Mecánica Analítica (Marion)

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

30 de enero de 2021

1. Vectores

1.0.1. Escalar:

Un escalar es un número que no depende del sistema de coordenadas que se use al medirlo. Permanece invariante bajo transformaciones de coordenadas.

1.0.2. Transformaciones de Coordenadas

Consideramos un punto P con coordenadas (x_1, x_2, x_3) en un sistema. Estas coordenadas describen a P en este sistema, pero no son P. P puede tener otras coordenadas en otros sistemas.
Digamos que ahora tenemos un sistema primado y queremos las coordenadas de P en este nuevo sistema.
Si el cambio de coordenadas es una transformación lineal, entonces se tiene que las coordenadas de P en el nuevo sistema, (x'_1, x'_2, x'_3) son:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 \\ x'_2 &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3 \\ x'_3 &= \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3 \end{aligned}$$

O en notación de suma:

$$x'_i = \lambda_{ij}x_j$$

Rotaciones: En el caso especial (pero el más común) de que el cambio de coordenadas sea una rotación entonces los λ tienen una forma particular. Tenemos que:

$$\lambda_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$$

Y λ_{ij} se llama el **coseno director** del eje x'_i relativo al x_j.
La transformación inversa es:

$$x_i = \lambda_{ji}x'_j$$

La matriz $A = (\lambda_{ij})$ es una **Matriz de Rotación**

Propiedades de las matrices de Rotación:
Las matrices de rotación cumplen que:

$$\lambda_{ij}\lambda_{kj} = \delta_{ik}$$

Que es una condición de ortogonalidad.

Además, cumplen que:

$$A^t = A^{-1}$$

Y tienen determinante 1

1.1. Definición de Escalar y Vector en Términos de Transformaciones

Definimos un vector como un conjunto de triadas de la forma (A_1, A_2, A_3) escritas ahora en un sistema de coordenadas. Tales que si cambiamos a otro sistema, la triada se transforma de la misma forma que el vector de posición:

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j$$

1.1.1. Operaciones

Si tenemos dos vectores en un sistema, los podemos sumar de la forma esperada y multiplicar por escalares.
Y este resultado será un vector.
Por ejemplo, en un sistema original, tenemos (A_1, A_2, A_3) y (B_1, B_2, B_3) y su suma es $C = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3)$.
Los vectores se transforman en la base primada como $A' = (\lambda_{1j}A_j, \lambda_{2j}A_j, \lambda_{3j}A_j)$, $B' = (\lambda_{1j}B_j, \lambda_{2j}B_j, \lambda_{3j}B_j)$.
Entonces, la suma en el sistema primado es $C' = (\lambda_{1j}A_j + \lambda_{1j}B_j, \lambda_{2j}A_j + \lambda_{2j}B_j, \lambda_{3j}A_j + \lambda_{3j}B_j) = (\lambda_{1j}(A_j + B_j), \lambda_{2j}(A_j + B_j), \lambda_{3j}(A_j + B_j)) = \lambda_{ij}C_j$.
Por lo que C es un vector.

1.1.2. Producto Escalar

Definimos el producto escalar entre dos vectores escritos en la misma base como:

$$A \cdot B = A_i B_i$$

Se puede probar que es un escalar (Conserva su valor bajo cambios de base).

1.1.3. Producto Vectorial

El producto vectorial entre dos vectores A, B es el vector C con coordenadas:

$$C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_K$$

Con ϵ el símbolo de Levi Civita.
Que tiene la propiedad importante:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Un resultado importante es que:

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

1.2. Derivada de un vector:

Derivamos un vector respecto a un escalar en una base específica al derivar cada una de sus coordenadas:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{A(s + \Delta s) - A(s)}{\Delta s}$$

La derivada de un vector es nuevamente un vector.
Cumple con todas las propiedades que uno se espera de derivadas de productos y así.

Velocidad y Aceleración
Si tenemos un vector $\mathbf{r}(t)$ que da la posición como función del tiempo, entonces la velocidad y aceleración se calculan como:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$
$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$$

En coordenadas cartesianas se calculan de la forma sencilla que uno esperaría. Sin embargo, en coordenadas distintas la velocidad tiene distintas expresiones.

1.2.1. Otras Coordenadas

Un sistema coordenado generalizado son tres números q_1, q_2, q_3 que se usan para especificar la posición de un objeto.
Se puede ver $x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)$ o también $q_1(x, y, z), q_2(x, y, z), q_3(x, y, z)$.
Luego, sea r un punto (x, y, z) que por tanto se puede escribir como $r(q_1, q_2, q_3)$.

Vectores en las direcciones:

$$\vec{b}_i = \frac{\partial r}{\partial q_i}$$

Componentes de Escala:

$$h_i = \left|\vec{b}_i\right|$$

Vectores unitarios:

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{b}_i}{h_i}$$

Estos vectores unitarios pueden cambiar dependiendo del punto en el que nos paramos. Un sistema es **ortogonal** si los vectores unitarios son ortogonales.
Desplazamiento Infinitesimal:

$$ds = \frac{\partial r}{\partial q_i} dq_1 = \vec{b}_i dq_i = h_i dq_i \vec{e}_i$$

Para calcular la velocidad, dividimos esto por dt y queda $h_i \dfrac{dq_i}{dt}\vec{e}_i$. Para la aceleración hay que derivar de nuevo, lo que requiere conocer las derivadas de los vectores unitarios. Se pueden conocer geométricamente o escribíendolos en la base i, j, k (pero con coordenadas q_1, q_2, q_3) derivando y viendo cómo se relacionan.

Coordenadas Rectangulares:

- $ds = dx_1\vec{i} + dx_2\vec{j} + dx_3\vec{k}$
- $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$
- $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$
- $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

Coordenadas Cilíndricas:

- $h_r = 1 \ \ , \ \ h_\phi = r \ \ , \ \ h_z = 1$
- $ds = dr\mathbf{e}_r + rd\phi\mathbf{e}_\phi + dz\mathbf{e}_z$
- $\vec{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$
- $\vec{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z$
- $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$
- $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z$

Coordenadas Esféricas:

- $h_r = 1 \ \ , \ \ h_\theta = r \ \ , \ \ h_\phi = r\sin\theta$
- $ds = dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta d\phi\mathbf{e}_\phi$
- $\vec{r} = r\mathbf{e}_r$
- $\vec{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$
- $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2$
- $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2)\widehat{e}_r + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\widehat{e}_\theta + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - 2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\widehat{e}_\phi$

1.2.2. Velocidad Angular

Una partícula moviéndose en el espacio se puede considerar como que en un momento se mueve en un arco de círculo contenido en un plano.
En este movimiento, tiene una velocidad angular y gira respecto al eje perpendicular al círculo.
Notamos que si tenemos un vector de velocidad angular, entonces se cumple que:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Una rotación infinitesimal se puede representar por un vector, porque sí son conmutativas. Por ello, definimos:

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\theta} \times \vec{r}$$

1.3. Operaciones Diferenciales:

Gradiente: Dada una función $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en coordenadas curvilíneas, definimos $\nabla\phi$ como el vector en el que sucede el máximo crecimiento y como tal, se define como el vector tal que $d\phi = \nabla\phi \cdot ds$. Entonces:

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\widehat{q_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\widehat{q_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\widehat{q_3}$$

Divergencia: Sea $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en coordenadas curvilíneas. entonces definimos $\nabla \cdot F(p) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int F \cdot d\sigma}{\delta V}$. Donde la integral es la integral de superficie alrededor de una superficie que rodea a p y que se hace pequena. Dibujando y calculando los flujos infinitesimales, se llega a que:

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1h_2h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_2h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3h_1h_2)\right]$$

Laplaciano: El laplaciano de $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se define como $\nabla \cdot \nabla\phi$. Usando las fórmulas de estas cosas, se puede llegar a que:

$$\nabla \cdot \nabla\phi \ = \ \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\right) \ + \ \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_2h_1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\right)\right]$$

Curl: Dada una función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se define su curl en la dirección $\widehat{q_i}$ como: $\nabla \times F \cdot q_i(p) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\oint F \cdot ds}{\sigma}$ donde σ es una curva cerrada que rodea al punto p y que es ortogonal al vector unitario $\widehat{q_i}$. Podemos calcular los tres componentes del curl para cada vector unitario haciendo dibujitos y así. para llegar a:

$$\nabla \times F = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{pmatrix} \widehat{q_1}h_1 & \widehat{q_2}h_2 & \widehat{q_3}h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{pmatrix}$$

Segundas Derivadas: $\nabla \times \nabla\phi = 0$ $\nabla \cdot \nabla \times F = 0$ $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$ (Aquí el $\nabla^2 F$ indica tomar el laplaciano de cada componente de F y juntarlos en un vector)

Teoremas y cosas:
Integral de Línea (vectorial): $\int_C F \cdot ds = \int_a^b F(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt$ donde $\phi(t)$ parametriza la curva C.
Integral de Superficie (vectorial): $\int_S F \cdot da = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} F(\sigma(u,v)) \cdot (T_u \times T_v) dv du$ donde $\sigma(u,v)$ parametriza la superficie S.

Teorema Fundamental: $\int_C \nabla\phi = \phi(b) - \phi(a)$ donde C es una curva que une a con b.

Teorema de la div: $\int_V \nabla \cdot F\, dV = \oint_{\partial V} F \cdot dA$

Teorema de Stokes: $\int_S (\nabla \times F) \cdot da = \int_{\partial S} F \cdot ds$

Equivalencias irrotacionales: Son equivalentes (bajo ciertas condiciones): $\nabla \times F = 0$, Las integrales de línea de F son indep. de la trayectoria , la integral de línea por un camino cerrado es 0 , $F = \nabla V$ para alguna función escalar V.

Equivalencias Incompresibles: Son equivalentes (bajo ciertas condiciones): $\nabla \cdot F = 0$, La integral de superficie de F es independiente de la superficie para cualquier borde , la integral de superficie en una superficie cerrada es 0 , existe una función A con $F = \nabla \times A$.

2. Mecánica Newtoniana

Leyes de Newton:

1) Un cuerpo permanece en su estado de movimiento uniforme a menos que le actúe una fuerza

2) $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

3) Acción-Reacción.

Donde el momento es $\vec{p} = m\vec{v}$

Sistema de Referencia: Un sistema de referencia se llama **inercial** si se valen las leyes de Newton.
Si las leyes de Newton son válidas en un sistema de referencia, entonces son válidas en todos los sistemas que se mueven a velocidad constante con respecto a éste.

2.1. Ecuaciones de Movimiento

La segunda ley de Newton se puede escribir como:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

Para encontrar las ecuaciones de movimiento primero necesitamos encontrar $\vec{F}$ como función de la posición, velocidad y tiempo. Por otro lado, escribimos las aceleraciones según corresponda a las coordenadas usadas y las restricciones.
Con ello encontramos las ecuaciones de movimiento.

2.1.1. MRUA

Un MRUA es un movimiento en una dinmesnión con una fuerza constante. Por ejemplo, $F(y) = -mg$. Entonces, tenemos que $\ddot{y} = -g$.
Por tanto:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2$$

2.1.2. MRU

Un MRU es un movimiento con fuerza igual a 0. Por ejemplo, $F(x) = 0$. Entonces $\ddot{x} = 0$.
Por tanto:

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

2.1.3. Parábola:

Un movimiento parabólico es una combinación de un MRU en la dirección x y un MRUA en la dirección y.

2.1.4. Movimiento con Resistencia

Sin Gravedad: La segunda ley nos dice que tenemos la ecuación $ma = -kmv$. Después de resolverla resulta que:

$$x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

Con Gravedad: La segunda ley nos dice que queda la ecuación $ma = -mg - kmv$.
Se puede resolver sencillamente para la velocidad y luego para la posición. Por lo que nos queda:

$$y = y_0 - \frac{gt}{k} + \frac{kv_0 + g}{k^2}(1 - e^{-kt})$$

Juntando estas dos ecuaciones nos queda la descripción paramétrica de un tiro parabólico con resistencia.

2.1.5. Movimiento en un Campo B Uniforme

Tenemos un campo $\vec{B} = B\vec{j}$. El cuál nos genera una fuerza $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.
La velocidad es $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ y la aceleración es $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$.
Entonces usamos la ecuación de Newton y nos queda:

$$\begin{gathered} m\ddot{x} = -qB_0\dot{z} \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qB_0\dot{x} \end{gathered}$$

El sistema se puede resolver con muchos métodos. Uno puede ser derivando la ecuación de x, z y luego reemplazando una en la otra. Para obtener $z''' = -\alpha^2 z'$ y $x''' = -\alpha^2 x'$. Donde $\alpha = qB_0/m$.
Al final, las soluciones son de la forma:

$$\begin{gathered} x = x_0 + \frac{\dot{z}_0 m}{qB_0}\cos\alpha t \\ y = \dot{y}_0 t \\ z = z_0\frac{\dot{z}_0 m}{qB_0}\sin\alpha t \end{gathered}$$

Lo cual forma un círculo de radio $\dot{z}_0 m/qB_0$ recorrido con velocidad angular $\alpha = qB_0/m$

2.2. Teoremas de Conservación:

- **Momento:**
  Definimos el momento de una partícula como $\vec{p} = m\vec{v}$
  El momento de una partícula se conserva si no hay fuerzas actuando sobre ella (Directo de la segunda Ley).

- **Momento Angular:**
  Definimos el momento angular respecto al origen como:

$$\vec{r} \times \vec{p}$$

  Y definimos la torca que hace una fuerza en la partícula con respecto al origen como:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

  Entonces, el torque se puede ver como $\vec{N} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$.
  Si no hay torques en una partícula, entonces el momento se conserva.
  Pues la derivada del momento angular es $\dot{\vec{L}} = \dot{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \dot{p} = \vec{N}$

- **Trabajo:**
  Definimos el trabajo que hace una fuerza en una trayectoria γ como:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

  Podemos ver que:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}dt = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v})dt \\ &= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v^2)dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \end{aligned}$$

  Esto nos anima a definir la energía cinética de una partícula como:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

  Entonces, tenemos que **El trabajo entre un punto 1 y 2 es igual a la diferencia de energía cinética**:

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

  Ahora definimos la **energía potencial**.
  Dada una fuerza $\vec{F}$, tomamos un punto o que usaremos de referencia y definimos el potencial en un punto p como:

$$U(p) = -\int_{o}^{p} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Con esta definición, vemos que se cumple el **Teorema de Conservación de Energía:**

$$\begin{aligned} & W_{12} = U_1 - U_2 \\ \Rightarrow \quad & T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \end{aligned}$$

La definición se vale siempre y cuando, **la fuerza F se conservativa** (Tenga misma integral de línea independiente de la trayectoria, sea el gradiente de una función escalar, sea irrotacional).
Entonces, tendremos que:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Entonces, **La energía total $E = U + T$ de una partícula en bajo fuerzas conservativas se conserva.**

El concepto de energía se suele extender a sistemas en los que no se valen las leyes de Newton (y por tanto no se debería de valer la conservación de energía).

2.3. Energía

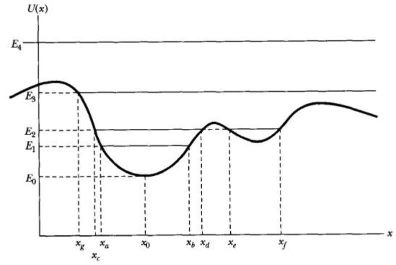
Consideramos una partícula bajo la influencia de un campo conservativo con potencial U. Entonces, tenemos que:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

Obtenemos así que:

$$\begin{aligned} v(t) &= \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \\ \Rightarrow \quad t - t_0 &= \int_{x_0}^{x} \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} \end{aligned}$$

Con esto se podrían conseguir las ecuaciones de movimiento.
Podemos conocer mucho del movimiento de una partícula graficando $U(x)$ en un plano.



