

Resumen Antes de Partículas

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

7 de abril de 2021

Relatividad

Frame of Reference: Es con respecto a lo que hacemos una medida.

Inertial Frame of Reference: Es un frame of reference en el que se siguen las leyes de Newton.

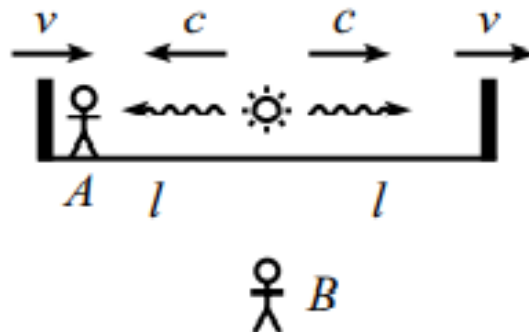
Postulados de la Relatividad Especial

Los postulados son:

- Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia
- La velocidad de la luz en el espacio tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia.

0.1. Los efectos Fundamentales

Pérdida de Simultaneidad



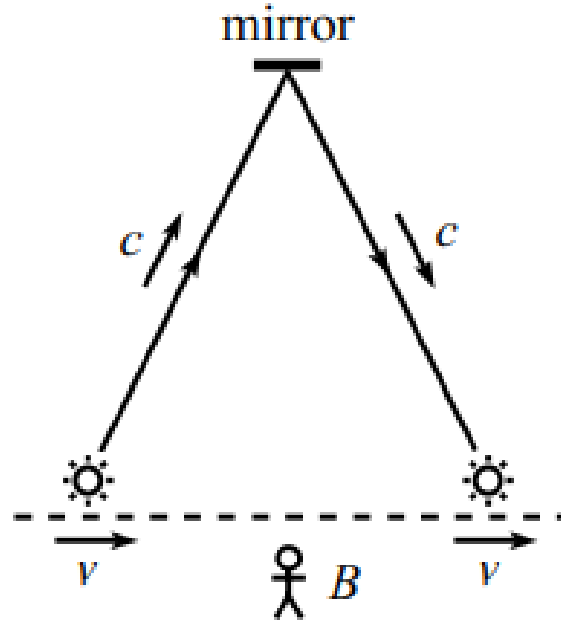
Consideramos la imagen de arriba, en la que A está en un tren de longitud $2l$ que se mueve a v respecto a B (que está en el piso)(la imagen es en el sistema de B).

Digamos que A tiene una fuente de luz en el centro y manda dos rayos de luz, entonces, desde

el punto de vista de A , ambos rayos alcanzan las paredes al mismo tiempo en un tiempo l'/c (l' es la longitud en el punto de vista de A).

Desde el punto de vista de B , ambos rayos se mueven a la velocidad c por el postulado. Pero el primer rayo tiene una velocidad de $c - v$ respecto a la pared y el segundo $c + v$. Entonces toman un tiempo $t_l = \frac{l}{c + v}$ y $t_r = \frac{l}{c - v}$. Estos tiempos no son iguales, por lo que se pierde la simultaneidad.

Dilatación del Tiempo



A se encuentra en un tren y B lo ve desde el piso moverse a una velocidad v . A crea un reloj de luz.

En el punto de vista de A , el tren está en reposo y la luz toma un tiempo $t_A = \frac{2h}{c}$ en hacer una vuelta.

Desde el punto de vista de B , la luz se mueve en diagonal, pero la velocidad aún es c , por lo que $t_B = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}}$.

Esto implica que:

$$t_B = \gamma t_A$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Por lo tanto: **eventos que están en la misma coordenada espacial desde el punto de vista de A** y que toman un intervalo de tiempo t_A , desde el punto de vista de B toman un tiempo mayor de $t_B = \gamma t_A$.

Se vale también al revés, si dos eventos en la misma posición en el sistema B toman un tiempo t_B , entonces desde el punto de vista de A , toman un tiempo $t_A = \gamma t_B$. Conste que $t_A = \gamma t_B$ y $t_B = \gamma t_A$ tienen distintas hipótesis y no son válidas simultáneamente.

Contracción de la longitud

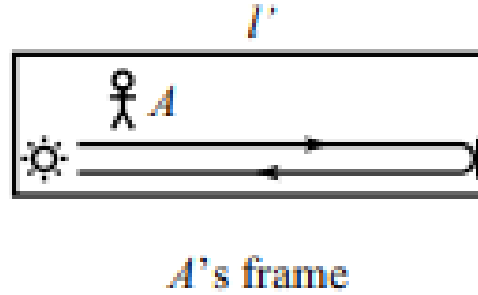
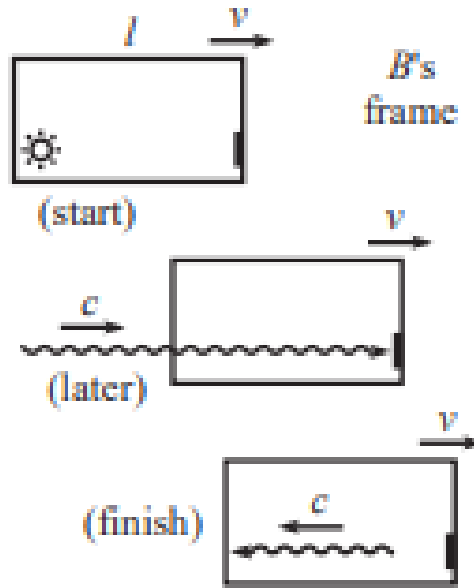


Fig. 11.12



A se mueve en un tren que él mide que tiene una longitud de l' y B está en el piso. El tren se mueve a v respecto con B .

Para medir el tren, A lanza un rayo de luz que toma un tiempo $t_A = \frac{2l'}{c}$.

Desde el punto de vista de B , el tren mide l (no sabemos cuánto es esto) y el tiempo es $t_B = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2-v^2} = \frac{2l}{c} \gamma^2$.

Pero como se cumplen las condiciones de $t_B = \gamma t_A$ (tomar en cuenta que la salida y llegada de la luz de la fuente en el frame de A son en la misma posición en este frame).

Usando esto, llegamos a:

$$l = \frac{l'}{\gamma}$$

Entonces, si alguien ve algo que se mueve a velocidad v , ve su longitud contraerse por γ .

Ejemplo Muones

En la atmósfera se crean muones con una vida media (desde su propio sistema de referencia) de $2 \times 10^{-6}s$ y tiene que recorrer una distancia de $50km$ hasta la tierra (medido desde nuestro punto de vista). Se mueve a $0.99998c$ (medido en nuestro punto de vista obvio), llega?

Desde el frame de la tierra: Desde este frame, el muón se mueve y entonces los $2 \cdot 10^{-6}s$ del muón en realidad son $t_T = \gamma * 2 \cdot 10^{-6}s$ que es 160 veces más. Entonces, la distancia que recorre desde nuestro frame es $d = vt_T$ que es mayor a $50km$

Desde el frame del Muón: Desde este frame, parece que la tierra se mueve hacia el muón y las distancias se acortan a $50km/\gamma$. Entonces, en el tiempo $t_\mu = 2 \cdot 10^{-6}s$, se mueve lo suficiente como para recorrer la distancia $50km/\gamma$.

Transformación de Lorentz

Tenemos un sistema S' que se mueve relativo a un sistema S a una velocidad v . El origen de S' se mueve en $x+$. Entonces, pretendemos escribir $\Delta x = A\Delta x' + B\Delta t'$ y $\Delta t = C\Delta t' + D\Delta x'$, usando las condiciones que hemos descubierto, tenemos las siguiente condiciones:

	Effect	Condition	Result	Eq. in text
1	Time dilation	$x' = 0$	$t = \gamma t'$	(11.9)
2	Length contraction	$t' = 0$	$x' = x/\gamma$	(11.14)
3	Relative v of frames	$x = 0$	$x' = -vt'$	
4	Rear clock ahead	$t = 0$	$t' = -vx'/c^2$	(11.6)

Metiendo estas condiciones, encontramos las constantes y llegamos a que:

$$(L1) \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

$$(L2) \Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$$

Donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Por otro lado, si despejamos podemos llegar a:

$$(L-1) \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$(L-2) \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$$

Generalmente omitiremos los Δ , pero están ahí.

Los Efectos Fundamentales

- **Pérdida de Simultaneidad:** Dos eventos suceden simultáneamente en S' . Entonces $x' = x'$ y $t' = 0$. Luego, según la ecuación L2, tenemos que $t = \gamma vx'/c^2$. Por lo que hay una diferencia en los tiempos medidos, los eventos no son simultáneos.
- **Dilatación del Tiempo:** Dos eventos ocurren en el mismo lugar en S' . Entonces tenemos que $x' = 0$, $t' = t'$. Usando la ecuación L2, llegamos a que $t = \gamma t'$. Por lo que desde el punto de vista no primado, es mayor el tiempo de separación.

Lo mismo si intercambiamos S y S' . En este caso, dos eventos en el mismo lugar de S tienen $x = 0$ y tienen $t = t$. Entonces la ec. L-2 nos dice que $t' = \gamma t$.

Notar que los dos casos no son válidos a la vez.

- **Contracción de Longitud:** Consideramos un palo quieto en S' , donde tiene longitud l' . Queremos medirlo en S . Para medirlo en S , necesitamos la distancia entre sus puntas al mismo tiempo, es decir $t = 0$ y $x = x$. Usando la ec L-1, llegamos a que: $x' = \gamma x$. Entonces, tenemos que $l = l'/\gamma$

Al igual que en el tiempo, se puede hacer al revés pero nunca al derecho y al revés a la vez.

Adición de Velocidades

Adición Longitudinal

Consideramos un objeto que se mueve a v_1 respecto a un sistema S' (un tren) que se mueve a velocidad v_2 respecto a un sistema quieto S . Buscamos calcular la velocidad del objeto en S .

Las transformaciones de Lorentz nos dicen que $\Delta x = \gamma_2(\Delta x' + v_2 \Delta t')$ y que $\Delta t = \gamma_2(\Delta t' + v_2 \Delta x'/c^2)$

Y además, por hipótesis, $\Delta x'/\Delta t' = v_1$.

Entonces, la velocidad en S es:

$$\begin{aligned} u &:= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v_2 \Delta t'}{\Delta t' + v_2 \Delta x'/c^2} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v_2}{1 + v_2(\Delta x'/\Delta t')/c^2} \\ &= \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2} \end{aligned}$$

0.2. El intervalo Invariante

Definimos:

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Que se llama el **intervalo invariante entre dos eventos**.

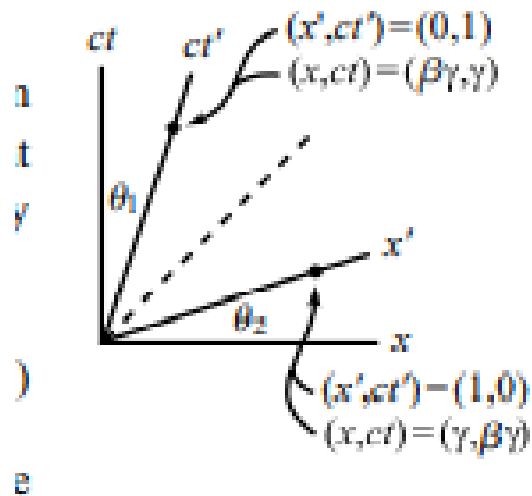
Entonces se puede demostrar usando las transformaciones de Lorentz, que sin importar en qué sistema estemos, esto vale lo mismo.

- **Caso 1:** $s^2 > 0$ (timelike separation)
 En este caso, tenemos que $c^2t^2 > x^2$.
 Lo que significa que la luz puede conectar los eventos.
- **Caso 2:** $s^2 < 0$ (Spacelike)
 En este caso, ni la luz puede llegar a ambos.

Diagramas de Minkowski

En un diagrama de minkosky, dibujamos el espacio tiempo para un observador S.

Si un sistema S' se mueve a velocidad v respecto al sistema S , buscamos la forma de dibujar sus ejes sobre los nuestros. para ello, nos apoyamos de las transformaciones de Lorentz y llegamos a que:



Donde $\tan \theta_1 = \tan \theta_2 = \beta$

Y vemos que el punto con coordenadas $(x', ct') = (1, 0)$ tiene coordenadas $(x, ct) = (\gamma, \beta\gamma)$

Entonces, vemos que el tamaño de las unidades cambian en los sistemas.

Notar que los sistemas coinciden en sus centros (lo que significa que para tiempo $t = 0$ están en el mismo lugar).

