# Solitones: Tarea 6

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

21 de enero de 2022

## Problemas 24-25

**Considera la ecuación NLS:**

$$iu_z + \epsilon u_{tt} + |u|^2 u = 0$$

**¿Es posible usar el método variacional de Anderson para explicar por qué sólo pueden existir solitones brillantes cuando $\epsilon > 0$? Explica con detalle**

Primero veamos cuál es la lagrangiana de esta ecuación diferencial. Ya hemos trabajado la ecuación y ecuaciones similares y hemos visto antes que la lagrangiana es la siguiente:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(uu_z^* - u^* u_z) + \epsilon u_t u_t^* - \frac{1}{2}u^2 u^{*2}$$

Para comprobar que sí lo es, calculamos la ecuación de Euler-Lagrange para esta lagrangiana:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \partial_t \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} \right) - \partial_z \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} \right) = 0$$

Calculamos cada una de estas derivadas por separado:

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = \dfrac{\partial}{\partial u^*}\left( \dfrac{i}{2}(uu_z^* - u^* u_z) + \epsilon u_t u_t^* - \dfrac{1}{2}u^2 u^{*2} \right) = -\dfrac{i}{2}u_z - u^2 u^* = -\dfrac{i}{2}u_z - |u|^2 u$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} = \dfrac{\partial}{\partial u_t^*}\left( \dfrac{i}{2}(uu_z^* - u^* u_z) + \epsilon u_t u_t^* - \dfrac{1}{2}u^2 u^{*2} \right) = \epsilon u_t$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} = \dfrac{\partial}{\partial u_z^*}\left( \dfrac{i}{2}(uu_z^* - u^* u_z) + \epsilon u_t u_t^* - \dfrac{1}{2}u^2 u^{*2} \right) = \dfrac{i}{2}u$

Por lo que al sustituir en la ecuación de Euler Lagrange nos queda:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \partial_t \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} \right) - \partial_z \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} \right) &= 0 \\
\Rightarrow\ -\frac{i}{2}u_z - |u|^2 u - \partial_t(\epsilon u_t) - \partial_z\left(\frac{i}{2}u\right) &= 0 \\
\Rightarrow\ -\frac{i}{2}u_z - |u|^2 u - \epsilon u_{tt} - \frac{i}{2}u_z &= 0 \\
\Rightarrow\ -iu_z - \epsilon u_{tt} - |u|^2 u &= 0
\end{aligned}$$

Que es la ecuación diferencial que queremos estudiar.

Queremos ver por qué los solitones brillantes sólo pueden existir cuando $\epsilon > 0$. Para hacerlo, usamos la expresión de los solitones brillantes de esta ecuación, que como vimos en la clase 8 (en la cual en realidad se probó que $\epsilon > 0$ para solitones brillantes), se pueden escribir como:

$$u(z,t) = A\ sech(Bt)e^{iCz}$$

Para ver que para que esta solución sea válida se debe de tener que $\epsilon > 0$ en la ecuación diferencial, usaremos el método variacional. Para usarlo, primero hay que suponer que $A$, $B$, $C$ dependen de $z$ y calcular $\mathcal{L}$, lo cual requiere calcular los siguientes términos:

- $u = A(z)\ sech(B(z)t)e^{iC(z)z}$
- $u^* = A(z)\ sech(B(z)t)e^{-iC(z)z}$
- $u_z = A'(z)sech(B(z)t)e^{iC(z)z} - A(z)B'(z)t\ sech(B(z)t)\ tanh(B(z)t)e^{iC(z)z}$
  $+A(z)sech(B(z)t)\ e^{iC(z)z}(iC(z) + izC'(z))$
- $u_z^* = A^{'}(z)sech(B(z)t)e^{-iC(z)z} - A(z)B'(z)t\ sech(B(z)t)\ tanh(B(z)t)e^{-iC(z)z}$
  $-A(z)sech(B(z)t)\ e^{-iC(z)z}(iC(z) + izC'(z))$
- $u_t = -e^{iC(z)z}A(z)B(z)sech(B(z)t)\ tanh(B(z)t)$
- $u_t^* = -e^{-iC(z)z}A(z)B(z)sech(B(z)t)\ tanh(B(z)t)$

