Tomás Ricardo Basile Álvarez   MAF   Tarea 2

1) Usa la transformada de laplace para resolver las siguientes EDO y estudia la gráfica.

a) $y''+3y'+2y = -5\,sen(t) + 5\cos(t)$, $y_0 = 5$ $y_0' = 3$

Aplicamos Laplace de ambos lados $\Rightarrow \mathcal{L}[y''+3y'+2y] = \mathcal{L}[-5\,sen(t) + 5\cos(t)]$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y''] + 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = -5\,\mathcal{L}[sen(t)] + 5\mathcal{L}[\cos(t)]$$

Por L35, L3, L4

$$\Rightarrow p^2Y - py_0 - y_0' + 3[pY - y_0] + 2Y = -5\frac{1}{p^2+1^2} + 5\frac{p}{p^2+1^2}$$

$$\Rightarrow p^2Y - p(5) - 3 + 3pY - 3(5) + 2Y = -\frac{5}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow p^2Y + 3pY + 2Y = \frac{-5+5p}{p^2+1} + 5p + 18$$

$$\Rightarrow (p^2+3p+2)Y = \frac{-5+5p}{p^2+1} + \frac{(5p+18)(p^2+1)}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow (p^2+3p+2)Y = \frac{-5+5p+5p^3+18p^2+5p+18}{p^2+1}$$

transformada de Y

$$\Rightarrow (p^2+3p+2)Y = \frac{5p^3+18p^2+10p+13}{p^2+1} \rightarrow Y = \frac{5p^3+18p^2+10p+13}{(p^2+1)(p^2+3p+2)}$$

Buscamos la transformada inversa de eso.

Descomponemos en fracciones parciales: $Y = \frac{5p^3+18p^2+10p+13}{(p^2+1)(p+1)(p+2)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+2}$

$$\Rightarrow (Ap+B)(p+1)(p+2) + C(p^2+1)(p+2) + D(p^2+1)(p+1) = 5p^3+18p^2+10p+13$$

$$\Rightarrow (Ap+B)(p^2+3p+2) + C(p^3+2p^2+p+2) + D(p^3+p^2+p+1) = 5p^3+18p^2+10p+13$$

$$\Rightarrow (A+C+D)p^3 + (3A+B+2C+D)p^2 + (2A+3B+C+D)p + 2B+2C+D = 5p^3+18p^2+10p+13$$

Entonces nos queda el sistema de ecuaciones

1) $A + C + D = 5$
2) $3A + B + 2C + D = 18$
3) $2A + 3B + C + D = 10$
4) $2B + 2C + D = 13$

Si hacemos 3) − 1) obtenemos $A + 3B = 5$
Si hacemos 4) − 2) obtenemos $-3A + B = -5$
Con esto vemos que $A = 2$, $B = 1$

Al sustituir esto en 1) y 4), tenemos

$2 + C + D = 5 \rightarrow C + D = 3$
$2 + 2C + D = 13 \rightarrow 2C + D = 11$

De donde $C = 8$, $D = -5$

Entonces, tenemos que $Y = \frac{2p+1}{p^2+1} + \frac{8}{p+1} + \frac{-5}{p+2}$

$$\rightarrow Y = 2\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} + \frac{8}{p+1} + \frac{-5}{p+2}$$

Entonces recuperamos $y(t)$ al aplicar la transformada inversa a Y

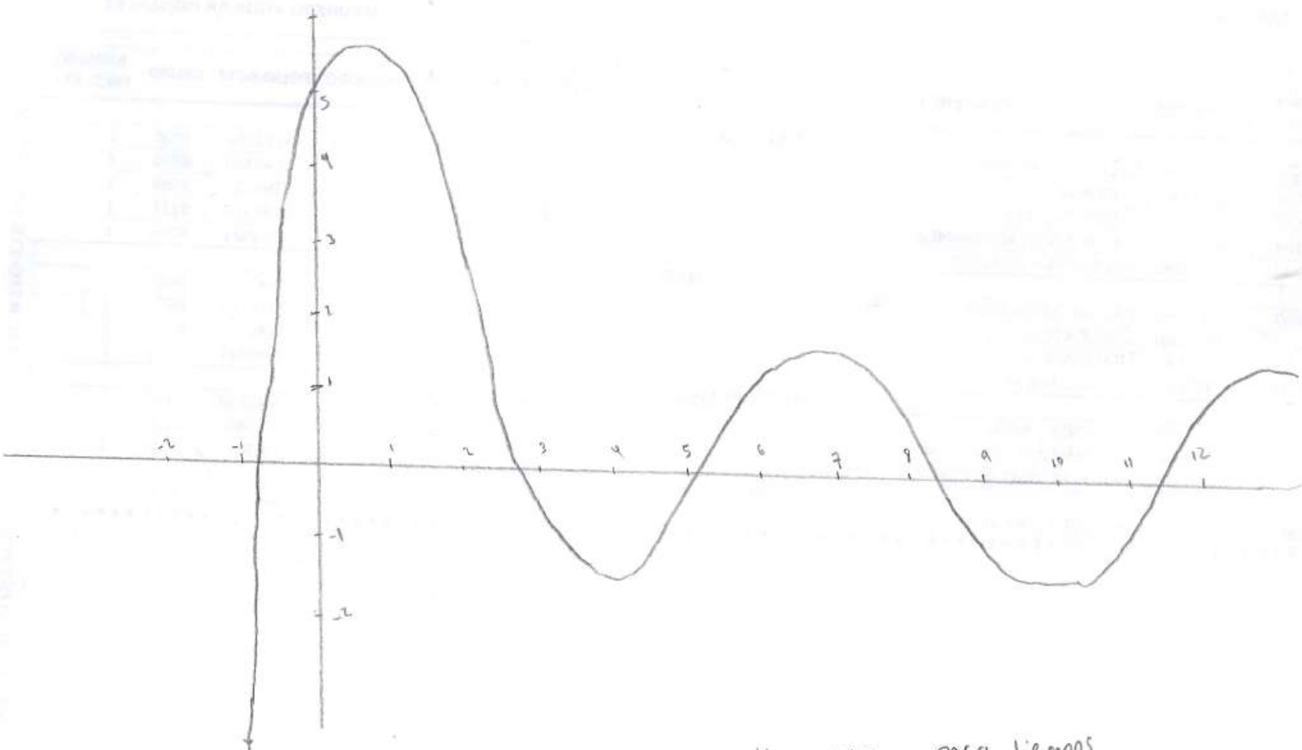
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} + \frac{8}{p+1} + \frac{-5}{p+2}\right]$$

$$= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right] + 8\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] - 5\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right]$$

$$= \underset{\uparrow L4}{2\cos(t)} + \underset{\uparrow L3}{\operatorname{sen}(t)} + \underset{\uparrow L2}{8e^{-t}} - \underset{\uparrow L2}{5e^{-2t}}$$

Por lo tanto, la solución es $\underline{y(t) = 2\cos(t) + \operatorname{sen}(t) + 8e^{-t} - 5e^{-2t}}$ //

Podemos usar un graficador para visualizar la solución:



Vemos que la solución empieza con una oscilación muy alta, pero para tiempos más grandes, los términos $8e^{-t}$, $-5e^{-2t}$ pierden importancia y predominan los términos $2\cos(t) + \operatorname{sen}(t)$ por lo que tenemos una oscilación armónica.

b) $y''+y = 5\,U(t-\pi) \quad y_0 = 2,\ y_0' = 4$ con $U(t)$ la función de Heaviside

Aplicamos la transformada $\rightarrow \ L[y''+y] = L[5\,U(t-\pi)]$

$\rightarrow L[y''] + L[y] = L[5\,U(t-\pi)] \implies p^2 Y - p y_0 - y_0' + Y = L[5\,U(t-\pi)]$ ← por L 35

$\rightarrow p^2 Y - 2p - 4 + Y = L[5\,U(t-\pi)]$ ← por las condiciones iniciales

$$\Rightarrow Y = L[5U(t-\pi)]\frac{1}{p^2+1} + \frac{2p}{p^2+1} + \frac{4}{p^2+1}$$

Ahora aplicamos L^{-1} para recuperar $y(t)$ y usamos linealidad

$$\rightarrow y(t) = \underbrace{L^{-1}\left[L[5U(t-\pi)]\frac{1}{p^2+1}\right]}_{(1)} + 2\underbrace{L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+1}\right]}_{(2)} + 4\underbrace{L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right]}_{(3)}$$

---

(1) $L^{-1}\left[L[5U(t-\pi)]\frac{1}{p^2+1}\right] = L^{-1}\left[L[5\,U(t-\pi)]\cdot L[\text{sen}(t)]\right]$ ← por L3 $\ L[\text{sen}\, t] = \frac{1}{p^2+1}$

$= 5U(t-\pi) * \text{sen}(t)$ ← Por el teorema de convolución, $L^{-1}[G(p)\,H(p)] = g * h$

$= 5\int_0^t U(\tau-\pi)\,\text{sen}(t-\tau)\,d\tau$ ← Def. de convolución

$= \begin{cases} 0 & , \text{ si } t<\pi \\ 5\int_\pi^t 1\cdot \text{sen}(t-\tau)\,d\tau & , \text{ si } t>\pi \end{cases}$ ← Porque si $t<\pi \Rightarrow \tau\in[0,t] \rightarrow \tau<\pi \Rightarrow U(\tau-\pi)=0$ y por tanto $\int_0^t U(\tau-\pi)\,\text{sen}(t-\tau)\,d\tau = 0$. Si $t>\pi \Rightarrow U(\tau-\pi)=1$ cuando $\pi<\tau<t$ y la integral se reduce a $\int_\pi^t 1\cdot\text{sen}(t-\tau)\,d\tau$

$= \begin{cases} 0 & , \text{ si } t<\pi \\ 5\int_\pi^t \text{sen}(t-\tau)\,d\tau & , \text{ si } t>\pi \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } t<\pi \\ 5\cos(t-\tau)\Big|_\pi^t = 5\cos(t-t) - 5\cos(t-\pi) = 5(1+\cos(t)) & , \ t>\pi \end{cases}$

pero esto se puede escribir sencillamente como $5U(t-\pi)\,[1+\cos(t)]$

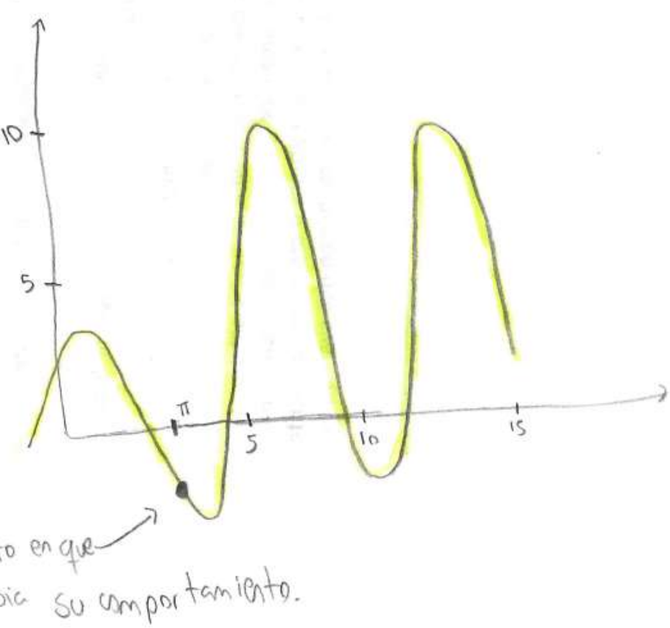
2) $2L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+1}\right] = 2\cos(t)$ ← por L4

3) $4L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right] = 4\,\text{sen}(t)$ ← por L 3

∴ Si juntamos 1), 2), 3), obtenemos:

$$y(t) = 5U(t-\pi)\left[1+\cos(t)\right] + 2\cos(t) + 4\,\text{sen}(t)$$

$$y(t) = \begin{cases} 2\cos(t) + 4\,\text{sen}(t) & , \ t<\pi \\ 5 + 7\cos(t) + 4\,\text{sen}(t) & , \ t>\pi \end{cases}$$



d) $y'' + 2y' + 2y = e^{-t} + 5\delta(t-2)$. $y_0 = 0$ $y_0' = 1$

Aplicamos L y usamos linealidad, $L[y''] + 2L[y'] + 2L[y] = L[e^{-t}] + 5L[\delta(t-2)]$

$\Rightarrow p^2Y - py_0 - y_0' + 2[pY - y_0] + 2Y = \frac{1}{p+1} + 5L[\delta(t-2)]$ ← por L35 y L2

$\Rightarrow p^2 Y - 0(p) - 1 + 2pY - 0(2) + 2Y = \frac{1}{p+1} + 5L[\delta(t-2)]$

$\Rightarrow (p^2+2p+2)Y = \frac{1}{p+1} + 1 + 5L[\delta(t-2)] = \frac{p+2}{p+1} + 5L[\delta(t-2)]$

$\Rightarrow Y = \frac{p+2}{(p+1)(p^2+2p+2)} + \frac{5L[\delta(t-2)]}{p^2+2p+2}$

Ahora encontramos la transformada inversa de cada sumando:

- $\frac{p+2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$ Descomponemos en fracciones parciales: $\frac{p+2}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{Bp+C}{p^2+2p+2}$

$\rightarrow A(p^2+2p+2) + (Bp+C)(p+1) = p+2$

$\rightarrow (A+B)p^2 + (2A+B+C)p + (2A+C) = p+2$ ⇝ 1) $A+B=0$ 2) $2A+B+C=1$ 3) $2A+C=2$

hacemos 2)-3) → $B=-1$ → $A=1$ → $C=0$

$\therefore \frac{p+2}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{1}{p+1} + \frac{-p}{p^2+2p+2}$

Ahora sí aplicamos L^{-1}

$$L^{-1}\left[\frac{p+2}{(p+1)(p^2+2p+2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+2p+2}\right]$$
$$= L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{p}{(p+1)^2+1}\right]$$
$$= L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)^2+1}\right]$$
$$= e^{-t} - e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\operatorname{sen}(t)$$

por L2, $L[e^{-t}] = \frac{1}{p+1}$

por L14: $L[e^{-at}\cos bt] = \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$

por L13: $L[e^{-at}\operatorname{sen} bt] = \frac{b}{(p+a)^2+b^2}$

- $\frac{L[\delta(t-2)]}{p^2+2p+2}$ Para encontrar su transformada inversa, primero notamos que $\frac{1}{p^2+2p+2} = \frac{1}{(p+1)^2+1} = L[e^{-t}\operatorname{sen}(t)]$ ← por L3

Entonces, $L^{-1}\left[L[\delta(t-2)]\frac{1}{p^2+2p+2}\right] = L^{-1}\left[L[\delta(t-2)]\,L[e^{-t}\operatorname{sen}(t)]\right] = \delta(t-2) * e^{-t}\operatorname{sen}(t)$

por el teorema de convolución $L^{-1}[G(p)F(p)] = g(t)*f(t)$

$= \int_0^t \delta(t-\tau-2)\,e^{-\tau}\operatorname{sen}(\tau)\,d\tau = \int_0^t \delta(\tau-t+2)\,e^{-\tau}\operatorname{sen}(\tau)\,d\tau$

Lo cual nos deja 2 casos: El operador δ actuará si $t-2 \in [0,t]$, es decir, si $t-2>0 \rightarrow t>2$ y la integral será $\int_0^t \delta(\tau-(t-2))\,e^{-\tau}\operatorname{sen}(\tau)\,d\tau = e^{-(t-2)}\operatorname{sen}(t-2)$

