Teoría Cuántica de campos I: Tarea 2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

20 de octubre de 2021

Problema 1

Considere la densidad Lagrangiana de un campo escalar complejo que se trabajó en la tarea anterior

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

Donde $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ **con** $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$

a) **Muestre que la acción de la teoría es invariante ante la transformación**

$$\phi \to \phi' = e^{i\theta}\phi$$

con θ **un parámetro real**

Veamos primero cómo se transforma el Lagrangiano:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= (\partial_\mu \phi')^* \partial^\mu \phi' - m^2 (\phi')^* \phi' \\
&= (\partial_\mu e^{i\theta}\phi)^* \partial^\mu e^{i\theta}\phi - m^2 (e^{i\theta}\phi)^* e^{i\theta}\phi \\
&= (e^{i\theta}\partial_\mu \phi)^* e^{i\theta}\partial^\mu \phi - m^2 e^{-i\theta}\phi^* e^{i\theta}\phi \\
&= e^{-i\theta}\partial_\mu \phi^* \; e^{i\theta}\partial^\mu \phi - m^2 e^{-i\theta} e^{i\theta}\phi^* \phi \\
&= e^{-i\theta} e^{i\theta}\partial_\mu \phi^* \; \partial^\mu \phi - m^2 e^{-i\theta} e^{i\theta}\phi^* \phi \\
&= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que el lagrangiano es el mismo. Luego, la acción tras la transformación es:

$$\begin{aligned} S' &= \int d^4x'\mathcal{L}' \\ &= \int d^4x\ \mathcal{L}' \qquad \text{Porque las coordenadas no cambiaron, } x = x' \\ &= \int d^4x\ \mathcal{L} \\ &= S \end{aligned}$$

Por lo que la acción es la misma.

b) **¿Qué consecuencias tiene el teorema de Noether sobre la simetría anterior? Calcule la corriente conservada y muestre que en verdad se conserva.**

Primero consideramos la transformación infinitesimal (es decir, cuando el parámetro $\theta = \epsilon$ con $\epsilon << 1$)
Por lo tanto, por la serie de Taylor de la exponencial (tomando sólo el término lineal) $e^{i\epsilon} \simeq 1 + i\epsilon$

Entonces, tenemos que el campo transformado es:

$$\phi'(x) = e^{i\epsilon}\phi(x) \simeq (1 + i\epsilon)\phi(x)$$

Y por tanto, su diferencia en un mismo punto $\delta\phi = \phi'(x) - \phi(x)$ es:

$$\delta\phi := \phi'(x) - \phi(x) = (1 + i\epsilon)\phi(x) - \phi(x) = i\epsilon\phi$$

Finalmente, la diferencia total del campo, que vimos en clase que se calcula como $\Delta\phi = \delta\phi + (\partial\phi)\delta x$ es igual a $\delta\phi$ (porque las coordenadas no cambiaron $\Rightarrow\ \delta x = 0$). Entonces:

$$\boxed{\Delta\phi = i\epsilon\phi}$$

Y similarmente con el campo conjugado ϕ^*, el cual se transforma como ${\phi^*}' = (e^{i\epsilon}\phi)^* = e^{-i\epsilon}\phi^*$. Por lo tanto, infinitesimalmente la transformación es:

$${\phi^*}'(x) = e^{-i\epsilon}\phi^*(x) \simeq (1 - i\epsilon)\phi^*(x)$$

Su diferencia en un mismo punto es entonces ${\phi^*}'(x) - \phi^*(x) = (1 - i\epsilon)\phi^*(x) - \phi^*(x) = -i\epsilon\phi^*(x)$. Y por la misma razón de antes (que las coordenadas no cambiaron, $\delta x = 0$) tenemos que:

$$\boxed{\Delta\phi^* = -i\epsilon\phi^*}$$

Luego, como vimos en clase, la corriente conservada se calcula como:

$$J^{\beta} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\phi_i)}\Delta\phi_i + \delta x_{\beta} T^{\beta\alpha}$$

Donde la suma sobre i se hace sobre los campos involucrados (ϕ y $\phi*$ en este caso). Además, como las coordenadas no cambian, $\delta x_{\beta} = 0$ y el segundo término desaparece. Por lo que nos queda:

$$J^{\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\phi)}\Delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\phi^*)}\Delta\phi^*$$

Las derivadas de este lagrangiano con respecto a $\partial_{\beta}\phi$ y respecto a $\partial_{\beta}\phi^*$ ya las habíamos calculado en el ejercicio 3 de la tarea 1 (ecuación (2): $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\phi^*)} = \partial^{\beta}\phi$ y ecuación (4): $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\phi)} = \partial^{\beta}\phi^*$)
Entonces la corriente nos queda como:

$$\begin{aligned} J^{\beta} &= \partial^{\beta}\phi^*\Delta\phi + \partial^{\beta}\phi\Delta\phi^* \\ &= (\partial^{\beta}\phi^*)(i\epsilon\phi) + (\partial^{\beta}\phi)(-i\epsilon\phi^*) \quad \text{por el valor de } \Delta\phi, \Delta\phi^* \text{ que encontramos} \\ &= i\left[(\partial^{\beta}\phi^*)\phi - (\partial^{\beta}\phi)\phi^*\right]\epsilon \end{aligned}$$

Por lo que la corriente conservada es

$$\boxed{J^{\beta} = i\left[(\partial^{\beta}\phi^*)\phi - (\partial^{\beta}\phi)\phi^*\right]}$$

Probar que verdaderamente se conserva
Vamos a ver que verdadereamente se cumple que $\partial_{\beta}J^{\beta} = 0$. Calculamos esta derivada:

$$\begin{aligned} \partial_{\beta}J^{\beta} &= i\partial_{\beta}\left[(\partial^{\beta}\phi^*)\phi - (\partial^{\beta}\phi)\phi^*\right] \\ &= i\partial_{\beta}[(\partial^{\beta}\phi^*)\phi] - i\partial_{\beta}[(\partial^{\beta}\phi)\phi^*] \\ &\text{usamos la regla de la derivada del producto} \\ &= i[\partial_{\beta}(\partial^{\beta}\phi^*)\phi + (\partial^{\beta}\phi^*)(\partial_{\beta}\phi)] - i[\partial_{\beta}(\partial^{\beta}\phi)\phi^* + (\partial^{\beta}\phi)(\partial_{\beta}\phi^*)] \\ &= i[\phi\partial_{\beta}\partial^{\beta}\phi^* + (\partial^{\beta}\phi^*)(\partial_{\beta}\phi)] - i[\phi^*\partial_{\beta}\partial^{\beta}\phi + (\partial^{\beta}\phi)(\partial_{\beta}\phi^*)] \\ &= i\phi\partial_{\beta}\partial^{\beta}\phi^* + i(\partial^{\beta}\phi^*)(\partial_{\beta}\phi) - i\phi^*\partial_{\beta}\partial^{\beta}\phi - i(\partial^{\beta}\phi)(\partial_{\beta}\phi^*) \\ \\ &\text{Subimos un índice en el segundo y cuarto término usando la métrica} \\ &= i\phi\partial_{\beta}\partial^{\beta}\phi^* + i(\partial^{\beta}\phi^*)(\eta_{\alpha\beta}\partial^{\alpha}\phi) - i\phi^*\partial_{\beta}\partial^{\beta}\phi - i(\partial^{\beta}\phi)(\eta_{\alpha\beta}\partial^{\alpha}\phi^*) \\ &= i\phi\partial_{\beta}\partial^{\beta}\phi^* + \cancel{i\eta_{\alpha\beta}(\partial^{\beta}\phi^*)(\partial^{\alpha}\phi)} - i\phi^*\partial_{\beta}\partial^{\beta}\phi - \cancel{i\eta_{\alpha\beta}(\partial^{\beta}\phi)(\partial^{\alpha}\phi^*)} \\ &= i\phi\partial_{\beta}\partial^{\beta}\phi^* - i\phi^*\partial_{\beta}\partial^{\beta}\phi \end{aligned}$$

Pero ϕ cumple con la ecuación de Euler-Lagrange, que en la tarea 3 vimos que es $\partial_\beta \partial^\beta \phi + m^2\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\beta \partial^\beta \phi = -m^2\phi$
Y similarmente para ϕ^*, que cumple la ecuación $\partial_\beta \partial^\beta \phi^* + m^2\phi^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\beta \partial^\beta \phi^* = -m^2\phi^*$.
Si sustituimos estas dos expresiones en el desarrollo que teníamos, llegamos a que:

$$\begin{aligned}
\partial_\beta J^\beta &= i\phi(-m^2\phi^*) - i\phi^*(-m^2\phi) \\
&= -im^2\phi\phi^* + im^2\phi\phi^* \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que $\partial_\beta J^\beta = 0$, lo que significa que la corriente se conserva.

c) **Encuentre la carga conservada asociada a la corriente del inciso anterior. ¿Qué significado físico tiene?**

La carga conservada se define como $Q = \int d^3x J^0$, que es igual a:

$$\begin{aligned}
Q &= \int d^3x \; i \left[(\partial^0\phi^*)\phi - (\partial^0\phi)\phi^* \right] \\
&= i \int d^3x \; (\dot{\phi}^*\phi - \dot{\phi}\phi^*)
\end{aligned}$$

Ahora notamos que $\dot{\phi}$ es el momento conjugado a ϕ^* pues:

$$\begin{aligned}
\pi^* &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^*)} \\
&= \frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi^*)} \left[\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi^*)} \big(\partial_0\phi^*\partial^0\phi + \partial_1\phi^*\partial^1\phi + \partial_2\phi^*\partial^2\phi + \partial_3\phi^*\partial^3\phi - m^2\phi^*\phi \big) \\
&= \partial^0\phi = \dot{\phi}
\end{aligned}$$

Y similarmente para el momento conjugado a ϕ:

$$\begin{aligned}
\pi &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \\
&= \frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi)} \left[\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi)} \big(\partial_0\phi^*\partial^0\phi + \partial_1\phi^*\partial^1\phi + \partial_2\phi^*\partial^2\phi + \partial_3\phi^*\partial^3\phi - m^2\phi^*\phi \big) \\
&= \partial_0\phi^* = \dot{\phi}^*
\end{aligned}$$

Entonces, la carga Q a la que habíamos llegado antes se puede escribir como:

$$\boxed{Q = i \int d^3x \ \left(\pi\phi - \pi^*\phi^*\right)}$$

Y por el teorema de Noether, esta cantidad se conserva.

d) **¿Cómo se relaciona la carga conservada con el tensor de energía momento?**

Calculamos el tensor de energía momento. En clase definimos dicho tensor como:

$$\begin{aligned}
T^{\alpha}_{\mu} &:= \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_i)}\partial_\mu \phi_i - \eta^{\alpha}_{\mu}\mathcal{L} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi)}\partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^*)}\partial_\mu \phi^* - \eta^{\alpha}_{\mu}\mathcal{L}
\end{aligned}$$

Las derivadas que aparecen en el primer y segundo término las calculamos en el ejercicio 3 de la tarea 1 y tienen como resultado $\partial^\alpha \phi^*$ y $\partial^\alpha \phi$ respectivamente, por lo que la expresión queda como:

$$\begin{aligned}
T^{\alpha}_{\mu} &= \partial^\alpha \phi^* \partial_\mu \phi + \partial^\alpha \phi \partial_\mu \phi^* - \eta^{\alpha}_{\mu}\mathcal{L} \\
&= \partial^\alpha \phi^* \partial_\mu \phi + \partial^\alpha \phi \partial_\mu \phi^* - \eta^{\alpha}_{\mu}[(\partial_\beta \phi)^* \partial^\beta \phi - m^2 \phi^* \phi] \\
&= \partial^\alpha \phi^* \partial_\mu \phi + \partial^\alpha \phi \partial_\mu \phi^* - \eta^{\alpha}_{\mu}(\partial_\beta \phi^*)(\partial^\beta \phi) + \eta^{\alpha}_{\mu} m^2 \phi^* \phi
\end{aligned}$$

No encuentro la forma de relacionar este tensor con la carga del inciso pasado.

e) **Ahora promueva al parámetro θ a una función del espacio tiempo**

$$\theta \to \theta(x)$$

¿La acción de la teoría sigue siendo invariante ante la transformación?

