Ecuaciones Diferenciales I : Tarea 3 Tomás Ricardo Basik Álvarez

1. a) Hallar la solución exacta a : $y' = 2x(1+y)$, $y(0)=0$

$\to \frac{dy}{dx} = 2x(1+y) \to \int \frac{1}{1+y}\frac{dy}{dx}\,dx = \int 2x\,dx \xrightarrow{TCV} \int \frac{1}{1+y}\,dy = \int 2x\,dx \to \ln|1+y| = x^2 + c$

$\to 1+y = c_1 e^{x^2} \longrightarrow y = c_1 e^{x^2} - 1$

Pero queremos que $y(0)=0 \to 0 = c_1 - 1 \to c_1 = 1$

$\therefore \underline{y = e^{x^2} - 1}$

b) Calcula los primeros cuatro iterados de Picard. ¿Cómo se comparan con la solución exacta?

$y_0 = 0 \qquad f(x,y) = 2x(1+y)$

- $y_1 = y_0 + \int_0^x f(t,y_0)\,dt = 0 + \int_0^x 2t(1+0)\,dt = x^2 \qquad \therefore y_1 = x^2$
- $y_2 = y_0 + \int_0^x f(t,y_1)\,dt = 0 + \int_0^x 2t(1+t^2)\,dt = \int_0^x 2t + 2t^3\,dt = x^2 + \frac{x^4}{4} \qquad \therefore y_2 = x^2 + \frac{x^4}{4}$
- $y_3 = y_0 + \int_0^x f(t,y_2)\,dt = 0 + \int_0^x 2t(1+t^2+\frac{t^4}{4})\,dt = x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} \qquad \therefore y_3 = x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}$
- $y_4 = y_0 + \int_0^x f(t,y_3)\,dt = 0 + \int_0^x 2t(t^2 + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6})\,dt = x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} \qquad \therefore \underline{y_4 = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}}$

- Pero, la serie de Taylor de e^{x^2} es: $e^{x^2} = 1 + \frac{(x^2)}{1} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \dots$

$\therefore e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots \qquad \therefore y_4$ son los primeros 4 términos de la serie de $e^{x^2} - 1$

c) Ahora aplique el método de Euler $y(x_n) = y(x_{n-1}) + f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))\Delta x$ para $x_n = n\Delta x$ con $n = 1, 2, 3, 4$ y $\Delta x = \{0.2, 0.1, 0.05\}$

∘) $\Delta x = 0.2$

- $y(0) = 0$
- $y(x_1) = y(x_0) + f(x_0, y(x_0))\Delta x \Rightarrow y(0.2) = y(0) + f(0, y(0))(0.2) = 0 + 2(0)(1+0)(0.2) = 0$
- $y(0.4) = y(0.2) + f(0.2, y(0.2))\Delta x = 0 + 2(0.2)(1+0)(0.2) = 0.08$
- $y(0.6) = y(0.4) + f(0.4, y(0.4))\Delta x = 0.08 + f(0.4, 0.08)(0.2) = 0.08 + 2(0.4)(1+0.08)(0.2) = 0.2528$
- $y(0.8) = y(0.6) + f(0.6, y(0.6))\Delta x = 0.2528 + 2(0.6)(1+0.2528)(0.2) = 0.55347$

$\therefore y(0.2) = 0$
$\therefore y(0.4) = 0.08$
$\therefore y(0.6) = 0.2528$
$\therefore y(0.8) = 0.5535$

Comparamos con la solución exacta, que dice $y(0.8) = e^{0.8^2} - 1 = 0.8965$

∘∘) $\Delta x = 0.1$

- $y(0) = 0$
- $y(0.1) = y(0) + f(0, y(0))\Delta x = 0 + 2(0)(0+1)(0.1) = 0$
- $y(0.2) = y(0.1) + f(0.1, y(0.1))\Delta x = 0 + 2(0.1)(1+0)(0.1) = 0.02$
- $y(0.3) = y(0.2) + f(0.2, y(0.2))\Delta x = 0.02 + 2(0.2)(1+0.02)(0.1) = 0.0608$
- $y(0.4) = y(0.3) + f(0.3, y(0.3))\Delta x = 0.0608 + 2(0.3)(1+0.0608)(0.1) = 0.1244$

$\therefore y(0.1) = 0$
$\therefore y(0.2) = 0.02$
$\therefore y(0.3) = 0.0608$
$\therefore y(0.4) = 0.1244$

