Solitones: Tarea 5

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

27 de noviembre de 2021

Problemas 15-17

Considera la ecuación

$$iu_z - \frac{1}{2}u_{tt} + |u|^2u = 0$$

Esta ecuación tiene solitones oscuros de la forma:

$$u(z,t) = A\tanh(At)\exp(iA^2z)$$

¿Será posible usar el método variacional para estudiar la estabilidad de estos solitones? Explica con detalle

Primero veamos cuál es la lagrangiana de esta ecuación diferencial. Ya hemos trabajado la ecuación y hemos visto antes que la lagrangiana es la siguiente:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(uu_z^* - u^*u_z) - \frac{1}{2}u_tu_t^* - \frac{1}{2}u^2u^{*2}$$

Para comprobar que sí lo es, calculamos la ecuación de Euler-Lagrange para esta lagrangiana:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*}\right) - \partial_z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*}\right) = 0$$

Calculamos cada una de estas derivadas por separado:

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = \dfrac{\partial}{\partial u^*}\left(\dfrac{i}{2}(uu_z^* - u^*u_z) - \dfrac{1}{2}u_tu_t^* - \dfrac{1}{2}u^2u^{*2}\right) = -\dfrac{i}{2}u_z - u^2u^* = -\dfrac{i}{2}u_z - |u|^2u$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} = \dfrac{\partial}{\partial u_t^*}\left(\dfrac{i}{2}(uu_z^* - u^*u_z) - \dfrac{1}{2}u_tu_t^* - \dfrac{1}{2}u^2u^{*2}\right) = -\dfrac{1}{2}u_t$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} = \dfrac{\partial}{\partial u_z^*}\left(\dfrac{i}{2}(uu_z^* - u^*u_z) - \dfrac{1}{2}u_tu_t^* - \dfrac{1}{2}u^2u^{*2}\right) = \dfrac{i}{2}u$

Por lo que al sustituir en la ecuación de Euler Lagrange nos queda:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*}\right) - \partial_z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*}\right) &= 0 \\
\Rightarrow\ -\frac{i}{2}u_z - |u|^2u - \partial_t\left(-\frac{1}{2}u_t\right) - \partial_z\left(\frac{i}{2}u\right) &= 0 \\
\Rightarrow\ -\frac{i}{2}u_z - |u|^2u + \frac{1}{2}u_{tt} - \frac{i}{2}u_z &= 0 \\
\Rightarrow\ -iu_z + \frac{1}{2}u_{tt} - |u|^2u &= 0
\end{aligned}$$

Que es la ecuación diferencial que queremos estudiar.

Ya teniendo la Lagrangiana, la calcularemos para la solución $u(z,t) = A\tanh(At)\exp(iA^2z)$. Calculamos primero cada una de las derivadas necesarias:

- $u = A\tanh(At)\exp(iA^2z)$
- $u^* = A\tanh(At)\exp(-iA^2z)$
- $u_z = iA^3\tanh(At)\exp(iA^2z)$
- $u_z^* = -iA^3\tanh(At)\exp(-iA^2z)$
- $u_t = A^2\mathrm{sech}^2(At)\exp(iA^2z)$
- $u_t^* = A^2\mathrm{sech}^2(At)\exp(-iA^2z)$