Ya no es invariante, pues tenemos que el Lagrangiano se transforma como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= (\partial_\mu \phi')^* \partial^\mu \phi' - m^2 {\phi'}^* \phi' \\
&= (\partial_\mu e^{i\theta(x)}\phi)^* \partial^\mu (e^{i\theta(x)}\phi) - m^2 (e^{i\theta(x)}\phi)^* (e^{i\theta(x)}\phi) \\
&= (i(\partial_\mu \theta) e^{i\theta}\phi + e^{i\theta}\partial_\mu \phi)^* (i(\partial^\mu \theta) e^{i\theta}\ \phi + e^{i\theta}\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \quad \text{ya no anotamos } \theta(x) \text{, sino } \theta \text{ por simplicidad} \\
&= (-i(\partial_\mu \theta) e^{-i\theta}\phi^* + e^{-i\theta}\partial_\mu \phi^*)(i(\partial^\mu \theta) e^{i\theta}\ \phi + e^{i\theta}\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \\
&= (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta)\phi^*\phi + i(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \theta)\phi - i(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \theta)\phi^* + (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L} + (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta)\phi^*\phi + i(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \theta)\phi - i(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \theta)\phi^*
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la acción pasa a ser:

$$\begin{aligned}
S' &:= \int dx^4\ \mathcal{L}' \\
&= \int dx^4\ \left[\mathcal{L} + (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta)\phi^*\phi + i(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \theta)\phi - i(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \theta)\phi^*\right] \\
&= \int dx^4\ \mathcal{L} + \int dx^4\ \left[(\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta)\phi^*\phi + i(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \theta)\phi - i(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \theta)\phi^*\right] \\
&= S + \int dx^4\ \left[(\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta)\phi^*\phi + i(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \theta)\phi - i(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \theta)\phi^*\right]
\end{aligned}$$

Vemos que a la acción tras la transformación se le suma la integral que se muestra en la expresión anterior. Dicha integral depende de la función $\theta(x)$ en particular que escojamos y no se puede asegurar que sea 0, por lo que cambia el valor de la acción y la teoría ya no es invariante.

f) **Extra: Discuta alguna idea para hacer que la acción sea invariante ante esta transformación**

Una forma de hacer que la acción sea invariante ante esta transformación es introduciendo un campo $A^\mu(x)$ e insistiendo que se transforme como $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta$ con q una parámetro fijo.
Además, introducimos un nuevo objeto D_μ llamado **derivada covariante** definido como:

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x)$$

Finalmente, redefinimos la densidad Lagrangiana usando las derivadas covariantes

$$\mathcal{L} = (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

Veremos que con estas definiciones, la densidad Lagrangiana (y por tanto la acción) son invariantes al hacer la transformación $\phi \to e^{i\theta(x)}\phi$. Calculemos primero la densidad lagrangiana antes de transformar los campos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi \\
&= [(\partial^\mu + iqA^\mu)\phi]^* \cdot (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi - m^2\phi^*\phi \\
&= (\partial^\mu - iqA^\mu)\phi^* \cdot (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi - m^2\phi^*\phi \\
&= [\partial^\mu\phi^* - iqA^\mu\phi^*][\partial_\mu\phi + iqA_\mu\phi] - m^2\phi^*\phi \\
&= \partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - iqA^\mu\phi^*\partial_\mu\phi + iqA_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + q^2A_\mu A^\mu\phi\phi^* - m^2\phi^*\phi \qquad (1)
\end{aligned}$$

La densidad lagrangiana tras la transformación está dada por:

$$\mathcal{L}' = (D'^{\,\mu}\phi')^*(D'_\mu\phi') - m^2\phi'^*\phi'$$

Calculamos cada uno de los términos de esta expresión por separado:

- $(D'^\mu\phi')^*$

$$\begin{aligned}
(D'^\mu\phi')^* &= [(\partial^\mu + iqA'^\mu)\phi']^* \quad \text{por la definición de D} \\
&= [(\partial^\mu + iq(A^\mu - \frac{1}{q}\partial^\mu\theta))\phi']^* \quad \text{por la transformación de A} \\
&= [(\partial^\mu + iqA^\mu - i\partial^\mu\theta)\phi']^* \\
&= [(\partial^\mu + iqA^\mu - i\partial^\mu\theta)e^{i\theta}\phi]^* \\
&= (\partial^\mu - iqA^\mu + i\partial^\mu\theta)e^{-i\theta}\phi^* \\
&= \partial^\mu(e^{-i\theta}\phi^*) - iqA^\mu e^{-i\theta}\phi^* + i(\partial^\mu\theta)e^{-i\theta}\phi^* \\
&= -i(\partial^\mu\theta)e^{-i\theta}\phi^* + e^{-i\theta}\partial^\mu\phi^* - iqA^\mu e^{-i\theta}\phi^* + i(\partial^\mu\theta)e^{-i\theta}\phi^* \\
&= e^{-i\theta}\partial^\mu\phi^* - iqA^\mu e^{-i\theta}\phi^*
\end{aligned}$$

- $(D'_\mu \phi')$

$$\begin{aligned}
(D'_\mu \phi') &= (\partial_\mu + iqA'_\mu)\phi' \quad \text{por la definición de D} \\
&= (\partial_\mu + iq(A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu \theta))\phi' \quad \text{por la transformación de A} \\
&= (\partial_\mu + iqA_\mu - i\partial_\mu \theta)\phi' \\
&= (\partial_\mu + iqA_\mu - i\partial_\mu \theta)e^{i\theta}\phi \\
&= (\partial_\mu + iqA_\mu - i\partial_\mu \theta)e^{i\theta}\phi \\
&= \partial_\mu (e^{i\theta}\phi) + iqA_\mu e^{i\theta}\phi - i(\partial_\mu \theta)e^{i\theta}\phi \\
&= i(\partial_\mu \theta)e^{i\theta}\phi + e^{i\theta}\partial_\mu \phi + iqA_\mu e^{i\theta}\phi - i(\partial_\mu \theta)e^{i\theta}\phi \\
&= e^{i\theta}\partial_\mu \phi + iqA_\mu e^{i\theta}\phi
\end{aligned}$$

- $-m^2 \phi'^* \phi' = -m^2 e^{-i\theta}\phi^* e^{i\theta}\phi = -m^2 \phi^* \phi$

Sustituimos estos tres resultados en la expresión de $\mathcal{L}'$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= (D'^\mu \phi')^*(D'_\mu \phi) - m^2 \phi'^* \phi' \\
&= [e^{-i\theta}\partial^\mu \phi^* - iqA^\mu e^{-i\theta}\phi^*][e^{i\theta}\partial_\mu \phi + iqA_\mu e^{i\theta}\phi] - m^2 \phi^* \phi \\
&= \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + (\partial^\mu \phi^*)iqA_\mu \phi - (\partial_\mu \phi)iqA^\mu \phi^* + q^2 A_\mu A^\mu \phi\phi^* - m^2 \phi^2 \phi \\
&= \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - iqA^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + iqA_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + q^2 A_\mu A^\mu \phi\phi^* - m^2 \phi^* \phi
\end{aligned}$$

Vemos que esta expresión es igual a la encontrada para $\mathcal{L}$ en (1). Por lo que la densidad Lagrangiana es la misma antes y después de la transformación y se sigue que la acción se mantiene invariante.

g) **Muestre que la acción de la teoría es invariante ante la transformación**

$$\phi_1 \to \phi_1' = -\phi_1$$
$$\phi_2 \to \phi_2' = -\phi_2$$

Primero vemos que como $\phi := \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$, tras aplicar la transformación, ϕ pasa a ser $\phi' = -\phi$. Similarmente para $\phi^* := \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$ que pasa a ser ${\phi'}^* = -\phi^*$
Usaremos esta representación de los campos en vez de la de ϕ_1, ϕ_2.