En la imagen se ponen varias posibilidades para la energía total.
Si la energía total es E_0 entonces la partícula se debe de quedar en x_0 y toda su energía es potencial. La partícula no se mueve.
Si es E_1, entonces el movimiento es periódico entre x_a, x_b con equilibrio estable en x_0
Si la energía es E_2, hay dos posibles regiones para un movimiento periódico estable, aunque no hay forma de pasar de uno al otro.
Si la energía es E_3, entonces la partícula tiene acceso a toda la zona a la derecha de x_g. La partícula se mueve desde el infinito y llega al punto x_g al cual llega sin velocidad por lo que es un punto de retorno y se regresa.
Si la energía es E_4, el movimiento es totalmente libre.

Punto de Equilibrio: Es un punto máximo o mínimo del potencial. Una partícula para ahí no tiene fuerza externa.
El potencial cerca de estos puntos se puede aproximar como $U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$.
El equilibrio es **estable** si es un mínimo, por lo que la partícula se mueve de ida y vuelta.
Es **inestable** si es un máximo de energía, que una vez que la partícula se mueve de ese punto, ya no regresará naturalmente.

3. Oscilaciones

Un oscilador armónico es uno con una fuerza:

$$F(x) = -kx$$

3.1. Oscilador Simple

Uno que tiene solamente la fuerza simple del oscilador:

$$\begin{aligned} -kx &= m\ddot{x} \\ \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \end{aligned}$$

Donde $\omega_0 = k/m$.
Entonces, la solución es de la forma:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

Por tanto, la velocidad es $\dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$. Luego, la energía cinética es $T = \dfrac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$.
Por otro lado, la energía potencial es de $U = \dfrac{1}{2}kx^2$.
Por lo que la energía total es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

En el movimiento, la velocidad angular y el periodo son:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Para muchos problemas, se empieza con un potencial complicado y se usa una aproximación de oscilaciones pequenas para que se vea como un potencial de resorte.

3.2. Oscilador Simple en Dos Dimensiones

Tenemos ahora dos ecuaciones:

$$F_x = -kx$$
$$F_y = -ky$$

Entonces, si definimos $\omega_0^2 = k/m$, nos queda $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ y similarmente para t. Entonces, nos queda al final que:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$$
$$y(t) = B\cos(\omega_0 t + \beta)$$

Los caminos que siguen las partículas se llaman **Curvas de Lissajous** y en casos particulares son elipses.

3.3. Oscilaciones Amortiguadas

Tenemos una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad. Entonces, nos queda que $\vec{F} = m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$.
Entonces, nos queda que:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Con $\beta = b/2m$ y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
Las soluciones dependen de las raíces de la ecuación asociada. Que son:

$$r_{12} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Entonces tenemos varios casos:

- **Underdamped**: Cuando tenemos dos soluciones complejas.
  Entonces las soluciones son:
  $$x(t) = A_1 e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t + \phi)$$
  La solución oscila un poco y luego se va amortiguando.
- **Critically Damped:** Cunado las dos soluciones son reales iguales.
  Tenemos entonces que la solución es:
  $$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$$
- **Overdamped:** Las dos raíces son reales distintas.
  Entonces tenemos que la solución es:
  $$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

3.4. Driving Forces:

Podemos tener un oscilador armónico con resistencia pero con una fuerza sinusoidal que lo lleva:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Entonces, tenemos:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t$$

Para resolver estas EDO, primero se consigue la solución homogéneas, que son como las que ya calculamos en los casos (que son todas transientes porque desaparecen rápido). Luego se le suma la solución particular. Para la solución particular se propone un coseno parecido y resulta:

$$x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \cos(\omega t - \delta)$$
$$\delta = \arctan\left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

3.4.1. Resonancia:

Buscamos la frecuencia ω_R de la driving force tal que la amplitud sea máxima. Diferenciando la amplitud e igualando a 0 encontramos que:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Solemos describir la cantidad de Damping en un sistema usando el **factor de calidad:**

$$Q \equiv \frac{\omega_R}{2\beta}$$

Para osciladores con un damping chiquito, se ve que $\omega_R \simeq \omega_0$ y se tienen las siguientes gráficas:

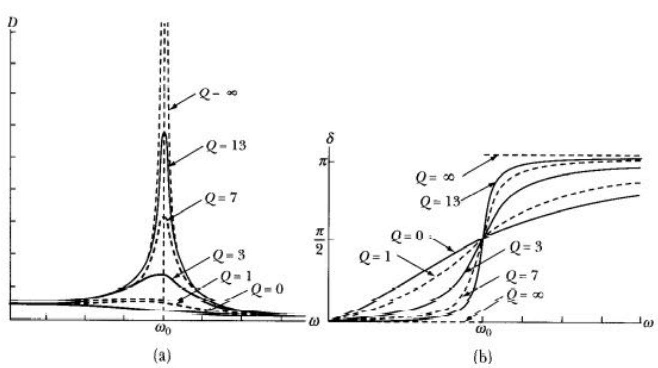


FIGURE 3-16 (a) The amplitude D is displayed as a function of the driving frequency ω for various values of the quality factor Q. Also shown is (b) the phase angle δ, which is the phase angle between the driving force and the resultant motion.

Se ve cómo la amplitud es máxima cerca de ω_0. Y la diferencia se nota más conforme sea menor la resistencia β.
También vemos la diferencia de ángulo entre la driving force y el resorte.

Resonancia de la Energía Cinética:
También podemos calcular la frecuencia ω de la driving force que hace máxima a la energía cinética. Para ello, buscamos maximizar el coeficiente de $\dot{x}$. Después de calcularlo, derivarlo e igualarlo a cero, obtenemos que la energía cinética tiene máxima amplitud cuando:

$$\omega_E = \omega_0$$

Es decir, cuando la frecuencia de la driving force es igual a la frecuencia de oscilación del sistema original sin resistencia.

3.5. Superposición:

Si tenemos una ecuación de la forma:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(x)$$

Con $f(x)$ una función cualquiera, entonces para encontrar la solución podemos descomponer f en una serie de Fourier y luego calcular cada una de las soluciones para cada término de la serie como antes, para finalmente sumarlos todos y obtener la solución final.

4. Gravedad

La ley de Newton de gravitación universal dice que la fuerza entre dos masas es:

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\mathbf{e}_r$$

Donde el vector apunta de una masa a la otra.
Si tenemos un cuerpo con densidad $\rho(\mathbf{r'})$, entonces podemos calcular la fuerza en un punto con masa m como:

$$\mathbf{F} = -Gm\int_V \frac{\rho(\mathbf{r'})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r'})dv'$$

Donde $\mathbf{r'}$ varía sobre la masa distribuida y $\mathbf{r}$ es el punto en el que queremos medir la fuerza.
Definimos el campo vectorial $\mathbf{g}$ en un punto $\mathbf{r}$ como:

$$\mathbf{g} = -G\int_V \frac{\rho(\mathbf{r'})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r'})dv'$$

4.0.1. Potencial Gravitatorio

Vemos que $\mathbf{g}$ no tiene curl, por lo que se puede conseguir como el gradiente de una **potencial gravitacional:**

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi$$

Se puede ver que el potencial es:

$$\Phi = -G\frac{M}{r}$$

Y si tenemos una masa distribuida, nos queda:

$$\Phi = -G\int_V \frac{\rho(\mathbf{r'})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}dv'$$

Lo cual vale 0 para un punto infinitamente lejos.
Luego, dada una masa podemos definir su **energía potencial** como :

$$U = m\Phi$$

Y tenemos que:

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

Esfera: El campo de una esfera fuera de ella es igual a si concentramos toda la masa en el centro. Y dentro de la esfera el campo es 0.

4.0.2. Ecuación de Poisson

La ecuación nos dice que en el vacío se cumple:

$$\nabla^2\Phi = 0$$

Mientras que en un punto con densidad ρ se tiene que:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

Esto se puede ver calculando la divergencia del campo gravitatorio.

5. Cálculo de Variaciones

Tenemos una función $f(y(x), y'(x), x)$ y definimos la integral:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x), x\} dx$$

Buscamos un extremo de J. Una función $y(x)$ con extremos x_1, x_2 tal que J es estacionario.
Definimos una pequena deformación de $y(x)$ como $y(\alpha, x) = y(x) + \alpha\eta(x)$.
Con $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.
Entonces, podemos definir una función:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha, x), x\} dx$$

Para que $y(x)$ sea estacionario, necesitamos que $\partial J/\partial\alpha = 0$ en $\alpha = 0$.
Calculamos eso y nos queda:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Es la **ecuación de Euler** que nos da una condición necesaria que debe de cumplir $y(x)$ para que J sea estacionario.

Segunda Forma: Si la función f no depende explícitamente de x entonces se puede encontrar la segunda forma de la ec. de Euler, que es:

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = cte$$

Si e tienen muchas variables dependientes $y_1, y_2, \cdots, y_n$, cada una sigue las ecuaciones de Euler.

5.0.1. Condiciones Adicionales

Digamos que tenemos que encontrar las $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ tales que se maximiza $J = \int f\{x, y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \cdots, y_n(x), y_n'(x)\}dx$.
Bajo la restricción que $g_j\{y_i, x\} = 0$.
Entonces, las ecuaciones de Euler son:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_j \lambda_j(x)\frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0$$

Para todo y_i

6. Lagrange y Hamilton

6.1. Principio de Hamilton

De todos los posibles caminos en los que se puede mover un sistema dinámico bajo fuerzas conservativas de un punto a otro consistente con ciertas constricciones, el camino seguido es aquél que minimiza la acción.
Donde la **acción** es:

$$\int_{t_1}^{t_2} T - U dt$$

De hecho, no tiene que ser un mínimo, puede ser un extremo. Definimos el **Lagrangiano:**

$$L = T - U$$

Entonces, la acción es la integral del Lagrangiano.
Por tanto, con lo que estudiamos de antes, tenemos que la ecuación de movimiento es:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

Ejemplo (Péndulo): Digamos que tenemos un péndulo bajo la acción de la gravedad. Tiene $U = mgl(1 - \cos\theta)$, $T = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta}^2 + \dot{r}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$.
Donde metimos la condición de $r = l$. Al usar la ec. de Lagrange nos queda el clásico:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Lo importante es que la ecuación de Lagrange es equivalente a la segunda ley de Newton, pero el principio de Hamilton es algo más general que aplica a muchas otras cosas.

La ecuación es válida si cambiamos x_i por coordenadas generalizadas.

Fuerzas Generalizadas
Si se tiene una fuerza no conservativa $\vec{F}$, definimos las fuerzas generalizadas como $Q_i = \vec{F}\cdot\vec{b}_i$.
Entonces, resulta que:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = Q_i$$

Restricciones:
Si el movimiento tiene que cumplir cierta restricción $R(q_1, \cdots, q_n) = 0$.
Entonces, hay una fuerza de restricción perpendicular a la curva. Que es $\vec{R} = \lambda\nabla R$.
Por lo que la fuerza generalizada de la restricción es $R_i = \lambda\nabla R \cdot \vec{b}_i$. Al meter esto como fuerza generalizada, queda como una derivada.
Entonces, tenemos en la forma más general:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = Q_i + \lambda_i\frac{\partial R}{\partial q_i}$$

Para resolver un problema se puede usar estas esucaciones con restricción y calcular la λ para obtener las fuerzas de restricción. O bien, se puede usar la restricción desde antes de usar las ecuaciones de Lagrange y luego obtener únicamente las ecuaciones de movimiento sin conocer la restricción.

6.2. Teorema de Euler

Si tenemos un sistema de n partículas, entonces la energía cinética total es:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{3} m_\alpha \dot{x}_{\alpha,i}^2$$

Digamos que cambiamos a un sistema de coordenadas q_1, q_2, q_3.
Se puede probar que si el sistema es scleronómico (el cambio de coordenadas no depende del tiempo) entonces:

$$T = \sum_{jk} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

Podemos derivar con respecto a $\dot{q}_i$ y obtener:

$$\sum_{l} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

6.3. Teoremas de Conservación

Momento Generalizado:
Definimos el momento generalizado de una partícula en la coordenada q_i como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

La última igualdad se da siempre que U no dependa de las velocidades generalizadas.
En el caso de coordenadas rectangulares, coincide con el momento normal.
En el caso de coordenadas angulares, nos da las componentes del momento angular perpendicular al movimiento angular.

6.3.1. Conservación de Energía

Digamos que el Lagrangiano no depende directamente del tiempo. Entonces $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Si lo escribimos como derivada total, tenemos que:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = 0$$

Con una suma en notación de Einstein.
Donde no aparece la derivada parcial respecto al tiempo por la condición inicial.
Usando la ecuación de Lagrange, nos queda que:

$$
\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = 0 \\
\Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} &- \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \\
\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}&\left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \\
\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}&\left(L - \sum_j \dot{q}_j p_j\right) = 0
\end{aligned}
$$

Donde la suma está en notación de Einstein en los primeros incisos.
A esta cantidad se le llama Hamiltoniano:

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = cte$$

Entonces, si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, se conserva el Hamiltoniano.
A veces el Hamiltoniano es igual a la energía total $U + T$ y a veces no. Para que sea igual, se debe de cumplir que:

- Las ecuaciones para pasar de las coordenadas cartesianas a las rectangulares no dependen del tiempo. Así, se cumple la ley de Euler.
- El potencial es independiente de $\dot{q}_i$
- Las fuerzas son conservativas.

6.3.2. Conservación del Momento

Si q_i es una coordenada y el Lagrangiano no depende explísictamente de ella, por lo que $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.
Entonces, si hay puras fuerzas conservativas, la ecuación de Lagrange nos dice que el momento generalizado se conserva:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \\
\Rightarrow \quad &\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = cte
\end{aligned}
$$

El Lagrangiano es independiente de una coordenada si se tiene simetría en dicha coordenada. Entonces, la simetría en una coordenada implica que se conserva el momento de dicha coordenada.

6.4. Dinámica de Hamilton

Tenemos que el Legrangiano es:

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

Y su diferencial total es:

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Entonces, el diferencial total es:

$$dH = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Pero tenemos que $p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ y que $\dot{p}_j = \dfrac{\partial L}{\partial q_j}$.
Entonces, nos queda que:

$$dH = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Entonces, tenemos que, **Ecuaciones de Hamilton:**

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$
$$-\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}$$
$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$$

La última ecuación muestra que si el Lagrangiano no depende del tiempo, entonces H se conserva.

Para resolver un problema, podemos calcular H directamente como $U + E$ (si se cumplen las condiciones para que H sea la energía total). Sino, debemos de calcular el Lagrangiano y los momentos generalizados para escribir el Hamiltoniano.

6.5. Espacio Fase y Teorema de Lioville

Si tenemos s partículas en un sistema, podemos crear un espacio de dimensión $2s$. Este espacio se llama **Espacio Fase**
Cada punto representa una configuración en la que se encuentra el sistema. Dada una configuración inicial, queda determinada toda una curva en el espacio fase que indica el movimiento. Tenemos entonces varias posibles curvas en el espacio fase que describen los posibles movimientos del sistema.

Para un sistema grande de partículas, no podemos identificar el punto particular en el espacio fase que representa al sistema.
Pero podemos llenar el espacio fase con una gran colección de puntos, cada uno representando una posible condición del sistema.