Si por el contrario, $t<2 \Rightarrow$ El δ vale 0 en todo el intervalo de integración y la integral es 0

$$= \begin{cases} 0, & t<2 \\ e^{-(t-2)}\operatorname{sen}(t-2), & t>2 \end{cases} = u(t-2)\left[e^{-(t-2)}\operatorname{sen}(t-2)\right]$$

con u la función de Heaviside

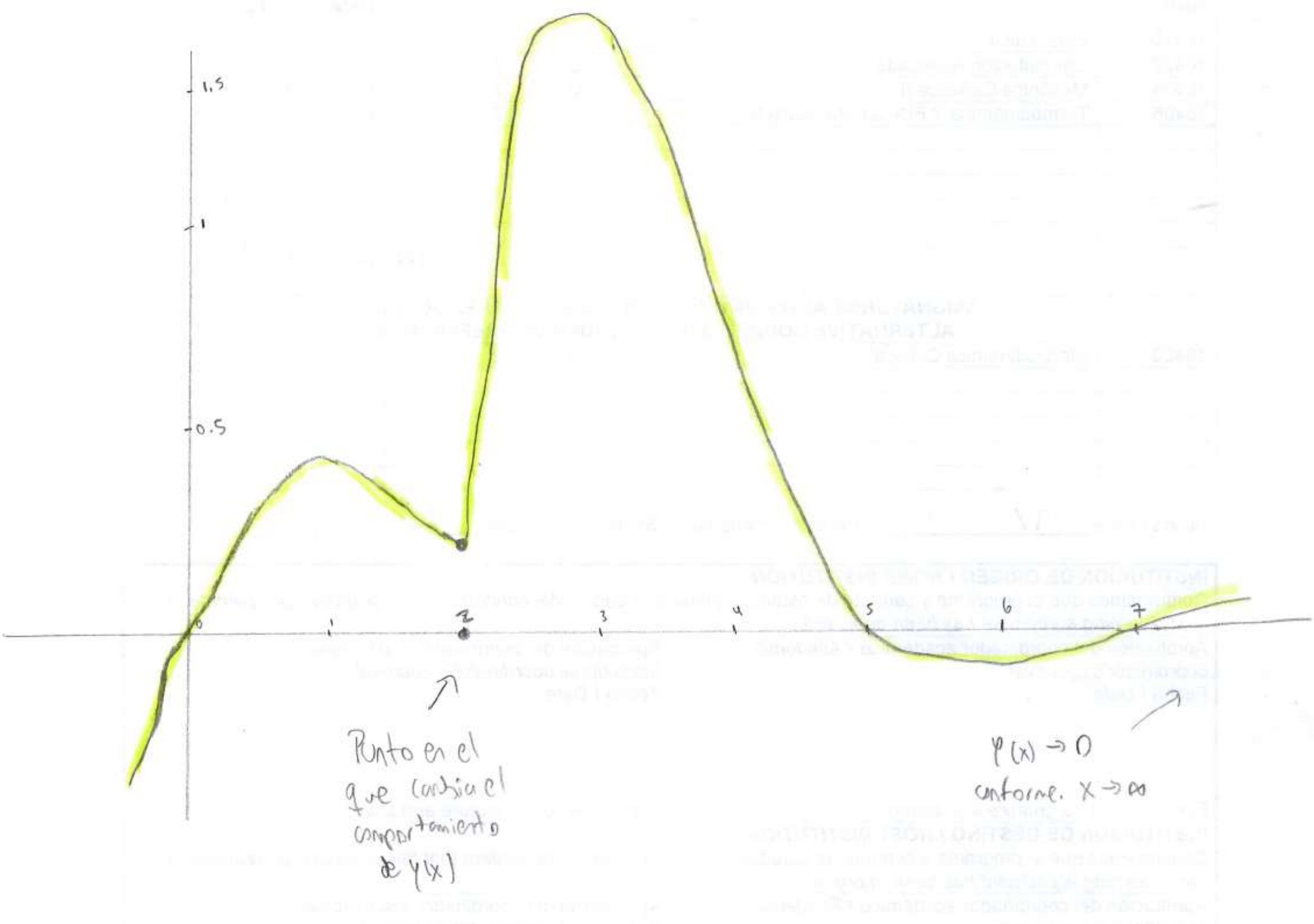
Entonces, regresando a la expresión para Y, tenemos:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(p+1)(p^2+2p+2)}\right] + 5\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}[\delta(t-2)]}{(p^2+2p+2)}\right]$$

$$= e^{-t} - e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\operatorname{sen}(t) + 5u(t-2)\left[e^{-(t-2)}\operatorname{sen}(t-2)\right]$$

Podemos dibujar la gráfica partiendo a $y(t)$ en dos:

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t} - e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\operatorname{sen}(t) & \text{si } t < 2 \\ e^{-t} - e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\operatorname{sen}(t) + 5e^{-(t-2)}\operatorname{sen}(t-2), & \text{si } t > 2 \end{cases}$$



d) $y'' + 8y' + 15y = \begin{cases} 35e^{2t}, & \text{si } 0<t<2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$ $\quad y_0 = 3,\ y_0' = -8$

Primero llamemos $f(t)$ al lado derecho $\Rightarrow y'' + 8y' + 15y = f(t)$

Aplicamos $\mathcal{L}$ de ambos lados

$$\rightarrow \mathcal{L}[y''] + 8\mathcal{L}[y'] + 15\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\rightarrow p^2Y - py_0 - y_0' + 8(pY - y_0) + 15Y = \mathcal{L}[f(t)] \quad \text{por } \mathcal{L}35$$

$$\rightarrow p^2Y - 3p + 8 + 8pY - 8(3) + 15Y = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\rightarrow (p^2 + 8p + 15)Y = \mathcal{L}[f(t)] + 3p + 16$$

$$\rightarrow Y = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{p^2+8p+15} + \frac{3p+16}{p^2+8p+15}$$

Encontramos la transformada inversa de cada sumando

•) $\frac{3p+16}{p^2+8p+15}$ Escribimos en fracciones parciales: $\frac{3p+16}{p^2+8p+15} = \frac{3p+16}{(p+5)(p+3)} = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+3}$

$$\rightarrow A(p+3) + B(p+5) = 3p + 16$$

$$\rightarrow (A+B)p + 3A + 5B = 3p + 16 \longrightarrow \begin{array}{l} 1)\ A+B=3 \\ 2)\ 3A+5B=16 \end{array}$$

hacemos (2) − 3 veces (1) $\rightarrow 2B = 7 \rightarrow B = 7/2$

$\rightarrow A = -1/2$

Entonces, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3p+16}{p^2+8p+15}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{p+5}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7}{2}\frac{1}{p+3}\right] = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+5}\right] + \frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right] = -\frac{1}{2}e^{-5t} + \frac{7}{2}e^{-3t}$

••) $\frac{\mathcal{L}[f(t)]}{p^2+8p+15}$ primero notamos que $\frac{1}{p^2+8p+15} = \frac{1}{(p+5)(p+3)} = \mathcal{L}\left[\frac{e^{-3t} - e^{-5t}}{2}\right]$ ← por $\mathcal{L}7$: $\mathcal{L}\left[\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}\right] = \frac{1}{(p+a)(p+b)}$ con $a = 3,\ b = 5$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}[f(t)]}{p^2+8p+15}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[f(t)]\,\mathcal{L}\left[\frac{e^{-3t} - e^{-5t}}{2}\right]\right]$$

$$= f(t) * \frac{e^{-3t} - e^{-5t}}{2} \longleftarrow \text{por el teorema de convolución, } \mathcal{L}^{-1}[F(p)G(p)] = F(t)*g(t)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\left(e^{-3(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}\right)d\tau$$

Lo que nos da 3 casos: •) Si $t > 2$ entonces $f(\tau) = 35e^{2\tau}$ en todo el intervalo $[0,2]$ por cómo se define y afuera vale 0. Por lo que queda $\frac{1}{2}\int_0^2 35e^{2\tau}\left(e^{-3(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}\right)d\tau$

••) Si $0 < t < 2$ entonces $f(\tau) = 35e^{2\tau}$ en todo el intervalo de integración y queda la integral $\frac{1}{2}\int_0^t 35e^{2\tau}\left(e^{-3(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}\right)d\tau$

•••) Si $t < 0 \Rightarrow f(t) = 0$ y $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}[f(t)]}{p^2+8p+15}\right] = \mathcal{L}^{-1}[0] = 0$

$$\int 35e^{2\tau}\left(e^{-3(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}\right)d\tau = \int 35e^{5\tau}e^{-3t}\,d\tau - \int 35e^{7\tau}e^{-5t}\,d\tau$$

$$= \frac{35e^{5\tau}e^{-3t}}{5} - \frac{35e^{7\tau}e^{-5t}}{7} = 7e^{5\tau}e^{-3t} - 5e^{7\tau}e^{-5t}$$

Resolvemos primero la integral indefinida para usarla luego.

Ahora sí, por lo mencionado antes de los casos, tenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}[f(t)]}{p^2+8p+15}\right] = \begin{cases} \text{si } t>2: & \frac{1}{2}\int_0^2 35e^{2\tau}\left(e^{-3(t-\tau)}-e^{-5(t-\tau)}\right)d\tau = \frac{1}{2}\left[7e^{5\tau}e^{-3t}-5e^{7\tau}e^{-5t}\right]\Big|_0^2 = \frac{7}{2}e^{10-3t}-\frac{5}{2}e^{14-5t}+\frac{7}{2}e^{-3t}+\frac{5}{2}e^{-5t} \\ \text{si } 0<t<2: & \frac{1}{2}\int_0^t 35e^{2\tau}\left(e^{-3(t-\tau)}-e^{-5(t-\tau)}\right)d\tau = \frac{1}{2}\left[7e^{5\tau}e^{-3t}-5e^{7\tau}e^{-5t}\right]\Big|_0^t = \frac{7}{2}e^{2t}-\frac{5}{2}e^{2t}+\frac{7}{2}e^{-3t}+\frac{5}{2}e^{-5t} \\ \text{si } t<0: & 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{si } t>2: & \frac{7}{2}e^{-3t}\left(e^{10}-1\right)-\frac{5}{2}e^{-5t}\left(e^{14}-1\right) \\ \text{si } 0<t<2: & e^{2t}-\frac{7}{2}e^{-3t}+\frac{5}{2}e^{-5t} \\ \text{si } t<0: & 0 \end{cases}$$

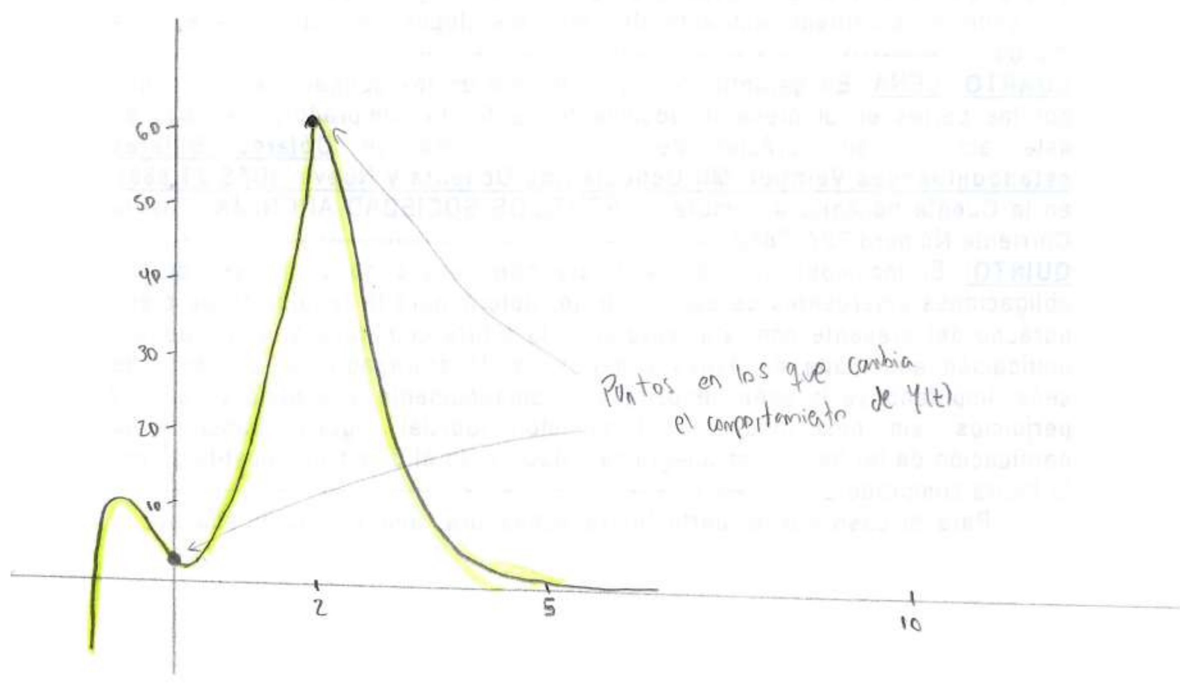
Ahora regresamos a la expresion de Y y tenemos:

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}[f(t)]}{p^2+8p+15}+\frac{3p+16}{p^2+8p+15}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}[f(t)]}{p^2+8p+15}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3p+16}{p^2+8p+15}\right]$$

$$= \begin{cases} \text{si } t>2: & \frac{7}{2}e^{-3t}\left(e^{10}-1\right)-\frac{5}{2}e^{-5t}\left(e^{14}-1\right)-\frac{1}{2}e^{-5t}+\frac{7}{2}e^{-3t} \\ 0<t<2: & e^{2t}-\frac{7}{2}e^{-3t}+\frac{5}{2}e^{-5t}-\frac{1}{2}e^{-5t}+\frac{7}{2}e^{-3t} \\ \text{si } t<0: & 0-\frac{1}{2}e^{-5t}+\frac{7}{2}e^{-3t} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{si } t>2: & \left(2-\frac{5}{2}e^{14}\right)e^{-5t}+\frac{7}{2}e^{10}e^{-3t} \\ \text{si } 0<t<2: & e^{2t}+2e^{-5t} \\ \text{si } t<0: & -\frac{1}{2}e^{-5t}+\frac{7}{2}e^{-3t} \end{cases}$$

Graficamos el resultado por secciones:



2. Se define el siguiente conjunto de funciones: $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}$ $t \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$

a) Argumentar que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(t) = \delta(t)$

Primero comprobamos que $f_\varepsilon(t)$ es un impulso unitario $\forall \varepsilon > 0$, es decir: $\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t)\,dt = 1$

hacemos la sustitución $t = \varepsilon \tan\theta \to dt = \varepsilon \sec^2\theta\, d\theta$ $\quad t=\infty \to \theta = \pi/2$, $t=-\infty \to \theta = -\pi/2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2\tan^2\theta+\varepsilon^2}\,\varepsilon\sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta$$

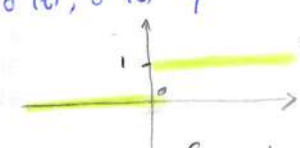
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{\pi} = 1$$ ← Por lo que es un impulso unitario. $\forall \varepsilon$

- Además, vemos que si $t \neq 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{0}{t^2+0^2} = 0$

y si $t = 0 \to \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{0+\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} = \infty$

Entonces, $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t)$ se comporta como $\delta(t)$ ("vale" 0 si $t \neq 0$ y "vale" ∞ si $t = 0$)

b) A partir de $f_\varepsilon(t)$ obtener un conjunto de funciones que aproximen $u(t)$, $\delta'(t)$, $\delta''(t)$ y estudiar sus gráficas.



