RESUMEN: SEMANA 5 Y ¿?

ERNESTO MAYORGA SAUCEDO

5. El plano cartesiano $\mathbb{R}^2$

Aceptando la identificación de los números reales con los puntos de una recta, en adelante no haremos distinción entre ellos, salvo que se indique lo contrario, llamaremos a tal identificación ***recta numérica***. Si convenimos en dibujar una recta numérica de forma horizontal, una vez elegido el "punto" 0, los puntos a la derecha de tal punto se identificarán con los elementos de $\mathbb{R}^+$, en particular se tendrá que el punto 1 está a la derecha de 0. Los elementos del conjunto $\mathbb{R}^- \underset{def.}{=} \mathbb{R} - (\mathbb{R}^+)$ están entonces representados a la izquierda de 0.

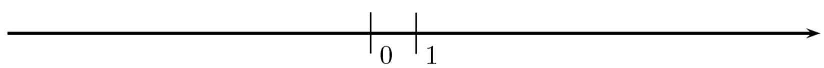


Figura 34. Representación gráfica de la recta numérica

Un modelo del plano cartesiano se obtiene al considerar un par de rectas (numéricas) perpendiculares, de modo que una de ellas es horizontal (y por consiguiente la otra es vertical). El punto de intersección de dichas rectas será en ambas el correspondiente a punto 0; en el caso de la recta horizontal establecemos la convención mencionada en el párrafo anterior y llamaremos a ésta recta el ***eje de las abscisas*** o ***eje*** $\boldsymbol{X}$; para la recta vertical, convenimos que los punto de tal recta que están arriba del eje X corresponden a los elementos de $\mathbb{R}^+$ y los puntos debajo a los elementos de $\mathbb{R}^-$; esta recta es llamada ***eje de las ordenadas*** o ***eje*** $\boldsymbol{Y}$.

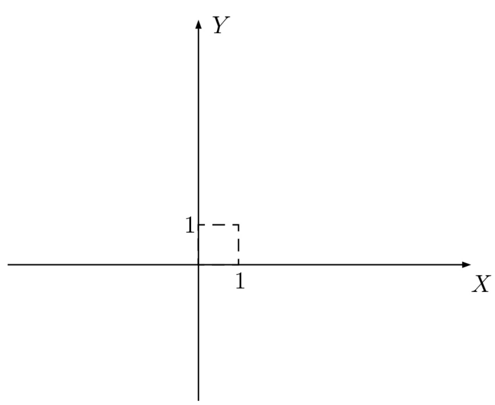


Figura 35. Modelo para el plano cartesiano

Nota 5.1. *En ambas rectas numéricas, la unidad de medida es la misma, esto es, los punto que elegimos en cada una de ellas que correspondiente al número* 1 *determinan junto con* 0 *segmentos de la misma magnitud (congruentes); en otras palabras, si giramos el eje* X *en torno al punto de intersección de los ejes, y que en adelante llamaremos* ***origen****, por un ángulo recto* $\llcorner$, *en sentido opuesto al giro de las manecillas del reloj, el eje* X *coincide con el eje* Y *como rectas numéricas.*

El modelo del plano descrito de esta manera recibe el nombre de ***sistema derecho del plano cartesiano***.

5.1. Coordenadas. Las coordenadas de un punto P en un plano cartesiano se establecen de la siguiente forma:

- Si ℓ es la recta paralela al eje Y que pasa por P, ésta intersecta al eje X en un (único) punto el cual corresponde a un único número real al que llamaremos a
- Considerando ahora la recta ℓ' paralela al eje X que pasa por P, llamamos b al único número real que está asociado a la intersección de ℓ' con el eje Y.
- Las coordenadas de P es la ***pareja ordenada*** (a, b)

Notación 5.2. *En el contexto de la descripción anterior escribiremos* $\boldsymbol{P = (a, b)}$. *Los numeros* a *y* b *se llaman* primera y segunda coordenada *de* P*, respectivamente.*

Por otra parte, dada una pareja ordenada de números reales (c, d), ésta determina un único punto en el plano cartesiano de la siguiente manera;

- Localizamos en el eje X el punto asociado al número c y de igual forma en el eje Y hacemos lo correspondiente para el número d.
- Considerando la rectas $\widetilde{\ell}$ paralela al eje Y que pasa por c y $\widetilde{\ell}$' la recta paralela al eje X que pasa por d, tales rectas se intersectan en un único punto Q el cual satisface $Q = (c, d)$ (según lo dicho en 5.2).

Denotaremos por
$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$
al conjunto de parejas ordenadas de números reales y lo llamaremos ***plano cartesiano***

Los ejes coordenados determinan cuatro regiones del plano cartesiano llamadas ***cuadrantes*** y estas están caracterizadas por los signos de las coordenadas de sus puntos:

Primer cuadrante	:	puntos del plano con ambas coordenadas positivas
Segundo cuadrante	:	puntos del plano con abscisa negativa y ordenada positiva
Tercer cuadrante	:	puntos del plano con abscisa negativa y ordenada negativa
Cuarto cuadrante	:	puntos del plano con abscisa positiva y ordenada negativa

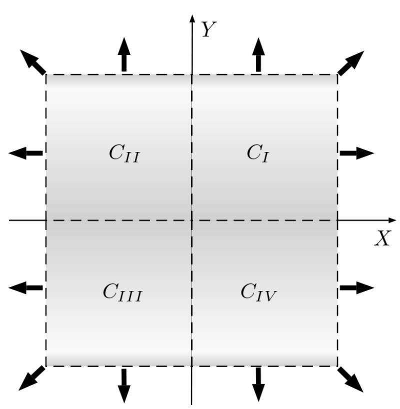


FIGURA 36. Cuadrantes del plano cartesiano

6. El espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$

Para describir el esquema del espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$ consideraremos el plano cartesiano como un subconjunto de éste dibujándolo de forma horizontal (figura 37). Intuitivamente esta idea nos permitiría "movernos" según el sistema coordenado XY en dos direcciones, si consideramos la figura 37 los movimientos serán de atrás hacia adelante (o viceversa) y de izquierda a derecha (o viceversa). Para poder localizar un punto en el espacio es necesario un tercer eje coordenado el cual nos permitirá "subir" o "bajar" del plano XY, dicho eje se elige perpendicular y a través del origen del mencionado plano XY con el semieje positivo ubicado hacia arriba (figura 38).

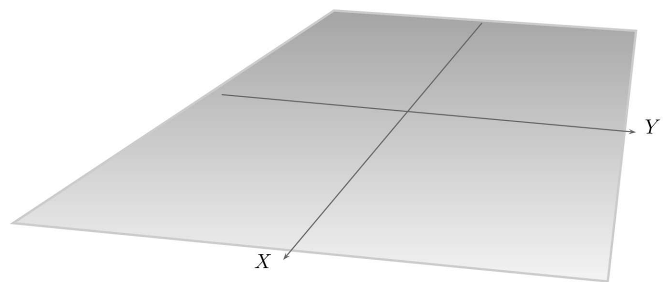


FIGURA 37. Plano coordenado en el espacio cartesiano

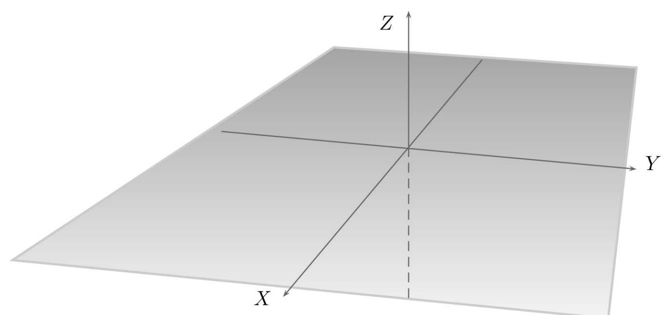


FIGURA 38. Modelo del espacio cartesiano

Tradicionalmente el espacio cartesiano suele representarse sólo con sus ejes coordenados; en la figura 39 se muestra el esquema de un sistema coordenado del espacio cartesiano en donde si se eligen cualesquiera dos ejes coordenados estos determinaran un plano con orientación positiva, tal sistema coordenado es llamado *sistema derecho del espacio*.

Un modelo para el espacio cartesiano considera el conjunto

$$\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

donde si $P, Q \in \mathbb{R}^3$, con $P = (x_P, y_P, z_P)$ y $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ se cumple

$$P = Q \text{ si y sólo si } \begin{cases} x_P = x_Q, \\ y_P = y_Q, \\ z_P = z_Q. \end{cases}$$

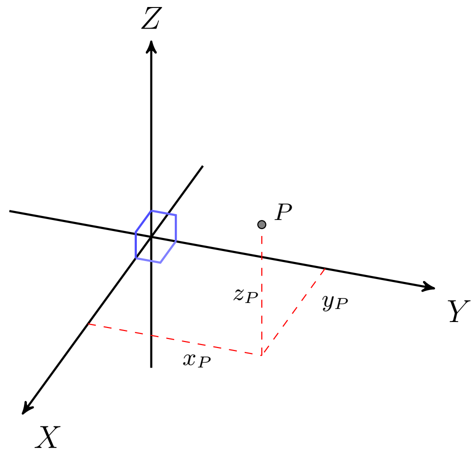


FIGURA 39. Ejes coordenados del espacio cartesiano

Esto es, dos punto P y Q son iguales si y sólo si todas sus correspondientes coordenadas son iguales.

Para describir el espacio cartesiano, comenzaremos presentando algunos elementos distinguidos de este.

El **origen** del espacio es el punto, denotado por $\mathcal{O}$ dado por

$$\mathcal{O} = (0,0,0)\,.$$

Los **ejes coordenados**, que en este caso son tres, están determinados por los siguientes conjuntos:

eje $\boldsymbol{X}$: está determinado por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\ell_X} &:= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ y } z = 0\Big\}\\ &= \Big\{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\Big\}\end{aligned}$$

eje $\boldsymbol{Y}$: está determinado por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\ell_Y} &:= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ y } z = 0\Big\}\\ &= \Big\{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\Big\}\end{aligned}$$

eje $\boldsymbol{Z}$: está determinado por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\ell_Z} &:= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ y } y = 0\Big\}\\ &= \Big\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\Big\}\end{aligned}$$

Los últimos elemento que distinguimos son los **planos coordenados** que de forma intuitiva se obtiene cuando elegimos parejas de ejes coordenados; esto son:

plano $\boldsymbol{XY}$: está determinado por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi_{XY}} &:= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\Big\}\\ &= \Big\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\Big\}\end{aligned}$$

plano XZ: está determinado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_{XZ} &\coloneqq \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\Big\}\\ &= \Big\{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,z\in\mathbb{R}\Big\}\end{aligned}$$

plano YZ: está determinado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_{YZ} &\coloneqq \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\Big\}\\ &= \Big\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\Big\}\end{aligned}$$

Los planos coordenados dividen el espacio en ocho regiones, llamadas octantes. Considerando el plano XY, el cual identificamos con el plano cartesiano, este está dividido en cuatro regiones que son los cuadrantes; de esta manera los ocho octantes se pueden describir como las regiones que se obtiene a partir de consideran los puntos del espacio que están arriba de cada uno de los cuadrantes del plano XY, dando lugar a los primeros cuatro octantes y las regiones del espacio que están abajo de cada cuadrante, obteniendo así los cuatro octantes restantes.

Los conjuntos que determinan los octantes son:

octante I $O_I \coloneqq \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x>0, y>0, z>0\Big\}$

octante II $O_{II} \coloneqq \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x<0, y>0, z>0\Big\}$

octante III $O_{III} \coloneqq \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x<0, y<0, z>0\Big\}$

octante IV $O_{IV} \coloneqq \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x>0, y<0, z>0\Big\}$

octante V $O_V \coloneqq \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x>0, y>0, z<0\Big\}$

octante VI $O_{VI} \coloneqq \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x<0, y>0, z<0\Big\}$

octante VII $O_{VII} \coloneqq \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x<0, y<0, z<0\Big\}$

octante VIII $O_{VIII} \coloneqq \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x>0, y<0, z<0\Big\}$

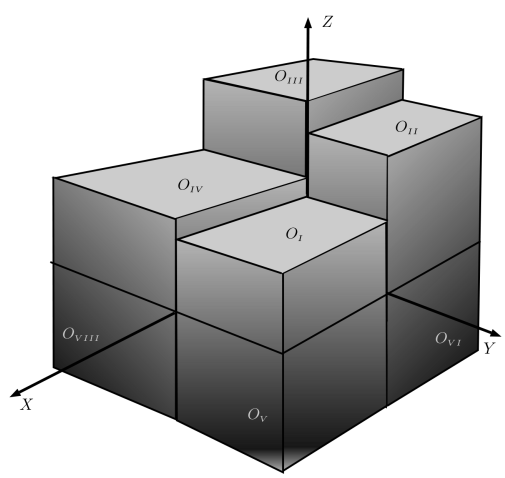


FIGURA 40. Esquema de los octantes del espacio cartesiano

Observación 6.1. *Hemos descrito los ejes coordenados de dos formas, la primera involucra explícitamente las condiciones que deben cumplir dos de las coordenadas de sus puntos; por ejemplo el eje X está caracterizado por los puntos del espacio cuyas coordenadas cumplen las ecuaciones lineales, en tres indeterminadas,*

$$\mathrm{y} = 0 \quad y \quad \mathrm{z} = 0,$$

o bien, el sistema de ecuaciones lineales, en tres indeterminadas

$$\begin{cases} \mathrm{y} = 0 \\ \mathrm{z} = 0 \end{cases}$$

Esto significa que, para describir el eje X, y en general cualquier recta en el espacio, no es suficiente con una ecuación lineal.

La segunda descripción de los ejes coordenados, permite identificar tales conjuntos con una recta numérica de los números reales.

Observación 6.2. *A diferencia de los ejes coordenados, los planos coordenados si están determinados por una sola ecuación lineal, esto es, dado $P \in \mathbb{R}^3$;*

$P \in \Pi_{XY}$ *si y sólo si las coordenadas de P satisfacen la ecuación lineal* $\mathrm{z} = 0$,
$P \in \Pi_{XZ}$ *si y sólo si las coordenadas de P satisfacen la ecuación lineal* $\mathrm{y} = 0$,
$P \in \Pi_{YZ}$ *si y sólo si las coordenadas de P satisfacen la ecuación lineal* $\mathrm{x} = 0$.

A continuación describimos algunas regiones del espacio.

Si $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \cdot z = 0\}$, en vista de que para cualesquiera $y, z \in \mathbb{R}$ se cumple $y \cdot z = 0$ si y sólo si $y = 0$ o $z = 0$, el conjunto A se puede describir como:

$$\begin{aligned} A = \ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ o } z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \\ &= \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Denotando por $B = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}^2\}$ y $C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}^2\}$, éstas regiones se muestran en la figura 41

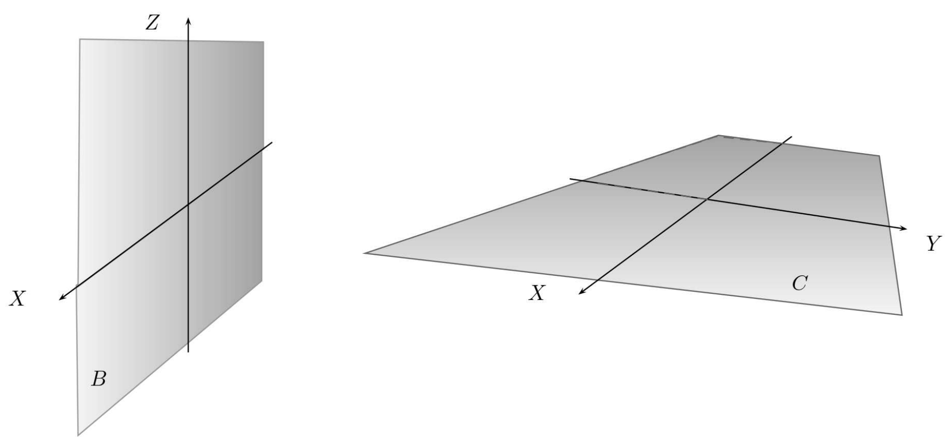


FIGURA 41. Regiones B y C por separado

Consecuentemente, la región determinada por A es la unión de estos dos planos y esta se ilustra en la figura 42.

