Tomás Ricardo Basile Alvarez

Variable Compleja
Examen 1

1) Sea $f(x+iy) = -10xy + cx + i(5(x^2-y^2) - cy)$ con $c \in \mathbb{R}$

a) Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ calcula la matriz jacobiana en un punto (x_0, y_0)

La función se verá como $f(x,y) = (\underbrace{-10xy + cx}_{f_1(x,y)}, \underbrace{5x^2 - 5y^2 - cy}_{f_2(x,y)})$ ← como $c \in \mathbb{R}$ podemos estar seguros de que ésta es la parte real e imaginaria

El Jacobiano se calcula como: $\begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial y \\ \partial f_2/\partial x & \partial f_2/\partial y \end{pmatrix}$

Pero vemos que $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-10xy + cx) = -10y + c$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-10xy + cx) = -10x$

$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(5x^2 - 5y^2 - cy) = 10x$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(5x^2 - 5y^2 - cy) = -10y - c$

$\Rightarrow$ Jacobiano en un punto (x_0, y_0) $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} -10y_0 + c & -10x_0 \\ 10x_0 & -10y_0 - c \end{pmatrix}$

b) ¿Para qué valores $c \in \mathbb{R}$ la matriz Jacobiana $D_{(x_0, y_0)} f$ corresponde a una función $\mathbb{C}$-lineal?

Una función $\mathbb{C}$ lineal se ve siempre como $f(z) = \mu z$ con $\mu \in \mathbb{C}$

Y al representarlas como una matriz, se deben de ver como $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ para que la matriz represente al producto por un complejo.

Entonces, viendo el Jacobiano que calculamos, vemos que debe cumplir:

$-10y_0 + c = -10y_0 - c$ $\rightarrow$ $c = -c$ $\Rightarrow$ $c = 0$

$-10x_0 = -(10x_0)$ $\quad -10x_0 = -10x_0$ ✓

Entonces, sólo será una transformación $\mathbb{C}$ lineal si $c = 0$

c) Para cada valor de $c \in \mathbb{R}$ determina en qué puntos f es $\mathbb{C}$-dif y en qué puntos holomorfa

o) Si $c = 0$: Entonces ya vimos que el Jacobiano es $\mathbb{C}$ lineal sin importar la elección del punto (x_0, y_0)

$\Rightarrow$ f es $\mathbb{C}$-diferenciable en todo $x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$

Y también es holomorfa en todo punto $x_0 + iy_0$ porque para cada punto $x_0 + iy_0$, podemos considerar cualquier abierto que lo contenga y f será $\mathbb{C}$-dif en todos los puntos de dicho abierto (porque es $\mathbb{C}$-dif en todo $\mathbb{C}$)

oo) Si $c \neq 0$,

Las condiciones para que sea $\mathbb{C}$ dif en un punto (x_0, y_0) son que, como ya vimos

$-10y_0 + c = -10y_0 - c$ $\Longrightarrow$ $c = -c$ ← lo cual no se cumple para ningún $c \in \mathbb{R}$

$-10x_0 = -10x_0$

$\therefore$ No es $\mathbb{C}$-dif ni mucho menos holomorfa en ningún punto

d) Identificando ahora $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ escribe a $D_{(x_0,y_0)}f$ como una función $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Encuentre los valores λ y μ tales que $T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$
¿Para qué valores de c es T $\mathbb{C}$-lineal?

Vimos que $D_{(x_0,y_0)}f = \begin{pmatrix} -10y_0+c & -10x_0 \\ 10x_0 & -10y_0-c \end{pmatrix}$

Visto como una transformación lineal de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, manda un punto (x,y) a $D_{(x_0,y_0)}f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Es decir: $T(x,y) = \begin{pmatrix} -10y_0+c & -10x_0 \\ 10x_0 & -10y_0-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$= \left((-10y_0+c)x - (10x_0)y \;,\; (10x_0)x + (-10y_0-c)y\right)$$

Regresando a los complejos, esto es: $(-10y_0+c)x + (-10x_0)y + [(10x_0)x + (-10y_0-c)y]i$

