Teoría de campos I: Tarea 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

5 de octubre de 2021

1. **Considere la varilla que modelamos en clase con un conjunto de resortes y masas. En el límite continuo este sistema tiene la siguiente densidad Lagrangiana:**

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{y}{2}\eta'^2$$

a) **Encuentre la ecuación que rige el movimiento de este sistema**

Para la ecuación de movimiento del sistema, escribimos la ecuación de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)} \right) = 0$$

La varilla tiene una sola dimensión, lo que quiere decir que $\eta = \eta(x,t)$. Podemos desarrollar la suma del segundo término sobre estas dos coordenadas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \eta)} \right) - \partial_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \eta)} \right) = 0$$

O bien, escribiendo $\partial_t \eta$ como $\dot{\eta}$ y $\partial_x \eta$ como η' para usar la misma notación que en el enunciado, tenemos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) - \partial_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta'} \right) = 0 \quad (1)$$

Las derivadas de la expresión (1) se calculan sencillamente:

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} \left(\frac{\rho}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{y}{2}\eta'^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} \left(\frac{\rho}{2}\dot{\eta}^2 \right) = \rho\dot{\eta}$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta'} = \frac{\partial}{\partial \eta'} \left(\frac{\rho}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{y}{2}\eta'^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \eta'} \left(\frac{y}{2}\eta'^2 \right) = y\eta'$

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{\rho}{2}\dot{\eta}^2 - \dfrac{y}{2}\eta'^2\right) = 0$

Luego reemplazamos estos tres resultados en (1):

$$\begin{aligned} 0 - \partial_t(\rho\dot{\eta}) - \partial_x(y\eta') = 0 \\ \Rightarrow\ \rho\partial_t\dot{\eta} - y\partial_x\eta' \\ \Rightarrow\ \rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación resultante es:

$$\boxed{\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}}$$

Con $v^2 := \dfrac{y}{\rho}$.
Que es la ecuación de onda.

b) **¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?**

Se puede encontrar una solución general a la ecuación haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} \xi = x - vt \\ \kappa = x + vt \end{aligned}$$

Y aplicando la regla de la cadena tenemos que las derivadas se transforman como:

- $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial\xi} + \dfrac{\partial\kappa}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial\kappa} = (1)\dfrac{\partial}{\partial\xi} + (1)\dfrac{\partial}{\partial\kappa} = \dfrac{\partial}{\partial\xi} + \dfrac{\partial}{\partial\kappa}$
- $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial\xi}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial\xi} + \dfrac{\partial\kappa}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial\kappa} = -v\dfrac{\partial}{\partial\xi} + v\dfrac{\partial}{\partial\kappa}$

Entonces podemos calcular las segundas derivadas de η para luego reemplazarlas en la ecuación de onda:

- $\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x}\eta = \left(\dfrac{\partial}{\partial\xi} + \dfrac{\partial}{\partial\kappa}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi} + \dfrac{\partial}{\partial\kappa}\right)\eta = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial\xi\partial\kappa} + \dfrac{\partial^2}{\partial\kappa^2}\right)\eta$
- $\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t}\eta = \left(-v\dfrac{\partial}{\partial\xi} + v\dfrac{\partial}{\partial\kappa}\right)\left(-v\dfrac{\partial}{\partial\xi} + v\dfrac{\partial}{\partial\kappa}\right)\eta = \left(v^2\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 2v^2\dfrac{\partial^2}{\partial\xi\partial\kappa} + v^2\dfrac{\partial^2}{\partial\kappa^2}\right)\eta$

Reemplazamos estas dos expresiones en la ecuación de onda:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \\
\Rightarrow \quad & \left(v^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 2v^2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\kappa} + v^2\frac{\partial^2}{\partial\kappa^2}\right)\eta = v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\kappa} + \frac{\partial^2}{\partial\kappa^2}\right)\eta \\
\Rightarrow \quad & v^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2} - 2v^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi\partial\kappa} + v^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\kappa^2} = v^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2} + 2v^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi\partial\kappa} + v^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\kappa^2} \\
\Rightarrow \quad & -\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi\partial\kappa} = \frac{\partial^2\eta}{\partial\xi\partial\kappa} \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial^2\eta}{\partial\xi\partial\kappa} = 0
\end{aligned}
$$

Así queda la ecuación de onda en estas nuevas coordenadas. Como la segunda derivada es con respecto a las dos variables, cualquier función que sea de una sola variable tendrá como resultado 0 al aplicarle estas dos derivadas. Entonces, las funciones $\eta = f(\xi)$ y $\eta = g(\kappa)$ son soluciones para cualesquiera funciones f y g .
Y en general la solución será de la forma:

$$\eta = f(\xi) + g(\kappa)$$
$$\boxed{\eta = f(x - vt) + g(x + vt)}$$

De esta forma f representa una onda viajera que se mueve hacia la derecha y g una que se mueve hacia la izquierda.

