



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**Trabajo Final:**  
**Mapa Iterativo de Gauss en Números Complejos**

**Tomás Ricardo Basile Álvarez**  
**316617194**

ASIGNATURA

**Dinámica No Lineal y Caos**

# Introducción

El objetivo principal de este trabajo es estudiar un mapa iterativo conocido como mapa iterativo de Gauss [1]. Se generalizará este mapa a los números complejos y se estudiará el comportamiento del mapa para distintos valores de su parámetro por medio de diagramas realizados en Python, en los cuales se observarán patrones con formas de fractales.

Se empezará por revisar las definiciones generales y características de los mapas iterativos, así como del conjunto de Mandelbrot. Esto con el objetivo de poder estudiar el mapa de Gauss y generalizarlo a los números complejos.

## Marco Teórico

### Mapa Iterativo

Un mapa iterativo es una clase de sistema dinámico en el que el tiempo se considera discreto en vez de continuo [2]. Estos sistemas están descritos por una variable  $x$  que empieza en cierto valor  $x_0$  y posteriormente toma valores  $x_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La evolución del sistema está dado por una función  $f$  que permite calcular  $x_{n+1}$  a partir de  $x_n$  como

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

donde  $f$  es alguna función que caracteriza al sistema. Estos mapas se pueden utilizar como modelos simples de fenómenos naturales y pueden ser también ejemplos simples de sistemas **caóticos** (es decir, sistemas muy sensibles a las condiciones iniciales y que no convergen a comportamientos periódicos con el tiempo).

### Mapa Logístico

Un caso particular de un mapa dinámico es el mapa logístico, el cual se define a partir de la relación de recurrencia:

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n).$$

Se define así como un análogo discreto de la ecuación diferencial logística y por lo tanto se puede utilizar para describir el crecimiento en la población de una especie.

La variable  $r$  es un parámetro conocido como **tasa de crecimiento** y lo restringimos a  $0 \leq r \leq 4$ , de tal forma que  $x$  siempre se mantenga en  $[0, 1]$  (y así un valor de 0 indica que no quedan individuos de la especie y un valor de 1 indica la cantidad máxima de individuos). Nos interesa el comportamiento que tiene el mapa logístico a largo plazo, es decir, cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Para estudiarlo, se puede hacer un “diagrama de telaraña” para distintos valores de  $r$  como se explican en [2]. Básicamente el diagrama consiste en dibujar la curva de  $x_{n+1}$  vs  $x_n$  y la recta  $x_{n+1} = x_n$ . Luego, se empieza desde un punto  $x_0$  en el eje horizontal y se usa que el valor de  $x_1$  es la componente vertical de la curva  $x_{n+1}$  vs  $x_n$  evaluada en  $x_0$ . Posteriormente, se usa la diagonal  $x_{n+1} = x_n$  para encontrar este valor de  $x_1$  en el eje horizontal y así poder repetir el procedimiento para ir encontrando  $x_2, x_3, \dots$ . Al final queda un diagrama en el que se marcan con puntos conectados por líneas los valores de  $x_n$  para cada  $n$  desde 0 hasta el número de iteraciones deseadas.

En las siguientes figuras se presentan algunos de estos diagramas para distintos parámetros  $r$  y con valor inicial  $x_0 = 0.1$  (excepto en la primera, en la que  $x_0 = 0.5$  como se indica). En las gráficas se muestran puntos cuya coordenada horizontal indica el valor de  $x_n$  empezando desde un color claro para  $x_0$  hasta colores cada vez más oscuros para valores de  $n$  más grandes. Con ello, se pueden ver los valores de  $x_0, x_1, \dots$  y concluir si se converge a un punto, un ciclo o se tiene un comportamiento caótico.

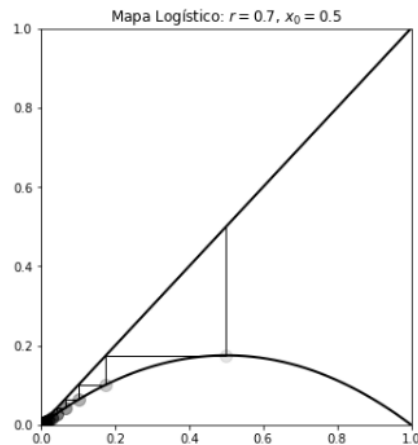


Figura 1: Diagrama de Telaraña para mapa logístico con  $r = 0.7$ .

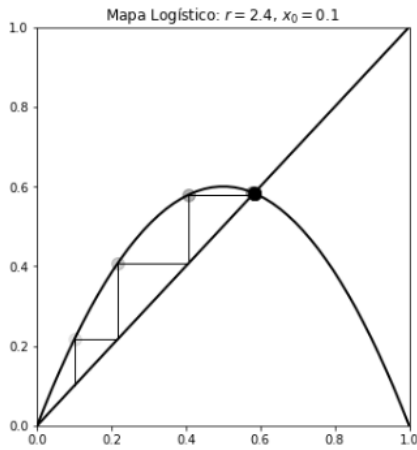


Figura 2: Diagrama de Telaraña para mapa logístico con  $r = 2,4$ .

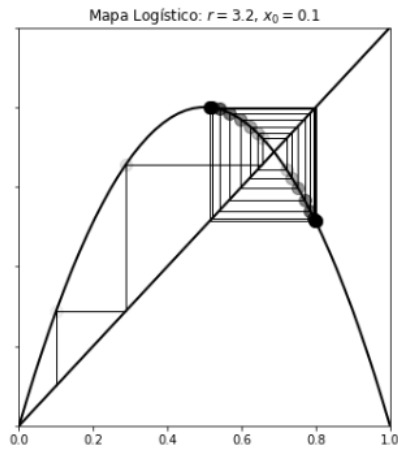


Figura 3: Diagrama de Telaraña para mapa logístico con  $r = 3,2$ .

