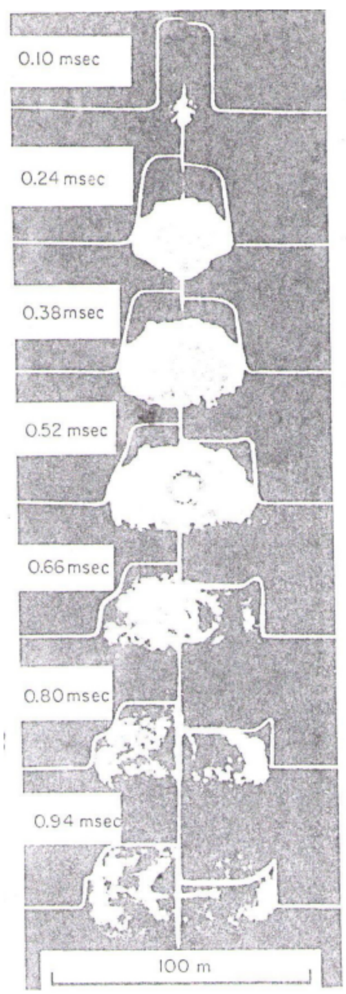
Dinámica de Medios Deformables: Tarea Extra

Tomás Ricardo Basile Álvarez
Jessica Andrea Gallegos Salgado

27 de marzo de 2022

La figura muestra una explosión (real) a 7 diferentes tiempos. Las escalas de tiempo y distancia se muestran en la figura. El proyectito consiste en ajustar el modelo de Sedov-Taylor a la explosión (y sólo este modelo).
a) Discutir bajo qué condiciones puede (o no) realizarse el ajuste.
b) Dar la expresión que relaciona el radio de la explosión como función del tiempo.



El modelo de Sedov-Taylor nos da una relación entre el tiempo transcurrido desde la explosión y el radio de la onda de choque, según la regla:

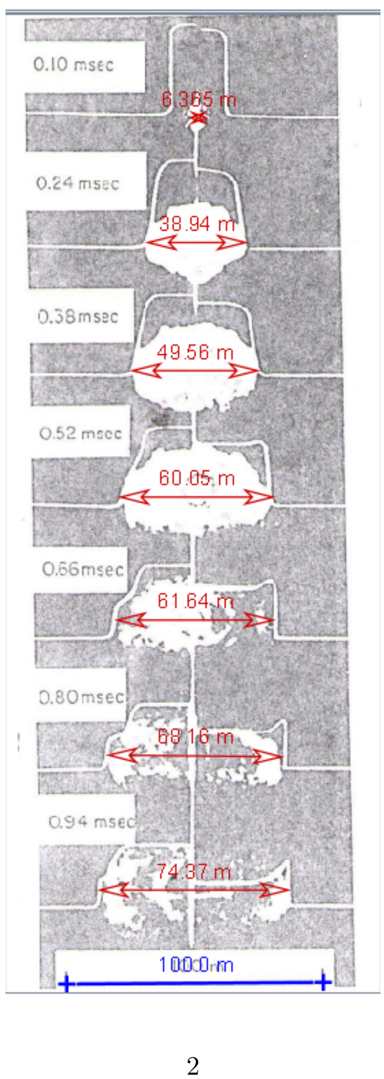
$$R(t) = \xi \frac{E^{1/5}}{\rho_0^{1/5}} t^{2/5},$$

donde ξ es una constante, E es la energía, ρ_0 la densidad del gas y t el tiempo. En este caso sólo nos interesa la dependencia del radio de la onda de choque como función del tiempo, por lo que mejor escribimos la ecuación como:

$$R(t) = kt^{2/5},$$

donde k es una constante que caracteriza a la explosión.
Intentaremos ajustar este modelo a los datos de la explosión, buscando si existe un valor de k que permita que la ecuación describa a la explosión (ya sea en todos los tiempos mostrados en la imagen, o sólo en un rango).

