

# Tarea 3

## Física Nuclear y Subnuclear

Tomás Ricardo Basile Álvarez  
316617194

April 29, 2022

### Problema 1. Cross-section

Los deuterones con una energía  $E_{kin} = 5MeV$  son perpendicularmente incidentes sobre un objetivo de tritio, que tiene una densidad de ocupación de masa  $\mu_t = 0.2mg/cm^2$ , para investigar la reacción  ${}^3H(d, n){}^4He$ .

- a) ¿Cuántos neutrones por segundo pasan a través de un detector con un área de recepción de  $A = 20cm^2$  que está a una distancia  $R = 3m$  del objetivo y un ángulo  $\theta = 30^\circ$  a la dirección del haz de deuterón, si la sección transversal diferencial  $d\sigma/d\Omega$  en este ángulo es de  $13mb/sr$  y la corriente de deuterón aplicada al objetivo es  $I_d = 2\mu A$ ?

Cada que choca un deuterón con uno de los tritios en el objetivo, se produce como resultado un átomo de helio y se libera un neutrón. Por ello, la cantidad de neutrones liberados en todas las direcciones es igual al número de reacciones entre deuterones y tritios.

Para calcular lo que se nos pide, empezamos con la definición de la sección transversal diferencial, que según vimos en clase (y en la ecuación 4.5 de [1]) es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Número de reacciones por unidad de tiempo por sección angular } d\Omega \text{ a ángulo } \theta}{\text{Partículas en el haz por unidad y tiempo} \times \text{Blancos por unidad de área}}$$

Denotamos por  $\dot{N}$  al número de reacciones por unidad de tiempo por sección angular  $d\Omega$  a ángulo  $\theta$ . Denotamos por  $\dot{N}_d$  al número de partículas en el haz de deuterones por unidad de tiempo y por  $n_t$  al número de blancos (tritio) por unidad de área. Por lo tanto, siguiendo la ecuación anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\dot{N}}{\dot{N}_d n_t} \\ \Rightarrow \dot{N} &= \dot{N}_d n_t \frac{d\sigma}{d\Omega}\end{aligned}$$

Finalmente, como  $\dot{N}$  es el número de reacciones que son detectadas por unidad de tiempo por sección angular  $d\Omega$ , para calcular la cantidad de neutrones que serán detectados por unidad de tiempo en una sección angular  $d\Omega$ , hay que multiplicar por esta sección angular:

Número de neutrones detectados por unidad de tiempo

$$\text{por el detector que cubre un ángulo } d\Omega: \dot{N}d\Omega = \dot{N}_d n_t \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (1)$$

Para calcular esto, obtenemos cada uno de los términos por separado con los datos que nos da el problema:

- 
- $\dot{N}_d$ : Esta cantidad es el número de partículas en el haz por unidad de tiempo. Para calcularlo, usamos que el problema nos dice que la corriente de deuterones es  $I_d = 2\mu A$ , que se define como la cantidad de carga del haz que cruza un objetivo por unidad de tiempo. Es decir, considerando que cada deuterón tiene una carga  $e$  (pues tiene un protón de más), la cantidad de deuterones del haz que cruzan un objetivo por unidad de tiempo es  $\dot{N}_d = I_d/e$ .
  - $n_t$ : Se define como el número de blancos (es decir, tritio) por unidad de área. Sabemos que la densidad de masa del tritio por unidad de área es  $\mu_t = 0.2mg/cm^2$ . Luego, si cada tritio tiene una masa  $m_t$ , entonces la cantidad de átomos de tritio que hay por unidad de área es  $\frac{\mu_t}{m_t}$ .
  - $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ : Este valor ya nos lo da el problema y vale  $13mb/sr$ .
  - $d\Omega$  es el ángulo sólido que cubre el detector. Como el detector tiene un área  $A$  y un radio  $R$ , dicho ángulo sólido es  $d\Omega = \frac{A}{R^2}$ .

Sustituimos todos estos resultados en la expresión (1) y nos queda que el número de neutrones detectados por unidad de tiempo por el detector a un ángulo de  $\theta$  es de:

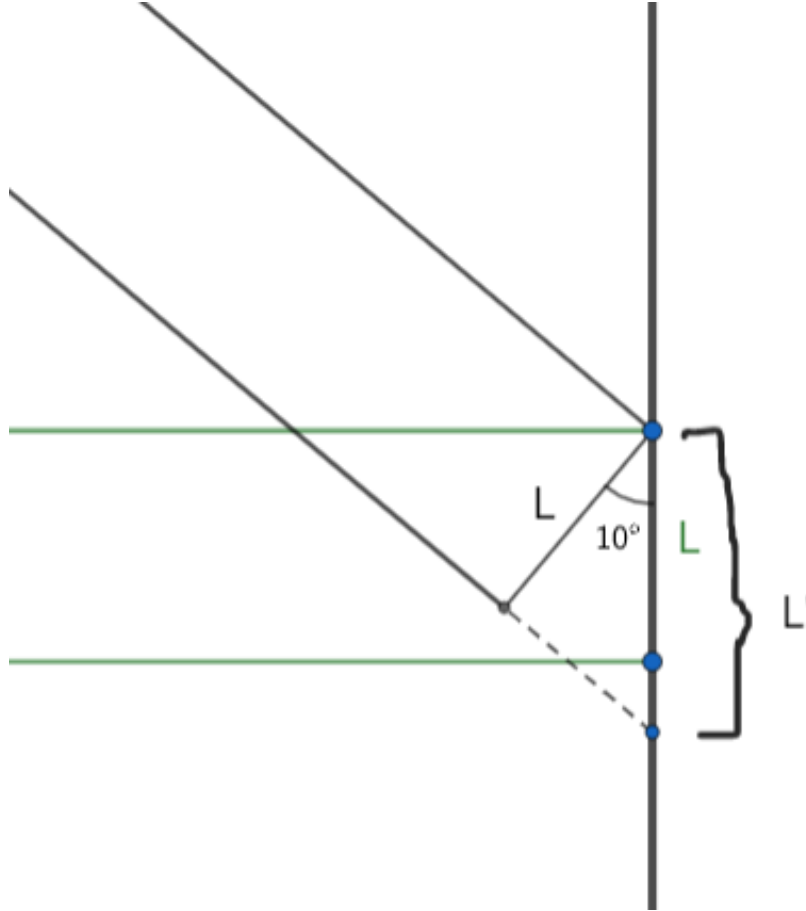
$$\begin{aligned}\dot{N}d\Omega &= \dot{N}_d n_t \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \\ &= \left(\frac{I_d}{e}\right) \left(\frac{\mu_t}{m_t}\right) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \left(\frac{A}{R^2}\right)\end{aligned}$$

Para obtener el valor numérico, sustituimos todos los datos que nos da el problema. Incluida la masa del tritio, que según [2] tiene un valor de  $m_t = 3.016049u = 5.00827 \times 10^{-27}kg$  y nos queda:

$$\begin{aligned}\dot{N}d\Omega &= \left(\frac{2\mu A}{1.60217 \times 10^{-19}C}\right) \left(\frac{0.2mg/cm^2}{5.00827 \times 10^{-27}kg}\right) (13mb/sr) \left(\frac{20cm^2}{(3m)^2}\right) \\ &= \left(\frac{2 \times 10^{-6}A}{1.60217 \times 10^{-19}C}\right) \left(\frac{2 \times 10^{-3}kg/m^2}{5.00827 \times 10^{-27}kg}\right) (13 \times 10^{-31}m^2/sr) \left(\frac{0.0020m^2}{(3m)^2}\right) \\ &= \boxed{1440 \text{ Neutrones por segundo}}\end{aligned}$$

- b) ¿Cuántos neutrones por segundo recibe el detector si el objetivo está inclinado para que la misma corriente de deuterón ahora se acerque a  $80^\circ$  en lugar de  $90^\circ$ ?

