Mecánica Analítica

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

8 de enero de 2021

1. Vectores:

Un vector es es una flecha con magnitud y dirección.
Los vectores se pueden sumar (con una suma asociativa, conmutativa, con neutro y con inverso) y se pueden multiplicar por un escalar.

Representación Algebraica: Un vector $\vec{A}$ se puede representar como una tercia de números conseguidos como la proyección con respecto a tres vectores bases no coplanares.
Un vector es igual a todas las posibles representaciones que puede tener en cualquier sistema de coordenadas y debe de cumplir que en un sistema de coordenadas rotado, los componentes del vector se transforman como lo hace el vector posición.

La suma de dos vectores representados algebraicamente se representa como la suma de sus componente.

Producto Escalar:
Podemos definir el producto escalar de dos vectores como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\phi$$

Esta expresión aparece en la ley de cosenos que dice que $|\vec{A} + \vec{B}|^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\phi$ y entonces la podemos despejar de ahí y llegar a que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Esta operación es conmutativa, bilineal, $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$

Producto Vectorial: Ya sé como se define.
Cumple la siguiente igualdad:

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 = A^2 B^2 \sin^2\phi$$

Es anticonmutativo, distributivo con la suma.

Triple Producto Escalar: Se devine como $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ y da el volumen comprendido entre estos tres vectores.

Triple Producto Vectorial: Se puede probar la identidad BAC CAB:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

1.1. Sistemas de Coordenadas no Ortogonales

Tenemos tres vectores no coplanares $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. Entonces cualquier vector $\vec{A}$ lo podemos escribir en esta base como:

$$\vec{A} = \alpha_1^* \vec{b}_1 + \alpha_2^* \vec{b}_2 + \alpha_3^* \vec{b}_3$$

Esto da lugar a un sistema de tres ecuaciones (una por cada componente) el cual se puede resolver para las incógnitas $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ y da como resultado:

$$\alpha_1^* = \frac{\vec{A} \cdot \vec{b}_2 \times \vec{b}_3}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 \times \vec{b}_3} \qquad \alpha_2^* = \frac{\vec{A} \cdot \vec{b}_3 \times \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 \times \vec{b}_3} \qquad \alpha_3^* = \frac{\vec{A} \cdot \vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 \times \vec{b}_3}$$

Con estas ecuaciones se puede encontrar los componentes de $\vec{A}$ en cualquier base de coordenadas no coplanares. Para escribir estos componente de forma más sencilla, podemos definir los **vectores recíprocos:**

$$\vec{\mathfrak{b}}_1 = \frac{\vec{b}_2 \times \vec{b}_3}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 \times \vec{b}_3} \qquad \vec{\mathfrak{b}}_2 = \frac{\vec{b}_3 \times \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 \times \vec{b}_3} \qquad \vec{\mathfrak{b}}_3 = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 \times \vec{b}_3} \qquad (1{,}36)$$

Con estas expresiones, los coeficientes de $\vec{A}$ en la base $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ se pueden conseguir como:

$$\alpha_1^* = \vec{A} \cdot \vec{\mathfrak{b}}_1 \qquad \alpha_2^* = \vec{A} \cdot \vec{\mathfrak{b}}_2 \qquad \alpha_3^* = \vec{A} \cdot \vec{\mathfrak{b}}_3$$

Además, se puede ver que se cumple:

$$\vec{\mathfrak{b}}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{i,j} \qquad (1{,}37)$$
$$\vec{\mathfrak{b}}_1 \cdot \vec{\mathfrak{b}}_2 \times \vec{\mathfrak{b}}_3 = \frac{1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 \times \vec{b}_3}$$
.

Alternativamente, podemos empezar buscando una forma de escribir $\vec{A}$ en la base $\vec{\mathfrak{b}}_1, \vec{\mathfrak{b}}_2, \vec{\mathfrak{b}}_3$, es decir, encontrar los coeficientes tales que:

$$\vec{A} = \alpha_1 \vec{\mathfrak{b}}_1 + \alpha_2 \vec{\mathfrak{b}}_2 + \alpha_3 \vec{\mathfrak{b}}_3$$

El método es el mismo, primero encontramos los vectores recíprocos definidos similarmente a la ecuación 1.36 y resulta que ahora los recíprocos (de los recíprocos) vuelven a ser los originales, o sea $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.
Con estos recíprocos podemos encontrar los coeficientes de la base $\vec{\mathfrak{b}}$:

$$\alpha_1 = \vec{A} \cdot \vec{b}_1 \qquad \alpha_2 = \vec{A} \cdot \vec{b}_2 \qquad \alpha_3 = \vec{A} \cdot \vec{b}_3$$

Entonces, un vector tridimensional está completamente determinado si se conocen sus productos escalares por tres vectores no coplanares.
Las demostraciones de que los vectores recírpocos tienen volumen igual a 1 entre el volumen de los originales y el vector recíproco de un recíproco es la original se prueba en el cuaderno.

Producto Punto: Digamos que los vectores son $A = \alpha_l^* \vec{b}_l = \alpha_m \vec{\mathfrak{b}}_m$ y $B = \beta_l^* \vec{b}_l = \beta_m \vec{\mathfrak{b}}_m$.
Es especialmente fácil conseguir el producto punto de $\vec{A}, \vec{B}$ si expresamos uno en la base $\vec{b}$, es decir $\vec{A} = \alpha_1 \vec{\mathfrak{b}}_1 + \alpha_2 \vec{\mathfrak{b}}_2 + \alpha_3 \vec{\mathfrak{b}}_3$ y el otro en la base recíproca: $\vec{B} = \beta_1^* \vec{b}_1 + \beta_2^* \vec{b}_2 + \beta_3^* \vec{b}_3$. Y obtenemos como resultado:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \alpha_1 \beta_1^* + \alpha_2 \beta_2^* + \alpha_3 \beta_3^*$$
$$\vec{B} \cdot \vec{A} = \beta_1 \alpha_1^* + \beta_2 \alpha_2^* + \beta_3 \alpha_3^*$$

Si escribiámos ambos vectores en la misma base (ambos en la original por ejemplo), tendríamos un total de 9 términos en la suma y por eso se complica.
Escribiremos $\vec{A}$ cuando un vector está representado en la base $\vec{b}$ y escribiremos $\vec{A}^*$ cuando está escrito en la base recíproca.

Producto Vectorial: Para esto sí conviene que ambos vectores estén en la misma base. En este caso, se puede demostrar que el resultado es:

$$A \times B = (\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 \times \vec{b}_3) \begin{vmatrix} \vec{\mathfrak{b}}_1 & \vec{\mathfrak{b}}_2 & \vec{\mathfrak{b}}_3 \\ \alpha_1^* & \alpha_2^* & \alpha_3^* \\ \beta_1^* & \beta_2^* & \beta_3^* \end{vmatrix}$$

.

Ejemplo: En las coordenadas cilíndricas, la base de vectores depende de la posición en la que nos encontramos, y los vectores son:
Cilíndricas: $\vec{b}_r, \vec{b}_\phi, \vec{b}_z$
Esféricas: $\vec{b}_r, \vec{b}_\theta, \vec{b}_\phi$
De las cuales también podemos calcular sus recíprocas. Creo que considera los vectores originales como no unitarios, entonces los recíprocos no son iguales a los originales.

1.2. Derivada de un Vector Respecto a un Escalar

Digamos que el vector $\vec{A}(t)$ es una función univaluada u continua del escalar t.
Es decir, para cada valor de t hay un solo valor de la función $\vec{A}$.
Y continua siginifica que para toda $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $|t - t_0| < \delta$ entonces $|A(t) - A(t_0)| < \epsilon$.
Derivada: La derivada del vector se define como:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} := \lim_{\Delta t} = \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}$$

Donde $\vec{A}$ se expresa en la base que estemos usando.
Para coordenadas rectangulares, tendremos que:

$$\dot{\vec{A}} = \dot{A}_x\vec{i} + \dot{A}_y\vec{j} + \dot{A}_z\vec{k}$$

Y cumple las propiedades que conocemos de la suma y del producto y también para productos de vectores:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \dot{\vec{A}}\cdot\vec{B} + \vec{A}\dot{\vec{B}}$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \dot{\vec{A}}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\dot{\vec{B}}$$

1.2.1. Rotación de un Vector:

Tenemos un vector $\vec{A}$. Sabemos que este vector lo podemos escribir como $\vec{A}(t) = A(t)\widehat{e}_A(t)$
Derivamos ahora esto:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}\widehat{e}_A(t) + A(t)\frac{d\widehat{e}_A(t)}{dt} \quad (1)$$

Para la derivada de la magnitud, usamos que $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$ y derivamos ambos lados para obtener que: $2A\frac{dA}{dt} = 2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}$ y por tanto, $\frac{dA}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\widehat{e}_A(t) \quad (2)$. Entonces, al tomar el producto escalar con (1), obtenemos que:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\widehat{e}_A(t) = \frac{dA}{dt}\widehat{e}_A(t)\cdot\widehat{e}_A(t) + A(t)\widehat{e}_A(t)\cdot\frac{d\widehat{e}_A(t)}{dt} \quad (3)$$

Juntando (2) y (3), obtenemos que se debe de cumplir siempre que:

$$\widehat{e}_A(t)\cdot\frac{d\widehat{e}_A(t)}{dt} = 0$$

Es decir, **la derivada del vector unitario es siempre perpendicular a su dirección**.
Lo cual se pudo obtener más fácil partiendo de que $\widehat{e}_A(t)\cdot\widehat{e}_A(t) = 1$ y derivando ambos lados.

Entonces, regresando a (1), el primer término nos habla del cambio de la magnitud de $\vec{A}$ y el segundo término nos habla del cambio direccional de $\vec{A}$, que es siempre perpendicular a $\widehat{e}_A(t)$.

En general, un vector $\vec{A}(t+\Delta t)$ se consigue partiendo de $\vec{A}(t)$ y sumándole un pedacito de longitud $\Delta\vec{A}_\perp$ y uno $\Delta\vec{A}_\parallel$.
Si $\vec{A}$ cambia de dirección pero no de magnitud, se puede ver como un giro infinitesimal por una magnitud $\Delta\phi \simeq 0$.
En este caso, se puede ver gráficamente que:

$$\Delta\vec{A}_\perp = A(t+\Delta t)\sin\Delta\phi\widehat{e}_\perp$$
$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{A}_\perp = A\Delta\phi\widehat{e}_\perp =^* \Delta\phi\widehat{e}_n\times\widehat{e}_A A = \Delta\vec{\phi}\times\vec{A}$$

Donde $\widehat{e}_n$ es el vector perpendicular a la rotación. Y la igualdad $*$ se obtiene porque estos tres vectores unitarios forman un sistema ortonormal.
Entonces, ya tenemos el vector de cambio en la dirección perpendicular.

Si tomo el siguiente límite, me queda:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}_\perp}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\phi}}{\Delta t}\times\vec{A}=\frac{d\vec{\phi}}{dt}\times\vec{A}:=\vec{\omega}\times\vec{A}$$

Entonces, el cambio perpendicular es $(\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\widehat{e}_\perp)\widehat{e}_\perp=\vec{\omega}\times\vec{A}$. Entonces, (1) se convierte en:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA}{dt}\widehat{e}_A+\vec{\omega}\times\vec{A}\quad (4)$$

Donde el primer término es el cambio en magnitud y el segundo es el cambio en la dirección. El vector ω no es único, pues le podemos sumar cualquier vector en la dirección $\vec{A}$ y se sigue cumpliendo (4). Se puede arreglar esto teniendo dos vectores no colineales $\vec{A},\vec{B}$ que rotan, porque ahora habrá indeterminaciones para uno en la dirección de $\vec{A}$ y uno en la dirección de $\vec{B}$ pero al juntar esto, tenemos bien definido el $\vec{\omega}$.

Las rotaciones finitas no conmutan. Pero las rotaciones infinitesimales sí.
Digamos que tenemos dos rotaciones $\Delta\phi_1,\Delta\phi_2$.
Primero rotamos $\vec{A}$ y pasa a ser:
$\vec{A}'=\vec{A}+\Delta\vec{A}_\perp=\vec{A}+\Delta\vec{\phi}_1\times\vec{A}$
Luego rotamos
$vec\delta\phi_2$ y obtenemos:
$\vec{A}''=\vec{A}'+\vec{\Delta}\phi_2\times\vec{A}'=...=$ ver Hauser.
Si se cambia el orden de rotación, se obtiene otro vector pero que solamente cambia en segundo orden. Por tanto, son iguales en primer orden.

Ejercicio 1.18: Demostrar que $\alpha_i=\vec{A}\cdot\vec{b}_i$ (que son los componentes en la base recíproca) y $\alpha_i^*=\vec{A}\cdot\vec{\mathfrak{b}}_i$ (que son los componentes en la base original) tienen la siguiente relación:

$$\alpha_i^*=\sum_j g_{ij}^*\alpha_j\quad,\quad \alpha_i=\sum_j g_{ij}\alpha_j^*$$

Primero escribimos $\vec{A}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^*\vec{b}_i=\sum_{i=1}\alpha_i\vec{\mathfrak{b}}_i$.
Donde $\alpha_i^*=\vec{A}\cdot\vec{\mathfrak{b}}_i=\left(\sum_l\alpha_l\vec{\mathfrak{b}}_l\right)\cdot\vec{\mathfrak{b}}_j=\sum_l\vec{\mathfrak{b}}_l\cdot\vec{\mathfrak{b}}_l\alpha_l$
Entonces, $\alpha_i^*=\sum_l g_{i,l}^*\alpha_l$ donde $g_{i,l}=\vec{\mathfrak{b}}_i\cdot\vec{\mathfrak{b}}_l$.
Y también, $\alpha_i=\vec{A}\cdot\vec{b}_i=\left(\sum_l\alpha_l^*\vec{b}_l\right)\cdot\vec{b}_j=\sum_l\vec{b}_i\cdot\vec{b}_l\alpha_l^*$
Entonces, $\alpha_i=\sum_l g_{i,l}\alpha_l^*$ donde $g_{i,l}=\vec{b}_i\cdot\vec{b}_l$
Donde $g_{i,l}$ se llaman componentes covariantes del tensor métrico y $g_{i,l}^*$ son los componentes contravariantes del tensor métrico.

2. Cinemática de una partícula

partícula: Un objeto ideal sin dimensiones. Una partćula se mueve pero no se deforma y no gira.
Para describir el movimiento, necesito dar un sistema de referencia. Luego, podemos representar la posición de la partícula como un vector $\vec{r}(t)$ en este sistema.
Luego, la velocidad es $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} := \dot{\vec{r}}(t)$.
Y la aceleración es $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.
En coordenadas cartesianas la velocidad y la aceleración tienen los resultados típicos.
Sin embargo, para algunos problemas conviene usar otras coordenadas q_1, q_2, q_3 y con vectores base $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$
El vector de posición de una partícula se puede ver como:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

La velocidad instantánea se define como es de esperar:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right]$$

2.0.1. Coordenadas Rectangulares

En estas coordenadas, la posición es simplemente:

$$\vec{r}(t) = x(t)\widehat{i} + y(t)\widehat{j} + z(t)\widehat{k}$$

Luego, la velocidad es simplemente:

$$\vec{v} = \dot{x}\widehat{i} + \dot{y}\widehat{j} + \dot{z}\widehat{k}$$

Y la aceleración es:

$$\vec{a} = \ddot{x}\widehat{i} + \ddot{y}\widehat{j} + \ddot{z}\widehat{k}$$

2.0.2. Coordenadas Cilíndricas

En las coordenadas cilíndricas se definen como:

$$x = \rho\cos\phi \qquad y = \rho\sin\phi \qquad z = z$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2 \qquad \phi = \arctan(y/x)$$

Entonces, la posición de un objeto se puede escribir como:

$$\vec{r} = \rho\cos\phi\widehat{i} + \rho\sin\phi\widehat{j} + z\widehat{k}$$

La velocidad y aceleración (en base rectangular) se puede calcular como:

$$\vec{v} = (\dot{\rho}\cos\phi - \rho\dot{\phi}\sin\phi)\widehat{i} + (\dot{\rho}\sin\phi + \rho\dot{\phi}\cos\phi)\widehat{j} + \dot{z}\widehat{k}$$
$$\vec{a} = (\ddot{\rho}\cos\phi - 2\dot{\rho}\dot{\phi}\sin\phi - \rho\dot{\phi}^2\cos\phi - \rho\ddot{\phi}\sin\phi)\widehat{i} + (\ddot{\rho}\sin\phi + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\cos\phi - \rho\dot{\phi}^2\sin\phi + \rho\ddot{\phi}\cos\phi)\widehat{j} + \ddot{z}\widehat{k}$$

Vectores Unitarios: Se definen como sigue:

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}/\partial \rho}{|\partial \vec{r}/\partial \rho|} = \cos\phi \widehat{i} + \sin\phi \widehat{j}$$
$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \vec{r}/\partial \phi}{|\partial \vec{r}/\partial \phi|} = -\sin\phi \widehat{i} + \cos\phi \widehat{j}$$

Luego podemos derivar cada uno de estos vectores para obtener:

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \qquad \dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi}\mathbf{e}_\rho$$

Se puede ver que esta base de vectores depende de la posición en la que se consideren. Pero se puede ver que son siempre una base ortogonal de vectores para cualquier punto.
Ahora bien, un punto cualquier en el espacio se puede escribir como:

$$\vec{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{k}$$

Para encontrar esto se puede usar la base recíproca para escribir $\vec{r}$ en la base original.

Luego derivamos esta expresión y usamos las derivadas de los vectores base para obtener:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{k}$$
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{k}$$

Esta expresión de la aceleración tiene las cuatro componentes que conocemos bien (la aceleración radial, la centrípeta, la angular y la de Coriolis).
Se puede encontrar esta expresión de otra forma. Tomamos la velocidad y aceleración que habíamos calculado escrita en base cartesiana y le hacemos producto punto con los vectores unitarios cilíndricos (en base cartesiana) para calcular cada componente.

Definimos el vector de velocidad angular como:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{k}$$

Ya que con esta definición, vemos que:

$$\dot{\mathbf{e}_\rho} = \vec{\omega} \times \mathbf{e}_\rho \qquad \dot{\mathbf{e}_\phi} = \vec{\omega} \times \mathbf{e}_\phi$$

Vector de Rotación: Hay dos rotaciones, la de cambio en ϕ, que es $\dot{\phi}\widehat{k}$ y la de cambio en θ que es $\dot{\theta}\widehat{e}_\phi$.
Entonces, el vector de rotación es $\vec{\omega} = \dot{\phi}\widehat{k} + \dot{\theta}\widehat{e}_\phi$.
Luego, escrito en coordenadas rectangulares o en esféricas, es:

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\sin\phi\widehat{i} + \dot{\theta}\cos\phi\widehat{j} + \dot{\phi}\widehat{k}$$
$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\cos\theta\widehat{e}_r - \dot{\phi}\sin\theta\widehat{e}_\theta + \dot{\theta}\widehat{e}_\phi$$

Y se tiene que:

$$\dot{\widehat{e}_r} = \vec{\omega} \times \widehat{e}_r \quad , \quad \dot{\widehat{e}_\phi} = \vec{\omega} \times \widehat{e}_\phi \quad , \quad \dot{\widehat{e}_\theta} = \vec{\omega} \times \widehat{e}_\theta$$

2.0.3. Coordenadas Esféricas

Se definen como:

$$x = r\cos\theta\sin\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\theta$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Con esto, los vectores unitarios toman la siguiente forma:

$$\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\phi\widehat{i} + \sin\theta\sin\phi\widehat{i} + \cos\theta\widehat{k}$$
$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\widehat{i} + \cos\theta\sin\phi\widehat{j} - \sin\theta\widehat{k}$$
$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\widehat{i} + \cos\phi\widehat{j}$$

Para cada punto del espacio, estos vectores definen una base ortogonal que depende de cada punto. Usando las ecuaciones pasadas, podemos derivar los vectores base y escribir el resultado en esta base, obtenemos así:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot\theta\mathbf{e}_\theta + \sin\theta\dot\phi\mathbf{e}_\phi$$
$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot\theta\mathbf{e}_\theta + \cos\theta\dot\phi\mathbf{e}_\phi$$
$$\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\sin\theta\ \phi\mathbf{e}_\theta - \cos\theta\ \phi\mathbf{e}_\theta$$

Con esto, podemos definir el vector de velocidad angular como sigue:

$$\vec\omega = \dot\phi\cos\theta\mathbf{e}_r - \dot\phi\sin\theta\mathbf{e}_\theta + \dot\theta\mathbf{e}_\phi$$

Y con esto tenemos las siguientes relaciones:

$$\dot{\mathbf{e}_r} = \vec\omega\times\mathbf{e}_r$$
$$\dot{\mathbf{e}_\theta} = \vec\omega\times\mathbf{e}_\theta$$
$$\dot{\mathbf{e}_\phi} = \vec\omega\times\mathbf{e}_\phi$$

Un punto arbitrario se puede escribir como:

$$\vec r = r\mathbf{e}_r$$

Y luego se puede derivar y usar las expresiones para la derivada de los vectores unitarios para llegar a:

$$\vec v = \dot r\mathbf{e}_r + r\dot\theta\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\ \dot\phi\mathbf{e}_\phi$$
$$\vec a = \text{Una expresión bastante larga.}$$

2.1. Base para Coordenadas Generalizadas:

Tenemos un grupo de coordenadas generalizadas dado por q_1, q_2, q_3 que son funciones de x, y, z. Y a la vez, x, y, z son funciones de q_1, q_2, q_3, es decir:

$$x = x(q_1,q_2,q_3) \quad y = y(q_1,q_2,q_3) \quad z = z(q_1,q_2,q_3)$$

Entonces, la posición de un objeto se puede escribir como:

$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\hat{i} + y(q_1, q_2, q_3)\hat{j} + z(q_1, q_2, q_3)\hat{k}$$

Los vectores base en estas coordenadas se definen como:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = h_1 \mathbf{e}_1 \quad , \quad h_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right| \\
\vec{b}_2 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = h_2 \mathbf{e}_2 \quad , \quad h_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right| \\
\vec{b}_3 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = h_3 \mathbf{e}_3 \quad , \quad h_3 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right|
\end{aligned}$$

Notamos que los vectores $\vec{b}$ no son unitarios y que sus formas unitarias son las $\mathbf{e}_i$.

Estos vectores base se pueden especificar en su forma cartesiana como:

$$\vec{b}_i = \frac{\partial x}{\partial q_i}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\hat{k}$$

Por ejemplo, en el sistema de coordenadas esféricas se tiene que $\vec{b}_1 = \mathbf{e}_r \quad \vec{b}_2 = r\mathbf{e}_\theta \quad \vec{b}_3 = r \sin\theta \mathbf{e}_\phi$. Puesto a que $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$.

Generalmente los vectores $\vec{b}_i$ no son perpendiculares entre sí. Sin embargo, sí vamos a pedir la condición de que no sean coplanares, es decir:

$$\vec{b}_1 \cdot b_2 \times \vec{b}_3 = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \right| := \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0$$

Es decir, necesitamos que el Jacobiano sea distinto de 0. Con esta condición también se puede asegurar que existen funciones inversas $q_1(x, y, z), q_2(x, y, z), q_3(x, y, z)$.

Ahora nos interesa calcular los vectores recíprocos que nos serán necesarios. En el caso particular de que $\vec{b}_i$ sean ortogonales (como en las cilíndricas, esféricas) deducimos de la ecuación 1.37 (que dice que los vectores recíprocos son aquéllos únicos que cumplen que $\vec{\mathfrak{b}}_i \vec{b}_j = \delta_{i,j}$) que los vectores recíprocos deben de ser $\vec{\mathfrak{b}}_i = \frac{1}{h_i}\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i^2}\vec{b}_i$.

