Tarea 6
Física Nuclear y Subnuclear

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

June 3, 2022

Problema 1. CP de la desintegración de neutrones.

Considere la desintegración de neutrones β, $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ y aplique el operador de paridad: ¿Existe el proceso resultante en la naturaleza? Luego, aplique el operador de conjugación de carga. ¿Qué tipo de proceso obtienes? ¿Qué se puede concluir sobre el operador CP en el decaimiento β?

Como dice el enunciado, comenzamos considerando la desintegración de neutrones β:

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Si aplicamos el operador de paridad a esta reacción, obtendremos un proceso que no existe en la naturaleza. Esto se debe a que hasta donde se sabe hoy en día, los neutrinos son siempre left-handed y los antineutrinos son siempre right-handed [2]. Por lo tanto, en el decaimiento $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$, el antineutrino $\bar{\nu}_e$ es right-handed.

Luego, al aplicar el operador de paridad, lo que hace es cambiar right-handed por left-handed, por lo que queda un antineutrino left-handed. Sin embargo, como dije antes, el antineutrino left-handed no parece existir, por lo que aplicar paridad al decaimiento da lugar a una reacción imposible.

Ahora aplicaremos también el operador de conjugación de carga a la reacción. Aplicar paridad a las partículas n, p, e^- cambia su handness, pero no genera ningún problema, ya que estas partículas existen con ambas orientaciones. Luego, al aplicar la conjugación de carga, se cambian partículas por antipartículas y obtenemos:

$$\bar{n} \to \bar{p} + e^+ + \nu_e$$

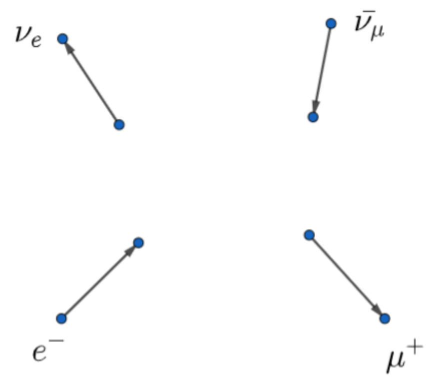
En este caso ya no hay problemas con el neutrino, ya que partiendo inicialmente del antineutrino $\bar{\nu}_e$ (que tiene que ser right-handed), aplicar paridad lo convierte en $\bar{\nu}_e$ (pero left-handed, que no existe). Pero luego aplicar conjugación lo convierte en ν_e left-handed (que sí existe).

Este decaimiento resultante es un decaimiento beta pero con las partículas cambiadas por antipartículas y vice versa y es perfectamente válido.

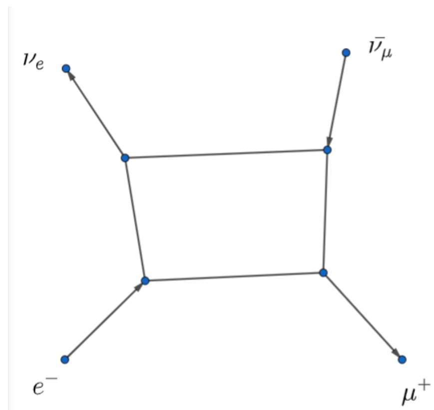
Problema 2. Diagrama de reacción débil.

Dibuja los dos diagramas de Feynman de cuarto orden para la reacción débil $e^- + \mu^+ \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_\mu$

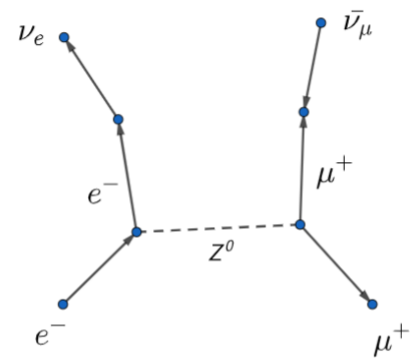
Los diagramas tendrán cuatro vértices en los extremos correspondientes a e^-, μ^+, ν_e y $\bar{\nu}_\mu$, entonces, el diagrama empieza así:



Luego, como nos piden diagramas de cuarto orden, tiene que haber 4 vértices interiores en el diagrama, por lo que en general tendrá la siguiente forma:

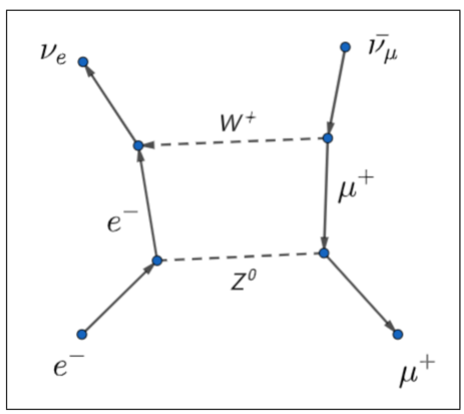


Lo único que hace falta es encontrar la forma de completar las líneas entre los cuatro vértices interiores. Como se trata de una reacción débil como dice el enunciado, entonces usaremos los bosones $W^{\pm}, Z^0$ para las interacciones. Empezaremos este ejemplo usando primero un bosón Z^0 en la línea inferior. Como dice en la página 132 de [1] y vimos en las notas, el bosón Z^0 no cambia a las partículas y sólo las dispersa, por lo que la de la izquierda sigue siendo un electrón y la de la derecha un muón μ^+. Por lo tanto, nos queda:

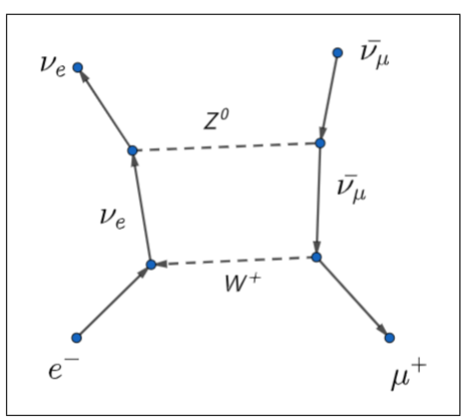


Finalmente, necesitamos un bosón para convertir el electrón y muón a los neutrinos, para lo cual es necesario un bosón W. En particular, como se debe de preservar la carga en cada vértice, es necesario usar el bosón W^+ que vaya desde el vértice del muón al del electrón, para que así la carga que entra a cada vértice sea igual a la que sale. Este intercambio del bosón convierte al electrón y muón en sus neutrinos.

