Electromagnetismo I : Tarea 7

Tomás Ricardo Basile Álvarez

1. Cerca de la Tierra, la densidad de los protones en el viento solar es $8.70\ cm^{-3}$ y velocidad $470\ Km/s$. a) Densidad de corriente de esos protones b) ¿Cuál es la corriente total de protones que llega a nuestro planeta?

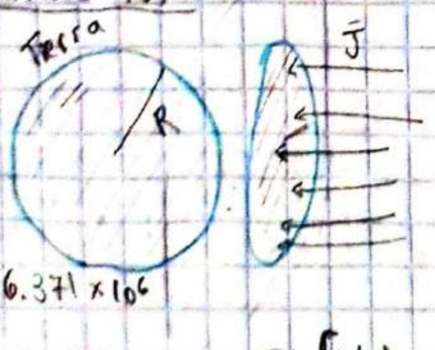
En clase vimos que para un flujo de cargas: $\bar{J} = n q \bar{v}$ con n el número de cargas por unidad de volumen y v la velocidad.

Tenemos que $q = e = 1.6 \times 10^{-19}\ C$, $n = 8.7 \frac{1}{cm^3}\left[\frac{100cm}{1m}\right]^3 = 8.7 \times 10^{6}\ m^{-3}$

$|\bar{v}| = 470 \frac{Km}{s} = 470{,}000\ m/s$

$\therefore |\bar{J}| = n q |\bar{v}| = (1.6 \times 10^{-19})(8.7 \times 10^{6})(470{,}000) = \boxed{6.542 \times 10^{-7} \frac{C}{s m^2}}$

b) Corriente total:



$R = 6.371 \times 10^{6}$

Pensando en que todos los rayos llegan paralelos, (porque el sol está muy lejos),
Los rayos que llegan a la tierra son aquellos que pasan por una zona de área πR^2 (El área transversal de la tierra)

$\Rightarrow I = \int \bar{J} \cdot d\bar{a} = \int |\bar{J}||d\bar{a}|$ Porque $\bar{J}$ es perpendicular al corte transversal

$|\bar{J}|$ es cte $= |\bar{J}| \int |d\bar{a}| = |\bar{J}| A = J \pi R^2$

$= (6.542 \times 10^{-7}) \pi (6.371 \times 10^{6})^2 = \boxed{8.343 \times 10^{7} \frac{C}{s}}$

2. La resistividad del agua de mar es $0.25\,\Omega m$. Portadores de carga son Na^+, Cl^- que hay $3\times10^{26}/m^3$. Rellenamos un tubo de plástico de 2m de longitud con agua marina y conectamos una batería de 12 V ¿Velocidad de deriva?

Primero calculamos la densidad de corriente $J = \frac{I}{A}$ (considerando que es constante a lo largo del tubo)

$$J = \frac{I}{A} = \frac{V/R}{A} = \frac{V}{A}\frac{1}{\rho L/A} = \frac{V}{\rho L}$$

Ley de Ohm porque $R = L\rho/A$ con ρ la resistividad

Pero, por lo visto en clase, $J = nqv$ con: n = núm. de cargas por volumen, q = carga de cada partícula, v = velocidad de deriva

Como Cl^- (con carga $-e$) se mueve en una dirección y Na^+ (con carga $+e$) se mueve en la dirección contraria, podemos ver la situación como $2\cdot(3\times10^{26}/m^3) = n$, portadores de carga (con carga e) moviéndose en la misma dirección

$$\rightarrow v = J/nq = V/(\rho L n q) = \frac{V}{\rho L n e} = \frac{12}{(0.25)(2)(6\times10^{26})(1.6\times10^{-19})}$$

$$= \boxed{2.5\times10^{-7}\ m/s}$$

3. Un bloque sólido rectangular área transversal $3.5\ cm^2$ una longitud $15.8\ cm$ y resistencia $935\ \Omega$. Contiene $5.44\times10^{22}\ e/m^3$ a $35.8\ V$ entre las caras a) ¿Corriente? b) ¿Densidad de corriente? c) ¿Vel de deriva? d) Magnitud del campo eléctrico

Ley de Ohm

a) La corriente I es simplemente $I = \frac{V}{R} = \frac{35.8}{935} = \boxed{0.038\ A}$

b) Como la densidad de corriente es uniforme $\rightarrow$ $J = I/A = \frac{0.038A}{3.5\times10^{-4}m} = \boxed{109.4\ \frac{A}{m^2}}$

c) Sabemos que para una densidad de corriente uniforme, $|J| = ne|v|$

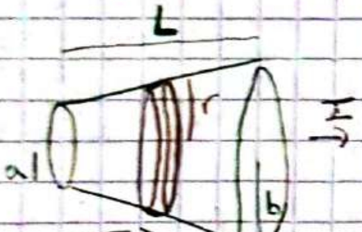
con n = electrones / m^3 v = velocidad

$\rightarrow |v| = \frac{|J|}{ne} = \frac{109.4}{(5.44\times10^{22})(1.6\times10^{-19})} = \boxed{0.0126\ \frac{m}{s}}$

d) Tenemos que $|E| = \rho|J|$ con ρ la resistividad $\rho = \frac{RA}{L}$

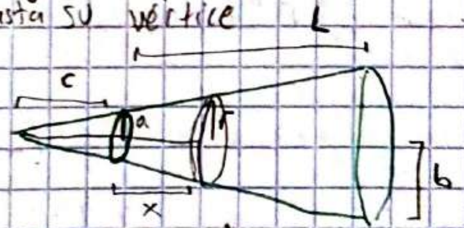
$|E| = \frac{RA}{L}|J| = \frac{(935)(3.5)}{0.158}(109.4) = \underline{226.59\ \frac{V}{m}}$

4) Se hace pasar una corriente por el cono de resistividad $731\ \Omega m$ con radio izq $a = 2mm$, radio derecho $2.3mm$ y longitud $L = 1.94cm$ ¿Resistencia?



Partimos el cono en discos de longitud dx a una distancia x de la cara pequeña y con radio $r(x)$

Digamos que extendemos el cono una distancia c hasta su vértice



Entonces, por similitud de triángulos:

$$\frac{L+c}{b} = \frac{x+c}{r} \rightarrow r = \frac{b(x+c)}{L+c}$$

pero si $x = 0 \Rightarrow r = a \rightarrow a = \frac{bc}{L+c}$

$$\Rightarrow c = \frac{La}{b-a}$$

$$\therefore r(x) = \frac{b\left(x + \frac{La}{b-a}\right)}{L + \frac{La}{b-a}} = \frac{bx(b-a) + La}{L(b-a) + La} = \frac{(b-a)}{L}x + a$$

Entonces, el disco a distancia x tiene área: $A = \pi r^2 = \pi \left(a + \frac{b-a}{L} x\right)^2$
y longitud dx

$\therefore$ Su resistencia es: $R = \frac{\rho L}{A} = \frac{\rho \, dx}{\pi \left(a + \left(\frac{b-a}{L}\right) x\right)^2}$

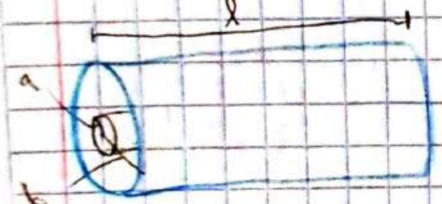
Los discos están en serie, por lo que para la resistencia total hay que sumar todas las resistencias desde $x = 0$ a $x = L$

$$R_T = \int_0^L R(x)\, dx = \int_0^L \frac{\rho}{\pi \left(a + \left(\frac{b-a}{L}\right) x\right)^2} dx = -\frac{\rho L}{\pi (b-a)} \frac{1}{\left(a + \frac{b-a}{L} x\right)} \Big|_0^L$$

$$= -\frac{\rho L}{\pi (b-a) b} + \frac{\rho L}{\pi (b-a) a} = \frac{\rho L}{\pi} \left(\frac{1}{(b-a)a} - \frac{1}{(b-a)b}\right) = \frac{\rho L}{\pi a b}$$

$$\therefore R_{tot} = \frac{(731)(0.0194)}{\pi (0.002)(0.0023)} = 981{,}000 \, \Omega$$

5, Determina la resistencia de aislamiento en una longitud ℓ de un cable coaxial.



