Cálculo III Tarea IV: Funciones Tomás Ricardo Basile Álvarez

I Límite y continuidad, $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1) ¿Cuáles funciones de las siguientes, tienen límite o son continuas en $x=y=0$?

a) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Seguimos la trayectoria $y=mx \to \lim_{x\to 0} \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$

Es decir, el límite depende de la trayectoria (en este caso de la pendiente de la recta $y=mx$)

$\therefore$ Límite no existe $\therefore$ Tampoco es continua.

b) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$

Seguimos la trayectoria $y=mx \to \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x(mx)+(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2mx^2+m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+2m+m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1+2m+m^2}{1+m^2}$

Es decir, el límite depende de la trayectoria (En este caso de la pendiente de la recta $y=mx$)

$\therefore$ Límite no existe $\therefore$ Tampoco es continua

c) $\frac{x^2+3xy+y^2}{x^2+4xy+y^2}$

Seguimos la trayectoria $y=mx \to \lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x(mx)+(mx)^2}{x^2+4x(mx)+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+3mx^2+m^2x^2}{x^2+4mx^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+3m+m^2)}{x^2(1+4m+m^2)} = \frac{1+3m+m^2}{1+4m+m^2}$

$\therefore$ El límite depende de la trayectoria (Depende de la pendiente de la recta $y=mx$)

$\therefore$ Límite no existe $\therefore$ Tampoco es continua

d) $\frac{-|x-y|}{x^2-2xy+y^2} = f(x,y)$

Probaré que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -\infty$ Es decir, $\forall\ M>0\ \exists\ \delta>0$.э. si $\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow f(x,y)<-M$

Sea $M>0$ un número fijo y arbitrario, y propongo $\delta = \frac{1}{2M} > 0$

Suponemos que $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \to \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ ... (1)

Ahora bien,

i) $|x| = \sqrt{x^2} \underset{\text{Por ser } y^2 \geq 0}{\leq} \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ (por (1)) $\to |x| < \delta \to |x| < \frac{1}{2M}$ ...(2) por la elección de δ

ii) $|y| = \sqrt{y^2} \underset{\text{por ser } x^2 \geq 0}{\leq} \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ (por (1)) $\to |y| < \delta \to |y| < \frac{1}{2M}$ ...(3) por la elección de δ

Por otro lado: $|x-y| \leq |x|+|-y|$ ← desigualdad del triángulo

$= |x|+|y| < \frac{1}{2M} + \frac{1}{2M}$ (por 2 y 3) $= \frac{1}{M}$

$\therefore |x-y| < 1/M$

$\to \frac{1}{|x-y|} > M$ (obtenemos el recíproco de ambos lados)

$\to -\frac{1}{|x-y|} < -M$ (multiplicamos por -1)

$\to -\frac{|x-y|}{|x-y||x-y|} < -M$ (multiplicamos por $1 = \frac{|x-y|}{|x-y|}$) $\to -\frac{|x-y|}{|x-y|^2} < -M \to \frac{-|x-y|}{x^2-2xy+y^2} < -M$

$\therefore$ Si $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \to f(x,y) < -M$ $\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -\infty$

e) $e^{-\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}} = f(x,y)$

Probaré que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, Es decir, $\forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, \delta>0$ -∋- $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \to \|f(x,y)-0\| < \varepsilon$

Sea $\varepsilon>0$ y definimos $\delta = \frac{-1}{2\ln(\varepsilon)} > 0$ · Aquí $\frac{-1}{2\ln(\varepsilon)} > 0$ porque podemos suponer que $0<\varepsilon<1$, ya que para definición de límite nos interesan las ε pequeñas $\Rightarrow \varepsilon<1 \to \ln(\varepsilon)<0 \quad \therefore \frac{-1}{2\ln(\varepsilon)} > 0$

• Suponemos $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

Entonces: •) $|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = -\frac{1}{2\ln(\varepsilon)} \quad \therefore |x| < \frac{-1}{2\ln(\varepsilon)} \cdots (1)$

••) $|y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = -\frac{1}{2\ln(\varepsilon)} \quad \therefore |y| < -\frac{1}{2\ln(\varepsilon)} \cdots (2)$

Por otro lado: $|x-y| \le |x|+|y|$ (desigualdad triángulo)

$= |x|+|y| < \frac{-1}{2\ln(\varepsilon)} - \frac{1}{2\ln(\varepsilon)}$ (por 1 y 2).

$= -\frac{1}{\ln(\varepsilon)} \quad \therefore |x-y| < -\frac{1}{\ln(\varepsilon)}$

$\to \frac{1}{|x-y|} > -\ln(\varepsilon)$ (obtenemos el recíproco)

$\to -\frac{1}{|x-y|} < \ln(\varepsilon)$ (multiplicamos por -1) $\to -\frac{|x-y|}{|x-y|^2} < \ln(\varepsilon)$ (multiplicamos por $1 = \frac{|x-y|}{|x-y|}$)

$\to -\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2} < \ln(\varepsilon)$

$\to e^{\frac{-|x-y|}{x^2-2xy+y^2}} < \varepsilon$ ← (ya que si $a<b \to e^a < e^b$ por ser e^x una función creciente)

$\therefore \forall\, \varepsilon>0$ si: $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta = \frac{-1}{2\ln(\varepsilon)} \Rightarrow e^{\frac{-|x-y|}{x^2-2xy+y^2}} < \varepsilon \to |f(x,y)| < \varepsilon$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ La continuidad de la función se discutirá en el ejercicio 2.

f) $|x|^y$

Seguimos la trayectoria $x = e^{-a/y}$ con a una cte.

cuando $y\to 0$, se tiene que $\frac{a}{y}\to\infty$, entonces $-\frac{a}{y}\to-\infty$ y finalmente $e^{-a/y}\to 0$ (i.e. $x\to 0$)

Es decir, si el límite general existe, debe de valer lo mismo para la trayectoria $x=e^{-a/y}$ con $y\to 0$

$\lim_{y\to 0} |e^{-a/y}|^y = \lim_{y\to 0} (e^{-a/y})^y$ (porque $e^{-a/y}>0$ porque la función exponencial es positiva)

$= \lim_{y\to 0} e^{-\frac{a}{y}(y)} = \lim_{y\to 0} e^{-a} = e^{-a}$

Entonces el valor del límite a lo largo de $x=e^{-a/y}$ es igual a e^{-a}, es decir, depende de la trayectoria.

