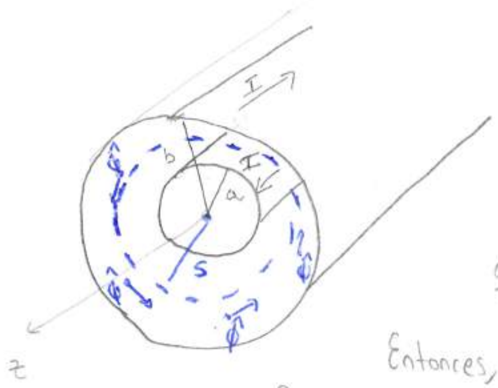
2, a) Un cable coaxial consiste de dos tubos cilíndricos muy largos separados por un material aislante lineal con susceptibilidad magnética χ_m. Sobre el conductor interno fluye una corriente I que regresa por el conductor externo, para ambos la corriente se distribuye uniformemente en la superficie.
Encuentra el campo magnético en la región entre los tubos.



Parece ser un problema para resolver con la ley de Ampere $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = I_{enc}$

Sin embargo, para la ley de Ampere se necesita saber la corriente total que fluye a través de un circuito. Y en este caso, como hay un medio involucrado, hay corrientes ligadas que por ahora no conocemos.

Entonces, conviene usar la ley para el campo $\vec{H}$: $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{libre\ enc}$

Donde ahora $I_{Libre\ enc}$ es la corriente libre encerrada, que sí la podemos conocer.

Usamos como circuito de Ampere el circuito azul de radio s mostrado.

La ley dice:
$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{libre\ enc}$$
$$= I$$

I es la corriente libre del tubo interior. No hace falta considerar otras corrientes.

Ahora bien, por la simetría radial del problema, podemos ver que $\vec{H}$ no tiene componente radial ni tampoco componente paralelo al tubo (porque las corrientes generan campos magnéticos perpendiculares a su dirección).

Entonces, $\vec{H}$ rodea el tubo y apunta siempre en la dirección de $\hat{\phi}$ marcado en la figura.
(Regla de la mano derecha)

Además H tiene la misma magnitud a lo largo de todo el camino, porque todos estos puntos están a la misma distancia de las corrientes por la simetría radial.

$$\Rightarrow \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$$

$$\rightarrow \oint |H|\hat{\phi}\cdot s\, d\hat{\phi} = I$$

Como dijimos, $\vec{H} = |H|\hat{\phi}$ y por la elección del circuito, $d\vec{l} = s\,d\hat{\phi}$

$$\rightarrow |H| s \oint d\phi = I$$

$|H|$ es constante en todo el camino y el radio s también.

$$\rightarrow |H|\, 2\pi s = I$$

$$\Rightarrow |H| = \frac{I}{2\pi s}$$

$$\therefore\ \vec{H} = \frac{I}{2\pi s}\hat{\phi}$$

Teniendo $\vec{H}$, como en la zona entre los cables hay un medio con susceptibilidad χ_m, (y es un medio lineal) se cumple que $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 (1 + \chi_m) I}{2\pi s} \hat{\phi}$$ ← por el resultado de $\vec{H}$

Para verificar, calcula la magnetización y las corrientes ligadas correspondientes y confirma que (junto con las cargas libres) generan el campo magnético correcto.

Por ser un medio lineal, entre los cables se cumple que $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{\chi_m I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

• Calculamos las corrientes ligadas generadas por esta magnetización en el medio entre los cables:

- Densidad de corriente: $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$

$$= \left(\frac{1}{s} \frac{\partial M_z}{\partial \phi} - \frac{\partial M_\phi}{\partial z} \right) \hat{s} + \left(\frac{\partial M_s}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial s} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial (s M_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial M_s}{\partial \phi} \right) \hat{z}$$ ← $\nabla \times$ en cilíndricas

Donde $M_z = 0$, $M_s = 0$, $M_\phi = \frac{\chi_m I}{2\pi s}$. Sustituimos esto:

$$= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\chi_m I}{2\pi s} \right) \hat{s} + 0 \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\chi_m I}{2\pi s} \right) \right) \hat{z}$$

$$= 0 \hat{s} + 0 \hat{\phi} + 0 \hat{z} = \vec{0}$$

$\therefore \vec{J}_b = \vec{0}$

- Superficial: Se calcula como $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$ con $\hat{n}$ el vector ortogonal a la superficie

Aquí tenemos una superficie interna y una externa

• Interna

← Cable interno.

