Tarea 2 Cálculo

Tomás Basile Jessica Gallegos Zeus Hernández Nathan Kosoi
Rebeca Rangel

13 de julio de 2021

Haaser p.541, 542, 543

2. Para una cierta partición P, sea $\overline{x}_k$ un cierto punto en $[x_{k-1}, x_k]$ Demuéstrese que cualquiera que sea la elección de los x_k se tiene

$$L(f,P) \leq \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x}_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right) \leq U(f,P)$$

Conclúyase de aquí, si f es integrable, que

$$\left|\int_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x}_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right)\right| \leq U(f,P) - L(f,P)$$

Demostración.
Sea $P \in P_{[a,b]}, P = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$
Tenemos que $\overline{x_k} \in [x_{k-1}, x_k]$ arbitrario, notemos que se cumple lo siguiente:
$m_k(f) \leq f(\overline{x}_k) \leq M_k(f) \qquad \forall\ k\ \in \{1, ..., n\}$
$\Rightarrow m_k(f)(x_k - x_{k-1}) \leq f(\overline{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \leq M_k(f)(x_k - x_{k-1})$
$\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1})$
$\Rightarrow L(f,P) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \leq U(f,P) \quad ...(1)$
Si además f es integrable, se tiene que: $L(f,P) \leq \displaystyle\int_a^b f \leq U(f,P)$
$\Rightarrow\ -U(f,P) \leq -\displaystyle\int_a^b f \leq -L(f,P) \quad ...(2)$
Sumamos (1) y (2) y obtenemos:
$L(f,P) - U(f,P) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f \leq U(f,P) - L(f,P)$
$\Rightarrow\ \left|\displaystyle\int_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x}_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right)\right| \leq U(f,P) - L(f,P)$

■

4. Si f es no decreciente o no creciente, demuéstrese que la aproximación $\frac{1}{2}(U(f,P)+L(f,P))$ es la suma del área de trapezoides. Ilústrese geométricamente.

Demostración.
Para cada intervalo, el área del trapezoide puede calcularse como:
$\frac{(f(x_{i-1})+f(x_i))(x_i-x_{i-1})}{2}$
Supongamos que f es no decreciente (el caso no creciente es análogo). Entonces:
$f(x_{i-1}) \leq f(x_i) \;\; \forall i \in \{1,...,n\}$
$\Rightarrow \; m_i(f) = f(x_{i-1}) \leq f(x_i) = M_i(f)$
Sumamos el área de cada trapezoide desde 1 hasta n, llamémoslo S

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(M_i(f)+m_i(f))(x_i-x_{i-1})\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(M_i(f)(x_i-x_{i-1})+m_i(f)(x_i-x_{i-1}))$$
$$= \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i-x_{i-1}))$$
$$\frac{1}{2}(U(f,P)+L(f,P))$$

Entonces la suma del área de los trapezoides es la aproximación dada por $\frac{1}{2}(U(f,P)+L(f,P))$

■

6. Determinese si es o no integrable cada una de las siguientes funciones en el intervalo que se indica.

1. I^{-1} sobre $[1,2]$.

2. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ es irracional} \\ 0 \text{ si } x \text{ es racional} \end{cases}$, sobre $[0,1]$

   Sugerencia. Pruébese que para cualquier partición P, que $U(f,P)-L(f,P)=1$.

Demostración.
1) $I^{-1} = \frac{1}{x} \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}-\{0\}$
Pero $\frac{1}{x}$ es una función continua en el intervalo dado $[1,2]$. Y por el teorema visto en clase, la continuidad implica integrabilidad, por lo que $\frac{1}{x}$ es integrable en $[1,2]$.

2) No es integrable, ya que como los racionales e irracionales son densos sobre los reales, dada cualquier partición del intervalo, se cumple que $M_i(f)=1$ y $m_i(f)=0 \;\; \forall\, i=1,...,n$

Entonces: $U(f,P)-L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i-x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i-x_{i-1})$.

Pero como $M_i(f) = 1$ y $m_i(f) = 0$, entonces la primera suma es telescópica y da como resultado $x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$
La otra suma da igual a cero.
$\therefore \ U(f,P) - L(f,P) = 1$
Entonces dado $\epsilon = 1$, $U(f,P) - L(f,P) = \epsilon \quad \forall\ P$ partición de $[0,1]$. Entonces no se cumple el criterio de integrabilidad, f no es integrable en $[0,1]$.

■

8. Supongamos que f es diferenciable sobre $[a,b]$ y que $|f'(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$. Aplíquese el teorema del valor medio y conclúyase que

1) para toda partición P, $U(f,P) - L(f,P) \leq K|P|(b-a)$,

2) f es integrable sobre $[a,b]$, y

3) $\left|\int_a^b f - \frac{1}{2}(U(f,P) + L(f,P))\right| \leq \frac{1}{2}K|P|(b-a)$

Demostración.
Sea $P = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$

$$\Rightarrow \ U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^{**}) - f(x_i^{*})(x_i - x_{i-1})]$$ Donde x_i^{**}, x_i^{*} son los puntos donde la función alcanza su máximo y mínimo en el intervalo respectivamente.

Aplicamos el teorema del valor medio para concluir que la suma es igual a:
$\sum_{i=1}^{n} [f'(x_i^{***})|x_i^{**} - x_i^{*}|(x_i - x_{i-1})]$
$\leq \sum_{i=1}^{n} K|P|(x_i - x_{i-1}) \qquad$ (Por hipótesis)
$= K|P| \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = k|P|(b-a)$
$\therefore U(f,P) - L(f,P) \leq k|P|(b-a)$

Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria y sea $Q \in P_{[a,b]}$ tal que $|Q| \leq \frac{\epsilon}{k(b-a)}$
$\Rightarrow \ U(f,Q) - L(f,Q) < k|Q|(b-a) \leq k(\frac{\epsilon}{k(b-a)})(b-a) = \epsilon$

$\therefore \ \forall \epsilon > 0 \ \ \exists Q \in P_{[a,b]}$ tal que $U(f,Q) - L(f,Q) < \epsilon$
Por lo tanto f es integrable en $[a,b]$

Tenemos que $L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P)$ (Restamos $\frac{1}{2}(U(f,P) + L(f,P))$
$\frac{1}{2}(L(f,P) - U(f,P)) \leq \int_a^b f - \frac{1}{2}(U(f,P) + L(f,P)) \leq \frac{1}{2}(U(f,P) - L(f,P))$

$\Rightarrow \ \left|\int_a^b f - \frac{1}{2}(U(f,P) + L(f,P))\right| \leq \frac{1}{2}(U(f,P) - L(f,P))$
$< \frac{1}{2}k|P|(b-a)$ (Por la parte a)
$\therefore \left|\int_a^b f - \frac{1}{2}(U(f,P) + L(f,P))\right| \leq \frac{1}{2}K|P|(b-a)$

■

9. ¿Cuán pequeño debería hacerse $|P|$ para estar seguros de que el error en la aproximación de

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx$
2. $\int_1^2 \frac{du}{u}$

por $\frac{1}{2}(U(f,P)+L(f,P))$ no es mayor que 0,0005?

