Óptica Tarea 4

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

14 de julio de 2021

Del libro Eugene Hecht, Óptica 3ra edición: Resolver los problemas 3.4, 3.6, 3.13, 3.17, 3.19, 3.21, 3.31, 3.32, 3.34, 3.38, y 3.41

Ejercicio 3.4: Una onda electromagnética se especifica (en MKS) por la siguiente función:

$$\vec{E} = (-3\widehat{i} + 3\sqrt{3}\ \widehat{j})(10^4 V/m)e^{i[\frac{1}{3}(\sqrt{5}x+2y)\pi\times 10^7 - 9{,}42\times 10^{15}t]}$$

Calcule a) la dirección en la que el campo oscila, b) el valor escalar de la amplitud del campo eléctrico, c) la dirección de propagación de la onda, d) el número de propagación y la longitud de onda, e) la frecuencia y la frecuencia angular y f) la velocidad.

a) Notamos por la fórmula de $\vec{E}$, que el vector $\vec{E}$ siempre tiene la dirección $(-3\widehat{i}+3\sqrt{3}\widehat{j})$ y lo que varía con el tiempo y la posición es solamente la amplitud de este vector. Por tanto la dirección en la que oscila el campo es $(\mathbf{-3\widehat{i}+3\sqrt{3}\widehat{j}})$

b) Para la magnitud, podemos usar que $|\vec{E}|^2 = \vec{E}\cdot\vec{E} = E_x\ E_x^* + E_y\ E_y^* + E_z\ E_z^*$ (por como se calcula el producto punto con números complejos)

$$\Rightarrow\ |\vec{E}|^2 = \left(-3\times 10^4 e^{i[\frac{1}{3}(\sqrt{5}x+2y)\pi\times 10^7 - 9{,}42\times 10^{15}t]}\right)\left(-3\times 10^4 e^{-i[\frac{1}{3}(\sqrt{5}x+2y)\pi\times 10^7 - 9{,}42\times 10^{15}t]}\right)$$
$$+\left(3\sqrt{3}\times 10^4 e^{i[\frac{1}{3}(\sqrt{5}x+2y)\pi\times 10^7 - 9{,}42\times 10^{15}t]}\right)\left(3\sqrt{3}\times 10^4 e^{-i[\frac{1}{3}(\sqrt{5}x+2y)\pi\times 10^7 - 9{,}42\times 10^{15}t]}\right)$$
$$= (-3\times 10^4)^2 + (3\sqrt{3}\times 10^4)^2 = 36\times 10^8$$

$$\Rightarrow\ |E| = \sqrt{36\times 10^8} = \mathbf{6\times 10^4 V/m}$$

c) Como vimos en clase, la expresión general para una onda plana armónica como ésta es: $\vec{E}_0\ \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_0)]$
Comparando con la expresión del problema, notamos que $\vec{k}\cdot\vec{r} = \frac{1}{3}(\sqrt{5}x+2y)\pi\times 10^7$, donde $\vec{r} = (x,y,z)$

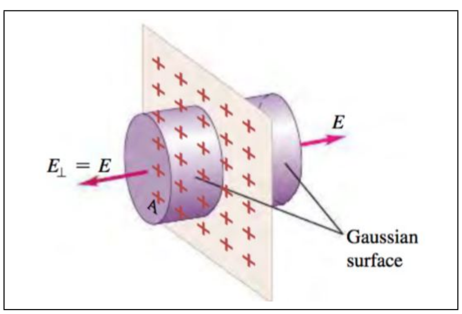
Entonces, podemos ver que $\tilde{\mathbf{k}} = \frac{1}{3}(\sqrt{5}\,\widehat{\mathbf{i}} + 2\widehat{\mathbf{j}})\pi \times \mathbf{10^7\ m^{-1}}$

d) El número de propagación es la magnitud del vector $\vec{k}$ y por tanto es:
$|\vec{k}| = \sqrt{\vec{k}\cdot\vec{k}} = \sqrt{[\frac{1}{3}(\sqrt{5}\,\widehat{\imath} + 2\widehat{\jmath})\pi \times 10^7]\cdot[\frac{1}{3}(\sqrt{5}\,\widehat{\imath} + 2\widehat{\jmath})\pi \times 10^7]}$
$= \sqrt{\frac{1}{3^2}(\pi\times 10^7)^2(\sqrt{5}\sqrt{5}+2*2)} = \sqrt{(\pi\times 10^7)^2} = \pi \times \mathbf{10^7 m^{-1}}$
Entonces la longitud de onda es: $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/(\pi\times 10^7) = \mathbf{2\times 10^{-7} m}$

e) Nuevamente, la forma general de una onda plana es $\vec{E}_0\ \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_0)]$
Comparando con la ecuación del problema, notamos que la frecuencia angular es de $\omega = \mathbf{9{,}42 \times 10^{15} \frac{rad}{s}}$
Luego, la frecuencia es de $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9{,}42\times 10^{15}}{2\pi} = \mathbf{1{,}5\times 10^{15}\ Hz}$

f) La velocidad se puede calcular sencillamente como $v = \frac{\omega}{k} = \frac{9{,}42\times10^{15}}{\pi\times10^7} \simeq \mathbf{3\times 10^8\ m/s}$

Ejercicio 3.6: Calcule la energía de entrada necesaria para cargar un condensador de placas paralelas, transportando carga de una placa a la otra. Suponga que la energía está almacenada en el campo entre las placas y calcule la energía por unidad de volumen, u_E de la región, es decir, ecuación (3.31). Pista: Puesto que el campo eléctrico aumenta durante el proceso, integre o utilice su valor medio $E/2$:



Primero calculamos el campo eléctrico en el espacio entre las placas. Si tenemos una sola placa con densidad de carga superficial σ, podemos calcular su campo eléctrico usando la ley de Gauss con la superficie gaussiana como la de la imagen (Un cilindro con área A).
Por simetría, el campo eléctrico E es perpendicular a la placa y tiene la misma magnitud en toda la superficie circular del cilindro. Entonces, el flujo total por la superficie gaussiana es de $2EA$, mientras que la carga encerrada por el cilindro es σA.
Usando la ley de Gauss tenemos que el flujo es igual a la carga encerrada entre ϵ_0, es decir $2EA = \sigma A/\epsilon_0 \quad\Rightarrow\quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ y apunta en la dirección ortogonal.

Por tanto, el campo en un capacitor de placas paralelas será la suma del campo de dos placas, que es $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$, donde $\sigma = q/A$ es la densidad de carga superficial.

Entonces, como dice la pista del problema, consideramos el valor medio de este campo, que será de $E/2 = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$.
Ahora suponemos que la carga está almacenada en el campo entre las placas, y como vimos en las notas, la energía por volumen de este campo eléctrico se calcula como $u_E = \dfrac{\epsilon_0 E^2}{2}$,

donde como dice la pista usamos el valor medio del campo y entonces queda:
$u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)^2}{2} = \frac{\sigma^2}{8\epsilon_0}$
Esta es la densidad de energía por unidad de volumen, por lo que para obtener la energía total hay que multiplicarla por el volumen entre placas (que es $d * A$ con d la distancia entre placas y A el área).
Entonces la energía total es:
$u_E(d * A) = \frac{\sigma^2}{8\epsilon_0} * d * A = \frac{\frac{q^2}{A^2}}{8\epsilon_0} * d * A = \mathbf{\frac{q^2 d}{8A\epsilon_0}}$

Ejercicio 3.13: Un láser proporciona unos pulsos de radiación EM en el vacío con una duración de $10^{-12}s$. Si la densidad de flujo radiante es de $10^{20}W/m^2$, calcule la amplitud del campo eléctrico del haz.

En las notas vimos que la densidad de flujo radiante se relaciona con la amplitud del campo eléctrico según la relación:
$I = \frac{c\epsilon_0}{2}E_0^2$
Entonces, la densidad de flujo radiante es de $10^{20}W/m^2$ y por tanto la amplitud de campo es:
$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 * 10^{20}W/m^2}{3 \times 10^8 m/s * 8{,}8542 \times 10^{-12}C^2/(Nm^2)}} = \mathbf{2{,}744 \times 10^{11}V/m}$

Ejercicio 3.17: ¿Cuántos fotones por segundo se emiten de una lámpara de luz amarilla de $100W$ si suponemos pérdidas térmicas despreciables y una longitud de onda cuasimonocromática de 550 nm? En realidad solamente alrededor de un $2{,}5\,\%$ de la potencia total disipada sale como radiación en una lámpara ordinaria de 100W.

Por la relación $c = \lambda\nu$, podemos calcular la frecuencia de la onda:
$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (1)$

Entonces, la energía de cada fotón es de $\mathcal{E} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \quad (por 1)$

$\Rightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda} \quad (2)$

Por otro lado, los $100W$ de la lámpara significa que emite $100J$ de energía por segundo (suponiendo que no hay pérdidas térmicas como dice el problema). Esta energía se consigue debido a muchos fotones, cada uno con una energía $\mathcal{E}$. Luego, para calcular la cantidad de fotones por segundo, podemos dividir la energía total por segundo entre la cantidad de energía de cada fotón:

$$N = \frac{100J}{\mathcal{E}} = \frac{100J}{\frac{hc}{\lambda}} \quad \text{Por (2)}$$
$$= \frac{(100J)\lambda}{hc} = \frac{100J\ (550 \times 10^{-9}m)}{(6{,}63 \times 10^{-34}m^2kg/s)(3 \times 10^8 m/s)} = \mathbf{2{,}77 \times 10^{20}}\ \textbf{fotones por segundo}$$

Ejercicio 3.19: Una fuente puntual cuasimonocromática isotrópica radia a razón de 100W ¿Cuál es la densidad de flujo a una distancia de 1m? ¿Cuáles son las amplitudes de los campos E , B en ese punto?

