

CONSTANTE DE STEFAN - BOLTZMANN

Tomás R. Basile¹ y Julia Hernández¹

26 de septiembre de 2022

Correos Electrónicos: tbasilealvarez@ciencias.unam.mx / juliahm@ciencias.unam.mx

¹Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México 01000, México

RESUMEN. En este trabajo se determinó experimentalmente la constante de Stefan-Boltzmann. Para hacerlo, se usó la ley de Joule para calcular la radiación emitida por un alambre de cobre cubierto de hollín por el cual pasa una corriente controlada por una fuente de poder. Tras repetir varias veces el experimento, se obtuvo un valor promedio de $\sigma_{exp} = 5.4 \pm 0.32 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$, el cual difiere en un 4.7 % del valor teórico de $\sigma_{teo} = 5.6704 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$.

ABSTRACT. In this work, the Stefan-Boltzmann constant was experimentally determined. To do it, Joule's law was used to calculate the emitted radiation by a copper wire covered in soot when a current is conducted through it. After repeating the experiment several times, we obtained an average of $\sigma_{exp} = 5.4 \pm 0.32 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$, which differs in only 4.7 % from the theoretical value of $\sigma_{teo} = 5.6704 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$.

1. Introducción

1.1. Antecedentes

La radiación térmica se refiere a la energía que es emitida por un cuerpo debido al movimiento de sus partículas cuando tiene una temperatura mayor al cero absoluto [2]. Hacia los finales del siglo XIX se tuvo mucho interés por estudiar esta radiación. Para su estudio, Gustav Kirchhoff propuso el concepto de cuerpo negro [1], que es un cuerpo ideal que absorbe toda la radiación incidente sobre él, lo que hace más fácil el análisis de su radiación térmica [4].

Bajo este contexto, en 1879 Stefan descubrió experimentalmente [10] la ley que hoy se conoce como ley de Stefan-Boltzmann. Este resultado dice que la radiación total que emite un cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta [12]. Esta relación fue demostrada teóricamente por Boltzmann en 1884 usando argumentos de la termodinámica [3].

Además, un tiempo después, la radiación de un cuerpo negro cobró una mayor importancia histórica. Esto debido a que Rayleigh y Jeans intentaron encontrar teóricamente el espectro de emisión de un cuerpo negro utilizando argumentos clásicos pero llegaron a resultados absurdos, pues predecían que el cuerpo emitiría energías infinitas conforme aumenta la frecuencias emitida [7]. Para corregir este problema, en 1900 Planck propuso que la energía de un oscilador dentro de un cuerpo

negro sólo puede cambiar en incrementos discretos [2]. Esta idea permitió a Planck llegar a una expresión para el espectro de un cuerpo negro que coincidía con los resultados experimentales. La propuesta de Planck de discretizar la energía significó una de las ideas fundamentales de la mecánica cuántica y dio lugar al nacimiento de esta disciplina [1]. Además, con el espectro de emisión encontrado por Planck, se puede demostrar la ley de Stefan-Boltzmann de una forma alternativa a la que había realizado Boltzmann.

1.2. Conceptos Básicos

Como se mencionó en los antecedentes, Planck encontró teóricamente el espectro de radiación de un cuerpo negro. La expresión a la que llegó plantea que la cantidad de radiación que emite un cuerpo negro a temperatura T por unidad de área, de ángulo sólido y de tiempo entre las frecuencias ν y $\nu + d\nu$ está dada por [12]

$$I(\nu, T)d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} d\nu, \quad (1)$$

donde h es la constante de Planck, k la de Boltzmann y c la velocidad de la luz.

Si se integra esta expresión sobre las frecuencias y ángulo sólido, se obtiene la energía total irradiada por un cuerpo negro (por unidad de área y tiempo) a temperatura T [12]. De esta forma se demuestra la ley de Stefan-Boltzmann, es decir, que la potencia irradiada por un cuerpo negro a temperatura T es

$$P = A\sigma T^4, \quad (2)$$

con A el área del cuerpo negro y σ la constante de Stefan-Boltzmann, la cual es igual a $\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{c^2 h^3} = 5.67037 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ [12].