Entonces, **el primer diagrama es:**



Por otro lado, se puede conseguir un diagrama similar pero en el que el primer bosón intercambiado sea el W^+ (que cambie al electrón y muón por sus neutrinos) y el segundo sea el Z^0, que dispersa a las partículas. Por lo tanto, **el segundo diagrama es:**

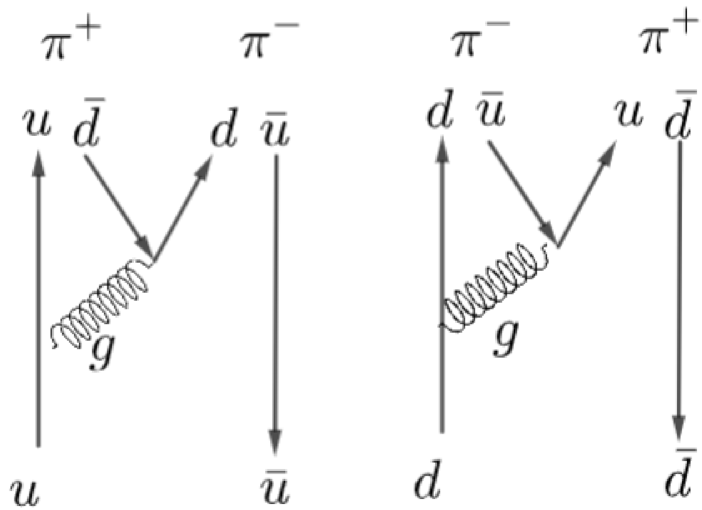


Con lo cual tenemos ya los dos diagramas.

Problema 3. Tiempos de vida de interacción fuerte y débil: decaimientos ρ^0 y K^0.

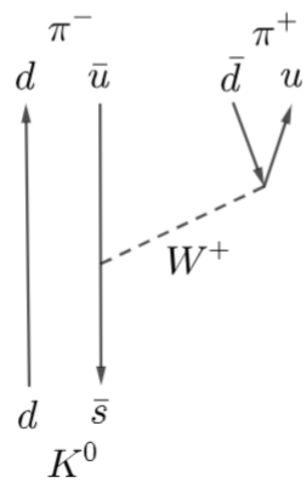
Los mesones ρ^0 yK^0 decaen principalmente en $\pi^+\pi^-$. Explique por qué el tiempo de vida de ρ^0 es del orden de $10^{-23}s$ y el de K^0 del orden de $10^{-10}s$. Dibuja los diagramas de Feyman para ambas desintegraciones.

Para empezar, la composición del mesón ρ^0 es $\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}+d\bar{d})$ [4] y la de los piones es $\pi^+ = u\bar{d}$ y $\pi^- = d\bar{u}$. Entonces, en el decaimiento, tanto $u\bar{u}$ como $d\bar{d}$ se deben de convertir en $u\bar{d}$ $d\bar{u}$. Una forma de hacer esto, es que el quark u libere un gluón y éste luego produzca en una pareja $d\bar{d}$. Por otro lado, que el quark d también libere un quark y produzca una pareja $u\bar{u}$. Entonces, el diagrama de Feynman del decaimiento es el siguiente:



Entonces, vemos que el mesón ρ_0 puede decaer en $\pi^+ + \pi^-$ por medio de la interacción fuerte.

Ahora consideramos el decaimiento del mesón K^0, cuya composición es $K^0 = d\bar{s}$ y queremos ver su decaimiento a $\pi^+\pi^-$, que tiene composición $u\bar{d}$ $d\bar{u}$. Sin embargo, este decaimiento no puede suceder por medio de la interacción fuerte, ya que la interacción fuerte preserva la extrañeza pero K^0 tiene extrañeza -1 mientras que $\pi^+ + \pi^-$ no tiene quarks extraños. Entonces, este decaimiento solamente puede suceder por medio de la interacción débil. Una forma de que suceda es que el quark $\bar{s}$ libere un bosón W^+ y en el proceso se convierta en un quark $\bar{u}$ y luego el bosón W^+ se convierta en una pareja $\bar{d}u$. Es decir, el diagrama de Feynman es:



Finalmente, esto es lo que explica las diferencias en el tiempo de decaimiento de cada uno de los mesones. Como el mesón K^0 solamente puede decaer por interacción débil, su tiempo de vida es mucho mayor que el de ρ^0, que puede decaer también por interacción fuerte, debido a que las reacciones con interacción fuerte suceden en tiempos más cortos por ser una interacción mucho más fuerte y con una constante de acoplamiento mayor.

Problema 4. Paridad y C-paridad

Inciso a)

¿Cuáles de los siguientes estados de partículas son eigenestados del operador de conjugación de carga C y cuáles son sus respectivos eigenvalores?

$$|\gamma\rangle; |\pi^0\rangle; |\pi^+\rangle; |\pi^-\rangle; |\pi^+\rangle - |\pi^-\rangle; |\nu_e\rangle; |\Sigma^0\rangle.$$

- $|\gamma\rangle$: Como el fotón es su propia antipartícula, entonces aplicarle C no debe de cambiarla, es decir, $|\gamma\rangle$ es un eigenvector de C. Falta aún definir el eigenvalor, pues es posible que $|\gamma\rangle$ cambie de signo al aplicar C.

  Para determinar esto, notamos que el campo eléctrico y magnético cambian de signo al aplicar C, ya que esto hace que las cargas positivas cambien por negativas y vice versa, lo que voltea los campos. Luego, como el fotón consiste de estos campos, se debe de tener que también cambia de signo al aplicar C. Por lo tanto, concluimos que:

  $$\boxed{C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle}$$

- $|\pi^0\rangle$: Primero notamos que π^0 es su propia antipartícula, ya que su composición es $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[u\bar{u} - d\bar{d}]$ (página 103 de [1]) y entonces vemos que al cambiar partículas por antipartículas, se sigue teniendo la misma composición. Entonces, debido a que π^0 es su propia antipartícula, debe de ser eigenvector de C.

  Para determinar el eigenvalor, podemos usar que un decaimiento muy común del pión π^0 que vimos en clase, que es convertirse en dos fotones γ, es decir, $\pi^0 \to \gamma + \gamma$. Luego, la C-paridad del lado derecho es la de los dos fotones, pero como la C-paridad de dos partículas es el producto de sus C-paridades [1], entonces la C-paridad de $\gamma+\gamma$ es $(-1)(-1) = 1$ (ya que en el inciso anterior vimos que la de γ es -1).

