

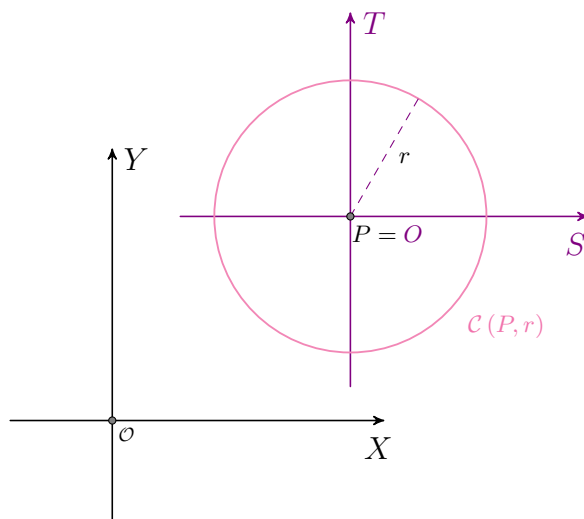
RESUMEN: SEMANAS 15 Y 16

ERNESTO MAYORGA SAUCEDO

13. COORDENADAS POLARES

Si una curva plana \mathcal{C} yace en un plano Π y en tal plano se introduce un sistema coordenado rectangular (cartesiano) éste sistema permite considerar a \mathcal{C} como un conjunto de parejas ordenadas que satisfacen alguna ecuación.

Por ejemplo, si $\mathcal{C}(P, r)$ denota una circunferencia con centro en el punto P y radio r en un plano Π , dependerá de cómo se eligen los ejes coordenados en dicho plano, el origen de el sistema puede o no ser el punto P .

FIGURA 71. Dos sistemas coordenados en un plano Π

Si el sistema introducido en Π lo denotamos por ST y resulta que en tal sistema P es el origen, entonces se tendrá que

$$\mathcal{C}(P, r) = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 = r^2\},$$

esto es, la curva $\mathcal{C}(P, r)$ consta de todas las soluciones de la ecuación en las indeterminadas s y t

$$(13.1) \quad s^2 + t^2 = r^2.$$

Por otra parte, si se introduce otro sistema de coordenadas rectangulares XY en el mismo plano Π para el cual P no es el origen, entonces en éste sistema $P = (a, b)$ y así se tendrá que

$$\mathcal{C}(P, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\},$$

en este caso, los elementos de $\mathcal{C}(P, r)$ serán todas las soluciones de la ecuación en las indeterminadas x y y :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

o de forma equivalente

$$(13.2) \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = r^2.$$

Claramente la ecuación más simple que describe a $\mathcal{C}(P, r)$ es (13.1).

En éste ejemplo se muestra que la elección de un sistema coordenado adecuado puede simplificar la ecuación que determina al objeto geométrico que nos interesa conocer.

La curva plana llamada “rosa de cuatro pétalos”, que se ilustra en la figura 72, está determinada en un sistema de coordenadas rectangulares XY , por la ecuación

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2 (x^2 - y^2)^2.$$

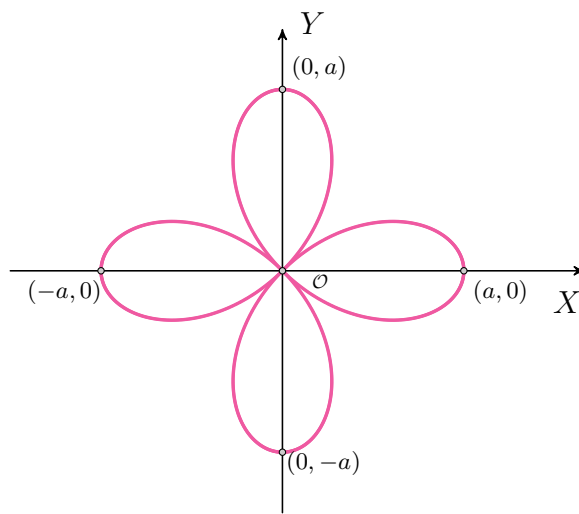


FIGURA 72. Rosa de cuatro pétalos

Veremos que ésta curva puede ser descrita por una cierta ecuación más simple bajo el sistema de coordenadas polares.

13.1. El plano polar. A continuación describimos cómo se introduce un sistema de coordenadas polares en un plano Π :

Polo: Elegimos en el plano Π un punto O , al que llamaremos **polo**.

Un vez elegido el polo, dado un punto P del plano Π , si $P \neq O$ es posible considerar el segmento \overline{OP} y por consiguiente se tendrá definido el número real positivo $r_P = OP$ que es la magnitud del segmento \overline{OP} . Llamaremos a tal número real r_P el **radio** o la **norma** de P .

El caso en que $P = O$ convenimos en que 0 será el radio de O .

Eje polar: Elegimos en Π el punto U de manera que el segmento \overline{OU} tenga longitud 1 y que el rayo $\text{ray}(OU)$ de O hacia u sea horizontal y a la derecha de O . Tal rayo es llamado **eje polar**.

Con estos elementos, polo y eje polar, introducimos la siguiente definición.

Definición 13.1. Sea Π un plano y $O, u \in \Pi$. Decimos que la pareja ordenada $(O, \text{ray}(OU))$ es un sistema de coordenadas polares para Π si O y $\text{ray}(OU)$ cumplen que O es el polo en Π y $\text{ray}(OU)$ es el eje polar.

Definición 13.2. Sea $(O, \text{ray}(OU))$ un sistema de coordenadas polares para un plano Π y $P \in \Pi - \{O\}$. Decimos que $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son las coordenadas polares canónicas de P , si

$$r = r_P \text{ y}$$

$$\theta \in [0, 2\pi) \text{ es la medida en radianes del ángulo } \angle UOP.$$

En esta situación, llamaremos a θ el argumento de P y lo denotamos $\theta = \arg(P)$.

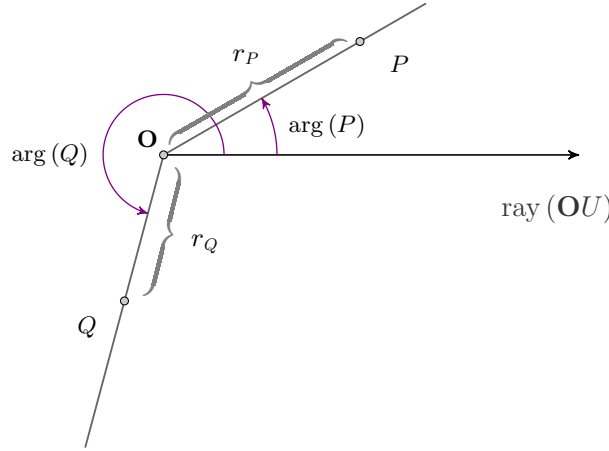


FIGURA 73. Elementos del plano polar y coordenadas polares

Bajo estas condiciones, si $P \in \Pi - \{O\}$, escribiremos $P = (r_P, \arg(P))$.

Para terminar de dar las coordenadas polares de los punto de un plano Π , falta asignar a el polo O sus coordenadas polares y es en esta parte donde surge la primera gran diferencia entre los sistemas coordenados cartesianos y polares.

Ya que a O no es posible asignarle un argumento como a los otros puntos, éste punto no tiene una pareja ordenada canónica, el único número real canónico que el polo determina es su distancia a sí mismo, la cual es cero. Por tal razón, convenimos en establecer como coordenadas polares de O las parejas $(0, \theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

Básicamente la convención que hemos hecho en la elección de la representación del polo en coordenadas polares tiene que ver con la intención de describir curvas en el plano a través de las coordenadas polares, más aún, en éste sentido se introducen más convenciones respecto de las representaciones de los punto en dicho sistema coordenado.

Antes de presentar tales convenciones, analizaremos las coordenadas de un sistema coordenado cartesiano con ayuda de las funciones trigonométricas y el producto por escalares.

