Práctica 4: Fuentes I (Haces Gaussianos)

Tomás Basile, Jessica Gallegos, Rebeca Rangel

9 de agosto de 2021

Resumen

En esta práctica usamos un láser con el objetivo de crear un haz gaussiano, posteriormente tomamos varias imágenes del láser a distintas distancias para poder medir el diámetro de su sección transversal. Con esta información, a partir de un análisis, encontramos los parámetros que caracterizan a este haz.
Al realizar el experimento pudimos notar en los resultados y tablas comparativas que el rayo del láser efectivamente se puede aproximar como un haz Gaussiano y su sección transversal es casi circular.

2. Introducción y Teoría

Un haz gaussiano es un rayo de luz cuya amplitud tiene la forma de una curva Gaussiana y es una muy buena aproximación para representar haces que salen de los láseres.
Un haz láser es una fuente coherente de luz, es decir, sus componentes conservan una relación de fase constante y por tanto pueden interferir.[1] El haz de un láser ideal, como mencionamos anteriormente, tiene una estructura gaussiana, por lo que si se propaga en la dirección z, el campo eléctrico en un punto $\vec{x} = (x, y, z)$ está dado por:[3]

$$BG(\vec{x}) = \frac{A}{q(z)} \exp\left(-\frac{ik\rho^2}{2q(z)}\right) \exp(-ikz) \qquad (1)$$

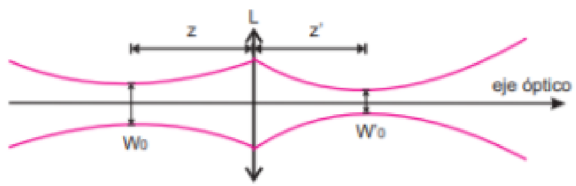

Figura 1: Haz Gaussiano pasando por un lente

Donde A es una constante, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es la magnitud del vector de propagación, $\rho^2 = x^2 + y^2$ y $\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}$. En donde $R(z) = z\left[1 + \frac{z_R^2}{z}\right]$.

$W(z)$ representa el grosor del haz tras haberse propagado una distancia z, y definimos una constante llamada W_0 como el grosor mínimo que tiene el haz o también conocido como el radio del cinturón del haz. La teoría nos dice que $W(z)$ se puede calcular como:[3]

$$W(z) = W_0\sqrt{1 + \frac{(z - z_0)^2}{z_R^2}} \qquad (2)$$

En esta ecuación, z_0 es la posición en la que se alcanza este mínimo de grosor y z_R es una cantidad conocida como el rango de Rayleigh. Se puede establecer una relación entre W_0 y z_R dada por:[3]

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \qquad (3)$$

Dadas estas ecuaciones, queda claro que podemos definir al haz gaussiano completamente si conocemos:

1. La longitud de onda λ
2. La posición z_0 en la que el haz tiene un radio mínimo.
3. La longitud del radio mínimo W_0.

Con ello, z_R se puede calcular utilizando (3), $W(z)$ utilizando (2) y quedan listos todos los parámetros para la ecuación (1).

Calidad de un rayo Gaussiano:
Dado un haz cualquiera, podemos ver qué tan bien puede ser descrito por las ecuaciones de un haz Gaussiano. Para ello, primero se calcula el ángulo θ con el que se esparce el haz asintóticamente, el cual está dado por $\theta = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi * z_R}}$. A partir de este ángulo, se puede calcular la calidad del haz como:[2]

$$M^2 = \frac{W_0 \theta}{\pi \lambda} \qquad (4)$$

Dicho coeficiente será cercano a 1 para haces que puedan ser bien aproximados con un haz Gaussiano.

3. Experimento

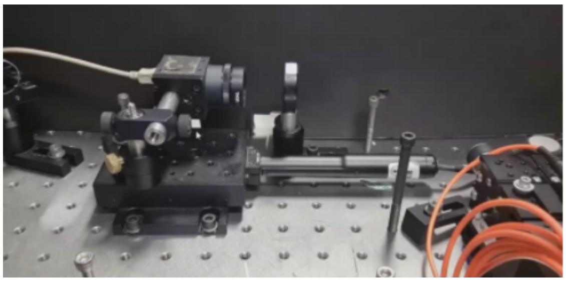

Figura 2: Montaje Experimental

Montaje Experimental: Se genera un haz utilizando un láser de longitud de onda de $633mm$ y se hace pasar por una lente convergente de distancia focal $50mm$. Finalmente, el láser llega al sensor de una cámara CCD de resolución 1280×1024 pixeles con un sensor de tamaño $5{,}95mm \times 4{,}76mm$.

