TAREA 1 *Medios Deformables*

Basile Álvarez Tomás Ricardo 316617194
Gallegos Salgado Jessica Andrea 316038456

1. A partir de la ecuación de continuidad Euleriana, deducir la ecuación de continuidad en forma Lagrangeana:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0. \tag{1}$$

Si la densidad no depende del tiempo,

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0. \tag{2}$$

La ecuación de continuidad Euleriana viene dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{u}) = 0 \quad \dots 1$$

Desarrollamos $\nabla\cdot(\rho\bar{u})$ de la expresión, donde $\bar{u} = (u, v, w)$:

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\rho\bar{u}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \qquad \text{por definición de divergencia}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\rho\bar{u}) = \left(\rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \left(\rho\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \left(\rho\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \qquad \text{aplicando la ley del producto}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\rho\bar{u}) = \left(\rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \qquad \text{Reordenando}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\rho\bar{u}) = \rho\nabla\cdot\bar{u} + \bar{u}\cdot\nabla\rho \qquad \text{Por la definición de divergencia}$$

Ahora sustituimos esta expresión en la ecuación 1

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho\nabla\cdot\bar{u} + \bar{u}\cdot\nabla\rho] = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u}\cdot\nabla\rho}_{*} + \rho\nabla\cdot\bar{u} = 0 \quad \dots 2$$

En clase vimos que la forma general de la derivada material o lagrangiana es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \bar{u}\cdot\nabla A$$

Por lo que, de nuestra expresión, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u}\cdot\nabla\rho = \frac{d\rho}{dt}$ $*$ con $\frac{d\rho}{dt}$ la derivada total

Sustituimos en 2 y nos queda entonces

$$\boxed{\therefore \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\bar{u} = 0} \qquad \text{ECUACIÓN DE CONTINUIDAD EN FORMA LAGRANGIANA}$$

Ahora bien, si la densidad no depende del tiempo, entonces $\frac{d\rho}{dt} = 0$ y por consiguiente, de la ecuación de continuidad en forma lagrangiana vemos que $\rho\nabla\cdot\bar{u} = 0$
Pero como $\rho = cte$, tenemos que $\nabla\cdot\bar{u} = 0$

2. A partir de las ecuaciones de continuidad y momento en forma Euleriana, deducir la "ley de Newton" Lagrangeana:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla P + \rho \vec{g}. \tag{3}$$

La ecuación de momento en forma Euleriana está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \nabla \cdot (\rho u_i \underline{u}) + \nabla \cdot (P \hat{e}_i) = 0$$

y en forma indicial por: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0$

Por lo tanto, la ecuación de conservación de momento en forma Euleriana e indicial cuando consideramos fuerzas externas f_i es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = f_i$$

Con f_i las fuerzas del cuerpo. Si consideramos únicamente la gravedad, $f_i = \rho g_i$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \rho g_i \quad \ldots \mathrm{I}$$

Usamos la regla del producto para expandir el primer y el segundo término

- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$
- $\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \cdot u_i) = \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}$

Sustituyendo en I nos queda:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \rho g_i$$

$$\Rightarrow \rho \underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}_{\mathrm{II}} + u_i \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}\right)}_{\mathrm{III}} = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i}$$ factorizando ρ y u_i

De esta expresión podemos notar dos cosas:

II : $\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{d u_i}{dt}$ Por como se pasa de la derivada Euleriana a la Lagrangiana

III : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$ ya que es la ecuación de continuidad en notación indicial.

Sustituyendo estas dos expresiones tenemos finalmente que:

$$\rho \frac{du_i}{dt} + 0 = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i$$

La cual es la forma indicial de la "Ley de Newton" Lagrangiana que buscábamos demostrar:

$$\boxed{\rho \frac{du_i}{dt} = -\nabla P + \rho \underline{g}}$$

3. Partiendo de la ecuación Lagrangeana para la energía térmica,

$$\frac{d\epsilon}{dt} + P\frac{d(1/\rho)}{dt} = 0, \tag{4}$$

con $\epsilon = P/[(\gamma-1)\rho]$ la energía térmica por unidad de masa, y combinándola con las ecuaciones (1) y (3) obtenidas en los problemas 1 y 2, llegar a la ecuación de energía Euleriana:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}[u_i(E+P)] = \rho u_i g_i, \tag{5}$$

donde $E = \rho u_j^2/2 + P/(\gamma-1)$ es la densidad de energía total (cinética más térmica).

Partimos de la ecuacion (4) : $\frac{d\varepsilon}{dt} + P\frac{d(1/\rho)}{dt} = 0$, y sustituimos en ella $\varepsilon = \frac{P}{(\gamma-1)\rho}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{(\gamma-1)\rho}\right) + P\frac{d(1/\rho)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{P}{\gamma-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + P\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

Usando la regla de la derivada de un producto para el término $\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{(\gamma-1)\rho}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{P}{\gamma-1} + P\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\right)\left(\frac{P}{\gamma-1} + P\right) = 0 \quad \ldots \text{I}$$

Usando la regla de la derivada de un cociente

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\left(\frac{P}{\gamma-1} + P\right) = 0$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por ρ

Por otro lado, de la ecuación (1) obtenida en el primer problema (ecuación de continuidad en forma lagrangiana), tenemos que:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\bar{u} = 0 \quad \text{o en notación de índices:} \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

... sustituimos en I

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) - \frac{1}{\rho}\left(-\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\left(\frac{P}{\gamma-1} + P\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\left(\frac{P}{\gamma-1} + P\right) = 0 \quad \ldots \text{II}$$

Ahora convertiremos la derivada temporal $\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right)$ a la forma Euleriana. En clase vimos que, en notación indicial, las derivadas se relacionan como $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}A$. Entonces:

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right)$ ... sustituimos en II

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\left(\frac{P}{\gamma-1} + P\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}P = 0$$

Donde los términos $u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j\frac{P}{\gamma-1}\right)$ usando la regla del producto. Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}P = 0$$

Ahora sumamos un cero a la ecuación $\left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} P - u_j \frac{\partial}{\partial x_j} P\right) = 0$:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \frac{\rho}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} P + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} P - u_j \frac{\partial}{\partial x_j} P = 0$$

Donde los términos $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} P + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} P = \frac{\partial}{\partial x_j}(Pu_j)$ usando la regla del producto. Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \frac{\rho}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(Pu_j) - u_j \frac{\partial}{\partial x_j} P = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \frac{P}{\gamma-1} + Pu_j\right) - u_j \frac{\partial}{\partial x_j} P = 0 \qquad \text{factorizando } \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \left(\frac{\rho}{\gamma-1} + P\right)\right) - u_j \frac{\partial}{\partial x_j} P = 0 \quad \ldots \text{III} \qquad \text{factorizando } u_j$$

Ahora usaremos la "Ley de Newton" Lagrangiana encontrada en el ejercicio 2, la cual dice que:

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = -\nabla P + \rho \bar{g} \qquad \text{o en notación indicial} \qquad \rho \frac{du_j}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \rho g_j$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x_j} = -\rho \frac{du_j}{dt} + \rho g_j \quad \ldots \text{ Sust en III}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \left(\frac{\rho}{\gamma-1} + P\right)\right) - u_j\left(-\rho \frac{du_j}{dt} + \rho g_j\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \left(\frac{\rho}{\gamma-1} + P\right)\right) + \rho u_j \frac{du_j}{dt} - \rho u_j g_j = 0$$

Convertimos la derivada total $\frac{du_j}{dt}$ a la forma Euleriana: $\frac{du_j}{dt} = \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$, por lo que queda:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \left(\frac{\rho}{\gamma-1} + P\right)\right) + \rho u_j\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \rho u_j g_j = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \left(\frac{\rho}{\gamma-1} + P\right)\right) + \rho u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_j u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \rho u_j g_j = 0$$

Ahora sumamos otro cero a la ecuación $\left(\frac{1}{2} u_j u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{2} u_j u_j \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \left(\frac{\rho}{\gamma-1} + P\right)\right) + \rho u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{1}{2} u_j u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{2} u_j u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_j u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \rho u_j g_j = 0$$

y usamos que $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u_j u_j\right) = \rho u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{1}{2} u_j u_j \frac{\partial \rho}{\partial t}$ y sustituimos en la expresión anterior:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \left(\frac{\rho}{\gamma-1} + P\right)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u_j u_j\right) - \frac{1}{2} u_j u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_j u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \rho u_j g_j = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u_j u_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \left(\frac{\rho}{\gamma-1} + P\right)\right) - \frac{1}{2} u_j u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_j u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \rho u_j g_j = 0 \qquad \text{factorizando}$$

la ecuación de continuidad de Euler nos dice que $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$, con lo que reemplazamos $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)$ en el tercer término

