Hilbert

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

4 de febrero de 2021

1. Espacios Con Producto Interno

Definición: Un producto interno es un $\mathbb{C}$-e.v. es un mapeo $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que:

- $(x, y) = \overline{(y, x)}$
- $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- $(x, x) > 0$ cuando $x \neq 0$

Espacio Pre-Hilbert: Es un espacio vectorial complejo V junto con un producto interno.
Ejemplos:

- $\mathbb{C}^n$: Podemos definir el siguientes producto punto para $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

- l^2: Denotamos por l^2 a todas las secuencias complejas $x = (x_n)$ sobre $\mathbb{C}$ que son cuadrado sumables, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

  Si x, y son dos secuencias $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, les podemos definir el producto punto como:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$$

  Podemos ver que este producto punto es finito porque $\sum |x_n \bar{y}_n| \leq (\sum |x_n|^2)^{1/2} (\sum |y_n|^2)^{1/2} < \infty$

- $C[0,1]$: El espacio de funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{C}$. Le definimos el producto punto:

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

- $\mathbb{C}^{n\times m}$: Es el espacio de matrices complejas de $m \times n$. Definimos el producto punto como:

$$(A,B) = tr(B^*A)$$

- L_2: Espacio de todas las funcines $f : \Omega \to \mathbb{C}$ medibles tales que $\int |f|^2 d\mu < \infty$. Le definimos el producto interno:

$$(f,g) = \int f\bar{g}d\mu$$

  En este caso, pensamos en la igualdad si es una igualdad casi siempre (todo excepto un espacio de medida cero).

Teorema: Para todo $x,y,z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos:

- $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$
- $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x,y)$
- $(x,0) = 0 = (0,x)$
- Si $(x,z) = (y,z)\ \forall\ z \in V \ \Rightarrow\ x = y$

1.1. Espacios Internos como Métricos

Norma Inducida: La norma inducida por un producto punto se define como:

$$||x|| = (x,x)^{1/2}$$

Teorema: Para todo x en un espacio con producto interior V y $\lambda \in \mathbb{C}$, se cumple:

- $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0$ sii $x = 0$
- $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

Estas son las propiedades que definen una norma si no viene inducida de un producto punto.

Teorema (Desigualda de Cauchy-Schwartz): Para $x, y \in V$ en un espacio con producto interno con norma inducida, tenemos que:

$$|(x, y)| \leq ||x||||y||$$

Teorema (Ley de Paralelogramos): Para vectores x, y en un espacio con producto interior, se cumple:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

Identidad de Polarización:

$$4(x, y) = ||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i||x + iy||^2 - i||x - iy||^2$$

Teorema de Pitágoras: Si $(x, y) = 0$, entonces:

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

2. Espacio Normado

Definimos una norma de un espacio V como una función $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ tal que:

- $||x|| > 0$ si $x \neq 0$
- $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$ para escalares λ y vectores x
- $||x + y| \ \leq ||x|| + ||y||$

Espacio Normado: Es un espacio vectorial real o complejo con una norma como la definida antes.

Teorema: Si $(E, ||\cdot||)$ es un espacio normado, entonces la función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d(x, y) = ||x - y||$$

Es una métrica traslacionalmente invariante.
Es decir, cumple $d(x, y) > 0$, $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Teorema: Para cualquier espacio normado $(E, ||\cdot||)$, el mapeo $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ es continuo. Y también el mapeo $(\cdot, \cdot) : E \times E \to \mathbb{C}$ es continuo.

Teorema: En un espacio normado E, las operaciones algebráicas de sumar vectores y de multiplicar por escalares son continuas.

Ejemplo:

- $\mathbb{C}^n$: Definimos la norma dada por:

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

- $\mathbb{C}_p^n$: Dado $p \geq 1$, le podemos definir una norma como:

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

  O bien, para $p = \infty$ definimos:

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|$$

- l^p: Consiste de todas las secuencias $x = \{x_n\}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Con $p \geq 1$. Su norma está dada por:

$$||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

  Si $p = \infty$, tenemos el espacio l^∞ dado por las secuencias $x = \{x_n\}$ acotadas. Le definimos la norma:

$$||x||_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$$

- $L_p(\Omega)$: El espacio de todas las funciones medibles $f : \Omega \to K$ tales que $\int |f|^p d\mu < \infty$, para $p \geq 1$.
  Donde la igualdad se entiende como igualdad casi siempre. Le definimos la norma:

$$||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Algunos de estos espacios son las normas inducidas por espacios con producto interno vistos antes.

Un espacio normado es un espacio con producto punto si cumple la ley de paralelogramo.

2.1. Espacio Lineal Cerrado

En $\mathbb{C}^n$ todo subespacio lineal es topológicamente cerrado, sin embargo, en espacios de dimensión infinita, esto no es necesariamente cierto.

Ejemplo: Sea l_0 el espacio de secuencias $(x_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que la casi todos los términos son 0 excepto una cantidad finita. Se puede ver que l_0 es un subespacio de l^2. Pero no es cerrado, pues podemos pensar en una secuencias de secuencias en la que $x^k = (1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/k, 0, 0, \cdots)$. Entonces esta secuencia de secuencias contiene puras secuencias de l_0 pero converge a la secuencia armónica que no es de l_0.

Ejercicio: Sea $F = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = 0\}$. Se puede ver que es un subespacio de $C[0,1]$ (funciones continuas con dominio $[0,1]$) pero no es cerrado. Bueno, el propio $C[0,1]$ no es cerrado porque las funciones x^k pertenecen aquí pero el límite es discontinuo.

Teorema: La cerradura de un subespacio de un espacio normado es un subespacio.

Span: Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado y sea $A \subset E$.
El span lineal de A, denotado por $lin(A)$ es la intersección de todos los subespacios de E

que contienen a A.
También se puede ver como todas las combinaciones lineales de elementos de A.

Span Cerrado Lineal: Definimos $clin(A)$ como la intersección de todos los subespacios cerrados de E que contienen a A.

Teorema: Cualesquiera dos normas en un espacio dimensional finito E sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$ determinan la misma topología.
Corolario: Los conjuntos cerrados acotadas en espacios normados dimensionalmente finitos son compactos.

3. Espacios de Hilbert y Banach

Secuencia de Cauchy: Sea (M, d) un espacio métrico. Una secuencia (x^k) en M es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe un entero k_0 tal que:

$$k, l \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad d(x^k, x^l) < \epsilon$$

Completo: (M, d) es completo si toda secuencia de Cauchy en M converge a un límite en M.

Teorema: $\mathbb{C}^n$ y l^2 son espacios métricos completos.

- Dem: Sea (x^k) una secuencia de Cauchy en l^2, es decir, cada x^k es una secuencia en sí mismo $x^k = (x_n^k)_{n=1}^{\infty}$. Entonces, hacemos:

  - **Encontrar un candidato a a límite:** Tenemos la secuencia de secuencias:

    $$\begin{aligned} x^1 &= (x_1^1, x_2^1, x_3^1, \cdots, x_n^1, \cdots) \\ x^2 &= (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots, x_n^2, \cdots) \\ &\vdots \\ x^k &= (x_1^k, x_2^k, x_3^k, \cdots, x_n^k, \cdots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

    Digamos que converge a una secuencia $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$. Para ello, consideramos una n fija y vemos la secuencia en columna $(x_n^k)_{k=1}^{\infty}$.
    Vemos que es de Cauchy. Como la secuencia (x^k) es de Cauchy, pata todo $\epsilon > 0$ tal que $k, l \geq k_0$ implica $||x^k - x^l|| < \epsilon$. Y esto implica que $|x_n^k - x_n^l| < \epsilon$. Por lo que cada columna es una secuencia de Cauchy en $\mathbb{C}$. Y entonces, converge a un a_n. Por tanto definimos $a = (a_1, a_2, \cdots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ como la convergencia de todas las columnas.
  - **Probar que a pertenece a l^2:**
  - **Probar que $x^k \to a$**

Def (Espacio de Hilbert): Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno tal que es completo con la métrica inducida por la norma inducida por el producto interno.

Def(Espacio de Banach): Es un espacio normado completo con la métrica inducida por la nora.

Claramente todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach. Pero no todo espacio de Banach es de Hilbert.
Por ejemplo, el l^{∞} (secuencias acotadas con norma supremo) tiene una norma que lo hace completo.
Sin embargo, es imposible definirle un producto interno tal que $(x, x) = ||x||_{\infty}^2$ ya que le falla

la ley del paralelogramo. Pues:

Teorema: Si un espacio de Banach cumple la ley del paralelogramo $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$, entonces la identidad de polatización:

$$(x,y) := \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^n ||x + i^n y||^2$$

Define un producto interno con $(x,x) = ||x||^2$.

