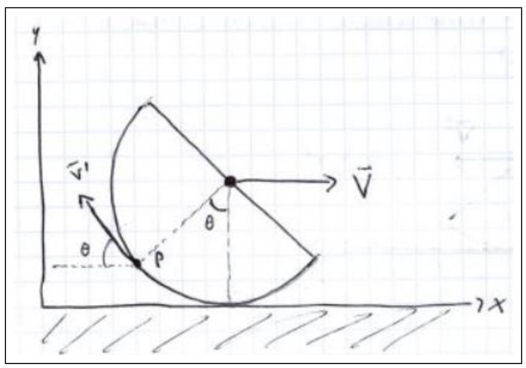
Mecánica analítica: Tarea 3

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

4 de noviembre de 2020

1) **3.3 Un semicilindro se balancea sinusoidalmente sin deslizamiento, como se muestra en la figura 3-11, de tal forma que $\theta = \sin 2t$. a) Cuando pasa por la posición neutra $\theta = 0$,a) ¿Cuál es la aceleración del punto de contacto con la superficie fija? b) Cuando el semicilindro está al ángulo máximo de 1 radián ¿Cuál es la aceleración del punto de contacto con la superficie fija?**



a) Primero definimos un marco de referencia O fijo respecto al piso y con el eje x horizontal. Y definimos un segundo marco de referencia O' paralelo al primero pero que se mueve junto con el centro del cilindro.
Calcularemos la velocidad y aceleración en el sistema de referencia O del punto marcado con P (que es el punto que hace contacto con el piso cuando $\theta = 0$) y después evaluaremos su aceleración en el momento en que toca el piso.

Entonces, primero definimos $\vec{V}$ como la velocidad del sistema O' respecto al sistema O (la velocidad del centro del círculo), definimos $\vec{v'}$ a la velocidad del punto P con respecto al sistema O' y finalmente, el vector $\vec{v}$ de velocidad del punto P respeto al piso. Por las relaciones vistas en clase para la transformación de velocidades de un sistema a otro, tenemos que la velocidad de P respecto a O es igual a la velocidad de O' respecto a O más la velocidad de P respecto a O', es decir:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{V} \quad (1)$$

Ahora calculamos cada una de las velocidades del lado derecho.
En el instante capturado en la imagen, pensamos que el cilindro está rotando en sentido horario y por tanto desplazándose a la derecha.

Calcular $\vec{v'}$: Como en la imagen el cilindro está rotando sin deslizar, entonces todos los puntos en la superficie se mueven con una velocidad puramente tangencial medida con respecto al centro del cilindro. La velocidad $\vec{v'}$ es justamente la velocidad de un punto en la superficie con **respecto al centro del cilindro** y por tanto es tangente al mismo. Por eso al dibujarlo notamos que forma con la horizontal un ángulo θ.
Además, sabemos del curso básico de mecánica que la velocidad con la que se mueve un punto en movimiento circular uniforme con respecto al centro es de $|v'| = R\dot{\theta}$. Luego, observando los componentes de $\vec{v'}$, vemos que es igual a :

$$\begin{aligned}\vec{v'} &= -|v'|\cos\theta\,\widehat{i} + |v'|\sin\theta\,\widehat{j} \\ &= -R\dot{\theta}\cos\theta\,\widehat{i} + R\dot{\theta}\sin\theta\,\widehat{j}\end{aligned}$$

Calcular $\vec{V}$: Como el centro siempre se encuentra a la misma altura del piso (siempre se encuentra a una distancia de un radio), entonces podemos ver que la velocidad $\vec{V}$ del centro del cilindro respecto al piso es puramente horizontal como en la figura.
Además, como el cilindro rueda sin deslizar, esta condición implica que su centro se traslada a una velocidad de $|V| = R\dot{\theta}$. Por esto tenemos que la velocidad $\vec{V}$ del centro del cilindro respecto al piso es de:

$$\begin{aligned}\vec{V} &= |V|\,\widehat{i} \\ &= R\dot{\theta}\,\widehat{i}\end{aligned}$$

Si ahora juntamos estas dos expresiones junto con (1), tenemos que la velocidad de P respecto al piso es:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v'} + \vec{V} \\ &= (-R\dot{\theta}\cos\theta\,\widehat{i} + R\dot{\theta}\sin\theta\,\widehat{j}) + (R\dot{\theta}\,\widehat{i}) \\ &= (-R\dot{\theta}\cos\theta + R\dot{\theta})\,\widehat{i} + R\dot{\theta}\sin\theta\,\widehat{j}\end{aligned}$$

