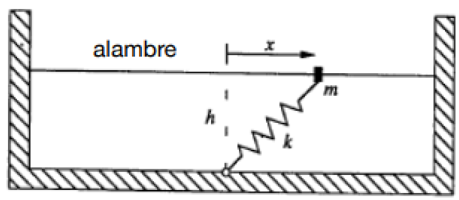
Tarea 2 Dinámica no Lineal y Caos

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

March 15, 2022

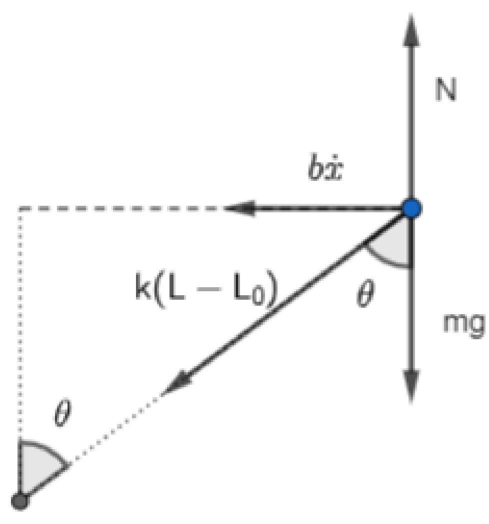
1. (Cuenta en un alambre horizontal) Una cuenta de masa m, está constreñida a deslizarse a lo largo de un alambre horizontal recto. Un resorte con longitud sin estiramiento L_0 y constante de resorte k se ata a la masa y a un punto de soporte a una distancia h desde el alambre. Fig 1.



Finalmente, suponer que el movimiento de la cuenta se opone a una fuerza de amortiguamiento viscoso $b\dot{x}$.

a) **Dibuja el diagrama de cuerpo libre.**

Se presenta el diagrama a continuación:



Vemos que la cuenta siente un total de 4 fuerzas:

- Fuerza gravitacional: Esta fuerza apunta directamente hacia abajo y es igual a mg.

- Fuerza normal: Es la fuerza que el alambre hace sobre la cuenta de tal forma que mantiene a la cuenta sobre el alambre. Esta fuerza es la que constriñe a la cuenta a quedarse en el alambre y por eso no hace falta tomar en cuenta el movimiento vertical de la cuenta, pues sólo se mueve horizontalemnte.
- Fuerza del resorte: Es la fuerza del resorte sobre la cuenta debida a la ley de Hooke. Si el resorte está estirado hasta una longitud de L, la fuerza es proporcional al estiramiento adicional que tiene sobre el estiramiento inicial L_0. Por lo que la fuerza es $k(L - L_0)$.
- Fricción: Por último, debemos incluir una fuerza de fricción $b\dot{x}$ que se opone al movimiento.

b) **Encuentra la ley de movimiento de Newton para el movimiento de la cuenta**

Como dijimos antes, la cuenta no se mueve en la dirección y por estar constreñida, por lo que sólo nos importa la fuerza en la dirección x.

Analizando el diagrama de cuerpo libre, vemos que la fuerza en la dirección x es $F = -b\dot{x} - k(L - L_0)\sin\theta$. Donde se tomó el seno de θ para proyectar la fuerza del resorte sobre el eje x. En el diagrama podemos ver que el ángulo θ del resorte respecto al eje vertical aparece también en la esquina inferior izquierda. Si tomamos en cuenta este ángulo y usamos que $\sin\theta$ es igual al lado opuesto (que en este caso es la longitud x desde el centro del alambre hasta la cuenta) entre hipotenusa (que es la longitud L del alambre), nos queda que $\sin\theta = \dfrac{x}{L}$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} F &= -b\dot{x} - k(L - L_0)\sin\theta \\ &= -b\dot{x} - k(L - L_0)\frac{x}{L} \end{aligned}$$

Finalmente, podemos usar que la longitud total del alambre L es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud h y x, por lo que $L = \sqrt{x^2 + h^2}$ y por lo tanto:

$$F = -b\dot{x} - k(\sqrt{x^2 + h^2} - L_0)\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

