Tomás Ricardo Basile Álvarez

Serie 8

1. By writing the linearized Poisson's equation used in the derivation of simple plasma oscillations in the form $\nabla\cdot(\varepsilon E)=0$ derive an expression for the dielectric constant ε applicable to high frequency longitudinal motions.

Como dice el enunciado, seguiremos un procedimiento similar al que usamos para deducir ω_p en clase. Sin embargo, en vez de buscar ω_p intentaremos llegar a la ecuación linealizada de Poisson para así deducir el valor de ε.

Para saber a qué queremos llegar, linealizemos la ec. de Poisson

$$\nabla\cdot(\varepsilon\vec{E}) = 0 \xrightarrow{\nabla = iK} \underline{i\vec{K}\cdot(\varepsilon E) = 0}$$

Ecuación de Poisson linealizada

Ahora sí, hacemos un desarrollo similar al de la clase. Empezamos con las 3 ecuaciones:

① Ecuación de mov. : $m n_e\left[\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e\cdot\nabla)\vec{v}_e\right] = -e n_e E$

② Ecuación de continuidad : $\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla(n_e\vec{v}_e) = 0$

③ Ecuación de Gauss : $\varepsilon_0\nabla\cdot E = e(n_i - n_e)$

Luego aplicamos el método de aproximaciones sucesivas, para lo que suponemos que n, v, E se ven como

$$\begin{cases} n_e = n_{e_0} + n_{e_1} \\ v_e = v_0 + v_1 \\ E = E_0 + E_1 \end{cases}$$

Donde n_{e_0}, v_0, E_0 son los valores de la densidad, velocidad y campo cuando el plasma está en equilibrio y n_{e_1}, v_1, E_1 son las pequeñas perturbaciones del equilibrio

En equilibrio los electrones no se mueven y el campo es 0 y estos valores no cambian, por lo que:

$$\nabla n_0 = \vec{v}_0 = E_0 = 0 \quad , \quad \frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} = \frac{\partial E_0}{\partial t} = 0$$

Y después linealizamos las ecuaciones usando $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$, $\nabla \to ik\hat{x}$

Todo esto lo hicimos en clase y llegamos a las ecuaciones siguientes:

$$1'') \quad i m \omega v_1 = e E_1$$

$$2'') \quad \omega n_1 = n_0 k v_1$$

$$3'') \quad i k \varepsilon_0 E_1 = -e n_1$$

Ahora bien, por la ecuación 2'', tenemos que $n_1 = \frac{n_0 k v_1}{\omega}$ y podemos sustituir este resultado en la ecuación 3''

$$\to ik\varepsilon_0 E_1 = -e\left(\frac{n_0 k v_1}{\omega}\right) \Rightarrow ikE_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0}\left(\frac{n_0 k v_1}{\omega}\right) \quad (4)$$

Ahora despejamos v_1 de 1'') $\to$ $v_1 = \frac{e}{im\omega}E_1 = -\frac{ie}{m\omega}E_1$

Y sustituimos esto en 4)

$$ikE_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0}\left(\frac{n_0 k v_1}{\omega}\right) = -\frac{e}{\varepsilon_0}\frac{n_0 k}{\omega}\left(-\frac{ie}{m\omega}E_1\right)$$

$$\Rightarrow ikE_1 = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 \omega^2 m}(ikE_1)$$

$$\Rightarrow ikE_1 - \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0\omega^2 m} ikE_1 = 0$$

$$\Rightarrow ik\left[1 - \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 \omega^2 m}\right]E_1 = 0$$

Esto tiene la forma de la ecuación de Poisson linealizada que buscábamos.
De hecho, si cambiamos $ik \to \nabla$ tenemos

$$\nabla\left(\left[1 - \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0\omega^2 m}\right]E_1\right) = 0$$ que es la ecuación de Poisson

Entonces, recordando la forma original de la ecuación de Poisson, tenemos que $\nabla(\varepsilon E) \Rightarrow$

$$\varepsilon = 1 - \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 \omega^2 m}$$

pero en clase vimos que $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}$

$$\therefore \varepsilon = 1 - \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 \omega^2 m} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Acepto que estos problemas sean considerados para la evaluación del semestre 2021-2
Tomás Basile