Variable Compleja Tarea 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

23 de octubre de 2020

Ejercicio 1

Define una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que sea $\mathbb{R}$ lineal pero no $\mathbb{C}$ lineal y que preserve el ángulo (orientado) de dos vectores.

Tomaré una función que 'estire' el eje real por un factor de 2 y que deje fijo al eje Imaginario. Esto porque claramente esta función mantiene el ángulo entre 2 vectores (el $(1,0)$ y el $(0,1)$) y es $\mathbb{R}$ lineal. Sin embargo, no es una función $\mathbb{C}$ lineal porque las funciones $\mathbb{C}$ lineales consisten en simplemente multiplicar por un complejo y multiplicar por un complejo solamente puede rotar el plano o 'amplificarlo' en todas las direcciones. Pero multiplicar por un complejo no puede 'estirar' el eje real y al mismo tiempo dejar el eje imaginario fijo como hace la función que presentaré.

Teniendo en cuenta esta intuición, un buen ejemplo sería buscar una función tal que $f(1) = 2$ y que $f(i) = i$.
Ahora vamos a pedirle a la función que sea $\mathbb{R}$ lineal y usar esta condición para encontrar la expresión de la función para un $z = x + iy$ general.

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= f(x) + f(iy) && \text{queremos que f separe sumas} \\ &= xf(1) + yf(i) && \text{queremos que f saque reales} \\ &= x(2) + y(i) \\ &= 2x + iy \end{aligned}$$

Entonces, la función que usaré de ejemplo es:

$$f(z) = f(x+iy) = 2x + iy$$

Y ahora sí probamos lo que se pide.
Primero vemos que es $\mathbb{R}$ lineal (aunque ya lo sabemos porque la construimos para que lo fuera). Sea $z = x_1 + iy_1$ y $w = x_2 + iy_2$ y sea λ real. Entonces:

- Separa sumas:

$$\begin{aligned} f(z+w) &= f((x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)) = f((x_1+x_2)+(y_1+y_2)i) \\ &= 2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i \quad \text{por cómo definimos la función} \\ &= (2x_1+iy_1)+(2x_2+iy_2) \\ &= f(x_1+iy_1)+f(x_2+iy_2) = f(z)+f(w) \end{aligned}$$

- Saca escalares reales:

$$\begin{aligned} f(\lambda z) &= f(\lambda(x_1+iy_1)) = f(\lambda x_1 + i\lambda y_1) \\ &= 2(\lambda x_1) + i(\lambda y_1) \quad \text{Usamos la def. de la función, tomando en cuenta que como } \lambda \\ & \text{es real, entonces } \lambda x_1, \lambda y_1 \text{ son la parte real e imaginaria (respectivamente) de } \lambda x_1 + i\lambda y_1 \\ &= \lambda(2x_1+iy_1) \\ &= \lambda f(z) \end{aligned}$$

Ahora probamos que mantiene el ángulo entre 2 vectores (particulares). Escogemos como vectores a 1 y a i, el ángulo entre ellos es obviamente de 90^o.
Sólo para molestar, lo comprobaré con la expresión que tenemos para ángulo entre dos complejos:

$$\text{ángulo entre 1 , i:}$$
$$= \arccos\left(\frac{\langle 1, i\rangle}{|1||i|}\right) = \arccos\left(\frac{Re(1\cdot \bar{i})}{1\cdot 1}\right) = \arccos\left(\frac{Re(-i)}{1}\right) = \arccos(0) = 90^o$$

Luego le aplicamos la transformación y nos queda $f(1) = 2$, $f(i) = i$. Y el ángulo entre estos dos puntos sigue siendo claramente de 90^0. Que podemos comprobar nuevamente:

$$\text{ángulo entre 2 , i:}$$
$$= \arccos\left(\frac{\langle 2, i\rangle}{|2||i|}\right) = \arccos\left(\frac{Re(2\cdot \bar{i})}{2\cdot 1}\right) = \arccos\left(\frac{Re(-2i)}{2}\right) = \arccos(0) = 90^o$$

Por lo que f preserva el ángulo entre $1, i$.