Comparamos con la solución exacta, que dice: $y(0.4) = e^{0.4^2} + 1 = 0.1735$

∘∘∘) $\Delta x = 0.05$

- $y(0) = 0$
- $y(0.05) = y(0) + f(0, y(0))\Delta x = 0 + 2(0)(0+1)(0.05) = 0$
- $y(0.1) = y(0.05) + f(0.05, y(0.05))\Delta x = 0 + 2(0.05)(1+0)(0.05) = 0.005$
- $y(0.15) = y(0.1) + f(0.1, y(0.1))\Delta x = 0.005 + 2(0.1)(1+0.005)(0.05) = 0.015$
- $y(0.2) = y(0.15) + f(0.15, y(0.15))\Delta x = 0.015 + 2(0.15)(1+0.015)(0.05) = 0.0302$

$\therefore y(0.05) = 0$
$\therefore y(0.1) = 0.005$
$\therefore y(0.15) = 0.015$
$\therefore y(0.2) = 0.0302$

Comparamos con la solución exacta: $y(0.2) = e^{0.2^2} - 1 = 0.0408$

2) ¿Para qué puntos (x_0, y_0) implica el teorema de existencia y unicidad que el problema de valores iniciales $y' = y|y|$ $\quad y(x_0) = y_0$ tiene una solución única sobre algún intervalo $|x - x_0| \le h$

Según vimos en clase, para que el problema de valores iniciales tenga solución, es necesario que $f(x,y)$ sea continua en (x_0, y_0) y $\frac{\partial f}{\partial y}$ también lo sea.

Caso 1) $y_0 > 0$

- Si $y_0 > 0$ entonces para puntos (x,y) cercanos a (x_0, y_0), la y toma valores estrictamente positivos. Por lo que la ecuación diferencial se puede ver como

$$y' = y(y) \rightarrow y' = y^2$$

Y como $f(x,y) = y^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ son continuas $\Rightarrow$ la ecuación diferencial tiene solución.

Caso 2) $y_0 < 0$

Si $y_0 < 0$, entonces para puntos (x,y) en una vecindad de (x_0, y_0) la y tiene valores negativos. Por lo que la ecuación diferencial se ve como:

$$y' = y(-y) \rightarrow y' = -y^2$$

Y como $f(x,y) = -y^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ son continuas $\Rightarrow$ la ecuación diferencial tiene solución.

Caso 3) $y_0 = 0$

- $f(y)$ es continua en $y_0 = 0$, ya que de hecho es continua en todos los puntos, porque y, $|y|$ son continuas.

Pero f ni siquiera es derivable en $y_0 = 0$ porque $|y|$ no es derivable en $y = 0$, mucho menos va a tener derivada continua en $y_0 = 0$

$\therefore$ La ecuación no cumple las hipótesis del Teorema A

3 Siguiendo la demostración del teorema de Picard, pruebe el teorema de existencia y unicidad para ec. diferenciales de 2° grado

Teorema A: sea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \cdots (1)$ con P, Q, R funciones continuas en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ si $x_0 \in (a,b)$ y y_0, y_0' son arbitrarios $\Rightarrow$ (1) tiene una y sólo una solución sobre el intervalo, con $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$

Escribimos (1) como $\frac{d\bar{\omega}}{dx} = \bar{F}(x,\bar{\omega})$, $\bar{\omega}(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix} \cdots (2)$ donde $\bar{\omega}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$ $z(x) = \frac{dy}{dx}$

$$\bar{F}(x,\bar{\omega}) = \begin{pmatrix} z \\ -P(x)z - Q(x)y + R(x) \end{pmatrix}$$

a) Muestre que una solución $\bar{\omega}(x)$ de la ecuación: $\bar{\omega}(x) = \bar{\omega}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \bar{\omega}(t))\, dt$ es solución de (2).

si $\bar{\omega}(x)$ es solución de la ecuación integral $\rightarrow$ $\bar{\omega}(x) = \bar{\omega}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t; \bar{\omega}(t))\, dt$

$\bar{F}(x,\bar{\omega})$ es continua, porque sus componentes son continuas ya que P, Q, R lo son.

$\Rightarrow$ por el Teorema Fundamental del cálculo, $\bar{\omega}$ es diferenciable y $\frac{d\bar{\omega}}{dx} = \bar{F}(x, \bar{\omega}(x))$

Pero por la definición de $\bar{\omega}$ y $\bar{F}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dz}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -P(x)z - Q(x)y + R(x) \end{pmatrix}$

$\rightarrow \frac{dz}{dx} = -P(x)z - Q(x)y + R(x)$ (pero $\frac{dy}{dx} = z$)

$\rightarrow y'' = -P(x)y - Q(x)y + R(x)$ $\therefore$ y es solución de 1)

b) Prueba que $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es Lipschitz.