Entonces, la lagrangiana para esta solución es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{i}{2}(uu_z^* - u^*u_z) + \epsilon u_t u_t^* - \frac{1}{2}u^2u^{*2} \\
&= \frac{i}{2}A(z)\ sech(B(z)t)e^{iC(z)z}\Big[A'(z)sech(B(z)t)e^{-iC(z)z} - A(z)B'(z)t\ sech(B(z)t)\ tanh(B(z)t)e^{-iC(z)z} \\
&\quad - A(z)sech(B(z)t)\ e^{-iC(z)z}(iC(z) + izC'(z))\Big] \\
&\quad - \frac{i}{2}A(z)\ sech(B(z)t)e^{-iC(z)z}\Big[A'(z)sech(B(z)t)e^{iC(z)z} - A(z)B'(z)t\ sech(B(z)t)\ tanh(B(z)t)e^{iC(z)z} \\
&\quad + A(z)sech(B(z)t)\ e^{iC(z)z}(iC(z) + izC'(z))\Big] \\
&\quad + \epsilon e^{iC(z)z}A(z)B(z)sech(B(z)t)tanh(B(z)t)e^{-iC(z)z}A(z)B(z)sech(B(z)t)tanh(B(z)t) \\
&\quad - \frac{1}{2}A(z)^4sech^4(B(z)t) \\
&= \frac{i}{2}A(z)A'(z)sech^2(B(z)t) - \frac{i}{2}A^2(z)B'(z)sech^2(B(z)t)tanh(B(z)t) - \frac{i}{2}A^2(z)sech^2(B(z)t)(iC(z) + izC'(z)) \\
&\quad - \frac{i}{2}A(z)A'(z)sech^2(B(z)t) + \frac{i}{2}A^2(z)B'(z)tsech^2(B(z)t)tanh(B(z)t) - \frac{i}{2}A^2(z)sech^2(B(z)t)(iC(z) + izC'(z)) \\
&\quad + \epsilon A^2(z)B^2(z)sech^2(B(z)t)tanh^2(B(z)t) - \frac{1}{2}A^4(z)sech^4(B(z)t) \\
&= -iA^2(z)sech^2(B(z)t)(iC(z) + izC'(z)) + \epsilon A^2(z)B^2(z)sech^2(B(z)t)tanh^2(B(z)t) - \frac{1}{2}A^4(z)sech^4(B(z)t) \\
&= A^2(z)sech^2(B(z)t)(C(z) + zC'(z)) + \epsilon A^2(z)B^2(z)sech^2(B(z)t)tanh^2(B(z)t) - \frac{1}{2}A^4(z)sech^4(B(z)t)
\end{aligned}$$

Luego, podemos calcular la lagrangiana promediada o reducida:

$$
\begin{aligned}
\langle\mathcal{L}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A^2(z)sech^2(B(z)t)(C(z)+zC'(z)) + \epsilon A^2(z)B^2(z)sech^2(B(z)t)tanh^2(B(z)t) - \frac{1}{2}A^4(z)sech^4(B(z)t)dt \\
&= A^2(z)(C(z)+zC'(z))\int_{-\infty}^{\infty} sech^2(B(z)t)dt \\
&\qquad + \epsilon A^2(z)B^2(z)\int_{-\infty}^{\infty} sech^2(B(z)t)tanh^2(B(z)t)dt\ - \frac{1}{2}A^4(z)\int_{-\infty}^{\infty} sech^4(B(z)t)dt \\
&= A^2(z)(C(z)+zC'(z))\frac{tanh(B(z)t)}{B(z)}\bigg|_{-\infty}^{\infty} \\
&\qquad + \epsilon A^2(z)B^2(z)\frac{tanh^3(B(z)t)}{3B(z)}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2}A^4(z)\frac{2tanh(B(z)t)}{3B(z)} - \frac{1}{2}A^4(z)\frac{sech^2(B(z)t)tanh(B(z)t)}{3B(z)}\bigg|_{-\infty}^{\infty} \\
&= A^2(z)(C(z)+zC'(z))\frac{2}{B(z)} + \epsilon A^2(z)B^2(z)\frac{2}{3B(z)} - \frac{1}{2}A^4(z)\frac{4}{3B(z)} \\
&= 2\frac{A^2(z)}{B(z)}(C(z)+zC'(z)) + \frac{2}{3}\epsilon A^2(z)B(z) - \frac{2}{3}A^4(z)\frac{1}{B(z)}
\end{aligned}
$$

Ahora imponemos la condición variacional $\delta\int\langle\mathcal{L}\rangle dz = 0$ para variaciones en $A(z)$ lo cual nos lleva a la ecuación de Euler Lagrange:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\langle\mathcal{L}\rangle}{\partial A} - \frac{d}{dz}\frac{\partial\langle\mathcal{L}\rangle}{\partial A'} &= 0 \\
\Rightarrow\ 4\frac{A(z)}{B(z)}(C(z)+zC'(z)) + \frac{4}{3}\epsilon A(z)B(z) - \frac{8}{3}A^3(z)\frac{1}{B(z)} &= 0 \\
\Rightarrow\ C(z)+zC'(z) + \frac{1}{3}\epsilon B^2(z) - \frac{2}{3}A^2(z) &= 0 \\
\Rightarrow\ C(z)+zC'(z) = \frac{2}{3}A^2(z) - \frac{1}{3}\epsilon B^2(z) &\qquad (1)
\end{aligned}
$$

