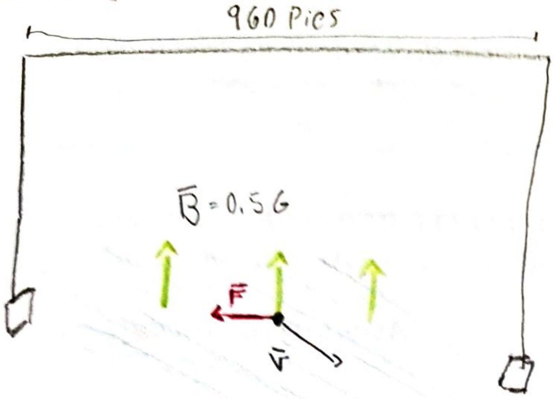
Problemas extra Electro I

Tomás Ricardo Basile Álvarez.

!! Voltaje inducido por mareas.



¿Voltaje inducido?

Consideremos una partícula cargada q que se mueve con el río a velocidad $\bar{v}$, como en el dibujo.

$\Rightarrow$ Siente una fuerza de Lorentz perpendicular a la velocidad $\bar{v}$ dada por:

$$\bar{F} = q\,\bar{v} \times \bar{B}$$

Nos interesa la componente de esta fuerza en la dirección horizontal (dirección de una placa a otra)

Esta componente se obtiene con el componente vertical de $\bar{B}$, es decir $0.5\,G$.

$\Rightarrow |\bar{F}| = 0.5\,q|\bar{v}|$ en la dirección de una placa a otra.

$\Rightarrow$ la fuerza por unidad de carga (el campo eléctrico efectivo) es: $\underline{|\bar{E}| = (5 \cdot 10^{-5}\,T)(|\bar{v}|)}$

El voltaje entre las placas es $\int \bar{E} \cdot d\bar{r}$ pero como E tiene el mismo valor a lo largo del río

$$\Rightarrow \quad V = |E|\,l \quad \leftarrow \quad l\text{: Longitud entre placas}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V = (5 \cdot 10^{-5}\,T)|\bar{v}|\,l}$$

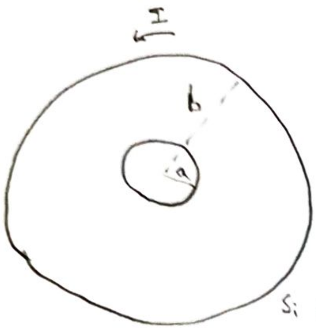
pero $l = 960$ pies $= 292.6\,m$

y una aproximación de $|\bar{v}|$ podría ser algo así como $|\bar{v}| = 2\,m/s$

$$\Rightarrow \quad V = (5 \cdot 10^{-5}\,T)(2\,m/s)(292.6\,m)$$
$$= \underline{0.029 \text{ Volts}}$$

2. Un circuito circular de radio a coplanar y concéntrico a uno de radio b. Una corriente I pasa por el circuito grande y el chico empieza a rotar con ω.

a) corriente por el circuito pequeño como función del tiempo



El anillo b genera un campo magnético $\bar{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2b}$ en el centro que apunta hacia afuera de la hoja.

campo de un anillo en el centro. (Tarea 9 ej extra)

Si $a << b \Rightarrow$ Podemos pensar que el campo $\bar{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2b}$ no es sólo válido en el centro, sino dentro de todo el anillo de radio a. ...(1)

Si el anillo pequeño tiene un ángulo θ con respecto al plano entonces el flujo magnético por dentro del anillo es:

$$\int \bar{B}\cdot d\bar{a} = \int |\bar{B}||d\bar{a}|\cos\theta$$

pues en un dado momento, $\cos\theta$ es cte y por (1), $|\bar{B}|$ es constante dentro del anillo

$$= |\bar{B}|\cos\theta \int |d\bar{a}|$$
$$= |\bar{B}|\,|\text{Area}|\cos\theta$$
$$= |\bar{B}|(\pi a^2)\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{2b}\pi a^2 \cos\theta$$

$\therefore$ el flujo es $\boxed{\phi_m = \dfrac{\mu_0 I \pi a^2}{2b}\cos\theta}$

