Variable Compleja Tarea 2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

28 de noviembre de 2020

1) **Supongamos que f es holomorfa en una región $A \subset \mathbb{C}$ y D es un disco contenido en A. Muestre que:**

$$\int_{\partial D} \overline{f(z)} f'(z) dz$$

es un número imaginario puro

Supongamos que f se descompone en una parte real e imaginaria como $f = u + iv$. Y entonces la derivada de f se puede escribir como $f' = u_x + iv_x$. Además, el diferencial es $dz = dx + idy$ Entonces, la integral en cuestión es:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \overline{f(z)} f'(z) dz &= \int_{\partial D} \overline{(u+iv)}(u_x + iv_x)(dx + idy) \\
&= \int_{\partial D} (u - iv)(u_x + iv_x)(dx + idy) \\
&= \int_{\partial D} [(uu_x + vv_x) + (-u_x v + uv_x)i](dx + idy) \\
&= \int_{\partial D} (uu_x + vv_x)dx - (-u_x v + uv_x)dy + i \int_{\partial D} (uu_x + vv_x)dy + (-u_x v + uv_x)dx
\end{aligned}$$

Como las funciones u, v son reales y sus derivadas también, entonces, en la última expresión la primera integral es la parte real de la integral original y la segunda es la parte imaginaria.
Para probar que el resultado es un imaginario puro basta con probar que la parte real se anula. Es decir, que la primera integral vale 0.

Usamos que como f es holomorfa, se cumplen las ecuaciones de Cauchy Riemann, por lo que $u_x = v_y, u_y = -v_x$. Entonces la primera integral pasa a ser:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} (uu_x + vv_x)dx - (-u_x v + uv_x)dy = \int_{\partial D} (uu_x + vv_x)dx - (-v_y v - uu_y)dy \\
&= \int_{\partial D} (uu_x + vv_x)dx + (v_y v + uu_y)dy \\
&= \int_{\partial D} d\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Esto último porque la expresión dentro del paréntesis no es más que $d\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)dy = \frac{2uu_x + 2vv_x}{2}dx + \frac{2uu_y + 2vv_y}{2}dy = (uu_x + vv_x)dx + (uu_y + vv_y)dy$

Entonces nos queda la integral $\displaystyle\int_{\partial D} d\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)$.

Pero como estamos integrando este diferencial exacto el resultado será $\frac{u^2+v^2}{2}$ evaluado en los extremos. Pero como se trata de una cuerva cerrada, el resultado es 0.

Por lo tanto, la integral original no tiene parte real y es un imaginario puro.

2) **Calcule las siguientes integrales**

a) $\int_{|z|=1} z^3 \sin^5(z)\cos^2(z)dz$

El resultado es 0. Esto porque como $z, \sin(z), \cos(z)$ son holomorfas en todo el plano, entonces $z^3 \sin^5(z)\cos^2(z)$ tabién es holomorfa en el plano ya que el producto de funciones holomorfas vuelve a ser holomorfa.

Por tanto, podemos usar el teorema de Cauchy que dice que si f es holomorfa en una región A en donde la curva sobre la que se integra la función es homótopa a cero, entonces $\int_\gamma f dz = 0$
En este caso, como $f = z^3 \sin^5(z)\cos^2(z)$ es holomorfa en todo el plano y el círculo $|z| = 1$ es homótopo a cero en esta región, entonces el teorema nos asegura que la integral vale 0.

b) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$

Resolvemos la integral partiéndola en fracciones parciales. Para ello notamos que $\dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{1}{(z+1)(z-1)}$ y para partirla en fracciones parciales hay que encontrar los números A, B tales que $\dfrac{1}{(z+1)(z-1)} = \dfrac{A}{z+1} + \dfrac{B}{z-1} = \dfrac{A(z-1)+B(z+1)}{(z+1)(z-1)} \Rightarrow$ $A(z-1)+B(z+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}\ ,\ A = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, $\dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{-1/2}{z+1} + \dfrac{1/2}{z-1}$

Entonces resolvemos la integral separando en estas fraciones parciales:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} &= \int_{|z|=2} \frac{-1/2}{z+1} + \frac{1/2}{z-1} dz \\ &= -\frac{1}{2} \int_{|z|=2} \frac{1}{z+1} dz + \frac{1}{2} \int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \end{aligned}$$

Para resolver estas integrales podemos utilizar el siguiente resultado que probamos en clase: $\displaystyle\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$. Donde r es cualquier número real positivo.

