Álgebra Moderna: Clase 13

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

20 de octubre de 2020

- **Ejercicio 13.4: Prueba con todo detalle que el diagrama visto en clase es la retícula de S_4**

Primero escribiré los $4! = 24$ elementos de S_4 explícitamente:

- **Neutro:** Lo denotaré por (1)
- **2-ciclos:** $(12), (13), (14), (23), (24), (34)$
- **3 ciclos:** $(123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)$
- **4 ciclos:** $(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)$
- **Producto de 2 ciclos:** $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$

Ahora iré construyendo los subgrupos de S_4 de abajo hacia arriba. Fijándome en todos los factores de 24 (que son los únicos órdenes en los que puede existir un subgrupo según el teorema de Lagrange)

* **Grupos de orden 1:**

Obviamente el único elemento de orden 1 es el neutro (1). Entonces tenemos el primer subgrupo:

- $E = \{(1)\}$

* **Grupos de orden 2:**

Los grupos de orden 2 tienen que ser isomorfos a $\mathbb{Z}_2$ y por tanto formados por el generado de un elemento de orden 2. Viendo los elementos de S_4 enlistados arriba, podemos encontrar fácilmente los grupos de orden 2 (son los 2 ciclos y los productos de 2 ciclos):

- $C_1 = \langle (13)(24) \rangle = \{(1), (13)(24)\}$
- $C_2 = \langle (12)(34) \rangle = \{(1), (12)(34)\}$
- $C_3 = \langle (14)(23) \rangle = \{(1), (14)(23)\}$

- $C_4 = \langle (24) \rangle = \{(1), (24)\}$
- $C_5 = \langle (13) \rangle = \{(1), (13)\}$
- $C_6 = \langle (34) \rangle = \{(1), (34)\}$
- $C_7 = \langle (12) \rangle = \{(1), (12)\}$
- $C_8 = \langle (23) \rangle = \{(1), (23)\}$
- $C_9 = \langle (14) \rangle = \{(1), (14)\}$

Y estos son todos los grupos de orden 2, porque son los únicos elementos de orden 2.

* **Grupos de orden 3:**

Los grupos de orden 3 tienen necesariamente que ser isomorfos a $\mathbb{Z}_3$ y por tanto, ser generados por un elemento de orden 3. Vemos entonces los elementos de orden 3 de S_4 en la lista (los 3-ciclos):

- $H_1 = \langle (234) \rangle = \{(1), (234), (243)\} = \langle (243) \rangle$
- $H_2 = \langle (134) \rangle = \{(1), (134), (143)\} = \langle (143) \rangle$
- $H_3 = \langle (124) \rangle = \{(1), (124), (142)\} = \langle (142) \rangle$
- $H_4 = \langle (123) \rangle = \{(1), (123), (132)\} = \langle (132) \rangle$

Y estos son todos los grupos de orden 3 porque usamos a todos los elementos de orden 3.

* **Grupos de orden 4**:

Para los grupos de orden 4 tenemos dos posibilidad, que sean isomorfos a $\mathbb{Z}_4$ o que sean isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Entonces nos fijamos en cada una de estas posibilidades:

\- **Grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_4$:** Los grupos isomorfos a $\mathbb{Z}_4$ son cíclicos y por tanto generados por un elemento de orden 4. Los únicos elementos de orden 4 en la lista son los 4-ciclos, por lo que tenemos los grupos:

- $B_1 = \langle (1234) \rangle = \{(1), (1234), (13)(24), (1432)\} = \langle (1432) \rangle$
- $B_2 = \langle (1324) \rangle = \{(1), (1324), (12)(34), (1423)\} = \langle (1423) \rangle$
- $B_3 = \langle (1243) \rangle = \{(1), (1243), (14)(23), (1342)\} = \langle (1342) \rangle$

Con esto ya podemos incluso ver las primeras contenciones entre subgrupos, pues tenemos que $C_1 \subset B_1$, $C_2 \subset B_2, C_3 \subset B_3$.