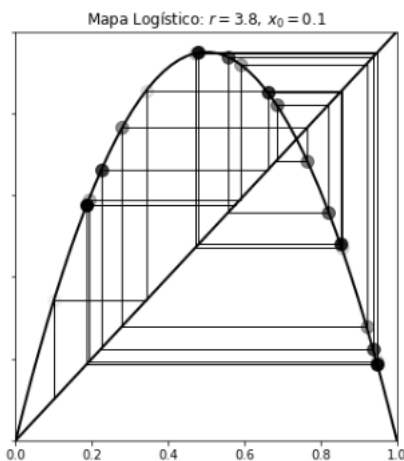


Figura 4: Diagrama de Telaraña para mapa logístico con  $r = 3,8$ .

Vemos por ejemplo en las figuras que para  $r = 0,7$ , el sistema tiende a  $x_n \rightarrow 0$ , para  $r = 2,4$  tiende a

$x_n \rightarrow 0,583$ , para  $r = 3,2$  el sistema oscila entre dos valores de  $x$  y para  $r = 3,8$  el sistema no parece tener un patrón o un periodo y se desarrolla de forma caótica.

En general, el comportamiento de  $x_n$  conforme  $n \rightarrow \infty$  sigue alguno de estos comportamientos (converge a un punto, a un ciclo con cierto periodo o tiene un comportamiento caótico). Los diagramas de telaraña nos permiten concluir que el comportamiento conforme  $n \rightarrow \infty$  depende del valor del parámetro  $r$ . Con un análisis más cuidadoso como el que se hace en [1] o [2], se puede concluir que el comportamiento cambia según  $r$  como sigue:

- $0 < r < 1$ : En este caso la población tiende a 0, es decir,  $x_n \rightarrow 0$
- $1 < r < 3$ : La población va a converger al valor final  $x_n \rightarrow \frac{r-1}{r}$ .
- $3 < r < 3,449\dots$ : En este caso la población no tiende a un valor fijo, sino que oscilará en un ciclo con periodo 2, tal como se observa en el diagrama para  $r = 3,2$ .
- $3,449\dots < r < 3,544\dots$ : A largo plazo, la población oscilará en un ciclo con periodo 4.
- $3,544\dots < r < 3,564\dots$ : A largo plazo, la población oscilará en un ciclo con periodo 8.
- $3,564\dots < r < 3,5687\dots$ : A largo plazo, la población oscilará en un ciclo con periodo 16.

Conforme  $r$  aumenta, así seguirá duplicándose el periodo de oscilación. La duplicación de periodo aparecerá cada vez más pronto conforme aumentamos  $r$ , hasta que cuando  $r = r_\infty = 3,569946\dots$ , habrán sucedido infinitas duplicaciones y el periodo tenderá a infinito.

Lo curioso sucede para valores de  $r$  entre  $r_\infty$  y 4, en donde empieza el comportamiento caótico. Para la mayoría de estos valores el sistema no se estabiliza en una órbita, sino que evoluciona de forma aperiódica como se puede ver por ejemplo para el diagrama de telaraña de  $r = 3,8$ .

Sin embargo, esto no es cierto para todos los valores de  $r$  entre  $r_\infty$  y 4, sino que en medio del caos, hay ventanas de valores de  $r$  en los que regresa el comportamiento periódico. Por ejemplo, para  $r = 3,8284$ , se tienen oscilaciones de periodo 3, que luego duplican rápidamente de periodo conforme  $r$  aumenta, hasta regresar al caos cuando  $r = 3,8415\dots$ .

Estos comportamientos se pueden resumir en un **diagrama de bifurcación**. En un diagrama de bifurcación se escribe sobre el eje horizontal el valor del parámetro  $r$  y sobre el eje vertical los valores que toma  $x_n$  para  $n \rightarrow \infty$ . Al hacer esto, se obtiene un diagrama como el de la figura 5.

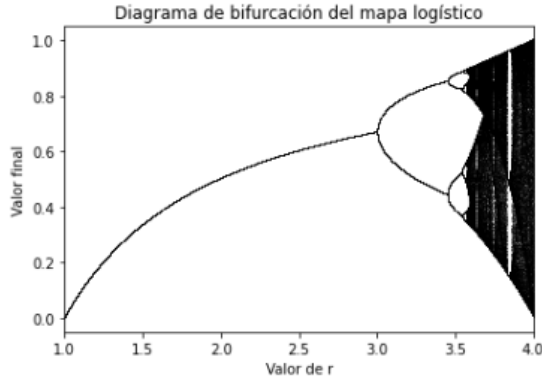


Figura 5: Diagrama de bifurcación para el mapa logístico

Notamos que se sigue el comportamiento descrito antes. Para valores de  $r$  entre 1 y 3, el sistema converge al punto fijo  $\frac{r-1}{r}$  y posteriormente se va duplicando el periodo conforme aumentamos  $r$ , lo que se ve gráficamente por la bifurcación de las líneas en el diagrama.

Este comportamiento sigue así hasta llegar al caos en  $r = 3,569946$ . En las zonas de caos,  $x_n$  no converge a un ciclo, sino que toma varios valores distintos sin un aparente orden y por ello en el diagrama se ven líneas verticales en estos puntos. Además, se observa la ventana de periodicidad en  $r \in [3,8286, 3,8415]$  que se mencionó antes, que es una de infinitas ventanas de valores de  $r$  donde se recupera la periodicidad dentro de la zona caótica.

## Conjunto de Mandelbrot

Relacionado con el tema de mapas iterativos y más encaminado a lo que veremos después sobre el mapa de Gauss, se encuentra el tema de conjunto de Mandelbrot. Dicho conjunto se define a partir de un mapa iterativo similar al logístico pero en el que ahora se trabaja sobre el campo de los números complejos en vez de restringirse a los reales. El mapa iterativo en cuestión es [3]:

$$z_{n+1} = f_c(z_n) = z_n^2 + c$$

donde los  $z_n$  son números complejos y  $c$  es un parámetro también complejo.

