Ecuaciones Diferenciales I — Tomás Ricardo Basile Álvarez

Tarea 11

1) Realice el análisis de estabilidad lineal para el péndulo físico

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\operatorname{sen}\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -K\operatorname{sen}\theta\end{pmatrix} \quad \text{con } v \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

1) Puntos de equilibrio.

$$G(t_0, \bar{x}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} v \\ -K\operatorname{sen}\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{donde } \bar{x} = \begin{pmatrix}\theta\\ v\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} v = 0 \\ K\operatorname{sen}\theta = 0 \rightarrow \theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ los puntos fijos son $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi n\end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ hay infinitos puntos fijos, sin embargo, como dice la nota, sólo hay que fijarnos en dos. Que ahora descubriremos cuáles

2) Escribir el sistema linealizado

Primero calculamos el Jacobiano de $G(\theta, v) = \begin{pmatrix} v \\ -K\operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow DG = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K\cos\theta & 0\end{pmatrix}$$

Y hay que evaluar esta matriz en cada punto fijo $\begin{pmatrix}0\\ \pi n\end{pmatrix}$ $n \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, vemos que para todos los n pares, $-K\cos(n\pi) = -K$ y para los impares, $-K\cos(n\pi) = K$, entonces estos son nuestros únicos dos casos posibles.

i) para n par: $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix}0\\ \pi n\end{pmatrix}$

$$\rightarrow DG\big|_{\bar{x}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K\cos(\pi n) & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Lineal}]{\text{sistema}} \boxed{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ v\end{pmatrix}}$$

ii) Para n impar: $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\ \pi n\end{pmatrix}$ n impar

$$DG\big|_{\bar{x}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K\cos(\pi n) & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sistema}} \boxed{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ v\end{pmatrix}}$$

3) Resolver cada Sistema:

·) para $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi n \end{pmatrix}$ con n par: $\rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix}$

Eigenvalores: $\left|\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -K & -\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \rightarrow \lambda^2 + K = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = \pm\sqrt{K}\, i}$ Conjugados imaginarios puros

Para $\lambda_1 = \sqrt{K}\, i$ eigenvectores: $\begin{pmatrix} -\sqrt{K} i & 1 \\ -K & -\sqrt{K} i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{matrix} -\sqrt{K}\, x\, i + y = 0 \\ -Kx - \sqrt{K}\, i\, y = 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow y = \sqrt{K}\, i\, x$

Tomando $x = 1$, tenemos el eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{K}\, i \end{pmatrix}$

$\therefore$ La solución es: $e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{K} i \end{pmatrix} = e^{\sqrt{K} i t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{K} i \end{pmatrix} = \cos(\sqrt{K} t) + i\,\mathrm{sen}(\sqrt{K} t) \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{K} i \end{pmatrix}$

Tomamos la parte real e imaginaria: $\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}\, t) \\ -\sqrt{K}\,\mathrm{sen}(\sqrt{K}\, t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathrm{sen}(\sqrt{K}\, t) \\ \sqrt{K}\, \cos(\sqrt{K}\, t) \end{pmatrix}$
Que son dos soluciones l.i.

$\therefore$ Solución general: $\boxed{\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}\, t) \\ -\sqrt{K}\,\mathrm{sen}(\sqrt{K} t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(\sqrt{K}\, t) \\ \sqrt{K}\, \cos(\sqrt{K}\, t) \end{pmatrix}}$

··) para $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi n \end{pmatrix}$ con n impar: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix}$

Eigenvalores: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ K & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - K = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = \pm\sqrt{K}}$ Reales de signo opuesto

· Para $\lambda_1 = \sqrt{K}$, el eigenvector es: $\begin{pmatrix} -\sqrt{K} & 1 \\ K & -\sqrt{K} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow -\sqrt{K}\, x + y = 0$

$\rightarrow y = \sqrt{K}\, x$ con $x = 1$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{K} \end{pmatrix}$

· Para $\lambda_2 = -\sqrt{K}$, el eigenvector es: $\begin{pmatrix} \sqrt{K} & 1 \\ K & \sqrt{K} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \sqrt{K}\, x + y = 0$