- Como $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en el compacto $[a,b] \Rightarrow$ Son acotadas, $\exists$ $K_1, K_2 > 0$ con
  $|P(x)| < K_1 \quad |Q(x)| < K_2 \quad \forall x \in [a,b]$
  sea $K = \max\{K_1, K_2\}$

consideremos: $|z_1 - z_2|$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(z_1-z_2)^2} \leq \sqrt{(z_1-z_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\|$$

$\therefore |z_1 - z_2| \leq \|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\| \quad \cdots (3)$

Por otro lado:

$$|-P(x)(z_1-z_2) - Q(x)(y_1-y_2)| \leq |P(x)||z_1-z_2| + |Q(x)||y_1-y_2|$$ .... Desigualdad del triángulo y propiedades del val. abs.

$$\leq K|z_1-z_2| + K|y_1-y_2|$$ .... Porque $P(x)$ y $Q(x)$ son acotadas.

$$= K(|z_1-z_2|, |y_1-y_2|) \cdot (1,1)$$ (lo vemos como un producto punto)

$$\leq K\|(z_1-z_2, y_1-y_2)\| \|(1,1)\|$$ ... por cauchy-Shwartz. $(u_1,u_2)\cdot(v_1,v_2) \leq \|(u_1,u_2)\|\|(v_1,v_2)\|$

$$= \sqrt{2}\, K \|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\|$$

$\therefore |-P(x)(z_1-z_2) - Q(x)(y_1-y_2)| \leq \sqrt{2}K\|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\| \quad \ldots (4)$

Ahora bien:

$$\|\bar{F}(x,\bar{\omega}_1) - \bar{F}(x,\bar{\omega}_2)\| = \left\| \begin{pmatrix} z_1 - z_2 \\ -P(x)(z_1-z_2) - Q(x)(y_1-y_2) \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left((z_1-z_2)^2 + (-P(x)(z_1-z_2) - Q(x)(y_1-y_2))^2\right)^{1/2} \leq |z_1-z_2| + |-P(x)(z_1-z_2) - Q(x)(y_1-y_2)|$$

(por (3) y (4))

$$\leq \|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\| + \sqrt{2}K\|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\|$$

$$= (1+\sqrt{2}K)\|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\|$$

hacemos $L = 1 + \sqrt{2}K > 0$

$$\Rightarrow \|\bar{F}(x,\bar{\omega}_1) - \bar{F}(x,\bar{\omega}_2)\| \leq L\|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\|$$

c) Muestre que los iterados de Picard,

$\bar{\omega}_0(x) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$ $\quad \bar{\omega}_n(x) = \omega_0 + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \bar{\omega}_{n-1}(t))\, dt.$ convergen

$$\|\bar{\omega}_n(x)\| = \|\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1(x) - \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_2(x) - \bar{\omega}_1(x) + \dots + \bar{\omega}_n(x) - \bar{\omega}_{n-1}(x)\|$$
$$\leq \|\bar{\omega}_0\| + \|\bar{\omega}_1(x) - \omega_0\| + \dots + \|\bar{\omega}_n(x) - \bar{\omega}_{n-1}(x)\|$$

Sea $M_0 = \|\bar{\omega}_0\|$ (que es un número fijo) y $M_1 = \text{máx}\{\|\bar{\omega}_1(x)\| \mid x \in [a,b]\}$ ← que existe porque ω_1 es continua (por el Teorema fundamental del cálculo $F(t, \omega_0)$ es continua $\Rightarrow \int_{x_0}^{x} F(t, \omega_0)\, dt$ es continua)

y sea $M = M_0 + M_1$

$$\Rightarrow \|\bar{\omega}_1(x) - \bar{\omega}_0\| \leq \|\bar{\omega}_1(x)\| + \|\bar{\omega}_0\| \leq M_0 + M_1 = M$$

