Óptica 1er Examen Parcial

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

20 de agosto de 2020

Ejercicio 1 (1pt): Demuestra que $\psi(x,t) = A\sin^2(t+x)$ es una solución de la ecuación de onda en una dimensión.

Debemos de comprobar que esta función cumple con la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Calculamos entonces las derivadas necesarias:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\sin^2(t+x)\right) = 2A\sin(t+x)\cos(t+x)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2A\sin(t+x)\cos(t+x)\right) = 2A\sin(t+x)(-\sin(t+x)) + 2A\cos(t+x)\cos(t+x)$$
$$= 2A\left[\cos^2(t+x) - \sin^2(t+x)\right] = 2A\cos(2t+2x)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(A\sin^2(t+x)\right) = 2A\sin(t+x)\cos(t+x)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(2A\sin(t+x)\cos(t+x)\right) = 2A\sin(t+x)(-\sin(t+x)) + 2A\cos(t+x)\cos(t+x)$$
$$= 2A\left[\cos^2(t+x) - \sin^2(t+x)\right] = 2A\cos(2t+2x)$$

Entonces, podemos ver que $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t^2}$.
Lo cual prueba que la función cumple con la ecuación de onda con $v = 1$.

Ejercicio 2 (1pt): ¿La función $f(x,t) = A(x+Bt+D)^2 e^{Cx^2+B^2Ct^2-2BCxt}$ es una función de onda? Justifica tu respuesta.

Primero que nada, podemos escribir la función como: $f(x,t) = A(x+Bt+D)^2 e^{C(x-Bt)^2}$
Y ahora definimos las siguientes funciones:

$$h(y) = A(y+D)^2$$
$$g(y) = e^{Cy^2}$$

Con estas funciones auxiliares podemos notar que la función original se puede escribir como:

$$f(x,t) = A(x+Bt+D)^2 e^{C(x-Bt)^2} = h(x+Bt)\ g(x-Bt)$$

Entonces ahora será más sencillo derivarla para ver si la función cumple con la ecuación de onda :

8

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\ [h(x+Bt)g(x-Bt)] = h(x+Bt)\ \frac{\partial}{\partial x} g(x-Bt) + g(x-Bt)\frac{\partial}{\partial x} h(x+Bt)$$
$= h(x+Bt)g'(x-Bt) + g(x-Bt)h'(x+Bt)$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\, [h(x+Bt)g'(x-Bt) + g(x-Bt)h'(x+Bt)]$$
$= h(x+Bt)\ \frac{\partial}{\partial x} g'(x-Bt) + g'(x-Bt)\frac{\partial}{\partial x} h(x+Bt) + g(x-Bt)\frac{\partial}{\partial x} h'(x+Bt) + h'(x+Bt)\frac{\partial}{\partial x} g(x-Bt)$
$= h(x+Bt)g''(x-Bt) + g(x-Bt)h''(x+Bt) + 2g'(x-Bt)h'(x+Bt)$
Entonces,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = h(x+Bt)g''(x-Bt) + g(x-Bt)h''(x+Bt) + 2g'(x-Bt)h'(x+Bt) \quad (1)$$
.

Ahora calculamos la derivada con respecto a t:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\ [h(x+Bt)g(x-Bt)] = h(x+Bt)\ \frac{\partial}{\partial t} g(x-Bt) + g(x-Bt)\frac{\partial}{\partial t} h(x+Bt)$$
$= -B\ h(x+Bt)g'(x-Bt) + B\ g(x-Bt)h'(x+Bt)$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\, [-B\ h(x+Bt)g'(x-Bt) + B\ g(x-Bt)h'(x+Bt)]$$
$= -B\ h(x+Bt)\ \frac{\partial}{\partial t} g'(x-Bt) - B\ g'(x-Bt)\frac{\partial}{\partial t} h(x+Bt) + B\ g(x-Bt)\frac{\partial}{\partial t} h'(x+Bt) + B\ h'(x+Bt)\frac{\partial}{\partial t} g(x-Bt)$
$= B^2\ h(x+Bt)g''(x-Bt) - B^2\ g'(x-Bt)h'(x+Bt) + B^2\ g(x-Bt)h''(x+Bt) - B^2\ g'(x-Bt)h'(x+Bt)$
Entonces,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = B^2 h(x+Bt)g''(x-Bt) + B^2 g(x-Bt)h''(x+Bt) - 2B^2 g'(x-Bt)h(x+Bt) \quad (2)$$

Observando (1) y (2), vemos que no existe una v tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

Pues $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ es mayor a $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ por un término extra de $4g'(x-Bt)h'(x+Bt)$. Podemos ver que este término no se anula, pues $h'(y) = 2A(y+C)$ y $g'(y) = 2Cye^{Cy^2}$ y entonces $4g'(x-Bt)h'(x+Bt) = 16AC(x-Bt)e^{C(x-Bt)^2}(x+Bt+D) \neq 0$

.