El conjunto de Mandelbrot se consigue estudiando el valor al que tiende  $z_n$  conforme  $n \rightarrow \infty$  si se empieza desde  $z_0 = 0$ . Para distintos valores de  $c$ , este comportamiento puede ser distinto. Hay valores de  $c$  para los que  $z_n$  tiende a un valor fijo y hay valores para los que tiene un comportamiento periódico, caótico o incluso diverge y tiende a infinito.

Dicho esto, el conjunto de Mandelbrot se define como el conjunto de todos los valores de  $c$  tales que la secuencia  $\{z_n\}$  que inicia en  $z_0 = 0$  no diverge a infinito. Es decir, para dibujarlo se puede iterar sobre distintos valores complejos de  $c$  y para cada uno de ellos calcular la secuencia  $z_0 = 0, z_1, z_2, \dots$  y revisar si diverge o no. Si la secuencia no diverge, el punto  $c$  pertenece al conjunto de Mandelbrot. Al hacer esto para varios valores de  $c$  sobre el plano complejo, se obtiene una imagen como la de la figura 6, la cual fue construida justo de esta forma usando Python.

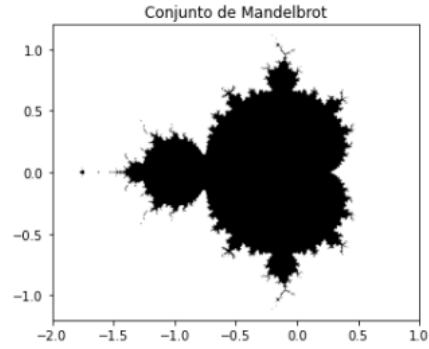


Figura 6: Conjunto de Mandelbrot

El plano representa los posibles valores de  $c$  en el campo complejo y se dibujan de color negro cuando dicho valor de  $c$  es tal que la secuencia  $\{z_n\}$  no diverge. Vemos que la figura resultante tiene una forma muy interesante y con una frontera bastante compleja. Por ejemplo, si hacemos zoom alrededor de  $c = -0,05 + 0,95i$ , obtenemos la figura 7. Dicha figura muestra más a detalle la forma compleja que tiene el conjunto de Mandelbrot en su frontera.

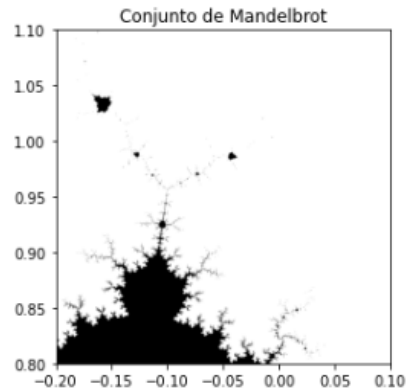


Figura 7: Conjunto de Mandelbrot alrededor de  $c = -0,05 + 0,95i$ .

Un punto particularmente interesante en el que vale la pena hacer un acercamiento es alrededor de  $c = -1,76$ , donde se puede ver en la figura 6 que parece haber una “isla” del conjunto. Cuando hacemos zoom sobre esta zona, encontramos la imagen de la figura 8

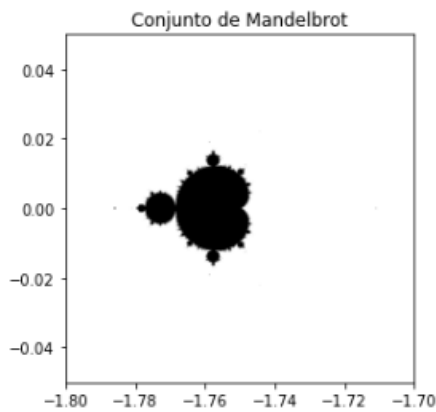


Figura 8: Conjunto de Mandelbrot alrededor de  $c = -1.76$ .

Notamos que al hacer zoom sobre esta zona, se forma una figura que nuevamente se parece al conjunto de Mandelbrot original, sólo que de menor tamaño. Esta autosimilitud del conjunto a distintas escalas es una característica importante del conjunto de Mandelbrot y parte de la definición del concepto de **fractales**, [3].

### Conjuntos de Julia

Una forma conveniente de estudiar el conjunto de Mandelbrot es a través de un concepto conocido como conjuntos de Julia. Considerando nuevamente la iteración que definía al conjunto de Mandelbrot:

$$z_{n+1} = f_c(z_n) = z_n^2 + c,$$

definimos un conjunto  $J_c$  conocido como conjunto de Julia para cada valor posible del parámetro  $c$  en el campo complejo. Este conjunto se define como sigue:

$$J_c = \{z_0 \in \mathbb{C} \text{ tales que } z_0, z_1, z_2, \dots \text{ no diverge}\}.$$

Es decir, una vez fijado el valor de  $c$ , para cada posible punto inicial  $z_0$ , se itera el mapa y se observa si el resultado diverge o no. En caso de que no diverja, el punto  $z_0$  pertenece al conjunto de Julia  $J_c$ . Por ejemplo, a continuación se muestran conjuntos de Julia contruidos de esta forma en Python para  $c = -1 + 0.2i$  y para  $c = -1 + 0.5i$ .