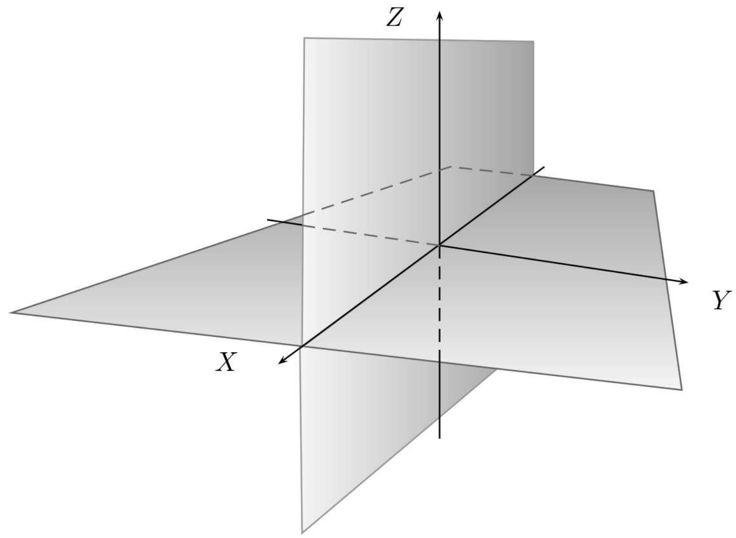


FIGURA 42. Región $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \cdot z = 0\}$

7. Aritmética en el plano

7.1. Traslaciones en la recta. Bajo la identificación de los números reales $\mathbb{R}$ con una recta numérica, si $a \in \mathbb{R}$ y queremos “mover” el punto a hacia la derecha, bastará con sumar a a un número $h \in \mathbb{R}^+$ y así obtener el punto $a' := a + h$.

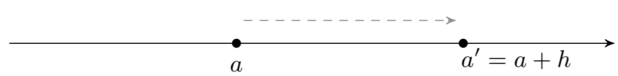


FIGURA 43. Desplazamiento de a hacia la derecha

Además, la distancia de a a a' es $|a - a'| = h$. De manera análoga, si queremos mover el punto a hacia la izquierda, debemos sumar a a un número $h' \in \mathbb{R}^-$ y así el punto $a'' = a + h'$ está a la izquierda de a.

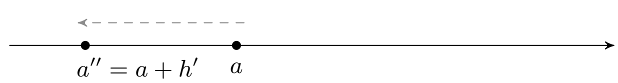


FIGURA 44. Desplazamiento de a hacia la izquierda

En este caso, la distancia de a a a'' es $|a - a''| = -h'$.

Por otra parte, si en lugar de considerar un punto consideramos un intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \mathbb{R}$ y a cada punto de éste le sumamos un número $x_0 \in \mathbb{R}$, obtenemos el conjunto

$$\{x_0\} + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] := \{x_0 + x \mid x \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\}.$$

La propiedad del orden en los números reales:

$$a \leq x \leq b \text{ si y sólo si } x_0 + a \leq x_0 + x \leq x_0 + b$$

garantiza que $\{x_0\} + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ es un intervalos, esto es

$$\{x_0\} + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{b}].$$

Además la longitud del intervalo $[\boldsymbol{x_0+a, x_0+b}]$ es precisamente

$$\begin{aligned} |(x_0+b)-(x_0+a)| &= |b-a| \\ &= b-a, \end{aligned}$$

que es la longitud de $[\boldsymbol{a,b}]$.

Geométricamente, si $x_0>0$, el intervalo $[\boldsymbol{a,b}]$ se traslada hacia la derecha al intervalo $[\boldsymbol{x_0+a, x_0+b}]$ y si $x_0<0$, entonces la traslación será hacia la izquierda.

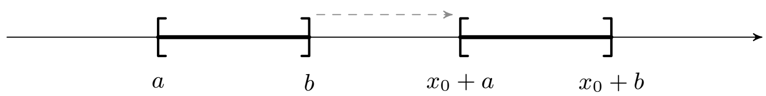


FIGURA 45. Desplazamiento de $[\boldsymbol{a,b}]$ hacia la derecha cuando $x_0>0$

Si en lugar de considerar el intervalo $[\boldsymbol{a,b}]$ se consideran los intervalos:

$$(\boldsymbol{a,b}),\ [\boldsymbol{a,b}),\ \text{ó } (\boldsymbol{a,b}],$$

la interpretación geométrica para los intervalos

$$(\boldsymbol{x_0+a, x_0+b}),\ [\boldsymbol{x_0+a, x_0+b}),\ \text{ó } (\boldsymbol{x_0+a, x_0+b}],$$

es exactamente la misma que antes, una traslación a la derecha si $x_0>0$ y hacia la izquierda si $x_0<0$.

7.2. Suma en $\mathbb{R}^2$. Extrapolando la discusión de la subsección 7.1 al plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, obtendremos una manera algebraica de describir la noción de traslación, la idea central radica en "sumar los puntos".

Considerando $P, P_0 \in \mathbb{R}^2$, por la discusión $x_P + x_{P_0}$ se puede pensar como el trasladado de x_P hacia el punto $x_P + x_{P_0}$, donde tal punto está a la derecha de x_P si y sólo si $x_{P_0}>0$ y está a la izquierda si y sólo si $x_{P_0}<0$; de manera análoga, si consideramos la ordenadas de P y P_0 y_P y y_{P_0}, respectivamente.

Si $Q \coloneqq (x_P+x_{P_0}, y_P+y_{P_0}) \in \mathbb{R}^2$, por construcción Q se obtiene a partir de desplazar P horizontalmente hacia $(x_P+x_{P_0}, y_P)$ y posteriormente desplazando éste punto verticalmente hacia Q o viceversa, desplazamos verticalmente P hasta $(x_P, y_P+y_{P_0})$ y posteriormente desplazamos éste punto horizontalmente hacia Q, véase la figura 46.

Para dar una interpretación geométrica al punto $Q=(x_P+x_{P_0}, y_P+y_{P_0})$ consideramos el caso particular en que P y P_0 son ambos diferentes del origen, $\mathcal{O}$, no están en la misma recta por el origen y que ambos tiene su abscisa distinta de cero.

En esta situación, podemos calcular las pendientes de los segmentos: $\overline{\mathcal{O}P}$, $\overline{P_0Q}$, $\overline{\mathcal{O}P_0}$ y $\overline{PQ}$.

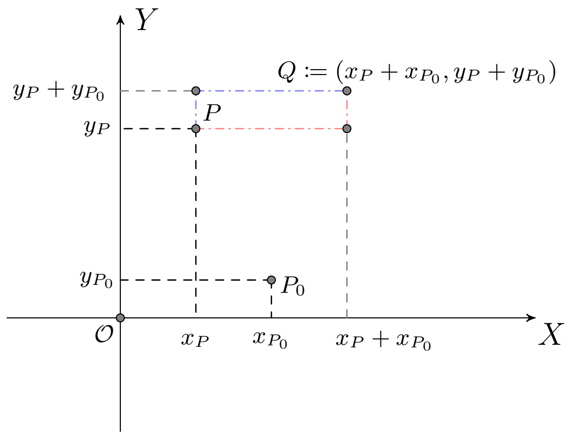


FIGURA 46. $x_{P_0} > 0$ y $y_{P_0} > 0$

$$
\begin{aligned}
m_{\overline{\mathcal{O}P}} &= \frac{y_P - 0}{x_P - 0} \\
&= \frac{y_P}{x_P}
\end{aligned} \tag{7.1}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{\overline{P_0Q}} &= \frac{(y_P + y_{P_0}) - y_{P_0}}{(x_P + x_{P_0}) - x_{P_0}} \\
&= \frac{y_P}{x_P}
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{\overline{\mathcal{O}P_0}} &= \frac{y_{P_0} - 0}{x_{P_0} - 0} \\
&= \frac{y_{P_0}}{x_{P_0}}
\end{aligned} \tag{7.3}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{\overline{PQ}} &= \frac{(y_P + y_{P_0}) - y_P}{(x_P + x_{P_0}) - x_P} \\
&= \frac{y_{P_0}}{x_{P_0}}
\end{aligned} \tag{7.4}
$$

Se sigue de (7.1) y (7.2) que el segmento $\overline{\mathcal{O}P}$ es paralelo al segmento $\overline{P_0Q}$, $\overline{\mathcal{O}P} \parallel \overline{P_0Q}$; y de (7.3) y (7.4) obtenemos que $\overline{\mathcal{O}P_0} \parallel \overline{PQ}$, y por consiguiente, los puntos $\mathcal{O}, P, Q$ y P_0 son los vértices de un paralelogramo.

Antes de resumir la discusión anterior en la siguiente proposición, presentamos la definición de suma (vectorial) en $\mathbb{R}^2$.

Definición 7.1. *Dados $P, Q \in \mathbb{R}^2$, la suma de P y Q, que denotamos $\boldsymbol{P + Q}$, es el elemento en $\mathbb{R}^2$ dado por*

$$P + Q = (x_P + x_Q, y_P + y_Q)\,.$$

Proposición 7.2. *Sean $P, R \in \mathbb{R}^2$ tales que P y R no pertenecen a la misma recta por el origen. Si $Q := P + R$, entonces los puntos $\mathcal{O}, P, Q$ y R son los vértices de un paralelogramo, donde $\overline{\mathcal{O}Q}$ es una diagonal de dicho paralelogramo.*

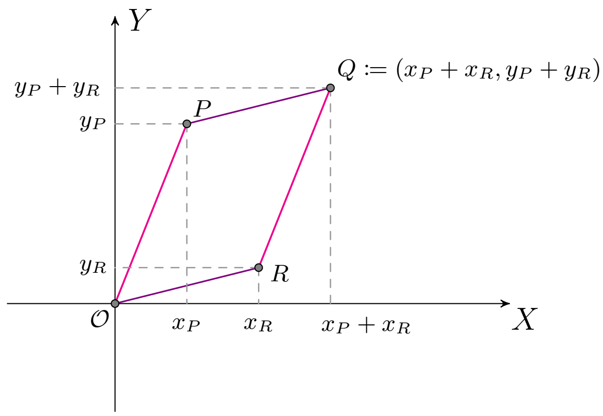


FIGURA 47. Paralelogramo

Observación 7.3. *Para completar la demostración de la proposición 7.2, si $P = (0, y_P) \in \ell_{,Y} - \{\mathcal{O}\}$, necesariamente $x_P \neq 0$; además en tal caso, el segmento $\overline{\mathcal{O}P}$ es vertical y $\overline{\mathcal{O}R}$ no es vertical.*

Bajo estas condiciones, $Q = P + R = (x_R, y_P + y_R)$ y como las abscisas de Q y R son iguales el segmento $\overline{QR}$ es vertical y por lo tanto paralelo al segmento $\overline{\mathcal{O}P}$, esto es $\overline{QR} \parallel \overline{\mathcal{O}P}$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} m_{\overline{PQ}} &= \frac{(y_P + y_R) - y_P}{x_R - 0} \\ &= \frac{y_R}{x_R} \\ &= m_{\overline{\mathcal{O}R}}, \end{aligned}$$

lo cual muestra que $\overline{PQ} \parallel \overline{\mathcal{O}R}$ y por lo tanto, los puntos $\mathcal{O}, P, Q$ y R, también es este caso, son los vértices de un paralelogramo, donde $\overline{\mathcal{O}Q}$ es una diagonal de dicho paralelogramo.

7.3. Traslación en $\mathbb{R}^2$. La proposición 7.2 permite interpretar la suma en $\mathbb{R}^2$ por lo menos de dos formas. La primera que mencionaremos es que la suma en el planos de dos puntos P_0 y P, a la que llamamos Q, es el resultado de la concatenación de los segmentos $\overline{\mathcal{O}P}$ y el segmento paralelo al segmento $\overline{\mathcal{O}P_0}$ que tiene punto inicial P y de longitud igual a $\mathcal{O}P_0$, véase la figura 48.

Vale la pena hacer notar que la concatenación también puede ser con el segmento $\overline{\mathcal{O}P_0}$ y el segmento paralelo al segmento $\overline{\mathcal{O}P}$, de longitud $\mathcal{O}P_0$, véase la figura 49.

En el área de la física, estas interpretación se suele presentar como la concatenación de dos fuerzas que actúa sobre una partícula el plano, tradicionalmente las fuerzas se representan como flechas y la concatenación tiene lugar cuando el inicio de una de estas es el final de la otra, véase la figura 50.

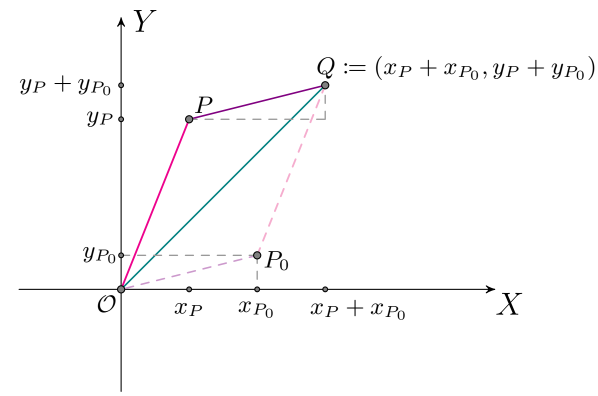


FIGURA 48. Concatenación de segmentos $\overline{\mathcal{O}P}$ y $\overline{\mathcal{O}P_0}$

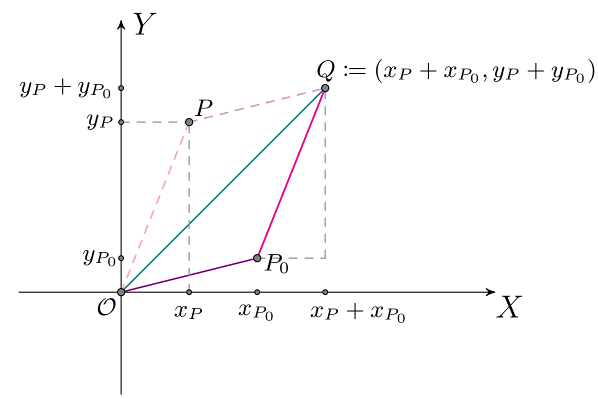


FIGURA 49. Concatenación de segmentos $\overline{\mathcal{O}P_0}$ y $\overline{\mathcal{O}P}$

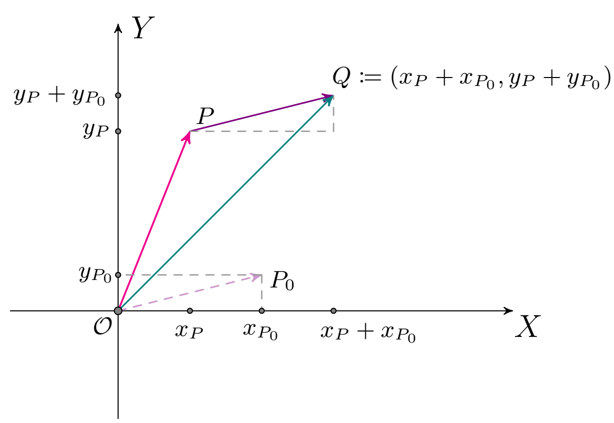


FIGURA 50. Concatenación de las fuerzas $\overrightarrow{\mathcal{O}P}$ y $\overrightarrow{\mathcal{O}P_0}$

Otra interpretación geométrica de la suma en $\mathbb{R}^2$ se basa en el hecho de que, si consideramos las rectas $\ell_{P_0,X}$ y $\ell_{P_0,Y}$ con ecuaciones:

$$\mathrm{x} = x_{P_0} \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{y} = y_{P_0},$$

entonces el punto $P_0 + P$ se puede obtener con la misma técnica con la que localizamos un punto en $\mathbb{R}^2$ una vez dadas sus coordenadas, esto es, considerando como rectas numéricas a las rectas $\ell_{P_0,X}$ y $\ell_{P_0,Y}$, donde P_0 funge como origen de estas rectas numéricas, en estas localizamos los "puntos" x_P y y_P, respectivamente, y el punto así obtenido será $P_0 + P$. Esta interpretación se puede interpretar como una traslación del sistema coordenado.

