# Mecánica Cuántica: Tarea 3

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

1 de julio de 2021

## Problema 1

**Para los estados estacionarios del pozo de potencial infinito, donde fuera del pozo la función de onda es cero y dentro es $\psi_n = Ae^{iE_n t/\hbar}\sin(\frac{n\pi}{a}x)$ con $E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$**

a) **Confirma el valor que debe tener $A$ para que $\psi_n$ esté normalizada (te debe de dar $\sqrt{\dfrac{2}{a}}$ salvo por una fase**

Para que la función esté normalizada, por definición se debe de cumplir que $\int_{\mathbb{R}} |\psi_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \psi_n^*(x)\psi_n(x)dx = 1$. Desarrollamos $\int_{\mathbb{R}} \psi_n^*(x)\psi_n(x)dx$ para encontrar la condición para $A$ (tomando en cuenta que sólo hay que realizar la integral entre 0 y $a$, pues fuera de este intervalo la función de onda del pozo infinito vale 0):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi_n^*(x)\psi_n(x)dx &= \int_0^a \left(Ae^{iE_n t/\hbar}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\right)^* \left(Ae^{iE_n t/\hbar}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\right) dx \\
&= \int_0^a A^* e^{-iE_n t/\hbar}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\ \ Ae^{iE_n t/\hbar}\sin(\frac{n\pi}{a}x)dx \\
&= \int_0^a AA^* e^{-iE_n t/\hbar + iE_n t/\hbar}\sin^2(\frac{n\pi}{a}x)dx \\
&= |A|^2 \int_0^a \sin^2(\frac{n\pi}{a}x)dx \\
&= |A|^2 \int_0^a \frac{1-\cos(\frac{2n\pi}{a}x)}{2}dx \quad \text{por la identidad trigonométrica de seno cuadrado} \\
&= |A|^2 \left[\int_0^a \frac{1}{2}dx - \int_0^a \frac{\cos(\frac{2n\pi}{a}x)}{2}dx\right] \\
&= |A|^2 \left[\frac{1}{2}x\Big|_0^a - \frac{a}{2n\pi}\frac{\sin(\frac{2n\pi}{a}x)}{2}\Big|_0^a\right] \\
&= |A|^2 \left[\frac{a}{2} - \frac{a}{4n\pi}(\sin(2n\pi) - \sin(0))\right] \\
&= |A|^2 \left[\frac{a}{2} - \frac{a}{4n\pi}(0-0)\right] \quad \text{como n es natural,}\ \ \sin(2n\pi) = 0 \\
&= |A|^2 \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

Por lo dicho al principio, para que la función de onda esté normalizada, esta integral debería de dar 1. Por lo tanto, igualamos este resultado a 1:

$$|A|^2 \frac{a}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|A| = \sqrt{\frac{2}{a}}}$$

Y obtenemos el resultado mencionado en el enunciado. $A$ debe de tener una norma de $|A| = \sqrt{\frac{2}{a}}$ (es decir, tiene el valor $\sqrt{\frac{2}{a}}$ salvo alguna fase).

b) **Considera que el sistema esté descrito por $\psi_n$ y calcula $\langle x \rangle$ y su varianza**

Usamos la expresión para el valor esperado de $x$ que vimos en clase:

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_{\mathbb{R}} x|\psi_n|^2 dx = \int_0^a x|\psi_n|^2 dx \quad \text{porque la función de onda vale 0 fuera de } [0,a] \\
&= \int_0^a x\psi_n^*(x)\psi_n(x)dx \;=\; \int_0^a x \left(Ae^{iE_nt/\hbar}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\right)^* \left(Ae^{iE_nt/\hbar}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\right) dx \\
&= |A|^2 \int_0^a x\sin^2(\frac{n\pi}{a}x)dx \;=\; |A|^2 \int_0^a x\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(\frac{2n\pi}{a}x)}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}|A|^2 \left(\int_0^a xdx + \int_0^a x\cos(\frac{2n\pi}{a}x)dx\right) \\
&= \frac{1}{2}|A|^2 \left(\int_0^a x + \frac{a}{2n\pi}\frac{x\sin(\frac{2n\pi}{a}x)}{2}\bigg|_0^a - \frac{a}{2n\pi}\int_0^a \frac{\sin(\frac{2n\pi}{a}x)}{2}dx\right) \quad \text{la 2da integral por partes} \\
&= \frac{1}{2}|A|^2 \left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^a + \frac{a}{2n\pi}\frac{x\sin(\frac{2n\pi}{a}x)}{2}\bigg|_0^a + \frac{a^2}{8n^2\pi^2}\cos(\frac{2n\pi}{a}x)\bigg|_0^a\right) \\
&= \frac{1}{2}|A|^2 \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sin(2n\pi)}{4n\pi} - \frac{a^2\sin(0)}{4n\pi} + \frac{a^2}{8n^2\pi^2}(\cos(2n\pi) - \cos(0))\right) \\
&= \frac{1}{2}|A|^2 \left(\frac{a^2}{2}\right) \quad \text{porque los senos valen 0 y los cosenos se cancelan} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{a}\frac{a^2}{2} \quad \text{por el valor de A del inciso anterior} \\
&= \boxed{\frac{a}{2}}
\end{aligned}$$

