Teoría Cuántica de campos I: Examen 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

7 de enero de 2022

Problema 1

a) Al inicio del curso tuviste tu primer encuentro con la mecánica cuántica relativista a través de la conocida ecuación de Klein Gordon

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0$$

Muestra que el propagador de Feynman, $G_f(x', x) := G(x' - x)$, para la partícula libre relativista es una función de Green del operador de Klein-Gordon. Es decir, muestra que

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G(x' - x) \propto \delta^{(4)}(x' - x)$$

Primero que nada, escribiremos el operador de la ecuación de Klein-Gordon como sigue:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G(x' - x) = (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) G(x' - x)$$

Calculamos cada uno de los términos necesarios por separado:

- ∂_t^2:

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 G(x' - x) = \partial_t^2 \left[i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] &= i \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \partial_t^2 \left(\frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \\
&= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \partial_t^2 \left(\frac{e^{-i[p_0(t'-t) - p_1(x_1' - x_1) - p_2(x_2' - x_2) - p_3(x_3' - x_3)]}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \\
&= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (ip_0)^2 \left(\frac{e^{-i[p_0(t'-t) - p_1(x_1' - x_1) - p_2(x_2' - x_2) - p_3(x_3' - x_3)]}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \\
&= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-p_0^2) \left(\frac{e^{-i[p_0(t'-t) - p_1(x_1' - x_1) - p_2(x_2' - x_2) - p_3(x_3' - x_3)]}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \\
&= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-p_0^2) \frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}
\end{aligned}$$

- ∇^2:

$$\nabla^2 G(x'-x) = \nabla^2\left[i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2-m^2+i\epsilon}\right] = i\int \frac{d^4x}{(2\pi)^4}\nabla^2\left(\frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2-m^2+i\epsilon}\right)$$
$$= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\nabla^2\left(\frac{e^{-i[p_0(t'-t)-p_1(x_1'-x_1)-p_2(x_2'-x_2)-p_3(x_3'-x_3)]}}{p^2-m^2+i\epsilon}\right)$$
$$= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\partial_{x_3}^2)\left(\frac{e^{-i[p_0(t'-t)-p_1(x_1'-x_1)-p_2(x_2'-x_2)-p_3(x_3'-x_3)]}}{p^2-m^2+i\epsilon}\right)$$
$$= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}[(-ip_1)^2+(-ip_2)^2+(-ip_3)^2]\left(\frac{e^{-i[p_0(t'-t)-p_1(x_1'-x_1)-p_2(x_2'-x_2)-p_3(x_3'-x_3)]}}{p^2-m^2+i\epsilon}\right)$$
$$= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}[-p_1^2-p_2^2-p_3^2]\left(\frac{e^{-i[p_0(t'-t)-p_1(x_1'-x_1)-p_2(x_2'-x_2)-p_3(x_3'-x_3)]}}{p^2-m^2+i\epsilon}\right)$$
$$= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-p_1^2-p_2^2-p_3^2)\frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2-m^2+i\epsilon}$$

Juntando estos resultados en la ecuación, tenemos que:

$$(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)G(x'-x) = \partial_t^2 G(x'-x) - \nabla^2 G(x'-x) + m^2 G(x'-x)$$
$$= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-p_0^2)\frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2-m^2+i\epsilon} - i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-p_1^2-p_2^2-p_3^2)\frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2-m^2+i\epsilon}$$
$$+ m^2\, i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2-m^2+i\epsilon}$$
$$= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}[-p_0^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2+m^2]\frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2-m^2+i\epsilon}$$
$$= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}[-p^2+m^2]\frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2-m^2+i\epsilon}$$
$$= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{-p^2+m^2}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x'-x)}$$

Luego, si usamos que ϵ indica un número muy pequeño y hay que tomar el límite $\epsilon \to 0$, tendremos que la fracción $\dfrac{-p^2+m^2}{p^2-m^2+i\epsilon}$ tiende a -1. Por lo tanto, el resultado al que hemos llegado será:

$$(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)G(x'-x) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-1)e^{-ip\cdot(x'-x)}$$