- **Ejemplo espacio de Hilbert $L^2(a,b)$:** Definido como el espacio de todas las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ medibles tales que $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$.
  Si usamos la integral de Riemann para la definición de arriba, este espacio sigue siendo incompleto, porque hay sucesiones de funciones Riemann cuadrado-integrables que no convergen a una función de este estilo.
  Por ello usamos la integral de Lebesgue, que se comporta mejor bajo límites. Con esta integral, el espacio de funciones cuadrado integrables ya es completo con el producto interno:

  $$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} d\mu$$

  La mayortía del tiempo no hay que fijarnos en la integral de Lebesgue y basta con la de Riemann.
  En el espacio L^2 decimos que dos funciones son iguales sii $f \neq g$ en un conjunto de medida cero. Por lo que en realidad no se trata de un espacio de funciones, sino de clases de equivalencia. Pero hablamos de los elementos como si fueran funciones.
  Es importante notar que $C[a,b]$ (espacio de funciones continuas en $[a,b]$) es denso en $L^2(a,b)$ con la norma L^2.
  Se puede probar que L^2 es cerrado bajo suma y que el producto de arriba es verdaderamente un producto punto.

- **Espacio de Banach $L^p[a,b]$, $p \geq 1$**
  Como vimos antes, podemos definir un espacio normado de todas las funciones medibles $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ tales que $\int |f|^p d\mu < \infty$ con $p \geq 1$. Y le definimos la norma:

  $$||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

  Se puede probar que esto es un espacio vectorial y normado y completo (Banach). Sin embargo, no siempre es un espacio de Hilbert, ya que sólo cumple con la ley del Paralelogramo si $p = 2$ y entonces L^2 es el único espacio de Hilbert de los L^p

- **Espacio de Hilbert** l^2: Es el espacio de todas las secuencias complejas $x = (x_n)$ sobre $\mathbb{C}$ que son cuadrado integrables, es decir:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

  Se puede probar que es un espacio vectorial con la suma y producto escalar típico. Además, le definimos el producto escalar:

  $$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

  Resulta ser un espacio completo con la métrica inducida y por tanto, un espacio de Hilbert.

- **Espacio de Banach** l^p**:** Consiste de todas las secuencias $x = \{x_n\}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Esto forma un espacio vectorial y le definimos la norma:

  $$||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

  Que se puede demostrar que es una norma. Este espacio es completo, por lo que tenemos un espacio de Banach.
  Sin embargo, no siempre es un espacio de Hilbert, ya que sólo cumple la desigualdad del paralelogramo si $p = 2$, por lo que l^2 es el único espacio de Hilbert de la forma l^p.
  Demostramos que para $p \neq 2$ no se cumple la igualdad del paralelogramo.
  Para ello definimos $x = (1, 0, 0, \cdots)$ y $y = (0, 1, 0, 0, \cdots)$. Entonces, tenemos que:

  - $||x + y||_p^2 = ||(1, 1, 0, 0, \cdots)||_p^2 = (|1|^p + |1|^p)^{2/p} = 2^{2/p}$
  - $||x - y||_p^2 = ||(1, -1, 0, \cdots)||_p^2 = (|1|^p + |-1|^p)^{2/p} = 2^{2/p}$
  - $||x||_p^2 = ||(1, 0, 0, \cdots)||_p^2 = (|1|^p)^{1/p} = 1$
  - $||y||_p^2 = ||(0, 1, 0, \cdots)||_p^2 = (|1|^p)^{1/p} = 1$

  Entonces, si queremos que se cumpla que $||x + y||_p^2 + ||x - y||_p^2 = 2||x||_p^2 + 2||y||_p^2$.
  Necesitamos $2^{2/p} + 2^{2/p} = 2 + 2 \;\Rightarrow\; 2 \cdot 2^{2/p} = 4 \;\Rightarrow\; 2^{2/p+1} = 4$
  Entonces, tenemos que $2/p + 1 = 2 \;\Rightarrow\; p = 2$.

- $\mathbb{C}^n$: Este espacio es prehilbert con $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$.
  Pero resulta que es un espacio completo con la métrica, por lo que es un espacio de Hilbert.

3.1. La propiedad del punto más cercano

Si X es un punto arriba de una superficie plana A, entonces existe un único punto Y en A que es el más cercano a X de entre todos los puntos de A. Esto se puede extender a Hilbert.

Def: Un subconjunto A de un espacio vectorial es **convexo** si para todo $a, b \in A$ y todo $\lambda \in (0,1)$ se cumple que $\lambda a + (1-\lambda)b$ pertenece a A.

Teorema del punto más cercano: Sea A un subconjunto cerrado y convexo de H espacio de Hilbert. Entonces, para todo $x \in H$ existe un único punto $y \in A$ que es el más cercano a x, es decir:

$$||x - y|| = \inf_{a \in A} ||x - a||$$

En un espacio de Banach puede haber infinitos puntos con esta propiedad.

- Dem: Sea $M = \inf_{a \in A} ||x - a||$.
  Como $A \neq \emptyset$, entonces $M < \infty$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in A$ tal que:

  $$||x - y_n||^2 < M^2 + \frac{1}{n}$$

  Luego, vamos a probar que y_n es una secuencia de Cauchy. Aplicamos la ley del paralelogramo (que se vale por estar en un Hilbert) a $x - y_n$ y a $x - y_m$. Tenemos entonces que para cualquier $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple:

  $$\begin{aligned} &||x - y_n - (x - y_m)||^2 + ||x - y_n + x - y_m||^2 \\ &= 2||x - y_n||^2 + 2||x - y_m||^2 \\ &< 4M^2 + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

  Entonces, podemos reordenar para obtener $||y_n - y_m||^2 < 4M^2 + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) - 4\left|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right|^2$
  Como A es convexo y $y_n, y_m \in A$, entonces $(y_n + y_m)/2 \in A$. Y por lo tanto:

  $$\left|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right|^2 \geq M^2$$

  Por definición, entonces:

  $$\begin{aligned} ||y_n - y_m||^2 &< 4M^2 + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) - 4M^2 \\ &= 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

  Entonces (y_n) es una secuencia de Cauchy y por tanto converge a un $y \in H$ (H es completo. Y como A es cerrado, entonces $y \in A$. Por lo tanto, $||x - y|| \geq M$ (ya que

$x \notin A$).

Luego, conforme hacemos tender $n \to \infty$ en $||x - y_n||^2 < M^2 + \frac{1}{n}$, tenemos que $||x - y|| \leq M$.

Por tanto, $||x - y|| = M$.

También se puede probar la unicidad.

4. Expansiones Ortogonales

La ventaja de usar vectores en geometría de $\mathbb{R}^n$ es que no necesitamos exponer los números de las coordenadas. Aunque para hacer cálculo sí es necesario usar las coordenadas.

Def (Ortogonal): Los vectores $x, y \in V$ son **ortogonales** si $(x, y) = 0$

Sistema ortogonal: Es un conjunto de elementos $(e_a)_{a\in A} \in V/\{0\}$ tales que $e_a \perp e_b$ para $a \neq b$. Y es un **sistema ortonormal** si:

$$(e_a, e_b) = \delta_{a,b}$$

Se dice **secuencia ortonormal** si puede ser indexada por $\mathbb{N}$ (es un conjunto numerable).

Ejemplos:

- En $\mathbb{C}^n$ la base estándar es ortonotmal
- En l^2, la base $e_i = (0, 0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots)$ es ortonotmal.
- En $L^2(-\pi, \pi)$, una secuencia ortonormal es:

  $$e_n(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{int}$$

  Para $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, es ortonotmal porque:

  $$(e_n, e_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \delta_{n,m}$$

Def (Coeficiente de Fourier): Si (e_n) es una secuencia ortonormal en un espacio de Hilbert H, entonces para todo $x \in H$, definimos el **n-ésimo coeficiente de Fourier de** x respecto a la secuencia ortonotmal como:

$$a_n = (x, e_n)$$

Serie de Fourier: Dado un $x \in H$, definimos su serie de Fourier como:

$$\sum_n (x, e_n) e_n$$

Hasta ahora, esta es una suma formal, no sabemos nada de convergencia.

Teorema (Pitágoras): Si $x_1, \cdots, x_n$ son ortonormales, entonces:

$$\left|\left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right|\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2$$

Lema: Sea $e_1, \cdots, e_n$ un sistema ortonormal en un espacio pre-Hilbertiano H. Sea $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ y sea $x \in H$. Entonces:

$$\left|\left|x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right|\right|^2 = ||x||^2 + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - c_j|^2 - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2$$

Donde $c_j = (x, e_j)$.