Consideremos un punto $P \in \mathbb{R}^2 - \{O\}$, se tiene que $\|P\| \neq 0$ y podemos considerar el punto

$$\hat{P} = \left(\frac{1}{\|P\|}\right) \cdot P.$$

Un cálculo directo muestra que $d(\hat{P}, O) = 1$ y por consiguiente $\hat{P} \in \mathbb{S}^1$.

Ya que $\hat{P} \in \mathbb{S}^1$, existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\hat{P} = P_\theta$, esto es,

$$\left(\frac{1}{\|P\|}\right) \cdot P = P_\theta$$

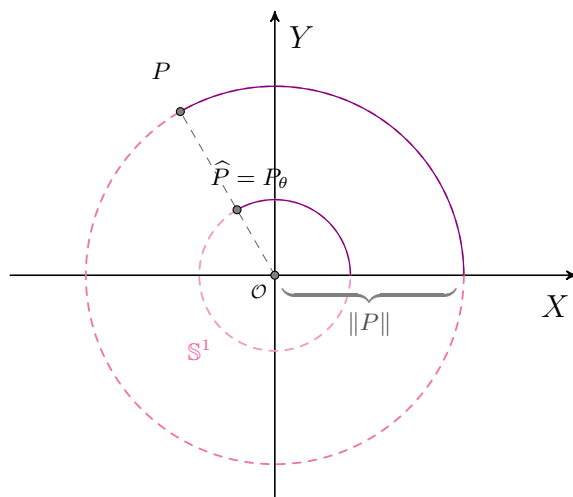


FIGURA 74. Coordenadas de un punto en el plano cartesiano utilizando funciones trigonométricas

y por consiguiente

$$(13.3) \quad P = \|P\| \cdot P_\theta.$$

La identidad (13.3) implica que

$$(13.4) \quad x_P = \|P\| \cos(\theta) \quad \text{y} \quad y_P = \|P\| \sin(\theta).$$

Bajo el supuesto de que las coordenadas de P satisfacen (13.4) y del hecho de que las funciones \cos y \sin son periódicas de periodo 2π , para cada $\kappa \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$(13.5) \quad x_P = \|P\| \cos(\theta + 2\kappa\pi) \quad \text{y} \quad y_P = \|P\| \sin(\theta + 2\kappa\pi).$$

Por otra parte, ya que $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ y $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$, entonces

$$\begin{aligned} (-\|P\|) \cos(\theta + \pi) &= (-\|P\|) (-\cos(\theta)) \\ &= \|P\| \cos(\theta) \\ &= x_P \end{aligned}$$

y análogamente, $(-\|P\|) \sin(\theta + \pi) = y_P$, es decir,

$$(13.6) \quad x_P = (-\|P\|) \cos(\theta + \pi) \quad \text{y} \quad y_P = (-\|P\|) \sin(\theta + \pi).$$

Teniendo en cuenta las identidades (13.4), (13.5) y (13.6) presentamos la convención respecto a las representaciones de los puntos de un plano bajo el sistema de coordenadas polares.

Convenciones 13.3. Aceptar las siguientes convenciones para un sistema de coordenadas polares en un plano Π : Dado $P \in \Pi - \{O\}$

- 1) Para cada $\kappa \in \mathbb{Z}$ las parejas $(r_P, \arg(P) + 2\kappa\pi)$ también son coordenadas polares de P .

2) Para cada $k \in \mathbb{Z}$

$$(-r_P, \arg(P) + (2k\pi + 1)\pi)$$

también son coordenadas polares de P .

Nota* 13.4. En el caso del sistema de coordenadas rectangulares, para localizar un punto dado $P = (a, b)$ lo que se suele hacer es “moverse” sobre los ejes coordenados y alguna de las rectas $h_b = \{(x, b) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ (horizontal) y $v_a = \{(a, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ (vertical).

Cuando trabajamos en un sistema coordenado polar el mecanismo es similar y las curvas que nos permiten localizar puntos en tal sistema son llamadas **curvas coordenadas** y esencialmente son de dos tipos.

Para $r_0 \in \mathbb{R}$ fijo, el conjunto $\mathcal{C}_{|r_0|} = \{(r_0, \theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ representa una circunferencia con centro en \mathbf{O} y radio $|r_0|$. Esto es claro cuando $r_0 \geq 0$; cuando $r_0 < 0$ si variamos el ángulo $\theta \in [\pi, 2\pi)$, la pareja (r, θ) tiene representación con radio positivo $(-r, \theta - \pi)$, donde $\theta - \pi = \arg((-r, \theta - \pi)) \in [0, \pi)$ obteniendo así el semicírculo superior con centro en \mathbf{O} y radio $-r_0$. Cuando se varía $\theta \in [0, \pi)$ se obtiene el semicírculo restante (véase la figura 75), dejamos los detalles de lo mencionado como ejercicio al lector. Más adelante establecemos una relación entre los sistemas de coordenadas polares y cartesiano y lo que hemos expuesto aquí quedará mucho más claro.

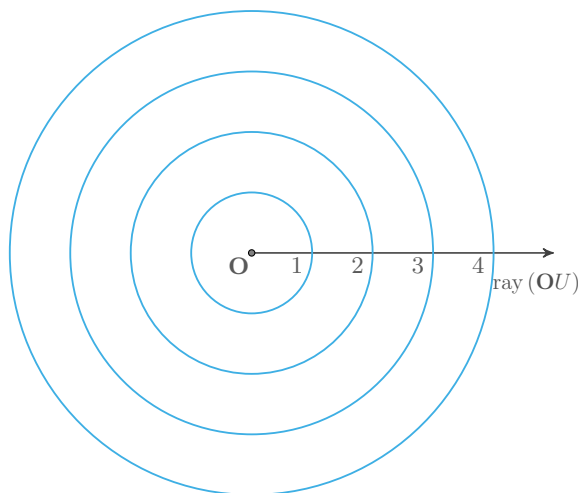


FIGURA 75. Curvas coordenadas determinadas por radios constantes

Los otros tipos de curvas coordenadas se obtienen considerando $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fijo; el conjunto $\ell_{\theta_0} = \{(r, \theta_0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ representa una recta que pasa por el polo y que forma el ángulo θ_0 , donde el lado inicial de dicho ángulo es el eje polar (véase la figura 76).

Es claro que cuando variamos $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, determinamos el rayo que junto con el eje polar como lado inicial forman el ángulo θ_0 . Por otra parte, para $r \in \mathbb{R}^-$, el punto P representado por (r, θ_0) también está representado por la pareja con radio positivo $(-r, \theta_0 - \pi)$; si $\theta_0 \in [\pi, 2\pi)$ el punto tiene argumento $\theta_0 - \pi$. Finalmente, si $\theta_0 \in [0, \pi)$ tal punto tiene argumento $\theta_0 + \pi$ así que otra representación para P es $(-r, \theta_0 + \pi)$ (véase la figura 77).

