Introducción A La Física Cuántica: Tarea 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

30 de septiembre de 2020

1. La función de Distribución de Planck para la radiación de cuerpo negro es:

$$u(\nu;T) = \left(\frac{8\pi}{c^3}\right)\frac{h\nu^3}{[e^{\frac{h\nu}{K_BT}}-1]}$$

Usando esta función, demuestre que:

1.1 Esta función tiene un máximo v_0 y encontrarlo.

Para encontrar el máximo, derivamos (respecto a ν) e igualamos a cero y entonces la derivada es:

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\nu} &= \left(\frac{8\pi}{c^3}\right)\frac{[e^{\frac{h\nu}{K_BT}}-1]\cdot\frac{d}{d\nu}(h\nu^3) - h\nu^3\cdot\frac{d}{d\nu}[e^{\frac{h\nu}{K_BT}}-1]}{[e^{\frac{h\nu}{K_BT}}-1]^2}\\ &= \left(\frac{8\pi}{c^3}\right)\frac{[e^{\frac{h\nu}{K_BT}}-1](3h\nu^2) - h\nu^3(\frac{h}{K_BT})e^{\frac{h\nu}{K_BT}}}{[e^{\frac{h\nu}{K_BT}}-1]^2}\end{aligned}$$

Igualamos esta expresión a 0 y hay que encontrar el ν_0 correspondiente que hace esto posible:

$$\begin{aligned}&[e^{\frac{h\nu_0}{K_BT}}-1](3h\nu_0^2) - \frac{h^2\nu_0^3}{K_BT}e^{\frac{h\nu_0}{K_BT}} = 0\\ \Rightarrow\quad &3[e^{\frac{h\nu_0}{K_BT}}-1] - \frac{h\nu_0}{K_BT}e^{\frac{h\nu}{K_BT}} = 0\end{aligned}$$

Para simplificar un poco, sea $x := \dfrac{h\nu_0}{K_BT}$, con lo que queda:

$$\begin{aligned}&3[e^x-1] - xe^x = 0\\ \Rightarrow\quad &3e^x - xe^x - 3 = 0\end{aligned}$$

Esta ecuación no parece que se pueda resolver de forma exacta con métodos algebráicos. Sin embargo, se puede resolver con programas como Mathematica, y se obtiene un valor de $x \simeq 2{,}82144$.
Entonces, regresando a la definición que hicimos de x, obtenemos:

$$\nu_0 = \frac{K_B T x}{h} = 2{,}82144\frac{K_B T}{h}$$

Probar que este valor es efectivamente un máximo implica calcular la segunda derivada de $u(\nu)$ y verificar que al evaluarla en ν_0 se obtiene un resultado negativo. Viendo el resultado que obtuvimos para la primera derivada, la segunda va a requerir una cantidad de cuentas excesiva. Sin embargo, para comprobar que efectivamente se trate de un mínimo, calculé la segunda derivada en Mathematica y la evalué en v_0 como se muestra a continuación:

```
(* Calculamos la segunda derivada de la expresión u(v) *)

In[31]:= segundaderiv = Simplify@D[(8 *Pi / c^3) (h*v^3) / (Exp[h*v / (k*T)] - 1), {v, 2}]
```

Out[31]=
$$\frac{8 h \pi v \left(6 \left(-1 + e^{\frac{h v}{k T}}\right)^2 k^2 T^2 - 6 e^{\frac{h v}{k T}} \left(-1 + e^{\frac{h v}{k T}}\right) h k T v + e^{\frac{h v}{k T}} \left(1 + e^{\frac{h v}{k T}}\right) h^2 v^2\right)}{c^3 \left(-1 + e^{\frac{h v}{k T}}\right)^3 k^2 T^2}$$

```
(* Evaluamos esta segunda derivada en v_0 = 2.82144 K_BT/h *)

In[32]:= segundaderiv /. v → 2.82144 * k / h * T
```

Out[32]=
$$-\frac{11.0592\, k\, T}{c^3}$$

```
(* Notamos que este valor es negtivo (porque k , c y la temperatura absoluta son positivos)
 y por tanto la función tiene un máximo en v_0 *)
```

