Teoría Cuántica de campos I: Tarea 3

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

6 de diciembre de 2021

Problema 1

Calcule nuevamente el propagador en el espacio de momentos de la teoría escalar libre pero ahora median- te integración compleja. ¿Cómo sabe que contorno elegir? ¿Distintos contornos dan resultados diferentes?
Explique la física de cada uno.

Vamos a trabajar con la definición del propagador como la vimos en clase:

$$\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle = \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle\ \theta(y^0 - x^0) + \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle\ \theta(x^0 - y^0) \qquad (1)$$

Ahora utilizamos la expresión para el campo escalar ϕ como la hemos usado en clase:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left[a_p e^{-ip\cdot x} + a_p^\dagger e^{ip\cdot x}\right]$$

Y similarmente con $\phi(y)$ (pero con otra variable de integración para no confundirlas):

$$\phi(y) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_q}}\left[a_q e^{-iq\cdot y} + a_q^\dagger e^{iq\cdot y}\right]$$

Ahora calculamos el término $\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle$ de la expresión (1):

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle &= \langle 0| \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_q}}\left[a_q e^{-iq\cdot y} + a_q^\dagger e^{iq\cdot y}\right] \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left[a_p e^{-ip\cdot x} + a_p^\dagger e^{ip\cdot x}\right] |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{4E_pE_q}} \langle 0| \left[a_q e^{-iq\cdot y} + a_q^\dagger e^{iq\cdot y}\right]\left[a_p e^{-ip\cdot x} + a_p^\dagger e^{ip\cdot x}\right] |0\rangle\end{aligned}$$

Al desarrollar el producto de los corchetes obtenemos cuatro términos distintos. Sin embargo, si tomamos en cuenta que $a_p|0\rangle = 0$ y que $\langle 0|a_q^\dagger = 0$, vemos que la mayoría de los términos resultantes son 0, por lo que nos quedamos solamente con:

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_pE_q}} \langle 0|a_q a_p^\dagger e^{-iq\cdot y + ip\cdot x}|0\rangle$$

Conmutamos ahora los operadores

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_pE_q}} \langle 0|(a_p^\dagger a_q + [a_q, a_p^\dagger])e^{-iq\cdot y + ip\cdot x}|0\rangle$$

usamos la expresión del conmutador

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_pE_q}} \langle 0|(a_p^\dagger a_q + (2\pi)^3\delta(p-q))e^{-iq\cdot y + ip\cdot x}|0\rangle$$

El término $\langle 0|a_p^\dagger a_q|0\rangle$ es 0 porque $a_q|0\rangle = 0$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_pE_q}} \langle 0|(2\pi)^3\delta(p-q)e^{-iq\cdot y + ip\cdot x}|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_pE_q}} (2\pi)^3\delta(p-q)e^{-iq\cdot y + ip\cdot x}\langle 0|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_pE_q}} (2\pi)^3\delta(p-q)e^{-iq\cdot y + ip\cdot x}$$

Realizamos la integral respecto a q, que usando la delta de dirac, consiste en cambiar p por q y listo

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_p^2}} e^{-ip\cdot y + ip\cdot x}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(y-x)}$$

Para el término $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ se tiene lo mismo pero con x intercambiado por y, por lo que tenemos:

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

Reemplazamos estos dos resultados en la expresión (1):

$$\begin{aligned}
\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(y-x)}\ \theta(y^0 - x^0) + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(x-y)}\ \theta(x^0 - y^0) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p(y^0-x^0) - i\vec{p}\cdot(\vec{y}-\vec{x})}\ \theta(y^0 - x^0) + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p(x^0-y^0) - i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\ \theta(x^0 - y^0)
\end{aligned}$$

En la segunda integral cambiamos de variable p por $-p$

$$\begin{aligned}
\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p(y^0-x^0) - i\vec{p}\cdot(\vec{y}-\vec{x})}\ \theta(y^0 - x^0) + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p(x^0-y^0) - i\vec{p}\cdot(\vec{y}-\vec{x})}\ \theta(x^0 - y^0) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left[\frac{e^{-iE_p(y^0-x^0)}}{2E_p}\theta(y^0 - x^0) + \frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p}\theta(x^0 - y^0) \right] \qquad (2)
\end{aligned}$$

Ahora intentaremos reescribir lo que está entre corchetes como una integral de contorno. Para hacerlo, vamos a considerar la función $\dfrac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2}$ y vamos a ver que al integrarla respecto a p^0 (una integral de contorno) el resultado será lo que está entre corchetes en (2).

