Óptica Tercer Examen Parcial

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

16 de septiembre de 2020

1) Considere un rayo de luz que incide en una interfaz Vidrio-Aire donde los índices de refracción son $n_n = 1{,}5$ y $n_a = 1$ respectivamente, determine el valor mínimo que debe de tener el ángulo incidente θ_i para tener reflexión total interna.

Sea θ_i el ángulo de incidencia de la luz y θ_f el ángulo con el que sale la luz.
Por la ley de Snell, se tiene que:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_f \qquad (1)$$

Donde $n_1 = 1{,}5$ es el medio en el que se encuentra la luz incidente (vidrio) y $n_2 = 1$ es el medio sobre el que incide (aire).
La reflexión total interna sucede cuando el rayo de luz no sale del medio y en cambio el rayo refractado viaja por la superficie, es decir, cuando el ángulo de refracción es de $\theta_f = 90^o$.
Ahora despejamos θ_i de la ecuación (1):

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_f\right)$$

Luego usamos la condición de reflexión total interna mencionada en el párrafo anterior $\theta_f = 90^o \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_f = 1$.
Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\theta_i &= \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\\ &= \arcsin\left(\frac{1}{1{,}5}\right) = \mathbf{41{,}81^o}\end{aligned}$$

.

2. Considere una lente delgada biconvexa con distancia focal de $10cm$, si se coloca un objeto de 1.5cm justo a la mitad de la distancia entre el vértice y el foco de la lente, determine la posición, amplificación y naturaleza de la imagen.

Una lente biconvexa es una lente convergente. Esto se puede ver usando la fórmula del fabricante de lentes (que es válida porque la lente es delgada):

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (1)$$

Para una lente biconvexa, se tiene por convención de signos, que el radio de la primera cara R_1 es positivo porque el centro de este círculo se encuentra a la derecha del vértice. Y el radio de la segundo cara R_2 es negativo porque el centro de este círculo se encuentra a la izquierda del vértice.
Entonces se tiene que para una lente biconvexa, $R_2 < 0$ y $0 < R_1$. Con lo cual se puede ver que la expresión entre paréntesis de la ecuación (1) es positiva.
Entonces, el foco calculado según la ecuación (1) es un número positivo y entonces por convención se trata de una lente convergente.

Con esta información, podemos usar la fórmula de Gauss (que es válida para lentes delgados como el del problema) con $f = +10cm$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_0} \\
&\qquad\quad = \frac{1}{0{,}1m} - \frac{1}{0{,}05m} \qquad s_o = 0{,}05m \text{ porque se encuentra a la mitad de distancia del foco} \\
&\qquad\quad = -10m^{-1} \\
&\Rightarrow \quad s_i = \frac{1}{-10m^{-1}} = -\frac{1}{10}m = \mathbf{-0.1m}
\end{aligned}$$

Por lo que la imagen se forma $0{,}1m$ a la izquierda del lente.
La imagen es una imagen virtual lo que se puede notar por el signo negativo en el resultado de s_i o bien, sabiendo que las lentes convergentes generan imágenes virtuales cunado el objeto se encuentra más cerca que el foco.

La magnificación transversal se puede calcular con la relación vista en clase $M_T = \frac{-s_i}{s_o}$

$$\begin{aligned}
M_T &= \frac{-s_i}{s_o} \\
&= \frac{-(-0{,}1m)}{0{,}05m} = 2
\end{aligned}$$

Como el factor de magnificación es 2, nos indica que la imagen tiene el doble de tamaño que la original, es decir, mide $2 \times 1{,}5cm = 3cm$.
Además, el signo positivo nos indica que la imagen es de orientcación derecha.

3. ¿Qué clase de espejo se necesita para formar sobre una pared que se encuentra a una distancia de $3m$ del espejo, una imagen del filamento de un faro situado a 10cm delante del espejo? ¿Cuál será la amplificación transversal de la

imagen si la altura del objeto es de 5mm?

Con esta información, la distancia del objeto (el faro) es de $s_o = 10cm = 0{,}1m$ y la distancia de la imagen es de $s_i = 3m$.
Ahora usamos la fórmula de Gauss de un espejo para obtener el foco:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i}\\ &= \frac{1}{0{,}1m} + \frac{1}{3m} = \frac{31}{3}m^{-1}\\ \Rightarrow\ f &= \frac{3}{31}m = 0{,}0968m\end{aligned}$$

Ahora podemos saber también el radio del espejo, pues en los espejos esféricos se sigue la relación vista en clase:

$$f = -\frac{R}{2}$$

Luego, tenemos que $R = -2f = -2(0{,}0968m) = \mathbf{-0{,}193m}$
El signo negativo del radio nos indica que el centro del círculo con el que se forma el espejo se encuentra a la izquierda del vértice, es decir, es un espejo cóncavo.

