

4.2, a) Escriba las diferencias básicas en las suposiciones fundamentales de las estadísticas de MB y FD

En general hay dos diferencias en las suposiciones, que son dos condiciones adicionales en la estadística FD.

1) Indistinguibilidad: No se pueden distinguir fermiones entre sí. Esto significa que al contar estados de varias partículas, si intercambiamos un par de las partículas, en realidad es el mismo estado.

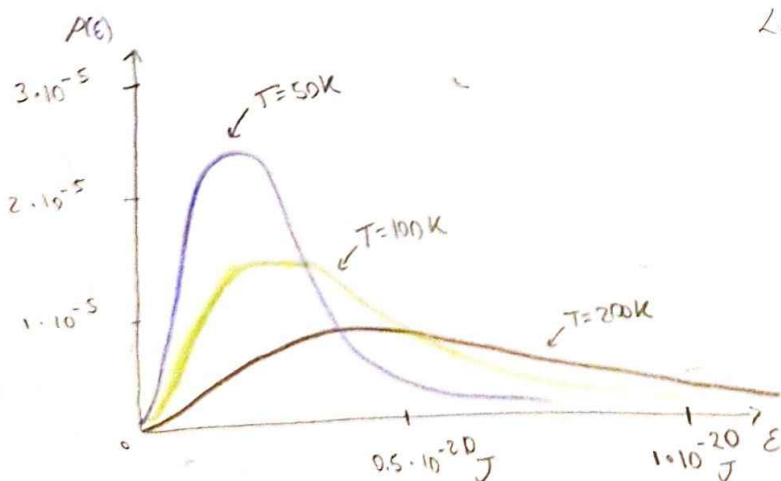
2) Principio de Exclusión: Un estado particular sólo puede ser ocupado por a lo sumo un fermión. Esto implica que al tener múltiples partículas, cada una tiene que estar en un estado distinto.

b) Si $p(\epsilon)$ denota el número de partículas en el nivel de energía ϵ , bosqueje esquemáticamente las curvas $p(\epsilon)$ vs ϵ para MB y FD. Indique cuáles corresponden a temperaturas más altas.

MB Para un gas de Maxwell Boltzmann, vimos en clase que la distribución de velocidades está dada por $P(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right] 4\pi v^2$.
Para expresarlo en términos de la energía, usamos que $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$ (energía cinética) y entonces $v^2 = \frac{2}{m}\epsilon$, por lo que

$$P(\epsilon) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2kT}\left(\frac{2}{m}\epsilon\right)\right) \left(4\pi\left(\frac{2}{m}\epsilon\right)\right) \\ = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(\frac{8\pi}{m}\epsilon\right) \exp\left(-\frac{\epsilon}{kT}\right)$$

Podemos graficar esta función para distintos valores de T para ver cómo depende $P(\epsilon)$ vs ϵ con la temperatura.



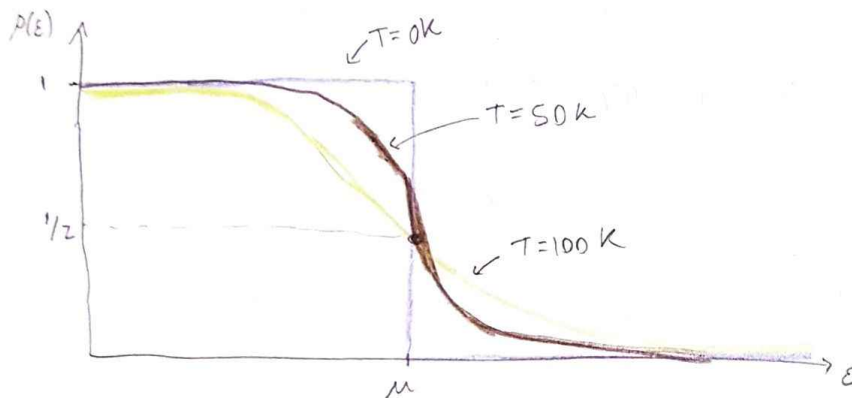
Las gráficas se hicieron usando como m la masa de un electrón, sólo para ver la forma general que tienen.

Vemos que conforme crece la temperatura, los niveles de energía más altos se empiezan a ocupar más y las partículas se distribuyen en estos niveles.

F.D.

Como vimos en clase, el número promedio de fermiones por nivel de energía es $p(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}$ ← Donde suponemos que la degeneración de cada nivel de energía, g_ϵ es 1.

Podemos graficar esta función para distintos valores de T .



Vemos que a temperatura $T=0K$, todos los niveles con $\epsilon < \mu$ están ocupados y los niveles con $\epsilon > \mu$ no.