- Heaviside: como vimos en clase, podemos escribir $u(t)$ como $u(t) = \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$

$u(t) = \int_{-\infty}^{t}\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(\tau)\,d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{t} f_\varepsilon(\tau)\,d\tau$ ← siempre y cuando f_ε sea lo suficientemente regular

Entonces, usando f_ε tenemos:

Entonces, calculamos: $U_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} f_\varepsilon(\tau)\,d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\tau^2+\varepsilon^2}\,d\tau$$ hacemos la sustitución $\tau = \varepsilon\tan\theta$, $d\tau = \varepsilon\sec^2\theta\,d\theta$

$$= \int_{*}^{*}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon\cdot\varepsilon\sec^2\theta\,d\theta}{\varepsilon^2\tan^2\theta+\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi}\int_{*}^{*}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{*}^{*} 1\,d\theta = \frac{\theta}{\pi}$$

pero $\theta = \arctan\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \to = \left.\frac{\arctan(\tau/\varepsilon)}{\pi}\right|_{-\infty}^{t} = \frac{\arctan(t/\varepsilon)}{\pi} - \frac{(-\pi/2)}{\pi}$

$\therefore$ Aproximamos Heaviside con $U_\varepsilon = \frac{1}{\pi}\arctan(t/\varepsilon) + 0.5$, con $\varepsilon \to 0^+$

- $\delta'(t)$ Aproximamos δ como $f_\varepsilon(t)$ y entonces, $\delta'(t)$ se aproxima con $\frac{d}{dt}f_\varepsilon(t)$

$$\to \frac{d}{dt}f_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}\right] = \frac{\varepsilon}{\pi}\left[-\frac{1}{(t^2+\varepsilon^2)^2}2t\right] = \frac{-2\varepsilon t}{\pi(t^2+\varepsilon^2)^2}$$

Entonces aproximamos $\delta'(t)$ con las funciones $f'_\varepsilon(t) = \frac{-2\varepsilon t}{\pi(t^2+\varepsilon^2)^2}$

- $\delta''(t)$ Calculamos la segunda derivada de $f_\varepsilon(t)$

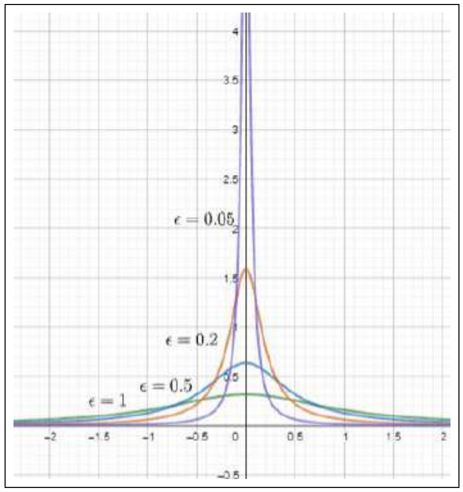
$$\to \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}f_\varepsilon(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{-2\varepsilon t}{\pi(t^2+\varepsilon^2)^2}\right) = \frac{-2\varepsilon}{\pi}\left[\frac{(t^2+\varepsilon^2)^2(1) - t[4t(t^2+\varepsilon^2)]}{(t^2+\varepsilon^2)^4}\right] = \frac{-2\varepsilon}{\pi}\left[\frac{t^2+\varepsilon^2-4t^2}{(t^2+\varepsilon^2)^3}\right] = -\frac{2\varepsilon}{\pi}\left[\frac{\varepsilon^2-3t^2}{(t^2+\varepsilon^2)^3}\right]$$

Entonces, aproximamos $\delta''(t)$ con $f''_\varepsilon(t) = -\frac{2\varepsilon}{\pi}\left[\frac{\varepsilon^2-3t^2}{(t^2+\varepsilon^2)^3}\right]$ conforme $\varepsilon\to 0^+$

Aquí vemos las gráficas de estas funciones para algunos valores de ϵ

1) **Delta de Dirac**:

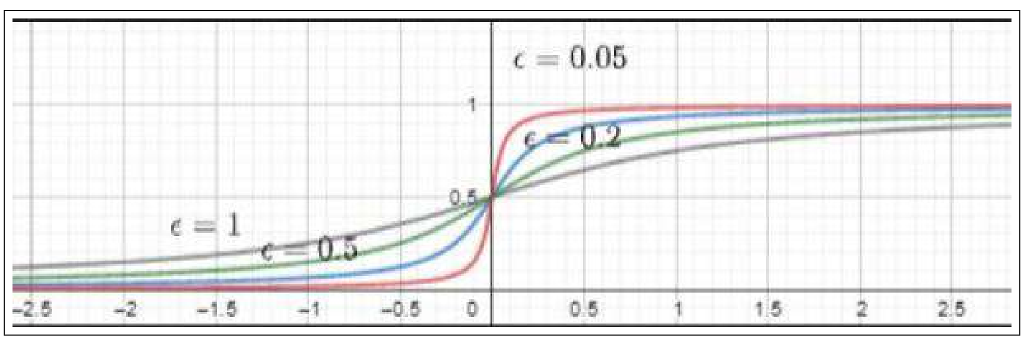
   Vemos las gráficas de $f_\epsilon(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2}$ para algunos valores de ϵ



   Vemos como conforme ϵ tiende a 0, la gráfica se parece más y más aun impulso delgado y muy grande en el 0, tal como es la Delta de Dirac .

2) **Heaviside:**

   Para la función de Heaviside graficamos $u_\epsilon(t) = \dfrac{1}{\pi}\arctan(t/\epsilon) + 0{,}5$:

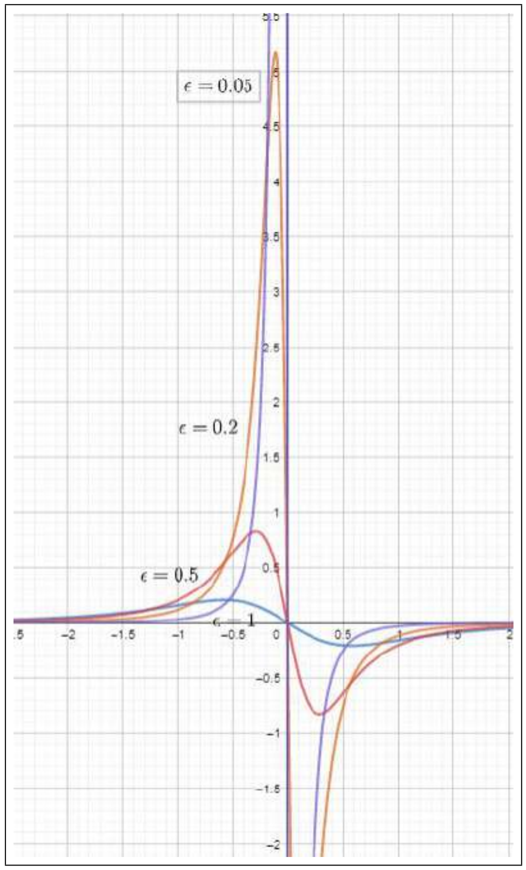


   Vemos que efectivamente conforme ϵ tiende a 0, la gráfica se parece más y más a la de la función de Heaviside.

3) **Derivada de Delta:**

Aproximamos la derivada de las deltas con las funciones $f_\epsilon'(t) = \dfrac{-2\epsilon t}{\pi(t^2+\epsilon^2)^2}$

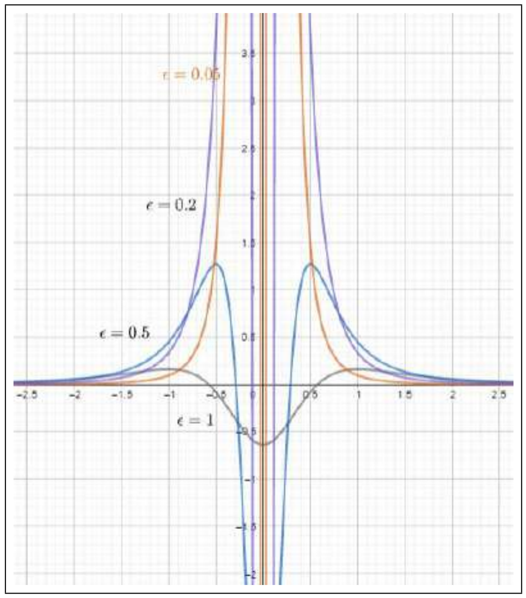
Graficamos esta función para varios valores de ϵ:



4) **Segunda Derivada de Delta:**

Aproximamos la segunda derivada de la delta con las funciones $f_\epsilon''(t) = \dfrac{-2\epsilon}{\pi}\dfrac{\epsilon^2 - 3t^2}{(t^2+\epsilon^2)^3}$

Graficamos esta función para varios valores de ϵ:



3) Para f continua y acotada, se define $T_f : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como $T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x)\, dx$.

a) si $\hat{f}$ denota la transformada de Fourier de f demostrar que $T_{\hat{f}}(\phi) = T_f(\hat{\phi})$. La transformada de T se define entonces $\hat{T}(\phi) = T(\hat{\phi})$

Sea $\phi \in S(\mathbb{R})$

$$T_{\hat{f}}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \hat{f}(x)\, dx \quad \leftarrow \text{por definición de } T$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx}\, dt \right] dx \leftarrow \text{por definición de } \hat{F}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx}\, dt\, dx \quad \leftarrow \text{metemos } \phi(x) \text{ a la integral interior (porque no depende de } t)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(t) e^{-itx}\, dt\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(t) e^{-itx}\, dx\, dt \leftarrow \text{Como } \phi(x) \in S(\mathbb{R}) \text{ y } f \text{ es continua y acotada, se comportan bien y podemos voltear el orden de integración}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left[\int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-itx}\, dx \right] dt \leftarrow \text{Sacamos } f(t) \text{ de la integral que depende de } x$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-itx}\, dx \right] dt \leftarrow \text{lo de corchetes es la def. de } \hat{\phi} \text{ evaluado en } t$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) \hat{\phi}(t)\, dt$$

$$= T_f(\hat{\phi})$$

b) Probar que $T_{\psi * f}(\phi) = T_f(\tilde{\psi} * \phi)$ con $\tilde{\psi}(x) = \psi(-x)$

$$T_{\psi * f}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) (\psi * f)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-\tau) f(\tau)\, d\tau \right] dx \leftarrow \text{por la def. de } \psi * f \text{ que dimos para el teorema de convolución para transformada de Fourier}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \psi(x-\tau) f(\tau)\, d\tau\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \psi(x-\tau) f(\tau)\, dx\, d\tau \leftarrow \text{cambiamos el orden de integración usando que } \phi, \psi, f \text{ son lo suficientemente regulares}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \psi(x-\tau)\, dx\, d\tau$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \tilde{\psi}(\tau - x)\, dx\, d\tau \leftarrow \text{Por la def. de } \tilde{\psi},\ \tilde{\psi}(\tau - x) = \psi(x-\tau)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) (\tilde{\psi} * \phi)(\tau)\, d\tau \leftarrow \text{Porque } \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \tilde{\psi}(\tau - x)\, dx \text{ es la convolución de } \phi \text{ y } \tilde{\psi} \text{ evaluada en } \tau$$

$$= T_f(\tilde{\psi} * \phi)$$

c) Obtener la transformada de Fourier T_f cuando f es:

1) $f(x) = x^n$

$$\hat{T}_f(\phi) = T_f(\hat{\phi}) \quad \leftarrow \text{por a), la definición de la transformada de una distribución}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x)\, f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x)\, x^n\, dx \quad \leftarrow f(x) = x^n$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x)\, x^n e^{i\alpha x}\, dx \Big|_{\alpha=0}$$

$\leftarrow$ multiplicamos por $1 = e^{i\alpha x}$. La igualdad se da cuando evaluamos en $\alpha = 0$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x)\, (-i)^n \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(e^{i\alpha x}\right) dx \Big|_{\alpha=0}$$

$\leftarrow$ Porque $(-i)^n \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(e^{i\alpha x}\right) = (-i)^n (ix)^n e^{i\alpha x}$

$= (-i)^n i^n x^n e^{i\alpha x} = (-1)^n i^{2n} x^n e^{i\alpha n}$

$= (-1)^n (-1)^n x^n e^{i\alpha n} = x^n e^{i\alpha n}$

$$= (-i)^n \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x) \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(e^{i\alpha x}\right) dx \Big|_{\alpha=0}$$

$$= (-i)^n \frac{d^n}{d\alpha^n}\left[\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x)\, e^{i\alpha x}\, dx\right] \Big|_{\alpha=0}$$

$$= (-i)^n \frac{d^n}{d\alpha^n}\left[\phi(\alpha)\right] \Big|_{\alpha=0}$$

$\leftarrow$ Porque por el teorema de inversión, si $\hat{\phi}$ es la transformada de $\phi \Rightarrow$ Recuperamos ϕ como $\phi(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x)\, e^{i\alpha x}\, dx$

$$= (-i)^n \frac{d^n \phi}{d\alpha^n} \Big|_{\alpha=0}$$

Entonces, $\hat{T}_f(\phi) = (-i)^n \frac{d^n \phi}{d\alpha^n}\Big|_{\alpha=0} = (i)^n (-1)^n \phi^{(n)}(0) \quad \ldots (1)$

con δ la delta de Dirac

Por otro lado, en clase vimos que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, \delta^{(n)}(x)\, dx = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$

Entonces, $(i)^n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, \delta^{(n)}(x)\, dx = (i)^n (-1)^n \phi^{(n)}(0)$

Entonces, $\hat{T}_f(\phi)$ le hace lo mismo a $\phi(x)$ que la distribución $(i)^n \delta^{(n)}(x)$

$$\Rightarrow \hat{T}_f = i^n \delta^{(n)}(x)$$

2) $f(x) = \operatorname{sen}(ax)$

Tenemos que $\hat{T}_f(\phi) := T_f(\hat{\phi})$

$= \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x) \operatorname{sen}(ax)\, dx$ ← por la definición de T_f con $f(x) = \operatorname{sen}(ax)$

$= \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x) \dfrac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}\, dx$ ← forma compleja de $\operatorname{sen}(ax)$

$= \frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x) e^{iax}\, dx - \frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x) e^{-iax}\, dx$

Por el teorema de inversión, si $\hat{\phi}$ es la T.F de $\phi \Rightarrow \phi(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x) e^{i\alpha x}\, dx$

$= \frac{1}{2i}\phi(a) - \frac{1}{2i}\phi(-a)$

$\therefore\ \hat{T}_f(\phi) = \frac{1}{2i}\phi(a) - \frac{1}{2i}\phi(-a)$

Pero, nos damos cuenta que obtenemos este mismo resultado aplicando $\frac{1}{2i}\delta(x-a) - \frac{1}{2i}\delta(x+a)$ a $\phi(x)$

pues: $\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2i}\delta(x-a) - \frac{1}{2i}\delta(x+a)\right]\phi(x)\, dx = \frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}} \delta(x-a)\phi(x)\, dx - \frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}} \delta(x+a)\phi(x)\, dx = \frac{1}{2i}\phi(a) - \frac{1}{2i}\phi(-a)$

