Álgebra Lineal

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

4 de enero de 2021

Definición 0.1.
Campo: Es un conjunto K con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$ que son conmutativas, asociativas, tienen neutro, tienen inverso y es distributiva.

Espacio Vectorial: Un conjunto V con un campo K y dos operaciones $+ : V \times V \longrightarrow V$ y $\cdot : K \times V \longrightarrow V$. Tales que $+$ es conmutativa, asociativa, con neutro e inverso. Y $\cdot$ cumple $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$, $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$, y $1a = a$

Subespacio: $W \subset V$ es un subespacio si contiene al elemento neutro de V y las operaciones son cerradas en W. Se denota $W \leq V$

Subespacio generado: Dado un conjunto $S \subset V$, se define su generado como:

$$\langle S \rangle = \cap\{H \leq V : S \subset H\} \ = \ \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid a_i \in K \ , \ x_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$$

Teorema 0.1.
1) La intersección de subespacios es nuevamente un subespacio.
2) $\{0\}$ y V son subespacios del espacio V.
3) Para todo conjunto $S \subset V$, su generado es el subespacio vectorial más chico que contiene a S. Por eso se vale la igualdad de la def.

Definición 0.2.
L.D.: Un conjunto $S \subset V$ es L.D si existe $\{x_1, ..., x_n\} \in S$ tal que $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ con por lo menos un coef. distinto de 0.

L.I.: $S \subset V$ es L.I. si para todo $\{x_1, ..., x_n\} \in S$, si $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ entonces todos los coef. son 0

Definición 0.3.

Suma: $W_1 + W_2 := \{x + y : x \in W_1, y \in W_2\}$

Suma Directa: Se dice que $V = W_1 \oplus W_2$ si 1) $W_1 + W_2 = V$ y 2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Teorema: Dado un vector $x \in V = W_1 \oplus W_2$, existen únicos vectores $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$

Definición 0.4.

Base: $\beta \subset V$ es una base de V si: a) β es l.i. b) $\langle \beta \rangle = V$

Dimensión: La dimensión de V es la cantidad de elementos en alguna de sus bases (que esta cantidad esté bien definida se desprende de un teorema que sigue).

Teorema 0.2.

1) β es base de V sii todo vector de V se puede escribir de manera única como combinación lineal de los elementos de β

2) Sea $S \subset V$ L.I. y sea $x \in V$, entonces, $\{x\} \cup S$ en l.d. sii $x \in \langle S \rangle$

3) Teo técnico: Sea β una base de V con n elementos. Sea $S \subset V$ L.I. con m elementos, entonces existe un conjunto S_0 con $n - m$ elementos tal que $\langle S \cup S_0 \rangle = V$

Corolario 1) Si β es una base de V con n elementos y S es un conjunto L.I, entonces su cardinalidad en menor o igual a n.

2) Si γ es un conjunto L.I. con n elementos, entonces es una base.

3) Todas las bases tienen el mismo número de elementos.

1) Si $W \leq V$ (V de dim. finita) entonces $\dim(W) \leq \dim(V)$

2) Si $W_1, W_2 \leq V$, entonces $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$

Definición 0.5.

Transformación Lineal: $T : V \longrightarrow W$ con $T(x + y) = T(x) + T(y)$ $T(ax) = aT(x)$

Núcleo: $Nuc(T) = \{x \in V : T(x) = 0\} \leq V$

$Im(T) = \{T(x) | x \in V\} \leq W$

Teorema 0.3.

1) $T(0) = 0$

2) **Teorema de la dimensión:** $\dim(V) = \dim(Nuc(T)) + \dim(Im(T)) = Null(T) + Im(T)$

Definición 0.6.

Inyectiva: $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$

Suprayectiva: $\forall y \in W$, existe $x \in V$ con $T(x) = y$

Teorema 0.4.
1) $T : V \longrightarrow W$ es inyectiva sii $Nuc(T) = \{0\}$
2) T es inyectiva sii manda conjuntos L.I. a conjuntos L.I.
3) T es biyectiva sii manda bases de V a bases de W.

Propiedad Universal de las Bases: Dado $T : V \longrightarrow W$, si sabemos a dónde manda T todos los elementos de una base de V, entonces T queda completamente definida.

Definición 0.7.
Matriz asociada: A cada transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ le podemos asociar una matriz.
Simplemente seleccionamos una base de V y una base de W. Luego, aplicamos T a cada elemento de la base de V y lo escribimos como combinación lineal de la base de W, los coeficientes usados servirán como primera columna de la matriz y así con las demás columnas. La matriz representada depende obviamente de las bases utilizadas.