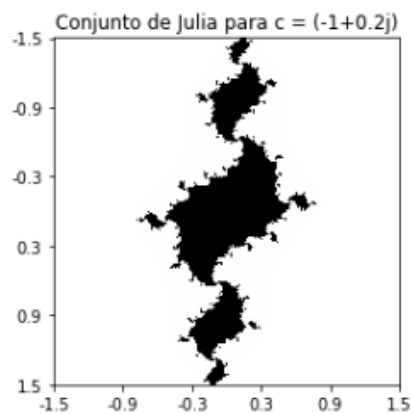


Figura 9: Conjunto de Julia  $J_{-1+0.2i}$

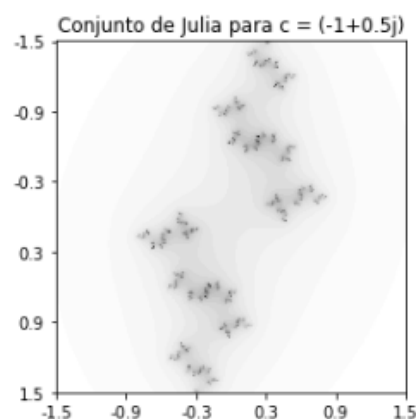


Figura 10: Conjunto de Julia  $J_{-1+0.5i}$

Notamos algunas características importantes de los conjuntos de Julia. Para empezar, queda clara la siguiente propiedad (donde hemos denotado por  $M$  al conjunto de Mandelbrot) [4]:

$$c \in M \Leftrightarrow 0 \in J_c$$

La propiedad queda clara a partir de las definiciones de  $M$  y de  $J_c$ . Pues notamos que por definición  $c \in M$  si y sólo si la secuencia  $z_0 = 0, z_1, z_2, \dots$  no diverge. Esto significa que la secuencia que inicia en  $z_0 = 0$  y se itera usando la función  $f_c$  no diverge, lo que es la definición de que  $0 \in J_c$ .

Sin embargo, la propiedad que hace más útiles a los conjuntos de Julia es que un punto  $c$  pertenece al conjunto de Mandelbrot si y sólo si  $J_c$  es un conjunto conexo [3]. Esta relación topológica entre el conjunto de Mandelbrot y los de Julia es más difícil de probar pero es muy útil para demostrar propiedades del conjunto de Mandelbrot a partir de estudiar topológicamente los conjuntos de Julia.

## Relación con el mapa logístico

Una característica interesante del conjunto de Mandelbrot es que se puede relacionar con el mapa logístico. Para hacerlo, es necesario hacer un cambio de variable al mapa iterativo  $z_{n+1} = f_c(z_n) = z_n^2 + c$  que define al conjunto de Mandelbrot. Simplemente definimos  $z = r \left( \frac{1}{2} - x \right)$  y cambiamos también el parámetro  $c$  por un parámetro  $r$  definiendo  $c = \frac{r}{2} \left( 1 - \frac{r}{2} \right)$ . Al sustituir esto en la función iterativa de Mandelbrot, nos queda:

$$\begin{aligned} r \left( \frac{1}{2} - x_{n+1} \right) &= r^2 \left( \frac{1}{2} - x_n \right)^2 + \frac{r}{2} \left( 1 - \frac{r}{2} \right) \\ \Rightarrow x_{n+1} &= -\frac{1}{r} \left[ \frac{r^2}{4} - r^2 x_n + r^2 x_n^2 + \frac{r}{2} - \frac{r^2}{4} - \frac{r}{2} \right] \\ \Rightarrow x_{n+1} &= r x_n - r x_n^2 \\ \Rightarrow x_{n+1} &= r x_n (1 - x_n) \end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que se obtiene el mapa logístico para  $x$  con parámetro  $r$ . Esto significa que bajo el mapa iterativo de Mandelbrot, la variable  $x$  definida a través de  $z = r \left( \frac{1}{2} - x \right)$  evoluciona como si siguiera un mapa logístico con parámetro  $r$ , donde  $r$  está definido a partir de  $c$  por medio de la relación  $c = \frac{r}{2} \left( 1 - \frac{r}{2} \right)$ .

Más aún, se puede ver otra similitud con el mapa logístico, en particular, la existencia de zonas con distintas periodicidades. Es decir, hay valores de  $c$  para los cuales  $z_0, z_1, z_2 \dots$  converge a un ciclo con periodo 2, o con periodo 3 ó 4, etc. En la figura 11, dibujamos nuevamente el conjunto de Mandelbrot pero pintamos con distintos colores las zonas en las que se llega a ciclos con distinta periodicidad.

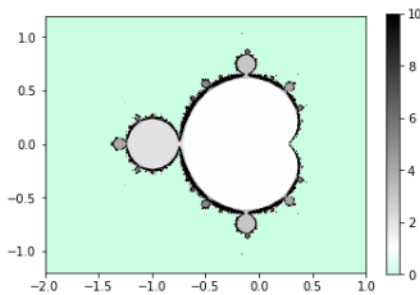


Figura 11: Conjunto de Mandelbrot con periodos marcados en escala de grises.

En la figura 11, el color verde marca valores de  $c$  para los cuales la secuencia  $z_0, z_1, \dots$  diverge (puntos que no pertenecen al conjunto de Mandelbrot). Luego, se marca con color blanco valores de  $c$  para los cuales la secuencia converge a un solo punto final. Con un tono más oscuro de gris se marcan los valores de  $c$  para los cuales la secuencia converge a un ciclo de periodo 2, y luego con un color más oscuro los ciclos de periodo 3,

4, etc. Hasta llegar a ciclos de periodo 10 o mayor (o comportamientos caóticos), que se dibujan en color negro.

Podemos ver que el cardiode principal del conjunto de Mandelbrot corresponde a los valores de  $c$  en los que se converge a un solo valor. Luego, el círculo a la izquierda tiene valores de  $c$  en los que se llega a un ciclo de periodo 2, el siguiente círculo a la izquierda tiene valores de  $c$  en los que la convergencia es de periodo 4. Así sucesivamente se va duplicando el periodo conforme nos movemos hacia la izquierda en el eje real y las zonas de periodo alto son cada vez más pequeñas.

Finalmente, después de infinitas duplicaciones de periodo, se llega a un comportamiento caótico. Este comportamiento es similar al duplicamiento de periodo que tiene el mapa logístico y de hecho su presencia se debe a la relación entre el mapa logístico y el de Mandelbrot encontrada antes.