Ahora que ya tenemos la expresión de $\vec{v}$, podemos derivarlo con respecto al tiempo para encontrar la aceleración $\vec{a}$ respecto al piso.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \left(-R\frac{d\dot{\theta}}{dt}\cos\theta - R\dot{\theta}\frac{d}{dt}\cos\theta + R\frac{d\dot{\theta}}{dt}\right)\,\widehat{i} + \left(R\frac{d\dot{\theta}}{dt}\sin\theta + R\dot{\theta}\frac{d}{dt}\sin\theta\right)\,\widehat{j} \\ &= \left(-R\ddot{\theta}\cos\theta + R\dot{\theta}^2\sin\theta + R\ddot{\theta}\right)\,\widehat{i} + \left(R\ddot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\,\widehat{j}\end{aligned}$$

Como dijimos antes, ahora hay que ver cuánto vale esta expresión cuando $\theta = 0$ para así tener la aceleración del punto de contacto cuando el cilindro para por la posición

$\theta = 0$.
Para ello, podríamos tomar la expresón pasada de $\vec{a}$ y sustituir $\theta = \sin(2t)$ y luego ver para qué tiempo se cumple que $\theta = 0$. Sin embargo, mejor calcularé antes $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ y los sustituiré directamente en la expresión.

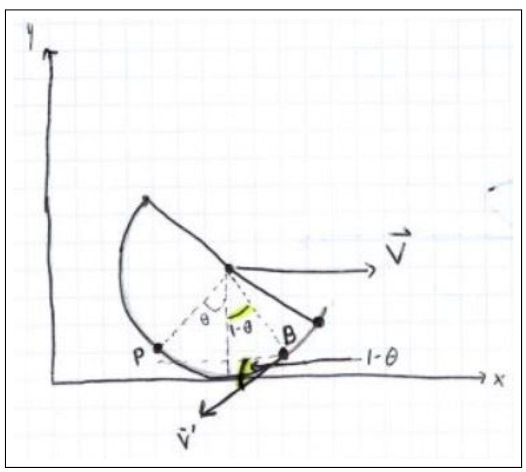
Tenemos que $\theta = \sin(2t)$ y por tanto, $\dot{\theta} = 2\cos(2t)$, $\ddot{\theta} = -4\sin(2t)$.
Pero como queremos que $\theta = 0$, esto implica que $\sin(2t) = 0$, y por tanto, $\cos(2t) = \pm 1$ (cuando sin vale 0, cos siempre vale ± 1).
Por lo tanto, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 2\cos(2t) = \pm 2$, $\ddot{\theta} = -4\sin(2t) = 0$.

Entonces sustituimos todo esto en la expresión de $\vec{a}$ y nos queda:

$$\begin{aligned} \vec{a}\Big|_{\theta=0} &= \big(-R(0)\cos(0) + R(\pm 2)^2 \sin(0) + R(0)\big)\ \widehat{\imath} + \ \big(R(0)\sin(0) + R(\pm 2)^2\cos(0)\big)\ \widehat{\jmath} \\ &= 4R\,\widehat{\jmath} \end{aligned}$$

Por tanto, como $R = 1m$, tenemos una aceleración de $4m/s^2$ dirigida en la dirección vertical hacia arriba.

b) **Cuando el semicilindro está al ángulo máximo de 1 radián ¿ cuál es la aceleración del punto de contacto con la superficie fija?**



Ahora hay que fijarnos en otro punto B que se encuentra en contacto con el piso cuando el semicilindro se encuentra a 1 radián.
Este punto B estará a un radián del punto P que estudiamos en el inciso anterior.
En la imagen se ve el cilindro justo unos momentos antes de que llegue al ángulo máximo y el punto B entre en contacto con el piso por un instante antes de regresar la oscilación.
Vemos que si el ángulo entre B y P es de un radián, eso implica que el ángulo que dibujamos a la derecha es de $1 - \theta$.

Pero como la velocidad $\vec{v'}$ de B con respecto al centro del cilindro es tangente al mismo, vemos que debe de hacer un ángulo con la horizontal con un valor también de $1-\theta$.

La ecuación (1) que usamos en el inciso anterior sigue siendo perfectamente válida, por lo que calcularemos $\vec{v'}$, $\vec{V}$.

Calcular $\vec{v'}$: El razonamiento del inciso anterior para concluir que $\vec{v'}$ es tangente al cilindro y que se tiene una velocidad $|v'| = R\dot{\theta}$ sigue siendo válido (porque esto es válido para cualquier punto en la superficie del cilindro que rota). Sin embargo, ahora hay que cambiar las componentes de $\vec{v'}$ porque su ángulo con la horizontal es $1-\theta$. Entonces queda:

$$\begin{aligned}\vec{v'} &= -|v'|\cos(1-\theta)l\widehat{i} - |v'|\sin(1-\theta)\,\widehat{j} \\ &= -R\dot{\theta}\cos(1-\theta)\,\widehat{i} - R\dot{\theta}\sin(1-\theta)\,\widehat{j}\end{aligned}$$