- Dem: Por propiedades tenemos $(\sum \lambda_j e_j, \sum \lambda_j e_j) = \sum \lambda_j \bar{\lambda_j}$. Entonces:

$$\begin{aligned} ||x - \sum \lambda_j e_j||^2 &= (x - \sum \lambda_j e_j, x - \sum \lambda_j e_j) \\ &= (x, x) - \sum \lambda_j (e_j, x) - \sum \bar{\lambda_j}(x, e_j) + \sum \lambda_j \bar{\lambda_j} \\ &= ||x||^2 - \sum \lambda_j \bar{c_j} - \sum \bar{\lambda_j} c_j + \sum \lambda_j \bar{\lambda_j} \\ &= ||x||^2 + \sum (\lambda_j \bar{\lambda_j} - \lambda_j \bar{c_j} - \bar{\lambda_j} c_j + c_j \bar{c_j}) - \sum c_j \bar{c_j} \\ &= ||x||^2 + \sum (\lambda_j - c_j)(\bar{\lambda_j} - \bar{c_j}) - \sum c_j \bar{c_j} \\ &= ||x||^2 + \sum |\lambda_j - c_j|^2 - \sum |c_j|^2 \end{aligned}$$

Teorema: Sea $e_1, \cdots, e_n$ un sistema ortonormal en un espacio pre- hilbertiano H. Y sea $x \in H$. Entonces, el punto y en $lin\{e_1, \cdots, e_n\}$ más cercano a x (del que hablamos en la propiedad del punto más cercanos) tiene la forma:

$$y = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$$

Y la distancia $d = ||x - y||$ está dada por:

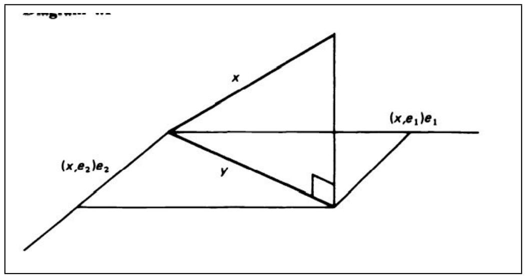
$$d^2 = ||x||^2 - \sum_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2$$

- **Dem:** Del teorema pasado, digamos que e_j y x están fijos y vamos variando $y = \lambda_j e_j$ (variamos las λ). Entonces, como $||x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j||^2 = ||x||^2 + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - c_j|^2 - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2$, vemos que $||x - \sum \lambda_j e_j||^2$ se minimiza si $\lambda_j = c_j$. Por ello, el punto más cercano es $y = \sum (x, e_j) e_j$ y la distancia es $d^2 = ||x||^2 - \sum\limits_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2$

Corolario: Si $x \in lin\{e_1, \cdots, e_n\}$, entonces:

$$x = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$$

Visualización:



4.1. Desigualdad de Bessel

Teorema (Desigualdad de Bessel): Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia ortonormal en el espacio pre-Hilbert H, entonces para todo $x \in H$, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq ||x||^2$$

- **Dem:** Para $N \in \mathbb{N}$, sea $y_N = \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n$. Entonces, por el último teorema, tenemos que:

$$||x - y_N||^2 = ||x||^2 - \sum_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2$$

  Y por lo tanto: $\sum\limits_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2 = ||x||^2 - ||x - y_N||^2 \leq ||x||^2$.
  Por lo que conforme $N \to \infty$, tenemos la desigualdad.

Def: Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado y sea $x_n \in E$ para $n \in \mathbb{N}$. Decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge y tiene suma x si $\sum\limits_{n=1}^{k} x_n \to x$ conforme $k \to \infty$.

Teorema 4.11: Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia ortonormal en el espacio de Hilbert H y sea $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ converge en H sii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$

4.2. Convergencia Puntual y L^2

Nota: Suponga que (f_n) es una secuencia de funciones en $L^2(0, 1)$. Entonces, ya le dimos definición a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f$ como habíamos hecho para todo espacio normado.
Pero hay una definición de **convergencia puntual** como $\sum f_n(t) = f(t)$ para todo $t \in (0, 1)$.

Estas dos condiciones de convergencia no son iguales.

4.3. Secuencias Ortonormales Completas

Dado un $x \in H$ espacio de Hilbert, nos gustaría poder escribir que:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

La desigualdad de Bessel y el teorema 4.11 nos asegura que el lado derecho converge. Pero no sabemos si converge a x.

Por **ejemplo:** Consideramos la secuencia ortonormal usual e_n en l^2. Y sea $f_n = e_{n+1}$, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia ortonormal en l^2 y para $x = (x_n) \in l^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (x, f_n) f_n &= \sum_{n=2}^{\infty} (x, e_n) e_n \\ &= (0, x_2, x_3, \cdots) \end{aligned}$$

En general, si queremos escribir x como $\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$, vamos a definir el error de esta suma como:

$$y = x - \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

Entonces, para todo $j \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} (y, e_j) &= (x, e_j) - \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)(e_n, e_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Def (Completa): Una secuencia (e_n) en un espacio de Hilbert H es completa si el único miembro de H ortogonal a todo e_n es 0. Es decir, si $(z, e_n) = 0 \forall z \quad \Rightarrow \quad z = 0$

Teorema 4.14: Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia ortonormal completa en un espacio de Hilbert H. Entonces para todo $x \in H$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

y entonces **(parseval)**:

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$$

- **dem:** El error de la suma es $y = x - \sum (x, e_n) e_n$ y entonces tenemos que $(y, e_j) = (x, e_j) - \sum (x, e_n)(e_n, e_j) = 0$

Pero como es completo, eso implica que $y = 0$ y entonces $x = \sum(x, e_j)e_j$.

Una secuencia ortonormal completa en H se llama también **base ortonormal** en H.

Teorema: Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia ortonormal en el espacio de Hilbert H. Entonces lo siguiente es equivalente:

1) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es completo
2) $clin\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} = H$
3) **Parseval:** $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$

- 1) $\Rightarrow$ 2) está contenido en el teorema 4.14 y 1) $\Rightarrow$ 3) también
- 3) $\Rightarrow$ 1): Suponga que (e_n) no es completo. Entonces existe un $x \neq 0 \in H$ tal que $(x, e_n) = 0 \forall n$. Entonces, $||x|| \neq 0$ pero $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = 0$, lo que contradice 3)
- 2) $\Rightarrow$ 1): Suponga que se cumple 2 y sea $x \in H$ tal que $x \perp e_n$ para todo n. Sea $E = \{y \in H \mid (x, y) = 0\}$.
  E es un subespacio de H y es cerrado por continuidad del producto interno. Y contiene todos los e_n, por lo que contiene a $clin\{e_n\} = H$. En particular, eso implica $x \in E$ y entonces $(x, x) = 0$ por lo que $x = 0$. Y (e_n) es completo.

def (Separable): Un espacio de Hilbert es separable si contiene una secuencia ortonormal completa numerable o finita.

Def (Unitario): Un mapeo $U : H \to K$ se llama unitario si es lineal y biyectivo y preserva productos punto:

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

Dos espacios H, K con un operador unitario se llaman **isomorfos**.

Teorema: Sea $U : H \to K$ un mapeo lineal biyectivo. Entonces es unitario sii $|U(x)|| = ||x||$ para todo x.
La ida es inmediata y el regreso depende de la identidad de polarización.

Teorema: Sea H un espacio de Hilbert Separable. Entonces H es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ o a l^2.

4.4. Complementos Ortogonales

Def: Sea $E \subset H$, su complemento ortogonal es:

$$E^{\perp} = \{x \in H \mid (x, y) = 0 \ \ \forall \, y \in E\}$$

Teorema: Sea $E \subset H$, entonces $E^{\perp}$ es un subespacio lineal cerrado de H.

Lema: Sea M un subespacio lineal de un espacio con producto interno H y sea $x \in H$. Entonces $x \in M^{\perp}$ sii:

$$||x - y|| \geq ||x|| \quad \forall \, y \in M$$

Teorema: Sea M un subespacio lineal cerrado de H y sea $x \in H$. Existe $y \in M$ y $z \in M^{\perp}$ tal que $x = y + z$.

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

Corolario:

$$(M^{\perp})^{\perp} = M$$

Proceso de Gram Schmidt: Sea $x_1, x_2, \cdots$ una secuencia de vectores l.i. en un espacio con producto interno. Definimos los vectores e_n inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1/||x_1|| \\ f_n &= x_n - \sum_{j=1}^{n-1} (x_n, e_j) e_j \\ e_n &= f_n/||f_n|| \end{aligned}$$

Entonces e_n son ortonormales y generan el mismo espacio que las x_i

5. Series de Fourier

Para poder usar series de Fourier, necesitamos demostrar que el conjunto de funciones que se usa en Fourier son un conjunto completo.

Teorema: Sea $e_n(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi} e^{inx}}$, $-\pi < x < \pi$. Entonces $(e_n)_{-\infty}^{\infty}$ es una secuencia ortonormal completa en $L^2(-\pi, \pi)$.