Por último, probamos que no es $\mathbb{C}$ lineal. Sabemos que si f fuera $\mathbb{C}$ lineal, debería de tenerse la igualdad $f(i) = if(1)$.
Sin embargo, por cómo definimos la función, $f(i) = i$
Pero por otro lado, $if(1) = i(2) = 2i$.
Por lo tanto $f(i) \neq if(1)$.
Y por tanto f no es $\mathbb{C}$ lineal.

Ejercicio 2

Muestra que la transformación $z \to \frac{1}{z}$ produce una rotación de 180^o en la esfera de Riemann S^2 dejando al eje x_1 fijo.

Consideramos un punto $x + iy \in \mathbb{C}$. Como vimos en clase, un punto de esta forma en el plano complejo tiene asociado el punto en la esfera de Riemman dado por la inversa de la proyección estereográfica:

$$\phi^{-1}(x+iy) = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$$

Ahora bien, cuando le aplicamos la función $z \to \dfrac{1}{z}$ al punto $x + iy$ en el plano complejo, la transformación lo manda a:

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$$

Ahora veamos a qúe punto en la esfera de Riemman corresponde este punto del plano complejo. Para esto le aplicamos la inversa de la proyección estereográfica:

$$\phi^{-1}\left(\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2(\frac{x}{x^2+y^2})}{1+(\frac{x}{x^2+y^2})^2+(\frac{-y}{x^2+y^2})^2}, \frac{2(\frac{-y}{x^2+y^2})}{1+(\frac{x}{x^2+y^2})^2+(\frac{-y}{x^2+y^2})^2}, \frac{-1+(\frac{x}{x^2+y^2})^2+(\frac{-y}{x^2+y^2})^2}{1+(\frac{x}{x^2+y^2})^2+(\frac{-y}{x^2+y^2})^2}\right)$$

$$= \left(\frac{2(\frac{x}{x^2+y^2})}{\frac{(x^2+y^2)^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}}, \frac{2(\frac{-y}{x^2+y^2})}{\frac{(x^2+y^2)^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}}, \frac{\frac{-(x^2+y^2)^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}}{\frac{(x^2+y^2)^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{2x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2+x^2+y^2}, \frac{-2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2+x^2+y^2}, \frac{-(x^2+y^2)^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2+x^2+y^2}\right)$$

Dividimos el numerador y denominador por $x^2 + y^2$ en las tres coordenadas

$$= \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)+1}, \frac{-2y}{(x^2+y^2)+1}, \frac{-(x^2+y^2)+1}{(x^2+y^2)+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{-2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-(x^2+y^2)+1}{1+x^2+y^2}\right)$$

Entonces, vemos que el punto $z = x + iy$ que en la esfera de Reimann corresponde con:

$$\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right) \qquad (1)$$

Tras aplicarle la transformación $z \to 1/z$, su punto correspondiente en la esfera pasa a ser:

$$\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{-2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-(x^2+y^2)+1}{1+x^2+y^2}\right) \qquad (2)$$

Es decir, viendo todo desde la esfera de Riemann, la transformación manda el punto (1) al punto (2). Que se puede ver que esta correspondencia consiste en dejar la primera coordenada fija y cambiar de signo las otras dos. Es decir, un punto (x_1, x_2, x_3) de la esfera es mandado a $(x_1, -x_2, -x_3)$ cuando se aplica la función $1/z$ del plano complejo.

Ahora veremos cómo se ve una rotación de 180^o que deja fijo al eje x_1 para comprobar que sí se ve igual al resultado que obtuvimos para $1/z$ y probar así el resultado que se busca.
Llamemos T a esta rotación y veamos cuál es su expresión.
Como la rotación deja fijo al eje x_1, entonces debe de cumplir que $T(1,0,0) = (1,0,0)$.
Luego, como rota 180^o al eje x_2 con respecto al eje x_1, se puede visualizar que debe de mandar al punto $(0,1,0)$ a $(0,-1,0)$ tras la rotación.
Y como también rota 180^o al eje x_3, entonces se visualiza que debe de mandar al punto $(0,0,1)$ hasta $(0,0,-1)$.

