Mecánica analítica: Tarea 4

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

20 de noviembre de 2020

1) **5.3 a) El punto de soporte de un péndulo simple de longitud l y masa m se mueve sobre una recta vertical con la ecuación:**

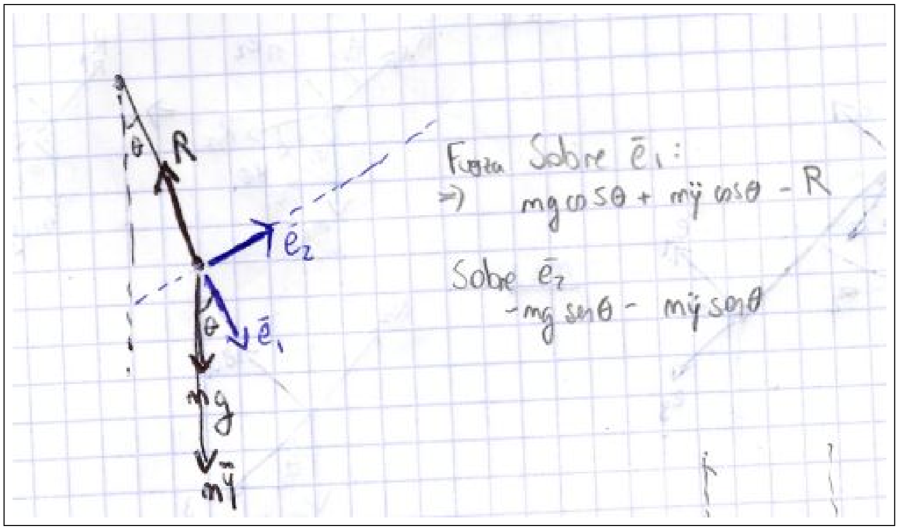
$$y = y(t)$$

El movimiento del péndulo es en un plano vertical. Establecer las componentes de las ecuaciones de movimiento de Newton para la partícula en las direcciones $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$

Como dice el enunciado, consideramos un sistema de referencia O' que se mueve con una aceleración de $\mathbf{A} = \ddot{y}\widehat{j}$ (es decir, se mueve junto con el pivote del péndulo). Desde este punto de referencia el pivote del péndulo parece estar quieto (o a velocidad constante).
Denotamos por $\mathbf{a}$ a la aceleración con respecto al sistema de referencia fijo y $\mathbf{a}'$ a la aceleración respecto al sistema O'

Como vimos en clase, la aceleración en el sistema fijo se obtiene como $\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}'$.
Además, vimos que para aplicar la segunda ley de Newton en el sistema primado (que no es inercial), hay que sumar una fuerza ficticia de $-m\mathbf{A}$ a la fuerza total que es la fuerza que aparece debido a la aceleración del sistema O'.

Podemos dibujar las fuerzas que hay vistas desde el sistema no inercial que son (incluyendo la fuerza ficticia) la fuerza de gravedad $-mg\widehat{j}$, la tensión de la cuerda $-R\mathbf{e}_1$ y la fuerza ficticia $-m\mathbf{A} = -m\ddot{y}\widehat{j}$



Descomponemos la fuerza neta en los componentes sobre $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ como es ve en la imagen. Ahora sí podemos usar la segunda ley de Newton en este sistema no inercial. Para cada una de las componentes se debe de cumplir que $ma_i = F_i$.

En la dirección radial $\mathbf{e}_1$ tenemos que la fuerza total es $mg\cos\theta + m\ddot{y}\cos\theta - R$. Y en esta dirección la aceleración correspondiente es la centrípeta, que tiene un valor de $-l\dot{\theta}^2$. Entonces, nuestra primera ecuación es:

$$\begin{aligned} ma_1 &= F_1 \\ \Rightarrow \quad m(-l\dot{\theta}^2) &= mg\cos\theta + m\ddot{y}\cos\theta - R \end{aligned}$$

Por otro lado, en la dirección angular $\mathbf{e}_2$ tenemos una fuerza total de $-mg\sin\theta - m\dot{y}\sin\theta$. Y como se estudia en el curso básico de mecánica, la aceleración en la dirección angular es de $l\ddot{\theta}$. Por tanto, la segunda ecuación es:

$$\begin{aligned} ma_2 &= F_2 \\ \Rightarrow \quad m(l\ddot{\theta}) &= -mg\sin\theta - m\ddot{y}\sin\theta \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones de movimiento son:

- En e_1 : $\quad mg\cos\theta + m\ddot{y}\cos\theta - R = -ml\dot{\theta}^2$
- En e_2 : $\quad -mg\sin\theta - m\ddot{y}\sin\theta = ml\ddot{\theta}$

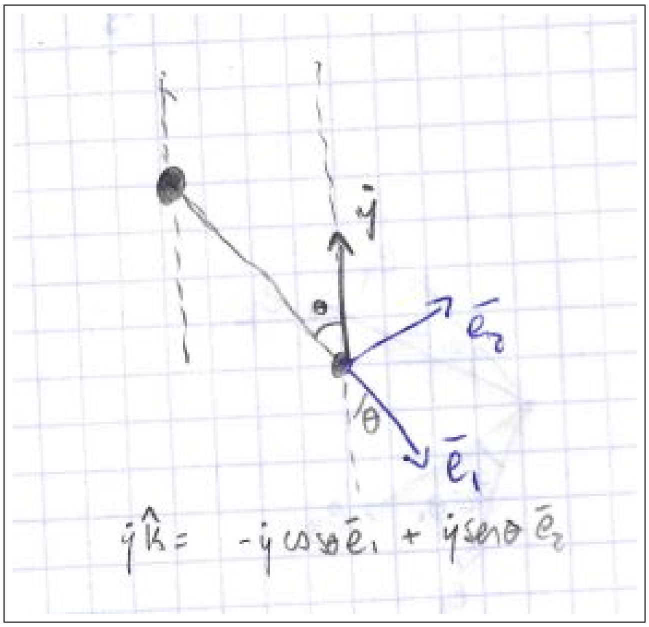
b) **Demostrar que la energía cinética de la partícula está dada por:**

$$T = \tfrac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{y}^2 + ml\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta$$

Consideramos primero la velocidad en el sistema O' (sistema desde el que el pivote está quieto). En este sistema, la velocidad v' del péndulo es simplemente la velocidad angular con norma $l\dot{\theta}$ que apunta en la dirección angular, es decir: $\vec{v'} = l\dot{\theta}\mathbf{e}_2$.

Por otro lado, el soporte del péndulo se mueve con una velocidad $\dot{y}$ en la dirección vertical, es decir la velocidad del soporte del péndulo es $\vec{V} = \dot{y}\widehat{j}$.
Por lo tanto, la velocidad con respecto al sistema fijo es:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{V} + \vec{v'} \\
&= \dot{y}\widehat{j} + l\dot{\theta}\mathbf{e}_2 \\
&= -\dot{y}\cos\theta\mathbf{e}_1 + \dot{y}\sin\theta\mathbf{e}_2 + l\dot{\theta}\mathbf{e}_2 \quad \text{por cómo se decompone } \dot{y}\widehat{j} \text{ según la imagen siguiente} \\
&= -\dot{y}\cos\theta\mathbf{e}_1 + (\dot{y}\sin\theta + l\dot{\theta})\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$



Como esta base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ es ortonormal, entonces la velocidad cuadrada se calcula como:

$$\begin{aligned}
v^2 &= (-\dot{y}\cos\theta)^2 + (\dot{y}\sin\theta + l\dot{\theta})^2 \\
&= \dot{y}^2\cos^2\theta + \dot{y}^2\sin^2\theta + 2l\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta + (l\dot{\theta})^2 \\
&= \dot{y}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta + (l\dot{\theta})^2
\end{aligned}$$

Entonces, la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + ml\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta$$

Como se quería probar.

c) **Dado que la energía potencial escalar es:**

$$U = mgy - mgl\cos\theta$$

demostrar que las ecuaciones de Lagrange deducidas de la energía cinética de la parte b) y esta función de la energía para la variable θ (ver problema

5.1) son equivalentes a la ecuación de Newton a lo largo de $\mathbf{e}_2$

Como se tiene la energía potencial $U = mgy - mgl\cos\theta$ y las fuerzas son conservativas, podemos utilizar las ecuaciones de Lagrange como se muestran en el ejercicio 5.1 y como las probamos en clase:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Con $L = T - U$ el lagrangiano. Como ya calculamos la energía cinética y nos están dando la potencial, tenemos que el lagrangiano es:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + ml\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta - (mgy - mgl\cos\theta)$$

Y entonces las derivadas que nos interesan (las que son respecto a θ) son:

- $\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + ml\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta - (mgy - mgl\cos\theta)\right)$
  $= ml\dot{\theta}\dot{y}\cos\theta - mgl\sin\theta$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + ml\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta - (mgy - mgl\cos\theta)\right)$
  $= ml^2\dot{\theta} + ml\dot{y}\sin\theta$

- $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta} + ml\dot{y}\sin\theta\right)$
  $= ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{y}\sin\theta + ml\dot{y}\cos\theta\,\dot{\theta}$

Entonces, si reemplazamos en la ecuación de Lagrange obtenemos que:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0\\ \Rightarrow\quad ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{y}\sin\theta + ml\dot{\theta}\dot{y}\cos\theta - (ml\dot{\theta}\dot{y}\cos\theta - mgl\sin\theta) = 0\\ \Rightarrow\quad ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{y}\sin\theta + mgl\sin\theta = 0\\ \Rightarrow\quad ml\ddot{\theta} = -m\ddot{y}\sin\theta - mg\sin\theta\end{gathered}$$

Que es igual a la ecuación de Newton en la dirección $\mathbf{e}_2$

2) **5.9 a) Una partícula de masa m se desliza, bajo la acción de la gravedad, en la superficie interior lisa del cono invertido de la figura 5-11 cuya ecuación es:**

$$\rho = z\tan\alpha$$

a) Establecer las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula

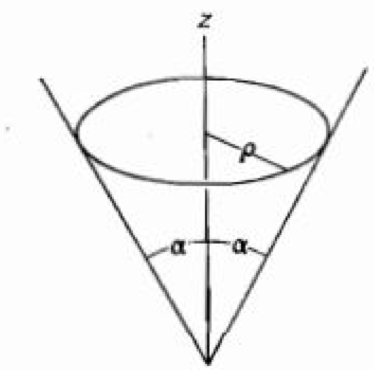


Fig. 5-11

Usaremos coordenadas cilíndricas, que son las coordenadas con las que se dio la ecuación del cono. Primero encontramos la energía cinética de la partícula. Para ello, usamos la expresión de la velocidad cuadrada v^2.
Como hemos visto varias veces, las componentes covariantes de la velocidad en coordenadas cilíndricas son $\dot{\rho}$, $\rho\dot{\phi}$, $\dot{z}$. Por tanto, como son coordenadas rectangulares, la velocidad cuadrada es:

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

Ahora aplicamos la condición del movimiento restringido (la usamos desde ahora porque no nos interesa conocer la fuerza de restricción) , $\rho = z\tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \dot{z}\tan\alpha$.
Por tanto, la velocidad cuadrada es:

$$\begin{aligned} v^2 &= (\dot{z}\tan\alpha)^2 + (z\tan\alpha)^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \\ &= \dot{z}^2\tan^2\alpha + z^2\dot{\phi}^2\tan^2\alpha + \dot{z}^2 \\ &= \dot{z}^2(\tan^2\alpha + 1) + z^2\dot{\phi}^2\tan^2\alpha \\ &= \dot{z}^2\sec^2\alpha + z^2\dot{\phi}^2\tan^2\alpha \end{aligned}$$

Entonces tenemos que la energía cinética es $T = \frac{1}{2}mv^2$:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2\sec^2\alpha + z^2\dot{\phi}^2\tan^2\alpha\right)$$

Por otro lado, la única fuerza presente es la de la gravedad y la fuerza normal. Las fuerzas son conservativas, por lo que podemos usar la expresión de las ecuaciones de Lagrange que involucra al Lagrangiano L. La energía potencial se debe únicamente a la fuerza de gravedad. Si consideramos que se tiene energía 0 en la punta del cono (cuando $z = 0$) entonces la energía potencial es $U = mgz$.
Calculamos entonces el lagrangiano:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{z}^2\sec^2\alpha + \frac{1}{2}mz^2\dot{\phi}^2\tan^2\alpha - mgz$$

Entonces, usamos las ecuaciones de Lagrange como las probamos en clase para cada una de las variables:

1) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$, derivamos L:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{z}}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\sec^2\alpha + \frac{1}{2}mz^2\dot{\phi}^2\tan^2\alpha - mgz\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\sec^2\alpha + \frac{1}{2}mz^2\dot{\phi}^2\tan^2\alpha - mgz\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{z}\sec^2\alpha\right) - (mz\dot{\phi}^2\tan^2\alpha - mg) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{z}\sec^2\alpha - mz\dot{\phi}^2\tan^2\alpha + mg = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{z}\sec^2\alpha = mz\dot{\phi}^2\tan^2\alpha - mg$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{z} = \frac{z\dot{\phi}^2\tan^2\alpha}{\sec^2\alpha} - \frac{g}{\sec^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\ddot{z} = z\dot{\phi}^2\sin^2\alpha - g\cos^2\alpha}$$

2) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$, derivamos L:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\sec^2\alpha + \frac{1}{2}mz^2\dot{\phi}^2\tan^2\alpha - mgz\right) - \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\sec^2\alpha + \frac{1}{2}mz^2\dot{\phi}^2\tan^2\alpha - mgz\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mz^2\dot{\phi}\tan^2\alpha) - 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(mz^2\dot{\phi}\tan^2\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \quad mz^2\dot{\phi}\tan^2\alpha = cte$$

$$\Rightarrow \quad \underline{z^2\dot{\phi} = c = cte}$$

Y éstas dos son las ecuacioens de movimiento de la partícula en el cono.

b) **Demostrar que son posibles órbitas circulares y hallar la velocidad de la partícula en una órbita de este tipo.**

Para una órbita circular, la partícula debe de girar sobre un círculo de altura constante h, es decir, $z = h = cte \;\Rightarrow\; \dot{z} = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{z} = 0$.
Por tanto, si sustituimos esto en la primera ecuación de movimiento, tenemos que:

$$0 = h\dot{\phi}^2\sin^2\alpha - g\cos^2\alpha$$
$$\Rightarrow \quad h\dot{\phi}^2\sin^2\alpha = g\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\phi}^2 = \frac{g}{h} \cot^2 \alpha$$
$$\Rightarrow \quad \dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{h}} \quad \cot \alpha$$

Ésta es una condición necesaria para que la altura de la partícula sea constante y por tanto se mueva en una órbita circular.