Finalmente usamos que la delta de Dirac es igual a $\delta^{(4)}(x'-x) = \int \dfrac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x'-x)}$. Por lo que llegamos al resultado esperado:

$$\boxed{(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)G(x'-x) = -i\delta^{(4)}(x'-x)}$$

b) Por otra parte, muestra que el propagador $\langle x'|x\rangle$ es una solución (y no una función de Green) de la ecuación de Klein-Gordon. Es decir, muestra que

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\langle x'|x\rangle = 0$$

Entonces la delta de Dirac que obtuviste en el inciso anterior proviene de las funciones de Heaviside que contiene el propagador de Feynman

Nuevamente empezamos escribiendo el operador de la ecuación de Klein Gordon como sigue:

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\langle x'|x\rangle = (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\langle x'|x\rangle$$

Al igual que en el inciso pasado, calculamos cada una de las derivadas por separado:

- ∂_t^2:

$$\begin{aligned}
\partial_t^2\langle x'|x\rangle &= \partial_t^2\left(\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}e^{-ip\cdot(x'-x)}\Big|_{p_0=E_{\vec{p}}}\right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\partial_t^2\left(e^{-ip\cdot(x'-x)}\right)\Big|_{p_0=E_{\vec{p}}}\\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\partial_t^2\left(e^{-i[E_{\vec{p}}(t'-t)-p_1(x_1'-x_1)-p_2(x_2'-x_2)-p_3(x_3'-x_3)]}\right)\\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}(iE_{\vec{p}})^2\left(e^{-i[E_{\vec{p}}(t'-t)-p_1(x_1'-x_1)-p_2(x_2'-x_2)-p_3(x_3'-x_3)]}\right)\\
&= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\vec{p}}}{2}\left(e^{-i[E_{\vec{p}}(t'-t)-p_1(x_1'-x_1)-p_2(x_2'-x_2)-p_3(x_3'-x_3)]}\right)\\
&= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\vec{p}}}{2}\left(e^{-ip\cdot(x'-x)}\right)\Big|_{p_0=E_{\vec{p}}}
\end{aligned}$$

- ∇^2:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\langle x'|x\rangle &= \nabla^2\left(\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}e^{-ip\cdot(x'-x)}\Big|_{p_0=E_{\vec{p}}}\right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\nabla^2\left(e^{-ip\cdot(x'-x)}\right)\Big|_{p_0=E_{\vec{p}}}\\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\nabla^2\left(e^{-i[E_{\vec{p}}(t'-t)-p_1(x_1'-x_1)-p_2(x_2'-x_2)-p_3(x_3'-x_3)]}\right)\\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\partial_{x_3}^2)\left(e^{-i[E_{\vec{p}}(t'-t)-p_1(x_1'-x_1)-p_2(x_2'-x_2)-p_3(x_3'-x_3)]}\right)\\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}[(-ip_1)^2+(-ip_2)^2+(-ip_3)^2]\left(e^{-i[E_{\vec{p}}(t'-t)-p_1(x_1'-x_1)-p_2(x_2'-x_2)-p_3(x_3'-x_3)]}\right)\\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}[-p_1^2-p_2^2-p_3^2]e^{-ip\cdot(x'-x)}\Big|_{p_0=E_{\vec{p}}}
\end{aligned}$$

Finalmente, si juntamos estos resultados, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\langle x'|x\rangle &= (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\langle x'|x\rangle \\
&= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\vec{p}}}{2}\left(e^{-ip\cdot(x'-x)}\right)\bigg|_{p_0=E_{\vec{p}}} - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}[-p_1^2 - p_2^2 - p_3^2]e^{-ip\cdot(x'-x)}\bigg|_{p_0=E_{\vec{p}}} \\
&\qquad + m^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}e^{-ip\cdot(x'-x)}\bigg|_{p_0=E_{\vec{p}}} \\
&= \frac{1}{2E_{\vec{p}}}(-E_{\vec{p}}^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-ip\cdot(x'-x)}\bigg|_{p_0=E_{\vec{p}}} \\
&= \frac{1}{2E_{\vec{p}}}(-E_{\vec{p}}^2 + E_{\vec{p}}^2)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-ip\cdot(x'-x)}\bigg|_{p_0=E_{\vec{p}}} \qquad \text{Porque } E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Con lo que se prueba lo que buscábamos

Problema 2

En las últimas clases has trabajado y aprendido mucho sobre con la interacción ϕ^4 para un campo escalar real. Por ahora vas a regresar a la teoría de campos clásica no masiva correspondiente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

a) Muestra que la acción es invariante bajo la transformación

$$x^\mu \to x^{'\mu} = s x^\mu$$
$$\phi(x) \to \phi'(x') = s^{-d}\phi(x)$$

donde s es un número real positivo y d es un entero que tienes que encontrar.

