UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Leyes de Kirchhoff

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

ASIGNATURA

Laboratorio de Electrónica. Grupo 8285

5 de octubre de 2021

Introducción

En este trabajo se presenta el análisis teórico de dos circuitos usando las leyes de Kirchhoff de voltajes y de corrientes. Los procedimientos seguidos son como se detallan en [1] y [2]. Luego, se utilizó el simulador Tina-TI para comprobar los resultados teóricos y compararlos con los obtenidos por el programa.

Preguntas

Para realizar la actividad usted debe realizar los siguientes pasos:

1. **Aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff al siguiente circuito para calcular los voltajes en cada uno de los nodos del circuito.**

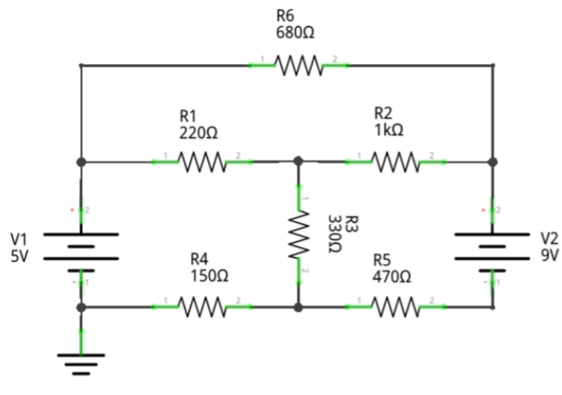

Figura 1. Circuito a resolver

Resolveremos el circuito de la Figura 1 usando el método de mallas (que se basa en la ley de Kirchhoff del voltaje) como se detalla en [1] y [2].

Para empezar, notamos que hay 3 mallas en el circuito y vamos a proponer una corriente de malla para cada una. En la Figura 2 se ve el circuito nuevamente pero con las corrientes I_A, I_B, I_C de cada malla.

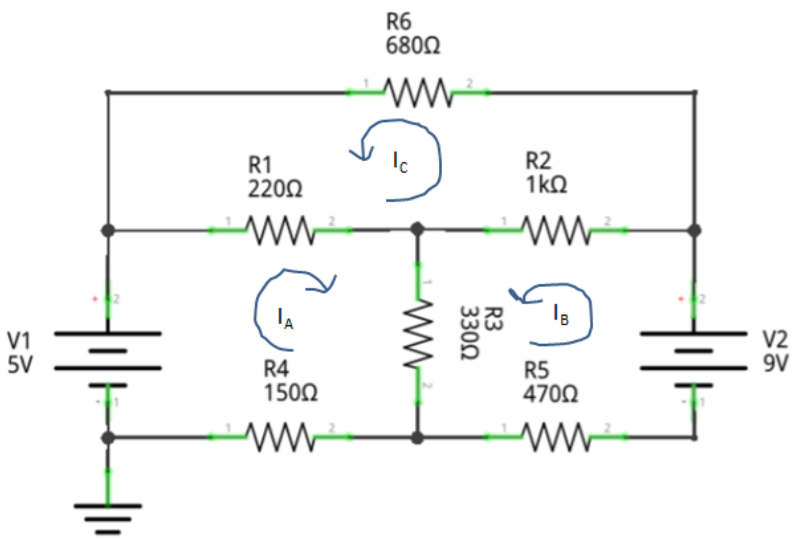

Figura 2. Circuito con corrientes de malla

Con estas corrientes definidas como en la Figura 2, iremos recorriendo cada malla del circuito y calculando la suma de los voltajes de cada elemento (que es igual a 0 debido a la ley de voltajes de Kirchhoff).
Cada que nos encontramos una resistencia R, su voltaje será $V = IR$, donde I es la corriente total que pasa por la resistencia (si la resistencia forma parte de dos mallas, la corriente que pasa por ella es la suma de las dos corrientes, tomando en cuenta la dirección de las corrientes).