Calculamos la densidad Lagrangiana después de la transformación

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= (\partial_\mu \phi')^* \partial^\mu \phi' - m^2 {\phi'}^* \phi' \\
&= (\partial_\mu (-\phi)^*) \partial^\mu (-\phi) - m^2 (-\phi^*)(-\phi) \\
&= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L}
\end{aligned}$$

Por lo que la densidad Lagrangiana permanece invariante ante la transformación. Se sigue inmediatamente al igual que se vio en el inciso a) que la acción permanece invariante.

h) **¿Qué consecuencias tiene el teorema de Noether sobre la simetría anterior?**

Primero calculamos cómo varían los campos en un punto dado:

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -\phi(x) - \phi(x) = -2\phi(x)$$
$$\delta\phi^*(x) = \phi^{'*}(x) - \phi^*(x) = -\phi^*(x) - \phi^*(x) = -2\phi^*(x)$$

Y luego calculamos la variación total de los campos (pero considerando que las coordenadas no cambian $\delta x = 0$, el resultado será lo mismo que lo calculado antes).

$$\Delta\phi(x) = \delta\phi + (\partial_\mu\phi)\delta x^\mu = -2\phi(x)$$
$$\Delta\phi^*(x) = \delta\phi^* + (\partial_\mu\phi^*)\delta x^\mu = -2\phi^*(x)$$

Luego, la corriente conservada se calcula igual que antes:

$$\begin{aligned} J^\beta &= \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\phi_i)}\Delta\phi_i + \delta x_\beta T^{\beta\alpha} \\ &= \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\phi_i)}\Delta\phi_i \qquad \text{porque } \delta x = 0 \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\phi)}\Delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\phi^*)}\Delta\phi^* \end{aligned}$$

Las derivadas ya las calculamos en la tarea pasada y ya las hemos usado varias veces, al reemplazarlas tenemos que:

$$\begin{aligned} J^\beta &= \partial^\beta\phi^*\Delta\phi + \partial^\beta\phi\Delta\phi^* \\ &= \partial^\beta\phi^*(-2\phi) + \partial^\beta\phi(-2\phi^*) \\ &= -2[\phi\partial^\beta\phi^* + \phi^*\partial^\beta\phi] \end{aligned}$$

Luego, la carga conservada se calcula como antes:

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x\ J^0 = -2\int d^3x\ [\phi\partial^0\phi^* + \phi^*\partial^0\phi] \\ &= -2\int d^3x\ [\phi\dot{\phi}^* + \phi^*\dot{\phi}] \\ &= -2\int d^3x\ [\phi\pi + \phi^*\pi^*] \end{aligned}$$

Donde π y π^* son como ya habíamos calculado en el inciso c). El teorema de Noether nos dice que esta cantidad se conserva.

Problema 2

La acción que describe la dinámica del campo electromagnético libre está dada por

$$S[A^\mu(x)] = \int d^4x \; c_1 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Donde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

- **Muestre que la acción es invariante ante la transformación**

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$$

  Con $\Lambda(x)$ **una función** C^2 **arbitraria. A estas transformaciones se les conoce con transformaciones de norma.**

  Veamos cómo se transforma el tensor $F^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu \\ &= \partial^\mu [A^\nu + \partial^\nu \Lambda] - \partial^\nu [A^\mu + \partial^\mu \Lambda] \\ &= \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu \Lambda - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu \Lambda \\ &= F^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu \Lambda - \partial^\nu \partial^\mu \Lambda \quad \text{Por la definición de } F^{\mu\nu} \\ &= F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

  Donde en el último paso usamos que como Λ es una función C^2, sus derivadas mixtas conmutan, por lo que $\partial^\mu \partial^\nu \Lambda - \partial^\nu \partial^\mu \Lambda = 0$.
  Similarmente, podemos ver cómo se transforma $F'_{\mu\nu}$ (aunque no es necesario porque podríamos bajar los índices de $F'^{\mu\nu}$ y listo):

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu [A_\nu + \partial_\nu \Lambda] - \partial_\nu [A_\mu + \partial_\mu \Lambda] \\ &= \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda \\ &= F_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda \\ &= F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

  Por lo tanto, tras la transformación, la acción no cambia:

$$\begin{aligned} S'[A'^\mu(x)] &= \int d^4x \; c_1 F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \; c_1 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= S[A^\mu(x)] \end{aligned}$$

b) **Si ahora se trabaja con la teoría completa (con fuentes), ¿Qué condiciones debe de cumplir J^μ para que la acción sea invariante ante una transformación de norma invariante?**

Ahora la densidad Lagrangiana es $\mathcal{L} = c_1 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + c_2 A_\mu J^\mu$.

Cuando hacemos el cambio de coordenadas, el tensor $F^{\mu\nu}$ se transforma como vimos en el inciso pasado ($F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$).
Y podemos calcular cómo se transforma el término que agregamos a la Lagrangiana

$$\begin{aligned} A'_\mu J^\mu &= (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) J^\mu \\ &= A_\mu J^\mu + J^\mu \partial_\mu \Lambda \end{aligned}$$

Entonces, la Lagrangiana completa se transforma como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= c_1 F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + c_2 A'_\mu J^\mu \\ &= c_1 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + c_2 \left(A_\mu J^\mu + J^\mu \partial_\mu \Lambda\right) \\ &= c_1 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + c_2 A_\mu J^\mu + c_2 J^\mu \partial_\mu \Lambda \\ &= \mathcal{L} + c_2 J^\mu \partial_\mu \Lambda \end{aligned}$$

Entonces la diferencia de la Lagrangiana antes y después de la transformación es:

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = c_2 J^\mu \partial_\mu \Lambda$$

Lo cual podemos reescribir como

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = c_2 J^\mu \partial_\mu = -c_2(\partial_\mu J^\mu)\Lambda + c_2 \partial_\mu (J^\mu \Lambda)$$

Pues el segundo término del lado derecho es $c_2\partial_\mu(J^\mu\Lambda) = c_2(\partial_\mu J^\mu)\Lambda + c_2 J^\mu(\partial_\mu\Lambda)$ y entonces el lado derecho es igual a $-c_2(\partial_\mu J^\mu)\Lambda + c_2\partial_\mu(J^\mu\Lambda) = -c_2(\partial_\mu J^\mu)\Lambda + c_2(\partial_\mu J^\mu)\Lambda + c_2 J^\mu(\partial_\mu\Lambda) = c_2 J^\mu(\partial_\mu\Lambda)$ que es $\mathcal{L}' - \mathcal{L}$