Primero reescribimos la función que estamos considerando como sigue:

$$\frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2} = \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2-(E_p)^2} = \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_p)(p^0+E_p)}$$

Notamos que esta función tiene dos polos en $p^0 = -E_p$ y en $p^0 = E_p$. Para realizar la integral de contorno, necesitamos antes saber cuál es el residuo de cada uno de estos polos.

Recordamos que si tenemos una función compleja de la forma $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{z-z_0}$ (con $\phi(z)$ analítica en z_0), entonces el residuo del polo $z = z_0$ es de $Res_{z=z_0} = \phi(z_0)$. Con ello podemos ya calcular los residuos de nuestra función:

- $p^0 = -E_p$

  Para este caso, vemos que la función $\dfrac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_p)(p^0+E_p)}$ se puede ver como $\dfrac{\phi(p^0)}{p^0+E_p}$ con $\phi(p^0) = \dfrac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{p^0-E_p}$, por lo que con lo dicho antes sobre cómo calcular residuos, tenemos que:

  $$Res_{-E_p} = \phi(-E_p) = \frac{ie^{iE_p(x^0-y^0)}}{-E_p-E_p} = -\frac{ie^{iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p}$$

- $p^0 = E_p$

  Para este caso, vemos que la función $\dfrac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_p)(p^0+E_p)}$ se puede ver como $\dfrac{\phi(p^0)}{p^0-E_p}$ con $\phi(p^0) = \dfrac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{p^0+E_p}$, por lo que con lo dicho antes sobre cómo calcular residuos, tenemos que:

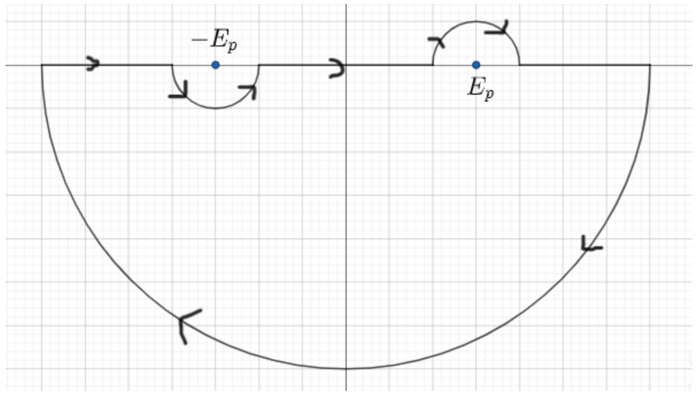
  $$Res_{E_p} = \phi(E_p) = \frac{ie^{-iE_p(x^0-y^0)}}{E_p+E_p} = \frac{ie^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p}$$

Habiendo hecho esto, ahora sí calculamos la integral de la función respecto a p^0. Es decir, calculamos $\int dp^0 \dfrac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_p)(p^0+E_p)}$

Para ello, primero escogemos el contorno sobre el que vamos a integrar la función. Lo que haremos por ahora es escoger un contorno que recorra la recta real y se desvíe levemente en los polos, de tal forma que rodee sólo uno de ellos.

- Si $x^0 > y^0$:

  Para este caso, escogemos el siguiente contorno:



Donde se entiende que la semicircunferencia grande tiene un radio que tiende a infinito, para que el contorno de integración cubra así todos los números reales y sea cerrado. Escogimos cerrar el contorno con un medio círculo hacia abajo porque como $x^0 > y^0$, entonces $e^{-ip^0(x^0-y_0)}$ será una exponencial negativa cuando p^0 es un número con parte imaginaria negativa. Por lo que la función toma valores muy pequeños en la semicircunferencia inferior y entonces la parte de la integral correspondiente al semicírculo grande es insignificante y no hay problemas de convergencia.