Respuesta
$1) f'(x) = -sen(x) \ \Rightarrow\ |f'(x)| \leq 1,$ Ya que Rango$(sen) = [-1,1]$

$\therefore \quad \left| \int_0^{\pi/2} cosx\ dx - \frac{1}{2}(U(f,P)-L(f,P)) \right| \ \leq\ \frac{1}{2}(1)(\frac{\pi}{2}-0)|P|$ (Aplicando el ejercicio anterior)
$\Rightarrow\ \frac{1}{2}(1)(\frac{\pi}{2}-0)|P| \leq 0{,}0005 \ \Rightarrow\ |P| \leq \frac{4(0{,}0005)}{\pi} \ \simeq\ 0{,}00063$

2) $f'(u) = -\frac{1}{u^2} \quad \Rightarrow \quad |f'(u)| \leq 1$ en $u \in [1,2]$

$\therefore \ \left| \int_1^2 \frac{du}{2} - \frac{1}{2}(U(f,P)-L(f,P)) \right| \leq \frac{1}{2}(1)(2-1)|P| \ \leq\ 0{,}0005$
$\therefore |P| \leq 0{,}001$

■

12. Pruébese que: si $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$ salvo un número finito de excepciones, entonces $\int_a^b f = 0$

Demostración.
Sean $x_1^*, ..., x_n^*$ los valores donde f es diferente de cero, el conjunto $C = \{x_1^*, ..., x_n^*\}$
Sea $M = max\{|f(x_1^*)|, ..., |f(x_n^*)|\}$. Entonces:
$-M \leq f(x_i^*) \leq M \ \ \forall\ i \in \{1, ..., n\}$
Además, $m_i(f) \leq f(x_i^*) \leq M_i(f)$. Entonces:
$-M \leq m_i(f) \leq f(x_i^*) \leq M_i(f) \leq M$
$\Rightarrow\ -M(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1})$
Pero $(x_i - x_{i-1}) \leq |P|$ y por tanto: $M(x_i - x_{i-1}) \leq M|P|$
$\Rightarrow\ \sum_{i=1}^n M(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M|P|$
$= M|P| \sum_{i=1}^n 1$
$= M|P|n$
$\therefore\ M\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \leq M|P|n$

Sea $|P| < \frac{\epsilon}{2Mn}$. Entonces, retomando lo anterior,
$\sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \leq M|P|n < Mn\frac{\epsilon}{2Mn} = \frac{\epsilon}{2}$
$\therefore\ U(f,P) < \frac{\epsilon}{2}$ ...(1)
Pero, análogamente se cumple que $-\frac{\epsilon}{2} < L(f,P) \ \Rightarrow\ -L(f,P) < \epsilon$ ...(2)
Sumamos (1) y (2) para obtener:

$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$

$\therefore$ f es integrable en $[a,b]$, por lo que se cumple que $L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P)$
$\Rightarrow -\frac{\epsilon}{2} < L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P) < \frac{\epsilon}{2}$
$\Rightarrow \left|\int_a^b f\right| < \frac{\epsilon}{2}$
$\Rightarrow 0 \leq \left|2\int_a^b f\right| < \epsilon$
Como $\left|2\int_a^b f\right|$ es mayor o igual que cero pero menor que ϵ para toda $\epsilon > 0$, concluimos que:
$2\int_a^b f = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f = 0$

$\blacksquare$

Haaser p.567 , 568 y 569

1. Evalúense las siguientes integrales:

d) $D_x\left\{\int_0^x \cos^3\right\}$

e) $\int_0^\pi D_t\{\cos^3 t\}\,dt$

r) $D_t\left\{\int_0^t \sqrt{1+x^4}dx\right\}$

w) $D_t\left\{\int_0^{t^2} \frac{1}{1+u^2}du\right\}$

x) $D_\theta\left\{\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2}\right\}$

y) $D_\theta\left\{\int_\theta^{\theta^2} \frac{1}{1+\cos^2}\right\}$

Respuesta
d) $D_x\left\{\int_0^x \cos^3\right\} \; = \; cos^3(x)$ (por la primera parte del Teorema fundamental del cálculo)

e) $\int_0^\pi D_t\{\cos^3 t\}\,dt = cos^3(t)\Big|_0^\pi$
$= \; cos^3(\pi) - cos^3(0)$ (Por el segundo teorema fundamental del cálculo)
$= \; -2$

r) $D_t\left\{\int_0^t \sqrt{1+x^4}dx\right\} \; = \; \sqrt{1+t^4}$ (por la primera parte del Teorema fundamental del cálculo)

w) $D_t\left\{\int_0^{t^2} \frac{1}{1+u^2}du\right\}$
Sea $F(t) = \int_0^{t^2} \frac{du}{1+u^2}$, y sea $g(t) = t^2$, $f(y) = \int_0^y \frac{du}{1+u^2}$
Entonces $F(t) = f(g(t))$
$\Rightarrow \; F'(t) = f'(g(t))g'(t)$

$$= \frac{1}{1+(t^2)^2}(2t) \quad = \quad \frac{2t}{1+t^4}$$

x) $D_\theta \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2} \right\} = 0$
Ya que la integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2}$ es simplemente un número constante, por lo que su derivada es 0.

y)$D_\theta \left\{ \int_\theta^{\theta^2} \frac{1}{1+\cos^2} \right\} =$
Sea $f(\theta) = \int_\theta^{\theta^2} \frac{1}{1+cos^2} \;=\; \int_0^{\theta^2} \frac{1}{1+cos^2} - \int_0^{\theta} \frac{1}{1+cos^2}$
Sea $g(\theta) = \theta^2$. Entonces:
$f(\theta) = F(g(\theta)) - \int_0^\theta \frac{1}{1+cos^2}$, $F(u) = \int_0^u \frac{1}{1+cos^2}$
$\Rightarrow\; f'(\theta) = F'(g(\theta))g'(\theta) - D_\theta \int_0^\theta \frac{1}{1+cos^2}$
$= \frac{1}{1+cos^2}\Big|_{\theta^2}(2\theta) - \frac{1}{1+cos^2\theta}$
$= \frac{2\theta}{1+cos^2(\theta^2)} - \frac{1}{1+cos^2\theta}$

■

2. Encuéntrese el área de la región sobre el intervalo dado y bajo la curva dada.

f) $[0, \frac{\pi}{2}], y = x^2 \cos x$

Respuesta
f) Como y es no negativa en $[0, \frac{\pi}{2}]$ se cumple que el área es:
$\int_0^{\pi/2} x^2 cosx\ dx = x^2 senx + 2xcosx - 2senx\Big|_0^{\pi/2}$
$= (\frac{\pi^2}{4} - 2)\ u^2$ (unidades cuadradas)

■

5. Encuéntrese el área acotada por la curva $x + \sqrt{y} = 2$ y los ejes de coordenadas.

Respuesta. Ya que $x + \sqrt{y} = 2$ es una función positiva para todo x ya que si $x + \sqrt{y} = 2 \;\Rightarrow\; y = x^2 - 4x + 4$ con $x \in (-\infty, 2]$
El área está dada entonces por:
$\int_0^2 x^2 - 4x + 4\ dx = \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$

■

6. Denotemos por $v(t)$ la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una recta en el instante t. Determinese la distancia recorrida por la particula desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2.

b) $v(t) = t + |\cos t|;\ t_1 = 0,\ t_2 = 4\pi$

Respuesta. $v(t) = \dfrac{dx}{dt} \;\Rightarrow\; x = \int_0^{4\pi} t + |\cos t|\ \ dt \;=\; \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{|\cos t|}{\cos t} \operatorname{sen} t\Big|_0^{4\pi} = 8\pi^2$

■

8. Pruébese que: sea f integrable sobre $[a,b]$ y definase G sobre $[a,b]$ por la regla de correspondencia: $G(x) = \int_a^x f$ Entonces G es continua sobre $[a,b]$ y en todo punto $x_0 \in [a,b]$ donde f es continua $G'(x_0) = f(x_0)$

Demostración. Como f es integrable sobre $[a,b]$, entonces f está acotada. Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que: $|f(x)| \leq M \ \ \forall\, x \in [a,b]$
Tomamos un punto arbitrario $c \in [a,b]$. Si $h > 0$, entonces:
$G(c+h) - G(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f$
Como $|f(x)| \leq M \ \ \forall x \in [a,b]$, entonces $-M \leq f(x) \leq M$
Recordemos de la desigualdad fundamental del cálculo integral $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$
Aplicamos este resultado a lo anterior, sobre $[c, c+h]$, y tenemos que:
$-M((c+h)-c) \leq \displaystyle\int_c^{c+h} f \leq M((c+h)-c)$
$\Rightarrow \ -Mh \leq G(c+h) - G(c) \leq Mh$

Ahora, si $h < 0$, tenemos que:
$G(c+h) - G(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f = -\int_{c+h}^c f$
Nuevamente, como $-M \leq f(x) \leq M$, aplicamos el resultado sobre $[c+h, c]$ y tenemos:
$-M(c-(c+h)) \leq \int_{c+h}^c f \leq M(c-(c+h))$
$-Mh \leq G(c) - G(c+h) \leq -Mh$
$\Rightarrow Mh \leq G(c+h) - G(c) \leq -Mh$

Como esto se cumple para toda $h \neq 0$, entonces $|G(c+h) - G(c)| \leq M|h|$
Sea $\epsilon > 0$, y sea $|h| \leq \epsilon/M$. Por tanto:
$|G(c+h) - G(c)| < M(\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$
$\therefore \ |G(c+h) - G(c)| < \epsilon$, es decir:
$\lim\limits_{h\to 0} G(c+h) = G(c)$
y como c fue un punto arbitrario sobre $[a,b]$, concluimos que G es continua en $[a,b]$. Supongamos que $x_0 \in [a,b]$ es tal que f es continua en x_0
Siguiendo el argumento utilizado para la demostración del primer teorema fundamental del cálculo vista en clase, podemos concluir que:
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} = f(x_0)$
Es decir $G'(x_0) = f(x_0)$. Por tanto para todo $x_0 \in [a,b]$ donde f es continua, $G'(x_0) = f(x_0)$

■

Haaser p.577,578,579

1. Dígase por qué cada una de las siguientes integrales es impropia, y determinese la convergencia o divergencia de la integral. Cuando sea convergente, evaluese la integral.

m) $\int_0^5 \frac{x}{(25-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

p) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \cos^{\frac{1}{2}}$

Respuesta.
m) La función no está acotada en $x = 5$ y por lo tanto es una integral impropia de segunda clase.

$$\int_0^5 \frac{x}{(25-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \lim_{r\to 0^+}\int_0^{5-r}\frac{x}{(25-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$
$$= \lim_{r\to 0^+} -\frac{1}{2}\int_0^{5-r}\frac{-2x}{(25-x^2)^{3/2}} = \lim_{r\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\int_0^{5-r}(25-x^2)^{3/2}(-2x\ dx)\right)$$
$$= \lim_{r\to 0^+} -\frac{1}{2}\frac{1}{-1/2}(25-x^2)^{-1/2}\Big|_0^{5-r} = \lim_{r\to 0^+}(25-x^2)^{-1/2}\Big|_0^{5-r}$$
$$= \lim_{r\to 0^+}\left[(25-(5-r)^2)^{-1/2}-(25-(0)^2)\right]$$
$$= \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{10r-r^2}}-25$$
(Cuando $r \to 0^+, (10r-r^2)^{-1/2} \to 0^+$), entonces:
$$= \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{10r-r^2}}-25 = \infty$$ Por tanto la integral no converge.

p) $$\int_0^{\pi/2} sen\ cos^{1/2} = \lim_{r\to 0^+}\int_0^{\pi/2-r}\frac{sen}{\sqrt{cos}}$$
$$= \lim_{r\to 0^+} -2cos^{1/2}\Big|_0^{\pi/2-r} = \lim_{r\to 0^+}\left(-2\sqrt{cos(\frac{\pi}{2}-r)}+2\sqrt{cos(0)}\right) = 0+2 = 2$$

■

2. Si f es integrable sobre cada intervalo finito, entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f$ está definida por $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_{0}^{\infty} f$ donde $\int_{-\infty}^{\infty} f$ se dice que es conmergente si las dos integrales impropias de la derecha son convergentes y esta ecuación define el valor de $\int_{-\infty}^{\infty} f$ Si una (o ambas) de las integrales diverge, $\int_{-\infty}^{\infty} f$ se dice que es divergente.

Determinese la convergencia o divergencia de cada una de las siguientes integrales impropias y evalúense las integrales convergentes.

c) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $a > 0$

Sugerencia. Demuéstrese que: $D_x\left[\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right] = \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

d) $\int_{-\infty}^{\infty}$ sen.

Respuesta.
c)Tenemos que $\left(\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right)' = \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

Y $lim_{x\to\infty}\ \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a^2}$ (Ya que el exponente de la x es el mismo en el numerador que en el denominador)

$lim_{x\to-\infty}\ \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a^2}$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{a^2} - (-\dfrac{1}{a^2}) = \dfrac{2}{a^2}$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} senx\ dx$
Como $\int sen = -cosx$ y $lim_{x\to\infty}\ cosx$ no existe debido a la periodicidad de la función, entonces la integral diverge.

■

3. Si f es integrable sobre $[a, c-\varepsilon] y$ sobre $[c+\varepsilon, b]$ para todo $\varepsilon > 0$ y no está acotada sobre $[a, c) \cup (c, b]$, entonces $\int_a^b f$ se llama integral impropia y su valor está definido por:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Si las dos integrales de la derecha son convergentes, entonces $\int_a^b f$ se dice que es convergente y esta ecuación define el valor de $\int_a^b f$. Si alguna (o ambas) de las integrales diverge, $\int_a^b f$ se dice que es divergente. Determinese la convergencia o divergencia de cada una de las siguientes integrales impropias y evaluense las integrales convergentes.

d) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{-1}$

e) $\int_{-1}^{1} f$, donde $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para $x < 0$ y $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ para $x > 0$

Respuesta
d) Sabemos que sen^{-1} no está definido en $x = 0$. Entonces:
$\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} sen^{-1} = \lim_{r\to 0^+} \int_{-\pi/2}^{-r} \frac{1}{sen} + \lim_{r\to 0^+} \int_{r}^{\pi/2} \frac{1}{sen}$
$= \displaystyle\lim_{r\to 0^+} ln|csc - cot|\Big|_{-\pi/2}^{-r} + \lim_{r\to 0^+} ln|csc - cot|\Big|_{r}^{\pi/2}$
$= \displaystyle\lim_{r\to 0^+} ln|csc(-r) - cot(-r)| - ln|csc(-\pi/2) - cot(\pi/2)| + \lim_{r\to 0^+} ln|csc(\pi/2) - cot(\pi/2)| -$
$ln|csc(r) - cot(r)|$
Cuando $r \to 0^+, csc(-r)-cot(-r) \to 0^-$, entonces, $\ln|csc(-r)-cot(-r)| \to -\infty$. Además, $cot(-\pi/2)$ no está definido.
Por tanto la integral no converge.

e) Como $0 \notin Dom(f)$, entonces,
$\displaystyle\int_{-1}^{1} f = \lim_{r\to 0^+} \int_{-1}^{-r} \frac{1}{x^2} + \lim_{r\to 0^+} \int_{r}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}$
$= \displaystyle\lim_{r\to 0^+} -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-r} + \lim_{r\to 0^+} 2x^{1/2}\Big|_{r}^{1}$
$= \displaystyle\lim_{r\to 0^+} \left(\frac{1}{r} - 1\right) + lim_{r\to 0^+} \left(2(1^{1/2}) - 2r^{1/2}\right)$
Cuando $r \to 0^+$, $\frac{1}{r} - 1 \to \infty$. Así, aunque el segundo límite es 2, la integral no converge.