- **Malla A:** Empezamos desde el nodo inferior izquierdo y recorremos la malla en el sentido de I_A. Primero pasamos por la batería de 5 volts en la polaridad de - a +, por lo que contribuye -5 volts.

Luego pasamos por la resistencia R_1, por la que fluye una corriente total de $I_A + I_C$ y por tanto tiene un voltaje de $R_1(I_A + I_C)$. Luego la resistencia R_3, por la que pasa una corriente total de $(I_A + I_B)$ y por tanto tiene un voltaje de $R_3(I_A + I_B)$. Y finalmente la resistencia R_4 que tiene una corriente de I_A y por tanto un voltaje $R_4 I_A$.
Entonces, según la ley de Kirchhof, la suma de estos voltajes debe de ser 0:

$$-5 + R_1(I_A + I_C) + R_3(I_A + I_B) + R_4 I_A = 0$$

Reordenamos un poco:

$$(R_1 + R_3 + R_4)I_A + R_3 I_B + R_1 I_C = 5 \qquad (1)$$

- **Malla B:** Empezamos desde el nodo inferior derecho y recorremos la malla en el sentido de I_B. Primero pasamos por la batería de 9 volts en la polaridad de - a +, por lo que contribuye -9 volts. Luego pasamos por la resistencia R_2, por la que fluye una corriente de $I_B - I_C$ y por tanto tiene un voltaje $R_2(I_B - I_C)$. Luego la resistencia R_3, por la que pasa una corriente total de $(I_A + I_B)$ y por tanto tiene un voltaje de $R_3(I_A + I_B)$. Y finalmente la resistencia R_5 que tiene una corriente de I_B y por tanto un voltaje $R_5 I_B$.
Entonces, según la ley de Kirchhof, la suma de estos voltajes debe de ser 0:

$$-9 + R_2(I_B - I_C) + R_3(I_A + I_B) + R_5 I_B = 0$$

Reordenamos:

$$R_3 I_A + (R_2 + R_3 + R_5)I_B - R_2 I_C = 9 \qquad (2)$$

- **Malla C:** Empezamos desde el nodo inferior derecho y recorremos la malla en el sentido de I_C. Primero pasamos por la resistencia R_6, por la que fluye una corriente I_C y por tanto tiene un voltaje de $R_6 I_C$. Luego pasamos por la resistencia R_1, por la que fluye una corriente de $I_A + I_C$ y por tanto tiene un voltaje $R_1(I_A + I_C)$. Luego la resistencia R_2, por la que pasa una corriente total de $(I_C - I_B)$ y por tanto tiene un voltaje de $R_2(I_C - I_B)$.
Entonces, según la ley de Kirchhoff, la suma de estos voltajes debe de ser 0:

$$R_6 I_C + R_1(I_A + I_C) + R_2(I_C - I_B) = 0$$

Reordenamos:

$$R_1 I_A - R_2 I_B + (R_1 + R_2 + R_6)I_C = 0 \qquad (3)$$

Con lo que hemos obtenido tres ecuaciones lineales $(1), (2), (3)$ para tres variables I_A, I_B, I_C. Para resolver el sistema de ecuaciones, primero lo escribiremos en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & R_3 & R_1 \\ R_3 & R_2 + R_3 + R_5 & -R_2 \\ R_1 & -R_2 & R_1 + R_2 + R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si sustituimos los valores de las resistencias dadas en el problema, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 220 + 330 + 150 & 330 & 220 \\ 330 & 1000 + 330 + 470 & -1000 \\ 220 & -1000 & 220 + 1000 + 680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 700 & 330 & 220 \\ 330 & 1800 & -1000 \\ 220 & -1000 & 1900 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Ahora podemos encontrar los valores de I_A, I_B, I_C calculando la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 700 & 330 & 220 \\ 330 & 1800 & -1000 \\ 220 & -1000 & 1900 \end{pmatrix}$.