El Efecto Doppler

Digamos que una fuente emite luz a una frecuencia f' en su propio frame y se mueve hacia nosotros a velocidad v , entonces:

El intervalo de tiempo para nosotros será de $\delta t = \gamma \Delta t'$ pero hay que tomar en cuenta el movimiento de la fuente. Al final resulta que:

$$f = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} f'$$

Relatividad (Dinámica)

Energía y Momento

Momento

Podemos hacer experimentos en distintos sistemas de referencia y notamos que el momento que se conserva no es el usual, sino que es:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Y esto es lo que sí se conserva.

Energía

De forma similar al momento, podemos ver que al hacer experimentos, lo que se conserva es:

$$E = \gamma m c^2$$

Si la expandimos por Taylor, vemos que:

$$E = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots$$

Podemos separar la energía total en dos partes:

- **KE:** Se define como $KE = (\gamma - 1) m c^2$
- **Energía en Reposo:** $m c^2$

Segunda Ley:

La segunda ley relativista es:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v})$$

Energía Cinética: Luego, la energía cinética se define como:

$$KE = \int_0^s \vec{F} ds = \int_0^s \frac{d(\gamma m v)}{dt} ds = \dots = (\gamma - 1) m c^2$$

Energía total:

Definimos la energía total de una partícula como:

$$\boxed{E = \gamma m c^2}$$

Y con esta definición, podemos ver que $E = KE + m c^2$, por lo que $m c^2$ se piensa como la energía en reposo de la partícula.

Relación Momento-Energía

Podemos ver que:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Una relación útil es que:

$$\frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{v}}{c^2}$$

Si tenemos una partícula con $m = 0$, entonces el momento $\gamma m v$ es 0 a menos que $v = c$ ($\gamma = \infty$). Entonces las partículas sin masa se mueven a la velocidad de la luz. Y para ellas se cumple que:

$$E = pc$$

Método Lagrangiano

Podemos también demostrarlo usando Lagrange. Para ello, busquemos un lagrangiano relativista. Lo único que se nos ocurre es la mejor cantidad invariante que conocemos $cd\tau = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2}$ y proponemos que la acción sea:

$$S = -mc \int c d\tau = -mc \int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2} = -mc \int \sqrt{c^2 - \dot{x}^2} dt$$

Ponemos el mc para que tenga unidades de tiempo la S .

Entonces el lagrangiano es $L = -mc\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}$.

La ecuación de Euler Lagrange es entonces:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Y el momento es $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, que se conserva por la ecuación. Vemos que esto da $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m v$

Por otro lado, según lagrange (según Hamilton), la energía es $E = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \dots = \gamma m c^2$

Poniendo $c = 1$

Si ponemos $c = 1$, las relaciones de antes son:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad , \quad E = \gamma m \quad , \quad E^2 = p^2 + m^2 \quad , \quad \frac{\vec{p}}{E} = \vec{v}$$

Transformaciones de E y de p

Digamos que el sistema S' se mueve a velocidad v respecto al sistema S en la dirección $x+$. Digamos que una partícula tiene energía E' y momento p' en S' . Entonces cuál es su energía y momento en S ?

Sea u' la velocidad en S' , entonces la velocidad en S es $u = \frac{u' + v}{1 + u'v}$.
Luego, tras un poco de trabajo se puede demostrar que $\gamma_u = \gamma_{u'}\gamma_v(1 + u'v)$

Luego, la energía es $E' = \gamma_{u'}m$ y el momento $p' = \gamma_{u'}mu'$.
Entonces, al compararlos con la energía y momento en el primado, tenemos que:

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E' + vp') \\ p &= \gamma(p' + vE') \end{aligned}$$

Vemos que son transformaciones similares a las de Lorentz (con $c = 1$)

Invariante:

Se puede demostrar un tipo de invarianza como la de intervalo:

$$E^2 - p^2 = E'^2 - p'^2$$

Colisiones y Decays

Definimos el 4-vector de energía como:

$$\begin{aligned} P &= (E, \vec{p}) = (E, p_x, p_y, p_z) \\ &= (\gamma m, \gamma m v_x, \gamma m v_y, \gamma m v_z) \end{aligned}$$

Definimos el producto punto entre dos 4-vectores como:

$$A \cdot B = A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3$$

Entonces, la invarianza de E, p se puede escribir como:

$$E^2 - p^2 = m^2 = P \cdot P$$

Example (Relativistic billiards): A particle with mass m and energy E approaches an identical particle at rest. They collide elastically⁸ in such a way that they both scatter at an angle θ relative to the incident direction (see Fig. 12.7). What is θ in terms of E and m ? What is θ in the relativistic and nonrelativistic limits?

Solution: The first thing we should do is write down the 4-momenta. The 4-momenta before the collision are

$$P_1 = (E, p, 0, 0), \quad P_2 = (m, 0, 0, 0), \quad (12.37)$$

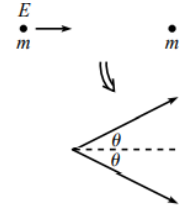


Fig. 12.7

where $p = \sqrt{E^2 - m^2}$. The 4-momenta after the collision are (primes now denote “after”)

$$P'_1 = (E', p' \cos \theta, p' \sin \theta, 0), \quad P'_2 = (E', p' \cos \theta, -p' \sin \theta, 0), \quad (12.38)$$

where $p' = \sqrt{E'^2 - m^2}$. Conservation of energy gives $E' = (E + m)/2$, and conservation of p_x gives $p' \cos \theta = p/2$. Therefore, the 4-momenta after the collision are

$$P'_{1,2} = \left(\frac{E+m}{2}, \frac{p}{2}, \pm \frac{p}{2} \tan \theta, 0 \right). \quad (12.39)$$

From Eq. (12.36), the squares of these 4-momenta must be m^2 . Therefore,

$$\begin{aligned} m^2 &= \left(\frac{E+m}{2} \right)^2 - \left(\frac{p}{2} \right)^2 (1 + \tan^2 \theta) \\ \implies 4m^2 &= (E+m)^2 - \frac{(E^2 - m^2)}{\cos^2 \theta} \\ \implies \cos^2 \theta &= \frac{E^2 - m^2}{E^2 + 2Em - 3m^2} = \frac{E+m}{E+3m}. \end{aligned} \quad (12.40)$$

The relativistic limit is $E \gg m$, which yields $\cos \theta \approx 1$. This means that both particles scatter almost directly forward. You can convince yourself that θ should be small by looking at the collision in the CM frame and then shifting back to the lab frame. The transverse speeds decrease during this shift of frames.

The nonrelativistic limit is $E \approx m$ (it's *not* $E \approx 0$), which yields $\cos \theta \approx 1/\sqrt{2}$. So $\theta \approx 45^\circ$, and the particles scatter with a 90° angle between them. This agrees with the result from the “Billiards” example in Section 5.7.2, a result which pool players are very familiar with.

Vemos que el mejor método para resolver estos problemas es usar la invarianza de E, p .

Example (Decay at an angle): A particle with mass M and energy E decays into two identical particles. In the lab frame, one of them is emitted at a 90° angle, as shown in Fig. 12.8. What are the energies of the created particles? We'll give two solutions. The second one shows how 4-momenta can be used in a very clever and time-saving way.

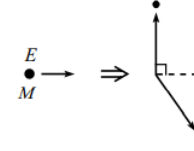


Fig. 12.8

First solution: The 4-momentum before the decay is

$$P = (E, p, 0, 0), \quad (12.41)$$

where $p = \sqrt{E^2 - M^2}$. Let the created particles have mass m , and let the second particle make an angle θ with the x axis. The 4-momenta after the decay are

$$P_1 = (E_1, 0, p_1, 0), \quad P_2 = (E_2, p_2 \cos \theta, -p_2 \sin \theta, 0). \quad (12.42)$$

Conservation of p_x immediately gives $p_2 \cos \theta = p$, which then implies that $p_2 \sin \theta = p \tan \theta$. Conservation of p_y says that the final p_y 's are opposites. Therefore, the 4-momenta after the decay are

$$P_1 = (E_1, 0, p \tan \theta, 0), \quad P_2 = (E_2, p, -p \tan \theta, 0). \quad (12.43)$$

Conservation of energy gives $E = E_1 + E_2$. Writing E_1 and E_2 in terms of the momenta and masses, this becomes

$$E = \sqrt{p^2 \tan^2 \theta + m^2} + \sqrt{p^2 (1 + \tan^2 \theta) + m^2}. \quad (12.44)$$

Putting the first radical on the left side, squaring, and solving for that radical (which is E_1) gives

$$E_1 = \frac{E^2 - p^2}{2E} = \frac{M^2}{2E}. \quad (12.45)$$

In a similar manner, we find that E_2 equals

$$E_2 = \frac{E^2 + p^2}{2E} = \frac{2E^2 - M^2}{2E}. \quad (12.46)$$

These add up to E , as they should.

Second solution: With the 4-momenta defined as in Eqs. (12.41) and (12.42), conservation of energy and momentum can be combined into the statement, $P = P_1 + P_2$. Therefore,

$$\begin{aligned} P - P_1 &= P_2, \\ \implies (P - P_1) \cdot (P - P_1) &= P_2 \cdot P_2, \\ \implies P^2 - 2P \cdot P_1 + P_1^2 &= P_2^2, \\ \implies M^2 - 2EE_1 + m^2 &= m^2, \\ \implies E_1 &= \frac{M^2}{2E}. \end{aligned} \quad (12.47)$$

Relativity (Dynamics)

And then $E_2 = E - E_1 = (2E^2 - M^2)/2E$. This solution should convince you that 4-momenta can save you a lot of work. What happened here was that the expression for P_2 was fairly messy, but we arranged things so that it appeared only in the form of P_2^2 , which is simply m^2 . 4-momenta provide a remarkably organized method for sweeping unwanted garbage under the rug.

Fuerza

Recordamos que en física no relativista tenemos la ecuación $F = \frac{dp}{dt}$

Sin embargo, para relatividad, cargamos esta ecuación pero el momento es distinto (por qué usamos dp/dt en vez de ma ? porque esta def. nos lleva al teorema de energía momento).

Para calcular esto, primero vemos que $\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 mva$.

En general, para la fuerza tenemos que:

$$F = \frac{d(\gamma mv)}{dt} = \gamma^3 ma$$

Si consideramos la cantidad dE/dx con $E = \gamma m$, vemos que:

$$\frac{dE}{dx} = \gamma^3 mv \frac{dv}{dx}$$

Pero tenemos $v(dv/dx) = a$, Lo que nos lleva a que:

$$F = \frac{dE}{dx}$$

Este resultado nos muestra otra forma de demostrar que $E = \gamma m$, tenemos que $E = \int F dx$ y listo.

Fuerza en Dos Dimensiones

En dos dimensiones tenemos que:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m(v_x, v_y)}{\sqrt{1 - v_x^2 - v_y^2}} \right)$$

Consideremos una partícula que se mueve en la dirección x y le aplicamos una fuerza $\vec{F} = (F_x, F_y)$. Entonces, tendremos que:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_{v_y=0} = m(\gamma^3 a_x, \gamma a_y)$$

que no es proporcional a (a_x, a_y)

Transformación de las Fuerzas

Digamos que S' se mueve a velocidad v respecto a S en la dirección x . S' es el frame de la partícula. Entonces, en el frame S tenemos que:

$$(F_x, F_y) = m(\gamma^3 a_x, \gamma a_y)$$

En el frame S' , el factor γ de la partícula es 1, por lo que:

$$(F'_x, F'_y) = m(a'_x, a'_y)$$

En particular, vemos que las fuerzas siguen la regla de transformación:

$$\begin{aligned} F_x &= F'_x \\ F_y &= \frac{F'_y}{\gamma} \end{aligned}$$

La fuerza longitudinal es la misma en ambos frames pero la transversa es mayor por γ en el particles frame.

4-Vectores

Definición: Una 4-ada $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ es un 4-vector si se transforma como Lorentz. Es decir, si cuando pasamos a un sistema primado S' que se mueve a velocidad v en la dirección x con respecto a S , entonces nos queda que el nuevo vector es $A' = (A'_0, A'_1, A'_2, A'_3)$ Y se siguen las relaciones:

$$\begin{aligned} A_0 &= \gamma(A'_0 + (v/c)A'_1) \\ A_1 &= \gamma(A'_1 + (v/c)A'_0) \\ A_2 &= A'_2 \\ A_3 &= A'_3 \end{aligned}$$

Es decir, se transforma al igual que (dt, dx, dy, dz) .

Por ejemplo, el vector $m(dt, dx, dy, dz)$ es un 4-vector porque m es invariante.

