Teorema de Bell

Tomás Ricardo Basile Álvarez

Óptica Cuántica

Interpretaciones de la mecánica cuántica

Tenemos una partícula con espín ½ y medimos su proyección.

Sabemos que el resultado tiene cierta probabilidad de apuntar arriba o abajo según el estado en el que se encuentra.

Explicar esto tiene por lo menos dos interpretaciones:

Visión Realista: La partícula tenía un espín determinado antes de medirla. La cuántica es una teoría incompleta y hay información faltante con la que podríamos determinar el resultado **(variable oculta**).

Visión ortodoxa: Antes de medir, la partícula está en una superposición y luego colapsa a un estado con una proyección de espín determinada.

- El teorema de Bell encuentra que ambas posturas llevan a predicciones incompatibles y se puede distinguir entre ellas.

- Para ello necesitaremos el concepto de entrelazamiento.

Entrelazamiento

- Fenómeno que sucede cuando un grupo de partículas interactúan de tal forma que el estado de cada partícula no se puede describir de forma independiente a los demás.

- Dos partículas están entrelazadas si su estado es:

$$|\Psi\rangle \neq |a\rangle|b\rangle$$

Ejemplo de Entrelazamiento

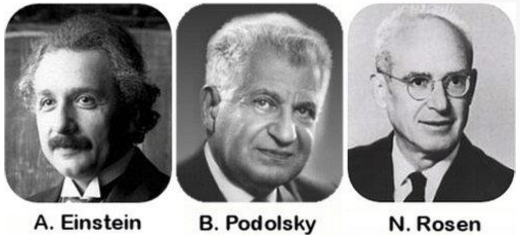
- Decaimiento del pión: $\pi^0 \rightarrow e^- + e^+$

- Estado del electrón y positrón:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle \right)$$

- Si se mide el electrón y se obtiene espín abajo, automáticamente sabemos que el positrón tiene espín arriba y vice versa.
- No sabemos qué pareja de espín vamos a obtener, pero sabemos que tienen espines opuestos.

Paradoja EPR



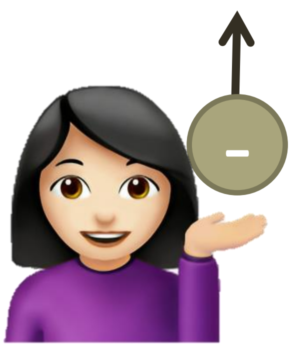
$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+$$

Alice

Bob

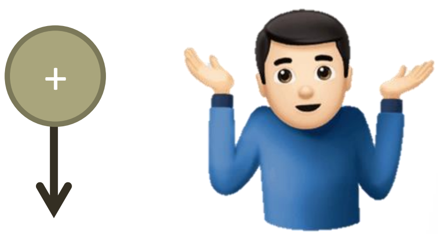
Paradoja EPR

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle\right)$$



Alice

La medición de Alice asegura que la otra partícula tiene espín opuesto.



Bob

¿Se transmitió información instantáneamente?

Paradoja EPR

Alice

Bob

Visión Ortodoxa: Ninguna de las partículas tenía espín arriba o abajo al momento de crearse (superposición). Medir una hace que colapse la función de onda y “crea” el estado opuesto en la otra.

Visión Realista: Al crearse, las partículas ya tenían el espín así, el problema es que falta completar la teoría de la mecánica cuántica (variables ocultas).

Teorema de Bell

- Cualquier teoría de variables ocultas que sea **local** (ninguna influencia se puede propagar más rápido que la luz) contradice las predicciones de la mecánica cuántica.

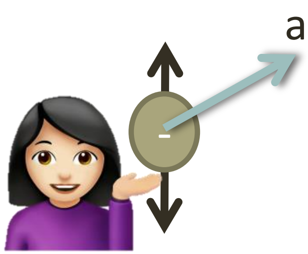
- Es decir, la visión realista y local predice cosas distintas que la mecánica cuántica.

- La discusión no es sólo filosófica.

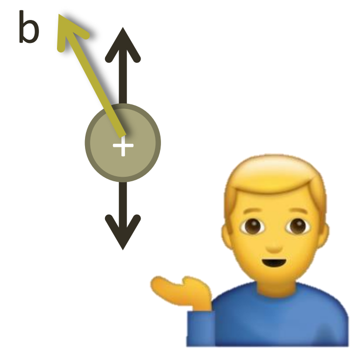
Prueba del teorema

- Empezamos con el mismo experimento de antes, pero ahora el primer spin se mide en la dirección de un vector **a** y el segundo en la de un vector **b.** Los vectores forman un ángulo θ.

