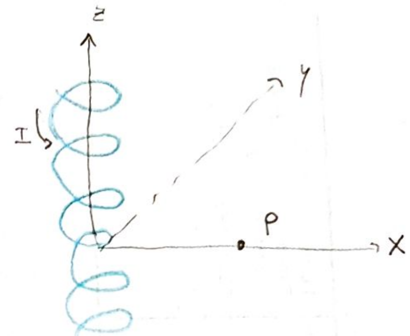
Examen 3 Electro I Tomás Ricardo Basile Álvarez

1) Considera dos solenoides coaxiales, cada uno con corriente I en direcciones opuestas. El interno tiene radio a con n_1 vueltas, El exterior, radio b con n_2 vueltas. Encuentra $\bar{B}$ en:

a) Dentro del interno b) Entre los solenoides c) Afuera de ambos.

• Primero calcularé el campo de un solenoide "general" de radio R, con n vueltas/longitud y corriente I

pensemos que el solenoide está alineado al eje Z y es infinito

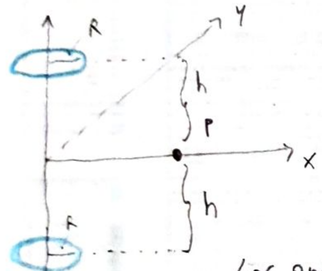


Paso 1) Probar que el campo $\bar{B}$ tiene sólo componente en dirección $\hat{z}$ en cualquier punto P

Nos fijaremos en un punto $P = (x,0,0)$ sin importar si está dentro o no del solenoide.

Si $n \gg 1/R$ entonces el solenoide da muchas vueltas por unidad de longitud y así se puede aproximar como si estuviera formado por muchos anillos de corriente totalmente planos (paralelos al plano XY)

Consideremos dos estos anillos en posiciones opuestas a P, como en el dibujo



Veremos que el campo $\bar{B}$ del anillo superior se cancela con el del inferior en todas las direcciones excepto $\hat{z}$.

Para eso usamos la ley de Biot - Savaart:

El punto P tiene coordenadas $\bar{r} = (x,0,0)$

• El círculo superior:

Los puntos en este círculo se parametrizan como $L_1(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t, h)$ $t \in [0,2\pi]$

$$\Rightarrow d\bar{L}_1 = \frac{dL_1}{dt}dt = (-R\operatorname{sen} t, R\cos t, 0)\,dt$$

• El círculo inferior:

se parametriza como: $L_2(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t, -h)$, $t \in [0,2\pi]$

$$\Rightarrow d\bar{L}_2 = \frac{dL_2}{dt}dt = (-R\operatorname{sen} t, R\cos t, 0)\,dt$$

Entonces, según la Ley de Biot-Savaart como se vió en clase, el campo Total de los dos círculos es:

$$\bar{B} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int \frac{I\, dL_1 \times (\bar{r} - \bar{L}_1)}{\|\bar{r} - \bar{L}_1\|^3} + \int \frac{I\, dL_2 \times (\bar{r} - \bar{L}_2)}{\|\bar{r} - \bar{L}_2\|^3}\right)$$

Sustituimos
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} \frac{I(-R\operatorname{sen}t, R\cos t, 0) \times (x - R\cos t, -R\operatorname{sen}t, -h)}{\|(x-R\cos t, -R\operatorname{sen}t, -h)\|^3}dt + \int_0^{2\pi} \frac{I(-R\operatorname{sen}t, R\cos t, 0) \times (x - R\cos t, -R\operatorname{sen}t, h)}{\|(x-R\cos t, -R\operatorname{sen}t, h)\|^3}dt\right)$$

Calculamos
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} I\frac{(-hR\cos t, -hR\operatorname{sen}t, R^2 - Rx\cos t)}{(x^2 - 2Rx\cos t + R^2 + h^2)^{3/2}}dt + \int_0^{2\pi} \frac{I(hR\cos t, hR\operatorname{sen}t, R^2 - Rx\cos t)}{(x^2 - 2Rx\cos t + R^2 + h^2)^{3/2}}dt$$

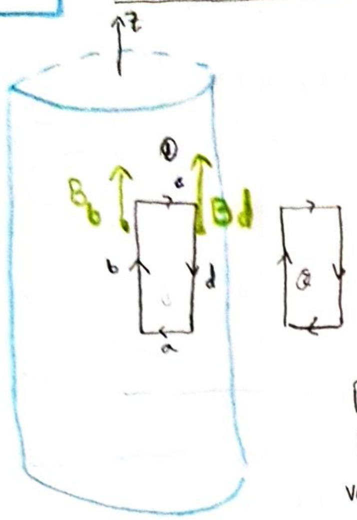
Juntamos
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I(0,0,2R^2 - 2Rx\cos t)}{(x^2 - 2Rx\cos t + R^2 + h^2)^{3/2}}dt \quad \dots(1)$$

Esta integral sólo tiene componente $\hat{z}$.