■

5. Demuéstrese que: $\int_0^1 I^{-1} = \infty$

$\int_0^1 I^{-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x} = lim_{x\to 1^-}\ ln|x| - lim_{x\to 0^+}\ ln|x|$
Esto en caso de que existiera el límite, pero sabemos que la función logaritmo natural no es acotada y por lo tanto: $\lim_{x\to 0^+} ln|x| = -\infty$ (Ya que $ln(x) < 0\ \forall x \in (0,1)$)
$\therefore\ \int_0^1 I^{-1} = -(-\infty) = \infty$

■

Spivak p.376,377,378,379,380

1. Demostrar que $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$, considerando particiones en n subintervalos iguales y utilizando la fórmula para $\sum_{i=1}^n i^3$ hallada en el problema 2-6. Este problema requiere solamente una simple imitación de los cálculos del texto, pero conviene que el lector lo escriba con detalle como demostración formal para asegurarse de que todos los puntos delicados del razonamiento quedan claros.

Demostración. Creamos una partición $P = \{0 = x_0, ..., x_n = b\}$ con n subintervalos se igual longitud. Por lo tanto la longitud de cada subintervalo es $\frac{b}{n}$ y los puntos de la partición son: $P = \{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, ..., b\}$
Como la función x^3 es creciente en el intervalo $[0,b]$, entonces:

$$m_i(f) = inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}) = x_{i-1}^3 = \left(\frac{(i-1)b}{n}\right)^3$$

$$M_i(f) = sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i) = x_i^3 = \left(\frac{ib}{n}\right)^3$$

$$\longrightarrow\ L(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(i-1)b}{n}\right)^3 \left(\frac{b}{n}\right) = \frac{b^4}{n^4}\sum_{i=1}^n (i-1)^3 =$$

$$\frac{b^4}{n^4}\sum_{j=0}^{n-1}(j)^3 = \frac{b^4}{n^4}\left(\frac{(n-1)^4}{4} + \frac{(n-1)^3}{2} + \frac{(n-1)^2}{4}\right) \quad \text{(Por la fórmula del ejercicio 2-6)}$$

$$= \frac{b^4}{4}\frac{(n-1)^4}{n^4} + \frac{b^4}{4}\frac{(n-1)^3}{n^4} + \frac{b^4}{4}\frac{(n-1)^2}{n^4}$$

Por otro lado, $U(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{ib}{n}\right)^3 \left(\frac{b}{n}\right) = \frac{b^4}{n^4}\sum_{i=1}^n (i)^3$

$$= \frac{b^4}{n^4}\left(\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right) \quad \text{(Por el ejercicio 2-6)}$$

$$= \frac{b^4}{4} + \frac{b^4}{2n} + \frac{b^4}{4n^2}$$

Ahora bien, si n es muy grande, tanto $L(f,P)$ como $U(f,P)$ se aproximan al valor $\frac{b^4}{4}$, por lo que la integral tiene este valor.

■

5. Obtener sin cálculos

i) $\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}dx$

ii) $\int_{-1}^{1} (x^5+3)\sqrt{1-x^2}dx$

Respuesta.
(i) $f(x) = x^3\sqrt{1-x^2}$ es una función impar, ya que:
$f(-x) = (-x)^3\sqrt{1-(-x)^2} = -x^3\sqrt{1-x^2} = -f(x)$
Pero como las funciones impares tienen simetría alrededor del origen, y los límites de integración son -1 y 1, entonces el área bajo la curva de -1 a 0 es igual al área de 0 a 1 pero con signo contrario. Por lo que la integral completa vale 0.

(ii) $\int_{-1}^{1} (x^5+3)\sqrt{1-x^2}\ dx = \int_{-1}^{1} x^5\sqrt{1-x^2}\ dx + 3\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ dx$
Pero $f(x) = x^5\sqrt{1-x^2}$ es impar ya que:
$f(-x) = (-x)^5\sqrt{1-(-x)^2} = -x^5\sqrt{1-x^2} = -f(x)$
Entonces por el mismo argumento de (i) se tiene que $\int_{-1}^{1} x^5\sqrt{1-x^2}\ dx = 0$
Por otro lado $\sqrt{1-x^2}$ en el intervalo $[-1,1]$ es la función que forma una semicircunferencia de radio 1 centrada en el origen. Y por lo tanto su área es de $\frac{\pi}{2}$.
$\therefore\ \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{\pi}{2}$
$\therefore\ \int_{-1}^{1}(x^5+3)\sqrt{1-x^2}\ dx = \int_{-1}^{1} x^5\sqrt{1-x^2}\ dx + 3\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ dx = 0 + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

■

6. Demostrar que $\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t+1}dt > 0$ para todos los $x > 0$

Demostración. Sabemos que para $x \in [0,\pi], sen(x) > 0 \ \Rightarrow\ \frac{sen(x)}{x+1} > 0$ lo cual significa que $\int_0^x \frac{sen(t)}{t+1}dt > 0\ \ \forall x \in [0,\pi]$
Ahora bien, en el intervalo $x \in [\pi, 2\pi]$, $sen(x) < 0$ y por lo tanto $\frac{sen(x)}{x+1} < 0$. Pero como en este intervalo $x+1$ es mayor al $x+1$ del intervalo $[0,\pi]$, entonces aunque la función sea negativa en $[\pi,2\pi]$, el valor absoluto de la función en $[\pi,2\pi]$, es menor al de $[0,\pi]$. Entonces el área positiva bajo la curva en el intervalo $[0,\pi]$ es mayor al área negativa en $[\pi,2\pi]$, por lo que en todo el intervalo $[0,2\pi]$ prevalece el signo positivo y se tiene que:
$\int_0^x \frac{sen(t)}{t+1} > 0\ \ \forall x \in [0,2\pi]$

Se continua de esta manera para el resto de los intervalos $[n\pi,(n+1)\pi]$. En los que el área positiva del intervalo $[n_0\pi,(n_o+1)\pi]$ siempre será mayor en magnitud al área negativa en el intervalo siguiente. Y por lo tanto prevalece el signo positivo para todo $x > 0$
$\therefore \int_0^x \frac{sen(t)}{t+1} > 0\ \ \forall x > 0$

■

7. Decidir cuáles de las siguientes funciones son integrables sobre [0,2], y calcular la integral cuando sea posible.

iv) $f(x) = \begin{cases} x+[x], & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{cases}$

v) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{Si } x \text{ es de la forma } a+b\sqrt{2} \text{ para } a \text{ y } b \text{ racionales} \\ 0, & \text{si } x \text{ no es de esta forma} \end{cases}$

vi) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{[\frac{1}{x}]}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \text{ o } x > 1 \end{cases}$

Respuesta.
iv) Sea $P = \{0 = x_0, ..., x_n = 2\}$ una partición de $[0, 2]$, como ya se probó en la tarea anterior, cualquier intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición contiene números racionales y números irracionales.
Como cada intervalo tiene números racionales, en alguno de estos la función alcanza el máximo de cada intervalo.
$M_i(f) = r_i + [r_i] > 0$ con $r_i \in [x_{i-1}, x_i]$
$\therefore U(f, P) = \sum_{i=0}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) > 0$ ... (1)

Por otro lado, cada intervalo contiene números irracionales, y en cualquiera de estos se alcanza el mínimo, que es 0.
$m_i(f) = 0$
$\therefore L(f, P) = \sum_{i=0}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = 0$

$\therefore \underline{\int}_0^2 = sup\{L(f, P)|P \in P_{[a,b]}\} = sup\{0\} = 0$
$\therefore \overline{\int}_0^2 = inf\{U(f, P)|P \in P_{[a,b]}\} > 0$

$\Rightarrow \underline{\int}_0^2 f \neq \overline{\int}_0^2 f$ y la función no es integrable.

v) Sea $P = \{0 = x_0, ..., x_n = 2\}$ partición de $[0, 2]$. Probaré que cada intervalo de la partición contiene un número de la forma $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$
Sea $[x_{i-1}, x_i]$ un intervalo de la partición, por lo visto en la tarea pasada, en este intervalo hay infinitos racionales. Sean $m, n \in [x_{i-1}, x_i]$ dos de estos, con $m < n$.