Digamos que el aislamiento tiene una resistividad ρ.
Partimos el cilindro en muchos cilindros de radio r y grosor dr y longitud ℓ con r entre a y b

Cada uno de estos cilindros tiene área $(2\pi r)\ell$ y grosor dr.

$\therefore$ Su resistencia es: $R = \rho \dfrac{L}{A} = \dfrac{\rho\, dr}{2\pi \ell r}$

El aislamiento total se ve como muchos de estos cilindros en serie mientras r varía de "a" a "b"

$$\Rightarrow R_{tot} = \int_a^b \frac{\rho\, dr}{2\pi \ell r} = \frac{\rho}{2\pi \ell} \ln(r)\Big|_a^b = \boxed{\frac{\rho}{2\pi \ell} \ln\left(b/a\right)}$$

Forma alternativa (Que supongo es la que sugiere la hint)

Imaginamos que dentro del aislamiento hay un cable con densidad de carga λ

Como hemos visto múltiples veces, este cable genera un campo $\bar{E}(\bar{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$

Si el aislante tiene resistividad $\rho \Rightarrow$ Se genera una densidad de corriente $\bar{J} = \frac{1}{\rho}\bar{E}$

$$\bar{J}(\bar{r}) = \frac{1}{\rho}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

Entonces, la corriente por el aislante se puede calcular como $I = \int_S \bar{J}\cdot d\bar{S}$ ...(1)

Con S la superficie exterior del aislante

Pero en esta superficie, $\bar{J}$ tiene el valor constante

$$\bar{J}(b) = \frac{1}{\rho}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b}\hat{r}$$ y es paralelo a $d\bar{S}$

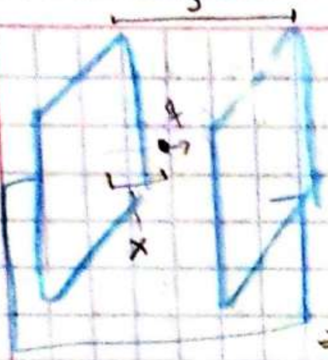
$\therefore$ La integral (1) es simplemente $I = |\bar{J}(b)|\,|A| = \frac{\lambda}{\rho 2\pi\varepsilon_0 b} 2\pi b l = \frac{\lambda l}{\rho\varepsilon_0}$ ...(2)

Por otro lado, la diferencia de potencial entre $\bar{r} = a\hat{r}$ y $\bar{r} = b\hat{r}$ es:

$$V = \int_a^b E\cdot d\bar{r} = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}\cdot d\bar{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad ...(3)$$

$$\therefore R = \frac{V}{I} \overset{\text{por (2) y (3)}}{=} \frac{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(b/a)}{\frac{\lambda l}{\rho\varepsilon_0}} = \frac{\rho}{2\pi l}\ln(b/a)$$

Extra a) Considera el circuito 3a) electrodos a 2mm conectados por un cable corto. Una partícula alfa 2e se emite de la placa izq. a la derecha a 10^6 m/s. Haga una gráfica de la corriente en el alambre vs t. ¿Y si viaja a 45°?



El problema 1 de la tarea 5 nos dice que si Q_1 es la carga de la placa izquierda y Q_2 la de la derecha, si tenemos una carga q a distancia x de la placa izquierda

$$\Rightarrow \quad Q_2 = -q\frac{x}{s}$$ con s la distancia entre placas

$\Rightarrow$ La carga del plano derecho como función de la posición x de la carga $q = 2e$ es:

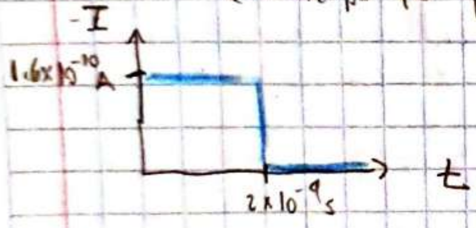
$$Q_2(x) = -\frac{q}{s}x$$

Derivamos respecto al tiempo: $\boxed{\frac{dQ_2}{dt} = -\frac{q}{s}\frac{dx}{dt}}$ ... (1) Pero $\frac{dQ_2}{dt}$ es la cantidad de carga que sale de la placa derecha por unidad de tiempo, es decir, es igual a la corriente I por el cable

$$\Rightarrow I = -\frac{q}{s}\frac{dx}{dt} = -\frac{q}{s}v$$

$$\therefore \quad I = -\frac{2(1.6\times10^{-19}\,C)(10^6\,m/s)}{0.002\,m} = \boxed{1.6\times10^{-10}\,A}$$

