Trabajo Final: Flujo Vehicular

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

May 29, 2022

Introducción

A grandes rasgos, el flujo vehicular es el estudio del movimiento de vehículos a lo largo de calles y carreteras. Se estudian las interacciones entre los vehículos y la infraestructura con el objetivo de entender la forma en que se comportan los vehículos en la calle.

Hay varios tipos distintos de modelos para simular el movimiento de vehículos con la finalidad de entenderlo mejor y mejorar la infraestructura vehicular [1]. En general los modelos se dividen en microscópicos y macroscópicos, que definiremos más adelante en este trabajo. Dentro de los modelos macroscópicos hay varios que utilizan ecuaciones similares a las de dinámica de fluidos, por lo que el estudio de fluidos puede servir para analizar estas ecuaciones y explicar fenómenos que suceden en el tráfico.

A lo largo del trabajo estudiaremos principalmente el problema sencillo en el que se tiene una carretera infinita de un solo carril, sin semáforos y sin entrada o salida de coches. Este es el problema más sencillo posible de flujo vehicular que sin embargo presenta varios conceptos importantes y explica varios fenómenos que suceden en el tráfico. Además, es posible agregar complicaciones a este problema para estudiar situaciones más complicadas en las que se tienen semáforos, accidentes, entradas y salidas de la carretera, múltiples carriles, etc.

En este trabajo empezaremos por definir el concepto de flujo vehicular y los objetivos de estudiarlo, posteriormente veremos en general en qué se basan los modelos microscópicos y macroscópicos. Dentro del modelo macroscópico veremos la relación que tienen las ecuaciones y conceptos con los de dinámica de fluidos. Luego, vamos a linearizar las ecuaciones para poder resolverlas y entender algunos fenómenos que suceden en el tráfico. Finalmente veremos cómo se resuelve computacionalmente la ecuación no lineal y que da lugar al concepto de “jamitones”.

Desarrollo

Como se mencionó en la introducción, el flujo vehicular se refiere al problema de encontrar ecuaciones y modelos para representar el movimiento de vehículos en las calles. Estos modelos permiten entender el movimiento de los vehículos y explicar algunos de los fenómenos que se observan en el tráfico.
Los modelos que se utilizan se dividen en microscópicos y macroscópicos y sus propiedades generales son las siguientes:

- **Microscópicos:** En estos modelos se simulan los coches y sus interacciones de manera individual. Cada coche tiene una ecuación de movimiento que lo describe y estas ecuaciones se pueden relacionar entre sí dando lugar a la interacción entre los coches [2].
- **Macroscópico:** En este modelo se estudia al tráfico como un continuo en vez de ver a los coches de manera individual. De esta forma, el tráfico se modela de manera similar a la dinámica de fluidos. El primero de estos modelos fue propuesto por Lighthill y Whitham en 1955 [3].

Ahora veremos a más detalle cada una de estas posibles descripciones. Nos centraremos principalmente en la macroscópica, ya que es la que se relaciona con el movimiento de fluidos, sin embargo, estudiaremos también un poco de la microscópica para ver las diferencias entre estas descripciones.

Descripción Microscópica

Como se dijo antes, en esta descripición se estudian a los coches de manera individual. Es decir, el i-ésimo coche tiene una función $x_i(t)$ que indica su posición en la carretera como función del tiempo transcurrido [2]. En el caso sencillo en de una carretera recta y de un solo carril, la situación se verá algo como en la figura 1.

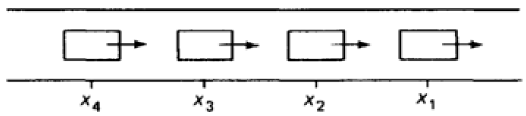

Figure 1: Coches en una carretera. Fiugra obtenida de [2]

Para encontrar la función $x_i(t)$ para cada coche, hay que proponer un modelo que dé lugar a ciertas ecuaciones que al resolverlas nos den estas funciones.