Ejercicio 3 (1pt): Dada la función de onda $y(x,t) = 10^2 \sin(2\pi x - 4\pi t)$ y dos detectores en los puntos $x_1 = 2$ y $x_2 = 10$ ¿Cuánto vale la función de onda en x_2 en el instante en que $y(x_1, t') = 10^2$?

Tenemos que $y(x_1, t') = 10^2 \;\Rightarrow\; 10^2 \sin(2\pi x_1 - 4\pi t') = 10^2$
$\Rightarrow\; \sin(2\pi(2) - 4\pi t') = 1 \;\Rightarrow\; \sin(4\pi(1 - t')) = 1$
Por lo tanto, para que el seno valga 1, tenemos: $4\pi(1-t') = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
$\Rightarrow 2(1-t') = k + 1/4 \quad \Rightarrow\; t' = 1 - \dfrac{k}{2} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7-4k}{8}$

Entonces, evaluamos la función en este mismo tiempo en $x_2 = 10$
$y(x_2, t') = 10^2 \sin(2\pi x_2 - 4\pi t') = 10^2 \sin\left(20\pi - 4\pi \dfrac{7-4k}{8}\right)$
$= 10^2 \sin\left(20\pi - \dfrac{7\pi}{2} + 2k\pi\right)$
$= 10^2 \sin\left(\dfrac{-7\pi}{2}\right)$ (eliminamos todos los múltiplos de 2π del seno).

Y entonces, la función de onda en x_2 vale: $y(x_2, t') = 10^2 \sin\left(\dfrac{-7\pi}{2}\right) = 10^2$

El resultado también se puede conseguir notando que:
$y(x_1, t') = 10^2 \sin(4\pi - 4\pi t')$, $y(x_2, t') = 10^2 \sin(20\pi - 4\pi t')$
Y los argumentos difieren en 16π que es múltiplo de 2π y por tanto el seno tiene el mismo valor en ambos argumentos.

Ejercicio 4 (1pt): Demuestra que la velocidad de grupo puede escribirse como

$$v_g = \frac{c}{n} + \frac{\lambda c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}$$

La velocidad de grupo se calcula como $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$, entonces:

$$\begin{aligned}
v_g &= \frac{d\omega}{dk} \\
&= \frac{d}{dk}(kv) \qquad \text{porque } \omega = kv \\
&= v + k\frac{dv}{dk} \quad \text{Por la regla del producto} \\
&= v + k\frac{dv}{dn}\frac{dn}{dk} \quad \text{Por la regla de la cadena} \\
&= v + k\frac{d}{dn}\left(\frac{c}{n}\right)\frac{dn}{dk} \quad \text{Porque } n = c/v \ \Rightarrow \ v = c/n \\
&= v + k\left(-\frac{c}{n^2}\right)\frac{dn}{dk} \\
&= v - \frac{kc}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} \quad \text{Por la regla de la cadena} \\
&= v - \frac{kc}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}\frac{d}{dk}\left(\frac{2\pi}{k}\right) \quad \text{Porque } \lambda = 2\pi/k \\
&= v - \frac{kc}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}\frac{-2\pi}{k^2} \\
&= v + \frac{2\pi}{k}\frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda} \\
&= \frac{c}{n} + \frac{\lambda c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda} \quad \text{Porque } v = c/n \ \text{ y } \frac{2\pi}{k} = \lambda
\end{aligned}$$

Y queda entonces demostrado.