Y finalemente, usando estos resultados y usando que una rotación es lineal, la expresión general es:
$T(x_1,x_2,x_3) = T(x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)) = x_1T(1,0,0)+x_2T(0,1,0)+x_3T(0,0,1) = x_1(1,0,0) + x_2(0,-1,0) + x_3(0,0,-1) = (x_1,-x_2,-x_3)$

Con lo que vemos que una rotación de 180^o con respecto al eje x_1 tiene la expresión $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1,-x_2,-x_3)$

Pero esto es justo lo que probamos que hace la transformación $z \to 1/z$ en la esfera.
Por lo tanto, la función $z \to 1/z$ realiza una rotación de 180^o de la esfera de Riemann dejando el eje x_1 fijo.

Ejercicio 3

Construye una transformación de Mobius $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ tal que transforme a la circunferencia unitaria $\{|z| = 1\}$ en la circunferencia con centro en $3+2i$ y radio 2

Lo podemos hacer de una forma muy sencilla. Primero multiplicamos todo por 2, al hacer esto, estamos duplicando el radio del círculo unitario.
Luego, lo trasladamos por $3+2i$ para pasar su centro a este punto. Y listo, ya transformamos la circunferencia unitaria en la de centro $3+2i$ con radio 2.
Entonces, la transformación que buscamos puede ser:

$$T(z) = 2z + (3+2i)$$

Vemos que efectivamente cumple con lo esperado:

- **Es de Mobius:** Claramente T tiene la forma de una transformación de Mobius con $a = 2$, $b = 3+2i$, $c = 0$, $d = 1$ y cumple que $ad - bd \neq 0$

- **Manda la circunferencia unitaria a la circunferencia de centro $3+2i$ y radio 2**

  Para esto, vamos a fijarnos solamente en 3 puntos de la circunferencia unitaria y ver que se mandan a 3 puntos de la circunferencia de radio 2 y centro $3+2i$.

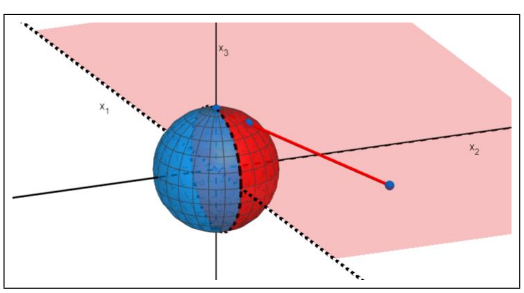
  Consideramos los puntos $z_1 = 1, z_2 = i$, $z_3 = -1$ tres puntos en la esfera unitaria y calculamos sus imágenes:

  - $w_1 = T(z_1) = T(1) = 2(1) + (3 + 2i) = 5 + 2i$. Vemos que pertenece a la circunferencia de centro $3+2i$ y radio 2 porque $|(5+2i)-(3+2i)| = |2| = 2$
  - $w_2 = T(z_2) = T(i) = 2(i) + (3 + 2i) = 3 + 4i$. Vemos que pertenece a la circunferencia de centro $3+2i$ y radio 2 porque $|(3+4i)-(3+2i)| = |2i| = 2$
  - $w_3 = T(z_3) = T(-1) = 2(-1) + (3 + 2i) = 1 + 2i$. Vemos que pertenece a la circunferencia de centro $3+2i$ y radio 2 porque $|(1+2i)-(3+2i)| = |-2| = 2$

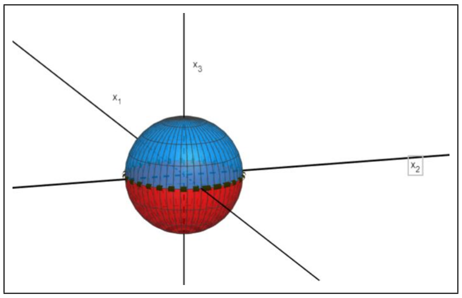
En clase vimos que una transformación de Mobius manda una circunferencia en otra circunferencia. Entonces, esta transformación T debe de mandar la circunferencia unitaria en alguna otra circunferencia.
Para determinar a qué circunferencia es mandada la circunferencia unitaria, notamos arriba que tres puntos eran mandados a tres puntos de la circunferencia de centro $3+4i$ y radio 2. Pero es un resultado conocido de la geometría que con 3 puntos se determina de manera única una circunferencia.
Por tanto, la circunferencia a la que es mandada la circunferencia unitaria bajo la transformación T debe de ser aquélla de radio 2 y centro $3+2i$.

