Electromagnetismo I   Tarea 6 / 2° Parcial   Tomás Basile Álvarez

1) Tres capacitores de la misma área y separación. Sea C_0 la capacitancia del que está vacío y en los otros se ocupa parcialmente por un dieléctrico K.

a) 

Para el capacitor que está vacío, la capacitancia es $C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$.

↖ Omitiendo los efectos de borde, este capacitor se puede ver como dos capacitores en serie.

i) El primero con el dieléctrico K, área A, distancia $d/2$

$$\Rightarrow C_1 = K \frac{\varepsilon_0 A}{d/2} = 2K \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \underline{2K C_0}$$

ii) El segundo en el vacío, área A, distancia $d/2$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d/2} = 2 \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \underline{2 C_0}$$

Como están en serie: $1/C_{tot} = 1/C_1 + 1/C_2 = 1/2KC_0 + 1/2C_0 = \frac{1+K}{2KC_0}$

$$\Rightarrow \boxed{C_{tot} = \frac{2KC_0}{1+K}}$$

b) 

← Omitiendo efectos de borde, puede verse como dos capacitores en paralelo.

i) El primero con dieléctrico K, área $A/2$, distancia d

$$\rightarrow C_1 = K \frac{\varepsilon_0 A/2}{d} = K \frac{\varepsilon_0 A}{2d} = \underline{\frac{K}{2} C_0}$$

ii) El segundo en el vacío, con área $A/2$, distancia d

$$\rightarrow C_2 = \frac{\varepsilon_0 A/2}{d} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \underline{\frac{C_0}{2}}$$

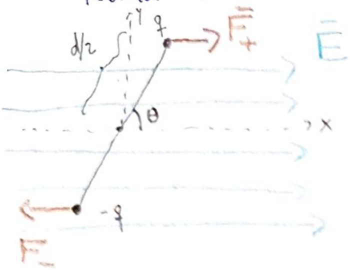
Como están en paralelo: $C_{tot} = C_1 + C_2 = \frac{K}{2} C_0 + \frac{1}{2} C_0 = \frac{(K+1)}{2} C_0$

$$\therefore \boxed{C = \frac{K+1}{2} C_0}$$

© Como comprobación, vemos que ambos resultados tienen la dimensión correcta [Faradios)

Además, si hacemos $K=1$ (haciendo desaparecer el dieléctrico) → ambos resultados se reducen a C_0, como deberían.

2) Un dipolo con cargas $\pm q$ separadas s se coloca en un campo uniforme $\bar{E}$. Demuestra que la fuerza total es nula y la torca es $\bar{N} = \bar{p} \times \bar{E}$



Calculamos la fuerza sobre cada carga:

$$\bar{F}_+ = \bar{E} q \quad , \quad \bar{F}_- = \bar{E}(-q)$$

$$\rightarrow \bar{F}_{tot} = \bar{F}_- + \bar{F}_+ = \bar{E}(-q) + \bar{E} q = \underline{\bar{0}}$$

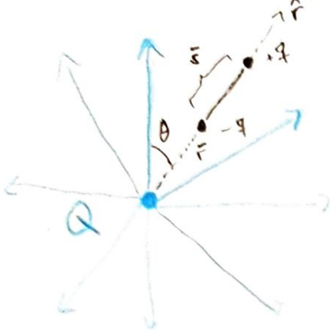
Torcas:

•) Torca de $\bar{F}_+$: $\bar{\tau}_+ = \bar{r}_+ \times \bar{F}_+ = -|\bar{r}_+||\bar{F}_+| \operatorname{sen}\theta \, \hat{z} = \underline{-\frac{d}{2} |\bar{E}| q \operatorname{sen}\theta \, \hat{z}}$

••) Torca de $\bar{F}_-$: $\bar{\tau}_- = \bar{r}_- \times \bar{F}_- = -|\bar{r}_-||\bar{F}_-| \operatorname{sen}\theta \, \hat{z} = \underline{-d/2 \, |\bar{E}| q \operatorname{sen}\theta \, \hat{z}}$

∴ Torca total: $\bar{\tau} = \bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_- = -d|\bar{E}| q \operatorname{sen}\theta \, \hat{z} = -|\bar{p}||\bar{E}| \operatorname{sen}\theta \, \hat{z} = \underline{\bar{p} \times \bar{E}}$

b) Ahora considera el campo eléctrico producido por una carga puntual. ¿Cuál es la fuerza neta sobre el dipolo? Es de ayuda orientar el dipolo radialmente. Con el resultado, demuestra $F_x = \bar{p} \cdot \nabla E_x$



