MAF Tarea 1 Tomás Ricardo Basile Álvarez

1. Fenómeno de Gibbs. Sea $f(x) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } x \in [0,\pi) \\ -\pi/4 & \text{si } x \in [-\pi, 0). \end{cases}$

a) Demostrar que la serie de Fourier viene dad por $S(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{2n+1}$

La función está definida en $[-\pi,\pi]$ y por tanto le podemos calcular los coeficientes como vimos en clase para este intervalo

• a_m :

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(mx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-\pi/4)\cos(mx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi/4)\cos(mx)\,dx$$ ← Por la def. de f en cada intervalo $[\pi,0]$, $[0,\pi]$

$$= -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{0}\cos(mx)\,dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}\cos(mx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{4m}\operatorname{sen}(mx)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{4m}\operatorname{sen}(mx)\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{4m}\left(\operatorname{sen}(0) - \operatorname{sen}(-m\pi)\right) + \frac{1}{4m}\left[\operatorname{sen}(m\pi) - \operatorname{sen}(0)\right]$$

como $m \in \mathbb{Z}$ → $\operatorname{sen}(m\pi) = 0$, $\operatorname{sen}(-m\pi) = 0$

$$= -\frac{1}{4m}(0-0) + \frac{1}{4m}(0-0)$$

$$= 0$$ ← Lo cual es de esperar porque f es impar y ⇒ $a_m = 0$

• b_m :

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(mx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\operatorname{sen}(mx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(mx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-\pi/4)\operatorname{sen}(mx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi/4)\operatorname{sen}(mx)\,dx$$ ← Por la def. de f en cada intervalo. $[-\pi,0]$, $[0,\pi]$

$$= -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen}(mx)\,dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}(mx)\,dx$$

$$= \frac{1}{4m}\cos(mx)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{4m}\cos(mx)\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4m}\left[\cos(0) - \cos(-\pi m)\right] - \frac{1}{4m}\left[\cos(m\pi) - \cos(0)\right]$$

como $m \in \mathbb{Z}$, $\cos(\pi m) = (-1)^m$

$$= \frac{1}{4m}\left[1 - \cos(\pi m)\right] - \frac{1}{4m}\left[\cos(m\pi) - 1\right]$$

$$= \frac{1}{4m}\left[1 - (-1)^m\right] - \frac{1}{4m}\left[(-1)^m - 1\right] = \frac{1}{2m}\left[1 - (-1)^m\right]$$

$$\therefore\ b_m = \begin{cases} \frac{1}{2m}\left[1-(-1)^m\right] = \frac{1}{2m}[1-1] = 0 & \text{para } m \text{ par} \\ \frac{1}{2m}\left[1-(-1)^m\right] = \frac{1}{2m}[1-(-1)] = \frac{1}{m} & \text{para } m \text{ impar} \end{cases}$$

Para no hacer la distinción entre par e impar, notamos que podemos escribir todos los impares como $2m+1$ para $m = 0,1,2,\ldots$

⇒ La serie de fourier queda como: $S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m\cos(mx) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m\operatorname{sen}(mx)$

Reemplazamos los valores de a_m, b_m : $S(f)(x) = \sum_{m\text{ impar}} 1/m \operatorname{sen}(mx)$

$$\rightarrow S(f)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1}\operatorname{sen}((2m+1)x)$$

b) Para N par, considerar la Suma de Fourier acotada $S_N(f)(x)$. Demostrar que

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}\,dx$$

En el ejercicio anterior obtuvimos que la serie de Fourier es $S(f)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \operatorname{Sen}((2m+1)x) \ldots (1)$

Luego, $S_N(f)$ es esta suma cortada hasta el término con $\operatorname{Sen}(Nx)$.

Como N es par y la suma tiene puros términos impares, $\operatorname{sen}(Nx)$ tiene coeficiente 0, por lo que la suma $S_N(f)$ se detiene en realidad en $\operatorname{Sen}((N-1)x)$. término que se consigue con $m=\frac{N}{2}$ en (1)

$$\Rightarrow S_N(f)(x) = \sum_{m=0}^{N/2} \frac{1}{2m+1} \operatorname{sen}((2m+1)x)$$

$$= \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x) + \ldots + \frac{1}{N-1}\operatorname{sen}((N-1)x)$$

Luego evaluamos en $x = \pi/N$

$$\rightarrow S_N(f)\left(\frac{\pi}{N}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{N}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{N}\right) + \ldots + \frac{1}{N-1}\operatorname{sen}\left(\frac{(N-1)\pi}{N}\right) \ \ldots (2)$$

Definimos ahora una función $g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x\pi)}{x}$ y veremos que la suma (2) es una suma de Riemann de $g(x)$ en el intervalo de 0 a 1.

Para construir la suma de Riemann de g, haremos el procedimiento usual.