Para la amplificación, usamos la ecuación vista en clase para calcular la magnificación transversal:

$$\begin{aligned}M_t &= -\frac{s_i}{s_o}\\ &= -\frac{-3m}{0{,}1m} = -30\end{aligned}$$

Lo que indica que la imagen es 30 veces más grande, por lo que mide: $30(5mm) = 30(0{,}005m) =$ **0,15m**
Y la imagen se encuentra invertida, ya que el signo de la magnificación es negativo.

4. El campo eléctrico de un haz de luz linealmente polarizada oscila verticalmente, si el haz incide perpendicularmente sobre un polarizador de eje de transmisión a 60^o respecto a la vertical ¿Cuál será el porcentaje de la irradiancia transmitida por el polarizador?

Como la luz incidente está ya polarizada linealmente, podemos usar la ley de Malus para calcular la irradiancia final.
Si I_o es la irradiancia de la luz que llega al polarizador y I_f es la irradiancia tras pasar por el polarizador, entonces la ley de Malus nos dice que:

$$I_f = I_0 \cos^2\theta$$

Con θ el ángulo entre la dirección de polarización de la luz incidente y el eje de transmisión, en este caso, por lo que dice el problema, se tiene que $\theta = 60^o$.
Entonces, por la ley de Malus:

$$I_f = I_o \cos^2(60) = I_o(1/2)^2 = \frac{1}{4}I_o$$

Entonces, la irradiancia emitida es un cuarto de la irradiancia original, es decir, es un 25 % .

5. Un haz de luz linealmente polarizado, tiene un campo eléctrico de $1200W/m^2$ que oscila a 10^o respecto al eje vertical (es decir, en el primer y tercer cuadrante). El haz pasa perpendicularmente a través de dos polarizadores ideales consecutivos. El eje de transmisión del primer polarizador está en -80^o respecto a la vertical y el segundo a 55^o respecto a la vertical. a) ¿Cuanta luz emerge del segundo polarizador? b) ¿Si se intercambian los polarizadores sin cambiar su orientación, cuál será la cantidad de luz resultante que emergerá?

a) El primer polarizador se encuentra a -80^o de la vertical y la luz se encuentra polarizada a 10^o de la vertical. Entonces, la diferencia total de ángulo entre la polarización de la luz y el eje del primer polarizador es de 90^o.
Por la ley de malus, la luz transmitida por el primer polarizador tiene una irradiancia de $I_f = I_0 \cos^2(90^o) = 0$.
Entonces, no sale luz irradiada del primer polarizador y entonces ya ni siquiera es necesario considerar el segundo polarizador, la luz total transmitida es de $0W/m^2$.

b) Ahora el primer polarizador es el de 55^0 y la luz llega polarizada a 10^o. Entonces la diferencia de ángulo es de 45^o, por la ley de Malus se tiene que la irradiancia tras pasar por el primer polarizador es:

$$I_1 = I_o \cos^2(45^o) = (1200W/m^2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (1200W/m^2)(1/2) = 600W/m^2.$$

Luego, sale luz del primer polarizador con una intensidad de $600W/m^2$ y sale alineada con la misma polarización que el eje de transmisión del primer polarizador, es decir, con un ángulo de 55^o.
Entonces, cuando llega al segundo polarizador, la diferencia de ángulo de la luz que llega al segundo polarizador (con 55^o) y el segundo polarizador (con ángulo de -80^o) es de $55^o - (-80^o) = 135^o$. Entonces, por la ley de Malus se tiene que la irradiancia final es:

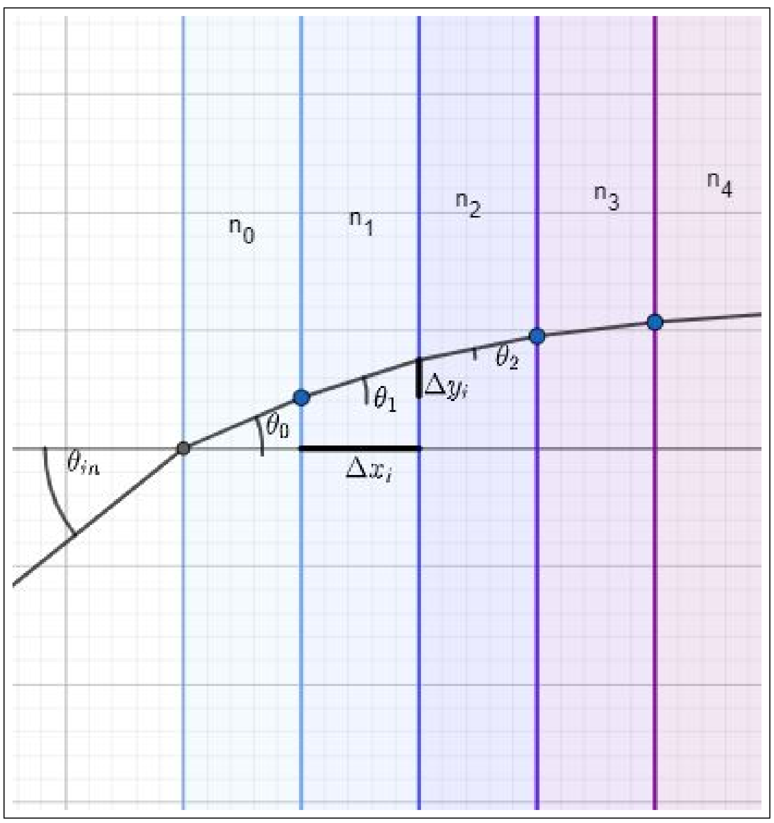
$$I_2 = I_1 \cos^2(135^o) = (600W/m^2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (600W/m^2)(1/2) = 300W/m^2$$

Entonces la irradiancia final es de $300W/m^2$.