1.2 **Satisface la ley de Wein : $\lambda_0 T = b_1 = cte$ o $\nu_0 = b_2 T$. Donde b_1, b_2 son constantes. Encuentre las constantes en cada caso.**

Usando la expresión del inciso anterior, tenemos que:

$$\nu_0 = 2{,}82144\frac{K_B T}{h}$$

Entonces, vemos directamente que $\nu_0 = b_2 T$. Donde la constante es $b_2 = 2{,}82144\dfrac{K_B}{h} \simeq 5{,}878 \times 10^{10} \;\; Hz/K$.
Por otro lado, conocemos la relación entre velocidad de la luz y frecuencia para una onda que viaja a c dada por $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0}$. Sustituyendo esto en la expresión del inciso anterior, obtenemos:

$$\frac{c}{\lambda_0} = 2{,}82144\frac{K_B T}{h} \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 T = \frac{ch}{2{,}82144 K_B}$$

Entonces, se cumple que $\lambda_0 T = b_1$. Donde $b_2 = \dfrac{ch}{2{,}82144 K_B}$.

1.3 **Integrándola a todas las frecuencias, se obteine la ley de Stefan y Boltzmann, $u(T) = \sigma T^4$, obtenga la constante de Stefan en términos de**

constantes universales y obtenga un valor numérico:

La densidad de energía total $u(T)$ se obtiene integrando la expresión de Planck como dice el resultado. Hay que integrar sobre todas las frecuencias, es decir, de 0 a infinito. Entonces:

$$u(T) = \int_0^\infty u(\nu) d\nu = \int_0^\infty \left(\frac{8\pi}{c^3}\right) \frac{h\nu^3}{[e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1]} d\nu$$

Hacemos la sustitución $x = \dfrac{h\nu}{K_B T} \quad \Rightarrow \quad \nu = \dfrac{K_B T x}{h}$, por lo que $dx = \dfrac{h}{K_B T} d\nu \quad \Rightarrow$ $d\nu = \dfrac{K_B T}{h} dx$ y los límites de integración siguen siendo los mismos. Y la integral queda como:

$$\begin{aligned} &= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{K_B^3 T^3 x^3}{h^3 [e^x - 1]} \quad \frac{K_B T}{h} dx \\ &= 8\pi hc \left(\frac{K_B T}{hc}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

Evaluar la integral requiere de usar el método de residuos u otros métodos avanzados que son demasiado largos y rebasan el nivel de este estudiante de inicios de quinto semestre. Por tanto, la evaluaré usando Mathematica, y se obtiene un resultado de $\dfrac{\pi^4}{15}$. Entonces, nos queda que:

$$u(T) = 8\pi hc \left(\frac{K_B T}{hc}\right)^4 \frac{\pi^4}{15}$$

Con lo que vemos que se cumple que $u(T) = \sigma T^4$ como se esperaba. Con el valor de sigma dado por: $\sigma = \dfrac{8\pi^5 K_B^4}{15 h^3 c^3}$

Cuyo valor numérico es de: $\sigma = \dfrac{8\pi^5 (1{,}38 \times 10^{-23})^4}{15(6{,}626 \times 10^{-34})^3 (3 \times 10^8)^3} = 7{,}5361 \times 10^{-16} J m^{-3} K^{-4}$

1.4) **Para valores pequeños de $\dfrac{h\nu}{K_B T}$, se reduce a la función de distribución de Rayleigh Jeans**

Para valores chicos de x, podemos aproximar e^x con hasta el término lineal de su serie de Taylor como $e^x \simeq 1 + x$. Usamos esta aproximación en la función de Planck para el término $e^{\frac{h\nu}{K_B T}}$ para valores chicos de $\frac{h\nu}{K_B T}$:

$$\begin{aligned} u(\nu) = \left(\frac{8\pi}{c^3}\right) \frac{h\nu^3}{[e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1]} &\simeq \left(\frac{8\pi}{c^3}\right) \frac{h\nu^3}{[1 + \frac{h\nu}{K_B T} - 1]} \\ = \left(\frac{8\pi}{c^3}\right) \frac{h\nu^3}{\frac{h\nu}{K_B T}} &= \frac{8\pi \nu^2 K_B T}{c^3} \end{aligned}$$

Esto último es la expresión de la fórmula de Rayleigh-Jeans expresada en términos de ν tal como aparece en la página 59 del Beiser.

