MAF — Examen 1 — Tomás Ricardo Basile Álvarez

1. a) Obtener la serie de Fourier de $f(x) = x - [x] - 1/2$ de periodo 1 en el intervalo $[0,1]$

Uso la fórmula vista en clase para coeficientes complejos de Fourier

$$C_n = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\, e^{-\frac{2\pi i n x}{L}}\, dx \qquad \leftarrow \text{con } a=0,\ b=1,\ L=b-a=1$$

$$= \int_0^1 (x - [x] - 1/2)\, e^{-2\pi i n x}\, dx$$

$$= \int_0^1 (x - 0 - 1/2)\, e^{-2\pi i n x}\, dx$$

← En el intervalo $[0,1]$, la función $[x]$ vale 0 (excepto en $x=1$ donde vale $[x]=1$, pero modificar un solo valor no cambia la integral)

$$= \int_0^1 (x - 1/2)\, e^{-2\pi i n x}$$

$$= (x-1/2)\frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}\, dx$$

← Por Partes $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

con $u = (x-1/2) \rightarrow du = dx$

$dv = e^{-2\pi i n x} \rightarrow v = \frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}$ ← Para $n \neq 0$

$$= (x-1/2)\frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}\Bigg|_0^1 - \frac{e^{-2\pi i n x}}{(-2\pi i n)(-2\pi i n)}\Bigg|_0^1$$

$$= (x-1/2)\frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}\Bigg|_0^1 + \frac{e^{-2\pi i n x}}{4\pi^2 n^2}\Bigg|_0^1$$

← Porque $(2\pi i n)(2\pi i n) = 4\pi^2 i^2 n^2 = -4\pi^2 n^2$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{-2\pi i n}}{-2\pi i n} - (-1/2)\frac{e^0}{-2\pi i n} + \frac{e^{-2\pi i n}}{4\pi^2 n^2} - \frac{e^0}{4\pi^2 n^2}$$

← como $n \in \mathbb{Z} \rightarrow e^{-2\pi i n} = \cos(-2\pi n) + i\,\text{sen}(-2\pi n) = 1$

$$= -\frac{1}{4\pi i n} - \frac{1}{4\pi i n} + \frac{1}{4\pi^2 n^2} - \frac{1}{4\pi^2 n^2}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i n} \qquad \leftarrow \text{para } n \neq 0$$

- En $n = 0$ calculamos directamente el coeficiente $C_0 = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i (0) x}\, dx$
  $= \int_0^1 (x - 1/2)\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Entonces, la serie compleja es:

$$S(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{\frac{2\pi i n x}{L}} = \boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{-1}{2\pi i n}\, e^{2\pi i n x}}$$

con $L = 1 - 0 = 1$

b) Obtener la serie coseno de Fourier de la extensión par de la función f del apartado anterior en el intervalo $[-1, 1]$ de periodo 2.

La expresión de f del apartado anterior se reducía simplemente a $f(x) = x - 1/2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Ahora hay que definirla también en $x \in [-1, 0]$ y de tal forma que $f(-x) = f(x)$

Entonces, para $x \in [-1, 0]$, definimos $f(x) = f(-x) = -x - 1/2$ ← usamos la expresión de f para $[0,1]$ porque $-x \in [0, 1]$

y por tanto
$$f(x) = \begin{cases} x - 1/2 & \text{para } x \in [0, 1] \\ -x - 1/2 & \text{para } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

Calculamos los coeficientes. Como f es par, sabemos automáticamente que $b_n = 0 \ \forall n$.

