21 Demuestra que el potencial retardado de un dipolo oscilante, satisface la norma de Lorentz

Como vimos en clase, los potenciales para un dipolo oscilante son:

$$V(r,\theta,t) = \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{-\frac{\omega}{c}\operatorname{sen}[\omega(t-r/c)] + \frac{1}{r}\cos[\omega(t-r/c)]\right\} \quad \dots \text{ Griffiths 11.12}$$

$$\vec{A}(r,\theta,t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi}\frac{1}{r}\operatorname{sen}[\omega(t-r/c)]\left(\cos\theta\,\hat{r} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}\right) \quad \dots \text{ Griffiths 11.17}$$

Con $p_0 \equiv q_0 d$ el máximo momento dipolar alcanzado, ω la frecuencia de oscilación.

La expresión de V se toma antes de usar la aproximación $r \gg c/\omega$ (aproximación para la zona de radiación) para tener el término completo del potencial sin omitir términos.

Decimos que los potenciales cumplen la norma de Lorentz si $\nabla\cdot\vec{A} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \dots (1)$

Por tanto, para ver si los potenciales la cumplen, calculamos ambos lados:

- $$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{-\frac{\omega}{c}\operatorname{sen}[\omega(t-r/c)] + \frac{1}{r}\cos[\omega(t-r/c)]\right\}\right)$$ por la expresión de V

$$= -\frac{p_0\cos\theta\,\omega}{4\pi\varepsilon_0 r c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{sen}[\omega(t-r/c)]\right\} + \frac{p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\cos[\omega(t-r/c)]\right\}$$

$$= -\frac{p_0\cos\theta\,\omega}{4\pi\varepsilon_0 r c}(\omega)\cos[\omega(t-r/c)] - \frac{p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\omega)\operatorname{sen}(\omega(t-r/c))$$

$$= -\frac{p_0\omega\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{\omega}{c}\cos(\omega(t-r/c)) + \frac{1}{r}\operatorname{sen}(\omega(t-r/c))\right]$$

$$\Rightarrow -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\mu_0 p_0\omega\cos\theta}{4\pi r}\left[\frac{\omega}{c}\cos[\omega(t-r/c)] + \frac{1}{r}\operatorname{sen}[\omega(t-r/c)]\right] \quad \dots (2)$$

Ahora calculamos $\nabla\cdot\vec{A}$:

$$\nabla\cdot\vec{A} = \nabla\cdot\left\{-\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r}\,\text{sen}[\omega(t-r/c)]\left(\cos\theta\,\hat{r} - \text{sen}\theta\,\hat{\theta}\right)\right\}$$ por la expresión de $\vec{A}$

$$= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi}\,\nabla\cdot\left\{\frac{1}{r}\text{sen}[\omega(t-r/c)]\cos\theta\,\hat{r} - \frac{1}{r}\text{sen}[\omega(t-r/c)]\,\text{sen}\theta\,\hat{\theta}\right\}$$

$$= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{r}\text{sen}[\omega(t-r/c)]\cos\theta\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\text{sen}[\omega(t-r/c)]\,\text{sen}^2\theta}{r}\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(0)\right]$$

por la expresión de $\nabla\cdot\vec{C}$ en esféricas

$$\nabla\cdot\vec{C} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 C_r) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(C_\theta\,\text{sen}\theta) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial C_\phi}{\partial\phi}$$

para un vector $\vec{C}$

$$= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi}\left[\frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\text{sen}[\omega(t-r/c)]\right) - \frac{\text{sen}[\omega(t-r/c)]}{r^2\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}^2\theta\right)\right]$$

$$= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi}\left[\frac{\cos\theta}{r^2}\left\{\text{sen}[\omega(t-r/c)] + r\left(-\frac{\omega}{c}\right)\cos[\omega(t-r/c)]\right\} - \frac{\text{sen}[\omega(t-r/c)]}{r^2\,\text{sen}\theta}(2\,\text{sen}\theta\cos\theta)\right]$$

$$= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi}\left[\cancel{\frac{\cos\theta\,\text{sen}[\omega(t-r/c)]}{r^2}} - \frac{\omega\cos\theta}{c\,r}\cos[\omega(t-r/c)] - \cancel{\frac{2\,\text{sen}[\omega(t-r/c)]}{r^2}}\cos\theta\right]$$

$$= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi}\left\{-\frac{\omega\cos\theta}{r\,c}\cos[\omega(t-r/c)] - \frac{\text{sen}[\omega(t-r/c)]\cos\theta}{r^2}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0 p_0 \omega\cos\theta}{4\pi r}\left\{\frac{\omega}{c}\cos[\omega(t-r/c)] + \frac{1}{r}\,\text{sen}[\omega(t-r/c)]\right\}$$

Que por (2) vemos que es igual a $-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$

$$\therefore\ \nabla\cdot\vec{A} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$$

Que es la norma de Lorentz.

Por lo que los potenciales cumplen la norma de Lorentz.

Acepto que estos problemas sean considerados para la evaluación del Semestre 2021-2