En la siguiente figura se ve la situación:



El haz verde marca la situación original en la que los deuterones inciden perpendicularmente sobre el blanco (marcado por una línea vertical) y el haz tiene un grosor  $L$ . Por otra parte, en negro se marca un haz a  $10^\circ$  grados respecto a la perpendicular (el ángulo está exagerado en la figura). Este haz también tiene un ancho de  $L$ , pero como se ve en el dibujo, el ángulo hace que el haz cubra una mayor área del blanco, pues ahora el ancho sobre el que incide es  $L'$ . Se puede ver por la figura que se cumple que  $L = L' \cos 10^\circ \Rightarrow L' = \frac{L}{\cos 10^\circ} = L(1.01543)$ . Es decir, el haz ahora “ve” un ancho del blanco 1.01543 veces mayor al original.

Entonces, el área sobre la que incide el haz aumenta en 1.01543 y por lo tanto, también lo hace el número de colisiones y el número de neutrones detectados. Por lo tanto, el número de neutrones observados por segundo en el detector ahora es  $1440 \cdot (1.01543) = 1462.21$  neutrones. Donde ahora el detector forma un ángulo de  $30^\circ$  respecto a este nuevo haz, no respecto al original.

## Problema 2. Dispersión de Rutherford

Partículas  $\alpha$  con energía cinética  $E_{kin} = 6\text{MeV}$  de una fuente radiactiva se dispersan del núcleo de  $Au^{197}$ . ¿En qué ángulo de dispersión se encuentran las desviaciones de la sección transversal?:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \cdot (4E_{kin})^2 \sin^2(\frac{\theta}{2})}$$

¿Es éste el resultado esperado?

Estudiaremos las aproximaciones que se hacen para calcular la sección eficaz de Rutherford que se presenta en el enunciado y veremos si alguna de ellas no es válida para este problema en algún ángulo y entonces esperaríamos ver una desviación del resultado experimental respecto al de Rutherford en dicho ángulo.

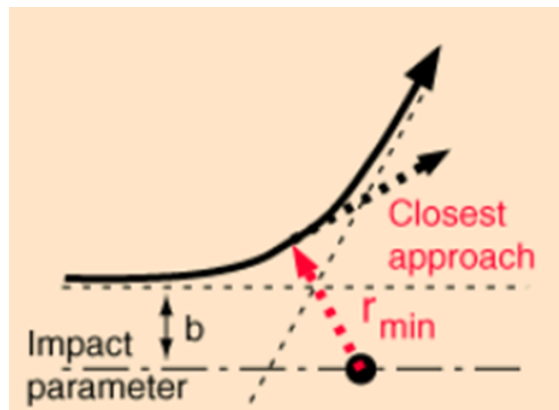
La sección eficaz de Rutherford hace un par de aproximaciones para ser válida. La primera de ellas es que se desprecia el retroceso del núcleo, para lo cual es necesario que la masa del proyectil sea mucho menor que la del objetivo y su energía sea pequeña. Esto se cumple en este caso, ya que la masa del oro es  $197u$  y la de las partículas alpha es  $4u$ .

Por otro lado, la sección eficaz de Rutherford omite los efectos que aparecen a energías relativistas y que se incluyen en la sección eficaz de Mott. Sin embargo, esta corrección tampoco es necesaria en este caso, ya que la energía cinética de las partículas alpha  $E_{kin} = 6\text{MeV}$  es muy pequeña comparada con la masa de la partícula alpha (que es  $3727\text{MeV}/c^2$ ), lo que significa que la energía no es relativista y no hace falta hacer esta corrección.

Finalmente, la sección eficaz de Rutherford solamente toma en cuenta la interacción electromagnética entre la partícula  $\alpha$  y el núcleo. Sin embargo, si estas partículas se acercan lo suficiente, sería necesario considerar también la interacción nuclear fuerte. Esta interacción podría causar desviaciones de la sección transversal respecto a lo que dice el resultado de Rutherford.

Para ver si es necesario considerar esta interacción, obtendremos la distancia de mayor acercamiento entre la partícula alpha y el núcleo de oro y calcularemos el ángulo  $\theta$  de dispersión en la que este mayor acercamiento sucede. Luego, veremos si este acercamiento es lo suficientemente pequeño como para que sea necesario considerar la interacción fuerte y entonces se esperaría una desviación de la sección eficaz respecto a la que predice Rutherford.

Para calcular la distancia de mayor acercamiento, nos fijamos primero en la siguiente figura, en la que se muestra una partícula alpha deflectándose de un núcleo. La figura fue obtenida de [3]



En esta figura,  $b$  es el parámetro de impacto, que es la distancia perpendicular del núcleo a la trayectoria inicial de la partícula  $\alpha$  y  $r_{min}$  es la distancia de mayor acercamiento para el ángulo de dispersión  $\theta$ . Como

se dijo antes, buscaremos el valor de  $r_{min}$  en función de  $\theta$  y luego el ángulo  $\theta$  para el  $r_{min}$  es mínimo, para así obtener el mínimo acercamiento de entre todas las posibles dispersiones.

Primero, como dijimos antes, la energía cinética de las partículas  $\alpha$  es lo suficientemente pequeña como para que no sea necesario usar relaciones relativistas. Por lo tanto, la energía cinética con la que son disparadas las partículas alpha se relaciona con su velocidad según:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m_{\alpha}v_0^2$$

donde  $v_0$  es la velocidad con la que son disparadas las partículas alpha. Como las partículas son lanzadas desde una distancia muy lejana al núcleo, no hay energía potencial y ésta es la energía total de las partículas alpha al ser disparadas.