## Mapa de Gauss

En esta sección introduciremos el concepto central de este trabajo, que es el mapa de Gauss. El mapa de Gauss se define a partir de siguiente función de recurrencia [1]:

$$x_{n+1} = f(x_n) = b + e^{-ax_n^2},$$

donde  $a$  y  $b$  son dos parámetros reales que definen al mapa. El mapa se llama mapa de Gauss porque usa una función gaussiana  $e^{-ax^2}$  en su definición. Para estudiar este mapa, podemos empezar dibujando la curva de  $x_{n+1}$  vs  $x_n$ , que se ve como la de la figura 12.

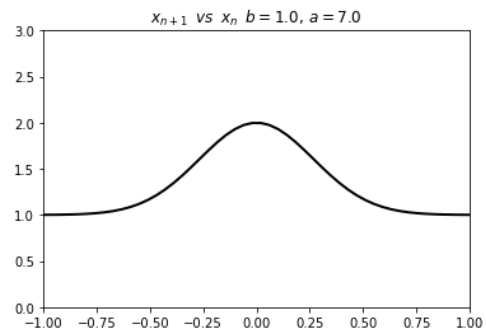


Figura 12:  $x_{n+1}$  vs  $x_n$  para el mapa de Gauss con  $b = 1$  y  $a = 7$ .

Vemos que la curva es una campana Gaussiana cuya forma particular depende de los valores de  $b$  y  $a$ . Además, tiene una forma similar a la curva del mapa logístico, ya que ambas son curvas con un solo máximo en el centro.

Ahora dibujaremos algunos diagramas de bifurcación de este mapa para distintos valores de  $a$ . Para hacerlo, escogemos primero un valor fijo de  $a$  y dibujamos el diagrama de bifurcación como función del parámetro  $b$ . Es decir, después de seleccionar un valor de  $a$ , vamos variando valores de  $b$  en cierto rango y para cada uno iteramos el mapa varias veces empezando desde  $x_0 = 0$ .

Luego, para este parámetro  $b$ , dibujamos en el diagrama los valores finales que toma la secuencia  $\{x_n\}$  después de muchas iteraciones (ya sea que converge a un valor o a un ciclo entre varios valores o que se comporta de manera caótica). En las siguientes figuras se dibujan diagramas de bifurcación para distintos valores de  $a$ , los cuales se dibujaron en Python usando el procedimiento mencionado.

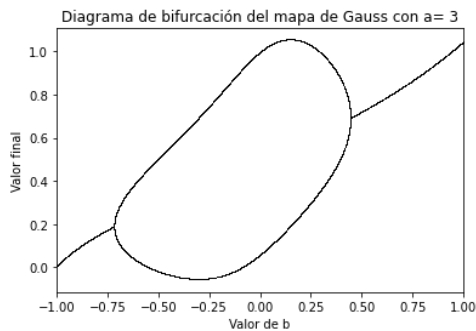


Figura 13: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss,  $a = 3$

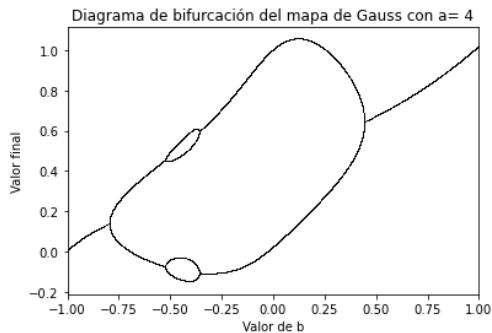


Figura 14: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss,  $a = 4$

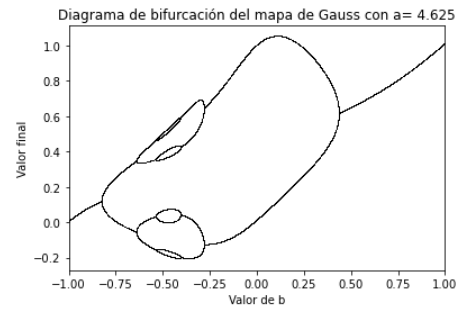


Figura 15: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss,  $a = 4,625$

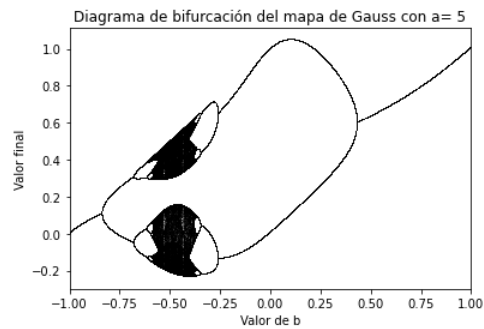


Figura 16: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss,  $a = 5$

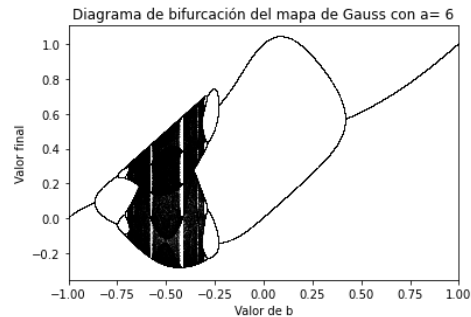


Figura 17: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss,  $a = 6$

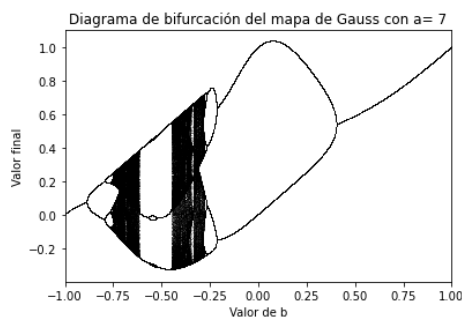


Figura 18: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss,  $a = 7$

Podemos notar varias cosas interesantes en estos diagramas. Para empezar, vemos que para valores bajos de  $a$ , no hay zonas caóticas para ningún valor del parámetro  $b$ . Luego, conforme aumentamos  $a$ , observamos un comportamiento de duplicación de periodos (para  $a = 3$  hay zonas con periodo 2, para  $a = 4$  aparecen zonas con periodo 4, para  $a = 4,625$  aparecen zonas con periodo 8). Posteriormente, para valores más altos de  $a$ , empezamos a observar zonas caóticas, que al igual que en el mapa logístico, suelen tener ventanas de comportamiento periódico (por ejemplo, hay una ventana de comportamiento periódico muy ancha para  $a = 7$ ).

