Tarea 3: Óptica Cuántica con átomos y fotones

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

June 20, 2022

Problema 1

Calcular R_0 y analizar sus unidades

Según la definición vista en clase, R_0 es igual a $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$. Para calcularla, simplemente buscamos los valores de estas constantes, los cuales se pueden encontrar en la página de NIST, https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html.

$$R_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{8.8541878128 \times 10^{-12} F m^{-1}}{1.25663706212 \times 10^{-6} N A^{-2}}} = 0.00265442$$

Vamos a checar las unidades de este resultado. Para ello, primero reescribimos los Faradios como $F = s^4 A^2 m^{-2} kg^{-1}$ que son sus unidades básicas en el SI. También reescribimos los Newtons como $N = kgms^{-2}$, con lo que las unidades quedan como:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{Fm^{-1}}{NA^{-2}}} &= \sqrt{\frac{s^4 A^2 m^{-2} kg^{-1} m^{-1}}{kgms^{-2} A^{-2}}} \\
&= \sqrt{\frac{s^6 A^4}{kg^2 m^4}} \\
&= \frac{s^3 A^2}{kgm^2} \\
&\text{Sustituimos las unidades de uno de los Ampere, que son } C/s \\
&= \frac{s^3 A C s^{-1}}{kgm^2} \\
&= \frac{s^2 AC}{kgm^2} \\
&\text{Notamos ahora que } \frac{s^2}{kgm^2} \text{ es } 1/J \\
&= \frac{AC}{J} \\
&\text{Notamos que } J/C \text{ son unidades de voltaje} \\
&= \frac{A}{V} \\
&\text{Y finalmente, } V/A \text{ son unidades de resistencia, por lo que nos queda:} \\
&= \frac{1}{\Omega}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado final es:

$$R_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = 0.00265442\ \Omega^{-1}$$

Sin embargo, buscando en las tablas de NIST, se puede ver que en realidad en general se define la impendancia al revés de la definición que le dimos, es decir, como $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$. Si le diéramos esta definición, el resultado sería el recíproco de lo que obtuvimos, que es $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.730316\Omega$. Y así tiene unidades de resistencia.

Problema 2.

Probar que la probabilidad $P_i = \dfrac{e^{-\epsilon_i/k_BT}}{q}$ **es igual a** $P_i = (e^{h\nu/k_BT})(1 - e^{h\nu/k_BT})$

Para probarlo, necesitamos antes calcular la función de partición q, que se define como:

$$q = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\epsilon_i/k_BT}$$

Para realizar esta suma, necesitamos sustituir el valor de las energías ϵ_i, que como vimos en clase, valen $\epsilon_i = \left(n_i + \dfrac{1}{2}\right) h\nu$ y por lo tanto nos queda:

$$\begin{aligned}
q &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\left(n_i+\frac{1}{2}\right)h\nu/k_BT} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-n_ih\nu/k_BT} e^{-h\nu/2k_BT} \\
&= e^{-h\nu/2k_BT} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-n_ih\nu/k_BT}
\end{aligned}$$

El sumando $e^{-n_ih\nu/k_BT}$ se puede reescribir como $(e^{-h\nu/k_BT})^n := r^{n_i}$ donde $r := e^{-h\nu/k_BT}$ es una cantidad menor que 1 (porque es una exponencial negativa). Por lo tanto, la suma queda como $\sum_{i=0}^{\infty} r^{n_i}$. Esto es una serie geométrica convergente (porque $|r| < 1$) y se sabe bien que su resultado es $\dfrac{1}{1-r}$. Por lo tanto, nos queda que:

$$\begin{aligned}
q &= e^{-h\nu/2k_BT} \frac{1}{1-r} \\
&= e^{-h\nu/2k_BT} \frac{1}{1 - e^{-h\nu/k_BT}} \\
&= (e^{-h\nu/2k_BT})(1 - e^{-h\nu/k_BT})^{-1}
\end{aligned}$$

Luego, regresando a la expresión para P_i, nos queda:

$$\begin{aligned}
P_i &= \frac{e^{-\epsilon_i/k_BT}}{q} \\
&= \frac{e^{-n_ih\nu/k_BT} e^{-h\nu/2k_BT}}{q} \\
&= \frac{e^{-n_ih\nu/k_BT} e^{-h\nu/2k_BT}}{(e^{-h\nu/2k_BT})(1 - e^{-h\nu/k_BT})^{-1}} \\
&= \boxed{e^{-n_ih\nu/k_BT}(1 - e^{-h\nu/k_BT})}
\end{aligned}$$

Que es lo que buscábamos.

Por otro lado, podemos calcular también la energía promedio por modo. Para hacerlo hay que calcular

$\bar{\epsilon} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \epsilon_i$, lo cual es igual a:

$$
\begin{aligned}
\bar{\epsilon} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \epsilon_i &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-n_i h\nu/k_B T}(1 - e^{-h\nu/k_B T})(n_i + 1/2)h\nu \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} r^{n_i}(1-r)(n_i + 1/2)h\nu \\
&= h\nu(1-r)\left(\sum_{i=0}^{\infty} r^{n_i} n_i + 1/2 \sum_{i=0}^{\infty} r^{n_i}\right)
\end{aligned}
$$

La segunda suma $\sum_{i=0}^{\infty} r^{n_i}$ es la misma que mencionamos antes y tiene como resultado $\frac{1}{1-r}$. Por otro lado, la primera suma $\sum_{i=0}^{\infty} r^{n_i} n_i$ es un poco más complicada y se llama suma aritmético-geométrica. Para calcularla, podemos primero escribir que el resultado es alguna función f de r que queremos obtener, es decir $f(r) = \sum_{i=0}^{\infty} r^{n_i} n_i$.

Luego, notamos que esta función se puede escribir como $f(r) = r\frac{d}{dr}\sum_{i=0}^{\infty} r^{n_i}$. Esto debido a que $r\frac{d}{dr}\sum_{i=0}^{\infty} r^{n_i} = r\sum_{i=0}^{\infty} n_i r^{n_i - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} n_i r^{n_i}$.

Pero $\sum_{i=0}^{\infty} r^{n_i}$ es nuevamente la suma geométrica, que es igual a $\frac{1}{1-r}$ y por lo tanto $f(r) = r\frac{d}{dr}\frac{1}{1-r} = r\frac{1}{(1-r)^2}$.

Sustituimos estos resultados en el valor de $\bar{\epsilon}$ que teníamos:

$$
\begin{aligned}
\bar{\epsilon} &= h\nu(1-r)\left(\sum_{i=0}^{\infty} r^{n_i} n_i + 1/2 \sum_{i=0}^{\infty} r^{n_i}\right) \\
&= h\nu(1-r)\left(r\frac{1}{(1-r)^2} + \frac{1}{2(1-r)}\right) \\
&= h\nu\left(\frac{r}{1-r} + \frac{1}{2}\right) \\
&= h\nu\left(\frac{e^{-h\nu/k_B T}}{1 - e^{-h\nu/k_B T}} + \frac{1}{2}\right) \\
&= h\nu\left(\frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Problema 3

Considera a un haz de luz láser con intensidad I_0 entrando a una celda llena de gas en la posición z_0. Trabájalo en el límite de alta potencia, tal que $B_{21}\bar{\rho_\omega} >> A_{21}$. Muestra que su intensidad decrece linealmente con la distancia, tal que

$$I - I_0 = \frac{g_1}{g_2} n A_{21} \hbar \left[\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}} \omega L(\omega) d\omega \right] (z - z_0)$$

Empezamos con la ecuación a la que llegamos en clase para la derivada de I, que es:

$$\frac{d\bar{I}}{dz} = -\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \frac{dI(\omega')}{d\omega'} \frac{B_{12}}{c\eta V} \left[N_1 - N_2 \frac{g_1}{g_2} \right] \hbar\omega F(\omega - \omega_0) d\omega' d\omega$$

Para simplificar esto, empezamos usando la definición de la intensidad a frecuencia ω' vista en clase, que es $\bar{I}_{\omega'} = \dfrac{d\bar{I}}{d\omega'}$ y lo sustituimos en la expresión de antes:

$$\frac{d\bar{I}}{dz} = -\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \bar{I}_{\omega'} \frac{B_{12}}{c\eta V} \left[N_1 - N_2 \frac{g_1}{g_2} \right] \hbar\omega F(\omega - \omega_0) d\omega' d\omega$$

Ahora bien, nos dicen que el haz es de alta potencia, lo que implica que la mayoría de los átomos se encuentran en el estado excitado y por lo tanto $N_2 >> N_1$. Por lo tanto, podemos despreciar el término N_1 dentro de los corchetes:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{I}}{dz} &= -\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \bar{I}_{\omega'} \frac{B_{12}}{c\eta V} \left[-N_2 \frac{g_1}{g_2} \right] \hbar\omega F(\omega - \omega_0) d\omega' d\omega \\ &= \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \bar{I}_{\omega'} \frac{B_{12}}{c\eta V} N_2 \frac{g_1}{g_2} \hbar\omega F(\omega - \omega_0) d\omega' d\omega \end{aligned}$$

Usamos ahora otro resultado al que llegamos en clase, según el cual $\bar{I}_{\omega'} = \bar{\rho}_{\omega'} \dfrac{c}{\eta}$. Pero recordando que para un dieléctrico necesitamos cambiar $\rho_{\omega'}$ por $\rho_{\omega'}\eta^2$ al igual que en clase, nos queda $\bar{I}_{\omega'} = \bar{\rho}_{\omega'} c\eta$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{I}}{dz} &= \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \bar{\rho}_{\omega'} c\eta \frac{B_{12}}{c\eta V} N_2 \frac{g_1}{g_2} \hbar\omega F(\omega - \omega_0) d\omega' d\omega \\ &= \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \bar{\rho}_{\omega'} \frac{B_{12}}{V} N_2 \frac{g_1}{g_2} \hbar\omega F(\omega - \omega_0) d\omega' d\omega \end{aligned}$$

Además, usamos que la densidad de átomos es $n \simeq N_2/V$, ya que la mayoría de los átomos están en el estado excitado:

$$\frac{d\bar{I}}{dz} = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \bar{\rho}_{\omega'} B_{12} n \frac{g_1}{g_2} \hbar\omega F(\omega - \omega_0) d\omega' d\omega$$