Cálculo de $\vec{V}$: El cálculo es igual que en el inciso pasado, porque esta velocidad no tiene nada que ver con la elección de P o B. Entonces:

$$\vec{V} = R\dot{\theta}\,\widehat{i}$$

Por lo tanto, la velocidad de B respecto al sistema O es:

$$\vec{v} = \Big(R\dot{\theta} - R\dot{\theta}\cos(1-\theta)\Big)\ \widehat{i} - R\dot{\theta}\sin(1-\theta)\,\widehat{j}$$

Y derivamos para calcular la aceleración:

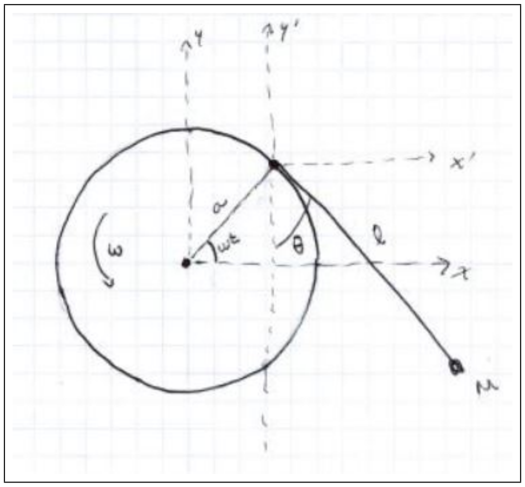
$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left(R\ddot{\theta} - R\ddot{\theta}\cos(1-\theta) - R\dot{\theta}\frac{d}{dt}\cos(1-\theta)\right)\ \widehat{i} + \left(-R\ddot{\theta}\sin(1-\theta) - R\dot{\theta}\frac{d}{dt}\sin(1-\theta)\right)\ \widehat{j} \\ &= \Big(R\ddot{\theta} - R\ddot{\theta}\cos(1-\theta) - R\dot{\theta}^2\sin(1-\theta)\Big)\ \widehat{i} + \Big(-R\ddot{\theta}\sin(1-\theta) + R\dot{\theta}^2\cos(1-\theta)\Big)\ \widehat{j}\end{aligned}$$

Queremos conocer esta aceleración del punto B cuando está en contacto con el piso. Por como definimos B, esto sucede cuando el ángulo es máximo, con un valor de $\theta = 1$. Esto significa que $\theta = \sin(2t) = 1$.
Y por lo tanto, $\dot{\theta} = 2\cos(2t) = 0$ (si el seno vale 1, entonces el coseno vale 0). Y también , $\ddot{\theta} = -4\sin 2t = -4(1) = -4$.
Ahora sustituimos esto en la expresión de $\vec{a}$:

$$\begin{aligned}\vec{a}\big|_{\theta=1} &= (R(-4) - R(-4)\cos(0) - R(0)\sin(0))\ \widehat{i} + \big(-R(-4)\sin(0) + R(-4)^2\cos(0)\big)\ \widehat{j} \\ &(-4R + 4R)\widehat{i} + (0)\widehat{j} \\ &= 0\widehat{i} + 0\widehat{j}\end{aligned}$$

Por lo que la aceleración del punto B cuando entra en contacto con el piso es $\vec{0}$.

2) **3.10 El punto de soporte de un péndulo simple se mueve en una circunferencia vertical de radio a con una velocidad angular ω constante, como se muestra en la figura. a) Hallar la expresión para las componentes cartesianas de la velocidad y aceleración de la masa m**



Creamos un sistema de referencia O fijo en el centro del círculo y con el eje x horizontal. Luego creamos un sistema O' cuyo centro se mueve junto con el soporte del péndulo en el círculo y con los ejes paralelos a O.
Llamamos $\vec{R}$ a la posición del origen de O' con respecto a O. Y llamamos $\vec{r'}$ a la posición de la masa con respecto a O'.
Entonces, la posición de la masa respecto al sistema fijo O es simplemente:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'} \quad (1)$$

Encontrar $\vec{R}$) Como la velocidad angular con la que se mueve el centro del sistema O' en el círculo es ω, entonces en un tiempo t habrá recorrido un ángulo de ωt desde el ángulo que tenía a un tiempo $t = 0$. Consideraremos que a un tiempo $t = 0$ el centro O' se encontraba sobre el eje x positivo, para así poder medir el ángulo ωt desde este eje como se ve en la figura. Sino, el resultado sería el mismo pero con $\omega t + \phi_0$ (con ϕ_0 el ángulo que tenía O' a un tiempo 0) en vez de ωt.
Entonces, es fácil ver que la posición de O' respecto a O es el vector:

$$\vec{R} = a\cos(\omega t)\,\widehat{i} + a\sin(\omega t)\,\widehat{j}$$

Calcular $\vec{r'}$: Este vector es la posición de la masa **con respecto al sistema primado**, es decir, con respecto al pivote del péndulo que se encuentra en el círculo. Por lo tanto, viendo el dibujo podemos notar que:

$$\vec{r'} = l\sin\theta\,\widehat{i} - l\cos\theta\,\widehat{j}$$

Entonces, tenemos que la posición $\vec{r}$ con respecto al sistema fijo O es igual a :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{R} + \vec{r'}\\ &= a\cos(\omega t)\,\widehat{i} + a\sin(\omega t)\,\widehat{j} + l\sin\theta\,\widehat{i} - l\cos\theta\,\widehat{j}\\ &= (a\cos\omega t + l\sin\theta)\,\widehat{i} + (a\sin\omega t - l\cos\theta)\,\widehat{j}\end{aligned}$$