Sin embargo, $A = (dt, 2dx, dy, dz)$ no lo es. Esto porque si fuera un 4-vector, debería de cumplir que:

$$\begin{aligned} dt &:= A_0 = \gamma(A'_0 + vA'_1) := \gamma(dt' + v(2dx')) \\ 2dx &:= A_1 = \gamma(A'_1 + vA'_0) := \gamma((2dx') + vdt') \end{aligned}$$

Por lo que no es un 4-vector.

Algunos ejemplos:

- **Velocidad:** Si $d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$ es el proper time. Definimos el tensor de velocidad como:

$$V := \frac{1}{d\tau}(dt, dx, dy, dz) = \gamma \left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (\gamma, \gamma\vec{v})$$

En el rest frame de un objeto, tenemos que $V = (1, 0, 0, 0)$. Con las c , se tiene que $V = (\gamma c, \gamma\vec{v})$.

- **Energía - Momento:** Si multiplicamos el 4-vector de velocidad por m , obtenemos:

$$P := mV = (\gamma m, \gamma m\vec{v}) = (E, \vec{p})$$

En el rest frame, tenemos que $P = (m, 0, 0, 0)$ y con las c tenemos que $P = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) = (E/c, \vec{p})$.

Vemos que para una partícula en reposo, $P = (m, 0, 0, 0)$

- **Aceleración:** Definimos:

$$A := \frac{dV}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\gamma, \gamma\vec{v}) = \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} \right) = (\gamma^4 v \dot{v}, \gamma^4 v \dot{v} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a})$$

Propiedades

- **Combinaciones Lineales:** Si A y B son 4-vectores, entonces $C := aA + bB$ es un 4-vector
- **Invariancia :** Consideramos dos cuatro vectores $A = (A_0, \vec{A})$, $B = (B_0, \vec{B})$, entonces, definimos el producto interno como:

$$A \cdot B = A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 = A_0B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

Entonces $A \cdot B$ es invariante bajo transformaciones de Lorentz. También es invariante bajo rotaciones del 3-espacio.

- **Norma:** Definimos la norma de un 4-vector como:

$$A^2 := A \cdot A = A_0A_0 - A_1A_1 - A_2A_2 - A_3A_3 = A_0^2 - |\vec{A}|^2$$

Casos especiales de la invarianza de 4-vectores son la invarianza de $c^2dt^2 - dx^2$ y de $E^2 - p^2c^2$

- **Teorema:** Si uno de los componentes de un 4-vector es 0 en todos los frames, entonces todos los componentes son 0 en todos los frames.

Energy-Momento

Nuevamente, consideramos el vector $P = (E, \vec{p})$. Entonces la invarianza de $|P|$ implica que $P \cdot P = E^2 - |\vec{p}|^2$ es invariante.

Si estuviéramos en el rest frame, entonces tendríamos que $P^2 = m^2$, entonces ya tenemos el resultado:

$$E^2 - p^2 = m^2$$

Transformaciones de E, p . Sabemos que si (E, p_x, p_y, p_z) es un 4-vector. Entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E' + vp'_x) \\ p_x &= \gamma(p'_x + vE') \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \end{aligned}$$

Intro Cuántica

La ecuación de Onda

La ecuación de onda para una partícula en un potencial V es:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi}$$

No hay forma de demostrarla y a lo sumo se puede medio incentivar.

Incentivo: En el Beiser empieza diciendo que Schrodinger pensó que una partícula se describe por una onda inspirado en de Broglie. Luego, propuso que para una partícula free, la ecuación de onda debería ser $\Psi = Ae^{-i(E/\hbar t - p/\hbar x)}$.

Esto porque así tiene una longitud de onda de $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/(p/\hbar) = 2\pi\hbar/p = 2\pi\hbar/(h/\lambda) = \lambda$ como debería (usamos de Broglie).

Y también, $\omega = E/\hbar$, como debería según el efecto fotoeléctrico.

Luego, Beiser demuestra que esta función cumple la ecuación de onda escrita antes.

Interpretación estadística

Tenemos que si $\Psi(x, t)$ describe una partícula, entonces lo que significa es que:

$|\Psi(x, t)|^2 dx$ representa la probabilidad de encontrar la partícula a un tiempo t entre x y $x + dx$

Interpretaciones:

- Realista: La partícula tiene una posición determinada, pero la teoría está incompleta.
- Ortodoxa: La partícula no estaba en ningún lugar determinado, medir produce que la partícula tenga una posición determinada con probabilidades dadas por $|\Psi|^2$
- Agnóstico: Vale madres, vamos a resolver los problemas que podamos con lo que sabemos.

Probabilidad

Una **función de densidad de probabilidad** $\rho(x)dx$ es una tal que la probabilidad de que el evento suceda entre a y b es de:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x)dx$$

Se debe de cumplir que $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$.

Además, definimos:

- Media: $\bar{x} = \langle x \rangle = \int_{\mathbb{R}} x\rho(x)dx$
- Valor esperado de $f(x)$: es: $\langle f(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\rho(x)dx$

- Segundo momento central: $\langle x^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(x) dx$
- Varianza: $\langle (x - \bar{x})^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} (x - \bar{x})^2 \rho(x) dx$
Se cumple que $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

Normalización

Es importante que la ecuación de onda esté normalizada, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

Para que una onda sea normalizable, se debe de tener que la integral sea finita.

Conservación de la Normalización:

Sin embargo, es posible que hayamos normalizado Ψ para un tiempo $t = 0$, pero quién nos asegura que siga normalizada en otros tiempos? No podemos ir cambiando la constante de normalización con el tiempo.

Sin embargo, se demuestra usando la ecuación de Schrodinger que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\Psi(x, t)|^2 dx = 0$$

Por lo que la probabilidad total se conserva.

Momento

Para una partícula, la expectativa de su posición es de:

$$\langle x \rangle = \int_{\mathbb{R}} x |\Psi(x, t)|^2 dx$$

Para calcular la "velocidad" de la partícula, lo que podríamos hacer es calcular $\frac{d\langle x \rangle}{dt}$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \int x \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 dx = \\ &= \dots = -\frac{i\hbar}{m} \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \quad \text{integrando por partes} \end{aligned}$$

Si lo que nos interesa es el momento, tenemos que:

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -i\hbar \int \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx = \int \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx$$

Esto nos anima a definir el **operador de momento** como:

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Si tenemos una cantidad cualquiera $Q(x, p)$, entonces el operador asociado es $Q(x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x})$ y tiene una expectativa dada por:

$$\langle Q(x, p) \rangle = \int \Psi^* Q(x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}) \Psi dx$$

Por ejemplo, como la energía cinética es $T = \frac{p^2}{2m}$, tenemos que el valor esperado es:

$$\langle T \rangle = \frac{-\hbar^2}{2m} \int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx$$

Ahora definimos el operador energía potencial como $\hat{V} = V$ y el operador energía como $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$. Es decir:

- $\hat{x} = x$
- $\hat{V} = V$
- $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
- $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

Entonces, la ecuación de Schrodinger toma la forma sencilla de:

$$E = KE + V$$

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}$$

En 3D el operador p^2 se cambia por un laplaciano y listo.

Ecuación Independiente del tiempo

Ecuación Estacionaria

Proponemos como solución a la ecuación de Schrodinger una solución de la forma:

$$\Psi(x, t) = \psi(x)f(t)$$

Al sustituir en la ecuación diferencial y usar una E como separador de variable, nos queda una ecuación para f muy sencilla, que es:

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

Y nos queda que la ecuación independiente del tiempo es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

Que es igual a la de la Schrodinger pero con E en vez de \hat{E} .

- Esta ecuación nos da los estados estacionarios de la partícula. Una vez que la resolvemos, las wave equations como tal son:

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

La densidad de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2$ para una función $\Psi(x, t) = \psi(x)f(t)$ no depende del tiempo y es igual a $|\Psi(x, t)|^2 = |\psi(x)|^2$.

- Estas soluciones $\psi(x)f(t)$ son estados de **energía total definida**. Donde E_n es un eigenvalor de la ecuación y $\psi_n(x)$ su eigenfunción.
- La solución general es una **combinación lineal** de las soluciones de la forma $\psi_n(x)e^{iE_nt/\hbar}$. Es decir, la solución general es de la forma:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_nt/\hbar}$$

Algunas soluciones Estacionaras:

Infinite Square Well

Supongamos que:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq a \\ \infty & , \quad cc. \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación diferencial, que dentro del Well es $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$. Entonces nos

queda que $\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$ donde $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Luego, le pedimos que $\psi(0) = \psi(a) = 0$ y eso nos deja con $\psi(x) = A \sin(kx)$ con $ka = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$.

Y por tanto, despejando E nos queda que:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

Son los valores permitidos de la energía. Podemos calcular que para cada solución estacionaria, la constante de normalización es $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ y tenemos que:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Con n un entero.

La solución dependiente del tiempo es $\Psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar}$. Y luego una solución general (que se puede adecuar a cualquier condición inicial) se consigue como una combinación lineal.

Oscilador Armónico

La energía potencial es $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ y entonces la ecuación de Schrodinger es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi$$

Se puede resolver por medios de operadores de subida y bajada o por medio de series. Haciendo esto, tenemos que la solución ya normalizada es:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

Donde $\xi := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$.

Donde H_n es el n -ésimo polinomio de Hermite. Con n un entero.

Free Particle

Es una partícula con $V(x) = 0 \quad \forall x$ y entonces la ecuación diferencial es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

Que es $\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi$ con $k := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

Entonces, nos queda que la solución para una k cualquiera (que varía en los reales) es:

$$\psi_k(x, t) = Ae^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)}$$

Para k un real cualquiera.

El problema es que esta función no es normalizable.

Sin embargo, en este caso no nos interesan las soluciones eigenfunciones, sino las combinaciones lineales. Pero una combinación lineal es ahora una integral porque k varía en los enteros. Entonces tenemos que una solución general se ve de la forma:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(k) e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)} dk$$

Donde $\phi(k)$ son los coeficientes de la combinación lineal. Y la condición inicial es:

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(k) e^{ikx} dk$$

Por el teorema de **inversión de la transformada de Fourier**, se tiene que:

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Psi(x, 0) e^{-ikx} dx$$

Es decir $\phi(k)$ es la transformada de $\Psi(x, 0)$.

Esta función tiene una velocidad de grupo de $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ y una velocidad de fase de $v_p = \frac{\omega}{k}$

Potencial de Delta Function

Digamos ahora que $V(x) = -\alpha\delta(x)$, entonces la ecuación de Schrodinger es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha\delta(x)\psi = E\psi$$

Resolvemos por regiones (ver Griffiths) y nos queda al final que:

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}$$

Donde $E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$.

Finite Square Well

Tenemos un potencial de la forma:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & , \quad -a < x < a \\ 0 & , \quad |x| > a \end{cases}$$

En las regiones fuera del well, la ecuación de onda es $\frac{d^2\psi}{dx^2} = k^2\psi$ para $k = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$. La solución completa es:

$$\psi(x) = \begin{cases} Fe^{-kx} & , \quad x > a \\ D \cos(lx) & , \quad 0 < x < a \\ \psi(-x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

Donde luego le pedimos continuidad para ver el valor de F

Propiedades de las soluciones

Si tenemos una ecuación de Schrodinger estacionaria, la solución de mínima energía se llama **ground state** y las siguientes se llaman **excited states**.

Cumplen las siguientes propiedades:

- Las soluciones $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ son alternativamente pares e impares.
- Conforme aumentamos el valor de n , las soluciones ψ_n tienen un cruce más del origen
- Las soluciones son mutuamente ortogonales, en el sentido que:

$$\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

- Las soluciones son **completas**, en el sentido de que cualquier función $f(x)$ se puede escribir como $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$ donde los coeficientes c_n están dados por el **truco de Fourier**

Entonces, después de obtener las eigensoluciones $\psi_n(x)$, podemos construir las eigensoluciones multiplicando por $f(t)$, lo que nos deja $\Psi_n(x) = \psi(x)e^{-iE_n t/\hbar}$.

Luego, si queremos una solución $\Psi(x, t)$ del problema, la ponemos como $\Psi(x, t) = \sum c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$ y encontramos las c_n según las condiciones iniciales. Generalmente, la condición inicial es $\Psi(x, 0) = g(x)$, para lo que usamos la completés de $\psi_n(x)$.

Álgebra Lineal

Vectores:

Un vector $|\alpha\rangle$ es un elemento de un espacio vectorial.

Definimos las combinaciones lineales, dependencia lineal, bases, span, componentes, etc.