Luego, calculamos la velocidad cuadrada en una órbita circular. Tenemos la condición de que $\dot{z} = 0$ y $z = h = cte$.
Y además tenemos la condición de que $\dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{h}} \; \cot \alpha$.
Luego, sustituimos estas dos condiciones en la expresión de velocidad cuadrada que habíamos obtenido antes:

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{z}^2 \sec^2 \alpha + z^2 \dot{\phi}^2 \tan^2 \alpha \\ &= 0 + h^2 \left(\sqrt{\frac{g}{h}} \cot \alpha \right)^2 \tan^2 \alpha \\ &= h^2 \frac{g}{h} \cot^2 \alpha \tan^2 \alpha \\ &= hg \end{aligned}$$

3) **5-10 a) Considerando el sistema de partículas mostrado en la figura 5-12: a) Escribir las ecuaciones de movimiento de Newton para cada una de las partículas, en función de las variables de desplazamiento a partir del equilibrio x_1, x_2**

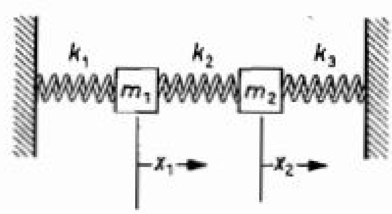
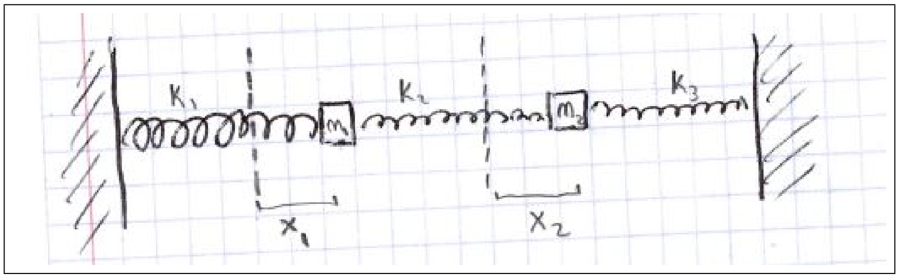


Fig. 5-12

Consideramos el siguiente dibujo en el que la primera masa se desplazó una distancia x_1 con respecto al equilibrio y la masa 2 se desplazó una distancia x_2.
Consideramos ahora las fuerzas sobre cada una de las masas. Para ello, hay que encontrar qué tan estirados están los resortes con respecto a su longitud inicial.



El primer resorte tiene una longitud en equilibrio que va de la pared a la primer línea punteada, por lo que en el dibujo se ha estirado una distancia x_1.
El segundo resorte tiene una longitud en equilibrio que va de una de las líneas punteadas a la otra. Pero ahora la longitud del resorte disminuyó en una cantidad x_1 y aumentó en x_2. Por lo que la longitud del segundo resorte cambió en una magnitud $x_2 - x_1$
El tercer resorte tenía una longitud en equilibrio que va de la segunda línea punteada a la segunda pared, por lo que ahora cambió su longitud en $-x_2$.

Luego, consideramos la fuerza sobre cada una de las masas y usamos la segunda ley de Newton:

- **Masa 1:** La masa 1 siente una fuerza a la izquierda debida al primer resorte y proporcional a su cambio en longitud que es x_1, es decir una fuerza $-k_1x_1$.
  Y siente una fuerza a la derecha debida al segundo resorte y proporcional al cambio de longitud del segundo resorte que es $x_2 - x_1$. Es decir, una fuerza de $k_2(x_2 - x_1)$
  Por lo tanto, la ecuación $F = ma$ de la masa 1 es (considerando que la aceleración de la primera masa es $\ddot{x}_1$):
  $$-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) = m_1\ddot{x}_1$$
- **Masa 2**: La masa 2 siente una fuerza a la izquierda debida al segundo resorte y proporcional a su cambio en longitud que es $x_2 - x_1$, es decir una fuerza $-k_2(x_2 - x_1)$.
  Y siente una fuerza a la derecha debida al segundo resorte y proporcional al cambio de longitud del segundo resorte que es $-x_2$. Es decir, una fuerza de $k_3(-x_2)$
  Por lo tanto, la ecuación $F = ma$ de la masa 1 es (considerando que la aceleración de la primera masa es $\ddot{x}_2$):
  $$-k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 = m_2\ddot{x}_2$$

Entonces, las ecuaciones del movimiento son el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \frac{k_2}{m_1}x_1$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k_2}{m_2}x_2 + \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_3}{m_2}x_2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2$$
$$\ddot{x}_2 = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2+k_3}{m_2}x_2$$

y este es el sistema de ecuaciones que describe al movimiento.

b) **Demostrar que para cualesquiera desplazamientos arbitrarios de las dos partículas, la energía potencial acumulada en los resortes está dada por:**

$$U = \tfrac{1}{2}k_1x_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2 + \tfrac{1}{2}k_3x_2^2$$

Recordamos que la energía potencial de un resorte de constante k que cambia su longitud en una magnitud A es de $\frac{1}{2}kA^2$.

Como vimos en el inciso pasado, el primer resorte se estira una magnitud x_1, por lo que su energía es $\frac{1}{2}k_1x_1^2$
El segundo resorte se estira una magnitud $x_2 - x_1$, por lo que tiene una energía potencial de $k_2(x_2-x_1)^2$
El tercer resorte cambia su longitud en una magnitud $-x_2$, por lo que su energía potencial es $\frac{1}{2}k_3(-x_2)^2 = \frac{1}{2}k_3x_2^2$.

Entonces, la energía potencial total es la suma de todas estas energías:

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2$$

c) **Empleando la expresión:**

$$T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

para la energía cinética, demostrar que las ecuaciones de Lagrange así obtenidas para las variables x_1, x_2, a partir de esta TyU, concuerdan con las ecuaciones de Newton. ¿Cuáles supone usted que son las ecuaciones de Lagrange para un sistema de partículas?

Primero calculamos el lagrangiano:

$$L = T - U = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \left[\frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2 - \frac{1}{2}k_3x_2^2$$

Luego usamos las ecuaciones de Lagrange en cada una de las variables.

- $\mathbf{x}_1$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left[\tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2 - \frac{1}{2}k_3x_2^2\right] - \\
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2 - \frac{1}{2}k_3x_2^2\right] = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[m_1\dot{x}_1\right] - \left[-k_1x_1 + k_2(x_2-x_1)\right] = 0 \\
&\Rightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2-x_1) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = \frac{k_2(x_2-x_1)}{m_1} - \frac{k_1x_1}{m_1} \\
&\boxed{\Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2x_2}{m_1}}
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{x}_2$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left[\tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2 - \frac{1}{2}k_3x_2^2\right] - \\
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2 - \frac{1}{2}k_3x_2^2\right] = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[m_2\dot{x}_2\right] - \left[-k_2(x_2-x_1) - k_3x_2\right] = 0 \\
&\Rightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2-x_1) + k_3x_2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad \ddot{x}_2 = -\frac{k_2(x_2-x_1)}{m_2} - \frac{k_3x_2}{m_2} \\
&\boxed{\Rightarrow \quad \ddot{x}_2 = \frac{k_2x_1}{m_2} - \frac{(k_2+k_3)x_2}{m_2}}
\end{aligned}
$$

Vemos que éstas son las mismas ecuaciones que obtuvimos con el método de Newton.

¿Cuáles supone usted que son las ecuaciones de Lagrange para un sistema de partículas?

Supongo que se refiere a las ecuaciones para el caso en que tenemos n masas $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ conectadas por $n+1$ resortes con constantes $k_1, k_2, ..., k_n, k_{n+1}$.
Para el caso anterior con $n = 2$, obtuvimos las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 \\
\ddot{x}_2 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{(k_2+k_3)}{m_2}x_2
\end{aligned}
$$

Que se puede escribir en notación matricial como:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2+k_3}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Luego, usando este ejemplo, podemos suponer que la extensión para n masas se verá como:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2+k_3}{m_2} & \dfrac{k_3}{m_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{k_3}{m_3} & -\dfrac{k_3+k_4}{m_3} & \dfrac{k_4}{m_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{k_n}{m_n} & -\dfrac{k_n+k_{n+1}}{m_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Lo cual es una generalización para el caso de $n = 2$. El resultado tiene sentido porque el movimiento de la ísema partícula depende siempre de la posición de la partícula anterior y siguiente y de la constante del resorte anterior y del siguiente.

4) **5-11 a) Hállese la energía conética total del péndulo doble representado en la figura 5-13**

En el ejercicio 3.11 de la tarea 3 calculamos la velocidad de cada una de las partículas del péndulo doble con respecto a un sistema de referencia fijo. Y obtuvimos que la velocidad de la partícula 1 es:

$$\vec{v}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \,\widehat{i} + l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \,\widehat{j}$$

Entonces, su energía cinética es:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 \left((l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2 + (l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}m_1 \left(l_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + l_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 \right) = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

La velocidad de la partícula 2 la obtuvimos como:

$$v_2 = (l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)\widehat{i} + (l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)\widehat{j}$$

Y entonces la energía cinética es:

$$\begin{aligned}
T_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2\left[(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2\right] \\
= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2\cos^2\theta_2 + \\
+ l_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_1\sin\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2\sin^2\theta_2] \\
= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)] \\
= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]
\end{aligned}$$

Entonces, si sumamos las energías de las dos partículas obtenemos que la energía cinética total es de:

$$\underline{T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

b) **Utilizando la energía cinética encontrada en la parte a) y la energía potencial:**

$$U = -m_1l_1g\cos\theta_1 - m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

demostrar que las ecuaciones de Lagrange así obtenida para θ_1 y θ_2 concuerdan con las componentes de las ecuaciones de Newton sobre $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_4$. Tómese las componentes de las ecaciones de Newton a lo largo de $\mathbf{e}_2$ para ambas partículas.

Con el resultado para la energía cinética y potencial, tenemos que el lagrangiano es:

$$L = T - U$$
$$= \tfrac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2(l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - [-m_1l_1g\cos\theta_1 - m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)]$$
$$= \tfrac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2(l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_1l_1g\cos\theta_1 + m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

Entonces utilizamos las ecuaciones de Lagrange para cada una de las coordenadas generalizadas θ_1, θ_2.
Calcularé primero las derivadas de L que necesitaremos después.

a) $\dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - m_1l_1g\sin\theta_1 - m_2gl_1\sin\theta_1 =$
$= -l_1g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)$

b) $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$

$$c) \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{d}{dt}\Big(m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\Big)$$
$$= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

Entonces, tenemos que la ecuación de Lagrange en θ_1 es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$
$$\Rightarrow \; m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) -$$
$$\Big[-l_1 g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\Big] = 0$$
$$\Rightarrow \; m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + l_1 g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 +$$
$$m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$
$$\Rightarrow \; m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + l_1 g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 +$$
$$m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1 g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 = 0$$

Entonces, la ecuación para θ_1 es (dividimos entre l_1):

$$\boxed{(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 = 0}$$

Ahora hacemos lo mismo para θ_2. Calcularé primero las derivadas de L que necesitaremos después.

a) $\dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin\theta_2$

b) $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$

$$c) \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{d}{dt}\Big(m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)\Big)$$
$$= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

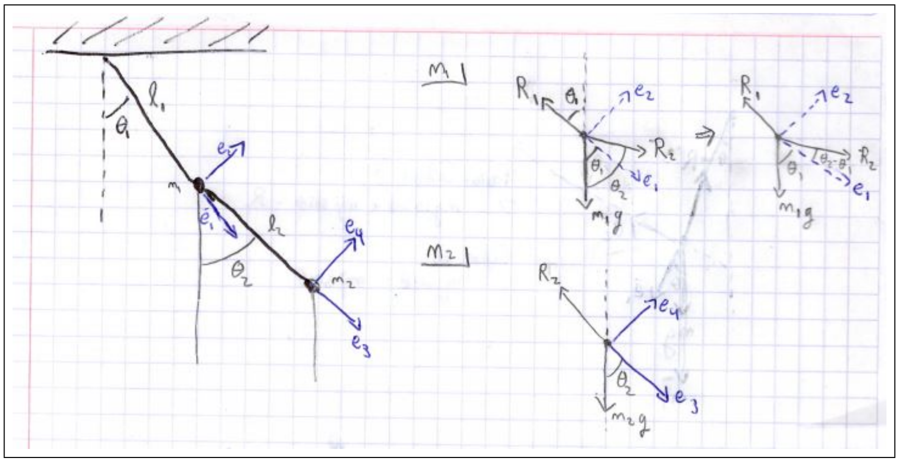
Entonces, tenemos que la ecuación de Lagrange en θ_2 es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$
$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - [m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin\theta$$
$$\Rightarrow m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin\theta_2 = 0$$

Entonces, la ecuación para θ_2 es (dividimos entre $m_2 l_2$):

$$\boxed{l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g\sin\theta_2 = 0}$$

Ahora encontramos las ecuaciones de Newton sobre $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_4$.
Para ello, dibujamos el siguiente diagrama.
Y luego dibujamos el diagrama de cuerpo libre de cada una de las masas, en las que consideramos las tensiones R_1 y R_2 de las dos cuerdas.



Para el cuerpo m_1 nos queda que las fuerzas a lo largo de $\mathbf{e}_1$ son:

$$R_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - R_1 + m_1 g \cos\theta_1$$

Y a lo largo de $\mathbf{e}_2$ es:

$$R_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_1 g \sin\theta_1$$

Ahora para aplicar las leyes de Newton notamos que la fuerza a lo largo de $\mathbf{e}_1$ debe de ser igual a $m_1 a_c$ con a_c la aceleración centrípeta que es igual a $-l_1\dot{\theta}_1^2$.
Mientras que la fuerza a lo largo de $\mathbf{e}_2$ es igual a $m_1 a_{an}$ con a_{an} la aceleración angular, que tiene un valor de $a_{an} = l_1\ddot{\theta}_1$
Entonces, las dos ecuaciones de Newton de la masa 1 son:

1) $R_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - R_1 + m_1 g \cos\theta_1 = -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2$
2) $R_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_1 g \sin\theta_1 = m_1 l_1 \ddot{\theta}_1$

Ahora nos fijamos en la masa m_2. La fuerza neta es de:

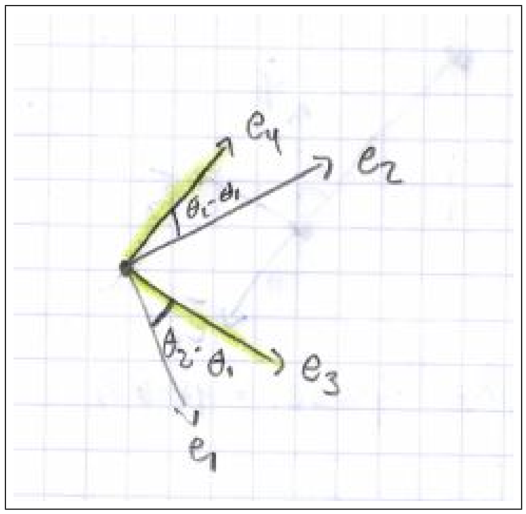
$$(m_2 g \cos\theta_2 - R_2)\mathbf{e}_3 - (m_2 g \sin\theta_2)\mathbf{e}_4$$

