

# Tarea 4

## Física Nuclear y Subnuclear

Tomás Ricardo Basile Álvarez  
316617194

May 8, 2022

### Problema 1. Wavelength

La difracción de Fraunhofer sobre un disco circular de diámetro  $D$  produce un patrón de difracción en forma de anillo. El primer mínimo aparece en  $\theta = 120\lambda/D$ . Calcule la separación angular de los mínimos de difracción de las partículas  $\alpha$  con energías  $E_{kin} = 100MeV$  dispersada en un núcleo  $Fe^{56}$ . El núcleo debe considerarse como un disco impenetrable.

Por lo que dice el enunciado, vamos a interpretar el problema como si se tratara de uno de difracción. Las partículas  $\alpha$  van hacia el núcleo de hierro y suponemos que el núcleo es un disco impenetrable, por lo que las partículas que van en dirección directa al núcleo no son consideradas. El resto de las partículas son dispersadas elásticamente con cierto ángulo.

Esta situación es semejante a iluminar con luz un disco que absorbe toda la luz incidente y crea patrones de difracción debido a la luz que no es absorbida. La única diferencia es que se tienen partículas  $\alpha$  en vez de luz. Para completar la similitud con el problema de luz, hay que usar la longitud de onda de de Broglie de las partículas  $\alpha$ , que es  $\lambda = h/p$ , para poder hacerles el mismo análisis que se haría con luz que forma un patrón de difracción al incidir sobre un disco de diámetro  $D$ .

Como dice el enunciado, el primer mínimo de ángulo en el patrón de difracción por un disco se encuentra en

$$\theta_{min} = 1.22\lambda/D \quad (1)$$

Queremos calcular este ángulo, para lo cual hay que calcular cada uno de los términos faltantes en la ecuación (1):

- $D$ : Este valor es el diámetro del núcleo de hierro. Como vimos en clase, el radio de un núcleo se puede aproximar como  $R = r_0 A^{1/3}$ , donde  $r_0 = 1.3 \times 10^{-15}m$  [1]. Entonces, el diámetro es dos veces este valor:

$$\begin{aligned} D &= 2R = 2r_0 A^{1/3} \\ &= 2(1.3 \times 10^{-15}m)(56)^{1/3} \\ &= 9.947 fm \end{aligned}$$

- $\lambda$ : Para calcular la longitud de onda de de Broglie, usamos que ésta se define como  $\lambda = h/p_{\alpha cm}$ . El problema es que el momento  $p_{\alpha cm}$  de las partículas  $\alpha$  se entiende como el que tienen en el marco de centro de masa [8], por lo que hay que convertir la información que nos dan al marco de centro de masa.

Para hacer esta conversión, usaremos que si  $\gamma_\alpha$  es el factor de Lorentz de las partículas alpha en el

marco de laboratorio, entonces  $\gamma_{\alpha \text{ cm}}$  (el factor en el marco de CM) es (ecuación 14.122a de [9]):

$$\gamma_{\alpha \text{ cm}} = \frac{\gamma_{\alpha} + \frac{m_{\alpha}}{m_{Fe}}}{\sqrt{1 + 2\gamma_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{m_{Fe}} + \frac{m_{\alpha}^2}{m_{Fe}^2}}},$$

donde  $m_{\alpha}$  es la masa de la partícula  $\alpha$  y  $m_{Fe}$  la del hierro. En el problema no nos dan  $\gamma_{\alpha}$ , pero nos dan la energía cinética de las partículas  $\alpha$  en el marco de laboratorio, por lo que podemos usar que esta energía cinética se relaciona con  $\gamma_{\alpha}$  como [9]:  $E_{kin} = (\gamma_{\alpha} - 1)m_{\alpha}c^2$  y entonces  $\gamma_{\alpha} = \frac{E_{kin}}{m_{\alpha}c^2} + 1$ . Por lo tanto, la ecuación anterior queda como:

$$\gamma_{\alpha \text{ cm}} = \frac{\frac{E_{kin}}{m_{\alpha}c^2} + 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{Fe}}}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{E_{kin}}{m_{\alpha}c^2} + 1\right) \frac{m_{\alpha}}{m_{Fe}} + \frac{m_{\alpha}^2}{m_{Fe}^2}}}$$

Si sustituimos la energía cinética  $E_{kin} = 100 \text{ MeV}$  y las masas (obtenidas de [3])  $m_{\alpha} = 3.727 \text{ GeV}/c^2$ ,  $m_{Fe} = 52.4 \text{ GeV}/c^2$ , se obtiene que:

```

c = 2.99792 * 10^8;
Ekin = 100 * 10^6;
malpha = 3.72737 * 10^9 / c^2;
mfe = 52.4 * 10^9 / c^2;
|
gammacm = (Ekin / (malpha * c^2) + 1 + malpha / mfe) /
  Sqrt[1 + 2 * (Ekin / (malpha * c^2) + 1) * malpha / mfe +
    malpha^2 / mfe^2]
Out[139]= 1.02335

```

Figure 1: Cálculo de  $\gamma_{\alpha \text{ cm}}$  en Mathematica.

$$\Rightarrow \gamma_{\alpha \text{ cm}} = 1.02335$$

Luego, una vez que tenemos el factor  $\gamma_{\alpha \text{ cm}}$ , podemos calcular el momento en el centro de masa usando su definición relativista  $p_{\alpha \text{ cm}} = \gamma_{\alpha \text{ cm}} m_{\alpha} \beta_{\alpha \text{ cm}} c$  (donde  $\beta_{\alpha \text{ cm}}$  es  $\sqrt{1 - 1/\gamma_{\alpha \text{ cm}}^2}$ ). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_{\alpha \text{ cm}} &= \gamma_{\alpha \text{ cm}} m_{\alpha} \sqrt{1 - 1/\gamma_{\alpha \text{ cm}}^2} c \\ &= 1.02335 (3.727 \times 10^9 \text{ eV}/c^2) \sqrt{1 - 1/1.02335^2} * c \\ &= 8.201 \times 10^8 \text{ eV}/c \end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud de onda de de Broglie de las partículas  $\alpha$  en el centro de masa es de:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p_{\alpha \text{ cm}}} = \frac{4.13567 \times 10^{-15} \text{ eV s}}{8.201 \times 10^8 \text{ eV}/c} \\ &= 1.51 \times 10^{-15} \text{ m} \\ &= 1.51 \text{ fm} \end{aligned}$$

Ya teniendo  $\lambda$  y  $D$ , los sustituimos en la ecuación (1) para obtener el valor del primer ángulo en el patrón de difracción:

$$\begin{aligned} \theta_{min} &= 1.22 \lambda / D \\ &= 1.22 (1.51 \text{ fm} / 9.947 \text{ fm}) \simeq 0.19 \text{ radianes} \simeq 10.6^\circ \end{aligned}$$

Sin embargo, éste es el ángulo en el que se encuentra el mínimo según el marco de centro de masa, pero no el marco del laboratorio. Para convertir al marco de laboratorio, hay que usar la ecuación 14.128 de [9], que dice que si el ángulo de dispersión en el CM es  $\theta$ , entonces el ángulo en el laboratorio (que denotamos por  $\psi$ ) es:

$$\psi = \arctan \left[ \frac{1}{\gamma_{Fe\ cm}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_{\alpha} \gamma_{\alpha\ cm} / m_{Fe} \gamma_{Fe\ cm}} \right],$$

donde  $\gamma_{\alpha\ cm}$  es el factor de Lorentz de las partículas alpha en el CM, que ya calculamos y vale 1.02335, mientras que  $\gamma_{Fe\ cm}$  es el de el blanco de hierro en el CM, el cual se puede obtener a partir del factor de las partículas alpha en el laboratorio  $\gamma_{\alpha}$  con la ecuación 14.122b de [9]:

$$\gamma_{Fe\ cm} = \frac{\gamma_{\alpha} + \frac{m_{Fe}}{m_{\alpha}}}{\sqrt{1 + 2\gamma_{\alpha} \frac{m_{Fe}}{m_{\alpha}} + \frac{m_{Fe}^2}{m_{\alpha}^2}}}$$

Si sustituimos aquí que, como se vio antes,  $\gamma_{\alpha} = \frac{E_{kin}}{m_{\alpha} c^2} + 1$ , podemos calcular  $\gamma_{Fe\ cm}$  y a partir de eso calcular  $\psi$ , como se muestra en el siguiente cálculo hecho en Mathematica:

```
In[189]:= c = 2.99792*10^8;
Ekin = 100*10^6;
malpha = 3.72737*10^9 / c^2;
mfe = 52.4*10^9 / c^2;
gamma = Ekin / (malpha*c^2) + 1;
gammacm = 1.02335;
theta = 10.6*Pi / 180;

gammaFecm = (gamma + mfe / malpha) /
  Sqrt[1 + 2*gamma*mfe / malpha + mfe^2 / malpha^2];

psi =
  ArcTan[
    1 / gammaFecm * Sin[theta] / (Cos[theta] + malpha * gammacm / (mfe * gammaFecm)) ] *
    180 / Pi

Out[197]:= 9.88297
```

Por lo tanto, concluimos que el ángulo en el que se encuentra el primer mínimo (en el marco de referencia del laboratorio) y por lo tanto, la separación angular entre los mínimos es:

$$\boxed{\simeq 9.88^{\circ}}$$

## Problema 2. Niveles de energía y secciones eficaces.

El núcleo de  $Li^5$  presenta una resonancia en la dispersión elástica de protones con  $He^4$ , con energía de  $2MeV$ . La resonancia tiene una anchura de  $0.5MeV$  y  $g = 2$ . Estimar la sección eficaz para esa energía de resonancia.

Como dice el ejercicio, cuando protones inciden sobre  $He^4$ , se produce un núcleo de  $Li^5$  con una resonancia de  $2MeV$ , anchura de  $0.5MeV$  y  $g = 2$ . La sección eficaz para reacciones con resonancias como ésta se obtiene usando la fórmula de Breit-Wigner, que es [1]:

$$\sigma(E) = \sigma_{max} \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}, \quad (1)$$

donde  $\Gamma$  es el ancho de la resonancia y  $E_R$  es la energía que tiene. Además, el factor  $\sigma_{max}$  de resonancia máxima se obtiene como [1]:

$$\sigma_{max} = 4\pi\lambda^2 g, \quad (2)$$

donde  $g$  es un factor que depende de los espines de las partículas involucradas (pero en este caso nos dicen directamente que es  $g = 2$ ) y  $\lambda = \lambda/2\pi$  con  $\lambda$  la longitud de onda de de-Broglie en el marco de referencia de centro de masa.

Como el problema nos pide la sección eficaz para la energía de resonancia, necesitamos calcular  $\sigma(E_R)$ , que según (1), es igual a:

$$\sigma(E_R) = \sigma_{max} \frac{\Gamma^2/4}{(E_R - E_R)^2 + \Gamma^2/4} = \sigma_{max} \frac{\Gamma^2/4}{\Gamma^2/4} = \sigma_{max}$$

Y por la expresión (2), esto es igual a:

$$\begin{aligned} \sigma(E_R) &= \sigma_{max} = 4\pi\lambda^2 g \\ &= 8\pi\lambda^2 \quad \text{usando que } g = 2 \\ &= 8\pi \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \\ &= \frac{2\lambda^2}{\pi} \quad (3) \end{aligned}$$

Para usar esta fórmula, necesitamos calcular  $\lambda$ , la longitud de onda de de-Broglie, que es  $\lambda = h/p$ , donde  $p$  es el momento del haz en el marco de centro de masa.

Vamos a calcular la velocidad de los protones en el marco de centro de masa para así luego poder obtener el momento  $p$  del haz en este marco. Respecto al marco de laboratorio (en el cual el protón se mueve a velocidad  $v_p$  y el núcleo está quieto), el centro de masa tiene una velocidad de (ecuación 5.56 de [2])  $u = \frac{m_p v_p + M_N v_N}{m_p + M_N}$ , donde  $m_p, v_p$  son la masa y velocidad del protón y  $M_N$  y  $v_N$  las del núcleo de Helio (en el marco de laboratorio).

En el marco de referencia de laboratorio,  $v_N = 0$  y por tanto la velocidad del centro de masa es  $u = \frac{m_p v_p}{m_p + M_N}$ .

Por lo tanto, la velocidad de los protones en el marco de CM es  $v_{p\,cm} = v_p - u = v_p - \frac{m_p v_p}{m_p + M_N} = \frac{M_N v_p}{m_p + M_N}$ .

Como la energía cinética  $2MeV$  de los protones es mucho menor a la energía debido a su masa (que es  $938.272MeV/c^2$ ), entonces el problema se puede aproximar usando mecánica clásica y no hace falta usar ecuaciones relativistas. Luego, el momento de los protones en el centro de masa es simplemente

$$p = m_p v_{p\,cm} = \frac{m_p M_N v_p}{m_p + M_N} = \mu v_p \quad (\text{donde } \mu \text{ es la masa reducida } \frac{m_p M_N}{m_p + M_N}).$$

Con esta expresión para el momento del haz respecto al CM, nos queda que la sección eficaz que queremos calcular (a partir de la ecuación (3)) es:

$$\begin{aligned}
\sigma(E_R) &= \frac{2\lambda^2}{\pi} \\
&= \frac{2h^2}{\pi p^2} \quad \text{donde sustituimos } \lambda = h/p \\
&= \frac{2h^2}{\pi \mu^2 v_p^2} \quad \text{donde sustituimos la expresión de } p \text{ encontrada antes} \\
&= \frac{2h^2}{\pi \mu^2 (2E_{kin}/\mu)} \quad \text{ya que la velocidad del protón en el CM se relaciona con la energía como } E_{kin} = \frac{1}{2}\mu v_p^2 \Rightarrow v_p^2 = 2E_{kin}/\mu \\
&= \frac{h^2}{\pi \mu E_{kin}}
\end{aligned}$$

Ya solamente falta sustituir las masas y la energía. La masa del helio es  $M_N = 4.0026u$  [3] y la del protón es  $m_p = 1.00727u$  [4], por lo que la masa reducida es  $\mu = \frac{m_p M_N}{m_p + M_N} = \frac{(1.00727u)(4.0026u)}{1.00727u + 4.0026u} = 0.804751u$ . Según el problema, la energía cinética es  $E_{kin} = 2 \times 10^6 eV$ , por lo que nos queda que la sección eficaz en  $E_R$  es de:

$$\begin{aligned}
\sigma(E_R) &= \frac{h^2}{\pi \mu E_{kin}} \\
&= \frac{(6.62607015 \times 10^{-34} J/s)^2}{\pi (0.804751u)(2 \times 10^6 eV)}
\end{aligned}$$

Calculando esto y usando que  $u = 1.66054 \times 10^{-27} kg$ ,  $1eV = 1.60218 \times 10^{-19} J$ , nos queda que:

$$\sigma(E_R) = 3.26371 \times 10^{-28} m^2 = \boxed{3.26371 \text{ barn}}$$

---

### Problema 3. Sección transversal total

La sección transversal total (elástica + inelástica) protón - neutrón en el centro de masa del momento  $p = 10\text{GeV}/c$  es  $\sigma = 40\text{mb}$ .

Inciso a)

Sin tener en cuenta el giro del nucleón, establezca un límite inferior en la sección transversal diferencial delantera elástica del centro de masa protón-neutrón.

En la referencia [7] se estudian este tipo de problemas de dispersión con un método que usa modelos ópticos en el que se supone que la partícula entrante se describe por una onda plana y al chocar con el blanco genera una onda esférica que representa a la dispersión. Según la ecuación 6.371 de [7], se tiene la siguiente relación:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\theta} = |F(\theta)|^2,$$

donde  $\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\theta}$  es la sección eficaz diferencial elástica medida a un ángulo  $\theta$  y  $F(\theta)$  se denomina la amplitud de dispersión, que en el modelo de ondas mencionado antes, corresponde con la amplitud de la onda esférica de dispersión. En particular, como nos interesa la sección eficaz diferencial elástica delantera, quiere decir que la estamos midiendo a un ángulo de  $\theta = 0^\circ$ , por lo que tenemos que la cantidad que buscamos es:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_0 = |F(0)|^2 \quad (1)$$

Queremos establecer un límite inferior para esta cantidad, para lo cual es necesario conocer un poco más del término  $|F(0)|^2$ . Resulta que hay un resultado importante conocido como el “teorema óptico” que relaciona la parte imaginaria de  $F(0)$  con la sección transversal total (ecuación 6.372 de [7]) y dice que:

$$\text{Im}(F(0)) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot}, \quad (2)$$

donde  $k$  es el número de onda de de Broglie para el proceso. Entonces, a partir de (1) y (2) podemos encontrar una cota inferior para la sección transversal diferencial delantera elástica  $\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_0$  como sigue:

Partimos de la ecuación (1) :

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{0^\circ} = |F(0)|^2$$

Usamos que la norma cuadrada de un número es mayor al cuadrado de su parte imaginaria

$$\geq |\text{Im}(F(0))|^2$$

Usamos ahora la ecuación (2)

$$= \left( \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot} \right)^2$$

Por lo que concluimos que:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{0^\circ} \geq \left( \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot} \right)^2$$

Sólo hace falta sustituir los datos. El problema nos dice que la sección eficaz total es de  $\sigma_{tot} = 40\text{mb} = 40 \times 10^{-27}\text{m}^2$ . Por otro lado, para el número de onda de de Broglie podemos usar que ésta se define como

---

$k = p/\hbar$  con  $p$  el momento en el centro de masa. Por lo tanto, nos queda que la sección transversal delantera elástica es mayor o igual a:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{0^\circ} &\geq \left( \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot} \right)^2 = \left( \frac{p}{4\pi\hbar} \sigma_{tot} \right)^2 \\
 &= \left( \frac{10 \times 10^9 \text{ eV}/c}{4\pi(6.582119569 \times 10^{-16}) \text{ eVs}} 40 \times 10^{-27} \text{ m}^2 \right)^2 \\
 &= 2.6021 \times 10^{-20} \text{ m}^2 \\
 &= \boxed{2.6021 \text{ barn}}
 \end{aligned}$$

**Inciso b)**

**Suponga que los experimentos encontraron una violación de este límite. ¿Qué significaría esto?**

Si se viola este límite, significaría que el teorema óptico mencionado anteriormente no es válido. Pero este teorema se deriva usando únicamente la conservación de probabilidad en la mecánica cuántica [7], por lo que implicaría que las bases de la mecánica cuántica están equivocadas.

---

## Problema 4. Neutrino Discovery

El neutrino fue descubierto en la reacción

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$$

donde el protón objetivo estaba en reposo. ¿Cuál es la energía mínima de los neutrinos para inducir esta reacción?

Para que sea posible una reacción, es necesario que la energía en el marco de centro de masa sea al menos igual a las masas de las partículas que se buscan crear (para que así se tenga energía necesaria para crearlas).

Por lo tanto, empezamos por calcular la energía del centro de masa del antineutrino y el protón. En el capítulo 5 de las diapositivas de clase vimos si se tienen dos partículas y una está en reposo, entonces la energía del centro de masa es (donde se toma  $c = 1$ ):

$$E_{CM} = \sqrt{s} = [m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2]^{1/2},$$

donde  $m_1, E_1$  son la masa y energía total del antineutrino y  $m_2$  la masa del protón. Como la masa del neutrino es muy pequeña comparada con la del protón, se puede despreciar  $m_1$  y se sustituye  $m_2 = m_p$ , por lo que queda:

$$E_{CM} = \sqrt{s} = [m_p^2 + 2E_1m_p]^{1/2}$$

Como se dijo antes, esta energía tiene que ser mayor a la suma de las masas del estado final, que son  $m_n + m_e$  ( $m_n$  y  $m_e$  denotan la masa del neutrón y positrón). Entonces, se debe de cumplir que:

$$\begin{aligned} E_{CM} &\geq m_n + m_e \\ \Rightarrow [m_p^2 + 2E_1m_p]^{1/2} &\geq (m_n + m_e) \\ \Rightarrow m_p^2 + 2E_1m_p &\geq (m_n + m_e)^2 \\ \Rightarrow 2E_1m_p &\geq (m_n + m_e)^2 - m_p^2 \\ \Rightarrow E_1 &\geq \frac{(m_n + m_e)^2 - m_p^2}{2m_p} \end{aligned}$$

Sustituimos ahora las masas, que se pueden encontrar en [4]. La masa del neutrón (con  $c = 1$ ) es  $m_n = 939.5655^\circ MeV$ , la del protón es  $m_p = 938.272013 MeV$  y la del positrón  $m_e = 0.510998928 MeV$ . Por lo tanto, nos queda que la energía del neutrino tiene que ser:

$$\begin{aligned} E_1 &\geq \frac{(939.5655^\circ MeV + 0.510998928 MeV)^2 - (938.272013 MeV)^2}{2(938.272013 MeV)} \\ &= 1.806 MeV \end{aligned}$$

Entonces, la energía mínima de los neutrinos tiene que ser  $\boxed{1.806 MeV}$ .



---

## Problema 5. Energía Umbral 1

Calcular la energía umbral del proceso de fotoproducción de piones,

$$\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$$

Considerando que el protón de objetivo se encuentra en reposo e incide sobre él un fotón  $\gamma$ , se nos pide la energía mínima del fotón necesaria para que se produzca la reacción. Para que la reacción sea posible, se debe de tener que la energía del centro de masa sea mayor a las masas de las partículas producidas (para que la energía sea suficiente para crear a las partículas).

Para ello empezamos calculando la energía del centro de masa de  $\gamma + p$ . Como se considera que el protón inicia en reposo, esta energía de centro de masa se puede obtener como (ecuación encontrada en las diapositivas del capítulo 5 de clase):

$$E_{CMS} = \sqrt{s} = [m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2]^{1/2},$$

donde  $m_1, E_1$  es la masa y energía de  $\gamma$  y  $m_2$  es la masa del protón, además, se está usando  $c = 1$ . La masa del fotón es 0 y la del protón la denotamos por  $m_p$ , por lo que nos queda:

$$E_{CMS} = \sqrt{s} = [m_p^2 + 2E_1m_p]^{1/2}.$$

Como se dijo antes, para que se produzca la reacción es necesario que esta energía sea mayor a la suma de las masas de las partículas producidas:

$$\begin{aligned} E_{CMS} &\geq m_p + m_{\pi^0} \\ \Rightarrow [m_p^2 + 2E_1m_p]^{1/2} &\geq m_p + m_{\pi^0} \\ \Rightarrow m_p^2 + 2E_1m_p &\geq (m_p + m_{\pi^0})^2 \\ \Rightarrow E_1 &\geq \frac{(m_p + m_{\pi^0})^2 - m_p^2}{2m_p} \end{aligned}$$

Finalmente, sustituimos las masas de las partículas en cuestión, que se pueden encontrar en [4] y son (considerando  $c = 1$ )  $m_p = 938.272013MeV$ ,  $m_{\pi^0} = 134.9766MeV$ , por lo que nos queda:

$$\begin{aligned} E_1 &\geq \frac{(938.272013MeV + 134.9766MeV)^2 - (938.272013MeV)^2}{2(938.272013MeV)} \\ &= \boxed{144.685MeV} \end{aligned}$$

## Problema 6. Energía Umbral 2.

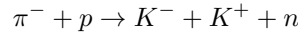
### Inciso a)

Considere un rayo de piones que incide en un objetivo de protones. ¿Cuál es el umbral para la producción de  $K^-$ ?

La reacción en cuestión es un pión  $\pi^-$  incidiendo sobre un protón y produciendo una kaón  $K^-$ . Sin embargo, aún hay que completar la reacción, ya que se deben de crear otras partículas adicionales para que sea posible. Por ejemplo, como se debe de preservar la extrañeza, que es 0 para las partículas iniciales y el kaón  $K^-$  tiene extrañeza de  $-1$ , es de esperar que también se tenga que crear un  $K^+$  (que tiene extrañeza  $+1$ ) para que la extrañeza final también sea 0.

Además, las partículas iniciales incluyen un barión (el protón), por lo que las partículas finales también deben de tener un número bariónico de 1 para que se preserve este número. Los kaones no son bariones, así que nos falta agregar algún barión. Como además se debe de preservar la carga y la carga inicial es 0 y hasta ahora los kaones tienen una carga total de 0, el barión que falta debe de ser neutro, por lo que posiblemente se trata de un neutrón.

Por lo tanto, la reacción es:



Consideramos que el objetivo de protones está en reposo y nos interesa obtener la energía mínima de los piones  $\pi^-$  para producir esta reacción. Para que esto sea posible, la energía en el marco de centro de masa tiene que ser mayor a la suma de las masas de las partículas resultantes. En las diapositivas del capítulo 5 vistas en clase, vimos que la energía del centro de masa se puede obtener como (donde se toma que  $c = 1$ ):

$$E_{CMS} = \sqrt{s} = (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2)^{1/2},$$

donde  $m_1$  y  $E_1$  es la masa y energía del pión y  $m_2$  la del protón, por lo que nos queda:

$$E_{CMS} = (m_{\pi^-}^2 + m_p^2 + 2E_1m_p)^{1/2}$$

Como se dijo antes, para que se produzcan las partículas resultantes, esta energía tiene que ser mayor o igual a la suma de masas de las partículas resultantes, por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} (m_{\pi^-}^2 + m_p^2 + 2E_1m_p)^{1/2} &\geq (m_{K^-} + m_{K^+} + m_n) \\ \Rightarrow m_{\pi^-}^2 + m_p^2 + 2E_1m_p &\geq (m_{K^-} + m_{K^+} + m_n)^2 \\ \Rightarrow m_{\pi^-}^2 + m_p^2 + 2E_1m_p &\geq (m_{K^-} + m_{K^+} + m_n)^2 \\ \Rightarrow 2E_1m_p &\geq (m_{K^-} + m_{K^+} + m_n)^2 - m_p^2 - m_{\pi^-}^2 \\ \Rightarrow E_1 &\geq \frac{(m_{K^-} + m_{K^+} + m_n)^2 - m_p^2 - m_{\pi^-}^2}{2m_p} \end{aligned}$$

Sustituimos ahora las masas de estas partículas, que son  $m_p = 938.272088 \text{ MeV}$ ,  $m_n = 939.56556 \text{ MeV}$ ,  $m_{\pi^-} = 139.57018 \text{ MeV}$ ,  $m_{K^-} = m_{K^+} = 493.677 \text{ MeV}$  [4] y nos queda:

$$\begin{aligned} E_1 &\geq \frac{(493.677 \text{ MeV} + 493.677 \text{ MeV} + 939.56556 \text{ MeV})^2 - (938.272088 \text{ MeV})^2 - (139.57018 \text{ MeV})^2}{2(938.272088 \text{ MeV})} \\ &= \boxed{1499 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

### Inciso b)

Determine la energía de umbral para que un rayo gamma cree un par electrón-positrón en una interacción con un electrón en reposo.

---

La interacción que se menciona consiste en un rayo gamma llegando a un electrón y luego convirtiéndose en un par positrón-electrón, es decir:

$$\gamma + e \rightarrow e + e^+ + e$$

Queremos conocer la energía del fotón necesaria para que esta interacción sea posible. Para ello, como vimos en clase, es necesario que la energía del centro de masa sea mayor a la masa de los productos finales. En las diapositivas del capítulo 5 vistas en clase vimos que la energía del centro de masa se puede obtener como (donde se toma  $c = 1$ ):

$$E_{CMS} = \sqrt{s} = (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2)^{1/2},$$

donde  $m_1, E_1$  es la masa y energía de la partícula incidente, que al ser un fotón, tiene que  $m_1 = 0$  y  $m_2$  es la masa del objetivo, que es un electrón. Por lo que nos queda:

$$E_{CMS} = (m_e^2 + 2E_\gamma m_e)^{1/2}$$

Como se dijo antes, esta energía tiene que ser mayor a la masa de las partículas resultantes. Al ser dos electrones y un positrón, la masa de las partículas resultantes es  $3m_e$ . Por lo tanto, nos queda que:

$$\begin{aligned} (m_e^2 + 2E_\gamma m_e)^{1/2} &\geq 3m_e \\ \Rightarrow m_e^2 + 2E_\gamma m_e &\geq 9m_e^2 \\ \Rightarrow 2E_\gamma m_e &\geq 8m_e^2 \\ \Rightarrow E_\gamma &\geq 4m_e \end{aligned}$$

La masa de un electrón es (considerando que  $c = 1$ )  $m_e = 0.510998928 MeV$  [4] y entonces nos queda que la energía mínima del fotón es:

$$E_\gamma \geq 4(0.510998928 MeV) = \boxed{2.043995712 MeV}$$

## Problema 7. Factor de Forma

En lugar de partículas  $\alpha$  con  $E_{kin} = 6MeV$ , ahora consideramos la dispersión de electrones con la misma longitud de onda de De Broglie del oro. ¿Qué tan grande debe ser la energía cinética de los electrones? ¿Cuántos máximos y mínimos serán visibles en la distribución angular? Como el retroceso es pequeño en este caso, podemos suponer que las cantidades cinemáticas son las mismas tanto en el centro de masa como en los marcos de laboratorio.

Lo primero que queremos hacer es calcular la energía cinética de los electrones de tal forma que tengan la misma longitud de onda de Broglie que tienen las partículas  $\alpha$  cuando su energía cinética es de  $E_{kin\alpha} = 6MeV$ . Entonces, primero calcularemos la longitud de onda reducida de Broglie de estas partículas  $\alpha$ , que se define como  $\lambda_\alpha = \hbar/p_\alpha$ . El momento  $p_\alpha$  se debería medir respecto al CM, pero como dice el ejercicio, suponemos que es el mismo que en el marco del laboratorio, lo que se puede calcular a partir de la energía cinética como  $p = \sqrt{2m_\alpha E_{kin\alpha}}$  (donde se aproximó al límite no relativista, ya que la energía cinética  $E_{kin\alpha} = 6MeV$  es pequeña comparada con la masa de las partículas  $\alpha$  de  $3.727379GeV/c^2$  [3]). Entonces queda que:

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha &= \frac{\hbar}{p_\alpha} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_\alpha E_{kin\alpha}}} \\ &= \frac{6.582119569 \times 10^{-16} eVs}{\sqrt{2(3.727379 \times 10^9 eV/c^2)(6 \times 10^6 eV)}} \\ &= 3.11224 \times 10^{-24} c s \\ &= 9.33025 \times 10^{-16} m\end{aligned}$$

Por lo que dice el problema, esta longitud de onda es igual a la de los electrones  $\lambda_e$ , la cual también se calcula como  $\hbar/p_e$ , por lo que concluimos que el momento que tienen que tener los electrones es de:

$$\begin{aligned}p_e &= \frac{\hbar}{\lambda_e} = \frac{\hbar}{\lambda_\alpha} \\ &= \frac{6.582119569 \times 10^{-16} eVs}{9.33025 \times 10^{-16} m} \\ &= 2.11491 \times 10^8 eV/c\end{aligned}$$

Y con ello podemos calcular la energía cinética de los electrones usando que dicha energía es igual a la energía total menos la de reposo,  $E_{kin e} = E_{tot e} - m_e c^2$  y que la energía total se relaciona con el momento según  $E_{tot e} = c\sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2}$  [2]. Por lo que nos queda que la energía cinética de los electrones tiene que ser:

$$\begin{aligned}E_{kin e} &= E_{tot} - m_e c^2 = c\sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2} - m_e c^2 \\ \text{Sustituimos la masa del electrón y el momento encontrado antes} \\ &= c\sqrt{(2.11491 \times 10^8 eV/c)^2 + (0.510998 \times 10^6 eV/c^2)^2 c^2} - (0.510998 \times 10^6 eV/c^2) c^2 \\ &= 2.10981 \times 10^8 eV \\ &= \boxed{210.98 MeV}\end{aligned}$$

Con lo que se contesta a la primera pregunta sobre qué tan grande tiene que ser la energía de los electrones para que tenga la misma longitud de onda que las partículas  $\alpha$  tienen con energía cinética de  $6MeV$ .

Nos preguntan ahora cuántos máximos y mínimos serán visibles en la distribución angular. Como esta distribución angular es proporcional al factor de forma  $|F(\mathbf{q}^2)|^2$ , necesitamos conocer la cantidad de máximos y mínimos en este factor de forma. Como el oro es un átomo con muchos nucleones, vimos en clase que su factor de forma es de tipo oscilante y se ve como:

$$F(\mathbf{q}^2) = 3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha), \quad (1)$$

con  $\alpha = |\mathbf{q}|R/\hbar$  con  $R$  el radio del núcleo y  $\mathbf{q}$  el momento transferido. Necesitamos averiguar cuantos máximos y mínimos tiene esta función dentro del rango de posibles valores de momento transferido  $\mathbf{q}$  que son posibles en esta reacción. Suponiendo que el retroceso del núcleo es pequeño, el momento transferido se puede calcular a partir del momento del electrón según la ecuación 5.35 de [8]:

$$|\mathbf{q}| = 2|\mathbf{p}_2| \sin \frac{\theta}{2},$$

por lo que el rango de valores que puede tomar va desde  $|\mathbf{q}|_{min} = 0$  cuando  $\theta = 0$  hasta  $|\mathbf{q}|_{max} = 2|\mathbf{p}_e|$  cuando  $\theta = 180^\circ$ , que es igual a  $|\mathbf{q}|_{max} = 2|\mathbf{p}_e| = 2(2.11491 \times 10^8 eV/c) \simeq 4.23 \times 10^8 eV/c$ .

Es decir, la variable  $\alpha$  de la ecuación (1) puede tomar valores que van desde:

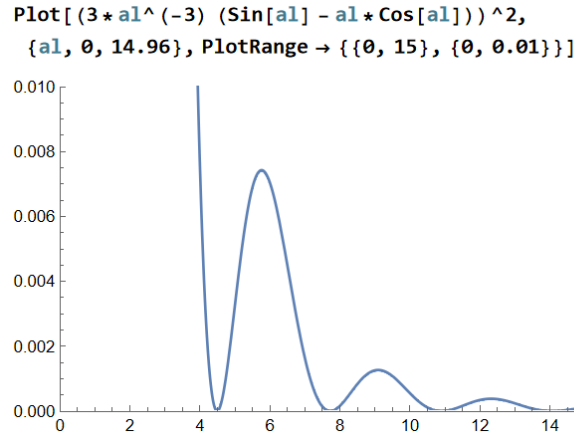
$$\alpha_{min} = \frac{|\mathbf{q}|_{min}R}{\hbar} = 0$$

hasta:

$$\alpha_{max} = \frac{|\mathbf{q}|_{max}R}{\hbar} = \frac{(4.23 \times 10^8 eV/c) \cdot 1.2 fm \cdot (197)^{1/3}}{6.582119569 \times 10^{-16} eVs} = 14.967,$$

donde se usó que el radio es  $R = 1.2 fm(A)^{1/3}$ , con  $A = 197$  el número atómico del oro [8].

Por lo tanto, para saber la cantidad de mínimos y máximos que tendrá la distribución angular, hay que contar la cantidad de mínimos y máximos de la función  $|F(q^2)|^2 = |3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)|^2$  desde  $\alpha = 0$  hasta  $\alpha = 14.967$ . Para contarlos, graficamos la función respecto a  $\alpha$  desde 0 hasta 14.967 usando Mathematica y queda el resultado de la siguiente figura:



Vemos que se tienen 4 valores de  $\alpha$  dentro del rango en los que se tiene un mínimo de  $|F(q^2)|^2$  (en particular, vale  $|F(q^2)|^2 = 0$ ). Además, hay 4 máximos dentro del rango (el primero no se muestra pero se encuentra en  $\alpha = 0$ , en el que  $|F(q^2)|^2 = 1$ ).

Se estudian las colisiones elásticas entre haces de partículas alfa y otros núcleos en una cámara de niebla. Se observa que la partícula  $\alpha$  se desvía  $55^\circ$  de su dirección, mientras que el núcleo blanco deja una traza formando un ángulo de  $35^\circ$ . Determinar la masa del núcleo blanco.

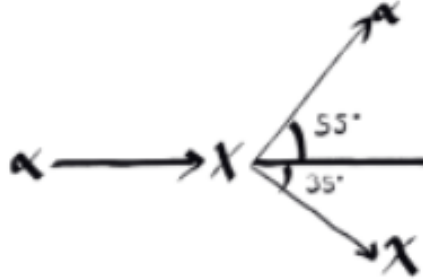


Figure 1: Diagrama problema 7.

Escribiremos las ecuaciones de conservación del momento y de la energía a partir de la figura del problema. Denotamos por  $m_\alpha$  la masa de la partícula alfa y  $m_X$  la del blanco. Además, la velocidad inicial de la partícula  $\alpha$  se denota por  $v_\alpha$  y la final  $v'_\alpha$ , mientras que la velocidad final del núcleo (su inicial es 0) se denota por  $v'_X$ .

Entonces, empezamos escribiendo la conservación del momento en la dirección horizontal, igualamos el momento antes y después de la colisión y nos queda:

$$m_\alpha v_\alpha = m_\alpha v'_\alpha \cos 55^\circ + m_X v'_X \cos 35^\circ \quad (1)$$

La conservación de momento en la dirección vertical nos lleva a:

$$0 = m_\alpha v'_\alpha \sin 55^\circ - m_X v'_X \sin 35^\circ \quad (2)$$

Finalmente, la conservación de la energía (considerando que la energía debido a masa no cambia antes y después del choque, por lo que sólo importa la cinética) nos lleva a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 &= \frac{1}{2} m_\alpha v'^2_\alpha + \frac{1}{2} m_X v'^2_X \\ \Rightarrow m_\alpha v_\alpha^2 &= m_\alpha v'^2_\alpha + m_X v'^2_X \end{aligned} \quad (3)$$

A partir de estas ecuaciones nos interesa encontrar  $m_X$  (la masa del blanco). Para ello, empezamos usando la ecuación (2), de la cual al despejar  $v'_\alpha$  nos queda:

$$v'_\alpha = \frac{m_X v'_X \sin 35^\circ}{m_\alpha \sin 55^\circ}$$

Sustituimos esta velocidad en la ecuación (1) y nos queda:

$$\begin{aligned} m_\alpha v_\alpha &= m_\alpha v'_\alpha \cos 55^\circ + m_X v'_X \cos 35^\circ \\ \Rightarrow m_\alpha v_\alpha &= m_\alpha \frac{m_X v'_X \sin 35^\circ}{m_\alpha \sin 55^\circ} \cos 55^\circ + m_X v'_X \cos 35^\circ \\ \Rightarrow v_\alpha &= \frac{m_X}{m_\alpha} v'_X \sin 35^\circ \cot 55^\circ + \frac{m_X}{m_\alpha} v'_X \cos 35^\circ \\ \Rightarrow v_\alpha &= \frac{m_X}{m_\alpha} v'_X [\sin 35^\circ \cot 55^\circ + \cos 35^\circ] \end{aligned}$$

---

Finalmente, sustituimos las expresiones de  $v'_\alpha$  y de  $v_\alpha$  encontradas en la ecuación (3), lo que la convierte en:

$$\begin{aligned}
m_\alpha v_\alpha^2 &= m_\alpha v_\alpha'^2 + m_X v_X'^2 \\
\Rightarrow m_\alpha \left[ \frac{m_X}{m_\alpha} v'_X [\sin 35^\circ \cot 55^\circ + \cos 35^\circ] \right]^2 &= m_\alpha \left[ \frac{m_X v'_X \sin 35^\circ}{m_\alpha \sin 55^\circ} \right]^2 + m_X v_X'^2 \\
\Rightarrow \frac{m_X^2}{m_\alpha} v_X'^2 [\sin 35^\circ \cot 55^\circ + \cos 35^\circ]^2 &= \frac{m_X^2}{m_\alpha} v_X'^2 \frac{\sin^2 35^\circ}{\sin^2 55^\circ} + m_X v_X'^2 \\
\Rightarrow m_X [\sin 35^\circ \cot 55^\circ + \cos 35^\circ]^2 &= m_X \frac{\sin^2 35^\circ}{\sin^2 55^\circ} + m_\alpha \\
\Rightarrow m_X \left[ (\sin 35^\circ \cot 55^\circ + \cos 35^\circ)^2 - \frac{\sin^2 35^\circ}{\sin^2 55^\circ} \right] &= m_\alpha
\end{aligned}$$

Calculando en una calculadora el término entre corchetes, se puede comprobar que tiene un valor de 1, por lo que nos queda que:

$$\boxed{m_X = m_\alpha}$$

Es decir, la masa del blanco es igual a la de la partícula  $\alpha$ , por lo que podemos concluir que seguramente se trata de una partícula  $\alpha$  también.

---

## Problema 8. Formas geométricas de los núcleos.

La dispersión Compton de electrones unidos puede entenderse en analogía con la dispersión inelástica. Los rayos gamma de la aniquilación de positronio se dispersan de los átomos de helio (energía de unión del “primer” electrón:  $24\text{eV}$ ). Calcule la dispersión angular de los electrones Compton que se miden en coincidencia con los fotones dispersados por  $\theta_\gamma = 30^\circ$ .

Según dice el problema, tenemos rayos gamma que se generan por la aniquilación de un positrón con un electrón. Estos rayos gamma inciden sobre un átomo de helio. En particular, los fotones chocan contra el “primer” electrón del átomo de helio y por dispersión Compton, los fotones cambian de energía y son dispersados a ángulo  $\theta_\gamma$ . Además, si la energía es suficiente, el electrón contra el que chocaron sale del helio y nos interesa conocer la dispersión angular de estos electrones que salen del helio tras la dispersión Compton.

Para empezar, obtenemos la energía de los fotones, que como dice el problema fueron producidos por la aniquilación de un electrón con un positrón. Dicha reacción tiene la forma:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Si la energía cinética de  $e^-, e^+$  es relativamente pequeña, la energía total del lado izquierdo es debida únicamente a la de reposo, que es igual a  $2m_e c^2 = 2(0.511\text{MeV})$  (donde usamos que la masa del electrón es  $\simeq 0.511\text{MeV}/c^2$  [4]). Esta energía inicial es repartida equitativamente a los dos fotones creados (cada uno se lleva  $0.511\text{MeV}$ ). Esto se debe a que el momento inicial era 0 (porque supusimos que el movimiento del electrón y positrón era pequeño) y la única forma de que el momento final también lo sea es que los fotones salgan en direcciones opuestas y con la misma energía.

Entonces, concluimos que la energía de los fotones que llegan al helio es de  $E_\gamma = 0.511\text{MeV}$ .

Ahora como dice el problema, uno de estos fotones impacta al electrón del helio y sucede una dispersión de Compton, con lo que el fotón le da energía y momento a este electrón. Vamos a calcular esta energía que el fotón le pasa al electrón debido a la dispersión de Compton.

En [6] se estudia el efecto Compton y se llega a que la energía final  $E'_\gamma$  de un fotón que incide con energía  $E_\gamma$  sobre un electrón y sale con un ángulo  $\theta$  es de:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + (E_\gamma/m_e c^2)(1 - \cos \theta)}$$

Sustituimos ahora  $E_\gamma = 0.511\text{MeV}$ , la masa del electrón  $m_e = 0.511\text{MeV}/c^2$  y el ángulo  $\theta = 30^\circ$  y nos queda:

$$E'_\gamma = \frac{0.511\text{MeV}}{1 + (0.511\text{MeV}/0.511\text{MeV})(1 - \cos 30^\circ)} = 0.45063\text{MeV}$$

Entonces, el fotón llegó con energía  $0.511\text{MeV}$  al helio y salió con energía  $0.4506\text{MeV}$ , por lo que perdió una energía de  $0.511\text{MeV} - 0.45063\text{MeV} = 0.06037\text{MeV}$ . Por lo tanto, esta energía es ganada por el electrón tras la dispersión,  $E_e = 0.06037\text{MeV}$ .

Ya tenemos la energía transferida al electrón y ahora nos interesa encontrar también el momento transferido, para lo cual usamos la relación entre la energía cinética  $E_e$  ganada por el electrón y el momento ganado  $p_e$ , que es  $p_e = \sqrt{2m_e E_e} = \sqrt{2(0.511\text{MeV}/c^2)(0.06037\text{MeV})} = 0.25\text{MeV}/c$  (donde se usó la relación no relativista  $E_e = p_e^2/2m_e$ , debido a que la energía  $0.06037\text{MeV}$  es pequeña comparada con la masa del electrón).

Por lo que concluimos que tras la dispersión de Compton, el electrón gana un momento de  $0.25\text{MeV}/c$ .

Como dice el problema, nos interesa la dispersión angular de los electrones. Es decir, el rango de ángulos que puede tomar el electrón que es liberado del helio. Para ello, calculamos el mínimo y máximo momento posible con el que puede salir el electrón.



Ya vimos que el electrón gana un momento de  $0.25MeV/c$  por la dispersión Compton, pero el electrón ya tenía cierto momento debido a su rotación alrededor del núcleo. Podemos calcular este momento del electrón debido a la rotación  $p_{rot}$  y sabremos que el momento final se encontrará en el rango que va desde  $0.25MeV/c - p_{rot}$  hasta  $0.25MeV/c + p_{rot}$  (dependiendo de si el momento que se suma al electrón debido al efecto Compton  $0.25MeV/c$  es antiparalelo, paralelo o algún intermedio al momento que tiene debido a la rotación  $p_{rot}$ ).

Para calcular el momento que tiene el electrón en el helio debido a su rotación, necesitamos la energía cinética que tiene en el átomo, para lo cual usamos el teorema bien conocido del virial [6]. Este teorema dice que para un átomo, la energía potencial más dos veces la cinética es igual a 0. Pero como la energía potencial más la cinética es la total, eso implica que la energía total del átomo es igual a menos la cinética. Luego, usando el dato que nos dan en el problema, esto implica que  $E_{Kin\ rot} = 24eV$ . Luego, usando la relación con el momento, podemos concluir que el momento debido a la rotación del electrón en el átomo es  $p_{rot} = \sqrt{2m_e E_{kin\ rot}} = \sqrt{2(0.511MeV/c^2)(24eV)} = 0.00495MeV/c$ .

Entonces, el electrón tiene un momento  $0.00495MeV/c$  en su órbita y al ser expulsado debido al fotón, le es transferido un momento de  $0.25MeV/c$ . Por lo tanto, el momento final con el que sale el electrón (dependiendo de la alineación del momento en su órbita con el transferido) está dentro del rango:

$$0.25MeV/c - 0.00495MeV/c = 0.245MeV/c \quad , \quad 0.25MeV/c + 0.00495MeV/c = 0.255MeV/c.$$

Ahora bien, recordamos que como vimos antes, el fotón entrante llega con un momento de  $p_{\gamma i} = 0.511MeV/c$ , y tras el choque con el electrón, sale con momento  $p_{\gamma f} = 0.45063MeV/c$  a ángulo  $30^\circ$ . Además, el electrón sale con momento dentro del rango  $p_e \in [0.245MeV/c, 0.255MeV/c]$  y con un ángulo de dispersión  $\theta$ . Para encontrar el ángulo  $\theta$ , podemos usar la conservación del momento en la dirección en la que llega el fotón, que nos lleva a:

$$\begin{aligned} p_{\gamma i} &= p_{\gamma f} \cos 30^\circ + p_e \cos \theta \\ \Rightarrow \theta &= \arccos \left( \frac{p_{\gamma i} - p_{\gamma f} \cos 30^\circ}{p_e} \right) \\ \Rightarrow \theta &= \arccos \left( \frac{0.511MeV/c - 0.45063MeV/c \cos 30^\circ}{p_e} \right) \end{aligned}$$

Para encontrar el rango de ángulos posibles con los que sale el electrón, podemos sustituir  $p_e = 0.245MeV/c$  y sustituir  $p_e = 0.255MeV/c$  y ver los ángulos de salida resultantes. Al hacerlo, nos queda que los ángulos para estos momentos son:

$$\theta = 60.4664^\circ \quad , \quad \theta = 61.7315^\circ$$

Por lo tanto, el ángulo de salida se encuentra en el rango  $[60.4664^\circ, 61.7315^\circ]$ , lo cual significa que hay una dispersión angular de  $1.265^\circ$ .

---

## Problema 9. Differential Cross-Section

Inciso a)

Escriba la sección transversal diferencial para la dispersión de Rutherford en  $cm^2/sr$ .

La sección transversal diferencial para la dispersión de Rutherford es de (ecuación 5.16 de [8]):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} = \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \cdot (4E_{kin})^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1)$$

donde  $Z$  es el número atómico del blanco y  $z$  de las partículas lanzadas,  $E_{kin}$  es la energía cinética de las partículas lanzadas y  $\theta$  es el ángulo de dispersión.

Un acelerador suministra un haz de protones de  $10^{12}$  partículas por segundo y un impulso de  $200MeV/c$ . Esta haz pasa a través de una ventana de aluminio de  $0.01cm$ . (Densidad de Al  $\rho = 2.7gm/cm^3$ , longitud de radiación de  $x_0 = 24gm/cm^2$ ,  $Z = 13$ ,  $A = 27$ ).

Inciso b)

Calcule la sección transversal de dispersión diferencial de Rutherford en  $cm^2/sr$  a  $30^\circ$  para el haz anterior en Al.

Se nos pide calcular la sección transversal de Rutherford para esta dispersión usando los datos que nos dan. Para ello, necesitamos determinar la energía cinética  $E_{kin}$  con la que llegan los protones.

Nos dicen que el momento de los protones es  $200MeV/c$ , por lo tanto, su energía total se puede calcular usando la relación  $E = c\sqrt{p^2 + m_p^2 c^2}$ , que nos lleva a:

$$E = c\sqrt{(200MeV/c)^2 + (938.27201MeV/c^2)^2 c^2} = 959.351MeV$$

Entonces, la energía cinética se obtiene restando a este resultado la energía en reposo del protón  $m_p c^2 = 938.27201MeV$  y nos queda:

$$E_{kin} = E - 938.27201MeV = 21.079MeV$$

Luego, podemos ya sustituir todos los datos en la ecuación (1), pues sabemos que  $Z = 13$ ,  $z = 1$ ,  $E_{kin} = 21.079MeV$  y  $\theta = 30^\circ$ , lo que nos lleva a:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth\ 30^\circ} &= \frac{(13e^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 (4 \cdot 21.079MeV)^2 \sin^4 15^\circ} = 1.116 \times 10^{-29} m^2/sr \\ &= \boxed{1.116 \times 10^{-25} cm^2/sr} \end{aligned}$$

Inciso c)

¿Cuántos protones por segundo entrarán en un contador circular de  $1cm$  de radio a una distancia de  $2m$  y en un ángulo de  $30^\circ$  con la dirección del haz?

Ya vimos en el inciso pasado que a  $30^\circ$ , la sección eficaz es de  $1.116 \times 10^{-25} cm^2/sr$ . Por lo tanto, solamente hace falta calcular la cobertura  $d\Omega$  en sr que tiene el detector. Dicha cobertura se calcula como  $d\Omega = \frac{A}{r^2}$  con  $A$  el área del detector y  $r$  su distancia. En este caso, al ser circular, el área del detector es  $A = \pi(0.01m)^2$  y entonces nos queda que  $d\Omega = \frac{\pi(0.01m)^2}{(2m)^2} = 7.85 \times 10^{-5} sr$ .

Luego, la sección eficaz para este detector es de  $d\sigma = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth\ 30^\circ} d\Omega = 1.116 \times 10^{-25} cm^2/sr (7.85 \times 10^{-5} sr) = 8.765 \times 10^{-30} cm^2$ .

Ahora bien, según [8], la sección eficaz  $d\sigma$  se relaciona con el número de partículas por unidad de segundo del haz  $\dot{N}$ , con la cantidad de blancos por unidad de área  $n$  y con la cantidad de detecciones como:

$$\text{Cantidad de detecciones por segundo} = (d\sigma)(\dot{N})(n)$$

El número de partículas del haz por unidad de segundo ya nos lo dan y es de  $\dot{N} = 10^{12}$ . Por otro lado, nos dicen que el blanco de aluminio tiene una densidad de  $\rho = 2.7 gm/cm^3$  y la ventana tiene un grosor de  $0.01 cm$ , por lo que la densidad por unidad de área es  $(0.01 cm)(2.7 gm/cm^3) = 0.027 gm/cm^2$ . Luego, como la masa atómica del aluminio es  $A = 27$ , quiere decir que  $27g$  de aluminio tienen  $N_A = 6.022 \times 10^{23}$  moléculas, lo que significa que en  $0.027 gm$  hay  $6.022 \times 10^{20}$  moléculas. Por lo tanto, la densidad de blancos por unidad de área es de  $6.022 \times 10^{20}$  blancos por  $cm^2$ . Entonces nos queda que la cantidad de detecciones es:

$$\text{Cantidad de detecciones por segundo} = (8.765 \times 10^{-30} cm^2)(10^{12})(6.022 \times 10^{20} \text{ blancos } /cm^2) = \boxed{5278}$$

#### Inciso d)

**Calcule la sección transversal de dispersión de Rutherford integrada para ángulos mayores que  $5^\circ$ . (sugerencia:  $\sin \theta d\theta = 4 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2}$ )**

Como vimos en el inciso a), la sección eficaz diferencial para un ángulo  $\theta$  es de:

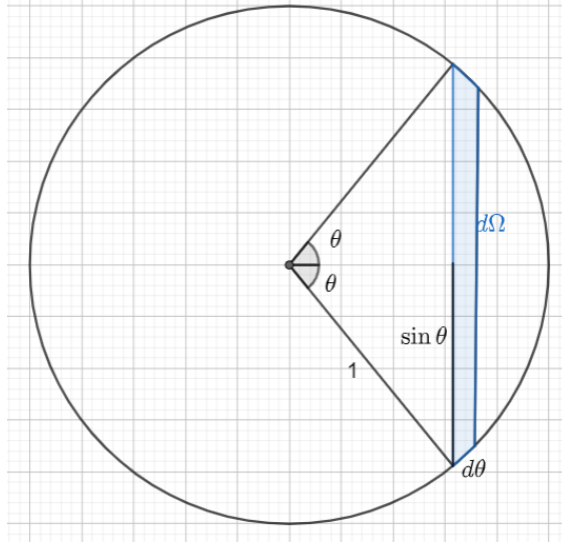
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{kin})^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Antes de integrar respecto a  $\theta$ , hay que multiplicar por el diferencial de ángulo sólido  $d\Omega$ , con lo que nos queda:

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{kin})^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega \quad (2)$$

Para integrar, necesitamos escribir el diferencial  $d\Omega$  (que es un pedacito de ángulo sólido a ángulo de dispersión  $\theta$ ) respecto a  $d\theta$ .

Consideramos entonces dispersiones a ángulo  $\theta$ . En tres dimensiones, el conjunto de todas las posibles dispersiones a ángulo  $\theta$  forman un círculo dentro de la esfera unitaria, como se ve en la siguiente figura.



En la figura se muestra una esfera unitaria con todas las posibles direcciones de dispersión posibles. En particular, cuando la dispersión forma un ángulo  $\theta$  respecto al haz de entrada, las posibles direcciones de dispersión forman una banda circular a ángulo  $\theta$  del origen (que en la imagen se muestra en azul). La superficie de esta banda es el diferencial de ángulo sólido  $d\Omega$ .

Viendo el dibujo, vemos que esta banda circular tiene un radio  $\sin \theta$  y un grosor  $d\theta$ , por lo que su superficie es  $2\pi \sin \theta d\theta$  (el  $2\pi \sin \theta$  es la circunferencia y multiplicamos por  $d\theta$  para obtener la superficie). Entonces, tenemos que la diferencial de ángulo sólido a ángulo de dispersión  $\theta$  es de  $d\Omega = \sin \theta d\theta$ . Por lo tanto, regresando a la ecuación (2), tenemos que la sección eficaz a ángulo de dispersión  $\theta$  es:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{kin})^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega \\ &= \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{kin})^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 2\pi \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Por lo tanto, para calcular la sección eficaz desde  $\theta = 5^\circ$  hasta  $\theta = 180^\circ$  hay que integrar esta cantidad en estos límites:

$$\begin{aligned} \sigma_{5^\circ \rightarrow 180^\circ} &= 2\pi \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{kin})^2} \int_{5^\circ}^{180^\circ} \frac{\sin \theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ \text{Usamos el hint } \sin \theta d\theta &= 4 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2} \\ &= 8\pi \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{kin})^2} \int_{5^\circ}^{180^\circ} \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\frac{\theta}{2} \\ &= 8\pi \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{kin})^2} \int_{5^\circ}^{180^\circ} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Esta integral se puede hacer directamente haciendo el cambio de variable  $u = \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow du = \cos \frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2}$ , con

lo que queda:

$$\begin{aligned}
\sigma_{5^\circ \rightarrow 180^\circ} &= 8\pi \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{kin})^2} \int \frac{du}{u^3} = -8\pi \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{kin})^2} \frac{1}{2u^2} \\
&= -4\pi \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{kin})^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \Big|_{5^\circ}^{180^\circ} \\
&= 4\pi \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{kin})^2} \left[ \frac{1}{\sin^2 \frac{5^\circ}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{180^\circ}{2}} \right] \\
&= 4\pi \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{kin})^2} (524.582)
\end{aligned}$$

Ahora, al igual que en el inciso b), sustituimos  $Z = 13$ ,  $z = 1$ ,  $E_{kin} = 21.079 MeV$  y al hacerlo en Mathematica nos queda:

```

Z = 13
z = 1
(*conv convierte de eV a J*)
Ekin = 21.079 * 10^6 / conv

In[45]:= 4 * Pi * ((z * Z * e^2)^2) / ((4 * Pi * e0)^2 * (4 * Ekin)^2) * 524.582
Out[45]:= 3.24932 * 10^-28

```

Es decir,

$$\sigma_{5^\circ \rightarrow 180^\circ} = 3.25 \times 10^{-28} m^2 = 3.25 \times 10^{-24} cm^2 = 3.25 barn$$

**Inciso e)**

**¿Cuántos protones por segundo se dispersan fuera del haz en ángulos  $> 5^\circ$ ?**

Para esto usamos el mismo razonamiento que en el inciso c), hay que multiplicar la sección eficaz  $\sigma$  por el número de partículas por segundo del haz, que es  $10^{12}/s$  y por la cantidad de blancos por unidad de área, que en el inciso b) vimos que es  $6.022 \times 10^{20}$  blancos /  $cm^2$ . Entonces nos queda:

$$\begin{aligned}
\text{Número de protones a ángulo mayor a } 5^\circ \text{ por segundo} &= \sigma_{5^\circ \rightarrow 180^\circ} (10^{12}/s) (6.022 \times 10^{20} \text{ blancos}/cm^2) \\
&= 3.25 \times 10^{-24} cm^2 (10^{12}) (6.022 \times 10^{20} \text{ blancos}/cm^2) \\
&= \boxed{1.96 \times 10^9 \text{ protones por segundo}}
\end{aligned}$$

## Problema 10. Energía Umbral 3.

### Inciso a)

**Demostrar que la reacción  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  es imposible en el vacío.**

Por conservación de la energía, la energía del fotón debe de ser igual a la suma de las energías de los dos electrones. La energía del fotón depende de su frecuencia  $\nu$  y es igual a  $E_{foton} = h\nu$ . La energía final del primer electrón es  $E_1$  y la del segundo electrón es  $E_2$ . Por lo tanto, la conservación de la energía nos lleva a:

$$h\nu = E_1 + E_2 \quad (1)$$

Por otro lado, utilizamos la conservación de momentos. El momento del fotón es igual a su energía dividida por  $c$  (ya que es una partícula sin masa) y por tanto es  $h\nu/c$ . Dibujamos ahora la situación del problema, que se ve en la siguiente imagen.

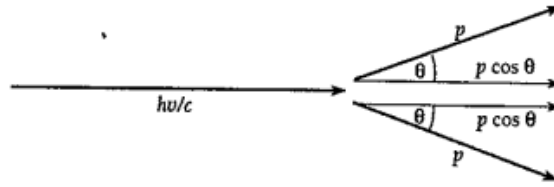


Figure 2: Producción de pares. Obtenida de [6].

En el dibujo se muestra que ambas partículas tienen que salir con el mismo ángulo  $\theta$  respecto al fotón y que tienen el mismo momento  $p$ . Esto se debe a que de esta forma se va a conservar el momento en la dirección vertical, ya que el inicial en esta dirección es 0 y entonces el final también tiene que ser 0 y es necesario que se cancelen los momentos en esta dirección.

Entonces, considerando que el momento del electrón y del positrón es  $p$ , el momento final en la dirección horizontal es  $2p \cos \theta$  y por tanto la conservación del momento nos lleva a:

$$\begin{aligned} \frac{h\nu}{c} &= 2p \cos \theta \\ \Rightarrow h\nu &= 2pc \cos \theta \end{aligned}$$

Si combinamos esto con la ecuación (1), nos queda que:

$$E_1 + E_2 = 2pc \cos \theta$$

Ahora bien, de la relatividad sabemos que la energía total de una partícula es  $E = \gamma mc^2$  y su momento es  $\gamma mv$  (con  $\gamma$  el factor de Lorentz). En este caso dijimos que tanto el electrón como el positrón salen con la misma velocidad, por lo que ambos tienen energía  $\gamma m_e c^2$  y momento  $\gamma m_e v$ , con  $v$  la velocidad con la que salen y  $\gamma$  el factor correspondiente. Por lo tanto, sustituyendo en la última ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} \gamma m_e c^2 + \gamma m_e c^2 &= 2\gamma m_e v c \cos \theta \\ \Rightarrow 2\gamma m_e c^2 &= 2\gamma m_e v c \cos \theta \\ \Rightarrow c^2 &= v c \cos \theta \\ \Rightarrow c &= v \cos \theta \end{aligned}$$

Pero esta última ecuación es imposible, ya que  $|\cos \theta| \leq 1$  y la velocidad  $v$  con la que sale el par tiene que ser menor a la de la luz,  $v < c$ , por lo que es imposible que  $c = v \cos \theta$ . Entonces, vemos que estudiar el proceso nos lleva a una contradicción, por lo que concluimos que este proceso es imposible.

---

Inciso b)

**Demostrar que la energía de umbral de un fotón para dar lugar a la producción de un par electrón-positrón en el campo de un electrón libre (se considera en reposo) es  $4mc^2$**

La interacción que se menciona consiste en un rayo gamma llegando a un electrón y luego convirtiéndose en un par positrón-electrón, es decir:

$$\gamma + e \rightarrow e + e^+ + e$$

Queremos conocer la energía del fotón necesaria para que esta interacción sea posible. Para ello, como vimos en clase, es necesario que la energía del centro de masa sea mayor a la masa de los productos finales. En las diapositivas del capítulo 5 vistas en clase vimos que la energía del centro de masa se puede obtener como (donde se toma  $c = 1$ ):

$$E_{CMS} = \sqrt{s} = (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2)^{1/2},$$

donde  $m_1, E_1$  es la masa y energía de la partícula incidente, que al ser un fotón, tiene que  $m_1 = 0$  y  $m_2$  es la masa del objetivo, que es un electrón. Por lo que nos queda:

$$E_{CMS} = (m_e^2 + 2E_\gamma m_e)^{1/2}$$

Como se dijo antes, esta energía tiene que ser mayor a la masa de las partículas resultantes. Al ser dos electrones y un positrón, la masa de las partículas resultantes es  $3m_e$ . Por lo tanto, nos queda que:

$$\begin{aligned} (m_e^2 + 2E_\gamma m_e)^{1/2} &\geq 3m_e \\ \Rightarrow m_e^2 + 2E_\gamma m_e &\geq 9m_e^2 \\ \Rightarrow 2E_\gamma m_e &\geq 8m_e^2 \\ \Rightarrow E_\gamma &\geq 4m_e \end{aligned}$$

Si volvemos a escribir los factores de  $c$ , hay que agregar un  $c^2$  a la masa y queda:

$$\boxed{E_\gamma \geq 4m_e c^2}$$

Inciso c)

**Demostrar que en el caso de un núcleo de masa  $M$  en vez de un electrón, la energía de umbral del fotón vale  $2mc^2$ .**

Ahora la interacción que se menciona consiste en un rayo gamma llegando a un núcleo y luego convirtiéndose en un par positrón-electrón, es decir:

$$\gamma + M \rightarrow M + e^+ + e$$

Queremos conocer la energía del fotón necesaria para que esta interacción sea posible. Para ello, como vimos en clase, es necesario que la energía del centro de masa sea mayor a la masa de los productos finales. En las diapositivas del capítulo 5 vistas en clase vimos que la energía del centro de masa se puede obtener como (donde se toma  $c = 1$ ):

$$E_{CMS} = \sqrt{s} = (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2)^{1/2},$$

donde  $m_1, E_1$  es la masa y energía de la partícula incidente, que al ser un fotón, tiene que  $m_1 = 0$  y  $m_2$  es la masa del objetivo, que es un núcleo de masa  $M$ . Por lo que nos queda:

$$E_{CMS} = (M^2 + 2E_\gamma M)^{1/2}$$

---

Como se dijo antes, esta energía tiene que ser mayor a la masa de las partículas resultantes. La masa de las partículas resultantes es  $M + 2m_e$ . Por lo tanto, nos queda que:

$$\begin{aligned}
(M^2 + 2E_\gamma M)^{1/2} &\geq M + 2m_e \\
\Rightarrow M^2 + 2E_\gamma M &\geq (M + 2m_e)^2 \\
\Rightarrow M^2 + 2ME_\gamma &\geq M^2 + 4Mm_e + 4m_e^2 \\
\Rightarrow 2ME_\gamma &\geq 4Mm_e + 4m_e^2 \\
\Rightarrow E_\gamma &\geq \frac{4Mm_e + 4m_e^2}{2M}
\end{aligned}$$

Como la masa del electrón es mucho menor a la del núcleo, podemos despreciar el término  $m_e^2$  y el numerador queda simplemente como  $4Mm_e$ , por lo que tenemos:

$$\begin{aligned}
E_\gamma &\geq \frac{4Mm_e}{2M} \\
\Rightarrow E_\gamma &\geq 2m_e
\end{aligned}$$

Finalmente, agregamos de vuelta las constantes  $c$ , que en este caso por las unidades hay que agregar un  $c^2$  a la masa  $m_e$  y nos queda:

$$\boxed{E_\gamma \geq 2m_e c^2}$$



---

## Referencias

- [1 ] Burcham, W. A. Nuclear physics an introduction. Longman Group Limited Second edition, 1973.
- [2 ] Morin, David. Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions. Cambridge University Press, 2019.
- [3 ] “IUPAC Commission on Isotopic Abundances and Atomic Weights.” IUPAC Commission on Isotopic Abundances and Atomic Weights, <https://www.ciaaw.org/>.
- [4 ] “The Nist Reference on Constants, Units, and Uncertainty.” Fundamental Physical Constants from NIST, Nist, <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>.
- [5 ] Tipler, Paul A., and Llewellyn, Ralph A. Modern Physics. W. H. Freeman and Company New York, Sixth ed., 2012.
- [6 ] Beiser, Arthur, et al. Concepts of Modern Physics. McGraw-Hill Education, 2015.
- [7 ] Angelis, Alessandro De, and Martins Pimenta Mario Joao. Introduction to Particle and Astroparticle Physics: Questions to the Universe. Springer, 2015.
- [8 ] Povh, Bogdan, et al. Particles and Nuclei. Springer, Fifth ed., S.n., 1995.
- [9 ] Thornton, Stephen T., and Jerry B. Marion. Classical Dynamics of Particles and Systems. Cengage Learning, 2014.