Luego, podemos calcular la energía total que tienen las partículas alpha en el punto de máximo acercamiento. Digamos que en este punto la velocidad es  $v_{min}$  y la distancia al núcleo es  $r_{min}$ , entonces la energía total (cinética más potencial) es:

$$E_f = \frac{1}{2}m_{\alpha}v_{min}^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\alpha}q_{Au}}{r_{min}}$$

con  $q_{\alpha}$  la carga de la partícula alpha y  $q_{Au}$  la del oro. Luego, por la conservación de la energía de las partículas alpha al ser disparadas y al acercarse al núcleo (suponiendo que no hay retroceso del núcleo y por tanto éste no se lleva energía), nos queda:

$$\frac{1}{2}m_{\alpha}v_0^2 = \frac{1}{2}m_{\alpha}v_{min}^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\alpha}q_{Au}}{r_{min}} \quad (1)$$

Luego, hay que considerar que como se tiene un potencial central (el potencial electrostático del núcleo), el momento angular se conserva. Viendo la figura, está claro que el momento angular respecto al núcleo cuando la partícula está muy lejos del núcleo es  $m_{\alpha}v_0b$ . Luego, cuando el acercamiento es máximo, digamos que la velocidad es  $v_{min}$  (y es una velocidad sin componente en la dirección del núcleo, para que efectivamente sea el punto de máximo acercamiento) y por lo tanto el momento angular final es  $m_{\alpha}v_{min}r_{min}$ . La conservación del momento angular da lugar a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} m_{\alpha}v_0b &= m_{\alpha}v_{min}r_{min} \\ \Rightarrow v_0b &= v_{min}r_{min} \quad (2) \end{aligned}$$

Ahora despejamos  $v_{min}$  de (2) y nos queda  $v_{min} = \frac{v_0b}{r_{min}}$  y lo sustituimos en (1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_{\alpha}v_0^2 &= \frac{1}{2}m_{\alpha} \frac{v_0^2b^2}{r_{min}^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\alpha}q_{Au}}{r_{min}} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}m_{\alpha}v_0^2r_{min}^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_{\alpha}q_{Au}r_{min} - \frac{1}{2}m_{\alpha}v_0^2b^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Sustituimos la energía cinética } E_{kin} = \frac{1}{2}m_{\alpha}v_0^2$$

$$\Rightarrow E_{kin}r_{min}^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_{\alpha}q_{Au}r_{min} - E_{kin}b^2 = 0$$

$$\Rightarrow r_{min}^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 E_{kin}}q_{\alpha}q_{Au}r_{min} - b^2 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática para  $r_{min}$  y cuya solución positiva es:

$$r_{min} = \frac{q_{\alpha}q_{Au}}{8\pi E_{kin}\epsilon_0} + \sqrt{b^2 + \frac{q_{\alpha}^2 Q_{Au}^2}{64\pi^2 \epsilon_0^2 E_{kin}^2}}$$

Finalmente, para conseguir  $r_{min}$  como función de solamente el ángulo y la energía cinética con la que se disparan las partículas, podemos sustituir la expresión del parámetro de impacto  $b$ . Esta expresión se puede encontrar en la ecuación 4.3 de [4] y es  $b = \frac{q_\alpha q_{Au}}{8\pi\epsilon_0 E_{kin}} \cot \frac{\theta}{2}$ . Por lo tanto,  $r_{min}$  queda como:

$$\begin{aligned} r_{min} &= \frac{q_\alpha q_{Au}}{8\pi E_{kin} \epsilon_0} + \sqrt{\frac{q_\alpha^2 q_{Au}^2}{64\pi^2 \epsilon_0^2 E_{kin}^2} \cot^2 \frac{\theta}{2} + \frac{q_\alpha^2 Q_{Au}^2}{64\pi^2 \epsilon_0^2 E_{kin}^2}} \\ &= \frac{q_\alpha q_{Au}}{8\pi E_{kin} \epsilon_0} + \frac{q_\alpha q_{Au}}{8\pi E_{kin} \epsilon_0} \sqrt{\cot^2 \frac{\theta}{2} + 1} \\ &= \frac{q_\alpha q_{Au}}{8\pi E_{kin} \epsilon_0} \left[ 1 + \csc \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned}$$

Con lo cual ya conseguimos el valor de la distancia de máximo acercamiento  $r_{min}$  como función de la energía cinética y el ángulo de dispersión. De todos los ángulos de dispersión  $\theta$  posibles, vemos ahora el que produce un  $r_{min}$  lo más pequeño posible y cuál es este valor. Claramente el mínimo se obtiene para un valor de  $\theta$  tal que  $\csc \frac{\theta}{2}$  sea mínimo, lo cual sucede cuando  $\theta = \pi$ , ya que entonces  $\csc \frac{\theta}{2} = \csc \frac{\pi}{2} = 1$ . Luego, el acercamiento mínimo de entre todos los posibles para todos los ángulos es:

$$\begin{aligned} r_{min} &= \frac{q_\alpha q_{Au}}{8\pi E_{kin} \epsilon_0} [1 + 1] \\ &= \frac{q_\alpha q_{Au}}{4\pi E_{kin} \epsilon_0} \end{aligned}$$

Sustituimos los valores  $q_\alpha = 2e$ ,  $q_{Au} = 79e$  y  $E_{kin} = 6MeV$  y nos queda:

$$r_{min} = \frac{(2e)(79e)}{4\pi(6 \times 10^6 eV)(8.987551 \times 10^9 Nm^2/C^2)} = \boxed{38 \times 10^{-15} m}$$

Es decir, de todos los ángulos de dispersión posibles, en el que se logra el máximo acercamiento es  $\theta = 180^\circ$  y para ese ángulo, el máximo acercamiento es de  $38fm$ .

Veamos si este valor es lo suficientemente pequeño como para que sea necesario considerar la interacción nuclear fuerte. La separación en la que empieza a ser necesario considerar la interacción fuerte es cuando la partícula alpha entra en contacto con el núcleo de oro, es decir, una distancia de  $r = R_\alpha + R_{Au}$ . Donde  $R_\alpha$  y  $R_{Au}$  son los radios de la partícula  $\alpha$  y del núcleo de oro, que se calculan como vimos en clase siguiendo la ecuación  $R = 1.2fmA^{1/3}$ . Por lo tanto, tenemos que  $r = R_\alpha + R_{Au} = 1.2fm(4)^{1/3} + 1.2fm(197)^{1/3} \simeq 9fm$ .

Por lo tanto, notamos que la distancia de máximo acercamiento  $r_{min}$  es considerablemente mayor a la distancia a la que empieza a ser importante considerar la interacción fuerte. Por ello, concluimos que la interacción fuerte no causará desviaciones notables en la fórmula de la sección eficaz de Rutherford.

Es decir, concluimos que la sección eficaz de Rutherford será válida en este caso para todos los ángulos de desviación posibles. Esto es de esperarse, porque a final de cuentas fue con este mismo experimento con el que Rutherford propuso su teoría y porque las partículas alpha no son lo suficientemente energéticas como para que sea necesario considerar otros efectos.

---

### Problema 3. Neutrones Lentos.

¿Cuál es el valor máximo de la sección eficaz de la reacción para neutrones lentos de energía  $E$ , al incidir sobre un blanco de  $^{135}\text{Xe}$ . El  $^{135}\text{Xe}$  tiene un espín de  $J = 3/2$ , mientras que el correspondiente espín del núcleo compuesto  $^{136}\text{Xe}$  es  $J' = 2$ . Aplicar al caso de  $E = 0.4\text{eV}$ .

Para hacer este problema, me basaré en un libro donde se hace un análisis completo de este tipo de reacciones. Dicho libro es la referencia [5] (en particular, el capítulo 15).

