Ecuaciones diferenciales I   Tarea 13   Tomás Ricardo Basile Álvarez

1) $\frac{dx}{dt} = -y+z$
$dy/dt = 2x-3y+z$
$dz/dt = x-y-z$
$\rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Buscamos eigenvalores:

$$\left| \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda\left[(-3-\lambda)(-1-\lambda)+1\right] + \left[2(-1-\lambda)-1\right] + \left[-2+\lambda+3\right] = 0 \rightarrow -\lambda^3-4\lambda^2-5\lambda-2=0$$

probando vemos que $\lambda_1=-1$ es una raíz
$\rightarrow$ le reducimos el orden $\lambda+1 \,\big|\, -\lambda^3-4\lambda^2-5\lambda-2 = \lambda^2+3\lambda+2=0 \nearrow \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$

$\rightarrow \lambda_1 = -1$ con multiplicidad 2 , $\lambda_2=-2$

- Eigenvectores: $\underline{\lambda=-1}$:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ $x-y+z=0$ $\quad z=y-x=0$
$2x-2y+z=0 \quad \rightarrow z=2y-2x=0 \rightarrow$
$x-y=0 \quad \rightarrow \boxed{x=y}$

eigenvector: $\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ para $x=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sólo tenemos un eigenvector pero necesitaríamos 2 por la multiplicidad $\rightarrow$ Buscamos en:

$$\mathrm{Nuc}\left((A-\lambda I)^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -x+y=0 \\ z \text{ es libre} \end{matrix}$$

El vector correspondiente a $x=y$ ya lo consideramos, el otro vector es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \underline{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Por la teoría, una solución al sistema es de la forma $e^{At}\bar{v}$ para cualquier $\bar{v}$

$$= e^{At}\bar{v} = e^{\lambda t}e^{At-\lambda t}\bar{v} = \underbrace{e^{\lambda t}\left(I\bar{v} + t(A-\lambda I)\bar{v} + \frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2\bar{v} + \frac{t^3}{6}(A-\lambda I)^3\bar{v} + \dots\right)}_{\text{solución al sistema } \forall \bar{v} \text{ y todo } \lambda}$$

Por el desarrollo de $e^{At-\lambda t}$

.) Si en esta solución metemos el valor $\lambda_1=-1$ con el vector $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ estratégicamente, por construcción sabemos que $(A-\lambda I)\bar{v}_1=0$ y los demás términos también valen 0

$$\Rightarrow e^{\lambda_1 t}(I\bar{v}_1) = \underline{e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

..) Si metemos $\lambda_1=-1$ y el vector $v_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, todos los término a partir del cuadrático son 0 porque $v_2 \in \mathrm{Nuc}((A-\lambda I)^2)$

$$\Rightarrow e^{\lambda_1 t}(v_1 + t(A-\lambda I)\bar{v}) = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underline{e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

- Eigenvector de $\lambda_2 = -2$

$$\text{Nuc}\,(A-\lambda I) = \text{Nuc}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{matrix} \rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow -y+z=0 \Rightarrow z = y \qquad \therefore \text{ eigenvector: } \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

para $y=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ La solución es $e^{\lambda_2 t}\,\bar{v} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ La solución general es: $\bar{x} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + c_3 e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

o bien:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$
$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{-2t}$$
$$z(t) = c_2 e^{-t} + c_3 e^{-2t}$$

$$= e^{-t}\left(c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}\right) + c_3 e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Encontrar la solución a: $\dot{X} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \bar{X} + \begin{pmatrix} 4e^t \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Primero resolvemos la homogénea: $\dot{X} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \bar{X}$

eigenvalores: $\left| \begin{pmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \rightarrow (4-\lambda)(-2-\lambda) + 10 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1+i \\ \lambda_2 = 1-i \end{matrix}$

Complejos conjugados. buscamos el eigenvector de $\lambda_1 = 1+i$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 3-i & 5 \\ -2 & -3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} (3-i)x + 5y = 0 \ldots (1) \\ -2x + (-3-i)y = 0 \ldots (2) \end{matrix} \rightarrow y = -\frac{3-i}{5} x = \frac{-3+i}{5} x$

vemos que esta solución también satisface (2) ✓

$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ \frac{-3+i}{5} x \end{pmatrix}$ para $x = 5 \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -3+i \end{pmatrix}$