Por lo tanto, $\hat{T}_f = \frac{1}{2i}\delta(x-a) - \frac{1}{2i}\delta(x+a) = i\left[\frac{1}{2}\delta(x+a) - \frac{1}{2}\delta(x-a)\right]$

3. $f(x) = \cos(ax)$

Tenemos que $\hat{T}_f(\phi) := T_f(\hat{\phi})$

$= \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x) \cos(ax)\, dx$

$= \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x) \dfrac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}$

$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x) e^{iax}\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x) e^{-iax}\, dx$

Por el teorema de inversión, si $\hat{\phi}$ es la T. F. de $\phi \Rightarrow \phi(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x) e^{i\alpha x}\, dx$

$= \frac{1}{2}\phi(a) + \frac{1}{2}\phi(-a)$

Pero obtenemos este mismo resultado aplicando $\frac{1}{2}\delta(x-a) + \frac{1}{2}\delta(x+a)$ a $\phi(x)$

pues: $\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2}\delta(x-a) + \frac{1}{2}\delta(x+a)\right]\phi(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \delta(x-a)\phi(x)\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \delta(x+a)\phi(x)\, dx = \frac{1}{2}\phi(a) + \frac{1}{2}\phi(-a)$

$\therefore\ \hat{T}_f = \frac{1}{2}\delta(x-a) + \frac{1}{2}\delta(x+a)$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$

consideramos la función $\quad sgn(\alpha) = \begin{cases} 1 & si \quad \alpha > 0 \\ -1 & si \quad \alpha < 0 \end{cases}$

y vemos cuál es su transformada inversa:

$$\mathcal{F}^{-1}[sgn](x) = \int_{-\infty}^{\infty} sgn(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{0} sgn(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha + \int_{0}^{\infty} sgn(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

$\leftarrow$ Por la definición de sgn

$$= \int_{-\infty}^{0} -e^{i\alpha x}\, d\alpha + \int_{0}^{\infty} e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

$$= -\frac{e^{i\alpha x}}{ix}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{i\alpha x}}{ix}\Bigg|_{0}^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{ix} + \left(-\frac{1}{ix}\right)$$

$$= -\frac{2}{ix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[sgn] = \frac{-2}{ix}$$

Entonces, la transformada de $\frac{-2}{ix}$ es $sgn(\alpha)$

$\Rightarrow$ la transformada de $\frac{1}{x}$ es $\underline{-\frac{i}{2}\, sgn(\alpha)}$ ✓

4. Obtener la función de Green correspondiente y calcular la solución para la función f dada.

a) $y''(x) = f(x)$, $y(0) = y(1) = 0$. Resolver para $f(x) = x^2$

Vemos que se trata de un problema con condiciones de frontera. En clase vimos que para encontrar la función de Green es útil encontrar dos soluciones de la ecuación homogénea

$y''(x) = 0$ con $y_1(0) = 0$, $y_2(1) = 0$

Es fácil ver que $\underline{y_1(x) = x \quad , \quad y_2(x) = x-1}$ son soluciones a la ec. homogénea y cumplen lo esperado $y_1(0) = 0$, $y_2(1) = 0$

Por inspección

Entonces, vimos en clase que la función de Green es de la forma: $G(x,x') = \begin{cases} A(x')\,y_1(x) & , 0 < x < x' < 1 \\ B(x')\,y_2(x) & , 0 < x' < x < 1 \end{cases}$

Donde vimos que $A(x') = \dfrac{y_2(x')}{W(x')}$, $B(x') = \dfrac{y_1(x')}{W(x')}$

Calculamos el Wronskiano: $W(x) = y_1(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y_1'(x) = x(1) - (x-1)(1) = \underline{1}$

Entonces tenemos: $A(x') = \dfrac{y_2(x')}{W(x')} = \dfrac{x'-1}{1}$, $B(x') = \dfrac{y_1(x')}{W(x')} = \dfrac{x'}{1}$

y por tanto, la función de Green es: $G(x,x') = \begin{cases} (x'-1)\,x & , 0 < x < x' < 1 \\ x'\,(x-1) & , 0 < x' < x < 1 \end{cases}$

Luego, si $y''(x) = f(x)$, entonces por la teoría vista en clase, la solución es

$$y(x) = \int_0^1 G(x,x')\,f(x')\,dx'$$

Si $\underline{f(x) = x^2}$ $\Rightarrow$ $y(x) = \int_0^1 G(x,x')\,x'^2\,dx'$ por cómo quedó $G(x,x')$

$$= \int_0^x x'(x-1)\,x'^2\,dx' + \int_x^1 (x'-1)\,x\,x'^2\,dx'$$

$$= \int_0^x (x-1)\,x'^3\,dx' + \int_x^1 x'^3 x - x x'^2\,dx'$$

$$= (x-1)\frac{x'^4}{4}\Big|_0^x + x\frac{x'^4}{4}\Big|_x^1 - x\frac{x'^3}{3}\Big|_x^1$$

$$= (x-1)\frac{x^4}{4} + \frac{x}{4} - \frac{x^5}{4} - \frac{x}{3} + \frac{x^4}{3} = -\frac{x^4}{4} + \frac{x}{4} - \frac{x}{3} + \frac{x^4}{3}$$

$$= \frac{1}{12}\left(x^4 - x\right)$$

y comprobamos fácilmente que $y''(x) = x^2$ y que $y(0) = y(1) = 0$

$\therefore\ \underline{y(x) = \frac{1}{12}\left(x^4 - x\right)}$

b) $y''(x) + y(x) = f(x)$ con $y(0) = y'(1) = 0$. Resolver para e^{-x}

Primero buscamos dos soluciones a la ec. homogénea $y''(x)+y(x)$ tal que una cumpla $y_1(0)=0$ y la otra $y_2'(1)=0$

La solución general de $y''+y=0$ se ve fácilmente que es $A\cos(x) + B\,\text{sen}(x)$

- Para la solución y_1 que cumpla $y_1(0)=0$, podemos ver fácilmente que podemos tomar $\underline{y_1(x) = \text{sen}(x)}$
- Buscamos ahora una $y_2(x)$ de la forma $A\cos(x) + B\,\text{sen}(x)$ tal que $y_2'(1)=0$

$$\rightarrow \left. -A\,\text{sen}(x) + B\cos(x)\right|_{x=1} = 0 \quad \rightarrow \quad -A\,\text{sen}(1) + B\cos(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = A\tan(1)$$

Si tomamos $A=1 \Rightarrow$ la solución es: $\underline{y_2(x) = \cos(x) + \tan(1)\,\text{sen}(x)}$

Entonces, la función de Green será:
$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{y_2(x')\,y_1(x)}{W(x')} & , 0<x<x'<1 \\ \dfrac{y_1(x')\,y_2(x)}{W(x')} & , 0<x'<x<1 \end{cases}$$

Calculamos entonces $W(x)$, para lo que necesitamos y_1', y_2'

$$y_1(x) = \text{sen}(x) \qquad \rightarrow \qquad y_1'(x) = \cos(x)$$
$$y_2(x) = \cos(x) + \tan(1)\,\text{sen}(x) \qquad y_2'(x) = -\text{sen}(x) + \tan(1)\cos(x)$$

$$\Rightarrow W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \text{sen}(x)\left[-\text{sen}(x) + \tan(1)\cos(x)\right] - \cos(x)\left[\cos(x) + \tan(1)\,\text{sen}(x)\right]$$
$$= -\text{sen}^2(x) + \tan(1)\cos x\,\text{sen}\,x - \cos^2 x - \tan(1)\cos x\,\text{sen}\,x$$
$$= \underline{-1}$$

Entonces, tenemos que:
$$\frac{y_2(x')\,y_1(x)}{W(x')} = \frac{[\cos(x') + \tan(1)\,\text{sen}(x')]\,\text{sen}(x)}{-1} = -\cos(x')\,\text{sen}(x) - \tan(1)\,\text{sen}(x')\,\text{sen}(x)$$
$$\frac{y_1(x')\,y_2(x)}{W(x')} = \frac{\text{sen}(x')\,[\cos(x) + \tan(1)\,\text{sen}(x)]}{-1} = -\text{sen}(x')\cos(x) - \tan(1)\,\text{sen}(x')\,\text{sen}(x)$$

$$\Rightarrow G(x,x') = \begin{cases} -\cos(x')\,\text{sen}(x) - \tan(1)\,\text{sen}(x')\,\text{sen}(x) & , 0<x<x'<1 \\ -\text{sen}(x')\cos(x) - \tan(1)\,\text{sen}(x')\,\text{sen}(x) & , 0<x'<x<1 \end{cases}$$

Ahora bien, la solución $y(x)$ a la ecuación original será: $y(x) = \int_0^1 G(x,x')\,f(x')\,dx'$

con $f(x') = e^{-x'}$ $\rightarrow$ $y(x) = \int_0^1 G(x,x')\,e^{-x'}\,dx'$

$$= \int_x^1 \left[-\cos(x')\,\text{sen}(x) - \tan(1)\,\text{sen}(x')\,\text{sen}(x)\right] e^{-x'}\,dx' + \int_0^x \left[-\text{sen}(x')\cos(x) - \tan(1)\,\text{sen}(x')\,\text{sen}(x)\right] e^{-x'}\,dx'$$
$$= -\text{sen}(x)\int_x^1 \cos(x')\,e^{-x'}dx' - \tan(1)\,\text{sen}(x)\int_x^1 \text{sen}(x')\,e^{-x'}dx' - \cos x\int_0^x \text{sen}(x')\,e^{-x} - \tan(1)\,\text{sen}(x)\int_0^x \text{sen}(x')\,e^{-x'}$$

$$= -\mathrm{Sen}(x)\left[\frac{1}{2}e^{-x'}(-\cos x' + \mathrm{sen}\,x')\right]_x^1 - \tan(1)\,\mathrm{sen}(x)\left[-\frac{1}{2}e^{-x'}(\cos x' + \mathrm{sen}\,x')\right]_x^1$$

$$- \cos x\left[-\frac{1}{2}e^{-x'}(\cos x' + \mathrm{sen}\,x')\right]_0^x - \tan(1)\,\mathrm{sen}\,x\left[-\frac{1}{2}e^{-x'}(\cos x' + \mathrm{sen}\,x')\right]_0^x$$

$\leftarrow$ Porque $\int \mathrm{sen}\,x' e^{-x'} dx' = -\frac{1}{2}e^{-x'}(\cos x' + \mathrm{sen}\,x')$

$\int \cos x' e^{-x'} = \frac{1}{2}e^{-x'}(-\cos x' + \mathrm{sen}\,x')$

$$= -\mathrm{sen}(x)\left[\frac{1}{2}e^{-1}(-\cos(1) + \mathrm{sen}(1)) - \frac{1}{2}e^{-x}(-\cos x + \mathrm{sen}\,x)\right] - \tan(1)\,\mathrm{sen}(x)\left[-\frac{1}{2}e^{-1}(\cos(1) + \mathrm{sen}(1)) + \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \mathrm{sen}\,x)\right]$$

$$- \cos x\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \mathrm{sen}\,x) + \frac{1}{2}e^{0}\right] - \tan(1)\,\mathrm{sen}(x)\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \mathrm{sen}\,x) + \frac{1}{2}e^{0}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{sen}(x)\cos(1)e^{-1} - \cancel{\frac{1}{2}\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(1)\,e^{-1}} - \cancel{\frac{1}{2}\cos x\,\mathrm{sen}\,x\,e^{-x}} + \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2 x\,e^{-x} + \cancel{\frac{1}{2}\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(1)e^{-1}} + \frac{1}{2}\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(1)\tan(1)\,e^{-1}$$

$$- \cancel{\frac{1}{2}\tan(1)\,\mathrm{sen}\,x\cos x\,e^{-x}} - \cancel{\frac{1}{2}\tan(1)\,\mathrm{sen}^2 x\; e^{-x}}$$

$$+ \frac{1}{2}\cos^2 x\; e^{-x} + \cancel{\frac{1}{2}\cos x\,\mathrm{sen}\,x\,e^{-x}} - \frac{1}{2}\cos x + \cancel{\frac{1}{2}\tan(1)\,\mathrm{sen}\,x\cos x\,e^{-x}} + \cancel{\frac{1}{2}\tan(1)\;\mathrm{sen}^2 x\; e^{-x}} - \frac{1}{2}\tan(1)\,\mathrm{sen}\,x$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{sen}(x)\cos(1)e^{-1} + \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2 x\,e^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x\;\mathrm{sen}(1)\tan(1)\,e^{-1} + \frac{1}{2}\cos^2 x\,e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\tan(1)\;\mathrm{sen}\,x$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{sen}(x)\cos(1)e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x\;\mathrm{sen}(1)\tan(1)\;e^{-1} - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\tan(1)\,\mathrm{sen}\,x$$

c) $y''(x) + 2ay'(x) + \omega^2 y(x) = f(x)$ con $a>0$, $y(0) = y(\pi/2) = 0$. Resolver para $f(x) = \cos(x)$

Vemos que se trata de un problema de valores de frontera. Primero tenemos que encontrar dos soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ a la ecuación homogénea y que cumplan $y_1(0)=0$, $y_2(\pi/2)=0$.

Resolvemos $y''(x) + 2ay'(x) + \omega^2 y(x) = 0$

Para lo que proponemos una solución de la forma $y(x) = e^{\alpha x}$

$\rightarrow \alpha^2 e^{\alpha x} + 2a\alpha e^{\alpha x} + \omega^2 e^{\alpha x} = 0 \rightarrow \alpha^2 + 2a\alpha + \omega^2 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4\omega^2}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2-\omega^2}$

Entonces, tenemos las soluciones $y(x) = Ae^{(a+\sqrt{a^2-\omega^2})x} + Be^{(a-\sqrt{a^2-\omega^2})x}$

• Buscamos una solución $y_1(x)$ tal que $y_1(0) = 0$, como puede ser $y_1(x) = e^{(a+\sqrt{a^2-\omega^2})x} - e^{(a-\sqrt{a^2-\omega^2})x}$

•• Buscamos una solución $y_2(x)$ tal que $y_2(\pi/2) = 0$. $y_2(x) = Ae^{(a+\sqrt{a^2-\omega^2})x} + Be^{(a-\sqrt{a^2-\omega^2})x}$

Es decir, $y_2(\pi/2) = Ae^{(a+\sqrt{a^2-\omega^2})\pi/2} + Be^{(a-\sqrt{a^2-\omega^2})\pi/2} = 0$

$\rightarrow Ae^{\sqrt{a^2-\omega^2}\,\pi/2} + Be^{-\sqrt{a^2-\omega^2}\,\pi/2} = 0 \rightarrow Ae^{\sqrt{a^2-\omega^2}\,\pi/2} = -Be^{-\sqrt{a^2-\omega^2}\,\pi/2}$

$\rightarrow \frac{A}{B} = -e^{\sqrt{a^2-\omega^2}\,\pi} \Rightarrow A = -Be^{\sqrt{a^2-\omega^2}\,\pi}$ hacemos $B=1$

Entonces, $y_2(x) = -e^{\sqrt{a^2-\omega^2}\,\pi}\, e^{(a+\sqrt{a^2-\omega^2})x} + e^{(a-\sqrt{a^2-\omega^2})x}$

