Teoría Cuántica de campos I: Tarea 7

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

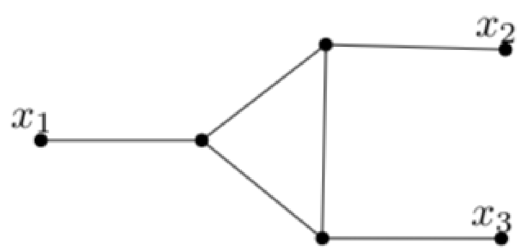
27 de enero de 2022

Problema 1

Considera la teoría con interacción ϕ^3 para un campo escalar real

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3$$

Uno de los diagramas de Feynman que contribuye a la función de correlación de tres puntos $G_3(x_1, x_2, x_3)$ es el siguiente

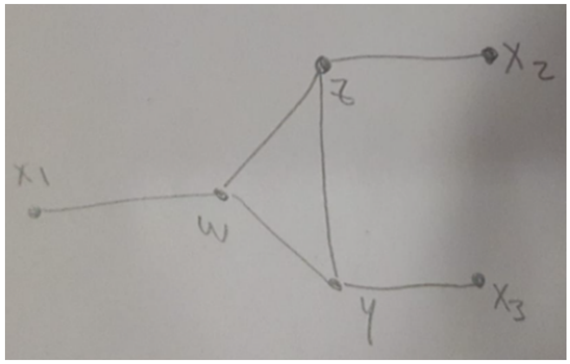


El objetivo principal de esta tarea es relacionar los elementos de matriz invariante $\mathcal{M}$ con los elementos de la matriz de dipersión $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = \mathbb{I} + (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum p_i\right) i\mathcal{M}$$

Escribe la contribución del diagrama, llamémosle $\mathcal{T}_3^{(3)}$, en el espacio de configuraciones. Para ello, tienes que escribir TODOS los propagadores del diagrama en el espacio de configuraciones y posteriormente integrar sobre los puntos internos del diagrama (por ahora sólo deja expresadas esas integrales).

Primero le asignamos nombre a los vértices internos.



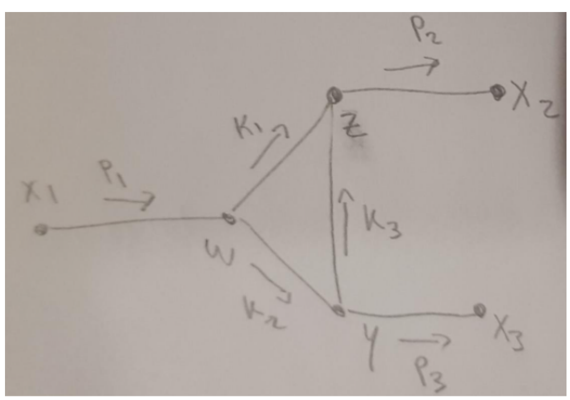
Para escribir la expresión correspondiente a este diagrama, seguimos las reglas de Feynman en el espacio de configuraciones (Peskin p.94). Para cada línea entre dos puntos (por ejemplo x, y), se agrega la cantidad $D_f(x-y)$ y para cada vértice interno (por ejemplo y) se agrega una integral $(-i\lambda)\int d^4y$. Además, se divide entre el factor de simetría S del diagrama. Entonces, la expresión para el diagrama de Feynman es:

$$\mathcal{T}_3^{(3)} = (-i\lambda)^3 \frac{1}{S} \int d^4w \int d^4y \int d^4z \;\; D_f(x_1-w)D_f(w-z)D_f(w-y)D_f(y-z)D_f(z-x_2)D_f(y-x_3)$$

El factor de simetría se puede calcular con la fórmula que vimos en la tarea 5. Simplemente hay que multiplicar 2^c (con c el número de patas de un mismo vértice contraídas entre sí) multiplicado por $l!$ por cada conjunto de l líneas intercambiables y multiplicado por $v!$ por cada v vértices intercambiables. Sin embargo, en este caso no hay líneas intercambiables ni puntos intercambiables en el dibujo, ni tampoco patas de un mismo vértice contraídas entre sí, por lo que $S = 2^0 \cdot 0! \cdot 0! = 1$. Por lo que ya no será necesario escribir este factor.

Asocia un momento a cada uno de los propagadores (llama p_1 al momento que va del punto x_1 hacia el lazo y $p_{2,3}$ a los momentos que salen del lazo y llegan a los puntos $x_{2,3}$) y escríbelos en términos de los propagadores en el espacio de momentos. Con esto vas a poder realizar las integrales sobre todos los puntos internos del diagrama de forma sencilla.