Calculamos ahora el valor esperado de $x^2$ para usarlo para conseguir la varianza.

$$
\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &:= \int_{\mathbb{R}} x^2|\psi_n|^2 dx = \int_0^a x^2|\psi_n|^2 dx \\
&= |A|^2 \int_0^a x^2 \sin^2(\frac{n\pi}{a}x)dx \quad \text{el valor de } \ |\psi_n|^2 \ \text{ es el mismo que calculamos antes} \\
&= |A|^2 \frac{a^3}{n^3\pi^3} \int_0^{n\pi} u^2 \sin^2 \ udu \quad \text{hacecmos el cambio } u = \frac{n\pi}{a}x \ \Rightarrow \ dx = \frac{a}{n\pi}du \ \ , \ \ u \in [0, n\pi] \\
&= |A|^2 \frac{a^3}{n^3\pi^3} \int_0^{n\pi} u^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2u)}{2}\right) du \\
&= |A|^2 \frac{a^3}{2n^3\pi^3} \left(\int_0^{n\pi} u^2 du - \int_0^{n\pi} u^2 \cos(2u) du\right) \\
&= |A|^2 \frac{a^3}{n^3\pi^3} \left(\int_0^{n\pi} u^2 du - \frac{u^2\sin(2u)}{2}\Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} u\sin(2u)du\right) \\
&= |A|^2 \frac{a^3}{n^3\pi^3} \left(\int_0^{n\pi} u^2 du - \frac{u^2\sin(2u)}{2}\Big|_0^{n\pi} - \frac{u\cos(2u)}{2}\Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \frac{\cos(2u)}{2}du\right) \\
&= |A|^2 \frac{a^3}{n^3\pi^3} \left(\frac{u^3}{3}\Big|_0^{n\pi} - \frac{u^2\sin(2u)}{2}\Big|_0^{n\pi} - \frac{u\cos(2u)}{2}\Big|_0^{n\pi} + \frac{\sin(2u)}{4}\Big|_0^{n\pi}\right) \\
&= |A|^2 \frac{a^3}{n^3\pi^3} \left(\frac{n^3\pi^3}{3} - \frac{n\pi\cos(2n\pi)}{2}\right) \\
&= \frac{2}{a}\frac{a^3}{n^3\pi^3} \left(\frac{n^3\pi^3}{3} - \frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \boxed{a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2(n\pi)^2}\right)}
\end{aligned}
$$

Entonces, la varianza de $x$ se calcula como:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 &= a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2(n\pi)^2}\right) - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2(n\pi)^2} \\
&= \boxed{\frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{(n\pi)^2}\right)}
\end{aligned}
$$

Y la desviación estándar es $\sigma_x = \sqrt{\frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{(n\pi)^2}\right)}$

- **$\langle p\rangle$ y su varianza**

Recordamos que $\langle p\rangle$ se define como $\langle p\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{dt}$
Pero en el inciso anterior calculamos que $\langle x\rangle = \frac{a}{2} = cte$. Por lo que su derivada con

respecto al tiempo vale 0.
Entonces $\boxed{\langle p\rangle = 0}$

Para calcular $\sigma_p^2$ primero calculamos $\langle p^2\rangle$.
Para ello, recordamos que el operador de momento es $\widehat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ y usamos la expresión vista en clase para calcular el valor esperado de un operador.

$$\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \widehat{p}^2 \psi_n dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 \psi_n dx \\
&= -\hbar^2 \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \frac{d^2}{dx^2}\psi_n dx
\end{aligned}$$

No hace falta sustituir la expresión para $\psi_n$, pues podemos recordar que esta función se obtiene resolviendo la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo para el pozo infinito, que es: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_n}{dx^2} = E_n\psi$
Entonces, despejando notamos que $\frac{d^2\psi_n}{dx^2} = -\frac{2mE_n}{\hbar^2}\psi_n$
Con ello encontramos una expresión para la segunda derivada de $\psi_n$ y la podemos sustituir en la integral que teníamos:

$$\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= -\hbar^2 \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \frac{d^2}{dx^2}\psi_n dx \\
&= -\hbar^2 \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \left(-\frac{2mE_n}{\hbar^2}\psi_n\right) dx \\
&= 2mE_n \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \psi_n dx \\
&= 2mE_n(1) \quad \text{porque } \psi_n \text{ está normalizado} \\
&= 2mE_n
\end{aligned}$$