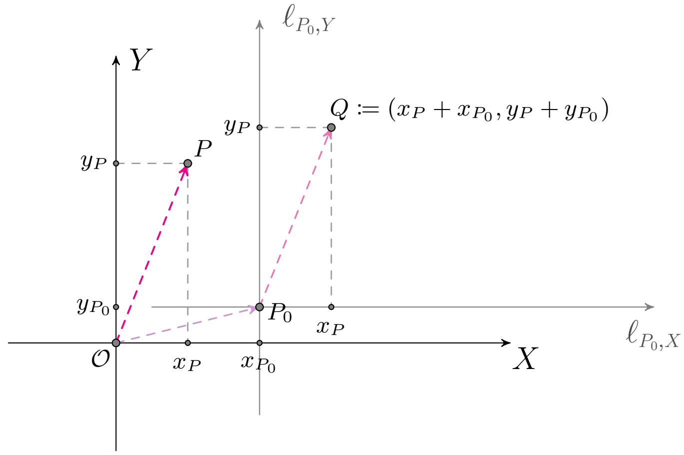


FIGURA 51. Interpretación de la suma en $\mathbb{R}^2$ como una traslación

Suma (vectorial) en $\mathbb{R}^2$

7.4. Propiedades aritméticas de la suma en $\mathbb{R}^2$. Antes de pasar a los aspectos geométricos de la suma en $\mathbb{R}^2$, veremos las principales propiedades aritméticas.

Estas propiedades nos permitirán manipular los puntos del plano como si fueran números reales y como veremos más adelante esto resulta muy útil para describir objetos geométricos.

Proposición 7.4. *Sean $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$.*

(S_1) $P + (Q + R) = (P + Q) + R$.
(S_2) $P + Q = Q + P$.
(S_3) $P + \mathcal{O} = P$.
(S_4) *Si $P' = (-x_P, -y_P)$, entonces $P + P' = \mathcal{O}$.*

La demostración no es difícil y la dejamos como ejercicio al lector.

Corolario 7.5. *Sean $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$.*

(1) (Ley de cancelación para la suma) Si $P + R = Q + R$, entonces $P = Q$.
(2) Si $u \in \mathbb{R}^2$ satisface que $P + u = P$, entonces $u = \mathcal{O}$.
(3) Si $P + Q = \mathcal{O}$, entonces $Q = (-x_P, -y_P)$.

Demostración. (1) Supongamos que $P+R=Q+R$, entonces

$$\begin{aligned} P &= P+\mathcal{O} && (\text{por } (\mathrm{S}_3)) \\ &= P+(R-R) && (\text{por } (\mathrm{S}_4)) \\ &= (P+R)-R && (\text{por } (\mathrm{S}_1)) \\ &= (Q+R)-R && (\text{por hipótesis}) \\ &= Q+(R-R) && (\text{por } (\mathrm{S}_1)) \\ &= P+\mathcal{O} && (\text{por } (\mathrm{S}_4)) \\ &= Q. && (\text{por } (\mathrm{S}_3)) \end{aligned}$$

(2) Suponemos que, para cada $P \in \mathbb{R}^2$, $P+u=P$; en particular si elegimos $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^2$, obtenemos que

$$\begin{aligned} u &= u+\mathcal{O} && (\text{por } (\mathrm{S}_3)) \\ &= \mathcal{O}+u && (\text{por } (\mathrm{S}_2)) \\ &= \mathcal{O} && (\text{por hipótesis}). \end{aligned}$$

(3) Suponemos que $P+Q=\mathcal{O}$. Considerando $-P \in \mathbb{R}^2$, por (S_4) sabemos que $P-P=\mathcal{O}$, luego

$$\begin{aligned} Q &= Q+(P-P) && (\text{por } (\mathrm{S}_3)) \\ &= (Q+P)-P && (\text{por } (\mathrm{S}_2)) \\ &= \mathcal{O}-P && (\text{por hipótesis}) \\ &= -P. && (\text{por } (\mathrm{S}_3)) \end{aligned}$$

□

Notación 7.6. *Dado $P \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por $-P$ al único elemento en $\mathbb{R}^2$ que cumple (S4), esto es,*

$$P+(-P)=\mathcal{O}.$$

Además, para cada $P, Q \in \mathbb{R}^2$, escribiremos $P-Q$ en lugar de $P+(-Q)$, esto es,

$$P-Q \coloneqq P+(-Q)\,.$$

7.5. Regreso a traslaciones. En este apartado veremos cómo algunos objetos geométricos que hemos estudiado se pueden obtener de otros bajo una traslación.

Como primer ejemplo, consideramos una recta $\ell \subset \mathbb{R}^2$ determinada por una ecuación de la forma $\mathrm{y}=m\mathrm{x}+b$, donde $m, b \in \mathbb{R}$, luego

$$\begin{aligned} \ell &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=mx+b\right\} \\ &= \left\{(x,mx+b) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(0,b)+(x,mx) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Con este ejemplo como modelo, introducimos la siguiente definición.

Definición 7.7. *Sea $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ y $P_0 \in \mathbb{R}^2$. El trasladado de $\mathbb{A}$ por P_0, que denotaremos por* $\boldsymbol{\{P_0\} + \mathbb{A}}$*, es el conjunto:*

$$\{P_0\} + \mathbb{A} := \left\{P_0 + P \in \mathbb{R}^2 \mid P \in \mathbb{A}\right\}.$$

Con esta definición, para la recta ℓ, anterior, se tiene que, si $B = (0, b) \in \mathbb{R}^2$, y $\boldsymbol{\ell_m}$ denota la recta que pasa por $\mathcal{O}$ con pendiente m entonces

$$\begin{aligned} \ell &= \{B\} + \left\{(x, mx) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{B\} + \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\right\} \\ &= \{B\} + \ell_{\mathcal{O},m}, \end{aligned}$$

esto es, ℓ es el trasladado de $\ell_{\mathcal{O},m}$ por B.

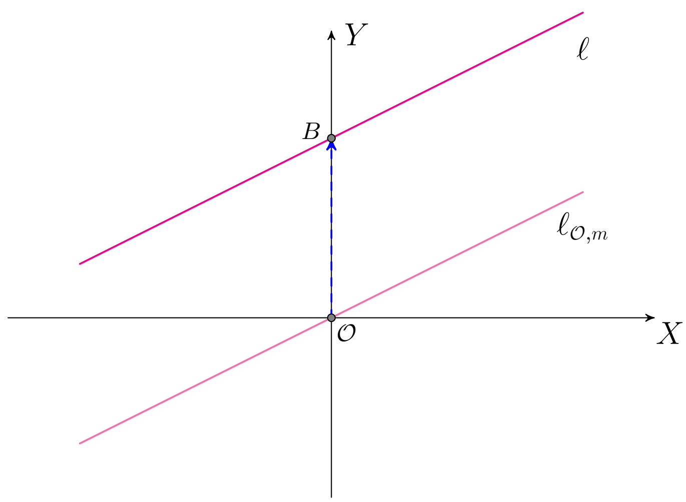


FIGURA 52. Trasladado de $\ell_{\mathcal{O},m}$ por B, caso $m, b > 0$

Ejemplo 7.8. *Recordamos que $\mathcal{C}(C, r)$ denota la circunferencia con centro en C y radio r. Veamos que*

$$\mathcal{C}(C, r) = \{C\} + \mathcal{C}(\mathcal{O}, r).$$

En efecto, suponemos que $C = (h, k) \in \mathbb{R}^2$.

$\subseteq$) *Si $P \in \mathcal{C}(C, r)$, entonces*

$$(x_P - h)^2 + (y_P - k)^2 = r^2. \tag{7.5}$$

Considerando el punto $R := (x_P - h, y_P - k) = P - C \in \mathbb{R}^2$, la identidad (7.5) garantiza que $R \in \mathcal{C}(\mathcal{O}, r)$ y así

$$\begin{aligned} P &= P + \mathcal{O} && \text{(por (S}_3\text{))} \\ &= P + (C - C) && \text{(por (S}_4\text{))} \\ &= (P + C) - C && \text{(por (S}_1\text{))} \\ &= (C + P) - C && \text{(por (S}_2\text{))} \\ &= C + (P - C) && \text{(por (S}_1\text{))} \\ &= C + R, && \text{(por definición)} \end{aligned}$$

esto es, $P = C + R \in \{C\} + \mathcal{C}(\mathcal{O}, r)$ *y así* $\mathcal{C}(C, r) \subseteq \{C\} + \mathcal{C}(\mathcal{O}, r)$.

$\supseteq$) *Si* $Q \in \{C\} + \mathcal{C}(\mathcal{O}, r)$, *existe* $S \in \mathcal{C}(\mathcal{O}, r)$ *tal que* $Q = C + S$, *lo cual implica que* $Q - C = S \in \mathcal{C}(\mathcal{O}, r)$, *y por consiguiente*

$$(x_Q - h)^2 + (y_Q - k)^2 = r^2,$$

lo que asegura que $Q \in \mathcal{C}(C, r)$ *y así* $\{C\} + \mathcal{C}(\mathcal{O}, r) \subseteq \mathcal{C}(C, r)$.

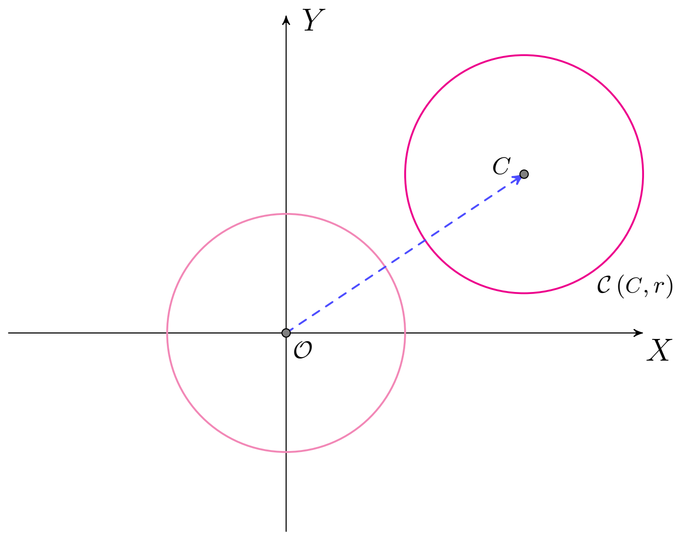


FIGURA 53. Trasladado de $\mathcal{C}(\mathcal{O}, r)$ por C

De manera similar, se pueden comprobar las siguientes igualdades

Ejercicio 3. *En cada uno de los siguientes incisos, demuestre la identidad que se afirma.*

1) $\mathcal{E}(C, r) = \{C\} + \mathcal{E}(\mathcal{O}, r)$.
2) *Si* $P_0 \in \mathbb{R}^3$, *entonces*
   I) $\ell_{P_0,X} = \{P_0\} + \ell_{\mathcal{O},X}$.
   II) $\ell_{P_0,Y} = \{P_0\} + \ell_{\mathcal{O},Y}$.
   III) $\ell_{P_0,Z} = \{P_0\} + \ell_{\mathcal{O},Z}$.
3) *Si* $P_0 \in \mathbb{R}^3$, *entonces*
   I) $\Pi_{P_0,XY} = \{P_0\} + \Pi_{XY}$.
   II) $\Pi_{P_0,XZ} = \{P_0\} + \Pi_{XZ}$.
   III) $\Pi_{P_0,YZ} = \{P_0\} + \Pi_{YZ}$.

8. Dos nuevas descripciones de rectas en $\mathbb{R}^2$

Hasta el momento, las rectas en el plano cartesiano, $\mathbb{R}^2$, están completamente determinadas por una ecuación lineal en dos indeterminadas, pero en el caso de el espacio cartesiano, $\mathbb{R}^3$, sólo contamos con algunos ejemplos como son las rectas que pasan por un punto dado P_0 y que tienen la dirección de uno de los ejes coordenados, $\ell_{P_0,X}, \ell_{P_0,Y}$ y $\ell_{P_0,Z}$. Con la finalidad de obtener una descripción de las rectas en $\mathbb{R}^3$, basados en un par de nuevas descripciones de las rectas en $\mathbb{R}^2$, introduciremos el concepto de recta en $\mathbb{R}^3$.

8.1. Producto por escalares en $\mathbb{R}^2$. En la subsección 7.5 vimos que una recta ℓ definida por una ecuación de la forma $\mathrm{y} = m\mathrm{x} + b$ es el trasladado por $B \coloneqq (0, b)$ de la recta que pasa por el origen con pendiente $m \in \mathbb{R}$, $\ell_{\mathcal{O},m} \coloneqq \{(x, y) \mid y = mx\}$, esto es,

$$\ell = \{B\} + \ell_{\mathcal{O},m}.$$

Ya que

$$\begin{aligned} \ell_{\mathcal{O},m} &= \{(x, y) \mid y = mx\} \\ &= \{(x, mx) \mid x \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

si $P \in \ell$, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P = (x_0, mx_0)$; las coordenadas de P tiene la peculiaridad de que ambas tienen como factor al número real x_0, y además haciendo uso de las propiedades de los números reales, se tiene que

$$P = (x_0 1, x_0 m).$$

Basados en los puntos de la forma anterior se define una "operación" en el plano cartesiano llamada *producto por escales*.

Definición 8.1. *Sea $P \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. El producto por escales de P por λ, que denotaremos por $\lambda \cdot P$, es el elemento en $\mathbb{R}^2$ dado por*

$$\lambda \cdot P = (\lambda x_P, \lambda y_P).$$

A parti de esta definición, resulta que, si $u \coloneqq (1, m) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\ell_{\mathcal{O},m} = \{x \cdot u \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Con el ejemplo de la recta ℓ, anterior, para $u = (1, m) \in \mathbb{R}^2$, fijo, se tiene que todos los múltiplos escalares de u son elementos de ℓ, es decir, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot u$ está en la recta determinada por $\mathcal{O}$ y u. En realidad esto sucede para cualquier elemento de $\mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$.