Matriz cambio de Base: La matriz cambio de base de β a γ bases de V es la matriz que representa la transformación lineal Id_V entre estas bases.
Propiedad: $[T]_\beta^\beta = [I]_\gamma^\beta [T]_\gamma^\gamma [I]_\beta^\gamma$
$[I]_\beta^\gamma = [I]_\gamma^\beta$

Teorema 0.5.
La representación matricial de la trnasformación lineal $T + S$ es igual a la suma de las representaciones de T y S.
La representación de la transformación $T \circ S$ es igual al producto matricial de las representaciones de T y S. Bueno, de hecho el producto matricial se define de forma tal que se cumpla esto.

Definición 0.8.
Proyección: Sea $V = W_1 \oplus W_2$. Para todo $x \in V$ definimos la proyección de V a través de W_2 sobre W_1 cono la función lineal con:
$T(x) = T(w_1 + w_2) = w_1$
La proyección se llama ortogonal si $W_1^\perp = W_2$

Definición 0.9.
Espacio de Transformaciones: $\ell(V, W) = \{T : V \longrightarrow W | T \text{ es lineal } \}$
Isomorfismo: $T : V \longrightarrow V$ es un isomorfismo si es biyectivo. V es isomorfo a W si existe un isomorfismo entre ambos, y se escribe como $V \simeq W$

Propiedades:
1) El isomorfismo es una relación de equivalencia de ℓ

2) Si T es un isomorfismo, entonces existe T^{-1} que es lineal.

3) Si T y U son isomorfismos, entonces $T \circ U$ es un isomorfismo y $(T \circ U)^{-1} = U^{-1} \circ T^{-1}$

4) Si $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, entonces $\ell(V, W) \simeq M_{m \times n}(\mathbb{R})$

5) Si $T : V \longrightarrow W$ y $\dim(V) = \dim(W)$ entonces son equivalentes: 1) T es iny, 2) T es supra.

6) $V \simeq W \Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$

0.1. Determinantes

Determinantes: Un determinante es una función que toma una matriz de $n \times n$ y regresa un número y que cumple las siguientes cosas:

1) Es multilineal: $\delta(R_1|...|R_i + aR_i'|...|R_n) = \delta(R_1|...|R_i|...|R_n) + a\ \delta(R_1|...|R_i'|...|R_n)$
2) Alternantes: Si dos renglones son iguales, el resultado es 0.
3) $\delta(I) = 1$

Matriz 2×2 : Para matrices de 2×2 se puede probar que un determinante debe de cumplir que:
1) $\delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$ 2) $\delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$ 3) $\delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$
Con esto se puede probar que en general: $\delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$

Teorema 0.6.
Interpretación Geométrica: $\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = O(u, v)\ A(u, v)$
Con O la orientación ± 1 y A el área.

Para matrices de $n \times n$:

Teorema 0.7.
1) Una combinación lineal de funciones multilineales es nultilineal.

2) Si δ es alternante y A se obtiene al intercambiar dos vectores de B, entonces $\delta(A) = -\delta(B)$

Teorema 0.8.
Si δ es un determinante de $M_{n\times n}$, y $A \in M_{(n+1)\times(n+1)}$ entonces:
$\varepsilon_j(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+j}\ A_{ij}\ \ \delta(\overbrace{A_{ij}})$ es un det de $(n+1)\times(n+1)$

Donde $\overbrace{A_{ij}}$ es la matriz que se obtiene al eliminar el iésimo renglón y la jésima columna.
Entonces a partir del determinante de 2×2 se puede construir cualquier det de cualquier orden.

Teorema 0.9. Propiedades:
1) Multilineal, alternante y $\delta(I) = 1$
2) Si un rengón es 0, el det es 0.
3) Si B se obtiene a partir del renglón A al sumar un múltiplo del renglón i al j, entonces $\delta(B) = \delta(A)$

Corolario: Si E_1 se obtiene de intercambiar dos renglones de I, entonces $\delta(E_1) = -1$
2) Si E_2 se obtiene al multiplicar un renglón de I por c, entonces $\delta(E_2) = c$
3) Si E_3 se obtiene a sumar un múltiplo de un renglón a otro, entonces $\delta(E_3) = 1$

Estas tres son las matrices elementales, con las cuales se puede construir cualquier matríz invertible.