Pero si el anillo rota a $\omega \Rightarrow$ el ángulo θ como función del tiempo es $\theta(t) = \omega t + \theta_0$

pero como inicialmente es coplanar al anillo grande $\Rightarrow \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta(t) = \omega t$

$\therefore \phi_m$ como función del tiempo es: $\phi_m(t) = \dfrac{\mu_0 I \pi a^2}{2b}\cos(\omega t)$

$\Rightarrow$ por ley de Faraday: $\mathcal{E}mf = -\dfrac{d\phi_m}{dt} = \dfrac{\omega \mu_0 I \pi a^2}{2b}\text{sen}(\omega t)$

y la corriente por el circuito a es $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}mf}{R} \Rightarrow \boxed{I_1(t) = \dfrac{\omega \mu_0 I \pi a^2}{2bR}\text{sen}(\omega t)}$

b) ¿Torca para que el circuito gire?

La torca sobre un circuito en un campo $\bar{B}$ es $\tau = \bar{m}\times\bar{B}$ con $\bar{m} = I_1\bar{a}$ el momento magnético del alambre chico

$$\rightarrow \tau = I_1\,\bar{a}\times\bar{B} \rightarrow |\bar{\tau}| = I_1\,|\bar{a}|\,|\bar{B}|\,\text{sen}\,\theta$$

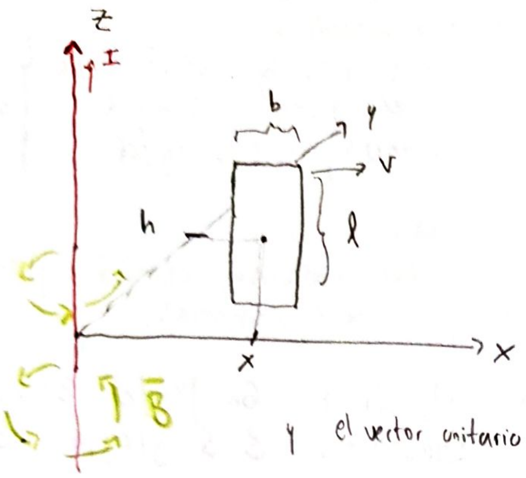
Pero ya conocemos I_1, $|\bar{a}|$, $|\bar{B}|$

$$\rightarrow |\bar{\tau}| = \left(\frac{\omega\mu_0 I \pi a^2}{2bR}\text{sen}(\omega t)\right)(\pi a^2)\left(\frac{\mu_0 I}{2b}\right)\text{sen}(\omega t)$$

$$= \left(\frac{\mu_0 I \pi a^2}{2b}\right)^2 \frac{\omega\,\text{sen}^2(\omega t)}{R}$$

3) Encuentra la magnitud de la Emf cuando el circuito tiene posición x.

Primero que nada, voy a redefinir un poco los ejes, pero el problema es el mismo.



Digamos que la corriente se mueve por el eje z y que el rectángulo se desplaza en la dirección $\hat{x}$ en el plano $y=h$.

Con esto es más fácil encontrar una expresión para el campo $\vec{B}$

El campo de un alambre recto tiene magnitud $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ y su dirección rodea el eje z. con $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow$ En coordenadas cilíndricas: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$

y el vector unitario $\hat{\theta}$ en coordenadas cartesianas es: $\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$

$$= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{y}$$

$\Rightarrow$ El campo $\vec{B}$ en cartesianas es: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{y}\right)$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2+y^2)}(-y\hat{x}+x\hat{y})$$

Ahora, cuando el rectángulo está en un punto x, queremos calcular el flujo de $\vec{B}$ sobre el rectángulo

$\rightarrow \int \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int B(\sigma(s,t))\cdot(\vec{\sigma}_s \times \vec{\sigma}_t)\,ds\,dt$ $\leftarrow$ Que es como se define la integral de superficie, donde $\sigma(s,t)$ parametriza el rectángulo.

El rectángulo se consigue al variar x' de $[x-b/2$ a $x+b/2$ y variar z' de $-l/2$ a $l/2$ y dejar $y'=h$.