Entonces calculamos los coeficientes del coseno en $[-1, 1]$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \qquad \text{con } a = 1,\ b = -1,\ L = b - a = 2$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x) \cos(\pi n x)\, dx$$

Para $n \neq 0$

$$= \int_0^1 (x - 1/2) \cos(\pi n x)\, dx + \int_{-1}^{0} (-x - 1/2) \cos(\pi n x)\, dx$$

Resolvemos por partes las 2 integrales $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

En la 1ra: $u = x - 1/2 \rightarrow du = dx$; $dv = \cos(\pi n x) \rightarrow v = \frac{\operatorname{sen}(\pi n x)}{\pi n}$

En la 2da: $u = -x - 1/2 \rightarrow du = -dx$; $dv = \cos(\pi n x) \rightarrow v = \frac{\operatorname{sen}(\pi n x)}{\pi n}$

$$= (x - 1/2) \frac{\operatorname{sen}(\pi n x)}{\pi n}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(\pi n x)}{\pi n} dx + (-x - 1/2) \frac{\operatorname{sen}(\pi n x)}{\pi n}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{\operatorname{sen}(\pi n x)}{\pi n} (-dx)$$

$$= (x - 1/2) \frac{\operatorname{sen}(\pi n x)}{\pi n}\Big|_0^1 + \frac{\cos(\pi n x)}{\pi^2 n^2}\Big|_0^1 + (-x - 1/2) \frac{\operatorname{sen}(\pi n x)}{\pi n}\Big|_{-1}^{0} - \frac{\cos(\pi n x)}{\pi^2 n^2}\Big|_{-1}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}\cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen}(\pi n)}{\pi n}} + \frac{1}{2}\cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen}(0)}{\pi n}} + \frac{\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{\cos(0)}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{2}\cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen}(0)}{\pi n}} - \frac{1}{2}\cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen}(-\pi n)}{\pi n}} - \frac{\cos(0)}{\pi^2 n^2} + \frac{\cos(-\pi n)}{\pi^2 n^2}$$

← Como $n \in \mathbb{Z} \rightarrow \operatorname{sen}(\pi n) = 0$ y $\cos(\pi n) = \cos(-\pi n) = (-1)^n$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$= \frac{2(-1 + (-1)^n)}{\pi^2 n^2} \quad \rightarrow \quad a_n = \begin{cases} n \text{ par}: \frac{2(-1+1)}{\pi^2 n^2} = 0 \\ n \text{ impar}: \frac{2(-1 + -1)}{\pi^2 n^2} = \frac{-4}{\pi^2 n^2} \end{cases}$$

Para $n = 0$, calculamos directamente: $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x) \cos(\pi n (0))\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2\int_0^1 f(x)\, dx$ ← porque f es par

$$= 2\int_0^1 x - 1/2\, dx = \frac{2x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{2x}{2}\Big|_0^1 = 1 - 1 = 0$$

Luego, la serie de cosenos será: $S(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$ ← con $L = 2$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\pi n x)$$

$$= \sum_{n \text{ impar}} \frac{-4}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n x)$$

Para simplificar, en vez de escribir "n impar" reemplazamos n por $2n+1$ y haremos correr n de 0 a ∞

$$\rightarrow S(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi^2 (2n+1)^2} \cos(\pi (2n+1) x)$$

c) Usar la información de los apartados anteriores para calcular:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Según la serie compleja de f en $[0,1]$, obtuvimos que los coeficientes son $c_n = -\frac{1}{2\pi i n}$, $n \neq 0$; $c_0 = 0$

El teorema de Parseval nos dice que $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$

- Calculamos: $\|f\|_2^2 = \frac{1}{L}\int_a^b f_{(x)}^2\,dx$ ← definición de $\|f\|_2^2$

$= \int_0^1 f_{(x)}^2\,dx$ ← porque $a=0$, $b=1$, $L=b-a=1$

$= \int_0^1 (x - [x] - 1/2)^2\,dx = \int_0^1 (x-1/2)^2\,dx$ ← como $x \in [0,1] \to [x]=0$ excepto en $x=1$, pero un solo punto no cambia la integral

$= \left.\frac{(x-1/2)^3}{3}\right|_0^1 = \frac{(1/2)^3}{3} - \frac{(-1/2)^3}{3} = \frac{1}{12}$

- Por otro lado: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|-\frac{1}{2\pi i n}\right|^2$ ← por el valor de c_n

$= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(-\frac{1}{2\pi i n}\right)\overline{\left(-\frac{1}{2\pi i n}\right)}$ ← porque en $\mathbb{C}$, $|z|^2 = z\bar{z}$

$= \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \left(\frac{i}{2\pi n}\right)\overline{\left(\frac{i}{2\pi n}\right)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \left(\frac{i}{2\pi n}\right)\left(\frac{-i}{2\pi n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{4\pi^2 n^2}$