Además, como las coordenadas generalizadas son independientes entre sí, se cumple que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_i}{\partial q_j} &= \delta_{i,j} \\
\Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial q_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_j} &= \delta_{i,j}
\end{aligned}$$

Con esto y junto a lo que dice la ecuación 1.37, llegamos a que los vectores recíprocos deben de estar dados por:

$$\vec{\mathfrak{b}}_i = \frac{\partial q_i}{\partial x}\widehat{i} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\widehat{j} + \frac{\partial q_i}{\partial z}\widehat{k}$$

Es decir:

$$\vec{\mathfrak{b}}_i = \nabla q_i$$

Con esto podremos calcular los vectores recíprocos, aunque claro que quedarán expresados en x, y, z y luego habrá que usar las funciones $x(q_1, q_2, q_3), ..$ para expresarlo en términos de las coordenadas generalizadas. Sino, siempre se puede calcular los recíprocos directamente de la ecuación 1.36 y listo.

2.1.1. Velocidad y Aceleración en Coordenadas Generalizadas:

La velocidad de una partícula se puede expresar en función de sus vectores base, $\vec{b}_i$ y sus recíprocos $\vec{\mathfrak{b}}_i$ de las siguientes formas (notación de Einstein):

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\mathfrak{b}}_i)\vec{b}_i = v_i^* \vec{b}_i$$
$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{b}_i)\vec{\mathfrak{b}}_i = v_i \vec{\mathfrak{b}}_i$$

Los elementos v_i (los que sirven de coeficientes en la base recíproca pero se consiguen con el producto punto en la base original) se llaman **componentes covariantes de la velocidad** y se calculan como:

$$v_i = \vec{v} \cdot \vec{b}_i = \dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_i} \quad 2{,}71$$

Por otro lado, tenemos que: $\dot{x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial q_i}\dot{q}_i$ y similarmente para y, z.
Luego, si derivamos estas expresiones con respecto a cada $\dot{q}_i$, obtenemos que:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \qquad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial y}{\partial q_i} \qquad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial z}{\partial q_i} \quad 2{,}73$$

Si sustituimos esto en la ecuación 2.71, vemos que queda expresada como:

$$v_i = \dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}|v|^2\right) \quad 2{,}74$$

Con $|v|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$.

Componentes Contravariantes de la Velocidad:
Llamadas también velocidades generalizadas, son los componentes de la velocidad en la base original $\vec{b}_i$ y se consiguen con el producto punto con la base recíproca:

$$v_i^* = \vec{v} \cdot \vec{\mathfrak{b}}_i = \frac{\partial q_i}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial q_i}{\partial z}\dot{z} = \dot{q}_i$$

Se puede hacer algo análogo para las aceleraciones como sigue:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} (\vec{a} \cdot \vec{b}_i)\vec{\mathfrak{b}}_i = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{\mathfrak{b}}_i$$

Donde las a_i son las componentes covariantes de la aceleración (las que se consiguen la hacer producto punto con la base original y que son componentes de la base recíprocas).

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{b}_i = \ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_i}$$

Usando la ecuación 2.73 se puede simplificar esta expresión como sigue:

$$a_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Vector rotación: Buscamos el vector $\vec{\omega}$ tal que: $\dot{\widehat{e}}_l = \vec{\omega} \times \widehat{e}_l$. Entonces: $\widehat{e}_l \times \dot{\widehat{e}}_l = \widehat{e}_l \times (\vec{\omega} \times \widehat{e}_l) = \vec{\omega}(\widehat{e}_l \cdot \widehat{e}_l - \widehat{e}_l(\vec{\omega} \cdot \widehat{e}_l)$

Entonces, $\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \widehat{e}_l)\widehat{e}_l + \widehat{e}_l \times \dot{\widehat{e}}_l$.

Luego se usan estas ecuaciones para $l = 1, 2, 3$ y se encuentra $\vec{\omega}$

2.1.2. Resumen

Dadas las relaciones entre las coordenadas cartesianas y las generalizadas, los vectores base se obtienen como:

$$\vec{b}_i = \frac{\partial x}{\partial q_i}\widehat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\widehat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\widehat{k}$$

Donde sus normas son las magnitudes h_i.

Los vectores recíprocos se pueden calcular con la ecuación 1.36 o bien, sabiendo que los productos puntos tienen que dar la delta de Kronecker. Entonces tenemos que:

$$\vec{\mathfrak{b}}_i = \frac{\partial q_i}{\partial x}\widehat{i} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\widehat{j} + \frac{\partial q_i}{\partial z}\widehat{k}$$

La **velocidad contravariante** son las componentes en la base original y que se obtienen con el producto punto en la base recíproca.

$$v_i^* = \vec{v} \cdot \vec{\mathfrak{b}}_i = \frac{\partial q_i}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial q_i}{\partial z}\dot{z} = \dot{q}_i$$

Velocidad Covariante: Son las componentes en la base recíproca y se obtienen con el producto punto en la base original. Resulta que:

$$v_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Donde $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ se debe de escribir en su dependencia en las q_i y las $\dot{q}_i$ para poder derivarlos.

Se tiene que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i \vec{b}_i = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i h_i \mathbf{e}_i$

Con lo que en el caso de coordenadas rectangulares: $v^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 \dot{q}_i^2$

Aceleración Covariante: Las componentes de la aceleración en la base recíproca que se obtienen con producto punto en la base original:

$$a_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Ejemplo: Obtener el vector velocidad en coordenadas cilíndricas.

Ya lo hicimos al inicio del capítulo al escribir $\diagdown$ en cilíndricas y derivando. Sin embargo, ahora lo haremos con las nuevas formulitas.
Como vimos, para coordenadas ortogonales, se tiene que $v^2 = \sum h_i^2 \dot{q}_i^2$.
Entonces, la velocidad es simplemente $\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$.

Calculamos ahora las componentes covariantes de la velocidad. Sabemos que éstas son $v_i = \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\dfrac{1}{2}v^2\right)$.
Por lo que los resultados van a ser $v_\rho = \dot{\rho}$, $v_2 = \rho^2\dot{\phi}, v_z = \dot{z}$.
Luego, estos componentes son los componentes de la base recíproca. Como ya conocemos la base recíproca (o la podemos calcular ya sea con las ecuaciones originales o como el gradiente de cada q) Y luego ponemos estos componentes covariantes y nos queda el vector velocidad de siempre.

También podemos calcular las componentes covariantes de la aceleración usando la ecuación que tenemos, para la cuál solamente necesitamos v^2.

2.1.3. Geometría Diferencial en Curvilíneas

Se $f(x,y,z)$ una función univaluada y con derivadas continuras. Entonces, si yo tengo $f(x,y,z) = C$, esto me representa una superficie en el espacio.
Entonces, las $q_1 = C_1, q_2 = C_2, q_3 = C_3$ representan tres superficies en el espacio. Entonces, el punto (x_0, y_0, z_0) viene dado por $x_0 = x(c_1, c_2, c_3), y_0 = y(c_1, c_2, c_3), z_0 = z(c_1, c_2, c_3)$.
Es el punto de intersección de las tres superficies.

Si tenemos las dos superficies $q_1 = c_1, q_2 = c_2$, se cortan en una curva. Esa cuerva en la que se cortan es la curva-q_3 porque es la única coordenada que cambia. Los vectores $\vec{b}_i$ son tangentes a sus curvas de coordenadas correspondiente.

Además, los vectores recíprocos $\vec{\mathfrak{b}}_i$ son normales a las superficies $q_i = c_i$. (porque se consiguen como el producto de as otras b, o porque son el gradiente ed q_i)
Esto se puede probar porque:

$$\vec{\mathfrak{b}}_1 = \frac{\vec{b}_2 \times \vec{b}_3}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 \times \vec{b}_3}$$

Es ortogonal a los vectores $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$, los cuales son tangentes a la superficie q_1.

Longitud de Arco: La longitud de arco está definida por:

$$\Delta s = |\Delta \vec{r}| = |\Delta x\widehat{i} + \Delta y\widehat{j} + \Delta z\widehat{k}|$$

Entonces, se consiguen como $\Delta\vec{r} = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\Delta q_i = h_i\Delta q_i\widehat{e}_i$.
Entonces, $(\Delta\vec{r})^2 = (h_i\Delta q_i\widehat{e}_i)\cdot(h_j\Delta q_j\widehat{e}_j)$
También un vector de camino infinitesimal en la dirección de la curva q_i es simplemente:

$$\Delta\vec{s}_i = \Delta q_i\vec{b}_i$$

En el caso particular de un sistema de coordenadas ortogonales,tenemos que $\Delta\vec{r} = \Delta q_1\vec{b}_1 + \Delta q_2\vec{b}_2 + \Delta q_3\vec{b}_3 = h_1\Delta q_1\mathbf{e}_1 + h_2\Delta q_2\mathbf{e}_2 + h_3\Delta q_3\mathbf{e}_3$
Y que $(\Delta\vec{r})^2 = h_i^2\Delta q_i^2$

Área Infinitesimal: El área infinitesimal en la superficie coordenada q_k se puede conseguir con el producto vectorial de vectores infinitesimales sobre la superficie:
$\Delta S_k = |\Delta\vec{s}_i \times \Delta\vec{s}_j| = |\Delta q_i\Delta q_j\vec{b}_i \times \vec{b}_j| = h_1 h_j\Delta q_i\Delta q_j|\widehat{e}_i \times \widehat{e}_j|$
En el caso particular de coordenadas rectangulares: $\Delta S_k = h_i h_j\Delta q_i\Delta q_j$

Volumen Infinitesimal: El volumen es $\Delta V = \Delta\vec{s}_i \cdot \Delta\vec{s}_2 \times \Delta\vec{s}_3$. En unas coordenadas cualesquiera, el resultado es:
$\Delta V = h_1h_2h_3\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3\widehat{e}_1\cdot\widehat{e}_2\times\widehat{e}_3$.
En el caso particular de coordenadas rectangulares, se calcula como: $\Delta V = h_1h_2h_3\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3$

Gradiente (en coordenadas ortogonales): Sebe de cumplir que $\Delta\phi = \nabla\phi\cdot\delta r$. Con esto se puede concluir que el gradiente es:

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial q_i}\mathbf{e}_i$$

2.2. Movimiento a lo largo de una Curva dada

Digamos que $\vec{r}(t)$ se mueve a lo largo de una curva dada. Empezando en $\vec{r}(0) = O_s$. Definimos el parámetro $s(t)$ como la distancia medida recorrida sobre la curva.
Entonces, la posición es parámetro de esta s, es decir, $\vec{r} = x(s)\widehat{i} + y(s)\widehat{j} + z(s)\widehat{k}$
La velocidad es $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}\dot{s}$.
El vector $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial s} = \dfrac{\partial x}{\partial s}\widehat{i} + \dfrac{\partial y}{\partial s}\widehat{j} + \dfrac{\partial z}{\partial s}\widehat{k} = \mathbf{e}_s$
Es el vector unidad tangente a la curva (es unidad porque en el límite, la curva se ve recta y la distancia por la curva es igual al cambio de $\vec{r}$).

Partiendo de $\vec{v} = \dot{s}\mathbf{e}_s$, podemos encontrar la aceleración somo:

$$\vec{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_s + \dot{s}\dot{\mathbf{e}}_s$$

Para un pequeno segmento de la trayectoria, podemos ajustarle una circunferencia osculante con radio ρ.
Ahora bien, el vector $\dot{\mathbf{e}}_s$ es perpendicular a $\mathbf{e}_s$ por ser unitario. Y es más, $\dot{\mathbf{e}}_s = \vec{\omega}\times\mathbf{e}_s$.
Elegimos $\mathbf{e}_n$ como el vector unitario en la dirección $\dot{\mathbf{e}}_s$.

Luego, la velocidad de rotación (la norma de $\vec{\omega}$) es el cambio de ángulo, que es el cambio de longitud transversara por el círculo $\dot{s}$ entre el radio ρ. Por lo que $|\omega| = \dfrac{\dot{s}}{\rho}$.

Con esto, el la derivada de $\mathbf{e}_s$ es:

$$\dot{\mathbf{e}}_s = -\frac{\dot{s}}{\rho}\mathbf{e}_n$$

Por lo que ahora sí, la aceleración es:

$$\vec{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_s - \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n$$

Tenemos la aceleración radial y la centrípeta.

Por otro lado, tenemos que $\mathbf{e}_s = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ y luego, al derivar de nuevo, tenemos que $\dot{\mathbf{e}}_s = \dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\dot{s}$. Pordemos igualar esta expresión con la de hace un rato y encontramos una expesión para el radio de curvatura:

$$\rho = \frac{|-\mathbf{e}|}{|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}|} = \frac{1}{\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}}$$

Ejercicio: Calcular el radio de curvatura de una curva plana en coordenadas rectangulares. 9

3. Resumen Cálculo Vectorial:

Coordenadas Curvilineas: Se utilizan tres funciones $q_i = q_i(x, y, z)$. Las ecuaciones $q_i = cte_i$ describen tres superficies en $\mathbb{R}^3$. La intersección de estas superficies es un punto en $\mathbb{R}^3$ que queda descrito por estas tres coordenadas curvilineas. Por ejemplo, en cilíndricas tenemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \arctan(y/x)$ $\varsigma = z$.
Es útil tener las funciones inversas, que son $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$.

Vector Unitario: El vector unitario en la dirección i es $\widehat{q_i}$ = un vector ortogonal a la superficie $q_i = cte$ y que apunta en la dirección en la que q_i aumenta. Como tal, para calcularlo, podemos escribir $r = (x, y, z)$ como función de las variables q_1, q_2, q_3, luego derivamos con respecto a la q_i que queramos y eso nos da el vector en la dirección en la que q_i aumenta. Finalmente, lo unitarizamos.

Sea r un punto (x, y, z) descrito como función de q_1, q_2, q_3. Entonces tendremos que:

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}dq_3$$

La norma de los vectores $|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}|$ se llama componente de longitud a lo largo de q_i y al multiplicarlo por dq_i es el componente de longitud a lo largo de q_i diferencial.

$$h_i = |\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}|$$
$$d\vec{s}_i = \vec{b}_i \, dq_i$$

Si unitarizamos estos vectores $\dfrac{\partial r}{\partial q_i}$ nos quedan los vectores unitarios que mencionamos antes.

Finalmente (para coordenadas ortogonales), tenemos que un pedacito de longitud ds es:

$$d\vec{s} = h_1 dq_1 \widehat{q_1} + h_2 dq_2 \widehat{q_2} + h_3 dq_3 \widehat{q_3} \;=\; ds_1 \widehat{q_1} + ds_2 \widehat{q_2} + ds_3 \widehat{q_3}$$

Elemento de área: $d\sigma_{ij} = ds_i \, ds_j \;\; = h_i h_j \, dq_i \, dq_j$

Elemento de Volumen: $d\tau = ds_1 \, ds_2 \, ds_3 \;=\; h_1 \, h_2 \, h_3 \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3$

3.1. Operaciones Diferenciales:

Gradiente: Dada una función $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en coordenadas curvilíneas, definimos $\nabla\phi$ como el vector en el que sucede el máximo crecimiento y como tal, se define como el vector tal que $d\phi = \nabla\phi \cdot ds$. Entonces:

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\widehat{q_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\widehat{q_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\widehat{q_3}$$

Divergencia: Sea $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en coordenadas curvilíneas. entonces definimos $\nabla \cdot F(p) = \lim_{\Delta V \to 0} \dfrac{\int F \cdot d\sigma}{\delta V}$. Donde la integral es la integral de superficie alrededor de una superficie que rodea a p y que se hace pequena. Dibujando y calculando los flujos infinitesimales, se llega a que:

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3 h_1 h_2)\right]$$

Laplaciano: El laplaciano de $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se define como $\nabla \cdot \nabla\phi$. Usando las fórmulas de estas cosas, se puede llegar a que:

$$\nabla \cdot \nabla\phi \;=\; \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\right) \;+\; \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_2 h_1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\right)\right]$$

Curl: Dada una función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se define su curl en la dirección $\widehat{q_i}$ como: $\nabla \times F \cdot q_i(p) = \lim_{\sigma \to 0} \dfrac{\oint F \cdot ds}{\sigma}$ donde σ es una curva cerrada que rodea al punto p y que es ortogonal al vector unitario $\widehat{q_i}$. Podemos calcular los tres componentes del curl para cada vector unitario haciendo dibujitos y así. para llegar a:

$$\nabla \times F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{pmatrix} \widehat{q_1} h_1 & \widehat{q_2} h_2 & \widehat{q_3} h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{pmatrix}$$

Segundas Derivadas: $\nabla \times \nabla\phi = 0 \quad \nabla \cdot \nabla \times F = 0 \quad \nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$
(Aquí el $\nabla^2 F$ indica tomar el laplaciano de cada componente de F y juntarlos en un vector)

Teoremas y cosas:
Integral de Línea (vectorial): $\int_C F \cdot ds = \int_a^b F(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt$ donde $\phi(t)$ parametriza la curva C.
Integral de Superficie (vectorial): $\int_S F \cdot da = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} F(\sigma(u,v)) \cdot (T_u \times T_v) dv du$ donde $\sigma(u,v)$ parametriza la superficie S.

Teorema Fundamental: $\int_C \nabla\phi = \phi(b) - \phi(a)$ donde C es una curva que une a con b.

Teorema de la div: $\int_V \nabla \cdot F \, dV = \oint_{\partial V} F \cdot dA$

Teorema de Stokes: $\int_S (\nabla \times F) \cdot da = \int_{\partial S} F \cdot ds$

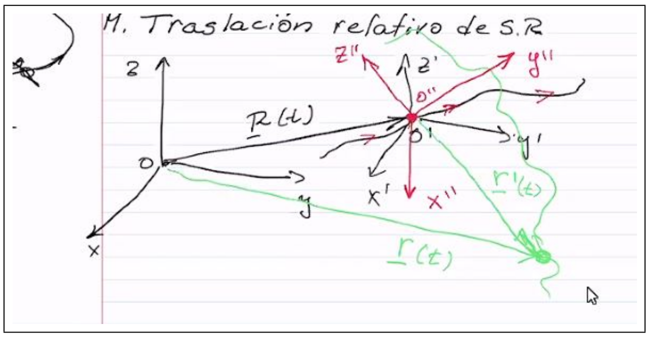
Equivalencias irrotacionales: Son equivalentes (bajo ciertas condiciones): $\nabla \times F = 0$, Las integrales de línea de F son indep. de la trayectoria , la integral de línea por un camino cerrado es 0 , $F = \nabla V$ para alguna función escalar V.

Equivalencias Incompresibles: Son equivalentes (bajo ciertas condiciones): $\nabla \cdot F = 0$, La integral de superficie de F es independiente de la superficie para cualquier borde , la integral de superficie en una superficie cerrada es 0 , existe una función A con $F = \nabla \times A$

4. Movimiento Relativo de Sistemas

4.1. Traslación

Digamos que tenemos un sistema original O y un sistema O' paralelo y que se mueve.
Definimos $\vec{R}(t)$ como la posición de O' con respecto al sistema O.
Y ahora suponemos que queremos medir un punto.
Desde el sistema O, el punto tiene vector $\vec{r}(t)$. Mientras que desde O', el punto tiene coordenadas $\vec{r'}(t)$.



Si el sistema trasladado está rotado (como el biprima) mejor lo redefinimos de forma que los ejes sean paralelos a los ejes originales.

Entonces, vemos que los vectores en ambos sistemas se conectan por:

$$\vec{r}(t) + \vec{R}(t) + \vec{r}\,'(t)$$

Si derivamos respecto al tiempo, obtenemos la velocidad de la partícula en cada frame:

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}\,'(t)$$

Donde $\vec{V}$ es la velocidad del sistema primado con respecto al sistema original.
Si derivamos de nuevo, obtenemos:

$$\vec{a}(t) = \vec{A}(t) + \vec{a}\,'(t)$$

Donde $\vec{A}(t)$ es la aceleración del sistema primado respecto al original.
Si la partícula tiene una masa m, entonces:

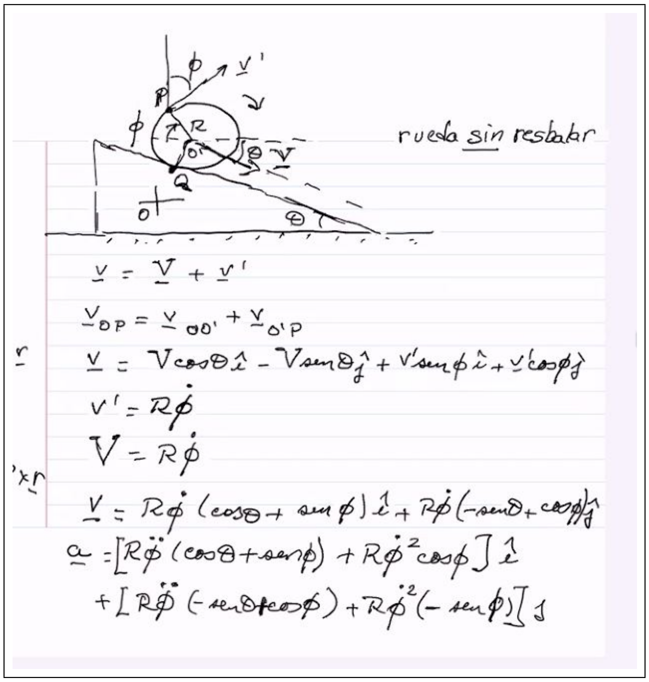
$$m\vec{a} = m\vec{a}\,' + m\vec{A}(t)$$

Digamos que el sistema original es inercial. Entonces, el lado izquierdo de la ecuación es igual a la fuerza de la partícula por la segunda ley de Newton.
Sin embargo, en el sistema primado, la fuerza no es igual a la aceleración medida $\vec{a}\,'$ pues se tiene que:

$$m\vec{a}\,' = m\vec{a} - m\vec{A}$$

Entonces, si quisiéramos usar segunda ley, necesitaríamos sumarle una fuerza ficticia de $-m\vec{A}(t)$ para que parezca que se cumple la ley.

Ejemplo: Digamos que tenemos una rueda que rueda sin dezlizar en un plano inclinado.



Encontrar el movimiento de P respecto del piso.

Primero definimos el sistema O' en el centro de la rueda.

El punto O' se va a trasladar en una línea recta paralela al plano inclinado con velocidad $\vec{V}$.

Por la ley de adición de velocidades, se tiene que:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,'$$

Con $\vec{v}$ la velocidad de P respecto de O, $\vec{V}$ la velocidad de O' respecto de O y $\vec{v}\,'$ la velocidad de p respecto de o'. Podemos anotarlo mejor como:

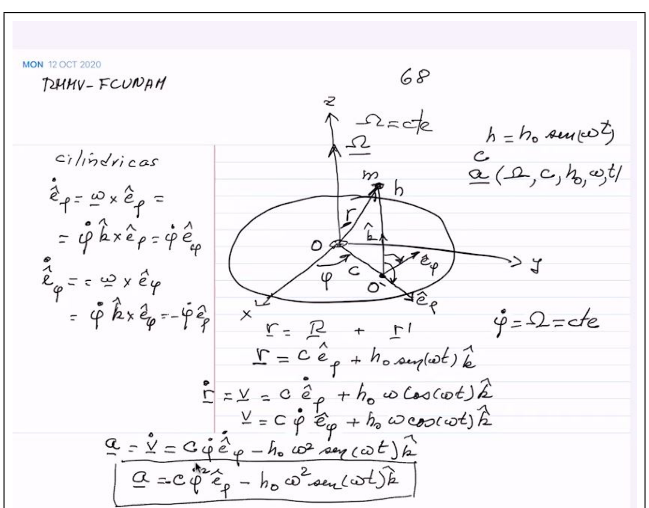
$$\vec{v}_{OP} + \vec{v}_{OO'} + \vec{v}_{O'P}$$

Si estamos parados en O', la velocidad de P se ve tangente a la trayectoria.