Pero en los complejos, sabemos que la parte real de z es $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ y la imaginaria $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Entonces sustituimos esto:

$$T(z) = (-10y_0+c)\frac{z+\bar{z}}{2} + (-10x_0)\frac{z-\bar{z}}{2i} + (10x_0 i)\frac{z+\bar{z}}{2} + (-10y_0-c)i\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$= \left[\frac{(-10y_0+c)}{2} + \frac{-10x_0}{2i} + \frac{10x_0 i}{2} + \frac{(-10y_0-c)}{2}\right]z + \left[\frac{(-10y_0+c)}{2} - \frac{(-10x_0)}{2i} + \frac{10x_0 i}{2} - \frac{(-10y_0-c)i}{2i}\right]\bar{z}$$

$$= \left[\frac{-20y_0 + 10x_0 i + 10x_0 i}{2}\right]z + \left[\frac{2c - 10x_0 i + 10x_0 i}{2}\right]\bar{z}$$

$$= \underbrace{[-10y_0 + 10x_0 i]}_{\lambda} z + \underbrace{[c]}_{\mu} \bar{z}$$

T es $\mathbb{C}$ lineal si y sólo si $T(z) = \lambda z$ (sin término para $\bar{z}$)

Es decir, si y sólo si $\underline{\mu = c = 0}$

Tal como habíamos visto antes

2. Define una transformación de Möbius que lleve los puntos $0, 3, -i$ en $2, i, \infty$ respectivamente. ¿Existe otra Möbius que haga lo mismo?

- Consideramos primero $L_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que lleve $\underbrace{0}_{z_1}$ al 0, $\underbrace{3}_{z_2}$ al 1 y $\underbrace{-i}_{z_3}$ al ∞

Vimos en clase que dicha función es $L_1(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} = \frac{z\ (3+i)}{(z+i)(3)}$

vemos que efectivamente $L_1(0) = 0$, $L_1(3) = 1$, $L_1(-i) = \infty$

- Ahora consideramos L_2 que mande $\underbrace{2}_{w_1}$ al 0, $\underbrace{i}_{w_2}$ a 1 y mande $\underbrace{\infty}_{w_3}$ a ∞

Para que mande el 2 al 0, debe de tener $w-2$ en el numerador y para que mande i al 1, puede verse como $\frac{w-2}{i-2}$

$\rightarrow L_2(w) = \frac{w-2}{i-2}$ vemos que manda $L_2(2) = 0$, $L_2(i) = 1$, $L_2(\infty) = \infty$

Luego, para que $M : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mande el 0 al 2, el 3 a i y el $-i$ a ∞, la construimos como:

$M(z) = L_2^{-1} L_1(z)$

así, $M(0) = L_2^{-1} L_1(0) = L_2^{-1}(0) = 2$ ← porque $L_2(2) = 0$

$M(3) = L_2^{-1} L_1(3) = L_2^{-1}(1) = i$ ← porque $L_2(i) = 1$

$M(-i) = L_2^{-1} L_1(-i) = L_2^{-1}(\infty) = \infty$ ← porque $L_2(\infty) = \infty$

→ Pero, si $L_2(w) = \frac{w-2}{i-2} \rightarrow L_2^{-1}(z) = \frac{(i-2)z+2}{1-0z} = (i-2)z+2$

Por la fórmula para inversas
$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$
$\rightarrow f^{-1}(z) = \frac{zd-b}{a-zc}$

$\therefore M(z) = L_2^{-1} L_1(z) = L_2^{-1}\left(\frac{z(3+i)}{3(z+i)}\right) = (i-2)\left(\frac{z(3+i)}{3(z+i)}\right) + 2$

$= \frac{(-7+i)z}{3z+3i} + 2 = \frac{(-7+i)z}{3z+3i} + \frac{6z+6i}{3z+3i} = \frac{(-1+i)z+6i}{3z+3i}$

vemos que cumple con lo buscado pues:

$M(0) = \frac{(-1+i)0+6i}{3(0)+3i} = \frac{6i}{3i} = 2$

$M(3) = \frac{(-1+i)(3)+6i}{3(3)+3i} = \frac{-3+3i+6i}{9+3i} = \frac{-3+9i}{9+3i} = \frac{(3i+9)i}{9+3i} = i$

$M(-i) = \frac{(-1+i)(-i)+6i}{3(-i)+3i} = \frac{i+6i+1}{0} = \infty$

¿Existe otra? No. Vimos en clase que 3 puntos y sus 3 imágenes determinan de forma única una Trans. de Möbius.

