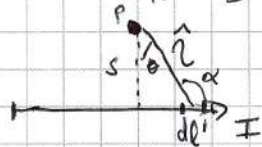


a) Utilizando la ley de Biot Savart, encuentra el campo magnético en el centro de un circuito cuadrado con corriente constante I

Primero encontraremos el campo magnético a distancia s de una línea con corriente I como hicimos en clase



Para encontrarlo, usamos la ley de Biot Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times \hat{n}}{r^2}$$

Separando la línea en pedacitos dl' como en el dibujo

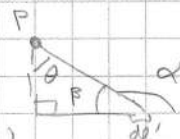
En el dibujo vemos que $d\vec{l}' \times \hat{n}$ apunta hacia afuera de la página y tiene una magnitud

$$|d\vec{l}' \times \hat{n}| = |d\vec{l}'| |\hat{n}| \sin \alpha = dl' \sin \alpha$$

Pero $\sin \alpha = \cos \theta$ pues, si dibujamos de nuevo el triángulo

Vemos que $\alpha + \theta = 180^\circ$ por lo que $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \theta) = \sin(\theta)$

Pero como es un triángulo recto $\rightarrow \theta + \beta = \pi/2 \rightarrow \sin(\beta) = \sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta$

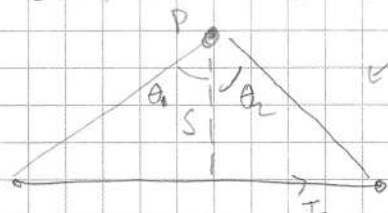


$$\therefore |d\vec{l}' \times \hat{n}| = dl' \cos \theta, \quad (1)$$

Además, usando el ángulo θ , la distancia l' sobre el cable es $l' = s \tan \theta$ por lo que derivando tenemos $dl' = \frac{s}{\cos^2 \theta} d\theta$, (2)

Además, vemos en el dibujo que $s = r \cos \theta$, (3)

Sustituimos todo esto en la ley de Biot Savart



Para considerar todo el cable, integramos desde θ_1 hasta θ_2 medidos respecto al punto P.

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times \hat{n}}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{|d\vec{l}' \times \hat{n}|}{r^2} \hat{n}$$

con \hat{n} el vector que apunta hacia afuera de la página, pues así apuntan todos los $d\vec{l}' \times \hat{n}$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{dl' \cos \theta}{r^2} \hat{n} \quad (\text{por 1})$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{s \cos \theta}{\cos^2 \theta r^2} d\theta \hat{n} \quad (\text{por 2})$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{s}{\cos \theta} \frac{\cos \theta}{s^2 \cos^2 \theta} d\theta \hat{n} \quad (\text{por 3})$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta}{s} d\theta \hat{n}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \hat{n}$$

Ahora sí calculamos el del cuadrado

El cuadrado se puede ver como 4 líneas de corriente I .
 Por la regla de la mano derecha vemos que cada lado va a contribuir al centro un campo que apunta hacia arriba como se ve en la figura. Y por simetría, cada uno de los 4 lados contribuye el mismo campo.



Para calcular el campo causado por un lado usamos el ejercicio anterior para un lado como se ve en el dibujo.



Considerando que el ángulo respecto al centro en un cuadrado va de $-\pi/4$ a $\pi/4$ porque se forman triángulos rectángulos con dos lados de la misma longitud R .

\Rightarrow Según la fórmula, el campo de un lado es $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \hat{n}$

donde ahora $s=R$, $\theta_2 = \pi/4$, $\theta_1 = -\pi/4$

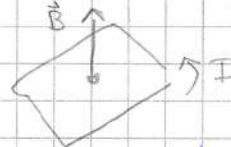
$$\rightarrow \vec{B}_{\text{un lado}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin \pi/4 - \sin(-\pi/4)) \hat{n} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{2} \hat{n}$$

Sumamos los 4 lados que contribuyen igual:

$$\vec{B} = 4 \vec{B}_{\text{un lado}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi R} \hat{n}$$

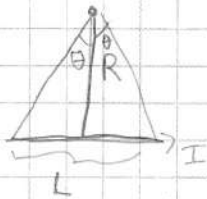
Apunta como en el dibujo



b) Encuentra el campo de un polígono de n lados. con R la distancia del centro a cualquier lado.