  Luego, como la C-paridad se preserva bajo interacciones electromagnéticas, se preserva en el decaimiento $\pi^0 \to \gamma + \gamma$. Vimos que el lado derecho tiene C-paridad 1, por lo que el lado izquierdo también debe de tenerla y concluimos que el eigenvalor es 1. Por lo tanto:

  $$\boxed{C|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle}$$

- $|\pi^+\rangle$: Esta partícula no es eigenvector de C, ya que sí tiene una antipartícula (el pión π^-), por lo que:

  $$\boxed{C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle}$$

- $|\pi^-\rangle$: Esta partícula no es eigenvector de C, ya que sí tiene una antipartícula (el pión π^+), por lo que:

  $$\boxed{C|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle}$$

- $|\pi^+\rangle - |\pi^-\rangle$: Simplemente le aplicamos C y usamos los dos resultados de los incisos anteriores:

  $$\begin{aligned} C(|\pi^+\rangle - |\pi^-\rangle) &= C|\pi^+\rangle - C|\pi^-\rangle \\ &= |\pi^-\rangle - |\pi^+\rangle \\ &= -(|\pi^+\rangle - |\pi^-\rangle) \end{aligned}$$

  Por lo tanto, concluimos que:

  $$\boxed{C(|\pi^+\rangle - |\pi^-\rangle) = -(|\pi^+\rangle - |\pi^-\rangle)}$$

  Entonces, $|\pi^+\rangle - |\pi^-\rangle$ es eigenestado de C con eigenvalor -1.

- $|\nu_e\rangle$: Hasta donde se sabe, el neutrino tiene una antipartícula $\bar{\nu_e}$ (y no es su propia antipartícula), por lo que aplicar C da:

$$\boxed{C|\nu_e\rangle = |\bar{\nu_e}\rangle}$$

- $|\Sigma^0\rangle$: El barión Σ^0 tiene composición uds, por lo que su antipartícula es $\bar{u}\bar{d}\bar{s}$, que se denota por $\bar{\Sigma^0}$. Como no es su propia antipartícula, no es eigenestado de C y entonces:

$$\boxed{C|\Sigma^0\rangle = |\bar{\Sigma^0}\rangle}$$

Inciso b)

¿Cómo se comportan las siguientes cantidades bajo la operación de paridad? (Proporcione una breve explicación).
Por definición, el operador de paridad cambia $\vec{r}$ por $-\vec{r}$, es decir:

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

- **Vector de posición $\vec{r}$:**
  Por definición, $\boxed{P\vec{r} = -\vec{r}}$.

- **Momento $\vec{p}$:**
  El momento se define como $\vec{p} = m\vec{v} = m(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Al aplicar el operador P, se cambia x, y, z por $-x, -y, -z$, por lo que las derivadas también cambian $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \to -\dot{x}, -\dot{y}, -\dot{z}$. Entonces, aplicar P cambia $\vec{v}$ por $-\vec{v}$ y por lo tanto se tiene que $\boxed{P\vec{p} = -\vec{p}}$.

- **Momento angular $\vec{L}$**

  El momento angular se define como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, por lo que aplicar el operador P lo convierte en:

$$\begin{aligned} P(\vec{L}) &= P(\vec{r} \times \vec{p}) \\ &= (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) \quad \text{Por los dos resultados anteriores} \\ &= \vec{r} \times \vec{p} \\ &= \vec{L} \end{aligned}$$

  Por lo que concluimos que $\boxed{P(\vec{L}) = \vec{L}}$.

- **Espín σ:**
  Como σ es también un momento angular, el resultado es igual que el de $\vec{L}$ y se tiene que $\boxed{P(\sigma) = \sigma}$.

- **Campo eléctrico $\vec{E}$:**

  Si se tiene un campo eléctrico generado por una distribución de cargas, aplicar el operador de paridad refleja las coordenadas de todas las cargas. Entonces, la distribución de cargas es reflejada espacialmente y por lo tanto el campo eléctrico cambia de signo. Entonces, $\boxed{P(\vec{E}) = -\vec{E}}$.

- **Campo magnético $\vec{B}$:**

Recordamos que el campo magnético se calcula usando la ley de Biot-Savart, que dice que $\vec{B}$ se calcula como $\dfrac{q\vec{r}\times\vec{v}}{|\vec{r}|^3}$. Si aplicamos el operador de paridad, el vector $\vec{r}$ cambia por $-\vec{r}$ y la velocidad $\vec{v}$ cambia por $-\vec{v}$, por lo que el producto cruz $\vec{r}\times\vec{v}$ no cambia de signo. Por lo tanto, $\vec{B}$ no cambia de signo y se tiene que $\boxed{P(\vec{B})=\vec{B}}$.

- **Momento dipolo eléctrico** $\sigma\cdot\vec{E}$

  Simplemente aplicamos el operador a esta cantidad:

  $$\begin{aligned} P(\sigma\cdot\vec{E}) &= (\sigma)\cdot(-\vec{E}) \quad \text{Por la paridad de } \sigma \text{ y } \vec{E} \text{ demostradas antes} \\ &= -\sigma\cdot\vec{E} \end{aligned}$$

  Por lo que concluimos que $\boxed{P(\sigma\cdot\vec{E})=-\sigma\cdot\vec{E}}$.

- **Momento dipolo magnético** $\sigma\cdot\vec{B}$

  Simplemente aplicamos el operador a esta cantidad:

  $$\begin{aligned} P(\sigma\cdot\vec{B}) &= (\sigma)\cdot(\vec{B}) \quad \text{Por la paridad de } \sigma \text{ y } \vec{B} \text{ demostradas antes} \\ &= \sigma\cdot\vec{B} \end{aligned}$$

  Por lo que concluimos que $\boxed{P(\sigma\cdot\vec{B})=\sigma\cdot\vec{B}}$.

- **Helicidad** $\sigma\cdot\vec{p}$**:**

  Simplemente aplicamos el operador a esta cantidad:

  $$\begin{aligned} P(\sigma\cdot\vec{p}) &= (\sigma)\cdot(-\vec{p}) \quad \text{Por la paridad de } \sigma \text{ y } \vec{p} \text{ demostradas antes} \\ &= -\sigma\cdot\vec{p} \end{aligned}$$

  Por lo que concluimos que $\boxed{P(\sigma\cdot\vec{p})=-\sigma\cdot\vec{p}}$.

- **Polarización transversal** $\sigma\cdot(p_1\times p_2)$

  Simplemente aplicamos el operador a esta cantidad. A los momentos $\vec{p}_1,\vec{p}_2$ se les agrega un signo menos al hacer esto, ya que como vimos antes, $P(\vec{p})=-\vec{p}$ y entonces:

  $$\begin{aligned} P(\sigma\cdot(\vec{p}_1\times\vec{p}_2)) &= (\sigma)\cdot[(-\vec{p}_1)\times(-\vec{p}_2)] \quad \text{Por la paridad de } \sigma \text{ y } \vec{p} \text{ demostradas antes} \\ &= \sigma\cdot(\vec{p}_1\times\vec{p}_2) \end{aligned}$$

  Por lo que concluimos que $\boxed{P(\sigma\cdot(\vec{p}_1\times\vec{p}_2))=\sigma\cdot(\vec{p}_1\times\vec{p}_2)}$.

