Tarea 1: Óptica Cuántica con átomos y fotones

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

June 23, 2022

Ejercicio 1

Probar que $\langle u|d\rangle = \langle l|r\rangle$ **donde** $|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$ **y** $|l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$**.**

Primero que nada, sabemos que $\langle u|d\rangle = 0$, ya que $|u\rangle$ y $|d\rangle$ son ortogonales. Por lo tanto, para probar que $\langle l|r\rangle = \langle u|d\rangle$ hay que probar que $\langle l|r\rangle = 0$.

Para probarlo, partimos de las definiciones dadas para $|r\rangle$ y $|l\rangle$ para calcular $\langle l|r\rangle$. A partir de la definición del ket $|l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$, tenemos que su bra es:

$$\langle l| = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle d|.$$

Por lo tanto, el producto interno $\langle l|r\rangle$ se calcula como:

$$\begin{aligned}
\langle l|r\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle d|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&\text{Desarrollamos los productos:} \\
&= \frac{1}{2}\langle u|u\rangle + \frac{1}{2}\langle u|d\rangle - \frac{1}{2}\langle d|u\rangle - \frac{1}{2}\langle d|d\rangle \\
&\text{Usamos que la base } \{|u\rangle, |d\rangle\} \text{ es ortonormal} \\
&= \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(1) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Con lo que ya se prueba que $\langle l|r\rangle = 0 = \langle u|d\rangle$

Ejercicio 2

Probar que $|i\rangle$ y $|o\rangle$ cumplen con

$$\begin{aligned}
\langle i|o\rangle &= 0 \\
\langle i|u\rangle\langle u|i\rangle = \langle i|d\rangle\langle d|i\rangle &= \frac{1}{2} \\
\langle o|u\rangle\langle u|o\rangle = \langle o|d\rangle\langle d|o\rangle &= \frac{1}{2} \\
\langle i|r\rangle\langle r|i\rangle = \langle i|l\rangle\langle l|i\rangle &= \frac{1}{2} \\
\langle o|r\rangle\langle r|o\rangle = \langle o|l\rangle\langle l|o\rangle &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Para probarlos, usaremos la definición de $|i\rangle$ y la de $|o\rangle$, que son $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle$ y $|o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle$ y haremos las cuentas:

- $\langle i|o\rangle = 0$
  Desarrollamos la expresión de $\langle i|o\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle i|o\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^{\dagger}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\langle u|u\rangle - \frac{i}{2}\langle d|u\rangle - \frac{i}{2}\langle u|d\rangle - \frac{1}{2}\langle d|d\rangle \\
&\text{Usamos que la base } \{|u\rangle, |d\rangle\} \text{ es ortonormal} \\
&= \frac{1}{2}(1) - \frac{i}{2}(0) - \frac{i}{2}(0) - \frac{1}{2}(1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- $\langle i|u\rangle\langle u|i\rangle = \langle i|d\rangle\langle d|i\rangle = \frac{1}{2}$
  Comprobamos cada una de las igualdades por separado.

$$\begin{aligned}
\langle i|u\rangle\langle u|i\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^{\dagger}|u\rangle\langle u|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|\right)|u\rangle\langle u|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|u\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\langle u|d\rangle\right) \\
&\text{usamos la ortonormalidad de la base } \{|u\rangle, |d\rangle\} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1) - \frac{i}{\sqrt{2}}(0)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1) + \frac{i}{\sqrt{2}}(0)\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Y ahora la otra igualdad, que se prueba de forma totalmente análoga.

$$\begin{aligned}
\langle i|d\rangle\langle d|i\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^{\dagger} |d\rangle\langle d| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|\right) |d\rangle\langle d| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u|d\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|d\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle d|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|d\rangle\right) \\
&\text{usamos la ortonormalidad de la base } \{|u\rangle, |d\rangle\} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0) - \frac{i}{\sqrt{2}}(1)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0) + \frac{i}{\sqrt{2}}(1)\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- $\langle o|u\rangle\langle u|o\rangle = \langle o|d\rangle\langle d|o\rangle = \dfrac{1}{2}$

  Lo probamos igual que el inciso anterior.

$$\begin{aligned}
\langle o|u\rangle\langle u|o\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^{\dagger} |u\rangle\langle u| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| + \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|\right) |u\rangle\langle u| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|u\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle u|d\rangle\right) \\
&\text{usamos la ortonormalidad de la base } \{|u\rangle, |d\rangle\} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1) + \frac{i}{\sqrt{2}}(0)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1) - \frac{i}{\sqrt{2}}(0)\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Y ahora la otra igualdad, que se prueba de forma totalmente análoga.

$$\begin{aligned}
\langle o|d\rangle\langle d|o\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^{\dagger} |d\rangle\langle d| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| + \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|\right) |d\rangle\langle d| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u|d\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|d\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle d|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|d\rangle\right) \\
&\text{usamos la ortonormalidad de la base } \{|u\rangle, |d\rangle\} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0) + \frac{i}{\sqrt{2}}(1)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0) - \frac{i}{\sqrt{2}}(1)\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- $\langle i|r\rangle\langle r|i\rangle = \langle i|l\rangle\langle l|i\rangle = \dfrac{1}{2}$

Empezamos probando que $\langle i|r\rangle\langle r|i\rangle = \frac{1}{2}$, para lo cual utilizamos las expresiones de $|i\rangle$ y de $|r\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle i|r\rangle\langle r|i\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle d|\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\langle u|u\rangle + \frac{1}{2}\langle u|d\rangle - \frac{i}{2}\langle d|u\rangle - \frac{i}{2}\langle d|d\rangle\right) \left(\frac{1}{2}\langle u|u\rangle + \frac{i}{2}\langle u|d\rangle + \frac{1}{2}\langle d|u\rangle + \frac{i}{2}\langle d|d\rangle\right) \\
&\text{Usamos la ortonormalidad de la base } \{|u\rangle, |d\rangle\} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Probamos ahora la otra igualdad de manera totalmente análoga.

$$\begin{aligned}
\langle i|l\rangle\langle l|i\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle d|\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\langle u|u\rangle - \frac{1}{2}\langle u|d\rangle - \frac{i}{2}\langle d|u\rangle + \frac{i}{2}\langle d|d\rangle\right) \left(\frac{1}{2}\langle u|u\rangle + \frac{i}{2}\langle u|d\rangle - \frac{1}{2}\langle d|u\rangle - \frac{i}{2}\langle d|d\rangle\right) \\
&\text{Usamos la ortonormalidad de la base } \{|u\rangle, |d\rangle\} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- $\langle o|r\rangle\langle r|o\rangle = \langle o|l\rangle\langle l|o\rangle = \frac{1}{2}$

