# Variable Compleja

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

21 de octubre de 2020

## 1. Generalidades de los Complejos

**Definición 1.1. Unidad imaginaria:** La unidad imaginaria $i$ es el número tal que $i^2 = -1$.

**Campo complejo:** $\mathbb{C} = \{x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ Con las operaciones
$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
$(a + bi) * (c + di) = ab - cd + (ad + bc)i$
Estas operaciones cumplen todas las propiedades esperadas para un campo (conmutatividad, asociatividad, neutro, inverso, distributividad) debido a que estas operaciones en complejos se definen a partir de operaciones en reales.
Se puede ver que la formulita del producto tiene sentido, pues es el resultado que se obtendría distribuyendo el producto y usando $i^2 = -1$

**Parte Real:** $Re(z) = Re(a + bi) = a$
**Parte Imaginaria:** $Im(z) = Im(a + bi) = b$

**Conjugado:** Dado un complejo $z = a + bi$, su conjugado es $a - bi$ y se denota como $\overline{z}$

**Módulo (o norma):** El módulo de un complejo $z = a + bi$ se define como: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y es siempre un real mayor o igual a cero.

**Argumento:** El argumento de un complejo $a + ib$ es $Arg(z) = \arctan(b/a)$ que es un número entre 0 y $2\pi$

Con esto tenemos el campo de los números complejos y sus operaciones básicas. El campo $\mathbb{C}$ se puede asociar a $\mathbb{R}^2$, graficando los números $a + ib \in \mathbb{C}$ en el punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

De hecho, es común representar puntos y conjuntos en $\mathbb{C}$ usando un plano cartesiano tal como se representan puntos en $\mathbb{R}^2$, a esta forma de representar el campo complejo se conoce como **Plano Complejo**. Vemos entonces que la definición del modulo y de argumento coinciden con la definición de norma y ángulo de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, al igual que se puede representar un elemento de $\mathbb{R}^2$ dando sólo la norma y ángulo, lo mismo se puede con cualquier elemento de $\mathbb{C}$. A esta representación de $\mathbb{C}$ se le conoce como forma polar de un número complejo (nota: un complejo puede tener infinitas representaciones polares como $r, \theta + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{N}$

**Inverso Multiplicativo:** Encontrar el inverso de $a + bi$, es decir $(a + bi)^{-1}$ se puede hacer de la siguiente forma: Queremos encontrar $\frac{1}{a+bi}$, entonces lo que hacemos es multiplicar arriba y abajo por el conjugado de $a + bi$:
$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} * \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Este truco para el inverso multiplicativo es muy útil y se usa muy seguido. De hecho, siempre que se tenga una división de un complejo entre otro, lo que se suele hacer es multiplicar por el conjugado del denominador tanto arriba como abajo. De esta forma, el denominador queda como un número real ($\sqrt{a^2 + b^2}$) y así se pueden identificar fácilmente la parte real e imaginaria del resultado.

**Forma Polar:** un númeo $z = a+bi$ se puede representar en su forma polar especificando su norma ($r$) y su ángulo ($\theta$). En este caso $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\theta = \arctan(b/a)$
E inversamente, cualquier par $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$ definen un número complejo $a + bi$ con $a = r\cos(\theta)$ $b = r\sin(\theta)$
Un número complejo se puede representar en la forma polar de varias maneras distintas (pues al sumarle $2\pi$ al ángulo, el número que representa es el mismo).

**Producto en forma polar:** El producto entre números complejos toma una forma más fácil al usar la forma polar. Dado $z_1 = a_1 + b_1 i$ con módulo $r_1$ y ángulo $\theta_1$, y un número $z_2 = a_2 + b_2 i$ con módulo $r_2$ y ángulo $\theta_2$, su producto será:
$(a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = r_1(\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)i) * r_2(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)i) = ... = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)i)$
Es decir, el resultado es el complejo con norma $r_1 r_2$ y ángulo $\theta_1 + \theta_2$. Lo que significa que al multiplicar números, las normas se multiplican y los ángulos se suman, esto le da una interpretación geométrica al producto de complejos.

**Teorema 1.1. Teorema de Moivre:** Dado $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Dem: Es una consecuencia del producto en forma polar, o bien se puede demostrar por inducción.

**Raíces enésimas de $z$:** Dado un $z \in \mathbb{C}$, su raíz enésima será un complejo $w$ tal que $w^n = z$. Tomando en cuenta las propiedades anteriores, $|w^n| = |w|^n \quad \Rightarrow |w| = |z|^{1/n}$ y $n\ arg(w) = arg(z) + 2\pi k$
Entonces, $w = z^{1/n} = |z|^{1/n}(\cos(\frac{\theta+2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2\pi k}{n}))$ para $k = 0, ..., n-1$

**Teorema 1.1. Fórmula de Euler:**

$$e^{\theta\, i} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Dem: 1) Esta fórmula se puede comprobar usando las series de Taylor de las funciones en cuestión.
2) Definimos la curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\alpha(t) = e^{it}$. Esta curva tiene como vector tangente $i\, e^{it}$ i.e un vector rotado 90 grados. Entonces, $\alpha$ tiene norma 1 (pues $(\alpha \cdot \alpha)' = 2\alpha \cdot \alpha' = 0$) por lo que se quedará en un círculo (de radio 1 pues $e^0 = 1$). Similarmente, la acelaración y la velocidad están a 90 grados, por lo que la velocidad es constante y tiene valor 1. Entonces la curva traza un círculo en velocidad unitaria.
3) Escribimos $e^{ti} = A(t) + iB(t)$, con $A$ la función que da la parte real y $B$ la imaginaria.

Queremos que $e^{ti}$ tenga las propiedades que definen al exp $((e^{it})' = ie^{it}, e(0) = 0)$ por lo tanto, $A' + iB' = -B + iA$ y entonces $A'' = -A$, $B'' = -B$, y con la condición inicial nos queda que $A$ es cos y $B$ es sen.

De esta forma, como un número complejo se puede escribir de la forma $r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$, entonces también lo podemos expresar de la forma $r\ e^{\theta i}$
Y también $z^n = r^n e^{n\theta i}$ , $z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-\theta i}$

**Teorema 1.1. Propiedades generales:**
1) $\overline{\overline{z} = z}$
2) $|\overline{z}| = |z|$
3) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
4) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$
5) $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
6) $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$
7) $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$
8) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
9) $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
10) $|z| = z\overline{z}$
11) Triángulo: $|z + w| \leq |z| + |w|$
12) Triángulo inversa: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
13)$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

## 1.1. Topología de $\mathbb{C}$

**Definición 1.2. Distancia:** La distancia entre dos punto $z$ y $w$ en $\mathbb{C}$ es: $d(z, w) = |z-w|$

**Teorema 1.2. Propiedades de la Métrica:**
1) $d(z, w) \geq 0$
2) $d(w, z) = 0 \Leftrightarrow z = w$
3) $d(w, z) = d(z, w)$

4)$d(u,w) \leq d(u,z) + d(z,w)$

**Definición 1.3. Bola de centro en $w$ y radio $r$:** Es el conjunto de puntos a una distancia a $w$ menor o igual a $r$. $B_r(w) = \{z : |z - w| < r\}$

**Conjunto abierto:** $A \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto si para todo $z \in A$ existe una $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(z) \subset A$.

**Cerrado:** $K$ es un conjunto cerrado si $\mathbb{C} - K$ es abierto.

**Teorema 1.3. Propiedades básicas de los conjuntos abiertos y cerrados:**
1) $\emptyset, \mathbb{C}$ son abiertos
2) Si $A_1, ..., A_n$ son abiertos, entonces su intersección es abierta.
3) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos abiertos, entonces su unión es abierta.

1) $\emptyset$ y $\mathbb{C}$ son cerrados
2) La unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.
3) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.

**Definición 1.4.**
**Punto frontera de $A$:** $a \in \mathbb{C}$ es un punto frontera de $A$ si para todo $\epsilon > 0$ $B_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ y $B_\epsilon(a) \cap A^c \neq \emptyset$
Definimos $\partial A =$ conjunto de puntos fronteras de $A$

**Punto interior de $A$:** $a \in A$ es un punto abierto de $A$ si existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \subset A$
$\text{Int}(A) =$ Conjunto de puntos interiores de $A$.

**Punto exterior de $A$:** $a \in \mathbb{C}$ es un punto exterior de $A$ si es un punto interior de $A^c$

**Punto de acumulación de $A$:** $a \in \mathbb{C}$ es un punto de ac. de $A$ si para toda $\epsilon > 0$, $(B_\epsilon(a) - \{a\}) \cap A \neq \emptyset$
$A' = \{$ puntos de Ac. de $A$ $\}$

**Punto límite:** Igual a la definición de pto de ac. pero con una bola normal (no agujerada), así que esto incluye puntos aislados

**Cerradura de $A$:** $\overline{A} = A \cup \partial A$

**Teorema 1.4. Propiedades**

0)Dado un $A \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{C} = \partial A \cup int(A) \cup ext(A)$ y estos conjuntos son ajenos.

1) $\Omega$ es abierto sii $\text{int}(\Omega) = \Omega$

2) $\Omega$ es cerrado sii $\overline{\Omega} = \Omega$

3)$\Omega$ es cerrado sii $\partial\Omega \subset \Omega$

3.5) $\partial\Omega \subset \Omega'$

4)$\Omega$ es cerrado sii $\Omega' \subset \Omega$

5) $\text{int}(\Omega) =$ unión de la colección de todos los abiertos que son subconjuntos de $\Omega$.