Luego, la lagrangiana es igual a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{i}{2}(uu_z^* - u^*u_z) - \frac{1}{2}u_tu_t^* - \frac{1}{2}u^2u^{*2} \\
&= \frac{i}{2}\left[(A\tanh(At)\exp(iA^2z))(-iA^3\tanh(At)\exp(-iA^2z)) - (A\tanh(At)\exp(-iA^2z))(iA^3\tanh(At)\exp(iA^2z))\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left((A^2\mathrm{sech}^2(At)\exp(iA^2z))(A^2\mathrm{sech}^2(At)\exp(-iA^2z))\right) - \frac{1}{2}|A\tanh(At)\exp(iA^2z)|^4 \\
&= \frac{i}{2}\left[-iA^4\tanh^2(At) - iA^4\tanh^2(At)\right] - \frac{1}{2}\left[A^4\mathrm{sech}^4(At)\right] - \frac{1}{2}A^4\tanh^4(At) \\
&= A^4\tanh^2(At) - \frac{1}{2}A^4\mathrm{sech}^4(At) - \frac{1}{2}A^4\tanh^4(At) \\
&= \frac{1}{2}A^4\tanh^2(At) + \frac{1}{2}A^4\left[\tanh^2(At) - \tanh^4(At)\right] - \frac{1}{2}A^4\mathrm{sech}^4(At) \\
&= \frac{1}{2}A^4\tanh^2(At) + \frac{1}{2}A^4\mathrm{sech}^2(At)\tanh^2(At) - \frac{1}{2}A^4\mathrm{sech}^4(At)
\end{aligned}$$

E integrando podemos calcular la lagrangiana:

$$L = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{L}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}A^4\tanh^2(At)dt + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}A^4\mathrm{sech}^2(At)\tanh^2(At)dt + \int_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{2}A^4\mathrm{sech}^4(At)dt$$

La segunda y tercera integral son finitas como se puede aquí usando Mathematica:

```
Integrate[Sech[t]^2 Tanh[t]^2, {t, -Infinity, Infinity}]
2
-
3
Integrate[Sech[x]^4, {x, -Infinity, Infinity}]
4
-
3
```

Pero la primera integral no converge

```
Integrate[Tanh[t]^2, {t, -Infinity, Infinity}]
··· Integrate: Integral of Tanh[t]^2 does not converge on {-∞, ∞}.
∫_-∞^∞ Tanh[t]^2 dt
```

Por lo que la integral completa $L = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{L}dt$ no es convergente.

Sin embargo, el método variacional requiere obtener el lagrangiano L, por lo que no parece que se pueda utilizar el método para esta ecuación y con esta solución.

Problema 18

Encuentra la lagrangiana de la ecuación de Schrodinger usual que surge en mecánica cuántica (la ecuación dependiente del tiempo)
Verifica que las 2 ecuaciones de Euler Lagrange (la de u y la de u^*) conducen a la misma ecuación)

La ecuación de Shrodinger usual (a la que queremos llegar) es (con $\hbar = 1$):

$$\begin{aligned} iu_t &= -\frac{1}{2m}\nabla^2 u + Vu \\ \Rightarrow\ iu_t &= -\frac{1}{2m}(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) + Vu \\ \Rightarrow\ iu_t + \frac{1}{2m}(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) - Vu &= 0 \end{aligned}$$

Queremos deducir esta ecuación a partir de una lagrangiana $\mathcal{L}$ con la ecuación de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*}\right) - \partial_x\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x^*}\right) - \partial_y\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y^*}\right) - \partial_z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*}\right) = 0$$

El término iu_t de la ecuación de Schrodinger se puede obtener poniendo un término iu^*u_t en la Lagrangiana, pues entonces tendremos que el término $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*}$ de la ecuación de Euler Lagrange es iu_t.

Por otro lado, el término $\frac{1}{2m}u_{ii}$ se puede conseguir con un término $-\frac{1}{2m}u_i^*u_i$ en la lagrangiana. Pues entonces tendremos que el término $-\partial_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i^*}\right)$ de la ecuación de Euler Lagrange es igual a $-\partial_i\left(-\frac{1}{2m}u_i\right) = \frac{1}{2m}u_{ii}$.

Finalmente, el término Vu de la ecuación de Schrodinger se puede conseguir a partir de un término Vuu^* en la lagrangiana. Pues entonces la ecuación de Euler lagrange contendría el término $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = Vu$.

Luego, la propuesta para lagrangiana de la ecuación de Euler Lagrange es:

$$\boxed{\mathcal{L} = iu^*u_t - \frac{1}{2m}(u_x^*u_x + u_y^*u_y + u_z^*u_z) - Vu^*u}$$

Vamos a ver si efectivamente esta lagrangiana funciona calculando su ecuación de Euler Lagrange. Para ello, primero calculamos cada una de las derivadas por separado.