Luego, usamos una de las relaciones a las que llegamos en clase, la que permite calcular la densidad espectral de energía: $\rho_\omega = \dfrac{A_{21}}{\frac{N_1}{N_2} B_{21} - B_{12}}$. Como $N_1 << N_2$, el primer término en el denominador es despreciable y nos queda: $\rho_\omega = \dfrac{A_{21}}{-B_{12}} = -\dfrac{A_{21}}{B_{12}}$, lo que implica que $B_{12} = -\dfrac{A_{21}}{\rho_\omega}$. Podemos sustituir esto en la expresión a la que habíamos llegado y nos queda:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{I}}{dz} &= -\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \bar{\rho}_{\omega'} \frac{A_{21}}{\bar{\rho}_{\omega'}} n \frac{g_1}{g_2} \hbar\omega F(\omega-\omega_0) d\omega' d\omega \\
&= -\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} A_{21} n \frac{g_1}{g_2} \hbar\omega F(\omega-\omega_0) d\omega' d\omega
\end{aligned}
$$

Similarmente a como se hizo en clase, para tomar en cuenta los cambios relativos, cambiamos $F(\omega-\omega_0)$ por $L(\omega-\omega_0)$, con lo que nos queda:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{I}}{dz} &= -\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} A_{21} n \frac{g_1}{g_2} \hbar\omega L(\omega-\omega_0) d\omega \\
&= -A_{21} n \frac{g_1}{g_2} \hbar \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \omega L(\omega-\omega_0) d\omega
\end{aligned}
$$

Finalmente, en esta ecuación diferencial podemos integrar ambos lados respecto a z para obtener la intensidad $\bar{I}$ en función de z. Del lado izquierdo nos queda $\int \frac{d\bar{I}}{dz} dz = \bar{I}(z)$ y el derecho es constante, por lo que simplemente se multiplica por z. Además, se agrega una constante de integración C:

$$
\bar{I}(z) = -A_{21} n \frac{g_1}{g_2} \hbar \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \omega L(\omega-\omega_0) d\omega \; z + C \qquad (1)
$$

Finalmente, para encontrar la constante C, usamos que $\bar{I}(z_0) = I_0$ y por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\bar{I}_0 &= -A_{21} n \frac{g_1}{g_2} \hbar \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \omega L(\omega-\omega_0) d\omega \; (z_0) + C \\
\Rightarrow \; C &= \bar{I}_0 + A_{21} n \frac{g_1}{g_2} \hbar \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \omega L(\omega-\omega_0) d\omega \; (z_0)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la expresión (1) con C sustituida queda como:

$$
\begin{aligned}
&\bar{I}(z) = -A_{21} n \frac{g_1}{g_2} \hbar \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \omega L(\omega-\omega_0) d\omega \; z + \bar{I}_0 + A_{21} n \frac{g_1}{g_2} \hbar \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \omega L(\omega-\omega_0) d\omega \; (z_0) \\
&\Rightarrow \; \bar{I}(z) - \bar{I}_0 = -A_{21} n \frac{g_1}{g_2} \hbar \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \omega L(\omega-\omega_0) d\omega \; (z - z_0)
\end{aligned}
$$

Lo cual prueba que $\bar{I}(z)$ decrece linealmente con la distancia.

Problema 4

Resuelve el sigueinte sistema de ecuaciones

$$i\frac{dC_1(t)}{dt} = C_2(\vec{r},t)\Omega_0 \cos\omega t e^{-i\omega_0 t} \quad (1)$$
$$i\frac{dC_2(\vec{r},t)}{dt} = C_1(\vec{r},t)\Omega_0^* \cos\omega t e^{i\omega_0 t} \quad (2)$$

y demuestra que, para condiciones iniciales $C_1(0) = 1$ y $C_2(0) = 0$ y en el límite de campo eléctrico pequeño,

$$C_2(t) = \frac{\Omega_0^*}{2}\left[\frac{1-e^{i(\omega_0+\omega t)}}{\omega_0+\omega} + \frac{1-e^{i(\omega_0-\omega t)}}{\omega_0-\omega}\right]$$

Empezamos derivando la ecuación (2) respecto a t de ambos lados y nos queda:

$$i\ddot{C}_2 = \dot{C}_1\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t} - \omega C_1\Omega_0^*\sin\omega t e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 C_1\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t}$$

Ahora utilizamos la ecuación (1) para sustituir $\dot{C}_1$, que según esta ecuación, es igual a $\dot{C}_1 = -iC_2\Omega_0\cos\omega t e^{-i\omega_0 t}$ y nos queda:

$$\begin{aligned} i\ddot{C}_2 &= \left[-iC_2\Omega_0\cos\omega t e^{-i\omega_0 t}\right]\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t} - \omega C_1\Omega_0^*\sin\omega t e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 C_1\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t} \\ &= -iC_2|\Omega_0|^2\cos^2\omega t - \omega C_1\Omega_0^*\sin\omega t e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 C_1\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Como Ω_0 es la cantidad que depende del campo eléctrico, en el límite de campo pequeño podemos despreciar órdenes cuadráticos de Ω_0. Esto significa despreciar el primer término de la ecuación anterior, ya que es proporcional a $|\Omega_0|^2$. Por lo tanto, la ecuación queda como:

$$i\ddot{C}_2 = -\omega C_1\Omega_0^*\sin\omega t e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 C_1\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t}$$

Ahora usamos la ecuación (2) para sustituir $C_1\Omega_0^*$, que despejando dicha ecuación, vemos que es igual a $C_1\Omega_0^* = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\cos\omega t}i\dot{C}_2$ y entonces nos queda:

$$\begin{aligned} i\ddot{C}_2 &= -\omega\frac{e^{-i\omega_0 t}}{\cos\omega t}i\dot{C}_2\sin\omega t e^{i\omega_0 t} + i\omega_0\frac{e^{-i\omega_0 t}}{\cos\omega t}i\dot{C}_2\cos\omega t e^{i\omega_0 t} \\ &= -\omega i\tan\omega t\dot{C}_2 - \omega_0\dot{C}_2 \\ \Rightarrow\ \frac{\ddot{C}_2}{\dot{C}_2} &= -\omega\tan\omega t + i\omega_0 \end{aligned}$$

Ahora integramos ambos lados respecto a t, del lado izquierdo nos queda $\int\frac{\ddot{C}_2}{\dot{C}_2}dt = \ln\dot{C}_2$.

$$\ln\dot{C}_2 = \int -\omega\tan\omega t + i\omega_0\ dt$$

Las integrales del lado derecho son inmediatas y nos queda:

$$\ln\dot{C}_2 = \ln(\cos\omega t) + i\omega_0 t + K$$

donde K es una constante de integración.

Exponenciamos de ambos lados y obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{C}_2 &= e^{\ln(\cos\omega t)+i\omega_0 t+K} \\ \Rightarrow\ \dot{C}_2 &= e^K\cos\omega t\ e^{i\omega_0 t} \quad (3) \end{aligned}$$

Ahora usamos una de las condiciones iniciales, que nos dice que $C_1(0) = 1$. Si sustituimos esta condición inicial en la ecuación 2, tendremos una condición inicial para $\dot{C}_2$:

$$\begin{aligned}
&i\dot{C}_2(t) = C_1(t)\Omega_0^* \cos(\omega t)e^{i\omega_0 t}\Big|_{t=0} \\
&\Rightarrow i\dot{C}_2(0) = C_1(0)\Omega_0^* \cos(0)e^0 \\
&\Rightarrow i\dot{C}_2(0) = \Omega_0^* \\
&\Rightarrow \dot{C}_2(0) = -i\Omega_0^*
\end{aligned}$$

Si sustituimos esta condición inicial en la ecuación (3), llegamos a que:

$$\begin{aligned}
&\dot{C}_2(0) = -i\Omega_0^* \\
&\Rightarrow\ e^K \cos(0)e^0 = -i\Omega_0^* \\
&\Rightarrow e^K = -i\Omega_0^*
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo el valor de e^K en (3), nos queda que:

$$\dot{C}_2 = -i\Omega_0^* \cos\omega t\ e^{i\omega_0 t}$$

Integramos ambos lados de esta ecuación respecto a t y obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\int \dot{C}_2 dt = \int -i\Omega_0^* \cos\omega t e^{i\omega_0 t}\ dt \\
&\Rightarrow\ C_2(t) = -i\Omega_0^* \int \cos\omega t e^{i\omega_0 t} dt
\end{aligned}$$

Para hacer la integral de $\int \cos\omega t e^{i\omega_0 t}$, primero escribimos el coseno como $\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$:

$$\begin{aligned}
&C_2(t) = \frac{-i\Omega_0^*}{2} \int (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{i\omega_0 t} dt \\
&\Rightarrow\ C_2(t) = \frac{-i\Omega_0^*}{2} \int e^{it(\omega+\omega_0)} + e^{it(\omega_0-\omega)} dt \\
&\Rightarrow\ C_2(t) = \frac{-i\Omega_0^*}{2} \left[\frac{e^{it(\omega+\omega_0)}}{i(\omega+\omega_0)} + \frac{e^{it(\omega_0-\omega)}}{i(\omega_0-\omega)}\right] + K,
\end{aligned}$$

donde K es una constante de integración.

Simplificamos un poco:

$$C_2(t) = -\frac{\Omega_0^*}{2} \left[\frac{e^{it(\omega+\omega_0)}}{\omega+\omega_0} + \frac{e^{it(\omega_0-\omega)}}{\omega_0-\omega}\right] + K \quad (4)$$

La condición inicial de C_2 nos dice que $C_2(0) = 0$, lo que implica que:

$$\begin{aligned}
&0 = C_2(0) = -\frac{\Omega_0^*}{2} \left[\frac{e^0}{\omega+\omega_0} + \frac{e^0}{\omega_0-\omega}\right] + K \\
&\Rightarrow\ 0 = -\frac{\Omega_0^*}{2} \left[\frac{1}{\omega+\omega_0} + \frac{1}{\omega_0-\omega}\right] + K \\
&\Rightarrow\ K = \frac{\Omega_0^*}{2} \left[\frac{1}{\omega+\omega_0} + \frac{1}{\omega_0-\omega}\right]
\end{aligned}$$

Sustituimos este valor de K en (4) y obtenemos:

$$C_2(t) = -\frac{\Omega_0^*}{2}\left[\frac{e^{it(\omega+\omega_0)}}{\omega+\omega_0} + \frac{e^{it(\omega_0-\omega)}}{\omega_0-\omega}\right] + \frac{\Omega_0^*}{2}\left[\frac{1}{\omega+\omega_0} + \frac{1}{\omega_0-\omega}\right]$$
$$\Rightarrow \boxed{C_2(t) = \frac{\Omega_0^*}{2}\left[\frac{1-e^{it(\omega+\omega_0)}}{\omega+\omega_0} + \frac{1-e^{it(\omega_0-\omega)}}{\omega_0-\omega}\right]}$$

que es el resultado que se buscaba demostrar.