Como un ejemplo de lo dicho en la convención 1), para localizar el punto $P = (-1, \frac{\pi}{4})$, notamos que la pareja $(1, \frac{\pi}{4} - \pi)$, que también está representada

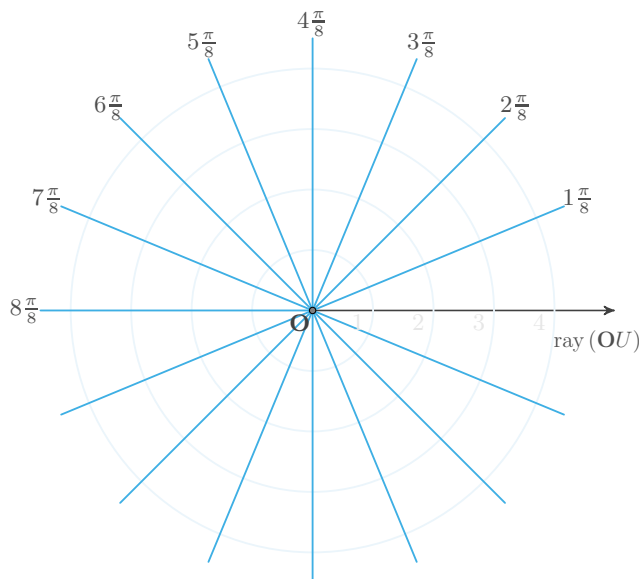


FIGURA 76. Curvas coordenadas determinadas por argumentos constantes

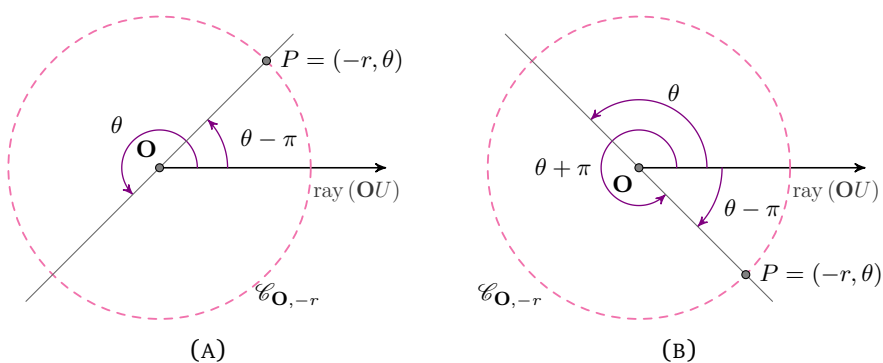


FIGURA 77. Argumentos que representan la misma dirección

por el punto $(1, \frac{\pi}{4} + \pi)$, cumple que su representación con radio negativo es precisamente P , y de esta manera otra representación para P , con radio positivo, es $(1, \frac{5\pi}{4})$, véase la figura 78.

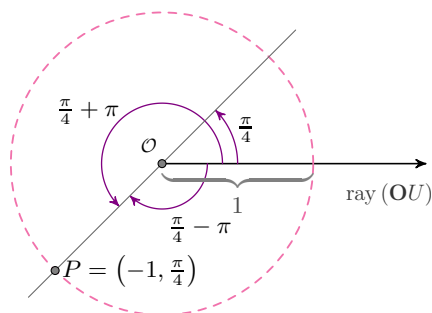


FIGURA 78. Localización de un punto con radio negativo en su representación

13.2. Relación entre los sistemas de coordenadas polares y cartesianas. Si en un plano Π se introducen un sistema de coordenadas polares y un sistema de coordenadas cartesianas, XY , donde en éste último se eligen los ejes coordenados de tal manera que el origen O , coincide con el punto elegido como polo, O , y el semieje positivo X coincide con el eje polar $\text{ray}(OU)$. Es posible asignar a cada pareja (r, θ) , de coordenadas polares, un único punto (x, y) en el sistema de coordenadas cartesianas.

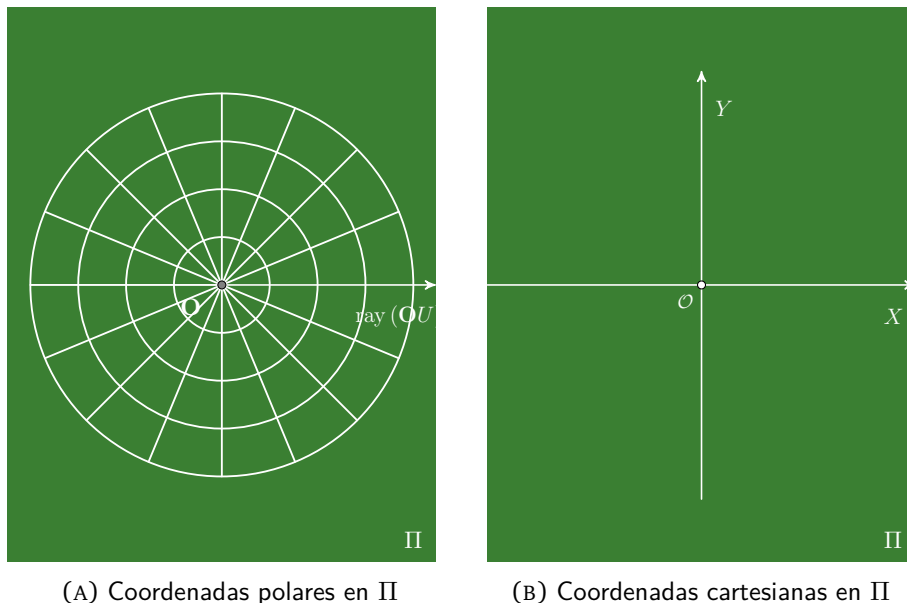


FIGURA 79

La asignación está motivada por las identidades (13.4) dadas en la sección 13.1.

Definición 13.5. Dada una pareja $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de coordenadas polares, las coordenadas cartesianas de $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es la pareja ordenada

$$(13.7) \quad (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2.$$

Ejemplo 13.6. Si las coordenadas polares de un punto P son $(3, \frac{\pi}{6})$, entonces las coordenadas cartesianas de P están dadas por:

$$\left(3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Para $Q = (-2, \frac{\pi}{3})$, sus coordenadas cartesianas son:

$$\left(-2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = (-1, -\sqrt{3}).$$

Compare estas coordenadas con las coordenadas determinadas por $(2, \frac{7\pi}{6})$, que es otra representación de Q en coordenadas polares.

También es posible asignar a cada pareja de coordenadas cartesianas (x, y) una pareja ordenada de coordenadas polares (r, θ) , a continuación presentamos la manera de obtener las coordenadas polares canónicas asociada a un punto a través de sus coordenadas cartesianas.

Si $P \in \mathbb{R}^2$ tiene coordenadas cartesianas (x_P, y_P) , consideramos $\|P\|$ como la primera coordenada polar de P ; para la segunda coordenada, comenzamos suponiendo que P no pertenece a los ejes coordenados.

Considerando las identidades dadas en (13.4), obtenemos que el número real $\frac{y_P}{x_P}$ correspondería a $\tan(\theta)$, donde θ es la medida en radianes del ángulo determinado por el semieje positivo X y el rayo $\text{ray}(\mathcal{O}P)$.

Si queremos utilizar la función \arctan para obtener el número θ , debemos tener cuidado de cómo la utilizamos ya que por construcción $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

Considerando $x \in \text{Dom}(\tan)$, como $\text{Dom}(\tan) = \mathbb{R} - \mathcal{Z}(\cos)$,^{xv} existe $k \in \mathbb{Z}$ impar tal que

$$x \in \left((k-2)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}\right).$$

Como k es impar, entonces $k-1$ es un número par y por consiguiente $\frac{k-1}{2} \in \mathbb{Z}$; de esta manera,

$$(k-2)\frac{\pi}{2} < x < k\frac{\pi}{2} \text{ implica } -\frac{\pi}{2} < x - \left(\frac{k-1}{2}\right)\pi < \frac{\pi}{2}$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \tan\left(x - \left(\frac{k-1}{2}\right)\pi\right) && (\tan \text{ es de periodo } \pi) \\ &= t\left(x - \left(\frac{k-1}{2}\right)\pi\right) && (\text{donde } t: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}); \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} x - \left(\frac{k-1}{2}\right)\pi &= \arctan\left(t\left(x - \left(\frac{k-1}{2}\right)\pi\right)\right) && (t^{-1} = \arctan) \\ &= \arctan(\tan(x)), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$x = \arctan(\tan(x)) + \left(\frac{k-1}{2}\right)\pi.$$

Resumimos lo anterior en la siguiente proposición.