Dicha inversa la encontré usando Mathematica y obtuve un resultado de $\begin{pmatrix} \frac{2}{1037} & \frac{-7}{10370} & \frac{-3}{5185} \\ \frac{-7}{10370} & \frac{3204}{3136925} & \frac{3863}{6273850} \\ \frac{-3}{5185} & \frac{3863}{6273850} & \frac{11511}{125477000} \end{pmatrix}$

Si aplicamos esta matriz a ambos lados de (4), obtenemos el resultado de las corrientes:

$$\begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1037} & \frac{-7}{10370} & \frac{-3}{5185} \\ \frac{-7}{10370} & \frac{3204}{3136925} & \frac{3863}{6273850} \\ \frac{-3}{5185} & \frac{3863}{6273850} & \frac{11511}{125477000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad I_A &= \frac{2}{1037}(5) + \frac{-7}{10370}(9) \simeq -0{,}003567 = 3{,}567mA \\ I_B &= \frac{-7}{10370}(5) + \frac{3204}{3136925}(9) \simeq -0{,}005817 = 5{,}817mA \\ I_C &= \frac{-3}{5185}(5) + \frac{3863}{6273850}(9) \simeq -0{,}002648 = 02{,}648mA \end{aligned}$$

Con estos resultados ya estamos listos para calcular los voltajes en cada uno de los nodos. Primero nombramos los nodos como se muestra en la Figura 3.

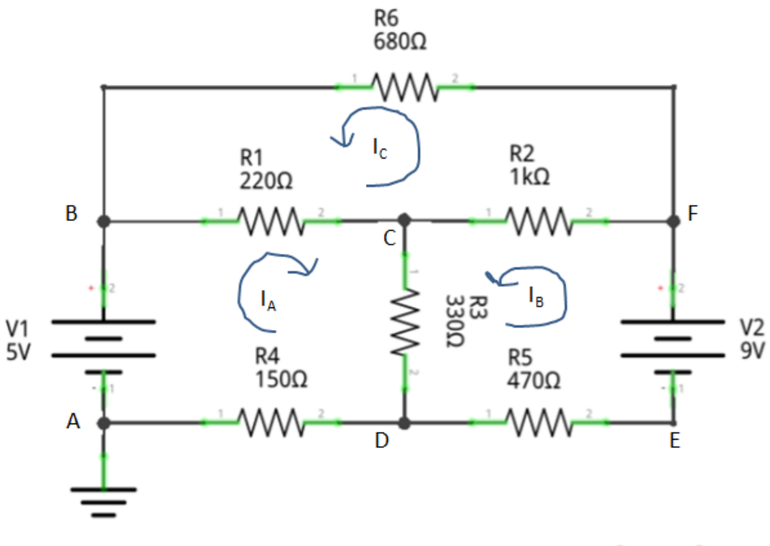

Figura 3. Circuito con corrientes de malla y nodos

Para calcular el voltaje de cada nodo, empezaremos desde el nodo A y recorreremos cada malla del circuito, calculando los voltajes de cada resistencia como antes.

- El nodo A tiene un voltaje de $V_A = 0V$ ya que está conectado a Tierra.
- Para pasar del nodo A al B atravesamos una batería de 5V, por lo que el voltaje de B es $V_B = 5V$
- Para pasar del nodo B al C hay que atravesar la resistencia R_1. En el sentido en el que estamos recorriendo el circuito, la corriente de R_1 es $I_A + I_C$, por lo que la caída de voltaje por la resistencia es $R_1(I_A + I_C)$.
  Entonces el voltaje de C es $V_C = V_B - R_1(I_A + I_C) = 5V - (220\Omega)(3{,}567mA + 2{,}648mA) = 3{,}633V$
- Del nodo C a D hay que atravesar la resistencia R_3. Por esta resistencia pasa una corriente $I_B + I_A$ por lo que la caída de voltaje es de $R_3(I_A + I_B)$.
  Entonces el voltaje en D es $V_D = V_C - R_3(I_A + I_B) = 3{,}633V - (330\Omega)(3{,}567mA + 5{,}817mA) = 0{,}536V$
- Ahora pasamos de D a E, para lo cual hay que atravesar la resistencia R_5, por la que pasa una corriente I_B. Entonces esta resistencia tiene una caída de voltaje de $R_5 I_B$.
  Por lo tanto, el voltaje de E es $V_E = V_D - R_5 I_B = 0{,}536V - (470\Omega)(5{,}817mA) = -2{,}198V$
- Finalmente, notamos que el nodo F se encuentra separado del E por una batería de 9V, y por la dirección de la batería, notamos que V_F está 9 Volts por arriba de V_E.
  Por tanto $V_F = 9V + V_E = 9V - 2{,}198V = 6{,}802V$