Es decir, lo podemos parametrizar como: $\sigma(t,s) = (x-\frac{b}{2}+bt,\ h,\ -\frac{l}{2}+ls)$ con $t\in[0,1]$, $s\in[0,1]$

$\Rightarrow$) $B(\sigma(s,t)) = B(x-b/2+bt,\ h,\ -\frac{l}{2}+ls) = \frac{\mu_0 I}{2\pi[(x-\frac{b}{2}+bt)^2+h^2]}(-h\hat{x}+(x-b/2+bt)\hat{y}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi[x^2+h^2]}(-h\hat{x}+x\hat{y})$

si $x \gg b$

$\bullet\bullet$) $\sigma_s = \frac{d\sigma}{ds} = (0,0,l)$

$\sigma_t = \frac{d\sigma}{dt} = (b,0,0)$

$\Big\} \rightarrow \sigma_s \times \sigma_t = (0,-bl,0)$

Metemos esto en la integral de flujo y nos queda:

$$\Phi_m(x) = \int_0^1\int_0^1 \frac{\mu_0 I}{2\pi[x^2+h^2]}(-h,x,0)\cdot(0,-bl,0)\,ds\,dt = \int_0^1\int_0^1 -\frac{\mu_0 I x}{2\pi[x^2+h^2]}bl\,ds\,dt = \frac{-\mu_0 I x b l}{2\pi[x^2+h^2]}$$

Ése es el valor del flujo magnético cuando el cuadrado está en x.

Pero el rectángulo viaja a velocidad $v \Rightarrow x(t) = vt$

$\therefore \quad \phi_m(t) = \dfrac{-\mu_0 I \, v t \, b l}{2\pi \, [v^2 t^2 + h^2]}$

Usando Mathematica

Por ley de Faraday: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \phi_m(t)}{\partial t} = \dfrac{\mu_0 I b l v}{2\pi} \dfrac{h^2 - v^2 t^2}{(h^2 + v^2 t^2)^2}$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \dfrac{\mu_0 I b l v}{2\pi} \dfrac{h^2 - x^2}{(h^2 + x^2)^2}}$

(usando otra vez $vt = x$)

b) ¿Para qué valores de X esta fem tiene un mínimo local?

necesitamos minimizar $\mathcal{E} = \dfrac{\mu_0 I b l v}{2\pi} \dfrac{h^2 - x^2}{(h^2 + x^2)^2} \equiv c \dfrac{h^2 - x^2}{(h^2 + x^2)^2}$ definimos $c = \dfrac{\mu_0 I b l v}{2\pi}$

$\Rightarrow$ Derivamos e igualamos a 0

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = c \, \frac{(h^2+x^2)^2(-2x) - (h^2 - x^2)\, 2x\, (2)(h^2 + x^2)}{(h^2 + x^2)^4} = 0 \Rightarrow -2x(h^2 + x^2) - 4x(h^2 - x^2) = 0$$

Si $x \neq 0 \Rightarrow h^2 + x^2 + 2h^2 - 2x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 3h^2 \rightarrow \underline{x = \pm\sqrt{3}\, h}$

$\therefore$ alcanza un punto crítico en:

$\underline{x_1 = 0, \; x_2 = -\sqrt{3}\, h, \; x_3 = \sqrt{3}\, h}$

$\mathcal{E}(x_1) = \mathcal{E}(0) = c \dfrac{h^2 - 0^2}{(h^2 + 0^2)^2} = \dfrac{c}{h^2}$

$\mathcal{E}(x_2) = \mathcal{E}(-\sqrt{3}\, h) = c \dfrac{h^2 - 3h^2}{(h^2 + 3h^2)^2} = c \dfrac{-2h^2}{16 h^4} = -\dfrac{c}{8h}$

$\mathcal{E}(x_3) = \mathcal{E}(\sqrt{3}\, h) = -\dfrac{c}{8h}$

$\therefore$ Entonces alcanza un mínimo en $x_2 = -\sqrt{3}\, h$ y en $x_3 = \sqrt{3}\, h$ y su valor es

$$-\frac{c}{8h} = \underline{-\frac{\mu_0 I b l v}{16 \pi h}}$$