A parte, el punto P se puede poner en cualquier lado, pues el solenoide es infinito, por lo que para cualquier anillo de un lado, siempre habrá uno del lado opuesto que lo cancele. Y luego se pueden escoger los ejes de tal forma que P quede con coordenadas $(x,0,0)$

$\therefore$ En cualquier punto, el campo magnético tiene dirección $\hat{z}$. $\blacktriangle$

Paso 2 Probar que el campo es Uniforme adentro y Afuera.



Proponemos el circuito amperiano (1) dentro del solenoide.

Por la ley de Ampere: $\oint_{①} \bar{B} \cdot ds = \mu_0 I_{a\ través}$

pero este circuito no es atravesado por corriente $\Rightarrow I_{a\ través} = 0$

$$\Rightarrow \oint_{(1)} \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$$

separamos la integral en los 4 lados: (a, b, c, d).

$$\int_a \bar{B} \cdot d\bar{s} + \int_b \bar{B} \cdot d\bar{s} + \int_c \bar{B} \cdot d\bar{s} + \int_d \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$$

Pero como $\bar{B}$ sólo tiene componente $\hat{z}$ $\Rightarrow$ las integrales en a y c valen 0.
Por otro lado, vemos que en la trayectoria b: $d\bar{s} = dz\,\hat{z}$ (porque el camino es vertical hacia arriba) y en trayectoria d: $d\bar{s} = -dz\,\hat{z}$

$$\Rightarrow \int_b \bar{B} \cdot dz\,\hat{z} + \int_d \bar{B} \cdot (-dz\,\hat{z}) = 0$$

Pero a lo largo de toda la trayectoria b, $\bar{B}$ tiene valor cte, pues el solenoide es <u>infinito</u> en la dirección z, entonces el campo debe de tener el mismo valor sin importar la coordenada z donde se mida.** $\Rightarrow$ digamos que a lo largo de b, el campo $\bar{B}$ vale $B_b\,\hat{z} = cte$
y similarmente, en cualquier punto sobre d, vale $B_d\,\hat{z} = cte$

$\Rightarrow$ las integrales quedan: $\int_b B_b\,\hat{z} \cdot dz\,\hat{z} - \int_d B_d\,\hat{z} \cdot dz\,\hat{z} = 0$ pues $B_b = cte$, $B_d = cte$

$$\Rightarrow \int_b B_b\, dz - \int B_d\, dz = 0 \qquad \Rightarrow B_b \int_b dz - B_d \int_d dz = 0$$

Pero $\int_b dz$ es simplemente la longitud del lado b y es igual a $\int_d dz$ (la del lado d)

$$\Rightarrow B_b - B_d = 0 \qquad \Rightarrow \underline{B_b = B_d}$$

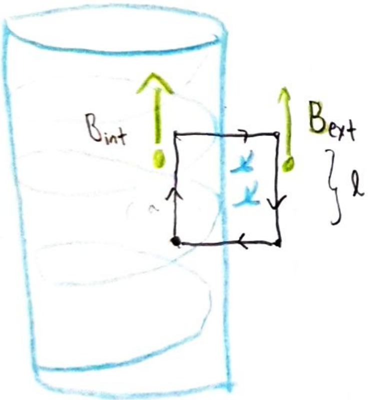
Esto se vale para cualquier rectángulo contenido en el solenoide $\Rightarrow$ concluimos que en todos los puntos dentro del solenoide (sin importar la distancia radial al centro), el campo tiene un valor fijo $\underline{B_{int}\,\hat{z}}$

Por un argumento <u>completamente</u> análogo pero usando un circuito como el (2) afuera del solenoide, concluimos que en cualquier punto fuera del solenoide, el campo tiene un valor fijo $\underline{B_{ext}\,\hat{z}}$

** Porque sin importar la coordenada z en la que nos paremos, siempre veríamos lo mismo (un solenoide que se extiende al infinito abajo y arriba)

Finalmente, calculemos la diferencia entre B_{int} y B_{ext}

Usamos un circuito amperiano como se ve, con longitud l



Por ley de ampere: $\oint \bar{B}\cdot d\bar{s} = \mu_0 I_{through}$

Pero, a esta integral sólo contribuyen, los lados verticales (pues el campo es vertical) y como a parte B_{int} y B_{ext} son ctes, es fácil ver que la integral queda:

$$\oint \bar{B}\cdot ds = \int_{\uparrow} B\cdot dz + \int_{\downarrow} B\cdot(-dz)$$

$$= \int_{\uparrow} B_{int}\, dz + \int_{\downarrow} B_{ext}(-dz) = \underline{B_{int}\, l - B_{ext}\, l}$$