Ahora lo derivamos con respecto al tiempo para obtener la velocidad $\vec{v}$ con respecto al sistema O (al derivar, tomamos en cuenta que ω es una constante)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-a\omega\sin\omega t + l\dot{\theta}\cos\theta)\,\widehat{i} + (a\omega\cos\omega t + l\dot{\theta}\sin\theta)\,\widehat{j}$$

Volvemos a derivar para obtener la aceleración respecto al sistema fijo :

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \left(-a\omega^2\cos\omega t + l\frac{d\dot{\theta}}{dt}\cos\theta + l\dot{\theta}\frac{d}{dt}(\cos\theta)\right)\,\widehat{i} + \left(-a\omega^2\sin\omega t + l\frac{d\dot{\theta}}{dt}\sin\theta + l\dot{\theta}\frac{d}{dt}(\sin\theta)\right)\,\widehat{j}\\ &= \left(-a\omega^2\cos\omega t + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\,\widehat{i} + \left(-a\omega^2\sin\omega t + l\ddot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\,\widehat{j}\end{aligned}$$

b) Obtener la aceleración generalizada para el ángulo θ

Como vimos en clase, la aceleración generalizada se calcula como $a_\theta = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\dfrac{1}{2}v^2\right) - \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{2}v^2\right)$

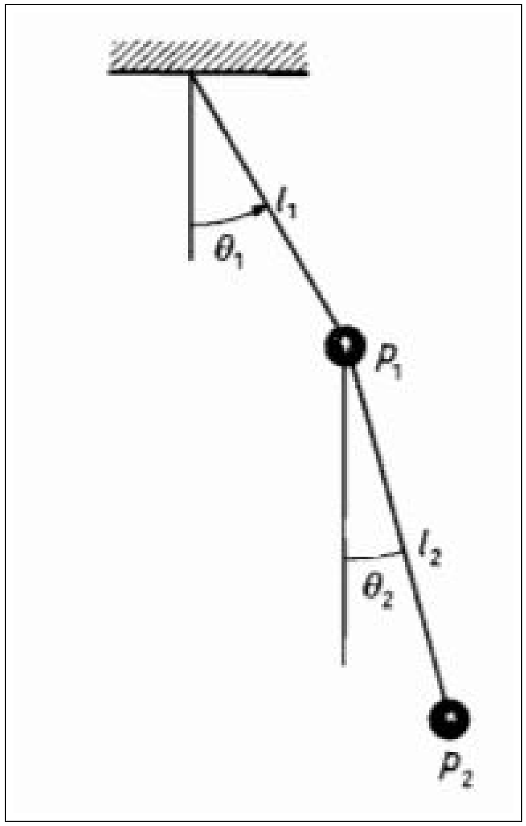
Para usar esta ecuación, primero necesitamos encontrar el valor de v^2 para lo cual usamos la expresión de $\vec{v}$ que ya teníamos:

$$\begin{aligned}v^2 &= (-a\omega\sin\omega t + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (a\omega\cos\omega t + l\dot{\theta}\sin\theta)^2\\ &= a^2\omega^2\sin^2\omega t - 2a\omega l\dot{\theta}\sin\omega t\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + a^2\omega^2\cos^2\omega t + 2a\omega l\dot{\theta}\cos\omega t\sin\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\\ &= a^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega l\dot{\theta}(\cos\omega t\sin\theta - \sin\omega t\cos\theta)\\ &= a^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega l\dot{\theta}\sin(\theta - \omega t)\end{aligned}$$

Y ahora sí usamos la fórmula para la aceleración generalizada:

$$\begin{aligned}a_\theta &= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\\ &= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}a^2\omega^2 + \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2 + a\omega l\dot{\theta}\sin(\theta - \omega t)\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}a^2\omega^2 + \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2 + a\omega l\dot{\theta}\sin(\theta - \omega t)\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left(l^2\dot{\theta} + a\omega l\sin(\theta - \omega t)\right) - a\omega l\dot{\theta}\cos(\theta - \omega t)\\ &= l^2\ddot{\theta} + a\omega l\dot{\theta}\cos(\theta - \omega t) - a\omega l\dot{\theta}\cos(\theta - \omega t)\\ &= l^2\ddot{\theta}\end{aligned}$$

3 **3.11 Encontrar las velocidades y las aceleraciones de las partículas p_1, p_2 del péndulo doble representado en la figura 3-17. a) cuando el movimiento está confinado al plano vertical (expresar $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en función de $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$, etc.)**



Consideramos un sistema O fijo centrado en el techo donde se encuentra el soporte del primer péndulo y con eje x horizontal. Y un sistema O' paralelo al primero pero centrado en p_1.