Inner Product

Un producto interno entre dos vectores $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ es un complejo de la forma $\langle\beta|\alpha\rangle$ que cumple:

- $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$
- $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$ y vale 0 sii $|\alpha\rangle = 0$
- $\langle\alpha|(b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle) = b\langle\alpha|\beta\rangle + c\langle\alpha|\gamma\rangle$

Definimos la norma como:

$$||\alpha|| = \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}$$

Decimos que un conjunto es ortonormal si cumple que:

$$\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = \delta_{i,j}$$

Si a_i, b_i son el i ésimo coeficiente de un vector $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ en una base ortonormal, entonces definimos el producto punto en términos de los componentes como:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = a_1^*b_1 + a_2^*b_2 + \cdots + a_n^*b_n$$

Y los componentes en sí mismos son:

$$a_i = \langle e_i|\alpha\rangle$$

Linear Transformation

Una transformación lineal separa vectores y saca escalares. Para conocerla por completo, es suficiente con conocer su imagen en una base, digamos una base ortonormal e_i . Entonces definimos los T_{ij} como los números tales que:

$$T|e_j\rangle = \sum_{i=1}^n T_{ij}|e_i\rangle = T_{1j}|e_1\rangle + T_{2j}|e_2\rangle + \cdots + T_{nj}|e_n\rangle$$

Con estos elementos, podemos construir una matriz T_{ij} que representa a la transformación lineal. Entonces, si \vec{a} son los componentes de un vector escritos verticalmente, entonces $\vec{a'}$, los componentes de este vector están dados por:

$$\vec{a'} = T\vec{a}$$

Definimos los tipos de transformaciones como:

- **Simétrico:** Si $\tilde{T} = T$ (\tilde{T} es el transpuesto)
- **Antisimétrico** si $\tilde{T} = -T$
- **Real** si $T^* = T$ (donde $*$ es el conjugado)
- **Imaginario:** Si $T^* = -T$
- **La matriz adjunta o hermitiana a T es:** $T^T = \tilde{T}^*$
- **Matriz Hermitiana:** es una que cumple $T^T = T$
- **Matriz anti hermitiana** si cumple $T^T = -T$
- **Unitaria:** Es una matriz que cumple $T^T = T^{-1}$

Eigenvectores y Eigenvalores

Si T es una transformación lineal, entonces $|\alpha\rangle$ es un eigenvector con eigenvalor λ si se cumple que:

$$T|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$$

Los eigenvalores se pueden conseguir calculando $\det(T - \lambda I) = 0$ y encontrando las soluciones λ

Luego, los eigenvectores de λ se obtienen como una base del espacio nulo $(T - \lambda I)\vec{x} = 0$

Transformaciones Hermitianas

Si T es una transformación cualquiera, entonces su transformación adjunta es una que cumple que:

$$\langle\alpha|T\beta\rangle = \langle T^T\alpha|\beta\rangle$$

Ésta es una definición más general que la de transpuesta conjugada. Pero se puede probar que en el caso de una matriz en una base ortonormal finita, esta definición implica que T^T es el adjunto conjugado.

Pues, $\langle\alpha|T\beta\rangle = a^T T b = (T^T a)^T b = \langle T^T \alpha | \beta \rangle$

Transformación Hermitiana:

Es una que cumple que $T^T = T$ o bien que $\langle T\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|T\beta\rangle$

Tienen las siguientes propiedades:

- Los eigenvalores son reales
- Los eigenvectores de distintos eigenvalores son ortogonales
- Los eigenvectores spanean el espacio.

Es decir, es diagonalizable por medio de una matriz unitaria (porque la matriz que diagonaliza está formada por los eigenvectores, que son ortonormales) y la matriz resultante es real (porque tiene a los eigenvalores, que son reales).

Espacio de Funciones

Nos centramos ahora en el espacio de funciones cuadrado integrables, que son las funciones que cumplen que:

$$\int |f(x)|^2 dx < \infty$$

Y le definimos el producto punto como:

$$\langle f|g \rangle = \int f(x)^* g(x) dx$$

En este espacio, las transformaciones lineales son operadores como derivar, o multiplicar por x .

Se puede comprobar usando la definición que algunos de estos operadores son hermitianos y otros no, en general nos interesan los que sí.

Espacios de Hilbert

Es un espacio con producto interno completo (que toda sucesión de Cauchy es convergente dentro del espacio)

Apéndice de Hilbert y espacios de Funciones

Antes de continuar, un resumen de espacios de Hilbert.

Como dijimos antes, el producto interno toma dos vectores es una operación que cumple: 1) $(x, y) = (y, x)^*$, 2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, 3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, 4) $(x, x) > 0$ cuando $x \neq 0$.

Y tienen una norma definida por $\|x\|^2 = (x, x)$.

En el espacio \mathbb{C}^n podemos definir el producto interno como $(a, b) = a_1^* b_1 + \dots + a_n^* b_n$

En el espacio de funciones cuadrado integrables, tenemos que $(f, g) = \int f^* g dx$. Le llamamos espacio L^2 o bien $L^2(a, b)$ si integramos en este intervalo.

Espacio de Hilbert

Es un espacio con producto interior tal que toda secuencia de Cauchy converge a un límite dentro del espacio.

Propiedad del Producto más cercano

Sea A un subconjunto cerrado y convexo de H un espacio de Hilbert. Entonces para todo $x \in H$ existe un único $y \in A$ tal que:

$$\|x - y\| = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

Expansiones Ortogonales

Decimos que dos vectores $x, y \in V$ son **ortogonales** si $(x, y) = 0$

Sistema Ortogonal: Es un conjunto de elementos $(e_a)_{a \in A} \in V/\{0\}$ tales que $e_a \perp e_b$ y es **ortonormal** si $(e_a, e_b) = \delta_{a,b}$

Coefficiente de Fourier: Si (e_n) es una secuencia ortonormal en un espacio de Hilbert H , entonces para todo $x \in H$ definimos el **n-ésimo coeficiente de Fourier** de x respecto a la secuencia ortonormal como:

$$a_n = (x, e_n)$$

Serie de Fourier: Dado un $x \in H$, definimos su serie de Fourier como:

$$\sum_n (x, e_n) e_n$$

No sabemos aún si este resultado será igual a x .

Teorema:

Si e_1, \dots, e_n es un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert H . Y sea $x \in H$. Entonces el punto $y \in \text{lin}\{e_1, \dots, e_n\}$ más cercano a x tiene la forma dada por:

$$y = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j$$

Y la distancia $d = \|x - y\|$ está dada por $d^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2$.

Desigualdad de Bessel:

Sea (e_n) una secuencia ortonormal en el espacio de Hilbert H , entonces para todo $x \in H$ tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

Nota sobre convergencia: La convergencia en L^2 es respecto al producto interno, pero no necesariamente es puntual.

Secuencias Ortonormales Completas

Dado un espacio de Hilbert, nos gustaría escribir $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$.

Secuencia Ortonormal Completa (base ortonormal): Es una secuencia (e_n) en un espacio de Hilbert que cumple que si $y \in H$ es ortogonal a todo e_n , entonces $y = 0$.

Equivalencias de Secuencias ortonormales:

Dado un espacio de Hilbert H , siempre podemos encontrar una base ortonormal (e_n) .

Se cumplen las siguientes equivalencias para bases ortonormales:

- (e_n) es completo (un elemento ortogonal a todo e_n tiene que ser 0)
- Para todo x se cumple que:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

- $\text{clin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} = H$

- Parseval:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$$

Donde $\|x\|^2$ es la norma cuadrada del vector x (que puede ser una función). Y el lado derecho es la suma de los coeficientes de fourier de x al cuadrado-norma.

Conste que e_n es una base ortonormal en el espacio H con el producto interno adecuado.

Series de Fourier

Teorema: Sea $e_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{inx}$ en $-\pi < x < \pi$. Entonces (e_n) es una base ortonormal en $L^2(-\pi, \pi)$.

Sistemas de Sturm Liouville

Def: Un sistema regular de SL regular (RSL) es una ecuación diferencial en $[a, b]$ junto con condiciones de frontera como sigue:

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{df}{dx} \right) + qf = -\lambda \rho f \quad , \quad a \leq x \leq b$$

$$\begin{cases} \alpha f(a) + \alpha' f'(a) = 0 \\ \beta f(b) + \beta' f'(b) = 0 \end{cases}$$

Donde:

- p, q, ρ son funciones continuas y reales en $[a, b]$
- p, ρ son positivas en $[a, b]$

- p' existe y es continua en $[a, b]$
- $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ son reales constantes.

La ecuación de SL se puede escribir usando el operador L dado por:

$$Lf = \frac{d}{dx} \left(p \frac{df}{dx} \right) + qf$$

Y entonces la ecuación de un RSL es:

$$Lf = -\lambda \rho f$$

Propiedad de Autoadjunto: Se cumple que:

$$(Lf, g) = (f, Lg)$$

Expansión en Eigenfunciones

Teorema de Ortogonalidad: Sean f, g eigenfunciones de un problema de SL con distintos eigenvalores. Entonces $\rho^{1/2}f$, $\rho^{1/2}g$ son ortogonales. Es decir:

$$\int \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$$

Lo que significa que son ortogonales respecto al peso f, g .

Luego, si queremos una solución particular a la ecuación diferencial, escribimos combinaciones lineales de estas soluciones.

Muchas ec. diferenciables se pueden conseguir para distintos ρ, p, q y se pueden resolver con métodos de series u otros.

Cosas de Fourier

Si tenemos una función f no muy fea (cantidad finita de discontinuidades, número finito de max y mins) en un intervalo $[a, b]$, entonces tenemos bases dadas por:

$$\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right), \quad \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)$$

$e^{i2\pi nx/L}$

Y entonces $f(x)$ se puede escribir como $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ donde:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx$$

O bien, se puede escribir como $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ donde:

$$c_n = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-2\pi inx/L} dx$$

Teorema de Parseval:

Sea $f \in L^2(a, b)$, donde el producto punto está definido como $(f, g) = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) g(x)^* dx$.

Entonces, podemos calcular los coeficientes de Fourier de f llamados $\hat{f}(n)$ y tendremos que:

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

Transformada de Fourier

Definimos la transformada de fourier de f como:

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

y entonces, se cumple la inversa:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} dx$$

Identidad de Plancherel:

Definimos el producto punto como:

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)^* dx$$

Y entonces se va a cumplir que:

$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2$$

La Interpretación Estadística Generalizada

- El estado de una partícula está representado por un vector normalizado $|\Psi\rangle$ en el espacio de Hilbert L_2 .

Las cantidades dinámicas tales como posición, momento, energía cinética, etc se pueden expresar como función de x, p y a veces t . Es decir $Q(x, p, t)$. Entonces, el operador \hat{Q} asociado se consigue como $\hat{Q} = Q(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, t)$.

El valor de esperanza en Q si la partícula está descrita por Ψ es:

$$\langle Q \rangle = \int \Psi(x, t)^* \hat{Q} \Psi(x, t) dx = \langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle$$

Ahora bien, este valor esperado tiene que ser real. Lo que implica que $\langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle^* = \langle \hat{Q} \Psi | \Psi \rangle$. Lo que implica que \hat{Q} es **Hermitiano**.

- 2 Las cantidades Observables $Q(x, p, t)$ son representadas por operadores Hermitianos $\hat{Q}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, t)$. El valor esperado de Q en el estado $|\Psi\rangle$ es $\langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle$.

En general, medidas idénticas de sistemas distintos pero idénticos dan resultados no reproducibles.

Sin embargo, algunos estados son **determinados** para algún observable, en el sentido de que se obtiene siempre el mismo resultado para él.

Para ello, la varianza de Q debe de ser 0, lo que significa que $0 = \sigma_Q^2 = \langle (\hat{Q} - \langle Q \rangle)^2 \rangle$ lo cual luego implica que:

$$\hat{Q}|\Psi\rangle = \langle Q \rangle |\Psi\rangle$$

- La medida de un observable Q en una partícula en un estado $|\Psi\rangle$ es seguro que tomará el valor λ sii $|\Psi\rangle$ es un eigenvector de \hat{Q} con eigenvalor λ .

Por ejemplo, la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo $\hat{H}\psi = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = E\psi$ es una ecuación de eigenvalores.

Como ψ es un eigenvector de \hat{H} , el teorema nos dice que \hat{H} es seguro que toma el valor E .

- 3. Si mides un observable Q de una partícula en un estado $|\Psi\rangle$, entonces es seguro que obtendrás un eigenvalor de \hat{Q} . La probabilidad de obtener un eigenvalor λ en particular es igual al cuadrado del valor absoluto del componente λ de $|\Psi\rangle$ cuando es expresado en la base de eigenvectores

Tiene como corolario el postulado de antes. Pues si $|\Psi\rangle$ es un e.v de \hat{Q} con eigenvalor λ , entonces Ψ ya es un eigenvector y por tanto sólo tiene este componente con componente 1.