6) $\overline{A} =$ la intersección de todos los cerrados en los que $A$ está contenido.

7) $\text{int}(\Omega) = \mathbb{C} - \overline{(\mathbb{C} - \Omega)}$

8) $\overline{\Omega} = \mathbb{C} - int(\mathbb{C} - \Omega)$

9) $\partial\Omega = \overline{\Omega} -$ $\text{int}(\Omega)$

10) $\text{int}(\Omega) \subset \Omega \subset \overline{\Omega}$

0) Dado un punto $a \in \mathbb{C}$, o todas las bolas intersectan $A$ y $A^c$ o alguna está metida en $A$ o alguna está metida en $A^c$.

1) Directo de la definición de ambas cosas

2)Como $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, por 0), $(\overline{\Omega})^c$ es abierto.

3) $\rightarrow$ Pues por 2) $\Omega \cup \partial\Omega = \Omega$ entonces $\partial\Omega \subset \Omega$

$\leftarrow$ Pues si $\partial\Omega \subset \Omega$, entonces $\Omega \cup \partial\Omega = \Omega$ y luego por 2), $\Omega$ es cerrado.

3.5) Por definición, toda bola de un punto frontera intersecta a $\Omega$ y por tanto es un punto de ac.

4) $\rightarrow$ por 2, $\Omega = \Omega \cup \partial\Omega$, pero un punto de acumulación no puede ser externo por def., por lo que por 0, $\Omega' \subset \Omega \cup \partial\Omega = \Omega$

$\leftarrow$ Por 3.5 y 3.

5) Como $\text{int}(\Omega)$ es abierto, entonces para todo $p$ ahí, existe un abierto que queda contenido en $\text{int}(\Omega)$, por lo que $p$ está en el conjunto del lado derecho. Si $p$ está en una vecindad del lado derecho, esta vecindad está contenida en $\Omega$ y por tanto $p$ es un punto interior.

6) Por 3), no puede haber un cerrado más chiquito que $A \cup \partial A$ contenga a $A$, pues le faltaría algún punto de la frontera.
7 y 8) Por complementos. 9) Para que un punto esté en $\overline{\Omega}$ pero no en int$(\Omega)$, tiene que estar en $\Omega$ o ser punto de ac. de $\Omega$ (en cualquier caso, no puede ser un punto exterior) pero tampoco puede ser interior, luego es frontera.
10) Directo de 5 y 6.

**Definición 1.5. Disconexo:** $\Omega$ es Disconexo si existen $A$ y $B$ abiertos tales que:
1) $A \cap \Omega \neq \emptyset \neq B \cap \Omega$
2) $A$ y $B$ son ajenos.
3) $\Omega \subset A \cup B$

**Teorema 1.5.**
1) $\Omega \subset \mathbb{C}$ es conexo sii los únicos conjuntos clopen relativos en $\Omega$ son $\emptyset$ y $\Omega$.

2) Si tenemos una familia de conexos que se intersectan todos en un punto, entonces la unión es conexa.

3) Si $\Omega$ es abierto: $\Omega$ es conexo sii cualquier par de puntos en $\Omega$ se puede unir por medio de un polígono contenido en $\Omega$.

Dem: 1) Si $A$ es clopen en $\Omega$ y es un subconjunto propio, entonces $A$ y $\Omega - A$ crean una disconección de $\Omega$.
Si $\Omega$ es disconexo, entonces existe una disconección usando $A$ y $B$, entonces, $A \cap \Omega$ y $B \cap \Omega$ son abiertos, pero como juntos forman $\Omega$ y son ajenos, entonces $\Omega - (A \cap \Omega) = B \cap \Omega$ por lo que $A \cap \Omega$ es cerrado relativo en $\Omega$, entonces es clopen.

2) Intuitivamente es obvio
3)Sea $z \in \Omega$ arbitrario, definimos $D_z$ como el conjunto de puntos en $\Omega$ que se pueden conectar con $z$ por medio de un polígono contenido en $\Omega$. Si probamos que $D_z = \Omega$, ya está. Podemos ver que $D_z$ es abierto, pues si $a \in D_z \subset \Omega$, entonces existe una $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \subset \Omega$ (pues $\Omega$ abierto). Pero entonces para todo $w \in B_\epsilon(a)$, $w$ se puede conectar con $a$ (sin salir de $\Omega$) y luego $a$ con $z$, por lo que $w$ se puede conectar con $z$. Por lo que $B_\epsilon(a) \subset D_z$ y por lo tanto es abierto.
Similarmente podemos probar que $D_z$ es cerrado probando que su complemento es abierto

en $\Omega$ y por 1), queda que $D_z = \Omega$ (pues es clopen y no es vacío porque $z \in D_z$)

**Definición 1.6. Cubierta abierta de $A$:** Es una colección de conjuntos abiertos tales que su unión cubre a $A$.
**Compacidad:** $A$ es compacto si para toda cubierta abierta de $A$, existe una subcubierta finita.

**Teorema 1.6.** Sea $K \in \mathbb{C}$ un compacto, entonces
1) $K$ es cerrado.
2) Si $F \subset K$ y $F$ es cerrado, entonces $F$ es compacto.

Dem: Tomamos un punto $p$ fuera de $K$, luego creamos una cubierta abierta en todos los puntos de $K$ de radio tal que no lleguen hasta $p$. Luego tomamos una subcubierta finita cuya unión sea $U$. Si tomamos el abierto más chico de esta subcubierta y ahora lo centramos en $p$, es imposible que esta vecindad $V_p$ toque a $K$, pues si lo hiciera, esta vecindad tendria un radio mayor al que se le pidió por def. Luego, la vecindad se queda en $K^c$ y por tanto éste es abierto.

2) Dada una cubierta de $F$, le podemos agregar $F^c$ (abierto) para convertirla en cubierta de $K$. Luego, $K$ acepta una subcubierta finita, a ésta le sacamos $F^c$ (si lo tiene) que no nos sirve y nos quedamos entonces con una subcubierta de $F$

## 1.2. Sucesiones y Series:

**Definición 1.7. Sucesión:** Una sucesión es una función $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ cuyas imágnes escribimos como $\{s_n\}$ o bien como $\{a_n + ib_n\}$ (es decir, es una lista numerable de elementos de $\mathbb{C}$.

**Convergencia:** Una sucesión $\{s_n\}$ converge al número $L \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ tenemos que $|s_n - L| < \epsilon$
Es decir, eventualmente la sucesión se acerca tanto al valor $L$ como queramos.

**Teorema 1.7.** Sea $s_n = a_n + ib_n$ una secuencia que converge a $L = a + ib$, entonces $\{s_n\} \longrightarrow L \Leftrightarrow \{a_n\} \longrightarrow a$ , $\{b_n\} \longrightarrow b$
Dem:Trivial, usando desigualdad del triangulo y desigualdades de normas.

**Lema:** $\Omega$ es cerrado sii toda secuencia convergente $\{s_n\}$ contenida en $\Omega$ tiene su punto de convergencia dentro de $\Omega$.
**Dem:** Por def. el punto de convergencia es un punto de acumulación de $\{s_n\}$ y como esta secuencia está contenida en $\Omega$, entonces es un punto de ac. de $\Omega$. Como $\Omega$ es cerrado entonces este punto de acumulación está contenido en $\Omega$.
Regreso: Todo punto $p$ de $\Omega'$ se puede ver como el límite de una serie contenida en $\Omega$ (para toda $i$ definimos $w_i$ como un punto de intersección entre $B_{1/i}(p)$ con $\Omega$ que existe porque $p$ es un punto de ac., luego esta serie converge a $p$ y está contenida en $\Omega$). Luego, por hipótesis, $p \in \Omega$, por lo que $\Omega$ contiene a sus puntos de ac. y por tanto es cerrado.

**Teorema 1.7. Bolzano Weierstrass:** Toda secuencia acotada tiene una subsecuencia convergente.
dem: Tomamos un rectángulo que contenga a la secuencia, luego lo partimos en cuatro y nos vamos a la parte que tenga infinitos puntos, a alguno de esos puntos le llamamos $a_1$. Luego partimos este rescángulo en cuatro y otra vez seleccionamos la parte infinita, a alguno de los puntos le llamamos $a_2$, seguimos así hasta que el rectángulo será tan chico que nos acercamos tanto como creamos un punto de ac. de esta subsecuencia que por tanto converge.

**Definición 1.8. Suseción de Cauchy:**
Es una sucesión $\{s_n\}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces $|s_n - s_m| < \epsilon$
(una sucesión tal que eventualmente todo par de elementos están epsilon-cerca)

**Teorema 1.8.** $\{s_n\}$ converge sii es Cauchy.

dem: Ida: Si es converge entonces $|s_n - s_m| = |s_n - L + L - s_m| \leq |s_n - L| + |S_m - L| \leq 2\epsilon$
Regreso: vemos primero que una secuencia de Cauchy es acotada, pues existe un $N$ tal que si $m, n \geq N$ entonces $|s_n - s_m| < 1$ y por tanto $|s_n - s + N| < 1$ para todo $n > N$
Luego, por BW, tiene una subsecuencia convergente que converge a $x$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ hay un punto $s_m$ de dicha subserie $\epsilon/2$ - cerca de $x$, y que a la vez por ser Cauchy, cumple que para toda $n > m$, $s_n$ está $\epsilon/2$ cerca de $s_m$, por lo que $s_n$ está epsilon cerca de $x$ para toda $n$ mayor a $m$.
Nota: Un espacio con esta propiedad (el regreso) se denomina completo y no todo espacio es completo.