Entonces la solución es: $e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 5 \\ -3+i \end{pmatrix} = e^t(\cos(t) + i\,\text{sen}(t)) \begin{pmatrix} 5 \\ -3+i \end{pmatrix}$

$$= e^t \begin{pmatrix} 5\cos(t) + 5i\,\text{sen}(t) \\ -3\cos(t) - \text{sen}(t) + i\cos(t) - 3i\,\text{sen}(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ -3\cos(t) - \text{sen}(t) \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} 5\,\text{sen}(t) \\ \cos(t) - 3\,\text{sen}(t) \end{pmatrix}$$

Por la teoría, la parte real e imaginaria son soluciones independientes:

$$\bar{X}_{\text{homogénea}} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ -3\cos(t) - \text{sen}(t) \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 5\,\text{sen}(t) \\ \cos(t) - 3\,\text{sen}(t) \end{pmatrix}$$

Solución particular: Como tenemos dos soluciones indep. La matriz Fundamental es:

$$\mathcal{X}(t) = \begin{pmatrix} 5\cos(t) & 5\,\text{sen}(t) \\ -3\cos(t) - \text{sen}(t) & \cos(t) - 3\,\text{sen}(t) \end{pmatrix} e^t \rightarrow \mathcal{X}(0) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{X}^{-1}(0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

por la teoría: $e^{At} = \mathcal{X}(t)\,\mathcal{X}^{-1}(0) = e^t \begin{pmatrix} 5\cos(t) & 5\,\text{sen}(t) \\ -3\cos(t) - \text{sen}(t) & \cos(t) - 3\,\text{sen}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 3/5 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) + 3\,\text{sen}(t) & 5\,\text{sen}(t) \\ -2\,\text{sen}(t) & \cos(t) - 3\,\text{sen}(t) \end{pmatrix} e^t$$

Por la teoría, sabemos que la solución del problema completo es:

$$\bar{X}(t) = e^{At} e^{-At_0} \bar{X}(t_0) + e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{-As} f(s)\, ds$$

Son $t_0 = 0$ $\quad \bar{X}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f(s) = \begin{pmatrix} 4e^{s}\cos(s) \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \bar{x}(t) = e^{At} \int_{0}^{t} e^{-As} f(s)\, ds = e^{At} \int_0^t \begin{pmatrix} (\cos(-s) + 3\,\text{sen}(-s))e^{-s} & 5\,\text{sen}(-s)\, e^{-s} \\ -2\,\text{sen}(-s)\, e^{-s} & (\cos(-s) - 3\,\text{sen}(-s))e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^{s}\cos(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

$$= e^{At} \int_0^t \begin{pmatrix} (\cos(s) - 3\,\text{sen}(s))e^{-s} & -5\,\text{sen}(s)\, e^{-s} \\ 2\,\text{sen}(s)\, e^{-s} & (\cos(s) + 3\,\text{sen}(s))e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^{s}\cos(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

$$= e^{At} \int_0^t \begin{pmatrix} 4\cos^2(s) - 12\cos(s)\,\text{sen}(s) \\ 8\cos(s)\,\text{sen}(s) \end{pmatrix} ds$$

$$= e^{At} \begin{pmatrix} 2s + \text{sen}(2s) - 6\,\text{sen}^2(s) \\ 4\,\text{sen}^2(s) \end{pmatrix} \Bigg|_0^t = e^{At} \begin{pmatrix} 2t + \text{sen}(2t) - 6\,\text{sen}^2(t) \\ 4\,\text{sen}^2(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos(t) + 3\,\text{sen}(t))e^{t} & 5\,\text{sen}(t)\, e^{t} \\ -2\,\text{sen}(t)\, e^{t} & (\cos(t) - 3\,\text{sen}(t))e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t + 2\,\text{sen}(t)\cos(t) - 6\,\text{sen}^2(t) \\ 4\,\text{sen}^2(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2t\cos(t) + 6t\,\text{sen}(t) + 2\,\text{sen}(t)\cos^2(t) + \cancel{6\,\text{sen}^2(t)\cos(t)} - \cancel{6\cos(t)\,\text{sen}^2(t)} - 18\,\text{sen}^3(t) + 20\,\text{sen}^3(t))\, e^{t} \\ (-4t\,\text{sen}(t) - \cancel{4\,\text{sen}^2(t)\cos(t)} + \cancel{12\,\text{sen}^3(t)} + \cancel{4\cos(t)\,\text{sen}^2(t)} - \cancel{12\,\text{sen}^3(t)})\, e^{t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2t\cos(t) + 6t\,\text{sen}(t) + 2\,\text{sen}(t)\cos^2(t) + 2\,\text{sen}^3(t))\, e^{t} \\ (-4t\,\text{sen}(t))\, e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\bar{x}(t) = 2e^{t} \begin{pmatrix} t\cos(t) + 3t\,\text{sen}(t) + \text{sen}(t) \\ -2t\,\text{sen}(t) \end{pmatrix}}$$