Si el espectro es **discteto**, entonces sólo hay una cantidad numerable de eigenvalores. Por lo que tenemos $\hat{Q}|e_n\rangle = \lambda_n|e_n\rangle$ para $n \in \mathbb{N}$

Los eigenvectores son ortonormales, es decir $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$

Entonces, la función de onda tiene la forma de una suma dada por:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |e_n\rangle$$

Con $c_n = \langle e_n | \Psi \rangle$.

Y la probabilidad de obtener un eigenvalor λ_n es:

$$P_{\lambda_n} = |c_n|^2 = |\langle e_n | \Psi \rangle|^2$$

Si el espectro es **continuo**, lo que significa que los eigenvalores son descritos por reales como:

$$\hat{Q}|e_k\rangle = \lambda_k|e_k\rangle \quad , \quad -\infty < k < \infty$$

Las eigenfunciones en este caso no son normalizables y satisfacen un tipo de ortonormalidad dada por:

$$\langle e_k | e_l \rangle = \delta(k - l)$$

Una solución a la ec. dif se consigue como combinación lineal como:

$$|\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} c_k |e_k\rangle dk$$

Los componentes están dados por el truco de Fourier $c_k = \langle e_k | \Psi \rangle$.

Y la probabilidad de que un eigenvalor esté en el rando dk alrededor de λ_k es de:

$$|c_k|^2 dk = |\langle e_k | \Psi \rangle|^2 dk$$

Resúmenes

- 1) La ecuación de Schrodinger sale de tomar una ecuación de onda y exigir que tenga $\lambda = h/p$ y que $E = \hbar\omega$.
La ecuación es:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

- 2) Para resolverla, procedemos por separación de variables de la forma $\Psi(x, t) = \psi(x)f(t)$.
Resulta que la ecuación temporal se resuelve sencillamente como: $f(t) = e^{iEt/\hbar}$.
Por otro lado, la ecuación espacial toma la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

Donde E es una constante de separación. Al imponer las condiciones de frontera a la ec. temporal generalmente encontramos que sólo es posible elegir ciertos e.val E_n con ciertas e.func $\psi_n(x)$.

Entonces, la solución general será $\Psi(x, t) = \sum c_n \psi_n(x) f(t)$

Los c_n los encontramos según la condición inicial.

- 3) $|\Psi|^2$ se interpreta como la densidad de probabilidad de dónde encontrar la partícula.
Tiene que estar normalizada, lo que significa que $\int_{\mathbb{R}} |\Psi|^2 dx = 1$
La normalización no cambia con el tiempo.

- 4) Entonces, una vez encontrada la Ψ , el valor promedio de x está dado por:

$$\langle x \rangle = \int x |\Psi|^2 dx$$

Con ello, podemos encontrar el valor promedio de $\langle v \rangle$ como $\frac{d}{dt} \langle x \rangle$. Entonces se puede demostrar que:

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \int \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx$$

Esto nos lleva a definir el **operador de momento** como:

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Es decir, este operador, al meterlo en medio de la integral $\int \Psi^* \Psi dx$ nos permite encontrar el valor promedio de p .

- 5) Si tenemos una cantidad física cualquiera $Q(x, p)$, entonces el operador asociado que nos permite encontrar el valor promedio de Q es $Q(x, \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x})$ y su expectativa está dada por:

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* Q(x, \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x}) \Psi dx$$

- 6) Esto nos permite encontrar varios operadores para calcular valores esperados:

- $\hat{x} = x$
- $\hat{V} = V$
- $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
- $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

Entonces, la ecuación de Schrodinger tiene la forma dada por:

$$\hat{H} := \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = \hat{E}$$

Esto nos permite encontrar el valor medio de cualquier variable, pero no sabemos los valores que la variable puede tomar ni la probabilidad de cada valor.

Recordamos que Ψ es la solución a la ecuación de Schrodinger, que puede ser bastante complicada. Y que $\int \Psi^* \hat{Q} \Psi$ nos da el valor esperado de Q .

Si diera la coincidencia de que Ψ es un **eigenvalor** de \hat{Q} , es decir que $\hat{Q}\Psi = \lambda\Psi$. Entonces la media de Q es de:

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi dx = \int \Psi^* \lambda \Psi dx = \lambda$$

Y es más, se puede demostrar que $\sigma_Q^2 = \langle (\hat{Q} - \langle Q \rangle)^2 \rangle = 0$, por lo que Q tiene varianza 0 y sólo puede tomar un valor determinado (el eigenvalor de antes).

Es decir, **si la función de onda Ψ que encontramos resultó ser un eigenvector del operador \hat{Q} con eigenvalor λ , entonces el valor de Q está obligado a ser λ , con una certeza total.**

- 7) Si Ψ no es eigenvector de \hat{Q} , entonces al parecer sólo podemos conocer el valor esperado de Q usando la función de onda, pero no podemos saber los valores que puede tomar Q ni sus probas.

Sin embargo, lo que podemos hacer es encontrar eigenvectores de \hat{Q} . Los **eigenvectores** de \hat{Q} son funciones e_i tales que:

$$\hat{Q}|e_i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle$$

Como \widehat{Q} es hermitiano, podemos encontrar muchas eigenfunciones e_i y forman una base ortonormal y completa.

Para que sea ortonormal, pedimos que se cumpla lo siguiente (quizá haga falta normalizarla):

$$\langle e_i | e_j \rangle = \int_{\mathbb{R}} e_i^* e_j dx = \delta_{ij}$$

Si el espectro es continuo en vez de discreto, pediremos que $\langle e_\lambda | e_\mu \rangle = \delta(\lambda - \mu)$.

En cualquier caso, podremos encontrar una base de eigenfunciones del operador \widehat{Q} .

Entonces, podemos construir a la solución Ψ como una combinación lineal de los eigenfunciones:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |e_n\rangle$$

Donde:

$$c_n = \langle e_n | \Psi \rangle$$

Y entonces, el valor esperado de \widehat{Q} es:

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \int \Psi^* \widehat{Q} \Psi dx \\ &= \int (c_1^* |e_1\rangle^* + c_2^* |e_2\rangle^* + \dots) \widehat{Q} (c_1 |e_1\rangle + c_2 |e_2\rangle + \dots) dx \\ &= \int (c_1^* |e_1\rangle^* + c_2^* |e_2\rangle^* + \dots) (\lambda_1 c_1 |e_1\rangle + \lambda_2 c_2 |e_2\rangle + \dots) dx \\ &= \lambda_1 |c_1|^2 + \lambda_2 |c_2|^2 + \dots \end{aligned}$$

Donde en el último paso usamos ortonormalidad de las $|e_i\rangle$.

Como Ψ se puede ver como combinación lineal de los eigenfunciones de \widehat{Q} , entonces por el paso anterior concluimos que Q sólo puede tomar los valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Y viendo la suma que nos lleva a $\langle Q \rangle$, concluimos que la probabilidad de que Q tome el valor λ_i es $|c_i|^2$

Con ello, concluimos que: **Si medimos un observable Q en una partícula descrita por Ψ , estamos seguros de obtener un eigenvalor de \widehat{Q} . La probabilidad de obtener un eigenvalor particular λ es igual al valor absoluto cuadrado del componentes λ de $|\Psi$ expresado en la base ortonormal de eigenvectores, es decir $|c_n|^2 = |\langle e_n | \Psi \rangle|^2$**

Ejemplos:

- **Energía:** Ya tenemos la función de onda Ψ del problema. Podemos calcular la media de la energía como $\int \Psi^* \hat{H} \Psi dx$.

Para calcular los posibles valores de la energía, calculamos los eigenvalores y eigenvectores de \hat{H} , es decir, buscamos las funciones ψ_n tales que:

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi_n &= E_n\psi_n \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + V\psi_n &= E_n\psi_n\end{aligned}$$

Notar que esto no es otra cosa que la ecuación indep. del tiempo, que ya tuvimos que haber resuelto para haber encontrado Ψ .

Entonces ya tenemos que los valores que puede tener la energía son E_n .

Por otro lado, tenemos que escribir la función de onda general (que es Ψ , pero ignoramos la dependencia temporal, que no importa porque se cancelaría de ambos lados) en términos de las ψ_n , es decir $\Psi = \sum c_n \psi_n$

Luego, la probabilidad de obtener el eigenvalor E_n está dada por:

$$|c_n|^2 = |\langle \psi_n | \Psi \rangle|^2$$

Cómo sabemos que estas probas suman 1? Esto se debe al teorema de Parseval, que dice que $1 = \|\Psi\|^2 = \sum |c_n|^2$.

- **Posición:** Ya tenemos la solución Ψ a la ecuación de onda. Ahora buscamos los eigenvectores g_λ del operador \hat{x} y buscamos escribir Ψ en esta base. Los eigenvectores de \hat{x} son:

$$\begin{aligned}xg_\lambda(x) &= \lambda g_\lambda(x) \\ \Rightarrow g_\lambda(x) &= \delta(x - \lambda)\end{aligned}$$

De esta forma, ya están normalizadas las eigenfunciones, lo que significa en este caso que $\int_{\mathbb{R}} g_\lambda(x)^* g_\mu(x) = \delta(\lambda - \mu)$.

Luego, cualquier número puede ser eigenvalor de \hat{x} , por lo que x puede tomar cualquier valor.

Para encontrar la probabilidad de que x tome cierto valor en específico, tenemos que el componente x' de la función $\Psi(x, t)$ está dado por:

$$c_{x'} = \langle g_{x'} | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') \Psi(x, t) dx = \Psi(x', t)$$

Por lo que la probabilidad de encontrar la partícula en el rango dx' alrededor de x' es de:

$$|c_{x'}|^2 dx' = |\Psi(x', t)|^2 dx'$$

Lo cul ya lo sabíamos.

- **Momento:** Ya tenemos la solución de Ψ a la ec. de onda. Ahora buscamos los eigen-vectores del operador $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. En este caso, es fácil ver que los eigenvectores que cumplen $\hat{p}|e_p(x)\rangle = pe_p(x)$ son:

$$e_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

Donde el eigenvalor p puede tomar cualquier valor real. Y estos eigenvectores ya están normalizados, en el sentido que $\langle e_p(x)|e_q(x)\rangle = \int e_p(x)e_q(x)dx = \delta(p-q)$. Entonces, el p "Componente" de $|\Psi\rangle$ está dado por:

$$c_p = \langle e_p|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx := \Phi(p, t)$$

Entonces, la función de densidad que nos da la proba de encontrar p en cierto rango dp alrededor de p está dada por:

$$|c_p|^2 = |\Phi(p, t)|^2 dp$$

Entonces, la **función de onda en el espacio momento** es (ignorando la \hbar) la transformada de Fourier de $\Psi(x, t)$. Evidentemente la probabilidad de encontrar p en un rango entre a, b se consigue integrando esta densidad $|\Phi(p, t)|^2 dp$.

El hecho de que $\int |\Phi(p, t)|^2 dp = 1$ se debe al teorema de Plancherel.

Otra forma: Sabemos que la posición está dada por $\Psi(x, t)$. Y sabemos que según De Broglie, el momento está dado por $p = \frac{h}{\lambda}$.

Luego, necesitamos calcular el espectro de λ en Ψ .

Para ello, usamos la transformada de Fourier, tenemos que la transformada es $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t) e^{-2\pi i x/\lambda} dx$

Luego, tendremos que la transformada es $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t) e^{-2\pi i x p/\hbar} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t) e^{-ipx/\hbar} dx$

Le ponemos un factor de conversión por ahí y nos queda que: $\Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx$

Incluso podemos ver que por el teorema de inversión, tendremos que $\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{ipx/\hbar} \Phi(p, t) dp$

Ejemplo

Resolver la partícula en una caja con condición inicial $\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{8}{3L}} \sin^2(\pi x/L)$ (notar que esto está normalizado, pues $\int_{\mathbb{R}} |\Psi(x, 0)|^2 dx = 1$).

Tenemos que el problema es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Para $x \in [0, L]$ y con condiciones $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$ y que $\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{8}{3L}} \sin^2(\pi x/L)$

Ya sabemos que para la ecuación indep. del tiempo, cambiamos el operador \hat{E} por E y nos queda:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi = E\psi$$

Lo que nos da por solución $\psi(x) = A \cos(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x) + B \sin(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x)$. Por otro lado, sabemos que la solución temporal es $f(t) = e^{-iEt/\hbar}$. Por tanto, la solución general es:

$$\Psi_n(x) = \cos(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x) + B \sin(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x) e^{-iEt/\hbar}$$

Al imponer las primeras dos condiciones de frontera nos queda que $A = 0$ y que $\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\pi n}{L}$. Lo que implica que las energía accesibles (autovalores) son $\mathbf{E_n} = \frac{\pi^2 \hbar^2 \mathbf{n}^2}{2mL^2}$.

