Tarea 2: Óptica Cuántica con átomos y fotones

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

April 5, 2022

Ejercicio 1

En la norma de Coulomb, las ecuaciones de Maxwell son

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi\right] = \mu_0 \mathbf{J} \quad , \quad -\nabla^2\phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Usando las definiciones de $\mathbf{J}_t$ y $\mathbf{J}_L$, $\nabla\cdot\mathbf{J}_T = 0, \nabla\times\mathbf{J}_L = 0$, descomponer estas ecuaciones y llegar a:

$$\mathbf{J}_L = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi \quad , \quad -\nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{J}_T$$

Primero separamos $\mathbf{J}$ en $\mathbf{J}_L + \mathbf{J}_T$ en la primera ecuación, con lo que nos queda:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi\right] = \mu_0 \mathbf{J}_L + \mu_0\mathbf{J}_T$$
$$\Rightarrow \; -\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi = \mu_0 \mathbf{J}_L + \mu_0\mathbf{J}_T$$

Del lado derecho tenemos un campo vectorial separado en una parte sin divergencia, que es $\mu_0\mathbf{J}_T$, ya que $\nabla\cdot\mathbf{J}_T = 0$ y una parte sin rotación, que es $\mu_0\mathbf{J}_L$ ya que $\nabla\times\mathbf{J}_L = 0$. Luego, para separar la ecuación en dos partes, nos gustaría partir el lado izquierdo también en una parte que no tenga divergencia más una que no tenga rotación.

- Primero notamos que $\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi$ no tiene rotación. Para comprobarlo, le aplicamos el rotacional y nos queda:

$$\nabla\times\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi\right) = \frac{1}{c^2}\nabla\times\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi\right)$$

Como $\nabla\times$ involucra puras derivadas espaciales y $\partial/\partial t$ es temporal, podemos conmutarlas

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\nabla\phi)$$

Una propiedad bien conocida del cálculo vectorial nos dice que el rotacional de un gradiente es 0:

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(0)$$
$$= 0$$

- Ahora demostramos que $-\nabla^2\mathbf{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$ no tiene divergencia. Para hacerlo, aplicamos la divergencia y veremos que nos da como resultado 0:

$$\nabla\cdot\left[-\nabla^2\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right]=-\nabla\cdot(\nabla^2\mathbf{A})+\frac{1}{c^2}\nabla\cdot\left(\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right)$$

Usamos ahora una identidad bien conocida que dice $\nabla^2\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$

$$=-\nabla\cdot(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}))+\frac{1}{c^2}\nabla\cdot\left(\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right)$$

Como $\nabla\cdot$ involucra puras derivadas espaciales y $\partial^2/\partial t^2$ temporales, podemos conmutarlas

$$=-\nabla\cdot(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}))+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

Usamos la norma de Coulomb, que exige $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$

$$=-\nabla\cdot(\nabla 0-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}))+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(0)$$

$$=\nabla\cdot[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})]$$

Por último, usamos que la divergencia de un rotacional es 0

$$=0$$

Entonces, regresando a la expresión

$$-\nabla^2\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi=\mu_0\mathbf{J}_L+\mu_0\mathbf{J}_T$$

Notamos que del lado izquierdo los primeros dos términos no tienen divergencia y del lado derecho $\mu_0\mathbf{J}_T$ no tiene divergencia. Mientras tanto, el tercer término del lado izquierdo no tiene rotación y del lado derecho $\mu_0\mathbf{J}_L$ tampoco. Por lo tanto, podemos separar la ecuación en la parte sin rotación y la parte sin divergencia y nos queda:

$$\begin{aligned}-\nabla^2\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}&=\mu_0\mathbf{J}_T\\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi&=\mu_0\mathbf{J}_L\end{aligned}$$

La segunda ecuación se puede cambiar recordando que $\dfrac{1}{c^2}=\epsilon_0\mu_0$ y queda:

$$\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi=\mathbf{J}_L$$

Ejercicio 2

Demostrar que

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$$
$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \right)$$

Empezamos con las definiciones de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}^\dagger$, que son:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\mathbf{q} + i\mathbf{p}) \qquad \mathbf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\mathbf{q} - i\mathbf{p})$$

Y calculamos directamente los productos $\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger$ y $\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\mathbf{q} + i\mathbf{p})\ \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\mathbf{q} - i\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega}\left(\omega^2\mathbf{q}^2 + i\omega\mathbf{p}\mathbf{q} - i\omega\mathbf{q}\mathbf{p} + \mathbf{p}^2\right) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\mathbf{q}^2 + i\omega(\mathbf{p}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{p}) + \mathbf{p}^2) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\mathbf{q}^2 + i\omega[\mathbf{p}, \mathbf{q}] + \mathbf{p}^2) \\
&\text{Usamos que } [\mathbf{p}, \mathbf{q}] = -i\hbar \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\mathbf{q}^2 + i\omega(-i\hbar) + \mathbf{p}^2) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\mathbf{q}^2 + \omega\hbar + \mathbf{p}^2) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega}(\mathbf{p}^2 + \omega^2\mathbf{q}^2) + \frac{1}{2\hbar\omega}(\hbar\omega) \\
&\text{Identificamos ahora que } \mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 + \omega^2\mathbf{q}^2) \text{ y queda:} \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\mathbf{H} + \frac{1}{2\hbar\omega}(\hbar\omega) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\mathbf{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega\right)
\end{aligned}$$

Y ahora el otro producto:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\mathbf{q} - i\mathbf{p})\ \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\mathbf{q} + i\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega}\left(\omega^2\mathbf{q}^2 - i\omega\mathbf{p}\mathbf{q} + i\omega\mathbf{q}\mathbf{p} + \mathbf{p}^2\right) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\mathbf{q}^2 - i\omega(\mathbf{p}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{p}) + \mathbf{p}^2) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\mathbf{q}^2 - i\omega[\mathbf{p},\mathbf{q}] + \mathbf{p}^2) \\
&\text{Usamos que } [\mathbf{p},\mathbf{q}] = -i\hbar \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\mathbf{q}^2 - i\omega(-i\hbar) + \mathbf{p}^2) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\mathbf{q}^2 - \omega\hbar + \mathbf{p}^2) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega}(\mathbf{p}^2 + \omega^2\mathbf{q}^2) + \frac{1}{2\hbar\omega}(-\hbar\omega) \\
&\text{Identificamos ahora que } \mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 + \omega^2\mathbf{q}^2) \text{ y queda:} \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\mathbf{H} + \frac{1}{2\hbar\omega}(-\hbar\omega) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\mathbf{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega\right)
\end{aligned}$$

Con esto, podemos ya obtener el conmutador:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a},\mathbf{a}^\dagger] &= \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\mathbf{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega\right) - \frac{1}{\hbar\omega}\left(\mathbf{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\mathbf{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega - \mathbf{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}(\hbar\omega) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Además, podemos usar el resultado de $\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}$ para obtener una expresión para el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\mathbf{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \\
&\Rightarrow\quad \hbar\omega\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} = \mathbf{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega \\
\Rightarrow\ &\boxed{\mathbf{H} = \hbar\omega\left(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Demostrar usando que los $|n\rangle$ forman una base ortonormal que:

$$\mathbf{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \ \ , \ \ \mathbf{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

En clase vimos que si tenemos el estado $|n\rangle$ (que es eigenestado de $\mathbf{H}$ con valor E_n) y le aplicamos $\mathbf{a}^\dagger$, nos resulta nuevamente un eigenestado de $\mathbf{H}$ pero ahora con valor $E_n + \hbar\omega$ (es decir, subió un "escalón" de energía). Esto nos lleva a decir que el estado $|n+1\rangle$ es proporcional a $\mathbf{a}^\dagger|n\rangle$, en la forma:

$$K_n|n+1\rangle = \mathbf{a}^\dagger|n\rangle \quad (1)$$

donde K_n es una constante. Sólo podemos decir que es proporcional a $|n+1\rangle$ y no que sea exactamente igual porque puede ser que este estado $\mathbf{a}^\dagger|n\rangle$ no esté normalizado, pero queremos que $|n+1\rangle$ sí lo esté.

Para calcular la constante K_n, vamos a exigir que estos estados estén normalizados, lo que significa que $\langle n+1|n+1\rangle = 1$, $\langle n|n\rangle = 1$. Tomamos entonces la ecuación (1) y multiplicamos cada lado por su conjugado, obteniendo el producto interno de ambos lados:

$$K_n|n+1\rangle = \mathbf{a}^\dagger|n\rangle$$

$$\Rightarrow \ \langle n+1|K_n^* K_n|n+1\rangle = \langle n|\mathbf{a}^{\dagger\dagger}\mathbf{a}^\dagger|n\rangle$$

Usamos que conjugar dos veces nos devuelve el operador original, por lo que $\mathbf{a}^{\dagger\dagger} = \mathbf{a}$

$$\Rightarrow \ |K_n|^2\langle n+1|n+1\rangle = \langle n|\mathbf{a}\,\mathbf{a}^\dagger|n\rangle$$

Usamos que queremos que $|n+1\rangle$ esté normalizado

$$\Rightarrow \ |K_n|^2 = \langle n|\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger|n\rangle$$

Ahora conmutamos el $\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger$, usando que $\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} = 1 \ \Rightarrow \ \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger = 1 + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}$

$$\Rightarrow \ |K_n|^2 = \langle n|1 + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}|n\rangle$$

$$\Rightarrow |K_n|^2 = \langle n|n\rangle + \langle n|\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}|n\rangle$$

$$\Rightarrow \ |K_n|^2 = 1 + \ \langle n|\mathbf{n}|n\rangle$$

Sabemos que el operador $\mathbf{n}$ tiene el efecto, $\mathbf{n}|n\rangle = n|n\rangle$

$$\Rightarrow \ |K_n|^2 = 1 + \langle n|n|n\rangle$$

$$\Rightarrow \ |K_n|^2 = 1 + n\langle n|n\rangle$$

Usamos que $|n\rangle$ está normalizado

$$\Rightarrow \ |K_n|^2 = 1 + n \cdot 1$$

$$\Rightarrow \ |K_n|^2 = n + 1$$

De aquí concluimos que, salvo una posible fase, se cumple que $K_n = \sqrt{n+1}$. Por lo tanto, la ecuación (1) se convierte en:

$$\boxed{\mathbf{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle}$$

Ahora hacemos lo mismo pero para el operador de aniquilación. Sabemos que $\mathbf{a}|n\rangle$ tiene que ser proporcional a $|n-1\rangle$, lo que significa que:

$$C_n|n-1\rangle = \mathbf{a}|n\rangle, \qquad (2)$$

donde C_n es una constante. Al igual que antes, multiplicamos por el conjugado de cada lado y nos queda:

$C_n|n-1\rangle = \mathbf{a}|n\rangle$

$\Rightarrow \ \langle n-1|C_n^* C_n|n-1\rangle = \langle n|\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}|n\rangle$

$\Rightarrow \ |C_n|^2 \langle n-1|n-1\rangle = \langle n|\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}|n\rangle$

Usamos que queremos que $|n-1\rangle$ esté normalizado

$\Rightarrow \ |C_n|^2 = \langle n|\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}|n\rangle$

Usamos la definición del operado $\mathbf{n} := \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$

$\Rightarrow \ |C_n|^2 = \ \langle n|\mathbf{n}|n\rangle$

Sabemos que el operador $\mathbf{n}$ tiene el efecto, $\mathbf{n}|n\rangle = n|n\rangle$

$\Rightarrow \ |C_n|^2 = \langle n|n|n\rangle$

$\Rightarrow \ |C_n|^2 = n\langle n|n\rangle$

Usamos que $|n\rangle$ está normalizado

$\Rightarrow \ |C_n|^2 = n$

Esto implica que $C_n = \sqrt{n}$, salvo por una posible fase. Por lo tanto, de la ecuación (2) concluimos que:

$$\boxed{\mathbf{a}|n\rangle = \sqrt{n}|C_n\rangle}$$

Ejercicio 3 (4)

demuestra que la energía promedio para el modo k-ésimo, dad en la base $|n\rangle$ por la integral

$$\overline{U_k} = \frac{\varepsilon_0}{2T}\int_0^T \langle n|\mathbf{E}_k^{(-)}\mathbf{E}_k^{(+)}|n\rangle \, dt$$

tomando en cuenta las dos componentes de polarización lineal, es igual a $\overline{U}_k = \hbar\omega_k\left(\frac{1}{2}+n\right)$. ¿Qué relación tiene este resultado con la radiación de cuerpo negro propuesta por Planck?

Calculamos la integral del problema directamente:

$$\overline{U}_k = \frac{\varepsilon_0}{2T}\int_0^T \langle n|\mathbf{E}_k^{(-)}\mathbf{E}_k^{(+)}|n\rangle \, dt$$

Usamos la definición de $\mathbf{E}^{(+)}$ y $\mathbf{E}(-)$ vistas en clase

$$= \frac{\varepsilon_0}{2T}\int_0^T \langle n|\omega_k \mathbf{a}^\dagger{}_k e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, \omega_k \mathbf{a}_k e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}|n\rangle \, dt$$

Las exponenciales complejas se cancelan y queda:

$$= \frac{\varepsilon_0}{2T}\omega_k^2\int_0^T \langle n|\mathbf{a}^\dagger{}_k \mathbf{a}_k|n\rangle \, dt$$

Usamos ahora que $\mathbf{a}^\dagger{}_k \mathbf{a}_k = \hat{n_k}$ y nos queda:

$$= \frac{\epsilon_0}{2T}\omega_k^2\int_0^T \langle n|\hat{n_k}|n\rangle dt$$

Usamos que $|n\rangle$ es eigenvector de $\hat{n_k}$ con eigenvalor n_k

$$= \frac{\epsilon_0}{2T}\omega_k^2\int_0^T \langle n|n_k|n\rangle dt$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2T}\omega_k^2\int_0^T n\langle n_k|n\rangle dt$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2T}\omega_k^2 n_k\int_0^T dt$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2T}\omega_k^2 n_k T$$

$$= \frac{\epsilon_0\omega_k^2}{2}n_k$$

Este resultado nos dice que la intensidad promedio para el modo k-ésimo es proporcional a n_k (que se puede interpretar como el número de fotones en el estado k-ésimo). Esto se relaciona con la radiación de cuerpo negro de Planck en la que se propone que las energías de la luz están cuantizadas.