Encontrar los radios para cada tiempo: Para empezar, usando la escala que marca la imagen, encontraremos el radio de la explosión para cada uno de los tiempos. Para hacerlo, utilizamos el programa "tracker" [1], que permite realizar medidas en una imagen. Primero se coloca un "calibrador" en la referencia de longitud de 100m en la imagen y luego se colocan "medidores" para medir el diámetro en cada uno de los tiempos de la bomba (se escoge el diámetro porque es más fácil de medir). Este análisis se muestra en la siguiente figura.



Tiempo [ms]	**Radio [m]**
0.10	3.18
0.24	19.47
0.38	24.78
0.52	30.03
0.66	30.82
0.80	34.08
0.94	37.185

Con estas medidas de los diámetros, se puede obtener el radio para cada uno de los tiempos, los cuales se muestran en la siguiente tabla y gráfica.

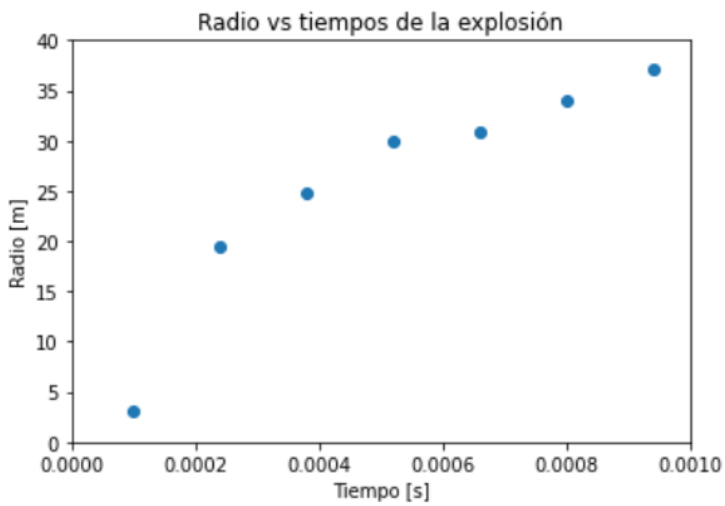


Figura 1: Gráfica de radio vs tiempo

Linealizar los datos: Queremos ajustar el modelo $R(t) = kt^{2/5}$ a los datos mostrados en la figura 1 (es decir, encontrar el valor de k para que la curva $R(t) = kt^{2/5}$ se acerque lo más posible a los datos). Sin embargo, una forma más sencilla de hacerlo es si antes linealizamos la ecuación.

Para hacerlo, notamos que si aplicamos logaritmo natural de ambos lados de la ecuación de Sedov-Taylor, obtenemos una ecuación lineal dada por

$$\ln(R(t)) = \ln(kt^{2/5})$$
$$\Rightarrow \ln(R(t)) = \ln k + \frac{2}{5}\ln t$$

Es decir, si hacemos una gráfica de $\ln(R(t))$ vs $\ln t$, deberíamos obtener una línea recta que intercepta el eje vertical en $\ln k$ y con pendiente de $\frac{2}{5}$. Entonces primero haremos una tabla y gráfica de $\ln(R(t))$ vs $\ln t$ para linealizar los datos.

Ln(Tiempo) [ln(s)]	**ln(Radio) [ln(m)]**
-9.2103	1.1569
-8.3349	2.9689
-7.8753	3.2100
-7.5617	3.4020
-7.3233	3.4282
-7.1309	3.5287
-6.9696	3.6159

