Ecuaciones diferenciales I

Tomás Basile Álvarez

Tarea 8 30/04/20

1. Encuentra una solución particular para cada una de las ecuaciones

a) $y'' + y = x^4$

Propongo $y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \rightarrow y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$

Sustituyendo: $12Ax^2 + 6Bx + 2C + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = x^4$

$\rightarrow Ax^4 + Bx^3 + (12A + C)x^2 + (6B + D)x + 2C + E = x^4$

$\rightarrow$ $A = 1$, $B = 0$,

$12A + C = 0 \rightarrow C = -12$,

$6B + D = 0 \rightarrow D = 0$,

$2C + E = 0 \rightarrow E = 24$.

$\therefore$ Solución: $\boxed{y = x^4 - 12x^2 + 24}$

---

b) $y'' - y = e^{-x}$

Propongo $y = Ke^{-x} \rightarrow y' = -Ke^{-x} \rightarrow y'' = Ke^{-x}$

$\therefore y'' - y = Ke^{-x} - Ke^{-x} = 0$ $\therefore$ No Funciona ¡¡

Propongo $y = Kxe^{-x} \rightarrow y' = -Kxe^{-x} + Ke^{-x} \rightarrow y'' = Kxe^{-x} - Ke^{-x} - Ke^{-x}$

$\rightarrow y'' = Kxe^{-x} - 2Ke^{-x}$

Sustituyo: $y'' - y = e^{-x}$

$\rightarrow Kxe^{-x} - 2Ke^{-x} - Kxe^{-x} = e^{-x}$

$\rightarrow -2Ke^{-x} = e^{-x} \rightarrow -2K = 1 \rightarrow \boxed{K = -1/2}$

$\therefore$ Solución General: $\boxed{y = -\frac{1}{2}xe^{-x}}$

2) a) $4y'' + 20y' + 25y = 0$

propongo $y = e^{\alpha x}$ $\rightarrow$ $4y'' + 20y' + 25y = 0 \rightarrow 4(e^{\alpha x})'' + 20(e^{\alpha x})' + 25(e^{\alpha x}) = 0$

$\rightarrow 4\alpha^2 e^{\alpha x} + 20\alpha e^{\alpha x} + 25e^{\alpha x} = 0$

$\rightarrow 4\alpha^2 + 20\alpha + 25 = 0 \nearrow \alpha_1 = -5/2$ con doble multiplicidad

$\therefore$ Una solución es $\underline{y = e^{-\frac{5}{2}x}}$

Para otra solución propongo $\underline{y = x e^{-\frac{5}{2}x}} \rightarrow y' = -\frac{5}{2}x e^{-\frac{5}{2}x} + e^{-\frac{5}{2}x} \rightarrow y'' = -5e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{25}{4}x e^{-\frac{5}{2}x}$

$\rightarrow 4y'' + 20y' + 25y = -20e^{-5/2x} + 25xe^{-5/2x} - 50xe^{-5/2x} + 20e^{-5/2x} + 25xe^{-5/2x} = 0$

$\therefore$ Es solución.

$\therefore$ Solución general: $\boxed{y = c_1 e^{-\frac{5}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{5}{2}x}}$

---

b) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$

Ecuación homogénea: $y'' - 2y' - 3y = 0$ propongo $e^{\alpha x}$

$\rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \nearrow \alpha_1 = 3 \quad \alpha_2 = -1$

$\therefore$ Solución homogénea: $\underline{y_H = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}}$

b) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$

homogénea: $y'' - 2y' - 3y = 0$. propongo $y = e^{\alpha x} \to y' = \alpha e^{\alpha x} \to y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \to \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = -1$

$\therefore$ Solución homogénea: $y = c_1 \underbrace{e^{3x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{e^{-x}}_{y_2}$

- Particular

Por variación de parámetros, propongo:

$y = v_1 y_1 + v_2 y_2$

El Wroskiano es $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{3x}(-e^{-x}) - e^{-x}(3e^{3x}) = -4e^{2x}$

- Por la teoría tenemos: $v_1' = \frac{-y_2\, 64xe^{-x}}{W(y_1,y_2)} = -\frac{e^{-x}(64xe^{-x})}{-4e^{2x}} = 16xe^{-4x}$

$\to v_1 = 16\int xe^{-4x}dx = 16\left(-\frac{xe^{-4x}}{4} + \int \frac{e^{-4x}}{4}\right) = -4xe^{-4x} - e^{-4x}$

- Por la teoría tenemos: $v_2' = \frac{y_1\, 64xe^{-x}}{W(y_1,y_2)} = \frac{64xe^{2x}}{-4e^{2x}} = -16x$