$\therefore \|\bar{\omega}_1(x) - \bar{\omega}_0\| \leq M \quad \dots (5)$

Ahora bien,

$$\|\bar{\omega}_2(x) - \bar{\omega}_1(x)\| = \left\|\bar{\omega}_0 + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \bar{\omega}_1(t))\, dt - \left(\bar{\omega}_0 + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \bar{\omega}_0)\, dt\right)\right\|$$
$$= \left\|\int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \bar{\omega}_1(t)) - \bar{F}(t, \bar{\omega}_0)\, dt\right\|$$
$$\leq \int_{x_0}^{x} \|\bar{F}(t, \bar{\omega}_1(t)) - \bar{F}(t, \bar{\omega}_0)\|\, dt$$
$$\leq \int_{x_0}^{x} L\, \|\bar{\omega}_1(t) - \bar{\omega}_2(t)\|\, dt \quad \text{(porque } \bar{F} \text{ es Lipschitz en } \bar{\omega})$$

por 5 $\rightarrow \leq \int_{x_0}^{x} L M\, dt \leq L M |x - x_0|$

$\therefore \|\bar{\omega}_2(x) - \bar{\omega}_1(x)\| \leq L M |x - x_0| \quad \dots (6)$

$$\rightarrow \|\bar{\omega}_3(x) - \bar{\omega}_2(x)\| = \left\|\int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \bar{\omega}_2(t)) - \bar{F}(t, \bar{\omega}_1(t))\, dt\right\|$$
$$\leq \int_{x_0}^{x} \|\bar{F}(t, \bar{\omega}_2(t)) - \bar{F}(t, \bar{\omega}_1(t))\|\, dt \quad \text{(porque } \bar{F} \text{ es Lipschitz)}$$
$$\leq \int_{x_0}^{x} L\|\bar{\omega}_2(t) - \omega_1(t)\|\, dt$$

Por 6 $\rightarrow \leq \int_{x_0}^{x} L(LM)|x - x_0|\, dt \leq L^2 M \frac{|x - x_0|^2}{2}$

$\therefore \|\bar{\omega}_3(x) - \bar{\omega}_2(x)\| \leq L^2 M \frac{|x - x_0|^2}{2}$

y en general:

$$\|\bar{\omega}_n(x) - \bar{\omega}_{n-1}(x)\| \leq L^{n-1} M \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} \leq L^{n-1} M \frac{|b-a|^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\therefore \|\omega_n(x)\| \leq \|\bar{\omega}_0\| + \|\bar{\omega}_1(x) - \bar{\omega}_2(x)\| + \dots + \|\bar{\omega}_n(x) - \bar{\omega}_{n-1}(x)\|$$
$$\leq M + M + LM|b-a| + L^2 M \frac{|b-a|^2}{2} + \dots + L^{n-1} M \frac{|b-a|^{n-1}}{(n-1)!}$$

Que cuando $n \to \infty$, la serie converge lo que podemos ver aplicando la prueba de la razón

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{L^{(n+1)-1} M |b-a|^{(n+1)-1}}{(n+1-1)!}}{\dfrac{L^{n-1} M |b-a|^{n-1}}{(n-1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{L|b-a|}{n}\right| = 0 < 1$$

$\therefore$ La serie $\bar{\omega}_n(x) = \bar{\omega}_0 + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \bar{\omega}_{n-1}(t))\, dt$ converge

d) Mostrar que $\tilde{\omega}(x)$ a la que convergen los iterados.
$\tilde{\omega}(x) = \bar{\omega}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_n(x) - \omega_{k-1}(x))$ es solución de la ecuación integral.

Por demostrar: $\tilde{\omega}(x) = \omega_0 + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \tilde{\omega}(t))\, dt$

Ya que por los iterados:
$\omega_n(x) = \omega_0 + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \omega_{n-1}(t))\, dt$
$\rightarrow \omega_0 - \omega_n(x) + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \omega_{n-1}(t))\, dt = 0$

considera: $\tilde{\omega}(x) - \omega_0 - \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \tilde{\omega}(t))\, dt$

$= \tilde{\omega}(x) - \omega_0 - \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \tilde{\omega}(t))\, dt + \omega_0 - \omega_n(x) + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \omega_{n-1}(t))\, dt$

$= \tilde{\omega}(x) - \omega_n(x) + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \omega_{n-1}(t)) - \bar{F}(t, \tilde{\omega}(t))\, dt$

$\therefore \| \tilde{\omega}(x) - \omega_0 - \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \tilde{\omega}(t))\, dt \| = \| \tilde{\omega}(x) - \omega_n(x) + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \omega_{n-1}(t)) - \bar{F}(t, \tilde{\omega}(t))\, dt \|$

$\leq \| \tilde{\omega}(x) - \omega_n(x) \| + \| \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \omega_{n-1}(t)) - \bar{F}(t, \tilde{\omega}(t))\, dt \|$

$\leq \| \tilde{\omega}(x) - \omega_n(x) \| + \int_{x_0}^{x} \| \bar{F}(t, \omega_{n-1}(t)) - \bar{F}(t, \tilde{\omega}(t)) \|\, dt$ ← Porque F es Lipschitz.

