Electro I Tarea 9 01/Junio/2020

Tomás Ricardo Basile Álvarez

1) Una partícula q, m se mueve a $\bar{v}$ en un campo $\bar{B}$. $\bar{B}$ es perpendicular a $\bar{v}$

a) Muestra que la trayectoria de la partícula es una curva de radio $R = \frac{P}{qB}$

b) Si $\bar{B}$ es igual en cualquier punto, va a tener una trayectoria circular.

•) Sabemos que la velocidad no cambia de magnitud sino sólo de dirección, esto debido a que la fuerza $F = q v \times B$ es siempre perpendicular a $\bar{v}$ y por tanto no hace trabajo.

••) Por la ley de Newton: $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} \rightarrow q\bar{v} \times \bar{B} = \frac{d(\gamma m \bar{v})}{dt}$

pero como la magnitud de la velocidad no cambia $\Rightarrow$ γ es cte y puede salir de la derivada

$$\rightarrow \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{q}{\gamma m} \bar{v} \times \bar{B} \quad , \ldots (1)$$

•••) Si tenemos una curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\alpha(t)$, es un resultado del cálculo que la curvatura es $K = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \ldots (2)$

Pero en este caso, si α representa la posición $\rightarrow$ α' es la velocidad $\bar{v}$ y $\alpha'' = \frac{d\bar{v}}{dt}$

Entonces, sustituyendo en (2): $\frac{\|\bar{v} \times d\bar{v}/dt\|}{\|\bar{v}\|}$, lo cual, por (1)

$$K = \frac{\|\bar{v} \times (\frac{q}{\gamma m} \bar{v} \times \bar{B})\|}{\|v\|^3}$$

pero $v \times B$ es ortogonal a $\bar{v}$ por lo que $\|v \times (\frac{q}{\gamma m} \bar{v} \times \bar{B})\| = \|\bar{v}\| \, \|\frac{q}{\gamma m} \bar{v} \times \bar{B}\|$

$$= \frac{\|\bar{v}\| \|\frac{q}{\gamma m} \bar{v} \times \bar{B}\|}{\|v\|^3} = \frac{q}{\gamma m} \frac{\|\bar{v}\| \|B\|}{\|v\|^2}$$ $\leftarrow$ pues $\bar{v}$ es ortogonal a $\bar{B}$

Por último, el radio de curvatura es $R = 1/K = \frac{\gamma m \|v\|}{\|B\| q} = \frac{\|\bar{p}\|}{q \|\bar{B}\|}$

b) Si $\bar{B}$ es igual en cualquier punto, entonces si $\bar{v}$ es perpendicular a $\bar{B}$ en un momento, entonces son perpendiculares durante toda la trayectoria, pues $\bar{v}$ no puede "ganar" un componente en la dirección de $\bar{B}$ pues la fuerza siempre es perpendicular a $\bar{B}$.

Entonces, el resultado de a) es válido en toda la trayectoria

$\rightarrow$ La carga se mueve por una curva de radio $R = \frac{\|\bar{p}\|}{q\|\bar{B}\|}$ que es cte pues el momento es cte

$\Rightarrow$ Debe de moverse en un círculo.
(una curva con radio de curvatura cte es un círculo)

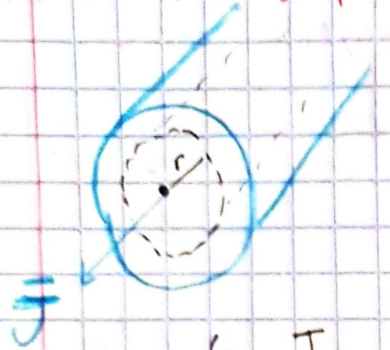
Tiempo: Como la velocidad no cambia de magnitud, ésta siempre es $\|\vec{v}\|$

y para dar una vuelta al círculo, recorre una distancia $2\pi R = 2\pi \dfrac{\gamma m \|v\|}{q\|B\|}$

El tiempo es simplemente distancia entre velocidad

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi \dfrac{\gamma m \|v\|}{q\|B\|}}{\|v\|} = \boxed{\frac{2\pi\gamma m}{q\|B\|}}$$

2] ¿Qué dependencia debe tener la densidad de corriente dentro de un alambre para que tenga una magnitud cte dentro del alambre?