Ahora usamos la expresión que nos dan en el enunciado de la energía para la partícula en el pozo $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$
Y entonces $\langle p^2\rangle = 2mE_n = 2m\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \boxed{\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}}$

Entonces, la varianza de $p$ está dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 \\
&= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2} - 0 = \boxed{\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}}
\end{aligned}$$

Por lo que la desviación estándard es de $\sigma_p = \dfrac{n\pi\hbar}{a}$

d) **Considera ahora un estado dado $\psi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n+\psi_m)$. Dado que ya normalizaste a las $\psi_n$. ¿Está $\psi$ correctamente normalizado?**

Para ver si está normalizado, calculamos $\int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \psi^*\psi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n + \psi_m)\right)^* \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n + \psi_m)\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n^* + \psi_m^*)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n + \psi_m)\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \psi_n^*\psi_n + \psi_n^*\psi_m + \psi_n\psi_m^* + \psi_m\psi_m^* dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\psi_n|^2 + \psi_n^*\psi_m + \psi_n\psi_m^* + |\psi_m|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} |\psi_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \psi_n^*\psi_m dx + \int_{\mathbb{R}} \psi_n\psi_m^* dx + \int_{\mathbb{R}} |\psi_m|^2 dx\right)
\end{aligned}$$

Como $\psi_n$ y $\psi_m$ están normalizadas, las integrales $\int_{\mathbb{R}} |\psi_n|^2 dx$ y $\int_{\mathbb{R}} |\psi_m|^2 dx$ valen 1. Por otro lado, en clase vimos que se tiene una relación de ortonormalidad en las soluciones, es decir: $\int_0^a \psi_k^*\psi_j dx = \delta_{kj}$. Por lo que si $m \neq n$, tendremos que las integrales $\int_{\mathbb{R}} \psi_n^*\psi_m dx$ y $\int_{\mathbb{R}} \psi_n\psi_m^* dx$ valen ambas 0.

Entonces, la expresión que teníamos antes nos queda como:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx &= \frac{1}{2}(1+0+0+1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo que $\psi$ está normalizada.

e) **Calcula $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$ para esta $\psi$**

Primero obtenemos una expresión para $|\psi|$ que vamos a necesitar luego:

$$\begin{aligned}
|\psi|^2 = \psi^*\psi &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n + \psi_m)\right)^* \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n + \psi_m)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\psi_n^*\psi_n + \psi_m^*\psi_n + \psi_n^*\psi_m + \psi_m^*\psi_m\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|\psi_n|^2 + (\psi_m^*\psi_n) + (\psi_m^*\psi_n)^* + |\psi_m|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|\psi_n|^2 + 2Re(\psi_m^*\psi_n) + |\psi_m|^2\right) \quad \text{usando la propiedad: } z^* + z = 2Re(z) \\
&= \frac{1}{2}|\psi_n|^2 + Re(\psi_m^*\psi_n) + \frac{1}{2}|\psi_m|^2
\end{aligned}$$

Ahora ya nos ponemos a calcular $\langle x \rangle$ a partir de su definición (y considerando que sólo hay que integrar en $[0, a]$ pues fuera las funciones valen 0)

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_0^a x|\psi|^2 dx \\
&= \int_0^a x\left(\frac{1}{2}|\psi_n|^2 + Re(\psi_m^*\psi_n) + \frac{1}{2}|\psi_m|^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a x|\psi_n|^2 + \int_0^a xRe(\psi_m^*\psi_n)dx + \frac{1}{2}\int_0^a x|\psi_m|^2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

La primera y última integral son los valores esperados $\langle x \rangle$ para una partícula en el estado $n$ y en el estado $m$. Como vimos en el inciso b), en ambos casos el valor es $\dfrac{a}{2}$.

Por otro lado, necesitamos calcular la integral del centro:

$$\begin{aligned}
\int_0^a xRe(\psi_m^*\psi_n)dx &= \int_0^a xRe\left[\left(\sqrt{\frac{2}{a}}e^{-iE_m t/\hbar}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\right)^* \left(\sqrt{\frac{2}{a}}e^{-iE_n t/\hbar}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\right)\right] dx \\
&= \frac{2}{a}\int_0^a Re\left[xe^{it(E_m - E_n)/\hbar}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)\right] dx \\
&= \frac{2}{a}\int_0^a x\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)Re\left[e^{it(E_m - E_n)/\hbar}\right] dx \\
&= \frac{2}{a}\int_0^a x\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(t(E_m - E_n)/\hbar)dx \\
&= \frac{2}{a}\cos(t(E_m - E_n)/\hbar)\int_0^a x\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)dx \qquad (2)
\end{aligned}$$