$\therefore$ No existe el límite $\quad \therefore$ No es continua

g) $|x|^{1/|y|} = f(x,y)$

Probaré que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, es decir, $\forall \varepsilon>0 \;\exists \delta>0 \;\ni 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon$

Sea $\varepsilon>0$ y definimos: $\delta = \min\left(\frac{-\ln(2)}{\ln(\varepsilon)}, \frac{1}{2}\right) > 0$

$\left(-\frac{\ln(2)}{\ln(\varepsilon)} > 0\right.$ ya que para ε pequeñas (que son las que nos interesan en la definición de lím) $\to \ln(\varepsilon)<0$ $\left.\to -\frac{\ln(2)}{\ln(\varepsilon)} > 0 \right)$

Suponemos $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$:

Entonces: •) $|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \frac{1}{2}$ (por la definición de δ) $\to |x| < 1/2 \;\dots(1)$

••) $|y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta < -\frac{\ln(2)}{\ln(\varepsilon)}$ (por la def. de δ)

$\to |y| < \frac{-\ln(2)}{\ln(\varepsilon)} \longrightarrow \frac{1}{|y|} > -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} \to \frac{1}{2}^{(1/y)} < \frac{1}{2}^{\left(-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}\right)} \dots (2)$

(esta última implicación porque si $a>b \Rightarrow \frac{1}{2}^a < \frac{1}{2}^b$, porque la función $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ es decreciente)

Por (1): $|x| < 1/2 \to |x|^{1/|y|} < \frac{1}{2}^{1/|y|}$ ... por ser $\frac{1}{|y|} > 0$

$\to |x|^{1/|y|} < \frac{1}{2}^{(1/|y|)} < \frac{1}{2}^{\left(-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}\right)}$ (por (2))

$\therefore |x|^{1/|y|} < \frac{1}{2}^{\left(-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}\right)} = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}\right)}$ (por propiedades de logaritmos)

$= e^{-\ln(2)\left(-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}\right)} = e^{\ln(\varepsilon)} = \varepsilon$ $\qquad \therefore |x|^{1/|y|} < \varepsilon$

Entonces, si $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \to |x|^{1/|y|} < \varepsilon$ $\qquad \therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

la continuidad se discutirá en el ej. 2

h) $\dfrac{|y|^{|x|}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2} + |y/x|}$ Probaré que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe

Tomaremos las trayectorias $y = e^{-a/|x|}$ para $a>0$

Esta trayectoria es válida, porque cuando $x\to 0$, tenemos que $\frac{-a}{|x|} \to -\infty$ y entonces $e^{-a/|x|} \to 0$

Es decir, si $x\to 0 \Rightarrow y \to 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x, e^{-a/|x|}) = \lim_{x\to 0} \frac{|e^{-a/|x|}|^{|x|}\sqrt{x^2+e^{-2a/|x|}}}{\sqrt{x^2+e^{-2a/|x|}} + \left|\frac{e^{-a/|x|}}{x}\right|} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-a}\sqrt{x^2+e^{-2a/|x|}}}{\sqrt{x^2+e^{-2a/|x|}} + \frac{e^{-a/|x|}}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-a}\sqrt{x^2+0}}{\sqrt{x^2+0} + 0}$$ (porque conforme $x\to 0 \Rightarrow e^{-a/|x|} \to 0$)

$$= e^{-a}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}} = e^{-a}(1) = e^{-a}$$

$\therefore$ El valor del límite depende de a y $\therefore$ el límite no existe porque depende de la trayectoria

2. De las funciones del ejercicio anterior, si alguna resulta continua ¿Podrás dar una demostración formal?

Sabemos que para que la función sea continua en $(0,0)$, debe de cumplir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$ Por la definición de continuidad.

Sin embargo, como se mostró en el ejercicio anterior, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe para los incisos a), b), c), d), f) y h). Entonces estas funciones no son continuas. Sin embargo, para las otras dos funciones:

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-|x-y|}{x^2-2xy+y^2}} = 0$, lo cual ya se probó con $\varepsilon-\delta$ en el primer ejercicio

Sin embargo $f(0,0)$ no está definido porque implica dividir entre 0

$\therefore$ Para que sea continua, definimos $f^*(x,y) = \begin{cases} \frac{-|x-y|}{x^2-2xy+y^2} & \text{con } x \text{ o } y \neq 0 \\ 0 & \text{con } x=y=0 \end{cases}$

Esta nueva función sigue cumpliendo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f^*(x,y) = 0$ ya que no se alteró la regla de correspondencia para los puntos diferentes de $(0,0)$. Y además $f^*(0,0) = 0$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f^*(x,y) = f^*(0,0)$ $\therefore$ Esta extensión de la función sí es continua en $(0,0)$

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^{1/|y|} = 0$ lo cual se probó con $\varepsilon-\delta$ en el ejercicio 1

Sin embargo $f(0,0)$ no está definido ya que sería $|0|^{1/0}$ lo cual es indefinido

$\therefore$ Para que sea continua, definimos $f^*(x,y) = \begin{cases} |x|^{1/|y|} & \text{con } x \text{ o } y \neq 0 \\ 0 & \text{con } x=y=0 \end{cases}$

Esta nueva función sigue cumpliendo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f^*(x,y) = 0$ porque $f^* = f$ para todos los valores diferentes a $(0,0)$. Y además $f^*(0,0) = 0$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f^*(x,y) = f^*(0,0)$ $\therefore$ Esta extensión de f sí es continua en $(0,0)$

3) Una función $f(x)$ con dominio en $\mathbb{R}^n$ e imagen en $\mathbb{R}$, se dice que es de Lipschitz si $\exists\ c>0$ tal que $|f(x)-f(y)| < c\,\|x-y\|$

a) Demuestra que toda función de Lipschitz es continua, más aún es uniformemente continua

Probaré que es uniformemente continua. i.e $x,y\in\mathbb{R}^n$ $\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0 \ni \|x-y\|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

- Sea $\varepsilon>0$ y sea $\delta=\frac{\varepsilon}{c}>0$ (con $c>0$ la constante que surge de que f sea lipschitz)

Suponemos que $\|x-y\|<\delta$

Entonces: $|f(x)-f(y)| < c\,\|x-y\|$ (por ser lipschitz)

$< c\delta = c\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) = \varepsilon$ $\therefore |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\therefore$ Si $\|x-y\|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ $\therefore$ f es uniformemente continua

La continuidad uniforme implica continuidad en cualquier punto x_0 si en la definición de continuidad uniforme tomamos un x_0 fijo en vez de la y.