Proposición 13.7. Si $x \in \text{Dom}(\tan)$, entonces existe un único número entero a_x tal que

$$(13.8) \quad x = \arctan(\tan(x)) + a_x\pi.$$

Definición 13.8. Sea $P \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$ y $U = (1, 0)$. El argumento de P , que denotamos $\arg(P)$, es el número real en el intervalo $[0, 2\pi)$ que corresponde a la medida en radianes del ángulo $\angle U\mathcal{O}P$; esto es

$$\arg(P) = (\angle U\mathcal{O}P) \text{ rad.}$$

Ejemplo 13.9. (1) $\arg(U) = 0$.

$$(2) \arg((1, 1)) = \frac{\pi}{4}.$$

$$(3) \arg(U^\perp) = \frac{\pi}{2}.$$

$$(4) \arg(-U) = \pi.$$

$$(5) \arg(-U^\perp) = 3\frac{\pi}{2}.$$

^{xv} El símbolo $\mathcal{Z}(\cos)$ denota el conjunto de todos los números reales que al ser evaluados en la función \cos tienen valor cero, esto es, $\mathcal{Z}(\cos) := \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\}$.

Corolario 13.10. Si $P \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$ y P no está en los ejes coordenados, entonces

$$\arg(P) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) & \text{si } P \in C_I \\ \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) + \pi & \text{si } P \in C_{II} \cup C_{III} \\ \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) + 2\pi & \text{si } P \in C_{IV} \end{cases}$$

Corolario 13.11. Si $P \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$, entonces

$$\arg(P) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) & \text{si } x_P > 0 \text{ y } y_P > 0 \\ \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) + \pi & \text{si } x_P < 0 \\ \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) + 2\pi & \text{si } x_P > 0 \text{ y } y_P < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x_P = 0 \text{ y } y_P > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x_P = 0 \text{ y } y_P < 0 \end{cases}$$

Con estas definiciones, para cada punto $P \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$, sus coordenadas polares canónicas están dadas por la pareja $(\|P\|, \arg(P))$. Por último, si $P = \mathcal{O}$ unas coordenadas polares para P son $(0, \theta)$, donde $\theta \in \mathbb{R}$.

A continuación presentamos la definición general de las coordenadas polares determinadas por las coordenadas cartesianas:

Definición 13.12. Dada una pareja $P \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas cartesianas, unas coordenadas polares para P es cualquier solución del sistema de ecuaciones en las indeterminadas r y Θ

$$(13.9) \quad \begin{cases} r \cdot \cos(\Theta) = x_P \\ r \cdot \sin(\Theta) = y_P \end{cases}$$

Nota 13.13. La definición 13.12 tiene sentido pues si $P \neq \mathcal{O}$, el sistema de ecuaciones (13.9) tiene como una solución la pareja $(\|P\|, \arg(P))$; de hecho el conjunto de todas las soluciones de (13.9) es el conjunto

$$\{(\|P\|, \arg(P) + 2\kappa\pi) \mid \kappa \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-\|P\|, \arg(P) + (2\kappa + 1)\pi) \mid \kappa \in \mathbb{Z}\},$$

que consta de todas las posibles representaciones en coordenadas polares del punto cuyas coordenadas polares canónicas son $(\|P\|, \arg(P))$. Por último, para $P = \mathcal{O}$, el conjunto de todas las soluciones es $\{(0, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, lo cual explica la convención respecto a las coordenadas polares del polo.

Nota* 13.14. Los cambios de coordenadas polares a coordenadas cartesianas permiten definir una función $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(r, \theta) = (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta))$, para cada $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tal función no es inyectiva pero sí suprayectiva por lo expuesto en la nota 13.13.

La función φ permite dar un “modelo” para el plano polar de la siguiente manera:

Definimos en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la siguiente relación, dados $(r, \theta), (r', \theta') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(r, \theta) \sim (r', \theta') \text{ si y sólo si } \varphi(r, \theta) = \varphi(r', \theta').$$

No es difícil demostrar que “ \sim ” es de equivalencia en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. El conjunto que es un modelo para el plano polar es el conjunto de clase de equivalencia $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) / \sim$.

Ejemplo 13.15. Si $P = (\sqrt{3}, 1)$ es un punto en el plano cartesiano, las coordenadas polares canónicas de P son:

$$\left(\sqrt{3+1}, \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right).$$

Por otra parte, si $Q = (-\sqrt{3}, -1)$, las coordenadas polares para Q son:

$$\left(\sqrt{3+1}, \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi\right) = \left(2, \frac{\pi}{6} + \pi\right) = \left(2, \frac{7\pi}{6}\right).$$

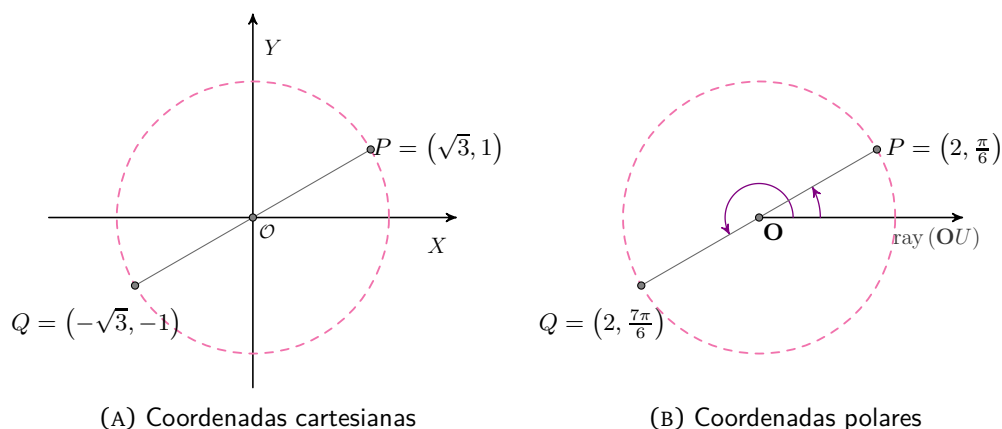


FIGURA 80. Esquema del ejemplo 13.15

13.3. Curvas en coordenadas polares. Con la introducción de los cambios de coordenadas, es posible determinar “ecuaciones en coordenadas polares” a partir de una ecuación dada en el sistema cartesiano. Por ejemplo, si ℓ es la recta en el plano cartesiano determinada por la ecuación

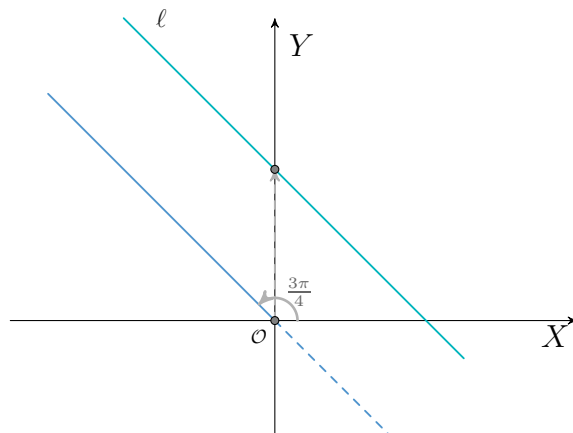
$$(13.10) \quad y = -x + 3,$$

para cada punto $P = (x, y)$ en ℓ y para cada representación (r, θ) de P en coordenadas polares, se tiene que $x = r \cos(\theta)$ y $y = r \sin(\theta)$, luego al sustituir en (13.10) obtenemos $r \sin(\theta) = -r \cos(\theta) + 3$ o de manera equivalente $r(\cos(\theta) + \sin(\theta)) = 3$. La identidad anterior en particular implica que $\cos(\theta) + \sin(\theta) \neq 0$. Comparando las gráficas de coseno y seno en el intervalo $[0, 2\pi)$ (vea la figura 98) obtenemos que si $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ entonces $\cos(\theta) + \sin(\theta) = 0$; así, para cada $\theta \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3\pi}{4} + \kappa\pi \mid \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$, $\cos(\theta) + \sin(\theta) \neq 0$ y así

$$r = \frac{3}{\cos(\theta) + \sin(\theta)}$$

De esta manera, cada representación en coordenadas polares de los puntos en la recta ℓ satisfacen la ecuación, en las indeterminadas r y θ :