  Lo probamos igual que el inciso anterior.

$$\begin{aligned}
\langle o|r\rangle\langle r|o\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| + \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle d|\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\langle u|u\rangle + \frac{1}{2}\langle u|d\rangle + \frac{i}{2}\langle d|u\rangle + \frac{i}{2}\langle d|d\rangle\right) \left(\frac{1}{2}\langle u|u\rangle - \frac{i}{2}\langle u|d\rangle + \frac{1}{2}\langle d|u\rangle - \frac{i}{2}\langle d|d\rangle\right) \\
&\text{Usamos la ortonormalidad de la base } \{|u\rangle, |d\rangle\} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle o|l\rangle\langle l|o\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| + \frac{i}{\sqrt{2}}\langle d|\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle d|\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\langle u|u\rangle - \frac{1}{2}\langle u|d\rangle + \frac{i}{2}\langle d|u\rangle - \frac{i}{2}\langle d|d\rangle\right) \left(\frac{1}{2}\langle u|u\rangle - \frac{i}{2}\langle u|d\rangle - \frac{1}{2}\langle d|u\rangle + \frac{i}{2}\langle d|d\rangle\right) \\
&\text{Usamos la ortonormalidad de la base } \{|u\rangle, |d\rangle\} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Con esto quedan probadas todas las ecuaciones que se buscaban probar.

Además, veremos que $|i\rangle$, $|o\rangle$ no son soluciones únicas a estas ecuaciones. Para verlo, definimos nuevos vectores $|i'\rangle = e^{ai}|i\rangle$ y $|o'\rangle = e^{ai}|o\rangle$ con $a \in \mathbb{R}$. Es decir, definimos vectores que son múltiplos de $|i\rangle, |o\rangle$, con un desfase global.

Probaremos que estos vectores $|i'\rangle, |o'\rangle$ también cumplen las 9 ecuaciones que probamos para $|i\rangle, |o\rangle$:

- $\langle i'|o'\rangle = (e^{ai})^*\langle i|e^{ai}o\rangle = (e^{ai})^* e^{ai}\langle i|o\rangle = \langle i|o\rangle = 0$.
  Donde al final usamos que $\langle i|o\rangle = 0$, como se probó antes. Por lo tanto, concluimos que $\langle i'|o'\rangle = 0$.

- $\langle i'|u\rangle\langle u|i'\rangle = (e^{ai})^*\langle i|u\rangle\langle u|(e^{ai})i\rangle = (e^{ai})^*(e^{ai})\langle i|u\rangle\langle u|i\rangle = \langle i|u\rangle\langle u|i\rangle = \dfrac{1}{2}$
  Donde al final usamos que $\langle i|u\rangle\langle u|i\rangle = \dfrac{1}{2}$ como se probó antes. Con lo que concluimos que $\langle i'|u\rangle\langle u|i'\rangle = \dfrac{1}{2}$.

- $\langle i'|d\rangle\langle d|i'\rangle = (e^{ai})^*\langle i|d\rangle\langle d|(e^{ai})i\rangle = (e^{ai})^*(e^{ai})\langle i|d\rangle\langle d|i\rangle = \langle i|d\rangle\langle d|i\rangle = \dfrac{1}{2}$
  Donde al final usamos que $\langle i|d\rangle\langle d|i\rangle = \dfrac{1}{2}$ como se probó antes. Con lo que concluimos que $\langle i'|d\rangle\langle d|i'\rangle = \dfrac{1}{2}$.

- $\langle o'|u\rangle\langle u|o'\rangle = (e^{ai})^*\langle o|u\rangle\langle u|(e^{ai})o\rangle = (e^{ai})^*(e^{ai})\langle o|u\rangle\langle u|o\rangle = \langle o|u\rangle\langle u|o\rangle = \dfrac{1}{2}$
  Donde al final usamos que $\langle o|u\rangle\langle u|o\rangle = \dfrac{1}{2}$ como se probó antes. Con lo que concluimos que $\langle o'|u\rangle\langle u|o'\rangle = \dfrac{1}{2}$.

- $\langle o'|d\rangle\langle d|o'\rangle = (e^{ai})^*\langle o|d\rangle\langle d|(e^{ai})o\rangle = (e^{ai})^*(e^{ai})\langle o|d\rangle\langle d|o\rangle = \langle o|d\rangle\langle d|o\rangle = \dfrac{1}{2}$
  Donde al final usamos que $\langle o|d\rangle\langle d|o\rangle = \dfrac{1}{2}$ como se probó antes. Con lo que concluimos que $\langle o'|d\rangle\langle d|o'\rangle = \dfrac{1}{2}$.

- $\langle i'|r\rangle\langle r|i'\rangle = (e^{ai})^*\langle i|r\rangle\langle r|(e^{ai})i\rangle = (e^{ai})^*(e^{ai})\langle i|r\rangle\langle r|i\rangle = \langle i|r\rangle\langle r|i\rangle = \dfrac{1}{2}$
  Donde al final usamos que $\langle i|r\rangle\langle r|i\rangle = \dfrac{1}{2}$ como se probó antes. Con lo que concluimos que $\langle i'|r\rangle\langle r|i'\rangle = \dfrac{1}{2}$.

- $\langle i'|l\rangle\langle l|i'\rangle = (e^{ai})^*\langle i|l\rangle\langle l|(e^{ai})i\rangle = (e^{ai})^*(e^{ai})\langle i|l\rangle\langle l|i\rangle = \langle i|l\rangle\langle l|i\rangle = \dfrac{1}{2}$

  Donde al final usamos que $\langle i|l\rangle\langle l|i\rangle = \dfrac{1}{2}$ como se probó antes. Con lo que concluimos que $\langle i'|l\rangle\langle l|i'\rangle = \dfrac{1}{2}$.

- $\langle o'|r\rangle\langle r|o'\rangle = (e^{ai})^*\langle o|r\rangle\langle r|(e^{ai})o\rangle = (e^{ai})^*(e^{ai})\langle o|r\rangle\langle r|o\rangle = \langle o|r\rangle\langle r|o\rangle = \dfrac{1}{2}$

  Donde al final usamos que $\langle o|r\rangle\langle r|o\rangle = \dfrac{1}{2}$ como se probó antes. Con lo que concluimos que $\langle o'|r\rangle\langle r|o'\rangle = \dfrac{1}{2}$.