Pensamos en varios sistemas y sus correspondientes varios puntos en el sistema fase a la vez. Y dos posibles curvas no se intersectan.

Pensamos que los puntos son suficientemente numerosos como para construir una densidad ρ del espacio fase. Entonces, la cantidad de puntos en un espacio dv es:

$$N = \rho dv = \rho dq_1 dq_2 \cdots dq_s dp_1 dp_2 \cdots dp_s$$

Entonces, se puede escribir el flujo $\frac{d\rho}{dt}$ y resulta que se obtiene el **Teorema de Liouville:**

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Por lo que conforme pasa el tiempo, la densidad de puntos en el espacio de Hamilton es constante.

7. Fuerzas Centrales

7.1. Masa Reducida

Digamos que tenemos un sistema de dos partículas. Entonces, necesitaríamos conocer las componentes de $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.
Sin embargo, esto se puede cambiar a conocer solamente el vector de CM $\vec{R}$ y $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.
Definimos los vectores:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Sin embargo, escogemos ahora que el sistema de coordenadas empiece en el CM $\vec{R}$. Por lo que desde este sistema de coordenadas se tiene $\vec{R} = 0 \Rightarrow m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$.
Combinando esto con $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ nos lleva a :

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$
$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Luego, si la fuerza entre las partículas es en la lína que las une, tenemos que el potencial es $U(r)$. Por otro lado, la energía cinética es $\frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{r}}_2|^2$ y al sustituir la expresión de antes, nos queda que:

$$L = \frac{1}{2}\mu|\dot{\vec{r}}|^2 - U(r)$$

Donde $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es el momento reducido.

Por lo que convertimos el problema de dos partículas en un problema equivalente de una partícula.

7.2. Teoremas de Conservación

El lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

Como no depende de θ, el momento angular se conserva:

$$l = p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta} = cte$$

En el movimiento de la partícula, el vector $\vec{r}(t)$ barre un área de $\frac{1}{2}r^2 d\theta$. Por lo tanto, tenemos la **segunda ley de Kepler :**

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2\mu} = cte$$

Además como L no depende de t, se conserva H y se cumplen las condiciones para que $H = E$. Entonces:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) = cte$$

7.3. Ecuaciones de Movimiento

Tenemos una partícula bajo el potencial $U(r)$. Entonces, en coordenadas polares tiene un Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

Luego, al calcular las ecuaciones de Lagrange, nos queda:

$$\begin{gathered} m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - V'(r) \\ mr^2\dot{\theta} = L = cte \end{gathered}$$

Sustituyendo la L en la primera ecuación e integrando, obtenemos la energía total:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{2mr^2} + V(r)\right) = E$$

Entonces, ya tenemos el movimiento en una sola dimensión y tenemos una energía cinética en el primer término. Entonces, le definimos que su 'potencial efectivo' sea lo demás, y tenemos:

$$V_{ef} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

Hay dos formas de 'resolver' las ecuaciones de movimiento. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{gathered} mr^2\dot{\theta} = L \\ \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E \end{gathered}$$

7.3.1. Solución Paramétrica

De la ecuación de energía, tenemos que:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}$$

Entonces, si nos dan E, L, podemos separar las variables y resolver para $r(t)$ en teoría. Luego podemos obtener $\dot{\theta}$ despejando en la expresión de L y luego integrar para tener $\theta(t)$

7.3.2. Entonctrar la Órbita

Podemos encontrar la órbita $r(\theta)$.
Podemos despejar $\dot{r}^2$ en la segunda ecuación y luego dividir por el cuadrado de la primera ecuación. Se cancelan los dt^2 y obtenemos:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2mV(r)}{L^2}$$

En teoría podemos hacer una separación de variables y resolver para $r(\theta)$.
Después de unas manipulaciones, se puede llegar a que:

$$\theta(r) = \int \frac{\pm(l/r^2)dr}{\sqrt{2m\left(E - U - \dfrac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

Fuerza en Términos de la órbita Luego, con un poco de cuentas y usando que $F(r) = -V'_{ef}(r)$, tenemos:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2}F(r)$$

Esta última ecuación nos permite conocer la fuerza dada la órbita.

7.4. Problema de Kepler

Ahora resolvemos estas ecuaciones para el caso especial del problema de Kepler.

En este caso el potencial es:

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

Usando la ecuación de antes, tenemos que:

$$\theta(r) = \int \frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2m\left(E + \dfrac{k}{r} - \dfrac{L^2}{2mr^2}\right)}} + C$$

La integral se puede evaluar usando $u = 1/r$. Definimos el origen de tal forma que el mínimo de r se encuentre en $\theta = 0$. Encontramos:

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon\cos\theta$$

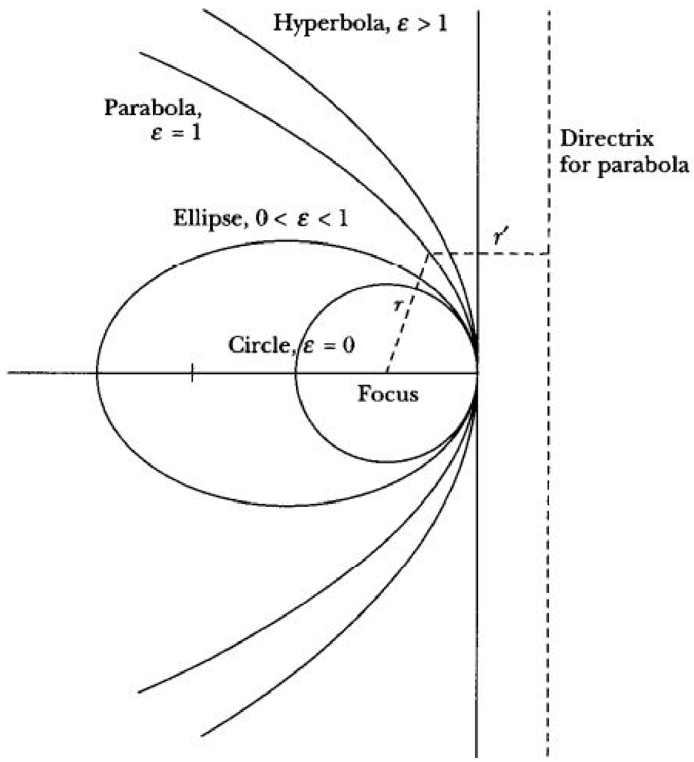
Donde $\alpha = \dfrac{L^2}{mk}$ y $\epsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{mk^2}}$

7.4.1. Las órbitas

Entonces tenemos que:

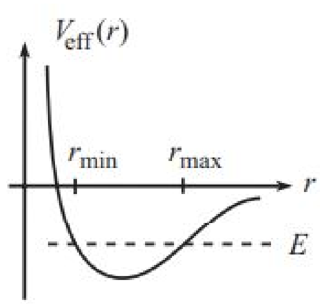
$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos\theta}$$

Esto es una ecuación de una cónica con el origen en un foco. Como se ve en los dibujos:



La eccentricidad nos da las distintas órbitas posibles.
El círculo se crea con $\epsilon = 0$, por tanto, tiene $E = -m\alpha^2/2L^2$
La elipse se genera con $0 < \epsilon < 1$ por lo que $-m\alpha^2/2L^2 < E < 0$
La parábola se crea con $\epsilon = 1$ por lo que $E = 0$
La hipérbola se crea con $\epsilon > 1$ y es cuando se tiene una energía $E > 0$.

En cuanto a energía,



La energía total siempre es la misma, pero los valores de energía potencial accesibles son solamente los que están debajo de la E. El resto de la energía es la energía cinética. En el dibujo de arriba tenemos el caso de una elipse, que puede variar entre los radio r_{min} y $_{max}$. Si la energía total es justo el mínimo, tenemos un círculo. Si la energía es mayor que 0, el objeto se puede acercar bastante y se puede alejar hasta el infinito.

7.4.2. Leyes de Kepler:

- **Primera Ley:** Los planetas se mueven en elipses con el sol en un foco

- **Segunda Ley:** El vector radio barre áreas iguales en tiempos iguales.

- **Tercera Ley:** Si T es el periodo de una órbita, entonces:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

8. Dinámica de un Sistema de Partículas

Trabajamos ahora en sistemas con n partículas. Las partículas dentro del objeto tendrán fuerzas internas entre sí. Pedimos que cumplan las siguientes condiciones al estudiarlo:

1. La fuerza interna entre dos partículas i, j son iguales y en dirección opuesta. Denotamos por $\vec{f}_{ij}$ en la partícula i debijo a la j. Entonces, tenemos que:

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

2. Las fuerzas $\vec{f}_{ij}$ actúan en la línea que une a las partículas i y j.

Debemos de tener cuidado al ver cuándo son válidas las leyes de Newton. Por ejemplo, la tercer ley no es válida en fuerzas magnéticas ya que estas fuerzas dependen de la velocidad.

8.1. Centro de Masa

Consideramos un sistema compuesto por n partículas con masa m_α y con posiciones $\vec{r}_\alpha$.
La masa total del sistema se denota por:

$$M := \sum_\alpha m_\alpha$$

Donde α siempre va a variar entre 1 y n.

Luego, definimos el **centro de masa**:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha$$

Entonces $\vec{R}$ es el vector del CM medido con respecto al mismo origen que las $\vec{r}_\alpha$.
Para una distribución continua, tenemos que:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

Donde se puede poner $dm = \rho dV$.

8.2. Momento Lineal

La fuerza total en la partícula α debido a interacciones internas es:

$$\vec{f}_\alpha = \sum_\beta \vec{f}_{\alpha,\beta}$$

Y sea $\vec{F}^e_\alpha$ la fuerza externa total en la partícula α. Entonces, la fuerza total en la partícula α es:

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}^e_\alpha + \vec{f}_\alpha$$

Entonces, la segunda ley de Newton para esta partícula nos dice que:

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_\alpha \vec{r}_\alpha) = \vec{F}^e_\alpha + \sum_\beta \vec{f}_{\alpha,\beta}$$

Podemos sumar esto sobre todas las partículas y nos queda:

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha = \sum_\alpha \vec{F}^e_\alpha + \sum_\alpha \sum_\beta \vec{f}_{\alpha,\beta}$$

El lado izquierdo da como resultado $\frac{d^2}{dt^2} M\vec{R}$. Expresamos por $\vec{F} = \sum_\alpha \vec{F}^e_\alpha$ a la fuerza externa total. Luego, como las fuerzas internas se cancelan a pares, tenemos:
La fuerza total externa es igual a la Masa total por la aceleración del CM:

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}$$

Donde $\vec{F}$ es la fuerza externa total. Entonces, podemos pensar que hay una masa M en el CM que representa a todo el cuerpo.
Además, el momento lineal total es de:

$$\vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{d}{dt}\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha = \frac{d}{dt}(M\vec{R}) = M\dot{\vec{R}}$$

Entonces tenemos los tres resultados importantes:

I) El centro de masa del sistema se mueve como si fuera una partícula de masa M sobre la que actúa el total de las fuerzas externas. (Siempre y cuando las fuerzas internas sean como describirmos antes).

II) El omento lineal del sistema completo es igual al de una partícula de masa M en el CM y moviéndose a la velocidad del CM

III) Si no hay fuerzas externas, el momento lineal completo se conserva.

8.3. Momento Angular del Sistema

Sistema CM: Formamos ahora un sistema de referencia con centro en el CM. Desde este sistema los vectores son $\vec{r}'_\alpha$. Entonces, tenemos que:

$$\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{r}'_\alpha$$

Entonces, el momento angular de la partícula respecto al origen es:

$$\vec{L}_\alpha = \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$$

Si sumamos la expresión respecto a α, obtenemos el momento total respecto al origen:

$$\begin{aligned}\vec{L} = \sum_{\alpha} \vec{L}_{\alpha} &= \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}) \\ &= \sum (\vec{r}'_{\alpha} + \vec{R}) \times m_{\alpha} (\dot{\vec{r}}'_{\alpha} + \dot{\vec{R}}) \\ &= \sum m_{\alpha} [(\vec{r}'_{\alpha} \times \dot{\vec{r}}'_{\alpha}) + (\vec{r}'_{\alpha} \times \dot{\vec{R}}) + (\vec{R} \times \dot{\vec{r}}'_{\alpha}) + (\vec{R} \times \dot{\vec{R}})]\end{aligned}$$

Los términos de en medio valen 0. Entonces, la ecuación se transforma en:

$$\vec{L} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times \vec{p}'_{\alpha}$$

Por tanto, obtenemos que:

IV) **El momento angular respecto al origen es la suma del momento angular del CM respecto al origen más el momento angular del sistema con respecto al CM.**

El momento total respecto al origen es $\vec{L} = \sum \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}$
El momento del CM es $\vec{L}_{CM} = \vec{R} \times M\dot{\vec{R}}$
El momento del sistema respecto al CM es $\vec{L}' = \sum \vec{r}'_{\alpha} \times \vec{p}'_{\alpha}$.

Luego, la derivada del momento angular medido respecto al origen de la partícula α es:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{p}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \left(\vec{F}^{e}_{\alpha} + \sum_{\beta} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha,\beta} \right) \\ &= \cdots = \sum_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}^{e}_{\alpha}] \\ &= \sum_{\alpha} \vec{N}^{e}_{\alpha} = \vec{N}^{e}\end{aligned}$$

Esto se vale siempre y cuando las fuerzas se dirijan en la dirección que une a las partículas. Entonces, tenemos que:

V) **La derivada del momento angular total es igual a la torca externa total:**

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}^{e}$$

Entonces, el momento total de un sistema no puede cambiarse sin aplicar una torca externa.

VI) **La torca total externa medida respecto al CM es igual a la derivada del momento angular respecto al CM**:

$$\vec{\tau}' = \frac{d\vec{L}'}{dt}$$

Donde $\vec{L}' = \sum \vec{r}'_\alpha \times \vec{p}'_\alpha$ y $\vec{\tau}' = \sum \vec{r'}_\alpha \times \vec{F}^e_\alpha$.
Esto no parece cierto porque estas cantidades se están midiendo respecto al CM, que es sistema de referencia no inercial, pero igual se cumple por propiedades del CM.

8.4. Energía del Sistema

Si tenemos un sistema de partículas, entonces su energía cinética total es:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_\alpha v'^2_\alpha + \frac{1}{2} M V^2$$

Que significa que:

VII) **La energía total del sistema es igual a la energía de las partículas respecto al CM más la energía del CM con masa M.**

8.5. Colisión Elástica

Una colisión elás es una interacción entre dos partículas, ya sea por un golpe o por atracción gravitatoria en la que se conserva la energía.

Sistema LAB: Sistema desde el que se hacen las medidas (y generalmente una de las partículas estará fija en este sistema).
Sistema CM: Las velocidades se miden respecto al CM.

