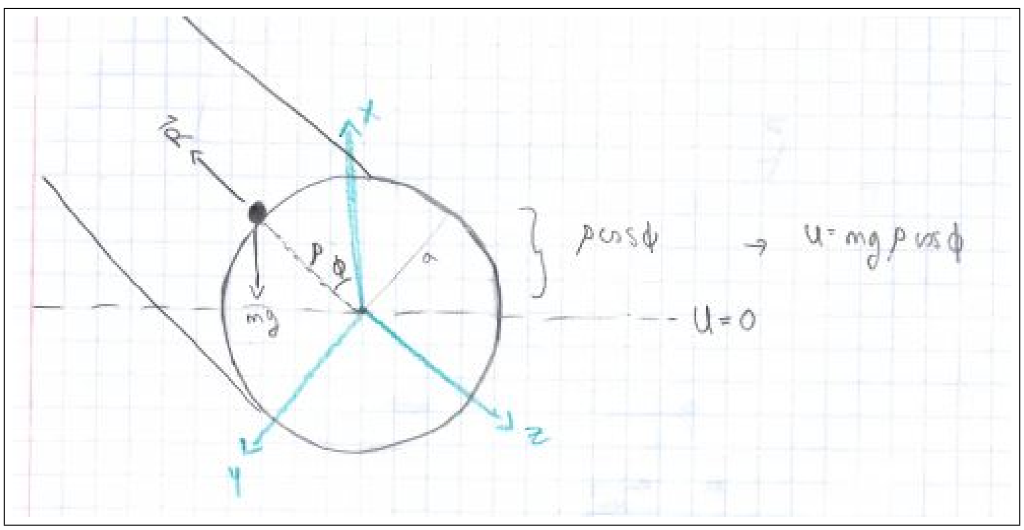
Mecánica analítica: Examen 2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

4 de diciembre de 2020

1. **Resuelve el problema 5.7 del Hauser: Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de la gravedad sobre la superficie de un cilindro horizontal. a) Obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula:**

   Primero dibujamos el problema:



Usamos coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z como se muestran en el dibujo. El potencial gravitacional $U = 0$ corresponde a la línea horizontal punteada. Entonces, se puede ver que la partícula tiene una altura $\rho\cos\phi$ respecto a esta línea y por tanto, una energía potencial $U = mg\rho\cos\phi$.
La energía cinética es la usual para coordenadas cilíndricas que hemos visto en clase:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \quad , \quad U = mg\rho\cos\phi$$
$$\Rightarrow \quad L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mg\rho\cos\phi$$

Luego nos falta considerar la restricción. Digamos que el cilindro tiene radio a, entonces para que la partícula se quede en la superficie, debe de cumplir que $f = \rho - a = 0$.

Luego, se presenta una fuerza de restricción normal a la superficie, $\vec{R} = \lambda \nabla f$.
Entonces ya podemos plantear la ecuación de Lagrange para movimiento conservativo con restricción:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

Y la obtenemos para cada una de las coordenadas:

- ρ :
  Calculamos las derivadas que necesitamos:
  - $\frac{\partial L}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mg\rho\cos\phi\right] = m\rho\dot{\phi}^2 - mg\cos\phi$
  - $\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\rho}}\left[\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mg\rho\cos\phi\right] = m\dot{\rho}$
  - $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) = m\ddot{\rho}$
  - $\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho - a) = 1$

  Entonces, metemos todo esto en la ecuación de Lagrange para obtener la ecuación correspondiente a ρ:

  $$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi = \lambda$$

  Podemos simplificar usando la restricción que $\rho = a \;\; \Rightarrow \;\; \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0$. Y nos queda la ecuación:

  $$(1) \quad -ma\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi = \lambda$$

- ϕ :
  Calculamos las derivadas que necesitamos:
  - $\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left[\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mg\rho\cos\phi\right] = mg\rho\sin\phi$
  - $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left[\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mg\rho\cos\phi\right] = m\rho^2\dot{\phi}$
  - $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi})$
  - $\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho - a) = 0$