Primero partimos el intervalo $[0,1]$ en $N/2$ pedacitos ← ($N/2$ es entero porque N es par)

Luego, cada uno de los $N/2$ pedacitos mide $\frac{1-0}{N/2} = \frac{1}{N/2} = \frac{2}{N}$

y por tanto, los intervalitos se ven como: $[0, 2/N]$, $[2/N, 4/N]$, $[4/N, 6/N]$, ..., $[\frac{N-2}{N}, 1]$

Posteriormente, tomamos el punto medio de cada intervalo: $1/N$, $3/N$, $5/N$, ..., $\frac{N-1}{N}$ (En general es $\frac{2i-1}{N}$ para $i\in\{1,\ldots,\frac{N}{2}\}$)

Ahora la suma de Riemann se obtiene evaluando g en cada punto medio y multiplicando por la longitud de cada intervalito $(2/N)$ y sumando:

Suma de Riemann de g : $$\sum_{i=1}^{N/2} g\left(\frac{2i-1}{N}\right)\left(\frac{2}{N}\right) = \sum_{i=1}^{N/2} \frac{\operatorname{sen}\left(\pi\left(\frac{2i-1}{N}\right)\right)}{\left(\frac{2i-1}{N}\right)}\left(\frac{2}{N}\right)$$ ← por la def. de g

$$= \sum_{i=1}^{N/2} \frac{2}{2i-1} \operatorname{sen}\left(\pi\left(\frac{2i-1}{N}\right)\right)$$

$$= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{N}\right) + \frac{2}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{N}\right) + \frac{2}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{N}\right) + \ldots + \frac{2}{N-1}\operatorname{sen}\left(\frac{(N-1)\pi}{N}\right)$$ ← Notamos que esta suma es el doble de la suma (2)

Pero según la teoría de Riemann, conforme aumenta la cantidad de intervalitos (es decir, $N\to\infty$), esta suma converge a la integral de $g(x)$ en $[0,1]$ *

Pero la suma de Riemann es el doble de la suma (2). Por lo que la suma (2) es la mitad de la suma de Riemann. $S_N(f)\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}$ (suma Riemann de g)

Y si consideramos el límite de $N\to\infty$, la suma de Rieman se convierte en integral y queda

$$\rightarrow \lim_{N\to\infty} S_N(f)\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}\,dx$$

* Esto porque g es integrable en $[0,1]$, ya que $g(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}$ es continua $\forall x \neq 0$. Y se puede hacer continua en $x=0$ si se reemplaza $g(0)$ por el límite $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x} = \pi$. Con esto, g es continua en $[0,1]$ y por tanto integrable.

c) Demostrar, usando métodos computacionales o el desarrollo en serie de Taylor, que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\text{Sen}(\pi x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(0.08948987)$$

Calculé la integral usando la función NIntegrate de Mathematica, con un resultado de:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\text{sen}(\pi x)}{x} = 0.92596852599$$

Luego, por el desarrollo del inciso b), este valor es igual a $\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\pi/N)$ que es básicamente el valor de $S_N(f)$ para puntos positivos muy cercanos a 0 y cuando $N\to\infty$

Es decir, la serie de Fourier se acerca al valor 0.92596852599 en puntos positivos cercanos a 0.

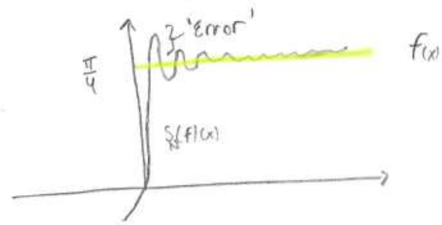
Sin embargo, por la definición original de $f(x) = \begin{cases} \pi/4 & x\in[0,\pi) \\ -\pi/4 & x\in[-\pi,0) \end{cases}$, la serie de Fourier debería de valer $\pi/4$ en estos puntos, en vez de 0.92596852599

Para ver qué tan grande es el "error", notamos que podemos escribir 0.92596852599 como:

$$\underbrace{0.92596852599}_{\text{Valor de } S_N(f)(\frac{\pi}{N}),\ N\to\infty} = \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\substack{\text{Valor de} \\ f \text{ cerca de } 0^+}} + \underbrace{0.1405703626}_{\text{"Error"}}$$

Sin embargo, conviene escribir el 'error' como un múltiplo de $\pi/2$ para ver cómo se compara con la longitud del salto que hace f (que vale $\pi/2$). Vemos que $0.1405703626 = \frac{\pi}{2}(0.08948987\ldots)$

$$\Rightarrow \underbrace{0.92596852599}_{\text{Valor de } S(f)(\frac{\pi}{N}) \text{ cuando } N\to\infty} = \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\substack{\text{Valor de } f \\ \text{cerca de } 0^+}} + \underbrace{\frac{\pi}{2}(0.08948987\ldots)}_{\text{"Error."}}$$