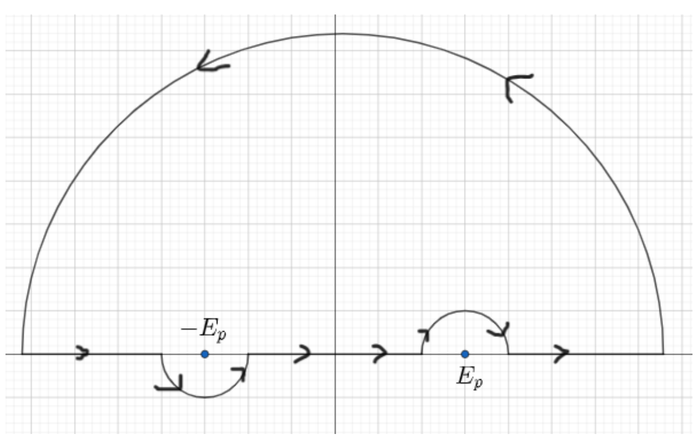
El contorno rodea únicamente el polo $p^0 = E_p$, por lo que el valor de la integral (por el teorema del residuo) es de:

$$\int dp^0 \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_p)(p^0+E_p)} = -2\pi i Res_{E_p} = -2\pi i \frac{ie^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} = \boxed{\frac{2\pi e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p}}$$

Donde agregamos el signo $-$ porque el polo se rodea en sentido horario.

- Si $y^0 > x^0$:

  Para este caso, escogemos el siguiente contorno:



Se escoge cerrar el contorno con una semicircunferencia en el semiplano superior porque de esa forma el exponente de $e^{-ip^0(x^0-y_0)}$ es negativo y así la función no diverge.

El contorno rodea únicamente el polo $p^0 = -E_p$, por lo que el valor de la integral (por el teorema del residuo) es de:

$$\int dp^0 \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_p)(p^0+E_p)} = 2\pi i Res_{-E_p} = 2\pi i \frac{-ie^{iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} = \boxed{\frac{2\pi e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p}}$$

Juntando los dos casos (de $x^0 > y^0$ y de $y^0 > x^0$), tenemos que la integral es igual a:

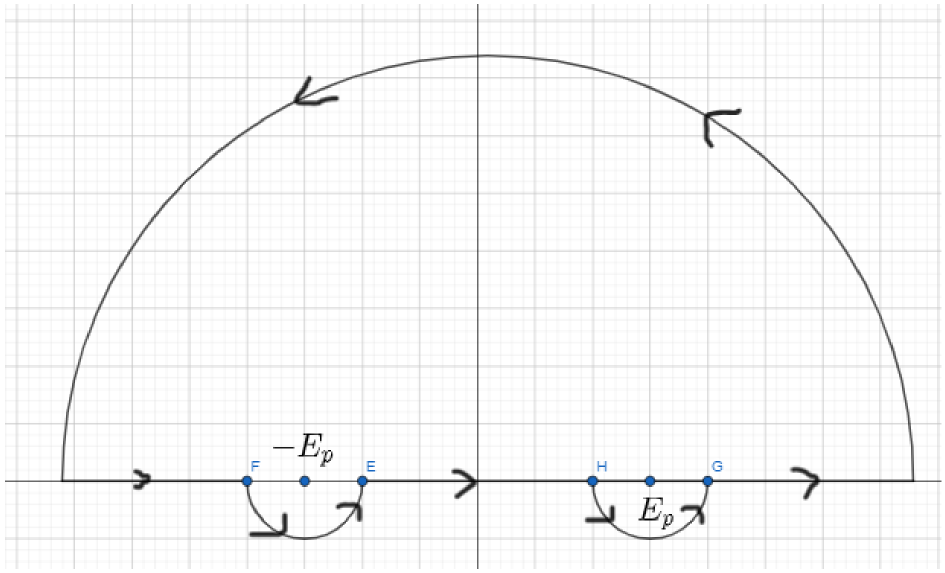
$$\int dp^0 \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2} = \frac{2\pi e^{-iE_p(y^0-x^0)}}{2E_p}\theta(y^0-x^0) + \frac{2\pi e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p}\theta(x^0-y^0)$$

