Medida Cálculo IV

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

14 de julio de 2021

Medida y contenido cero

1. Si $F, G : R \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que sus discontinuidades son de medida cero, donde $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo. Demuestren:
a) El conjunto de discontinuidades de $F + G$, también es de medida cero.

Demostración: Llamemos D_F al conjunto de discontinuidades de la función F y D_G al conjunto de discontinuidades de la función G.
Por lo estudiado en cálculo III, sabemos que si la función F es continua en un punto $x_0 \in R$ y G también es continua en dicho punto, entonces la función $F+G$ es continua en x_0. Con la nueva notación introducida, esto se puede escribir como:
$x_0 \notin D_F$ y $x_0 \notin D_G \Rightarrow x_0 \notin D_{F+G}$
Si consideramos la contrapuesta de esta implicación, se obtiene:
$x_0 \in D_{F+G} \Rightarrow x_0 \in D_F$ ó $x_0 \in D_G$
Es decir, $D_{F+G} \subset D_F \cup D_G$ ...(1)

Pero, como D_f y D_G son conjuntos de medida cero por hipótesis, entonces su unión $D_F \cup D_G$ también es de medida cero. Y cualquier subconjunto de un conjunto de medida cero sigue siendo de medida cero. Entonces, por (1), D_{F+G} es de medida cero, que es lo que se quería probar.

b) El conjunto de discontinuidades de FG también es de medida cero. Noten que un caso particular es cuando F ó G son una función constante.

Demostración: Por lo estudiado en cálculo III, sabemos que si la función F es continua en un punto $x_0 \in R$ y G también es continua en dicho punto, entonces la función FG es continua en x_0. Esto se puede escribir como:
$x_0 \notin D_F$ y $x_0 \notin D_G \Rightarrow x_0 \notin D_{FG}$
Si consideramos la contrapuesta de esta implicación, se obtiene:
$x_0 \in D_{FG} \Rightarrow x_0 \in D_F$ ó $x_0 \in D_G$
Es decir, $D_{FG} \subset D_F \cup D_G$ ...(2)

Pero, como D_f y D_G son conjuntos de medida cero por hipótesis, entonces su unión

$D_F \cup D_G$ también es de medida cero. Y cualquier subconjunto de un conjunto de medida cero sigue siendo de medida cero. Entonces, por (1), D_{FG} es de medida cero, que es lo que se quería probar.

Por último, si una de las funciones es constante (digamos que la $F = c \neq 0$) entonces es continua en todo R y por lo tanto $D_F = \emptyset$ y por lo tanto, la expresión (2) pasa a ser $D_{FG} \subset D_G$

Por otro lado, si cG es continua en un punto, entonces, al multiplicarla por $\frac{1}{c}$ (que existe porque $c \neq 0$), la función $\frac{1}{c}cG = G$ también es continua. O bien, por la contrapuesta de esta implicación, si G es discontinua en un punto, entonces cG también. Es decir, $D_G \subset D_{cG}$

Pero tomando en cuenta que cG es simplemente FG y usando las dos contenciones anteriores, obtenemos:

$D_{FG} = D_G$.

Es decir, en el caso particular en el que F sea constante (distinta de 0) entonces las discontinuidades de FG son iguales a las de G. ■

2. Sea A un conjunto Jordan-Medible. Demuestre lo siguiente:

a) Si A tiene medida de Jordan positiva, entonces $int(A) \neq \emptyset$. Inversamente, si un conjunto es Jordan-medible con interior no vacío, entonces la medida de Jordan de A es positiva. Más aún, prueben que la medida de $intA$ y la medida de A es la misma.

Demostración ⇒) Si A tiene medida de Jordan positiva, significa que la función característica χ_A es integrable en un rectángulo R que contiene a A y su valor $\int \chi_A > 0$. Y en particular, la integral inferior es mayor que cero.

Es decir, $sup\{L(\chi_A, P) \mid P$ es una partición de R $\} = \underline{\int} \chi_A > 0$ Con $L(\chi_A, P)$ la suma superior de χ_A para la partición P.

Es decir, tiene que haber por lo menos una partición P_0 tal que $L(\chi_A, P_0) > 0$ (sino, el supremo mencionado valdría cero, pero sabemos que es mayor que 0).

Pero la suma inferior $L(\chi_A, P_0)$ suma los ínfimos de la función χ_A en cada rectangulito R_i de la partición P_0. Pero para que esta suma sea distinta de cero, tiene que haber por lo menos un rectangulito R_0 de la partición, tal que el ínfimo de la función en dicho rectángulo sea mayor que cero (para que así contribuya positivamente a la suma inferior y ésta no sea cero).

Como la función χ_A vale 1 para los puntos dentro de A y 0 para los demás, para que el ínfimo de la función en R_0 sea positivo, es necesario R_0 no tenga puntos fuera de A. Entonces, $R_0 \subset A$.

En resumen, existe un rectángulo $R_0 \subset A$. Pero sabemos que dentro de cualquier rectángulo podemos colocar una bola abierta $B \neq \emptyset$. Entonces, existe una bola abierta $B \subset A$. Si tomamos el interior de ambos lados, obtenemos $intB \subset intA$. Pero como B es abierto, entonces $int(B) = B \neq \emptyset$. Por lo tanto $int(A) \neq \emptyset$

$\Leftarrow$) Si un conjunto es Jordan medible con interior no vacío, como el interior es no vacío, existe una bola abierta $B \neq \emptyset$ con $B \subset A$. Pero dentro de esta bola abierta, podemos colocar un rectángulo $R_0 \neq \emptyset$ (basta con colocarlo en el centro y hacer sus lados menores que el radio de la bola). Entonces existe un rectángulo $R_0 \subset A$. Entonces, en este rectángulo, la función χ_A siempre vale 1.

Ahora, si creamos una partición P_0 de A tal que incluya al rectángulo R_0, entonces la suma inferior de χ_A para dicha partición, será mayor a cero (Porque en la suma, el rectángulo R_0 contribuye positivamente, pues la función χ_A vale 1 en todo el rectángulo).

Entonces, la integral inferior (que es el supremo de las sumas inferiores), será mayor que cero. Pero como A es Jordan medible, entonces la medida de Jordan y la integral inferior son lo mismo y por tanto la medida de A es mayor a cero.

Por último, falta probar que $m(int(A)) = m(A)$. Para esto, usaré un teorema muy conocido y que mencionamos en clase.