- **Grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:** Para ser un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ se necesitan dos generadores de orden 2 y que conmuten entre ellos. Y los elementos del generado serán entonces el neutro, estos dos elementos y su producto. Viendo el listado de 2-ciclos y de producto de 2-cíclicos que tenemos al principio, esto nos deja con unas pocas opciones que enlistamos:

  - $V_0 = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
  - $V_1 = \langle (13), (24) \rangle = \{(1), (13), (24), (13)(24)\}$
  - $V_2 = \langle (12), (34) \rangle = \{(1), (12), (34), (12)(34)\}$
  - $V_3 = \langle (14), (23) \rangle = \{(1), (14), (23), (14)(23)\}$

  ¿Pero son éstas todas las posibilidades de escoger dos elementos de orden 2 que conmuten?

  Sí.
  Primero vemos que si los dos elementos que escogemos son productos de 2-cíclicos, entonces el generado va a ser siempre V_0 porque contiene a los 3 elementos que son productos de 2-cíclicos.

  Luego, digamos que escogemos 2 elemenotos que sean 2 cíclicos.
  En la lista me fijé a propósito solamente en las parejas de este tipo que son permutaciones disjuntas porque así seguro conmutan. Sin embargo, falta probar que las otras parejas no generan un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, para lo que hay que probar que no conmutan. Como estamos considerando 2-ciclos distintos que no son disjuntos, deben de compartir un número repetido y por tanto las parejas se ven como alguna de las siguientes cuatro formas: $\{(ab), (ac)\}, \{(ab), (ca)\}, \{(ba), (ac)\}, \{(ba), (ca)\}$ para números distintos a, b, c entre 1 y 4.
  Sin embargo, todas estas parejas son en realidad iguales porque $(ab) = (ba), (ac) = (ca)$. Así que con probar que $\{(ab), (ac)\}$ no conmutan, ya habremos probado que ninguna pareja de 2-ciclos no disjunta es conmutativa:
  $(ab)(ac) = (acb) \neq (abc) = (ac)(ab)$
  Y entonces no se puede formar un $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ usando parejas no disjuntas de 2-ciclos.

  Ahora queda ver la opción de escoger un 2-cíclico y un producto de 2 cíclicos. Si escogemos por ejemplo el (13) y el $(13)(24)$ entonces se puede ver que el generado es V_1 porque estos dos elementos están en V_1 y lo generan completamente porque $(24) = (13)\ (13)(24)$.
  Y en general, si el 2-cíclico era uno de los factores en el producto de 2-ciclos, el generado ya está considerado en una de las V.

  En el otro caso, tenemos que el 2-cíclico es de la forma (ab) con a, b dos número distintos entre 1 y 4.
  Y que como el producto de 2 cíclcos no puede tener como uno de sus factores al (ab)

(porque es el caso que ya consideramos), entonces tiene que ser necesariamente de la forma $(ac)(bd)$, con c y d otros números distintos entre 1 y 4.
Y el producto de estos dos elementos es no conmutativo:
$(ab)(ac)(bd) = (acbd) \neq (adbc) = (ac)(bd)(ab)$

Entonces, los subgrupos que consideramos arriba son todos los posibles grupos isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Y junto con los subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_4$ completa todos los grupos de orden 4.

Además, tenemos las contenciones $C_4, C_5 \subset V_1$, $C_6, C_7 \subset V_2$, $C_8, C_9 \subset V_3$, $C_1, C_2, C_3 \subset V_0$.

* **Grupos de orden 6**

Los grupos de orden 6 tienen que ser isomorfos a $\mathbb{Z}_6$ o a $D_{2(3)}$ (que es isomorfo a S_3 y mejor consideraremos a S_3). Sin embargo, no encontraremos un subgrupo de S_4 isomorfo a $\mathbb{Z}_6$ porque S_4 claramente no tiene elementos de orden 6. Por lo que solamente nos quedan los grupos isomorfos a S_3.

S_3 es el conjunto de biyecciones de tres elementos $\{a, b, c\}$ en sí mismos.
Se puede ver sencillamente que este conjunto está compuesto por
$S_3 = \{(a), (ab), (ac), (bc), (abc), (acb)\}$. Sin importar quiénes sean a, b, c (con que sean distintos) pues son solamente los nombres de los elementos.

Los elementos de S_4 son biyecciones entre 4 elementos. Así que para que un subconjunto de S_4 sea isomorfo a S_3 tiene que estar constituido por puras biyecciones que 'ignoren' a alguno de los 4 elementos. No hay de otra, porque si tomamos un subgrupo de S_4 tal que todos los elementos $\{1, 2, 3, 4\}$ sean movidos en por lo menos una biyección, entonces ya no estamos hablando de biyecciones entre 3 elementos y no puede ser isomorfo a S_3.

Por tanto, clasificamos a los subgrupos de S_4 isomorfos a S_3 según cual de los elementos $\{1, 2, 3, 4\}$ es 'ignorado'. Y simplemente tomamos todas las permutaciones de S_4 que ignoran a este elementos para formar al conjunto. Lo que nos da los 4 siguientes conjuntos:

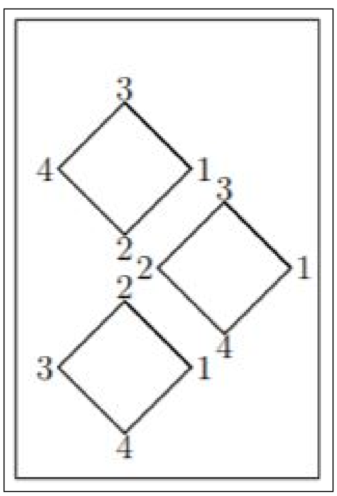
- $K_1 = \{(1), (23), (34), (24), (234), (243)\}$ 'Ignora' al 1
- $K_2 = \{(1), (13), (14), (34), (134), (143)\}$ 'Ignora' al 2
- $K_3 = \{(1), (12), (14), (24), (124), (142)\}$ 'Ignora' al 3
- $K_4 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ 'Ignora' al 4.

Cada uno de estos grupos es claramente isomorfo a S_3 y por lo mencionado antes, no hay más grupos isomorfos a S_3.
Entonces estos son entonces todos los grupos de orden 6, porque ya formamos todos los isomorfos a S_3 y no hay isomorfos a Z_6.

Además, notamos que tenemos nuevas contenciones: $C_4, C_6, C_8, H_1 \subset K_1$, $C_5, C_6, C_9, H_2 \subset K_2$, $C_4, C_7, C_9, H_3 \subset K_3$, $C_5, C_7, C_8, H_4 \subset K_4$.

* **Grupos de Orden 8**

Aquí ya no llega la tabla que vimos en clase de isomorfismos. Sin embargo, sabemos que una posibilidad es que los subgrupos de orden 8 sean isomorfos a $D_{2(4)}$.
Seguimos el mismo argumento que en las notas para enumerar estos conjuntos.



Tomamos en cuenta que D_8 es el grupo de simetrías del cuadrado. Entonces, para formar un grupo isomorfo a D_8 hay que escoger un cuadrado. Dados los números $\{1, 2, 3, 4\}$ hay 3 cuadrados distintos que podemos considerar según la forma en que nombremos a sus vértices (comprobaremos luego que no hay más). Las tres opciones para nombrar los vértices están consideradas en la imagen de las notas.

El tercer cuadrado tiene asociado el grupo de simetrías L_1 generado por la rotación (1234) y la reflexión (24).
El segundo cuadrado tiene asociado el grupo de simetrías L_2 generado por la rotación (1324) y la reflexión (34).
El primer cuadrado tiene asociado el grupo de simetrías L_3 generado por la rotación (1342) y la reflexión (23).

Podemos construir explícitamente los generados de manera sencilla recordando que tienen la forma $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Con r la rotación y s la reflexión.

Entonces, los grupos isomorfos a $D_{2(4)}$ son:

- $L_1 = \langle(1234), (24)\rangle = \{(1), (1234), (13)(24), (1432), (24), (14)(32), (13), (12)(34)\}$
- $L_2 = \langle(1324), (34)\rangle = \{(1), (1324), (12)(34), (1423), (34), (14)(23), (12), (14)(23)\}$
- $L_3 = \langle(1342), (23)\rangle = \{(1), (1342), (14)(32), (1243), (23), (12)(34), (14), (13)(24)\}$

¿Cómo sabemos que estos son todos los grupos isomorfos a D_8?