En efecto, sea $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$. Como primer caso suponemos que $a \neq 0$. La recta determinada por $\mathcal{O}$ y v tiene pendiente $m_{\overline{\mathcal{O}v}} = \frac{b}{a}$, así que una ecuación de esta recta es:

$$\mathrm{y} = \left(\tfrac{b}{a}\right)\mathrm{x}.$$

Por otra parte, si $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned} \tfrac{b}{a}(\lambda a) &= \tfrac{\lambda ab}{a} \\ &= \lambda b, \end{aligned}$$

lo cual implica que las coordenadas de $\lambda \cdot v$ satisfacen la ecuación de la recta determinada por $\mathcal{O}$ y v y por lo tanto

$$\{\lambda \cdot v \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \ell_{\mathcal{O},(b/a)}$$

Para mostrar que en realidad se cumple la igualdad, consideramos $Q \in \mathbb{R}^2$ que pertenece a la recta $\ell_{\mathcal{O},\left({}^{b}\!/_{a}\right)}$, entonces $y_Q = \left(\frac{b}{a}\right) x_Q$ y por consiguiente

$$\begin{aligned} Q &= \left(x_Q, \left(\frac{b}{a}\right) x_Q\right) \\ &= \left(\left(\frac{x_Q}{a}\right) a, \left(\frac{x_Q}{a}\right) b\right) \\ &= \left(\frac{x_Q}{a}\right) \cdot (a, b) \\ &= \left(\frac{x_Q}{a}\right) \cdot v, \end{aligned}$$

lo cual implica que $Q \in \{\lambda \cdot v \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ y así se obtiene que

$$\ell_{\mathcal{O},\left({}^{b}\!/_{a}\right)} \subseteq \left\{\lambda \cdot v \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\};$$

y por lo tanto

$$\ell_{\mathcal{O},\left({}^{b}\!/_{a}\right)} = \{\lambda \cdot v \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

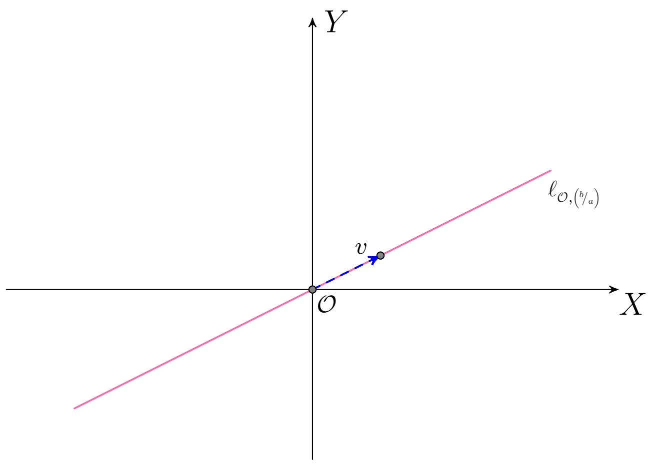


FIGURA 54. Múltiplos escalares de $v \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$

Por otra parte, si $v = (0, b) \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$, entonces $v \in \ell_Y$ y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot v = (0, \lambda b)$, que también es un elemento del eje Y, ℓ_Y.

Además, si $R = (0, y_R) \in \ell_Y$, entonces

$$\begin{aligned} R &= (0, y_R) \\ &= \left(0, \left(\frac{b}{b}\right) y_R\right) \\ &= \left(0, \left(\frac{y_R}{b}\right) b\right) \\ &= \left(\left(\frac{y_R}{b}\right) 0, \left(\frac{y_R}{b}\right) b\right) \\ &= \left(\frac{y_R}{b}\right) (0, b) \\ &= \left(\frac{y_R}{b}\right) \cdot v, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\ell_Y = \left\{\lambda \cdot v \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Resumimos lo anterior en la siguiente proposición.

Proposición 8.2. *Sea* $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$. *Si* $\ell = \ell_{\mathcal{O},(^b/_a)}$ *es la recta en el plano determinada por* $\mathcal{O}$ *y* v*, entonces*

$$\ell = \left\{ \lambda \cdot v \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Corolario 8.3. *Si* $\ell \subset \mathbb{R}^2$ *es la recta determinada por la ecuación* $\mathrm{y} = m\mathrm{x} + b$*,* $B = (0,b) \in \mathbb{R}^2$ *y* $u = (1,m) \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$*, entonces*

$$\ell = \{ B + \lambda \cdot u \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Para que la proposición 8.2 describa a todas las rectas en el plano que pasan por el origen, es necesario comprobar algunas propiedades respecto a este tipo de rectas y por ello, antes veremos las principales propiedades aritméticas del producto por escalares.

Proposición 8.4. *Sean* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(P_1) $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$.
(P_2) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.
(P_3) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
(P_4) $1 \cdot u = u$.

La demostración de la proposición 8.4 no es difícil y se deja como ejercicio al lector. Las primeras consecuencias de las propiedades $(\mathrm{P}_1) - (\mathrm{P}_4)$

Proposición 8.5. *Sean* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(1) $0 \cdot u = \mathcal{O}$ *y* $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$.
(2) *Si* $\lambda \neq 0$ *y* $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v$*, entonces* $u = v$.
(3) *Si* $u \neq \mathcal{O}$ *y* $\lambda \cdot u = \mu \cdot u$*, entonces* $\lambda = \mu$.
(4) $\lambda \cdot u = \mathcal{O}$ *si y sólo si* $\lambda = 0$ *o* $u = \mathcal{O}$.

La demostración de 8.4 también se deja como ejercicio.

Nota 8.6. *En las subsecciones 7.2 y 8.1 se introducen dos operaciones en* $\mathbb{R}^2$ *las cuales satisfacen las propiedades* $(\mathrm{S}_1) - (\mathrm{S}_4)$ *y* $(\mathrm{P}_1) - (\mathrm{P}_4)$*, de las proposiciones 7.4 y 8.4 respectivamente; la terna* $(R^2, +, \cdot)$*, donde "+" representa la suma dada en 7.2 y "·" representa el producto por escalares, dado en 8.1, junto con las ocho propiedades anteriores son ejemplo de un concepto llamado espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial, concepto que revisaremos más adelante.*

Por el momento, y en virtud del hecho de que "$\mathbb{R}^2$*" es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial, en algunas ocasiones llamaremos a los elementos de* $\mathbb{R}^2$ *vectores, esto es principalmente porque queremos hacer énfasis en el carácter algebraico de la propiedad a discutir.*

8.2. Interpretación geométrica del producto por escalares. La proposición 8.2 establece que los múltiplos escalares de un vector en $\mathbb{R}^2$ son precisamente los elementos de la recta determinada por el origen y el vector dado. Lo que haremos a continuación es ver el efecto de multiplicar un vector distinto de cero por un escalar.

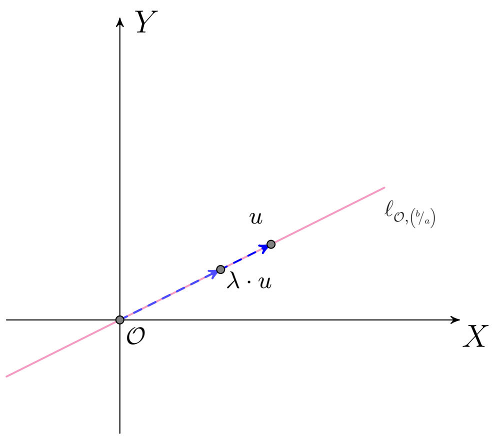
Comenzamos considerando $u \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Sabemos que u y $\lambda \cdot u$ están en la misma recta por el origen, por ora parte, si $u = (a,b)$ entonces las longitudes de los segmentos $\overline{\mathcal{O}u}$ y $\overline{\mathcal{O}(\lambda \cdot u)}$ son $d(\mathcal{O}, u)$ y $d(\mathcal{O}, (\lambda \cdot u))$, luego

$$\begin{aligned} d(\mathcal{O}, (\lambda \cdot u)) &= \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 (a^2 + b^2)} \\ &= |\lambda| \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \lambda d(\mathcal{O}, u). & \text{(ya que } \lambda > 0) \end{aligned}$$

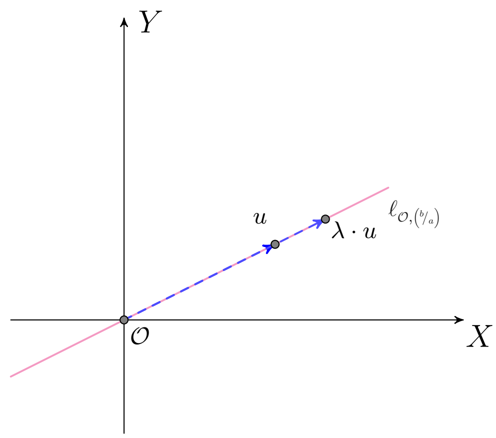
La igualdad $d(\mathcal{O}, (\lambda \cdot u)) = \lambda d(\mathcal{O}, u)$ establece el comportamiento de la multiplicación por escalares, ya que, si $0 < \lambda < 1$, como $d(\mathcal{O}, u) > 0$, entonces $0 < \lambda d(\mathcal{O}, u) < d(\mathcal{O}, u)$, esto es, $0 < d(\mathcal{O}, (\lambda \cdot u)) < d(\mathcal{O}, u)$.

Por otra parte, y de forma completamente análoga al análisis anterior, si $1 < \lambda$ entonces $d(\mathcal{O}, u) < d(\mathcal{O}, (\lambda \cdot u))$.

En las gráficas en la figura 55, identificamos los segmentos $\overline{\mathcal{O}u}$ y $\overline{\mathcal{O}(\lambda \cdot u)}$ con unas flechas que inician en $\mathcal{O}$ y terminan en u y $\lambda \cdot u$, respectivamente, para destacar el comportamiento de la multiplicación por escalares.



(A) $\lambda \cdot u$ con $0 < \lambda < 1$



(B) $\lambda \cdot u$ con $\lambda > 1$

FIGURA 55. Multiplicación por escalares de u por $\lambda \in \mathbb{R}^+$

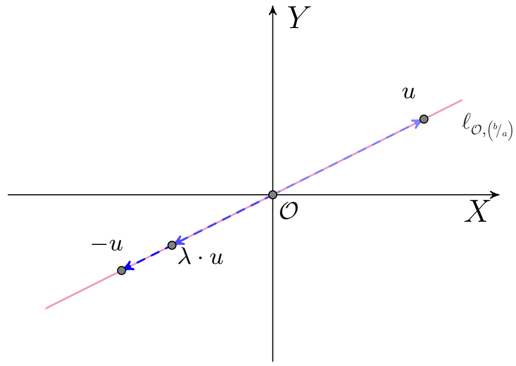
Para terminar esta interpretación, falta ver qué pasa cuando los escalares están en $\mathbb{R}^-$. Si $\lambda < 0$, entonces $-\lambda > 0$; luego

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u &= ((-\lambda)(-1)) \cdot u \\ &= (-\lambda) \cdot ((-1) \cdot u) \\ &= (-\lambda) \cdot (-u), \end{aligned}$$

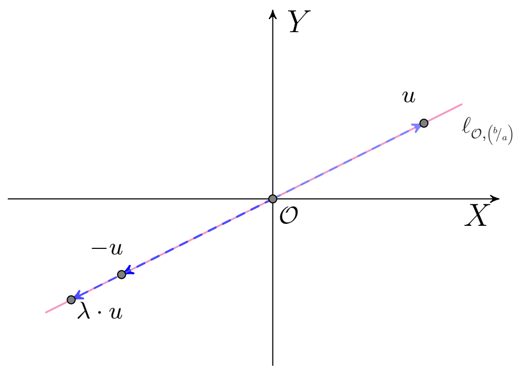
de esta manera, el comportamiento de $\lambda \cdot u$ se reduce a ver el comportamiento de $-u$ respecto de $-\lambda > 0$. Ya que

$$\begin{aligned} -1 < \lambda < 0 &\iff 0 < -\lambda < 1, \\ \lambda \leq -1 &\iff 1 \leq -\lambda, \end{aligned}$$

entonces $\lambda \cdot u$ está "entre" $\mathcal{O}$ y $-u$ si y sólo si $\lambda \in (\mathbf{-1, 0})$ y $-u$ está entre $\mathcal{O}$ y $\lambda \cdot u$ si y sólo si $\lambda \leq -1$.



(A) $\lambda \cdot u$ con $-1 < \lambda < 0$



(B) $\lambda \cdot u$ con $\lambda < -1$

FIGURA 56. Multiplicación por escalares de u por $\lambda \in \mathbb{R}^-$

8.3. Forma vectorial de rectas en $\mathbb{R}^2$. En la subsección 8.1 se demostró que si una recta ℓ en el plano está determinada por la ecuación $\mathrm{y} = m\mathrm{x} + b$, y si $B = (0, b)$ y $u = (1, m)$ entonces $\ell = \{B + \lambda \cdot u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, considerando este caso como modelo, presentamos la siguiente definición.

Definición 8.7. *Sean $P_0, u \in \mathbb{R}^2$, con $u \neq \mathcal{O}$. La recta que pasa por P con dirección u, que denotamos $\boldsymbol{\ell}_{P_0,\overline{u}}$, está dada por*

$$\ell_{P_0,\overline{u}} = \{P_0 + \lambda \cdot u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Como consecuencia de la definición, se tiene que, para cada $P_0, u \in \mathbb{R}^2$, con $u \neq \mathcal{O}$, se tiene que

$$\ell_{P_0,\overline{u}} = \{P_0\} + \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}; \tag{8.1}$$

esto es, la recta $\ell_{P_0,\overline{u}}$ es el trasladado de $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$, la recta por el origen con dirección u, por P_0.

En el corolario 8.3 se establece que si ℓ es la recta del plano determinada por la ecuación $\mathrm{y} = m\mathrm{x} + b$, $B = (0, b)$ y $u = (1, m)$, entonces $\ell = \ell_{B,\overline{u}}$, esto es, para las rectas cuya ecuación es de la forma $\mathrm{y} = m\mathrm{x} + b$, tenemos un método para dar su representación vectorial. A continuación veremos que el proceso inverso también es posible.

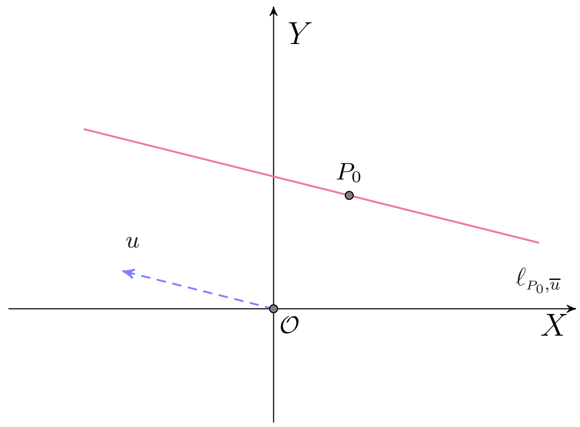


FIGURA 57. $\ell_{P_0,\overline{u}}$

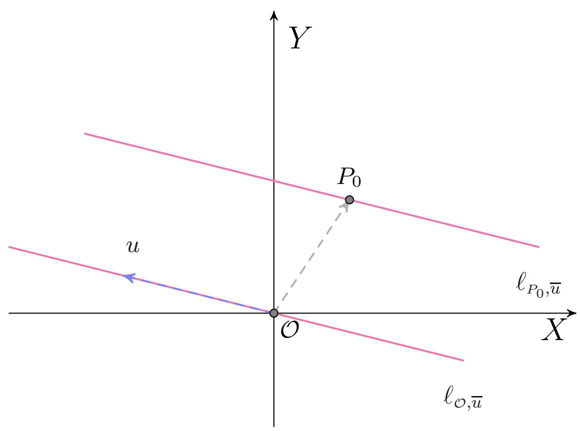


FIGURA 58. $\ell_{P_0,\overline{u}} = \{P_0\} + \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$

Consideramos una recta $\ell_{P_0,\overline{u}}$, donde suponemos que $u = (B, -A)$. Si $P \in \ell_{P_0,u}$, debe existir un número real λ tal que $P = P_0 + \lambda \cdot u$, lo cual implica

$$\begin{cases} x_P = x_{P_0} + \lambda B \\ x_P = y_{P_0} - \lambda A \end{cases}$$

lo cual da lugar a las siguientes identidades

$$\begin{cases} Ax_P = Ax_{P_0} + \lambda AB \\ Bx_P = By_{P_0} - \lambda Ab \end{cases}$$

y por consiguiente

$$Ax_P + By_P = Ax_{P_0} + By_{P_0}.$$

Si $C := -(Ax_{P_0} + By_{P_0}) \in \mathbb{R}$, lo anterior asegura que, para cada $P \in \ell_{P_0,\overline{u}}$, las coordenadas de P satisfacen la ecuación lineal, en las indeterminadas x y y,

$$A\mathrm{x} + B\mathrm{y} + C = 0;$$

y por lo tanto se ha demostrado que

$$\ell_{P_0,\overline{u}} \subseteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax + By + C = 0\right\}. \tag{8.2}$$

Para ver que en efecto se da la contención recíproca, consideremos $Q \in \mathbb{R}^2$ tal que $Ax_Q + By_Q + C = 0$, de donde

$$Ax_Q + By_Q = Ax_{P_0} + By_{P_0}. \tag{8.3}$$

Para el siguiente análisis tenemos dos casos, uno si $A \neq 0$ y otro si $B \neq 0$.