El teorema dice que un conjunto A es Jordan medible si y sólo si ∂A es de contenido cero (o lo que es lo mismo, ∂A tiene contenido de Jordan igual a 0).

Ahora bien, todo conjunto A cumple que $int(A) \subset A \subset A \cup \partial A$ (Todo conjunto contiene a su interior y es contenido por su cerradura), entonces, A se puede escribir como $int(A) \cup C$ donde $C \subset \partial A$. Es decir, A es igual a su interior junto con algunos elementos de su frontera.

Y además, por el teorema mencionado, como A es Jordan medible, ∂A es de contenido cero, pero como $C \subset \partial A$, entonces C es de contenido cero, o lo que es lo mismo, tiene medida de Jordan $m(C) = 0$

Y, por otro lado, por una propiedad de topología, $\partial(int(A)) \subset \partial A$, pero como $partial A$ es de contenido cero, entonces $\partial(int(A))$ también, lo cual implica, por el teorema mencionado, que $int(A)$ es medible.

Entonces, la medida de Jordan de A es:
$m(A) = m(int(A) \cup C)$
$= m(int(A)) + m(C) - m(int(A) \cap C)$ (Propiedad de medida de Jordan de la unión)
$= m(int(A)) + m(C)$ (Porque $int(A) \cap \partial A = \emptyset$, entonces en particular, $int(A) \cap C = \emptyset$)
$= m(int(A))$ (Por lo mencionado arriba) $\blacksquare$

b) La medida de Jordan de A es cero sii $A \subset \partial A$

Demostración $\Rightarrow$) Por contradicción, digamos que hay un $x_0 \in A$ pero $x_0 \notin \partial A$
Entonces como x_0 no está en la frontera pero está en A, tiene que ser un punto interior de A. Eso implica que $int(A) \neq \emptyset$ Pero por el inciso a), esto implica que A tiene medida de Jordan positiva. Lo que contradice la hipótesis de este ejercicio.

$\Leftarrow$) Vemos que si $A \subset \partial A$ entonces $intA = \emptyset$
Porque si suponemos que el interior no es vacío, entonces hay un punto $x \in int(A)$, que por hipótesis está en ∂A pero esto es una contradiccón porque el interior y la frontera siempre son conjuntos ajenos.
Por lo tanto, $int(A) = \emptyset$, que por la contrapuesta del inciso a), implica que A no tiene medida de Jordan positiva. Pero como la medida de Jordan de un conjunto no puede ser negativa, concluimos que la medida de Jordan de A es 0.

c) Si B es un conjunto tal que $int(A) \subset B \subset A \cup \partial A$, entonces B es Jordan medible y su medida es igual a la medida de A.

Demostración:
Por como se define, B se puede ver como el interior de A junto con algunos elementos de la frontera de A. Es decir, $B = int(A) \cup C$, donde $C \subset \partial A$.
Pero como A es Jordan medible, entonces por el teorema mencionado en el inciso a), ∂A es de contenido cero. Entonces, $C \subset \partial A$ es de contenido cero (o lo que es lo mismo, C es jordan medible con $m(C) = 0$).
Pero como ya vimos en el inciso a), $int(A)$ es Jordan medible y $m(int(A)) = m(A)$.

Entonces, al ser $B = int(A) \cup C$ la unión de dos conjuntos Jordan medibles, entonces B es Jordan medible.

Y su medida es:

$m(B) = m(int(A) \cup C)$

$= m(int(A)) + m(C) - m(int(A) \cap C)$ (Propiedad de medida de Jordan de la unión)

$= m(int(A)) + m(C)$ (Porque $int(A) \cap \partial A = \emptyset$, entonces en particular, $int(A) \cap C = \emptyset$)

$= m(int(A))$ (Por lo mencionado arriba)

$= m(A)$ (por inciso a)) $\blacksquare$

II. Integral múltiple

1. Supongamos que $F, G : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son dos funciones integrables tales que:

$$\int \int_R F \; dxdy = \int \int_R G \; dxdy$$

¿Podemos concluir que $F = G$ en R?

NO, tomemos como contraejemplo a $F(x, y) = cos(x)$ y $G(x, y) = sin(x)$ definidas en el rectángulo $R = [0, 2\pi]$ x $[0, 1]$

Entonces, $\int \int_R F \; dxdy \; = \; \int_0^1 \int_0^{2\pi} cos(x) \; dxdy \; = \int_0^1 sin(x) \Big|_0^{2\pi} dy = \int_0^1 0dy = 0$

$\int \int_R G \; dxdy \; = \; \int_0^1 \int_0^{2\pi} sin(x) \; dxdy \; = \int_0^1 -cos(x) \Big|_0^{2\pi} dy = \int_0^1 0dy = 0$

Entonces las dos integrales son iguales, sin embargo, las funciones son muy distintas.

e

1. **Rectángulo**: R es un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$ si R es de la forma: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ Donde $\times$ es el producto cartesiano, a_i y b_i son números y cada $[a_i, b_i]$ es un intervalo cerrado. Si $n = 1$, el rectángulo es simplemente un intervalo cerrado, si $n = 2$, es un rectángulo de los normalitos, si $n = 3$ es un prisma, etc.

2. **Área de un rectángulo**: Dado un rectángulo en $\mathbb{R}^n$ de la forma $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$, definimos su área como lado por lado por lado por .... por lado, es decir:

$$a(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$$

Le llamamos área sin importar la dimensión del rectángulo, aunque claramente sólo coincide con la idea típica de área cuando $n = 2$.
El área de un rectángulo es siempre positiva y vale cero si alguna de sus dimensiones es 0.
Los rectángulos son los únicos conjuntos de $\mathbb{R}^n$ para los cuales tenemos una idea clara de área, el área para otros conjuntos se tendrá que construir a partir de rectángulos.

3. **Diagonal de un rectángulo** : Dado un rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$, la diagonal es la máxima distancia entre dos puntos del rectángulo (que naturalmente coincide con la distancia entre dos esquinas del rectángulo) o bien, $diag(R) = sup\{||x - y|| : x, y \in R\}$

Topología

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos los siguientes conjuntos:
1. def. **interior,** $int(A)$: Es el abierto más grande posible que se queda contenido en A.

2. def. **cerradura,** $\overline{A}$: Es el cerrado más chico posible que tiene contenido a A.