Como $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow (n - m)\frac{\sqrt{2}}{2} < n - m \Rightarrow \frac{n-m}{2}\sqrt{2} < n - m$ con $\frac{n-m}{2} \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow m + (\frac{n-m}{2})\sqrt{2} < n \Rightarrow m < m + (\frac{n-m}{2})\sqrt{2} < n$
$\therefore m + (\frac{n-m}{2})\sqrt{2} \in [x_{i-1}, x_i]$ y tiene la forma deseada.

Como hay puntos de la forma $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in Q$ en todos los intervalos (y también hay números que no tienen esta forma en cada intervalo), entonces:

$m_i(f) = 0 \;\; \forall i < n \Rightarrow L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - x_{i-1}) = 0 \Rightarrow \underline{\int}_a^b f = 0$
$M_i(f) = 1 \;\; \forall i < n \Rightarrow U(f, P) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = 2 - 0 = 2$ (por ser una suma telescópica)
$\therefore \overline{\int}_a^b f = 2$
$\therefore \underline{\int}_a^b f \neq \overline{\int}_a^b f$ Entonces no es integrable.
vi) Probaré que $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{[x]}}$ es no decreciente.

Sea $a < b \in [0, 1] \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Rightarrow [\frac{1}{b}] \leq [\frac{1}{a}] \Rightarrow \frac{1}{[\frac{1}{a}]} \leq \frac{1}{[\frac{1}{b}]}$

$\therefore$ la función es no decreciente.
Y como ya se demostró en clase, las funciones no decrecientes son integrables, entonces $f(x)$ es integrable en $[0,1]$
Pero en $[1,2]$ la función es la constante 0, que sí es integrable.
$\therefore f(x)$ es integrable en [0,2].

■

8. Hallar las áreas de las regiones limitadas por

vi) La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, el eje horizontal, y la vertical por $(2,0)$. (No intente el lector hallar $\int_0^2 \sqrt{x}\, dx$; debería darse cuenta de la manera de adivinar la respuesta utilizando sólo integrales que ya sabe calcular. Las cuestiones que debe sugerir este ejemplo son consideradas en el problema 22)

Respuesta. El problema 22 sugieren que podemos encontrar la respuesta con la identidad:
$\int_a^b f^{-1} = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f$
En donde $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ y por lo tanto $f(x) = x^2$, además $a = 0$, $b = 2$
Por lo tanto la identidad se convierte en: $\int_0^2 \sqrt{x}\, dx = 2\sqrt{2} - 0\sqrt{0} - \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{2}} x^2\, dx$
$= 2\sqrt{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}} \quad = 2\sqrt{2} - \frac{2^{3/2}}{3} \; = \; 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \; = \; \frac{4\sqrt{2}}{3}$

■

14. a) Demostrar que si f es integrable sobre $[a,b] \geq 0$ y $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a,b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$.

b) Demostrar que si f y g son integrables sobre $[a,b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo x de $[a,b]$, entonces $\int_a^b f \geq \int_a^b g \cdot$[Ahora ya no debería hacer falta advertir que si se trabaja mucho en la parte (b) se está perdiendo el tiempo.]

Demostración. a) Sea $P = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ una partición de [a,b]
Como $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow M_i(f) \geq 0$ para todo subintervalo de P.
$\therefore U(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=0}^n 0(x_i - x_{i-1}) = 0$
$\Rightarrow U(f,P) \geq 0 \;\; \forall P \in P_{[a,b]}$
$\Rightarrow \overline{\int}_a^b f = inf\{U(f,P) | P \in P_{[a,b]}\} \geq 0$

Pero como es integrable, $\int_a^b f = \overline{\int}_a^b f \geq 0 \quad \therefore \int_a^b f \geq 0$

b) Como $f(x) \geq g(x) \;\; \forall x \in [a,b] \;\; \Rightarrow \;\; f(x) - g(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$
Entonces $(f-g)(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$
Aplicamos la parte anterior del ejercicio a la función $(f-g)$ para concluir que $\int_a^b f - g \geq 0$
$\Rightarrow \int_a^b f - \int_a^b g \geq 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f \geq \int_a^b g$

■

15. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$

(La interpretación geométrica debe hacer esto muy plausible.) Indicación: Toda partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ da origen a una partición $P == \{t_0 + c, \ldots, t_n + c\}$ de $[a+c, b+c]$ y viceversa.

Demostración. Sea $P = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$ y llamamos $g(x) = f(x-c)$ y sea $P' = \{a + c = x_0 + c, ..., x_n + c = b + c\}$ una partición de $[a + c, b + c]$.
$\Rightarrow m_i(f) = inf\{f(x)|x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = inf\{f(x-c)|x_{i-1} + c \leq x \leq x_i + c\} = m_i(g)$
$\Rightarrow M_i(f) = sup\{f(x)|x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = sup\{f(x-c)|x_{i-1} + c \leq x \leq x_i + c\} = M_i(g)$

$\therefore L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(g)(x_i - x_{i-1}) = L(g, P')$
$\therefore U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(g)(x_i - x_{i-1}) = U(g, P')$

Como f es integrable: $\int_a^b f(x) = \underline{\int}_a^b f(x) = sup\{L(f, P)|P \in P_{[a,b]}\} = sup\{Ł(g, P')|P' \in P_{[a+c,b+c]}\} = \underline{\int}_{a+c}^{b+c} g(x)$

Por otro lado: $\int_a^b f(x) = \overline{\int}_a^b f(x) = inf\{U(f, P)|P \in P_{[a,b]}\} = inf\{U(g, P')|P' \in P_{[a+c,b+c]}\} = \overline{\int}_{a+c}^{b+c} g(x)$

$\therefore \underline{\int}_{a+c}^{b+c} g(x) = \overline{\int}_{a+c}^{b+c} g(x) \quad \therefore$ g es integrable.
Y como $\int_{a+c}^{b+c} g(x) = \underline{\int}_{a+c}^{b+c} g(x) = \int_a^b f(x) \quad \therefore \quad \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) = \int_a^b f(x)$

■

17. Demostrar que

$$\int_{ca}^{cb} f(t)dt = c\int_a^b f(ct)dt$$

(Obsérvese que el problema 16 es un caso especial.)

Demostración. Sea $P = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ y $P' = \{ca = cx_0, ..., cx_n = cb\}$, definimos $g(x) = f(cx)$

$m_i(g) = inf\{f(cx)|x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = inf\{f(x)|cx_{i-1} \leq x \leq cx_i\} = m_i(f)$
$\Rightarrow cL(g, P) = c\sum_{i=1}^{n} m_i(g)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(cx_i - cx_{i-1}) = L(f, P')$
$\therefore \int_{ca}^{cb} f(x) = sup\{L(f, P')|P' \in P_{[ca,cb]}\} = sup\{cL(g, P)|P \in P_{[a,b]}\}$
$= csup\{L(g, P)|P \in P_{[a,b]}\} = c\int_a^b g(x) = c\int_a^b f(cx)$

$\therefore \int_{ca}^{cb} f(x) = c\int_a^b f(cx)$

■

Spivak p.417,418,419,420,422,423,424

1. Hallar las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

ii) $F(x) = \int_3^{\left(\int_1^x \operatorname{sen}^2 t dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^8 t + t^2}\, dt$

Respuesta. Sea $G(u) = \int_3^u \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^6 t + t^2}\, dt \;\Rightarrow\; G'(u) = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^6 u + u^2}$
Y Sea $H(x) = \int_1^x \operatorname{sen} 3t\, dt \;\Rightarrow\; H'(x) = \operatorname{sen}^3 x$
Entonces $F(x) = G(H(x)) \;\Rightarrow\; F'(x) = G'(H(x))H'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sen}^6(H(x))+H^2(x)} \times \operatorname{sen}^3 x = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\operatorname{sen}^6(\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\, dt) + (\int_1^x \operatorname{sen}^3 x)}$