Es importante notar que ningún cuerpo real es verdaderamente un cuerpo negro. Los cuerpos reales emiten menos radiación que un cuerpo negro y para cuantificar esta diferencia se les define la emisividad ϵ como la razón entre la energía radiada por el cuerpo real y la que radiaría un cuerpo negro (por lo que $0 \leq \epsilon \leq 1$). Considerando esto, la ley de Stefan-Boltzmann se adapta a [4]

$$P = \sigma \epsilon A T^4. \quad (3)$$

Por último, como usaremos un cable por el que pasa corriente para producir la radiación, necesitaremos entender también el efecto Joule para calcular la potencia con la que se produce esta radiación. Este efecto dice que la potencia radiada por una resistencia que conduce una corriente I bajo una diferencia de potencial V es [7]

$$P = VI. \quad (4)$$

1.3. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es determinar experimentalmente el valor de la constante de Stefan-Boltzmann. A grandes rasgos, se utilizará un cable de cobre recubierto de hollín (para simular un cuerpo negro, debido a que el hollín tiene una emisividad muy cercana a 1 [5]) y se hará pasar una corriente por él.

Por la ley de Joule, el cable emitirá radiación con una potencia $P = VI$. Sin embargo, eventualmente el cable llegará a su temperatura de fusión $T = 1357K$ [11] y entonces se romperá y dejará de conducir. Si conocemos el voltaje y la corriente justo antes de ese momento, podremos determinar la constante de Stefan-Boltzmann despejando la ecuación (2) como

$$\sigma = \frac{P}{AT^4} = \frac{VI}{AT^4}. \quad (5)$$

Usando la ecuación (5) esperamos obtener una buena aproximación de σ .

Además, posteriormente repetiremos el experimento, pero ahora para el cable sin hollar. Esto con el objetivo de determinar el valor de la emisividad del cobre utilizando la ecuación (3), que nos lleva a

$$\epsilon = \frac{P}{\sigma AT^4} = \frac{VI}{\sigma AT^4}. \quad (6)$$

2. Desarrollo Experimental

2.1. Materiales

Para el experimento se utilizaron los siguientes materiales:

- Alambre de cobre.
- Tubo de vacío, bomba de vacío y cinta de teflón.
- Fuente de poder, dos multímetros y un par de cables banana-banana y banana caimán.
- Micrómetro y flexómetro.
- Mechero de petróleo y cerillos.
- Plomada.
- Lija.
- Soporte universal y dos pinzas.

2.2. Preparación del tubo de vacío

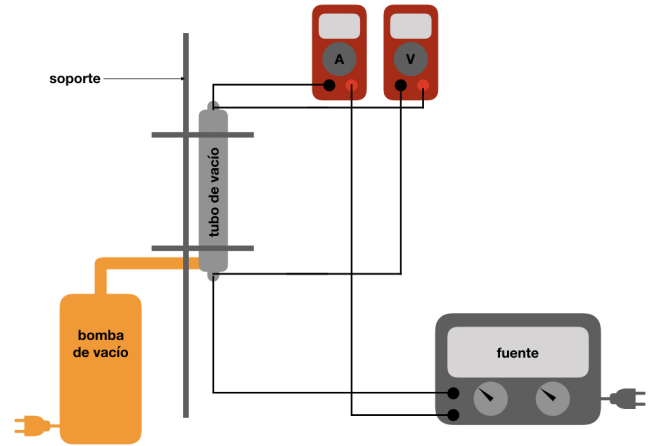


Figura 1: Diagrama de la configuración experimental

Se prepara el tubo de vacío con cinta de teflón en ambos extremos para asegurar el vacío en su interior al atornillar las tapas en su lugar. Con ayuda del soporte y un par de pinzas unidas a este por medio de nueces, se sostiene al tubo de vacío frente a la mesa. La manguera que une al tubo con la bomba de vacío debe estar en la parte inferior de este. Se hace la conexión entre el tubo, la fuente, el voltímetro y el amperímetro como se ve en la figura (1). De esta forma, la fuente crea una corriente sobre el alambre (que se encontrará al interior del tubo de vacío) y los multímetros miden voltaje y corriente.

