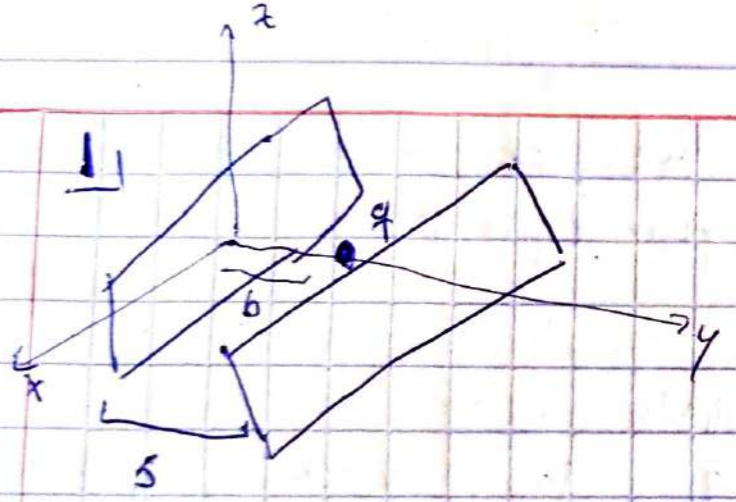
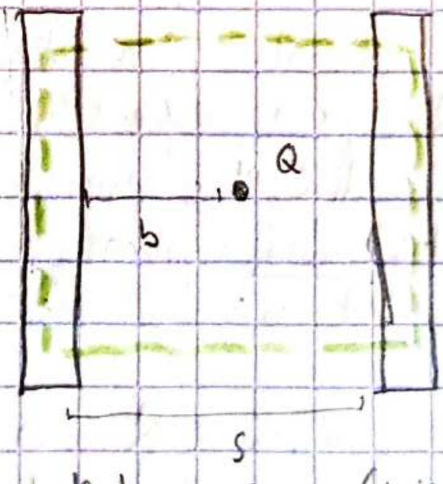
1)



La carga en el interior de ambos planos es $-Q$ ¿por qué?



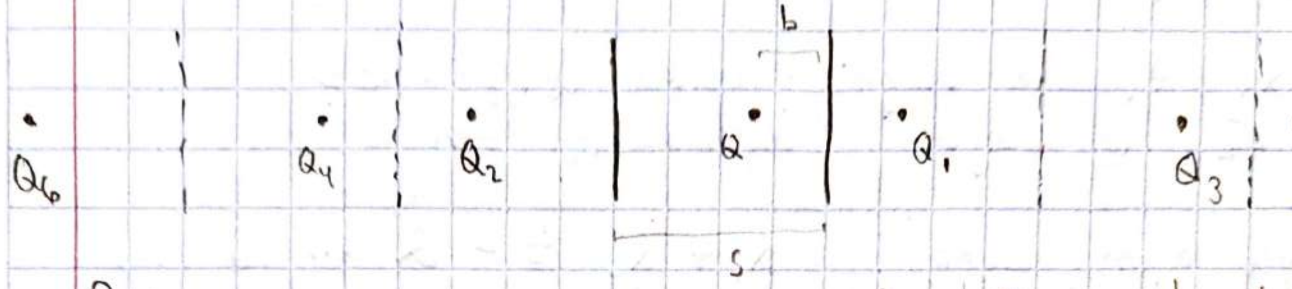
Proponemos la superficie Gaussiana en verde.

Para las caras laterales el flujo es 0, ya que dentro de las placas el campo vale 0.

Para la cara superior e inferior de la superficie gaussiana, si la dimensión de las placas es mucho mayor a s, el campo producido por Q en la cara superior e inferior es casi 0 porque están muy lejos de Q. $\therefore$ El flujo total es 0

→ La carga total contenida en  es 0, entonces la carga total en las caras interiores es $\underline{-Q}$

¿Cómo usaría el método de imágenes?



Primero pongo una carga Q_1 imágen con el plano derecho, que como vimos en clase hace que el campo en el plano derecho sea perpendicular. Lo mismo con el plano derecho y colocando una carga Q_2.