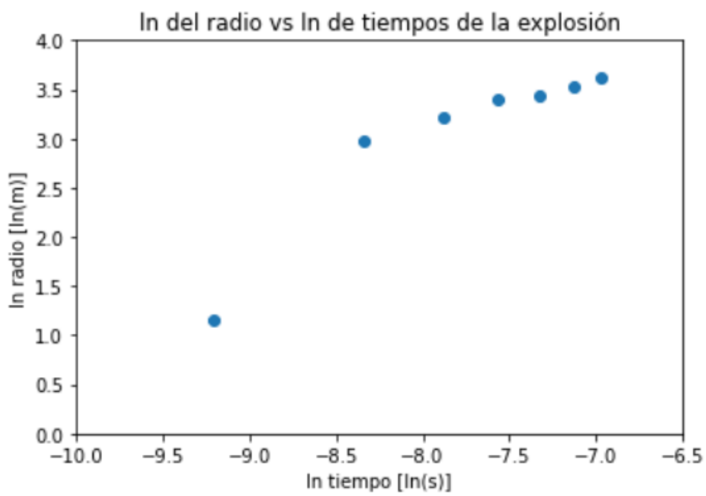


Figura 2: Gráfica de ln(radio) vs ln(tiempo)

Para analizar estos datos, usaremos el método de mínimos cuadrados que se describe a continuación.

Mínimos cuadrados: Según el modelo de Sedov-Taylor linealizado, estos puntos deberían poderse modelar por $\ln(R(t)) = \ln k + \frac{2}{5}\ln t$ para algún valor de k (es decir, una recta con pendiente $2/5$ y con ordenada al origen $\ln k$). Para encontrar el valor de k que mejor se adapta a los datos usaremos el método de mínimos cuadrados. En este caso tenemos datos que creemos que forman una recta con pendiente ya definida $2/5$ (para que efectivamente sea el modelo de Sedov-Taylor) y lo que buscamos es solamente la ordenada al origen.

Resolveremos el problema de encontrar esta ordenada al origen en general, donde tenemos datos $x_1, x_2, \cdots x_n$ y $y_1, y_2, \cdots y_n$ que creemos que se pueden modelar por una recta con pendiente fija m, es decir, suponemos que $y = mx + b$ y buscamos el mejor valor de b para modelar estos datos. Para encontrarlo, calcularemos la distancia entre los valores experimentales y_i y los predecidos por la ecuación lineal $y = mx + b$, sumaremos los cuadrados de estas distancias y encontraremos el valor de b que minimiza esta suma.

La distancia del valor experimental y_i al valor que predice la recta de $mx_i + b$ es $r_i = y_i - mx_i - b$, por lo que la suma de las distancias al cuadrado es

$$\sum_i r_i^2 = \sum_i (y_i - mx_i - b)^2$$

Buscamos el valor de b que minimiza esta suma de errores, podemos conseguirlo derivando esta expresión respecto a b e igualando a 0:

$$\frac{d}{db}\left[\sum_i (y_i - mx_i - b)^2\right] = -2\sum_i (y_i - mx_i - b) = 0$$
$$\Rightarrow \sum_i (y_i - mx_i - b) = 0 \ \Rightarrow \ \sum_i y_i - m\sum_i x_i - bn = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{\sum_i y_i - m\sum_i x_i}{n}} \qquad (1)$$

Finalmente, se puede también medir qué tan buena es la recta $y = mx + b$ para aproximar los datos (x_i, y_i). Para hacerlo, se utiliza el "coeficiente de determinación" R^2, el cual se calcula como:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - mx_i - b)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} \qquad (2)$$

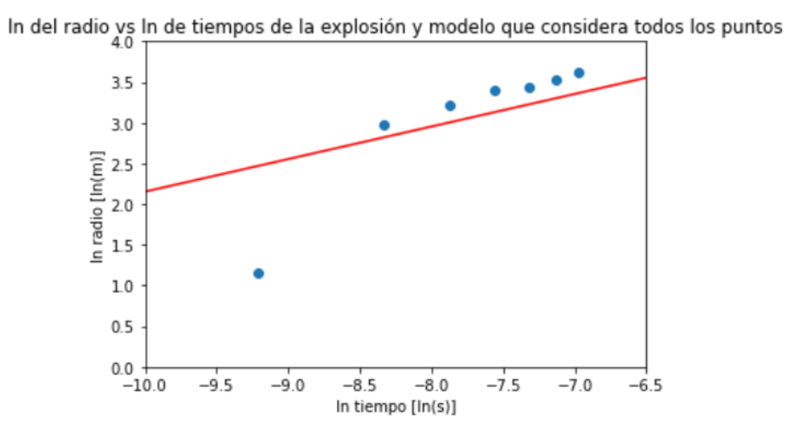
donde $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i$ es el promedio de los puntos y_i. Cuando este coeficiente vale 1, indica que la recta pasa exactamente por los puntos (x_i, y_i), es decir, la ecuación modela perfectamente a los puntos. Mientras que un valor de $R^2 = 0$ se puede conseguir con el modelo más simple $y = \bar{y}$, que a todos los puntos les predice el promedio de las y_i.