- **Dem:** Que (e_n) son ortonormales está claro. Por las equivalencias de espacios completo, (e_n) es completo si $clin\{(e_n)\} = L^2(-\pi, \pi)$.
  Si esto se cumple, entonces, para todo $f \in L^2(-\pi, \pi)$ podríamos escribir $f = \sum (f, e_n) e_n$.

  Es un resultado de teoría de la medida que las restricciones a $(-\pi, \pi)$ de funciones 2π periódicas son un subespacio denso de $L^2(-\pi, \pi)$.
  Entonces, ya sóloo nos queda probar que estas funciones periódicas pertenece a clin $\{e_n | n \in \mathbb{Z}\}$ para probar que $clin\{e_n\}$ es denso (y como es cerrado, es igual a $L^2(-\pi, \pi)$)
  Con lo que tenemos la parte 2 del teorema de equivalencias.

  Consideremos una función f con periodo 2π, queremos ver que está en $clin\{(e_n)\}$, es decir, probar que hay una secuencia de funciones de $lin\{e_n\}$ convergente a f. Entonces, un candidato es $f_m = \sum\limits_{n=-m}^{m} (f, e_n) e_n$.
  Claramente $f_m \in lin\{e_n\}$ y sólo tenemos que probar que $f_m \to f$.
  Para ello, resulta más fácil probar que $F_m = \dfrac{1}{m+1}(f_0 + f_1 + \cdots + f_m) \to f$.
  Tenemos que:

$$\begin{aligned} f_m(y) &= \sum_{n=-m}^{m} (f, e_n) e_n(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-m}^{m} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) e^{iny} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{n=-m}^{m} e^{in(y-x)} dx \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} F_m(y) &= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} f_j(y) \\ &= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sum_{n=-m}^{m} e^{in(y-x)}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=-j}^{j} e^{in(y-x)}dx \end{aligned}$$

Definimos el **Kernel de Fejer** como:

$$K_m(t) = \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=-j}^{j} e^{int}$$

Y entonces, hemos probado que:

$$F_m(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_m(y-x)dx = k * f(y)$$

- **Lema:** El Kernel de Fejer se puede escribir como:

$$K_m(t) = \frac{1}{m+1}\frac{\sin^2\dfrac{(m+1)t}{2}}{\sin^2\dfrac{t}{2}}$$

- **Lema 2:** El Kernel de Fejer satisface:
  - $K_m(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $m = 0, 1, 2, \cdots$
  - $\int_{-\pi}^{\pi} K_m(t)dt = 2\pi \quad , \; m = 0, 1, 2, \cdots$
  - Para todo δ con $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{-\pi}^{-\delta} K_m(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} K_m(t)dt \to 0$$

Los $K_m(x)$ se aproximan a $\delta(x)$

Terminamos la Prueba: Consideramos un punto $y \in [-\pi, \pi]$ fijo. Y sustituimos $t = y - x$ en el segundo lema (ii). Entonces, tenemos:

$$\int_{y-\pi}^{y+\pi} K_m(y-x)dx = 2\pi$$

Multiplicamos por $f(y)$ y dividimos por 2π para obtener:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{y-\pi}^{y+\pi} f(y) K_m(y-x) dx \quad (5{,}3)$$

K_m es claramente 2π periódico por lo que la función $x \to f(x)K_m(y-x)$ también. Por lo que es lo mismo integrarla sobre cualquier periodo de 2π. Entonces, reescribimos la fórmula que teníamos para $F_m(y)$:

$$\begin{aligned} F_m(y) = k * f(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_m(y-x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x) K_m(y-x) dx \end{aligned}$$

Luego, restamos 5.3 para obtener:

$$F_m(y) - f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{y-\pi}^{y+\pi} [f(x) - f(y)] K_m(y-x) dx$$

Se puede acotar esta integral viendo que para $y \sim x$ se tiene que $f(x) - f(y)$ es chico. Pero para x lejos de y, $K_m(y-x)$ es chiquito (porque los K_m se van pareciendo a la delta de dirac para $m \to \infty$). Se puede probar formalmente con los lemas de antes.
Entonces, tendremos que para todo $\epsilon > 0$ existe m_0 tal que si $m \geq m_0$, entonces:

$$|F_m(y) - f(y)| < \epsilon$$

Entonces, $F_m \to f$ uniformemente (es decir $||F_m - f||_\infty \to 0$.
Entonces, como la norma de L^2 es menor a la norma $||\cdot||_\infty$, tenemos que $||F_m - f|| \to 0$ con $||\cdot||$ la norma de $L^2(-\pi, \pi)$

Entonces, hemos probado que si f es de periodo 2π, su restricción a $(-\pi, \pi)$ se puede aproximar con funciones de $lin\{e_n\}$. Lo que significa que $f \in clin\{e_n\}$.

Entonces, eso demuestra que (e_n) es completo. Pues digamos que $x \in L^2(-\pi, \pi)$ tal que $x \perp e_n$. Y definimos $E = \{y \in L^2 \mid (x, y) = 0\}$. E es cerrado porque es la imagen inversa bajo el producto punto del 0 (y el prod. punto es continuo). Además, como E contiene a todos los e_n (y sus combinaciones lineales) y es cerrado, contiene a todos los $clin\{e_n\}$. Por tanto, contiene a todo $L^2(-\pi, \pi)$ y en particular a x. Por lo tanto $(x, x) = 0$.
Lo que significa que (e_n) es completo.

Corolario: Sea $f \in L^2(-\pi, \pi)$ y digamos que tiene una serie de Fourier dada por:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Entonces:

$$\left\| f(x) - \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx} \right\| \to 0$$

En la norma de $L^2(-\pi, \pi)$ conforme $m \to \infty$.

- **Dem:** Como $L^2(-\pi, \pi)$ tiene como base completa a (e_n), entonces ya vimos que $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f, e_n) e_n$

5.1. Teorema de Fejer

Aunque ya vimos que $\sum (f, e_n) e_n \to f$ en $L^2(-\pi, \pi)$, nos falta probar que hay una convergencia puntual.

Teorema de Fejer: Sea f una función continua de periodo 2π en $\mathbb{R}$. Sea $s_n(f) = \sum_{m=-n}^{n} (f, e_m) e_m$ la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de f. Y sea $\sigma_n(f)$ la suma de Cesaro $\sigma_n(f) = \dfrac{s_0(f) + \cdots + s_n(f)}{n+1}$. Entonces $\sigma_n(f) \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}$ conforme $n \to \infty$.

Es decir, si:

$$f(x) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Escribimos:

$$s_n(f, x) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijx}$$

Y escribimos:

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} s_j(f, x)$$

El teorema de Fejer asegura que si f es continua en x y es de periodo 2π, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(f, x) = f(x)$$

5.2. Fórmula de Parseval

Sea $f, g \in L^2(-1, \pi)$ con series de Fourier dadas por:

$$f(x) \sim \sum c_n e^{inx} \quad , \quad g(x) \sim \sum d_n e^{inx}$$

Entonces, tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{d}_n$$

Corolario: Si $f \in L^2(-\pi, \pi)$ y $f(x) \sim \sum c_n e^{inx}$, entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

5.3. Teorema de Weierstrass

Teorema: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una función continua. Para todo $\epsilon > 0$ existe un polinomio complejo p tal que:

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon \quad , \quad a \le x \le b$$

- Podemos cambiar $[a, b]$ por $[-\pi, \pi]$ con un cambio de variable.
  Luego, sea $\mathfrak{p}$ el espacio de todos los polinomios en $[-\pi, \pi]$. Queremos probar que es denso en $C[-\pi, \pi]$ (fucniones continuas).
  La función $e^{inx} \in clos(\mathfrak{p})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ porque e^x tiene una serie de Taylor convergente. Entonces, $clos\mathfrak{p}$ contiene todas las combinaciones lineales de funciones e^{inx} y usamos la convergencia de series de Fourier según Fejer.

6. Espacios Duales

Dado un espacio V, definimos un **funcional lineal** como una función $p : V \to \mathbb{C}$.

Para espacios de dimesión finita, el conjunto de todos los funcionales lineales forme un espacio vectorial y es fácil de identificar (para cada $e_i \in V$ de la base, podemos definir $\widehat{e_i} : V \to \mathbb{R}$ como la i-ésima proyección, es decir $\widehat{e_i}(e_j) = \delta_{ij}$).

Sin embargo, para espacios de dimensión infinita, nos vamos a restringir sólo a funcionales continuos. La ventaja de los espacios de Hilbert sobre los de Banach es que en los de Hilbert es fácil identificar los funcionales lineales ya que tienen la forma $(\cdot, y)$.

Def (Funcional Lineal): Sea E un espacio vectorial sobre K, entonces un funcional lineal es un mapeo lineal $f : E \to K$.