3. def. **frontera,** $\partial(A)$: Son los puntos p de $\mathbb{R}^n$ (pueden o no estar en A) tales que están cerca de A pero también están cerca de $A^{\complement}$. Es decir, toda bola abierta alrededor de p intersecta a A y también intersecta a $A^{\complement}$

4. def **Cubierta**: Sea $\{E_i\}$ una familia de conjuntos, decimos que es una cubierta de A si $A \subset \cup E_i$. Decimos que es una cubierta abierta si cada E_i es abierto, pero trabajaremos con cubiertas que no necesariamente son abiertas. Decimos que es una cubierta finita si sólo hay una cantidad finita de conjuntos en la familia (es decir, $\{E_i\} = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$). Decimos que es una cubierta numerable si hay tantos conjuntos en la cubierta como números naturales, es decir la cubierta es infinita pero se puede "*enlistar*" con los naturales, $\{E_i\} = \{E_1, E_2, ...\}$.

Propiedades:

Sean A, B, C subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ arbitrarios, tenemos que:
1. $int(A)$ siempre es un conjunto abierto. (por def)
2. $\overline{A}$ siempre es un conjunto cerrado. (por def)
3. ∂A siempre es un conjunto cerrado.
4. Equivalencias de cerrado: A es cerrado sii $\partial A \subset A$ sii A contiene todos sus puntos de acumulación.
5. Si B es un conjunto cualquiera y C es cerrado con $B \subset C \;\Rightarrow\; \overline{B} \subset C$ (porque $\overline{B}$ es el cerrado más chico que contiene a B, entonces es más chico que C.)
6. Si B es un conjunto cualquiera y C es abierto con $C \subset B \;\Rightarrow\; C \subset int(B)$ (porque $int(B)$ es el abierto más grande contenido en B, entonces es más grande que C.)

7. $int(A) = A - \partial A$
8. $\partial A = \overline{A} - int(A)$
9. $\overline{A} = A \cup \partial A$
10. $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$
11. $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$
12. $\partial(\partial A) \subset \partial A$
13. La unión arbitraria de abiertos es abierta, la intersección finita de abiertos es abierta.
14. La unión finita de cerrados es cerrada, la intersección arbitraria de cerrados es cerrada.

Medida y Contenido cero

Def. Contenido Cero: Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido cero si para toda $\epsilon > 0$ existe una cubierta FINITA de rectángulos $\{R_1, R_2, ..., R_m\}$ que cubre a A y que cumple $\sum\limits_{i=1}^{m} a(R_i) \; < \epsilon$.

Def. Medida Cero: Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero si para toda $\epsilon > 0$ existe una cubierta NUMERABLE (o finita) de rectángulos $\{R_1, R_2, ...\}$ que cubre a

A y que cumple $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a(R_i) \ < \epsilon$.

Es decir, un conjunto A tiene contenido cero, si es tan "*chiquito*" o "*delgado*" que podemos encontrar una cubierta finita de rectángulos que cubren A y que además la suma de sus áreas se puede hacer tan chica como queramos. Los conjuntos de medida cero pueden ser un poco más "*grandes*" ya que podemos darnos el lujo de cubrirlos con una infinidad numerable de rectángulos en vez de con una cantidad finita, pero aún con la condición de que la suma de las áreas de los rectángulos se pueda hacer tan chiquita como queramos.

Claramente, un conjunto de contenido cero, automáticamente es de medida cero, pero el regreso no siempre es válido.

Nota: Para las definiciones de contenido y medida cero, se pueden usar equivalentemente rectángulos abiertos en vez de cerrados. Que son iguales pero sin la frontera, es decir, en vez de ser el producto cartesiano de intervalos cerrados, un rectángulo abierto es el producto cartesiano de intervalos abiertos. Con este cambio no varía la definión de contenido y medida cero.

Propiedades obvias que probaré con puras palabras:

1. **Si A y B tienen contenido cero, entonces $A \cup B$ tienen contenido cero**:

Prueba: Sea $\epsilon > 0$ como A y B tienen contenido cero, hay una familia finita de rectángulos que cubren a A y la suma de sus áreas es menor que $\frac{\epsilon}{2}$. De la misma manera, como B tiene contenido cero, hay una familia finita de rectángulos que cubren a B y la suma de sus áreas es menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Entonces, si unimos las dos familias de rectángulos, tenemos una familia que sigue siendo finita, que cubre a $A \cup B$ y que la suma suma de sus áreas es menor que ϵ. Esta propiedad se puede generalizar por inducción, si tenemos una cantidad FINITA de conjuntos de contenido cero, su unión es de contenido cero. Sin embargo no se puede generalizar para cantidades infinitas de conjuntos de contenido cero.

2. **Si A y B tienen medida cero, entonces $A \cup B$ tiene medida cero.**

Prueba: igual que la anterior, pero ahora las cubiertas son numerables, y al tomar la unión de las dos cubiertas, sigue siendo una cubierta numerable. Esta propiedad sí se puede generalizar para cualquier cantidad finita o numerable de conjuntos con medida cero. Por que si tenemos una cantidad numerable de conjuntos con medida cero y juntamos todas sus cubiertas numerables, esta cubierta enorme sigue siendo numerable (porque la unión numerable de conjuntos numerables es numerable).

3. **Si A es de contenido cero y $B \subset A$, entonces B es de contenido cero.**

Prueba: Sea $\epsilon > 0$ Como A es de contenido cero, existe una cubierta finita de rectángulos $\{R_1, R_2, ..., R_m\}$ que cubre a A y que cumple $\sum_{i=1}^{m} a(R_i) < \epsilon$. Pero como $B \subset A$, entonces esta cubierta finita también cubre a B (y hasta sobran rectángulos) y sigue cumpliendo que $\sum_{i=1}^{m} a(R_i) < \epsilon$, entonces B es de contenido cero.

4. **Si A es de medida cero y $B \subset A$, entonces B es de medida cero.**

Prueba: igual que la anterior.

5. **Si A y B son de contenido (medida) cero, entonces $A \cap B$ es de contenido (medida) cero**:

Prueba: Notamos que $A \cap B \subset A$ pero A tiene contenido (medida) cero, entonces por la propiedad 3 (4), $A \cap B$ tiene contenido (medida) cero.

6. **Si A y B son de contenido (medida) cero, entonces $A \vartriangle B$ es de contenido (medida) cero**:

Prueba: Notamos que por la propiedad 1 (2), $A \cup B$ tiene contenido (medida) cero. Además, $A \vartriangle B \subset A \cup B$ pero $A \cup B$ tiene contenido (medida) cero, entonces por la propiedad 3 (4), $A \vartriangle B$ tiene contenido (medida) cero.

7. **Si A es de medida cero y es COMPACTO, entonces A es de contenido cero**:

Prueba: Sea $\epsilon > 0$, Como A es de medida cero, existe una cubierta numerable de rectángulos ABIERTOS $\{R_1, R_2, ...\}$ que cubren a A y que cumplen: $\sum_{i=1}^{\infty} a(R_i) \; < \epsilon$ (es válido usar rectángulos abiertos, porque como dice la nota, la definición de medida y contenido cero es equivalente sin importar si usamos rectángulos cerrados o abiertos).
Como A es compacto, por Heine Borel, existe una subcubierta finita $\{R_1, R_2, ...R_m\}$ que sigue cubriendo a A y que naturalmente, cumple $\sum_{i=1}^{m} a(R_i) \; < \epsilon$, entonces A es de contenido cero.
Entonces todo conjunto de contenido cero tiene medida cero, pero si es de medida cero, sólo podemos asegurar que es de contenido cero cuando sea además compacto.

Ejemplos y teoremas :

1. **El conjunto finito de puntos** $\{p_1, p_2, ..., p_m\} \subset \mathbb{R}$ **tiene contenido cero (y por tanto medida cero)**:

Sea $\epsilon > 0$. Consideramos los rectángulos en $\mathbb{R}$: $R_i = [p_i - \frac{\epsilon}{2m}, p_i + \frac{\epsilon}{2m}]$. Claramente, la familia Finita de rectángulos $\{R_1, ..., R_m\}$ cubren al conjunto de puntos (de hecho cada punto es el centro de un rectángulo). Además, el área de cada rectángulo (en este caso, longitud) es: $a(R_i) = p_i + \frac{\epsilon}{2m} - (p_i - \frac{\epsilon}{2m}) \; = \; \frac{\epsilon}{m}$.

Entonces la suma del área de todos los rectángulos es: $\sum_{i=1}^{m} a(R_i) \; = \; a(R_1) + ... + a(R_m) \; = \frac{\epsilon}{m} + ... + \frac{\epsilon}{m} = \epsilon$. Por lo tanto, el conjunto tiene contenido cero.

2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ **tiene medida cero:**

Como Q es un conjunto numerable, se puede enlistar u ordenar usando como índices los naturales. Es decir, podemos ver a $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, ...\}$ donde q_i representa el iésimo racional.
Sea $\epsilon > 0$ y proponemos el rectángulo R_i en $\mathbb{R}$ con $R_i = [q_i - \dfrac{\epsilon}{2^{i+1}}, q_i + \dfrac{\epsilon}{2^{i+1}}]$. Y consideremos la familia de rectángulos $\{R_1, R_2, ...\}$.

Claramente esta familia es una partición de $\mathbb{Q}$ porque todo q_i de $\mathbb{Q}$ está metido en un rectángulo (en R_i).
Sólo falta comprobar que la suma de las áreas de los rectángulos de esta familia es menor que ϵ. Vemos que $a(R_i) = q_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} - (q_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}) = \frac{\epsilon}{2^i}$.
Entonces $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a(R_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \epsilon * 1 = \epsilon$.
Aunque nos dió igual a ϵ en vez de menor, sabemos que habiendo agarrado $\epsilon = \frac{\epsilon}{2}$ sí jalaba. Por lo tanto es de medida cero. Nota: La misma prueba se puede usar para mostrar que cualquier conjunto NUMERABLE de puntos en R es de medida cero.

3. **Si A no es acotado, entonces no es de contenido cero**:

Por contrapuesta, suponemos que A es de contenido cero, entonces existe una familia FINITA de rectángulos $\{R_1, ..., R_m\}$ que cubren a A y que la suma de sus áreas es menos que ϵ. Como la suma de las áreas de los rectángulos es menor que ϵ, entonces cada rectángulo tiene que ser acotado (sino su área sería infinita).
Entonces para cualquier rectángulo R_i de la familia, existe una cota M_i tal que $\{||x|| \quad : x \in R_i\} < M_i$. Sea $M = max\{M_1, M_2, ..., M_m\}$, este máximo existe porque lo estamos tomando entre una cantidad finita de números. Claramente A está acotado por M porque todo elemento de A está en alguno de los rectángulos, y entonces está acotado por M.

4. **Un rectángulo S de R^n no degenerado no tiene medida cero:**

Como el rectángulo es no degenerado, entonces tiene un área positiva $a > 0$. Supongamos que tiene medida cero y sea $\epsilon = a > 0$, por la definición de medida cero, existe una familia numerable de rectángulos $\{R_1, R_2, ...\}$ que cubre a S con $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a(R_i) < a$. Pero como S está metido en la unión de los rectángulos, entonces su área es menor o igual a la suma de las áreas de los rectángulos. Entonces:
$a \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} a(R_i) < a$**!**

5. **Si A es de contenido cero, entonces $\overline{A}$ es de contenido cero.**

Sea $\epsilon > 0$ Como A es de contenido entonces existe una familia finita de rectángulos cerrados $\{R_1, ..., R_m\}$ que cubren a A y $\sum_{i=1}^{m} a(R_i) < \epsilon$.
Pero como $R_1, ..., R_m$ son una cantidad finita de cerrados, entonces su unión es cerrada. Pero como $A \subset \cup_{i=1}^{m} R_i$ con $\cup_{i=1}^{m} R_i$ cerrado, entonces por la propiedad (5) de topología, $\overline{A} \subset \cup_{i=1}^{m} R_i$
Por lo tanto, la misma familia de conjuntos cubre a $\overline{A}$ y sigue cumpliendo $\sum_{i=1}^{m} a(R_i) < \epsilon$ entonces $\overline{A}$ es de contenido cero.
(Notar que no se cumple para conjuntos de medida cero)

6. **Si $\{a_1, a_2, ...\} \subset \mathbb{R}^n$ es una secuencia convergente que converge a a, entonces tiene contenido cero.**

Por la definición de convergencia, para todo U abierto con $a \in U$ existe un ńumero N tal que para todo n con $n > N$ se cumple que $a_n \in U$. Es decir, para todo abierto alrededor de a, hay un momento en la secuencia en el que a partir de entonces todos los elementos siguientes de la secuencia caen en el abierto.
Sea $\epsilon > 0$ y sea R_0 un abierto alrededor de a con área menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Por la definición de convergencia, hay un $N > 0$ tal que todos los elementos de la secuencia a partir de a_N están contenidos en R_0. Luego, nos sobra una cantidad finita de elementos de la secuencia que nos falta cubrir, pero como es una cantidad finita de puntos, por el ejercicio 1, sabemos que lo podemos cubrir con una cantidad finita de rectángulos cuyas áreas suman $\frac{\epsilon}{2}$
Si juntamos R_0 y estos rectángulos, entonces podemos cubrir toda la secuencia con los rectángulos y la suma de las áreas será menor que $\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Por lo tanto la secuencia es de medida cero.

7.**Teorema de Saard: Sea $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con K compacto y f continua. Entonces la gráfica de f , $G_f = \{(x, f(x)) : x \in K\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es de contenido (y por tanto medida) cero.**

Prueba: Como f es continua en K compacto, entonces f es uniformemente continua. Sea $\epsilon > 0$, Como f es U.C entonces existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in K$ con $||x - y|| < \delta$, entonces $||f(x) - f(y)|| < \epsilon$.
Partimos el dominio K en una cantidad finita N de rectangulitos $R_1, ..., R_N \subset \mathbb{R}^n$ que cubren

K (podemos hacer esto porque K es acotado) cada uno con una diagonal menor que δ (es decir, para dos puntos en un rectangulito, la distancia entre ellos es menor que δ)
Ahora, para cada R_i agarramos un punto $x_i \in R_i$, y consideramos los rectangulitos $\overline{R_i} \subset \mathbb{R}^m$ en el contradominio con lados de longitud ϵ y centro en $f(x_i)$
Finalmente, definimos los rectangulitos $\widehat{R_i} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ dados por $\widehat{R_i} = R_i \times \overline{R_i}$

Veremos que estos N rectangulitos de $\mathbb{R}^{n+m}$ cubren a G_f. Para esto, sea $(x, f(x)) \in G_f$
Entonces, $x \in K$ y por tanto $x \in R_j$ para algún rectángulo R_j de la partición de K. En ese rectangulito, también está el punto x_j, y como la diagonal del rectángulo es menor que δ, entonces, $||x-x_j|| \leq \delta$ que por continuidad uniforme, implica $||f(x)-f(x_j)|| < \epsilon$, y entonces $f(x) \in \overline{R_j}$

Entonces, $(x, f(x)) \in R_j \times \overline{R_j} = \widehat{R_j}$. Y por tanto, los rectangulitos $\widehat{R_i}$ cubren a G_f
Pero esta cubierta por rectángulos es finita (porque sólo hay N rectángulos) y además, cada rectángulo tiene área $a(\widehat{R_i}) < n\delta m\epsilon$ (porque las primeras n longitudes del rectángulo son menores que la diagonal δ y las otras m dimensiones son menores que ϵ). Luego, la sumas de las áreas será $\sum_{i=1}^{N} = Nmn\epsilon\delta$ que se puede hacer tan chiquita como queramos si hacemos la δ, y por tanto la partición, más chica.

Con este teorema, podemos probar que muchísmos conjuntos tienen contenido cero.
Por ejemplo, si queremos ver que el pedazo de recta $y = x$ en $\mathbb{R}^2$ con x de 0 a 1 tiene contenido cero, basta con encontrar la forma de ver este conjunto como la gráfica de una función continua sobre un conjunto compacto. Claramente, si tomamos $f : [0, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x$ es una función continua en un dominio compacto, y su gráfica es el pedazo de recta que mencionamos. Luego, por el teorema, este pedazo de recta en $\mathbb{R}^2$ tiene medida cero.

O por ejemplo, queremos probar que el cascarón de una esfera unitaria en R^3 tiene medida cero. Proponemos la función $f : S^1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con S^1 el círculo unitario (que es compacto) y $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ que es continua en el dominio. Se puede ver que esta función en este dominio tiene como gráfica la mitad superior de la esfera unitaria en R^3 y por el teorema, esta media esfera en R^3 es de contenido cero. Si queremos la mitad inferior, proponemos $f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y luego la esfera total es la unión de las dos partes que por consiguiente también es de contenido cero.

Integración

Primero definiremos la idea de integración para funciones con dominio en un rectángulo acotado y luego generalizaremos para dominios más generales.

Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función acotada con dominio en R un rectángulo acotado. Sea P una partición de R (la partición P divide el rectángulo R en muchos rectángulitos R_i que juntos forman R)

Definimos la suma inferior con esta partición como:

$$L(f,P) = \sum_{R_i \in P} [inf\{f(x) \mid x \in R_i\}] a(R_i)$$

Es decir, para cada R_i de la partición P, encontramos el ínfimo de $f(x)$ y lo multiplicamos por el área de R_i, luego sumamos sobre todos los rectangulitos de la partición.
Similarmente definimos la suma superior de la función con esta partición como:

$$U(f,P) = \sum_{R_i \in P} [sup\{f(x) \mid x \in R_i\}] a(R_i)$$

Claramente, para cualquier partición se cumple $L(f,P) \leq U(f,P)$ y si P' es un refinamiento de P entonces: $L(f,P) \leq L(f,P')$ y $U(f,P') \leq U(f,P)$ Entonces, al ir refinando, las sumas superiores bajan y se acercan al valor que buscamos (la integral) y las sumas inferiores suben y también se acercan al valor que buscamos.

Definimos la integral superior como :

$$\overline{\int}_R f = inf\{U(f,P) \mid P \text{ es una partición de R }\}$$

y la integral inferior:

$$\underline{\int}_R f = sup\{L(f,P) \mid P \text{ es una partición de R }\}$$

Decimos que una función es integrable si $\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f$ y este valor es la integral.

Teorema 1 f es integrable en R sii para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P_ϵ de R con $U(f,P_0) - L(f,P_0) < \epsilon$

Podemos generalizar la idea de integral de f si el dominio es cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ con tal que sea acotado. Como sólo sabemos integrar en rectángulos, simplemente, tomamos R un rectángulo que contenga a A (que existe porque A es acotado). Y posteriormente extendemos el dominio de la función f de A a todo el rectángulo R, haciendo que valga lo mismo en los puntos de A y que valga 0 en los puntos del rectángulo fuera de A.
La integral de la función original en A será igual a la integral de la función extendida calculada sobre el rectángulo.

Contenido de Jordan

Sea $A \subset R^n$ acotado y sea R un rectángulo que contiene a A, y P una partición de R en rectangulitos R_i.
Definimos la suma interior como:

$$S^-(P) = \sum a(R_i) \quad | \; R_i \subset A$$

Es decir, la suma de las áreas de los rectangulitos de la partición pero únicamente de aquellos metidos A
Definimos la suma exterior como:

$$S^+(P) = \sum a(R_i) \quad | \; R_i \cap A \neq \emptyset$$

Es decir, la suma de las áreas de todos los rectangulitos de la de la partición que tocan a A.

Claramente, para cualquier partición se cumple que $S^-(P) \leq S^+(P)$ y para un refinamiento P' de P se cumple $S^-(P) \leq S^-(P')$ y $S^+(P) \geq S^+(P')$. Es decir, con refinamientos, las áreas interiores se hacen más grandes (y se acercan a lo que definiremos como área de A) mientras que las áreas exteriores se hacen chicas (y se acercan al área de A)

Y definimos el área interior de A como:

$$V^-(A) = sup\{S^-(P)\ |P \text{ es partición de } R\}$$

Y el área exterior de A como:

$$V^+(A) = inf\{S^+(P)\ |P \text{ es partición de } R\}$$

Finalmente decimos que A es tiene contenido de Jordan (o es Jordan medible) si $V^+(A) = V^-(A)$ y a este número le llamamos contenido de Jordan de A o volumen de A que denotamos simplemente como $V(A)$

Como vemos, estas definiciones se parecen mucho a la construcción que hicimos de la integral. Con esta idea, podemos encontrar una definición alternativa a contenido de Jordan usando integrales.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, primero definimos la función característica de A como:

Función característica de A : Es la función $\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con:

$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Definición alternativa de contenido de Jordan: Ahora digamos que R es un rectángulo que cubre a A, entonces A es Jordan medible si:

$\int_R \chi_A$ existe (es decir la función χ_A es integrable en R.)

Y el valor de esta integral es el contenido de Jordan o volumen de A que denotamos como $V(A)$

Se puede demostrar la igualdad entre las dos definiciones de contenido de Jordan viendo las semejanzas entre la construcción que se hizo de contenido de jordan y la construcción de la integral con la función χ_A

Propiedades de contenido de Jordan:

1. A **es Jordan medible con** $V(A) = 0$ **sii** A **tiene contenido cero.**

Prueba: $\rightarrow$) Si A es JM con $V(A) = 0$, Entonces, usando la def. alternativa, χ_A es integrable con $\int \chi_A = 0$.

Lo que quiere decir que $\overline{\int} \chi_A = inf\{U(\chi_A, P) : P \text{ es partición } \} = 0$
Por def. de ínfimo, para toda $\epsilon > 0$ existe una patición P_ϵ con $0 + \epsilon > U(\chi_A, P_\epsilon)$. Pero $U(\chi_A, P_\epsilon) = \sum\limits_{R_i \in P_\epsilon} [sup\{\chi_A(x) \mid x \in R_i\}]a(R_i)$

Pero este supremo $sup\{\chi_A(x) \mid x \in R_i\}$, por la def. de χ_A, valdrá 1 en los rectángulos que intersectan a A y 0 en los otros.

Entonces, $\epsilon > U(\chi_A, P_\epsilon) = \sum\limits_{i=1}^{m} a(R_i) \quad : \quad R_i \cap A \neq \emptyset$ Y estos R_i forman una cubierta de A
Por lo tanto, $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists$ una cubierta de rectángulos con $\sum\limits_{i=1}^{m} a(R_i) < \epsilon$

$\leftarrow$) Si A tiene contenido cero, hay que probar que χ_A es integrable y su integral vale 0.

Como ya se mencionó en la ida, la suma superior de χ_A coincide con sumar las áreas de los rectángulos que intersectan a A (Porque en estos rectángulos hay puntos donde la función vale 1 y si no intersecta, la función vale 0 en todo el rectángulo). Luego, como estas sumas de áreas se pueden hacer tan chicas como queramos (por ser A de contenido cero) entonces las sumas superiores se pueden hacer tan chicas como queramos. Entonces la integral superior (que es el ínfimo de las sumas superiores) vale 0.
Por otro lado, la integral inferior de χ_A es necesariamente mayor o igual a 0 (porque la función nunca toma valores negativos), pero no puede ser mayor a la integral superior. Luego, la integral inferior vale exactamente lo mismo que la superior, es decir 0.
Como la integral inferior y la superior valen 0, entonces χ_A es integrable y por tanto A es JM con $V(A) = 0$

Con esto vemos, que en la primera sección, cuando decíamos que un conjunto tenía contenido cero, bien podríamos haber dicho que el conjunto es JM y su volumen es 0.

2. Si R es un rectángulo, entonces el contenido de Jordan o volumen de R coincide con el volumen que habíamos dado cuando definimos un rectángulo.

3. Si A y B son Jordan medibles, entonces $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \triangle B$ son Jordan medibles. (se demostrará más tarde con otra equivalencia a ser JM)

4. **Positividad**: Si A es Jordan medible, entonces $V(A) \geq 0$
Prueba: La medida de Jordan de A es $\int \chi_A$ (que existe porque A es JM, pero claramente esta integral es mayor o igual a cero porque χ_A es una función que no toma valores negativos.)

5. **Aditividad**: Si A y B son Jordan medibles y $A \cap B = \emptyset$, entonces $V(AUB) = V(A) + V(B)$ (Se puede generalizar a una cantidad finita de conjuntos que no se intersecten entre sí)
Prueba: Se puede ver fácilmente que como A y B no se intersectan, la función $\chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B$. Luego $V(A \cup B) = \int \chi_{A \cap B} = \int \chi_A + \chi_B = \int \chi_A + \int \chi_B = V(A) + V(B)$
(Faltaría probar que la integral se puede separar como se hizo)

6. **Monotonía**: Si A y B son Jordan medibles y $A \subset B$ entonces $V(A) \leq V(B)$

7. Si A y B son Jordan medibles, entonces $V(A \cup B) = V(A) + V(B) - V(A \cap B)$
(la propiedad 5 es un corolario de ésta) (Además, una forma más útil es simplemente la llamada **Subaditividad:** $V(A \cup B) \leq V(A) + V(B)$)

Teorema importantísimo que relaciona estas cosas:

Sea $A \subset R^n$ un conjunto acotado y sea $f : A \longrightarrow R$ una función acotada. Extendemos f a todo un rectángulo que cubra A y hacemos que f afuera de A valga cero y que adentro no cambie, para así poder definir la integral. Entonces f es integrable en R sii el conjunto de puntos donde f es discontinua es de medida cero.

Corolario importante: Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es Jordan medible sii su frontera tiene medida cero.

Dem: Si A es Jordan medible, según la segunda definición de Jordan medible, significa que la función χ_A es integrable. Pero por el teorema importantísimo , si χ_A es integrable, es porque su conjunto de discontinuidades tiene medida cero. Pero, dónde es discontinua χ_A? Pues viendo la def. de χ_A, es claro que es discontinua en la frontera de A porque para los puntos justo afuera, la función vale 0 y para los puntos justo adentro de A, la función salta al 1. Entonces es discontinua en ∂A y por la ida del teorema, ∂A tiene medida cero.
El regreso es igual.

Ejercicios

1. Pruebe que A acotado es Jordan medible sii ∂A es de CONTENIDO cero:

$\rightarrow$) Por el corolario importante, si A es Jordan medible, entonces ∂A es de medida cero, pero además ∂A es cerrado y acotado (compacto) entonces por la propiedad obvia que probaré con palabras número 7, ∂A es de contenido cero.

$\leftarrow$) Si ∂A tiene contenido cero entonces tiene medida cero, entonces por el corolario importante, A es jordan medible.

2. Si A y B son Jordan medibles, entonces $A \cap B$ es Jordan medible.

Dem: $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cap \partial B$ por una propiedad de topología.
Pero como A y B son Jordan medibles, entonces por el corolario importante, sus fronteras tienen medida cero, luego la unión de ∂A y ∂B tiene medida cero y como la frontera de $A \cap B$ está contenida en $\partial A \cup \partial B$, entonces la frontera de $A \cap B$ es de medida cero (porque subconjuntos de algo de medida cero son de medida cero). Luego, usando el regreso del corolario, $A \cap B$ es Jordan medible.

3. Si F y G son integrable en un conjunto A entonces $F + G$ es integrable en A.

Sea D_F el conjunto de las discontinuidades de la función F . Sabemos que si F y G son continuas en un punto, entonces F+G es continua en dicho punto. O lo que es lo mismo, si F+G es discontinua en un punto es porque o F o G son discontinuas. entonces
$D_{F+G} \subset D_F \cup D_G$
Pero como F y G son integrables, por el teorema, D_F y D_G son de medida cero, entonces su unión es de medida cero, entonces D_{F+G} es de medida cero. Usando el regreso del teorema, concluimos que $F + G$ es integrable.

4. Si A es JM, entonces $\overline{A}$ es JM.
Como A es JM, entonces ∂A es de medida cero, pero como es compacto, es de Contenido cero. Entonces es JM (propiedad 1). Luego, como A y ∂A son JM, entonces $\overline{A} = A \cup \partial A$ es JM.

Medida de Lebesgue

Ya habiendo estudiado la medida de Jordan, introduciremos ahora la medida de Lebesgue que es en cierto sentido una generalización de la de Jordan ya que nos permite medir muchos más conjuntos que no son JM. Al igual que la de Jordan, la medida de Lebesgue se basa en usar muchos rectángulos para aproximar un conjunto cualquiera, con la única diferencia de que ahora podremos usar una cantidad numerable de rectángulos en vez de limitarnos a cantidades finitas.

Primero que nada, definiremos la medida de lebesgue exterior. La medida exterior, denotada μ^* le asigna una noción de tamaño (longitud, área, volumen, ...) a CUALQUIER conjunto de R^n

Medida de Lebesgue exterior: Para CUALQUIER conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ definimos su medida de Lebesgue exterior como:

$$\mu^*(A) = inf\{\sum_{i=1}^{\infty} a(R_i) \ \ |\{R_1, R_2, ...\} \text{ es una cubierta numerable de rectángulos que cubre a } A\}$$

Es decir, cubrimos el conjunto con una cantidad infinita de rectángulos y luego sumamos sus áreas. Luego hacemos lo mismo para diferentes cubiertas de rectángulos y sacamos el ínfimo del área sobre todas estas posibles cubiertas. Además en esta definición no importa si los rectángulos son abiertos o cerrados, la medida exterior de A será la misma.

Se nota que la medida de Lebesgue exterior siempre cumple que es positiva o cero (A esto se le llama **positividad**)

Ejemplos de medida de Lebesgue exterior:

1. La medida exterior de un punto es 0:   Esto está claro si se observa que un punto es un rectángulo de área 0 (un rectángulo degenerado). En general, cualquier conjunto numerable de puntitos tendrá medida de lebesgue exterior igual a 0.

2. La medida de Lebesgue exterior de un rectángulo es igual al área del rectángulo (como la habíamos definido originalmente): Esto se ve claramente porque el rectángulo se cubre a sí mismo y para cualquier cubierta más grande o con más rectangulitos, la suma de las

áreas de los rectangulitos será mayor (pero nos interesa el ínfimo)

3. La medida exterior de $\mathbb{R}^n$ es infinita: Si hacemos una cubierta de R^n, la suma de lás áreas de los rectangulitos claramente va a ser infinita.

Observaciones de la medida exterior

1. Monotonicidad: Si $A \subset B$, entonces, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$:
Esto está claro si vemos que toda cubierta de B también será cubierta de A.

2. Subaditividad numerable: Para cualesquiera conjuntos $A_1, A_2, ...$, se cumple $\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$
Esto tiene sentido porque al sumar las medidas exteriores de los conjuntos A_i por separado, puede ser que estemos repitiendo muchas zonas (donde se intersectan los conjuntos)

3. Para todo conjunto E se cumple que $\mu^*(E) = inf\{\mu^*(U) : E \subset U$ con U abierto $\}$
Esto nos dice que si queremos sacar la medida de Lebesgue exterior de un conjunto, en vez de cubrirlo con rectángulos, podemos cubrirlo con abiertos cualquiera y sacar el ínfimo.