Primero vamos a calcular la posición, velocidad y aceleración de O' con respecto a O. Pero como O' está centrado en p_1, esto es lo mismo que calcular la posición de p_1 en el sistema fijo.
Por la figura, vemos que $\vec{r}_1$ la posición de p_1 en el sistema fijo es de:

$$\vec{r}_1 = l_1 \sin\theta_1 \,\widehat{i} - l_1 \cos\theta_1 \,\widehat{j}$$

Luego, obtenemos su velocidad derivando:

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \,\widehat{i} + l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \,\widehat{j}$$

Y ahora su aceleración:

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \left(l_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_1\dot{\theta}_1 \frac{d}{dt}\cos\theta_1\right) \,\widehat{i} + \left(l_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_1\dot{\theta}_1 \frac{d}{dt}\sin\theta_1\right) \,\widehat{j} \\ &= \left(l_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1\right) \,\widehat{i} + \left(l_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1\right) \widehat{j}\end{aligned}$$

Ahora nos fijamos en la partícula p_2. Primero calcularemos su posición, velocidad y aceleración con respecto a la partícula p_1 y ya luego lo encontraremos con respecto al sistema fijo O.
Con respecto a la partícula p_1, se puede ver que la partícula p_2 tiene una posición dada por:

$$\vec{r'}_2 = l_2 \sin\theta_2 \,\widehat{i} - l_2 \cos\theta_2 \,\widehat{j}$$

Ésta expresión es muy parecida a la de $\vec{r}_1$ y podemos usar las derivadas calculadas antes para obtener la velocidad y aceleración de p_2 con respecto a p_1. Obtenemos así:

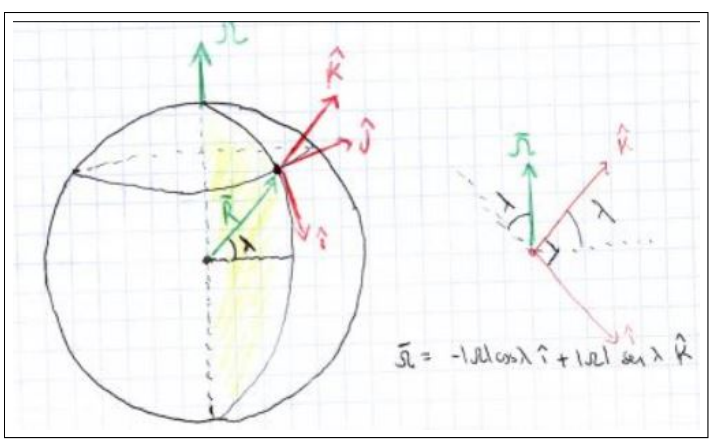
$$\vec{v'}_2 = l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \,\widehat{i} + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \,\widehat{j}$$
$$\vec{a'}_2 = \left(l_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2\right) \widehat{i} + \left(l_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + l_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2\right)\widehat{j}$$

Ahora sí nos fijamos en la posición, velocidad y aceleración de p_2 con respecto al sistema fijo. Para eso hay que sumar la posición (velocidad, o aceleración) de p_1 con la posición (velocidad o aceleración) de p_2 con respecto a p_1. Entonces, tenemos que la posición, velocidad y aceleración de p_2 con respecto al sistema fijo es:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r'}_2 = (l_1 \sin\theta + l_2 \sin\theta_2)\,\widehat{i} + (-l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2)\widehat{j}$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v'}_2 = (l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2)\widehat{i} + (l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2)\widehat{j}$$

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a'}_2 = (l_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 + l_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2)\,\widehat{i} + (l_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 + l_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + l_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2)\widehat{j}$$

4. **Calcule la desviación de la vertical al lanzar un cuerpo hacia arriba en el hemisferio norte. Magnitud y dirección.**



Primero que nada, hacemos un esquema de la Tierra como se ve en el dibujo. Tomamos un punto en el hemisferio norte a una latitud de λ.
Construimos ahora un sistema de coordenadas con centro en este punto en la superficie de la Tierra y con vectores $\widehat{k}$ en la dirección radial, $\widehat{j}$ apuntando hacia el este y $\widehat{i}$

apuntando hacia el sur.
Este sistema de coordenadas permanece fijo para un observador en la Tierra y es el que usaremos para medir la desviación. Sin embargo, un observador fijo con respecto a las estrellas lejanas, usará otro sistema de referencia según el cual nuestro sistema en la superficie está en la posición $\vec{R}$ y está rotando.