Ahora mejor nombramos $\lambda := \sqrt{a^2-\omega^2}$ y las soluciones que hemos encontrado son

$$y_1(x) = e^{(-a+\lambda)x} - e^{(-a-\lambda)x}$$
$$y_2(x) = -e^{-\lambda\pi + (-a+\lambda)x} + e^{(-a-\lambda)x}$$

y cumplen $y_1(0)$, $y_2(\pi/2)$

Luego, sabemos que la función de Green es $G(x,x') = \begin{cases} \frac{y_2(x')\,y_1(x)}{W(x')}, & 0<x<x'<\pi/2 \\ \frac{y_1(x')\,y_2(x)}{W(x')}, & 0<x'<x<\pi/2 \end{cases}$

Calculamos entonces $W(x')$

$W(x') = y_1(x')\,y_2'(x') - y_1'(x')\,y_2(x')$

$= \left[e^{(a+\lambda)x'} - e^{(a-\lambda)x'}\right]\left[-(a+\lambda)e^{-\lambda\pi+(a+\lambda)x'} + (a-\lambda)e^{(a-\lambda)x'}\right] - \left[(a+\lambda)e^{(a+\lambda)x'} - (a-\lambda)e^{(a-\lambda)x'}\right]\left[-e^{-\lambda\pi+(a+\lambda)x'} + e^{(a-\lambda)x'}\right]$

$= \left[-(a+\lambda)e^{-\lambda\pi+2ax'+2\lambda x'} + (a+\lambda)e^{-\lambda\pi+2ax'} + (a-\lambda)e^{-2ax'} - (a-\lambda)e^{-2ax'-2\lambda x'}\right] - \left[-(a+\lambda)e^{-\lambda\pi+2ax'+2\lambda x'} + (a-\lambda)e^{\lambda\pi+2ax'} + (a+\lambda)e^{-2ax'} - (a-\lambda)e^{-2ax'-2\lambda x'}\right]$

$= (a+\lambda)\left[e^{-\lambda\pi-2ax'} - e^{2ax'}\right] + (a-\lambda)\left[e^{-2ax'} - e^{-\lambda\pi-2ax'}\right]$

$= (a+\lambda)e^{-2ax'}\left[e^{-\lambda\pi} - 1\right] + (a-\lambda)e^{-2ax'}\left[1 - e^{-\lambda\pi}\right] - ae^{2ax'} - \lambda e^{2ax'} + ae^{-2ax'}e^{-\lambda\pi} + \lambda e^{-2ax'}e^{-\lambda\pi}$

$= -ae^{-2ax'}e^{-\lambda\pi} + \lambda e^{-2ax'}e^{-\lambda\pi} + ae^{-2ax'} - \lambda e^{-2ax'} - ae^{-2ax'}$

$= -2\lambda e^{-2ax'} + 2\lambda e^{-2ax'}e^{-\lambda\pi}$

$= \underline{2\lambda e^{-2ax'}\left[-1 + e^{-\lambda\pi}\right]}$

Entonces: •) $$\frac{Y_2(x')\,Y_1(x)}{W(x')} = \frac{\left(-e^{-\lambda\pi+(-a+\lambda)x'} + e^{(-a-\lambda)x'}\right)\left(e^{(-a+\lambda)x} - e^{(-a-\lambda)x}\right)}{2\lambda e^{-2ax'}\left[-1+e^{-\lambda\pi}\right]}$$

$$= e^{-ax'}\left[-e^{-\lambda\pi} e^{\lambda x'} + e^{-\lambda x'}\right] e^{-ax}\left[e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right] \Big/ \left(2\lambda e^{-2ax'}\left[-1+e^{-\lambda\pi}\right]\right)$$

$$= e^{ax'}\left[-e^{-\lambda\pi} e^{\lambda x'} + e^{-\lambda x'}\right] e^{-ax}\left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right) \Big/ \left[-2\lambda + 2\lambda e^{-\lambda\pi}\right]$$

$$= -e^{ax'-\lambda\pi+\lambda x'-ax+\lambda x} + e^{ax'-\lambda x'-ax+\lambda x} + e^{ax'-\lambda\pi+\lambda x'-ax-\lambda x} - e^{ax'-\lambda x'-ax-\lambda x} \Big/ \left(-2\lambda + 2\lambda e^{-\lambda\pi}\right)$$

$$= \frac{-e^{(a+\lambda)x'+(-a+\lambda)x-\lambda\pi} + e^{(a-\lambda)x'+(-a+\lambda)x} + e^{(a+\lambda)x'-(a+\lambda)x-\lambda\pi} - e^{(a-\lambda)x'-(a+\lambda)x}}{2\lambda\left[1+e^{-\lambda\pi}\right]}$$

••) $$\frac{Y_1(x')\,Y_2(x)}{W(x')} = \frac{\left[e^{(-a+\lambda)x'} - e^{(-a-\lambda)x'}\right]\left[-e^{-\lambda\pi+(-a+\lambda)x} + e^{(-a-\lambda)x}\right]}{2\lambda e^{-2ax'}\left[-1+e^{-\lambda\pi}\right]}$$

$$= \frac{-e^{(a+\lambda)x'+(-a+\lambda)x-\lambda\pi} + e^{(a+\lambda)x'-(a+\lambda)x} + e^{(a-\lambda)x'+(-a+\lambda)x-\lambda\pi} - e^{(a-\lambda)x'-(a+\lambda)x}}{2\lambda\left[-1+e^{-\lambda\pi}\right]}$$

y entonces:

$$G(x,x') = \begin{cases} G_2(x,x') = \dfrac{-e^{(a+\lambda)x'+(-a+\lambda)x-\lambda\pi} + e^{(a-\lambda)x'+(-a+\lambda)x} + e^{(a+\lambda)x'-(a+\lambda)x-\lambda\pi} - e^{(a-\lambda)x'-(a+\lambda)x}}{2\lambda\left[-1+e^{-\lambda\pi}\right]}, & 0<x<x'<\pi/2 \\[2ex] G_1(x,x') = \dfrac{-e^{(a+\lambda)x'+(-a+\lambda)x-\lambda\pi} + e^{(a+\lambda)x'-(a+\lambda)x} + e^{(a-\lambda)x'+(-a+\lambda)x-\lambda\pi} - e^{(a-\lambda)x'-(a+\lambda)x}}{2\lambda\left[-1+e^{-\lambda\pi}\right]}, & 0<x'<x<\pi/2 \end{cases}$$

Luego, la solución cuando $f(x) = \cos(x)$ es $y(x) = \int_0^{\pi/2} G(x,x')\,f(x')\,dx' = \int_0^{\pi/2} G(x,x')\cos(x')\,dx'$

$$= \int_0^{x} G_1(x,x')\cos(x')\,dx' + \int_x^{\pi/2} G_2(x,x')\cos(x')\,dx'$$

y dejaré las integrales sólo indicadas

5. A partir de las soluciones de la ecuación homogénea, obtener la solución particular a la no homogénea.

a) $y'' - y = \operatorname{sech}(x)$, con $\operatorname{senh}(x)$, $\cosh(x)$ soluciones homogéneas

Como vimos en clase, si $y_1(x)$, $y_2(x)$ son soluciones homogéneas $\Rightarrow$ La solución particular es:

$$y_p(x) = y_2(x)\int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)}\,dx - y_1(x)\int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)}\,dx$$

Tenemos $y_1(x) = \operatorname{Senh}(x) \rightarrow y_1'(x) = \cosh(x)$, y entonces $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$, $f(x) = \operatorname{Sech}(x)$

$y_2(x) = \cosh(x) \rightarrow y_2'(x) = \operatorname{Senh}(x)$, $= \operatorname{Senh}^2(x) - \cosh^2(x) = -1$

Entonces: $$y_p(x) = \cosh(x)\int \frac{\operatorname{Senh}(x)\operatorname{Sech}(x)}{-1}\,dx - \operatorname{senh}(x)\int \frac{\cosh(x)\operatorname{Sech}(x)}{-1}\,dx$$

$$= -\cosh(x)\int \tanh(x)\,dx + \operatorname{Senh}(x)\int 1\,dx$$

$$= -\cosh(x)\left[\ln(\cosh(x))\right] + x\operatorname{Senh}(x)$$

b) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x\ln(x)$, con x, x^2 soluciones de la homogénea.

Calculamos y_1', y_2' y $W(x)$

$y_1(x) = x \rightarrow y_1' = 1$

$y_2(x) = x^2 \rightarrow y_2' = 2x$

$\rightarrow W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = x(2x) - 1(x^2) = \underline{x^2}$

Escribimos la ecuación en la forma $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

$$\rightarrow y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x}y = \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{f(x)}$$

Entonces, según la teoría, una solución particular es:

$$y_p = y_2 \int \frac{y_1(x)\, f(x)}{W(x)} - y_1(x)\int \frac{y_2(x)\, f(x)}{W(x)}$$

$$= x^2 \int \frac{x \ \ln(x)/x}{x^2} - x\int \frac{x^2 \ \ln(x)/x}{x^2}$$

$$= x^2 \int \frac{\ln(x)}{x^2}dx - x\int \frac{\ln(x)}{x}dx$$

Resolvemos las integrales:

$\cdot)\ \int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int u\,du$ ← con $u = \ln(x)$ $\rightarrow du = dx/x$

$= u^2/2 = (\ln(x))^2/2$ ✓

$\cdot\cdot)\ \int \frac{\ln(x)}{x^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \int -\frac{1}{x^2}dx$ ← Integral por partes $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

con $u = \ln(x)$, $dv = 1/x^2$ $\rightarrow \int \ln(x)\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln(x) - \int(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x})dx$

$du = 1/x$ $\quad v = -1/x$

$= -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$ ✓

Reemplazamos: $y_p = x^2 \int \frac{\ln(x)}{x^2}dx - x\int \frac{\ln(x)}{x}dx$

$$= x^2\left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right] - x\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]$$

$$= -x\ln(x) - x - x\frac{\ln^2(x)}{2}$$

c) $y'' - 2\csc^2(x)\, y = \sin^2(x)$ con $ctg(x)$, $1 - x\, ctg(x)$ soluciones homogéneas

Calculamos las derivadas de y_1, y_2 y calculamos $W(x)$

$$y_1 = ctg(x) \qquad y_1' = -\csc^2(x)$$
$$y_2 = 1 - x\, ctg(x) \quad \rightarrow \quad y_2' = x\csc^2(x) - ctg(x)$$

$$\Rightarrow W(x) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) = ctg(x)\left[x\csc^2(x) - ctg(x)\right] - \left[1 - x\, ctg(x)\right]\left[-\csc^2(x)\right]$$
$$= \cancel{x\csc^2(x)\, ctg(x)} - ctg^2(x) + \csc^2(x) - \cancel{x\, ctg(x)\csc^2(x)}$$
$$= \csc^2(x) - ctg^2(x) = \frac{1}{sen^2(x)} - \frac{\cos^2(x)}{sen^2(x)} = \frac{sen^2(x)}{sen^2(x)} = 1$$

Entonces, la solución particular es:

$$y_p(x) = y_2(x)\int \frac{y_1(x)\, f(x)}{W(x)} - y_1(x)\int \frac{y_2(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx \qquad \text{con } f(x) = sen^2(x)$$
$$= (1 - x\, ctg x)\int ctg(x)\, sen^2(x)\, dx - ctg(x)\int (1 - x\, ctg x)\, sen^2(x)\, dx$$
$$= (1 - x\, ctg x)\int \cos(x)\, sen(x)\, dx - ctg(x)\int sen^2(x) - x\cos(x)\, sen(x)\, dx$$

Calculamos las integrales:

i) $\int \cos x\, sen x\, dx = \dfrac{sen^2(x)}{2}$

ii) $\int sen^2(x)dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen(2x)$

iii) $\int x\cos x\, sen x\, dx = \dfrac{x\, sen^2 x}{2} - \int \dfrac{sen^2 x}{2}\, dx$ ← Integral por partes con $\int u\, dv = uv - \int v\, du$; $u = x$, $du = 1$, $dv = \cos x\, sen x$, $v = \frac{sen^2 x}{2}$

$$= \frac{x\, sen^2 x}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}sen(2x)$$

Entonces, una solución particular es:

$$y_p(x) = (1 - x\, ctg x)\frac{sen^2 x}{2} - ctg(x)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen(2x)\right) + ctg(x)\left[\frac{x\, sen^2 x}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}sen(2x)\right]$$
$$= (1 - x\, ctg x)\frac{sen^2 x}{2} - ctg(x)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cos x\, sen x\right) + ctg(x)\left[x\frac{sen^2 x}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cos x\, sen x\right]$$
$$= \frac{sen^2 x}{2} - \cancel{\frac{x}{2}\cos x\, sen x} - \frac{1}{2}x\, ctg(x) + \frac{1}{2}\cos^2 x + \cancel{\frac{x}{2}\cos x\, sen x} - \frac{1}{4}x\, ctg x + \frac{1}{4}\cos^2 x$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x\, ctg x + \frac{1}{4}\cos^2 x$$

De hecho, vemos que $1 - x\, ctg(x)$ es una de las soluciones homogéneas de la ecuación. Y que al sumar una solución homogénea a la solución particular $y_p(x)$ obtenemos una nueva solución particular $y_{p_1}(x)$ más sencilla:

Entonces podemos obtener una nueva solución particular

$$y_{p_1}(x) = y_p(x) - \frac{3}{4}(1 - x\, ctg(x)) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x\, ctg(x) + \frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}x\, ctg(x)$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos^2 x$$
$$= -\frac{1}{4}sen^2 x$$

d) $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2+1)^2$ con x, $1-x^2$ soluciones homogéneas.