Usamos la notación:

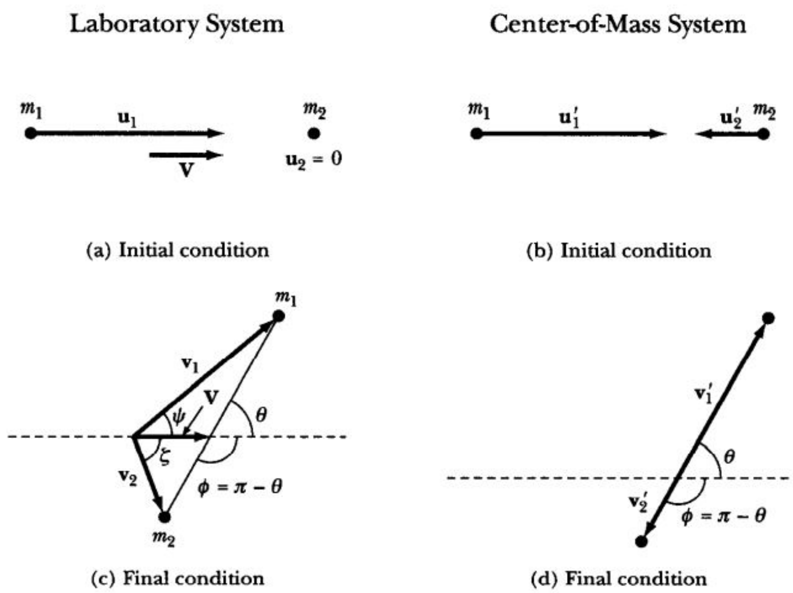
- m_1: Masa en movimiento
- m_2: Masa quieta que es golpeada.

- $\vec{u}_1, \vec{v}_1$: velocidad inicial y final de m_1 en el LAB
- $\vec{u'}_1, \vec{v'}_1$: velocidad inicial y final de la masa m_1 en CM.
  Similarmente con subíndices 2. Aunque $\vec{u}_2 = 0$

- T_0, T_0': Energía cinética total inicial en el LAB y CM.
- T_1, T_1' Energía cinética final de m_1 en LAB y CM
- T_2, T_2' energía cinética final de m_2 en LAB y CM.

- $\vec{V}$: Velocidad del centro de masa en el LAB

- Ψ: ángulo que se desvía m_1 en el LAB
- ζ: ángulo que se desvía m_2 en el LAB
- θ: ángulo que se desvían m_1, m_2 en el CM.



De acuerdo a la definición del centro de masa, tenemos que:

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

Y al derivar nos queda que:

$$M\vec{V} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

Pero $\vec{u}_2 = 0$ y $M = m_1 + m_2$. Entonces el CM se mueve en el sistema LAB como:

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{u}_1}{m_1 + m_2}$$

Por el mismo razonamiento, como m_2 empieza en reposo, la velocidad inicial de m_2 en el CM debe de ser igual a $\vec{V}$:

$$\vec{u'}_2 = -\vec{V} = -\frac{m_1\vec{u}_1}{m_1 + m_2}$$

Se puede llegar a que:

$$\boxed{\tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + (m_1/m_2)}}$$

Vemos que si $m_1 \leq\leq m_2$, entonces $\psi \simeq \theta$. Si $m_1 = m_2$, entonces $\psi = \theta/2$.

8.5.1. Cinemática

La energía inicial es $T_0 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$ y en el sistema CM es $T_0' = \frac{1}{2}(m_1 u_1'^2 + m_2 u_2'^2)$.
Por lo que, con un poco de manipulación y usando las otras fórmulas, tenemos que:

$$T_0' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_0$$

Tras muchas cuentas, tenemos que:

$$\boxed{\frac{T_1}{T_0} = \cos^2 \psi \qquad , m_1 = m_2}$$

$$\boxed{\frac{T_2}{T_0} = \sin^2 \psi \qquad , m_1 = m_2}$$

8.6. Colisiones Inelásticas

Son colisiones en las que no se conserva la energía, es algo del tipo:

$$Q + \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Si $Q = 0$, entonces es elástica. Si $Q > 0$, entonces se gana energía. Si $Q < 0$, entonces se pierde energía.

Ver más en Marion.

8.7. Cohete

Tenemos un cohete que suelta una masa dm hacia atrás con velocidad $-u$ respecto al cohete.
El momento inicial es mv
El momento final es $(m - dm')(v + dv) + dm'(v - u)$.
Como el momento inicial es igual al final, tenemos que:

$$dv = u \frac{dm'}{m}$$

Pero $dm = -dm'$ (dm indica la canidad de masa perdida por el cohete, dm' es la masa del expulsado). Entonces queda:

$$dv = -u \frac{dm}{m}$$
$$\Rightarrow \quad v = v_0 + u \log\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Por lo que la velocidad terminal está limitada al valor de m_0/m. Por ello, es común construir cohetes que operan a varias stages.

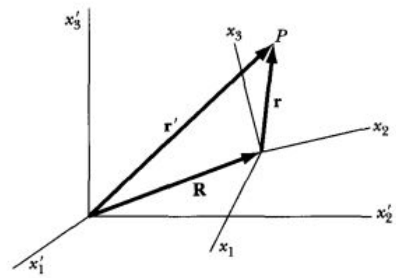
9. Movimiento No-Inercial

9.1. Sistemas Coordenados Rotados

Consideramos un par de ejes coordenados. Uno de los sistemas está fijo y es inercial y el otro sistema se mueve con respecto a éste. Usamos coordenadas x_i' para los ejes fijos y los x_i a las del sistema rotado (distinto a lo usual). Si elegimos un punto P, tenemos:

$$\vec{r'} = \vec{R} + \vec{r}$$

Donde el primo es el vector en el sistema fijo y el sin primo es el vector en eje rotado, medido respecto a $\vec{R}$ que es el origen del sistema rotado.



El sistema fijo tiene como vectores base $\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}$ y un vector $\vec{A}$ se ve como $\vec{A} = A_x\widehat{x} + A_y\widehat{y} + A_z\widehat{z}$.

Calcular Derivadas

Si $\vec{A}$ es un vector, entonces $\frac{d\vec{A}}{dt}$ es la derivada respecto al sistema fijo (Donde se valen las leyes de Newton).

Por otro lado $\frac{\delta\vec{A}}{\delta t}$ es la derivada respecto al sistema en movimiento (es la derivada que calcula alguien parado en el sistema en movimiento).

Sea $\vec{A}$ un vector arbitrario en el sistema rotando. $\vec{A} = A_x\widehat{x} + A_y\widehat{y} + A_z\widehat{z}$.
Entonces, su derivada **respecto al sistema fijo es:**

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}\widehat{x} + \frac{dA_y}{dt}\widehat{y} + \frac{dA_z}{dt}\widehat{z}\right) + \left(A_x\frac{d\widehat{x}}{dt} + A_y\frac{d\widehat{y}}{dt} + A_z\frac{d\widehat{z}}{dt}\right)$$

Vemos que el cambio total de $\vec{A}$ (respecto al sistema fijo) viene de dos efectos. Primero se debe al cambio de los coeficientes de $\vec{A}$ y luego al cambio de los ejes como tal.
El primer término es la derivada de $\vec{A}$ respecto al sistema en movimiento, que lo llamamos:

$$\frac{\delta\vec{A}}{\delta t} = \frac{dA_x}{dt}\widehat{x} + \frac{dA_y}{dt}\widehat{y} + \frac{dA_z}{dt}\widehat{z}$$

Es la **Derivada de A vista por alguien en el sistema en movimiento**

Ahora nos fijamos en el segundo término. Primero recordamos que para un vector $\vec{B}$ de longitud fija cualquiera, se cumple que $d\vec{B}/dt = \vec{\omega} \times \vec{B}$.
En particular, los vectores que están rotando $\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}$ cumplen eso respecto al sistema fijo. Por lo que sus derivadas se pueden escribir como dije. Eso prueba que:

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\delta\vec{A}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

Por lo que así es como se relaciona la derivada de un vector en el eje fijo $d\vec{A}/dt$ y la derivada respecto al sistema en movimiento $\dfrac{\delta A}{\delta t}$

Segunda Derivada:
Luego, la segunda derivada respecto al sistema fijo es:

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\vec{A}}{\delta t}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{A} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{A}}{dt}$$

Y aplicando de nuevo la fórmula, tenemos que:

$$\boxed{\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \frac{\delta^2\vec{A}}{\delta t^2} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{A}) + 2\vec{\omega} \times \frac{\delta\vec{A}}{\delta t} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{A}}$$

Para el Movimiento

Ahora lo hacemos para un vector $\vec{r}$ de posición. En este caso, tenemos:

- $\vec{r}$: Es la posición respecto al sistema acelerado
- $\vec{v}$: Es la velocidad respecto al sistema acelerado y se calcula como $\vec{v} = \dfrac{\delta\vec{r}}{\delta t}$
- $\vec{a}$: Es la aceleración respecto al sistema acelerado y se calcula como. $\vec{a} = \dfrac{\delta^2\vec{r}}{\delta t^2}$

Ahora retomamos el problema inicial. Tenemos $\vec{r'} = \vec{R} + \vec{r}$ medido respecto al sistema fijo, donde $\vec{R}$ es la posición del sistema en movimiento.
Entonces, la derivada de $\vec{r}$ es:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\
\Rightarrow\quad & \frac{d(\vec{R} + \vec{r})}{dt} = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\
\Rightarrow\quad & \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\
\Rightarrow\quad & \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\
\Rightarrow\quad & \vec{v}_f = \vec{V} + \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}
\end{aligned}$$

Donde $\vec{v}_f$ es la derivada respecto al sistema fijo (la velocidad fija), $\vec{V}$ es la velocidad con la que se mueve el sistema en movimiento.

Segunda derivada, tenemos que:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} - \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

Luego, tenemos que la derivada de $\vec{r}$ es $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{\delta^2\vec{r}}{\delta t^2} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \dfrac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$.
Sustituimos esto y usamos que $\dfrac{\delta^2\vec{r}}{\delta t} = \vec{a}$ es la aceleración en el sistema fijo, entonces, tenemos:

$$m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{m\vec{a} = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}$$

Donde $\vec{F}$ es la fuerza respecto al sistema fijo y es $md^2\vec{r}/dt^2$ debido a la segunda ley de Newton.
Las fuerzas que aparecen son:

- $\vec{F}_{trans} = -m\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}$
- $\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
- $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$
- $\vec{F}_{az} = -m\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$

Aparecen estas 'fuerzas' ficticias cuando hacemos mediciones desde el sistema en movimiento.
Estas fuerzas aparecen cuando no estamos en un sistema inercial.

9.1.1. Ejemplos:

Hombre en un Tren:
Tenemos una persona parada en un tren. Desde el punto de vista exterior, la persona está haciendo una fuerza de fricción que es lo que hace que se mueva con el tren.

Desde el punto de vista del interior del tren: La persona percibe una fuerza misteriosa $-m\vec{a}_{tren}$ debida a la aceleración del tren. Y la persona en el interior debe de hacer una fricción $\vec{F}$ para contrarrestar esta fuerza y permanecer en equilibrio respecto al tren.

Girar una Roca:
Tomamos una roca con un hilo y la hacemos girar sobre la cabeza.

Desde el punto de vista exterior, hay una fuerza de tensión $\vec{T}$ debida al hilo y debe de ser igual a la aceleración $m\dot{v}^2/R$ (La aceleración polar de $(\ddot{r}-r\dot{\phi}^2)\mathbf{r}_r$ pero el hilo no cambia de longitud.

Desde el punto de vista de la roca: La roca siente una fuerza de tensión hacia adentro. Y siente una fuerza ficticia $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

9.1.2. Ejemplo: Tierra

Se usa el Primado y No primado al revés de antes
Consideramos ahora la descripción que hace un observador fijo en la superficie de la tierra de una partícula con respecto a la misma descripción que haría alguien en un sistema fijo. Entre los observadores se cumple que:

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{R}_o$$

donde $\vec{r}$ mide la posición de la partícula desde el centro de la tierra, $\vec{R}_0$ es la posición del observador con respecto al centro de la tierra y $\vec{r'}$ es la posición de la partícula respecto al observador en la superficie.

Como la posición de la tierra no varía con el tiempo, tenemos que $\left(\dfrac{d\vec{R'}_0}{dt}\right)' = 0$.

Y como la tierra gira con respecto a las estrellas con velocidad angular $\vec{\Omega}$, la relación entre las velocidades está dada por:

$$\vec{V}_0 = \frac{d\vec{R'}_0}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{R'}_0$$

y también:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v'} + \vec{\Omega} \times \vec{r'} + \vec{V}_0 \\ &= \vec{v'} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

Para las aceleraciones se tiene que:

$$\vec{a} = \vec{a'} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v'} + \vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times (\vec{r'} + \vec{R}_0)]$$

Desechamos la derivada de $\vec{\Omega}$ porque es muy chiquita.
Notamos que la aceleración centrífuga se puede separar en un término $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R'}_0)$ más una corrección $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r'})$. El término de corrección es muy chiquito comparado con el otro, por lo que lo desechamos.

Digamos ahora que tenemos un objeto con velocidad $\vec{v'} = 0$ (quieto respecto a la rotación de la tierra). Entonces, un observador externo mide que el objeto tiene una aceleración $\vec{g}$ hacia el centro de la tierra debida a la atracción gravitacional. Sin embargo, un observador en la tierra mide una aceleración de:

$$\vec{g_{ef}} = \vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}_0)$$

Donde la acelaración centrífuga apunta hacia afuera del paralelo sobre el que está girando la persona.

En la primera imagen se nota la dirección de los vectores y todo eso. En la segunda se especifica el vector $\vec{g}$ (aceleración para alguien viendo desde afuera) que apunta radialmente hacia adentro. Y el vector $\vec{a}_c$ que apunta un poco hacia el sur y hacia afuera.
Podemos definir un sistema de coordenadas fijas con respecto a la superficie de la tierra, en las que el vector i denote la dirección tangente al meridiano (hacia el sur), el j la dirección tangente al paralelo (hacia el este) y el k la dirección radial hacia afuera.
En la segunda imagen se muestra el plano i, k.
En este sistema, se puede ver que la velocidad angular es:
$\vec{\Omega} = -\Omega \cos \lambda;\ i + \Omega \sin \lambda\ k$
Y que el vector de posición respecto al centro de la tierra es $\vec{R} = R\vec{k}$.
Entonces, podemos hacer el triple producto que exige la aceleración centrífuga para obtener:

$$\vec{a}_c = -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\Omega^2 R \sin \lambda \cos \lambda \vec{i} - \Omega^2 R \cos^2 \lambda \vec{k}$$

Por lo que la dirección de $\vec{g}_{eff}$ es:

$$g_{eff} = -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\Omega^2 R \sin \lambda \cos \lambda \vec{i} - (\Omega^2 R \cos^2 \lambda - g)\vec{k}$$

Por lo que el ángulo δ de la dirección de g_{eff} con respecto a la dirección radial tiene una tangente de:

$$\tan \delta = \frac{\Omega^2 R \sin \lambda \cos \lambda}{g - \Omega^2 R \cos^2 \lambda} \simeq \frac{\sin(2\lambda) R \Omega^2}{2g}$$

Como δ es tan chiquito (porque $R\Omega^2/g$ es chiquito), entonces podemos aproximar como que $\vec{g'}$ es paralela a $\vec{g}$ (en la dirección radial hacia adentro). Por lo tanto, en la expresión completa de g', desechamos el término no radial y nos queda:

$$g' = (g - \Omega^2 R \cos^2 \lambda)\vec{k}$$

Aproximaciones Sucesivas (integrar la aceleración)

De ahora en adelante, trabajaremos en la aproximación en que $\vec{g'}$ es constante e igual a lo que calculamos arriba. Entonces, tenemos que la aceleración en el sistema primado es:

$$\vec{a'} = \vec{g'} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v'}$$

(la $\vec{g'}$ ya incluye el ̂ermono $\vec{g}$ y la aceleración centrífuga incluidos). Luego, podemos integrar esta ecuación para llevar a la velocidad primada:

$$\vec{v'}(t) = \vec{v'}_0 + \vec{g'}(t - t_0) - 2\vec{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} \vec{v'}(\tau) d\tau$$

Donde $\vec{v'}_0$ es la velocidad inicial (en el sistema primado) y $\vec{r}_0$ es la posición inicial.
Ahora sustituimos toda esta expresión adentro de sí misma en la integral (ésta es la primera iteración) y nos queda:

$$\vec{v'}(t) = \vec{v'}_0 + \vec{g'}(t-t_0) - 2\vec{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} \left[\vec{v'}_0 + \vec{g'}(t-t_0) - 2\vec{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} \vec{v'}(\tau')d\tau' \right] d\tau$$
$$= \vec{v'}_0 + \vec{g'}(t-t_0) - 2\vec{\Omega} \times \left[\vec{v'}_0(t-t_0) + \tfrac{1}{2}\vec{g'}(t-t_0)^2 - 2\vec{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} \vec{v'}(\tau')d\tau' \right]$$
$$= \vec{v'}_0 + \vec{g'}(t-t_0) - 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{v'}}_0(t-t_0) - \vec{\Omega} \times \vec{g'}(t-t_0)^2$$
$$\vec{v'}(t) = 1 - 2(t-t_0)\vec{\Omega}\times]\vec{v'}_0 + [(\dot{t}-t_0) - (t-t_0)^2\vec{\Omega}\times]\vec{g'} + O(\Omega^2)$$

Donde desechamos el último término porque es proporcional a $\vec{\Omega}^2$, que en este caso es un número muy chico.

