Ecuaciones Diferenciales I 2° Parcial

Tomás Ricardo Basile Álvarez

1. Muestre que la función de Lipschitz $f(x,y) = y^{1/2}$
a) No satisface la condición de Lipschitz en $R = \{(x,y) \mid |x| \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

Para que fuera Lipschitz, debería de cumplir que $\forall x \in R$ y $\forall y_1, y_2 \in R$

Se cumple que $\exists$ $K > 0$ tal que $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq K|y_2 - y_1|$

O, lo que es lo mismo, que: $\dfrac{|f(x,y_2) - f(x,y_1)|}{|y_2 - y_1|}$ está acotado

Sin embargo, si tomamos $0 \leq y_2 \leq 1$, $y_1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{|f(x,y_2) - f(x,y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{|y_2^{1/2} - y_1^{1/2}|}{|y_2 - y_1|} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}}$$

Que no está acotada en $0 \leq y_2 \leq 1$

Pues si lo estuviera $\Rightarrow$ $\exists$ $K > 0$ tal que $\frac{1}{\sqrt{y_2}} \leq K$ $\forall$ $y_2 \in [0,1]$

Sin embargo, si tomamos $y_2 = \dfrac{1}{(K+1)^2}$ (que es menor o igual a 1 pues $K+1 \geq 1$)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y_2}} = K + 1 > K$$ ¡! $\therefore$ $\frac{1}{\sqrt{y_2}}$ no es acotada en $0 \leq y_2 \leq 1$

$\therefore$ $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| / |y_2 - y_1|$ no es acotada en R $\rightarrow$ f no es Lipschitz en R

b) Pruebe que sí es Lipschitz en $R = \{(x,y) \mid |x| \leq 1,\ c \leq y \leq d\}$ con $0 < c < d$

Sean $y_1, y_2 \in [c, d]$ y x con $|x| \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{|f(x,y_2) - f(x,y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}|}{|y_2 - y_1|} = \frac{|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}|}{|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}||\sqrt{y_2} + \sqrt{y_1}|}$$

$$= \frac{1}{|\sqrt{y_2} + \sqrt{y_1}|}$$

Pero como $0 < c \leq y_1$, $0 < c \leq y_2$ $\Rightarrow \sqrt{c} \leq \sqrt{y_1}$, $\sqrt{c} \leq \sqrt{y_2}$ (porque $\sqrt{\ }$ es creciente)

$$\Rightarrow \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} \geq 2\sqrt{c} \rightarrow |\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}| \geq 2\sqrt{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\sqrt{y_2} + \sqrt{y_1}|} \leq \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

Está acotado

$$\therefore \frac{|f(x,y_2) - f(x,y_1)|}{|y_2 - y_1|} \leq \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

$\therefore$ f es Lipschitz en R.

2) La ecuación $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ es un caso especial de la ecuación de Legendre. Encuentre la solución general partiendo de que $y_1 = x$.

Proponemos como solución a $y_2 = xv$ con $v = v(x)$

$\Rightarrow y_2' = v + xv'$ $\qquad y_2'' = v' + xv'' + v' = 2v' + xv''$

Sustituimos:

$$(1-x^2)(2v' + xv'') - 2x(v + xv') + 2xv = 0$$

$$\Rightarrow 2v' + xv'' - 2x^2v' - x^3v'' - 2xv - 2x^2v' + 2xv = 0$$

$$\Rightarrow (x - x^3)v'' + (2 - 4x^2)v' = 0$$

Como no aparece v, le bajamos el orden con $w = v'$

$$\Rightarrow (x - x^3)w' + (2 - 4x^2)w = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - x^3)\frac{dw}{dx} = (4x^2 - 2)w$$

$$\Rightarrow \frac{1}{w}\frac{dw}{dx} = \frac{4x^2 - 2}{x - x^3} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{w}\,dw = \int \frac{4x^2 - 2}{x - x^3}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|w| = \int \frac{4x^2 - 2}{x - x^3}\,dx = \int \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{1 - x^2}\,dx$$ ← Fracciones parciales

$-A + B = 4$

$\Rightarrow C = 0$

$A = -2$

$$= \int -\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\,dx = -2\ln|x| - \ln|1 - x^2|$$

$$\therefore \ln|w| = -2\ln|x| - \ln|1 - x^2| \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{x^2(1 - x^2)},$$

$$\therefore v = \int w\,dx = \int \frac{1}{x^2(1-x^2)}\,dx$$

$$= \int \frac{Ax + B}{x^2} + \frac{C}{1 - x} + \frac{D}{1 + x}\,dx$$

$-A + C - D = 0$

$C + D - B = 0$

$A = 0$

$B = 1$

$\Rightarrow$ $C - D = 0$, $C + D = 1$ $\Rightarrow$ $C = 1/2$, $D = 1/2$

$$= \int \frac{1}{x^2} + \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}\,dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|1-x| + C$$

tomamos $C = 0$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$$

$$\therefore \text{la solución es } y_2 = xv = -1 + \frac{x}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$$

$\therefore$ La solución general es: $c_1y_1 + c_2y_2$

$$= \boxed{c_1 x + c_2\left(\frac{x}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right| - 1\right)}$$

3. Por inspección o experimentando, encuentra una solución particular a:

$$x^3 y'' + x^2 y' + xy = 1$$

Queremos que del lado derecho nos quede simplemente un número,

por lo que sería conveniente que $xy = cte \rightarrow y = \frac{c}{x}$

Y como además, cada derivada hace que el exponente de x disminuya en uno entonces viendo la ecuación notamos que todos los términos quedarán ctes.

$\therefore$ proponemos: $y = c/x \rightarrow y' = -c/x^2 \rightarrow y'' = 2c/x^3$

$$\Rightarrow x^3\left(\frac{2c}{x^3}\right) + x^2\left(-\frac{c}{x^2}\right) + x\left(\frac{c}{x}\right) = 1$$

$$\rightarrow 2c - c + c = 1 \rightarrow c = 1/2$$

$$\therefore \boxed{y = \frac{1}{2x}}$$

5. Encuentre la solución al P.V.I

$$y'' - 2y' + y = 2x \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

- Solución homogénea: $y'' - 2y' + y = 0$ proponemos $y = e^{\alpha x} \to y' = \alpha e^{\alpha x} \to y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$\Rightarrow \alpha^2 e^{\alpha x} - 2\alpha e^{\alpha x} + e^{\alpha x} = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \to (\alpha - 1)^2 = 0 \to \alpha = 1$

$\therefore$ Una solución es e^x

y como vimos en clase, cuando tenemos una solución repetida, la otra solución es xe^x

$$\Rightarrow \quad y_H = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

- Solución Particular: Como tenemos un polinomio sencillo del lado derecho, proponemos $y = Ax^2 + Bx + C \to y' = 2Ax + B \to y'' = 2A$

$\to 2A - 2(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = 2x$

$\to Ax^2 + (B - 4A)x + C - 2B + 2A = 2x$

$\to A = 0$

$B - 4A = 2 \to B = 2$

$C - 2B + 2A = 0 \to C = 4$

$$\therefore \quad y_p = 2x + 4$$

$\therefore$ Solución general: $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + 2x + 4$

$\to y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + 2$

Usamos la condición inicial: $y(0) = 0 \to c_1 + 4 = 0$

$y'(0) = 1 \to c_1 + c_2 + 2 = 1$

$\Rightarrow c_1 = -4$

$c_2 = 3$

$$\therefore \boxed{y = -4e^x + 3xe^x + 2x + 4}$$