Teoría Cuántica de Campos: Tarea Extra 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

13 de octubre de 2021

Obtener las ecuaciones de Maxwell de forma explícita de $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{c_2}{4c_1} J^\nu$ (donde $\frac{c_2}{4c_1} = \mu_0$)

El tensor F en unidades SI está definido como lo vimos en clase:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Y J está definido como $J^\nu = (c\rho, \vec{J})$

Entonces tenemos que las 4 ecuaciones expresadas en $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$ son:

- $\nu = 0$:

$$\begin{aligned}
&\partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \mu_0 J^0 \\
&\Rightarrow \ \frac{1}{c}\partial_t(0) + \partial_x(E_x/c) + \partial_y(E_y/c) + \partial_z(E_z/c) = \mu_0(c\rho) \\
&\Rightarrow \ \frac{1}{c}\left[\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z\right] = \mu_0 c\rho \\
&\Rightarrow \ \nabla\cdot\vec{E} = \mu_0 c^2\rho \\
&\Rightarrow \ \nabla\cdot\vec{E} = \mu_0 \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\rho \\
&\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho}
\end{aligned}$$

  Que es la ecuación de Gauss eléctrica.

- $\nu = 1$:

$$\begin{aligned}
&\partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \mu_0 J^1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{c}\partial_t(-E_x/c) + \partial_x(0) + \partial_y(B_z) + \partial_z(-B_y) = \mu_0 J_x \\
&\Rightarrow \ -\frac{1}{c^2}\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y = \mu_0 J_x
\end{aligned}$$

- $\nu = 2$:

$$
\begin{aligned}
&\partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{32} = \mu_0 J^1 \\
&\Rightarrow \ \frac{1}{c}\partial_t(-E_y/c) + \partial_x(-B_z) + \partial_y(0) + \partial_z(B_x) = \mu_0 J_y \\
&\Rightarrow \ \ -\frac{1}{c^2}\partial_t E_y + \partial_z B_x - \partial_x B_z = \mu_0 J_y
\end{aligned}
$$

- $\nu = 3$:

$$
\begin{aligned}
&\partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} + \partial_3 F^{33} = \mu_0 J^3 \\
&\Rightarrow \ \frac{1}{c}\partial_t(-E_z/c) + \partial_x(B_y) + \partial_y(-B_x) + \partial_z(0) = \mu_0 J_z \\
&\Rightarrow \ \ -\frac{1}{c^2}\partial_t E_z + \partial_x B_y - \partial_y B_x = \mu_0 J_z
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, llegamos a las tres ecuaciones siguientes

- $-\frac{1}{c^2}\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y = \mu_0 J_x$
- $-\frac{1}{c^2}\partial_t E_y + \partial_z B_x - \partial_x B_z = \mu_0 J_y$
- $-\frac{1}{c^2}\partial_t E_z + \partial_x B_y - \partial_y B_x = \mu_0 J_z$

Estas 3 ecuaciones se pueden escribir compactamente en forma vectorial. Notamos en la primera ecuación que $\partial_y B_z - \partial_z B_y = (\nabla \times \vec{B})_x$ y similarmente en las otras ecuaciones, lo que nos permite reescribirlas como:

- $-\frac{1}{c^2}\partial_t E_x + (\nabla \times \vec{B})_x = \mu_0 J_x$
- $-\frac{1}{c^2}\partial_t E_y + (\nabla \times \vec{B})_y = \mu_0 J_y$
- $-\frac{1}{c^2}\partial_t E_z + (\nabla \times \vec{B})_z = \mu_0 J_z$

Estas tres ecuaciones son simplemente los componentes de la ecuación vectorial siguiente:

$$
\boxed{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}
$$

Que es la ecuación de Ampere-Maxwell.

Se darán cuenta que sólo hay dos ecuaciones de Maxwell, ¿De dónde salen las otras dos?
Explicar un poco sobre el tensor electromagnético dual

$$
F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}
$$

Y las identidades de Bianchi

La identidad de Bianchi para el tensor electromagnético está dada por:

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

Que se cumpla esta identidad es una consecuencia de que F se definió en términos de las derivadas del potencial A como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
Para ver una comprobación de la identidad, sustituimos esto en la expresión $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}$ y veremos que el resultado es 0:

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} \\
&\quad = \partial_\mu(\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) + \partial_\nu(\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) + \partial_\rho(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&\quad = \partial_\mu\partial_\nu A_\rho - \partial_\mu\partial_\rho A_\nu + \partial_\nu\partial_\rho A_\mu - \partial_\nu\partial_\mu A_\rho + \partial_\rho\partial_\mu A_\nu - \partial_\rho\partial_\nu A_\mu \\
&\quad = (\partial_\mu\partial_\nu A_\rho - \partial_\nu\partial_\mu A_\rho) + (\partial_\nu\partial_\rho A_\mu - \partial_\rho\partial_\nu A_\mu) + (\partial_\rho\partial_\mu A_\nu - \partial_\mu\partial_\rho A_\nu) \\
&\quad = 0 + 0 + 0 \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

Asumiendo que las derivadas aplicadas a A conmutan.

Luego, podemos contraer la identidad de Bianchi por el símbolo de Levi Civita $\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}$ para llegar a que:

$$\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} + \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\partial_\nu F_{\rho\mu} + \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

Por cómo se define el símbolo de Levi Civita, recordamos que podemos cambiarle los índices con una permutación par y se seguirá cumpliendo la igualdad. Por ello, hacemos los siguientes cambios:

En el segundo término de esta expresión podemos cambiar $\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}$ por $\epsilon^{\alpha\nu\rho\mu}$, lo cual es una permutación par de los índices.

Similarmente, en el segundo término podemos cambiar $\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}$ por $\epsilon^{\alpha\rho\mu\nu}$ que nuevamente es una permuación par de los índices.

Luego, la expresión nos queda como:

$$\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} + \epsilon^{\alpha\nu\rho\mu}\partial_\nu F_{\rho\mu} + \epsilon^{\alpha\rho\mu\nu}\partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

Notamos que en todos los términos los últimos tres índices son mudos. Por lo tanto, podemos cambiarles de nombre sin problema. Cambiamos los nombres de estos índices en el segundo y tercer término para hacerlos iguales al primero:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} + \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} + \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} &= 0 \\
\Rightarrow 3\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} &= 0 \\
\Rightarrow \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} &= 0
\end{aligned}$$

Si definimos el **tensor electromagnético dual** como $F^{*\alpha\mu} = \dfrac{1}{2}\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}$, esta última expresión se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} &= 0\\ \Rightarrow\ \partial_\mu(2F^{*\alpha\mu}) &= 0\\ \Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{*\alpha\mu} = 0} &\quad (1)\end{aligned}$$

En esta última expresión están contenidas las dos ecuaciones de Maxwell restantes.
Para verlo, primero calculemos el tensor $F^{*\alpha\mu}$ a partir de la definición. Lo que hacemos a continuación a partir de la definición $F^{*\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$.

Pero antes necesitamos el tensor $F_{\alpha\beta}$, que es igual a $F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}F^{\mu\nu}$.
Como $\eta_{\alpha\mu} = 0$ si $\alpha \neq \mu$ y similarmente con $\eta_{\beta\nu}$, la mayoría de los términos de la suma sobre α y β se anulan y el resultado queda como $F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\alpha}\eta_{\beta\beta}F^{\alpha\beta}$
Si α y β son distintos de cero, $\eta_{\alpha\alpha} = \eta_{\beta\beta} = 1$ por lo que tenemos que en ese caso $F_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}$
Si uno de los índices α o β es 0 y el otro no, una de las η valdrá -1 (porque $\eta_{00} = -1$) y la otra 1, por lo que tendremos $F_{\alpha\beta} = -F^{\alpha\beta}$ en este caso.
Y si $\alpha = \beta = 0$, ambas η valdrán -1 y tendremos $F_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}$

Con ello, vemos que $F_{\alpha\beta}$ es igual a:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora sí podemos calcular las coordenadas de $F^{*\mu\nu}$ según la definición $F^{*\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$:

- Si $\mu = \nu$, $F^{*\mu\nu} = 0$.
  Esto porque en este caso tendremos en el símbolo de Levi Civita: $\epsilon^{\mu\mu\alpha\beta}$ lo cual vale 0 (pues el símbolo de Levi-Civita es 0 si tiene dos índices repetidos).

  Para los demás componentes, sustituimos explícitamente sobre la definición de $F^{*\mu\nu}$, pero para la suma $\dfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ podemos ignorar todos los sumandos en los que se repita un índice en el símbolo de Levi Civita. Y para los demás sumandos usamos que $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = 1$ si $(\mu\nu\alpha\beta)$ es una permutación par de $(0, 1, 2, 3)$ y vale -1 si es una permutación impar.

  Además, para ahorrarnos algunas cuentas, usamos que F^* es antisimétrico, pues $F^{*\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -F^{*\nu\mu}$

- $F^{*01} = \dfrac{1}{2}\epsilon^{01\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{0123}F_{23} + \frac{1}{2}\epsilon^{0132}F_{32} = \frac{1}{2}(F_{23} - F_{32}) = \frac{1}{2}(-B_x - B_x) = -B_x$

- $F^{*02} = \dfrac{1}{2}\epsilon^{02\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{0213}F_{13} + \frac{1}{2}\epsilon^{0231}F_{31} = \frac{1}{2}(-F_{13} + F_{31}) = \frac{1}{2}(-B_y - B_y) = -B_y$

- $F^{*03} = \dfrac{1}{2}\epsilon^{03\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{0312}F_{12} + \frac{1}{2}\epsilon^{0321}F_{21} = \frac{1}{2}(F_{12} - F_{21}) = \frac{1}{2}(-B_z - B_z) = -B_z$
- $F^{*10} = -F^{*01} = B_x$ por antisimetría
- $F^{*12} = \dfrac{1}{2}\epsilon^{12\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{1203}F_{03} + \frac{1}{2}\epsilon^{1230}F_{30} = \frac{1}{2}(F_{03} - F_{30}) = \frac{1}{2}(E_z/c + E_z/c) = E_z/c$
- $F^{*13} = \dfrac{1}{2}\epsilon^{13\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{1302}F_{02} + \frac{1}{2}\epsilon^{1320}F_{20} = \frac{1}{2}(-F_{02} + F_{20}) = \frac{1}{2}(-E_y/c - E_y/c) = -E_y/c$
- $F^{*20} = -F^{*02} = B_y$ por asimetría
- $F^{*21} = -F^{*12} = -E_z/c$ por antisimetría
- $F^{*23} = \dfrac{1}{2}\epsilon^{23\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{2301}F_{01} + \frac{1}{2}\epsilon^{2310}F_{10} = \frac{1}{2}(F_{01} - F_{10}) = \frac{1}{2}(E_x/c + E_x/c) = E_x/c$
- $F^{*30} = -F^{*03} = B_z$
- $F^{*31} = -F^{*13} = E_y/c$
- $F^{*32} = -F^{*23} = -E_x/c$

Con todos estos resultados, tenemos que el tensor dual es:

$$F^{*\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora sí podemos calcular las ecuaciones dadas por $\partial_\mu F^{*\alpha\mu} = 0$ que encontramos en (1).
Las 4 ecuaciones son:

- $\alpha = 0$

$$\begin{aligned}
&\partial_0 F^{*00} + \partial_1 F^{*01} + \partial_2 F^{*02} + \partial_3 F^{*03} = 0 \\
&\frac{1}{c}\partial_t(0) + \partial_x(-B_x) + \partial_y(-B_y) + \partial_z(-B_z) = 0 \\
&\Rightarrow\ -\nabla\cdot\vec{B} = 0 \\
&\Rightarrow\ \boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}
\end{aligned}$$

  Que es la ecuación de Gauss magnética.

- $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
&\partial_0 F^{*10} + \partial_1 F^{*11} + \partial_2 F^{*12} + \partial_3 F^{*13} = 0 \\
&\frac{1}{c}\partial_t(B_x) + \partial_x(0) + \partial_y(E_z/c) + \partial_z(-E_y/c) = 0 \\
&\Rightarrow\ \frac{1}{c}\partial_t B_x + \frac{1}{c}[\partial_y E_z - \partial_z E_y] = 0 \\
&\Rightarrow\ \partial_t B_x + (\nabla\times E)_x = 0
\end{aligned}$$

- $\alpha = 2$

$$\begin{aligned}
&\partial_0 F^{*20} + \partial_1 F^{*21} + \partial_2 F^{*22} + \partial_3 F^{*23} = 0 \\
&\frac{1}{c}\partial_t(B_y) + \partial_x(-E_z/c) + \partial_y(0) + \partial_z(E_x/c) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{c}\partial_t B_y + \frac{1}{c}[\partial_z E_x - \partial_x E_z] = 0 \\
&\Rightarrow \quad \partial_t B_y + (\nabla \times E)_y = 0
\end{aligned}$$

- $\alpha = 3$

$$\begin{aligned}
&\partial_0 F^{*30} + \partial_1 F^{*31} + \partial_2 F^{*32} + \partial_3 F^{*33} = 0 \\
&\frac{1}{c}\partial_t(B_z) + \partial_x(E_y/c) + \partial_y(-E_x/c) + \partial_z(0) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{c}\partial_t B_z + \frac{1}{c}[\partial_x E_y - \partial_y E_x] = 0 \\
&\Rightarrow \quad \partial_t B_z + (\nabla \times E)_z = 0
\end{aligned}$$

Estas últimas tres ecuaciones son las componentes de la ecuación vectorial:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0}$$

Que es la ecuación de Faraday