Sin embargo, no podemos usar directamente la segunda ley de Newton ya que hay que considerar que el sistema de referencia desde el que se miden estas fuerzas es un sistema que se mueve junto con la masa m_1 y no es un sistema inercial. Éste es un sistema que se mueve con una aceleración $\mathbf{A} = -l_1\dot{\theta}_1^2\mathbf{e}_1 + l_1\ddot{\theta}_1\mathbf{e}_2$ (la aceleración de la masa 1)

Como vimos en clase, una forma de arreglar este problema y poder usar la segunda ley de Newton es agregar una fuerza ficticia de $-m_2\mathbf{A}$ a las fuerzas que actúan sobre la masa 2 y ahora sí usar las leyes de Newton.
Con esta fuerza agregada, la fuerza neta sobre la partícula 2 es de:

$$\begin{gathered}(m_2 g\cos\theta_2 - R_2)\mathbf{e}_3 - (m_2 g\sin\theta_2)\mathbf{e}_4 - m_2\mathbf{A}\\ = (m_2 g\cos\theta_2 - R_2)\mathbf{e}_3 - (m_2 g\sin\theta_2)\mathbf{e}_4 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\mathbf{e}_1 - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\mathbf{e}_2\end{gathered}$$

Para escribir esta fuerza únicamente en la base $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ consideramos la siguiente imagen que nos permite escribir los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ en esta base.



Entonces, tenemos que $\mathbf{e}_1 = \cos(\theta_2-\theta_1)\mathbf{e}_3 - \sin(\theta_2-\theta_1)\mathbf{e}_4$ y que $\mathbf{e}_2 = \sin(\theta_2-\theta_1)\mathbf{e}_3 + \cos(\theta_2-\theta_1)\mathbf{e}_4$.
Entonces, la fuerza neta sobre la partícula m_2 es de:

$$\begin{aligned}&(m_2 g\cos\theta_2 - R_2)\mathbf{e}_3 - (m_2 g\sin\theta_2)\mathbf{e}_4 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\mathbf{e}_1 - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\mathbf{e}_2\\ &= (m_2 g\cos\theta_2 - R_2)\mathbf{e}_3 - (m_2 g\sin\theta_2)\mathbf{e}_4 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2(\cos(\theta_2-\theta_1)\mathbf{e}_3 - \sin(\theta_2-\theta_1)\mathbf{e}_4)\\ &\qquad\qquad - m_2 l_1\ddot{\theta}_1(\sin(\theta_2-\theta_1)\mathbf{e}_3 + \cos(\theta_2-\theta_1)\mathbf{e}_4)\\ &= [m_2 g\cos\theta_2 - R_2 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\sin(\theta_2-\theta_1)]\mathbf{e}_3 +\\ &\quad + [-m_2 g\sin\theta_2 - m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1)]\mathbf{e}_4\end{aligned}$$

Con esta fuerza neta ahora sí podemos usar las leyes de Newton. La fuerza sobre $\mathbf{e}_3$ hay que igualarla a ma_c con a_c la aceleración centrípeta de la masa 2, que es de $a_c = -l_2\dot{\theta}_2^2$.
Y la fuerza sobre la dirección $\mathbf{e}_4$ hay que igualarla a ma_{an} con a_{an} la aceleración angular, que es igual a $a_{an} = l_2\ddot{\theta}_2$.
Entonces, nos quedan las siguientes dos ecuaciones de Newton:

3) $m_2 g\cos\theta_2 - R_2 + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\sin(\theta_2-\theta_1) = -m_2 l_2\dot{\theta}_2^2$

4) $-m_2 g\sin\theta_2 - m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1) = m_2 l_2\ddot{\theta}_2$

Entonces, para resumir, tenemos las 4 ecuaciones:

1) $R_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - R_1 + m_1 g \cos\theta_1 = -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2$
2) $R_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_1 g \sin\theta_1 = m_1 l_1 \ddot{\theta}_1$
3) $m_2 g \cos\theta_2 - R_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) = -m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2$
4) $-m_2 g \sin\theta_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) = m_2 l_2 \ddot{\theta}_2$

De estas ecuaciones, podemos tomar directamente la 4) y depués de pasar los términos de la izquierda a la derecha y dividir por m_2, queda que la ecuación es:

$$\begin{aligned} & l_2\ddot{\theta}_2 + g\sin\theta_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) = 0 \\ \Rightarrow \quad & l_2\ddot{\theta}_2 + g\sin\theta_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{aligned}$$

Y esta última ecuación es la segunda ecuación que habíamos obtenido con el método de Lagrange. Lo cual prueba que aquélla ecuación obtenida por el método de Lagrange se hubiera obtenido con Newton también.

Por otro lado, podemos usar la ecuación 3) para despejar R_2 y obtener
$R_2 = m_2 g \cos\theta_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2$

Ahora sustituimos esto en la ecuación 2) y obtenemos:

$$\begin{aligned} & [m_2 g \cos\theta_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2] \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_1 g \sin\theta_1 = m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 \\ \Rightarrow \quad & m_2 g \cos\theta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \sin^2(\theta_2 - \theta_1) \\ & + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_1 g \sin\theta_1 - m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 \;=\; 0 \end{aligned}$$

Antes de seguir, hacemos un despeje de la ecuación 4) y nos queda que:
$m_2 l_1 \dot{\theta_1}^2 = \dfrac{-m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 g \sin\theta_2 - m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}$

Ahora sustituimos esto en el desarrollo que llevábamos antes:

$$\Rightarrow \quad m_2 g\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{-m_2l_2\ddot{\theta}_2-m_2g\sin\theta_2-m_2l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\cos(\theta_2-\theta_1)\sin(\theta_2-\theta_1)$$
$$-\,m_2l_1\ddot{\theta}_1\sin^2(\theta_2-\theta_1)+m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)-m_1g\sin\theta_1-m_1l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

.

$$\Rightarrow \quad m_2 g\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1)+[-m_2l_2\ddot{\theta}_2-m_2g\sin\theta_2-m_2l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1)]\cos(\theta_2-\theta_1)$$
$$-\,m_2l_1\ddot{\theta}_1\sin^2(\theta_2-\theta_1)+m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)-m_1g\sin\theta_1-m_1l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

.

$$\Rightarrow \quad m_2 g\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1)-m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)-m_2g\sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)-m_2l_1\ddot{\theta}_1\cos^2(\theta_2-\theta_1)$$
$$-\,m_2l_1\ddot{\theta}_1\sin^2(\theta_2-\theta_1)+m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)-m_1g\sin\theta_1-m_1l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

.

$$\Rightarrow \quad m_2 g\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1)-m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)-m_2g\sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)-m_2l_1\ddot{\theta}_1$$
$$+\,m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)-m_1g\sin\theta_1-m_1l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$
$$\Rightarrow \quad m_2 g[\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1)-\sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)]-m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)-m_2l_1\ddot{\theta}_1$$
$$+\,m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)-m_1g\sin\theta_1-m_1l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

.

$$\Rightarrow \quad m_2 g[\sin((\theta_2-\theta_1)-\theta_2)]-m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)-m_2l_1\ddot{\theta}_1$$
$$+\,m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)-m_1g\sin\theta_1-m_1l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$
$$\Rightarrow \quad -m_2 g\sin\theta_1-m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)-m_2l_1\ddot{\theta}_1+m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)-m_1g\sin\theta_1-m_1l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

.

$$\Rightarrow \quad m_2 g\sin\theta_1+m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)+m_2l_1\ddot{\theta}_1-m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)+m_1g\sin\theta_1+m_1l_1\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$

.

$$\Rightarrow \quad (m_1+m_2)l_1\ddot{\theta}_1+m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)+m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)+g(m_1+m_2)\sin\theta_1=0$$

Y ésta última es justo la expresión de la primera ecuación que obtuvimos con el método de Lagrange. Por lo que ya recuperamos ambas ecuaciones usando el método de Newton.