El problema es que al colocar Q_2, el campo en el plano derecho ya no es perpendicular por lo que hay que poner una carga Q_3 imagen de Q_2 con respecto al plano derecho para compensar.

Por lo mismo hay que poner una carga Q_4 imagen de Q_1 con respecto al plano izq.

Pero al colocar Q_4, el plano derecho ya no tiene un campo perpendicular por lo que colocamos Q_5

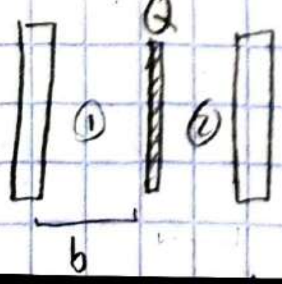
Y así sucesivamente, cada carga corrige el campo en un plano pero lo arruina en el otro, así que hay que seguir hasta el infinito

... Pero no hace falta tanto barullo... Agregamos una carga Q en cualquier parte de un plano, ¿qué pasará?

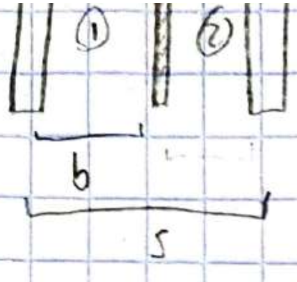
Si agregamos una carga Q al plano derecho, el plano izquierdo sumará una carga $-Q$ para que se siga cumpliendo la ley de Gauss. Pero no sucede lo que dice el enunciado, porque la carga $-Q$ del inciso a) es la carga total de los dos planos, no en cada uno, lo que hay que ver es, de esa carga $-Q$ ¿cuánto se lleva cada plano?

Vemos que si agregamos una carga Q en el plano $y=b$ (es decir, en el mismo plano "imaginario" donde estaba la carga Q original), ahora sí, por la ley de Gauss la carga total de los dos planos es $-2Q$. Y no importa la posición de estas cargas.

Entonces, en vez de ver la carga Q como una carga puntual, la podemos ver como una carga distribuida en un nuevo plano en $y=b$ y esto no cambiará las cargas en el plano izq. y derecho.



Sea Q_1 σ_1 la carga y densidad del plano izq
Q_2 y σ_2 la carga y densidad del derecho.



Sea Q_1 σ_1 la carga y densidad del plano izq
Q_2 y σ_2 la carga y densidad del derecho.

Como ya hemos dicho, $Q_1 + Q_2 = -Q \quad \ldots (1)$

Además, el campo en la zona ① es $\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$ y en la zona dos es $\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$
(ya que al ver Q como una carga uniforme en un plano, los campos ahora son uniformes)

Pero como están al mismo potencial : $\varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow \int E_1 \cdot dr = \int E_2 \cdot dr$

$$\rightarrow \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} b = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}(s-b) \xrightarrow[\text{tienen misma área}]{} \frac{Q_1}{\varepsilon_0} b = \frac{Q_2}{\varepsilon_0}(s-b) \quad \ldots (2)$$

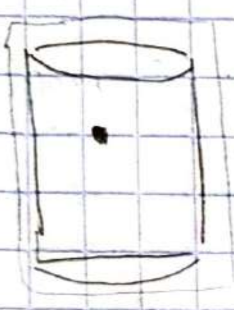
$$\rightarrow \begin{array}{l} 1)\ Q_1 + Q_2 = -Q \\ 2)\ Q_1 = \frac{s-b}{b} Q_2 \end{array} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} Q_1 = -Q\left(\frac{s-b}{s}\right) \\ Q_2 = -Q\frac{b}{s} \end{array}}$$

Y como dice el enunciado, si $b << s \rightarrow Q_1 = -Q \quad Q_2 = 0$

Es decir, sólo se cargará el plano cercano (el izq) y no el derecho.

También si $b \approx s \rightarrow Q_1 = 0 \quad Q_2 = -Q$ otra vez sólo se carga el plano cercano

2. Un observador, con un dispositivo para medir el campo E a una cierta distancia de una carga q. Un tubo metálico envuelve la carga q ¿cómo altera el campo eléctrico?

