Tomás Ricardo Basile Álvarez

Mecánica Vectorial

15-03-19

Tarea 5

1. Una masa de 5kg se mueve bajo la acción de una fuerza $\bar{F} = (4t^2\hat{\imath} - 3t\hat{\jmath}\,N)$. Si el movimiento inicia en el origen $\bar{r}(t=0) = 0$. Encuentra su velocidad, posición y $\bar{r}\times\bar{v}$ para cualquier tiempo.

$\bar{F} = (4t^2\hat{\imath} - 3t\hat{\jmath}\,N)$

Sabemos que $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, por lo tanto podemos dividir el vector de fuerza entre la masa para obtener el vector de aceleración

$\bar{a} = \frac{1}{m}\vec{F} = \frac{1}{5_{kg}}(4t^2\hat{\imath} - 3t\hat{\jmath}\,N) = \left(\frac{4}{5}t^2\hat{\imath} - \frac{3}{5}t\hat{\jmath}\ m/s^2\right)$ ← La operación se hace por separado a cada coordenada ya que el movimiento en x es independiente al de y.

$\boxed{\bar{a} = \left(\frac{4}{5}t^2\hat{\imath} - \frac{3}{5}t\hat{\jmath}\ m/s^2\right)}$

· Para la velocidad, integramos el vector de aceleración en cada coordenada

$V_x = \int a_x\,dt = \int \frac{4}{5}t^2 dt = \frac{4}{15}t^3 + V_{0x} = \frac{4}{15}t^3$ ← La velocidad inicial en cada eje es cero.

$V_y = \int a_y\,dt = \int -\frac{3}{5}t\,dt = -\frac{3}{10}t^2 + V_{0y} = -\frac{3}{10}t^2$

$\boxed{\bar{v} = \left(\frac{4}{15}t^3\hat{\imath} - \frac{3}{10}t^2\hat{\jmath}\ \frac{m}{s}\right)}$

· Para la posición, integramos la velocidad

$x(t) = \int v_x\,dt = \int \frac{4}{15}t^3\,dt = \frac{1}{15}t^4 + X_0 = \frac{1}{15}t^4$ ← X_0 y Y_0 son cero porque parte del origen

$y(t) = \int v_y\,dt = \int -\frac{3}{10}t^2 = -\frac{1}{10}t^3 + Y_0 = -\frac{1}{10}t^3$

$\boxed{\bar{r} = \left(\frac{1}{15}t^4\hat{\imath} - \frac{1}{10}t^3\hat{\jmath}\ m\right)}$

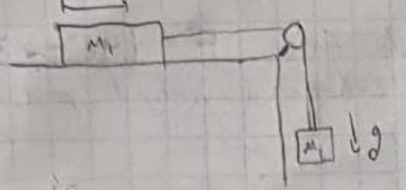
$\bar{r}\times\bar{v} = \left(\frac{1}{15}t^4\hat{\imath} - \frac{1}{10}t^3\hat{\jmath}\right) \times \left(\frac{4}{15}t^3\hat{\imath} - \frac{3}{10}t^2\hat{\jmath}\right)$

$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{1}{15}t^4 & -\frac{1}{10}t^3 & 0 \\ \frac{4}{15}t^3 & -\frac{3}{10}t^2 & 0 \end{vmatrix}$ ← Agregué 0 en $\hat{k}$ ya que el producto cruz sólo se define en 3 dimensiones

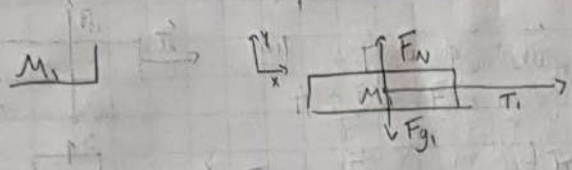
$= \overbrace{\begin{vmatrix} -\frac{1}{10}t^3 & 0 \\ -\frac{3}{10}t^2 & 0 \end{vmatrix}}^{0}\hat{\imath} - \overbrace{\begin{vmatrix} \frac{1}{15}t^4 & 0 \\ \frac{4}{15}t^3 & 0 \end{vmatrix}}^{0}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} \frac{1}{15}t^4 & -\frac{1}{10}t^3 \\ \frac{4}{15}t^3 & -\frac{3}{10}t^2 \end{vmatrix}\hat{k}$

$= \left(\frac{1}{15}t^4\right)\left(-\frac{3}{10}t^2\right) - \left(\frac{4}{15}t^3\right)\left(-\frac{1}{10}t^3\right) = -\frac{3}{150}t^6 + \frac{4}{150}t^6 = \frac{1}{150}t^6$

$\boxed{\bar{r}\times\bar{v} = \frac{1}{150}t^6\,\hat{k}}$

2. 

¿Cuánto se mueve M_1 en un tiempo t?