Como vimos en clase, se puede usar la relación entre las aceleraciones en distintos marcos de referencia junto con el método de aproximaciones sucesivas para llegar a la siguiente ecuación (para la cual no hicimos ninguna suposición de un problema en específico y se hizo también para el caso del hemisferio norte, por lo que es válido ahora)

$$\vec{r'}(t) = \vec{r'}_0 + [(t-t_0) - (t-t_0)^2\vec{\Omega}\times]\vec{v'}_0 + [\tfrac{1}{2}(t-t_0)^2 - \tfrac{1}{3}(t-t_0)^3\,\vec{\Omega}\times]\vec{g'} \quad (1)$$

Donde $\vec{r'}(t)$ es la posición del objeto que mide alguien en la superficie en un tiempo t y $\vec{r'}_0$ es la posición inicial que se midió a un tiempo t_0 cuando empezó el movimiento. $\vec{\Omega}$ es el vector de velocidad angular de la Tierra. $\vec{v'}_0$ es la velocidad inicial que tiene el cuerpo estudiado con respecto a la superficie de la Tierra en un tiempo t_0. $\vec{g'}$ es la aceleración de la gravedad efectiva para alguien en la superficie de la tierra.
Vamos a necesitar la expresión de todos estos vectores antes de continuar.
La expresión para los vectores $\vec{g'}$ y $\vec{\Omega}$ las vimos en clase y son:

$$\vec{g'} \simeq (g - \Omega^2 R\cos^2\lambda)\widehat{k}$$
$$\vec{\Omega} = -\Omega\cos\lambda\widehat{i} + \Omega\sin\lambda\widehat{k}$$

Donde la expresión de $\vec{g'}$ se calculó en clase y la de $\vec{\Omega}$ se puede ver observando los vectores dibujados al lado de la imagen de la tierra que muestran al plano formado por $\widehat{i}, \widehat{k}$, al que pertenece $\vec{\Omega}$.
Luego, por tratarse de un tiro vertical, la velocidad inicial del objeto con respecto a la tierra tendrá una magnitud v_0 y apuntará de forma radial y hacia afuera (la dirección 'vertical' para alguien en la tierra). Por lo que:

$$\vec{v'}_0 = v_0\widehat{k}$$

Con estas expresiones, podemos calcular los productos vectoriales que necesitaremos:

- $\vec{\Omega}\times\vec{v'}_0 = \left|\begin{pmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ -\Omega\cos\lambda & 0 & \Omega\sin\lambda \\ 0 & 0 & v_0 \end{pmatrix}\right| = v_0\Omega\cos\lambda\widehat{j}$
- $\vec{\Omega}\times\vec{g'} = \left|\begin{pmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ -\Omega\cos\lambda & 0 & \Omega\sin\lambda \\ 0 & 0 & -g' \end{pmatrix}\right| = -\Omega g'\cos\lambda\widehat{j}$

Ahora reemplazamos estas expresiones en la ecuación (1) y encnotramos que:

$$\begin{aligned}
\vec{r'}(t) &= \vec{r'}_0 + (t-t_0)v_0\widehat{k} - (t-t_0)^2\ (\Omega v_0'\cos\lambda)\widehat{j} - \frac{1}{2}(t-t_0)^2 g'\ \widehat{k} + \frac{1}{3}(t-t_0)^3(g'\Omega\cos\lambda)\widehat{j} \\
&= \vec{r'}_0 + [(t-t_0)v_0 - \frac{1}{2}(t-t_0)^2 g']\widehat{k} + [\frac{1}{3}(t-t_0)^3 g'\Omega\cos\lambda - (t-t_0)^2\Omega v_0'\cos\lambda]\widehat{j} \quad (2)
\end{aligned}$$

Notamos que el primer corchete contiene únicamente el movimiento en la dirección vertical y el segundo corchete en la dirección este-oeste. Usamos el término de $\vec{k}$ para encontrar una relación entre la velocidad v_0 y el tiempo de recorrido de la trayectoria. El objeto lanzado volverá al piso cuando este término entre corchetes sea 0 (porque para este tiempo, $\vec{r'}(t)$ tendrá la misma componente en la dirección $\vec{k}$ que $\vec{r'}_0$ que es la posición inicial).

Entonces, el tiempo t de vuelo es aquél para el que se cumple que:

$$\begin{aligned}
(t-t_0)v_0 - \tfrac{1}{2}(t-t_0)^2 g' = 0 \\
\Rightarrow \quad (t-t_0) = \frac{2v_0}{g'}
\end{aligned}$$

