Álgebra Moderna Tarea 2.3

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

18 de octubre de 2020

a) **Si x es un elemento de un grupo finito G y $|x| = |G|$, probar que $G = \langle x \rangle$. El resultado no es cierto para G un grupo de orden infinito, da un ejemplo donde $|x| = |G|$ pero $G \neq \langle x \rangle$**

Recordamos que $|x|$ se define como el mínimo entero positivo n tal que $x^n = e$.
Ahora bien, consideramos el conjunto $\langle x \rangle = \{x^k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{e, x, x^2, x^3, ...\}$
El cual es un subgrupo de G porque $x \in G$ y el producto es cerrado.
Además, podemos ver que el conjunto $\{e, x, x^2, x^3, ..., \}$ empieza a repetirse una vez que llegamos a x^n, ya que $x^n = e$ y entonces $x^{n+1} = x$, $x^{n+2} = x^2, x^{n+3} = x^3$, $\cdots$.

Entonces lo podemos escribir sencillamente como $\langle x \rangle = \{e, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$.
Notamos ahora que todos los elementos de este conjunto son distintos, pues si no fuera así, tendríamos $x^j = x^i$ para $j, i \leq n$ distintos (sin pérdida de generalidad suponemos que $j > i$) , lo que implica que $x^j = x^i \quad \Rightarrow \quad x^{j-i} = x^i x^{-i} = e$
Entonces, encontramos un entero positivo $j - i$ tal que $x^{j-i} = e$ y claramente $j - i < n$.
Por lo que esto contradice que $|x| = n$.

Entonces, $\langle x \rangle = \{e, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ está formado por $|x| = n$ elementos distintos y es un subconjuntos de G. Pero G también tiene n elementos por hipótesis, por lo que se debe de cumplir que $\langle x \rangle = G$.

Para el contraejemplo consideramos el grupo infinito $(\mathbb{Z}, +)$ y consideramos el elemento $2 \in \mathbb{Z}$. El 2 tiene un orden infinito, ya que no existe n positivo tal que $2n = 0$. Por lo que $|2| = |\mathbb{Z}|$.

Sin embargo, $\langle 2 \rangle = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ es distinto de $\mathbb{Z}$, pues no contiene a los enteros impares.

b) **Consideremos el grupo cíclico $\mathbb{Z}_{54}$.**

b1) **Encuentra el orden de $\overline{30}$**

Como vimos en clase, si tenemos un grupo cíclico $G = \langle x \rangle$ de orden n, entonces $H = \langle x^a \rangle$ tiene orden $\dfrac{n}{(n,a)}$.
En este caso, el grupo es $\mathbb{Z}_{54}$ que es un grupo cíclico (generado por el $\overline{1}$) y entonces $\overline{30} = 30 \cdot \overline{1}$ tiene un orden de $\dfrac{n}{(n,a)} = \dfrac{54}{(54,30)} = \dfrac{54}{6} = 9$.

b2) **Escribe explicitamente el subgrupo $\langle \overline{30} \rangle$ y encuentra el orden de cada elemento.**

Calculamos las ' potencias ' de $\overline{30}$ y las reducimos cada que podemos hasta llegar a $\overline{0}$

$\langle \overline{30} \rangle = \{\overline{30}\ ,\ \overline{60} = \overline{6}\ ,\ \overline{36}\ ,\ \overline{66} = \overline{12}\ ,\ \overline{42}\ ,\ \overline{72} = \overline{18}\ ,\ \overline{48}\ ,\ \overline{78} = \overline{24}\ ,\ \overline{54} = \overline{0}\}$

$= \{\overline{30}, \overline{6}, \overline{36}, \overline{12}, \overline{42}, \overline{18}, \overline{48}, \overline{24}, \overline{0}\}$

Ahora calculamos el orden de cada uno de estos elementos con la misma fórmula de antes:

- $|\overline{30}| = \dfrac{54}{(54,30)} = \dfrac{54}{6} = 9$
- $|\overline{6}| = \dfrac{54}{(54,6)} = \dfrac{54}{6} = 9$
- $|\overline{36}| = \dfrac{54}{(54,36)} = \dfrac{54}{18} = 3$
- $|\overline{12}| = \dfrac{54}{(54,12)} = \dfrac{54}{6} = 9$
- $|\overline{42}| = \dfrac{54}{(54,42)} = \dfrac{54}{6} = 9$
- $|\overline{18}| = \dfrac{54}{(54,18)} = \dfrac{54}{18} = 3$
- $|\overline{48}| = \dfrac{54}{(54,48)} = \dfrac{54}{6} = 9$
- $|\overline{24}| = \dfrac{54}{(54,24)} = \dfrac{54}{6} = 9$

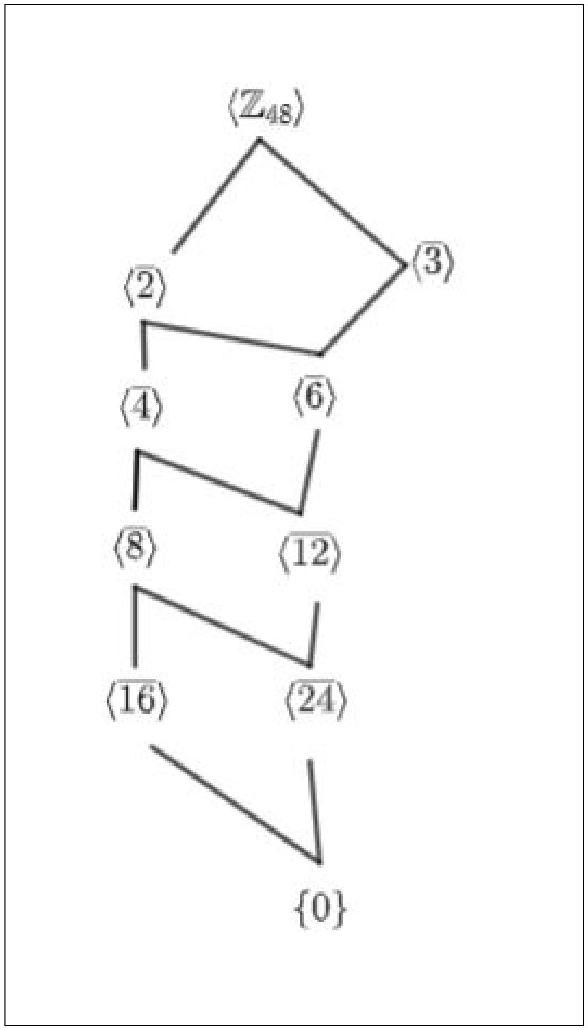
c) **Dibuja el diagrama de Hasse de $\mathbb{Z}_{48}$**

$\mathbb{Z}_{48}$ es cíclico y de orden 48. Por ser cíclico, podemos usar el teorema fundamental de los grupos cíclicos, que dice que si $G = \langle x \rangle$ de orden n, entonces para todo divisor d de n existe un único subgrupo de orden d y es $\langle x^{\frac{n}{d}} \rangle$. Y por el teorema de Lagrange, el orden de un subgrupo debe de ser un divisor de n, por lo que estos grupos mencionados antes son todos los subgrupos posibles.

Entonces, buscamos todos los divisores de 48. Sus divisores primos son $48 = 2^4 \cdot 3$. Y por tanto todos los divisores serán de la forma $2^k \cdot 3^j$ con $0 \leq k \leq 4, 0 \leq j \leq 1$.
Por tanto, los divisores son: $1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 48$. Ahora para cada uno de estos construimos el subgrupo de la forma $\langle \overline{n/d} \rangle$ como mencionamos antes:

- $\langle \overline{48/1} \rangle = \langle \overline{48} \rangle = \{\overline{0}\}$
- $\langle \overline{48/2} \rangle = \langle \overline{24} \rangle = \{\overline{0}, \overline{24}\}$
- $\langle \overline{48/3} \rangle = \langle \overline{16} \rangle = \{\overline{0}, \overline{16}, \overline{32}\}$
- $\langle \overline{48/4} \rangle = \langle \overline{12} \rangle = \{\overline{0}, \overline{12}, \overline{24}, \overline{36}\}$
- $\langle \overline{48/6} \rangle = \langle \overline{8} \rangle = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{24}, \overline{32}, \overline{40}\}$
- $\langle \overline{48/8} \rangle = \langle \overline{6} \rangle = \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}, \overline{24}, \overline{30}, ...\}$
- $\langle \overline{48/12} \rangle = \langle \overline{4} \rangle = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}, ...\}$
- $\langle \overline{48/16} \rangle = \langle \overline{3} \rangle = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, ...\}$
- $\langle \overline{48/24} \rangle = \langle \overline{2} \rangle = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, ...\}$
- $\langle \overline{48/48} \rangle = \langle \overline{1} \rangle = \mathbb{Z}_{48}$

Ahora tenemos que arreglarlos según sus contenciones. Para esto ponemos arriba el $\mathbb{Z}_{48}$ y luego los grupos generados por números primos (porque no están contenidos en ningún otro grupo ni entre sí) y luego vamos bajando, notando que las contenciones se obtienen cuando un generador es múltiplo del otro.



.

d) **Dibuja el diagrama de Hasse de** $D_{2(4)}$

Primer necesitamos encontrar todos los subgrupos de $D_{2(4)} = \langle r, s| \; s^2 = 1, r^4 = 1, sr^{-1} = rs\rangle$
$D_{2(4)} = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$

Por el teorema de Lagrange, los subgrupos solamente pueden tener orden 1,2,4 u 8. El grupo de orden 1 es solamente el $\{1\}$ y el de orden 8 es $D_{2(4)}$.

Para los grupos de orden 2, nos damos cuenta que un grupo de orden 2 debe de ser isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Tal grupo es cíciclo, por lo que los grupos de orden 2 son los generados por un solo elemento de orden 2. Se puede ver fácilmente (y lo hicimos en la tarea 1.2) que estos elementos son r^2, s, sr, sr^2, sr^3. Por lo que todos los grupos de orden 2 son $\langle r^2\rangle, \langle s\rangle, \langle sr\rangle, \langle sr^2\rangle, \langle sr^3\rangle$.

Para los grupos de orden 4 tenemos dos posibilidades según la tabla de isomorfismos que obtuvimos en la clase 10. Una es que el grupo de orden 4 que sea isomorfo a $\mathbb{Z}_4$. Para esto, tiene que ser un grupo cíclico de orden 4, pero los únicos elementos de orden 4 son r y r^3 y por tanto, los grupos son $\langle r \rangle$ y $\langle r^3 \rangle$.

Por otro lado los grupos de orden 4, pueden ser isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Para esto, tiene que ser un grupo generado por dos elementos de orden 2.
Las opciones son entonces: $\langle r^2, s \rangle, \langle r^2, sr^2 \rangle, \langle r^2, sr^3 \rangle, \langle sr^2, s \rangle, \langle r^2, sr \rangle, \langle sr, sr^3 \rangle$.
Entonces, enlistamos los grupos que tenemos hasta ahora:

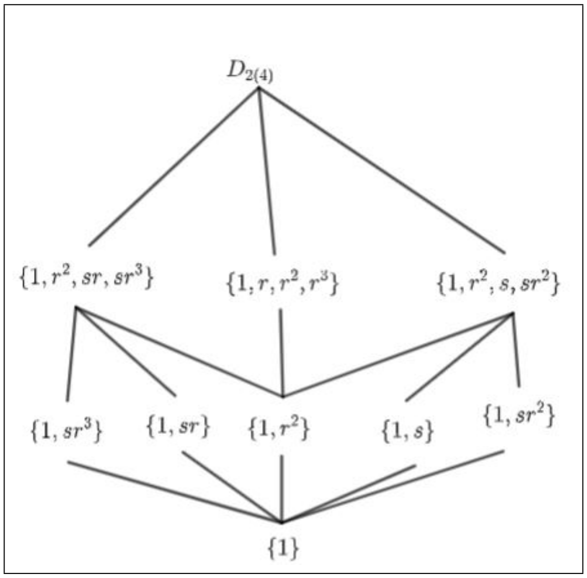
- $\{1\}$
- $D_{2(4)}$
- $\langle r^2 \rangle = \{1, r^2\}$
- $\langle s \rangle = \{1, s\}$
- $\langle sr \rangle = \{1, sr\}$
- $\langle sr^2 \rangle = \{1, sr^2\}$
- $\langle sr^3 \rangle = \{1, sr^3\}$
- $\langle r \rangle = \{1, rr^2, r^3\}$
- $\langle r^3 \rangle = \{r^3, r^2, r, 1\}$
- $\langle r^2, s \rangle = \{1, r^2, s, sr^2\}$
- $\langle r^2, sr^2 \rangle = \{1, r^2, sr^2, sr^4 = s\}$
- $\langle r^2, sr^3 \rangle = \{1, r^2, sr^3, sr^5 = sr\}$
- $\langle sr^2, s \rangle = \{1, sr^2, s, sr^2s = r^2\}$
- $\langle r^2, sr \rangle = \{1, r^2, sr, sr^3\}$
- $\langle sr, sr^3 \rangle = \{1, sr, sr^3, srsr^3 = r^2\}$

Sin embargo, tenemos muchos grupos repetidos, en la siguiente lista evitamos las repeticiones y escribimos cada grupo una sola vez:

- $\{1\}$
- $D_{2(4)}$
- $\langle r^2 \rangle = \{1, r^2\}$
- $\langle s \rangle = \{1, s\}$
- $\langle sr \rangle = \{1, sr\}$
- $\langle sr^2 \rangle = \{1, sr^2\}$
- $\langle sr^3 \rangle = \{1, sr^3\}$
- $\langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3\}$
- $\langle r^2, s \rangle = \{1, r^2, s, sr^2\}$

- $\langle r^2, sr\rangle = \{1, r^2, sr, sr^3\}$

Y estos son todos los subgrupos. Para formar el diagrama de Hasse, empezamos poniendo el $\{1\}$ hasta abajo y ponemos arriba los grupos que solamente tienen el subgrupo trivial (todos los de orden 2). Y luego ponemos los de orden 4 fijándonos en las contenciones que tengan.



.

e) **Sea $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 = \langle a, b | a^2 = b^4 = 1, ab = ba\rangle$ tiene orden 8 y tiene res subgrupos de orden 4, a saber $\langle a, b^2\rangle, \langle b\rangle, \langle ab\rangle$ y cada subgrupo propio está contenido en uno de estos tres. Dibuja el diagrama de Hasse**

Primero escribiré todos los elementos de A de forma explícita.
Como b es de orden 4, tenemos a los elementos $1, b, b^2, b^3$. Y como a es de orden 2, tenemos también al elemento a.
Consideramos ahora los elementos ab, ab^2, ab^3. Vemos que estos elementos son distintos entre sí (pues si por ejemplo $ab^2 = ab^3$ fueran iguales, concluiríamos que $b^2 = b^3$, lo que es falso porque el orden de b es 4).
Entonces, ya tenemos los 8 elementos del conjunto:

$$A = \{1, b, b^2, b^3, a, ab, ab^2, ab^3\}$$

Como ya nos dicen los grupos de orden 4, por el teorema de Lagrange, los únicos grupos propios que quedan para considerar son los de orden 2. Estos grupos tienen que ser isomorfos a $\mathbb{Z}_2$ y por tanto tienen que ser cíclicos de orden 2.
Consideramos entonces los grupos cíclicos generados por un solo elemento:

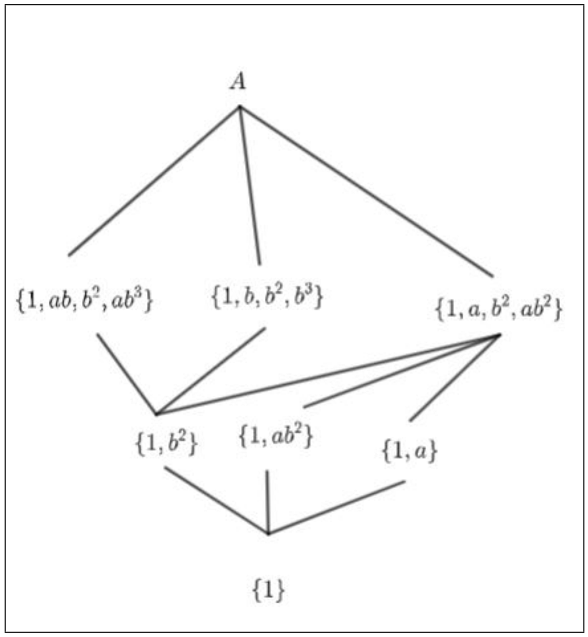
- $\langle b\rangle = \{1, b, b^2, b^3, b^4 = 1\} = \{1, b, b^2, b^3\}$

- $\langle b^2\rangle = \{1, b^2, b^4 = 1\} = \{1, b^2\}$
- $\langle b^3\rangle = \{1, b^3, b^2, b, b^4 = 1\} = \{1, b, b^2, b^3\}$
- $\langle a\rangle = \{1, a, a^2 = 1\} = \{1, a\}$
- $\langle ab\rangle = \{1\ ,\ ab\ ,\ (ab)(ab) = (ba)(ab) = ba^2b = b^2\ ,\ (ab)b^2 = ab^3\ ,\ (ab)(ab^3) = (ba)(ab^3) = ba^2b^3 = b^4 = 1\} = \{1, ab, b^2, ab^3\}$
- $\langle ab^2\rangle = \{1, ab^2\ ,\ (ab^2)(ab^2) = (ab)(ba)(bb) = (ba)(ab)(bb) = ba^2b^3 = b^4 = 1\} = \{1, ab^2\}$
- $\langle ab^3\rangle = \{1, ab^3\ ,\ (ab^3)(ab^3) = (ab)b^2(ab)b^2 = (ab)b^2(ba)b^2 = ab^4ab^2 = a^2b^2 = b^2\ ,\ b^2(ab^3) = b(ba)b^3 = b(ab)b^3 = (ba)b^4 = ba = ab\ ,\ (ab)(ab^3) = (ba)(ab^3) = ba^2b^3 = b^4 = 1\} = \{1, ab^3, b^2, ab\}$

Con esto, tenemos todos los subgrupos cíclicos. Por tanto, los grupos de la lista de arriba que tienen orden 2 son todos los grupos de orden 2 (porque los grupos de orden 2 son siempre cíclicos). Junto con los grupos de orden 4 que nos da el problema, ya tenemos todos los grupos posibles:

- $\langle b\rangle = \{1, b, b^2, b^3\}$
- $\langle ab\rangle = \{1, ab, b^2, ab^3\}$
- $\langle a, b^2\rangle = \{a, ab^2, b^2, 1\}$
- $\langle b^2\rangle = \{1, b^2\}$
- $\langle a\rangle = \{1, a\}$
- $\langle ab^2\rangle = \{1, ab^2\}$
- $\{1\}$
- A

Generamos ahora el diagrama de Hasse. Empezamos desde abajo con $\{1\}$. Luego ponemos los grupos que solamente tienen el subgrupo trivial (los de orden 2). Y luego ponemos los de orden 4 y vemos cómo van las contenciones.


A
$\{1, ab, b^2, ab^3\}$
$\{1, b, b^2, b^3\}$
$\{1, a, b^2, ab^2\}$
$\{1, b^2\}$
$\{1, ab^2\}$
$\{1, a\}$
$\{1\}$

.