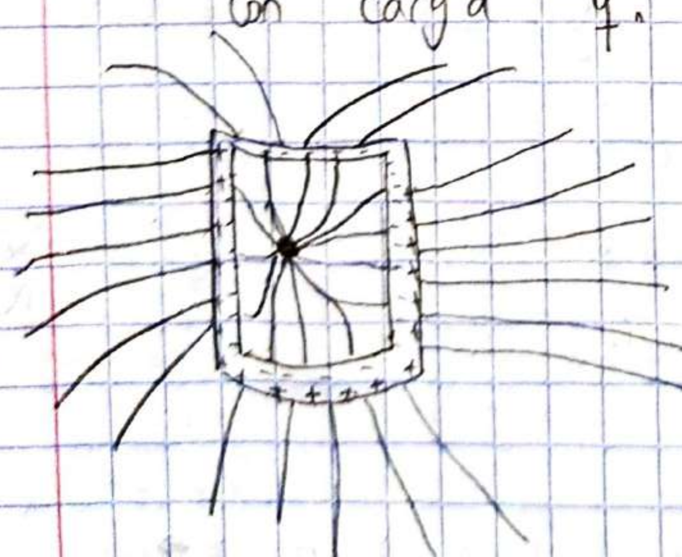


Cuando el tubo envuelve a la carga, la carga inducirá una carga Q_{in} de signo opuesto en la cara interior y una Q_{out} en la exterior.

Si usamos una superficie de gauss justo en el conductor (en medio de la superficie interna y externa), el campo en la superficie gaussiana vale 0 $\Rightarrow$ El flujo es 0 $\Rightarrow$ la carga $q + Q_{in} = 0 \Rightarrow Q_{in} = -q$

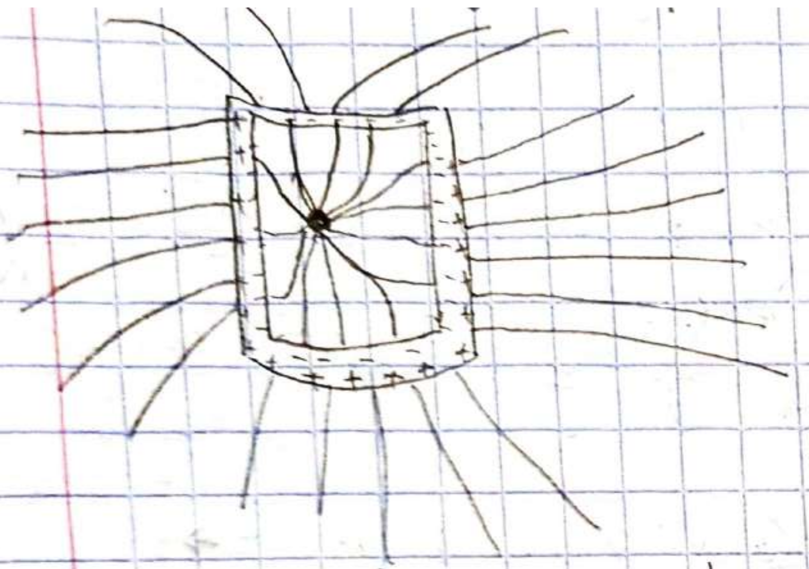
$\therefore Q_{out} = q$ Para que el metal en su totalidad sea neutro.

Entonces se observará un campo como si fuera dado por el tubo con carga q.



b) Si usted está en un lab. en el interior de una caja de cobre ¿Puede saber si hay cargas en el exterior?

No, porque la caja de cobre funcionará como una



b) Si usted está en un lab. en el interior de una caja de cobre ¿ Puede saber si hay cargas en el exterior?