Por otro lado,

La corriente I que atraviesa el circuito es IN con N el número de vueltas dentro del circuito

$$\Rightarrow I_{Thru} = I(n l) = \underline{n l I}$$

Juntamos esto con la Ley de Ampere $\Rightarrow (B_{int} - B_{ext})\, l = \mu_0\, n l I$

$$\Rightarrow \underline{B_{int} = B_{ext} + \mu_0 I}$$

Paso 3) Probar que $B_{ext} = 0$

Tomemos un punto $P = (x, 0, 0)$ muy lejos del solenoide, es decir $x \gg R$

El campo en este punto generado por 2 anillos opuestos fue calculado en Paso 1, en la integral (1)
y vale

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{I\,(2R^2-2Rx\cos t)}{(x^2-2Rx\cos t+R^2+h^2)^{3/2}}\,dt$$

Si x es muy grande $\Rightarrow$ el denominador es aprox. $(x^2)^{3/2}$ y el numerador es $-2IRx\cos t$

$$\Rightarrow \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-2IRx\cos t}{x^3}\,dt = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{x^2}\int_0^{2\pi}-2IR\cos t\,dt \approx 0$$

para x muy grande

Entonces, para puntos muy lejanos, $B_{ext} = 0$, pero dijimos que B_{ext} tiene el mismo valor en todos los puntos fuera del Solenoide $\Rightarrow$ $B_{ext} = 0$ en todo punto fuera

Ahora, por el resultado final del paso 2), tenemos

$$B_{int} = B_{ext} + \mu_0 n I = \underline{\mu_0 n I}$$

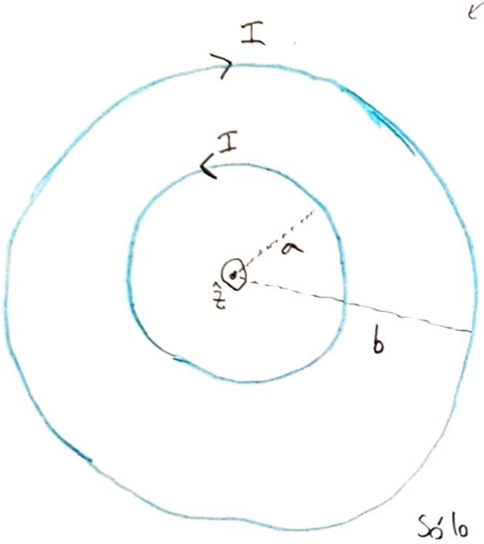
Para concluir todo esto, Un solenoide infinito con radio R, corriente I y n vueltas \ longitud (con n grande) genera un campo:

$$\vec{B}_{ext} = \vec{0}$$
$$\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \hat{z}$$

con la dirección de $\bar{B}_{int}$ dada por la regla de la mano Derecha.

Ahora sí (al fin), el problema:

Los dos solenoides desde un punto de vista transversal (con $\hat{z}$ apuntando hacia afuera de la hoja)



a) Dentro del solenoide interno: $(0 \leq r < a)$

Como estamos dentro de ambos solenoides, los dos contribuyen al campo total.

$$\bar{B}_{Tot} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2$$

Campos dentro de solenoides 1 y 2 (tomando en cuenta el sentido de la corriente)

$$= \mu_0 n_1 I \hat{z} + (-\mu_0 n_2 I \hat{z})$$

$$= \boxed{\mu_0 I (n_1 - n_2) \hat{z}}$$

b) Entre los Solenoides: $(a < r < b)$

Sólo estamos dentro del solenoide grande, sólo él contribuye al campo $\bar{B}_{Tot}$, el Solenoide chico no contribuye, pues estamos afuera de él.

$$\Rightarrow \bar{B}_{Tot} = \bar{B}_2 = \underline{-\mu_0 n_2 I \hat{z}}$$

c) Afuera de Ambos: $(r > b)$

Como estamos afuera de ambos, ninguno contribuye al campo

$$\Rightarrow \underline{\bar{B}_{Tot} = \bar{0}}$$

2) Un cascarón esférico de radio R y densidad σ rota con velocidad angular ω alrededor del eje z. Calcula A sobre la esfera.

a) Por integración directa, calcula $\bar{A}$ en $(R,0,0)$

Primero que nada, para calcular A en un punto $\bar{r}$ hay que encontrar la integral $\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\bar{J}(\bar{r}')\, dV}{\|\bar{r}-\bar{r}'\|}$ ... (1)

Esto es para una corriente volumétrica con densidad de corriente $\bar{J}$.

El problema en cuestión no tiene una corriente volumétrica, sino superficial. Para adaptar la expresión (1) pensemos que la esfera es en realidad sólida, con un pequeñísimo espesor dr.