Resolvemos la integral que nos queda:

$$\int_0^a x\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^a x\left[\cos(\frac{\pi x}{a}(n-m)) - \cos(\frac{\pi x}{a}(n+m))\right]dx \quad \text{Por identidad de producto a suma}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^a x\cos(\frac{\pi x}{a}(n-m))dx - \int_0^a x\cos(\frac{\pi x}{a}(n+m))dx$$

Resolvemos ambas integrales por partes:

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{a}{\pi(n-m)}x\sin(\frac{\pi x}{a}(n-m))\Big|_0^a} - \int_0^a \frac{a}{\pi(n-m)}\sin(\frac{\pi x}{a}(n-m))dx\right.$$
$$\left. - \cancel{\frac{a}{\pi(n+m)}x\sin(\frac{\pi x}{a}(n+m))\Big|_0^a} + \int_0^a \frac{a}{\pi(n+m)}\sin(\frac{\pi x}{a}(n+m))dx\right]$$

Las partes tachadas velen 0 porque $\sin(c\pi) = 0$ para c entero y m-n, m+n son enteros

$$= -\frac{1}{2}\int_0^a \frac{a}{\pi(n-m)}\sin(\frac{\pi x}{a}(n-m))dx + \frac{1}{2}\int_0^a \frac{a}{\pi(n+m)}\sin(\frac{\pi x}{a}(n+m))dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{a^2}{\pi^2(n-m)^2}\cos(\frac{\pi x}{a}(n-m))\Big|_0^a - \frac{1}{2}\frac{a^2}{\pi^2(n+m)^2}\cos(\frac{\pi x}{a}(n+m))\Big|_0^a$$
$$= \frac{1}{2}\frac{a^2}{\pi^2(n-m)^2}[\cos(\pi(n-m)) - 1] - \frac{1}{2}\frac{a^2}{\pi^2(n+m)^2}[\cos(\pi(n+m)) - 1]$$

Ahora usamos que $\cos(\pi c) = (-1)^c$ para c entero

$$= \frac{1}{2}\frac{a^2}{\pi^2(n-m)^2}[(-1)^{n-m} - 1] - \frac{1}{2}\frac{a^2}{\pi^2(n+m)^2}[(-1)^{n+m} - 1]$$

notamos que $(-1)^{n-m} = (-1)^{n+m}$ porque n-m y n+m tienen la misma paridad

$$= \frac{1}{2}\frac{a^2}{\pi^2(n-m)^2}[(-1)^{n+m} - 1] - \frac{1}{2}\frac{a^2}{\pi^2(n+m)^2}[(-1)^{n+m} - 1]$$
$$= \frac{a^2}{2\pi^2}[(-1)^{n+m} - 1]\left(\frac{1}{(n-m)^2} - \frac{1}{(n+m)^2}\right)$$
$$= \frac{a^2}{2\pi^2}[(-1)^{n+m} - 1]\frac{4mn}{(n-m)^2(n+m)^2}$$
$$= \frac{2mna^2}{\pi^2(n-m)^2(n+m)^2}[(-1)^{n+m} - 1]$$
$$= \frac{2mna^2}{\pi^2(n^2-m^2)^2}[(-1)^{n+m} - 1]$$

Ahora ya podemos sustituir esto en (2) para obtener obtener la expresión de la integral:

$$\int_0^a xRe(\psi_m^*\psi_n)dx = \frac{2}{a}\cos(t(E_m - E_n)/\hbar)\frac{2mna^2}{\pi^2(n^2-m^2)^2}[(-1)^{n+m} - 1]$$

Y finalmente, sustituir esta integral y las otras dos (que ya habíamos dicho que valen $a/2$) en la expresión (1):

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \frac{1}{2}\int_0^a x|\psi_n|^2 + \int_0^a xRe(\psi_m^*\psi_n)dx + \frac{1}{2}\int_0^a x|\psi_m|^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\cos(t(E_m-E_n)/\hbar)\frac{2mna^2}{\pi^2(n^2-m^2)^2}[(-1)^{n+m}-1] + \frac{1}{2}\frac{a}{2} \\ &= \boxed{\frac{a}{2} + 4a\frac{mn}{\pi^2(n^2-m^2)^2}[(-1)^{n+m}-1]\cos(t(E_m-E_n)/\hbar)}\end{aligned}$$

Tenemos dos casos dependiendo de los valores de $n, m$.
Si $n+m$ es un número par (es decir, $n$ y $m$ tienen la misma paridad) entonces $[(-1)^{n+m}-1] = [1-1] = 0$ y la expresión se simplifica a $\langle x\rangle = \frac{a}{2}$
Mientras que si $m+n$ es impar, entonces $[-(1)^{n+m}-1] = [-1-1] = -2$ y la expresión queda como $\frac{a}{2} - 8a\frac{mn}{\pi^2(n^2-m^2)^2}\cos(t(E_m-E_n)/\hbar)$

- **Si** $n+m$ **es par:** $\langle x\rangle = \frac{a}{2}$
- **Si** $n+m$ **es impar:** $\langle x\rangle = \frac{a}{2} - 8a\frac{mn}{\pi^2(n^2-m^2)^2}\cos(t(E_m-E_n)/\hbar)$

Calculamos ahora $\langle p\rangle$, para lo que recordamos que $\langle p\rangle := M\frac{d}{dt}\langle x\rangle$,con $M$ la masa de la partícula. Pero como la energía del estado $n$ es $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2Ma^2}$, podemos despejar de aquí $M$ para no introducir la nueva constante $M$ a nuestras expresiones: $M = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2E_na^2}$.
Entonces, el valor esperado del momento es $\langle p\rangle = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2E_na^2}\frac{d}{dt}\langle x\rangle$
Por lo que usamos los resultados de $\langle x\rangle$ recién obtenidos

- **Si** $n+m$ **es par:** $\langle p\rangle := \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2E_na^2}\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2E_na^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{2}\right) = \boxed{0}$
- **Si** $n+m$ **es impar:**

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2E_na^2}\frac{d}{dt}\langle x\rangle \\ &= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2E_na^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{2} - 8a\frac{mn}{\pi^2(n^2-m^2)^2}\cos(t(E_m-E_n)/\hbar)\right) \\ &= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2E_na^2}\left(8a\frac{mn}{\pi^2(n^2-m^2)^2}\frac{E_m-E_n}{\hbar}\sin(t(E_m-E_n)/\hbar)\right) \\ &= \frac{4mn^3\hbar(E_m-E_n)}{aE_n(n^2-m^2)^2}\sin(t(E_m-E_n)/\hbar)\end{aligned}$$

Ahora bien, como $E_n = kn^2$ (donde $k = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ es una constante que no depende de $n$, entonces tenemos que $\dfrac{E_m - E_n}{E_n} = \dfrac{km^2 - kn^2}{kn^2} = \dfrac{m^2 - n^2}{n^2}$.

Entonces nos queda:

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle &= \frac{4mn^3\hbar(m^2 - n^2)}{an^2(n^2 - m^2)^2} \sin(t(E_m - E_n)/\hbar) \\
&= \boxed{\frac{4mn\hbar}{a(m^2 - n^2)} \sin(t(E_m - E_n)/\hbar)}
\end{aligned}$$

f) **Para una combinación general $\psi = \sum_n C_n \psi_n$, demuestra la condición que deben de cumplir los coeficientes $C_n$ para que $\psi$ esté normalizada si las $\psi_n$ lo están**

Primero encontramos una expresión para $|\psi|^2$:

$$\begin{aligned}
|\psi|^2 &= \psi^* \psi \\
&= \left( \sum_n C_n \psi_n \right)^* \sum_m C_m \psi_m \\
&= \sum_n C_n^* \psi_n^* \sum_m C_m \psi_m \\
&= \sum_n \sum_m C_n^* C_m \psi_n^* \psi_m
\end{aligned}$$

Ahora bien, para que $\psi$ esté normalizada, se debe de cumplir que $\int_0^a |\psi|^2 = 1$, entonces, calculamos esta integral y luego imponemos la condición de que valga 1:

$$\begin{aligned}
\int_0^a |\psi|^2 &= \int_0^a \sum_n \sum_m C_n^* C_m \psi_n^* \psi_m dx \\
&= \sum_n \sum_m C_n^* C_m \int_0^a \psi_n^* \psi_m dx \\
&= \sum_n \sum_m C_n^* C_m \delta_{nm} \quad \text{porque las } \psi \text{ son ortonormales}
\end{aligned}$$

Por la aparición de la $\delta$, los términos de la suma doble son distintos de cero solamente cuando $n = m$, entonces cambiamos $m$ por $n$ y ahora sumamos sólo sobre las $n$:

$$\begin{aligned}
&= \sum_n C_n^* C_n \\
&= \sum_n |C_n|^2
\end{aligned}$$

Para que $\psi$ esté normalizada, se debía de cumplir que el valor de esta integral sea 1, por lo que llegamos a la conclusión que:

$$\boxed{\sum_n |C_n|^2 = 1}$$

# Problema 2

**Usando las funciones de onda que encontramos en clase $\psi_p = A_p e^{\frac{i}{\hbar}(px - E_p t)}$ para la partícula libre de energía $E_p = p^2/2m$ donde $p$ puede tomar cualquier valor real:**

a) **Verifica el valor que $A_p$ debe tomar para que se cumpla la normalización $\int \psi^*_{p_2}\psi_{p_1}dx = \delta(p_1 - p_2)$ (debes obtener $1/\sqrt{2\pi\hbar}$, salvo por una fase)**