La fuerza total es $\bar{F} = \bar{F}_+ + \bar{F}_-$

El campo de la carga puntual es $E(\bar{r}) = KQ \frac{1}{|\bar{r}|^2} \hat{r}$

$$\Rightarrow \bullet \; \bar{F}_+ = q E(\bar{r} + \bar{s}) = KQq \frac{1}{|\bar{r} + \bar{s}|^2} \hat{r}$$

El mismo $\hat{r}$ porque están alineados radialmente.

$$\bullet \; \bar{F}_- = -q E(\bar{r}) = -KQq \frac{1}{|\bar{r}|^2} \hat{r}$$

$$\therefore \bar{F}_{tot} = KQq \left(\frac{1}{|\bar{r} + \bar{s}|^2} - \frac{1}{|\bar{r}|^2} \right) \hat{r}$$

Ahora, probaré: $F_x = \bar{p} \cdot \nabla E_x$

- Por un lado: $F_x = |\bar{F}| \operatorname{sen}\theta$ ← por como se define θ

$$= KQq \left(\frac{1}{|\bar{r} + \bar{s}|^2} - \frac{1}{|\bar{r}|^2} \right) \operatorname{sen}\theta = KQq \left(\frac{1}{(r+s)^2} - \frac{1}{r^2} \right) \operatorname{sen}\theta$$

Si $\bar{r}$ tiene norma r
y $\bar{s}$ norma s
→ $\bar{r} + \bar{s}$ tiene norma $r+s$ por estar alineados radialmente.

$$= \frac{KQq}{r^2} \left(\frac{1}{(1 + \frac{s}{r})^2} - 1 \right) \operatorname{sen}\theta = \frac{KQq}{r^2} \left[1 - \frac{2s}{r} - 1 \right] \operatorname{sen}\theta$$

aproximamos $s \ll r$
$\rightarrow \frac{1}{(1 + s/r)^2} \approx 1 - \frac{2s}{r}$

$$= -\frac{2KQqs}{r^3} \operatorname{sen}\theta \qquad \therefore \; F_x = -\frac{2KQqs}{r^3} \operatorname{sen}\theta \quad \ldots (1)$$

- Por otro lado: $E_x = |\bar{E}| \operatorname{sen}\theta = \frac{KQ}{r^2} \operatorname{sen}\theta$

Pero, En coordenadas cilíndricas: $\nabla E_x = \frac{\partial E_x}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_x}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial E_x}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$

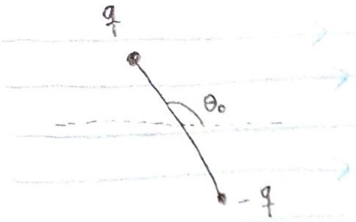
$$= -\frac{2KQ}{r^3} \operatorname{sen}\theta \, \hat{r} + \frac{KQ}{r^3} \cos\theta \, \hat{\theta},$$

pero $\bar{p} = q\bar{s} = qs\hat{r}$, (porque $\bar{s}$ es radial)

$$\rightarrow \bar{p} \cdot \nabla E_x = qs\hat{r} \cdot \left(-\frac{2KQ}{r^3} \operatorname{sen}\theta \, \hat{r} + \frac{KQ}{r^3} \cos\theta \, \hat{\theta} \right) = -\frac{2KQqs}{r^3} \operatorname{sen}\theta \quad \ldots (2)$$

por (1) y (2) → $F_x = \bar{p} \cdot \nabla E_x$

3. a) Demuestra que la energía potencial de un dipolo en un campo uniforme es $U = -\bar{p}\cdot\bar{E}$



Calculamos el trabajo para girar el dipolo desde la posición horizontal hasta θ_0.

El trabajo para rotar un objeto es: $W = \int_0^{\theta_0} \tau(\theta)\, d\theta$

$$= \int_0^{\theta_0} |\bar{p}||\bar{E}| \operatorname{sen}\theta \, d\theta \quad \longleftarrow \text{por el ejercicio 2.a)}$$

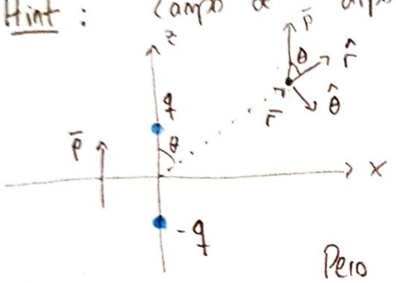
$$= -|\bar{p}||\bar{E}|\cos\theta \Big|_0^{\theta_0} = |\bar{p}||\bar{E}| - \bar{p}\cdot\bar{E}$$

Pero al ser $|\bar{p}||\bar{E}|$ constante, podemos fijarlo y medir la energía sólo respecto a este número.

$$\rightarrow U = -\bar{p}\cdot\bar{E}$$

b) Energía de interacción entre dos dipolos $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ separados por un vector $\bar{r}$.