**Teorema 1.8. Teorema de Cantor:** Si $\{F_n\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados en $\mathbb{C}$ con $F_1 \supset F_2 \supset ....$ y con $\lim\{diam(F_n)\} = 0$ Entonces, $F = \cap F_n$ es un único punto.

Dem: Sea $z_n \in F_n$, como los rectángulos se hacen cada vez más chicos y están contenidos uno dentro del otro, la serie $z_n$ es de Cauchy y por lo tanto converge a un $z$. Pero como eventualmente, la cola de la secuencia cae dentro de un $F_n$ para todo $n$ (porque son nested) y como son cerrados, entonces la secuencia converge dentro de $F_n$ para todo $n$ y por tanto es un elemento en la intersección. La unicidad se sigue de que el diámetro es cada vez más chico.

**Teorema 1.8. Heine Borel:** $K \subset \mathbb{C}$ es compacto sii $K$ es cerrado y acotado.

Dem: (ida): Si cubrimos $K$ con bolas centradas en el origen de radio $1, 2, ...$ , como es compacto existe una subcubierta finita, entonces hay una máxima bola donde $K$ está metido y por lo tanto es acotado.
Suponemos que no es cerrado, entonces existe un punto $p \in \overline{K}/K$ Para cada $n \in \mathbb{N}$ construimos $\overline{B_{1/n}(p)}$, el complemento de estas bolas $U_n$ es una cubierta de $K$ (pues cubren todos los puntos excepto $p$). Luego, existe una subcubierta finita $U_1, ...U_k$ de $K$, que además, por def. cumple que $U_i \subset U_j$ cuando $i \leq j$, entonces $K$ está contenido en el más grande de estos, $K \subset U_k$ pero entonces, $B_{1/k}(p)$ no toca a $K$ lo cual es una contradicción porque $p \in \overline{K}$
Regreso: un rectángulo es compacto: Sea $U_\alpha$ una cubierta de $R$, y digamos que no acepta

subcubierta. Partimos $R$ en cuatro partes, una de ellas no acepta subcubierta, luego volvemos a partir y seguimos así ad infinitum. Por el teorema de Cantor, eventualmente nos queda un solo punto, pero este punto está dentro de algún $U_1$, y esta vecindad cubre una cantidad infinita de subrectangulitos que por tanto sí aceptan una cubierta finita !
Luego, como $K$ es acotado, se puede meter en un rectángulo $R$ compacto, y por el teorema 1.6, $K$ es compacto.
Nota: El regreso se vale para espacios completos (pues requiere teorema de Cantor que a su vez requiere completitud)

**Definición 1.9.**
**Serie:** Una serie es una suma infinita del tipo $z_1 + z_2 + ....$ Se definen las **sumas parciales** como los resultados de sumar los primeros $n$ elementos $s_n = z_1+z_2+...+z_n$. Finalmente, se dice que la serie converge a un valor $L$ si las sucesión de sumas parciales $s_1, s_2, ....$ converge a $L$.

# 2. Funciones Complejas

**Definición 2.1.**
**función:** Como es de esperar, una función compleja $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una regla de correspondencia que a cada $z \in S$ le asigna un único $f(z) \in \mathbb{C}$.

Se puede pensar como una función de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo. Y de hecho, es común separar a las funciones complejas en sus componentes real e imaginario. $f = u + iv$
O incluso se puede partir en su parte radial y angular como $f(x, y) = \rho(x, y)e^{i\theta(x,y)}$

**Imagen:** La imagen de $S \subset \mathbb{C}$ es el conjunto $f(S) = \{f(x) \ : \ x \in S\}$

**Preimagen:** La preimagen de un conjunto $B$ es: $f^{-1}(B) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ f(z) \in B\}$

**Límite:** Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega'$. Se dice que $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ si: para todo $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

**Continuidad:** $f$ es continua en $z_0 \in \Omega$ si se cumple que $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$
O bien, si para todo $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

**Continuidad Uniforme:** $f$ es U.C. en un conjunto $\Omega$ si para todo $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para todo $z, w \in \Omega$ con $|z - w| < \delta$ se cumple que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$

**Teorema 2.1.**
1) Si el límite existe, es único.
2)Si el límite existe, da igual el trayecto que se utilice para aproximarse a $z_0$
3) Si el límite en dos trayectorias da dos valores distintos, entonces el límite general no existe.
4) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} U(x,y) = u_0$ y $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} V(x,y) = v_0$
5) Si existen los límites correspondientes (hay que comprobar que el límite existe antes de separar), entonces: límite de suma es suma de límites, límite de producto es producto de límites y límite de división es división de límites (si el de abajo es distinto de 0)
6) Si dos funciones son continuas, su suma, composición, producto y división (si el de abajo es distinto de 0) son continuas.
7) $f = u + iv$ es continua en $z_0$ sii $u, v$ son continuas en $z_0$

**Teorema 2.1.**
1) Si $f$ es continua en $z_0$ y $f(z_0) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in B_\delta(z_0)$
Dem: Tomamos como $\epsilon$ a $|f(z_0)|$ y usamos la def. de continuidad.

2) $f$ es continua en todo el dominio sii para todo $U \in \mathbb{C}$ abierto se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto.
Dem: en la ida, tomamos un $z_0 \in f^{-1}(U)$ lo que significa que $f(z_0) = z_1$ para algún $z_1 \in U$. Pero como $U$ es abierto, existe $\epsilon$ con $z_1 \in B_\epsilon \in U$. Como $f$ es continua, existe un $\delta$ tal que $z_0 \in B_\delta \in \Omega$ y que la imagen de todo elemento $x \in B_\delta$ cae en $B_\epsilon$. Lo que prueba que $f(x) \in U$ o bien, $x \in f^{-1}(U)$. Por lo que $B_\delta \subset f^{-1}(U)$ y por tanto es abierto.
Regreso: Similar pero al revés.

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua y $\Omega$ conexo, entonces $f(\Omega)$ es conexo.
Dem: Si $f(\Omega)$ es disconexo, existen abiertos que lo disconexan. Pero entonces, sus imágnes inversas (que son abiertos) disconexan a $\Omega$ !

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua y $\Omega$ compacto, entonces $f(\Omega)$ es compacto.
Dem: Tomamos una cubierta abierta de $f(\Omega)$, la imagen inversa de esta cubierta es una cubierta abierta (por continuidad) de $\Omega$. Como $\Omega$ es compacto, tomamos una subcubierta finita. La imagen de esta subcubierta finita es una subcubierta finita de $f(\Omega)$

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua y $\Omega$ compacto, entonces $|f|$ alcanza máximo y mínimo.
Dem: Sacar norma es continuo, por lo que $|f|$ es una función continua a los reales. Como $\Omega$ es compacto, la imagen de $|f|$ es compacta, que en $\mathbb{R}$ significa que tiene un máx y mín.

**Heine Cantor:** Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $\Omega$ compacto, entonces $f$ es U.C.

**Definición 2.2.**
**Proyección Estereográfica:**
A cada punto $p$ en la esfera unitaria se le asigna el punto $\phi(p) = z \in \mathbb{C}$ tal que el polo norte $N$, $p$ y $z$ están en la misma línea recta. Se puede probar que para un punto $p = (x, y, z) \in S$

$$\phi(p) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right)$$

La proyección esterográfica es biyectiva, por lo que $C \cup \{\infty\} \simeq S^2$. Entonces tiene una inversa:

$$\phi^{-1}(w) = \left( \frac{2x}{1+|w|^2}, \frac{2y}{1+|w|^2}, \frac{|w|^2-1}{1+|w|^2} \right)$$

Esto nos permite ver conjuntos de $\mathbb{C}$ como conjuntos de $S^2$ y vice versa. Y nos permite definir las siguientes cosas que tienen que ver con el infinito.

Vecindad de infinito: $B_{1/\epsilon}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 1/\epsilon\}$
Límite a infinito: $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \ \Rightarrow \ \lim_{z \to z_0} 1/f(z) = 0$
$\lim_{z \to \infty} f(z) = w \ \Rightarrow \ \lim_{z \to 0} f(1/z) = \omega_0$

Distancia cordal: Podemos definir una nueva norma en $C^*$ como $d(w, w') = ||\phi(w) - \phi(w')||$

## 2.1. Derivada:

**Definición 2.3.**
**Diferenciable:** $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $z \in \Omega$. $f$ es diferenciable en $z_0$ si existe (por todos los caminos):

$$f'(z_0) = \lim_{w \to z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}$$

Una definición alternativa parecida a la de funciones multivariables es la siguiente: $f$ es diferenciable en $z_0$ si cerca de $z_0$, $f$ se puede aproximar muy bien como una función afín cerca de $z_0$. Es decir, existe un complejo que denotamos por $f'(z_0)$ tal que:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0$$

Recordando que el producto de complejos se ve como un amplitwist, esto significa que localmente $f$ se ve como un amplitwist para puntos cercanos a $z_0$.

