Álgebra Moderna Tarea 3.2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

11 de noviembre de 2020

a) **Encuentra todas las clases de conjugación de S_6, escribiendo un representante para cada una de ellas.**

Nos basamos en el lema 19.5 que dice que dos permutaciones $\alpha, \beta \in S_6$ tienen la misma estructura cíclica si y sólo si existe $\gamma \in S_6$ tal que $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$.
Esto es lo mismo que decir que α pertenece a la clase de conjugación de β si y sólo si tienen la misma estructura cíclica.
Lo cual significa que las clases de conjugación de S_6 corresponden con las distintas estructuras cíclicas que pueden tener los elementos de S_6.

Entonces, para encontrar a todas las clases de conjugación de S_6 hay que enumerar a todas las posibles estructuras cíclicas que puede tener un elemento de S_6. Recordamos que la estructura cíclica de un ciclo $\alpha = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$ se refiere a la sucesión de números naturales $(|\sigma_1|, |\sigma_2|, \cdots, |\sigma_k|)$.
Cada uno de estos ciclos σ_i tiene una cantidad de elementos $|\sigma_i|$ que es menor o igual a 6. Y si consideramos incluir a los ciclos de longitud uno (que en realidad no expresan ninguna permutación), como los ciclos son disjuntos entonces debemos de tener que sus elementos suman en total 6: $|\sigma_1| + |\sigma_2| + ... + |\sigma_k| = 6$.

Es decir, cada estructura cíclica (y por tanto, cada clase de conjugación) corresponde a una forma de sumar hasta el número 6. Entonces enlistamos estas formas y para cada una de ellas tomamos un representante cualquiera que tenga dicha forma cíclica:

- Estructura: $(1,1,1,1,1,1)$ representante: () , el mapeo identidad
- Estructura: $(2,1,1,1,1)$ representante: (1 2)
- Estructura: $(3,1,1,1)$ representante: (1 2 3)
- Estructura: $(4,1,1)$ representante: (1 2 3 4)
- Estructura: $(5,1)$ representante: (1 2 3 4 5)
- Estructura: (6) representante: (1 2 3 4 5 6)
- Estructura: $(2,2,1,1)$ representante: (1 2)(3 4)

- Estructura: $(2,2,2)$ representante: $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$
- Estructura: $(3,2,1)$ representante: $(1\ 2\ 3)(4\ 5)$
- Estructura: $(3,3)$ representante: $(1\ 2\ 3)(\ 4\ 5\ 6)$
- Estructura: $(4,2)$ representante: $(1\ 2\ 3\ 4\ )(5\ 6)$

b) **Supongamos que $|a| = n$ en un grupo finito G. Si a^m es conjugado a a en G, muestra que $gdc(m, n) = 1$.**
Hint: Primero prueba que $g^2ag^{-2} = a^{m^2}$

Probamos primero lo que nos pide el hint. Llamamos g al elemento tal que $gag^{-1} = a^m$ (porque a es conjugado a a^m)

$$\begin{aligned} g^2ag^{-2} &= ggag^{-1}g^{-1} \\ &= g(gag^{-1})g^{-1} \\ &= g(a^m)g^{-1} \\ &= (gag^{-1})^m \quad \text{porque probamos en clase que } (gbg^{-1})^k = gb^kg^{-1} \\ &= (a^m)^m \\ &= a^{m^2} \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $g^2ag^{-2} = a^{m^2}$, lo que significa que a es conjugado con a^{m^2}
Podemos generalizar este resultado por inducción. Ya tenemos probado el caso base y ahora probaremos que que $g^kag^{-k} = a^{m^k}$ para todo k.
Hipótesis de inducción: Suponemos que se cumple que $g^kag^{-k} = a^{m^k}$ y probaremos que $g^{k+1}ag^{-(k+1)} = a^{m^{k+1}}$.

$$\begin{aligned} g^{k+1}ag^{-(k+1)} &= gg^kag^{-k}g^{-1} \\ &= g(a^{m^k})g^{-1} \quad \text{hipótesis inductiva} \\ &= (gag^{-1})^{m^k} \\ &= (a^m)^{m^k} \\ &= (a^{m \cdot m^k}) \\ &= a^{m^{k+1}} \end{aligned}$$