Porque todos los grupos isomorfos a D_8 deben de tener asociado un cuadrado como el que dibujamos.

Para seleccionar un cuadrado de este tipo, primero escogemos cómo nombrar a los 4 vértices, esto es un total de $4! = 24$ opciones. Pero, muchas de estas opciones son en realidad iguales. Pues si se puede pasar de una numeración a otra con una simetría, entonces ambas opciones van a dar el mismo grupo D_8. Para cada selección de la numeración de los vértices hay un total de 8 selecciones que dan el mismo grupo D_8 (las 8 simetrías). Y entonces en vez de tener 24 opciones para numerar los vértices, solamente tenemos $24/8 = 3$ opciones que proporcionen distintos grupos D_8.

¿Cómo sabemos que no hay otros grupos de orden 8?

Sea H un grupo de orden 8, probaremos que se ve como uno de los $D_{2(4)}$ que ya enlistamos.

Primero que nada, notamos que un grupo de orden 8 no puede contener ningún 3-ciclo porque el generado de este 3-ciclo crearía un subgrupo de orden 3 y esto violaría el teorema de Lagrange.
Entonces, debe de estar compuesto por puros elementos de orden 2 y 4.

Probamos ahora que debe de contener al menos un elementos de orden 4: Digamos que no contiene ninguno y que los 7 elementos distintos del neutro en H son de orden 2. Viendo la lista de elementos de S_3 vemos que no podemos tomar 7 elementos de orden 2 sin agarrar al menos una pareja de 2-ciclos disjuntos. Pero entonces su producto también debe de estar en H y como vimos cuando estudiamos los grupos de orden 4, el producto de dos 2-ciclos disjuntos da un 3-ciclo, lo que es una contradicción a que H no contiene 3-ciclos.
Por lo que concluimos que H contiene al menos un elemento de orden 4. Digamos que este elemento es $(abcd)$ para a, b, c, d números arbitrarios distintos entre 1 y 4.

Similarmente se puede probar que H debe de contener al menos un 2-ciclo. Porque como probamos que $(abcd) \in H$, entonces $\langle (abcd) \rangle \leq H$ es un subgrupo que contiene a $\{(1), (abcd), (ac)(db), (adcb)\}$. Y fuera de estos, faltan otros 4 elementos de H.
Digamos que ninguno es un 2-ciclo, y no pueden ser todos productos de 2 ciclos porque no alcanzan para llenar H, entonces alguno tiene que ser un 4-ciclo distinto a los que están en el generado de $(abcd)$, como podría ser $(acdb)$.
El producto de estos dos ciclos debe de estar en H pero da como resultado $(abcd)(acdb) = (adc)$ que es un 3-ciclo. Se puede ver similarmente que si escogemos otro de los 4 ciclos que faltan, el producto con $(abcd)$ será siempre un 3 ciclo, lo que es una contradicción porque H no contiene 3-ciclos.
Entonces concluimos que H contiene al menos un 2-ciclo.

Veamos ahora las posibilidades. Sabemos que H contiene al 4 ciclo arbitrario $(abcd)$ y que contiene a algún 2-ciclo, que puede ser (ab), (ac), $(ad), (bc), (bd), (cd)$.

Veamos que pasa en cada caso:

- H **contiene a** $(abcd),(ab)$ **)**: Entonces H contiene a $(abcd)(ab)=(acd)$, lo que contradice que H no tiene 3-ciclos.
- H **contiene a** $(abcd),(bc)$ **)**: Entonces H contiene a $(abcd)(bc)=(abd)$, lo que contradice que H no tiene 3-ciclos.
- H **contiene a** $(abcd),(cd)$ **)**: Entonces H contiene a $(abcd)(cd)=(abc)$, lo que contradice que H no tiene 3-ciclos.
- H **contiene a** $(abcd),(ad)$ **)**: Entonces H contiene a $(abcd)(ad)=(bcd)$, lo que contradice que H no tiene 3-ciclos.
- H **contiene a** $(abcd),(ac)$ **)**: Entonces H tiene el elemento $(abcd)$ de orden 4, y el elemento (ac) de orden 2. Y además, cumple que $(abcd)^{-1}(ac)=(adcb)(ac)=(ab)(cd)=(ac)(abcd)$. Por lo que $(abcd)^{-1}(ac)=(ac)(abcd)$.
  Pero estas tres condiciones son justo las condiciones generadoras de $D_{2(4)}$, y como H tiene también orden 8, debe de ser igual al generado de $\{(abcd),(ac)\}$ (que es de orden 8 porque es igual a $D_{2(4)}$) y por tanto H es isomorfo a $D_{2(4)}$
- H **contiene a** $(abcd),(bd)$ **)**: Entonces H tiene el elemento $(abcd)$ de orden 4, y el elemento (bd) de orden 2. Y además, cumple que $(abcd)^{-1}(bd)=(adcb)(bd)=(ad)(bc)=(bd)(abcd)$. Por lo que $(abcd)^{-1}(bd)=(bd)(abcd)$.
  Pero estas tres condiciones son justo las condiciones generadoras de $D_{2(4)}$, y como H tiene también orden 8, debe de ser igual al generado de $\{(abcd),(bd)\}$ (que es de orden 8 porque es igual a $D_{2(4)}$) y por tanto H es isomorfo a $D_{2(4)}$

Entonces, para que no haya una contradicción, concluimos que H es necesariamente isomorfo a $D_{2(4)}$. Y por tanto, en la lista anterior ya consideramos a todos los subgrupos de S_4 de orden 8.

Además, podemos ver que tenemos las contenciones $B_1,V_1,V_0\subset L_1\ \ ,\ \ B_2,V_2,V_0\subset L_2\ \ ,\ \ B_3,V_3,V_0\subset L_3$.

* **Grupos de Orden 12:**

Primero crearé un grupo de orden 12 y luego mostraré que es el único que puede haber.

Sea A_4 el conjunto de todas las permutaciones de signo par que tiene S_4 (permutaciones que se pueden ver como una cantidad par de transposiciones).

Es fácil ver que los productos de 2-ciclos tiene 2 transposiciones y por tanto pertenecen a A_4. Los 3-ciclos también son pares porque se pueden ver como dos transposiciones (por ejemplo, $(123)=(23)(13)$ y en general $(abc)=(bc)(ac)$).

Y la identidad es también una permutación par.

Los 2-ciclos claramente no son pares y los cuatro ciclos tampoco porque se pueden escribir como $(abcd) = (cd)(bd)(ad)$, que son 3 transposiciones.

Ya tenemos así que A_4 está formado por las 12 permutaciones:

$$A_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)\}$$

Luego, es bien conocido que la composición de dos permutaciones pares es par y por tanto A_4 es cerrdado bajo composiciones. Además de que la permutación inversa a una permutación par es también par (tiene las mismas transposiciones pero aplicadas al revés), por lo que A_4 es cerrado bajo inversos.
Por lo tanto, A_4 es un subgrupo de S_4.

Probar que es el único subgrupo de orden 12

Supongamos que existe otro subgrupo $H \leq S_4$ de orden 12.

Por el teorema de Lagrange, tenemos que $[S_4 : H] = 2$.

En el ejercicio 9.10 b) se demuestra que si $H \leq G$ con G finito y $[G : H] = 2$, entonces $x^2 \in H \ \ \forall x \in G$.

Si lo aplicamos para nuestro caso, tenemos que $\sigma^2 \in H \ \ \forall \sigma \in S_4$.

Como H contiene a todos los elementos de la forma σ^2, entonces, en particular, para $\sigma = (acb)$, H contiene a $\sigma^2 = (acb)(acb) = (abc)$.
Y por tanto contiene a todos los 3 ciclos.

Entonces, como contiene a (123) y a (124) (por ser 3-ciclos), debe de contener a su producto $(123)(124) = (13)(24)$.
Similarmente, debe de contener a $(132)(134) = (12)(34)$ y también a $(124)(123) = (14)(23)$.
Por lo que contiene a todos los productos de 2-ciclos.