Ejercicio2: Un muchacho está cabalgando en un caballo que se mueve sinusoidalmente con $h = h_0 \sin \omega t$ respecto a una plataforma que gira alrededor de la vertical con una velocidad angular Ω. El muchacho se encuentra a una distancia c del eje de rotación. Encuentre la expresión para la aceleración respecto al piso.

Tomamos coordenadas cilíndricas. El piso es el sistema O con centro en el carrusel. El sistema O' es un sistema que se mueve junto al caballo.

Para O', el movimiento del muchacho es $h = h_0 \sin \omega t$. Mientras que para O hay que sumarle el movimiento de rotación.



Vemos que la aceleración vista desde O tiene el término de la fuerza restitutiva de un oscilador armónico y una fuerza centrípeta (debida a la fricción del caballo pegado al piso). Estas son las fuerzas vistas desde el sistema inercial externo (O).

Pero desde el punto de vista de O', la aceleración es solamente la del resorte del caballo.

Sin embargo, la fuerza sigue siendo la del resorte caballo pero también observa la de la fricción hacia adentro. Por tanto, para poder usar la ley de Newton, hay que agregar una fuerza centrífuga hacia afuera.

.

4.2. Mov. de Rotación Relativa

Cambio de un vector:

Si tenemos un sistema base $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \|'$ de vectores que giran con una velocidad angular $\vec{\Omega}$ con respecto a un sistema no primado, entonces sus derivadas respecto al sistema no primado vienen dadas por:

$$\frac{di'}{dt} = \vec{\Omega} \times i' \ \ , \ \ \frac{dj'}{dt} = \vec{\Omega} \times j' \ \ , \ \ \frac{dk'}{dt} = \vec{\Omega} \times k'$$

Ahora digamos que tenemos un vector $\vec{A}$ arbitrario y lo queremos expresar en ambos sistemas. El vector es obviamente el mismo sin importar el sistema en que lo expresemos.
Entonces, tenemos que :

$$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k = A'_x i' + A'_y j' + A'_z k'$$

Y ahora tomamos la derivada del vector $\vec{A}$ con respecto al tiempo en el sistema O (como cambia $\vec{A}$ en el sistema sin primas). Pero al derivar el lado derecho, hay que tomar en cuenta que los vectores unitarios del sistema primado sí cambian con respecto al sistema sin primar y habrá que usar las fórmulas que describen sus derivadas. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{dA'_x}{dt}i' + \frac{dA'_y}{dt}j' + \frac{dA'_z}{dt}k' + A'_x\frac{di'}{dt} + A'_y\frac{dj'}{dt} + A'_z\frac{dk'}{dt} \\
&= \left(\frac{dA'_x}{dt}i' + \frac{dA'_y}{dt}j' + \frac{dA'_z}{dt}k'\right) + \vec{\Omega} \times \left(A'_x i' + A'_y j' + A_z k'\right) \\
&= \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)' + \vec{\Omega} \times \vec{A}
\end{aligned}$$

Esto último porque notamos que el primer término entre parétesis no es otra cosa que la derivada de $\vec{A}$ como la vería alguien parado en el sistema primado. El símbolo $()'$ indica que la derivada se está tomando desde el punto de vista de alguien en el sistema primado.
Vemos por ejemplo, que el vector $\vec{\Omega}$ tiene la misma derivada tanto en el sistema primado como en el no primado. Escribimos de nuevo la ecuación solamente para hacer énfasis:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)' + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Segunda derivada:
Ahora derivamos de nuevo esta rspresión de ambos lados:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)' + \vec{\Omega}\times\vec{A}\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)' + \frac{d}{dt}(\vec{\Omega}\times\vec{A}) \\
&= \left(\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}\right)' + \vec{\Omega}\times\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)' + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{A} + \vec{\Omega}\times\frac{d\vec{A}}{dt} \\
&= \left(\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}\right)' + \vec{\Omega}\times\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)' + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{A} + \vec{\Omega}\times\left[\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)' + \vec{\Omega}\times\vec{A}\right] \\
&= \left(\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}\right)' + 2\vec{\Omega}\times\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)' + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{A} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{A})
\end{aligned}$$

Ahora resumimos este resultado:

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \left(\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}\right)' + 2\vec{\Omega}\times\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)' + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{A} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{A})$$

Si usamos el caso específico en que $\vec{A}$ es el vector $\vec{r}$ de la posición de una partícula, entonces, su velocidad y aceleración en el sistema sin primas será $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Y su velocidad y aceleración en el sistema primado va a ser: $\vec{v'} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)'$, $\vec{a'} = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)'$. Y luego, la relación entre ambas es:

$$\begin{gathered}
\vec{v} = \vec{v'} + \vec{\Omega}\times\vec{r} \\
\vec{a} = \vec{a'} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})
\end{gathered}$$

Notemos que del lado derecho podríamos poner $\vec{r}$ o $\vec{r'}$ porque ambos sistemas tienen el mismo origen y por tanto estos vectores son iguales.
Podemos escribir también el vector aceleración primado despejado como:

$$\vec{a'} = \vec{a} - 2\vec{\Omega}\times\vec{v'} - \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{r} - \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

Si ahora multiplicamos por masa, el $m\vec{a'}$ del lado izquierdo de interpreta como la fuerza que medimos sobre el objeto cuando estamos parados en el sistema primado. Y el $m\vec{a}$ es la fuerza 'verdadera' que se siente sobre el objeto cuando se lo ve desde un sistema inercial.
Entonces, el sistema primado sensará unas fuerzas raras que aparecen en el cuerpo pero no se deben a fuerzas externas o inerciales. Estas fuerzas son en orden: la fuerza de Coriolis, la fuerza de Euler (azimutal), la fuerza centrífuga. La persona en el sistema primado tiene

que agregar estas fuerzas a su estudio del movimiento si quiere ser capaz de usar las leyes de Newton sin problema y sin salir de su sistema.
Estas fuerzas se deben puramente al movimiento relativo de los sistemas de referencia y no a ningún tipo de interacción.

4.2.1. Ejemplo: Tierra

Consideramos ahora la descripción que hace un observador fijo en la superficie de la tierra de una partícula con respecto a la misma descripción que haría alguien en un sistema fijo.
Entre los observadores se cumple que:

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{R}_o$$

donde $\vec{r}$ mide la posición de la partícula desde el centro de la tierra, $\vec{R}_0$ es la posición del observador con respecto al centro de la tierra y $\vec{r'}$ es la posición de la partícula respecto al observador en la superficie.

Como la posición de la tierra no varía con el tiempo, tenemos que $\left(\dfrac{d\vec{R'}_0}{dt}\right)' = 0$.

Y como la tierra gira con respecto a las estrellas con velocidad angular $\vec{\Omega}$, la relación entre las velocidades está dada por:

$$\vec{V}_0 = \frac{d\vec{R'}_0}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{R'}_0$$

y también:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v'} + \vec{\Omega} \times \vec{r'} + \vec{V}_0 \\ &= \vec{v'} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

Para las aceleraciones se tiene que:

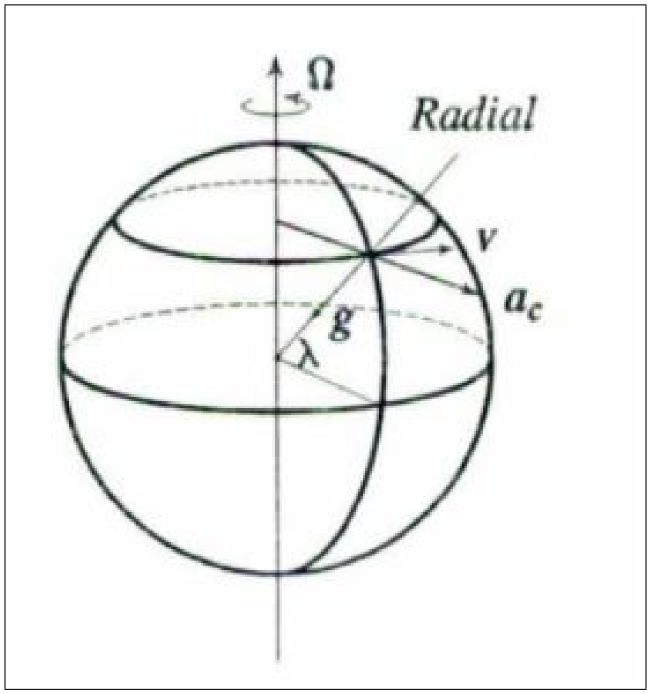
$$\vec{a} = \vec{a'} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v'} + \vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times (\vec{r'} + \vec{R}_0)]$$

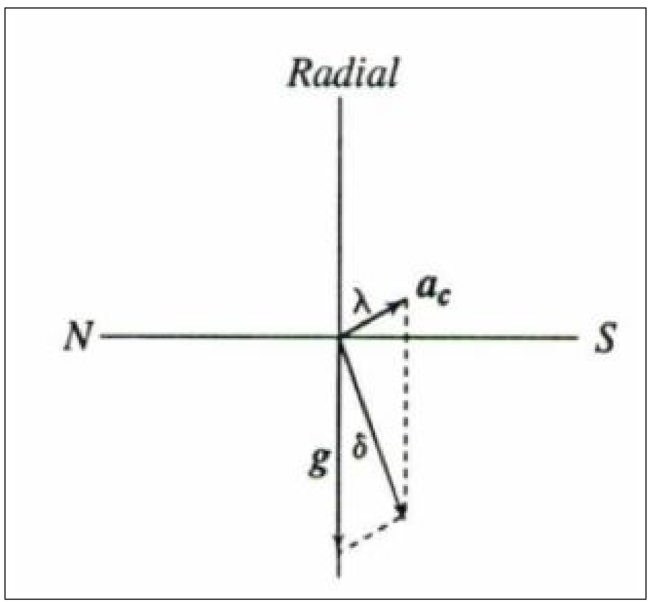
Desechamos la derivada de $\vec{\Omega}$ porque es muy chiquita.
Notamos que la aceleración centrífuga se puede separar en un término $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R'}_0)$ más una corrección $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r'})$. El término de corrección es muy chiquito comparado con el otro, por lo que lo desechamos.

Digamos ahora que tenemos un objeto con velocidad $\vec{v'} = 0$ (quieto respecto a la rotación de la tierra). Entonces, un observador externo mide que el objeto tiene una aceleración $\vec{g}$ hacia el centro de la tierra debida a la atracción gravitacional. Sin embargo, un observador en la tierra mide una aceleración de:

$$\vec{g_{ef}} = \vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}_0)$$

Donde la acelaración centrífuga apunta hacia afuera del paralelo sobre el que está girando la persona.





En la primera imagen se nota la dirección de los vectores y todo eso. En la segunda se especifica el vector $\vec{g}$ (aceleración para alguien viendo desde afuera) que apunta radialmente hacia adentro. Y el vector $\vec{a}_c$ que apunta un poco hacia el sur y hacia afuera.
Podemos definir un sistema de coordenadas fijas con respecto a la superficie de la tierra, en las que el vector i denote la dirección tangente al meridiano (hacia el sur), el j la dirección tangente al paralelo (hacia el este) y el k la dirección radial hacia afuera.
En la segunda imagen se muestra el plano i, k.
En este sistema, se puede ver que la velocidad angular es:
$\vec{\Omega} = -\Omega \cos \lambda;\ i + \Omega \sin \lambda\ k$
Y que el vector de posición respecto al centro de la tierra es $\vec{R} = R\vec{k}$.
Entonces, podemos hacer el triple producto que exige la aceleración centrífuga para obtener:

$$\vec{a}_c = -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\Omega^2 R \sin\lambda \cos\lambda \vec{i} - \Omega^2 R \cos^2\lambda \vec{k}$$

Por lo que la dirección de $\vec{g}_{eff}$ es:

$$g_{eff} = -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\Omega^2 R \sin\lambda \cos\lambda \vec{i} - (\Omega^2 R \cos^2\lambda - g)\vec{k}$$

Por lo que el ángulo δ de la dirección de g_{eff} con respecto a la dirección radial tiene una tangente de:

$$\tan\delta = \frac{\Omega^2 R \sin\lambda \cos\lambda}{g - \Omega^2 R \cos^2\lambda} \simeq \frac{\sin(2\lambda) R\Omega^2}{2g}$$

Como δ es tan chiquito (porque $R\Omega^2/g$ es chiquito), entonces podemos aproximar como que $\vec{g'}$ es paralela a $\vec{g}$ (en la dirección radial hacia adentro). Por lo tanto, en la expresión completa de g', desechamos el término no radial y nos queda:

$$g' = (g - \Omega^2 R \cos^2\lambda)\vec{k}$$

Aproximaciones Sucesivas (integrar la aceleración)

De ahora en adelante, trabajaremos en la aproximación en que $\vec{g'}$ es constante e igual a lo que calculamos arriba. Entonces, tenemos que la aceleración en el sistema primado es:

$$\vec{a'} = \vec{g'} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v'}$$

(la $\vec{g'}$ ya incluye el ̂ermono $\vec{g}$ y la aceleración centrífuga incluidos). Luego, podemos integrar esta ecuación para llevar a la velocidad primada:

$$\vec{v'}(t) = \vec{v'}_0 + \vec{g'}(t - t_0) - 2\vec{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} \vec{v'}(\tau) d\tau$$

Donde $\vec{v'}_0$ es la velocidad inicial (en el sistema primado) y $\vec{r}_0$ es la posición inicial.
Ahora sustituimos toda esta expresión adentro de sí misma en la integral (ésta es la primera iteración) y nos queda:

$$\begin{aligned}\vec{v'}(t) &= \vec{v'}_0 + \vec{g'}(t - t_0) - 2\vec{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} \left[\vec{v'}_0 + \vec{g'}(t - t_0) - 2\vec{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} \vec{v'}(\tau')d\tau'\right] d\tau \\ &= \vec{v'}_0 + \vec{g'}(t - t_0) - 2\vec{\Omega} \times \left[\vec{v'}_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\vec{g'}(t - t_0)^2 - 2\vec{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} \vec{v'}(\tau')d\tau'\right] \\ &= \vec{v'}_0 + \vec{g'}(t - t_0) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v'}_0(t - t_0) - \vec{\Omega} \times \vec{g'}(t - t_0)^2 \\ \vec{v'}(t) &= 1 - 2(t - t_0)\vec{\Omega}\times]\vec{v'}_0 + [(t - t_0) - (t - t_0)^2\vec{\Omega}\times]\vec{g'} + O(\Omega^2)\end{aligned}$$

Donde desechamos el último término porque es proporcional a $\vec{\Omega}^2$, que en este caso es un número muy chico.

Ahora podemos integrar de nuevo para obtener la posición con respecto a la tierra que gira. Y obtenemos que:

$$\vec{r'}(t) = \vec{r'}_0 + [(t - t_0) - (t - t_0)^2\vec{\Omega}\times]\vec{v'}_0 + [\tfrac{1}{2}(t - t_0)^2 - \tfrac{1}{3}(t - t_0)^3\vec{\Omega}\times]\vec{g'} + O(\Omega^2)$$

Donde $\vec{r'}_0$ es la posición inicial del objeto (medida desde el centro de la tierra en el sistema que gira con la tierra) Y el resultado $\vec{r'}$ es la posición del objeto también medida desde el centro en el sistema que gira.
De hecho, todo está medido desde el centro de la tierra pero con el sistema que gira (el primado). Si queremos verlo desde el laboratorio de la superficie, hay que corregir el $\vec{r'}$ quitándole el vector de radio de la tierra, pero las velocidades y aceleraciones no cambian (porque el vector radio de la tierra es fijo)

Caída Libre:

Ahora dejamos caer un objeto desde una altura h y queremos ver dónde cae. Sabemos que la aceleración de Coriolis va a hacer que se desvíe, así que calcularemos qué tanto y en qué dirección se desvía.
Usamos entonces la formulita que acabamos de obtener. Como es caída libre, tenemos que $\vec{v}'_0 = 0$, lo que simplifica mucho la fórmula. Tenemos que:

$$\vec{r'}(t) = \vec{r'}_0 + [\tfrac{1}{2}(t - t_0)^2 - \tfrac{1}{3}(t - t_0)^3\vec{\Omega}\times]\vec{g'}$$

Donde, como vimos antes (con el sistema de coordendas de antes, tenemos que $\vec{\Omega} = -\Omega\cos\lambda\vec{i} + \Omega\sin\lambda\vec{k}$ y en la aproximación radial que hicimos de $\vec{g'} = -g'\vec{k}$.
Entonces se puede calcular que $\vec{\Omega} \times \vec{g'} = -\Omega g' \cos\lambda\vec{j}$.
Entonces, nuestro vector de posición queda como:

$$\vec{r'}(t) = \vec{r'}_0 + \tfrac{1}{2}(t - t_0)^2\vec{g'} + \tfrac{1}{3}(t - t_0)^3\Omega g' \cos\lambda\vec{j}$$

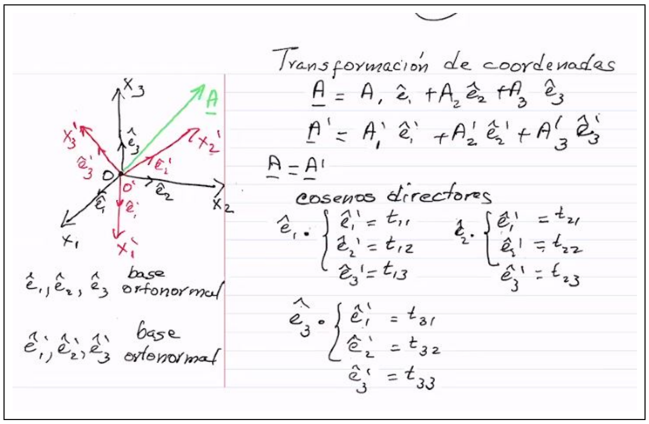
Vemos que el tercer término es la desviación que tendrá el cuerpo al caer, por lo que definimos al vector de desviación:

$$\vec{d} = \frac{1}{3}(t - t_0)^3\Omega g' \cos\langle\vec{j}$$

Además, podemos ver que en la expresión de $\vec{r'}(t)$, la única parte radial es el clásico $\frac{1}{2}(t-t_0)^2$.
Por lo que la altura inicial es de $h = \frac{g'}{2}(t - t_0)^2$ y el tiempo de caida es $t - t_0 = \sqrt{\dfrac{2h}{g'}0}$.
Por lo que el vector de desviación será de:

$$\vec{d} = \tfrac{1}{3}\tfrac{2h}{g'}\sqrt{\tfrac{2h}{g'}}\Omega g' \cos\lambda\vec{j}$$

4.3. Transformación de Coordenadas



Tengo dos sistemas de coordenadas, uno rotado con respecto al otro. En el no primado, nuestro vector es:

$$\vec{A} = A_i \widehat{e}_i$$

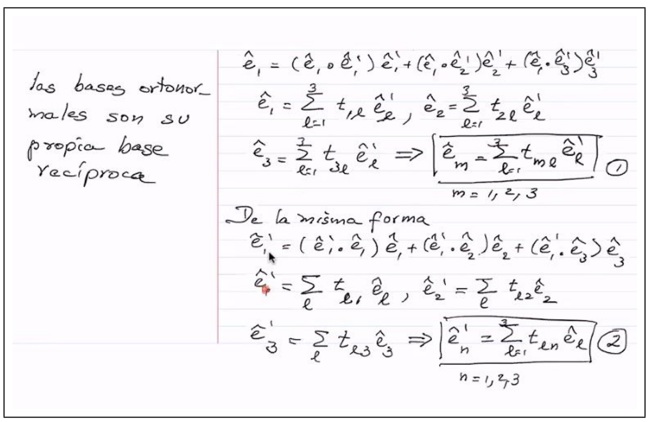
Mientras que en el primado, tenemos que:

$$\vec{A'} = A'_i \widehat{e'}_1$$

También tenemos el valor de todos los productos escalares entre los elementos de las bases (los cosenos directores).

Como las bases son ortonormales, podemos escribir los elementos de una base en términos de la otra usando nadamás los cosenos directores.

Entonces, tenemos la ecuación $\widehat{e}_m = t_{ml} \widehat{e'}_l$



Podemos hacer lo mismo para escribir a los vectores de la base primada en términos de la no primada como:

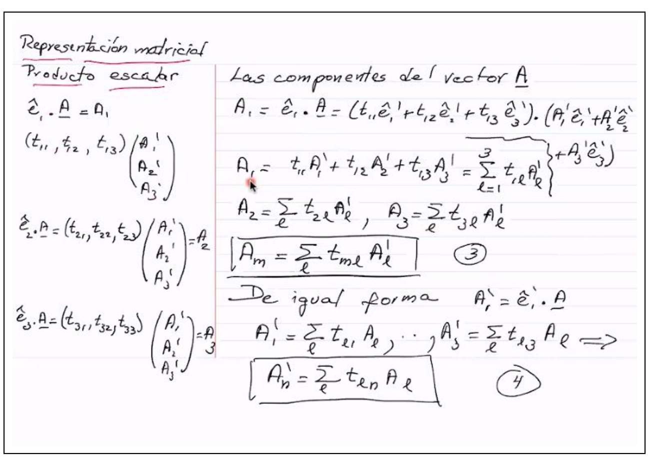
$\widehat{e'}_n = t_{ln} \widehat{e}_l$

Ahora quiero expresar las A no primadas en términos de las primadas. Para eso, veo que $A_1 = \widehat{e}_1 \cdot \vec{A}$ y luego escribo ambos vectores en la base primada. Con eso llegaré a que:

$A_m = t_{ml} A'_l$

Y lo mismo para expresar las primadas con respecto a las no primadas. Con lo que se llega a que:

$$A'_n = t_{ln} A_l$$

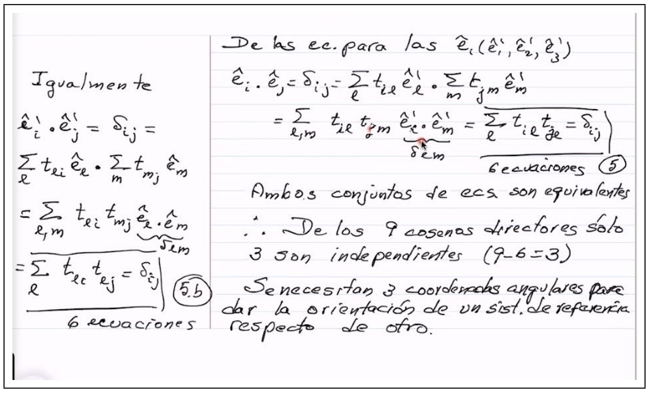


Como los vectores de la base original son ortonormales, cumulen que $\widehat{e}_i \cdot \widehat{e}_j = \delta_{ij}$. Y si ahora expresamos cada uno de estos vectores en la base primada, nos queda que:

$t_{il} t_{jl} = \delta_{ij}$

Podemos hacer algo similar para el producto punto en el sistema primado. Partimos de que $\widehat{e'}_i \cdot \widehat{e'}_j = \delta_{ij}$ y podemos llegar a que

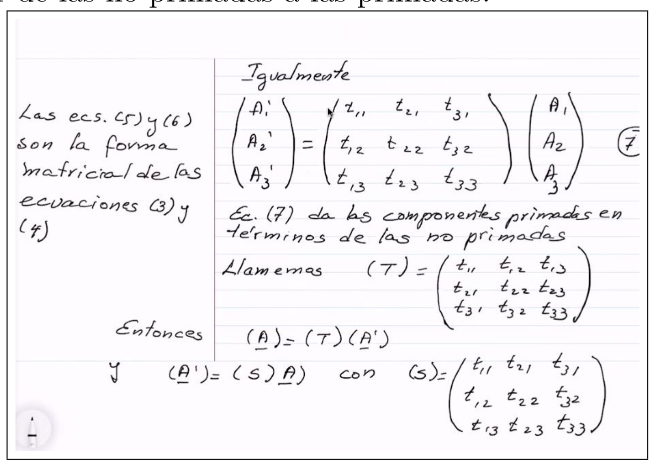
$t_{li} t_{lj} = \delta_{ij}$

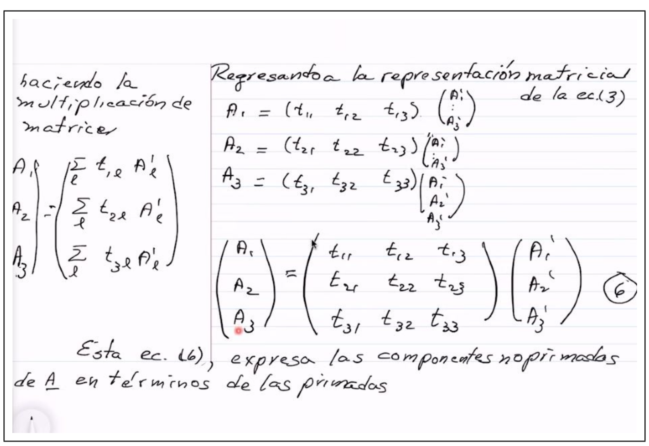


Entonces, tenemos 6 ecuaciones que relacionan a las t. Por lo que de los 9 cosenos directores, solamente 9-6 = 3 son independientes.