Finalmente, según la segunda ley de Newton se tiene que $F = m\ddot{x}$, por lo que la ecuación resultante es:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -b\dot{x} - k(\sqrt{x^2 + h^2} - L_0)\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \\ m\ddot{x} + b\dot{x} + k(\sqrt{x^2 + h^2} - L_0)\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} &= 0 \\ \Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + k\left(x - \frac{L_0 x}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right) = 0} \end{aligned}$$

c) **Suponer que $m = 0$. Encuentra todas las posibles configuraciones de equilibrio, es decir, encuentra los puntos fijos, como funciones de k, h, b, m, L_0. Todos los parámetros son positivos.**

Si suponemos que $m = 0$, entonces la ecuación nos queda como

$$\begin{aligned} b\dot{x} + kx\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \dot{x} &= \frac{1}{b}\left(-kx\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right)\right) \end{aligned}$$

Que es una ecuación de primer orden como las que hemos estudiado. Los puntos de equilibrio se consigue cuando $\dot{x} = 0$, lo cual implica que:

$$-kx\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right) = 0$$

Como esto está factorizado, uno de los dos factores tiene que ser 0 para que el producto sea 0. Por lo tanto tenemos dos casos:

1. $kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0}$
2. $\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right) = 0 \quad \sqrt{x^2 + h^2} - L_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + h^2} = L_0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + h^2 = L_0^2 \quad x^2 = L_0^2 - h^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \pm\sqrt{L_0^2 - h^2}}$

Por lo que hemos encontrado un total de 3 puntos fijos:

1. $x^* = 0$
2. $x^* = \sqrt{L_0^2 - h^2}$
3. $x^* = -\sqrt{L_0^2 - h^2}$

Sin embargo, vemos que los puntos fijos 2 y 3 sólo existen si $L_0^2 \geq h^2$ (y considerando que L_0 y h son positivos, eso implica que $L_0 \geq h$) pues en caso contrario lo que se encuentra dentro de la raíz es negativo y nos daría un valor de x imaginario.

d) **Suponer que $m = 0$. Clasifica la estabilidad de los puntos fijos y dibuja un diagrama de bifurcación (x^* vs h). ¿Qué tipo de bifurcación e?**

Para clasificar los puntos fijos de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ con $f(x) = -\frac{kx}{b}\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right)$ a la que llegamos el paso anterior, necesitamos considerar la primera derivada de $f(x)$ y evaluarla en cada punto fijo.

Calculamos la derivada de $f(x)$ con Mathematica como se muestra a continuación.

```
In[9]:= f[x_] := k * x / b * (L0 / Sqrt[h^2 + x^2] - 1);
        Simplify[D[f[x], x]]
```

$$\text{Out[10]=} \quad \frac{k\left(-1 + \frac{h^2\,\text{L0}}{(h^2 + x^2)^{3/2}}\right)}{b}$$

Es decir,

$$f'(x) = \frac{k}{b}\left(-1 + \frac{h^2 L_0}{(h^2 + x^2)^{3/2}}\right)$$

Evaluamos esta función en cada uno de los puntos fijos para encontrar su estabilidad. Esto lo podemos hacer sencillamente en Mathematica definiendo una función $g(x) = \frac{k}{b}\left(-1 + \frac{h^2 L_0}{(h^2 + x^2)^{3/2}}\right)$ y evalúandola en cada punto fijo como se muestra en la imagen siguiente:

In[31]:= $g[x\_] := \dfrac{k\left(-1 + \dfrac{h^2\, L0}{(h^2 + x^2)^{3/2}}\right)}{b}$

```
Assuming[{h > 0, L0 > 0}, Simplify[g[0]]]
```

Out[32]= $\dfrac{k\,(-h + L0)}{b\,h}$

```
In[29]:= Assuming[{h > 0, L0 > 0}, Simplify[g[Sqrt[L0^2 - h^2]]]]
```

