Tercer parcial Cálculo IV

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

9 de julio de 2020

Cambio de Variable

1. Calcular $\int\int_D x^2y^2dxdy$ donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es la región acotada, en el primer cuadrante, por las hipérbolas $xy = 1, xy = 2$ y las rectas $x = y, y = 4x$. (Proponga un cambio de variables y demuestre que tal cumple las hipótesis del Teorema de Cambio de Variable, úselo para calcular la integral)

Solución

Propongo el siguiente cambio de variable: $u(x, y) = xy$, $v(x, y) = y/x$ ...(1).
Con este cambio de variable, los límites de integración pueden verse sencillamente como $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 4$.
Ahora obtenemos la transformación inversa que es la que nos interesa (la que va de (u, v) a (x, y)). Para esto, podemos tomar las ecuaciones (1) y despejar y en ambas, e igualarlas, para obtener $\frac{u}{x} = vx$ y así , obtenemos $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$, luego sustituimos este valor de x en cualquiera de las ecuaciones (1) y encontramos y, entonces $y = \sqrt{uv}$. Así, la transformación del cambio de variable es:

$$(x, y) = G(u, v) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv})$$

Así, este cambio de variable G envía el conjunto $D^* = [1, 2] \times [1, 4]$ al conjunto D. Además, es un cambio de coordenadas diferenciable, pues las funciones componentes son al menos clase C^1 (en el conjunto D^*) y su Jacobiano es:

$$JG = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{bmatrix}$$

Y calculamos su determinante, $Det(JG) = \frac{1}{2\sqrt{uv}} * \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} * \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}$.
Vemos que este determinante no se anula en la región D^*, por lo que se vale el TCV.
Entonces:

$$\int\int_D f \ dxdy = \int\int_{D^*} (f \circ G) \ Det(JG) \ dudv = \int_1^4\int_1^2 \left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right)^2 \cdot (\sqrt{uv})^2 \cdot \left(\frac{1}{2v}\right) \ dudv = \int_1^4\int_1^2 \frac{u^2}{2v}dudv = \int_1^4 \frac{u^3}{6v}\Big|_1^2 dv = \int_1^4 \frac{7}{6v}dv = \frac{7}{6}ln(v)\Big|_1^4 = \frac{7}{6}ln(4)$$

2. Calcular el volumen del conjunto

$$B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$$

Solución

La forma en la que se define el conjunto B nos sugiere un cambio a coordenadas esféricas para obtener límites de integración sencillos. Entonces usamos el cambio de coordenadas:

$$(x,y,z) = G(r,\phi,\theta) = (r\sin(\phi)\cos(\theta), r\sin(\phi)\sin(\theta), rcos(\phi)) \text{ con}$$
$$r \geq 0 \ , \ 0 \leq \phi \leq \pi \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Con este cambio, las restricciones del conjunto B pasan a ser:

$(r\sin(\phi)\cos(\theta))^2 + (r\sin(\phi)\sin(\theta))^2 + (rcos(\phi))^2 \leq 1 \ \rightarrow \ r^2 \leq 1 \ \rightarrow \ 0 \leq r \leq 1 \quad ...(1)$

$(r\sin(\phi)\cos(\theta))^2 + (r\sin(\phi)\sin(\theta))^2 \leq (r\cos(\phi))^2 \quad \rightarrow \quad r^2\sin^2(\phi) \leq r^2\cos^2(\phi) \quad \rightarrow$ $\tan^2(\phi) \leq 1 \quad ...(2)$

$rcos(\phi) \geq 0 \ \rightarrow cos(\phi) \geq 0$ (pues $r \geq 0$) $\ \rightarrow \ 0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{2} \quad ...(3)$

Por (3) tenemos que $\cos(\phi) \geq 0$ y por las condiciones generales de ϕ $(0 \leq \phi \leq \pi)$, tenemos que también $\sin(\phi) \geq 0$. Entonces $\tan(\phi) \geq 0$ y por lo tanto la condición (2) pasa a ser $0 \leq \tan(\phi) \leq 1$, entonces, $0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{4}$.

Así ya tenemos condiciones para las variables $(0 \leq r \leq 1)$, $(0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4})$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

Entonces, aplicamos el TCV a coordenadas esféricas (donde sabemos y ya hemos calculado múltiples veces que $|JG| = r^2\sin(\phi)$). Entonces:

Volumen $= \displaystyle\int\int\int_B dxdydz = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} |JG| \ d\theta d\phi dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} r^2\sin(\phi) \ d\theta d\phi dr =$
$\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi r^2 \sin(\phi) \ d\phi dr = \int_0^1 -2\pi r^2\cos(\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} dr = 2\pi \int_0^1 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) r^2 \ dr$
$= \dfrac{2\pi}{3}\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\simeq 0{,}6134$

3. Si g es un cambio de coordenadas esféricas, demostrar que los puntos de la forma (ρ, θ, ϕ_0) con ϕ_0 fijo, satisfacen la ecuación de un cono. Represéntelo gráficamente.