Ejercicio 5 (2pt) Para ondas luminosas $\lambda_1 = 656{,}3nm$, el agua presenta un índice de refracción de $n_1 = 1{,}3311$ a 20^o C. Para $\lambda_2 = 589{,}3nm$, el índice de refracción es de $n_2 = 1{,}3330$. Determina el valor aproximado de la velocidad de grupo en el agua. (Tal vez convenga aproximar las derivadas en diferencias finitas, es decir $df/dx \simeq \Delta f/\Delta x$)

Por como se define, la velocidad de grupo es: $v_g = \dfrac{d\omega}{dk} \simeq \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$

Podría usar directamente esta fórmula, calculando antes $\omega_1, \omega_2, k_1, k_2$ a partir de los datos dados por el problema. Sin embargo, en el ejercicio anterior se probó otra forma de calcular la velocidad de grupo que involucra justo las variables que tenemos:

$$v_g = \frac{c}{n} + \frac{\lambda c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{c}{\bar{n}} + \frac{\bar{\lambda} c}{\bar{n}^2}\frac{\Delta n}{\Delta\lambda}$$

Donde aproximamos la derivada por diferencias finitas y para λ y n tomamos el valor promedio de las dos ondas $\bar{\lambda}$ $\bar{n}$.
Entonces calculamos las magnitudes que necesitamos:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{656{,}3 \times 10^{-9}m + 589{,}3 \times 10^{-9}m}{2} = 622{,}8 \times 10^{-9}m$$
$$\bar{n} = \frac{n_1 + n_2}{2} = \frac{1{,}3311 + 1{,}3330}{2} = 1{,}33205$$
$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 656{,}3 \times 10^{-9}m - 589{,}3 \times 10^{-9}m = 67 \times 10^{-9}m$$
$$\Delta n = n_2 - n_1 = 1{,}3330 - 1{,}3311 = 0{,}0019$$

Entonces, calculamos la velocidad de grupo:

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{c}{\bar{n}} + \frac{\bar{\lambda}c}{\bar{n}^2}\frac{\Delta n}{\Delta\lambda} \\ &= \frac{3 \times 10^8 m/s}{1{,}33205} + \frac{(622{,}8 \times 10^{-9}m)(3 \times 10^8 m/s)}{1{,}33205^2}\frac{0{,}0019}{67 \times 10^{-9}m} \\ &\simeq 228,200,000 m/s \end{aligned}$$

Ejercicio 6 (1 pto): Sea $f(x)$ una función de periodo $\lambda = 2$, tal que para $|x| \leq 1$, $f(x) = x^2$. Determina la serie de Fourier de $f(x)$

El problema dice que el periodo es de $\lambda = 2$, así que es suficiente con que nos fijemos en el ciclo completo que comprende $-1 \leq x \leq 1$ donde la función vale $f(x) = x^2$.
Además, tenemos que $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Entonces, podemos calcular los coeficientes de Fourier según como se definen en el Hecht:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\lambda}\int_{Ciclo} f(x)dx = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_m &= \frac{2}{\lambda}\int_{Ciclo} f(x)\cos mkx\; dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cos m\pi x\; dx \\
&= \frac{1}{\pi m} x^2 \sin \pi m x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi m} x \sin \pi m x\; dx \quad \text{(integral por partes con } \; u = x^2,\; dv = \cos m\pi x) \\
&= \frac{1}{\pi m}\sin \pi m - \frac{1}{\pi m}\sin(-\pi m) - \int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi m} x \sin \pi m x\; dx \\
&= -\int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi m} x \sin \pi m x\; dx \quad (\text{ Como } m \text{ es entero, } sin(m\pi) = 0) \\
&= -\frac{2}{\pi m}\left[x \frac{-1}{\pi m}\cos \pi m x + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi m}\cos \pi m x\; dx\right] \quad \text{Integral por partes con } u = x, dv = \sin \pi m x \\
&= -\frac{2}{\pi^2 m^2}\left[-x \cos \pi m x + \frac{1}{\pi m}\sin \pi m x\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{2}{\pi^2 m^2}\left[-\cos(\pi m) - \cos(-\pi m)\right] = -\frac{2}{\pi^2 m^2}\left[-2\cos \pi m\right] \\
&= \frac{4}{\pi^2 m^2}(-1)^m \qquad \text{Porque el coseno vale } -1 \text{ para } m \text{ impar y vale 1 para } m \text{ par}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_m &= \frac{2}{\lambda}\int_{ciclo} f(x)\sin mkx\; dx = \int_{-1}^{1} x^2 \sin mkx\; dx \\
&= 0 \;\; \text{Porque el integrando es par y se integra sobre un intervalo simétrico con el origen}
\end{aligned}
$$

Entonces, la series es: $f(x) = \dfrac{A_0}{2} + \sum A_m \cos mkx + \sum B_m \sin mkx$

$$
f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 m^2}(-1)^m \cos(mkx)
$$

