Solitones: Tarea 2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

9 de octubre de 2021

El 'par de Lax' correspondiente a la ecuación KdV es la siguiente pareja de operadores:

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t)$$
$$A = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial x}u$$

Demuestra que la ecuación:

$$(L_t + [L, A])u = 0$$

Donde $[L, A] = LA - AL$ **es efectivamente la ecuación KdV.**

Nota: L_t **representa la derivada (parcial) respecto a** t **de la dependencia explícita en** t **del operador** L**, de modo que:**

$$L_t = \frac{\partial u}{\partial t} := u_t$$

y por lo tanto: $L_t u = u_t u$

Solución: Antes que nada, notemos que hay cierta ambigüedad en la definición de A, en particular en el tercer término. La forma correcta de definir el operador para una función f es como:

$$\left(-4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial x}u\right) f = -4\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial x}(uf)$$

Notar que el último término lo definimos como $\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right) f := \frac{\partial}{\partial x}(uf)$ en vez de $\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right) f = u_x f$

Ahora sí calculamos lo que nos pide el ejercicio.

Calculamos primero $L(u)$:

$$L(u) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u\right) u = -u_{xx} + u^2$$

Calculamos ahora $A(L(u))$:

$$
\begin{aligned}
A(L(u)) &= \left(-4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial x}u\right)(-u_{xx} + u^2) \\
&= -4\partial_x^3(-u_{xx} + u^2) + 3u\partial_x(-u_{xx} + u^2) + 3\partial_x[u(-u_{xx} + u^2)] \\
&= 4u_{xxxxx} - 4\partial_x^3(u^2) - 3uu_{xxx} + 3u\partial_x(u^2) - 3\partial_x(uu_{xx}) + 3\partial_x(u^3) \\
&= 4u_{5x} - 4\partial_x^2(2uu_x) - 3uu_{xxx} + 3u(2uu_x) - 3u_xu_{xx} - 3uu_{xxx} + 9u^2u_x \\
&= 4u_{5x} - 8\partial_x(u_x^2 + uu_{xx}) - 3uu_{xxx} + 3u(2uu_x) - 3u_xu_{xx} - 3uu_{xxx} + 9u^2u_x \\
&= 4u_{5x} - 8(2u_xu_{xx} + u_xu_{xx} + uu_{xxx}) - 3uu_{xxx} + 3u(2uu_x) - 3u_xu_{xx} - 3uu_{xxx} + 9u^2u_x \\
&= 4u_{5x} - 24u_xu_{xx} - 8uu_{xxx} - 3uu_{xxx} + 6u^2u_x - 3u_xu_{xx} - 3uu_{xxx} + 9u^2u_x \\
&= 4u_{5x} - 27u_xu_{xx} - 14uu_{xxx} + 15u^2u_x
\end{aligned}
$$

Ahora calculamos $A(u)$ y luego $L(A(u))$:

$$
\begin{aligned}
A(u) &= \left(-4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial x}u\right)u \\
&= -4u_{xxx} + 3uu_x + 3\partial_x(u^2) \\
&= -4u_{xxx} + 3uu_x + 6uu_x \\
&= -4u_{xxx} + 9uu_x
\end{aligned}
$$

Calculamos $L(A(u))$:

$$
\begin{aligned}
L(A(u)) &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u\right)(-4u_{xxx} + 9uu_x) \\
&= -\partial_x^2(-4u_{xxx} + 9uu_x) + u(-4u_{xxx} + 9uu_x) \\
&= 4u_{xxxxx} - 9\ \partial_x^2(uu_x) - 4uu_{xxx} + 9u^2u_x \\
&= 4u_{5x} - 9\partial_x(u_x^2 + uu_{xx}) - 4uu_{xxx} + 9u^2u_x \\
&= 4u_{5x} - 9(2u_xu_{xx} + u_xu_{xx} + uu_{xxx}) - 4uu_{xxx} + 9u^2u_x \\
&= 4u_{5x} - 9(3u_xu_{xx} + uu_{xxx}) - 4uu_{xxx} + 9u^2u_x \\
&= 4u_{5x} - 27u_xu_{xx} - 9uu_{xxx} - 4uu_{xxx} + 9u^2u_x \\
&= 4u_{5x} - 27u_xu_{xx} - 13uu_{xxx} + 9u^2u_x
\end{aligned}
$$

Entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
[L, A](u) &= L(A(u)) - A(L(u)) \\
&= 4u_{5x} - 27u_xu_{xx} - 13uu_{xxx} + 9u^2u_x - (4u_{5x} - 27u_xu_{xx} - 14uu_{xxx} + 15u^2u_x) \\
&= uu_{xxx} - 6u^2u_x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(L_t + [L, A])u &= 0 \\
\Rightarrow L_tu + [L, A]u &= 0 \\
\Rightarrow\ u_tu + uu_{xxx} - 6u^2u_x &= 0
\end{aligned}
$$

Que es la ecuación KdV