Consideramos la primera integral $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z+1}$ y vemos que es igual a $\displaystyle\int_{|z+1|=2} \frac{dz}{z+1}$.

Esto porque el integrando $\dfrac{1}{z+1}$ es holomorfo en todos los puntos excepto en -1. Podemos deformar el círculo $|z| = 2$ en el círculo de radio 2 y centro -1 de forma continua y sin necesidad de cruzar el -1 porque el círculo original $|z| = 2$ ya rodea este punto. Por lo que $|z| = 2$ y $|z+1| = 2$ son curvas homótopas en el conjunto en el que la función es holomorfa y entonces por el teorema de deformación, ambas integrales son iguales. Sin embargo, la segunda integral ya tiene la forma del resultado que probamos en clase y vemos que entonces vale $2\pi i$.

Hacemos los mismo para la segunda integral $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-1}$ y vemos que es igual a $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z-1}$.

Esto porque el integrando $\dfrac{1}{z-1}$ es holomorfo en todos los puntos excepto en 1. Podemos deformar el círculo $|z| = 2$ en el círculo de radio 2 y centro 1 de forma continua y sin necesidad de cruzar el 1 porque el círculo original $|z| = 2$ ya rodea este punto. Por lo que $|z| = 2$ y $|z-1| = 2$ son curvas homótopas en el conjunto en el que la función es holomorfa y entonces por el teorema de deformación, ambas integrales son iguales. Sin embargo, la segunda integral ya tiene la forma del resultado que probamos en clase y vemos que entonces vale $2\pi i$.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-1} &= \frac{-1}{2}\int_{|z|=2}\frac{1}{z+1}dz+\frac{1}{2}\int_{|z|=2}\frac{dz}{z-1}\\ &= \frac{-1}{2}\int_{|z-1|=2}\frac{1}{z+1}dz+\frac{1}{2}\int_{|z+1|=2}\frac{dz}{z-1}\\ &= -\frac{1}{2}(2\pi i)+\frac{1}{2}(2\pi i)=0\end{aligned}$$

Por lo que el resultado final es 0.

c) $\int_{|z-2|=1}\frac{e^z\cos(z)}{z(z-2)}dz$

Para resolver esta integral usamos el teorema de Cauchy. El teorema dice que si f es holomorfa en el disco $D_r(z_0)$ entonces $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)}\frac{f(z)dz}{z-z_0}$.

Para utilizarlo, definimos $f(z)=\frac{e^z\cos(z)}{z}$. Esta función es holomorfa en el disco $D_1(2)$, pues es el producto de puras funciones holomorfas y el denominador no se anula en este disco, ya que el disco de radio 1 y centro 2 no incluye al 0. Luego, si hacemos $z_0=2$, la fórmula de Cauchy nos asegura que:

$$\begin{aligned}f(2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)}\frac{f(z)dz}{z-2} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-2|=1}\frac{f(z)dz}{z-2}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-2|=1}\frac{e^z\cos(z)dz}{z(z-2)}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_{|z-2|=1}\frac{e^z\cos z dz}{z(z-2)}=2\pi i f(2)$$

Donde $f(2)=\frac{e^2\cos(2)}{2}$. Por lo tanto, el resultado que buscamos es:

$$\int_{|z-2|=1}\frac{e^z\cos z dz}{z(z-2)}=2\pi i\frac{e^2\cos(2)}{2}=e^2\cos(2)\pi i$$

.