Ahora calculamos la condición variacional para $B(z)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\langle\mathcal{L}\rangle}{\partial B} - \frac{d}{dz}\frac{\partial\langle\mathcal{L}\rangle}{\partial B'} &= 0 \\
\Rightarrow\ -2\frac{A^2(z)}{B^2(z)}(C(z)+zC'(z)) + \frac{2}{3}\epsilon A^2(z) + \frac{2}{3}\frac{A^4(z)}{B^2(z)} &= 0 \\
\Rightarrow\ \frac{A^2(z)}{B^2(z)}(C(z)+zC'(z)) - \frac{1}{3}\epsilon A^2(z) - \frac{1}{3}\frac{A^4(z)}{B^2(z)} &= 0 \\
\Rightarrow\ C(z)+zC'(z) - \frac{1}{3}\epsilon B^2(z) - \frac{1}{3}A^2(z) &= 0 \\
\Rightarrow\ C(z)+zC'(z) = \frac{1}{3}\epsilon B^2(z) + \frac{1}{3}A^2(z) &\qquad (2)
\end{aligned}
$$

Luego, podemos igualar las expresiones (1) y (2) y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}A^2(z) - \frac{1}{3}\epsilon B^2(z) &= \frac{1}{3}\epsilon B^2(z) + \frac{1}{3}A^2(z) \\
\Rightarrow\ \frac{1}{3}A^2(z) &= \frac{2}{3}\epsilon B^2(z) \\
\Rightarrow\ A^2(z) &= 2\epsilon B^2(z) \\
\Rightarrow\ \epsilon &= \frac{1}{2}\frac{A^2(z)}{B^2(z)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, concluimos que para que $u$ sea un punto estacionario de $\mathcal{L}[u(z,t)]$, se debe de cumplir necesariamente que $\epsilon = \frac{1}{2}\frac{A^2(z)}{B^2(z)}$. Esto implica que $\epsilon$ debe de ser positiva, pues $A^2(z)/B^2(z)$ es un número real al cuadrado y por tanto positivo.

## Problemas 26-27

**Obtén la solución de la ecuación:**

$$iu_z + i\epsilon_0 u + \epsilon_2 u_{tt} - i\epsilon_3 u_{ttt} = 0$$

**(donde los coeficientes $\epsilon_n$ son reales positivos), correspondiente a una condición inicial de la forma:**

$$u(0,t) = f(t)$$

Resolvemos la ecuación utilizando la transformada de Fourier (respecto a $t$), la cual se define como:

$$U(z,s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z,t)e^{its}dt$$

Entonces, la condición inicial que teníamos se traduce a:

$$U(0,s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(0,t)e^{its}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{its}dt = F(s)$$

Con $F(s)$ la transformada de Fourier de $f(t)$.

Ahora transformamos la ecuación diferencial, para lo cual tendremos que utilizar el resultado visto en clase de que la transformada de la derivada $u_{nt}(t)$ es $(-is)^n U(s)$. Y la transformada de $u_z(t)$ es simplemente $U_z(s)$, pues no se está transformando sobre esta variable. Por lo tanto, la ecuación diferencial se transforma en:

$$\begin{aligned}
& iu_z + i\epsilon_0 u + \epsilon_2 u_{tt} - i\epsilon_3 u_{ttt} = 0 \\
\Rightarrow\ & iU_z + i\epsilon_0 U + \epsilon_2(-is)^2 U - i\epsilon_3(-is)^3 U = 0 \\
\Rightarrow\ & iU_z + i\epsilon_0 U - \epsilon_2 s^2 U + \epsilon_3 s^3 U = 0 \\
\Rightarrow\ & iU_z = (s^2\epsilon_2 - i\epsilon_0 - \epsilon_3 s^3)U \\
\Rightarrow\ & U_z = (-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)U
\end{aligned}$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden y su solución se ve directamente:

$$U(z,s) = U(0,s)\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]$$

Luego, por la condición inicial, se tiene que $U(0,s) = F(s)$, por lo que tenemos que:

$$U(z,s) = F(s)\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]$$

Con lo que ya obtuvimos la transformada de Fourier de la solución. Para recuperar la solución $u(z,t)$ al problema original, simplemente hay que aplicar la transformada inversa a $U$.

$$\begin{aligned}
u(z,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(z,s)e^{-ist}ds \\
&= \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds}
\end{aligned}$$

Llegado a este punto, no hay mucha forma de proseguir si no sabemos la forma de $f(t)$, pero técnicamente tenemos la solución al problema.