Teorema 0.10.
1) Si A es de rango $< n$ entonces $\delta(A) = 0$
Pues un renglón es combinación lineal de los otros.

2) Si E es elemental, entonces $\delta(EB) = \delta(E)\delta(B)$

3) $\delta(AB) = \delta(A)\ \delta(B)$

4) A es invertible sii $\delta(A) \neq 0$ y $\delta(A^{-1}) = [\delta(A)]^{-1}$

5) Existe un único det de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$

6) $\det(A) = \det(A^{\top})$

0.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Resolver un sistema de ecuaciones lineales es sencillo.
1) Escribir la matrz de coeficientes, con el renglón de resultados agragado.
2)Realizar las operaciones válidas para escalonar la matriz (Multiplicar un renglón por c, a un renglón sumarle un múltiplo de otro, intercambiar dos renglones)

2.1) Convertir en un 1 el primer elemento distinto de 0 en el iésimo renglón.
2.2) Con ese 1, sumar a los demás renglones el múltiplo correspondiente del renglón i para que esa columna se llene de ceros excepto por el 1 del iésimo renglón.
3) Repetir desde $i = 1$ hasta $i = n$

2.5) Si hay algún renglón con puros 0 en en la matriz pero un valor distinto de 0 en el renglón de resultados, el sistema no tiene solución.
3) Para cada renglón, anotar el número de la primera columna con un número distinto de 0. Las variables que correspondan a estas columnas son los pivotes
4) El resto de las variables son las variables libres. Asignar a las variable libres los valores paramétrios t, s, u, v conforme haga falta.
5) Escribir las ecuaciones que están representadas por la matriz agregada.
6) Debería de ser posible escribir cada pivote como combinación lineal de los parámetros. Empezar de abajo hacia arriba.
7) Todas las variables son ahora funciones paramétricas.

1. Lineal 2

Definición 1.1.
Operador Diagonalizable: $T : V \longrightarrow V$ es diagonalizable si existe una base β de V tal que $[T]_\beta$ es una matriz diagonal.

Matriz Diagonalizable: La matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es diagon si la transformación $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $L_A(x) = Ax$ es diagonalizable.

Entonces, si T es una transformación con matriz A (en la base canónica) es diagonalizable, significa que existe una base β tal que $[T]_\beta = D$, pero:
$[T]_\beta^\beta = [I]_{can}^\beta [T]_{can}^{can} [I]_\beta^{can}$
Entonces, T es diagonalizable sii existe una base β tal que:
$[I]_{can}^\beta A [I]_\beta^{can} = D$
O bien, una matriz A es diagon, sii existe Q con:
$Q^{-1}AQ = D$ Donde Q es la matriz cambio de base de β a can.

Eigenvector: Un eigenvector de T es un vector v con $T(v) = \lambda v$
El eigenvalor correspondiente es el valor de λ

Determinante de un Operador: $\det(T) = \det([T])$ Para cualquier base. (La base no importa, porque aunque agarremos distintas bases, todas las matrices que representan a T son similares y por tanto tienen el mismo det).

Teorema 1.1.
1) T es Diagonalizable sii existe una base de puros eigenvectores.
dem: Es fácil ver que con una base de eigenvectores, la matriz será diagonal.
Las entradas de la matriz diagonal son los eigenvalores.

2) λ_0 es un Eigenvector de T sii $\det(T - \lambda_0 I_d) = 0$

3) $x \in V$ es un eigenvector de T con eigenvalor λ_0 sii $x \in Nuc(T - \lambda_0 I_d) = Nuc([T] - \lambda_0 I_d)$

Definición 1.2.
Polinomio Característico: El polinomio característico de T es: $P_T(\lambda) = \det(T - \lambda I_d)$
Los eigenvalores son las raíces del polinomio característico

Eigenespacio de λ: Es el espacio vectorial: $E_\lambda = \{x \in V \ : \ T(x) = \lambda x\}$

Suma directa múltiple: $V = \oplus_{i=1}^{r} W_i$ si se cumple 1) $V = \sum_{i=1}^{r} W_i$ y también $W_i \cap \sum_{i \neq j} W_j = \{0\}$

Teorema 1.2. Propiedades
1) Si $\lambda_1, ..., \lambda_k$ son eigenvalores distintos, entonces sus eigenvectores son L.I.
Cor. Si T tiene n eigenvalores distitnos, entonces es diagonalizable.