- Dado un valor de **a** y **b**, medimos varias veces los resultados de crear muchos pares entrelazados y registramos los resultados así:



electron	positron	product
+1	−1	−1
+1	+1	+1
−1	+1	−1
+1	−1	−1
−1	−1	+1
⋮	⋮	⋮



- Bell propone que calculemos el promedio del producto de los espines para estos valores de **a** y **b** y le llamamos P(**a**,**b**). Veremos que la cuántica y una teoría local de variable oculta predicen cosas incompatibles para este valor.

Cuántica

Resulta que la mecánica cuántica predice que P(**a,b**) = -cos θ

Lo que buscamos calcular es:

$$P(a,b) = \langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle$$

Podemos suponer que $\vec{a}$ está en el eje z y $\vec{b}$ en el plano xz, por lo que $S_a^{(1)} = S_z^{(1)}$ y $S_b^{(2)} = \cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(a,b) &= \langle S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)}) \rangle \\ &= \langle \Psi | S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)}) | \Psi \rangle \end{aligned}$$

Usamos que $|\Psi\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$ y que $S_z \uparrow = \uparrow$, $S_z \downarrow = -\downarrow$, $S_x \uparrow = \downarrow$, $S_x \downarrow = \uparrow$ para calcular $S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)})|\Psi\rangle$:

$$\begin{aligned} & S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)})|\Psi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)})|\downarrow\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)})|\uparrow\downarrow\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\downarrow) \otimes (\cos\theta \uparrow + \sin\theta \downarrow) - \frac{1}{\sqrt{2}} \uparrow \otimes (\cos\theta(-\downarrow) + \sin\theta \uparrow) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [-\cos\theta \downarrow\uparrow - \sin\theta \downarrow\downarrow + \cos\theta \uparrow\downarrow - \sin\theta \uparrow\uparrow] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [-\cos\theta(\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow) - \sin\theta(\downarrow\downarrow + \uparrow\uparrow)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\cos\theta\sqrt{2}|\Psi\rangle - \sin\theta(\downarrow\downarrow + \uparrow\uparrow)\right] \end{aligned}$$

Luego, calculando el producto con $\langle\Psi|$, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(a,b) &= \langle \Psi | S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)}) | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\cos\theta\sqrt{2}|\Psi\rangle - \sin\theta(\downarrow\downarrow + \uparrow\uparrow)\right] \\ &= -\cos\theta \end{aligned}$$

Teoría de variable oculta y local

- Si la mecánica cuántica no está completa, para caracterizar un sistema se necesita además de la función de onda, una **variable "oculta"** λ.
- Suponemos que el estado de la pareja e-p depende del valor de la **variable oculta** λ.
- Entonces, existe una función A(**a,** λ) que da el resultado de la medida del espín del electrón y una B(**b,** λ) que da el resultado del positrón. Estas funciones siempre valen 1 o -1. Por **localidad**, B(**b,** λ) no depende de **a,** ni A(**a,** λ) depende de **b.** Entonces, el promedio del producto de los resultados es:

$$P(\vec{a},\vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda) d\lambda$$

donde $\rho(\lambda)$ es la densidad de probabilidad de la variable oculta.

- Además, si los detectores están alineados, los resultados son perfectamente contrarios, es decir: A(**a**, λ) = -B(**a**, λ).
- Entonces,

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -\int \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) A(\vec{b},\lambda) d\lambda$$

Luego, si $\vec{c}$ es cualquier otro vector, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}) &= -\int \rho(\lambda)[A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda) - A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]d\lambda \\ &= -\int \rho(\lambda)[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)d\lambda \quad \text{Porque } A(\vec{b},\lambda)^2 = 1 \end{aligned}$$

Si saco valor absoluto de ambos lados, queda que:

$$|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})| = \left| -\int \rho(\lambda)[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)d\lambda \right| \leq \int |\rho(\lambda)[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]|\ |A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)|d\lambda$$

Pero como $|A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)| = 1$ y también $\rho(\lambda)[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)] \geq 0$, entonces:

$$|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})| \leq \int \rho(\lambda)[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]d\lambda$$

Entonces:

$$|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b},\vec{c})$$

Llegamos entonces a la **desigualdad de Bell:**

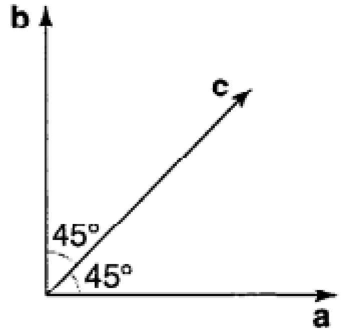
Para una teoría de variable oculta y local, se cumple:

$$|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b},\vec{c})$$

- Cuántica: P(**a**,**b**) = -cos θ
- Teoría local de variable oculta :

$$|P(\mathbf{a},\mathbf{b}) - P(\mathbf{a},\mathbf{c})| \leq 1 + P(\mathbf{b},\mathbf{c})$$