6. Un rayo de luz que viaja en el aire, incide sobre una interfaz con un cierto ángulo θ. Si el medio de transmisión tiene un índice de refracción que crece gradualmente a medida que la luz avanza, describa cual será la trayectoria de la luz antes y después de la interfaz.

Digamos que el medio se encuentra en el semiplano derecho y que su interfaz se encuentra en el eje $x = 0$, es decir, el eje y.
La luz viene desde el aire y escogemos la posición de los ejes de tal forma que la luz incida en la interfaz en el punto $(0, 0)$.
Por lo que dice el problema, el índice de refracción de la interfaz crece a medida que la luz avanza, lo que significa que el índice de refracción n es una función que depende de qué tan profundo nos adentremos al material, es decir $n = n(x)$ y además es una función creciente.

Pensemos por un momento como aproximación que esta función $n(x)$ no es continua y más bien pensemos que el material está compuesto por muchas 'capas' o franjas verticales, cada una con un valor fijo de n.



En la imagen se ve esta situación. El medio se encuentra en el semiplano derecho de la imagen y está conformado por muchas franjas delgadas de longitud Δx y que empiezan a una distancia x_i de la interfaz. Cada una de estas franjas con un índice constante n_i.
El rayo de luz incide sobre el medio en el punto (0,0) y con un ángulo θ_{in}. Luego atraviesa la primera franja con un ángulo θ_0 dado por la ley de Snell.
Luego, llega a la segunda franja y se vuelve a desviar, formando ahora un ángulo θ_1 dado por la ley de Snell $n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1$.
Luego incide sobre la tercera franja y ahora forma un ángulo θ_2 dado por $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ y así sucesivamente.

Podemos ver al ángulo θ que tiene la luz con respecto a la horizontal como una función de la profundidad recorrida en el material (una función de x), es decir, tenemos que $\theta = \theta(x)$ es la función que para una cierta profundidad recorrida por la luz, nos da el ángulo que tiene

en ese punto.
Además, como dijimos hace rato, el problema nos indica que el índice de refracción de este material es también una función de la profundidad recorrida, es decir $n = n(x)$.
Luego, por lo mencionado antes de aplicar la ley de Snell en cada franja, en cada punto del medio se cumple que $n_i \sin\theta_i = n_{i+1}\sin\theta_{i+1}$ y entonces, más generalmente, se cumple que para todo x:

$$n(x)\sin(\theta(x)) = cte \quad (1)$$

Podemos ahora derivar esta ecuación de ambos lados con respecto a x para obtener:

$$n'(x)\sin(\theta(x)) + n(x)\theta'(x)\cos(\theta(x)) = 0$$
$$\text{O bien, } \tan(\theta(x)) = -\frac{n(x)\theta'(x)}{n'(x)} \quad (2)$$

Ahora bien, el rayo de luz va a seguir una trayectoria que podemos pensar que está dada por una función $y = y(x)$. Si nos fijamos en la segunda franja del dibujo, podemos ver que en esta franja de longitud Δx_1, la luz recorrió una distancia vertical Δy_1 donde $\tan\theta_1 = \dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$.
Esto en general se cumple para todas las franjas, es decir: $\tan\theta_i = \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ (3).
Si ahora hacemos las franjas muy chiquitas, entonces nos queda que la fracción $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ se convierte en la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ evaluada en un punto x_i. Y entonces le ecuación (2) se transforma en:

$$\tan(\theta(x)) = y'(x) \quad (4)$$

Esta ecuación nos relaciona la derivada de la trayectoria de la luz $y(x)$ con el ángulo que tiene la luz en ese momento.
Además, tenemos que $\theta(x) = \arctan(y'(x))$ y derivando ambos lados respecto a x nos queda:

$$\theta'(x) = \frac{y''(x)}{1 + y'^2(x)} \quad (5)$$

Si ahora metemos (4) y (5) en (2), nos queda la siguiente ecuación diferencial:

$$y'(x) = -\frac{n(x)}{n'(x)}\,\frac{y''(x)}{1 + y'^2(x)}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbf{n'(x)}}{\mathbf{n(x)}}\mathbf{y'(x)} = -\frac{\mathbf{y''(x)}}{\mathbf{1 + y'^2(x)}} \quad (6)$$