4. Aditividad: Si A y B son conjuntos con $A \cap B = \emptyset$, entonces $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$
En general, $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) - \mu^*(A \cap B)$

Todo esto de la medida de Lebesgue externa aplica para cualquier conjunto, sin embargo, nos vamos a interesar sólo en ciertos conjuntos que no sean muy patológicos para poder desarrollar más la teoría. A dichos conjuntos les llamaremos conjuntos Lebesgue Medibles (LM) y los distinguimos como sigue:

Criterio 1 para ser LM Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es LM (según este criterio) si se cumple que para toda $\epsilon > 0$ existe un conjunto abierto U con:

$$E \subset U \qquad \text{y} \qquad \mu^*(U - E) \leq \epsilon$$

Los conjuntos E que cumplan este criterio medio raro son lo suficientemente "*bonitos*" como para decir que son LM. y su medida de Lebesgue es $\mu(E) = \mu^*(E)$ (se quita el asterisco para indicar que el conjunto es LM y ya no estamos hablando de medida exterior sino de medida como tal) Los conjuntos LM serán los que nos interesarán especialmente.

Propiedades de medida de Lebsgue

1. Todo conjunto abierto $\omega \subset \mathbb{R}^n$ es LM
Es claro que cumple el criterio si tomamos $U = \omega$ (y considerando que $\mu^*(\emptyset) = 0$

2. Si $\mu^*(E) = 0$ entonces E es LM
Es decir, si un conjunto tiene medida de lebesgue exterior igual a 0 entonces es Lebesgue medible.
Prueba: Sea $\epsilon > 0$ por la observación 3, $0 = \mu^*(E) = inf\{\mu^*(U) : E \subset U$ con U abierto $\}$.
Recordando la def. de ínfimo, existe un conjunto U abierto que cubre a E y con $\mu^*(U) \leq 0+\epsilon$
Pero como $U - E \subset U$, la monotonicidad implica que $\mu^*(U - E) \leq \mu^*(U) \leq \epsilon$ Por lo tanto se cumple el criterio para ser LM.

3. Si $E_1, E_2, ...$ son LM entonces $\cup_{i=1}^{\infty} E_i$ es LM
Prueba: Sea $\epsilon > 0$, Como cada E_i es LM, para cada uno existe un abierto U_i que cubre a E_i y con $\mu^*(U_i - E_i) \leq \dfrac{\epsilon}{2^i}$
Luego llamamos U la unión de todos los U_i y E la unión de todos los E_i. Claramente, $E \subset U$ y U es abierto (unión numerable de abiertos es abierta).

Además $U - E \subset \cup_{i=1}^{\infty}(U_i - E_i)$, luego, por monotonía,
$\mu^*(U - E) \leq \mu^*(\cup_{i=1}^{\infty}(U_i - E_i))$, luego, por subaditividad,
$\mu^*(U - E) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i - E_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\epsilon}{2^i} = \epsilon$
Por lo tanto se cumple el criterio y E es LM.

4. Si E es LM, entonces E^c es LM

5. Los conjuntos cerrados son LM
Sale de la propiedad 1 y 4 y de recordar que los cerrados tienen como complemento a abiertos.

6. La intersección de conjuntos LM es LM

Prueba: Usando la ley de morgan, podemos ver la intersección como la unión de complementos. Pero los complementos son LM por 5. y la unión de conjuntos LM es LM por 3.

Por las propiedades 3,5 y 7 se dice que los conjuntos LM forman una σ- álgebra.

Teorema: $A \subset \mathbb{R}^n$ es LM y $\mu(A) = 0$ sii A es de medida cero

$\Rightarrow$ Si A es LM y con $\mu(A) = 0$ significa que:
$inf\{\sum_{i=1}^{\infty} a(R_i) \ \ |\{R_1, R_2, ...\}$ es una cubierta numerable de rectángulos que cubre a A $\} = 0$
por la def de ínfimo eso significa que para toda $\epsilon > 0$, existe una familia numerable de rectángulos que cubren a A con:
$0 + \epsilon > \sum_{i=1}^{\infty} a(R_i)$.
Entonces, recordando la def. de medida cero, A es de medida cero.

$\Leftarrow$) Si A es de medida cero, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe una cubierta de rectángulos con $\sum_{i=1}^{\infty} a(R_i) < \epsilon$ Entonces, como esta suma se puede hacer tan chica como queramos, claramente el ínfimo de $\{\sum_{i=1}^{\infty} a(R_i) \ \ |\{R_1, R_2, ...\}$ cubre a $A\}$ es cero.

Con esto probamos que la medida exterior de A es 0, pero falta probar que A es LM para así poder escribir $\mu(A)$ en vez de $\mu^*(A)$. Pero esto está claro por la propiedad 2.

Juntando (1) y (2) tenemos que A es LM

Con esto, vemos que la definición que habíamos dado originalente de que un conjunto sea de medida cero, es lo mismo que decir que un conjunto es LM y $\mu(A) = 0$
Similarmente, como vimos al estudiar JM. La def. de que un conjunto sea de contenido cero es lo mismo que decir que dicho conjunto es JM y su contenido de Jordan o volumen es 0.

Teorema: Todo conjunto JM es LM y además las medidas coinciden

Sea A un conjunto JM, lo que quiere decir por el corolario importante que ∂A tiene medida cero.
Claramente, el conjunto A se puede ver como $int(A) \cup C$ donde $C \subset \partial A$ (todo conjunto se puede ver como el interior unido con pedazos de la frontera [en particular, si es abierto $C = \emptyset$ y si es cerrado, $C = \partial A$])
Como $C \subset \partial A$ y ∂A tiene medida cero, entonces C tiene medida cero. Entonces, por la propiedad 2 de esta seccón, C es LM. Por otro lado, $int(A)$ es abierto, y por la propiedad 1, es LM. Entonces la unión de ambos, $int(A) \cup C = A$ es LM por la propiedad 3

Falta comprobar que las dos medidas dan el mismo valor. Pero sí

Teorema: equivalencias. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es LM, los siguientes enunciados son equivalentes:
Para toda $\epsilon > 0$:
1. Existe un abierto U con $E \subset U$ y $\mu(U - E) \leq \epsilon$
2. Existe un cerrado K con $K \subset E$ y $\mu(E - K) \leq \epsilon$