**Teorema 2.3.**
**Propiedades Básicas:**
Si $f$ y $g$ son funciones diferenciables en $z$, entonces:
1) $f + g$ es diff en $z$ y $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
2)$fg$ es diff en $z$ y $(fg) = fg' + f'g$
3)Si $g \neq 0$ entonces $f/g$ es diff y $(f/g)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$
4) $(cf)' = cf'$
5) $(c)' = 0$
6) $(z^n)' = nz^{n-1}$
7) Cadena: $(f \circ g)'(z) = f'(g(z_0))g'(z_0)$

**Teorema 2.3.**
1) Si $f$ es diff en $z_0$, entonces $f$ es continua en $z_0$

2)Si $\Omega$ es abierto y conexo y $f$ es diferenciable en $\Omega$ con $f'(z) = 0 \forall z$, entonces $f = cte$

**Ecuaciones de Cauchy - Riemann:**

Primero que nada, los números complejos se pueden representar a través de matrices muy particulares. $a+bi \simeq \begin{pmatrix} a & b-b & a \end{pmatrix}$ Y se representa de esta forma porque así, la representación matricial del producto de dos complejos es igual a el producto de las representaciones. Además, incluso la norma del complejo es igual al determinante. De hecho, al representarlo así, se puede ver como multiplicar por un complejo es equivalente a realizar un amplitwist.

Con esto, veamos a $f$ como una función de dos variables $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ Esta función es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ si existe su jacobiano (una función lineal que la aproxima bien). Pero, si queremos que sea diferenciable en $\mathbb{C}$, necesitamos que dicha función lineal corresponda con multiplicar por un complejo (que la matriz jacobiana sea la representación de un complejo). Recordamos que el Jacobiano de $f$ si existe es: $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_z & v_y \end{pmatrix}$ Por lo tanto:

**Teorema 2.3.**
$f$ es diferenicable (en el sentido de $\mathbb{C}$) en $z_0$ si y sólo si $f$ es diferenciable en el sentido Real de $\mathbb{R}^2$ y satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann:

$$u_x(z_0) = v_y(z_0)$$
$$u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

Las ecuaciones de Cauchy Riemman salen de buscar que el Jacobiano sea la representación de un complejo. Se puede checar si una función es $\mathbb{C}$-diff si $u_x, u_y, v_x, v_y$ son clase $C^1$ y cumplen las ecuaciones de C-R.

Luego, la derivada de $f$ como tal es el número complejo $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0)$ que es el número complejo representado por la matriz.

**Ecuaciones de Cauchy Riemman para otras representaciones:**
**Cart - Cart:** $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \Rightarrow \quad u_x = v_y \ , \ u_y = -v_x$ y la derivada es $f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

**Polar - Cart** $f(r,\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \quad \Rightarrow \quad ru_r = v_\theta \ , \ u_\theta = -rv_r$ y la derivada es $f' = u_\theta + iv_\theta = -rv_r + iru_r$

**Cart - Polar** $f(x,y) = R(x,y)e^{i\phi(x,y)} \quad \Rightarrow \quad R_x = R\theta_y \ , \ R_y = -R\theta_x$

**Polar - Polar** $f(r,\theta) = R(r,\theta)e^{i\phi(r,\theta)} \quad \Rightarrow \quad R_\theta = rR\phi_r \ , \ R\phi_\theta = rR_r$

**Definición 2.4.**
**Función Holomorfa en $z_0$:** $f$ es holomorfa en $z_0$ si es $\mathbb{C}$ - diferenciable en toda una bola abierta alrededor de $z_0$.

**Entera:** Una función que es analítica en todo $\mathbb{C}$.

**Punto Singular:** Un punto $z_0$ tal que $f$ es analítica en toda una vecindad de $z_0$ excepto en $z_0$ mismo.

Por ejemplo, los polinomios son funciones enteras. $|z|^2$ no es analítica en nigún punto. $1/z$ es analítica en todo $\mathbb{C}$ excepto 0 que es un punto singular.

**Teorema 2.4.**
La suma, composición, producto y cociente (si el de abajo no es cero) de funciones analíticas es analítica.

Si $f'(z) = 0$ para todo $z$ en un conjunto conexo, entonces $f = cte$.

**Definición 2.5.**
**Función Armónica:** $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es armónica si es clase $C^2$ y $H_{xx} + H_{yy} = 0$

**Conjugado armónico:** Dado $u : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica, existe una $v$ armónica tal que $f = u + iv$ es holomorfa. Esta $v$ es el conjugado armónico de $u$.

**Teorema 2.5.**
Si $f = u + iv$ es holomorfa en $D$, entonces $u$ y $v$ son armónicas en $D$¿

$f = u + iv$ es holomorfa sii $v$ es el conjugado armónico de $v$.
Dado $u(x, y)$ armónico, usamos las ecuaciones de $CR$ para obtener $v$.

## 2.2. Funciones Elementales

**Función Constante:**

La función $f$ con $f(z) = w_0$ para todo $z$.

Por componentes: $f(x+iy) = u_0 + iv_0 \quad \forall x, y \in \mathbb{C}$

Derivada: La función es holomorfa en todos los puntos, pues $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ por lo que cumple las ecuaciones de CR. La derivada es $f'(z) = 0$

**Función potencia (Natural)**

La función $f(z) = z^n \quad$ con $n \in \mathbb{N}$ Por componentes: $f(x+iy) = (x+iy)^n$ . Sin embargo, es complicado desarrollar este binomio y encontrar la parte real y compleja, por lo que es mejor representarla como de polares a polares.

$f(z) = (re^{i\theta})^n \ = \ r^n \, e^{in\theta}$

Es decir, al evaluar la función en un punto $z$, entonces le potencia su magnitud a la $n$ y le multiplica su ángulo por $n$.

Derivada: Podemos usar las ecuaciones de $CR$ en polar-polar para probar que es diferenciable en todo el plano (es entera). Y su derivada es $f'(z) = nz^{n-1}$

**Exponencial:**

La función $f(z) = e^z$

Para definirla, buscamos que se cumpla que $e^z e^w = e^{z+w}$ . Entonces, es natural definirl como $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$. Entonces, la forma más natural es escribirla en la forma Cart - Cart o Cart - Polar:

$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$

Es decir, toma un punto $(x, y)$ y lo manda a un punto con radio $e^x$ y ángulo $y$.

Por tanto, manda rectas verticales a círculos de radio $e^x$ a los que les da una vuelta completa cada que $y$ aumenta una cantidad $2\pi i$. Y manda rectas horizontales a rayos que salen del origen (porque todas las imágenes tendrán el mismo ángulo $y$. Es decir, manda cualquier franja horizontal de altura $2\pi$ a todo el plano (excepto 0) de forma biyectiva.

Derivada: Usando $CR$ se puede probar que es entera. y que la derivada de $e^x$ es nuevamente

$e^x$

**Trigonométricas:**

Se define: $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ , $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Es decir, son la parte real e imaginaria de la función $e^z$.

Dif: Son funciones enteras (por ser combinación lineal de exponenciales. Y se puede probar que $\sin' = \cos$ , $\cos' = \sin$

**Hiperbólicas:**

Se define: $\sinh(z) = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$ , $\cosh(z) = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

Es decir, son la parte par e impar de la función $e^z$.

Dif: Son funciones enteras (por ser combinación lineal de exponenciales. Y se puede probar que $\sinh' = \cosh$ , $\cosh' = \sinh$

**Logaritmo:**

La función logaritmo natural requiere un trato especial. Se define como la función inversa de $e^z$. Sin embargo, como $e^z$ no es biyectiva (manda cada tira horizontal de altura $2\pi$ a todo el plano), entonces ln no es una función como tal, sino que es una Multifunción. Lo que quiere decir que dada una $z \in \mathbb{C}$, pueden existir múltiples posibles $\ln(z)$.

$ln(z)$ significa buscar una $w$ tal que $e^w = z$. Sin embargo, existen infinitas tales $w$, pues si $e^{w_0} = z$, entonces también $e^{w_0 + 2k\pi i} = z$ para todo $k$ entero. Es decir, todas las posibles soluciones se encuentran en una misma línea horizontal separadas por una distancia de $2\pi$.

El logaritmo se define como:

$\ln(z) = \ln(r) + i\theta$

Se puede ver que al exponenciar este resultado, efectivamente nos vuelve a dar $z$ como debería. Sin embargo, como un mismo punto $z$ se puede expresar de forma polar de infinitas maneras (sumando $2\pi$ al ángulo, $ln(z) = \ln(r) + i\theta + 2\pi ni$ para todo $n$ natural), entonces, al aplicarle la función $ln$, esta definición puede tener infinitos resultados. Para esto, hay que limitar la forma en que expresamos $z$. Generalmente, se pide que el ángulo $\theta$ esté entre $-\pi$ y $\pi$ y así se obtiene esta definición de (ahora sí) una función:

$\ln(z) = \ln(r) + i\theta \quad$ con $-\pi < \theta < \pi$

Ahora sí es una función como tal, el único problema son los puntos en la línea que une al 0 con $-\infty$ (pues no está definido si su ángulo es $-\pi$ o $\pi$, A este rayo se le conoce como Branch cut.

Otro problema surgirá cuando queremos integrar o así y queremos hacerlo por algún camino que cruce la branch cut. Pues al cruzarla, de repente pasaremos de tener un valor de $\theta$ de casi $\pi$ a saltar directo a uno de casi $-\pi$ (Pues no podemos ir por arria de $\pi$). Esto causará problemas y discontinuidades al integrar. El 0 es un punto que es imposible rodear sin que el camino cruce la branch cut, a este tipo de puntos se les conoce como branch points (otro punto así en este caso es el infinito).

Lo más común es representar el ln de la forma Polar - Cart. Manda círculos centrados en el origen a segmentos verticales de altura $2\pi$ que van de $(\ln(r), -\pi)$ a $(\ln(r), \pi)$ (Realizando un salto cuando el círculo cruza la branch cut).

Y manda rayos que salen del origen a rectas horizontales.

Se puede probar que cumple las ecuaciones de $CR$ (excepto en el 0, en donde no está ni definida) y que su derivada es $1/z$.