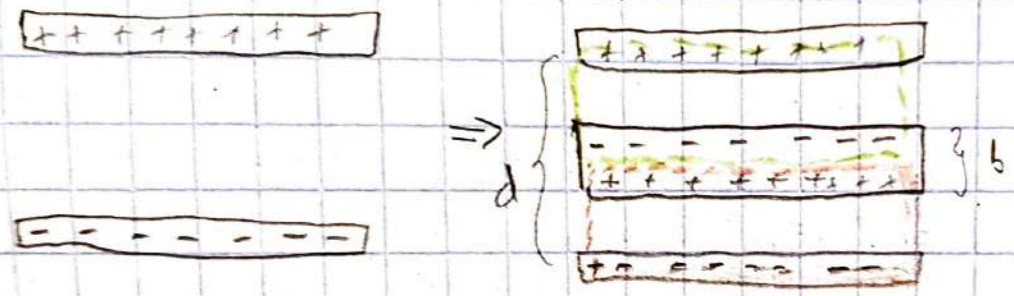
No, porque la caja de cobre funcionará como una jaula de Faraday.

Cualquier campo externo reacomodará las cargas en el cobre de tal forma que se creará un campo de respuesta en el interior de la caja

En el equilibrio, este campo de respuesta cancelará el campo externo dentro de la caja, dejándola con campo total 0.

3. Pedazo de cobre de $b = 2\,mm$ se incrusta justo por la mitad de un capacitor con $A = 2.40\,cm^2$ y separación $d = 5.00\,cm$

a) capacitancia al final?



Al colocar el cobre, se le induce una carga en la superfice. La carga inducida en cada superficie del cobre es la misma que existía en las placas pero de signo opuesto a la placa cercana. (Esto se puede ver usando las superficies gaussianas en verde y café en las cuales el flujo es 0 → carga total es 0).

∴ Se crean dos capacitadores de placas paralelas en serie (cada uno con área A y distancia $(d-b)/2$)

La capacitancia de cada uno es: $C_1 = C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 A}{\frac{1}{2}(d-b)}$ } Porque así se obtiene la capacitancia de capacitador de placas paralelas

Como están en serie: $\dfrac{1}{C_{Tot}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} = \dfrac{d-b}{\varepsilon_0 A}$

$\longrightarrow \underline{C_{Tot} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d-b}}$

$C_{Tot} = \dfrac{(8.85\times10^{-12})(2.4\times10^{-4}\,m^2)}{0.05 - 0.002} = \boxed{4.425\times10^{-14}\,F}$

b) Si una carga $q = 3.4\,\mu C$ se mantiene en las placas ¿Cuál es el cociente de la energía antes y después?

$$\frac{U_a}{U_d} = \frac{\frac{1}{2}\frac{Q_a^2}{C_a}}{\frac{1}{2}\frac{Q_d^2}{C_d}} = \frac{C_d}{C_a} = \frac{\frac{\varepsilon_0 A}{d-b}}{\frac{\varepsilon_0 A}{d}} = \frac{d}{d-b} = \frac{0.05}{0.05-0.002} = \frac{25}{24}$$

Porque la carga antes Q_a = carga después Q_d por lo dicho en el inciso anterior

c) ¿Trabajo para insertar la placa?

El trabajo es igual al cambio en energía $W = U_f - U_i$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_d} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_a} = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{C_d} - \frac{1}{C_a}\right) = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{d-b}{\varepsilon_0 A} - \frac{d}{\varepsilon_0 A}\right)$$

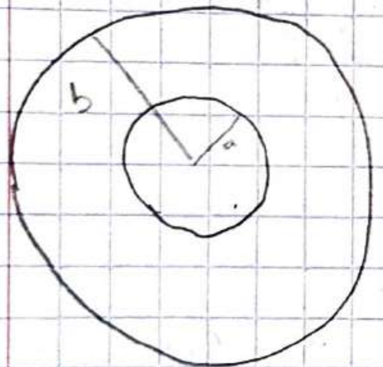
$$= \frac{\frac{1}{2}(3.4\times10^{-6})^2}{(8.85\times10^{-12})(2.4\times10^{-4})}(-0.002) = -5.44\ \text{J}$$

d) ¿La placa fue aspirada o se empujó?

Por el inciso anterior, vemos que no se tuvo que añadir energía a la placa para meterla, sino que se perdió energía, esto nos indica que la placa fue aspirada.