- $\langle o'|l\rangle\langle l|o'\rangle = (e^{ai})^*\langle o|l\rangle\langle l|(e^{ai})o\rangle = (e^{ai})^*(e^{ai})\langle o|l\rangle\langle l|o\rangle = \langle o|l\rangle\langle l|o\rangle = \dfrac{1}{2}$

  Donde al final usamos que $\langle o|l\rangle\langle l|o\rangle = \dfrac{1}{2}$ como se probó antes. Con lo que concluimos que $\langle o'|l\rangle\langle l|o'\rangle = \dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto, hemos probado que $|i'\rangle, |o'\rangle$ también cumplen con las nueve ecuaciones y entonces $|i\rangle, |o\rangle$ no son las únicas soluciones posibles, sino que se les puede dar una fase global y seguirán siendo solución.

Ejercicio 3

Olvida que hemos deducido $|i\rangle$ y $|o\rangle$. Supone la forma original, $|i\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|d\rangle$ y $|o\rangle = \gamma|u\rangle + \delta|d\rangle$, en la que desconocemos a los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

a) **Usa las ecuaciones (**) de las notas para demostrar que** $\alpha\alpha^* = \beta\beta^* = \gamma\gamma^* = \delta\delta^* = \dfrac{1}{2}$

Empezamos notando

$$\langle u|i\rangle = \langle u| \left(\alpha|u\rangle + \beta|d\rangle\right) = \alpha\langle u|u\rangle + \beta\langle u|d\rangle = \alpha(1) + \beta(0) = \alpha$$

Por lo tanto, tenemos que,

$$\langle u|i\rangle\langle i|u\rangle = \langle u|i\rangle\langle u|i\rangle^* = \alpha\alpha^*$$

Pero por uno de los resultados de (**) sabemos que $\langle u|i\rangle\langle i|u\rangle = \dfrac{1}{2}$. Por lo que concluimos que

$$\boxed{\alpha\alpha^* = \frac{1}{2}}$$

Similarmente, tenemos que

$$\langle d|i\rangle = \langle d| \left(\alpha|u\rangle + \beta|d\rangle\right) = \alpha\langle d|u\rangle + \beta\langle d|d\rangle = \alpha(0) + \beta(1) = \beta$$

Por lo tanto, nos queda que,

$$\langle d|i\rangle\langle i|d\rangle = \langle d|i\rangle\langle d|i\rangle^* = \beta\beta^*$$

Pero por uno de los resultados de (**) sabemos que $\langle d|i\rangle\langle i|d\rangle = \dfrac{1}{2}$. Por lo que concluimos que

$$\boxed{\beta\beta^* = \frac{1}{2}}$$

Por otro lado vemos que

$$\langle u|o\rangle = \langle u| \left(\gamma|u\rangle + \delta|d\rangle\right) = \gamma\langle u|u\rangle + \delta\langle u|d\rangle = \gamma(1) + \delta(0) = \gamma$$

Por lo tanto, nos queda que,

$$\langle u|o\rangle\langle o|u\rangle = \langle u|o\rangle\langle u|o\rangle^* = \gamma\gamma^*$$

Pero por uno de los resultados de (**) sabemos que $\langle u|o\rangle\langle o|u\rangle = \dfrac{1}{2}$. Por lo que concluimos que

$$\boxed{\gamma\gamma^* = \frac{1}{2}}$$

Similarmente, tenemos que

$$\langle d|o\rangle = \langle d| \left(\gamma|u\rangle + \delta|d\rangle\right) = \gamma\langle d|u\rangle + \delta\langle d|d\rangle = \gamma(0) + \delta(1) = \delta$$

Por lo tanto, nos queda que,

$$\langle d|o\rangle\langle o|d\rangle = \langle d|o\rangle\langle d|o\rangle^* = \delta\delta^*$$

Pero por uno de los resultados de (**) sabemos que $\langle d|o\rangle\langle o|d\rangle = \frac{1}{2}$. Por lo que concluimos que

$$\boxed{\delta\delta^* = \frac{1}{2}}$$

b) **Usa el resultado anterior y las ecuaciones (***) para demostrar que**

$$\alpha^*\beta + \alpha\beta^* = \gamma^*\delta + \gamma\delta^* = 0$$

Empezamos con la definición de $|r\rangle$ que es $|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$ y usaremos una de las ecuaciones (***) que dice $\langle i|r\rangle\langle r|i\rangle = \frac{1}{2}$. Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \langle i|r\rangle\langle r|i\rangle = (\alpha|u\rangle + \beta|d\rangle)^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^\dagger (\alpha|u\rangle + \beta|d\rangle) \\
&= (\alpha^*\langle u| + \beta^*\langle d|)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle d|\right)(\alpha|u\rangle + \beta|d\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha^*\langle u|u\rangle + \alpha^*\langle u|d\rangle + \beta^*\langle d|u\rangle + \beta^*\langle d|d\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\langle u|u\rangle + \beta\langle u|d\rangle + \alpha\langle d|u\rangle + \beta\langle d|d\rangle\right) \\
&\text{Usamos la ortonormalidad de la base } \{|u\rangle, |d\rangle\} \\
&= \frac{1}{2}(\alpha^* + \beta^*)(\alpha + \beta) \\
&= \frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + \alpha^*\beta + \beta^*\alpha + |\beta|^2\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$1 = |\alpha|^2 + \alpha^*\beta + \beta^*\alpha + |\beta|^2$$

Pero por el resultado del inciso a), sabemos que $|\alpha|^2 = \alpha^*\alpha = \frac{1}{2}$ y que $|\beta|^2 = \beta^*\beta = \frac{1}{2}$, con lo que nos queda que:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2} + \alpha^*\beta + \beta^*\alpha + \frac{1}{2} \\
\Rightarrow\ 1 &= 1 + \alpha^*\beta + \beta^*\alpha \\
\Rightarrow\ &\boxed{\alpha^*\beta + \beta^*\alpha = 0}
\end{aligned}$$

Que es el primer resultado que queríamos demostrar.