Por lo que vemos que si multiplicamos esto por $\frac{1}{2\pi}$, nos queda lo que está entre corchetes en la expresión (2). Por lo tanto, podemos escribir la expresión (2) como:

$$\begin{aligned}
\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left[\frac{e^{-iE_p(y^0-x^0)}}{2E_p}\theta(y^0-x^0) + \frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p}\theta(x^0-y^0)\right] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left(\frac{1}{2\pi}\int dp^0 \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2}\right) \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}e^{-ip^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2} \\
&= \boxed{i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2-m^2}}
\end{aligned}$$

Donde el producto punto en esta última expresión es el de Minkowsky.

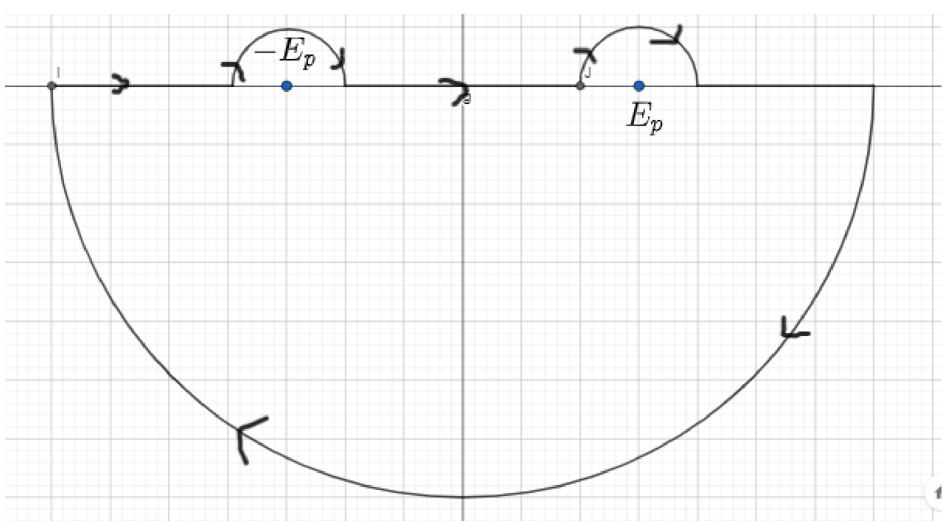
Estudiamos ahora un poco de los contornos de integración. Pudimos haber escogido un contorno como el siguiente para realizar la integral



Este contorno pasa por abajo de los dos polos de la función. Al hacer esto, la integral de contorno vale 0 si $y^0 < x^0$, pues en ese caso la exponencial $e^{-ip^0 \cdot (x^0 - y^0)}$ tiende a infinito en el semiplano superior, por lo que debemos completar el contorno con una semicircunferencia en el semiplano inferior. Por lo tanto, el contorno ya no rodeará a los polos de la función, lo que hace que la integral de contorno valga 0.

En conclusión, con este contorno la integral es 0 si $y^0 < x^0$ (es decir, el evento y está en el pasado del evento x), lo que es un resultado distinto al que se obtiene con el contorno que escogimos antes.

Por otro lado, podríamos hacer que el contorno de integración pase por arriba de los dos polos como en la siguiente imagen.



Este contorno pasa por arriba de los dos polos. En este caso, si $x^0 < y^0$, la integral es igual a 0. Esto se debe a que en dicho caso la exponencial $e^{-ip^0 \cdot (x^0 - y^0)}$ tiende a infinito en el semiplano inferior, por lo que debemos completar el contorno usando una semicircunferencia en el semiplano superior. Por lo tanto, el contorno ya no rodeará a los polos de la función, lo que hace que la integral valga 0. En conclusión, con este contorno la integral es 0 si $x^0 < y^0$, es decir, si x está en el pasado respecto a y.