■

iii) $F(x) = \int_{15}^x (\int_8^y \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt)\, dy$

Respuesta. Por el Teorema fundamental del cálculo, la derivada de F es el argumento de la integral pero con x
$\therefore\; F'(x) = \int_8^x \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt$

■

vi) $F(x) = \operatorname{sen}(\int_0^x \operatorname{sen}(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\, dt)\, dy)$

Respuesta. $F'(x) = \operatorname{sen}'(\int_0^x \operatorname{sen}(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\, dt) dy) \times (\int_0^x \operatorname{sen}(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\, dt) dy)'$
(por la regla de la cadena)
$= \cos(\int_0^x \operatorname{sen}(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\, dt) dy) \times \operatorname{sen}(\int_0^x \operatorname{sen}^3 t\, dt)$

■

viii) F^{-1}, donde $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ [Hallar $(F^{-1})'(x)$ en terminos de $F^{-1}(x)$]

Respuesta. $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ (Por el Teorema Fundamental del cálculo)
$F^{-1}{}'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-[F^{-1}(x)]^2}}} = \sqrt{1-[F^{-1}(x)]^2}$

■

2. Para cada una de las f siguientes, si $F(x) = \int_0^x f$, ¿en qué puntos x es $F'(x) = f(x)$? [Precaución: puede ocurrir que $F'(x) = f(x)$, aún no siendo f continua en x.]

iv) $f(x) = 0$ si x es irracional o $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ fracción irreducible

Respuesta. Como $f(x) = 0$ para casi todos los valores x (ya que los números irracionales tienen una cardinalidad más grande que los racionales) Entonces $F'(x) = \int_0^x f = 0 \;\therefore\; F(x)$ es la función constante 0.
$\therefore\; F'(x) = 0$ ya que F es constante

Y por lo tanto, $F'(x) = f(x)$ cuando x es tal que $f(x) = 0$
$\therefore$ se cumple para todo x irracional

■

viii) $f(x) = 1$ si $x = \frac{1}{n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ o $f(x) = 0$ en los demás casos

Respuesta. $F(x) = \int_0^x f = \int_0^\epsilon f + \int_\epsilon^x f$ (separamos la integral de esa manera)

Ahora bien, $\int_\epsilon^x f = 0$ ya que en el intervalo $[\epsilon, x]$ sólo hay una cantidad finita de puntos de la forma $\frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$ y en el resto vale 0. Por lo tanto se aplica el ejercicio 12 de la página 543 del Haaser (Demostrado en esta tarea) para concluir que $\int_{\epsilon}^{x} f = 0$

Por otro lado, para ϵ muy pequeño, la integral $\int_{0}^{\epsilon} f$ también vale 0, ya que podemos disminuir ϵ para hacer que los límites de integración estén arbitrariamente cerca entre sí.
$\therefore$ $F(x) = \int_{0}^{\epsilon} f + \int_{\epsilon}^{x} f = 0$. $F(x)$ es la función constante 0 y por ser constante, su derivada es 0. $F'(x) = 0 \; \forall x$

$\therefore$ Se cumple $F'(x) = f(x)$ cuando $f(x) = 0$, lo cual sucede cuando x no es un número de la forma $\frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$

■

3. Sea f integrable en $[a, b], c$ un punto de (a, b) y

$$F(x) = \int_{a}^{x} f, a \leq x \leq b$$

Proporcionar una demostración o bien poner un contraejemplo para cada una de las proposiciones siguientes:

a) Si f es derivable en c, entonces F es derivable en c.

Demostración. Si f es derivable en $c \Rightarrow$ f es continua en c y por el Teorema Fundamental del cálculo $\Rightarrow$ $F(x) = \int_{a}^{x} f$ es diferenciable en c

■

b) Si es derivable en c, entonces F' es continua en c.

Demostración. No se cumple
Esto sólo es cierto si suponemos que f es continua en un intervalo $(c - \delta \; , \; c + \delta)$ porque en ese caso de tendría que F es derivable en c y $F'(x) = f(x)$ en este intervalo (por TFC) y como f es derivable en $c \Rightarrow f$ es continua en c , pero como $F'(x) = f(x)$ entonces $F(x)$ es continua en c.

Sin embargo, esto no se cumple si elegimos una función derivable en c pero discontinua en cualquier intervalo $(c - \delta \; , \; c + \delta) \forall \delta \; ; \in \mathbb{R}^{+}$

■

c) Si f' es continua en c, entonces F' es continua en c.

Demostración. Como f' es continua en c, entonces $f'(x)$ debe de existir para todos los puntos x en un intervalo $(c - \delta \; , \; c + \delta)$ alrededor de c. Entonces f es continua en dicho intervalo $(c - \delta \; , \; c + \delta)$ y si f es continua en $(c - \delta \; , \; c + \delta) \Rightarrow F(x) = \int_{a}^{x} f$ es derivable y $F'(x) = f(x) \; \forall x \in (c - \delta \; , \; c + \delta)$ (debido al Teorema Fundamental del cálculo)

Pero como $F'(x) = f(x) \; \forall x \in (c - \delta \; , \; c + \delta) \Rightarrow$ Como f es continua en $c \Rightarrow F'(x)$ es continua en c

■

5. Hallar $(f^{-1})'(0)$ si

i) $f(x) = \int_0^x 1 + \text{sen}(\text{sen}\, t)\ dt$

Respuesta. $f'(x) = 1 + \text{sen}(\text{sen}(x))$ Por el Teorema Fundamental del cálculo, pero por la fórmula para calcular derivadas de una función inversa:
$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{1+\text{sen}(\text{sen}(f^{-1}(0)))}$
Ahora bien, como $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(0) \Rightarrow 0 = f^{-1}(0)$

Entonces: $\frac{1}{1+\text{sen}(\text{sen}(f^{-1}(0)))} = \frac{1}{1+sen(sen(0))} = \frac{1}{1+0} = 1$
Por lo tanto $f^{-1}(0) = 1$

■

ii) $f(x) = \int_1^x \text{sen}(\text{sen}\, t)\ dt$

Respuesta. $f'(x) = \text{sen}(\text{sen}(x))$ ...(1) Por el Teorema Fundamental del cálculo
$f(1) = \int_1^1 \text{sen}(\text{sen}(t))dt = 0 \Rightarrow f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(0) \Rightarrow 1 = f^{-1}(0)$ ...(2)

Entonces $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{\text{sen}(\text{sen}(f^{-1}(0)))}$ ...por (1) $= \frac{1}{\text{sen}(\text{sen}(1))}$ ...por (2)
Entonces $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{sen(sen(1))}$

■

6. Hallar una función g tal que

i) $\int_0^x tg(t)\ dt = x + x^2$

ii) $\int_0^{x^2} tg(t)\ dt = x + x^2$
(Tener en cuenta que g no se supone continua en 0).

Respuesta. i) Derivamos ambos lados para obtener $xg(x) = 1 + 2x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x} + 2$
$\therefore$ Sea $g(t) = \frac{1}{t} + 2$ si $t \neq 0$ y $g(t) = 0$ si $t = 0$
$\Rightarrow \int_0^x tg(t)\ dt = \int_0^x t(\frac{1}{t} + 2)\ dt = \int_0^x 1 + 2t\ dt = t + t^2\Big|_0^x = x + x^2$

ii) Derivamos ambos lados para obtener $x^2 g(x)(2x) = 1 + 2x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow$
$g(x) = \frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{1}{x}$
$\therefore$ Sea $g(t) = \frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t}$ si $t \neq 0$ y $g(t) = 0$ si $t = 0$
$\Rightarrow \int_0^{x^2} tg(t)\ dt = \int_0^{x^2} t(\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t})\ dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} + 1\ dt = \sqrt{t} + t\Big|_0^{x^2} = \sqrt{x^2} + x^2 = x^2 + x$

■

8. Supóngase que f y g son funciones derivables que satisfacen

$$\int_0^{f(x)} fg = g(f(x))$$

Demostrar que g(0)=0.