**Potencia arbitraria:**

$f(z) = z^a$ donde $a$ es cualquier complejo. Se define:

$z^a = e^{a\ln(z)}$

Inmediatamente tenemos un problema, como $\ln(z)$ es una multifunción, entonces esta potencia es una multifunción también. Antes de hcaer un branch cut, investiguemos qué tan multifunción es verdaderamente por casos.

1) Si $a \in \mathbb{Z})$ entonces, consideramos $z^a = e^{a\ln(z)} = e^{a(r+\theta i+2\pi ni)} = e^{ar+a\theta i+2an\pi i} = e^{ar+a\theta i}e^{2an\pi i} = e^{ar+a\theta i}$ Donde usamos que $e^{2an\pi i} = 1$ por ser $an$ entero. Entonces, en este caso, no es una multifunción, la multifuncionalidez del ln desapareció y nos quedó un solo valor definido. (Como era de esperar, porque estas potencias ya las teníamos definidas como funciones normales).

2) Si $a = 1/p$ con $p$ entero: $z^a = e^{a\ln(z)} = e^{a(r+\theta i+2n\pi i)} = e^{1/p(r+\theta i+2n\pi i)} = e^{r/p+\theta/pi+2n/p\pi i}$.

Donde $n$ puede ser cualquier natural, sin embargo, vemos que los únicos resultados verdaderamente diferentes van a ser para $n = 0, 1, 2, ..., p-1$, a partir de ahí, todos los resultados se van a empezar a repetir (tomar en cuenta que $p$ es entero). Entonces, en realidad no hay infinitos resultados, sino sólo $p$ distintos. Esto coincide con el hecho de que la raíz p-ésima tiene p resultados.

En los demás casos, sí es una multifunción con infinitos resultados. Como tal, siempre que $a$ no sea entero, hay que definir un branch cut. Definimos el mismo que para ln y listo. Tendremos los mismos problemas de discontinuidad al cruzar el eje $x$ negativo.

Derivada: Es una función diferenciable (excepto en 0 cuando $a \notin \mathbb{N}$). Se pueden derivar usando regla de la cadena y así y se tiene que $f'(z) = az^{a-1}$ como es de esperar.
Cumple con todas las reglas de potencias esperables.

**Exponenciales:**

$f(z) = a^z$ para $a \in \mathbb{C}$. Se definen como:
$a^z = e^{z\ln(a)}$
Son multifunciones por la presencia del $ln$, por lo que hay que realizar un branch cut como siempre.
Son funciones diferenciables, excepto en 0, donde no está definida, con derivada: $a^z \ln(a)$

**Trigo e Hiper inversas:**

$\text{arcsin}(z) = -i\ln(iz + (1-z^2)^{1/2})$
$\arccos(z) = -i\ln(z + i(1-z^2)^{1/2})$

$arcsinh(z) = \ln(z + (z^2+1)^{1/2})$
$arccosh(z) = \ln(z + (z^2-1)^{1/2})$

Estas expresiones se pueden encontrar al despejar las funciones originales para encontrar la inversa. Por la presencia de Logaritmos, todas éstas son en realidad multifuncinoes a las que nuevamente hay que definirles un branch cut.

Con estas funciones se pueden construir muchas otras funciones al componer, multiplicar, dividir, sumar, . Y sus derivadas se obtendrán con las reglas típcas de derivación. Algunas notables son $\tan \sec \csc$ que se definen como en el caso real a partir de las funciones sin y cos.

## 2.3. Mapeos Particulaes y Transformación de Mobius

**Mapeos:**

Algunas funciones complejas se pueden ver de una forma especialmente geométrica como transformaciones del plano en sí mismo. Éstas son:

1)**Traslación por** $c$ : $\quad f(z) = z + c$

Lo que hace esta traslación es mover el todo el plano sin rotar ni estirar hasta que el 0 cae en el punto complejo $c$.

En la esfera de Riemman: Es un poco complicado de ver y no vale mucho la pena.

2) **Ampliar por** $c$ : $\quad f(z) = cz \quad \text{con } c \in \mathbb{R}^+$

Estira al plano en todas las direcciones por una constante $c$. Un punto cualquiera $z$ se mueve a través del rayo con el origen hasta $cz$.

En la esfera de Riemman: Si $c$ es mayor que 1, los puntos en la esfera de Riemman se dirigen hacia el norte a través del meridiano en el que se encuentran (no todos a la misma velocidad, por ejemplo, el polo sur (0) y norte ($\infty$) no se mueven y otros puntos en la esfera sí suben bastante.

Si $c$ es menor que 1, sucede lo mismo pero los puntos bajan sobre sus meridianos.

3) **Twist por** $c$ : $\quad f(z) = cz$ donde $c$ es un complejo de norma 1 con ángulo $\theta$.

Un punto cualquiera $z$ rota sobre su círculo centrado al origen un ángulo $c$.

Esfera de Riemman: Los puntos giran en el paralelo en el que se encuentran un ángulo $c$. En este caso, todos los puntos de un mismo paralelo giran por la misma cantidad, por lo que se puede pensar que la esfera en sí está girando sobre su eje $z$ un ángulo $c$.

4) **Amplitwist por** $c$ : $\quad f(z) = cz$ con $c$ complejo.

Los puntos giran por una cantidad $\theta_c$ y luego (o antes) se estiran por una cantidad $r_c$. Corresponde a componer los dos movimientos anteriores.
En la esfera de Riemman: Componer una twist de $\theta_c$ con un ampli de $r_c$.

**Inversión:** $f(z) = 1/z$
Los puntos pasan de tener un radio $r$ a uno $1/r$ (los puntos dentro del círculo unitario pasan afuera y los de afuera pasan adentro) y luego cambiar el ángulo $\theta$ por $-\theta$ (Reflejar con respecto al eje $x$). Tras esto, es importante notar que el círculo unitario en su totalidad es invariante (aunque cambian de posición algunos de sus puntos).
En la esfera de Riemman: La esfera gira 180 grados sobre el eje $x$.

**Transformación de Mobius:**

Un tipo muy importante de mapeo es la llamada transformación de Mobius. Se define en general como:

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Donde $a, b, c, d$ son complejos.

**Teorema 2.5.**
1) Una transfomración de Mobius se puede descomponer como: Una traslación de $d/c$ seguida por una inversión, seguida por un amplitwist por $-\frac{ad-bc}{c^2}$ seguida por una traslación por $a/d$

2) Manda círculos en círculos (tomando en cuenta a las rectas como círculos degenerados)

3)Es conforme (La imagen de dos curvas que se cruzan con un ángulo $\theta$ también se cruzan con un ángulo $\theta$)

4) Si dos puntos $x, y$ son simétricos respecto a un círculo $C$ (Se pueden unir con una recta que pasa por el origen del círculo y la distancia entre $O$ y $x$ es 1 entre la de $O$ y $y$). Entonces, $M(x)$ y $M(y)$ son simétricos con respecto a $M(C)$.

5) La imagen de tres puntos describe unívocamente a una Mobius.

6) El conjunto de transformaciones de Mobius con $ad - bd \neq 0$ forma un grupo (composición e inversión de Mobius da un Mobius).

**Definición 2.6.**
**Punto Fijo:** Un punto fijo es un punto $z$ tal que $M(z) = z$.

Toda transformación de mobius distinta de la Identidad tiene a lo sumo 2 puntos fijos. Se pueden encontrar usando la def. de punto fijo y resolviendo la cuadrática que surge. Los puntos son:

$$\xi_{\pm} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 - 4}}{2c}$$

Vemos que si $c = 0$, entonces el $\infty$ es un punto fijo.

**Parabólica:** Una Mobius es parabólica si los dos puntos fijos son iguales.

**Transformación de Mobius que pasa por 3 puntos:** Dados tres puntos $p, q, r$ e imágenes $p_f, q_f, r_f$, queda definida implícitamente una única transformación de Mobius:

$$\frac{(w - q_f)(r_f - s_f)}{w_f - s_f)(r_f - q_f)} = \frac{(z-q)(r-s)}{(z-s)(r-q)}$$

**Definición 2.7. Clasicación de Transformaciones directas (de la forma $M(z) = Az$ con $A = re^{i\theta}$):**

1)**Elíptica:** Si $r = 1$, es decir, es una rotación. Gira los trópicos sobre sí mismos (dejándolos invariantes como conjuntos) e itera sobre los meridianos.

2) **Hiperbólica:** Si $\theta = 0$, es un ampli. Deja a los meridianos invariantes e itera sobre los trópicos. Los puntos en un meridiano suben si $r > 1$ y bajan sino.

3) **Loxodrómica:** Es una combinación de las dos anteirores. Para cualquier $A$.

**Clasificación general de transformación de Mobius:**

**Inversa:** Si $M = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$, entonce tiene inversa $\dfrac{dw-b}{-cw+a}$

**Representación como matriz:** Una transformación de Mobius se puede representar como la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
Una transformación de mobius se puede representar por muchas matrices distintas (al multiplicar toda la matriz por una constante). Cumple las reglas esperadas en inversas y composiciones.

