Tomás Ricardo Basile Álvarez Álgebra Moderna

Tarea 2.7

a) Sean $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, con $|a| = 8$, $|b| = 2$ y $K = \langle (a^2, b) \rangle$ grupo y $H \leq G$. Encuentra todas las clases laterales y escribe la tabla de Cayley de G/K

Podemos ver que G es abeliano pues si (a^i, b^j), (a^k, b^m) son dos elementos arbitrarios
$\Rightarrow (a^i, b^j) \cdot (a^k, b^m) = (a^i \cdot a^k, b^j b^m) = (a^k a^i, b^m b^j) = (a^k, b^m)(a^i, b^j)$ #

Entonces todo subgrupo es normal, en particular $K = \{(a^2, b), \underbrace{(a^4, b^2)}_{=(a^4,1)}, (a^6, b), \underbrace{(a^8, b^2)}_{=(1,1)}\}$

Calculamos las clases laterales

- $(a,1)K = (a,1)\{(a^2,b), (a^4,1), (a^6,b), (1,1)\} = \{(a^3,b), (a^5,1), (a^7,b), (a,1)\}$
- $(a,b)K = (a,b)\{(a^2,b), (a^4,1), (a^6,b), (1,1)\} = \{(a^3,1), (a^5,b), (a^7,1), (a,b)\}$
- $(a^2,1)K = (a^2,1)\{(a^2,b), (a^4,1), (a^6,b), (1,1)\} = \{(a^4,b), (a^6,1), (1,b), (a^2,1)\}$
- $(a^2,b)K = K$ ← porque $(a^2,b) \in K$
- $(a^3,1)K = (a^3,1)\{(a^2,b), (a^4,1), (a^6,b), (1,1)\} = \{(a^5,b), (a^7,1), (a,b), (a^3,1)\} = \underline{(a,b)K}$

⋮

Podría seguir calculando clases pero me da flojera. Es claro que $|G| = 2 \cdot 8 = 16$ y vimos que $|K| = 4$. Por lo tanto, G/K tiene $|G/K| = |G|/|K| = 16/4 = \underline{4}$ elementos

y ya encontramos las 4 clases laterales: $\underline{K,\ (a,1)K,\ (a,b)K,\ (a^2,1)K}$

Cayley	K	$(a,1)K$	$(a,b)K$	$(a^2,1)K$
K	K	$(a,1)K$	$(a,b)K$	$(a^2,1)K$
$(a,1)K$	$(a,1)K$	$(a^2,1)K$	K	$(a,b)K$
$(a,b)K$	$(a,b)K$	K	$(a^2,1)K$	$(a,1)K$
$(a^2,1)K$	$(a^2,1)K$	$(a,b)K$	$(a,1)K$	K

Para calcular estos productos vemos que K es el neutro y por eso $K \cdot (a,1)K = (a,1)K$, $K \cdot (a^2,1)K = (a^2,1)K$, ..., lo que prueba la primera fila y columna.

Por otro lado, vemos que

- $((a,1)K)((a,1)K) = (a,1)^2 K = (a^2,1)K$
- $((a,b)K)((a,1)K) = (a,b)(a,1)K = (a^2,b)K = K$

Luego usamos que G/K es conmutativo porque G lo es. Y ya podemos llenar todo el cuadrado interior de 2x2 con esos productos

Y luego usamos que cada fila y columna debe de incluir a todos los elementos de $G\backslash K$ para llenar el resto de la gráfica como un Sudoku.

b) Encuentra todas las clases laterales y escribe la tabla de Cayley de $D_{2(6)}/Z(D_{2(6)})$

$D_{2(6)} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\} = \langle r, s, r^6 = 1, s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle$ y usaremos mucho que $sr^k = r^{6-k}s$ (3.5 e))

Los elementos de $Z(D_{2(6)})$ son los que conmutan con los generadores. Buscamos uno a uno:

- 1: $1\cdot r = r\cdot 1$ ✓ ; $1\cdot s = s\cdot 1$ ✓
- r: $r\cdot r = r\cdot r$ ✓ ; $r\cdot s = sr^{-1} = sr^5$ ✗
- r^2: $s\cdot r^2 = r^4 s \neq r^2 s$ ✗
- r^3: $s\cdot r^3 = r^{6-3}s = r^3 s$ ✓ ; $r^3\cdot r = r\cdot r^3$ ✓
- r^4: $s\cdot r^4 = r^{6-4}s = r^2 s \neq sr^4$ ✗
- r^5: $s\cdot r^5 = r^{6-5}s = rs \neq r^5 s$
- s: $s\cdot r = r^5 s \neq rs$ ✗
- sr: $(sr)\cdot r = sr^2 = r^4 s$; $r\cdot(sr) = r(r^5 s) = s$ ✗
- sr^2: $(sr^2)\cdot r = sr^3 = r^3 s$; $r\cdot(sr^2) = r(r^4 s) = r^5 s$ ✗
- sr^3: $(sr^3)\cdot r = sr^4 = r^2 s$; $r\cdot(sr^3) = r(r^3 s) = r^4 s$ ✗
- sr^4: $(sr^4)\cdot r = sr^5 = rs$; $r\cdot(sr^4) = r\cdot(r^2 s) = r^3 s$ ✗
- sr^5: $(sr^5)\cdot r = s$; $r\cdot(sr^5) = r(rs) = r^2 s$ ✗

$\therefore Z(D_{2(6)}) = \{1, r^3\}$

clases laterales:

- $1\cdot Z(D_{2(6)}) = Z(D_{2(6)}) = \{1, r^3\}$
- $r\cdot Z(D_{2(6)}) = r\{1, r^3\} = \{r, r^4\}$
- $r^2\cdot Z(D_{2(6)}) = r^2\{1, r^3\} = \{r^2, r^5\}$
- $r^3\cdot Z(D_{2(6)}) = r^3\{1, r^3\} = \{r^3, 1\} = Z(D_{2(6)})$
- $\vdots$
- $s\cdot Z(D_{2(6)}) = s\{1, r^3\} = \{s, sr^3\}$
- $sr\cdot Z(D_{2(6)}) = sr\{1, r^3\} = \{sr, sr^4\}$
- $sr^2\cdot Z(D_{2(6)}) = sr^2\{1, r^3\} = \{sr^2, sr^5\}$

como son 6 grupos distintos y $|D_{2(6)}/Z(D_{2(6)})| = |D_{2(6)}|/|Z(D_{2(6)})| = 12/2 = 6$

$\Rightarrow$ tenemos todas las clases laterales

Cayley:	$\{1, r^3\}$	$\{r, r^4\}$	$\{r^2, r^5\}$	$\{s, sr^3\}$	$\{sr, sr^4\}$	$\{sr^2, sr^5\}$
$\{1, r^3\}$	$\{1, r^3\}$	$\{r, r^4\}$	$\{r^2, r^5\}$	$\{s, sr^3\}$	$\{sr, sr^4\}$	$\{sr^2, sr^5\}$
$\{r, r^4\}$	$\{r, r^4\}$	$\{r^2, r^5\}$	$\{1, r^3\}$	$\{sr, sr^4\}$	$\{sr^2, sr^5\}$	$\{s, sr^3\}$
$\{r^2, r^5\}$	$\{r^2, r^5\}$	$\{1, r^3\}$	$\{sr, sr^4\}$	$\{sr^2, sr^5\}$	$\{s, sr^3\}$	$\{sr, sr^4\}$
$\{s, sr^3\}$	$\{s, sr^3\}$	$\{sr, sr^4\}$	$\{sr^2, sr^5\}$	$\{1, r^3\}$	$\{r, r^4\}$	$\{r^2, r^5\}$
$\{sr, sr^4\}$	$\{sr, sr^4\}$	$\{sr^2, sr^5\}$	$\{sr^3, s\}$	$\{r, r^4\}$	$\{1, r^3\}$	$\{r, r^4\}$
$\{sr^2, sr^5\}$	$\{sr^2, sr^5\}$	$\{sr^3, s\}$	$\{sr^4, sr\}$	$\{r^2, r^5\}$	$\{r, r^4\}$	$\{1, r^3\}$

c) Si $G = \langle X \rangle$, $K \trianglelefteq G$, muestra que G/K es generado por $\{xK \mid x \in X\}$

