Álgebra Moderna Tarea 4.2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

24 de noviembre de 2020

a) **Muestra explícitamente todos los 3-subgrupos de Sylow de S_4 y de A_4**

Primero escribiré los $4! = 24$ elementos de S_4 explícitamente:

- **Neutro:** Lo denotaré por (1)
- **2-ciclos:** $(12),(13),(14),(23),(24),(34)$
- **3 ciclos:** $(123),(124),(132),(134),(142),(143),(234),(243)$
- **4 ciclos:** $(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)$
- **Producto de 2 ciclos:** $(12)(34),(13)(24),(14)(23)$

Como la máxima potencia de 3 que divide a 24 es el propio 3, entonces los 3-subgrupos de Sylow de S_4 son simplemente los grupos de orden 3.
Entonces, buscamos todos los grupos de orden 3 de S_4. Como 3 es primo, sabemos que un grupo de orden 3 necesariamente es isomorfo a $\mathbb{Z}_3$ y es por tanto cíclico.
Entonces, los grupos de orden 3 son aquéllos generados por elementos de orden 3 de entre los listados arriba (que son los 3-ciclos)

- $H_1 = \langle(234)\rangle = \{(1),(234),(243)\} = \langle(243)\rangle$
- $H_2 = \langle(134)\rangle = \{(1),(134),(143)\} = \langle(143)\rangle$
- $H_3 = \langle(124)\rangle = \{(1),(124),(142)\} = \langle(142)\rangle$
- $H_4 = \langle(123)\rangle = \{(1),(123),(132)\} = \langle(132)\rangle$

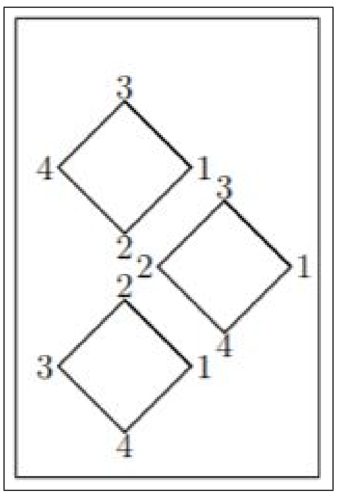
Por tanto, estos 4 subgrupos son los 3-subgrupos de S_4.

Para A_4, los 3-subgrupos también son de orden 3 porque 3 es la máxima potencia de 3 que divide a 12. Y todos los subgrupos mencionados arriba son también subgrupos de A_4, porque los 3-ciclos se pueden ver como como el producto de dos 2-ciclos y por tanto, son pares.
Entonces, los 3-subgrupos de A_4 son los mismos enlistados arriba.

b) **Muestra explícitamente los 2-subgrupos de Sylow de S_4**

Como $2^3 = 8$ es la máxima potencia de 2 que divide a $|S_4| = 24$, entonces buscamos todos los subgrupos de S_4 de orden 8.

Para encontrar grupos de orden 8, buscamos a qué grupos conocidos pueden ser isomorfos. Sabemos que una posibilidad es que los subgrupos de orden 8 sean isomorfos a $D_{2(4)}$.
Seguimos el mismo argumento que en las notas de la clase 13 para enumerar estos conjuntos.



Tomamos en cuenta que D_8 es el grupo de simetrías del cuadrado. Entonces, para formar un grupo isomorfo a D_8 hay que escoger un cuadrado. Dados los números $\{1, 2, 3, 4\}$ hay 3 cuadrados distintos que podemos considerar según la forma en que nombremos a sus vértices (comprobaremos luego que no hay más). Las tres opciones para nombrar los vértices están consideradas en la imagen de las notas.

El tercer cuadrado tiene asociado el grupo de simetrías L_1 generado por la rotación (1234) y la reflexión (24).
El segundo cuadrado tiene asociado el grupo de simetrías L_2 generado por la rotación (1324) y la reflexión (34).
El primer cuadrado tiene asociado el grupo de simetrías L_3 generado por la rotación (1342) y la reflexión (23).

Podemos construir explícitamente los generados de manera sencilla recordando que tienen la forma $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Con r la rotación y s la reflexión.

Entonces, los grupos isomorfos a $D_{2(4)}$ son:

- $L_1 = \langle (1234), (24) \rangle = \{(1), (1234), (13)(24), (1432), (24), (14)(32), (13), (12)(34)\}$
- $L_2 = \langle (1324), (34) \rangle = \{(1), (1324), (12)(34), (1423), (34), (14)(23), (12), (14)(23)\}$
- $L_3 = \langle (1342), (23) \rangle = \{(1), (1342), (14)(32), (1243), (23), (12)(34), (14), (13)(24)\}$

¿Cómo sabemos que estos son todos los grupos isomorfos a D_8?