El vector perpendicular a esta superficie es $\hat{n} = -\hat{r}$.

$\vec{M}$ evaluado en la superficie $s = a$

$$\therefore \vec{K}_b = \vec{M} \times (-\hat{r}) = \frac{\chi_m I}{2\pi a} \hat{\phi} \times (-\hat{r})$$

↖ vemos en la figura que $\hat{\phi}$ y $-\hat{r}$ son ortogonales y por la regla de mano derecha, su producto apunta en $\hat{z}$

$$\Rightarrow \vec{K}_b = \frac{\chi_m I}{2\pi a} \hat{z}$$ ← Superficie $s = a$

• Externa

← Cable externo

El vector perpendicular es $\hat{n} = \hat{r}$ ← $\vec{M}$ evaluado en superficie $s = b$

$$\rightarrow \vec{K}_b = \vec{M} \times (\hat{r}) = \frac{\chi_m I}{2\pi b} \hat{\phi} \times \hat{r}$$

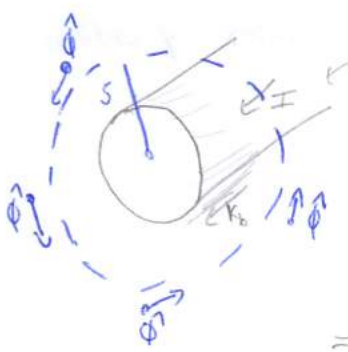
$$= -\frac{\chi_m I}{2\pi b} \hat{z}$$ ← Superficie $s = b$

Ahora ya podemos calcular $\vec{B}$ usando $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{Tot\,enc}$

Con $I_{Tot\,enc}$ la corriente total que pasa por el circuito.

Usamos el mismo circuito que usamos antes.

Ahora la corriente total que pasa dentro es la corriente libre I y la densidad de corriente superficial ligada en la superficie interna $K_b = \frac{\chi_m I}{2\pi a}\hat{z}$



La corriente superficial $K_b = \frac{\chi_m I}{2\pi a}\hat{z}$ genera una corriente

$$I_b = K_b\,(2\pi a) \quad \text{← longitud sobre la que fluye } K_b \text{ (perímetro del cilindro)}$$
$$= \frac{\chi_m I}{2\pi a}(2\pi a)$$
$$= \chi_m I \quad \text{← en dirección } \hat{z}$$

$\Rightarrow$ La corriente total encerrada es:

$$I_{Tot\,enc} = I + I_b$$
$$= I + \chi_m I$$
$$= (1+\chi_m) I \qquad (1)$$

Luego, por los mismos argumentos de simetría que usamos para $\vec{H}$, $|\vec{B}|$ es constante en todo el circuito y tiene dirección $\hat{\phi}$

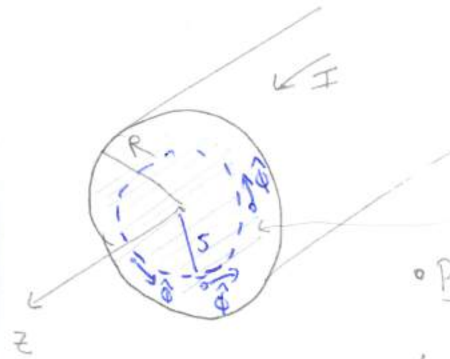
y por lo tanto: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = |\vec{B}|\,(\text{perímetro}) = |\vec{B}|\,(2\pi s)$, (2)

Sustituimos (1) y (2) en la ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{Tot\,enc}$$
$$\rightarrow |\vec{B}|\, 2\pi s = \mu_0 (1+\chi_m) I$$
$$\Rightarrow |\vec{B}| = \mu_0 \frac{1+\chi_m}{2\pi s} I$$

$$\therefore \boxed{\vec{B} = \frac{(1+\chi_m)\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}}$$ ← Mismo resultado de antes.

b) Ahora considera un cable largo (con volumen) tiene una corriente uniformemente distribuida en su sección transversal (circular). La corriente regresa a lo largo de su superficie externa.
Encuentra la auto inductancia por unidad de longitud. Hint: primero calcula la energía magnética almacenada en un tramo l del cable, compara con la energía expresada en función de la auto inductancia.