Comprobación: $x(t) = 2e^{t}(t\cos(t) + 3t\,\text{sen}(t) + \text{sen}(t)) \rightarrow \dot{x}(t) = 2e^{t}(4t\cos(t) + 2t\,\text{sen}(t) + 4\,\text{sen}(t) + 2\cos(t))$

$y(t) = -4te^{t}\,\text{sen}(t) \rightarrow \dot{y}(t) = 2e^{t}(-2\,\text{sen}(t) - 2t\,\text{sen}(t) - 2t\cos(t))$

entonces, $4x + 5y + 4e^{t}\cos(t) = 2e^{t}(4t\cos(t) + 12t\,\text{sen}(t) + 4\,\text{sen}(t) - 10t\,\text{sen}(t) + 2\cos(t)) = \dot{x}$ ✓

$-2x - 2y = 2e^{t}(-2t\cos(t) - 6t\,\text{sen}(t) - 2\,\text{sen}(t) + 4t\,\text{sen}(t)) = \dot{y}$ ✓

3. La ecuación $4x^2y'' - 8x^2y' + (4x^2+1)y = 0$ tiene una solución de Frobenius. Encuentre la solución general.

La ecuación es: $y'' - 2y' + \frac{(4x^2+1)}{4x^2} y = 0$

$P(x) = -2$ $\qquad Q(x) = \frac{4x^2+1}{x^2}$

Vemos que Q no es analítica en $x=0$ por lo que $x=0$ es un punto singular.

Sin embargo, $x^2 Q(x) = 4x^2+1$ sí es analítica y su expresión es válida en todo $\mathbb{R}$

Entonces $x=0$ es un punto singular regular por lo que esperamos encontrar al menos una solución de Frobenius.

Proponemos $y = X^m (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^{m+n}$

$\Rightarrow y' = a_0 m X^{m-1} + a_1 (m+1) X^m + a_2 (m+2) X^{m+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n X^{m+n-1}$

$\Rightarrow y'' = a_0 m(m-1) X^{m-2} + a_1 (m+1) m X^{m-1} + a_2 (m+1)(m+2) X^m \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n)(m+n-1) X^{m+n-2}$

Entonces los expresiones de la ecuación son:

- $4x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} 4(m+n)(m+n-1) a_n X^{m+n}$
- $-8x^2 y' = \sum_{n=0}^{\infty} -8(m+n) a_n X^{m+n+1}$
- $4x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n X^{m+n+2}$

Sustituimos en la ecuación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(m+n)(m+n-1) a_n X^{m+n} + \sum_{n=0}^{\infty} -8(m+n) a_n X^{m+n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n X^{m+n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^{m+n} = 0$$

- Igualamos el coeficiente de X^m a 0 (Que sólo aparece en la primera y última suma como el término para $n=0$)

$\rightarrow 4(m+0)(m+0-1)a_0 + a_0 = 0 \rightarrow \underbrace{(4m^2 - 4m + 1)}_{\text{Indicial}} a_0 = 0 \rightarrow \boxed{m = 1/2}$ ← una única solución

- Igualamos el coeficiente de X^{m+1} a 0 (haciendo $n=1$ en la suma 1 y 4 y $n=0$ en la 2)

$\rightarrow 4(m+1)(m+1-1)a_1 - 8(m+0)a_0 + a_1 \rightarrow (4(m+1)(m)+1)a_1 = 8m a_0 \rightarrow a_1 = \frac{8(\frac{1}{2})a_0}{4} = \underline{a_0}$

⋮

- Igualamos el coef. de X^{m+j} (haciendo $n=j$ en la suma 1 y 4, $n=j-1$ en la suma 2, $n=j-2$ en la suma 3):

$\rightarrow 4(\frac{1}{2}+j)(\frac{1}{2}+j-1)a_j - 8(\frac{1}{2}+j-1)a_{j-1} + 4a_{j-2} + a_j = 0$

$\rightarrow 4(j+\frac{1}{2})(j-\frac{1}{2})a_j - 8(j-\frac{1}{2})a_{j-1} + 4a_{j-2} + a_j = 0$

$\rightarrow (4j^2 - 1 + 1)a_j - (8j-4)a_{j-1} + 4a_{j-2} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{a_j = \frac{-4a_{j-2} + (8j-4)a_{j-1}}{4j^2}}$$