En particular, como G es un grupo finito, entonces g tiene un orden finito, digamos que es $p \in \mathbb{N}$ el número tal que $g^p = e$.
Entonces, por lo demostrado antes, tenemos que:

$$a^{m^p} = g^pag^{-p}$$

Pero como $g^p = e, g^{-p} = e$ entonces:

$$a^{m^p} = a$$

Y entonces, $a^{m^p-1} = e$.
Pero como el orden de a es n, solamente las potencias que sean múltiplo de n pueden anular a a. Por lo que $m^p - 1$ debe de ser un múltiplo de n.
Esto implica que existe una q entero tal que:

$$\begin{aligned}
& m^p - 1 = qn \\
\Rightarrow \quad & m^p + (-q)n = 1 \\
\Rightarrow \quad & (m^{p-1})m + (-q)n = 1
\end{aligned}$$

Pero la identidad de Bezout nos dice que el $gdc(m, n)$ es el entero positivo más chico que se puede conseguir como $k_1m + k_2n$ con k_1, k_2 enteros. En este caso, tenemos que $(m^{p-1})m + (-q)n = 1$ donde $m^{p-1}, -q$ son enteros.
Por lo que la identidad de Bezout nos dice que $gdc(m, n) = 1$

c) **Encuentra un elemento $g \in S_6$ tal que**

$$g(123)(456)g^{-1} = (531)(264)$$

y muestra que $(123)(456)$ **y** $(531)(264)$ **son conjugados en** A_6

$$\begin{aligned}
g(123)(456)g^{-1} &= g(123)g^{-1}g(456)g^{-1} \\
&= (g(1)g(2)g(3))\,(g(4)g(5)g(6)) \quad \text{por 14.1}
\end{aligned}$$

Queremos que esto sea igual a $(531)(264)$ para lo cual necesitamos que:

- $g(1) = 5$
- $g(2) = 3$
- $g(3) = 1$
- $g(4) = 2$
- $g(5) = 6$
- $g(6) = 4$

Por lo que g escrito en forma de ciclos es $g = (156423)$.
Luego, debemos de probar que son conjugados en A_6. Ya vimos que son conjugado, pero nos falta ver que lo son en A_6. Para ello, hay que probar que $(123)(456), (531)(264), g$ son elementos de A_6. Lo que significa que se pueden descomponer en una cantidad par de transposiciones. Encontramos las siguientes descomposiciones en transposiciones:

- $(123)(456) = (12)(23)(45)(56)$ que son 4 transposiciones.
- $(531)(264) = (53)(31)(26)(64)$ que son 4 transposiciones

Sin embargo, en este caso la g que obtuvimos no es una permutación par pues se descompone como $(156423) = (15)(23)(35)(45)(56)$.
Entonces probamos de nuevo. En vez de igualar $(g(1)\ g(2)\ g(3))\ (g(4)\ g(5)\ g(6))$ a $(531)(264)$, lo igualamos a $(264)(531)$ que es lo mismo porque los ciclos disjuntos conmutan. Entonces:

- $g(1) = 2$
- $g(2) = 6$
- $g(3) = 4$
- $g(4) = 5$
- $g(5) = 3$
- $g(6) = 1$

Y esto es igual a $g = (126)(345)$. Lo cual sí es una permutación par ya que $g = (126)(345) = (12)(26)(34)(45)$ que tiene 4 transposiciones.
Entonces, ya probamos que $g(126)(345)g^{-1} = (264)(531)$ donde cada una de las permutaciones es par. Por lo que los elementos $(126)(345)$ y $(264)(531)$ son conjugados en A_6.

d **Muestra que** $(12345)(678)$ **y** $(43786)(215)$ **no son conjugados en** A_8

Primero vemos que $(12345)(678)$ tiene una estructura cíclica de $(5, 3)$ porque es un ciclo de longitud 5 por uno de longitud 3. Y por lo mismo, $(43786)(215)$ también tiene esta estructura cíclica.
Pero como vimos en el lema 19.5, que tengan la misma estructura cíclca implilca que son conjugados.
Además, se puede probar fácilmente que estos dos ciclos son pares, por lo que el problema para que no sean conjugados en A_8 no se debe a que alguno de ellos sea impar.
El problema está en que la permutación que los conjuga está obligada a ser impar.