En el libro se hace un análisis completo de este problema, usando algunas herramientas que no hemos visto en clase. Lo importante para este problema es que se estudia una partícula incidente  $a$  hacia un núcleo  $X$  que lo convierte en un núcleo compuesto  $^*X$ . Según la ecuación 15.36 de [5], si el número cuántico de spin de la partícula  $a$  es  $s$ , el del núcleo  $X$  es  $J$  y el del núcleo compuesto es  $J'$ , entonces el valor máximo de la sección eficaz de esta reacción es:

$$\sigma_{max} = 4\pi\lambda^2 g$$

donde  $g = \frac{2J' + 1}{(2s + 1)(2J + 1)}$  y  $\lambda$  es la longitud de onda de de Broglie del neutrón dividida por  $2\pi$ .

Por lo tanto, con la información que nos dan en el problema es suficiente para calcular  $\sigma_{max}$ . Sólo hay que tomar en cuenta que el espín del neutrón es  $s = 1/2$ , el del núcleo original es  $J = 3/2$  y el del núcleo compuesto es  $J' = 2$ . Además, podemos calcular la longitud de onda de de Broglie dividida entre  $2\pi$  usando el dato de la energía de los neutrones.

Como la energía es de  $E = 0.4\text{eV}$ , que es un valor muy bajo, podemos aproximar la relación entre momento y energía para el caso no relativista, en el cual se cumple que  $E = \frac{p^2}{2m_n} \Rightarrow p = \sqrt{2m_n E}$ . Luego, la longitud de onda de de Broglie es  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_n E}}$  y la longitud dividida entre  $2\pi$  es  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_n E}}$ .

Sustituimos todo esto en la expresión de  $\sigma_{max}$  y queda:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= 4\pi\lambda^2 g \\ &= 4\pi \left( \frac{h}{\sqrt{2m_n E}} \right)^2 \frac{2J' + 1}{(2s + 1)(2J + 1)} \\ &= \frac{4\pi h^2}{2m_n E} \frac{2J' + 1}{(2s + 1)(2J + 1)}\end{aligned}$$

Sustituimos ahora los valores de las constantes y nos queda:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \frac{4\pi(1.0545718 * 10^{-34} \text{Js})^2}{2(1.67492729 * 10^{-27} \text{kg})(0.4\text{eV})(1.60218 * 10^{-19} \text{J/eV})} \frac{2(2) + 1}{(2(1/2) + 1)(2(3/2) + 1)} \\ &\simeq \boxed{4.07 * 10^{-22} \text{m}^2}\end{aligned}$$

#### Problema 4. Dispersión elástica de nucleones

Indique la sección transversal diferencial,  $d\sigma/d\Omega$ , para la dispersión elástica de piones a electrones. Escriba explícitamente la dependencia  $Q^2$  de la parte del factor de forma de la sección transversal en el límite  $Q^2 \rightarrow 0$ , suponiendo que  $\langle r^2 \rangle_\pi = 0.44 fm^2$

La dispersión que estamos considerando es un pión interactuando con un electrón. La sección eficaz de esta interacción se calcula usando la fórmula de Rosenbluth que es la 6.10 de [1] y nos dice que:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left[ \frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

donde  $G_E(Q^2)$  y  $G_M(Q^2)$  son los factores de forma eléctrico y magnético y  $\tau = \frac{Q^2}{4M^2c^2}$ .

Ahora bien, debido a que el pión tiene espín  $s = 0$ , el factor de forma magnético  $G_M^2(Q^2)$  es 0, de tal manera que nos queda solamente:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \frac{G_E^2(Q^2)}{1 + \tau}$$

Por otro lado, la sección eficaz de Mott se puede escribir a partir de la de Rutherford usando la ecuación 6.1 y la 5.38 de [1], que nos dicen que  $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{E'}{E}$ . entonces, la sección eficaz queda como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{E'}{E} \frac{G_E^2(Q^2)}{1 + \tau}$$

Además, la sección transversal de Rutherford se obtiene según la ecuación de 5.33 de [1] que dice que  $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E'^2}{|Qc|^2}$ , por lo que nos queda:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E'^2}{|Qc|^2} \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{E'}{E} \frac{G_E^2(Q^2)}{1 + \tau}$$

Finalmente, como nos pide el ejercicio, necesitamos también escribir explícitamente la dependencia del factor de forma respecto a  $Q^2$ . Para obtener esta dependencia explícita, usamos que según la ecuación 6.23 de [1], el radio cuadrado medio del pión se relaciona con el factor de forma como:

$$\begin{aligned} G_E(Q^2) &= \left( 1 + \frac{Q^2 \langle r^2 \rangle}{6\hbar^2 c^2} \right)^{-1} \\ &= \left( 1 + \frac{Q^2 (0.44 fm^2)}{6\hbar^2 c^2} \right)^{-1} \quad \text{Usando el valor de } \langle r^2 \rangle \end{aligned}$$

Para  $Q^2 \rightarrow 0$ , el término  $\frac{Q^2 (0.44 fm^2)}{6\hbar^2 c^2}$  es muy pequeño y entonces la expresión  $\left( 1 + \frac{Q^2 (0.44 fm^2)}{6\hbar^2 c^2} \right)^{-1}$  tiene la forma  $(1 + \epsilon)^{-1}$  y se puede aproximar como  $(1 + \epsilon)^{-1} \simeq 1 - \epsilon$  y entonces nos queda:

$$G_E(Q^2) = 1 - \frac{Q^2 (0.44 fm^2)}{6\hbar^2 c^2}$$

y entonces:

$$G_E^2(Q^2) = \left( 1 - \frac{Q^2 (0.44 fm^2)}{6\hbar^2 c^2} \right)^2$$



---

Aquí podemos usar nuevamente que  $Q \rightarrow 0$  para aproximar el binomio al cuadrado, que tiene la forma  $(1 - \epsilon)^2$  y por tanto se puede aproximar como  $1 - 2\epsilon$  y nos queda:

$$G_E^2(Q^2) = 1 - \frac{Q^2(0.44 fm^2)}{3\hbar^2 c^2} = 1 - 3.78 \frac{Q^2}{GeV^2}$$

Luego, sustituyendo esto en la expresión para la sección eficaz que teníamos, nos queda que:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E'^2}{|Qc|^2} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \frac{E'}{E} \frac{1 - 3.78 \frac{Q^2}{GeV^2}}{1 + \tau}$$

Finalmente, considerando que  $\tau = \frac{Q^2}{4M^2 c^2}$  pero  $Q \rightarrow 0$ , podemos cambiar el denominador  $1 + \tau$  por 1 y nos queda:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E'^2}{|Qc|^2} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \frac{E'}{E} \left(1 - 3.78 \frac{Q^2}{GeV^2}\right)}$$

## Problema 5. Kinematics of electromagnetic scattering

Un haz de electrones con energía  $E_e$  se dispersa elásticamente de un núcleo pesado.

a) Calcule la transferencia de momento máximo.

Consideramos que el electrón inicia con un cuadrimomento  $P_e = (E_e/c, \vec{p}_e)$  y el núcleo con  $P_N = (E_N/c, \vec{p}_N) = (E_N/c, \vec{0})$  (el momento inicial del núcleo es  $\vec{0}$  porque inicia en reposo). Por otro lado, tras el choque, el electrón sale con un cuadrimomento  $P'_e = (E'_e/c, \vec{p}'_e)$  y el núcleo sale con  $P'_N = (E'_N/c, \vec{p}'_N)$ . Como vimos en clase, el cuadrado de la transferencia de cuadrimomento en el choque se define como  $Q^2 = -q^2 = -(P_e - P'_e)^2$ .