En resumen, los resultados obtenidos son:

$$\boxed{V_A = 0V \quad V_B = 5V \quad V_C = 3{,}633V \quad V_D = 0{,}536V \quad V_E = -2{,}198V \quad V_F = 6{,}802V}$$

2. **Simular este circuito usando TINA-TI. Para hacer la simulación se debe usar la opción de tabla de DC, la cual se puede encontrar en el menú donde dice 'análisis'.**

En la Figura 4 se muestra la implementación del circuito en TINA-TI y el análisis del circuito con los resultados del voltaje en cada nodo.

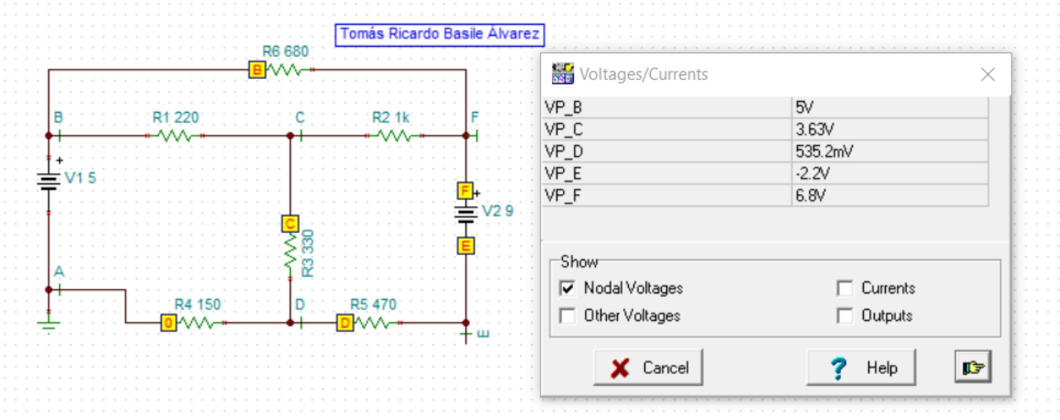

Figura 4. Circuito y análisis en TINA-TI

Es decir, los resultados de TINA son:

$$\boxed{V_A = 0V \quad V_B = 5V \quad V_C = 3{,}63V \quad V_D = 0{,}535V \quad V_E = -2{,}2V \quad V_F = 6{,}8V}$$

3. **Haga una estimación de los errores entre los resultados obtenidos por medio de la simulación y de los cálculos hechos con la ley de voltajes de Kirchhoff. Explicar las causas de las diferencias observadas en caso de que éstas se hubieran encontrado.**

Enlistamos los resultados según el análisis con leyes de Kirchhoff y según el resultado de TINA:

- **Nodo A:** Ambos resultados son $0V$, por lo que no hay error.
- **Nodo B:** Ambos resultados son $5V$ por lo que no hay error.
- **Nodo C:** Kirchhoff da un resultado de $3{,}633V$ y TINA un resultado de $3{,}63V$, por lo que hay una diferencia de $0{,}083\,\%$
- **Nodo D:** Kirchhoff da un resultado de $0{,}536V$ y TINA un resultado de $0{,}535V$, por lo que hay una diferencia de $0{,}19\,\%$
- **Nodo E:** Kirchhoff da un resultado de $-2{,}198V$ y TINA un resultado de $-2{,}2V$, por lo que hay una diferencia de $0{,}091\,\%$
- **Nodo F:** Kirchhoff da un resultado de $6{,}802V$ y TINA un resultado de $6{,}8V$, por lo que hay una diferencia de $0{,}029\,\%$

Vemos que en todos los casos los errores son muy pequeños y se pueden atribuir a errores de redondeo (ya sea en el método usando las leyes de Kirchhoff o en los cálculos que hace TINA y que redondea al final).
Además, en general esperaríamos errores en simuladores de circuitos como TINA debido a que no resuelve los problemas analíticamente como lo hicimos con las leyes de Kirchhoff (ya que muchos problemas más complicados no se pueden resolver analíticamente), sino que usan métodos numéricos y simulaciones con lo que obtienen resultados aproximados.

4. **. ¿Qué es la tolerancia de un elemento eléctrico, por ejemplo, de una resistencia?**

La tolerancia de un elemento eléctrico (por ejemplo, una resistencia) es el porcentaje en que puede variar el valor real de la resistencia con respecto al valor que marca el fabricante. Por ejemplo, si la resistencia viene marcada por el fabricante como de 50Ω con una tolerancia de $10\,\%$, significa que el valor verdadero de la resistencia podría estar en cualquier valor entre 45Ω y 55Ω. [3]

5. **Si este circuito se hubiera implementado en el laboratorio con resistencias cuyos valores nominales son los que se muestran en el diagrama, ¿cómo hubieran sido los resultados que se hubieran obtenido? ¿Serían iguales a los que se obtuvieron teóricamente y a través de la simulación? ¿Cómo hubieran variado estos resultados?**

Los resultados seguramente serían distintos a los que se obtuvieron teóricamente y a los que se obtuvieron con la simulación. Esto debido a que en un laboratorio hay muchas variables externas que son muy difíciles de controlar y que no se toman en cuenta ni en el método teórico ni en la simulación.

Una fuente importante de error es la tolerancia de los elementos eléctricos, pues significa que aunque las resistencias tengan como valor nominal lo que marca el diagrama, su valor de resistencia verdadero puede ser algo distinto al nominal. Por esta razón el circuito será distinto al de la figura 1 y probablemente obtendremos resultados algo diferentes a los que se obtuvieron teóricamente.
Además puede haber otras fuentes de error, como multímetros con poca precisión o elementos eléctricos algo defectuosos.

6. **Proponga un circuito eléctrico que esté formado por una fuente de corriente independiente, una fuente de voltaje independiente y, por lo menos, 4 resistencias eléctricas.**

El circuito propuesto se muestra en la figura 5.