Entonces, el error es un $8.948\,\%$ de la longitud del salto de f

Hacer lo mismo cuando se evalúa $S_N(f)(x)$ en $x=-\pi/N$

Empezamos con la expresión de $S_N(f)(x)$ del inciso anterior

$$\to S_N(f)(x) = \text{sen}(x) + \frac{1}{3}\text{sen}(3x) + \frac{1}{5}\text{sen}(5x) + \ldots + \frac{1}{N-1}\text{sen}((N-1)x)$$

Evaluamos en $x=-\pi/N$

$$S_N(f)(-\pi/N) = \text{Sen}(-\pi/N) + \frac{1}{3}\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{N}\right) + \frac{1}{5}\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{N}\right) + \ldots + \frac{1}{N-1}\text{Sen}\left(-\frac{(N-1)\pi}{N}\right)$$

$$= -\left[\text{sen}(\pi/N) + \frac{1}{3}\text{sen}\left(\frac{3\pi}{N}\right) + \frac{1}{5}\text{Sen}\left(\frac{5\pi}{N}\right) + \ldots + \frac{1}{N-1}\text{Sen}\left(\frac{(N-1)\pi}{N}\right)\right] \longleftarrow \text{Usamos que } \text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$$

$$\to \lim_{N\to\infty} S_N(f)(-\pi/N) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\text{sen}(\pi x)}{x}\,dx \longleftarrow$$

Se demostró que la suma en corchetes tiende a esta integral para $N\to\infty$

$$\to \underbrace{\lim_{N\to\infty} S_N(f)(-\pi/N)}_{\text{Valor de } S(f)(-\frac{\pi}{N}) \text{ cuando } N\to\infty} = \underbrace{-\frac{\pi}{4}}_{\substack{\text{Valor de } f \\ \text{para puntos} \\ \text{negativos cerca de } 0}} \underbrace{-\frac{\pi}{2}(0.08948987\ldots)}_{\text{"Error" entre } S_f \text{ y } f}$$

$\therefore S_N(f)$ se pasa por $-\frac{\pi}{2}(0.08948987\ldots)$ del valor que debería de tener

un error de $8.948\,\%$ con respecto a la longitud del salto de f.

2. Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Usando el desarrollo de Fourier de $f(x) = \cos(\alpha x)$ en $[-\pi, \pi]$ demostrar las dos identidades: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha \pi)}$

Calculamos los coeficientes de la serie de Fourier compleja de $\cos(\alpha x)$ para el intervalo $[-\pi, \pi]$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} \right) e^{-inx}\, dx \quad \leftarrow \text{Por la expresión compleja de cos}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha-n)x} + e^{i(-\alpha-n)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{i(\alpha-n)x}}{(\alpha-n)i} + \frac{e^{i(-\alpha-n)x}}{(-\alpha-n)i} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$\leftarrow$ como $\alpha \notin \mathbb{Z} \to \alpha - n, -\alpha - n$ no son 0 $\forall n \in \mathbb{Z}$ y no hay problema de dividir por 0

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{i(\alpha-n)\pi} - e^{-i(\alpha-n)\pi}}{(\alpha-n)i} + \frac{e^{i(-\alpha-n)\pi} - e^{-i(-\alpha-n)\pi}}{(-\alpha-n)i} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(\alpha-n)\pi} - e^{-i(\alpha-n)\pi}}{2i\,(\alpha-n)} + \frac{e^{i(-\alpha-n)\pi} - e^{-i(-\alpha-n)\pi}}{2i\,(-\alpha-n)} \right]$$

Por la expresión compleja de sin $\quad \sin x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2i}$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\operatorname{sen}[(\alpha-n)\pi]}{\alpha-n} + \frac{\operatorname{sen}[(-\alpha-n)\pi]}{-\alpha-n} \right] \leftarrow$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(-\alpha-n)\operatorname{sen}(\pi\alpha - \pi n) + (\alpha-n)\operatorname{sen}(-\pi\alpha - \pi n)}{n^2 - \alpha^2} \right]$$

Usamos la Fórmula de Suma de ángulos del seno

$$= \frac{(-\alpha-n)\left[\operatorname{sen}(\pi\alpha)\cos(-\pi n) + \operatorname{sen}(-\pi n)\cos(\pi\alpha)\right] + (\alpha-n)\left[\operatorname{sen}(-\pi\alpha)\cos(-\pi n) + \operatorname{sen}(-\pi n)\cos(-\pi\alpha)\right]}{2\pi(n^2-\alpha^2)}$$

$$= \frac{(-\alpha-n)\operatorname{sen}(\pi\alpha)(-1)^n + (\alpha-n)\operatorname{sen}(-\pi\alpha)(-1)^n}{2\pi(n^2-\alpha^2)}$$