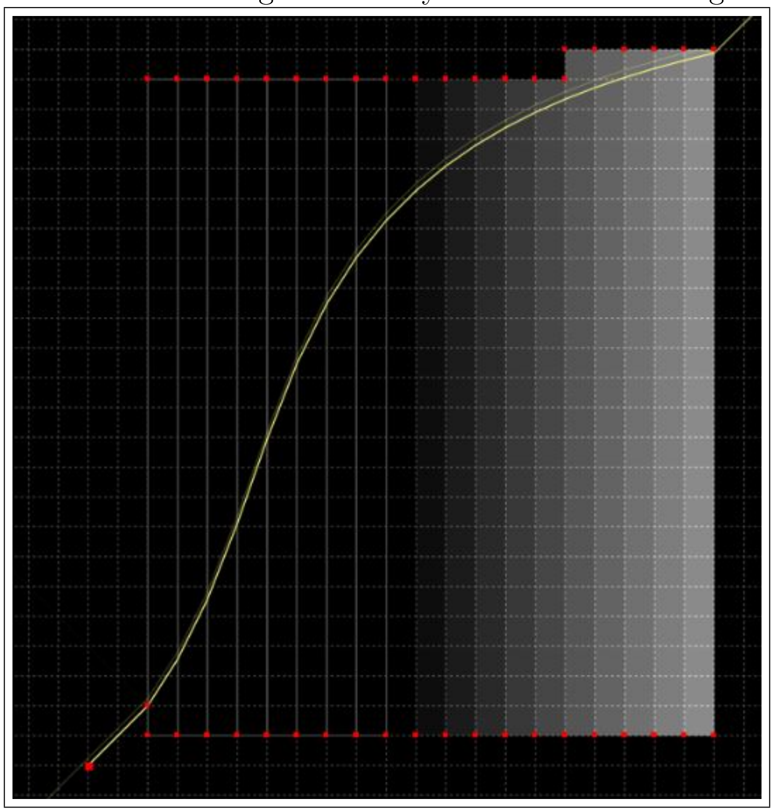
Entonces, si nos dan la función $n(x)$ que da el índice de refracción como función de la profundidad recorrida x, sustituimos esta $n(x)$ y $n'(x)$ en la ecuación (6) y nos da una ecuación diferencial cuya solución $y(x)$ describirá la trayectoria del rayo.
Para la ecuación diferencial necesitamos las condiciones iniciales. Por la selección de los ejes con los que el rayo incide en (0,0), la primera condición inicial es $\mathbf{y(0) = 0}$.
Por otro lado, $\mathbf{y'(0) = \tan(\theta(0))}$ por la ecuación (4) donde $\theta(0)$ es el ángulo del rayo de luz

justo al atravesar la frontera.
Si el ángulo con el que incide la luz es θ_i y el índice del material justo en la frontera es $n(0)$, entonces este ángulo $\theta(0)$ se puede calcular con la ley de Snell justo en la frontera entre el aire y la primera parte del material (donde el índice es $n(0)$) y tenemos $\sin(\theta_i) = n(0)\sin(\theta(0))$ con lo que se puede calcular $\theta(0)$ y así tener la condición inicial $y'(0) = \tan(\theta(0))$.

Respondiendo a la pregunta original del problema, antes de la interfaz el rayo se mueve en línea recta porque está en el aire y no hay nada que lo desvíe ni cambios de índice de refracción.
Para el movimiento después de la interfaz se requiere conocer la función $n(x)$ que da el índice de refracción como función de la profundidad recorrida x en el medio. Dado esto, la trayectoria viene dada por la gráfica de la solución $y(x)$ a la ecuación diferencial (6) con condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = \tan(\theta(0))$ donde $\theta(0)$ es el ángulo justo después de atravesar la superficie.
Resolver la ecuación diferencial requiere de conocer el valor de $n(x)$. Sin embargo, si $n(x)$ es creciente como indica el problema, podemos darnos una idea de la solución.
Recordamos que cuando la luz pasa de un medio n_1 a uno n_2 con $n_1 < n_2$, la luz se doblará acercándose a la normal por la ley de Snell. Entonces, si $n(x)$ es creciente, es como si constantemente se estuviera pasando de un medio a otro con mayor índice y por tanto, el ángulo del rayo de luz se irá acercando a la normal. Es decir, el rayo de luz se hará cada vez más horizontal (si dibujamos el sistema orientado como en la imagen).
Alternativamente, podemos ver por (1) que $\sin(\theta(x)) = cte/n(x)$, por lo que si $n(x)$ crece sin cota, $\sin(\theta(x))$ se tiene que hacer 0, lo que indica que el ángulo $\theta(x)$ se hace 0 y nuevamente concluimos que el rayo llegará arbitrariamente cerca de la línea horizontal. Sin $n(x)$ crece pero está acotado, el rayo se irá acercando a la horizontal pero no tiende a esta dirección en el sentido de un límite.