$\to v_2 = -16\int x\,dx = -8x^2$

$\therefore$ La solución es: $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 = (-4x-1)e^{-4x}e^{3x} - 8x^2 e^{-x}$

$= (-8x^2 - 4x - 1)e^{-x}$

$\therefore$ La solución general es:

$$\boxed{y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + (-8x^2 - 4x - 1)e^{-x}}$$

$$= c_1 e^{3x} + c_2' e^{-x} + (-8x^2 - 4x)e^{-x}$$

con $c_2' = c_2 - 1$

3) Encuentre la solución a los siguientes problemas valores iniciales

a) $y'' + 6y' + 8y = \cos(t)$ $\qquad y(0) = y'(0) = 0$

Homogénea: $y'' + 6y' + 8y = 0$ $\quad$ propongo $y = e^{\alpha x} \rightarrow y' = \alpha e^{\alpha x} \rightarrow y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$\Rightarrow \alpha^2 + 6\alpha + 8 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -2 \ , \ \alpha_2 = -4$

$\therefore$ Solución homogénea: $y_H = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$

Particular: propongo $y = A\,\mathrm{sen}(t) + B\cos(t) \Rightarrow y' = A\cos(t) - B\,\mathrm{sen}(t) \rightarrow y'' = -A\,\mathrm{sen}(t) - B\cos(t)$

$\Rightarrow -A\,\mathrm{sen}(t) - B\cos(t) + 6A\cos(t) - 6B\,\mathrm{sen}(t) + 8A\,\mathrm{sen}(t) + 8B\cos(t) = \cos(t)$

$\rightarrow \begin{array}{l} 7A - 6B = 0 \\ 6A + 7B = 1 \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow B = \frac{7}{6}A \\ \rightarrow 6A + \frac{49}{6}A = 1 \rightarrow A = \frac{6}{85} \ , \ B = \frac{7}{85} \end{array}$

$\therefore$ Solución particular $\frac{6}{85}\,\mathrm{sen}(t) + \frac{7}{85}\cos(t)$

$\therefore$ Solución general: $y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t} + \frac{6}{85}\,\mathrm{sen}(t) + \frac{7}{85}\cos(t)$

$\rightarrow y' = -2c_1 e^{-2t} - 4c_2 e^{-4t} + 6/85 \cos(t) - \frac{7}{85}\,\mathrm{sen}(t)$

pero $y(0) = 0 \rightarrow c_1 + c_2 + 7/85 = 0$ $\quad \cdots (1)$

$y'(0) = 0 \rightarrow -2c_1 - 4c_2 + 6/85 = 0$ $\quad \cdots (2)$

$2(1) + (2)$ $\quad 0 - 2c_2 + 4/17 = 0 \rightarrow c_2 = 2/17$

$\rightarrow c_1 = -1/5$

$\therefore$ Solución: $\boxed{y = -\frac{1}{5} e^{-2t} + \frac{2}{17} e^{-4t} + \frac{6}{85}\,\mathrm{sen}(t) + \frac{7}{85}\cos(t)}$

b) $y'' + 4y = \operatorname{sen}(3t)$ $\qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 0$

homogénea $\quad y'' + 4y = 0 \qquad$ propongo $y = e^{\alpha t} \to y' = \alpha e^{\alpha t} \to y'' = \alpha^2 e^{\alpha t}$

$\to \alpha^2 + 4 = 0 \quad \to \quad \alpha_1 = 2i; \quad \alpha_2 = -2i;$

$\therefore$ La solución es : $e^{0t}\left(C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)\right)$

$\underline{y_H = C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)}$

Particular: $\quad$ propongo $y = A \operatorname{sen}(3t) \to y' = 3A \cos(3t) \to y'' = -9A \operatorname{sen}(3t)$

$\to y'' + 4y = \operatorname{sen}(3t)$

$\to -9A\operatorname{sen}(3t) + 4A\operatorname{sen}(3t) = \operatorname{sen}(3t) \to -5A = 1 \to \underline{A = -1/5}$

$\therefore \quad \underline{y_p = -1/5 \operatorname{sen}(3t)}$

$\therefore$ Solución general $\quad y = C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{5} \operatorname{sen}(3t)$

$\to y' = -2C_1 \operatorname{sen}(2t) + 2C_2 \cos(2t) - \frac{3}{5} \cos(3t)$

Pero: $\quad y(0) = 2 \qquad \underline{C_1 = 2}$

$\to$

$y'(0) = 0 \qquad 2C_2 - 3/5 = 0 \to \underline{C_2 = 3/10}$

$\therefore$ La solución es : $\boxed{y = 2\cos(2t) + 3/10 \operatorname{sen}(2t) - 1/5 \operatorname{sen}(3t)}$

4) a) Muestre que el método de variación de parámetros en $y''+y=f(x)$ lleva a la solución particular. $y_p(x) = \int_0^x f(t)\,\text{Sen}(x-t)\,dt$

La ecuación homogénea es: $y''+y=0$

Que por inspección, tiene soluciones $y_1=\cos x$ $y_2=\text{sen}\,x$

Para el método de variación, proponemos: $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$

$W(y_1,y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \cos^2 x + \text{Sen}^2 x = 1$

- Y por la teoría, sabemos que $v_1 = \int \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)} = \int_0^x -\text{Sen}(t) f(t)\,dt$,
- $v_2 = \int \frac{y_1 f(t)}{W(y_1,y_2)}\,dt = \int_0^x \cos(t) f(t)\,dt$,

$\therefore$ Solución particular: $y_p = \cos x \int_0^x -\text{Sen}(t) f(t)\,dt + \text{Sen}\,x \int_0^x \cos(t) f(t)\,dt$

$y_p = \int_0^x -\cos x\,\text{Sen}(t) f(t)\,dt + \int_0^x \text{Sen}\,x \cos(t) f(t)\,dt$ ← porque x es cte en la integral

$= \int_0^x (\text{Sen}\,x \cos t - \cos x\,\text{Sen}\,t) f(t)\,dt$

$= \boxed{\int_0^x \text{Sen}(x-t)\, f(t)\,dt}$

b) Encontre algo similar para $y''+K^2y=f(x)$ $K>0$

Homogénea: $y''+K^2y=0$ nuevamente, por inspección $y_1=\cos(Kx)$ $y_2=\text{Sen}(Kx)$

Proponemos como solución particular a $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$

$W(y_1,y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \cos(Kx)\,K\cos(Kx) + \text{Sen}(Kx)\,K\,\text{Sen}(Kx) = K$

- Sabemos que $v_1 = \int_0^x \frac{-y_2 f(t)}{W(y_1,y_2)} = \int_0^x -\frac{\text{sen}(Kt) f(t)}{K}\,dt$

$v_2 = \int_0^x \frac{y_1 f(t)}{W(y_1,y_2)} = \int_0^x \frac{\cos(Kt)}{K} f(t)\,dt$,

$\Rightarrow y_p = \cos(Kx) \int_0^x -\frac{\text{sen}(Kt) f(t)}{K}\,dt + \text{Sen}(Kx) \int_0^x \frac{\cos(Kt) f(t)}{K}\,dt$

$= \frac{1}{K}\left[\int_0^x f(t)\,(-\cos(Kx)\,\text{Sen}(Kt) + \text{Sen}(Kx)\cos(Kt))\,dt \right]$

$= \boxed{\frac{1}{K}\int_0^x \text{sen}(Kx-Kt)\, f(t)\,dt}$

5) $y'' + py' + qy = f(t)$, $y(0) = y_0$ $y'(0) = y_0'$ ... (1)

introducimos $z(t) = y'(t)$ $\rightarrow$ $\frac{d}{dt}\bar{w} = \bar{F}(t, \bar{w})$, $\bar{w}(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$ ... (2)

con $\bar{w}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\bar{F}(t, \bar{w}) = \begin{pmatrix} z \\ -pz - qy + f(t) \end{pmatrix}$

También se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt}\bar{w}(t) = \mathbb{A}\bar{w} + \bar{G}(t) \quad \text{... (3)} \quad \text{con } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \quad G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

a) Usando los tres casos vistos en clase para la ec. homogénea, escriba la solución general para el caso homogéneo del sistema (3)

El sistema es: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = z(t)$ ...... (1)

Sustituyo 1) en 2)

$\frac{dz(t)}{dt} = -q\,y(t) - p\,z(t)$ ... (2) $\rightarrow$ $\frac{d^2y(t)}{dt} + p\frac{dy(t)}{dt} + q\,y(t) = 0$

Proponemos $y(t) = e^{\alpha t}$ $\rightarrow$ $\alpha^2 e^{\alpha t} + p\alpha e^{\alpha t} + q e^{\alpha t} = 0$

$\rightarrow \alpha^2 + p\alpha + q = 0$

- **Caso 1**: Tenemos dos soluciones distintas $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow y_1 = e^{\alpha_1 t}$ $y_2 = e^{\alpha_2 t}$ $\rightarrow$ $y = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$