$\rightarrow y = -\sqrt{K}\, x$ para $x = 1$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{K} \end{pmatrix}$

$\therefore$ La solución general es:

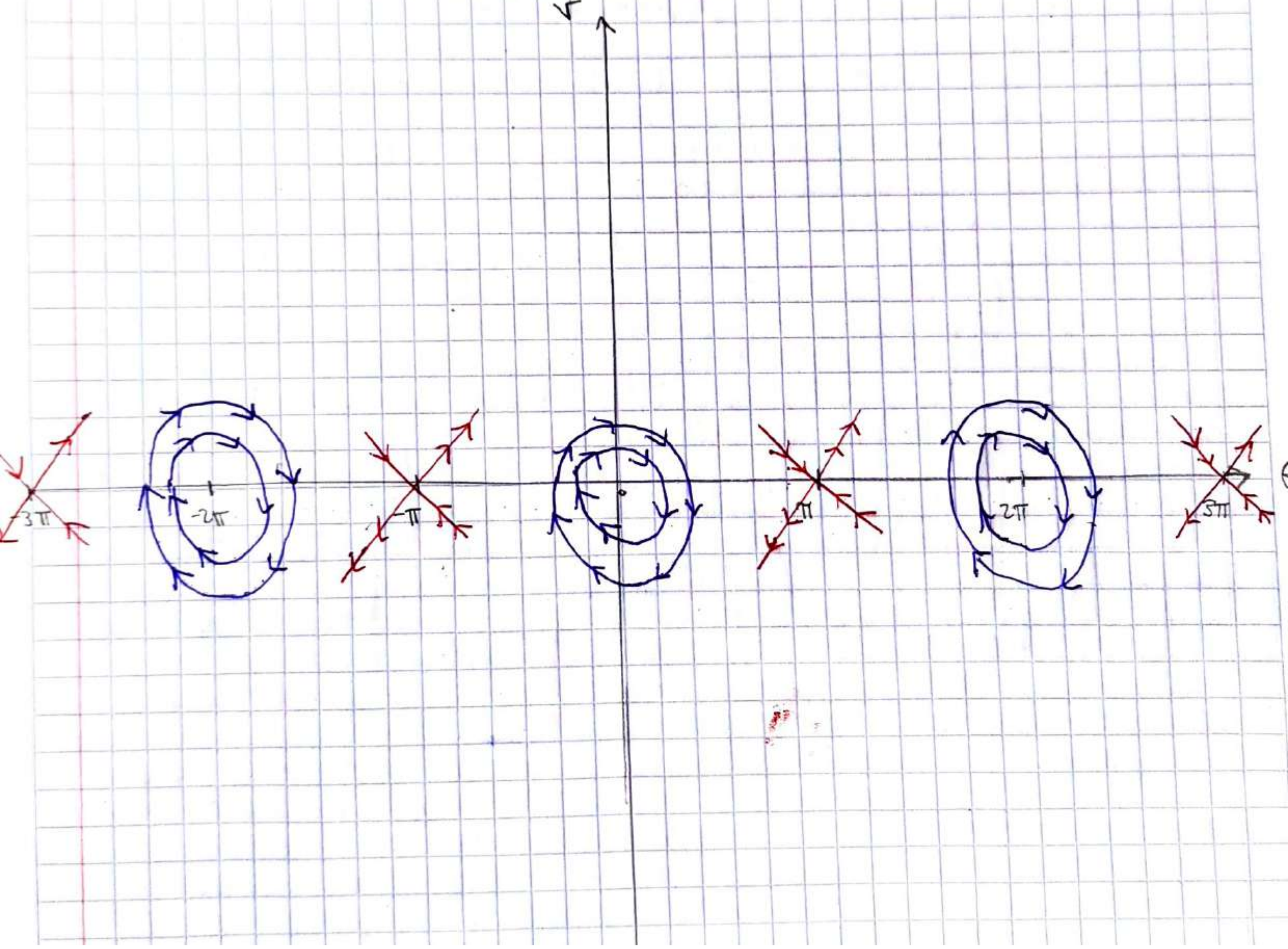
$$\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{K} \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{K} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = c_1 e^{\sqrt{K} t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{K} \end{pmatrix} + c_2 e^{-\sqrt{K} t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{K} \end{pmatrix}}$$

d) Bosquejo

Para $X = \begin{pmatrix} 0 \\ n\pi \end{pmatrix}$ con n par, tenemos dos eigenvalores $\lambda = \pm\sqrt{k}\, i$ que son imaginarios puntos conjugados, según la terminología de la lectura 16 b, es un centro