Problema 5

Usando la definición de una transformación unitaria demuestra que la traza de una permutación cíclica de un producto de operadores es invariante. Es decir,

$$Tr[ABC] = Tr[CAB] = Tr[BCA]$$

Primero demostraremos que para dos operadores P y Q, se cumple que $Tr(PQ) = Tr(QP)$, con lo cual será fácil probar las relaciones del problema. Se puede probar directamente usando la definición de traza de un operador O (donde el operador actúa en un espacio con una base ortogonal $\{|\psi_i\rangle\}$), que es $\langle O\rangle = \sum_i \langle\psi_i|O|\psi_i\rangle$.

Aplicamos esta definición al producto PQ y nos queda:

$$Tr(PQ) = \sum_i \langle\psi_i|PQ|\psi_i\rangle$$

Usamos la completez de la base para meter un operador identidad en la forma, $I = \sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$

$$= \sum_i \langle\psi_i|\ P\ \sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|\ Q\ |\psi_i\rangle$$

Podemos pasar pasar la suma de j hasta el frente

$$= \sum_i \sum_j \langle\psi_i|P|\psi_j\rangle\langle\psi_j|Q|\psi_i\rangle$$

Por otro lado, podemos calcular $Tr(QP)$ de forma totalmente análoga:

$$Tr(QP) = \sum_i \langle\psi_i|QP|\psi_i\rangle$$

Usamos la completez de la base para meter un operador identidad en la forma, $I = \sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$

$$= \sum_i \langle\psi_i|\ Q\ \sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|\ P\ |\psi_i\rangle$$

Podemos pasar pasar la suma de j hasta el frente

$$= \sum_i \sum_j \langle\psi_i|Q|\psi_j\rangle\langle\psi_j|P|\psi_i\rangle$$

Vemos que $\sum_i \sum_j \langle\psi_i|P|\psi_j\rangle\langle\psi_j|Q|\psi_i\rangle = \sum_i \sum_j \langle\psi_i|Q|\psi_j\rangle\langle\psi_j|P|\psi_i\rangle$ debido a que son la misma suma (solamente cambiando el nombre de los índices sobre los que se suma, lo cual no cambia a la suma en sí). Entonces, como estas sumas son iguales, concluimos que:

$$Tr(PQ) = Tr(QP)$$

para cualesquiera operadores Q, P.

Entonces, podemos demostrar lo que nos piden el problema:

$Tr(ABC) = Tr((AB)C)$ Es decir, consideramos (AB) como si fuera un solo operador.

Usamos la propiedad $Tr(PQ) = Tr(QP)$ donde $P = AB$ y $Q = C$, por lo que nos queda:

$= Tr(C(AB))$

$= Tr(CAB)$

De la misma forma, se puede demostrar que:

$Tr(ABC) = Tr(A(BC))$ Es decir, consideramos (BC) como si fuera un solo operador.

Usamos la propiedad $Tr(PQ) = Tr(QP)$ donde $P = A$ y $Q = BC$, por lo que nos queda:

$= Tr((BC)A)$

$= Tr(BCA)$

Por lo tanto, hemos probado que $Tr(ABC) = Tr(CAB)$ y que $Tr(ABC) = Tr(BCA)$.

Ahora en particular vemos que $Tr(\rho O) = Tr(O\rho) = \langle O \rangle$.
Esto se ve directamente de la demostración de que $Tr(PQ) = Tr(QP)$ para cualesquiera operadores P, Q, como se vio antes. En particular lo hacemos para $P = \rho$ y $Q = O$, con lo que concluimos que $Tr(\rho O) = Tr(O\rho)$.
Además, en clase vimos que $Tr(\rho O) = \langle O \rangle$, por lo que concluimos que $Tr(\rho O) = Tr(O\rho) = \langle O \rangle$.

Problema 6

Usando el resultado visto en clase,

$$\frac{d\rho^I(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[V(t), \rho^I(t)],$$

demostrar que las ecuaciones de Bloch en la imagen de interacción son:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho^I_{11}}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[\rho^I_{12}V_{21} - V_{12}\rho^I_{21}] \\
\frac{d\rho^I_{22}}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[\rho^I_{21}V_{12} - V_{21}\rho^I_{12}] \\
\frac{d\rho^I_{12}}{dt} &= \frac{i}{\hbar}V_{12}(\rho^I_{11} - \rho^I_{22}) \\
\frac{d\rho^I_{21}}{dt} &= \frac{i}{\hbar}V_{21}(\rho^I_{22} - \rho^I_{11})
\end{aligned}$$

Lo que hay que hacer básicamente es partir de la ecuación de Liouville en el cuadro de interacción que nos dan en el problema,

$$\frac{d\rho^I(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[V(t), \rho^I(t)] \qquad (1)$$

y tomar los elementos de matriz de ambos lados.

Si denotamos por ρ^I_{mn} al elemento de matriz mn de ρ^I, los elementos de matriz de la parte izquierda de la ecuación (1) son directamente:

$$\langle m|\frac{d\rho^I(t)}{dt}|n\rangle = \frac{d\rho^I_{mn}}{dt} \qquad (2)$$

Por otro lado, calculamos ahora los elementos de matriz del lado derecho de la ecuación (1):

$$\begin{aligned}
\langle m| -\frac{i}{\hbar}[V(t), \rho^I(t)]|n\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\langle m|[V(t), \rho^I(t)]|n\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar}\langle m|V(t)\rho^I(t) - \rho^I(t)V(t)|n\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar}\langle m|V(t)\rho^I(t)|n\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle m|\rho^I(t)V(t)|n\rangle \\
&\text{Introducimos la relación de cerradura } \sum_k |k\rangle\langle k| = Id \\
&= -\frac{i}{\hbar}\sum_k \langle m|V(t)|k\rangle\langle k|\rho^I(t)|n\rangle + \frac{i}{\hbar}\sum_k \langle m|\rho^I(t)|k\rangle\langle k|V(t)|n\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar}\sum_k V_{mk}\rho^I_{kn} + \frac{i}{\hbar}\sum_k \rho^I_{mk}V_{kn} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Al igual que hicimos en clase, consideramos ahora que tenemos un átomo de dos niveles, por lo que los estados son $|1\rangle$ y $|2\rangle$. Además el operador V solamente tiene términos fuera de la diagonal, es decir $\langle 1|V|1\rangle = \langle 2|V|2\rangle = 0$. Entonces, regresando al desarrollo que teníamos en (3), calculamos $\langle m| -\frac{i}{\hbar}[V(t), \rho^I(t)]|n\rangle$ para cada m, n en $\{1, 2\}$:

- $m = n = 1$: A partir de (3), tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle 1| -\frac{i}{\hbar}[V(t), \rho^I(t)]|1\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\sum_k V_{1k}\rho^I_{k1} + \frac{i}{\hbar}\sum_k \rho^I_{1k}V_{k1} \\
&= -\frac{i}{\hbar}\left[V_{11}\rho^I_{11} + V_{12}\rho^I_{21}\right] + \frac{i}{\hbar}\left[\rho^I_{11}V_{11} + \rho^I_{12}V_{21}\right] \\
&\text{Usamos que } V_{11} = V_{22} = 0: \\
&= -\frac{i}{\hbar}V_{12}\rho^I_{21} + \frac{i}{\hbar}\rho^I_{12}V_{21} \\
&= \frac{i}{\hbar}[\rho^I_{12}V_{21} - V_{12}\rho^I_{21}] \quad (4.1)
\end{aligned}$$

- $m = n = 2$: A partir de (3), tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle 2| -\frac{i}{\hbar}[V(t), \rho^I(t)]|2\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\sum_k V_{2k}\rho^I_{k2} + \frac{i}{\hbar}\sum_k \rho^I_{2k}V_{k2} \\
&= -\frac{i}{\hbar}\left[V_{21}\rho^I_{12} + V_{22}\rho^I_{22}\right] + \frac{i}{\hbar}\left[\rho^I_{21}V_{12} + \rho^I_{22}V_{22}\right] \\
&\text{Usamos que } V_{11} = V_{22} = 0: \\
&= -\frac{i}{\hbar}V_{21}\rho^I_{12} + \frac{i}{\hbar}\rho^I_{21}V_{12} \\
&= \frac{i}{\hbar}[\rho^I_{21}V_{12} - V_{21}\rho^I_{12}] \quad (4.2)
\end{aligned}$$

- $m = 1, n = 2$: A partir de (3), tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle 1| -\frac{i}{\hbar}[V(t), \rho^I(t)]|2\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\sum_k V_{1k}\rho^I_{k2} + \frac{i}{\hbar}\sum_k \rho^I_{1k}V_{k2} \\
&= -\frac{i}{\hbar}\left[V_{11}\rho^I_{12} + V_{12}\rho^I_{22}\right] + \frac{i}{\hbar}\left[\rho^I_{11}V_{12} + \rho^I_{12}V_{22}\right] \\
&\text{Usamos que } V_{11} = V_{22} = 0: \\
&= -\frac{i}{\hbar}V_{12}\rho^I_{22} + \frac{i}{\hbar}\rho^I_{11}V_{12} \\
&= \frac{i}{\hbar}V_{12}[\rho^I_{11} - \rho^I_{22}] \quad (4.3)
\end{aligned}$$