$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{4\pi^2 n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ ← Separamos las sumas para $n<0$, $n>0$

$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ ← como el único término del sumando es $\frac{1}{4\pi^2 n^2}$ y vale lo mismo en $n<0$, $n>0$ ⇒ juntamos las dos sumas

$= \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Juntamos las dos expresiones → $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \to \frac{1}{12} = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

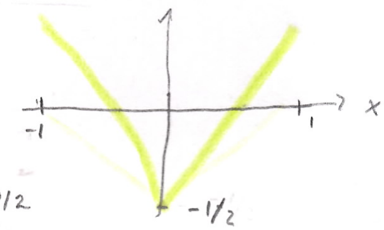
$$\to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

En la parte b) habíamos obtenido que para $f(x) = \begin{cases} x - 1/2 & , x \in [0, 1] \\ -x - 1/2 & , x \in [-1, 0] \end{cases}$

su serie en $[-1, 1]$ es $S(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2} \cos(\pi (2n+1) x)$

Vemos que la función f es continua en 0, pues f se ve como:



Es decir, las dos partes en las que se define f, "chocan" en $x=0$ y por eso f es continua ahí.

O bien, se puede ver que f se puede escribir como $f(x) = |x| - 1/2$ y como el valor absoluto es continuo en 0 $\rightarrow$ f es continua en 0.

En cualquier caso, como f es continua en 0, entonces la serie $S(f)$ evaluada en 0 coincide con f evaluada en 0.

$$\rightarrow S(f)(0) = f(0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2} \cos(0) = -1/2$$ $\leftarrow$ Por la expresión de $S(f)$ y de f en 0

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Usamos el Teorema de parseval. Según el teorema de parseval para una serie de senos y cosenos visto en clase, tenemos que $\|f\|_2^2 = \left|\frac{a_0}{2}\right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$

- Calculamos el lado izquierdo: $\|f\|_2^2 = \frac{1}{L} \int_a^b f^2(x)\, dx$ $\leftarrow$ la definición de $\|f\|^2$

$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx$ $\leftarrow$ $a=-1$, $b=1$ $\rightarrow L = b - a = 2$

$= \frac{1}{2} \, 2 \int_0^1 f^2(x)\, dx$ $\leftarrow$ como f es par, $f^2(x)$ es par y entonces $\int_{-a}^{a} f^2 = 2\int_0^a f^2$

$= \int_0^1 (x - 1/2)^2\, dx$ $\leftarrow$ por la def. de f en $[0, 1]$

$= \left.\frac{(x-1/2)^3}{3}\right|_0^1 = \frac{(1/2)^3}{3} - \frac{(-1/2)^3}{3} = 1/12$

- Por otro lado: $\left|\frac{a_0}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ $\leftarrow$ porque vimos que $a_0 = 0$, $b_n = 0 \ \forall n$

$= \frac{1}{2} \sum_{n \text{ impar}} \left| -\frac{4}{\pi^2 n^2} \right|^2$ $\leftarrow$ por la expresión de a_n encontrada en b)

$= \frac{1}{2} \sum_{n \text{ impar}} \frac{16}{\pi^4 n^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^4 (2n+1)^4}$ $\leftarrow$ En vez de poner n impar, cambiamos n por $2n+1$ que corre por los impares para $n = 0, 1, \dots$

$\therefore$ Igualamos ambos lados: $\frac{1}{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^4 (2n+1)^4}$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

2) Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

a) Calcular la transformada de Fourier de f y las transformadas seno y coseno de las extensiones pares e impares.