Una característica interesante de estos diagramas y que los distingue del mapa logístico es que después de las zonas caóticas, se vuelve permanentemente a zonas con comportamiento periódico y eventualmente zonas en las que el mapa converge a un solo valor.

## Generalizar a números complejos

En esta sección generalizaremos el mapa de Gauss definido en la sección pasada para que incluya números complejos. Hago esto porque de esta forma se relacionará este mapa con el conjunto de Mandelbrot y entonces puede dar lugar a un fractal. Además, es algo que no encontré que se hiciera en las referencias que consulté y que creo que se podrían crear imágenes interesantes al hacerlo.

Para hacer la generalización, tomaré en cuenta de ahora en adelante que los parámetros  $b$  y  $a$  pueden ser complejos y entonces también la variable  $x$  lo puede ser.

## Diagramas de Bifurcación en el Campo Complejo

En esta sección dibujaré una generalización de los diagramas de bifurcación pero ahora considerando que los valores se encuentran en el plano complejo. Para hacer cada diagrama, empezaremos al igual que antes fijando un valor de  $a$ . Luego, se varía el parámetro  $b$  sobre una zona del plano complejo de forma similar a como se hace con el parámetro  $c$  para el conjunto de Mandelbrot.

Posteriormente, para cada valor de  $b$ , se itera el mapa de Gauss  $x_{n+1} = b + e^{-ax_n^2}$  empezando desde  $x_0 = 0$  y se estudia el comportamiento después de varias iteraciones. La secuencia  $\{x_n\}$  puede converger a un ciclo con cierto periodo, puede divergir a infinito o tener un comportamiento acotado pero caótico (es decir, sin un aparente periodo).

Finalmente, para dibujar toda esta información, consideramos el campo complejo donde se encuentran los valores de  $b$ . Para cada valor de  $b$ , coloreamos el punto correspondiente del campo complejo con un color distinto dependiendo del comportamiento que tiene el mapa para ese parámetro.

En particular, se dibuja con un azul oscuro los puntos  $b$  para los cuales la secuencia  $\{x_n\}$  diverge (marcado con un 0 en la barra de colores de las figuras). Por otro lado, se dibujan los puntos  $b$  con colores que van desde el azul hasta el amarillo dependiendo del periodo del ciclo al que converge la secuencia  $\{x_n\}$  desde un periodo de 1 (la secuencia converge a un solo punto) hasta un periodo máximo (en este caso en la mayoría de las figuras se escogió 15, aunque en otras se escogieron valores mayores, que se marcan en la barra de colores). Los puntos en los que no se observa un comportamiento periódico dentro del límite de periodos que se considera también se pintan del color más amarillo al igual que los de periodo máximo.

Por ejemplo, en la figura 19, los puntos verdes corresponden a valores de  $b$  en los que la secuencia  $\{x_n\}$  converge a un ciclo de periodo 10. Los puntos del color más amarillo corresponden a valores de  $b$  en los que la secuencia  $\{x_n\}$  converge a un ciclo de periodo de al menos 15 (e incluyen periodos mayores o incluso comportamientos caóticos).

En las siguientes figuras dibujamos algunos de estos diagramas para distintos valores de  $a$  usando Python.



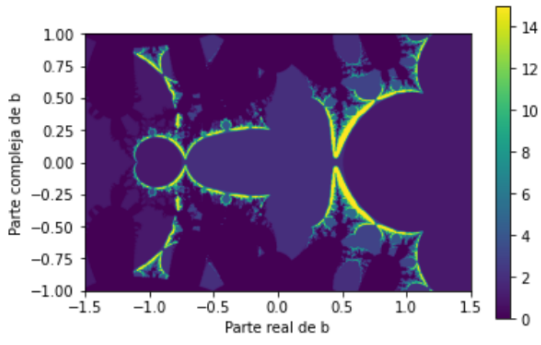


Figura 19: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss coplejo,  $a = 3$ .

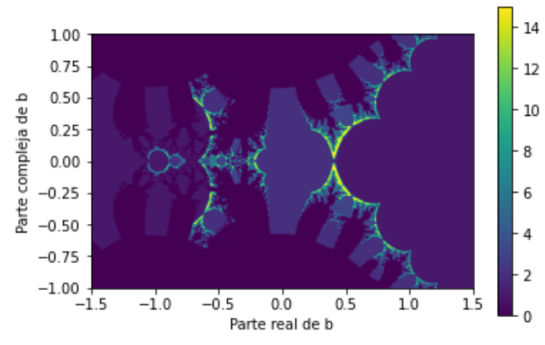


Figura 22: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss coplejo,  $a = 7$ .

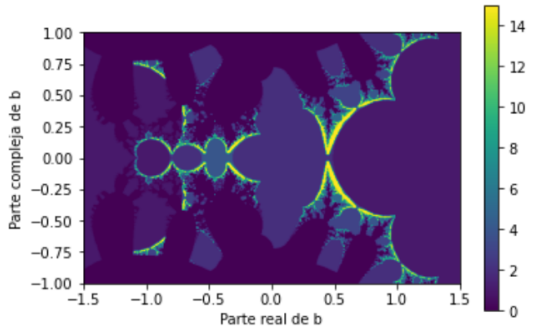


Figura 20: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss coplejo,  $a = 4$ .

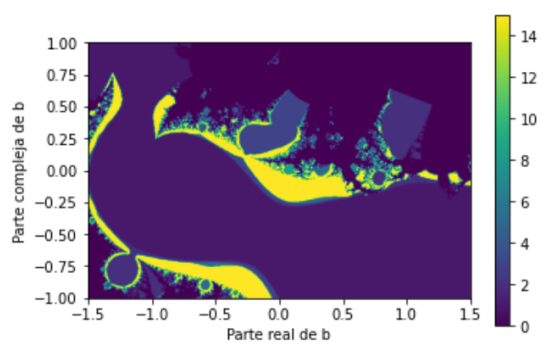


Figura 23: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss coplejo,  $a = i$ .

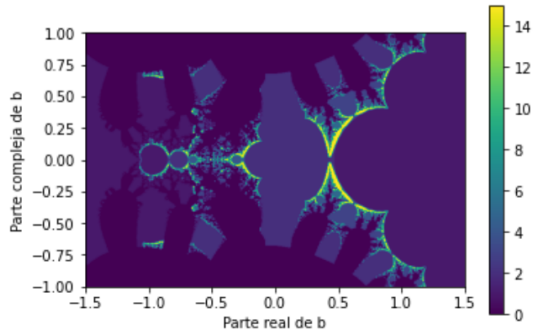


Figura 21: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss coplejo,  $a = 5$ .

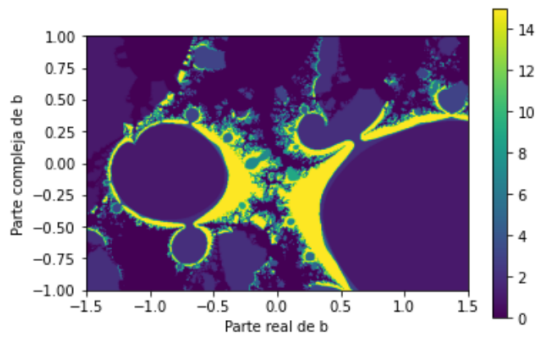


Figura 24: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss coplejo,  $a = 1 + i$ .

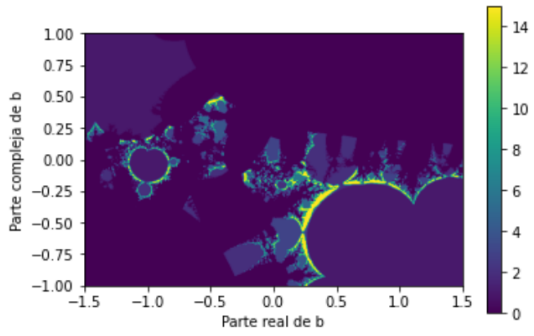


Figura 25: Diagrama de bifurcación del mapa de Gauss complejo,  $a = 4i$ .

Notamos que se generan figuras interesantes y que parecen fractales. Entre las observaciones que se pueden hacer, podemos notar que para  $a = 3$  y  $a = 4$ , no hay comportamiento caótico sobre la recta real, lo cual coincide con lo que dicen los diagramas de bifurcación de las figuras 13 y 14, en los que sólo se varía sobre valores de  $b$  reales. Luego, cuando  $a = 5$ , se puede ver que empieza a haber comportamiento de periodo muy alto (o incluso caótico) en la recta real para valores de  $b$  de alrededor de  $-0,5$ , lo cual coincide con la figura 16.

Finalmente, observamos que para diagramas en los que  $a$  es un número complejo (en estos ejemplos tenemos  $a = i$ ,  $a = 1+i$  y  $a = 4i$ ), las figuras son mucho más complicadas y hay muchas zonas amarillas. Como se ha mencionado, estas zonas no necesariamente representan caos, pero son valores de  $b$  en los que la secuencia  $\{z_n\}$  no converge a un ciclo de periodo 15 o menor.

Ahora estudiaremos uno de estos mapas a mayor profundidad y para eso nos concentraremos en particular en el que tiene  $a = 7$ . Primero haremos zoom a algunas zonas del diagrama de la figura 22 para ver los detalles más de cerca. Se muestran las figuras a continuación.

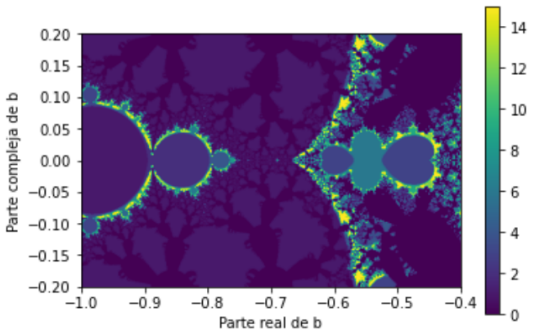


Figura 26: Diagrama con  $a = 7$  y  $b \in [-1, -0,4] \times [-0,2, 0,2]$ .

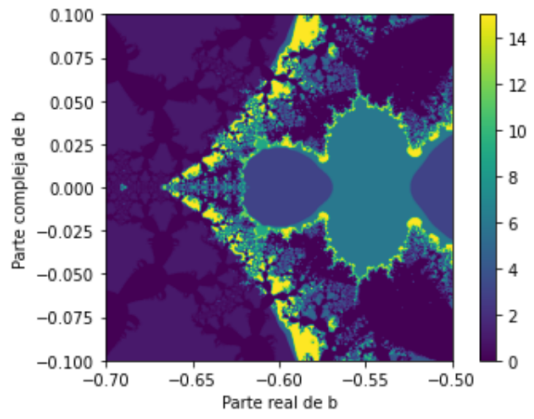


Figura 27: Diagrama con  $a = 7$  y  $b \in [-0,7, -0,5] \times [-0,1, 0,1]$ .