Primero dividimos entre (x^2+1) para tener la ecuación en la forma $y'' + P(x)\, y' + Q(x) = f(x)$

$$\to y'' - \frac{2x}{x^2+1} y' + \frac{2}{x^2+1} y = \underbrace{x^2+1}_{\leftarrow f(x)}$$

Tenemos las soluciones homogéneas $y_1 = x$, $y_2 = 1-x^2$

$$\to \begin{matrix} y_1 = x \\ y_2 = 1-x^2 \end{matrix} \to \begin{matrix} y_1' = 1 \\ y_2' = -2x \end{matrix} \quad \Rightarrow W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$
$$= x(-2x) - (1-x^2)1 = -1-x^2 = \underline{-(1+x^2)},$$

Entonces, la solución particular está dada por:

$$y_p(x) = y_2(x) \int \frac{y_1(x)\, f(x)}{W(x)} dx - y_1(x) \int \frac{y_2(x)\, f(x)}{W(x)} dx$$

$$= (1-x^2) \int \frac{x\,\cancel{(x^2+1)}}{-\cancel{(1+x^2)}} dx - x \int \frac{(1-x^2)\,\cancel{(x^2+1)}}{-\cancel{(1+x^2)}} dx$$

$$= x^2-1 \int x\, dx + x \int 1-x^2$$

$$= x^2-1 \left(\frac{x^2}{2}\right) + x\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$$

$$= \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + x^2 - \frac{x^4}{3}$$

$$= \frac{x^4}{6} + \frac{x^2}{2}$$

$\therefore$ La solución particular es $\underline{y_p(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{x^2}{2}}$

6) Demostrar que la siguiente ec. diferencial

$y''(x) + 4y(x) = f(x)$ $\quad x \in (0,1)$, $y(0) = y(1) = 0$

se puede escribir como $y(x) = \int_0^1 G(x,x') f(x')\,dx'$ con $G(x,x') = 2\sum \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(n\pi x')}{4 - n^2\pi^2}$

Se trata de una EDO con valores de frontera.
Primero hay que buscar dos soluciones a la ecuación homogénea $y''(x) + 4y(x) = 0$ tal que $y_1(0) = 0$, $y_2(1) = 0$

Para esta ecuación $y''(x) + 4y(x) = 0$ proponemos $y(x) = e^{\alpha x}$

$\rightarrow \alpha^2 e^{\alpha x} + 4e^{\alpha x} = 0 \rightarrow \alpha^2 + 4 = 0 \rightarrow \alpha = \pm 2i$

$\therefore$ La solución general es $y(x) = Ae^{2ix} - Be^{-2ix} = \underline{C\cos(2x) + D\operatorname{sen}(2x)}$ con C, D constantes

•) Queremos que $y_1(0) = 0 \rightarrow y_1(x) = C_1\cos(2x) + D_1\operatorname{sen}(2x)$

$\rightarrow y_1(0) = C_1\cos(2(0)) = 0 \quad \therefore C_1 = 0$

y la solución y_1 puede ser $\underline{y_1(x) = \operatorname{sen}(2x)}$

••) Queremos que $y_2(1) = 0 \rightarrow y_2(x) = C_2\cos(2x) + D_2\operatorname{sen}(2x)$

$\rightarrow C_2\cos(2) + D_2\operatorname{sen}(2) = 0 \rightarrow C_2 = -D_2\tan(2)$

$\therefore$ Si hacemos $D_2 = 1$, una posible solución es $\underline{y_2(x) = -\tan(2)\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)}$

vemos que efectivamente $y_2(1) = 0$

Luego, la función de Green está dada por $G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{y_2(x')\,y_1(x)}{W(x')} & , 0 < x < x' < 1 \\ \dfrac{y_1(x')\,y_2(x)}{W(x')} & , 0 < x' < x < 1 \end{cases}$

Calculamos lo que necesitamos:

$y_1(x) = \operatorname{sen}(2x) \rightarrow y_1'(x) = 2\cos(2x)$

$y_2(x) = -\tan(2)\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x) \rightarrow y_2' = 2\tan(2)\operatorname{sen}(2x) + 2\cos(2x)$

y por lo tanto: $W(x,x') = y_1 y_2' - y_1' y_2$

$= \operatorname{sen}(2x)\left[2\tan(2)\operatorname{sen}(2x) + 2\cos(2x)\right] - 2\cos(2x)\left[-\tan(2)\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)\right]$

$= 2\tan(2)\operatorname{sen}^2(2x) + \cancel{2\cos(2x)\operatorname{sen}(2x)} + 2\tan(2)\cos^2(2x) - \cancel{2\cos(2x)\operatorname{sen}(2x)}$

$= 2\tan(2)\left[\cos^2(2x) + \operatorname{sen}^2(2x)\right]$

$= \underline{2\tan(2)}$

Y por lo tanto, la función de Green queda como:

$$\circ, \quad \frac{Y_2(x')\,Y_1(x)}{W(x')} = \frac{\left[-\tan(2)\cos(2x') + \operatorname{sen}(2x')\right]\operatorname{sen}(2x)}{2\tan(2)} = \frac{1}{2}\left[\cos(2x')\operatorname{sen}(2x) + \cot(2)\operatorname{sen}(2x')\operatorname{sen}(2x)\right]$$

$$\circ\circ, \quad \frac{Y_1(x')\,Y_2(x)}{W(x')} = \frac{\operatorname{sen}(2x')\left[-\tan(2)\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)\right]}{2\tan(2)} = \frac{1}{2}\left[-\operatorname{sen}(2x')\cos(2x) + \cot(2)\operatorname{sen}(2x')\operatorname{sen}(2x)\right]$$

Entonces la función de Green es:

$$G(x,x') = \begin{cases} -\frac{1}{2}\cos(2x')\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}\cot(2)\operatorname{sen}(2x')\operatorname{sen}(2x), & 0<x<x'<1 \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x')\cos(2x) + \frac{1}{2}\cot(2)\operatorname{sen}(2x')\operatorname{sen}(2x), & 0<x'<x<1 \end{cases}$$

Resultado que podemos escribir mejor con ayuda de "U" la función de Heaviside. Pues

$$U(x'-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x'>x \\ 0 & \text{si } x>x' \end{cases}, \quad U(x-x') = \begin{cases} 0 & \text{si } x'>x \\ 1 & \text{si } x>x' \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(x,x') = \frac{1}{2}\cot(2)\operatorname{sen}(2x')\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}U(x'-x)\cos(2x')\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}U(x-x')\cos(2x)\operatorname{sen}(2x')$$

Para ver a G en la forma que se nos pide, expandiremos G como una serie de Fourier. en el intervalo $[0,1]$.

Para eso, vemos a G como función de x y con parámetro x' y expande esta función y calculamos su serie seno de Fourier. La cual es igual a $G(x;x')$ en su extensión impar.

porque al hacer la serie impar, el intervalo extiende a $[-1,1]$

con $a=0$, $b=1$, $L=2$

El n-ésimo coeficiente es $b_n = \frac{2}{L}\int_a^b G(x;x')\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx$

$$\Rightarrow b_n = 2\int_0^1\left[\frac{1}{2}\cot(2)\operatorname{sen}(2x')\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}U(x'-x)\cos(2x')\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}U(x-x')\cos(2x)\operatorname{sen}(2x')\right]\operatorname{sen}(\pi n x)\,dx$$

$$\Rightarrow b_n = \cot(2)\operatorname{sen}(2x')\int_0^1 \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(\pi n x)\,dx - \cos(2x')\int_0^1 U(x'-x)\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(\pi n x)\,dx - \operatorname{sen}(2x')\int_0^1 U(x-x')\cos(2x)\operatorname{sen}(\pi n x)\,dx$$

Calculamos cada una de las integrales:

$$\text{i)} \int_0^1 \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(\pi n x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2x-\pi n x) - \cos(2x+\pi n x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(2x-\pi n x)}{2-\pi n} - \frac{\operatorname{sen}(2x+\pi n x)}{2+\pi n}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(2-\pi n)}{2-\pi n} - \frac{\operatorname{sen}(2+\pi n)}{2+\pi n}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(2+\pi n)}{2-\pi n} - \frac{\operatorname{sen}(2+\pi n)}{2+\pi n}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(2+\pi n)}{2}\left[\frac{1}{2-\pi n} - \frac{1}{2+\pi n}\right]$$

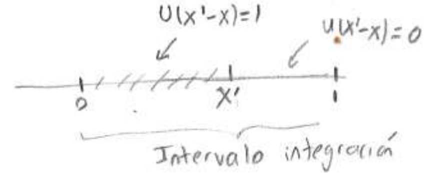
$$= \frac{\operatorname{sen}(2+\pi n)}{2}\left[\frac{2+\pi n - (2-\pi n)}{4-\pi^2 n^2}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(2+\pi n)}{2}\left[\frac{2\pi n}{4-\pi^2 n^2}\right]$$

$$= \operatorname{sen}(2+\pi n)\left[\frac{\pi n}{4-\pi^2 n^2}\right]$$

ii) $\int_0^1 U(x'-x)\,\text{sen}(2x)\,\text{sen}(\pi n x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 U(x'-x)\left[\cos(2x-\pi n x)-\cos(2x+\pi n x)\right]dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{x'} \cos(2x-\pi n x)-\cos(2x+\pi n x)\,dx$ ← Porque:



$= \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}(2x-\pi n x)}{2-\pi n} - \frac{\text{sen}(2x+\pi n x)}{2+\pi n}\right]_0^{x'}$

Tomar en cuenta que $x' \in [0,1]$ siempre.

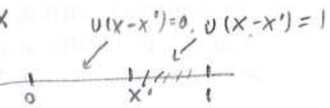
$= \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}(2x'-\pi n x')}{2-\pi n} - \frac{\text{sen}(2x'+\pi n x')}{2+\pi n}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2+\pi n)\,\text{sen}(2x'-\pi n x') - (2-\pi n)\,\text{sen}(2x'+\pi n x')}{4-\pi^2 n^2}\right]$

$= \frac{\left(1+\frac{\pi n}{2}\right)\text{sen}((2-\pi n)x') - \left(1-\frac{\pi n}{2}\right)\text{sen}((2+\pi n)x')}{4-\pi^2 n^2}$

---

iii) $\int_0^1 U(x-x')\cos(2x)\,\text{sen}(\pi n x) = \frac{1}{2}\int_0^1 U(x-x')\left[\text{sen}(2x+\pi n x)+\text{sen}(\pi n x-2x)\right]dx$ ← Porque



$= \frac{1}{2}\int_{x'}^1 \text{sen}(2x+\pi n x)+\text{sen}(\pi n x-2x)\,dx$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2x+\pi n x)}{2+\pi n} + \frac{\cos(\pi n x-2x)}{\pi n-2}\right]_{x'}^1$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2+\pi n)}{2+\pi n} + \frac{\cos(\pi n-2)}{\pi n-2} - \frac{\cos(2x'+\pi n x')}{2+\pi n} - \frac{\cos(\pi n x'-2x')}{\pi n-2}\right]$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2+\pi n)}{2+\pi n} + \frac{\cos(2-\pi n)}{\pi n-2} - \frac{\cos(2x'+\pi n x')}{2+\pi n} - \frac{\cos(\pi n x'-2x')}{\pi n-2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(\pi n-2)\cos((2+\pi n)x') + (2+\pi n)\cos((\pi n-2)x')}{\pi^2 n^2-4} - \frac{\cos(2+\pi n)(2\pi n)}{\pi^2 n^2-4}\right]$

$= \frac{\left(\frac{\pi n}{2}-1\right)\cos((2+\pi n)x') + \left(1+\frac{\pi n}{2}\right)\cos((\pi n-2)x')}{\pi^2 n^2-4} - \frac{\cos(2+\pi n)(\pi n)}{\pi^2 n^2-4}$

Entonces, regresamos a la expresión de b_n y sustituimos estos resultados:

$$b_n = \cot(2)\,\text{sen}(2x')\left[\frac{\text{sen}(2+\pi n)\,\pi n}{4-\pi^2 n^2}\right] - \cos(2x')\left[\frac{\left(1+\frac{\pi n}{2}\right)\text{sen}((2-\pi n)x') - \left(1-\frac{\pi n}{2}\right)\text{sen}((2+\pi n)x')}{4-\pi^2 n^2}\right]$$
$$-\,\text{sen}(2x')\left[\frac{\left(\frac{\pi n}{2}-1\right)\cos((2+\pi n)x') + \left(1+\frac{\pi n}{2}\right)\cos((\pi n-2)x')}{\pi^2 n^2-4} - \frac{\cos(2+\pi n)(\pi n)}{\pi^2 n^2-4}\right]$$

Porque $\cot(2)\,\text{sen}(2+\pi n) = \cot(2+\pi n)\,\text{sen}(2+\pi n) = \cos(2+\pi n)$

$$= \frac{\cos(2+\pi n)\,\text{sen}(2x')\,\pi n}{4-\pi^2 n^2} + \frac{-\cos(2x')\left(1+\frac{\pi n}{2}\right)\text{sen}((2-\pi n)x') + \left(1-\frac{\pi n}{2}\right)\cos(2x')\,\text{sen}((2+\pi n)x')}{4-\pi^2 n^2}$$
$$- \frac{\text{sen}(2x')\left(\frac{\pi n}{2}-1\right)\cos((2+\pi n)x') + \text{sen}(2x')\left(1+\frac{\pi n}{2}\right)\cos((\pi n-2)x')}{\pi^2 n^2-4} + \frac{\cos(2+\pi n)\,\text{sen}(2x')(\pi n)}{\pi^2 n^2-4}$$

$$= \frac{-\left(1+\frac{\pi n}{2}\right)\cos(2x')\,\text{sen}\left((2-\pi n)x'\right) + \left(1-\frac{\pi n}{2}\right)\cos(2x')\,\text{sen}\left((2+\pi n)x'\right) + \left(\frac{\pi n}{2}-1\right)\text{sen}(2x')\cos\left((2+\pi n)x'\right) + \left(1+\frac{\pi n}{2}\right)\text{sen}(2x')\cos\left((\pi n-2)x'\right)}{4-\pi^2 n^2}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{\pi n}{2}\right)\left[\text{sen}(2x')\cos\left((2-\pi n)x'\right) - \cos(2x')\,\text{sen}\left((2-\pi n)x'\right)\right] + \left(\frac{\pi n}{2}-1\right)\left[\text{sen}(2x')\cos\left((2+\pi n)x'\right) - \cos(2x')\,\text{sen}\left((2+\pi n)x'\right)\right]}{4-\pi^2 n^2}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{\pi n}{2}\right)\text{sen}\left(2x'-(2-\pi n)x'\right) + \left(\frac{\pi n}{2}-1\right)\text{sen}\left(2x'-(2+\pi n)x'\right)}{4-\pi^2 n^2}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{\pi n}{2}\right)\text{sen}(\pi n x') + \left(\frac{\pi n}{2}-1\right)\text{sen}(-\pi n x')}{4-\pi^2 n^2}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{\pi n}{2}\right)\text{sen}(\pi n x') - \left(\frac{\pi n}{2}-1\right)\text{sen}(\pi n x')}{4-\pi^2 n^2}$$

$$= \frac{2\,\text{sen}(\pi n x')}{4-\pi^2 n^2}$$

Entonces, estos son los b_n de la serie Seno de Fourier de $G(x;x')$. Entonces, se puede escribir como:

$$G(x;x') = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \,\text{sen}(\pi n x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,\text{sen}(\pi n x')}{4-\pi^2 n^2}\,\text{sen}(\pi n x)$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(\pi n x')\,\text{sen}(\pi n x)}{4-\pi^2 n^2}$$

lo que se quería probar

Dada la función de Green, la solución de $y''(x) + 4y(x) = x^2$ se obtiene como

$$y(x) = \int_0^1 G(x,x') f(x') dx'$$

$$= \int_0^1 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi n x')\operatorname{sen}(\pi n x)}{4-\pi^2 n^2} \cdot x'^2 \, dx'$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(\pi n x')\operatorname{sen}(\pi n x)}{4-\pi^2 n^2} x'^2 \, dx'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\operatorname{sen}(\pi n x)}{4-\pi^2 n^2} \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi n x') x'^2 \, dx'$$

Una integral de la forma

$\int \operatorname{sen}(ax) x^2 dx$ se hace por partes

$$= -x^2 \frac{\cos(ax)}{a} + \int \frac{2x\cos(ax)}{a} dx$$

y por partes de nuevo

$$= \frac{-x^2\cos(ax)}{a} + \frac{2x\operatorname{sen}(ax)}{a^2} - \int \frac{2\operatorname{sen}(ax)}{a^2}$$

$$= \frac{-x^2\cos(ax)}{a} + \frac{2x\operatorname{sen}(ax)}{a^2} + \frac{2\cos(ax)}{a^3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\operatorname{sen}(\pi n x)}{4-\pi^2 n^2} \left[\frac{-x'^2\cos(\pi n x')}{\pi n} + \frac{2x'\operatorname{sen}(\pi n x')}{\pi^2 n^2} + \frac{2\cos(\pi n x')}{\pi^3 n^3} \right]_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\operatorname{sen}(\pi n x)}{4-\pi^2 n^2} \left[\frac{-\cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{2\operatorname{sen}(\pi n)}{\pi^2 n^2} + \frac{2\cos(\pi n)}{\pi^3 n^3} - \frac{2}{\pi^3 n^3} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\operatorname{sen}(\pi n x)}{4-\pi^2 n^2} \left[-\frac{(-1)^n}{\pi n} + \frac{(-1)^n \cdot 2}{\pi^3 n^3} - \frac{2}{\pi^3 n^3} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4-\pi^2 n^2} \left[-\frac{2}{\pi^3 n^3} + (-1)^n \left(\frac{2}{\pi^3 n^3} - \frac{1}{\pi n} \right) \right] \operatorname{sen}(\pi n x)$$

← Ésta es la solución $y(x)$ que como vemos, está escrita en una serie de senos.