$$(13.11) \quad r = \frac{3}{\cos(\theta) + \sin(\theta)}.$$

FIGURA 81. Dirección paralela a la recta ℓ

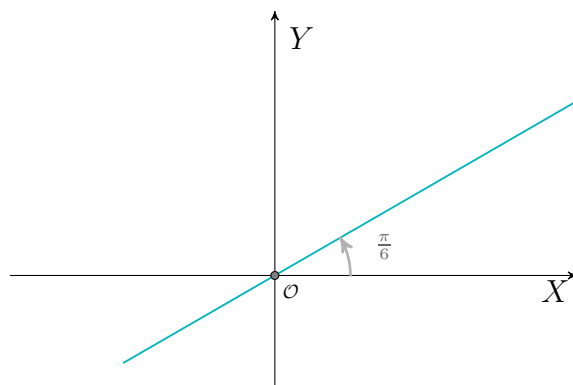
En forma recíproca, si se tiene una ecuación en coordenadas polares, los cambios de coordenadas establecidos permiten obtener la correspondiente ecuación en el sistema cartesiano; por ejemplo si se considera la ecuación

$$(13.12) \quad \Theta = \frac{\pi}{6},$$

cada pareja $(r, \frac{\pi}{6})$ satisface (13.12) y si (x, y) son las coordenadas cartesianas determinadas por $(r, \frac{\pi}{6})$, entonces $(x, y) = (r \cos(\frac{\pi}{6}), r \sin(\frac{\pi}{6}))$ lo cual implica que $x = r \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $y = r \frac{1}{2}$, despejando r se obtiene la identidad $\frac{2}{\sqrt{3}}x = 2y$ o de forma equivalente $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. Esto es, cada pareja (x, y) de coordenadas cartesianas determinada por una pareja de la forma $(r, \frac{\pi}{6})$ satisface la ecuación

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x,$$

la cual determina una recta por el origen con pendiente $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

FIGURA 82. Recta determinada por la ecuación $\Theta = \frac{\pi}{6}$

Para representar una ecuación en coordenadas polares escribiremos el símbolo

$$F(r, \Theta) = 0,$$

donde $F(r, \theta)$ es una “expresión formal” en las indeterminadas r y θ . Por ejemplo, si $F(r, \theta) = r - a$, donde $a \in \mathbb{R}^+$, fijo; la ecuación $F(r, \theta) = 0$ es

$$(13.13) \quad r - a = 0.$$

En éste ejemplo, para cada $\theta \in \mathbb{R}$ la pareja $(a, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es una solución de (13.13), sin embargo cuando *interpretamos* (a, θ) como las coordenadas polares de un punto P en el plano polar, otra representación de P en coordenadas polares es $(-a, \theta + \pi)$, sin embargo al sustituir estas coordenadas en la ecuación (13.13) estas no la satisfacen, esto es, $F(-a, \theta + \pi) = -a - a = -2a \neq 0$.

Para evitar tal inconveniente, dada una ecuación de la forma $F(r, \theta) = 0$, interpretaremos el objeto geométrico que ésta determina en el plano cartesiano a través de los cambios de coordenadas según la siguiente definición.

Definición 13.16. Dada una ecuación polar en las indeterminadas r y θ

$$(13.14) \quad F(r, \theta) = 0,$$

el lugar geométrico determinado por (13.14) es el subconjunto del plano cartesiano

$$\mathcal{C}_{F(r, \theta)} = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \mid F(r, \theta) = 0\}.$$

Ejemplo 13.17. Consideramos $F(r, \theta) = r - a$, donde $a \in \mathbb{R}^+$, fijo, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{F(r, \theta)} &= \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \mid r = a\} \\ &= \{(a \cos(\theta), a \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\}. \end{aligned}$$

Los detalles de la última igualdad los dejamos como ejercicio para el lector. Note que, si $F(r, \theta) = 0$, entonces al considerar $(-r, \theta + \pi)$, que es otra representación de (r, θ) , entonces

$$\begin{aligned} ((-r) \cos(\theta + \pi), (-r) \sin(\theta + \pi)) &= ((-r)(-\cos(\theta)), (-r)(-\sin(\theta))) \\ &= (r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Así $\mathcal{C}_{F(r, \theta)}$ es la circunferencia con centro en el origen y radio a . Si \mathcal{C} denota la circunferencia cuyo centro coincide en los sistemas coordenados polar y cartesiano con O y \mathcal{O} , respectivamente, y de radio a ; ésta está determinada por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} r - a &= 0, & \text{en el caso polar} \\ x^2 + y^2 &= a^2, & \text{en el caso cartesiano.} \end{aligned}$$

Cabe mencionar que en éste ejemplo la circunferencia \mathcal{C} también puede describirse con la ecuación polar $G(r, \theta) = r + a = 0$, con $a \in \mathbb{R}^+$ fijo.

Ejercicio 8. Suponga que $(x, y) = \varphi(r, \theta)$, donde $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la función definida en nota 13.14. Demuestre que:

- 1) $(x, -y) = \begin{cases} \varphi(r, -\theta) & \text{o} \\ \varphi(r, 2\pi - \theta) \end{cases}$.
- 2) $(-x, y) = \varphi(r, \pi - \theta)$.

$$3) (-x, -y) = \begin{cases} \varphi(r, \theta + \pi) & \text{o} \\ \varphi(-r, \theta). \end{cases}$$

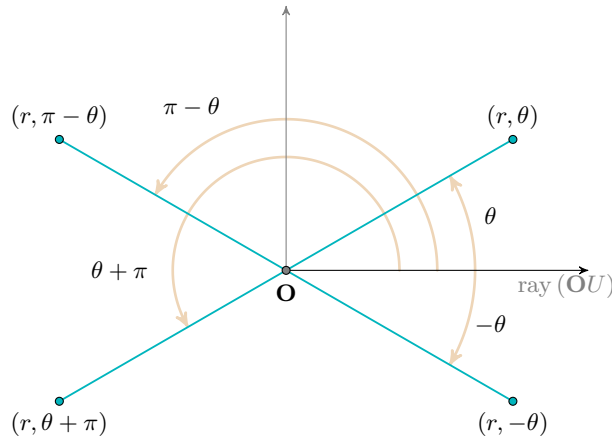


FIGURA 83. Puntos simétricos en coordenadas polares

Considerando el ejercicio 8 introducimos los siguientes criterios de simetría para lugares geométricos determinados por curvas polares.

Sean $F(r, \theta) = 0$ una ecuación en las indeterminadas r y θ y $\mathcal{C}_{F(r, \theta)}$ el lugar geométrico determinado por ella.

Eje X: $\mathcal{C}_{F(r, \theta)}$ es simétrica respecto al eje X si para cada $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se cumple

$$F(r, \theta) = 0 \text{ implica } F(r, -\theta) = 0$$

Eje Y: $\mathcal{C}_{F(r, \theta)}$ es simétrica respecto al eje Y si para cada $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se cumple

$$F(r, \theta) = 0 \text{ implica } F(r, \pi - \theta) = 0$$

Origen: $\mathcal{C}_{F(r, \theta)}$ es simétrica respecto al origen si para cada $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se cumple

$$F(r, \theta) = 0 \text{ implica } F(r, \theta + \pi) = 0$$

Ejemplo 13.18. Al inicio de esta sección presentamos la curva plana llamada rosa de cuatro pétalos con ecuación cartesiana $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2$, donde $a \in \mathbb{R}^+$; consideramos entonces

$$\mathcal{R} := \left\{ (x, y) \mid (x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2 \right\}.$$

Si $P \in \mathcal{R}$ y elegimos unas coordenadas polares (r, θ) para P , entonces, utilizando los cambios de coordenadas polares a cartesianas, se tiene que

$$\begin{cases} x_P = r \cos(\theta) \\ y_P = r \sin(\theta) \end{cases}$$

Luego

$$x_P^2 + y_P^2 = r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r^2 \quad \text{y}$$

$$x_P^2 - y_P^2 = r^2 (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = r^2 \cos(2\theta),$$

de donde, al ser $P \in \mathcal{R}$, se obtiene que las coordenadas polares de P satisfacen

$$\begin{aligned}(r^2)^3 &= a^2 (r^2 \cos(2\theta))^2 \\ &= (r^2)^2 (a \cos(2\theta))^2.\end{aligned}$$

De esta manera, para cada $P \in \mathcal{R}$, cada representación polar de P satisface la siguiente ecuación en las indeterminadas \mathfrak{r} y Θ :

$$(13.15) \quad (\mathfrak{r}^2)^3 = (\mathfrak{r}^2)^2 (a \cos(2\Theta))^2.$$

Recíprocamente, si r', θ' satisfacen la ecuación (13.15), no es difícil comprobar que el punto, dado en coordenadas cartesianas, $Q := (r' \cos(\theta'), r' \sin(\theta'))$ satisfacen que $Q \in \mathcal{R}$. De esta manera, la ecuación (13.15) es la ecuación polar que determina a \mathcal{R} .

Por otra parte, si $r = 0$, entonces $P = \mathcal{O}$; de esta manera si (r, θ) satisface (13.15) y $r \neq 0$, se sigue que (r, θ) cumplen la identidad

$$(13.16) \quad r^2 = (a \cos(2\theta))^2,$$

que es equivalente a

$$(13.17) \quad (r - a \cos(2\theta))(r + a \cos(2\theta)) = 0.$$

No es difícil demostrar que el lugar geométrico determinado por la ecuación (13.16) es la unión de los lugares geométricos determinados por las ecuaciones polares

$$\mathfrak{r} = a \cos(2\Theta) \quad \text{y} \quad \mathfrak{r} = -a \cos(2\Theta).$$

Para dibujar el lugar geométrico determinado por (13.17) analizaremos la ecuación $\mathfrak{r} = a \cos(2\Theta)$, que entre otras cosas nos dice que \mathfrak{r} es una función de Θ . Bajo este punto de vista, como la función \cos es de periodo 2π , entonces la función, en la variable Θ , $\cos(2\Theta)$ es de periodo π y por consiguiente, $\mathfrak{r} = a \cos(2\Theta)$ es de periodo π ; así es suficiente considerar valores de Θ en el intervalo $[0, \pi]$.

Con esta información ya podemos comenzar a graficar al lugar geométrico determinado por $\mathfrak{r} = a \cos(2\Theta)$ y con la finalidad de tener suficientes puntos para hacer el bosquejo de esta parte de la gráfica, partimos el intervalo $[0, \pi]$ en subintervalos de longitud $\pi/12$.

θ	2θ	$r = a \cos(2\theta)$	θ	2θ	$r = a \cos(2\theta)$
0	0	a	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}a}{2}$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}a}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$-\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{a}{2}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}a}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{a}{2}$	π	2π	a
$\frac{\pi}{2}$	π	$-a$			

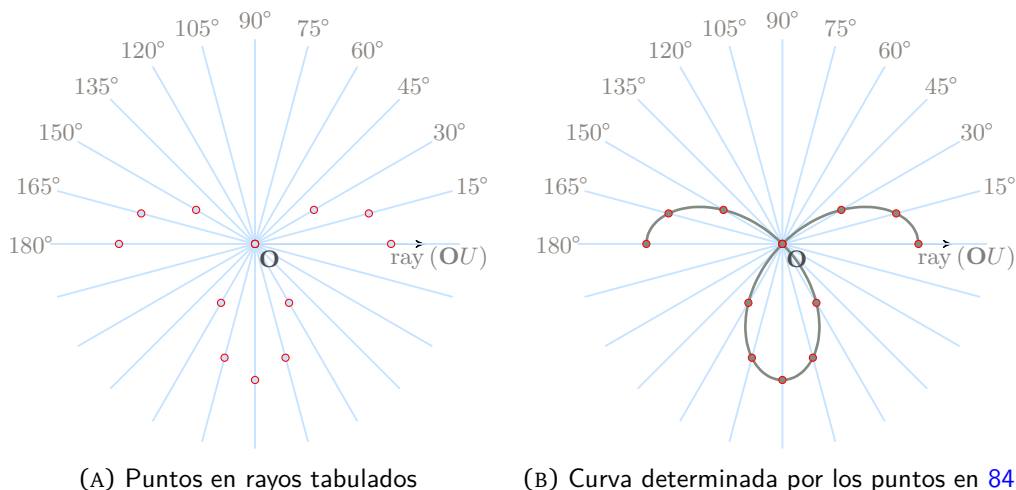


FIGURA 84. Curva determinada por la ecuación polar $r = a \cos(\theta)$

A continuación, localizamos estos puntos en el plano polar.

De esta manera, el lugar geométrico determinado por la ecuación $r = -\cos(2\theta)$ es la curva dada en la figura 84b.

Por otra parte, la curva determinada por la ecuación $r = -a \cos(2\theta)$, también se puede considerar como una función en la variable θ que es de periodo π y la única diferencia respecto a la ecuación anterior es el signo, que geoméricamente significa reflejar respecto al polo O la gráfica descrita en la figura 84b.^{xvi}

Por lo tanto, el lugar geométrico determinado por la ecuación polar $r = -a \cos(2\theta)$ es la dada en la figura 85.

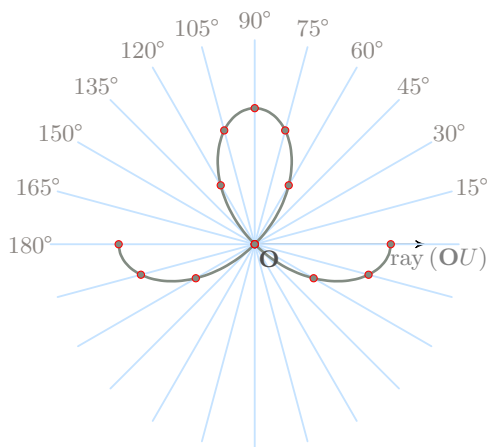


FIGURA 85. Curva determinada por la ecuación $r = -a \cos(2\theta)$

Como mencionamos anteriormente, el lugar geométrico determinado por la ecuación (13.17) se obtiene como la unión de las curvas descritas en las figuras 84b y 85; por lo tanto esta curva es

^{xvi} Para $\theta \in [0, \pi]$, un punto en este lugar geométrico es de la forma $(-a \cos(\theta), \theta)$, la cual es equivalente a las coordenadas polares $(a \cos(\theta), \theta + \pi)$, que es el punto simétrico de $(a \cos(\theta), \theta)$ respecto de O.

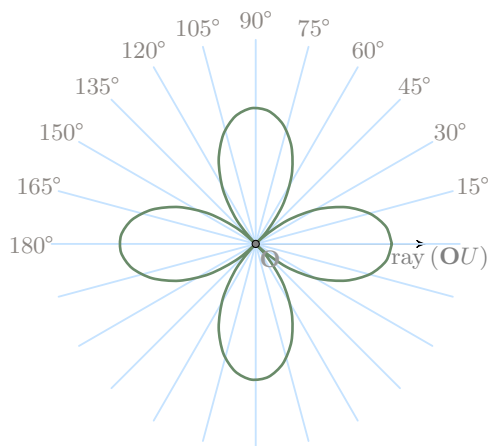


FIGURA 86. Curva determinada por la ecuación $(r^2)^3 = (r^2)^2 (a \cos(2\theta))^2$

Otra forma de proceder para hacer la gráfica de la ecuación (13.15) es utilizando la información derivada de esta y los aspectos de las posibles simetrías de $\mathcal{C}_{G(r,\theta)}$.

Definimos la expresión $G(r, \theta) := r - a \cos(2\theta)$; la ecuación $G(r, \theta) = 0$ es equivalente a $r = a \cos(2\theta)$ que como ya mencionamos, ésta permite considerar a r como una función de θ ; la cual es una función periódica de periodo π y así

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{G(r,\theta)} &= \{(r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \mid r = a \cos(2\theta)\} \\ &= \{(a \cos(2\theta) \cos(\theta), a \cos(2\theta) \cdot \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a \cos(2\theta) \cos(\theta), a \cos(2\theta) \cdot \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in [0, \pi)\}\end{aligned}$$

Vamos ahora qué simetrías posee $\mathcal{C}_{G(r,\theta)}$.

Supongamos que $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ satisface $G(r, \theta) = 0$, si consideramos $\theta \in [0, \pi)$ entonces la simetría que podemos comprobar es

Eje Y:

$$\begin{aligned}G(r, \pi - \theta) &= r - a \cos(2(\pi - \theta)) \\ &= r - a \cos(2\pi - 2\theta) \\ &= r - a \cos(-2\theta) && (\cos \text{ es función de periodo } 2\pi) \\ &= r - a \cos(2\theta) && (\text{porque } \cos \text{ es función par}) \\ &= G(r, \theta) = 0.\end{aligned}$$

Observe que si no restringimos el intervalo entonces podemos comprobar las otras posibles simetrías; por ejemplo

Eje X:

$$\begin{aligned}
 G(r, -\theta) &= r - a \cos(2(-\theta)) \\
 &= r - \cos(-2\theta) \\
 &= r - \cos(2\theta) \quad (\text{porque } \cos \text{ es función par}) \\
 &= G(r, \theta) = 0.
 \end{aligned}$$

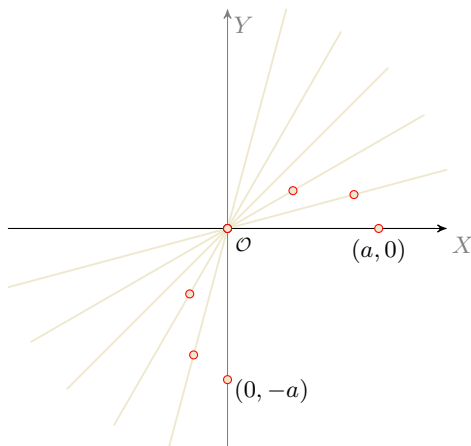
Por lo tanto $\mathcal{C}_{G(r,\theta)}$ es simétrica respecto al eje X.

En base a esta dos simetría podemos concluir que $\mathcal{C}_{G(r,\theta)}$ también es simétrica respecto al origen.

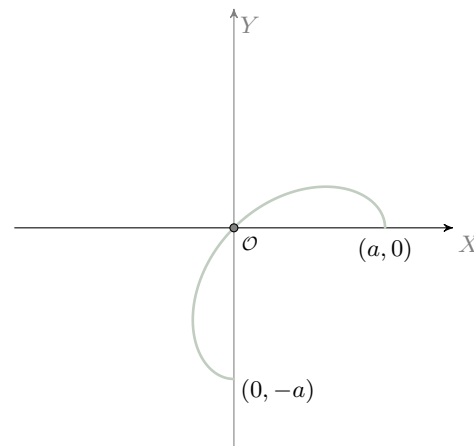
Si consideramos $\theta \in [0, \pi)$ con $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces $-\frac{\pi}{2} < -\theta \leq 0$ y por consiguiente $\frac{\pi}{2} < \pi - \theta \leq \pi$ (vea la figura 99); así, por la simetría que posee $\mathcal{C}_{F(r,\theta)}$ respecto al eje Y es suficiente considerar $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ para conocer los valores de r cuando $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

Finalmente, para hacer la gráfica consideramos la siguiente tabla:

θ	$r = a \cos(2\theta)$	$(a \cos(2\theta) \cos(\theta), a \cos(2\theta) \cdot \sin(\theta))$
0	a	$(a, 0)$
$\frac{\pi}{12}$	$a \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(a \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, a \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) \approx (0,836a, 0,224a)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{a}{2}$	$\left(\frac{a}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2} \frac{1}{2}\right) \approx (0,433a, 0,25a)$
$\frac{\pi}{4}$	0	$(0, 0)$
$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{a}{2}$	$\left(-\frac{a}{2} \frac{1}{2}, -\frac{a}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (-0,25a, -0,433a)$
$\frac{5\pi}{12}$	$-a \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(-a \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, -a \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right) \approx (-0,244a, -0,836a)$
$\frac{\pi}{2}$	$-a$	$(0, -a)$

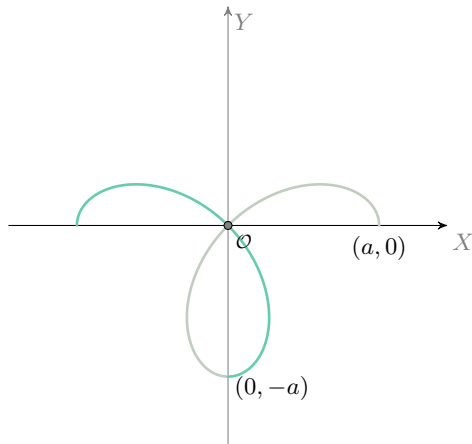
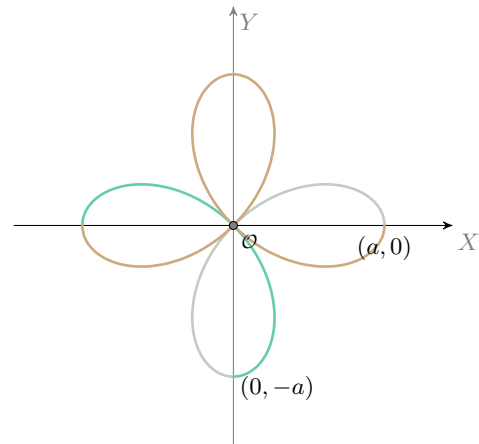


(A) Puntos en rayos distinguidos

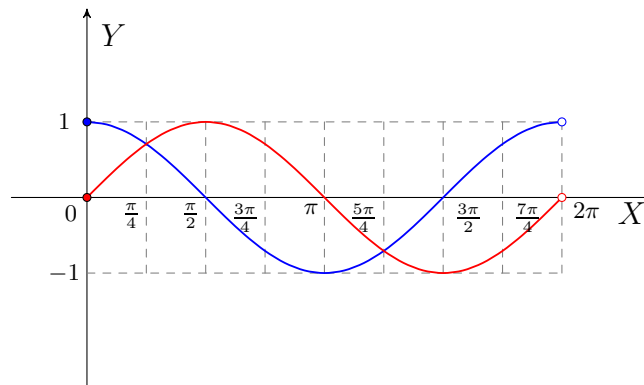
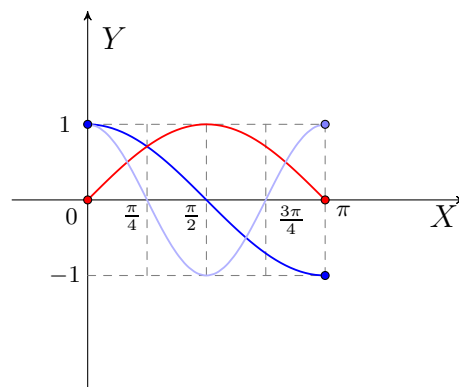


(B) Curva (suave) determinada por 87a

FIGURA 87. Estudio de curva $r = a \cos(2\theta)$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$

(A) Reflexión respecto del eje Y de 87b(B) Reflexión respecto del eje X de 88aFIGURA 88. Estudio de curva $r = a \cos(2\theta)$ en $[0, 2\pi)$

17. APÉNDICE

FIGURA 98. Gráficas de las funciones \cos y \sin FIGURA 99. Porciones de las gráficas de las funciones \cos , \sin y $\cos(2\theta)$

