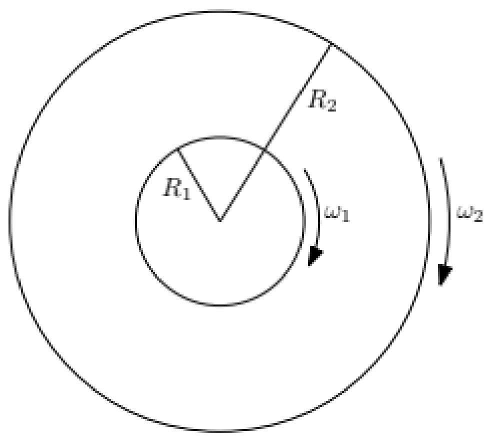
Dinámica de Medios Deformables: Tarea 6

Tomás Ricardo Basile Álvarez
Jessica Andre Gallegos Salgado

May 9, 2022

Problema 1

Otra solución exacta de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles es la de flujo entre dos cilindros concéntricos que rotan (Figura 1). El cilindro interior tiene radio R_1 y velocidad angular ω_1, mientras que el exterior tiene radio R_2 y velocidad angular ω_2.



Para este problema conviene usar coordenadas cilíndricas, donde la velocidad es $u = (u_r, u_\theta, u_z)$. Las ecuaciones de Navier Stokes en coords. cilíndricas son:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu\left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\nabla^2 u_z \tag{4}$$

donde el laplaciano escalar toma la forma $\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Inciso a)

La única componente de la velocidad distinta de cero es la componente tangencial u_θ (i.e $u_r = u_z = 0$). Además, debido a las simetrías del problema tanto u_θ como la presión P, sólo

dependen de r. El problema es estacionario. Muestra que en este caso las ecs. de Navier Stokes se reducen a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = \frac{u_\theta^2}{r} \quad , \quad \frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) = 0$$

Simplemente partiremos de las 4 ecuaciones que nos dan en el enunciado y cancelaremos los términos que se hacen cero debido a la simetría del problema. Como se dice en el enunciado de este inciso, $u_r = u_z = 0$, por lo que todos los términos incluyan estas componentes son 0. Además, tanto u_θ como P sólo dependen de r, por lo que si encontramos una derivada de estas cantidades respecto a otra coordenada, sabemos inmediatamente que ésta es 0.

Por lo tanto, partimos de cada una de las 4 ecuaciones y aplicamos estas simplificaciones para llegar a ecuaciones más sencillas y aplicables para el problema que estamos resolviendo.

- Ecuación 1):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Hacemos 0 a u_r, u_z:

$$\Rightarrow \ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r(0)) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial (0)}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Como u_θ sólo depende de r, su derivada respecto a θ es 0 :

$$\Rightarrow \ 0 = 0$$

por lo que la ecuación nos lleva a $0 = 0$, que es trivialmente cierto y no nos da nada de información.

- Ecuación 2):

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)$$

Hacemos $u_r = u_z = 0$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial (0)}{\partial t} + (0)\frac{\partial (0)}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + (0)\frac{\partial (0)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 (0) - \frac{(0)}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\Rightarrow \ \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \nu\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

Como se dijo antes, u_θ solamente depende de r, por lo que su derivada respecto a θ es 0:

$$\Rightarrow \ -\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}$$

$$\frac{u_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}$$

Como las cantidades sólo dependen de r, podemos cambiar los símbolos de derivadas parciales por derivadas comunes

$$\Rightarrow \ \boxed{\frac{u_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}}$$

Este resultado es una de las ecuaciones a las que se nos pedía llegar.

- Ecuación 3):

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\nu\left(\nabla^2 u_\theta-\frac{u_\theta}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)$$

Hacemos $u_r=u_z=0$:

$$\Rightarrow\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t}+(0)\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{(0)u_\theta}{r}+(0)\frac{\partial u_\theta}{\partial z}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\nu\left(\nabla^2 u_\theta-\frac{u_\theta}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial (0)}{\partial \theta}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\nu\left(\nabla^2 u_\theta-\frac{u_\theta}{r^2}\right)$$

Como el flujo es estacionario, u_θ no depende del tiempo y entonces su derivada respecto a t es 0

$$\Rightarrow\ \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\nu\left(\nabla^2 u_\theta-\frac{u_\theta}{r^2}\right)$$

Como P y u_θ sólo dependen de r, sus derivadas respecto a θ son 0 y nos queda:

$$\Rightarrow\ 0=\nu\nabla^2 u_\theta-\nu\frac{u_\theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow\ 0=\nabla^2 u_\theta-\frac{u_\theta}{r^2}$$

Escribimos el laplaciano explísitamente:

$$\Rightarrow\ 0=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}-\frac{u_\theta}{r^2}$$

Nuevamente, como u_θ sólo depende de r, sus derivadas respecto a otras coordenadas son 0 y entonces queda:

$$\Rightarrow\ 0=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)-\frac{u_\theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow\ 0=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+r\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}\right)-\frac{u_\theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow\ 0=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}-\frac{u_\theta}{r^2}$$

Finalmente, por la regla de derivada de un producto, se ve que $\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)$ y entonces:

$$\Rightarrow\ 0=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}$$

Como las cantidades sólo dependen de r, podemos cambiar los símbolos de derivadas parciales por derivadas comunes

$$\Rightarrow\ \boxed{0=\frac{d}{dr}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{d^2 u_\theta}{dr^2}}$$

Este resultado es una de las ecuaciones a las que se nos pedía llegar.

- Ecuación 4)

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z$$

Hacemos $u_\theta = u_z = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial (0)}{\partial t} + u_r \frac{\partial (0)}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial (0)}{\partial \theta} + (0)\frac{\partial (0)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 (0)$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

Como P sólo depende de r, su derivada respecto a z es 0 y nos queda:

$0 = 0$

Es decir, nos queda como resultado una ecuación trivial que no nos da nada de información adicional.

Por lo tanto, concluimos que las 4 ecuaciones aplicadas a las condiciones de este problema se reducen a:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = \frac{u_\theta^2}{r}$$

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) = 0$$

Inciso b)

La segunda ecuación no contiene la presión, intégrala dos veces respecto a r para obtener:

$$u_\theta(r) = \frac{Ar}{2} + \frac{B}{r}$$

donde A, B son constantes de integración.

Partimos de la segunda ecuación del inciso anterior

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) = 0.$$

y la integramos respecto a r:

$$\int \frac{d^2 u_\theta}{dr^2} dr + \int \frac{d}{dr}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) dr = 0.$$

Al hacer esta integral, desaparece una de las derivadas de $\frac{d^2 u_\theta}{dr^2}$ y queda $\frac{du_\theta}{dr}$. A su vez, la derivada de $\frac{d}{dr}\frac{u_\theta}{r}$ desaparece también y queda solamente $\frac{u_\theta}{r}$. Además, como realizamos una integral, hay que agregar una constante de integración, que llamaremos A. Por lo tanto, después de integrar una vez respecto a r nos queda:

$$\frac{du_\theta}{dr} + \frac{u_\theta}{r} = A$$

Multiplicamos ambos lados por r:

$$r\frac{du_\theta}{dr} + u_\theta = Ar$$

Ahora podemos identificar que el lado izquierdo es igual a $\frac{d}{dr}(ru_\theta) = r\frac{du_\theta}{dr} + \frac{dr}{dr}u_\theta = r\frac{du_\theta}{dr} + u_\theta$, y entonces:

$$\frac{d}{dr}(ru_\theta) = Ar$$

Integramos nuevamente respecto a r (y por haber integrado, agregamos una constante de integración B):

$$\int \frac{d}{dr}(ru_\theta)dr = \int Ardr + B$$

En el lado izquierdo, la integral nos permite deshacernos de la derivada respecto a r. Por otro lado, como A es constante, nos queda que $\int Ardr = A\int rdr = Ar^2/2$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} ru_\theta &= A\frac{r^2}{2} + B \\ \Rightarrow &\boxed{u_\theta(r) = A\frac{r}{2} + \frac{B}{r}} \end{aligned}$$

Con lo cual obtuvimos el resultado que buscábamos.

Inciso c)

Aplica las condiciones de frontera $u_\theta(R_1) = \omega_1 R_1$ y $u_\theta(R_2) = \omega_2 R_2$ y muestra que las constantes de integración son:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \\ B &= -R_1^2 R_2^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \end{aligned}$$

Ya obtuvimos la función $u_\theta(r)$ en el inciso anterior, por lo que podemos aplicarle las condiciones $u_\theta(R_1) = \omega_1 R_1$ y $u_\theta(R_2) = \omega_2 R_2$ para ver a qué sistema de ecuaciones nos lleva:

- Para $r = R_1$:

$$\begin{aligned} &u_\theta(R_1) = \omega_1 R_1 \\ \Rightarrow\ &A\frac{R_1}{2} + \frac{B}{R_1} = \omega_1 R_1 \\ \Rightarrow\ &\frac{R_1}{2}A + \frac{1}{R_1}B = \omega_1 R_1 \qquad (5) \end{aligned}$$

- Para $r = R_2$:

$$\begin{aligned} &u_\theta(R_2) = \omega_2 R_2 \\ \Rightarrow\ &A\frac{R_2}{2} + \frac{B}{R_2} = \omega_2 R_2 \\ \Rightarrow\ &\frac{R_2}{2}A + \frac{1}{R_2}B = \omega_2 R_2 \qquad (6) \end{aligned}$$

  Estas dos ecuaciones (5) y (6) definen un sistema de ecuaciones que debemos de resolver para A y B. Para resolver el sistema, podemos empezar depejando B de (5):

$$\begin{aligned} &\frac{R_1}{2}A + \frac{1}{R_1}B = \omega_1 R_1 \\ \Rightarrow\ &\frac{1}{R_1}B = \omega_1 R_1 - \frac{R_1}{2}A \\ \Rightarrow\ &B = \omega_1 R_1^2 - \frac{R_1^2}{2}A \qquad (7) \end{aligned}$$

Ahora sustituimos este resultado en la ecuación (6):

$$\begin{aligned}
\frac{R_2}{2}A + \frac{1}{R_2}B &= \omega_2 R_2 \\
\Rightarrow\ \frac{R_2}{2}A + \frac{1}{R_2}\left[\omega_1 R_1^2 - \frac{R_1^2}{2}A\right] &= \omega_2 R_2 \\
\Rightarrow\ \frac{R_2}{2}A - \frac{R_1^2}{2R_2}A + \frac{\omega_1 R_1^2}{R_2} &= \omega_2 R_2 \\
\Rightarrow\ \left[\frac{R_2}{2} - \frac{R_1^2}{2R_2}\right]A &= \omega_2 R_2 - \frac{\omega_1 R_1^2}{R_2} \\
\Rightarrow\ \left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_2}\right]A &= \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2} \\
\Rightarrow\ A &= \frac{(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2)2R_2}{R_2(R_2^2 - R_1^2)} \\
\Rightarrow &\boxed{A = \frac{2(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2}}
\end{aligned}$$

Ahora podemos sustituir este resultado para A en la ecuación (7) y obtener así B:

$$\begin{aligned}
B &= \omega_1 R_1^2 - \frac{R_1^2}{2}A \\
&= \omega_1 R_1^2 - \frac{R_1^2}{2}\frac{2(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2} \\
&\text{Multiplicamos el primer término por } \frac{2(R_2^2 - R_1^2)}{2(R_2^2 - R_1^2)} \\
&= \frac{2\omega_1 R_1^2(R_2^2 - R_1^2)}{2(R_2^2 - R_1^2)} - \frac{R_1^2 2(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2)}{2(R_2^2 - R_1^2)} \\
&= \frac{\omega_1 R_1^2(R_2^2 - R_1^2) - R_1^2(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2} \\
&= \frac{\omega_1 R_1^2 R_2^2 - \omega_1 R_1^4 - \omega_2 R_1^2 R_2^2 + \omega_1 R_1^4}{R_2^2 - R_1^2} \\
&= \frac{R_1^2 R_2^2(\omega_1 - \omega_2)}{R_2^2 - R_1^2} \\
&\Rightarrow \boxed{B = -\frac{R_1^2 R_2^2(\omega_2 - \omega_1)}{R_2^2 - R_1^2}}
\end{aligned}$$

Con lo cual hemos encontrado los valores de A y B.

Como dice el enunciado, con esto $u_\theta(r)$ queda determinada para un flujo con estas condiciones de frontera (es simplemente el resultado del inciso b) con A y B como las encontramos en el inciso c).
A partir de este resultado, se puede encontrar $P(r)$ usando ahora la primera de las ecuaciones a las que llegamos en a), que dice $\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = \frac{u_\theta^2}{r}$. Por lo tanto, nos queda que:

$$P(r) = \int \rho \frac{u_\theta^2}{r} dr,$$

lo cual se puede resolver sustituyendo la función u_θ encontrada antes y haciendo la integral.