Así, ahora tiene un diferencial de volumen $dV = dr\, da$, ← con da un pedacito de área superficial

y una densidad $\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{dq}{dr\, da} = \frac{\sigma}{dr} \Rightarrow \rho\, dr = \sigma$

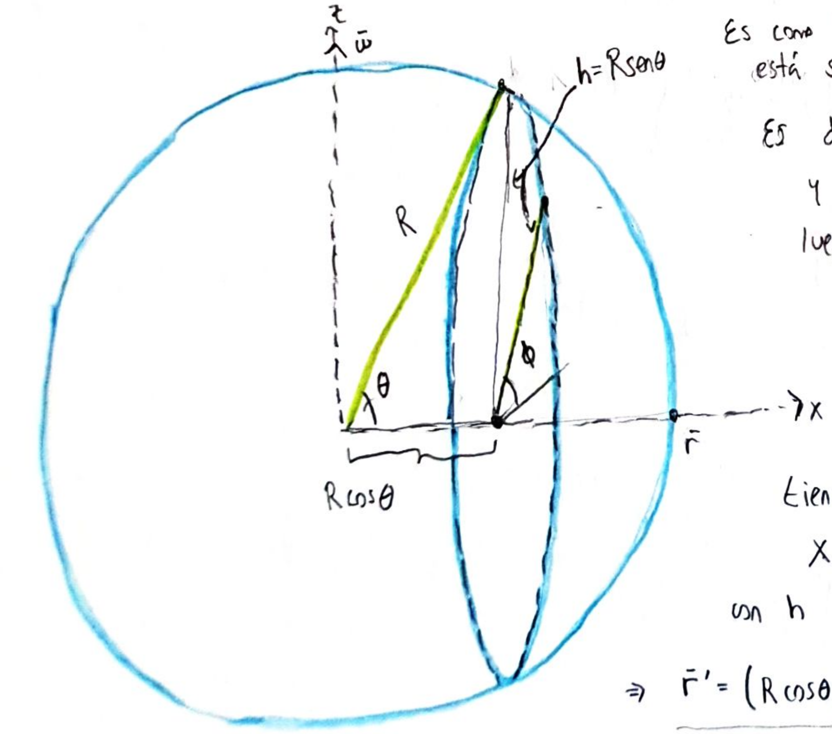
Finalmente, vimos en clase que $\bar{J}(\bar{r}') = \rho(\bar{r}')\,\bar{v}(\bar{r}')$ ← velocidad del punto $\bar{r}'$

cuando estudiamos la de velocidad de deriva

$\Rightarrow$ La expresión (1) queda como: $\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\rho(\bar{r}')\,\bar{v}(\bar{r}')}{\|\bar{r}-\bar{r}'\|}\, dr\, da = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\sigma\,\bar{v}(\bar{r}')\, da}{\|\bar{r}-\bar{r}'\|}$ ... (2)

Donde $\bar{r}$ es el punto de medida $(R,0,0)$ y $\bar{r}'$ parametriza la esfera; $\bar{v}(\bar{r}')$ da la vel. del punto $\bar{r}'$

Necesitamos una forma de parametrizar la esfera, para así tener $\bar{r}'$. Para eso, propongo la siguiente, cortándola en anillos cuyo eje es el eje x.



Es como las coordenadas esféricas, pero el "polo norte" está sobre el eje x.

Es decir, el ángulo θ varía de $0 \to \pi$ y nos selecciona uno de los anillos, luego el ángulo ϕ varía de $0 \to 2\pi$ (medido respecto al eje y) y así va seleccionando puntos sobre el anillo.

Así, un punto $\bar{r}' = (x, y, z)$ en la esfera tiene coordenadas

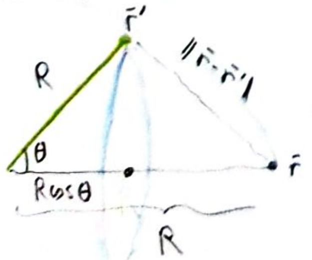
$x = R\cos\theta \qquad y = h\cos\phi \qquad z = h\,\text{sen}\,\phi$

con h el radio del anillo, que es $h = R\,\text{sen}\,\theta$

$\Rightarrow \bar{r}' = (R\cos\theta,\ R\,\text{sen}\,\theta\cos\phi,\ R\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi)$

Entonces, con $\theta \in [0,\pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, esto parametriza toda la esfera.