Out[29]= $\dfrac{k\,(h^2 - L0^2)}{b\,L0^2}$

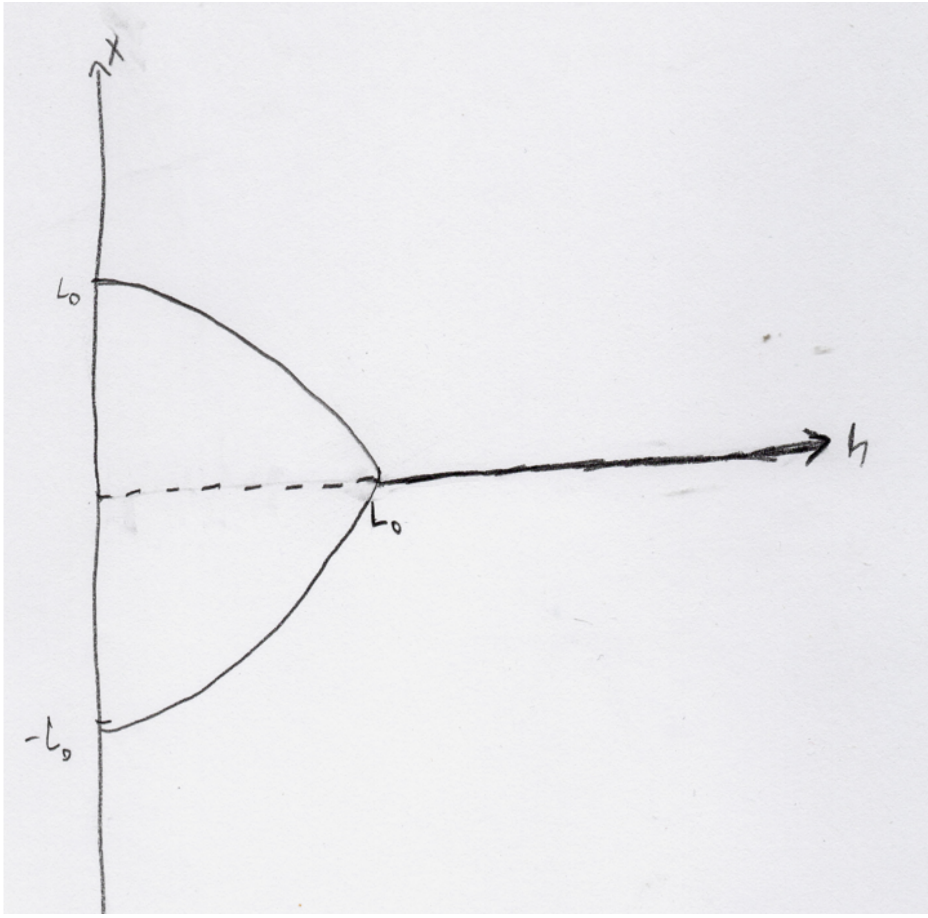
```
In[30]:= Assuming[{h > 0, L0 > 0}, Simplify[g[-Sqrt[L0^2 - h^2]]]]
```

Out[30]= $\dfrac{k\,(h^2 - L0^2)}{b\,L0^2}$

Por lo tanto, llegamos a las siguientes conclusiones:

- $x^* = 0$: En este punto se tiene que $f'(x^* = 0) = \dfrac{k(-h + L_0)}{bh}$.
  Por lo tanto $f'(x^* = 0) > 0$ y entonces $x^* = 0$ es inestable si $L_0 > h$. Por otro lado, $f'(x^* = 0) < 0$ y entonces $x^* = 0$ es estable si $L_0 < h$.
- $x^* = \sqrt{L_0^2 - h^2}$: En este punto se tiene que $f'(x^* = \sqrt{L_0^2 - h^2}) = \dfrac{k(h^2 - L_0^2)}{bL_0^2}$
  Por lo tanto considerando que h y L_0 son positivos, $f'(x^* = \sqrt{L_0^2 - h^2}) < 0$ y se trata de un punto estable si $h < L_0$. No nos interesa otro caso para este punto fijo, pues ya vimos que el punto fijo sólo existe si $L_0 \geq h$.
- $x^* = -\sqrt{L_0^2 - h^2}$: En este punto se tiene que $f'(x^* = -\sqrt{L_0^2 - h^2}) = \dfrac{k(h^2 - L_0^2)}{bL_0^2}$
  Por lo tanto considerando que h y L_0 son positivos, $f'(x^* = -\sqrt{L_0^2 - h^2}) < 0$ y se trata de un punto estable si $h < L_0$. No nos interesa otro caso para este punto fijo, pues ya vimos que el punto fijo sólo existe si $L_0 \geq h$.

Con esta información, ya podemos dibujar el diagrama de bifurcación de x^* vs h. Considerando que si $h < L_0$ se tienen tres puntos fijos en $x^* = 0, \pm\sqrt{L_0^2 - h^2}$, siendo $x^* = 0$ inestable y los otros dos estables. Por otro lado, si $h > L_0$, se tiene sólo un punto fijo en $x^* = 0$ que es estable. Entonces el diagrama queda como sigue:



Es una bifurcación de tridente supercrítica.

Podemos interpretar el diagrama y notar que tiene mucho sentido.

Primero vemos que si $h > L_0$, entonces sólo hay un punto fijo estable en $x = 0$. Esto tiene sentido porque si $h > L_0$, entonces el resorte se encuentra siempre estirado (porque en cualquier punto en el que se ubique la cuenta, la longitud del resorte será mayor a L_0) y hay una fuerza que busca disminuir su longitud. Por lo tanto, la cuenta se acerca al punto en el que la longitud del resorte sea lo menor posible, que es cuando $x = 0$. En este punto no hay fuerzas horizontales y por lo tanto se trata de un punto fijo, que es estable porque si movemos un poco la cuenta, la fuerza de compresión del resorte lo manda de vuelta a $x = 0$.

Por otro lado, si $h < L_0$, entonces puede haber varios puntos en los que el resorte tenga la longitud sin estiramiento L_0. Cuando la cuenta se encuentra en $x = \pm\sqrt{L_0^2 - h^2}$, entonces la longitud del resorte es L_0 y por lo tanto no hay fuerza de Hooke. Por lo tanto, en estos puntos no hay fuerzas horizontales y por ello $x = \pm\sqrt{L_0^2 - h^2}$ son puntos fijos. Por otro lado, $x = 0$ es un punto fijo porque en él nunca hay fuerzas horizontales y es inestable porque en este punto el resorte está comprimido y tiene una fuerza que busca estirarlo. Si movemos un poco la posición de la cuenta a partir de $x = 0$, la fuerza de estiramiento del resorte tiene ahora una componente horizontal y hará que la cuenta se mueva hasta el momento en que la longitud del resorte sea L_0 (que son los puntos fijos $x = \pm\sqrt{L_0^2 - h^2}$).

e) **Si $m \neq 0$. ¿Qué tan pequeño tiene que ser m para ser considerado despreciable?**

Consideramos de nuevo la ecuación de movimiento que habíamos obtenido:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2+h^2}}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{m}{k}\ddot{x} + \frac{b}{k}\dot{x} + x\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2+h^2}}\right) = 0$$

Definimos ahora una variable τ dada por:

$$\tau = \frac{k}{b}t$$

Veremos que si hacemos este cambio de variable, los coeficientes de la ecuación serán adimensionales y los podremos comparar entre sí.

Reemplazamos esta variable en la ecuación diferencial, que por la regla de la cadena, derivar x respecto a t es $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{k}{b}$. Es decir, para convertir una derivada respecto a t a una respecto a τ hay que multiplicar por k/b (y para una segunda derivada hay que multiplicar por k^2/b^2). Por lo tanto, la ecuación de antes se transforma en:

$$\frac{m}{k}\frac{k^2}{b^2}\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{b}{k}\frac{k}{b}\frac{dx}{d\tau} + x\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{h^2+x^2}}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{mk}{b^2}\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} + x\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{h^2+x^2}}\right) = 0$$

Esta ecuación ya es adimensional y podemos entonces comparar los coeficientes y ver la condición para ignorar $\frac{dx^2}{d\tau^2}$ respecto a $\frac{dx}{d\tau}$. Vemos que la segunda derivada tiene el coeficiente $\frac{mk}{b^2}$ mientras que la primera derivada tiene coeficiente 1. Por lo tanto, para ignorar la segunda derivada se debe de cumplir que:

$$\boxed{\frac{mk}{b^2} << 1}$$