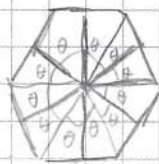
Hacemos la misma estrategia que para el cuadrado.

Primero calculamos el campo de un lado:



número de ángulos

Necesitamos conocer el ángulo θ del centro a las esquinas de un lado.



Para ello, vemos el ejemplo de este hexágono.

Notamos que si la figura tiene n lados, habrá $2n$ ángulos θ que salen del centro de la figura (2 por cada lado) y juntos suman 2π (una vuelta completa).

$$\Rightarrow 2n\theta = 2\pi \rightarrow \theta = \pi/n$$

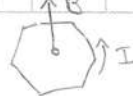
Ya podemos usar la fórmula para un lado demostrada antes:

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{un lado}} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin(\pi/n) - \sin(-\pi/n)) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin(\pi/n) + \sin(\pi/n)) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} 2 \sin(\pi/n) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \sin(\pi/n) \end{aligned}$$

Todos los n lados contribuyen igual, así que multiplicamos por n .

$$\vec{B}_{\text{Tot}} = n \vec{B}_{\text{un lado}} = \frac{n \mu_0 I}{2\pi R} \sin(\pi/n) \hat{n}$$

y apunta como en el dibujo



- c) Verifica que cuando $n \rightarrow \infty$ tu fórmula se reduce a la del campo magnético en el centro de un círculo $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{z}$

Tenemos que $\vec{B} = \frac{n \mu_0 I}{2\pi R} \sin(\pi/n) \hat{z}$

Conforme $n \rightarrow \infty$, el argumento del seno π/n se hace infinitamente pequeño, por lo que es válido usar la aproximación lineal $\sin x \approx x$

Entonces $\vec{B} = \frac{n \mu_0 I}{2\pi R} \sin(\pi/n) \hat{z} = \frac{n \mu_0 I}{2\pi R} \frac{\pi}{n} \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{z}$ ← Campo del círculo.

- d) Encuentra el momento dipolar magnético para un circuito circular como descrito en c) (Radio R , corriente I , sobre el plano xy)

Como vimos, el potencial magnético dipolar se obtiene como $\vec{A}_{dp}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint \vec{r}' \cos\theta' d\vec{r}'$

pero $\hat{r} \cdot \vec{r}' = r' \cos\theta'$ pues θ' es el ángulo entre \hat{r} y \vec{r}' $\rightarrow \vec{A}_{dp}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{r} \cdot \vec{r}') d\vec{r}'$

Para usando una propiedad de integrales $\oint (\hat{r} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' = \vec{a} \times \vec{c}$ donde \vec{a} es el vector de área del circuito (tiene magnitud igual al área y apunta según la mano derecha), con $\hat{r} = \hat{z}$ nos queda

$$\vec{A}_{dp}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \vec{a} \times \hat{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}$$

Donde $\vec{m} \equiv I \vec{a}$ es el momento dipolar magnético

Sabiendo como se define, ahora lo calculamos.

En este caso el área tiene magnitud πR^2 y si la corriente gira en sentido antihorario, la regla de la mano derecha indica que \vec{a} apunta en la dirección \hat{z}