Luego, la diferencia entre la acción antes y después de la transformación es:

$$\begin{aligned} S' - S &= \int d^4x\ \mathcal{L}' - \int d^4x\ \mathcal{L} = \int dx^4 \mathcal{L}' - \mathcal{L} \\ &= -c_2 \int dx^4\ (\partial_\mu J^\mu)\Lambda + c_2 \int d^4x\ \partial_\mu (J^\mu \Lambda) \end{aligned}$$

El segundo término es la integral de una divergencia total $\partial_\mu(J^\mu\Lambda)$ por lo que usando el teorema de la divergencia, se puede cambiar por una integral de superficie. Sin embargo, como estamos integrando sobre todo el espacio tiempo, la superficie se encuentra infinitamente lejos, donde el campo J^μ se puede considerar como nulo, por lo que esta

integral se anula.
Por lo tanto, la diferencia en la acción es simplemente

$$S' - S = -c_2 \int dx^4 \ (\partial_\mu J^\mu)\Lambda$$

Para que la acción sea invariante, S' debe de ser igual a S, por lo que la integral de la última expresión debe de valer 0. La única forma de que dicha integral valga 0 para cualquier función $\Lambda(x)$ es que el término $\partial_\mu J^\mu$ se anule. Es decir, la condición que se tiene sobre J^μ para que la acción sea invariante es:

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$$

Que es la ecuación de continuidad.

c) **Calcule el tensor de energía momento a partir del teorema de Noether**

Consideramos una transformación en el espacio-tiempo dada por una traslación $x^\nu \to x'^\nu = x^\nu + \delta a^\nu$. Luego, el campo A_μ se transformará como:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x^\nu + \delta a^\nu) \simeq A_\mu(x) + \delta a^\nu \ \partial_\nu A_\mu(x)$$

Donde hemos expandido $A_\mu(x^\nu + \delta a^\nu)$ en una serie de Taylor de primer orden en δa^ν

Ahora vemos cómo se transforma el tensor $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$:

$$\begin{aligned}
F_{\alpha\beta} &\to \partial_\alpha(A_\beta + \delta a^\nu \partial_\nu A_\beta) - \partial_\beta(A_\alpha + \delta a^\nu \partial_\nu A_\alpha) \\
&= \partial_\alpha A_\beta + \delta a^\nu \partial_\alpha \partial_\nu A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + \delta a^\nu \partial_\beta \partial_\nu A_\alpha \\
&= F_{\alpha\beta} + \delta a^\nu \left(\partial_\alpha \partial_\nu A_\beta - \partial_\beta \partial_\nu A_\alpha\right) \\
&= F_{\alpha\beta} + \delta a^\nu \partial_\nu \left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right) \\
&= F_{\alpha\beta} + \delta a^\nu \partial_\nu \left(F_{\alpha\beta}\right)
\end{aligned}$$

Se puede hacer algo similar para $F^{\alpha\beta}$ (el mismo procedimiento pero con los índices α, β arriba) se tiene que:

$$F^{\alpha\beta} \to F^{\alpha\beta} + \delta a^\nu \partial_\nu (F^{\alpha\beta})$$

Entonces el lagrangiano pasa a ser:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\to c_1[F_{\alpha\beta} + \delta a^\nu \partial_\nu (F_{\alpha\beta})][F^{\alpha\beta} + \delta a^\nu \partial_\nu (F^{\alpha\beta})] \\
&= c_1 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + c_1 \delta a^\nu [F_{\alpha\beta} \partial_\nu (F^{\alpha\beta}) + F^{\alpha\beta} \partial_\nu (F_{\alpha\beta})] + c_1 O(\delta a^2) \\
&= \mathcal{L} + c_1 \delta a^\nu [\partial_\nu (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})] + c_1 O(\delta a^2) \\
&= \mathcal{L} + c_1 \partial_\nu (\delta a^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})
\end{aligned}$$

Donde hemos ignorado los términos de orden δa^2.

Entonces la diferencia del Lagrangiano es $c_1\partial_\nu(\delta a^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})$, lo cual es una divergencia total, por lo que similarmente al ejercicio pasado, no cambia el valor de la acción. Por lo que la acción es invariante ante traslaciones.

Luego, el tensor de energía momento como lo vimos en clase está dado por:

$$T^{\alpha\mu} := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\lambda)}\partial^\mu A_\lambda - \eta^{\alpha\mu}\mathcal{L}$$

La derivada $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\lambda)}$ fue calculada en la tarea 1 y tiene como resultado $4c_1F^{\alpha\lambda}$.
Por lo tanto, el tensor toma la forma:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\mu} &:= 4c_1F^{\alpha\lambda}\partial^\mu A_\lambda - \eta^{\alpha\mu}\mathcal{L} \\ &= \boxed{4c_1F^{\alpha\lambda}\partial^\mu A_\lambda - c_1\eta^{\alpha\mu}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}} \end{aligned}$$

Haber demostrado que la teoría es invariante ante traslaciones nos asegura que se cumplirán leyes de conservación en este tensor que veremos en el último inciso.

d) **Muestre que este tensor no es invariante de norma y no es simétrico**

- **No es simétrico:**
  Calculamos $T^{\alpha\mu} - T^{\mu\alpha}$ y vemos que no da 0:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\mu} - T^{\mu\alpha} &= 4c_1F^{\alpha\lambda}\partial^\mu A_\lambda - c_1\eta^{\alpha\mu}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} - 4c_1F^{\mu\lambda}\partial^\alpha A_\lambda + c_1\eta^{\mu\alpha}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\ &\text{Como } \eta \text{ es simétrico, el segundo y cuarto término se cancelan} \\ &= 4c_1F^{\alpha\lambda}\partial^\mu A_\lambda - 4c_1F^{\mu\lambda}\partial^\alpha A_\lambda \\ &= 4c_1[F^{\alpha\lambda}\partial^\mu A_\lambda - F^{\mu\lambda}\partial^\alpha A_\lambda] \\ &= 4c_1[(\partial^\alpha A^\lambda - \partial^\lambda A^\alpha)\partial^\mu A_\lambda - (\partial^\mu A^\lambda - \partial^\lambda A^\mu)\partial^\alpha A_\lambda] \\ &= 4c_1[\cancel{(\partial^\alpha A^\lambda)(\partial^\mu A_\lambda)} - (\partial^\lambda A^\alpha)(\partial^\mu A_\lambda) - \cancel{(\partial^\mu A^\lambda)(\partial^\alpha A_\lambda)} + (\partial^\lambda A^\mu)(\partial^\alpha A_\lambda)] \\ &= 4c_1[-(\partial^\lambda A^\alpha)(\partial^\mu A_\lambda) + (\partial^\lambda A^\mu)(\partial^\alpha A_\lambda)] \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

  Como el resultado es distinto de 0, concluimos que el tensor no es simétrico.