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = iu_t - Vu$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} = 0$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x^*} = -\frac{1}{2m}u_x$

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y^*} = -\dfrac{1}{2m} u_y$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} = -\dfrac{1}{2m} u_z$

Luego sustituimos en la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} \right) - \partial_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x^*} \right) - \partial_y \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y^*} \right) - \partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} \right) = 0 \\ \Rightarrow \; iu_t - Vu - \partial_t(0) - \partial_x \left(-\frac{1}{2m} u_x \right) - \partial_y \left(-\frac{1}{2m} u_y \right) - \partial_z \left(-\frac{1}{2m} u_z \right) = 0 \\ iu_t - Vu + \frac{1}{2m} \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \right) = 0 \end{aligned}$$

Que es la ecuación de Schrodinger.

Ahora calculamos la ecuación que se obtiene al derivar respecto a u en vez de respecto a u^*. Se obtiene con la siguiente ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \partial_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \partial_y \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} \right) - \partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \right) = 0$$

Calculamos cada derivada del lagrangiano que obtuvimos antes para luego sustituirlo en esta ecuación de Euler Lagrange:

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = -Vu^*$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = iu^*$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = -\dfrac{1}{2m} u_x^*$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} = -\dfrac{1}{2m} u_y^*$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} = -\dfrac{1}{2m} u_z^*$

Sustituimos en la ecuación de Euler Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \partial_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \partial_y \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} \right) - \partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \right) = 0 \\ \Rightarrow \; -Vu^* - \partial_t(iu^*) - \partial_x \left(-\frac{1}{2m} u_x^* \right) - \partial_y \left(-\frac{1}{2m} u_y^* \right) - \partial_z \left(-\frac{1}{2m} u_z^* \right) = 0 \\ \Rightarrow \; -Vu^* - iu_t^* + \frac{1}{2m} \left(u_{xx}^* + u_{yy}^* + u_{zz}^* \right) = 0 \end{aligned}$$

Y recuperamos la misma ecuación de Schrodinger de antes si conjugamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} \left[-Vu^* - iu_t^* + \frac{1}{2m} \left(u_{xx}^* + u_{yy}^* + u_{zz}^* \right) \right]^* = 0 \\ \Rightarrow \; -Vu + iu_t + \frac{1}{2m} \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \right) = 0 \end{aligned}$$

Problemas 19-22

Encuentra qué forma tiene la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a una lagrangiana de la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) + \frac{1}{2}u^2(u^*)^2 - u_t u_t^* + [z\,\mathrm{sen}(t)](u_{zt} + u_{zt}^*)$$

exigiendo que $\partial S = 0$, donde:

$$S = \int\int \mathcal{L}\; dtdz$$

Explica claramente todos los pasos que conducen a la ecuación de Euler-Lagrange

S es una funcional de u de la siguiente forma:

$$S[u(z,t)] = \int\int \mathcal{L}(u, u_z, u_t, u_{zt})\; dtdz$$

Vemos que se diferencia de los funcionales a los que estamos acostumbrados en que la lagrangiana depende también de la segunda derivada u_{zt}.

Para encontrar la condición para que $\delta S = 0$, supongamos que $u(t,z)$ es una función que extremiza $S[u]$ y consideremos una familia de superficies parametrizadas por α dada por:

$$u = u(t,z,\alpha) = u(t,z) + \alpha\delta u$$

La superficie que extremiza a $S[u]$ es la correspondiente a $\alpha = 0$. Por lo tanto, $\left.\frac{\partial}{\partial\alpha}S[u(t,z,\alpha)]\right|_{\alpha=0} = 0$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\int\int \mathcal{L}(u, u_z, u_t, u_{zt})\; dtdz\right]_{\alpha=0} = 0 \\
&\Rightarrow \int\int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\frac{\partial u_z}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\frac{\partial u_t}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\frac{\partial u_{zt}}{\partial\alpha}\; dtdz\Big|_{\alpha=0} = 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Para continuar, calculamos los siguientes derivadas:

$$\begin{aligned}
u_t(t,z,\alpha) &= \partial_t(u(t,z,\alpha)) = \partial_t(u(t,z) + \alpha\delta u) = u_t(t,z) + \alpha\delta u_t \\
u_z(t,z,\alpha) &= \partial_z(u(t,z,\alpha)) = \partial_z(u(t,z) + \alpha\delta u) = u_z(t,z) + \alpha\delta u_z \\
u_{zt}(t,z,\alpha) &= \partial_z(u_t(t,z,\alpha)) = \partial_z(u_t(t,z) + \alpha\delta u_t) = u_{zt}(t,z) + \alpha\delta u_{zt}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos calcular las derivadas que necesitamos sustituir en la integral (1)

- $\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}u(t,z,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}(u(t,z) + \alpha\delta u) = \delta u$
- $\frac{\partial u_t}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}(u_t(t,z) + \alpha\delta u_t) = \delta u_t$
- $\frac{\partial u_z}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}(u_z(t,z) + \alpha\delta u_z) = \delta u_z$

- $\dfrac{\partial u_{zt}}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial}{\partial \alpha}(u_{zt}(t,z) + \alpha \delta u_{zt}) = \delta u_{zt}$

Por lo que la integral (1) queda como:

$$\boxed{\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\delta u_{zt}\; dtdz = 0} \quad (2)$$

Vamos a separar esta integral en 3 partes para resolverla:

- $\int\int \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\delta u \;\; dtdz$
  A esta primera parte no le haremos nada.
- $\int\int \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t \; dtdz$

  Para calcular esta integral, primero notamos que:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\frac{\partial}{\partial z}(\delta u) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\frac{\partial}{\partial t}(\delta u) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t \quad (4)$$

  Y entonces por (3) tenemos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\delta u$$

  Y por (4) tenemos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\delta u$$

  Sustituimos estas dos expresiones en la integral que queremos calcular:

$$\begin{aligned}\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t \; dtdz &= \int\int \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\delta u + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\delta u \;\; dtdz \\ &= \int\int \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u\right] \; dtdz + \int\int -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\delta u - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\delta u \; dtdz \quad (5)\end{aligned}$$

  En esta última expresión la primera integral se puede calcular usando la fórmula de Green $\int\int_D \; \partial_z N + \partial_t M \; dtdz = \int_C N \; dt - M \; dz$. Con C la frontera del conjunto D sobre el que estamos integrando. Por lo que la primera integral de la expresión (5) es igual a:

$$\begin{aligned}\int\int \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u\right] \; dtdz &= \int_C \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u\right] \; dt - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u\right] \; dz \\ &= \int_C \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\; dt - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\; dz\right]\delta u\end{aligned}$$

  Pero esta integral vale 0 debido a que en el contorno C la variación $\delta u = 0$, ya que todas las superficies admisibles deben de cumplir con ciertas condiciones de frontera en este contorno.

Por lo tanto, igualando a 0 la primera integral del lado derecho de (5), tenemos que la integral que buscábamos es:

$$\boxed{\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t \; dtdz = \int\int -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\delta u - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\delta u \; dtdz} \quad (6)$$

- $\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\delta u_{zt} \; dtdz$

  Para resolver esta integral, integramos por partes primero respecto a t:

  $$\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\delta u_{zt} \; dtdz = \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\right)\delta u_z\Big|_{t_0}^{t_1} - \int \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\right)\delta u_z \; dt\right] dz$$

  Pero la variación δu_z se anula en los extremos, por lo que $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\right)\delta u_z\Big|_{t_0}^{t_1} = 0$

  $$= -\int\int \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\right)\delta u_z \; dzdt$$

  Ahora integramos por partes respecto a z:

  $$= -\int \left[\partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\right)\delta u\Big|_{z_0}^{z_1} - \int \partial_z\partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\right)\delta u \; dz\right] dt$$