$$\Rightarrow \vec{m} = I \vec{a} = I \pi R^2 \hat{z}$$

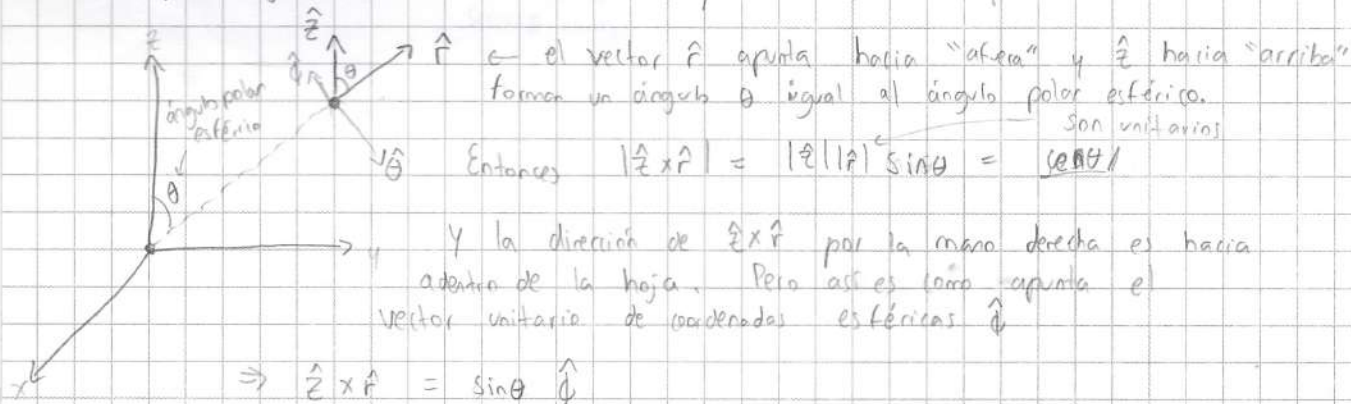
- e) ¿Cuál es el campo magnético (aproximado) lejos del origen.

Usamos la aproximación de sólo tomar el momento dipolar, es decir, como vimos antes, tenemos un potencial

$$\vec{A}_{dp}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \pi R^2 \hat{z} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I R^2}{4 r^2} \hat{z} \times \hat{r}$$

Necesitamos calcular $\hat{z} \times \hat{r}$

Para eso, dibujamos un punto arbitrario y vectores \hat{z} , \hat{r} que salen de él



$$\therefore A_{\phi}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R^2}{4 r^2} \hat{z} \times \hat{r} = \frac{\mu_0 I R^2}{4 r^2} \sin \theta \hat{\phi} \quad (1)$$

El campo magnético es $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

La expresión de $\nabla \times \vec{A}$ en esféricas para un campo $A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$ es

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$

En nuestro caso $A_r = A_\theta = 0$ por lo que muchas derivadas desaparecen.

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \hat{\theta}$$

$$\text{Y } A_\phi = \frac{\mu_0 I R^2}{4 r^2} \sin \theta \text{ por (1)} \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_0 I R^2}{4 r^2} \sin \theta \sin \theta \right) \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0 I R^2}{4 r} \sin \theta \right) \right) \hat{\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{4 r^3 \sin \theta} (2 \sin \theta \cos \theta) \hat{r} - \frac{\mu_0 I R^2}{4 r} \sin \theta \left(-\frac{1}{r^2} \right) \hat{\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{4 r^3 \sin \theta} 2 \cos \theta \hat{r} + \frac{\mu_0 I R^2 \sin \theta}{4 r^3} \hat{\theta}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 r^3} \cos \theta \hat{r} + \frac{\mu_0 I R^2}{4 r^3} \sin \theta \hat{\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{4 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

f) Muestra que para puntos en el eje z , la respuesta es consistente con el campo exacto $B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$ cuando $z \gg R$

Tenemos $B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R^2}{4 r^3} (z \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$

En el eje z se tiene que $\theta = 0$ y que $\hat{r} = \hat{z}$, $r = z$

Entonces $\cos \theta = 1$, $\sin \theta = 0$ y tenemos:

$$\Rightarrow B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R^2}{4 z^3} (z \hat{z}) = \frac{\mu_0 I R^2}{4 z^2} \hat{z} \quad (1)$$

Si z es negativo
 $\Rightarrow \theta = \pi/2$ y entonces
 $\cos \theta = -1$, $r = -z$ y ahora
 $\hat{r} = -\hat{z}$. Entonces

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R^2}{4 z^2} \hat{z}$$

En cualquier caso, la magnitud es igual

Mientras que el campo real es $B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$

Pero como $z \gg R$, despreciamos R^2 frente a z^2 por lo que
 $R^2 + z^2 \approx z^2$

$$\text{Entonces el campo real es } B(z) \approx \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{z^3}$$

que coincide con (1)