- $m = 2, n = 1$: A partir de (3), tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle 2| -\frac{i}{\hbar}[V(t), \rho^I(t)]|1\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\sum_k V_{2k}\rho^I_{k1} + \frac{i}{\hbar}\sum_k \rho^I_{2k}V_{k1} \\
&= -\frac{i}{\hbar}\left[V_{21}\rho^I_{11} + V_{22}\rho^I_{21}\right] + \frac{i}{\hbar}\left[\rho^I_{21}V_{11} + \rho^I_{22}V_{21}\right] \\
&\text{Usamos que } V_{11} = V_{22} = 0: \\
&= -\frac{i}{\hbar}V_{21}\rho^I_{11} + \frac{i}{\hbar}\rho^I_{22}V_{21} \\
&= \frac{i}{\hbar}V_{21}[\rho^I_{22} - \rho^I_{11}] \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Con las ecuaciones $4.1, 4.2, 4.3, 4.4$ tenemos ya las componentes de matriz del lado derecho de (1). Podemos igualar cada una de estas componentes a las componentes del lado izquierdo de (1) que obtuvimos en (2). Entonces nos quedan las ecuaciones:

- $n = m = 1$:

$$\frac{d\rho_{11}^I}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\rho_{12}^I V_{21} - V_{12}\rho_{21}^I]$$

- $n = m = 2$:

$$\frac{d\rho_{22}^I}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\rho_{21}^I V_{12} - V_{21}\rho_{12}^I]$$

- $m = 1, n = 2$:

$$\frac{d\rho_{12}^I}{dt} = \frac{i}{\hbar}V_{12}[\rho_{11}^I - \rho_{22}^I]$$

- $m = 2, n = 1$:

$$\frac{d\rho_{21}^I}{dt} = \frac{i}{\hbar}V_{21}[\rho_{22}^I - \rho_{11}^I]$$

Estas son las ecuaciones a las que se quería llegar, con lo que concluimos el ejercicio.

Problema 7.

Demostrar que:

- **Usando la ecuación de Schrodinger para expresar** $\frac{dC_1}{dt}$ **y** $\frac{dC_2}{dt}$
- **Haciendo la aproximación de la onda rotante.**
- **Bajo la hipótesis de que** $\Omega_0 = \Omega_0^*$
- **Definiendo** $\Delta\omega = \omega - \omega_0$

El sistema anterior se reduce a

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{22}}{dt} &= i\frac{\Omega_0}{2}[e^{\Delta\omega t} - e^{-\Delta\omega t}\rho_{12}] = -\frac{d\rho_{11}}{dt}\\ \frac{d\rho_{12}}{dt} &= i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\Delta\omega t}(\rho_{11} - \rho_{22}) = \frac{d\rho_{21}^*}{dt}\end{aligned}$$

Para empezar, en clase llegamos a las expresiones para dC_1/dt y dC_2/dt (y se encuentran también en el ejercicio 4 de esta tarea), que son:

$$\begin{aligned}i\frac{dC_1(t)}{dt} &= C_2(\vec{r},t)\Omega_0 \cos\omega t e^{-i\omega_0 t}\\ i\frac{dC_2(\vec{r},t)}{dt} &= C_1(\vec{r},t)\Omega_0^* \cos\omega t e^{i\omega_0 t}\\ \Rightarrow \frac{dC_1}{dt} &= -iC_2\Omega_0 \cos\omega t e^{-i\omega_0 t} \quad (1)\\ \Rightarrow \frac{dC_2}{dt} &= -iC_1\Omega_0^* \cos\omega t e^{i\omega_0 t} \quad (2)\end{aligned}$$

Ahora podemos usar la expresión de los elementos de ρ en términos de C_1, C_2 que vimos en clase, para poder introducir a ρ a las ecuaciones. Estas ecuaciones dicen que $\langle n|\rho|m\rangle = c_{ni}c_{mi}^*$ y $\langle n|\rho|n\rangle = |c_{ni}|^2$, que en el caso de un átomo de dos niveles, se reducen a:

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= |C_1|^2 = C_1C_1^* \quad (3.1)\\ \rho_{22} &= |C_2|^2 = C_2C_2^* \quad (3.2)\\ \rho_{12} &= C_1C_2^* \quad (3.3)\\ \rho_{21} &= C_2C_1^* \quad (3.3)\end{aligned}$$

Ahora derivamos respecto al tiempo cada una de las ecuaciones $3.1, 3.2, 3.3, 3.4$ usando la regla del producto y nos queda:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{11}}{dt} &= C_1\frac{dC_1^*}{dt} + \frac{dC_1}{dt}C_1^*\\ \frac{d\rho_{22}}{dt} &= C_2\frac{dC_2^*}{dt} + \frac{dC_2}{dt}C_2^*\\ \frac{d\rho_{12}}{dt} &= C_1\frac{dC_2^*}{dt} + \frac{dC_1}{dt}C_2^*\\ \frac{d\rho_{21}}{dt} &= C_2\frac{dC_1^*}{dt} + \frac{dC_2}{dt}C_1^*\end{aligned}$$

Ahora podemos sustituir las ecuaciones (1) y (2) en cada una de estas cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{11}}{dt} &= C_1\left[-iC_2\Omega_0\cos\omega t e^{-i\omega_0 t}\right]^* + C_1^*\left[-iC_2\Omega_0\cos\omega t e^{-i\omega_0 t}\right] \\
\frac{d\rho_{22}}{dt} &= C_2\left[-iC_1\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t}\right]^* + C_2^*\left[-iC_1\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t}\right] \\
\frac{d\rho_{12}}{dt} &= C_1\left[-iC_1\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t}\right]^* + C_2^*\left[-iC_2\Omega_0\cos\omega t e^{-i\omega_0 t}\right] \\
\frac{d\rho_{21}}{dt} &= C_2\left[-iC_2\Omega_0\cos\omega t e^{-i\omega_0 t}\right]^* + C_1^*\left[-iC_1\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t}\right]
\end{aligned}$$

Luego, aplicando los conjugados, queda:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{11}}{dt} &= iC_1C_2^*\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t} - iC_1^*C_2\Omega_0\cos\omega t e^{-i\omega_0 t} \\
\frac{d\rho_{22}}{dt} &= iC_2C_1^*\Omega_0\cos\omega t e^{-i\omega_0 t} - iC_2^*C_1\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t} \\
\frac{d\rho_{12}}{dt} &= iC_1C_1^*\Omega_0\cos\omega t e^{-i\omega_0 t} - iC_2^*C_2\Omega_0\cos\omega^* t e^{-i\omega_0 t} \\
\frac{d\rho_{21}}{dt} &= iC_2C_2^*\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t} - iC_1^*C_1\Omega_0^*\cos\omega t e^{i\omega_0 t}
\end{aligned}$$

Los productos $\cos\omega t e^{i\omega_0 t}$ se pueden reescribir usando que $\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$ y entonces queda como $\cos\omega t e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2}\left(e^{i(\omega+\omega_0)t} + e^{i(\omega_0-\omega)t}\right)$. Luego, para ω cercano a ω_0, el término $e^{i(\omega+\omega_0)t}$ tiene una frecuencia muhco mayor que $e^{i(\omega_0-\omega)t}$ (que tiene frecuencia cercana a 0), por lo que según la aproximación de onda rotante, lo podemos despreciar. Entonces, nos queda que $\cos\omega t e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2}e^{i(\omega_0-\omega)t} = \frac{1}{2}e^{-i\Delta\omega t}$ (o conjugando, queda que $\cos\omega t e^{-i\omega_0 t} = \frac{1}{2}e^{i\Delta\omega t}$) y podemos sustituir esto en las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{11}}{dt} &= iC_1C_2^*\Omega_0^*\frac{1}{2}e^{-i\Delta\omega t} - iC_1^*C_2\Omega_0\frac{1}{2}e^{i\Delta\omega t} \\
\frac{d\rho_{22}}{dt} &= iC_2C_1^*\Omega_0\frac{1}{2}e^{i\Delta\omega t} - iC_2^*C_1\Omega_0^*\frac{1}{2}e^{-i\Delta\omega t} \\
\frac{d\rho_{12}}{dt} &= iC_1C_1^*\Omega_0\frac{1}{2}e^{i\Delta\omega t} - iC_2^*C_2\Omega_0\frac{1}{2}e^{i\Delta\omega t} \\
\frac{d\rho_{21}}{dt} &= iC_2C_2^*\Omega_0^*\frac{1}{2}e^{-i\Delta\omega t} - iC_1^*C_1\Omega_0^*\frac{1}{2}e^{-i\Delta\omega t}
\end{aligned}$$

Luego, usamos que $\Omega_0 = \Omega_0^*$ y también escribimos $C_1C_1^* = |C_1|^2$ y que $C_2C_2^* = |C_2|^2$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{11}}{dt} &= \frac{1}{2}iC_1C_2^*\Omega_0e^{-i\Delta\omega t} - \frac{1}{2}iC_1^*C_2\Omega_0e^{i\Delta\omega t} \\
\frac{d\rho_{22}}{dt} &= \frac{1}{2}iC_2C_1^*\Omega_0e^{i\Delta\omega t} - \frac{1}{2}iC_2^*C_1\Omega_0e^{-i\Delta\omega t} \\
\frac{d\rho_{12}}{dt} &= \frac{1}{2}i|C_1|^2\Omega_0e^{i\Delta\omega t} - \frac{1}{2}i|C_2|^2\Omega_0e^{i\Delta\omega t} \\
\frac{d\rho_{21}}{dt} &= \frac{1}{2}i|C_2|^2\Omega_0e^{-i\Delta\omega t} - \frac{1}{2}i|C_1|^2\Omega_0e^{-i\Delta\omega t}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho_{11}}{dt} &= \frac{i}{2}\Omega_0\left[C_1C_2^*e^{-i\Delta\omega t} - C_1^*C_2e^{i\Delta\omega t}\right]\\
\frac{d\rho_{22}}{dt} &= \frac{i}{2}\Omega_0\left[C_2C_1^*e^{i\Delta\omega t} - C_2^*C_1e^{-i\Delta\omega t}\right]\\
\frac{d\rho_{12}}{dt} &= \frac{i}{2}\Omega_0\left[|C_1|^2e^{i\Delta\omega t} - |C_2|^2e^{i\Delta\omega t}\right]\\
\frac{d\rho_{21}}{dt} &= \frac{i}{2}\Omega_0\left[|C_2|^2e^{-i\Delta\omega t} - |C_1|^2e^{-i\Delta\omega t}\right]
\end{aligned}
$$