Entonces las soluciones estacionarias (eigenfunciones) son de la forma $\sin(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x) = \sin(\frac{\pi n}{L} x)$.

Para hacerlas de norma 1, hay que agregar un factor $\sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi n}{L} x)$. Para que la integral $\int_{\mathbb{R}} \psi_n^2 dx$ de 0 (conste que la función vale 0 fuera de $[0, L]$).

Luego, la solución general es de la forma:

$$\Psi_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi n}{L} x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

Luego, cuando $t = 0$ buscamos escribir $\sqrt{\frac{8}{3L}} \sin^2(\pi x/L)$ como una combinación lineal de estas soluciones, para lo que usamos una serie de Fourier de senos en el intervalo $[0, L]$. Haciendo determinado los c_n como $\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi n}{L} x) \sqrt{\frac{8}{3L}} \sin^2(\pi x/L) dx$ (claro que las funciones

se hacen 0 fuera de $[0, L]$), nos va a quedar al final que:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n \text{ impar}} -\frac{16}{\sqrt{3}\pi(n^3 - 4n)} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) e^{-iE_n t/\hbar}$$

La energía: Los eigenvalores de \hat{H} son $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}$. Pero no estamos en ninguno de los estados estacionarios correspondientes a las eigenfunciones de \hat{H} (que las eigenfunciones son nuestras soluciones $\Psi_n(x, t)$). Si nos quedáramos en sólo uno de esos estados, estaríamos 100 % seguros de que la energía es el valor correspondiente. Pero nel, estamos en una combinación lineal de todos, con coeficientes $-\frac{16}{\sqrt{3}\pi(n^3 - 4n)}$ para n impar (y 0 para n par).

Tenemos que encontrar los eigenvectores de \hat{H} . Como vimos antes, los encontramos como parte del proceso de encontrar Ψ . Obtuvimos que los eigenvectores son $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$.

El facto de $\sqrt{\frac{2}{L}}$ es lo que nos permite que $\int \psi_n(x)^2 dx = 1$ y por tanto son una base ortonormal.

Y como vimos antes, los eigenvalores están dados por $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}$.

Luego, para obtener la probabilidad de obtener un eigenvalor en específico, calculamos el coeficiente de Ψ en la dirección del eigenvector, que se obtiene como:

$$|c_n|^2 = |\langle \psi_n | \Psi \rangle|^2 = \left| -\frac{16}{\sqrt{3}\pi(n^3 - 4n)} \right|^2$$

$$P_{E_n \text{ (impar)}} = \frac{256}{3\pi^2(n^3 - 4n)^2}$$

Podemos comprobar que esto suma 1 sobre los impares, por lo que sí es una proba. Y de hecho, hay un casi 96 % de proba de que se encuentre en el primer estado.

E incluso podemos calcular el valor esperado de E como:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \sum P_{E_n} E_n \\ &= \sum_{n \text{ impar}} \frac{256}{3\pi^2(n^3 - 4n)^2} \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2} \\ &= \frac{6,57973 \hbar^2}{L^2 m} \end{aligned}$$

Que pudimos haber calculado igual usando la otra reglita:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int \Psi^* \hat{E} \Psi dx \\ &= \int \Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx \end{aligned}$$

y da lo mismo.

Principio de Incertidumbre

Para cualquier observable A , tenemos que:

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi \rangle = \langle f | f \rangle$$

Donde $|f\rangle := (\hat{A} - \langle A \rangle) |\Psi\rangle$. Similarmente para cualquier observable B , para el que definimos $|g\rangle = (\hat{B} - \langle B \rangle) |\Psi\rangle$.

Entonces tenemos (usando la desigualdad de Schwarz):

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2$$

Pero se puede comprobar que $\langle f | g \rangle = \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$.

Por lo que concluimos que:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2$$

En el caso particular de posición y momento, tenemos que:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Donde el conmutador es:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Mientras que en la energía tiempo tenemos que:

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar^2}{2}$$

Además, tenemos que si \hat{H} es el operador Hermitiano, entonces:

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

Cuántica en 3D

Ecuación de Schrodinger en 3d

En 3 dimensiones el operador H está dado por:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V$$

Donde:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

Entonces, definimos el operador de momento como:

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$$

Con ello, la ecuación de Schrodinger en 3D es:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V \Psi$$

Al igual de antes se puede hacer una separación de variables:

$$\Psi_n(\vec{r}, t) = \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}$$

Donde ψ está dado por la **ecuación de Schrodinger indep. del tiempo**:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_n + V \psi_n = E_n \psi_n$$

La solución general será entonces:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum c_n \psi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}$$

Separación de variables

Si estamos en coordenadas esféricas, el laplaciando toma la forma complicada que ya conocemos. Y para resolver la ecuación indep. del tiempo para cada estado estacionario, proponemos:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

Tras hacer la separación de variables encontramos las ecuaciones:

■ **Ecuación azimutal:**

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m_l^2$$

Que se resuelve sencillamente como:

$$\Phi(\phi) = e^{im_l \phi}$$

Donde $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ para que sea periódica.

- **Ecuación Polar:** La ecuación polar con las constantes de separación (la m_l de antes y una $l(l+1)$ escogida tramposamente queda como:

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m_l^2] \Theta = 0$$

La solución está dada por:

$$\Theta(\theta) = A P_l^{m_l}(\cos \theta)$$

Donde $P_l^{m_l}$ es el **función asociada de Legendre**, definida como:

$$P_l^{m_l}(x) := (1-x^2)^{|m_l|/2} \frac{d^{|m_l|}}{dx^{|m_l|}} P_l(x)$$

Donde la **fórmula de Rodrigues** nos dice que:

$$P_l(x) := \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

Table 4.1: Some associated Legendre functions, $P_l^m(\cos \theta)$.

$P_1^1 = \sin \theta$	$P_3^3 = 15 \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)$
$P_1^0 = \cos \theta$	$P_3^2 = 15 \sin^2 \theta \cos \theta$
$P_2^2 = 3 \sin^2 \theta$	$P_3^1 = \frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$
$P_2^1 = 3 \sin \theta \cos \theta$	$P_3^0 = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$
$P_2^0 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$	

Figura1: Algunos ejemplos de $P_l^m(\cos \theta)$

Notamos que l tiene que ser un entero no negativo para que tenga sentido lo de Rodrigues (y si no fuera así, la ecuación asociada de Legendre tendría soluciones pero se harían infinitas porque la ecuación de Legendre no se cortaría nunca las series). Además, si $|m_l| > l$, se tiene que $P_l^{m_l} = 0$, que no incluimos. Por tanto, las condiciones son:

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

$$m_l = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$$

Sólo tenemos una solución a la ecuación de Legendre (aunque supuestamente deberían de ser 2) porque la otra explota en los límites.

Por otro lado, nos conviene tener $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ normalizada, es decir:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

Tras normalizar y unir $\Theta(\theta)$ y $\Phi(\phi)$, nos queda que:

$$Y_l^{m_l}(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m_l|)!}{4\pi(l+|m_l|)!}} e^{im_l\phi} P_l^{m_l}(\cos\theta)$$

Donde $\epsilon = (-1)^{m_l}$ para $m_l \geq 0$ y $\epsilon = 1$ para $m_l \leq 0$. Además, son ortogonales:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^{m_l}(\theta, \phi)]^* [Y_{l'}^{m_{l'}}(\theta, \phi)] \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{m_l m_{l'}}$$

■ **Ecuación Radial:** Queda como:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] R = l(l+1)R$$

Claro que **supusimos desde el principio que** $V = V(r)$

La ecuación se simplifica si ponemos $u(r) = rR(r)$, porque nos queda:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu$$

Que tiene más sentido si definimos:

$$V_{eff} = V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$$

Átomo de Hidrógeno

Es la ecuación de Schrodinger en 3D cuando:

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Para resolver la ecuación es un poco complicado (ver tarea 3 MAF) pero queda como resultado:

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r} \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho)$$

Donde $v(\rho)$ son polinomios de Laguerre de grado $n-l-1$ en ρ (con tal vez algún factor por la convención del libro).

En un momento fue necesario pedir que la solución a una ec. dif. no explotara, para lo cuál se tuvo que imponer que las **energías accesibles** son:

$$E_n = -\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Y también se tiene que:

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m\epsilon^2} = 0,529 \times 10^{-10}m$$

Además:

$$\rho = \frac{r}{an}$$

La solución ahora sí completa y noramlizada es:

$$\psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na}\right) Y_l^m(\theta, \phi)$$

Donde ya está todo normalizado y ortonormalizado:

$$\int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Table 4.6: The first few radial wave functions for hydrogen, $R_{nl}(r)$.

$R_{10} = 2a^{-3/2} \exp(-r/a)$
$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} a^{-3/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a}\right) \exp(-r/2a)$
$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}} a^{-3/2} \frac{r}{a} \exp(-r/2a)$
$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}} a^{-3/2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{a} + \frac{2}{27} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \exp(-r/3a)$
$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}} a^{-3/2} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right) \exp(-r/3a)$
$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} a^{-3/2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp(-r/3a)$
$R_{40} = \frac{1}{4} a^{-3/2} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192} \left(\frac{r}{a}\right)^3\right) \exp(-r/4a)$
$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}} a^{-3/2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{80} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \frac{r}{a} \exp(-r/4a)$
$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}} a^{-3/2} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp(-r/4a)$
$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}} a^{-3/2} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp(-r/4a)$

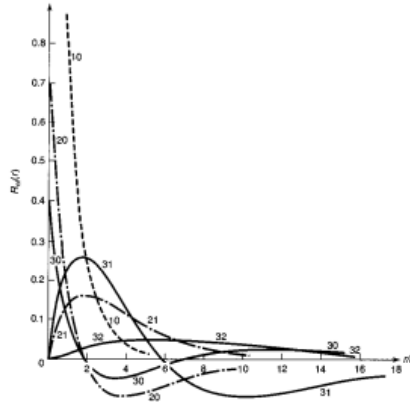


Figure 4.4: Graphs of the first few hydrogen radial wave functions, $R_{nl}(r)$.

Espectro

Un átomo puede transitar de un estado Ψ_{nlm} a otro estado final, cambiando su energía y liberando lo sobrante en forma de luz.

Por ahora nos preocupamos sólo por el cambio de n que no tiene restricciones (reglas de selección) y que es el directamente relacionado con la energía cuando no hay campo magnético. Entonces, la energía liberada es:

$$E_\gamma = E_i - E_f = -13,6eV \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

Usando que la energía es $E_\gamma = h\nu$, tenemos que:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Donde $R = 1,097 \times 10^7 m^{-1}$.

Momento Angular

El momento angular de una partícula respecto al origen es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Es decir: $L_x = yp_z - zp_y$, etc.

Viéndolo como operadores, tenemos:

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{\hbar}{i} (y\partial_z - z\partial_y) \\ L_y &= \frac{\hbar}{i} (z\partial_x - x\partial_z) \\ L_z &= \frac{\hbar}{i} (x\partial_y - y\partial_x) \end{aligned}$$

L_x, L_y no conmutan, de hecho se cumplen las relaciones cíclicas:

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= i\hbar L_z \\ [L_y, L_z] &= i\hbar L_x \\ [L_z, L_x] &= i\hbar L_y \end{aligned}$$

De acuerdo al principio de incertidumbre generalizado, los componentes del momento angular son incompatibles y se cumple que:

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \langle L_z \rangle^2$$

Sin embargo, el cuadrado del momento angular completo:

$$L^2 := L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

Sí conmuta con L_x, L_y, L_z . Pues se cumple que $[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0$

O más compactamente, lo escribimos como $[L^2, \vec{L}] = 0$

Lo que buscamos es encontrar los eigenvalores de estas funciones, para usar luego los métodos de la interpretación estadística para saber los posibles valores de L^2 y de L_z por decir. Para ello, buscamos los eigenvalores y eigenvectores siguiente:

$$L^2 f = \lambda f$$

$$L_z f = \mu f$$

Usaremos el **operador escalera** que definiremos como:

$$L_{\pm} := L_x \pm iL_y$$

La conmutación de L_z con L_{\pm} es:

$$\begin{aligned} [L_z, L_{\pm}] &= [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm iL_y) \\ &\Rightarrow [L^2, L_{\pm}] = 0 \end{aligned}$$

Y también tenemos obviamente que:

$$[L^2, L_{\pm}] = 0$$

Podemos demostrar que si f es una eigenfunción del operador L^2 y de L_z , entonces $L_{\pm}f$ también lo es. Esto debido a que:

$$L^2(L_{\pm}f) = L_{\pm}(L^2f) = L_{\pm}(\lambda f) = \lambda(L_{\pm}f)$$

Por lo que $L_{\pm}f$ es una eigenfunción de L^2 con el mismo eigenvalor λ . Por otro lado, para L_z tenemos que:

$$\begin{aligned} L_z(L_{\pm}f) &= (L_z L_{\pm} - L_{\pm} L_z)f + L_{\pm} L_z f = \pm\hbar L_{\pm}f + L_{\pm}(\mu f) \\ &= (\mu \pm \hbar)(L_{\pm}f) \end{aligned}$$

Por lo que $L_{\pm}f$ es una eigenfunción de L_z con el nuevo eigenvalor $\mu \pm \hbar$.