El problema nos dice que emite a una razón de $100W$, lo que significa una energía de $100J$ por segundo.
Luego, como es una fuente isotrópica, podemos pensar que la energía se distribuye en todas las direcciones con la misma intensidad.
Si nos imaginamos una esfera de una radio de $R = 1m$ que rodee la fuente, $100J$ de energía atraviesan esta esfera por segundo. La esfera tiene un área de $4\pi R^2$. Y por tanto, la energía por segundo por unidad de área en un punto a $1m$ de distancia es de: $I = \frac{100J/s}{4\pi R^2}$ y por ser isotrópica, vale lo mismo en todas las direcciones.

$$I = \frac{100J/s}{4\pi R^2} = \frac{100J/s}{4\pi(1m)^2} = \mathbf{7{,}96W/m^2}$$

Luego, por la relación vista en clase entre irradiancia y amplitud del campo eléctrico, $I = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2$

$$\Rightarrow \quad E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(7{,}96W/m^2)}{(8{,}854 \times 10^{-12}C^2/(Nm^2))(3 \times 10^8 m/s)}} = \mathbf{77{,}42V/m}$$

Y por la relación entre campo eléctrico y magnético, tenemos que:
$B_0 = E_0/c = \frac{77{,}42V/m}{3 \times 10^8 m/s} = \mathbf{2{,}58 \times 10^{-7}}$ **Tesla**

Ejercicio 3.21: ¿Cuál es el momento de un fotón de rayos X de $10^{19}\ Hz$

Primero deducimos la ecucación para calcular el momento de un fotón de la misma forma en que lo hace el Hecht.
Primero Maxwell propuso que cuando la luz incide en un material, se ejerce una presión sobre éste. Y demostró que la **presión de radiación** es igual a la densidad de energía de la onda. Es decir, la presión tiene un valor de u_E.

Luego, al multiplicar esta presión de radiación por el área sobre la que incide, nos da como resultado la fuerza que se está aplicando sobre el material: $F = Au_E$
Finalmente, la fuerza aplicada al material es igual a la tasa de cambio del momento, por lo que: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow Au_E = \frac{\Delta p}{\Delta t}$.
Y finalmente tenemos que el momento que lleva la luz es de:

$$\begin{aligned}
p &= A\ \Delta t u_E \\
&= A\Delta t\frac{\epsilon_0}{2}E_0^2 \quad \text{Por la fórmula para la densidad de energía del campo } E,\ \ u_E = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 \\
&= A\Delta t\frac{\epsilon_0}{2}\frac{2I}{c\epsilon_0} \quad \text{Por la relación entre } I \text{ y } E \text{ que dice: } \ I = \frac{c\epsilon_0}{2}E^2 \\
&= \frac{A\Delta t I}{c} \\
&= \frac{\mathcal{E}}{c} \quad \text{Donde } \mathcal{E} \text{ Es la energía del fotón, debido a que } I \text{ es la energía por unidad de área} \\
&\quad \text{por unidad de tiempo. Y por tanto, } \ IA\Delta t \text{ es la energía del fotón} \\
&= \frac{h\nu}{c} \quad \text{Por la relación entre energía y frecuencia de un fotón } \mathcal{E} = h\nu
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el momento es $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{(6{,}62 \times 10^{-34} m^2 kg/s)(10^{19} Hz)}{3 \times 10^8 m/s} = \mathbf{2{,}2 \times 10^{-23} Nm}$

Ejercicio 3.31: Una onda luminosa plana, armónica, polarizada linealmente tiene una intensidad de campo eléctrico dada por

$$E_z = E_0 \cos\left[\pi 10^{15}\left(t - \frac{x}{0{,}65c}\right)\right]$$

mientras viaja en un trozo de vidrio. Calcule:
a) La frecuencia de la luz;
b) su longitud de onda;
c) el índice de refracción del cristal.

a) Recordamos que la forma general de una onda armónica es $A\cos(kx - \omega t + \phi)$. Viendo la función del problema, podemos notar que la frecuencia angular de la onda (el coeficiente que multiplica a la t) es de $\omega = \pi\mathbf{10^{15}\ \frac{rad}{s}}$.
Luego, la frecuencia es de $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi 10^{15}\frac{rad}{s}}{2\pi} = 0{,}5 \times 10^{15} Hz = \mathbf{5 \times 10^{14} Hz}$

b) De nuevo, por la forma general de una onda armónica, el número de onda es el coeficiente de la x y en este caso es de: $k = \frac{\pi 10^{15}}{0{,}65c}$