Truco algebráico: Digamos que $M$ es Mobius con dos puntos fijos. Definimos otra Mobius como:

$$F(z) = \frac{z - \xi_+}{z - \xi_-} \quad F^{-1}(z) = \frac{-\xi_- z + \xi_+}{-z+1}$$

Con esta función, surge un trucazo (que viene inspirado de representar $M$ como una matriz y después diagonalizarla).
El trucazo es considerar

$$W(z) = F \circ M \circ F^{-1}$$

Entonces, seguún el trucazo,

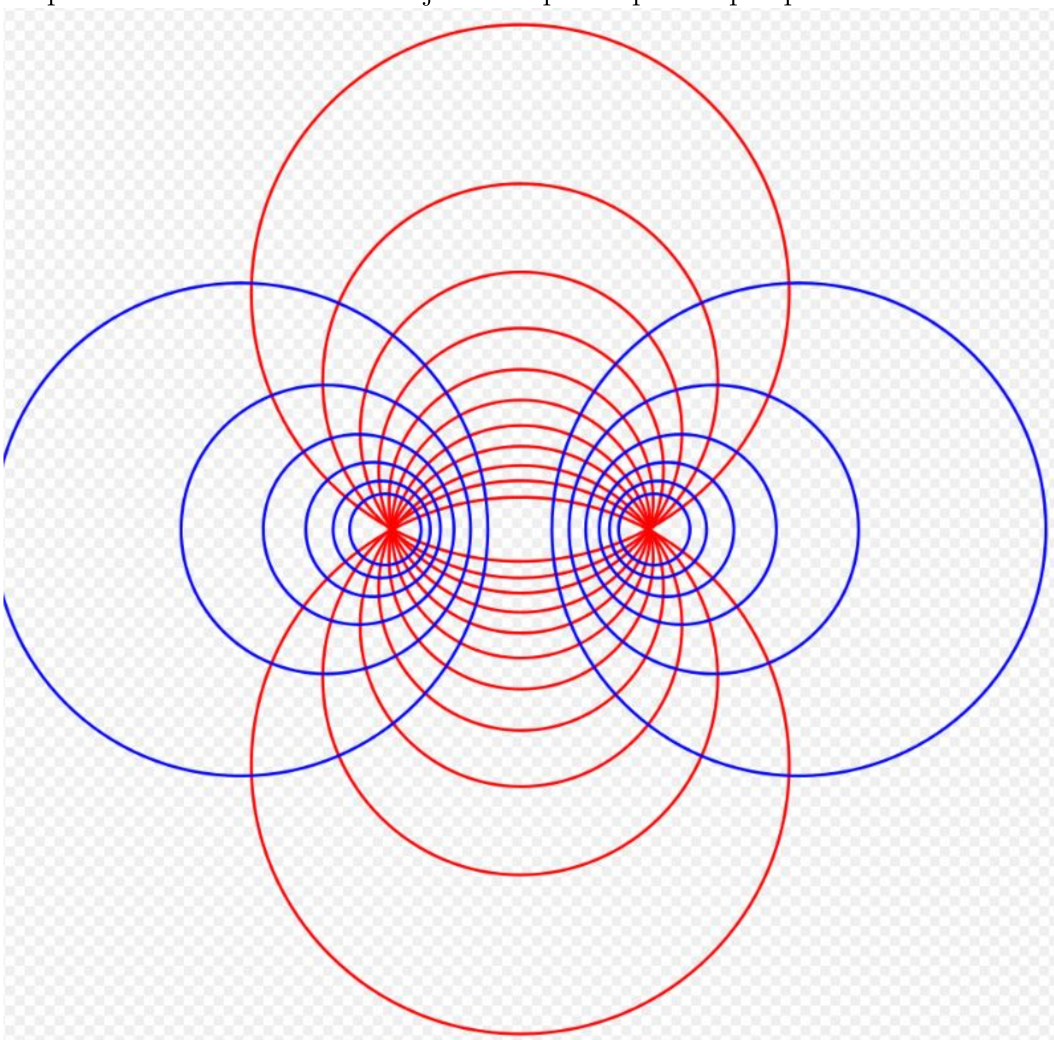
$$W(z) = mz$$

Es decir, con esta $F$, convertimos a $M$ en una transformación directa con multiplicador $m$.

Esto nos permite ver qué es lo que hace $M$ y clasificarla. $M = F^{-1} \circ W \circ F$.
Primero, $F$ (entre otras cosas) manda a $\xi_+$ al 0 y manda a $\xi_-$ a $\infty$. Luego, $W$ hace lo que le corresponda según si es una hiperbólica, elíptica o loxodrómica. Finalmente, $F^{-1}$ vuelve a poner a los puntos fijos en su lugar.
En total, para visualizar una transformación de Mobius, primero dibujamos los puntos fijos. Luego, dibujamos círculos azules que rodean a los puntos fijos (que los puntos fijos son simétricos respecto a los círculos azules). Estos círculos azules se transformarán en círculos centrados al origen cuando aplicamos $F$ (son trópicos). Luego, dibujamos círculos rojos ortogonales a los azules, que al aplicar $F$ se transforman en rayos centrados en el origen (son meridianos).
Entonces, $M = F^{-1}WF$ primero transforma los círculos azules en trópicos y los rojos en

meridianos y para $\xi_+$ al 0 y $\xi_-$ al $\infty$. Luego, $W$ realiza lo correspondiente transformación directa. Finalmente, $F^{-1}$ regresa todos los círculos y puntos fijos a su lugar. Entonces, la función $M$ puede verse directamente en el plano sin aplicar $F$ como sigue:

Si la función $W$ asociada a $M$ es elíptica, entonces aplicar $M$ a un punto hace que gire sobre su círculo azul una cantidad de grados dados por el ángulo $m$. Si la función $W$ asociada a $M$ es hiperbólica, aplicar $M$ mueve un punto por las líneas rojas desde de tal forma que va de un punto fijo al otro (de $\xi_+$ a $\xi_-$ si $m_r > 1$ y al revés si $m_r < 1$). Si la función $W$ asociada a $M$ es loxodrómica, sucede una combinación de ambas cosas de arriba. En la que nuevamente, las imágenes se mueven de $\xi_+$ a $\xi_-$ si $m_r > 1$ y al revés si $m_r < 1$. Pero ahora no permanecen en el círculo rojo en el que empiezan porque a la vez van rotando.



Entonces, una transformación $M$ se clasifica de acuerdo a la clasificación de $W$ (que depende de cómo sea el multiplicador $m$).

**Forma canónica de Mobius:**

Forma de representar una transformación de Mobius de manera más bonita:

$$\frac{w-\xi_+}{w-\xi_-} = m\,\frac{z-\xi_+}{z-\xi_-}$$

Para una parabólica, se puede escribir como:

$$\frac{1}{w-\xi} = \frac{1}{z-\xi} + T$$

**Calcular directamente el multiplicador $m$ (sin usar $F$):**

1) Calcular los puntos fijos.

2) Como $M(\infty) = a/c$, la forma canónica es:

$$\frac{a/c-\xi_+}{a/c-\xi_-} = m\frac{\infty}{\infty} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{a-c\xi_+}{a-c\xi_-}$$

# 3. Integrales

**Definición 3.1. Trayectoria:** Una trayectoria en el plano complejo se puede parametrizar como una función $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Que a cada valor $t$ le asigna un punto en el plano dado por $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$

Si $\gamma'$ es continua, se dice que es una trayectoria lisa. Su derivada se calcula como $\gamma'(t) = u'(t) + iv'(t)$

Simple: La curva no se corta a sí misma.

Cerrada: $\gamma(a) = \gamma(b)$

Ejemplos: $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ dibuja un círculo de radio $R$ y centro en $z_0$

**Integral de una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$:** Si $f(t) = u(t) + iv(t)$ es una función de esta forma, se integra como $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + \int_a^b v(t)dt$

**Integral sobre una curva:** Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función continua y tenemos una curva $\gamma$, definimos la integral de $f$ a lo largo de $\gamma$ como:

$$\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt$$

Que consiste en sumar números complejos a lo largo de la curva $\gamma$.

**Teorema 3.1.**
1) $\displaystyle\int af + bg d\gamma = a\int f d\gamma + b\int g d\gamma$
2) $\displaystyle\int f d(a\gamma + b\beta) = a\int f d\gamma + b\int f d\beta$
3) $\displaystyle\int_C f d\gamma = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f$ Donde $C$ se forma al concatenar $C_1$ y $C_2$.

Se suele escribir simplemente como $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ a la integral de $f(z)$ desde $z_1$ hasta $z_2$. Luego, se especifica la trayectoria y se escribe como $z(t)$. Entonces la integral de trayectoria es $\int_a^b f(z(t))z'(t)dt$

**Ejemplo 3.1.**
1) $f(z) = \overline{z}$ integrado en la parte derecha del círculo de radio 2.
$z(t) = 2e^{it} \Rightarrow z'(t) = 2ie^{it}$ con $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$
$\int f(z)dz = \int f(2e^{it})(2ie^{it})dt = \int 2e^{-it}(2ie^{it})dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4idt = 4\pi i$

2)$f(z)$ de $z_1$ a $z_2$
$\int f(z)dz = \int z(t)z'(t)dt = \int \frac{d}{dt}z^2(t)/2dt = z^2(t)\Big|_{z_1}^{z_1} = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$

3) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ a través de un círculo de radio 2.
$z(t) = 2e^{it} \Rightarrow z'(t) = 2ie^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$
$\displaystyle\int f(z)dz = \int f(2e^{it})(2ie^{it})dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} 2ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$

4) $f(z) = z^{a-1}$ en un círculo de radio $R$.
$z(t) = Re^{it}$ con $-\pi \leq t \leq \pi$ $z'(t) = Rie^{it}$ (Para respetar el branch cut)
$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{it})Rie^{it}dt = \int_{-\pi}^{\pi} R^{a-1}e^{i(a-1)t}Rie^{it}dt = \int_{-\pi}^{\pi} R^a ie^{ait}dt = iR^a \frac{e^{iat}}{ia}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2iR^a}{a}\sin(a\pi)$
Entonces, si $a = \pm 1, \pm 2, ...$, la integral vale 0.
Si $a = 0$, entonces la integral vale $2\pi i$.