Consideramos una parte del cilindro de radio r

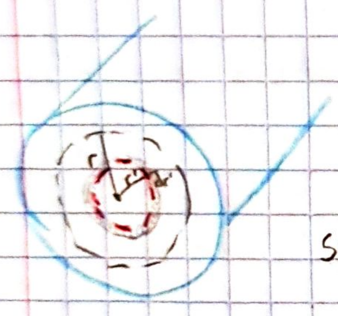
Por la ley de Ampere, se cumple:

$$\int_c B \cdot d\bar{r} = \mu_0 I_{Through} \quad \dots (1)$$

Con $I_{Through}$ la corriente que atraviesa el cilindro de radio r.

Esta corriente I es igual al flujo de $\bar{J}$, $I = \int \bar{J} \cdot d\bar{a}$

Si $\bar{J}$ es función del radio $\bar{J}(r')$, podemos calcular el flujo partiendo el cilindro en pequeños cilindros de radio r' con $0 < r' < r$ y de grosor dr'



El área de este cilindrito es $2\pi r' dr'$, y en él J es cte y de valor $J(r')$

Por lo que el flujo por este cilindrito es $J(r')\, 2\pi r' dr'$

Si sumamos todos los flujos, tenemos: $I = \int_0^r J(r')\, 2\pi r' dr' \quad \dots (2)$

Pero por (1) y como queremos que B sea cte $\Rightarrow B \int dr = \mu_0 I_{Thro}$

$$\rightarrow I_{Thoug} = \frac{2\pi r}{\mu_0} B$$

Lo cual se debe cumplir $\forall r$ con una B, cte, para que B no dependa de r

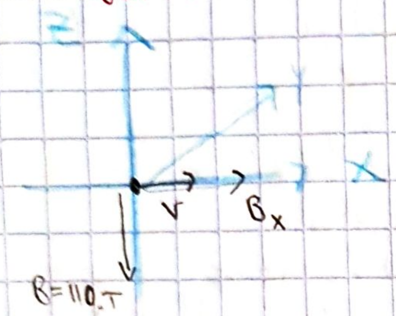
Sustituimos en (2) $\rightarrow \frac{2\pi r}{\mu_0} B = \int_0^r J(r')\, 2\pi r' dr'$

o bien, al derivar respecto a r y usar el Teorema Fund. del Cálculo

$$\rightarrow \frac{2\pi}{\mu_0} B = J(r)\, 2\pi r$$

$$\Rightarrow J(r) = \frac{B}{\mu_0 r}$$

3. A tiempo $t=0$, un electrón con 24 KeV se mueve en $x=0$ en la dirección positiva del eje x paralelo al componente horizontal de $\vec{B}$. La componente vertical apunta hacia abajo con magnitud $110\,\mu T$ a) ¿Magnitud de la aceleración? b) distancia del electrón desde el eje x cuando $x=4\,0$?



Primero necesitamos la velocidad del electrón con 24 KeV

La Energía y velocidad de una partícula se relacionan por:

$$\gamma - 1 = \frac{E}{mc^2} \qquad \text{con } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \gamma = 1 + \frac{3.845\times10^{-15}\,J}{(9.109\times10^{-31}\,kg)(3\times10^{8}\,m/s)^2} = \underline{1.047}$$

Entonces la velocidad es $v = \sqrt{1-1/\gamma^2}\; c^2 = \underline{8.887\times10^{7}\,m/s}$

Al principio del movimiento, el componente B_x no hace una fuerza (pues es paralelo a v) y el único componente que importa es $B_y = -110\,\mu T$ que es ortogonal a v

$\therefore$ Podemos usar el problema 1 para concluir que se mueve en un círculo de radio

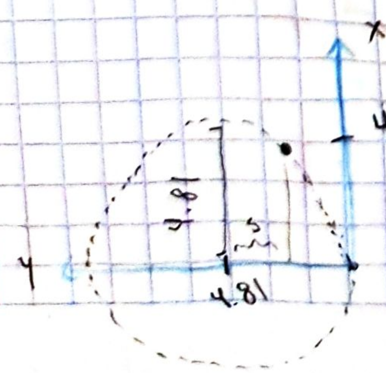
$$R = \frac{p}{qB} = \frac{\gamma m v}{qB} = \frac{(1.047)(9.109\times10^{-31}\,kg)(8.887\times10^{7})}{(1.602\times10^{-19})(110\times10^{-6})} = \underline{4.81\,m}$$

Como se mueve en un círculo, tiene una aceleración centrípeta

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{\frac{\gamma m v}{qB}} = \frac{qBv}{\gamma m} = \cdots = \underline{1.642\times10^{15}\,m/s^2}$$

b) el electrón nunca llega a $x=40$, pues el radio del círculo es 4.81

En todo caso, si quisiéramos hacerlo para $x=4$



Del dibujo, vemos que s es tal que $s^2+4^2=4.81^2$

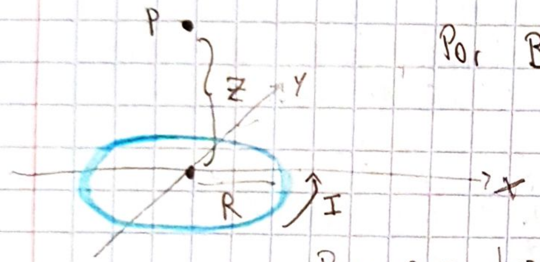
$\rightarrow s = 2.67\,m$

$\therefore$ La distancia con el eje x es:

$4.81 - s = 4.81 - 2.67 = \underline{2.139\,m}$

4. Un cono vacío tiene un ángulo 2θ y longitud L y densidad σ. Gira alrededor de su eje de simetría con frecuencia ω ¿Campo a la punta?

Vamos a partir el cono en anillos, por lo que primero calcularé el campo generado por un anillo de radio R, corriente I a una distancia z



Por Biot Savaart: $\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I \frac{d\bar{l} \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$

Donde $\bar{r}$ es la coordenada del punto $P = (0, 0, z)$
y $\bar{r}'$ parametriza al anillo

Para parametrizar el anillo, usamos $\bar{r}' = (R\cos t, R\,\text{sen}\, t, 0)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\Rightarrow d\bar{l} = \frac{d\bar{r}'}{dt} = (-R\,\text{sen}\,t, R\cos t, 0)$$

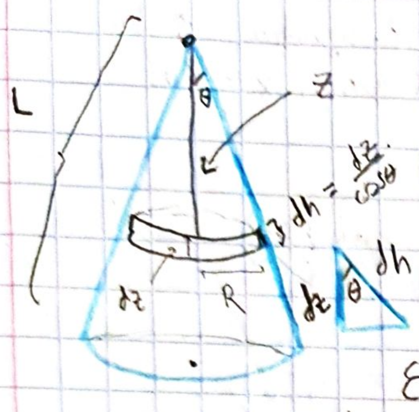
$$\Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I\,(-R\,\text{sen}\,t, R\cos t, 0) \times (-R\cos t, -R\,\text{sen}\,t, z)}{|(-R\cos t, -R\,\text{sen}\,t, z)|^3}\, dt$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I\,(zR\cos t\,\hat{\imath} + zR\,\text{sen}\,t\,\hat{\jmath} + R^2\,\hat{k})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\, dt$$

Como la integral va de $0 \to 2\pi$, vemos que las integrales para el componente $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ se hacen 0, pues sólo contienen $\cos t$ y $\text{sen}\, t$.

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I R^2\,\hat{k}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\, dt = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(2\pi)\, I R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,\hat{k} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}\,\hat{k}$$

Ahora sí, partimos el cono en muchos anillitos.