Por lo tanto, se necesitan solamente 3 coordenadas angulares para dar la orientación de un sistema de referencia respecto de otro.

Esto último me da la transformacón que me lleva de las componentes de A primadas a las componentes en el sistema no primado.
Tenemos una transformación similar para pasar de las no primadas a las primadas.





5. Dinámica

5.1. Leyes de Newton

5.1.1. Primera Ley

Ley de Inercia: Considere una partícula que no interacciona con ninguna otra partícula del universo (una partícula libre). O una partícula en la que todas las fuerzas se cancelan. La ley dice que:

La partícula
libre tiene movimiento rectilíneo uniforma

Es decir, $\vec{v} = cte$ y no se tiene aceleración.
Un sistema de referencia inercial es aquél en el que las partículas libres se mueven a velocidad constante (como deberían).

Definimos el momento lineal (ímpetu) como $\vec{p} = m\vec{v}$ de una partícula.
Entonces, $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$.
Es un hecho experimental que si dos partículas aisladas interaccionan, entonces se tiene que:

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

Y por lo tanto, si $\vec{p}_1'$ indica el momento final de la masa 1 y $\vec{p}_2'$ el final de la masa 2, entonces:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Definimos el ímpetu total del sistema como:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Y entonces la fórmula se puede reescribir como:

$$\vec{p} = \vec{p}'$$

Entonces, la primera ley de Newton dice que el momento se conserva.

Segunda Ley

Considerando de nuevo las dos partículas y tomando un límite cuando la diferencia del tiempo tiende a cero, tenemos que $\dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = -\dfrac{d\vec{p}_2}{dt}$.
A este cambio en el ímpetu le llamamos fuerza:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Para una partícula de masa constante se tiene que:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$$

Y si puedo escribir la fuerza como una función del tiempo, posición y velocidad, tendré una ecuación diferencial vectorial.
Algunos ejemplos de fuerzas son:

- Resorte: $F = -kx$
- Gravitatoria: $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\widehat{e}_r$
- Coulumb: $\vec{F} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\widehat{e}_r$

Tercera Ley

Del resultado experimental que teníamos antes:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

5.2. Resolver Problemas

La ecuación $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ son tres ecuaciones que pueden estar acopladas. Podemos tener la suerte de encontrar un sistema de coordenadas generalizadas tal que se puedan desacoplar las ecuaciones y queden 3 ecuaciones en 1 dimensión.

Problemas de movimiento en 1D

1. **Fuerza que depende del tiempo $F(t)$:** En este caso, tenemos que $F(t) = m\ddot{x}$. Podemos integrar ambos lados con respecto al tiempo:
   $m(v(t) - v_0) = \int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau$.
   Y luego integramos de nuevo para obtener que:

   $$x(t) - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} F(\tau')d\tau'$$

   1.a Si $F = cte$, entonces:

   $$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$
   $$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + a\frac{(t - t_0)^2}{2}$$

   Ejemplo: Digamos que tenemos una fuerza $F = F_0 \sin\omega t$. Entonces, $F_0 \sin\omega t = m\ddot{x}$.
   Entonces tenemos que $v(t) = v_0 + \frac{F_0}{m\omega} - \frac{F_0}{m\omega}\cos(\omega t)$.
   Y tenemos que: $x(t) = x_0 + \left(v_0 + \frac{F_0}{m\omega}\right)t - \frac{F_0}{m\omega^2}\sin\omega t$

2. F **depende de la velocidad** $F(v)$
   Tenemos que la ecuación de Newton es $F(v) = m\ddot{x}$. Integramos ambos lados con respecto al tiempo.
   $F(v)dt = m\frac{dv}{dt}dt = mdv$
   Entonces, separamos variables, y nos queda:
   $\int_{t_0}^{t} dt = m\int_{v_o}^{v} \frac{dv}{F(v)}$
   $t = z(v)$ con z la función que se consigue integrando.
   Luego, en principio podemos despejar v como función del tiempo y tener que $v = v(t)$ y podemos ahora integrar esto para obtener la posición como función del tiempo.

   Ejemplo: En un medio resistivo, tenemos una fuerza de resistencia $F = -mkv$ con mk el amortiguamiento.
   Por la segunda ley de Newton, tenemos que:
   $m\frac{dv}{dt} = -mkv$, lo cual se va a : $\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = -k$
   Integramos respecto a t y nos queda que: $\int_{t_0}^{t} \frac{1}{v}\frac{dv}{dt}dt = -k\int_{t_0}^{t} dt$
   Y entonces, nos queda que $ln\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) = -k(t - t_0)$
   Y por tanto, la solución es:

$$v(t) = v_0 e^{-k(t-t_0)}$$

   Y al integrar obtenemos que:

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}\left[1 - e^{-k(t-t_0)}\right]$$

   Ejemplo 2 (Lanzar hacia arriba y paracaer) Ahora nuestra fuerza total es de $-mg - mkv$.
   Entonces, $m\frac{dv}{dt} = -mg - mkv$.
   $\int_{t_0}^{t} dt = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{(g/k + v)k}$
   $t - t_0 = -\frac{1}{k}ln\frac{g/k + v(t)}{g/k + v_0}$
   Y por tanto, nos queda al despejar que:

$$v(t) = -\frac{g}{k} + \frac{1}{k}(g + kv_0)e^{-k(t-t_0)}$$

   Y podemos integrar de nuevo para obtener:

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{k}(t - t_0) - \left(\frac{g}{k^2} + \frac{v_0}{k}\right)\left[e^{-k(t-t_0)} - 1\right]$$

Ejemplo 3: ' Tiro Parabólico ' con resistencia

Simplemente la coordenada x es la del primer problema y la coordenada y es la del segundo:

$$\vec{r}(t) = \left(x_0 + \frac{v_{0x}}{k}[1 - e^{-k(t-t_0)}]\right)\widehat{\imath} + \left(y_0 - \frac{g}{k}(t - t_0) - \left(\frac{g}{k^2} + \frac{v_0}{k}\right)[e^{-k(t-t_0)} - 1]\right)\widehat{\jmath}$$

5.3. Principio de Trabajo-Energía

Trabajo que realiza una fuerza F sobre una partícula:

$$W = \int_{x_0}^{x} F dx$$

Por la segunda ley de Newton, tenemos que $F_R = ma$ y por tanto, el trabajo es:

$$W = \int_{x_0}^{x} F dx = \int_{x_0}^{x} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{t_o}^{t} m\frac{dv}{dt}v dt = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)dt$$

Para masa una constante. Y entonces, si definimos que T sea la energía cinética $T = \dfrac{mv^2}{2}$, tenemos que:

$$W = T - T_0$$

- **Fuerzas que dependen de la posición:** $F(x) = ma = m\dfrac{dv}{dt}$.

  Tenemos que $\displaystyle\int_{t_0}^{t} F(x(t))dt = \int_{t_0}^{t} m\frac{dv}{dt}dt = mv(t) - mv_0$

  Pero no concemos $x(t)$.

  Lo que haremos es calcular el trabajo como: $\displaystyle\int_{x_0}^{x} F(x')dx'$. Definimimos ahora una función $U(x)$ tal que:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad , \quad U(x) = -\int^{x} F(x)dx$$

  A esta función le llamamos energía portencial. Y entonces, nos queda que el trabajo es:

$$W = \int_{x_0}^{x} F(x)dx = -U(x) + U(x_0)$$

  Pero como el trabajo es igual al cambio de energía cinética, tenemos que:

$$T - T_0 = U_0 - U(x)$$

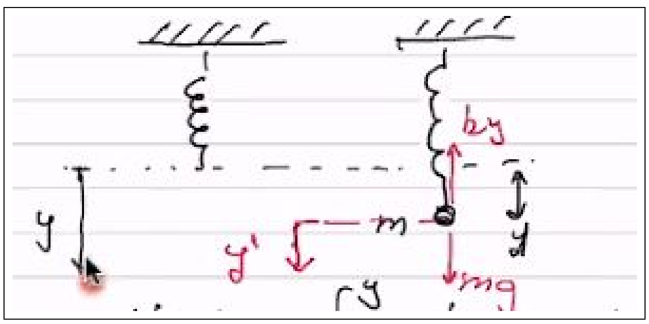
Y por tanto, tenemos que:

$$T(x) + U(x) = T_0 + U_0 = E_{tot}$$

Entonces, la energía total se conserva para las fuerzas que dependen solamente de la posición (unidimensional, sino no necesariamente). Por lo que se llaman fuerzas conservativas.

Notamos que $U(x) = \int^x F(x)dx$ está indeterminada hasta una constante aditiva. Esto nos permite escoger el lugar en el que $U = 0$.

Ejemplo (resorte y gravedad)



La fuerza es $F = mg - ky$. Donde y se mide desde la posición de equilibrio del resorte sin la masa. Enotnces, calculamos el potencial:

$$U(y) - \int^y (-ky + mg)dy =$$
$$\frac{k}{2}y^2 - mgy = \frac{k}{2}\left(y - \frac{mg}{k}\right)^2 - \frac{m^2g^2}{2k}$$

Ahora voy a hacer un cambio en la coordenada, voy a definir una coordenada primada $y' = y - \dfrac{mg}{k}$. Entonces, $y' = 0$ cuando $ky = mg$.

Luego se llega a que la energía total es:

$$\frac{1}{2}k(y')^2 + \frac{m}{2}(\dot{y}')^2 = E$$

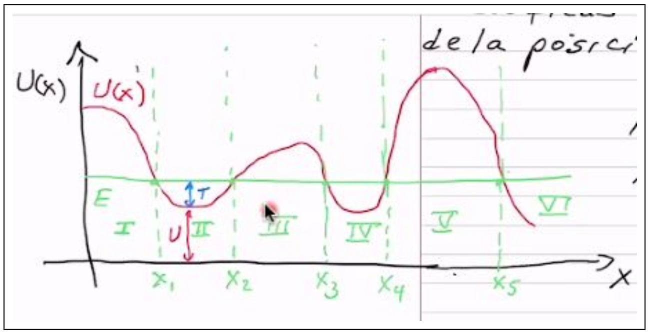
En el caso general, tenemos que $E = \dfrac{1}{2}mv^2 + U(x)$, por lo que tenemos que:

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

Y entonces, tenemos que:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\frac{dx}{dt}dt}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$
$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}} = t - t_0$$

Y al hacer esta integral voy a tener a $t = f(x)$ y luego la puedo despejar para obtener $x = x(t)$



Podemos graficar la curva de energía potencial como función de la posición (y poner también la energía total). La línea verde es la energía total. Sabemos que la energía cinética debe de ser mayor que 0. Por lo tanto, las regiones I, III, V son imposibles y no tienen sentido.
Por otro lado, en los puntos x_1, x_2 se tiene que $T = 0$ y se llaman puntos de retorno.

Punto de Equilibrio (estable) Un punto de equilibrio (estable) en este diagrama serían los mínimos con los de la región II y IV. Esto se debe a que la fuerza allí es 0 (porque $F = -dU/dx$) y además, si me muevo un poco a la izquierda o derecha, dU/dx tiene signo positivo, por lo que la fuerza es negativa y me lleva de vuelta al punto de equilibrio. Como la partícula tiene una velocidad proporcional a la distancia con E, la partícula se mueve alrededor de este punto, va y viene en un movimiento acotado.

Equilibrio Inestable: Corresponde a un máximo en la gráfica (que sea accesible). Si se mueve un poco la partícula, empieza a ganar más y más energía y se va.

Movimiento de una partícula alrededor de un punto Estable

Un movimiento alrededor de un equilibrio estable es periódico. La partícula se mueve desde el mínimo de potencial hasta el punto de retorno y luego regresa y llega hasta el otro punto de retorno y así sucesivamente.
Buscamos movimientos de amplitud chiquita, para que se pueda aproximar como un oscilador armónico simple. Entonces, el potencial cerca del punto de equilibrio x_0 se puede escribir como:

$$U(x) = U(x_0) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 + ...$$

Nos quedamos hasta el segundo término. Y por la libertad de una constante que se tiene al escoger U, escogemos que $U(x_0) = 0$. Y como es un punto de equilibrio $\frac{dU}{dx}(x_0) = 0$ estable $\frac{d^2U}{dx^2}(x_0) > 0$.

Entonces, tenemos que:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

Con $k = d^2U/dx^2(x_0) > 0$. La utilidad de esto es que estamos cambiando algún potencial difícil y raro por uno que sea cuadrático y correspondiente a un MAS.
Como $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$, la amplitud del movimiento es la distancia hasta los puntos de

retorno, en los que la energía es puramente potencial.
Y por lo tanto, la energía total del cuerpo es $E = \frac{1}{2}kA^2$.

Entonces, para el movimiento armónico simple, tenemos que:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \frac{1}{2}kA^2$$

Entonces, si definimos $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, nos queda que:
$\dot{x} = \pm\omega_0\sqrt{A^2 - x^2}$.
Y luego integramos con respecto al tiempo desde un tiempo t_0 hasta t y desde una posición x_o hasta $x(t)$.
Antes de integrar, hacemos el cambio de variable $x = A\sin\theta, dx = A\cos\theta d\theta$.

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\pm\sqrt{A^2 - x^2}} = \int_{t_0}^{t} \omega_0 dt$$
$$\Rightarrow \; \omega_0(t - t_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{A\cos\theta d\theta}{\pm\sqrt{A^2(1 - \sin^2\theta)}} = \theta - \theta_0$$

Entonces, si $v_0 > 0$, tenemos que $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.
Entonces, $\omega_0(t - t_0) = \theta - \theta_0 = \sin^{-1}(x/A) - \theta_0$.
Despejando, tenemos que:

$$x(t) = A\sin[\omega_0(t - t_0) + \theta_0]$$

O bien que $x = A\cos\theta_0\sin(\omega_0(t - t_0)) + A\sin\theta_0\cos(\omega_0(t - t_0))$.
La amplitud A y θ_0 son constantes de condiciones iniciales. Y $\omega_0^2 = k/m, T = 2\pi * \omega_0$

Si fuera un equilibrio inestable, tendríamos una solución parecida pero con cosh por lo que se va al carajo.

5.4. Osciladores Armónicos

Un oscilador armónico es algo que se mueve con una fuerza proporcional a el negativo del desplazamiento. Es decir, una fuerza de la forma $F(x) = -kx$ (con punto de equilibrio en $x = 0$ en este caso). Lo discutido en la sección anterior de ocsilaciones chiquitas cerca de un equilibrio estable son ejemplo de este tipo de movimiento.

Oscilador Armónico Simple

En este caso, solamente tenemos una fuerza restitutiva $-kx$. Entonces, la ley de Newton nos da la ecuación:

$$m\ddot{x} = -kx$$

La solución de este tipo de oscilador se puede ver que es sencillamente de la forma:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Por lo que tiene una freceuncia de $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ y un periodo de $T = \dfrac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Oscilador Amortiguado

Ahora tenemos una fuerza disipativa de amortiguamiento dada por $F_{amor} = -c\dot{x} = -2m\mu\dot{x}$ (la escribimos así porque nos simplificará luego).
Entonces, la segunda ley de Newton nos dice:

$$m\ddot{x} = -kx - 2m\mu\dot{x}$$

Entonces, definiendo $\omega_0^2 = k/m$ la frecuencia natural, nos queda que:

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Para resolver, proponemos una solución de la forma $x = Ae^{\alpha t}$ y os queda que α debe de cumplir que $\alpha^2 + 2\mu\alpha + \omega_0^2 = 0$. Por lo tanto:

$$\alpha = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

Y ya tenemos las dos soluciones:

$$x(t) = Ae^{-(\mu+\lambda)t} + Be^{-(\mu-\lambda)t}$$

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

Siempre y cuando $\mu \neq \omega_0$, sino no son soluciones independientes. Entonces, tenemos varios casos:

a) **Caso Subamortiguado:** $\mu < \omega_0$: En este caso, la λ es un número imaginario $i\nu$. Entonces, $\alpha = -\mu \pm iv$ y sabemos de EDO que la solución es entonces:

$$x(t) = Ce^{-\mu t}\cos(\nu t + \phi)$$

$$x(t) = e^{-\mu t}[C_1\cos(\nu t) + C_2\sin(\nu t)]$$

Y la curva se ve como un oscilador típico pero que va disminuyendo en amplitud dado por $e^{-\mu t}$. Tiene un 'periodo' de $T = \dfrac{2\pi}{\nu} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}}$.

Podemos considerar también la pérdida de energía. La pérdida por unidad de tiempo se debe al trabajo de la fuerza de amortiguamiento entre el tiempo. Es decir, $-\dfrac{dE}{dt} = -vF_{amor} = -\dot{x}(m\ddot{x} + m\omega_0^2 x)$ Donde $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$

b) **Caso Sobreamortiguado** $\mu > \omega_0$
En este caso, la λ es un número real, por lo que la solución a la EDO es simplemente:

$$x(t) = Ae^{-(\mu+\lambda)t} + Be^{-(\mu-\lambda)t}$$

Como $\mu > \lambda$, los dos términos disminuyen exponencialmente. Podemos encontrar A, B a partir de las condiciones iniciales. Resulta que B será positivo y A negativo y con $B > |A|$.
Se puede ver que la partícula volverá asintóticamente a la posición de equilibrio y no oscila.

c) Amortiguado Crítico $\mu = \omega_0$.
En este caso, la solución es:

$$x(t) = e^{-\mu t}(A + Bt)$$

La importancia de este caso es que, para las mismas condiciones iniciales, este es el caso en el que se regresa al equilibrio en el menor tiempo posible.

5.5. Oscilador Armónico Forzado (Resonancia)

En este caso tenemos una fuerza externa que depende del tiempo y que permite que el objeto siga oscilando. Se le agrega una fuerza que depende del tiempo y entonces la ecuación diferencial es:

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

La solución se consigue como la homogénea más una solución particular. La solución homogénea es cualquiera de la de los tres casos anteriores, pero en cualquier caso, es transitoria y desaparece. La solución que importa en el régimen permanente es la particular.

- **caso Sinusoidal:** Digamos que la fuerza es $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \theta)$

  Lo que hacemos es mejor suponer una fuerza compleja $F_0 e^{i(\omega t+\theta)}$ cuya parte imaginaria es la función que nos interesa. Luego la resolvemos y sacamos la parte imaginaria para obtener la solución verdadera de la ecuación original. Suponemos una solución de la forma $x(t) = Ae^{i(\omega t+\theta)}$.
  Sustituimos esto en la ecuación diferencial original y obtendremos que:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} e^{-i\phi}$$
$$\tan\phi = \frac{2\mu\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

La solución verdadera a la ecuación diferencial es la parte imaginaria de esto, es decir:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} \sin(\omega t + \theta - \phi)$$

Entonces, la solución estacionaria es de la misma frecuencia que la fuerza. Sin embargo, tiene un desfase ϕ y tiene una amplitud distinta. En la siguiente gráfica mostramos el desfase y la amplitud de la solución dependiendo del valor de ω (la frecuencia de la fuerza) con respecto a ω_0 (la frecuencia natural).

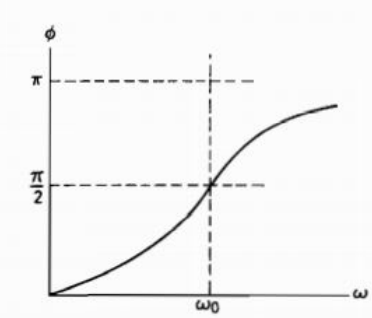


Fig. 4-10. Retraso de fase del oscilador armónico forzado.

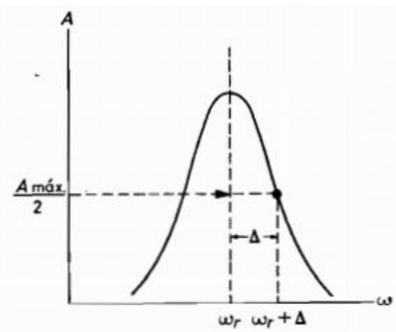


Fig. 4-11. Amplitud del oscilador armónico forzado en función de la frecuencia de la fuerza excitadora.

Para μ chiquito, la amplitud tiene un máximo de $F_0/(2m\mu\omega_0)$ dado a una frecuencia ω_r con $\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\mu^2$.
Esto se conoce como punto de resonancia. En este caso, la frecuencia de resonancia es $f_r = \omega_r/2\pi$.
Habrá una frecuencia $\omega_r + \Delta$ en la que la amplitud se hace un medio. Al valor Δ se le conoce como anchura media de la curva de resonancia.
Para μ chiquito, se puede aproximar la amplitud usando Taylor y se puede encontrar que:

$$\Delta = \mu\sqrt{3}$$

Energía: La energía media suministrada por ciclo debe de ser igual a la energía media perdida por la fuerza amortiguamiento. En un intervalo Δt, la magnitud de energía disipada por F_{amo} es $F_{amp}\Delta x = F_{amp}\dot{x}\Delta t$. Entonces, la diferencia de trabajo es:

$$\Delta W = 2m\mu\dot{x}^2\Delta t$$

De aquí, hallamos que la potencia media $\langle P\rangle$ disipada en un periodo T está dada por:

$$\langle P\rangle = \frac{1}{T}\langle W\rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} 2m\mu\dot{x}^2 dt = \frac{2m\mu A^2\omega^2}{T}\int_t^{t+T} \cos^2(\omega t + \theta - \phi) dt$$
$$= m\mu A^2\omega^2$$

Por lo tanto, tenemos que la potencia media disipada es:

$$\langle P\rangle = \frac{\mu F_0^2\omega^2}{m[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\mu^2\omega^2]}$$

El valor máximo de la potencia media disipada es de $F_0^2/(4m\mu)$ y se presenta cuando $\omega=\omega_0$.
Por lo que ω_0 es la frecuencia de resonancia de potencia media absorbida (frecuencia en la que la potencia es máxima).