Entonces, que la transformación mande
$0 \to 2$
$3 \to i$
$-i \to \infty$
la define de forma única.

3, Calcula las raíces séptimas de la unidad. y las de $3+3i$.

Recordamos que las raíces séptimas de $re^{i\theta}$ son $\sqrt[7]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{7}\right)}$ para $k=0,\dots,6$

porque así cumplen que $\left[\sqrt[7]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{7}\right)}\right]^7 = re^{7i\left(\frac{\theta+2\pi k}{7}\right)} = re^{i\theta}e^{2\pi k i} = re^{i\theta}$

- Entonces, para 1:
Escribimos $1 = 1e^0 \Rightarrow$ las raíces son $\sqrt{1}\ e^{i\left(\frac{0+2k\pi}{7}\right)} = e^{2k\pi/7\, i}$ $k=0,\dots,6$

- $w_0 = e^{0i} = 1$
- $w_1 = e^{2(1)\pi/7\, i} = e^{\frac{2\pi}{7}i} = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{7}\right)$
- $w_2 = e^{2(2)\pi/7\, i} = e^{\frac{4\pi}{7}i} = \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{7}\right)$
- $w_3 = e^{2(3)\pi/7\, i} = e^{6\pi/7\, i} = \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{6\pi}{7}\right)$
- $w_4 = e^{2(4)\pi/7\, i} = e^{8\pi/7\, i} = \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{8\pi}{7}\right)$
- $w_5 = e^{2(5)\pi/7\, i} = e^{10\pi/7\, i} = \cos\left(\frac{10\pi}{7}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{10\pi}{7}\right)$
- $w_6 = e^{2(6)\pi/7 i} = e^{12\pi/7\, i} = \cos\left(\frac{12\pi}{7}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{12\pi}{7}\right)$

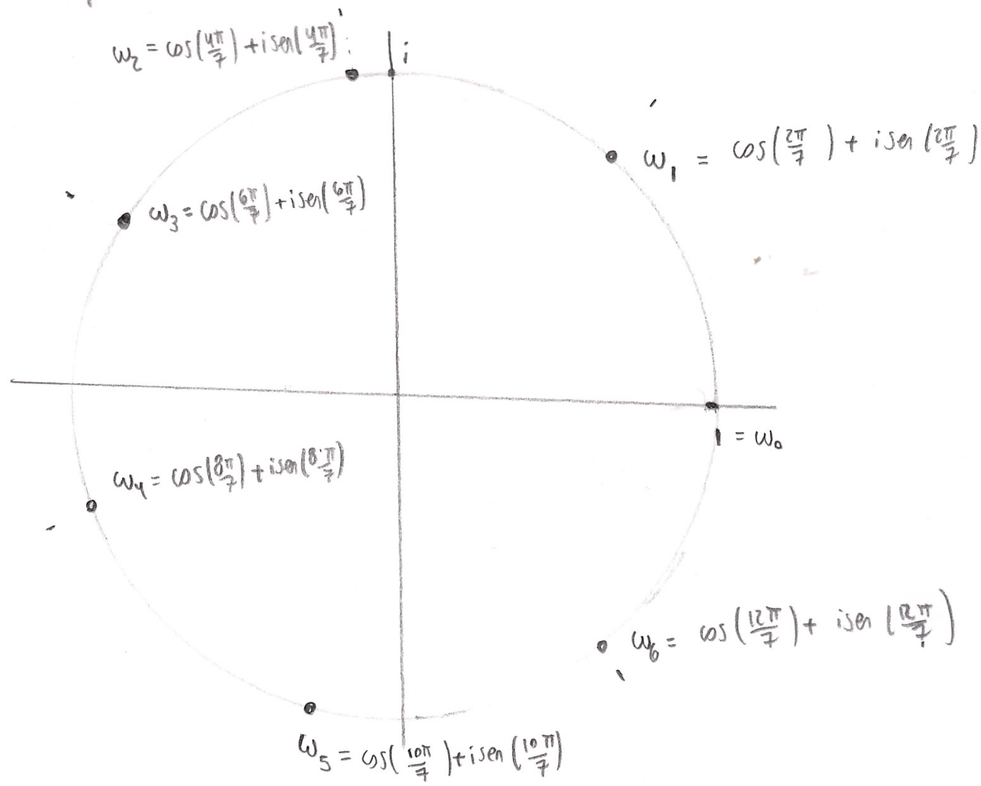
- Para $3+3i$,
Su norma es $|3+3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$
Su arg es $\arctan\left(\frac{3}{3}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ $\rightarrow 3+3i = \sqrt{18}\ e^{\pi/4\, i}$

Y sus raíces son $\sqrt[14]{18}\ e^{\frac{\pi/4+2k\pi}{7}i}$ para $k=0,\dots,6$

$\Rightarrow$
- $z_0 = \sqrt[14]{18}\ e^{\pi/4/7\, i} = \sqrt[14]{18}\ e^{\pi/28\, i} = \sqrt[14]{18}\left[\cos\left(\frac{\pi}{28}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{28}\right)\right]$
- $z_1 = \sqrt[14]{18}\ e^{(\frac{\pi}{4}+2\pi)/7\, i} = \sqrt[14]{18}\ e^{9\pi/28\, i} = \sqrt[14]{18}\left[\cos\left(\frac{9}{28}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{9}{28}\pi\right)\right]$
- $z_2 = \sqrt[14]{18}\ e^{(\frac{\pi}{4}+4\pi)/7\, i} = \sqrt[14]{18}\ e^{17\pi/28\, i} = \sqrt[14]{18}\left[\cos\left(\frac{17}{28}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{17}{28}\pi\right)\right]$
- $z_3 = \sqrt[14]{18}\ e^{(\pi/4+6\pi)/7 i} = \sqrt[14]{18}\ e^{25\pi/28\, i} = \sqrt[14]{18}\left[\cos\left(\frac{25}{28}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{25}{28}\pi\right)\right]$
- $z_4 = \sqrt[14]{18}\ e^{(\pi/4+8\pi)/7 i} = \sqrt[14]{18}\ e^{33\pi/28\, i} = \sqrt[14]{18}\left[\cos\left(\frac{33}{28}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{33}{28}\pi\right)\right]$
- $z_5 = \sqrt[14]{18}\ e^{(\pi/4+10\pi)/7 i} = \sqrt[14]{18}\ e^{41\pi/28\, i} = \sqrt[14]{18}\left[\cos\left(\frac{41}{28}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{41}{28}\pi\right)\right]$
- $z_6 = \sqrt[14]{18}\ e^{(\pi/4+12\pi)/7 i} = \sqrt[14]{18}\ e^{49\pi/28\, i} = \sqrt[14]{18}\left[\cos\left(\frac{49}{28}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{49}{28}\pi\right)\right]$