Sea $aK \in G \backslash K$ con $a \in G$ ← porque así se ve un elemento arbitrario de $G \backslash K$

pero $a \in \langle X \rangle$ es una palabra de X (porque así se ven todos los elementos de $\langle X \rangle$)

$$\Rightarrow a = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} \quad \text{con } x_i \in X,\ \alpha_i = \pm 1$$

$$\Rightarrow aK = (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k})K$$

$$= x_1^{\alpha_1}K \cdot x_2^{\alpha_2}K \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k}K$$

$$= (x_1K)^{\alpha_1} \cdot (x_2K)^{\alpha_2} \cdots (x_kK)^{\alpha_k}$$

pero cada elemento x_iK pertenece a $\{xK : x \in X\}$ porque $x_i \in X$

Por lo que aK es una palabra de $\{xK : x \in X\}$

y por tanto, todo elemento de G/K es generado por $\{xK \mid x \in X\}$

d) Sea G un grupo, $K \trianglelefteq G$. $Z(K)$ y $Z(G/K)$ triviales $\Rightarrow$ $Z(G)$ es trivial.

Supongamos que $a \in Z(G)$

$\Rightarrow$ por def, $ag = ga$ $\forall g \in G$

Entonces, $(ag)K = (ga)K$ $\forall g \in G$

$\Rightarrow$ Entonces $(aK)(gK) = (gK)(aK)$ $\forall g \in G$

lo que significa que aK conmuta con toda clase lateral de K

$\rightarrow$ $aK \in Z(G/K)$.

Pero como $Z(G/K)$ es trivial $\Rightarrow$ $Z(G/K) = \{K\}$

$\rightarrow$ $aK = K$

Por lo tanto, $a \in K$

Pero como también $ag = ga$ $\forall g \in G$ y y como $a \in K$

en particular $ag = ga$ $\forall g \in K \subseteq G$ y conmuta con todo elemento de K porque a está en K

Entonces $a \in Z(K)$

pero como $Z(K)$ es trivial $\Rightarrow$ $a = e$

$\therefore$ El único elemento de $Z(G)$ es e

y $Z(G)$ es trivial

e) Sea G un grupo. Prueba que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano

Como $G/Z(G)$ es cíclico $\rightarrow$ existe $x \in G$ tal que $G/Z(G) = \langle x Z(G) \rangle$

Sean $g, h \in G$. Entonces $gZ(G), hZ(G) \in G/Z(G) = \langle x Z(G) \rangle$

$\Rightarrow gZ(G) = (xZ(G))^m, \quad hZ(G) = (xZ(G))^n$ para $m, n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow gZ(G) = x^m Z(G), \quad hZ(G) = x^n Z(G)$

$\Rightarrow (x^m)^{-1} g \in Z(G), \quad (x^n)^{-1} h \in Z(G)$

$\Rightarrow$ Entonces $x^{-m} g = z_1, \quad x^{-n} h = z_2$ para $z_1, z_2 \in Z(G)$

$\Rightarrow g = x^m z_1, \quad h = x^n z_2$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
gh &= (x^m z_1)(x^n z_2) \\
&= (x^m z_1)(z_2 x^n) && \leftarrow \text{porque } z_2 \in Z(G) \text{ conmuta con todo elemento de } G \\
&= x^m (z_1 z_2) x^n && \leftarrow \text{porque } z_1 z_2 \in Z(G) \\
&= (z_1 z_2) x^m x^n \\
&= z_1 z_2 x^{m+n} && \leftarrow \text{porque } z_1 z_2 \in Z(G) \\
&= z_2 x^{m+n} z_1 \\
&= z_2 (x^n x^m) z_1 \\
&= (z_2 x^n)(x^m z_1) && \leftarrow \text{porque } z_1, z_2 \in Z(G) \\
&= (x^n z_2)(x^m z_1) \\
&= hg
\end{aligned}
$$

$\therefore gh = hg \quad \forall h, g \in G$ $\blacksquare$