$\leftarrow$ Como $n \in \mathbb{Z}$

$\to \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = (-1)^n$

$\to \operatorname{sen}(n\pi) = \operatorname{sen}(-n\pi) = 0$

$$= \frac{(-\alpha-n)\operatorname{sen}(\pi\alpha)(-1)^n + (n-\alpha)\operatorname{sen}(\pi\alpha)(-1)^n}{2\pi(n^2-\alpha^2)} \quad \leftarrow \text{usamos } \operatorname{sen}(-\pi\alpha) = -\operatorname{sen}(\pi\alpha)$$

$$= \frac{-2\alpha(-1)^n \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{2\pi(n^2-\alpha^2)}$$

$$= -\frac{\alpha(-1)^n \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi(n^2-\alpha^2)}$$

Con estos coeficientes calculados y como $f(x) = \cos(\alpha x)$ es clase $C^\infty \Rightarrow$ Podemos escribir f como serie de Fourier y la serie converge en todo x a $f(x)$

$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{inx} \quad \longleftarrow \text{ f es igual a su serie de Fourier } \forall x$$

$$\rightarrow \cos(\alpha x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-\alpha(-1)^n \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi(n^2-\alpha^2)} e^{inx} \quad \longleftarrow \text{ Sustituimos lo de la hoja anterior}$$

Evaluamos en $x = \pi$

$$\rightarrow \cos(\alpha\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-\alpha(-1)^n \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi(n^2-\alpha^2)} e^{in\pi}$$

Como $n \in \mathbb{Z} \rightarrow e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i\operatorname{sen}(n\pi) = (-1)^n + i(0) = (-1)^n$,

$$\rightarrow \cos(\alpha\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-\alpha(-1)^n \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi(n^2-\alpha^2)} (-1)^n$$

$$\rightarrow \cos(\alpha\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{\alpha \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi(n^2-\alpha^2)} \quad \longleftarrow \quad \text{Pues } (-1)^n(-1)^n = (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1$$

$$\rightarrow \cos(\alpha\pi) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-\alpha \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi(n^2-\alpha^2)} + \frac{-\alpha \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi(-\alpha^2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi(n^2-\alpha^2)}$$

$\longleftarrow$ Separamos la suma en las partes $n<0$, $n=0$, $n>0$

$$\rightarrow \cos(\alpha\pi) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi(n^2-\alpha^2)} + \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$

$\longleftarrow$ como los sumandos sólo tienen el término n^2 que vale lo mismo en $n<0$ ó en $n>0$ entonces la suma que corre por los negativos vale lo mismo que la que corre por los positivos. Portanto, juntamos las sumas.

$$\rightarrow 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi(n^2-\alpha^2)} = \cos(\alpha\pi) - \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \quad \longleftarrow \text{ Despeje}$$

$$\rightarrow \frac{-2\alpha \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2} = \cos(\alpha\pi) - \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \quad \longleftarrow \text{ Sacamos términos que no dependen de n de la suma}$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2} = \frac{\pi\cos(\alpha\pi)}{-2\alpha\operatorname{sen}(\alpha\pi)} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)\,\pi}{\alpha\pi\,(2\alpha\operatorname{sen}(\alpha\pi))}$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2} = -\frac{\pi}{2\alpha\tan(\alpha\pi)} + \frac{1}{2\alpha^2}$$

b) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2} = \frac{1}{4\alpha^2}\left(\frac{\pi}{\alpha \tan(\alpha\pi)} + \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\alpha\pi)} - \frac{2}{\alpha^2}\right)$

Usaremos el teorema de Parseval dice que si $f(x)$ se puede escribir como serie de Fourier compleja $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ entonces $\Rightarrow$ $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$

En el inciso anterior aproximamos $f(x) = \cos(\alpha x)$ en $[-\pi, \pi]$ y obtuvimos los C_n. Como $f(x)$ es clase $C^{\infty} \rightarrow$ se puede escribir como serie de Fourier $\rightarrow$ aplica el teorema de Parseval

$$\rightarrow \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad \longleftarrow \text{Porque } \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

identidad de $\cos^2(\alpha x)$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\alpha x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\alpha x)}{2}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}x + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha x)}{4\alpha}\right]_{-\pi}^{\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}(\pi-(-\pi)) + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha\pi) - \operatorname{sen}(-2\alpha\pi)}{4\alpha}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

Usamos que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi}\left[\pi + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha\pi)}{2\alpha}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha\pi)}{4\alpha\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\frac{-\alpha(-1)^n \operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi(n^2-\alpha^2)}\right|^2 \quad \longleftarrow \text{Usamos la expresión de } C_n \text{ del inciso anterior}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha\pi)}{4\alpha\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\alpha \operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi(n^2-\alpha^2)}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha\pi)}{4\alpha\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\alpha\pi)}{\pi^2(n^2-\alpha^2)^2}$$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha\pi)}{4\alpha\pi}\right]\left[\frac{\pi^2}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\alpha\pi)}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2}$$

$\longleftarrow$ Pasamos multiplicando los términos de la suma que no dependen de n.

$$\rightarrow \left[\frac{2\alpha\pi + \operatorname{sen}(2\alpha\pi)}{4\alpha\pi}\right]\left[\frac{\pi^2}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\alpha\pi)}\right] = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2} + \frac{1}{(0-\alpha^2)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2}$$