Si $A \neq 0$, la identidad (8.3) implica que

$$x_Q = x_{P_0} + \tfrac{B}{A}\left(y_{P_0} - y_Q\right), \tag{8.4}$$

luego

$$\begin{aligned}
Q &= (x_Q, y_Q) \\
&= \left(x_{P_0} + \tfrac{B}{A}\left(y_{P_0} - y_Q\right), y_Q\right) && \text{(por (8.4))} \\
&= \left(x_{P_0} + \tfrac{B}{A}\left(y_{P_0} - y_Q\right), y_{P_0} + \left(y_Q - y_{P_0}\right)\right) \\
&= \left(x_{P_0}, y_{P_0}\right) + \left(\tfrac{B}{A}\left(y_{P_0} - y_Q\right), \left(y_Q - y_{P_0}\right)\right) \\
&= P_0 + \tfrac{\left(y_{P_0} - y_Q\right)}{A} \cdot (B, -A) \\
&= P_0 + \tfrac{\left(y_{P_0} - y_Q\right)}{A} \cdot u,
\end{aligned}$$

lo cual implica que $Q \in \ell_{P_0,\overline{u}}$, ya que $\frac{\left(y_{P_0} - y_Q\right)}{A} \in \mathbb{R}$. Si $B \neq 0$, procediendo de manera completamente análoga al caso anterior, a partir de (8.3) se obtiene que

$$y_Q = y_{P_0} + \tfrac{A}{B}\left(x_{P_0} - x_Q\right),$$

y a partir de aquí obtenemos nuevamente que $Q \in \ell_{P_0,\overline{u}}$ y por consiguiente

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax + By + C = 0\right\} \subseteq \ell_{P_0,\overline{u}},$$

luego, por (8.2), podemos concluir que

$$\ell_{P_0,\overline{u}} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax + By + C = 0\right\}.$$

Resumimos esta discusión en la siguiente proposición.

Proposición 8.8. *Sean $P_0, u \in \mathbb{R}^2$, donde $u \neq \mathcal{O}$. Si $u = (B, -A)$ y definimos $C = -\left(Ax_{P_0} + By_{P_0}\right) \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\ell_{P_0,\overline{u}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax + By + C = 0\}.$$

De esta manera, la proposición 8.8 nos proporciona una manera de pasar de la representación vectorial de una recta dada a su descripción a partir de su ecuación lineal.

9. Extensión de los conceptos a $\mathbb{R}^3$

Todos los conceptos de las subsecciones anteriores se pueden extender al espacio cartesiano, a continuación sólo mencionaremos cómo es que se extiende y dejamos los detalles como ejercicio al lector.

9.1. El $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. La suma y el producto por escalares en $\mathbb{R}^3$ se definen de la siguiente manera: Dados $P, Q \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$P + Q := (x_P + x_Q, y_P + y_Q, z_P + z_Q)\,, \tag{9.1}$$

$$\lambda \cdot P := (\lambda x_P, \lambda y_P, \lambda z_P)\,. \tag{9.2}$$

Las principales propiedades de estas operaciones son exactamente las ocho propiedades dadas en las proposiciones 7.4 y 8.4, esto es,

Proposición 9.1. *Si $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces*

(S_1) $P + (Q + R) = (P + Q) + R$.
(S_2) $P + Q = Q + P$.
(S_3) $P + \mathcal{O} = P$.
(S_4) *Si* $P' = (-x_P, -y_P, -z_P)$, *entonces* $P + P' = \mathcal{O}$.

(P_1) $\lambda \cdot (\mu \cdot P) = (\lambda\mu) \cdot P$.
(P_2) $\lambda \cdot (P + Q) = \lambda \cdot P + \lambda \cdot Q$.
(P_3) $(\lambda + \mu) \cdot P = \lambda \cdot P + \mu \cdot P$.
(P_4) $1 \cdot P = P$.

De esta manera, la terna $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ es un ejemplo más de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y por consiguiente, los elemento de $\mathbb{R}^3$ reciben el nombre de vectores. Al igual que en el plano cartesiano, de forma tradicional, los vectores se ilustran como flechas con la condición de que el punto inicial de dicha flecha está en el origen $\mathcal{O}$ y el punto final es el elemento dado en $\mathbb{R}^3$.

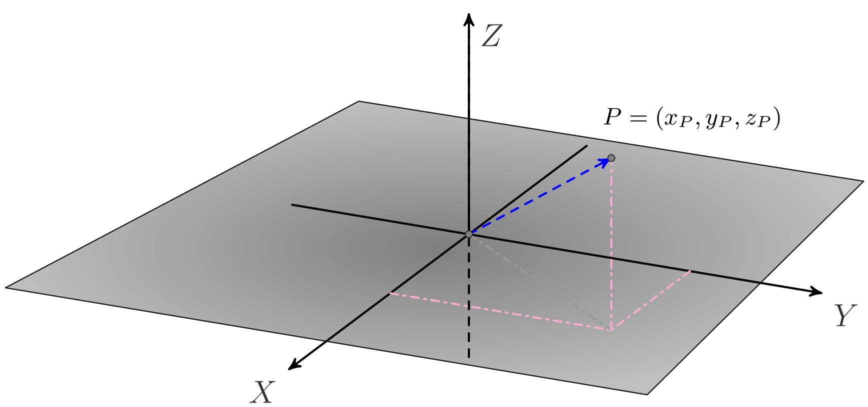


FIGURA 59. Flecha que inicia en $\mathcal{O}$ y termina en P

Las interpretaciones geométricas de la suma y el producto por escalares son exactamente las mismas que para el plano cartesiano.

Suma (vectorial) en $\mathbb{R}^3$

Producto por escalares en $\mathbb{R}^3$

Definición 9.2. *Sean $P_0, u \in \mathbb{R}^3$, con $u \neq \mathcal{O}$. La recta que pasa por P_0 con dirección u, está dada por*

$$\ell_{P_0,\overline{u}} = \left\{P_0 + \lambda \cdot u \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

A partir de la definición vectorial de una recta $\ell = \ell_{P_0,\overline{u}}$ en el espacio, es posible dar la representación "*paramétrica*" de dicha recta. Si $u = (a, b, c)$, la forma paramétrica de ℓ está dada por

$$\begin{cases} x(t) = x_{P_0} + ta, \\ y(t) = y_{P_0} + tb, \\ z(t) = z_{P_0} + tc, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde en este caso x, y y z son las funciones coordenadas de ℓ.

A continuación, daremos una lista de propiedades respecto a las rectas dadas en forma vectorial, y que bajo el punto de vista práctico, resultan muy útiles.

Ya que las propiedades que revisaremos son válidas tanto en el plano como en el espacio, las enunciaremos en $\mathbb{R}^n$, para $n = 2$ ó $n = 3$.

Ejercicio 4. *Demuestre que, si $u \in \mathbb{R}^n$, entonces para cada $P, Q \in \mathbb{R}^n$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$,*

(SE_1) $\mathcal{O} \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$.
(SE_2) *Si $P, Q \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$, entonces $P + Q \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$.*
(SE_3) *SI $P \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$, entonces $\lambda \cdot P \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$.*

Nota 9.3. *Como se mencionó en la nota 8.6, el conjunto $\mathbb{R}^2$ junto con la suma y el producto por escalares forman un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y por la proposición 9.1, $\mathbb{R}^3$ junto con la suma y su producto por escalares también forma un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.*

Por otra parte, un subconjunto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ que satisface las correspondientes propiedades $(\mathrm{SE}_1) - (\mathrm{SE}_3)$, es llamado subespacio vectorial*, o simplemente subespacio, de $\mathbb{R}^n$, y por consiguiente, el ejercicio 4 establece que cualquier recta por el origen en el plano ó el espacio cartesiano es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Si $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, denotamos este hecho como $\boldsymbol{V \leq \mathbb{R}^n}$.*

Proposición 9.4. *Sean $P, Q, u, v \in \mathbb{R}^n$, con $u, v \neq \mathcal{O}$.*

1) *Si $Q \in \ell_{P,\overline{u}}$, entonces $\ell_{Q,\overline{u}} \subseteq \ell_{P,\overline{u}}$.*
2) *Si $v \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$, entonces $\ell_{\mathcal{O},\overline{v}} \subseteq \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$.*
3) *Si $Q \in \ell_{P,\overline{u}}$, entonces $(Q - P) \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$.*

Demostración. 1) Si $Q \in \ell_{P,\overline{u}}$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q = P + \lambda \cdot u. \tag{9.3}$$

Veamos ahora que $\ell_{Q,\overline{u}} \subseteq \ell_{P,\overline{u}}$. Si $R \in \ell_{Q,\overline{u}}$, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $R = Q + \mu \cdot u$, luego

$$\begin{aligned} R &= Q + \mu \cdot u \\ &= (P + \lambda \cdot u) + \mu \cdot u && \text{(por (9.3))} \\ &= P + (\lambda \cdot u + \mu \cdot u) \\ &= P + (\lambda + \mu) \cdot u && \text{(por } (\mathrm{P}_3)) \end{aligned}$$

y como $(\lambda + \mu) \in \mathbb{R}$ la igualdad anterior implica que $R \in \ell_{P,\overline{u}}$.

2) Si $v \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = \lambda \cdot u. \tag{9.4}$$

Veamos ahora que $\ell_{\mathcal{O},\overline{v}} \subseteq \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$. Si $R \in \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $R = \mu \cdot v$, luego

$$\begin{aligned} R &= \mu \cdot v \\ &= \mu \cdot (\lambda \cdot u) && \text{(por (9.4))} \\ &= (\mu\lambda) \cdot u && \text{(por (P}_1\text{))} \end{aligned}$$

y como $(\mu\lambda) \in \mathbb{R}$ la igualdad anterior implica que $R \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$.

3) Si $Q \in \ell_{P,\overline{u}}$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Q = P + \lambda \cdot u$; sumando $-P$ a la identidad anterior obtenemos que $Q - P = \lambda \cdot u \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$.

□

Para el siguiente corolario, necesitaremos la siguiente propiedad.

Ejercicio 5. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$, entonces*

$$-(\lambda \cdot u) = (-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u).$$

Corolario 9.5. *Sean $P, Q, u, v \in \mathbb{R}^n$, con $u, v \neq \mathcal{O}$.*

1) $Q \in \ell_{P,\overline{u}}$ *si y sólo si* $\ell_{Q,\overline{u}} = \ell_{P,\overline{u}}$.
2) $v \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}} - \{\mathcal{O}\}$ *si y sólo si* $\ell_{\mathcal{O},\overline{v}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$.
3) $Q \in \ell_{P,\overline{u}} - \{P\}$ *si y sólo si* $\ell_{\mathcal{O},\overline{(Q-P)}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$.
4) *Si* $P \neq Q$, *entonces* $P, Q \in \ell_{P,\overline{(Q-P)}}$.

Demostración. Demostraremos (1) y dejamos las restantes como ejercicio al lector.

$\Longrightarrow$) Si $Q \in \ell_{P,\overline{u}}$, por (1) de la proposición 9.4 se tiene que

$$\ell_{Q,\overline{u}} \subseteq \ell_{P,\overline{u}}. \tag{9.5}$$

Por otra parte, también sabemos que $Q = P + \lambda \cdot u$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y por consiguiente, sumando $-(\lambda \cdot u)$ a la identidad anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} P &= Q - (\lambda \cdot u) \\ &= Q + (-\lambda) \cdot u && \text{(por el ejercicio 5)} \end{aligned}$$

y como $(-\lambda) \in \mathbb{R}$, la igualdad anterior implica que $P \in \ell_{Q,\overline{u}}$ y por lo tanto, por (1) de la proposición 9.4 se tiene que $\ell_{P,\overline{u}} \subseteq \ell_{Q,\overline{u}}$ y por (9.5) concluimos que

$$\ell_{Q,\overline{u}} = \ell_{P,\overline{u}}.$$

□

Como sugerencia para la demostración de la propiedad (2), debe tenerse en cuenta la propiedad (4) de la proposición 8.5, las cuales son también válidas en $\mathbb{R}^3$.

10. Rectas paralelas

Terminamos esta sección revisando el significado de rectas paralelas en el plano y a partir de esto presentamos la definición en el espacio.

Sean ℓ y ℓ' rectas paralelas en el plano cartesiano. Po la proposición 8.8 podemos suponer que $\ell = \ell_{P_0,\overline{u}}$ y $\ell' = \ell_{Q_0,\overline{v}}$ donde

$$u = (B, -A) \quad \text{y} \quad v = (B', -A'),$$

Para los dos casos posibles sobre ℓ y ℓ' tenemos que:

Si ℓ y ℓ' son verticales, entonces $B = B' = 0$ y por consiguiente $u = (B, -A) = (0, -A) = (-A) \cdot (0, 1)$; y de manera completamente análoga se tiene que $v = (-A') \cdot (0, 1)$.

Ya que $A \neq 0$ y $A' \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} u &= (-A) \cdot (0, 1) \\ &= (-A) \cdot \left(\left(\tfrac{1}{-A'}\right) \cdot v\right) \\ &= \left(\tfrac{A}{A'}\right) \cdot v. \end{aligned}$$

Observe que también $v = \left(\frac{A'}{A}\right) \cdot u$.

Por otra parte, si ℓ y ℓ' son oblicuas, entonces $B \neq 0$ y $B' \neq 0$ y las pendientes de ℓ y ℓ' son $\frac{-A}{B}$ y $\frac{-A'}{B'}$, respectivamente. Si las rectas son paralelas, necesariamente $\frac{-A}{B} = \frac{-A'}{B'}$ y por consiguiente $B = A\frac{B'}{A'}$; luego

$$\begin{aligned} u &= (B, -A) \\ &= \left(A\tfrac{B'}{A'}, -A\right) \\ &= \left(\tfrac{A}{A'}\right) \cdot (B', -A') \\ &= \left(\tfrac{A}{A'}\right) \cdot v. \end{aligned}$$

De esta manera, en cualquier caso, si las rectas ℓ y ℓ' son paralelas, entonces $u = \left(\frac{A}{A'}\right) \cdot v$. Resumimos esta análisis como parte de la siguiente proposición.