Ahora resolvemos la ecuación original $y''+4y=x^2$ y comparamos:

•) Solución homogénea: $y''+4y=0$. por inspección se puede ver que la solución es $y_H(x) = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x)$

••) Solución particular: $y''+4y = x^2$

Proponemos una solución de la forma $y = ax^2+bx+c \rightarrow y' = 2ax+b \rightarrow y''=2a$

$\Rightarrow$ Sustituimos: $2a + 4(ax^2+bx+c) = x^2 \rightarrow 4ax^2+4bx+2a+4c = x^2$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 4a &= 1 \\ b &= 0 \\ 2a+4c &= 0 \end{aligned} \quad \text{y por tanto, } \begin{aligned} a &= 1/4 \\ c &= -1/8 \end{aligned}$$

por lo que la solución particular es $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$

Entonces, la solución general es: $y(x) = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$

Pero queremos que $y(0) = y(1) = 0$

$y(0) = A - 1/8 = 0 \longrightarrow A = 1/8$

$y(1) = A\cos(2) + B\,\mathrm{sen}(2) + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 0 \rightarrow \frac{1}{8}\cos(2) + B\,\mathrm{sen}(2) + \frac{1}{8} = 0 \rightarrow B = \frac{-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(2)}{\mathrm{sen}(2)} = \frac{-\frac{1}{8}(1+\cos(2))}{\mathrm{sen}(2)}$

Y por tanto, la solución es: $y(x) = \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{-\frac{1}{8}(1+\cos(2))}{\mathrm{sen}(2)}\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$

Para comprobar si es igual a la solución de antes obtenida con Green, vamos a expandir $y(x)$ como una serie seno en $[-1,1]$ para ver si nos da la misma serie de antes.

Calculamos los coeficientes de cada parte de $y(x)$ por separado:

•) $\cos(2x)$: $b_{1_n} = 2\int_0^1 \cos(2x)\,\mathrm{sen}(\pi n x)\,dx$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}(2x+\pi n x) - \mathrm{sen}(2x-\pi n x)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \mathrm{sen}((2+\pi n)x) - \mathrm{sen}((2-\pi n)x)\,dx$$

$$= -\frac{\cos((2+\pi n)x)}{2+\pi n} + \frac{\cos((2-\pi n)x)}{2-\pi n}\Bigg|_0^1$$

$$= -\frac{\cos(2+\pi n)}{2+\pi n} + \frac{\cos(2-\pi n)}{2-\pi n} + \frac{1}{2+\pi n} - \frac{1}{2-\pi n}$$

✓ porque $\cos(2+\pi n) = \cos(2-\pi n)$

$$= -\frac{\cos(2+\pi n)}{2+\pi n} + \frac{\cos(2+\pi n)}{2-\pi n} + \frac{1}{2+\pi n} - \frac{1}{2-\pi n}$$

$$= \frac{[-(2-\pi n) + (2+\pi n)]\cos(2+\pi n)}{4-\pi^2 n^2} + \frac{2-\pi n - (2+\pi n)}{4-\pi^2 n^2}$$

$$= \frac{2\pi n\cos(2+\pi n) - 2\pi n}{4-\pi^2 n^2} = \frac{2\pi n[\cos(2)\cos(\pi n) - \mathrm{sen}(2)\,\mathrm{sen}(\pi n)] - 2\pi n}{4-\pi^2 n^2}$$

$$= \frac{2\pi n(-1)^n\cos(2) - 2\pi n}{4-\pi^2 n^2} = \frac{2\pi n[(-1)^n\cos(2) - 1]}{4-\pi^2 n^2}$$

ii) $\underline{sen(2x)}$:

$$b_{2n} = 2\int_0^1 sen(2x)\, sen(\pi n x)\, dx$$
$$= 2\int_0^1 \frac{1}{2}\left[\cos(2x-\pi n x) - \cos(2x+\pi n x)\right] dx$$
$$= \int_0^1 \cos(2x-\pi n x) - \cos(2x+\pi n x)\, dx$$
$$= \frac{sen(2x-\pi n x)}{2-\pi n} - \frac{sen(2x+\pi n x)}{2+\pi n}\Bigg|_0^1$$
$$= \frac{sen(2-\pi n)}{2-\pi n} - \frac{sen(2+\pi n)}{2+\pi n} = sen(2+\pi n)\left[\frac{1}{2-\pi n} - \frac{1}{2+\pi n}\right]$$
$$= \frac{2\pi n}{4-\pi^2 n^2}\, sen(2+\pi n) = \frac{2\pi n}{4-\pi^2 n^2}\left[sen(2)\cos(\pi n) + sen(\pi n)\cos(2)\right] = \frac{(-1)^n\, 2\pi n\, sen(2)}{4-\pi^2 n^2}$$

iii) $\underline{x^2}$:

$$b_{3n} = 2\int_0^1 x^2\, sen(\pi n x)\, dx$$ ← ya calculamos este tipo de integral

$$= 2\left[-\frac{x^2\cos(\pi n x)}{\pi n} + \frac{2x\, sen(\pi n x)}{\pi^2 n^2} + \frac{2\cos(\pi n x)}{\pi^3 n^3}\right]_0^1$$
$$= 2\left[-\frac{\cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{sen(\pi n)}{\pi^2 n^2} + \frac{2\cos(\pi n)}{\pi^3 n^3} - \frac{2}{\pi^3 n^3}\right]$$
$$= 2\left[-\frac{(-1)^n}{\pi n} + \frac{2(-1)^n}{\pi^3 n^3} - \frac{2}{\pi^3 n^3}\right]$$
$$= \frac{-4}{\pi^3 n^3} + (-1)^n\left(\frac{4}{\pi^3 n^3} - \frac{2}{\pi n}\right)$$

iv) $\underline{-\frac{1}{8}}$:

$$b_{4n} = 2\int_0^1 -\frac{1}{8}\, sen(\pi n x)\, dx$$
$$= -\frac{1}{4}\int_0^1 sen(\pi n x)$$
$$= \frac{1}{4}\, \frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\Bigg|_0^1$$
$$= \frac{1}{4}\frac{\cos(\pi n)}{\pi n} - \frac{1}{4}\frac{\cos(0)}{\pi n}$$
$$= \frac{(-1)^n - 1}{4\pi n}$$

Entonces, regresando a la expresión de $y(x) = \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{-\frac{1}{8}(1+\cos(2))}{\operatorname{sen}(2)}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$,

Calculamos su coeficiente b_n usando lo calculado antes:

$$b_n = \frac{1}{8} b_{1n} + \frac{-\frac{1}{8}(1+\cos(2))}{\operatorname{sen}(2)} b_{2n} + \frac{1}{4} b_{3n} + b_{4n}$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{2\pi n\left[(-1)^n\cos(2)-1\right]}{4-\pi^2n^2} + \frac{-\frac{1}{8}(1+\cos(2))}{\cancel{\operatorname{sen}(2)}}\,\frac{(-1)^n 2\pi n \cancel{\operatorname{sen}(2)}}{4-\pi^2n^2} + \frac{1}{4}\left[-\frac{4}{\pi^3n^3} + (-1)^n\left(\frac{4}{\pi^3n^3} - \frac{2}{\pi n}\right)\right] + \frac{(-1)^n-1}{4\pi n}$$

$$= \cancel{\frac{1}{8}\,\frac{2\pi n(-1)^n\cos(2)}{4-\pi^2n^2}} - \frac{2\pi n}{8(4-\pi^2n^2)} - \frac{(-1)^n 2\pi n}{8(4-\pi^2n^2)} - \cancel{\frac{(-1)^n\cos(2)\,2\pi n}{8(4-\pi^2n^2)}} - \frac{1}{\pi^3n^3} + (-1)^n\left(\frac{1}{\pi^3n^3} - \frac{1}{2\pi n}\right) + \frac{(-1)^n-1}{4\pi n}$$

$$= (-1)^n\left[-\frac{2\pi n}{8(4-\pi^2n^2)} + \frac{1}{\pi^3n^3} - \frac{1}{2\pi n} + \frac{1}{4\pi n}\right] + \left[-\frac{2\pi n}{8(4-\pi^2n^2)} - \frac{1}{\pi^3n^3} - \frac{1}{4\pi n}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{4-\pi^2n^2}\left[-\frac{2\pi n}{8} + \frac{4-\pi^2n^2}{\pi^3n^3} - \frac{4-\pi^2n^2}{2\pi n} + \frac{4-\pi^2n^2}{4\pi n}\right] + \frac{1}{4-\pi^2n^2}\left[-\frac{2\pi n}{8} - \frac{4-\pi^2n^2}{\pi^3n^3} - \frac{4-\pi^2n^2}{4\pi n}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{4-\pi^2n^2}\left[\cancel{-\frac{\pi n}{4}} + \frac{4}{\pi^3n^3} - \frac{1}{\pi n} - \frac{2}{\pi n} + \cancel{\frac{\pi n}{2}} + \cancel{\frac{1}{\pi n}} \cancel{- \frac{\pi n}{4}}\right] + \frac{1}{4-\pi^2n^2}\left[\cancel{-\frac{\pi n}{4}} - \frac{4}{\pi^3n^3} + \cancel{\frac{1}{\pi n}} \cancel{- \frac{1}{\pi n}} + \cancel{\frac{\pi n}{4}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{4-\pi^2n^2}\left[\frac{4}{\pi^3n^3} - \frac{2}{\pi n}\right] + \frac{1}{4-\pi^2n^2}\left[-\frac{4}{\pi^3n^3}\right]$$

$$= \frac{2}{4-\pi^2n^2}\left[-\frac{2}{\pi^3n^3} + (-1)^n\left(\frac{2}{\pi^3n^3} - \frac{1}{\pi n}\right)\right]$$

Entonces, la solución $y(x)$ se puede escribir como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\pi n x)$$

$$= \sum_{n=n}^{\infty} \frac{2}{4-\pi^2n^2}\left[-\frac{2}{\pi^3n^3} + (-1)^n\left(\frac{2}{\pi^3n^3} - \frac{1}{\pi n}\right)\right] \operatorname{sen}(\pi n x)$$

Vemos que esta solución conseguida con el "método usual" para resolver ecuaciones diferenciales es igual a la que habíamos conseguido con funciones de Green.

7. Resolver el siguiente EDP con condiciones iniciales usando el método de separación de variables:

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, y < c, 0 < z < L\}$

Suponemos que la solución es de la forma $u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ y sustituimos en la EDP

$$\frac{\partial^2 (X(x)Y(y)Z(z))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X(x)Y(y)Z(z))}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (X(x)Y(y)Z(z))}{\partial z^2} = 0$$

$$\rightarrow Y(y)Z(z)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)Z(z)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + X(x)Y(y)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0 \quad \leftarrow \text{Dividimos por } X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$$

Como ambos lados dependen de distintas variables pero son iguales, deben de ser igual a una constante $-\alpha^2$

$$\rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\alpha^2 \quad \ldots (1), \qquad -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -\alpha^2$$

Seguimos con el lado derecho:

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y}{dy^2} = -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \alpha^2$$

Ambos lados dependen de distintas variables pero son iguales $\Rightarrow$ deben de ser iguales a una cte $-\beta^2$

$$\rightarrow \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 \quad \ldots (2), \qquad -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \alpha^2 = -\beta^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \alpha^2 + \beta^2 \equiv \gamma^2 \quad \ldots (3)$$

Las ecuaciones ordinarias son entonces: y sus soluciones son (por pura inspección se resuelven):

i) $\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\alpha^2 \rightarrow \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\alpha^2 X(x) \longrightarrow X(x) = A_1 \cos(\alpha x) + B_1 \operatorname{sen}(\alpha x)$

ii) $\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\beta^2 \rightarrow \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\beta^2 Y(y) \longrightarrow Y(y) = A_2 \cos(\beta y) + B_2 \operatorname{sen}(\beta y)$

iii) $\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \gamma^2 \rightarrow \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \gamma^2 Z(z) \longrightarrow Z(z) = A_3 \cosh(\gamma z) + B_3 \sinh(\gamma z)$

Ahora usamos las condiciones iniciales:

°) $u(x,y,z)=0$ para $x=0$:
$\cdot\ X(0)Y(y)Z(z)=0 \quad \forall y,z \Rightarrow X(0)=0 \rightarrow A_1\cos(0)+B_1\operatorname{sen}(0)=0 \Rightarrow \underline{A_1=0}$

°°) $u(x,y,z)=0$ para $x=c$:
$\cdot\ X(c)Y(y)Z(z)=0 \quad \forall y,z \Rightarrow X(c)=0 \rightarrow B_1\operatorname{sen}(\alpha c)=0 \rightarrow \alpha c=n\pi$ para $n\in\mathbb{N}$

$\rightarrow \underline{\alpha_n=\frac{\pi n}{c}} \qquad \therefore \underline{X_n(x)=B_n\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c}x\right)}$

°°°) $u(x,y,z)=0$ para $y=0$:
$\cdot\ X(x)Y(0)Z(z)=0 \quad \forall x,z \Rightarrow Y(0)=0 \rightarrow A_2\cos(0)+B_2\operatorname{sen}(0)=0 \Rightarrow \underline{A_2=0}$

°°°°) $u(x,y,z)=0$ para $y=c$:
$\cdot\ X(x)Y(c)Z(z)=0, \quad \forall x,z \Rightarrow Y(c)=0 \rightarrow B_2\operatorname{sen}(\beta c)=0 \rightarrow \beta c=m\pi,\ m\in\mathbb{N}$

$\rightarrow \underline{\beta_m=\frac{\pi m}{c}} \qquad \therefore \underline{Y_m(y)=B_m\operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c}y\right)}$

—) $u(x,y,z)=0$ para $z=0$:
$\cdot\ X(x)Y(y)Z(0)=0 \quad \forall x,y \Rightarrow Z(0)=0 \rightarrow A_3\cosh(0)+B_3\operatorname{senh}(0)=0 \rightarrow \underline{A_3=0}$

$\therefore \underline{Z(z)=B_3\operatorname{senh}(\gamma z)}$ con $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=\frac{\pi^2m^2}{c^2}+\frac{\pi^2n^2}{c^2}$

Entonces, las soluciones posibles son:

$u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)=B_n\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c}x\right)B_m\operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c}y\right)B_3\operatorname{senh}(\gamma z)$ para $n,m\in\mathbb{N}$

podemos "absorber" la constante B_3 en la B_n para omitirla. Y juntamos el producto $B_n B_m$ como una sola constante B_{nm}

Y como la ec. dif. es lineal, entonces la suma de soluciones es una solución.

Por tanto, una solución general es:

$$\underline{u(x,y,z)=\sum_{n,m=0}^{\infty}B_{n,m}\operatorname{senh}(\gamma z)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c}y\right)}$$

Luego imponemos la última condición, $U(x,y,z) = V$ cuando $z = L$

$$\Rightarrow \sum_{n,m=0}^{\infty} B_{nm} \operatorname{senh}(\gamma L) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c} y\right) = V$$

definimos $b_{nm} := B_{nm} \operatorname{senh}(\gamma L)$

$$\rightarrow \sum_{n,m}^{\infty} b_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c} y\right) = V \quad \ldots (4)$$

Que es una serie de Fourier en senos en x, y.