$\longleftarrow$ Separamos la suma en $n<0$, $n=0$, $n>0$

$$\rightarrow \left[\frac{2\alpha\pi + \operatorname{sen}(2\alpha\pi)}{4\alpha\pi}\right]\left[\frac{\pi^2}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\alpha\pi)}\right] = \frac{1}{\alpha^4} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2}$$

$\longleftarrow$ Como el único término de los sumandos es n^2 $\rightarrow$ los sumandos valen lo mismo para $n<0$ y para $n>0$. Entonces, las dos sumas son iguales y las juntamos

- Despejamos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2}$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\alpha^4} + \left(\frac{2\alpha\pi + \operatorname{sen}(2\alpha\pi)}{4\alpha\pi}\right)\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\alpha\pi)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\alpha^4} + \frac{2\alpha\pi^2 + \operatorname{sen}(2\alpha\pi)\pi}{4\alpha^3 \operatorname{sen}^2(\alpha\pi)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-4\operatorname{sen}^2(\alpha\pi) + 2\alpha^2\pi^2 + \alpha\pi \operatorname{sen}(2\alpha\pi)}{4\alpha^4 \operatorname{sen}^2(\alpha\pi)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-4\operatorname{sen}^2(\alpha\pi) + 2\alpha^2\pi^2 + 2\alpha\pi \operatorname{sen}(\alpha\pi)\cos(\alpha\pi)}{4\alpha^4 \operatorname{sen}^2(\alpha\pi)}\right]$$

$\longleftarrow$ Usamos la fórmula de doble ángulo de Seno.

$$= \frac{-2\operatorname{sen}^2(\alpha\pi) + \alpha^2\pi^2 + \alpha\pi \operatorname{sen}(\alpha\pi)\cos(\alpha\pi)}{4\alpha^4 \operatorname{sen}^2(\alpha\pi)}$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}\left[-\frac{2\operatorname{sen}^2(\alpha\pi)}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\alpha\pi)} + \frac{\alpha^2\pi^2}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\alpha\pi)} + \frac{\alpha\pi \operatorname{sen}(\alpha\pi)\cos(\alpha\pi)}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\alpha\pi)}\right]$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}\left[-\frac{2}{\alpha^2} + \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\alpha\pi)} + \frac{\pi}{\alpha \tan(\alpha\pi)}\right]$$

y es lo que se quería probar.

3. Fórmula de Sumación de Poisson: Sea $f(x)$ una función suficientemente regular e integrable en $\mathbb{R}$ y $\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \alpha} dx$ su transformada. Se definen las dos siguientes función (suponiendo que convergen)

$$P_1(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n), \quad P_2(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i x n}$$

a) Demostrar que $P_1(f)(x)$, $P_2(f)(x)$ son dos funciones periódicas de periodo 1.

Para esto, hay que probar que $P_1(f)(x) = P_1(f)(x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- Sea $x \in \mathbb{R}$

$$\underline{P_1(f)(x+1)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+1+n) \quad \leftarrow \text{Por la def. de } P_1(f)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+(n+1)) = \sum_{n'\in\mathbb{Z}} f(x+n') \quad \leftarrow \text{Definimos } n' \equiv n+1. \text{ Cuando } n \text{ varía sobre los enteros, } n'=n+1 \text{ también.}$$

$$= \underline{P_1(f)(x)} \quad \leftarrow \text{Porque la suma es la definición de } P_1(f)(x) \text{ (tomar en cuenta que } n' \text{ es una variable "muda")}$$

Probamos lo mismo para $P_2(f)(x)$

- Sea $x \in \mathbb{R}$

$$\underline{P_2(f)(x+1)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i (x+1) n} \quad \leftarrow \text{Por la def. de } P_2(f)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i x} e^{2\pi i n}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i x} \quad \leftarrow \text{como } n \in \mathbb{Z} \rightarrow e^{2\pi i n} = 1$$

$$= \underline{P_2(f)(x)}$$

b) Demostrar que $P_1(f)(x) = P_2(f)(x)$.

Calculamos la serie de Fourier de $P_1(f)(x)$ en el intervalo $[0,1]$. Como $P_1(f)(x)$ es periódica de periodo 1, la serie de Fourier en este intervalo se extiende a todo $\mathbb{R}$ y aproxima a $P_1(f)(x)$ en todo $\mathbb{R}$

Calculamos los coeficientes de la serie compleja de $P_1(f)(x)$. El K-ésimo viene dado por:

$$\widehat{P_1(f)}(k) = \frac{1}{L}\int_0^1 P_1(f)(t)\, e^{-2\pi i k t/L}\, dt$$ ← Con $L=1$ la longitud del intervalo (usamos t como la variable muda de integración)

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)\right) e^{-2\pi i k t}\, dt$$ ← Por la def. de $P_1(f)(x)$

Luego, como $P_1(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge y $P_1(f)(x)$ es suficientemente regular, es por tanto igual a su serie de Fourier.

$$\to P_1(f)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{P_1(f)}(k)\, e^{2\pi i k x}$$ ← Serie de Fourier de $P_1(f)$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\int_0^1 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)\right) e^{-2\pi i k t}\, dt\right] e^{2\pi i k x}$$ ← Por la $\widehat{P_1(f)}(k)$ calculada antes

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^1 f(t+n)\, e^{-2\pi i k t}\, dt\right)\right] e^{2\pi i k x}$$ ← intercambiamos Σ y $\int$ que se vale suponiendo que la suma converge uniformemente.