Para demostrar el otro resultado, usamos otra de las propiedades (***), que dice $\langle o|r\rangle\langle r|o\rangle = \frac{1}{2}$, por lo que tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \langle o|r\rangle\langle r|o\rangle = (\gamma|u\rangle + \delta|d\rangle)^{\dagger}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)^{\dagger}(\gamma|u\rangle + \delta|d\rangle) \\
&= (\gamma^*\langle u| + \delta^*\langle d|)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle d|\right)(\gamma|u\rangle + \delta|d\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma^*\langle u|u\rangle + \gamma^*\langle u|d\rangle + \delta^*\langle d|u\rangle + \delta^*\langle d|d\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma\langle u|u\rangle + \delta\langle u|d\rangle + \gamma\langle d|u\rangle + \delta\langle d|d\rangle\right) \\
&\text{Usamos la ortonormalidad de la base } \{|u\rangle, |d\rangle\} \\
&= \frac{1}{2}(\gamma^* + \delta^*)(\gamma + \delta) \\
&= \frac{1}{2}\left(|\gamma|^2 + \gamma^*\delta + \delta^*\gamma + |\delta|^2\right)
\end{aligned}
$$

Por tanto concluimos que

$$
1 = |\gamma|^2 + \gamma^*\delta + \delta^*\gamma + |\delta|^2
$$

Pero por el resultado del inciso b), sabemos que $|\gamma|^2 = \gamma^*\gamma = \frac{1}{2}$ y que $|\delta|^2 = \delta^*\delta = \frac{1}{2}$, con lo que nos queda que:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2} + \gamma^*\delta + \delta^*\gamma + \frac{1}{2} \\
\Rightarrow\ 1 &= 1 + \gamma^*\delta + \delta^*\gamma \\
\Rightarrow\ &\boxed{\gamma^*\delta + \delta^*\gamma = 0}
\end{aligned}
$$

c) **Demuestra que $\alpha^*\beta$ y $\gamma^*\delta$ deben ser cada una imaginarios. ¿Qué puedes concluir de esto?**

Primero escribimos α como $\alpha = a_1 + a_2 i$ y β como $\beta = b_1 + b_2 i$. Por lo tanto, usando el resultado del inciso anterior, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha^*\beta + \beta^*\alpha \\
&= (a_1 + a_2 i)^*(b_1 + b_2 i) + (b_1 + b_2 i)^*(a_1 + a_2 i) \\
&= (a_1 - a_2 i)(b_1 + b_2 i) + (b_1 - b_2 i)(a_1 + a_2 i) \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_2 b_1 i + a_1 b_2 i + a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i \\
&= 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto concluimos que $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$.
Luego, tenemos que $\alpha^*\beta$ es igual a:

$$
\begin{aligned}
\alpha^*\beta &= (a_1 + a_2 i)^*(b_1 + b_2 i) \\
&= (a_1 - a_2 i)(b_1 + b_2 i) \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 i - a_2 b_1 i \\
&\text{Usamos ahora el resultado anterior, } a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1) i
\end{aligned}
$$

Que es una cantidad puramente imagninaria.

Exactamente lo mismo se puede hacer para $\gamma^*\delta$ usando el resultado del inciso pasado $\gamma^*\delta + \delta^*\gamma = 0$. Con lo que concluimos también que $\gamma^*\delta$ es una cantidad puramente imaginaria.

Como $\alpha^*\beta$ es puramente imaginario, concluimos que los dos números α, β no pueden ser reales a la vez. Con lo que se concluye que

$$|i\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|d\rangle$$

tiene alguna de sus componentes no reales.

De la misma forma, como $\gamma^*\delta$ es puramente imaginario, los números γ y δ no pueden ser reales a la vez y concluimos que

$$|o\rangle = \gamma|u\rangle + \delta|d\rangle$$

tiene alguna de sus componentes no reales. Es decir, con estos resultamos hemos llegado a la conclusión de que son necesarios vectores con entradas complejas para definir $|i\rangle, |o\rangle$.

Ejercicio 4

Probar que $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ es vector propio de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con valor propio igual a $-i$

Sencillamente aplicamos la matriz M al vector:

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0(1) - 1(i) \\ 1(1) + 0(i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que vemos que el efecto de aplicar M al vector es igual a multiplicar el vector por $-i$. Eso significa que $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ es vector propio de M con valor propio $-i$.

Ejercicio 5

Prueba que si un espacio vectorial tiene N dimensiones, es posible construir una base ortonormal de N vectores que son eigenvectores de un Operador Hermitiano.

Para empezar, denotaremos por H al operador Hermitiano y por V al espacio vectorial.

Sea $|x_1\rangle$ un eigenvector del operador H y λ_1 su eigenvalor correspondiente (es un teorema bien conocido de álgebra lineal que todo operador en un espacio complejo tiene al menos un eigenvalor y eigenvector).

Luego, definimos el subconjunto W_1 de V de vectores que son ortogonales a $|x_1\rangle$, es decir $W_1 = \{|w\rangle \in V \mid \langle w|x_1\rangle = 0\}$.

Ahora veremos que H es un operador sobre W_1, lo que significa que manda elementos de W_1 sobre sí mismo. Es decir, probamos que para todo $|w\rangle \in W_1$, se cumple que $H|w\rangle \in W_1$. Para ello, tenemos que ver que $H|w\rangle$ es ortogonal a $|x_1\rangle$ (y por tanto $H|w\rangle$ pertenece a W_1).

$$\begin{aligned}
\langle Hw|x_1\rangle &= \langle w|H^\dagger x_1\rangle \ \text{ por cómo se define el conjugado hermitiano de un operador} \\
&= \langle w|Hx_1\rangle \ \text{ porque } H \text{ es hermitiano y entonces } H^\dagger = H \\
&= \langle w|\lambda_1 x_1\rangle \ \text{ porque } |x_1\rangle \text{ es eigenvector de } H \\
&= \lambda_1\langle w|x_1\rangle \\
&= \lambda_1(0) \ \text{ porque } w \in W_1 \text{ y entonces } \langle w|x_1\rangle = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $H|w\rangle$ es ortogonal a $|x_1\rangle$ y entonces $H|w\rangle \in W_1$.