$\rightarrow z = y' = C_1\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\alpha_2 t}$

- **Caso 2**: Dos soluciones iguales α_1

$\rightarrow y_1 = e^{\alpha_1 t}$ $y_2 = t\,e^{\alpha_1 t}$ $y = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2\, t\, e^{\alpha_1 t}$

$z = y' = C_1\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + C_2\alpha_1 t\, e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_1 t}$

- **Caso 3**: Dos soluciones complejas. $a + bi$, $a - bi$

$\rightarrow y_1 = e^{(a+bi)t}$, $y_2 = e^{(a-bi)t}$, o bien: $y_1 = e^{at}\cos(bt)$, $y_2 = e^{at}\,\text{sen}(bt)$

$\rightarrow y = e^{at}\left(C_1\cos(bt) + C_2\,\text{sen}(bt)\right)$

$\rightarrow z = y' = e^{at}\left[(aC_2 - bC_1)\,\text{sen}(bt) + (bC_2 + aC_1)\cos(bt)\right]$

b) Reescriba las soluciones del inciso anterior de forma matricial

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = X(t) \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

Caso 1) Dos raíces Reales. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

La solución general es $y(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$

$\rightarrow y'(t) = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t}$

Pero $y(0) = y_0 \rightarrow C_1 + C_2 = y_0 \rightarrow C_1 = y_0 - C_2$

$y'(0) = y_0' \quad \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = y_0' \rightarrow \alpha_1 (y_0 - C_2) + \alpha_2 C_2 = y_0'$

$\rightarrow -\alpha_1 C_2 + \alpha_1 y_0 + \alpha_2 C_2 = y_0' \rightarrow C_2 = \dfrac{y_0' - \alpha_1 y_0}{\alpha_2 - \alpha_1}$

$$C_1 = y_0 - C_2 = \frac{y_0 \alpha_2 - y_0'}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

$$\therefore \quad y(t) = \frac{y_0 \alpha_2 - y_0'}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{y_0' - \alpha_1 y_0}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t}$$

- $$y(t) = y_0 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t} \right) + y_0' \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} \right)$$

$$\rightarrow y'(t) = y_0 \left(\frac{\alpha_2 \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t} \right) + y_0' \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} \right)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t} & \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(e^{\alpha_2 t} - e^{\alpha_1 t} \right) \\ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t} \right) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

••) Caso 2) : Dos soluciones iguales $\alpha \rightarrow y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}$

$\rightarrow y' = \alpha C_1 e^{\alpha t} + \alpha C_2 t e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t}$

Pero $\begin{matrix} y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_0' \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} C_1 = y_0 \\ \alpha C_1 + C_2 = y_0' \end{matrix} \rightarrow C_2 = y_0' - \alpha y_0$

$\therefore \; y(t) = y_0 e^{\alpha t} + (y_0' - \alpha y_0) t e^{\alpha t}$

$\rightarrow y(t) = y_0 (e^{\alpha t} - \alpha t e^{\alpha t}) + y_0' (t e^{\alpha t})$

$y'(t) = \alpha y_0 e^{\alpha t} + \alpha(y_0' - \alpha y_0) t e^{\alpha t} + (y_0' - \alpha y_0) e^{\alpha t}$

$\rightarrow y'(t) = y_0 (-\alpha^2 t e^{\alpha t}) + y_0' (\alpha t e^{\alpha t} + e^{\alpha t})$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} - \alpha t e^{\alpha t} & t e^{\alpha t} \\ -\alpha^2 t e^{\alpha t} & \alpha t e^{\alpha t} + e^{\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

•••) Caso 3) Dos soluciones conjugadas $\rightarrow y = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \operatorname{sen}(bt))$

$\rightarrow y' = e^{at} [(aC_2 - bC_1) \operatorname{sen}(bt) + (bC_2 + aC_1)\cos(bt)]$

Pero: $\begin{matrix} y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_0' \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} C_1 = y_0 \\ bC_2 + aC_1 = y_0' \end{matrix} \rightarrow C_2 = y_0' - aC_1/b$

$\therefore \; y = e^{at}\left(y_0 \cos(bt) + \left(\frac{y_0' - ay_0}{b}\right)\operatorname{sen}(bt)\right)$

$\rightarrow y(t) = y_0 \left[e^{at}\left[\cos(bt) - \frac{a}{b}\operatorname{sen}(bt)\right]\right] + y_0' \left(e^{at} \frac{\operatorname{sen}(bt)}{b}\right)$