- Transformada: Se define como $\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\alpha x} dx$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} x e^{-x} e^{-i\alpha x} dx$$ ← porque $f = 0$ en $(-\infty, 0]$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} x\, e^{-(1+i\alpha)x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[x \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{-(1+i\alpha)} \right]_0^{\infty} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{-(1+i\alpha)} dx$$

← Integramos por partes $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ con $u = x \rightarrow du = dx$, $dv = e^{-(1+i\alpha)x} \rightarrow v = \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{-(1+i\alpha)}$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x e^{-x} e^{-i\alpha x}}{-(1+i\alpha)} \right]_0^{\infty} - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-x} e^{-i\alpha x}}{(1+i\alpha)^2} \right]_0^{\infty}$$

← Al evaluar $x e^{-x} e^{-i\alpha x}$ y $e^{-x} e^{-i\alpha x}$ en $x \to \infty$ el resultado es 0 porque e^{-x} tiende a 0 más rápido de lo que crece x. Y $e^{-\alpha i x}$ está acotado. (Tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ porque si α es complejo, el término $e^{-i\alpha x}$ podría crecer sin cota si $\mathrm{Im}(\alpha) > 0$)

$$= 0 - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{0\, e^{0}}{-(1+i\alpha)} \right] - \left(0 - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^0}{(1+i\alpha)^2} \right] \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi (1+i\alpha)^2}$$

$$\boxed{\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi(1+i\alpha)^2}}$$

- Transformada ~~Serie~~ Seno: Extendemos f a todo $\mathbb{R}$ de forma que sea impar. Que cumpla $f(x) = -f(-x)$. Entonces, para un $x < 0$ definimos $f_s(x) = -f_s(-x) = -(-x) e^{-(-x)} = x e^{x}$ ← como $-x > 0$ → usamos la definición de f en $[0, \infty)$ que tenemos

$$\Rightarrow f_s(x) = \begin{cases} x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ x e^{x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Aplicamos la transformada seno con la convención vista en clase para funciones impares.

$$\hat{f}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(x) \operatorname{sen}(\alpha x)\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x} \operatorname{sen}(\alpha x)\, dx$$ ← por la definición de f

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x} \left(\frac{e^{\alpha x i} - e^{-\alpha x i}}{2i} \right) dx$$ ← Expresión compleja de seno

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} x e^{(\alpha i - 1)x} - x e^{(-1-\alpha i)x}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2i} \left[\int_0^{\infty} x e^{(\alpha i - 1)x} dx - \int_0^{\infty} x e^{(-1-\alpha i)x} dx \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2i} \left[\cancel{\frac{x e^{(\alpha i - 1)x}}{\alpha i - 1}}\Bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{(\alpha i - 1)x}}{\alpha i - 1} dx - \cancel{\frac{x e^{(-1-\alpha i)x}}{-1-\alpha i}}\Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{(-1-\alpha i)x}}{-1-\alpha i} dx \right]$$

← Integramos por partes con
1) $u = x \rightarrow du = dx$, $dv = e^{(\alpha i - 1)x} \rightarrow v = \frac{e^{(\alpha i - 1)x}}{\alpha i - 1}$
2) $u = x \rightarrow du = dx$, $dv = e^{(-1-\alpha i)x} \rightarrow v = \frac{e^{(-1-\alpha i)x}}{-1-\alpha i}$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2i} \left[-\int_0^{\infty} \frac{e^{(\alpha i - 1)x}}{\alpha i - 1} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{(-1-\alpha i)x}}{-1-\alpha i} dx \right]$$

$x e^{(\alpha i - 1)x}$ vale 0 cuando $x \to \infty$ porque es igual a $x e^{-x} e^{\alpha i x}$ y e^{-x} tiende a 0 más rápido de lo que crece x. Además, si α es real, $e^{\alpha i x}$ está acotado $\forall x \in \mathbb{R}$

Lo mismo para $x e^{(-1-\alpha i)x} = x e^{-x} e^{-\alpha i x}$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2i}\left[-\frac{e^{(\alpha i-1)x}}{(\alpha i-1)^2}\Big|_0^\infty + \frac{e^{(-1-\alpha i)x}}{(-1-\alpha i)^2}\Big|_0^\infty \right]$$

$e^{(\alpha i-1)x} = 0$, $e^{(-1-\alpha i)x} = 0$ → cuando $x \to \infty$ (si α es real)

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2i}\left[-\left[0 - \frac{e^0}{(\alpha i-1)^2}\right] + \left[0 - \frac{e^0}{(-1-\alpha i)^2}\right] \right]$$

← Por lo mencionado en la aclaración anterior

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(\alpha i-1)^2} - \frac{1}{(-1-\alpha i)^2} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2i}\left[\frac{(-1-\alpha i)^2 - (\alpha i-1)^2}{[(-1+\alpha i)(-1-\alpha i)]^2} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2i}\left[\frac{1+2\alpha i-\alpha^2-1+2\alpha i+\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2i}\left[\frac{4\alpha i}{(1+\alpha^2)^2} \right] = \underline{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}}$$

Transformada Coseno:

Primero extendemos f a todo $\mathbb{R}$ de forma que $f_c(-x) = f_c(x)$

Entonces, para $x \in (-\infty, 0]$ definimos $f_c(x) := f_c(-x) = -x\, e^{-(-x)}$ ← porque $-x \in [0,\infty)$ y usamos la definición normal de f

Entonces, la extensión par es: $f_c(x) = \begin{cases} xe^{-x} & ; x \geq 0 \\ -x\,e^{x} & , x \leq 0 \end{cases}$

Calculamos la transformada coseno según la convención vista en clase para funciones <u>pares</u>:

$$\hat{f}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_c(x) \cos(\alpha x)\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x e^{-x} \left[\frac{e^{\alpha x i} + e^{-\alpha x i}}{2} \right] dx$$

← Por la definición de f_c en $x \geq 0$ y la expresión compleja de coseno

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2} \int_0^\infty x\, e^{(-1+\alpha i)x} + x\, e^{(-1-\alpha i)x}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2} \left[\frac{x\, e^{(-1+\alpha i)x}}{-1+\alpha i}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{(-1+\alpha i)x}}{(-1+\alpha i)} dx + \frac{x\, e^{(-1-\alpha i)x}}{-1-\alpha i}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{(-1-\alpha i)x}}{-1-\alpha i} dx \right]$$

← Hacemos las dos integrales por partes, con

1) $u = x \to du = dx$, $dv = e^{(-1+\alpha i)x} \to v = e^{(-1+\alpha i)x}/(-1+\alpha i)$

2) $u = x \to du = dx$, $dv = e^{(-1-\alpha i)x} \to v = \dfrac{e^{(-1-\alpha i)x}}{-1-\alpha i}$

se anula por el mismo argumento de la parte anterior.

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2} \left[-\int_0^\infty \frac{e^{(-1+\alpha i)x}}{-1+\alpha i} dx - \int_0^\infty \frac{e^{(-1-\alpha i)x}}{-1-\alpha i} dx \right]$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(-1+\alpha i)x}}{(-1+\alpha i)^2}\Big|_0^\infty + \frac{e^{(-1-\alpha i)x}}{(-1-\alpha i)^2}\Big|_0^\infty \right]$$

si $\alpha \in \mathbb{R}$ → $e^{(-1+\alpha i)x} = e^{-x} e^{-\alpha i x}$ tiende a 0 cuando $x \to \infty$ porque $e^{-\alpha i x}$ está acotado $\forall x$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2} \left[0 - \frac{e^0}{(-1+\alpha i)^2} + 0 - \frac{e^0}{(-1-\alpha i)^2} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(-1+\alpha i)^2} + \frac{1}{(-1-\alpha i)^2} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2} \left[\frac{(-1-\alpha i)^2 + (-1+\alpha i)^2}{[(-1+\alpha i)(-1-\alpha i)]^2} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2} \left[\frac{1+2\alpha i-\alpha^2+1-2\alpha i-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2} \left[\frac{2-2\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} \right]$$

$$= \underline{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} \right]}$$

b) Usa el resultado del apartado anterior para probar que:

- $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen}(x)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4e}$

En la transformada de seno, teníamos que $f_s(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{para } x \geq 0 \\ -xe^{x} & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$

y la transformada resultó ser $\hat{f}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}$

Luego, según el teorema de inversión, podemos recuperar f_s a partir de $\hat{f}_s$ como:

$$f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha x)\, d\alpha \qquad \forall x$$

hacemos $x=1$, considerando que $f_s(1) = 1e^{-1} = 1/e$

$$\rightarrow \frac{1}{e} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha)\, d\alpha$$

$$\rightarrow \frac{1}{e} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2} \operatorname{sen}(\alpha)\, d\alpha$$

← sustituimos $\hat{f}(\alpha)$

Despeje: $\frac{1}{e} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2} \operatorname{sen}(\alpha)\, d\alpha \longrightarrow \int_0^\infty \frac{\alpha \operatorname{sen}(\alpha)}{(1+\alpha^2)^2} d\alpha = \frac{\pi}{4e}$

← es lo que se quería probar (con α en vez de x como variable muda)

- $\int_0^\infty \frac{(1-x^2)\cos(x)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2e}$

En la transformada de coseno, teníamos que $f_c(x) = \begin{cases} xe^{-x} & , x \geq 0 \\ xe^{x} & , x \leq 0 \end{cases}$

y su transformada resultó $\hat{f}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\right]$

Por el teorema de inversión, podemos recuperar f_c a partir de $\hat{f}_c$ como:

$$f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\alpha) \cos(\alpha x)\, d\alpha \qquad \forall x$$

Evaluamos en $x=1$, considerando que $f_c(1) = 1e^{-1} = 1/e$

$$\rightarrow \frac{1}{e} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\alpha) \cos(\alpha)\, d\alpha$$

$$\rightarrow \frac{1}{e} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\right] \cos(\alpha)\, d\alpha$$

$$\rightarrow \frac{1}{e} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} \cos(\alpha)\, d\alpha$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{(1-\alpha^2)\cos(\alpha)}{(1+\alpha^2)^2} = \frac{\pi}{2e}$$

← Lo que se quería probar, con α en vez de x como variable muda.

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^4}\,dx = \frac{\pi}{32}$$

Consideramos la función $f_s(x) = \begin{cases} x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ x e^{x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ que es impar

Calculamos su transformada (transformada "completa" definida por $\hat{f}_s(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f_s(x) e^{-i\alpha x}\,dx$, porque es la transformada que usamos en clase para demostrar Plancherel, que planeo usar).

$$\rightarrow \hat{f}_s(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f_s(x) e^{-i\alpha x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f_s(x)\cos(-\alpha x) + \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f_s(x)\,\text{sen}(-\alpha x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f_s(x)\cos(\alpha x) - \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f_s(x)\,\text{sen}(\alpha x)\,dx$$

Como f_s es impar $\rightarrow f_s(x)\cos(\alpha x)$ es impar. $f_s(x)\,\text{sen}(\alpha x)$ es par. Simplificamos entonces las integrales

$$= -\frac{2i}{2\pi}\int_0^\infty f_s(x)\,\text{sen}(\alpha x)\,dx$$

$$= -\frac{i}{\pi}\left(\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}\right)$$

Esta integral ya la habíamos hecho en la transformada-seno de f_s

Luego, el teorema de Plancherel dice que $\|f_s\|_2^2 = 2\pi\|\hat{f}_s\|_2^2$

• Calculamos $\|f_s\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |f_s(x)|^2\,dx$ ← Por def. de $\|\cdot\|$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f_s^2(x)\,dx$$ ← Porque $f_s(x)$ es real

$$= \frac{1}{2\pi}\,2\int_0^\infty f_s^2(x)\,dx$$ ← Como $f_s(x)$ es impar $\rightarrow f_s^2(x)$ es par $\rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_s^2 = 2\int_0^\infty f_s^2$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x^2 e^{-2x}$$ ← Definición de $f_s(x)$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{x^2\frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^\infty}^{\,0} - \int_0^\infty 2x\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx\right]$$ ← Por partes. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$; $u = x^2 \rightarrow du = 2x$, $dv = e^{-2x} \rightarrow v = \frac{e^{-2x}}{-2}$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x e^{-2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{x\frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^\infty}^{\,0} - \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{-2}\,dx\right]$$ ← Por partes $u = x \rightarrow du = dx$, $dv = e^{-2x} \rightarrow v = \frac{e^{-2x}}{-2}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-2x} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{4\pi}$$

• Calculamos $\|\hat{f}_s\|_2^2 \rightarrow \|\hat{f}_s\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_s(\alpha)|^2\,d\alpha$ ← Def. de $\|\cdot\|$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|-\frac{i}{\pi}\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}\right|^2 d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{4\alpha^2}{\pi^2(1+\alpha^2)^2}\,d\alpha$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_0^\infty\frac{4\alpha^2}{\pi^2(1+\alpha^2)^2}\,d\alpha$$ ← Como $\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}$ es claramente par $\rightarrow \int_{\mathbb{R}}\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\,d\alpha = 2\int_0^\infty\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\,d\alpha$

$$= \frac{4}{\pi^3}\int_0^\infty\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\,d\alpha$$

Usamos Plancherel: $\|f\|_2^2 = 2\pi\|\hat{f}\|_2^2$

$$\rightarrow \frac{1}{4\pi} = 2\pi\frac{4}{\pi^3}\int_0^\infty\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\,d\alpha$$

$$\rightarrow \int_0^\infty\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\,d\alpha = \frac{\pi}{32}$$

Extra: Sea $D_N(x)$ el polinomio trigonométrico definido por $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$

Demostrar que el polinomio trigonométrico $F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$ se puede escribir como:

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{sen(Nx/2)}{sen(x/2)}\right)^2$$

Olvidándonos del factor $1/N$, básicamente hay que probar que

$$\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \left(\frac{sen(Nx/2)}{sen(x/2)}\right)^2 \quad \dots (1)$$

Analizemos el lado Izquierdo $\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$:

Por la definición de $D_n(x)$, esto es igual a $\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}}$ Def. de $D_n(x)$ con variable muda de sumación k para no confundir.

Si desarrollamos la suma exterior, queda:

$$\sum_{k=0}^{0} e^{ikx} + \sum_{k=-1}^{1} e^{ikx} + \sum_{k=-2}^{2} e^{ikx} + \dots + \sum_{k=1-N}^{N-1} e^{kx}$$

Y lo escribimos de otra forma:

$$\begin{aligned}
n=0 &= \sum_{k=0}^{0} e^{ikx} = e^0 \\
n=1 &= \sum_{k=-1}^{1} e^{ikx} = + \quad e^{-xi} + e^0 + e^{xi} \\
n=2 &= \sum_{k=-2}^{2} e^{ikx} = + \quad e^{-2xi} + e^{-xi} + e^0 + e^{xi} + e^{2xi} \\
n=3 &= \sum_{k=-3}^{3} e^{ikx} = + \quad e^{-3xi} + e^{-2xi} + e^{-xi} + e^0 + e^{xi} + e^{2xi} + e^{3xi} \\
&\vdots \\
n=N-1 &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} = e^{-(N-1)xi} + \dots + e^{-3xi} + e^{-2xi} + e^{-xi} + e^0 + e^{xi} + e^{2xi} + e^{3xi} + \dots + e^{(N-1)xi} \\
& \qquad -(N-1) \quad \dots \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1
\end{aligned}$$

y hay que hacer esa suma ↗

Nos preguntamos cuántas veces aparece el término e^{lxi} para $l \in \{-(N-1), -(N-2), \dots, 0, 1, \dots, N-1\}$

Fácil, sólo hay que ver la altura de la pirámide en la columna l.

Vemos que e^0 aparece $N-1$ veces, e^{xi} y e^{-xi} aparecen $N-2$ veces, e^{2xi}, e^{-2xi} aparecen $N-3$ veces, ..., $e^{(2-N)xi}$ y $e^{(N-2)xi}$ aparecen 2 veces y $e^{(1-N)xi}$, $e^{(N-1)xi}$ una vez.

Por ahora dejamos esta suma y consideramos el lado derecho de (1)