Asociamos los momentos como se muestra en la siguiente figura:



Ahora escribimos los propagadores en el espacio de momentos como vimos en clase, por ejemplo, el correspondiente a $D_f(x_1-w)$, al que le dimos el momento p_1, sería $\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{ie^{ip_1(x_1-w)}}{p_1^2-m^2+i\epsilon}$. Al hacerlo sobre todos los momentos, nos queda:

$$\mathcal{T}_3^{(3)} = \frac{(-i\lambda)^3}{((2\pi)^4)^6}\int d^4wd^4yd^4zd^4p_1d^4p_2d^4p_3d^4k_1d^4k_2d^4k_3 \frac{ie^{ip_1(x_1-w)}}{p_1^2-m^2+i\epsilon}\frac{ie^{ik_1(w-z)}}{k_1^2-m^2+i\epsilon}\frac{ie^{ik_2(w-y)}}{k_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{ie^{ik_3(y-z)}}{k_3^2-m^2+i\epsilon}$$
$$\frac{ie^{ip_2(z-x_2)}}{p_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{ie^{ip_3(y-x_3)}}{p_3^2-m^2+i\epsilon}$$
$$= \frac{(-i\lambda)^3}{((2\pi)^4)^6}\int d^4wd^4yd^4zd^4p_1d^4p_2d^4p_3d^4k_1d^4k_2d^4k_3\; e^{ix_1p_1}e^{-ix_2p_2}e^{-ix_3p_3}e^{iw(k_1+k_2-p_1)}e^{iy(-k_2+k_3+p_3)}e^{iz(-k_1-k_3+p_2)}$$
$$\frac{i}{p_1^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_1^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_3^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{p_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{p_3^2-m^2+i\epsilon}$$

Vemos que la única dependencia de las variables w, y, z se encuentra en las exponenciales $e^{iw(k_1+k_2-p_1)}$, $e^{iy(-k_2+k_3+p_3)}$, $e^{iz(-k_1-k_3+p_2)}$, las cuales se pueden integrar dando lugar a deltas de dirac, pues recordamos que la delta de dirac tiene la siguiente propiedad $\delta^4(x-\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ip(x-\alpha)}dp$. Entonces podemos hacer fácilmente las integrales sobre w, y, z:

$$\mathcal{T}_3^{(3)} = \frac{(-i\lambda)^3}{((2\pi)^4)^3}\int d^4p_1d^4p_2d^4p_3d^4k_1d^4k_2d^4k_3\; e^{ix_1p_1}e^{-ix_2p_2}e^{-ix_3p_3}\delta^4(k_1+k_2-p_1)\delta^4(-k_2+k_3+p_3)\delta^4(-k_1-k_3+p_2)$$
$$\frac{i}{p_1^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_1^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_3^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{p_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{p_3^2-m^2+i\epsilon}$$

Con ayuda de las deltas de dirac, es fácil integrar respecto a k_1 y k_3. Usamos $\delta(k_1+k_2-p_1)$ en la integral sobre k_1 para intercambiar k_1 por p_1-k_2 y usamos $\delta(-k_2+k_3+p_3)$ en la integral sobre k_3 para intercambiar k_3 por $-p_3+k_2$. Entonces nos queda:

$$\mathcal{T}_3^{(3)} = \frac{(-i\lambda)^3}{((2\pi)^4)^3}\int d^4p_1d^4p_2d^4p_3d^4k_2\; e^{ix_1p_1}e^{-ix_2p_2}e^{-ix_3p_3}\delta^4(-p_1+k_2+p_3-k_2+p_2)$$
$$\frac{i}{p_1^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(p_1-k_2)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(-p_3+k_2)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{p_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{p_3^2-m^2+i\epsilon}$$
$$= \frac{(-i\lambda)^3}{((2\pi)^4)^3}\int d^4p_1d^4p_2d^4p_3d^4k_2\; e^{ix_1p_1}e^{-ix_2p_2}e^{-ix_3p_3}\delta^4(p_1-p_3-p_2)$$
$$\frac{i}{p_1^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(p_1-k_2)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(-p_3+k_2)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{p_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{p_3^2-m^2+i\epsilon}$$

Hasta ahí lo dejamos por ahora.