Digamos que el cable lleva una corriente total I y tiene un radio R.

Para calcular $\vec{B}$, usamos la ley de Ampere con el circuito circular de radio $s<R$ que se muestra en la figura.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

- Primero calculamos I_{enc}: Es la corriente que pasa dentro de un radio s, es decir, en un área de πs^2.

La corriente total de todo el cable es I, que pasa por un área total πR^2. Como está distribuida uniformemente, tenemos una corriente por unidad de área de $I/\pi R^2$ que es constante.

Entonces en el área πs^2 en cuestión, pasa una corriente de $I_{enc} = \underbrace{\frac{I}{\pi R^2}}_{\text{corriente por unidad de área}} \underbrace{(\pi s^2)}_{\text{área}}$

$$\rightarrow I_{enc} = \frac{I s^2}{R^2} \quad (1)$$

Por otro lado, por la simetría radial del arreglo, $\vec{B}$ tiene la misma magnitud en todo el circuito de radio s. Además, por la regla de la mano derecha, $\vec{B}$ apunta siempre en la dirección $\hat{\phi}$ $\Rightarrow \vec{B} = |\vec{B}|\,\hat{\phi}$

∴ Reemplazamos en la ley de Ampere:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$\rightarrow \oint |\vec{B}|\,\hat{\phi}\cdot s\,d\phi\,\hat{\phi} = \mu_0 I_{enc} \quad \text{pues en el camino, } d\vec{l} = s\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$\rightarrow |\vec{B}|\, s \oint d\phi = \mu_0 I_{enc} \quad \text{En el circuito se tiene } |B| = cte,\ s = cte$$

$$\rightarrow |\vec{B}|\, s\,(2\pi) = \mu_0 \frac{I s^2}{R^2} \quad \text{por (1) y } \oint d\phi = 2\pi$$

$$\rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I s}{2\pi R^2}$$

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi R^2}\,\hat{\phi}$$

- Fuera del cilindro: Como hay una corriente de regreso que pasa por la superficie; fuera del cilindro se cancela la corriente de ida con la de vuelta. Y cualquier circuito amperiano que rodee totalmente el cable tendrá $I_{enc} = 0$. $\therefore$ Fuera del cilindro se tiene $\vec{B} = 0$.

Entonces
$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I s}{2\pi R^2} \hat{\phi} & , s < R \\ 0 & , s > R \end{cases}$$

- Energía: Calculamos la energía guardada en un pedazo de longitud ℓ

Vimos que la energía es: $W = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, d\tau$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{z=0}^{\ell} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{s=0}^{R} B^2 \, d\tau$$

$\leftarrow$ Integramos con z de 0 a ℓ, ϕ de 0 a 2π y s de 0 a R para encapsular todo un pedazo de cilindro

s va de 0 a R porque en $s > R \to B = 0$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} B^2 \, s \, ds \, d\phi \, dz$$

$\leftarrow$ Diferencial de volumen cilíndrico $dV = s\,ds\,d\phi\,dz$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \frac{\mu_0^2 I^2 s^2}{4\pi^2 R^4} \, s \, ds \, d\phi \, dz$$

$\leftarrow$ usamos el resultado de B

$$= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^4} \int_0^{\ell} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R} s^3 \, ds$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^4} (\ell)(2\pi)\left(s^4/4\right)\Big|_0^R$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^4} (\ell)(2\pi)\left(R^4/4\right) = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{16\pi}$$

$\to \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$ por unidad de longitud

Pero sabemos que la energía de un inductor es $W = \frac{1}{2} L I^2$

Entonces, usando la W encontrada $\to \frac{\mu_0 I^2 \ell}{16\pi} = \frac{1}{2} L I^2 \to L = \frac{\mu_0 \ell}{8\pi}$

$\therefore$ La inductancia por unidad de longitud es $\boxed{\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{8\pi}}$

Acepto que estos problemas sean considerados para la evaluación del semestre 2021-2

Tomás Basile