Ahora bien, la desviación del cuerpo al regresar al piso viene dada por el término que lleva $\widehat{j}$ porque ésta es la única parte del movimiento que no se encuentra en la dirección vertical.
Entonces, para encontrar el valor de la desviación en el momento en el que el objeto regresa al piso, sustituimos el valor de $(t-t_0)$ encontrado antes en el término que lleva la $\widehat{j}$.
Entonces la desviación $\vec{d}$ es:

$$\begin{aligned}
\vec{d} &= [\frac{1}{3}(t-t_0)^3 g'\Omega\cos\lambda - (t-t_0)^2\Omega v_0'\cos\lambda]\widehat{j} \\
&= [\frac{1}{3}\frac{8v_0^3}{g'^3}g'\Omega\cos\lambda - \frac{4v_0^2}{g'^2}\Omega v_0'\cos\lambda]\widehat{j} \\
&= [\frac{8}{3}\frac{v_0^3}{g'^2}\Omega\cos\lambda - \frac{4v_0^3}{g'^2}\Omega\cos\lambda]\widehat{j} \\
&= -\frac{4}{3}\Omega\frac{v_0^3}{g'^2}\cos\lambda\ \widehat{j}
\end{aligned}$$

Y ésta es la desviación del objeto al regresar a la Tierra. Vemos que es en la dirección Oeste (porque $\widehat{j}$ apunta hacia el este).

Para poder compararlo con lo obtenido para caída libre en la clase, encontramos una relación entre v_0 y la altura máxima del objeto h.
La altura máxima se encuentra a la mitad del tiempo total de vuelo (esto se cumple porque podemos ver que en la dirección $\widehat{k}$ el movimiento es un tiro vertical típico). Entonces, para calcular la altura que alcanza el objeto sobre el piso, sustituimos $(t-$

$t_0) = \frac{v_0}{g'}$ en la componente $\vec{k}$.
Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} h &= (t-t_0)v_0 - \frac{1}{2}(t-t_0)^2 g' \\ &= \frac{v_0}{g'}v_0 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g'^2}g' \\ &= \frac{v_0^2}{2g'} \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que:

$$v_0 = \sqrt{2g'h}$$

Y sustituimos esto en la expresión que obtuvimos para $\vec{d}$

$$\begin{aligned} \vec{d} &= -\frac{4}{3}\Omega\frac{v_0^3}{g'^2}\cos\lambda\,\widehat{j} \\ &= -\frac{4}{3}\Omega\frac{\sqrt{8g'^3h^3}}{g'^2}\cos\lambda\,\widehat{j} \\ &= -\frac{4}{3}\Omega\cos\lambda\sqrt{\frac{8h^3}{g'}}\,\widehat{j} \\ &= -\frac{8h}{3}\Omega\cos\lambda\sqrt{\frac{2h}{g'}}\,\widehat{j} \end{aligned}$$

Vemos que este resultado es 4 veces más grande que el que obtuvimos para caída libre y va en la dirección contraria (Oeste).

5) **4.2. Encontrar la posición en un tiempo t de una partícula de masa m cuando la fuerza aplicada de $F = 2m\cos\omega t$ y $x = 8$ a $t = 0$, $x = -b$, $t = \pi/(2\omega)$**

Empezamos con la segunda ley de Newton, en este caso la fuerza depende únicamente del tiempo:

$$\begin{aligned} &F(t) = ma(t) \\ \Rightarrow \quad &a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{2m\cos\omega t}{m} = 2\cos\omega t \end{aligned}$$

Entonces, integramos una vez para obtener la velocidad:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int 2\cos\omega t\; dt \\ &= \frac{2}{\omega}\sin\omega t + A \end{aligned}$$

Con A una constante de integración. Integramos de nuevo para obtener la posición como función del tiempo:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \frac{2}{\omega}\sin\omega t + A\,dt \\ &= -\frac{2}{\omega^2}\cos\omega t + At + B \end{aligned}$$

Con B otra constante de integración. Ahora, para encontrar A y B usamos las condiciones del problema:

- $x(0) = 8 \quad \Rightarrow \quad 8 = -\frac{2}{\omega^2}\cos(0) + A(0) + B = -\frac{2}{\omega^2} + B$
  $\Rightarrow \quad B = 8 + \frac{2}{\omega^2}$
- $x(\pi/(2\omega)) = -b \quad \Rightarrow \quad -b = -\frac{2}{\omega}\cos\left(\omega\frac{\pi}{2\omega}\right) + A\frac{\pi}{2\omega} + B = A\frac{\pi}{2\omega} + B$
  $\Rightarrow \quad A = \frac{2\omega}{\pi}(-B-b) = -\frac{2\omega}{\pi}(B+b) = -\frac{2\omega}{\pi}(8 + \frac{2}{\omega^2} + b)$

Sustituimos estos valores para A, B en la expresión de $x(t)$ para obtener:

$$x(t) = -\frac{2}{\omega^2}\cos\omega t - \left(\frac{2\omega}{\pi}(8 + \frac{2}{\omega^2} + b)\right)t + 8 + \frac{2}{\omega^2}$$

6. **4.4 a) Si la velocidad límite de caída de un hombre de 80Kg con paracaídas es la misma que tendría al caer libremente 0.75 metros; hallar el valor de esta velocidad límite y la constante de amortiguamiento k.**