$\rightarrow$ si $\|x-x_0\|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (por ser uniformemente continua)

Entonces f es continua en x_0 y esto $\forall x_0\in\mathbb{R}^n \rightarrow f$ es continua en todo el dominio.

b) ¿El inverso es cierto? ¿Toda función continua es lipschitz?

Es Falso

Contraejemplo: tomamos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

$f(x)=x^2$ es continua

Sin embargo no es lipschitz.

Para demostrarlo suponemos que f sí es Lipschitz $\Rightarrow \exists\ c>0 \ni |f(x)-f(y)| < c\|x-y\|$

$$\Rightarrow |x^2-y^2| < c\,|x-y|$$
$$\Rightarrow |x-y|\,|x+y| < c\,|x-y|$$
$$\Rightarrow |x+y| < c\,\frac{|x-y|}{|x-y|}$$
$$\Rightarrow |x+y| < c \quad \nabla$$

Lo cual es una contradicción, porque $c>0$ es un valor fijo, pero $x,y\in\mathbb{R}$ por lo que $|x+y|<c$ porque $\mathbb{R}$ no es acotado.

$\therefore$ f no es lipschitz

4) Demuestra que si una función manda un conjunto conexo a uno disconexo, entonces no puede ser continua

Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es conexo, pero su imagen $f_*(\Omega)$ es disconexa.
Y supongamos que f es continua, buscando una contradicción.

Como $f_*(\Omega)$ es disconexo $\Rightarrow \exists\ A, B \subset \mathbb{R}^n$ abiertos con:

·) $f_*(\Omega) \subset A \cup B$

··) $A \cap B = \emptyset$

···) $A \cap f_*(\Omega) \neq \emptyset$, $B \cap f_*(\Omega) \neq \emptyset$

Probaré que con esto podemos llegar a que Ω es disconexo, que es una contradicción.
Consideremos la imagen inversa de A y B, $f^*(A)$ y $f^*(B)$

0) Como A y B son abiertos y f es continua
$\Rightarrow f^*(A)$ y $f^*(B)$ son abiertos (demostrado en ej. 5)

1) Pd. $\Omega \subset f^*(A) \cup f^*(B)$

Sea $x \in \Omega \rightarrow f(x) \in f_*(\Omega) \rightarrow f(x) \in A \cup B$ (por ·))
$\rightarrow f(x) \in A$ o $f(x) \in B$
$\rightarrow x \in f^*(A)$ o $x \in f^*(B)$ (por la definición de imagen inversa)
$\rightarrow x \in f^*(A) \cup f^*(B)$ $\therefore \Omega \subset f^*(A) \cup f^*(B)$ #

2) Pd. $f^*(A) \cap f^*(B) = \emptyset$

Por contradicción, suponemos que hay un $x \in f^*(A) \cap f^*(B)$
$\rightarrow x \in f^*(A)$ y $x \in f^*(B)$
$\rightarrow f(x) \in A$ y $f(x) \in B$
$\rightarrow f(x) \in A \cap B$ pero $A \cap B = \emptyset$ por ··) ¡! $\therefore f^*(A) \cap f^*(B) = \emptyset$

3) Pd. $f^*(A) \cap \Omega \neq \emptyset$

por ···) : $A \cap f_*(\Omega) \neq \emptyset \rightarrow \exists\ f(x) \in A \cap f_*(\Omega) \rightarrow f(x) \in A$ y $f(x) \in f_*(\Omega)$
$\rightarrow x \in f^*(A)$ y $x \in \Omega$
$\rightarrow x \in f^*(A) \cap \Omega$ $\therefore f^*(A) \cap \Omega \neq \emptyset$

Pd. $f^*(B) \cap \Omega \neq \emptyset$

por ···) : $B \cap f_*(\Omega) \neq \emptyset \rightarrow \exists\ f(x) \in B \cap f_*(\Omega) \rightarrow f(x) \in B$ y $f(x) \in f_*(\Omega)$
$\rightarrow x \in f^*(B)$ y $x \in \Omega$
$\rightarrow x \in f^*(B) \cap \Omega$ $\therefore f^*(B) \cap \Omega \neq \emptyset$

Por 0,1,2,3), tenemos que Ω es disconexo ¡!
Entonces suponer que f es continua fue un error $\rightarrow f$ es discontinua

5) Si la función cumple que hay un subconjunto abierto en la imagen, tal que su imagen inversa no es abierto, entonces la función es discontinua.

Supongamos que $A \subset \mathrm{Im}(f)$ es abierto, pero que $f^*(A)$ no es abierto.
y tambien supongamos que f es continua (Esperando encontrar contradicción)

Sea $x_0 \in f^*(A)$, entonces $f(x_0) \in A$ (por definición de imagen inversa)

Pero como A es abierto $\rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ tal que:

$$B_\varepsilon(f(x_0)) \subset A \quad \dots (1)$$

Además, como f es continua, entonces para este $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Es decir, si $x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$

pero por (1), $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \subset A \rightarrow f(x) \in A$

$\rightarrow x \in f^*(A)$

$\therefore$ si $x \in B_\delta(x_0) \rightarrow x \in f^*(A)$

Es decir $B_\delta(x_0) \subset f^*(A)$

Entonces si $x_0 \in f^*(A) \Rightarrow B_\delta(x_0) \subset f^*(A)$

lo que significa que $f^*(A)$ es abierto, contradiciendo la suposición inicial.

Entonces suponer que f es continua fue un error

$\therefore$ f no es continua

6, Imaginen que el conjunto solución $f(x,y)=0$ es una curva.
Prueben que esta función es continua $\iff$ $f(x,y)$ es continua en el conjunto solución.

$\Rightarrow$, Demostraré que el teorema es falso con un contraejemplo:

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ con $f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } x^2+y^2=1 \\ 1 & \text{en cualquier otro caso}\end{cases}$

Entonces el conjunto solución de $f(x,y)=0$ son todos los punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que $x^2+y^2=1$ que es una curva continua (la circunferencia unitaria)

Sin embargo, la función f no es continua en este conjunto solución, ya que la función "salta" de 0 a 1 al salir de la circunferencia unitaria.

$\therefore$ Este f es un contraejemplo.

$\Leftarrow$, Demostraré que también es falso con un contraejemplo:

Sea $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ con $g(x,y)=\operatorname{Sen}(x^2+y^2)$

Esta función g es continua en todo el dominio ya que seno es una función continua y la composición de continuas es continua

Sin embargo, el conjunto solución $g(x,y)=0$, se alcanza cuando $\operatorname{Sen}(x^2+y^2)=0$

Es decir $x^2+y^2=n\pi$ con $n\in\mathbb{N}$

Entonces el conjunto solución de $g(x,y)=0$ consiste de todas las circunferencias con radios $\sqrt{n\pi}$ con $n\in\mathbb{N}$

Y por lo tanto el conjunto solución no es continuo, ya que estas circunferencias están separadas.