Proposición 10.1. *Sean $P_0, Q_0, u, v \in \mathbb{R}^2$, con $u, v \neq \mathcal{O}$. Las rectas $\ell_{P_0,\overline{u}}$ y $\ell_{Q_0,\overline{v}}$ son paralelas si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{\mathcal{O}\}$ tal que $u = \lambda \cdot v$.*

Demostración. Como mencionamos antes, la condición suficiente ya fue analizada previamente obteniendo que $\lambda = \frac{A}{A'} \in \mathbb{R}$ satisface que $u = \lambda \cdot v$.

Veamos ahora la condición necesaria y supongamos que $u = \lambda \cdot v$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $v = (B', -A')$, entonces $u = (\lambda B, -\lambda A)$. Por la proposición 8.8, las ecuaciones que determinan a $\ell_{P_0,\overline{u}}$ y $\ell_{Q_0,\overline{v}}$ son:

$$\lambda A'\mathrm{x} + \lambda B'\mathrm{y} + C = 0 \quad \text{y} \quad A'\mathrm{x} + B'\mathrm{y} + C' = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} C &= -\left(\lambda A' x_{P_0} + \lambda B' y_{P_0}\right) \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad C' = -\left(A' x_{Q_0} + B' y_{Q_0}\right). \\ &= -\lambda\left(A' x_{P_0} + B' y_{P_0}\right), \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de la recta $\ell_{P_0,\overline{u}}$ se puede escribir como

$$\lambda\left(A'\mathrm{x} + B'\mathrm{y} - \left(A' x_{P_0} + B' y_{P_0}\right)\right) = 0$$

y como $\lambda \neq 0$, esta es equivalente a

$$A'\mathrm{x} + B'\mathrm{y} - \left(A' x_{P_0} + B' y_{P_0}\right) = 0.$$

Ya que las ecuaciones de las rectas $\ell_{P_0,\overline{u}}$ y $\ell_{Q_0,\overline{v}}$ sólo difieren en el término constante, dichas rectas son paralelas. $\square$

Extrapolando la propiedad anterior a los elementos de $\mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$, introducimos la siguiente definición.

Definición 10.2. *Sean $u, v \in \mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$. Decimos que u es paralelo a v, y lo denotamos como $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$, si existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $u = \lambda \cdot v$.*

La propiedad de ser paralelos en $\mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$ determina una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$, y dejamos al lector comprobar esta afirmación en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 6. *Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$. Demuestre que*

1) $u \parallel u$.
2) *si* $u \parallel v$, *entonces* $v \parallel u$.
3) *si* $u \parallel v$ *y* $v \parallel w$, *entonces* $u \parallel w$.

Nota 10.3. *Ya que la relación "$\parallel$" es de equivalencia en $\mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$, esta induce una partición de $\mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$ en clases de equivalencia, donde para cada $u \in \mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$, la clase de equivalencia a la que pertenece u es $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} - \{\mathcal{O}\}$.*

El conjunto de clases de equivalencia, que se denota $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, genéricamente es llamado espacio proyectivo real*; pero en los casos particulares $n = 2$ y $n = 3$, son llamados* recta proyectiva *y* plano proyectivo*, respectivamente.*

Ahora extrapolamos la definición 10.2 para la siguiente definición.

Definición 10.4. *Diremos que las rectas $\ell_{P_0,\overline{u}}, \ell_{Q_0,\overline{v}} \subset \mathbb{R}^3$ son paralelas si sus correspondientes vectores de dirección son paralelos, esto es, si $u \parallel v$. El tal caso escribiremos $\ell_{P_0,\overline{u}} \parallel \ell_{Q_0,\overline{v}}$.*

Corolario 10.5. *Si $P_0, Q_0, u, v \in \mathbb{R}^2$, con $u, v \neq \mathcal{O}$, entonces las siguiente afirmaciones son equivalentes.*

1) $\ell_{P_0,\overline{u}} \parallel \ell_{Q_0,\overline{v}}$.
2) $u \parallel v$.
3) $\ell_{P_0,\overline{u}} = \ell_{P_0,\overline{v}}$.

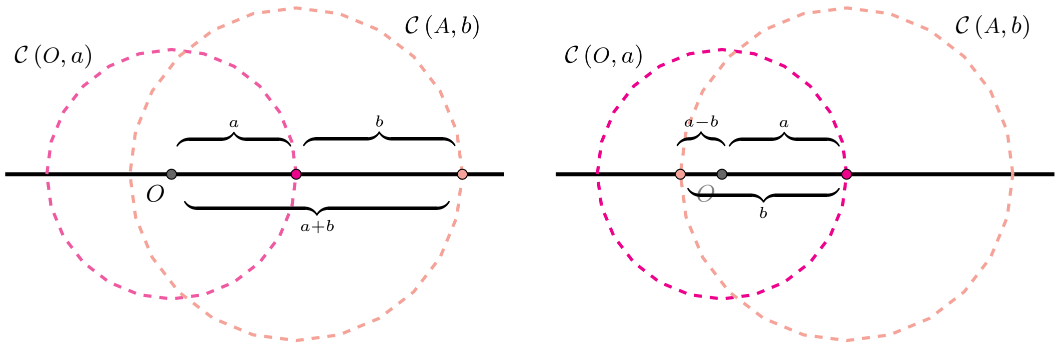
Corolario 10.6. *Si $\ell_{P_0,\overline{u}}, \ell_{Q_0,\overline{v}} \subset \mathbb{R}^2$ son rectas paralelas, entonces las siguiente afirmaciones son equivalentes.*

1) $\ell_{P_0,\overline{u}} = \ell_{Q_0,\overline{v}}$.
2) $\ell_{P_0,\overline{u}} \cap \ell_{Q_0,\overline{v}} \neq \varnothing$.

Corolario 10.7. *(Axioma de Playfair o Quinto postulado de Euclides) Si $P \in \mathbb{R}^2$ y $\ell \subset \mathbb{R}^3$ es una recta que no contiene a P, entonces existe una única recta ℓ' que pasa por P y es paralela a ℓ.*

11. Apéndice

11.1. Aritmética de magnitudes. Teniendo un punto fijo “distinguido” y un segmento “*unidad*”, la geometría euclidiana permite realizar construcciones de segmentos que representen la *suma*, *resta*, *producto*, *fracciones* y *raíces cuadradas* de segmentos de recta finitos (magnitudes finitas) como lo muestra Descartes en su libro “La géométrie”, publicado en 1637. Las figuras 60a y 60b ilustran gráficamente la manera de construir segmentos que representen la suma y resta de segmentos dados.



(A) Suma de magnitudes (B) Resta de magnitudes

FIGURA 60. Estructura aditiva

Respecto al producto, fracción y raíz cuadrada de segmentos necesitamos enunciar un resultado respecto a proporciones. Para simplificar la explicación recordamos la siguiente convención:

El símbolo $\triangle \boldsymbol{ABC}$ denotará un triángulo con vértices A, B, C en la disposición de la figura 61

Las magnitudes de los lados del triángulo $\triangle ABC$ se denotan con las letras a, b y c para las magnitudes BC, CA y AB, respectivamente; y abusando de la notación y el lenguaje se suele decir que el triángulo $\triangle ABC$ tiene lados a, b y c.

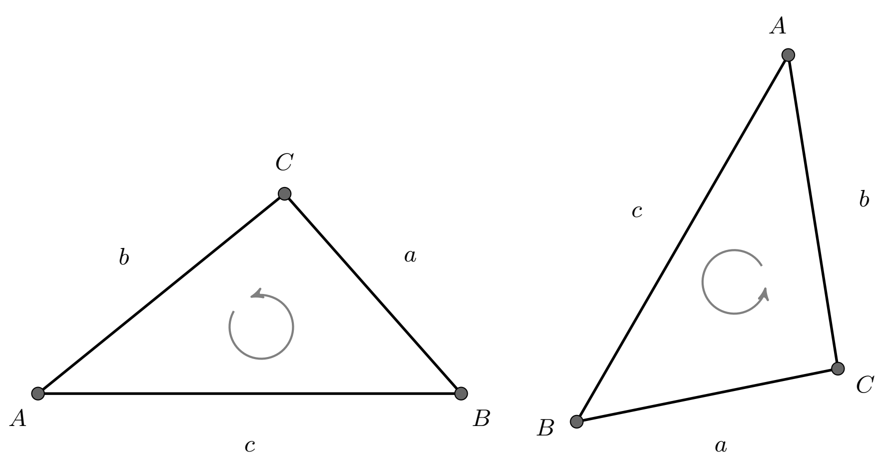


FIGURA 61. El orden lexicográfico de los vértices es en sentido levógiro

Una ves hecha esta convención enunciamos el teorema:

Teorema. (Teorema de segmentos de Tales) Considerando un triángulo $\triangle ABC$. Si los lados AC y AB se extienden hasta los puntos C' y B', respectivamente, de tal forma que el segmentos $B'C'$ es paralelo al segmento BC, entonces las magnitudes de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$ satisfacen:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

y por consiguiente

$$\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}, \ \frac{c'}{b'} = \frac{c}{b} \text{ y } \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}.$$

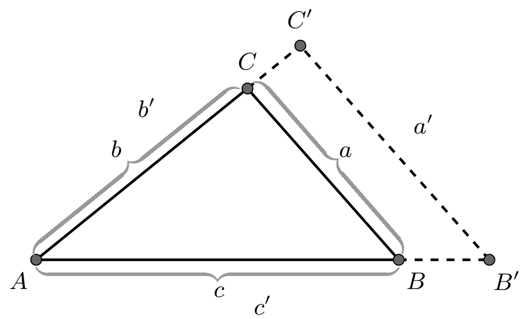


FIGURA 62. Teorema de proporciones de Tales

Para dar el **producto** de dos magnitudes convenimos en establecer una magnitud unidad la cual denotamos con **1**.

Construcción

Dados los segmentos con longitudes a y b:

1) Por un punto O trazamos dos rectas no paralelas marcando los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ de longitudes a y b respectivamente.
2) En una de las rectas marcamos el segmento $\overline{OU}$ de longitud 1.
3) Si U está en la linea que contiene al segmento $\overline{OA}$ ($\overline{OB}$) trazamos el segmento $\overline{UB}$ ($\overline{AU}$).
4) Por el punto a (b) trazamos un segmento paralelo al segmento $\overline{UB}$ ($\overline{AU}$) de tal manera que interseque la linea $\overline{OB}$ ($\overline{OA}$) es el punto X.

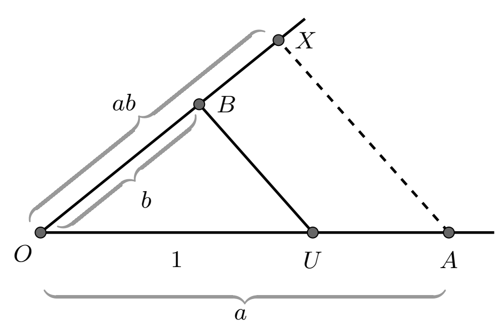


FIGURA 63. Producto de magnitudes

Considerando los triángulos $\triangle OUB$ y $\triangle OAX$ y aplicando el teorema de Tales obtenemos que $\frac{a}{\overline{OX}} = \frac{1}{b}$ así que $a \cdot b = \overline{OX}$.

En las figuras 64 y 65 ilustramos cómo se construyen segmento que representan la fracción de dos magnitudes dadas y la raíz cuadrada de una magnitud dada.

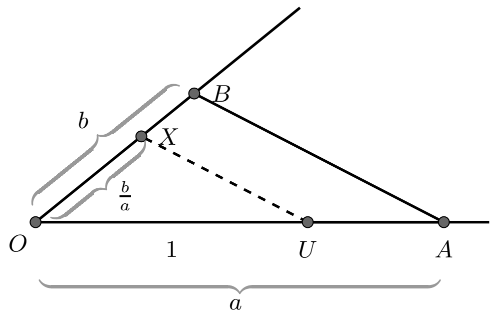


FIGURA 64. Fracciones de magnitudes

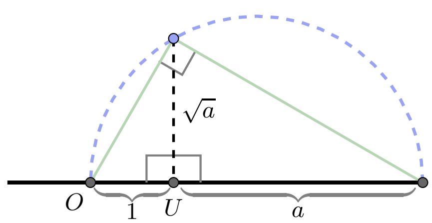


FIGURA 65. Raíz cuadrada de una magnitud dada

Ejercicio 7. *Qué puede decir del segmento $\overline{OX}$ de la figura 63 si el segmento $\overline{OU}$ es mayor que el segmento $\overline{OA}$.*

Ejercicio 8. *Dé una justificación de que el segmento $\overline{OX}$ de la figura 64 representa la fracción $\frac{b}{a}$.*

Ejercicio 9. *Utilizando los datos de la figura 64, haga un dibujo que represente la fracción $\frac{a}{b}$.*

Ejercicio 10. *Dé una justificación de que el segmento vertical (punteado) de la figura 65 representa la raíz cuadrada de a.*

11.2. El sistema de los números reales. El sistema numérico que describe a todos los números determinados por magnitudes de segmentos, incluyendo magnitudes orientadas, es el de los *números reales*. Para presentar dicho sistema es necesario introducir la siguiente

Definición 11.1. *Sea X un conjunto. Una **operación binaria** "$*$" en X es una regla que asigna a cada par de elementos $x, y \in X$ un único elemento $z \in X$, el cual denotamos por $z = \boldsymbol{x * y}$.*

Ejemplo 11.2. *La suma usual en $\mathbb{N}$ es una operación binaria*

Para describir el sistema de los números reales son necesarios tres datos junto con una serie de propiedades (axiomas); más precisamente, el sistema de números reales consta de un conjunto, denotado por $\mathbb{R}$, y dos operaciones binarias en $\mathbb{R}$, llamadas ***suma*** y ***producto*** que denotaremos por $+$ y $\cdot$, respectivamente; los axiomas están divididos en tres bloques:

(A) De aritmética.
(O) De orden.
(C) De completes.

A continuación listamos cada uno de éstos:

(A) (Axiomas de la suma) Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$
 A1. $a + (b + c) = (a + b) + c$.
 A2. $a + b = b + a$.
 A3. existe un elemento $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + a_0 = a = a_0 + a$.
 A4. dado a existe $a' \in \mathbb{R}$ tal que $a + a' = a_0 = a' + a$.

(Axiomas del producto) Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$
 A5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
 A6. $a \cdot b = b \cdot a$.
 A7. existe un elemento $e \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot e = a = e \cdot a$.
 A8. dado $a \neq a_0$ existe $a'' \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a'' = e = a'' \cdot a$.

(Leyes distributivas) Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$
 A9. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.
 $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Nota 11.3. *Es posible demostrar que los elementos mencionados en los axiomas (A3), (A4), (A7) y (A8) son únicos con las propiedades descritas y por tal razón estos tienen una notación especial:*

Neutro aditivo: *El elemento a_0 lo denotamos por* **0** *y lo llamamos* ***cero***.
Neutro multiplicativo: *El elemento e lo denotamos por* **1** *y lo llamamos* ***uno***.
Inverso aditivo: *Dado $a \in \mathbb{R}$, el elemento a' lo denotamos por $-\boldsymbol{a}$ y lo llamamos* ***el inverso aditivo de a*** *o* ***menos a***.
Inverso multiplicativo: *Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, el elemento a'' lo denotamos por $\boldsymbol{a^{-1}}$ y lo llamamos* ***el inverso multiplicativo de a*** *o* ***el inverso de a***.

(O) (Axiomas de orden)
 O1. Existe un subconjunto $\mathbb{R}^+$ de $\mathbb{R}$ que cumple la siguiente propiedad: para cada número real $a \in \mathbb{R}$ se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:
  (i) $a = 0$.
  (ii) $a \in \mathbb{R}^+$.
  (iii) $-a \in \mathbb{R}^+$.
 Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple:
 O2. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $(a + b) \in \mathbb{R}^+$.
 O3. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$.

