Súper Resumen Tensorial

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

13 de enero de 2021

1. Lineal

Todo lo que ya sé.

1.1. Espacio Dual:

Un **funcional lineal** de V es un mapeo linal $f : V \to \mathbb{R}$.
Espacio Dual: Es el espacio de todos los funcionales lineales de V
Al espacio dual se le asigna la suma $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ y el producto por escalar $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$. Que convierten a V^* en un espacio vectorial.

Se suele escribir $\langle v, f\rangle$ para denotar $f(v)$ y se llama el **dual pairing** entre V, V^*.
Los elementos de V^* se llaman **covectores**

Base Dual: Si $\{e_i\}$ es una base en V, entonces su base dual son los covectores $\{\theta_j\}$ de V^* definidos a partir de:

$$\langle e_i, \theta_j\rangle = \delta_{ij}$$

Cualquier elemento $f \in V^*$ se puede expandir en la base dual como:

$$f = f_i\theta_i$$

Donde $f_i \in \mathbb{R}$ son los **componentes** de f en la base $\{\theta_i\}$

Por tanto, $\dim V^* = \dim V$ y por tanto son isomorfos (pero no de manera natural).

Por otro lado, V, V^{**} son isomorfos en una forma más natural. En la que a cada $v \in V$ le asignamos el $v \in V^{**}$ tal que $v(f) = f(v)$.

Aniquilador: El aniquilador de W es:

$$AnnW = \{\theta \in V^* \ \mid \theta(w) = 0 \quad \forall w \in W\}$$

Se puede probar que $AnnW$ es un subespacio de V^*. Y que todo subespacio de V^* es un $AnnW$ para algún W.
Además $(V/W)* \simeq V^*/W^*$.

1.2. Cambio de Base

Sea $\{e_i\}$ y $\{e'_i\}$ dos bases de V. Cada base se puede escribir como combinación lineal de la otra. Por convención, podemos escribir:

$$e'_j = e_i A_{ij}$$

Entonces:

$$e'_1 = e_1 A_{11} + e_2 A_{21} + e_3 A_{31} + \cdots + e_n A_{n1}$$
$$e'_j = e_1 A_{1j} + e_2 A_{2j} + e_3 A_{3j} + \cdots + e_n A_{nj}$$

Para la matriz **cambio de base** A_{ij}.
Es decir, A^T transforma los vectores base de la base sin primas a la primada.

Cambio de Coordenadas:

Digamos que tenemos un vector $v = v_i e_i$, entonces sus coordenadas son $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$.
Luego, si lo queremos escribir en la base primada, sería de la forma $v = v'_i e'_i$ con coordenadas $(v'_1, v'_2, \cdots, v'_n)$.

Tenemos que $v = v'_j e'_j = v'_j e_i A_{ij}$ Por lo que $v_i = A_{ij} v'_j$. Y sacando inverso, tenemos las dos relaciones:

$$v_i = A_{ij} v'_j \quad , \quad v'_i = (A^{-1})_{ij} v_j$$

Entonces, para cambiar de coordenadas del sistema primado al no primado se usa la misma matriz A (que convertía a los vectores no primados en primados) pero sin transponer. Por eso, se dice que estos son vectores **contravariantes**.

Covectores Un cambio de base en V induce un cambio de base en V^*. Si V tiene una base original $\{e_i\}$, entonces tiene su dual $\{\theta_i\}$ que cumple $\langle e_i, \theta_i \rangle = \delta_{ij}$.
Si cambiamos a una base $\{e'_i\}$, la base dual debe de cambiar a una base $\{\theta'_i\}$ tal que $\langle e'_i, \theta'_j \rangle = \delta_{ij}$
Los covectores de una base se tienen que poder escribir respecto a la otra. Entonces escribimos:

$$\theta'_j = \theta_i B_{ij}$$

O bien:

$$\theta'_j = \theta_1 B_{1j} + \theta_2 B_{2j} + \theta_3 B_{3j} + \cdots + \theta_n B_{nj}$$

Entonces, usando la definición de los covectores, tenemos que $\delta_{ij} = \langle e'_i, \theta'_j \rangle = \langle e_k A_{ki}, \theta_l B_{lj} = A_{ki} B_{lj} \langle e_k, \theta_l \rangle = A_{ki} B_{lj} \delta_{kl} = A_{ki} B_{kj}$
Por lo que $A_{ki} B_{kj} = \delta_{ij}$
$\boxed{\text{Lo que implica que } B = (A^T)^{-1}}$
Entonces, la matriz que convierte la base de covectores a la base de covectores primados es

$B = (A^T)^{-1}$

componentes: Sea $f \in V^*$ un covector. En la base original se escribe como $f = f_i\theta_i$. Y en la base primada como $f' = f'_j\theta'_j$.
Vemos cómo se transforman de una base a otra. Tenemos que $f = f'_j\theta'_j = f'_j\theta_i B_{ij}$. Por lo que $f_i = B_{ij}f'_j$.
Por lo que concluimos que:

$$f_i = B_{ij}f'_j \quad , \quad f'_i = (B^{-1})_{ij}f_j$$

O bien, usando la matriz A, tenemos que:

$$f'_j = f_i A_{ij}$$

Por lo que los componentes de los covectores se transforman exactamente como es transformaba la base original.

Y de hecho, reescribimos la transformaciones de las coordenadas de los vectores para tener que $v'_i = (A^{-1})_{ij}v_j \quad \Rightarrow \quad v'_j = B_{ij}v_i$. Por lo que las coordenadas de los vectores se transforman justo como se transforma la base de los covectores (dual de dual es el original).

1.3. Notación

Decimos que los componentes de un covector se transforman **covariantemente** (de la misma forma que los vectores base).
Y los componentes de un vector se transforman **contravarianetemente** (en contra de los vectores de la base)

Escribimos con índice abajo las cosas que se transforman como base de vectores, y con índice arriba las que se transforman como base de covectores.

Por convención escribimos los vectores base con índice abajo e_i. Los covectores como θ^i.
Los componentes de un vector van con índice arriba $v = v^i e_i$ y los de un covector van con índice abajo $f = f_i\theta^i$.

En general, si escribimos:

$$\mathbf{e} = (e_1, e_2, \cdots, e_n) \ , \ \theta = (\theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^n)^T$$
$$\mathbf{v} = (v^1, v^2, \cdots, v^n)^T \quad , \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

Entonces, las reglas de transformación son:

$$\mathbf{e}' = \mathbf{eA}$$
$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$$
$$\theta' = \mathbf{A}^{-1}\theta$$
$$\mathbf{f}' = \mathbf{fA}$$

1.4. Espacios de Producto Interno

Sea V un espacio vectorial sobre K. Se dice que $g : V \times V \to K$ es una **producto interno** de V si cumple que:

- $g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$
- $g(v, u) = \overline{g(u, v)}$
- $g(u, v) = 0$ para todo v implica que $u = 0$.

- **Se llama Positiva definida si** $g(u, u) \geq 0$ para todo u y la igualdad implica $u = 0$

Las primeras dos propiedades implican que g es anitlineal en la primera entrada (separa sumas pero conjuga escalares al sacarlos).

Forma Bilineal: Es una función $g : V \times V \to K$ que toma dos entradas y es lineal en cada una de ellas por separado. Es simétrica si cumple que $g(u, v) = g(v, u)$ y es positiva definida si cumple lo de positiva definida

Ortogonal: Un conjunto de vectores es ortogonal si $g(v_i, v_j) = 0$ cuando $i \neq j$.
Ortonormal: Un conjunto de vectores es ortonormal si $g(v_i, v_i) = \delta_{ij}$

Teorema: Todo espacio con producto interno tiene una base ortonormal.

Matriz de Gram: Dada una base $\{v_i\}$, se puede construir una matriz $G_{ij} = g(v_i, v_j)$ llamada matriz Grammiana.

Lemma: Si V es un espacio real con base $\{e_i\}$ y g es una forma bilineal simétrica. Sea $G = g(e_i, e_j)$. Entonces g es un producto interno sii el determinante del Grammiano es distinto de 0.

Signo de una Forma Bilineal Simétrica: Si g es una forma bilinaeal bisimétrica, entonces se puede diagonalizar con una matriz otrogonal (toerema espectral). Luego, se puede normalizar esta matriz multiplicando por todavía otra matriz. El resultado es una matriz con puros 1 y -1. El signo de la permutación es el número de 1s y de -1s en esta matriz.

1.5. Lemma de Riesz:

Digamos que V tiene un producto interno g . Definimos un mapeo $\psi : V \to V^*$ dado por $v \to f_v$. Con:

$$f_v(\cdot) = g(v, \cdot)$$

Entonces, si $K = \mathbb{R}$, el mapeo ψ es un isomorfismo y si $K = \mathbb{C}$, es un antihomomorfismo (porque es antilineal).
Es decir, a cada $v \in V$ le corresponde el funcional lineal $f_v(\cdots) = g(v, \cdot)$.

Adjunta: Dada una función $A : V \to W$, tiene una adjunta $A^* : W^* \to V^*$ con:

$$(A^*(f))(v) = f(A(v))$$

O bein:

$$\langle A^* f, v\rangle = \langle f, Av\rangle$$

Resulta que la matriz que representa a A^* es la matriz transpuesta y conjugada de A. Lo cual tiene todo el sentido del mundo con lo visto antes.

2. Álgebra Multilineal

Un **Mapeo multilineal** es una función $f : V \times V \times ... \times V \to A$ (con A es lo que sea) tal que es lineal en cada una de las entradas por separado (cuando las demás entradas se mantienen fijas).
Por ejemplo, tenemos algunos ejemplos de mapeos multilineales:

- Un producto interno sobre $\mathbb{R}$ es una función bilineal que toma dos vectores y devuelve un real
- El determinante de matrices de $n \times n$ es una función multilineal que toma n vectores y devuelve un escalar
- El producto cruz es un mapeo bilineal que toma dos vectores de $\mathbb{R}^3$ y devuelve un tercer vector de $\mathbb{R}^3$.

Consideremos por un momento a las formas bilineales que van de $V \times W \to Y$.
Sea por ejemplo f una forma bilineal de este tipo. Nos preguntamos ahora de qué elementos hay que conocer la imagen de f para poder determinar a f por completo. Es decir, cuántos números necesitamos para determinar perfectamente a f.

Digamos que $\{e_1, ...\ e_n\}$ es una base de V y que $\{g_1, ..., g_m\}$ es una base de w. Podemos ver que para determinar a f por completo, es necesario conocer a f en cada uno de los elementos de la forma (e_i, g_j).
Entonces, digamos que estas imágenes son $f(e_i, g_j) = f_{ij}$

Esto porque si queremos calcular por ejemplo $f(v, w)$, lo podemos hacer como sigue :

$$f(v, w) = f(v_i e_i, w_j g_j) = \sum_i v_i f(e_i, w_j g_j) = \sum_i v_i \sum_j w_j f(e_i, g_j) = v_i w_j f_{ij}$$

Entonces, necesitamos todos estos números $f_{ij} = f(e_i, g_j)$ para determinar los valores de f sobre $V \times W$. Sin embargo, a diferencia de como sucede para transformaciones lineales, los elementos (e_i, g_j) no son una base de $V \times W$ (porque una base de este espacio puede ser $\{(e_1, 0), (e_2, 0), ..., (e_n, 0), (0, w_1), ..., (0, w_m)\}$)

Entonces, no basta con saber la imagen de f en cada elemento de la base de $V \times W$ (de hecho no sirve de nada saber eso, porque f en cada elemento de la base de antes vale 0). Sino que hay que conocer f en todos los elementos de la forma (e_i, g_j).
Esto es algo que no se parece en nada en como solían ser usualmente las transformaciones lineales en las que solamente había que saber el valor de f en los elementos de la base.
Esto nuevamente se debe a que f es una función bilineal.

Nos gustaría ahora definir un espacio o algo así en el que podamos encontrar una función f' relacionada con la función f tal que ahora sí requiera solamente de conocer las imágenes en la base de este espacio y que ahora sí sea una función lineal.

Para esto, definimos el mágico producto Tensorial

Espacio Tensorial:
Dados dos espacios vectoriales V, W, definimos su producto tensorial como el espacio $V \otimes W$. Este producto tiene a los elementos de la forma $v \otimes w$ y además, le definimos la siguiente suma y producto por escalares:

- $\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$

- $v \otimes w + v' \otimes w = (v + v') \otimes w$

Si tenemos elementos que no comparte una de las coordenadas, entonces es imposible reducir su suma como en el ejemplo de arriba. Por ello, los elementos de la forma $v \otimes w$ son llamados simples. Y todos los elementos que se consiguen como sumas no reducibles de estos elementos se consideran todavía como miembros de $V \otimes W$ (para que sea un e.v.) pero no se pueden representar de forma simple. Estamos declarando que cumpla con todos los axiomas de un espacio vactorial. También le vamos a exigir que:

$$\lambda(a \otimes b + c \otimes d) = \lambda(a \otimes b) + \lambda(c \otimes d)$$

Entonces, los axiomas con los que definimos a $V \otimes W$ son:

- Los vectores (tensores) "simples"son $v \otimes w$ y se usan para construir otros vectores (tensores)
- La suma es simbólica nada más. A menos que dos tensores tengan una coordenada fija, en cuyo caso se suma la otra
- Los escalares salen al estar en una sola de las entradas.
- El resto de los axiomas de un e.v (distributividad, inversos, etc) se asumen o se obligan digamos.

Base: Una base para $V \otimes W$ se puede ver que es $\{e_i \otimes g_j\} = \{e_1 \otimes g_1, e_1 \otimes g_2, ...e_i \otimes g_m, e_2 \otimes g_1, ..., e_n \otimes g_m\}$
Se puede ver que con esta base se pueden obtener de forma sencilla los elementos simples y por tanto, luego todos los demás.
Vemos que $\dim(V \otimes W) = nm$ mientras que $\dim(V \times W) = n + m$.

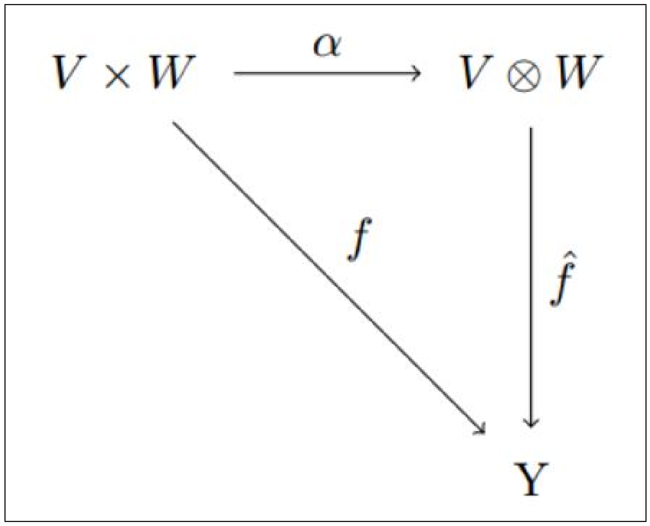
Y curiósamente la base de $V \otimes W$ se parece mucho a los elementos que necesitábamos para definir una forma bilineal. No es coincidencia.

Para qué nos ayuda este espacio tan raro?
Ah bueno, regresando a la discusión pasada sobre formas bilineales, el espacio $V \otimes W$ ayuda a transformar una forma bilineal f que iba de $V \times W$ a Y en una transformación lineal

común y corriente f' que va de $V \otimes W$ a Y.

Primero definimos una función $\mu : V \times W \to V \otimes W$ dada por:

$$\mu(v, w) = v \otimes w$$



μ es un mapeo multilineal, porque:

- $\mu(v_1 + v_2, w) = (v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w = \mu(v_1, w) + \mu(v_2, w)$
- $\mu(\lambda v, w) = (\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) = \lambda\mu(v, w)$

Ahora bien, considermos al mapa $f : V \times W \to Y$ y queremos verlo como un mapa lineal de $V \otimes W$ a Y.
Para ello, definimos f' como:

$$f'(e_i \otimes g_j) = f(e_i, w_j)$$

Y obligamos a f' a que sea lineal. La multilinealidad de f obliga a que f' esté bien definido.

Entonces, f' ya es una mejor forma de ver a la forma bilineal f porque ahora sí es lineal y se requiere justamente de conocer la imagen de la base del dominio de f' para conocer a todo f'.

Toda esta construcción se puede generalizar como uno esperaría para funcionels k-lineales (más de bi) y para k productos tensoriales.

Entonces, dada una forma multilineal $B : V_1 \times V_2 ... \times V_k \to Y$, podemos constuir el espacio $V_1 \otimes V_2 ... \otimes V_k$ que contiene a todos los productos tensoriales
Luego, el tensor que describe a B será un arreglo multidimensional que nos da todas las

imágenes que necesitamos para describir a B.
Además, ahora B se podrá ver como una función sencillamente lineal que va de $V_1 \otimes ... \otimes V_k$ a Y.

Todo lo anterior se puede ignorar porque está mejor el resumen uwu.

Resumen Y Ejemplos

Los tensores sirven para representar funciones multilineales. En especial cuando se tratan de funcionales cuyo resultado es un número real pero sino también se puede.
Nos fijaremos principalmente en funciones bilineales para los ejemplos porque es lo más sencillo y luego generalizamos.

Función Bilineal

Nos restringiremos a funciones bilineales para tener buenos ejemplos y que sea más fácil.
Una función bilineal es $B : V \times W \to Y$ que es bilineal en ambas entradas.
Creo que se llama forma bilineal si Y es el campo K.

Evaluar una función Bilineal :
Digamos que tenemos $v \in V, w \in W$, entonces, vemos que:

$$B(v, w) = B(v^i e_i, w^j g_j) = v^i w^j B(e_i, g_j)$$

Entonces, **una función bilineal se ve como elementos $v^i w^j$ multiplicados por elementos de Y, $B(e_i, g_j)$**.

Ejemplo: Si $f \in V^*, g \in V^*$, entonces una forma bilineal $\phi : V \times W \to K$ es:

$$\phi(u, v) = f(u)g(v)$$

Si $v \in V, w \in W$, entonces una forma bilineal $\lambda : V^* \times W^* \to K$ es:

$$\lambda(f, g) = f(u)g(v)$$

.

El problema de las funciones bilineales es que no se determinan totalmente al conocer la imagen de toda la base de $V \times W$. Para esto creamos el espacio 'abstracto' $V \otimes W$.
Este espacio nos servirá como un paso intermedio entre $V \times W$ y Y de tal forma que las funciones bilineales en $V \times W$ son ahora lineales en $V \otimes W$.

Queremos un espacio en el que la base sean elementos de la forma $[e_i, g_j]$ digamos. Para que una función bilineal como la de arriba se conozca en su totalidad al conocer la imagen de solamente este tipo de elementos.

Y que estos elementos sean verdaderamente distintos y no 'interaccionen entre sí' para que sí sean una base. A diferencia de $V \times W$, en la que no serían una base.

El espacio $V \otimes W$ tiene elementos de la forma $e_i \otimes g_j$. Y luego extendemos al generar usando bilinealidad. Es decir, definimos la suma y producto por escalar como:

- $+ : \begin{cases} e_i \otimes g_j + e_l \otimes g_j = (e_i + e_l) \otimes g_j & \text{(porque la segunda entrada es igual)} \\ e_i \otimes g_j + e_i \otimes g_k = e_i \otimes (g_j + g_k) & \text{(porque primera entrada son iguales)} \\ e_i \otimes g_j + e_l \otimes g_k = e_i \otimes g_j + e_l \otimes g_k & \text{La suma se deja sólo escrita} \end{cases}$

- $\cdot : a \cdot (e_i \otimes g_j) = (ae_i) \otimes g_j = e_i \otimes (ag_j)$

El espacio $V \otimes W$ tiene todos los elementos generados por los elementos de esta forma $e_i \otimes g_j$. Al hacer esto, como que este espacio tiene una 'estructura bilineal' en vez de la estructura lineal de $V \times W$. Lo que permita que las funciones bilineales de $V \otimes W$ se representen de una forma más natural.

Algunos elementos importantes del espacio $V \otimes W$ son los elementos de la forma $v \otimes w$. Se puede probar (con la definición de arriba) que tienen las propiedades:

- $+ : \begin{cases} v_1 \otimes w + v_2 \otimes w = (v_1 + v_2) \otimes w & \text{(porque la segunda entrada es igual)} \\ v \otimes w_1 + v \otimes w_2 = v \otimes (w_1 + w_2) & \text{(porque primera entrada son iguales)} \\ v \otimes w + x \otimes z = v \otimes w + x \otimes z & \text{La suma se deja sólo escrita} \end{cases}$

- $\cdot : \quad a \cdot (v \otimes w) = (av) \otimes w = v \otimes (aw)$

Con estas operaciones, el espacio $V \otimes W$ es un espacio vectorial y todos los elementos se ven como sumas de elementos de la forma $v \times w$ (no todos se pueden expresar de esta forma sencilla, algunos se deben dejar como sumas indicadas). Y es un espacio muy útil.
La base de $V \otimes W$ son los elementos de la forma $e_i \otimes g_j$. (porque literal lo construimos así, para que la forma bilineal quedara determinada por la base)

La utilidad de $V \otimes W$ es que ahora podemos ver a la forma bilineal B como si fuera una función lineal $B' : V \otimes W \to Y$.

Para esto, definimos B' como $B'(v \otimes w) = B(v, w)$ y le exigimos alv ser lineal. Lo bueno de haberle definido al espacio tensorial la suma toda rara es que ahora se cumple que:

- $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w) = B'(v_1 \otimes w) + B'(v_2 \otimes w) = B'(v_1 \otimes w + v_2 \otimes w) = B'((v_1 + v_2) \otimes w)$

Además ahora queda determinada toda B' con sólo conocer la imagen de los básicos. Pues se tiene que:

$$B(v, w) = B(v_i e_i, w_j g_j) = v_i B(e_i, w_j g_j) = v_i w_j B(e_i, g_j) = v_i w_j B'(e_i \otimes g_j) := v_i w_j B_{ij}$$

Con lo que se ve que B queda totalmente determinada con sólo saber su imagen en los elemento $e_i \otimes g_j$.
Por eso la utilidad de los tensores. Porque las formas bilineales no dependen solamente de la imagen de las bases, sino de los pares de vectores. Las funciones bilineales siempre se ven como sumas de productos de la forma $v_i w_j$.

Podemos representar B_{ij} en un arreglo multidimensional (en este caso una matriz) para guardar toda la información de la transformación.
También podemos representar a los tensores (los simples de la forma $v \otimes w$) como arreglos multidimensionales.

Representación del producto de dos vectores:

Si tenemos dos vectores v, w y queremos ver su imagen bajo B, ya sabemos que lo importante son los productos de sus coordenadas, porque $B(v,w) = v^i w^j B(e_i, g_j) = v^i w^j B'(e_i \otimes g_j)$.
Entonces, representaremos al elemento $v \times w$ como la matriz $v^i w^j$:

$$v \otimes w = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_2 w_1 & v_3 w_1 \\ v_1 w_2 & v_2 w_2 & v_3 w_2 \\ v_1 w_3 & v_2 w_3 & v_3 w_3 \end{pmatrix}$$

Donde cada elemento de esta matriz representa el coeficiente de $v \otimes w$ en el básico $e_i \otimes e_j$.

Representación de un tensor:

En general, recibe el nombre de tensor un elemento del espacio tensorial $V \otimes W$. Como tal, un tensor R debe de tener nueve componentes R^{ij}, correspondientes a los 9 básicos $e_i \otimes g_j$.
Donde entonces, $R = R^{ij} e_i \otimes g_j$.
Para representar este tensor, usamos la matriz R^{ij} y ya sabemos que el elemento i, j de la matriz representa al coeficiente de $e_i \otimes g_j$.

Representación de la función bilineal

Si tenemos la forma bilineal $B(v,w)$, sabemos que queda definida por la imagen en los productos $e_i \otimes g_j$.
Es decir, $B(v,w) = v^i w^j B'(e_i \otimes g_j)$.
Para representarlo en una matriz, escribimos a $B(e_i \otimes g_j)$ en el lugar i, j de una matriz B.
Claro que al mentos que B sea una forma bilineal, las entradas de la matriz B^{ij} serán los vectores de Y llamados $B'(e_i \otimes g_j)$.

Si tenemos una forma bilineal B representada por una matriz y se la queremos aplicar a un par de vectores v, w. Simplemente ponemos la matriz $v^i w^j$ sobre la B y sumamos todos los elementos que coninciden. $B(v,w) = v^i w^j B'(e_i \otimes g_j)$

2.0.1. Ejemplos

1. **Producto Interno:** Definimos la forma bilineal $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $g(\vec{v}, \vec{w}) = v_i w_i$.

   En este caso, sí le podemos dar una forma a los elementos de $V \otimes W$ como:

   $$v \otimes w = \begin{pmatrix} v_1w_1 & v_2w_1 & v_3w_1 \\ v_1w_2 & v_2w_2 & v_3w_2 \\ v_1w_3 & v_2w_3 & v_3w_3 \end{pmatrix}$$

   Se puede ver que al representar a los tensores de esta forma, se cumplen con las características que debe de cumplir el producto tensorial.
   Además, la base del espacio tensorial $e_i \otimes g_j$ serán entonces como la matriz anterior pero con un 1 en algún lado (i, j) y 0s en las demás.

   La importancia de exponer $v \otimes w$ de esta forma es que ahora la función bilineal g se puede escribir como una función lineal g' que simplemente combina los 9 elementos de $v \otimes w$.

   Podemos ver que el tensor g tiene entonces la representación $g_{ij} = \delta_{ij} = Id$.

   En realidad, cualquier tensor que vaya de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ queda definido por nueve números que dicen cómo hacer una suma de los elementos de la forma $v_i w_j$. En este caso resultó ser la delta de Kroenecker.

   Por esta razón, un tensor de grado 2 (que representa a una forma bilineal $V \times W \to \mathbb{R}$) requiere de $\dim(V) \cdot \dim(W)$ números, que podemos ordenar en un arreglo matricial por ejemplo.

- **Determinante:** Consideramos el determinante de una matriz de 2*2. Esto se puede ver como una forma bilineal $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Con $d(v, w) = v_1w_2 - v_2w_1$.

  Podemos representar un producto tensorial como:

  $$v \otimes w = \begin{pmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 \\ v_2w_1 & v_2w_2 \end{pmatrix}$$

  Y el tensor d simplemente nos dice qué es lo que hace d con cada una de estas coordenadas. En este caso es:

  $$d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1. Tensores Generales

Un tensor de lo más general del tipo (r, s) es un elemento del espacio:

$$T_s^r = \bigotimes_{i=1}^r V \otimes \bigotimes_{j=1}^s V^*$$

Digamos que V tiene una base $\{e_i\}$ y que V^* tiene una base $\{\theta^i\}$. Entonces, una base para el espacio T_s^r sería todos los objetos de la forma:

$$e_{i1} \otimes e_{i2} \otimes ... \otimes e_{ir} \otimes \theta^{j1} \otimes \theta^{j2} \otimes ... \otimes \theta^{js}$$

Esta base para T_s^r tiene puros ceros excepto por un uno en cada lugar correspondiente.
Un tensor de tipo (r,s) general sería una combinación lineal de esta base, es decir:

$$T^{i_1 i_2 ... i_r}{}_{j_1 j_2 ... j_s} e_{i1} \otimes e_{i2} \otimes ... \otimes e_{ir} \otimes \theta^{j1} \otimes \theta^{j2} \otimes ... \otimes \theta^{js}$$

Es decir, se puede ver de por lo menos dos formas:

- Un arreglo de muchos números (en esta caso necesitamos un arreglo $r + s$ dimensional con n números en cada 'fila'). Tal que representa a una función lineal que se aplica a r vectores y s covectores. La función consiste en multiplicar cada una de las combinaciones posibles de coordenadas de los $r + s$ objetos por el número correspondiente de T y luego sumar sobre todas.
- Una función multilineal que toma r vectores y s covectores.

2.2. Cambio de Base

Entonces, el tensor representado en esta base se ve como un arreglo de un chingo de números en una forma bastante rara. Ahora nos preguntamos qué pasa si queremos cambiarnos a una base $\{e'_i\}$. Representamos los componentes de un objeto en esta base al poner un primado en su índice.
T va a tener r índices que se transforman contravariantemente y s que se transforman covariantemente.
Como vimos antes, si A es la matriz que transforma a la base e en la base e' según $e'_j = e'_i A^{i'}_j$.
Entonces, los componentes de vectores y covectores se transforman como:

$$v^{i'} = (A^{-1})^{i'}_j v^j$$
$$\phi_{i'} = A^j_{i'} \phi_j$$

Entonces, nos queda que las componentes del tensor se transforman como:

$$T^{i'_1 \cdots i'_r}{}_{j'_1 \cdots j'_s} = T^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s} (A^{-1})^{i'_1}_{i_1} \cdots (A^{-1})^{i'_r}_{i_r} A^{j_1}_{j'_1} \cdots A^{j_s}_{j'_s}$$

2.3. Tensores como mapeos multilineales

Como ya dije antes, un tensor del espacio T_s^r se puede ver como un mapeo multilineal de la forma $T : V^* \times ... \times V^* \times V \times .... \times V \to \mathbb{R}$.

Por ejemplo, si tenemos el tensor básico dado por:

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{j_s}$$

Lo podemos ver como un mapeo multilineal en el espacio $(V^*)^{\times r} \times V^{\times s}$ que actúa según la regla:

$$\begin{aligned}
&(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{j_s})(\theta^{k_1}, \cdots, \theta^{k_r}, e_{l_1}, \cdots, e_{l_s}) \\
&= \langle e_{i_1}, \theta^{k_1} \rangle \cdots \langle e_{i_r}, \theta^{k_r} \rangle \langle \theta^{j_1}, e_{l_1} \rangle \cdots \langle \theta^{j_s}, e_{l_s} \rangle \\
&= \delta_{i_1}^{k_1} \cdots \delta_{i_r}^{k_r} \delta_{l_1}^{j_1} \cdots \delta_{l_s}^{j_s}
\end{aligned}$$

Entonces, un tensor general es

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{\quad j_1 j_2 \ldots j_s} e_{i1} \otimes e_{i2} \otimes ... \otimes e_{ir} \otimes \theta^{j1} \otimes \theta^{j2} \otimes ... \otimes \theta^{js}$$

Que es una combinación lineal de los tensores de antes

2.4. Tensores de Orden General

Un tensor de orden $(r + s)$ que es $r-$ contravariante y s covariante se escribe como T_s^r.
Es una función multilineal del conjunto $\times_r V^* \times \times_s V$ a $\mathbb{R}$.
Es lineal en cada uno de los componentes.

El conjunto de todos los tensores r- contravariantes y s- covariantes se denota por $\mathcal{T}_s^r(V) = \bigotimes_r V \otimes \bigotimes_s V^*$
Definimos la suma y producto por escalares de estas funciones como es de esperar y forma así un espacio vectorial.

Base: La base de este espacio son los N^{r+s} elementos de la forma: $\{\vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_r} \otimes \tilde{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{e}^{j_s}\}$

Producto Tensorial: Sea T_s^r , W_q^p dos tensores. Entonces definimos $T_s^r \otimes W_q^p$ como un funcional lineal de $V^* \times \cdots_{r+p} \times V^* \times V \times \cdots_{s+q} \times V$ a $\mathbb{R}$.
Es decir, un elemento de $\mathcal{T}_{s+q}^{r+p}(V)$. Se define por:

$$\begin{aligned}
&(T_s^r \otimes W_q^p)(\tilde{u}^1, \cdots, \tilde{u}^r, \tilde{v}^1, \cdots, \tilde{v}^p; \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s, \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_q) \\
&= [T_s^r(\tilde{u}^1, \cdots, \tilde{u}^r; \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s)][W_q^p(\tilde{v}^1, \cdots, \tilde{v}^p; \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_q)]
\end{aligned}$$

Cumple las propiedades de asociatividad, sacas escalares, distributividad, no-conmutatividad.

Componentes: Un tensor T_s^r (toma r covectores y s vectores) se puede escribir como:

$$T_s^r = T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_r} \otimes \tilde{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{e}^{j_s}$$

Entonces, los componentes son $T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$.

Cambio de Base: Si la base se cambia como $\vec{e'}_a = \lambda^b_a \vec{e}_b \quad , \quad \vec{e}_a = \mu^b_a \vec{e'}_b$.
Entonces las N^{r+s} componentes de $T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$ cambian según la regla:

$$T^{i'_1 \cdots i'_r}_{j'_1 \cdots j'_s} = \mu^{i'_1}_{i_1} \cdots \mu^{i'_r}_{i_r} \lambda^{j_1}_{j'_1} \cdots \lambda^{j_s}_{j'_s} \; T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$$

Tensor Numérico:
Es un tensor cuyos componentes se mantienen fijos bajo cambios de coordenadas. Por ejemplo, el tensor O. O bien el tensor I. Pues en cambio de coordenadas tenemos:

$$\delta'^a_b = \mu^a_c \lambda^d_b \delta^c_d = \mu^a_c \lambda^c_b = \delta^a_b$$

2.5. Simetría de Tensores

Sea T un tensor de tipo $(0,2)$ (toma 2 covectores y da un escalar, sus componentes son covariantes), solamente como ejemplo.
Decimos que es:

- **Simétrico:** $T_{ij} = T_{ji}$
- **Antisimétrico:** $T_{ij} = -T_{ji}$

La simetría o antisimetría de un tensor no depende de la base elegida para sus componentes. Un tensor cualquiera de tipo (0,2) o (2,0) o (1,1)? se puede descomponer en su parte simétrica y su parte antisimétrica:

$$(T_{sim})_{ij} := \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$$
$$(T_{asim})_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$$

Para tensores de mayor orden hay que tomar en cuenta todas las otras simetrías que pueden pasar y así. Y hay que considerar las posibles permutaciones de los índices que hay. Ver Renteln 36.
No escribiré la condición desde el punto de vista del tensor como un arreglo de índices, pero sí del tensor como una función multilineal.
Sea σ una permutación de p elementos. Entonces T es simétrico si:

$$T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(p)}) = T(v_1, v_2, ..., v_p)$$

Y es antisimétri si:

$$T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(p)}) = sgn(\sigma) T(v_1, v_2, ..., v_p)$$

El conjunto de tensores antisimétricos son aquéllos que sacan un menos al trasponer dos vectores de su dominio. A este subespacio de los $(0,p)$ tensores se le conoce como espacio alternante de V o $Alt^p V$

2.6. Operaciones Especiales de Tensores de segundo Orden

2.6.1. Composición:

La composición de dos tensores es básicamente el producto de sus matrices. En clase lo llamamos el producto punto pero bueno.

Por ejemplo, si queremos calcular el producto de dos tensores A y B, hacemos el producto de los componentes del tensor como matrices (omitiendo los elementos de la base tensorial):

$$A \cdot B = A^{ij} B^{kl}$$

$\Rightarrow \quad A^{ij} B^{jl}$ al igualar la segunda del primero y la primera del segundo, estamos haciendo el producto de matrices

Entonces, el resultado como tal, ya con la base es:

$$A \cdot B = A^{ij} B^{jl} (e_i \otimes e_l)$$

Pero, qué significa esto? No sé

Pero es fácil ver que aís como las matrices no conmutan, $AB \neq BA$.
Y también se puede probar que $A \cdot (B + A) = A \cdot B + A \cdot C$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

2.6.2. Producto con un escalar:

Es como el producto de la matriz y el vector:

$$A \cdot w = A^{ij} w^j$$

Que ya es un simple vector.

O por ejemplo:

$$\begin{aligned} (v \otimes u) \cdot w &= (v^i e^i \otimes u^j e^j) \cdot w \\ &= v^i u^j w^j (e^i \otimes e^j e^j) \\ &= v \otimes (u \cdot w) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= v^i u^j (e^i \otimes e^j) \cdot w^j e^j \\ &= v^i e^i \otimes u^j w^j \end{aligned}$$

Y este producto cumple que $v \otimes (\alpha u + \beta w) = \alpha (v \otimes u) + \beta (v \otimes w)$

2.6.3. Doble Contracción

Definimos la doble contracción (horizontal) de dos tensores de la forma:

$$(v \otimes u) \cdot \cdot (w \otimes s) = (v \cdot s)(u \cdot w)$$

que ya es un escalar. Extendemos esta definición a tensores más arbitrarios. Y tenemos entonces que en general:

$$A \cdot \cdot B = (A^{ij}e^i \otimes e^j) \cdot \cdot (B^{kl}e^k \otimes e^l) = (A^{ij}e^i \cdot e^l)(e^j \cdot B^{kl}e^k) =$$
$$= (A^{ij}\delta^{il})(B^{kl}\delta^{jk}) = A^{lj}B^{jl}$$

Se puede probar que es un producto conmutativo.

Doble contracción Parada

Una definición alternativa a la doble contracción anterior, y con la que nos quedaremos es:

$$(v \otimes u) : (w \otimes s) = (v \cdot w)(u \cdot s)$$

Con esta definición, el producto general de dos tensores es:

$$A : B = (A^{ij}e^i \otimes e^j) : (B^{kl}e^k \otimes e^l) = (A^{ij}e^i \cdot B^{kl}e^k)(e^j \cdot e^l) =$$
$$= A^{ij}B^{kl}\delta^{ik}\delta^{jl} = A^{ij}B^{ij}$$

Se puede ver que este producto es conmutativo y en general no es igual al otro.
Además, se distribuye con la suma y saca escalares.

2.7. Propiedades básicas

- **Transpuesta de un Tensor:**
  La transpuesta de un tensor es $(v \otimes u)^T = (u \otimes v)$
  O bien, si el tensor es $A^{ij}(e^i \otimes e^j)$, entonces su transpuesta es $A^T = Aji(e^i \otimes e^j) = A^{ij}(e^j \otimes e^i)$

  Propiedades:

  - $(A^T)^T = A$
  - $(\alpha B + \beta A)^T = \alpha B^T + \beta A^T$
  - $(B \cdot A)^T = A^T \cdot B^T$
  - $A : B^T = A \cdot \cdot B$
  - $A^T : B = A \cdot \cdot B$
  - $A^T : B = A : B^T$

  Traza: La traza actuando sobre los elementos de la base es $Te(e^i \otimes e^j) = e^i \cdot e^j = \delta^{ij}$
  La traza de un tensor A es la suma de las componentes de su diagonal principal:
  $Tr(A) = Tr(A^{ij}(e^i \otimes e^j))A^{ij}Tr(e^i \otimes e^j) = A^{ij}\delta^{ij} = A^{ii}$

  Con esto, podemos redefinir algunas de las operaciones que hemos hecho:

- **Producto punto de Dos vectores:**
  $u \cdot v = u^i v^i = u^i v^j \delta^{ij} = u^i v^j Tr(e^i \otimes e^j) = Tr(u^i e^i \otimes v^j e^j) = Tr(u \otimes v)$

Propiedades de la traza:

- $Tr(A^T) = Tr(A)$
- $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
- $Tr(A \cdot B) = A \cdot \cdot B = Tr(B \cdot A)$

Entonces, podemos definir a la doble $A \cdot \cdot B = Tr(A \cdot B)$ y también que $A : B = Tr(A^T \cdot B)$

Vemos que un tensor (de rango 2) es simétrico si $A = A^T$ y antisimétrico si $A^T = -A$.

Simetría:

Para tensores de orden 4, decimos que un tensor tiene simetría menor si al permutar por separado la primera pareja o la segunda, el resultado es el mismo tensor.
Tiene simetría mayor si al cambiar cualquier pareja de índices el resultado es el mismo.

2.8. Delta De Kronecker

Dados dos vectores $\mathbf{v} = (v^1, v^2), \mathbf{u} = (u^1, u^2)$. Entonces, podemos escribir el producto punto de $\mathbf{u}$ con $\mathbf{v}$ como:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}^T I \mathbf{u} = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad fue necesaria para poder verlo en notación de índices:

$$\mathbf{v} I \mathbf{u} = v_j \delta_i^j u^i = \delta_i^j v_j u^i = v^i u^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

Y además, la delta de Kronecker subió el índice de v (convierte un covector en un vector). Esto define el producto escalar entre un vector y un covector.
Si hacemos el producto de $\mathbf{v}$ con sigo mismo, obtenemos por resultado $v^i v^i = (v^i)^2 = |v|^2$. Por ello, el producto punto nos permite definir norma.
Pero para definir la norma, usamos la delta de Kronecker.

2.9. Espacios con Producto Interno y Tensor Métrico

Norma: Una norma es una función $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$ tal que:

N1) $||\vec{a}|| \geq 0$; $\quad ||\vec{a}|| = 0 \quad$ sii $\quad \vec{a} = \vec{0}$

N2) $||\lambda \vec{a}|| = |\lambda| ||\vec{a}||$

N3) $||\vec{a}+\vec{b}|| \leq ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$

Un Producto Interno (o métrica) es un tensor 2 covariante $g_{..} : V \times V \to \mathbb{R}$ que cumple:

I1) $g_{..}(\vec{a},\vec{b}) \in \mathbb{R}$

I2) $g_{..}(\vec{b},\vec{a}) = G_{..}(\vec{a},\vec{b})$

I3) $g_{..}(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b},\vec{c}) = \lambda g_{..}(\vec{a},\vec{c}) + \mu g_{..}(\vec{b},\vec{c})$

iv) $g_{..}(\vec{a},\vec{x}) = 0$ para todo $\vec{x} \in V$ sii $\vec{a} = \vec{0}$

Métrica positiva definida: Es una métrica que además cumple $g(\vec{a},\vec{a}) \geq 0$ y $g(\vec{a},\vec{a}) = 0$ sii $\vec{a} = 0$. Estas métricas nos permiten definir una norma inducida.

Ejemplo 1: La métrica euclideana está definida como:

$$g_{..}(\vec{a},\vec{b}) = g_{..}(\alpha^i\vec{e}_i, \alpha^j\vec{e}_j) := \delta_{ij}\alpha^i\beta^j = \alpha^i\beta^i$$

Es decir, tiene como componentes a $g_{ij} = \delta_{ij}$

Ejemplo 2: La métrica Lorentziana est a definida como:

$$g_{..}(\vec{a},\vec{b}) = g_{..}(\alpha^i\vec{e}_i, \beta^j\vec{e}_j) = \alpha^1\beta^1 + \cdots + \alpha^{n-1}\beta^{n-1} - \alpha^n\beta^n = \eta_{ij}\alpha^i\beta^j$$

Donde η_{ij} son los componentes de la métrica y valen 0 para $i \neq j$, valen 1 para $i = j < n$ y vale -1 para $i = j = n$

Signo de la métrica: El signo de la métrica dada por $g_{ij} = g(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$. Como es una matriz simétrica, es diagonaizable. Y definimos el signo de la métrica como $sgn(g) = p - n$ donde p es la cantidad de eigenvalores positivos y n es la cantidad de negativos.

Inverso de la Métrica: Si la métrica tiene coeficientes g_{ab}, es invertible y definimos su matriz inversa como g^{ab}. Esta matriz es un 2-contravariante tensor.

2.9.1. Subir y Bajar índices

Producto Punto dada métrica: Dada una métrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$, definimos su producto punto asociado como:

$$\vec{v}\cdot\vec{u} := g(\vec{v},\vec{u}) = g_{\alpha\beta}v^\alpha u^\beta$$

Métrica dado producto punto: Así la métrica euclidea induce el producto punto euclídeo. Y la Lorenziana induce el Lorenziano.

Inversamente, dado un producto punto y una base $\{\vec{e}_i\}$ de V, podemos definir su métrica como:

$$g_{..}(\vec{u},\vec{v}) = g_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta$$

Donde u^α, v^β son los componentes de $\vec{u},\vec{v}$ en la base $\{\vec{e}_i\}$.

Desplazamiento Infinitesimal: Dada una métrica $g_{\alpha\beta}$. La magnitud de un vector de desplazamiento infinitesimal $d\vec{x}$ es:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

Covector asociado a un vector

Sea V un espacio con métrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Sea $\vec{v} \in V$, le podemos asociar a este vector un funcional real $f : v \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$f(\vec{u}) = g(\vec{v},\vec{u})$$

Este covector le llamamos **covector asociado a $\vec{v}$ por la métrica** y lo escribirmos como $\tilde{v}$.
Vemos cuáles son las coordenadas de $\tilde{v}$. La coordenada es:

$$v_\alpha := \tilde{v}(\vec{e}_\alpha) = g(\vec{v},\vec{e}_\alpha) = g_{\mu\nu}v^\mu(\vec{e}_\alpha)^\nu = g_{\mu\nu}v^\mu\delta^\nu_\alpha = g_{\alpha\beta}v^\beta$$

Es decir, la métrica nos permite definir covectores a partir de vectores y luego encontrar sus componentes como:

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta}v^\beta$$

O bien, podemos usar la matriz inversa $g^{\alpha\beta}$ para subir índices:

$$v^\alpha = g^{\alpha\beta}v_\beta$$

Por lo que la métrica nos da un camino entre vectores y covectores.

Ejemplo: En la métrica euclidea un vector y su covector asociado tienen los mismos componentes porque $g_{ij} = \delta_{ij}$
En la métrica Lorenziana, una de las componentes cambia de signo en el covector.

Subir y bajar índices para tensores de orden 2:

$$\begin{aligned} T^{ab} = g^{bc}T^a_c = g^{ac}g^{bd}T_{cd} = g^{ac}T^b_c \\ T_{ab} = g_{ac}T^c_b = g_{ac}g_{bd}T^{cd} = g_{bd}T^d_a \end{aligned}$$

Y así con otras.

Para una métrica cualquiera, se cumple que:

$$\begin{aligned} g^a_b = g^{ac}g_{cb} = \delta^a_b \\ g^b_a = g_{ac}g^{cb} = \delta^b_a \end{aligned}$$

2.10. Tensores Alternantes

Producto externo o cuña: El producto externo entre dos vectores de V se define como:

$$v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v$$

El producto exterior de dos vectores es llamado un 2-vector y el espacio de 2-vectores es denotado como $\bigwedge^2 V$.
Probamos ahora que una base para este conjunto son los productos de la forma $e_i \wedge e_j$ para $i < j$.
Para ver esto, notamos que los vectores se pueden escribir como $v = v^i e_i, w = w^j e_j$.
Y que el producto exterior es:

$$\begin{aligned} v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v &= v^i e_i \otimes w^j e_j - w^j e_j \otimes v^i e_i \\ &= v^i w^j (e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) = v^i w^j e_i \wedge e_j \end{aligned}$$

Si cambiamos los índices mudos, el resultado queda igual pero con un menos. Por lo que los únicos elementos básicos son los $e_i \wedge e_j$.

Entonces, tenemos una base para los 2-vectores. Y esta base tiene $\binom{n}{2}$ elementos.

$\bigwedge^2 V$ **es isomorfo a** $Alt^2 V$: Esto porque $Alt^2 V$ también tiene $(n2)$ elementos.

Podemos ahora proceder de manera axiomática y definimos el producto exterior de p vectores como una operación $v_1 \wedge v_2 \wedge .... \wedge v_p$ de p vectores cuyo resultado es un tensor que satisface:

- **Multilineal:**

$$v_1 \wedge ... \wedge (au + bv) \wedge ... \wedge v_p = a(v_1 \wedge ... \wedge u \wedge ... \wedge v_p) + b(v_1 \wedge ... \wedge v \wedge ... \wedge v_p)$$

- **Antisimetría:**
  Cambiar el orden de dos vectores le cambia el signo al resultado.

Un producto exterior de p vectores se llama un p-vector y es un elementos de $\bigwedge^p V$.
Una base para este espacio está dada por:

$$e_I := e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}$$

Donde $I = (i_1, ..., i_p)$ indica una colección ordenada de índices (los de las e de la derecha) y donde $1 \leq i_1 < ... < i_p \leq \dim V$.
Esto porque cualquier otra colección de índices que no cumpla esta regla o vale 0 (si dos son iguales) o se puede llevar a una de esta forma.

La dimensión de $\bigwedge^p V$ es $(n\ p)$. Un vector general en $\bigwedge^p V$ s escribe como:

$$\frac{1}{p!} a^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} = a^I e_I$$

Donde se tiene el $p!$ abajo porque varias de las entradas son iguales y solamente cambia la posición de los ídices, que se resuelve con antisimetría.
De forma general, se puede definir:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p = c_p \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots v_{\sigma(p)}$$

2.11. El Álgebra Exterior

La colección $\bigwedge V$ de todos los $\bigwedge^p V$ para todo p forman un álgbra llamada álgebra exterior de V. Dado $\lambda \in \bigwedge^p V$ y $\mu \in \bigwedge^q V$, dan como resultado:

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge \cdots \wedge w_p) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_p$$

Y extendemos la operación con linealidad. Para que cumpla las propiedades:

- $\lambda \wedge (a\mu + b\nu) = a\lambda \wedge \mu + b\lambda \wedge \nu$
- $\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu$
- $\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq} \lambda \wedge \mu$

Así como el producto tensorial sirve para identificar funciones multilineales, el producto producto alternante sirve para identificar funciones multilineales alternantes sin términos adicionales de la base.

2.12. La transformación Lineal Inducida

Digamos que tenemos un mapeo $T : V \to V$ lineal. Definimos su **potencia p exterior** como el mapeo lineal:

$$\Lambda^p T : \bigwedge^p V \to \bigwedge^p V$$

Definida por:

$$(\bigwedge^p T)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = T(v_1) \wedge \cdots \wedge T(v_p)$$

Este mapeo es natural, en el sentido que:

$$\bigwedge^p (ST) = (\bigwedge^p S)(\bigwedge^p T)$$

Similarmente, si $\lambda \in \bigwedge^p V \quad , \quad \mu \in \bigwedge^q V$, entonces:

$$(\bigwedge^{p+q} T)(\lambda \wedge \mu) = (\bigwedge^p T)(\lambda) \wedge (\bigwedge^q T)(\mu)$$

Además, como $\dim \bigwedge^n V = 1$, entonces $\bigwedge^n T$ es un mapeo lineal entre espacios de una dimensión y por tanto se ve como el producto por un escalar:

$$(\bigwedge^n T)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = (\det T)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)$$

2.13. Apéndice 1: Productos Tensoriales y Derivadas con notación de índices

2.14. Operaciones Diferenciales

Si trabajamos en $\mathbb{R}^n$ usaremos el sistema como base como (x^1, x^2, x^3). En cuyo caso un vector se puede escribir como $\mathbf{v} = v^1x^1 + v^2x^2 + v^3x^3$. O se puede reducir como $\mathbf{v} = v^ix^i$ (donde usamos letras latinas para indicar índices que corren en 1,2,3) o incluso como $\mathbf{v} = v^i$ si damos por obvia la base usada.

Si trabajamos en el espacio de 3 dimensiones espaciales y una temporal. Renombramos la base como (x^0, x^1, x^2, x^3) y usamos letras griegas μ, ν que corren de 0 a 3. Para describir un vector como $\mathbf{v} = v^\mu x^\mu = v^\mu$

Tomemos ahora un campo escalar ϕ que va del espacio tiempo a $\mathbb{R}$. Es una función que toma un punto espacio tiempo y les asigna un real. Le definimos las derivadas parciales como sigue:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial x^0} = \partial^0\phi$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x^1} = \partial^1\phi$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x^2} = \partial^2\phi$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial x^3} = \partial^3\phi$$

O de manera colectiva las podemos escribir como:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \partial^\mu\phi$$

O si queremos solamente las dimensiones espaciales:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \partial^i\phi$$

2.14.1. Gradiente

El gradiente de un campo escalar es:

$$\nabla\phi = \partial^i\phi = (\partial^0\phi, \partial^1\phi, \partial^2\phi, \partial^3\phi)$$

Donde se entiende que se tiene que hacer la suma sobre las coordenadas espaciales. Y se entiende que cada término incluye su componente vectorial.

Sea $\mathbf{v} = v^{mu}$ un campo vetorial (es decir, a cada vector le asigna un nuevo vector). Entonces, sus derivadas son:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}^\mu}{\partial x^0} = \partial^0 v^\mu$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{v}^\mu}{\partial x^1} = \partial^1 v^\mu$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{v}^\mu}{\partial x^2} = \partial^2 v^\mu$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{v}^\mu}{\partial x^3} = \partial^3 v^\mu$$

Donde μ corre desde 0 a 3. Por lo que cada uno de estos es en realidad cuatro ecuaciones. Por ejemplo, el primero es el vector $\partial^0 v^\mu = \partial^0 v^0, \partial^0 v^1, \partial^0 v^2, \partial^0 v^3$.

Entonces, el gradiente como tal tiene dos índices libres y es (para las coordenadas espaciales):

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \partial^j v^i = \begin{pmatrix} \partial^1 v^1 & \partial^1 v^2 & \partial^1 v^3 \\ \partial^2 v^1 & \partial^2 v^2 & \partial^2 v^3 \\ \partial^3 v^1 & \partial^3 v^2 & \partial^3 v^3 \end{pmatrix}$$

Y si tomamos el gradiente de un elemento de la base. O sea de un x^i. Entonces, nos queda:

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \partial^j x^i = \begin{pmatrix} \partial^1 x^1 & \partial^1 x^2 & \partial^1 x^3 \\ \partial^2 x^1 & \partial^2 x^2 & \partial^2 x^3 \\ \partial^3 x^1 & \partial^3 x^2 & \partial^3 x^3 \end{pmatrix} = \delta^{ij}$$

Divergencia:
Sea $\mathbf{v}$ un campo vectorial.
Definimos la divergencia como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial^i v^i$$

Rotacional: El rotacional se define por:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \partial^j \times v^k = \epsilon_{ijk} \partial^j v^k$$

Este objeto es un vector, porque tiene un índice libre.

Laplaciano Se define por:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) = \partial^i \cdot (\partial^i v^j) = \partial^i \partial^i v^j$$

Es un vector con índice libre j.

Laplaciano
Para cambiar de un sistema si tilde a un sistema con tilde usaremos las derivadas parciales. Por ejemplo, de coordenadas cartesianas a polares, tenemos:

$$x^1 = r \sin \cos \theta \ , \ x^2 = r \sin \theta \sin \phi \ , \ x^3 = r \cos \theta$$

Y sidamos que el índice μ varía en r, θ, ϕ. Entonces, la matriz jacobiana es:

$$\partial^\alpha x^i = \begin{pmatrix} \partial^r x^1 & \partial^r x^2 & \partial^r x^3 \\ \partial^\theta x^1 & \partial^\theta x^2 & \partial^\theta x^3 \\ \partial^\phi x^1 & \partial^\phi x^2 & \partial^\phi x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

(no va transpuesta?)

Ejemplo:
Consideramos el experimento en el que estamos en un elevador en caída libre y dejamos caer dos objetos.
Aproximamos a la tierra como una esfera con potencial gravitacional dado por:

$$\phi = \frac{-GM}{r}$$

Definimos al tensor (a la matriz) de marea:

$$K^{ij} = \partial^i \partial^j \phi$$

Demostrar algo:
Empezamos escribiendo a r como $r = (x^j x^j)^{1/2}$
Hacemos las derivadas:

- $\partial^j \phi = \partial^j \left(-GM/r\right) = -GM\partial^j(1/r) = -GM\partial^j(r^{-1})$
  $= -GM(-r^{-2}\partial^j r) = GM(r^{-2}\partial^j(x^i x^i)^{1/2}) = \dfrac{GM}{2r^2}(x^i x^i)^{-1/2}\ \ \partial^j(x^i x^i)$
  $= \dfrac{GM}{2r^3}\ \ (2x^i\partial^j x^i) = \dfrac{GM}{r^3}x^j$

- **Ejemplo:** Ecuación de onda. Primero escribimos las ecuaciones de Maxwell en su notación normal y de índices:
  - $\nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \ \ \Rightarrow \ \ \partial^i E^i$
  - $\nabla \cdot B = 0 \ \ RR \ \ \partial^i B^i = 0$
  - $\nabla \times E = -\dfrac{d}{dt}B \ \ \Rightarrow \ \ \epsilon_{ijk}\partial^j E^k = -\dfrac{d}{dt}B$
  - $\nabla \times B = \mu_0\epsilon_0\dfrac{d}{dt}E + \mu_o J \ \ \Rightarrow \ \ \epsilon_{ijk}\partial^j B^k = \mu_0\epsilon_0\dfrac{d}{dt}E + \mu_0 J$

  Como vamos a estar en el vacío, dejamos de lado el ρ y la J.
  Primero vamos a sacar la siguiente identidad:

  $$\nabla \times (\nabla \times V) = \nabla(\nabla \cdot V) - \nabla^2 V$$

Hacemos la prueba con notación de índices:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times V) &= \nabla \times (\partial^i \times v^i) = \nabla \times (\epsilon_{ijk}\partial^j v^k) \\
&= \partial^l \times (\epsilon_{ijk}\partial^j v^k) = \epsilon_{pmi}\partial^m(\epsilon_{ijk}\partial^j v^k) \\
&= \epsilon_{pmi}\epsilon_{ijk}\partial^m\partial^j v^k \\
&= \epsilon_{pmi}\epsilon_{jki}\partial^m\partial^j v^k \quad \text{los levi deben de sumar por el ultimo} \\
&= (\delta^p_j\delta^m_k - \delta^p_k\delta^m_j)\partial^m\partial^j v^k \\
&= \delta^p_j\delta^m_k(\partial^m\partial^j v^k) - \delta^p_k\delta^m_j(\partial^m\partial^j v^k) \\
&= \delta^p_j\partial^k\partial^j v^k - \delta^p_k\partial^j\partial^j v^k \\
&= \delta^p_j\partial^j\partial^k v^k - \delta^p_k\partial^j\partial^j v^k \\
&= \partial^p\partial^k v^k - \partial^j\partial^j\delta^p_k v^k \\
&= \partial^p(\nabla \cdot v) - \partial^j\partial^j v^k \\
&= \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla^2 v
\end{aligned}$$

Y luego se puede sacar el rotacional de las ecuaciones rotacionales de Maxwell y listo.

Las operaciones que suelen definirse en los espacio vectoriales son:
Suma, producto por escalar, producto interior, producto vectorial.
Para hacer estas operaciones, es conveniente tener los vectores expresados en una base.
Expresamos un vector $\mathbf{v}$ como:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i\mathbf{e}^i$$

Tomamos dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en el espacio vectorial. Y definimos las operaciones como:

- $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n v^i\mathbf{e}^i + \sum_{i=1}^n u^i\mathbf{e}^i = ... = \sum_{i=1}^n (v^i + u^i)\mathbf{e}^i$
- $a\mathbf{v} = a\sum_{i=1}^n v^i\mathbf{e}^i = ... = \sum_{i=1}^n av^i\mathbf{e}^i$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n v^i\mathbf{e}^i \cdot \sum_{i=1}^n u^i\mathbf{e}^i = \sum_{i=1}^n v^i u^i$ (en el caso ortonormal)

Símbolo de Levi-Civita: Es un objeto de rango 3 definido como sigue:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk = 123, 231, 312 \\ 0, & i = j, j = k, j = k \\ -1 & ijk = 132, 213, 321 \end{cases}$$

Con este símbolo podemos escribir el producto vectorial como:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \epsilon_{ijk}v^j u^k\mathbf{e}^i$$

Se puede hacer las 3 sumas de esto y luego usar la definición del símbolo.
Por ejemplo, para el término 1-ésimo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{v} \times \mathbf{u}]_1 &= \epsilon_{1jk} v^j u^k \\
&= \epsilon_{11k} v^1 u^k + \epsilon_{12k} v^2 u^k + \epsilon_{13k} v^3 u^k \\
&= (\epsilon_{111} v^1 u^1 + \epsilon_{112} v^1 u^2 + \epsilon_{113} v^1 u^3) + (\epsilon_{121} v^1 u^1 + \epsilon_{122} v^1 u^2 + \epsilon_{123} v^1 u^3) \\
&+ (\epsilon_{131} v^1 u^1 + \epsilon_{132} v^1 u^2 + \epsilon_{133} v^1 u^3) \\
&= v^1 u^3 - v^1 u^2
\end{aligned}$$

Triple Producto Escalar:

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\epsilon_{ijk} v^j u^k \mathbf{e}^i) = (w^i e^i) \cdot (\epsilon_{ijk} v^j u^k \mathbf{e}^i) = \epsilon_{ijk} v^j u^k w^i$$

Triple producto vectorial

$$\begin{aligned}
[\mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u})]_k &= \epsilon_{kij} w^i (u \times v)^j \\
&= \epsilon_{kij} w^i (\epsilon_{jlm} v^l u^m) \\
&= \epsilon_{kij} \epsilon_{jlm} w^i v^l u^m \\
&= \epsilon_{kij} \epsilon_{lmj} w^i v^l u^m \\
&= (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) w^i v^l u^m \\
&= \delta_{kl} \delta_{im} w^i u^l v^m - \delta_{km} \delta_{il} w^i v^l u^m \\
&= \delta_{im} w^i v^k u^m - \delta_{il} w^i v^l u^k \\
&= v^k w^m u^m - w^l v^l u^k
\end{aligned}$$

3. Resumen Geometría Diferencial

3.1. Curva:

Una curva es una función $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (generalmente $n = 3$)
Se ve como $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$
Vector tangente: Es el vector $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t))$

Curva Regular: Es una curva cuya rapidez $|\alpha'(t)|$ nunca es 0.

Longitud de Curva: La longitud de una curva entre dos puntos $\alpha(a), \alpha(b)$ es:

$$L(\alpha)\Big|_a^b = \int_a^b ||\alpha'(t)||dt$$

Reparametrización: Sea $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^3$ una curva y sea $h(t) : J \to I$. Podemos reparametrizar la curva con h definiendo $\beta(t) = \alpha(h(t))$. Ambas funciones dibujan la misma curva.

PLA: Una curva PLA es una curva que cumple que $|\alpha'(t)| = 1 \ \forall t$

Teorema: Reparametrizar: Una curva regular siempre se puede reparametrizar como pla.

3.1.1. Fórmulas de Frenet

Sea $\beta(s)$ una curva p.l.a. Entonces definimos:

- **Vector Tangente:** $T(s) = \beta'(s)$, que tiene magnitud 1.
- **Curvatura:** $k(s) = |T'(s)|$
- **Vector Normal (unitario):** $N(s) = \dfrac{1}{|T'|}T' = \dfrac{1}{k}T$
- **Vector Binormal:** Se define como $B(s) = T(s) \times N(s)$

Fórmulas de Frenet:

1) $T' = kN$
2) $B' = -\tau N$ (con $\tau := -N \cdot B'$ se llama **torsión**)
3) $N' = -kT + \tau B$

Fórmulas para curvas no PLA:

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \quad , \quad N(t) = \frac{T'(t)}{k|\alpha'(t)|} \quad , \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} \quad , \quad k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \quad , \quad \tau(t) = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \times \alpha''|^2}$$

3.2. Superficies

Uba superficie es la imagen de una función $\mathbf{x} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (de hecho se puede formar juntando muchas imágenes o 'patches' de este tipo).
Se puede ver de la forma:

$$\mathbf{x}(u,v) = (x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v))$$

Vectores tangentes: Dos vectores tangentes se consiguen con las u-curvas y v-curvas:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (x^1_u, x^2_u, x^3_u) \\ \mathbf{x}_v &= (x^1_v, x^2_v, x^3_v) \end{aligned}$$

Ecaluando en el punto u_0, v_0 que querramos.

Plano Tangente: El plano tangente a una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ en un punto $p \in M$ es:

$$T_p(M) = \{\vec{v} : \vec{v} \text{ es tangente a } M \text{ en } p\}$$

Son los vectores que se consiguen con curvas $\alpha : I \to M$ con $\alpha(0) = p \;\;,\;\; \alpha'(0) = \vec{v}$
Para una superficie regular, los vectores $x_u(p), x_v(p)$ son una base de $T_p(M)$

Vector Normal: Es el vector $\mathbf{X}(u_0, v_0) = x_u(u_0, v_0) \times x_v(u_0, v_0)$

Mapeo entre funciones: Un mapeo de la forma $\phi : S_1 \to S_2$ con S_1, S_2 superficies.

Derivada de un mapeo entre Superficies: Estas funciones entre superficies se pueden derivar.
La derivada de una función ϕ en $p \in S_1$ es un mapeo lineal:

$$d_p\phi : T_p(S_1) \to T_{\phi(p)}(S_2)$$

Y que se define como sigue: Para $w \in T_p(S_1)$, encontramos una curva $\alpha : I \to S_1$ tal que $\alpha(0) = p \;\;,\;\; \alpha'(0) = w$. Y con ello definimos:

$$d_p\phi(w) = (\phi \circ \alpha)'(0)$$

La definición no depende de la curva que sea α con tal de que cumpla con lo de antes.
Este mapeo es lineal.

4. Tensores en Variedades

4.1. Variedades

Dado un espacio topológico M, una **carta** es un par (ϕ, U) donde U es un abierto de M y ϕ es una función continua biyectiva de U a un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$.
Se llama también un **sistema coordenado**, pues a cada punto de U le asigna una n-eada de coordenadas como para $p \in M$:

$$\phi(p) = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in D$$

Variedad: Una variedad es un espacio topológico M que es Hausdorff, con base numerable y que se puede cubrir totalmente con cartas coordenadas.

Traducción: Si dos cartas $(\phi, U), (\theta, V)$ son tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces para un punto $p \in M$, le podemos asociar dos coordenadas:

$$\begin{aligned} \phi(p) &= (x^1, \cdots, x^n) \\ \theta(p) &= (y^1, \cdots, y^n) \end{aligned}$$

Podemos conectar estas coordenadas con:

$$\begin{aligned} y &= (\theta \circ \phi^{-1})(x) \\ x &= (\phi \circ \theta^{-1})(y) \end{aligned}$$

La **variedad es diferenciable** C^r si estas funciones son C^r (en el sentido real, pues estas funciones son de los reales en los reales).

Nota: Notar que una variedad no tiene que estar metida (embedded) en un espacio $\mathbb{R}^m$ más grande. La variedad tiene una existencia individual independiente de que la podamos o no meter en un espacio $\mathbb{R}^m$. De hecho, el teorema de Whitney dice que toda variedad de dimensión n se puede embeddar en $\mathbb{R}^{2n}$

4.1.1. Funciones entre Variedades

Función a los Reales:

Sea $F : U \subset M \to \mathbb{R}$. Donde (ϕ, U) es una de las cartas de M. Esta función induce una función entre espacios reales como:

$$f = F \circ \phi^{-1} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Con esta forma de escribirlo, ya se pueden revisar las condiciones de continuidad y diferenciabilidad pues tenemos que:

$$y = F(p) = [F \circ \phi^{-1}](x) = f(x) = f(x^1, \cdots, x^n)$$

Función entre Variedades:
Digamos que $F : M \to N$ es una función entre variedades. Sea (ϕ_1, U_1) una carta de M y (ϕ_2, U_2) una de N, entonces podemos escribir mejor la función como:

$$y = \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$$

Que es una función entre espacios reales.

4.2. Espacio Tangente y Cotangente

Vector tangente en $\mathbb{R}^n$ En $\mathbb{R}^n$ el vector $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ tangente a $x = (x^1, x^2, x^3)$ se representa como un vector que sale de x en la dirección $\vec{v}$.

Vector Tangente en Variedades: El vector tangente $\vec{v}$ a un punto $p \in M$ se puede representar como una flecha de dirección $\vec{v}$ que sale de p (dibujada en el espacio en el que M está embedido).
Sin embargo, nos interesa definirlo de forma intrínseca a M.

Por eso generalizamos el término de vector tangente usando las derivadas direccioneales.

Derivada direccional generalizada: Tenemos una variedad M con una carta (ϕ, U). Sea $x = \phi(p) \in \mathbb{R}^n$
Sea $(v^1, \cdots, v^n)$ una n-eada.
Entonces el **vector tangente** $\vec{v}_x$ en $D \subset \mathbb{R}^n$ se define como:

$$\vec{v}_x = v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Que es un operador al que le falta meter una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Espacio Tangente: El espacio a un punto $p \in M$ es $T_p(M)$ con coordenadas $(x^1, \cdots, x^n)$ es el conjunto de todos los vectores tangentes definidos antes.
Tiene como **base** a los operadores:

$$\vec{e}_{1x} = \frac{\partial}{\partial x^1} \quad , \quad \vec{e}_{nx} = \frac{\partial}{\partial x^n}$$

Que se deben de aplicar a una función f y <u>luego evaluar en x</u>.

Campo Vectorial a una variedad: Un campo vectorial en una variedad asigna un vector tangente a todos los puntos de una variedad. Requiere de n funciones $v^j(x)$ y se ve como:

$$\vec{v}(x) = v^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Teorema 3.2.4: Si $\vec{v}, \vec{w}$ son campos vectoriales en $D \subset \mathbb{R}^n$, y $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ son funciones C^1. Entonces:

i) $[f(x)\vec{v}(x) + g(x)\vec{w}(x)][h] = f(x)(\vec{v}(x)[h]) + g(x)(\vec{w}(x)[h])$

ii) $\vec{v}(x)[cf + kg] = c(\vec{v}(x)[f]) + k(\vec{v}(x)[g])$

iii) $\vec{v}(x)[fg] = (\vec{v}(x)[f])g(x) + f(x)(\vec{v}(x)[g])$

4.3. Resumen espacios Tangentes

- Sea M una variedad. Digamos que tiene un sistema de coordenadas locales $\{x^1, \cdots, x^n\}$ y otro sistema de coordenadas $\{y^1, \cdots, y^n\}$.
- Definimos $\Omega^0(M)$ como el conjunto de todas las funciones $f : M \to \mathbb{R}$ que son continuas (Es decir que son continuas al componer con las funciones coordenadas y ver como una función real)
- **Espacio Tangente**: T_pM Es el conjunto de todos los operadores que toman una función f y dan un real. Y cumplen con linealidad y regla de Leibniz.
  La **base** son elementos de la forma $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, que toman una función de $\Omega^0(M)$ y devuelven su derivada evaluada en p.
  En general sus elementos son **vectores** de la forma $X_p = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$.
  O bien, en la otra base es de la forma $X_p = Y^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p$
- **Espacio Cotangente:** T_p^*M es el espacio dual a T_pM.
  La **base** son elementos de la forma dx^i. Estos elementos pertenecen a $\Omega^0(M)$. Toman los puntos de M y los proyectan sobre el eje x^i.
  Es el dual porque $\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j\rangle = \delta_i^j$, donde el producto punto consiste en derivar la función dx^j usando $\frac{\partial}{\partial x^i}$ y por eso la delta de Kroenecker.
  En general, son **covectores** de la forma $\alpha_p = a_i dx^i$
  O bien, en la otra base es de la forma $\alpha_p = b_i dy^i$
- **Transformaciones:**
  - **la Base** Tenemos la base $\frac{\partial}{\partial x^i}$ y la base $\frac{\partial}{\partial y^j}$ del espacio tangente, entonces por la regla de la cadena, se transforman **covariantemente:**
    $$\frac{\partial}{\partial y^j} = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_p$$
    Donde el operador $\frac{\partial}{\partial x^i}$ se deja indicado.
  - **La Cobase**: Si tenemos la cobase $\{dx^i\}$ y la cobase $\{dy^i\}$ que vienen de las bases coordenadas $\{x^i\}, \{y^j\}$. Enotnces, la cobase se transforma **contravariantemente**
    $$dy^j = \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_p dx^i$$
  - **Coordenadas de vectores:** Digamos que $X_p = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ y $X_p = Y^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p$.
    Entonces las coordenadas de los vectores se transforman **contravariantemente** como:

$$Y^j = X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_p$$

- **Coordenada de covectores:** Digamos que $\alpha_p = a_i dx^i$ y también $\alpha_p = b_j dy^j$. Entonces, las coordenadas se transforman **covariantemente:**

$$a_i = b_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\bigg|_p$$

Es decir, las cosas se transforman como $\mathbf{e}' = \mathbf{e}\mathbf{A}$, $\theta' = \mathbf{A}^{-1}\theta$, $\mathbf{v}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$, $\mathbf{f}' = \mathbf{f}\mathbf{A}$. Donde $A = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}$

Campos: Podemos definir campos como asignaciones que a cada punto p le dan un vector tangente y un covector y así.

4.3.1. Lie Bracket

Dados X, Y dos campos vectoriales. Su Lie Bracket $[X, Y]$ es el operador diferenciabl dado por:

$$[X, Y] = XY - YX$$

Se puede ver que esto vuelve a ser un campo vectorial al probar que $[X, Y]$ vuelve a ser una derivación tensorial.
Si $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$

$$\begin{aligned}[XY]f &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \\ &= X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)\end{aligned}$$

Si luego restamos un término igual pero con X, Y intecambiados. Y ahora quitando la f, nos queda:

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

Por lo que es un campo vectorial nuevamente.
Además, cumple la **identidad de Jacobi:**

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, x]] + [Z, [x, Y]] = 0$$

4.4. Campos Tensoriales En Variedades

Consideramos el espacio tangente $T_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ en $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^n)$ en $\mathbb{R}^n$ (correspondiente a $T_p(M)$) Y el espacio cotangente consiste de las funciones lineales de $T_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathbb{R}$. El espacio $T_p(M)$ tiene como base:

$$\vec{e}_{p\,i} = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

Y el espacio cotangente contiene las funciones lineales $f : M \to \mathbb{R}$ y se define la **forma natural** entre ambos como $\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, f \rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$
Una base de $T_p^*(M)$ son las proyecciones dx^i que dan la iésima coordenadas de p.

Tensor: Un tensor en un punto $p \in M$ se puede ver ya sea como un elemento de un espacio de producto tensorial o como un mapeo multilineal. En cualquier caso, un tensor en $p \in M$ es:

$$\Psi = \Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

O bien es un mapeo multilineal que toma r elementos de T_p^*M y s elementos de T_pM como $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, X_1, \cdots, X_s)$ y aplica $\Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$ a esto (aplicando cada uno por parejas usando el producto interno en el que el elemento de T_pM se aplica a T_p^*M.

Campo Tensorial. Es una expresión del tipo:

$$\Psi = \Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

Donde $\Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$ es una expresión que depende del punto $p \in M$. Es decir, a cada punto p (o bien a cada coordenadas x) le da un tensor de $(T_pM)^{\otimes r} \otimes (T_p^*M)^{\otimes s}$.
Y ahora las derivadas se deben de evaluar en p
Este es un **Tensor de tipo** (r, s).
Este tensor se tiene que aplicar a un elemento de $\Pi_r T_p^*(M) \times \Pi_s T_p(M) \to \mathbb{R}$. Es decir, toma r funciones lineales de M en $\mathbb{R}$ y s operadores diferenciales.
Luego aplica la forma natural a cada par como es de esperar de un tensor y realize las sumas sobre los índices repetidos.

Transformación de coordenadas. Si tenemos unas coordenadas $\{y^1, \cdots, y^n\}$, entonces vimos que las bases se transforman como $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}$ y $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k$. Entonces, en estas nuevas coordenadas, los componentes del tensor se transforman como:

$$\Psi^{i'_1 \cdots i'_r}_{j'_1 \cdots j'_s}(y(x)) = \Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}(x) \frac{\partial y^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{j'_s}}$$

Y ahora para cada punto p con coordenadas y, se le asigna un tensor.

Se define una suma entre tensores como es de esperar y un producto tensorial también.

4.5. Haces Tangentes y Cotangentes

El haz tangente a una variedad es la unión de todos los espacios tangentes. Es decir:

$$T(M) = \bigcup_{p\in M} T_pM = \{(p,v) \mid p \in M \wedge v \in T_pM\}$$

Al haz tangente le podemos asignar una proyección que nos devuelve el punto p de la variedad correspondiente.
Es la proyección $\pi : T(M) \to M$ que toma un vector tangente (p,ν) y nos devuelve p:

$$\pi(p,\nu) = p \in M$$

La función inversa $\pi^{-1}(p)$ es la **fibra del haz tangente:**

$$\pi^{-1}(p) = T_p(M)$$

Haz cotangente
Se define como:

$$T^*(M) = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$$

4.5.1. Conmutador

Si $u = u_a\partial_a$ y $v = v_b\partial_b$ son dos campos vectoriales sobre la variedad, definimos el **conmutador** de u y v o **corchete de Lie** como la aplicación:

$$[\cdot,\cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

Definida por:

$$[u,v](f) = u(v(f)) - v(u(f))$$

Si $u,v,w \in \mathcal{X}(M)$ y $a,b \in \mathbb{R}$ podemos verificar las siguientes propiedades:

- **Bilinealidad** $[a\cdot u + b\cdot w, v](f) = a\cdot[u,v](f) + b\cdot[w,v](f)$
- **Bilinealidad** $[u, a\cdot v + b\cdot w](f) = a\cdot[u,v](f) + b\cdot[u,w](f)$
- **Antisimetría:** $[u,v](f) = -[v,u](f)$
- **Jacobi:** $[u,[v,w]](f) + [w,[u,v]](f) + [v,[w,u]](f) = 0$
- **Leibniz:** $[u,v](f\cdot g) = g\cdot[u,v](f) + f\cdot[u,v](g)$

5. Derivadas de Tensores

Las parciales de un tensor no son un tensor (no siguen la regla de transformación).

5.1. Variedades Afines

5.1.1. Derivada de Lie

Tomamos dos campos vectoriales $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Y tomamos una carta coordenada $(U, \phi) \in \mathcal{D}_A$ tal que para $p \in M$, $\phi(p) = x^a$.
Teneos:

$$\phi(p) = x^a \quad , \quad p = \phi^{-1}(x^a)$$

Además, los campos vectoriales son:

$$X = X^a \partial_a$$
$$Y = Y^a \partial_a$$

Definimos la **derivada de Lie** de Y respecto de X en $p \in M$ como:

$$\mathcal{L}_X Y(p) = [X, Y](p) = \partial_X Y(p) - \partial_Y X(p)$$

Que es un operador diferencial.

5.1.2. Conexión Afín

Buscamos algo que tome dos campos vectoriales en $p \in M$ y les asigne un vector tangente.

Def: Sea M una variedad diferenciable y sean $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ dos campos vectoriales, una **conexión afín** sobre M es el mapeo:

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

Definido por:

$$\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

Que cumple las siguientes propiedades:

- $\mathbb{R}$ **lineal:**

$$\nabla_{aX+bX'}(Y) = a\nabla_X Y + b\nabla_{X'} Y$$
$$\nabla_X (aY + bY') = a\nabla_X Y + b\nabla_X Y'$$

- Sea $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable. ∇ es $C^\infty(M)$-lineal en la primera variable:

$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$$

- **Regla de Leibniz**:

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + \nabla_{fX}Y$$

- Se llama **conexión simétrica** si cumple:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \mathcal{L}_X Y$$

La derivada de Lie no es una conexión afín.

Prop 2.1: Sea $V, V' \in \mathcal{X}(M)$ tales que $V_p = V'_p$ para un $p \in M$. Entonces, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$, se cuple:

$$(\nabla_V X)_p = (\nabla_{V'} X)_p$$

Campo Paralelo: Sea (M, ∇) una variedad afín. Decimos que $X \in \mathcal{X}(M)$ es un campo paralelo si para todo $V \in T(M)$ se cumple:

$$\nabla_V X = 0$$

5.2. Símbolos de la conexión

Tomamos $X = X^a \partial_a$ y $Y = Y^b \partial_b$.
Volviendo a usar las propiedades de la conexión, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{X^a \partial_a}(Y^b \partial_b) = X^a \nabla_{\partial_a}(Y^b \partial_b) \\
&= X^a(\partial_a Y^b \partial_b + \nabla_{Y^b \partial_a} \partial_b) = X^a(\partial_a Y^b \partial_b + Y^b \nabla_{\partial_a} \partial_b) \\
&= X^a \partial_a Y 6b \partial_b + X^a Y^b \nabla_{\partial_a} \partial_b
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\nabla_X Y = X^a \partial_a Y^b \partial_b + X^a Y^b \nabla_{\partial_a} \partial_b$$

Con ello, definimos los **símbolos de la conexión** como:

$$\nabla_{\partial_a} \partial_b := \Gamma^c_{ab} \partial_c$$

Por lo que reescribimos como:

$$\nabla_X Y = X^a(\partial_a Y^b \partial_b + Y^b \Gamma^c_{ab} \partial_c)$$

Prop: Si la conexión es simétrica, tenemos que $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$

- Dem: Se puede calcular que $\nabla_X Y - \nabla_Y X = \mathcal{L}_X Y + X + X^a Y^b (\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}) \partial_c$
  Si la conexión es simétrica, tenemos que $\nabla_X Y - \nabla_Y X = \mathcal{L}_X Y$, lo que implica que $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$

Los símbolos no son tensores, pues se transforman como:

$$\Gamma^s_{ab} = \partial_a x^l \partial_b x^m \partial_r x^s \Gamma^r_{lm} + \partial_a \partial_b x^s$$

5.3. Diferenciales de tensores

Podemos con un poco de cuentas demostrar que:

$$\nabla_X Y = (X^a Y^b \Gamma^c_{ab} + X^a \partial_a Y^c)\partial_c$$

Prop: Si $f : M \to \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\nabla_a f = \partial_a f$$

Prop: Si ω es una 1-forma, entonces:

$$\nabla_b \omega = (\partial_b \omega_c - \omega_a \Gamma^a_{bc})dx^c$$

6. Geodésicas

Digamos que queremos sumar $\nu_p \in T_pM$ y $\mu_q \in T_qM$. Tenemos el problema de que no tienen los orígenes en el mismo lugar y no podemos sumarlos. Para sumarlos, hay que trnasportar un vector de un plano tangente al otro.

6.1. Transporte Paralelo

En $\mathbb{R}^n$, si queremos comparar dos vectores, necesitamos mover la cola de uno hacia donde está la cola del otro para que tengan los mismos orígenes. Al hacer este movimiento, el vector no cambia porque estamos en un lugar plano y no importa la curva con la que transportemos los vectores.

Sin embargo, si hacemos estos transportes en espacios curvos, pasan cosas raras.

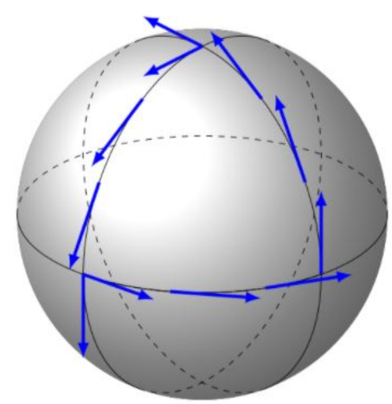


Figura 6: El transporte de un vector sobre una esfera.

Vemos que al mover el vector en la curva cerrada vuelve siendo un vector distinto.

Sea M una variedad afín y sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to U \subset M$ una curva. Ya tenemos una expresión para el vector tangente a la curva:

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = (dx^a\partial_a\alpha)(t)$$

Recordamos que la derivada total de un espacio vectorial en M es:

$$D_tX = (\frac{d}{dt}X^c + X^a dx^b \Gamma^c{}_{ab})\partial_c$$

Def: Decimos que un campo vectorial del haz tangente a la variedad afín,$X \in \mathcal{X}(M)$ es **paralelo** a lo largo de una curva $\alpha \in M$ si cumple:

$$D_tX = 0$$

Es decir:

$$\frac{d}{dt}X^c + X^a dx^b {\Gamma^c}_{ab} = 0$$

Se conoce como la ecuación del **transporte paralelo.**
En un espacio plano los símbolos de la conexión son 0 y la ecuación se reduce a $\frac{d}{dt}X^c = 0$ que es una recta.

6.2. Geodésica

Def: Sea (M, ∇) una variedad afín, con una conexión arbitraria, diremos que $\alpha \in M$ es una geodésica de M si $\frac{d\alpha}{dt}$ se transporta paralelamente sobre α, es decir:

$$D_\alpha(\frac{d\alpha}{dt}) = D_t(\frac{d\alpha}{dt}) = 0$$

Vemos qué quiere decir esto:

$$\begin{aligned}
D_t\left(\tfrac{d\alpha}{dt}\right) &= D_t\left(\tfrac{dx^c}{dt}\,\partial_c\alpha\right)(t)\\
&= \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{dx^c}{dt}\,\partial_c\alpha\right)(t) + \left(\tfrac{dx^c}{dt}\,\partial_c\alpha\right)(t)\;dx^b\,{\Gamma^c}_{ab}\\
&= \left(\tfrac{d^2x^c}{dt^2}\,\partial_c\alpha + x^c\,\tfrac{d}{dt}\partial_c\alpha + \tfrac{dx^c}{dt}\,dx^b\,{\Gamma^c}_{ab}\,\partial_c\alpha\right)(t)\\
&= \left(\tfrac{d^2x^c}{dt^2}\,\partial_c\alpha + \tfrac{dx^c}{dt}\,dx^b\,{\Gamma^c}_{ab}\,\partial_c\alpha\right)(t)\\
&= \left(\tfrac{d^2x^c}{dt^2} + \tfrac{dx^c}{dt}\,dx^b\,{\Gamma^c}_{ab}\right)\partial_c\alpha(t)\\
&= \left(\tfrac{d^2x^c}{dt^2}\,\partial_a x^c + dx^a\,\partial_a x^c\,dx^b\,{\Gamma^c}_{ab}\right)\partial_c\alpha(t)\\
&= \left(\tfrac{d^2x^c}{dt^2} + dx^a\,dx^b\,{\Gamma^c}_{ab}\right)\partial_a x^c\,\partial_c\alpha(t)\\
&= \left(\tfrac{d^2x^c}{dt^2} + dx^a\,dx^b\,{\Gamma^c}_{ab}\right)\partial_a\alpha(t).
\end{aligned}$$

Como debe cumplirse la ecuación (4), esto nos deja con:

$$\frac{d^2x^c}{dt^2} + dx^a\ dx^b\ {\Gamma^c}_{ab} = 0. \tag{5}$$

La ecuación (5) es la famosísima *ecuación geodésica*. Veamos de nuevo que si estamos en una variedad con la conexión ∇^0, donde todos los ${\Gamma^c}_{ab} = 0$, obtenemos algo sospechosamente familiar:

$$\frac{d^2x^c}{dt^2} = 0. \tag{6}$$

Las soluciones a la ecuación 6 son curvas de la forma:

$$x^c(t) = a\ x^c(t) + b\ .$$

6.3. Torsión y Curvatura

Definimos la torsión de dos campos vectoriales como:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - \mathcal{L}_X Y$$

6.3.1. Curvatura

7. Apéndice 1: Formas Diferenciales

0-forma: Una 0-forma es un campo escalar $f(x) = f(x^1, \cdots, x^n)$

1-forma: Una 1-forma es un campo tensorial 1-covariante, de la forma $\tilde{T}(x) = T_j(x)dx^j$

Producto Externo de nuevo: Sea $W_p(x)$ un campo tensorial p-covariante totalmente antisimétrico en $D \subset \mathbb{R}^n$, es decir, pertenece a $\bigwedge^p(\tilde{T}_x(\mathbb{R}^n))$. Y sea $U_q(x)$ otro tensor en $\bigwedge^q(\tilde{T}_x(\mathbb{R}^n))$.
El producto externo entre ellos es el tensor totalmente antisimétrico:

$$\begin{aligned}&[W_p(x) \wedge U_q(x)](\vec{a}_1(x), \cdots, \vec{a}_p(x), \vec{a}_{p+1}(x), \cdots, \vec{a}_{p+q}(x))\\ := &\frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} [sgn(\sigma)][W_p(x) \otimes U_q(x)](\vec{a}_{\sigma(1)}(x), \cdots, \vec{a}_{\sigma(p+q)}(x))\end{aligned}$$

Para todos los campos vectoriales $\vec{a}_1(x), \cdots, \vec{a}_{p+q}(x)$ en $T_x(\mathbb{R}^n)$

Podemos expresar $W_p(x)$ como:

$$\begin{aligned}W_p(x) &= W_{i_1 \cdots i_p}(x) dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}\\ &= \frac{1}{p!} W_{i_1 \cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\\ &:= \sum_{i_1 < \cdots < i_p}^{n} W_{i_1 < \cdots < i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\\ &= W_{i_1 < \cdots < i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\end{aligned}$$

p-Forma diferencial: Es un campo tensorial covariante totalmente antisimétrico $W(x)$ de orden (0 , p).

Teorema: El producto exterior es distributivo con la suma y asociativo. Además cumple que:

$$U_q(x) \wedge W_p(x) = (-1)^{pq} W_p(x) \wedge U_q(x)$$

Usando $p = q = 1$, tenemos que:

$$\begin{gathered}dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j\\ dx^1 \wedge dx^1 = \cdots = dx^n \wedge dx^n = O_{..}(x)\end{gathered}$$

Example 3.4.2 Let us choose $N = 3$ and $p = 1$. Consider two 1-forms $\tilde{\mathbf{A}}(x)$ and $\tilde{\mathbf{B}}(x)$. Therefore,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}(x) \wedge \tilde{\mathbf{B}}(x) &= [A_i(x)B_j(x)]\, dx^i \wedge dx^j\\ &= [A_1(x)B_2(x) - A_2(x)B_1(x)]\, dx^1 \wedge dx^2\\ &\quad + [A_2(x)B_3(x) - A_3(x)B_2(x)]\, dx^2 \wedge dx^3\\ &\quad + [A_3(x)B_1(x) - A_1(x)B_3(x)]\, dx^3 \wedge dx^1.\end{aligned}$$

This expression is analogous to the *cross product* between vector fields in the vector calculus. □

Derivada Exterior: Si f es una función de $D \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, su derivada exterior es definida como la 1-forma:

$$df(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x^j} dx^j$$
$$df(x)[\vec{v}(x)] = v^j(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^j}$$

Por lo que $df(x)$ es una 1-forma.
Si $\tilde{T}(x) = T_j(x) dx^j$ es una 1-forma diferenciables, su **derivada** exterior es:

$$\begin{aligned} d\tilde{T}(x) &:= [dT_i(x)] \wedge dx^i = \frac{\partial T_i(x)}{\partial x^j} \, dx^j \wedge dx^i \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial T_i(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j(x)}{\partial x^i}\right] dx^j \wedge dx^i \end{aligned}$$

Derivada Exterior: En general la derivada exterior d convierte una p-forma $W_p(x)$ de $\bigwedge^p(\tilde{T}_x(\mathbb{R}^n))$ en una $(p+1)$-forma $d\, W_p(x)$ en $\bigwedge^{p+1}(\tilde{T}_x(\mathbb{R}^n))$. Se define como:

$$\begin{aligned} d[W_p(x)] &:= \frac{1}{p!}[dW_{j_1 \cdots j_p}(x)] \wedge dx_1^j \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \\ &:= \frac{1}{p!}\left[\frac{\partial W_{j_1 \cdots j_p}(x)}{\partial x^k} dx^k\right] \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_p}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial W_{j_1 \cdots j_p}(x)}{\partial x^k}\right] dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \end{aligned}$$

Example 3.4.4 Consider a differentiable 2-form

$$_2\mathbf{F}(x) = (1/2) F_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j = F_{i<j}(x) dx^i \wedge dx^j. \tag{3.67}$$

Then the exterior derivative of $_2\mathbf{F}(x)$, according to (3.66), is

$$\begin{aligned} d[{}_2\mathbf{F}(x)] &= (1/2)\left[\frac{\partial F_{ij}(x)}{\partial x^k}\right] dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j \\ &= (1/6)\left[\frac{\partial F_{ij}(x)}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}(x)}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}(x)}{\partial x^j}\right] dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Teorema 3.4.5: La derivada exterior cumple:

i) $d[W(x) + A(x)] = d[W(x)] + d[A(x)]$

ii) $d[W_p(x) \wedge A_q(x)] = d[W_p(x)] \wedge A_q(x) + (-1)^p W_p(x) \wedge d[A_q(x)]$

Lema: Sea $W_p(x)$ una p-forma diferenciable 2 veces en $D \subset \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$d^2 W_p(x) = O_{p+2}(x)$$

Se sigue de usar la expresión de dW que vimos antes dos veces.

Example 3.4.8 Consider $N = 3$ and a function $f \in C^2(D \subset \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. In that case,

$$\begin{aligned} df(x) &= \frac{\partial f(x)}{\partial x^j} dx^j, \\ d^2[f(x)] &= \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^k \partial x^j} dx^k \wedge dx^j = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^j \partial x^k}\right] dx^k \wedge dx^j \\ &= \mathbf{O}_{..}(x). \end{aligned}$$

The statement above is equivalent to the familiar vector field identity

$$\text{curl}\ [\text{grad}\, f(x)] \equiv \boldsymbol{\nabla} \times [\boldsymbol{\nabla} f(x)] \equiv \vec{\mathbf{O}}(x). \qquad \square$$

Example 3.4.9 Consider $N - 3$ and a continuously twice-differentiable 1-form $\tilde{\mathbf{V}}(x) = V_j(x)dx^j$. By (3.65), we obtain

$$d\tilde{\mathbf{V}}(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_j(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial V_i(x)}{\partial x^j}\right] dx^i \wedge dx^j.$$

3.4. Differential Forms and Exterior Derivatives 85

Using (3.66) and (3.69), we get

$$\begin{aligned} d^2[\tilde{\mathbf{V}}(x)] &= \frac{1}{6}\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial V_j(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial V_i(x)}{\partial x^j}\right] + \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial V_k(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial V_j(x)}{\partial x^k}\right]\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial V_i(x)}{\partial x^k} - \frac{\partial V_k(x)}{\partial x^i}\right]\right\} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &\equiv \mathbf{O}_{...}(x). \end{aligned}$$

The identity above is equivalent to the vector field identity

$$\operatorname{div}\left[\operatorname{curl}\vec{\mathbf{V}}(x)\right] \equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathbf{V}}(x)\right] \equiv 0. \qquad \square$$

Cerrada: Una $p-$forma $W_p(x)$ es cerrada si $d[W_p(x)] = O_{p+1}(x)$.
Exacta: Una p-forma $A_p(x)$ es exacta si existe una p-1 forma $B_{p-1}(x)$ tal que $A_p(x) = d[B_{p-1}(x)]$.

Lemma de Poincare: Toda forma exacta es cerrada.

Teorema: Si el dominio D de las formas es estrellado (todos los puntos se pueden conectar a un punto centro por medio de rectas), entonces una forma cerrada es exacta.
Esto prueba teoremas como que un campo irrotacional es la divergencia de algún otro campo o así

Integración: Sea f una función integrable en $D \cup \partial D$. Entonces definimos:

$$\int_D f(x)dx^i \wedge \cdots \wedge dx^n := \int_D f(x^1, \cdots, x^n)dx^1 \cdots dx^n$$

La segunda parte es una integral múltiple usual.

Por tanto, si $W(x) = f(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ es una n-forma, tenemos que:

$$\textstyle\int_D W(x) = \int_D f(x^1, \cdots, x^n)dx^1 \cdots dx^n$$

Teorema Generalizado de Stokes:
Sea $D^*_{p+1} \subset \mathbb{R}^n$ con $p+1 \leq N$ un conjunto abierto y estrellado con una frontera continua p-dimensional ∂D^*_{p+1}. Enotnces, para cualquier p-forma continuamente diferenciable $W_p(x)$ se cumple:

$$\int_{D^*_{p+1}} d[W_p(x)] = \int_{\partial D^*_{p+1}} W_p(x)$$