Hint: campo de dipolo $\bar{p}_1$



Sabemos que genera un potencial $\phi(\bar{r}) = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$\rightarrow \bar{E} = -\nabla\phi = -\left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right]$$

$$= \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{r} + \frac{p\operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\theta}$$

Pero por otro lado, el vector $\bar{p} = \bar{p}\cdot\hat{r}\,\hat{r} + \bar{p}\cdot\hat{\theta}\,\hat{\theta} = \overbrace{p\cos\theta}^{\bar{p}\cdot\hat{r}}\,\hat{r} - \overbrace{p\operatorname{sen}\theta}^{\bar{p}\cdot\hat{\theta}}\,\hat{\theta}$

Entonces, $\bar{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2p\cos\theta\,\hat{r} + p\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}\right] = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3p\cos\theta\,\hat{r} - (p\cos\theta\,\hat{r} - p\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta})\right]$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[(3\bar{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \bar{p}\right]$$

- Energía entre los dipolos:

El dipolo $\bar{p}_1$ genera un campo $\bar{E}_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\bar{p}_1\cdot\hat{r})\hat{r} - \bar{p}_1\right]$

pero por el inciso a): La energía del dipolo $\bar{p}_2$ por la interacción es:

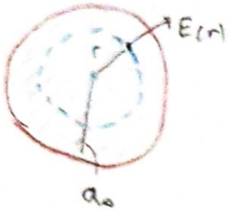
$$U = -\bar{p}_2\cdot\bar{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\bar{p}_2\cdot\left[3(\bar{p}_1\cdot\hat{r})\hat{r} - \bar{p}_1\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\bar{p}_2\cdot(3\bar{p}_1\cdot\hat{r})\hat{r} - \bar{p}_2\cdot\bar{p}_1\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\bar{p}_1\cdot\bar{p}_2 - 3(\bar{p}_1\cdot\hat{r})(\bar{p}_2\cdot\hat{r})\right]$$

4. En el esquema de mecánica cuántica, la densidad de carga de la nube de electrones es $\rho(r) = \frac{q}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$. Encuentre la polarizabilidad atómica.

•) Calcular $\bar{E}(\bar{r})$ de la nube de electrones.



Como la configuración de la nube es radial (ρ es radial)
→ por simetría, el campo es radial.

Por ley de Gauss, para una esfera S de radio $r < a_0$ concéntrica.

$$Q_{in} = \varepsilon_0 \int_S \bar{E} \cdot d\bar{a} = \varepsilon_0 \int_S |\bar{E}|\,|d\bar{a}| = \varepsilon_0 |\bar{E}| \int_S |d\bar{a}| = \underline{\varepsilon_0 |\bar{E}| 4\pi r^2} \quad \cdots (1)$$

porque $\bar{E}$ radial

Alternativamente, podemos calcular Q_{in} como:

$$Q_{in} = \int_S \rho(r)\, dV$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \frac{q}{\pi a_0^3} e^{-2r'/a_0} r'^2 \operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\phi'$$
$$= \frac{q}{\pi a_0^3}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \int_0^{r} e^{-2r'/a_0} r'^2\, dr' = \frac{q}{\pi a_0^3}(2\pi)(2)\int_0^r r'^2 e^{-2r'/a_0}\, dr'$$
$$= \frac{4q}{a_0^3}\int_0^r r'^2 e^{-2r'/a_0}\, dr'$$

Por partes

$$= \frac{4q}{a^3}\left[\frac{-ar'^2}{2} e^{2r'/a_0} - \int_0^r -ar' e^{-2r'/a_0}\, dr'\right]$$
$$= \frac{4q}{a^3}\left[-\frac{ar'^2}{2} e^{2r/a} - \frac{a^2}{2} r' e^{-2r'/a} + \int_0^r \frac{a^2}{2} e^{-2r'/a}\, dr'\right]$$
$$= \frac{4q}{a^3}\left[-\frac{ar'^2}{2} e^{-2r'/a} - \frac{a^2}{2} r' e^{-2r'/a} - \frac{a^3}{4} e^{-2r'/a}\right]\Big|_0^r$$
$$= \frac{4q}{a^3}\left[-\frac{ar^2}{2} e^{-2r/a} - \frac{a^2}{2} r e^{-2r/a} + \frac{a^3}{4} e^{-2r/a} + \frac{a^3}{4}\right] = q\left[1 - e^{-\frac{2r}{a}}\left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2}\right)\right]$$