Por lo tanto, calculamos esta cantidad:

$$\begin{aligned} Q^2 &= -(P_e - P'_e)^2 \\ &= -P_e^2 + 2P_e \cdot P'_e - P'^2_e \end{aligned}$$

El cuadrado del cuadrimomento del electrón es una cantidad invariante y tiene un valor de  $P_e^2 = P'^2_e = m_e^2 c^2$ , por lo que nos queda:

$$\begin{aligned} Q^2 &= -m_e^2 c^2 + 2P_e \cdot P'_e - m_e^2 c^2 \\ &= -2m_e^2 c^2 + 2P_e \cdot P'_e \end{aligned}$$

Desarrollamos el producto de los cuadrimomentos  $P_e \cdot P'_e = (E_e/c)(E'_e/c) - \vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e$  y nos queda:

$$Q^2 = -2m_e^2 c^2 + 2 \frac{E_e E'_e}{c^2} - 2\vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e$$

Ahora bien, para sustituir la expresión de  $\vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e$ , usaremos el problema 6 de esta tarea. El arreglo de dicho problema es el mismo que el de éste, con la excepción de que en el otro se usa la aproximación ultrarrelativista. Sin embargo, antes de usar la aproximación ultrarrelativista, en el problema 6 se llega con todo detalle a la ecuación (\*):

$$E_e m_N c^2 = E'_e E_e - \vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e c^2 + E'_e m_N c^2 - m_e^2 c^4$$

Despejando esta ecuación tenemos una expresión para el producto punto que buscábamos:

$$\vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e = \frac{E_e E'_e}{c^2} + E'_e m_N - E_e m_N - m_e^2 c^2$$

Entonces, sustituimos este producto punto en la ecuación que teníamos para  $Q^2$ :

$$\begin{aligned} Q^2 &= -2m_e^2 c^2 + 2 \frac{E_e E'_e}{c^2} - 2\vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e \quad (1) \\ &= -2m_e^2 c^2 + 2 \frac{E_e E'_e}{c^2} - 2 \left[ \frac{E_e E'_e}{c^2} + E'_e m_N - E_e m_N - m_e^2 c^2 \right] \\ &= -2m_e^2 c^2 + 2 \frac{E_e E'_e}{c^2} - 2 \frac{E_e E'_e}{c^2} - 2E'_e m_N + 2E_e m_N + 2m_e^2 c^2 \\ &= -2E'_e m_N + 2E_e m_N \\ &= 2m_N (E_e - E'_e) \end{aligned}$$

Para que la transferencia de momento sea máximo, notamos que entonces  $E'_e$  tiene que tener el menor valor posible (para restar lo menos posible). Para seguir desarrollando el problema, vamos a sustituir también el resultado de la energía  $E'_e$  obtenida en la ecuación (2) del problema 6, que dice que  $E'_e =$

$\frac{E_e m_N c^2}{E_e (1 - \cos \theta) + m_N c^2}$  y nos queda:

$$\begin{aligned} Q^2 &= 2m_N (E_e - E'_e) \\ &= 2m_N \left[ E_e - \frac{E_e m_N c^2}{E_e (1 - \cos \theta) + m_N c^2} \right] \end{aligned}$$

Como se dijo antes, para que esta cantidad sea lo mayor posible, es necesario que  $E'_e$  sea lo más pequeño. Esto se consigue cuando el denominador de  $E'_e = \frac{E_e m_N c^2}{E_e(1 - \cos \theta) + m_N c^2}$  es lo mayor posible. Para que el denominador  $E_e(1 - \cos \theta) + m_N c^2$  sea máximo, necesitamos claramente que  $\cos \theta = -1$ , lo que significa que  $\theta = \pi$ .

Entonces nos queda que:

$$\begin{aligned}
 Q^2 &= 2m_N \left[ E_e - \frac{E_e m_N c^2}{E_e(1 - (-1)) + m_N c^2} \right] \\
 &= 2m_N \left[ E_e - \frac{E_e m_N c^2}{2E_e + m_N c^2} \right] \\
 &= 2m_N \left[ \frac{E_e(2E_e + m_N c^2) - E_e m_N c^2}{2E_e + m_N c^2} \right] \\
 &= 2m_N \left[ \frac{2E_e^2 + E_e m_N c^2 - E_e m_N c^2}{2E_e + m_N c^2} \right] \\
 &= 2m_N \frac{2E_e^2}{2E_e + m_N c^2} \\
 &= \boxed{\frac{4m_N E_e^2}{2E_e + m_N c^2}}
 \end{aligned}$$

b) **Calcule el momento y la energía del núcleo dispersado hacia atrás en este caso.**

Empezamos nuevamente usando la ecuación (2) del problema 6, la cual nos da el valor de la energía final del electrón  $E'_e = \frac{E_e m_N c^2}{E_e(1 - \cos \theta) + m_N c^2}$  y como dice el enunciado, usamos el caso particular del inciso a), en el que  $\theta = \pi$ , por lo que:

$$\begin{aligned}
 E'_e &= \frac{E_e m_N c^2}{E_e(1 - (-1)) + m_N c^2} \\
 &= \frac{E_e m_N c^2}{2E_e + m_N c^2}
 \end{aligned}$$

Luego, usamos la conservación de la energía en el proceso. Al inicio la energía es  $E_e + E_N$  y al final es  $E'_e + E'_N$ , por lo tanto:

$$E_e + E_N = E'_e + E'_N$$

Sustituimos la expresión de  $E'_e$  encontrada antes y usamos que la energía inicial del núcleo (que está en reposo) es  $E_N = m_N c^2$ , por lo tanto:

$$E_e + m_N c^2 = \frac{E_e m_N c^2}{2E_e + m_N c^2} + E'_N$$

Por lo tanto, la energía final del núcleo es:

$$\begin{aligned}
 E'_N &= E_e + m_N c^2 - \frac{E_e m_N c^2}{2E_e + m_N c^2} \\
 &= m_N c^2 + \frac{E_e(2E_e + m_N c^2) - E_e m_N c^2}{2E_e + m_N c^2} \\
 &= m_N c^2 + \frac{2E_e^2 + E_e m_N c^2 - E_e m_N c^2}{2E_e + m_N c^2} \\
 &= \boxed{m_N c^2 + \frac{2E_e^2}{m_N c^2 + 2E_e}}
 \end{aligned}$$

Calculamos ahora el momento cuadrado del núcleo dispersado. Por la conservación del momento se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_e + \vec{p}_N &= \vec{p}'_e + \vec{p}_N \\
 \Rightarrow \vec{p}'_N &= \vec{p}_e - \vec{p}'_e + \vec{p}_N
 \end{aligned}$$