Primero escribimos la acción antes de la transformación

$$S = \int \mathcal{L}\, d^4x = \int \left(\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) d^4x$$

Para escribir la acción tras la transformación, veamos cómo se transforman los términos necesarios:

- Derivada: La derivada ∂^μ al hacerla respecto a las coordenadas primadas se transforma como:

$$\begin{aligned}
\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \ \to \frac{\partial}{\partial x'_\mu}& \\
&= \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} \qquad \text{por la regla de la cadena} \\
&= \frac{\partial (s^{-1}x'_\mu)}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} \qquad \text{por la definición de la transformación} \\
&= s^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\mu} \\
&= s^{-1}\partial^\mu
\end{aligned}$$

  Lo mismo sucede con la otra derivada ∂_μ:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ \to \frac{\partial}{\partial x'^\mu}& \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad \text{por la regla de la cadena} \\
&= \frac{\partial (s^{-1}x'^\mu)}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad \text{por la definición de la transformación} \\
&= s^{-1}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \\
&= s^{-1}\partial_\mu
\end{aligned}$$

- $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$: Ya sabiendo cómo se transforman las derivadas, podemos transformar el término $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$:

$$\begin{aligned}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \to\ & s^{-1}\partial_\mu\phi'(x')s^{-1}\partial^\mu\phi'(x') && \text{transformamos las derivadas y los campos}\\ =\ & s^{-2}\partial^\mu\phi'(x')\partial_\mu\phi'(x')\\ =\ & s^{-2}\partial^\mu(s^{-d}\phi(x))\partial_\mu(s^{-d}\phi(x)) && \text{por la regla de la transformación}\\ =\ & s^{-2-2d}\partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x)\end{aligned}$$

- ϕ^4: Ahora transformamos el término ϕ^4:

$$\begin{aligned}\phi^4(x) \to\ & {\phi'}^4(x')\\ =\ & (s^{-d}\phi(x))^4 && \text{por la regla de la transformación}\\ =\ & s^{-4d}\phi^4(x)\end{aligned}$$

- d^4x: Para escribir la acción, también habrá que transformar el elemento de volumen d^4x. Como cada x^μ se transforma en $x^{'\mu} = sx^\mu$, entonces $dx^{'\mu} = sdx^\mu$ y por lo tanto d^4x se transforma como:

$$d^4x \to d^4x' = s^4 d^4x$$

Ahora escribimos todo esto en la definición de la acción para ver en qué se transforma:

$$\begin{aligned}S =\ & \int\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right)d^4x\\ \to S' =\ & \int\left(\frac{1}{2}[s^{-2-2d}\partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x)] - \frac{\lambda}{4!}s^{-4d}\phi(x)\right)s^4d^4x && \text{transformamos cada término}\\ =\ & \int\left(\frac{1}{2}s^{2-2d}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{\lambda}{4!}s^{-4d+4}\phi\right)d^4x\end{aligned}$$

Para que la transformación deje invariante a la acción, se debe de cumplir que $S = S'$. Viendo la expresión de S', notamos que para que esto se cumpla deben de desaparecer las potencias de s, para lo cual debemos de tener que:

$$\begin{aligned}s^{2-2d} = s^{-4d+4} = 1\\ \Rightarrow\ 2-2d = -4d+4 = 0\end{aligned}$$

Vemos que estas ecuaciones se cumplen cuando $\boxed{d=1}$.

Por lo tanto, concluimos que con la transformación definida como:

$$\begin{aligned}x^\mu \to x^{'\mu} = sx^\mu\\ \phi(x) \to \phi'(x') = s^{-d}\phi(x) = s^{-1}\phi(x)\end{aligned}$$

la acción es invariante.

b)¿La transformación anterior sigue dejando invariante a la acción del caso masivo?