Ahora podemos integrar de nuevo para obtener la posición con respecto a la tierra que gira. Y obtenemos que:

$$\vec{r'}(t) = \vec{r'}_0 + [(t-t_0) - (t-t_0)^2\vec{\Omega}\times]\vec{v'}_0 + [\tfrac{1}{2}(t-t_0)^2 - \tfrac{1}{3}(t-t_0)^3\vec{\Omega}\times]\vec{g'} + O(\Omega^2)$$

Donde $\vec{r'}_0$ es la posición inicial del objeto (medida desde el centro de la tierra en el sistema que gira con la tierra) Y el resultado $\vec{r'}$ es la posición del objeto también medida desde el centro en el sistema que gira.
De hecho, todo está medido desde el centro de la tierra pero con el sistema que gira (el primado). Si queremos verlo desde el laboratorio de la superficie, hay que corregir el $\vec{r'}$ quitándole el vector de radio de la tierra, pero las velocidades y aceleraciones no cambian (porque el vector radio de la tierra es fijo)

Caída Libre:

Ahora dejamos caer un objeto desde una altura h y queremos ver dónde cae. Sabemos que la aceleración de Coriolis va a hacer que se desvíe, así que calcularemos qué tanto y en qué dirección se desvía.
Usamos entonces la formulita que acabamos de obtener. Como es caída libre, tenemos que $\vec{v}'_0 = 0$, lo que simplifica mucho la fórmula. Tenemos que:

$$\vec{r'}(t) = \vec{r'}_0 + [\tfrac{1}{2}(t-t_0)^2 - \tfrac{1}{3}(t-t_0)^3\vec{\Omega}\times]\vec{g'}$$

Donde, como vimos antes (con el sistema de coordendas de antes, tenemos que $\vec{\Omega} = -\Omega\cos\lambda\vec{i} + \Omega\sin\lambda\vec{k}$ y en la aproximación radial que hicimos de $\vec{g'} = -g'\vec{k}$.
Entonces se puede calcular que $\vec{\Omega} \times \vec{g'} = -\Omega g' \cos\lambda\vec{j}$.
Entonces, nuestro vector de posición queda como:

$$\vec{r'}(t) = \vec{r'}_0 + \tfrac{1}{2}(t-t_0)^2\vec{g'} + \tfrac{1}{3}(t-t_0)^3\Omega g' \cos\lambda\vec{j}$$

Vemos que el tercer término es la desviación que tendrá el cuerpo al caer, por lo que definimos al vector de desviación:

$$\vec{d} = \frac{1}{3}(t-t_0)^3\Omega g' \cos\langle\vec{j}$$

Además, podemos ver que en la expresión de $\vec{r'}(t)$, la única parte radial es el clásico $\frac{1}{2}(t-t_0)^2$. Por lo que la altura inicial es de $h = \frac{g'}{2}(t-t_0)^2$ y el tiempo de caida es $t - t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g'}0}$.
Por lo que el vector de desviación será de:

$$\vec{d} = \tfrac{1}{3}\tfrac{2h}{g'}\sqrt{\tfrac{2h}{g'}}\Omega g' \cos\lambda \vec{j}$$

10. Dinámica de Cuerpos Rígidos ($\widehat{L}$ constante) (Morin)

Cuerpo Rígido: Es un cuerpo en el que todas las partículas tienen unas distancias fijas entre sí.

Momento angular de una partícula respecto al origen se define como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Es una cantidad útil porque tiene buenas propiedades (como que se conserva bajo fuerzas centrales como vimos en el problema de Kepler).

Momento Angular de un Cuerpo: Se consigue al sumar todos los momentos angulares de las partículas del cuerpo:

$$\vec{L} = \sum \vec{r} \times \vec{p}$$

10.1. Objeto Pancake en el plano x-y

Digamos que tenemos un cuerpo rígido plano moviéndose en el plano x-y.
Su momento angular total es $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$.
Este vector apunta en la dirección $\widehat{z}$ por el pancake

10.1.1. Rotación alrededor del eje z

Digamos que el objeto está pivoted de tal forma que sólo gira alrededor del eje z con velocidad angular ω.
Si consideramos una partecita del cuerpo con masa dm y posición (x, y), este pedacito se mueve con velocidad $v = \omega r$ (perpendicular a $\vec{r}$)
Por lo que un pedacito de momento angular es $d\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = r(vdm)\widehat{z} = dmr^2\omega\widehat{z}$. El momento angular completo es:

$$\vec{L} = \int r^2\omega\widehat{z}dm = \int (x^2 + y^2)\omega\widehat{z}dm$$

Vemos que $\vec{L}$ es proporcional a ω, por lo que definimos el **momento de inercia** alrededor del eje z como:

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2)dm$$

Por tanto, en este caso tenemos la ecuación sencilla de:

$$L_z = I_z\omega$$

Energía:
La energía de un pedacito en este caso es de $dmv^2/2 = dm(r\omega)^2/2$. Por lo que la energía cinética total es:

$$T = \int \frac{r^2\omega^2}{2}dm = \frac{I_z\omega^2}{2}$$

10.1.2. Movimiento General en el plano XY

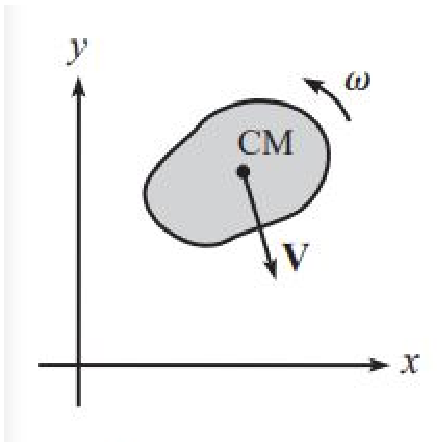


Fig. 8.3

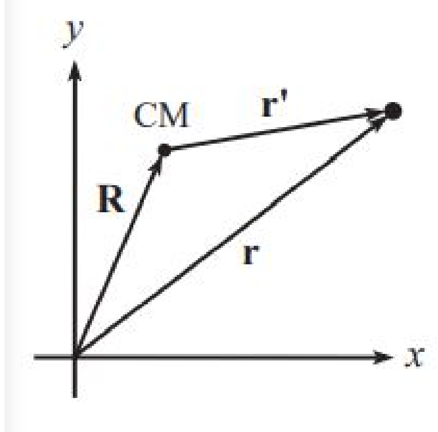


Fig. 8.4

Ahora tenemos un objeto que se mueve de forma arbitraria en el plano. Por lo que no podemos escribir sencillamente $v = \omega r$.

Centro de Masa: Definimos el centro de masa como:

$$\vec{R} = \frac{\int \rho(\vec{r})\vec{r}dV}{M}$$

Entonces, un punto tiene coordenadas $\vec{r'} = (x', y')$ respecto al CM y coordenadas $\vec{r} = (x, y) = \vec{R} + \vec{r'}$ respecto al origen.
Si el centro de masa tiene velocidad $\vec{V}$, y la velocidad de la partícula relativa al CM es $\vec{v'}$, entonces la velocidad de la partícula respecto al origen es $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v'}$.
Digamos que el cuerpo gira con velocidad angular ω' respecto al CM (alrededor de un eje instantáneo paralelo al eje z).
Entonces, lo que sí se cumple es que $v' = \omega' r'$.

Teorema8.1: El momento angular relativo al origen de un cuerpo se puede calcular sumando el momento angular del CM (tratándolo como una partícula de masa M) y sumando el momento angular relativo al CM (en el que las posiciones son $\vec{r'}$ y las velocidades $\vec{v'}$ y se puede ya usar los momentos de inercia).

Calculamos $\vec{L}$:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \int \vec{r} \times \vec{v} dm = \int (\vec{R} + \vec{r'}) \times (\vec{V} + \vec{v'}) dm \\
&= \int \vec{R} \times \vec{V} dm + \int \vec{r'} \times \vec{v'} dm \, * \\
&= M\vec{R} \times \vec{V} + \int r'^2 \omega' dm \, \widehat{z} \\
&:= \vec{R} \times \vec{P} + (I_z^{CM} \omega')\widehat{z}
\end{aligned}$$

* Los términos cruzados desaparecen por la def. de CM pues $\int \vec{r'} dm = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \int \vec{r'} \times \vec{V} dm = \vec{V} \times \int \vec{r'} dm = 0$, $\int \vec{R} \times \vec{v'} dm = \vec{R} \times \int \vec{v'} dm = 0$.

Teorema 8.2: La energía cinética de un cuerpo se puede obtener tratando al CM como una partícula de masa M y sumando su KE con la KE del cuerpo debido

al movimiento relativo al centro de masa (el movimiento $\vec{v'}$) que ya se calcula usando el momento de inercia

Calculamos T:

$$
\begin{aligned}
T &= \int \frac{1}{2} v^2 dm = \int \frac{1}{2} |\vec{V} + \vec{v'}|^2 dm \\
&= \frac{1}{2} \int V^2 dm + \frac{1}{2} \int v'^2 dm \; * \\
&= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \int r'^2 \omega'^2 dm \\
&= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_z^{CM} \omega'^2
\end{aligned}
$$

Los términos $\int \vec{V} \cdot \vec{v'}$ y $\vec{V} \cdot \int \vec{v'} dm$ desaparecen

- **Problema:** Un cilindro de masa m, radio r y momento $I = 1/2mr^2$ baja por una rampa de ángulo θ sin deslizar, cuál es la aceleración del centro del cilindro.

Solution: We'll use conservation of energy to determine the speed v of the center of the cylinder after it has moved a distance d down the plane, and then we'll read off a from the standard constant-acceleration kinematic relation, $v = \sqrt{2ad}$.

The loss in potential energy of the cylinder is $mgd \sin\theta$. This shows up as kinetic energy, which equals $mv^2/2 + I\omega^2/2$ from Theorem 8.2. But the nonslipping condition is $v = \omega r$. Therefore, $\omega = v/r$, and conservation of energy gives

$$
\begin{aligned}
mgd \sin\theta &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \\
&= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \left(\frac{v}{r} \right)^2 \\
&= \frac{3}{4} m v^2. \qquad (8.11)
\end{aligned}
$$

So the speed as a function of distance is $v = \sqrt{(4/3) g d \sin\theta}$. Hence, $v = \sqrt{2ad}$ gives $a = (2/3) g \sin\theta$, which is independent of r.

REMARKS: Our answer is 2/3 of the $g \sin\theta$ result for a block sliding down a frictionless plane. It is smaller because there is kinetic energy "wasted" in the rotational motion. Alternatively, it is smaller because there is a friction force pointing up the plane (to provide the torque necessary to get the cylinder rotating, but we'll talk about torque in Section 8.4), so this decreases the net force down the plane.

If we let I take the general form $I = \beta m r^2$, where β is a numerical factor, then you can show that the acceleration becomes $a = \sqrt{g \sin\theta/(1+\beta)}$. So if $\beta = 0$ (all the mass is at the center), then we simply have $a = g \sin\theta$, so the cylinder behaves just like a sliding block. If $\beta = 1$ (all the mass is on the rim), then $a = (1/2) g \sin\theta$. If $\beta \to \infty$,[6] then $a \to 0$. After reading Section 8.4, you can think about these special cases alternatively in terms of the forces and torques involved.

Although this problem can also be solved by using force and torque (the task of Exercise 8.37), the conservation-of-energy method is generally quicker in more complicated problems of this type, as you can see by doing, for example, Exercises 8.28 and 8.46. ♣

10.1.3. Teorema del Eje paralelo

Dice que:

$$I_z = MR^2 + I_z^{CM}$$

Si queremos calcular el momento de inercia respecto al origen y conocemos el m.d.i alrededor del CM es I_Z^{CM}, esta es la ecuación.

10.1.4. Teorema del Eje perpendicular

Esto es sólo válido para objetos pancake y dice que:

$$I_z = I_x + I_y$$

10.2. Objetos no Planares

Como seguimos en el caso de que $\widehat{L}$ es constante, podemos pensar que dicho eje es el eje z. Y vemos al cuerpo no planar como la combinación de muchos pancakes. Todo lo visto antes se traduce a estos cuerpos sin problemas.

- **Centro de Masa:**

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{M} \to \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

- **Momento de Inercia:**

$$I = \int r^2 dm$$

  Donde r es la distancia al eje de rotación.

10.3. Torque

Vamos a ver que bajo ciertas condiciones, el cambio de momento angular $d\vec{L}/dt$ es igual a una cantidad $\vec{\tau}$.
Lo probamos para tres eventos cada vez más complicados:

10.3.1. Masa Puntual, origen fijo

Tenemos una masa de posición $\vec{r}$ relativo al origen, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \\
&= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\
&= \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}
\end{aligned}$$

Por ello, definimos que el torque (relativo al origen) es:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Y tenemos que la ecuación de Newton es:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

10.3.2. Masa extendida, origen fijo

Ahora tenemos un objeto de muchas partículas $\vec{r}_i$.
Entonces, el momento angular total del sistema es:

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Y luego, su derivada es:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\
&= \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \sum \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\
&= \sum \vec{v}_i \times (m\vec{v}_i) + \sum \vec{r}_i (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}) \\
&= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} \\
&:= \sum \vec{\tau}_i^{ext}
\end{aligned}$$

Las fuerzas internas se cancelan por 3ra ley de Newton.

10.3.3. Masa Extendida, Origen no fijo

Digamos que la posición del origen es $\vec{r}_0$ y que se mueve. Y la posición de las partículas (respecto al origen fijo) son $\vec{r}_i$.
Entonces, las posiciones respecto al origen son $\vec{r}_i - \vec{r}_0$
Y el **momento angular** respecto al origen no fijo es:

$$\vec{L} = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_0)$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_0) \right) \\
&= \sum (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_0) \times m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_0) + \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times m_i (\ddot{\vec{r}}_i - \ddot{\vec{r}}_0) \\
&= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int} - m_i \ddot{\vec{r}}_0)
\end{aligned}$$

Usamos que las fuerzas internas se cancelan y que $\sum m_i \vec{r}_i = M\vec{R}$. Entonces tenemos que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\sum (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i^{ext} \right) - M(\vec{R} - \vec{r}_0) \times \ddot{\vec{r}}_0$$

Que es una expresión bastante fea. Sin embargo, queda más sencilla en tres casos particulares:

- $\vec{R} = \vec{r}_0$ (El origen es el CM)
- $\ddot{r}_0 = 0$ (el origen no acelera)

- $(\vec{R} - \vec{r}_0)$ es paralelo a $\ddot{r}_0$

En cualquiera de estos casos, tenemos que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i^{ext} := \sum \vec{\tau}_i^{ext}$$

Donde recordamos que $\vec{L}$ está medida respecto al origen no fijo (y la torca también se mide así).