Ejercicio 4

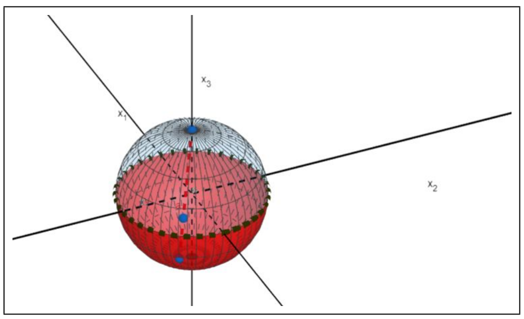
¿Existe una transformación de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que lleve al semiplano superior (abierto) en el disco unitario $\{|z| < 1\}$? ¿ Puede ser holomorfa? ¿Se puede extender esta función al plano extendido $\mathbb{C}^*$, incluyendo al eje real en el semi-plano superior y a la frontera del disco? Si tu respues es sí, exhibe una y muestra que cumple lo que se pide



Construiremos la función como sigue:
1) Primero usamos la inversa de la proyección estereográfica $\Phi^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ para convertir al plano complejo en la esfera unitaria.
En la imagen se observa como el semiplano superior (pintado de rojo) se proyecta al hemisferio de la esfera con $x_2 > 0$ (la parte de la esfera de color rojo).
El eje real del plano complejo (que no forma parte del semiplano abierto) se muestra en una línea punteada y su imagen formará el círculo máximo que se encuentra punteado en la esfera (con un hoyo en el polo norte si no se considera el punto al infinito).



2) Luego, realizaremos una rotación $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de 90^o con respecto al eje x_1, que transorma el hemisferio que teníamos pintado de rojo en la imagen anterior en el hemisferio sur de la esfera.
Y el círculo punteado de antes se convierte ahora en el ecuador de la esfera (y ahora el hoyo que se tenía en el polo norte pasa a estar en el punto $(0,1,0)$.



3) Finalmente aplicamos la proyección estereográfica Φ y el hemisferio sur marcado de rojo se transforma en el interior del círculo unitario.

Entonces, vemos que componiendo estas funciones como $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} = \Phi \circ R \circ \Phi^{-1}$ obtenemos la función que buscamos que transforma el semiplano superior (abierto) en el interior del círculo unitario. Además, la frontera del semiplano se transforma en la frontera del círculo unitario (con un posible hoyo en $0+i$ si no se consideró el plano extendido)

Las expresiones para las 3 funciones en cuestión son:

- **Inversa de la proyección:** $\Phi^{-1}(x+iy) = \left(\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}, \dfrac{2y}{1+x^2+y^2}, \dfrac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$

- **Rotación:** Queremos una rotación R gire 90^o con respecto al eje x_1.
  Como $(1,0,0)$ se encuentra en el eje de rotación, no se mueve y se debe de cumplir que $R(1,0,0) = (1,0,0)$
  Por otro lado, el punto $(0,1,0)$ debe de ser rotado 90^o, lo cual es fácil de visualizar (viendo la segunda imagen) que lo llevará a $(0,0,-1)$. Por lo tanto, $R(0,1,0) = (0,0,-1)$
  Finalmente, el punto $(0,0,1)$ debe de ser rotado 90^o, lo cual es fácil de visualizar que lo llevará a $(0,1,0)$. Por lo tanto, $R(0,0,1) = (0,1,0)$

  Luego, como una rotación es una transformación lineal, podemos usar la linealidad para obtener una expresión general de $R(x_1,x_2,x_3)$ usando los resultados anteriores:
  $R(x_1,x_2,x_3) = x_1R(1,0,0) + x_2R(0,1,0) + x_2R(0,0,1) = x_1(1,0,0) + x_2(0,0,-1) + x_3(0,1,0) = (x_1, x_3, -x_2)$
  Entonces la rotación es:

$$R(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_3, -x_2)$$

- **Proyección estereográfica:** La proyección es:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}$$

Ahora componemos estas tres funciones como mencionamos antes para formar la función $f(x+iy)$:

$$\begin{aligned}
f(x+iy) &= \Phi \circ R \circ \Phi^{-1}(x+iy) \\
&= \Phi \circ R \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}, \frac{-2y}{1+x^2+y^2} \right) \quad \text{por la def. de R} \\
&= \frac{\frac{2x}{1+x^2+y^2}}{1-\frac{-2y}{1+x^2+y^2}} + i\frac{\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}}{1-\frac{-2y}{1+x^2+y^2}} \\
&= \frac{\frac{2x}{1+x^2+y^2}}{\frac{1+2y+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}} + i\frac{\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}}{\frac{1+2y+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}} \\
&= \frac{2x}{x^2+(1+y)^2} + i\frac{-1+x^2+y^2}{x^2+(1+y)^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{f(x+iy) = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2} + i\frac{-1+x^2+y^2}{x^2+(1+y)^2}}}$$

Ahora que ya tenemos la expresión para f, probamos que sí cumple con lo que se nos pide:

1. **Probamos que manda el plano superior al disco unitario:**
   Aunque por la construcción ya sabemos que cumple esto, lo probamos a partir de la expresión de f:
   Sea $x+iy$ un punto del plano superior abierto (es decir $y > 0$) Entonces, su imagen bajo f es $f(x+iy) = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2} + i\frac{-1+x^2+y^2}{x^2+(1+y)^2}$.
   Probamos que esta imagen se encuentra en el disco unitario abierto sacando su norma. Su norma (al cuadrado) es:

$$\left(\frac{2x}{x^2+(1+y)^2}\right)^2 + \left(\frac{-1+x^2+y^2}{x^2+(1+y)^2}\right)^2 = \frac{4x^2+(x^2+y^2-1)^2}{(x^2+(1+y)^2)^2}$$

   Hay que probar que este nḿero es menor a 1.
   O lo que es lo mismo, hay que probar que:

$$4x^2+(x^2+y^2-1)^2 < (x^2+(1+y)^2)^2$$

Para ver cómo probar esto, simplificamos esta expresión de ambos lados:

$$
\begin{aligned}
&4x^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2 < (x^2 + (1 + y)^2)^2 \\
\Leftrightarrow\ \ & 4x^2 + x^4 + y^4 + 1 - 2x^2 - 2y^2 + 2x^2y^2 < (x^2 + y^2 + 2y + 1)^2 \\
\Leftrightarrow\ \ & 4x^2 + x^4 + y^4 + 1 - 2x^2 - 2y^2 + 2x^2y^2 < x^4 + y^4 + 4y^2 + 1 + 2x^2y^2 + 4x^2y + 2x^2 + 4y^3 + 2y^2 + 4y \\
\Leftrightarrow\ \ & 2x^2 + x^4 + y^4 + 1 - 2y^2 + 2x^2y^2 < x^4 + y^4 + 6y^2 + 1 + 2x^2y^2 + 4x^2y + 2x^2 + 4y^3 + 4y \\
\Leftrightarrow\ \ & -2y^2 < 6y^2 + 4x^2y + 4y^3 + 2y^2 + 4y \\
\Leftrightarrow\ \ & 0 < 8y^2 + 4x^2y + 4y^3 + 4y
\end{aligned}
$$

Entonces, si $x + iy$ pertenece al semiplano superior abierto, se tiene que $y > 0$ y por tanto, se ve que $0 < 8y^2 + 4x^2y + 4y^3 + 4y$ porque cada uno de estos términos es mayor a 0. Luego, podemos seguir la deducción anterior en sentido contrario hasta llegar a que $4x^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2 < (x^2 + (1 + y)^2)^2$, lo que implica que $\dfrac{4x^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}{(x^2 + (1 + y)^2)^2} < 1$. Que significa que la norma de la imagen bajo f es menor a 1 y por tanto pertenece al disco unitario abierto.