Son incompatibles, por ejemplo, si escogemos los vectores como:



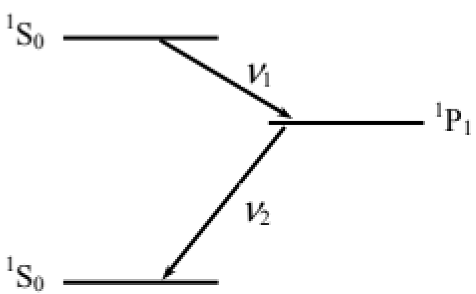
La cuántica dice P(**a**,**b**) = 0, P(**a**,**c**) = P(**b**,**c**) = -0.707, que es inconsistente con la desigualdad de Bell pues no se cumple que $0.707 \leq 1-0.707 = 0.293$

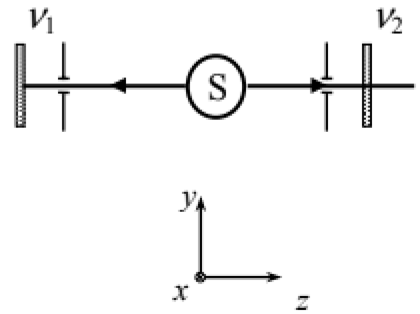
Consecuencias

- Una teoría con variable oculta y local contradice a la mecánica cuántica.
- Si la mecánica cuántica es correcta, no es posible una teoría de variable oculta que sea local. Si insistimos en teorías de variable oculta, hay que abandonar la localidad.
- Podemos hacer el experimento y ver si se cumple o no la desigualdad de Bell. Si no se cumple, indica que no se puede tener una teoría con variable oculta y local. Si se cumple siempre, contradice las predicciones de la mecánica cuántica.

Experimento

- Los experimentos generalmente se hacen con fotones entrelazados y lo que se mide es su polarización.





Se puede probar usando paridad y conservación del momento angular, que el estado de los fotones creados es:

$$\Psi(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|R, R\rangle + |L, L\rangle\right]$$

Loopholes

Son problemas que se deben de resolver para verdaderamente poner a prueba experimentalmente la desigualdad.

- **Detección**: Un problema en cualquier experimento es que sólo detecta una pequeña fracción de los fotones, por lo que puede ser que no sean representativos de todos los pares de fotones creados y que no sea válido sacar conclusiones de ellos.
- **Localidad**: Para mostrar que no hay alguna interacción entre las medidas que se mueve a velocidad menor que la de la luz, la elección de orientación de los detectores se tiene que hacer mientras las partículas están en viaje. El primer experimento en hacer esto fue realizado por Alain Aspect en 1982.

Ambos loopholes fueron cerrados simultáneamente de forma definitiva en un experimento en 2015. Los experimentos probaron que no se cumple la desigualdad de Bell.

- El experimento muestra que no se puede tener una teoría con variable oculta y local.

- Sin embargo, la visión ortodoxa no contradice la relatividad especial.
- La detección de la primera partícula afecta la medida que se haga sobre la segunda, pero no hay forma de transmitir información.
- Cuando Alice mide su partícula, colapsa la función de onda pero desde el punto de vista de Bob seguirá habiendo una probabilidad de 50/50 de medir espín abajo o arriba y no puede saber que Alice hizo una medida antes.
- Como el resultado de Alice es aleatorio, no puede escoger un resultado específico para mandar información a Bob.

Referencias

[1] Aspect, Alan. Bell's Theorem: The Naïve View of an experimentalist. Institut d'Optique Théorique et Appliquée.

[2] Griffiths, David j. *Introduction to Quantum Machanics*. Pearson, 2014.

[3] Nielsen, Michael A., and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2021.

[4] Wu, C. S., and I. Shaknov. "The Angular Correlation of Scattered Annihilation Radiation." *Physical Review*, vol. 77, no. 1, 1950, pp. 136–136., https://doi.org/10.1103/physrev.77.136.

[5] *Merali, Zeeya (27 August 2015). "Quantum 'spookiness' passes toughest test yet". Nature News.* ***525*** *(7567): 14–15. Bibcode:2015Natur.525...14M. doi:10.1038/nature.2015.18255. PMID 26333448. S2CID 4409566.*