Es decir **Teorema:** Si medimos el $\vec{L}$ respecto al CM, su derivada es igual al torque total aplicado (según el CM).
Que es algo medio sorprendente, porque el CM no es siempre un sistema inercial y sin embargo se cumple esta ecuación, qué loco.

Todo hasta aquí es válido para cualquier movimiento (no necesariamente el de $\widehat{L} = cte$)

Si consideramos un objeto rígido y que se mueve en pura rotación alrededor de un punto fijo, tenemos que:

$$\tau_{ext} = I\alpha$$

10.4. Colisiones

Es importante fijarse donde se pone el centro de referencia.

Example (Elastic collision): A mass m travels perpendicular to a stick of mass m and length ℓ, which is initially at rest. At what location should the mass collide elastically with the stick, so that the mass and the center of the stick move with equal speeds after the collision?

Solution: Let the initial speed of the mass be v_0. We have three unknowns in the problem (see Fig. 8.19), namely the desired distance from the middle of the stick, h; the final (equal) speeds of the stick and the mass, v; and the final angular speed of the stick, ω. We can solve for these three unknowns by using our three available conservation laws:

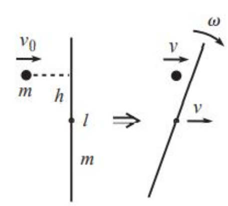


Fig. 8.19

- Conservation of p:

$$mv_0 = mv + mv \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{v_0}{2}. \tag{8.50}$$

- Conservation of E: Remembering that the energy of the stick equals the energy of the rotational motion around the center, plus the energy of the effective point mass at the center, we have

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \left[\frac{m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\omega^2\right] \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{\sqrt{6}v_0}{\ell}. \tag{8.51}$$

- Conservation of L: Let's pick our origin to be the fixed point in space that coincides with the initial location of the center of the stick. Then conservation of L gives

$$mv_0h = m\left(\frac{v_0}{2}\right)h + \left[\left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\omega + 0\right]. \tag{8.52}$$

The zero here comes from the fact that the CM of the stick moves directly away from the origin, so there is no contribution to L from the first of the two parts in Theorem 8.1. Plugging the ω from Eq. (8.51) into Eq. (8.52) gives

$$\frac{1}{2}mv_0h = \left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\left(\frac{\sqrt{6}v_0}{\ell}\right) \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{\ell}{\sqrt{6}}. \tag{8.53}$$

You are encouraged to solve this problem again with a different choice of origin, for example, the fixed point that coincides with the spot where the mass hits the stick, or the CM of the entire system.

Remark: After the stick makes half of a revolution, it will hit the backside of m. The resulting motion will have the stick sitting at rest (both translationally and rotationally) and the mass moving with its initial speed v_0. You can show this by working though the second collision, using the quantities we found above. Or you can just use the fact that this scenario certainly satisfies conservation of p, E, and L with the initial conditions, so it must be what happens (because the quadratic conservation statements have only two solutions, and the other one corresponds to the intermediate motion). Note that the time it takes the stick to make half of a revolution is $\pi/\omega = \pi\ell/\sqrt{6}v_0$. So the stick travels a distance of $(v_0/2)(\pi\ell/\sqrt{6}v_0) = (\pi\ell/2\sqrt{6})$ before it ends up at rest. This distance is independent of v_0 (which follows from dimensional analysis). ♣

10.5. Impulso Angular

Definimos el **impulso** normal como:

$$\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \Delta\vec{p}$$

El **Impulso angular** es:

$$\mathcal{I}_\theta = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}(t)dt = \Delta\vec{L}$$

Se puede ver sencillamente que tenemos que:

$$\vec{\tau}(t) = \vec{R} \times \vec{F}(t)$$

11. Momento Angular (Dirección General)

11.1. Generalidades Rotacionales

Teorema de Chasles: Consideramos un cuerpo rígido con un movimiento arbitrario. Escogemos un punto P en el cuerpo. En cualquier instante, el movimiento se puede escribir como una suma de una traslación de P más una rotación alrededor de un eje (que puede cambiar con el tiempo) que pasa por P.

11.1.1. Vector de Velocidad Angular

El vector de velocidad angular $\vec{\omega}$ apunta en la dirección del eje de rotación y tiene como magnitud la velocidad angular (y sigue la regla de la mano derecha). La dirección de $\vec{\omega}$ puede cambiar con el tiempo.

Teorema 2: Dado un objeto rotando con velocidad angular $\vec{\omega}$ (sin trasladar), la velocidad de un punto en posición $\vec{r}$ (medida respecto a algún punto del eje de rotación) es de:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Conversamente si un cuerpo que gira se mueve de tal forma que la velocidad de todos los puntos del cuerpo están dadas por $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, entonces es $\vec{\omega}$ debe de ser el vector de velocidad angular.

Teorema 3: Sea S_1, S_2, S_3 tres sistemas de coordenadas con el mismo origen.
Digamos que S_1 gira con velocidad $\vec{\omega}_{12}$ respecto a S_2 y que S_2 gira con velocidad $\vec{\omega}_{2,3}$ respecto a S_3 (instanteneamente). Entonces S_1 gira (instantáneamente) con velocidad angular:

$$\vec{\omega}_{1,3} = \vec{\omega}_{1,2} + \vec{\omega}_{2,3}$$

11.2. El Tensor de Inercia

El tensor de inercia es lo que relaciona el momento angular $\vec{L}$ con la velocidad angular $\vec{\omega}$. Vemos varios casos poco a poco.

11.2.1. Rotación alrededor de un eje por el origen

Un cuerpo que sólo rota alrededor de un eje en el origen y no se traslada.
Consideramos un pedazo de masa dm ubicado en $\vec{r}$, que tiene una velocidad de $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Por tanto, su momento angular es $(dm)\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. Entonces, el momento angular de todo el cuerpo es:

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \;\rightarrow\; \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

El producto cruz doble es simplemente:

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\omega_1(y^2+z^2) - \omega_2 xy - \omega_3 zx)\widehat{x} + (\omega_2(z^2+x^2) - \omega_3 yz - \omega_1 xy)\widehat{y} + (\omega_3(x^2+y^2) - \omega_1 zx - \omega_2 yz)\widehat{z}$$

Por tanto, al sacar las $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ del as integrales, podemos llegar a que:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \int (y^2+z^2) & -\int xy & -\int zx \\ -\int xy & \int (z^2+x^2) & -\int yz \\ -\int zx & -\int yz & \int (x^2+y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\ &:= \mathbf{I}\vec{\omega}\end{aligned}$$

El tensor de momento angular toma un vector (la velocidad angular) y produce otro vector (el momento angular).
El tensor I depende sólo de la geometría del objeto.

Example 1 (Point mass in the *x*-*y* plane): Consider a point mass m traveling in a circle of radius r (centered at the origin) in the x-y plane, with frequency ω_3, as shown in Fig. 9.9. Using $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$, $x^2 + y^2 = r^2$, and $z = 0$ in Eq. (9.8) (with a discrete sum of only one object, instead of the integrals), the angular momentum with respect to the origin is

$$\mathbf{L} = (0, 0, mr^2\omega_3). \tag{9.11}$$

The z component is $mr(r\omega_3) = mrv$, as it should be. And the x and y components are zero, as they should be. This case where $\omega_1 = \omega_2 = 0$ and $z = 0$ is simply the case we studied in Chapter 8, as mentioned in Remark 6 above.

Example 2 (Point mass in space): Consider a point mass m traveling in a circle of radius r, with frequency ω_3. But now let the circle be centered at the point $(0, 0, z_0)$, with the plane of the circle parallel to the x-y plane, as shown in Fig. 9.10. Using $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$, $x^2 + y^2 = r^2$, and $z = z_0$ in Eq. (9.8), the angular momentum with respect to the origin is

$$\mathbf{L} = m\omega_3(-xz_0, -yz_0, r^2). \tag{9.12}$$

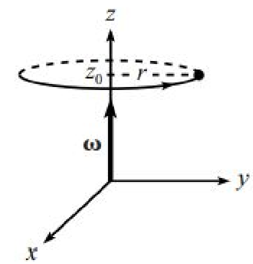


Fig. 9.10

The z component is mrv, as it should be. But surprisingly, we have nonzero L_1 and L_2, even though the mass is just rotating around the z axis. $\mathbf{L}$ does *not* point along $\boldsymbol{\omega}$ here. What's going on?

Consider an instant when the mass is in the y-z plane, as shown in Fig. 9.10. The velocity of the mass is then in the $-\hat{\mathbf{x}}$ direction. Therefore, the particle most certainly has angular momentum around the y axis, as well as the z axis. Someone looking at a split-second movie of the mass at this point can't tell whether it's rotating around the y axis, the z axis, or undergoing some complicated motion. But the past and future motion is irrelevant; at any instant in time, as far as the angular momentum goes, we are concerned only with what is happening at this instant.

At this instant, the angular momentum around the y axis is $L_2 = -mz_0v$, because z_0 is the distance from the y axis, and the minus sign comes from the right-hand rule. Using $v = \omega_3 r = \omega_3 y$, we have $L_2 = -mz_0\omega_3 y$, in agreement with Eq. (9.12). Also, at this instant, L_1 is zero, because the velocity is parallel to the x axis. This agrees with Eq. (9.12), since $x = 0$. As an exercise, you can check that Eq. (9.12) is also correct when the mass is at a general point (x, y, z_0).

We see that, for example, the $I_{yz} \equiv -\int yz$ entry in $\mathbf{I}$ tells us how much the ω_3 component of the angular velocity contributes to the L_2 component of the angular momentum. And due to the symmetry of $\mathbf{I}$, the $I_{yz} = I_{zy}$ entry in $\mathbf{I}$ also tells us how much the ω_2 component of the angular velocity contributes to the L_3 component of the angular momentum. In the former case, if we group the product of the various quantities as $-\int(\omega_3 y)z$, we see that this is simply the appropriate component of the velocity times the distance from the y axis. In the latter case with $-\int(\omega_2 z)y$, it is the opposite grouping. But in both cases there is one factor of y and one factor of z, hence the symmetry in $\mathbf{I}$.

Example 3 (Two point masses): Let's now add another point mass m to the previous example. Let it travel in the same circle, at the diametrically opposite point, as shown in Fig. 9.12. Using $\omega = (0, 0, \omega_3)$, $x^2 + y^2 = r^2$, and $z = z_0$ in Eq. (9.8), you can show that the angular momentum with respect to the origin is

$$\mathbf{L} = 2m\omega_3(0, 0, r^2). \tag{9.13}$$

Since $v = \omega_3 r$, the z component is $2mrv$, as it should be. And L_1 and L_2 are zero, unlike in the previous example, because these components of the $\mathbf{L}$'s of the two particles cancel. This occurs because of the symmetry of the masses around the z axis, which causes the I_{zx} and I_{zy} entries in the inertia tensor to vanish; they are each the sum of two terms, with opposite x values, or opposite y values. Alternatively, you can just note that adding on the mirror-image $\mathbf{L}$ vector in Fig. 9.10 produces canceling x and y components.

Energía cinética

Un pedacito de masa tiene energía $(dm)v^2/2 = dm|\vec{\omega} \times \vec{r}|^2/2$.

Entonces, la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}\int((\omega_2 z - \omega_3 y)^2 + (\omega_3 x - \omega_1 z)^2 + (\omega_1 y - \omega_2 x)^2)dm$$

Haciendo las cuentas y un poco de trabajo, nos queda que:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot I\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}$$

11.2.2. Movimiento General

Ahora pensamos en un objeto que se traslada y gira a la vez. Ya no podemos escribir $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ como si nada.
Según el teorema de Chasles, podemos ver el movimiento como un traslado del CM más una rotación alrededor del centro de masa.
Digamos que el CM se mueve con velocidad $\vec{V}$ y creamos un sistema de coordenadas primado paralelo al sistema fijo pero que sale del CM.
El cuerpo rota alrededor del CM con velocidad angular $\vec{\omega'}$ (medido en este sistema primado, aunque de hecho es igual en todos los sistemas).

Sea $\vec{R}$ la posición del CM respecto al sistema fijo. Y sea $\vec{r'}$ la posición de un punto cualquiera respecto al CM. Por lo que $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$ es la posición respecto al origen.
La velocidad del punto respecto al centro de masa es $\vec{v'}$ (donde ahora sí $\vec{v'} = \vec{\omega'}\times\vec{r'}$) y la velocidad respecto a los ejes fijos es $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v'}$.

Teorema: El momento angular respecto al origen es el momento angular que tendría una masa puntual M en el CM más el momento angular respecto al CM.

Dem: El momento angular (respecto al origen obvio) es:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \int \vec{r}\times\vec{v}dm = \int(\vec{R}+\vec{r'})\times(\vec{V}\times(\vec{\omega'}\times\vec{r'}))dm\\ &= \int(\vec{R}\times\vec{V})dm + \int\vec{r'}\times(\vec{\omega'}\times\vec{r'})dm\\ &= M(\vec{R}\times\vec{V}) + \vec{L}_{CM}\end{aligned}$$

Los términos cruzados desaparecen por magia del CM (porque incluyen a $\int\vec{r'}dm$ que es 0).

Teorema: La energía cinética respecto al origen es igual a la energía cinética de una masa M en el CM más la energía cinética de rotación respecto al CM.

Dem: El momento angular es:

$$
\begin{aligned}
T &= \int \frac{1}{2} v^2 dm = \int \frac{1}{2} |\vec{V} + \vec{v'}|^2 dm \\
&= \int \frac{1}{2} V^2 dm + \int \frac{1}{2} v'^2 dm \\
&= \frac{1}{2} M V^2 + \int \frac{1}{2} |\vec{\omega'} \times \vec{r'}|^2 dm \\
&= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega'} \cdot \vec{L}_{CM}
\end{aligned}
$$

Las integrales se cancelan por la magia del CM.

11.2.3. El Teorema del Eje paralelo

Si queremos calcular el momento de inercia del cuerpo respecto al origen (que lo podemos poner en cualquier parte) $\vec{I_o}$, sólo hay que calcular el I_{CM} respecto al CM y sumarle I_R que es la matriz de momento de inercia que tendría una masa M en el CM.

$$
\begin{aligned}
I_o &= \begin{pmatrix} \int y^2 + z^2 & -\int xy & -\int zx \\ -\int xy & \int z^2 + x^2 & -\int yz \\ -\int zx & -\int yz & \int x^2 + y^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int y'^2 + z'^2 & -\int x'y' & -\int z'x' \\ -\int x'y' & \int z'^2 + x'^2 & -\int y'z' \\ -\int z'x' & -\int y'z' & \int x'^2 + y'^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y^2 + Z^2 & -XY & -ZX \\ -XY & Z^2 + X^2 & -YZ \\ -XZ & -YZ & X^2 + Y^2 \end{pmatrix} \\
&= I_{CM} + I_R
\end{aligned}
$$

El nombre 'eje paralelo' está de hecho mal, porque el momento de inercia no está asociado con un eje, sino con todo un sistema de coordenadas. Se debería de llamar teorema de ejes paralelos

11.3. Ejes Paralelos

Como la matriz I es simétrica, existe una base ortonormal tal que la matriz es diagonal y se ve como:

$$
\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 I_3 & \end{pmatrix}
$$

Los I_1, I_2, I_3 se llaman momentos principales.