Es una función cte (porque v es cte) y tiene una duración de $t = s/v = 2\cdot10^{-9}$ s (el tiempo que q está viajando)



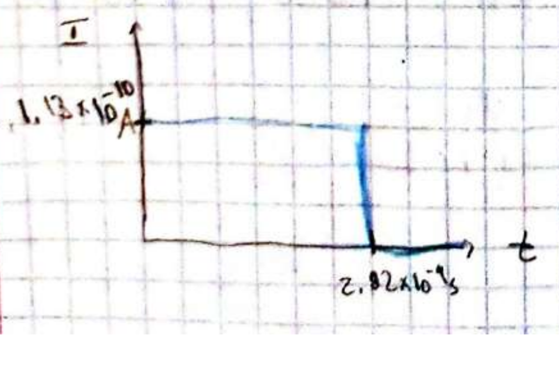
Si se mueve a 45°, en la ecuación 1): $I = -\frac{q}{s}\frac{dx}{dt}$

Pero ahora dx/dt es el componente horizontal de v, i.e. $v\cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}v$

$$\Rightarrow I = -\frac{q}{s}\frac{\sqrt{2}}{2}v = \frac{2(1.6\times10^{-19}\,C)(10^6\,m/s)}{0.002\,m}\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{1.13\times10^{-10}\,A}$$

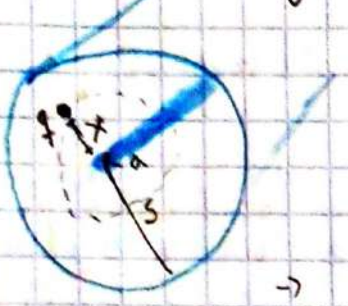
Pero ahora la carga se encuentra entre las placas un tiempo $t = s/v\cos(45)$

$$= 2.828\times10^{-9}\,s$$



b) Tenemos un arreglo cilíndrico de electrodos, con las partículas alfa emitidas desde el eje de un pequeño electrodo. ¿Forma del pulso que se genera? Realiza la versión cilíndrica del ejercicio 1 de tarea 5.

Dada una carga q fija a distancia x del centro:



Llamamos Q_1 a la carga del cilindro interior y Q_2 la del exterior.

Si proponemos una superficie gaussiana justo en el cilindro exterior, como es un conductor, $\bar{E} = \bar{0}$

$\Rightarrow$ El flujo es 0 y $\therefore$ $Q_{in} = 0$

$$\Rightarrow Q_1 + Q_2 + q = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Q_1 + Q_2 = -q} \quad \cdots (1)$$

Por otro lado, vemos que por simetría, la carga q se pudo haber colocado en cualquier parte de un cilindro de radio x y de todas formas Q_1 y Q_2 serían iguales (omitiendo efectos de borde)

Entonces, en vez de pensar en q como una carga puntual a distancia x, podemos intercambiarla por todo un cilindro de radio x con carga q distribuida uniformemente.

Entonces el arreglo se puede ver como tres cilindros coaxiales con cargas Q_1, q y Q_2

Tomando en cuenta que el campo eléctrico generado por un cilindro medido desde adentro vale $\bar{0}$ y medido afuera a distancia r vale $\bar{E} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}\hat{r}$

Podemos calcular el campo en las zonas:

·) $a < r < x$: Aquí el único cilindro que genera campo es el interior

$$\bar{E}_1 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r L}\hat{r}$$

··) $x < r < b$. Aquí el cilindro interior y el de enmedio generan campo

$$\bar{E}_2 = \left(\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r L} + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r L}\right)\hat{r} = \frac{Q_1 + q}{2\pi\varepsilon_0 r L}\hat{r}$$

Al igual que en el ejercicio 1 tarea 5, si los dos cilindros originales están al mismo potencial (porqué están conectados con un cable conductor)

Entonces el voltaje desde a hasta x debe ser igual al voltaje desde b hasta x

$$\rightarrow \int_a^x E_1 \cdot d\bar{r} = \int_b^x E_2 \cdot d\bar{r}$$

$$\rightarrow \int_a^x \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r L}\hat{r}\cdot d\bar{r} = \int_b^x \frac{Q_1+q}{2\pi\varepsilon_0 r L}\hat{r}\cdot d\bar{r} \rightarrow Q_1 \ln\left(\frac{x}{a}\right) = (Q_1+q)\ln(x/b)$$

$$\rightarrow Q_1\left(\ln(x/a) - \ln(x/b)\right) = q\ln(x/b) \rightarrow \boxed{Q_1 = q\frac{\ln(x/b)}{\ln(b/a)}}$$

Si combinamos este resultado con (1), obtenemos: $Q_2 = -\frac{q\ln(x/b)}{\ln(b/a)} - q = \frac{-q(\ln(x/b)+\ln(b/a))}{\ln(b/a)}$

$$\rightarrow \underline{Q_2 = -q\ln(x/a)/\ln(b/a)} \quad \dots (2)$$

Regresando al problema de la partícula alfa moviéndose:
Similar a lo del ejercicio a), el resultado 2) nos da la carga en el cilindro exterior en función de la posición x de la partícula.

Si derivamos (2), obtenemos: (usando $I = -dQ_2/dt$)

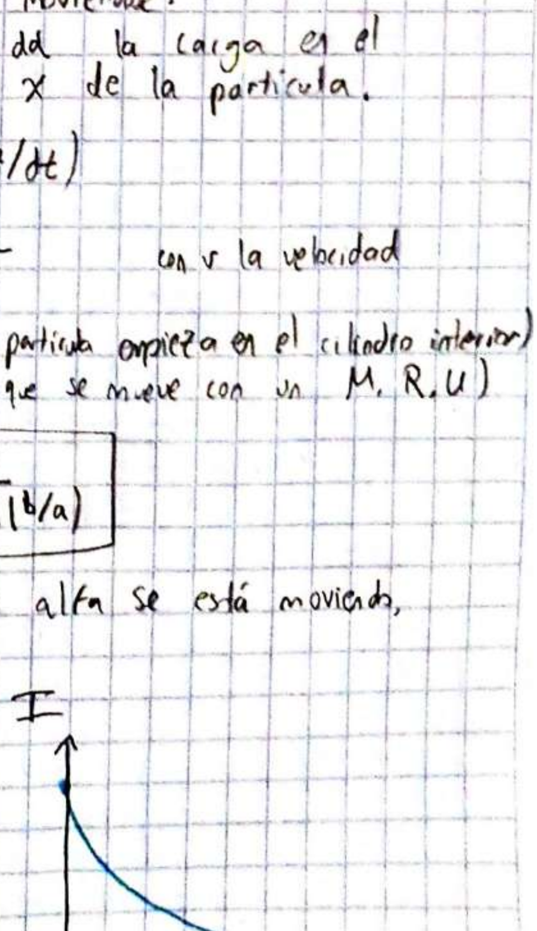
$$I = \frac{q}{\ln(b/a)}\left(\frac{a}{x}\right)\left(\frac{1}{a}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{q}{x\ln(b/a)}v \quad \text{con } v \text{ la velocidad}$$

Pero como a un tiempo $t=0 \rightarrow x=a$ (la partícula empieza en el cilindro interior)
$\rightarrow x(t) = a + vt$ (porque se mueve con un M.R.U)

$$\Rightarrow I = \frac{qv}{(a+vt)\ln(b/a)} \Rightarrow \boxed{I(t) = \frac{(2e)v}{(a+vt)\ln(b/a)}}$$

Esto se vale en el tiempo en el que la partícula alfa se está moviendo, que sería $t_f = (b-a)/v$

La corriente empieza con su valor máximo
$I(t=0) = 2ev/a\ln(b/a)$
Luego I tiene una dependencia con t del tipo $I \approx 1/t$



Hasta que al tiempo final, llega a su valor más bajo:
$$I(t_f) = \frac{2ev}{(a+vt_0)\ln(b/a)} = \frac{2ev}{b\ln(b/a)}$$

y luego inmediatamente se hace 0 cuando la partícula llega al otro lado