Súper Guía de Cálculo

Unidad 01:

Sección 1: Supremo, ínfimo, cotas.

- **Def₁** (cota superior): Sea $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, decimos que c es cota superior de A si se cumple que $a \leq c \quad \forall a \in A$.

- **Def₂** (cota inferior): Sea $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, decimos que c es cota inferior de A si se cumple que $a \geq c \quad \forall a \in A$

- **Def₃** (Conjunto acotado superiormente): A es acotado superiormente si tiene cota superior.
- **Def₄** (Conjunto acotado inferiormente): A es acotado inferiormente si tiene cota inferior.

- **Def₅** (Conjunto acotado): $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ es acotado si existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $|a| \leq r \quad \forall a \in A$.

□ **Teorema₁** (Conjunto acotado $\Leftrightarrow$ conjunto acotado superior e inferiormente): Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, A es acotado sí y sólo sí A es acotado superiormente e inferiormente.

Demostración:

$\Rightarrow$] Supongamos que A es acotado (definición de conjunto acotado)

$\Rightarrow \exists \; r \in \mathbb{R}$ tal que $|a| \leq r \quad \forall a \in A$ (Propiedad de valores absolutos)

$\Rightarrow -r \leq a \leq r \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow -r \leq a \;$ y $\; a \leq r \quad \forall a \in A$

$\therefore -r$ es cota inferior de A y r es cota superior de A.

$\therefore A$ es acotado inferior y superiormente #

$\Leftarrow$] Sea A acotado inferior y superiormente $\Rightarrow A$ tiene cota inferior y superior.

$\Rightarrow \exists \; r \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq r \quad \forall a \in A$ (porque A tiene cota superior)

$\Rightarrow \exists \; s \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq a \quad \forall a \in A$ (porque A tiene cota inferior)

construimos $q \in \mathbb{R}$ $\quad q = \max\{|r|, |s|\}$

entonces:

- $a \leq r \leq |r| \leq q \Rightarrow a \leq q \quad \forall a \in A \quad (1)$
- $|s| \leq q \Rightarrow -q \leq s \leq q \Rightarrow -q \leq s \Rightarrow -q \leq s \leq a \Rightarrow -q \leq a \quad \forall a \in A \quad (2)$

por (1) y (2)

$$-q \leq a \leq q \quad \forall a \in A$$

$$\Rightarrow a \leq |q| \quad \forall a \in A$$

entonces A es acotado #

- Def_6 (mínimo): Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ y sea $c \in \mathbb{R}$ con c una cota inferior de A y $c \in A$
 Entonces c es el mínimo de A.

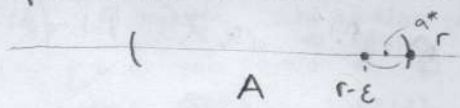
- Def_7 (Máximo): Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, y sea $c \in \mathbb{R}$ cota superior de A y $c \in A$.
 entonces c es el máximo de A.

Def_8 (Supremo) Decimos que $r = \sup(A)$ si:
- $a \leq r \quad \forall a \in A$ (r es cota superior)

•• si s es otra cota superior de A $\Rightarrow$ $r \leq s$ (r es la mínima cota superior)

- Def_8^*: Se cambia la condición •• por:
 •• $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a^* \in A$ tal que $r - \varepsilon < a^*$

Esta definición significa que si le restamos cualquier número a r (nos movemos un poco a la izquierda) entonces siempre habrá un elemento de A mayor a $r-\varepsilon$ (siempre habrá un elemento que revase)



Def_9 (ínfimo): $r = \inf(A)$ si:
- $a \geq r \quad \forall a \in A$ (r es cota inferior)

•• Si s es otra cota inferior, entonces $r \geq s$ (r es la máxima cota inferior)

Def_9^* ••) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a^* \in A$ tal que $r + \varepsilon > a^*$

☐ $Teorema_2$ ($Def_8 \Leftrightarrow Def_8^*$)

$\Rightarrow$) Suponemos que r es la mínima cota superior, p.d. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a^* \in A$ tal que $r - \varepsilon < a^*$
 La demostración será por contradicción (suponemos que no se cumple que para todo $\varepsilon > 0$ $\exists a^* \in A$ tal que $r - \varepsilon < a^*$)
 Es decir, existe una $\varepsilon > 0$ tal que para todo $a^* \in A$ $r - \varepsilon \geq a$

$\Rightarrow$ $r - \varepsilon$ es cota superior de A
 (ya que r es la mínima cota superior)
$\Rightarrow r \leq r - \varepsilon$
 $r \leq r - \varepsilon$ ⚡ (ya que ε es positivo y por lo tanto es imposible que $r \leq r - \varepsilon$)

$\Leftarrow$)

Suponemos que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a^* \in A$ tal que $r + \varepsilon > a^*$ pd. r es la mínima cota superior
 Por contradicción:
 Suponemos que r no es la mínima cota superior
 $\Rightarrow$ existe una s cota superior menor a r $(s < r)$
 $\Rightarrow$ $r - s > 0$ ← usaremos $r - s$ como ε.
 $\Rightarrow$ Sea $\varepsilon = r - s$, entonces existe $a^* \in A$ tal que $r - \varepsilon < a^*$
 $\Rightarrow$ $r - (r - s) < a^*$ $\Rightarrow$ $s < a^*$ ⚡ (contradicción porque se supone que s es cota superior)

☐ $Teorema_3$ (Lo mismo pero para el ínfimo) ema$_4$ (Unicidad del supremo): Sea $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ con un supremo, entonces el supremo es único.

Demostración: Sean r y s los supremos de A, p.d. $r = s$

- Como r es supremo (mínima cota superior) y s es cota superior $\Rightarrow r \leq s$ ... (1)
- Como s es supremo (mínima cota superior) y r es cota superior $\Rightarrow s \leq r$ ... (2)

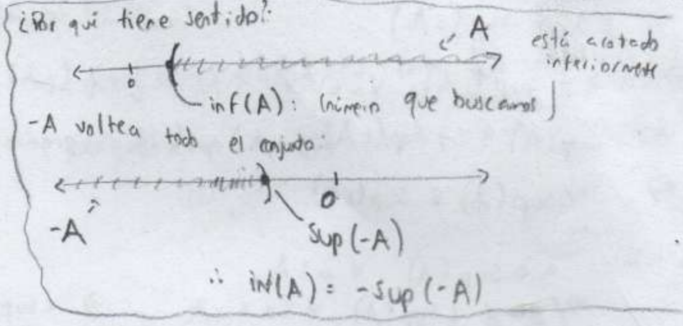
por (1) y (2) $\Rightarrow r = s$ #

Axioma del Supremo: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ un conjunto acotado superiormente, entonces A tiene supremo

□ **Teorema$_5$** (Teorema del ínfimo): Sea $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo.

Recordemos que $-A = \{-a \mid a \in A\}$ (o sea el conjunto $-A$ es el conjunto de todos los inversos de A)

tiene sentido pensar que $\inf(A) = -\sup(-A)$ ←



- Pd. $-\sup(-A)$ es ínfimo de A

(1) pd. $-\sup(-A)$ es cota inferior de A

$-a \leq \sup(-A) \quad \forall -a \in -A$

$\Rightarrow -\sup(-A) \leq a \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow -\sup(-A)$ es cota inferior de A.

•) Pd. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad a^* \in A$ tal que $-\sup(-A) + \varepsilon > a^*$ ← Segundo punto de def*

Sea $\varepsilon > 0$ fija y arbitraria

como $-A$ tiene supremo

$\Rightarrow \sup(-A) - \varepsilon < -a^*$ p.a $-a^* \in -A$

$\Rightarrow a^* < -\sup(-A) + \varepsilon$ #

$\therefore$ $-\sup(-A)$ es ínfimo de A #

Propiedades de Supremo

sean $A, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ acotados

Recordar que:
$cA = \{ca \mid a \in A\}$
o sea cA es el conjunto que se forma al multiplicar todos los elementos de A por c.

1) Si $c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$ $\Rightarrow$ • $\sup(cA) = c\sup(A)$ •• $\inf(cA) = c\inf(A)$

2) Si $c \in \mathbb{R}$ con $c < 0$ $\Rightarrow$ • $\sup(cA) = c\inf(A)$ •• $\inf(cA) = c\sup(A)$

3) Si $A \subseteq \mathcal{B}$ $\Rightarrow$ • $\sup(A) \leq \sup(\mathcal{B})$ •• $\inf(A) \geq \inf(\mathcal{B})$

4) • $\sup(A+\mathcal{B}) = \sup(A) + \sup(\mathcal{B})$ •• $\inf(A+\mathcal{B}) = \inf(A) + \inf(\mathcal{B})$

Demostraciones

1) Como A es acotado superiormente $\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{R}$ tq que $a \leq r \;\forall a \in A$
$\Rightarrow ca \leq cr \;\forall\; ca \in cA$ $\Rightarrow cA$ es acotado sup. y por axioma del supremo, tiene supremo
$\Rightarrow ca \leq \sup(cA)$ ... (ca es elemento de cA y $\therefore$ es menor al supremo de cA)
$\Rightarrow a \leq \frac{1}{c}\sup(cA) \;\forall a \in A$ $\rightarrow \frac{1}{c}\sup(cA)$ es cota superior de A
$\Rightarrow \sup(A) \leq \frac{1}{c}\sup(cA)$ (El supremo es menor o igual a una cota superior)
$\Rightarrow c\sup(A) \leq \sup(cA)$ ... (1)

Por otro lado: $a \leq \sup(A) \;\forall a \in A$
$\Rightarrow ca \leq c\sup(A) \;\forall ca \in cA$ $\Rightarrow c\sup(A)$ es cota superior de cA
$\Rightarrow \sup(cA) \leq c\sup(A)$ ... (2) ($\sup(cA)$ es la mínima cota superior)

Por (1) y (2) $\rightarrow \sup(cA) = c\sup(A)$ #

2) Como A es acotado superiormente $\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq r \;\forall a \in A$
$\Rightarrow cr \leq ca \;\forall ca \in cA$ (multiplicar por c voltea la desigualdad)
$\Rightarrow cA$ es acotado inferiormente por cr y por teorema del ínfimo, tiene ínfimo
$\Rightarrow \inf(cA) \leq ca$
$\Rightarrow a \leq \frac{1}{c}\inf(cA)$ (multiplicar por $1/c$ voltea la desigualdad)
$\rightarrow \frac{1}{c}\inf(cA)$ es cota superior de A y como $\sup(A)$ es la mínima cota superior $\Rightarrow$
$\sup(A) \leq \frac{1}{c}\inf(cA)$ $\rightarrow \inf(cA) \leq c\sup(A)$ ... (1)

Por otro lado: $\inf(A) \leq a \;\forall a \in A$
$\Rightarrow ca \leq c\inf(A) \;\forall ca \in cA$ ($c\inf(A)$ es cota superior de cA)
$\Rightarrow \sup(cA) \leq c\inf(A)$ ... (2)

Por (1) y (2) $\Rightarrow \sup(cA) = c\inf(A)$

edad 3 Si $A \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow$ $\cdot\ \text{Sup}(A) \leq \sup(\mathcal{B})$
$\therefore\ \inf(A) \geq \inf(\mathcal{B})$

Demostración:

Como $\mathcal{B}$ es acotado superiormente $\Rightarrow \mathcal{B}$ tiene supremo

Sea $a \in A \Rightarrow a \in \mathcal{B}$ (porque $A \subseteq \mathcal{B}$)

$\Rightarrow a \leq \sup(\mathcal{B})$ (porque $\sup(\mathcal{B})$ es cota superior)

$\Rightarrow \sup(\mathcal{B})$ es cota superior de A y como $\sup(A)$ es la mínima cota superior $\Rightarrow$

$\sup(A) \leq \sup(\mathcal{B})$ #

Propiedad 4 $\sup(A+\mathcal{B}) = \sup(A) + \sup(\mathcal{B})$

(recordar que $A+\mathcal{B} = \{a+b \mid a \in A, b \in \mathcal{B}\}$ ← $A+\mathcal{B}$ son todos los elementos que se pueden expresar como la suma de un elemento de A con uno de $\mathcal{B}$

como A y $\mathcal{B}$ son acotados $\Rightarrow$ tienen supremo

$a \leq \sup(A)$ $\quad b \leq \sup(\mathcal{B})$ $\quad \forall a \in A,\ b \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow a+b \leq \sup(A) + \sup(\mathcal{B})$ $\quad \forall a+b \in A+\mathcal{B}$ $\Rightarrow \sup(A)+\sup(\mathcal{B})$ es cota sup de $A+\mathcal{B}$

$\Rightarrow \sup(A+\mathcal{B}) \leq \sup(A) + \sup(\mathcal{B})$ ...(1) (porque $\sup(A+\mathcal{B})$ es la mínima cota sup)

Por otro lado:

$a+b \leq \sup(A+\mathcal{B})$ $\quad \forall a+b \in A+\mathcal{B}$

$\Rightarrow a \leq \sup(A+\mathcal{B}) - b$ $\quad \forall a \in A$ y $b \in \mathcal{B}$ $\quad$ ($\sup(A+\mathcal{B})-b$ es cota superior de A)

$\Rightarrow \sup(A) \leq \sup(A+\mathcal{B}) - b$ $\quad \forall b \in \mathcal{B}$ $\quad$ (porque $\sup(A)$ es la mínima cota superior)

$\Rightarrow b \leq \sup(A+\mathcal{B}) - \sup(A)$ $\quad \forall b \in \mathcal{B}$ $\quad$ ($\sup(A+\mathcal{B}) - \sup(A)$ es cota superior de $\mathcal{B}$)

$\Rightarrow \sup(\mathcal{B}) \leq \sup(A+\mathcal{B}) - \sup(A)$

$\Rightarrow \sup(A) + \sup(\mathcal{B}) \leq \sup(A+\mathcal{B})$ ...(2)

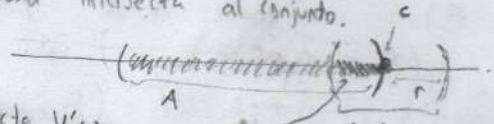
$\therefore\ \sup(A+\mathcal{B}) = \sup(A) + \sup(\mathcal{B})$

Las demostraciones de las propiedades para ínfimos son semejantes

Teorema 6 (relación de sup y punto de acumulación): Sea $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$ con $\sup(S) \notin S$. Entonces $\sup(S)$ es punto de acumulación de S.

Recordatorio punto de acumulación:
c es un punto de acumulación de A si se cumple que para todo $r > 0$ $V_r'(c) \cap A = \emptyset$.
O sea que para cualquier vecindad agujerada con centro en c, la vecindad intersecta al conjunto.

Ej.



Aquí intersecta $V_r'(c)$ y A $\leftarrow$ $V_r'(c)$ $\therefore V_r'(c) \cap A \neq \emptyset$

P.d. $\sup(S) = c$ es punto de acumulación de S

$\Rightarrow$ P.d. $\forall r > 0$ $(c-r, c) \cup (c, c+r) = V_r'(c) \cap A \neq \emptyset$

recordamos que $V_r'(c) = (c-r, c) \cup (c, c+r)$

demostración:

Sea $r > 0$ fija y arbitraria, construimos:

$V_r'(c) = (c-r, c) \cup (c, c+r)$

· Por ser $c = \sup(S)$, dada $r > 0$ $\exists s^* \in S$ tal que $c - r < s^*$ (1) $\leftarrow$ def* de supremo

y además $s^* \leq c$ (porque c es cota superior), pero como $s^* \neq c$ (ya que $c \notin S$)

$\Rightarrow$ $s^* < c$ (2)

por (1) y (2) $\Rightarrow$ $c - r < s^* < c$ $\Rightarrow$ $s^* \in (c-r, c) \subset V_r'(c)$ $\therefore s^* \in V_r'(c)$

$\therefore$ $V_r'(c) \cap S \neq \emptyset$ $\forall r$ ya que $s^* \in V_r'(c) \cap S$

$\therefore$ $\sup(S)$ es punto de acumulación de S #

Pregunta: ¿Por qué no sirve la demostración si $\sup(S) \in S$? Da un ejemplo de un conjunto en el que $\sup(S) \in S$ y entonces $\sup(S)$ no es pto. de acumulación.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN

	min	max	inf	sup
$[a,b]$	a	b	a	b
(a,b)	X	X	a	b
$(-\infty, a)$	X	X	X	a
(a, ∞)	X	X	X	X

Hasser p. 424 1-11.

Spivak p. 182 ej 1: encuentra supremo e ínfimo

a) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = A$

escribimos algunos elementos $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$ $\leftarrow$ evidentemente $\sup(A) = 1$ $\inf(A) = 0$

demostración rigurosa:

a) $\sup(A) = 1$

⊕) pd. 1 es cota superior

Suponemos que no lo es, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} > 1$ $\Rightarrow$ $1 > n$ ⚡

contradicción porque dijimos que $n \in \mathbb{N}$.

•) pd. 1 es la mínima cota superior.

como $1 \in A$, no puede haber una cota superior menor a 1 ya que esta cota no acotaría al 1.

Técnica,) Se puede usar este argumento para probar mínima cota superior siempre que el supremo esté en el conjunto

$\circ)$ $\inf(A) = 0$

$\circ)$ Pd. 0 cota inferior.

Suponemos que no lo es, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < 0$ $\Rightarrow$ $1 < 0$ ⊗ (multiplicamos por n, que es positivo y $\therefore$ no voltea la desigualdad)

$\circ)$ Pd. 0 es la máxima cota inferior

- No podemos usar Técnica, ya que $0 \notin A$.

- Demostración Errónea: Suponemos que 0 no es máximo cota inferior, entonces suponemos $r > 0$ cota inferior de A.

construimos $r/2$ $\rightarrow$ $0 < r/2 < r$ y como $r/2$ pertenece al conjunto $\Rightarrow$ r no es cota inferior ya que no acota a $r/2$ ⊗.