7, Sea $f(x)$ definida sobre un cerrado Ω. Sea $K = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$. Demuestre que K es cerrado.

Demostraré que K^c es abierto. Para esto, sea $y_0 \in K^c$, eso nos deja con dos posibilidades:

•) $y_0 \notin \Omega$:

Entonces $y \in \Omega^c$ (que es abierto porque Ω es cerrado) $\rightarrow \exists\, \delta > 0 \ni B_\delta(y_0) \subset \Omega^c$

Es decir, si $x \in B_\delta(y_0) \rightarrow x \in \Omega^c \rightarrow x \notin \Omega \rightarrow x \notin K \rightarrow x \in K^c$

$\therefore\ B_\delta(y_0) \subset K^c$

••) $y_0 \in \Omega$ pero $f(y_0) > 0$ ó $f(y_0) < 0$

caso 1) $f(y_0) > 0$ Pero como f es continua*, para $\varepsilon = \frac{f(y_0)}{2} > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que:

si: $\|x - y_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y_0)| < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - f(y_0)| < \frac{f(y_0)}{2}$

$\Rightarrow -\frac{f(y_0)}{2} < f(x) - f(y_0) < \frac{f(y_0)}{2}$

$\Rightarrow \frac{f(y_0)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(y_0)$ (sumamos $f(y_0)$ a la desigualdad)

pero como $\frac{f(y_0)}{2} > 0 \rightarrow f(x) > 0$

$\therefore$ si $x \in B_\delta(y_0) \rightarrow \|x - y_0\| < \delta \rightarrow f(x) > 0 \rightarrow x \notin K \rightarrow x \in K^c$ $\therefore B_\delta(y_0) \subset K^c$

caso 2) $f(y_0) < 0$ Pero como f es continua $\rightarrow$ para $\varepsilon = -\frac{f(y_0)}{2} > 0\ \exists\, \delta > 0 \ni$.

Si $\|x - y_0\| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y_0)| < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - f(y_0)| < -\frac{f(y_0)}{2} \rightarrow \frac{f(y_0)}{2} < f(x) - f(y_0) < -\frac{f(y_0)}{2}$

$\rightarrow \frac{3}{2} f(y_0) < f(x) < -\frac{f(y_0)}{2}$ (sumamos $f(y_0)$)

Pero como $-\frac{f(y_0)}{2} > 0 \rightarrow f(x) < -\frac{f(y_0)}{2} < 0 \rightarrow f(x) < 0$

$\therefore$ si $x \in B_\delta(y_0) \rightarrow \|x - y_0\| < \delta \rightarrow f(x) < 0 \rightarrow x \notin K \rightarrow x \in K^c$ $\therefore B_\delta(y_0) \subset K^c$

Entonces, en cualquier caso, si $y_0 \in K^c$ concluimos que $B_\delta(y_0) \subset K^c$ $\therefore K^c$ es abierto

$\rightarrow$ K es cerrado

---

* A la tarea le falta la hipótesis de que f sea continua. Porque si no lo fuera, podemos encontrar el contraejemplo:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ y además $\mathbb{R}$ es cerrado

Sin embargo: $K = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \mathbb{Q}$ que no es cerrado

Derivación Parcial, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1) Una función es homogénea grado n sí y sólo sí:
$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_m) = k^n f(x_1, \dots, x_n)$$

Demostre que las derivadas parciales son homogéneas de grado $n-1$

Partimos de la igualdad $f(kx_1, kx_2, \dots, kx_m) = k^n f(x_1, \dots, x_m)$ y derivamos respecto a la i-ésima variable

$$\to \frac{\partial}{\partial x_i} f(kx_1, \dots, kx_m) = \frac{\partial}{\partial x_i} k^n f(x_1, \dots, x_m)$$

$$\to \frac{\partial}{\partial x_i} f(kx_1, \dots, kx_m) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} kx_i = \frac{\partial}{\partial x_i} k^n f(x_1, \dots, x_m) \quad \text{(por regla de cadena)}$$

$$\to \frac{\partial}{\partial x_i} f(kx_1, \dots, kx_m) \cdot k = k^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_m)$$

$$\to \frac{\partial f}{\partial x_i}(kx_1, \dots, kx_m) = k^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m)$$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x_i}$ es homogénea de grado $n-1$

2) Demuestre que una función homogénea de grado n satisface:
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf$$

Primero definimos la función: $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ con $\phi(k) = (kx, ky, kz)$

Entonces $f(\phi(k)) = f(kx, ky, kz) = k^n f(x,y,z)$

porque f es homogénea grado n

$$\to f(\phi(k)) = k^n f(x,y,z)$$

$$\to \frac{\partial}{\partial k} f(\phi(k)) = \frac{\partial}{\partial k} k^n f(x,y,z) \quad \text{(Derivamos respecto a } k\text{)}$$

$$\to \nabla f(\phi(k)) \cdot \frac{d}{dk}\phi(k) = \frac{\partial}{\partial k} k^n f(x,y,z) \quad \text{(Regla de cadena)}$$

$$\to \left(\frac{\partial}{\partial x} f(kx,ky,kz), \frac{\partial}{\partial y} f(kx,ky,kz), \frac{\partial}{\partial z} f(kx,ky,kz)\right) \cdot \frac{d}{dk}(kx,ky,kz) = nk^{n-1} f(x,y,z)$$

$$\to \left(\frac{\partial}{\partial x} f(kx,ky,kz), \frac{\partial}{\partial y} f(kx,ky,kz), \frac{\partial}{\partial z} f(kx,ky,kz)\right) \cdot (x,y,z) = nk^{n-1} f(x,y,z)$$

Ahora, esta igualdad se cumple $\forall k$, en particular si hacemos $k=1$

$$\to \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)\right) \cdot (x,y,k) = n\,(1)\, f(x,y,z)$$

$$\to x\frac{\partial}{\partial x}f + y\frac{\partial}{\partial y}f + z\frac{\partial}{\partial z}f = nf \quad /\!\!/ \quad \#$$

3) Sea $f(x,y,z)$ con segundas parciales continuas
a) Demuestren que la expresión $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ no cambia bajo rotaciones.