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u_j u_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j\left(\frac{P}{\gamma-1}+P\right)\right) - \frac{1}{2}u_j u_j\left(-\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)\right) + \rho u_j u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \rho u_j g_j = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u_j u_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j\left(\frac{P}{\gamma-1}+P\right)\right) + \underbrace{\frac{1}{2}u_j u_j \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) + \rho u_j u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} - \rho u_j g_j = 0$$

Notemos que para el tercer y cuarto término: $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\rho u_i u_j u_j\right) = \frac{1}{2}u_j u_j \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) + \frac{1}{2}\rho u_i \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j u_j)$

$$= \frac{1}{2}u_j u_j \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) + \rho u_j u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u_j u_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j\left(\frac{P}{\gamma-1}+P\right)\right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\rho u_i u_j u_j\right)} - \rho u_j g_j = 0$$

Hacemos un cambio de índices mudos $i \leftrightarrow j$ en el tercer término:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u_j u_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j\left(\frac{P}{\gamma-1}+P\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\rho u_j u_i u_i\right) - \rho u_j g_j = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u_j u_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j\left(\frac{P}{\gamma-1}+P\right) + \frac{1}{2}\rho u_j u_i u_i\right) - \rho u_j g_j = 0$$ factorizando $\frac{\partial}{\partial x_j}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{P}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u_j u_j\right)}_{\text{IV}} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j\left(\underbrace{\frac{P}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u_i u_i}_{\text{V}} + P\right)\right) - \rho u_j g_j = 0$$ factorizando u_j

Finalmente usamos que la densidad de energía total se define como $E = \frac{\rho u_j^2}{2} + \frac{P}{\gamma-1}$ y lo sustituimos en IV y V

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}E + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j(E+P)\right) - \rho u_j g_j = 0$$

$$\boxed{\therefore \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_i(E+P)\right] = \rho u_i g_i}$$

4. Partiendo de la ecuación de entropía,

$$\frac{dS}{dt} = 0, \tag{6}$$

con $S = P\rho^{-\gamma}$, llegar a la ecuación Lagrangeana para la energía térmica, ec. (4) del problema 3.

Primero expandimos la derivada de $S = P\rho^{-\gamma}$:

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(P\rho^{-\gamma}) = 0$$

$$\Rightarrow P\frac{d}{dt}\rho^{-\gamma} + \rho^{-\gamma}\frac{d}{dt}P = 0$$ por regla del producto

$$\Rightarrow -\gamma P\rho^{-\gamma-1}\frac{d\rho}{dt} + \rho^{-\gamma}\frac{dP}{dt} = 0$$ resolviendo

$$\Rightarrow (\rho^{\gamma-1})(-\gamma P\rho^{-\gamma-1})\frac{d\rho}{dt} + (\rho^{\gamma-1})(\rho^{-\gamma}\frac{dP}{dt}) = 0$$ Multiplicamos por $(\rho^{\gamma-1})$

$$\Rightarrow -\gamma P\rho^{-2}\frac{d\rho}{dt} + \rho^{-1}\frac{dP}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\gamma-1}\right)\left(-\gamma P\rho^{-2}\frac{d\rho}{dt}\right) + \left(\frac{1}{\gamma-1}\right)\left(\rho^{-1}\frac{dP}{dt}\right) = 0$$ Ahora multiplicamos por $\frac{1}{(\gamma-1)}$:

$$\Rightarrow -\frac{\gamma}{\gamma-1}P\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt} = 0$$ Notemos que $\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{1}{\gamma-1} + 1$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{\gamma-1} - 1\right)\left(P\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\right) + \frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{-\frac{1}{\gamma-1}P\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}} - P\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \underline{\frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt}} = 0$$ desarrollando

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma-1}\underbrace{\left[-P\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt}\right]} - P\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = 0$$ factorizando $\frac{1}{\gamma-1}$

Ahora, notemos que $\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{\rho\frac{dP}{dt} - P\frac{d\rho}{dt}}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt} - P\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}$ por la regla del cociente.
lo cual es justamente la expresión entre corchetes del primer término de la expresión :

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho}\right) - P\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{(\gamma-1)\rho}\right) - P\underbrace{\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}} = 0$$

Notemos que $-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{P}{(\gamma-1)\rho}\right)} + P\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

Finalmente usamos que $\varepsilon = \frac{P}{(\gamma-1)\rho}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\varepsilon) + P\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

$$\boxed{\therefore \frac{d\varepsilon}{dt} + P\frac{d(1/\rho)}{dt} = 0}$$