- **Eje principal** Es un eje $\widehat{\omega}$ para el cual $\mathbf{I}\widehat{\omega} = I\widehat{\omega}$ (el momento angular es paralelo a la velocidad angular). En general, son tres ejes $\widehat{\omega}_1, \widehat{\omega}_2, \widehat{\omega}_3$ tales que una rotación de cada uno de esos ejes tiene:

$$\mathbf{I}\widehat{\omega}_1 = I_1\widehat{\omega}_1 \quad , \quad \mathbf{I}\widehat{\omega}_2 = I_2\widehat{\omega}_2 \quad , \quad \mathbf{I}\widehat{\omega}_3 = I_3\widehat{\omega}_3$$

- Si un objeto gira sobre un eje con velocidad angular constante y no necesita torca para seguir girando, entonces este eje es un eje principal y el objeto es "feliz"de girar en este eje.
  Esto porque al girar en este eje, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ (porque $\vec{L}$ tiene siempre la misma dirección y magnitud).
  Mientras que en otros ejes (no principales), se requiere de torca para mantener el movimiento.

- En los ejes principales, si la matriz de momento de inercia es $diag(I_1, I_2, I_3)$ y gira con velocidad angular $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ entonces:

$$\vec{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$$
$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

- Los ejes principales dependen sólo de la geometría del cuerpo y pueden verse como dibujados en él.
  Por ello, pueden cambiar conforme el objeto se mueve. Por eso, las relaciones anteriores, se miden respecto a los ejes instantáneos.

- Para un objeto con simetría, los ejes principales pueden ser medio obvios.

- **Teorema 9.5:** Si dos momentos principales son iguales ($I_1 = I_2 = I$) entonces cualquier eje que pase por el plano formado por los ejes principales correspondentes es un eje principal con el mismo momento.

11.4. Torque

11.4.1. Masa puntual, origen fijo

Tenemos una masa de posición $\vec{r}$ respecto al origen, entonces:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Por lo que definimos el torque como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Y tenemos la ley de Newton:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

11.4.2. Masa extendida, origen fijo

Ahora tenemos un objeto de muchas partículas $\vec{r}_i$.
Entonces, el momento angular total del sistema es:

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Y luego, su derivada es:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\
&= \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \sum \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\
&= \sum \vec{v}_i \times (m\vec{v}_i) + \sum \vec{r}_i(\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}) \\
&= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} \\
&:= \sum \vec{\tau}_i^{ext}
\end{aligned}$$

Las fuerzas internas se cancelan por 3ra ley de Newton.

11.4.3. Masa Extendida, Origen no fijo

Digamos que la posición del origen es $\vec{r}_0$ y que se mueve. Y la posición de las partículas (respecto al origen fijo) son $\vec{r}_i$.
Entonces, las posiciones respecto al origen son $\vec{r}_i - \vec{r}_0$
Y el **momento angular** respecto al origen no fijo es:

$$\vec{L'} = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times m_i(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_0)$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L'}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_i(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times m_i(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_0)\right) \\
&= \sum(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_0) \times m_i(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_0) + \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times m_i(\ddot{\vec{r}}_i - \ddot{\vec{r}}_0) \\
&= \sum_i(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int} - m_i\ddot{\vec{r}}_0)
\end{aligned}$$

Usamos que las fuerzas internas se cancelan y que $\sum m_i\vec{r}_i = M\vec{R}$. Entonces tenemos que:

$$\frac{d\vec{L'}}{dt} = \left(\sum(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i^{ext}\right) - M(\vec{R} - \vec{r}_0) \times \ddot{\vec{r}}_0$$

Que es una expresión bastante fea. Sin embargo, queda más sencilla en tres casos particulares:

- $\vec{R} = \vec{r}_0$ (El origen es el CM)
- $\ddot{r}_0 = 0$ (el origen no acelera)

- $(\vec{R} - \vec{r}_0)$ es paralelo a $\ddot{r}_0$

En cualquiera de estos casos, tenemos que:

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i^{ext} := \sum \vec{\tau}_i^{ext}$$

Donde recordamos que $\vec{L}'$ está medida respecto al origen no fijo (y la torca también se mide así).

Es decir **Teorema:** Si medimos el $\vec{L}$ respecto al CM, su derivada es igual al torque total aplicado (respecto al CM).
Que es algo medio sorprendente, porque el CM no es siempre un sistema inercial y sin embargo se cumple esta ecuación, qué loco.

Todo hasta aquí es válido para cualquier movimiento (no necesariamente el de $\widehat{L} = cte$)

11.5. Problemas típicos

11.5.1. Movimiento Tras un Impulso

Problema: Tres masas están conectadas por palos sin masa en un triángulo isóceles. La masa B es golpeada rápidamente con un golpe dirigido hacia la hoja. El impulso tiene una magnitud $\int F dt = P$. Velocidades de las tres masa despúes del golpe?

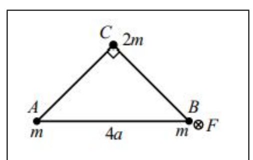
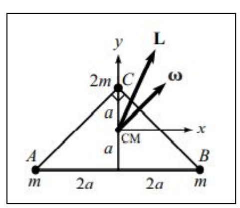


Fig. 9.18

- **Solución:** Vamos a encontrar el momento angular usando el impulso angular.



El centro de masa es donde se ve el dibujo. Desde el centro de masa, se tiene que los vectores son $\vec{r}_A = (-2a, -a, 0)$, $\vec{r}_B = (2a, -a, 0)$, $\vec{r}_C = (0, a, 0)$

- **Encontrar** L**:** El eje z se dirije hacia afuera de la página, el vector de impulso es $\vec{P} = (0, 0, -P)$. Entonces, el momento angular es:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int \vec{\tau} dt = \int \vec{r}_B \times \vec{F} dt = \vec{r}_B \times \int \vec{F} dt \\ &= (2a, -a, 0) \times (0, 0 - P) = aP(1, 2, 0) \end{aligned}$$

  Donde $\vec{r}_B$ es asumido constante por la rapidez del golpe

- **Momentos Principales**: Los ejes principales son x, y, z por la simetría. Los momentos relativos a estos ejes son:

$$\begin{aligned} I_x &= ma^2 + ma^2 + (2m)a^2 = 4ma^2 \\ I_y &= m(2a)^2 + m(2a)^2 + (2m)0^2 = 8ma^2 \\ I_z &= I_x + I_y = 12ma^2 \end{aligned}$$

- **Encontrar** $\vec{\omega}$**:** Tenemos que $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Pero como son los ejes principales, tenemos que $\vec{L} = (I_x\omega_x, I_Y\omega_y, I_z\omega_z)$.
  Igualamos esto a la expresión anterior de $\vec{L}$:

$$\begin{aligned} (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z) &= aP(1, 2, 0) \\ (4ma^2\omega_x, 8ma^2\omega_y, 12ma^2\omega_z) &= aP(1, 2, 0) \\ (\omega_x, \omega_y, \omega_z) &= \frac{P}{4ma}(1, 1, 0) \end{aligned}$$

- **Calculamos las velocidades relativas al CM**
  Justo después del golpe, el objeto rota alrededor del CM y las velocidades son $\vec{u}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_a$

$$\begin{aligned} \vec{u}_A &= \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \frac{P}{4ma}(1, 1, 0) \times (-2a, -a, 0) = (0, 0, P/4m) \\ \vec{u}_B &= \vec{\omega} \times \vec{r}_B = \frac{P}{4ma}(1, 1, 0) \times (2a, -a, 0) = (0, 0, -3P/4a) \\ \vec{u}_C &= \vec{\omega} \times \vec{r}_C = \frac{P}{4ma}(1, 1, 0) \times (0, a, 0) = (0, 0, P/4m) \end{aligned}$$

- **Sumar la velocidad del CM**:
  El golpe le da a todo el sistema un momento $\vec{P} = (0, 0, -P)$. La masa total es $M = 4m$, por lo que:

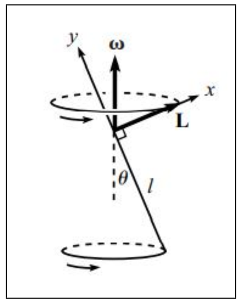
$$V_{CM} = \frac{\vec{P}}{4m} = (0, 0, -P/4m)$$

  Luego, la velocidad con respecto al sistema fijo es:

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{u}_A + V_{CM} = (0, 0, 0) \\ \vec{v}_B &= \vec{u}_B + V_{CM} = (0, 0, -P/m) \\ \vec{v}_C &= \vec{u}_C + V_{CM} = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

11.5.2. Frecuencia de un movimiento debido a un torque

Problema



Problema: Tenemos un palo de longitud l, masa uniforme m. El palo está pivotado y gira de tal forma que siempre hace un ángulo θ con la vertical. Frecuencia de movimiento.

- Vamos a encontrar los principales momentos y el momento angular para encontrar $\vec{L}$ y luego encontraremos el torque e igualaremos $\vec{\tau}$ con $d\vec{L}/dt$. Ponemos el origen en el pivote (para que las fuerzas del pivote no importen) y porque es un origen quieto, no hay problema.

- **Momentos Principales:** Los ejes principales son uno a lo largo del palo y dos perpendiculares. Los definimos como en la figura, con el z hacia afuera de la hoja.
Los momentos de inercia son $I_x = ml^2/3$, $I_y = 0$, $I_z = ml^2/3$

- **Encontrar** $\vec{L}$: El vector de velocidad angular apunta verticalmente. Por lo que en nuestro sistema, es $\vec{\omega} = (\omega \sin\theta, \omega\cos\theta, 0)$. Entonces tenemos que:

$$\vec{L} = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z) = (1/3ml^2\omega\sin\theta, 0, 0)$$

- **Encontramos** $\frac{d\vec{L}}{dt}$: No puedo derivar $\vec{L}$ así nadamás, porque está cambiando respecto a los ejes.
En el instante mostrado, apunta en la dirección x con magnitud $L = 1/3ml^2\omega\sin\theta$. Conforme gira, $\vec{L}$ traza un cono. La punta de $\vec{L}$ traza un círculo de radio $L\cos\theta$. La velocidad de la punta es entonces $L\cos\theta\omega$ (porque gira con la misma frecuencia que el palo). Entonces:

$$\left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = L\cos\theta\omega = \frac{1}{3}ml^2\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

Y apunta hacia dentro de la hoja.
Remark (forma formal): Como $\vec{L}$ tiene magnitud constante, sabemos que su taza de cambio es $d\vec{L}/dt = \vec{\omega}\times\vec{L}$. Podemos calcularlo así y obtener $(0, 0, -1/3ml^2\omega^2\sin\theta\cos\theta)$ Que es correcto

- **Torca:** La única torca es la de la masa, que actúa en el CM. Tiene una magnitud de:

$$|\vec{\tau}| = rF\sin\theta = (l/2)(mg)\sin\theta$$

- **Igualar $\vec{\tau}$ con $d\vec{L}/dt$:** Al igualar los vectores (que apuntan en la misma dirección, como deberían), tenemos que:

$$\frac{ml^2\omega^2\cos\theta\sin\theta}{3} = \frac{mgl\sin\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{2l\cos\theta}}$$

11.6. Ecuaciones de Euler

Consideramos un cuerpo instantáneamente rotando por un eje $\vec{\omega}$. El momento angular está dado por $\vec{L} = I\vec{\omega}$ calculado respecto a un cierto origen y sistema de ejes.
Pero podemos usar un eje principal (que rota junto con el objeto) para escribir:

$$\vec{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$$

Donde ω_i son los componentes de $\vec{\omega}$ en los ejes principales. Es decir, si tomamos $\vec{L}$ y lo proyectamos sobre los ejes principales instantáneos, obtenemos estos componentes.

Escribirlo así hace que quede muy limpio. Sin embargo, nos hace difícil saber cómo cambia $\vec{L}$ (respecto al origen fijo) porque los ejes como tal están cambiando.
El objetivo ahora es encontrar una expresión para $d\vec{L}/dt$ respecto al sistema fijo (para poder igualarla a la torca respecto al sistema fijo) y obtener así las ecuaciones de Euler.

Si escribimos $\vec{L}$ respecto al sistema del cuerpo (que son ejes pintados en el cuerpo), entonces $\vec{L}$ puede cambiar (respecto al lab) por dos efectos:
Sus componentes cambian en el body frame
O la rotación del body frame hace que cambie.

Sea $\vec{L}_0$ el vector $\vec{L}$ en un instante. Digamos que pintamos $\vec{L}_0$ en el cuerpo de forma que se mueve con éste. Entonces el cambio de $\vec{L}$ respecto al lab frame es:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{L} - \vec{L}_0)}{dt} + \frac{d\vec{L}_0}{dt}$$

El segundo término es el cambio de un vector fijo en el cuerpo, por lo que es $\vec{\omega} \times \vec{L}$. Y el primer término es el cambio que mide alguien dentro del cuerpo, que denotaremos como $\delta\vec{L}/\delta t$. Entonces tenemos que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\delta\vec{L}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

(Esto ya lo vimos para lo de fuerzas ficticias).
Ahora bien, si los ejes del cuerpo son los ejes principales, tenemos que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) + (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \times (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$$

La primera derivada es claramente lo que mide alguien dentro del cuerpo.
Como escogimos el sistema de referencia instantáneo de los ejes principales del lado derecho, hay que hacer lo mismo del lado derecho. Por lo que tenemos que:

$$\left(\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_1, \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_2, \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_3\right) = \frac{d}{dt}(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) + (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \times (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$$

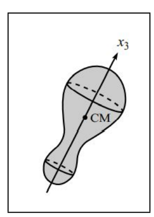
El lado izquierdo significa que primero estamos derivando $\vec{L}$ (respecto al lab) y luego escribiendo sus componentes al proyectar sobre los ejes principales). Si escogimos un origen fijo o el CM, estas componentes son las componentes de la torca medido respecto de este sistema, por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2 \\ \tau_2 &= I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 \\ \tau_3 &= I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 \end{aligned}$$

Repetimos que estos son compoenentes de los vectores en el sistema de ejes principales que se mueve junto con el cuerpo y que no están fijos en el lab.

11.7. Trompo Simétrico Libre

Consideramos un objeto medio cilíndrico (con dos de sus momentos principales iguales) y con el origen en el CM.
Asumimos que está en el espacio exterior y no le actúa ninguna fuerza.



Los ejes principales son el eje de simetría y dos ejes ortogonales. Tenemos que $I_1 = I_2 := I$ y tenemos I_3.

11.7.1. Vista desde el Body Frame

Desde el Body Frame podemos usar las ecuaciones de Euler con. Como no hay torcas, tenemos que:

$$0 = I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\omega_3\omega_2$$
$$0 = I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\omega_1\omega_3$$
$$0 = I_3\dot{\omega}_3$$

Luego, como ω_3 es constante por la tercera ecuación, podemos definir:

$$\Omega := \frac{I_3 - I}{I}\omega_3$$

Con ello, las primeras dos ecuaciones se convierten en:

$$\dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 = 0 \quad , \quad \dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0$$

Se puede ver que tienen como soluciones a:

$$\omega_1(t) = A\cos(\Omega t + \phi) \quad , \quad \omega_2(t) = A\sin(\Omega t + \phi)$$

Es decir, trazan un cono alrededor de $\widehat{x}_3$ desde el punto de vista del body frame, con una fercuencia de Ω (que depende de ω_3 y de la geometría del cuerpo).
El momento angular es:

$$\vec{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) = (IA\cos(\Omega t + \phi), IA\sin(\Omega t + \phi), I_3\omega_3)$$

Por lo que $\vec{L}$ también traza un cono alrededor de $\widehat{x}_3$ con frecuncia Ω para alguien sentado en el cuerpo.

