1er Examen Parcial EDO I

Tomás Ricardo Basile Álvarez

1. Modelo Kermack - Mckendrick tipo SIR

1a) $\dfrac{dS}{dt} = -\beta S I$

1b) $\dfrac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I$

1c) $\dfrac{dR}{dt} = \gamma I$

S = número de personas susceptibles

I = infectados

R = Recuperados inmunes o muertos

β = tasa de infección

γ = tasa de recuperación

$S+I+R=N$ siempre es cte. $\beta, \gamma > 0$, S es decreciente, R es creciente (salvo si $I=0$)

$R_0 = \beta/\gamma$

a) Las ecuaciones 1a y 1b no dependen de $R(t)$. Considere las curvas de solución para $I(S)$

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta S I - \gamma I}{-\beta S I} = -1 + \frac{1}{R_0 S}$$

Encuentre las curvas para $S(t_0) = S_0$, $I(t_0) = I_0$

$\dfrac{dI}{dS} = -1 + \dfrac{1}{R_0 S}$ claramente es separable (y ya está separada)

$$\to \int \frac{dI}{dS} dS = \int -1 + \frac{1}{R_0 S} dS \xrightarrow{TCV} \int dI = \int -1 + \frac{1}{R_0 S} dS$$

$$\to \int_{I_0}^{I} dI' = \int_{S_0}^{S} -1 + \frac{1}{R_0 S'} dS' \to I - I_0 = -(S - S_0) + \frac{1}{R_0} \ln \left| \frac{S}{S_0} \right|$$

$$\to \boxed{I(S) = I_0 + S_0 - S + \frac{1}{R_0} \ln \left| \frac{S}{S_0} \right|}$$

si el brote cesa i.e $I_\infty = 0$.

b) Qué puede decir del valor final de S ($S_\infty = \lim_{t\to\infty} S(t)$) si el brote cesa i.e $I_\infty = 0$.

Si dejamos que $t \to \infty$, la relación entre I y S del ejercicio anterior queda:

$$I(S_\infty) = I_0 + S_0 - S_\infty + \frac{1}{R_0} \ln\left|\frac{S_\infty}{S_0}\right|$$

$$\to I_\infty = I_0 + S_0 - S_\infty + \frac{1}{R_0} \ln\left|\frac{S_\infty}{S_0}\right|$$ pero como $I_\infty = 0$

$$\to I_0 + S_0 - S_\infty + \frac{1}{R_0} \ln\left|\frac{S_\infty}{S_0}\right| = 0$$

Pero como al momento inicial no hay recuperados o muertos, $I_0 + S_0 = N$

$$\to N = S_\infty - \frac{1}{R_0} \ln\left|\frac{S_\infty}{S_0}\right|$$ esta ecuación no se puede despejar para S_∞

Sin embargo, vemos que S_∞ va a ser un número positivo ya que cuando $S \to 0$, $I \to -\infty$ Entonces la curva cruza el eje $I=0$ en algún momento.

$\therefore$ hay un valor positivo de S en el que $I = 0$.

$\therefore$ Al final de la pandemia queda población susceptible

c) Se tiene una vacuna y se inmuniza a la población susceptible a una razón $\lambda \propto S$.

i.e.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I - \lambda S$$

¿Curvas de solución para $I(S)$?

$$\frac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \lambda S$$

Como en el inciso a), las primeras dos ecuaciones no dependen de $R(t)$ y se resuelven independientemente.

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta S I - \gamma I}{-\beta S I - \lambda S} \rightarrow \frac{dI}{dS} = \frac{I(\beta S - \gamma)}{-S(\beta I + \lambda)}$$ es separable

$$\rightarrow \frac{\beta I + \lambda}{I} \frac{dI}{dS} = \frac{\beta S - \gamma}{-S} \rightarrow \int \beta + \frac{\lambda}{I} \frac{dI}{dS} dS = \int -\beta + \frac{\gamma}{S} dS$$

$$\xrightarrow{TCV} \int \beta + \frac{\lambda}{I} dI = \int -\beta + \frac{\gamma}{S} dS$$

$$\rightarrow \beta I + \lambda \ln|I| = -\beta S + \gamma \ln|S| + C$$

$$\rightarrow \underline{I + \frac{\lambda}{\beta} \ln|I| = -S + \frac{1}{R_0} \ln|S| + C}$$

vemos que si hacemos $\lambda = 0$, la ecuación se reduce a la del inciso a), como debería.

Si la infección cesa y $I \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

entonces el lado izquierdo de la ecuación se hace extremadamente grande y negativo (por el ln) $\therefore$ Para que la igualdad se mantenga, el lado derecho también se tiene que hacer extremadamente negativo, lo cual se consigue si

$S \rightarrow 0$

$\therefore$ $S \rightarrow 0$ y no queda población susceptible

d) La vacuna se aplica a un razón $\lambda \alpha S I^2$

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I - \lambda S I^2$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \lambda S I^2$$

Encuentre la solución a $I(S)$

¿Queda población suceptible?