Ejemplos:

- Definimos $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ como:

$$F(x_1, \cdots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

- Definimos $F : C[0,1] \to \mathbb{C}$ como:

$$F(X) = \int_0^1 x(t)d\alpha(t)$$

- Sea H un espacio de Hilbert y sea $y \in H$. Definimos entonces $F_y : H \to \mathbb{C}$ como:

$$F_y(x) = (x, y)$$

Teorema 6.3: Sea F un funcional lineal en un espacio normado $(E, ||\cdot||)$. Entonces los siguientes son equivalentes:

i) F es continuo

ii) F es continuo en 0

iii) $||F|| := \sup\{|F(x)| \mid x\ inE\ ,\ ||x|| \leq 1\} < \infty$ (la función F es acotada).
Entonces F es continua sii es acotada en la bola unitaria.

- **Dem:**$i) \Rightarrow\ ii)$ es evidente.
- $ii) \to iii)$: Por ii) con $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $||x|| < \delta\ \Rightarrow\ |F(x)| < 1$. Entonces, para todo $x \in E$ tal que $||x|| \leq 1$, tenemos que $||\delta x/2|| < \delta$ y entonces $|F(\delta x/2)| < 1$. Entonces $|F(x)| < 2/\delta$. Por lo que se cumple iii)

- *iii)* $\Rightarrow$ *i)*: Para $x, y \in E$ distintos, $(x-y)/||x-y||$ es un vector unitario. Entonces, por iii) tenemos que $\left|F\left(\frac{x-y}{||x-y||}\right)\right| \leq M$.
  Entonces $|F(x)-F(y)| \leq M||x-y||$. Por lo que F es Lipschitz y es continua.

Definición: Para un espacio E, definimos el **espacio dual** E^* como el espacio de todos los funcionales lineales continuos de E.

Teorema 6.5: El conjunto E^* de todos los funcionales lineales continuos de $(E, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach con definción de norma dada por:

$$||F|| = \sup_{x\in E\ ,\ ||x||\leq 1} |F(x)|$$

Teorema 6.6: Para todo vector $x \in E$ un espacio normado. Y todo funcional lineal continuo $F : E \to K$, tenemos que:

$$|F(x)| \leq ||F||||x||$$

Y de hecho, $||F||$ es el ínfimo de las constantes que cumplen lo de arriba.

6.1. El teorema de Riesz - Frechet

Teorema de Riesz Frechet: Sea H un espacio de Hilbert y sea F un funcional lineal continuo de H. Entonces existe un único $y \in H$ tal que:

$$F(x) = (x, y)$$

Para todo $x \in H$, además, $||y|| = ||F||$

El teorema muestra que para todo H espacio de Hilbert, existe una función suprayectiva que preserva la norma $T : H \to H^*$ dada por:

$$T(y) = T_y$$
$$T_y(x) = (x, y)$$

Donde T es **lineal conjugada**, es decir:

$$T(\lambda y + \mu z) = \bar{\lambda}T(y) + \bar{\mu}T(z)$$

Por tanto, los espacios de Hilbert se suelen llamar **auto-duales**.

7. Operadores Lineales

Función Lineal: Un operador lineal entre E y F es una función $T : E \to F$ tal que:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

Operador Lineal en E: Es una función lineal$T : E \to E$.

Acotada: Una función lineal $T : E \to F$ es acotada si existe $M \geq 0$ tal que:

$$||T(x)|| \leq M||x|| \quad , \forall x \in E$$

Para un operador acotado, le definimos la **norma** a T como:

$$||T|| = \sup\{||T(x)|| \ : \ x \in E \ , \ ||x|| \leq 1\}$$

$||T||$ se puede pensar como el máximo factor por el cual T estira a un vector. Notamos que para todo $x \in E$, tenemos:

$$||T(x)|| \leq ||T|| ||x||$$

De hecho, $||T||$ es el ínfimo de todos los números K tales que $||T(x)|| \leq K||x||$.

Ejemplo

- **Operador de Multiplicación:** Definimos M en $L^2(a,b)$ como:

  $$(Mx)(t) = f(t)x(t) \quad , \quad x \in L^2(a,b)$$

  Con $f \in C[a,b]$ una función fija. M es claramente lineal y vemos que:

  $$\begin{aligned} ||M(x)||^2 &= \int_a^b |f(t)|^2 |x(t)|^2 dt \\ &\leq \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|^2 \int_a^b |x(t)|^2 dt \\ &= ||f||_\infty^2 ||x||^2 \end{aligned}$$

  Entonces M es acotada y $||M|| \leq ||f||_\infty$. En realidad, se puede probar que $||M|| = ||f||_\infty$.

ii) **Operador Integral:** Sea $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sea: $k : [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ continuo.
Y definimos $K : L^2(a,b) \to L^2(c,d)$ como:

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds \ , \quad c < t < d \ , \quad x \in L^2(a,b)$$

K es claramente lineal. Además, por la desigualdad de CS, tenemos que para un $t \in (c,d)$ fijo:

$$|Kx(t)|^2 \leq \left(\int_a^b |k(t,s)|^2 ds\right)\left(\int_a^b |x(s)|^2 ds\right)$$

Entonces, tenemos que $||Kx||^2 \leq \left(\int_c^d \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt\right) ||x||^2$.
Entonces K es acotada y $||K|| \leq \left(\int_c^d \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt\right)^{1/2}$

iii) **Operador Diferencial:** Sea $\mathcal{D}$ el espacio de funciones diferenciable en $L^2(-\infty,\infty)$ tal que $f' \in L^2(-\infty,\infty)$. Entonces, definimos el operador:

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{D} \to L^2(-\infty,\infty)$$

es un operador lineal. No es acotada respecto a la norma de L^2

iv) **Operador Shift:** Definimos $S : l^2 \to l^2$ como:

$$S(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$$

S claramente es una isometría, $||Sx|| = ||x||$ para todo $x \in l^2$. Entonces S es acotado con $||S|| = 1$.
También tenemos un shift opuesto como $S^*(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$. S^* es acotado con $||S^*|| = 1$ y S^* es una isometría.

Teorema: Sean E, F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal. Los siguientes son equivalente:

i) T es continuo.

ii) T es continua en 0.

iii) T es acotado.

7.1. El espacio de Banach $L(E,F)$

Def: Dados E, F espacios normados, definimos por $L(E,F)$ al espacio de transformaciones lineales de E a F.
Este conjunto es en sí mismo un espacio vectorial con norma (la norma definida arriba, válida para operadores acotados).

Teorema: El espacio $L(E, F)$ es un espacio vectorial normado. Además, si F es Banach, entonces $L(E, F)$ es Banach.

Teorema: Sean E, F, G espacios normados. Si $A \in L(E, F)$ y $B \in L(F, G)$ entonces $BA \in L(E, G)$ y además:

$$||BA|| \leq ||B||||A||$$

- BA es claramente lineal y continua. Para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned} ||BAx||_G &= ||B(Ax)||_G \\ &\leq ||B||||Ax||_F \\ &\leq ||B||||A||||x||_E \end{aligned}$$

  Entonces, $||BA|| \leq ||B||\ ||A||$

7.2. Inversos de Operadores

Definición: Sea E, F espacios normados lineales. Un operador $A \in L(E, F)$ es **invertible** si existe un $B \in L(F, E)$ tal que:

$$AB = I_F \quad , \quad BA = I_E$$

Tal B es única si existe y se llama **inversa de** A.

Equivalencias: Si $A : E \to E$ es un operador en un espacio normado de dimensión finita E. Entonces lo siguiente es equivalente:

i) A es invertible

ii) A es inyectiva

iii) A es supra

iv) Existe $B \in L(E)$ tal que $AB = I$

v) Existe $B \in L(E)$ tal que $BA = I$

En dimensiones infinitas, estas cosas no son equivalentes.

Ejemplos:

i) Los operadores Shift $S, S^* : l^2 \to l^2$ cumplen que:

$$S^*S = I \quad , \quad SS^* \neq I$$

Se sigue que ni S ni S^* son totalmente invertibles. Sino que S tiene un inverso izquierdo (y es inyectiva) y S^* tiene un inverso derecho (y es supra).

ii) El operador de multiplicación $M : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definido como:

$$(Mx)(t) = tx(t) \quad , \quad 0 < t < 1$$

Es inyectiva pero no es suprayectiva y por tanto no es invertible. Es inyectiva porque si $Mx = 0$ entonces $tx(t) = 0$ para casi todo $t \in (0,1)$ y por tanto $x(t) = 0$ c.s.. Sin embargo, no hay un $x \in L^2(0,1)$ tal que Mx sea la función idénticamente 1, esto porque la función $1/t$ no es cuadrado integrable en $(0,1)$.

Teorema 7.10: Sea E un espacio de Banach y sea $A \in L(E)$. Si $||A|| < 1$ entonces $I - A$ es invertible y:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

En el espacio normado $L(E)$
Este teorema nos permite encontrar inversos a operadores.