$\Rightarrow a_0 = a_0$

$a_1 = a_0$

$a_2 = \frac{-4a_0 + (16-4)a_1}{4(2)^2} = a_0/2$

$a_3 = \frac{-4a_1 + (8(3)-4)a_2}{4(3)^2} = \frac{-4a_0 + 20\,a_0/2}{36} = \frac{1}{6}a_0 = \frac{a_0}{3!}$

$a_4 = \frac{-4a_2 + (8(4)-4)a_3}{4(4)^2} = \frac{-2a_0 + (28)(\frac{1}{6}a_0)}{64} = \frac{1}{24}a_0 = \frac{a_0}{4!}$

Viendo este patrón, esperamos que los términos tengan la forma $a_j = \frac{a_0}{j!}$

- Lo probamos por inducción: Para a_0 es cierto y para a_1 también

.. Suponemos que se vale para a_{j-1} y para a_{j-2} hipótesis inducción

Por la fórmula de recurrencia: $a_j = \frac{-4a_{j-2} + (8j-4)a_{j-1}}{4j^2} = \frac{-4\frac{a_0}{(j-2)!} + 4(2j-1)\frac{a_0}{(j-1)!}}{4j^2}$

$$= \left(\frac{-1}{(j-2)!\,j^2} + \frac{(2j-1)}{(j-1)!\,j^2}\right)a_0 = \frac{-j+1 + 2j-1}{j^2(j-1)!}a_0 = \frac{j}{j^2(j-1)!}a_0 = \frac{a_0}{j!} \quad \#$$

$\therefore$ La expansión es: $x^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$ Válido en $(0,\infty)$

$$y = x^{1/2}a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) = a_0x^{1/2}e^x \quad \# \quad \text{con } a_0 \in \mathbb{R}$$

Encontramos una solución de Frobenius $y_1(x) = x^{1/2} e^x$
proponemos como segunda solución

Por la teoría vista en clase, proponemos $y_2(x) = x^{1/2} e^x \ln(x)$

Comprobamos que sea solución : $y_2' = \frac{e^x}{2\sqrt{x}}\left((2x+1)\ln(x) + 2\right)$

$$y_2'' = \frac{e^x}{4x\sqrt{x}}\left((4x^2+4x-1)\ln(x) + 8x\right)$$

Sustituimos en la ec. : $4x^2 y_2'' - 8x^2 y_2' + (4x^2+1) y_2 =$

$$= \sqrt{x}\, e^x \left((4x^2+4x-1)\ln(x) + 8x\right) - 4x\sqrt{x}\, e^x \left((2x+1)\ln(x) + 2\right) + \sqrt{x}\, e^x \ln(x)\,(4x^2+1)$$

↳ cual, realizando los productos, vale 0 $\rightarrow$ y_2 es solución

∴ Solución general : $\boxed{C_1\sqrt{x}\, e^x + C_2\sqrt{x}\, e^x \ln(x)}$

4) Resuelve usando transformada de Laplace.

a) $y'' + 2y' + 2y = 2$ $\quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

Aplicamos la transformada de Laplace de ambos lados $\rightarrow \mathcal{L}(y'' + 2y' + 2y) = 2$

$\rightarrow \mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(2) \ \ldots (1)$

Calculamos $\cdot)$ $\mathcal{L}(y') = \int_0^\infty e^{-px} y' \, dx = y e^{-px}\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} y \, dx = \underline{-y(0) + p\mathcal{L}(y)}$

$\cdot\cdot)$ $\mathcal{L}(y'') = \int_0^\infty e^{-px} y'' \, dx = y' e^{-px}\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} y' \, dx = \underline{-y'(0) + p\mathcal{L}(y')}$

$\cdot\cdot\cdot)$ $\mathcal{L}(2) = \int_0^\infty e^{-px}(2) \, dx = -\frac{2}{p} e^{-px}\Big]_0^\infty = \underline{2/p}$

Sustituimos todo en (1):

$$-y'(0) + p(-y(0) + p\mathcal{L}(y)) + 2(-y(0) + p\mathcal{L}(y)) + 2\mathcal{L}(y) = 2/p$$

$\rightarrow -y'(0) - p\,y(0) + p^2\mathcal{L}(y) - 2y(0) + 2p\mathcal{L}(y) + 2\mathcal{L}(y) = 2/p$, despejamos $\mathcal{L}(y) \rightarrow$

$$\rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{2/p + y'(0) + (p+2)y(0)}{p^2 + 2p + 2}$$