6. Ecuaciones de Lagrange

Fuerzas Generalizadas

Las componentes de las fuerzas generalizadas se definen como:

$$Q_i = \vec{F}\cdot\vec{b}_i = F_x\frac{\partial x}{\partial q_i}+F_y\frac{\partial y}{\partial q_i}+F_z\frac{\partial z}{\partial q_i}$$

Entonces, la expresión de la fuerza será:

$$\vec{F} = (\vec{F}\cdot\vec{b}_l)\vec{\mathfrak{b}}_l = Q_l\vec{\mathfrak{b}}_l$$

Ejemplo (Coordenadas esféricas):

En este caso, los vectores base son:
$\vec{b}_i = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \widehat{e}_r$, $\vec{b}_2 = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = r\widehat{e}_\theta = \widehat{e}_\phi\times\vec{r}$, $\vec{b}_3 = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = r\sin\theta\widehat{e}_\phi = \widehat{k}\times\vec{r}$

Entonces, te nemos que las fuerzas generalizadas son:

- $Q_1 = \vec{F}\cdot\vec{b}_1 = F_r$
- $Q_2 = \vec{F}\cdot\vec{b}_2 = \vec{F}\cdot\widehat{e}_\phi\times\vec{r} = \widehat{e}_\phi\cdot\vec{r}\times\vec{F}$
- $Q_3 = \vec{F}\cdot\vec{b}_3 = \vec{F}\cdot\widehat{k}\times\vec{r} = \widehat{k}\cdot\vec{r}\times\vec{F}$

Entonces, la segunda y tercera fuerza generalizada en realidad tienen dimensiones de torcas. La Q_1 es la fuerza en la dirección radial, pero la Q_2, Q_3 son los componentes de la torca $\vec{r}\times\vec{F}$ en las direcciones $\vec{e}_\phi$ y $\vec{k}$.
De hecho, la fuerza generalizada para una coordenada angular es siempre la componente de la torca sobre el eje de rotación en el que gira dicho ángulo.

Trabajo: El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ cuando q_i varía en una cantidad infinitesimal Δq_i es:

- $\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s} = \sum_i \vec{F}\cdot\vec{b}_i\Delta q_i = \sum_i Q_i\Delta q_i$
- $\Delta W = \sum_l Q_l\vec{\mathfrak{b}}_l\cdot\sum_m\vec{b}_m\Delta q_m = \sum_{l,m} Q_l\Delta q_m\vec{\mathfrak{b}}_l\cdot\vec{b}_m = \sum_l Q_l\Delta q_m$

Entonces:

$$\Delta W = \textstyle\sum_l Q_l\Delta q_l$$

6.1. Momento Generalizado (de una partícula)

Los momentos generalizados los definimos como:

$$\mathfrak{p}_i = \vec{p} \cdot \vec{b}_i$$

Es decir, son los componentes del momento que van con la base recíproca. Entonces, tenemos que:

$$\vec{\mathfrak{p}}_i = m\vec{v} \cdot \vec{b}_i$$

Pero este $\vec{v} \cdot \vec{b}_i$ no es otra cosa que las componentes covariantes de la velocidad, que se obtenían como $v_i = \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_i} = (\frac{1}{2}v^2)$. Y por tanto, tenemos la siguiente ecuación para calcular los momentos generalizados:

$$\vec{\mathfrak{p}}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

Momento generalizado en coordenadas esféricas
Tenemos que:

- $\vec{\mathfrak{p}}_1 = \vec{p} \cdot \widehat{e}_r = \vec{\mathfrak{p}}_r$
- $\vec{\mathfrak{p}}_2 = \vec{p} \cdot (\widehat{e}_\phi \times \vec{r}) = \widehat{e}_\phi \cdot (\vec{r} \times \vec{p})$
- $\vec{\mathfrak{p}}_3 = \vec{p} \cdot (\widehat{k} \times \vec{r}) = \widehat{k} \cdot (\vec{r} \times \vec{p})$

Las dos últimas cantidades son en realidad componentes del vector de moemnto angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.
Y en general, para coordenadas angulares, el momento generalizado va a ser el componente del momento angular sobre el eje de rotación.
En coordenadas esféricas se tiene que la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

De donde obtenemos que las componentes generalizadas del momento son:

- $\vec{\mathfrak{p}}_1 = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$
- $\vec{\mathfrak{p}}_2 = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$
- $\vec{\mathfrak{p}}_3 = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2\theta\ \dot{\phi}$

O se puede llegar a estas expresiones usanod el vector de momento como masa por velocidad (en la base normal unitaria resférica) y sabando el producto punto con los vectores de la base normal (no unitarizados).

6.1.1. Segunda Ley de Newton

$\vec{F} = m\vec{a}$
Hacemos el producto punto con $\vec{b}_i$ de ambos lados, del lado izquierdo nos queda la fuerza generalizada y del derecho nos quedan los componentes covariantes de la aceleración.

$$\vec{F} \cdot \vec{b}_i := Q_i = m\vec{a} \cdot \vec{b}_i = ma_i$$

Entonces, $Q_i = ma_i$. Pero por la fórmula para componentes covariantes de la velocidad, tenemos:

$$Q_i = ma_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

Y entonces, llegamos a la ecuación general:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i}$$

Ejemplo: Partícula que se mueve en un plano bajo una fuerza central

Pensamos en una partícula sometida a una fuerza central dada por:

$$\vec{F} = -m\omega_0^2\vec{r} = -m\omega_0^2(x\widehat{i} + y\widehat{j})$$

Las coordenadas generalizadas son $q_1 = x$, $\vec{b}_1 = \widehat{i}$ y también $q_2 = y$, $\vec{b}_2 = \widehat{j}$. Y los factores de escala son $h_1 = h_2 = 1$.

Entonces, la energía cinética es: $T = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3} h_i^2\dot{q}_i^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$.

Luego, podemos calcular las fuerzas generalizadas:

$$Q_1 = \vec{F} \cdot \vec{b}_1 = -m\omega_0^2 x \quad , \quad Q_2 = \vec{F} \cdot b_2 = -m\omega_0^2 y$$

Y las derivadas de la energía cinética son:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

Entonces, sustituimos en la ecuación de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y$$
$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -m\omega_0^2 y$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$
$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -m\omega_0^2 x$$

Y entonces, nos queda que las ecuaciones de movimiento son:

$$x = A_x \cos(\omega_0 t + \phi_x)$$
$$y = A_y \cos(\omega_0 t + \phi_x)$$

Lo cual dibuja una elipse.
En el caso más general en el que las frecuencias son distintas para x, y, los dibujos se llaman figuras de Lissajous.

En coordenadas polares:
Las coordenadas son r, ϕ y los vectores base generalizados son $\vec{b}_1 = \widehat{e}_r \quad , \quad \vec{b}_2 = r\widehat{e}_\phi \qquad h_r = 1, h_\phi = r$

Luego, la fuerza es $\vec{F} = -m\omega_0^2\vec{r} = -m\omega_0^2 r\widehat{e}_r$. Por lo que las fuerzas generalizadas son:
$Q_r = \vec{F} \cdot \vec{b}_r = (-m\omega_0^2 r\widehat{e}_r) \cdot (\widehat{e}_r) = -m\omega_0^2 r$
$Q_\phi = \vec{F} \cdot \vec{b}_\phi = (-m\omega_0^2 r\widehat{e}_r) \cdot (r\widehat{e}_\phi) = 0$.

Luego, tenemos que la energía cinética es $T = \dfrac{m}{2}\sum_l h_l^2 \dot{q}_l^2 = \dfrac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$.
Luego, calculamos las derivadas de T para poder meterlas en la ecuación de Lagrange:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$
$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$$

Luego, lo metemos a las ecuaciones de Lagrange y nos queda:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r$$
$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\phi}^2 = -m\omega_0^2 r$$
$$\Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = -m\omega_0^2 r \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\dot{\partial T}}{\partial \phi} = Q_\phi$$
$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \quad (2)$$

Por otro lado, tenemos que la torca se define como $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Y el momento angular se define como $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$.
Luego, se puede ver que: $\dfrac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$.

De la segunda ecuación tenemos que $mr\dot{\phi} = cte = l_z$. Y que la torca sea cero se ve en que $Q_\phi = 0$.

Entonces, tenemos que $\dot{\phi} = \frac{l_z}{mr^2}$. Luego sustituimos esto en la primer ecuación:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\left(\frac{l_z}{mr^2}\right)^2 = -m\omega^2 r \\
&\Rightarrow m\ddot{r} - \frac{l_z^2}{mr^3} + m\omega_0^2 r = 0 \\
&\Rightarrow m\dot{r}\ddot{r} - \frac{l_z^2}{mr^3}\dot{r} + m\omega_0^2 r\dot{r} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2}\right) + \frac{l_z^2}{2m}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r^2}\right) + \frac{m\omega_0^2}{2}\frac{dr^2}{dt} = \frac{d}{dt}(cte) \\
&\Rightarrow \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l_z^2}{2mr^2} + \frac{r^2 m\omega_0^2}{2} = cte \\
&\Rightarrow \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m^2r^4}{2mr^2}\dot{\phi}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} = cte \\
&\Rightarrow \frac{m}{2}\left(\dot{r} + r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{m\omega_0^2}{2}r^2 = E
\end{aligned}
$$

Esta ecuación no es otra cosa que la conservación de la energía. La primera parte es la energía cinética y la segunda es la potencial. Porque es la integral de la fuerza respecto a r

6.1.2. Constricciones

Una constricción se refiere a cuando la partícula no puede moverse en todo el espacio y está restringida a una región.

Constricción Holonómica: Es una constricción de la forma:

$$\Phi(q_1, q_2, q_3, t) = 0$$

Si no dependen del tiempo, se llaman **holonómicas** y si dependen del tiempo se llaman **reónomas**.

La superficie realiza una fuerza de constricción sobre la partícula y en caso de que no haya fricción, la fuerza será perpendicular a la superficie de constricción. Entonces:

$$\vec{R} = \lambda\nabla\phi$$

Por ejemplo, si una partícula se mueve en un plano, la constricción en el plano xy será de $\phi_1(x, y, z) = y - x\tan\theta = 0$.

La fuerza de constricción también se puede separar en sus componentes generalizadas como:

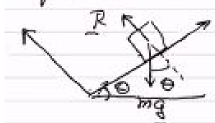
$$
\begin{aligned}
R_i &= \vec{R}\cdot\vec{b}_i \\
&= \lambda\nabla\phi\cdot\vec{b}_i \\
&= \lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}, \frac{\partial y}{\partial q_i}, \frac{\partial z}{\partial q_i}\right) = \lambda\frac{\partial\phi}{\partial q_i}
\end{aligned}
$$

Y entonces, la ecuación de Lagrange queda como:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_i}}$$

Ejemplo

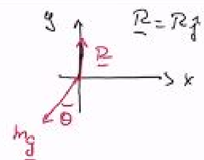
Regresemos al ejemplo del plano inclinado



$\phi_1(x,y,z) = y = 0$

$\phi_2(x,y,z) = z = 0$

Como las fuerzas están en el plano x–y, eliminaremos la coordenada z



$\underline{mg} = -mg\,\mathrm{sen}\theta\,\hat{i} - mg\cos\theta\,\hat{j}$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial q_i}$

$\phi(x,y) = y = 0$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \,, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 1$

$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \;; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \Big\} \; q_1 = x,\; q_2 = y \;\; b_1 = \hat{i},\; b_2 = \hat{j}$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \;; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$

$Q_1 = \underline{mg}\cdot\hat{i} = -mg\,\mathrm{sen}\theta \,, \quad Q_2 = \underline{mg}\cdot\hat{j} = -mg\cos\theta$

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg\,\mathrm{sen}\theta \\ m\ddot{y} &= -mg\cos\theta + \lambda \end{aligned}}$$

de la ec. de constricción $y = 0,\; \dot{y} = 0,\; \ddot{y} = 0$

$\therefore \boxed{\lambda = mg\cos\theta}$

la primera ecuación es la ec. de mov.

$\ddot{x} = -g\,\mathrm{sen}\theta = cte$ que se puede resolver sin problema

la 2ª ecuación nos da la λ y $\therefore$ tenemos la fuerza de constricción: $\boxed{\underline{R} = mg\cos\theta\,\hat{j}}$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial q_i}$

$\underline{F}_n = m\underline{a} = m\ddot{\underline{r}}$

Supongamos que en el problema anterior no queremos obtener la fuerza de constricción

$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ y $\phi = y = 0$

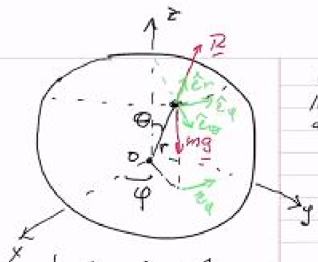
Entonces usamos desde el comienzo la ec. de constricción para eliminar una de las coordenadas (y en este caso) $\dot{y} = \ddot{y} = 0$

$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \,, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \,, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} = Q_1 = -mg\,\mathrm{sen}\theta$

$m\ddot{x} = -mg\,\mathrm{sen}\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -g\,\mathrm{sen}\theta}$ ec. de movimiento

sólo obtenemos una ecuación ya que eliminamos a la variable y; si queremos obtener la fuerza de constricción seguimos el camino de la página anterior



Péndulo esférico

Una partícula está confinada a moverse en la superficie de una esfera de radio l, bajo la acción de la fuerza de gravedad.

Obtendremos las ecuaciones de movimiento

$q_1 = r,\ h_1 = 1\ ;\ q_2 = \theta,\ h_2 = r\ ;\ q_3 = \varphi,\ h_3 = r\,\text{sen}\,\theta$

ec. de constricción $\Phi = r - l = 0$

$\underline{b}_1 = \hat{e}_r,\ \underline{b}_2 = r\hat{e}_\theta$

$\underline{b}_3 = r\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_\varphi$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\text{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right),\quad \underline{F} = -mg\hat{k}$$

$$\hat{k} = (\hat{k}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r + (\hat{k}\cdot\hat{e}_\theta)\hat{e}_\theta + (\hat{k}\cdot\hat{e}_\varphi)\hat{e}_\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$$

$$\hat{k} = +mg\cos\theta\,\hat{e}_r - mg\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$\underline{F} = -mg\cos\theta\,\hat{e}_r + mg\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 1\ ;\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = $$

$$Q_1 = \underline{F}\cdot\underline{b}_1 = -mg\cos\theta$$

$$Q_2 = \underline{F}\cdot\underline{b}_2 = mgr\,\text{sen}\,\theta,\quad Q_3 = \underline{F}\cdot\underline{b}_3 = 0$$

RMHV_ ECUNA

3 ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$$

$q_1 = r$ $\quad \boxed{m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\,\text{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2) = -mg\cos\theta + \lambda}$

q_2: $\quad \boxed{\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mr\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = mgr\,\text{sen}\,\theta}$

q_3: $\quad \frac{d}{dt}(mr^2\text{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}) = 0 \qquad Q_3 = \hat{k}\cdot\underline{r}\times\underline{F} = 0$

$\boxed{mr^2\text{sen}^2\theta\,\dot{\varphi} = P_3} \qquad P_3 = l_z = \hat{k}\cdot(\underline{r}\times\underline{P}) = \text{cte}$

Ahora usamos $r = l$,

$\dot{r} = \ddot{r} = 0$

Entonces $\Rightarrow$

$\boxed{-ml\dot{\theta}^2 - ml\,\text{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2 = -mg\cos\theta + \lambda}$ ec. (1)

de la ec. (1)

$\boxed{\lambda = mg\cos\theta - ml(\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2)}$

ec. (1.a)

$\boxed{ml^2\ddot{\theta} - ml^2\text{sen}\,\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = mgl\,\text{sen}\,\theta}$ ec. (2)

$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{P_3}{ml^2\text{sen}^2\theta}}$ ec. (3)

substituimos (3) en (2)

RMHV_FCUNAH

de la ec. (2b)

$$\frac{2}{\ell}(mg\ell\cos\theta - E) = -m\ell(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2)$$

ec. (2.c)

substituyendo ec (2.c) en ec. (1.a) obtenemos la fuerza de constricción

$$\boxed{\lambda = \frac{3mg\ell\cos\theta - 2E}{\ell}}$$

$$\boxed{\vec{R} = \lambda\hat{e}_r}$$

$$\nabla\Phi = \sum_\ell \frac{1}{h_\ell}\frac{\partial\Phi}{\partial q_\ell}\hat{e}_\ell$$

$$m\ell^2\ddot\theta - \frac{m\ell^2\sin\theta\cos\theta\, p_3^2}{m^2\ell^4\sin^4\theta} - mg\ell\sin\theta = 0$$

queda una ecuación en θ y sus derivadas

$$m\ell^2\ddot\theta - \frac{\cos\theta\, p_3^2}{m\ell^2\sin^3\theta} - mg\ell\sin\theta = 0$$

factor integrante $\dot\theta$

$$m\ell^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot\theta^2}{2}\right) + \frac{p_3^2}{m\ell^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sin^2\theta}\right) + mg\ell\frac{d}{dt}\cos\theta = \frac{d\,cte}{dt}$$

$$\boxed{\frac{m}{2}\ell^2\dot\theta^2 + \frac{p_3^2}{2m\ell^2\sin^2\theta} + mg\ell\cos\theta = cte}$$ ec. (2.a)

substituyendo p_3 de la ecuación (3)

$$\boxed{\frac{m}{2}\left(\ell^2\dot\theta^2 + \ell^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right) + mg\ell\cos\theta = T + U = E = cte}$$

ec. (2.b)

$\therefore$ La constante en la ec (2.a) es la energía $E = T + U$

Tomamos la ec. (2.a), dividiendo entre ℓ^2

$$\boxed{\frac{m}{2}\dot\theta^2 + \frac{p_3^2}{2m\ell^4\sin^2\theta} + \frac{mg}{\ell}\cos\theta = \frac{E}{\ell^2} = \mathcal{E}}$$

Esta es una ecuación de primer orden en θ. Formalmente se puede resolver. La solución queda en términos de integrales elípticas. Pero podemos averiguar algo más sobre el comportamiento con la variable θ

Esta ecuación tiene la forma

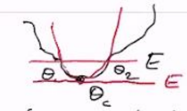
$$\frac{m}{2}\dot q^2 + U_{ef}(q) = \mathcal{E}$$ ecuación en una variable

$$T + U_{ef}(q) = \mathcal{E}$$

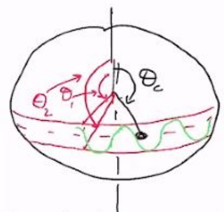
Existe algún valor de $\theta = \theta_c$ que sea un punto de equilibrio estable?

$$U_{ef} = \frac{p_3^2}{2m\ell^4\sin^2\theta} + \frac{mg}{\ell}\cos\theta$$

$$\frac{\partial U_{ef}}{\partial\theta} = -\frac{p_3^2\cos\theta}{m\ell^4\sin^3\theta} - \frac{mg}{\ell}\sin\theta$$



¿máximo ó mínimo?



Si se le da una energía ΔE el valor de θ oscilará entre θ_1 y θ_2 y la frecuencia es $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m}\frac{d^2U}{d\theta^2}\Big|_{\theta_c}$

haciendo $\frac{\partial U}{\partial\theta}\Big|_{\theta_c} = 0$ obtenemos

$$\boxed{\frac{P_3^2}{ml^4 \operatorname{sen}^4\theta_c} = -\frac{mg}{l\cos\theta_c} \quad \text{en } \theta = \theta_c}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta + 3\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\frac{P_3^2}{ml^4} - \frac{mg}{l}\cos\theta$$

evaluando en $\theta = \theta_c$ y usando el resultado enmarcado

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\Big|_{\theta_c} = -\frac{mg}{l}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta_c + 3\cos^2\theta_c + \cos^2\theta_c}{\cos\theta_c}\right]$$

$$= \frac{mg}{l}\frac{1+3\cos^2\theta_c}{-\cos\theta_c} > 0 \quad \text{si } \frac{\pi}{2} < \theta_c < \pi$$

$$< 0 \quad \text{si } 0 < \theta_c < \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ $\frac{\pi}{2} < \theta_c < \pi$ Para este valor $\theta = \theta_c$ tenemos un péndulo cónico

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}\frac{1+3\cos^2\theta_c}{-\cos\theta_c} \; ; \quad \frac{\pi}{2} < \theta_c < \pi$$

6.1.3. Ejercicio

(152)

$$\underline{F}^{cons} = -\nabla U(x,y,z)$$

$$Q_i^{cons} = \underline{F}^{con}\cdot\underline{b}_i = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)$$

$$Q_i^{cons} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Si la fuerza resultante es conservativa

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad \therefore$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} = 0 \; ; \quad \frac{\partial U(q_1,q_2,q_3)}{\partial \dot q_i} = 0$$

$U(q_1,q_2,q_3)$ depende sólo de las coordenadas y no de las velocidades generalizadas

(153)

$L \equiv T - U$ Lagrangiana

para fuerzas conservativas $\boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$

$i = 1, 2, 3$

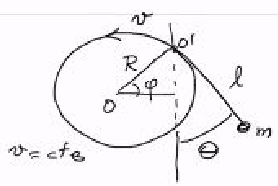
ecs. de Lagrange del movimiento

Si además tenemos fuerzas no-conservativas y fuerzas de constricción, las ecs. del movimiento son:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{n.c.} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, 3}$$

RMHV_FCUNAM

(154)



el movimiento es en el plano vertical del círculo

$R\dot{\varphi} = v = cte$

$\dot{\varphi} = \dfrac{v}{R}$

$\varphi = \dfrac{v}{R}(t - t_0)$

(5.5) Obtenga las ecuaciones de movimiento

$x = R\cos\varphi + l\,\mathrm{sen}\,\Theta \quad ; \quad \dot{x} = -R\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi + l\dot{\Theta}\cos\Theta$

$y = R\,\mathrm{sen}\,\varphi - l\cos\Theta \quad ; \quad \dot{y} = R\dot{\varphi}\cos\varphi + l\dot{\Theta}\,\mathrm{sen}\,\Theta$

$T = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dfrac{m}{2}[R^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\Theta}^2 + 2Rl\dot{\varphi}\dot{\Theta}(\mathrm{sen}\,\Theta\cos\varphi - \cos\Theta\,\mathrm{sen}\,\varphi)]$

$T = \dfrac{m}{2}[R^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\Theta}^2 + 2Rl\dot{\Theta}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}(\Theta - \varphi)]$

$U = mg(R\,\mathrm{sen}\,\varphi - l\cos\Theta)$

$L = \dfrac{m}{2}[v^2 + l^2\dot{\Theta}^2 + 2lv\dot{\Theta}\,\mathrm{sen}(\Theta - \varphi)] - mg(R\,\mathrm{sen}\,\varphi - l\cos\Theta)$

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \Theta} = 0$

YV-FCUNAM

155

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m l v \dot{\theta} \cos(\theta-\varphi) - m g l \,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} + m l v \,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \ddot{\theta} + m l v \cos(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})$$

Substituyendo en las ecs. de Lagrange

$$m l^2 \ddot{\theta} + m l v \cos(\theta-\varphi)(\cancel{\dot{\theta}}-\dot{\varphi}) - \cancel{m l v \dot{\theta} \cos(\theta-\varphi)} + m g l \,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$\dot{\varphi} = \frac{v}{R}$

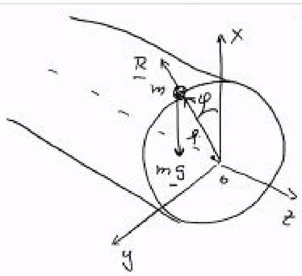
$$m l^2 \ddot{\theta} - m l v \frac{v}{R} \cos(\theta-\varphi) + m g l \,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$\boxed{m l \ddot{\theta} - m \frac{v^2}{R} \cos(\theta-\varphi) + m g \,\mathrm{sen}\,\theta = 0}$$

ecuación de movimiento

RHMU-FCUNAM

156



Se mueve bajo la acción de la gravedad en la superficie de un cilindro horizontal liso

(5.7) a) Obtener ecs. de Lagrange del movimiento.