La ventaja de esta parametrización, es que la distancia entre un punto $\bar{r}'$ en la esfera y el punto $\bar{r} = (R,0,0)$ se puede obtener muy fácil. Sólo dibujamos



← este triángulo y usamos ley de cosenos:

$\|\bar{r}-\bar{r}'\|^2 = R^2 + R^2 - 2RR\cos\theta$

$\rightarrow \|\bar{r}-\bar{r}'\|^2 = 2R^2(1-\cos\theta)$

$\rightarrow \|\bar{r}-\bar{r}'\| = R\sqrt{2-2\cos\theta}$

Ahora, calculamos $\bar{V}(\bar{r}')$. Es un resultado que se ve en mecánica que la velocidad $\bar{v}$ de un punto $\bar{r}'$ en un objeto que rota con vel. angular $\bar{\omega}$ es $\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}'$

En nuestro caso, $\bar{\omega}$ apunta en la dirección z $\rightarrow$ $\bar{\omega} = (0,0,\omega)$ y también $\bar{r}' = (R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)$

$$\Rightarrow \bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos\theta & R\operatorname{sen}\theta\cos\phi & R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} = \underline{(-\omega R\operatorname{sen}\theta\cos\phi,\ R\omega\cos\theta, 0)},$$

Finalmente, sólo nos falta conocer da.

Para esto calculamos los elementos de longitud de la parametrización $r'(\theta,\phi)$, que son

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ h_1 = \left|\frac{\partial r'}{\partial\theta}\right| = |(-R\operatorname{sen}\theta, R\cos\theta\cos\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi)| = R \\ &\bullet\ h_2 = \left|\frac{\partial r'}{\partial\phi}\right| = |(0, -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi)| = R\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} da &= h_1 h_2\, d\theta\, d\phi \\ &= \underline{R^2\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}, \end{aligned}$$

este diferencial de área coincide con el de una esfera parametrizada con coordenadas esféricas, esto era de esperarse, pues la parametrización que usé es como de coordenadas esféricas, pero con el "polo" en en el eje X.

Ahora metemos todo esto en la integral (2):

$$A(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\sigma\,\bar{v}(\bar{r}')}{\|\bar{r}'-\bar{r}\|}\,da = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\sigma(-\omega R\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + R\omega\cos\theta\,\hat{\jmath})}{R\sqrt{2-2\cos\theta}} R^2\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\omega\mu_0 R^2\sigma}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-\operatorname{sen}^2\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}}{\sqrt{2-2\cos\theta}}\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{\omega\mu_0 R^2\sigma}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{2\pi\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}}\,\hat{\jmath}\, d\theta$$

pues $\int_0^{2\pi}\cos\phi = 0$, $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$

usando identidades de doble ángulo:

- $\cos\theta = \cos^2(\theta/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta/2$
- $\operatorname{sen}\theta = 2\cos\theta/2\,\operatorname{sen}\theta/2$
- $\frac{1-\cos\theta}{2} = \operatorname{sen}^2\theta/2$

$$= \frac{\omega\mu_0 R^2\sigma}{2}\int_0^{\pi} \frac{(1-2\operatorname{sen}^2\theta/2)(2\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2)}{\sqrt{4\operatorname{sen}^2\theta/2}}\,\hat{\jmath}\, d\theta$$

$$= \frac{\omega\mu_0 R^2\sigma}{2}\int_0^{\pi} (1-2\operatorname{sen}^2(\theta/2))\cos(\theta/2)\, d\theta\ \hat{\jmath}$$

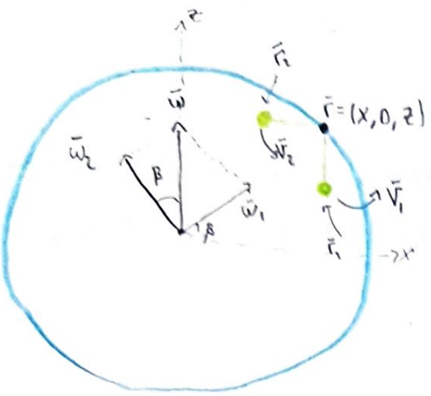
$$= \frac{\omega\mu_0 R^2\sigma}{2}\int_0^{\pi} \cos(\theta/2) - 2\cos(\theta/2)\operatorname{sen}^2(\theta/2)\, d\theta\ \hat{\jmath}$$

$$= \frac{\omega\mu_0 R^2\sigma}{2}\left[2\operatorname{sen}(\theta/2) - \frac{4}{3}\operatorname{sen}^3(\theta/2)\right]\Bigg|_0^{\pi}\ \hat{\jmath}$$

$$= \frac{\omega\mu_0 R^2\sigma}{2}\left[2 - 4/3\right]\hat{\jmath}$$

$$= \boxed{\frac{\omega\mu_0 R^2\sigma}{3}\,\hat{\jmath}}$$

b) Encuentra $\bar{A}$ en $(x,0,z)$ como se muestra en la figura:



Descomponemos la rotación $\bar{\omega}$ en la superposición de dos rotaciones $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$. Calculamos $\bar{A}$ por separado para cada rotación y luego sumamos

•) La rotación $\bar{\omega}_1$: El campo $\bar{A}(x,0,z)$ debido a $\bar{\omega}_1$ vale $\bar{0}$.