Usamos nuevamente las ecuaciones $3.1, 3.2, 3.3, 3.4$ para sustituir $|C_1|^2 = \rho_{11}$, $|C_2|^2 = \rho_{22}$, $C_1C_2^* = \rho_{12}$, $C_2C_1^* = \rho_{21}$ y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho_{11}}{dt} &= \frac{i}{2}\Omega_0\left[\rho_{12}e^{-i\Delta\omega t} - \rho_{21}e^{i\Delta\omega t}\right]\\
\frac{d\rho_{22}}{dt} &= \frac{i}{2}\Omega_0\left[\rho_{21}e^{i\Delta\omega t} - \rho_{12}e^{-i\Delta\omega t}\right]\\
\frac{d\rho_{12}}{dt} &= \frac{i}{2}\Omega_0\left[\rho_{11}e^{i\Delta\omega t} - \rho_{22}e^{i\Delta\omega t}\right]\\
\frac{d\rho_{21}}{dt} &= \frac{i}{2}\Omega_0\left[\rho_{22}e^{-i\Delta\omega t} - \rho_{11}e^{-i\Delta\omega t}\right]
\end{aligned}
$$

Finalmente, notamos que el resultado de $\frac{d\rho_{22}}{dt}$ es igual al de $\frac{d\rho_{11}}{dt}$ pero multiplicado por -1 y similarmente se nota que $\frac{d\rho_{12}}{dt} = \left(\frac{d\rho_{21}}{dt}\right)^*$, por lo que concluimos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho_{11}}{dt} &= \frac{i}{2}\Omega_0\left[\rho_{12}e^{-i\Delta\omega t} - \rho_{21}e^{i\Delta\omega t}\right] = -\frac{d\rho_{22}}{dt}\\
\frac{d\rho_{12}}{dt} &= \frac{i}{2}\Omega_0\left[\rho_{11}e^{i\Delta\omega t} - \rho_{22}e^{i\Delta\omega t}\right] = \frac{d\rho_{21}^*}{dt}
\end{aligned}
$$

Que son las ecuaciones a las que se nos pedía llegar.

Problema 8

Usa

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_m)t}\langle\psi_n(\vec{r},t)|O_{IS}|\psi_m(\vec{r})\rangle = \langle\phi_n(\vec{r})|O_{IR}|\phi_m(\vec{r})\rangle$$

para llegar a la transformación $\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12}e^{i\omega_0 t}$ en $\frac{d\rho_{12}}{dt} = i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\Delta\omega t}(\rho_{11}-\rho_{22}) = \frac{d\rho_{21}^*}{dt}$ (imagen de interacción) y obtener $\frac{d\tilde{\rho}_{12}}{dt} = i\omega\tilde{\rho}_{12} + \frac{i}{\hbar}\left[V_{12}e^{i\omega t}(\tilde{\rho}_{11}-\tilde{\rho}_{22}\right]$. Compara con el sistema de ecuaciones de Bloch obtenido anteriormente.

La ecuación

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_m)t}\langle\psi_n(\vec{r},t)|O_{IS}|\psi_m(\vec{r})\rangle = \langle\phi_n(\vec{r})|O_{IR}|\phi_m(\vec{r})\rangle,$$

que nos piden usar, relaciona los elementos de matriz de un operador (en particular el operador O) entre la representación de interacción y la de Schrodinger. En el caso particular del operador de densidad para un átomo de dos niveles, tenemos que en la representación de Schrodinger $\rho_{12} = \langle\psi_1|\rho|\psi_2\rangle$ y en la de interacción $\tilde{\rho}_{12} = \langle\phi_1|\rho|\phi_m\rangle$, por lo que nos queda:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1-E_2)t}\rho_{12} = \tilde{\rho}_{12}$$

Pero como la frecuencia es $\omega_0 = \frac{E_2-E_1}{\hbar}$, entonces tenemos:

$$\tilde{\rho}_{12} = e^{i\omega_0 t}\rho_{12}$$

Lo cual significa que $\rho_{12} = e^{-i\omega_0 t}\tilde{\rho}_{12}$, y sustituimos esto en la ecuación:

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\Delta\omega t}(\rho_{11}-\rho_{22})$$

Al sustituirlo (y usando que ρ_{11} y ρ_{22} son iguales en la representación de Schrodinger y la de interacción, ya que usando la ecuación de antes en ese caso, se tiene que la exponente $e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_m)t}$ es 1 ya que queda $e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1-E_1)t} = 1$ o $e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_2)t} = 1$), nos queda que:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\left(e^{-i\omega_0 t}\tilde{\rho}_{12}\right)}{dt} = i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\Delta\omega t}(\tilde{\rho}_{11}-\tilde{\rho}_{22}) \\
&\Rightarrow -i\omega_0 e^{-i\omega_0 t}\tilde{\rho}_{12} + e^{-i\omega_0 t}\frac{d\tilde{\rho}_{12}}{dt} = i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\Delta\omega t}(\tilde{\rho}_{11}-\tilde{\rho}_{22}) \\
&\Rightarrow \; e^{-i\omega_0 t}\frac{d\tilde{\rho}_{12}}{dt} = i\omega_0 e^{-i\omega_0 t}\tilde{\rho}_{12} + i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\Delta\omega t}(\tilde{\rho}_{11}-\tilde{\rho}_{22}) \\
&\Rightarrow \; \frac{d\tilde{\rho}_{12}}{dt} = i\omega_0\tilde{\rho}_{12} + i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\omega_0 t}(\tilde{\rho}_{11}-\tilde{\rho}_{22})
\end{aligned}$$

Finalmente, en clase vimos que $V_{12} = \hbar\Omega_0\cos\omega t$ y entonces $\Omega_0 = \frac{V_{12}}{\hbar\cos\omega t} = \frac{2V_{12}}{\hbar(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})}$, por lo que $\frac{\Omega_0}{2}e^{i\omega_0 t} = \frac{V_{12}}{\hbar(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})}e^{i\omega_0 t} = \frac{V_{12}}{\hbar(e^{i(\omega-\omega_0)t}+e^{-i(\omega_0+\omega)t})}$. Pero por la aproximación de onda rotante, despreciamos el término $e^{-i(\omega_0+\omega)t}$ y nos queda que $\frac{\Omega_0}{2}e^{i\omega_0 t} = \frac{V_{12}}{\hbar e^{-i\Delta\omega t}} = \frac{V_{12}}{\hbar}e^{i\Delta\omega t}$. Por lo tanto, sustituyendo en el desarrollo que teníamos antes, nos queda que:

$$\frac{d\tilde{\rho}_{12}}{dt} = i\omega_0\tilde{\rho}_{12} + \frac{i}{\hbar}\left[V_{12}e^{i\Delta\omega t}(\tilde{\rho}_{11}-\tilde{\rho}_{22})\right]$$

Vemos que esta ecuación se parece a la ecuación de Bloch obtenida en clase para el caso general en el cuadro de interacción, que es:

$$\frac{d\tilde{\rho}_{12}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[V_{12}(\tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{22})]$$

pero con un término $i\omega_0\tilde{\rho}_{12}$ adicional y con el factor $e^{i\Delta\omega}$

Problema 9.

Demostrar que la representación matricial de las ecuaciones de Bloch para átomos de dos niveles es:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\rho_{11}}{dt} \\ \dfrac{d\rho_{12}}{dt} \\ \dfrac{d\rho_{21}}{dt} \\ \dfrac{d\rho_{22}}{dt} \end{pmatrix} = \frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & \hbar\Omega_0/2 & -\hbar\Omega_0/2 & 0 \\ \hbar\Omega_0/2 & -\hbar\Delta\omega & 0 & \hbar\Omega_0/2 \\ -\hbar\Omega_0/2 & 0 & \hbar\omega_0 & \hbar\Omega_0/2 \\ 0 & -\hbar\Omega_0/2 & \hbar\Omega_0/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{12} \\ \rho_{21} \\ \rho_{22} \end{pmatrix}$$

Hint: Ver apéndices 4.B y 4.C del Weiner, J. y Ho P.T., Light-Matter Interactions Fundamentals and Applicarions. (2022).

Como dice el hint, seguiremos el desarrollo que se hace en el libro de Weiner. Para empezar, si se tiene un átomo de dos niveles, en general su hamiltoniano se ve como

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{V},$$

y consideramos que el hamiltoniano $\hat{H}_A$ es proporcional a la matriz σ_z, por lo que $\hat{H}_A = \dfrac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z$.

Luego, como los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son eigenestados de σ_z, con eigenvalores -1 y 1 respectivamente, tenemos que:

$$\hat{H}_A|1\rangle = -\frac{\hbar\omega_0}{2}|1\rangle$$
$$\hat{H}_A|2\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2}|2\rangle$$

Por otro lado, consideramos que el potencial $\hat{V}$ está dado por luz que se propaga en la dirección z y que está circularmente polarizada y con una frecuencia ω, por lo que este término es:

$$\hat{V} = \frac{\hbar\Omega_0}{2}[\sigma_x \cos\omega t + \sigma_y \sin\omega t]$$

Luego, usamos las expresiones complejas del seno y coseno:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{\hbar\Omega_0}{2}\frac{1}{2}[\sigma_x(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - i\sigma_y(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})] \\ &= \frac{\hbar\Omega_0}{4}\left[(\sigma_x - i\sigma_y)e^{i\omega t} + (\sigma_x + i\sigma_y)e^{-i\omega t}\right] \end{aligned}$$

Luego, usamos las relaciones vistas en clase entre las matrices circulares y las cartesianas, por lo que sustituimos $\sigma_x = \sigma^+ + \sigma^-$ y $\sigma_y = i(\sigma^- - \sigma^+)$:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{\hbar\Omega_0}{4}\left[(\sigma^+ + \sigma^- - ii(\sigma^- - \sigma^+))e^{i\omega t} + (\sigma^+ + \sigma^- + ii(\sigma^- - \sigma^+))e^{-i\omega t}\right] \\ &= \frac{\hbar\Omega_0}{4}\left[(\sigma^+ + \sigma^- + \sigma^- - \sigma^+)e^{i\omega t} + (\sigma^+ + \sigma^- - \sigma^- + \sigma^+)e^{-i\omega t}\right] \\ &= \frac{\hbar\Omega_0}{2}\left[e^{i\omega t}\sigma^- + e^{-i\omega t}\sigma^+\right] \end{aligned}$$