2. **Continua:** La función $f = \dfrac{2x}{x^2 + (1 + y)^2} + i\dfrac{-1 + x^2 + y^2}{x^2 + (1 + y)^2}$ es continua porque es el cociente de expresiones continuas y el denominador sólo se anula en $x = 0, y = -1$ que no es un punto del plano superior abierto así que no nos interesa.

3. **Biyectiva:** La función es biyectiva por cómo se construyó.
   Pues es una composición $f = \Phi \circ R \circ \Phi^{-1}$
   Y la función Φ^{-1} primero manda el semiplano superior a un hemisferio de la esfera de forma biyectiva. Luego la función R rota este hemisferio y lo transforma en el hemisferio sur de forma biyectiva. Finalmente la proyección Φ manda en hemisferio sur de forma biyectiva al círculo unitario abierto.
   Incluso, se puede ver que la f tiene una función inversa dada por $f^{-1} = \Phi^{-1} \circ \mathcal{R} \circ \Phi$
   Donde $\mathcal{R}$ es una rotación de 90 grados respecto al eje x_1 pero en sentido opuesto a R.

4. **Holomorfa:**
   Para ver que $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + (1 + y)^2} + i\dfrac{-1 + x^2 + y^2}{x^2 + (1 + y)^2}$ es holomorfa en el semiplano superior abierto, primero hay que ver que es diferenciable en el sentido real, lo cuál está claro porque el es una función racional en la que el denominador no se anula en el plano superior.
   Luego, calculamos las derivadas de u y de v para revisar si cumple las condiciones de Cauchy-Riemann:

   - $u_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2x}{x^2 + (1 + y)^2}\right) = \dfrac{[x^2 + (1 + y)^2](2) - (2x)(2x)}{[x^2 + (1 + y)^2]^2} = \dfrac{-2x^2 + 2(1 + y)^2}{[x^2 + (1 + y)^2]^2}$

- $u_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2x}{x^2+(1+y)^2}\right) = \dfrac{[x^2+(1+y)^2](0) - 2x(2)(1+y)}{[x^2+(1+y)^2]^2} = \dfrac{-4x(1+y)}{[x^2+(1+y)^2]^2}$
- $v_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-1+x^2+y^2}{x^2+(1+y)^2}\right) = \dfrac{[x^2+(1+y)^2](2x) - (-1+x^2+y^2)2x}{[x^2+(1+y)^2]^2}$
  $= \dfrac{2x(1+y)^2 + 2x - 2xy^2}{[x^2+(1+y)^2]^2} = \dfrac{2x+4xy+2xy^2+2x-2xy^2}{[x^2+(1+y)^2]^2} = \dfrac{4x(1+y)}{[x^2+(1+y)^2]^2}$
- $v_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-1+x^2+y^2}{x^2+(1+y)^2}\right) = \dfrac{[x^2+(1+y)^2](2y) - [-1+x^2+y^2](2)(1+y)}{[x^2+(1+y)^2]^2}$
  $= \dfrac{2x^2y+2y+4y^2+2y^3+2-2x^2-2y^2+2y-2x^2y-2y^3}{[x^2+(1+y)^2]^2}$
  $= \dfrac{2y^2+2+4y-2x^2}{[x^2+(1+y)^2]^2} = \dfrac{-2x^2+2(1+y)^2}{[x^2+(1+y)^2]^2}$

  Vemos entonces qeu se cumple que $u_x = v_y$ y que $u_y = -v_x$. Por lo que se cumplen las ecuaciones de Cauchy Riemann.

  Estas condiciones se cumplen en todo el semiplano abierto, por lo que la función es holomorfa en este conjunto.

¿Se puede extender esta función al plano extendido incluyendo al eje real?

Sí.
Utilizamos la misma definición de f pero ahora incluimos el eje real y el punto al infinito. Si observamos las imágenes, como se mencionó antes, vemos que el eje real (que se encuentra punteado) es mandado a la frontera del círculo unitario (con un hoyo en el punto $0+i$).

Por otro lado, el punto al infinito es mandado a i bajo f.
Esto se puede ver en la construcción de $f = \Phi \circ R \circ \Phi^{-1}$.
Pues primero la proyección estereográfica inversa manda el punto al infinito al polo norte. Luego la rotación manda este polo norte a $(0,1,0)$ y finalmente la proyección estereográfica lo manda a i.