El Lagrangiano del caso masivo está dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

Por lo que la acción es:

$$S = \int \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) d^4x$$

Para ver cómo se transforma la acción, podemos usar los mismos resultados del inciso pasado, solamente nos falta transformar el término masivo:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}m^2\phi^2(x) \to & -\frac{1}{2}m^2\phi'^2(x') \\
&= -\frac{1}{2}m^2(s^{-d}\phi(x))^2 \quad \text{por la regla de la transformación} \\
&= -\frac{1}{2}m^2 s^{-2d}\phi^2(x)
\end{aligned}$$

Ahora sí podemos ver cómo se transforma la acción en este caso:

$$\begin{aligned}
S &= \int \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) d^4x \\
\to S' &= \int \left(\frac{1}{2}s^{-2-2d}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2 s^{-2d}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}s^{-4d}\phi^4\right) s^4 d^4x \\
&= \int \left(\frac{1}{2}s^{2-2d}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2 s^{-2d+4}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}s^{-4d+4}\phi^4\right) d^4x
\end{aligned}$$

Al igual que en el inciso anterior, para que $S' = S$, notamos que todas las potencias de s deben desaparecer, lo cual se consigue si:

$$\begin{aligned}
s^{2-2d} = s^{-2d+4} = s^{-4d+4} = 1 \\
\Rightarrow\ 2 - 2d = -2d + 4 = -4d + 4 = 0
\end{aligned}$$

Pero estas ecuaciones no tienen solución, ya que vemos directamente que para que se cumpla la primera igualdad necesitaríamos tener que $2 - 2d = -2d + 4 \ \Rightarrow\ 2 = 4$. Por lo tanto, para el caso masivo no queda invariante la acción.

c) En clase escuchaste un poco sobre la transfomación de paridad

$$\vec{x} \to \vec{x'} = -\vec{x}$$

y la inversión temporal

$$t \to t' = -t$$

Muestra que al aplicar ambas transformaciones a la teoría no masiva

$$x^\mu \to x'^\mu = -x^\mu$$
$$\phi(x) \to \phi'(x') = -\phi(x)$$

la acción queda invariante.

Para la teoría no masiva, el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

Y por tanto la acción es

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) d^4x$$

Vemos ahora cómo se transforma cada término de esta expresión:

- Derivada: Vemos cómo se transforma la derivada ∂^μ al hacerla respecto a las coordenadas primadas:

$$\begin{aligned} \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \to & \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \\ &= \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} \\ &= \frac{\partial(-x'_\mu)}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} \qquad \text{por la definición de la transformación} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_\mu} = -\partial^\mu \end{aligned}$$

  Lo mismo se cumple con la otra derivada:

$$\begin{aligned} \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \to & \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{\partial(-x'^\mu)}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad \text{por la definición de la transformación} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^\mu} = -\partial_\mu \end{aligned}$$

- Transformamos ahora el término $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \to & \frac{1}{2}(-\partial_\mu)(-\phi)(-\partial^\mu)(-\phi) \qquad \text{por cómo se transforman las derivadas y el campo} \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \end{aligned}$$

- Transformamos el término $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \to& \frac{\lambda}{4!}(-\phi)^4 \quad \text{por la transformación del campo}\\ =& \frac{\lambda}{4!}\phi^4\end{aligned}$$

- Transformamos el término d^4x. Como $x'^{\mu} = -x^{\mu}$, tenemos que $dx'^{\mu} = -dx^{\mu}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}d^4x \to& d^4x' = (dx'^0)(dx'^1)(dx'^2)(dx'^3) = (-dx^0)(-dx^1)(-dx^2)(-dx^3)\\ =& d^4x\end{aligned}$$

  Por lo tanto, vemos que ninguno de los términos cambia ante la transformación y por lo tanto la acción tras la transformación es:

$$\begin{aligned}S =& \int \left(\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) d^4x\\ \to S' =& \int \left(\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) d^4x \quad \text{aplicando las transformaciones}\end{aligned}$$

  Con lo que concluimos que $S = S'$, la acción es invariante.

d) ¿Qué puedes deducir a partir del teorema de Noether para las simetrías anteriores? Explica brevemente, no es necesario que escribas ecuaciones