Luego, la longitud de onda es: $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi 10^{15}}{0{,}65c}} = \dfrac{2 * 0{,}65 * 3 \times 10^{8} m/s}{10^{15}} = \mathbf{3{,}9 \times 10^{-7} m}$

c) Finalmente, la velocidad de propagación es: $v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\pi 10^{15} \frac{rad}{s}}{\frac{\pi 10^{15}}{0{,}65c}} = 0{,}65\ c$

Por lo que el índice de refracción es $n = \dfrac{c}{v} = \dfrac{c}{0{,}65c} = \dfrac{1}{0{,}65} = \mathbf{1{,}538}$

Ejercicio 3.32: ¿Cuál es la velocidad de la luz en el diamante si el índice de refracción es de 2.42?

Por la definición de índice de refracción: $n = \dfrac{c}{v}$ y entonces,

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^{8} m/s}{2{,}42} = \mathbf{1{,}24 \times 10^{8} m/s}$$

.

Ejercicio 3.34: Calcule el índice de refracción de un medio si quisiéramos reducir la velocidad de la luz en un 10 % comparada con su velocidad en el vacío?

Queremos que $v = 0{,}9c$.
Pero por la definición de índice de refracción, tenemos que $v = \dfrac{c}{n}$
Igualando las dos ecuaciones, tenemos que:
$0{,}9c = \dfrac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad 0{,}9 = \dfrac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \dfrac{1}{0{,}9} = \mathbf{1{,}11}$

Ejercicio 3.38: La luz amarilla de una lámpara de sodio ($\lambda_0 = 589nm$) cruza un depósito de glicerina (con índice de 1.47) de 20.0 cm de largo, en un tiempo t_1. Si la luz tarda t_2 en cruzar el mismo depósito cuando está lleno de disulfuro de carbono (con índice 1.63), calcule el valor de $t_2 - t_1$.

Supongo que los índices de refracción están dados para la luz en la longitud de onda que se está utilizando.
Entonces, la velocidad de la luz en la glicerina es de

$$v_1 = \frac{c}{n_1}$$

Y por tanto para atravesar una distancia $d = 20cm$ se toma un tiempo de:

$$t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{d}{c/n_1} = \frac{n_1 d}{c}$$

De forma similar para el disulfuro tenemos que:

$$t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{d}{c/n_2} = \frac{n_2 d}{c}$$

Entonces la diferencia de tiempos es de

$$t_2 - t_1 = \frac{n_2 d}{c} - \frac{n_1 d}{c} = \frac{d(n_2 - n_1)}{c} = \frac{0{,}2m(1{,}63 - 1{,}47)}{3 \times 10^8 m/s} = \mathbf{1{,}066 \times 10^{-10} s}$$

.

Ejercicio 3.41: Demuestre que para sustancias de baja densidad, como los gases, que tienen una frecuencia resonante única ω_0, el índice de refracción está dado por:

$$n \simeq 1 + \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Primero, usaremos que una expresión del tipo $(1+\epsilon)^n$ se puede aproximar como $(1+\epsilon)^n \simeq 1 + n\epsilon$ para $\epsilon << 1$.
Para comprobar esto, definimos $f(\epsilon) = (1+\epsilon)^n$ y desarrollamos su serie de Taylor alrededor de $\epsilon = 0$: $f(\epsilon) = f(0) + f'(0)\epsilon + f''(0)/2\epsilon^2 + ...$
Luego omitimos las potencias de ϵ por ser ϵ muy pequeño. Claramente $f(0) = 1$ y notamos que la derivada es $f'(\epsilon) = n(1+\epsilon)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = n$
Por lo tanto, la serie de Taylor nos dice que $f(\epsilon) \simeq 1 + n\epsilon$

Ahora sí, dado a que es un medio con una sola frecuencia resonante, se probó en las notas que la ecuación de dispersión es:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$
$$\Rightarrow \; n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}$$

Además, como se indica en el libro, para estas sustancias de baja densidad, el índice de refracción es $n \simeq 1$. Esto se puede ver en la ecuación de $n^2(\omega)$ ya que para una baja densidad se tiene que N es un número pequeño.

Entonces, si $n \simeq 1$, la ecuación de $n^2(\omega)$ nos dice que el término $\frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) << 1$.
Entonces podemos usar la aproximación demostrada antes con $\epsilon = \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$ y $n = 1/2$ para probar que:

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)} = (1+\epsilon)^n \simeq 1 + n\epsilon = 1 + \frac{1}{2}\frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Que es lo que se quería probar.