Y vamos a sumar sus contribuciones $\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{k}$ ... (1)

Pero antes hay que escribir la R y la I en términos de z

Vemos que $\underline{R = z\tan\theta}$.

$\Rightarrow$ El anillo tiene un área $2\pi R\, dh$, por lo que tiene una carga $q = 2\pi R \sigma\, dh$

Esta carga da vueltas a velocidad angular ω, por lo que da una vuelta completa en tiempo $T = 2\pi/\omega$

Entonces, la carga q se mueve una vuelta en tiempo T, generando una corriente $I = \frac{q}{T}$

$$= \frac{2\pi R \sigma\, dh}{2\pi/\omega} = \omega R \sigma\, dh = \frac{\omega R \sigma}{\cos\theta} dz$$

Sustituimos en (1) $\rightarrow$ La contribución del campo de este anillo es: $dB = \frac{\mu_0 \omega R \sigma R^2 dz}{2(R^2+z^2)^{3/2}\cos\theta} \hat{k}$

Sustituimos R $\rightarrow$ $dB = \frac{\mu_0 \omega \sigma z^3 \tan^3\theta}{2(z^2\tan^2\theta + z^2)^{3/2}\cos\theta} dz\, \hat{k}$

Pero a lo largo del cono, z varía de 0 a $L\cos\theta$

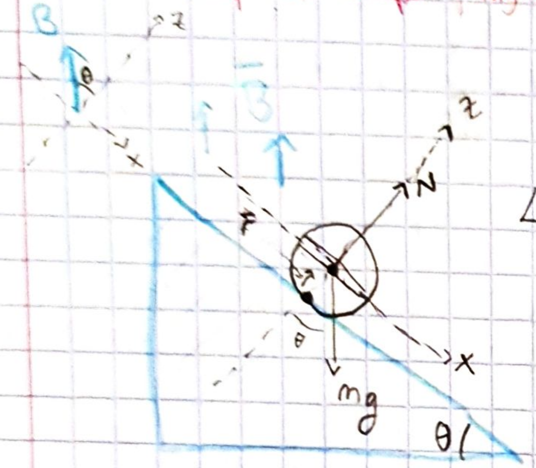
$$\Rightarrow \bar{B} = \int_0^{L\cos\theta} \frac{\mu_0 \omega \sigma z^3 \tan^3\theta}{2(z^2\tan^2\theta + z^2)^{3/2}\cos\theta} dz\, \hat{k} = \int_0^{L\cos\theta} \frac{\mu_0 \omega \sigma z^3 \tan^3\theta}{2z^3(\tan^2\theta+1)^{3/2}\cos\theta} dz\, \hat{k}$$

$$= \int_0^{L\cos\theta} \frac{\mu_0 \omega \sigma \tan^3\theta}{2(\sec^2\theta)^{3/2}\cos\theta} dz\, \hat{k} = \int_0^{L\cos\theta} \frac{\mu_0 \omega \sigma \tan^3\theta}{2\sec^3\theta\cos\theta} dz\, \hat{k}$$

$$= \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos\theta} \int_0^{L\cos\theta} dz\, \hat{k} = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \frac{L\cos\theta \operatorname{sen}^3\theta}{\cos\theta} \hat{k}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma L \operatorname{sen}^3\theta\, \hat{k}}$$

5. Cilindro de $m = 0.5\,Kg$, longitud $L = 0.2\,m$ con $N = 10$ vueltas de alambre. El cilindro se libera en un plano inclinado con ángulo θ. Hay un campo magnético $1T$ vertical. ¿Corriente mínima para que no ruede?