Demostración. No se cumple, daremos un contraejemplo. Sea $f(x) = 1$ (la función constante 1) y sea $g(x) = 5$ (la función constante 5).
Ambas son funciones derivables y cumplen que: $\int_0^{f(x)} fg = \int_0^1 (1)(5) = \int_0^1 5 = 5x\Big|_0^1 = 5 = g(1) = g(f(x))$
$\therefore$ cumple que $\int_0^{f(x)} fg = g(f(x))$
Sin embargo $g(0) = 5 \neq 0$ (Porque g es la función constante 5)

■

9. Supóngase que f es derivable con $f(0) = 0$ y $0 < f' \leq 1$. Demostrar que para todo $x \geq 0$ tenemos

$$\int_0^x f^3 \leq \left(\int_0^x f\right)^2$$

Demostración. Primero probaremos que $f(x) \geq 0 \; \forall x \geq 0$
Aplicamos el Teorema del Valor Medio para $(0, x)$
$\exists c \in (0, x)$ tal que: $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \;\Rightarrow\; f(x) = f(0) + f'(c)x \;\Rightarrow\; f(x) = 0 + xf'(c)$ (Porque $f(0) = 0$)
$\therefore\; f(x) \geq 0$ (Ya que $f' > 0$ y $x \geq 0$)
$\therefore\; f(x) \geq 0 \; \forall x \geq 0$ ...(1)

Ahora bien: $f' \leq 1$ (por hipótesis)
$\therefore\; 2ff' \leq 2f$ (Podemos multiplicar la desigualdad por f ya que $f \geq 0$ por (1))
$\therefore\; \int_0^x 2ff' \leq \int_0^x 2f \;\Rightarrow\; f^2\Big|_0^x \leq 2\int_0^x f$
$\Rightarrow f^2(x) \leq 2\int_0^x f$
$\Rightarrow f^3(x) \leq 2f(x)\int_0^x f \;\Rightarrow\; 2f(x)\int_0^x f - f^3(x) \geq 0 \;\; \forall x \geq 0$
Pero si definimos $G(x) = (\int_0^x f)^2 - \int_0^x f^3$ Entonces este último resultado es la derivada de G.
Entonces para esta función G, $G(0) = (\int_0^0 f)^2 - \int_0^0 f^3 = 0$ y $G'(x) = 2f(x)\int_0^x f - f^3(x) \geq 0 \;\; \forall x \geq 0$
Y por una demostración igual a la dada para f al inicio del teorema, pero esta vez para G, se tiene que:
$\Rightarrow\; G(x) = (\int_0^x f)^2 - \int_0^x f^3 \geq 0 \;\Rightarrow\; \int_0^x f^3 \leq \left(\int_0^x f\right)^2 \;\; \forall x \geq 0$

■

23. Supóngase que f' es integrable en $[0, 1]$ y $f(0) = 0$. Demostrar que para todo x de $[0, 1]$ tenemos

$$|f(x)| \leq \sqrt{\int_0^1 |f'|^2}$$

Demostrar que la hipótesis $f(0) = 0$ es necesaria. Ayuda: Problema 13-40.

Demostración. Por la desigualdad de Cauchy-Shwartz, se tiene que $(\int_a^b gh)^2 \leq \int_a^b g^2 \int_a^b h^2$
Para funciones g y h
Aplicamos esta desigualdad para f' y 1 en $[0, x]$ donde $x \leq 1$
$\therefore (\int_0^x f' * 1)^2 \leq \int_0^x f'^2 \int_0^x 1^2$

$\Rightarrow (\int_0^x f')^2 \leq (\int_0^x f'^2)x$
$\Rightarrow (f(x) - f(0))^2 \leq x \int_0^x f'^2$
$\Rightarrow f^2(x) \leq x \int_0^x f'^2$ (Ya que $f(0) = 0$)
$\Rightarrow f^2(x) \leq x \int_0^x f'^2 \leq \int_0^x f'^2$ (Ya que $0 \leq x \leq 1$)
$\Rightarrow f^2(x) \leq \int_0^x f'^2$
$\Rightarrow \sqrt{f^2(x)} \leq \sqrt{\int_0^x f'^2}$
$\Rightarrow |f(x)| \leq \sqrt{\int_0^x f'^2}$

Pero por último, $\int_0^1 f'^2 = \int_0^x f'^2 + \int_x^1 f'^2$ ...(1)
Pero $f'^2 \geq 0$ (Por ser una función al cuadrado)
$\Rightarrow \int_x^1 f'^2 \geq 0$ Entonces por (1) se tiene que:
$\int_0^x f'^2 \leq \int_0^1 f'^2$ ...(2)
$\therefore |f(x)| \leq \sqrt{\int_0^x f'^2} \leq \sqrt{\int_0^1 f'^2}$ (por 2)
$\Rightarrow |f(x)| \leq \sqrt{\int_0^1 f'^2}$ $\forall x \in [0,1]$

$\blacksquare$

26. El limite $\lim_{x\to\infty} \int_0^x f$, si existe, se designa por $\int_0^\infty f(x)dx$, y se le da el nombre de "integral impropia".

c) Supóngase que $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$ y que existe $\int_0^\infty f$. Demostrar que si $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo $x \geq 0$, entonces también existe $\int_0^\infty g$

d) Explicar por qué $\int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)}\, dx$ existe. Indicación: Separar esta integral en 1.

Demostración.
c) La función $G(x) = \int_0^x g \geq 0$ puesto que $g(x) \geq 0$
Y esta función está acotada por $\int_0^\infty f$ ya que $0 \leq g(x) \leq f(x)$
$\therefore \int_0^x g(x) \leq \int_0^x f(x) \leq \int_0^\infty f(x)$
$\int_0^\infty f$ es cota superior de G.
$\therefore \lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} \int_a^b g \leq \int_0^\infty f$ Y como $\int_0^\infty f$ existe, entonces $\lim_{x\to\infty} \int_0^x g$ también existe.

d) Como $0 \leq x^2 \leq x^2 + 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}$ Entonces $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$
Pero por el ejercicio a), se tiene que $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ existe.
Y entonces por c), $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}$ existe.
Pero además $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}$ existe porque $\frac{1}{x^2+1}$ es continua en $[0,1]$.
$\therefore \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}$ existe.

$\blacksquare$

27. Decir si existen o no las siguientes integrales impropias:

i) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$

ii) $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{\frac{3}{2}}}\, dx$

iii) $\int_0^\infty \frac{x}{x\sqrt{1+x}}\ dx$

Respuesta. i) Como $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ es continua en $[0,1]$ entonces $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ existe.
Y además, para $x \geq 1$, se tiene que:
$x^3 \leq 1+x^3 \ \Rightarrow\ x^{3/2} \leq \sqrt{1+x^3} \ \Rightarrow\ 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \leq x^{-3/2} \ \Rightarrow\ 0 \leq \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \leq \int_1^\infty x^{-3/2}\ dx$
Y esta integral existe por el ejercicio 26.a) y por el ejercicio 26.c) esto implica que $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ existe.
$\therefore\ \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \ = \ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ existe.

ii) Sea $x \geq 1 \ \Rightarrow\ x^{3/2} \geq 1 \ \Rightarrow\ 2x^{3/2} \geq 1 + x^{3/2} \ \Rightarrow\ \frac{1}{1+x^{3/2}} \geq \frac{1}{2x^{3/2}} \ \Rightarrow\ \frac{x}{1+x^{3/2}} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}}$
$\therefore\ \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{-1/2}\ dx \leq \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{3/2}}$
Pero $\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{-1/2} = lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^b x^{-1/2} = \lim_{b\to\infty}\sqrt{x}|_1^b \ = \lim_{b\to\infty}\sqrt{b}-\sqrt{1}$ (pero este límite no existe)
$\therefore\ \int_0^\infty x^{-1/2}$ diverge, lo cual implica que $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{3/2}}$ diverge.

iii) Para $x \geq 0$ tenemos que:
$x < x+1 \ \Rightarrow\ \sqrt{x} < \sqrt{x+1} \ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$
$\Rightarrow\ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}} < \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}$ Pero esta última integral ya se probó en el ejercicio anterior que diverge.
$\therefore\ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ diverge y por lo tanto no existe.