Ajustar el modelo a los datos:
Ahora ajustaremos el modelo de Sedov-Taylor a los datos linealizados obtenidos antes usando la fórmula (1) para obtener la ordenada al origen. Lo haremos para distintas colecciones de datos para ver en cuales se adapta más el modelo.

- **Con todos los puntos:** Consideramos todos los radios de la bomba en los 7 radios distintos. Como se dijo antes, suponemos que los datos linealizados se pueden modelar con Sedov-Taylor, que nos da una ecuación de la forma $\ln(R(t)) = \ln k + \frac{2}{5}\ln t$.
  Para encontrar el valor de $\ln k$ que permite que esta recta se acerque lo más posible a los puntos de la figura 2, usamos la ecuación (1) para obtener la ordenada al origen $\ln k$ considerando los 7 puntos $\ln R_i$ y $\ln t_i$ y con una pendiente de 2/5:

  $$\ln k = \frac{\sum_{i=1}^{7} \ln R_i - \frac{2}{5}\sum_{i=1}^{7} \ln t_i}{7}$$

  Sustituyendo los valores de R_i y t_i en esta ecuación obtenemos que $\ln k = 6{,}1533$. Por lo tanto, la recta con pendiente 2/5 que mejor se acerca a los 7 puntos de los datos es $\ln R = 6{,}1533 + \frac{2}{5}\ln t$. Si dibujamos esta recta junto con los datos linealizados de antes, nos queda la siguiente figura:



Vemos que la recta se acerca a los últimos 6 datos pero no mucho al primero. Podemos calcular el coeficiente de determinación R^2 para los puntos y esta recta usando la ecuación (2) y obtenemos:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{7}(\ln R_i - \frac{2}{5}\ln t_i - 6{,}1533)^2}{\sum_{i=1}^{7}(\ln R_i - \overline{\ln R_i})^2}$$

Sustituyendo los datos, se obtiene que

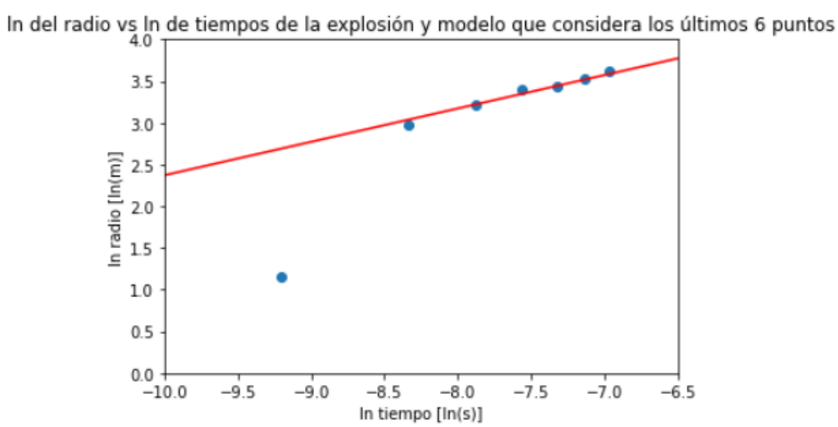
$$R^2 = 0{,}5446,$$

que es un valor bastante bajo e indica que el modelo no se acerca mucho a los datos.