Calculamos la integral en cuestión:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi^*_{p_2}\psi_{p_1}dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(A_{p_1}e^{\frac{i}{\hbar}(p_1x - E_{p_1}t)}\right)^* \left(A_{p_2}e^{\frac{i}{\hbar}(p_2x - E_{p_2}t)}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(A^*_{p_1}e^{-\frac{i}{\hbar}(p_1x - E_{p_1}t)}\right) \left(A_{p_2}e^{\frac{i}{\hbar}(p_2x - E_{p_2}t)}\right) dx \\
&= A^*_{p1}A_{p_2}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar}[(p_2-p_1)x - (E_{p_2}-E_{p_1})t]}dx \\
&= A^*_{p_1}A_{p_2}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{p_2}-E_{p_1})t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar}(p_2-p_1)x}dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ahora resolvemos la integral que nos queda $\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar}(p_2-p_1)x}dx$.

Para resolverla, primer probamos una propiedad de la delta de dirac:

**Proposición:** $\delta(\mathbf{x}) = \mathbf{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk}$

**Prueba:** Para probarlo, primero vamos a calcular la transformada de Fourier de la delta de Dirac.
Recordando que la transformada de Fourier de una función $f(x)$ está definida por $F(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$, tenemos entonces que la transformada de la delta (que denotaremos por $F(k)$) es:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-ikx}dx$$

Recordamos ahora que la delta cumple que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)\delta(x) = g(0)$ y lo aplicamos para este caso

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-ik(0)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Entonces, la transformada de la función delta es $F(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$
Aplicaremos ahora el teorema de inversión de la transformada de Fourier. El teorema

dice que si $F(k)$ es la transformada de $f(x)$, entonces podemos recuperar a la función $f(x)$ usando la transformada inversa como $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$
Aplicamos este teorema para $f(x) = \delta(x)$ y la transformada que acabamos de calcular:

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} dk \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk
\end{aligned}$$

Y entonces ya probamos el teorema:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$$

Ahora, intentando llegar a una expresión parecida a la integral que buscamos resolver, vemos que si en vez de evaluar en $x$, evaluamos en $p_2 - p_1$, tendremos que:

$$\delta(p_2 - p_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(p_2 - p_1)} dk$$

Ahora multiplicamos y dividimos el exponente por $\hbar$:

$$\delta(p_2 - p_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} k\hbar (p_2 - p_1)} dk$$

Y hacemos el cambio de variable $u = k\hbar \quad \Rightarrow \quad du = \hbar dk$ y como en la integral $k$ se mueve de $-\infty$ a $\infty$, $u = k/\hbar$ también lo hará (y en la misma dirección, pues $\hbar > 0$)
Entonces, al hacer el cambio de variable nos queda:

$$\begin{aligned}
\delta(p_2 - p_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} u (p_2 - p_1)} \frac{du}{\hbar} \\
\Rightarrow \quad \delta(p_2 - p_1) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} u (p_2 - p_1)} du \\
\Rightarrow \quad 2\pi\hbar\delta(p_1 - p_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} u (p_2 - p_1)} du
\end{aligned}$$

Y listo, ésta es la integral que necesitábamos (sólo que con $u$ en vez de $x$ como variable de integración). Entonces, podemos sustituir en la expresión (1):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi_{p_2}^* \psi_{p_1} dx &= A_{p_1}^* A_{p_2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{p_2} - E_{p_1})t} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar}(p_2 - p_1)x} dx \\
&= A_{p_1}^* A_{p_2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{p_2} - E_{p_1})t} \left(2\pi\hbar\, \delta(p_1 - p_2)\right)
\end{aligned}$$

Si ignoramos la exponencial imaginaria que sólo introduce una fase, vemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{p_2}^* \psi_{p_1} dx = A_{p_1}^* A_{p_2} (2\pi\hbar\, \delta(p_1 - p_2))$$

Entonces, para que se cumpla la condición de normalización $\int_{\mathbb{R}} \psi_{p_2}^* \psi_{p_1} dx = \delta(p_1 - p_2)$, debemos de tener que $A_{p_1}^* A_{p_2} = \dfrac{1}{2\pi\hbar}$

En particular, para $p_2 = p_1 = p$, nos queda que $A_p^* A_p = \dfrac{1}{2\pi\hbar} \quad \Rightarrow \quad |A_p|^2 = \dfrac{1}{2\pi\hbar}$

Por lo que, salvo por una fase, debemos de tener que $\boxed{A_p = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}}$

b) **Calcula la velocidad de grupo de $\psi_p$ y verifica que coincide con la velocidad de una partícula libre de masa $m$ con energía $E_p$, o momento $p$ (la expresión para la velocidad de grupo que vimos en clase la puedes encontrar muy fácilmente en la literatura)**

Podemos ver que la función de onda $\psi_p = A_p e^{\frac{i}{\hbar}(px - E_p t)}$ tiene la forma de una onda viajera general $Ae^{i(kx - \omega t)}$

Donde entonces identificamos que $k = \dfrac{p}{\hbar}$ , $\omega = \dfrac{E_p}{\hbar}$

Para una onda viajera, la velocidad de grupo se obtiene como $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$.