Con las expresiones para $\hat{H}_A$ y $\hat{V}$, tenemos que el hamiltoniano es:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_A + \hat{V} \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\left[e^{i\omega t}\sigma^- + e^{-i\omega t}\sigma^+\right] \end{aligned}$$

Con esta expresión, podemos obtener la matriz de $\hat{H}$ en la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ usando que $\sigma_z|1\rangle = |1\rangle$, $\sigma_z|2\rangle = |2\rangle$, $\sigma^-|1\rangle = 0$, $\sigma^-|2\rangle = |1\rangle$, $\sigma^+|1\rangle = |2\rangle$, $\sigma^+|2\rangle = 0$. Usando esto, podemos conseguir los componentes de matriz de $\hat{H}$:

$$\begin{aligned}
H_{11} &= \langle 1|\hat{H}|1\rangle \\
&= \langle 1| \left(\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\left[e^{i\omega t}\sigma^- + e^{-i\omega t}\sigma^+\right] \right)|1\rangle \\
&= \langle 1| \left(\frac{\hbar\omega_0}{2}|1\rangle + \frac{\hbar\Omega_0}{2}e^{-i\omega t}|2\rangle \right) \\
&= \frac{\hbar\omega_0}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{12} &= \langle 1|\hat{H}|2\rangle \\
&= \langle 1| \left(\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\left[e^{i\omega t}\sigma^- + e^{-i\omega t}\sigma^+\right] \right)|2\rangle \\
&= \langle 1| \left(\frac{\hbar\omega_0}{2}|2\rangle + \frac{\hbar\Omega_0}{2}e^{i\omega t}|1\rangle \right) \\
&= \frac{\hbar\Omega_0}{2}e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{21} &= \langle 2|\hat{H}|1\rangle \\
&= \langle 2| \left(\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\left[e^{i\omega t}\sigma^- + e^{-i\omega t}\sigma^+\right] \right)|1\rangle \\
&= \langle 2| \left(\frac{\hbar\omega_0}{2}|1\rangle + \frac{\hbar\Omega_0}{2}e^{-i\omega t}|2\rangle \right) \\
&= \frac{\hbar\Omega_0}{2}e^{-i\omega t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{22} &= \langle 2|\hat{H}|2\rangle \\
&= \langle 2| \left(\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\left[e^{i\omega t}\sigma^- + e^{-i\omega t}\sigma^+\right] \right)|2\rangle \\
&= \langle 2| \left(\frac{\hbar\omega_0}{2}|2\rangle + \frac{\hbar\Omega_0}{2}e^{i\omega t}|1\rangle \right) \\
&= \frac{\hbar\omega_0}{2}
\end{aligned}$$

Entonces, la matriz del hamiltoniano es:

$$H = \begin{pmatrix} \langle 1|H|1\rangle & \langle 1|H|2\rangle \\ \langle 2|H|1\rangle & \langle 2|H|2\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \Omega_0 e^{i\omega t} \\ \Omega_0 e^{-i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

Ya teniendo el hamiltoniano $\hat{H}$, podemos meterlo en la ecuación de Liouville para encontrar la evolución temporal de la matriz de densidad. Esta ecuación dice:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\rho, \hat{H}] = \frac{i}{\hbar}\rho\hat{H} - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\rho$$

Podemos sustituir la matriz H y $\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$ y entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} &= \frac{i}{\hbar}\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \Omega_0 e^{i\omega t} \\ \Omega_0 e^{-i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix} - \frac{i}{\hbar}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \Omega_0 e^{i\omega t} \\ \Omega_0 e^{-i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \omega_0\rho_{11} + \Omega_0 e^{-i\omega t}\rho_{12} & \Omega_0 e^{i\omega t}\rho_{11} - \omega_0\rho_{12} \\ \omega_0\rho_{21} + \Omega_0 e^{-i\omega t}\rho_{22} & \Omega_0 e^{i\omega t}\rho_{21} - \omega_0\rho_{22} \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \omega_0\rho_{11} + \Omega_0 e^{i\omega t}\rho_{21} & \omega_0\rho_{12} + \Omega_0 e^{i\omega t}\rho_{22} \\ \Omega_0 e^{-i\omega t}\rho_{11} - \omega_0\rho_{21} & \Omega_0 e^{-i\omega t}\rho_{12} - \omega_0\rho_{22} \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \Omega_0 e^{-i\omega t}\rho_{12} - \Omega_0 e^{i\omega t}\rho_{21} & \Omega_0 e^{i\omega t}\rho_{11} - 2\omega_2\rho_{12} - \Omega_0 e^{i\omega t}\rho_{22} \\ 2\omega_0\rho_{21} + \Omega_0 e^{-i\omega t}\rho_{22} - \Omega_0 e^{-i\omega t}\rho_{11} & \Omega_0 e^{i\omega t}\rho_{21} - \Omega_0 e^{-i\omega t}\rho_{12} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces, igualando las entradas una a una, queda que:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{11}}{dt} &= \frac{i}{2}\left(\Omega_0 e^{-i\omega t}\rho_{12} - \Omega_0 e^{i\omega t}\rho_{21}\right) \\
\frac{d\rho_{12}}{dt} &= \frac{i}{2}\left(\Omega_0 e^{i\omega t}\rho_{11} - 2\omega_0\rho_{12} - \Omega_0 e^{i\omega t}\rho_{22}\right) \\
\frac{d\rho_{21}}{dt} &= \frac{i}{2}\left(2\omega_0\rho_{21} + \Omega_0 e^{-i\omega t}\rho_{22} - \Omega_0 e^{-i\omega t}\rho_{11}\right) \\
\frac{d\rho_{22}}{dt} &= \frac{i}{2}\left(\Omega_0 e^{i\omega t}\rho_{21} - \Omega_0 e^{-i\omega t}\rho_{12}\right)
\end{aligned}$$

Podemos escribir estas ecuaciones de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\rho_{11}}{dt} \\ \frac{d\rho_{12}}{dt} \\ \frac{d\rho_{21}}{dt} \\ \frac{d\rho_{22}}{dt} \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \Omega_0 e^{-i\omega t} & -\Omega_0 e^{i\omega t} & 0 \\ \Omega_0 e^{i\omega t} & -2\omega_0 & 0 & -\Omega_0 e^{i\omega t} \\ -\Omega_0 e^{-i\omega t} & 0 & 2\omega_0 & \Omega_0 e^{-i\omega t} \\ 0 & -\Omega_0 e^{-i\omega t} & \Omega_0 e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{12} \\ \rho_{21} \\ \rho_{22} \end{pmatrix}$$

Problema 9

De la misma forma que calculamos la potencia de la luz absorbida, calcular la potencia de la luz esparcida.

En clase vimos que la polarización se calcula como:

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \vec{E}_0 [\chi' \cos\omega t - \chi'' \sin\omega t]$$

Esto se puede separar en una parte relacionada con dispersión y otra con absorción como:

$$\vec{P}_{dis} = \epsilon_0 \chi' \vec{E}_0 \cos\omega t \quad \vec{P}_{abs} = \epsilon_0 \chi'' \vec{E}_0 \sin\omega t,$$

Luego, como vimos en clase, la potencia se calcula como:

$$\wp = \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \vec{E}(t),$$

donde como hicimos en clase, sólo se toma la dependencia temporal de $\vec{E}(t)$, que es $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos\omega t$. Para el término esparcido, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\wp &= \frac{d\vec{P}_{dis}}{dt} \cdot \vec{E}(t) = \frac{d[\epsilon_0 \chi' \vec{E}_0 \cos\omega t]}{dt} \cdot \vec{E}(t) \\
&= \epsilon_0 \chi' \vec{E}_0 \frac{d\cos\omega t}{dt} \cdot \vec{E}_0 \cos\omega t \\
&= \epsilon_0 \chi' \vec{E}_0 (-\omega \sin\omega t) \cdot \vec{E}_0 \cos\omega t
\end{aligned}$$

como $\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 = E_0^2$, tenemos que:

$$\wp = -\epsilon_0 \chi' E_0^2 \omega \sin\omega t \cos\omega t$$

Luego, podemos usar que $\sin(\omega t)\cos(\omega t) = \sin(2\omega t)/2$, por lo que para promediar $\wp$ sobre un periodo hay que promediar $\sin(2\omega t)$. Sin embargo, al ser simplemente un seno, su promedio es 0, por lo que concluimos que $\langle \wp \rangle = 0$. Esto se interpreta como que la luz esparcida no contribuye a la potencia de la luz.

Para el término de absorción, se tiene similarmente que:

$$\begin{aligned}
\wp &= \frac{d\vec{P}_{abs}}{dt} \cdot \vec{E}(t) = \frac{d[\epsilon_0 \chi'' \vec{E}_0 \sin\omega t]}{dt} \cdot \vec{E}(t) \\
&= \epsilon_0 \chi'' \vec{E}_0 \frac{d\sin\omega t}{dt} \cdot \vec{E}(t) \\
&= \epsilon_0 \chi'' \omega \cos\omega t \vec{E}_0 \cdot \vec{E}(t) \\
&= \epsilon_0 \chi'' \omega \cos\omega t \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 \cos\omega t \\
&= \epsilon_0 \chi'' \omega E_0^2 \cos^2\omega t
\end{aligned}$$

Luego, el promedio de esta expresión se consigue promediando $\cos\omega t$, cuyo resultado es $1/2$. Por lo tanto, nos queda que:

$$\langle \wp \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi'' \omega E_0^2$$

Problema 10

Calcular la intensidad de saturación para la transición $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ (línea $D2$) del isótopo 87 de rubidio.

En clase vimos que la intensidad de saturación se define como:

$$I_{sat} = \frac{g_1}{g_2} \frac{2\pi^2 c\hbar}{3\tau\lambda_0^3}$$

Primero necesitamos consulta los valores de λ_0 y de τ. Se pueden investigar estos datos en distintas fuentes y en particular, los encontré en [1]. En dicha fuente se presenta que para esta transición, la longitud de onda es de $\lambda_0 = 780.24nm$ y el tiempo de vida es $\tau = 26.24ns$.