  Entonces, metemos todo esto en la ecuación de Lagrange para obtener la ecuación correspondiente a ϕ:

  $$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) - mg\rho\sin\phi = 0$$

  Podemos usar la restricción $\rho = a$ para simplificar la ecuación. Nos queda que la ecuación $\frac{d}{dt}(ma^2\dot{\phi}) - mga\sin\phi = 0 \;\; \Rightarrow \;\; ma^2\ddot{\phi} - mga\sin\phi = 0$. Por lo que la ecuación es:

$$(2)\ \ ma^2\ddot{\phi} - mga\sin\phi = 0$$

- z :
  Calculamos las derivadas que necesitamos:
  - $\dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mg\rho\cos\phi\right] = 0$
  - $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dfrac{\partial}{\partial \dot{z}}\left[\dfrac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mg\rho\cos\phi\right] = m\dot{z}$
  - $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dfrac{d}{dt}(m\dot{z})$
  - $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}(\rho - a) = 0$

  Entonces, metemos todo esto en la ecuación de Lagrange para obtener la ecuación correspondiente a ϕ:

$$3)\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = cte$$

Y con eso tenemos ya las tres ecuaciones.

b **Si la partícula se desliza en un plano vertical habiendo partido de la parte superior del cilindro con una velocidad muy pequeña, hállese la fuerza de reacción en función de la posición**

La primera ecuación que obtuvimos en el inciso pasado nos dice directamente el valor de λ. Tenemos que $\lambda = mg\cos\phi - ma\dot{\phi}^2$.
Queremos obtener esta λ en función de solamente la posición, por lo que hay que reemplazar $\dot{\phi}^2$ de alguna forma.
Para eso recurrimos a la segunda ecuación que obtuvimos:

$$\begin{aligned}
&ma^2\ddot{\phi} - mga\sin\phi = 0 \\
\Rightarrow\ & ma^2\ddot{\phi}\dot{\phi} - mga\sin\phi\dot{\phi} = 0 \quad \text{multiplicamos por el factor } \dot{\phi} \\
\Rightarrow\ & \int ma^2\ddot{\phi}\dot{\phi}dt - \int mga\sin\phi\dot{\phi}\,dt = cte \quad \text{integramos respecto a t y aparece cte de integración} \\
\Rightarrow\ & \int ma^2\dot{\phi}d(\dot{\phi}) - \int mga\sin\phi d(\phi) = cte \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{2}ma^2\dot{\phi}^2 + mga\cos\phi = cte
\end{aligned}$$

Para obtener la constante de integración, evaluamos esta ecuación en el momento en el que la partícula se encuentra en la cima del cilindro. En esa posición se tiene que $\phi = 0$. Y además, como dice el problema que la partícula empieza con una velocidad muy chica, tenemos que al inicio del movimiento se tiene que $\dot{\phi} = 0$. Sustituimos esto en la ecuación y nos queda $mga\cos(0) = cte \ \Rightarrow\ cte = mga$.

Por tanto, la ecuación nos queda ahora como:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}ma^2\dot{\phi}^2 + mga\cos\phi = mga \\
&\Rightarrow \ \frac{1}{2}a\dot{\phi}^2 + g\cos\phi = g \\
&\Rightarrow \ \dot{\phi}^2 = \frac{2g - 2g\cos\phi}{a}
\end{aligned}$$

Ahora ya podemos sustituir esto en la expresión para λ

$$\begin{aligned}
\lambda &= mg\cos\phi - ma\dot{\phi}^2 \\
&= mg\cos\phi - ma\left(\frac{2g - 2g\cos\phi}{a}\right) \\
&= mg\cos\phi - 2mg + 2mg\cos\phi \\
&= 3mg\cos\phi - 2mg
\end{aligned}$$

Luego, como se dijo desde un principio, la fuerza de restricción se obtiene como $\vec{R} = \lambda\nabla f$. Donde $f = \rho - a$.
El gradiente de f lo calculamos como se suele calcular en coordenadas cilíndricas:
$\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z = 1\mathbf{e}_\rho + 0\mathbf{e}_\phi + 0\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\rho$
Finalmente, la fuerza de restricción es:

$$\boxed{\vec{R} = \lambda\nabla f = (3mg\cos\phi - 2mg)\mathbf{e}_\rho}$$

c) **¿En qué punto se separará la partícula del cilindro?**

La fuerza de restricción nos indica la fuerza normal que siente la partícula por encontrarse sobre el cilindro.
Entonces, el momento en el que la partícula se separa del cilindro se obtiene cuando la fuerza de restricción vale 0, indicando que no hay contacto entre la partícula y el cilindro.
Por tanto, hacemos $\lambda = 0 \ \Rightarrow \ 3mg\cos\phi - 2mg = 0 \ \Rightarrow \ \cos\phi = \dfrac{2}{3}$.
Por tanto, la partícula se separa del cilindro cuando:

$$\phi = \arccos\tfrac{2}{3}$$

O bien, cuando la altura respecto a la línea punteada es de $h = a\cdot\cos\phi = a\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}a$.