Para la transformación del inciso a) en el campo no masivo, ya revisamos que la acción es invariante. Además, es una transformación continua y se puede llevar a cabo de forma infinitesimal, ya que la transformación es:

$$\begin{aligned}x^{\mu} \to x'^{\mu} = sx^{\mu}\\ \phi(x) \to \phi'(x') = s^{-1}(\phi(x))\end{aligned}$$

Y para valores de s cercanos a 1, podemos escribir $s = 1+\epsilon$ y $s^{-1} \simeq 1-\epsilon$, por lo que tenemos la transformación infinitesimal:

$$\begin{aligned}x^{\mu} \to x'^{\mu} = (1+\epsilon)x^{\mu}\\ \phi(x) \to \phi'(x') = (1-\epsilon)(\phi(x))\end{aligned}$$

Por ser una transformación continua que deja la acción invariante, sabemos que el teorema de Noether nos dice que existe una corriente que se conserva.

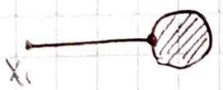
Para el inciso b) el teorema de Noether no aplica ya que la transformación no conserva la acción.

Para el inciso c) el teorema de Noether tampoco aplica. Esto porque dicho teorema sólo aplica para transformaciones continuas (que se pueden llevar a cabo de forma infinitesimal) pero la transformación del inciso c) es discreta.

Problema 3: Considera la interacción ϕ^3 para un campo escalar real

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3$$

a) Dibuja los diagramas de Feynman (sin incluir burbujas de vacío) hasta orden cúbico en la interacción del correlador de 1-punto



Lo que se nos pide es dibujar todos los diagramas con un punto externo x_1 y con 0, 1, 2 o hasta 3 vértices de tres patas (correspondientes a los términos $\frac{g}{3!}\phi^3$ a órdenes 0, lineal, cuadrado y cúbico en g).

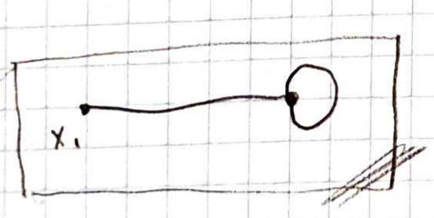
Empezamos primero con el orden 0 y vamos subiendo hasta el 3:

i) g^0: A este orden no agregamos vértices de tres patas, por lo que hay que conectar un punto x_1 sin otros puntos, es decir, sólo tenemos el punto:

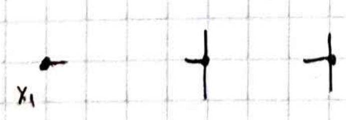
y no hay con qué conectarlo, por lo que no hay diagramas.

ii) g^1: A este orden debemos agregar un punto de 3 patas, es decir, tenemos que conectar lo siguiente:

Claramente, la única forma de hacerlo (salvo diagramas topológicamente iguales) es:

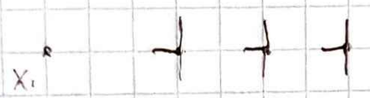


iii) g^2: A este orden debemos agregar 2 puntos de 3 patas. Es decir, hay que conectar lo siguiente:

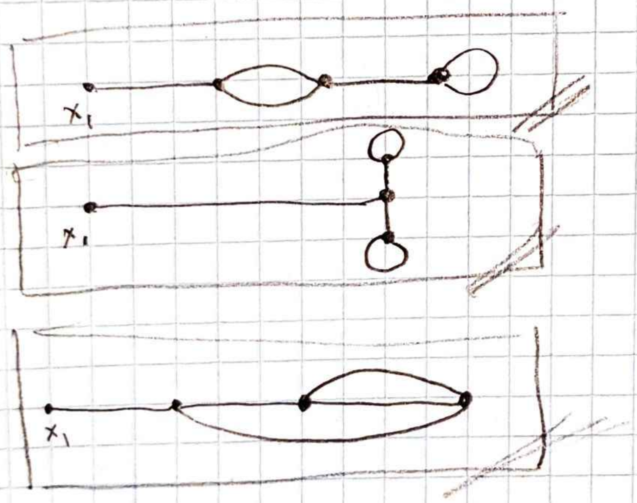


Sin embargo, esto es imposible, pues hay un total de $1+3+3 = 7$ patas por conectar. Como las patas se conecta de dos en dos y tenemos un número impar, no podemos hacerlo.