Para que no ruede, las torcas se deben de cancelar (respecto al punto de apoyo del cilindro)

La torca debido a N es: $\bar{r} \times \bar{N}$

$= (0, 0, R) \times (0, 0, N) = \bar{0}$

con R el radio del cilindro

La torca debida al peso es: $\bar{r} \times \bar{F}$

$= (0, 0, R) \times (mg\,\text{sen}\,\theta, 0, -mg\cos\theta)$

$= mgR\,\text{sen}\,\theta\ \hat{j}$

Por último, el alambre tiene un momento magnético $\bar{m} = AI\hat{n}$ con A el área que encierra, I la corriente y $\hat{n}$ el vector ortogonal (que es $\hat{z}$)

$\Rightarrow \bar{m} = N(2R)(L)I\,\hat{z} = 2RNLI\hat{z}$

y con el campo $\bar{B}$, esto genera una torca $\tau = \bar{m} \times \bar{B}$

Por el dibujo vemos que $\bar{B} = (-B\,\text{sen}\,\theta, 0, B\cos\theta)$

$\Rightarrow$ La torca es $\tau = (0, 0, 2RNLI) \times (-B\,\text{sen}\,\theta, 0, B\cos\theta)$

$= -2NRLIB\,\text{sen}\,\theta\ \hat{j}$

Para que no ruede, la torca total debe de ser 0.

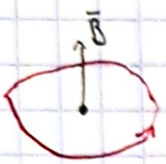
$\Rightarrow mgR\,\text{sen}\,\theta - 2NRLIB\,\text{sen}\,\theta = 0$

$\Rightarrow I = \dfrac{mg}{2NLB} = \dfrac{(0.5)(9.81)}{2(10)(0.2)(1)} = \boxed{1.226\ A}$

Extra : a) Considera un circuito de forma circular de radio a. Si lleva una corriente I encuentra la inducción magnética $\bar{B}$ en el centro del círculo.

Esto ya lo calculamos en el 4)

Donde vimos que el campo B a una distancia z de un anillo con corriente I y radio R es:



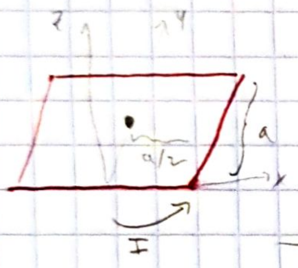
$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

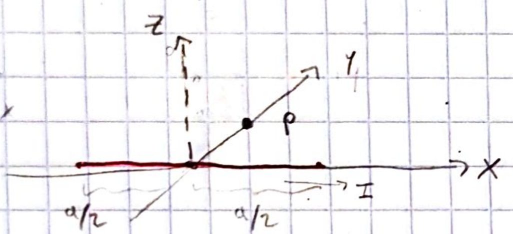
Pero ahora $R = a$, $z = 0$

$$\rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2a} \hat{k}}$$

b) Ahora una simetría cuadrada de lado a ¿Encuentre $\bar{B}$ en el centro?

Primero vemos que por simetría, cada lado aporta el mismo campo, así que calcularemos el campo de un lado y luego multiplicaremos $\times 4$





El campo es $\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I \frac{d\bar{l} \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$

Con $\bar{r}$ la posición donde medimos $= a/2 \, \hat{j}$

$\bar{r}'$ parametriza el circuito, en este caso lo podemos parametrizar como $t\hat{\imath}$ con $-a/2 \le t \le a/2$

$d\bar{l}$ es paralelo al circuito, $d\bar{l} = dr'/dt = dt\,\hat{\imath}$

$$\Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{I\,(dt\,\hat{\imath}) \times (-t\hat{\imath} + a/2\,\hat{j})}{|-t\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{j}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{a/2}^{a/2} \frac{I\,(\frac{a}{2}\,dt\,\hat{k})}{(t^2 + a^2/4)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dt}{(t^2 + a^2/4)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a}{8\pi} \int \frac{a}{2} \sec^2\theta \left(\frac{2}{a}\right)^3 \cos^3\theta \, d\theta$$

sustitución trigo $\tan\theta = \frac{2}{a} t$

$$= \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \int \cos\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \operatorname{sen}\theta = \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \left. \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2/4}} \right|_{-a/2}^{a/2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \frac{a/2}{\sqrt{a^2/2}} - \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \frac{(-a/2)}{\sqrt{a^2/2}} = \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \hat{k}$$

El campo total es 4 veces éste

$$\boxed{\bar{B} = \frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I}{\pi a} \hat{k}}$$