4 Un capacitor esférico está formado por dos cascarones huecos. La esfera interior tiene radio $a = 0.15m$ y capacitancia $116pF$

a) ¿radio de la esfera exterior b? b) si $\Delta V = 220V$ ¿Cuánto vale a?



Obtenemos el campo $E(r)$ con $a < r < b$

Sabemos que el campo en esta zona se debe únicamente al cascarón interior (porque estamos adentro del cascarón exterior) y se ve como si fuera una carga puntual en el centro.

$$\vec{E}(r) = k\frac{Q}{r^2}\hat{r} \quad (\text{con } a < r < b)$$

Entonces la dif. de potencial entre a y b será: $\Delta\varphi = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$

$$= -\int_a^b k\frac{Q}{r^2}dr = \left.\frac{kQ}{r}\right|_a^b = \frac{kQ}{b} - \frac{kQ}{a} = kQ\left(\frac{a-b}{ab}\right)$$

Pero $C = \dfrac{|Q|}{|\Delta\varphi|} = \dfrac{1}{k}\left|\dfrac{ab}{a-b}\right| = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{ab}{b-a}\right)$

$$\therefore C = \frac{1}{k}\left(\frac{ab}{b-a}\right) \rightarrow aC = bC - \frac{1}{k}ab \rightarrow b = \frac{aC}{C - \frac{1}{k}a}$$

$$\therefore b = \frac{(0.15m)(116\times10^{-12}F)}{116\times10^{-12}F - 1/(9\cdot10^{9})(0.15)} = \boxed{0.175m}$$

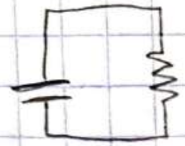
b) Si $\Delta V = 220\,V$ ¿cuánto vale Q?

$$Q = C\Delta V_{ab} = (116 \times 10^{-12}\ F)(220\ V)$$

$$= 25.52 \times 10^{-9}\ C$$

5) Capacitor C que se descarga por una resistencia R

Energía total disipada = energía original



Energía inicial: $E_i = \frac{1}{2} C V_0^2$

Descarga: Usamos la ley de Kirchhoff : $V_{Tot} = 0$

$\rightarrow V_C + V_R = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{Q}{C} + IR = 0$

Pero $I = \frac{dQ}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\, dt$

$\rightarrow \ln|Q| = -\frac{1}{RC} t + K$

$\rightarrow Q(t) = K_1 \, e^{-\frac{1}{RC} t}$

Pero como $V = \frac{Q}{C} \quad \rightarrow \quad V(t) = \frac{K_1}{C} \, e^{-\frac{1}{RC} t}$

Pero tenemos la condición inicial $V(0) = V_0 \quad \rightarrow \quad \frac{K_1}{C} = V_0 \quad \rightarrow \quad K_1 = V_0 C$

$\therefore \quad \underline{V(t) = V_0 \, e^{-\frac{1}{RC} t}}$

Ahora bien, la energía disipada por el resistor por unidad de tiempo es : $\frac{dE}{dt} = \frac{V^2}{R}$

$\rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{V_0^2 \, e^{-\frac{2}{RC} t}}{R} \quad \rightarrow \quad E = \int_0^\infty dE = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R} \, e^{-\frac{2}{RC} t} \, dt$ } Energía disipada desde $t = 0$ a $t \to \infty$

$= \frac{V_0^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right) e^{-\frac{2}{RC} t}\Big|_0^\infty = 0 - \frac{V_0^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right)$

$= \underline{\frac{1}{2} C V_0^2}$

Que es igual a la energía del capacitor cuando estaba cargado.

b) Alguien objeta diciendo que nunca se descarga por completo ¿cómo responderías?

Le diría que aunque no se descarge por completo, después de un tiempo $t_1 = RC$ ya sólo quedará un 36.79 % de la carga original y después de $t = 4RC$ ya sólo queda el 1.8 %.

Y así, en un tiempo finito la carga alcanzará valores tan bajos como queramos. Pero como la carga está cuantizada por la carga del electrón, eventualmente Q será menor que esta carga, lo cual no tiene sentido, indicando que ya se descargó por completo