Coordenadas cilíndricas

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \quad U = m g \rho \cos\varphi$$

ec. de constricción $\Phi = \rho - a = 0$ ec. del cilindro en coordenadas cilíndricas

ecs. de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - m g \rho \cos\varphi$$

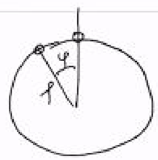
ρ: $\frac{\partial L}{\partial \rho} = m \rho \dot{\varphi}^2 - m g \cos\varphi$; $\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 1$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\ddot{\rho}$$

RHMV_FCUNAM

157

b)



usamos $\rho = a$

$$-ma\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi = \lambda$$

$$ma^2\ddot{\varphi} - mga\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0$$

multiplicamos la 2ª ecuación por el factor integrante $\dot{\varphi}$

$$\boxed{m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi = \lambda}$$

φ: $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = mg\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$; $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}$; $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi})$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) - mg\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0}$$

z: $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$; $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0$

$\therefore$ $m\dot{z} = cte \Rightarrow \boxed{\dot{z} = cte}$

b) mov. en plano vertical comenzando en la parte superior del cilindro con una velocidad muy pequeña. Encontrar la fuerza de reacción (fuerza de constricción) como función de la posición

RHMV_FCUNAM

158

$$\lambda = -ma\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi$$

$$\lambda = -\frac{2E + 2mg\cos\varphi\, a}{a} + \frac{mga\cos\varphi}{a}$$

$$\lambda = \frac{3mga\cos\varphi - 2E}{a}$$

$$ma^2\frac{d}{dt}\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + mga\frac{d}{dt}(\cos\varphi) = \frac{d\,cte}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{m}{2}a^2\dot{\varphi}^2}_{T} + \underbrace{mga\cos\varphi}_{U} = \underbrace{cte = E}_{E}$$

Se conserva la energía

queremos λ ; $R = \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\hat{e}_\rho$

de la ec. arriba

$$ma\dot{\varphi}^2 = \frac{2E}{a} - 2mg\cos\varphi$$

En la parte superior del cilindro $v_0 = 0$, $T_0 = 0$

$$E_0 = E = T_0 + U_0 = mga$$

$$\lambda = 3mg\cos\varphi - 2mg$$

si se separa del cilindro $\lambda = 0$

$$3\cancel{mg}\cos\varphi = 2\cancel{mg} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\varphi = \cos^{-1}\frac{2}{3}} \quad \text{ó} \quad \boxed{h = a\cos\theta = \frac{2}{3}a}$$

7. Movimiento Conservativo

Fuerza Conservativa: Son fuerzas que dependen de la posición tales que el trabajo realizado por ellas no depende de la trayectoria entre la posición inicial y la final.

Principio de Trabajo-Energía:
Si F es una fuerza que depende de la posición. Por la segunda ley de Newton se tiene que $\vec{F}_R = m\vec{a}$. Entonces, el trabajo realizado es:

$$W = \int_1^2 \vec{F}_R \cdot ds = \int_1^2 m\ddot{s} \cdot \dot{s}dt = T_2 - T_1$$

Cuando tengo una furza conservativa, el trabajo no depende de la trayectoria. Y por tanto, puedo definir una función $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $\int_p^1 \dot{F} \cdot ds = -U(1)$
Entonces, el trabajo entre doe puntos es:

$$W_{1,2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot ds = \int_1^2 \vec{F} \cdot ds = -\int_p^1 F ds + \int_p^2 F ds = U(1) - U(2)$$

Entonces, nos queda el teorema de trabajo energía $T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow \quad U_1 + T_1 = U_2 + T_2$

Luego, tenemos que:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Y la energía potencial se puede calcular a partir de conocerla en un punto y de calcular el trabajo como:

$$U(2) = U(1) + W_{12}$$

Condiciones Necesarias y suficientes

Si la fuerza se puede escribir como el gradiente de una función escalar, entonces el rotacional vale cero.
El regreso también es válido por el teorema de Stokes (siempre y cuando F sea lo suficientemente bonita)

Las fuerzas centrales son ejemplos de fuerzas conservativas.

7.0.1. Resumen y qué pasa con fuerzas conservativas

Las ecuaciones de Lagrange en su forma más general dicen que si T es la energía cinética (en las coordenadas que correspondan q_1, q_2, q_3) que como sabemos, para coordenadas ortogonales toma la forma $h_i^2 \dot{q}_i^2$. Y consideramos la fuerza generalizada $Q_i = \vec{F} \cdot \vec{b}_i$ donde $\vec{F}$ es la fuerza neta, entonces:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Esto es simplemente la segunda ecuación de Newton. El lado derecho es ma_i usando que $a_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial v^2}{\partial q_i}$ y el lado derecho es el componente de la fuerza.

Restricción:
Digamos ahora que hay una restricción del tipo $\phi(q_1, q_2, q_3) = 0$.
Entonces tenemos dos opciones, podemos escribir las ecuaciones de Lagrange y una vez que las tengamos, sustituir la restricción (o incluso desde antes) y obtener las ecuaciones de movimiento sin restricciones. O bien, podemos considerar que la restricción genera una fuerza de restricción $\vec{R} = \lambda \nabla \phi$ (porque es perpendicular a la superficie), con el gradiente calculado en las coordenadas que sean. Entonces, la fuerza generalizada de restricción sería $R_i = \vec{R} \cdot b_i = \lambda \nabla \phi \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_i}$. Y entonces, la ecuación queda como:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_i}$$

Con esto se pueden calcular las ecuaciones de Lagrange, de movimiento e incluso calcular el valor λ para conocer la fuerza de constricción $\vec{R} = \lambda \nabla \phi$

Conservativas Digamos que algunas de las fuerzas presentes son conservativas, por lo que $\vec{F} = -\nabla U$. Entonces, las fuerzas generalizadas en este caso son $F_i = -\nabla U \cdot b_i = -\nabla U \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$.
Estas fuerzas conservativas las podemos pasar del lado izquierdo de la ecuación de Lagrange tomando en cuenta que $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$. Entonces, si definimos $L = T - U$, nos queda:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + \frac{\partial \phi}{\partial q_i}$$

Donde Q_i son las fuerzas no conservativas que nos quedaron. Y ϕ es la restricción del movimiento si es que existe.

7.1. Movimiento en un campo eléctrico uniforme

Digamos que tenemos un campo $\vec{E} = E\vec{k}$. Entonces, las ecuaciones de movimiento son:

$$m\ddot{x} = m\ddot{y} = 0 \quad , \quad m\ddot{z} = eE$$

Se trata de un movimiento parabólico y la energía potencial es $U = -eEz$.

7.2. Movimiento en un campo magnético uniforme

Digamos que tenemos un campo magnético $\mathbf{B} = B\widehat{k}$. Entonces, usando la fuerza de Lorenz $\vec{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ en coordenadas cartesianas, tenemos que las ecuaciones de movimiento son :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= eB\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -eB\dot{x} \\ m\ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

Este campo no realiza trabajo, por lo que la velocidad será constante. La fuerza magnética será en todo momento perpendicular a la partícula y con magnitud constante $F^m = ev_\perp B$. Podemos combinar las dos ecuaciones de movimiento en una sola usando un trucazo de sumarlas y con una constante imaginaria como:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x+iy) = \frac{eB}{m}\dot{y} - \frac{ieB}{m}\dot{x} = -\frac{ieB}{m}\frac{d}{dt}(x+iy)$$

Entonces, su solución es simplemente:

$$\begin{aligned} x + iy &= C_1 e^{-i(eB/m)t} + C_2 \\ &= Ae^{-i(eBt/m+\phi)} + a + ib \end{aligned}$$

Entonces, la función x, y son las partes reales e imaginarias es esta expresión, es decir:

$$x = a + A\cos(\omega t + \phi)$$
$$y = b - A\sin(\omega t + \phi)$$

Lo cual describe un círculo de radio A, con centro en (a, b) y con frecuencia $\omega = \frac{eB}{m}$. En este caso, queda en sentido horario. Lo que quiere decir que el vector de velocidad angular es $\vec{\omega} = -\omega\hat{k}$

La magnitud del radio se puede obtener a partir de la velocidad perpendicular $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_\perp^2 = A^2\omega^2$. Por lo que: $A = \left|\frac{v_\perp m}{eB}\right|$

7.3. Movimiento en un campo E y B uniformes

Escogemos el campo $\vec{B}$ a lo largo del eje z y que el campo E con componentes en la dirección z y en la dirección x (o sea, escogemos la dirección x en la dirección del componente de E perpendicular a B). Entonces nos queda:

$$m\ddot{x} = e\dot{y}B + eE_x$$
$$m\ddot{y} = -e\dot{x}B$$
$$m\ddot{z} = eE_z$$

La última ecuación es un MRUA en la dirección z, por lo que:

$$z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m}t^2$$

Las primeras dos ecuaciones se pueden escribir usando el truquito de los complejos como:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x + iy) = -ieB\frac{d}{dt}(x + iy) + eE_z$$

Es una ecuación de segundo orden no homogénea. Cuya solución es:

$$x + iy = C_1 e^{i(eB/m)t} + C_2 - \frac{iE_x}{B}t$$

Donde $C_1 = Ae^{-i\phi}, C_2 = a + ib$. Enotnces, sacando la parte real e imaginaria obtenemos que:

$$x = A\cos(\omega t + \phi) + a$$
$$y = -A\sin(\omega t + \phi) + b - \frac{E_x}{B}t$$

Lo cual en el caso más general describe un cicloide en el plano xy, que se combina con un movimiento a velocidad constante en la dirección z. Si los campos son perpendiculares, lo que significa que $E_z = 0$. Una partícula que se mueve perpendicular a ambos campos se desviará. A menos que las fuerzas se compensen, es decir:

$$eE = evB$$

En cuyo caso la partícual sale recta. Por ello, sirve como un selector de velocidades.

7.4. El Oscilador Isotrópico en un campo Magnético

La energía potencial del oscilador isotrópico es:

$$U = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$$

Consideramos ahora que se le agrega un campo magnético a lo largo del eje z. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -m\omega_0^2 x + eB\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -m\omega_0^2 y - eB\dot{x} \\ m\ddot{z} &= -m\omega_0^2 z \end{aligned}$$

Consideramos una variable compleja dada por $X = x + iy$ y entonces nos queda que:

$$m\ddot{X} = -m\omega_0^2 X - ieB\dot{X}$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$X = Ce^{i(\alpha t + \phi)}$$

donde α es una raíz de la ecuación característica $-m\alpha^2 - eB\alpha + m\omega_0^2 = 0$
$\alpha = -\dfrac{eB}{2m} \pm \sqrt{\dfrac{e^2B^2}{4m^2} + \alpha_0^2}$ Si el campo magnético es chiquito, se puede aproximar como:

$$\alpha = \pm\omega_0 - \omega_l$$

Donde $\omega_L = \dfrac{eB}{2m}$.
Con esta aproximación, las dos solucioens homogéneas son:

$$\begin{aligned} X_1 &= C_1 e^{i[(\omega_0 - \omega_l)t + \phi_1]} \\ X_2 &= C_2 e^{-i[(\omega_0 + \omega_l)t + \phi_2]} \end{aligned}$$

El movimiento se encuentra al obtener la parte real e imaginaria de estas funciones. La cantidad $-\omega_L \widehat{k}$ se llama preseción de Larmor.

Teorema de Larmor: Siempre que tengamos una partícula cargada moviéndose en una órbita limitada en una región finita del espacio en la que actúa un campo de fuerzas centrales, la adición de un pequeno campo magnético produce una precesión superpuesta al movimiento de la partícula cargada.

7.5. Funciones energía potencial que dependen de la velocidad

Digamos que tenemos una partícula cargada que se mueve en un camo de fuerza conservativo de un campo magnético. Entonces, no podemos incluir las fuerzas magnéticas en el Lagrangiano todavía y tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i$$

Reescribiremos el término del lado derecho para poder meterlo del lado izquierdo. Para ello recordamos que para un campo $\mathbf{B}$ constante tiene un potencial $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$ tal que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Entonces, vemos que:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = -2\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

Entonces, podemos ver que:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = -2\frac{d\mathbf{A}_i}{dt} = -2\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{v} \times \mathbf{A})$$

Porque $\mathbf{A}_i = \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$. Pero también podemos ver que $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = -\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$. Entonces, tenemos mejor que:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = -\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

Enotnces, regresando a la ecuación de Laplace, ya podemos meter el término de este lado:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial x_i}(T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = 0$$

Luego, podemos definir el **Lagrangiano con Campo Magnético** como:

$$L = T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

Y ahora sí las ecuaciones de movimiento de una partícula en un campo de fuerzas conservativas y un campo uniforme magnético es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

De hecho resulta que esto se cumple igual si el campo $\mathbf{B}$ no es constante. Y además, en coordenadas generalizadas también se tiene que con $L = T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

O bien, se puede agregar el potencial magnético a la U.

Definición (Momento Generalizado)
El momento generalizado en la dirección q_i se define como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$$

Es decir, la derivada con respecto a la velocidad del Lagrangiano. Para fuerzas independientes de la velocidad (como las fuerzas conservativas que hemos usado que no son magnéticas), se tiene que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

En los problemas en los que sí hay fuerzas magnéticas, encontramos que el momento generalizado es:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = (m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}_i = mv_i + eA_i$$

7.6. Conservación de la Energía (Función Hamiltoniana)

Partimos de las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = 0$$

Vamos a verificar la conservación de la energía para el caso en que la energía potencial U sea también función de la velocidad. Las fuerzas generalizadas expresadas a partir de la función de energía potencial dependiente de la velocidad,$U(q_i, \dot{q}_i, t)$ son:

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Y entonces, el trabajo realizado por dichas fuerzas generalizadas es:

$$dW = \sum_{i=1}^{3} Q_i dq_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}\right) dq_i$$

Entonces, la ecuación de Lagrange nos indica que:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}\right) dq_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) dq_i$$

O bien, que:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i\right) = 0$$

Utilizando la relación

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{dq_i}{dt} dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) dt - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\, dt = d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i, \tag{6–132}$$

podemos expresar la ecuación (6–131) en la forma

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i\right\} = 0$$

o

$$d\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt = 0, \tag{6–133}$$

ya que

$$dL = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{6–134}$$

Si el lagrangiano L no contiene explícitamente el tiempo, esto es, si

$$\partial L/\partial t = 0, \tag{6–135}$$

la ecuación (6–133) se reduce a

$$d\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0,$$

Lo cual nos da el teorema de conservación:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = cte$$

Entonces, por la definición de momentos generalizados, nos queda que siempre y cuando L no dependa explícitamente del tiempo, entonces:

$$\sum_{i=1}^{3} p_1\dot{q}_i - L = cte$$

Enotnces, en general, definimos el **Hamiltoniano** como:

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i\dot{q}_i - L$$

Por ejemplo: Digamos que tenemos una partícula cargada que se mueve bajo la acción combinada de un campo de fuerzas conservativas y un campo magnético. Entonces, las cantidades de momento generalizado serán:

$$p_i = mv_i + eA_i$$

Y entonces, el Hamiltoniano es:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{3} p_i\dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{2} mv_i v_i^* + \sum_{i=1}^{3} eA_i v_i^* - L \\ &= mv^2 + e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - (\frac{1}{2}mv^2 - U + e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = T + U \end{aligned}$$

7.7. Ecuaciones de Movimeinto de Hamilton

La función Hamiltoniana definida por la ecuación $H = \sum_{i=1}^{2} p_i\dot{q}_i - L$ es para valores de $q_i, \dot{q}_i, p_i$ que satisfagan la ecuación estacionaria 6.126) $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$

Esto podemos verificarlo considerando la variación de H, que es:

$$dH = \sum_{i=1}^{2}\left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

Para valores de $q_i, \dot{q}_i, p_i$ que satidfagan la ecuaión 6.126, se cumple que $\sum_{i=1}^{3}\left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)d\dot{q}_i$ se anulan. Por lo tanto, se halla en consecuencia que:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Como nos limitamos al empleo de sólo aquéllos que $q_i, \dot{q}_i, p_i$ satisfagan 6.126), entonces podemos considerar que $\dot{q}_i$ son funciones de q_i, p_i y que el Hamiltoniano es:

$$H = H(q_i, p_i, t)$$

Y entonces:

$$dH = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_1 + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Entonces, tenemos que:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$$

La segunda ecuación nos da las velocidades generalizadas como funciones de las coordenadas y cantidades de movimiento generalizadas. Las ecuaciones de Hamilton no ofrecen ninguna ventaja al resolver problemas, pero dan un planteamiento distinto que puede ayudar en cuántica.

Ejemplo: Consideramos un problema con campo magnético, entonces:
$L = T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$.
Y a partir de esto, obtenemos que los momentos generalizados son:

$$p_1 = p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x + eA_x = mv_1 + eA_1$$
$$p_2 = mv_2 + eA_2$$
$$p_3 = mv_3 + 3A_3$$

Con lo que encontramos las velocidades generalizadas:

$$\dot{x}_i = \frac{p_i - eA_i}{m}$$

Ahora podemos construir el hamiltoniano, que será, considerando que $T = \frac{m}{2} \sum \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2m} \sum (p_i - eA_i)^2$.
Entonces, nos queda que el hamiltoniano es:

$$H = \sum_{i=1}^{2} p_i \dot{x}_i - T + U - e \sum_{i=1}^{3} A_i \dot{x}_i = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3} (p_i - eA_i)^2 + U$$

190

Ya se vió antes que $H=\frac{mv^2}{2}+U$

Tomemos coordenadas curvilíneas ortogonales (cartesianas, cilíndricas, esféricas). Entonces las bases $\underline{b}_i$ y $\underline{\ell}_i$ son paralelas

$i=1,2,3$ $\underline{b}_i = h_i\hat{e}_i$, $\underline{\ell}_i = \frac{\hat{e}_i}{h_i}$

ó $\underline{\ell}_i = \frac{\underline{b}_i}{h_i^2}$

Ejemplos:

Partícula cargada en presencia de campo de fuerzas conservativo y uno magnético.

Encontrar la expresión de H en coordenadas generalizadas

$$v_i = \underline{v}\cdot\underline{b}_i = \underline{v}\cdot\underline{\ell}_i\, h_i^2 = h_i^2\dot{q}_i \Rightarrow \dot{q}_i = \frac{v_i}{h_i^2}$$

$$v^2 = \sum_i v_i\dot{q}_i = \sum_i \frac{v_i^2}{h_i^2}$$

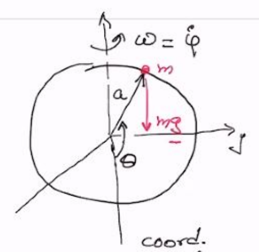
$$H = \frac{m}{2}\sum_i \frac{v_i^2}{h_i^2} + U$$

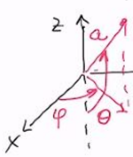
obtuvimos antes $P_i = mv_i + eA_i$

$\therefore\ v_i = \frac{P_i - eA_i}{m}$

$$\Rightarrow H = \sum_i \frac{m}{2}\frac{(P_i-eA_i)^2}{m^2h_i^2} + U$$

$$\boxed{H = \sum_i \frac{(P_i-eA_i)^2}{2mh_i^2} + U}$$





coord. esféricas

$r=a$

$\varphi=\omega t$

1 grado de libertad: θ

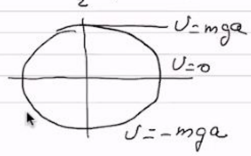
Una chaquira de masa m se desliza sin fricción en un aro circular de radio a. El aro se encuentra en el aro vertical y rota alrededor de su diámetro vertical (el eje z) con vel. angular constante ω. Encuentre las ecs. de movimiento.

No nos interesa la fuerza de constricción

Vamos a medir θ desde la parte inferior del diámetro vertical

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right)$$

$$= \frac{m}{2}\left(a^2\dot\theta^2 + a^2\sin^2\theta\,\omega^2\right)$$



$U = -mga\cos\theta$

θ	U
0	$-mga$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	mga

MON 23 NOV 2020

RMMV-FCUNAM

Como L no contiene al tiempo explícitamente H es una constante del movimiento.

Las ctes. del mov. ayudan a resolver el problema (integrales del movimiento)

$$L = T - U = \frac{m}{2}(a^2\dot\theta^2 + a^2\omega^2 sen^2\theta) + mga\cos\theta$$

$$\boxed{L \neq L(t) \quad \therefore \quad H = cte}$$

$$H = \dot\theta \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - L, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = ma^2\dot\theta$$

$$H = ma^2\dot\theta^2 - \frac{m}{2}a^2\dot\theta^2 - \frac{m}{2}a^2\omega^2 sen^2\theta - mga\cos\theta$$

$$H = \frac{m}{2}\underbrace{(a^2\dot\theta^2 - a^2\omega^2 sen^2\theta)}_{\neq T} - \underbrace{mga\cos\theta}_{U} = E' = cte$$

Tenemos una ec. de mov. en una dimensión (en una variable: θ)

$$H = \underbrace{\frac{m}{2}a^2\dot\theta^2}_{T} - \underbrace{\frac{m}{2}a^2\omega^2 sen\theta - mga\cos\theta}_{U_{ef} \text{ potencial efectivo}} = E'$$

$$U_{ef} = -\frac{m}{2}a^2\omega^2 sen^2\theta - mga\cos\theta$$

valores críticos

$\boxed{\theta_0 = 0} \Rightarrow sen\,\theta_0 = 0$

$\boxed{\theta_0 = \pi} \Rightarrow sen\,\theta_0 = 0$

$$\cos\theta_0 = \frac{mga}{ma^2\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{g}{a}$$

$$\boxed{\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)} \quad \text{con } \boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{a}}$$

¿Existe algún valor de θ que sea un punto de equilibrio estable del potencial efectivo?