Uno de los modelos más utilizados se conoce como **car following model**. En este modelo se propone que la aceleración que tiene un coche es una función de la velocidad actual que lleva, la distancia que tiene respecto al coche siguiente y la velocidad del coche siguiente. De esta forma, las ecuaciones diferenciales para este modelo toman la siguiente forma:

$$\ddot{x}_i = F(v_i(t), d_i(t), v_{i-1}(t)),$$

donde v_i es la velocidad del i-ésimo coche, d_i es la distancia entre el i-ésimo coche y el siguiente y F es alguna función. La forma de la función F dependerá del modelo particular que se utilice, pero en general se propone una función que cumpla con algunas propiedades que son de esperar del movimiento de vehículos. Estas propiedades pueden ser que la aceleración sea pequeña si la velocidad ya es muy alta (para no sobrepasar el límite de velocidad) o que la aceleración sea negativa cuando el coche siguiente se encuentra a una distancia muy corta y a menor velocidad (para no chocar).

Una vez propuesta la función F de tal manera que refleje los comportamientos que se esperarían observar, se obtiene así un sistema de N ecuaciones diferenciales acopladas (con N la cantidad de coches). Este sistema en general será imposible de resolver analíticamente, pero se puede simular computacionalmente con un programa que resuelve las ecuaciones siguiendo un método de pasos finitos como el de Euler o Runge Kutta [3]. Además, la ventaja de que sea microscópico es que se le puede añadir al modelo comportamientos más elaborados, como un tiempo de respuesta de los conductores.

Además del modelo de Car Following, existen otros modelos microscópicos como modelos que utilizan autómatas celulares [8].

Descripción Macroscópica

El otro tipo de descripción del tráfico vehicular y que estudiaremos a mayor profundidad en este trabajo es el macroscópico. Como se mencionó antes, este tipo de modelos describen al tráfico como un continuo en vez de ver a los coches de forma individual y se relaciona mucho con la forma en que se estudia el movimiento macroscópico de fluidos, pues básicamente se reemplazan a los coches individuales por un "fluido de tráfico".

En general, para usar estos modelos, entran en juego tres variables cuyos valores dependen del tiempo t y la posición en el espacio x. Estas variables son:

- **Velocidad** $u(x,t)$**:** En vez de estudiar las velocidades individuales de cada coche, se reemplazan por un campo de velocidades u que a cada punto x en el espacio y tiempo t le asigna una velocidad $u(x,t)$. Esta velocidad es con la que se mueven los vehículos que pasan por el punto x a tiempo t.
- **Densidad** $\rho(x,t)$**:** Para un tiempo t dado, esta variable es la cantidad de coches por unidad de longitud alrededor de un punto x a dicho tiempo [4]. Es decir, básicamente describe cuántos coches hay por unidad de longitud en cierto punto y tiempo. Si $\rho(x,t)$ es grande, indica que a tiempo t hay mucho tráfico alrededor del punto x y si $\rho(x,t)$ es pequeño, indica que hay poco tráfico en esa posición.
- **Flujo** $q(x,t)$**:** Para una posición x dada y a tiempo t, es la cantidad de coches que atraviesan dicha posición por unidad de tiempo [4].

Se puede ver inmediatamente que estas variables son análogas a variables similares que se definen en la dinámica de fluidos y por ello existe una relación entre el estudio de fluidos y la descipción macroscópica del movimiento vehicular.

Relación entre flujo y densidad

Se puede encontrar una relación entre las tres variables que describen macroscópicamente al fluido. Para hacerlo, consideramos un observador al lado de la carretera que se encuentra a posición x_0 en un tiempo t_0. Esta situación se muestra en la figura 2.

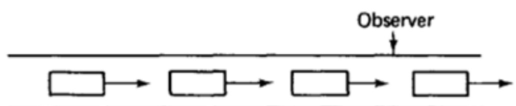

Figure 2: Observador al lado de la carretera. Imagen obtenida de [2].

Consideramos ahora un corto tiempo Δt, en el que la velocidad y densidad son casi constantes y los coches se mueven una corta distancia $u(x_0,t_0)\Delta t$, por lo que $u(x_0,t_0)\Delta t\rho(x_0,t_0)$ coches pasan al observador. Pero esta cantidad es el flujo que pasa por la posición x_0 a tiempo t_0, por lo que se tiene que $q(x_0,t_0) = u(x_0,t_0)\rho(x_0,t_0)$. Por lo tanto, en general se tiene que:

$$\boxed{q = u\rho} \quad (1)$$

Ecuaciones de Movimiento

Ahora que ya tenemos las tres variables que describen al tráfico y la relación (1) entre ellas, faltan obtener las ecuaciones de movimiento del sistema. Como ya se tiene una relación entre las variables, faltan dos ecuaciones para poder tener información suficiente para resolver las tres variables del problema. Las dos ecuaciones son las siguientes:

1. **Conservación de Coches:** Ésta es una ecuación que describe que la cantidad de coches no puede cambiar en una zona a menos que entren o salgan coches de ahí. Digamos que en la zona de la carretera que se encuentra entre $x = a$ y $x = b$ no hay entradas ni salidas de la carretera, entonces la cantidad de coches en esta zona (que denotamos por N) depende solamente del flujo en a y b. Debido a la definición de ρ, la cantidad de coches N en esta zona es:

$$N = \int_a^b \rho dx.$$

Luego, $\dfrac{\partial N}{\partial t}$ es igual a la razón en que entran o salen coches en esta zona. Debido a la definición del flujo q, esta cantidad se obtiene como:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q(a,t) - q(b,t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b \rho dx = q(a,t) - q(b,t)$$

Debido al teorema fundamental del cálculo, podemos reescribir el lado derecho de la ecuación:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b \rho dx = -\int_a^b \frac{\partial q}{\partial x} dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} dx = 0$$

Localmente, si a está muy cerca de b, tenemos:

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0} \quad (2)$$

Se puede ver que esta ecuación es totalmente análoga a la ecuación de continuidad que se estudia en dinámica de fluidos, sólo que en vez de considerar la conservación de la masa, se considera la conservación de la cantidad de coches, que es análogo a la masa en los fluidos.

2. **Relación de Velocidad y Densidad:** Todavía falta por lo menos una ecuación para describir completamente al tráfico. Se pueden proponer distintas ecuaciones dependiendo del modelo. Un modelo particularmente sencillo para esta ecuación fue propuesto por Lighthill y Whitham (**modelo LW**) que proponen que la velocidad es una función que se puede obtener directamente de la densidad [3]:

$$u(x,t) = u(\rho(x,t)) \quad (3)$$

A partir de propiedades que intuitivamente queremos que sean cumplidas por nuestro modelo, se propone que la función cumpla lo siguiente:

– La velocidad alcanza un máximo cuando hay muy pocos coches, es decir, si la densidad es $\rho = 0$, la velocidad alcanza algún máximo u_{max}. Esto describe que cuando hay pocos coches en la carretera, todos intentan ir al límite de velocidad. Matemáticamente esto se describe como:

$$u(0) = u_{max},$$

donde u_{max} representa la velocidad máxima.

– La velocidad disminuye con la densidad, es decir, conforme aumenta la cantidad de coches, la velocidad que tienen disminuye debido al incremento del tráfico. Matemáticamente esto se describe como:

$$\frac{du}{d\rho} \leq 0$$

– Hay una densidad máxima en la que la velocidad es 0. Es decir, si la cantidad de coches es demasiada, los coches llenarán toda la carretera y no habrá movimiento. Esto se expresa matemáticamente como:

$$u(\rho_{max}) = 0,$$

donde ρ_{max} representa la densidad máxima.

Estas tres propiedades indican que en general la función $u(\rho(x,t))$ tiene una forma similar a lo que se muestra en la figura 3.

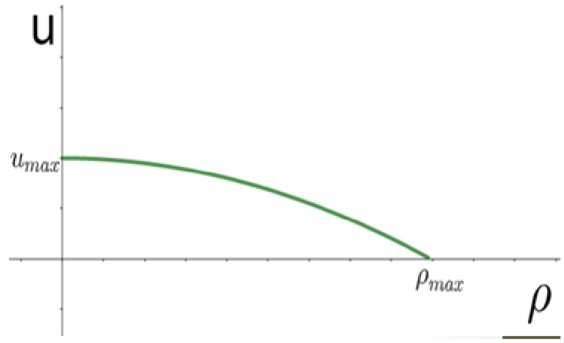

Figure 3: Forma cualitativa de la función $u = u(\rho(x,t))$

Deficiencias del modelo LW: El modelo LW presenta ciertas deficiencias, pues no toma en cuenta algunos efectos que pueden suceder en el tráfico. Para empezar, la velocidad en un punto podría depender del valor de la densidad más adelante en la carretera, ya que los conductores ven que hay tráfico más adelante y disminuyen su velocidad. Además, el modelo LW asume que si la densidad cambia, la velocidad va a cambiar inmediatamente y no se toma en cuenta el tiempo de reacción de los conductores. Finalmente, no se toma en cuenta que la calle puede cambiar de condiciones dependiendo de la posición y por tanto la función $u(\rho(x,t))$ puede depender de x.

Se pueden hacer correcciones al modelo LW para incluir estos efectos y se obtienen así modelos más complicados [6]. Una de estas correcciones la hace Payne en [6] al proponer que en vez de tener u directamente como función de ρ, estas cantidades se relacionan por una ecuación diferencial como la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Delta t}\left[u_e(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} - V\right],$$

donde u_e se denomina la velocidad de equilibrio y es función de solamente ρ (como en el modelo LW), $D(\rho)$ es un término discipativo y V una velocidad límite. En general se pueden agregar muchas otras correcciones al modelo y considerar accidentes, tiempos de reacción, entradas o salidas de la carretera, semáforos, etc. y hay muchos modelos distintos con estas cualidades.

Comprobación Experimental: Como una comprobación del modelo LW (que la velocidad u depende solamente de la densidad y cumple con $u(0) = u_{max}$, $\frac{du}{d\rho} \leq 0$, $u(\rho_{max}) = 0$), Greenber [5] midió velocidades y densidades en un túnel y graficó la velocidad como función de la densidad. La gráfica resultante es la de la figura 4.

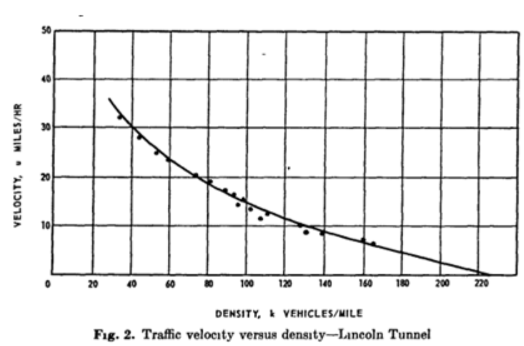

Figure 4: Velocidad vs densidad en el túnel de Lincoln. Obtenida de [5]

Se puede ver en la figura 4 que la velocidad u es función de la densidad y que tiene una forma similar a la gráfica de la figura 3. Es decir, para densidades bajas, la velocidad alcanza un máximo, y luego disminuye con la densidad hasta llegar a 0 para una densidad máxima ρ_{max}.

Entonces, como u es función de ρ, podemos sustituir $u(\rho)$ en la ecuación de continuidad (2) y así obtener una sola ecuación que describa al flujo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0} \quad (4)$$

Entonces, en el modelo LW, esta ecuación es la que describe totalmente al flujo, pues combina a la ecuación de conservación de coches con la relación entre densidad y velocidad.

