Tomás Ricardo Basile Álvarez DMD Examen 2 20/05/22

1. En cilíndricas, el campo de velocidad de un flujo uniforme alrededor de un cilindro es:

$$u_R = U_\infty \left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)\cos\theta$$
$$u_\theta = -U_\infty \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)\operatorname{sen}\theta$$

a) Usando la ec. de Bernoulli, determina el campo de presión

La ley de Bernoulli para un flujo estacionario dice que en una línea de corriente:

$$\frac{|u|^2}{2} + \phi + \int \frac{dP}{\rho} = cte$$

Con ϕ el potencial de fuerzas externas (que en este caso es 0). Como $\rho = cte$ para el flujo incompresible, sale de la integral y queda:

$$\frac{|u|^2}{2} + \frac{1}{\rho}\int dP = cte \rightarrow \underline{\frac{|u|^2}{2} + \frac{P}{\rho} = cte} \quad \dots (1)$$

Primero tenemos que obtener el valor de la constante. Como esta constante tiene que ser la misma en toda una línea de flujo, su valor infinitamente lejos nos permite determinarla.

Entonces, evaluamos en infinito

$$\rightarrow \frac{|U_\infty|^2}{2} + \frac{P_\infty}{\rho} = cte$$

Como todas las líneas de flujo eventualmente van a infinito, podemos sustituir la cte en (1) para encontrar P en cualquier punto.

$$\rightarrow \frac{|u|^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \frac{|U_\infty|^2}{2} + \frac{P_\infty}{\rho} \rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{|U_\infty|^2}{2} + \frac{P_\infty}{\rho} - \frac{|u|^2}{2}$$

$$\rightarrow P = \frac{|U_\infty|^2\rho}{2} + P_\infty - \frac{|u|^2\rho}{2}$$

$$= \frac{U_\infty^2}{2}\rho + P_\infty - \frac{|u_R|^2+|u_\theta|^2}{2}\rho \longleftarrow \text{porque } |u|^2 = |u_R|^2 + |u_\theta|^2$$

Entonces, para encontrar $P(R,\theta)$, sustituimos u_R, u_θ

$$P = \frac{U_\infty^2}{2}\rho + P_\infty - \frac{1}{2}\rho\left[\left|U_\infty\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)\cos\theta\right|^2 + \left|-U_\infty\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)\operatorname{sen}\theta\right|^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty - \frac{1}{2}\rho\left[U_\infty^2\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)^2\cos^2\theta + U_\infty^2\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty - \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)^2\cos^2\theta + \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)\operatorname{sen}^2\theta\right]$$

$$= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1 - \left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)^2\cos^2\theta - \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)\operatorname{sen}^2\theta\right]$$

Esta expresión nos permite calcular la presión para cualquier punto R,θ

b) Obtén la presión en la superficie $P(a,\theta)$

Para ello usamos la expresión encontrada para $P(R,\theta)$ y sustituimos $R=a$ (superficie del cilindro)

$$\rightarrow P(R=a,\theta) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-\left(1-\frac{a^2}{a^2}\right)\cos^2\theta - \left(1+\frac{a^2}{a^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta\right]$$

$$= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-(1-1)\cos^2\theta - (1+1)^2\operatorname{sen}^2\theta\right]$$

$$= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-\cancel{(0)\cos^2\theta} - 2^2\operatorname{sen}^2\theta\right]$$

$$\underline{= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-4\operatorname{sen}^2\theta\right]}$$

c) Posición de los dos puntos de estancamiento en la superficie $(R=a)$, es decir, los valores de θ en los que $u_R = u_\theta = 0$.

Para empezar, las velocidades son

$$U_R = U_\infty\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)\cos\theta$$
$$U_\theta = -U_\infty\left(1+\frac{d^2}{R^2}\right)\operatorname{sen}\theta$$

y evaluamos en el cilindro $(R=a)$

$$\rightarrow u_R = U_\infty\left(1-\frac{a^2}{a^2}\right)\cos\theta = U_\infty(1-1)\cos\theta = U_\infty(0)\cos\theta = 0$$

$$\rightarrow U_\theta = -U_\infty\left(1+\frac{a^2}{a^2}\right)\operatorname{sen}\theta = -U_\infty(1+1)\operatorname{sen}\theta = -2U_\infty\operatorname{sen}\theta$$

vemos que $U_R = 0$ en toda la superficie, por lo que sólo hace falta hacer $U_\theta = 0$

$$\rightarrow U_\theta = 0 \rightarrow -2U_\infty\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \rightarrow \left.\begin{matrix}\theta = 0\\ \theta = \pi\end{matrix}\right\}$$ ángulos en los que $\operatorname{sen}\theta = 0$

Entonces, los ángulos en los que $U_R = U_\theta = 0$ son $\underline{\theta = 0,\ \theta = \pi}$

2. El potencial complejo cilindro de radio a sobre el que incide un flujo de velocidad U a ángulo α es:

$$F(z) = U\left(z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha}\right)$$

a) Muestra que lejos del origen (si $z = Re^{i\theta}$, entonces $R \gg a$), las componentes cartesianas de la velocidad son $u = U\cos\alpha$, $v = U\operatorname{sen}\alpha$.