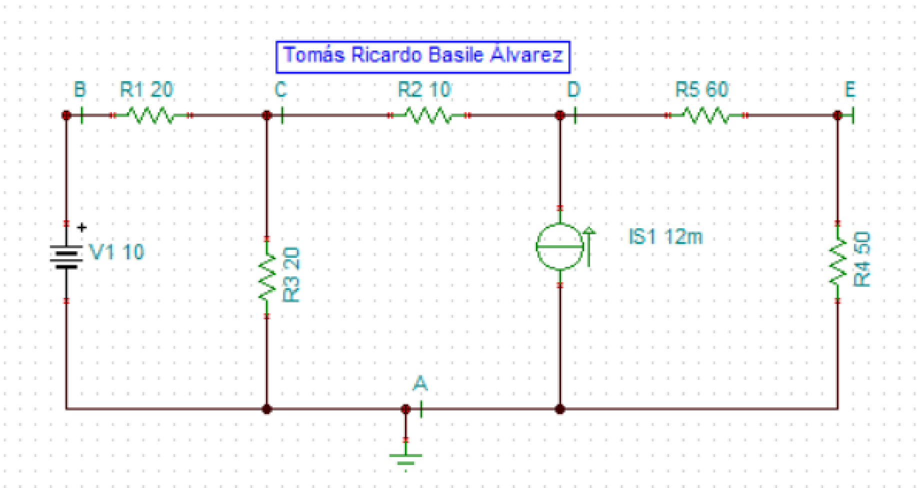

Figura 5. Circuito propuesto

- **Analice el circuito del incido 6 usando la ley de corrientes de Kirchhoff**

Para analizarlo, primero nombramos las corrientes que pasan por cada parte del circuito como se muestra en la figura 6. Tomando en cuenta que el tramo donde se encuentra la fuente de corriente ya tiene definida la corriente (12mA).

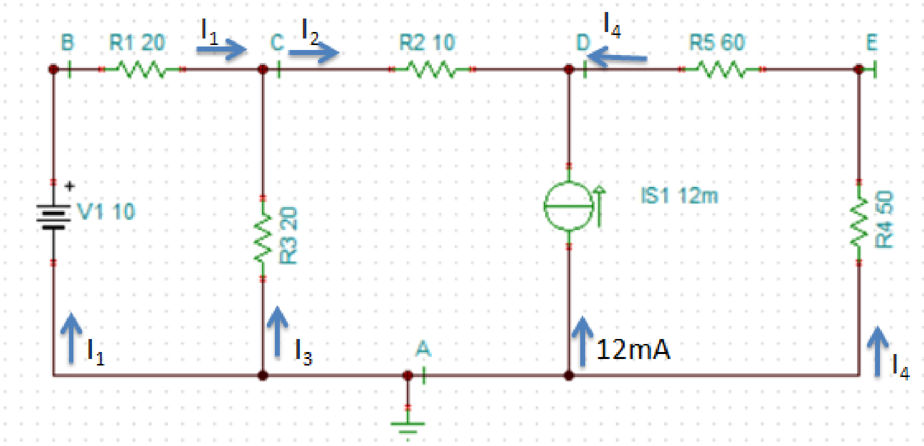

Figura 6. Circuito propuesto con corrientes nombradas

Ahora nos paramos en cada uno de los nodos marcados en la figura 6 y aplicamos la ley de Kirchhoff de corrientes, que dice que la corriente entrante al nodo menos la corriente saliente es igual a 0.

- **Nodo A:** Como se muestra en la figura 6, del nodo A salen las corrientes $I_1, I_3, 12mA$ y I_4, por lo que la ecuación es:

$$-I_1 - I_3 - I_4 - 0{,}012 = 0$$

- **Nodo C:** Entran corrientes I_1 y I_3 y sale una corriente I_2. Entonces la ecuación es:

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0$$

- **Nodo D:** Entra una corriente I_2, una de 12mA y la corriente I_4, por lo que la ecuación es:

$$I_2 + I_4 + 0{,}012 = 0$$

Estas 3 ecuaciones no son linealmente independientes, pues se puede ver sencillamente que si sumamos las tres el resultado es $0 = 0$, lo que corresponde con el hecho que todas las corrientes que entran en algún nodo, salen de otro. Por ello, sólo nos quedaremos con dos de estas ecuaciones (la segunda y tercera).

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0 \qquad (1)$$
$$I_2 + I_4 + 0{,}012 = 0 \qquad (2)$$

Ahora aplicamos la ley de Ohm para cada resistor del circuito. La ley dice que si la diferencia de voltaje entre las terminales del resistor es V y la corriente que pasa por él es I, entonces $I = \frac{V}{R}$.