- **Con los últimos 6 puntos:** Ahora ajustamos el mismo modelo pero omitiendo el primer punto, ya que en la figura 2 se puede ver que este punto es el que más se aleja a los demás y no permite que se puedan modelar con una recta. Nuevamente, suponemos que estos seis puntos se pueden modelar con Sedov-Taylor, que nos da una ecuación de la forma $\ln(R(t)) = \ln k + \dfrac{2}{5}\ln t$.
Para encontrar el valor de $\ln k$, usamos la ecuación (1) para la ordenada al origen utilizando solamente los últimos 6 puntos y con una pendiente 2/5:

$$\ln k = \frac{\sum_{i=2}^{7}\ln R_i - \frac{2}{5}\sum_{i=2}^{7}\ln t_i}{6}$$

Sustituyendo los valores de R_i y t_i obtenemos que $\ln k = 6{,}37200$. Por lo tanto, la recta con pendiente 2/5 que mejor se acerca a los últimos 6 puntos de los datos es $\ln R = 6{,}37200 + \dfrac{2}{5}\ln t$. Dibujamos esta recta junto con todos los puntos y nos queda la siguiente figura:



Vemos que esta recta se acerca muy bien a últimos 6 puntos de los datos. Podemos calcularle el coeficiente de determinación R^2 considerando solamente estos últimos 6 puntos usando la ecuación (2) y obtenemos:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=2}^{7}(\ln R_i - \frac{2}{5}\ln t_i - 6{,}372)^2}{\sum_{i=2}^{7}(\ln R_i - \overline{\ln R_i})^2} = 0{,}9666$$

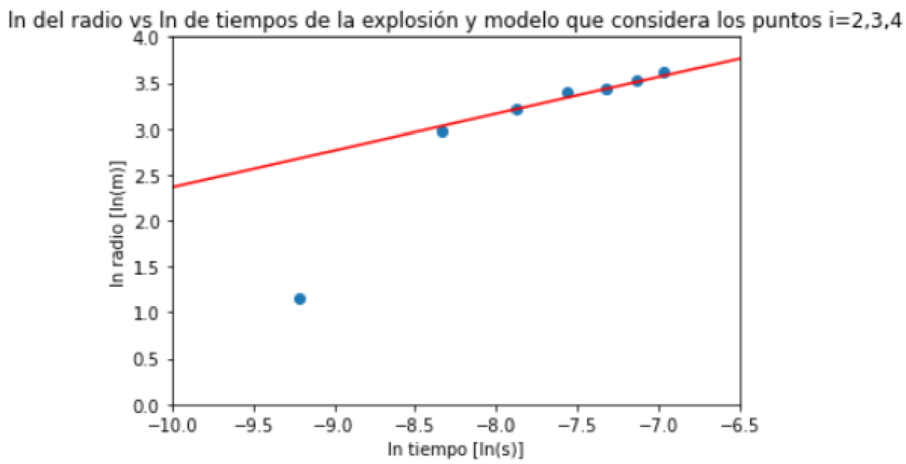
Este valor muy cercano a 1 indica una muy buena aproximación de la recta a los datos.

- **Con los tres puntos $i = 2, 3, 4$:** Hacemos el mismo análisis pero solamente considerando los puntos $i = 2, 3, 4$. Hacemos esto porque se puede apreciar en la figura 2 que estos puntos forman casi una recta

y que los últimos 3 parecen no adherirse muy claramente a esta recta.
Haciendo el mismo análisis de antes, suponiendo que el modelo es $\ln R(t) = \ln k + \dfrac{2}{5}\ln t$, usamos la ecuación (1) para la ordenada al origen utilizando solamente estos tres puntos y con una pendiente de 2/5, con lo que obtenemos:

$$\ln k = \frac{\sum_{i=2}^{4} \ln R_i - \frac{2}{5}\sum_{i=2}^{4} \ln t_i}{3}$$

Sustituyendo los datos, se obtiene que $\ln k = 6{,}36323$. Por lo tanto, la recta con pendiente 2/5 que mejor se acerca a los puntos $i = 2, 3, 4$ de los datos es $\ln R = 6{,}36323 + \dfrac{2}{5}\ln t$. Dibujamos esta recta junto con todos los puntos y nos queda la siguiente figura:



Vemos que esta recta se acerca muy bien a los puntos $i = 2, 3, 4$. Podemos calcularle el coeficiente de determinación R^2 considerando solamente estos 3 puntos en la ecuación (2) y obtenemos:

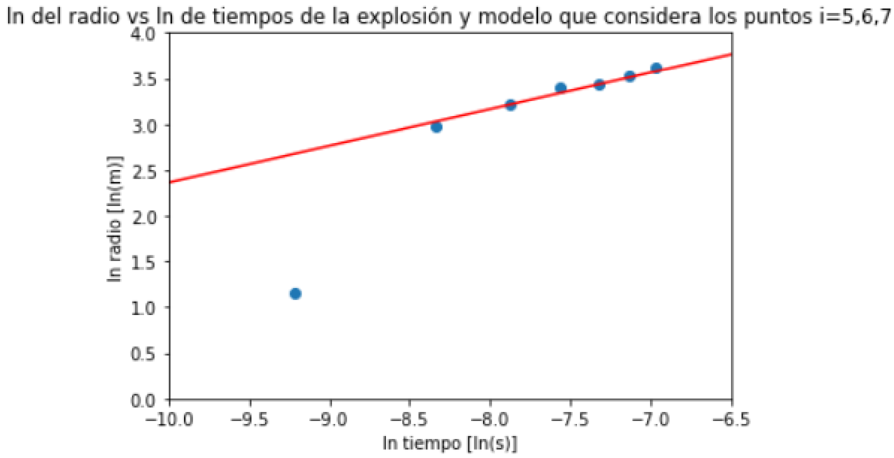
$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=2}^{4}(\ln R_i - \frac{2}{5}\ln t_i - 6{,}36323)^2}{\sum_{i=2}^{4}(\ln R_i - \overline{\ln R_i})^2} = 0{,}918408$$

Este valor cercano a 1 indica una buena aproximación de la recta a los 3 puntos.

- **Con los tres puntos $i = 5, 6, 7$:** Hacemos el mismo análisis pero solamente considerando los puntos $i = 5, 6, 7$. Hacemos esto porque se puede apreciar en la figura 2 que estos puntos forman casi una recta.
Haciendo el mismo análisis de antes, suponiendo que el modelo es $\ln R(t) = \ln k + \dfrac{2}{5}\ln t$, usamos la ecuación (1) para la ordenada al origen utilizando solamente estos tres puntos y con una pendiente de 2/5, con lo que obtenemos:

$$\ln k = \frac{\sum_{i=5}^{7} \ln R_i - \frac{2}{5}\sum_{i=5}^{7} \ln t_i}{3}$$

Sustituyendo los datos, se obtiene que $\ln k = 6{,}38076$. Por lo tanto, la recta con pendiente 2/5 que mejor se acerca a los puntos $i = 2, 3, 4$ de los datos es $\ln R = 6{,}38076 + \dfrac{2}{5}\ln t$. Dibujamos esta recta junto con todos los puntos y nos queda la siguiente figura:



Vemos que esta recta se acerca muy bien a los puntos $i = 5, 6, 7$. Podemos calcularle el coeficiente de determinación R^2 considerando solamente estos 3 puntos en la ecuación (2) y obtenemos:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=2}^{4}(\ln R_i - \frac{2}{5}\ln t_i - 6{,}38076)^2}{\sum_{i=2}^{4}(\ln R_i - \overline{\ln R_i})^2} = 0{,}93931$$

Este valor cercano a 1 indica una buena aproximación de la recta a los 3 puntos.