Sustituimos $y(0)$ y $y'(0)$ $\rightarrow \mathcal{L}(y) = \dfrac{2/p + 1}{p^2 + 2p + 2}$

$\mathcal{L}(y) = \dfrac{2+p}{p(p^2+2p+2)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{Bp + C}{p^2 + 2p + 2}$ ← fracciones parciales

$\rightarrow Ap^2 + 2Ap + 2A + Bp^2 + Cp = 2 + p \longrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + C = 1 \\ 2A = 2 \end{cases} \rightarrow A = 1,\ B = -1,\ C = -1$

$$\rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{1}{p} - \frac{p+1}{p^2+2p+2} = \underline{\frac{1}{p} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1}} \ \ldots (2)$$

Viendo la tabla de transformadas, tenemos: $\mathcal{L}(1) = 1/p$, $\mathcal{L}(\cos(ax)) = \dfrac{p}{p^2 + a^2}$

pero por la "shifting formula": $\mathcal{L}(e^{x}\cos(ax)) = \dfrac{p-1}{(p-1)^2 + a^2}$

con esto, ya podemos calcular la transformada inversa de (2)

$$y = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(y)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1}\right) = \boxed{1 - e^{-x}\cos(x)}$$

b) $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x}\,\text{sen}(x)$ $\quad y(0)=0 \quad y'(0)=3$

Aplicamos Laplace : $\mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') + 5\mathcal{L}(y) = 3\mathcal{L}(e^{-x}\text{sen}(x)) \quad \dots (1)$

Calculamos: • $\mathcal{L}(y'') = \int_0^\infty e^{-px} y'' \, dx = y' e^{-px}\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} y' = \underline{-y'(0) + p\,\mathcal{L}(y')}$

•• $\mathcal{L}(y') = \int_0^\infty e^{-px} y' \, dx = y e^{-px}\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} y = \underline{-y(0) + p\,\mathcal{L}(y)}$

••• $\mathcal{L}(e^{-x}\text{sen}(x))$ por la "shifting rule": $\mathcal{L}(e^{ax}f(x)) = F(p-a)$

$\rightarrow$ $\mathcal{L}(e^{-x}\text{sen}(x))$ es igual a la transformada de sen(x) evaluada en $p+1$

$$\rightarrow \; = \underline{\frac{1}{(p+1)^2+1}}$$

Sustituimos en 1)

$$\rightarrow \; -y'(0) + p\left(-y(0) + p\,\mathcal{L}(y)\right) + 2\left(-y(0) + p\,\mathcal{L}(y)\right) + 5\,\mathcal{L}(y) = \frac{3}{(p+1)^2+1}$$

Despejamos $\mathcal{L}(y)$:

$$\rightarrow \; \mathcal{L}(y) = \frac{\frac{3}{(p+1)^2+1} + y'(0) + (2+p)\,y(0)}{p^2+2p+5}$$

Sustituimos $y(0)$, $y'(0)$

$$\rightarrow \; \mathcal{L}(y) = \frac{\frac{3}{(p+1)^2+1} + 3}{p^2+2p+5} = \frac{3 + 3(p+1)^2 + 3}{(p^2+2p+5)\,((p+1)^2+1)} = \frac{3 + 3(p+1)^2 + 3}{((p+1)^2+4)\,((p+1)^2+1)}$$

Por el momento, llamemos $m = (p+1)^2$ $\quad \rightarrow \; \mathcal{L}(y) = \dfrac{6+3m}{(m+4)(m+1)}$

Fracciones parciales: $\dfrac{6+3m}{(m+4)(m+1)} = \dfrac{A}{m+4} + \dfrac{B}{m+1}$ $\quad \rightarrow \; \begin{matrix} A+B=3 \\ A+4B=6 \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} B=1 \\ A=2 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \; \mathcal{L}(y) = \frac{2}{m+4} + \frac{1}{m+1} = \underline{\frac{2}{(p+1)^2+4} + \frac{1}{(p+1)^2+1}}$$

Usamos que $\mathcal{L}(e^{ax}\,\text{sen}(bx)) = \dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$ para sacar la inversa.

$$y = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(p+1)^2+4} + \frac{1}{(p+1)^2+1}\right)$$

$$= e^{-x}\,\text{sen}(2x) + e^{-x}\,\text{sen}(x)$$

$$\boxed{y(x) = e^{-x}\,\text{sen}(2x) + e^{-x}\,\text{sen}(x)}$$