Pero el momento inicial del núcleo es  $\vec{p}_N = \vec{0}$  y por lo tanto:

$$\vec{p}'_N = \vec{p}_e - \vec{p}'_e$$

Entonces la norma cuadrada del momento final del núcleo es:

$$\begin{aligned}
 |\vec{p}'_N|^2 &= |\vec{p}_e - \vec{p}'_e|^2 \\
 &= (\vec{p}_e - \vec{p}'_e) \cdot (\vec{p}_e - \vec{p}'_e) \\
 &= |\vec{p}_e|^2 - 2\vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e + |\vec{p}'_e|^2
 \end{aligned}$$

Para calcular las normas, podemos usar la relación entre energía y momento de Einstein, que dice que  $|\vec{p}| = \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2$  y nos queda:

$$\begin{aligned}
 |\vec{p}'_N|^2 &= \frac{E_e^2}{c^2} - m_e^2 c^2 - 2\vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e + \frac{E_e'^2}{c^2} - m_e^2 c^2 \\
 &= \frac{E_e^2}{c^2} + \frac{E_e'^2}{c^2} - 2\vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e - 2m_e^2 c^2
 \end{aligned}$$

Recordamos ahora la expresión (1) de este ejercicio, que dice  $Q = -2m_e^2 c^2 + 2\frac{E_e E_e'}{c^2} - 2\vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e$  y por lo tanto  $-2\vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e - 2m_e^2 c^2 = Q^2 - 2\frac{E_e E_e'}{c^2}$ , lo cual sustituimos en la expresión de  $|\vec{p}'_N|^2$ :

$$\begin{aligned}
 |\vec{p}'_N|^2 &= \frac{E_e^2}{c^2} + \frac{E_e'^2}{c^2} + Q^2 - 2\frac{E_e E_e'}{c^2} \\
 &= \frac{1}{c^2} (E_e - E_e')^2 + Q^2
 \end{aligned}$$

Podemos sustituir aquí el resultado final para  $Q^2$  que obtuvimos antes, que fue  $Q^2 = \frac{4m_N E^2}{2E_e + m_N c^2}$  y

también el de  $E'_e$ , que fue  $E'_e = \frac{E_e m_N c^2}{2E_e + m_N c^2}$  y nos queda:

$$\begin{aligned}
|\vec{p}'_N|^2 &= \frac{1}{c^2} (E_e - E'_e)^2 + Q^2 \\
&= \frac{1}{c^2} \left( E_e - \frac{E_e m_N c^2}{2E_e + m_N c^2} \right)^2 + \frac{4m_N E_e^2}{2E_e + m_N c^2} \\
&= \frac{1}{c^2} \left( \frac{2E_e^2 + E_e m_N c^2 - E_e m_N c^2}{m_N c^2 + 2E_e} \right)^2 + \frac{4m_N E_e^2}{2E_e + m_N c^2} \\
&= \frac{1}{c^2} \left( \frac{2E_e^2}{m_N c^2 + 2E_e} \right)^2 + \frac{4m_N E_e^2}{2E_e + m_N c^2} \\
&= \boxed{\frac{4E_e^4}{c^2(m_N c^2 + 2E_e)^2} + \frac{4m_N E_e^2}{2E_e + m_N c^2}}
\end{aligned}$$

**c) Obtenga las mismas cantidades para la dispersión elástica de fotones con la misma energía (efecto Compton nuclear)**

Empezamos calculando  $Q^2$  de forma similar a lo hecho en el ejercicio a). Los fotones llegan con energía  $E_e$ , lo que significa que tienen un cuadrimomento  $P_f = (E_f/c, \vec{p}_f)$  y el núcleo tiene  $P_N = (E_N/c, \vec{0})$  al igual que antes. Tras el choque, el fotón sale con un ángulo  $\theta$  y tiene ahora un cuadrimomento  $P'_f = (E'_f/c, \vec{p}'_f)$  y el núcleo tiene  $P'_N = (E'_N/c, \vec{p}'_N)$ . La única diferencia con el ejercicio anterior es que la relación de energía y momento para el fotón es ahora simplemente  $|\vec{p}_f|c = E_f$ . Entonces, calculamos  $Q$ :

$$\begin{aligned}
Q^2 &= -(P_f - P'_f)^2 \\
&= -P_f^2 + 2P_f \cdot P'_f - P'^2_f
\end{aligned}$$

El cuadrado del cuadrimomento del fotón es invariante y vale siempre 0, por lo que:

$$\begin{aligned}
Q^2 &= 2P_f \cdot P'_f \\
&= 2(E_f/c)(E'_f/c) - 2\vec{p}_f \cdot \vec{p}'_f \\
&= 2 \frac{E_f E'_f}{c^2} - 2|\vec{p}_f| |\vec{p}'_f| \cos \theta \\
&= 2 \frac{E_f E'_f}{c^2} - 2 \frac{E_f E'_f}{c^2} \cos \theta \\
&= 2 \frac{2E_f E'_f}{c^2} (1 - \cos \theta)
\end{aligned}$$

vemos que el  $Q^2$  máximo se alcanza cuando  $\theta = \pi$  y entonces  $1 - \cos \theta = 1 - (-1) = 2$  y nos queda:

$$Q^2 = \frac{4E_f E'_f}{c^2}$$

Para la energía final del fotón  $E'_f$  podemos usar el resultado de la ecuación (2) del problema 6. Ya que en ese problema la situación era la misma (pero con un electrón ultrarrelativista, y por ello se hizo en este electrón aproximaciones como  $|\vec{p}_e|c = E_e$  y  $m_e c^2 \ll E_e$ , que son características del fotón) y por tanto el resultado es el mismo:  $E'_f = \frac{E_f m_N c^2}{E_f(1 - \cos \theta) + m_N c^2}$  y con  $\cos \theta = -1$  se tiene

$E'_f = \frac{E_f m_N c^2}{2E_f + m_N c^2}$  y por tanto nos queda:

$$Q^2 = \frac{4E_f}{c^2} \frac{E_f m_N c^2}{2E_f + m_N c^2} = \boxed{\frac{4E_f^2 m_N}{2E_f + m_N c^2}}$$

---

Este resultado es el mismo que el del inciso *a*), justamente porque en el inciso *a*) se despreció la masa del electrón y se podía considerar básicamente como un fotón.

Como este resultado es el mismo, y esas mismas aproximaciones que hacen que el electrón se comporte básicamente como un fotón se utilizaron también en el inciso *b*), podemos concluir que los resultados del inciso *b*) también serán los mismos para el fotón, y los pasos son exactamente los mismos, es decir:

$$E'_N = m_N c^2 + \frac{2E_f^2}{m_N c^2 + 2E_f}$$

y

$$|\vec{p}'_N|^2 = \frac{4E_f^4}{c^2(m_N c^2 + 2E_f)^2} + \frac{4m_N E_f^2}{2E_f + m_n c^4}$$

## Problema 6. Interacción Relativista de Partículas

Suponga una colisión elástica entre un electrón ultrarrelativista ( $E \gg m_0 c^2$ ) y un núcleo de masa  $M$ . Demuestre que la energía de retroceso del núcleo es:

$$T_R = \frac{E^2(\cos \theta - 1)}{E(\cos \theta - 1) - M c^2}$$

donde  $\theta$  es el ángulo de desviación.