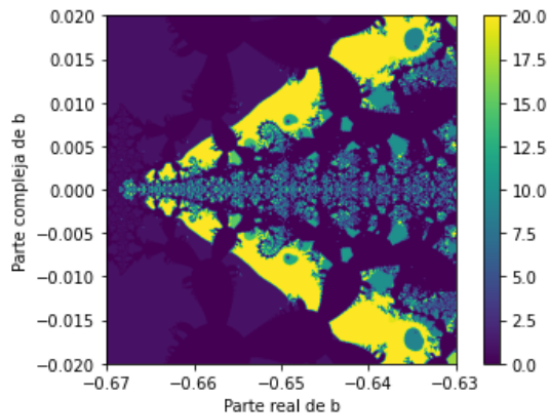


Figura 28: Diagrama con  $a = 7$  y  $b \in [-0,67, -0,63] \times [-0,02, 0,02]$ .

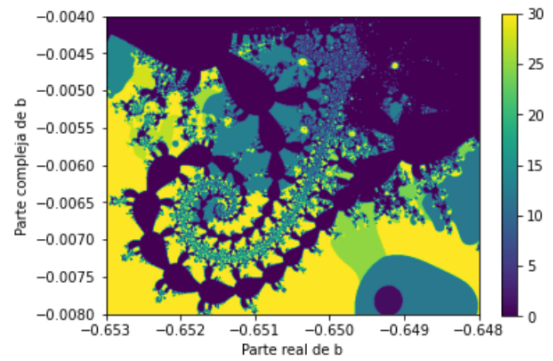


Figura 29: Diagrama con  $a = 7$  y  $b \in [-0,653, -0,648] \times [-0,008, -0,004]$ .

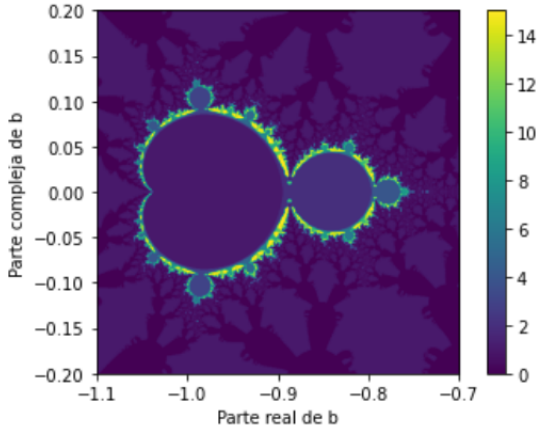


Figura 30: Diagrama con  $a = 7$  y  $b \in [-1, 1, -0, 7] \times [-0, 2, 0, 2]$ .

En estas imágenes se ve como al acercarnos a zonas pequeñas se siguen observando figuras complicadas y con detalles infinitamente finos, que es una característica de los fractales. En particular, en la figura 30 podemos ver que alrededor del punto  $b = -1$  se crea un diagrama similar al conjunto de Mandelbrot.

La aparición de este conjunto de Mandelbrot se puede entender partiendo de la expresión del mapa de Gauss, que para  $a = 7$ , que tiene la forma:

$$x_{n+1} = b + e^{-7x_n^2}$$

Luego, si desarrollamos esta expresión en una serie de Taylor y consideramos solamente el primer término, tendremos:

$$x_{n+1} = b + 1 - 7x_n^2$$

Esta regla de recurrencia se parece mucho a la de Mandelbrot, con la diferencia que el parámetro  $c$  se cambia por  $b + 1$  y que el término  $x_n^2$  se multiplica por  $-7$ . No es sorprendente entonces que al dibujar el diagrama de este mapa se genere una figura con la forma del conjunto de Mandelbrot. En la figura 31 mostramos el diagrama de bifurcación para este mapa  $x_{n+1} = b + 1 - 7x_n^2$ .

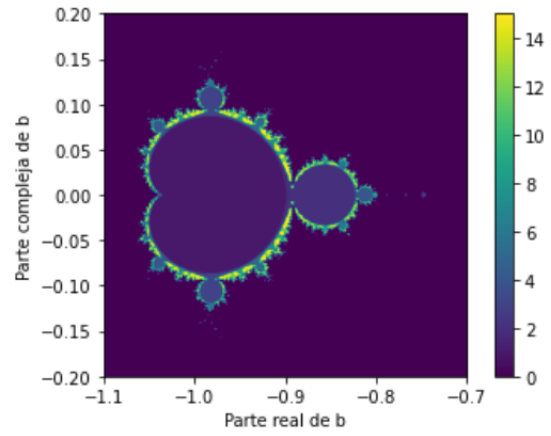


Figura 31: Diagrama del mapa  $x_{n+1} = b + 1 - 7x_n^2$ .

Vemos que se genera un fractal de Mandelbrot similar al de la figura 30 y en prácticamente la misma posición. Esto indica que aparece el fractal de Mandelbrot en la figura 30 debido a que a primer orden el mapa de Gauss se aproxima al mapa  $x_{n+1} = b + 1 - 7x_n^2$ , que tiene forma similar al mapa de Mandelbrot.

## Conclusiones

Se estudiaron los mapas iterativos en general, haciendo énfasis particular al logístico para poder entender a mayor profundidad los diagramas de telaraña y de bifurcación. Además, se estudió el fractal de Mandelbrot y sus propiedades principales.

Luego, por medio de código en Python, se pudo estudiar el mapa de Gauss y generalizarlo a los números complejos. Se observa que este mapa tiene comportamientos similares al logístico pero con algunas diferencias notables y cuando se hacen diagramas sobre el plano complejo, forma figuras similares a las del conjunto de Mandelbrot. Es interesante ver el comportamiento caótico y figuras complejas que se generan al estudiar funciones tan sencillas como las del mapa logístico, Mandelbrot y el mapa de Gauss.

## Referencias

- [1] Charilaos, Skiadas and Christos H Skiadas. Chaotic Modelling and Simulation: Analysis of Chaotic Models, Attractors and Forms. 1st edition, CRC Press, 2019.
- [2] Strogatz, Steven. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry,

---

and Engineering. CRC Press, Taylor Et Francis Group, 2019.

- [3 ] Peitgen, Heinz-Otto, et al. Chaos and Fractals: New Frontiers of Science. Springer, 2012.
- [4 ] Falconer, Kenneth. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Wiley, second edition, 2003.