2. Encuentre la temperatura de un cuerpo negro si su espectro tiene un pico en:
a) $\lambda_0 = 700nm$, b) $\lambda_0 = 3cm$, c) $\lambda_0 = 3m$

La longitud de onda máxima y la temperatura del cuerpo negro están relacionados por la ley de Wein:

$$\lambda_m = \frac{a}{T}$$

Donde a es una constante que vale $2{,}898 \times 10^{-3} m \cdot K$.
Rearreglando los términos obtenemos que la temperatura es igual a:

$$T = \frac{a}{\lambda_m}$$

Entonces, la temperatura en cada caso es igual a:

a) $T = \dfrac{a}{\lambda_m} = \dfrac{2{,}898 \times 10^{-3} m \cdot K}{700 \times 10^{-9} m} = 4140K$

b) $T = \dfrac{a}{\lambda_m} = \dfrac{2{,}898 \times 10^{-3} m \cdot K}{3 \times 10^{-2} m} = 0{,}0966K$

c) $T = \dfrac{a}{\lambda_m} = \dfrac{2{,}898 \times 10^{-3} m \cdot K}{3m} = 9{,}66 \times 10^{-4} K$

3. Calcule la energía promedio $\langle E \rangle$ por modo de oscilación para:

a) **Una longitud de onda larga,** $\lambda = \left(\dfrac{10hc}{K_B T}\right)$

Según la ecuación de la energía promedio calculada de Planck que demostramos en clase, se tiene que:

$$\langle E \rangle = \frac{hf}{e^{hf/KT} - 1}$$

Lo cual podemos escribir en función de λ usando que $f = \dfrac{c}{\lambda}$ y queda:

$$\langle E \rangle = \frac{hc/\lambda}{e^{hc/\lambda K_B T} - 1} \quad (1)$$

Ahora sustituimos el valor de λ que dice el problema:

$$\langle E\rangle = \frac{hc/(\frac{10hc}{K_BT})}{e^{\frac{hc}{K_BT}\frac{K_BT}{10hc}}-1} = \frac{\frac{K_BT}{10}}{e^{\frac{1}{10}}-1} = \frac{0{,}1K_BT}{e^{0{,}1}-1} \simeq \mathbf{0{,}951K_BT}$$

b) **Una longitud de onda corta** $\lambda = \dfrac{0{,}1hc}{K_BT}$

Partimos de la ecuación (1) del inciso anterior y sustituimos esta λ:

$$\langle E\rangle = \frac{hc/(\frac{0{,}1hc}{K_BT})}{e^{\frac{hc}{K_BT}\frac{K_BT}{0{,}1hc}}-1} = \frac{\frac{K_BT}{0{,}1}}{e^{\frac{1}{0{,}1}}-1} = \frac{10K_BT}{e^{10}-1} \simeq \mathbf{4{,}59\times 10^{-4}K_BT}$$

Vemos que para el inciso a) de la longitud de onda larga se obtiene un resultado muy parecido al clásico K_BT. Sin embargo, para el resultado b) se obtiene un resultado mucho menor al predicho por la teoría clásica.

4. **Un haz de luz de $100W$ incide sobre un cuerpo negro de masa $2\times 10^{-3}Kg$ durante un intervalo de tiempo de $10^4 s$. Inicialmente el cuerpo negro está en reposo en un espacio sin fricción.**

a) **Calcule la energía y el momento lineal absorbido por el cuerpo negro, del haz de luz**

El haz de luz tiene una potencia de $100W = 100J/s$. Por lo que si incide durante $10^4 s$ en el cuerpo negro, le transmite una energía de:

$$100W(10^4 s) = 10^6 J$$

El momento se puede calcular según la ecuación $E = pc$ que relaciona el momento y energía de un haz de luz Con esto, el momento es:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{10^6 J}{3\times 10^8 m/s} = 3{,}33\times 10^{-3} J\cdot s/m$$

b) **Calcule la velocidad del cuerpo negro al final del periodo de iluminación**

El momento final es de $3{,}33\times 10^{-6} J\cdot s/m$.

Y como el momento se calcula como $p = mv$. Podemos obtener la velocidad sencillamente con:

$$v = \frac{p}{m} = \frac{3{,}33\times 10^{-6} J\cdot s/m}{2\times 10^{-3}Kg} = 1{,}67 m/s$$

c) **Calcule la energía cinética final del cuerpo negro. Por qué esta última es menor que la energía total absorbida de los fotones?**

La energía cinética final es de $E = \dfrac{1}{2}mv_f^2$. Es decir:

$$E = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}(2\times 10^{-3}kg)(1{,}67m/s)^2 = 2{,}78\times 10^{-3} J$$

Vemos que esta energía es un poco menor a la que llevaban los fotones entrantes. Esto se debe a que parte de la energía de los fotones se usó para aumentar la temperatura del cuerpo negro y no se convirtió en energía cinética.

5. La función trabajo del molibdeno es $4{,}22eV$:

a) **¿Cuál es la frecuencia umbral para éste materia?**

Según la ecuación del efecto fotoeléctrico, la energía máxima de un electrón dejando la superficie del metal es de:

$$hf - \Phi$$

Con Φ la función de trabajo del metal.
La frecuencia umbral es la frecuencia para la cual esta energía vale 0. Es decir:

$$hf_t - \Phi = 0$$
$$\Rightarrow \quad f_t = \frac{\Phi}{h}$$

Entonces, en este caso se tiene que la frecuencia umbral es de:

$$f_t = \frac{\Phi}{h} = \frac{4{,}22eV}{4{,}136 \times 10^{-15} eV \cdot s} = \mathbf{1{,}02 \times 10^{15} Hz}$$

b) **¿ La luz amarilla de $560nm$, arrancará fotoelectrones en éste material?**

Calculamos la frecuencia de esta luz:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^9 m/s}{560 \times 10^{-9} m} = 5{,}36 \times 10^{14} HZ$$

Vemos que esta frecuencia está por debajo de la frecuencia umbral calculada en el inciso pasado, así que NO arrancará fotoelectrones.
Es más, con esta frecuencia, la energía de cada fotón es $hf = (4{,}136 \times 10^{-15} eV \cdot s)(5{,}36 \times 10^{14} HZ) = 2{,}217eV$
Y esto es menos que la función de trabajo del metal $\Phi = 4{,}22eV$.
Por lo que concluimos nuevamente que los electrones no tendrán la energía suficiente para salir del metal.

6. La tabla siguiente contiene los datos de efecto fotoeléctrico:

$\lambda(nm)$	544	594	604	612	633
$E_{kMax}(eV)$	0,360	0,199	0,156	0,117	0,062

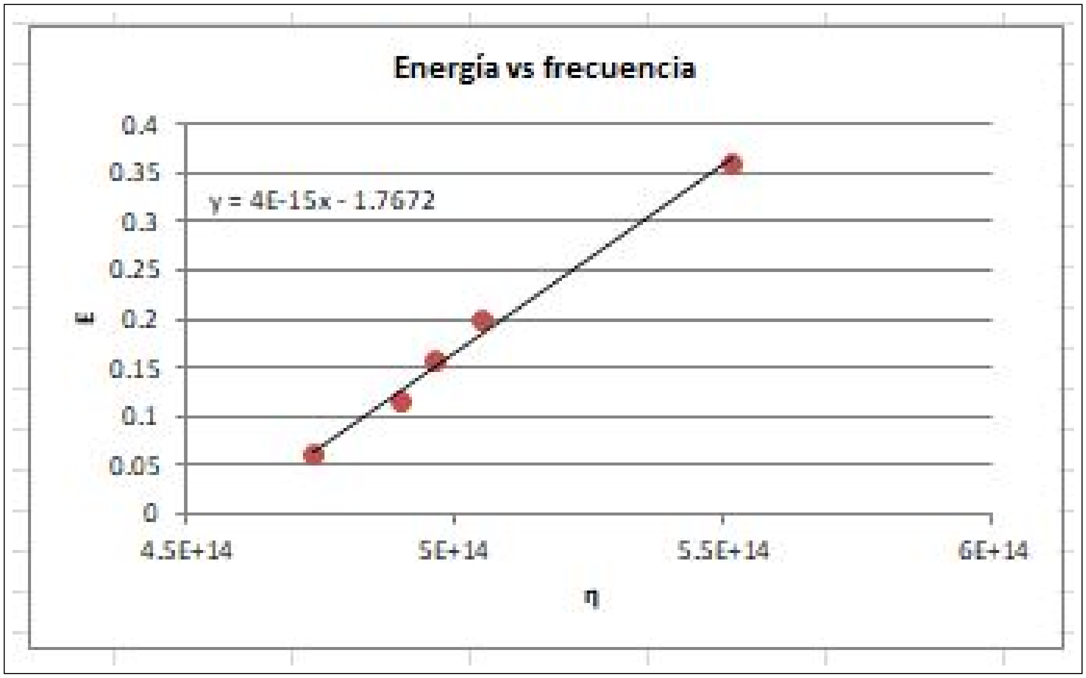
a) **A partir de una gráfica E_{kM} Vs ν, calcule un valor para la constante de Planck, h y su porcentaje de error respecto al valor reportado en los textos.**