Se dice que L_+ es un "sube" porque si f tiene un eigenvalor μ en el operador L_z , entonces L_+f tiene un eigenvalor $\mu + \hbar$ (subió).

Mientras que si f tiene un eigenvalor μ en el operador L_z , entonces L_-f tiene un eigenvalor $\mu - \hbar$ (lo baja).

Para un dado valor de μ , podemos encontrar una escalera de estados, con cada escalón separado por \hbar en los eigenvalores de L_z . Para subir, aplicamos L_+ y para bajar aplicamos

L_- .

En algún momento vamos a llegar a un eigenvalor de L_z que exceda el total de momento total, lo cual es imposible. Entonces, debe de existir un último escalón f_t tal que:

$$L_+ f_t = 0$$

Llamamos $\hbar l$ a este eigenvalor de L_z , con l llamado el **número cuántico azimutal**

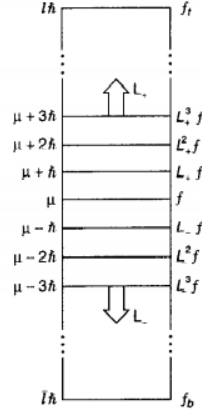


Figure 4.6: The "ladder" of angular momentum states.

Para este último escalón, se cumple que:

$$L_z f_t = \hbar l f_t \quad , \quad L^2 f_t = \lambda f_t$$

Ahora bien, se puede demostrar que:

$$L^2 = L_+ L_- + L_z^2 \mp \hbar L_z$$

De donde se sigue que:

$$L^2 f_t = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t = (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t = \hbar^2 l(l+1) f_t$$

Por lo tanto, el último escalón es:

$$\lambda = \hbar^2 l(l+1)$$

Por lo que éste es el último valor posible de L^2 .

Similarmente se puede calcular el eigenvalor más bajo, que resulta ser $-l$, entonces se va de $-l$ a l en N pasos enteros, lo que significa que $l = N/2$ es un medio entero.

Entonces, las eigenfunciones y eigenvalores de L^2 y L_z son:

$$L^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m \quad , \quad L_z Y_l^m = \hbar m Y_l^m$$

Donde:

$$l = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots, \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

Pusimos Y_l^m porque resulta que las eigenfunciones son los armónicos esféricos, lo que cuesta un poco de demostrar.

Entonces, en general tenemos que:

$$H\psi = E\psi, \quad L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi, \quad L_z\psi = \hbar m\psi$$

Son los eigenvalores de los operadores H, L^2, L .

Resulta que en la teoría algebraica, l, m pueden tomar valores medio enteros. Pero en la teoría analítica, sólo pueden tomar enteros. Sin embargo, las soluciones extra que nos da la parte algebraica tienen un significado.

Spin

En mecánica clásica, un objeto rígido tiene **momento orbital angular** $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ y tiene **Spin** $\vec{S} = I\omega$.

En mecánica cuántica, el electrón también tiene una fuente nueva de momento angular fundamental intrínseco al electrón.

Si lo partimos en sus componentes, tenemos que:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$$

$$[S_y, S_z] = i\hbar S_x$$

$$[S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

Se sigue, como en el caso de antes, que:

$$S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle$$

$$S_z|sm\rangle = \hbar m|sm\rangle$$

$$S_{\pm}|sm\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}|s(m\pm 1)\rangle$$

Donde $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$.

Donde $|sm\rangle$ significa el estado en el que está el Spin (con números cuánticos s, m).

Es decir, el momento de Spin tiene una magnitud dada por:

$$S^2 = s(s+1)\hbar^2$$

Y la componente z está dada por:

$$S_z = m\hbar$$

Donde el número del **spin** es:

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad , \quad m = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

El **spin** es una cantidad específica e inmutable de cada partícula. Los electrones tienen spin $1/2$ por ejemplo.

Spin 1/2

Las partículas con $s = 1/2$ son las que conforman la materia como los leptones y los quarks.

En este caso existen sólo dos eigenestados: **spin up** $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ y **spin down** $|\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle$.

Donde $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \rightarrow$ significa el estado con $s = 1/2, m = 1/2$

Y $|\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle \rightarrow$ representa el estado down que es $s = 1/2, m = -1/2$.

Lo que implica que el momento angular Spin de la partícula puede ser:

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

El estado general de una partícula-1/2 se puede expresar como sigue:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donde $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \chi_+$ representa al estado $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ y luego $\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ representa el estado $|\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\rangle$

Entonces, el operador de Spin que transforma en un estado de Spin en otro, se convierte en una matriz de 2x2 que se pueden conseguir aplicando S^2 a los eigenvectores que sí conocemos:

$$\blacksquare S^2 \chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2 \chi_+$$

$$\blacksquare S^2 \chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2 \chi_-$$

$$\blacksquare S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+$$

$$\blacksquare S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_-$$

Y similarmente $S_+ \chi_- = \hbar \chi_+$, $S_- \chi_+ = \hbar \chi_-$, $S_+ \chi_+ = S_- \chi_- = 0$

Y además, tenemos que $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ y que $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$.

De dónde podemos calcular $S_x \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_-$, $S_x \chi_- = \frac{\hbar}{2} \chi_+$, $S_y \chi_+ = -\frac{\hbar}{2i} \chi_-$, $S_y \chi_- = \frac{\hbar}{2i} \chi_+$

Entonces, tenemos las siguientes matrices para los operadores, **matrices de Spin de Pauli**:

$$\blacksquare S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es común definir matrices $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ al quitar el factor $\hbar/2$

Si medimos S_z en una partícula en un estado χ , entonces podríamos obtener cualquiera de los eigenvalores de $\pm\hbar/2$ con las posibilidades dadas por $|a|^2$ y $|b|^2$.

Si medimos S_z , obtendremos uno de estos eigenvalores con cierta posibilidad.

Similarmente, si medimos S_x , los eigenvalores son igual $\hbar/2$ y $-\hbar/2$ (que obviamente tenían que ser iguales a los de S_z). Los eigen espinores son los eigenvectores de la matriz S_x . que en este caso los eigenvectores son:

$$\chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ (eigenvalor } \hbar/2) \text{ y } \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ (con eigenvalor } -\hbar/2)$$

Si queremos calcular la probabilidad de que S_x valga $\hbar/2$ o $-\hbar/2$ tenemos que descomponer el estado del spinor que describe a la partícula en sus componentes en esta base. Y la probabilidad será el cuadrado de los componentes en cada caso.

Y saber el componente del spin en una dirección nos causa desconocer el componente en las otras direcciones.

Sistemas de Dos Partículas

Para una partícula solita tenemos la función de onda $\Psi(\vec{r}, t)$. Para la función de onda de dos partículas, necesitamos una función de la posición de las dos partículas, es decir:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$$

Su comportamiento está determinado (como siempre) por la ecuación de Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

Donde H es el hamiltoniano del sistema:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$$

El subíndice de ∇ indica con respecto a qué coordenadas estamos derivando.

La interpretación estadística es la misma, pues:

$$|\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)|^2 d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2$$

es la probabilidad de encontrar a la partícula 1 en el volumen $d^3\vec{r}_1$ y la partícula 2 en el volumen $d^3\vec{r}_2$. Evidentemente, Ψ debe de ser normalizada de tal forma que:

$$\int |\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)|^2 d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 = 1$$

Si V no depende del tiempo, podemos hacer una separación de las variables y nos queda:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) e^{-iEt/\hbar}$$

Donde la función ψ sigue la ecuación independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 \psi + V\psi = E\psi$$

Donde E es la energía total del sistema.

Bosones y Fermiones

Supongamos que la partícula 1 se encuentra en el estado $\psi_a(\vec{r})$ y la partícula 2 en el estado $\psi_b(\vec{r})$. En este caso, $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ está dado por:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_a(\vec{r}_1) \psi_b(\vec{r}_2)$$

Esto presupone que podemos diferenciar estas partículas y podemos decir que la partícula 1 tiene el estado a y la partícula 2 el estado b.

En cuántica, muchas partículas son verdaderamente idénticas y no podemos separarlas. Para tomar en cuenta estas partículas, construimos una función de onda en la que no importá quéé partícula está en qué estado:

$$\psi_{\pm}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A[\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) \pm \psi_b(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2)]$$

Entonces, las partículas aceptan dos tipos de partículas:

- **Bosones:** Usamos el signo +
- **Fermiones:** Usamos el signo menos

Los fotones y mesones son bosones. Y los leptones y quarks son fermiones.

- Todas las partículas con spin entero son bosones y con spin medio-entero son fermiones.

Se sigue que no se puede tener dos fermiones en el mismo estado, porque entonces la ecuación de onda se vuelve 0. Éste es el **principio de exclusión de Pauli**. Que aplica a todos los fermiones idénticos.

Definimos un **operador de intercambio** P que intercambia a las partículas:

$$Pf(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = f(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

Claramente $P^2 = 1$ y los eigenvalores de P son ± 1 . Si las partículas son iguales, las masas son iguales y el potencial las debe de tratar igual $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$. Se sigue que:

$$[P, H] = 0$$

Podemos encontrar soluciones a la ecuación de Schrodinger que son simétrica (eigenvalor 1) o antisimétrica (eigenvalor -1) bajo el cambio:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \pm \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

Con + para bosones y - para fermiones.

Example. Suppose we have two noninteracting³ particles, both of mass m , in the infinite square well (Section 2.2). The one-particle states are

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad E_n = n^2 K$$

(where $K \equiv \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$). If the particles are *distinguishable*, the composite wave functions are simple products:

$$\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2), \quad E_{n_1 n_2} = (n_1^2 + n_2^2) K.$$

For example, the ground state is

$$\psi_{11} = \frac{2}{a} \sin(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/a), \quad E_{11} = 2K;$$

the first excited state is doubly degenerate:

$$\psi_{12} = \frac{2}{a} \sin(\pi x_1/a) \sin(2\pi x_2/a), \quad E_{12} = 5K,$$

$$\psi_{21} = \frac{2}{a} \sin(2\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/a), \quad E_{21} = 5K;$$

and so on. If the two particles are identical *bosons*, the ground state is unchanged, but the first excited state is *nondegenerate*:

$$\frac{\sqrt{2}}{a} [\sin(\pi x_1/a) \sin(2\pi x_2/a) + \sin(2\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/a)]$$

(still with energy $5K$). And if the particles are identical *fermions*, there is *no* state with energy $2K$; the ground state is

$$\frac{\sqrt{2}}{a} [\sin(\pi x_1/a) \sin(2\pi x_2/a) - \sin(2\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/a)],$$

and its energy is $5K$.

Exchange Forces

Digamos que tenemos una partícula 1 en un estado $\psi_a(x)$ y una partícula 2 en el estado $\psi_b(x)$ y estos estados son ortogonales y normalizados.

Si las partículas son distinguibles, entonces el estado combinado es:

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1) \psi_b(x_2)$$

Si son bosones idénticos, entonces:

$$\psi_+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(x_1) \psi_b(x_2) + \psi_b(x_1) \psi_a(x_2)]$$

Y si son fermiones idénticos, entonces:

$$\psi_-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(x_1) \psi_b(x_2) - \psi_b(x_1) \psi_a(x_2)]$$

Calculemos ahora el calor esperado del cuadrado de la distancia:

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle - 2\langle x_1 x_2 \rangle$$

■ Caso 1: Distinguibles

Tenemos que:

$$\langle x_1^2 \rangle = \int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_a$$

El valor esperado de x^2 es el estado ψ_a .

$$\begin{aligned}\langle x_2^2 \rangle &= \int |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2^2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x^2 \rangle_b \\ \langle x_1 x_2 \rangle &= \int x_1 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int x_2 |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 = \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b\end{aligned}$$

Entonces, tenemos que:

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_d = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

La respuesta sería la misma si las partículas estuvieran en estados al revés.

