Álgebra Moderna Ejercicios Clase 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

25 de septiembre de 2020

(b) **Prueba que si $b \in G$ satisface que $ab = e$ entonces $b = a^-1$**

$$ab = e$$
$$a^{-1}ab = a^{-1}e \text{ Como } a \in G \text{ entonces tiene inverso } a^{-1}\text{que multiplicamos a la izquierda}$$
$$eb = a^{-1}e \text{ Por la def. de inverso, } a^{-1}a = e$$
$$b = a^{-1} \text{ por la definición del neutro}$$

c) **Sea $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1$ para algún $n \in Z\}$**

(c1) Prueba que G es un grupo con el producto de los complejos:

1) Cerradura: Sea z, w en G, entonces cumplen que $z^n = 1, w^m = 1$ para enteros n, m. Luego, su producto es zw.
Si elevamos este número a la nm, obetenemos: $(zw)^{nm} = z^{nm}w^{nm} = (z^n)^m(w^m)^n = 1^m \cdot 1^n = 1$.
Y como nm es un entero, zw cumple la condición para pertenecer a G. Y entonces el producto es cerrado.
2) Asociatividad: Como el producto en $\mathbb{C}$ es asociativo y $G \subset \mathbb{C}$, entonces el producto es asociativo en G.
3) Neutro: El neutro es 1, que pertenece al grupo ya que $1^1 = 1$ por lo que cumple con la condición para pertenecer.
Como $G \subset \mathbb{C}$, y 1 es el neutro de $\mathbb{C}$, entonces 1 es también es el neutro de $\mathbb{C}$.
Pues si $z \in G$, entonces $z \in \mathbb{C}$ y por tanto $z \cdot 1 = z$.
4) Inverso: Sea $z \in G$, entonces z tiene el inverso z^{-1} en $\mathbb{C}$.
Solamente falta probar que $z^{-1} \in G$. Como $z \in G$, entonces existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $z^n = 1$, y también, $(z^{-1})^n = z^{-n} = (z^n)^{-1} = (1)^{-1} = 1$.
Por lo tanto, z^{-1} cumple con la condición para pertenecer al conjunto G.