Consideramos que el electrón inicia con un cuadrimomento  $P_e = (E_e/c, \vec{p}_e)$  y el núcleo con  $P_N = (E_N/c, \vec{p}_N) = (E_N/c, \vec{0})$  (el momento inicial del núcleo es  $\vec{0}$  porque inicia en reposo). Por otro lado, tras el choque, el electrón sale con un cuadrimomento  $P'_e = (E'_e/c, \vec{p}'_e)$  y el núcleo sale con  $P'_N = (E'_N/c, \vec{p}'_N)$ .

Por la conservación del cuadrimomento, se debe de cumplir que:

$$P_e + P_N = P'_e + P'_N \quad (1)$$

Hacemos el producto punto de cada lado consigo mismo y nos queda:

$$P_e^2 + 2P_e \cdot P_N + P_N^2 = P_e'^2 + 2P'_e \cdot P'_N + P_N'^2$$

Ahora bien, los cuadrimomentos al cuadrado son cantidades invariantes y su valor es siempre igual a  $m^2 c^2$ . Es decir,  $P_e^2 = P_e'^2 = m_e^2 c^2$  y  $P_N^2 = P_N'^2 = m_N^2 c^2$ . Por lo tanto, sustituimos esto en la expresión de antes:

$$\begin{aligned} m_e^2 c^2 + 2P_e \cdot P_N + m_N^2 c^2 &= m_e^2 c^2 + 2P'_e \cdot P'_N + m_N^2 c^2 \\ \Rightarrow 2P_e \cdot P_N &= 2P'_e \cdot P'_N \\ \Rightarrow P_e \cdot P_N &= P'_e \cdot P'_N \end{aligned}$$

Ahora bien, por la ecuación (1), se tiene que  $P'_N = P_e + P_N - P'_e$  y podemos sustituir esto en la última ecuación que tenemos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_e \cdot P_N &= P'_e \cdot (P_e + P_N - P'_e) \\ \Rightarrow P_e \cdot P_N &= P'_e \cdot P_e + P'_e \cdot P_N - P'_e \cdot P'_e \\ \Rightarrow P_e \cdot P_N &= P'_e \cdot P_e + P'_e \cdot P_N - m_e^2 c^2 \end{aligned}$$

donde en el último paso usamos que  $P'_e \cdot P'_e = m_e^2 c^2$ .

Ahora sustituimos las expresiones los cuadrimomentos y usamos que el producto punto entre dos cuadrimomentos  $P$  y  $Q$  se calcula como  $P \cdot Q = (E_P/c, \vec{p}) \cdot (E_Q/c, \vec{q}) = (E_P/c)(E_Q/c) - \vec{p} \cdot \vec{q}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow (E_e/c, \vec{p}_e) \cdot (E_N/c, \vec{0}) &= (E'_e/c, \vec{p}'_e) \cdot (E_e/c, \vec{p}_e) + (E'_e/c, \vec{p}'_e) \cdot (E_N/c, \vec{0}) - m_e^2 c^2 \\ \Rightarrow E_e E_N / c^2 &= E'_e E_e / c^2 - \vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e + E'_e E_N / c^2 - m_e^2 c^2 \\ \Rightarrow E_e E_N &= E'_e E_e - \vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e c^2 + E'_e E_N - m_e^2 c^4 \end{aligned}$$

Ahora bien, como el cuadrimomento inicial del núcleo es  $P_N = (E_N/c, \vec{0})$ , entonces su cuadrado es  $P_N^2 = E_N^2/c^2 - \vec{0} \cdot \vec{0} = E_N^2/c^2$ . Sin embargo, sabemos que el cuadrimomento cuadrado es igual a  $P_N^2 = m_N^2 c^2$  y por lo tanto  $E_N^2/c^2 = m_N^2 c^2 \Rightarrow E_N^2 = m_N^2 c^4 \Rightarrow E_N = m_N c^2$ . Sustituimos esto en la expresión que teníamos:

$$E_e m_N c^2 = E'_e E_e - \vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e c^2 + E'_e m_N c^2 - m_e^2 c^4 \quad (*)$$

Ahora usamos la aproximación ultrarrelativista, por la cual podemos omitir la energía del electrón debida a su masa  $m_e c^2$ , ya que es mucho menor a la energía total del electrón:

$$\begin{aligned} E_e m_N c^2 &= E'_e E_e - \vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e c^2 + E'_e m_N c^2 \\ \Rightarrow E_e m_N c^2 &= E'_e E_e - |\vec{p}_e| |\vec{p}'_e| \cos \theta c^2 + E'_e m_N c^2 \end{aligned}$$

donde  $\theta$  es el ángulo con el que sale el electrón respecto al ángulo con el que llega y por ello  $\vec{p}_e \cdot \vec{p}'_e = |\vec{p}_e||\vec{p}'_e| \cos \theta$ .

Además, también por la aproximación ultrarrelativista, tomamos la energía inicial del electrón, que es  $E_e^2 = m^2 c^4 + |\vec{p}_e|^2 c^2$  y se puede omitir la contribución debida a la masa y queda  $E_e^2 = |\vec{p}_e|^2 c^2 \Rightarrow E_e = |\vec{p}_e| c$ . Por lo tanto, podemos sustituir  $|\vec{p}_e| = E_e/c$  y lo mismo para el electrón tras el choque, por lo que  $|\vec{p}'_e| = E'_e/c$ .

$$\begin{aligned} E_e m_N c^2 &= E'_e E_e - (E_e c)(E'_e/c) \cos \theta c^2 + E'_e m_N c^2 \\ \Rightarrow E_e m_N c^2 &= E'_e E_e - E_e E'_e \cos \theta + E'_e m_N c^2 \end{aligned}$$

Podemos ahora despejar la energía final del electrón  $E'_e$ :

$$\begin{aligned} E_e m_N c^2 &= E'_e [E_e (1 - \cos \theta) + m_N c^2] \\ \Rightarrow E'_e &= \frac{E_e m_N c^2}{E_e (1 - \cos \theta) + m_N c^2} \quad (2) \end{aligned}$$

Con esto ya podemos calcular la energía de retroceso que nos piden en el problema. Por la conservación de la energía antes y después del choque, se cumple que:

$$E_e + E_N = E'_e + E'_N$$

y como  $E_N = m_N c^2$ , tenemos que:

$$E_e + m_N c^2 = E'_e + E'_N,$$

por lo que la diferencia entre la energía final del núcleo y la inicial (la energía de retroceso) es:

$$E'_N - m_N c^2 = E_e - E'_e$$

podemos ahora sustituir la expresión (2) para  $E'_e$ :

$$\begin{aligned} E'_N - m_N c^2 &= E_e - \frac{E_e m_N c^2}{E_e (1 - \cos \theta) + m_N c^2} \\ &= \frac{E_e [E_e (1 - \cos \theta) + m_N c^2] - E_e m_N c^2}{E_e (1 - \cos \theta) + m_N c^2} \\ &= \frac{E_e^2 (1 - \cos \theta) + E_e m_N c^2 - E_e m_N c^2}{E_e (1 - \cos \theta) + m_N c^2} \\ &= \frac{E_e^2 (1 - \cos \theta)}{E_e (1 - \cos \theta) + m_N c^2} \end{aligned}$$

Multiplicamos arriba y abajo por  $-$  para obtener el resultado del enunciado :

$$= \boxed{\frac{E_e^2 (\cos \theta - 1)}{E_e (\cos \theta - 1) - m_N c^2}}$$



---

## Problema 7. Partículas

Discutir cuales de las siguientes reacciones están permitidas

a)  $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$

Sí es posible y de hecho es una reacción conocida pues es el decaimiento más común de un muón (página 128 de [1]).