Entonces, en este caso, la velocidad de grupo de $\psi_p$ es:

$$\begin{aligned}
v_g &= \frac{d\omega}{dk} \\
&= \frac{d\left(\frac{E_p}{\hbar}\right)}{d\left(\frac{p}{\hbar}\right)} \\
&= \frac{d}{d\left(\frac{p}{\hbar}\right)} \left(\frac{p^2}{2m\hbar}\right) \qquad \text{usamos la expresión de energía cinética } \; E_p = \frac{p^2}{2m} \; \text{ pues no hay potencial} \\
&= \frac{d}{d(p/\hbar)} \left(\frac{p^2}{2m\hbar^2}\hbar\right) \\
&= \frac{d}{d(p/\hbar)} \left(\frac{\hbar}{2m}\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2\right) \\
&= \frac{\hbar}{2m} 2 \left(\frac{p}{\hbar}\right) \\
&= \boxed{\frac{p}{m}}
\end{aligned}$$

Vemos que esto da el resultado esperado para una partícula libre con velocidad $v$ y masa $m$. Pues en dicho caso, el momento es $p = mv \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{p}{m}$

## Problema 3

**Demuestre que, salvo para la función idénticamente cero, la norma de toda solución a la ecuación de Schrodinger con energía menor al mínimo global del potencial, y que se anule en $x \to -\infty (x \to \infty)$, crecerá de manera desmedida para algún valor de $x$, ya sea finito o conforme $x \to \infty (x \to -\infty)$. Argumenta que esto basta para ver que tales soluciones no son normalizables. Pista: La clave de la demostración radica en que la función $f(x) := V(x) - E$ es real y positiva para toda $x$, y considerar que la derivada de la función de onda debe existir y ser continua** $(C^1)$

La ecuación de Schrodinger independiente del tiempo dice $\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = \dfrac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]\psi$

Definimos una función $f(x) = V(x) - E$
Como $E < V(x)$ para todo $x$, entonces $f(x) > 0$ para todo $x$ y es una función real, puesto que tanto $V(x)$ como $E$ son reales.

Entonces la ecuación toma la forma $\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = \dfrac{2m}{\hbar^2} f(x)\psi$
Como $f(x) > 0$, automáticamente notamos que esto implica que $\psi''(x)$ y $\psi(x)$ tienen el mismo signo para todo $x$.

Dicho esto, intuitivamente el resultado tiene sentido, pues si $\psi(x)$ se anula en $x \to -\infty$, a menos que la función sea 0 en todo $\mathbb{R}$, debe de haber un punto en el que $\psi$ se despegue del 0 y tome un valor distinto (digamos que toma un valor positivo).
En este punto, para despegar del 0 hacia un valor positivo, la pendiente de $\psi$ tiene que ser positiva. Además, como $\psi$ y $\psi''$ tienen el mismo signo, $\psi''$ también es positiva. Es decir, en este punto la función tiene una pendiente positiva y que aumenta. A partir de entonces, la función permanecerá siempre positiva por un ciclo vicioso , pues que $\psi$ sea positiva implicará que $\psi''$ lo sea también, lo que hará que $\psi'$ no pueda disminuir y se mantenga positiva, lo que finalmente implica que $\psi$ siga aumentando. Y así sucesivamente.
Esta función nunca podría regresar al 0 conforme $x \to \infty$, por lo que no sería normalizable.

Aún así, procedemos a hacer una demostración un poco más formal.
Digamos que $\psi$ es una solución a la ecuación que encontramos de Schrodinger $\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = \dfrac{2m}{\hbar^2} f(x)\psi$.
Primero, redefinimos $f(x)$ para incluir el factor $\dfrac{2m}{\hbar^2}$, es decir $f(x) \to \dfrac{2m}{\hbar^2} f(x)$, lo cual no cambia que sea una función estrictamente positiva.

Entonces, digamos que la función $\psi(x)$ es una solución a la ecuación diferencial $\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = f(x)\psi(x)$.

Demostraremos que esta función no puede ser normalizable.

