right) = -1961 \text{ J/K}$$

Para el cambio de entropía del agua el desarrollo y la fórmula final son lo mismo, por lo que tenemos que:

$$\Delta S_{agu} = m_{agu}c_{agu} \log \left(\frac{T_f}{T_i} \right) = (90kg)(4,2kJ/kgK) \log \left(\frac{373,0K}{371K} \right) = 2032 \text{ J/K}$$

Por lo que el cambio total de entropía es de:

$$\Delta S = \Delta S_{cu} + \Delta S_{agu} = -1961 \text{ J/K} + 2032 \text{ J/K} = \boxed{71 \text{ J/K}}$$

Vemos que el cambio en entropía total es positivo. Esto era de esperarse para que se respete la segunda ley de la termodinámica.

Problema 7

¿Un proceso que es internamente reversible y adiabático necesariamente es isentrópico? Explique.

Sí.

Como el proceso es reversible, entonces no se crea entropía en el proceso. Además, como es adiabático, no fluye entropía entre los alrededores y el sistema. Por lo tanto, en el proceso el sistema no cambia su entropía.

Otra forma de verlo es que como el proceso es reversible, se cumple la relación $dS = \frac{dQ}{T}$ (que es la definición de la entropía para procesos reversibles).

Pero como es un proceso adiabático, tenemos que $dQ = 0$. Por lo tanto $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{0}{T} = 0$ y el proceso es entonces isentrópico.