Problema 5. Desintegraciones semileptónicas

Clasifique las siguientes desintegraciones semileptónicas del mesón $D^+(1869) = c\bar{d}$ como Cabibbo-permitido, Cabibbo-suprimido o prohibido en interacciones débiles de orden más bajo, encontrando reglas de selección para los cambios en la extrañeza, encanto y carga eléctrica en tales decaimientos:

$$D^+ \to K^- + \pi^+ + e^+ + \nu_e$$
$$D^+ \to K^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e$$
$$D^+ \to \pi^+ + \pi^+ + e^+ + \bar{\nu}_e$$
$$D^+ \to \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e$$

Las probabilidades de transiciones entre distintos sabores de quarks están descritas por la matriz CKM, que como se escribe en el ejercicio 10, tiene la expresión:

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.97428 \pm 0.00015 & 0.2253 \pm 0.0007 & 0.00347 \pm 0.00016 \\ 0.2252 \pm 0.0007 & 0.97345 \pm 0.00015 & 0.041 \pm 0.001 \\ 0.0086 \pm 0.0003 & 0.040 \pm 0.001 & 0.99915 \pm 0.00005 \end{pmatrix}$$

La probabilidad de una transición está dada por la norma cuadrada de la entrada correspondiente, por lo que vemos que las transiciones de la diagonal son mucho más probables que las otras. Por ello, las transiciones de la diagonal son Cabibbo-permitidas mientras que las otras son Cabibbo-suprimidas.

En el caso de las transiciones que nos piden en el enunciado, todas son decaimientos de D^+, el cual tiene una composición de quarks dada por $c\bar{d}$. Los posibles decaimientos del quark c de D^+ son que se transforme en un quark s o en un quark d, con las respectivas probabilidades dadas por $|V_{cs}|^2$ y $|V_{cs}|^2$. Viendo la matriz, notamos que la transición $c \to s$ es más probable (Cabibbo permitido) mientras que la transición $c \to d$ es menos probable (Cabibbo suprimido).

Entonces, como las transiciones Cabibbo permitidas son $c \to s$, en general incluyen un vértice de alguna de las formas:

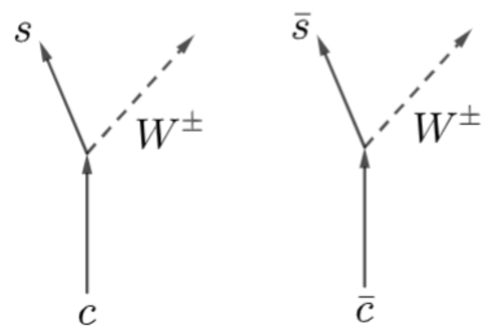


Figure 1: Vértice incluido en un Cabibbo permitido

Podemos ver que en cualquiera de estos vértices el cambio de charm es $\Delta C = \pm 1$, el cambio de carga es $\Delta Q = \pm 1$ (pues la carga de c es $2/3$ y la de s es $-1/3$) y el cambio en extrañeza es $\Delta S = \pm 1$. Además, en cualquiera de los dos vértices, se cumple que los cambios son iguales $\Delta C = \Delta S = \Delta Q$.

Por otro lado, las transiciones Cabibbo suprimidas son $c \to d$, en general incluyen un vértice de alguna de las formas:

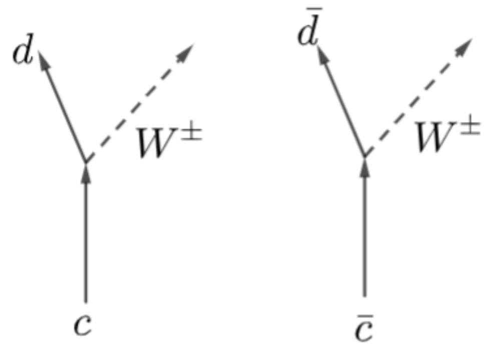


Figure 2: Vértice incluido en un Cabibbo suprimido

Podemos ver que en cualquiera de estos vértices el cambio de charm es $\Delta C = \pm 1$, el cambio de carga es $\Delta Q = \pm 1$ (pues la carga de c es $2/3$ y la de d es $-1/3$) y el cambio en extrañeza es $\Delta S = \pm 0$. Además, en cualquiera de los dos vértices se cumple que $\Delta C = \Delta Q$.

Entonces, concluimos que para transiciones Cabibbo permitidas, se cumple que:

$$\Delta C = \Delta S = \Delta Q = \pm 1$$

y para Cabibbo suprimidas se cumple:

$$\Delta C = \Delta Q = \pm 1 \ , \ \Delta S = 0$$

Finalmente, si estas cantidades cambian de alguna otra forma, indica que se requieren al menos dos interacciones débiles para suceder, lo cual significa que es una reacción muy poco probable y es entonces Cabibbo prohibida.

Teniendo estas reglas, revisamos ahora cada una de las reacciones.

- $D^+ \to K^- + \pi^+ + e^+ + \nu_e$

  En este caso, los quarks cambian como $D^+ \to K^- + \pi^+$. En esta reacción se ve sencillamente que $\Delta Q = -1$. Además, como D^+ tiene un quark charm y del lado derecho no hay, se tiene que $\Delta C = -1$ y finalmente, como K^- tiene un quark $\bar{s}$ y es el único con quarks extraños, se tiene que $\Delta S = -1$.

  Por lo tanto, $\Delta S, \Delta Q, \Delta C$ cumplen con las condiciones para ser una interacción **Cabibbo permitida**.

- $D^+ \to K^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e$

  En este caso, los quarks cambian como $D^+ \to K^+ + \pi^-$. En esta reacción se ve sencillamente que $\Delta Q = -1$. Además, como D^+ tiene un quark charm y del lado derecho no hay, se tiene que $\Delta C = -1$ y finalmente, como K^+ tiene un quark s y es el único con quarks extraños, se tiene que $\Delta S = 1$.

  Por lo tanto, $\Delta Q \neq \Delta S$, por lo que no es Cabibbo permitida y como $\Delta S \neq 0$, tampoco es suprimida. Entonces concluimos que es **Cabibbo prohibida**.

- $D^+ \to \pi^+ + \pi^+ + e^+ + \bar{\nu}_e$

  En este caso,los quarks cambian como $D^+ \to \pi^+ + \pi^+$. En esta reacción se ve sencillamente que $\Delta Q = +1$. Además, como D^+ tiene un quark charm y del lado derecho no hay, se tiene que $\Delta C = -1$

y finalmente, como no hay quarks s, se tiene que $\Delta S = 0$.

Por lo tanto, $\Delta Q \neq \Delta C$, por lo que no es Cabibbo permitida ni Cabibbo suprimida. Entonces concluimos que es **Cabibbo prohibida**.

- $D^+ \to \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e$

  En este caso, los quarks cambian como $D^+ \to \pi^+ + \pi^-$. En esta reacción se ve sencillamente que $\Delta Q = -1$. Además, como D^+ tiene un quark charm y del lado derecho no hay, se tiene que $\Delta C = -1$ y finalmente, como no hay quarks s, se tiene que $\Delta S = 0$.

  Por lo tanto, $\Delta Q = \Delta C = -1$ y $\Delta S = 0$, por lo que es **Cabibbo suprimida**.

Problema 6. K_L desintegración semileptónica

Demuestre que en las desintegraciones semileptónicas K_L, la asimetría:

$$A_L = \frac{\Gamma(K_L \to \pi^- l^+ \nu_l) - \Gamma(K_L \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)}{\Gamma(K_L \to \pi^- l^+ \nu_l) + \Gamma(K_L \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)}$$

(l indica el muón o electrón) está relacionado con el parámetro de violación CP ε a través de la relación:

$$A_L \simeq 2Re(\varepsilon) = (3.32 \pm 0.006) \cdot 10^{-3}$$

Para empezar, necesitamos considerar la definición del eigenestado K_L, el cual se define como (ecuación 12.15 de [5]):

$$|K_L\rangle = (1+\epsilon)|K^0\rangle - (1-\epsilon)|\bar{K}^0\rangle$$

Vamos a empezar calculando $\Gamma(K_L \to \pi^- l^+ \nu_l)$. Esto se calcula como la norma cuadrada del producto interno del estado inicial y el final [3] por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Gamma(K_L \to \pi^- l^+ \nu_l) &= |\langle \pi^- l^+ \nu_l | K_L\rangle|^2 \\
&= |\langle \pi^- l^+ \nu_l | \left[(1+\epsilon)|K^0\rangle - (1-\epsilon)|\bar{K}^0\rangle\right]|^2 \\
&= |(1+\epsilon)\langle \pi^- l^+ \nu_l | K^0\rangle - (1-\epsilon)\langle \pi^- l^+ \nu_l | \bar{K}^0\rangle|^2 \quad (1)
\end{aligned}$$

Ahora necesitamos calcular estos productos internos. Para ello, usamos que la constitución de los hadrones es $K^0 = d\bar{s}$, $\bar{K}^0 = \bar{d}s$ y $\pi^- = d\bar{u}$ [1].

Entonces, la transformación $\bar{K}^0 \to \pi^- l^+ \nu_l$, vista desde el punto de vista de los quarks es $\bar{d}s \to d\bar{u}\ l^+ \nu_l$. Sin embargo, se puede ver que este decaimiento es Cabibbo prohibido, por lo que su contribución a (1) es nula y nos queda solamente que:

$$\begin{aligned}
\Gamma(K_L \to \pi^- l^+ \nu_l) &= |(1+\epsilon)\langle \pi^- l^+ \nu_l | K^0\rangle|^2 \\
&= |1+\epsilon|^2 |\langle \pi^- l^+ \nu_l | K^0\rangle|^2 \\
&= |1+\epsilon|^2 \Gamma(K^0 \to \pi^- l^+ \nu_l) \quad (2)
\end{aligned}$$

Por otro lado, calculamos ahora $\Gamma(K_L \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)$. Esto se calcula como la norma cuadrada del producto interno del estado inicial y el final [3] por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Gamma(K_L \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l) &= |\langle \pi^- l^+ \bar{\nu}_l | K_L\rangle|^2 \\
&= |\langle \pi^+ l^- \bar{\nu}_l | \left[(1+\epsilon)|K^0\rangle - (1-\epsilon)|\bar{K}^0\rangle\right]|^2 \\
&= |(1+\epsilon)\langle \pi^+ l^- \nu_l | K^0\rangle - (1-\epsilon)\langle \pi^+ l^- \bar{\nu}_l | \bar{K}^0\rangle|^2 \quad (3)
\end{aligned}$$

Ahora necesitamos calcular estos productos internos. Para ello, usamos que la constitución de los hadrones es $K^0 = d\bar{s}$, $\bar{K}^0 = \bar{d}s$ y $\pi^+ = u\bar{d}$ [1].

Entonces, la transformación $K^0 \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l$, vista desde el punto de vista de los quarks, es $d\bar{s} \to u\bar{d}\ l^- \bar{\nu}_l$. Sin embargo, se puede ver que este decaimiento es Cabibbo prohibido, por lo que su contribución a (3) es nula y nos queda solamente que:

$$\begin{aligned}
\Gamma(K_L \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l) &= |(1-\epsilon)\langle \pi^+ l^- \nu_l | K^0\rangle|^2 \\
&= |1-\epsilon|^2 |\langle \pi^+ l^- \bar{\nu}_l | \bar{K}^0\rangle|^2 \\
&= |1-\epsilon|^2 \Gamma(\bar{K}^0 \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l) \quad (4)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (3) y (4) en la expresión para A_L nos queda que:

$$\begin{aligned} A_L &= \frac{\Gamma(K_L \to \pi^- l^+ \nu_l) - \Gamma(K_L \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)}{\Gamma(K_L \to \pi^- l^+ \nu_l) - \Gamma(K_L \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)} \\ &= \frac{|1+\epsilon|^2 \Gamma(K^0 \to \pi^- l^+ \nu_l) - |1-\epsilon|^2 \Gamma(\bar{K}^0 \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)}{|1+\epsilon|^2 \Gamma(K^0 \to \pi^- l^+ \nu_l) + |1-\epsilon|^2 \Gamma(\bar{K}^0 \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)} \end{aligned}$$

Finalmente, por el teorema CPT [5], los decaimientos de partículas y antipartículas tienen el mismo tiempo de vida, por lo que los dos grosores $\Gamma(\bar{K}^0 \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)$ y $\Gamma(K^0 \to \pi^- l^+ \nu_l)$ son iguales y entonces se cancelan en la fracción. Por lo tanto, nos queda:

$$\begin{aligned} A_L &= \frac{|1+\epsilon|^2 - |1-\epsilon|^2}{|1+\epsilon|^2 + |1-\epsilon|^2} \\ &= \frac{(1+\epsilon)(1+\epsilon^*) - (1-\epsilon)(1-\epsilon^*)}{(1+\epsilon)(1+\epsilon^*) + (1-\epsilon)(1-\epsilon^*)} \\ &= \frac{1+\epsilon+\epsilon^*+|\epsilon|^2 - 1 + \epsilon + \epsilon^* - |\epsilon|^2}{1+\epsilon+\epsilon^*+|\epsilon|^2 + 1 - \epsilon - \epsilon^* + |\epsilon|^2} \\ &= \frac{2\epsilon + 2\epsilon^*}{2+2|\epsilon|^2} \\ &= \frac{\epsilon+\epsilon^*}{1+|\epsilon|^2} \\ &= \frac{2Re(\epsilon)}{1+|\epsilon|^2} \\ &\text{Finalmente, como } \epsilon \text{ es pequeño, podemos despreciar el denominador y aproximarlo como 1} \\ &\simeq 2Re(\epsilon) \end{aligned}$$

Éste es el resultado al que queríamos llegar, y si se usa que la norma del parámetro de violación CP es $|\epsilon| = 2.228 \times 10^{-3}$ y su fase es $\phi_e = 43.5^\circ$ [6], entonces concluimos que $Re(\epsilon) = |\epsilon|\cos(\phi_e) = 1.616 \times 10^{-3}$. Entonces, $A_L = 2Re(\epsilon) = 3.32 \times 10^{-3}$.

Problema 7. Reacción de partículas

Muestre si las siguientes reacciones y desintegraciones de partículas son posibles o no. Indique a qué interacción se refiere y bosqueje la composición de quarks de los hadrones involucrados.

- $p + \bar{p} \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^+ + \pi^-$

  El protón tiene una composición de quarks uud y el antiprotón entonces $\bar{u}\bar{u}\bar{d}$. Mientras que los piones tienen composiciones $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$, $\pi^- = d\bar{u}$ [1]. En la transformación los quarks del protón y antiprotón se convierten en otro tipo de quarks, generan nuevos y se distribuyen para formar los cinco piones. Entonces, podemos concluir que el tipo de interacción es **fuerte**.

  Además, podemos ver que efectivamente es posible la transformación notando que se preservan todas las cantidades que deben de preservarse. Para empezar, la carga del lado izquierdo es 0 (pues es $1e$ por el protón y $-1e$ por el antiprotón) y la carga del lado derecho también es 0 (pues es $1e - 1e + 0 + 1e - 1e = 0$). Además, el número bariónico se preserva pues del lado izquierdo es 0 (debido a que es 1 para el protón y -1 para el antiprotón) y del lado derecho es 0 ya que los piones no son bariones. Por último, como no hay leptones, los números leptónicos son 0 de ambos lados.

- $p + K^- \to \Sigma^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$

  El protón tiene una composición $p = uud$ y el kaón $K^- = s\bar{u}$. Mientras que del lado derecho las composiciones son $\Sigma^+ = uus$, $\pi^- = d\bar{u}$, $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$ [1]. En la transformación los quarks del protón y antiprotón se convierten en otro tipo de quarks, generan nuevos y distribuyen para formar los cinco piones. Entonces, podemos concluir que el tipo de interacción es **fuerte**.

  Además, vemos que la transformación es posible, pues se conservan las cantidades que se deben de conservar. Para empezar, la carga del lado izquierdo es $0e$ ($1e$ del protón y $-1e$ del kaón) mientras que del lado derecho la carga total es $1e - 1e + 1e - 1e + 0e = 0e$. Por otro lado, los únicos bariones en la interacción son el protón y Σ^+, por lo que el número bariónico es 1 de ambos lados. Finalmente, la extrañeza debe de conservarse en una interacción fuerte y en este caso sí se conserva, ya que K^- tiene un quark s y Σ^+ igual, mientras que las otras partículas no tienen quarks extraños. Los números leptónicos se conservan porque no hay leptones.

- $p + \pi^- \to \Lambda^0 + \bar{\Sigma}^0$

  Las composiciones de quarks de estas partículas son $p = uud$, $\pi^- = d\bar{u}$, $\Lambda^0 = uds$, $\bar{\Sigma}^0 = \bar{u}\bar{d}\bar{s}$.

  Esta reacción es imposible ya que el número bariónico no se conserva. Del lado izquierdo tenemos un barión p y un pión (que no es un barión), mientras que del lado derecho tenemos Λ^0 y $\bar{\Sigma}^0$, que son ambos bariones. Por lo tanto, el número bariónico aumentó en 1, lo cual es imposible, ya que se debería de conservar este número.

- $\bar{\nu}_\mu + p \to \mu^+ + n$

  Las composiciones de estas partículas son $p = uud$ y $n = udd$ y las otras partículas son elementales. Como hay neutrinos involucrados en la reacción, podemos concluir que se trata de una interacción débil.

  Además, vemos que la transformación es posible, pues se conservan todas las cantidades que se deben de conservar. Para empezar, la carga del lado izquierdo es $1e$ (la del protón, pues el neutrino es neutro) y la del derecho es también $1e$ (la del muón pues el neutrón es neutro). Los únicos bariones son p

y n, que se encuentran uno a cada lado de la reacción, por lo que el número bariónico se conserva. Finalmente, los únicos leptones son $\bar{\nu}_\mu$ y μ^+, que son ambos antipartículas de leptones muónicos, por lo que tienen número leptónico muónico de -1; como se encuentra uno a cada lado de la reacción, el número leptónico muónico se conserva. Como no aparecen otros leptones, también se conservan los números leptónicos electrónico y tauónico y por lo tanto también el número leptónico total.

- $\nu_e + p \to e^+ + \Lambda^0 + K^0$

  Esta reacción es imposible, pues no se conserva el número leptónico electrónico. Se puede ver esto debido a que del lado izquierdo hay un ν_e, que al ser un neutrino electrónico, tiene número leptónico electrónico de 1. Sin embargo, del lado derecho se tiene un positrón, que al ser la antipartícula del electrón, tiene número leptónico electrónico -1. Por lo tanto, la reacción no es posible.

- $\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$

  Las composiciones de quarks de estas partículas son $\Sigma_0 = uds$ y $\Lambda^0 = uds$ (es decir, tienen la misma composición, su diferencia está en como cambia su función de onda al intercambiar el sabor de dos de sus quarks). Como se está produciendo un fotón, podemos decir que se trata de una interacción electromagnética.

  Además, vemos que la transformación es posible, pues se conservan todas las cantidades que se deben de conservar. Para empezar, la carga del lado izquierdo es $0e$ y la del derecho es también $0e$. Los únicos bariones son Σ^0 y Λ^0, que se encuentran uno a cada lado de la reacción, por lo que el número bariónico se conserva. Finalmente, no hay leptones, por lo que trivialmente se conservan todos los números leptónicos.

Problema 8. Supresión de la interacción $\Delta S = 1$ NC.

Se ha encontrado experimentalmente que la relación NC/CC para los decaimientos de K cargados es:

$$\frac{(K^+ \to \pi^+ \nu \bar{\nu})}{(K^+ \to \pi^0 \mu^+ \nu_\mu)} < 10^{-8}$$

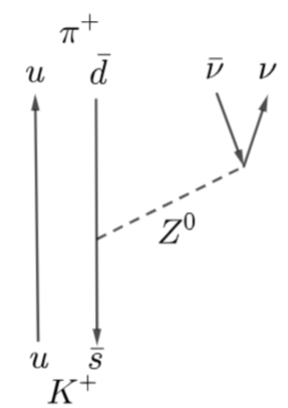
Esta es una de las pruebas experimentales de que la corriente neutra débil decae con una carga $\Delta S = 1$ y se suprime la extrañeza.