Partiendo de $F(z)$, calculamos $W(z)$ como $W(z) = \frac{d}{dz}F(z)$

$$W(z) = \frac{d}{dz}\left[U\left(z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha}\right)\right]$$

$$= Ue^{-i\alpha} - U\frac{a^2}{z^2} e^{i\alpha}$$

Sustituimos $z = Re^{i\theta}$ $\rightarrow$ $W(z) = Ue^{-i\alpha} - U\frac{a^2}{R^2 e^{2i\theta}} e^{i\alpha}$

Pero como $R \gg a$ lejos del origen $\Rightarrow \frac{a^2}{R^2} \approx 0$ y podemos despreciar el segundo término de $W(z)$.

Entonces $W(z) = Ue^{-i\alpha}$

$= U[\cos(-\alpha) + i\operatorname{sen}(-\alpha)]$ ← por la relación de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

$= U[\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha]$ ← porque cos es par y sen impar.

$= U\cos\alpha - iU\operatorname{sen}\alpha$

Pero por la teoría, sabemos que $W = u - iv$, por lo que tenemos:

$u - iv = U\cos\alpha - iU\operatorname{sen}\alpha$

igualando la parte real e imaginaria, queda $\nearrow u = U\cos\alpha$ $\#$

$-v = -U\operatorname{sen}\alpha \rightarrow v = U\operatorname{sen}\alpha$ $\#$

b) Muestra que sobre el círculo de radio a centrado en el origen $(z = ae^{i\theta})$ se tiene $\psi =$ cte.

Tenemos que $F(z) = U\left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z}e^{i\alpha}\right)$

Sustituimos $z = ae^{i\theta}$ para evaluar en el cilindro

$\rightarrow F(R=a) = U\left(ae^{i\theta}e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{ae^{i\theta}}e^{i\alpha}\right) = Uae^{i\theta - i\alpha} + Uae^{-i\theta}e^{i\alpha}$

$= Uae^{i(\theta-\alpha)} + Uae^{i(\alpha-\theta)}$

$= Ua\left[e^{i(\theta-\alpha)} + e^{-i(\theta-\alpha)}\right]$

$= Ua[\cos(\theta-\alpha) + i\operatorname{sen}(\theta-\alpha) + \cos(-(\theta-\alpha)) + i\operatorname{sen}(-(\theta-\alpha))]$ ← por la relación de Euler en ambos exponentes

$= Ua[\cos(\theta-\alpha) + i\operatorname{sen}(\theta-\alpha) + \cos(\theta-\alpha) - i\operatorname{sen}(\theta-\alpha)]$ ← porque cos es par y seno impar

$= Ua[2\cos(\theta-\alpha)]$

$= 2Ua\cos(\theta-\alpha)$ $\#$

Entonces, como $F = \phi + i\psi$, tenemos que en el cilindro:

$$2Ua\cos(\theta-\alpha) = \phi + i\psi$$

del lado izquierdo la expresión es puramente real, por lo que tenemos:

$$2Ua\cos(\theta-\alpha) = \phi \quad , \quad 0 = \psi$$

Entonces, $\psi = 0$ en la superficie del cilindro. Luego, como ψ es cte. (en particular igual a 0) en la superficie, eso significa que la superficie del cilindro es una <u>línea de corriente</u>.

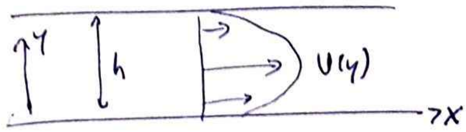
3. Las Ecs. de N-S incompresible son: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v}$$
con $\nu = \mu/\rho$.

Consideremos un fluido bidimensional entre dos paredes separadas una distancia h.

Suponemos que: (1) El flujo se mueve en la dirección x $(v = w = 0)$

(2) $P = P(x)$ y $u = u(y)$

(3) El flujo es estacionario



a) Muestra que las ecuaciones de N-S se reducen a $\mu \frac{d^2 \vec{v}}{dy^2} = \frac{dP}{dx}$

Simplemente escribimos las ecs. y usamos las condiciones (1), (2), (3):

ec. 1) $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ← Usamos que $\vec{v} = (u, v, w)$ y la def. de la divergencia $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot$

$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (0)}{\partial y} + \frac{\partial (0)}{\partial z} = 0$ ← porque $v = w = 0$

$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

porque u depende sólo de y, y entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u(y)}{\partial x} = 0$

$\rightarrow 0 = 0$

∴ Nos resulta una ecuación trivial sin nada de información.

ec 2) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v}$

$\rightarrow \frac{\partial u \hat{\imath}}{\partial t} + (u\hat{\imath} \cdot \nabla) u\hat{\imath} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 (u\hat{\imath})$ ← Usamos que $\vec{v} = (u, v, w)$ y $v = w = 0 \Rightarrow \vec{v} = (u, 0, 0) = u\hat{\imath}$

$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}\hat{\imath} + \left(u\hat{\imath} \cdot \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right) u\hat{\imath} = -\frac{1}{\rho}\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)P + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u\hat{\imath}$ ← Usamos la def. de ∇ en rectangulares

$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}\hat{\imath} + \left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)u\hat{\imath} = -\frac{1}{\rho}\left(\hat{\imath}\frac{\partial P}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial P}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial P}{\partial z}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\hat{\imath}$

Luego, como $P = P(x)$, las derivadas de P respecto a y, z son 0. Y como $u = u(y)$, las derivadas de u respecto a x, z son 0

$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}\hat{\imath} = -\frac{1}{\rho}\left(\hat{\imath}\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\hat{\imath} \xrightarrow{\text{Tomamos la componente } \hat{\imath}} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Como el flujo es estacionario, u no depende de $t \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = 0$

$\rightarrow 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \longrightarrow 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ← por la def. de $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

$\rightarrow 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ← Multiplicamos por ρ

← escribimos $\frac{dP}{dx}$ en vez de $\frac{\partial P}{\partial x}$ porque P sólo depende de x y lo mismo con $\frac{du}{dy}$

$$\rightarrow \boxed{\mu\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dP}{dx}}$$

b) Integra dos veces respecto a y.

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dP}{dx}$$

Integramos respecto a y: $\int \mu \frac{d^2u}{dy^2}\, dy = \int \frac{dP}{dx}\, dy$

$$\rightarrow \mu \int \frac{d^2u}{dy^2}\, dy = \int \frac{dP}{dx}\, dy \quad \leftarrow \text{porque } \mu \text{ es cte}$$

Por el teorema fundamental del cálculo, $\int \frac{d^2u}{dy^2}\, dy = \frac{du}{dy}$. Y como $P = P(x)$ no depende de y, sale de la integral:

$$\mu \frac{du}{dy} = \frac{dP}{dx} \int dy \rightarrow \mu \frac{du}{dy} = \frac{dP}{dx} y + A \quad \leftarrow \text{donde } A \text{ es una cte de integración.}$$

Integramos de nuevo:

$$\int \mu \frac{du}{dy}\, dy = \int \frac{dP}{dx} y + A \;\; dy \quad \leftarrow \text{porque } \frac{dP}{dx}, \mu, A \text{ no dependen de } y$$

$$\rightarrow \mu \int \frac{du}{dy}\, dy = \frac{dP}{dx} \int y\, dy + A \int dy$$

↓ Teorema Fun. de cálculo

$$\rightarrow \mu u = \frac{dP}{dx} \frac{y^2}{2} + Ay + B \quad \leftarrow \text{Agregamos cte de integración } B$$

↓

$$\boxed{u = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \frac{y^2}{2} + \frac{A}{\mu} y + \frac{B}{\mu}}$$

c) Aplica las condiciones $u(0) = 0$ y $u(h) = 0$ para encontrar A, B.

Aplicamos $u(0) = 0$ al resultado anterior

$$\rightarrow 0 = u(0) = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} (0)^2 + \frac{A}{\mu} (0) + \frac{B}{\mu}$$

$$\rightarrow 0 = 0 + 0 + B/\mu \rightarrow \underline{B = 0}$$

Aplicamos $u(h) = 0$

$$0 = u(h) = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \frac{h^2}{2} + \frac{A}{\mu} h + \cancel{\frac{B}{\mu}}^{\,0} \quad \leftarrow \text{porque vimos que } B = 0$$

$$\rightarrow 0 = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \frac{h^2}{2} + \frac{A}{\mu} h \rightarrow 0 = \frac{dP}{dx} \frac{h}{2} + A \quad \leftarrow \text{multiplicamos por } \frac{\mu}{h}$$

$$\rightarrow \underline{A = -\frac{dP}{dx} \frac{h}{2}}$$

Entonces sustituimos $A = -\frac{dP}{dx}\frac{h}{2}$, $B=0$ en la solución

$$u = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx}\frac{y^2}{2} + \frac{A}{\mu}y + \cancel{\frac{B}{\mu}}^{\,0}$$

$$\rightarrow u = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx}\frac{y^2}{2} + \frac{y}{\mu}\left(-\frac{dP}{dx}\frac{h}{2}\right)$$

$$\rightarrow u = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}\cdot\left[y^2 - yh\right]$$

$$\rightarrow u = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}\cdot\left[y(y-h)\right]$$

$$\rightarrow u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}\cdot\left[y(h-y)\right]$$