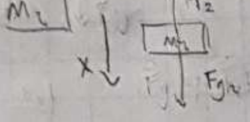


Ecuación en x: 2da ley de Newton

$\cdot)\ T_1 = m_1 a_{1x}$

Ecuación en y:

$F_N - F_{g_1} = m a_{1y} \rightarrow \cdot\cdot)\ F_N - mg = m_1 a_{1y}$



ecuación en x:

$F_{g_2} - T_2 = m_2 a_{2x} \rightarrow \cdots)\ m_2 g - T_2 = m_2 a_{2x}$

Nos quedan 3 ecuaciones, pero sabemos que $T_1 = T_2$ ya que ambas cajas están sostenidas por la misma cuerda y la tensión es constante a lo largo de toda la cuerda.

Además $a_{1y} = a_{2x}$ ya que ambas cajas se mueven juntas por la cuerda que las une y por lo tanto siempre tienen la misma velocidad y misma aceleración

(la ec $\cdot\cdot$) no es necesaria para calcular la a)

$\therefore\ \cdot)\ T = m_1 a \qquad \cdots)\ m_2 g - T = m_2 a$

$m_2 g - m_1 a = m_2 a \rightarrow m_2 g = m_2 a + m_1 a \rightarrow \boxed{a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}}$

Por el resultado obtenido, vemos que a es una constante y por lo tanto el movimiento es un MRUA, la fórmula de posición es

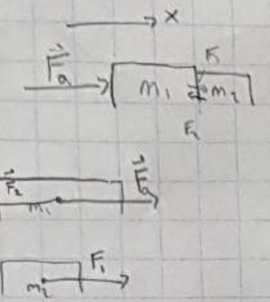
$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}$ pero tomamos $x_0 = 0_m$ como la posición inicial.

$$\therefore\ \boxed{x(t) = v_0 t + \left(\frac{m_2 g}{m_1 + m_2}\right) t^2}$$

En todo caso, si $v_0 = 0\ \frac{m}{s}$ entonces la función queda

$$\boxed{x(t) = \left(\frac{m_2 g}{m_1 + m_2}\right) t^2}$$

3. Dos bloques de masa m_1 y m_2 están en contacto. Una fuerza se aplica a uno de los bloques. Si $m_1 = 2\,kg$ $m_2 = 1\,kg$ $F = 3\,N$ ¿Cuál es la fuerza de contacto entre los bloques?



F_1 es la fuerza que imprime m_1 sobre m_2
F_2 es la fuerza de reacción de m_1 sobre m_1.

Podemos considerar la Fuerza como que actúa sobre ambas masas a la vez en conjunto. Y calculamos la aceleración

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_a}{m_1+m_2} \quad (1)$$

Esta aceleración es la misma que tiene únicamente m_2, ya que ambas masas se mueven a la vez y con la misma aceleración

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_1}{m_2} \quad (2)$$

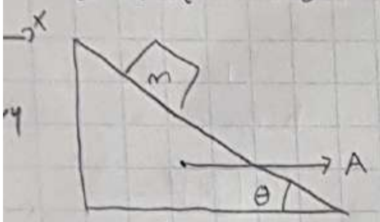
Igualamos (1) y (2) ya que es la misma aceleración.

$$\frac{F_a}{m_1+m_2} = \frac{F_1}{m_2} \qquad F_1 = \frac{m_2 \, F_a}{m_1+m_2}$$

$$F_1 = \frac{1\,(3N)}{2+1} = \frac{3\,N\cdot kg}{3kg} = \boxed{1\,N}$$

Y esa fuerza de 1N actúa tanto de m_1 sobre m_2 como de m_2 sobre m_1. Debido a la 3ra ley de Newton.

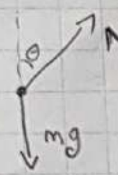
4.) Una cuña a $45°$ es empujada con una aceleración constante A. Un bloque de masa m se desliza sobre su superficie sin fricción ¿Qué aceleración tiene el bloque?



Tomamos un marco de referencia fuera de la cuña con "x" positivas a la derecha y "y" positivos abajo.

Diagrama cuerpo Libre

m)



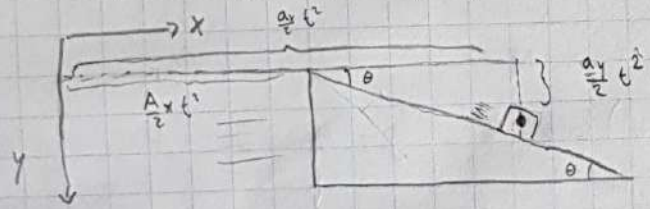
en "x" 1) $N \operatorname{sen}\theta = m a_x$ — aceleración en "x" del bloque, para un observador externo

en "y" 2) $mg - N\cos\theta = m a_y$ — aceleración en "y" del bloque, para un observador externo

· Necesitamos encontrar una expresión que relacione A con a_x y a_y. Para esto notamos que a lo largo del movimiento, el bloque siempre permanece en contacto con la cuña. Usando esta condición, encontraremos una tercera ecuación.