Para ello, consideramos una nueva función definida como $h(x) = |\psi(x)|^2$, que es real y $\geq 0$ para todo $x$.
Y calculamos ahora su segunda derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2h(x)}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2}[\psi(x)\psi^*(x)] = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}[\psi(x)\psi^*(x)] \\
&= \frac{d}{dx}[\psi'(x)\psi^*(x) + \psi(x)\psi^{*'}(x)] \\
&= \psi''(x)\psi^*(x) + \psi'(x)\psi^{*'}(x) + \psi'(x)\psi^{*'}(x) + \psi(x)\psi^{*''}(x) \\
&= \psi''(x)\psi^*(x) + 2\psi'(x)\psi^{*'}(x) + \psi(x)\psi^{''*}(x) \\
&\text{usamos ahora que } \ \psi''(x) = f(x)\psi(x) \\
\\
&= f(x)\psi(x)\psi^*(x) + 2\psi'(x)\psi^{*'}(x) + \psi(x)(f(x)\psi(x))^* \\
&= f(x)|\psi(x)|^2 + 2\psi'(x)\psi^{'*}(x) + \psi(x)f^*(x)\psi^*(x) \\
&= f(x)|\psi(x)|^2 + 2|\psi'(x)|^2 + f(x)|\psi(x)|^2 \quad \text{porque f es real} \\
&= 2f(x)|\psi(x)|^2 + 2|\psi'(x)|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Esto último porque tanto $f(x)$ como los valores absolutos son positivos o 0.

Que la segunda derivada sea mayor o igual a 0 implica que $h'$ es no decreciente en todo $\mathbb{R}$, es decir, si $x_0 < x_1$ entonces $h'(x_0) \leq h'(x_1)$.
Ahora supongamos que como dice el enunciado, $\psi(x)$ se anula cuando $x \to -\infty$.
Es decir, $h(x) = |\psi(x)|^2$ se anula cuando $x \to -\infty$

A menos que $h(x)$ sea 0 en todos los reales (lo cual nos daría la solución trivial $\psi(x) = 0$), debe de haber algún momento en que la función toma valores estrictamente positivo (recordar que $h(x) \geq 0$). En dicho momento, la función tiene una pendiente positiva (para despegarse del 0) y por tanto $h'$ es positiva.

Como $h'$ es no decreciente, de este momento en adelante se tendrá que $h'$ es siempre positiva. Entonces, como se tiene una derivada positiva, $h(x)$ tiene que ser creciente a partir de este momento.

Eso implica que es imposible que $h = |\psi|^2$ regrese al 0 de nuevo. Es decir, habrá un valor $M > 0$ (finito o infinito) tal que $\lim_{x\to\infty} h(x) = M$.
Este límite existe (o es infinito) pero no podemos tener un límite que no exista por que la única forma de conseguir esto con una función continua es por oscilaciones y esta función no oscila por tener derivada siempre positiva.

Entonces, probaremos que $h = |\psi|^2$ no es normalizable.
Pues como $\lim_{x\to\infty} h(x) = M > 0$, entonces por defición del límite, se tiene que para todo

$\epsilon > 0$ existe $x_0 > 0$ tal que si $x > x_0$ entonces $|h(x) - M| < \epsilon$.
en particular, para $\epsilon = M/2 > 0 \;\Rightarrow\; |h(x) - M| < M/2 \;\Rightarrow\; -M/2 < h(x) - M < M/2 \;\Rightarrow$ $M/2 < h(x)$
Es decir, para todo $x > x_0$ se tiene $h(x) > M/2$

Y por lo tanto, considerando sólo la media recta $[0, \infty)$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty |\psi(x)|^2 dx = \int_0^\infty h(x)dx &= \int_0^{x_0} h(x)dx + \int_{x_0}^\infty h(x)dx \\
&\geq \int_{x_0}^\infty h(x)dx \quad \text{,pues como } h(x) \geq 0\text{, entonces } \int_0^{x_0} h(x) \geq 0 \\
&> \int_{x_0}^\infty M/2dx \quad \text{pues cuando } x > x_0 \text{ se tiene que } h(x) > M/2 \\
&= M/2 \int_{x_0}^\infty dx = \infty
\end{aligned}
$$

Si $M$ no fuera finito, entonces $\epsilon = M/2$ no es válido, pero sabríamos que existe un $x_0$ tal que si $x > x_0$ entonces $h(x) > 1$ y el resto es igual con $M/2$ cambiado por 1.

Por otro lado, si como dice el otro caso del enunciado, la función $\psi$ se anula en $x \to \infty$, podemos considerar la función $\tilde{\psi}(x) = \psi(-x)$.
Esta nueva función $\tilde{\psi}$ se anula en $x \to -\infty$ y entonces podemos aplicar todo lo usado en el caso anterior para concluir que $\tilde{\psi}$ crece de manera desmedida para algún valor de $x$ o conforme $x \to \infty$. Por lo que $\psi$ crece de manera desmedida para algún valor de $x$ o conforme $x \to -\infty$.