b) **¿Cuál es el valor aproximado para la función de trabajo del metal usado para extraer electrones?**

Primero convertimos las λ a frecuencias para tener los datos como los pide la pregunta. Usamos para esto que $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$. Nos queda:

$\nu(\times 10^{14})$	5,515	5,051	4,967	4,902	4,739
$E_{kMax}(eV)$	0,360	0,199	0,156	0,117	0,062

Aquí se ve una gráfica de estos datos junto con la recta que mejor se aproxima a los datos.



Para calcular la pendiente de esta recta se usa el método de mínimos cuadrados. Si a los datos de ν los denotamos con x y a los de E con y, y denotamos con n la cantidad total de medidas, la fórmula de mínimos cuadrados dice que la pendiente es:

$$m = \frac{(\sum_i x_i)(\sum_i y_i) - n(\sum_i x_i y_i)}{(\sum_i x_i) - n(\sum_i x_i^2)} = \frac{(2{,}52 \times 10^{15})(0{,}894) - 5(4{,}63 \times 10^{14})}{(2{,}52 \times 10^{15}) - 5(1{,}27 \times 10^{30})}$$
$$= \mathbf{3{,}87 \times 10^{-15}} eV \cdot s$$

Por otro lado, la fórmula para calcular la ordenada al origen es:

$$\frac{(\sum_i x_i)(\sum_i x_i y_i) - (\sum_i y_i)(\sum_i x_i^2)}{(\sum_i x_i) - n(\sum_i x_i^2)} =$$
$$\frac{(2{,}52 \times 10^{15})(4{,}63 \times 10^{14}) - 0{,}894 \times (1{,}27 \times 10^{30})}{2{,}52 \times 10^{15} - 5(1{,}27 \times 10^{30})} = -1{,}767 eV$$

Por otro lado, Según la ecuación del efecto fotoeléctrico, la energía máxima con la que salen los electrones es

$$E = h\nu - \Phi$$

Con lo que vemos que la pendiente de la recta debe de ser igual a h.
Por lo que los datos dan una aproximación de h de $3{,}87 \times 10^{-15} eV \cdot s$. Y el valor real es de $4{,}135 \times 10^{-15} eV \cdot s$.
Por lo tanto, se tiene un error porcentual de:

$$\frac{|4{,}135 \times 10^{-15} - 3{,}87 \times 10^{-15}|}{4{,}135 \times 10^{-15}} = 0{,}064\,\%$$

Por otro lado, por la fórmula $E = h\nu - \Phi$, vemos que la ordenada al origen debe de ser igual a $-\Phi$. La ordenada al origen que obtuvimos experimentalmente es $-1{,}767 eV$.
Por lo tanto, la función trabajo del metal tiene un valor aproximado de:

$$\Phi = 1{,}767 eV$$

c) **En el texto de Tipler viene una tabla de funciones de trabajo para varios metales, identifique el material usado en el experimento**

Table 3-1 Photoelectric work functions

Element	Work function (eV)
Na	2.28
Cs	1.95
Cd	4.07
Al	4.08
Ag	4.73
Pt	6.35
Mg	3.68
Ni	5.01
Se	5.11
Pb	4.14

En la gráfica vemos que el valor más cercano a los 1.767 eV que encontramos es el del Cs. Por lo que concluimos que el material usado fue el Cesio.