**Teorema 3.1.**
1) $\left|\int_a^b w(t)dt\right| \leq \int_a^b |w(t)|dt$
2) Si $C$ es un contorno de longitud $L$ y $f(z)$ es continua en $C$ acotada por $M$, entonces:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML$$

**Antiderivadas:**
Dado $f(z) : D \to \mathbb{C}$ continua, su antiderivada en $D$ es una función $F(z) : D \to \mathbb{C}$ holomorfa con $F'(z) = f(z)$

**Teorema 3.1.**
Los siguientes tres son equivalentes:

1) $f(z)$ tiene antiderivada $F(z)$ en $D$

2) $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$ sin importar el trayecto.

3) La integral de $f$ por un camino cerrado es 0

Que 1 implica 2 se demuestra con $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} F'(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)$.
Que 2 implica 3 es fácil de ver.
Esto puede facilitar calcular integrales, sin necesidad de parametrizar la curva de integración.

**Ejemplo 3.1.**
1) $f(z) = 1/z^2$ en el círculo unitario.
Tiene antiderivada $F(z) = 1/z$ en $\mathbb{C}/\{0\}$ y que es válida en todo el círculo unitario. Por la parte 3) del teorema, la integral vale 0.

2) $f(z) = 1/z$ a lo largo del círculo unitario.
Tiene antiderivada $\ln(z)$, el problema es que ésta no es una función, es una multifunción. Necesitaríamos agarrar una rama (para convertirla en función) que sea válida en todo el contorno de integración. Pero una rama así no existe, pues 0 es siempre un branch point y es imposible rodearlo sin cruzar un branch cut. Sin embargo, para una trayectoria cerrada que no encierre al cero, sí existe una antiderivada y por la parte 3 del teorema, la integral sería 0.

Sin embargo, para el círculo unitario que rodea el 0, podemos partir el camino en 2 partes. Primero integramos en la parte derecha de $-i$ a $i$ usando como antiderivada la branch $\ln_1(z) = \ln(r) + i\theta \quad$ con $-\pi < \theta < \pi$ (branch en el $x$ negativo). Entonces, la integral sobre el círculo derecho es $\ln_1(i) - \ln_1(-i) = \pi/2i - (-\pi/2i) = \pi i$
Luego integramos sobre la parte izquierda del círculo de $i$ a $-i$. Usamos la antiderivada $\ln_2(z) = \ln(r) + i\theta \quad$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (branch en $x$ positivo). Entonces, la integral sobre el círculo izquierdo es $\ln_2(-i) - \ln_2(i) = 3\pi/2i - \pi/2i = \pi i$.
Entonces, la integral total es $2\pi i$.

## 3.1. Teoría de Cauchy

**Teorema 3.1.**
1) **Teorema de Cauchy - Goursat:** Si $f$ es holomorfa en todos los puntos en el interior de un contorno $C$ simple y cerrado, entonces $\int_C f(z)dz = 0$
Dem: Se escribe la integral como integral de línea, $\int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$ Luego, como $C$ es cerrado, se usa el teorema de Green para escribirlo como una integral doble $\int\int_R -v_x - u_y dA + i\int\int_R u_x - v_y dA$. Se usa que cumple las ecuaciones de CR en todo el interior para probar que los integrandos son 0, entonces la integral total vale 0

2) Si $f$ es holomorfa en un conjunto simplemente conexo (sin hoyos), entonces $\int_C f(z)dz = 0$ para toda curva $C$ en el conjunto.

3) Corolario: Si $f$ es holomorfa en un dominio simplemente conexo $D$, entonces tiene antiderivada en todo $D$. Y además, para cualesquieras puntos extremos, la integral de línea no depende de la trayectoria (si la trayectoria se encuentra dentro del conjunto $D$ donde $f$ es holomorfa).

4) Si integramos sobre un espacio con hoyos, tal que $C$ es una curva y $C_1, C_2, C_3, ...$ son curvas dentro de la curva original ($f$ es holomorfa en todo el espacio entre hoyos), entonces:

$$\int_C f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = 0$$

Donde las integrales sobre las curvas $C_k$ son en sentido horario y la integral en $C$ es en sentido antihorario.

5) Corolario: **Teorema de Deformación:** Si deformo un tramo $\gamma$ en uno $\beta$ de tal forma que en el camino de la deformación $f$ sea analítica, entonces $\displaystyle\int_\gamma f = \int_\beta f$
Dem: Para caminos no cerrados, se desprende del teorema 3. Si ambos caminos son cerrados, ponemos uno dentro del otro y usamos el teorema 4.

Con esto se puede mostrar que en cualquier trayectoria que rodee el origen, la integral de $1/z$ vale $2\pi i$ pues podemos deformar el círculo unitario y usar el teorema de deformación.

**Teorema 3.1.**
**Fórmula Integral de Cauchy:** Si $f$ es analítica en todo punto dentro de una curva $C$ y tenemos un punto $z_0$ dentro de $C$, entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)dw}{w - z_0}$$

Dem: Sea $C_p$ el críulo $|z - z_0| = r$ con $r$ chico y dentro de $C$, entonces, $f(z)/(z - z_0)$ es anal en todo el espacio entre $C_p$ y $C$, por lo que podemos usar el teorema de deformación:
$\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} = \int_{C_p} \frac{f(z)}{z - z_0} = \int_{C_p} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz + f(z_0)\int_{C_p} \frac{dz}{z - z_0} = 0 + f(z_0)(2\pi i)$

La primera integral vale 0 porque $f$ es U.C y el círculo $C_p$ se puede hacer tan chiquito tal que el denominador es mucho mayor al numerador. La segunda integral vale $2\pi i$ porque es como la integral de $1/z$ pero desplazada.

**Gneralización a derivadas de mayor orden:**
Sea $C$ un dominio simplemente conexo y $z$ dentro de $C$, entonces:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)dw}{w - z} \\ \Rightarrow \quad f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)dw}{(w - z)^2} \\ \Rightarrow \quad f''(z) &= \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(w)dw}{(w - z)^3} \\ \Rightarrow \quad f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)dw}{(w - z)^{n+1}} \end{aligned}$$

Se hace usando la regla de Leibniz de derivar dentro de la integral.

**Teorema 3.1.**
Si $f$ es holomorfa en un punto $z$, entonces todas sus derivadas también son holomorfas en dicho punto (es decir, es infinitamente derivable).
Dem: Las derivadas vienen dadas por las integrales de la fórmula de Cauchy generalizada para derivadas de mayor orden. Es necesario que $f$ sea holomorfa también en un círculo alrededor de $z$ para que éstas integrales se puedan realizar.

2) **Estimación de Cauchy:** Si $f : B_R(a) \to \mathbb{C}$ es holomorfa y acotada por $M$, entonces:

$$|f^(n)(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}$$

Dem: Sabemos que $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i} \int_C \dfrac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}}$, pero esta integral está acotada, por lo que $|f^{(n)}(z)| \leq \dfrac{n!}{2\pi i} \dfrac{M}{R^{n+1}} (2\pi R)$

**Teorema 3.1.**
**Teorema de Liouville:** Si $f$ es entera y acotada, entonces $f(z)$ es constante en $\mathbb{C}$.

Si $f$ es holomorfa y no constante en $D$ abierto, entonces $f$ no tiene un máximo en $D$ (pero a lo mejor en la frontera).

Teorema fundamental del Álgebra: Todo polinomio tiene una raíz compleja.
Dem: Digamos que $P(z)$ no tiene una raíz en ningún punto, entonces $1/P(z)$ es entera (porque $P(z)$ no vale 0) y acotada (porque $P(z)$ no puede acercarse infinitamente al 0 sin tocarlo). Entonces, por Liouville, $1/P$ es constante, lo cual es una contradicción.

# 4. Series y Secuencias

**Definición 4.1.**

**Secuencia:** Un mapeo $n \to a_n$, la secuencia se denota por $\{a_n\}$

**Converge:** $\{a_n\}$ converge a $l$ si para todo $\epsilon > 0$ existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $|a_n - l| < \epsilon$

**Secuencia de Cauchy:** Es una secuencia $\{a_n\}$ tal que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces $|a_n - a_m| < \epsilon$

**Serie:** Una serie es una suma $a_1 + a_2 + ....$

**Sumas parciales:** La suma parcial n-ésima de la serie es $s_n = a_1 + ...a_n$ .

**Serie Convergente:** Una serie $a_1 + a_2 + ...$ converge a $l$ si la secuencia de sumas parciales $\{s_n\}$ converge a $l$.

**Convergencia Absoluta:** $a_1 + a_2 + ...$ converge absolutamente si $|a_1| + |a_2| + ...$ converge.

**Teorema 4.1.**

1) Sea $z_n = x_n + iy_n$. Entonces, $\{z_n\} \to z \quad \Leftrightarrow \quad \{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$. Algo similar se puede enunciar de la convergencia de Series.

2) Si $a_1 + a_2 + ...$ converge, entonces $\{a_n\}$ converge a 0 (El regreso no se vale).

3) $\{a_n\}$ converge sii $\{a_n\}$ es Cauchy.

**Pruebas de Convergencia:**

1) **Test de Comparación:** Si $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

Cor: Si $\sum |a_n|$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

2) **Ratio Test:** Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, entonces:

Si $L < 1$, $\sum a_n$ converge.

Si $L > 1$, $\sum a_n$ diverge.