Analizemos el lado Derecho de (1)

$$\left(\frac{\operatorname{sen}(Nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)}\right)^2 = \left(\frac{(e^{Nx/2\, i} - e^{-Nx/2\, i})/2i}{(e^{x/2\, i} - e^{-x/2\, i})/2i}\right)^2$$ ← Expresión compleja de sin

$$= \left(\frac{e^{Nx/2\, i} - e^{-\frac{Nx}{2} i}}{e^{x/2\, i} - e^{-x/2\, i}}\right)^2 = \left[\frac{e^{-\frac{N}{2}xi}}{e^{-x/2\, i}}\left(\frac{e^{Nxi} - 1}{e^{xi} - 1}\right)\right]^2$$ ← Factorizamos

sea $z := e^{xi}$

$$= \left[\frac{z^{-N/2}}{z^{-1/2}}\left(\frac{z^N - 1}{z - 1}\right)\right]^2$$ ← Reconocemos la fórmula de suma geométrica (de los primeros N términos) que es $1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z}$ $\forall z$

$$= \left[\frac{z^{-N/2}}{z^{-1/2}}\left[-(1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1})\right]\right]^2$$

$$= \left[\frac{z^{-N/2}}{z^{-1/2}}\sum_{k=0}^{N-1} z^k\right]^2$$

$$= \frac{z^{-N}}{z^{-1}}\left(\sum_{k=0}^{N-1} z^k\right)^2 = \frac{z^{-N}}{z^{-1}}\left(\sum_{k=0}^{N-1} z^k\right)\left(\sum_{j=0}^{N-1} z^j\right)$$ ← Expresamos las 2 sumas con distinto índice

$$= \frac{z^{-N}}{z^{-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} z^{k+j}$$ ← Juntamos las sumas

$$= z^{1-N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} z^{k+j} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} z^{k+j+1-N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} e^{(k+j+1-N)xi}$$ ← Sustituimos $z = e^{xi}$ de vuelta

hacemos el cambio $j' = j + 1 - N$ → $= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j'=1-N}^{0} e^{(k+j)xi}$

hacemos la suma interior: $\sum_{k=0}^{N-1}\left[e^{(1-N+k)xi} + e^{(2-N+k)xi} + e^{(3-N+k)xi} + \dots + e^{(-2+k)xi} + e^{(-1+k)xi} + e^{kxi}\right]$

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

y ahora la suma de k:

$k=0:\quad e^{(1-N)xi} + e^{(2-N)xi} + e^{(3-N)xi} + \dots + e^{-2xi} + e^{-xi} + e^0$

$k=1:\quad + e^{(2-N)xi} + e^{(3-N)xi} + e^{(4-N)xi} + \dots + e^{-xi} + e^0 + e^{xi}$

$k=2:\quad + e^{(3-N)xi} + e^{(4-N)xi} + e^{(5-N)xi} + \dots + e^0 + e^{xi} + e^{2xi}$

$k=3:\quad + e^{(4-N)xi} + e^{(5-N)xi} + e^{(6-N)xi} + \dots + e^{xi} + e^{2xi} + e^{3xi}$

$\vdots \qquad e^{(N-1)xi}$

$k=N-1:\quad + e^0 + e^{xi} + e^{2xi} + \dots + e^{(N-3)xi} + e^{(N-2)xi} + e^{(N-1)xi}$

El resultado es un cuadrado (de $N-1 \times N-1$) con muchos términos. Donde e^0 se encuentra en toda la diagonal, e^{xi} y e^{-xi} en la siguiente diagonal, e^{2xi}, e^{-2xi} en la que sigue y así.

Entonces vemos que e^0 aparece N-1 veces, e^{xi}, e^{-xi} aparecen N-2 veces, e^{2xi}, e^{-2xi} aparecen N-3 veces, ..., $e^{(2-N)xi}, e^{(N-2)xi}$ aparecen 2 veces y $e^{(1-N)xi}, e^{(N-1)xi}$ una vez.

Vemos que ambas sumas tienen el mismo número de términos de cada tipo y $\therefore$ son iguales.

$$\Rightarrow \text{Se cumple (1)} \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \left(\frac{\operatorname{sen}(Nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)}\right)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_N(x)} = \frac{1}{N}\left(\frac{\operatorname{sen}(Nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)}\right)^2$$

$$\Rightarrow F_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\operatorname{sen}(Nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)}\right)^2$$

P.D: no supe cómo usar el hint o algo de Fourier por más que lo intenté mucho. Así que trabajé con $\left(\frac{\operatorname{sen}(Nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)}\right)^2$ y usé el truco de la suma geométrica porque recordé haber visto esta expresión en óptica alguna vez que provenía de una suma.