- **No es invariante de norma**

  Al aplicar la transformación de norma a A, el segundo término del tensor $T^{\alpha\mu} = 4c_1 F^{\alpha\lambda}\partial^\mu A_\lambda - c_1\eta^{\alpha\mu}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}$ es invariante (pues el término $F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}$ es la Lagrangiana, que ya vimos que era invariante en el inciso a).
  Entonces sólo nos preocupa el primer término, que debería de ser invariante para que T lo sea.
  Al aplicar la transformación de norma, dicho término se transforma en:

  $$\begin{aligned} 4c_1 F^{\alpha\lambda}\partial^\mu A_\lambda &\to F^{'\,\alpha\lambda}\partial^\mu A'_\lambda \\ \text{en el inciso a) } &\text{vimos que F es invariante de norma, por lo que } F^{'\,\alpha\lambda} = F^{\alpha\lambda} \\ &= F^{\alpha\lambda}\partial^\mu A'_\lambda \\ &= F^{\alpha\lambda}\partial^\mu (A_\lambda + \partial_\lambda \Lambda) \\ &= F^{\alpha\lambda}\partial^\mu A_\lambda + F^{\alpha\lambda}\partial^\mu \partial_\lambda \Lambda \end{aligned}$$

  Por lo que vemos que tras la transformación, el término $F^{\alpha\lambda}\partial^\mu A_\lambda$ toma un término extra $F^{\alpha\lambda}\partial^\mu\partial_\lambda\Lambda$, por lo que no es invariante.

  Con ello concluimos que T no es invariante de norma.

e) **Calcule las cargas conservadas de la teoría**

Como vimos en el inciso c), la acción es invariante ante traslaciones. Eso implica que tenemos cuatro corrientes conservadas (una por cada traslación), que son: $(J^\mu)_\nu = T^\mu_\nu$ y cumplen con:

$$\partial_\mu (J^\mu)_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu = 0$$

Luego, cada una de las 4 cantidades conservadas de la teoría son:

$$Q_\nu = \int d^3x\ (J^0)_\nu = \int d^3x\ T^0_\nu$$

Tomando en cuenta que el tensor de energía momento es $T^\alpha_\mu = 4c_1 F^{\alpha\lambda}\partial_\mu A_\lambda - c_1 \eta^\alpha_\mu F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}$, vemos que las 4 cantidades conservadas son:

- $Q_0 = \int d^3x\ T^0_0$

Calculamos primero T^0_0 sin considerar la integral:

$$\begin{aligned}
T^0_0 &= 4c_1 F^{0\lambda}\partial_0 A_\lambda - c_1\eta^0_0 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\
&= 4c_1[F^{00}\partial_0 A_0 + F^{01}\partial_0 A_1 + F^{02}\partial_0 A_2 + F^{03}\partial_0 A_3] - c_1 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\
&= 4c_1[(0)\partial_0 A_0 + (-E_x)\partial_0 A_1 + (-E_y)\partial_0 A_2 + (-E_z)\partial_0 A_3] - c_1 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\
&= 4c_1[-E_x\partial_t A_x - E_y\partial_t A_y - E_z\partial_t A_z] - c_1 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\
&= 4c_1[-\vec{E}\cdot\partial_t\vec{A}] - c_1 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\
&= -4c_1\vec{E}\cdot\partial_t\vec{A} - c_1 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}
\end{aligned}$$

Entonces la carga conservada es:

$$\boxed{Q_0 = \int d^3x\ \left[-4c_1\vec{E}\cdot\partial_t\vec{A} - c_1 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\right]}$$

- $Q_1 = \int d^3x\ T^0_1$
  Calculamos primero T^0_1 sin considerar la integral:

$$\begin{aligned}
T^0_1 &= 4c_1 F^{0\lambda}\partial_1 A_\lambda - c_1\eta^0_1 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\
&= 4c_1[F^{00}\partial_1 A_0 + F^{01}\partial_1 A_1 + F^{02}\partial_1 A_2 + F^{03}\partial_1 A_3] - c_1\cancel{\eta^0_1} F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\
&= 4c_1[(0)\partial_x A_0 + (-E_x)\partial_x A_1 + (-E_y)\partial_x A_2 + (-E_z)\partial_x A_3] \\
&= -4c_1[E_x\partial_x A_x - E_y\partial_x A_y - E_z\partial_x A_z] \\
&= -4c_2\vec{E}\cdot\partial_x\vec{A}
\end{aligned}$$

Entonces la carga conservada es:

$$\boxed{Q_1 = \int d^3x\ \vec{E}\cdot\partial_x\vec{A}}$$

- $Q_2 = \int d^3x\ T^0_2$
  Calculamos primero T^0_2 sin considerar la integral:

$$\begin{aligned}
T^0_2 &= 4c_1 F^{0\lambda}\partial_2 A_\lambda - c_1\eta^0_2 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\
&= 4c_1[F^{00}\partial_2 A_0 + F^{01}\partial_2 A_1 + F^{02}\partial_2 A_2 + F^{03}\partial_2 A_3] - c_1\cancel{\eta^0_2} F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\
&= 4c_1[(0)\partial_y A_0 + (-E_x)\partial_y A_1 + (-E_y)\partial_y A_2 + (-E_z)\partial_y A_3] \\
&= -4c_1[E_x\partial_y A_x - E_y\partial_y A_y - E_z\partial_y A_z] \\
&= -4c_2\vec{E}\cdot\partial_y\vec{A}
\end{aligned}$$

Entonces la carga conservada es:

$$\boxed{Q_2 = \int d^3x\ \vec{E}\cdot\partial_y\vec{A}}$$

- $Q_3 = \int d^3x \; T^0_3$
  Calculamos primero T^0_3 sin considerar la integral:

$$\begin{aligned} T^0_3 &= 4c_1 F^{0\lambda}\partial_3 A_\lambda - c_1 \eta^0_3 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\ &= 4c_1[F^{00}\partial_3 A_0 + F^{01}\partial_3 A_1 + F^{02}\partial_3 A_2 + F^{03}\partial_3 A_3] - c_1 \cancel{\eta^0_3} F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \\ &= 4c_1[(0)\partial_z A_0 + (-E_x)\partial_z A_1 + (-E_y)\partial_z A_2 + (-E_z)\partial_z A_3] \\ &= -4c_1[E_x\partial_z A_x - E_y\partial_z A_y - E_z\partial_z A_z] \\ &= -4c_2 \vec{E}\cdot\partial_z\vec{A} \end{aligned}$$

  Entonces la carga conservada es:

$$\boxed{Q_3 = \int d^3x \; \vec{E}\cdot\partial_z\vec{A}}$$

Sin embargo, estas cantidades no son muy reconocibles. Esto es debido a que el tensor de energía momento que obtuvimos no es el típico que se usa en electromagnetismo. Sin embargo, podemos convertir las cantidades en una forma más reconocida.