2) $E_\lambda \leq V$ $E_\lambda = Nuc(T - \lambda I)$

3) Si $d = \dim(E_\lambda)$ y $m = mult(\lambda)$ en $P_T(\lambda)$ entonces $d \leq m$

Teorema 1.3.
Equivalencia de Sumas Directas:
1) $V = \oplus_{i=1}^{r} W_i$

2) $V = \oplus W_i$ y si $x_1 + ... + x_r = 0$ entonces $x_1 = ... = x_r = 0$

3)Todo vector $x \in V$ se puede escribir de forma única como la suma de vectores de cada W_i

Teorema 1.4.
Equivalencias Diagonalizibilidad:
Sea T un operador lineal y $P_T(t)$ se divide y tiene $\lambda_1, ...\lambda_r$ como distintas raíces con multiplicidades m_i, entonces son equivalentes:

1) T es diagonalizable

2) $V = \oplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$

3) Si $d_i = \dim(E_{\lambda_i}) \Rightarrow d_1 + ... + d_r = \dim(V)$

4) $d_i = m_i$
Pues V es diagonalizable sii existe una base de eigenvectores. Para esto, necesitamos que los eigenespacios sean tan grandes como se pueda.

Algoritmo para diagonzalizar:

1) Encontrar todos los eigenvalores (raices del polinomio característico)
2) Para cada Eigenvalor, encontrar el eigenespacio (Es decir, $Nuc(T - \lambda I)$), si algún eigenespacio tiene menor dimensión que la multiplicidad, ya valimos. Si todos los eigenespacios tienen dimensión igual a la multiplicidad, simplemente juntamos sus bases para formar la base diagonalizadora.
3) Con esta base, podemos diagonalizar el operador T.
4) En todo caso, si queremos diagonalizar una matriz A, y tenemos la base diagonalizadora, esta base escrita verticalmente forma la matriz Q que diagonaliza. Pues esta matriz es $[I]_\beta^{can}$

1.1. Espacios Invariantes, Polinomio Mínimo

Definición 1.3. Espacio Invariante:
$W \leq V$ es $T-$ inv en $T : V \to V$ si cumple que $T(W) \subset W$, es decir: $\forall x \in W \Rightarrow T(x) \in W$

Teorema 1.5.
1) Si $W \leq V$ es T- inv, entonces $P_{T|_W}(t)|P_T(t)$

2) Sea $T : V \to V$ con $V = W_1 \oplus ... \oplus W_k$ con cada W T - inv. Entonces, $P_T(t) = P_{T|_{W_1}}(t) \cdot ... \cdot P_{T|_{W_n}}(t)$

Definición 1.4.
Espacio T-cíclico: centrado en x es: $\langle\{x, T(x), T^2(x), ...\}\rangle = C_x$

W $\leq$ V es $T-$ cíclico: si $W = C_x$ para algún $x \in V$

Teorema 1.6.
Teo 1 $T : V \to V$ y sea $C_x \leq V$ con $\dim(C_x) = k$, entonces:
1) $\{x, T(x), ..., T^{k-1}(x)\}$ es base de C_x.

Teorema de Cayley-Hamilton: $P_T(T) = T_0$

Definición 1.5.
Polinomio Mínimo: Sea $T : V \to V$, $g(t)$ es el pol. mínimo si g es el pol mónico de grado mínimo con $g(T) = T_0$

Teorema 1.7.
1) Si $g(t)$ es un pol. min. de T y $f(t)$ es un pol. cualquiera con $f(T) = T_0$, entonces $g|f$ y g es único.

2) λ es eigenvalor de T sii $g(\lambda) = 0$ Por lo tanto, g y P_T tienen los mismos 0s.
Cor) Si $P_T(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdot ... \cdot (t - \lambda_k)^{n_k} \Rightarrow g(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (t - \lambda_k)^{m_k}$ con $m_i \leq n_i$

3) Si V es $T-$cíclico, entonces el grado de P_T = grado de pol. min.

4) T es diagon sii $g(t) = (t - \lambda_1) \cdot ... \cdot (t - \lambda_k)$

2. Forma Canónica

Definición 2.1.

Bloque de Jordan: Es una matrz de la forma: $J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & 1 & ... & 0 \\ ... & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_j \end{pmatrix}$

Forma Canónica de Jordan: Es una matriz que está formada por bloques de Jordan puestos en diagonal, se escribe $J_{\lambda_1} \oplus ... \oplus J_{\lambda_k}$

Base de Jordan: Es una base β tal que $[T]_\beta$ es una forma canónica de Jordan.

Eigenvector Generalizado: Es un $x \in V$ tal que existe λ con $(T - \lambda I_d)^p(x) = 0$ p.a $p \in \mathbb{N}$

Ciclo de EVG: Si x es un e.v.g con p el entero más chico con $(T - \lambda I_d)^p(x) = 0$, entonces el ciclo de e.v.g es el conjunto $C_x = \{(T - \lambda I)^{p-1}(x), ..., (T - \lambda I)(x), x\}$ donde se puede ver que el primer elemento es un e.vector.

Por ejemplo, tomemos la matriz: $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Que vemos es una matriz con cuatro bloques correspondientes a $\{2, 2, 3, 0\}$
Vemos que x_1, x_4, x_5, x_7 son eigenvectores. Y vemos también que por ejemplo, x_1, x_2, x_3 forman un ciclo de e.v.g con eigenvalor 2, pues $T(x_3) = x_2 + 2x_3 \Rightarrow (T - 2I)(x_3) = x_2$ y similarmente $(T - 2I)(x_2) = x_1$ y $(T - 2I)(x_1) = 0$. Es decir, cada bloque de Jordan corresponde a un ciclo de eigenvectores. Y puede haber más de un ciclo de eigenvectores (y más de un bloque) con el mismo eigenvalor.

Las matrices de este tipo son más o menos sencillas y cuando no es posible diagonalizar, nos conviene al menos encontrar una de esta forma. Como vemos, para encontrarla es necesario encontrar una base formada por puros ciclos de eigenvectores generalizados.

Teorema 2.1.
Sea γ un ciclo de eigenvectores generalizados correspondientes a λ, entonces: a) El vector inicial de γ es el único eigenvector de la lista. b) γ es L.I. c) β es una base de Jordan sii β es la unión de ciclos de eigenvectores.

Definición 2.2.
Eigen Espacio Generalizado: $K_\lambda = \{x \in V : (T - \lambda I_d)^p(x) = 0 \text{ p.a } p \in \mathbb{N}\}$

Es decir, K_λ consta de 0 y de todos los e.v.g de T con λ, aunque sean de distintos ciclos, en el ejemplo anterior tenemos que $k_\lambda = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Teorema 2.2.
1) $E_\lambda \leq K_\lambda \leq V$

2) Para $\lambda_1, ..., \lambda_k$ distintos, $K_{\lambda_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} K_{\lambda_j}\right) = \{0\}$

3) **Teorema de Jordan** Todo operador T con polinomio separable tiene una base de Jordan.

4) Sea T que se descompone en eigenvalores $\lambda_1, ..., \lambda_k$ con multi. $m_1, ..., m_k$, entonces:
a) $K_{\lambda_i} = Nuc((T - \lambda_i I)^{m_i})$
b) $\dim(K_{\lambda_i}) = m_i$

Definición 2.3.
Diagrama de Puntos: Para cada λ_0 un eigenvalor de T con eigenespacio generalizado K_{λ_0} que consta de muchos ciclos de e.v.g., entonces podemos formar una serie de puntos para representar a la transformación.
Tomamos todos los ciclos correspondientes a λ y contamos el número de elementos, luego ponemos ese número de puntos en forma de columnas.

Por ejemplo, para la matriz pasada:

$$\lambda = 2 : \quad \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \\ \bullet & \end{array} \qquad \lambda = 3 \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \qquad \lambda = 0 \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}$$

En estos diagramas, cada columna es un ciclo de e.v.g y los puntos de hasta arriba son los vectores iniciales (eigenvectores). Si conocemos el diagrama de puntos para cada uno de los eigenvalores de T, entonces podemos encontrar fácilmente la matriz de Jordan correspondiente (el orden de los bloques no importa). Sin embargo, no conoceríamos la base con la que lo logramos, pero ni modo.

Calcular el número de puntos en un renglón:
Sea $r_i =$ el número de puntos en el rengón i para un eigenvector λ_0 de T y digamos que tenemos en total j renglones.
Pensándolo un poco, podemos ver que si aplicamos $(T - \lambda_0 I)$ j veces a todos los puntos (e.g.v) entonces todos ellos se harán 0, primero los de las columnas de arriba y así para abajo por como se define el ciclo de e.v.g.

Entonces $r_1 + ... + r_j = null((T - \lambda_0)^j)$
Pero también, $r_1 = null(T - \lambda_0 I)$ porque son los eigenvectores.
$r_1 + r_2 = null((T - \lambda_0)^2)$
etc.
Con estas fórmulas, se puede uno convencer que: $r_j = ran(T - \lambda_0 I)^{j-1} - ran(T - \lambda_0)^j$

Procedimiento para encontrar la matriz de Jordan:

1) Calcular los eigenvalores y sus multiplicidades.
2) Para cada eigenvalor, calcular el diagrama de puntos con las formulitas.
3) Formar los bloques y juntarlos.

Procedimiento para encontrar la base de Jordan:

1) Encontrar los eigenvalores.
2) Para un eigenvalor fijo λ_0, encontrar su multiplicidad m_0
3) Encontrar una base para $K_{\lambda_0} = Nuc(T - \lambda_0)^{m_0}$
4) Esta base es una base para todos los ciclos con eigenvalor λ_0. Pero puede ser que no esté ordenada por ciclos de principio a fin.
5) Podemos buscar una base para $E_{\lambda_0} = Nuc(T - \lambda_0 I)$ que sabemos que son los vectores iniciales de cada ciclo y que nos da el número de ciclos totales.
6) Esto nos puede ayudar a ordenar la base de K_{λ_0} y separarla por ciclos. Además, si tenemos el diagrama de puntos nos puede ayudar a saber qué estamos buscando.
7) Unir para todos los eigenvectores.

3. Operadores Funcionales y eso

Definición 3.1.
Funcional Lineal: Una transformación lineal que tiene como contradominio el campo (Los reales generalmente)

Espacio Dual: Dado un espacio vectorial V, definimos $V^* = \{$ funciones lineales de V a $\mathbb{R}\}$.
Espacio bi-dual: $V^{**} = \{$ funciones lineales de V^* a $\mathbb{R}\}$

Es decir, el espacio bi-dual toma funcionales de V como entrada y da como resultado un $\mathbb{R}$.

Observación, $V \simeq V^*$: Si $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V, entonces podemos definir $\phi_i(v_j) = \delta_{i,j}$, (Es decir, $\phi_i(x) = \phi_i(a_1 v_1 + ... + a_i v_i + ... + a_n v_n) = a_i$, la función ϕ_i da el componente iésimo de x en la base original de V.)
Entonces, el conjunto de funcionales $(\phi_1, ..., \phi_n)$ es una base de V^* (probarlo) y como entonces tienen la misma dimensión, son isomorfos. Si la base original de V es la canónica, entonces las proyecciones de la base dual se escriben como π_i y cualquier funcional se puede escribir como una combinación lineal de proyecciones.
Obseravción, $V \simeq V^{**}$: Dado un $v \in V$ construimos $\phi_v \in V^{**}$ con $\phi_v(f) = f(v)$ para $f \in V$. La asociación $v \longrightarrow \phi_v$ es biyectiva, por lo que $V \simeq V^{**}$
Nota: podemos ver que la asociación con el bi-dual es más natural que con el dual en el sentido de que no se requiere de bases para definirla.

Definición 3.2.
Producto Interno: $\langle , \rangle : V \times V \to K$ es un funcional lineal que cumple 4 propiedades:

$$\begin{gathered} \text{a) } \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \\ \text{b) } \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \\ \text{c) } \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \\ \text{d) } \langle x, x\rangle > 0 \text{ sii } x \neq 0 \end{gathered}$$

Ejemplos:
1) En $\mathbb{C}^n$: $\langle a, b\rangle = a_1\overline{b_1} + ... + a_n\overline{b_n}$
2) En $\mathbb{R}^n$: $\langle a, b\rangle = a_1 b_1 + ... + a_n b_n$
3) En $M_{n\times n}(\mathbb{R})$: $\langle A, B\rangle = tr(\overline{B^t}A)$
4)$H = \{$ funciones de $[0,1] \to \mathbb{C}$ continuas $\}$: $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\overline{g}dx$

Teorema 3.1.
Teorema de Riezs: Sea $g : V \to K$ entonces existe un único $y \in V$ con $g(x) = \langle x, y\rangle$
Es decir, toda funcional lineal se puede ver como un producto interno con un elemento fijo.

Teorema 3.2. Propiedades:
a) $\langle x, cy\rangle = \overline{c}\langle x, y\rangle$
b) Si $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle \ \forall x \in V \Rightarrow y = z$

Definición 3.3. Norma:
Una norma en su definición más general es una función $V \times V \to K$ con:
a) $|cx| = |c||x|$
b) $|x| > 0$ sii $x \neq 0$ y $|0| = 0$
c) Desigualdad del triángulo: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Norma inducida por un producto punto:

Dado un producto punto, podemos definir una norma como: $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
Se puede probar que esta norma cumple con las propiedades que definen a la norma (entonces está bien llamarla así) y además cumple con:
Desigualdad de Cauchy: $|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|$

Definición 3.4.
Ortogonal: x y y son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$

$S \subset V$ es un conjunto ortogonal si $\langle x_i, x_j\rangle = 0 \ \forall x_i, x_j \in S$ (con $i \neq j$)

$S \subset V$ es **Ortonormal** si $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$ (la delta de Kroenecker)

Teorema 3.3.
Si $S = \{x_1, ..., x_n\}$ es un conjunto ortogonal, entonces es L.I.

Pitágoras: Si $S = \{x_1, ..., x_n\}$ es un conjunto ortogonal, entonces $|x_1 + ... + x_n|^2 = |x_1|^2 + ... + |x_n|^2$

Proceso de Ortogonalización de Grahm Schmidt: Dado un conjunto cualquiera $S = \{x_1, ..., x_n\}$ que sea L.I. , podemos encontrar una conjunto $\{y_1, ..., y_n\}$ que se puede calcular a partir del conjunto original y que es ortogonal.

Para encontrar dicho conjunto, simplemente hacemos lo siguiente:

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{|y_1|^2} y_1$$
$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{|y_1|^2} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{|y_2|^2} y_2$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$
$$y_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle x_n, y_j \rangle}{|y_j|^2} y_j$$

Se puede probar que este conjunto $\{y_1, ..., y_n\}$ es ortogonal. Además, se puede convertir en un conjunto ortonormal si dividimos cada y_i por su norma para unitarizarlo. Entonces, vemos que pata todo espacio vectorial finito, le podemos encontrar una base y luego convertirla en una base ortonormal, es decir, todo espacio vectorial tiene una base ortonormal.

Combinación Lineal para Bases Ortonormales

Dada una base ortonormal $\{x_1, ..., x_n\}$ de V, y dado un punto cualquiera x en V, podemos encontrar su expresión en esta base muy sencillamente como:

$$x = \langle x, x_1 \rangle\, x_1 + \langle x, x_2 \rangle\, x_2 + ... + \langle x, x_n \rangle\, x_n$$

Esta es la ventaja de las bases ortonormales, poder encontrar fácilmente la expresión de cualquier elemento.

Complemento Ortogonal: Dado un conjunto S, definimos su complemento ortogonal como el conjunto:
$S^\perp = \{x \in V : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in S\}$

Para W un espacio vectorial, tenemos que: $(W^\perp)^\perp = W$

Si $W \leq V$: $V = W \oplus W^\perp$

Definición 3.5. Adjunto:
Dado un operador Lineal (o una matriz) tenemos que $g(x) = \langle T(x), y\rangle$ es un funcional lineal. Por lo tanto, por el teorema de Riezs, debe de existir un valor fijo w tal que $g(x) = \langle T(x), y\rangle = \langle x, w\rangle$.
Entonces, para todo y podemos definir una función T^* nueva que nos da a w, es decir $T^*(y) = w$.

Es decir, el adjunto de T es la transformación lineal única tal que:

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

Teorema 3.4. Propiedades del adjunto:
1) Para una matriz: $A^* = \overline{A^t}$
2) $[T]^* = [T^*]$
3)$(T + U)^* = T^* + U^*$
4)$(cT)^* = \overline{c}T^*$
5)$(TU)^* = U^*T^*$
6) $T^{**} = T$

Ahora podemos definir varios tipos de operadores lineales según sus relaciones con el adjunto.

1) Normal

Definición 3.6. Normal
Un operador $T : V \to V$ es normal si conmuta con su adjunto $TT^* = T^*T$

Propiedades

1) $|T(x)| = |T^*(x)|$
2) Si λ es un e.val de T entonces $\overline{\lambda}$ es un eigenvalor de T^*
3) Si λ_1 y λ_2 son eigenvalores distintos de T, entonces sus eigenvectores son ortogonales.

4) (Para el campo complejo) T es normal sii V tiene una base ortonormal de eigenvectores de T.

2) Autoadjunto

Definición 3.7. Autoadjunto
Un operador $T : V \to V$ es autoadjunto si $T = T^*$

La definición por si misma implica que una matriz autoadjunta es una matriz simétrica.

Propiedades

Todas las de un operador normal (pues un autoadjunto es normal)

1) $|T(x)| = |T^*(x)|$ Que en este caso en realidad no nos dice nada esto.
2) Si λ es un e.val de T entonces $\overline{\lambda}$ es un eigenvalor de T^*. Que en este caso implica que los eigenvalores son reales.
3) Si λ_1 y λ_2 son eigenvalores distintos de T, entonces sus eigenvectores son ortogonales.

4) (Para el campo Real (por 2)) T es autoadjunto sii V tiene una base ortonormal de eigenvectores reales de T

3) Unitario

Definición 3.8. Unitario
Un operador $T : V \to V$ es Unitario si $TT^* = T^*T \ = I_d$

Propiedades

Todas las de un operador normal (pues un Unitario es normal)

1) $|T(x)| = |T^*(x)|$ Pero en este caso, como son inversos se puede probar, entonces $|T(x)| = |x|$, o bien $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
1.5) $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
2) Si λ es un e.val de T entonces $\overline{\lambda}$ es un eigenvalor de T^*. Que en este caso, como $T = T^{*-1}$, implica que $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$, lo que implica que la norma de los eigenval. es 1.
3) Si λ_1 y λ_2 son eigenvalores distintos de T, entonces sus eigenvectores son ortogonales.

4) (Para el campo Complejo) T es normal sii V tiene una base ortonormal de eigenvectores de T y son eigenvalores de valor absoluto 1.
5) Si β es una base ortonormal, entonces $T(\beta)$ es una base ortonormal.

4) Ortogonal

Definición 3.9. Ortogonal
Un operador $T : V \to V$ es Ortogonal si $TT^* = T^*T \ = I_d$ y es un operador real (i.e. es como unitario pero para reales)
La def. por si misma implica que si una matriz es ortogonal, entonces su inverso es su traspuesto, lo cual implica que las columnas de la matriz son un conjunto ortonormal.

Propiedades

Todas las de un operador unitario (pero para reales)

0) Las columnas de la matriz son una base ortonormal.
1) $|T(x)| = |T^*(x)|$ Pero en este caso, como son inversos se puede probar, entonces $|T(x)| = |x|$, o bien $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
1.5) $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
2) Si λ es un e.val de T entonces $\overline{\lambda}$ es un eigenvalor de T^*. Que en este caso, como $T = T^{*-1}$, implica que $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$, lo que implica que la norma de los eigenval. es 1. Pero como son reales, implica que los únicos eigenvalores posibles son -1 y 1.
3) Si λ_1 y λ_2 son eigenvalores distintos de T, entonces sus eigenvectores son ortogonales.

4) (Para el campo Real) T es ortogonal sii V tiene una base ortonormal de eigenvectores de T y son eigenvalores son ± 1
5) Si β es una base ortonormal, entonces $T(\beta)$ es una base ortonormal.

Definición 3.10.
Ortogonalmente equivalente: A y B son unitariamente (ortogonalmente) equivalente sii $\exists$ una matriz P unitaria (ortogonal) con $A = P^*BP$

A es una matriz normal (autoadjunta) sii es unitariamente (ortogonalmente) equivalente a una matriz diagonal.

Proyección Ortogonal: Dado $V = W_1 \oplus W_2$, T es una proyección orto sobre W_1 si $T(x) = T(w_1 + w_2) = w_1$ y además $W_1^\perp = W_2$

Propiedad: T es una proyección ortogonal sii $T = T^* = T^2$

Teorema 3.5. Teorema Espectral:
Sea $T : V \to V$ es normal ($\mathbb{C}$) o autoadjunta ($\mathbb{R}$) si $\lambda_1, ...\lambda_k$ son eigenvalores de T. Sea T_1 la proyección ortogonal sobre E_i $\Rightarrow$

1) T tiene una base ortonormal de eigenvectores de T (Reales si es autoad.)

2) $V = E_1 \oplus ... \oplus E_k$ (Pues es diagon)

3) $W_i^{\perp} = (\sum_{j \neq i} W_j)^{\perp}$

4)$T_i T_j = \delta_{ij} T_i$

5) $T_1 + ... + T_k = I$

6) $T = \lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k$