Nota 11.4. *A partir de los axiomas (O1)-(O3) se define la siguiente* relación *en $\mathbb{R}$:*

$$\textit{para cada } a, b \in \mathbb{R}\ a < b \textit{ si y sólo si } (b - a) \in \mathbb{R}^+.$$ [XI]

El símbolo $a < b$ *se lee "*a *es menor que* b*". Las propiedades que determinan a ésta relación son las siguientes:*

Teorema 11.5. *Para cada* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *se cumple:*

1) $a \not< a$.
2) *si* $a < b$ *y* $b < c$*, entonces* $a < c$.

A partir de la relación "menor que" es posible definir las siguientes relaciones en $\mathbb{R}$*: para cada* $a, b \in \mathbb{R}$

$a > b$ *si y sólo si* $b < a$*;* $a > b$ *se lee "*a *es mayor que* b*".*
$a \leq b$ *si y sólo si* $a < b$ *ó* $a = b$*;* $a \leq b$ *se lee "*a *es menor o igual que* b*"*
$a \geq b$ *si y sólo si* $a > b$ *ó* $a = b$*;* $a \geq b$ *se lee "*a *es mayor o igual que* b*"*

Las propiedades que determinan a la relación "$\leq$*" son las siguientes:*

Teorema 11.6. *Para cada* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *se cumple:*

1) $a \leq a$.
2) *si* $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces* $a = b$.
3) *si* $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $a \leq c$.

Para finalizar este inciso mencionamos las propiedades de compatibilidad entre las operaciones en $\mathbb{R}$ *y las "relaciones de orden" que hemos definido.*

Teorema 11.7. *Para cada* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *se cumple:*

1) *si* $a < b$*, entonces* $(a + c) < (b + c)$.
2) *si* $a < b$ *y* $c < d$*, entonces* $(a + c) < (b + d)$.
3) *si* $a < b$ *y* $c > 0$*, entonces* $a \cdot c < b \cdot c$.
4) *si* $0 < a < b$ *y* $0 < c < d$*, entonces* $0 < a \cdot c < b \cdot d$.
5) *si* $a < b$ *y* $c < 0$*, entonces* $a \cdot c > b \cdot c$.
6) $a^2 \geq 0$.
7) $a > 0$ *si y sólo si* $-a < 0$.
8) $a > 0$ *si y sólo si* $a^{-1} > 0$.

Para presentar el último axioma necesitaremos de la siguiente definición.

Definición 11.8. *Sean* S *un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *y* $a \in \mathbb{R}$.

(I) *Diremos que* a *es* ***cota superior*** *de* S *si para cada* $x \in S$ $a \geq x$*. En tal caso se dice que el conjunto* S *está "acotado superiormente".*
(II) *Diremos que* a *es* ***supremo*** *de* S *si:*
  (II.1) a *es cota superior de* S.
  (II.2) *si* $a' \in \mathbb{R}$ *es cota superior de* S *entonces* $a \leq a'$*. (*a *es la mínima cota superior de* S*)*

(C) (Axioma del supremo)
C1. Si S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y S es acotado superiormente, entonces S tiene supremo en $\mathbb{R}$.

[XI] Dados $a, b \in \mathbb{R}$ $(b - a) \underset{def.}{=} b + (-a)$.

Nota 11.9. *Como mencionamos al inicio de esta sección, es posible "construir numeros" que no son racionales y en este sentido si "marcamos" en una recta todos los punto que son racionales de colo azul (por ejemplo) resulta que hay puntos que no son azules lo cual podemos imaginar como una "recta azul agujereada". El axioma (C1) garantiza que podemos identificar todos los punto de una recta con los elementos de $\mathbb{R}$ y es por ello que se suele decir que la recta numérica o recta real "no tiene hoyos".*

FIGURA 66. Recta agujereada.

Una estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ que satisface los axiomas (A1)-(A9), (O1)-(O3) y (C1) es llamado ***campo ordenado completo***. En el siglo XIX Richard Dedekind (6 de octubre de 1831—12 de febrero de 1916) presentó un "*modelo*" para el sistema de los números reales a partir de ciertos subconjunto de números racionales.

Para finalizar esta sección introduciremos la siguiente definición:

Definición 11.10. *Sea $a \in \mathbb{R}$, el **valor absoluto** de a, denotado por $|\boldsymbol{a}|$, es el número real*

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0; \\ \text{-}a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Las principales propiedades del valor absoluto se listan en el siguiente teorema.

Teorema 11.11. *Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple*

1) $|a| \geq 0$ *y*

$$|a| = 0 \text{ si y sólo si } a = 0.$$

2) $|a| = |-a|$ *y* $a \leq |a|$.

3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

4) si $b \geq 0$*, entonces*

$$|a| \leq b \text{ si y sólo si } -b \leq a \leq b.$$

5) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Por último presentamos el siguiente lema cuya utilidad se verá en la sección 11.4.

Lema 11.12. *Si $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, entonces*

$$|a|\,|a'| + |b|\,|b'| \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}.$$

Demostración. Consideramos $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$. Ya que

$$0 \leq (ab' + a'b)^2$$
$$0 \leq (ab' - a'b)^2,$$

entonces

$$-2aa'bb' \leq a^2b'^2 + a'^2b^2 \tag{11.1}$$

$$2aa'bb' \leq a^2b'^2 + a'^2b^2. \tag{11.2}$$

Se sigue de (11.1) y (11.2) que

$$\begin{aligned} a^2a'^2 - 2aa'bb' + b^2b'^2 &\leq a^2a'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2 + b^2b'^2 \\ &= \left(a^2+b^2\right)\left(a'^2+b'^2\right) \end{aligned} \tag{11.3}$$

y de manera análoga

$$a^2a'^2 + 2aa'bb' + b^2b'^2 \leq \left(a^2+b^2\right)\left(a'^2+b'^2\right). \tag{11.4}$$

Concluimos de (11.3) y (11.4) que

$$a^2a'^2 + 2\,|a|\,|a'|\,|b|\,|b'| + b^2b'^2 \leq \left(a^2+b^2\right)\left(a'^2+b'^2\right),$$

y por consiguiente

$$\left(|a|\,|a'| + |b|\,|b'|\right)^2 \leq \left(a^2+b^2\right)\left(a'^2+b'^2\right);$$

por lo tanto, al tomar raíz cuadrada y considerando que $|a|\,|a'| + |b|\,|b'| \geq 0$, se obtiene que

$$|a|\,|a'| + |b|\,|b'| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}. \tag{11.5}$$

$\square$

11.3. Segmentos en $\mathbb{R}^2$. Consideremos dos puntos P y Q en el plano cartesiano y suponemos que $P \neq Q$. Si $P = (x_P, y_P)$ y $Q = (x_Q, y_Q)$, entonces $x_P \neq x_Q$ o $y_P \neq y_Q$.

Si el segmento $\overline{PQ}$ es horizontal, entonces $\overline{PQ}$ es paralelo al eje X y por consiguiente, debido al sistema rectangular establecido, $y_P = y_Q$ y como $P \neq Q$ necesariamente $x_P \neq x_Q$.

Para describir $\overline{PQ}$ necesitamos considerar los casos: $x_P < x_Q$ ó $x_Q < x_P$.

Si $x_P < x_Q$, entonces P está a la izquierda de Q y en este caso

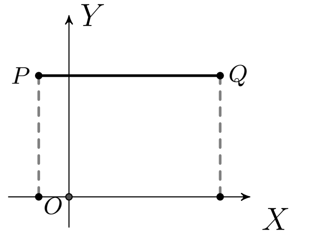
$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = y_P \text{ y } x_P \leq x \leq x_Q\right\} \\ &= \left\{(x,y_P) \in \mathbb{R}^2 \mid x_P \leq x \leq x_Q\right\} \\ &= \left\{(x,y_P) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\boldsymbol{x_P}, \boldsymbol{x_Q}]\right\}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $x_Q < x_P$, entonces P está a la derecha de Q y

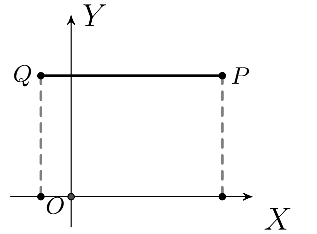
$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = y_P \text{ y } x_Q \leq x \leq x_P\right\} \\ &= \left\{(x,y_P) \in \mathbb{R}^2 \mid x_Q \leq x \leq x_P\right\} \\ &= \left\{(x,y_P) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\boldsymbol{x_Q}, \boldsymbol{x_P}]\right\}. \end{aligned}$$

Cabe hacer notar que como no estamos considerando segmentos dirigidos entonces $\overline{PQ} = \overline{QP}$.

De manera análoga, si el segmento $\overline{PQ}$ es vertical, necesariamente $x_P = x_Q$ y $y_P \neq y_Q$; y por consiguiente



(A) $\overline{PQ}$ con $x_P < x_Q$



(B) $\overline{PQ}$ con $x_Q < x_P$

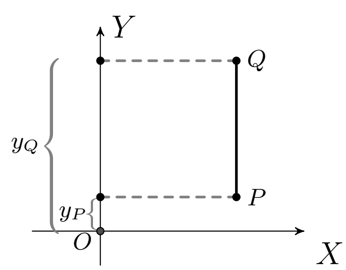
FIGURA 67. Segmentos horizontales

Si $y_P < y_Q$, entonces P está a la abajo de Q y en este caso

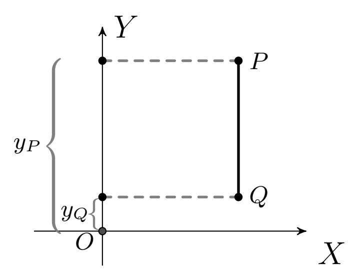
$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_P \text{ y } y_P \leq y \leq y_Q\right\}\\ &= \left\{(x_P,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_P \leq y \leq y_Q\right\}\\ &= \left\{(x_P,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [\boldsymbol{y_P}, \boldsymbol{y_Q}]\right\}.\end{aligned}$$

Por otra parte, si $x_Q < x_P$, entonces P está arriba de Q y

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_P \text{ y } y_Q \leq y \leq y_P\right\}\\ &= \left\{(x_P,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_Q \leq y \leq y_P\right\}\\ &= \left\{(x_P,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [\boldsymbol{y_Q}, \boldsymbol{y_P}]\right\}.\end{aligned}$$



(A) $\overline{PQ}$ con $y_P < y_Q$



(B) $\overline{PQ}$ con $y_Q < y_P$

FIGURA 68. Segmentos verticales

Si el segmento $\overline{PQ}$ no es horizontal ni vertical, diremos que $\overline{PQ}$ es *oblicuo* y por la discusión anterior, $\overline{PQ}$ es oblicuo si y sólo si $x_P \neq x_Q$ y $y_P \neq y_Q$. Para describir a $\overline{PQ}$ supondremos, sin pérdida de generalidad que $x_P < x_Q$ y $y_P < y_Q$.

Dado un punto $\mathcal{X}$ en el segmento $\overline{PQ}$, para determinar qué relación cumplen las coordenadas de $\mathcal{X}$, consideramos los puntos $R = (x_{\mathcal{X}}, y_P)$, $S = (x_Q, y_{\mathcal{X}})$ y $T = (x_Q, y_P)$.

Ya que $\overline{PR}$, $\overline{PT}$ y $\overline{\mathcal{X}S}$ son horizontales y $\overline{S\mathcal{X}}$, junto con $\overline{SQ}$ y $\overline{TQ}$ son verticales, entonces los triángulos $\triangle PR\mathcal{X}$, $\triangle \mathcal{X}SQ$ y $\triangle PTQ$ son rectángulos con ángulos rectos $\llcorner PR\mathcal{X}$, $\llcorner \mathcal{X}SQ$ y $\llcorner PTQ$; además como los ángulos $\angle \mathcal{X}PR$ y $\angle Q\mathcal{X}S$ junto

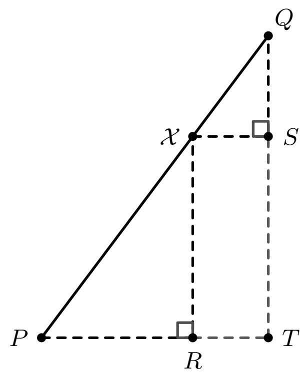


FIGURA 69. Descripción de $\overline{PQ}$ oblicuo

con $\angle R\mathcal{X}P$ y $\angle SQ\mathcal{X}$ son correspondientes, respectivamente, respecto a los segmentos paralelos $\overline{PR}$ y $\overline{\mathcal{X}S}$, y $\overline{S\mathcal{X}}$ y $\overline{SQ}$, respectivamente, se sigue que los triángulos $\triangle PR\mathcal{X}$ y $\triangle \mathcal{X}SQ$ son semejantes, y ambos semejantes al triángulo $\triangle PTQ$, por ser rectángulos y compartir uno de sus ángulos.

Por lo tanto, si $m_{\overline{PQ}} := \tan\left(\measuredangle QPT\right) = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} m_{\overline{PQ}} &= \frac{R\mathcal{X}}{PR} \\ &= \tan\left(\measuredangle \mathcal{X}PR\right) \\ &= \tan\left(\measuredangle Q\mathcal{X}S\right) \\ &= \frac{QS}{\mathcal{X}S}. \end{aligned}$$

Por otra parte, por construcción

$$R\mathcal{X} = y_{\mathcal{X}} - y_P,\ PR = x_{\mathcal{X}} - x_P,\ QS = y_Q - y_{\mathcal{X}} \text{ y } \mathcal{X}S = x_Q - x_{\mathcal{X}},$$

así que $\frac{y_{\mathcal{X}} - y_P}{x_{\mathcal{X}} - x_P} = \frac{R\mathcal{X}}{PR} = m_{\overline{PQ}}$ implica que

$$y_{\mathcal{X}} - y_P = m_{\overline{PQ}}\left(x_{\mathcal{X}} - x_P\right),$$

y por consiguiente

$$y_{\mathcal{X}} = m_{\overline{PQ}}\left(x_{\mathcal{X}} - x_P\right) + y_P. \tag{11.6}$$

De manera análoga, la identidad $m_{\overline{PQ}} = \frac{QS}{\mathcal{X}S}$ implica que

$$y_{\mathcal{X}} = m_{\overline{PQ}}\left(x_{\mathcal{X}} - x_Q\right) + y_Q. \tag{11.7}$$

Las identidades (11.6) y (11.7) dicen que para describir la ordenada del punto $\mathcal{X}$, necesitamos la *pendiente* del segmento $\overline{PQ}$, $m_{\overline{PQ}}$, la abscisa de $\mathcal{X}$, la cual varía en el intervalo $[\boldsymbol{x_P}, \boldsymbol{x_Q}]$ y las coordenadas de P o las de Q.

De esta manera, se sigue que

$$\overline{PQ} = \left\{(x,y) \mid y = m_{\overline{PQ}}\left(x - x_P\right) + y_P,\ \text{donde } x \in [\boldsymbol{x_P}, \boldsymbol{x_Q}]\right\}.$$

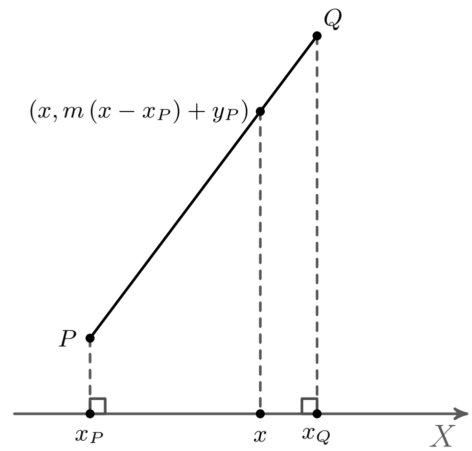


FIGURA 70. Segmento oblicuo

11.4. Distancia en $\mathbb{R}^2$. Otra de las ventajas de trabajar en un sistema coordenado rectangular es que la distancia entre dos puntos puede determinarse de manera sencilla.