2.3. Preparación del alambre de cobre

Se corta el alambre de cable con un largo de aproximadamente 30 centímetros. Se lija el recubrimiento de este hasta que pierda su brillo. Con la ayuda de un multímetro se verifica la continuidad al conectarlo a los extremos de alambre. Se toman medidas de su diámetro con ayuda de un tornillo micrométrico. La toma de medidas se repite a lo largo del alambre en caso de que el diámetro no sea el mismo en todo este y se reportará el promedio de estos diámetros.

Se amarra el alambre de un lado a la tapa superior del tubo de vacío y del otro a la plomada. Se verifica entonces que el largo permita al cable mantenerse tenso dentro del tubo y que al mismo tiempo haya continuidad, es decir contacto entre este y las tapas (fig.2). Se puede medir entonces el largo del cable con un flexómetro. Luego, sin desamarrar el alambre de la tapa, se utiliza el mechero de petróleo en un lugar ventilado para recubrir de hollín el alambre. Se coloca el alambre dentro del tubo de vacío, se cierran bien las tapas y se conecta la bomba da vacío. Se espera un tiempo a que esta trabaje antes de comenzar a producir la corriente, en este caso fueron 7 minutos.

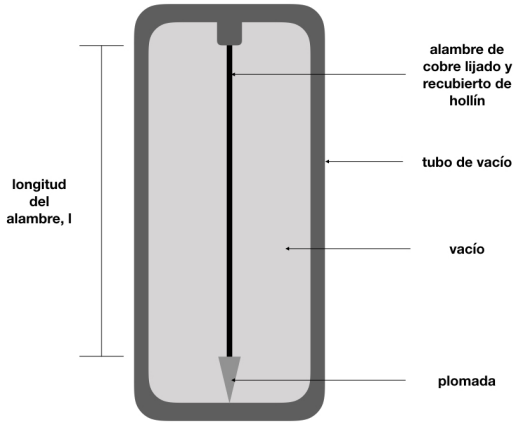


Figura 2: Diagrama del alambre lijado y cubierto de hollín dentro del tubo de vacío.

2.4. Toma de medidas

Una vez concluido el tiempo indicado anteriormente, sin apagar la bomba de vacío, se conecta y enciende la fuente. Se varía lentamente la corriente y la diferencia de potencial por turnos mientras se graban las pantallas de ambos multímetros para registrar sus valores y usarlos para su posterior análisis. Al romperse el alambre dentro del tubo, la corriente regresa a cero, se puede entonces apagar y desconectar tanto fuente como bomba de vacío. Se revisa el vídeo para saber cuál fue el valor tanto de la corriente como de la diferencia de potencial

justo antes de romperse el alambre, es decir, de que la corriente fuera cero. Repetir el proceso para un número de cables adecuado, en este caso lo repetimos para 15 cables hollinados.

2.5. Para la emisividad del cobre

Para determinar la emisividad del cobre se repitió el mismo proceso, pero esta vez sin cubrir de hollín el alambre de cobre. En este caso, lo hicimos para 3 cables para ver la diferencia con los hollinados y aproximar la emisividad del cobre.

3. Resultados

Los resultados de cada cable se presentan en la tabla (1) del apéndice, en donde se presenta primero el valor medio del diámetro de cada cable (calculado como el promedio de las varias medidas de éste, con el error estándar de la media reportado como la incertidumbre en esta medida). También se presenta la longitud de cada cable y el voltaje y corriente que indicaron los multímetros en el momento justo antes de que se rompiera el cable. Finalmente, se reporta el valor obtenido para σ en cada cable utilizando la ecuación (5).