Solución

El cambio de variable g es: $(x, y, z) = g(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi))$

Con el cambio de variable a esféreicas, vemos que: $x^2 + y^2 + z^2 = (\rho \sin(\phi) \cos(\theta))^2 + (\rho \sin(\phi) \sin(\theta))^2 + (\rho \cos(\phi))^2 = \rho^2 \sin^2(\phi) + \rho^2 \cos^2(\phi) = \rho^2$

Además, si dejamos ϕ_0 fijo, la última coordenada del cambio de variable nos dice que $z = \rho \cos(\phi_0) = C * \rho$ (con C constante)

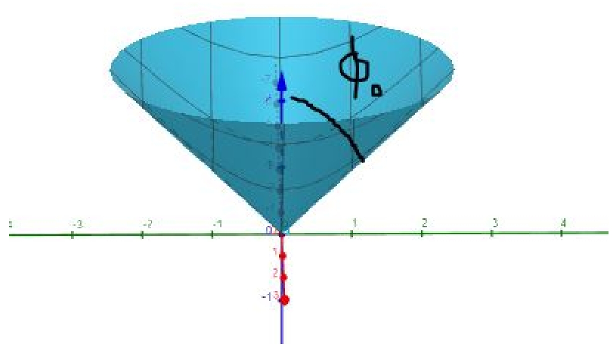
Entonces, $z = C\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow z^2 = C^2(x^2 + y^2 + z^2) \rightarrow$

$x^2 + y^2 = (1 - C^2)z^2$ ...(1)

Vemos que como $C = cos(\phi_0)$, entonces $-1 \leq C \leq 1$, entonces $0 \leq C^2 \leq 1 \rightarrow$ $0 \leq (1 - C^2) \leq 1$ ...(2)

Entonces la ecuación (1) dibuja un cono con la punta en el origen y que abre hacia arriba si $\cos(\phi_0) > 0$ (pues $z = \rho \cos(\phi_0)$ está restringido a ser positivo) o abre hacia abajo si $\cos(\phi_0) < 0$ (pues $z = \rho \cos(\phi_0)$ está restringido a ser negativo)

Para confirmar que (1) es un cono, podemos ver que los cortes transversales (cuando $z = z_0 = cte$), nos dan la ecuación de un círculo $x^2 + y^2 = (1 - C^2)z_0^2$ (esta ecuación tiene sentido debido a (2), ya que entonces el radio del círculo es positivo). Cuyo radio se hace más grande conforme z_0 aumenta.



4. Calcular $\int\int\int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot e^{-(x^2+y^2+z^2)}\ dxdydz$
Donde B es el sólido acotado por las esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$, aquí $0<b<a$.

Solución

Hacemos un cambio de variables a esféricas g:
$(x,y,z)=g(\rho,\theta,\phi)=(\rho\sin(\phi)\cos(\theta),\rho\sin(\phi)\sin(\theta),\rho\cos(\phi))$
con $r\geq 0$, $0\leq\phi\leq\pi$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

Con el cambio de variable a esféricas, vemos que: $x^2+y^2+z^2=(\rho\sin(\phi)\cos(\theta))^2+(\rho\sin(\phi)\sin(\theta))^2+(\rho\cos(\phi))^2=\rho^2\sin^2(\phi)+\rho^2\cos^2(\phi)=\rho^2$
Entonces los límites de integración pasan a ser $b\leq\rho\leq a$, $0\leq\phi\leq\pi$, $0\leq\theta\leq 2\pi$
Por último, para este cambio de coordenadas ya hemos calculado en clase y usado múltiples veces el Jacobiano y sabemos que $|Jg|=\rho^2 sin(\phi)$
Entonces usamos el teorema del cambio de variable:

$$\int\int\int_B f\ dxdydz=\int_b^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(f\circ g)\ Det(Jg)\ d\theta d\phi d\rho \ = \ \int_b^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\rho e^{-\rho^2}(\rho^2\sin(\phi))d\theta d\phi d\rho$$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^\pi\sin(\phi)d\phi\cdot\int_b^a\rho^3e^{-\rho^2}d\rho$ (Podemos separar las integrales porque la función es un producto de funciones en cada variable, y los límites de integración son constantes)

$$=2\pi\int_0^\pi\sin(\phi)d\phi\cdot\int_b^a\rho^3e^{-\rho^2}=2\pi\cdot(-cos(\phi))\Big|_0^\pi\cdot\int_b^a\rho^3e^{-\rho^2}d\rho \ =4\pi\cdot\int_b^a\rho^3e^{-\rho^2}d\rho$$