Luego, podemos considerar a H como un operador sobre W_1, que es $H : W_1 \to W_1$, ya que acabamos de probar que H toma un elemento de W_1 y lo mapea de vuelta a W_1. Entonces, considerando a H como un operador hermitiano sólo sobre W_1, podemos encontrar ahora un eigenvector de H en W_1, al que le llamamos $|x_2\rangle \in W_1$ y con eigenvalor λ_2 (por el mismo teorema mencionado antes, como H es un operador en W_1, tiene al menos un eigenvalor y eigenvector). Además, por la definición de W_1, como $|x_2\rangle \in W_1$, entonces es ortogonal a $|x_1\rangle$.

Ahora definimos W_2 como el subespacio de W_1 de vectores ortogonales a $|x_2\rangle$. Al igual que como probamos para W_1, se prueba de forma totalmente igual que H manda elementos de W_2 de vuelta a W_2. Luego, H se puede considerar como un operador en W_2 y por lo tanto podemos encontrar un eigenvector $|w_3\rangle \in W_2$ de H y por la definición de W_2, este eigenvector será ortogonal a $|w_2\rangle$ y $|w_1\rangle$.

Podemos continuar así encontrando una secuencia de eigenvectores $|w_k\rangle$ que son todos ortogonales entre sí. Esta secuencia tiene que terminar después de N pasos, ya que con cada paso se reduce en uno la dimensión del espacio vectorial. Al terminar, habremos encontrado un conjunto de N eigenvectores de H que son ortogonales (y por tanto son linealmente independientes y una base de V).

Ejercicio 6

Probar que $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **es solución única a las ecuacoines** $\sigma_z|u\rangle = |u\rangle$ **y** $\sigma_z|d\rangle = -|d\rangle$

Escribamos σ_z matricialmente de forma general como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y veremos que al imponer las dos ecuaciones mencionadas, la matriz debe de tomar necesarimente la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sabemos que el vector $|u\rangle$ se representa por $|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y el vector $|d\rangle$ por $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por lo que las relaciones que debe de cumplir σ_z son:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De donde se concluye que $a = 1, c = 0, b = 0, d = -1$.

Por lo tanto:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, probamos que una matriz que cumpla que $\sigma_z|u\rangle = |u\rangle$ y $\sigma_z|d\rangle = -|d\rangle$, necesariamente debe de tener la forma $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7

Calcular los eigenvectores y eigenvalores de σ_n. Pista: Asumir que el eigenvector λ_1 tiene la forma

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

donde α es un parámetro desconocido. ¿Por qué usamos el único parámetro α?

Para encontrar el valor de α tal que $|\lambda_1\rangle$ es eigenvector de σ_n, le aplicamos σ_n y vemos para qué valor de α se cumple que $\sigma_n|\lambda_1\rangle$ sea múltiplo de $|\lambda_1\rangle$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\\ \sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha\end{pmatrix}\\ &\text{usamos las identidades de suma y resta de ángulos}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\theta-\alpha)\\ \sin(\theta-\alpha)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Para que $\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ sea eigenvector de la matriz, este resultado tiene que ser igual a $\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ multiplicado por un eigenvalor λ. Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta-\alpha)\\ \sin(\theta-\alpha)\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} \qquad \cdots(1)$$

Lo que nos da lugar a dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}\cos(\theta-\alpha) &= \lambda\cos\alpha\\ \sin(\theta-\alpha) &= \lambda\sin\alpha\end{aligned}$$

Dividimos la segunda ecuación por la primera, por lo que nos queda:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\alpha)} &= \frac{\lambda\sin\alpha}{\lambda\cos\alpha}\\ \Rightarrow\ \tan(\theta-\alpha) &= \tan\alpha\end{aligned}$$

Para que se cumpla esta igualdad entre las dos tangentes, hay dos posibilidades. La primera es que los argumentos sean iguales, es decir

1) $\theta-\alpha=\alpha \ \Rightarrow\ \alpha=\theta/2$

La otra posibilidad para que se cumpla la igualdad $\tan(\theta-\alpha)=\tan\alpha$ es que uno de los argumentos se encuentre recorrido por π, es decir:

2) $\theta-\alpha=\alpha-\pi \ \Rightarrow\ \alpha=\dfrac{\theta+\pi}{2}$

Para cada una de estas posibilidades, calculamos ahora sí el eigenvalor y eigenvector:

1) $\alpha=\theta/2$

El eigenvector es entonces $|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}\cos\theta/2\\ \sin\theta/2\end{pmatrix}}$. El eigenvalor se puede conseguir al sustituir en la ecuación (1) y ver cuál es el valor de λ con el que se cumple:

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta-\theta/2)\\ \sin(\theta-\theta/2)\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\cos\theta/2\\ \sin\theta/2\end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}\cos\theta/2\\ \sin\theta/2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\cos\theta/2\\ \sin\theta/2\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el eigenvalor es $\lambda=1$.

b) $\alpha = \dfrac{\theta + \pi}{2}$

El eigenvector es entonces $|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2 + \pi/2) \\ \sin(\theta/2 + \pi/2) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}}$. El eigenvalor se puede conseguir al sustituir en la ecuación (1) y ver cuál es el valor de λ con el que se cumple:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta - (\theta + \pi)/2) \\ \sin(\theta - (\theta + \pi)/2) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\theta/2 + \pi/2) \\ \sin(\theta/2 + \pi/2) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta/2 - \pi/2) \\ \sin(\theta/2 - \pi/2) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\theta/2 + \pi/2) \\ \sin(\theta/2 + \pi/2) \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el eigenvalor es $\lambda = -1$.

Se propone un eigenvector de la forma $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ porque sabemos que los eigenvectores pueden tomarse en particular normalizados. Ya que si tuviéramos en general un eigenvector $|u\rangle$ que no está normalizado, podríamos normalizarlo como $|u\rangle/|u|$ y el resultado sería un eigenvector en la misma dirección pero normalizado. Por lo tanto, solamente es necesario explorar la circunferencia unitaria para encontrar eigenvectores y para hacer esto sólo es necesario un parámetro, que es el ángulo α y se explora así la círcula unitaria al considerar el vector $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$.

Ejercicio 8

Calcular los eigenvectores y eigenvalores de la matriz

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix}$$

Escribimos el vector $\hat{n}$ en coordenadas esféricas, que es $n_x = \sin\theta\cos\phi$, $n_y = \sin\theta\sin\phi$, $n_z = \cos\theta$, por lo que la matriz es:

$$\begin{aligned}
\sigma_n = \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\cos\phi - i\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi + i\sin\theta\sin\phi & -\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta(\cos\phi - i\sin\phi) \\ \sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi) & -\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ahora calculamos sus eigenvalores, para hacerlo, obtenemos el polinomio característico primero:

$$\begin{aligned}
\det(\sigma_n - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta - \lambda \end{pmatrix} \right| &= (\cos\theta - \lambda)(-\cos\theta - \lambda) - \sin^2\theta \\
&= -\cos^2\theta + \lambda^2 - \sin^2\theta = \lambda^2 - 1
\end{aligned}$$

Luego, necesitamos las raíces de este polinomio, que son los valores de λ para los cuales $\lambda^2 - 1$ vale 0. Por lo tanto, tenemos que los eigenvalores son $\boxed{\lambda_1 = 1}$ y $\boxed{\lambda_2 = -1}$.

Calculamos ahora el eigenvector para cada eigenvalor.

- $\lambda_1 = 1$

  El eigenvector es un vector $|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ con a y b complejos, tal que $\sigma_n|\lambda_1\rangle = \lambda_1|\lambda_1\rangle$, es decir:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} a\cos\theta + b\sin\theta e^{-i\phi} \\ a\sin\theta e^{i\phi} - b\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a\cos\theta + b\sin\theta e^{-i\phi} - a \\ a\sin\theta e^{i\phi} - b\cos\theta - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  Lo que nos da lugar a dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a\cos\theta + b\sin\theta e^{-i\phi} - a = 0 \\
a\sin\theta e^{i\phi} - b\cos\theta - b = 0
\end{aligned}$$

  En la primera ecuación despejamos a, con lo que tenemos $a = \dfrac{b\sin\theta e^{-i\phi}}{1 - \cos\theta}$. Por lo tanto, ya tenemos la relación que debe de tener a y b para que $|\lambda_1\rangle$ sea un eigenvector de σ_n con eigenvalor $\lambda_1 = 1$. No se puede terminar de resolver el sistema de ecuaciones, ya que son linealmente dependientes y a lo mucho se puede escoger el valor de b y a partir de éste encontrar el valor de a. Esto tiene sentido, pues en vez de haber sólo un eigenvector, hay todo un espacio unidimensional de eigenvectores con eigenvalor λ_1.

  Por lo tanto, si escogemos en particular $b = (1 - \cos\theta)$, entonces $a = \dfrac{(1 - \cos\theta)\sin\theta e^{-i\phi}}{1 - \cos\theta} = \sin\theta e^{-i\phi}$ y por lo tanto el eigenvector es:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta e^{-i\phi} \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$$

Si en particular queremos que el eigenvector sea unitario, dividimos entre la norma $\sqrt{|\sin\theta e^{-i\phi}|^2 + |(1-\cos\theta)|^2} = \sqrt{\sin^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta} = \sqrt{2-2\cos\theta} = 2\sin\frac{\theta}{2}$ y entonces tenemos que (usando algunas identidades trigonométricas):

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\sin\theta e^{-i\phi}\\ 1-\cos\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\\ 2\sin^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}}$$

- $\lambda_2 = -1$:

  El eigenvector es un vector $|\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ con a y b complejos, tal que $\sigma_n|\lambda_2\rangle = \lambda_2|\lambda_2\rangle$, es decir:

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi}\\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a\cos\theta + b\sin\theta e^{-i\phi}\\ a\sin\theta e^{i\phi} - b\cos\theta\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a\cos\theta + b\sin\theta e^{-i\phi} + a\\ a\sin\theta e^{i\phi} - b\cos\theta + b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

  Lo que nos da lugar a dos ecuaciones:

$$a\cos\theta + b\sin\theta e^{-i\phi} + a = 0$$
$$a\sin\theta e^{i\phi} - b\cos\theta + b = 0$$

  En la primera ecuación despejamos a, con lo que tenemos $a = -\frac{b\sin\theta e^{-i\phi}}{1+\cos\theta}$. Por lo tanto, ya tenemos la relación que debe de tener a y b para que $|\lambda_2\rangle$ sea un eigenvector de σ_n con eigenvalor $\lambda_2 = -1$. No se puede terminar de resolver el sistema de ecuaciones, ya que son linealmente dependientes y a lo mucho se puede escoger el valor de b y a partir de éste encontrar el valor de a. Esto tiene sentido, pues en vez de haber sólo un eigenvector, hay todo un espacio unidimensional de eigenvectores con eigenvalor λ_2.

  Por lo tanto, si escogemos en particular $b = -(1+\cos\theta)$, entonces $a = -\frac{-(1+\cos\theta)\sin\theta e^{-i\phi}}{1+\cos\theta} = \sin\theta e^{-i\phi}$ y por lo tanto el eigenvector es:

$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta e^{-i\phi}\\ -1-\cos\theta\end{pmatrix}$$

  Si en particular queremos que el eigenvector sea unitario, dividimos entre la norma $\sqrt{|\sin\theta e^{-i\phi}|^2 + |-1-\cos\theta|^2} = \sqrt{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta} = \sqrt{2+2\cos\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}$ y entonces tenemos que (usando algunas identidades trigonométricas):

$$|\lambda_2\rangle = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\sin\theta e^{-i\phi}\\ -1-\cos\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\\ -2\cos^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\\ -\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}}$$

Ahora supón que se tiene un espín preparado en $|u\rangle$ y se mide σ_n para alguna dirección $\hat{n}$, ¿cuál es la probabilidad de obtener cada resultado?

En este caso, el espín inicial es $|u\rangle$ y sabemos que al medir σ_n obtendremos como resultado alguno de sus eigenvalores, que son $\lambda_1 = 1$ o $\lambda_2 = -1$. Para saber la probabilidad de cada resultado, obtenemos la norma cuadrada de la proyección de $|u\rangle$ sobre cada uno de los eigenvectores correspondientes.

$$P(\sigma_n = 1) = |\langle u|\lambda_1\rangle = \left|\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\right|^2 = \left|\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right| = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$P(\sigma_n = -1) = |\langle u|\lambda_2\rangle = \left|\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ -\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\right|^2 = \left|\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right| = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

Por lo tanto, el valor esperado del operador σ_n es:

$$\langle\sigma_n\rangle = \sum_i \lambda_i P(\sigma_n = \lambda_i) = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$

Ejercicio 9

Probar que si U es unitaria y $|A\rangle$, $|B\rangle$ son vectores de estado, entonces el producto interno de $U|A\rangle$ y $U|B\rangle$ es el mismo que el de $|A\rangle$ y $|B\rangle$.

Sencillamente calculamos el producto interno de $U|A\rangle$ con $U|B\rangle$. Para ello, necesitamos el bra asociado a $U|A\rangle$, el cual sabemos que es $\langle A|U^\dagger$. Por lo tanto, el producto punto de $U|A\rangle$ con $U|B\rangle$ es:

$$(\langle A|U^\dagger)U|B\rangle = \langle A|U^\dagger U|B\rangle$$

Y ahora usamos que por definición de matriz unitaria, U cumple que $U^\dagger U = I$ y nos queda:

$$\begin{aligned}\langle A|U^\dagger U|B\rangle &= \langle A|I|B\rangle \\ &= \langle A|B\rangle\end{aligned}$$

Con lo que hemos probado que el producto interno de $U|A\rangle$ y $U|B\rangle$ es el mismo que el de $|A\rangle$ y $|B\rangle$.

Ejercicio 10

Probar que si M y L son hermitianos, entonces $i[M, L]$ también es hermitiano.

Para probar que $i[M, L]$ es hermitiano, simplemente hay que conjugarlo y ver que el resultado es igual a sí mismo:

$$
\begin{aligned}
(i[M, L])^\dagger &= (iML - iLM)^\dagger \quad \text{por la definición de conmutador} \\
&= -i(ML)^\dagger - (-i)(LM)^\dagger \\
&= -iL^\dagger M^\dagger + iM^\dagger L^\dagger \quad \text{donde usamos la propiedad del conjugado } (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \\
&= -iLM + iML \quad \text{donde usamos que } M \text{ y } L \text{ son hermitianas, por lo que } M^\dagger = M,\ L^\dagger = L \\
&= i(ML - LM) \\
&= i[M, L]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, hemos probado que $(i[M, L])^\dagger = i[M, L]$. Lo que significa que $i[M, L]$ es hermitiano.

Ejercicio 10

Prueba, que si $[Q, H] = 0$, entonces $[Q^n, H] = 0$ para cualquier n.

Suponiendo que $[Q, H] = 0$, probaremos que $[Q^n, H] = 0$ para todo n por inducción sobre n:

- Caso Base ($n = 1$): Este caso es la hipótesis del enunciado, que dice que $[Q, H] = 0$
- Hipótesis Inductiva: Suponemos ahora que se cumple que $[Q^n, H] = 0$ para algún valor de $n \in \mathbb{N}$
- Paso Inductivo: Ahora buscamos demostrar que $[Q^{n+1}, H] = 0$. Para hacerlo, empezamos considerando $[Q^{n+1}, H]$ y desarrollamos como sigue:

$$\begin{aligned}
[Q^{n+1}, H] &= [Q^{n+1}, H] \\
&= Q^{n+1}H - HQ^{n+1} \quad \text{Por cómo se define el conmutador} \\
&= QQ^nH - HQQ^n \quad \text{Donde escribimos } Q^{n+1} \text{ como } QQ^n \\
&= QHQ^n - HQQ^n \quad \text{Usando la hipótesis inductiva, } Q^nH = HQ^n \\
&= QHQ^n - QHQ^n \quad \text{Usando el caso base, } HQ = QH \\
&= 0
\end{aligned}$$

  Con lo que hemos probado que $[Q^{n+1}, H] = 0$

Por lo tanto, por inducción hemos demostrado que $[Q^n, H] = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 11

Verificar que los conmutadores del espín resultan en los siguientes valores.

$$
\begin{aligned}
[\sigma_x, \sigma_y] &= 2i\sigma_z \\
[\sigma_y, \sigma_z] &= 2i\sigma_x \\
[\sigma_x, \sigma_z] &= 2i\sigma_y
\end{aligned}
$$

Para hacerlo, directamente usamos las expresiones de las matrices de Pauli y calculamos los conmutadores a mano. Las matrices de Pauli son:

$$
\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
[\sigma_x, \sigma_y] &:= \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \\
&= 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{2i\sigma_z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\sigma_y, \sigma_z] &:= \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{2i\sigma_x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\sigma_x, \sigma_z] &:= \sigma_x \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2i \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{2i\sigma_y}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 12

Aplica la receta anterior para resolver el ket de Schrodinger para un espín. El hamiltoniano es $H = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$ y el observable final es σ_x. El estado inicial es $|u\rangle$.

Después de un tiempo t se requiere hacer una medición de σ_y. ¿Cuáles son los posibles resultados y sus probabilidades?

Seguimos los pasos descritos para obtener la dependencia del estado respecto al tiempo.

1. Nos están dando el hamiltoniano:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

2. El estado inicial es

$$|\Psi(0)\rangle = |u\rangle = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$$

3. Encontramos los eigenvectores y eigenvalores de H. Esto es fácil de hacer, pues H es un múltiplo de σ_z y entonces tiene los mismos eigenvectores pero con eigenvalores multiplicados por $\frac{\hbar\omega}{2}$. Mostramos esto a continuación:

$|E_1\rangle = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$ es eigenvector de H con eigenvalor $E_1 = \frac{\hbar\omega}{2}$, pues se cumple que:

$$H\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$$

$|E_2\rangle = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$ es eigenvector de H con eigenvalor $E_2 = -\frac{\hbar\omega}{2}$, pues se cumple que:

$$H\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = -\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$$

4. Calcular los coeficientes iniciales $a_1(0)$ y $a_2(0)$ del estado $|\psi(0)\rangle$ en la base de eigenvectores de H.

Calculamos el coeficiente respecto a $|E_1\rangle$:

$$a_1(0) = \langle E_1|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = 1$$

Y ahora calculamos el coeficiente respecto a $|E_2\rangle$:

$$a_2(0) = \langle E_2|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = 0$$

5. Escribimos $|\Psi(0)\rangle$ en la base de eigenvectores de H. Podemos hacer esto directamente porque ya encontramos los coeficientes a_1, a_2 antes:

$$\begin{aligned}|\Psi(0)\rangle &= \sum_j a_j(0)|E_j\rangle \\ &= a_1(0)|E_1\rangle + a_2(0)|E_2\rangle \\ &= 1|E_1\rangle + 0|E_2\rangle \\ &= |E_1\rangle\end{aligned}$$

- En la ecuación de arriba, reemplazar cada $a_j(0)$ por $a_j(t) = a_j(0)e^{-i/\hbar E_j t}$ y así tenemos $|\Psi(t)\rangle$. Nos queda entonces que:

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= \alpha_1(t)|E_1\rangle \\
&= \alpha_1(0)e^{-i/\hbar E_1 t}|E_1\rangle \\
&= e^{-i/\hbar E_1 t}|E_1\rangle
\end{aligned}$$

Finalmente sustituimos el valor de $E_1 = \dfrac{\hbar\omega}{2}$, con lo que nos queda:

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= e^{-i/\hbar(\hbar\omega/2)t}|E_1\rangle \\
&= e^{-i\frac{\omega}{2}t}|E_1\rangle \\
&= \boxed{e^{-i\frac{\omega}{2}t}|u\rangle}
\end{aligned}$$

Donde usamos que $|E_1\rangle = |u\rangle$.

Vemos que el resultado es que $|\Psi(t)\rangle$ es siempre un múltiplo de $|u\rangle$. Esto tiene sentido porque el estado inicial es justamente $|u\rangle$, que es un eigenvector de H y los eigenvectores del hamiltoniano no evolucionan con el tiempo excepto por una fase global.

Después de un tiempo t se requiere hacer una medición de σ_y. ¿cuáles son los posibles resultados y sus probabilidades?

Sabemos que el operador σ_y tiene como eigenvectores normalizados a $|\lambda_1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$ y $|\lambda_2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$ con eigenvalores de 1 y -1 respectivamente. Esto significa que los resultados de medir σ_y son 1 o -1 y sus probabilidades se consiguen con la norma cuadrada de la proyección de $|\Psi(t)\rangle$ sobre $|\lambda_1\rangle, |\lambda_2\rangle$.

La probabilidad de obtener como resultado 1 es:

$$\begin{aligned}
P(1) = |\langle\lambda_1|\Psi(t)\rangle|^2 &= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix} e^{-i\frac{\omega}{2}t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2 \\
&= \left|\frac{e^{-i\frac{\omega}{2}t}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2 \\
&= \left|\frac{e^{-i\frac{\omega}{2}t}}{\sqrt{2}}(1)\right|^2 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Mientras que la probabilidad de obtener como resultado -1 es:

$$\begin{aligned}
P(-1) = |\langle\lambda_2|\Psi(t)\rangle|^2 &= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix} e^{-i\frac{\omega}{2}t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2 \\
&= \left|\frac{e^{-i\frac{\omega}{2}t}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2 \\
&= \left|\frac{e^{-i\frac{\omega}{2}t}}{\sqrt{2}}(1)\right|^2 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo tiempo hay una probabilidad 1/2 de obtener $\sigma_y = 1$ al medir $|\Psi(t)\rangle$ y también probabilidad 1/2 de obtener $\sigma_y = -1$.

$|\Psi\rangle \neq |a\rangle|b\rangle$

$|\Psi_{bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$

$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$

$\pi^0 \to e^- + e^+$

Lo que buscamos calcular es:

$$P(a,b) = \langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle$$

Podemos suponer que $\vec{a}$ está en el eje z y $\vec{b}$ en el plano xz, por lo que $S_a^{(1)} = S_z^{(1)}$ y $S_b^{(2)} = \cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(a,b) &= \langle S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)}) \rangle \\ &= \langle \Psi | S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)}) |\Psi\rangle \end{aligned}$$

Usamos que $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$ y que $S_z \uparrow = \uparrow$, $S_z \downarrow = -\downarrow$, $S_x \uparrow = \downarrow$, $S_x \downarrow = \uparrow$ para calcular $S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)})|\Psi\rangle$:

$$\begin{aligned} &S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)})|\Psi\rangle \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{2}} S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)})|\downarrow\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)})|\uparrow\downarrow\rangle \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\downarrow) \otimes (\cos\theta \uparrow + \sin\theta \downarrow) - \frac{1}{\sqrt{2}} \uparrow \otimes (\cos\theta(-\downarrow) + \sin\theta \uparrow) \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\cos\theta \downarrow\uparrow - \sin\theta \downarrow\downarrow + \cos\theta \uparrow\downarrow - \sin\theta \uparrow\uparrow\right] \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\cos\theta(\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow) - \sin\theta(\downarrow\downarrow + \uparrow\uparrow)\right] \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\cos\theta\sqrt{2}|\Psi\rangle - \sin\theta(\downarrow\downarrow + \uparrow\uparrow)\right] \end{aligned}$$

Luego, calculando el producto con $\langle\Psi|$, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(a,b) &= \langle \Psi | S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)}) |\Psi\rangle \\ &= \langle\Psi| \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\cos\theta\sqrt{2}|\Psi\rangle - \sin\theta(\downarrow\downarrow + \uparrow\uparrow)\right] \\ &= -\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(a,b) &= \frac{1}{2}\left(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\right) |S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)})| (\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow) \\ &= \frac{1}{2}\left(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\right) \Big| S_z^{(1)} \downarrow \otimes \cos\theta S_z^{(2)} \uparrow + \sin\theta S_x^{(2)} \uparrow + \frac{1}{2}\left(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\right) \Big| S_z^{(1)} \uparrow \otimes \cos\theta S_z^{(2)} \downarrow + \sin\theta S_x^{(2)} \downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(a,b) &= \langle \Psi | S_z^{(1)} \otimes (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)}) |\Psi\rangle \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\cos\theta} \end{aligned}$$

$$P(\vec{a},\vec{b}) = \int \rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)d\lambda$$

$-P(\vec{a},\vec{b}) = \int \rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)B(\vec{a},\lambda)d\lambda$

Luego, si $\vec{c}$ es cualquier otro vector, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}) &= -\int \rho(\lambda)[A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda) - A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]d\lambda \\ &= -\int \rho(\lambda)[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)d\lambda \quad \text{Porque } A(\vec{b},\lambda)^2 = 1 \end{aligned}$$

Si saco valor absoluto de ambos lados, queda que:

$$|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})| = \left| -\int \rho(\lambda)[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)d\lambda \right| \leq \int |\rho(\lambda)[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]| \, |A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)|d\lambda$$

Pero como $|A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)| = 1$ y también $\rho(\lambda)[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)] \geq 0$, entonces:

$$|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})| \leq \int \rho(\lambda)[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]d\lambda$$

Entonces:

$$|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b},\vec{c})$$