Ejemplos: Realicé un par de ejemplos como comprobación de que la ecuación (6) es correcta.
Ejemplo 1: En el primer ejemplo, digamos que la función $n(x)$ es $n(x) = n_0$ una constante. Entonces, el lado izquierdo de la ecuación (6) se hace nulo y nos queda: $\dfrac{y''(x)}{1 + y'^2(x)} = 0 \quad \Rightarrow$ $y''(x) = 0$.
Esta es la ecuación diferencial de la trayectoria y la solución es $y(x) = ax + b$ para a, b constantes
Luego usamos las condiciones iniciales discutidas $y(0) = 0$ y $y'(0) = \tan(\theta(0))$ donde $\theta(0)$ es el ángulo justo al pasar la superficie y está dado por $\sin(\theta_i) = n_0 \sin(\theta(0)$.
Entonces, la solución es $y(x) = \tan(\theta(0))\, x$.
Es justo lo que esperaríamos, porque el medio tiene $n(x) = cte$ y por tanto, tras pasar al medio, la luz se va a mover en línea recta con ángulo θ_0 (o bien, pendiente $\tan(\theta_0)$).

Ejemplo 2: Sólo como comprobación de (6), digamos que el medio es tal que el índice de refracción sigue la relación funcional $n(x) = x^2 - x + 1$ (usé esta función porque era la que mejor se apreciaba de las que intenté). Y digamos que el rayo de luz entra con un ángulo de 45^o.
Para darme una idea de la trayectoria esperada del rayo en el medio, usé un simulador en internet llamado Ray Optics Simulator. Aproximé el medio con índice $n(x)$ variable por muchas franjas de longitud $\Delta x = 0{,}1$. Luego, a cada una de estas franjas les asigné un índice de refracción de $x^2 - x + 1$ para $x = 0, 0{,}1, 0{,}2, 0{,}3, ...{,}2$. Finalmente, coloqué un rayo de luz que entrara con un ángulo de 45^o y el resultado es la siguiente trayectoria:



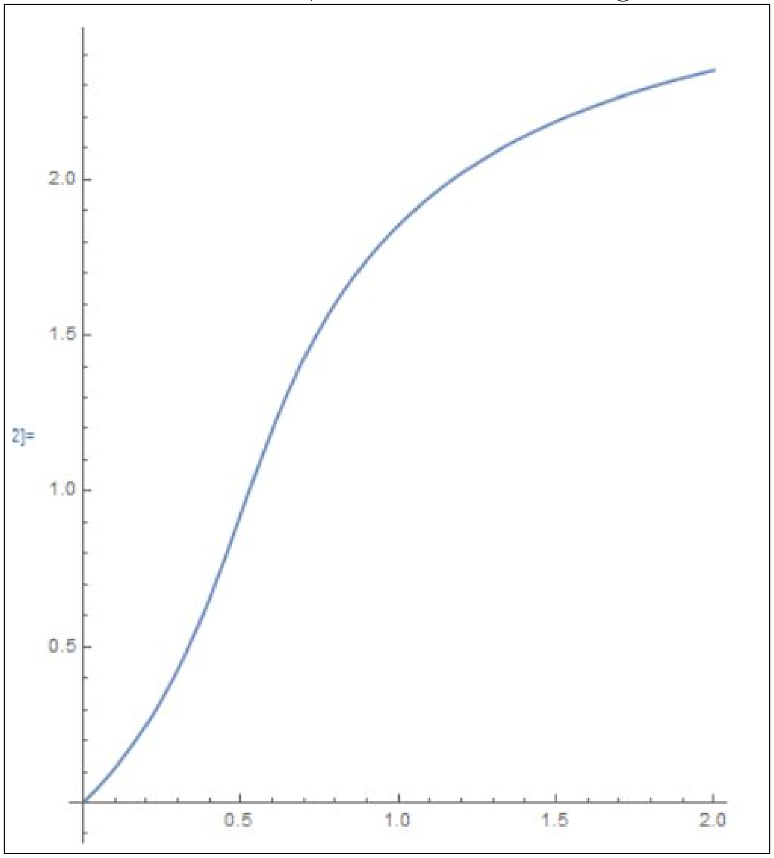
Que es una idea de cómo se vería la trayectoria correcta (es una aproximación porque estoy reemplazando la función continua $n(x)$ por franjas de ancho 0,1).

Luego, para ver si la ecuación diferencial (6) daba el mismo resultado, la resolví en Mathematica.
Tomando en cuenta que $n(x) = x^2 - x + 1$ y $n'(x) = 2x - 1$, la ecuación queda como:

$$\frac{2x-1}{x^2-x+1}y'(x) = -\frac{y''(x)}{1+y'^2(x)}$$

Y las condiciones iniciales son nuevamente $y(0) = 0$ y $y'(0) = \tan\theta_0$ donde θ_0 es el ángulo justo al cruzar la superficie.
En la superficie, el índice de refracción es $n(0) = 0^2 - 0 + 1 = 1$ y por tanto, la ley de Snell entre el rayo justo afuera de la superficie (con ángulo 45) y justo adentro (con ángulo θ_0) nos dice que $1\sin 45 = 1\sin\theta_0$ y por tanto $\theta_0 = 45^o$ y entonces la segunda condición inicial

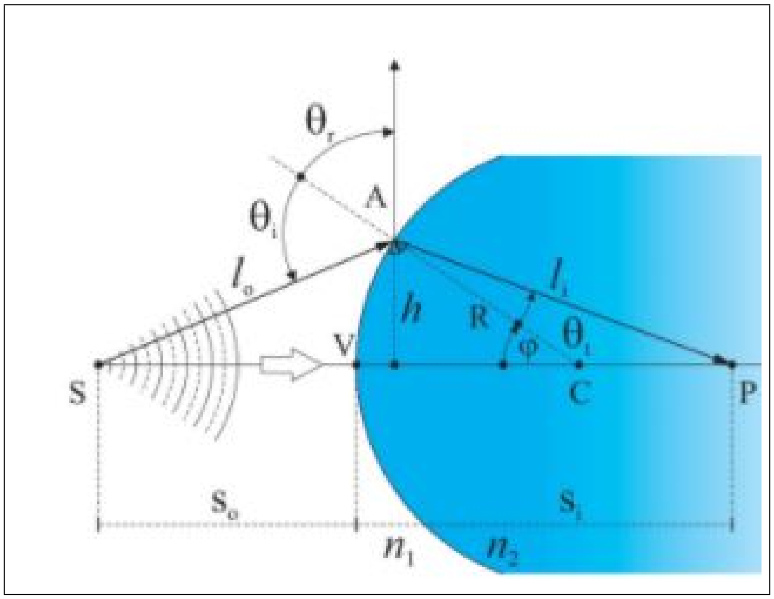
es $y'(0) = \tan 45^o = 1$.
Con estas consideraciones, Mathematica da la siguiente solución:



Vemos que esta solución con la ecuación diferencial es muy parecida a la obtenida con el simulador, por lo que podemos estar algo confiados de que la ecuación diferencial es la correcta.

7. ¿Qué consideraciones se deben hacer para la aproximación paraxial en lentes delgadas?

Lo que se debe de requerir para que sea válida la aproximación paraxial es que el rayo sale del objeto y llega al lente forma un ángulo pequeño con respecto al eje óptico.
La utilidad de esta aproximación y la razón por la que es importante considerarla se puede ver cuando se tiene un rayo que incide sobre una superficie esférica (como puede ser la primera superficie de un lente delgado) como en esta imagen:



La longitud de camino óptico de este rayo es de $LCO = n_1 l_o + n_2 l_i$ (1).
Calculamos l_o usando la ley de cosenos para el trángulo SAC (que tiene lados de longitud $l_0, s_o + R$ y R) y tenemos:

$$l_o^2 = (s_o + R)^2 + R^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi \quad (2)$$

Ahora usamos la ley de cosenos para el triángulo ACP, que tiene lados de longitud $l_i, R, s_i - R$ y el ángulo opuesto a l_i mide $180 - \phi$, entonces se tiene:

$$l_i^2 = (s_i - R)^2 + R^2 - 2R(s_i - R)\cos(180 - \phi)$$
$$\Rightarrow \quad l_i^2 = (s_i - R)^2 + R^2 + 2R(s_i - R)\cos(\phi) \quad (3)$$

Luego, regresando al resultado (1), y con las expresiones (2) y (3), tenemos que la longitud de camino óptico es de:

$$LCO = n_1\sqrt{(s_o + R)^2 + R^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi} + n_2\sqrt{(s_i - R)^2 + R^2 + 2R(s_i - R)\cos(\phi)}$$

Por el principio de Fermat, la luz siempre sigue el camino que minimiza la longitud de camino óptico, es decir, que cumple que $\dfrac{d(LCO)}{d\phi} = 0$. Si derivamos la expresión que tenemos para LCO e igualamos a 0, obtenemos la relación que deben de cumplir los parámetros:

$$\frac{n_1 R(s_o + R)\sin\phi}{2\sqrt{(s_o + R)^2 + R^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi}} - \frac{n_2 R(s_i - R)\sin\phi}{2\sqrt{(s_i - R)^2 + R^2 + 2R(s_i - R)\cos(\phi)}} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{n_1(s_o + R)}{l_o} - \frac{n_2(s_i - R)}{l_i} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{n_1 R}{l_o} + \frac{n_1 s_o}{l_o} + \frac{n_2 R}{l_i} - \frac{n_2 s_i}{l_i} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{n_1 R}{l_0} + \frac{n_2 R}{l_i} = \frac{n_2 s_i}{l_i} - \frac{n_1 s_o}{l_o} \quad (4)$$

Esta es la relación exacta que nos relaciona el radio de la superficie esférica R, los índices de refracción y las distancias a los objetos.

Sin embargo, es una expresión algo complicada ya que por (2) y (3), las expresiones para l_o y l_i son complicadas.