Por otro lado, los resultados para cada uno de los cables sin hollar se presentan en la tabla (2) del apéndice. Como en esta parte del experimento el objetivo era determinar la emisividad del cobre, en dicha tabla (2) se presenta para cada cable el valor obtenido de ϵ según la ecuación (3), en la que para el valor de la constante de Stefan-Boltzmann se utiliza el valor teórico de $\sigma_{teo} = 5.6704 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$.

4. Análisis y Discusión

Utilizando los valores para los cables hollinados de la tabla (1), se reporta como resultado final para el valor experimental de la constante de Stefan-Boltzmann la media de los resultados de cada cable, junto con su incertidumbre dada por el error estándar de la media. Este resultado es de

$$\sigma_{exp} = 5.4 \pm 0.32 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}.$$

Además, para ver esquemáticamente los resultados, en la figura 3 se presenta el resultado de cada cable (dividido por σ_{teo} para normalizarlos). En dicha figura se muestra también el valor medio obtenido y su incertidumbre y se observa como el valor verdadero de σ se encuentra dentro del rango de incertidumbre que se obtuvo en el experimento.

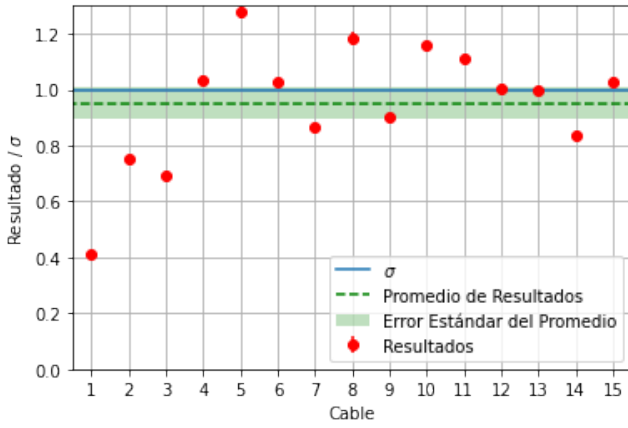


Figura 3: Resultados del valor experimental de σ para los 15 cables sin hollar. Los resultados están divididos por σ_{teo} y así un resultado de 1 indica un valor experimental totalmente igual al valor teórico. La línea verde indica el promedio de los resultados, con la incertidumbre del promedio marcada en verde claro.

Similarmente, con los resultados de los cables sin hollar de la tabla (2), se obtuvo el valor experimental de la emisividad ϵ del cobre como la media de los resultados de cada cable y nuevamente usando como incertidumbre el error estándar de la media, con lo que se obtiene que

$$\epsilon_{cobre} = 0.52 \pm 0.019.$$

Para explicar las variaciones que se tuvieron en los resultados, notamos que el desarrollo experimental seguido para la obtención de la constante de Stefan-Boltzmann implica seguir una serie de pasos manuales y difíciles de replicar de manera exacta a cada vez. Por ejemplo, el lijar el cable puede modificar el diámetro del alambre a lo largo de él y para cada cable. Igualmente, el recubrimiento de hollín puede variar, ya que el humo sigue la dirección del viento y debe ser perseguido. Incluso la tensión del cable dependiendo de su largo dentro del tubo de vacío varía, pues no se puede ver dentro de este. El alambre no es la única fuente de variaciones, también hay que considerar la calidad del vacío dentro del tubo. El sellado del tubo tiene que ser cuidadoso y ayudado de cinta de teflón. Asimismo, el vacío se mide con base al tiempo de trabajo de la bomba de vacío, lo cual puede no ser muy preciso. De modo que los valores obtenidos para cada alambre estudiado son diferentes cada vez. Que todos hayan sido del mismo orden de magnitud, demuestra que el proceso de preparación fue hecho con cuidado y que cada cable es similar dentro de lo posible.