Corolario 7.11: Sea E un espacio de Banach. El conjunto de operadores invertibles en E es abierto en $L(E)$

Ejemplo: Sea K un operador integral en $L^2(0,1)$ definido por:

$$Kf(t) = \int_0^t (t-s)f(s)ds \quad , \quad 0 < t < 1$$

Con ello, se puede demostrar que:

$$K^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(s)ds$$

Entonces, podemos resolver para un $f \in L^2(0,1)$ la ecuación integral siguiente:

$$f(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)f(s)ds$$

Donde g es una función dada.
Podemos considerar esta ecuación como $(I - K)f = g$ y entonces $f = (I - K)^{-1}g$. Entonces, por el teorema de antes, tenemos que $f = (I - K)^{-1}g = \sum\limits_{n=0}^{\infty} K^n g$

7.3. Operadores Adjuntos

Teorema: Sea $A \in L(E, F)$ donde E, F son espacios de Hilbert. Entonces, existe un único operador $A^/ \in L(F, E)$ tal que:

$$(Ax, y)_F = (x, A^* y)_E$$

Para todo $x \in E, y \in F$.
Esto se debe al teorema de Riesz.

Adjunto: A este operador único $A^* \in L(F,E)$ asociado a $A \in L(E,F)$ que cumple:

$$(Ax, y)_F = (x, A^*y)_E$$

Se le conoce a A^* como el **adjunto** de A.

Ejemplo:

i) Sea $M : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ definido por:

$$Mx(t) = f(t)x(t)$$

Donde $f \in C[a,b]$ es una función fija. Entonces M^* es también un operador de multiplicación.
Esto lo vemos porque:

$$\begin{aligned}
&(x, M^*y) = (Mx, y) \\
&\Rightarrow \int_a^b x(t)\overline{M^*y(t)}dt = \int_a^b f(t)x(t)\overline{y(t)}dt \\
&\Rightarrow \overline{M^*y(t)} = f(t)\overline{y(y)}
\end{aligned}$$

casi siempre. Lo que demuestr que:

$$M^*y(t) = \overline{f(t)}y(t)$$

En particular, si f es real, $M^* = M$.

ii) Sea $K : L^2(a,b) \to L^2(c,d)$ un operador integral con kernel k, es decir $(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)dx$. Entonces, vemos quién es K^*

$$\begin{aligned}
&(x, K^*y) = (Kx, y) \\
&\Rightarrow \int_a^b x(s)\overline{K^*y(s)}ds = \int_c^d Kx(t)\overline{y(t)}dt \\
&= \int_c^d \int_a^b k(t,s)x(s)\overline{y(t)}dsdt \\
&= \int_a^b \int_c^d x(s)k(t,s)\overline{y(t)}dtds
\end{aligned}$$

Como se cumple para toda función $x \in L^2(a,b)$, $y \in L^2(c,d)$, debemos de tener:

$$\overline{K^*y(s)} = \int_c^d k(t,s)y\bar{(}t)dt$$

O bien, intercambiando los roles, tenemos que:

$$K^*y(t) = \int_c^d \overline{k(s,t)}y(s)ds$$

Para casi todo t. Entonces K^* es un operador integral con Kernel k^*, donde $k^*(t,s) = \overline{k(s,t)}$.

Teorema 7.15: Se cumple que $A^{**} = A$ y que $||A^*|| = ||A||$ para todo operador $A \in L(E,F)$ con E, F espacios de Hilbert.

Teorema:

- Si $A \in L(E,F)$ y $B \in L(F,G)$ entonces:

$$(BA)^* = A^*B^*$$

- Si $A, B \in L(E,F)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, entonces:

$$(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda}A^* + \bar{\mu}B^*$$

7.4. Operadores Hermitianos

Def (Hermitiano): Un operador $A \in L(H)$ con H un espacio de Hilbert se llama Hermitiano (o autoadjunto) si $A = A^*$.

De los ejemplos de antes, podemos encontrar varios operadores Hermitianos en espacios dimensionalmente infinitos. Como por ejemplo, el operador de multiplicación $Mx(t) = f(t)x(t)$ tiene por adjunto $M^*y(t) = \overline{f(t)}y(t)$. Entonces, si f es real, entonces $M = M^*$.
O el operador integral $(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)dx$ tiene por adjunto a $(K^*y)(y) = \int_a^b \overline{k(s,t)}y(s)ds$. Entonces, si k es real, $K = K^*$.

Vamos a ver que este tipo de operadores se pueden diagonalizar.

Teorema 7.18: Si A es un operador hermitiano en un espacio de Hilber H, entonces:

$$||A|| := \sup_{||x|| \leq 1} ||A(x)|| = \sup_{||x||=1} |(Ax,x)|$$

7.5. El Espectro

La definición de Eigenvalores en operadores dimensionalmente infinitos no es tan útil como para operadores finitos. Por ello, cambiamos un poco la definición:

Def: Espectro: El espectro de $A \in L(E)$ con E un espacio de Banach. Se denota por $\sigma(A)$ y es el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda I - A$ no es invertible.

El espectro no es vacío, pues si lo fuera, el mapeo $\lambda \to (\lambda I - A)^{-1}$ sería un mapeo no constante acotado que contradice algo.
Si E es dim finito, entonces $\sigma(A)$ coincide con los eigenvalores de A pues un λ es un eigenvalor sii $\lambda I - A$ es no invertible, sii existe $x \in A$ con $(\lambda I - A)(x) = 0 \;\Rightarrow\; Ax = \lambda x$.

Teorema: Sea E un espacio de Banach y sea $A \in L(E)$. Entonces $\sigma(A)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y contenido en el disco cerrado de centro 0 y radio $||A||$

8. Operadores Compactos

Def (Compacto): Sea E, F espacios normados y sea $A : E \to F$ lineal. A es compacto si para toda secuencia $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en E, la secuencia (Ax_n) tiene una subsecuencia convergente en F.
Un operador A compacto es necesariamente acotado. Sino, existiría una secuencia (x_n) acotada en E tal que $||Ax_n|| \to \infty$ y entonces (Ax_n) no tendría una subsecuencia convergente.

Ejemplo (Operador Diagona): Sea $(e_n)_1^{\infty}$ una secuencia completa ortonormal en el espacio de Hilbert H. Y sea λ_n una secuencia acotada de números complejos. Sea $A \in L(H)$ un operador cuya matriz respecto a la base (e_n) es $\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$. Entonces, la aplicación de A a un vector $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ es:

$$A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n e_n$$

Entonces, A es compacto sii $\lambda_n \to 0$.

Teorema: Sean E, F espacios de Banach. El conjunto de operadores compactos en $L(E, F)$ es cerrado en $L(E, F)$.

8.1. Operadores de Hilbert-Schmidt

Def: Sean E, F espacios de Hilbert. Un operador lineal acotado $A : E \to F$ es de Hilbert-Schmidt si existe una secuencia ortonormal completa $(e_n)_1^{\infty}$ en E tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||Ae_n||^2 < \infty$$

Teorema: Los operadores de Hilbert - Schmidt son compactos. (pero no se cumple el inverso siempre)

Ejemplo: Sea $k : (c, d) \times (a, b) \to \mathbb{C}$ una función medible y cuadrado integrable. Entonces el operador integral $K : L^2(a, b) \to L^2(c, d)$ con kernel k es un operador de Hilbert Schmidt y es por tanto compacto.

8.2. El teorema espectral para operadores Hermitianos compactos

Teorema: Sea K un operador hermitiano compacto en un espacio de Hilbert H. Entonces $||K||$ o $-||K||$ es un eigenvalor de K.

Teorema: Sea A un operador Hermitiano en un espacio de Hilbert. Entonces todos los eigenvalores de A son reales y los eigenvectores de A correspondientes a distintos eigenvalores son ortogonales.

- **Dem:** Supongamos que λ es un eigenvalor de A y ϕ es su eigenvector. Entonce $A\phi = \lambda\phi$. Por ser hermitiano, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= (A\phi, \phi) - (\phi, A\phi) \\ &= (\lambda\phi, \phi) - (\phi, \lambda\phi) \\ &= (\lambda - \bar{\lambda})||\phi||^2 \end{aligned}$$

Por lo que $\lambda = \bar{\lambda}$ (ya que $\phi \neq 0$).
Sean λ, μ distintos eigenvalores de A y sean ϕ, ψ sus eigenvectores tales que $A\phi = \lambda\phi$, $A\psi = \mu\psi$. Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= (A\phi, \psi) - (\phi, A\psi) \\ &= (\lambda\phi, \psi) - (\phi, \mu\psi) \\ &= (\lambda - \bar{\mu})(\phi, \psi) \end{aligned}$$

Como μ es real y los eigenval son distintos, entonces $\lambda - \bar{\mu} \neq 0$. Por tanto $(\phi, \psi) = 0$

Teorema: Sea K un operador compacto hermitiano en un espacio de Hilbert H. El conjunto de eigenvalores de K es un conjunto de números reales que es ya sea lineal o una secuencia contable que tiende a 0.