Pero aproximamos $r << a_0 \Rightarrow h \equiv r/a_0 << 1$

ahora hacemos la expansión de e^{-2h} porque $h << 1$

$$\therefore Q_{in} = q\left[1 - e^{-2h}(1 + 2h + 2h^2)\right]$$
$$\approx q\left[1 - (1 - 2h + 2h^2 - \tfrac{4}{3}h^3)(1 + 2h + 2h^2)\right]$$
$$= q\left[1 - (1 - 2h + 2h^2 - \tfrac{4}{3}h^3 + 2h - 4h^2 + 4h^3 - \tfrac{8}{3}h^4 + 2h^2 - 4h^3 + 4h^4 - \tfrac{8}{3}h^5)\right]$$
$$= q\left[\tfrac{4}{3}h^3 + \tfrac{8}{3}h^4 - 4h^4 + \tfrac{8}{3}h^5\right]$$
$$\approx \underline{\tfrac{4}{3} q h^3}$$

porque $h << 1$. Despreciamos los términos $h^4, h^5, \ldots$

$$\therefore \boxed{Q_{in} = \frac{4}{3} q \frac{r^3}{a^3}}$$

Pero por la ecuación 1 $\rightarrow \varepsilon_0 |\bar{E}| 4\pi r^2 = \frac{4}{3} q \frac{r^3}{a^3} \rightarrow \underline{|\bar{E}| = \frac{qr}{3\pi\varepsilon_0 a^3}}$

Para que el protón esté en equilibrio al polarizar el átomo, el campo de la nube debe de ser igual al externo

evaluado en la posición donde está el protón (a distancia r del centro de la nube)

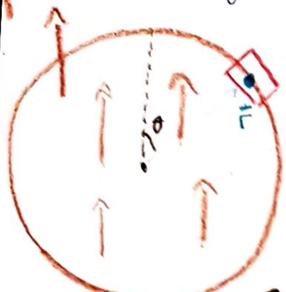
$$\rightarrow |\bar{E}| = |\bar{E}_0| \rightarrow |\bar{E}_0| = \frac{qr}{3\pi\varepsilon_0 a^3} \rightarrow qr = 3\pi\varepsilon_0 a_0^3 |\bar{E}|$$

Pero qr es el momento dipolar: $\underline{\bar{p} = 3\pi\varepsilon_0 a_0^3 \bar{E}}$

$\therefore$ polarizabilidad: $\underline{\alpha = 3\pi\varepsilon_0 a^3}$

En el caso del hidrógeno: $\alpha = 3\pi(8.8541 \cdot 10^{-12})(5.29 \cdot 10^{-11})^3 = \underline{4.414 \times 10^{-21} m^3}$

5. Considera una esfera sólida con densidad de polarización $\bar{P}$ uniforme. Calcula el campo dentro y fuera de la esfera y demostrar que afuera el campo es el de un dipolo y justo en el polo, su magnitud es el doble que el campo en el interior.



Sabemos, por un resultado importante en clase, que $\bar{\nabla}\cdot\bar{P} = -\rho_{ligada}$ ... (1)

En este caso, todas las cargas son ligadas (pues no hay libres)

- Dentro de la esfera: Dentro de la esfera $\bar{P}$ es cte y por tanto $\bar{\nabla}\cdot\bar{P}(\bar{r}) = 0$ entonces $\rho_{ligada} = 0$
- En la superficie de la esfera:

Si hacemos zoom al punto $\bar{r}$ y dibujamos un cubito que a penas entre a la esfera y alineado radialmente.

El flujo de $\bar{P}$ por el cubito sólo sucede por la cara inferior (porque las otras caras están afuera y ahí $\bar{P} = \bar{0}$)

$$\rightarrow \quad \Phi_{\bar{P}} = \int_{\square} \bar{P}\cdot d\bar{a} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teo. de div}}}{=} \int_{\square} \nabla\cdot\bar{P}\, dV \underset{\substack{\uparrow \\ (1)}}{=} \int_{\square} -\rho_{ligada}\, dV = -Q_{\text{ligada dentro de } \square}$$

Pero, por otro lado, el flujo por el cubo también se puede calcular como la componente de $\bar{P}$ perpendicular a la cara inferior del cubo $(-|\bar{P}|\cos\theta)$ por su área $|\bar{A}|$

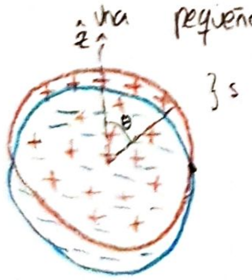
$$\therefore \quad \Phi_{\bar{P}} = -|\bar{P}||\bar{A}|\cos\theta$$