Para esta última integral usamos la sustitución $u=-\rho^2\ \to du=-2\rho d\rho$

$$=4\pi\int\frac{1}{2}ue^udu \ =\frac{4\pi}{2}\left(ue^u-\int e^udu\right) \quad \text{(integramos por partes)}$$
$$=2\pi\left(ue^u-e^u\right)$$
$$=2\pi\left(-\rho^2e^{-\rho^2}-e^{-\rho^2}\right)\Big|_b^a$$
$$=2\pi\left(-a^2e^{-a^2}-e^{-a^2}+b^2e^{-b^2}+e^{-b^2}\right)$$

II. Integral de línea

1. Sea S una superficie dada implícitamente $F(x, y, z) = 0$, encuentren su área. Hint: use el TFI y consideren los casos

Caso 1) $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$:

Según el TFI, dado que $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, entonces existe una función $\phi(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F(x, y, \phi(x, y)) = 0$ y $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$, $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$

Entonces el conjunto de puntos (x, y, z) que cumplen que $F(x, y, z) = 0$ se puede parametrizar como $(x, y, \phi(x, y))$ donde x y y varían sobre la proyección de la superficie al plano xy, llamémosle Ω.

Para calcular el área de superficie, necesitamos calcular la integral $\int \int_\Omega ||T_x \times T_y|| dxdx$

Donde $T_x = (\dfrac{\partial x}{\partial x}, \dfrac{\partial y}{\partial x}, \dfrac{\partial \phi}{\partial x}) \ = \ (1, 0, -\dfrac{F_x}{F_z})$

$T_y = (\dfrac{\partial x}{\partial y}, \dfrac{\partial y}{\partial y}, \dfrac{\partial \phi}{\partial y}) \ = \ (0, 1, -\dfrac{F_y}{F_z})$

Por lo que $T_x \times T_y = \left(\frac{F_x}{F_z}, \frac{F_y}{F_x}, 1\right) \ \to ||T_x \times T_y|| = \sqrt{\dfrac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_z^2}}$

Entonces la integral queda: $\displaystyle\int \int_\Omega \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_z^2}} dxdy$

Caso 2) $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$:

Según el TFI, dado que $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, entonces existe una función $\psi(x, z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F(x, \psi(x, z), z) = 0$ y $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_y}$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial z} = -\dfrac{F_z}{F_y}$

El resto del procedimiento es el mismo, sólo que ahora x, z son los parámetros y hay que variarlos por la proyección de la superficie sobre el plano xz, digamos Ω_{xz}. Por el mismo procedimiento, tenemos el resultado:

$$\int \int_{\Omega_{xz}} \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_y^2}} dxdz$$

Caso 3) $\dfrac{\partial F}{\partial x} \neq 0$:

Según el TFI, dado que $\dfrac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, entonces existe una función $\xi(y, z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$F(\xi(y,z),y,z)=0 \quad \text{y} \quad \dfrac{\partial \xi}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_x} \quad , \quad \dfrac{\partial \xi}{\partial z}=-\dfrac{F_z}{F_x}$

El resto del procedimiento es el mismo, sólo que ahora y, z son los parámetros y hay que variarlos por la proyección de la superficie sobre el plano yz, digamos Ω_{yz}. Por el mismo procedimiento, tenemos el resultado:

$$\int\int_{\Omega_{yz}} \sqrt{\frac{F_x^2+F_y^2+F_z^2}{F_x^2}}dydz$$

2. En cada uno de los siguientes ejercicios calculen la integral de línea del campo vectorial dado, a lo largo del camino que se indica:

a) $F(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ a lo largo de la parábola $y = x^2$ de $(-1,1)$ a $(1,1)$

solución: La curva la podemos parametrizar como $\alpha(t) = (t, t^2)$ con t variando de -1 a 1

Entonces la integral de línea es:

$\displaystyle\int_{-1}^{1} F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_{-1}^{1} F((t,t^2)) \cdot (1,2t)dt = \int_{-1}^{1} (t^2 - 2t(t^2), (t^2)^2 - 2(t)(t^2)) \cdot (1,2t)dt = \int_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3, t^4 - 2t^3) \cdot (1,2t)dt = \int_{-1}^{1} t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4 dt$

$\displaystyle= \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} - \frac{4t^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-19}{30} - \frac{3}{10} \quad = \frac{-14}{15}$

b) $F(x,y) = (2a - y, x)$ a lo largo del camino descrito por $\alpha(t) = (t - sin(t), 1 - cos(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$

Solución: La integral de línea es:

$\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_0^{2\pi} F((t - \sin(t), 1 - \cos(t))) \cdot (1 - cos(t), sin(t))dt = \int_0^{2\pi} (2a - 1 + \cos(t), t - \sin(t)) \cdot (1 - cos(t), sin(t))dt$