Sea u, v las coordenadas tras la rotación. Sabemos que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{Matriz rotación con ángulo } \theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\rightarrow u = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \quad , \quad v = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \quad \leftarrow$ coordenadas rotadas

Entonces tenemos la función rotada $f(u,v) = f(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$, tenemos que probar que esta función con coordenadas rotadas cumple que $f_{xx} + f_{yy}$ no varía.

$\cdot f(u,v)$

$\rightarrow \quad f_x = f_u U_x + f_v V_x$ (regla de la cadena multivariable)

$\rightarrow f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_u U_x + f_v V_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f_u) U_x + f_u \frac{\partial}{\partial x} U_x + \frac{\partial}{\partial x}(f_v) V_x + f_v \frac{\partial}{\partial x} V_x \quad \cdots (1)$ (regla del producto)

Pero f_u y f_v son funciones de u y v (que a su vez son funciones de x, y) entonces aplica la regla de la cadena.

- $\frac{\partial}{\partial x} f_u = \frac{\partial f_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f_{uu} U_x + f_{uv} V_x \quad \cdots (2)$
- $\frac{\partial}{\partial x} f_v = \frac{\partial f_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f_{vu} U_x + f_{vv} V_x \quad \cdots (3)$

Reemplazamos (2) y (3) en (1)

$\rightarrow f_{xx} = \left(f_{uu} U_x + f_{uv} V_x\right) U_x + f_u U_{xx} + \left(f_{vu} U_x + f_{vv} V_x\right) V_x + f_v V_{xx} \quad \cdots (3)$

El desarrollo para f_{yy} es completamente igual (ya que x y y juegan el mismo rol en la función) sólo reemplazamos x por y

$\rightarrow f_{yy} = \left(f_{uu} U_y + f_{uv} V_y\right) U_y + f_u U_{yy} + \left(f_{vu} U_y + f_{vv} V_y\right) V_y + f_v V_{yy} \quad \cdots (4)$

Pero por la definición de U y V, tenemos:

$U_x = \cos\theta \rightarrow U_{xx} = 0 \qquad V_x = \operatorname{sen}\theta \rightarrow V_{xx} = 0$

$U_y = -\operatorname{sen}\theta \rightarrow U_{yy} = 0 \qquad V_y = \cos\theta \rightarrow V_{yy} = 0$

Entonces (3) queda: $f_{xx} = \left(f_{uu}\cos\theta + f_{uv}\operatorname{sen}\theta\right)\cos\theta + \left(f_{vu}\cos\theta + f_{vv}\operatorname{sen}\theta\right)\operatorname{sen}\theta$

(4) queda: $f_{yy} = \left(-f_{uu}\operatorname{sen}\theta + f_{uv}\cos\theta\right)(-\operatorname{sen}\theta) + \left(f_{vu}(-\operatorname{sen}\theta) + f_{vv}\cos\theta\right)\cos\theta$

Y al sumarlos: $f_{xx} + f_{yy} = f_{uu}\cos^2\theta + f_{uv}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + f_{vu}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + f_{vv}\operatorname{sen}^2\theta$
$+ f_{uu}\operatorname{sen}^2\theta - f_{uv}\cos\theta\operatorname{sen}\theta - f_{uv}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + f_{vv}\cos^2\theta$

$= f_{uu}\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) + f_{vv}\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right)$

$= f_{uu} + f_{vv}$

$\therefore f_{xx} + f_{yy} = f_{uu} + f_{vv} \quad \#$

$\therefore$ El laplaciano es invariante al cambio de variable $(x,y) \rightarrow (u,v)$ por una rotación

b) Si $\Delta f = 0$ decimos que la función es armónica. ¿Una función es armónica bajo cualquier cambio de coordenadas?

No consideremos $f(x,y) = x^2 - y^2 \rightarrow \Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 2 + (-2) = 0$

y aplicamos el cambio de coordenadas $x \rightarrow 2x$, $y \rightarrow 3y$

$\rightarrow f(x,y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2 \rightarrow \Delta f = 8 - 18 = -10 \neq 0$

4. Demuestre las reglas de derivación:

a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

$\nabla(f+g) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(f+g), \frac{\partial}{\partial x_2}(f+g), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(f+g)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}f + \frac{\partial}{\partial x_1}g, \frac{\partial}{\partial x_2}f + \frac{\partial}{\partial x_2}g, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}f + \frac{\partial}{\partial x_n}g\right)$ ← Propiedad de la derivada

$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}f, \frac{\partial}{\partial x_2}f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}f\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_1}g, \frac{\partial}{\partial x_2}g, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}g\right) = \nabla f + \nabla g$

b) $\nabla(cf)$

$\nabla(cf) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(cf), \frac{\partial}{\partial x_2}(cf), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(cf)\right) = \left(c\frac{\partial}{\partial x_1}f, \dots, c\frac{\partial}{\partial x_n}f\right)$ ← propiedad de la derivada

$= c\left(\frac{\partial}{\partial x_1}f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}f\right) = c\,\nabla f$

c) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

$\nabla(fg) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(fg), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(fg)\right) = \left(f\frac{\partial}{\partial x_1}g + g\frac{\partial}{\partial x_1}f, \dots, f\frac{\partial}{\partial x_n}g + g\frac{\partial}{\partial x_n}f\right)$ ← Derivada de producto

$= \left(f\frac{\partial}{\partial x_1}g, \dots, f\frac{\partial}{\partial x_n}g\right) + \left(g\frac{\partial}{\partial x_1}f, \dots, g\frac{\partial}{\partial x_n}f\right)$

$= f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}g, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}g\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x_1}f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}f\right)$

$= f\,\nabla g + g\,\nabla f$

d) $\nabla(f/g) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

$\nabla(f/g) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(f/g), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(f/g)\right) = \left(\frac{g\frac{\partial}{\partial x_1}f - f\frac{\partial}{\partial x_1}g}{g^2}, \dots, \frac{g\frac{\partial}{\partial x_n}f - f\frac{\partial}{\partial x_n}g}{g^2}\right)$ ← Derivada de cociente

$= \frac{1}{g^2}\left(g\frac{\partial}{\partial x_1}f - f\frac{\partial}{\partial x_1}g, \dots, g\frac{\partial}{\partial x_n}f - f\frac{\partial}{\partial x_n}g\right)$

$= \frac{1}{g^2}\left[g\left(\frac{\partial}{\partial x_1}f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}f\right) - f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}g, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}g\right)\right]$

$= \frac{1}{g^2}\, g\nabla f - f\nabla g = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

5. Sea $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, encuetre una fórmula de ∇r y pruebe que $\|\nabla r\|=1$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\rightarrow \nabla r = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\|\nabla r\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}} = 1 \; \#$$

6. Supongamos que $g(r)$ depende sólo de r. y sea $f(x,y,z)=g(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

a) calcula $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$

$$f_x = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = g_r \, r_x \quad \text{(regla de cadena)}$$

$$\rightarrow f_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial x} g_r\right) r_x + g_r \frac{\partial}{\partial x} r_x \quad \ldots(1) \text{ (regla del producto)}$$

Pero como g_r es una función de r, (que a su vez es función de x,y,z) aplica la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial x} g_r = \left(\frac{\partial}{\partial r} g_r\right)\frac{\partial r}{\partial x} = g_{rr}\, r_x \quad \ldots(2)$$

Reemplazamos $(2) \rightarrow (1)$

$$\rightarrow f_{xx} = (g_{rr} r_x)\, r_x + g_r\, r_{xx} = r_x^2 g_{rr} + r_{xx}\, g_r \quad \ldots(3)$$

Pero como $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \rightarrow r_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\rightarrow r_{xx} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(1) - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Las derivadas con respecto a y y z se calculan similarmente y como r trata igual a las tres variables, las derivadas son las correspondientes:

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \rightarrow r_{yy} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$r_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad r_{zz} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$\therefore\ f_{xx} = r_x^2 g_{rr} + r_{xx} g_r$

y como r es también función de y, z, las expresiones para f_{yy}, f_{zz} son similares:

$$f_{yy} = r_y^2 g_{rr} + r_{yy} g_r \qquad f_{zz} = r_z^2 g_{rr} + r_{zz} g_r$$

$$\rightarrow f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = r_x^2 g_{rr} + r_{xx} g_r + r_y^2 g_{rr} + r_{yy} g_r + r_z^2 g_{rr} + r_{zz} g_r$$

$$= (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) g_{rr} + (r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}) g_r$$

$$= \left(\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\right) g_{rr} + \left(\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) g_r$$

$$= (1)\, g_{rr} + \frac{2x^2+2y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} g_r$$

$$= g_{rr} + \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} g_r = \underline{g_{rr} + \frac{2}{r} g_r}\ //$$

$$\therefore\ \underline{f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = g_{rr} + \frac{2}{r} g_r}\ //$$

b) Si $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0 \Rightarrow \exists\, a, b$ tal que $f(x,y,z) = \frac{a}{r} + b$

$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0 \rightarrow g_{rr} + \frac{2}{r} g_r = 0$ (por parte a))

$\rightarrow g_{rr} = -\frac{2}{r} g_r$

$\rightarrow \frac{g_{rr}}{g_r} = -\frac{2}{r} \rightarrow \int \frac{g_{rr}}{g_r} dr = \int \frac{2}{r} dr$

porque g_{rr} = derivada de g_r entonces tenemos la integral de la derivada de una función entre la función, que da igual al ln de la función

$= \ln(g_r) = -2\ln(r) + c$ ← cte de integración

$\rightarrow \ln(g_r) = \ln(r^{-2}) + C \rightarrow g_r = e^{c + \ln(r^{-2})} \rightarrow g_r = e^c e^{\ln(r^{-2})}$

$\rightarrow g_r = e^c r^{-2}$

$\rightarrow \frac{dg}{dr} = e^c r^{-2} \rightarrow \int dg = \int e^c r^{-2} dr \rightarrow g = -e^c r^{-1} + b$ ← cte de integración

$\rightarrow \underline{g = \frac{a}{r} + b}\ //$ ← Donde definimos a la cte a como $-e^c$

7] Consideremos en $\mathbb{R}^3$ las coordenadas polares $\begin{array}{l} x = r\,\text{sen}\,\theta\,\cos\phi \\ y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \\ z = r\cos\theta \end{array}$ calculen $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$

Primero encontraremos las expresiones para el cambio de coordenadas de rectangulares $\rightarrow$ esféricas.

i) vemos que $x^2+y^2+z^2 = r^2\text{sen}^2\theta\cos^2\phi + r^2\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\phi + r^2\cos^2\theta = r^2\text{sen}^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$

ii) vemos que $\frac{y}{x} = \tan\phi \rightarrow \phi = \arctan(y/x)$

iii) vemos que $\frac{z}{r} = \cos\theta \rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

$\therefore$
- $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ .... (A1)
- $\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$ ... (A2)
- $\phi = \arctan(y/x)$ ... (A3)

expresiones de cambio de coordenada

Para obtener el laplaciano, será necesario obtener las derivadas de r,θ,ϕ con respecto a x,y,z.

- $r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $r_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\rightarrow$ $\begin{array}{l} r_x = \text{sen}\,\theta\cos\phi \\ r_y = \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \\ r_z = \cos\theta \end{array}$

$\hookrightarrow r_{xx} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{(x^2+y^2+z^2)} = \frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$\therefore r_{xx} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ y similarmente: $r_{yy} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $r_{zz} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

- $\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

$\hookrightarrow \theta_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}}\left(-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}}\left(\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2+z^2)} = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi$

$\hookrightarrow \theta_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}}\left(-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}}\left(\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2+z^2)} = \frac{1}{r}\cos\theta\,\text{sen}\,\phi$

$\hookrightarrow \theta_z = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}}\left(\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}}\left(\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} = -\frac{1}{r}\text{sen}\,\theta$

- $\phi = \arctan(y/x)$

$\rightarrow \phi_x = \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi}{r^2\,\text{sen}^2\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\text{sen}\,\phi}{\text{sen}\,\theta}$

$\hookrightarrow \phi_y = \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+y^2/x} = \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi + \frac{r^2\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\phi}{r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi}} = \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\text{sen}\,\theta}$

$\hookrightarrow \phi_z = 0$

$\rightarrow \phi_{xx} = \frac{y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2r^2\text{sen}^2\theta\cos\phi\,\text{sen}\,\phi}{r^4\,\text{sen}^4\theta} = \frac{2}{r^2}\frac{\cos\phi\,\text{sen}\,\phi}{\text{sen}^2\theta}$

$\hookrightarrow \phi_{yy} = -\frac{1(2y/x)}{(x+y^2/x)^2} = \frac{-2y}{x\left(\frac{y^2}{x}+x\right)^2} = \frac{-2r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi}{r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi\left(\frac{r^2\text{sen}^2\theta}{r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi}\right)^2} = \frac{-2\,\text{sen}\,\phi}{\cos\phi\left(r\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\phi}\right)^2} = -\frac{2}{r^2}\frac{\text{sen}\,\phi\cos\phi}{\text{sen}^2\theta}$

Ahora sí, podemos encontrar el laplaciano, primero definimos $g(r,\theta,\phi) = f(x,y,z)$

$\rightarrow$ $f_x = g_r r_x + g_\theta \theta_x + g_\phi \phi_x$ ... (Regla de la cadena)

$\rightarrow$ $f_{xx} = r_x \frac{\partial}{\partial x}(g_r) + g_r r_{xx} + \theta_x \frac{\partial}{\partial x}(g_\theta) + g_\theta \theta_{xx} + \phi_x \frac{\partial}{\partial x}(g_\phi) + g_\phi \phi_{xx}$ $\leftarrow$ Regla del producto

Aplicamos la regla de la cadena a $\frac{\partial}{\partial x} g_r$, $\frac{\partial}{\partial x} g_\theta$ $\frac{\partial}{\partial x} g_\phi$

$$\rightarrow f_{xx} = r_x\left(g_{rr} r_x + g_{r\theta}\theta_x + g_{r\phi}\phi_x\right) + g_r r_{xx} + \theta_x\left(g_{\theta r} r_x + g_{\theta\theta}\theta_x + g_{\theta\phi}\phi_x\right) + g_\theta \theta_{xx}$$
$$+ \phi_x\left(g_{\phi r} r_x + g_{\phi\theta}\theta_x + g_{\phi\phi}\phi_x\right) + g_\phi \phi_{xx}$$

$$f_{xx} = g_{rr} r_x^2 + g_{\theta\theta}\theta_x^2 + g_{\phi\phi}\phi_x^2 + 2g_{r\theta} r_x\theta_x + 2g_{\theta\phi}\theta_x\phi_x + 2g_{r\phi} r_x\phi_x + g_r r_{xx} + g_\theta \theta_{xx} + g_\phi \phi_{xx} \quad \text{... (B1)}$$

El desarrollo para f_{yy} y f_{zz} es igual y se llega a:

$$f_{yy} = g_{rr} r_y^2 + g_{\theta\theta}\theta_y^2 + g_{\phi\phi}\phi_y^2 + 2g_{r\theta} r_y\theta_y + 2g_{\theta\phi}\theta_y\phi_y + 2g_{r\phi} r_y\phi_y + g_r r_{yy} + g_\theta \theta_{yy} + g_\phi \phi_{yy} \quad \text{... (B2)}$$

$$f_{zz} = g_{rr} r_z^2 + g_{\theta\theta}\theta_z^2 + g_{\phi\phi}\phi_z^2 + 2g_{r\theta} r_z\theta_z + 2g_{\theta\phi}\theta_z\phi_z + 2g_{r\phi} r_z\phi_z + g_r r_{zz} + g_\theta \theta_{zz} + g_\phi \phi_{zz} \quad \text{... (B3)}$$

Si sumamos (B1), (B2), (B3) obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \; & \underbrace{(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)}_{(1)} g_{rr} + \underbrace{(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)}_{(2)} g_{\theta\theta} + \underbrace{(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)}_{(3)} g_{\phi\phi} \\ & + 2\underbrace{(r_x\theta_x + r_y\theta_y + r_z\theta_z)}_{4} g_{r\theta} + 2\underbrace{(r_x\phi_x + r_y\phi_y + r_z\phi_z)}_{5} g_{r\phi} + 2\underbrace{(\theta_x\phi_x + \theta_y\phi_y + \theta_z\phi_z)}_{6} g_{\theta\phi} \\ & + \underbrace{(r_{xx} + r_{yy} + r_{zz})}_{7} g_r + \underbrace{(\theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz})}_{8} g_\theta + \underbrace{(\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz})}_{9} g_\phi \end{aligned}\right\} \text{.... } (*)$$

Ya sólo falta calcular las expresiones $1,\ldots,9$, que lo haremos con las derivadas calculadas en la página anterior.

(1): $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = \underline{1}$

(2): $\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 = \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\cos^2\phi + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\,\text{sen}^2\phi + \frac{1}{r^2}\text{sen}^2\theta$

$= \frac{1}{r^2}\cos^2\theta + \frac{1}{r^2}\text{sen}^2\theta = \underline{\frac{1}{r^2}}$

(3):
$$\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos^2\phi}{\operatorname{sen}^2\theta} + 0 = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\left(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi\right) = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

(4):
$$r_x\theta_x + r_y\theta_y + r_z\theta_z = (\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\left(\frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\right) + (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\left(\frac{1}{r}\cos\theta\operatorname{sen}\phi\right) + (\cos\theta)\left(-\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\right)$$
$$= \frac{1}{r}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\cos^2\phi + \frac{1}{r}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi - \frac{1}{r}\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$
$$= \frac{1}{r}\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{r}\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

(5):
$$r_x\phi_x + r_y\phi_y + r_z\phi_z = (\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\left(-\frac{1}{r}\frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta}\right) + (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\left(\frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta}\right) + \left(-\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\right)(0)$$
$$= -\frac{1}{r}\cos\phi\operatorname{sen}\phi + \frac{1}{r}\cos\phi\operatorname{sen}\phi = 0$$

(6):
$$\theta_x\phi_x + \theta_y\phi_y + \theta_z\phi_z = \left(\frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\right)\left(-\frac{1}{r}\frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta}\right) + \left(\frac{1}{r}\cos\theta\operatorname{sen}\phi\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta}\right) + \left(-\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\right)(0)$$
$$= -\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\phi\cos\phi + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\phi\cos\phi = 0$$

(7):
$$r_{xx} + r_{yy} + r_{zz} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{r}$$

(8):
$$\theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz} = \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

(9):
$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = \frac{2}{r^2}\frac{\cos\phi\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{\operatorname{sen}^2\theta} = 0$$

Finalmente, sustituimos (1), ..., (9) en (*)

$$\rightarrow \quad f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} =$$

$$g_{rr} + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} g_{\phi\phi} + \frac{2}{r} g_r + \frac{1}{r^2} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} g_\theta$$

comparando con el ejercicio anterior, vemos que en aquél el laplaciano era $g_{rr} + \frac{2}{r} g_r$, estos términos aparecen en el resultado de este ejercicio junto con las derivadas de las otras variables (θ, ϕ)

8. Sea $f(x,y,z)$ suave, con (x,y,z) en un abierto D y sea $\alpha: I \to D$ una curva suave.

Encuentra la segunda derivada de $f(t) = [f \circ \alpha](t)$

Llamamos $g(t) = f(\alpha(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$ con $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $z(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\to g' = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \qquad \text{(regla cadena)}$$

$$= f_x X_t + f_y Y_t + f_z Z_t \qquad \left(\text{donde } x_t = \frac{\partial x}{\partial t}, \dots \text{ etc}\right)$$

$$\to g'' = \frac{\partial}{\partial t}(f_x X_t) + \frac{\partial}{\partial t}(f_y Y_t) + \frac{\partial}{\partial t}(f_z Z_t)$$

$$= f_x \frac{\partial}{\partial t} X_t + X_t \frac{\partial}{\partial t} f_x + f_y \frac{\partial}{\partial t} Y_t + Y_t \frac{\partial}{\partial t} f_y + f_z \frac{\partial}{\partial t} z_t + z_t \frac{\partial}{\partial t} f_z \quad \dots (i)$$

Pero como f_x, f_y, f_z son funciones de (x,y,z), que a su vez son funciones de t, para derivar con respecto a t usamos la regla de la cadena:

$$\text{i)} \quad \frac{\partial}{\partial t} f_x = \frac{\partial}{\partial x} f_x \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} f_x \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} f_x \frac{\partial z}{\partial t} = f_{xx} X_t + f_{xy} Y_t + f_{xz} Z_t$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\partial}{\partial t} f_y = \frac{\partial}{\partial x} f_y \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} f_y \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} f_y \frac{\partial z}{\partial t} = f_{yx} X_t + f_{yy} Y_t + f_{yz} Z_t$$

$$\text{iii)} \quad \frac{\partial}{\partial t} f_z = \frac{\partial}{\partial x} f_z \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} f_z \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} f_z \frac{\partial z}{\partial t} = f_{zx} X_t + f_{zy} Y_t + f_{zz} Z_t$$

Sustituimos i) ii) iii) en (i)

$$\to g''(t) = f_x X_{tt} + (f_{xx} X_t + f_{xy} Y_t + f_{xz} Z_t) X_t + f_y Y_{tt} + (f_{yx} X_t + f_{yy} Y_t + f_{yz} Z_t) Y_t$$
$$+ f_z Z_{tt} + (f_{zx} X_t + f_{zy} Y_t + f_{zz} Z_t) Z_t$$

$$= f_x X_{tt} + f_{xx} X_t^2 + f_{xy} X_t Y_t + f_{xz} X_t Z_t + f_y Y_{tt} + f_{yx} X_t Y_t + f_{yy} Y_t^2 + f_{yz} Z_t Y_t$$
$$+ f_z Z_{tt} + f_{zx} X_t Z_t + f_{zy} Y_t Z_t + f_{zz} Z_t^2$$

Lo cual se puede escribir matricialmente como:

$$\underbrace{(f_x, f_y, f_z)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{(X_{tt}, Y_{tt}, Z_{tt})}_{\phi''(t)} + \underbrace{(x_t, y_t, z_t)}_{\phi'(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}}_{Hess(f)} \underbrace{\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \end{pmatrix}}_{\phi'(t)}$$

$$\therefore \quad g'' = \nabla f \cdot \phi''(t) + \phi'^{t}(t)\, Hess(f)\, \phi'(t)$$

9, Sea $f(x,y)$ que satisface la función Implícita. $\to$ existe curva $\alpha(t) = (t, \phi(t))$ tal que $f(t, \phi(t)) = 0$ ¿curvatura de $\alpha(t)$?

Sea $g(t) = f(\alpha(t)) = 0$ con $\alpha(t) = (t, \phi(t))$

derivamos dos veces:

$$0 = g''(t) = \nabla F \cdot \alpha''(t) + \alpha'^{t}(t) \, \text{Hess}(f) \, \alpha'(t) \quad \text{(por ejercicio anterior)}$$

$$\to (f_x \;\; f_y) \cdot (0, \phi''(t)) + (1 \;\; \phi') \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \phi' \end{pmatrix} = 0$$

$$\to \phi'' f_y + (1 \;\; \phi') \begin{pmatrix} f_{xx} + f_{xy}\phi' \\ f_{yx} + f_{yy}\phi' \end{pmatrix} = 0 \to \phi'' f_y + f_{xx} + f_{xy}\phi' + f_{yx}\phi' + f_{yy}\phi'^2 = 0$$

$$\to \phi'' = \frac{-f_{xx} - 2f_{xy}\phi' - f_{yy}\phi'^2}{f_y}$$

Pero en clase vimos que por el teorema de la función implícita: $\phi' = \dfrac{-f_x}{f_y}$ ...(1)

$$\to \phi'' = \frac{-f_{xx} - 2f_{xy}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right) - f_{yy}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)^2}{f_y} = \frac{2f_x f_{xy} f_y - f_x^2 f_{yy} - f_{xx} f_y^2}{f_y^3} \quad \text{... (2)}$$

Pero vimos en curvas, que dada una curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, la curvatura es: $\dfrac{x'y'' - y'x''}{\|\alpha'(t)\|^3}$

Que en este caso: $\alpha(t) = (t, \phi(t)) \to k = \dfrac{t'\phi'' - \phi' t''}{\|(t', \phi')\|^3} = \dfrac{(1)\phi'' - \phi'(0)}{\|(1, \phi')\|^3} = \dfrac{\phi''}{\sqrt{1+\phi'^2}^3}$

Pero por (1) y (2)

$$\to k = \frac{\dfrac{2f_x f_{xy} f_y - f_x^2 f_{yy} - f_{xx} f_y^2}{f_y^3}}{\sqrt{1 + \dfrac{f_x^2}{f_y^2}}^3} = \frac{(2f_x f_{xy} f_y - f_x^2 f_{yy} - f_{xx} f_y^2) / f_y^3}{\sqrt{\dfrac{f_y^2 + f_x^2}{f_y^2}}^3}$$

$$= \boxed{\frac{2f_x f_{xy} f_y - f_x^2 f_{yy} - f_{xx} f_y^2}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}^3}}$$

Ejemplo: para la circunferencia unitaria $x^2+y^2=1 \to f(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$

$\to f_x = 2x \to f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$

$f_y = 2y \to f_{yy} = 2$

$$\to k = \frac{2(2x)(0)(2y) - (2x)^2(2) - (2)(2y)^2}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}^3} = \frac{8x^2 + 8y^2}{\sqrt{4x^2+4y^2}^3} = \frac{8(x^2+y^2)}{2^3 \sqrt{x^2+y^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

ya que $x^2+y^2=1$

$\therefore k = 1$, que es lo que esperábamos.