Consideremos dos puntos P y Q en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ de manera que el segmento $\overline{PQ}$ es oblicuo, los casos en que $\overline{PQ}$ es horizontal ó vertical son más sencillos y lo dejamos como ejercicio al lector.

Si $P = (x_P, y_P)$ y $Q = (x_Q, y_Q)$, consideramos el punto $R = (x_P, y_Q) \in \mathbb{R}^2$. Ya que el segmento $\overline{QR}$ es horizontal y $\overline{RP}$ es vertical, entonces el triángulo $\triangle PQR$ es rectángulo con ángulo recto $\llcorner QRP$ y por consiguiente la hipotenusa es $\overline{PQ}$. Por el teorema de Pitágoras, aplicado a $\triangle PQR$, se tiene que

$$(PQ)^2 = (QR)^2 + (RP)^2 ,$$

y así, la longitud de $\overline{PQ}$ es:

$$PQ = \sqrt{(QR)^2 + (RP)^2}.$$

Por otra parte, sabemos que para cada número real a, se cumple $a^2 = (-a)^2$, en particular

$$(x_Q - x_P)^2 = (x_P - x_Q)^2 \text{ y}$$
$$(y_Q - y_P)^2 = (y_P - y_Q)^2 ;$$

así que

$$QR = |x_Q - x_P| = |x_P - x_Q| \text{ y}$$
$$RP = |y_Q - y_P| = |y_P - y_Q| ;$$

Por consiguiente

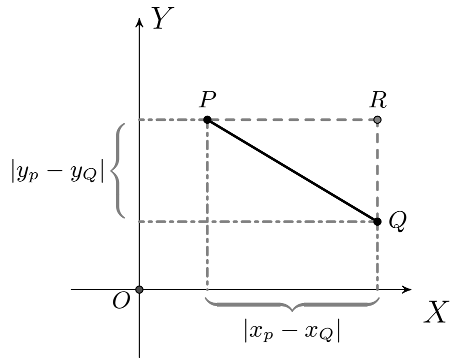


FIGURA 71. Catetos de longitud $|x_p - x_Q|$ y $|y_p - y_Q|$

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(QR)^2 + (RP)^2} \\ &= \sqrt{|x_P - x_Q|^2 + |y_P - y_Q|^2} \\ &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}. \end{aligned}$$

Definición 11.13. *Sean $P, Q \in \mathbb{R}^2$. La distancia de P a Q, que denotamos $\boldsymbol{d}\,(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$, es el número real*

$$d\,(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

Las principales propiedades de la distancia entre dos puntos se establecen en la siguiente proposición.

Proposición 11.14. *Si $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, entonces*

1) $d\,(P, Q) \geq 0$ *y*

$$d\,(P, Q) = 0 \text{ si y sólo si } P = Q.$$

2) $d\,(P, Q) = d\,(Q, P)$. *(Simetría)*
3) $d\,(P, Q) \leq d\,(P, R) + d\,(R, Q)$. *(Desigualdad del triángulo)*

Demostración. Las demostraciones de (1) y (2) las dejamos como ejercicio al lector y nos ocuparemos de comprobar (3).

Consideramos los números reales $a = x_P - x_R$, $a' = x_R - x_Q$, $b = y_P - y_R$ y $b' = y_R - y_Q$, tenemos que

$$a + a' = x_P - x_Q \text{ y } b + b' = y_P - y_Q;$$

luego

$$\begin{aligned}
d\left(P,Q\right)^2 &= \left(x_P - x_Q\right)^2 + \left(y_P - y_Q\right)^2 \\
&= \left(a + a'\right)^2 + \left(b + b'\right)^2 \\
&= a^2 + 2aa' + a'^2 + b^2 + 2bb' + b'^2 \\
&= a^2 + b^2 + 2\left(ab + a'b'\right) + a'^2 + b'^2 \\
&= d\left(P,R\right)^2 + 2\left(aa' + bb'\right) + d\left(R,Q\right)^2 \\
&\leq d\left(P,R\right)^2 + 2\left(|a|\,|a'| + |b|\,|b'|\right) + d\left(R,Q\right)^2 \\
&\leq d\left(P,R\right)^2 + 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2} + d\left(R,Q\right)^2 \qquad \text{(lema 11.12)} \\
&= d\left(P,R\right)^2 + 2d\left(P,R\right)d\left(R,Q\right) + d\left(R,Q\right)^2 \\
&= \left(d\left(P,R\right) + d\left(R,Q\right)\right)^2,
\end{aligned}$$

tomando raíz cuadrada y por la propiedad (1) obtenemos

$$d\left(P,Q\right) \leq d\left(P,R\right) + d\left(R,Q\right).$$

□

Más adelante se introducirán otros conceptos que, entre otras propiedades, permiten obtener otra forma de representar la distancia entre dos puntos, que además se puede extender de manera natural al *espacio cartesiano*; esta nueva forma de ver a la distancia, proporcionará otra demostración de la desigualdad del triángulo.

11.5. Punto medio de un segmento. En esta sección determinaremos las coordenadas del punto medio de un segmento $\overline{PQ}$ en el plano cartesiano y para esto consideraremos una propiedad que poseen los triángulos semejantes.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo y R un punto en el lado $\overline{AB}$. Por el punto R trazamos la recta paralela a $\overline{CA}$ y sea S la intersección de dicha recta con el lado $\overline{BC}$; análogamente se construye el punto T en el segmento $\overline{CA}$ de manera que $\overline{RT}$ es paralelo a $\overline{BC}$, véase la figura 72.

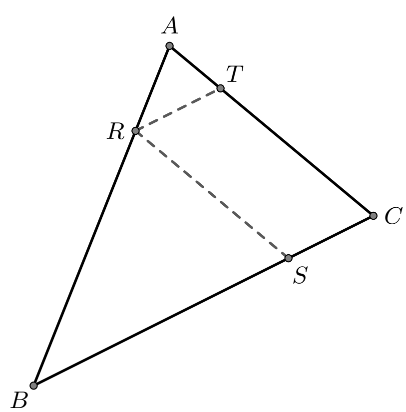


FIGURA 72. En $\triangle ABC$, R divide a $\overline{AB}$ en la razón $\frac{AR}{RB} = \rho$

Con los puntos anteriores, el triángulo $\triangle ART$ es semejante al triángulo $\triangle RBS$, por el criterio (AAA), además, por construcción, los puntos $R, S, C,$ y T determinan los vértices de un paralelogramo y por consiguiente

$$SC = RT \tag{11.8}$$

$$CT = SR \tag{11.9}$$

Supongamos que el punto R divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón $\rho \in \mathbb{R}^+$, esto es,

$$\frac{AR}{RB} = \rho. \tag{11.10}$$

Ya que $\triangle ART \sim \triangle RBS$, entonces $\frac{AR}{RT} = \frac{RB}{BS}$ lo cual implica

$$\begin{aligned} \frac{AR}{RB} &= \frac{RT}{BS} \\ &= \frac{SC}{BS} && \text{(por (11.8))} \end{aligned}$$

y por consiguiente, por (11.10), $\frac{SC}{BS} = \rho$.

Por otra parte, también $\frac{AR}{TA} = \frac{RB}{SR}$ implica $\frac{AR}{RB} = \frac{TA}{SR}$ y así, por (11.10) y (11.9), $\rho = \frac{TA}{CT}$. Resumimos lo anterior en la siguiente proposición.

Proposición 11.15. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo y R un punto en el segmento $\overline{AB}$ tal que $\frac{AR}{RB} = \rho \in \mathbb{R}^+$. Si S y T son los puntos en los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, respectivamente, tales que $\overline{RT}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y $\overline{SR}$ es paralelo a $\overline{CA}$, entonces*

$$\frac{SC}{BS} = \rho \quad \text{y} \quad \frac{TA}{CT} = \rho.$$

La proposición anterior dice que los puntos S y T dividen a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, respectivamente, en la misma razón en que lo hace el punto R al segmento $\overline{AB}$. Un caso particular interesante es cuando $\rho = 1$.

Corolario 11.16. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo y M un punto medio del segmento $\overline{AB}$. Si M' y M'' son los puntos en los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, respectivamente, tales que $\overline{MM''}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y $\overline{M'M}$ es paralelo a $\overline{CA}$, entonces M' y M'' son los puntos medios de los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, respectivamente.*

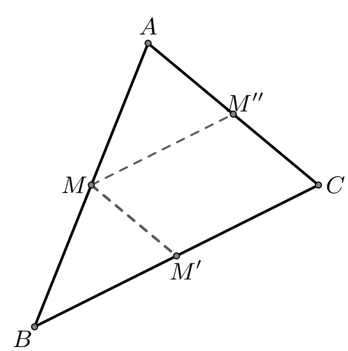


FIGURA 73. En $\triangle ABC$, M divide a $\overline{AB}$ en la razón $\frac{AM}{MB} = 1$

Como consecuencia del corolario 11.16 y de la elección del sistema coordenado rectangular podemos determinar las coordenadas del punto medio de un segmento en el plano cartesiano.

Proposición 11.17. *Sean $P, Q \in \mathbb{R}^2$, con $P \neq Q$. Si $M_{\overline{PQ}}$ es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$, entonces*

$$M_{\overline{PQ}} = \left(\frac{x_p + x_Q}{2}, \frac{y_p + y_Q}{2}\right).$$

Demostración. Dados $P, Q \in \mathbb{R}^2$, con $P \neq Q$, suponemos que $\overline{PQ}$ es oblicuo y dejamos como ejercicio al lector comprobar que la fórmula es válida cuando $\overline{PQ}$ es horizontal o vertical.

Consideramos el punto $S = (x_Q, y_P) \in \mathbb{R}^2$. Como $\overline{PS}$ es horizontal y $\overline{SQ}$ es vertical, el triángulo $\triangle PQS$ es rectángulo

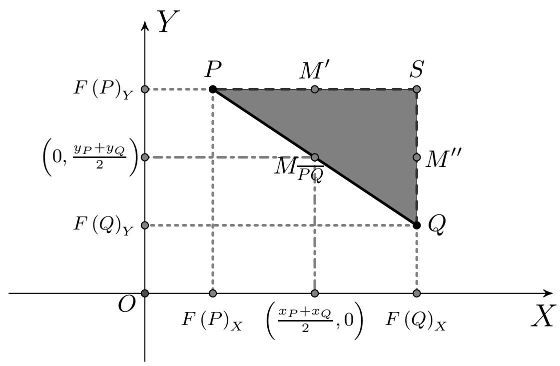


FIGURA 74. Triángulo rectángulo $\triangle PQS$ con hipotenusa $\overline{PQ}$

Por el corolario 11.16, los pie de perpendicular de $M_{\overline{PQ}}$ en los lados $\overline{SP}$ y $\overline{QS}$ son precisamente sus puntos medios y como estos lados son lados opuestos de los rectángulos con vértices $P, F(P)_X, F(Q)_X$ y Q y por otro lado $S, F(S)_Y, F(Q)_Y$ y Q, las coordenadas de $M' = \left(\frac{x_P+x_Q}{2}, y_P\right)$ y las de $M'' = \left(x_Q, \frac{y_P+y_Q}{2}\right)$ y por consiguiente $M_{\overline{PQ}} = \left(\frac{x_p+x_Q}{2}, \frac{y_p+y_Q}{2}\right)$. □

Lista de símbolos

$\boldsymbol{x_P}$**:** Abscisa del punto P
$\boldsymbol{\widehat{AB}}$**:** Arco de A hasta B
$\boldsymbol{arg\,(P)}$**:** Argumento de un punto P en el sistema de coordenadas cartesiano
$\boldsymbol{\mathcal{C}\,(O,r)}$**:** Circunferencia con centro O de rádio r
$\boldsymbol{d\,(P,Q)}$**:** Distancia de P a Q
$\boldsymbol{\ell_X}$**:** Eje coordenado equis
$\boldsymbol{\ell_Y}$**:** Eje coordenado ye
$\boldsymbol{\ell_Z}$**:** Eje coordenado zeta
$\boldsymbol{[x_0,x_1]}$**:** Intervalo determinado por los números x_0 y x_1 con $x_0 < x_1$
$\boldsymbol{\measuredangle ABC}$**:** Medida del ángulo $\angle ABC$
$\boldsymbol{\mathcal{O}}$**:** Origen en el espacio $\mathbb{R}^n$
$\boldsymbol{y_P}$**:** Ordenada del punto P
$\boldsymbol{u \parallel v}$**:** u es paralelo a v
$\boldsymbol{\Pi_{P_0,XY}}$**:** Plano por P_0 paralelo al plano Π_{XY}
$\boldsymbol{\Pi_{P_0,XZ}}$**:** Plano por P_0 paralelo al plano Π_{XZ}
$\boldsymbol{\Pi_{P_0,YZ}}$**:** Plano por P_0 paralelo al plano Π_{YZ}
$\boldsymbol{\Pi_{XY}}$**:** Plano coordenado XY
$\boldsymbol{\Pi_{XZ}}$**:** Plano coordenado XZ
$\boldsymbol{\Pi_{YZ}}$**:** Plano coordenado YZ
$\boldsymbol{s(P)_O}$**:** Punto simétrico de P respecto a O
rayOA: Rayo desde O hasta A
$\boldsymbol{\ell_m}$**:** Recta por el origen con pendiente m
$\boldsymbol{\ell_{P_0,X}}$**:** Recta por P_0 con dirección del eje X
$\boldsymbol{\ell_{P_0,Y}}$**:** Recta por P_0 con dirección del eje Y
$\boldsymbol{\ell_{P_0,Z}}$**:** Recta por P_0 con dirección del eje Z
$\boldsymbol{\ell_{P_0,\overline{u}}}$**:** Recta por P_0 con dirección u
$\boldsymbol{\overline{AB}}$**:** Segmento de recta determinado por los puntos A y B
$\boldsymbol{V \leq \mathbb{R}^n}$**:** Suespacio vecorial de $\mathbb{R}^n$
$\boldsymbol{P+Q}$**:** Suma (vectorial) de P y Q
$\boldsymbol{\{P_0\}+\mathbb{A}}$**:** Trasladado de $\mathbb{A}$ por B

Referencias

[E1] Euclid; The Thirteen Books of the Elements, Vol. 1, Segunda Edición; Dover; USA; 2012.
[E2] The First Six Books of the Elements by John Casey and Euclid scanned by Project Gutenberg.
[F] Fitzpatrick R.; Euclid's Elements of Geometry; versión otorgada por el autor aquí.
[P-L] Preston G, Lovaglia A.; Modern analytic geometry; Harper & Row, Publishers; New York; 1971.[XII]
[R] Ramirez-Galarza, A. I.; Geometría Analítica: *Una introducción a la geometría*; México: Las Prensas de Ciencias; 2011.
[Sp] Spivak M.; Calculus, Fourth Edition; Publish or Perish Inc. Housuton Texas, 2008.
[Su] Sullivan M.; Trigonometry A Unit Circle Approach; Ninth Edition; Prentice Hall; 2012.
[W-S] Wentworth J., Smith D. E.; Geometría Plana y del Espacio; Ginn & Company; Boston USA, 1915.

[XII] Vínculos Matemáticos No. 55 2006, servicios editoriales de la Facultad de Ciencias UNAM.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, Septiembre 2018
Email address: ernestoms@ciencias.unam.mx