Para hacerlo, primero consideramos el tensor $H^{\mu\nu} = F^{\lambda\mu}\partial_\lambda A^\nu$. Primero veremos que la divergencia de este tensor es igual a 0:

$$\begin{aligned} \partial_\mu H^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left(F^{\lambda\mu}\partial_\lambda A^\nu\right) \\ &= (\partial_\mu F^{\lambda\mu})(\partial_\lambda A^\nu) + F^{\lambda\mu}\partial_\mu\partial_\lambda A^\nu \\ &= (0)(\partial_\lambda A^\nu) + F^{\lambda\mu}\partial_\mu\partial_\lambda A^\nu \quad \text{Por las ecuaciones de movimiento encontradas en la tarea 1} \end{aligned}$$

El término $F^{\lambda\mu}\partial_\mu\partial_\lambda A^\nu$ es también igual a 0, porque al hacer la suma sobre μ y ν, para cada sumando de la forma $F^{\lambda_0\mu_0}\partial_{\mu_0}\partial_{\lambda_0}A^\nu$ existe también un sumando de la forma $F^{\mu_0\lambda_0}\partial_{\lambda_0}\partial_{\mu_0}A^\nu = -F^{\lambda_0\mu_0}\partial_{\mu_0}\partial_{\lambda_0}A^\nu$ (donde usamos que F es asimétrico y las parciales conmutan) que cancela al primer sumando.

Como $H^{\mu\nu}$ tiene divergencia igual a cero, se sigue de la misma forma que vimos en clase para las corrientes y cargas del teorema de Noether, que $\boxed{\int dx^3 \; H^{0\nu}}$ se conserva en el tiempo.

Con esto, podemos sumarle $\int dx^3 \; H^{0\nu}$ a cada carga que encontramos antes y seguirá conservándose. A cada carga Q_i que encontramos antes le sumaremos $\int dx^3 \; H^{0i}$ para cambiar la expresión de la carga y conseguir algo más conocido.

- $Q_0 = \int d^3x \; \left[-4c_1\vec{E}\cdot\partial_t\vec{A} - c_1 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\right]$

Le restaremos la constante $4c_1 \int dx^3 \; H^{00}$ que es igual a:

$$\begin{aligned}
4c_1 \int dx^3 \; H^{00} &= 4c_1 \int dx^3 \; F^{\lambda 0}\partial_\lambda A^0 \\
&= 4c_1 \int dx^3 \; \left[F^{00}\partial_0 A^0 + F^{10}\partial_1 A^0 + F^{20}\partial_2 A^0 + F^{30}\partial_3 A^0\right] \\
&= 4c_1 \int dx^3 \left[(0)\partial_t A^0 + (E_x)\partial_x A^0 + (E_y)\partial_y A^0 + (E_z)\partial_z A^0\right] \\
&= 4c_1 \int dx^3 \; \vec{E}\cdot\nabla A^0
\end{aligned}$$

Al restarla a la carga original, nos queda que la nueva carga es igual a:

$$Q_0 = \int d^3x \; \left[-4c_1\vec{E}\cdot\partial_t\vec{A} - 4c_1\vec{E}\cdot\nabla A^0 - c_1 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\right]$$

Para simplificar esta expresión, calculamos primero $F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}$ explícitamente:

$$\begin{aligned}
F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} &= F_{00}F^{00} + F_{01}F^{01} + F_{02}F^{02} + F_{03}F^{03} + F_{10}F^{10} + F_{11}F^{11} + F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} + F_{20}F^{20} \\
&\quad + F_{21}F^{21} + F_{22}F^{22} + F_{23}F^{23} + F_{30}F^{30} + F_{31}F^{31} + F_{32}F^{32} + F_{33}F^{33} \\
&\quad \text{subimos los índices que están abajo, poniéndo un signo menos} \\
&\quad \text{cada que subimos un índice distinto de 0} \\
&= F^{00}F^{00} - F^{01}F^{01} - F^{02}F^{02} - F^{03}F^{03} - F^{10}F^{10} + F^{11}F^{11} + F^{12}F^{12} + F^{13}F^{13} - F^{20}F^{20} \\
&\quad + F^{21}F^{21} + F^{22}F^{22} + F^{23}F^{23} - F^{30}F^{30} + F^{31}F^{31} + F^{32}F^{32} + F^{33}F^{33} \\
&\quad \text{sustituimos los valores de } F^{\mu\nu} \text{ en términos del } E, B \\
&= 0 - (E_x)(E_x) - (E_y)(E_y) - (E_z)(E_z) - (-E_x)(-E_x)0 + (B_z)(B_z) + (-B_y)(-B_y) - \\
&\quad (-E_y)(-E_y) + (-B_z)(-B_z) + 0 + (B_x)(B_x) - (-E_z)(-E_z) + (B_y)(B_y) + (-B_x)(-B_x) + 0 \\
&= -E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 - E_x^2 + B_z^2 + B_y^2 - E_y^2 + B_z^2 + B_x^2 - E_z^2 + B_y^2 + B_x^2 \\
&= -2(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + 2(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \\
&= 2|\vec{E}|^2 - 2|\vec{B}|^2
\end{aligned}$$

Además de sustituir esto en Q_0, reemplazaremos el término $\nabla A^0 = -\partial_t\vec{A} - \vec{E}$ (porque $\nabla A^0 = \nabla\phi$ por definición y luego usamos que $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t\vec{A}$). Entonces la expresión de Q_0 queda como:

$$\begin{aligned}
Q_0 &= \int d^3x \; \left[-4c_1\vec{E}\cdot\partial_t\vec{A} - 4c_1\vec{E}\cdot\nabla A^0 - c_1 F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\right] \\
&= \int d^3x \; \left[-4c_1\vec{E}\cdot\partial_t\vec{A} - 4c_1\vec{E}\cdot(-\partial_t\vec{A} - \vec{E}) - c_1(2|\vec{E}|^2 - 2|\vec{B}|^2)\right] \\
&= \int d^3x \; \left[-4c_1\vec{E}\cdot\partial_t\vec{A} + 4c_1\vec{E}\cdot\partial_t\vec{A} + 4c_1\vec{E}\cdot\vec{E} - c_1(2|\vec{E}|^2 - 2|\vec{B}|^2)\right] \\
&= \int d^3x \; \left[4c_1|\vec{E}|^2 - 2c_1|\vec{E}|^2 + 2c_1|\vec{B}|^2\right] \\
&= \boxed{2c_1 \int d^3x \; \left[|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right]}
\end{aligned}$$

Esta cantidad conservada es ahora más fácil de reconocer, se trata de la energía total del campo electromagnético (sin tomar en cuenta la constante $2c_1$).

