Física Estadística: Tarea 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

30 de octubre de 2021

Problema 1

Para aprobar un examen un estudiante debe resolver 10 problemas de un total de 13.

a) **¿Cuántas opciones tiene?**

De un conjunto de 13 elementos (las 13 preguntas del examen), tenemos que contar el número de maneras en las que podemos escoger 10 preguntas. Es decir, necesitamos calcular el número de combinaciones de 13 elementos tomados de 10 en 10, que es igual a:

$$C_{10}^{13} = \frac{13!}{10!(13-10)!} = \boxed{286 \quad \text{opciones}}$$

b) **¿Cuántas opciones tiene si obligatoriamente debe resolver los dos primeros?**

Como está obligado a hacer las primeras dos preguntas, le quedan solamente 11 preguntas en el examen. Además, debe de responder un total de 10 preguntas (contando las 2 obligatorias) por lo que el problema se reduce a calcular de cuántas formas puede escoger las 8 preguntas restantes de entre las 11 opciones que le quedan. Esto es igual al número de combinaciones de 11 elementos tomados de 8 en 8, es decir:

$$C_{8}^{11} = \frac{11!}{11!(11-2)!} = \boxed{165 \ \ \text{opciones}}$$

c) **¿Cuántas opciones tiene si obligatoriamente debe resolver el primero o el segundo problemas, pero no ambos?**

El estudiante primero tiene que escoger una de las dos primeras preguntas, lo cual se puede hacer de $C_2^2 = 2$ maneras distintas.

Luego tiene que escoger las $10-1=9$ preguntas restantes de entre las $13-2=11$ opciones que le quedan. Lo cual se puede hacer de $C_9^{11} = \dfrac{11!}{9!(11-9)!} = 55$ maneras distintas.

Estas elecciones son independientes, por lo que la cantidad de opciones en total es el producto de estos dos números. Es decir, el número total de opciones es:

$$C_2^2 C_{11}^{13} = (2)(55) = \boxed{110 \ \ \text{opciones}}$$

d) **¿Cuántas opciones tiene si debe resolver necesariamente 3 de los primeros 5 problemas?**

El estudiante primero tiene que escoger 3 de los 5 problemas, lo cual se puede hacer de un total de $C_3^5 = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ maneras.

Luego quedan $13 - 5 = 8$ preguntas y de ellas tiene que escoger $10 - 3 = 7$ para completar las 10 preguntas necesarias. Esto se puede hacer de un total de $C_7^8 = \dfrac{8!}{7!(8-1)!} = 8$ maneras distintas.

Por cada una de las 10 elecciones para las primeras preguntas, se puede hacer cualquiera de las 8 elecciones para las restantes. Es decir, estas elecciones son independientes y el número total de opciones es el producto de ellas:

$$C_3^5 C_7^8 = 10 * 8 = \boxed{80 \text{ opciones}}$$

e) **¿Cuántas opciones si debe resolver al menos 3 de los primeros 5?**

Vamos a separar las opciones por casos, dependiendo de la cantidad de preguntas que se escogen de las primeras 5.

- **Se escogen 3 preguntas:** Si se escogen 3 preguntas de las primeras 5, ya vimos que la cantidad total de opciones para resolver el examen es de 80.

- **Se escogen 4 preguntas:** Escoger 4 preguntas de las primeras 5 se puede hacer de $C_4^5 = \dfrac{5!}{4!(5-4)!} = 5$ formas distintas. Luego nos quedan $13 - 5 = 8$ preguntas de las que debemos escoger $10 - 4 = 6$ para completar el examen. Esto se puede hacer de $C_6^8 = \dfrac{8!}{6!(8-6)!} = 28$ maneras distintas.
  Como estas elecciones son independientes, el número de formas de resolver el examen de esta manera es el producto de ambas: $C_4^5 C_6^8 = 5 * 28 = 140$

- **Se escogen 5 preguntas:** Escoger 5 preguntas de las primeras 5 se puede hacer de una sola manera (escogiendo todas las preguntas).
  Luego, de entre las $13 - 5 = 8$ preguntas restantes, tenemos que escoger $10 - 5 = 5$ para completar el examen. Esto se puede hacer de $C_5^8 = \dfrac{8!}{5!(8-5)!} = 56$ maneras distintas.

  Por lo tanto, el número de formas de resolver el examen de esta manera es 56.

Finalmente, el número total de formas de resolver el examen, considerando que los tres casos son mutuamente excluyentes, es simplemente la suma de las opciones de los 3 casos, es decir:

$$80 + 140 + 56 = \boxed{276 \text{ opciones}}$$

Problema 2

La probabilidad $W(n)$ de que un evento caracterizado por una probabilidad p ocurra n veces en N realizaciones, está dada por la distribución binomial

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Considere la situación en que $p << 1$ y $n << N$. Nótese que si N es grande, $W(n)$ se hace muy pequeña, si $n \to N$, porque el factor p^n es muy pequeño cuando $p << 1$. En consecuencia, $W(n)$ sólo es apreciable cuando $n << N$. Varias aproximaciones permiten reducir $W(n)$ a una forma más simple:

a) **Utilizando el resultado $ln(1-p) \simeq -p$, mostrar que $(1-p)^{N-n} \simeq e^{-Np}$**

Primero calcularemos $ln((1-p)^{N-n})$, lo cual hacemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} ln((1-p)^{N-n}) &= (N-n) ln(1-p) \qquad \text{por la propiedad de logaritmos }, \ \ ln(a^b) = bln(a) \\ &\simeq (N-n)(-p) \quad \text{ usamos } ln(1-p) \simeq -p \text{ para } p << 1 \end{aligned}$$

Pero como $N >> n$, tenemos que $(N-n) \simeq N$ y por lo tanto tenemos que:

$$ln((1-p)^{N-n}) \simeq (N-n)(-p) \simeq -pN$$

Luego aplicamos la exponencial de ambos lados y tenemos que:

$$\boxed{(1-p)^{N-n} = e^{-Np}}$$

b) **Mostrar que** $\dfrac{N!}{(N-n)!} \simeq N^n$

Como N es grande y $n << N$, entonces $N-n$ también es grande. Por lo tanto, podemos usar la ' primera aproximación de Stirling ' para $N!$ y para $(N-n)!$. Dicha aproximación nos dice que $N! \simeq N^N e^{-N}$ y que $(N-n)! \simeq (N-n)^{N-n} e^{-(N-n)}$.
Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{N!}{(N-n)!} &\simeq \frac{N^N e^{-N}}{(N-n)^{N-n} e^{-(N-n)}} \\ &\simeq \frac{N^N e^{-N}}{N^{N-n} e^{-N}} \quad \text{ usamos que } N-n \simeq N \\ &= N^n \end{aligned}$$

Con lo que hemos probado que

$$\frac{N!}{(N-n)!} \simeq N^n$$

c) **Realizando a) y b), mostrar que $W(n)$ se reduce a la distribución de Poisson:**

$$W(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

en donde $\lambda = Np$ es el número promedio de eventos

Usamos directamente los resultados encontrados en a) y b):

$$\begin{aligned}
W(n) &= \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} \\
&\simeq \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n e^{-Np} \quad \text{por a)} \\
&\simeq \frac{N^n}{n!}p^n e^{-Np} \quad \text{por b)} \\
&= \frac{1}{n!}(Np)^n e^{-Np} \\
&= \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \quad \text{definiendo } \lambda = Np
\end{aligned}$$

Por lo que llegamos a:

$$\boxed{W(n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}}$$

Problema 3

Un borracho parte de una farola en la mitad de una calle con pasos de igual longitud l. La probabilidad de que uno de sus pasos sea a la derecha es p, y $q = 1-p$ de que sea hacia la izquierda. El hombre está tan borracho que su comportamiento en cada paso indica que no recuerda lo que hizo en los pasos anteriores y sus pasos son estadísticamente independientes. Suponiendo que el hombre ha dado N pasos,

a) **¿ Cuál es la probabilidad $P(n)$ de que n de dichos pasos sean hacia la derecha y los restantes $n' = N - n$ hacia la izquierda?**

Cada uno de los pasos a la derecha tiene una probabilidad p de suceder. Como la dirección de cada paso es independiente de las anteriores, las probabilidades se multiplican y concluimos que la probabilidad de dar n pasos a la derecha es p^n.

Por otro lado, cada paso a la izquierda tiene una probabilidad $1-p$ de suceder. Como la dirección de cada paso es independiente de las anteriores, las probabilidades se multiplican y concluimos que la probabilidad de dar $n' = N - n$ pasos a la izquierda es de $(1-p)^{N-n}$

Entonces, diríamos que la probabilidad de dar n pasos a la derecha y $N-n$ a la izquierda en algún orden en particular es de $p^n(1-p)^{N-n}$. Sin embargo, hay varias formas distintas de dar los n pasos a la derecha y los $N-n$ a la izquierda. Para calcular el número de maneras de realizar estos pasos, notamos que de los N pasos totales que se van a hacer, tenemos que escoger cuáles de ellos serán los n que daremos hacia la derecha y el resto serán hacia la izquierda. Es decir, el número de formas de dar los n pasos a la derecha y $N-n$ a la izquierda es igual a el número de combinaciones de N elementos tomados de n en n, que es C_n^N

Por lo tanto, hay que tomar la probabilidad $p^n(1-p)^{N-n}$ de realizar los n pasos a la derecha y $N-n$ a la izquierda en un orden particular y multiplicarla por el número de formas posibles de realizar esos pasos, es decir C_n^N.
Entonces, la probabilidad de dar n pasos a la derecha es:

$$\begin{aligned} P(n) &= C_n^N p^n (1-p)^{N-n} \\ &= \boxed{\frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}} \end{aligned}$$

b) **¿Cuál es la probabilidad $P'(m)$ de que el desplazamiento del hombre desde la farola sea igual a ml, en donde $m = n - n'$ es un número entero?**

Para desplazarse a una distancia $m = n - n'$ en N pasos, el hombre tiene que dar un total de n pasos a la derecha y $n' = N - n$ pasos a la izquierda. La probabilidad de que esto suceda es justo la que calculamos antes, es decir:

$$P'(m) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Para expresarlo en términos de solamente N y m, usamos que $m := n - n' = n - (N - n) = 2n - N$. Por lo tanto, $2n = m + N \ \Rightarrow \ n = \dfrac{1}{2}(m + N)$
Entonces sustituimos esto en la expresión de $P'(m)$ y tenemos que:

$$\begin{aligned}
P'(m) &= \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \\
&\text{usamos que } n = \frac{1}{2}(m+N) \\
&= \frac{N!}{[\frac{1}{2}(N+m)]!(N - [\frac{1}{2}(N+m)])!} p^{(N+m)/2} (1-p)^{N-(N+m)/2} \\
&= \boxed{\frac{N!}{[\frac{1}{2}(N+m)]![\frac{1}{2}(N-m)]!} p^{(N+m)/2} (1-p)^{(N-m)/2}}
\end{aligned}$$

Problema 4

Se extraen $10^{-6}J$ de calor de un sistema que se encuentra a $T = 300K$ y se transfieren a un sistema que está a $T = 299K$.

a) **¿Cuál es el cambio total de entropía de ambos sistemas?**

El cambio de entropía de un sistema a temperatura T que recibe calor dQ es de $dS = \dfrac{dQ}{T}$

Por lo tanto, cuando se extraen los $10^{-6}J$ del sistema a $300K$, si suponemos que el sistema se mantiene aproximadamente a la misma temperatura a pesar de haberle extraido la energía, entonces tendremos que la diferencia en entropía es $\Delta S_1 = \dfrac{\Delta Q_1}{T_1} = \dfrac{-10^{-6}J}{300K} = \boxed{-3.\bar{3}\bar{3} \times 10^{-9}\dfrac{J}{K}}$

Similarmente, la entropía agregada al sistema a $299K$ es de $\Delta S_2 = \dfrac{\Delta Q_2}{T_2} = \dfrac{10^{-6}J}{299K} = \boxed{3{,}3444 \times 10^{-9}\dfrac{J}{K}}$

Entonces, el cambio total de ambos sistemas juntos es simplemente la suma de estas dos cantidades:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{10^{-6}}{300} + \frac{10^{-6}}{299} = \boxed{1{,}114 \times 10^{-11} JK^{-1}}$$

b) **¿Por qué factor se incrementa el número de estados?**

Digamos que la entropía inicial del sistema completo es S_i y la final es S_f. Sabemos que $S_f - S_i = \Delta S = 1{,}114 \times 10^{-11} JK^{-1}$

Luego, por la hipótesis de Boltzman, tenemos que el número de estados inicial y final son:

$$S_i = k_B ln(\Omega_i) \;\;\Rightarrow\;\; \Omega_i = e^{S_i/k_B}$$
$$S_f = k_B ln(\Omega_f) \;\;\Rightarrow\;\; \Omega_f = e^{S_f/k_B}$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\begin{aligned}\frac{\Omega_f}{\Omega_i} &= \frac{e^{S_f/k_B}}{e^{S_i/k_B}}\\ &= e^{\frac{1}{k_B}(S_f - S_i)}\\ &= e^{\frac{1}{k_B}\Delta S}\\ &= e^{\frac{1{,}114\times 10^{-11} JK^{-1}}{1{,}38\times 10^{-23} JK^{-1}}}\\ &= \boxed{e^{8{,}072\times 10^{11}}}\end{aligned}$$

Lo cual es un número enorme.

Problema 5

La entropía de la radiación de cuerpo negro está dada por $S = \frac{4}{3}\sigma V^{1/4}U^{3/4}$, en donde σ es una constante.

a) **Determinar la temperatura de la radiación**

Sabemos de la representación de la entropía que se puede obtener la temperatura como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} &= \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} \\
&= \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{4}{3}\sigma V^{1/4}U^{3/4}\right)_{V,N} \\
&= \frac{3}{4}\frac{4}{3}\sigma V^{1/4}U^{-1/4} \\
&= \sigma\left(\frac{V}{U}\right)^{1/4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la temperatura de radiación es igual a:

$$\boxed{T = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{U}{V}\right)^{1/4}}$$

b) **Mostrar que** $pV = \frac{U}{3}$

Para calcular p, usamos que en la representación de la entropía en termodinámica clásica se tiene que $\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N}$

$$\begin{aligned}
\frac{p}{T} &= \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} \\
&= \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{4}{3}\sigma V^{1/4}U^{3/4}\right)_{U,N} \\
&= \frac{1}{4}\frac{4}{3}\sigma V^{-3/4}U^{3/4} \\
&= \frac{1}{3}\sigma V^{-3/4}U^{3/4}
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos que la presión es:

$$p = \frac{1}{3}\sigma V^{-3/4}U^{3/4}T$$

Usamos ahora la expresión de T que encontramos en el inciso pasado.

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}\sigma V^{-3/4}U^{3/4}T \\ &= \frac{1}{3}\sigma V^{-3/4}U^{3/4}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{U}{V}\right)^{1/4} \\ &= \frac{1}{3}V^{-4/4}U^{4/4} \\ &= \frac{1}{3}\frac{U}{V} \end{aligned}$$

Por lo tanto, pasando V del otro lado, tenemos que:

$$\boxed{pV = \frac{U}{3}}$$

Bibliografía

[1] Jaeger, Richard C., and Travis N. Blalock. Microelectronic circuit design. New York: McGraw-Hill, 2010. (Capítulo 2)

[2] Neamen, Donald A. Semiconductor physics and devices: basic principles. New York, NY: McGraw-Hill,, 2012. (Capítulo 5)