(El error en la demostración está al decir que $r/2 \in A$, esto no es necesariamente cierto ya que $r/2$ no se puede expresar como $1/n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, o sea no cumple la condición del conjunto)

(Este tipo de demostraciones en los que se crea el promedio entre dos números y se busca demostrar que pertenece al conjunto sólo sirven en intervalos)

- Demostración correcta: (con def *)

Sea $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (corolario Arquimedeano)

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon + 0 \Rightarrow 0 + \varepsilon < 1/n$ #

(V) $\{x \mid x^2 + x + 1 \geq 0\} = E$

Para resolver uno de esta forma, conviene llevar esta desigualdad a la forma de un intervalo, completar cuadrado.

$x^2 + x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + 3/4 \geq 0 \Rightarrow (x + 1/2)^2 + 3/4 \geq 0 \Rightarrow (x + 1/2)^2 \geq -3/4$

Pero cualquier número cumple esta última desigualdad $\Rightarrow E = \mathbb{R}$ (no tiene supremo ni ínfimo)

(VI) $\{x \mid x^2 + x - 1 < 0\} = F$

método 1 $\Rightarrow x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow x^2 + x + 1/4 - 5/4 < 0 \Rightarrow (x + 1/2)^2 - 5/4 < 0 \Rightarrow (x + 1/2)^2 < 5/4$

$\Rightarrow |x + 1/2| < \sqrt{5/4}$

caso $\cdot$) $\underline{x + 1/2 \geq 0} \Rightarrow x \geq -1/2$ (1) podemos sacar las barras de val absoluto

$\Rightarrow x + 1/2 < \sqrt{5/4} \Rightarrow x < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (2) $\therefore x \in \left[-1/2, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ... [1]

caso $\cdot\cdot$) $x + 1/2 < 0 \Rightarrow x < -1/2$ $\therefore x \in \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}, -1/2\right)$ ... [2]

$\Rightarrow -x - 1/2 < \sqrt{5}/2 \Rightarrow x > -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

por [1] y [2] $\Rightarrow$ $F = \left(\underbrace{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}_{\inf}, \underbrace{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}_{\sup}\right)$ #

método 2

Encontramos las raíces de $x^2 + x - 1 = 0$ con la fórmula general:

$x_1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Esto parte a los reales en 3 intervalos: $\longleftarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow$

Se toma un número cualquiera en cada intervalo, si este número cumple la propiedad $x^2 + x - 1 < 0$ $\Rightarrow$ entonces todo el intervalo en cuestión la cumple.

(si fueran imaginarias, el problema sería parecido al (V) y significa que el conjunto son todos los reales o que no tiene elementos (esto cuando se llega a algo así $(x + a)^2 < -b$, no se cumple para ningún x)

- Del primer intervalo tomamos el $-3 \Rightarrow (-3)^2 + (-3) - 1 = 5 \not< 0$ $\therefore$ no cumple la condición
- Del segundo intervalo tomamos el $0 \Rightarrow 0^2 + 0 - 1 = -1 < 0$ ✓ $\therefore$ si cumple, entonces todo el intervalo cumple
- Del Tercero tomamos el $3 \Rightarrow 3^2+3-1 = 11 \not< 0$ $\therefore$ No cumple

Ejercicio 2b

Si $A \neq 0$ acotado inferiormente, sea B el conjunto de todas las cotas inferiores de A.
Demostrar que $\sup(B) = \inf(A)$

Como A es acotado inferiormente, existe $r \in \mathbb{R}$ $\ni$ r es cota inferior de $A \Rightarrow r \in B$
$\therefore B \neq \emptyset$.

Además $\inf(A) \geq p$ para toda p cota inferior (ya que $\inf(A)$ es máxima cota inferior)
entonces $\inf(A)$ es cota superior de B. (☺)

- Pd. $\inf(A)$ es mínima cota superior de B. Suponemos que no lo es, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $L < \inf(A)$ y L es cota superior de B

Construimos $\frac{L+\inf(A)}{2} \Rightarrow L < \frac{L+\inf(A)}{2} < \inf(A) \Rightarrow \frac{L+\inf(A)}{2} < \inf(A)$, o sea $\frac{L+\inf(A)}{2}$ es cota inferior de A y $\therefore$ pertenece a B ¡ contradicción porque $L < \frac{L+\inf(A)}{2}$ y habíamos supuesto que L era cota inferior de B.

UNIDAD 2: Propiedades de los reales y cosas así

1 Propiedad Arquimedeana:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, $b > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < na$

(Traducción: si tenemos dos números reales positivos a y b, y vamos escribiendo los múltiplos de "a", o sea: $a, 2a, 3a, \ldots$ llegará un n-ésimo múltiplo de a que será más grande que b.)

Casos:

•) caso en que $a = b$:
entonces un natural que cumple el teorema es el $2 \in \mathbb{N}$ ya que $b < 2a$ #

••) caso en que $b < a$:
No se haga más, usamos $1 \in \mathbb{N}$ y se cumple que $b < 1a$.

•••) Caso en que $a < b$:
necesitamos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < na$

si quisiéramos encontrar una n tal que $b < na$, como ejemplo. Supongamos que $a = 2.5$ y $b = 11$, podemos ir creando los múltiplos de a hasta que alguno supere a "b".
Entonces: $\{2.5, 5, 7.5, 10, 12.5, \ldots\}$
este número ya supera a "b" y por lo tanto la n buscada era 5.

La demostración se basará en suponer que no existe este múltiplo de "a" y esto llevará a contradicción.

Construimos el conjunto $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ ← conjunto de todos los múltiplos de "a".
suponemos que ninguno de estos elementos es mayor a "b", o sea $an \leq b \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ b es cota superior de A
$\Rightarrow$ A tiene supremo $\Rightarrow \exists \sup(A) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup(A) - \varepsilon < \underbrace{n_0 a}_{\text{algún elemento de } A}$ ← def* de supremo

$\Rightarrow$ Sea $\varepsilon = a > 0$ ⇐ elegimos un ε cualquiera
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup(A) - a < n_0 a$
$\Rightarrow \sup(A) < n_0 a + a = a(n_0 + 1) \Rightarrow \sup(A) < a(n_0+1)$!

pero como $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ lo que significa que $a(n_0+1) \in A$
lo cual es una contradicción ya que $a(n_0+1) > \sup(A)$

$\therefore an > b$ #

Truco de la demostración:
Se creó un conjunto del cual se sabe que debe de cumplir algo para que el teorema sea cierto. Se supone que no lo cumple y se usa supremos para llegar a una contradicción.

2] Rodeada de los enteros:
Sea $b \in \mathbb{R}$, entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m-1 \leq b < m$.
traducción: cualquier real está rodeado por dos enteros consecutivos.

Demostración ~~alternativa~~ del prof.:
Primero probaremos que b está rodeado por enteros (no necesariamente consecutivos)

- Si $b > 0$ y sabemos que $1 > 0$ $\Rightarrow$ (propiedad arquimedeana) $\rightarrow$ $\exists\, q \in \mathbb{N}$ tal que $b < 1q \Rightarrow b < q$

.. Si $b \leq 0$ $\exists\, q \in \mathbb{N}$ tal que $b \leq 0 < q$ $\Rightarrow$ $b < q$

en cualquier caso, b es menor que algún entero q. (1)

Consideramos ahora $-b \in \mathbb{R}$, entonces existe $-p \in \mathbb{Z}^+$ tal que:
$-b < -p$ ($-p$ es positivo, no confundir por el signo)
$\Rightarrow$ $p < b$ (2)

por (1) y (2) $\Rightarrow$ $p < b < q$ $\leftarrow$ o sea b está rodeado por enteros.

$\rightarrow$ Hay que mostrar que b está rodeado por enteros consecutivos,

construimos $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid p+n > b \}$ $\leftarrow$ este es el conjunto de todos los números siguientes a p y mayores a b. Sabemos que el primer número que cumpla esto es el m que estamos buscando

Sabemos que $A \neq \emptyset$ ya que para $n = q-p \in \mathbb{N} \Rightarrow p + (q-p) = q > b$
$\therefore$ $q-p$ cumple la condición del conjunto

Además $A \subseteq \mathbb{N}$ (ya que todos sus elementos son naturales) y según el principio del Buen Orden (dice que cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene un mínimo) $\rightarrow$ existe $\min(A) \in \mathbb{N}$

como $\min(A) \in A$ definimos $m = p + \min(A)$ y:
$\Rightarrow m = p + \min(A) > b$, $\Rightarrow$ $m > b$ (1)
además $\min(A) - 1 \notin A$ ya que es menor al mínimo, $\therefore$ $p + \min(A) - 1 = m-1 \leq b$ (2)
y $\Rightarrow$ $m-1 \leq b < m$ #

1.5] Corolario de Propiedad arquimedeana
Sea $\varepsilon > 0$ fijo y arbitrario, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$
(Para cualquier positivo, sin importar qué tan pequeño sea, existe un $1/n$ que es más pequeño)

Dem: sabemos que $\varepsilon > 0$ y que $1 > 0$
$\Rightarrow$ por propiedad Arq $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n\varepsilon$
$\Rightarrow$ $1/n < \varepsilon$ #

3) Densidad de los Racionales.

- Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a<b$, existe un r racional tal que $a<r<b$

- Como $a<b \Rightarrow b-a>0$ y por el corolario de la propiedad arquimedeana, existe $n \in \mathbb{N}$ $\ni$ $1/n < b-a \Rightarrow \underline{\frac{1}{n} + a < b}$ (1)

- Por otro lado, por el teorema anterior (la rodada de los enteros) sabemos que existe $m \in \mathbb{Z}$ con:

$m-1 \leq an < m$ (o sea aplicamos la rodada al número $an \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow \underbrace{\frac{m-1}{n} \leq a}< \frac{m}{n}$ ... (2) (se puede dividir por n sin voltear porque n es positivo)

$\hookrightarrow \frac{m-1}{n} \leq a \Rightarrow \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \leq a \Rightarrow \frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} \underset{\text{por (1)}}{<} b$

además, por (2)

$\Rightarrow a < \frac{m}{n} \leq a + 1/n < b \Rightarrow \boxed{a < \frac{m}{n} < b}$ #

encontramos m/n entre a y b. Y como m y n son enteros, entonces m/n es racional. #

Ejercicios que usan estos teoremas

Ejercicio 3 Hasser 42 9

Si a y b son reales positivos, pruébese que existe un entero m tal que $(m-1)a \leq b < ma$

(Se puede resolver como en la tarea, súper fácil) o sino:

- Creamos un conjunto que sabemos que su ínfimo es el número que buscamos:

$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid b < na \}$ ← se puede ver que el mínimo de este conjunto cumpliría $(m-1)a \leq b < ma$

- Como $a>0$ y $b>0$, por la arquimedeana, sabemos que $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b < n_0 a$ $\therefore n_0 \in A$ y tenemos que $A \neq \emptyset$

- Por el buen orden, cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene un mínimo y como $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow$ A tiene mínimo

- Sea $m = \min(A) \Rightarrow m \in A \Rightarrow \underline{b < ma}$ ...(1)

- Probaremos que $(m-1)a \leq b$

Suponemos que no es así $\Rightarrow b < (m-1)a \Rightarrow m-1 \in A$ pero $m-1 < m$ ¡!

contradicción, encontramos un elemento menor al mínimo

$\therefore \underline{(m-1)a \leq b}$ ...(2)

por (1) y (2) $\Rightarrow \underline{(m-1)a \leq b < ma}$ #

Ejercicios 4, 5, 6 Hauser p. 429

Spivak p. 192 Ejercicio 5

a) Supóngase que $y-x>1$ demostrar que existe un entero k con $x<k<y$

Por la rodada de los enteros se tiene que $\exists\, m\in\mathbb{Z} \ni \underbrace{m-1\leq x<m}_{(1)}$

$\Rightarrow m\leq x+1<\cancel{m+1}$

$\Rightarrow m\leq x+1<y$ ← porque la hipótesis dice $y-x>1$, lo que significa que: $y>x+1$

$\Rightarrow m<y \ldots (2)$

por (1) y (2) $\Rightarrow \boxed{x<m<y}$ #

- Significado del ejercicio: $y-x>1$ significa que la distancia entre x y y es mayor a 1, y queremos mostrar que eso implica que hay un entero entre ellos (tiene sentido).
- Motivación de la demostración: Como se busca un entero en una desigualdad, tiene sentido usar la rodada de los enteros y luego se hace lo necesario para meter en juego la hipótesis.

b) Supóngase que $x<y$. Demostrar que hay un racional r con $x<r<y$.

(se puede usar la demostración de la densidad de $\mathbb{Q}$, o alternativamente:...

Dem: $x<y \Rightarrow y-x>0 \Rightarrow \exists\, n\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}<y-x$ (corolario Arquimedeana)

$\Rightarrow 1<ny-nx$ por a) existe un $k\in\mathbb{Z}$ tal que $nx<k<ny$

$\Rightarrow \underline{x<\frac{k}{n}<y}$, # $\frac{k}{n}$ es el racional buscado.

c) Supongamos que $r<s$ son racionales $\Rightarrow \exists$ un irracional entre r y s. Para empezar, es sabido que existe un irracional entre 0 y 1.

Supongamos que f es el irracional entre 0 y 1

como $r<s$, podemos sumarle cualquier número a r con tal que sea menor a $s-r$ y la suma seguirá siendo menor a s.

Consideramos $(s-r)f$, como $f<1$, este número es menor a $s-r$

$\Rightarrow r<r+(s-r)f<s$

— este es el irracional buscado (Es irracional porque f es irracional y al multiplicar y sumar, el resultado sigue irracional)

d) Supongamos $x<y$. Demostrar que hay un número irracional entre ellos.

por b) $x<y \Rightarrow \exists\, r\in\mathbb{Q}$ tal que $x<r<y$

usamos b) de nuevo para $r<y \Rightarrow \exists\, s\in\mathbb{Q}$ tal que $x<r<s<y$

y por el ~~teom~~ ejercicio c) $\Rightarrow x<r<\text{irracional}<s<y$

$\Rightarrow \underline{x<\text{irracional}<y}$ #

Unidad Heine Borel

Def. : Cubierta Abierta de Conjunto

Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ con $\mathcal{B} \neq \emptyset$ ← $\mathcal{B}$ es cualquier conjunto de reales

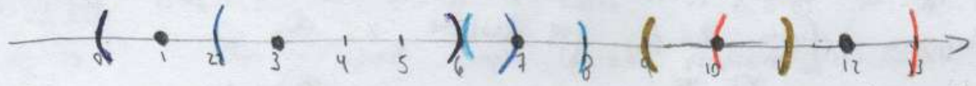
y sea $A = \{(a_i, b_i) \in \mathbb{R} \ , \ i \in I\}$ ← A es un conjunto de intervalos, la i es la forma de numerar al intervalo, de darle un índice. La I es el conjunto de todos estos índices, podría ser $\mathbb{N}$ si la cantidad de intervalos es contable. Sin embargo, no es muy importante esto.

Decimos que A es una cubierta abierta de $\mathcal{B}$ si se cumple que para todo $b \in \mathcal{B}$ $\exists$ $(a_j, b_j) \in A$ tal que $b \in (a_j, b_j)$

Podemos pensar en que B es un conjunto de números en la recta real, y A es un conjunto de sábanas (que son los intervalos abiertos). Decir que A cubre a $\mathcal{B}$ es decir que cualquier número de B tiene por lo menos una sábana.

• Ejemplo: 1)

Sea $\mathcal{B} = \{1, 3, 7, 10, 12\}$ $A = \{(0,5), (2,7), (6,8), (9,11), (10,13)\}$



se puede ver que A es cubierta de $\mathcal{B}$ porque cualquier elemento de $\mathcal{B}$ tiene sábana

• Ejemplo 2)

Sea $\mathcal{B} = (2,5)$ y $A = \{(1,4), (3,6)\}$

→ A cubre a $\mathcal{B}$.

→ **Compacidad**: Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que $\mathcal{B}$ es compacto si para toda A que sea una cubierta abierta de $\mathcal{B}$, existe $\mathcal{C} \subseteq A$ cubierta abierta finita de $\mathcal{B}$

• O sea si $\mathcal{B}$ es compacto, no importa qué cubierta infinita proponga (o sea un conjunto con infinidad de sábanas), siempre puedo seleccionar un subconjunto finito (un número finito de sábanas) que aún así es cubierta de $\mathcal{B}$.

¿ Esto se debe de cumplir para cualquier cubierta infinita.

• Ejemplo: Mostrar que $(0,8)$ no es compacto:

Para mostrar que no es compacto, debe haber alguna cubierta infinita de $(0,8)$ de la cual yo no pueda seleccionar un número finito de sábanas que siga cubriendo a $(0,8)$.

proponemos $A = \{\overset{1}{(0,4)}, \overset{2}{(0,6)}, \overset{3}{(0,7)}, \overset{4}{(0,7.5)}, \overset{5}{(0,7.75)}, \overset{6}{(0,7.875)}, \ldots\ldots \}$

es evidente que A cubre a $(0,8)$ ya que para cualquier elemento de $(0,8)$, puedo encontrarle una sábana.

Sin embargo, no puedo seleccionar un subconjunto finito de sábanas que cubra a $(0,8)$ ya que habría elementos como $7.99999\ldots$ a $(0,8)$ que no tienen sábana.

Teorema de Heine Borel:
Cualquier conjunto cerrado (o sea, de la forma $[a,b]$) ~~es~~ es compacto.

1• Primero proponemos una cubierta súper arbitraria
sea $A = \{ P_\alpha \mid \alpha \in I \}$ una cubierta de $[a,b]$ ← cada P es un intervalo abierto, o sea algo que se ve así: (c,d).