2. **Resuelva el problema 5.11 del Hauser 5-11 a) Hállese la energía conética total del péndulo doble representado en la figura 5-13**

En el ejercicio 3.11 de la tarea 3 calculamos la velocidad de cada una de las partículas del péndulo doble con respecto a un sistema de referencia fijo. Y obtuvimos que la velocidad de la partícula 1 es:

$$\vec{v}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1\, \widehat{i} + l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1\, \widehat{j}$$

Entonces, su energía cinética es:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1\left((l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2 + (l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(l_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + l_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1\right) = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

La velocidad de la partícula 2 la obtuvimos como:

$$v_2 = (l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)\widehat{i} + (l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)\widehat{j}$$

Y entonces la energía cinética es:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_2\left[(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2\cos^2\theta_2 + \\ &\qquad + l_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_1\sin\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2\sin^2\theta_2] \\ &= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned}$$

Entonces, si sumamos las energías de las dos partículas obtenemos que la energía cinética total es de:

$$\underline{T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2) + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

b) **Utilizando la energía cinética encontrada en la parte a) y la energía potencial:**

$$U = -m_1 l_1 g\cos\theta_1 - m_2 g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

demostrar que las ecuaciones de Lagrange así obtenida para θ_1 y θ_2 concuerdan con las componentes de las ecuaciones de Newton sobre $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_4$. Tómese las componentes de las ecaciones de Newton a lo largo de $\mathbf{e}_2$ para ambas partículas.

Con el resultado para la energía cinética y potencial, tenemos que el lagrangiano es:

$$L = T - U$$
$$= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - [-m_1 l_1 g\cos\theta_1 - m_2 g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)]$$
$$= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_1 l_1 g\cos\theta_1 + m_2 g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

Entonces utilizamos las ecuaciones de Lagrange para cada una de las coordenadas generalizadas θ_1, θ_2.
Calcularé primero las derivadas de L que necesitaremos después.

a) $\dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - m_1 l_1 g\sin\theta_1 - m_2 g l_1\sin\theta_1 =$
$= -l_1 g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)$

b) $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$

$c) \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \dfrac{d}{dt}\Big(m_1 l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\Big)$
$= m_1 l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$

Entonces, tenemos que la ecuación de Lagrange en θ_1 es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$
$$\Rightarrow \; m_1 l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - \Big[-l_1 g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)\Big] = 0$$
$$\Rightarrow \; m_1 l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + l_1 g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$
$$\Rightarrow \; m_1 l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + l_1 g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$
$$\Rightarrow \; m_1 l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1 g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 = 0$$

Entonces, la ecuación para θ_1 es (dividimos entre l_1):

$$\boxed{(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 = 0}$$

Ahora hacemos lo mismo para θ_2. Calcularé primero las derivadas de L que necesitaremos después.

a) $\dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin\theta_2$

b) $\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta_2} = m_2 l_2^2 \dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$

$$c) \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2} = \frac{d}{dt}\Big(m_2 l_2^2 \dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)\Big)$$
$$= m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot\theta_1 - \dot\theta_2)$$

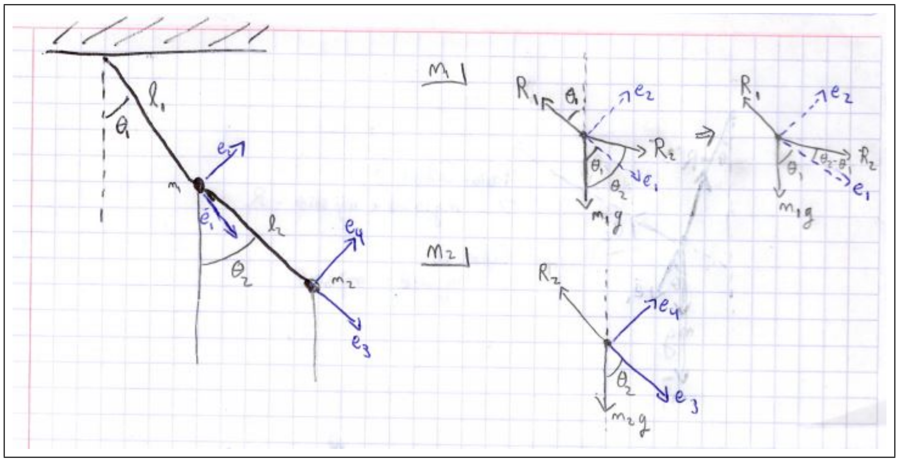
Entonces, tenemos que la ecuación de Lagrange en θ_2 es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$
$$m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot\theta_1 - \dot\theta_2) - [m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin\theta$$
$$\Rightarrow m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin\theta_2 = 0$$