Ahora comprobaré que esta solución es correcta, es decir, que cumple con la ecuación diferencial. Para hacerlo, le calcularé cada una de las derivadas necesarias para la ecuación:

- $u_z = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds\right)$
$= \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds$
- $u_{tt} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds\right)$
$= \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)(-is)^2\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds$
$= -\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)s^2\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds$
- $u_{ttt} = \dfrac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds\right)$
$= \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)(-is)^3\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds$
$= i\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)s^3\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds$

Por lo tanto, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
iu_z + &i\epsilon_0 u + \epsilon_2 u_{tt} - i\epsilon_3 u_{ttt} = \\
&= i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds \\
&\quad + i\epsilon_0\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds \\
&\quad - \epsilon_2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)s^2\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds \\
&\quad + \epsilon_3\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)s^3\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)(s^2\epsilon_2 - i\epsilon_0 - \epsilon_3 s^3 + i\epsilon_0 - \epsilon_2 s^2 + \epsilon_3 s^3)\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)(0)\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds \\
&= 0
\end{aligned}
$$

## Problemas 28

**¿Cómo es la solución del problema anterior cuando $z$ es muy grande?**

Recordamos que la solución a la que llegamos es:

$$u(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]e^{-ist}ds$$

Si $z$ es grande, entonces considerando que $\epsilon_0, \epsilon_2, \epsilon_3$ son reales positivos, se tiene que $z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)$ es un número complejo con parte real $-\epsilon_0 z$, que es un número negativo muy grande y con parte imaginaria $z(-s^2\epsilon_2 + \epsilon_3 s^3)$.

Al hacer la exponencial $\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]$, como la parte real del exponente es un número negativo muy grande, la norma de $\exp[z(-is^2\epsilon_2 - \epsilon_0 + i\epsilon_3 s^3)]$ es muy pequeña. Y entonces la exponencial tiende a cero (la parte imaginaria del exponente no importa, pues solamente hace cambiar el argumento del resultado final, pero como la norma es 0, no importa).

Entonces el exponente tiende a 0 y por lo tanto $u(z,t)$ también tiende a 0. Entonces tenemos que $u(z,t)$ tiende a 0 cuando $z \to \infty$.

## Problemas 29-30

**Obtén la solución a la ecuación**

$$iu_z + \gamma_1|u|^2u - \gamma_2|u|^4u = 0$$

**correspondiente a una condición inicial de la forma:**

$$u(0,t) = f(t)$$

Resolveremos esta ecuación con un anzats. El anzats que proponemos es $u(z,t) = f(t)e^{i\alpha(t)z}$. Con $\alpha(t)$ alguna función del tiempo que determinaremos. Se escoge así porque es una forma muy fácil de agregar una dependencia con $z$ de tal manera que cumpla la condición inicial $u(0,t) = f(t)$. Metemos este ansatz en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
iu_z+&\gamma_1|u|^2u - \gamma_2|u|^4u = \\
&= i[f(t)e^{i\alpha(t)z}]_z + \gamma_1|f(t)e^{i\alpha(t)z}|^2\ (f(t)e^{i\alpha(t)z}) - \gamma_2|f(t)e^{i\alpha(t)z}|^4\ (f(t)e^{i\alpha(t)z}) \\
&= i(if(t)\alpha(t)e^{i\alpha(t)z}) + \gamma_1|f(t)|^2(f(t)e^{i\alpha(t)z}) - \gamma_2|f(t)|^4(f(t)e^{i\alpha(t)z}) \\
&= -f(t)\alpha(t)e^{i\alpha(t)z} + \gamma_1|f(t)|^2f(t)e^{i\alpha(t)z} - \gamma_2|f(t)|^4f(t)e^{i\alpha(t)z}
\end{aligned}$$

Queremos que este resultado sea cero para que el ansatz propuesto sea una solución, por lo que igualamos esto a cero:

$$\begin{aligned}
&- f(t)\alpha(t)e^{i\alpha(t)z} + \gamma_1|f(t)|^2f(t)e^{i\alpha(t)z} - \gamma_2|f(t)|^4f(t)e^{i\alpha(t)z} = 0 \\
&\text{Cancelamos } f(t)e^{-i\alpha(t)z} \\
&\Rightarrow\ -\alpha(t) + \gamma_1|f(t)|^2 - \gamma_2|f(t)|^4 = 0 \\
&\Rightarrow\ \alpha(t) = \gamma_1|f(t)|^2 - \gamma_2|f(t)|^4
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ya encontramos la $\alpha(t)$ que hace que el ansatz sea solución. Con esta función, la solución que hallamos es:

$$\boxed{u(z,t) = f(t)e^{iz(\gamma_1|f(t)|^2 - \gamma_2|f(t)|^4)}}$$

Además, vemos que cumple con la condición inicial requerida, pues:

$$u(0,t) = f(t)e^{i(0)(\gamma_1|f(t)|^2 - \gamma_2|f(t)|^4)} = f(t)$$