Usa la fórmula de reducción LSZ para relacionar el elemento de matriz de dispersión con la función de correlación de tres puntos $G_3(x_1, x_2, x_3)$

$$\langle f|\mathcal{S}|i\rangle \propto \langle\Omega|T\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_2)\right]|\Omega\rangle$$

Para esto usamos la fórmula LSZ. Le llamamos p_i al momento que tiene la partícula entrante a un tiempo $-\infty$ y le llamamos p_{f_2} y p_{f_3} a los momentos de las dos partículas finales en un tiempo $+\infty$. Entonces, la fórmula LSZ como la vimos en clase nos dice que:

$$\langle f|S|i\rangle = \left[i\int d^4x_1e^{-ip_i\cdot x_1}(\Box_1+m^2)\right]\left[i\int d^4x_2e^{ip_{f_2}\cdot x_2}(\Box_2+m^2)\right]\left[i\int d^4x_3e^{ip_{f_3}\cdot x_3}(\Box_3+m^2)\right]\langle\Omega|\mathcal{T}\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_2)\right]|\Omega\rangle$$

Donde se pone el signo negativo a la exponencial de p_i porque es la partícula entrante y se pone el símbolo positivo a las exponenciales de p_{f_2}, p_{f_3} por ser las partículas que salen.

A partir del resultado anterior, encuentra la relación entre los elementos de la matriz de dispersión y la contribución del diagrama

$$\langle f|\mathcal{S}|i\rangle \propto \mathcal{T}_3^{(3)} + \cdots$$

Donde $\cdots$ representa todos los demás diagramas de $G_3(x_1, x_2, x_3)$ que no estás considerando.

Como hemos visto en clase, el objeto $\langle\Omega|T\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_2)\right]|\Omega\rangle$ se consigue como la suma de todos los diagramas conexos con puntos externos x_1, x_2, x_3. De entre estos diagramas que hay que sumar, sólo hemos considerado uno, por lo que tenemos que $\langle\Omega|T\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_2)\right]|\Omega\rangle = \mathcal{T}_3^{(3)} + \cdots$ donde $\cdots$ indica la suma sobre todos los demás diagramas. Por lo tanto, usando el resultado del paso anterior, tenemos que:

$$\langle f|S|i\rangle = \left[i\int d^4x_1 e^{-ip_i\cdot x_1}(\Box_1 + m^2)\right]\left[i\int d^4x_2 e^{ip_{f_2}\cdot x_2}(\Box_2 + m^2)\right]\left[i\int d^4x_3 e^{ip_{f_3}\cdot x_3}(\Box_3 + m^2)\right]\mathcal{T}_3^{(3)} + \cdots$$

Vimos en clase que integrar por partes dos veces una expresión del tipo $\int d^4x_1\ e^{\alpha\cdot x_1}(\Box_1 + m^2)$ da como resultado $\int d^4x_1\ (\alpha)^2 e^{\alpha\cdot x_1}$. Aplicando esto a cada una de las integrales entre corchetes, tenemos que:

$$\begin{aligned}\langle f|S|i\rangle &= \left[i\int d^4x_1 e^{-ip_i\cdot x_1}((-ip_i)^2 + m^2)\right]\left[i\int d^4x_2 e^{ip_{f_2}\cdot x_2}((ip_{f_2})^2 + m^2)\right]\left[i\int d^4x_3 e^{ip_{f_3}\cdot x_3}((ip_{f_3})^2 + m^2)\right]\mathcal{T}_3^{(3)} + \cdots\\ &= i^3\left[\int d^4x_1 e^{-ip_i\cdot x_1}(-p_i^2 + m^2)\right]\left[\int d^4x_2 e^{ip_{f_2}\cdot x_2}(-p_{f_2}^2 + m^2)\right]\left[\int d^4x_3 e^{ip_{f_3}\cdot x_3}(-p_{f_3}^2 + m^2)\right]\mathcal{T}_3^{(3)} + \cdots\end{aligned}$$

Ahora metemos la expresión para $\mathcal{T}_3^{(3)}$ a la que habíamos llegado antes

$$\begin{aligned}\langle f|\mathcal{S}|i\rangle = i^3 &\left[\int d^4x_1 e^{-ip_i\cdot x_1}(-p_i^2 + m^2)\right]\left[\int d^4x_2 e^{ip_{f_2}\cdot x_2}(-p_{f_2}^2 + m^2)\right]\left[\int d^4x_3 e^{ip_{f_3}\cdot x_3}(-p_{f_3}^2 + m^2)\right]\\ &\frac{(-i\lambda)^3}{((2\pi)^4)^3}\int d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4k_2\ e^{ix_1p_1}e^{-ix_2p_2}e^{-ix_3p_3}\delta^4(p_1 - p_3 - p_2)\\ &\frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{(-p_3 + k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} + \cdots\\ = &\frac{i^3(-i\lambda)^3}{((2\pi^4))^3}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4k_2\ e^{i(p_1 - p_i)\cdot x_1}(-p_i^2 + m^2)e^{i(p_{f_2} - p_2)\cdot x_2}(-p_{f_2}^2 + m^2)e^{i(p_{f_3} - p_3)\cdot x_3}(-p_{f_3}^2 + m^2)\\ &\delta^4(p_1 - p_3 - p_2)\frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{(-p_3 + k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} + \cdots\end{aligned}$$