Ahora bien, después de un tiempo t, la posición de la cuña en "x" es: $\frac{A}{2}t^2$ más su posición inicial

La posición en "x" y "y" del bloque es: $\frac{a_x}{2}t^2$, $\frac{a_y}{2}t^2$ más su posición inicial



Posición de los objetos tras un tiempo t.

Para que el bloque siga en contacto con la cuña, se debe de formar ese ángulo θ en el triángulo de arriba.

$$\tan(\theta) = \frac{\frac{a_y}{2}t^2}{\frac{a_x}{2}t^2 - \frac{A}{2}t^2} = \frac{a_y}{a_x - A}$$

y por lo tanto tenemos que:

3) $\tan(\theta) = \dfrac{a_y}{a_x - A}$

→ Despejar "a_x" y "a_y" en 1) y 2) y sustituir en 3)

$$\tan(\theta) = \frac{g - \frac{N}{m}\cos\theta}{\frac{N}{m}\operatorname{sen}\theta - A} \rightarrow \frac{N}{m}\operatorname{sen}\theta\tan\theta - A\tan\theta = g - \frac{N}{m}\cos\theta$$

$$\rightarrow \frac{N}{m}\left(\operatorname{sen}\theta\tan\theta + \cos\theta\right) = g + A\tan\theta \rightarrow N = \frac{mg + mA\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta\tan\theta + \cos\theta} = \frac{mg + mA\tan\theta}{\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta}$$

$$\rightarrow N = \frac{mg + mA\tan\theta}{\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta}} = \frac{mg + mA\tan\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} = mg\cos\theta + mA\operatorname{sen}\theta = m(g\cos\theta + A\operatorname{sen}\theta)$$

$$\therefore \boxed{N = m(g\cos\theta + A\operatorname{sen}\theta)}$$

$N = m(g\cos\theta + A \operatorname{sen}\theta)$.

* Veamos como esta ecuación tiene sentido en casos fáciles, para convencernos de su validez:

- Si $\theta = 0°$: La cuña es horizontal y el bloque está depositado sobre ella
  $N = m(g\cos(0) + A\operatorname{sen}(0)) = mg$ ← lo cual concuerda con lo esperado en el caso horizontal

- Si $\theta = 90°$: La cuña es más bien una pared que empuja al bloque. 
  En este caso, la aceleración horizontal del bloque es igual a la de la cuña. ya que se mueven "pegados" horizontalmente. La fuerza que causa este movimiento en el bloque es la normal y la aceleración es A. $\therefore N = mA$
  Lo cual concuerda con la ecuación: $N = m(g\cos\theta + A\operatorname{sen}\theta) = mA$

- a_x: Despejamos a_x en 1) y sustituimos N.

$$a_x = \frac{N\operatorname{sen}\theta}{m} = \frac{\cancel{m}(g\cos\theta + A\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}{\cancel{m}} = g\cos\theta\operatorname{sen}\theta + A\operatorname{sen}^2\theta$$

$$= g\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} + A\operatorname{sen}^2\theta \qquad \therefore \boxed{a_x = g\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} + A\operatorname{sen}^2\theta}$$

- a_y: Despejamos a_y en 2) y sustituimos N

$$a_y = \frac{mg - N\cos\theta}{m} = \frac{\cancel{m}g - \cancel{m}(g\cos\theta + A\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\cancel{m}} = g - g\cos^2\theta - A\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$a_y = g(1-\cos^2\theta) + A\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \Rightarrow \boxed{a_y = g\operatorname{sen}^2\theta - A\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}}$$

→ Estos resultados también tienen sentido ya que:

- $\theta = 0° \to a_x = 0$ m/s², $a_y = 0$ m/s² (lo cual es de esperar porque no hay ninguna fuerza neta sobre el bloque, y la mesa simplemente se desliza por debajo sin fricción)
- $\theta = 90° \to a_x = A \quad a_y = g$ (cuando $\theta = 90°$, el diagrama es 
  y tiene sentido que la aceleración en "x" es la de la cuña y en "y" es sólo "g".
- Para A suficientemente grande, $a_y < 0$, lo que significa que el bloque sube por la cuña, lo cual tiene sentido intuitivo cuando A es grande.

Por último, en el problema $\theta = 45°$

$$a_x = g\frac{\operatorname{sen}(2\cdot 45)}{2} + A\operatorname{sen}^2(45) = g\frac{\operatorname{sen}(90)}{2} + A\operatorname{sen}^2(45) = \frac{g}{2} + \frac{A}{2} = \frac{g+A}{2}$$

$$a_y = g\operatorname{sen}^2(45) - A\frac{\operatorname{sen}(2\cdot 45)}{2} = \frac{g}{2} - \frac{A}{2} = \frac{g-A}{2}$$

$$\therefore |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{g+A}{2}\right)^2 + \left(\frac{g-A}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + 2gA + A^2 + g^2 - 2Ag + A^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(g^2+A^2)}$$