Tomás Ricardo Basile Álvarez

Ecuaciones Diferenciales I   Mini Tarea 12

1) $\frac{dx}{dt} = x+3y$

$\frac{dy}{dt} = 3x+y$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- Calculamos los eigenvalores: $\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \rightarrow (1-\lambda)^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 4 \end{matrix}$

* Eigenvectores:

i) $\underline{\lambda_1 = -2}$ $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow 3x+3y=0 \rightarrow y=-x$

para $x=1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ii) $\underline{\lambda_2 = 4}$ $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow -3x+3y=0 \Rightarrow y=x$

para $x=1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\bar{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\bar{v}_2 = \boxed{C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}}$

2) Encuentre la solución a

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Eigenvalores: $\left|\begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \rightarrow (6-\lambda)(1-\lambda)+6=0 \rightarrow \lambda^2-7\lambda+12=0 \nearrow \begin{matrix} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}$

- Eigenvectores: i) $\underline{\lambda_1 = 4}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 2x-3y=0 \rightarrow y = \frac{2}{3}x$

para $x = 3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ii) $\underline{\lambda_2 = 3}$, $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{matrix} 3x-3y=0 \\ 2x-2y=0 \end{matrix} \rightarrow y = x$

para $x = 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ Solución general: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = C_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{matrix} x_1(t) = 3C_1 e^{4t} + C_2 e^{3t} \\ x_2(t) = 2C_1 e^{4t} + C_2 e^{3t} \end{matrix} \xrightarrow[\text{inicial}]{\text{condición}} \begin{matrix} 0 = 3C_1 + C_2 \quad \ldots (1) \\ 1 = 2C_1 + C_2 \quad \ldots (2) \end{matrix}$

$\rightarrow$ hacemos $(1)-(2) \rightarrow -1 = C_1$

$\Rightarrow C_2 = 3$

$\therefore \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}}$

3. Encuentre los 4 términos de la solución de series de $y' = 2xy$ y verifique con la solución exacta

Como $2x$ es analítica en $x=0$ $\Rightarrow$ Suponemos que existe una solución $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ que converge con $|x| < R$.

$\Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$

Sustituimos a la ecuación: $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} \dots (1)$

Todos los coeficientes de x^n deben de ser iguales $\rightarrow$

$\rightarrow a_{n+2}(n+2) = 2a_n \qquad \rightarrow \underline{a_{n+2} = \frac{2}{n+2} a_n}$.

Pero si en (1) vemos que del lado izquierdo el término independiente es a_1 pero del derecho no hay término independiente $\rightarrow a_1 = 0$

$\therefore$ Con la relación de equivalencia, vemos que todos los a impares valen 0 y los pares dependen del valor arbitrario de a_0

$$a_2 = \frac{2}{2} a_0 \rightarrow a_2 = a_0$$
$$a_4 = \frac{2}{2+2} a_2 \rightarrow a_4 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2} a_0$$
$$a_6 = \frac{2}{4+2} a_4 \rightarrow a_6 = \frac{1}{3} a_4 = \frac{1}{6} a_0$$

$$\boxed{a_{2k} = \frac{1}{k!} a_0}$$

$$\therefore \boxed{y = a_0 + a_0 x^2 + \frac{a_0}{2} x^4 + \frac{a_0}{6} x^6 + \dots + \frac{a_0}{k!} x^{2k} + \dots}$$

Como comprobación, lo resolvemos de forma exacta:

$$y' = 2xy \rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int 2x\, dx \rightarrow \ln|y| = x^2$$

$\rightarrow y = ce^{x^2}$ Que tiene la serie centrada en 0:

$$y = c\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots\right)$$