α es el índice de P, para numerar los intervalos, o sea e.g. P_i es el i-ésimo intervalo
I es el conjunto de todos los índices (porque no sabemos si estamos numerando con los naturales $(P_1, P_2, P_3, \dots)$ o con qué otra cosa)

→ Queremos probar que B es cubierto por un subconjunto finito de A.

2) Creamos un conjunto que debe de cumplir cierta cosa si se cumple que $[a,b]$ es compacto:
sea $\mathcal{B} = \{ x \in [a,b] \mid [a,x]$ es cubierto por un subconjunto finito de $A \}$

O sea para que un elemento x esté en $\mathcal{B}$, debe de cumplir que $x \in [a,b]$ y que el cerrado $[a,x]$ tenga una subcubierta finita de A.
∴ Queremos demostrar que $b \in \mathcal{B}$ ya que esto significa que $[a,b]$ tiene una subcubierta finita de A.

• b es cota superior de $\mathcal{B}$ ya que para que $x \in \mathcal{B} \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow \underline{x \leq b}$
• $\mathcal{B} \neq 0$ porque $a \in \mathcal{B}$. ya que $a \leq a \leq b$ y como A cubre a todo $[a,b]$, entonces para $a \in [a,b]$ hay un intervalo P_0 que contiene a a. ∴ para $[a,a] = \{a\}$ podemos agarrar a P_1 como el subconjunto finito de A que contiene a a.

∴ Según el axioma del supremo, $\mathcal{B}$ tiene supremo $\underline{\sup(\mathcal{B}) = c}$

3• Mostraremos que c es punto de acumulación de $\mathcal{B}$.
Suponemos que no lo es: $\Rightarrow \exists \ \varepsilon > 0$ tal que $((c-\varepsilon, c) \cup (c, c+\varepsilon)) \cap \mathcal{B} = \emptyset$ ← definición de que c no sea pto de acumulación
$\Rightarrow (c-\varepsilon, c) \cap \mathcal{B} = \emptyset$ ..... (1)

(El teorema 6 de la Unidad 1 dice que si $\sup(\mathcal{B}) \notin \mathcal{B} \Rightarrow \sup(\mathcal{B})$ es pto de acumulación,
y por su contrapuesta, si $\sup(\mathcal{B})$ no es pto de acumulación $\Rightarrow \sup(\mathcal{B}) \in \mathcal{B}$)
$\Rightarrow c \in \mathcal{B}$
$\Rightarrow [a,c]$ es cubierto por un subconjunto finito de A ← Definición de que $c \in \mathcal{B}$.
$\Rightarrow$ Es decir $[a,c] \subset P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n$ ← O sea, cualquier elemento de $[a,c]$ está en alguno de los finitos intervalos $P_1, P_2, \dots, P_n$ que son una cantidad finita de intervalos.

Tomemos ahora $y_0 \in (c-\varepsilon, c)$
por (1) sabemos que $y_0 \notin \mathcal{B}$ ya que $(c-\varepsilon, c) \cap \mathcal{B} = \emptyset$
pero como $y_0 \in (c-\varepsilon, c) \Rightarrow [a, y_0] \subset [a,c] \subset P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n$
entonces hay una cubierta finita $P_1, P_2, \dots, P_n$ que cubre a $[a, y_0]$
$\Rightarrow y_0 \in \mathcal{B}$ ⚡

∴ c es punto de acumulación de $\mathcal{B}$

Como $c \in [a,b]$ y A es una cubierta abierta de $[a,b]$, entonces c está en algún intervalo de A. o sea $\exists \; P_{\alpha_1} \in A$ tal que $c \in P_{\alpha_1}$

Pero como c era punto de acumulación de $\mathcal{B}$ y P_{α_1} es un intervalo abierto que contiene a c, entonces hay un elemento $x_0 \in P_{\alpha_1}$ que también está en $\mathcal{B}$

$\Rightarrow$ como $x_0 \in \mathcal{B}$ $[a, x_0]$ está cubierto por un subconjunto de A ← definición de $\mathcal{B}$

$\Rightarrow$ existen una cantidad finita de intervalos, digamos $P_{\beta_1}, P_{\beta_2}, \dots P_{\beta_m}$ que cubren a $[a, x_0]$

Si a esta colección le añadimos P_{α_1} que cubre tanto a x_0 como a c. entonces $P_{\beta_1}, P_{\beta_2}, \dots, P_{\beta_m}, P_{\alpha_1}$ cubre a $[a, c]$

$\Rightarrow c \in \mathcal{B}$

5\. Por otro lado $c \not< b$ ya que P_{α_1} contiene algunos elementos mayores a c (porque es un intervalo abierto con c metido adentro) entonces para estos elementos (digamos z_0) también se cumple que $[a, z_0]$ tiene subcubierta finita. $\Rightarrow z_0 \in \mathcal{B}$ lo cual contradiría que c es supremo. $\therefore$ z_0 no puede cumplir la otra condición del conjunto $\mathcal{B}$, o sea $z_0 \geq b$ $\therefore$ para todo $z > c \Rightarrow z_0 \geq b$ $\Rightarrow$ $\underline{b = c}$

$\therefore \; b \in \mathcal{B} \Rightarrow [a,b]$ tiene subcubierta finita $\Rightarrow$ es <u>compacto</u>.

Demostración Alternativa

~~Por demostrar: $[a,b]$ es compacto~~

~~Sea A una cubierta de $[a,b]$ p.d existe un subconjunto finito de A que cubre $[a,b]$~~

~~Definimos $S_x = [a, x]$~~

~~y $B = \{x \mid S_x$ tiene una subcubierta finita de $A\}$~~

~~$\cdot$ $S_a = [a, a] = \{a\}$ lo cual pertenece a un intervalo abierto de A (porque A es cubierta de $[a,b]$) entonces $\{a\}$ es cubierto por una subcubierta finita de A.~~

~~$\Rightarrow a \in B$~~

Continuidad y continuidad uniforme.

- **Continuidad:**

Def*: Sea $F: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una función y sea $a \in A$ decimos que f es continua en a si para cada $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta(\varepsilon, a) > 0$ tal que si $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

delta depende de ε y a.

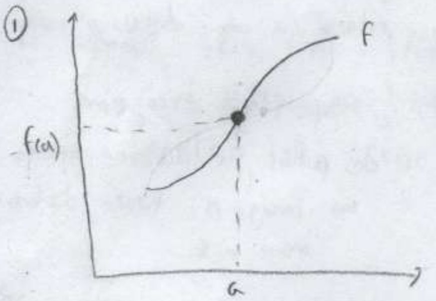
* Nota: La continuidad se define en un solo punto del dominio, (en a). O sea se dice que f es continua en a si cumple lo de arriba.

- Traducción: Intuitivamente, la idea de que f es continua en a significa que las imágenes de los valores cercanos a a caen cerca de $f(a)$ (la imagen de a).

La definición dice que primero escogemos un ε, este ε acotará la distancia entre $f(x)$ y $f(a)$ (o sea $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$). y la definición nos dice que para ese ε encontraremos un $\delta > 0$ tal que siempre que la distancia entre x y a sea menor a δ, entonces la distancia entre $f(x)$ y $f(a)$ será menor a ε.

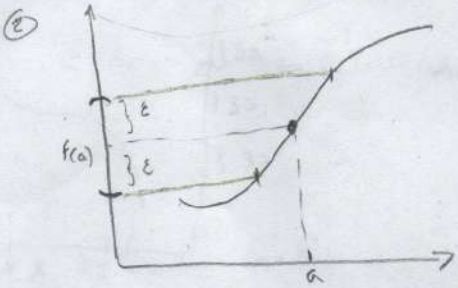
- Gráficamente, la definición dice:

①



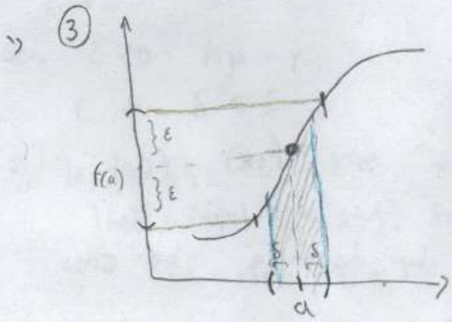
① Queremos probar que f es continua en a

②



② Elegimos cualquier ε y éste representa una distancia por arriba y abajo de $f(a)$

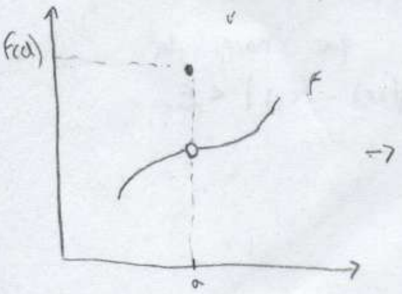
③



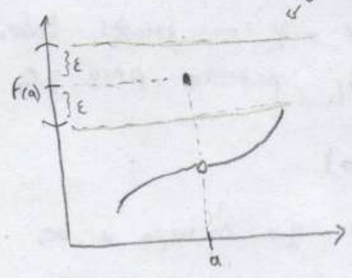
Si la función es continua encontraremos una δ, tal que todos los puntos que estén a una distancia menor a δ de a, sus imágenes caen en la vecindad de radio ε y centro $f(a)$.

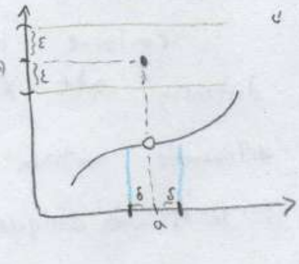
- Ejemplo gráfico de función que no es continua en a

es la misma función pero da un salto en a



Elegimos una ε





Evidentemente, ningún δ, por más pequeño que sea cumpliría la definición

Continuidad Uniforme

Df: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ una función, decimos que f es uniformemente continua en el conjunto $S \subseteq A$ si para todo $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon)$ tal que si $x, y \in S$

– δ depende de ε

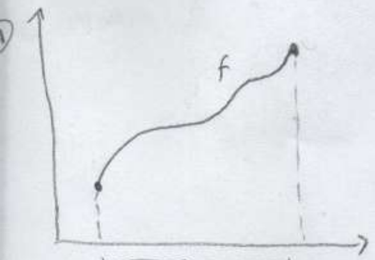
$$\underbrace{|x-y| < \delta}_{\text{La distancia entre } x \text{ y } y \text{ es menor a } \delta} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(y)| < \varepsilon}_{\text{La distancia entre } f(x) \text{ y } f(y) \text{ es menor a } \varepsilon.}$$

Nota: La continuidad uniforme se define sobre todo un conjunto, no sobre un punto.

Traducción: La idea es que primero escogemos un ε que acotará la distancia entre $f(x)$ y $f(y)$. Y si la función es uniformemente continua, la definición dice que existirá un número $\delta > 0$ tal que si elegimos dos números x, y en el conjunto S, si la distancia entre x, y es menor a δ entonces la distancia entre $f(x)$ y $f(y)$ será menor a ε.

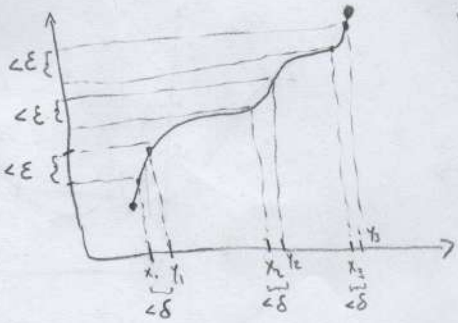
- Muestra gráfica:

1)



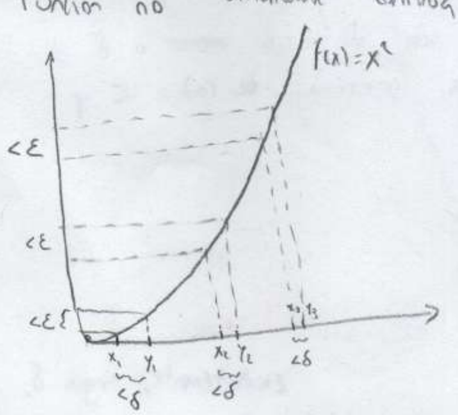
Intervalo en que queremos probar que es uniformemente continua.

② Escogemos una $\varepsilon > 0$ cualquiera y con esta ε queda definida una δ.
Tal que siempre que escojamos dos punto x, y a una distancia menor a δ entonces sus imágenes estarán a una distancia menor a ε.



Siempre que escogemos dos puntos a distancia menor a δ, sus imágenes tienen distancia menor a ε.

Función no uniformemente continua en el intervalo $[0, \infty)$



Notamos que para que la distancia entre $f(x)$ y $f(y)$ sea $< \varepsilon$, conforme movemos los punto más a la derecha, es necesario que la distancia entre ellos sea cada vez más pequeña.

Por eso, en el ejemplo, la distancia de x_3 y y_3 es menor a la de x_2 y y_2 y menor a la de x_1, y_1.

Conforme agarremos x y y más grandes, tendremos que hacer la distancia entre x_i y y_i muy pequeña para que $|f(x_i) - f(y_i)| < \varepsilon$.

$\therefore$ No es uniformemente continua en $[0, \infty)$

Sin embargo, sí lo es en cualquier intervalo que no vaya a ∞.

Lema i (continuidad $\Rightarrow$ continuidad uniforme) Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una función y sea $[a,b] \subseteq A$. Si f es continua en $[a,b] \Rightarrow F$ es uniformemente continua en $[a,b]$

Como f es continua en $[a,b]$ entonces $\forall x \in [a,b]$, dada $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tal que si: $|y-x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$ (1) $\leftarrow$ definición de continuidad (con y variable y x el punto en el que es continua)

Construimos el conjunto $\{(x-\delta, x+\delta) \mid x \in [a,b]\}$ $\leftarrow$ conjunto de todos los intervalos con centro en x y radio δ (que depende de x)

y construimos $\{(x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}) \mid x \in [a,b]\}$

Dicho conjunto es una cubierta abierta de $[a,b]$ que también es cubierta. O sea podemos agarrar un número finito de intervalos de la forma $(x-\delta/2, x+\delta/2)$ y por Heine Borel, existe un subconjunto finito y serán cubierta de $[a,b]$. Sea esa subcubierta dada por:

$$S = \{(x_k - \frac{\delta_k}{2}, x_k + \frac{\delta_k}{2}) \mid k = 1, \dots, n\}$$

y sea $\delta = \min\{\frac{\delta_k}{2} \mid k = 1, \dots, n\}$

Tomamos $x \in [a,b]$, como S es cubierta de $[a,b]$, x está en algún intervalo de S. O sea

$x \in (x_j - \frac{\delta_j}{2}, x_j + \frac{\delta_j}{2})$ p.a. $j \Rightarrow |x - x_j| < \frac{\delta_j}{2}$ $\leftarrow$ porque la distancia entre x y x_j es menor a $\frac{\delta_j}{2}$ ya que $x \in (x_j - \delta/2, x_j + \delta/2) = V_{\delta/2}(x_j)$

Consideremos ahora $y \in [a,b]$ tal que $|y-x| < \delta \leq \frac{\delta_j}{2} \Rightarrow |y-x| < \frac{\delta_j}{2}$

$\Rightarrow |y - x_j| = |y - x + x - x_j| \leq |y-x| + |x - x_j| < \frac{\delta_j}{2} + \frac{\delta_j}{2} = \delta_j$

$\Rightarrow |y - x_j| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$ $\leftarrow$ por (1)

y además $|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(x_j) + f(x_j) - f(x)| \leq |f(y) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\therefore |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

$\therefore |y-x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$ $\leftarrow$ Entonces es uniformemente continua

Ejercicios

1) Haaser p. 442 ej. 1: Demuestre que $f(x) = x$ es U. C. en $\mathbb{R}$

Sea $\varepsilon > 0$ fija y arbitraria

y sea $\delta \leq \varepsilon$

Si $|x-y| < \delta$

$\therefore |f(x) - f(y)| = |x-y| < \delta \leq \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ #

Caballo

Queremos demostrar que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

o sea $|x-y| < \varepsilon$

pero $|x-y|$ ya está acotado por δ, entonces con $\varepsilon \doteq \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x-y| < \delta \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ #

Ej. 2 : Pruebe que $f(x) = 1/x$ es U.C en $[a,\infty)$ con $a>0$.

Sea $\varepsilon > 0$ fija y arbitraria y sea $\delta \le a^2\varepsilon$

como $x, y \in [a,\infty)$

$\Rightarrow x \ge a > 0 \quad y \ge a > 0$

$\Rightarrow |x| \ge a \quad |y| \ge a$

$\Rightarrow \frac{1}{|x|} \le \frac{1}{a} \quad \frac{1}{|y|} \le a$

$\Rightarrow \frac{1}{|xy|} \le \frac{1}{a}\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{|xy|} \le \frac{1}{a^2} \quad \ldots(1)$

Ahora bien, si $|x-y| < \delta \le a^2\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = \frac{|x-y|}{|xy|} \le \delta\left(\frac{1}{a^2}\right) \le a^2\varepsilon\left(\frac{1}{a^2}\right) = \varepsilon$

$\therefore |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ #

$\therefore f(x) = 1/x$ es U.C en $[a,\infty)$.

Caballo

queremos probar que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

o sea $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{y-x}{xy}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{|x-y|}{|xy|} < \varepsilon$

pero $|x-y|$ ya está acotado por δ, falta acotar $\frac{1}{|xy|}$

para eso usamos que $x, y \in [a,\infty) \Rightarrow x \ge a > 0,\ y \ge a > 0$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \le \frac{1}{a} \quad 0 < \frac{1}{y} \le \frac{1}{a}$ ← (al sacar el recíproco se voltea la desigualdad)

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{|xy|} \le \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{|xy|} < \frac{1}{a^2}}$.

$\therefore \frac{|x-y|}{|xy|} < \frac{\delta}{a^2} < \varepsilon \Rightarrow \delta \le a^2\varepsilon$

Ej. 3. Demuestre que si existe un M positivo tal que, para $x, y \in S$: $|f(x) - f(y)| < M|x-y|$ entonces f es U.C en S.

Sea $\varepsilon > 0$ fija y arbitraria y sea $\delta \le \frac{\varepsilon}{M}$

$|f(x) - f(y)| < M|x-y|$ (por hipótesis)

$\le M\delta \le M\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) = \varepsilon$

$\therefore |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ #

Caballo

queremos probar que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

y sabemos que $|f(x) - f(y)| < M|x-y|$

pero $|x-y| < \delta$

entonces si hacemos $\delta \le \varepsilon/M \Rightarrow |f(x) - f(y)| < M\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) = \varepsilon$

Ej. 4 a) Pruebe que $f(x) = x^3$ es U.C en $[0,2]$

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta \le \varepsilon/12$

- como $x, y \in [0,2] \Rightarrow 0 \le x \le 2 \quad 0 \le y \le 2$

$\Rightarrow |x^2 + xy + y^2| \le |x|^2 + |x||y| + |y|^2$

$\le 2^2 + 2\cdot 2 + 2^2 = 12$

$\therefore |x^2 + xy + y^2| < 12 \quad \ldots(1)$

- $|f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3| = |x-y||x^2 + xy + y^2| < 12\delta$

$\le 12\left(\frac{\varepsilon}{12}\right) = \varepsilon$

$\therefore |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ #

Caballo

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, o sea $|x^3 - y^3| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x-y||x^2 + xy + y^2| < \varepsilon$ ← factorizamos la dif. de cubos de forma que aparezca $|x-y|$

$\Rightarrow$ Queremos acotar $|x^2 + xy + y^2|$

$|x^2 + xy + y^2| \le |x^2| + |x||y| + |y^2| \le 2^2 + 2\cdot 2 + 2^2$ ← porque $x, y \in [0,2]$, $x \le 2$, $y \le 2$

$\Rightarrow |x^2 + xy + y^2| \le 12$

$\therefore |x-y||x^2 + xy + y^2| \le 12\delta < \varepsilon \quad \therefore \delta \le \varepsilon/12$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ es U.C en $[2,4]$

Sea $\varepsilon > 0 \quad \delta \le 2\sqrt{2}\,\varepsilon$

como $x, y \in [2,4]$

$\Rightarrow 2 \le x \le 4 \quad 2 \le y \le 4$

$\Rightarrow \sqrt{2} \le \sqrt{x} \le 2 \quad \sqrt{2} \le \sqrt{y} \le 2$

$\Rightarrow 2\sqrt{2} \le \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$\Rightarrow \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \le \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \ldots(1)$

- $|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \le \delta\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

$\le (2\sqrt{2}\,\varepsilon)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \varepsilon$

$\therefore |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ #

Caballo

$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}||\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}$ ← multiplicamos por $\frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}$ porque permite que aparezca el $|x-y|$

$= \frac{|x-y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}$ falta acotar $|\sqrt{x} + \sqrt{y}|$

como $x, y \in [2,4]$

$\Rightarrow 2 \le x \le 4 \quad 2 \le y \le 4$

$\Rightarrow \sqrt{2} \le \sqrt{x} \le 2 \quad \sqrt{2} \le \sqrt{y} \le 2$

$\Rightarrow 2\sqrt{2} \le \sqrt{x} + \sqrt{y} \le 4$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ← se voltea la desigualdad por el recíproco

$\therefore \frac{|x-y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} < \frac{\delta}{2\sqrt{2}} \le \varepsilon \Rightarrow \delta \le 2\sqrt{2}\,\varepsilon$

1. Spivak p. 192

Ej. 2a. : Si f y g son U.C. en A, también lo es $f+g$

Sea $\varepsilon > 0$ fija y arbitraria.

Como f es U.C en A, dados $x, y \in A$ proponemos $\varepsilon/2 > 0$ para el cual según la definición existe un $\delta_1 > 0$ tal que:

$|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ ... (1)

Por la misma razón, pero ahora con g, existe una δ_2 tal que

$|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon/2$ ... (2)

Caballo

P.d $|(f+g)(x) - (f+g)(y)| < \varepsilon$

$|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| < \varepsilon$

$|\underbrace{f(x) - f(y)}_{\text{acotado porque } f \text{ es U.C.}} + \underbrace{g(x) - g(y)}_{\text{Acotado porque } g \text{ es U.C}}| < \varepsilon$

$\therefore$ Hay que acotar $|f(x)-f(y)|$ y $|g(x)-g(y)|$ con $\varepsilon/2$ para que su suma esté acotada con ε

Escogemos $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y si ahora acotamos $|x-y|$ con esta δ, tenemos que $|x-y| < \delta$ y esto nos permitirá usar tanto (1) como (2).

Ahora bien $|(f+g)(x) - (f+g)(y)|$ ← lo que queremos acotar con ε

$= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| = |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|$

$\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$ ← desigualdad triángulo

$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2$

$= \varepsilon$ ← por (1) y (2)

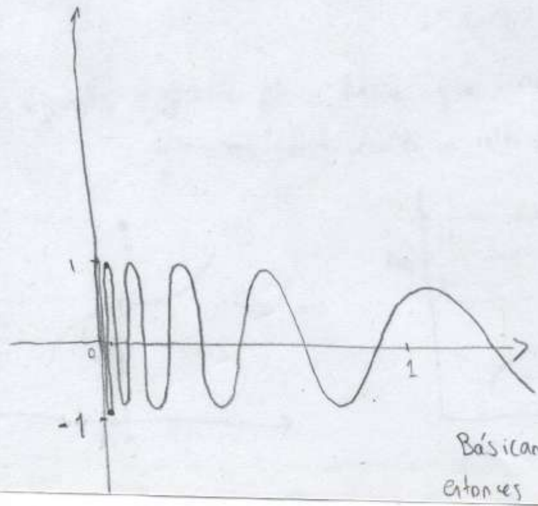
$\therefore$ Si $|x-y| < \delta \Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(y)| < \varepsilon$ #

1.b) Halla una función f que sea continua y acotada en $(0,1]$, pero no U.C en $(0,1]$

$f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$

El seno nos permite que sea acotada ya que seno siempre está entre -1 y 1.

El $1/x$ aumenta mucho conforme x se acerca a 0. por lo que hace que el seno oscile mucho conforme los valores del dominio se acercan a 0.



No cumple la definición de continuidad uniforme.

ya que podemos agarrar un x, y muy cercanos a 0 y que disten en menos de δ.

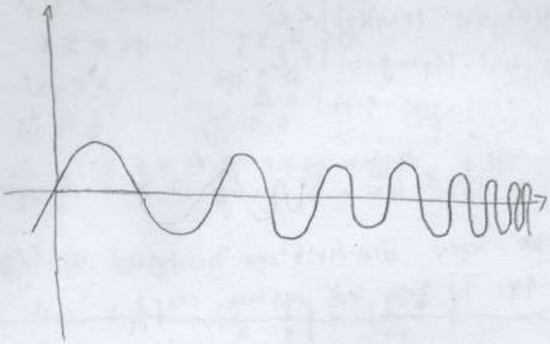
o sea $|x-y| < \delta$

Sin embargo $f(x)$ puede distar mucho de $f(y)$ ya que la función oscila mucho.

Básicamente si la pendiente de la función puede ser tan grande como queramos, entonces seguramente no es U.C.

1.c) Hallar una función f que sea continua y acotada $[0,\infty)$, pero no uniformemente continua en $[0,\infty)$

$f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$



conforme el valor del dominio se hace más grande, x^2 crece cada vez más rápido por lo que el seno oscila cada vez más.

Luego se usa el mismo argumento que en el anterior.

UNIDAD 3 | Funciones : Teoremas

Teorema$_1$: Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ y $g: \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ con $A \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ y sea:
$f+g : A \cap \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{B}+\mathcal{D}$ una función con $\mathcal{B}+\mathcal{D}$ acotado
entonces:

① $\sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$

(Notar que es diferente al de conjuntos $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$)

$P = \{f(x) \mid x \in A \cap \mathcal{C}\}$ $\quad Q = \{g(x) \mid x \in A \cap \mathcal{C}\}$ $\quad R = \{f(x)+g(x) \mid x \in A \cap \mathcal{C}\}$

P, Q, R son conjuntos acotados. sean $a = \sup(P)$ $\quad b = \sup(Q)$ $\quad c = \sup(R)$

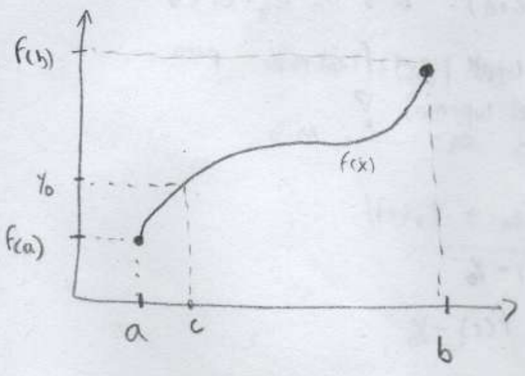
$\Rightarrow f(x) \leq a \quad \forall x \in A \cap \mathcal{C}$
$\Rightarrow g(x) \leq b \quad \forall x \in A \cap \mathcal{C}$ $\quad \Rightarrow f(x)+g(x) \leq a+b \quad \forall x \in A \cap \mathcal{C}$

entonces. $a+b$ es cota superior de $(f+g)(x)$

$\Rightarrow c = \sup(R) \leq a+b$
$= \sup(A) + \sup(B)$ $\quad \Rightarrow \sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$ #

Teorema$_2$: Teorema del Valor Intermedio : sea $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ una función continua y sea $f(a) < y_0 < f(b)$ $\Rightarrow$ existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = y_0$

Traducción: Una función continua que pasa por dos puntos $(f(a), f(b))$ pasa por todos los puntos intermedios.



la función es continua

entonces según el teorema si elegimos cualquier y_0 entre $f(a)$ y $f(b)$, este y_0 es la imagen de algún número c entre a y b (puede ser que y_0 sea la imagen de varios números entre a y b. Pero sólo hay que encontrar uno)

El teorema entonces es bastante obvio porque una función continua es una curva que tiene que unir $f(a)$ con $f(b)$ sin soltar el lápiz y es imposible hacer esto sin pasar por todos los puntos entre $f(a)$ y $f(b)$. O sea todos los puntos entre $f(a)$ y $f(b)$ son la imagen de algún número.

Demostración

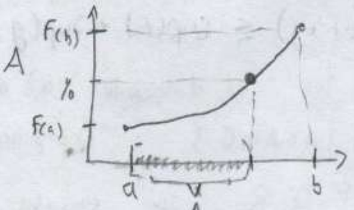
Suponemos que $f(a) < y_0 < f(b)$ Pd. $\exists\ c \in (a,b)$ con $f(c) = y_0$

1. Creamos un conjunto que sabemos que su supremo es la c que buscamos

Sea $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) < y_0\}$

A es el conjunto de todos los números cuya imagen es menor a y_0. tiene sentido que su supremo va a ser justamente el número cuya imagen es y_0

→ Veamos como se ve A



Como $a \in [a,b]$ y $f(a) < y_0 \Rightarrow a \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

además como todos los elementos de A cumplen que $x \in [a,b] \Rightarrow a \le x \le b \Rightarrow b$ es cota superior

Entonces A tiene supremo. Sea $c = \sup(A)$

· Sabemos que b es cota $\Rightarrow c \le b$ (porque c es la mínima cota)

2. Demostraremos que $f(c) = y_0$

- Suponemos $f(c) < y_0 \Rightarrow y_0 - f(c) > 0$ ← tomaremos esto como ε de la def. de continuidad

como f es continua en c, entonces dada $\varepsilon = y_0 - f(c) \Rightarrow \exists\ \delta > 0$ tal que:

$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < y_0 - f(c)$

$\Rightarrow f(c) - y_0 < f(x) - f(c) < y_0 - f(c)$ ..... propiedad de val absoluto

$\Rightarrow f(x) - f(c) < y_0 - f(c) \Rightarrow f(x) < y_0$ ↯

Es contradicción porque lo que dijimos es que para un $x_0 \in (c, c+\delta)$ ← o sea $|x_0 - c| < \delta$

$\Rightarrow f(x_0) < y_0$. entonces un elemento de A (porque cumple que $f(x_0) < y_0$ pero sin embargo como $x_0 \in (c, c+\delta) \Rightarrow x_0 > c$ que es el supremo) ↯

- Suponemos que $f(c) > y_0 \Rightarrow f(c) - y_0 > 0$

como f es continua en c, entonces dada $\varepsilon = f(c) - y_0$

existe $\delta > 0$ tal que: $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < f(c) - y_0$

$\Rightarrow y_0 - f(c) < f(x) - f(c) < f(c) - y_0$

$\Rightarrow y_0 - f(c) < f(x) - f(c) \Rightarrow y_0 < f(x)$ ↯

Es contradicción porque lo que dijimos es que si $x_0 \in (c-\delta, c)$ ← o sea $|x_0 - c| < \delta$

$\Rightarrow y_0 < f(x_0)$ ← no cumple la condición de A

o sea que ningún número en $(c-\delta, c)$ pertenece a A

entonces todos los x_0 en $(c-\delta, c)$ son cotas superiores de A, pero son menores al supremo ↯

$\therefore \boxed{f(c) = y_0}$ //

Teorema 3: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Entonces f es acotada en $[a,b]$. O sea P.d $|f(z)| < M$ con $M \in \mathbb{R}$ $\forall z \in [a,b]$ (definición de f. acotada)

Como f es continua en $[a,b]$ $\Rightarrow$ es uniformemente continua en $[a,b]$ (Teorema. continuidad)

entonces usamos la definición de continuidad uniforme pero para $\varepsilon = 1$. $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1 \quad \dots (1)$$

~~ahora bien: $|f(y)| - |f(x)| \leq \big||f(y)| - |f(x)|\big|$ ← cualquier número es menor a su absoluto~~

~~$\leq |f(y) - f(x)|$ ← Hijita desigualdad~~

~~< 1 ... por (1)~~

~~$\therefore |f(y)| - |f(x)| < 1 \Rightarrow |f(y)| < 1 + |f(x)|$ #~~

- Construimos el conjunto $\mathcal{B} = \{(x-\delta, x+\delta) \mid x \in [a,b]\}$. ← Conjunto de todos los intervalos con centro x y radio δ.

$\mathcal{B}$ es cubierta de $[a,b]$ $\Rightarrow$ por Heine Borel existe un subconjunto finito de $\mathcal{B}$ que cubre a $[a,b]$

Sea $\Psi = \{(x_k - \delta_k, x_k + \delta_k) \mid k = 1, \dots, n\}$ dicho subconjunto de $\mathcal{B}$. (Ψ sólo contiene un número finito de intervalos)

Ahora bien, sea $M = \max\{f(x_k) + 1 \mid k = 1, \dots, n\}$ y sea $z \in [a,b]$

Como Ψ es cubierta de $[a,b]$ $\Rightarrow$ $z \in (x_j - \delta_j, x_j + \delta_j)$ p.a $j = 1, \dots, n$ ← z es cubierto por alguna sábana de Ψ.

$\Rightarrow |z - x_j| < \delta_j \Rightarrow |f(z) - f(x_j)| < 1$ ← por (1)

Ahora bien: $|f(z)| - |f(x_j)| \leq \big||f(z)| - |f(x_j)|\big|$ ← cualquier número es $\leq$ a su absoluto

$\leq |f(z) - f(x_j)|$ ← Hijita desigualdad

< 1 ... por (1)

$\therefore |f(z)| - |f(x_j)| < 1 \Rightarrow |f(z)| < 1 + |f(x_j)|$

$\leq M$ (por def. de M)

$\therefore |f(z)| \leq M \quad \forall z \in [a,b]$ #

Teorema$_4$: Sea $A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b] \subseteq A \Rightarrow f$ alcanza un máximo en $[a,b]$. ~~Pd. existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) =$~~

Como $f(x)$ es acotada por el Teorema$_3$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es acotada superiormente $\Rightarrow$ tiene supremo

$\therefore \exists \; c \in \mathbb{R} \mid c = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ $\leftarrow$ c es el supremo de las imágenes de f

- queremos demostrar que este supremo pertenece al conjunto, para probar que es un máximo.

$\therefore$ Pd. $\exists \; x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c$

- Suponemos que $\nexists \; x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c$

$\Rightarrow f(x) \neq c \quad \forall \; x \in [a,b]$

Construimos una nueva función: $c - f(x)$ $\leftarrow$ como $f(x) \neq c$ entonces esta función nunca vale 0.

Construimos ahora $\frac{1}{c - f(x)}$ que es continua en $[a,b]$ ya que el denominador nunca vale 0.

Por el teorema anterior, $\exists \; M \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{c - f(x)} \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \frac{1}{M} \leq c - f(x) \Rightarrow \underline{c - \frac{1}{M} \geq f(x)}, \; (1) \quad \forall x \in [a,b]$ ↯

contradicción porque c era el supremo y $\therefore$ debería de cumplirse que para $\varepsilon > 0 \; \exists \; f(x^*)$ tal que $c - \varepsilon < f(x^*)$

pero por (1) y tomando $\frac{1}{M} = \varepsilon$. se llega a la contradicción

$\therefore$ sí existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c$.

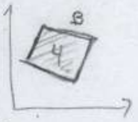
entonces este $f(x)$ es el máximo

Unidad 4: Construcción de la Integral

Tema 1: Área.

Entendemos por Área una función que le asigna un número real positivo a ciertas regiones del plano.
y cumple:

$\cdot)$ $A(B) \geq 0$ ← El área de cualquier conjunto es mayor o igual a 0. Ej:



$A(B) = 4$

$\cdot\cdot)$ Si $B \subset C \Rightarrow A(B) \leq A(C)$ Ej.:

← Los puntos de B están contenidos en C, o sea $B \subset C$ y entonces $A(B) \leq A(C)$

$\cdot\cdot\cdot)$ Si D, E son conjuntos y $A(D \cap E) = 0$
$\Rightarrow A(D \cup E) = A(D) + A(E)$

si dos conjuntos no se intersectan, entonces el área de ambos conjuntos juntos es igual al área del primero más la del segundo

$\cdot\cdot\cdot\cdot)$ El área de un rectángulo R de largo a y lado b tiene área ab, o sea $A(R) = ab$.

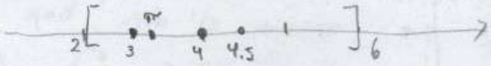
Teorema$_1$: $A(\emptyset) = 0$

Tema 2: Particiones

- Definición: Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado. Una partición de $[a,b]$ es un conjunto finito de puntos de $[a,b]$ incluidos a y b.

  o sea $P = \{ a = x_0, \dots, x_n = b \mid x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$

  ejemplo:



el conjunto $\{2, 3, \pi, 4, 4.5, 6\}$ es una partición de $[2,6]$ ya que incluye a 2, 6 y a puntos entre ellos.

- Definición $\mathbb{P}_{[a,b]}$ es el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$

  o sea, decir $P_1 \in \mathbb{P}_{[a,b]}$ es una forma resumida de decir que P_1 es una partición de $[a,b]$

- Refinamiento: Sean $P, Q \in \mathbb{P}_{[a,b]}$ (o sea P, Q son particiones de $[a,b]$), decimos que Q es un refinamiento de P si $P \subseteq Q$. O sea los puntos de P están en Q

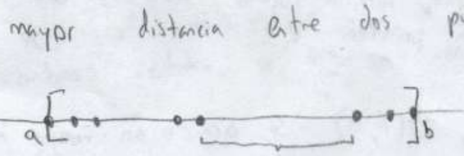
  Ej.:

sea $P = \{0, 1, 3, 5.5, 6\}$
y $Q = \{0, 1, 2, 2.7, 3, 4, 5, 5.5, 6\}$

como P y Q son particiones de $[0,6]$ y $P \subseteq Q$ entonces Q es refinamiento de P.

- Norma: sea $P \in \mathbb{P}_{[a,b]}$ (P es una partición de $[a,b]$) La norma de P está dada por la mayor distancia entre dos puntos de P.

  Ej.



digamos que la máxima distancia entre dos puntos de P es 3, entonces norma de $P = |P| = 3$

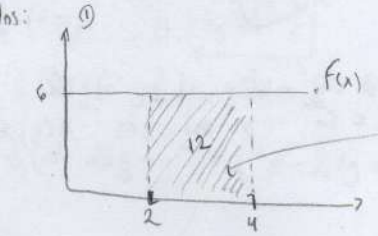
así se denota la norma de P.

Integral

¿Qué es la integral?

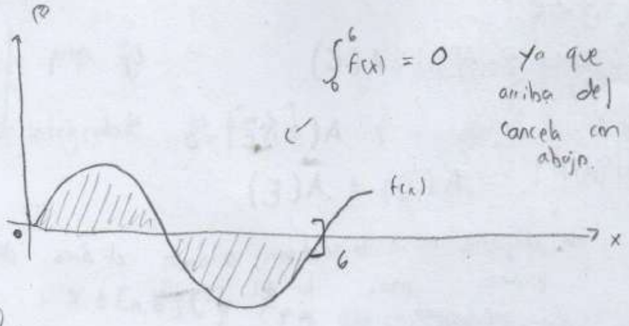
- Es una operación que dada una función y un intervalo cerrado sobre el que esté definida, la integral devuelve el área bajo la curva. (aunque da un signo negativo si el área es por debajo del eje x).

ejemplos: ①



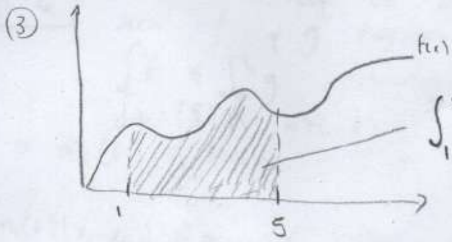
$\int_2^4 f(x) = 12$

②



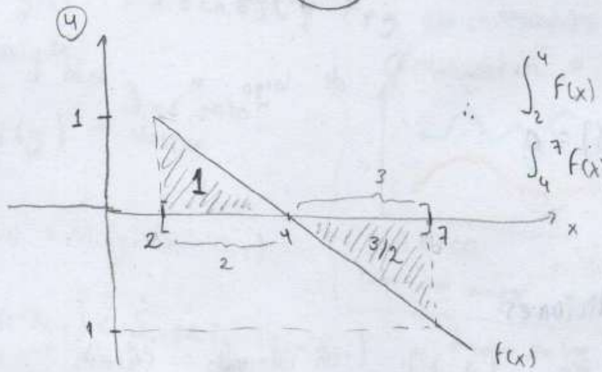
$\int_0^6 f(x) = 0$ ya que el área arriba del eje se cancela con el área abajo.

③



$\int_1^5 f(x) = ¿?$

④

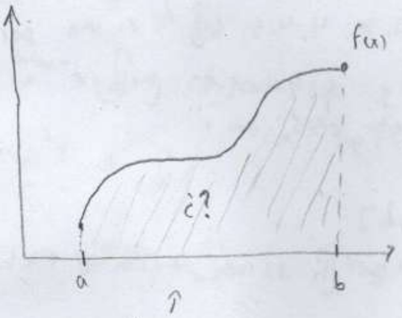


$\int_2^4 f(x) = 1$

$\therefore$ $\int_4^7 f(x) = -3/2$

$\int_2^7 f(x) = -1/2$

- Pero, ¿cómo calcular el área bajo una curva?

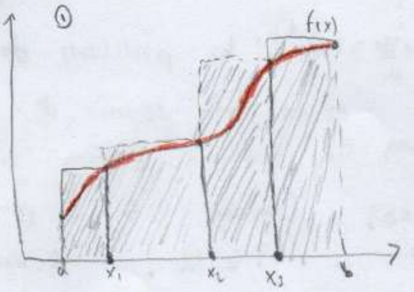


$\int_a^b f(x) = ¿?$

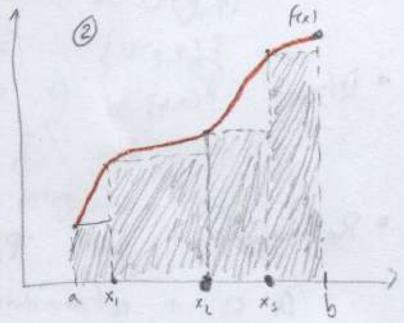
Como sólo sabemos calcular el área de rectángulos, nos conviene partir el intervalo $[a,b]$ con una partición y luego formar rectángulos que aproximen el área bajo la curva.

$\Rightarrow$

①



②



Llamemos P_1 a la partición creada $\{a, x_1, x_2, x_3, b\}$. El problema es que no sabemos qué altura tomar para construir los rectángulos. Por eso en la gráfica ① tomamos siempre la mayor altura posible (o sea el máximo de $f(x)$ en cada intervalito). Mientras que en la gráfica de la derecha tomamos los mínimos.

Al área calculada en (1) se le llamamos $U(f, P_1)$ $\leftarrow$ el área superior (usando máximos) calculada con la partición P_1

Al área en (2) se le llama $L(f, P_1)$ $\leftarrow$ Área inferior (usando mínimos) calculada con la partición P_1.

evidentemente $L(f,P_1) \leq \int_a^b f(x) \leq U(f, P_1)$

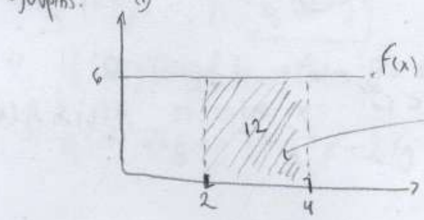
También, conforme hagamos mejores particiones, Las $L(f,P)$ y $U(f,P)$ se acercarán mejor a $\int_a^b f$

Integral

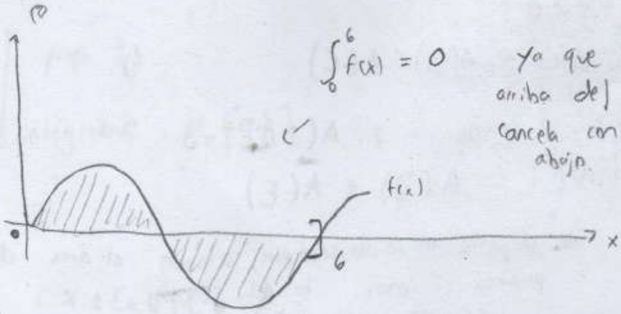
¿Qué es la integral?

- Es una operación que dada una función y un intervalo cerrado sobre el que esté definida, la integral devuelve el área bajo la curva. (aunque da un signo negativo si el área es por debajo del eje x).

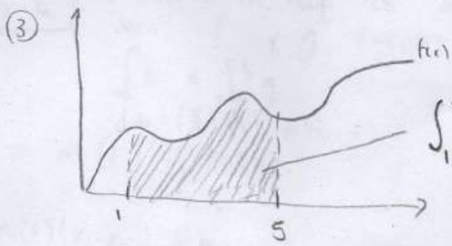
ejemplos:



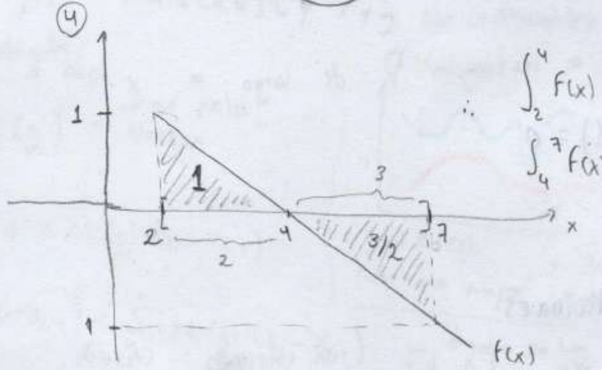
$$\int_2^4 f(x) = 12$$



$$\int_0^6 f(x) = 0$$ ya que el área arriba del eje se cancela con el área abajo.



$$\int_1^5 f(x) = ¿?$$

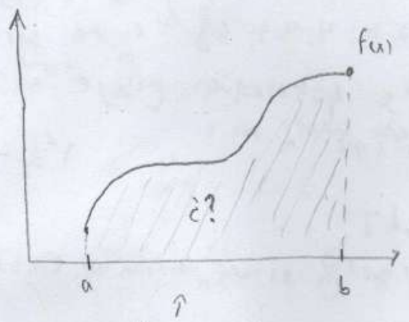


$$\int_2^4 f(x) = 1$$

$$\int_4^7 f(x) = -3/2$$

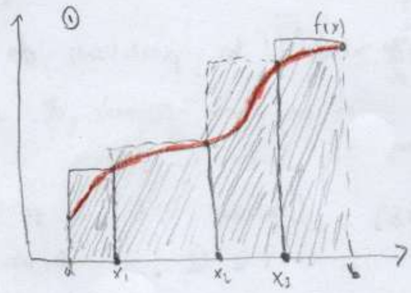
$$\therefore \int_2^7 f(x) = -1/2$$

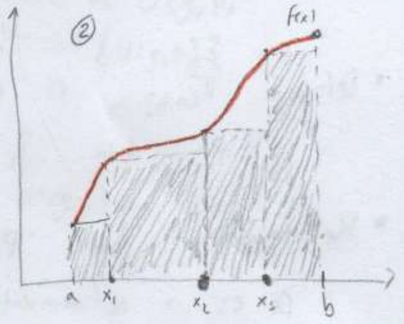
- Pero, ¿cómo calcular el área bajo una curva?



$$\int_a^b f(x) = ¿?$$

Como sólo sabemos calcular el área de rectángulos, nos conviene partir el intervalo $[a,b]$ con una partición y luego formar rectángulos que aproximen el área bajo la curva.





Llamemos P_1 a la partición creada $\{a, x_1, x_2, x_3, b\}$. El problema es que no sabemos qué altura tomar para construir los rectángulos. Por eso en la gráfica ① tomamos siempre la mayor altura posible (o sea el máximo de $f(x)$ en cada intervalito). Mientras que en la gráfica de la derecha tomamos los mínimos.

Al área calculada en (1) le llamamos $U(f,P_1)$ ← el área superior (usando máximos) calculada con la partición P_1

Al área en (2) se le llama $L(f,P_1)$ ← Área inferior (usando mínimos) calculada con la partición P_1.

evidentemente $L(f,P_1) \leq \int_a^b f(x) \leq U(f,P_1)$

También, conforme hagamos mejores particiones, las $L(f,P)$ y $U(f,P)$ se acercarán mejor a $\int_a^b f$

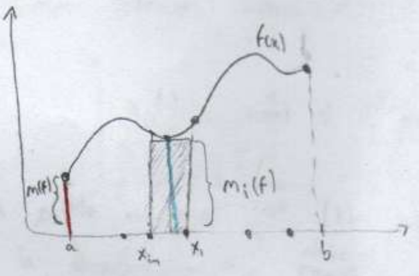
Definimos ciertas cosas:

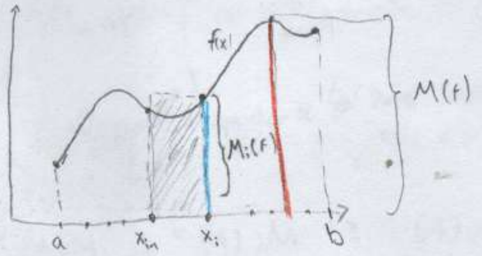
- $m(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$
- $M(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$

← o sea $m(f)$ es el menor valor de la función en todo $[a,b]$ y $M(f)$ el mayor.

- $m_i(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
- $M_i(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

← $m_i(f)$ es el menor valor en el i-ésimo intervalito y $M_i(f)$ el mayor.





Para calcular la suma inferior, sólo sumamos todas las áreas de los rectángulos formados con la altura mínima $(m_i(f))$ de cada intervalito.

$$\Rightarrow \quad L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i(f)}_{\text{Altura de cada rectángulo}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{Base de cada rectangulito (longitud de cada intervalito)}}$$

Sumar los n rectángulos.

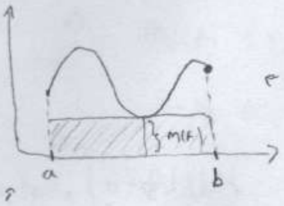
de forma similar:

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\,(x_i - x_{i-1})$$

Se puede ver que algunas particiones se acercarán más al resultado real, y además

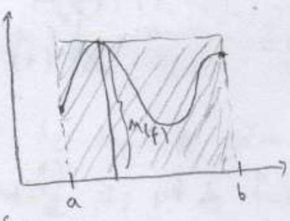
$$L(f,P) \le \int_a^b f(x) \le U(f,P)$$ para cualquier partición.

- La peor partición posible sería $\{a,b\}$ (la partición trivial que contiene sólo los extremos)



← $m(f)\,(b-a)$

Suma inferior con la partición $\{a,b\}$



← $M(f)\,(b-a)$

Suma Superior con la partición $\{a,b\}$

Ahora bien, si mejoramos las particiones, las sumas superiores cada vez se hacen más pequeñas y se acercan al área real, por otro lado, las sumas inferiores se hacen más grandes y se acercan al área real. con esto definimos:

Integral superior: $\overline{\int_a^b} f = \operatorname{Inf}\{U(f,P) \mid P \in \mathbb{P}_{[a,b]}\}$ ← Se calcula la suma superior para todas las particiones posibles y se toma la más pequeña (la mejor)

Integral inferior: $\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) \mid P \in \mathbb{P}_{[a,b]}\}$ ← Se calcula la suma inferior para todas las particiones posibles y se toma la más grande (la mejor)

- Si $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ entonces se define a este valor y se le llama integral: $\int_a^b f$

o sea que la integral sólo existe si se puede calcular tanto con sumas superiores como con inferiores y de ambos métodos se llega al mismo valor.

Desigualdad Fundamental del cálculo:

$$m(f)(b-a) \leq L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U(f,P) \leq M(f)(b-a)$$

Peor aproximación inferior — Una suma inferior cualquiera — Mejor suma inferior posible — Mejor suma superior — una suma superior cualquiera — Peor suma superior

Si se cumpliera la igualdad, a ese valor se le llama $\int_a^b f$

Demostración:

$\Rightarrow \quad m(f) \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq M(f)$

Ya que $m(f)$ es la mínima altura de todo el intervalo

$m_i(f)$ es la mínima altura en el i-ésimo intervalito.

$M_i(f)$ es la máxima altura en el i-ésimo intervalo

$M(f)$ es la máxima altura de todo el intervalo

$\Rightarrow m(f)(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M(f)(x_i - x_{i-1})$

(multiplicamos por la longitud de intervalo, la base de cada rectángulo)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(f)(x_i - x_{i-1})$

$\Rightarrow m(f) \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M(f) \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$

podemos sacar $m(f)$ y $M(f)$ de las sumas ya que son constantes

$\Rightarrow m(f)(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(f)(b-a)$

$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$ es la suma de la longitud de todos los intervalitos. Entonces es igual a la longitud de todo el intervalo completo, o sea $b-a$.

Y como $\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$, entonces $L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f$

además $\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$, entonces $\overline{\int_a^b} f \leq U(f,P)$

$\Downarrow$

$$m(f)(b-a) \leq L(f,P) \leq \underbrace{\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f}_{} \leq U(f,P) \leq M(f)(b-a)$$

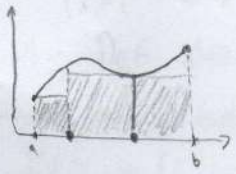
Esta parte se demuestra luego, pero es evidente por lo dicho antes.

Teorema$_1$: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}$ acotada en $[a,b]$ y sean $P, Q \in \mathbb{P}_{[a,b]}$ (o sea son particiones de $[a,b]$) con $P \subset Q$, es decir Q es un refinamiento de P. Entonces:

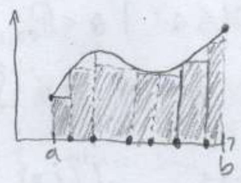
$$\bullet\ L(f,P) \leq L(f,Q) \qquad \bullet\bullet\ U(f,P) \leq U(f,Q)$$

→ Las sumas inferiores suben y las superiores bajan con refinamientos

ejemplo:



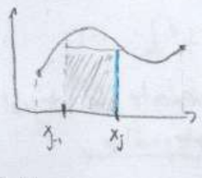
refinar →



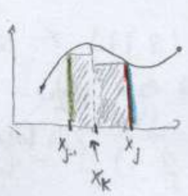
← La suma inferior aumenta y se acerca más a la curva.

• Para la demostración se empieza con una partición P y luego se crea una refinación con un solo punto más: $P_1 = P \cup \{x_k^*\}$

Suponemos que este x_k^* se encuentra en algún intervalito arbitrario de los intervalitos de P. o sea $x_k^* \in [x_{j-1}, x_j]$. Será en este intervalito en donde se verá la diferencia de areas



→



Definimos:

$$m_j(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$
$$m_j^*(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_k^*]\}$$
$$m_j^{**}(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_k^*, x_j]\}$$

Evidentemente

$\circ\ m_j(f) \leq m_j^*(f) \Rightarrow m_j(f)(x_k^* - x_{j-1}) \leq m_j^*(f)(x_k^* - x_{j-1})$ ← multiplicamos por longitud de intervalo

$\circ\ m_j(f) \leq m_j^{**} \Rightarrow m_j(f)(x_j - x_k^*) \leq m_j^{**}(f)(x_j - x_k^*)$ +

$$m_j(f)\left[(x_k^* - x_{j-1}) + (x_j - x_k^*)\right] \leq m_j^*(f)(x_k^* - x_{j-1}) + m_j^{**}(x_j - x_k^*)$$

$$\Rightarrow \underbrace{m_j(f)(x_j - x_{j-1})}_{\text{área del rectangulito original}} \leq \underbrace{m_j^*(f)(x_k^* - x_{j-1}) + m_j^{**}(x_j - x_k^*)}_{\text{Área después de refinar}}$$

← Sumamos por todo el intervalo

Por lo tanto el área del rectangulito aumentó y por lo tanto toda la suma inferior aumentó

$\therefore L(f,P) \leq L(f,P_1)$

como Q es un refinamiento de P, ya probamos que al agregar un punto a P el área aumenta, entonces sólo basta con seguir agregando puntos hasta llegar a Q.

$$\therefore L(f,P) \leq L(f,Q)$$

El $\bullet\bullet)$ se demuestra igual.

• **Corolario:** sean $P, Q \in \mathbb{P}_{[a,b]} \Rightarrow L(f,P) \leq U(f,Q)$

demostración: Sea $P \cup Q$ ← $P \cup Q$ es partición de $[a,b]$ (ya que contiene todos los elementos de P y Q) y es refinamiento tanto de P como de Q.

Entonces por el teorema anterior:

$$\underbrace{L(f,P) \leq}_{\text{Por Teorema}_1} L(f,P\cup Q) \underbrace{\leq}_{\text{Por Desigualdad Fundamental}} U(f,P\cup Q) \underbrace{\leq}_{\text{Por Teorema}_1} U(f,Q)$$

$\Rightarrow L(f,P) \leq U(f,Q)$ ← Entonces sin importar las particiones, una suma superior siempre es mayor a una inferior.

Teorema$_2$: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ una función acotada en $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

Entonces $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

Demostración:

Sean $P, Q \in \mathbb{P}_{[a,b]}$, sabemos que $L(f,P) \leq U(f,Q)$ (por corolario de Teorema$_1$)

como Q es arbitraria, se tiene $L(f,P) \leq U(f,Q) \quad \forall\, Q \in \mathbb{P}_{[a,b]}$

$\Rightarrow$ $L(f,P)$ es cota inferior de $\{ U(f,Q) \mid Q \in \mathbb{P}_{[a,b]} \}$

$\therefore$ $L(f,P) \leq \overline{\int_a^b} f$ ← por la definición de $\overline{\int_a^b} f$ que dice que es ínfimo de $\{U(f,Q) \mid Q \in \mathbb{P}_{[a,b]}\}$

Entonces ahora, como P es arbitraria tenemos que $L(f,P) \leq \overline{\int_a^b} f \quad \forall\, P \in \mathbb{P}_{[a,b]}$

$\therefore$ $\overline{\int_a^b} f$ es cota superior de $\{ L(f,P) \mid P \in \mathbb{P}_{[a,b]} \}$ y por lo tanto es mayor a su supremo

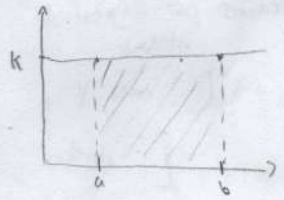
$\therefore$ $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$ # ya que $\underline{\int_a^b} f$ es el supremo de $\{ L(f,P) \mid P \in \mathbb{P}_{[a,b]} \}$

Entonces ya probamos toda la desigualdad fundamental. #

En caso de que se cumpla la igualdad: $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, a este valor es simplemente la integral $\int_a^b f$ y la función es <u>integrable</u>.

Ejemplos:

1] $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = k$ ← Es la función constante



Sea $P = \{ a = x_0, \ldots, x_n = b \}$ una partición arbitraria.

Ahora bien, $M(f) = K \quad m(f) = K \quad M_i(f) = K \quad m_i(f) = K$ ← Porque la función siempre vale K.

$\Rightarrow$ • $L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1}) = K \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = K(b-a)$

• $U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1}) = K \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = K(b-a)$

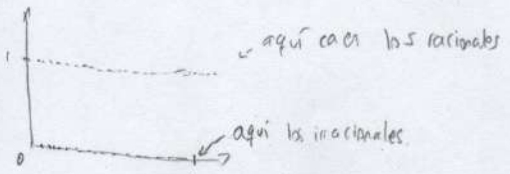
constantes salen — porque estamos sumando todo el intervalo

Sin importar la partición, tenemos que $L(f,P) = k(b-a)$ y $U(f,P) = K(b-a)$

$\therefore$ $\underline{\int_a^b} f = K(b-a)$ $\quad \overline{\int_a^b} f = K(b-a)$

$\therefore$ $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ $\therefore$ es integrable y $\int_a^b f = K(b-a)$.

2] $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$



$\therefore$ $M(f) = 1 \quad m(f) = 0$

cualquier intervalo contendría racionales e irracionales,

$\therefore$ $m_i(f) = 0 \quad M_i(f) = 1$

$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$

$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} = b - a = 1$

como Todas las $L(f,P)$ son 0 sin importar la partición, entonces $\{ L(f,P) \mid P \in \mathbb{P}_{[a,b]} \} = \{0\}$

$\therefore$ $\underline{\int_a^b} = 0$

Por otro lado $\overline{\int_a^b} = 1$ $\quad \therefore$ $\underline{\int_a^b} \neq \overline{\int_a^b}$ y no es integrable.

Integrabilidad: Def.: f es integrable si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$

Def*: f es integrable si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $P \in \mathbb{P}_{[a,b]}$ tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

O sea, f es integrable si podemos encontrar una partición P tal que $U(f,P)$ esté tan cerca de $L(f,P)$ como queramos. Podemos hacer que la diferencia entre ellos sea menor a cualquier ε.

Teorema 3: Def $\Longleftrightarrow$ Def*

$\Rightarrow$] Supongamos que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Ahora bien, sea $\varepsilon > 0$

- Como $\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) \mid P \in \mathbb{P}_{[a,b]}\}$ entonces según la def* de supremo existe un elemento, digamos aquél creado con la partición P_1 tal que: $\underline{\int_a^b} f - \varepsilon/2 < L(f,P_1)$ ... (1)
  usamos $\varepsilon/2$ en vez de ε, luego veremos por qué

- Como $\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,P) \mid P \in \mathbb{P}_{[a,b]}\}$ entonces existe un elemento, digamos aquél creado con P_2 tal que: $\overline{\int_a^b} f + \varepsilon/2 > U(f,P_2)$ ... (2)
  def* de ínfimo

$$(1)\quad \cancel{\underline{\int_a^b} f} - \varepsilon/2 < L(f,P_1)$$
$$(2)\quad U(f,P_2) - \cancel{\overline{\int_a^b} f} < \varepsilon/2$$

$\underline{\int_a^b} f$ se cancela con $\overline{\int_a^b} f$ porque son iguales por hipótesis

$$U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon \quad \text{... (3)}$$

Ya sólo falta que quede con la misma partición

Sea $P = P_1 \cup P_2$, como es refinamiento de P_1 y P_2

$$+\begin{cases} L(f,P_1) \le L(f,P) \\ U(f,P) \le U(f,P_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $U(f,P) + L(f,P_1) \le L(f,P) + U(f,P_2)$

$\Rightarrow$ $U(f,P) - L(f,P) \le U(f,P_2) - L(f,P_1) \underset{\text{por (3)}}{<} \varepsilon$ $\Rightarrow$ $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$]#

$\Leftarrow$] Pd. $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ con la hipótesis que $\forall \varepsilon$ $\exists P \in \mathbb{P}_{[a,b]}$ tal que

Sabemos que:
- $L(f,P) \le \underline{\int_a^b} f \Rightarrow -\underline{\int_a^b} f \le -L(f,P)$ ...(1)
- $\overline{\int_a^b} f \le U(f,P)$ ...(2)

Sumamos 1 y 2 $\Rightarrow$ $0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

porque $\overline{\int_a^b} f \ge \underline{\int_a^b} f$ — por hipótesis

$\Rightarrow$ $0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0$ ya que como es menor que ε, $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f$ es menor que cualquier positivo, pero a la vez es mayor o igual a 0. por lo tanto es 0. (Teorema de calc 1)

$\Rightarrow$ $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ #

Teorema 4 (continuidad ⇒ Integrobilidad) Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ continua en $[a,b] \subseteq A$, entonces f es integrable en $[a,b]$

P.d. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathbb{P}_{[a,b]}$ tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$ .. construimos $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a} > 0$.

Como f es continua $\Rightarrow$ f es uniformemente continua. Usamos la definición de Continuidad uniforme para ε'

$\exists \delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Sea P una partición que cumpla que $|P| < \delta \Rightarrow \underbrace{x_i - x_{i-1}}_{\text{distancia de cualquier intervalito.}} < \delta \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \dots (1)$

Consideramos $U(f,P) - L(f,P)$ ← lo cual queremos acotar con ε

$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$

$= \sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1})$

pero $M_i(f)$ es la imagen de un elemento del intervalo (digamos x_i^{**})
$M_i(f) = f(x_i^{**})$
Lo mismo para $m_i(f) \to m_i(f) = f(x_i^*)$

$\Rightarrow = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^{**}) - f(x_i^*))(x_i - x_{i-1})$

$\leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i^{**}) - f(x_i^*)|(x_i - x_{i-1})$ ← Porque el valor absoluto es $\geq$ al número sin absoluto.

$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1})$ ← por (1) $= \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$

$\therefore U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ $\quad \therefore f$ es integrable en $[a,b]$. #

Teorema 5: (suma de Riemann): Sea f una función integrable y sea $P \in \mathbb{P}_{[a,b]}$. Sea $c_i^* \in \mathbb{R}$ tal que $m_i(f) \leq c_i^* \leq M_i(f)$ entonces se cumple que

$$\left|\int_a^b f - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i^*(x_i - x_{i-1})}\right| \leq U(f,P) - L(f,P)$$

suma de Rienman (en los intervalitos no agarramos $m_i(f)$ ni $M_i(f)$, como alturas, más bien agarramos cualquier altura c_i^* entre ellas) y el teorema dice que la distancia entre esta suma y la integral $\int_a^b f$ es menor a $U(f,P) - L(f,P)$ y por lo tanto ambos valores se acercan tanto como queramos conforme agarramos mejores particiones y así $U(f,P) - L(f,P)$ se hace más pequeño.

$L(f,P) \leq \int_a^b \leq U(f,P) \quad \dots (1)$

por otro lado $m_i(f) \leq c_i^* \leq M_i^*(f)$

multiplicar por $(x_i - x_{i-1})$

$\to m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq c_i^*(x_i - x_{i-1}) \leq M_i^*(f)(x_i - x_{i-1})$

$\to \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i^*(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i^*(f)(x_i - x_{i-1})$

$\to L(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i^*(x_i - x_{i-1}) \leq U(f,P)$

$\Rightarrow -U(f,P) \leq -\sum_{i=1}^{n} c_i^*(x_i - x_{i-1}) \leq -L(f,P) \quad \dots (2)$

Por (1) y (2)

$\Rightarrow L(f,P) - U(f,P) \leq \int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} c_i^*(x_i - x_{i-1}) \leq U(f,P) - L(f,P)$

$\Rightarrow \left|\int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} c_i^*(x_i - x_{i-1})\right| \leq U(f,P) - L(f,P)$ ← Propiedad de absoluto (calc 1)

#

Escolio: Entonces podemos agarrar cualquier altura de los intervalitos y calcular la suma. (No es necesario agarrar $m_i(f)$ y $M_i(f)$) y aún así la aproximación será buena.

Unidad 5: Propiedades De Integral

- **Lema 1**: sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ integrable en $[a,b] \subseteq \mathbb{R} \to$ si $[c,d] \subseteq [a,b]$ $\Rightarrow$ f es integrable en $[c,d]$.
  - o sea f es integrable en cualquier subconjunto de un conjunto en que es integrable.

Pd. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; P \in \mathbb{P}_{[c,d]}$ tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

- Primero proponemos una $\varepsilon > 0$, como f es integrable en $[a,b] \Rightarrow \exists \; P_1 \in \mathbb{P}_{[a,b]}$ tal que
  $U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon$

  sea $P_2 = P_1 \cup \{c,d\}$ ← es un refinamiento de P_1 y además ahora incluye a c y d.

$U(f,P_2) \leq U(f,P_1) \qquad L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$ ← Porque P_2 es refinamiento

$\to U(f,P_2) - L(f,P_2) \leq U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon \qquad \therefore U(f,P_2) - L(f,P_2) < \varepsilon$

- Sea $P_3 = P_2 \cap [c,d]$. Ahora P_3 es una partición de $[c,d]$ ya que ya hicimos que incluyera a los extremos y ahora hicimos que sólo tenga elementos entre c y d.

y $P_3 \subseteq P_2$. consideramos:

$$\sum_{k=l}^{m} \left[(M_k(f) - m_k(f))(x_k - x_{k-1}) \right]^{①}$$ ← donde l es el intervalito en el que está la c y m es en el que está la d. $\therefore$ Esta suma sib suma los intervalitos de $[c,d]$

$$< \sum_{k=1}^{n} \left[(M_k(f) - m_k(f))(x_k - x_{k-1}) \right]^{②}$$ ← Porque esta sí es la suma a lo largo de todo $[a,b]$ y por eso es mayor

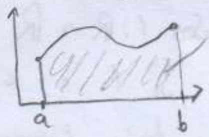
$\Downarrow$

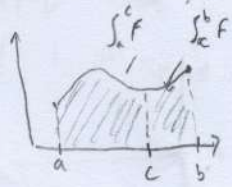
$$\underbrace{U(f,P_3) - L(f,P_3)}_{\text{Esto es ①}} < \underbrace{U(f,P_2) - L(f,P_2)}_{\text{Esto es ②}} < \varepsilon$$

$\therefore \; U(f,P_3) - L(f,P_3) < \varepsilon \; | \; \#$

Lema 2: sea f integrable en $[a,b]$ y sea $c \in [a,b] \Rightarrow$ f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

- O sea podemos partir $[a,b]$ en dos intervalos y la integral total será la suma de la integral en los dos nuevos intervalos.





Se ve que: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Probaremos que: $\underline{\int_a^b} = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$

Sea $P_1 \in \mathbb{P}_{[a,c]}$, $P_2 \in \mathbb{P}_{[c,b]}$ y $P = P_1 \cup P_2 \Rightarrow P \in \mathbb{P}_{[a,b]}$

$\Rightarrow L(f,P_1) + L(f,P_2) = L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f$ Porque $\underline{\int_a^b} f$ es el supremo de las L

$\Rightarrow L(f,P_2) \leq \underline{\int_a^b} - L(f,P_1) \qquad \therefore \underline{\int_a^b} - L(f,P_1)$ es cota superior de las $L(f,P)$

$\Rightarrow \underline{\int_c^d} f \leq \underline{\int_a^b} f - L(f,P_1)$ ← porque $\underline{\int_c^d} f$ es menor que cualquier cota superior

$\Rightarrow L(f,P_1) \leq \underline{\int_a^b} f - \underline{\int_c^d} f \qquad \therefore \underline{\int_a^b} f - \underline{\int_c^d} f$ es cota superior de $L(f,P_1)$

$\to \underline{\int_a^c} \leq \underline{\int_a^b} f - \underline{\int_c^d} f \qquad \Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f \geq \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \; | \; ①$

- Ver cuaderno para la demostración que $\underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \; | \; ②$

Por (1) y (2) $\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$

De forma similar se prueba $\overline{\int_a^b} = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$

} con estos dos se llega a que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \#$

Lema 3, Sean f y g funciones acotadas en $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

i) $\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} (f+g)$ ii) $\overline{\int_a^b} \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$

Probaremos i) Sea $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ con $P = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$

Sea $A = \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x]\}$

$B = \{g(x) \mid x \in [x_{i-1}, x]\}$

$C = \{(f+g)(x) \mid x \in [x_{i-1}, x]\}$

$\text{Inf}(A+B) \leq \text{Inf}(C)$ ← Teorema, Unidad 3

$\Rightarrow \text{Inf}(A) + \text{Inf}(B) \leq \text{Inf}(C)$

$\Rightarrow m_i(f) + m_i(g) \leq m_i(f+g)$ ← Por como se define $m_i(f)$, $m_i(g)$ y $M_i(f+g)$

$\Rightarrow m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + m_i(g)(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(f+g)(x_i - x_{i-1})$ ← multiplicar por longitud del intervalito.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} m_i(g)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(f+g)(x_i - x_{i-1})$ ← Sumar todos los intervalitos

$\Rightarrow L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g, P)$ ---- (1)

Sea $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y sea $Q = Q_1 \cup Q_2$

$\Rightarrow \cdot L(f, Q_1) \leq L(f, Q)$ $\cdot L(g, Q_2) \leq L(g, Q)$ ← porque Q es refinamiento.

$\Rightarrow L(f, Q_1) + L(g, Q_2) \leq L(f, Q) + L(g, Q) \underset{\text{Por (1)}}{\leq} L(f+g, Q) \underset{\text{Desigualdad fundamental}}{\leq} \underline{\int_a^b} f+g$

$\Rightarrow L(f, Q_1) + L(g, Q_2) \leq \underline{\int_a^b} f+g$

$\Rightarrow L(f, Q_1) \leq \underline{\int_a^b} f+g - L(g, Q_2)$ ← $\underline{\int_a^b} f+g - L(g, Q_2)$ es cota superior de las $L(f, Q)$.

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f+g - L(g, Q_2)$

$\Rightarrow L(g, Q_2) \leq \underline{\int_a^b} f+g - \underline{\int_a^b} f$ ← $\underline{\int_a^b} f+g - \underline{\int_a^b} f$ es cota superior de $L(g, Q)$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} f+g - \underline{\int_a^b} f \Rightarrow \boxed{\underline{\int_a^b} g + \underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f+g}$ #

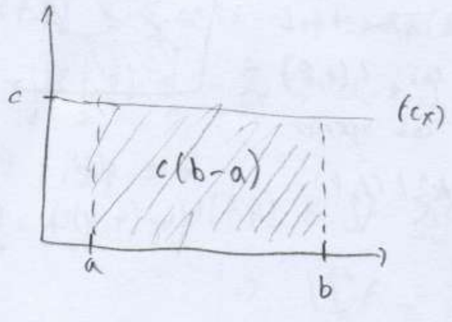
ii) se prueba similarmente

Propiedades.

1) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = c$, entonces f es integrable en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y

$\int_a^b f = c(b-a)$

dm: Ejemplo 2 de esta unidad



piedad 2 Sea f integrable en $[a,b]$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces cf es integrable y

$\int_a^b cf = c\int_a^b f$ La integral quita constantes.

Demostración: por casos:

- Caso 1, $c=0$

$$\to \int_a^b cf = \int_a^b 0f = \int_a^b 0 = 0(b-a) \overset{\text{Propiedad 1}}{=} 0 = 0\int_a^b f = c\int_a^b f \quad \#$$

- Caso 2, $c>0$

Sea $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ con $P = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ Podemos sacar constantes positivas del ínfimo (propiedad 1 de sup e inf).

$$\cdot\, m_i(cf) = \inf\{(cf)(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = c\inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = c\,m_i(f) \quad \dots (1)$$

$$\cdot\, M_i(cf) = \sup\{(cf)(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = c\sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = c\,M_i(f) \quad \dots (2)$$

$$\cdot\, L(cf,P) = \sum_{i=1}^n m_i(cf)(x_i - x_{i-1}) \overset{\text{por (1)}}{=} \sum_{i=1}^n c\,m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = c\sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = c\,L(f,P) \quad \dots (3)$$

$$\cdot\, U(cf,P) = \sum_{i=1}^n M_i(cf)(x_i - x_{i-1}) \overset{\text{Por (2)}}{=} \sum_{i=1}^n c\,M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = c\sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = c\,U(f,P) \quad \dots (4)$$

$$\cdot\, \underline{\int_a^b} cf = \sup\{L(cf,P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} \overset{\text{Por (3)}}{=} \sup\{c\,L(f,P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = c\sup\{L(f,P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = c\underline{\int_a^b} f \quad \dots (5)$$

$$\cdot\, \overline{\int_a^b} f = \dots \overset{\text{Por (4)}}{=} \dots = \dots = c\overline{\int_a^b} f \quad \dots (6)$$

como f es integrable: $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ ← criterio de integrabilidad

$$\Rightarrow c\underline{\int_a^b} f = c\overline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a} cf = \overline{\int^b} cf \quad \leftarrow \text{por (5) y (6)} \qquad \therefore cf \text{ es integrable.}$$

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f \quad \#$$

Caso 3, $c<0$

Se demuestra similarmente pero al sacar c de los ínfimos o supremos, estos se convierten en supremos o ínfimos. por propiedad 1 de sup e inf

Propiedad 3, sean f, g funciones integrables en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ entonces $f+g$ es integrable y

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

La integral separa sumas. Sea $Q \in \mathbb{P}_{[a,b]}$

Dem:

$A = \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

$B = \{ g(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

$C = \{ (f+g)(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

- $\inf(A) + \inf(B) \leq \inf(C)$ ← Teorema, Unidad 3
- $\sup(A) + \sup(B) \geq \sup(C)$

- $m_i(f) + m_i(g) \leq m_i(f+g)$

$\Rightarrow$ $m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + m_i(g)(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(f+g)(x_i - x_{i-1})$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n m_i(g)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n m_i(f+g)(x_i - x_{i-1})$

$\Rightarrow$ $L(f,Q) + L(g,Q) \leq L(f+g, Q)$ --- (1)

- $M_i(f) + M_i(g) \geq M_i(f+g)$ mult por longitud intervalito

- $M_i(f)(x_i - x_{i-1}) + M_i(g)(x_i - x_{i-1}) \geq M_i(f+g)(x_i - x_{i-1})$
- $\sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n M_i(g)(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^n M_i(f+g)(x_i - x_{i-1})$
- $U(f,Q) + U(g,Q) \geq U(f+g, Q)$ --- (2)

Ahora, sea $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_{[a,b]}$ y $P = P_1 \cup P_2$

$\Rightarrow L(f, P_1) \leq L(f, P)$

$L(g, P_2) \leq L(g, P)$

como P es refinamiento de P_1 y P_2

$U(f,P) \leq U(f, P_1)$

$U(g,P) \leq U(g, P_2)$

Las sumamos

$L(f,P_1) + L(g,P_2) \leq L(f,P) + L(g,P)$

$\leq L(f+g, P)$ --- por (1)

$\leq \underline{\int_a^b} (f+g)$

$\therefore L(f,P_1) + L(g,P_2) \leq \underline{\int_a^b} f+g$

$\Rightarrow L(f,P_1) \leq \underbrace{\underline{\int_a^b} f+g - L(g,P_2)}$ Es cota de $L(f,P_1)$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f+g - L(g,P_2)$

$\Rightarrow L(g,P_2) \leq \underline{\underline{\int_a^b} f+g - \underline{\int_a^b} f}$ Es cota de $L(g,P)$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} f+g - \underline{\int_a^b} f$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} g + \underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f+g$

$U(f,P_1) + U(g,P_2) \geq U(f,P) + U(g,P)$

$\geq U(f+g, P)$ --- por (2)

$\geq \overline{\int_a^b} f+g$

$\therefore U(f,P_1) + U(g,P_2) \geq \overline{\int_a^b} f+g$

Similar

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} g + \overline{\int_a^b} f \geq \overline{\int_a^b} f+g$

y como $\underline{\int_a^b} f+g \leq \overline{\int_a^b} f+g$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} f+g \leq \overline{\int_a^b} f+g \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$$

como f y g son integrables $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$, $\underline{\int_a^b} g = \overline{\int_a^b} g = \int_a^b g$

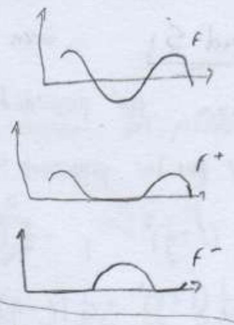
$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b f + \int_a^b g} \leq \underline{\int_a^b} f+g \leq \overline{\int_a^b} f+g \leq \underbrace{\int_a^b f + \int_a^b g}$$

como ⏝ ⏝ son iguales, todo es igual

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f+g = \overline{\int_a^b} f+g$ $\therefore$ $f+g$ es int.

además $\underline{\int_a^b} f+g = \int_a^b + \int_a^b g$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$ #

Definición: Sea $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$ $\quad f^-(x) \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$



$\Rightarrow U(f,P) - L(f,P) = U(f^+,P) - L(f^+,P) + U(f^-,P) - L(f^-,P) \quad \ldots (1)$

Dem: No, gracias qué hueva.

Propiedad 4 $\quad f$ es integrable en $[a,b] \iff f^+$ y f^- son integrables en $[a,b]$

$\Rightarrow]$ como f es int. $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}_{[a,b]}$ tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

por (1) $\Rightarrow U(f^+,P) - L(f^+,P) + U(f^-,P) - L(f^-,P) < \varepsilon$

como $U(f^-,P) - L(f^-,P)$ es positivo $\Rightarrow U(f^+,P) - L(f^+,P) < \varepsilon \quad \therefore f^+$ es integrable.

como $U(f^+,P) - L(f^+,P)$ es positivo $\Rightarrow U(f^-,P) - L(f^-,P) < \varepsilon \quad \therefore f^-$ es integrable

básicamente usamos que si $a, b > 0$
$\Rightarrow a + b < c \begin{cases} \Rightarrow a < c \\ \Rightarrow b < c \end{cases}$

$\Leftarrow]$ como f^+ y f^- son integrables
dada $\varepsilon/2 > 0 \quad \exists \quad P_1, P_2 \in \mathbb{P}_{[a,b]}$ tal que:
$U(f^+,P_1) - L(f^+,P_1) < \varepsilon/2 \qquad U(f^-,P_2) - L(f^-,P_2) < \varepsilon/2$

Sea $P = P_1 \cup P_2$

$\Rightarrow U(f^+,P) - L(f^+,P) \leq U(f^+,P_1) - L(f^+,P_1) < \varepsilon/2$
$+\ U(f^-,P) - L(f^-,P) \leq U(f^-,P_2) - L(f^-,P_2) < \varepsilon/2$

$\Rightarrow U(f,P) - L(f,P) \overset{\text{Por (1)}}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \therefore \boxed{U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon} \ \#$

Propiedad 5 $\quad$ si f es integrable $\Rightarrow f^2$ es integrable

Se prueba para el caso de una f no-negativa o sea $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

y se usa que $\inf\{f^2(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = (\inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\})^2$

$\therefore m_i(f^2) = (m_i(f))^2 \quad$ y $\quad M_i(f^2) = (M_i(f))^2$

Finalmente para el caso general se usa que $f = f^+ - f^-$ y que $f^+ f^- = 0 \leftarrow$ salen directo de su def.

$\Rightarrow f^2 = f^{+2} - \cancel{2f^+f^-} + f^{-2} = f^{+2} + f^{-2}$ y como f^+ y f^- son no-negativas entonces f^{+2} y f^{-2} son integrables.

Propiedad 5) Sean f y g funciones integrables en $[a,b]$ entonces fg es integrable.

Dem. por propiedad 3 $f+g$ es integrable y también $f-g$ lo es

y por la propiedad 4 $(f+g)^2$ y $(f-g)^2$ son integrables.

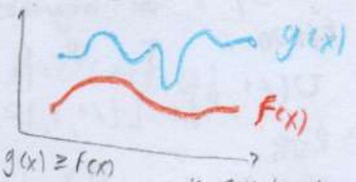
$\Rightarrow \frac{1}{4}(f+g)^2$ y $-\frac{1}{4}(f-g)^2$ son integrables por propiedad 2

$\Rightarrow \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$ es integrable usando nuevamente prop 3

$\Rightarrow \frac{1}{4}(\cancel{f^2}+2fg+\cancel{g^2}) - \frac{1}{4}(\cancel{f^2}-2fg+\cancel{g^2}) = fg$ es integrable en $[a,b]$

Prop. 6) Sean f y g funciones, si $f(x) \le g(x)$ $x \in [a,b]$ y f y g son integrables $\Rightarrow$ $\int_a^b f \le \int_a^b g$ (la integral conserva desigualdades)

Intuición:



$g(x) \ge f(x)$ y evidentemente $g(x)$ cubre una mayor área

$\circ$ $m_i(f) \le m_i(g)$ y $M_i(f) \le M_i(g)$ * lo que probó Nathan

$\Rightarrow m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \le m_i(g)(x_i - x_{i-1})$ $\quad M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \le M_i(g)(x_i - x_{i-1})$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m_i(g)(x_i - x_{i-1})$ $\quad \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(g)(x_i - x_{i-1})$ ← como siempre, multiplicamos por la longitud de intervalito y luego sumamos todo

$\Rightarrow L(f,P) \le L(g,P) \le \underline{\int_a^b} g$ (Desigualdad fundamental) $\quad \overline{\int_a^b} f \le U(f,P) \le U(g,P)$ (desigualdad fundamental)

$\Rightarrow L(f,P) \le \underline{\int_a^b} g$ $\quad \overline{\int_a^b} f \le U(g,P)$

entonces $\underline{\int_a^b} g$ es cota sup de $L(f,P)$ $\wedge$ $\overline{\int_a^b} f$ es cota inferior de $U(g,P)$

$\therefore \underline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} g$ y como $\underline{\int_a^b} = \sup\{L(f,P)\}$ $\quad$ y como $\overline{\int_a^b} = \inf\{U(g,P)\}$ $\quad \overline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} g$

pero $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$ y $\underline{\int_a^b} g = \overline{\int_a^b} g = \int_a^b g$ porque son integrables $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f \le \int_a^b g}$$ //

Prop. 7) Sea f una función integrable en $[a,b]$ $\Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$

Como f es int $\Rightarrow f^+$ y f^- son int. $\Rightarrow f^+ + f^-$ es int.

pero $f^+ = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\quad f^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \ge 0 \\ -f(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow f^+ + f^- = \begin{cases} f(x)+0 & \text{si } x \ge 0 \\ 0-f(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

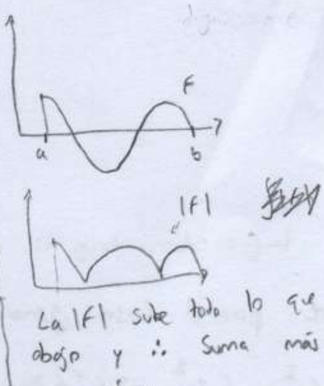
$\therefore f^+ + f^- = |f|$ y es int.

Por otro lado $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ propiedades de abs

$\Rightarrow \int_a^b -|f(x)| \le \int_a^b f(x) \le \int_a^b |f(x)|$ por propiedad 6

$\Rightarrow -\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f| \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$ ← Propiedades de val abs ($-a \le b \le a \Rightarrow |b| < a$)

Intuición



La $|f|$ sube todo lo que estaba abajo y $\therefore$ suma más el área.

Definición: $\int_a^b f = -\int_b^a f$ ← voltear los límites de integración cambia el signo.

∘ Justificación

Sabemos que $\int_b^b f = 0$ ← porque no hay ningún intervalo sobre el cual calcular el área.

$\Rightarrow 0 = \int_b^b f = \int_b^a f + \int_a^b f$ ← se comprueba con lema 2. $\Rightarrow \int_a^b f = -\int_b^a f$

UNIDAD 6:

Antiderivada

Este es un tema que al parecer no tiene nada que ver con la integral, pero pronto lo tendrá.

Dada una función $f(x)$, ya se definió su derivada en calc I como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y se dijo que esta derivada es la razón de cambio de la función. Nos dice qué tanto cambia la función si hacemos un cambio en 'x'.

Ejemplos:

- $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{Sen}(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \cdot \ln a$
- $\frac{d}{dx} c = 0$

Entonces cada función (que sea derivable) tiene otra función que llamamos su derivada. Sin embargo, podemos hacer lo opuesto y a una función $f(x)$ encontrarle su Antiderivada, que llamaremos $F(x)$. Esta nueva función tiene que cumplir que $F'(x) = f(x)$.

Ejemplos

Antiderivada de $2x \rightarrow x^2+C$ ya que $\frac{d}{dx} x^2+c = 2x$

Antiderivada de $\cos(x) \rightarrow \operatorname{Sen}(x) + C$

Antiderivada de $e^x \rightarrow e^x + C$

Antiderivada de $x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Antiderivada de $\frac{1}{x} \rightarrow \ln(x)$

← El $+C$ se debe a que no importa qué constante le sumemos a $F(x)$, al derivar ésta desaparece y se cumple que $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$

en vez de escribir antiderivada de $2x$ se escribe simplemente $\int 2x$ (el símbolo de integral pero sin los límites). Esto es debido a la relación entre antiderivadas e integrales. Sin embargo no son lo mismo. La integral de $f(x)$ se tiene que definir sobre un intervalo $[a,b]$ y da un número que es el área bajo la curva en el intervalo. La antiderivada es la función que al derivarla nos regresa a $f(x)$, da como resultado una función. (un grupo de funciones, ya que podemos sumar cualquier constante $+C$).

Teorema Fundamental 1

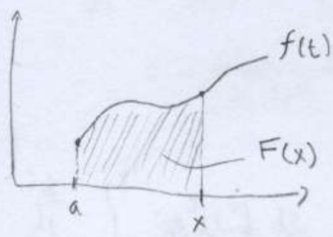
Sea f una función continua en $[a,b]$ y sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces F es derivable en $[a,b]$ y $F' = f$

Traducción:
Primero hay que entender cómo se definió $F(x)$. evaluar $F(x)$ lo que hace es cambiar el límite superior de la integral. Por ejemplo:

- $F(3) = \int_a^3 f(t)\,dt$ $\qquad$ • $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ $\qquad$ • $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt = 0$

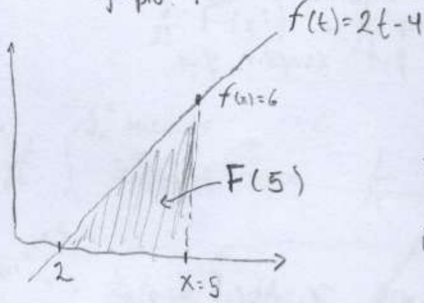
* Nota: La función $f(t)$ está definida sobre t, no x. ¿por qué? , esto se debe a que no importa cuál sea la variable dentro de la integral.
Es fácil ver que $\int_a^b x^2 + 2x\,dx = \int_a^b t^2 + 2t\,dt = \int_a^b .l.^2 + 2.l.\,d.l.$ ← nos está preguntando cuál es el área bajo la curva de a a b, no importa si usamos t o x para darle nombre a la curva, el resultado es el mismo, ya que la curva es la misma.

• Entendamos gráficamente $F(x)$:



Tenemos una función $f(t)$ como la de la gráfica, ahora definimos una función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
Cuando evaluamos un valor en particular en esta función F, el resultado es el área bajo la curva $f(t)$ desde a hasta x.

Ejemplo:



Digamos que $f(t) = 2t - 4$ y hacemos $a = 2$, entonces $F(x) = \int_2^x 2t - 4\,dt$. entonces por ejemplo, evaluar en $x=5$

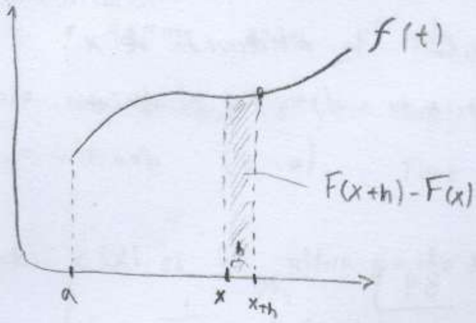
$F(5) = \int_2^5 2t - 4\,dt$. nos pide el área bajo la curva en el intervalo de 2 a 5.
Todavía no sabemos como resolver esta integral, pero como sabemos que representa el área bajo la curva, en este caso simplemente la calculamos gráficamente ya que es una figura sencilla y nos queda $\boxed{F(5) = 9}$

Por otro lado, es fácil ver que $F(2) = 0$.

Entonces $F(x)$ es una función que nos da el área bajo la curva f en el intervalo $[a, x]$.
Ahora el teorema nos pregunta cuál es la derivada de F

...ución Teorema fundamental: Gráficamente.

El teorema nos pide calcular la derivada de $F(x)$, o sea $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$. Lo haremos gráficamente:



$F(x+h)$ es el área bajo la curva desde a hasta $x+h$

$F(x)$ es el área bajo la curva desde a hasta x,

entonces $F(x+h) - F(x)$ es el área desde x hasta $x+h$

o sea: $\int_a^{x+h} f(t) - \int_a^x f(t) = \int_x^{x+h} f(t)$

Básicamente es el lema 2 de integrales

Ahora, hacemos $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$, entonces estamos dividiendo el área de ese rectangulito entre su base, y el resultado será su altura, pero su altura está dada por f evaluada en ese punto, o sea $f(x)$

$\therefore \quad F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ #

La demostración de verdad es obviamente más complicada.

Pero entonces lo que nos dice el teorema es que F es la antiderivada de f. O sea que la función F que calcula el área bajo f es su antiderivada. Y ahí está la relación entre antiderivadas y áreas bajo curvas.

Teorema Fundamental II.

Sea f una función continua en $[a,b]$ y sea F tal que $F' = f$ (o sea F es la antiderivada de f)

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Demostración:

Sea $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow G'(x) = f(x)$ ← Por el Teorema Fundamental 1

$\Rightarrow G'(x) = F'(x)$ ← Por hipótesis $F' = f$

$\Rightarrow G(x) = F(x) + K$ (1) ← Si dos funciones tienen la misma derivada, las funciones originales difieren en una constante (cálculo 1)

$\Rightarrow G(a) = F(a) + K$ ← pero $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow F(a) + k = 0 \quad \rightarrow \quad K = -F(a)$

$\therefore$ por (1) $\Rightarrow G(x) = F(x) - F(a)$ $\quad \therefore G(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ #

¿Qué nos dice el TFC 2?

Nos da una forma fácil de calcular áreas. Nos dice que sólo tenemos que encontrar la antiderivada y luego evaluar ésta en los extremos. Ejemplo:

1. $\int_2^5 x^2\,dx$

· Para calcular la integral, primero encontramos la antiderivada de x^2.
· Es fácil ver que $\frac{x^3}{3}$ es esta antiderivada (ya que al derivar $\frac{x^3}{3}$ regresamos a x^2)

· Evaluar x^3 en los extremos: $\frac{x^3}{3}\Big|_2^5 \to \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = 39$

2. $\int_1^6 \frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\ln(x)}_{\text{antiderivada de } 1/x}\Big|_1^6 \to \ln(6) - \ln(1) = 1.791$

Porque la integral es lineal (prop. 2 y 3)

3. $\int_a^b x^2+2x = \int_a^b x^2 + 2\int_a^b x \to \frac{x^3}{3}\Big|_a^b + 2\,\frac{x^2}{2}\Big|_a^b \to \frac{x^3}{3}\Big|_a^b + x^2\Big|_a^b = \boxed{\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} + b^2 - a^2}$

4. $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi} = \operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(0) = 0 - 0 = 0$

5. $\int_{-2}^{2} e^{x}\,dx \to e^x\Big|_{-2}^{2} = e^2 - e^{-2} = 7.253$

6. $\int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,dx$ } resulta que esta integral no se puede calcular con el Teorema Fundamental (o sea con antiderivadas) ya que e^{-x^2} no tiene antiderivada.

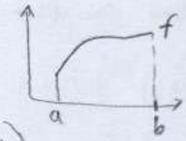
Los métodos para encontrar antiderivadas se ven después.

Valor promedio de f en $[a,b]$

Definición: el valor promedio de f en el intervalo $[a,b]$ se define como $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

Justificación:

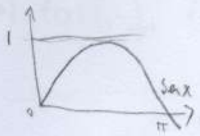
queremos sacar el valor promedio de f



Para esto sacamos el área bajo la curva $\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$ y lo estamos dividiendo entre la base o intervalo $(b-a)$. Tiene sentido que esto nos dé una altura. y es la altura promedio.

Ejemplo: ¿Cuál es la altura promedio de $\operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0,\pi]$?

$$\bar{f} = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx \to \frac{1}{\pi}\left(-\cos(x)\right)\Big|_0^{\pi} \to \frac{1}{\pi}\left(-\cos(\pi) - -\cos(0)\right) = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi} = \underline{0.636}$$



← o sea, la altura promedio de esta curva es más o menos $\underline{0.636}$,

• Teorema del Valor Medio Integrales.

• recordatorio: Teorema del Valor medio derivadas: nos dice que para una función definida en $[a,b]$, podemos encontrar un punto c tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

• Teorema: Sea f una función continua en $[a,b]$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \bar{f}$

o sea, la función pasa por su valor promedio en algún punto c.

Dem: | Sea $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

por el TFC I tenemos que G es derivable en $[a,b]$

Aplicamos el TVM pero para derivadas, entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que

$$G'(c) = \frac{G(b) - G(a)}{b-a} \to G'(c)\,(b-a) = G(b) - G(a)$$

$$\Rightarrow f(c)\,(b-a) = G(b) - G(a) \quad \leftarrow \text{Por TFC I que nos dice que } G' = f$$

$$\Rightarrow f(c)\,(b-a) = \int_a^b f(t)\,dt \quad \leftarrow \text{Por TFC II}$$

$$\Rightarrow f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \quad \#$$

Teorema de Cambio de Variable de Integrales.

Recordatorio: Regla de la cadena.

La Regla de la cadena nos dice como derivar la composición de funciones.

$$\left(f(g(t))\right)' = f'(g(t))\, g'(t)$$

Ejemplo:

1. $\frac{d}{dx} \operatorname{Sen}(x^2)$

1. Identificamos la función "exterior" que es Sen
2. Derivamos esta función y la evaluamos en la función de adentro

Sen $\Rightarrow$ $\cos(x^2)$

3. Multiplicamos por la derivada de lo de adentro:

$\cos(x^2)\, 2x$ #

2. $\frac{d}{dx} \ln(x^4) = \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\text{Derivada de ln evaluada en } x^4} \cdot \underbrace{4x^3}_{\text{Derivada de } x^4} = \frac{4}{x}$ #

3. $\frac{d}{dx} \cos^2(x) = \frac{d}{dx}\left(\cos(x)\right)^2 = \underbrace{2\cos(x)}_{\text{Derivada de algo al cuadrado, evaluada en } \cos x} \cdot \underbrace{(-\operatorname{Sen} x)}_{\text{derivada de } \cos x} = -2\cos x \operatorname{Sen} x$.

Teorema de Cambio de Variable Integrales:

Sea f una función en $[a,b]$ y sea g una función derivable tal que $g(c) = a$ $g(d) = b$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\, g'(t)\, dt.$$

Dem.: Usa los TFC y la regla de la cadena y ya sale.

Encuentre $f'(x)$

•) $f(x) = \int_a^x \frac{1}{1+\text{sen}^2 t}\,dt \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x \frac{1}{1+\text{sen}^2 t}\,dt = \frac{1}{1+\text{sen}^2 x}$ ← Por TFC I

••) $f(x) = \int_a^{x^3} \frac{1}{1+\text{sen}^2 t}\,dt$

Sea $F(u) = \int_a^u \frac{1}{1+\text{sen}^2 t}\,dt$ y sea $g(x) = x^3$

$F'(u) = \frac{1}{1+\text{sen}^2(u)} \qquad g'(x) = 3x^2$

$\therefore \int_a^{x^3} \frac{1}{1+\text{sen}^2 t}\,dt = F(g(x))$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\text{sen}^2 t}\,dt = \frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x) = \frac{1}{1+\text{sen}^2(x^3)}\cdot 3x^2 = \boxed{\frac{3x^2}{1+\text{sen}^2(x^3)}}$$

•••) $f(x) = \int_{x^3}^a \frac{1}{1+\text{sen}^2 t}\,dt = -\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\text{sen}^2 t}\,dt \qquad \therefore \frac{d}{dx}f(x) = \boxed{\frac{-3x^2}{1+\text{sen}^2(x^3)}}$

••••) $f(x) = \left(\int_a^x \frac{1}{\text{sen}^2 t}\,dt\right)^3$

Sea $F(u) = \int_a^u \frac{1}{\text{sen}^2 t}\,dt \qquad g(u) = u^3$

$F'(u) = \frac{1}{\text{sen}^2 u} \qquad g'(u) = 3u^2$

$$f(x) = g(F(x)) \rightarrow f'(x) = g'(F(x))\cdot F'(x) = 3(F(x))^2\cdot\frac{1}{\text{sen}^2(x)} = \frac{3\left(\int_a^x \frac{1}{\text{sen}^2 t}\,dt\right)^2}{\text{sen}^2 x}$$

•••••) $\int_a^{\cos(x)} \frac{1}{t^2+t}\,dt = f(x)$

Sea $F(u) = \int_a^u \frac{1}{t^2+t}\,dt$ y sea $g(x) = \cos(x)$

$F'(u) = \frac{1}{u^2+u} \qquad g'(x) = -\text{sen}(x)$

$\therefore f(x) = F(g(x)) \rightarrow$

$$f'(x) = F'(g(x))\cdot g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x + \cos x}\cdot -\text{sen}\,x = \boxed{\frac{-\text{sen}\,x}{\cos^2 x + \cos x}}$$

—) $f(x) = \int_5^x \left(\int_8^y \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)dy$

Sea $G(u) = \int_8^u \frac{1}{1+t^2}\,dt \rightarrow G'(u) = \frac{1}{1+u^2}$

$$f(x) = \int_5^x G(y)\,dy \rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}\int_5^x G(y)\,dy = G(x) = \boxed{\int_8^x \frac{1}{1+t^2}\,dt}$$

—) $f(x) = \int_0^{\int_0^x \text{sen}^2 t\,dt} \cos^2(r)\,dr$

Sea $G(u) = \int_0^u \text{sen}^2 t\,dt \qquad F(u) = \int_0^u \cos^2 t\,dt$

$G'(u) = \text{sen}^2 u \qquad F'(u) = \cos^2 u$

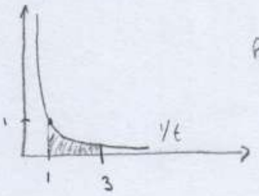
$$\therefore f(x) = F(G(x)) \rightarrow f'(x) = F'(G(x))\,G'(x)$$

$$= \boxed{\cos^2\left(\int_0^x \text{sen}^2 t\,dt\right)\,\text{sen}^2 x}$$

Anexo: Exponencial y Log.

Def. La función de logaritmo natural se define como $\ln x \equiv \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

o sea para calcular el $\ln X$, se mide el área debajo de la curva $1/t$ de 1 a X.



Por ejemplo: $\ln 3$ = el área marcada en la figura

Así se define ln, no hay más.

(sólo está definida para valores positivos)

otra forma de pensar en $\ln x$ es como la respuesta a la pregunta: ¿A qué potencia debo elevar $e = 2.71828....$ para que me dé x.

Ejemplo $\ln(5) =$ ← me pregunta a qué potencia elevar e para que dé 5., resulta que la respuesta es 1.609 porque $e^{1.609} = 5$ $\therefore$ $\underline{\ln(5) = 1.609}$

No sé por qué ambas definiciones son lo mismo.

Prop. 1: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

corolario: $\ln(x^n) = n\ln(x)$

Demostración:

- Según la definición de ln. $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ y por el TFC $\Rightarrow$ $\underline{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$

Sea y un número fijo, definimos $f(x) = \ln(xy)$

$$\Rightarrow f'(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regla de cadena}}}{\ln'(xy)} = \frac{1}{xy}\cdot y = \frac{1}{x}$$

$\therefore f'(x) = \ln'(x)$ ← Si dos funciones tienen la misma derivada, las funciones originales distan en solo una constante.

$\Rightarrow f(x) = \ln(x) + K$

$\therefore \ln(xy) = \ln(x) + K$

pero Si hacemos $x=1$, podemos encontrar qué es K

$$\ln(1y) = \ln(1) + K \Rightarrow \ln(y) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{porque } \ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0}}{0} + K \qquad \therefore \underline{K = \ln(y)}$$

Entonces $\underline{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$

Corolario: $\ln(x^n) = n\ln(x)$ por inducción.

•) Probamos para $n=1$; $\ln(x^1) = \ln(x) = 1\ln(x)$ $\therefore \ln(x^1) = 1\ln(x)$ ✓ ← se cumple

••) suponemos que se cumple para una n, pd. se cumple para $n+1$

$$\ln(x^{n+1}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Por Teorema}}}{\ln(x^n\cdot x) = \ln(x^n) + \ln(x)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por hipótesis inducción, se cumple para } n}}{n\ln(x) + \ln(x)} = \underline{(n+1)\ln(x)}$$ ✓ ← se cumple con $n+1$

$\therefore$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$

Corolario 2) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

Dem: $\ln(x) = \ln\left(\frac{x}{y}y\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln(y) \quad \therefore \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ #

Definimos $\exp(x)$ como la función inversa de ln. O sea $\exp(\ln(x)) = x$

sabemos que $\exp(x) = e^x$ pero esto lo demostraremos.

Teorema 2) $\exp'(x) = \exp(x)$

Dem. $\exp'(x) = \dfrac{1}{\ln'(\exp(x))}$ ← Teorema de cómo derivar la inversa de una función. (calc I)

$f^{*\prime}(x) = \dfrac{1}{f'(f^*(x))}$ ← donde f^* es la inversa de f

$= \dfrac{1}{\frac{1}{\exp(x)}}$ ← porque $\ln'(u) = 1/u$

$= \exp(x) \qquad \therefore \underline{\exp'(x) = \exp(x)}$

Teorema 3. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ sea $x_1 = \exp(x)$ $y_1 = \exp(y)$

$\Rightarrow \ln(x_1) = \ln(\exp(x)) \Rightarrow x = \ln(x_1)$

$\Rightarrow \ln(y_1) = \ln(\exp(y)) \Rightarrow y = \ln(y_1)$

$\Rightarrow x+y = \ln(x_1) + \ln(y_1) = \ln(x_1 y_1) \qquad \therefore x+y = \ln(x_1 y_1)$

$\exp(x+y) = \cancel{\exp}(\cancel{\ln}(x_1 y_1))$ ← aplicamos exp de ambos lados

$\Rightarrow \exp(x+y) = x_1 y_1 = \exp(x)\exp(y)$ #

Definición:

Definimos $e \equiv \exp(1)$

$\exp(x) \equiv e^x$