Luego, juntando las dos expresiones, $-|\bar{P}||\bar{A}|\cos\theta = -Q_{ligada} \rightarrow \frac{Q_{lig}}{|\bar{A}|} = |\bar{P}|\cos\theta$

$$\therefore \quad \sigma \equiv \frac{Q_{lig}}{|\bar{A}|} = |\bar{P}|\cos\theta.$$

$\therefore$ En la superficie, se distribuye una carga con densidad superficial $\underline{\sigma = |\bar{P}|\cos\theta}$

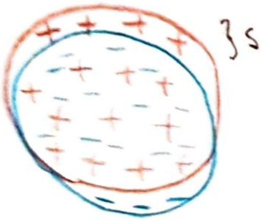
Pero esto es equivalente a tener dos esferas cargadas con $+Q$ y $-Q$ y desplazadas una pequeña distancia. s. Veremos que la superposición de estas dos esferas se ve como nuestra esfera original.



Ya que para puntos en el interior, las carguitas se cancelan y tenemos $\rho = 0$

Pero para puntos en la superficie, la densidad superficial de carga dependerá del ángulo θ con el eje z. Cuando el ángulo es $\theta = 0$, la densidad es máxima porque predomina la esfera positiva. Cuando $\theta = 90°$, la densidad es 0 porque justo se intersectan las dos esferas. $\therefore$ La densidad superficial varía con $\cos\theta$, tal como en la esfera original polarizada.

Entonces los dos arreglos son equivalentes, trabajaremos con este arreglo de dos esferas cargadas. $\pm Q$.



Desde afuera, estas esferas se ven como cargas $\pm Q$ en sus centros.

$\therefore$ Se ven como un dipolo con momento $p_0 = Qs$

Por otro lado, la superposición de las esferas se ve como muchos dipolitos de de carga q y separación s. Es decir, cada uno con un momento $p = qs$.

Entonces, la densidad de polarización es: $\bar{P} = Np = Nqs$ con N: #dipolitos / volumen.

Entonces el número total de dipolitos es: (Volumen) (N) $= \frac{4}{3}\pi R^3 N$

$\therefore$ Ésa es la cantidad de carguitas q en las esferas $\rightarrow$ la carga total de la esfera es $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 N q$

Entonces, regresando al dipolo que reemplaza a ambas esferas,

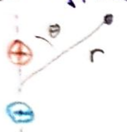
$$p_0 = Qs = \frac{4}{3}\pi R^3 N q s = \frac{4}{3}\pi R^3 P$$

∴ El campo eléctrico afuera de la esfera es como aquél que genera un dipolo en el centro con $p_0 = 4/3 \pi R^3 P$

Usamos las fórmulas de ϕ, E para un dipolo, que ya conocemos de sobra.

∴ Afuera de la esfera:

$$\phi(\vec{r}) \overset{\text{dipolo } p_0}{=} \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{R^3 P \cos\theta}{3\varepsilon_0 r^2} \#$$



y el campo es:

$$\bar{E}(\vec{r}) \overset{\text{dipolo } p_0}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2p_0 \cos\theta\, \hat{r} + p_0 \operatorname{sen}\theta\, \hat{\theta}\right) = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\left(2P\cos\theta\, \hat{r} + P\operatorname{sen}\theta\, \hat{\theta}\right) \#$$

∴ En la superficie de la esfera, tenemos un potencial

$$\phi(R) = \frac{R^3 P\cos\theta}{3\varepsilon_0 R^2} = \frac{R P \cos\theta}{3\varepsilon_0} = \frac{Pz}{3\varepsilon_0} \#$$

Ahora bien, la función $\phi(z) = \frac{P}{3\varepsilon_0} z$ en el interior de la esfera satisface la ecuación de La Place, pues $\nabla^2\phi = \frac{\partial^2}{\partial^2 z}\left(\frac{P}{3\varepsilon_0} z\right) = 0 \#$

← como vimos, en el interior $\rho = 0$ y por eso aquí aplica Laplace

Y en la frontera toma el valor $\frac{Pz}{3\varepsilon_0}$ (satisface la condición de frontera) ∴ Por el teorema de unicidad, $\phi(z) = \frac{P}{3\varepsilon_0} z$ es la solución al potencial dentro de la esfera.

∴ Dentro de la esfera:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Pz}{3\varepsilon_0} \# \quad \rightarrow \quad \bar{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi = 0\hat{x} + 0\hat{y} - \frac{P}{3\varepsilon_0}\hat{z} \#$$

En el polo norte, calculamos el campo con la función para el campo afuera evaluada en $\theta = 0$, $r = R$

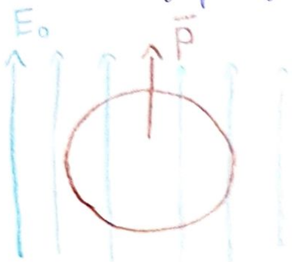
$$\rightarrow \bar{E} = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 R^3}\left(2P\cos(0)\,\hat{r} + P\operatorname{sen}(0)\,\hat{\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{3\varepsilon_0} 2P\hat{r} \qquad (\text{y en el polo norte } \hat{r} = \hat{z})$$

$$= \frac{1}{3\varepsilon_0} 2P\hat{z} \#$$

Que en magnitud, es el doble que el campo adentro $\frac{P}{3\varepsilon_0}$ #

6, Se tiene una esfera dieléctrica con cte K y se coloca en un campo uniforme $\bar{E}_0$. Obtener el campo dentro de la esfera y la densidad de polarización



El campo $\bar{E}_0$ hace que la esfera se polarice (supondré que uniformemente) con una densidad de pol. $\bar{P}$. Pero esta polarización crea su propio campo $\bar{E}'$ dentro de la esfera.

Por el ejercicio 5), $\bar{E}' = -\bar{P}/3\varepsilon_0$

$\therefore$ El campo total en la esfera es: $\bar{E}_{tot} = \bar{E}_0 + \bar{E}' = \bar{E}_0 - \bar{P}/3\varepsilon_0$

Suponiendo que es un dieléctrico lineal: $\bar{P} = \chi_e \varepsilon_0 \bar{E}_{tot}$ ... (1)

$= (K-1)\varepsilon_0 \bar{E}_{tot} = (K-1)\varepsilon_0 (\bar{E}_0 - \bar{P}/3\varepsilon_0)$

$\to \bar{P} = (K-1)\varepsilon_0 \left(\bar{E}_0 - \frac{\bar{P}}{3\varepsilon_0}\right) \to \bar{P} + \frac{K-1}{3}\bar{P} = (K-1)\varepsilon_0 \bar{E}_0 \to \boxed{\bar{P} = 3\left(\frac{K-1}{K+2}\right)\varepsilon_0 \bar{E}_0}$

Por otro lado, Regresando a 1) $\to \bar{P} = (K-1)\varepsilon_0 \bar{E}_{tot} \to 3\left(\frac{K-1}{K+2}\right)\varepsilon_0 \bar{E}_0 = (K-1)\varepsilon_0 \bar{E}_0$

$\to \boxed{\bar{E}_{tot} = \frac{3}{2+K}\bar{E}_0}$

Como comprobación, vemos que si $K=1$ (desaparece el dieléctrico) $\to \bar{P} = \bar{0}$, $\bar{E}_{tot} = \bar{E}_0$ como debería ser.

7) Un dieléctrico lineal, $\bar{P} = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E}$. ¿Relación entre la polarizabilidad atómica α y χ_e? Encontrar la relación de Clausius Mossotti.

Si en el dieléctrico se forman momentos dipolares $\bar{p} = \alpha \bar{E}_0$ externo
(según el problema 4)

$\Rightarrow$ Densidad de polarización: $\bar{P} = \bar{p} N = \underline{\alpha N \bar{E}_0}$ ...(1)

$N \equiv$ dipolos / unidad de volumen.

Pero por el ejercicio anterior, la relación entre $\bar{P}$ y el campo externo $\bar{E}_0$ en el dieléctrico es:

$$\bar{P} = 3\left(\frac{K-1}{K+2}\right)\varepsilon_0 \bar{E}_0$$

Pero junto con la expresión (1): $\rightarrow$ $\alpha N \bar{E}_0 = 3\left(\frac{K-1}{K+2}\right)\varepsilon_0 \bar{E}_0$

$$\Rightarrow \alpha N = 3\left(\frac{K-1}{K+2}\right)\varepsilon_0 \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3\varepsilon_0 (K-1)}{N (K+2)}}$$

8) La ecuación de Langevin para un dipolo permanente: $P = Np\left[\coth(pE/KT) - KT/pE\right]$
K = cte Boltzmann, T = temp. Si $KT \gg pE$. Demostrar que el dieléctrico es lineal y calcular la susceptibilidad.
Calcula la susceptibilidad del agua líquida y vapor ¿por qué sólo es válida para gases ideales?

De la ecuación $\rightarrow$ $\dfrac{P}{Np} = \coth(pE/KT) - KT/pE$

definimos $\underline{z \equiv P/Np \ , \ x \equiv pE/KT}$ $\rightarrow$ $\underline{z = \coth(x) - 1/x}$ ... (1)

Si como dice el enunciado, $KT \gg pE$ $\rightarrow$ $x \ll 1$

y la serie de taylor de $\coth(x)$ centrada en 0 es $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{3}$

$\therefore$ Sust. en (1) $\rightarrow$ $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{3} - 1/x = \underline{x/3}$ $\rightarrow$ $z = x/3$

Sustituyendo z y x, obtenemos: $\dfrac{P}{Np} = \dfrac{1}{3}\dfrac{pE}{KT}$

$\Rightarrow P = \dfrac{1}{3}\dfrac{p^2 N}{KT} E$ $\quad\therefore$ Es un dieléctrico lineal con $\varepsilon_0 \chi_e = \dfrac{p^2 N}{3KT}$

$$\rightarrow \boxed{\chi_e = \frac{N p^2}{3 \varepsilon_0 K T}}$$

* La aproximación de $\coth(x)$ para $x \approx 0$ se obtiene como sigue.

$\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

Pero si llamamos $f(x) = \cosh(x) \to f'(x) = \sinh(x) \to f''(x) = \cosh(x) \to \ldots$

y así $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$, ... etc

y así su desarrollo de taylor en 0 es: $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$

Si llamamos $g(x) = \sinh(x) \to g'(x) = \cosh(x)$, $g''(x) = \sinh(x)$, $g'''(x) = \cosh(x)$, ...

Y así, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 1$, ...

Y su desarrollo de Taylor en 0 es: $x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots$,

Entonces, $$\coth(x) \approx \frac{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}{x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}} = \frac{1}{x} \frac{1 + x^2/2 + x^4/24}{1 + x^2/6 + x^4/120}$$

Pero el denominador lo aproximamos usando $\dfrac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + x^2/2 + x^4/24\right)\left(1 - x^2/6 + x^4/120\right)$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + O(x^5)$$

i) Para agua líquida a $T = 20° \rightarrow 293K$, $p = 6.1 \times 10^{-30} Cm$

$N = \frac{\text{moléculas}}{\text{Volumen}}$. Si tenemos 6.022×10^{23} moléculas $\rightarrow$ 1 mol $\rightarrow$ su masa es 18g $\rightarrow$ ocupa $18 cm^3$ (densidad de agua = $1 gr/cm^3$)

$$\rightarrow N = \frac{6.022 \times 10^{23}}{18 \cdot 10^{-6}} = 3.34 \times 10^{28}$$

$$\therefore \chi_e = \frac{Np^2}{3\varepsilon_0 KT} = \frac{(3.34 \times 10^{28})(6.1 \cdot 10^{-30})^2}{3(8.85 \cdot 10^{-12})(1.38 \cdot 10^{-23})(293)} = 11.57$$

que está muy lejos del valor real de 79

ii) Vapor a $T = 100°C \rightarrow 373K$ $p = 6.1 \times 10^{-30} Cm$ a Patm

$N = \frac{\text{moléculas}}{\text{Volumen}}$ Suponiendo que es un gas ideal, $PV = \tilde{N}KT \rightarrow \frac{\tilde{N}}{V} = \frac{P}{KT} = \frac{101300 \, Pa}{(1.38 \cdot 10^{-23})(373)}$

$$\rightarrow N = 1.968 \times 10^{25}$$

$$\therefore \chi_e = \frac{Np^2}{3\varepsilon_0 KT} = \frac{(1.968 \cdot 10^{25})(6.1 \cdot 10^{-30})^2}{3(8.85 \cdot 10^{-12})(1.38 \cdot 10^{-23})(373)} = 5.41 \times 10^{-3}$$

Que se aproxima al valor real de $6 \cdot 10^{-3}$

Vemos que la aproximación funciona mejor para gases que se puedan tomar como ideales.

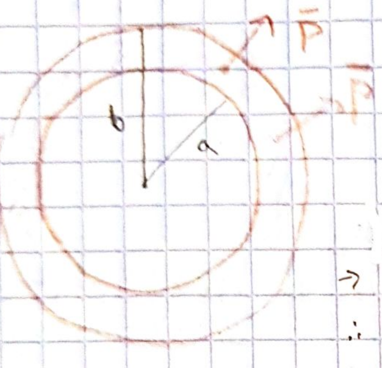
Esto debido a que estos gases ocupan un volumen V grande para un número pequeño de moléculas $\tilde{N}$

Y por la ley de Gas ideal:

$$\frac{PV}{\tilde{N}} = KT \quad \therefore KT \text{ tiene un valor grande}$$

Que es justo lo que asumimos para la aproximación.

9) Un cascarón esférico delgado radio interno a, externo b compuesto de un material dieléctrico con $\bar{P}(\bar{r}) = \frac{K}{r}\hat{r}$. No hay carga libre. Encontrar el campo eléctrico en todo el espacio.



Por ley de Gauss para $\bar{D}$, tenemos:

$$\int_S \bar{D} \cdot d\bar{a} = Q_{libre\ in}$$

Pero como no hay cargas libres en ningún lado,

$\rightarrow Q_{libre\ in} = 0$

$\therefore \int_S \bar{D} \cdot d\bar{a} = 0$ para toda superficie S

Luego, se debe de cumplir que $\bar{D} = \bar{0}$ en todos los puntos.

i) $0 < r < a$:

Como estamos fuera del dieléctrico, $\bar{P} = \bar{0}$. Luego, como

$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \bar{0} \rightarrow \varepsilon_0 \bar{E} = \bar{0} \rightarrow \boxed{\bar{E} = \bar{0}}$

ii) $a < r < b$:

Como estamos dentro del dieléctrico, $\bar{P}(\bar{r}) = \frac{K}{r}\hat{r}$

Pero: $\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \bar{0} \rightarrow \bar{E} = -\frac{\bar{P}}{\varepsilon_0}$

$$\rightarrow \boxed{\bar{E} = -\frac{K}{\varepsilon_0 r}\hat{r}}$$

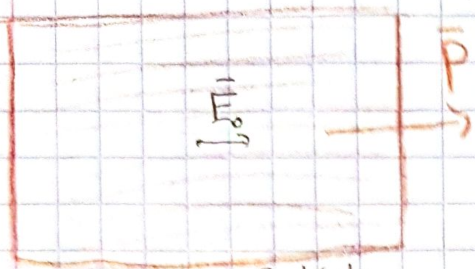
iii) $r > b$

Como estamos fuera del dieléctrico, $\bar{P} = \bar{0}$

$\rightarrow \bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \bar{0} \rightarrow \varepsilon_0 \bar{E} = \bar{0} \rightarrow \boxed{\bar{E} = \bar{0}}$

10) Supongamos que el campo dentro de un dieléctrico es $\bar{E}_0 \rightarrow \bar{D}_0 = \varepsilon_0 \bar{E}_0 + \bar{P}$

a) Se forma una cavidad esférica en el material. Encontrar el campo eléctrico en el centro. También el desplazamiento eléctrico.



(1): Dieléctrico

(2): Dieléctrico con cavidad.

La figura (1) = figura (2) + Esfera polarizada con $\bar{P}$

$\rightarrow \bar{E}_0 = \bar{E} + \left(-\frac{\bar{P}}{3\varepsilon_0}\right) \longleftarrow$ campo de una esfera polarizada adentro (Ejercicio 5)

$\rightarrow \boxed{\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{P}/3\varepsilon_0}$ (dentro de la cavidad)

Desplazamiento:

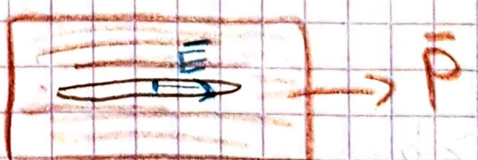
$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \varepsilon_0 \bar{E}$ (porque $\bar{P} = \bar{0}$ en la cavidad)

$= \varepsilon_0 \left(\bar{E}_0 + \bar{P}/3\varepsilon_0\right) = \varepsilon_0 \bar{E}_0 + \bar{P}/3 = \bar{D}_0 - \frac{2}{3}\bar{P}$

$\therefore \boxed{\bar{D} = \bar{D}_0 - \frac{2}{3}\bar{P}}$

b) Has lo mismo para una cavidad en forma de aguja orientada como $\bar{P}$.

i) Dieléctrico



ii) Dieléctrico con cavidad.

Figura (i) = Figura (ii) + Aguja polarizada con $\bar{P}$

Pero por lo visto en clase, una aguja polarizada con $\bar{P}$ se puede ver como un dipolo con cargas en los extremos. Pero si la aguja es lo suficientemente larga y delgada, las cargas son muy pequeñas y alejadas. Por lo que la aguja polarizada casi no genera un campo.

$\rightarrow \bar{E}_0 = \bar{E} + \bar{0} \rightarrow \boxed{\bar{E} = \bar{E}_0}$

Desplazamiento en la aguja: $\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \varepsilon_0 \bar{E}$ ($\bar{P} = \bar{0}$ en la cavidad)

$\therefore \boxed{\bar{D} = \bar{D}_0 - \bar{P}}$