Además, como comprobación vemos que se conserva la carga: que es  $-e$  de ambos lados. Se conserva el número leptónico electrónico: 0 del lado izquierdo pues no hay electrones ni neutrinos electrónicos y 0 del lado derecho porque hay un electrón (que suma  $+1$ ) y un antineutrino (que suma  $-1$ ). Se conserva el número leptónico muónico: 1 del lado izquierdo porque hay un muón y 1 del derecho porque hay un neutrino muónico. Se conserva también el número bariónico, pues es 0 de ambos lados ya que no hay bariones en la reacción.

b)  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$

No sólo es posible, sino que es el decaimiento  $\beta^+$  que estudiamos en clase. Sin embargo, como vimos en clase, este decaimiento no puede suceder en un protón aislado porque requiere energía, ya que la masa del neutrón libre es mayor a la del protón. Es un proceso que puede suceder en un protón que está dentro de un núcleo, tal como vimos en muchos ejemplos en clase.

Además, como comprobación vemos que se conserva la carga:  $+e$  de ambos lados. Se conserva el número leptónico electrónico: 0 del lado izquierdo pues no hay electrones ni neutrinos electrónicos y 0 del lado derecho porque hay un positrón (que suma  $-1$ ) y un neutrino electrónico (que suma  $+1$ ). También se conserva el número bariónico, pues del lado izquierdo hay un barión (el protón) y del lado derecho igual (el neutrón).

c)  $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^+$

No es posible, pues del lado izquierdo se tiene una carga de  $-e$ . Del lado derecho se tiene una carga de  $0e + 1e = 1e$ . Como no se conserva la carga, la reacción no está permitida.

d)  $\pi^+ + p \rightarrow p + p + \bar{n}$

No hay razón para considerar que esta reacción no sea posible. Vemos que se conserva la carga:  $2e$  de ambos lados, ya que del izquierdo tenemos dos partículas positivas y del derecho dos partículas positivas y una neutra. Se conserva el número leptónico electrónico, leptónico muónico y el leptónico tau, ya que no hay leptones de ningún lado. También se conserva el número bariónico: del lado izquierdo se tiene un barión (el protón) y del derecho se tienen dos bariones (los protones) y una antipartícula de un barión (el antineutrón), así que de ambos lados el número bariónico es 1.

**Averiguar qué partícula falta para completar la reacción**

a)  $\mu^+ \rightarrow - + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$

Como se debe de conservar la carga y vemos que del lado derecho se tiene carga 0 y del izquierdo  $+e$ , entonces sabemos que del lado derecho falta una partícula con carga  $+e$ . Luego, como del lado derecho se tiene un leptón electrónico (el neutrino electrónico) pero no hay del lado izquierdo, falta un antileptón electrónico del lado derecho para que ambos lados tengan un número leptónico de 0.

---

Por lo tanto, falta un antileptón electrónico de carga  $+$ , lo que nos lleva a pensar que falta un positrón  $e^+$  y así la reacción completa es:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

Por ejemplo, este decaimiento se estudia en el artículo [6].

b)  $\bar{n} \rightarrow - + e^+ + \nu_e$

Del lado izquierdo la carga total es 0 y para que sea así del lado derecho, hay que agregar una partícula con carga  $-e$ . Por otro lado, del lado izquierdo se tiene un antibarión y del derecho no hay bariones, por lo que para conservar el número bariónico, hay que agregar un antibarión al lado derecho.

Por lo tanto, hace falta una antipartícula bariónica de carga  $-e$ , lo cual puede ser un antiprotón. El resultado es entonces como un decaimiento beta del neutrón pero con las antipartículas:

$$\bar{n} \rightarrow \bar{p} + e^+ + \nu_e$$

Se puede ver un artículo en el que se investiga esta reacción en [7].

c)  $\nu_e + - \rightarrow e^- + p$

La carga del lado izquierdo es 0 y del lado derecho igual, por lo que la partícula que hay que agregar es neutra. Del lado derecho se tiene un barión y del izquierdo ninguno, por lo que hay que agregar un barión al izquierdo para preservar el número bariónico.

Entonces, buscamos un barión neutro, lo cual puede ser el neutrón. Esto nos lleva a que la reacción es:

$$\nu_e + n \rightarrow e^- + p$$

Esta reacción se conoce como una reacción beta inversa. Por ejemplo, en el artículo [8] se estudian reacciones beta inversa.

d)  $- + p \rightarrow \pi^0 + n$

Del lado izquierdo la carga es  $+e$  y del derecho se tiene una carga total de 0. Por lo tanto, hace falta una carga negativa del lado izquierdo para balancear las cargas. Además, de ambos lados se tiene un barión (el protón y neutrón) por lo que la partícula faltante no es un barión ya que no se conservaría el número bariónico. Finalmente, no hay leptones de ningún lado de la reacción, por lo que no hay que agregar uno ya que violaría la conservación del número leptónico.

Por lo tanto, falta una partícula de carga negativa que no sea un leptón ni un barión, por lo que puede ser un mesón y en particular podría ser un mesón  $\pi^-$ , con lo que la reacción queda como:

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$$

Por ejemplo, en la referencia [9] se menciona esta reacción.

---

## Referencias

- [1 ] Povh, Bogdan, et al. Particles and Nuclei. Springer, Fifth ed., S.n., 1995.
- [2 ] “IUPAC Commission on Isotopic Abundances and Atomic Weights.” IUPAC Commission on Isotopic Abundances and Atomic Weights, <https://www.ciaaw.org/>.
- [3 ] “History of Rutherford Experiment.” Rutherford Scattering, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Nuclear/rutsca2.html#c5>.
- [4 ] Tipler, Paul A., and Llewellyn, Ralph A. Modern Physics. W. H. Freeman and Company New York, Sixth ed., 2012.
- [5 ] Burcham, W. A. Nuclear physics an introduction. Longman Group Limited Second edition, 1973.
- [6 ] Dudziak, Walter F., et al. “Positron Spectrum from the Decay of the Mu Meson.” Physical Review, vol. 114, no. 1, 1959, pp. 336–358., <https://doi.org/10.1103/physrev.114.336>.
- [7 ] Mohapatra, R. N. “Neutron–Anti-Neutron Oscillation: Theory and Phenomenology.” Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, vol. 36, no. 10, 2009, p. 104006., <https://doi.org/10.1088/0954-3899/36/10/104006>.
- [8 ] Vogel, P., and J. F. Beacom. “Angular Distribution of Neutron Inverse Beta Decay.” Physical Review D, vol. 60, no. 5, 1999, <https://doi.org/10.1103/physrevd.60.053003>.
- [9 ] Falk-Vairant, P, and Valladas, G. RESULTS IN PION PROTON SCATTERING NEAR THE HIGHER RESONANCES. France: N. p., 1961. Web.