■

28. La integral impropia $\int_{-x}^a f$ se define de la manera evidente, como $\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f$ Pero otro tipo de integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f$ se define de manera no evidente:es $\int_0^\infty f + \int_{-\infty}^0 f$, siempre que existan estas dos integrales impropias.

(a) Explicar por qué $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+x^2)}\ dx$ existe.

(b) Explicar por qué no existe $\int_{-\infty}^\infty x\ dx$. (Obsérvese, sin embargo, que $\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^N\ x\ dx$ si existe.)

(c) Demostrar que si $\int_{-\infty}^\infty f$ existe, entonces existe $\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^N f$ y es igual a $\int_{-\infty}^\infty f$ Demostrar. además, que $\lim \int_{-N}^{N+1} f$ y $\lim_{x\to\infty}\int_{-N^2}^N f$ existen ambos y son iguales a $\int_{-\infty}^\infty f$. ¿Puede dar el lector una generalización razonable de estos hechos? (Si no es capaz de hacerlo encontrará bastante dificultad tratando estos casos particulares.)

Demostración. a) Ya se probó en 26.d) que $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ existe y como $\frac{1}{1+x^2}$ es una función par, entonces $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ también existe ya que $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$
$\therefore \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ existe.

b) $\int_{-\infty}^\infty x\ dx = \int_{-\infty}^0 x\ dx + \int_0^\infty x\ dx$
pero $\int_0^\infty x\ dx = lim_{b\to\infty}\int_0^b x\ dx = lim_{b\to\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_0^b = lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{2}$ lo cual diverge.
$\therefore\ \int_{-\infty}^\infty x\ dx$ no existe.

c) Probaré que si h y g son funciones tales que $lim_{N\to\infty}h(N) = \infty$ y $lim_{N\to\infty}g(N) = -\infty$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f$ existe, entonces $lim_{N\to\infty} \int_{g(N)}^{h(N)} f = \int_{-\infty}^{\infty} f$
Y lo pedido por el ejercicio es solo un caso especial de esto que se demostrará.

Sea $\epsilon > 0$, escogemos M_0 tal que:
$| \int_0^{\infty} f - \int_0^M f| < \frac{\epsilon}{2}$ y $| \int_{-\infty}^0 f - \int_{-M}^0 f| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall M > M_0$
Sea N_0 tal que $h(N) > M$ y $g(N) < -M \ \ \forall N > N_0$
Tenemos que:
$0 \leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} f - \int_{g(N)}^{h(N)} f\right| = \left|\int_{-\infty}^{0} f - \int_{g(N)}^{0} f + \int_0^{\infty} f + \int_0^{h(N)} f\right| \leq \left|\int_0^{\infty} f - \int_0^{h(N)} f\right| + \left|\int_{-\infty}^{0} f - \int_{g(N)}^{0} f\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
Como esto se cumple para toda $\epsilon > 0$, entonces tenemos que:
$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f - \int_{g(N)}^{h(N)} f\right| = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{g(N)}^{h(N)} f$

■

29. Existe otro tipo de integral impropia en la cual el intervalo está acotado, pero la función no está acotada:

(a) Si $a > 0$, hallar $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\epsilon}^{a} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ Este límite se designa por $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ aun cuando la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no esté acotada sobre $[0, a]$, de cualquier manera que se defina $f(0)$

(b) Hallar $\int_0^a x^r dx$ si $-1 < r < 0$

(c) Aplicar el problema 13-16 para demostrar que $\int_0^a x^{-1}\, dx$ no tiene sentido, ni siquiera como limite.

(d) Inventar una definición razonable de $\int_a^0 |x|^r dx$ para $a < 0$ y calcularla para $-1 < r < 0$.

(e) Inventar una definición razonable de $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}\, dx$ como suma de dos limites. *y* demostrar que los límites existen. Indicación: ¿Por qué existe $\int_{-1}^{1}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$? ¿Cómo es $(1+x)^{\frac{-1}{2}}$ comparado con $(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ para $-1 < x < 0$?

Demostración. a) $lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\epsilon}^{a} \frac{dx}{\sqrt{x}} = lim_{\epsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_{\epsilon}^{a} = lim_{\epsilon\to 0^+} 2\sqrt{a} - 2\sqrt{\epsilon} = 2\sqrt{a}$

b) $\int_0^a x^r\ dx = lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\epsilon}^{a} x^r\ dx = lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{a^{r+1}}{r+1} - \frac{\epsilon^{r+1}}{r+1} = \frac{a^{r+1}}{r+1}$

c) Por le teorema 13-15 del Spivak tenemos que $\int_{1/2^n}^{a} \frac{1}{x}\ dx = \int_{1/2}^{a} \frac{dx}{x} + ... + \int_{1/2}^{a} \frac{dx}{x}$ (n veces)
$\therefore\ \int_{1/2^n}^{a} \frac{1}{x}\ dx = n \int_{1/2}^{a} \frac{dx}{x} \quad ...(1)$

Pero $\int_0^a \frac{dx}{x} = lim_{n\to\infty} \int_{1/2^n}^{a} \frac{dx}{x} = lim_{n\to\infty} n \int_{1/2}^{a} \frac{dx}{x}$ (por 1) Y este último límite tiende a infinito.
$\therefore\ \int_0^a \frac{dx}{x}$ diverge.

d) Sea $\int_a^0 |x|^r\ dx = lim_{\epsilon\to 0^-} \int_a^{\epsilon} |x|^r\ dx =$
$= -lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\epsilon}^{a} |x|^r\ dx = lim_{\epsilon\to 0^+} - \frac{|a|^{r+1}}{r+1} + \frac{|\epsilon|^{r+1}}{r+1} = -\frac{|a|^{r+1}}{r+1}$

e) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim \epsilon \to 0^+ \int_{-1+\epsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim \epsilon \to 0^- \int_{0}^{1+\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$
$= 2 \lim \epsilon \to 0^+ \int_{-1+\epsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (porque la función es par)

Por otro lado:
$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-1+\epsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (que existe por 29.a))

Además, para $-1 < x < 0$ se tiene que:
$x(1+x) < 0 \;\Rightarrow\; x < -x^2 \;\Rightarrow\; 1+x < 1-x^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{1+x} < \sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$
$\therefore \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ Pero ya probamos que esta última integral existe.
Por lo tanto $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ existe.

■

30.

(a) Si f es continua en $[0,1]$, calcular $\lim_{x \to 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt$

(b) Si f es integrable en $[0,1]$ y $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, calcular $\lim_{x \to 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt$

Respuesta. a) $lim_{x \to 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt = -lim_{x \to 0^+} x \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = -lim_{x \to 0^+} \frac{\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt}{\frac{1}{x}}$
$= -lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{f(x)}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$ (por l'hopital)
$= lim_{x \to 0^+} x f(x) = lim_{x \to 0^+} x \;\; lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

b) Sea $lim_{x \to 0} f(x) = L$
$lim_{x \to 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt = -lim_{x \to 0^+} \frac{\int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt}{\frac{1}{x}} = -lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$ (Por l'hopital)
$= lim_{x \to 0^+} f(x) = L$
$\therefore \lim_{x \to 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt = L$

■