Inciso a)

Dibuja los diagramas de Feynman de las dos desintegraciones.

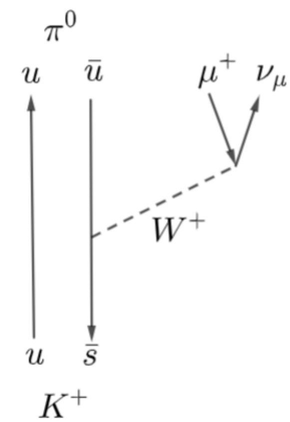
- $K^+ \to \pi^+ \nu \bar{\nu}$

  Empezamos considerando las configuraciones de los hadrones, que son $K^+ = \bar{s}u$ y $\pi^+ = \bar{d}u$ [1]. Por lo tanto, es de esperar que el quark u no cambia, mientras que el $\bar{s}$ decae por medio de la interacción débil y se convierte en un quark $\bar{d}$. Este decaimiento se hace por medio de alguno de los bosones $W^{\pm}, Z^0$, el cual luego decae al par neutrino anti-neutrino. Como el par al que decae no tiene carga, el bosón de la interacción tiene que ser el Z^0. Entonces, el diagrama es el siguiente:



- $K^+ \to \pi^0 \mu^+ \nu_\mu$:

  Empezamos considerando las configuraciones de los hadrones, que son $K^+ = \bar{s}u$ y $\pi^0 = \bar{u}u$ [1]. Por lo tanto, es de esperar que el quark u no cambia, mientras que el $\bar{s}$ decae por medio de la interacción débil y se convierte en un quark $\bar{u}$. Este decaimiento se hace por medio de alguno de los bosones $W^{\pm}, Z^0$, el cual luego decae al par $\mu^+\nu_\mu$. Como el par al que decae tiene carga $+$, el bosón de la interacción tiene que ser el W^+. Entonces, el diagrama es el siguiente:


π^0
u
$\bar{u}$
μ^+
ν_μ
W^+
u
$\bar{s}$
K^+

Problema 9. Δ^{++}

Estimar la proporción de la fracción de desintegración

$$\frac{\Gamma(\Delta^{++} \to pe^+\nu_e)}{\Gamma(\Delta^{++} \to p\mu^+)}$$

Como el decaimiento $\Delta^{++} \to pe^+\nu_e$ incluye un neutrino, sabemos que se debe a la interacción débil. Por otro lado, el decaimiento $\Delta^{++} \to p\mu^+$ se debe a la interacción fuerte.

En [1] se menciona que la constante de acoplamiento débil es aproximadamente 10^{-6}, mientras que la fuerte es 1. Como en los diagramas de Feynman de las reacciones, los bosones unen dos vértices (bosón W para la débil y gluón para la fuerte), entonces la sección eficaz de la reacción es proporcional a la constante de acoplamiento correspondiente al cuadrado. Entonces, para la reacción débil es proporcional a $(10^{-6})^2 = 10^{-12}$ y para la fuerte es 1^2.

Por lo tanto, la proporción de la fracción de desintegración es aproximadamente:

$$\boxed{\frac{\Gamma(\Delta^{++} \to pe^+\nu_e)}{\Gamma(\Delta^{++} \to p\mu^+)} \simeq 10^{-12}}$$

Si se tienen en cuenta las correcciones de masa de quarks, este resultado se modifica para

$$\frac{\Gamma(b \to q + e^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\tau^- \to \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e)} = |V_{qb}|^2 \frac{m_b^5}{m_\tau^5} f(m_q/m_b) \quad (1)$$

donde

$$f(x) = 1 - 8x^2 - 24x^4 \ln(x) + 8x^6 - x^8$$

Utilice esto, junto con el resultado experimental

$$\Gamma(b \to c + e^- + \bar{\nu}_e) + \Gamma(b \to u + e^- + \bar{\nu}_e) = (6.8 \pm 0.5) \times 10^{10} s^{-1}$$

deducido del decaimiento $B^- \to e^- + \bar{\nu}_e$ + hadrones, para obtener los límites superiores de las magnitudes de V_{ub} y V_{cb}

Para empezar, en clase vimos que el grosor de decaimiento de un leptón (como el τ por ejemplo) Γ_{τ^-} es proporcional a G_F^2 y a la masa elevada a la quinta potencia, es decir m_τ^5 (lo cual también se ve en la ecuación 10.5 de [1]). Entonces, se tiene que:

$$\Gamma(\tau^- \to \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e) = rG_F^2 m_\tau^5$$

con r alguna constante de proporcionalidad.
Sin embargo, vamos a necesitar este valor explícitamente, para lo cual podemos usar datos sobre el decaimiento de τ^-. El tiempo de vida de τ^- es de $t = 2.906 \times 10^{-13} s$ [5], por lo que su grosor es de $\Gamma = \dfrac{\hbar}{t} = 3.62895 \times 10^{-22} J$. Sin embargo, como se trata de un decaimiento en específico, $\tau^- \to \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e$, hay que multiplicar esta cantidad por la proporción de este decaimiento, que es 0.1784 [4] y entonces nos queda que $\Gamma = 1.155 \times 10^{-23} J$.
Entonces, si despejamos la ecuación (1), nos queda:

$$\begin{aligned} \Gamma(b \to q + e^- + \bar{\nu}_e) &= |V_{qb}|^2 \frac{m_b^5}{m_\tau^5} f(m_q/m_b) \Gamma(\tau^- \to \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e) \\ &\text{Sustituimos } \Gamma \\ &= |V_{qb}|^2 \frac{m_b^5}{m_\tau^5} f(m_q/m_b)(1.155 \times 10^{-23} J) \end{aligned}$$

En el caso particular en que el quark q es c, se tiene que:

$$\Gamma(b \to c + e^- + \bar{\nu}_e) = |V_{cb}|^2 \frac{m_b^5}{m_\tau^5} f(m_c/m_b)(1.155 \times 10^{-23} J),$$

mientras que si $q = u$ se tiene que:

$$\Gamma(b \to u + e^- + \bar{\nu}_e) = |V_{ub}|^2 \frac{m_b^5}{m_\tau^5} f(m_u/m_b)(1.155 \times 10^{-23} J).$$

Sumando estas dos cantidades, nos queda que:

$$\Gamma(b \to c + e^- + \bar{\nu}_e) + \Gamma(b \to u + e^- + \bar{\nu}_e) = \left[(1.155 \times 10^{-23} J)\frac{m_b^5}{m_\tau^5}\right] \left(f(m_c/m_b)|V_{cb}|^2 + f(m_u/m_b)|V_{ub}|^2\right)$$

y usando el dato de que $\Gamma(b \to c + e^- + \bar{\nu}_e) + \Gamma(b \to u + e^- + \bar{\nu}_e) = 6.8 \times 10^{10} s^{-1}\hbar$ (supongo que falta un factor $\hbar$ que agregué aquí para que tenga unidades de energía), por lo que concluimos que:

$$\left[(1.155 \times 10^{-23} J)\frac{m_b^5}{m_\tau^5}\right] \left(f(m_c/m_b)|V_{cb}|^2 + f(m_u/m_b)|V_{ub}|^2\right) = 6.8 \times 10^{10} s^{-1}\hbar$$

Con esto podemos ya encontrar un límite superior sobre $|V_{cb}|^2$ o $|V_{ub}|^2$. Por ejemplo vemos que lo mayor que puede valer $|V_{cb}|^2$ se obtiene cuando $|V_{ub}|^2 = 0$ y en ese caso se tiene que:

$$\left[(1.155 \times 10^{-23} J)\frac{m_b^5}{m_\tau^5}\right] \left(f(m_c/m_b)|V_{cb\;max}|^2\right) = 6.8 \times 10^{10} s^{-1}\hbar$$

$$\Rightarrow \boxed{|V_{cb\;max}|^2 = \frac{6.8 \times 10^{10} s^{-1}\hbar m_\tau^5}{(1.155 \times 10^{-23} J) m_b^5\; f(m_c/m_b)}}$$

Análogamente para $|V_{ub\;max}|^2$ se llega al mismo límite, pero con u en vez de c:

$$\boxed{|V_{ub\;max}|^2 = \frac{6.8 \times 10^{10} s^{-1}\hbar m_\tau^5}{(1.155 \times 10^{-23} J) m_b^5\; f(m_u/m_b)}}$$

Problema 10. La matriz CKM

Usando la matriz CKM

$$[h]\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.97428 \pm 0.00015 & 0.2253 \pm 0.0007 & 0.00347 \pm 0.00016 \\ 0.2252 \pm 0.0007 & 0.97345 \pm 0.00015 & 0.041 \pm 0.001 \\ 0.0086 \pm 0.0003 & 0.040 \pm 0.001 & 0.99915 \pm 0.00005 \end{pmatrix}$$

Calcule la fracción de desintegración (o proporciones de ramificación, BR) de la desintegración del bosón W en todos los pares posibles de quark-antiquark y leptón-antileptón. Recuerde que la suma de todos los BR debe ser igual a 1. Para las desintegraciones hadrónicas, se debe usar el factor de color $N_c = 3$.

Para empezar, sabemos por como se define la matriz CKM que la probabilidad de que se tenga un decaimiento a quarks ij es proporcional al cuadrado de su entrada correspondiente en la matriz, $(V_{ij})^2$. Pero además hay que multiplicar por $N_c = 3$ para tomar en cuenta las 3 posibiliades de los colores de los quarks.
Sin embargo, hay que tomar en cuenta también que no se va a generar ninguna pareja que incluya al quark t, ya que éste tiene una masa de $173.34GeV$, que es mayor a la masa de W^+ que es $80.401GeV$.
Entonces, cada una una de las probabilidades es proporcional a:

- $W^+ \to u\bar{d}$: La proporción es $N_c \cdot (V_{ud})^2 = 3(0.97428)^2 = 2.846$
- $W^+ \to c\bar{d}$: La proporción es $N_c \cdot (V_{cd})^2 = 3(0.2253)^2 = 0.152$
- $W^+ \to u\bar{s}$: La proporción es $N_c \cdot (V_{us})^2 = 3(0.225)^2 = 0.152$
- $W^+ \to c\bar{s}$: La proporción es $N_c \cdot (V_{cs})^2 = 3(0.973)^2 = 2.840$
- $W^+ \to u\bar{b}$: La proporción es $N_c \cdot (V_{ub})^2 = 3(0.00347)^2 = 0.000036$
- $W^+ \to c\bar{b}$: La proporción es $N_c \cdot (V_{cb})^2 = 3(0.041)^2 = 0.048$

Además, por la universalidad leptones-quark [5], la proporción de los decaimientos leptónicos respecto a estos es de 1 y es la misma para todas las familias de leptones. Es decir:

- $W^+ \to e^+\nu_e$: La proporción es 1.
- $W^+ \to \mu^+\nu_\mu$: La proporción es 1
- $W^+ \to \tau^+\nu_\tau$: La proporción es 1

Por lo tanto, ya tenemos la proporción de decaimiento de cada uno. Para obtener la probabilidad, vamos a sumar todas las proporciones y luego normalizamos cada una respecto a esta suma para obtener su probabilidad. La suma de todas las proporciones es $2.846+0.152+0.152+2.840+0.000036+0.048+1+1+1 = 9.038$.
Entonces, nos queda que la probabilidad de cada decaimiento es de:

- $W^+ \to u\bar{d}$: La probabilidad es $BR = 2.846/9.038 = 0.315$
- $W^+ \to c\bar{d}$: La probabilidad es $BR = 0.152/9.038 = 0.018$
- $W^+ \to u\bar{s}$: La probabilidad es $BR = 0.152/9.038 = 0.018$
- $W^+ \to c\bar{s}$: La probabilidad es $BR = 2.846/9.038 = 0.315$
- $W^+ \to u\bar{b}$: La probabilidad es $BR = 0.000036/9.038 = 0.000004$
- $W^+ \to c\bar{b}$: La probabilidad es $BR = 0.048/9.038 = 0.01$
- $W^+ \to e^+\nu_e$: La probabilidad es $BR = 1/9.038 = 0.111$
- $W^+ \to \mu^+\nu_\mu$: La probabilidad es $BR = 1/9.038 = 0.111$
- $W^+ \to \tau^+\nu_\tau$: La probabilidad es $BR = 1/9.038 = 0.111$

Referencias

[1] Povh, Bogdan, et al. Particles and Nuclei. Springer, Fifth ed., S.n., 1995.

[2] Drewes, MARCO. "The Phenomenology of Right Handed Neutrinos." International Journal of Modern Physics E, vol. 22, no. 08, 2013, p. 1330019., https://doi.org/10.1142/s0218301313300191.

[3] Martin, Brian Robert, and Graham Shaw. Nuclear and Particle Physics: An Introduction. Wiley, 2019.

[4] Thomson, Mark. Modern Particle Physics. Cambridge University Press, 2021.

[5] Braibant, Sylvie, et al. Particles and Fundamental Interactions: Supplements, Problems and Solutions: A Deeper Insight into Particle Physics. Springer, 2012.

[6] Wolfenstein, L. "67. CP KL 1 CP Violation in KL Decays - PDG.LBL.GOV." CP Violation in KL Decays, https://pdg.lbl.gov/2020/reviews/rpp2020-rev-cp-viol-kl-decays.pdf.