A pesar de la dificultad del procedimiento, podemos notar que el resultado experimental es del mismo orden de magnitud que el valor teórico. Más aún, la diferencia entre uno y otro es de tan solo $0.27 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$, siendo este un valor englobado por la incertidumbre del resultado experimental. Esta diferencia de tan solo 4.7% puede

ser atribuida a la cantidad de medidas y que se hayan promediado los resultados de cada caso para cancelar los errores de cada repetición.

Por otro lado, medir la emisividad del cobre se decidió como un objetivo extra al no poder seguir utilizando el mechero de petróleo para cubrir de hollín los últimos alambres por cuestiones de logística. La cantidad de medidas fue mucho menor al del caso anterior, por lo que necesariamente el resultado no es tan certero como si hubiera habido tiempo de mayor número de repeticiones. Además, es difícil comparar el resultado con otras fuentes pues los valores que estas dan son variados [8], [13], [9] y dependen del estado de la superficie del material (oxidado, pulido, etcétera). Sin embargo, podemos comprobar que nuestro resultado coincide con el de prácticas anteriores en este laboratorio [6], [14], pues obtienen emisividades del cobre de alrededor de 0.6.

5. Conclusiones

Como se menciona en la sección anterior, el valor de la constante de Stefan-Boltzmann conseguido experimentalmente fue de $\sigma_{exp} = 5.4 \pm 0.32 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$, mientras que el valor teórico es de $5.6704 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$. Esto significa que el error en el resultado experimental respecto al teórico es de 4.7%. Si tomamos en cuenta los pasos que se mencionaron antes que son propensos a errores, podemos concluir que un 4.7% de error es un resultado considerablemente bueno.

Finalmente, se mencionan a continuación algunas recomendaciones que mejorarían la realización del experimento para los próximos equipos que trabajen en él. Primero que nada, es recomendable usar la plomada más larga, ya que se notó que con ella es más sencillo obtener la continuidad cuando se coloca el cable en el tubo. Además, se recomienda verificar que exista continuidad entre pasos durante la preparación del alambre de cobre, ya que así se evita el problema de tener que repetir todo el experimento cuando ya se estaba en el último paso. Por último, se recomienda asegurarse que el alambre esté bien hollinado por completo, ya que sino se obtendrán resultados de voltaje e intensidad demasiado bajos.

Referencias

- [1] (2009). *A Brief History of the T4 Radiation Law*, volume Volume 1: Heat Transfer in Energy Systems; Thermophysical Properties; Heat Transfer Equipment; Heat Transfer in Electronic Equipment of *Heat Transfer Summer Conference*.
- [2] Beiser, A. and Kok, C. (2015). *Concepts of Modern Physics*. McGraw-Hill Education, 6th. edition.