- **R1:** La caída de voltaje por esta resistencia es $V_B - V_C = 10 - V_C$ (porque claramente $V_B = 10$ ya que la fuente de voltaje se encuentra entre tierra y el punto B, por lo que le da 10 volts al punto B), y la corriente es I_1, por lo que tenemos que:

$$I_1 = \frac{10 - V_C}{R_1}$$

- **R2:** La caída de voltaje en esta resistencia es $V_C - V_D$, y la corriente es I_2, por lo que tenemos que:

$$I_2 = \frac{V_C - V_D}{R_2}$$

- **R3:** La caída de voltaje en esta resistencia es $V_A - V_C = 0 - V_C$ (porque el punto A está conectado a Tierra, por lo que $V_A = 0$), y la corriente es I_3, por lo que tenemos que:

$$I_3 = \frac{-V_C}{R_3}$$

- **R4:** La caída de voltaje en esta resistencia es $V_A - V_E = 0 - V_E$ (porque el punto A está conectado a Tierra), y la corriente es I_4, por lo que tenemos que:

$$I_4 = \frac{-V_E}{R_4}$$

- **R5:** La caída de voltaje en esta resistencia es $V_E - V_D$, y la corriente es I_4, por lo que tenemos que:

$$I_4 = \frac{V_E - V_D}{R_5}$$

Las últimas 2 ecuaciones tienen I_4 del lado izquierdo, por lo que podemos igualarlas para obtener una nueva ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{-V_E}{R_4} &= \frac{V_E - V_D}{R_5} \\ \Rightarrow \quad (R_5 + R_4)V_E - R_4 V_D &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Además, podemos reemplazar los valores obtenidos para I_1, I_2, I_3, I_4 en las ecuaciones (1) y (2) para tenerlas en términos de los voltajes:

$$\begin{aligned} I_1 + I_3 - I_2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{10 - V_C}{R_1} + \frac{-V_C}{R_3} - \frac{V_C - V_D}{R_2} &= 0 \quad (4) \\ I_2 + I_4 + 0{,}012 &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{V_C - V_D}{R_2} + \frac{-V_E}{R_4} + 0{,}012 = 0 &\quad (5) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (3),(4) y (5) forman un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 variables:

$$\begin{aligned} (R_5 + R_4)V_E - R_4 V_D &= 0 \\ \frac{10 - V_C}{R_1} + \frac{-V_C}{R_3} - \frac{V_C - V_D}{R_2} &= 0 \\ \frac{V_C - V_D}{R_2} + \frac{-V_E}{R_4} + 0{,}012 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos ordenar las ecuaciones para poder luego escribirlas en forma matricial y poder resolverlas con un método matricial.

$$\begin{aligned} -R_4 V_D + (R_5 + R_4)V_E &= 0 \\ -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}\right) V_C + \frac{1}{R_2} V_D &= -\frac{10}{R_1} \\ \frac{1}{R_2} V_C - \frac{1}{R_2} V_D - \frac{1}{R_4} V_E &= -0{,}012 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -R_4 & R_5 + R_4 \\ -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & 0 \\ \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C \\ V_D \\ V_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{10}{R_1} \\ -0{,}012 \end{pmatrix}$$

Reemplazamos los valores de las resistencias:

$$\begin{pmatrix} 0 & -50 & 110 \\ -1/5 & 1/10 & 0 \\ 1/10 & -1/10 & -1/50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C \\ V_D \\ V_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10/R_1 \\ -0{,}012 \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema calculamos la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 0 & -50 & 110 \\ -1/5 & 1/10 & 0 \\ 1/10 & -1/10 & -1/50 \end{pmatrix}$. La calculé en Mathematica, obteniendo un resultado de $\begin{pmatrix} -1/650 & -120/13 & -110/13 \\ -1/325 & -110/13 & -220/13 \\ 1/130 & -50/13 & -100/13 \end{pmatrix}$

Multiplicamos por esta matriz de ambos lados de la ecuación, para obtener que:

$$\begin{pmatrix} V_C \\ V_D \\ V_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/650 & -120/13 & -110/13 \\ -1/325 & -110/13 & -220/13 \\ 1/130 & -50/13 & -100/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -10/R_1 \\ -0{,}012 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_C = 4{,}717V$$
$$V_D = 4{,}434V$$
$$V_E = 2{,}015V$$

Por lo que los resultados de todos los voltajes son:

$$\boxed{V_A = 0 \quad V_B = 10 \quad V_C = 4{,}717V \quad V_D = 4{,}434V \quad V_E = 2{,}015V}$$

8. **Simule el circuito usando TINA.**

Dibujé el circuito a TINA y en la figura 7 se muestra el resultado de hacer el análisis de voltajes de los nodos.