Igual que en el inciso a), las primeros ecuaciones forman un sistema independiente

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta S I - \gamma I}{-\beta S I - \lambda S I^2} = \frac{\beta S - \gamma}{-\beta S - \lambda S I}$$

$$\rightarrow (-\beta S - \lambda S I) dI = (\beta S - \gamma) dS \longrightarrow \underbrace{(\beta S - \gamma)}_{M} dS + \underbrace{(\beta S + \lambda S I)}_{N} dI = 0$$

vemos si es exacta: $M_I = 0$ $\quad N_S = \beta + \lambda I$ $\quad$ NO

Buscamos un factor integrante, analizamos $\dfrac{M_I - N_S}{N} = \dfrac{-\beta - \lambda I}{S(\beta + \lambda I)} = -\dfrac{1}{S}$ ← depende sólo de S ✓

∴ factor integrante va a ser: $\mu = e^{\int g(s) ds} = e^{\int -\frac{1}{S} dS} = e^{-\ln|S|} = \frac{1}{S}$

Multiplicamos por el factor: $\underbrace{\left(\beta - \frac{\gamma}{S}\right)}_{\tilde{M}} dS + \underbrace{(\beta + \lambda I)}_{\tilde{N}} dI = 0$

ahora sí: $\tilde{M}_I = \tilde{N}_S = 0$

∴ La función es: $\int \tilde{N}\, dI = \int \beta + \lambda I \, dI = \beta I + \frac{\lambda}{2} I^2 + h(S)$

$\rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial S} = h'(S) = \tilde{M}$ $\quad$ ∴ $h'(S) = \beta - \dfrac{\gamma}{S} \rightarrow h(S) = \beta S - \gamma \ln|S|$

∴ $f(S, I) = \beta I + \frac{\lambda}{2} I^2 + \beta S - \gamma \ln|S|$

∴ La solución es: $\underline{\beta I + \frac{\lambda}{2} I^2 + \beta S - \gamma \ln|S| = C}$

dividimos entre β: $\underline{I + \frac{\lambda}{\beta} I^2 + S - \frac{1}{R_0} \ln|S| = C}$

vemos que si $\lambda = 0$, la solución se reduce a la del inciso a) como debería.

Si el brote cesa, $I_\infty = 0$ cuando $t \to \infty$

Entonces obtenemos $S_\infty - \frac{1}{R_0} \ln|S_\infty| = C$

Lo cual, al igual que en el caso a) indica que queda una cantidad de población susceptible al final.

e) ¿Cuál política de vacunación es más efectiva?

La política del inciso d) es más efectiva, ya que en el inciso c) todos fueron vacunados como no queda población susceptible, esto significa que todos fueron vacunados o enfermaron. Sin embargo, en el inciso d) no fue necesario vacunar a todos para terminar con la epidemia.

Encuentre la solución general

a) $(e^x - 3x^2y^2)\,y' + e^x y = 2xy^3$

$\rightarrow \underbrace{(e^x - 3x^2y^2)}_{N}\,dy + \underbrace{(e^x y - 2xy^3)}_{M}\,dx = 0$

vemos si es exacta : $M_y = e^x - 6xy^2$, $N_x = e^x - 6xy^2$ $\therefore M_y = N_x$ ✓ es exacta

$\rightarrow$ la función es : $f(x,y) = \int N\,dy = \int e^x - 3x^2y^2\,dy = ye^x - x^2y^3 + h(x)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = ye^x - 2xy^3 + h'(x)$

$= M + h'(x)$

$\therefore h'(x) = 0$

$\rightarrow h(x) = C$

$\therefore$ La solucion $\boxed{ye^x - x^2y^3 = C}$

*

b) $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y + t^3 y}$

$\rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{1+t^3}\;\frac{1}{y}$ $\therefore$ es separable

$\rightarrow y\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{1+t^3} \rightarrow \int y\frac{dy}{dt}dt = \int \frac{t^2}{1+t^3}\,dt \xrightarrow{T.C.V.} \int y\,dy = \int \frac{t^2}{1+t^3}\,dt$

$\rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{1}{3}\ln|1+t^3| + C$

$\rightarrow \boxed{y = \sqrt{\frac{2}{3}\ln|1+t^3| + C_1}}$

* La ecuación a) es exacta, pero no es separable, porque $y' = \frac{2xy^3 - e^x y}{e^x - 3x^2y^2}$ no se puede escribir como $\frac{g(y)}{f(x)}$ y claramente no es lineal por el y^3 y el y^2.

* La ecuación b) es separable

$\underbrace{(y + t^3 y)}_{N}\,dy - \underbrace{t^2}_{M}\,dt = 0$ $\quad N_t = 3t^2 y$, $M_y = 0$ No es exacta

$(y + t^3 y)\frac{dy}{dt} = t^2$ no es lineal, porque no tiene la forma $y' + f(x)\,y = g(x)$