2. **La densidad Lagrangiana del campo electromagnético está dada por**

$$\mathcal{L} = c_1 F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} + c_2 A_\sigma J^\sigma$$

a) **Calcule las ecuaciones de movimiento**

Queremos escribir la ecuación de Euler Lagrange para esta densidad Lagrangiana. Dicha ecuación es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0$$

Vamos a resolver cada una de las derivadas por separado, tal como empezamos a hacer en clase:

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \dfrac{\partial}{\partial A_\nu} \left[c_1 F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} + c_2 A_\sigma J^\sigma \right]$

El primer término no depende directamente de A_ν, sino sólo de sus derivadas, pues F es define como $F^{\sigma\rho} = \partial^\sigma A^\rho - \partial^\rho A^\sigma$. Entonces la derivada de este término respecto a A_ν es 0. Por lo que nos quedamos sólo con el segundo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial}{\partial A_\nu}[c_2 A_\sigma J^\sigma] = c_2 J^\sigma \frac{\partial}{\partial A_\nu} A_\sigma$$

Pero como vimos en clase, la derivada de A_σ con respecto a A_ν da como resultado 1 si $\sigma = \nu$ (pues estaríamos derivando A_ν respecto a sí mismo) y 0 en caso contrario. Por lo que en la ecuación sólo queda el término con $\sigma = \nu$. Entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = c_2 J^\sigma \frac{\partial A_\sigma}{\partial A_\nu} = \boxed{c_2 J^\nu} \quad (1)$$

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \dfrac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left[c_1 F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} + c_2 A_\sigma J^\sigma \right]$

El segundo término de la densidad Lagrangiana no depende de los términos $\partial_\mu A_\nu$, por lo que aplicar la derivada $\dfrac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$ a este término nos da 0.
Por lo tanto, nos queda únicamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= c_1 \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}[F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho}] \\ &= c_1 \left[F^{\sigma\rho}\frac{\partial F_{\sigma\rho}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + F_{\sigma\rho}\frac{\partial F^{\sigma\rho}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right]\end{aligned}$$

El $F^{\sigma\rho}$ del segundo término lo podemos escribir como $F^{\sigma\rho} = F_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\rho}$ usando la métrica η para mover índices.

Por lo que el segundo término se ve como: $F_{\sigma\rho}\dfrac{\partial F^{\sigma\rho}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = F_{\sigma\rho}\dfrac{\partial F_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\rho}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = F_{\sigma\rho}\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\rho}\dfrac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$

$= F^{\alpha\beta}\dfrac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}.$

Y en esta última expresión podemos renombrar a los índices mudos α y β para escribirlo como $F^{\sigma\rho}\dfrac{\partial F_{\sigma\rho}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$

Con lo que notamos que es igual al primer término, por lo que juntamos ambos y nos queda:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= 2c_1 F^{\sigma\rho}\frac{\partial F_{\sigma\rho}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\
&= 2c_1 F^{\sigma\rho}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\left[\partial_\sigma A_\rho - \partial_\rho A_\sigma\right] \qquad \text{Por la definción de F} \\
&= 2c_1 F^{\sigma\rho}\left[\frac{\partial(\partial_\sigma A_\rho)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right]
\end{aligned}$$

El primer término entre corchetes $\dfrac{\partial(\partial_\sigma A_\rho)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$ vale 1 cuando $\sigma = \mu$ y $\rho = \nu$, pues entonces tenemos la derivada de $(\partial_\mu A_\nu)$ con respecto a sí mismo. Y vale 0 en cualquier otro caso. Por lo tanto, el primer término entre corchetes vale $\delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho$.