Entonces, la ecuación para θ_2 es (dividimos entre $m_2 l_2$):

$$\boxed{l_2 \ddot\theta_2 + l_1 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 \dot\theta_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin\theta_2 = 0}$$

Ahora encontramos las ecuaciones de Newton sobre $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_4$.
Para ello, dibujamos el siguiente diagrama.
Y luego dibujamos el diagrama de cuerpo libre de cada una de las masas, en las que consideramos las tensiones R_1 y R_2 de las dos cuerdas.



Para el cuerpo m_1 nos queda que las fuerzas a lo largo de $\mathbf{e}_1$ son:

$$R_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - R_1 + m_1 g \cos\theta_1$$

Y a lo largo de $\mathbf{e}_2$ es:

$$R_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_1 g \sin\theta_1$$

Ahora para aplicar las leyes de Newton notamos que la fuerza a lo largo de $\mathbf{e}_1$ debe de ser igual a $m_1 a_c$ con a_c la aceleración centrípeta que es igual a $-l_1\dot{\theta}_1^2$.
Mientras que la fuerza a lo largo de $\mathbf{e}_2$ es igual a $m_1 a_{an}$ con a_{an} la aceleración angular, que tiene un valor de $a_{an} = l_1\ddot{\theta}_1$
Entonces, las dos ecuaciones de Newton de la masa 1 son:

1) $R_2\cos(\theta_2 - \theta_1) - R_1 + m_1 g\cos\theta_1 = -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2$
2) $R_2\sin(\theta_2 - \theta_1) - m_1 g \sin\theta_1 = m_1 l_1 \ddot{\theta}_1$

Ahora nos fijamos en la masa m_2. La fuerza neta es de:

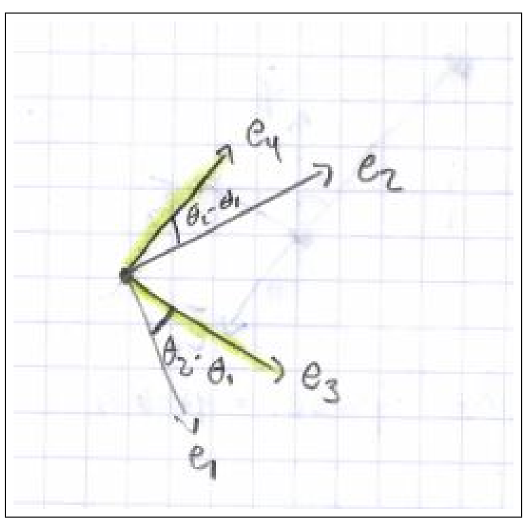
$$(m_2 g\cos\theta_2 - R_2)\mathbf{e}_3 - (m_2 g \sin\theta_2)\mathbf{e}_4$$

Sin embargo, no podemos usar directamente la segunda ley de Newton ya que hay que considerar que el sistema de referencia desde el que se miden estas fuerzas es un sistema que se mueve junto con la masa m_1 y no es un sistema inercial. Éste es un sistema que se mueve con una aceleración $\mathbf{A} = -l_1\dot{\theta}_1^2\mathbf{e}_1 + l_1\ddot{\theta}_1\mathbf{e}_2$ (la aceleración de la masa 1)

Como vimos en clase, una forma de arreglar este problema y poder usar la segunda ley de Newton es agregar una fuerza ficticia de $-m_2\mathbf{A}$ a las fuerzas que actúan sobre la masa 2 y ahora sí usar las leyes de Newton.
Con esta fuerza agregada, la fuerza neta sobre la partícula 2 es de:

$$(m_2 g\cos\theta_2 - R_2)\mathbf{e}_3 - (m_2 g\sin\theta_2)\mathbf{e}_4 - m_2\mathbf{A}$$
$$= (m_2 g\cos\theta_2 - R_2)\mathbf{e}_3 - (m_2 g\sin\theta_2)\mathbf{e}_4 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\mathbf{e}_1 - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\mathbf{e}_2$$

Para escribir esta fuerza únicamente en la base $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ consideramos la siguiente imagen que nos permite escribir los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ en esta base.