3) **Muestre que si f es holomorfa en el anillo $U=\{r<|z-a|<R\}$, entonces la integral de f, a lo largo de la circunferencia de centro en a y radio ρ, $\int_{|z-a|=\rho}f(z)dz$, tiene el mismo valor, para todo $r<\rho<R$**

Probaré que dicha integral tiene el mismo valor para dos números arbitrarioes ρ_0 y ρ_1 con $r < \rho_0 < R$, $r < \rho_1 < R$ y sin pérdida de generalidad, que $\rho_0 < \rho_1$. Probando así que vale lo mismo para cualquier valor de ρ con $r < \rho < R$.
Para ello, primero probaré detalladamente que $|z-a| = \rho_0$ es homótopa a $|z-a| = \rho_1$ en el anillo U. Para ello, denotamos al círculo $|z-a| = \rho_0$ como $\gamma_0(t)$ y nos fijamos que se puede parametrizar como $\gamma_0(t) = \rho_0 e^{2\pi it} + a$ con $t \in [0, 1]$. Y denotamos al círculo $|z-a| = \rho_1$ como $\gamma_1(t)$ y nos fijamos que se puede parametrizar como $\gamma_1(t) = \rho_1 e^{2\pi it} + a$ con $t \in [0, 1]$.

Para probar que estas curvas cerradas son homótopas en U hay que probar que existe una función continua $\gamma(s, t) : [0, 1] \times [0, 1] \to U$ tal que $\gamma(0, t) = \gamma_0(t)$ y que $\gamma(1, t) = \gamma_1(t) \ \ \forall\, t \in [0, 1]$ y que $\gamma(s, 0) = \gamma(s, 1) \ \ \ \forall\, s \in [0, 1]$.

Para ello, propongo que la homotopía comience en el círculo de radio ρ_0 y lo vaya cambiando continuamente al de radio ρ_1 simplemente cambiando el radio con el parámetro s de tal forma que el radio valga ρ_0 cuando $s = 0$ y valga ρ_1 cuando $s = 1$.
Es decir, que el radio cambie según la función $(\rho_1 - \rho_0)s + \rho_0$. Entonces, propongo que la homotopía sea:

$$\gamma(s, t) = [(\rho_1 - \rho_0)s + \rho_0]e^{2\pi it} + a \qquad \text{para } t \in [0, 1]\ ,\ s \in [0, 1]$$

Para probar que esto es una homotopía entre γ_0 y γ_1 en el anillo U hay que probar que:

- **La homotopía empieza en la curva** γ_0, es decir, $\gamma(0, t) = \gamma_0(t)$ para todo t

  Esto es fácil de ver, pues $\gamma(0, t) = [(\rho_1 - \rho_0)(0) + \rho_0]e^{2\pi it} + a = \rho_0 e^{2\pi it} + a = \gamma_0(t)$
- **La homotopía acaba en la curva** γ_1, es decir, $\gamma(1, t) = \gamma_1(t)$ para todo t

  Esto es fácil de ver, pues $\gamma(1, t) = [(\rho_1 - \rho_0)(1) + \rho_0]e^{2\pi it} + a = \rho_1 e^{2\pi it} + a = \gamma_1(t)$

- **Probar que conforme se deforma, la curva es siempre cerrada:** es decir, probar que $\gamma(s, 0) = \gamma(s, 1) \ \ \forall s \in [0, 1]$
  Lo probamos directamente:

$$\begin{aligned} \gamma(s, 0) &= [(\rho_1 - \rho_0)s + \rho_0]e^{2\pi i(0)} + a \\ &= [(\rho_1 - \rho_0)s + \rho_0]1 + a \\ &= [(\rho_1 - \rho_0)s + \rho_0]e^{2\pi i} + a \\ &= [(\rho_1 - \rho_0)s + \rho_0]e^{2\pi i(1)} + a \\ &= \gamma(s, 1) \end{aligned}$$