- $Q_1 = \int d^3x \ \vec{E} \cdot \partial_x \vec{A}$

Le sumaremos la constante $\int dx^3 \ H^{01}$ que es igual a:

$$\begin{aligned}
\int dx^3 \ H^{01} &= \int dx^3 \ F^{\lambda 0} \partial_\lambda A^1 \\
&= \int dx^3 \ \left[F^{00} \partial_0 A^1 + F^{10} \partial_1 A^1 + F^{20} \partial_2 A^1 + F^{30} \partial_3 A^1 \right] \\
&= \int dx^3 \ [(0)\partial_t A_x + (-E_x)\partial_x A_x + (-E_y)\partial_y A_x + (-E_z)\partial_z A_x] \\
&= \int dx^3 \ \left[-\vec{E} \cdot \nabla A_x \right]
\end{aligned}$$

Al sumarle esta cantidad conservada a la expresión de Q_1, nos queda la siguiente cantidad conservada:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int d^3x \ \left[\vec{E} \cdot \partial_x \vec{A} - \vec{E} \cdot \nabla A_x \right] \\
&= \int d^3x \ \vec{E} \cdot \left(\partial_x \vec{A} - \nabla A_x \right) \\
&= \int d^3x \ \vec{E} \cdot \left[(\partial_x A_x - \partial_x A_x)\widehat{i} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\widehat{j} + (\partial_x A_z - \partial_z A_x)\widehat{k} \right] \\
&= \int d^3x \ \vec{E} \cdot \left[0\widehat{i} + (\nabla \times \vec{A})_z \widehat{j} - (\nabla \times \vec{A})_y \widehat{k} \right] \\
&= \int d^3x \ \vec{E} \cdot \left[B_z \widehat{j} - B_y \widehat{k} \right] \\
&= \int d^3x \ (E_y B_z - E_z B_y) \\
&= \boxed{\int d^3x \ (\vec{E} \times \vec{B})_x}
\end{aligned}$$

La cantidad $(\vec{E} \times \vec{B})_x$ es la coordenada x del vector de Poynting $\vec{S}$

- $Q_2 = \int d^3x \ \vec{E} \cdot \partial_y \vec{A}$

Le sumaremos la constante $\int dx^3\ H^{02}$ que es igual a:

$$\begin{aligned}
\int dx^3\ H^{02} &= \int dx^3\ F^{\lambda 0}\partial_\lambda A^2 \\
&= \int dx^3\ \left[F^{00}\partial_0 A^2 + F^{10}\partial_1 A^2 + F^{20}\partial_2 A^2 + F^{30}\partial_3 A^2\right] \\
&= \int dx^3\ [(0)\partial_t A_y + (-E_x)\partial_x A_y + (-E_y)\partial_y A_y + (-E_z)\partial_z A_y] \\
&= \int dx^3\ \left[-\vec{E}\cdot\nabla A_y\right]
\end{aligned}$$

Al sumarle esta cantidad conservada a la expresión de Q_1, nos queda la siguiente cantidad conservada:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int d^3x\ \left[\vec{E}\cdot\partial_y\vec{A} - \vec{E}\cdot\nabla A_y\right] \\
&= \int d^3x\ \vec{E}\cdot\left(\partial_y\vec{A} - \nabla A_y\right) \\
&= \int d^3x\ \vec{E}\cdot\left[(\partial_y A_x - \partial_x A_y)\widehat{i} + (\partial_y A_y - \partial_y A_y)\widehat{j} + (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\widehat{k}\right] \\
&= \int d^3x\ \vec{E}\cdot\left[(-\nabla\times\vec{A})_z\widehat{i} + \widehat{j} + (\nabla\times\vec{A})_x\widehat{k}\right] \\
&= \int d^3x\ \vec{E}\cdot\left[-B_z\widehat{i} + B_x\widehat{k}\right] \\
&= \int d^3x\ (-E_xB_z + E_zB_x) \\
&= \boxed{\int d^3x\ (\vec{E}\times\vec{B})_y}
\end{aligned}$$

La cantidad $(\vec{E}\times\vec{B})_y$ es la coordenada y del vector de Poynting $\vec{S}$

- $Q_3 = \int d^3x\ \vec{E}\cdot\partial_z\vec{A}$

Le sumaremos la constante $\int dx^3\ H^{03}$ que es igual a:

$$\begin{aligned}
\int dx^3\ H^{03} &= \int dx^3\ F^{\lambda 0}\partial_\lambda A^3 \\
&= \int dx^3\ \left[F^{00}\partial_0 A^3 + F^{10}\partial_1 A^3 + F^{20}\partial_2 A^3 + F^{30}\partial_3 A^3\right] \\
&= \int dx^3\ [(0)\partial_t A_z + (-E_x)\partial_x A_z + (-E_y)\partial_y A_z + (-E_z)\partial_z A_z] \\
&= \int dx^3\ \left[-\vec{E}\cdot\nabla A_z\right]
\end{aligned}$$

Al sumarle esta cantidad conservada a la expresión de Q_3, nos queda la siguiente cantidad conservada:

$$
\begin{aligned}
Q_3 &= \int d^3x \; \left[\vec{E} \cdot \partial_z \vec{A} - \vec{E} \cdot \nabla A_z\right] \\
&= \int d^3x \; \vec{E} \cdot \left(\partial_z \vec{A} - \nabla A_z\right) \\
&= \int d^3x \; \vec{E} \cdot \left[(\partial_z A_x - \partial_x A_z)\widehat{\imath} + (\partial_z A_y - \partial_y A_z)\widehat{\jmath} + (\partial_z A_z - \partial_z A_z)\widehat{k}\right] \\
&= \int d^3x \; \vec{E} \cdot \left[(\nabla \times \vec{A})_y \widehat{\imath} - (\nabla \times \vec{A})_x \widehat{\jmath}\right] \\
&= \int d^3x \; \vec{E} \cdot \left[B_y \widehat{\imath} - B_x \widehat{\jmath}\right] \\
&= \int d^3x \; (E_x B_y - E_y B_x) \\
&= \boxed{\int d^3x \; (\vec{E} \times \vec{B})_z}
\end{aligned}
$$

La cantidad $(\vec{E} \times \vec{B})_z$ es la coordenada z del vector de Poynting $\vec{S}$