Considerando que los dos estados no son degenerados y entonces $g_1 = g_2$, se tiene que:

$$\begin{aligned} I_{sat} &= \frac{2\pi^2 c\hbar}{3\tau\lambda_0} \\ &= \frac{2\pi^2(3 \times 10^8 m/s)(1.054572 \times 10^{-34} Js)}{3(26.24 \times 10^{-9} s)(780.24 \times 10^{-9} m)^3} \\ &= \boxed{16.7016\ W/m^2} \end{aligned}$$

[1] Steck, Daniel. (2003). Rubidium 87 D Line Data. https://steck.us/alkalidata/rubidium87numbers.1.6.pdf

Sección 4

Problema 1

Partiendo de la ecuación

$$\begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{31} & T_{32} \\ T_{41} & R_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

y usando que

$$|E_1|^2 + |E_2|^2 = |E_3|^2 + |E_4|^2 \quad (2)$$

demostrar que:

$$|R_{31}|^2 + |T_{41}|^2 = 1 = |R_{42}|^2 + |T_{32}|^2$$

y que:

$$R_{31}T_{32}^* + T_{41}R_{42}^* = 0$$

Empezamos con la ecuación (1) y la usamos para el caso particular en que el vector del lado derecho es $\begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (es decir $E_2 = 0$).

Entonces, la ecuación (1) nos dice que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_{31} & T_{32} \\ T_{41} & R_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{31}E_1 \\ T_{41}E_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pero como (2) nos dice que $|E_1|^2 + |E_2|^2 = |E_3|^2 + |E_4|^2$, usando que $E_2 = 0$ y que obtuvimos que $E_3 = R_{31}E_1$, $E_4 = T_{41}E_1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |E_1|^2 + |0|^2 &= |R_{31}E_1|^2 + |T_{41}E_1|^2 \\ \Rightarrow \ |E_1|^2 &= |E_1|^2(|R_{31}|^2 + |T_{41}|^2) \\ \Rightarrow \ & \boxed{|R_{31}|^2 + |T_{41}|^2 = 1} \end{aligned}$$

que es el primer resultado que se buscaba.

Ahora hacemos lo mismo pero en el caso particular en que $E_1 = 0$, por lo que (1) nos lleva a:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_{31} & T_{32} \\ T_{41} & R_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_{32}E_2 \\ R_{42}E_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pero como (2) nos dice que $|E_1|^2 + |E_2|^2 = |E_3|^2 + |E_4|^2$, usando que $E_1 = 0$ y que obtuvimos que $E_3 = T_{32}E_2$, $E_4 = R_{42}E_2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |0|^2 + |E_2|^2 &= |T_{32}E_2|^2 + |R_{42}E_2|^2 \\ \Rightarrow \ |E_2|^2 &= |E_2|^2(|T_{32}|^2 + |R_{42}|^2) \\ \Rightarrow \ & \boxed{|T_{32}|^2 + |R_{42}|^2 = 1} \end{aligned}$$

que es el segundo resultado que se buscaba.

Finalmente, hacemos el mismo desarrollo pero para el caso particular en que $E_1 = E_2$, por lo que la ecuación (1) nos lleva a:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_{31} & T_{32} \\ T_{41} & R_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_1(R_{31} + T_{32}) \\ E_1(T_{41} + R_{42}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Entonces tenemos que $E_3 = E_1(R_{31} + T_{32})$ y $E_4 = E_1(T_{41} + R_{42})$. Luego, usando la relación (2), nos lleva a:

$$\begin{aligned}
&|E_1|^2 + |E_2|^2 = |E_3|^2 + |E_4|^2 \\
&\Rightarrow\ 2|E_1|^2 = |E_1(R_{31} + T_{32})|^2 + |E_1(T_{41} + R_{42})|^2 \\
&\Rightarrow\ 2|E_1|^2 = |E_1|^2 |R_{31} + T_{32}|^2 + |E_1|^2 |(T_{41} + R_{42})|^2 \\
&\Rightarrow\ 2 = |R_{31} + T_{32}|^2 + |T_{41} + R_{42}|^2 \\
&\Rightarrow\ 2 = (R_{31} + T_{32})(R_{31} + T_{32})^* + (T_{41} + R_{42})(T_{41} + R_{42})^* \\
&\Rightarrow\ 2 = R_{31}R_{31}^* + R_{31}T_{32}^* + T_{32}R_{31}^* + T_{32}T_{32}^* + T_{41}T_{41}^* + T_{41}R_{42}^* + R_{42}T_{41}^* + R_{42}R_{42}^* \\
&\Rightarrow\ 2 = |R_{31}|^2 + R_{31}T_{32}^* + T_{32}R_{31}^* + |T_{32}|^2 + |T_{41}|^2 + T_{41}R_{42}^* + R_{42}T_{41}^* + |R_{42}|^2 \\
&\text{Usamos ahora los dos resultados pasados } |T_{32}|^2 + |R_{42}|^2 = 1 = |R_{31}|^2 + |T_{41}|^2 \\
&\Rightarrow\ 0 = R_{31}T_{32}^* + T_{32}R_{31}^* + T_{41}R_{42}^* + R_{42}T_{41}^* \quad (3)
\end{aligned}$$

Hacemos el mismo desarrollo pero para el caso particular que $E_2 = iE_1$, por lo que la ecuación (1) nos lleva a:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_{31} & T_{32} \\ T_{41} & R_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ iE_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_1(R_{31} + iT_{32}) \\ E_1(T_{41} + iR_{42}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Entonces tenemos que $E_3 = E_1(R_{31} + iT_{32})$ y $E_4 = E_1(T_{41} + iR_{42})$. Luego, usando la relación (2), nos lleva a:

$$\begin{aligned}
&|E_1|^2 + |E_2|^2 = |E_3|^2 + |E_4|^2 \\
&\Rightarrow\ 2|E_1|^2 = |E_1(R_{31} + iT_{32})|^2 + |E_1(T_{41} + iR_{42})|^2 \\
&\Rightarrow\ 2|E_1|^2 = |E_1|^2 |R_{31} + iT_{32}|^2 + |E_1|^2 |(T_{41} + iR_{42})|^2 \\
&\Rightarrow\ 2 = |R_{31} + iT_{32}|^2 + |T_{41} + iR_{42}|^2 \\
&\Rightarrow\ 2 = (R_{31} + iT_{32})(R_{31} + iT_{32})^* + (T_{41} + iR_{42})(T_{41} + iR_{42})^* \\
&\Rightarrow\ 2 = R_{31}R_{31}^* - iR_{31}T_{32}^* + iT_{32}R_{31}^* + T_{32}T_{32}^* + T_{41}T_{41}^* - iT_{41}R_{42}^* + iR_{42}T_{41}^* + R_{42}R_{42}^* \\
&\Rightarrow\ 2 = |R_{31}|^2 - iR_{31}T_{32}^* + iT_{32}R_{31}^* + |T_{32}|^2 + |T_{41}|^2 - iT_{41}R_{42}^* + iR_{42}T_{41}^* + |R_{42}|^2 \\
&\text{Usamos ahora los dos resultados pasados } |T_{32}|^2 + |R_{42}|^2 = 1 = |R_{31}|^2 + |T_{41}|^2 \\
&\Rightarrow\ 0 = -iR_{31}T_{32}^* + iT_{32}R_{31}^* - iT_{41}R_{42}^* + iR_{42}T_{41}^* \\
&\Rightarrow\ 0 = -R_{31}T_{32}^* + T_{32}R_{31}^* - T_{41}R_{42}^* + R_{42}T_{41}^* \\
&\text{Multiplicamos ahora por } -1 \\
&\Rightarrow 0 = R_{31}T_{32}^* - T_{32}R_{31}^* + T_{41}R_{42}^* - R_{42}T_{41}^* \\
&\text{Le sumamos a esto la ecuación (3), que es } 0 = R_{31}T_{32}^* + T_{32}R_{31}^* + T_{41}R_{42}^* + R_{42}T_{41}^* \\
&\Rightarrow 0 = 2R_{31}T_{32}^* + 2T_{41}R_{42}^* \\
&\Rightarrow\ \boxed{R_{31}T_{32}^* + T_{41}R_{42}^* = 0}
\end{aligned}$$

Que es la última ecuación que se nos pedía probar.

Problema 2

Probar que lo demostrado en el ejercicio anterior implica que la matriz es unitaria, es decir, que la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} R_{31} & T_{32} \\ T_{41} & R_{42} \end{pmatrix}$$

es su conjugada transpuesta:

$$\begin{pmatrix} R_{31}^* & T_{41}^* \\ T_{32}^* & R_{42}^* \end{pmatrix}$$

Simplemente hay que demostrar que multiplicar A por su conjugada transpuesta da la identidad, con lo que se prueba que la conjugada transpuesta es su inversa. Hacemos las operaciones:

$$\begin{aligned} A^\dagger A &= \begin{pmatrix} R_{31}^* & T_{41}^* \\ T_{32}^* & R_{42}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{31} & T_{32} \\ T_{41} & R_{42} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{31}^* R_{31} + T_{41} T_{41}^* & R_{31}^* T_{32} + T_{41}^* R_{42} \\ T_{32}^* R_{31} + R_{42}^* T_{41} & T_{32}^* T_{32} + R_{42}^* R_{42} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |R_{31}|^2 + |T_{41}|^2 & R_{31}^* T_{32} + T_{41}^* R_{42} \\ T_{32}^* R_{31} + R_{42}^* T_{41} & |T_{32}|^2 + |R_{42}|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, por las relaciones probadas en el ejercicio anterior, los términos de la diagonal valen 1 y los términos fuera de la diagonal valen 0. Por lo tanto, concluimos que:

$$A^\dagger A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

y entonces la matriz A es unitaria.

Problema 3

Considere luz caótica, monocromática y paralela, compuesta por un alto número de ondas planas con el mismo vector de onda y amplitud pero con una distribución de fase aleatoria. Prueba que:

$$g^{(2)}(\tau) = 2$$

¿Qué podemos decir del tiempo de coherencia en este caso?