- [3] Boltzmann, L. (1884). Ableitung des stefanschen gesetzes, betreffend die abhangigkeit der warmestrah-
lung von der temperatur aus der electromagnetischen
lichttheorie [[derivation of stefan's law, concerning the
dependency of heat radiation on temperature, from
the electromagnetic theory of light].
- [4] Callen, H. (1985). *Thermodynamics and an Introduc-
tion to Thermostatistics*. John Wiley and Sons, 2nd.
edition.
- [5] De Falco, Gianluigi, e. a. (2017). Exploring soot par-
ticle concentration and emissivity by transient ther-
mocouples measurements in laminar partially premi-
xed coflow flames. *Energies*, 10(2).
- [6] Fierro, Carlos y Bañuelos, Q. (2020). Determinación
del valor de la constante de stefan-boltzmann. *Labo-
ratorio de Física Contemporánea I, Facultad de Cien-
cias*.
- [7] Halliday, D. and Resnick, R. (2020). *Fundamentals
of Physics*. John Wiley and Sons, 9th ed. edition.
- [8] Instruments, F. P. (2015). Emissivity - metals.
[https://www.flukeprocessinstruments.com/
en-us/service-and-support/knowledge-center/
infrared-technology/emissivity-metals](https://www.flukeprocessinstruments.com/en-us/service-and-support/knowledge-center/infrared-technology/emissivity-metals). Acces-
sed: 2022-09-19.
- [9] Omega (2017). Emissivity of common ma-
terials. [https://www.omega.co.uk/literature/
transactions/volume1/emissivitya.html](https://www.omega.co.uk/literature/transactions/volume1/emissivitya.html). Acces-
sed: 2022-09-19.
- [10] Stefan, J. (1879). Uber die beziehung zwischen der
warmestrahlung und der temperatur [on the relation
between heat radiation and temperature].
- [11] Supermarkets, M. (2021). The melting points
of metals. [https://www.metalsupermarkets.com/
melting-points-of-metals/](https://www.metalsupermarkets.com/melting-points-of-metals/). Accessed: 2022-09-10.
- [12] Tipler, P. and Llewellyn, R. (2012). *Modern Physics*.
W.H. Freeman, 5th edition.
- [13] Toolbox, T. E. (2014). Emissivity coefficients com-
mon products. [https://www.engineeringtoolbox.
com/emissivity-coefficients-d_447.html](https://www.engineeringtoolbox.com/emissivity-coefficients-d_447.html). Acces-
sed: 2022-09-19.
- [14] Zinzu, Alfredo y Augusto, M. (2019). Constante de
stefan-boltzmann. *Laboratorio de Física Contemporá-
nea I, Facultad de Ciencias*.

6. Apéndice

Cable	Diámetro [mm]	Longitud [cm \pm 0.05cm]	Voltaje [V \pm 0.005V]	Corriente [A \pm 0.005A]	Resultado σ [$10^{-8}Wm^{-2}K^{-4}$]
1	0.180 ± 0.0032	28.0	3.88	3.24	2.33 ± 0.04
2	0.174 ± 0.0024	26.6	8.20	2.58	4.27 ± 0.06
3	0.166 ± 0.0024	26.5	5.95	3.11	3.94 ± 0.06
4	0.166 ± 0.0024	27.5	6.18	4.63	5.87 ± 0.09
5	0.164 ± 0.0024	26.0	7.12	4.63	7.24 ± 0.11
6	0.158 ± 0.0020	26.3	6.21	4.16	5.82 ± 0.08
7	0.164 ± 0.0024	26.4	5.90	3.84	4.90 ± 0.07
8	0.160 ± 0.0032	28.5	4.42	7.39	6.70 ± 0.13
9	0.158 ± 0.0020	27.1	3.91	5.97	5.10 ± 0.07
10	0.168 ± 0.0020	27.0	4.53	7.03	6.57 ± 0.08
11	0.160 ± 0.0010	27.2	4.55	6.42	6.28 ± 0.017
12	0.164 ± 0.0024	27.6	4.56	6.03	5.69 ± 0.09
13	0.166 ± 0.0024	26.9	4.37	6.16	5.64 ± 0.08
14	0.166 ± 0.0024	27.5	4.03	5.75	4.75 ± 0.07
15	0.164 ± 0.0024	27.6	4.54	6.22	5.84 ± 0.09

Cuadro 1: Resultados para los cables hollinados.

Cable	Diámetro [mm]	Longitud [cm \pm 0.05cm]	Voltaje [V \pm 0.005V]	Corriente [A \pm 0.005A]	Resultado ϵ
1	0.168 ± 0.0020	26.5	3.81	3.71	0.524 ± 0.006
2	0.1580 ± 0.0020	26.5	3.68	3.77	0.547 ± 0.007
3	0.160 ± 0.0010	27.0	3.63	3.46	0.481 ± 0.002

Cuadro 2: Resultados para los cables no hollinados.