EDO I — Minitarea 14 — Tomás Basile Alvarez.

1) Encuentre la transformada de laplace de $x^5 + \cos(2x)$

Primero calculamos $\mathcal{L}[x^n]$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario

$$\mathcal{L}[x^n] = \int_0^\infty e^{-px} x^n \, dx = -\frac{x^n e^{-px}}{p}\Big]_0^\infty + \frac{n}{p}\int_0^\infty e^{-px} x^{n-1} \, dx \leftarrow \text{integral por partes}$$

$$= \lim_{a\to\infty} -\frac{a^n e^{-pa}}{p} + \frac{n}{p}\int_0^\infty e^{-px} x^{n-1} \, dx = \frac{n}{p}\int_0^\infty e^{-px} x^{n-1} \, dx$$

$$= n/p \, \mathcal{L}[x^{n-1}]$$

$$= n/p \left(\frac{n-1}{p}\right) \mathcal{L}[x^{n-2}] \leftarrow \text{usando } \mathcal{L}[x^{n-1}] = \frac{n-1}{p}\mathcal{L}(x^{n-2})$$

$$= n/p \left(\frac{n-1}{p}\right)\left(\frac{n-2}{p}\right)\cdots\left(\frac{1}{p}\right) \mathcal{L}[1] = \frac{n!}{p^n}\mathcal{L}[1]$$

pero $\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-px} dx = -\frac{1}{p} e^{-px}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}$

$$\rightarrow \mathcal{L}[x^n] = n!/p^{n+1}$$

para $n = 5 \rightarrow \mathcal{L}[x^5] = \boxed{\frac{120}{p^6}} \cdots (1)$

$$\mathcal{L}[\cos(2x)] = \int_0^\infty \overset{dv}{e^{-px}} \overset{u}{\cos(2x)}\, dx = \overset{v}{-\frac{1}{p} e^{-px}} \overset{u}{[\cos(2x)]}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \overset{v}{-\frac{1}{p} e^{-px}} \overset{du}{(-2\operatorname{sen}(2x))}\, dx$$ por partes

$$= -\tfrac{1}{p} e^{-px} \cos(2x)\Big|_0^\infty - \frac{2}{p}\left(-\frac{1}{p} e^{-px}(2\operatorname{sen}(2x))\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{p} e^{-px}(2\cos(2x))\right)$$ ← por partes

$$= 1/p - \frac{4}{p^2}\int_0^\infty e^{-px}\cos(2x)\, dx \quad *$$

$\Rightarrow$ tenemos que $\int_0^\infty e^{-px}\cos(2x) = 1/p - 4/p^2 \int_0^\infty e^{-px}\cos(2x)\,dx$

Despejando, $\int_0^\infty e^{-px}\cos(2x) = 1/p \,/\, (1 + 4/p^2)$

$$= \frac{1/p}{\frac{p^2+4}{p^2}} = \boxed{\frac{p}{p^2+4}} \quad \ldots (2)$$

Por (1) y (2) : $\mathcal{L}[x^5 + \cos(2x)] = \mathcal{L}[x^5] + \mathcal{L}[\cos(2x)] = \boxed{\frac{120}{p^6} + \frac{p}{p^2+4}}$

$*$ Se usó que $\lim_{a\to\infty} e^{-pa}\cos(2a) = 0$

que se demuestra como: Para toda a : $-1 \leq \cos(2a) \leq 1$

multiplicamos por e^{-pa} $\rightarrow$ $-e^{-pa} \leq e^{-pa}\cos(2a) \leq e^{-pa}$

Sacamos límite $\lim_{a\to\infty}$ $\rightarrow$ $\lim_{a\to\infty} -e^{-pa} \leq \lim_{a\to\infty} e^{-pa}\cos(2a) \leq \lim_{a\to\infty} e^{-pa}$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{a\to\infty} e^{-pa}\cos(2a) \leq 0$$

y por ley Sandwich $\rightarrow$ $\lim_{a\to\infty} e^{-pa}\cos(2a) = 0$

2 Encuentre una $f(x)$ tal que $\mathcal{L}(F(x)) = 1/p^2+p$

Tenemos: $\mathcal{L}[f(x)] = \dfrac{1}{p^2+p} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p+1}$ ← fracciones parciales

$\underline{pA + A + pB} = 1 \rightarrow \begin{matrix} A+B=0 \\ A=1 \end{matrix} \rightarrow B=-1$

$\Rightarrow \underline{\mathcal{L}[F(x)] = \dfrac{1}{p} + \dfrac{-1}{p+1}} \;\ldots (1)$

Por el ejercicio anterior, $\mathcal{L}[1] = 1/p \;\ldots (2)$

es decir, $\int_0^\infty e^{-px}\,dx = 1/p$ si queremos que nos dé $1/p+1$, sustituimos p por $p+1$

$\rightarrow \int_0^\infty e^{-(p+1)x}\,dx = 1/p+1$

$\rightarrow \int_0^\infty e^{-x} e^{-px}\,dx = 1/p+1$

$\rightarrow \underline{\mathcal{L}[e^{-x}] = 1/p+1} \;\ldots (3)$

por (1): $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(F(x))] = \mathcal{L}^{-1}[1/p - 1/p+1]$

$= \mathcal{L}^{-1}[1/p] - \mathcal{L}^{-1}[1/p+1]$

por 2 y 3 $= 1 - e^{-x}$

$\therefore \underline{f(x) = 1 - e^{-x}}$

3. Usa Laplace para resolver $y'+y=3e^{2x}$ $y(0)=0$

Aplicamos Laplace y usamos linealidad $\rightarrow$ $\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y] = 3\,\mathcal{L}[e^{2x}]$ ....(1)

pero,

·) $\mathcal{L}[y'] = \int_0^\infty e^{-px} y'\,dx = ye^{-px}\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} y\,dx$ ← por partes

$= \underline{-y(0) + p\,\mathcal{L}[y]}$

··) $\mathcal{L}[e^{2x}] = \int_0^\infty e^{-px}e^{2x}\,dx = \int_0^\infty e^{(2-p)x} = \frac{1}{2-p}e^{(2-p)x}\Big|_0^\infty = \underline{-\frac{1}{2-p}}$

Sostituimos en (1): $-y(0) + p\,\mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[y] = -\frac{3}{2-p}$

despejamos $\mathcal{L}[y]$ $\rightarrow$ $\mathcal{L}[y] = \dfrac{-\frac{3}{2-p} + y(0)}{1+p}$

Pero $y(0)=0$ $\rightarrow$ $\mathcal{L}[y] = \dfrac{-\frac{3}{2-p}}{1+p} = \dfrac{-3}{(2-p)(1+p)}$

buscamos una $y(x)$ tal que $\mathcal{L}[y] = \frac{-3}{(2-p)(1+p)}$

$\frac{-3}{(2-p)(1+p)} = \frac{A}{2-p} + \frac{B}{1+p}$ $\rightarrow$ $Ap + A - Bp + 2B = -3$ $\rightarrow$ $\begin{matrix} A-B=0 \\ A+2B=-3 \end{matrix}$ $\rightarrow$ $A=B=-1$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}[y] = \frac{-1}{2-p} + \frac{-1}{1+p} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+1}$

Pero por el ejercicio anterior $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] = e^{-x}$ y similarmente $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-2}\right] = e^{2x}$

$\Rightarrow$ $y = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}[y]) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+1}\right) = +\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)$

$= \underline{e^{2x} - e^{-x}}$