Entonces, tenemos que $\mathbf{e}_1 = \cos(\theta_2 - \theta_1)\mathbf{e}_3 - \sin(\theta_2 - \theta_1)\mathbf{e}_4$ y que $\mathbf{e}_2 = \sin(\theta_2 - \theta_1)\mathbf{e}_3 + \cos(\theta_2 - \theta_1)\mathbf{e}_4$.
Entonces, la fuerza neta sobre la partícula m_2 es de:

$$\begin{aligned}
&(m_2 g\cos\theta_2 - R_2)\mathbf{e}_3 - (m_2 g\sin\theta_2)\mathbf{e}_4 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\mathbf{e}_1 - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\mathbf{e}_2 \\
&= (m_2 g\cos\theta_2 - R_2)\mathbf{e}_3 - (m_2 g\sin\theta_2)\mathbf{e}_4 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2(\cos(\theta_2-\theta_1)\mathbf{e}_3 - \sin(\theta_2-\theta_1)\mathbf{e}_4) \\
&\qquad - m_2 l_1\ddot{\theta}_1(\sin(\theta_2-\theta_1)\mathbf{e}_3 + \cos(\theta_2-\theta_1)\mathbf{e}_4) \\
&= [m_2 g\cos\theta_2 - R_2 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\sin(\theta_2-\theta_1)]\mathbf{e}_3 + \\
&\quad + [-m_2 g\sin\theta_2 - m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1)]\mathbf{e}_4
\end{aligned}$$

Con esta fuerza neta ahora sí podemos usar las leyes de Newton. La fuerza sobre $\mathbf{e}_3$ hay que igualarla a ma_c con a_c la aceleración centrípeta de la masa 2, que es de $a_c = -l_2\dot{\theta}_2^2$.
Y la fuerza sobre la dirección $\mathbf{e}_4$ hay que igualarla a ma_{an} con a_{an} la aceleración angular, que es igual a $a_{an} = l_2\ddot{\theta}_2$.
Entonces, nos quedan las siguientes dos ecuaciones de Newton:

3) $m_2 g\cos\theta_2 - R_2 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\sin(\theta_2-\theta_1) = -m_2 l_2\dot{\theta}_2^2$
4) $-m_2 g\sin\theta_2 - m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1) = m_2 l_2\ddot{\theta}_2$

Entonces, para resumir, tenemos las 4 ecuaciones:

1) $R_2\cos(\theta_2-\theta_1) - R_1 + m_1 g\cos\theta_1 = -m_1 l_1\dot{\theta}_1^2$
2) $R_2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_1 g\sin\theta_1 = m_1 l_1\ddot{\theta}_1$
3) $m_2 g\cos\theta_2 - R_2 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\sin(\theta_2-\theta_1) = -m_2 l_2\dot{\theta}_2^2$
4) $-m_2 g\sin\theta_2 - m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1) = m_2 l_2\ddot{\theta}_2$

De estas ecuaciones, podemos tomar directamente la 4) y depués de pasar los términos de la izquierda a la derecha y dividir por m_2, queda que la ecuación es:

$$\begin{aligned}
&l_2\ddot{\theta}_2 + g\sin\theta_2 + l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2-\theta_1) + l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1) = 0 \\
\Rightarrow\quad &l_2\ddot{\theta}_2 + g\sin\theta_2 - l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) + l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) = 0
\end{aligned}$$

Y esta última ecuación es la segunda ecuación que habíamos obtenido con el método de Lagrange. Lo cual prueba que aquélla ecuación obtenida por el método de Lagrange se hubiera obtenido con Newton también.