7. **La longitud de onda de fotones dispersados en experimento compton se mide para $\theta = 90^o$. Si $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ debe ser el $1\,\%$. ¿Cuál será la longitud de onda de los fotones incidentes?**

Según la ecuación del efecto Compton, tenemos que:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{h}{mc\lambda}(1-\cos\theta)$$

Segun el problema, queremos que $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0{,}01$. Entonces tenemos que:

$$0{,}01 = \frac{h}{mc\lambda}(1-\cos\theta)$$
$$\Rightarrow \quad \lambda = 100\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

Luego sustituimos los valores, que como se ve en el siguiente ejercicio, para un electrón se tiene que $\dfrac{h}{mc} = 0{,}00243nm$ y nos queda:

$$\lambda = 100(0{,}00243nm)(1-\cos(90)) = 0{,}243nm$$

8) **a) Calcule las longitudes de onda Compton de un electrón y de un protón.**

Calculamos directamente los valores a partir de la masa de estas partículas:

$$\text{Electrón: } \frac{h}{mc} = \frac{6{,}63\times10^{-34}Js}{(9{,}11\times10^{-31}kg)(3\times10^{8}ms)} = 2{,}43\times10^{-12}m$$
$$\text{Protón: } \frac{h}{mc} = \frac{6{,}63\times10^{-34}Js}{(1{,}67\times10^{-27}kg)(3\times10^{8}ms)} = 1{,}32\times10^{-15}m$$

b) ¿Cuál es la energía de un fotón con longitud de onda igual a la longitud de onda Compton para un electrón y un protón?

Como ya hemos visto, la energía de un fotón es $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda}$. Entonces reemplazamos los resultados del inciso anterior.

$$\text{Electrón: } E = \frac{(6{,}63\times10^{-34}Js)(3\times10^{8}m/s)}{2{,}43\times10^{-12}m} = 8{,}185\times10^{-14}J$$
$$\text{protón: } E = \frac{(6{,}63\times10^{-34}Js)(3\times10^{8}m/s)}{1{,}32\times10^{-15}m} = 1{,}507\times10^{-10}J$$

9. **Un tubo de Rayos-x tiene un voltaje acelerador** $8KV$ ¿Cuál es la longitud de onda mínima que pueden tener los Rayos-x?

Por la ecuación de Duane-Hunt, se tiene la relación entre la longitud de onda mínima y el voltaje del tubo de rayos-x:

$$\lambda_m = \frac{1{,}24\times10^{3}}{V}nm$$

Entonces, para este voltaje, se tiene:

$$\lambda = \frac{1{,}24 \times 10^3}{V} nm = \frac{1{,}24 \times 10^3}{8000V} nm = 0{,}155 nm$$

10. Cuando un haz de rayos-X monocromático incide en un cristal de NaCl, reflexiones de Bragg de primer orden (n=1) ocurren a $\theta = 20^o$. El cristal tiene $d = 0{,}28nm$ ¿Cuál es el voltaje mínimo con que debe de operar el tubo de Rayos-x?

    La condición de Bragg dice que $m\lambda = 2d\sin\theta$. Como es de primer orden, tenemos que $m = 1$. Este λ es la longitud de onda mínima. Entonces:

    $$\lambda_m = 2d\sin\theta = 2(0{,}28nm)(\sin 20^o) = 0{,}192nm$$

    Luego, para obtener el voltaje mínimo correspondiente a esta longitud de onda mínima, usamos la regla de Duane-Hunt, que nos dice que dicho voltaje es:

    $$V_m = \frac{1{,}24 \times 10^3 V nm}{\lambda_m}$$

    Donde, debido a las unidades de la constante del numerador, hay que dar la λ en nanómetros y el resultado de V será en Volts.

    $$V_m = \frac{1{,}24 \times 10^3 V nm}{\lambda_m} = \frac{1{,}24 \times 10^3 V nm}{0{,}192nm} = 6460V$$