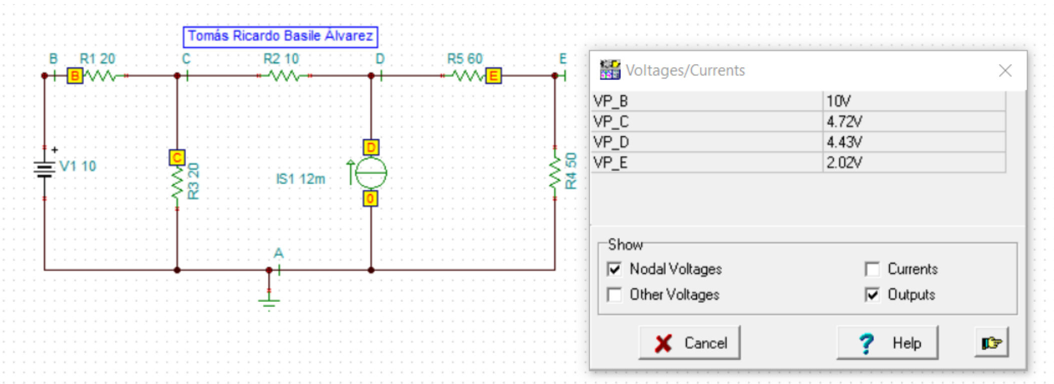

Figura 7. Análisis del circuito

Por lo que vemos que obtenemos resultados de:

$$\boxed{V_A = 0V \quad V_B = 10V \quad V_C = 4{,}72V \quad V_D = 4{,}43V \quad V_E = 2{,}02V}$$

9. **Compare sus resultados y calcule los errores entre los cálculos teóricos y los simulados.**

Vemos que los resultados teóricos y los simulados son bastante cercanos. A continuación se enlistan los resultados y los errores porcentuales.

- **Nodo A:** Ambos resultados son $0V$, por lo que no hay error.
- **Nodo B:** Ambos resultados son $10V$ por lo que no hay error.
- **Nodo C:** Kirchhoff da un resultado de $4{,}717V$ y TINA un resultado de $4{,}72V$, por lo que hay una diferencia de $0{,}063\,\%$
- **Nodo D:** Kirchhoff da un resultado de $4{,}434V$ y TINA un resultado de $4{,}43V$, por lo que hay una diferencia de $0{,}090\,\%$
- **Nodo E:** Kirchhoff da un resultado de $2{,}015V$ y TINA un resultado de $2{,}02V$, por lo que hay una diferencia de $0{,}248\,\%$

Conclusión

Se lograron los objetivos de analizar los dos circuitos utilizando las leyes de Kirchhoff y este trabajo fue útil para entender la forma en que se usan estas leyes para analizar un circuito. Además, se logró el objetivo de analizar ambos circuitos usando Tina-TI y se comprobó la gran semejanza entre los resultados obtenidos teóricamente y los que arroja el programa para cada uno de los circuitos.

Referencias

[1] Floyd, T. L., Salas, R. N., González, L. M. O., & López, G. P. (2007). Principios de circuitos eléctricos. Pearson Educación.

[2] Alexander, C. K., Sadiku, M. N. O. (2006). Fundamentos de circuitos eléctricos, McGraw-Hill Interamericana.

[3] Tooley, M. H. (2011). Electronic Circuits: Fundamentals and Applications. Third ed., Newnes.