Por otro lado, podemos usar la ecuación 3) para despejar R_2 y obtener
$R_2 = m_2 g\cos\theta_2 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\sin(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_2\dot{\theta}_2^2$

Ahora sustituimos esto en la ecuación 2) y obtenemos:

$$[m_2 g\cos\theta_2 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\sin(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_2\dot{\theta}_2^2]\sin(\theta_2-\theta_1) - m_1 g\sin\theta_1 = m_1 l_1\ddot{\theta}_1$$

$$\Rightarrow \quad m_2 g\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\theta_1)\sin(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\sin^2(\theta_2-\theta_1)$$
$$+ m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_1 g\sin\theta_1 - m_1 l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

Antes de seguir, hacemos un despeje de la ecuación 4) y nos queda que:

$$m_2 l_1\dot{\theta_1}^2 = \frac{-m_2 l_2\ddot{\theta}_2 - m_2 g\sin\theta_2 - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$$

Ahora sustituimos esto en el desarrollo que llevábamos antes:

$$\Rightarrow \quad m_2 g\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1) + \frac{-m_2 l_2\ddot{\theta}_2 - m_2 g\sin\theta_2 - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\cos(\theta_2-\theta_1)\sin(\theta_2-\theta_1)$$
$$- m_2 l_1\ddot{\theta}_1\sin^2(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_1 g\sin\theta_1 - m_1 l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

.

$$\Rightarrow \quad m_2 g\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1) + [-m_2 l_2\ddot{\theta}_2 - m_2 g\sin\theta_2 - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1)]\cos(\theta_2-\theta_1)$$
$$- m_2 l_1\ddot{\theta}_1\sin^2(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_1 g\sin\theta_1 - m_1 l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

.

$$\Rightarrow \quad m_2 g\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 g\sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\cos^2(\theta_2-\theta_1)$$
$$- m_2 l_1\ddot{\theta}_1\sin^2(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_1 g\sin\theta_1 - m_1 l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

.

$$\Rightarrow \quad m_2 g\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 g\sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1$$
$$+ m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_1 g\sin\theta_1 - m_1 l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

$$\Rightarrow \quad m_2 g[\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1) - \sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)] - m_2 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1$$
$$+ m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_1 g\sin\theta_1 - m_1 l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

.

$$\Rightarrow \quad m_2 g[\sin((\theta_2-\theta_1) - \theta_2)] - m_2 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1$$
$$+ m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_1 g\sin\theta_1 - m_1 l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

$$\Rightarrow \quad -m_2 g\sin\theta_1 - m_2 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_1 g\sin\theta_1 - m_1 l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

.

$$\Rightarrow \quad m_2 g\sin\theta_1 + m_2 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_1\ddot{\theta}_1 - m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1) + m_1 g\sin\theta_1 + m_1 l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

.

$$\Rightarrow \quad (m_1+m_2) l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) + m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1) + g(m_1+m_2)\sin\theta_1 = 0$$

Y ésta última es justo la expresión de la primera ecuación que obtuvimos con el método de Lagrange. Por lo que ya recuperamos ambas ecuaciones usando el método de Newton.

3. **a) Resuelva el problema 6.3 b) del Hauser: Calcular el trabajo realizado por las siguientes fuerzas a lo largo de la trayectoria indicada. $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i}+3z^2\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$ a lo largo de la recta $x = 2y = 4z$ desde el origen hasta el punto $(4, 2, 1)$**

   Primero parametrizamos la recta sobre la que queremos integrar con un parámetro t. Se puede ver fácilmente que se puede parametrizar la recta como $\phi(t) = 4t\widehat{i} + 2t\widehat{j} + t\widehat{k}$ con $0 \leq t \leq 1$
   Vemos que todos los puntos en esta curva cumplen que $x = 2y = 4z$ y que en $t = 0$ se tiene $\phi(0) = \mathbf{0}$ y en $t = 4$ se tiene $\phi(1) = 4\widehat{i} + 2\widehat{j} + 1\widehat{k}$. Por lo que ϕ es una parametrización de la recta.
   Entonces, podemos calcular la integral de línea correspondiente para el trabajo como sigue:

$$
\begin{aligned}
W &= \int \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt \\
&= \int_0^1 \mathbf{F}(4t, 2t, t) \cdot (4\widehat{i} + 2\widehat{j} + \widehat{k})dt \\
&= \int_0^1 2(4t)(t)\widehat{i} + 3(t)^2\widehat{j} + (2t)^2\widehat{k} \cdot (4\widehat{i} + 2\widehat{j} + \widehat{k})dt \\
&= \int_0^1 (8t^2\widehat{i} + 3t^2\widehat{j} + 4t^2\widehat{k}) \cdot (4\widehat{i} + 2\widehat{j} + \widehat{k})dt \\
&= \int_0^1 32t^2 + 6t^2 + 4t^2 dt \\
&= \int_0^1 42t^2 \, dt \\
&= 14t^3 \Big|_0^1 \\
&= 14
\end{aligned}
$$

   Entonces, el trabajo es de $14J$ (Siempre y cuando la fuerza esté en N y las longitudes en m).

b) **Demuestre la siguiente igualdad:**

$$[p_i, l_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} p_k$$

   Con ϵ_{ijk} el símbolo de Levi-Civita.
   Tenemos que el momento angular $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\vec{l} = \begin{vmatrix} \widehat{e}_1 & \widehat{e}_2 & \widehat{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = \widehat{e}_1(x_2p_3 - x_3p_2) + \widehat{e}_2(x_3p_1 - x_1p_3) + \widehat{e}_3(x_1p_2 - x_2p_1)$$

Calcularé para cada una de las combinaciones posibles de i, j y usando algunas de las propiedades vistas en clase.

- Calculamos $[p_1, l_2]$ como sigue:

$$\begin{aligned}
[p_1, l_2] &= [p_1, x_3p_1 - x_1p_3] \\
&= [p_1, x_3p_1] - [p_1, x_1p_3] \quad \text{porque } [X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z] \\
&= (x_3[p_1,p_1] + [p_1, x_3]p_1) - (x_1[p_1,p_3] + [p_1,x_1]p_3) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{porque } [X, YZ] = Y[X,Z] + [X,Y]Z \\
&= [p_1, x_3]p_1 - x_1[p_1,p_3] - [p_1,x_1]p_3 \quad \text{porque } [p_1,p_1] = 0 \\
&= 0 - 0 - (-1)p_3 \quad \text{porque } [q_i, p_j] = \delta_{ij} = -[p_j, q_i] \text{ y } [p_i, p_j] = 0 \\
&= p_3
\end{aligned}$$

  Y por otro lado, tenemos que $\sum_k \epsilon_{12k}p_k = \epsilon_{121}p_1 + \epsilon_{122}p_2 + \epsilon_{123}p_3 = p_3$

  Por lo que se cumple la igualdad en este caso

- Calculamos $[p_1, l_3]$ como sigue:

$$\begin{aligned}
[p_1, l_3] &= [p_1, x_1p_2 - x_2p_1] \\
&= [p_1, x_1p_2] - [p_1, x_2p_1] \quad \text{porque } [X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z] \\
&= (x_1[p_1,p_2] + [p_1, x_1]p_2) - (x_2[p_1,p_1] + [p_1,x_2]p_1) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{porque } [X, YZ] = Y[X,Z] + [X,Y]Z \\
&= x_1[p_1, p_2] + [p_1,x_1]p_2 - [p_1,x_2]p_1 \quad \text{porque } [p_1,p_1] = 0 \\
&= 0 - 1p_2 - 0 \quad \text{porque } [q_i, p_j] = \delta_{ij} = -[p_j, q_i] \text{ y } [p_i, p_j] = 0 \\
&= -p_2
\end{aligned}$$

  Y por otro lado, tenemos que $\sum_k \epsilon_{13k}p_k = \epsilon_{131}p_1 + \epsilon_{132}p_2 + \epsilon_{133}p_3 = -p_2$

  Por lo que se cumple la igualdad en este caso.

- Calculamos $[p_2, l_3]$ como sigue:

$$\begin{aligned}
[p_2, l_3] &= [p_2, x_1p_2 - x_2p_1] \\
&= [p_2, x_1p_2] - [p_2, x_2p_1] \quad \text{porque } [X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z] \\
&= (x_1[p_2,p_2] + [p_2, x_1]p_2) - (x_2[p_2,p_1] + [p_2,x_2]p_1) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{porque } [X, YZ] = Y[X,Z] + [X,Y]Z \\
&= [p_2, x_1]p_2 - x_2[p_2,p_1] - [p_2,x_2]p_1 \quad \text{porque } [p_2,p_2] = 0 \\
&= 0 + 0 - (-1)p_1 \quad \text{porque } [q_i, p_j] = \delta_{ij} = -[p_j, q_i] \text{ y } [p_i, p_j] = 0 \\
&= p_1
\end{aligned}$$

  Y por otro lado, tenemos que $\sum_k \epsilon_{23k}p_k = \epsilon_{231}p_1 + \epsilon_{232}p_2 + \epsilon_{233}p_3 = p_1$

  Por lo que se cumple la igualdad en este caso.