Pensemos en la contribución $d\bar{A}_1$ debida al punto $\bar{r}_1$, su contribución es:

$$d\bar{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sigma \bar{v}_1}{\|\bar{r}-\bar{r}_1\|}$$

Tomamos un punto $\bar{r}_2$ opuesto a $\bar{r}_1$ con respecto al eje donde está $\bar{\omega}_1$, este punto genera una contribución al potencial magnético

$$d\bar{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sigma \bar{v}_2}{\|\bar{r}-\bar{r}_2\|}$$

Pero podemos ver que por las posiciones de $\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$, tenemos que $\bar{v}_1 = -\bar{v}_2$ y además, $\|\bar{r}-\bar{r}_1\| = \|\bar{r}-\bar{r}_2\|$, $\Rightarrow dA_1 + dA_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\bar{v}_1}{\|\bar{r}-\bar{r}_1\|} + \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{r}-\bar{r}_2\|}\right) = \bar{0}$

Así, todos los puntos se cancelan de dos a dos $\Rightarrow \bar{A}_{\omega_1} = \bar{0}$

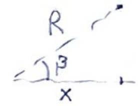
••) La rotación $\bar{\omega}_2$:

Podemos ver que el punto $(x,0,z)$ es al vector $\bar{\omega}_2$, lo que el punto $(x,0,0)$ es al vector $\bar{\omega}$ en la parte a).

Entonces, por el resultado a): $\bar{A}(x,0,z) = \frac{\mu_0 R^2 \sigma |\bar{\omega}_2|}{3}\hat{j}$ pero $|\bar{\omega}_2| = \omega\cos\beta$

$$= \frac{\mu_0 R^2\sigma\,\omega\cos\beta}{3}\hat{j}$$

pero por el dibujo, vemos que



$x = R\cos\beta$

$$= \frac{\mu_0 R\sigma\omega x}{3}\hat{j}$$

← Que es el campo total, pues $\bar{\omega}_1$ no aporta nada.

c) Determina el potencial en un punto (x,y,z) del cascarón.

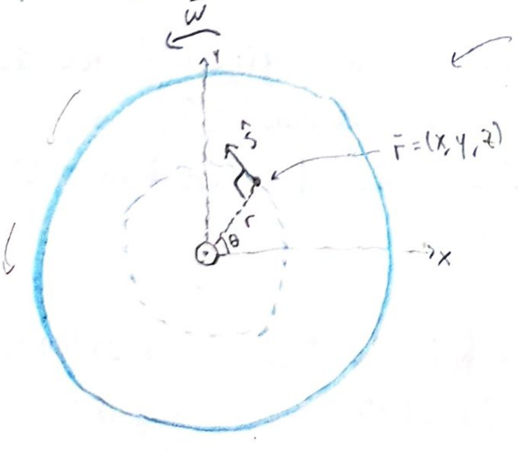
En la parte b), el número x es la distancia del punto $\bar{r}$ al eje de rotación $\bar{\omega}$ y el vector $\hat{j}$ está apuntando en la dirección en la que se está moviendo $\bar{r}$ instantáneamente. Con esto y tomando en cuenta que la elección de ejes es arbitraria, podemos generalizar el resultado b)

$$\bar{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0 R\sigma\omega r}{3}\hat{s} \quad \ldots(3)$$

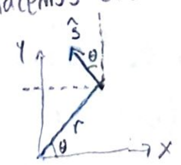
← con r la distancia de (x,y,z) al eje $\bar{\omega}$
$\hat{s}$ el vector unitario en la dirección en la que se mueve (x,y,z) instantáneamente.

veamos quién es r y $\hat{s}$:

Para esto, veamos la esfera desde arriba:



hacemos zoom



del dibujo, vemos que $r = \sqrt{x^2+y^2}$

y $\hat{s}$ tiene componentes:

$$-\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

Sustituimos en (3):

$$\bar{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0 R\sigma\omega r}{3}(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$$

pero $r\cos\theta = x$, $r\operatorname{sen}\theta = y$

$$\Rightarrow \bar{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0 R\sigma\omega r}{3}(-y\,\hat{i} + x\,\hat{j})$$

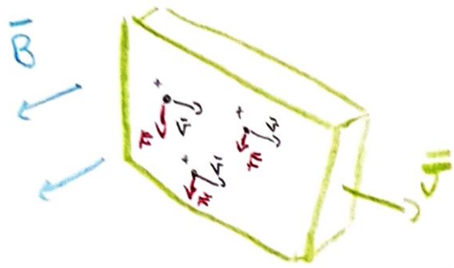
...

3) Efecto Hall clásico:

a) Describe las generalidades que dan origen al efecto Hall clásico

Empezamos con una placa conductora en la que corre una corriente eléctrica con densidad de corriente $\vec{J}$.

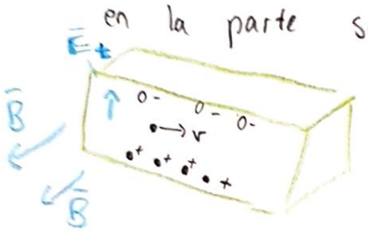
Posteriormente, le aplicamos un campo magnético $\bar{B}$ transversal a la placa



La corriente $\bar{J}$ se produce por el movimiento de muchas cargas positivas hacia la derecha con velocidad $\bar{v}$.

Como se están moviendo en un campo magnético, estas cargas sienten una fuerza $\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B}$, que apunta hacia abajo.

Entonces estas cargas positivas se empiezan a acumular en la parte inferior de la placa y dejan un espacio negativo en la parte superior.



Eventualmente, se colocan muchas cargas + en la base y la cima queda cargada con −. Esto se parece al arreglo de dos planos cargados (uno en la base con carga + y uno en la cima con −) y así se genera un campo dentro del conductor, en dirección vertical hacia arriba $\bar{E}_t \uparrow$

Este campo seguirá creciendo hasta que cancele la fuerza de Lorenz sobre las otras cargas en movimiento en el interior del conductor. Es entonces cuando las cargas que siguen moviéndose no sentirán una fuerza neta y seguirán circulando. (se llegó al equilibrio)

Además, se creó un voltaje entre la base y la cara superior debido a la nueva distribución de cargas. Este voltaje es lo que se puede medir en un experimento para comprobar que efectivamente sucede el efecto Hall.

b) Muestra que el campo de Hall es $E_t = \frac{-J \times B}{nq}$

Si hay n cargas moviéndose por m^3, cada una con carga q y velocidad $\bar{v}$

$\Rightarrow$ La densidad de corriente es $\underline{\bar{J} = nq\bar{v}}$, ← Fórmula que vimos en clase

Además, el campo $\bar{E}_t$ es aquél al que se llega cuando se llega al equilibrio, es decir, se canceló la fuerza magnética en las cargas que siguen en movimiento

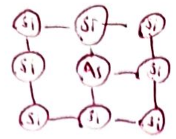
y $\bar{F}_{Tot} = \bar{0}$ $\Rightarrow$ $\bar{F}_{E_t} + \bar{F}_B = \bar{0}$ $\Rightarrow$ $q\bar{E}_t + q\bar{v} \times \bar{B} = \bar{0}$

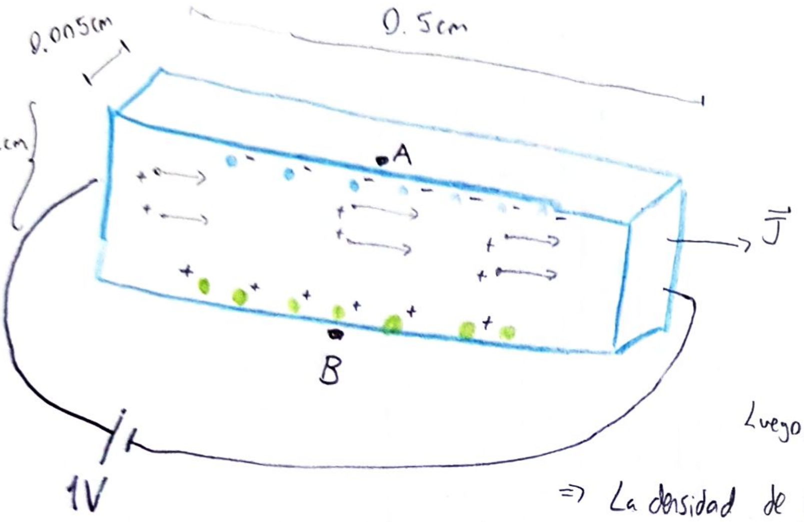
Sustituimos $\bar{v} = \frac{\bar{J}}{nq}$ $\Rightarrow$ $\bar{E}_t + \frac{\bar{J}}{nq} \times \bar{B} = 0$

$$\Rightarrow \bar{E}_t = -\frac{\bar{J} \times \bar{B}}{nq}$$

Bibliografía: • Purcell, Edward (2013). Electricity and Magnetism. (3rd edition). Cambridge UK: Cambrige press

•• Encyclopedia Britannica, Physics: Hall effect, britannica.com/science/Hall-effect

c) Una placa de Hall está formada como sigue  tiene 2×10^{21} electrones de conducción$/m^3$ y resistividad de $0.016\ \Omega m$, 0.2cm de ancho y 0.005cm de grosor, 0.5cm de largo entre los que está conectada una batería de 1V. ¿Voltaje de hall a través de la longitud de 0.2cm cuando es insertada en un campo de 1KG?



El dibujo muestra el arreglo (con un campo $\bar{B}$ que sale de la hoja) cuando ya se llegó al equilibrio.

Primero calculo la resistencia total por la que viajan las cargas

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(0.016\ \Omega m)(0.005m)}{(0.00005m)(0.002m)} \leftarrow \text{Área transversal}$$

$$= \underline{800\Omega}$$

Luego, la corriente es: $I = V/R = \frac{1V}{800\Omega} = \underline{1.25\times10^{-3}A}$

$\Rightarrow$ La densidad de corriente es:

$$|\bar{J}| = \frac{I}{A} = \frac{1.25\times10^{-3}A}{(0.00005m)(0.002m)} = \underline{12500\ A/m^2}$$

Luego, según la sección b): $\bar{E}_t = \frac{-\bar{J}\times\bar{B}}{nq}$ pues $\bar{J}\perp\bar{B}$

$$\Rightarrow |\bar{E}_t| = -\frac{|\bar{J}\times\bar{B}|}{nq} = \frac{|\bar{J}||\bar{B}|}{nq} = \frac{(12500A/m^2)(0.1\ T)}{(2\times10^{21})(1.6\times10^{-19}C)}$$

e^-

$$= \underline{3.9\ V/m}$$

$\bar{E}$ va hacia arriba y $\therefore$ es paralelo a $d\bar{r}$

Entonces, el voltaje entre A y B es: $V_{B\to A} = -\int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{r} = -\int_A^B |\bar{E}|\,|d\bar{r}|$

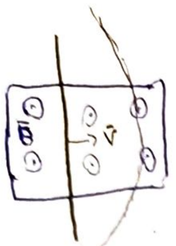
$$= -|\bar{E}|\int_A^B d\bar{r} = -|\bar{E}|\,l = (-3.9V/m)(0.002m)$$

El campo es como el de dos placas y $\therefore$ $|\bar{E}_t|$ es aprox cte en el interior

$$= \boxed{-7.81\times10^{-3}\ V}$$

En donde A está a menor voltaje que B

4. Un alambre terso pasa por el espacio en un imán de 5000 G. La longitud del alambre en el imán es 1.8cm. Calcula el voltaje inducido cuando el cable vibra a 2000hz y amplitud de 0.03cm.

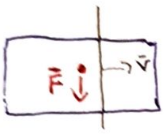


$\Big\}$ 1.8cm

Como la longitud del alambre dentro del imán es muy chica comparada con la longitud total del alambre

$\Rightarrow$ podemos pensar que el alambre no se deforma demasiado al oscilar, más bien se ve como un cable recto que se mueve de izquierda a derecha y de regreso.

Si tenemos una carga q en el alambre y en ese momento se está moviendo a velocidad $\bar{v}$, entonces esta carga siente una fuerza de Lorenz



$$\bar{F} = q\bar{v}\times\bar{B} = q\,|\bar{v}|\,|\bar{B}|\,\hat{k}$$

pues $\bar{v}$ es ortogonal a $\bar{B}$

Por lo dicho antes, como no se deforma mucho el alambre, está fuerza es válida en todo el sector del alambre dentro del imán.

$\Rightarrow$ La fuerza por unidad de carga es $\bar{v}\times\bar{B}$ en todos los puntos del alambre dentro del imán

Pero el voltaje entre dos puntos es la integral de línea de la fuerza por unidad de carga.

$$\Rightarrow V = \int \frac{\bar{F}}{q}\cdot d\bar{r} = \int \bar{v}\times\bar{B}\cdot d\bar{r} = \int |\bar{v}|\,|\bar{B}|\,dr$$

$$= |\bar{v}|\,|\bar{B}|\int dr = \underline{|\bar{v}|\,|\bar{B}|\,\ell}$$

(Pues $|\bar{v}|$ es cte dentro del imán (otra vez porque esta parte del cable no se deforma mucho)

$\leftarrow \ell$: longitud del alambre dentro del imán

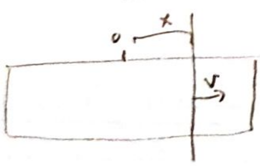
$\therefore$ En un momento en que el cable se mueve a vel. $\bar{v}$ (instantáneamente)

$\Rightarrow$ el voltaje por el alambre es $\underline{V = vB\ell}$ ... (1)

Al igual que la velocidad v oscila, este voltaje V también oscila de valor.

Si el cable oscila como un oscilador armónico simple, entonces su posición como función del tiempo es $x(t) = A\,\text{sen}(\omega t)$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\cos(\omega t)$$



Entonces, por (1), el voltaje como función del tiempo:

$$V(t) = A\omega\cos(\omega t)\,B\ell$$

Entonces la amplitud del voltaje es $\underline{A\omega B\ell}$.

Pero la frecuencia angular ω está relacionada con la frequencia f por $\omega = 2\pi f$

$\Rightarrow$ Amplitud de Voltaje: $\underline{2\pi A f B\ell}$

$$= 2\pi(0.0003\,m)(2000\,s^{-1})(0.5\,T)(0.018\,m) = \underline{0.033V}$$