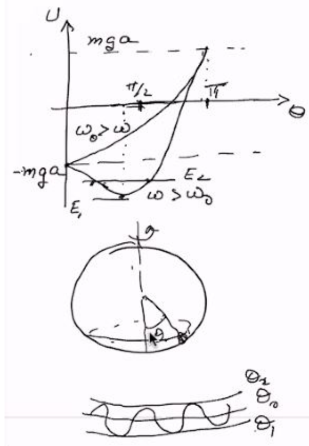
$$\frac{\partial U_{ef}}{\partial\theta} = -ma^2\omega^2 sen\theta\cos\theta + mga\, sen\theta$$

$$\frac{\partial^2 U_{ef}}{\partial\theta^2} = -ma^2\omega^2(\cos^2\theta - sen^2\theta) + mga\cos\theta$$

$$\left.\frac{\partial U_{ef}}{\partial\theta}\right|_{\theta_0} = 0 = (-ma^2\omega^2\cos\theta_0 + mga)\, sen\,\theta_0 = 0$$

Evaluamos la segunda derivada en los 3 puntos críticos

$$\left.\frac{\partial^2 U_{ef}}{\partial\theta^2}\right|_{\theta_0 = 0} = -ma^2\omega^2 + ma^2\omega_0^2 = ma^2(\omega_0^2 - \omega^2) \begin{cases} > 0 & \text{si } \omega_0 > \omega \quad \text{mínimo} \\ < 0 & \text{si } \omega > \omega_0 \quad \text{máximo} \end{cases}$$



$$\left.\frac{\partial^2 U_{ef}}{\partial\theta^2}\right|_{\theta_0=\pi} = -ma^2\omega^2 - ma^2\omega_0^2 < 0 \quad \text{máximo}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U_{ef}}{\partial\theta^2}\right|_{\theta_0=\cos^{-1}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = -ma^2\omega^2\left[2\frac{\omega_0^4}{\omega^4}-1\right] + ma^2\omega_0^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

$$= -ma^2\left[\frac{2\omega^2\omega_0^4-\omega^6}{\omega^4} - \frac{\omega_0^4\omega^2}{\omega^4}\right]$$

$$= -\frac{ma^2}{\omega^2}(\omega_0^4-\omega^4) \begin{cases} >0 & \omega>\omega_0 \text{ mínimo} \\ <0 & \omega_0>\omega \text{ máximo}\end{cases}$$

Paréntesis de Poisson

Sea $F = F(q_i, p_i, t)$ una variable dinámica que depende de las coordenadas y momentos generalizados

$$\frac{dF}{dt} = \dot{F} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Ecs. de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i$$

utilizando las ecs. de Hamilton:

$$\dot{F} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Definimos el paréntesis de Poisson de 2 variables dinámicas $X(q_i, p_i, t)$, $Y(q_i, p_i, t)$:

P. Poisson:

$$[X, Y] \equiv \left(\frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i}\frac{\partial Y}{\partial q_i}\right)$$

Entonces la ec. arriba para $\dot{F}$

$$\dot{F} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}dt \qquad \text{si } F \neq F(t) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

$\dot{F} = [F, H]$ y si el p. de Poisson es cero

$\dot{F} = [F, H] = 0 \Rightarrow F$ es una cte. del movimiento

De la definición de p. de Poisson se demuestra:

1) $[X, Y] = -[Y, X]$
2) $[X, X] = 0$
3) $[X, Y+Z] = [X, Y] + [X, Z]$
4) $[X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z$
5) $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$
6) $[q_i, p_j] = \sum_\ell \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_\ell}\frac{\partial p_j}{\partial p_\ell} - \cancel{\frac{\partial q_i}{\partial p_\ell}}\cancel{\frac{\partial p_j}{\partial q_\ell}}\right) = \sum_\ell \delta_{i\ell}\delta_{j\ell} = \delta_{ij}$

Vamos a trabajar con el momento angular $\underline{\ell} = \underline{r} \times \underline{p}$ en coord. cartesianas

$$\underline{\ell} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = \hat{e}_1\ell_1 + \hat{e}_2\ell_2 + \hat{e}_3\ell_3$$

con $\ell_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2$, $\ell_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3$

$\ell_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1$

Aquí vamos a aplicar las propiedades que se mostraron en la página anterior

Vamos a evaluar el P. de Poisson de 2 componentes de $\underline{\ell}$

$$[\ell_3, \ell_1] = [(x_1p_2 - x_2p_1), (x_2p_3 - x_3p_2)] =$$

$$= [(x_1p_2 - x_2p_1), x_2p_3] - [(x_1p_2 - x_2p_1), x_3p_2] =$$

$$= [x_1p_2, x_2p_3] - [x_2p_1, x_2p_3] - [x_1p_2, x_3p_2] + [x_2p_1, x_3p_2]$$

$$= x_1[p_2, x_2p_3] + [x_1, x_2p_3]p_2 - x_2[p_1, x_2p_3] - [x_2, x_2p_3]p_1$$

$$- x_1[p_2, x_3p_2] - [x_1, x_3p_2]p_2 + x_2[p_1, x_3p_2] + [x_2, x_3p_2]p_1$$

$$= x_1x_2\cancel{[p_2,p_3]} + \underset{-x_1p_3}{x_1\overset{-\delta_{22}}{[p_2, x_2]}p_3} + x_2\cancel{[x_1,p_3]}p_2 + \cancel{[x_1,x_2]}p_3p_2$$

$$- x_2x_2\cancel{[p_1,p_3]} - x_2\cancel{[p_1,x_2]}p_3 - x_2\cancel{[x_2,p_3]}p_1 - \cancel{[x_2,x_2]}p_3p_1$$

$$- x_1x_3\cancel{[p_2,p_2]} - x_1\cancel{[p_2,x_3]}p_2 - x_3\cancel{[x_1,p_2]}p_2 - \cancel{[x_1,x_3]}p_2p_2$$

$$\underset{+x_3p_1}{+ x_3\underbrace{[x_2,p_2]}_{\delta_{22}}p_1} + \cancel{[x_2,x_3]}p_2p_1 = x_3p_1 - x_1p_3 = \ell_2$$

Tensor de Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) \to (1,2,3) \text{ ó perm. pares} \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ corresponde a perm. impares} \\ 0 & \text{casos no contemplados arriba} \end{cases}$$

$[\ell_3, \ell_1] = \ell_2$, igualmente $[\ell_1, \ell_2] = \ell_3$ y $[\ell_2, \ell_3] = \ell_1$

ó sea $[\ell_i, \ell_j] = \sum_k \epsilon_{ijk}\ell_k$

Calculemos

$$[\ell_i, \ell^2] = [\ell_i, \sum_j \ell_j^2] = \sum_j [\ell_i, \ell_j^2] =$$

$$= 2\sum_j \ell_j[\ell_i, \ell_j] = 2\sum_{jk} \ell_j \epsilon_{ijk}\ell_k = 0$$

Igualmente se puede demostrar que

$$[x_i, \ell_j] = \sum_k \epsilon_{ijk}x_k$$

$$[p_i, \ell_j] = \sum_k \epsilon_{ijk}p_k$$

199

Vimos que $\dot{F} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}$

hacemos $F = H$

$$\frac{dH}{dt} = \cancel{[H, H]} + \frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}}$$

por otra parte evaluamos

$$[q_i, H] = \sum_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right)$$

$$= \sum_j \delta_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \Rightarrow \boxed{\dot{q}_i = [q_i, H]}$$

Igualmente $\boxed{\dot{p}_i = [p_i, H]}$

Paréntesis de Poisson y Conmutadores

Supongamos que tenemos 4 variables dinámicas que no conmutan. Sean estas X, Y, Z, W

$XY \neq YX$ para cualquier par formado con las 4 variables. Entonces

$$[X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z$$
$$[XY, Z] = X[Y, Z] + [X, Z]Y$$

el orden en el producto es importante

Calculemos: $[WX, YZ] = W[X, YZ] + [W, YZ]X$

① $= WY[X, Z] + \cancel{W[X, Y]Z} + \cancel{Y[W, Z]X} + [W, Y]ZX$

Ahora también

$[WX, YZ] = Y[WX, Z] + [WX, Y]Z =$

② $YW[X, Z] + \cancel{Y[W, Z]X} + \cancel{W[X, Y]Z} + [W, Y]XZ$

① = ② $\Rightarrow WY[X, Z] + [W, Y]ZX = YW[X, Z] + [W, Y]XZ$

reordenando $(WY - YW)[X, Z] = [W, Y](XZ - ZX)$

$\Rightarrow [W, Y] \propto (WY - YW)$ y $[X, Z] \propto (XZ - ZW)$

con la misma constante de proporcionalidad

8. Super Resumen de Lagrange y Hamilton

8.1. Lagrange

Tenemos un cuerpo con sistema de coordenadas generalizadas q_i y se tiene una energía cinética de T entonces se cumple que las ecuaciones de movimiento generalizado son:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Donde $Q_i = \vec{F} \cdot \vec{b}_i$ es la fuerza generalizada en la dirección $\vec{b}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$.
Esta ecuación no es otra cosa que la segunda ley de Newton. Tenemos que $m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m\vec{a} \cdot \vec{b}_i = \vec{F} \cdot \vec{b}_i \Rightarrow ma_i = Q_i$. Pero la aceleración generalizada es $a_i = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\dfrac{1}{2}v^2\right) - \dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{1}{2}v^2\right)$.
Y de ahí se recupera la ecuación.

Recordamos que en caso de que estemos en coordenadas ortogonales, entonces $T = \sum_{i=1}^{3} h_i \dot{q}_i$.

8.1.1. Fuerzas Conservativas

Digamos que alguna de las fuerzas son conservativas, por lo que $\vec{F} = -\nabla U$ para un potencial U. Entonces, las fuerzas generalizadas son $Q_i = \vec{F} \cdot \vec{b}_i = -\nabla U \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial U}{\partial q_i}$.

Caso en que el potencial no depende de las velocidades generalizadas: Entonces, tenemos que $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \dfrac{\partial U}{\partial q_i}$. Y podemos pasar la U del otro lado y nos queda:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

Donde Q_i son las fuerzas generalizadas que no surgen de un potencial. Y $L = T - U$.

8.1.2. Restricción:

Digamos que ahora hay una restricción del movimiento de tipo $\phi(q_1, q_2, q_3) = 0$.
Podemos sustituir la constricción desde un inicio en T y U y calcular las ecuaciones de Lagrange sin problema.
O bien, si nos interesa la constricción, vemos que se presenta una fuerza de constricción perpendicular a la superficie de $\vec{R} = \lambda \nabla \phi$.
Entonces, la fuerza generalizada de la constricción es $R_i = \vec{R} \cdot b_i = \lambda \nabla \phi \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \lambda \dfrac{\partial \phi}{\partial q_i}$. Y entonces, la ecuación de Lagrange queda como:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_i}$$

Donde Q_i son las fuerzas no conservativas, $L = T - U$ y ϕ es la constricción.
Podemos obtener las ecuaciones y usar alguna para calcular λ y así obtener la fuerza de constricción.

8.2. Lagrangiano de Fuerzas dependientes de Velocidad

Digamos que tenemos una partícula sometida a fuerzas conservativas (que no dependen de la velocidad) y junto con una fuerza magnética, entonces tenemos (en coordenadas rect):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i$$

Del lado derecho tenemos la fuerza de Lorentz generalizada (en coordenadas cartesianas). Sin embargo, si $\mathbf{B}$ es constante, entonces el potencial es $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$. Y tenemos que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.
Y entonces, tenemos que la fuerza es $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = -2\frac{d\mathbf{A}}{dt}$. Entonces, podemos establecer que $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = -2\frac{d\mathbf{A}_i}{dt} = -2\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{v} \times \mathbf{A}) = -\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$
Entonces, tiene la forma adecuada para meterla en la ecuación de Lagrange y obtener:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial x_i}(T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = 0$$

Entonces, podemos definir el lagrangiano que incluye al campo magnético como:

$$L = T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

Y ya podemos usar la ecuación de Lagrange normalita.
Lo hicimos todo para coordenadas cartesianas y para campo magnético constante. Sin embargo, se vale para campos magnéticos cualesquiera y coordenadas generalizadas.

Definiciones
Si tenemos un potencial, la **Fuerza generalizada** es:

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

En caso de que U no dependa de la velocidad, se rescatan las componentes de la fuerza generalizada como típicas.

Momento Generalizado:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i}$$

Veremos por qué lo definimos así después. Cuando las fuerzas y por tanto potenciales son independientes de la velocidades, entonces se recuperan los momentos generalizados como definimos antes.

Momento Generalizado para una partícula con un campo magnético

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial (e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})}{\partial \dot{q}_i} = mv_i + e\mathbf{A}_i$$

8.3. Leyes de Conservación

8.3.1. Coordenada Cíclica

Decimos que q_k es una **coordenada cíclica** del sistema si el Lagrangiano no depende de q_k. En este caso, **si hay puras fuerzas conservativas**, entonces:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0$$

Entonces, el momento generalizado en la dirección k se conserva. Por eso se define así el momento generalizado.

8.3.2. conservación de Energía

Si L no tiene dependencia explícita en t, entonces hay una cantidad H (Energía) que se conserva. Lo veremos luego, al meter el Hamiltoniano.

8.4. Lagrangiano a partir de Variacionales

Principio de Acción Estacionaria
Consideramos la cantidad:

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(x, x\dot{x}, t)dt$$

Donde llamamos S a la **acción**
Teorema: Si $x_o(t)$ es un valor estacionario de S, entonces se cumple que:

$$\tfrac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_0}$$

8.5. Hamilton

Definimos la función Hamiltoniana como:

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i - L = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - L$$

Con p_i los momentos generalizados.

Teorema: Si L no depende explícitamente del tiempo, entonces H es una cantidad conservada.

Dem (Morin):

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \frac{dL}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\right) \\
&= .... - \frac{\partial L}{\partial t} = 0
\end{aligned}$$

Demostración de que para una partícula en campos conservativos y magnéticos, $H = E$

Tenemos en cuenta que los momentos son $p_i = mv_i + eA_i$, con $v_i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{b}_i$, $A_i = \mathbf{A}\cdot\mathbf{b}_i$. Enotnces:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i=1}^{3} p_i\dot{q}_i - L \\
&= \sum_{i=1}^{3} mv_iv_i^* + \sum_{i=1}^{3} eA_iv_i^* - L \\
&= mv^2 + e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - (\frac{1}{2}mv^2 - U + e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = T + U
\end{aligned}$$

8.6. Ecuaciones de Movimiento de Hamilton

La función de Hamilton depende de $q_i, \dot{q}_i, p_i$, donde $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Entonces, la variación del Hamiltoniano es:

$$\begin{aligned}
H &= \sum p_i\dot{q}_i - L \\
\Rightarrow \quad dH &= \sum_{i=1}^{3}\left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt
\end{aligned}$$

Por la definición de $\dot{p}_i$, se cumple que $\dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i = 0$. Entonces, tendremos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial q_i} \\
\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \\
\frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}
\end{aligned}$$

Por la ecuación de Laplace, la primera ecuación es igual a $-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i$.

Y entonces nos queda que:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Ejemplo: Partícula en un campo conservativo con un campo magnético

Para esta situación, vimos que el lagrangiano es $L = T - U + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$.
Y así obtenemos los momentos generalizados cartesianos derivando con respecto a la velocidad (o cómo ya los teníamos antes):

$$\begin{aligned} p_1 = p_x = mv_x + eA_x \\ p_2 = p_y = mv_y + eA_y \\ p_3 = p_z = mv_3 + eA_3 \end{aligned}$$

Con lo que encontramos que las velocidades generalizadas son:

$$\dot{x}_i = \frac{p_i - eA_i}{m}$$

Ahora construimos el Hamiltoniano, para ello, notamos que:

$$T = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\dot{x}_i = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2$$

Entonces, el hamiltoniano es:

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i\dot{x}_i - T + U - e\sum_{i=1}^{3} A_i\dot{x}_i = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2 + U$$

En coordenadas generalizadas, tenemos que $p_i = mv_i + eA_i$. Y tenemos que $v_i = \dfrac{p_i - eA_i}{m}$.
Y tenemos que la velocidad generalizada es $\dot{q}_i = \dfrac{v_i}{h_i^2}$.

Tenemos que la velocidad cuadrada es $v^2 = \sum_i v_i v_i^* = \sum_i v_i\dot{q}_i = \sum_i \dfrac{v_i^2}{h_i^2}$.
Y entonces, queda que el Hamiltoniano es:

$$H = \sum_i \frac{(p_i - eA_i)^2}{2mh_i^2} + U$$

.

Obtenemos las ecuaciones de movimiento
Partiendo de ello, podemos usar la primera ecuación de Hamilton (modificada) para tener que:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x = \frac{d}{dt}(m\dot{x} + eA_x) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + e\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{p_i - eA_i}{m}\right)\frac{e\partial A_i}{\partial x} \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i + eA_x) = -\frac{\partial U}{\partial x} + e\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \end{aligned}$$

8.7. Paréntesis de Poisson

Sea $F = F(q_i, p_i, t)$ una vairable dinámica que depende de las coordenadas y momentos generalizados.
Si tenemos dos variables dinámicas X, Y, entonces definimos el **Paréntesis de Poisson:**

$$[X, Y] := \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial q_i} \right)$$

Se demuestra sencillamente que:

a) $[X, Y] = -[Y, X]$

b) $[X, X] = 0$

c) $[X, \alpha Y + Z] = \alpha[X, Y] + [X, Z]$

d) $[X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z$

e) $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$

f) $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$

g) **Identidad de Jacobi:**

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

Vemos aquí una utilidad de esto. Calculamos la derivada de F con respecto al tiempo:

$$\frac{dF}{dt} = \dot{F} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Teorema:

$$\dot{F} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Entonces, **Si F no depende de t y $[F, H] = 0$, se cumple que $\dot{F} = 0$ y F es una constante de movimiento.**

Momento angular
Vamos a trabajar con el momento angular $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ en coordenadas cartesianas. $\vec{l} = l_1 \widehat{e_1} + l_2 \widehat{e_2} + l_3 \widehat{e_3}$ con $l_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2, etc.$
Haciendo un montón de cuentas y usando las propiedades, se puede probar que $[l_3, l_1] = l_2, [l_1, l_2] = l_3$ y en general:

$$[l_i, l_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} l_k$$

Igualmente, se puede demostrar que:

$$[x_i, l_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} x_k$$
$$[p_i, l_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} p_k$$

.

Ahora usaremos el teorema de antes y tenemos que:

- $\frac{dH}{dt} = [H, H] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$
- $\dot{q}_i = [q_i, H]$
- $\dot{p}_i = [p_i, H]$

.

Paréntesis de Poisson y conmutadores.
Digamos que $XY \neq YX$.
Entonces, hay que ser más cuidadosos en las formulitas, tenemos que:

- $[X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z$
- $[XY, Z] = X[Y, Z] + [X, Z]Y$

Donde aquí importa mucho el orden.

8.8. Principios Variacionales

Supangamos que tenemos una integral entre límites fijos:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x), x\} dx$$

Digamos que conocemos la funcional f.
Nuestro problema es encontrar la función $y(x)$ tal que la integral J tenga un valor extremo.
Para ello, le agregamos un parámetro a y y definimos:

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\nu(x)$$

Donde α es un parámetro y la $y(0, x)$ es la y adecuada. Entonces, tenemos que:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha, x), x\} dx$$

La condición para que J sea extremo en $\alpha = 0$ es que sea independiente de α en primer orden. Por tanto, derivamos J respecto de α y metemos la derivada:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\nu(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\nu'(x) \right) dx
\end{aligned}
$$

Por partes hacemos la segunda integral $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\nu'(x)dx = \frac{\partial f}{\partial y'}\nu(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \nu(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}dx$
Pero la $\nu(x)$ en los extremos vale 0, por lo que me queda sólo la integral. Entonces la sustituyo en el desarrollo de antes.

$$
\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x)dx
$$

Luego, para que esto valga cero cuando $\alpha = 0$, la expresión entre paréntesis debe de ser 0. Entonces la condición para tener un extremal es que:

$$
\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}
$$

Podemos tener varias funciones y, y cada una debe de cumplir las condiciones de la ecuación de Euler-Lagrange.

Principio de Hamilton:

Espacio de Configuración: Es el espacio de las coordenadas que se necesitan para describir el estado de un sistema.

Para sistemas conservativos, incluyendo potenciales generalizados, se cumple el **principio de Hamilton:**
De todos los caminos posibles en el espacio de configuración en los cuales se puede mover un sistema dinémico de un punto a otro en un intervalo de tiempo dado (consistente con las constricciones del sistema). El camino seguido es el que minimiza la integral con respecto al tiempo de la Lagrangiana del sistema (la acción)
Entonces, se cumplen las ecuaciones:

$$
\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0
$$

9. Sistemas de Muchas Partículas

Digamos que tenemos un sistema con centro de coordenadas fijo en el que hay muchas partículas (puede ser un cuerpo rígido incluso o algo así).
Cada una de las partículas que componen al sistema tiene una posición $\vec{r}_i(t)$ y una masa m_i.
Para este sistema, definimos por conveniencia el centro de masa:

Centro de Masa: Es la posición 'promedio' de las partículas:

$$\vec{R}_{CM} := \vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{r}_i$$

Donde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$.
En los problemas, podemos pensar en el centro de masa como una partícula de masa M y posición $\vec{R}$ que 'representa' a todo el sistema.
Nos referiremos al CM como dicha partícula que representa a todas las demás.

9.0.1. Dinámica

$$M\vec{R} = M \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

El momento del CM es de:

$$\begin{aligned} M\dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{r}_i \quad &\Rightarrow \quad M\vec{V} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \\ \Rightarrow \quad &\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{P}_T \end{aligned}$$

Entonces, el momento del CM es la suma de los momentos de todas las párticulas.

2da Ecuación de Newton del CM:

$$\begin{aligned} M\vec{A} = M\dot{\vec{V}} &= \sum m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum m_i \vec{a}_i \\ &= \sum (\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}) \quad \text{2da ley para cada part. considera ext e int} \\ &= \sum \vec{F}_i^{ext} \quad \text{fuerzas int se cancelan a pares} \\ &= \vec{F}_T^{ext} \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación de Newton del CM es:

$$M\vec{A} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_T^{ext}$$

Entonces, el CM tiene como fuerzas la suma de todas las fuerzas externas. Que denotamos como fuerza externa total.

9.1. Torcas y Momentos Angulares

9.1.1. Para una partícula

Para una partícula definíamos su torca y su momento angular (con respecto a un origen fijo) como:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Estas expresiones también surgían como momentos generalizados. Además, se puede obtener un equivalente a la segunda ecuación de Newton:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

9.1.2. Grupo de Partículas

Si tenemos un grupo de partículas, le definimos el momento y torca total como:

$$\vec{\tau}_T := \vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i$$
$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i$$

Torca Respecto al Origen:
Entonces, calculamos la torca total:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \sum \vec{\tau}_i \\ &= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &= \sum \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}) \\ &= \sum \vec{\tau}_i^{ext} + \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \\ &= \sum \vec{\tau}_i^{ext}\end{aligned}$$

Esto último siempre y cuando $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_{ij}$. Porque $\sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$.

Entonces **la torca total es igual a la suma de las torcas externas** (no hay torcas internas por la condición de que las fuerzas son paralelas).

Torca total Respecto al CM:
Ahora digamos que queremos calcular la torca respecto al CM. Las partículas tienen ecuación $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r'}_i$, $\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v'}_i$. Entonces:

$$\begin{aligned}\vec{\tau'} &= \sum \vec{\tau'}_i \\ &= \sum \vec{r'}_i \times \vec{F}_i^{ext}\end{aligned}$$

(Recordar que las torcas internas desaparecen)

Torca del dentro de masa en sistema original:
Considerando al CM como una partícula de masa M y posición $\vec{R}$, su torca es:

$$\vec{\tau}_{CM} = \vec{R} \times \vec{F}_T^{ext}$$

(Recordar que el CM sólo siente las fuerzas externas).