Vemos que el integrando sólo depende de x_1 en el término $e^{i(p_1 - p_i)\cdot x_1}$, lo cual da lugar nuevamente a una delta de dirac, pues al integrar esto respecto a x_1 obtenemos $(2\pi)^4\delta^4(p_1 - p_i)$. Lo mismo pasa con x_2 y con x_3. Al hacer estas tres integrales llegamos a:

$$\begin{aligned}\langle f|\mathcal{S}|i\rangle = i^3(-i\lambda)^3 &\int d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4k_2\ \delta^4(p_1 - p_i)(-p_i^2 + m^2)\delta^4(p_{f_2} - p_2)(-p_{f_2}^2 + m^2)\delta^4(p_{f_3} - p_3)(-p_{f_3}^2 + m^2)\\ &\delta^4(p_1 - p_3 - p_2)\frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{(-p_3 + k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} + \cdots\end{aligned}$$

Las integrales restantes son sobre los momentos de los propagadores. Realiza las integrales que consideres inmediates (sólo te debería quedar una integral por hacer).

Hacemos las integrales sobre p_1, p_2, p_3 usando las deltas de dirac. Para hacer la integral de $\delta(p_1 - p_i)$ sobre p_1, cambiamos p_1 por p_i. Similarmente, la integral de $\delta^4(p_{f_2} - p_2)$, tiene el efecto de cambiar p_2 por p_{f_2} y con la de $\delta^4(p_{f_3}-p_3)$ cambiamos p_3 por p_{f_3}.

$$\langle f|\mathcal{S}|i\rangle = i^3(-i\lambda)^3\int d^4k_2\ (-p_i^2+m^2)(-p_{f_2}^2+m^2)(-p_{f_3}^2+m^2)\delta(p_i-p_{f_2}-p_{f_3})$$
$$\frac{i}{p_i^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(p_i-k_2)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(-p_{f_3}+k_2)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{p_{f_2}^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{p_{f_3}^2-m^2+i\epsilon}+\cdots$$

Luego, como ϵ se entiende como un número muy pequeño, tenemos que $(-p_i^2+m^2)\dfrac{i}{p_i^2-m^2+i\epsilon}\simeq -1$ y similarmente $(-p_{f_2}^2+m^2)\dfrac{1}{p_{f_2}^2-m^2+i\epsilon}\simeq -1$ y también $(-p_{f_3}^2+m^2)\dfrac{1}{p_{f_3}^2-m^2+i\epsilon}\simeq -1$ y entonces nos queda:

$$\begin{aligned}\langle f|\mathcal{S}|i\rangle &= i^3(-i\lambda)^3\int d^4k_2\ (-1)^3\delta(p_i-p_{f_2}-p_{f_3})\frac{i}{(p_i-k_2)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(-p_{f_3}+k_2)^2-m^2+i\epsilon}+\cdots\\ &= -\lambda^3\int d^4k_2\ \delta(p_i-p_{f_2}-p_{f_3})\frac{i}{(p_i-k_2)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(-p_{f_3}+k_2)^2-m^2+i\epsilon}+\cdots\end{aligned}$$

Finalmente, usando la expresión que acabas de obtener y la relación (2), identifica la contribución del diagrama al elemento de la matriz invariabe $i\mathcal{M}$

Por la relación (2), tenemos que $\mathcal{S}=\mathbb{I}+(2\pi)^4\delta^4\left(\sum p_i\right)i\mathcal{M}$, por lo que tenemos que $\langle i|\mathcal{S}|f\rangle = \langle i|f\rangle + (2\pi)^4\delta^4(\sum p_i)i\langle i|\mathcal{M}|f\rangle$.