$\leq \| \tilde{\omega}(x) - \omega_n(x) \| + L \int_{x_0}^{x} \| \tilde{\omega}(x) - \omega_{n-1}(x) \|\, dt$

Pero para n lo suficientemente grande, $\| \tilde{\omega}(x) - \omega_n(x) \|$ y $\| \tilde{\omega}(x) - \omega_{n-1}(x) \|$ se pueden hacer tan chiquitos como se quiera, ya que $\tilde{\omega}(x)$ es la función a la que convergen
$\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x), \ldots$

$\therefore \forall \varepsilon > 0 \ \exists n > 0$ tal que:

$\therefore \| \tilde{\omega}(x) - \omega_0 - \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \tilde{\omega}(t))\, dt \| < \varepsilon$

$\rightarrow \| \tilde{\omega}(x) - \omega_0 - \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \tilde{\omega}(t))\, dt \| = 0$ $\rightarrow$ $\tilde{\omega}(x) = \omega_0 + \int_{x_0}^{x_0} \bar{F}(t, \tilde{\omega}(t))\, dt$

e) Pruebe que $\tilde{\omega}(x)$ es única:

Sea $\hat{\omega}(x)$ otra solución, es decir: $\hat{\omega}(x) = \omega_0 + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \hat{\omega}(t))\, dt$

Y sea $A = \max\{\|\hat{\omega}(x) - \omega_0\| \mid x \in [a,b]\}$

$\Rightarrow$ ·) $\|\hat{\omega}(x) - \omega_1(x)\| = \left\| \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \hat{\omega}(t)) - \bar{F}(t, \omega_0)\, dt \right\| \leq \int_{x_0}^{x} \|\bar{F}(t, \hat{\omega}(t)) - \bar{F}(t, \omega_0)\|\, dt$

$\leq L \int_{x_0}^{x} \|\hat{\omega}(t) - \omega_0\|\, dt$ ... $\bar{F}$ es Lipschitz

$\leq L \int_{x_0}^{x} A\, dt = LA(x - x_0)$

··) $\|\hat{\omega}(x) - \omega_2(x)\| = \left\| \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \hat{\omega}(t)) - \bar{F}(t, \omega_1(t))\, dt \right\| \leq \int_{x_0}^{x} \|\bar{F}(t, \hat{\omega}(t)) - \bar{F}(t, \omega_1(t))\|\, dt$

$\leq L \int_{x_0}^{x} \|\hat{\omega}(t) - \omega_1(t)\|\, dt \leq L \int_{x_0}^{x} (LA(x - x_0))\, dt = L^2 A \frac{(x - x_0)^2}{2}$

Y en general: $\|\hat{\omega}(x) - \omega_n(x)\| \leq L^n A \frac{(x - x_0)^n}{n!}$

$\therefore \|\hat{\omega}(x) - \omega_n(x)\| \leq L^n A \frac{(x - x_0)^n}{n!} \leq L^n A \frac{(b-a)^n}{n!}$

pero $\frac{L^n A (b-a)^n}{n!} \to 0$ conforme $n \to \infty$ (porque el factorial crece más rápido que el exponencial)

$\therefore$ cuando $n \to \infty \Rightarrow \|\hat{\omega}(x) - \omega_n(x)\| \to 0$

Entonces $\hat{\omega}(x)$ es la función a la que tiende la secuencia $\omega_0, \omega_1(x), \omega_2(x), \ldots$

Pero $\tilde{\omega}(x)$ también es la función a la que tiende la secuencia $\omega_0, \omega_1(x), \ldots$

$\therefore \hat{\omega}(x) = \tilde{\omega}(x)$ ya que la secuencia sólo puede tender a una única función.

4) Encuentre y grafique las soluciones de las siguientes E. DD. de 2° orden.

a) $y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$

Proponemos como solución $\quad y = e^{\alpha t}$

$\rightarrow (e^{\alpha t})'' + 5(e^{\alpha t})' + 6e^{\alpha t} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha^2 e^{\alpha t} + 5\alpha e^{\alpha t} + 6e^{\alpha t} = 0$

$\rightarrow \underline{\alpha^2 + 5\alpha + 6 = 0} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = -3 \end{cases}$ $\quad \therefore$ Las soluciones son e^{-2t}, e^{-3t}