Ejercicio 7 (1 pt) Calcula la transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \quad , \quad x \geq 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{cases}$$

Según la convención con la que se define la transformada al final del examen, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)\} = F(k) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi kx} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i2\pi kx} dx = \int_0^{\infty} e^{-x(1+i2\pi k)} dx \\ &= \frac{-1}{1+2\pi ki} e^{-x(1+2\pi ki)} \bigg|_0^{\infty} \\ &= \frac{-1}{1+2\pi ki} \left[e^{-\infty} - e^0 \right] \\ &= \frac{1}{1+2\pi ki} \end{aligned}$$

Ejercicio 8 (2pts): Sean $f(x), g(x)$ dos funciones cuyas transformadas de Fourier son, respectivamente $F(k), G(k)$. La correlación (cruzada) de dos funciones, denotada por $f(x) \star g(x)$, se define como:

$$f(x) \star g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g^*(\xi + x)\, d\xi$$

Demuestre que la transformada de Fourier de la correlación de una función consigo misma (es decir la autocorrelación) es igual al cuadrado del módulo de su transformada de Fourier, es decir:

$$\mathcal{F}\{f(x) \star f(x)\} = |\mathcal{F}\{f(x)\}|^2$$

Empezamos con el lado izquierdo:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) f^*(\xi + x) d\xi\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) f^*(\xi + x) d\xi\right] e^{-i2\pi kx} dx \text{ Por la def. de Transformada de Fourier}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) f^*(\xi + x) e^{-i2\pi kx}\, d\xi dx \quad \text{Porque } \ e^{-i2\pi kx} \text{no tiene dependencia en } \xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) f^*(\xi + x) e^{-i2\pi kx}\, dx d\xi \quad \text{Cambio de orden de integración}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \ \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi + x) e^{-i2\pi kx}\, dx d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \ \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi + x) e^{-i2\pi k(x+\xi)} e^{i2\pi k\xi}\, dx\right] d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i2\pi k\xi} \ \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi + x) e^{-i2\pi k(x+\xi)}\, dx\right] d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i2\pi k\xi} \ \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + x) e^{i2\pi k(x+\xi)}\, dx\right]^* d\xi \text{ Extraemos el conjugado del término en corchetes}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i2\pi k\xi} \ \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i2\pi ku}\, du\right]^* d\xi$$

Cambio de variable $u = x + \xi,\ du = dx$ en la integral interior (en la que ξ es constante)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i2\pi k\xi} [F(k)]^*\, d\xi \text{ El término entre corchetes es la transformada de Fourier de } f$$

$$= [F(k)]^* \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i2\pi k\xi}\, d\xi$$

$$= [F(k)]^* [F(k)] \quad \text{La integral es la transformada de Fourier de } f$$

$$= |F(k)|^2 \qquad \text{Por la propiedad } zz^* = |z|^2$$

$$= |\mathcal{F}\{f(x)\}|^2$$

Ejercicio 9 (Opcional. 2 pts extras) : Demuestra el teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 \, dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 \, dk = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)F^*(k) \, dk$ Porque $|z|^2 = zz^*$

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i2\pi kx}dx\right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{i2\pi kx'}dx'\right]^* dk$ Por la def. de transformada

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i2\pi kx}dx\right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x')e^{-i2\pi kx'}dx'\right] dk$ Aplicamos el conjugado

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i2\pi kx}dx\right] f^*(x')e^{-i2\pi kx'}dx' \, dk$ Metemos la segunda integral en la tercera (para la cual es cte)

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i2\pi kx} f^*(x')e^{-i2\pi kx'}dx\right] dx' \, dk$ Metemos $f^*(x')e^{-i2\pi kx'}$ en la integral interna

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i2\pi k(x-x')} f^*(x')dxdx' \, dk$

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i2\pi k(x-x')} f^*(x')dkdx'dx$ Cambiamos el orden de integración

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x') \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi k(x-x')} \, dk\right\} dx'dx$ Sacamos $f(x)f^*(x')$ de la integral interior

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x')\delta(x-x') \, dx'dx$ Por la definición de la función delta que viene al final del examen, la integral entre corchetes es la función delta evaluada en $x - x'$

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x')\delta(x-x') \, dx'\right] dx$

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, f^*(x) \, dx$ Por la propiedad de 'localización' de la delta

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx$