Mecánica Vectorial

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

10 de diciembre de 2020

1. Fundamentos Matemáticos

1.1. Espacio y Tiempo:

Posición: Una partícula se puede localizar por sus coordenadas como:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Velocidad: La velocidad de una partícula es la derivada de su vector posición:

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t), \frac{dz}{dt}(t)\right)$$

Aceleración: La aceleración de una partícula es la segunda derivada de la posición:

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}(t), \frac{d^2y}{dt^2}(t), \frac{d^2z}{dt^2}(t)\right)$$

Un **Vector** se puede representar por tres números reales (x, y, z). Ésta representaciones cambian dependiendo de cómo definamos nuestro sistema de coordenadas (sistema rectangulares). Si rotamos el sistema de coordenadas por un ángulo θ, entonces la representación en coordenadas pasa a ser (x', y', z'):

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1}$$

Para que una terna de números reales sea considerada un vector, debe de cumplir que si su representación en S es (p, q, r), enonces su representación en S' sea (p', q', r') donde las coordenadas primadas vienen dadas por la relación **??**. Por ejemplo, digamos que $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector y definimos la terna $\frac{d\vec{a}}{dt} = (da_1/dt, da_2/dt, da_3/dt)$. Luego, si pasamos a S', el vector $\vec{a}$ pasa a ser $(a_1', a_2', a_3') = (a_1\cos\theta + a_2\sin\theta, a_2\cos\theta - a_1\sin\theta, a_3)$ y entonces, su derivada pasa a ser: $(da_1/dt\cos\theta + da_2/dt\sin\theta, da_2/dt\cos\theta - da_1/dt\sin\theta, da_3/dt)$.
Entonces, vemos que la derivada se transforma según lo dice la ecuación **??** y por tanto la

derivada es un vector.

Objetivo de la Mecánica: Las leyes de la física deben de ser tales que sean iguales en cualquier sistema de coordenadas. Si $\vec{F} = m\vec{a}$ es válido en un sistema, entonces también debe de ser válido si lo medimos en otro sistema.

1.2. Cálculo Vectorial:

Coordenadas Rectangulares: En coordenadas rectangulares, un vector se puede escribir como la combinación de los tres vectores unitarios:

$$\vec{r} = x\widehat{e_x} + y\widehat{e_y} + z\widehat{e_z} \tag{2}$$

Coordenadas Curvilineas: Se utilizan tres funciones $q_i = q_i(x, y, z)$. Las ecuaciones $q_i = cte_i$ describen tres superficies en $\mathbb{R}^3$. La intersección de estas superficies es un punto en $\mathbb{R}^3$ que queda descrito por estas tres coordenadas curvilineas. Por ejemplo, en cilíndricas tenemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \arctan(y/x)$ $\varsigma = z$.
Es útil tener las funciones inversas, que son $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$.

Vector Unitario: El vector unitario en la dirección i es $\widehat{q_i}$ = un vector ortogonal a la superficie $q_i = cte$ y que apunta en la dirección en la que q_i aumenta. Como tal, para calcularlo, podemos escribir $r = (x, y, z)$ como función de las variables q_1, q_2, q_3, luego derivamos con respecto a la q_i que queramos y eso nos da el vector en la dirección en la que q_i aumenta. Finalmente, lo unitarizamos.

Ejemplo: Coordenadas Esféricas: Un punto se representa como $(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$
$\widehat{r} = \sin\theta\cos\phi\vec{x} + \sin\theta\sin\phi\widehat{y} + \cos\theta\widehat{z}$
$\widehat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\vec{x} + \cos\theta\sin\phi\widehat{y} - \sin\theta\widehat{z}$
$\widehat{\phi} = -\sin\phi\widehat{x} + \cos\phi\widehat{y}$

Sea r un punto (x, y, z) descrito como función de q_1, q_2, q_3. Entonces tendremos que:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial r}{\partial q_3}dq_3$$

La norma de los vectores $|\frac{\partial r}{\partial q_i}|$ se llama componente de longitud a lo largo de q_i y al multiplicarlo por dq_i es el componente de longitud a lo largo de q_i diferencial.

$$h_i = |\frac{\partial r}{\partial q_i}|$$
$$ds_i = h_i\, dq_i$$

Si unitarizamos estos vectores $\dfrac{\partial r}{\partial q_i}$ nos quedan los vectores unitarios que mencionamos antes.

Finalmente (para coordenadas ortogonales), tenemos que un pedacito de longitud ds es:

$$ds = h_1 dq_1 \widehat{q_1} + h_2 dq_2 \widehat{q_2} + h_3 dq_3 \widehat{q_3} \; = \; ds_1 \widehat{q_1} + ds_2 \widehat{q_2} + ds_3 \widehat{q_3}$$

Elemento de área: $d\sigma_{ij} = ds_i \; ds_j \quad = h_i h_j \; dq_i \; dq_j$

Elemento de Volumen: $d\tau = ds_1 \; ds_2 \; ds_3 \; = \; h_1 \; h_2 \; h_3 \; dq_1 \; dq_2 \; dq_3$

1.3. Operaciones Diferenciales:

Gradiente: Dada una función $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en coordenadas curvilíneas, definimos $\nabla\phi$ como el vector en el que sucede el máximo crecimiento y como tal, se define como el vector tal que $d\phi = \nabla\phi \cdot ds$. Entonces:

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\widehat{q_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\widehat{q_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\widehat{q_3}$$

Divergencia: Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en coordenadas curvilíneas. entonces definimos $\nabla \cdot F(p) = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\int F \cdot d\sigma}{\Delta V}$. Donde la integral es la integral de superficie alrededor de una superficie que rodea a p y que se hace pequena. Dibujando y calculando los flujos infinitesimales, se llega a que:

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3 h_1 h_2)\right]$$

Laplaciano: El laplaciano de $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se define como $\nabla \cdot \nabla\phi$. Usando las fórmulas de estas cosas, se puede llegar a que:

$$\nabla \cdot \nabla\phi \; = \; \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\right) \; + \; \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_2 h_1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\right)\right]$$

Curl: Dada una función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se define su curl en la dirección $\widehat{q_i}$ como: $\nabla \times F \cdot q_i(p) = \lim\limits_{\sigma \to 0} \dfrac{\oint F \cdot ds}{\sigma}$ donde σ es una curva cerrada que rodea al punto p y que es ortogonal al vector unitario $\widehat{q_i}$. Podemos calcular los tres componentes del curl para cada vector unitario haciendo dibujitos y así. para llegar a:

$$\nabla \times F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{pmatrix} \widehat{q_1} h_1 & \widehat{q_2} h_2 & \widehat{q_3} h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{pmatrix}$$

Segundas Derivadas: $\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad \nabla \cdot \nabla \times F = 0 \quad \nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$ (Aquí el $\nabla^2 F$ indica tomar el laplaciano de cada componente de F y juntarlos en un vector)

Teoremas y cosas:
Integral de Línea (vectorial): $\int_C F \cdot ds = \int_a^b F(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt$ donde $\phi(t)$ parametriza la curva C.
Integral de Superficie (vectorial): $\int_S F \cdot da = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} F(\sigma(u,v)) \cdot (T_u \times T_v) dv du$ donde $\sigma(u,v)$ parametriza la superficie S.

Teorema Fundamental: $\int_C \nabla \phi = \phi(b) - \phi(a)$ donde C es una curva que une a con b.

Teorema de la div: $\int_V \nabla \cdot F \, dV = \oint_{\partial V} F \cdot dA$

Teorema de Stokes: $\int_S (\nabla \times F) \cdot da = \int_{\partial S} F \cdot ds$

Equivalencias irrotacionales: Son equivalentes (bajo ciertas condiciones): $\nabla \times F = 0$, Las integrales de línea de F son indep. de la trayectoria , la integral de línea por un camino cerrado es 0 , $F = \nabla V$ para alguna función escalar V.

Equivalencias Incompresibles: Son equivalentes (bajo ciertas condiciones): $\nabla \cdot F = 0$, La integral de superficie de F es independiente de la superficie para cualquier borde , la integral de superficie en una superficie cerrada es 0 , existe una función A con $F = \nabla \times A$

1.4. Posición, Velocidad y Aceleración en Coordenadas

Para derivar con respecto del tiempo a un vector unitario de esféricas o cilíndricas, podemos escribirlo en las coordenadas cartesianas. Luego derivamos y vemos cómo escribirlo como combinación lineal de todos los vectores unitarios.

1.4.1. Cartesianas

$$\vec{r}(t) = x\widehat{x} + y\widehat{y} + z\widehat{z}$$
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\widehat{x} + \frac{dy}{dt}\widehat{y} + \frac{dz}{dt}\widehat{z}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\widehat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\widehat{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\widehat{z}$$

1.4.2. Esféricas:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= r(t)\widehat{r} \\
\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\widehat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\widehat{\theta} + r\sin\theta\frac{d\phi}{dt}\widehat{\phi} \\
\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\widehat{r} + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\widehat{\theta} \\
&+ \left[2\sin\theta\frac{d\phi}{dt}\frac{dr}{dt} + 2r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\phi}{dt} + r\sin\theta\frac{d^2\phi}{dt^2}\right]\widehat{\phi}
\end{aligned}
$$

1.4.3. Cilíndricas

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \rho(t)\widehat{\rho} + z(t)\widehat{z} \\
\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\widehat{\rho} + \rho\frac{d\phi}{dt}\widehat{\phi} + \frac{dz}{dt}\widehat{z} \\
\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt} &= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\widehat{\rho} + \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\phi}{dt} + \rho\frac{d^2\phi}{dt^2}\right]\widehat{\phi} + \frac{d^2z}{dt^2}\widehat{z}
\end{aligned}
$$

Con estas ecuaciones también se puede escribir la ley de Newton en distintos sistemas de coordenadas. Para coordenadas porlares, usamos la de coordenadas esféricas con $\theta = \pi/2$.

2. Movimiento Unidimensional

2.1. Ley de Newton

Primera Ley: Un cuerpo moviéndose a velocidad constante permanece a velocidad constante a menos que se le aplique una fuerza.

Momento: El momento de una partícula se define como:

$$p = mv$$

Segunda Ley: La tasa de cambio del momento de una partícula es igual a la fuerza que actúa sobre la partícula.

$$F = \frac{dp}{dt}$$

Además, generalmente una fuerza se puede expresar como una función de la posición, del tiempo o de la velocidad. Por lo tanto, al ponerlo en la segunda ley de Newton, nos da una ecuación diferencial llamada la **ecuación de movimiento**.

Tercera Ley: Si A experimenta una fuerza debido a B, entonces B experimenta una fuerza igual pero en sentido contrario debido a A.

Conservación del Momento: Si tenemos un sistema sin fuerzas externas, entonces el momento total de las partículas se conserva.
Esto se debe a que las fuerzas internas (digamos una fuerza entre i y j) se cancelan a pares por la tercera ley.

2.2. Interacciones

Ley de Gravitación Universal: A partir de las mediciones de Kepler, Newton se dio cuenta que la fuerza entre dos masas m_1 , m_2 a distancia r es:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Para en tres dimensiones, digamos que las posiciones son $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, entonces la fuerza en $\vec{r_2}$ debida a $\vec{r_1}$ es:

$$\vec{F}_{2,1} = \frac{-Gm_1m_2(\vec{r_2} - \vec{r_1})}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}$$

Se puede probar que la fuerza gravitacional debido a una esfera es como si toda la masa de la esfera estuviera centrada en su centro.

Para un cuerpo de masa m en la superficie de la tierra, podemos escribir la fuerza gravitacional como:

$$F = -m\frac{M_EG}{R_E^2} = -mg$$

Fuerza de Coulumb: La fuerza debido a dos cargas q_1 , q_2 ubicadas en puntos $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ es:

$$\vec{F}_{2,1} = \frac{kq_1q_2(\vec{r_2} - \vec{r_1})}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}$$

Fuerza de Hooke: Si tenemos un resorte y medimos la coordenada x con respecto a la longitud de reposo del resorte, entonces se produce una fuerza:

$$F = -kx$$

Fricción: La fuerza de fricción estática entre dos superficies previene su movimiento y tiene un valor acotado por:

$$|F| \leq \mu_s N$$

Donde μ_s es el coeficiente de fricción estática y N es la fuerza normal.

Por otro lado, si los objetos están en movimiento, la magnitud de la fuerza de fricción viene dada por:

$$F = \mu_k N$$

Fuerza de Drag: Cuando un objeto se mueve por un fluido, a velocidad suficientemente bajas se presenta una fuerza de drag de:

$$F = -bv$$

Con b un coeficiente constante.
Cuando el objeto se mueve lo suficientemente rápido, la fuerza es:

$$F = -cv^2$$

Donde c es el coeficiente de Drag y es proporcional a la densidad del fluido y al área transversal.

Ejercicio 2.1. Paracaídas:
Un paracaidista siente una fuerza de $F = -mg+cv^2$, lo cual da lugar a la ecuación diferencial:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + cv^2$$

La velocidad terminal se consigue cuando $F = 0$ y es entonces: $v_t = \sqrt{\frac{mg}{c}}$.
Luego, al resolver la ecuación por separación de variables y usar que $v(0) = 0$, nos queda:

$$v(t) = -v_t \frac{1 - e^{-2gt/v_t}}{1 + e^{-2gt/v_t}}$$

Si queremos la posición como función del tiempo, integramos la velocidad y usamos $x(0) = h$, nos queda:

$$x(t) = h + v_t \left[t - \frac{v_t}{g} \log\left(\frac{2}{1 + e^{-2gt/v_t}} \right) \right]$$

2.3. Métodos de Solución:

En general, la ecuación de movimiento de una partícula se ve algo así:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$$

Que es una ODE de segundo orden.

Caso 1) Si $F = F(x)$, entonces usamos la regla de la cadena para escribir $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$
Entonces nos queda una ecuación separable con variables x, v

Caso 2) Si $F = F(v)$ entonces nos queda directamente que $m\frac{dv}{dt} = F(v)$ y podemos separar e integrar.

Caso 3) Si $F = F(t)$, nos queda $m\frac{dv}{dt} = F(t)$ y podemos nuevamente separar e integrar.

2.4. Movimiento Armónico Simple

La ecuación de un MAS es:

$$m\ddot{x} = -kx$$

Entonces, definimos la frecuencia angular natural $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La ecuación diferencial tiene solución general:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$
$$\text{O bien, } x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Las constante se consiguen usando las condiciones iniciales. El periodo de oscilación es $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ y la frecuencia de $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Ejercicio 2.2. Una masa m amarrada a un resorte de longitud de reposo l. La ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} = -k(x - l) + mg$$

Donde x se mide a partir del techo (hacia abajo positivo) y se le resta l para considerar la diferencia con respecto a la longitud de reposo. Entonces la ecuación es:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l + g$$

Entonces queda la misma ecuación pero ahora rodea el punto $x = \omega_0^2 l + g$.

De otra forma, se puede definir la distancia x_0 a partir de la longitud de reposo del resorte hasta la longitud de equilibrio con la masa. Y se tiene que $kx_0 = mg$. Luego, medimos la distancia x a partir del punto de equilibrio. Y tenemos la ecuación $m\ddot{x} = mg - k(x + x_0) \Rightarrow m\ddot{x} = -kx$. Y entonces el cuerpo oscila con un M.A.S alrededor del punto de equilibrio.

2.5. Damped Harmonic Motion

La ecuación general para un movimiento armónico Damped es:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La segunda forma es una manera de reescribirlo para que la solución se más sencilla, a veces se escribe sin el 2.

$$x(t) = e^{\lambda t}$$
$$\text{Con, } \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} := -\gamma \pm \Omega$$

Distinguimos tres soluciones diferentes:

Caso 1: Overdamping) Si las dos raíces son reales, es decir que $\gamma > \omega_0$. Entonces tiene las dos soluciones del tipo $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$. Las cuales decaen muy rápido porque las λ son negativas.
Caso 2: Underdamping) Si las dos raíces son complejas, es decir $\gamma < \omega_0$. Entonces las soluciones son del tipo $e^{at}\cos(bt)$, $e^{at}\sin(bt)$ donde $a = -\gamma$ y $b = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}/i$. Las soluciones decaen rápidamente (porque el exponente es negativo) pero antes oscilan un poco.
Caso 3: Critical Damping) Si las dos raíces son iguales, es decir $\gamma = \omega_0$. Entonces las soluciones son del tipo $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$. Que tienen exponente negativo, por lo que disminuyen rápidamente. Oscila muy poquito antes de decaer mucho.
Un buen ejemplo es un circuito RLC si fuente externa.

2.6. Damped Oscillator con Driving Force

Es una ecuación del tipo:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t$$

Donde la ecuación está dividida entre m y $F\cos\omega t$ es una fuerza externa, al dividir entre m, definimos $f = F/m$.
Las soluciones homogéneas son las mismas que en el anterior y dependen de si es overdamped, underdamped o critical damping. Estas soluciones desaparecen muy rápido y al final lo único que va a importar es la solución particular. Para resolverlo, se suele convertir la ecuación a su forma compleja y queda como:

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = fe^{i\omega t}$$

Resulta que una solución a esta ecuación es:

$$z = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma\omega i}e^{i\omega t}$$

El coeficiente tiene norma y ángulo dados por:
$\rho^2 = \dfrac{f^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$
$\tan\theta = \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
Luego, la solución real es la parte real de $\rho e^{i\theta} e^{i\omega t}$ y por tanto, es:

$$x(t) = \rho\cos(\omega t + \theta)$$

Ésta es la solución particular, que oscila con la misma frecuencia que la fuerza driven. La norma ρ es máxima cuando la frecuencia del driven es parecida a la frecuencia normal y el ángulo en ese caso es de 90 grados.

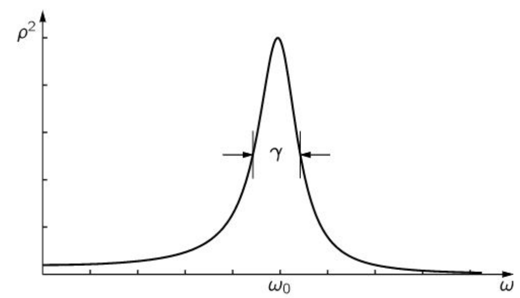


Fig. 23–2. Plot of ρ^2 versus ω.

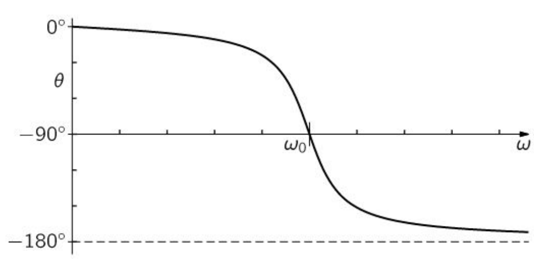


Fig. 23–3. Plot of θ versus ω.

3. Energía

Partimos de la segunda ley de Newton:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F(x,v,t)$$

Luego multiplicamos por v de ambos lados:

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = Fv$$

E integramos con respecto al tiempo de t_1 a t_2:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt = \int_{x_1}^{x_2} Fdx$$

Lo que nos queda a la izquierda recibe el nombre de energía cinética (o más bien, diferencia en energía cinética) y a la derecha nos queda el trabajo total realizado por todas las fuerzas. Definimos entonces el **trabajo** de una fuerza como:

$$W_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\cdot ds$$

3.0.1. Algunos Trabajos

Gravitacional : El trabajo de un objeto m que empieza en un punto 1 a cierta distancia de una masa M que lo atrae y cae directamente hacia M hasta un punto 2.

El trabajo es importante porque al cantidad de trabajo hecho es exactamente igual al cambio en energía cinética:

$$\frac{dK}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \;\;\Rightarrow\;\; \Delta K = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s}$$

Fuerza Conservativa: Una fuerza en la que el trabajo realizado no depende de la curva pero solamente del punto inicial y final. O lo que es lo mismo, la integral por un camino cerrado es 0. Para estas fuerzas se puede definir la energía potencial.
Para que una fuerza sea conservativa, su rotacional tiene que ser 0.

Energía potencial: Elegimos un punto P en el espacio al que le damos energía 0. Y luego, definimos una función $U(x,y,z)$ que mide (menos) la cantidad de trabajo para ir de P a 1. Es decir:

$$U(x,y,z) = -\int_P^{(x,y,z)} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

Esto es válido para fuerzas conservativas pues no depende del camino. Entonces, el trabajo para ir de 1 a 2 es:

$$W_1^2 = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_1^P \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_P^2 \vec{F}\cdot d\vec{s} \;=\; -U(1) + U(2)$$

Entonces, como el trabajo entre 1 y 2 es igual al cambio en la energía cinética. Y además, el trabajo es $U(1) - U(2)$. Por lo tanto, tenemos que $K(2) - K(1) = U(1) - U(2)$ y por lo tanto, tenemos que:

$$K(1) + U(1) = K(2) + U(2)$$
$$\Rightarrow \quad K + U = \text{cte}$$

Además, si queremos conseguir la fuerza a partir de la energía potencial que causa, sólo hay que hacer:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Campo Gravitacional en Tierra: La fuerza es $\vec{F} = -mg\vec{k}$ decimos que un objeto en $z = 0$ tiene energía cero. Por tanto, la energía potencial es $U(x, y, z) = -\int_P^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_P^{(x,y,z)} mg \cdot d\vec{s} = mgz$

Resorte: Hacemos un eje con origen en el punto de equilibrio y le definimos energía 0 en este punto P. Entonces, la fuerza es $\vec{F} = -kx\vec{i}$. Y la energía potencial es $-\int_P^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_P^{(x,y,z)} -kx \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}kx^2$

Campo Gravitacional: Indicamos energía 0 en el infinito y la fuerza de una masa m debido a M es $\vec{F} = -GMm\vec{r}/r^3$ y por tanto la energía es $-\int_\infty^r \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_\infty^r -GMm\vec{r}/r^3 \cdot d\vec{s} = -\frac{GMm}{r}$

Campo Eléctrico: Indicamos energía 0 en el infinito y la fuerza de una masa q debido a Q es $\vec{F} = KQq\vec{r}/r^3$ y por tanto la energía es $-\int_\infty^r \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_\infty^r KQq\vec{r}/r^3 \cdot d\vec{s} = -\frac{KQq}{r}$

Velocidad de Escape: Velocidad a la que hay que tirar un cohete para que salga de la tierra. La energía inicial es $-GMm/R + \frac{1}{2}mv^2$ y la energía final es 0 (ya no se mueve y está muy lejos). Por lo tanto, igualamos estas dos y nos queda que la velocidad de escape es $v = \sqrt{2GM/R}$

Velocidad de un Satélite: Si está restringido a un camino circular, entonces debe de tener una fuerza centrípeta de mv^2/r, entonces $GMm/r^2 = mv^2/r$ y por tanto $v = \sqrt{GM/r}$

La energía (gravitacional o eléctrica) total debido a muchas partículas es la suma de las energías potenciales. La energía total de muchas partículas es la suma de la energía de a pares.

Equilibrio: Una posición en la que la energía potencial alcanza un punto estable. Los cuerpos tienden a bajar su energía potencial por sí mismos, por lo que un mínimo de potencial es un equilibrio estable y un máximo es un equilibrio inestable.

Potencial: El potencial de un campo se define como $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Definimos que el potencial valga 0 en un punto P y el potencial en un punto (x, y, z) se consigue como:

$$\psi(x, y, z) = \int_P^{(x,y,z)} \vec{E} \cdot ds$$

Entonces, la energía potencial en dicho punto se calcula como $q\psi$. Es diferente a la energía potencial por un simple factor de escala.

El potencial de muchas fuentes es la suma de los potenciales debido a cada una por separado.

Si conocemos el potencial en todos los puntos, tenemos que:

$$\vec{E} = -\nabla \cdot \psi$$

Por ejemplo, en el espacio entre dos placas con densidad σ, se produce un campo $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Entonces, la diferencia de potencial entre las placas es $\int_1^2 E \cdot ds = \dfrac{\sigma d}{2\epsilon_0}$ y la diferencia de energía de una carga que va de una placa a otra es $q\dfrac{\sigma d}{2\epsilon_0}$

3.1. Pequeñas Oscilaciones

Para una energía potencial V arbitraria, tenemos que la energía total es: $E = V(x)+K(x)$. Entonces, se puede calcular la velocidad en un punto con:

$$v(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}$$

La región accesible es solamente aquella para la que $V(x) \leq E$. Las posiciones en las que $V(x) = E$ son puntos de cambio en los que la velocidad se vuelve cero y luego cambia de signo.

Digamos que x_0 es un punto en el que V es mínimo (es un punto de equilibrio estable), entonces el movimiento muy cerca de este punto es fácil de describir. Pues se puede aproximar $V(x)$ con una serie de Taylor:

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0)\left[\frac{dV(x)}{dx}\right]_{x=x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left[\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0} + ...$$

Ene el punto mínimo la primera derivada se hace 0 y digamos que la segunda vale k (que es positiva por ser un mínimo), entonces:

$$V(x) \simeq V(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

La constante $V(x_0)$ se puede eliminar. Entonces, la fuerza es $F = dV/dx$ y nos queda $F(x) = k(x - x_0)$ o bien, $m\ddot{x} = k(x - x_0)$. Esta es la ecuación de un M.A.S. que oscila alrededor de x_0 con frecuencia $\omega = k/m$.

En el caso en el que se tenga un máximo en vez de un mínimo, la partícula está en un equilibrio inestable y con un pequeño movimiento termina alejándose mucho del punto de equilibrio.

3.2. En 3 Dimensiones:

La ecuación de Newton se puede escribir en forma vectorial y luego es válida en cualquier representación de las coordenadas pues $\vec{F}$ y $\vec{a}$ son verdaderamente vectores.

3.3. Vectores

Si tenemos un sistema de referencia trasladado con respecto a otro, entonces las coordenadas pasarán a ser:
$x' = x - a$, $y' = y$, $z' = z$.

En el sistema de Joe se valen las leyes de Newton, y en el sistema de Moe tenemos que $\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2(x-a)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = F_x/m$.
Por lo tanto, ambos miden la misma fuerza.

3.3.1. Rotación:

Por otro lado tenemos las rotaciones. En una rotación, las coordenadas de un punto se transforman como:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta \\ z' &= z \end{aligned}$$

Vector: Un vector es una flecha en el espacio (sin importar el sistema de coordenadas que se use para sus coordenadas).

El vector es solamente la flecha en el espacio y no las coordenadas que lo representan. Además, para ser verdaderamente un vector, debe de cumplir que si tiene coordenadas (r_x, r_y, r_z) en el sistema de Joe, entonces sus coordenadas tras la rotación se deben de transformar tal como se transforma el sistema. Es decir (r'_x, r'_y, r'_z) donde $r'_x = r_x\cos\theta + r_y\sin\theta, ...$ etc.

La Derivada de un Vector es un Vector: Tenemos un vector $\vec{x} = (x, y, z)$ en el sistema S. Y definimos su derivada como $(dx/dt, dy/dt, dz/dt)$. En otro sistema de coordenadas, el vector es $(x', y', z') = (x\cos\theta + y\sin\theta, y\cos\theta - x\sin\theta, z)$ y su derivada representada en este sistema es entonces: $(dx/dt\cos\theta + dy/dt\sin\theta, dy/dt\cos\theta - dx/dt\sin\theta, dz/dt)$. Entonces las coordenadas de la derivada se transforman como un vector y por tanto es un vector.
La fuerza es también un vector.

3.3.2. Álgebra de Vectores

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que en cierto sistema se representan como (a_x, a_y, a_z) y (b_x, b_y, b_z), definimos su suma (en este mismo sistema) como $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ que en este sistema será representado por $\vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + c_z)$, pero es $\vec{c}$ verdaderamente un vector?

Al representar $\vec{c}$ en un nuevo sistema de coordenadas, pasará a ser $((a_x + b_x)\cos\theta + (a_y + b_y)\sin\theta, (a_y + b_y)\cos\theta - (a_x + b_x)\sin\theta, a_z + b_z)$ por como se transforma cada componente.
Pero esto es igual a $(a_x\cos\theta + a_y\sin\theta + b_x\cos\theta + b_y\sin\theta, a_y\cos\theta - a_x\sin\theta - b_y\cos\theta - b_x\sin\theta, a_z + b_z) = (a'_x + b'_x, a'_y + b'_y, a'_z + b'_z)$
Entonces, en este nuevo sistema de coordenadas, sigue siendo la suma de las coordenadas de $\vec{a}$ y de $\vec{b}$. Por lo tanto, la suma es un vector. Además, se puede probar que es conmutativa, asociativa, con neutro y con inverso.

Luego, si tenemos un vector $\vec{a}$ representado por (a_x, a_y, a_z). Definimos su producto escalar en esta representación como $\alpha\vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$.
Podemos probar que éste es efectivamente un vector.
En un sistema S, el vector es $(\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$. Pero en un sistema transformado, el vector producto tiene que ser el vector transformado multiplicado por α, es decir $(\alpha a'_x, \alpha a'_y, \alpha a'_z)$.
Hay que probar que esta representación de $\alpha\vec{a}$ se puede conseguir de igual manera empezando por $\alpha\vec{a}$ en el sistema S y luego transformar las coordenadas.
Sin embargo, se puede probar que algo así como $(\alpha a_x, a_y, a_z)$ no es un vector.

La ley de newton se puede escribir en forma vectorial como:

$$m(d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}$$

Y es una relación entre vectores, que se cumplirá para cualquier sistema de coordenadas.

3.3.3. Producto de Vectores:

Norma: Digamos que tenemos un vector que e un sistema tiene representación (x, y, z), entonces definimos su norma como el número $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Queremos probar que esta cantidad no depende del sistema de coordenadas y que por tanto es un escalar válido.

En el nuevo sistema de coordenadas, el vector se ve como $(x', y', z') = (x\cos\theta + y\sin\theta, y\cos\theta - x\sin\theta, z)$. En este nuevo sistema, la norma es de $\sqrt{(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 + z^2} = \sqrt{x^2\cos^2\theta + 2xy\cos\theta\sin\theta + y^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - xy\cos\theta\sin\theta + x^2\sin^2\theta + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Por lo tanto, la norma se mantiene constante al cambiar el sistema de coordenadas con el que se ve el vector.

Producto Interno: Si tenemos dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$ en un sistema de coordenadas en el que son (a_x, a_y, a_z) y (b_x, b_y, b_z). Entonces, definimos el producto interno como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Ahora, si cambiamos de sistema para que pase a $(a'_x, a'_y, a'_z) = (a_x\cos\theta + a_y\sin\theta, a_y\cos\theta - a_x\sin\theta, a_z)$ y $(b'_x, b'_y, b'_z) = (b_x\cos\theta + b_y\sin\theta, b_y\cos\theta - b_x\sin\theta, b_z)$, entonces el producto interno en esta nueva coordenada será:
$a'_x b'_x + a'_y b'_y + a'_z b'_z = (a_x\cos\theta + a_y\sin\theta)(b_x\cos\theta + b_y\sin\theta) + (a_y\cos\theta - a_x\sin\theta)(b_y\cos\theta - b_x\sin\theta) + a_z b_z = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
Por lo tanto, el producto interno tiene el mismo valor sin importar el sistema de coordenadas.

Entonces, podemos escoger un sistema de coordenadas en el que el eje x esté alineado con $\vec{a}$ y vamos a tener que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|\cos\theta$$

3.3.4. Producto Cruz:

Dados dos vectores $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, podemos definir su producto cruz dando sus coordenadas:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_x = a_y b_x - a_z b_y$$
$$(\vec{a} \times \vec{b})_y = a_z b_x - a_x b_z$$
$$(\vec{a} \times \vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x$$

Notamos que $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ y que $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.
Se puede probar con varias cuentas que los componentes de $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector. Empezamos con $\vec{a} \times \vec{b}$ escrito en el sistema S. Luego, transformamos los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a un sistema S' y los multiplicamos para ver cómo se ve $\vec{a} \times \vec{b}$ en este nuevo sistema de coordenadas. Finalmente probamos que las coordenadas se transforman como un vector.

Inversión: Una inversión es una transformada de los vectores haciendo $x' = -x, y' = -y, z' = -z$.
Vector Axial (pseudo-vector): Un vector es axial si no cambia de signo bajo una inversión.
A diferencia de esto, si hacemos una inversión, un vector sí va a cambiar de signo (como el vector fuerza por ejemplo).

Se puede probar que $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$ y por tanto, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta|$

BAC - CAB :

$$(a \times b) \times c = b(a \cdot b) - a(b \cdot c)$$

El Tensor de Outer Product de a y b: Definimos la matriz T de 9 elementos como $T_{ij} = a_i b_j$. Podemos ver que la traza de esta matriz corresponde al producto interno de los vectores.
Tensor (de segundo grado) : Es cualquier matriz de nueve elementos (en este caso de $\mathbb{R}^3$) tal que sus 9 elementos se transforman de un sistema a otro bajo una rotación en la misma forma en que lo hace una matriz Outer Product.

También le podemos definir producto punto con vectores (que en realidad son como productos de matriz por un vector):

$$(T \cdot c)_i = T_{ij} c_j$$
$$(c \cdot T)_i = c_j T_{ji}$$

Usando la notación de Einstein. El resultado es entonces un vector.

Tensor Unitario: El tensor I, que tiene la propiedad que:

$$a \cdot I = I \cdot a = a$$

Y que se puede ver como $I = \widehat{xx} + \widehat{yy} + \widehat{zz}$

Fuerza Central: Una fuerza central es una fuerza que se puede escribir de la forma (en esféricas):

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\widehat{r}$$

O bien, en la forma más general, se puede trasladar el centro, al convertir r en $|r - r_0|$ y convertir $\vec{r}$ en $\vec{r} - \vec{r_0}$.

Teorema: Una fuerza central es conservativa.
Dem: Se puede mostrar que su rotacional (en esféricas) es 0.

3.4. Movimiento en el Plano:

Escribimos ahora la segunda ley de Newton en coordenadas polares para usar en problemas en los que es más fácil estas coordenadas.
Digamos que representamos un punto en el plano por coordenadas polares como $\vec{r}(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$
Se seugirá valiendo que la segunda derivada de esta expresión es igual a la fuerza sobre el objeto. Entonces derivamos:
$\vec{r'} = r'e^{i\theta} + r\theta' i e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad \vec{r''} = r''e^{i\theta} + r'\theta' i e^{i\theta} + r\theta'' i e^{i\theta} + r'\theta' i e^{i\theta} - r\theta'^2 e^{i\theta}$

$$\vec{r}'' = (r'' - r\theta'^2)\widehat{r} + (r\theta'' + 2r'\theta')\widehat{\theta}$$

Al multiplicar por m, la primera parte es la fuerza radial, el primer término es la aceleración típica y el segundo la aceleración centrípeta. La segunda parte es la fuerza tangencial, el segundo término es la fuerza de Coriolis.

$$F_r\widehat{r} + F_\theta\widehat{\theta} = m(r'' - r\theta'^2)\widehat{r} + m(r\theta'' + 2r'\theta')\widehat{\theta}$$

3.5. Péndulo Simple

En un péndulo simple de longitud l, con x positiva hacia abajo y y positiva a la derecha. Las dos fuerzas son el peso y la fuerza de tensión, por lo que nos quedan las ecuaciones:

$$F_r = mg\cos\theta - T$$
$$F_\theta = -mg\sin\theta$$

Entonces, usamos las leyes de Newton en coordenadas polares con radio $l = cte$ y nos queda:

$$mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2$$
$$-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

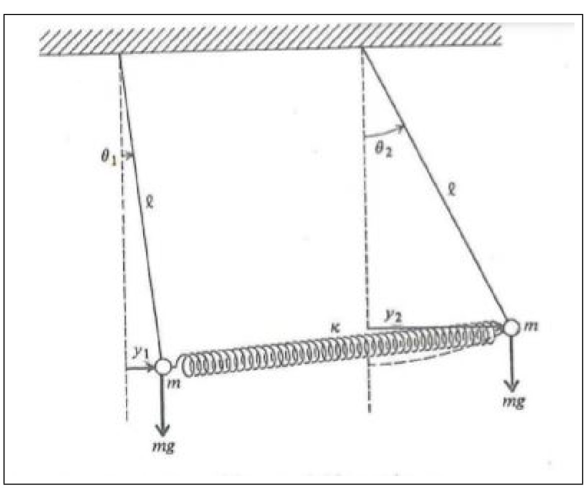
La segunda ecuación se puede simplificar para ángulo chico y queda como un MAS, cuya solución es entonces:

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Donde $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Además, con esto se puede sustituir la primera ecuación y calcular T como función del tiempo.

Para resolver las ecuaciones de forma exacta, se usa $\ddot{\theta} = \dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{\dot{\theta}^2}{2}\right)$ y lo reemplazamos en la segunda ecuación de movimiento y luego usamos separación de variables y así. Ver libro Mechanics modern perspective, pag 70.

3.6. Osciladores Armónicos Acoplados



Cada uno de los péndulos sigue la ecuación:

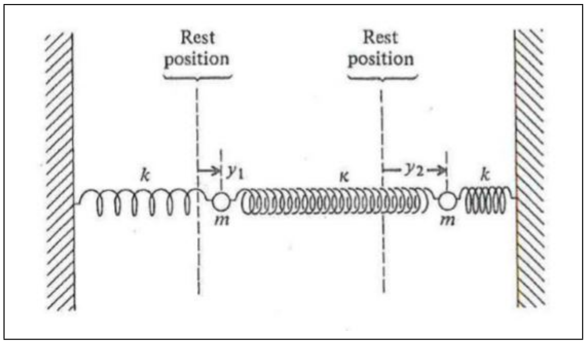
$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Entonces, cada uno de los péndulos se puede reemplazar por un resorte de constante $k = m\omega_0^2 = mg/l$.

Si tenemos un desplazamiento y_1. Entonces tiene una fuerza hacia la izquierda de $-ky_1$ debido al resorte 1 y una fuerza $-\kappa y_1$ debido al

resorte de enmedio. Aparte, el estiramiento a la derecha de y_2 del resorte central da una fuerza de κy_2.
Un análisis similar se puede aplicar a la segunda masa y queda:

$$m\ddot{y}_1 = -ky_1 - \kappa y_1 + \kappa y_2$$
$$m\ddot{y}_2 = -ky_2 - \kappa y_2 + \kappa y_1$$



Se pueden sumar y restar las ecuaciones para cancelar términos repetidos y resulta que la suma y resta dan ecuaciones de MAS. Por lo tanto nos queda:

$$m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) = -k(y_1 + y_2)$$
$$m(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) = -(k + 2\kappa)(y_1 - y_2)$$

Luego, éstos son los llamados modos normales y tienen como solución:

$$y_1 + y_2 = A_+ \cos(\omega_+ t + \alpha_+)$$
$$y_1 - y_2 = A_- \cos(\omega_- t + \alpha_-)$$

Con $\omega_+ = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, y $\omega_- \sqrt{\frac{k+2\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2\kappa}{m}}$ y entonces la solución es:

$$y_1 = \frac{1}{2}A_+ \cos(\omega_+ t + \alpha_+) + \frac{1}{2}A_- \cos(\omega_- t + \alpha_-)$$
$$y_2 = \frac{1}{2}A_+ \cos(\omega_+ t + \alpha_+) - \frac{1}{2}A_- \cos(\omega_- t + \alpha_-)$$

Por otro lado, se puede escribir y resolver el sistema en forma matricial para un método algo más general Luego, el sistema de ecuaciones que describe la situación es:

$$m\ddot{y}_1 = (-k - \kappa)y_1 + \kappa y_2$$
$$m\ddot{y}_2 = \kappa y_1 + (-k - \kappa)y_2$$

Se introducen las variables $z_1 = \dot{y}_1, z_2 = \dot{y}_2$ para que sea un sistema de primer orden y se resuelve usando el método de eigenvectores.

4. Método Lagrangiano:

4.1. Ecuaciones de Lagrange:

Digamos que tenemos N partículas en 3D para un total de $3N$ coordenadas cartesianas necesarias. Denotamos los vectores por $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_N}$ Cada coordenadas de cada partícula tiene una ecuación de Newton.

Coordenadas Generalizadas: Escogemos un grupo de coordenadas $q_1, q_2, ...q_{3N}$ para describir la posición de todas las partículas. Podemos escribir la posición con las coordenadas cartesianas antiguas a partir de las coordenadas nuevas usando:

$$\begin{gathered}\vec{r_1} = \vec{r_1}(q_1, q_2, ...q_{3N}; t)\\ \vec{r_2} = \vec{r_2}(q_1, q_2, ...q_{3N}; t)\\ ...\\ \vec{r_N} = \vec{r_N}(q_1, q_2, ...q_{3N}; t)\end{gathered}$$

Un ejemplo podría se usar coordenadas esféricas para describir la posición de una partícula. Y luego tenemos las fórmulas típicas para pasar a cartesianas.
Constraint: Si alguna de estas coordenadas cartesianas está obligada a estar fija. (por ejemplo, para un objeto que se mueve en una esfera, la coordenada radio es fija).

4.1.1. Ecuaciones de Lagrange en una Dimensión

Introducimos una coordenadas generalizada $q(t)$ expresada en términos de x, la coordenada cartesiana, tenemos entonces:

$$\begin{gathered}q(t) = q[x(t), t]\\ x(t) = x[(q(t), t]\end{gathered}$$

La velocidad se puede expresar como:

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \tag{3}$$

Luego, podemos notar que el momento de $p = dK/d\dot{x}$.
Por otro lado, en analogía definimos el momento general como $\mathfrak{p}(t) = dK/d\dot{q}$.
Donde K es $\frac{1}{2}m\dot{x}$ con $\dot{x}$ escrito como función de $\dot{q}$ según la ecuación (3).
Entonces, queda que $\mathfrak{p} = \dfrac{dK}{d\dot{x}}\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = p\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}}$
Por la ecuación 3, $\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \dfrac{\partial x}{\partial q}$ y por lo tanto, el momento general es:

$$\mathfrak{p} = p\frac{\partial x}{\partial q} \tag{4}$$

Ahora derivamos ambos lados con respecto al tiempo:

$$\dot{\mathfrak{p}} = \dot{p}\frac{\partial x}{\partial q} + p\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) \tag{5}$$

$$\dot{\mathfrak{p}} = \dot{p}\frac{\partial x}{\partial q} + p\frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \tag{6}$$

$$\dot{\mathfrak{p}} = F\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial K}{\partial q} \tag{7}$$

Usando que $\dot{p} = F$ y que $\dfrac{\partial K}{\partial q} = \dfrac{\partial K}{\partial \dot{x}}\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial q} = p\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial q}$, luego definimos la fuerza generalizada como:

$$Q(\dot{q}, q, t) = F\frac{\partial x}{\partial q}$$

Por lo que nos queda que la ecuación es:

$$\dot{\mathfrak{p}} = Q + \frac{\partial K}{\partial q} \tag{8}$$

El término de la derivada de K representa una fuerza 'ficticia' que aparece cuando dx/dq o dx/dt varían con q.
Ahora separamos la fuerza F en la parte que se tiene un potencial y la parte F' que no, con lo que nos queda:

$$Q = F\frac{\partial x}{\partial q} = \left(-\frac{dV(x)}{dx} + F'\right)\frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + Q'$$

Con $Q' = F'\dfrac{\partial x}{\partial q}$, por lo tanto la ecuación (8) nos queda como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{p}} &= -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + \frac{\partial K}{\partial q} + Q' && (9) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q} + Q' && (10) \end{aligned}$$

Donde $L(q, \dot{q}, t) := K(q, \dot{q}, t) - V(q)$
Como $p = \partial K/\partial \dot{q} = \partial L/\partial \dot{q}$, entonces la ecuación de movimiento se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q' \tag{11}$$

Donde Q' incluye todas las fuerzas no conservativas.

4.2. Demostración Alternativa:

Primero definimos el **Lagrangiano** como:

$$L := T - V$$

Y definimos la **Acción** de una partícula entre dos tiempos como:

$$S := \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t)dt$$

Los objetos se mueven de tal forma que la acción se encuentre en un punto estacionario.

Teorema 4.1. : Si la función $x_0(t)$ es un valor estacionario de la acción, entonces se cumple que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_0}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_0}$$

Dem: Tomamos una función que difiere levemente de $x_0(t)$ levemente. Probaremos que esta función da el mismo valor de acción, por lo que $x_0(t)$ es un valor estacionario. La función que difiere levemente es:

$$x_a(t) := x_0(t) + a\beta(t)$$

Donde $\beta(t_1) = \beta(t_2) = 0$ para que tenga el mismo valor inicial y final. Luego, podemos evaluar la acción de la función $x_a(t)$. Como $L(x_a, \dot{x_a}, t)$ depende solamente del tiempo, entonces al integrar, la acción depende únicamente de t_1 , t_2 y a. Si $x_0(t)$ es un valor estacionario, entonces la acción de $x_a(t)$ no debe de cambiar mucho al cambiar a pues es un cambio de primer orden. Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial a}S[x_a(t)] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial a}\int_{t_1}^{t_2} Ldt = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial a}dt = 0$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x_a}\frac{\partial x_a}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\frac{\partial \dot{x}_a}{\partial a}\ dt = 0$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x_a}\beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\dot{\beta}\ dt = 0$$

Integramos el segundo término por partes y nos queda:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\right)\beta dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\beta\bigg|_{t_1}^{t_2}$$

Pero por la condición de β, tenemos que el último término es 0 y para que todo sea cero para toda β, debemos de tener que el término entre paréntesis sea 0, lo cual muestra el teorema.

Ecaución en Muchas Dimensiones:

Luego, se puede probar (morin 230) que se valen las ecuaciones de Lagrange para un cambio de coordenadas $q_1, ...q_{3N}$.

Momento Generalizado: El momento generalizado de la j-ésima coordenada es:

$$\mathfrak{p}_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_k}\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} = p_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j}$$

Usando la regla de la cadena, la notación de Einstein y la consecuencia de la ecuación 3.
Y Definimos la **Fuerza general (no conservativa):**

$$Q'_j = F'_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

Donde las fuerzas son las no conservativas. Entonces, se puede probar que la ecuación de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j$$

4.3. Leyes de Conservación:

4.3.1. Coordenadas Cíclicas:

Una coordenada q_k se llama cíclica si el Lagrangiano no depende de dicha coordenada. En este caso, se tiene que (por la ecuación de E-L) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = C$$

La cantidad $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ se conserva. Si V no es función de $\dot{q}_k$ (como es generalmente), entonces se tiene que esta última expresión es igual al momento generalizado $\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}$. Y por tanto, este momento generalizado se conserva.

4.3.2. Conservación de la Energía:

Definimos la siguiente cantidad algo extraña:

$$E := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$

Si L no tiene una dependencia directa en el tiempo, entonces resulta que esta cantidad E se conserva en el tiempo y por eso, es de esperar que sea la energía.

Ejemplo 4.1.
1) Movimiento con potencial central en coordenadas polares:

La velocidad en coordenadas polares es $\dot{r}\widehat{r} + r\dot{\theta}\widehat{\theta}$ y por tanto tiene una energía potencial de $K = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$. De ahí vemos que el momento generalizado radial es $\partial K/\partial\dot{r} = m\dot{r}$ y el angular es $\partial K/\partial\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$.
Entonces, para un potencial central, el Lagrangiano es: $L = K - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$. Luego aplicamos las ecuaciones de E-L para las dos coordenadas y tomando en cuenta que no hay fuerzas no conservativas nos queda:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial V}{\partial r}$$
$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = r(mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

Son como las ecuaciones de fuerza en coordenadas polares. La segunda ecaución nos dice la conservación del momento angular, que se desprende de que L no depende de la variable θ. Si dependiera, es porque tenemos una torca y por eso se conserva el momento angular.

2) Coordenadas cilíndricas con una fuerza central (al eje z):

Por la ecuación de la velocidad en cilíndricas, tenemos que el Lagrangiano es:
$L = \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r)$
Como no hay dependencia en z, entonces, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = cte$ y como no hay dependencia de θ entonces el momento angular $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = cte$ y es el momento angular alrededor del eje z.

3) Coordenadas esféricas con un potencial que no depednde de ϕ:

Por la fórmula de la velocidad en coordenadas esféricas, el lagrangiano es:
$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - V(r,\theta)$.
Como no hay dependencia en ϕ, el momento generalizado $\partial L/\partial\dot{\phi} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}$ se conserva.

4.4. Constraints:

Un sistema en el que cierta condición se debe de satisfacer para las variables. Para cada constriant en el movimiento, hay una fuerza que la causa (por ejemplo en un péndulo la tensión causa un constraint y en una masa deslizándose por una esfera es la normal la constraint). Podemos meter directamente la constraint antes de aplicar las ecuaciones de

Lagrange (en este caso poner $r = L$) y encontramos la solución, sin embargo hay un mejor método que a parte permite encontrar el valor de las fuerzas de Constraint y consiste en definirle un potencial a la fuerza constraint y luego esperar hasta meter la constraint.

Ejemplo 4.2.
1) **Péndulo Simple:** Por las ecuaciones de movimiento en coordenadas polares, y por el potencial gravitacional $-mgr\cos\theta$ (vale 0 en el pivote) e introducimos un potencial de constraint:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\cos\theta - V_T(r)$$

Entonces, la ecuación de E-L radial y angular son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= 0 \\ \Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \frac{dV_T}{dr} &= 0 \\ \Rightarrow \quad mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

Ahora sí imponeos la condición de que $r = L$ por estar en el péndulo y entonces nos quedan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\frac{dV_T}{dr} &= -ml\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta \\ ml^2\ddot{\theta} &= mgl\sin\theta \end{aligned}$$

La primera ecuación es la derivada del potencial de constraint y por tanto es la fuerza de constraint (tensión). La segunda es la ecuación de movimiento que ya conocemos.

2) **Objeto Deslizándose en una Semiesfera:** Para este sistema, definimos el ángulo θ con respecto a la vertical y le damos energía potencial 0 a la base, además definimos un potencial de constraint que surge de la fuerza Normal. Entonces:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\cos\theta - V_N(r)$$

Luego calculamos las ecuaciones de movimiento usando E-L.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + \frac{dV_T}{dr} &= 0 \\ \Rightarrow \quad mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mgr\sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

Luego aplicamos la condición $r = R$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} -\left.\frac{dV_N}{dr}\right|_{r=R} &= mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 \\ mR^2\ddot{\theta} + mgR\sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

La primera ecuación es la derivada del potencial y por tanto es la fuerza de constraint (la normal). La segunda es la ecuación del movimiento.

Procedimiento General:

1) Podemos imponer las condiciones directamente y determinar las ecuaciones de movimiento.
2) Si queremos conocer las fuerzas de constraint, definimos un nuevo potencial que depende de la variable que estaba constrained y calculamos así las ecuaciones de E-L. Finalmente sustituimos la constraint para obtener las ecuaciones de movimiento y - la derivada del potencial es la fuerza.

4.5. Ejemplos:

1) **Péndulo en un Resorte:** El resorte tiene longitud de equilibrio l. Usamos coordenadas polares, la longitud del resorte en un momento cualquiera es $l + x(t)$ (es decir $x(t)$ se define como la distancia radial a partir de la longitud de equilibrio) y el ángulo $\theta(t)$ medido con respecto a la vertical.
Entonces, por la ecuación de la velocidad en polares, tenemos que:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\theta}^2)$$
$$V(x,\theta) = -mg(l+x)\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2$$
$$\text{Entonces, } L = \frac{1}{2}m(\dot{x} + (l+x)^2\dot{\theta}^2) + mg(l+x)\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2$$

Usamos las ecuaciones de EL para x y θ y nos queda:

$$m\ddot{x} = m(l+x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx$$
$$m(l+x)\ddot{\theta} + 2m\dot{x}\dot{\theta} = -mg\sin\theta$$

La primera parte es la ecuación de Newton radial en coordenadas polares y la segunda es la ecuación angular.

2) **Péndulo con un soporte oscilante:** Tenemos un péndulo simple pero con su pivote (x_s, y_s) se mueve. Y sea (x, y) la posición de la masa relativa al pivote. Entonces la posición con respecto al sistema fijo de la masa es $(x_s + x, y_s + y)$. Definimos θ como el ángulo de la masa respecto al pivote, entonces:

$$x = l\sin\theta$$
$$y = l\cos\theta$$

La energía cinética se puede calcular directamente en coordenadas cartesianas y la potencial es:

$$K = \frac{1}{2}m[(\dot{x} + \dot{x}_s)^2 + (\dot{y} + \dot{y}_s)^2] = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{x}_s + 2\dot{y}\dot{y}_s + \dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2)$$
$$V = -mgl\cos\theta - mgy_s$$

Luego podemos escribir el Lagrangiano (usar las expresiones de x, y con θ) y aplicar las ecuaciones de E-L para obtener la ecuación de movimiento de θ:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{\ddot{y}_s}{l}\right) \sin\theta = -\frac{\ddot{x}_s}{l} \cos\theta$$

Un caso importante surge si hacemos que el soporte se mueva como $\ddot{x}_s = x_0 \cos\omega t$, $y_s = 0$ es decir, el pivote se mueve oscilando horizontalmente. Si además aproximamos un desplazamiento angular chico, nos queda:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{x_0}{l} \omega^2 \cos\omega t$$

Donde $\omega_0^2 = g/l$ es la frecuencia natural del péndulo. La ecuación resultante por tanto se parece a la de un oscilador armónico forzado y sin damping.

4.6. Hamilton

Principio de Hamilton: El principio de Hamilton dice que si un camino $q_i(t)$ es tal que pequeñas variaciones en la trayectoria (que fijen el punto inicial y final) den solamente cambios lineales en la acción $\int L(q_i, \dot{q}_i, t)dt$ entonces L satisface las ecuaciones de E-L, y viceversa

Este teorema ya lo vimos y demostramos. Como el hecho que L tenga un punto estacionario al tomar $q(t)$ es independiente a cambios de coordenadas, entonces las ecuaciones de E-L (que según el principio son equivalentes) tampoco dependen de las coordenadas.

Luego, se sigue que las ecuaciones de E-L son equivalentes a las de Newton. Pues si tomamos las coordenadas cartesianas, $K = \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2$ y entonces el momento generalizado es el momento como tal. Y $L = K - V$, entonces la ecuación de E-L es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K-V)}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0$$
$$\frac{d}{dt} p_k + \frac{\partial V}{\partial x_k} = 0$$

Que es la ecuación de Newton para una fuerza conservativa.

4.7. Ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de Hamilton son ecuaciones diferenciales de primer orden. En Lagrange tenemos que las variables son $q_j, \vec{q}_j$ y t, y el momento general es:

$$\mathfrak{p}_j = \frac{\partial K}{\partial \vec{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}_j}$$

Porque el potencial no depende de la velocidad.
En mecánica Hamiltoniana, las variables son q_j , $\mathfrak{p}_j, t$ son variables independientes y $\dot{q}_j$ es una cantidad dependiente:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_1, q_2, ..., q_n; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, ..., \mathfrak{p}_n; t)$$

Con esto, la función Hamiltoniana se define como sigue:

$$H(q_1, q_2, ..., q_n; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, ..., \mathfrak{p}_n; t) := \mathfrak{p}_j \dot{q}_j - L$$

Con $\dot{q}_j$ entendidos como funciones del momento y coordenadas generalizadas y del tiempo. El diferencial total de H es entonces:

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}_j d\mathfrak{p}_j + \mathfrak{p}_j d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \dot{q}_j d\mathfrak{p}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

En la segunda igualdad usamos que $\mathfrak{p}_l = \partial L / \partial \dot{q}_j$
Otra forma de calcular el diferencial total es:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_j} d\mathfrak{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Si juntamos las dos expresiones para el diferencial total, entonces nos quedan las **ecuaciones de Hamilton:**

$$\begin{gathered} \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_j} = \dot{q}_j \\ \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\dot{\mathfrak{p}} + Q'_j \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{gathered}$$

Significado Físico: En coordenadas cartesianas, la energía cinética es $K = \frac{1}{2} p_k \dot{x}_k$, que usando la regla de la cadena, nos queda:
$K = \frac{1}{2} p_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_k}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \mathfrak{p}_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} p_k \frac{\partial x_k}{\partial t}$
Entonces, nos queda que:

$$\mathfrak{p}_j \dot{q}_j = 2K - p_k \frac{\partial x_k}{\partial t}$$

Entonces, el Hamiltoniano H es en realidad
$H = \mathfrak{p}_j \dot{q}_j - L = 2K - p_k \frac{\partial x_k}{\partial t} - L = K + V - p_k \frac{\partial x_k}{\partial t}$
Entonces, si la transformación entre coordenadas no tiene una dependencia temporal explícita, queda que el Hamiltoniano es:

$$H = K + V$$

Esta cantidad se conserva siempre y cuando no tenga una dependencia explícita con el tiempo y que no haya fuerzas no conservativas.

Ejemplo 4.3.
Consideramos un oscilador armónico en una dimensión. Para el cual tenemos:

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}m\dot{x} \\ V &= \tfrac{1}{2}kx^2 \\ L &= \tfrac{1}{2}m\dot{x} - \tfrac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

En este caso, usamos esta misma x como la coordenada generalizada y el momento generalizado se obtiene como:

$$p = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

El hamiltoniano es según su definición:

$$\begin{aligned} H &= p\dot{x} - (\tfrac{1}{2}m\dot{x} - \tfrac{1}{2}kx^2) \\ &= \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

Que es la energía total del oscilador.

Entonces nos quedan que las ecuaciones de Hamilton son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_j} = \dot{q}_j \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{p}{m} = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 \\ \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\dot{\mathfrak{p}} + Q'_j \quad &\Rightarrow \quad kx = -m\ddot{x} \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad &\Rightarrow \quad 0 = 0 \end{aligned}$$

La segunda ecuación es la del movimiento

4.8. Teorema de Noether:

Teorema 4.2. : Para cada simetría del Lagrangiano, hay una cantidad que se conserva.

Simetría quiere decir que si la coordenada es cambiada un poquito, entonces el Lagrangiano no tiene no tiene cambios de primer orden en esta cantidad.
Por cantidad conservada quiere decir una cantidad que no cambia con el tiempo.
El teorema es un caso más general que lo que vimos de coordenadas cíclicas en las que se pedía que el Lagrangiano no dependiera en absoluto de la coordenada.

Dem: Digamos que el Lagrangiano es invariante ante cambios lineales, es decir, cambios del tipo:

$$q_i \to q_i + \epsilon K_i(q)$$

Donde q simboliza a todas las q_i.

Decir que el Lagrangiano no cambia en primer orden con ϵ significa que:

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial L}{\partial \epsilon} &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \epsilon} \right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{K}_i \right)
\end{aligned}
$$

Entonces, por la ecuación de $E - L$, se puede escribir:

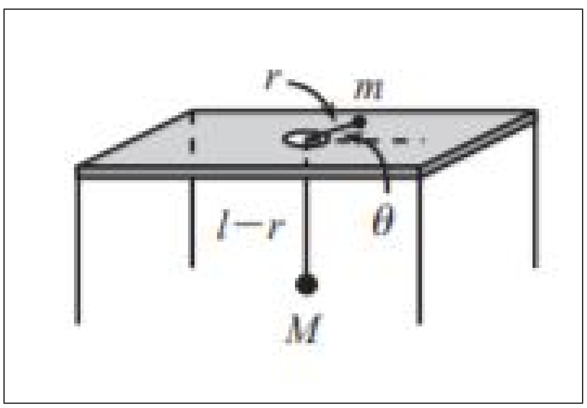
$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_i \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{K}_i \right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i \right)
\end{aligned}
$$

Entonces, la cantidad entre paréntesis se conserva y es el momento conservado.

Ejemplo 4.4. : Consideremos un Lagrangiano que sea: $L = (m/2)(5\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2) + C(2x - y)$

Aquí para que el lagrangiano no cambie, debemos de tener los cambios $x \to x + \epsilon$, $y \to y + 2\epsilon$.
Por lo que $K_1 = 1, K_2 = 2$.
Con esto, la cantidad conservada es: $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} K_x + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} K_y = ... = m(3\dot{x} + 3\dot{y})$

4.9. Oscilaciones Pequeñas:



Tenemos que calcular las ecuaciones de movimiento, la condición para movimiento circular y la frecuencia de oscilaciones chicas.

Se puede ver que el Lagrangiano es:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + Mg(l - r)$$

Entonces, las ecuaciones de movimiento son:

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \\
(M + m)\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - Mg
\end{gathered}
$$

La primera ecaución dice que la cantidad $mr^2\dot{\theta} = L$ es constante. Despejamos $\dot{\theta}$ en esta ecuación y la sustituimos en la segunda, para obtener:

$$(M + m)\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - Mg$$

Luego usamos la condición que queremos (movimiento circular) por lo que ponemos las derivadas de $r = r_0$ iguales a cero y nos queda:

$$r_0^3 = \frac{L^2}{Mmg}$$
$$\Rightarrow \; mr_0\dot{\theta} = Mg$$

Que básicamente dice que la fuerza de la masa M tiene que proporcionar justo la aceleración centrípeta. Dado r_0 se puede determinar la $\dot{\theta}$ correspondiente y vice versa.

Para las oscilaciones alrededor de este punto de movimiento circular, hay que ver qué pasa cuando alteramos levemente al r, es decir $r(t) = r_0 + \delta(t)$ con $\delta << r_0$. Entonces, la ecuaci on que teníamos de movimiento se transforma en:

$$(M+m)(r_0 \ddot{+} \delta) = \frac{L^2}{m(r_0+\delta)^3} - Mg$$
$$(M+m)\ddot{\delta} \simeq \frac{L}{mr_0^3}\left(1 - 3\frac{\delta}{r_0}\right) - Mg$$

Luego se cancelan los términos que no involucran a δ al sustituir la usar el valor de r_0. Este tipo de cancelaciones siempre suceden en estos problemas por la condición de que se realizan en un punto de equilibrio. Entonces, nos queda que la ecuación de δ es:

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{3L^2}{(M+m)mr_0^4}\right)\delta \simeq 0$$

ENtonces oscila con una frecuencai de la raíz del término entre paréntesis.

El método general es 1) encontrar las ecuaciones de movimiento, 2) encontrar el punto de equilibrio (punto en el que la primera derivada al menos se hace 0), 3) hacer $x(t) = x_0 + \delta(t)$ para un δ chico y obtener una ecaución para δ en una aproximación de primer orden.

5. Conservación del Momento:

Para un sistema de muchos cuerpos, y sin fuerzas externas, el momento total se conserva. Pues las fuerzas vienen en pares que se cancelan, y entonces el cambio del momento en un partícula es igual a menos el cambio en la otra.

Se puede probar que si un sistema tiene un Lagrangiano que es invariante bajo traslación entonces el momento se conserva. Pues si este es el caso, entonces el potencial tiene que depender únicamente de la diferencia en posiciones.

El lagrangino es entonces de la forma:

$$L = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2 - V(x_1 - x_2)$$

Entonces las ecuaciones de movimiento de E-L es:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial V(x_2 - x_1)}{\partial x_1}$$
$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial V(x_2 - x_1)}{\partial x_2}$$

Entonces, al sumar las ecuaciones, nos queda:

$$\frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0$$

Por lo que el momento total es constante.

5.1. Movimiento de Cohetes:

1) Tenemos un carro que se mueve y le va cayendo lluvia con una masa de σ por segundo. El momento inicial es $P = m_0 v_0$ y es constante porque la lluvia no tiene componente horizontal.
La masa cambia con el tiempo según la ecuación $m = m_0 + \sigma t$.
Entonces, tenemos:

$$mv = m_0 v_0 \quad \Rightarrow \quad (m_0 + \sigma t)v = m_0 v_0$$
$$\Rightarrow \quad v = v_0 \frac{m_0}{m_0 + \sigma t}$$

2) Cohete: A un tiempo t un cohete de masa m se mueve a velocidad v con respecto a una coordenada fija. Expulsa exhausto a una velocidad constante u con respecto al cohete y opuesta al cohete. En un momento dado, el cohete expulsa una masa $-dm$ (dm es negativo). Entonces, el cambio en momento es:

$$P + dP = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - u)$$

La primera parte es el momento final del cohete y la segunda es el momento del pedazo de masa expulsado, entonces:

$$dP = mdv + udm$$

Y entonces, el cambio en el momento es igual a la fuerza externa y es:

$$F_{ex} = \frac{dP}{dt} = m\frac{dv}{dt} + u\frac{dm}{dt}$$

Entonces, tenemos:

$$m\frac{dv}{dt} = F_{ex} - u\frac{dm}{dt}$$

El segundo término es el thrust que gana el cohete.
En la ausencia de fuerzas externas, se puede resolver exactamente la ecuación, pues queda:

$$dv = -u\frac{dm}{m}$$

Entonces nos queda:

$$v_f - v_i = u \log \frac{m_i}{m_f}$$

5.2. Sistemas de Referencia

El típico sistema de referencia es el Lab Frame que puede ser cualquiera (generalmente en colisiones se acostumbra usar un sistema en el que la partícula que recibe la colisión empieza quieta).

Sin embargo, podemos definir otro sistema de referencia llamado **Sistema CM** en el que el momento total de las partículas sea 0.

Cambio de Sistemas: Si un sistema S' se mueve a velocidad $\vec{u}$ con respecto a un sistema S entonces las posiciones y velocidades se relacionan por:

$$\vec{x} = \vec{x'} + \vec{u}t$$
$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{u}$$
$$\vec{a} = \vec{a'}$$

Si el momento se conserva en un frame S entonces se conserva en todos los frames inerciales.

Si el momento total en S es $\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$, entonces el sistema CM se consigue al moverse con respecto a S a una velocidad:

$$\vec{u} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

Esto debido a que en este nuevo sistema el momento es 0 como se puede probar:

$$\vec{P'} = \sum m_i \vec{v'_i} = \sum m_i \left(\vec{v}_i - \frac{\vec{P}}{M} \right) = \vec{P} - \vec{P} = 0$$

Posición Centro de Masa: El centro de masa de un grupo de partículas (medido desde el rest frame) es:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{M}$$

Podemos tomar este punto como el centro del CM frame.

Ejemplo 5.1. Tenemos una masa m a velocidad v_{1i} que se mueve hacia una masa estacionaria M en 1D. Calcula las velocidades finales si la colisión es elástica.

La velocidad con la que se mueve el centro de masa es: $u = \frac{mv_{mi}}{m+M}$. Entonces, las velocidades en el CM frame son:

$$v'_{mi} = v_{mi} - u = \frac{Mv}{m+M} \qquad v'_{Mi} = v_{Mi} - u = \frac{-mv}{m+M}$$

Como el momento final debe de ser 0, las velocidades finales deben de tener una razón de M/m como lo tienen inicialmente. La única forma de que esto pase es que cambien de signo o que las dos disminuyan o las dos aumenten. Esto no es posible por la conservación de la energía. Por lo tanto, la velocidad final se reversa de signo. Si queremos la final en el lab frame, tomamos estas finales en el CM (con el signo al revés) y le aplicamos la transformación. Queda:

$$v_{mf} = \frac{(m-M)v}{m+M} \qquad v_M = \frac{2mv}{m+M}$$

5.3. Energía Cinética:

La energía cinética en el CM es $K_{CM} = \frac{1}{2}\sum m_i|\vec{v'}_i|^2$. Entonces, en el sistema S es:

$$\begin{aligned} K_s = \frac{1}{2}\sum m_i|\vec{v}_i|^2 &= \frac{1}{2}\sum m_i|\vec{v'}_i + \vec{u}|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v'}_i \cdot \vec{v'}_i + 2\vec{v'}_i \cdot \vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{u}) \\ &= \frac{1}{2}\sum m_i|\vec{v'}_i|^2 + \vec{u}\cdot\sum m_i\vec{v'}_i + \frac{1}{2}|\vec{u}|\sum m_i \\ &= K_{CM} + \frac{1}{2}Mu^2 \end{aligned}$$

El término de en medio desaparece porque es el momento total en el CM que por def. es 0 Entonces, el K en cualquier sistema es igual al K en el CM más la energía cinética que tiene la suma de todas las masas moviéndose a la velocidad a la que se mueve el CM respecto a S. Por lo tanto, si K se conserva en un frame, se conserva en el CM y se conserva en todos los frames.

5.4. Colisiones

Elásticas: Se preserva la energía total.
Inelásticas: No se preserva la energía total.

5.4.1. 1D

Ejemplo: Tenemos una masa m que se acerca a velocidad v a una masa M quieta. Velocidades finales después de la colisión elástca.

En el lab frame, las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} mv + 0 &= mv_f + MV_f \\ \frac{1}{2}mv^2 + 0 &= \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV_f \end{aligned}$$

Una forma de resolver es despejar V_f en la primera y sustituir en la segunda, con lo que se llega a:

$$[(m + M0v_f - (m-M)v](v_f - v) = 0$$

Una solución es que $v_f = v$ y corresponde a la posibilidad de que no choquen (tomar en cuenta que $v = v_f$ es siempre una solución puede simplificar cuadráticas siempre). Si chocan, nos queda que la solución es:

$$v_f = \frac{(m-M)v}{m+M} \qquad V_f = \frac{2mv}{m+M}$$

Teorema: En una colisión Elástica en 1D, la velocidad relativa de las partículas después de la colisión es igual a la velocidad relativa antes.
Dem: Escribir la conservación de momento y de Energía. O bien, vimos ya que esto se cumple en el CM antes. Por tanto, se cumple en todos los S pues involucra solamente diferencias de velocidades.

5.4.2. 2D

Escribir las ecuaciones de conservación en todas las direcciones y listo.

5.5. Procesos Inelásticos:

Generalmente son problemas en que los objetos que colisionan terminan pegados.
Ejemplo: Arena cae verticalmente a una razón de $\sigma kg/s$ a una cinta que se mueve.

1) Fuerza para que se siga moviendo la cinta a velocidad v:
Sea $m = m_0 + \sigma t$ la masa total de la cinta m_0 y la arena. Entonces, por la segunda ley:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v = 0 + \sigma v$$

2) Cuanta energía cinética gana la arena por unidad de tiempo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{dm}{dt}\frac{v^2}{2} = \frac{\sigma v^2}{2}$$

Hemos usado en ambas respuestas que $v = cte$.

3)Trabajo que se realiza por unidad de tiempo:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{Fdx}{dt} = Fv = \sigma v^2$$

Como vemos, se pierde una energía a un ritmo de $\sigma v^2/2$ al comparar el trabajo y el cambio de ciética.

Ejemplo 2: Una cadena de longitud L y densidad σ se sostiene verticalmente justo sobre una balanza. Al soltarla, qué mide la balanza como función de la altura de la cima de la cadena?

Sea y dicha altura y F la fuerza de la cadena sobre la balanza (y viceversa) que es la que hay que medir.
La cadena tiene una fuerza $F - \sigma Lg$ y tiene un momento (debido a la parte que se mueve) de $\sigma y\dot{y}$. Por segunda ley:

$$F - \sigma L g = \frac{d(\sigma y \dot{y})}{dt} = \sigma y \ddot{y} + \sigma \dot{y}^2$$

La parte de arriba de la cadena está en caída libre, por lo que $\ddot{y} = -g$ y por conservación de la energía, tiene una velocidad de $\dot{y} = \sqrt{2g(L-y)}$ Entones, sustituyendo queda que la fuerza es:

$$F = 3\sigma(L-y)g$$

6. Fuerzas Centrales:

Una fuerza central es una fuerza que apunta radialmente y que su magnitud depende únicamente de la distancia al centro, es decir:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dt}\widehat{r}$$

6.1. Conservación del Momento Angular:

Definición de Momento Angular: Definimos el momento angular con respecto al origen de una masa puntual con momento $\vec{p}$ y localizada en $\vec{r}$ como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Se escoge así porque esta elección le da unas buenas propiedades, además de que ya probamos que esta cantidad se conserva para potenciales que dependen de r en coordenadas polares.

Teorema 7.1: Si una partícula es sujeta a una fuerza central, entonces el momento angular se conserva.

Dem:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F} \\ &= 0\end{aligned}$$

Porque la fuerza es en la misma dirección que el vector $\vec{r}$.

Teorema 7.2: Si una partícula es sujeta a una fuerza central, su movimiento toma lugar en un plano.

Dem: En un tiempo cualquier, consideramos el plano que contiene $\vec{r}$ y $\vec{v}$ y que pasa por el origen. Este es el plano con vector normal $\vec{r} \times \vec{v}$. Pero esta cantidad es el momento angular entre m, lo que no cambia con el tiempo. Por lo tanto, este plano es siempre el mismo.

6.2. Potencial Efectivo:

El potencial efectivo es una forma de simplificar problemas de fuerzas centrales a problemas de una sola dimensión.
Consideramos una masa m sujeta a una fuerza central con potencial $V(r)$. Sea r y θ las coordenadas polares del plano de movimiento. En estas coordenadas, el lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

Las ecuaciones de movimiento usando E-L son:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - V'(r)$$
$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

La primera ecuación es la de la fuerza radial con $F = -V$ y la segunda es la conservación del momento angular. Pues es la magnitud de $\vec{r} \times \vec{p}$ en la que la componente radial de la velocidad no importa.
Entonces $\vec{L}$ es constante (lo que se sigue de que θ es una coordenada cíclica).
Entonces, ponemos $L = mr^2\dot{\theta}$ y lo sustituimos en la primera ecuación (L se puede conseguir con las condiciones iniciales):

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - V'(r)$$

Al multiplicar por $\dot{r}$ e integrar, nos queda:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{2mr^2} + V(r)\right) = E$$

Donde E es una constante de integración, que resulta ser la energía total.
Estas últimas ecuaciónes involucran a una sola variable y parecen las ecuaciones de un objeto movíendose en la coordenada r bajo la influencia de un potencial:

$$V_{eff}(r) := \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$
$$\text{Y una fuerza } F_{eff}(r) := \frac{L^2}{mr^3} - V'(r)$$

Entonces, dado un problema de fuerza central, podemos resolver alguna de las ecuaciones de arriba y obtener $r(t)$, olvidándonos de que θ existe. Luego, sustituimos $r(t)$ en la expresión de L y despejamos $theta(t)$ y finalmente obtenemos $\theta(t)$
El procedimiento funciona porque L relaciona r con θ, por lo que no son independientes.

Para intepretar un poco la solución de un problema de este tipo, podemos graficar $V_{eff}(r)$. Luego, ponemos una línea horizontal en $V_{eff} = E$. La partícula se moverá desde el r en el que empieza a través de la curva, pero sin poder cruzar la línea E (porque significaría tener más energía potencial que la total). Para puntos en los que la gráfica se encuentra debajo de E, significa que el resto de la energía es cinética.
Por la conservación de L, r no puede hacerse demasiado chico, pues eso implica que $\dot{\theta}$ sea muy grande, lo cual nos daría una energía cinética tangencial muy alta que no se puede.

6.3. Resolver las Ecuaciones

Nuevamente, las ecuaciones son:

$$mr^2\dot{\theta} = L$$
$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

Podemos resolver a r y θ como funciones de t o bien, resolver a r como función de θ

Encontrar $r(t), \theta(t)$:
Tomamos la segunda ecaución (dado L, E o determinados por condiciones iniciales y dado $V(r)$). Luego, esta es una ecuación separable y listo.
Luego usamos la primera ecuación para obtener $\dot{\theta}(t)$ e integramos y listo.

Encontrar $r(\theta)$**:** Despejamos $\dot{r}$ de la segunda ecuación y luego dividimos por el cuadrado de la primera ecuación. Los dt se cancelan y queda:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2mV(r)}{L^2}$$

Luego despejamos $dr/d\theta$ y finalmente integramos y listo.

6.4. Cónicas en Polares:

Todas las cónicas se pueden definir dados un foco y una directriz. Una cónica es el conjunto de puntos tal que la distancia al foco entre la distancia a la directriz es una constante llamada excentricidad ϵ.

Si $\epsilon = 0$, se trata de un círculo.
Si $0 < \epsilon < 1$ se trata de una elipse.
Si $\epsilon = 1$ se trata de una parábola.
Si $\epsilon > 1$, se trata de una hipérbola.

Se puede ver geométricamente que en coordenadas polares se puede escribir la ecuación de una cónica con excentricidad ϵ y directriz ubicada en $x = d$ como:

$$r(\theta) = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon \cos\theta}$$

6.5. Órbitas

Buscamos calcular la trayectoria de un planeta alrededor del sol. Entonces tiene un potencial de

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad \alpha := GM_S m$$

Como $M_S >> m$, entonces se puede aproximar que el sol no se mueve y que r es la posición de la tierra y al mismo tiempo la distancia al sol. Podemos escribir entonces la ecuación de la energía y la del momento angular o directamente la de la sección anterior para encontrar $r(\theta)$:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2m\alpha}{rL^2}$$

Se puede resolver usando separación de variables, o mejor usando $y := 1/r$ y $z = y - m\alpha/L^2$ con lo que se simplifica mucho la ecuación y se puede resolver más sencillamente. La solución es:

$$r = \frac{L^2}{m\alpha(1+\epsilon\cos\theta)}$$
$$\text{Con: } \epsilon := \sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$$

Que es la ecuación de una cónica con excentricidad ϵ. También podemos calcular el radio mínimo y máximo de la trayectoria:

$$r_{min} = \frac{L^2}{m\alpha(1+\epsilon)}$$
$$r_{max} = \frac{L^2}{m\alpha(1-\epsilon)} \quad (\epsilon < 1) \qquad\qquad r_{max} = \infty \quad (\epsilon \geq 1)$$

Círculo: $\epsilon = 0$
La energía es entonces de $E = -m\alpha^2/2L^2$. El signo negativo indica que gana la energía gravitacional sobre la cinética. El radio mínimo y máximo son el mismo. La gráfica de V_{eff} vs r tiene un mínimo en dicho punto y no lo puede pasar porque es también el calor de E que no se puede superar.

Elipse $0 < \epsilon < 1$
Se puede calcular r_{min} y r_{max}. Si graficamos V_{eff} vs r, tiene un mínimo en un radio intermedio entre el mín y el máx. La barrera E está un poco arriba, pero r no puede variar demasiado.

Parábola: $(\epsilon = 1)$
La energía es $E = 0$, lo que implica que la masa puede llegar justo al infinito y quedar quieta. La gráfica de V_{eff} vs r tiene la barrera E en el 0 y la gráfica está por debajo de este punto y se acerca al 0 conforme r tiende a infinito.

Hipérbola: $(\epsilon > 1)$
La energía es Positiva, lo que significa que puede llegar al infinito teniendo todavía una energía cinética sobrante.

6.5.1. Leyes de Kepler

Primera Ley: Los planetas se mueven en elipses con el sol en el centro.
Esto ya lo probamos como cierto. Los objetos que no se mueven en elipses no son planetas, porque nunca regresan al sistema solar.

Segunda Ley: El vector radial barre áreas a una razón que es independiente de la posición en la órbita.
El área de un pedacito de órbita es $dA = r(rd\theta)/2$, entonces:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 d\theta}{2dt} = \frac{r^2}{2}\dot{\theta} = \frac{L}{2m} = cte$$

Tercera Ley: El cuadrado del periodo T es proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor a.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_S}$$

Dem: Integrando la ecuación de la ley anterior en el tiempo de una órbita, nos queda: $A = \dfrac{LT}{2m}$
Entonces, $\pi ab = \dfrac{LT}{2m}$
Luego, b es r_{min} y $a = r_{max}$, y entonces, al sustituir y trabajar un poco, se llega a la ecuación.

6.5.2. Masa Reducida:

Si la masa de un objeto es comparable con la del otro, entonces no se puede usar la aproximación pasada, y laplaciano (para un potencial que depende de la distancia) es de:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r_1}}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r_2}}^2 - V(|\vec{r_1} - \vec{r_2}|)$$

Definimos entonces las siguientes cosas (centro de masa y vector diferencia):

$$\vec{R} := \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2} \qquad \vec{r} := \vec{r_1} - \vec{r_2} \qquad M = m_1 + m_2$$

Entonces, podemos ver que:

$$\vec{r_1} = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \qquad \vec{r_2} = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

Entonces el lagrangiano pasa a ser:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 - V(|\vec{r}|) \\
&= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\dot{\vec{r}}^2 - V(r) \\
&= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(r)
\end{aligned}$$

Donde $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$
Vemos que el lagrangiano depende de $\dot{\vec{R}}$ pero no de $\vec{R}$ por lo que es una coordenada cíclica y por tanto $\dot{\vec{R}}$ es constante.
Es decir, el CM se mueve a velocidad constante (tal como se había probado cuando no hay fuerzas externas). Podemos ignorar la parte del lagrangiano que involucra al CM por ser constante y entonces, nos queda:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + \vec{\alpha}/r$$
$$\text{Con } \alpha := GM_S m$$

Entonces, es como el lagrangiano de hace un rato, sólo que en vez de tener L como constante, tiene la constante $1/2M\dot{\vec{R}}^2$, pero eso no importa. Y en vez de que r indique la distancia de la tierra al centro, indica la distancia entre los dos objetos.
Para resolver el sistema de tierra sol, entonces podemos usar la ecuación que ya resolvimos, pero ahora $r(\theta)$ nos da la distancia entre los planetas como función del ángulo. Y necesitamos usar μ en vez de m (excepto en α, pero sí en todo lo demás).

7. Momento Angular (Con $\widehat{L}$ Cte)

Como vimos antes, para una partícula puntual, se define el momento angular (con respecto al origen) como el vector:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Y lo definimos así porque tiene la propiedad de que se conserva cuando aplicamos fuerzas centrales. Además, veremos que la tasa de cambio de este vector se le puede asignar un vector llamado torca.

Para un sistema de partículas en un cuerpo rígido, definimos el momento angular total como:

$$\vec{L} = \sum \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v}\, dm$$

Esta construcción sigue siendo útil debido a que se conserva en para fuerzas centrales.

7.1. Objeto Plano:

Tenemos un objeto plano en el plano XY. Este objeto puede girar y también trasladarse. En este caso, el vector $\vec{L}$ siempre apunta en la dirección z.

7.1.1. Rotando con eje en el eje z:

Tenemos un objeto plano que rota con respecto al eje z a velocidad angular ω. Un pedazo de masa dm en el objeto se mueve con una velocidad $\vec{v} = (\dot{r}\widehat{r} + r\dot{\theta}\widehat{\theta}) = r\omega\widehat{\theta}$.
Entonces, el momento angular de este pedacito es $d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times dm\ r\omega\widehat{\theta} = dm\ r^2\omega\widehat{z}$

Entonces, el momento angular total del objeto rotando respecto al eje z es:

$$\vec{L} = \int r^2\omega\widehat{z}\, dm = \int (x^2 + y^2)\omega\widehat{z}\, dm$$

Nos conviene escribir el momento angular del objeto (en este instante y con respecto al eje z) como una constante multiplicada por la velocidad angular. Esta constante la definimos como momento de inercia.
Momento de Inercia:

$$I_z := \int r^2 dm$$

Y con esto, podemos escribir el momento angular del objeto como:

$$L_z = I_z\omega$$

Energía:
La energía de un pedacito es $dmv^2/2 = dm(r\omega)^2/2$, por lo que la energía cinética total es:

$$T = \int \frac{r^2\omega^2}{2} dm = \frac{I_z\omega^2}{2}$$

7.1.2. Movimiento General en el plano XY

Para este tipo de movimiento ya no se vale que $v = \omega r$.
Resulta ser especialmente fácil escribir el momento y la energía usando el CM. Sea $\vec{R}$ el centro de masa y sea $\vec{r'}$ las coordenadas de los puntos con respecto al CM. Entonces, las coordenadas respecto al origen son $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$ y también con la velocidad $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v'}$. Digamos que el objeto gira con respecto al CM a velocidad angular ω' (en un eje instantáneo paralelos al eje z). Entonces, $v' = \omega' r'$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \int \vec{r} \times \vec{v}\, dm = \int (\vec{R} + \vec{r'}) \times (\vec{V} + \vec{v'})\, dm \\
&= \int \vec{R} \times \vec{V}\, dm + \int \vec{r'} \times \vec{v'}\, dm = M\vec{R} \times \vec{V} + \int r'^2\omega'\, dm\ \ \widehat{z} \\
&= \vec{R} \times \vec{P} + I_z^{CM}\omega'\widehat{z}
\end{aligned}$$

En el segundo renglón los términos cruzados son cero por la def. de CM $\int \vec{r'} \times \vec{V} dm = \int \vec{R} \times \vec{v'} dm = 0$ pues para el cm se cumple que $\int \vec{r'} dm = 0$ y que $\int \vec{v'} dm = 0$

Teorema 8.1: El momento angular con respecto al origen se puede calcular sumando el momento que tendría toda la masa concentrada en el CM más el momento angular con respecto al CM.

Energía:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}v^2\ dm = \int \frac{1}{2}|\vec{V}+\vec{v'}|^2 dm \\ &= \frac{1}{2}\int V^2 dm + \frac{1}{2}\int v'^2 dm = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\int r'^2\omega'^2 dm \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_z^{CM}\omega'^2 \end{aligned}$$

Los términos cruzados desaparecen porque $\int \vec{V}\cdot\vec{v}'dm = \vec{V}\int v'dm = 0$ por la def de CM.

Teorema 8.2: La energía cinética de un cuerpo se puede calcular tratando el cuerpo como un punto en el CM y sumando la energía rotacional con respecto al CM.

Teorema del Eje Paralelo: Si conocemos el momento de inercia de un cuerpo con respecto al CM, podemos calcular el momento con respecto a un eje paralelo.
Dem: El momento angular es $\vec{R}\times\vec{P} + I_z^{cm}\omega'$. Pero ahora $\vec{P} = m(\dot{R}\widehat{R} + R\dot{\theta}\widehat{\theta})$ y entonces el momento es $MR^2\omega + I_z^{CM}\omega$.
Como el momento de inercia es la proporcion entre la velocidad angular y el momento angular, entonces:

$$I_R = MR^2 + I_z^{cm}$$

Teorema del Eje Paralelo: Para un objeto pancake, se cumple:

$$I_z = I_x + I_y$$

7.2. Objetos No Planos:

Nuevamente, nos fijamos solamente en cuerpos que rotan con respecto al eje z. Como el L_z es la suma de todos los L_z de los pancakes que forman el cuerpo extendido, entonces también el I_z se consigue al sumar los I de todos los pancakes que forman el cuerpo.
Incluso para un objeto que rota solamente respecto al eje z, se puede tener un momento angular en x, y, pero por ahora no analizamos esto.

Encontrar el CM:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{M} \qquad \vec{R}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

7.3. Torque:

Bajo ciertas consideraciones, el cambio del momento angular es igual a una cantidad que llamamos torca. La prueba de este punto se hace para el caso general y no necesariamente rotación alrededor el eje z.

Masa Puntual: Una masa m en posición $\vec{r}$ con respecto al origen y con una fuerza $\vec{F}$ aplicada:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times \vec{F} \end{aligned}$$

Entonces, para este caso, definimos:

$$\vec{\tau} := \vec{r} \times \vec{F}$$

Entonces, tenemos la ley de Newton: $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

Objeto Extendido: Los objetos extendidos tienen fuerzas externas además de fuerzas internas entre las partículas. Nos concentraremos únicamente en fuerzas internas centrales (que son casi todas excepto la magnética). El momento angular total es:

$$\vec{L} = \sum \vec{r_i} \times \vec{p}$$

Entonces, tenemos que la derivada del momento es:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum \vec{r_i} \times \vec{p_i} = \sum \frac{d\vec{r_i}}{dt} \times \vec{p_i} + \sum \vec{r_i} \times \frac{d\vec{p_i}}{dt} \\ &= \sum \vec{v_i} \times m\vec{v_i} + \sum \vec{r_i} \times (\vec{F}_i^{ex} + \vec{F}_i^{in}) \\ &= \sum \vec{r_i} \times \vec{F}_i^{ex} \\ &= \sum \vec{\tau}_i^{ex} \end{aligned}$$

La suma $\sum \vec{r_i} \times \vec{F}_i^{in} = 0$ por la tercera ley de Newton.

Masa extendida y con origen no fijo: Sea $\vec{r_0}$ el origen del cuerpo y $\vec{r_i}$ las posiciones de las masas dm. El momento angular *Respecto al origen* $\vec{r_0}$ es:

$$\vec{L} = \sum (\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times m_i(\dot{\vec{r_i}} - \dot{\vec{r_0}})$$

Entonces, la derivada del momento angular es:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum (\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times m_i(\dot{\vec{r_i}} - \dot{\vec{r_0}})\right) \\ &= \sum (\dot{\vec{r_i}} - \dot{\vec{r_0}}) \times m_i(\dot{\vec{r_i}} - \dot{\vec{r_0}}) + \sum (\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times m_i(\ddot{\vec{r_i}} - \ddot{\vec{r_0}}) \\ &= \sum (\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times (\vec{F}_i^{ex} + \vec{F}_i^{in} - m_i\ddot{\vec{r_0}}) \end{aligned}$$

Entonces, usando que $\sum m_i \vec{r_i} = M\vec{R}_{CM}$ y como las fuerzas internas se cancelan, entonces:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\sum(\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times \vec{F_i}^{ex}\right) - M(\vec{R} - \vec{r_0}) \times \ddot{\vec{r_0}}$$

El primer término es el torque externo, entonces para que se cumpla que $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$, necesitamos que se cumpla alguna de las 3 condiciones:

1) $\vec{R} = \vec{r_0}$, es decir, medimos el origen en el CM.

2) $\ddot{\vec{r_0}} = 0$, es decir, el origen no acelera.

3) $(\vec{R} - \vec{r_0})$ es paralelo a $\ddot{\vec{r_0}}$, esto rara vez se usa.

En cualquiera de estos casos, tenemos que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum(\vec{r_i} - \vec{r_0}) \times F_i^{ex} := \sum \vec{\tau}_i^{ext}$$

Corolario: Si el torque externo total de un sistema es 0, entonces el momento angular se conserva.

Esto se vale para todo tipo de movimientos, pero si restringimos para que el momento angular apunte siempre en el eje z y que además el objeto sea rígido (las distancias entre partes sean fijas), entonces tenemos que $L = I\omega$ y que $dL/dt = I\dot{\omega}$, entonces:

$$\tau = I\alpha$$

7.4. Colisiones:

La consercación del momento angular se puede usar siempre y cuando no haya torcas externas. Tenemos que escoger un origen antes de calcular (puede ser uno fijo o el CM para que se valga que $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Hay que tener cuidado de no tomar un origen que acelere.
Los momentos angulares los podemos calcular según el teorema como el momento de la masa centrada al CM más el momento de rotación con respecto al CM.

7.5. Impulso Angular:

Definimos el impulso (lineal) como:

$$\mathcal{I} := \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \Delta\vec{p}$$

Y el momento angular como:

$$\mathcal{I}_\theta := \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}(t)dt = \Delta\vec{p}$$

Si $\vec{F}(t)$ es una fuerza que siempre se aplica en la misma posición con respecto al centro con el que se mide $\vec{r}(t)$. Sea $\vec{R}$ esta posición, entonces:

$$\Delta\vec{L} = \vec{R} \times \Delta\vec{p}$$

8. Momento Angular (Para $\widehat{L}$ General):

Ahora nos fijaremos en lo que sucede cuando permitimos que $\vec{L}$ cambie de dirección además de de longitud.

8.1. Preliminares:

Teorema 9.1 (Teorema de Chasles): Consideramos un cuerpo rígido moviéndose de manera arbitraria. Entonces en cada instante, este movimiento se puede escribir como la superposición de un movimiento traslacional de P más una rotación alrededor de un eje que pasa por P.

El vector de Velocidad Angular: El vector $\vec{\omega}$ es definido como el vector que apunta en la dirección del eje de rotación y cuya magnitud es igual a la velocidad angular.

Teorema 9.2: Dado un objeto rotando con una velocidad angular $\vec{\omega}$, entonces la velocidad en un punto $\vec{r}$ está dada por:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Todo está medido con respecto a un punto P (por el que pasa el eje de rotación).
Una prueba está dada en el Morin y otra en el resumen de Feynman.

Teorema 9.3: Sean S_1, S_2, S_3 con un origen común. Digamos que S_1 gira a velocidad angular $\vec{\omega_{1,2}}$ con respecto a S_2, y S_2 gira a velocidad angular $\vec{\omega_{2,3}}$ con respecto a S_3. Luego, S_1 gira (instantáneamente) con respecto a S_3 a velocidad:

$$\vec{\omega_{1,3}} = \vec{\omega_{1,2}} + \vec{\omega_{2,3}}$$

8.2. Tensor de Inercia:

Al igual que antes, el momento de inercia se define como el valor por el que hay que multiplicar la velocidad angular para llegar al momento angular. Notar que estos dos vectores no siempre paralelos.

8.2.1. Movimiento alrededor de un eje que pasa por el origen:

Gira a una velocidad angular $\vec{\omega}$ (que pasa por el origen). Consideramos una masa dm con un vector de posición $\vec{r}$. La velocidad de dicho pedacito es $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Entonces, el momento angular (respecto al origen) es $\vec{r} \times \vec{p} = (dm)\vec{r} \times \vec{v} = (dm)\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. El momento angular de todo el cuerpo es:

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$$

Podemos calcular el doble producto cruz, que da como resultado:
$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\omega_1(y^2+z^2) - \omega_2 xy - \omega_3 zx)\widehat{x} + (\omega_2(z^2+x^2) - \omega_3 yz - \omega_1 xy)\widehat{y} + (\omega_3(x^2+y^2) - \omega_1 zx - \omega_2 yz)\widehat{z}$
Y por lo tanto, el momento se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \int(y^2+z^2) & -\int xy & -\int zx \\ -\int xy & \int(z^2+x^2) & -\int yz \\ -\int zx & -\int yz & \int(x^2+y^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\
&:= \mathbf{I}\omega
\end{aligned}$$

$\mathbb{I}$ es el **Tensor Inercia**. Notar que es una matriz autoadjunta y depende en la geometría del objeto y no en $\vec{\omega}$

Ejemplo 8.1.
Masa en el plano xy: Consideramos una masa que se mueve en un círculo de radio r en el plano xy. Tenemos que $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_3)$ y con las integrales de I usando $z = 0, x^2 + y^2 = r^2$, podemos ver que $I_{zz} = mr^2$ y los demás son 0. Entonces, se puede ver que:

$$\vec{L} = (0, 0, mr^2\omega_3)$$

Masa puntual en el espacio: Una masa m que se mueve en un círculo de radio r paralelos al plano xy y a altura z_0. Entonces, tienen $\omega = (0, 0, \omega_3)$. Usando que $x^2 + y^2 = r^2, z = z_0$ se puede calcular el tensor de inercia (con fórmulas discretas) y usarlo para calcular el vector de momento angular.

$$\vec{L} = m\omega_3(-xz_0, -yz_0, r^2)$$

Notar que $\vec{L}$ no es paralelo a $\vec{\omega}$. En estos casos es más fácil calcular el momento angular sin usar el tensor inercia y simplemente con $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Energía Cinética: Sumamos las energías cinéticas de cada partícula que conforma al cuerpo. Cada una tiene una energía de $dmv^2/2 = dm|\vec{\omega} \times \vec{r}|^2/2$. Entonces, la energía es de:

$$T = \frac{1}{2}\int (\omega_2 z - \omega_3 y)^2 + (\omega_3 x - \omega_1 z)^2 + (\omega_1 y - \omega_2 x)^2 \; dm$$

Se puede probar con un poco de trabajo que esto se puede escribir como:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathbf{I}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}$$

8.2.2. Movimiento General:

Digamos que ahora el objeto rígido que se mueve arbitráreamente en el espacio y queremos determinar $\vec{L}$.
El movimiento del objeto se puede ver como un movimiento de un punto P más una rotación alrededor de un eje que pasa por P. Usaremos el caso en el que P es el CM que es el único en el que nos queda un resultado útil.
Sea $\vec{R}$ la posición del CM y $\vec{r'}$ la posición de un punto relativo al CM. Entonces $\vec{r}$ es la posición del pedazo de masa relativo al origen.
Por la ley de movimiento rotacional, tenemos que $\vec{v'} = \vec{\omega'} \times \vec{r}$. Entonces, calculamos:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \int \vec{r}\times\vec{v}dm = \int (\vec{R}+\vec{r'})\times(\vec{V}+\vec{\omega'}\times\vec{r'})\; dm \\
&= \int \vec{R}\times\vec{V}\; dm + \int \vec{r'}\times(\vec{\omega'}\times\vec{r'})\; dm \\
&= M\vec{R}\times\vec{V} + \vec{L}_{CM}
\end{aligned}$$

Es decir, es el momento angular del CM si tuviera toda la masa condensada más el momento angular de la rotación con respecto al CM.

Energía Cinética:
Un pedacito de masa tiene energía $dm|\vec{v}|^2/2$

$$\begin{aligned}
T &= \int \frac{1}{2}v^2 dm = \int \frac{1}{2}|\vec{V}+\vec{v'}|^2\; dm \\
&= \int \frac{1}{2}V^2 dm + \int \frac{1}{2}v'^2 dm \\
&= \frac{1}{2}MV^2 + \int \frac{1}{2}|\vec{\omega'}\times\vec{r'}|^2\; dm \\
&= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega'}\cdot\vec{L}_{CM}
\end{aligned}$$

Nota: El $\vec{\omega'}$ no requiere del primado porque el valor de la velocidad angular no depende de si estamos en el sistema lab o en el CM.

8.2.3. El Teorema del Eje Paralelo:

Si tengo el tensor de Inercia $\mathbf{I}_{CM}$ con respecto a un eje que pasa por el CM y queremos calcular el tensor de inercia respecto al origen entonces: Tenemos que calcular $\mathbf{I}_{\mathbf{R}}$ el tensor

que tendría el CM si concentrara toda la masa del objeto y luego sumarlos.
Entonces nos queda que el tensor de inercia en el eje paralelo que pasa por el origen es:

$$\mathbf{I_o} = \mathbf{I_R} + \mathbf{I_{CM}}$$

8.3. Ejes Principales:

En general, el tensor de inercia tiene 9 números distintos de cero. Los cuales dependen del origen escogido (generalmente el CM) y del sistema ortonormal que se use.

Los ejes principales son ejes ortonormales que salen del CM tales que la matriz de momento de inercia es diagonal. Los momentos de inercia en las entradas de la diagonal se llaman momentos principales.

Si $\vec{\omega}$ apunta en la dirección de un eje principal, entonces se cumple que $\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega} = I\vec{\omega}$. De hecho, los tres ejes principales tienen las propiedades que:

$$\mathbf{I}\vec{\omega_1} = I_1\vec{\omega_1} \qquad \mathbf{I}\vec{\omega_2} = I_2\vec{\omega_2} \qquad \mathbf{I}\vec{\omega_3} = I_3\vec{\omega_3}$$

Consideremos un objeto rotando alrededor de un eje con velocidad angular constante. Entonces, es un eje principal sii no se necesita ningún torque para que siga rotando.
Esto es debido a que si rota por un eje principal, entonces el momento angular es paralelo a este eje y como el eje de rotación no cambia, entonces la dirección de $\vec{L}$ no cambia y por tanto no se necesita una torca.
Si $\vec{\omega}$ apunta en otra dirección que no sea principal, el vector $\vec{L}$ no es paralelo y de hecho gira en un cono alrededor de $\vec{\omega}$. Para esto se necesita una torca.

Teorema: Para todo cuerpo, en todo instante existe una base ortonormal de bases principales (porque **I** es autoadjunta).
Notar que la dirección de los ejes principales (relativos al cuerpo) dependen solamente de la geometría del cuerpo y por tanto podemos pensar como que están dibujados sobre el cuerpo. Los ejes se mueven en el espacio conforme el cuerpo gira.
Todo vector de velocidad angular $\vec{\omega}$ se puede escribir en la base (instantánea) de ejes principales. Es decir:

$$\vec{\omega} = \omega_1\widehat{\omega}_1 + \omega_2\widehat{\omega}_2 + \omega_3\widehat{\omega}_3$$
$$\vec{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$$

Los componentes $\omega_i, I_i\omega_i$ se miden a lo largo de los ejes principales instantáneos $\widehat{\omega}_i$.
Como los ejes se mueven con el tiempo, entonces estos componentes cambian con el tiempo aunque el vector de velocidad angular $\vec{\omega}$ sea constante.

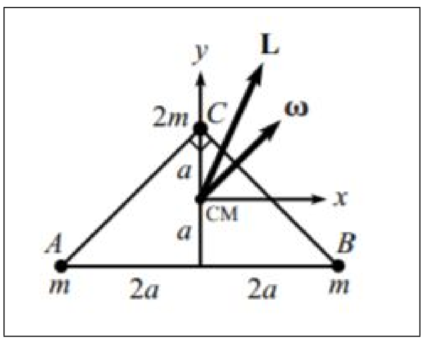
Para un objeto con cierta simetría, la posición de los ejes principales es más o menos obvia. Sin embargo, si tenemos un cuerpo asimétrico, nos conviene calcular **I** con respecto a cualquier base y luego encontrar los eigenvectores (ejes principales) y los eigenvalores (momentos principales)

Teorema 9.5: Si dos momentos principales son iguales ($I_1 = I_2 = I$) entonces cualquier eje que pase por el mismo origen y por el plano de los ejes principales 1 y 2, será también un eigenvector y con este mismo momento principal.

Teorema 9.6: Si un objeto es simétrico con una rotación por el eje $\vec{z}$ distinta de 180 grados, entonces todos los ejes por el plano XY son ejes principales y con el mismo momento de inercia.

8.4. Dos Tipos de Problemas

8.4.1. Movimiento de un Objeto tras un Golpe Impulsivo



Problema: Consideramos un cuerpo constituido por 3 masas como se ve en la figura. Se le imprime rápidamente un impulso $P = \int F dt$ a la masa B dirigido hacia adentro de la hoja. Velocidades después del impulso?

1) Encontrar el Centro de Masa y escribir las coordenadas de las masas: Las coordenadas de las masas con respecto al CM son $\vec{r}_A = (-2a, -a, 0)$, $\vec{r}_B = (2a, -a, 0)$, $\vec{r}_c = (0, a, 0)$.

2) Encontrar $\vec{L}$: El vector de impulso es $\vec{P} = (0, 0, -P)$. El momento angular del sistema con respecto al CM es entonces:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \int \vec{\tau} dt = \int (\vec{r}_B \times \vec{F}) dt = \vec{r}_B \times \int \vec{F} dt \\ &= (2a, -a, 0) \times (0, 0, -P) = aP(1, 2, 0)\end{aligned}$$

3) Calcular los momentos principales: Los ejes principales son el eje x, y, z por simetría. Así que los momentos principales son:

$$I_x = ma^2 + ma^2 + (2m)a^2 = 4ma^2$$
$$I_y = m(2a)^2 + m(2a)^2 + (2m)0^2 = 8ma^2$$

$I_z = I_x + I_y = 12ma^2$ Teorema del eje perpendicular

4) Encontrar $\vec{\omega}$: Tenemos dos expresiones para el momento angular, una es la de $aP(1, 2, 0)$

y la otra es por los ejes principales y es $(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$. Las igualamos y entonces:

$$
\begin{aligned}
(I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z) &= aP(1,2,0) \\
(4ma^2\omega_x, 8ma^2\omega_y, 12ma^2\omega_z) &= aP(1,2,0) \\
\Rightarrow \quad (\omega_x, \omega_y, \omega_z) &= \frac{P}{4ma}(1,1,0)
\end{aligned}
$$

5) Encontrar las velocidades con respecto al CM: La velocidad viene dada por $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A &= \frac{P}{4ma}(1,1,0) \times (-2a,-a,0) = (0,0,P/4m) \\
\vec{u}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_B &= \frac{P}{4ma}(1,1,0) \times (2a,-a,0) = (0,0,-3P/4m) \\
\vec{u}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_C &= \frac{P}{4ma}(1,1,0) \times (0,a,0) = (0,0,P/4m)
\end{aligned}
$$

Sumar la velocidad del CM: El impulso es $\vec{P} = (0,0,-P)$. La masa total es $M = 4m$ y por tanto la velocidad del centro de masa es: $\vec{V}_{CM} = \dfrac{\vec{P}}{M} = (0,0,-P/4m)$. Entonces las velocidades de las masas son:

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_A = \vec{u}_A + \vec{V}_{CM} &= (0,0,0) \\
\vec{v}_B = \vec{u}_B + \vec{V}_{CM} &= (0,0,-P/m) \\
\vec{v}_C = \vec{u}_C + \vec{V}_{CM} &= (0,0,0)
\end{aligned}
$$

8.4.2. Frecuencia de Movimiento Debido a un Torque:

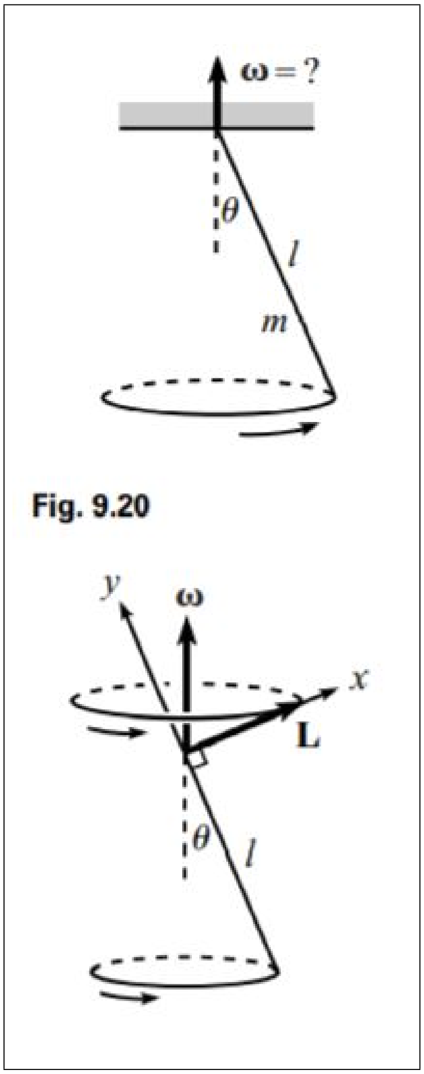


Fig. 9.20

Problema: Considera un palo con longitud l y masa m. Digamos que el palo siempre hace un ángulo θ con respecto a la vertical. Frecuencia del movimiento?

1) Calcular los Momentos Principales: Por simetría un eje principal es a lo largo del palo y los otros dos son entonces los perpendiculares como se ven en la imagen. Los momentos son: $I_x = ml^2/3$, $I_y = 0$, $I_z = ml^2/3$.

2) Encontrar $\vec{L}$: La velocidad angular apunta verticalmente y no cambia con el tiempo. Entonces, en la base de los ejes principales tenemos que $\vec{\omega} = (\omega \sin\theta, \omega\cos\theta, 0)$ (que podemos ver como cambia con el tiempo debido al cambio en el sistema de coordenadas). El momento angular es entonces:

$$\vec{L} = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z) = ((1/3)ml^2\omega\sin\theta, 0, 0))$$

Vemos que apunta siempre a lo largo del eje x.

3) Encontrar $\frac{d\vec{L}}{dt}$: Conforme el palo gira, el vector $\vec{L}$ dibuja un círulo horizontal con un radio de $L\cos\theta$. La velocidad de la punta es por tanto $(L\cos\theta)\omega$ Y por tanto:

$$\left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = (L\cos\theta)\omega = \frac{1}{3}ml^2\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

Podemos ver que no se consigue al simplemente derivar $\vec{L}$ porque este vector está escrito con respecto a los ejes principales (que rotan) pero hay que hacerlo respecto al eje de coordenadas del Lab. En este momento apunta hacia dentro de la hoja.

4) Calcular el Torque: El torque con respecto al pivote se debe a la gravedad (que actúa efectivamente en el CM) es $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$, apunta hacia adentro de la hoja y tiene magnitud $(l/2)(mg)\sin\theta$

5) Igualar la torca con la derivada de $\vec{L}$: Ambos apuntan hacia adentro de la hoja y al igualar sus magnitudes, tenemos:

$$\frac{ml^2\omega^2\sin\theta\cos\theta}{3} = \frac{mgl\sin\theta}{2} \quad\Rightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{2l\cos\theta}}$$

8.5. Ecuaciones de Euler:

Consideremos un cuerpo rotando instanténeamente con respecto a un eje $\vec{\omega}$. Este vector puede cambiar con el tiempo (con respecto a los ejes del lab o a los ejes principales instantáneos). El momento angular es $\mathbf{I}\vec{\omega}$ donde $\mathbf{I}$ se calcula con respecto a la base instanténa principal (al igual que el vector $\vec{\omega}$).

Escribir con respecto a los ejes principales hace que la ecuación $\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}$ tome la forma sencilla $(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$. Sin embargo, escribir con respecto a estos ejes (que se mueven con el tiempo) hace que sea difícil encontrar la expresión de $d\vec{L}/dt$ en el Lab frame. Esto nos lleva a las ecuaciones de Euler.

Si escribimos $\vec{L}$ en el body frame (con respecto a los ejes principales pintados en el cuerpo), entonces $\vec{L}$ puede cambiar debido a que cambia con respecto al cuerpo y debido a que los ejes principales se mueven.
Sea $\vec{L}_0$ el vector momento angular en un instante y digamos que lo pintamos en el cuerpo de tal forma que se mueva junto a los ejes principales. Luego, el cambio de $\vec{L}$ con respecto al lab se puede escribir obviamente de la forma:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{L} - \vec{L_0})}{dt} + \frac{d\vec{L}_0}{dt}$$

El segundo término es el cambio del vector $\vec{L}_0$ que está fijo en el cuerpo, y como tal, sabemos que su velocidad es $\vec{\omega} \times \vec{L}_0$ (o en cualquier tiempo es $\vec{\omega} \times \vec{L}$. El primer término es el cambio de $\vec{L}$ pero con respecto al body frame y lo denotamos $\delta\vec{L}/\delta t$, esto es lo que mide alguien parado sobre el cuerpo. Entonces, tenemos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\delta\vec{L}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Esto es un enunciado general sobre la tasa de cambio de un vector en el frame de un cuerpo. Ahora aplicamos el hecho de que estamos usando ejes principales para reescribir la ecuación. Con respecto a los ejes principales tenemos que $\vec{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$ y por tanto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) + (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \times (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$$

El vector del lado derecho está escrito con respecto al sistema de referencia de los ejes principales, por lo que el izquierdo también debe de estarlo. Por lo tanto, escribimos:

$$\left(\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_1, \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_2, \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_3\right) = \frac{d}{dt}(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) + (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \times (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$$

Donde el lado izquierdo significa derivar $\vec{L}$ y luego sacar sus componentes en los ejes principales. Entonces nos queda:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2$$
$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3$$
$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1$$

Tomando en cuenta que nuestros ejes salen del CM, cumple las condiciones necesarias para que la derivada del momento angular sea la torca y por tanto las **Ecuaciones de Euler:**

$$\vec{\tau}_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2$$
$$\vec{\tau}_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3$$
$$\vec{\tau}_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1$$

Ambos lados de las ecuaciones son componentes medidos con respecto a los ejes principales instantáneos. Que estos componentes no cambien no significa que el vector como tal no cambia (Sí cambia porque la base principal está cambiando)

8.6. Free Symmetric Top

Consideramos un objeto con dos de sus momentos principales iguales con el CM como origen. Asumimos que el objeto está en el espacio exterior, por lo que no hay fuerzas externas. Los ejes principales son el eje de simetría y cualesquiera dos ejes ortogonales. Se tiene momentos $I_1 = I_2 := I$ y I_3.

8.6.1. Desde el Body Frame:

Desde este frame podemos aplicar directamente las ecuaciones de Euler (sin torcas) y obtenemos:

$$0 = I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\omega_3\omega_2$$
$$0 = I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\omega_1\omega_3$$
$$0 = I\dot{\omega}_3$$

Por lo tanto, ω_3 es constante y además podemos definir $\Omega := \left(\frac{I_3 - I}{I}\right)\omega_3$ para que las primeras dos ecuaciones pasen a ser:

$$\dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 = 0 \quad , \quad \dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 = 0 \quad , \quad \ddot{\omega}_2 + \Omega\omega_2 = 0$$

Entonces, nos queda que estos componentes siguen las ecuaciones:

$$\omega_1(t) = A\cos(\Omega t + \phi) \ \ , \ \ \omega_2(t) = A\sin(\Omega t + \phi)$$

Por lo el vector ω dibuja un círculo alrededor de $\widehat{x}_3$ con una frecuencia Ω que depende del valor de ω_3 y de la geometría del cuerpo. El momento angular es:

$$\vec{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) = (IA\cos(\Omega t + \phi), IA\sin(\Omega t + \phi), I_3\omega_3)$$

Por lo que $\vec{L}$ también dibuja un círculo alrededor de $\widehat{x}_3$ con frecuencia Ω.
Todo esto para alguien viendo desde el body frame.

8.6.2. Desde el Lab Frame:

No podemos usar ahora las ecuaciones de Euler porque son solamente para el punto de vista desde el body frame. Sin embargo, en términos de los (cambiantes) ejes principales $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3$, tenemos:

$$\vec{\omega} = (\omega_1\widehat{x}_1 + \omega_2\widehat{x}_2) + \omega_3\widehat{x}_3$$
$$\vec{L} = I(\omega_1\widehat{x}_1 + \omega_2\widehat{x}_2) + I_3\omega_3\widehat{x}_3$$

Entonces, tendremos que:

$$\vec{L} = I(\vec{\omega} + \Omega\widehat{x}_3) \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \frac{L}{I}\widehat{L} - \Omega\widehat{x}_3$$

Como $\vec{L}, \vec{\omega}, \widehat{x}_3$ están relacionados linealmente, deben de pertenecer al mismo plano.

Podemos ver que la tasa de cambio de $\widehat{x}_3$ es $\vec{\omega} \times \widehat{x}_3$ porque esta es siempre la tasa de cambio de un vector pintado en un objeto que rota con $\vec{\omega}$. Por lo tanto:

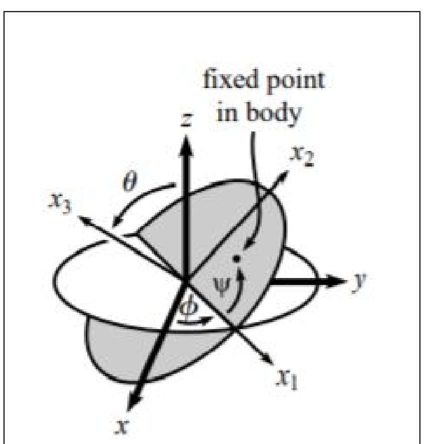
$$\frac{d\widehat{x}_3}{dt} = \left(\frac{L}{I}\widehat{L} - \Omega\widehat{x}_3\right) \times \widehat{x}_3 = \left(\frac{L}{I}\widehat{L}\right) \times \widehat{x}_3$$

Lo cual parece la tasa de cambio como se $\widehat{x}_3$ estuviera rotando alrededor del vector fijo (porque no hay torcas) $\frac{L}{I}\widehat{L}$ con una frecuencia de rotación de $\varpi = L/I$. De la misma forma, como pertenece en el mismo plano, $\vec{\omega}$ también rota alrededor de $\vec{L}$ con la misma frecuencia.

8.7. Heavy Simmetric Top

8.7.1. Ángulos de Euler:

Se definen como sigue:
Sea $\widehat{x}_3$ el eje de simetría del Top.
1) θ: El ángulo entre $\widehat{x}_3$ y el eje $\widehat{z}$ fijo en el lab frame.
2) ϕ: Dibujamos un plano ortogonal a $\widehat{x}_3$ y sea $\widehat{x}_1$ la intersección de este plano con el eje xy ($\widehat{x}_1$ es un eje principal porque por la simetría del top, todos los ejes ortogonales a $\widehat{x}_3$ lo son. Luego se define ϕ como el ángulo entre $\widehat{x}_1$ y el eje $\widehat{x}$ en el lab frame. Notar que $\widehat{x}_1$ no está pintado



en el objeto, aunque instantáneamente sí es un eje principal.
3) Sea $\widehat{x}_2$ el vector ortogonal a los otros dos (que tampoco estará fijo en el objeto aunque es un eje principal instantáneo). Sea S el frame de $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3$. Definimos ψ como el ángulo de rotación alrededor de $\widehat{x}_3$ en el frame S de un punto fijo en el cuerpo. Por lo que $\dot{\psi}\widehat{x}_3$ es la velocidad angular del objeto en S. Y la velocidad angular de S con respecto al lab frame es de $\dot{\phi}\widehat{z} + \dot{\theta}\widehat{x}_1$

Entonces, la velocidad angular del cuerpo con respecto al fixed frame es la suma de la velocidad angular de S más la velocidad angular del objeto respecto a S, es decir:

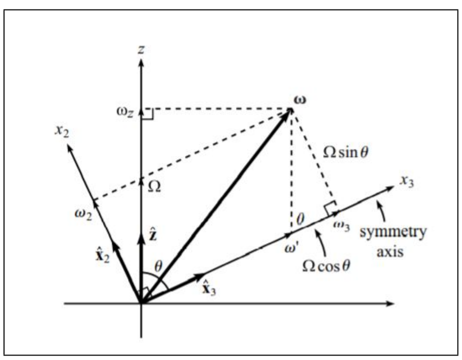
$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\widehat{x}_3 + (\dot{\phi}\widehat{z} + \dot{\theta}\widehat{x}_1)$$

O bien, si lo queremos escribir totalmente en una base usamos que $\widehat{z} = \cos\theta\widehat{x}_3 + \sin\theta\widehat{x}_2$ y nos queda:

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\widehat{x}_3 + \dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_2 + \dot{\theta}\widehat{x}_1$$

Y esta base es siempre instantáneamente una base de ejes principales (aunque no pintados en el objeto y solamente por ser un top simétrico).

Veremos más o menos que significan los términos.



Primero que nada, el $\dot{\theta}\widehat{x}_3$ se debe a la subida y bajada del top y vamos a suponer que $\dot{\theta} = 0$.
En el diagrama que dibujamos, $\widehat{x}_1$ apunta hacia adentro de la hoja.
Podemos descomponer $\vec{\omega}$ con respecto a $\widehat{x}_3, \widehat{z}$ de las dos formas que se ve. Notar que $\vec{\omega} = \omega'\widehat{x}_3 + \Omega\widehat{z}$ pero $\vec{\omega} \neq \omega_3\widehat{x}_3 + \omega_2\widehat{x}_2$
Comparando con las ecuaciones pasadas, tenemos (con $\dot{\theta} = 0$) que:

$$\omega' = \dot{\psi} \qquad \Omega = \dot{\phi}$$
$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = \omega' + \Omega\cos\theta$$
$$\omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta = \Omega\sin\theta$$

Preseción: El eje de simetría $\widehat{x}_3$ gira alrededor de $\widehat{z}$ con una frecuencia Ω. Esto se puede ver con (recordar que $\widehat{x}_3$ sí está pintado en el cuerpo):

$$\frac{d\widehat{x}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \widehat{x}_3 = (\omega'\widehat{x}_3 + \Omega\widehat{z}) \times \widehat{x}_3 = (\Omega\widehat{z}) \times \widehat{x}_3$$

Pero esta es la expresión que dice que $\widehat{x}_3$ gira alrededor de $\widehat{z}$ con una frecuencia de preseción Ω

Digamos que estamos parados en un frame que precesa igual que el top (pero no rota por el eje de simetría). Entonces el top se ve quieto (pero rotando con respecto al eje de simetría). Esta rotación la vemos con frecuencia ω' pues $\vec{\omega} = \omega'\widehat{x}_3 + \Omega\widehat{z}$ y la rotación con el frame no permite que veamos el término $\Omega\widehat{z}$

ω_3 es lo que se obtiene de componente de $\vec{L}$ a lo largo de $\widehat{x}_3$ porque $L_3 = I_3\omega_3$. $\omega_2, \omega_3, \omega_z$ no son fáciles de observar.

8.7.2. Método de Torque:

Ahora sí resolvemos el problema del top pesado. Por las ecuaciones pasadas, tenemos que:

$$\vec{\omega} = \dot{\beta}\widehat{x}_3 + \dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_2 + \dot{\theta}\widehat{x}_1$$

Donde $\dot{\beta} = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
Como centro del sistema consideraremos la punta del top que toca la mesa. Entonces, el momento angular es:

$$\vec{L} = I_3\dot{\beta}\widehat{x}_3 + I\dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_2 + I\dot{\theta}\widehat{x}_1$$

Ahora derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_3\ddot{\beta}\widehat{x}_3 + I\frac{d(\phi\sin\theta}{dt}\widehat{x}_2 + I\ddot{\theta}\widehat{x}_1 + I_3\dot{\beta}\frac{d\widehat{x}_3}{dt} + I\dot{\phi}\sin\theta\frac{d\widehat{x}_2}{dt} + I\dot{\theta}\frac{d\widehat{x}_1}{dt}$$

Donde con un poco de goemetría se puede probar que:

$$\frac{d\widehat{x}_3}{dt} = -\dot{\theta}\widehat{x}_2 + \dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_1$$
$$\frac{d\widehat{x}_2}{dt} = \dot{\theta}\widehat{x}_3 - \dot{\phi}\cos\theta\widehat{x}_1$$
$$\frac{d\widehat{x}_1}{dt} = -\dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_3 + \dot{\phi}\cos\theta\widehat{x}_2$$

Entonces, notamos que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_3\ddot{\beta}\widehat{x}_3 + \left(I\ddot{\phi}\sin\theta + 2I\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta - I_3\dot{\beta}\dot{\theta}\right)\widehat{x}_2 + \left(I\ddot{\theta} - I\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + I_3\dot{\beta}\dot{\phi}\sin\theta\right)\widehat{x}_1$$

La torca se debe a la gravedad empujando hacia abajo concentrada en el CM y apunta en la dirección $\widehat{x}_1$.
Por lo que hay una torca de $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$.
Esto da como resultado rápidamente que $\ddot{\beta} = 0$ y o otras dos ecuaciones que dejaremos hasta después.

8.7.3. El Método Lagrangiano:

Tenemos una energía cinética de $T = \vec{\omega} \cdot \vec{L}/2$. Usando las mismas ecuaciones para $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$, tenemos la energía:

$$T = \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta)^2 + \frac{1}{2} I (\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2)$$

La energía potencial es: $V = Mgl\cos\theta$. Si aplicamos el método de Lagrangiano, llegamos a las siguientes tres ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = 0$$
$$I\ddot{\theta} = (Mgl + I\dot{\phi}^2\cos\theta - I_3\omega_3\dot{\phi})\sin\theta$$
$$\frac{d}{dt}(I_3\omega_3\cos\theta + I\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0 \;\Rightarrow\; I\ddot{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}(2I\dot{\phi}\cos\theta - I_3\omega_3) = 0$$

Caso especial $\dot{\theta} = 0$: En este caso, la última ecuación nos dice que $\dot{\phi}$ es constante. Por lo que el CM se mueve en un movimiento circular en un plano horizontal. Sea $\Omega := \dot{\phi}$ la frecuencia de este movimiento, entonces la segunda ecuación nos dice:

$$I\Omega^2\cos\theta - I_3\omega_3\Omega + Mgl = 0$$

9. Sistemas de Referencia Acelerados:

Existe alguna forma de modificar la segunda ley de Newton para que sea válida para sistemas no inerciales?
Resulta que sí, solamente hay que agregar algunas fuerza 'ficticias'.

Por ejemplo, si un hombre está en un tren que frena. Un observador externo cree que una fuerza F_f del hombre hace que éste acelere junto al tren.
En el frame del tren, da la impresión de que aparece una fuerza ficticia F_{trans} hacia la izquierda y que se cancela con la fuerza de fricción del hombre. Si el piso no tiene fricción, el hombre sentirá una fuerza neta y acelerará hacia la parte trasera del tren.

9.1. Relacionar las Coordenadas

Consideramos un sistema inercial con ejes $\widehat{x}_1, \widehat{y}_1, \widehat{z}_1$ y consideramos otro sistema (posiblemente acelerado) con $\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}$.
Estos ejes pueden acelerar y rotar con respecto a los primeros y se pueden considerar como funciones de los ejes inerciales.

Sea O_1 y O los orígenes de los sistemas de coordenadas y sea $\vec{R}$ el vector que va de O_1 a O.
Tenemos ahora una partícula que queremos seguir. Sea $\vec{r}_1$ el vector que va de O_1 a la partícula (sistema no acelerado). Y sea $\vec{r}$ el vector de O a la partícula (sistema acelerado). Entonces:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}$$

Ahora escribimos estos vectores con respecto a algún sistema de referencia:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= X\widehat{x}_1 + Y\widehat{y}_1 + Z\widehat{z}_1\\ \vec{r}_1 &= x_1\widehat{x}_1 + y_1\widehat{y}_1 + z_1\widehat{z}_1\\ \vec{r} &= x\widehat{x} + y\widehat{y} + z\widehat{z}\end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir:

$$x_1\widehat{x}_1 + y_1\widehat{y}_1 + z_1\widehat{z}_1 = (X\widehat{x}_1 + Y\widehat{y}_1 + Z\widehat{z}_1) + (x\widehat{x} + y\widehat{y} + z\widehat{z})$$

Notar que la segunda derivada de $\vec{r}_1$ y de $\vec{R}$ se pueden calcular sencillamente porque están escritos en un sistema de coordenadas inercial y los ejes no cambian con el tiempo.
Sin embargo, la segunda derivada de $\vec{r}$ es más complicada porque los propios ejes cambian con el tiempo.

Sea $\vec{A}$ un vector cualquiera $A_x\widehat{x}+A_y\widehat{y}+A_z\widehat{z}$ escrito en el sistema de referencia no inercial y digamos que queremos calcular su derivada (con respecto al sistema inercial, por lo que habrá que tomar en cuenta tanto el cambio de $\vec{A}$ con respecto al sistema no inercial, como el cambio de las coordenadas no inerciales. Para así medir el cambio de $\vec{A}$ para un observador inercial.

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}\widehat{x} + \frac{dA_y}{dt}\widehat{y} + \frac{dA_z}{dt}\widehat{z}\right) + \left(A_x\frac{d\widehat{x}}{dt} + A_y\frac{d\widehat{y}}{dt} + A_z\frac{d\widehat{z}}{dt}\right)$$

El primer paréntesis es el cambio debido a las coordenadas de $\vec{A}$ (el cambio que mide alguien en el sistema no inercial) y lo denotamos por $\delta\vec{A}/\delta t$.
El segundo paréntesis se debe a que las coordenadas se están moviendo. El origen de las coordenadas no inerciales se mueven según el vector $\vec{R}$ y además hay una rotación ω por el origen. El eje de ω puede cambiar con el tiempo, pero está fijo en un tiempo instantáneo.

Ya vimos que un vector $\vec{B}$ de longitud constante 'pintado' en un sistema que rota cambia con el tiempo como $d\vec{B}/dt = \vec{\omega}\times\vec{B}$.
En particular, $d\widehat{x}/dt = \vec{\omega}\times\widehat{x}$, etc.
Entonces, $A_x\frac{d\widehat{x}}{dt} = A_x(\vec{\omega}\times\widehat{x}) = \vec{\omega}\times A_x\widehat{x}$ y similarmente para los otros términos, con lo que se puede probar que:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\delta\vec{A}}{\delta t} + \vec{\omega}\times\vec{A}$$

Ahora nos falta todavía una segunda derivada:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\vec{A}}{\delta t}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{A} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{A}}{dt}\\ &= \left(\frac{\delta^2\vec{A}}{\delta t^2} + \vec{\omega}\times\frac{\delta\vec{A}}{\delta t}\right) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{A}\right) + \vec{\omega}\times\left(\frac{\delta\vec{A}}{\delta t} + (\vec{\omega}\times\vec{A})\right)\\ &= \frac{\delta^2\vec{A}}{\delta t^2} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{A}) + 2\vec{\omega}\times\frac{\delta\vec{A}}{\delta t} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{A}\end{aligned}$$

Ahora, en particular ponemos $\vec{A} = \vec{r}$ para ver la segunda derivada del vector $\vec{r}$ (que es la posición medida en el sistema de referencia acelerado) con respecto a un observador exterior. Y usamos $\vec{v} = \delta\vec{r}/\delta t$, $\delta^2\vec{r}/\delta t^2$ que son la velocidad y aceleración medidas en el sistema de referencia no inercial. Entonces:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \quad (1)$$

El lado izquierdo es la segunda derivada de la posición de la partícula para un observador externo. Mientras que en el lado derecho, $\vec{a}, \vec{v}$ son la velocidad y aceleración que mide alguien en el sistema no inercial. Por lo de antes:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

Ahora usamos la expresión (1) y multiplicamos por la masa para obtener:

$$m[\vec{a} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}] = m\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

Luego, $m(d^2\vec{r}_1/dt^2)$ es la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula (en el sistema no inercial, pero es lo mismo, éstas son las fuerzas 'reales' y son iguales en los dos sistemas de referencia). Entonces despejamos:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \\ &=: \vec{F} + \vec{F}_{trans} + \vec{F}_{centrif} + \vec{F}_{Coriolis} + \vec{F}_{Azimut} \end{aligned}$$

Entonces, vemos que la aceleración de un cuerpo en un sistema no inercial no se debe solamente a $\vec{F}$ las fuerzas reales, sino que también hay que agregar cuatro fuerzas ficticias. En el lado izquierdo, $\vec{a}$ se mide en el sistema no inercial (solamente toma en cuenta el cambio con respecto a los ejes y no el cambio de ejes, es decir $\delta^2\vec{r}/\delta t^2$. Por lo que la persona en el sistema no inercial mide esta aceleración con respecto al 'tren' en el que se encuentra e interpreta que se debe a fuerzas ficticias.
Notar que la persona en el sistema no inercial puede medir $\vec{r}, \vec{v}$ y $\vec{a}$ porque es con respecto a su sistema. Sin embargo, $d^2\vec{R}/dt^2$ y $\vec{\omega}$ son cosas externas y generalmente se le tienen que dar como info extra.

Por ejemplo, un hombre en una caja que acelera a g en el espacio exterior, siente una fuerza ficticia $\vec{F}_{trans} = mg$ que puede interpretar como que está en la superficie de la tierra. Es imposible que note la diferencia entre una fuerza ficticia y una verdadera, esto se conoce como principio de equivalencia.

9.2. Las Fuerzas Ficticias:

9.2.1. Fuerza de Traslación $-md^2\vec{R}/dt^2$

Es la 'fuerza' que se siente en un frame acelerado como un tren que se detiene de golpe.

9.2.2. Fuerza Centrífuga $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Esta fuerza va mano a mano con la fuerza $mv^2/r = mr\omega^2$ que tiene que tener un objeto para que pueda moverse en círculos.

Ejemplo: Una persona está parada en un carrusel (sin moverse respecto al carrusel) a una distancia r del centro. El carrusel rota a $\vec{\omega} = \omega\widehat{z}$.

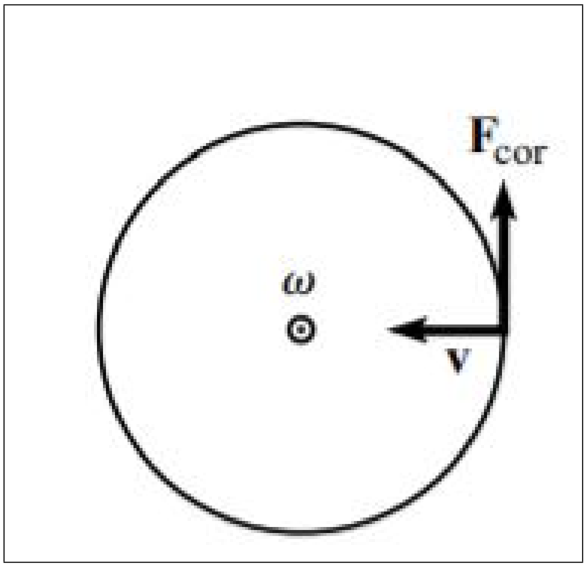
Entonces, la persona siente una 'fuerza' centrífuga de $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ que tiene una magnitud $mr\omega^2$ y apunta hacia afuera radialmente.
Como la persona no acelera en su sistema de referencia, debe de tener una fricción de sus pies hacia adentro.
Alguien externo observa solamente la fuerza de fricción (y la gravedad y normal) e interpreta que esta fuerza de fricción es la que constituye a la fuerza centrípeta que permite el movimiento circular.

Ejemplo: Fuerza de Gravedad efectiva. Una persona está parada en la tierra con un ángulo polar θ. La persona siente una fuerza radial hacia adentro de la gravedad y una fuerza centrífuga.

La fuerza centrífuga es de $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. La parte entre paréntesis tiene magnitud $R\omega \sin\theta$ y la fuerza centrífuga tiene magnitud $mR\omega^2 \sin\theta$ y apunta hacia afuera del eje de rotación.
Entonces, la g_{eff} es de $m\vec{g}_{eff} = m(\vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$
Y apunta ligeramente en la dirección al sur (para alguien en el hemisferio norte).
Para un observador externo, no se ve la fuerza ficticia. La componente $mg\sin\theta$ apunta en la dirección hacia el eje de rotación y al sumarle la normal, el resultado debe de ser el valor que nos dice la aceleración centrípeta para que el objeto se mueva en círculos. Con esto se puede calcular la fuerza normal que es la g_{eff}.

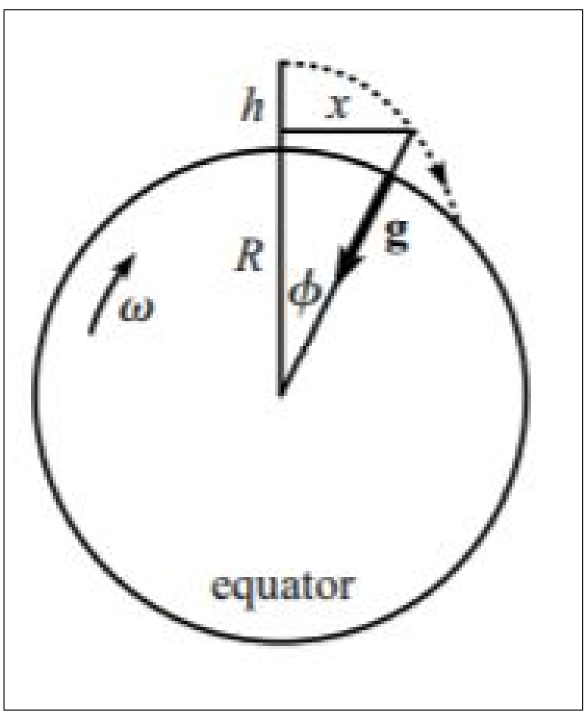
9.2.3. Fuerza de Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$

Esta fuerza requiere un movimiento v con respecto al sistema de referencia y por tanto es difícil de visualizar.



Ejemplo 1 (Moviéndose radialmente en un carrusel): Un carrusel se mueve en dirección antihoraria y una persona camina radialemente hacia adentro a velocidad v.
Entonces siente una fuerza de Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ que en este caso apunta tangencialmente y tiene magnitud $2m\omega v$.
La persona debe de hacer una fuerza que contrarreste esto con la fricción de sus pies. (También hay una fuerza centrífuga contrarrestada por una fricción radial, pero la ignoramos).

Ejemplo 2 (Dejar Caer Pelota): Se deja caer una pelota desde una altura h a un ángulo polar θ.
El ángulo entre $\vec{\omega}$ y $\vec{v}$ es de $\pi - \theta$ por lo que la fuerza de Coriolis se dirige al este con magnitud de $2m\omega v \sin\theta$. Con $v = gt$ la velocidad como función del tiempo.



La bola se deflecta al este. La aceleración hacia el este es por lo tanto de $2\omega gt \sin\theta$. Si la integramos, obtenemos una velocidad al este de $v_{east} = \omega g t^2 \sin\theta$ y luego, la posición es $d_{east} = \omega g t^3 \sin\theta/3$. Si ponemos $t = \sqrt{2h/g}$, la deflección total es de:
$d = \dfrac{2\omega h \sin\theta}{3}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$
Que incluso en casos muy grande, vale sólo como 2cm.