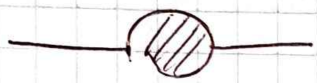
r..o) g^3: A este orden debemos agregar 3 puntos de dos patas. Es decir, hay que conectar lo siguiente:



Las formas de hacerlo son:



b) Dibuja todos los diagramas de Feynman (sin burbujas) hasta orden cuadrático en la interacción del correlador de 2-puntos



Lo que nos piden son todos los diagramas que unen dos puntos externos x_1, x_2 y con 0, 1 o hasta 2 puntos de 3 patas (correspondientes a $\frac{g\phi^3}{3!}$ a orden 0, 1 y 2)

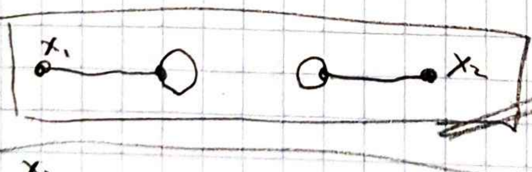
- A orden 0, g^0) Necesitamos conectar x_1 y x_2 sin usar puntos de 3 patas. La única forma es:

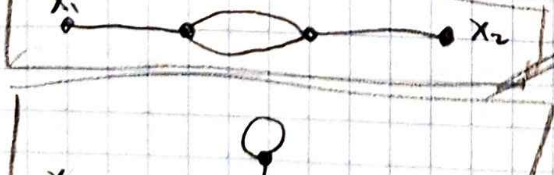
- A orden 1, g^1) Necesitamos unir x_1 y x_2 usando un solo punto de 3 patas. Es decir, necesitamos conectar lo siguiente:

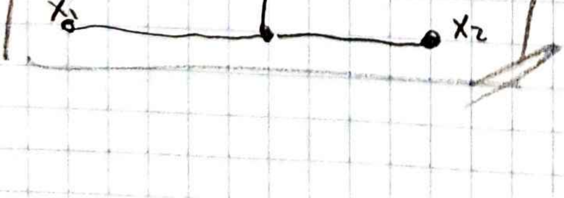
Sin embargo, la cantidad total de patas es 5 y como las patas se conectan de 2 en 2, es imposible conectar 5 patas.

- A orden 2, g^2) Necesitamos unir x_1 y x_2 usando dos puntos de 3 patas

Las formas de hacerlo son:







c) Encuentra el factor de simetría de cada uno de ellos.

Para cada diagrama, vamos a calcular S con la fórmula de la tarea 6:

$$S = \begin{pmatrix} 2 \text{ por cada par de} \\ \text{patas de un mismo vértice} \\ \text{contraídas entre sí } (c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l! \text{ por cada cjto} \\ \text{de } l \text{ líneas} \\ \text{intercambiables} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v! \text{ por cada} \\ v \text{ vértices} \\ \text{intercambiables} \end{pmatrix}$$

$$= 2^c \, l! \, v!$$

Además, vamos a calcular el factor combinatorio (FC) como vimos en clase y usarlo para calcular S según la fórmula:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{3!}\right)^n FC$$

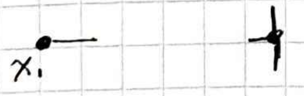
Con n el número de puntos de 3 patas usados.

---

a.1) 

•) Tenemos $c = 1$, $l = 0$, $v = 0$. Por lo que $S = 2^1 \cdot 0! \cdot 0! = \underline{2}$

••) Por otro lado, calculamos el F.C. Empezamos con los puntos que queremos conectar



para conectar x_1 con el punto de 3 patas hay $\underline{3}$ posibles opciones y queda:

Ahora las dos patas restantes se conectan de la única forma posible:

$\therefore$ $FC = \underline{3}$

Entonces: $\frac{1}{S} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{3!}\right)^n FC = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{3!}\right)^1 \cdot 3 = \frac{1}{2}$ $\quad \therefore \boxed{S = 2}$

$n = 1$ punto de 3 patas

9.2) 

·) Calculamos S directamente: Claramente $c=1$, $l=2$ porque hay una pareja de 2 líneas intercambiables (las que conectan V_1 y V_2) y ningún punto es intercambiable

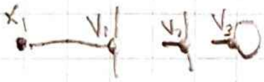
$$\rightarrow S = 2^c \cdot l! \cdot v! = 2^1 \cdot 2! \cdot 0! = \boxed{4}$$