■ Caso 2: Partículas Idénticas

En este caso tenemos que:

$$\begin{aligned}\langle x_1^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\int x_1^2 |\psi_a(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_b(x_2)|^2 dx_2 \right. \\ &\quad + \int x_1^2 |\psi_b(x_1)|^2 dx_1 \int |\psi_a(x_2)|^2 dx_2 \\ &\quad \pm \int x_1^2 \psi_a(x_1)^* \psi_b(x_1) dx_1 \int \psi_b(x_2)^* \psi_a(x_2) dx_2 \\ &\quad \left. \pm \int x_1^2 \psi_b(x_1)^* \psi_a(x_1) dx_1 \int \psi_a(x_2)^* \psi_b(x_2) dx_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} [\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b \pm 0 \pm 0] = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b)\end{aligned}$$

Similarmente, tenemos que:

$$\langle x_2^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle_b + \langle x^2 \rangle_a)$$

Naturalmente valen lo mismo, porque no podemos identificarlas. Finalmente, se puede demostrar que:

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \pm |\langle x \rangle_{ab}|^2$$

Donde:

$$\langle x \rangle_{ab} = \int x \psi_a(x)^* \psi_b(x) dx$$

Introducción a la Física de Partículas

Unidades naturales: $c = 1 = \hbar$

Decaimiento Beta

Un neutrón decae en un protón y un electrón. Tiene una vida media de $15min$.

En un volumen colocamos un montón de Neutrones y esperamos a que decaigan. Entonces, los electrones que salen deben de tener una energía bien definida.

Lo que necesitamos tomar en cuenta es la conservación de energía y momento (4-momento):
Un neutrón va a tener el siguiente cuadrimomento:

$$P^\mu = (E, \vec{P})$$

Después de que pasen 15 minutos, resulta ser que el sistema transita a un estado con un protón y un electrón.

Le llamamos q^μ al cuadrimomento del protón y el de el electrón le llamamos K^μ .

$$q^\mu = (E_p, \vec{q})$$

$$K^\mu = (E_e, \vec{k})$$

Como se conserva el cuadrimomentum, debemos de tener que:

$$p^\mu = q^\mu + K^\mu$$

Signatura:

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu &= P^0 P_0 + P^1 P_1 + P^2 P_2 + P^3 P_3 \\ &= P^0 P^0 - P^1 P^1 - P^2 P^2 - P^3 P^3 = (P^0)^2 - \vec{P}^2 \end{aligned}$$

El tensor con índices abajo lo que hace es cambiar el signo de los últimos 3 componentes (en esta signatura).

Aplicado a un cuadrimomento del neutrón, el invariante relativista es:

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu &= E^2 - \vec{P}^2 = m^2 \\ q^\mu q_\mu &= q^2 = m_p^2 \\ K^\mu K_\mu &= m_e^2 \end{aligned}$$

Usamos la conservación del 4-vector:

$$\begin{aligned} P^\mu &= q^\mu + K^\mu \\ \Rightarrow (P_\mu - K_\mu)(P^\mu - K^\mu) &= q^\mu q_\mu \\ \Rightarrow P^2 + K^2 - 2P^\mu K_\mu &= q^2 \\ &= m_n^2 + m_e^2 - 2P^\mu K_\mu = m_p^2 \\ \Rightarrow P^\mu K_\mu &= \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2}{2} \end{aligned}$$

Todo esto fue en un marco de referencia general.

Ahora sí lo hacemos en un marco de referencia particular, en el cual el neutrón está quieto. Lo que significa que $P^\mu = (E_n \vec{0}) = (m_n, 0, 0, 0)$ (es la energía en reposo).

Entonces cuando hago $P^\mu K_\mu$ me queda $P^0 K^0 - \vec{p} \cdot \vec{k} = m_n E_e$.

Entonces:

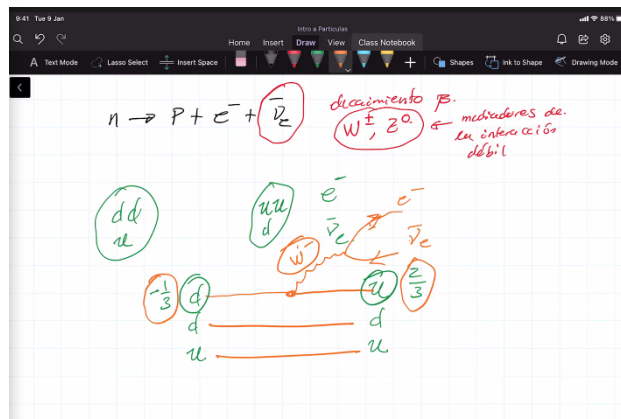
$$E_e = \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2}{2m_n}$$

Como tenemos que $m_p \simeq 938 \text{ MeV}$, $m_n \simeq 940 \text{ MeV}$, entonces llegamos a que $m_e \simeq 0,5 \text{ MeV}$. Sin embargo, en el experimento no medimos una energía determinada, medimos una curva con un poco de grosor alrededor de E_e . Esto porque se está liberando una partícula más, un antineutrino.

$$n \rightarrow P + e^- + \bar{\nu}_e$$

Hay una partícula responsable de este decaimiento, que se conocen como los **bosones** mediadores de la interacción débil W^\pm, Z^0 .

La descripción moderna es que n está compuesto por ddu y transitan a un estado uud (protón) y sueltan un electrón y un antineutrino. El d se convierte en u porque interactúa con el vacío (campos cuánticos). A la hora de excitar al vacío cuántico, emite un bosón W^- y cambia de sabor a u . La carga tiene que pasar de $d = -1/3$ a $u = 2/3$. Entonces W^- tiene una carga de -1 . Eventualmente, el bosón W^- decae en un e^- y un antineutrino $\bar{\nu}_e$.



Este tipo de procesos se pueden visualizar en una cámara de niebla. Al pasar las partículas, dejan una estela de gotitas en la cámara.

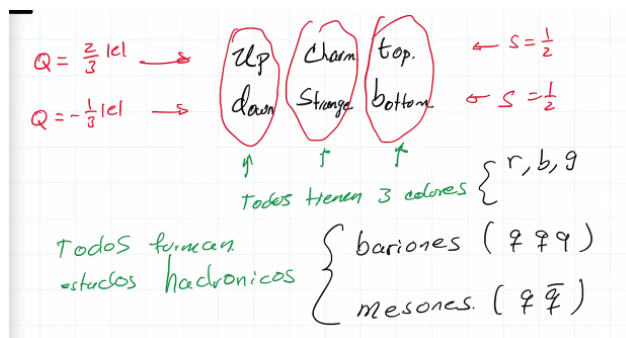
Sólo se pueden detectar partículas con carga en este experimento. Por ello, al usar neutrones, al principio no se ve nada, pero de repente, se ven dos espirales (indicando que el neutrón decayó en dos partículas). Como hay un campo magnético, las partículas viajan en espirales, del radio de las espirales se puede saber un poco la masa de las partículas (bueno, el cociente q/m) y sus signos.

Fermiones

Los fermiones son partículas con spin $1/2$ y que siguen el principio de exclusión de Pauli.

Quarks

Se descubrieron más quarks a parte de los Up, Down, que tienen mayor masa.



Son tres familias de partículas como se muestra aquí. Los quarks forman estados hadrónicos cuando se combinan.

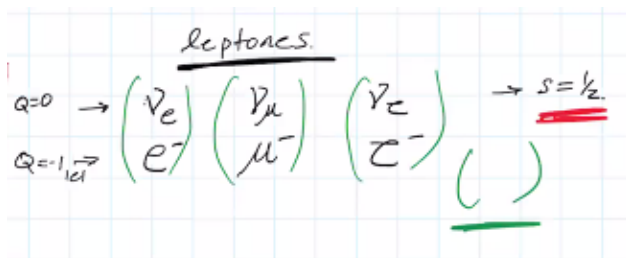
Los quarks sienten la interacción fuerte, lo que implica que tienen distintos colores. De cada tipo de quark podemos tener colores r,b,g.

Para formar un barión (muy masivo) se juntan tres quarks tal que el color total sea blanco. O se forman mesones (masa media) que tienen un quark y un antiquark (con el anticolor para sumar blanco).

Leptones

También aparecen en tres familias. Cada una con un electrón y con un neutrino. Todos tienen spin $1/2$.

Cada familia tiene una partícula negativa tipo electrón (aunque el μ y el τ son mucho más pesados) y un neutrino.



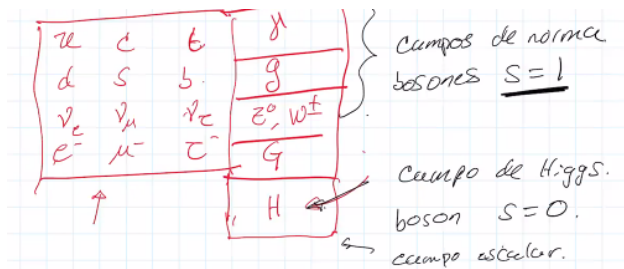
Bosones

Los bosones son partículas con spin entero. Son los que median las interacciones entre partículas. No tienen el principio de exclusión de Pauli.

- **Forón:** Son las que median las interacciones electromagnéticas. Las cuales sólo son sentidas por partículas con carga.
- **Gluón:** Median la fuerza fuerte, la cual sólo es sentida por partículas con color (quarks).
- W^\pm, Z : Median los decaimientos de las partículas, como en el ejemplo de arriba.

Resumen:

Zoológico de partículas elementales:



Isospinores

Nos imaginamos el electrón (mal) como una pelotita y que está girando sobre su propio eje. Esto genera que tenga cierto momento dipolar magnético $\vec{\mu}$. Esto se propuso porque se veía (Stern-Gerlach) que al mandar electrones por un campo magnético, estos se desviaban. No sólo eso, sino que se desviaban de dos formas distintas, unos iban para un lado y otros para el otro.

Por lo que resulta la idea de que el electrón tiene un momento magnético intrínseco. Y que el electrón puede tener dos estados de Spin.

Puede tener un momento de Spin hacia arriba o hacia abajo. Por lo que describimos el estado del electrón como $e^- = \begin{pmatrix} e_\uparrow \\ e_\downarrow \end{pmatrix}$.

Que son los spinores de Pauli.

IsoEspinor

Gellmann generaliza esta idea. Él ve que los neutrones y los protones se parecen mucho y propone que son una misma partícula con un Isoespinor de la forma $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$.

Supersimetría: Cada partícula de cierto tipo (fermión por ejemplo) tiene una partícula correspondiente del otro tipo (bosón). Y en realidad cada objeto es un doblete de bosón y de fermión.

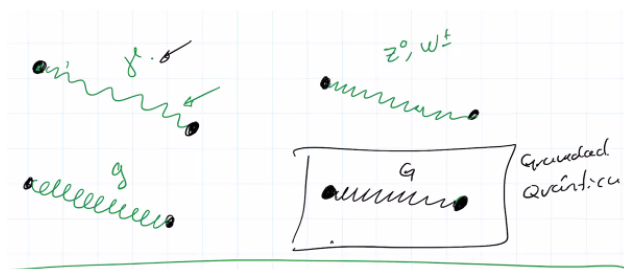
Fuerzas Fundamentales y Diagramas

Las fuerzas fundamentales (entre partículas que las pueden tener) surgen a partir del intercambio de bosones entre las partículas.

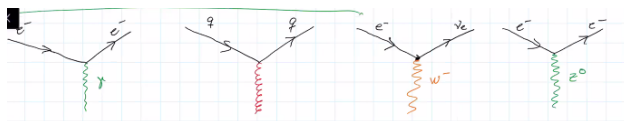
Si tienen carga eléctrica, es un intercambio de fotones.

Si tienen color, es un intercambio de colores.

Si tienen Spin, pueden tener interacción débil



Podemos observar varias situaciones en las que una partícula cambia su estado de movimiento. Esto se puede explicar por el desprendimiento de alguna partícula.



A estos diagramas se les conoce como **vértices**, en los que interactúan 3 o más partículas. La primera interacción depende de la carga eléctrica, la de la segunda depende del color y la de la tercera depende del spin.

Constante de Estructura fina (interacción eléctrica): $\alpha_e = \frac{e^2}{4\pi} = 1/137$

La constante de interacción eléctrica se pone 1 por ser la más fuerte.

La débil es de orden $\alpha_w = \frac{1}{30}$.

Se les conoce como constantes de acoplamiento.

Principio de Incertidumbre: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{1}{2}$
 $\Delta t \Delta E \geq \hbar = 1$

Recordar que $\hbar = c = 1$ y eso resulta en que muchas cosas se miden en eV. Por el principio de incertidumbre E-t, tenemos que el tiempo se debe de medir en eV^{-1}