$\displaystyle= \int_0^{2\pi} 2a - 1 + \cos(t) - 2a\cos(t) + \cos(t) - \cos^2(t) + t\sin(t) - sin^2(t)\ dt$

Por los límites de integración, la integral de $\cos(t)$ se anula, por lo que omitiré esos términos. Además, $-\cos^2(t) - \sin^2(t) = -1$

$\displaystyle= \int_0^{2\pi} 2a - 1 - 1 + tsin(t) = 4\pi(a-1) + \int_0^{2\pi} t\sin(t)\ dt$

Hacemos esta última integral por partes: $\displaystyle= 4\pi(a-1) + (-t\cos(t))\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2/pi} \cos(t)\ dt = 4\pi(a-1) + (-t\cos(t) + \sin(t))\Big|_0^{2\pi} \quad = 4\pi(a-1) - 2\pi \ = \ 4a\pi - 6\pi$

3. Calcular el área de la porción de la superficie dada por los límites indicados:
a) La cónica $x^2 + y^2 = z^2$ situada encima del plano XY y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a$.

Tenemos que parametrizar la superficie de la cuál queremos el área. Es decir, parametrizar la parte del CONO que está metido en la esfera y arriba del plano XY. La gráfica de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nos da la superficie del cono localizada sobre el plano XY. Entonces la parametrización debe de ser $\sigma(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ donde los parámetros x y y varían sobre una región B, que es la región en la cuál el cono $\sigma(x, y)$ se encuentra dentro de la esfera.
Veamos quién es B, si sumamos las dos ecauciones obtenemos $2(x^2 + y^2) = 2a$, entonces $x^2 + y^2 = a$. Estos son los puntos donde el cono intersecta a la esfera, entonces el conjunto de puntos donde el cono está dentro de la esfera es: $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a\}$

Con esto, la integral de superficie es: $\int\int_B ||T_x \times T_y||\; dxdy$
Donde $T_x = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}})$ es el vector que se obtiene al derivar σ respecto a x, y $T_y = (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$ al derivar respecto a y.
Entonces el vector $T_x \times T_y = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right)$ y su norma es:
$$||T_x \times T_y|| = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Sustituyendo esto en la integral de superficie, obtenemos:
$$\int\int_B \sqrt{2}\; dxdy = \sqrt{2}\int\int_B dxdy$$
Pero esta última integral es el área del conjunto B, que podemos observar que es un círculo de radio $\sqrt{a}$, cuya área es entonces πa

Entonces el área de la superficie que nos interesa es:
$\sqrt{2}\pi a$

b) El paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ cortado por el plano $z = a$

Necesitamos parametrizar la superficie de la cuál queremos calcular el área, es decir, parametrizar la parte del paraboloide debajo de $z = a$. El paraboloide es sencillo de parametrizar, ya que $z = \dfrac{1}{2a}(x^2 + y^2)$ y entonces queda parametrizado con $\sigma(x, y) = (x, y, \dfrac{1}{2a}(x^2 + y^2))$

Calculamos de una vez sus vectores tangentes derivando la paramterización con respecto de x y y:
$T_x = (1, 0, \frac{x}{a})$
$T_y = (0, 1, \frac{y}{a})$
Así, el vector perpendicular es $T_x \times T_y = (-\dfrac{x}{a}, -\dfrac{y}{a}, 1)$ y su norma es $||T_x \times T_y|| = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2} + 1}$

Con esta $\sigma(x, y)$ tenemos todo el paraboloide parametrizado, sin embargo, sólo nos interesa la parte del paraboloide debajo del plano $z = a$. Reemplazando esta condición en la ecuación del paraboloide obtenemos: $x^2 + y^2 = 2a^2$ como nos interesa toda la zona del paraboloide por debajo de este corte, integraremos sobre el conjunto $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$

Entonces la integral de área es:
$$\int\int_B ||T_x \times T_y|| dxdy = \int\int_B \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2} + 1}\, dxdy$$
Haré un cambio a coordenadas polares $r^2 = x^2 + y^2$, $tan(\theta) = y/x$, en las que el conjunto B se consigue variando r de 0 a $\sqrt{2}a$ y θ de 0 a 2π, como hemos visto en clase varias veces, el Jacobiano de este cambio de variables es r, entonces la integral queda:
$$\int_0^{\sqrt{2}a}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{r^2 + a^2}{a^2}}\ r\, d\theta dr = \frac{2\pi}{a}\int_0^{\sqrt{2}a}\sqrt{r^2 + a^2}\ r\, dr = \frac{2\pi}{a}\ \frac{(r^2 + a^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{a\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{a}\frac{(3^{3/2} - 1)a^3}{3}$$
$$= \frac{2\pi(3^{3/2} - 1)a^2}{3}$$