··) Calculamos FC y de ahí S: Empezamos con los puntos sin conectar

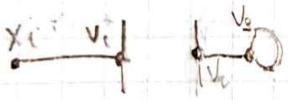
podemos conectar X_1 a cualquiera de las $\underline{9}$ patas y queda:

$\rightarrow$ 

Elegimos uno de los $\underline{2}$ puntos que quedan para asignarle la etiqueta de "V_3" y lo contraemos consigo mismo de una de las $\underline{3}$ formas posibles, y queda:

$\rightarrow$ 

Conectamos la pata de V_3 con una de las $\underline{3}$ de V_2,

$\rightarrow$ 

Conectamos las dos patas de V_1 con las dos de V_2, que se puede hacer de 2 maneras: así  o así 

$\rightarrow$ 

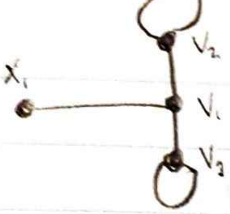
$\therefore$ Tenemos que $FC = 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = \underline{324}$

Entonces tenemos que $\frac{1}{S} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{3!}\right)^n FC = \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3!}\right)^3 324 = \frac{1}{4}$

$n = 3$ puntos de tres patas

$$\therefore \boxed{S=4}$$

$a_3)$

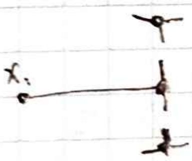


i) Calculamos S directamente: $c=2$, líneas que contraen al mismo vértice (en V_2 y V_3), $\ell=0$ (no hay líneas intercambiables), $v=2$ porque podemos intercambiar V_2 y V_3, pues ambos se conectan a V_1 y se contraen consigo mismos.

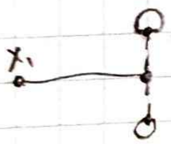
$$\rightarrow S = 2^c \cdot \ell! \cdot v! = 2^2 \cdot 0! \cdot 2! = \boxed{8}$$

ii) Calculamos primero FC: Empezamos con los puntos desconectados:

Hay 9 maneras de conectar x_1 con algún punto y nos queda:



Para cada uno de los puntos que siguen desconectados, hay 3 formas de contraerlos consigo mismos y nos queda:



Luego, hay 2 formas de terminar, así:  o así 

$$\therefore \quad FC = 9 \cdot 3^2 \cdot 2 = 162$$

Entonces $$\frac{1}{S} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{3!}\right)^n FC = \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3!}\right)^3 \cdot 162 = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \quad \boxed{S = 8}$$

$a_4)$ 

·) Calculamos S directament: $c=0$, $l=2$ porque hay una pareja de líneas intercambiables (las que conectan V_2 con V_3), $v=2$ porque V_2 y V_3 son intercambiables, pues ambos están conectados a V_1 y entre sí. Entonces:

$$S = 2^c\, l!\, v! = 2^0 \cdot 2! \cdot 2! = \boxed{4}$$

··) Calculamos FC: Empezamos con los puntos sin conectar:

 Conectamos X_1 con una de las $\underline{9}$ opciones

→  Conectamos una de las patas de V_1 con una de las $\underline{6}$ restantes

→  Conectamos la otra pata de V_1 con una de las $\underline{3}$ del vértice desconectado

→  Conectamos las dos parejas de patas restantes de una de la $\underline{2}$ maneras posibles: Así  o así 

→ 

$$\therefore FC = 9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = \underline{324}$$

Entonces $\frac{1}{S} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{3!}\right)^n \cdot FC = \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3!}\right)^3 \cdot 324 = \boxed{4}$

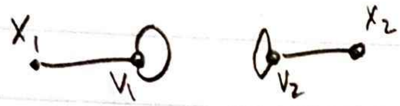
$b_1)$ 

·) Calculamos S: claramente $c=0$, $v=0$, $l=0$ → $S = 2^0 \cdot 0! \cdot 0! = \underline{1}$

··) Calculamos FC: Claramente $FC = 1$

→ $\frac{1}{S} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{3!}\right)^n = \frac{1}{0!}\left(\frac{1}{3!}\right)^0 \cdot FC = \underline{1}$