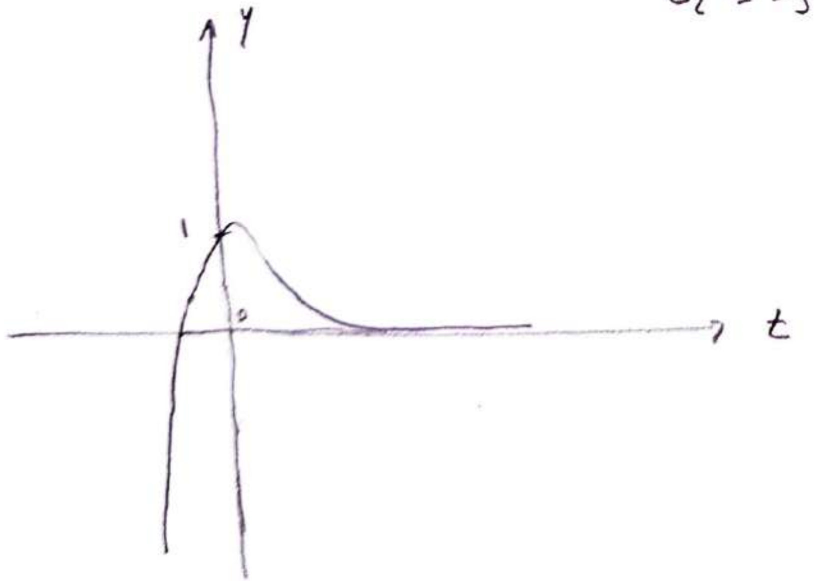
Como son soluciones L.i $\Rightarrow$ La solución general es $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$

$\rightarrow y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t}$

Pero $y(0) = 1$ $\qquad C_1 + C_2 = 1$

$y'(0) = 1 \quad \rightarrow \quad -2C_1 - 3C_2 = 1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 4,\ C_2 = -3$

$\therefore$ La solución es $\underline{y = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}}$



b) $y''+2y'+10y=0 \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=1$

Proponemos $y=e^{\alpha t} \longrightarrow (e^{\alpha t})''+2(e^{\alpha t})'+10e^{\alpha t}=0 \rightarrow \alpha^2 e^{\alpha t}+2\alpha e^{\alpha t}+10e^{\alpha t}=0$

$\rightarrow \alpha^2+2\alpha+10=0 \quad \begin{cases} \alpha_1 = -1-3i \\ \alpha_2 = -1+3i \end{cases}$

$\therefore$ Las soluciones son: $e^{(-1-3i)t} = e^{-t}(\cos(-3t)+i\,\text{sen}(-3t)) \quad \cdots (1)$

$e^{(-1+3i)t} = e^{-t}(\cos(3t)+i\,\text{sen}(3t)) \quad \cdots (2)$

Si sumamos 1) y 2) y dividimos entre 2, obtenemos la solución real: $\underline{e^{-t}\cos(3t)}$

Si hacemos 1) − 2) y dividimos entre −2, obtenemos otra solución real: $\underline{e^{-t}\text{sen}(3t)}$

$\therefore$ La solución general es $y=e^{-t}(c_1\cos(3t)+c_2\,\text{sen}(3t))$

$\rightarrow y' = c_1(-e^{-t}\cos(3t)-3e^{-t}\text{sen}(3t)) + c_2(-e^{-t}\text{sen}(3t)+3e^{-t}\cos(3t))$

Pero $y(0)=1 \qquad c_1 = 1$

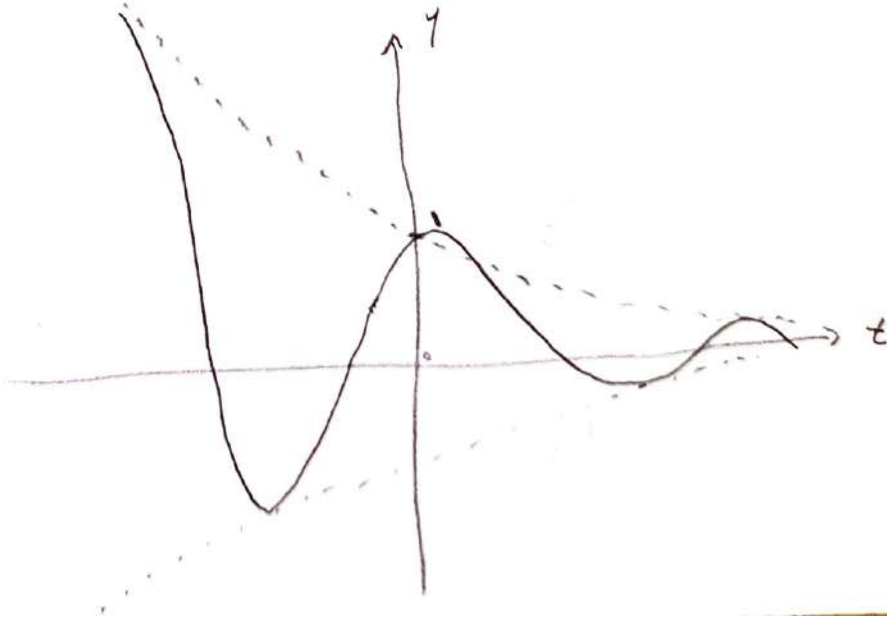
$y'(0)=1 \rightarrow c_1(-1)+c_2(3)=1$

$\rightarrow c_1 = 1$

$c_2 = 2/3$

$\therefore$ Solución:

$$\underline{y = e^{-t}\left(\cos(3t)+\tfrac{2}{3}\,\text{sen}(3t)\right)}$$



c) $y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

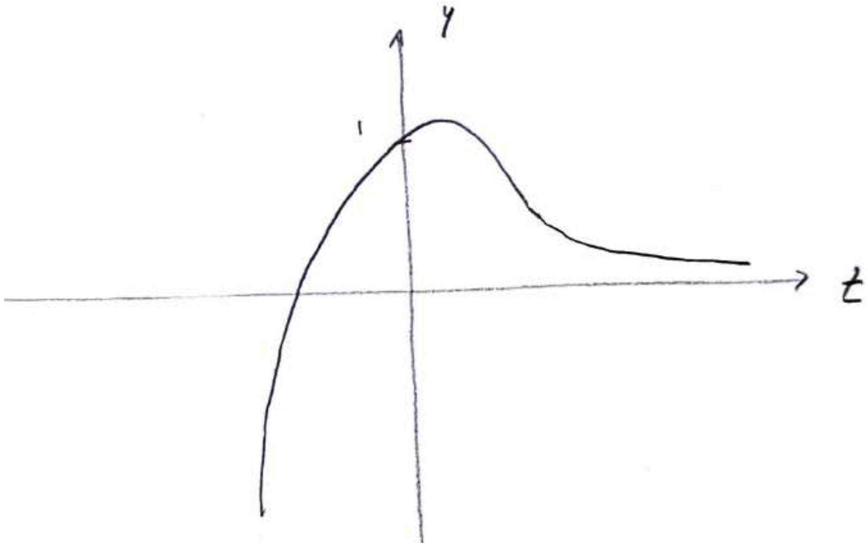
Proponemos $y = e^{\alpha t} \rightarrow (e^{\alpha t})'' + 4(e^{\alpha t})' + 4(e^{\alpha t}) = 0 \rightarrow \alpha^2 e^{\alpha t} + 4\alpha e^{\alpha t} + 4 = 0$

$\rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0 \rightarrow \underline{\alpha = -2}$

Como vimos en clase, si el polinomio tiene dos raíces iguales $\Rightarrow$ Las soluciones son $e^{\alpha t}$, $t e^{\alpha t}$

$\therefore$ Solución general $y = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$

$\rightarrow y' = -2c_1 e^{-2t} - 2c_2 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t}$



Pero: $\begin{matrix} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ -2c_1 + c_2 = 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{matrix}$

$\therefore$ Solución general: $\underline{y = e^{-2t} + 3t e^{-2t}}$

5. El voltaje $v(t)$ en un circuito RCL tiene la EDO:

$$Lv'' + Rv' + \frac{1}{C}v = \frac{1}{C}V_s(t)$$

a) solución si $L = 1.5$ $R = 2000$ $C = 5\times10^{-7}$ $V_s = 2e^{-t/2}$

- La ecuación homogénea es:

$$Lv'' + Rv' + \frac{1}{C}v = 0$$

Proponemos como solución $v = e^{\alpha t}$ $\rightarrow$ $L(e^{\alpha t})'' + R(e^{\alpha t})' + \frac{1}{C}e^{\alpha t} = 0$

$\rightarrow$ $\alpha^2 L e^{\alpha t} + \alpha R e^{\alpha t} + \frac{1}{C}e^{\alpha t} = 0$ $\longrightarrow$ $L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0$

La solución a este polinomio es:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} \xrightarrow{\text{Sustituimos}} \frac{-2000 \pm \sqrt{2000^2 - \frac{4(1.5)}{5\times10^{-7}}}}{2\cdot1.5} = -\frac{2000}{3} \pm 942.81\,i$$

como tenemos dos soluciones complejas conjugadas, la solución general es:

$$e^{at}\left(K_1\cos(bt) + K_2\,\text{sen}(bt)\right) \rightarrow Y_H = e^{-\frac{2000}{3}t}\left(K_1\cos(942.81t) + K_2\,\text{sen}(942.81t)\right)$$