  δu se anula en los extremos por lo que el primer término es 0 y nos queda:

  $$= \int\int \partial_z\partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\right)\delta u \; dzdt$$

  Por lo que concluimos que:

  $$\boxed{\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\delta u_{zt} \; dtdz = \int\int \partial_z\partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\right)\delta u \; dzdt} \quad (7)$$

Ahora sí regresamos a la expresión (2) y sustituimos estas integrales (6) y (7) que conseguimos:

$$\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\delta u_{zt} \; dtdz = 0$$

$$\Rightarrow \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\delta u \; dtdz + \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t \; dtdz + \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\delta u_{zt} \; dtdz = 0$$

sustiuimos las integrales 6 y 7:

$$\Rightarrow \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\delta u \; dtdz + \int\int -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\delta u - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\delta u \; dtdz + \int\int \partial_z\partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\right)\delta u \; dzdt = 0$$

$$\Rightarrow \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\delta u - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\delta u - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\delta u + \partial_z\partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\right)\delta u \; dzdt = 0$$

$$\Rightarrow \int\int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right) - \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) + \partial_z\partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\right)\right]\delta u \; dzdt = 0$$

Pero como esto se debe de valer para cualquier variación δu, debemos de tener que el término entre corchetes es igual a 0, es decir:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right) - \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) + \partial_z\partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}}\right) = 0}$$

Que es la ecuación de Euler Lagrange para este caso.

Problema 55

Cuando sustituimos la lagrangiana (3) en la ecuación de Euler Lagrange correspondiente (del problema anterior): ¿Cuál es la ecuación diferencial que obtenemos?

Tenemos que la lagrangiana es:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) + \frac{1}{2}u^2(u^*)^2 - u_t u_t^* + [z \operatorname{sen}(t)](u_{zt} + u_{zt}^*)$$

Y tenemos que sustituir esto en la ecuación de Euler Lagrange que acabamos de obtener:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \right) - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) + \partial_z \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}} \right) = 0$$

Calculamos cada una de las derivadas por separado:

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = -\dfrac{i}{2}u_z + u(u^*)^2$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} = \dfrac{i}{2}u^*$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = -u_t^*$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}} = z \sin(t)$

Y sustituimos en la ecuación de Euler Lagrange del ejercicio anterior:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \right) - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) + \partial_z \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}} \right) = 0 \\
&\Rightarrow \; -\frac{i}{2}u_z^* + u(u^*)^2 - \partial_z \left(\frac{i}{2}u^* \right) - \partial_t(-u_t^*) + \partial_z \partial_t (z \sin(t)) = 0 \\
&\Rightarrow \; -\frac{i}{2}u_z^* + u(u^*)^2 - \frac{i}{2}u_z^* + u_{tt}^* + \cos(t) = 0 \\
&\Rightarrow \; \boxed{-i u_z^* + |u|^2 u^* + u_{tt}^* + \cos(t) = 0}
\end{aligned}$$

Y también podemos obtener otra ecuación derivando con respecto a u^*. La ecuación de Euler Lagrange en este caso es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} \right) - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} \right) + \partial_z \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zt}^*} \right) = 0$$

Calculamos cada derivada por separado:

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = \dfrac{i}{2}u_z^* + u^* u^2$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} = -\dfrac{i}{2}u$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} = -u_t$

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*_{zt}} = z\sin(t)$

Y sustituimos en la ecuación de Euler Lagrange:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \partial_z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*_z}\right) - \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*_t}\right) + \partial_z\partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*_{zt}}\right) = 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{i}{2}u_z + u^*u^2 - \partial_z\left(-\frac{i}{2}u\right) - \partial_t(-u_t) + \partial_z\partial_t(z\sin(t)) = 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{i}{2}u_z + |u|^2u + \frac{i}{2}u_z + u_{tt} + \cos(t) = 0 \\
\Rightarrow\ & \boxed{iu_z + |u|^2u + u_{tt} + \cos(t) = 0}
\end{aligned}
$$