Lema: Sea M un subespacio cerrado de H espacio de Hilbert. Y sea M invariante bajo el operador lineal $T : H \to H$ (es decir $T(M) \subset M$). Entonces $M^{\perp}$ es invariante bajo T^*

Teorema Espectral: Sea K un operador Hermitiano compacto en un espacio de Hilbert H. Entonces existe una cantidad finita o una secuencia infinita ortonormal (ϕ_n) de eigenvectores de K con eigenvalores (λ_n), tal que para todo $x \in H$, se tiene que:

$$Kx = \sum_n \lambda_n (x, \phi_n)\phi_n$$

Si la secuencia (λ_n) es infinita, tiende a 0.

Corolario: Sea K un operador Hermitiano compacto en un espacio separable de dimensión infinita de Hilbert H. Entonces existe una secuencia ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que consiste de eigenvectores de K. Y para todo $x \in H$ se tiene que:

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n)e_n$$

9. Sistemas de Sturm-Liouville

Def (Sistema Regular de Sturm-Liouville, RSL): Consiste en una ecuación diferencial en el intervalo $[a, b]$ junto con condiciones de frontera como sigue:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{df}{dx}\right) + qf = -\lambda\rho f \qquad , \; a \leq x \leq b$$

$$\begin{cases} \alpha f(a) + \alpha' f'(a) = 0 \\ \beta f(b) + \beta' f'(b) = 0 \end{cases}$$

Donde:

- p, q, ρ son funciones continuas y reales en $[a, b]$
- p, ρ son positivas en $[a, b]$
- p' existe y es continua en $[a, b]$
- $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ son constantes reales.

Singular Sturm Liouville (SSL):

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{df}{dx}\right) + qf = -\lambda\rho f \qquad , \quad a < x \leq b$$

$$\beta f(b) + \beta' f'(b) = 0$$

Donde las funciones p, q, ρ cumplen lo mismo de antes, con la diferencia que p vale 0 en a , $p(a)$ pero es positiva en el resto.

9.1. Eigenfunciones y Eigenvalores

Def: Una eigenfunción de un RSL o un SSL es una solución a la ecuación diferencial de SL con un λ particular. Dicho λ se conoce como autovalor correspondiente.

Las ecuaciones de Sturm Liouville se pueden escribir de otra forma usando el operador $L : D(L) \to L^2(a, b)$ definido como:

$$Lf = \frac{d}{dx}\left(p\frac{df}{dx}\right) + qf$$

Donde $D(L)$ es el conjunto de todas las funciones complejas $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ tales que $f'' \in L^(a, b)$ y f satisface las condiciones de frontera del problema de Liouville.
Entonces, la ecuación de SL se puede escribir como:

$$Lf = -\lambda\rho f$$

Y de ahí es de donde viene el nombre de eigen cosas.

Identidad de Lagrange: Para cualquier $u, v \in D(L)$, tenemos que:

$$uLv - vLu = (p(uv' - vu'))'$$

Producto punto: El producto punto aquí es:

$$(u, v) = \int_a^b \bar{v} u dx$$

Propiedad de Autoadjunto:
Se cumple que:

$$(Lu, v) = (u, Lv)$$

Teorema: Los eigenvalores de un sistema de SL son reales.

- **Dem:** Sea λ un eigenvalor de un RSL (o SSL) y sea f la eigenfunción, entonces $Lf = -\lambda \rho f$. Luego, por autoadjunto, se cumple que:

$$\begin{aligned} 0 &= (Lf, f) - (f, Lf) \\ &= (-\lambda \rho f, f) - (f, -\lambda \rho f) \\ &= (\bar{\lambda} - \lambda) \int_a^b \rho(x) |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

  Luego, como $\rho > 0$ en $[a, b]$ y $f \neq 0$, entonces la integral es positiva y $\lambda = \bar{\lambda}$

10. Expansión en Eigenfunciones

Recordamos el problema RSL:

$$(pf')' + qf = -\lambda\rho f \quad , \quad a \leq x \leq b \begin{cases} \alpha f(a) + \alpha' f'(a) = 0 \\ \beta f(b) + \beta' f'(b) = 0 \end{cases}$$

Donde p, q, ρ son continuas reales en $[a, b]$. p, ρ son positivas en $[a, b]$ y p es diferenciables.

Decimos que un valor de λ es **simple** si cualesquiera dos eigenfunciones correspondientes son L.D
En otro caso, el eigenvalor se llama **degenerado**.

Teorema de Sturm Liouville: El sistema RSL tiene infinitos $(\lambda_j)_1^\infty$ eigenvalores. Cada eigenvalor es real y simple y $|\lambda_j| \to \infty$ conforme $j \to \infty$. Si ϕ_j es un eigenfunción de RSL correspondiente a λ_j, entonces $(\rho^{1/2}\phi_j)_1^\infty$ es un sistema ortogonal en $L^2(a, b)$.

Algunas otras propiedades en este caso (conste que es un RSL y no un SSL) es que:

- $\lambda_j \to \infty$
- $\sum_{\lambda_j \neq 0} \dfrac{1}{\lambda_j}$ converge
- ϕ_j tiene exactamente j zeros en $[a, b]$

10.1. Ejemplos Eigenfunciones

Teorema de Ortogonalidad: Sean u, v eigenfunciones de un problema de SL, correspondientes a distintos eigenvalores. Entonces $\rho^{1/2}u$, $\rho^{1/2}v$ son ortogonales. O bien, u, v son ortogonales con el peso ρ.

- **Dem:** Por hipótesis, tenemos que $Lu = -\lambda\rho u \quad , \quad Lv = -\mu\rho v$
  Para escalares λ, μ (reales por la propiedad de antes). Por la propiedad de autoadjunto, se cumple que $(Lu, v) = (u, Lv)$. Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= (Lu, v) - (u, Lv) \\ &= (-\lambda\rho u, v) - (u, -\mu\rho v) \\ &= (\mu - \lambda)\int_a^b \rho(x)u(x)\bar{v(x)}dx \\ &= (\mu - \lambda)(\rho^{1/2}u, \rho^{1/2}v) \end{aligned}$$

  Entonces como $\mu \neq \lambda$, tenemos que $\rho^{1/2}u \perp \rho^{1/2}v$.

Nos gustaría saber si el sistema de soluciones a parte de ser ortogonal, es completo.

Teorema: No todo número real de un problema RSL es un eigenvalor (hay ciertas restricciones a los eigenvalores, no se puede conseguir una solución finita a $Lf = -\lambda\rho f$ con las condiciones de frontera para cualquier λ)

Para algunas ecuaciones, las soluciones son polinomios, mientras que para otras no. Si las soluciones son polinomios, tenemos:

Fórmula de Rodrigues: Sea $\{P_n(x)\}$ una secuencia de polinomios ortogonales con peso $w(x)$. Lo que significa que tienen ortogonalidad dada por:

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)w(x)dx = K_{m,n}\delta_{m,n}$$

Entonces, buscamos que $w(x)$ cumpla la **ecuación de Pearson** dada por $\dfrac{w'(x)}{w(x)} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ donde $A(x)$ es un polinomio de a lo sumo orden 1 y $B(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo 2. Y además $\lim_{x\to a} w(x)B(x) = \lim_{x\to b} w(x)B(x) = 0$.
Entonces, se cumple que:

$$P_n(x) = \frac{c_n}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}[B(x)^n w(x)]$$

.