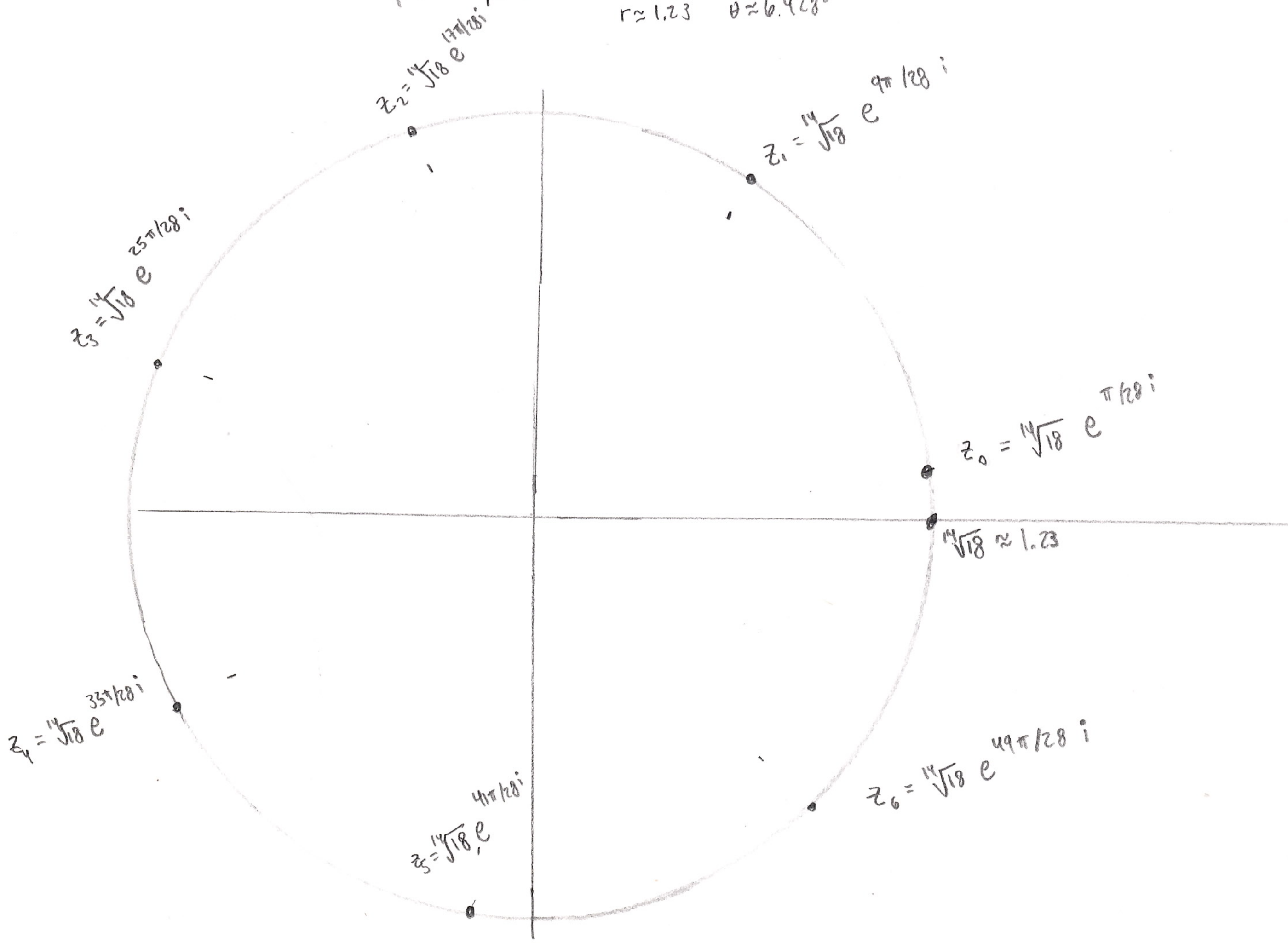
Representación gráfica:

raíces de 1   Empiezan en 1 y van rotando $\frac{2\pi}{7}$ radianes $\approx 51.43°$



Raíces de 3+3i   Podemos ver que empiezan en $\sqrt[14]{18}\, e^{\pi/28\, i}$ y van rotando $\frac{2\pi}{7}$ radianes $\approx 51.43°$

$r \approx 1.23$ $\theta \approx 6.428°$



¿ Existe una función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ holomorfa que lleve las raíces séptimas de 1 en las de $3+3i$?

Sí, Viendo el dibujo y las raíces, notamos que hay de expandir el plano por $\sqrt[14]{18}$ y luego rotarlo por $\pi/28$ radianes. O bien, multiplicar por $\sqrt[14]{18}\, e^{\pi/28\, i}$

Es decir, $f(z) = \sqrt[14]{18}\, e^{\pi/28\, i} z$

Comprobemos: sea $w_K = e^{2K\pi/7\, i}$ para $K = 0, \dots, 6$ una raíz de la unidad

$$\Rightarrow f(w_K) = \sqrt[14]{18}\, e^{\pi/28\, i} w_K = \sqrt[14]{18}\, e^{\pi/28\, i} e^{2K\pi/7\, i}$$
$$= \sqrt[14]{18}\, e^{\frac{\pi/4 + 2K\pi}{7} i} \quad \text{para } K = 0, \dots, 6$$

Pero este resultado es la K-ésima raíz de $3+3i$ como vimos antes.

Entonces, f manda la K-ésima raíz de 1 en la K-ésima raíz de $3+3i$

Y claramente $f(z) = \sqrt[14]{18}\, e^{\pi/28\, i} z$ es $\mathbb{C}$ diferenciable en todo $\mathbb{C}$ y $\therefore$ holomorfa (es más, es $\mathbb{C}$ lineal)