Experimento: La cámara se encuentra sobre una plataforma deslizable para poder variar la distancia de la lente a la cámara desde 36.5 mm hasta 60.5 mm en pasos de 1mm. En cada paso, tomamos una imagen del láser con la cámara, asegurándonos de que no esté sobresaturada.

Para cada una de las distancias denotadas por z, primero localizamos la posición del haz en la imagen usando matlab. Posteriormente, medimos el radio del haz en la dirección x ($W_x(z)$) y en la dirección y ($W_y(z)$). Estos radios en distintas direcciones pueden variar, puesto que el haz no necesariamente tiene una sección transversal circular, sino que ésta puede ser un poco elíptica. Además, para cada distancia calculamos también el radio promedio $W_p(z) = \frac{1}{2}(W_x(z) + W_y(z))$.

Finalmente, con los valores experimentales de $W_x(z)$, $W_y(z)$ y $W_p(z)$ (para las distancias z entre 36.5 mm y 60.5 mm) podemos encontrar, por medio de regresión, la curva que mejor se acerca a los valores en la dirección x, en la y y en promedio. Esta regresión, a su vez, puede ser usada para hallar los valores de W_0, z_R y z_0 en estos mismos tres casos.

Resultados: En la siguiente gráfica se expone lo dicho anteriomente, el valor experimental de $W_{0x}(z), W_{0y}(z)$ y $W_{0\rho}(z)$ como función de la distancia z de la cámara a la lente, así como la curva (obtenida por regresión) que mejor se adapta a los datos experimentales.

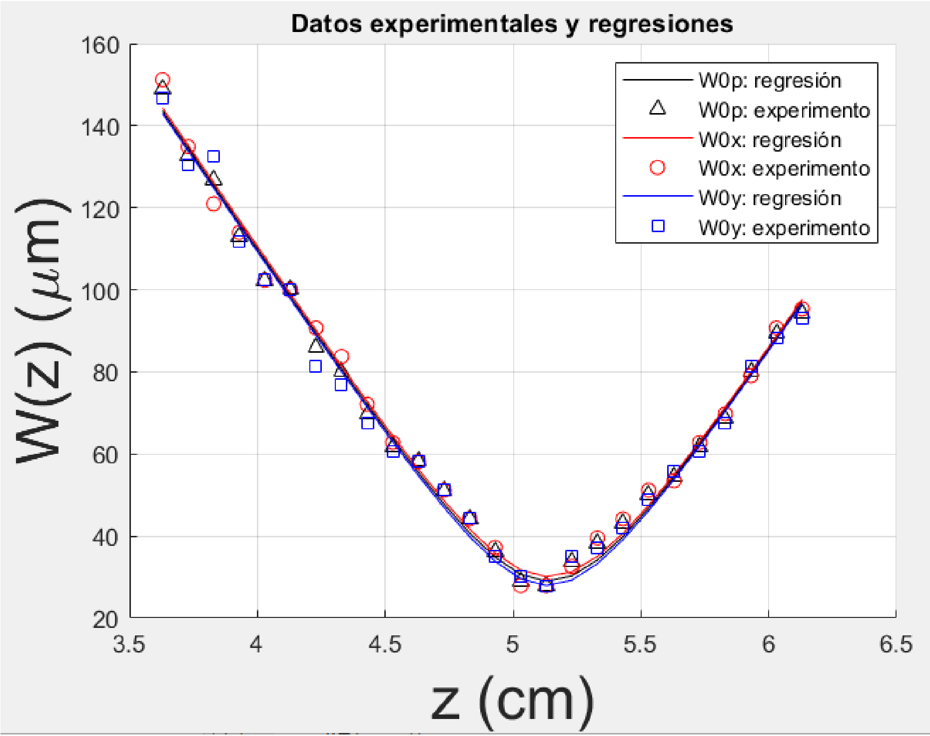

Figura 3: Gráfica de $W(z)$ vs z

La regresión se realiza buscando los valores de W_0, z_R y z_0 necesarios para que los valores experimentales se acerquen lo más posible a la ecuación (2). Aplicando la regresión, se pueden obtener los valores de los parámetros que caracterizan al láser y sus incertidumbres. En este caso obtuvimos los siguientes resultados:

	Eje x	**Eje y**	**Usando el Promedio**
$\mathbf{W_0}$	$30 \pm 1{,}9\mu m$	$28 \pm 1{,}9\mu m$	$29 \pm 1{,}9\mu m$
$\mathbf{z_R}$	$3{,}2 \pm 0{,}23mm$	$3{,}0 \pm 0{,}23mm$	$3{,}1 \pm 0{,}23mm$
$\mathbf{z_0}$	$5{,}14 \pm 0{,}013cm$	$5{,}14 \pm 0{,}013cm$	$5{,}14 \pm 0{,}014cm$

Tabla 1: Resultados

Además, se calculó también la calidad del haz para cada caso usando la ecuación (4):
$M_x^2 = 1{,}183, M_y^2 = 1{,}136, M_p^2 = 1{,}159$

4. Conclusiones

Los datos experimentales muestran que el láser verifica con bastante exactitud la ecuación de un haz Gaussiano. Esto se comprueba al notar que los datos experimentales se pueden modelar muy cercanamente usando la ecuación (2) con los valores de W_0, z_R y z_0 obtenidos. Como se puede observar en la tabla (1), los resultados son casi iguales en el eje x y en el eje y, lo que indica que la sección transversal del rayo es casi circular.

Finalmente, se obtuvieron los valores M^2 para la calidad del láser en cada dirección, y podemos notar que se tienen resultados cercanos a 1, esto nos indica que, en efecto, el rayo puede ser aproximado como un haz Gaussiano.

5. Referencia

[1] Hecht Eugene, Optics, Fifth Edition, Pearson, USA,2017.

[2] B.D. Guenther,“Modern Optics,” Oxford University Press; 2 edition (2015).

[3] Ramírez, H. C. (2017). *Fuentes I: haces gaussianos.* Recuperado 7 de Agosto de 2021 de http://www.paginaspersonales.unam.mx/app/webroot/files/5268/2018-03-10-195432 Fuentes I.pdf

Apéndice

En esta sección detallamos el procedimiento realizado para obtener los valores de los parámetros que caracterizan al haz utilizando las 25 imágenes capturadas a distintas distancias z:

1. Encontrar el centro del haz en cada imagen: Las imágenes se pasan a escala de grises y se suma la intensidad de los píxeles en cada columna y cada renglón. Con ello, se encuentra la columna y el renglón con mayor intensidad y éstas serán las coordenadas del centro del haz.

2. Calcular el ancho del haz en cada dirección: Primero se hace un corte horizontal de la imagen a la altura del centro del haz. Se grafica la intensidad como función de la posición horizontal y se utiliza el algoritmo $FWe^{-1}M$ para encontrar el grosor de dicha gráfica. El algoritmo consiste en encontrar el máximo de intensidad M, y luego encontrar los dos puntos a ambos lados en los que la intensidad vale Me^{-1}. El ancho del haz será la distancia entre estos dos puntos, denotada por $HWe^{-1}M$ y entonces $W_x(z)$ estará dado por $\sqrt{2}HWe^{-1}M$.

   Con ello se encuentra el valor de $W_x(z)$ para cada una de las distancias z en las que se tomaron imágenes. Se hace lo mismo en la dirección vertical usando un corte vertical de la imagen para calcular $W_y(z)$ y finalmente se calcula el promedio $W_p(z) := \frac{1}{2}(W_x(z) + W_y(z))$

3. Encontrar los parámetros: Con lo anterior se obtienen valores experimentales de $W(z)$ para las 25 distancias z. Posteriormente se usa una regresión cuadrática para encontrar los mejores coeficientes a, b, c tales que $W^2(z) = az^2 + bz + c$.

   Si se trata de un haz Gaussiano, podremos encontrar dichos coeficientes, pues según la ecuación (2), se tiene que $W(z)^2 = W_0^2 \left[1 + \frac{(z - z_0)^2}{z_R^2}\right]$, que es una ecuación cuadrática. Entonces, al hacer la regresión $W^2(z) = az^2 + bz + c$ y equipararla con la ecuación teórica (2), se deberá tener que $a = \frac{W_0^2}{z_R^2}, b = -\frac{2z_0}{z_R^2}W_0^2, c = W_0^2\left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)$. Por lo que, dados los valores a, b, c y sus desviaciones estándar encontrados en la regresión de los resultados experimentales, se pueden usar las ecuaciones de arriba para encontrar los parámetros W_0, z_R, z_0 del haz y sus errores. Esto se hace para los valores en la dirección x, dirección y y el promedio.

4. Con ello se tiene caracterizado al haz y se puede calcular su calidad como se hace en los resultados.