- **Oblato:** Si $\Omega > 0 \;\Rightarrow\; I_3 > I$, entonces $L_3/L_2 > \omega_3/\omega_2$, por lo que el vector $\vec{L}$ está arriba del vector $\vec{\omega}$ (entre $\vec{\omega}$ y $\vec{x}_3$). Y los vectores $\vec{\omega}, \vec{L}$ precesan alrededor de $\widehat{x}_3$ en sentido antihorario.
- **Prolato:** Si $\Omega < 0$ ($I_3 < I$) entonces $L_3/L_2 < \omega_3/\omega_2$. Por lo que el vector $\vec{L}$ está debajo del vector $\vec{\omega}$. Y los vectores $\vec{\omega}, \vec{L}$ precesan alrededor de $\widehat{x}_3$ en sentido horario.

11.7.2. Desde un sistema fijo

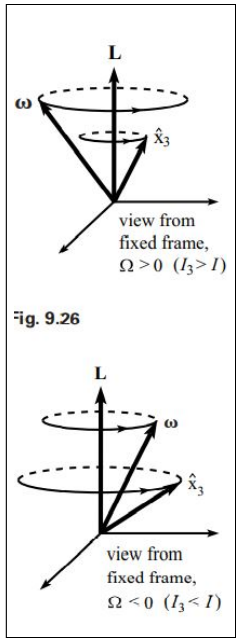
Ahora estamos parados en un sistema fijo. Las ecuaciones de Euler no sirven mucho porque dan los componentes en los ejes principales. Por lo que resolvemos desde cero.
Los vectores (que cambian con el tiempo) de velocidad angular y momento son:

$$\vec{\omega} = (\omega_1\widehat{x}_1 + \omega_2\widehat{x}_2) + \omega_3\widehat{x}_3$$
$$\vec{L} = I(\omega_1\widehat{x}_1 + \omega_2\widehat{x}_2) + I_3\omega_3\widehat{x}_3$$

Si definimos $\Omega := \frac{I_3 - I}{I}\omega_3$ y hacemos unos despejes, nos queda que:

$$\vec{L} = I(\vec{\omega} + \Omega\widehat{x}_3) \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \frac{L}{I}\widehat{L} - \Omega\widehat{x}_3$$

Esta relación lineal indica que $\vec{L}, \vec{\omega}$ y $\widehat{x}_3$ están en el mismo plano.
Pero $\vec{L}$ está vijo porque no hay torcas. Por lo que $\vec{\omega}$ y $\widehat{x}_3$ precesan alrededor de $\vec{L}$.
Tenemos dos casos como antes:



La tasa de cambio de $\widehat{x}_3$ es $\vec{\omega} \times \widehat{x}_3$ (porque su cambio es sólo rotacional debido a la rotación $\vec{\omega}$ del cuerpo. Entonces:

$$\frac{d\vec{\omega}_3}{dt} = \left(\frac{L}{I} \widehat{L} - \Omega \widehat{x}_3 \right) \times \widehat{x}_3 = \frac{L}{I} \widehat{L} \times \widehat{x}_3$$

Pero esta es la expresión de un vector $\vec{x_3}$ rotando alrededor del vector $\tilde{\vec{\omega}} = L/I\widehat{L}$ con frecuencia de rotación:

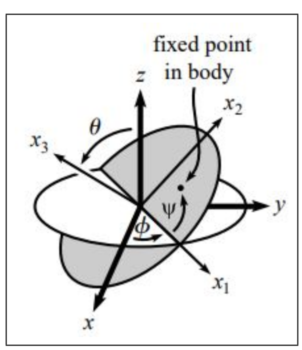
$$\tilde{\omega} = \frac{L}{I}$$

Y por tanto $\vec{\omega}$ también precesa con esta frecuencia porque están siempre en el mismo plano.

11.8. Trompo Pesado

Consideramos ahora un trompo bajo la acción de la gravedad. El trompo es como el de antes en cuanto a sus simetrías y eso

11.8.1. Ángulos de Euler



Definimos los ángulos θ, ϕ, ψ como en la figura:

- θ: Sea $\widehat{x}_3$ el eje de simetría del trompo. θ es el ángulo de $\widehat{x}_3$ y $\widehat{z}$
- ϕ: Dibujamos un plano ortogonal a $\widehat{x}_3$. Sea $\widehat{x}_1$ la intersección de este plano con el plano fijo $x - y$. Definimos ϕ como el ángulo entre $\widehat{x}_1$ y el eje $\widehat{x}$. Notamos que $\widehat{x}_1$ no está necesariamente fijo en el objeto.
- ψ: Sea $\widehat{x}_2$ el vector ortogonal a $\widehat{x}_1, \widehat{x}_3$. Sea S el frame de $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3$. Definimos ψ como el ángulo de rotación del cuerpo alrededor de $\widehat{x}_3$ en S. Así que $\dot{\psi}\widehat{x}_3$ es la velocidad angular del cuerpo respecto a S.
  Y vemos que la velocidad angular de S respecto al sistema fijo es de $\dot{\phi}\widehat{z} + \dot{\theta}\widehat{x}_1$

La velocidad angular del cuerpo respecto al lab es igual a la velocidad angular del cuerpo respecto a S más la velocidad angular de S respecto al Lab. Por tanto:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\widehat{x}_3 + (\dot{\phi}\widehat{z} + \dot{\theta}\widehat{x}_1)$$

Lo podemos escribir completamente en términos de los vectores de S. Tomando en cuenta que $\widehat{z} = \cos\theta\widehat{x}_3 + \sin\theta\widehat{x}_2$ nos queda:

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\widehat{x}_3 + \dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_2 + \dot{\theta}\widehat{x}_1$$

Esto es más útil porque $\widehat{x}_1$, $\widehat{x}_2$ son siempre ejes principales del cuerpo (aunque no están pintados en el cuerpo)

11.8.2. Método del Torque

Por conveniencia, definimos $\dot{\beta} = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$. Entonces:

$$\vec{\omega} = \dot{\beta}\widehat{x}_3 + \dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_2 + \dot{\theta}\widehat{x}_1$$

Para el origen, vamos a escoger la punta del trompo (que suponemos que está fija en la mesa).
Como estamos usando los ejes principales, la velocidad angular es simplemente:

$$\vec{L} = I_3\dot{\beta}\widehat{x}_3 + I\dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_2 + I\dot{\theta}\widehat{x}_1$$

Calcular $d\vec{L}/dt$

- **Con Geometría:** Derivamos literalmente $\vec{L}$ como $\frac{d\vec{L}}{dt} = I_3\frac{d\dot{\beta}}{dt}\widehat{x}_3 + I\frac{d(\dot{\phi}\sin\theta}{dt}\widehat{x}_2 + I\frac{d\dot{\theta}}{dt}\widehat{x}_1 + I_3\dot{\beta}\frac{d\widehat{x}_3}{dt} + I\dot{\phi}\sin\theta\frac{d\widehat{x}_2}{dt} + I\dot{\theta}\frac{d\widehat{x}_1}{dt}$.
  Luego, podemos encontrar las derivadas de los vectores con un poco de geometría y ver que $\frac{d\widehat{x}_3}{dt} = -\dot{\theta}\widehat{x}_2 + \dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_1$, $\frac{d\widehat{x}_2}{dt} = \dot{\theta}\widehat{x}_3 - \dot{\phi}\cos\theta\widehat{x}_1$, $\frac{d\widehat{x}_1}{dt} = -\dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_3 + \dot{\phi}\cos\theta\widehat{x}_2$
  Juntando esto, tenemos que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_3\ddot{\beta}\widehat{x}_3 + (I\ddot{\phi}\sin\theta + 2I\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta - I_3\dot{\beta}\dot{\theta})\widehat{x}_2 + (I\ddot{\theta} - I\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + I_3\dot{\beta}\dot{\phi}\sin\theta)\widehat{x}_1$$

- **Con Derivada en distintos Frames**:
  Sabemos que la derivada de $\vec{L}$ en el lab es igual a la derivada de $\vec{L}$ en el body más $\vec{\omega} \times \vec{L}$. Es decir, $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{\delta\vec{L}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{L}$
  Calculamos $\dfrac{\delta\vec{L}}{\delta t} = I_3\ddot{\beta}\widehat{x}_3 + (I\ddot{\phi}\sin\theta + I\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\widehat{x}_2 + I\ddot{\theta}\widehat{x}_1$
  Y calculamos $\vec{\omega} \times \vec{L} = (\dot{\theta}\widehat{x}_1 + \dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_2 + \dot{\beta}\widehat{x}_3) \times (I\dot{\theta}\widehat{x}_1 + I\dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_2 + I_3\dot{\beta}\widehat{x}_3)$ usando que son una base ortonormal, nos queda:
  $\vec{\omega} \times \vec{L} = (I_3 - I)\dot{\beta}\dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_1 + (I - I_3)\dot{\beta}\dot{\theta}\widehat{x}_2$
  Entonces, la derivada completa es:

  $$\frac{d\vec{L}}{dt} = ((I_3 - I)\dot{\beta}\dot{\phi}\sin\theta + I\ddot{\theta})\widehat{x}_1 + ((I - I_3)\dot{\beta}\dot{\theta} + I\ddot{\phi}\sin\theta + I\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\widehat{x}_2 + I_3\ddot{\beta}\widehat{x}_3$$

  No Funciona. Al sustituir algunos $\dot{\beta}$ nos damos cuenta que es una respuesta distinta a la de antes. Esto porque los ejes $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3$ no están dibujados en el trompo.

- **Ecuaciones de Euler**: Tampoco funciona, por lo mismo (queda igual que con el método de atrás)
  El tema es que no se vale el término $\vec{\omega} \times \vec{L}$.

Ahora que tenemos que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_3\ddot{\beta}\widehat{x}_3 + (I\ddot{\phi}\sin\theta + 2I\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta - I_3\dot{\beta}\dot{\theta})\widehat{x}_2 + (I\ddot{\theta} - I\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + I_3\dot{\beta}\dot{\phi}\sin\theta)\widehat{x}_1$$

Simplemente usamos $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$.
La torca se debe a la masa en el CM. Viendo la figura, vemos que $\vec{r}\times\vec{F}$ apunta en la dirección $\widehat{x}_1$ y tiene una magnitud de $Mgl\sin\theta$ con l la distancia del pivota al CM.
Usar esto nos da rápidamente las tres ecuaciones:

$$\begin{gathered}\ddot{\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\beta} := \omega_3 \\ I\ddot{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}(2I\dot{\phi}\cos\theta - I_3\omega_3) = 0 \\ (Mgl + I\dot{\phi}^2\cos\theta - I_3\omega_3\dot{\phi})\sin\theta = I\ddot{\theta}\end{gathered}$$

11.8.3. Método de Lagrange

La energía cinético del trompo (tomando en cuenta que no se desplaza) es de $T = \vec{\omega} \cdot \vec{L}/2$. Usando las expresiones para estas cosas, tenemos que:

$$\begin{aligned}T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} &= (\dot{\theta}\widehat{x}_1 + \dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_2 + \dot{\beta}\widehat{x}_3) \cdot (I\dot{\theta}\widehat{x}_1 + I\dot{\phi}\sin\theta\widehat{x}_2 + I_3\dot{\beta}\widehat{x}_3) \\ &= \frac{1}{2}I(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2\end{aligned}$$

Luego, la energía potencial es $V = Mgl\cos\theta$.
Por tanto, el Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V$. Y usando esto, las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta := \omega_3 - cte \\
\frac{d}{dt}\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}(I_3\omega_3\cos\theta + I\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0 \\
\frac{d}{dt}\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \quad\Rightarrow\quad I\ddot{\theta} = (Mgl + I\dot{\phi}^2\cos\theta - I_3\omega_3\dot{\phi})\sin\theta
\end{aligned}$$

Las cantidades conservadas son el momento angular en la dirección $\widehat{x}_3$ y en la dirección $\widehat{z}$

11.8.4. Spinning con $\dot{\theta} = 0$

Recordamos que las ecuaciones son:

$$\begin{gathered}
\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = dte \\
I\ddot{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}(2I\dot{\phi}\cos\theta - I_3\omega_3) = 0 \\
(Mgl + I\dot{\phi}^2\cos\theta - I_3\omega_3\dot{\phi})\sin\theta = I\ddot{\theta}
\end{gathered}$$

Definimos $\Omega := \dot{\phi}$
En este caso, la tercera ecuación pasa a ser:

$$I\Omega^2\cos\theta - I_3\omega_3\Omega + Mgl = 0$$

Ω es la frecuencia de precesión con la que da vueltas el trompo al eje vertical. Esta frecuencia se puede obtener de resolver la ecuación anterior. Por lo que encontramos que la frecuencia de precesión es:

$$\Omega_\pm = \frac{I_3\omega_3}{2I\cos\theta}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MIgl\cos\theta}{I_3^2\omega_3^2}}\right)$$

Se llaman precesión rápida y precesión lenta.
Si ω_3 es grande, podemos demostrar que la frecuencia es:

$$\Omega_- \simeq \frac{Mgl}{I_3\omega_3}$$

11.8.5. Nutación

Ahora resolvemos las ecuaciones en un caso un poco más general.

$$\begin{gathered}
\omega_3 = \dot{\beta} = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = cte \\
I\ddot{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}(2I\dot{\phi}\cos\theta - I_3\omega_3) = 0 \\
(Mgl + I\dot{\phi}^2\cos\theta - I_3\omega_3\dot{\phi})\sin\theta = I\ddot{\theta}
\end{gathered}$$

Suponemos que θ puede variar suavemente. Suponemos que ω_3 es grande y que $\dot{\phi}$ (frecuencia de precesión) es chiquito.
Entonces, el trompo va a 'rebotar' un poco conforme gira en el círculo. Esto se llama **nutación.**
Si $\dot{\phi}$ es chiquito (que es la frecuencia de precesión). Por lo que las ecuaciones quedan como:

$$I\ddot{\phi}\sin\theta - \dot{\theta}I_3\omega_3 = 0$$
$$(Mgl - I_3\omega_3\dot{\phi})\sin\theta = I\ddot{\theta}$$

Derivamos la primera ecuación y dejamos de lado el término cuadrático y nos queda $\ddot{\theta} = (I\sin\theta/I_3\omega_3)\dddot{\phi}$. Sustituimos esto en la segunda ecuación y nos queda:

$$\dddot{\phi} + \omega_n^2(\dot{\phi} - \Omega_s) = 0$$

Donde:

$$\omega_n = \frac{I_3\omega_3}{I} \quad , \quad \Omega_s = \frac{Mgl}{I_3\omega_3}$$

Son la frecuencia de nutación y la de precesión lenta (aproximada). Podemos resolver para obtener que:

$$\phi(t) = \Omega_s t + \frac{A}{\omega_n}\sin(\omega_n t + \gamma)$$

Y luego para θ resolvemos (usando $\sin\theta \simeq \sin\theta_0$ porque varía poco) y tenemos:

$$\omega(t) = B + \left(\frac{A}{\omega_n}\sin\theta_0\right)\cos(\omega_n t + \gamma)$$

Se ve cómo ω_n es la frecuencia con la que sube y baja θ (nutación). Y se ve que ϕ también cambia debido a esta frecuencia.