Diagrama Fundamental

Diagrama fundamental es el nombre que recibe una función que grafica el flujo vs la densidad, es decir $q\ vs\ p$. Para obtener esta gráfica, se puede utilizar que $q = u\rho$ y utilizar la función $u(\rho)$. A partir de las propiedades mencionadas para $u(\rho)$, se puede concluir que la gráfica resultante tiene cualitativamente la forma de la figura 5.

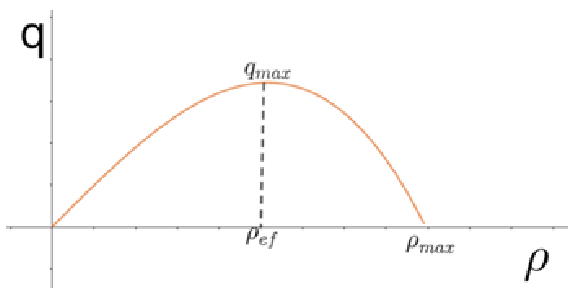

Figure 5: Forma cualitativa de q vs ρ.

Notamos que para densidades bajas o altas el flujo es aproximadamente 0. Esto se debe a que para densidades bajas no hay coches en la carretera, mientras que para densidades altas el tráfico es demasiado alto y los coches no se mueven, por lo que no hay flujo. Además, hay una densidad intermedia en la que el flujo alcanza un valor máximo q_{max}, esta densidad se llama densidad eficiente y se denota por ρ_{ef}.

Ejemplo: Linearización y ondas de densidad

En esta sección veremos una forma de resolver la ecuación (4) que resultó de usar el modelo LW para describir el flujo de coches. En particular, para poder resolver la ecuación primero supondremos que se trata de un flujo en el que la densidad es casi uniforme, es decir:

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \epsilon \rho_1(x,t),$$

donde ϵ es una cantidad muy pequeña y ρ_1 representa la perturbación respecto a un flujo con densidad constante ρ_0. Supondremos también que se tiene una condición inicial de la forma:

$$\rho(x,0) = \rho_0 + \epsilon f(x),$$

donde $f(x)$ es alguna función que describe a la perturbación inicial de la densidad. Luego, al sustituir la propuesta de $\rho(x,t)$ en la ecuación (4) y manteniendo solamente los términos lineales en ϵ, llegamos a que la ecuación para la perturbación ρ_1 es [4]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c\frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0,$$

donde c es igual a la derivada del flujo respecto a la densidad evaluada en el valor de la densidad uniforme ρ_0, es decir:

$$c = \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho_0)$$

Esta ecuación es simplemente una ecuación de onda con velocidad c, por lo que su solución (considerando la condición inicial) es:

$$\rho_1(x,t) = f(x-ct).$$

Esto significa que la perturbación en la densidad se traslada como una onda con velocidad c. Como ya se mencionó, la velocidad de la onda es $c = \dfrac{\partial q}{\partial \rho}(\rho_0)$, es decir, es la pendiente de la curva del diagrama fundamental (figura 5) en el punto ρ_0.

Por lo tanto, viendo el diagrama fundamental, concluimos que la velocidad de la onda es positiva si $\rho_0 < \rho_{ef}$ y es negativa si $\rho_0 > \rho_{ef}$. Esto significa que para densidades ρ_0 menores a la óptima, la perturbación se mueve en la misma dirección que los coches, mientras que para densidades mayores a la óptima, la perturbación se mueve en la dirección contraria.

De esta forma, hemos descrito que si se tiene una pequeña perturbación en una densidad uniforme, esta perturbación se va a mover por la carretera con cierta velocidad que puede ser positiva o negativa dependiendo de la densidad uniforme ρ_0. Se pueden hacer muchas otras predicciones usando la ecuación (4), y al igual que ésta, se hacen de forma similar a lo que hemos hecho en clase para estudiar la dinámica de fluidos.