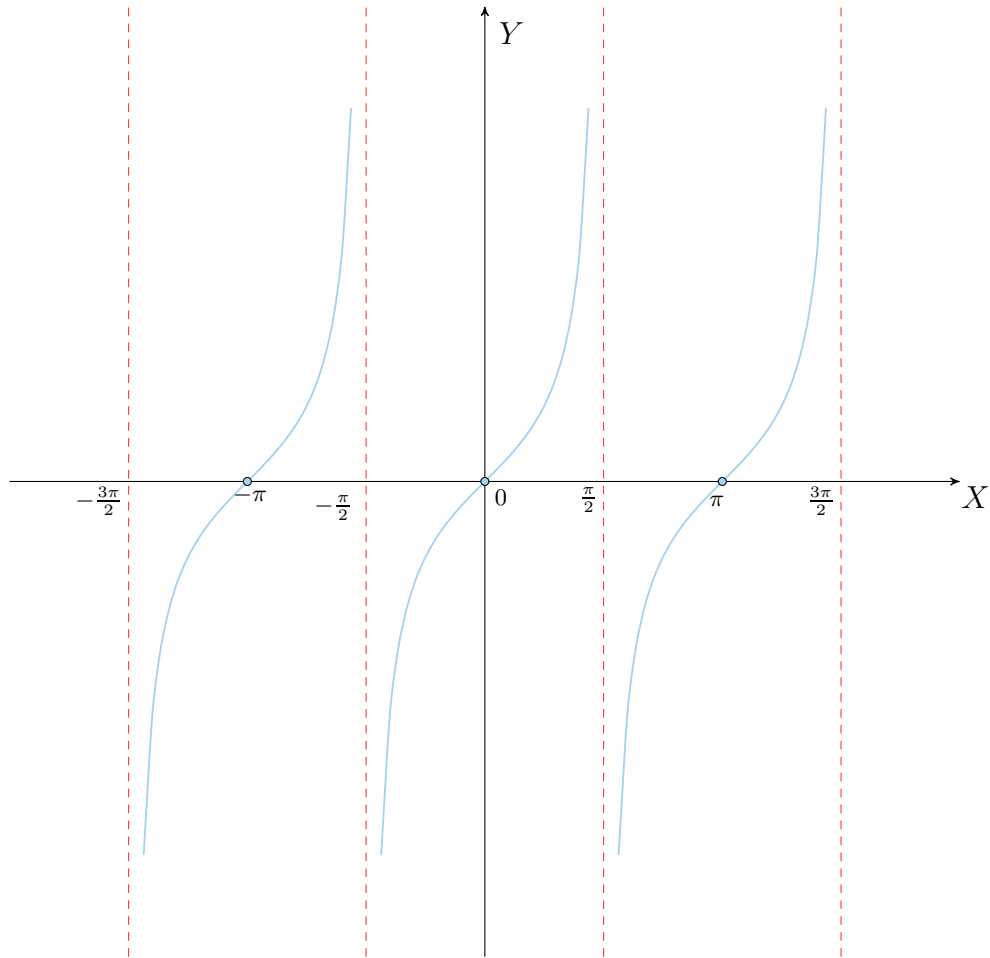


FIGURA 100. Gráficas de las función tan dentro de $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

REFERENCIAS

- [B-P] Burnside W. S., Panton A. W.; The theory of equations With an introduction to the theory of binary algebraic forms; Dublin University Press Series; Dublin; 1881.^{xv}
- [E1] Euclid; The Thirteen Books of the Elements, Vol. 1, Segunda Edición; Dover; USA; 2012.
- [E2] [The First Six Books of the Elements](#) by John Casey and Euclid scanned by Project Gutenberg.
- [F] Fitzpatrick R.; [Euclid's Elements of Geometry](#); versión otorgada por el autor [aquí](#).
- [M1] Mayorga E., [Notas de geometría, demostración: \$\Pi_{o,\overline{u},\overline{v}} = \{u \times v\}^\perp\$](#) , Curso 2017-2, Cd. México 2017.
- [M2] Mayorga E., [Notas de geometría, Resumen: semana 12](#), Curso 2019-1, Cd. México 2018.
- [K] Kleiner I.; A History of Abstract Algebra; Birkhaäser; Boston; 2007.
- [P-L] Preston G, Lovaglia A.; Modern analytic geometry; Harper & Row, Publishers; New York; 1971.^{xvi}
- [R] Ramirez-Galarza, A. I.; Geometría Analítica: *Una introducción a la geometría*; México: Las Prensas de Ciencias; 2011.
- [Sp] Spivak M.; Calculus, Fourth Edition; Publish or Perish Inc. Housuton Texas, 2008.
- [Su] Sullivan M.; [Trigonometry A Unit Circle Approach; Ninth Edition; Prentice Hall; 2012.](#)
- [W-S] Wentworth J., Smith D. E.; Geometría Plana y del Espacio; Ginn & Company; Boston USA, 1915.

^{xv} Scanned by Imagenes Digitales Nogales, AZ. On behalf of Preservation Division The University of Michigan Libraries.

^{xvi} Vínculos Matemáticos No. 55 2006, servicios editoriales de la Facultad de Ciencias UNAM.

LISTA DE SÍMBOLOS

- x_P : Abscisa del punto P
 \overline{AB} : Arco de A hasta B
 $\arg(P)$: Argumento de un punto P en el sistema de coordenadas polares
 $\arg(P)$: Argumento de un punto P en el sistema de coordenadas cartesianas
 $\mathcal{Z}(\cos)$: Conjunto de números donde la función \cos tiene valor cero
 $\mathcal{C}(O, r)$: Circunferencia con centro O de radio r
 u^\perp : Vector u -ortogonal (en \mathbb{R}^2)
 $u \times v$: Producto cruz de u y v
 $d(P, Q)$: Distancia de P a Q
 (a_{ij}) : Descripción simplificada de la matriz A
 ℓ_X : Eje coordenado equis
 ℓ_Y : Eje coordenado ye
 ℓ_Z : Eje coordenado zeta
 $\langle u, v \rangle$: Subespacio generado por u y v
 $[x_0, x_1]$: Intervalo determinado por los números x_0 y x_1 con $x_0 < x_1$
 A_i : i -ésimo renglón de la matriz A
 $A^{(j)}$: j -ésima columna de la matriz A
 \overline{AB} : Arco determinado por A y B en sentido levógiro
 $\mathcal{L}(\overline{AB})$: Longitud del arco \overline{AB}
 $\angle ABC$: Medida del ángulo $\angle ABC$
 $M_{n \times n}(\mathbb{R})$: Conjunto de matrices de $n \times n$
 \mathcal{O} : Origen en el espacio \mathbb{R}^n
 y_P : Ordenada del punto P
 $u \perp v$: u es ortogonal a v
 $u \parallel v$: u es paralelo a v
 $\Pi_{Q, \vec{u}, \vec{v}}$: Plano que pasa por Q con vectores de dirección u y v
 $\Pi_{P_0, XY}$: Plano por P_0 paralelo al plano Π_{XY}
 $\Pi_{P_0, XZ}$: Plano por P_0 paralelo al plano Π_{XZ}
 $\Pi_{P_0, YZ}$: Plano por P_0 paralelo al plano Π_{YZ}
 Π_{XY} : Plano coordenado XY
 Π_{XZ} : Plano coordenado XZ
 Π_{YZ} : Plano coordenado YZ
 O : Polo en el sistema de coordenadas polares
 $\lambda \cdot P$: Producto por escalares de P por λ
 $\text{Proy}_v(P)$: Proyección ortogonal de P en v
 $s(P)_O$: Punto simétrico de P respecto a O
 rayOA : Rayo desde O hasta A
 ℓ_m : Recta por el origen con pendiente m
 $\ell_{P_0, X}$: Recta por P_0 con dirección del eje X
 $\ell_{P_0, Y}$: Recta por P_0 con dirección del eje Y
 $\ell_{P_0, Z}$: Recta por P_0 con dirección del eje Z
 $\ell_{P_0, \vec{u}}$: Recta por P_0 con dirección u
 \overline{AB} : Segmento de recta determinado por los puntos A y B
 $V \leq \mathbb{R}^n$: Subespacio vectorial de \mathbb{R}^n

$P + Q$: Suma (vectorial) de P y Q
 $\{P_0\} + \mathbb{A}$: Traslado de \mathbb{A} por B

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS UNAM, NOVIEMBRE 2018
Email address: `ernestoms@ciencias.unam.mx`