Para calcular los coeficientes b_{nm} correctos, usaremos las condiciones de ortogonalidad de las funciones $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{c} x\right)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi j}{c} x\right)$. Que cumplen:

$$\int_0^c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi j}{c} x\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^c \cos\left(\frac{\pi}{c}x(i-j)\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{c}(i+j)\right) dx$$

Si $i \neq j \rightarrow$ $$= \frac{1}{2}\frac{c}{\pi(i-j)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{c}x(i-j)\right) - \frac{c}{\pi(i+j)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{c}(i+j)\right)\Bigg|_0^c = \frac{1}{2}\frac{c}{\pi(i-j)} \operatorname{sen}(\pi(i-j)) - \frac{c \operatorname{sen}(\pi(i+j))}{\pi(i+j)} = \underline{0}$$

Si $i = j \rightarrow$ $$= \frac{1}{2}\int_0^c \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi x}{c} 2i\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^c 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{c} 2i\right) = \underline{\frac{c}{2}}$$

$$\text{Entonces: } \int_0^c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi j}{c} x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ c/2 & \text{si } i = j \end{cases} \quad \ldots (5)$$

Entonces, podemos obtener los coeficientes b_{nm} en $\sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c} y\right) = V$ usando argumentos similares a los que habíamos usado para series en una dimensión para $p, q \in \mathbb{N}$

· Multiplicamos ambos lados por $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi p}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi q}{c} y\right)$

$$\rightarrow \sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi p}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi q}{c} y\right) = V \operatorname{sen}\left(\frac{\pi p}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi q}{c} y\right)$$

Integramos de 0, a c respecto a x, y

$$\rightarrow \int_0^c\int_0^c \sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi p}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi q}{c} y\right) dx\,dy = \int_0^c\int_0^c V \operatorname{sen}\left(\frac{\pi p}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi q}{c} y\right) dx\,dy$$

$$\rightarrow \sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm} \left(\int_0^c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi p}{c} x\right) dx\right)\left(\int_0^c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi q}{c} y\right) dy\right) = V \int_0^c\int_0^c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi p}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi q}{c} y\right) dx\,dy$$

usamos las condiciones de ortogonalidad (5), por lo que se anula la suma excepto cuando $p = n$, $q = m$, donde ambas integrales valen $c/2$:

$$\rightarrow b_{nm}\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right) = V \int_0^c\int_0^c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c} y\right) dx\,dy$$

$$\text{y entonces, } \quad b_{nm} = \frac{4V}{c^2} \int_0^c\int_0^c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c} y\right) dx\,dy$$

Calculamos los b_{nm}

$$b_{nm} = \frac{4V}{c^2}\int_0^c\int_0^c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c}y\right)dx\,dy$$

$$= \frac{4V}{c^2}\int_0^c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c}x\right)dx \int_0^c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c}y\right)dy$$

$$= \frac{4V}{c^2}\left[-\frac{c}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{c}x\right)\Big|_0^c\right]\left[-\frac{c}{\pi m}\cos\left(\frac{\pi m}{c}y\right)\Big|_0^c\right]$$

$$= \frac{4V}{c^2}\left[-\frac{c}{\pi n}\left(\cos(\pi n)-\cos(0)\right)\right]\left[-\frac{c}{\pi m}\left(\cos(\pi m)-\cos(0)\right)\right]$$

$$= \frac{4V}{c^2}\left[-\frac{c}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)\right]\left[-\frac{c}{\pi m}\left((-1)^m-1\right)\right]$$

$$= \frac{4V}{c^2}\left[-\frac{c}{\pi n}(-2)\right]\left[-\frac{c}{\pi m}(-2)\right]$$

si m y n son impares, sino alguno de los corchetes es 0 y el resultado es 0.

$$= \frac{16V}{\pi^2 nm}$$

Entonces, $b_{nm} = \begin{cases} \dfrac{16V}{\pi^2 mn}, & \text{si } m,n \text{ son ambos imares} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$

y por cómo definimos b_{nm} a partir de B_{nm}, tenemos $B_{nm} = \dfrac{b_{nm}}{\operatorname{senh}(\gamma L)}$

$$\rightarrow B_{nm} = \begin{cases} \dfrac{16V}{\pi^2 mn \operatorname{senh}(\gamma L)}, & \text{si } m,n \text{ impares} \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

Luego, la solución general que cumple $u(x,y,L)=V$ es:

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} B_{nm}\operatorname{senh}(\gamma z)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c}y\right)$$

$$= \sum_{n,m \text{ impar}} \frac{16V}{\pi^2 mn\operatorname{senh}(\gamma L)}\operatorname{senh}(\gamma z)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{c}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{c}y\right)$$

Como n,m son impares, los reemplazamos por $n=2k+1$, $m=2j+1$ con $k\in\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{N}$ para iterar sólo en los impares

$$= \sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{16V}{\pi^2(2k+1)(2j+1)\operatorname{senh}(\gamma L)}\operatorname{senh}(\gamma z)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2k+1)}{c}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2j+1)}{c}y\right)$$

Finalmente, usamos que $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2 \Rightarrow \gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{c^2}+\frac{\pi^2 n^2}{c^2}} = \frac{\pi}{c}\sqrt{m^2+n^2} = \frac{\pi}{c}\sqrt{(2k+1)^2+(2j+1)^2}$

$$\Rightarrow u(x,y,z) = \sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{16V\operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{(2k+1)^2+(2j+1)^2}\,z\right)}{\pi^2(2k+1)(2j+1)\operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{(2k+1)^2+(2j+1)^2}\,L\right)}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2k+1)}{c}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2j+1)}{c}y\right)$$

b) $-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = E_u$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0<x<a,\ 0<y<b,\ 0<z<c\}$

con $u(x,y,z)$ anulándose en todos los lados del paralelepípedo

Proponemos una solución de la forma $u(x,y,z) = X_{(x)} Y_{(y)} Z_{(z)}$ y reemplazamos en la ec. dif:

$$-\left(\frac{\partial^2 XYZ}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 XYZ}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 XYZ}{\partial z^2}\right) = E\,XYZ$$

$$\Rightarrow -\left(YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2}\right) = E\,XYZ$$

Dividimos por XYZ $\Rightarrow$ $-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = E$

Despejamos lo que tenga X $\Rightarrow$ $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - E$

Ambos lados son funciones de distintas variables pero son iguales $\forall x,y,z$. Para que esto pase, se debe de tener que ambas partes son iguales a una cte $-\alpha^2$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2}_{(1)} \qquad -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\alpha^2 + E$$

despejamos lo que tenga Y $\Rightarrow$ $\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \alpha^2 - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - E$

$\forall y,z \Rightarrow$ Son iguales a una cte $-\beta^2$

Ambos lados son funciones de distintas variables pero son iguales

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2}_{(2)} \qquad \alpha^2 - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - E = -\beta^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \alpha^2 + \beta^2 - E \equiv \gamma^2}_{(3)}$$

Escribimos las 3 ecuaciones por separado y resolvemos:

1) $\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx} = -\alpha^2 \rightarrow \frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2 X \Rightarrow X(x) = A_1\cos(\alpha x) + B_1 \operatorname{sen}(\alpha x)$,

2) $\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2 \rightarrow \frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2 Y \Rightarrow Y(y) = A_2\cos(\beta y) + B_2\operatorname{sen}(\beta y)$,

3) $\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} = \alpha^2+\beta^2-E \rightarrow \frac{d^2Z}{dz^2} = (\alpha^2+\beta^2-E)Z \rightarrow \frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 Z$ con $\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2-E$

$\Rightarrow Z(z) = A_3 e^{\gamma z} + B_3 e^{-\gamma z}$

Aplicamos las condiciones de frontera:

·) Vale 0 en la cara $x=0 \rightarrow u(0,y,z)=0 \rightarrow X(0)Y(y)Z(z)=0 \;\forall y,z \rightarrow X(0)=0$

$\rightarrow A_1\cos(0) + B_1\operatorname{sen}(0) = 0 \rightarrow A_1 = 0$

··) Vale 0 en la cara $x=a \rightarrow u(a,y,z)=0 \rightarrow X(a)Y(y)Z(z)=0 \;\forall y,z \rightarrow X(a)=0$

$\rightarrow B_1\operatorname{sen}(\alpha a)=0 \rightarrow \alpha a = \pi n$ para $n\in\mathbb{Z}$

$\rightarrow \alpha = \frac{\pi n}{a}$ $\therefore X(x) = B_1\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{a}x\right)$

···) Vale 0 en cara $y=0 \rightarrow u(x,0,z)=0 \rightarrow X(x)Y(0)Z(z)=0 \;\forall x,z \rightarrow Y(0)=0$

$\rightarrow A_2\cos(0) + B_2\operatorname{sen}(0) = 0 \rightarrow A_2 = 0$

····) Vale 0 en cara $y=b \rightarrow u(x,b,z)=0 \rightarrow X(x)Y(b)Z(z)=0 \;\forall x,z \rightarrow Y(b)=0$

$\rightarrow B_2\operatorname{sen}(\beta b)=0 \rightarrow \beta b = \pi m$ con $m\in\mathbb{Z}$

$\rightarrow \beta = \frac{\pi m}{b}$ $\therefore Y(y) = B_2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{b}y\right)$

-) Vale 0 en cara $z=0 \rightarrow u(x,y,0)=0 \rightarrow X(x)Y(y)Z(0)=0 \;\forall x,y \rightarrow Z(0)=0$

$\rightarrow A_3 e^{\gamma 0} + B_3 e^{-\gamma 0} = 0$

$\rightarrow A_3 + B_3 = 0 \rightarrow B_3 = -A_3$

$\therefore Z(z) = A_3 e^{\gamma z} - A_3 e^{-\gamma z}$

$\Rightarrow Z(z) = A_3\left(e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}\right)$

i) Todavía nos falta que $u(x,y,z)$ valga 0 en el lado $z=c$.

$\Rightarrow u(x,y,c)=0 \rightarrow X(x)\,Y(y)\,Z(c)=0 \quad \forall x,y \Rightarrow Z(c)=0$

Si $A_3=0 \Rightarrow Z(z)=0$ y la solución se transforma en $U(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)=0$

$\rightarrow A_3\left(e^{\gamma c}-e^{-\gamma c}\right)=0$, entonces, si $A_3\neq 0 \Rightarrow$

$\rightarrow e^{\gamma c}=e^{-\gamma c}$

$\Rightarrow \dfrac{e^{\gamma c}}{e^{-\gamma c}}=1 \rightarrow e^{2\gamma c}=1$

Entonces, $2\gamma c=2\pi K i$ para $K\in\mathbb{Z}$ (porque $e^{2\pi k i}=1$)

$\rightarrow \gamma c=\pi K i$

$\rightarrow$ Elevamos al cuadrado $\rightarrow \gamma^2 c^2=-\pi^2 k^2$

usamos la definición de $\gamma \rightarrow (\alpha^2+\beta^2-E)\,c^2=-\pi^2k^2$

$\rightarrow \alpha^2+\beta^2-E=-\dfrac{\pi^2k^2}{c^2} \Rightarrow E=\alpha^2+\beta^2+\dfrac{\pi^2k^2}{c^2}$

usamos la definición de $\alpha,\beta \rightarrow E=\left(\dfrac{\pi^2n^2}{a^2}\right)+\left(\dfrac{\pi^2m^2}{b^2}\right)+\dfrac{\pi^2k^2}{c^2}$

$$\rightarrow E=\pi^2\left[\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right]$$

Entonces, la única forma de que se cumpla la condición $u(x,y,c)=0$ es que $E=\pi^2\left[\dfrac{n^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}+\dfrac{k^2}{c^2}\right]$ con n,m,k enteros.

Porque si $E=\pi^2\left[\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right]=\alpha^2+\beta^2+\frac{\pi^2k^2}{c^2}$

y tenemos que $\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-E}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-(\alpha^2+\beta^2+\frac{\pi^2k^2}{c^2})}=\sqrt{-\frac{\pi^2k^2}{c^2}}=\pi\sqrt{-\frac{k^2}{c^2}}$

En dicho caso, la solución es:

$$
\begin{aligned}
U(x,y,z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z) &= B_1\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi n}{a}x\right)\,B_2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi m}{b}y\right)\,A_3\left(e^{\gamma z}-e^{-\gamma z}\right)\\
&= C\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi n}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi m}{b}y\right)\left[e^{(\sqrt{-k^2/c^2}\,z)\pi}-e^{-(\sqrt{-k^2/c^2}\,z)\pi}\right]\\
&= C\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi n}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi m}{b}y\right)\left[e^{i\frac{k}{c}\pi z}-e^{-i\frac{k}{c}\pi z}\right]\\
&= 2iC\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi n}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi m}{b}y\right)\left[\frac{e^{i\frac{k\pi}{c}z}-e^{-i\frac{k\pi}{c}z}}{2i}\right]\\
&= 2iC\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi n}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi m}{b}y\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi k}{c}z\right)\\
&= D\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi n}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi m}{b}y\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi k}{c}z\right)
\end{aligned}
$$

con $C=B_1B_2A_3$

por la expresión compleja de seno

con D un coeficiente constante

En caso contrario, si E no tiene esta forma, entonces la solución es $U(x,y,z)=0$

Comprobación: $$U(x,y,z) = D\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi m}{b}y\right)\text{sen}\left(\frac{\pi k}{c}z\right)$$

Calculamos las derivadas: $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -D\frac{\pi^2 n^2}{a^2}\text{sen}\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi m}{b}y\right)\text{sen}\left(\frac{\pi k}{c}z\right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -D\frac{\pi^2 m^2}{b^2}\text{sen}\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi m}{b}y\right)\text{sen}\left(\frac{\pi k}{c}z\right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -D\frac{\pi^2 k^2}{c^2}\text{sen}\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi m}{b}y\right)\text{sen}\left(\frac{\pi k}{c}z\right)$$

Las sumamos $\Rightarrow$ $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\underbrace{\left(\frac{\pi^2 n^2}{a^2}+\frac{\pi^2 m^2}{b^2}+\frac{\pi^2 k^2}{c^2}\right)}_{-E}\underbrace{D\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi m}{b}y\right)\text{sen}\left(\frac{\pi k}{c}z\right)}_{U(x,y,z)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -EU$$

Además, se ve fácilmente que cumple las condiciones de frontera

- $U(0,y,z) = D\,\text{sen}(0)\,\text{sen}\left(\frac{\pi m}{b}y\right)\text{sen}\left(\frac{\pi k}{c}z\right) = 0$
- $U(a,y,z) = D\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{a}a\right)^{0}\text{sen}\left(\frac{\pi m}{b}y\right)\text{sen}\left(\frac{\pi k}{c}z\right) = 0$
- $U(x,0,z) = D\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\text{sen}(0)^{0}\,\text{sen}\left(\frac{\pi k}{c}z\right) = 0$
- $U(x,b,z) = D\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi m}{b}b\right)^{0}\text{sen}\left(\frac{\pi k}{c}z\right) = 0$
- $U(x,y,0) = D\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi m}{b}y\right)\text{sen}(0)^{0} = 0$
- $U(x,y,c) = D\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi m}{b}y\right)\text{sen}\left(\frac{\pi k}{c}c\right)^{0} = 0$