Jamitones

Por último, presentamos el concepto de Jamitones, que obtuvo el grupo [7] al resolver las ecuaciones de tránsito del modelo de Payne que se mencionó anteriormente. El grupo [7] resolvió numéricamente estas ecuaciones para el caso de una densidad que inicia casi uniforme pero con una pequeña perturbación.

Lo que obtuvieron al resolver las ecuaciones numéricamente es que primero la perturbación de la densidad aumenta de magnitud, lo que significa que aumenta el tráfico en esa zona. Intuitivamente, esto se debe a que los coches que se acercan al tráfico suelen frenar de más y tardan cierto tiempo en reaccionar para avanzar cuando el coche de adelante se empieza a mover, lo cual genera que el tráfico en la zona aumente. Luego, encontraron que esta zona de tráfico se mueve en la carretera, pero una vez que se empieza a mover, la perturbación preserva la forma. A esta perturbación que se mueve le llamaron Jamitón, en analogía al concepto de solitones que se estudia en óptica para describir perturbaciones en el campo electromagnético que debido al balance entre dispersión y efectos no lineales, se mueven sin cambiar de forma.

Además, encontraron que si la densidad inicial es baja, el jamitón se mueve en la misma dirección que el flujo de coches, mientras que si es alta, se mueve en sentido contrario, coincidiendo con el resultado que obtuvimos al linearizar el modelo LW. La diferencia es que la linearización del modelo LW no predice que la perturbación crece de tamaño antes de estabilizarse, lo cual recibe el nombre de “tráfico fantasma”.

Conclusiones

Concluimos que el flujo vehicular se puede asemejar mucho al estudio de la hidrodinámica cuando es estudiado desde un punto de vista macroscópico. Las variables de interés son las mismas e incluso se encuentra una ecuación de continuidad de forma similar a lo que se hace en la hidrodinámica. Además, la forma de resolver estas ecuaciones y los resultados son similares a los de hidrodinámica que vimos en clase.

De esta forma se pueden modelar y explicar varios fenómenos del tráfico, entre los cuales se encuentran el de tráfico fantasma y el de ondas de densidad que se mueven por la carretera, y varios otros fenómenos que surgen de estas ecuaciones y no se mencionan en este trabajo, como las ondas de choque por ejemplo. Por lo tanto, el modelo del tráfico muestra un ejemplo interesante de aplicaciones que tiene la hidrodinámica en áreas que parecen no estar relacionadas con el movimiento de fluidos.

Referencias

[1] Poppin, J. An overview of microscopic and macroscopic traffic model. Rijksuniversiteit groningen, 2013.

[2] Haberman, Richard. Mathematical Models: M[echanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow: And Introduction to Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.

[3] Lighthill, Michael, and Gerald Whitman. "On Kinematic Waves II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads." Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, vol. 229, no. 1178, 1955, pp. 317–345., https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0089.

[4] Treiber, Martin, and Arne Kestin. Traffic Flow Dynamics. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG, 2012.

[5] Greenberg, Harold. "An Analysis of Traffic Flow." Operations Research, vol. 7, no. 1, 1959, pp. 79–85., https://doi.org/10.1287/opre.7.1.79.

[6] Helbing Dirk. "Traffic and Related Self-Driven Many-Particle Systems." Reviews of Modern Physics, vol. 73 no.4, 2001.

[7] Flynn, Morris et al. Traffic Modeling - Phantom Traffic Jams and Traveling Jamitons. https://math.mit.edu/traffic/

[8] Biham, Ofer; Middleton, A. Alan; Levine, Dov (1992). "Self-organization and a dynamic transition in traffic-flow models". Physical Review A. 46 (10): R6124–R6127. arXiv:cond-mat/9206001. Bibcode:1992PhRvA..46.6124B. doi:10.1103/PhysRevA.46.R6124. PMID 9907993. S2CID 14543020.