5) **6.1 c) Hállese la función de energía potencial de las fuerzas conservativas que hay entre las funciones siguientes:**

$$F_x=\frac{ax}{x^2+y^2+z^2} \quad , \quad F_y=\frac{ay}{x^2+y^2+z^2} \quad , \quad F_z=\frac{az}{x^2+y^2+z^2}$$

Primero revisamos que se trate de una fuerza conservativa, para lo que el rotacional debe de valer 0. Para ello, calculamos cada uno de los 3 componentes del rotacional y verificamos que se anulen.

- $\dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{az}{x^2+y^2+z^2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{ay}{x^2+y^2+z^2}\right)$
  $= -\dfrac{2ayz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \left(-\dfrac{2azy}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = 0$
- $\dfrac{\partial F_z}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{az}{x^2+y^2+z^2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{ax}{x^2+y^2+z^2}\right)$
  $= -\dfrac{2axz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \left(-\dfrac{2azx}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = 0$
- $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{ax}{x^2+y^2+z^2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{ay}{x^2+y^2+z^2}\right)$
  $= -\dfrac{2ayx}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \left(-\dfrac{2ayx}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = 0$

Ahora bien, para el potencial buscamos una función $U(x, y, z)$ tal que:

$$\nabla U = -\mathbf{F}$$

Para lo cual se debe de cumplir que $(\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z}) = (-F_x, -F_y, -F_z)$.
Entonces, en particular se debe de cumplir que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = -F_x$.
Entonces, integrando tenemos que:

$$U = \int -F_x dx = -\int \frac{ax}{x^2+y^2+z^2} dx = -\frac{a}{2} ln(x^2+y^2+z^2) + C(y, z)$$

Donde $C(y, z)$ es una constante de integración (para esta integral que es respecto a x) y que depende de las variables y, z.

Luego, como $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -F_y$, debemos de tener que:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{ay}{x^2+y^2+z^2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{a}{2} ln(x^2+y^2+z^2) + C(y, z)\right] = -\frac{ay}{x^2+y^2+z^2} \\
&\Rightarrow \quad -\frac{ay}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial y} C(y, z) = -\frac{ay}{x^2+y^2+z^2}
\end{aligned}$$

Entonces, debemos de tener que $\dfrac{\partial}{\partial y} C(y, z) = 0$.

Y como $\dfrac{\partial U}{\partial z} = -F_z$, debemos de tener que:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{az}{x^2+y^2+z^2} \\
\Rightarrow\quad &\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{a}{2}ln(x^2+y^2+z^2) + C(y,z)\right] = -\frac{az}{x^2+y^2+z^2} \\
\Rightarrow\quad &-\frac{az}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial z}C(y,z) = -\frac{az}{x^2+y^2+z^2}
\end{aligned}$$

Entonces, debemos de tener que $\dfrac{\partial}{\partial z}C(y,z) = 0$.

Como $\dfrac{\partial}{\partial z}C(y,z) = 0 = \dfrac{\partial}{\partial y}C(y,z) = 0$, entones $C(y,z)$ es una constate para todo y, z.
Y entonces, podemos escribir la función de potencial sencillamente como:

$$\boxed{U(x,y,z) = -\frac{a}{2}ln(x^2+y^2+z^2) + C}$$

Con C una constante.

6.1 d) **Hállese la función de energía potencial de:**

$$F_x = xy^2z \quad , \quad F_y = x^2yz \quad , \quad F_z = \tfrac{1}{2}x^2y^2$$

Primero revisamos que se trate de una fuerza conservativa, para lo que el rotacional debe de valer 0. Para ello calculamos cada uno de los 3 componentes del rotacional y verificamos que se anulan:

- $\dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial y}(\tfrac{1}{2}x^2y^2) - \dfrac{\partial}{\partial z}(x^2yz) = x^2y - x^2y = 0$
- $\dfrac{\partial F_z}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\tfrac{1}{2}x^2y^2) - \dfrac{\partial}{\partial z}(xy^2z) = xy^2 - xy^2 = 0$
- $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2yz) - \dfrac{\partial}{\partial y}(xy^2z) = 2xyz - 2xyz = 0$

Ahora bien, para el potencial buscamos una función $U(x,y,z)$ tal que:

$$\nabla U = -\mathbf{F}$$

Para lo cual se debe de cumplir que $(\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z}) = (-F_x, -F_y, -F_z)$.

Entonces, en particular se debe de cumplir que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = -F_x$.
Entonces, integrando tenemos que:

$$U = \int -F_x dx = -\int xy^2 z \; dx = -\frac{1}{2}x^2y^2z + C(y,z)$$

Donde $C(y,z)$ es una constante de integración (para esta integral que es respecto a x) y que depende de las variables y, z.

Luego, como $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -F_y$, debemos de tener que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{1}{2}x^2y^2z + C(y,z)\right] &= -x^2yz \\ \Rightarrow \quad -x^2yz + \frac{\partial}{\partial y}C(y,z) &= -x^2yz \end{aligned}$$

Y entonces se tiene que $\dfrac{\partial}{\partial y}C(y,z) = 0$.

Por otro lado, como $\dfrac{\partial U}{\partial z} = -F_z$, debemos de tener que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{1}{2}x^2y^2z + C(y,z)\right] &= -\frac{1}{2}x^2y^2 \\ \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{\partial}{\partial z}C(y,z) &= -\frac{1}{2}x^2y^2 \end{aligned}$$

Entonces, $\dfrac{\partial}{\partial z}C(y,z) = 0$.
Por tanto, como $\dfrac{\partial}{\partial z}C(y,z) = 0 = \dfrac{\partial}{\partial y}C(y,z) = 0$, tenemos que $C(y,z) = C$ es una constante.
Por lo tanto, el potencial es:

$$\boxed{U(x,y,z) = -\tfrac{1}{2}x^2y^2z + C(y,z)}$$

6) **6.2 a) Encontrar las fuerzas conservativas para las que las siguientes son las funciones de energía potencial escalares**

$$U = \frac{1}{2}ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

Tenemos que la fuerza es $\mathbf{F} = -\nabla U$
El gradiente lo calculamos en coordenadas rectangulares porque la función U está en estas coordenadas. Entonces calculamos cada una de las derivadas parciales:

- $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}ln(x^2+y^2+z^2)\right) = \dfrac{2x}{2(x^2+y^2+z^2)} = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$
- $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2}ln(x^2+y^2+z^2)\right) = \dfrac{2y}{2(x^2+y^2+z^2)} = \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}$

- $\dfrac{\partial U}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}ln(x^2+y^2+z^2)\right) = \dfrac{2z}{2(x^2+y^2+z^2)} = \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}$

Entonces, la fuerza es:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = -\nabla U &= -\frac{\partial U}{\partial x}\widehat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\widehat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\widehat{k} \\ &= -\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\widehat{i} - \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\widehat{j} - \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\widehat{k}\end{aligned}$$

b) Hacer lo mismo para

$$U(r,\theta,\phi) = \frac{a\cos\theta}{r^2}$$

Tenemos que $\mathbf{F} = -\nabla U$.
Para lo cual usaremos la expresión del gradiente en coordenadas esféricas, el cuál es:

$$\nabla U(r,\theta,\phi) = \frac{\partial U}{\partial r}\widehat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\widehat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\widehat{e}_\phi$$