Para $X = \begin{pmatrix} 0 \\ n\pi \end{pmatrix}$ con n impar, tenemos eigenvalores reales $\lambda = \pm\sqrt{K}$ de signo opuesto, un punto silla.



2. Modelo de Zombies: $\frac{dH}{dt} = \gamma H - aHZ - bH^2$ $\frac{dZ}{dt} = cHZ$

1) Puntos de equilibrio:

$$\gamma H - aHZ - bH^2 = 0 \quad \cdots (1)$$
$$cHZ = 0 \quad \cdots (2)$$

De (2) tenemos dos casos:

↳ caso 1) $H = 0$, al sustituir en (1) vemos que se cumple $\forall Z$

$\Rightarrow Z$ es libre $\therefore \begin{pmatrix} H \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}$ es un punto fijo $\forall K$.

↳ caso 2) $Z = 0$, al sustituir en (1) $\to \gamma H - bH^2 = 0$

$\to H = 0$

↳ $H = \gamma/b$

$\therefore$ tenemos dos puntos fijos: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \gamma/b \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Escribe el sistema linealizado:

Jacobiano: $G(H,Z) = (\gamma H - aHZ - bH^2, cHZ) \Rightarrow DG = \begin{pmatrix} \gamma - aZ - 2bH & -aH \\ cZ & cH \end{pmatrix}$

·) Punto fijo 1: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$DG\Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Lineal}]{\text{sistema}} \boxed{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} H \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H \\ Z \end{pmatrix}}$$

··) Punto fijo 2: $\begin{pmatrix} \gamma/b \\ 0 \end{pmatrix}$

$$DG\Big|_{\begin{pmatrix} \gamma/b \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\frac{a}{b}\gamma \\ 0 & \frac{c}{b}\gamma \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} H \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\frac{a}{b}\gamma \\ 0 & \frac{c}{b}\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H \\ Z \end{pmatrix}}$$

3) Resolver el sistema Lineal:

·) Para $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} H \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H \\ Z \end{pmatrix}$

Eigenvalores: $\left|\begin{pmatrix} \gamma-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \to -\lambda(\gamma - \lambda) = 0$ ↗ $\lambda_1 = 0$ ↘ $\lambda_2 = \gamma$

No hace falta usar el método de eigenvectores, pues las ecuaciones son sencillas:

$\frac{d}{dt}H = \gamma H$ $\frac{d}{dt}Z = 0$

$\to H = c_1 e^{\gamma t}$, $Z = c_2$

$\therefore$ Solución general: $\boxed{\begin{pmatrix} H \\ Z \end{pmatrix} = c_1 e^{\gamma t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

ii) Para $\begin{pmatrix} \gamma/b \\ 0 \end{pmatrix}$: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} H \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\frac{a}{b}\gamma \\ 0 & \frac{c}{b}\gamma \end{pmatrix}$

Eigenvalores: $\left| \begin{pmatrix} -\gamma-\lambda & -\frac{a}{b}\gamma \\ 0 & \frac{c}{b}\gamma-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow (-\gamma-\lambda)(\frac{c}{b}\gamma-\lambda) = 0$ → $\lambda_1 = -\gamma$, $\lambda_2 = \frac{c}{b}\gamma$

Eigenvectores: para $\lambda_1 = -\gamma$: $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{b}\gamma \\ 0 & (\frac{c}{b}+1)\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ x es libre, $y = 0$

$\rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = \frac{c}{b}\gamma$: $\begin{pmatrix} -\gamma-\frac{c}{b}\gamma & -\frac{a}{b}\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (-1-\frac{c}{b})x - \frac{a}{b}y = 0$

$\rightarrow y = \frac{b}{a}(-1-\frac{c}{b})x \rightarrow y = \frac{-b-c}{a}x$, para $x = a \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} a \\ -b-c \end{pmatrix}$

∴ La solución general es: $\begin{pmatrix} H \\ Z \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$

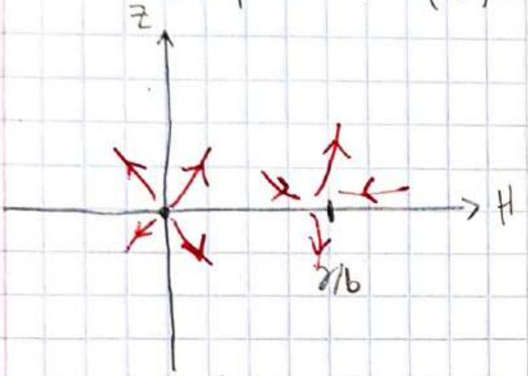
$$\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} H \\ Z \end{pmatrix} = c_1 e^{-\gamma t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{c}{b}\gamma t}\begin{pmatrix} a \\ -b-c \end{pmatrix}}$$

4. **Bosquejo:** Primero que nada, tenemos el caso en que $\gamma/b > 0$, de esta forma los puntos fijos están en el 1er cuadrante que es lo que nos interesa.

- Caso 1) $\gamma > 0$, $c > 0$.

En este caso, el punto fijo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es fuente pues sus eigenvalores son $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = \gamma > 0$

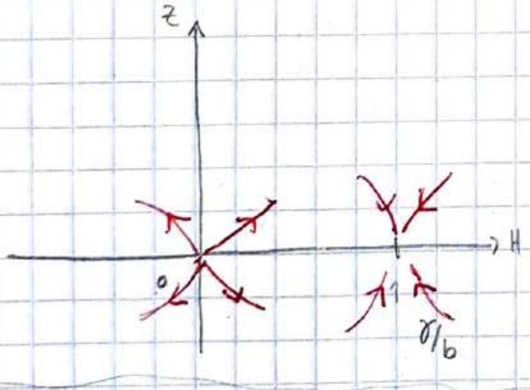
El punto $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} \gamma/b \\ 0 \end{pmatrix}$ es silla, pues sus eigenvalores son $\lambda_1 = -\gamma < 0$ $\lambda_2 = c\frac{\gamma}{b} > 0$



- Caso 2) $\gamma > 0$, $c < 0$.

· El punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es fuente pues $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \gamma > 0$

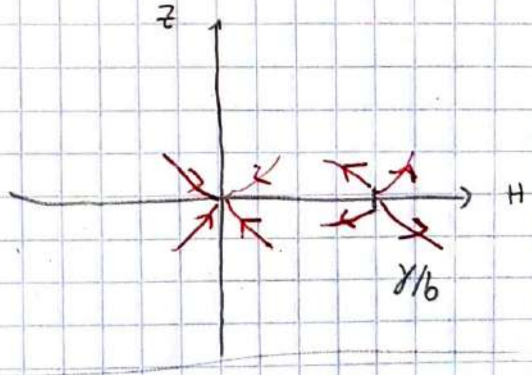
· El punto $\begin{pmatrix} \gamma/b \\ 0 \end{pmatrix}$ es sumidero pues $\lambda_1 = -\gamma < 0$ $\lambda_2 = c\frac{\gamma}{b} < 0$



Caso 3): $\gamma < 0$, $c > 0$

· El punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es sumidero pues $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = \gamma < 0$

· El punto $\begin{pmatrix} \gamma/b \\ 0 \end{pmatrix}$ es fuente pues $\lambda_1 = -\gamma > 0$ $\lambda_2 = c\frac{\gamma}{b} > 0$



Caso 4) $\gamma < 0$, $c < 0$

El punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es sumidero pues $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = \gamma < 0$

El punto $\begin{pmatrix} \gamma/b \\ 0 \end{pmatrix}$ es silla pues $\lambda_1 = -\gamma > 0$ $\lambda_2 = c\frac{\gamma}{b} < 0$