- **Probar que la homotopía se queda siempre en el anillo** U

Para ello, consideramos un punto arbitrario de la deformación de las curvas $\gamma(s,t) = [(\rho_1 - \rho_0)s + \rho_0]e^{2\pi i(t)} + a$ y hay que probar que pertenece a $U = \{r < |z-a| < R\}$

Para ello vemos que:

$$\begin{aligned}
|\gamma(s,t) - a| &= \left|[(\rho_1 - \rho_0)s + \rho_0]e^{2\pi it} + a - a\right| \\
&= \left|[(\rho_1 - \rho_0)s + \rho_0]e^{2\pi it}\right| \\
&= |(\rho_1 - \rho_0)s + \rho_0||e^{2\pi it}| \\
&= |(\rho_1 - \rho_0)s + \rho_0|
\end{aligned}$$

Y como $s \in [0,1]$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&0 < s < 1 \\
\Rightarrow\quad & 0 < s(\rho_1 - \rho_0) < \rho_1 - \rho_0 \qquad \text{multiplicamos por el positivo } \rho_1 - \rho_0 \\
\Rightarrow\quad & \rho_0 < s(\rho_1 - \rho_0) + \rho_0 < \rho_1 \qquad \text{sumamos } \rho_0 \\
\Rightarrow\quad & r < \rho_0 < s(\rho_1 - \rho_0) + \rho_0 < \rho_1 < R \quad \text{porque } r < \rho_0 < R\ ,\ r < \rho_1 < R \\
\Rightarrow\quad & r < s(\rho_1 - \rho_0) + \rho_0 < R \\
\Rightarrow\quad & r < |s(\rho_1 - \rho_0) + \rho_0| < R \quad \text{porque todos estos números son positivos}
\end{aligned}$$

Entonces, juntando esto con lo anterior, tenemos que: $r < |\gamma(s,t) - a| < R$. Y por tanto, en todo momento la homotopía está contenida en U

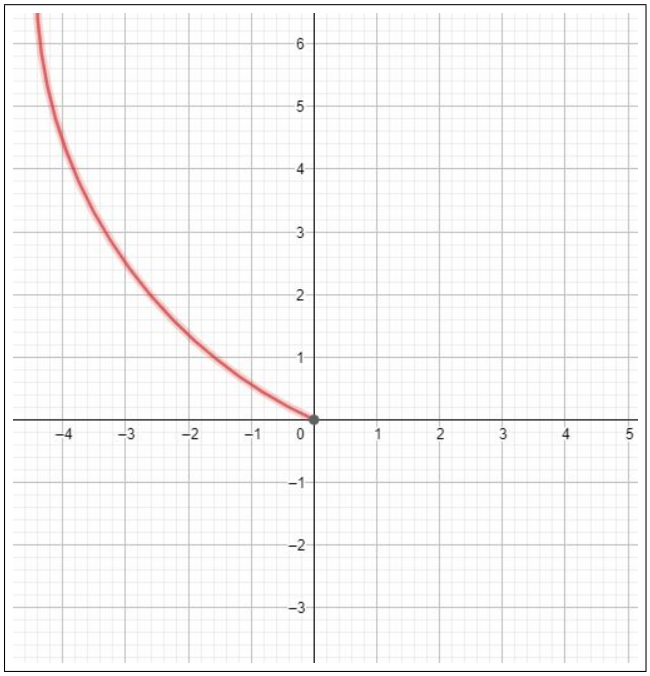
Con todo esto, por fin concluimos que $|z-a| = \rho_0$ y $|z-a| = \rho_1$ son curvas homótopas en U.
Luego, el teorema de deformación nos asegura que como f es holomorfa en U y las curvas son homótopas en este conjunto, la integral de f vale lo mismo a lo largo de estas dos curvas, es decir:

$$\int_{|z-a|=\rho_0} f(z)dz = \int_{|z-a|=\rho_1} f(z)dz$$

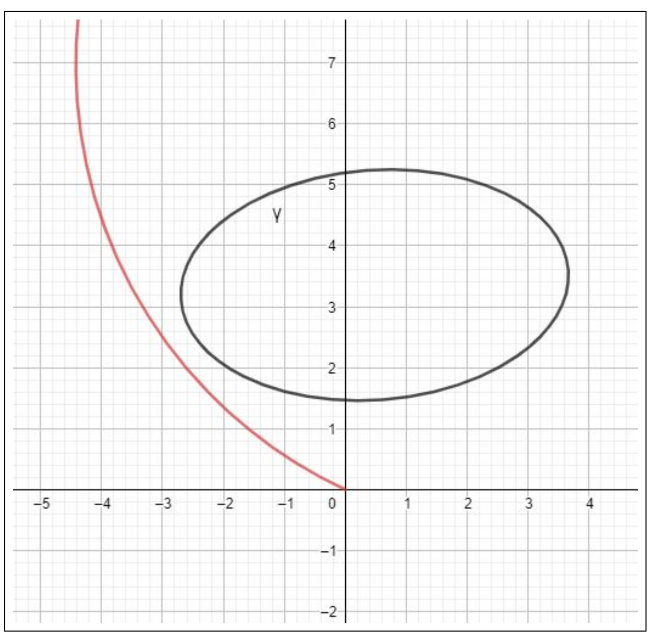
Para todo ρ_0, ρ_1 con $r < \rho_0, \rho_1 < R$. Con lo que probamos que la integral vale lo mismo sin importar el valor de ρ con tal que $r < \rho < R$.

4. **Describe condiciones para que la integral de $\log(z)$ a lo largo de una curva cerrada γ sea 0**

Como sabemos, para definir el $\log(z)$ como una función univaluada, es necesario restringir el dominio de la función a una rama. Como vimos en clase, se requiere eliminar una porción del plano que conecte a la singularidad 0 con el infinito.
Cualquier curva que vaya de 0 a infinito y que no se cruce a sí misma servirá para definir una rama válida del logaritmo. Digamos que definimos una rama del logaritmo al eliminar una curva como la curva roja marcada en la siguiente imagen.

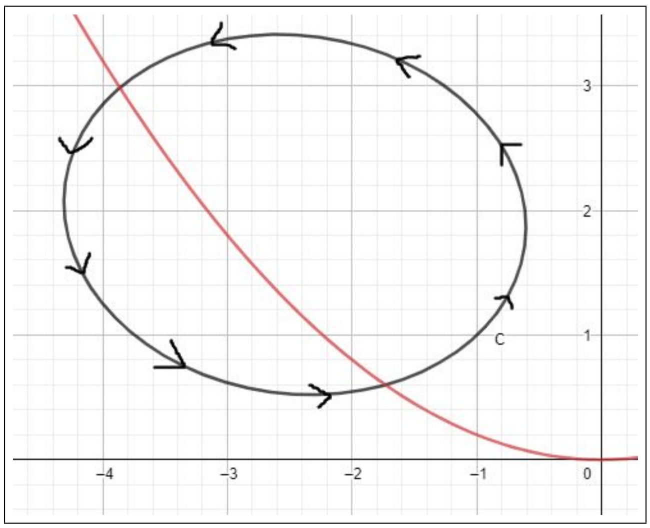


Luego, como vimos en clase, una forma de que una integral valga 0 es que la curva sobre la que se integra sea homótopa a cero en el conjunto en el que la función es holomorfa.
En este caso, la función log[z] es holomorfa en todo el plano excepto en los puntos que quitamos para elegir la rama. Entonces, para tener una curva homótopa a cero en este conjunto, necesitamos una curva cerrada que no cruce los puntos marcados en rojo. Ya que si la curva rodea alguno de los puntos en rojo, será imposible llevarla a un punto por medio de una homotopía sin salir del conjunto en el que log(z) es holomorfa.
Por tanto, necesitamos integrar sobre una curva como la siguiente, que no toque al corte:



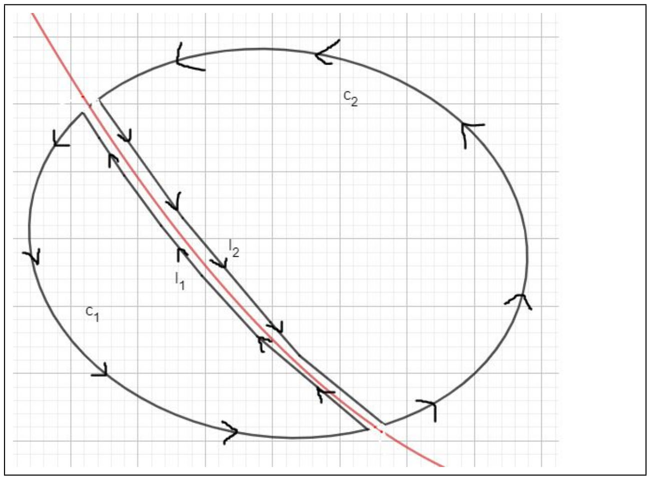
Por otro lado, si la curva cruza el corte que hicimos, la función $\log(z)$ tendrá una discontinuidad en dicho punto. Esto porque el argumento de z que hay que usar hace un salto de 2π al atravesar el corte.
Entonces no se puede usar ninguno de los teoremas que hemos demostrado en clase para evaluar la integral y no podemos asegurar que la integral valga cero.

Veamos qué pasa si la curva cruza la rama para convencernos que la integral no se anula.
Consideremos la siguiente imagen, queremos integrar la función $\log(z)$ con el corte de la rama marcado en rojo alrededor de la curva c.



Para empezar, la integral ni siquiera tiene sentido, porque la función no es continua en toda la curva, ya que ni está definida en los puntos en los que cruza el corte. Sin embargo, podríamos hacer la integral primero siguiendo la porción de la curva que está de un lado del corte y deteniéndonos justo antes de llegar al corte de nuevo. Y luego sumarle la integral que se obtiene con la parte de la curva del otro lado del corte y deteniéndonos justo antes de llegar al corte de rama.

Para obtener esta integral, primero consideramos la imagen siguiente. Partimos la curva inicial en dos curvas c_1, c_2 a cada uno de los lados del corte, que juntas forman casi toda la curva original. Y podríamos considerar que la integral por la curva original es igual a la suma de la integral por estas dos curvas.
Luego, en el dibujo incluimos el trayecto l_1 que va paralelo al corte y que cierra la primera curva. E incluimos el trayecto l_2 paralelo al corte y que cierra a la segunda curva.



Entonces, la integral que queremos calcular es básicamente $\int_c \log(z)dz = \int_{c_1 \cup c_2} \log(z)dz = \int_{c_1} \log(z)dz + \int_{c_2} \log(z)dz$.
Pero nos podemos fijar en la curva cerrada formada por c_1 y l_1, que es una curva cerrada que no atraviesa el corte. Por lo tanto, es homótopa a 0 en el dominio de log y por tanto $\int_{c_1 \cup l_1} \log(z)dz = 0 \;\Rightarrow\; \int_{c_1} \log(z)dz + \int_{l_1} \log(z)dz = 0 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; \int_{c_1} \log(z)dz = -\int_{l_1} \log(z)dz$.
Por un argumento similar para la curva cerrada formada por c_2, l_2, tenemos que $\int_{c_2} \log(z)dz = -\int_{l_2} \log(z)dz$.

Juntando esto, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_c \log(z)dz &= \int_{c_1} \log(z)dz + \int_{c_2} \log(z)dz \\ &= -\int_{l_1} \log(z)dz - \int_{l_2} \log(z)dz\end{aligned}$$