- **Movimiento armónico:**
  - **Ecuación:** $f'' + \lambda f = 0 \quad , \quad f(0) = f(\pi) = 0 \quad , \quad [0, \pi]$
  - **Valores:** $p = 1$, $q = 0$, $\rho = 1$
  - **Solución (con frontera):** $f(x) = B \sin(\sqrt{\lambda} x)$
  - **Eigenvalores:** Los eigenvalores válidos son $\lambda \in \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.
  - **Funciones ortogonales:** $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$, $\cdots$
  - **Norma:** $(\sin nx, \sin nx) = 1$
- **Legendre (Polinomios):**
  - **Ecuación** $\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dP(x)}{dx}\right] = -\lambda P(x) \quad , \quad [-1, 1]$
  - **Valores:** $p = 1 - x^2 \quad , \quad q = 0 \quad , \quad \rho = 1$
  - **Eigenvalores:** Se puede resolver usando series y se ve que para que la solución sea finita en $[-1, 1]$ se debe de cumplir que $\lambda = n(n+1)$
  - **Soluciones:** Las soluciones son $P_n(x)$ polinomio de orden n. Se pueden conseguir ortogonalizando el conjunto de funciones $\{1, x, x^2, \cdots\}$ con el producto punto con peso $\rho = 1$.
  - **Ortogonalidad:** Las funciones $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $\cdots$ son ortonormales. Y tienen **norma:** $\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \dfrac{2}{2n+1}$.
  - **Fórmula de Rodrigues:** $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$
- **Asociada de Legendre (No Son Polinomios)**
  - **Ecuación:** $\dfrac{d}{dx}\left[(1-x)^2 \dfrac{d}{dx} P_l^m(x)\right] - \dfrac{m^2}{1-x^2} P_l^m(x) = -\lambda P_l^m(x) \quad , \quad [-1, 1] \quad ,$ $|m| \leq l$
  - **Valores:** $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = -\dfrac{m^2}{1-x^2}$, $\lambda = l(l+1)$, $w(x) = 1$
  - **Eigenvalores:** Las soluciones se pueden obtener con series o así y los eigenvalores que hacen una solución finita son $\lambda = l(l+1)$ donde $|m| \leq l$

- **Soluciones:** Las soluciones $P_l^m(x)$ no son polinomios en general (a menos que m sea par). Se pueden obtener a partir de los polinomios de Legendre como:

$$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}(P_l(x))$$

Para $m \geq 0$, sino para $-m$ se obtienen soluciones $P_l^{-m} = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$
Algunas soluciones son $P_0^0(x) = 1$, $P_1^{-1}(x) = -\frac{1}{2}P_1^1(x)$, $P_1^0(x) = x$, $P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2}$, $P_2^{-2} = \frac{1}{24}P_2^2(x)$, $P_2^{-1}(x) = -\frac{1}{6}P_2^1(x)$, $P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^(1/2)$, $P_2^2(x) = 3(1-x^2)$

- **Ortogonalidad:** Las soluciones son ortogonales y completas y tienen **norma** dada por $\int_{-1}^{1} P_k^m P_l^m dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\delta_{k,l}$

- **Chebyshev 1 (polinomios) :**

  - **Ecuación:** $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{1/2}\frac{dy}{dx}\right] = -\lambda(1-x^2)^{-1/2}f(x) \quad , \quad -1 \leq x \leq 1$
  - **Valores:** $p(x) = (1-x^2)^{1/2}$, $q = 0$, $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$
  - **Eigenvalores:** Las soluciones se pueden conseguir con series de potencias y resulta que se consiguen soluciones si $\lambda = p^2$.
  - **Soluciones:** Las soluciones son polinomios $T_0, T_1, \cdots, T_p$. Con $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.
    Las soluciones se pueden conseguir ortogonalizando $\{1, x, x^2, \cdots\}$ con Gram-S usando el peso w.
  - **Ortogonalidad:** Las soluciones son ortogonales con el peso w. y son ortonotmales con una norma $\int_{-1}^{1}\frac{[T_n(x)]^2}{(1-x^2)^{1/2}}dx = \pi/2$ si $n \neq 0$ y π para $T_0(x)$
  - **Fórmula de Rodrigues:** $T_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}(1-x^2)^{1/2}}{2^n(n-1/2)!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n-1/2}]$

- **Laguerre (polinomios):**

  - **Ecuación:** $\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right] = -\lambda e^{-x}y \quad , \quad [0, \infty)$
    O bien, $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$
  - **Valores:** $p(x) = xe^{-x}$, $q = 0$, $w(x) = e^{-x}$
  - **Eigenvalores:** Los polinomios se consiguen haciendo la serie de potencia y se cortan cuando $\lambda \in \mathbb{N}$

- **Soluciones**: Para $\lambda \in \mathbb{N}$, las soluciones so polinomios $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = -x+1$, $L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$, $L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
  Las soluciones se pueden conseguir también al ortogonalizar $\{1, x, x^2, x^3 \ , \cdots \}$ con respecto al peso $w = e^{-x}$
- **Ortogonalidad:** Como en los otros casos, los polinomios son ortogonales con el peso w y tienen una norma dada por $\int_0^\infty [L_n(x)]^2 e^{-x} dx = 1$
- **Fórmula de Rodrigues:** $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$

- **Asociada de Laguerre (Polinomios)**

  - **Ecuación:** $\dfrac{d}{dx}\left[x^{k+1} e^{-x} \dfrac{dy}{dx}\right] = -\lambda x^k e^{-x} y \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad , \quad [0, \infty)$
    O bien $xy'' + (k + 1 - x)y' + \lambda y = 0$
  - **Valores:** $p(x) = x^{k+1} e^{-x}$, $q = 0$, $w(x) = x^k e^{-x}$
  - **Eigenvalores:** Los eigenvalores son $\lambda \in \mathbb{N}$
  - **Soluciones:** Para $\lambda \in \mathbb{N}$ se consiguen soluciones que se cortan (polinomios) que son $L_0^k(x) = 1$, $L_1^k(x) = -x + k + 1$, $L_2^k(x) = \frac{1}{2}[x^2 - 2(k+2)x + (k+1)(k+2)]$, $\cdots$
    Las soluciones se pueden obtener al ortonomalizar $\{1, x, x^2, \cdots, \}$ con respecto a $w = x^k e^{-x}$
  - **Ortogonalidad:** Los polinomios para una misma k son ortogonales respecto al peso $x^k e^{-x}$ y tienen norma dada por $\int_0^\infty [L_n^k(x)]^2 x^k e^{-x} dx = \dfrac{(n+k)!}{n!}$
  - **Fórmula de Rodrigues:** $L_n^k(x) = \dfrac{e^x x^{-k}}{n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+k})$

- **Hermite (Polinomios)**

  - **Ecuación:** $\dfrac{d}{dx}\left[e^{-x^2} \dfrac{dy}{dx}\right] = -\lambda e^{-x^2} y \quad , \quad (-\infty, \infty)$
    O bien, $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$
  - **Valores:** $p(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$, $w(x) = e^{-x^2}$
  - **Eigenvalores:** Al resolver por medio de series, nos queda que los eigenvalores son $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8, \cdots$
  - **Soluciones:** Para un valor de λ adecuado, la solución en series se detiene y nos queda un polinomio y no una serie infinita. Algunos polinomios de Hermite son $H_0 = 1$, $H_1 = x$, $H_2 = x^2 - 1$, $H_3 = x^3 - 3x$, $\cdots$
    Se pueden conseguir al ortogonalizar $\{1, x, x^2, \cdots\}$ con respecto al peso $w = e^{-x^2}$
  - **Ortogonalidad:** Como en los otros casos, las funciones son ortogonales respecto al peso $w = e^{-x^2}$ y tienen una norma de: $\int_{-\infty}^\infty [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx = 2^n \pi^{1/2} n!$

- **Fórmula de Rodrigues:** $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

- **Bessel**
  - **Ecuación:** $\dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{dy}{dx}\right] - \dfrac{n^2}{x}y = -\lambda xy$
    Con $n \in \mathbb{R}$ un parámetro fijo.
    La λ que aparece lo transforma en una ecuación de eigen. Pero no aparece generalmente en la 'ecuación de Bessel'
  - **Valores:** $p(x) = x$, $q(x) = -n^2/x$, $w(x) = x$
  - **Eigenvalores:** Se puede resolver por series y resulta que los eigenvalores para que la solución se finita en un intervalo $[0, R]$ son $\lambda_{n,m} = (j_{n,m}/R)^2$ donde n es el parámetro fijo y $j_{n,m}$ es el m-ésimo cero de la función de Bessel J_n
  - **Soluciones:** Entonces, las eigenfunciones son $J_n(j_{n,m}x/R)$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$
  - **Ortogonalidad:** Dos funciones de Bessel $J_n(j_{n,i}x/R)$ y $J_n(j_{n,j}x/R)$ son ortogonales

Aplicaciones a Ecuaciones Inhomogéneas
Digamos que tenemos una ecuación diferencial de la forma:

$$Ly = f$$

Con L un operador de SL.

Digamos que $Ly = -\lambda_i \rho y$, el problema de eigenvalores, tiene como soluciones a las funciones $u_i(x)$.

Entonces, lo primero que hacemos es escribir f en esta base (que se puede porque u_i es una base ortonormal completa) y la escribimos como:

$$f(x) = \sum_i \alpha_i u_i(x) \qquad , \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Entonces, podemos reescribir la ecuación diferencial como:

$$Ly = \sum_i \alpha_i u_i(x)$$
$$\Rightarrow \quad Ly = \sum_i \lambda_i \frac{\alpha_i}{\lambda_i} u_i(x)$$

Entonces, primero que nada sabemos que la solución es $Ly = \lambda_i u_i(x)$. Entonces, la solución completa es:

$$y = \sum_i \frac{\alpha_i}{\lambda_i} u_i(x)$$