Lo mismo sucede con el segundo término, que es 1 cuando $\rho = \mu$ y $\sigma = \nu$ y 0 en otro caso. Por lo que es igual a $\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma$. Entonces la expresión queda como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= 2c_1 F^{\sigma\rho}\left[\delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho - \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma\right] \\
&= 2c_1\left[F^{\sigma\rho}\delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho - F^{\sigma\rho}\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma\right] \\
&= 2c_1\left[F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}\right] \\
&= 2c_1\left[F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\right] \qquad \text{porque F es antisimétrico} \\
&= 4c_1 F^{\mu\nu} \quad (2)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, al sustituir (1) y (2) en la ecuación de Euler Lagrange, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = 0 \\
\Rightarrow\quad & c_2 J^\nu - \partial_\mu(4c_1 F^{\mu\nu}) = 0 \\
\Rightarrow\quad & \boxed{c_2 J^\nu = 4c_1 \partial_\mu F^{\mu\nu}}
\end{aligned}$$

b) **Encuentre los valores de c_1 y c_2**

Esperaríamos que las ecuaciones resultantes sean iguales a las ecuaciones de Maxwell, que se pueden escribir como $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$

Entonces, para que coincida con el resultado del inciso anterior, podemos tener que $c_2 = 1, c_1 = \dfrac{1}{4}$

3. **Al final de la última clase encontramos una densidad Lagrangiana de la forma**

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

en donde ϕ es un objeto complejo de la forma

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

Encuentre las ecuaciones de movimiento

Primero obtenemos la ecuación para ϕ^*, que según la ecuación de Euler Lagrange, es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^*)} \right) = 0$$

Calculamos cada una de las derivadas por separado:

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = \dfrac{\partial}{\partial \phi^*} \left((\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \right) = 0 - m^2 \phi = -m^2 \phi \qquad (1)$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^*)} = \dfrac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi^*)} \left[(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \right]$

  Sólo el primer término del Lagrangiano depende de las derivadas de ϕ^*, por lo que queda como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^*)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi^*)} [(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi)] \\ &= (\partial^\mu \phi) \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi^*)} (\partial_\mu \phi^*) \end{aligned}$$

  La derivada de $(\partial_\mu \phi^*)$ con respecto a $\partial_\nu \phi^*$ vale 1 cuando $\mu = \nu$ (pues estamos derivando $\partial_\nu \phi^*$ respecto a sí mismo) y vale 0 en otro caso, por lo que nos queda:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^*)} = (\partial^\mu \phi) \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi^*)} (\partial_\mu \phi^*) = (\partial^\mu \phi) \delta^\nu_\mu = \partial^\nu \phi \qquad (2)$$

  Por lo tanto, al sustituir estos resultados (1) y (2) en la ecuación de Euler Lagrange, tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^*)} \right) = 0 \\ &\Rightarrow -m^2 \phi - \partial_\nu (\partial^\nu \phi) = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{m^2 \phi + \partial_\nu \partial^\nu \phi = 0} \end{aligned}$$

Por otro lado, obtenemos la ecuación correspondiente a ϕ, que según la ecuación de Euler Lagrange, es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \right) = 0$$

Calculamos cada una de las derivadas por separado:

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} ((\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi) = 0 - m^2 \phi^* = -m^2 \phi^* \quad (3)$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi)} [(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi]$

  Sólo el primer término del Lagrangiano depende de las derivadas de ϕ, por lo que queda como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi)} [(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi)] \\ &= (\partial_\mu \phi^*) \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi)} (\partial^\mu \phi) \\ &= (\partial_\mu \phi^*) \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi)} \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \quad \text{bajamos el índice de } \partial^\mu \text{ usando la métrica} \\ &= (\partial_\mu \phi^*) \eta^{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi)} (\partial_\alpha \phi) \end{aligned}$$

  La derivada de $(\partial_\alpha \phi)$ con respecto a $\partial_\nu \phi$ vale 1 cuando $\alpha = \nu$ (pues estamos derivando $\partial_\nu \phi$ respecto a sí mismo) y vale 0 en otro caso, por lo que nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} &= (\partial_\mu \phi^*) \eta^{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi)} (\partial_\alpha \phi) = (\partial_\mu \phi^*) \eta^{\mu\alpha} \delta^\nu_\alpha \\ &= (\partial_\mu \phi^*) \eta^{\mu\nu} \\ &= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \\ &= \partial^\nu \phi^* \quad (4) \end{aligned}$$

  Por lo tanto, al sustituir estos resultados (3) y (4) en la ecuación de Euler Lagrange, tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \right) = 0 \\ &\Rightarrow -m^2 \phi^* - \partial_\nu (\partial^\nu \phi^*) = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{m^2 \phi^* + \partial_\nu \partial^\nu \phi^* = 0} \end{aligned}$$

: