Álgebra Moderna Tarea 4.4

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

3 de diciembre de 2020

a) **Sea G un grupo de orden 57 tal que G no es cíclico. Encuentra el número de elementos de orden 3 de G**

Notamos que $57 = 3 \cdot 19$.
Sea n_{19} el número de 19-subgrupos de Sylow de G. Entonces, por el tercer teorema de Sylow, tenemos que n_{19} debe de cumplir:

- n_{19} divide a $57/19 = 3$
- $n_{19} \equiv 1 \pmod{19}$

Por la primera condición, tenemos que $n_{19} = 1, 3$ Pero por la segunda condición, no queda de otra más que $n_{19} = 1$.
Entonces, solamente tenemos un subgrupo $P \leq G$ de orden 19. Como 19 es un primo, entonces dicho grupo tiene que ser isomorfo a $\mathbb{Z}_{19}$ y por tanto es cíclico.
Como P es cíclcio de orden 19, todos los elementos de P distintos de e tienen orden 19 (ya que si tuvieran orden menor, formarían un subgrupo propio de P, pero como P es de orden primo, no puede tener subgrupos propios).

Por otro lado, todos los elementos de G deben de tener orden 1, 3 , 19 (ninguno puede tener orden 57 porque entonces el grupo sería cíclico y se supuso que G no lo era).
Ya sabemos que los 18 elementos de P distintos de e tienen orden 19 y que e tiene orden 1. Además, no hay otros elementos de orden 19 fuera de P porque eso crearía un grupo de orden 19 distinto de P, pero sabemos que sólo existe un grupo de orden 19.

Entonces, todos los demás elementos de G deben de tener orden 3. Como ya consideramos 19 elementos, los que faltan son $57 - 19 = 38$ elementos.
Por tanto, se tienen 38 elementos de orden 3.

b) **Muestra que todo grupo de orden 200 tiene un subgrupo normal de orden 25**

Notamos que $200 = 2^3 \cdot 5^2$. Entonces, contemos la cantidad de grupos de orden 25 (que son los 5-subgrupos de G)

Si n_5 es la cantidad de 5-subgrupos de Sylow, entonces por el tercer teorema de Sylow, tenemos que debe de cumplir:

- n_5 divide a $200/25 = 8$
- $n_5 \equiv 1\ (mod\ 5)$

Por la primera condición, tenemos que $n_5 = 1, 2, 4, 8$. Y por la segunda condición tenemos que n_5 solamente puede ser 1.

Entonces, solamente existe un grupo de orden 25. Entonces, $Syl_5(G) = \{P\}$ donde P es el único 5-subgrupo de Sylow. Luego, por el corolario 26.8, tenemos que $P \trianglelefteq G$ si y sólo si $Syl_p(G) = \{P\}$. Por tanto, P es normal en G.

c) **Encuentra todas las clases de isomorfismo de grupos de orden 1755** $= 13 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3$

Primero calculamos la cantidad de subgrupos de Sylow de cada orden.
Sea n_{13} la cantidad de subgrupos de orden 13. Por el tercer teorema de Sylow, tenemos que:

- 13 divide a $1755/13 = 135$
- $n_{13} \equiv 1 \ \ (mod\ 13)$

Por la primera condición, tenemos que $n_{13} = 1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135$. Y por la segunda, las únicas opciones posibles son $n_{13} = 1, 27$

Sea n_5 la cantidad de subgrupos de orden 5. Por el tercer teorema de Sylow, tenemos que:

- 5 divide a $1755/5 = 351$
- $n_5 \equiv 1 \ \ (mod\ 5)$

Por la primera condición, tenemos que $n_{13} = 1, 3, 9, 13, 27, 39, 117, 351$. Y por la segunda, las únicas opciones posibles son $n_{13} = 1, 351$

Sea n_3 la cantidad de subgrupos de orden 3. Por el tercer teorema de Sylow, tenemos que:

- 3 divide a $1755/3^3 = 65$
- $n_3 \equiv 1 \ \ (mod\ 3)$

Por la primera condición, tenemos que $n_{13} = 1, 5, 13, 65$. Y por la segunda, las únicas opciones posibles son $n_3 = 1, 13$.

Entonces, eso nos deja con varias posibilidades para el grupo que enlistamos ahora:

- $n_3 = 1, n_5 = 1, n_{13} = 1$
  En este caso, solamente existe un grupo P de orden $3^3 = 27$, un solo grupo Q de orden 5 y un solo grupo R de orden 13.
  Entonces, como cada uno de estos grupos es el único correspondiente a su orden, el corolario 26.8 nos asegura que cada uno de estos grupos son normales.
  Luego, como cada uno de los grupos son normales y se intersectan trivialmente (porque tienen órdenes coprimos y la intersección tiene que tener orden que divida a los dos grupos intersectándose). Entonces, por 15.4, $|PQR| = |P||Q||R| = 27 \cdot 5 \cdot 13 = 1755$ y además, $PQR \simeq P \times Q \times R$

  Pero además, el grupo P tiene orden $27 = 3^3$, por lo que el teorema 24.12 nos asegura que es isomorfo a $\mathbb{Z}_{27}, \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3^3, H_3, E_3$.
  Por otro lado, como Q tiene orden 5, es isomorfo a $\mathbb{Z}_5$ y como R tiene orden 13 (que es primo), es isomorfo a $\mathbb{Z}_{13}$
  Por lo tanto, G es isomorfo a alguno de los siguientes:

  $$\mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{13} \ , \ \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{13} \ , \ \mathbb{Z}_3^3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{13} \ , \ H_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{13} \ , \ E_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{13}$$

d) **Elabora una tabla (como la elaborada en la clase 24) en donde muestres todos los grupos de orden menor o igual a 15 salvo isomorfismos**

La tabla es la siguiente

$\lvert G\rvert$	G abeliano	G no abeliano
2	$\mathbb{Z}_2$	$-$
3	$\mathbb{Z}_3$	$-$
4	$\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$-$
5	$\mathbb{Z}_5$	$-$
6	$\mathbb{Z}_6$	$D_{2(3)}$
7	$\mathbb{Z}_7$	$-$
8	$\mathbb{Z}_{2^3}, \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2^3$	$D_{2(4)}$, Q_8
9	$\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$-$
10	$\mathbb{Z}_{10}$	$D_{2(5)}$
11	$\mathbb{Z}_{11}$	$-$
12	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$Q_{12}, A_4, D_{2(6)}$
13	$\mathbb{Z}_{13}$	$-$
14	$\mathbb{Z}_{14}$	$D_{2(7)}$
15	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$-$

La justificación se basa en los siguientes resultados vistos en clase:

- **Todo grupo de orden p primo es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ (Corolario 9.8)**
  Esto explica los isomorfismos que se tienen en la tabla para $2, 3, 5, 7, 11, 13$

- **Todo grupo de orden 2p con p primo es isomorfo a $\mathbb{Z}_{2p}$ o a $D_{2(p)}$ (Teorema 10.13)**
  Esto explica los isomorfismos en la tabla para $6, 10, 14$

- **Sea G de orden 2^3, entonces si G es abeliano, es isomorfo a $\mathbb{Z}_{2^3}, \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_2, Z_2^3$ y si no es abeliano, es isomorfo a $D_{2(4)}$, Q_8 (Teorema 24.10**
  Esto explica los isomorfismos para el grupo de orden 8.

- **Todo grupo de orden 12 es isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3 \times Z_2 \times \mathbb{Z}_2, A_4, D_{2(6)}, Q_{2(6)}$ (Teorema 28.3**
  Esto explica los isomorfismos del grupo de orden 12.

- **Todo grupo de orden 15 es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ (Tarea 4.3 ejercicio a)**
  Esto explica el isomorfismo del grupo de orden 15.

- **Todo grupo de orden p^2 con p primo es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^2}$ o a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ (Teorema 24.7)**
  Lo que explica los isomorfismos de los grupos de orden 4 y 9