3) Hay muchas más pruebas pero sólo éstas serán útiles.

**Definición 4.2.**

**Secuencia de funciones:** Es una secuencia de la forma $f_1(z), f_2(z), ...$ Es decir, para cada

$z$ nos da una secuencia distinta. Definimos $f(z) = \lim f_n(z)$. Que para evaluar $f$ en $z$, hay que calcular el punto al que converge la secuencia $f_1(z), f_2(z), ...$

**Convergencia Puntual:** Una secuencia de funciones converge puntualmente en $z_0$ a $L(z_0)$ si para todo $\epsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $|f_n(z_0) - L(z_0)| < \epsilon$

**Convergencia Uniforme:** Una secuencia $f_n$ converge uniformemente a $f$ ($f_n \rightrightarrows f$) si para todo $\epsilon > 0$ existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z \in D$ si $n < N$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$

**Series de Funciones:** Es una suma del tipo $f_1 + f_2 + f_3 ....$ Es una series distinta para cada $z$. Se dice que converge (converge Unif.) si la sucesión de sumas parciales converge (converge Unif.)

**Teorema 4.2.**
1) Si $\{f_n\} \rightrightarrows f$, entonces $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$

2) Si $\{f_n\} \rightrightarrows f$ donde cada $f_i$ es continua, entonces $f$ es continua.

3) Si $\{f_n\} \rightrightarrows f$ donde cada $f_i$ es derivable y $\{f_n'\} \rightrightarrows g$ con $g$ continua, enotnces $f$ es derivable y $f' = g$

1) Si $\sum f_n \rightrightarrows f$ y cada $f_i$ es continua, entonces $f$ es continua.

2)Si $\sum f_n \rightrightarrows f$ y cada $f_n$ y $f$ son integrables, entonces $\int f = \sum \int f_i$

3)Si $\sum f_n \rightrightarrows f$ y $\sum f_n' \rightrightarrows g$ con $g$ continua, entonces $f' = \sum f_n'$

**Prueba M de Weirestrass:** Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $A$ y supóngase que $\{M_n\}$ es una sucesión de reales con $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo $z \in A$. Y supóngase que $\sum M_n$ converge,
entonces, para todo $z \in A$, $\sum f_n(z)$ converge y $\sum f_n \rightrightarrows f$

**Serie de Potencias centrada en $z_0$:** Una serie de la forma $\sum a_n(z - z_0)^n$

Es decir, para cada $z$, corresponde una serie distinta.

**Teorema 4.2.**

1) Para $\sum a_n(z-z_0)^n$ existe un $R \in \mathbb{R}^+$ tal que la serie converge en $|z-z_0| < R$

Dem: Usamos el Ratio test: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}|}{|a_n(z-z_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z-z_0|$

Queremos que esto sea menor que 1 para que la series converja en $z$.

Sea $1/R = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Entonces, lo que queremos es que $|z-z_0| < R$

Y éste es el radio de convergencia. $R = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

2) Si $\sum a_n(z-z_0)^n$ converge en $|z-z_0| < R$, entonces converge uniformemente en dicho conjunto.

Todo esto nos permite definir nuevas funciones a partir de series de potencias, simplemente tomamos una serie de potencias convergente y definimos $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$

Además, si la serie converge con un círculo de convergencia $R$, entonces $f(z)$ es infinitamente diferenciables en $|z-z_0| < R$ (pues la podemos derivar término a término y volver a derivar indefinidamente). A parte, para funciones de este tipo se puede ver que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

**Serie de Taylor:** Si $f$ es analítica en $|z-z_0| < R$ para algún $R > 0$, entonces:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Que es válido para $|z-z_0| < R$

Dem: Para un $z \in B_R(z_0)$ fijo, hay un $\rho$ con $|z-z_0| < \rho < R$. Sea $\gamma$ un círculo de radio $\rho$ que rodea a $z_0$. Entonces:

$f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(w)}{w-z}dw = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(w)}{(w-z_0)-(z-z_0)}dw = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(w)}{(w-z_0)(1-\frac{z-z_0}{w-z_0})}dw$

Pero como $\dfrac{z-z_0}{w-z_0} < 1$ (porque $w$ circula en el radio $\rho$ centro $z_0$, pero $z$ está dentro de dicho círculo), entonces, podemos expandir la serie geométrica:

$= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(w)\left(\dfrac{1}{w-z_0} + \dfrac{z-z_0}{(w-z_0)^2} + ... + \dfrac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} + ...\right) dw$

Que como converge uniformemente, podemos separ la suma.

$= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$
Esto último usando la fórmula de Cauchy para derivada.

Entonces, cualquier función derivables en $|z - z_0| < R$ (que por tanto es infinitamente derivable ahí) tiene una representación como serie de potencias centrada en $z_0$, donde cada coeficiente de la serie se obtiene como $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Y dicha serie converge uniformemente en el conjunto, por lo que podemos diferenciarla o integrarla término a término.
Entonces, si queremos expandir $f$ en una serie de Taylor alrededor de $z_0$, dicha serie sólo será vá'lida en un círculo que llegue hasta la singularidad de $f$ más cercana, pues después de eso, no se cumplen las hipótesis del teorema.
Además, La representación en serie de Taylor es única.

## 4.1. Series de Laurent:

**Teorema de Laurent:** Si $f$ es analítica en el anillo $0 \leq r_1 < |z - z_0| < r_2$, entonces tiene una única serie:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n(z - z_0)^n$$

$$\text{Donde, } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}dw$$

Dem: Dibujamos dor círculos alrededor de $z_0$, uno de radio $\rho_1$ con $r_1 < \rho_1 < |z - z_0|$ y uno de radio $\rho_2$ con $|z - z_0| < \rho_2 < r_2$. Entonces, por la fórmula de Cauchy con hoyos:
$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z}dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z}dw\right) =$
$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0})}dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{-(w - z_0)(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0})}dw\right)$
Pero en $C_2$ se tiene que $\frac{z - z_0}{w - z_0} < 1$ y en $C_1$ se tiene que $\frac{w - z_0}{z - z_0} < 1$, entonces podemos usar la serie geométrica en ambas integrales y nos queda al final:
$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(z - z_0)\int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}dw$

Para los térmonos $a_n$ con $n > 0$, los términos coinciden con, los de la serie que correspondería de Taylor. De hecho, si $f$ es analítica en $|z - z_0| < r_2$ (es decir, no en un anillo pero en un círculo), entonces, $a_n$ para $n < 0$ es cero, porque entonces el integrando es analítico. Y los términos de $n \geq 0$ coinciden con los de Taylor, por lo que finalmente nos queda solamente la serie de Taylor.

**Singularidades:**

**Definición 4.3.**
**Singularidad Aislada:** $f$ tiene una sing aislada en $z_0$ si existe $\epsilon > 0$ tal que $f$ es analítica en $0 < |z - z_0| < \epsilon$ pero no es anal en $z_0$

Ahora, sea $f$ una función con una singularidad aislada en $z_0$ y con serie de Laurent $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n(z - z_0)^n$. Entonces, podemos clasificar la singularidad de la siguiente forma:

1) **Singularidad Removible:** Si $a_n = 0$ para todo $n < 0$ Aquí se puede definir $f^*(z) = f(z)$ para $z \neq z_0$ y $f^*(z_0) = a_0$. Esta $f^*(z)$ ahora sí es anal.
2) **Polo de orden** $m$**:** Si $a_{-n} = 0$ para todo $n > m$ y $a_{-m} \neq 0$. Es decir, la serie llega hasta el t3) érmino con $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ pero no llega más lejos.
**Singularidad Esencial:** Si $a_{-n} = 0$ para infinitos $n > 0$

Por ejemplo, $z^{-1}\sin(z)$ tiene un polo de orden 1 en 0. $z\sin(z^{-1})$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$. $z^{-2}\sin(z)$ tiene un polo de orden 2 en $z = 0$.

**Teorema 4.3.**
**Teorema del Residuo:** Si $\gamma$ es cerrada y $f$ es anal. en $\gamma$ y dentro de $\gamma$ excepto en $z_0$, entonces:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = a_{-1} := RES_{z=z_0}f(z)$$

Es decir, el residuo de $f$ en $z_0$ singularidad, consiste en integrar $f$ alrededor de una curva que rodea $z_0$ y donde $f$ es anal en todos los puntos interiores (excepto $z_0$). El teorema se

puede demostrar al ver la expresión para $a_{-1}$ de la serie de Laurent.
Otra forma de escribirlo, es que si $f$ tiene una serie de Laurent, entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$$

Entonces, conocer el residuo de $f$ puede permitirnos calcular la integral de $f$ alrededor de $z_0$.

**Teorema 4.3.**
**Calcular polos:** Si $f$ tiene un polo en $z_0$ de orden $m$, entonces:

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m} \quad \text{Con } \phi \text{ anal en } z_0 \text{ y } \phi(z_0) \neq 0$$

$$\text{Además, } RES_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Dem: Escribimos $f$ como serie de Laurent: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + ... + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}$
Definimos $\phi(z) = (z-z_0)^m f(z)$ para $z \neq z_0$ y $\phi(z_0) = b_m$ para $z = z_0$
Entonces, $\phi(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + ... + b_2(z-z_0)^{m-2} + b_1(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{m+n}$
Se puede ver que $\phi$ es anal y que $b_1 = \frac{\phi^{m-1}(z_0)}{(m-1)!}$, que es el residuo de $f$.

**Singularidad en el infinito:** $f$ tiene una singularidad en el infinito si $f(1/z)$ tiene una singularidad en 0