Suponiendo que $|i\rangle, |f\rangle$ son distintos y $\langle i|f\rangle = 0$, tenemos que $\langle i|\mathcal{S}|f\rangle = (2\pi)^4\delta^4(\sum p_i)i\langle i|\mathcal{M}|f\rangle$ y por lo tanto $i\langle i|\mathcal{M}|f\rangle = \dfrac{\langle i|\mathcal{S}|f\rangle}{(2\pi)^4\delta^4(\sum p_i)}$

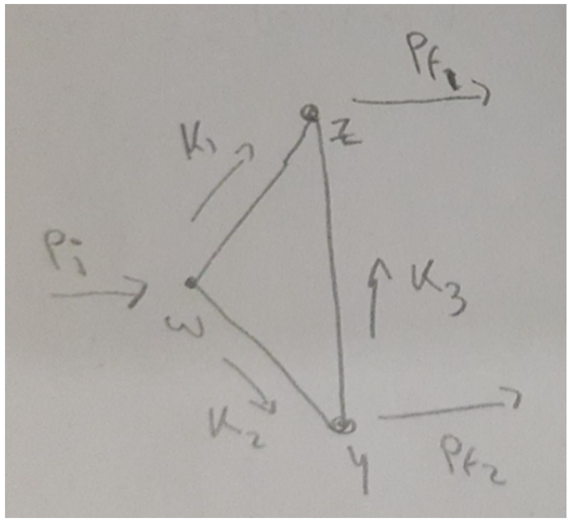
Lo cual, junto con el resultado anterior y considerando que $\sum p_i = p_i - p_{f_2} - p_{f_3}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}i\langle i|\mathcal{M}|f\rangle &= \frac{\langle i|\mathcal{S}|f\rangle}{(2\pi)^4\delta^4(\sum p_i)}\\ &= \frac{\left[-\lambda^3\int d^4k_2\delta(p_i-p_{f_2}-p_{f_3})\frac{i}{(p_i-k_2)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(-p_{f_3}+k_2)^2-m^2+i\epsilon}+\cdots\right]}{(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_{f_2}-p_{f_3})}\\ &= -\frac{\lambda^3}{(2\pi)^4}\int d^4k_2\frac{i}{(p_i-k_2)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(-p_{f_3}+k_2)^2-m^2+i\epsilon}+\cdots\end{aligned}$$

El procedimiento que acabas de llevar a cabo se lo conoce como 'amputar' el diagrama. Si te das cuenta, lo que pasó fue que eliminaste los propagadores asociados a los puntos externos y aplicaste conservación de momento para los propagadores internos. Una vez que entiendes la teoría y la física detrás de la fórmula de reducción LSZ es mucho menos tedioso trabajar directamente con diagramas amputados y reglas de Feynman en el espacio de momentos.

Corrobora tu resultado usando las reglas de Feynman de la página 95 del libro de Peskin en el diagrama amputado correspondiente.

Como dice el enunciado, para dibujar el diagrama amputado quitamos los puntos externos del diagrama, lo cual nos deja con lo siguiente:



Seguimos los pasos de la página 95 de Psekin:

1. Para cada propagador agregamos un factor $\dfrac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$, lo cual nos lleva a:

$$\frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon}$$

2. Por cada vértice agregamos un término $-i\lambda$. En total tenemos 3 vértices y entonces nos queda:

$$(-i\lambda)^3\frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon}$$

3. Por cada punto externo agregamos un factor $e^{-ip\cdot x}$. Pero no tenemos puntos externos, entonces no agregamos nada.

4. Imponemos condiciones de conservación del momento en cada vértice.

   En el vértice w la conservación de momento nos da que $p_i = k_1 + k_2$ y por tanto $k_1 = p_i - k_2$. En el y tenemos que $k_2 = p_{f_3} + k_3$ y por tanto $k_3 = k_2 - p_{f_3}$.

   Finalmente, en el vértice z, tenemos que $k_1 + k_3 = p_{f_2}$, pero ya encontramos expresiones de k_1 y k_3 y si fueramos a sustituirlas aquí obtendríamos que $p_i - k_2 + k_2 - p_{f_3} = p_{f_2} \;\Rightarrow\; p_i = p_{f_2} + p_{f_3}$. Lo cual nos habla de la conservación del momento antes y después de la interacción, pero no nos permite determinar k_2.

   Por lo tanto, sustituimos $k_1 = p_i - k_2$ y $k_3 = -p_{f_3} + k_2$ en la expresión que teníamos hasta ahora:

$$(-i\lambda)^3\frac{i}{(p_i - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{(-p_{f_3} + k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

5. Integra sobre todos los momentos indeterminados $\int \dfrac{d^4p}{(2\pi)^4}$.

   El único momento indeterminado es k_2, por lo que la expresión queda como:

$$(-i\lambda)^3\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{i}{(p_i - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{(-p_{f_3} + k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

5. Divide por el factor de simetría. Como dijimos antes, el factor es 1, por lo que la expresión no cambia y hemos llegado a que la contribución del diagrama a la matriz M es:

$$i\mathcal{M} = (-i\lambda)^3 \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p_i - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(-p_{f_3} + k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}$$