Empezaremos calculando $g^{(1)}(\tau)$ porque me parece que será más fácil y luego obtendremos $g^{(2)}(\tau)$ usando la relación entre estas cantidades. Entonces, empezamos con la definición de $g^{(1)}$, que es:

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t)E(t+\tau)\rangle}{\langle |E(t)|^2\rangle} \quad (1)$$

Necesitamos entonces una expresión para el campo eléctrico en esta situación. El problema nos dice que la luz está formada por muchas ondas monocromáticas del mismo vector de onda y amplitud, por lo que cada una tendrá un campo eléctrico de la forma (suponemos que su campo apunta en la dirección z y es igual para todas por ser paralelas):

$$E_j(z,t) = E_0 \exp(ik_0 z - i\omega_0 t + i\phi_j),$$

donde ϕ_j es la fase de la j-ésima onda y es algún valor aleatorio como dice el problema. Entonces, el campo total será la suma de estos (para un total de N ondas) :

$$E(t) = \sum_{j=1}^{N} E_0 \exp(ik_0 z - i\omega_0 t + i\phi_j)$$

Entonces, sustituyendo en (1) obtenemos que:

$$\begin{aligned}
g^{(1)}(\tau) &= \frac{\langle E^*(t)E(t+\tau)\rangle}{\langle |E(t)|^2\rangle} \\
&= \frac{\langle [\sum_{j=1}^{N} E_0 \exp(ik_0 z - i\omega_0 t + i\phi_j)]^* [\sum_{m=1}^{N} E_0 \exp(ik_0 z - i\omega_0 (t+\tau) + i\phi_m)]\rangle}{\langle |\sum_{l=1}^{N} E_0 \exp(ik_0 z - i\omega_0 t + i\phi_l)|^2\rangle} \\
&= \frac{\langle \sum_{j,m=1}^{N} |E_0|^2 \exp(-ik_0 z + i\omega_0 t - i\phi_j)\exp(ik_0 z - i\omega_0 (t+\tau) + i\phi_m)\rangle}{\langle \sum_{l=1}^{N} E_0^* \exp(-ik_0 z + i\omega_0 t - i\phi_l) E_0 \sum_{l'=1}^{N} \exp(ik_0 z - i\omega_o t + i\phi_{l'})\rangle} \\
&= \frac{\langle \sum_{j,m=1}^{N} |E_0|^2 \exp[-i\omega_0 \tau + i(\phi_m - \phi_j)]\rangle}{\langle \sum_{l,l'=1}^{N} |E_0|^2 \exp[i(\phi_{l'} - \phi_l)]\rangle} \\
&= \frac{\langle \sum_{j,m=1}^{N} |E_0|^2 \exp[-i\omega_0 \tau]\exp[i(\phi_m - \phi_j)]\rangle}{\langle \sum_{l,l'=1}^{N} |E_0|^2 \exp[i(\phi_{l'} - \phi_l)]\rangle} \\
&\text{Vemos que todo lo que está dentro de las } \langle\ \rangle \text{ es cte, por lo que podemos omitir los valores esperados} \\
&= \frac{\sum_{j,m=1}^{N} |E_0|^2 \exp[-i\omega_0 \tau]\exp[i(\phi_m - \phi_j)]}{\sum_{l,l'=1}^{N} |E_0|^2 \exp[i(\phi_{l'} - \phi_l)]} \\
&= \frac{\exp[-i\omega_0 \tau]\sum_{j,m=1}^{N} |E_0|^2 \exp[i(\phi_m - \phi_j)]}{\sum_{l,l'=1}^{N} |E_0|^2 \exp[i(\phi_{l'} - \phi_l)]} \\
&\text{Los dos sumandos son iguales y se cancelan} \\
&= e^{-i\omega_0 \tau}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ya calculamos $g^{(1)}(\tau)$ y podemos usar la relación entre esta cantidad y $g^{(2)}(\tau)$, que como vimos en clase es:

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\tau) &= 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2 \quad \text{Relación vista en clase} \\ &= 1 + \left|e^{-i\omega\tau}\right|^2 \\ &= 1 + 1 \\ &= \boxed{2} \end{aligned}$$

Como $g^{(2)}(\tau) = 2$ y no depende de τ, eso indica que la luz es siempre coherente y el tiempo de coherencia es infinito.

Problema 4

Considere un haz de luz compuesto por la superposición de dos haces independientes, cuya intensidad

$$\bar{I}(t) = \bar{I}_a(t) + \bar{I}_b(t)$$

en donde las etiquetas a y b indican las intensidades de los haces por separado. Demuestra que el segundo grado de correlación total está dado por:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\bar{I}_a^2 g^{(2)}_{a,a}(\tau) + \bar{I}_b^2 g^{(2)}_{b,b}(\tau) + 2\bar{I}_a\bar{I}_b}{(\bar{I}_a + \bar{I}_b)^2}$$

Empezamos directamente con la definición de $g^{(2)}(\tau)$, que es:

$$\begin{aligned}
g^{(2)}(\tau) &= \frac{\langle \bar{I}(t)\bar{I}(t+\tau)\rangle}{\langle \bar{I}(t)\rangle^2} \\
&\text{Usamos la definición de } \bar{I}(t) \\
&= \frac{\langle (\bar{I}_a(t) + \bar{I}_b(t))(\bar{I}_a(t+\tau) + \bar{I}_b(t+\tau))}{\langle \bar{I}_a(t) + \bar{I}_b(t)\rangle^2} \\
&= \frac{\langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_a(t+\tau) + \bar{I}_b(t)\bar{I}_a(t+\tau) + \bar{I}_a(t)\bar{I}_b(t+\tau) + \bar{I}_b(t)\bar{I}_b(t+\tau)\rangle}{\langle \bar{I}_a(t) + \bar{I}_b(t)\rangle^2} \\
&\text{Separamos los valores esperados en las sumas} \\
&= \frac{\langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_a(t+\tau)\rangle + \langle \bar{I}_b(t)\bar{I}_a(t+\tau)\rangle + \langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_b(t+\tau)\rangle + \langle \bar{I}_b(t)\bar{I}_b(t+\tau)\rangle}{(\langle \bar{I}_a(t)\rangle + \langle \bar{I}_b(t)\rangle)^2} \\
&\text{Usamos que } \bar{I}_a \text{ se define como } \langle \bar{I}_a(t)\rangle \text{ y similarmente con } b\text{, por lo que cambiamos el denominador} \\
&= \frac{\langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_a(t+\tau)\rangle + \langle \bar{I}_b(t)\bar{I}_a(t+\tau)\rangle + \langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_b(t+\tau)\rangle + \langle \bar{I}_b(t)\bar{I}_b(t+\tau)\rangle}{(\bar{I}_a + \bar{I}_b)^2} \quad (1)
\end{aligned}$$

Antes de continuar, probamos una forma de reescribir $\langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_a(t+\tau)\rangle$. Para hacerlo, partimos de la definición de $g^{(2)}_{a,a}(\tau)$, que se define como:

$$\begin{aligned}
g^{(2)}_{a,a}(\tau) &:= \frac{\langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_a(t+\tau)\rangle}{\langle \bar{I}_a(t)\rangle\langle \bar{I}_a(t+\tau)\rangle} \\
\Rightarrow\ \langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_a(t+\tau)\rangle &= g^{(2)}_{a,a}(\tau)\langle \bar{I}_a(t)\rangle\langle \bar{I}_a(t+\tau)\rangle
\end{aligned}$$

Finalmente, $\langle \bar{I}_a(t)\rangle$ se escribe como $\bar{I}_a$ y es igual a $\langle \bar{I}_a(t+\tau)\rangle$ (ya que solamente cambia en un desfase τ, lo cual no cambia el valor esperado). Entonces nos queda que:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_a(t+\tau)\rangle &= g^{(2)}_{a,a}(\tau)\bar{I}_a\bar{I}_a \\
\Rightarrow\ \langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_a(t+\tau)\rangle &= g^{(2)}_{a,a}(\tau)\bar{I}_a^2 \quad (2)
\end{aligned}$$

Lo mismo se tiene para b en lugar de a, por lo que tenemos que:

$$\langle \bar{I}_b(t)\bar{I}_b(t+\tau)\rangle = g^{(2)}_{b,b}(\tau)\bar{I}_b^2 \quad (3)$$

También necesitamos $\langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_b(t+\tau)\rangle$. Como nos dicen que los dos haces son independientes, este valor medio del producto es el producto de los valores medios, es decir:

$$\langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_b(t+\tau)\rangle = \langle \bar{I}_a(t)\rangle\langle \bar{I}_b(t+\tau)\rangle = \bar{I}_a\bar{I}_b \quad (4)$$

y similarmente:

$$\langle \bar{I}_b(t)\bar{I}_a(t+\tau)\rangle = \langle \bar{I}_b(t)\rangle\langle \bar{I}_a(t+\tau)\rangle = \bar{I}_a\bar{I}_b \quad (5)$$

Finalmente, sustituimos $(2), (3), (4), (5)$ en (1) y nos queda:

$$
\begin{aligned}
g^{(2)}(\tau) &= \frac{\langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_a(t+\tau)\rangle + \langle \bar{I}_b(t)\bar{I}_a(t+\tau)\rangle + \langle \bar{I}_a(t)\bar{I}_b(t+\tau)\rangle + \langle \bar{I}_b(t)\bar{I}_b(t+\tau)\rangle}{(\bar{I}_a + \bar{I}_b)^2} \\
&= \frac{g_{a,a}^{(2)}(\tau)\bar{I}_a^2 + \bar{I}_a\bar{I}_b + \bar{I}_a\bar{I}_b + g_{b,b}^{(2)}(\tau)\bar{I}_b^2}{(\bar{I}_a + \bar{I}_b)^2} \\
&= \boxed{\frac{g_{a,a}^{(2)}(\tau)\bar{I}_a^2 + 2\bar{I}_a\bar{I}_b + g_{b,b}^{(2)}(\tau)\bar{I}_b^2}{(\bar{I}_a + \bar{I}_b)^2}}
\end{aligned}
$$

que es el resultado que se buscaba.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| \downarrow \uparrow \rangle - | \uparrow \downarrow \rangle \right)$$