Con esto, tenemos que la función manda el plano superior extendido al círculo unitario cerrado. Mandando la parte abierta del plano a la parte interior del círculo. Mandando el eje real a la frontera del plano (excepto i). Y mandando el punto al infinito a i.

Ejercicio 5.

Define un dominio en $\mathbb{C}$ donde la función $\sqrt{z^2+1}$ sea holomorfa utilizando la rama principal del logaritmo

Primero vemos que podemos escribir la función $\sqrt{z^2+1}$ como $e^{ln(\sqrt{z^2+1})} = e^{\frac{1}{2}ln(z^2+1)}$

Ahora bien, esta función es una composición de varias funciones (la exponencial, z^2+1 y el logaritmo). Queremos que esta composición sea holomorfa, y la única función problemática de éstas es el logaritmo natural.
Entonces intentaremos restringir el dominio de forma tal que $ln(z^2+1)$ no nos traiga problemas, para lo que necesitamos que z^2+1 no caiga en el corte que definimos para la rama principal de logaritmo.

Es decir, necesitamos que z^2+1 tenga argumento dentro de $(-\pi, \pi)$. Entonces, buscaré los complejos z problemáticos, es decir, aquéllos tales que z^2+1 es un real negativo o el 0 (porque logaritmo natural de 0 tampoco existe)
Representamos z por $x+iy$ con x, y reales y vemos cuáles son los puntos problemáticos

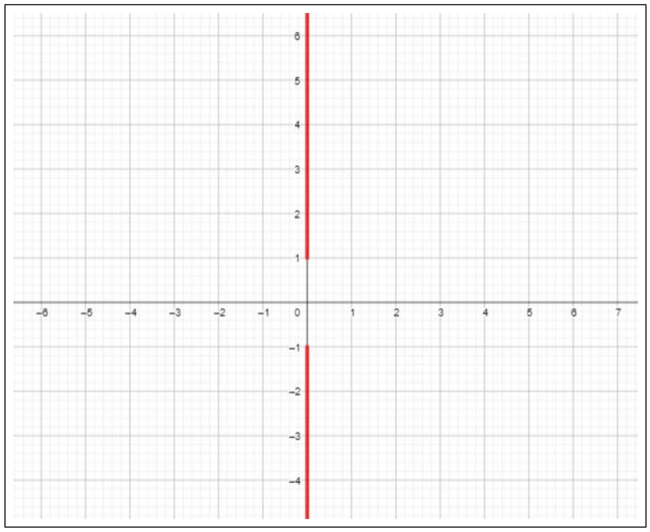
$$
\begin{aligned}
& z^2+1 \quad \text{es un real negativo o el } 0 \\
\Rightarrow\ & (x+iy)^2+1 \ \text{ es un real negativo o el } 0 \\
\Rightarrow\ & x^2-y^2+2xyi+1 \ \text{ es un real negativo o el } 0 \\
\Rightarrow\ & \begin{cases} x^2-y^2+1 \leq 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

La segunda ecuación nos deja con $x=0$ ó $y=0$. Pero vemos que el caso $y=0$ es imposible porque eso dejaría a la primera ecuación como $x^2+1 \leq 0$, lo cual es imposible para x real. Entonces, se debe de tener que $x=0$. Lo que nos deja la segunda ecuación como $1-y^2 \leq 0 \Rightarrow y^2 \geq 1$ y entonces $y \geq 1$ ó $y \leq -1$.

Por tanto, los puntos problemáticos, es decir, los que al aplicar z^2+1 caen en el corte principal de logaritmo y por tanto no nos permiten hacer la operación $e^{\frac{1}{2}ln(z^2+1)}$, son aquéllos que cumplen:

$$
z = x+iy \text{ con } \begin{cases} x=0 \\ y \geq 1 \text{ ó } y \leq -1 \end{cases}
$$

Y entonces el dominio adecuado para que a la función original sea holomorfa con la rama principal del logaritmo es todos los complejos $z=x+iy$ excepto estos puntos problemáticos.


6
5
4
3
2
1
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
−1
−2
−3
−4