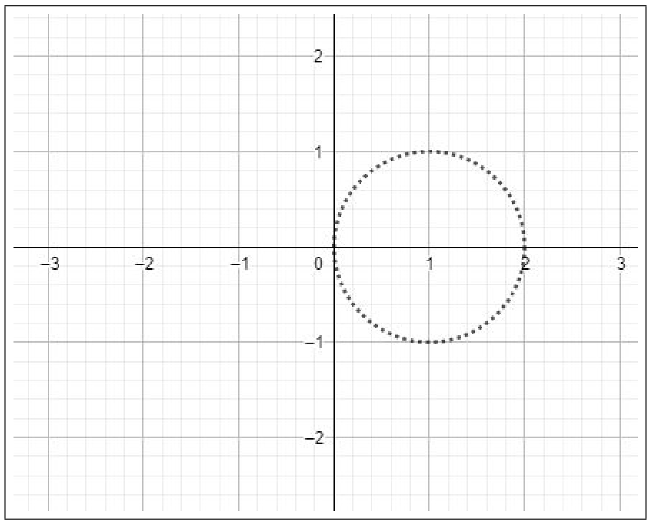
Entonces, para que la integral valga 0, deberíamos de tener que $\displaystyle\int_{l_1} \log(z)dz = -\int_{l_2} \log(z)dz$
Como l_1, l_2 son trayectoras en sentido opuesto y están muy cerca la una de la otra, podríamos pensar que efectivamente se cumple que las integrales valen lo mismo pero con signo opuesto. Sin embargo, esto no es cierto en este caso ya que ambas curvas se encuentran a lados distintos del corte. Debido a esto, la función $\log(z)$ es muy distinta en l_1 que en l_2 porque el argumento que se toma para definir el logaritmo salta por un valor de 2π al cruzar el corte. Y entonces no tiene por qué cumplirse que $\displaystyle\int_{l_1} \log(z)dz = -\int_{l_2} \log(z)dz$.
Por tanto, la integral no vale 0.

5. **Asumamos que f es holomorfa (o analítica) y satisface que $|f(z) - 1| < 1$ en una región $A \subset \mathbb{C}$. Muestre que:**

$$\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = 0$$

para toda γ curva cerrada, diferenciable por pedazos, contenida en A

Observamos que $|f(z)-1| < 1$ significa que la imagen de f está restringida al disco abierto de radio 1 y centro en 1.
Es decir, la imagen de f está restringida al interior del conjunto que se muestra en la imagen:



Podemos ver que este conjunto no incluye al 0 y que además, el argumento de $f(z)$ está restringido por $-\pi < arg(f(z)) < \pi$ ya que $f(z)$ nunca es un real negativo (En realidad, el argumento está más restringido que esto, pero con esto basta)

Luego, consideramos la función $G(z) = \log(f(z))$ definiendo al log con la rama principal (el argumento entre $-\pi$ y π).
Entonces, como f tiene siempre argumento entre $-\pi$ y π, la función $log(z)$ es analítica en el conjunto $f(A)$.
Como además $f(z)$ es analítica en A, entonces la composición de funciones $G(z) = \log(f(z))$ es analítica en A porque la composición de analíticas es analítica.

Luego, vemos que $G(z)$ es una primitiva de $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ porque:

$$\frac{d}{dz}\log(f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Luego podemos usar el teorema fundamental del cálculo complejo. Que dice que si $g(z) : A \to \mathbb{C}$ es una función continua en una región A y $G : A \to \mathbb{C}$ es holomorfa con $G' = g$, entonces para toda curva $\gamma : [a,b] \to A$ diferenciable a pedazos, se cumple que la integral $\int_\gamma g(z)dz = G(\gamma(b)) - G(\gamma(a))$
En este caso, la función $g(z)$ es $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ que es continua porque tanto $f(z)$ como $f'(z)$ lo son

(la derivada de una función analítica es continua) y además el denominador nunca se anula porque como vimos $f(z)$ nunca vale 0.
Luego, probamos que $G(z) = \log(f(z))$ es holomorfa en A y que $G' = g$. Entonces, el teorema fundamental del cálculo complejo nos permite concluir que:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = G(\gamma(b)) - G(\gamma(a))$$

Finalmente, como γ es cerrada, se tiene que $\gamma(b) = \gamma(a)$, por lo que $G(\gamma(b)) - G(\gamma(a)) = 0$ y por tanto:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$