Tarea 5 Teoría Cuántica de Campos I

Tomás Ricardo Basile Álvarez

Prof. Ángel Sánchez Cecilio

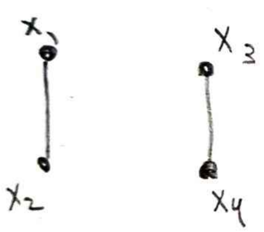
1. Dibuje los diagramas de Feynman asociados al correlador $G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ del problema 4 de la tarea anterior.

En la tarea anterior vimos que este propagador tiene la siguiente forma:

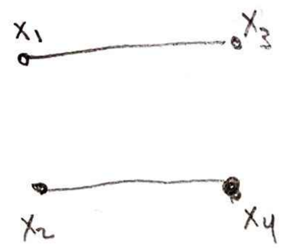
$$G_4^{(0)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \langle 0 | \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) + \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) + \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) | 0 \rangle$$

$$= \Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(x_3-x_4) + \Delta_F(x_1-x_3)\Delta_F(x_2-x_4) + \Delta_F(x_1-x_4)\Delta_F(x_2-x_3)$$

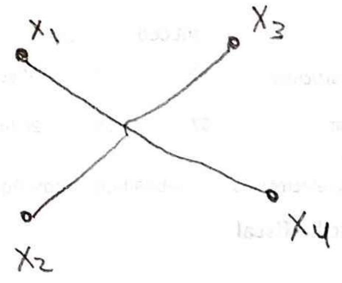
Por lo tanto, para los diagramas de Feynman, dibujamos los cuatro puntos x_1, x_2, x_3, x_4 y los conectamos según nos digan los propagadores



+



+



↑ Corresponde a $\Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(x_3-x_4)$

↑ Corresponde a: $\Delta_F(x_1-x_3)\Delta_F(x_2-x_4)$

↑ Corresponde a: $\Delta_F(x_1-x_4)\Delta_F(x_2-x_3)$

2. Para la teoría ϕ^4 vista en clase, calcule los factores combinatorios de los sig. diagramas (correspondientes a la corrección del propagador)

a) 

Veamos de cuántas formas se puede conseguir este diagrama

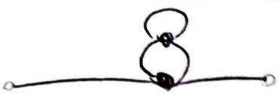
Empezamos con el punto izquierdo, el cual tiene 4 terminales, una de ellas que sale hacia la izquierda. Para escoger cuál de las 4 terminales hace esto, tenemos 4 posibilidades. Por lo que hasta ahora tenemos el siguiente diagrama:

Luego, fijándonos en el punto de la derecha, también tiene 4 terminales y una de ellas sale a la derecha. Por lo que hay 4 posibilidades de escogerla. Eso nos deja con lo siguiente:

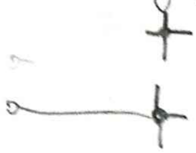
Ahora nos quedan 3 terminas de cada punto para conectar las entre sí. Para una terminal cualquiera del lado izquierdo, hay 3 opciones para conectarla con una del derecho. Luego, para la siguiente terminal quedan 2 opciones del lado derecho (pues una ya fue ocupada). Finalmente nos queda una terminal de cada punto, que no queda de otra más que conectarlas.

Pero además, podríamos intercambiar los dos puntos, lo que multiplica todas nuestras posibilidades por 2.

Entonces, la cantidad total es $(4)(4)(3)(2)(2) = \boxed{192}$ multiplicamos todo

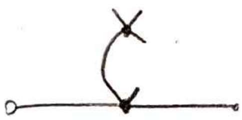
b) 

Primero nos fijamos en el punto de abajo, que tiene 4 terminales. Una de ellas sale hacia la izquierda y hay 4 formas de elegir cuál. Lo que nos deja con lo siguiente:



Luego, de las 3 terminales restantes del punto de abajo, escogemos cuál sale hacia la derecha. Lo que nos deja con el diagrama:

Al punto de abajo le quedan 2 terminales, que se tienen que conectar con 2 del punto de arriba. Para la primera terminal del punto de abajo, tenemos 4 posibilidades para conectarla con alguna de las terminales de arriba. Lo que nos deja:



La última terminal de abajo se tiene que conectar con el punto de arriba. Y hay 3 formas para hacerlo (las tres terminales de arriba). Y nos queda:

Luego, las dos terminales que quedan arriba se conectan y ya: 

Finalmente, también podríamos intercambiar los puntos de lugar, lo que agrega un factor de 2.

Entonces, el número total de formas es: $(4)(3)(4)(3)(2) = \boxed{288}$ Producto de todas las posibilidades

3. Para la teoría ϕ^4, calcule los Factores combinatorios de las siguientes "burbujas de vacío".

a)

Tenemos dos puntos con cuatro terminales conectados entre sí. Para la primera terminal del punto de abajo, tenemos 4 posibilidades para conectarla con el punto de arriba (correspondientes a las 4 terminales libres del punto de arriba) y nos queda:

Para la siguiente terminal del punto de abajo, hay 3 posibilidades para conectarla con el punto de arriba (sus 3 terminales libres). Luego nos queda:

Para la siguiente terminal del punto de abajo, nos quedan 2 posibilidades para conectarla con el punto de arriba (las 2 terminales restantes). Nos queda:

La última conexión sólo se puede hacer de una manera, por lo que llegamos a 

Entonces hay $(4)(3)(2) = 4! = \boxed{24}$ posibilidades

b) 

Primero nos fijamos en el punto izquiero, el cual tiene una terminal conectada con otra del mismo punto. Para hacer esta conexión, hay que escoger cuáles dos de las cuatro terminales conectaremos. Esta elección se puede hacer de $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \underline{\underline{6}}$ formas

Pues primero escogemos una de las 4 terminales, luego una de las 3 restantes y dividimos por 2 porque no importa el orden en que escojamos las terminales que conectaremos.

Lo mismo se vale para el punto derecho, que también tiene dos terminales conectados entre sí, lo que agrega un factor de $\underline{\underline{6}}$ también.

Después de esto nos queda:

Falta conectar dos terminales de la izquierda con dos de la derecha. Para hacerlo, de la primera terminal de la izquierda tenemos $\underline{\underline{2}}$ formas de conectarla con la derecha (las dos terminales de la derecha). Luego nos queda una sola terminal de cada lado y se conectan directamente.

Entonces, el número de posibilidades es $(6)(6)(2) = \boxed{72}$

4. ¿Cómo se relaciona el factor combinatorio con el factor de simetría?

Ambos son formas de calcular el factor que acompaña a cada diagrama de Feynman. Por ejemplo, para la teoría ϕ^4, si nos interesan los términos perturbativos con λ^2, necesitamos sumar todos los diagramas con dos vértices con 4 patas (correspondientes a los ϕ^4)

En la forma en que hemos trabajado en clase, primero poníamos un factor de $\frac{1}{2\cdot(4!)^2}$ delante de esta suma y luego a cada diagrama lo multiplicamos por su factor combinatorio (que lo escribiremos como FC).

Por lo que el coeficiente con el que queda el diagrama es $\frac{1}{2(4!)^2}FC$

Por otro lado, si utilizamos el factor de simetría, lo que se hace es contar el número de simetrías del diagrama (llamémosle S) y el factor que pondremos en el diagrama será $\frac{1}{S}$

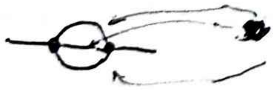
Estos dos factores tienen que ser iguales, por lo que la relación es

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{2(4!)^2}FC \Rightarrow \boxed{FC\cdot S = 2(4!)^2}$$ ← para teoría ϕ^4, los términos con λ^2

Para calcular el factor de simetría de un diagrama, se sigue la siguiente regla:

$$S = \left(2^{c}\ \text{por cada par de patas de un mismo vértice contraídos entre sí (c)}\right)\left(\ell!\ \text{Por cada conjunto de } \ell \text{ líneas intercambiables}\right)\left(v!\ \text{por cada } v \text{ vértices intercambiables}\right)$$

Por ejemplo, para los diagramas hechos en esta tarea, tenemos:

a)  $\ell=3$, $c=1$, $v=1$ $\therefore\ S = \ell!\cdot v! = 3! = \underline{6}$

y en este diagrama teníamos que $FC = \underline{192}$

$\therefore\ S\cdot FC = 6(192) = 1152$

← Que es $2(4!)^2$

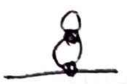
ii) Para el diagrama 

tenemos $l = 4$ líneas intercambiables y $v = 2$ puntos intercambiables, por lo que

$S = l!\,v! = 4!\,2! = \underline{48}$

Y ya habíamos calculado que $FC = \underline{24}$

por lo que $S \cdot FC = (48)(24) = \underline{1152}$ ✓

iii) Para el diagrama 

Tenemos un par de líneas intercambiables, por lo que es un factor de $2!$

Y tenemos un vértice que se une consigo mismo, lo que agrega un factor de $2(1) = 2$

$\rightarrow S = 2! \cdot 2 = \underline{4}$

Y en este caso habíamos visto que $FC = \underline{288}$

$\therefore S \cdot FC = (4)(288) = \underline{1152}$ ✓

iiii) Para el diagrama 

Tenemos una pareja de líneas intercambiables, lo que agrega un factor de $2!$

Tenemos 2 líneas que unen puntos consigo mismos, lo que añade un factor de $2c = 2(2) = 4$

Los dos puntos son intercambiables, lo que añade un factor de $2!$

$\rightarrow S = 2!\,(4)(2!) = \underline{16}$

Y teníamos que $FC = \underline{72}$

Por lo que $S \cdot FC = (16)(72) = \underline{1152}$ ✓