Entonces calculamos las derivadas necesarias:

- $\dfrac{\partial U}{\partial r} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{a\cos\theta}{r^2}\right) = \dfrac{-2a\cos\theta}{r^3}$
- $\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{a\cos\theta}{r^2}\right) = \dfrac{-2a\sin\theta}{r^2}$
- $\dfrac{\partial U}{\partial \phi} = \dfrac{\partial}{\partial \phi}\left(\dfrac{a\cos\theta}{r^2}\right) = 0$

Entonces, tenemos que la fuerza es:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = -\nabla U &= -\frac{\partial U}{\partial r}\widehat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\widehat{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\widehat{e}_\phi \\ &= -\left(\frac{-2a\cos\theta}{r^3}\right)\widehat{e}_r - \frac{1}{r}\left(-\frac{2a\sin\theta}{r^2}\right)\widehat{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}(0)\widehat{e}_\phi \\ &= \frac{2a\cos\theta}{r^3}\widehat{e}_r + \frac{2a\sin\theta}{r^3}\widehat{e}_\theta\end{aligned}$$

7) **6.10) Una partícula positiva de carga e se mueve en el campo eléctrico central**

$$\mathbf{E} = -\frac{\alpha}{\rho}\mathbf{e}_\rho$$

que hay entre las placas de un condensador cilíndrico, y un campo magnético uniforme

$$\mathbf{B} = B\mathbf{k}$$

paralelo al eje del condensador.
a) Establecer las ecuaciones de movimiento de la partícula en coordenadas cilíndricas

Primero que nada, tenemos que la fuerza sobre la partícula es de:

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

Con $\mathbf{v}$ a velocidad de la partícula. La velocidad en coordenadas cilíndricas la hemos calculado varias veces y es:

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{k}$$

Entonces, la fuerza es de:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} = e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] &= e[-\frac{\alpha}{\rho}\mathbf{e}_\rho + \left(\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{k}\right) \times B\mathbf{k}] \\
&= e[-\frac{\alpha}{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho \times B\mathbf{k} + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \times B\mathbf{k} + \dot{z}\mathbf{k} \times B\mathbf{k}] \\
&= e[-\frac{\alpha}{\rho}\mathbf{e}_\rho - \dot{\rho}B\mathbf{e}_\phi + \rho\dot{\phi}B\mathbf{e}_\rho] \\
&= [-\frac{e\alpha}{\rho} + e\rho\dot{\phi}B]\mathbf{e}_\rho - e\dot{\rho}B\mathbf{e}_\phi
\end{aligned}$$

Por otro lado, hemos visto varias veces que la aceleración en coordenadas cilíndricas es:

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{k}$$

Luego, según la segunda ley de Newton tenemos que:

$$\begin{gathered}
\mathbf{F} = m\mathbf{a} \\
\Rightarrow \quad [-\frac{e\alpha}{\rho} + e\rho\dot{\phi}B]\mathbf{e}_\rho - e\dot{\rho}B\mathbf{e}_\phi = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\rho + m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + m\ddot{z}\mathbf{k}
\end{gathered}$$

Lo que nos da las tres ecuaciones de movimiento:

1) $-\frac{e\alpha}{\rho} + e\rho\dot{\phi}B = m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2$
2) $-e\dot{\rho}B = m\rho\ddot{\phi} + 2m\dot{\rho}\dot{\phi}$
3) $m\ddot{z} = 0$

b) **Demostrar que la ecuación de movimiento, en función de la variable angular ϕ, que es una coordenada que se puede no considerar, se resuelve fácilmente y da como integral del movimiento:**

$$m\rho^2\dot{\phi} + \tfrac{1}{2}e\rho^2 B = h = cte$$

Partimos de la segunda ecuación de movimiento que teníamos en el inciso pasado:

$$\begin{aligned}
&-e\dot{\rho}B = m\rho\ddot{\phi} + 2m\dot{\rho}\dot{\phi} \\
&\Rightarrow \quad m\rho\ddot{\phi} + 2m\dot{\rho}\dot{\phi} + e\dot{\rho}B = 0 \\
&\Rightarrow \quad m\rho^2\ddot{\phi} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + e\rho\dot{\rho}B = 0 \qquad \text{multiplicamos por } \rho \\
&\Rightarrow \quad m\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\phi}\right) + \frac{1}{2}eB\frac{d}{dt}\left(\rho^2\right) = 0
\end{aligned}$$

Esto último porque $\dfrac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = \rho^2\dfrac{d}{dt}\dot{\phi} + \dfrac{d}{dt}(\rho^2)\dot{\phi} = \rho^2\ddot{\phi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}$ y porque $\dfrac{d}{dt}(\rho^2) = 2\rho\dot{\rho}$. Ahora integramos esta útima ecuación respecto al tiempo y agregamos una constante de integración h:

$$\begin{aligned}
&\int \left[m\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\phi}\right) + \frac{1}{2}eB\frac{d}{dt}\left(\rho^2\right)\right] = h = cte \\
&\Rightarrow \quad m\int \frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\phi}\right) + \frac{1}{2}eB\int \frac{d}{dt}\left(\rho^2\right) = h \\
&\Rightarrow \quad m\rho^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}eB\rho^2 = h
\end{aligned}$$

Que es lo que se quería demostrar.

c) **Demostrar que, utilizando el resultado hallado en b), la ecuación radial se puede reducir a una ecuación de movimiento unidimensional, que nos dará una segunda integral del movimiento que expresa la conservación de la energía total**

Primero despejamos $\dot{\phi}$ del resultado del inciso anterior. Y obtenemos:

$$\dot{\phi} = \frac{h - \frac{1}{2}eB\rho^2}{m\rho^2}$$

Luego sustituimos esto en la primera ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned}
&-\frac{e\alpha}{\rho} + e\rho\dot{\phi}B = m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 \\
&\Rightarrow \quad -\frac{e\alpha}{\rho} + e\rho\frac{h - \frac{1}{2}eB\rho^2}{m\rho^2}B = m\ddot{\rho} - m\rho\left(\frac{h - \frac{1}{2}eB\rho^2}{m\rho^2}\right)^2 \\
&\Rightarrow \quad -\frac{e\alpha}{\rho} + \frac{eBh}{m\rho} - \frac{e^2\rho B^2}{2m} = m\ddot{\rho} - \frac{h^2}{m\rho^3} + \frac{heB}{m\rho} - \frac{e^2B^2\rho}{4m} \\
&\Rightarrow \quad -\frac{e\alpha}{\rho} - \frac{e^2B^2\rho}{4m} + \frac{h^2}{m\rho^3} - m\ddot{\rho} = 0
\end{aligned}$$

Luego multiplicamos por el factor integrante $\dot{\rho}$ e integramos y agregamos una nueva constante de integración $-K$:

$$\Rightarrow\ -\frac{e\alpha}{\rho}\dot{\rho}-\frac{e^2B^2\rho}{4m}\dot{\rho}+\frac{h^2}{m\rho^3}\dot{\rho}-m\ddot{\rho}\dot{\rho}=0$$
$$\Rightarrow\ -\int\frac{e\alpha}{\rho}\dot{\rho}-\int\frac{e^2B^2\rho}{4m}\dot{\rho}+\int\frac{h^2}{m\rho^3}\dot{\rho}-\int m\ddot{\rho}\dot{\rho}=-K$$
$$\Rightarrow\ -e\alpha\log\rho-\frac{e^2B^2\rho^2}{8m}-\frac{h^2}{2m\rho^2}-m\frac{\dot{\rho}^2}{2}=-K$$

.

$$\Rightarrow\ e\alpha\log\rho+\frac{e^2B^2\rho^2}{8m}+\frac{h^2}{2m\rho^2}+m\frac{\dot{\rho}^2}{2}=K$$

Sustituimos el valor de h del inciso anterior

$$\Rightarrow\ e\alpha\log\rho+\frac{e^2B^2\rho^2}{8m}+\frac{(m\rho^2\dot{\phi}+\frac{1}{2}eB\rho^2)^2}{2m\rho^2}+m\frac{\dot{\rho}^2}{2}=K$$
$$\Rightarrow\ e\alpha\log\rho+\frac{e^2B^2\rho^2}{8m}+\frac{m^2\rho^4\dot{\phi}^2+m\rho^4\dot{\phi}eB+\frac{1}{4}e^2B^2\rho^4}{2m\rho^2}+m\frac{\dot{\rho}^2}{2}=K$$
$$\Rightarrow\ e\alpha\log\rho+\frac{e^2B^2\rho^2}{8m}+\frac{m\rho^2\dot{\phi}^2}{2}+\frac{\rho^2\dot{\phi}eB}{2}+\frac{e^2B^2\rho^2}{8m}+m\frac{\dot{\rho}^2}{2}=K$$
$$\Rightarrow\ e\alpha\log\rho+\frac{m}{2}\left(\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{\rho}^2\right)+\frac{e^2B^2\rho^2}{4m}+\frac{\rho^2\dot{\phi}eB}{2}=K$$
$$\Rightarrow\ e\alpha\log\rho+\frac{m}{2}\left(\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{\rho}^2+\dot{z}^2\right)-\frac{m}{2}\dot{z}^2+\frac{eB}{2m}\left(\frac{1}{2}eB\rho^2+m\rho^2\dot{\phi}\right)=K$$
$$\Rightarrow\ e\alpha\log\rho+\frac{m}{2}v^2-\frac{m}{2}\dot{z}^2+\frac{eB}{2m}h=K$$
$$\Rightarrow\ e\alpha\log\rho+\frac{m}{2}v^2=K+\frac{m}{2}\dot{z}^2-\frac{eB}{2m}h$$

Esta ecaución da la conservación de la energía.
Aquí, el lado izquierdo es la energía total de la partícula, pues $\alpha\log\rho$ es el potencial que se obtiene al integral el campo eléctrico, por lo que $e\alpha\log\rho$ es la energía potencial y $\frac{m}{2}\dot{v}^2$ es la energía cinética.
Por otro lado, el lado derecho es constante porque K, e, m, B, h son constantes. y la ecuación de movimiento 3 nos dice que $\ddot{z}=0$ y por tanto $\dot{z}$ es constante.

d) **Si la partícula es emitida del interior del cilindro con una velocidad inicial:**

$$\mathbf{v}=v_0\mathbf{e}_\rho$$

¿Cuál debe ser el valor mínimo de v_0 para que la partícula llegue al otro cilindro cuyo radio es R_2? [Sugerencia: el valor mínimo de v_0 se obtendrá cuando R_2 sea un punto de retorno]

Por el inciso anterior, sabemos que la energía se conserva y que tiene forma $e\alpha \log \rho + \frac{m}{2}v^2$. Entonces, si igualamos la energía inicial con la final, tenemos:

$$e\alpha \log \rho_1 + \frac{m}{2}v_1^2 = e\alpha \log \rho_2 + \frac{m}{2}v_2^2$$

En el punto incial, la partícula tiene velocidad $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_\rho$ y por tanto, la velocidad cuadrada incial es v_0^2.
Por otro lado, el radio inicial es R_1. Por lo que la energía total inicial es de:

$$E_1 = e\alpha \log R_1 + \frac{m}{2}v_0^2$$

Ahora consideramos el punto final de la partícula, en el que el radio es $\rho_2 = R_2$. Si queremos que la velocidad inicial v_0 sea la mínima, necesitamos que la partícula a penas llegue al radio R_2. Lo cual significa que la partícula llega a un punto de retorno y la velocidad radial final es 0 ($\dot{\rho}_2 = 0$). Además, como $\dot{z}_1 = 0$ porque la velocidad inicial es puramente en la dirección $\mathbf{e}_\rho$ y como $\ddot{z} = 0$ por la tercera ecuación de movimiento, entonces $\dot{z}_2 = 0$.
Entonces, la energía final es de:

$$\begin{aligned} E_2 &= e\alpha \log \rho_2 + \frac{m}{2}v_2^2 = e\alpha \log \rho_2 + \frac{m}{2}(\rho_2^2\dot{\phi_2}^2 + \dot{\rho_2}^2 + \dot{z_2}^2) \\ &= e\alpha \log R_2 + \frac{m}{2}(R_2^2\dot{\phi}_2^2) \end{aligned}$$

Pero por la primera ecuación que obtuvimos en el inciso c), tenemos que $\dot{\phi} = \dfrac{h - \frac{1}{2}eB\rho^2}{m\rho^2}$.
Entonces $\dot{\phi}_2 = \dfrac{h - \frac{1}{2}eBR_2^2}{mR_2^2}$. Sin embargo, tenemos que $h = m\rho^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}eB\rho^2$ y como es una constante de movimiento, podemos tomarla evaluada en cualquier punto del recorrido, en particular, si lo evaluamos en el punto 1, nos queda $h = m\rho_1^2\dot{\phi}_1 + \frac{1}{2}eB\rho_1^2 = mR_1^2(0) + \frac{1}{2}eBR_1^2 = \frac{1}{2}eBR_1^2$.
Entonces, tenemos que: $\dot{\phi}_2 = \dfrac{h - \frac{1}{2}eBR_2^2}{mR_2^2} = \dfrac{\frac{1}{2}eBR_1^2 - \frac{1}{2}eBR_2^2}{mR_2^2} = \dfrac{eB(R_1^2 - R_2^2)}{2mR_2^2}$

Entonces, siguiendo el desarrollo que teníamos para E_2, tenemos que:

$$\begin{aligned} E_2 &= e\alpha \log R_2 + \frac{m}{2}(R_2^2\dot{\phi}_2^2) \\ &= e\alpha \log R_2 + \frac{m}{2}R_2^2\left(\frac{eB(R_1^2 - R_2^2)}{2mR_2^2}\right)^2 \\ &= e\alpha \log R_2 + \frac{m}{2}R_2^2\left(\frac{e^2B^2(R_1^4 - 2R_1^2R_2^2 + R_2^4)}{4m^2R_2^4}\right) \\ &= e\alpha \log R_2 + \frac{e^2B^2}{8mR_2^2}(R_1^4 - 2R_1^2R_2^2 + R_2^4) \end{aligned}$$

Luego, podemos igualar la energía inicial con la energía final y despejar v_0

$$
\begin{aligned}
&E_1 = E_2 \\
\Rightarrow \quad & e\alpha \log R_1 + \frac{m}{2}v_0^2 = e\alpha \log R_2 + \frac{e^2B^2}{8mR_2^2}(R_1^4 - 2R_1^2R_2^2 + R_2^4) \\
\Rightarrow \quad & \frac{m}{2}v_0^2 = e\alpha \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{e^2B^2}{8mR_2^2}(R_1^4 - 2R_1^2R_2^2 + R_2^4) \\
\Rightarrow \quad & v_0 = \sqrt{\frac{2}{m}e\alpha \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{e^2B^2}{4m^2R_2^2}(R_1^2 - R_2^2)^2}
\end{aligned}
$$