Aquí es donde entra la importancia de la aproximación paraxial.
Queremos que las expresiones para l_o y l_i tengan una forma más sencilla y así la expresión (4) sea simple.
Para esto, notamos que parte de la complejidad de las expresiones para l_o, l_i en (2) y (3) se deben al $\cos\phi$.
Sin embargo, si suponemos que el ángulo ϕ con el que incide la luz es lo suficientemente chiquito como para que sea una buena aproximación usar el primer término de la serie de Taylor:

$$\cos\phi = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!}$$

Entonces el coseno se simplifica a un simple 1. Y la ecuación para l_o es ahora:
$l_o^2 = (s_o + R)^2 + R^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi \simeq (s_o + R)^2 + R^2 - 2R(s_o + R) = s_o^2 + 2Rs_o + R^2 + R^2 - 2R(s_0 + R) = s_o^2$
Por lo que $l_o \simeq s_o$

Por otro lado, la expresión para l_i también se simplifica:
$l_i^2 = (s_i - R)^2 + R^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi \simeq (s_i - R)^2 + R^2 + 2R(s_i - R) = s_i^2 - 2Rs_i + R^2 + R^2 + 2Rs_i - 2R^2 = s_i^2$
Por lo que $l_i \simeq s_i$

Con estas dos aproximaciones, la ecuación (4) se simplifica mucho y pasa a ser:

$$\frac{n_1 R}{s_o} + \frac{n_2 R}{s_i} = n_2 - n_1 \quad (5)$$

Este desarrollo muestra la utilidad de usar un ángulo de incidencia pequeño, que son los llamado rayos paraxiales. El desarrollo muestra que si se cumple la condición de que estos ángulos con los que incide la luz son lo suficientemente pequeños como para que la aproximación lineal de las funciones trigonométricas como $\sin\theta \simeq \theta, \cos\theta \simeq 1, \tan\theta \simeq \theta$ sean buenas aproximaciones, entonces se puede usar la aproximación paraxial y las aproximaciones sencillas como la que se expresa en (5).
Para saber si la aproximación lineal es lo suficientemente buena, se puede utilizar cualquiera de las expresiones para calcular el residuo de una serie de Taylor y buscar que la serie de Taylor con un solo término tenga un residuo pequeño.
Se puede usar esta expresión aproximada para rayos que inciden en una superficie esférica en cada una de las dos superficies de un lente para calcular la ecuación de un lente delgado.
Pero es importante recordar y tener siempre en mente que para que sea válida esta expresión, se requiere que el ángulo sea lo suficientemente chiquito como para aproximar las funciones trigonométricas de forma lineal.

8. ¿A qué nos referimos al decir que la luz está polarizada linealmente?

Primero hay que recordar que la luz es una onda electromagnética, con un campo eléctrico y uno magnético que oscilan perpendicularmente. Y que la luz se propaga en la dirección perpendicular a estos dos campos.

Para la polarización, nos fijamos únicamente en la dirección del campo eléctrico. Por ejemplo, si la luz se propaga en la dirección $\widehat{k}$, el campo eléctrico técnicamente podría apuntar en cualquier dirección del plano xy y se sigue cumpliendo que E es perpendicular a la dirección de propagación.

Sin embargo, se dice que la luz está polarizada linealmente si la dirección del campo eléctrico es constante, es decir, está restringido a oscilar en una sola dirección de todas las posibles direcciones perpendiculares a la dirección de propagación.
En el caso que mencionamos en el párrafo pasado, significa que el campo E solamente puede oscilar en una dirección del plano xy, que podría ser en la dirección $\widehat{i}, \widehat{j}$ o cualquier combinación de éstas, con tal de que permanezca fija esta dirección de polarización.

9.¿Qué aplicaciones puede tener la luz polarizada?

La luz polarizada se puede usar para varios propósitos muy distintos como los siguiente:

1) Medición de la tensión o esfuerzo mecánico en un material:
Muchos materiales transparentes comúnmente son ópticamente isotrópicos, sin embargo, cuando se les aplica un esfuerzo mecánico, el material adquiere propiedades de birrefrigencia (es decir, el material tiene ahora dos índices de refracción distintos dependiendo de la dirección de polarización de la luz incidente), este efecto se conoce como fotoelasticidad.
Luego, se puede usar esta propiedad para estudiar la tensión mecánica en cada punto de un material transparente para poder identificar los puntos de mayor tensión. El método consiste en colocar el objeto transparente entre dos polarizadores cruzados, colocar una fuente de luz antes del primer polarizador y observar el objeto a través de la luz que pasa por el segundo polarizador.
Cuando pasa la luz por el primer polarizador, sale polarizada linealmente. Luego, llega al objeto que se desea estudiar, que por la fotoelasticidad es un objeto birrefrigente donde algunas zonas del objeto (las de mayor tensión) tienen mayor birrefrigencia (mayor diferencia entre los dos índices de refracción). La luz polarizada incide en el objeto y la birrefrigencia del objeto tiene el efecto de rotar su eje de polarización. Esta rotación de la polarización será de distinta magnitud según la birefrigencia en cada zona del objeto por la que pase la luz (que a su vez depende de la tensión mecánica en esta zona). Entonces la polarización final de la luz tras haber atravesado el objeto cambiará de punto a punto según la tensión mecánica en cada punto. Al poner un segundo polarizador después del objeto, la intensidad final de la luz dependerá de la polarización tras atravesar el material y por tanto, por lo dicho antes, dependerá de punto a punto según la tensión mecánica en cada punto. Entonces finalmente se verá un patrón de zonas luminosas y oscuras que revelará las tensiones internas

del material.