Relación entre las torcas
Se puede ver que:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = \sum (\vec{R} + \vec{r}_i{}') \times \vec{F}_i^{ext} \\ &= \vec{R} \times \sum \vec{F}_i^{ext} + \sum \vec{r'}_i \times \vec{F}_i^{ext} \\ &= \vec{R} \times \vec{F}^{ext} + \vec{\tau'}\end{aligned}$$

Entonces, **La torca total respecto al origen es igual a la torca respecto al CM más la torca del CM**

9.1.3. Momentos:

Momento Respecto al Origen:
Es:

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Momento respecto al CM:

$$\begin{aligned}\vec{L'} &= \sum \vec{l'}_i \\ &= \sum \vec{r'}_i \times \vec{p'}_i\end{aligned}$$

Momento del CM

$$\vec{L}_{CM} = \vec{R} \times \vec{P}_{CM} = \vec{R} \times M\vec{V}$$

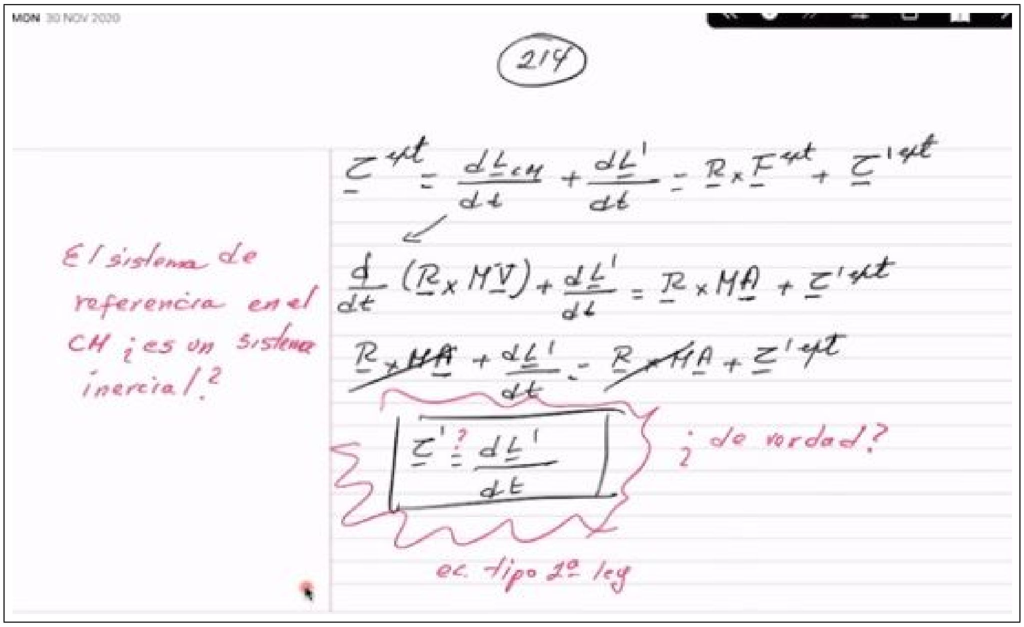
Relación entre los momentos:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ &= \sum (\vec{R} + \vec{r'}_i) \times m_i(\vec{V} + \vec{v'}_i) \\ &= \sum M\vec{R} \times \vec{V} + \sum m_i \vec{r'}_i \times \vec{v'}_i \\ &= \vec{L}_{CM} + \vec{L'}\end{aligned}$$

Los productos internos son cero. Esto porque $\sum m_i \vec{v'}_i \times \vec{R} = M\vec{V'} \times \vec{R} = 0$ (la velocidad respecto al CM del CM es 0).

Entonces, el momento angular total respecto al origen es igual al del CM más el momento respecto al CM

2da Ley de Newton en sistema no inercial



Entonces, la torca respecto al CM es igual a la derivada del momento angular respecto al CM.

9.1.4. Energía cinética total:

La energía cinética total T con respecto a O se puede conseguir como:

$$T = T_{CM} + T'$$

Donde T_{CM} es la energía de una partícula con Masa M y que se mueve con V. Y $T' = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2$, $T = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i'^2$

10. Sistemas de dos masas

Digamos que tenemos un sistema de dos partóculas con posiciones $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ y masas constantes m_1, m_2.
Entonces, las fuerzas sobre cada una son:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12}$$
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21}$$

Donde $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ son las fuerzas internas.

Luego, el centro de masa es:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} \quad , M = m_1 + m_2$$

Entonces, como vimos antes, tenemos que $M\ddot{\vec{R}} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{F}^{extT}$
Definimos el vector relativo como:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Ahora definimos un sistema primado con origen en el CM. Para dicho sistema se tiene que $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r'})i$
Podemos ver que $\vec{r'}_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = m_2/M(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \dfrac{m_2}{M}\vec{r}$ Y similarmente para la otra masa, pero queda un signo menos.
Entonces tenemos que:

$$\vec{r'}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{r}$$
$$\vec{r'}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{r}$$

Entonces, las posiciones respecto al CM se pueden expresar en términos del vector que une a las masas. Luego, podemos derivar para tener:

$$\vec{v'}_1 = \vec{v}_1 - \vec{V} = \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}$$
$$\vec{v'}_2 = \vec{v}_2 - \vec{V} = -\frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}$$
$$\vec{a'}_1 = \vec{a}_1 - \dot{\vec{A}} = \frac{m_2}{M}\ddot{\vec{r}}$$
$$\vec{a'}_2 = \vec{a}_2 - \vec{A} = -\frac{m_1}{M}\ddot{r}$$

Entonces tenemos que $\vec{a}_1 = \vec{A} + \dfrac{m_2}{M}\ddot{\vec{r}}$. Luego, metemos esto en la ecuación de $m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12}$.
Por tanto, nos queda que:

$$\frac{m_1 m_2}{M}\ddot{r} + m_1\vec{A} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} - \frac{m_1(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}}{m_1 + m_2}$$

Entonces, si definimos la masa reducida como:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Además, suponemos que las fuerzas externas son 0 o despreciables. Por lo que nos queda que $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}$
Entonces, podemos pasar del conjunto de ecuaciones iniciales:

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} \\ m_2\vec{a}_2 &= \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} \end{aligned}$$

Y lo cambiamos por las siguientes ecuaciones (siempre y cuando las fuerzas externas sean chiquitas):

$$\begin{aligned} M\ddot{\vec{R}} &= \vec{F}^{extT} \\ \mu\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{12} \end{aligned}$$

Y muchas veces este nuevo sistema de ecuaciones es más fácil de resolver. Y luego podríamos regresar a las expresiones para $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ originales.
Como la fuerza externa total es despreciable, nos queda que:

$$\begin{aligned} M\ddot{\vec{R}} &= 0 \\ \mu\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{12} \end{aligned}$$

La primera ecuación nos dice que la velocidad $\vec{R}$ es constante. Lo que nos dice que el sistema CM es un sistema inercial.

10.0.1. Problema de Kepler

Aplica todo lo de antes. Pero vamos a suponer que $m_2 \geq\geq m_1$ (es el sol). Entonces, el centro de masa es básicamente simplemente $\vec{r}_2$.
Luego, la primera ecuación nos dice nuevamente que el CM se mueve en un MRU, que ahora significa que $\vec{r}_2$ se mueve en un MRU.
Además, tenemos que $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1{}'$ (el vector de posición relativo es simplemente el vector $\vec{r}_1$ respecto al CM).
Además, como ya dijimos que $m_2 \geq m_1$ y lo usamos para decir que CM es igual a $\vec{r}_2$. Entonces para ser consistentes hay que usar que $\mu = m_1$ en esta aprox.
Entonces, la ecuación que nos queda por resolver es:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{12} \\ \Rightarrow \quad m_1\ddot{\vec{r}_1'} &= \vec{F}_{12} \end{aligned}$$

En el problema de Kepler, la fuerza es del tipo $\vec{F}_{12} = -f(r)\vec{e}_r$ que es una fuerza atractiva y central.

Fórmulas para dos partículas
Para N partículas probamos que $T = T_{CM} + T'$ y para dos partículas tenemos que $T = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2$

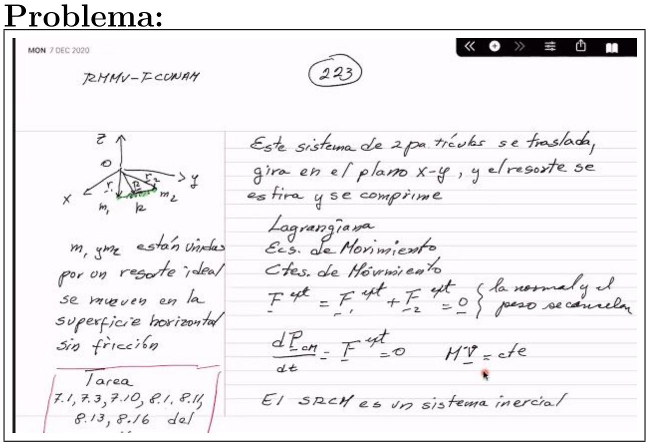
Para N partículas habíamos visto que $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{CM} + \vec{\tau'}$ y para dos partículas resulta que $\vec{\tau'} = \vec{r} \times \vec{F}_{12}$

Para N partículas habíamos visto que $\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}'$. Y en el caso de dos partículas, tenemos que $\vec{L}' = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$.

Conservación: Además, tenemos que $\dfrac{d\vec{P}_T}{dt} = \vec{F}^{ext}$. Entonces, si no hay fuerzas externas. $\vec{P}_T = \vec{P}_{CM} = cte$

Lo mismo con $\dfrac{d\vec{L}_T}{dt} = \vec{\tau}^{ext}$. Y si no hay torcas externas, entonces $\vec{L}_T = cte$.

Problema:



Resolvemos ese problema. Primero notamos que el CM es un sistema inercial porque no hay fuerzas externas netas. Entonces $M\ddot{R} = \vec{F}^{extT} = 0$. Entonces el CM se mueve con velocidad constante.

Ahora nos fijamos en el sistema centrado en el centro de masa.

En ese sistema tenemos $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ es la coordenada relativa. Y tenemos la segunda ecuación de movimiento $\mu\ddot{r} = \vec{F}_{12}$

Los primados indican que se ve desde el centro de masa, mientras que sin prima significa que se ve desde el sistema inercial. En este caso es lo mismo.

Vemos el Lagrangiano.

La energía cinética respecto al CM es $T = \frac{1}{2}(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2)$

La velocidad relativa es $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ que en coordenadas polares es $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$

Además, la energía cinética respecto al CM se puede ver como $\dfrac{\mu}{2}v^2$.

La energía potencial es $\frac{1}{2}k(r-l)^2$.

Entonces, el Lagrangiano es:

$$L = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \tfrac{1}{2}k(r-l)^2$$

Como ϕ no aparece, se conserva el momento $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2\dot{\phi}$

Como el tiempo no aparece, se conserva el Hamiltoniano.

El hamiltoniano es:

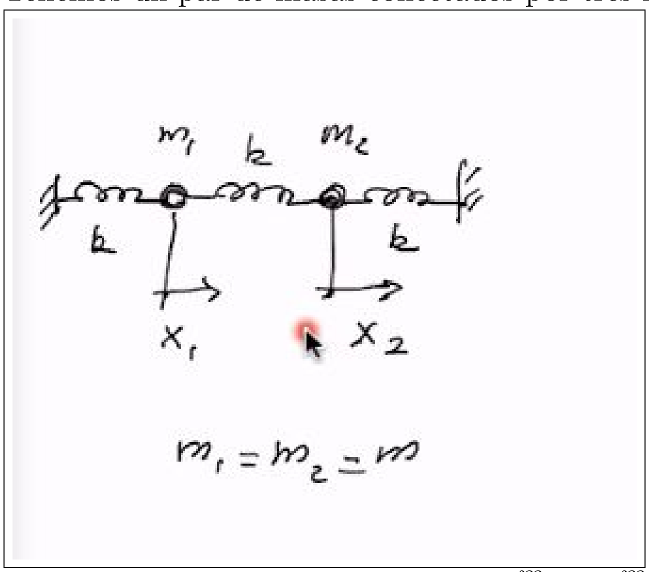
$$\begin{aligned}
H &= p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L \\
&= \mu\dot{r}^2 + \mu r^2\dot{\phi}^2 - \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{k}{2}(l-r)^2 \\
&= \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{k}{2}(r-l)^2 = T + U
\end{aligned}$$

Entonces, encontramos las constantes de movimiento:

$$\begin{gathered}
\vec{P}_{tot} = cte \\
\vec{L} = cte \\
H = T + U = cte
\end{gathered}$$

10.0.2. Modos Normales de Oscilación

Tenemos un par de masas conectados por tres resortes entre dos paredes.



La energía cinética es $T = T_1 + T_2 = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2$

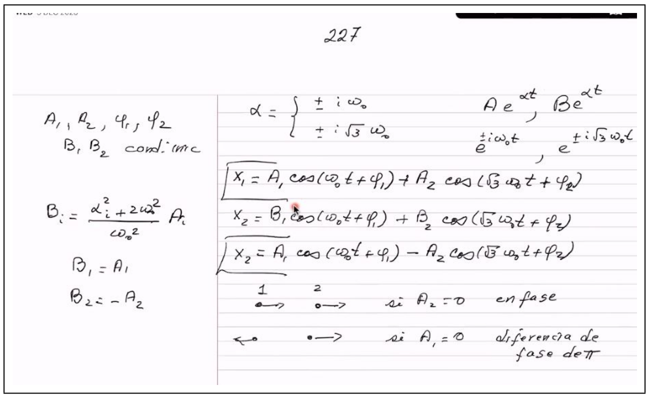
La energía potencial es $U = U_1 + U_2 = \frac{k}{2}x_1^2 + \frac{k}{2}x_2^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2$.

El lagrangiano es la resta de estas cosas. Entonces, nos quedan las dos ecuaciones de Lagrange:

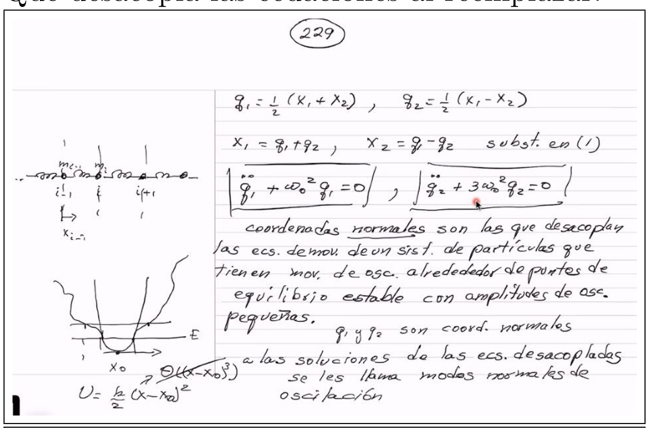
$$\begin{gathered}
m\ddot{x}_1 + 2m\omega_0^2 x_1 - m\omega_0^2 x_2 = 0 \\
m\ddot{x}_2 + 2m\omega_0^2 x_2 - m\omega_0^2 x_1 = 0
\end{gathered}$$

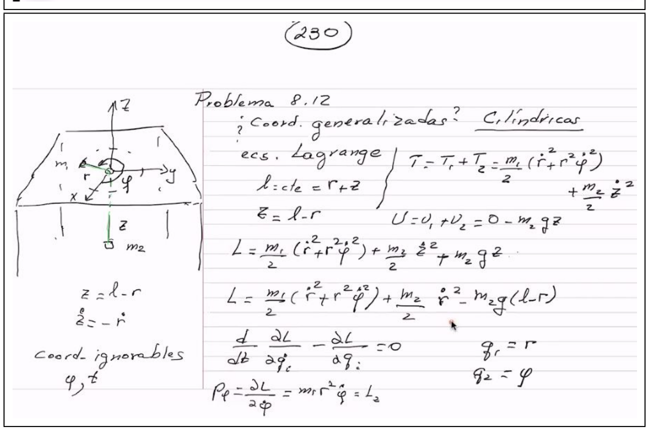
Con $\omega_0^2 = k/m$.

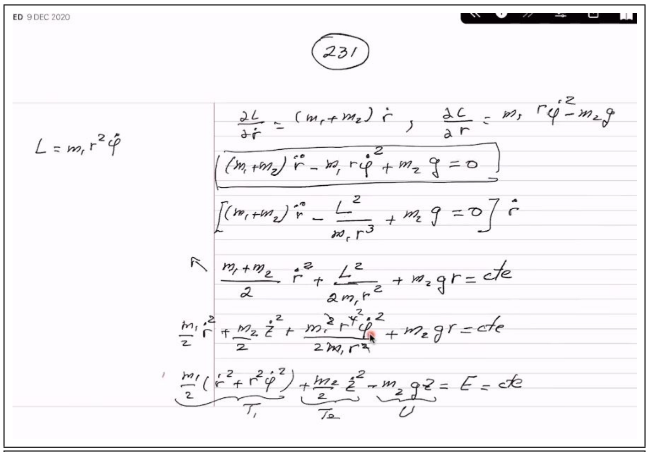
Proponemos una solución de la forma $x_1 = Ae^{\alpha t}, x_2 = Be^{\alpha t}$



Pero también podemos resolverlo más fácil haciendo un cambio de variables como se ve aquí. Que desacopla las ecuaciones al reemplazar.







ED 9 DEC 2020

231

$$L = m_1 r^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_1 + m_2)\dot{r}\,, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m_1 r \dot{\varphi}^2 - m_2 g$$

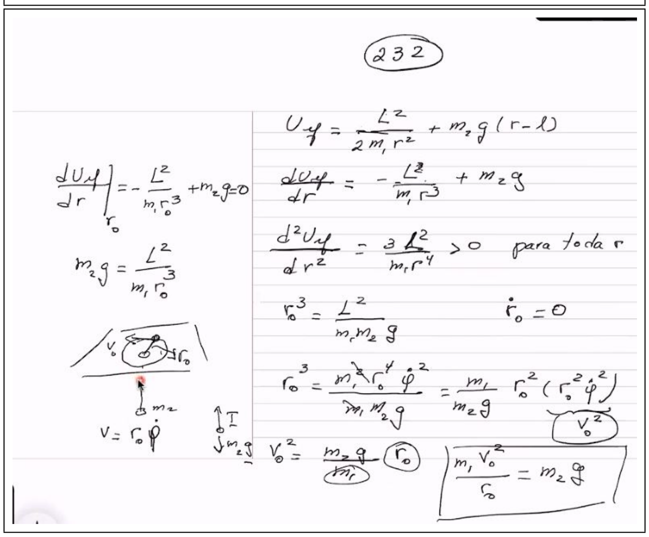
$$\boxed{(m_1+m_2)\ddot{r} - m_1 r \dot{\varphi}^2 + m_2 g = 0}$$

$$\left[(m_1+m_2)\ddot{r} - \frac{L^2}{m_1 r^3} + m_2 g = 0\right]\dot{r}$$

$$\frac{m_1+m_2}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r = cte$$

$$\frac{m_1}{2}\dot{r}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{z}^2 + \frac{m_1^2 r^4 \dot{\varphi}^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r = cte$$

$$\underbrace{\frac{m_1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}_{T_1} + \underbrace{\frac{m_2}{2}\dot{z}^2}_{T_2} \underbrace{- m_2 g z}_{U} = E = cte$$



232

$$U_{ef} = \frac{L^2}{2m_1 r^2} + m_2 g (r - l)$$

$$\frac{dU_{ef}}{dr} = -\frac{L^2}{m_1 r^3} + m_2 g$$

$$\frac{d^2 U_{ef}}{dr^2} = \frac{3L^2}{m_1 r^4} > 0 \quad \text{para toda } r$$

$$r_0^3 = \frac{L^2}{m_1 m_2 g} \qquad \dot{r}_0 = 0$$

$$\left.\frac{dU_{ef}}{dr}\right|_{r_0} = -\frac{L^2}{m_1 r_0^3} + m_2 g = 0$$

$$m_2 g = \frac{L^2}{m_1 r_0^3}$$

v_0, r_0, m_2, T, $m_2 g$

$$v = r_0 \dot{\varphi}$$

$$r_0^3 = \frac{m_1^2 r_0^4 \dot{\varphi}^2}{m_1 m_2 g} = \frac{m_1}{m_2 g} r_0^2 \underbrace{(r_0^2 \dot{\varphi}^2)}_{v_0^2}$$

$$v_0^2 = \frac{m_2 g}{m_1} r_0$$

$$\boxed{\frac{m_1 v_0^2}{r_0} = m_2 g}$$

11. Cuerpo Rígido

Es un cuerpo de N partículas con la particularidad de que la distancia entre pares de partículas es siempre constante.
Es decir, si los vectores de posición son $\vec{r}_i$, entonces: $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c_{ij}$.

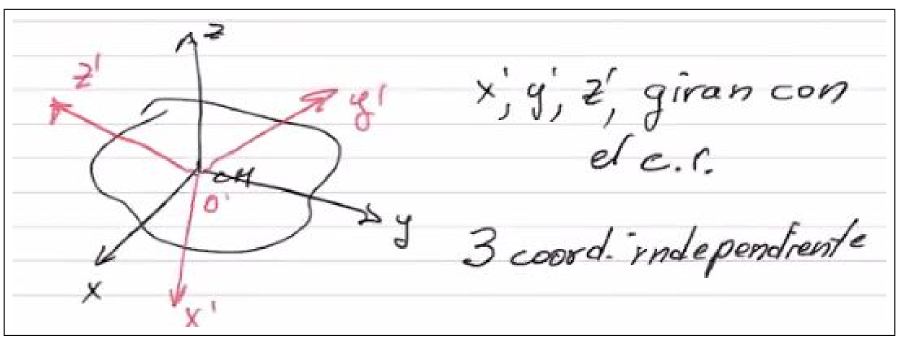
Si determinamos la posición de un punto 1 como $\vec{r}_1$, podemos determinar la posiciónd e $\vec{r}_2$ si conocemos c_{12} y conocemos dos ángulos para ir de 1 a 2.
Si quiero determinar $\vec{r}_3$ y ya conozco c_{13}, c_{23}, entonces $\vec{r}_3$ tiene que estar en una circunferencia y necesito una coordenada para determinarlo.
Si quiero determinar $\vec{r}_4$ la posición de un cuarto punto, ya con conocer c_{14}, c_{24}, c_{34} es suficiente.

Entonces, en total necesito de 6 coordenadas independientes para un cuerpo rígido.
Si hay alguna restricción, el número de coordenadas será menor.
Son 3 coordenadas para el movimiento de traslación y 3 para el de rotación respecto al cm.

El CM se mueve según la ecuación:

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ext}$$

Para la rotación, consideramos un sistema x, y, z fijo en el espacio (y que lo vemos como que salga del CM). Y tres ejes primados que pensamos que salen del CM y se mueven junto al cuerpo rígido. Como estacas clavadas en el cuerpo.



Para este movimiento se cumple que:

$$\vec{\tau}' = \frac{d\vec{L}'}{dt}$$

Donde las cosas se miden respecto al CM (por eso el primado). (Esta es la ecuación que vimos que se respecto al CM a pesar de no ser un sistema inercial por magia del CM).

Si el cuerpo tiene algún punto fijo, entonces nos conviene mejor usar este punto como centro de un sistema de referencia. En este caso no hay traslación y la rotación sigue la ec $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ medido respecto al punto fijo.

Cuerpos Continuos:
Si tenemos un cuerpo continuo, lo separamos en varios pedacitos dm y tenemos que $dm = \rho dV$.
Donde $dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$.
Entonces, las ecuaciones tímicas son:

$$M = \sum m_i \to \int \rho dV$$
$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \to \frac{1}{M} \int \rho \vec{r} dV$$

11.0.1. Momento Angular de un C.R

Estamos parados en un punto O del c.r. y consideramos un vector $\vec{r}_i$ que sale de O.
Entonces, como la magnitud de $\vec{r}_i$ no crece por ser un c.r. tenemos que:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_i$$

La misma Ω sirve para todos los puntos $\vec{r}_i$ por ser un cuerpo rígido (todos los puntos deben de girar igual para que no se deforme).

Momento angular:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i (\Omega \times \vec{r}_i) \\ &= \sum_i m_i [r_i^2 \vec{\Omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\Omega}) \vec{r}_i] \\ &= ..... \end{aligned}$$

252

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$$

$(\mathbb{I})$ matriz simétrica

Tensor de rango 2

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) \\ I_{yy} &= \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \\ I_{zz} &= \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \end{aligned} \right\} \text{momentos de inercia}$$

$$\left. \begin{aligned} I_{xy} &= -\sum_i x_i y_i = -\sum_i y_i x_i = I_{yx} \\ I_{xz} &= -\sum_i x_i z_i = I_{zx} \\ I_{yz} &= -\sum_i y_i z_i = I_{zy} \end{aligned} \right\} \text{productos de inercia}$$