••) $y' = e^{at}\left[\left(a\left(\frac{y_0' - ay_0}{b}\right) - by_0\right)\operatorname{sen}(bt) + (y_0' - ay_0 + ay_0)\cos(bt)\right]$

$\rightarrow y'(t) = y_0 \left[-\frac{a^2}{b} - b\right] e^{at} \operatorname{sen}(bt) + y_0' e^{at}\left[\frac{a}{b}\operatorname{sen}(bt) + \cos(bt)\right]$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at}\left[\cos(bt) - \frac{a}{b}\operatorname{sen}(bt)\right] & e^{at}\frac{\operatorname{sen}(bt)}{b} \\ \left(-\frac{a^2}{b} - b\right) e^{at}\operatorname{sen}(bt) & e^{at}\left[\frac{a}{b}\operatorname{sen}(bt) + \cos(bt)\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

c) Usando el método de variación de parámetros, escriba una solución particular del sistema ② en el caso no homogéneo.

• Caso 1) Dos raíces distintas: Soluciones: $y_1 = e^{\alpha_1 t}$, $y_2 = e^{\alpha_2 t}$

$$y'' + py' + qy = f(t)$$

Por el método de variación de parámetros, $\underline{y = v_1 y_1 + v_2 y_2}$, es sol. particular.

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{\alpha_1 t}\alpha_2 e^{\alpha_2 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t} e^{\alpha_1 t} = (\alpha_2 - \alpha_1) e^{(\alpha_1 + \alpha_2) t}$$

Por la teoría, tenemos que $v_1 = \int -\frac{y_2 f(t')}{W(y_1, y_2)} dt' = -\int \frac{e^{\alpha_2 t'} f(t')}{(\alpha_2 - \alpha_1) e^{(\alpha_1 + \alpha_2) t'}} dt'$

$$\Rightarrow v_1 = \underline{\int \frac{f(t')}{(\alpha_2 - \alpha_1) e^{\alpha_1 t'}} dt'}$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 f(t')}{W(y_2, y_1)} dt' = \int \frac{e^{\alpha_1 t'} f(t')}{(\alpha_2 - \alpha_1) e^{(\alpha_1 + \alpha_2) t'}} dt' = \underline{\int \frac{f(t')}{(\alpha_2 - \alpha_1) e^{\alpha_2 t'}} dt'}$$

•• Caso 2) Dos raíces iguales Soluciones: $y_1 = e^{\alpha t}$ $y_2 = t e^{\alpha t}$

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{\alpha t}(e^{\alpha t} + \alpha t e^{\alpha t}) - t e^{\alpha t} \alpha e^{\alpha t} = e^{2\alpha t}$$

$$\cdot\ v_1 = \int \frac{-y_2 f(t')}{W(y_1, y_2)} dt' = \int \frac{-t' e^{\alpha t'}}{e^{2\alpha t'}} f(t') dt' = \underline{\int -t e^{-\alpha t'} f(t') dt'}$$

$$\cdot\ v_2 = \int \frac{y_1 f(t')}{W(y_1, y_2)} dt' = \int \frac{e^{\alpha t'} f(t')}{e^{2\alpha t'}} dt' = \underline{\int e^{-\alpha t'} f(t') dt'}$$

Y la solución particular es $y = v_1 y_1 + v_2 y_2$

•••) <u>Caso 3: Raíces complejas.</u> Soluciones: $y_1 = e^{at}\cos(bt)$, $y_2 = e^{at}\operatorname{sen}(bt)$

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{at}\cos(bt)\left(b e^{at}\cos(bt) + a e^{at}\operatorname{sen}(bt)\right) - e^{at}\operatorname{sen}(bt)\left(-b\, e^{at}\operatorname{sen}(bt) + a e^{at}\cos(bt)\right)$$

$$= b\, e^{2at}\left(\cos^2(bt) + \operatorname{sen}^2(bt)\right) = b\, e^{2at}$$

Por la teoría tenemos:

$$v_1 = \int -\frac{y_2 f(t')}{W(y_1, y_2)}\, dt' = \int \frac{-e^{at'}\operatorname{sen}(bt') f(t')}{b\, e^{2at'}}\, dt' = \underline{\int -e^{-at'}\operatorname{sen}(bt') f(t')\, dt'}$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 f(t')}{W(y_1, y_2)}\, dt' = \int \frac{e^{at'}\cos(bt') f(t')}{b\, e^{2at'}}\, dt' = \underline{\int e^{-at'}\cos(bt') f(t')\, dt'}$$

Y entonces la solución particular es $\underline{y = v_1 y_1 + v_2 y_2}$