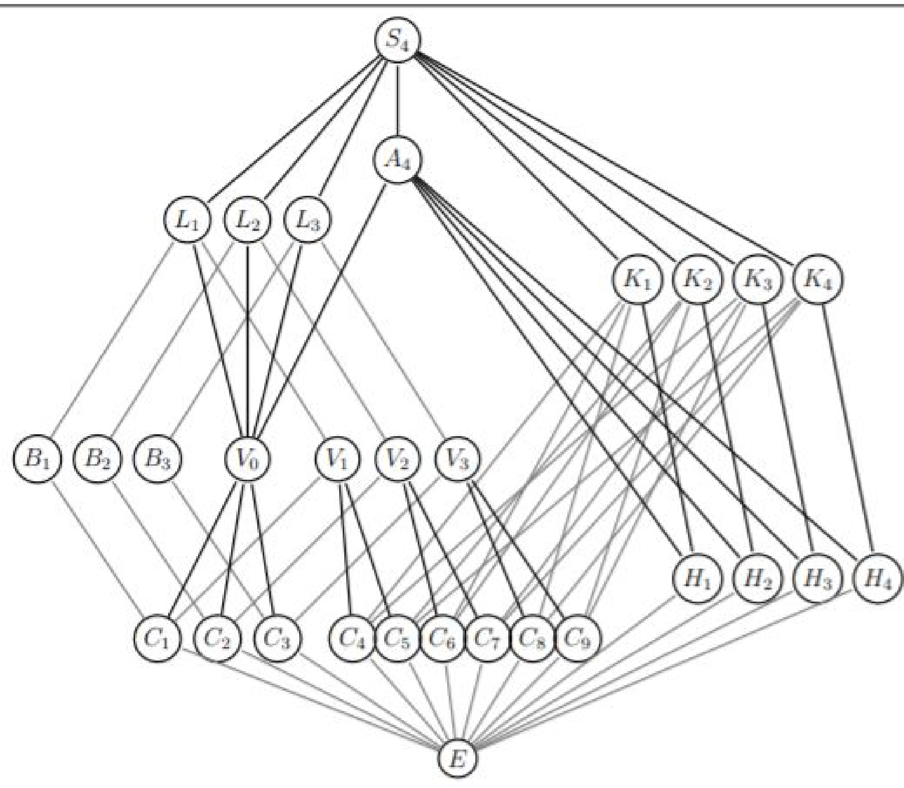
Luego, este grupo H contiene a todos los elementos de A_4 y como no tiene más elementos porque es también de orden 12, entonces $H = A_4$
Con lo que probamos que A_4 es el único grupo de orden 12.

Además, podemos ver que tenemos las contenciones $V_0, H_1, H_2, H_3, H_4 \subset A_4$

* **Grupos de orden 24:**
El único subgrupo de orden 24 es obviamente el propio S_4.

Con esto podemos estar seguros de que hemos encontrado todos los subgrupos de orden 24. Son un total de 30 subgrupos y ya hemos descrito sus contenciones que resumimos ahora:
$C_1 \subset B_1$, $C_2 \subset B_2$, $C_3 \subset B_3$
$C_1, C_2, C_3 \subset V_0$, $C_4, C_5 \subset V_1$, $C_6, C_7 \subset V_2$, $C_8, C_9 \subset V_3$
$C_4, C_6, C_8, H_1 \subset K_1$, $C_5, C_6, C_9, H_2 \subset K_2$, $C_4, C_7, C_9, H_3 \subset K_3$, $C_5, C_7, C_9, H_4 \subset K_4$
$B_1, V_1, V_0 \subset L_1$, $B_2, V_2, V_0 \subset L_2$, $B_3, V_3, V_0 \subset L_3$
$V_0, H_1, H_2, H_3, H_4 \subset A_4$

Por lo que el diagrama de Hasse de S_4 es el que vimos en las notas.



$L_i \cong D_{2(4)}$, $B_i \cong \mathbb{Z}_4$, $C_i \cong \mathbb{Z}_2$, $V_i \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $H_i \cong$, $K_i \cong S_3$