Habiendo hecho este análisis para estos conjuntos de puntos, podemos encontrar las condiciones bajo las cuales se puede usar el modelo de Sedov-Taylor. Concluimos que claramente no hay que incluir el primer punto de la explosión, pues al incluirlo los puntos linealizados no se acercan a una recta y el coeficiente de determinación es muy bajo.

Notamos también que el mejor acercamiento del modelo a los datos (es decir, el valor más alto de coeficiente de determinación R^2) se consigue cuando consideramos los últimos 6 puntos de la explosión. Aunque igual se consiguen resultados muy buenos considerando los puntos $i = 2, 3, 4$ o $i = 5, 6, 7$.

Esto coincide con lo visto en clase, pues vimos que el modelo de Sedov-Taylor se vasa en la suposición de que la onda de choque es mucho mayor que la masa eyectada por la explosión, lo que no es válido al principio de la explosión.

b) Dar la expresión que relaciona el radio de la explosión como función del tiempo

Como se mencionó en el inciso anterior, la mejor aproximación al modelo de Sedov-Taylor se consigue considerando los últimos 6 puntos de la expresión. Vimos que para estos 6 puntos, la recta que sigue el modelo de Sedov-Taylor y se acerca lo más posible a los puntos linealizados es

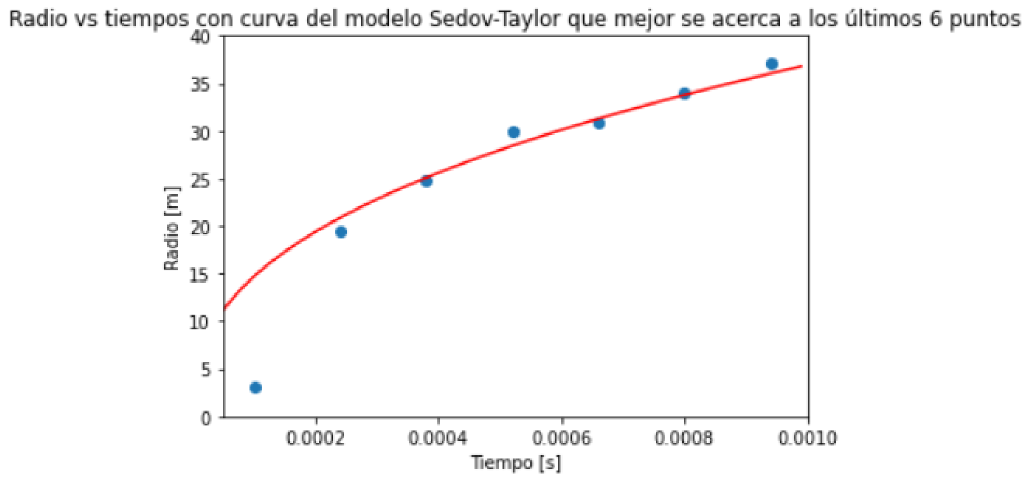
$$\ln R = 6{,}37200 + \frac{2}{5}\ln t$$

Calculando el exponencial de ambos lados, tenemos el radio como función del tiempo:

$$\boxed{R(t) = 585{,}227t^{2/5}}$$

Es decir, se sigue la regla de Sedov-Taylor $R(t) = \xi\frac{E^{1/5}}{\rho_0^{1/5}}t^{2/5}$ con $\xi\frac{E^{1/5}}{\rho_0^{1/5}} = 585{,}227m/s^{2/5}$.

Podemos dibujar esta curva junto con los puntos experimentales (pero ahora ya no linealizados) para ver qué tanto se acerca la curva a estos puntos. Esto se muestra en la siguiente figura:


Radio vs tiempos con curva del modelo Sedov-Taylor que mejor se acerca a los últimos 6 puntos
Radio [m]
Tiempo [s]
0
5
10
15
20
25
30
35
40
0.0002
0.0004
0.0006
0.0008
0.0010

Referencia

[1] Tracker Video Analysis and Modeling Tool, https://physlets.org/tracker/