2) Identificar Minerales: Algunos minerales son anisotrópicos ópticamnete y poseen la característica de desviar la luz por distintos caminos dependiendo de la polarización de la luz incidente (el fenómeno de birrefrigencia mencionado en el ejemplo anterior).
Por tanto, al incidir luz sobre un mineral, sus distintas polarizaciones seguirán caminos distintos dentro de éste. Al ver el mineral desde cierto ángulo, sólo estará presente la luz que siga ciertos caminos dentro de éste y que tenga ciertas polarizaciones. Se absorberán ciertas longitudes de onda de la luz entrante dependiendo del camino que siga dentro del material y por tanto la luz de salida tendrá algún color en específico.
Sin embargo, si observamos el mineral desde otro ángulo, la luz que pasa por éste tendrá una combinación diferente de caminos y de polarizaciones debido a la birrefrigencia y en estos caminos se absorberán ciertas longitudes de onda, dejando algún otro color al final de recorrer el mineral.
Entonces el color del mineral dependerá del ángulo con que se observa. Esto se puede usar para identificar minerales al ver el número de colores que se observan al ir rotando la posición del mineral.

3) Calcular la concentración de una disolución en una muestra desconocida:
Algunos compuestos naturales como la sacarosa tienen birrefrigencia circular. Lo que significa que tienen un índice de refracción para luz polarizada circularmente en sentido horario y otro índice para luz polarizada circularmente en sentido antihorario.
Por otro lado, la luz polarizada linealmente se puede ver como la combinación de luz polarizada en sentido horario y en sentido antihorario. Por tanto, cuando luz polarizada linelamente incide en un objeto con birrefrigencia circular entonces los componentes horario y antihorario que forman a la luz polarizada linealmente viajan a distinta velocidad y se desfasan. El desfase total depende de la longitud del objeto que se atraviesa y de la magnitud de la birrefrigencia. La luz que sale de la sustancia ahora tiene un desfase entre su componente horario y antihorario, lo cual al sumarlo da lugar a una polarización lineal distinta a la que se tenía antes de entrar al material.
Entonces, las sustancias con birefrigencia circular como el azúcar tienen la propiedad de rotar la dirección de polarización de luz polarizada linealmente, efecto que se conoce como actividad óptica.
Por tanto, se puede usar esto para medir por ejemplo la cantidad de azúcar en una muestra disuelta en agua, ya que la cantidad de birefrigencia circular dependerá de la cantidad de azúcar disuelta. Se hace pasar luz polarizada linealmente por la muestra (que tiene cierta longitud que conocemos) y se mide la polarización final de la luz tras atravesar la muestra. Con esto, se puede medir el ángulo por el que rotó la polarización de la luz al atravesar la muestra y así concluir qué tan birrefrigente es la muestra y por tanto, qué tanta azúcar contiene.

4) Cine 3d:
Una manera de crear el efecto 3d en el cine es usar dos proyectores para proyectar la imagen en la pantalla. Uno de estos proyectores tiene un filtro de polarización horizontal (por ejemplo) y el otro un filtro de polarización vertical. Además, los proyectores forman imágenes en

la pantalla que están un poco desplazadas entre sí.
Luego, el observador usa unos lentes polarizados en los que uno de los dos lentes tiene un polarizador vertical y el otro uno horizontal. Con esto, uno de los ojos verá únicamente la imagen de uno de los proyectores y el otro ojo verá la del otro proyector (el proyector que produzca luz con la misma polarización que el lente).
Entonces, las imágenes que ve cada ojo estarán un poco desplazadas y esto crea el efecto de visión 3D.
En realidad, se suelen usar métodos más complicados que involucran un solo proyector que proyecta imágenes con polarización horizontal y vertical intercaladamente, sin embargo, la idea detrás del efecto 3D es la misma.

10. Suponga que se hace pasar luz natural del sol a través de un material traslucido oscuro (por ejemplo las micas que se colocan en las ventanas de algunos autos), describa si esto es un fenómeno de polarización y qué sucede con la intensidad después de atravesar el material.

Sí se puede deber a un fenómeno de polarización. La luz incidente es natural y por tanto se puede considerar como que está polarizada en todas las direcciones por igual. Al llegar al material, sólamente cierto porcentaje de la luz atravesará el polarizador y el resto será absorbida.
El porcentaje de luz natural que atraviesa el polarizador se puede obtener al conocer el tipo de polarizador. Si es un polarizador de tipo HN-X, indica que un X % de la luz natural atraviesa al polarizador.

Por ejemplo, los polarizadores ideales son aquéllos que cumplen la ley de Malus tal como la vimos en clase, aquéllos en los que toda la luz paralela al eje de transmisión se transmite. Estos polarizadore son del tipo HN-50 e indican que el 50 % de la luz natural lo atraviesa.