Para ver esto, nombramos $a = (12345)(678)$ y $b = (43786)(215)$. Como son conjugados, existe una permutación σ tal que $\sigma a \sigma^{-1} = b$. Dicha permutación se puede conseguir como:

$$\begin{gathered}\sigma(12345)(678)\sigma^{-1} = (43786)(215) \\ \Rightarrow\ \sigma(12345)\sigma^{-1}\sigma(678)\sigma^{-1} = (43786)(215) \\ \Rightarrow\ (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)\ \sigma(4)\ \sigma(5))\ \ (\sigma(6)\ \sigma(7)\ \sigma(8)) = (43786)(215)\end{gathered}$$

Entonces, tenemos que:

- $\sigma(1) = 4$
- $\sigma(2) = 3$
- $\sigma(3) = 7$

- $\sigma(4) = 8$
- $\sigma(5) = 6$
- $\sigma(6) = 2$
- $\sigma(7) = 1$
- $\sigma(8) = 5$

Entonces, la permutación σ es:

$$\sigma = (14856237)$$

Esta permutación no es par, ya que:

$$\sigma = (14856237) = (14)(23)(37)(48)(56)(67)(78)$$

Sin embargo, esto no prueba que toda permutación σ que conjugue a con b va a ser necesariamente impar. Puede ser como el ejercicio anterior en el que primero encontramos una permutación impar y luego encontramos una par.

Veamos que es imposible conseguir una permutación par que conjugue a y b.

Para ello, digamos que τ es una permutación arbitraria tal que conjuga a a y a b:

$$\tau a \tau^{-1} = b$$

Probaremos que τ está obligada a ser impar.
Por lo que vimos antes, tenemos que $\sigma a \sigma^{-1} = b$. Si juntamos esto, nos queda:

$$\begin{aligned} \tau a \tau^{-1} = b = \sigma a \sigma^{-1} \\ \Rightarrow \quad \tau a \tau^{-1} = \sigma a \sigma^{-1} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \tau a = a \sigma^{-1} \tau \\ (\sigma^{-1} \tau) a = a (\sigma^{-1} \tau) \end{aligned}$$

Lo que significa que $\sigma^{-1}\tau$ conmuta con la permutación a. Sin embargo, veremos que toda permutación que conmute con a tiene que ser necesariamente par, para probar que $\sigma^{-1}\tau$ es par.

Probar que toda permutación que conmuta con a es par: Asumimos que

β es una permutación tal que $\beta a = a\beta$, es decir, $\beta a \beta^{-1} = a$.
Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
&\beta a \beta^{-1} = a \\
\Rightarrow\ &\beta(12345)(678)\beta^{-1} = (12345)(678) \\
\Rightarrow\ &\beta(12345)\beta^{-1}\beta(678)\beta^{-1} = (12345)(678) \\
\Rightarrow\ &(\beta(1)\ \beta(2)\ \beta(3)\ \beta(4)\ \beta(5))\ \ (\beta(6)\ \beta(7)\ \beta(8)) = (12345)(678)
\end{aligned}$$

Entonces, $\beta(1)$ debe de ser igual a algún número j entre 1 y 5. Y luego $\beta(2) = j + 1, \beta(3) = j+2, \beta(4) = j+3, \beta(5) = j+4$. Donde se entiende que $j, j+1, j+2, j+3, j+4$ se toman módulo 5. Es decir:

- $\beta(1) = j \quad (mod 5)$
- $\beta(2) = j + 1 \quad (mod 5)$
- $\beta(3) = j + 2 \quad (mod 5)$
- $\beta(4) = j + 3 \quad (mod 5)$
- $\beta(5) = j + 4 \quad (mod 5)$

Por ejemplo, si $j = 3$, tenemos que $\beta(1) = 3, \beta(2) = 4, \beta(3) = 5, \beta(4) = 1, \beta(5) = 2$. Y en este caso $\beta = (13524)$
En cualquier caso, β contendrá siempre una potencia de (12345).
Similarmente, como $(\beta(6)\ \beta(7)\ \beta(8)) = (678)$, entonces β debe de contener una potencia de (678).
Pero $(12345) = (12)(23)(34)(45)$ es una permutación par. Y $(678) = (67)(78)$ también lo es.
Luego, como β es un producto de una potencia de (12345) por una de (678) y el producto de premutaciones pares es par, entonces β es una permutación par.

Es decir, las únicas permutaciones que conmutan con a son las pares.

Probamos antes que $\sigma^{-1}\tau$ conmuta con a. Y por lo anterior, $\sigma^{-1}\tau$ debe de ser par. Pero ya vimos que σ es impar y por tanto también σ^{-1}. Por lo tanto, para que el producto $\sigma^{-1}\tau$ sea par, debemos de tener que τ es una permutación impar.

τ la habíamos propuesto como una permutación cualquiera tal que $\tau a \tau^{-1} = b$. Entonces, las permutaciones que cumplen esto tienen que ser necesariamente impares.
Con lo que concluimos que no se puede encontrar τ par tal que $\tau a \tau^{-1} = b$, por lo que a, b no son conjugadas en A_8