   Calculamos primero la velocidad que tendría al caer 0.75m libremente.
   Vimos en clase que la ecuación de la altura como función del tiempo para una caída libre es $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2$. Como empieza en el reposo, tenemos que $v_0 = 0$ y como empieza desde una altura de 0.75m, tenemos que $y_0 = 0{,}75m$
   Con esto tenemos que la función es $y(t) = y_0 - \frac{g}{2}t^2$.
   Podemos usar esta ecuación para calcular el tiempo total de caída t_f, que es aquél en el que el hombre llega al suelo, es decir, en el que $y(t_f) = 0$.
   Por tanto, nos queda que $y(t_f) = y_0 - \frac{g}{2}t_f^2$ y entonces $0 = y_0 - \frac{g}{2}t_f^2$.
   Por lo tanto, $t_f = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$

   Por otro lado, la velocidad en caída libre con aceleración $-g$ es $v(t) = v_0 - gt = -gt$. Y por tanto, la velocidad final con la que cae el hombre se obtiene para el tiempo $t = t_f$.
   Entonces, $v_f = v(t_f) = -g\sqrt{\frac{2y_0}{g}} = -\sqrt{2y_0 g}$

Por otro lado, en una caída con resistencia del aire, tenemos que la fuerza de resistencia es $F_a = -mkv$ con k la constante de amortiguamiento.
También se tiene la fuerza de la gravedad $-mg$.
El hombre alcanza su velocidad límite cuando estas dos fuerzas suman 0 (porque entonces la fuerza total y por tanto la aceleración es 0).
Es decir, cuando $-mkv - mg = 0$.
Despejamos de aquí la k para obtener que $k = -\frac{g}{v}$.
Y con la v que habíamos calculado antes y que el problema nos dice que es igual a la velocidad terminal del hombre, tenemos que:

$$k = -\frac{g}{v} = \frac{g}{\sqrt{2y_0 g}} = \sqrt{\frac{g}{2y_0}} = \sqrt{\frac{9{,}81 m/s^2}{2(0{,}75m)}} = 2{,}557 s^{-1}$$

b) **Supongamos ahora que el hombre cae libremente (partiendo del reposo) durante 5 segundos y que después abre su paracaídas. Luego de otros 5 segundo, ¿Cuál sería su velocidad?**

Primero calculamos la velocidad tras los primeros 5 segundos de caída libre.
Durante la caída libre, la aceleración es constante y por tanto la función para la velocidad como función del tiempo es $v(t) = v_0 - gt$.
Como inicia en reposo, $v_0 = 0$ y cae durante 5 segundos, por lo que la velocidad final tras la primera parte de la caída es:

$$v_1 = v \cdot (5) = -g(5) = -5g$$

Posteriormente, el hombre sigue otro tipo de movimiento en los siguientes 5 segundos. Ahora es una caída libre con resitencia del aire y que empieza con una velocidad v_1 calculada antes.

Para este movimiento se tiene una fuerza de $-mg$ por la gravedad y una de $-mkv$ por la resistencia del aire. Entonces, la segunda ley de Newton nos queda como:

$$-mg - mkv = ma$$

Reemplazamos a por $\frac{dv}{dt}$ y resolvemos la ecuación diferencial que resulta (donde el tiempo $t = 0$ se entiende como el momento en que el hombre abre el paracaídas y tiene una velocidad ya de v_1)

$$
\begin{aligned}
& -g - kv = \frac{dv}{dt} \\
\Rightarrow \quad & -1 = \frac{dv/dt}{g+kv} \\
\Rightarrow \quad & \int_0^t -dt = \int_0^t \frac{dv/dt \;\; dt}{g+kv} \\
\Rightarrow \quad & \int_0^t -dt = \int_0^t \frac{dv}{g+kv} = \frac{1}{k} ln \frac{g+kv}{g+kv_0} \\
\Rightarrow \quad & -t = \frac{1}{k} ln \frac{g+kv}{g+kv_1} \\
\Rightarrow \quad & v(t) = -\frac{g}{k} + \left(\frac{g}{k} + v_1\right) e^{-kt}
\end{aligned}
$$

La velocidad inicial de este movimiento es la velocidad que tenía el hombre después de caer los primeros 5 segundos sin paracaídas, es decir, la velocidad que calculamos antes de $v_1 = -5g$.
Y para la velocidad final hay que considerar los 5 segundos que cae con el paracaídas, para obtener:

$$v_f = v(5) = -\frac{g}{k} + \left(\frac{g}{k} - 5g\right) e^{-5k}$$

Y sustituimos el valor de k del inciso anterior:

$$
\begin{aligned}
v_f = -\frac{9{,}81 m/s^2}{2{,}557 s^{-1}} + \left(\frac{9{,}81 m/s}{2{,}557 s^{-1}} - (5s)(9{,}81 m/s^2)\right) e^{-(2{,}557 s^{-1})5s} \\
= -3{,}836 m/s
\end{aligned}
$$