- Calculamos $[p_2, l_1]$ como sigue:

$$\begin{aligned}
[p_2, l_1] &= [p_2, x_2p_3 - x_3p_2] \\
&= [p_2, x_2p_3] - [p_2, x_3p_2] \quad \text{porque } [X, Y+Z] = [X, Y] + [X, Z] \\
&= (x_2[p_2, p_3] + [p_2, x_2]p_3) - (x_3[p_2, p_2] + [p_2, x_3]p_2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{porque } \; [X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z \\
&= x_2[p_2, p_3] + [p_2, x_2]p_3 - [p_2, x_3]p_2 \quad \text{porque } [p_2, p_2] = 0 \\
&= 0 - 1p_3 + 0 \quad \text{porque } \; [q_i, p_j] = \delta_{ij} = -[p_j, q_i] \text{ y } [p_i, p_j] = 0 \\
&= -p_3
\end{aligned}$$

Y por otro lado, tenemos que $\sum_k \epsilon_{21k}p_k = \epsilon_{211}p_1 + \epsilon_{212}p_2 + \epsilon_{213}p_3 = -p_3$

Por lo que se cumple la igualdad en este caso.

- Calculamos $[p_3, l_1]$ como sigue:

$$\begin{aligned}
[p_3, l_1] &= [p_3, x_2p_3 - x_3p_2] \\
&= [p_3, x_2p_3] - [p_3, x_3p_2] \quad \text{porque } [X, Y+Z] = [X, Y] + [X, Z] \\
&= (x_2[p_3, p_3] + [p_3, x_2]p_3) - (x_3[p_3, p_2] + [p_3, x_3]p_2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{porque } \; [X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z \\
&= [p_3, x_2]p_3 - x_3[p_3, p_2] - [p_3, x_3]p_2 \quad \text{porque } [p_3, p_3] = 0 \\
&= 0 + 0 - (-1)p_2 \quad \text{porque } \; [q_i, p_j] = \delta_{ij} = -[p_j, q_i] \text{ y } [p_i, p_j] = 0 \\
&= p_2
\end{aligned}$$

Y por otro lado, tenemos que $\sum_k \epsilon_{31k}p_k = \epsilon_{311}p_1 + \epsilon_{312}p_2 + \epsilon_{313}p_3 = p_2$

Por lo que se cumple la igualdad en este caso.

- Calculamos $[p_3, l_2]$ como sigue:

$$\begin{aligned}
[p_3, l_2] &= [p_3, x_3p_1 - x_1p_3] \\
&= [p_3, x_3p_1] - [p_3, x_1p_3] \quad \text{porque } [X, Y+Z] = [X, Y] + [X, Z] \\
&= (x_3[p_3, p_1] + [p_3, x_3]p_1) - (x_1[p_3, p_3] + [p_3, x_1]p_3) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{porque } \; [X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z \\
&= x_3[p_3, p_1] + [p_3, x_3]p_1 - [p_3, p_1]p_3 \quad \text{porque } [p_3, p_3] = 0 \\
&= 0 - p_1 + 0 \quad \text{porque } \; [q_i, p_j] = \delta_{ij} = -[p_j, q_i] \; \text{ y } [p_i, p_j] = 0 \\
&= -p_1
\end{aligned}$$

Y por otro lado, tenemos que $\sum_k \epsilon_{32k}p_k = \epsilon_{321}p_1 + \epsilon_{322}p_2 + \epsilon_{323}p_3 = -p_1$

Por lo que se cumple la igualdad en este caso

- Ya sólo falta el caso en que los índices sean repetidos, así que calculamos $[p_i, l_i]$ para $i = 1, 2, 3$ como sigue:

$$\begin{aligned}
[p_i, l_i] &= [p_i, x_j p_k - x_k p_j] \\
&= [p_i, x_j p_k] - [p_i, x_k p_j] \\
&= x_j [p_i, p_k] + [p_i, x_j] p_k - (x_k [p_i, p_j] + [p_i, x_k] p_k) \\
&= 0 \\
&\text{porque } [p_i, p_j] = 0 \ \ , \ \ [q_i, p_j] = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Y por otro lado tenemos que $\sum_k \epsilon_{iik} p_k = \epsilon_{ii1} p_1 + \epsilon_{ii2} p_2 + \epsilon_{ii3} p_3 = 0$
Por lo que se cumple la igualdad en este caso también.

Por tanto, se cumple la igualdad en todos los casos posibles.