- Solución particular:

$$Lv'' + Rv' + \frac{1}{C} v = \frac{2}{C} e^{-t/2}$$

Proponemos $v = a e^{-t/2}$ $\rightarrow$ $L(ae^{-t/2})'' + R(ae^{-t/2})' + \frac{1}{C} a e^{-t/2} = \frac{2}{C} e^{-t/2}$

$$\rightarrow \frac{La}{4} e^{-t/2} - \frac{Ra}{2} e^{-t/2} + \frac{1}{C} a e^{-t/2} = \frac{2}{C} e^{-t/2} \rightarrow \frac{La}{4} - \frac{Ra}{2} + \frac{a}{C} = \frac{2}{C}$$

$$\rightarrow a = \frac{2}{\left(\frac{L}{4} - \frac{R}{2} + \frac{1}{C}\right) C}$$

$\therefore$ La solución particular es: $y_p = \dfrac{2}{\left(\frac{L}{4} - \frac{R}{2} + \frac{1}{C}\right) C} e^{-t/2}$

sustituimos: $\underline{y_p = 2 e^{-t/2}}$

$L = 1.5$
$R = 200\Omega$
$C = 5 \cdot 10^{-7}$

$\therefore$ La solución general completa es: $y = y_H + y_p$

$$\rightarrow y = e^{-\frac{2000}{3} t} \left[K_1 \cos(942.81 t) + K_2 \operatorname{sen}(942.81 t) \right] + 2 e^{-t/2}$$

b) ¿ Si se remueve la resistencia $(R=0)$?

$\rightarrow \ L v'' + \frac{1}{C} v = \frac{2}{C} e^{-t/2}$

Que es la ec. de un oscilado armónico

Homogénea: $L v'' + \frac{1}{C} v = 0 \ \rightarrow \ v'' = -\frac{1}{LC} v$

$\rightarrow \ v_1 = C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$

$v_2 = C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$

$\rightarrow \ v_H = C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$

Particular: $L v'' + \frac{1}{C} v = \frac{2}{C} e^{-t/2}$

proponemos $v = K e^{-t/2}$ $\rightarrow \ L\left(K e^{-t/2}\right)'' + \frac{1}{C}\left(K e^{-t/2}\right) = \frac{2}{C} e^{-t/2}$

$\rightarrow \ L\left(\frac{K}{4} e^{-t/2}\right) + \frac{K}{C}\left(e^{-t/2}\right) = \frac{2}{C} e^{-t/2}$

$\rightarrow \ \frac{KL}{4} + \frac{K}{C} = \frac{2}{C} e^{-t/2} \ \rightarrow \ K = \frac{2}{C\left(\frac{L}{4} + \frac{1}{C}\right)}$

$\therefore \ v_p = \frac{2}{C\left(\frac{L}{4} + \frac{1}{C}\right)} e^{-t/2}$

$\therefore$ Solución general: $\underline{v(t) = C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) + C_2 \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) + \frac{2}{C\left(\frac{L}{4} + \frac{1}{C}\right)} e^{-t/2}}$ $\#$

Sustituyendo: $\underline{v(t) = C_1 \cos(1154.7\, t) + C_2 \operatorname{Sen}(1154.7\, t) + 2 e^{-t/2}}$ $\#$

c) ¿Y si $L=0$?

$\rightarrow \quad Rv' + \frac{1}{C}v = \frac{2}{C}e^{-t/2}$

Que es una ecuación lineal de primer orden.

$\rightarrow \quad v' + \frac{1}{RC}v = \frac{2}{RC}e^{-t/2}$

Proponemos el factor integrante $\mu = e^{\int p(t)\,dt} = e^{\int \frac{1}{RC}dt} = e^{\frac{t}{RC}}$

$\rightarrow \quad e^{\frac{t}{RC}}v' + \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}v = \frac{2}{RC}e^{\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)t}$

$\rightarrow \quad \left(e^{\frac{t}{RC}}v\right)' = \frac{2}{RC}e^{\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)t}$

$\rightarrow \quad e^{\frac{t}{RC}}v = \int \frac{2}{RC}e^{\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)t}\,dt$

$\rightarrow \quad e^{\frac{t}{RC}}v = \frac{2}{RC\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)}e^{\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)t} + K$

$\rightarrow \quad v = Ke^{-\frac{t}{RC}} + \frac{2}{RC\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)}e^{-t/2}$

Sustituyendo: $\quad v = Ke^{-\frac{t}{RC}} + 2 \cdot e^{-t/2}$