En la integral hacemos el cambio de variable $t' = t+n \to dt' = dt$ y queda:

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t')\, e^{-2\pi i k(t'-n)}\, dt'\right] e^{2\pi i k x}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t')\, e^{-2\pi i k t'}\, dt'\right] e^{2\pi i k x}$$ ← Porque $e^{-2\pi i k(t'-n)} = e^{-2\pi i k t'} \underbrace{e^{2\pi i k n}}_{=1 \text{ porque } nk\in\mathbb{Z}} = e^{-2\pi i k t'}$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(t')\, e^{-2\pi i k t'}\, dt'\right] e^{2\pi i k x}$$ ← Porque sumar en $n\in\mathbb{Z}$ las integrales $\int_n^{n+1}$ al final completa toda la recta real

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\hat{f}(k)\right] e^{2\pi i k x}$$ ← Lo de corchetes es la definición de la transformada de f evaluada en k.

$$= P_2(f)(x)$$ ← Ésto es la def. de $P_2(f)(x)$

$\therefore P_1(f) = P_2(f)$ #

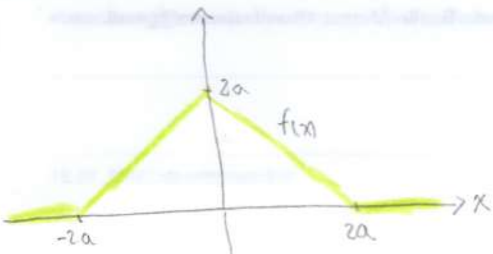
En particular para $x = 0$

$$P_1(f)(0) = P_2(f)(0)$$

$$\to \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(0+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{2\pi i (0) n}$$

$$\to \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$ #

c) Aplicar la fórmula de sumación de Poisson a $f(x) = \begin{cases} 2a - |x| & \text{si } |x| \leq 2a \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2a \end{cases}$



Vemos que f es integrable en $\mathbb{R}$ porque $\int_{\mathbb{R}} f(x)$ se reduce a $\int_{-2a}^{2a} 2a - |x| \, dx$ que claramente existe y es finita.

Además vemos que $f(x)$ es clase C^{∞} en todos los puntos excepto en $-2a, 0, 2a$ en donde es sólamente continua.

Por lo que f es lo "suficientemente regular" como para tener transformada de Fourier y para aplicar la fórmula de sumación.

Calculamos la transformada de Fourier de f según la convención de transformada que se usó para probar la fórmula de sumación.

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \alpha x} dx$$

← Por la def. de f, f vale 0 fuera de $[-2a, 2a]$ y la integral en $\int_{\mathbb{R}}$ se reduce a $\int_{-2a}^{2a}$

$$= \int_{-2a}^{2a} (2a - |x|) e^{-2\pi i \alpha x} dx$$

$$= (2a - |x|) \frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{-2\pi i \alpha} \Bigg|_{-2a}^{2a} - \int_{-2a}^{2a} \frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{-2\pi i \alpha} \frac{d(2a-|x|)}{dx} dx$$

← Integral por partes $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ con $u = 2a - |x|$ → $du = \frac{d(2a-|x|)}{dx}$, $dv = e^{-2\pi i \alpha x}$ → $v = \frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{-2\pi i \alpha}$

$$= \underbrace{(2a - |2a|)}_{0} \frac{e^{-2\pi i \alpha 2a}}{-2\pi i \alpha} - \underbrace{(2a - |-2a|)}_{0} \frac{e^{-2\pi i \alpha 2a}}{-2\pi i \alpha} - \int_{-2a}^{2a} \frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{-2\pi i \alpha} \frac{d(2a-|x|)}{dx} dx$$

$$= -\int_{-2a}^{2a} \frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{-2\pi i \alpha} \frac{d(2a-|x|)}{dx} dx$$

← Separamos la integral

$$= -\int_{-2a}^{0} \frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{-2\pi i \alpha} \frac{d(2a-|x|)}{dx} dx - \int_{0}^{2a} \frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{-2\pi i \alpha} \frac{d(2a-|x|)}{dx}$$

← Usamos que $|x| = -x$ en $[-2a, 0]$ y que $|x| = x$ en $[0, 2a]$

$$= -\int_{-2a}^{0} \frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{-2\pi i \alpha} \frac{d(2a+x)}{dx} dx - \int_{0}^{2a} \frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{-2\pi i \alpha} \frac{d(2a-x)}{dx} dx$$

$$= -\int_{-2a}^{0} \frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{-2\pi i \alpha} \cdot 1 \, dx - \int_{0}^{2a} \frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{-2\pi i \alpha} \cdot (-1) \, dx$$

← Integramos

$$= -\frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{(-2\pi i \alpha)^2} \Bigg|_{-2a}^{0} + \frac{e^{-2\pi i \alpha x}}{(2\pi i \alpha)^2} \Bigg|_{0}^{2a}$$

$$= -\frac{e^{-2\pi i \alpha(0)}}{(-2\pi i \alpha)^2} + \frac{e^{-2\pi i \alpha(-2a)}}{(-2\pi i \alpha)^2} + \frac{e^{-2\pi i \alpha(2a)}}{(-2\pi i \alpha)^2} - \frac{e^{-2\pi i \alpha(0)}}{(-2\pi i \alpha)^2} =$$

← Usamos que $(-2\pi i \alpha)^2 = 4\pi^2 i^2 \alpha^2 = -4\pi^2 \alpha^2$

$$= \frac{-1}{-4\pi^2\alpha^2} + \frac{e^{4\pi i \alpha a}}{-4\pi^2\alpha^2} + \frac{e^{-4\pi i \alpha a}}{-4\pi^2\alpha^2} - \frac{1}{-4\pi^2\alpha^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2\alpha^2} - \frac{1}{2\pi^2\alpha^2} \left[\frac{e^{4\pi i \alpha a} + e^{-4\pi i \alpha a}}{2} \right] = \frac{1}{2\pi^2\alpha^2} - \frac{1}{2\pi^2\alpha^2} \cos(4\pi \alpha a)$$

← Por la expresión compleja de cos.

Usamos que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ para $\theta = 2\pi\alpha a$

$$= \frac{1}{2\pi^2\alpha^2} - \frac{1}{2\pi^2\alpha^2} \left[\cos^2(2\pi\alpha a) - \operatorname{sen}^2(2\pi\alpha a) \right] = \frac{1}{2\pi^2\alpha^2} \left[1 - \cos^2(2\pi\alpha a) + \operatorname{sen}^2(2\pi\alpha a) \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi^2\alpha^2} \left[\operatorname{sen}^2(2\pi\alpha a) + \operatorname{sen}^2(2\pi\alpha a) \right] = \frac{\operatorname{sen}^2(2\pi\alpha a)}{\pi^2\alpha^2}$$

Luego, si las sumas $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$ y $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ convergen $\Rightarrow$ son iguales por b)

Si $a \leq 1/2$ entonces la suma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = 2a$

Porque $f(x) = \begin{cases} 2a-|x|, & \text{si } |x| \leq 2a \\ 0, & \text{si } |x| \geq 2a \end{cases}$ •) si $a < 1/2$ $\rightarrow$ el único entero n que cae dentro del intervalo $|x| \leq 2a < 2(1/2) = 1$ es el 0 y los demás no aportan a la suma

$$\rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = f(0) = 2a$$

••) si $a = 1/2$ entonces el -1 y el 1 también caen dentro de $|x| \leq 2a$ sin embargo al evaluarlos valen $f(-1) = 2a - |-1| = 2(1/2) - 1 = 0$, $f(1) = 2a - |1| = 2(1/2) - 1 = 0$

y nuevamente no aportan nada a la suma.

En cualquier caso, si $a \leq 1/2 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = 2a$ ← y esta "suma" claramente converge uniformemente, que fue una hipótesis necesaria que se usó en b) para probar la fórmula de Poisson

---

Por otro lado tenemos $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\text{sen}^2(2\pi a n)}{\pi^2 n^2} \quad \ldots (1)$ ← El resultado de la hoja anterior.

Primero vemos que esta suma converge, pues $0 \leq \text{sen}^2(2\pi a n) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ y $1/n^2 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}/\{0\}$

y así, cada sumando de (1) excepto el de $n=0$ están acotados por

$$0 \leq \frac{\text{sen}^2(2\pi a n)}{\pi^2 n^2} \leq \frac{1}{\pi^2 n^2}$$

y como $\sum_{n\in\mathbb{Z}/\{0\}} \frac{1}{\pi^2 n^2}$ es una suma convergente $\left(\text{de hecho vale } \sum_{n\in\mathbb{Z}/\{0\}} \frac{1}{\pi^2 n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} = \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{1}{3} \right)$

entonces por el "test de comparación", $\sum_{n\in\mathbb{Z}/\{0\}} \frac{\text{sen}^2(2\pi a n)}{\pi^2 n^2}$ converge

Sólo falta ver que el término de $n=0$ también es finito en la suma (1)

Calculamos entonces: $\lim_{n\to 0} \frac{\text{sen}^2(2\pi a n)}{\pi^2 n^2} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{n\to 0} \frac{4\pi a \,\text{sen}(2\pi a n)\cos(2\pi a n)}{2\pi^2 n} \overset{\text{fórmula de doble ángulo}}{=} \lim_{n\to 0} \frac{a\,\text{sen}(4\pi a n)}{\pi n}$

$$\overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{n\to 0} \frac{4\pi a^2 \cos(4\pi a n)}{\pi} = 4a^2$$

Entonces, la suma ya con todos los términos $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\text{sen}^2(2\pi a n)}{\pi^2 n^2}$ converge

Entonces, por b), las dos sumas son iguales

$$\rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\text{sen}^2(2\pi a n)}{\pi^2 n^2} = 2a$$

4| Fórmula de muestreo Whittaker - Shannon. Sea $f(x)$ suficientemente regular e integrable en $\mathbb{R}$ tal que su transformada es $\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \alpha} dx$ está soportada en $[-1/2, 1/2]$. Demostrar que:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\operatorname{Sen}(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}$$

Tenemos la función $\hat{f}(\alpha)$ que es la transformada de f.
Como función, le podemos calcular los coeficientes de Fourier a $\hat{f}$ usando las fórmulas de los coeficientes de la serie compleja de $\hat{f}$ en el intervalo $[-1/2, 1/2]$

El n-ésimo coeficiente complejo de $\hat{f}$ será:

$$C_n = \frac{1}{L} \int_a^b \hat{f}(\alpha) e^{\frac{-2\pi i n \alpha}{L}} d\alpha \quad \leftarrow \text{ con } a = -1/2,\ b = 1/2 \text{ y } L = b-a = 1$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \hat{f}(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha \longleftarrow$$ Porque $\hat{f}$ vale 0 fuera de $[-1/2, 1/2]$, entonces podemos extender la integral a $(-\infty, \infty)$ sin cambiar el valor de la integral.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{2\pi i (-n) \alpha} d\alpha \quad \dots (1)$$

Por el teorema de inversión* si $\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \alpha}$, entonces, $f(x)$ se recupera como
$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha) e^{2\pi i x \alpha} d\alpha$. Por lo que vemos que (1) es esta expresión evaluada en $x = -n$

$\Rightarrow$ (1) es igual a $\underline{f(-n)}$

Entonces, el n-ésimo coeficiente de la serie compleja de $\hat{f}$ es $f(-n)$. Por lo tanto, si escribimos $\hat{f}$ en su serie de Fourier, nos queda:

$$\hat{f}(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{2\pi i n \alpha} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(-n) e^{2\pi i n \alpha}$$

Podemos cambiar $-n$ por K, que si n varía en $\mathbb{Z}$, entonces $K = -n$ también varía en $\mathbb{Z}$

$$\rightarrow \hat{f}(\alpha) = \sum_{K \in \mathbb{Z}} f(K) e^{-2\pi i K \alpha} \quad \dots (2)$$

* El teorema de inversión es válido porque f se supone lo suficientemente regular e integrable.

Luego, usando nuevamente el teorema de inversión, f es la transformada inversa de $\hat{f}$. Por lo que f se escribe como:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha x}\, d\alpha$$ } Transformada inversa de $\hat{f}$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \hat{f}(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha x}\, d\alpha$$ ← Porque $\hat{f}$ vale 0 fuera de $[-1/2, 1/2]$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\, e^{-2\pi i k \alpha} \right) e^{2\pi i \alpha x}\, d\alpha$$ ← por (2)

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\, e^{-2\pi i k\alpha}\, e^{2\pi i \alpha x}\, d\alpha$$ ← Metemos $e^{2\pi i \alpha x}$ en la suma (porque este término no depende de k)

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-1/2}^{1/2} f(k)\, e^{-2\pi i k\alpha}\, e^{2\pi i \alpha x}\, d\alpha$$ ← Intercambiamos $\sum$ y $\int$ lo que es válido siempre y cuando $\sum f(k)\, e^{-2\pi i k\alpha}$ converja uniformemente

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \alpha (x-k)}\, d\alpha$$ ← Sacamos $f(k)$ de la integral porque no depende de x.

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) \left[\frac{e^{2\pi i \alpha (x-k)}}{2\pi i (x-k)} \right]\Bigg|_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) \left[\frac{e^{2\pi i (1/2)(x-k)} - e^{2\pi i (-1/2)(x-k)}}{2\pi i (x-k)} \right]$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) \left[\frac{e^{(x-k)\pi i} - e^{-(x-k)\pi i}}{2i} \left(\frac{1}{\pi (x-k)} \right) \right]$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) \left[\frac{\operatorname{sen}((x-k)\pi)}{\pi (x-k)} \right]$$ ← Por la expresión compleja de sen

Por lo tanto: $$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\, \frac{\operatorname{sen}(\pi (x-k))}{\pi (x-k)}$$