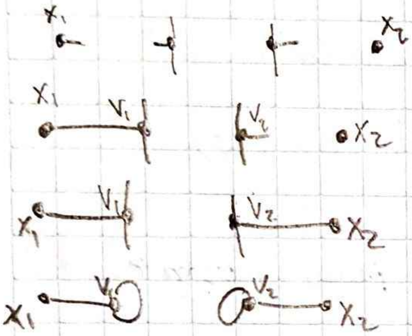
$n=0$ puntos de 3 patas

$b_2)$ 

$\cdot)$ Calculamos S: Hay $c=2$ líneas que contraen un mismo vértice. Y no hay puntos ni líneas intercambiables $\Rightarrow v=0$, $l=0$

$$\therefore \; S = 2^c \cdot v! \cdot l! = 2^2 \cdot 0! \cdot 0! = \boxed{4}$$

$\cdot\cdot)$ Calculamos FC: Empezamos con los puntos desconectados:



Conectamos x_1 con una de las $\underline{6}$ patas posibles,

Conectamos x_2 con una de las $\underline{3}$ patas de V_2,

Ya no quedan alternativas para acabar,

$$\therefore \; FC = 6 \cdot 3 = 18$$

Entonces, $\dfrac{1}{S} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{1}{3!}\right)^n FC = \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{1}{3!}\right)^2 \cdot 18 = \dfrac{1}{4} \;\rightarrow\; \boxed{S = 4}$

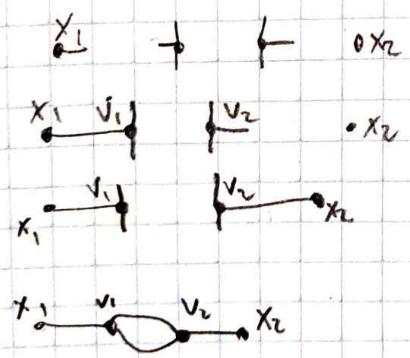
$\uparrow$ $n=2$ puntos de 3 patas

$b_3)$ 

$\cdot)$ Calculamos S directamente: $c=0$, $l=2$ líneas intercambiables, $v=0$ puntos intercamb

$$\rightarrow \; S = 2^c \cdot l! \cdot v! = 2^0 \cdot 2! \cdot 0! = \boxed{2}$$

$\cdot\cdot)$ Calculamos FC y luego S: Empezamos con los puntos desconectados:



Conectamos x_1 a una de las $\underline{6}$ patas libres,

Conectamos x_2 a una de las $\underline{3}$ patas de V_2,

Conectamos las parejas de líneas de V_1 y V_2 de una de las $\underline{2}$ formas posibles:  ó ,

$$\therefore \; FC = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36 \quad \text{y entonces,}$$

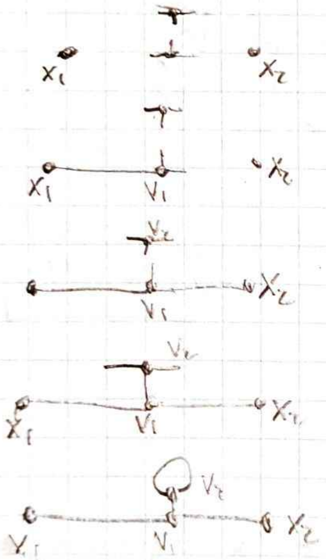
$$\frac{1}{S} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{3!}\right)^n FC = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3!}\right)^2 36 = \frac{1}{2} \qquad \therefore \; \boxed{S = 2}$$

b4) 

∘) Calculamos S directamente: $c = 1$, $l = v = 0$ pues no hay líneas ni vértices intercambiables. Entonces,

$$S = 2^c \cdot l! \cdot v! = 2^1 \cdot 0! \cdot 0! = \underline{2}$$

∘∘) Calculamos primero FC: Escribimos los puntos sin conectar;



conectamos X_1 con una de las $\underline{6}$ patas posibles,

Conectamos X_2 con una de las $\underline{2}$ patas restantes de V_1,

Conectamos la pata restante de V_1 con una de las $\underline{3}$ de V_2,

Cerramos V_2 de la única forma posible,

$$\therefore \quad FC = 6 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{36}$$

Y entonces $\frac{1}{S} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{3!}\right)^n FC = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3!}\right)^2 \cdot 36 = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{S = 2}$$