Porque todos los grupos isomorfos a D_8 deben de tener asociado un cuadrado como el que dibujamos.
Para seleccionar un cuadrado de este tipo, primero escogemos cómo nombrar a los 4

vértices, esto es un total de $4! = 24$ opciones. Pero, muchas de estas opciones son en realidad iguales. Pues si se puede pasar de una numeración a otra con una simetría, entonces ambas opciones van a dar el mismo grupo D_8. Para cada selección de la numeración de los vértices hay un total de 8 selecciones que dan el mismo grupo D_8 (las 8 simetrías). Y entonces en vez de tener 24 opciones para numerar los vértices, solamente tenemos $24/8 = 3$ opciones que proporcionen distintos grupos D_8.

Luego, sabemos por el segundo teorema de Sylow que todos los p-subgrupos de Sylow son conjugados y por tanto, son también isomorfos. Entonces, no podemos tener otro tipo de 2-subgrupos de Sylow de S_4 que no sea isomorfo a $D_{2(4)}$. Entonces los grupos enlistados arriba son todos los 2-subgrupos de Sylow de S_4.

3) **Encuentra elementos de S_4 que conjuguen uno de los subgrupos del inciso anterior en los otros, o muestra que estos grupos no son conjugados.**

Empezamos con $L_1 = \langle (1234), (24) \rangle$ y buscamos un elemento que lo conjugue en $L_2 = \langle (1324), (34) \rangle$.
Para ello, buscamos un elemento que en particular conjugue a (24) en (34).
Es decir, buscamos un σ tal que $\sigma(24)\sigma^{-1} = (34)$. Es decir, que de alguna forma σ cambie el 2 en el 3. Para ello, proponemos a $\sigma = (23)$.
Veamos que efectivamente conjuga a los dos generadores de L_1 en los generadores de L_2 (con lo que ya probariámos que son conjugados los dos grupos).

- **Conjuga** (1234) **en** (1324):
  $\sigma(1234)\sigma^{-1} = (23)(1234)(23)^{-1} = (23)(1234)(32) = (1324)$
- **Conjuga a** (24) **en** (34):
  $\sigma(24)\sigma^{-1} = (23)(24)(32) = (34)$

Entonces efectivamente (23) conjuga a los generadores de L_1 en los de L_2 y tenemos que:

$$(23)L_1(23)^{-1} = L_2$$

Ahora buscamos un elemento que conjugue a $L_1 = \langle (1234), (24) \rangle$ en $L_3 = \langle (1342), (23) \rangle$
Con la misma lógica de antes, probamos si $\sigma = (34)$ funciona:

- **Conjuga** (1234) **en** (1342)
  $\sigma(1234)\sigma^{-1} = (34)(1234)(34)^{-1} = (34)(1234)(34) = (1243)$
  Conjuga a (24) **en** (23)
  $\sigma(24)\sigma^{-1} = (34)(24)(34)^{-1} = (34)(24)(34) = (23)$

Entonces, vemos $(34)L_1(34)^{-1} = (34)\langle (1234), (24) \rangle (34) = \langle (34)(1234)(34), (34)(24)(34) \rangle = \langle (1243), (23) \rangle$

Nos quedó como resultado (1243) en vez de (1342), pero esto no importa ya que vemos que $\langle(1243),(23)\rangle$ también genera a L_3, aunque no es la forma incial en que lo escribimos. Esto porque $D_{2(4)}$ se puede generar con $\{r,s\}$ (que en este caso son la representación incial que pusimos, con $r=(1342), s=(23)$) O bien, se puede generar con $\{r^{-1},s\}$, que en este caso es $\{(1243),(23)\}$.
Entonces $L_3=\langle(1342),(23)\rangle=\langle(1243),(23)\rangle$
Y por tanto:

$$(34)L_1(34)^{-1}=\langle(1243),(23)\rangle=L_3$$

d) **Encuentre todos los 2-subgrupos de D_{2n} donde n es un número impar. Y muestre explícitamente que son conjugados**

Primero recordamos que dicho grupo es:

$$D_{2(n)}=\{1,r,r^2,...,r^{n-1},s,sr,sr^2,...,sr^{n-1}\}$$

Como n es impar, entonces la máxima potencia de 2 que divide a $|D_{2n}|=2n$ es 2.
Por tanto los 2-subgrupos de D_{2n} son simplemente los de orden 2.
Como 2 es primo, los grupos de orden 2 son necesariamente cíclicos y por tanto son de la forma $\{1,g\}$ donde g es un elemento de orden 2.

Por tanto, lo único que hay que hacer es buscar todos los elementos de D_{2n} de orden 2 y sus generados serán todos los subgrupos de orden 2 posibles.
Vemos lo siguiente:

- **Los elementos r^i para $i=1,2,...n-1$ no tienen orden 2.**

  Esto es fácil de ver, pues supongamos que r^i si tuviera orden 2, entonces se debería de cumplir que $(r^i)^2=1 \quad\Rightarrow\quad r^{2i}=1$.
  Pero para que una potencia de r sea 1, dicha potencia tiene que ser múltiplo de n (el orden de r). Entonces, $2i$ es múltiplo de n.
  Esto es una contradicción, ya que es imposible que $2i$ sea igual a $2n$ o cualquier múltiplo más grande porque $i<n \quad\Rightarrow\quad 2i<2n$.
  Además, es imposible que $2i=n$ porque $2i$ es par pero n es impar.
  Luego, concluimos que ningún r^i tiene orden 2.
- **Todos los sr^i con $i=0,1,...,n-1$ tienen orden 2:**
  Esto también es fácil de ver, pues:

  $$\begin{aligned}(sr^i)^2=(sr^i)(sr^i)\\ &=(sr^i)(r^{n-i}s) \quad \text{propiedad 3.5 e) que se vale para i=0,1,...,n-1}\\ &=s(r^ir^{n-i})s\\ &=sr^ns\\ &=ss \quad \text{porque el orden de r es n}\\ &=1 \quad \text{porque el orden de s es 2}\end{aligned}$$

Entonces, todos los elementos de la forma sr^i para $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ son de orden 2 (porque además de anularse al elevarse al cuadrado, todos estos elementos son distintos de la identidad).
Luego, los subgrupos de orden 2 son:

- $\{1, s\}$
- $\{1, sr\}$
- $\{1, sr^2\}$

  $\vdots$
- $\{1, sr^{n-1}\}$

Ahora veamos que son conjugados entre sí de dos en dos. Para ello, basta con probar que sr^i conjugado a s para cualquiera $i = 0, 1, 2, ..., n-1$.
Con ello habremos probado que el grupo $\{1, sr^i\}$ es conjugado a $\{1, s\}$. Y como la conjugación es simétrica, estaremos probando que $\{1, s\}$ es conjugado a $\{1, rs^j\}$ para cualquier $j = 0, 1, ..., n-1$. Y como la conjugación es transitiva, estaríamos probando que $\{1, sr^i\}$ es conjugado a $\{1, sr^j\}$ para cualesquiera $i, j = 0, 1, 2, ..., n-1$. Lo que prueba que cualquier pareja de los subgrupos de arriba son conjugados.

Entonces, tenemos que buscar un elemento $a \in D_{2n}$ tal que $s = a\ sr^i\ a^{-1}$
Para encontrar al elemento a, escogemos una potencia r^k tal que $r^{2k} = r^i$. Este número existe porque $\langle r \rangle = \langle r^2 \rangle$ porque el subgrupo cíclico $\langle r \rangle$ tiene orden n impar, y 2 es coprimo con n, entonces r^2 tiene orden n (corolario 11.6 b)).
Entonces, esto nos asegura que existe k tal que $(r^2)^k = r^i \quad \Rightarrow \quad r^{2k} = r^i$.

Por lo tanto, escogemos dicho elemento r^k. Y nos queda que:

$$\begin{aligned}
r^k(sr^i)(r^k)^{-1} &= r^k sr^{i-k} = r^k(sr^{i-k}) \\
&= r^k(r^{n-(i-k)}s) \qquad \text{propiedad 3.5 w)} \\
&= r^{n+2k-i}s \\
&= r^{2k-i}s \\
&= s \qquad \text{porque } r^{2k} = r^i \quad \Rightarrow \quad r^{2k-i} = 1
\end{aligned}$$

Entonces, cualquier grupo $\{1, sr^i\}$ es conjugado con $\{1, s\}$ y por el argumento mencionado antes, entonces, cualquier par de grupos $\{1, sr^i\}$ y $\{1, sr^j\}$ son conjugados.