Pero conforme aumentamos la temperatura, algunos niveles de energía menores a μ se empiezan a desocupar un poco y en consecuencia se empiezan a ocupar algunos niveles de mayor energía.

T4.3

Considere una colección de N sistemas de dos niveles en equilibrio a temp T . Cada sistema sólo tiene dos niveles: el base con energía nula y un excitado con energía ϵ . Calcule

a) La probab. de que un sistema dado se encuentre en el estado excitado.

Cada sistema tiene sólo dos niveles con energía 0 y ϵ ,

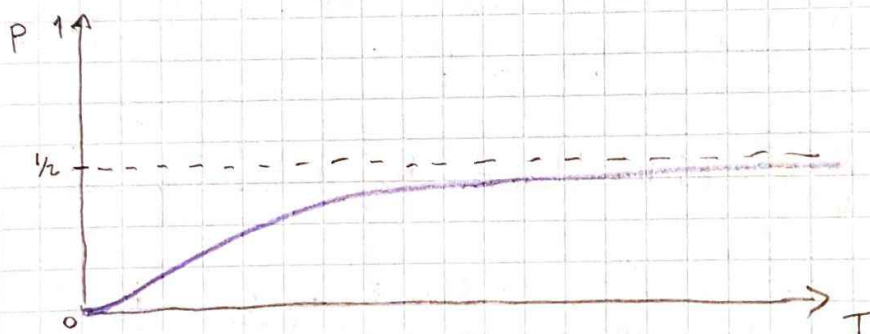
por lo que la función de partición de cada sistema es (sumar $e^{\beta \epsilon}$ sobre los niveles):

$$Z = \sum_j e^{\beta \epsilon_j} = e^{\beta(0)} + e^{\beta \epsilon} = 1 + e^{-\beta \epsilon}$$

Luego, la probabilidad de estar en el estado con energía ϵ es $e^{-\beta \epsilon} / Z$

$$P(\epsilon) = \frac{e^{-\beta \epsilon}}{Z} = \frac{e^{-\beta \epsilon}}{1 + e^{-\beta \epsilon}} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon} + 1} = \frac{1}{e^{\epsilon / kT} + 1}$$

Podemos graficar $P(\epsilon)$ como función de T usando un graficador



La probabilidad crece con T hasta llegar a $1/2$ cuando $T \rightarrow \infty$

b) La entropía de la colección de sistemas

La función de partición de todos los sistemas se consigue multiplicando las de cada uno:

$$Z = z^N = (1 + e^{-\beta \epsilon})^N$$

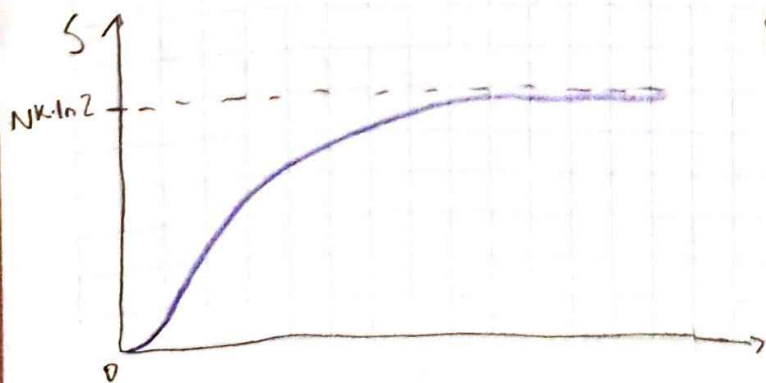
A partir de esto, calculamos F para la colección, usando $F = -kT \ln(Z)$

$$\text{Entonces, } F = -kT \ln(Z) = -kT \ln((1 + e^{-\beta \epsilon})^N) = -kTN \ln(1 + e^{-\epsilon / kT})$$

Y finalmente calculamos la entropía como $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$

$$\begin{aligned} S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -\frac{\partial}{\partial T} (-kTN \ln(1 + e^{-\epsilon / kT})) = NK \ln(1 + e^{-\epsilon / kT}) + NK T \left(\frac{-\frac{\epsilon}{k} \left(-\frac{1}{T^2}\right) e^{-\epsilon / kT}}{1 + e^{-\epsilon / kT}} \right) \\ &= NK \ln(1 + e^{-\epsilon / kT}) + \frac{N\epsilon}{T} (1 + e^{\epsilon / kT})^{-1} \end{aligned}$$

Podemos graficar $S(T)$ usando un graficador y obtenemos:



S crece con T hasta llegar a $NK \ln 2$, lo cual se nota porque

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[NK \ln(1 + e^{-\epsilon / kT}) + \frac{N\epsilon}{T} (1 + e^{\epsilon / kT})^{-1} \right] \\ = NK \ln(1 + e^0) + 0 \\ = NK \ln(2) \end{aligned}$$