Problema 2

Obtenga el propagador en el espacio de configuraciones tomando la transformada de Fourier del resultado del problema anterior

Como el propagador en el espacio de momentos es $\dfrac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$, para calcular la transformada debemos de realizar la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+i\epsilon} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{dp^0}{2\pi}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{dp^0}{2\pi}\frac{i}{(p^0)^2-E_p^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{dp^0}{2\pi}\frac{i}{(p^0)^2-E_p^2+i\epsilon}e^{ip^0(x^0-y^0)-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{dp^0}{2\pi}\frac{i}{(p^0)^2-E_p^2+i\epsilon}e^{ip^0(x^0-y^0)}e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Para proseguir, calculamos la integral con respecto a p^0:

$$\frac{1}{2\pi}\int dp^0 \frac{i}{(p^0)^2-E_p^2+i\epsilon}e^{ip^0(x^0-y^0)}$$

Esta integral es igual a la siguiente expresión que ya encontramos en la pregunta 1:

$$\int dp^0 \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2-E_p^2} = \frac{2\pi e^{-iE_p(y^0-x^0)}}{2E_p}\theta(y^0-x^0) + \frac{2\pi e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p}\theta(x^0-y^0)$$

Sólo que la integral que estamos calculando ahora tiene el denominador $(p^0)^2 - E_p^2 + i\epsilon$ en vez de $(p^0)^2 - E_p^2$, lo que tiene el efecto de mover los polos desde $\pm E_p$ y recorrerlos una distancia infinitesimal en las direcciones $\pm i\epsilon$. De esta forma, esta nueva integral recorre solamente el eje real y aún así rodea los polos de la misma forma que la integral anterior. Por lo que la integral es:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int dp^0 \frac{i}{(p^0)^2-E_p^2+i\epsilon}e^{ip^0(x^0-y^0)} &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi e^{-iE_p(y^0-x^0)}}{2E_p}\theta(y^0-x^0) + \frac{2\pi e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p}\theta(x^0-y^0)\right] \\
&= \frac{e^{-iE_p(y^0-x^0)}}{2E_p}\theta(y^0-x^0) + \frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p}\theta(x^0-y^0)
\end{aligned}$$

Vemos que debido a las funciones θ, si $y^0 > x^0$, entonces nos quedamos solamente con $e^{-iE_p(y^0-x^0)}/2E_p$ y si $x^0 > y^0$, nos quedamos con $e^{-iE_p(x^0-y^0)}/2E_p$. En cualquier caso, siempre nos quedamos con la parte tal que el término entre paréntesis del exponente sea positivo. Por lo tanto, podemos resumir ambos términos en uno solo

$$= \frac{e^{-iE_p|y^0-x^0|}}{2E_p}$$

Por lo tanto, regresando a la expresión (1), tenemos que:

$$i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+i\epsilon} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{dp^0}{2\pi}\frac{i}{(p^0)^2-E_p^2+i\epsilon}e^{ip^0(x^0-y^0)}e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{-iE_p|y^0-x^0|}}{2E_p}e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$

Supongamos por ahora que $y^0 - x^0 = 0$ y luego usaremos la invarainza de Lorenz para generalizarlo

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{p^2+m^2}}e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{p^2+m^2}}e^{-ipr\cos\theta}$$

Donde $p = |\vec{p}|$, $r = |\vec{x}-\vec{y}|$ y θ es el ángulo entre $\vec{p}$ y $\vec{x}-\vec{y}$, por lo que podemos escribir el producto punto como $\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = pr\cos\theta$.
Esta integral la tenemos que hacer sobre todo el espacio y la podemos escribir en coordenadas esféricas, en cuyo caso el elemento de volumen es $d^3p = p^2\sin\theta drd\theta d\phi$

$$= \int \frac{dpd\theta d\phi}{(2\pi)^3}\frac{p^2\sin\theta}{2\sqrt{p^2+m^2}}e^{-ipr\cos\theta}$$

la integral respecto a ϕ es 2π, pues la función no depende de ϕ

$$= \int \frac{dpd\theta}{(2\pi)^2}\frac{p^2\sin\theta}{2\sqrt{p^2+m^2}}e^{-ipr\cos\theta}$$

La integral con respecto a θ se hace sencillamente con un cambio de variable, pues tenemos que $\int_0^\pi \sin\theta e^{-ipr\cos\theta} = \int_{-1}^1 e^{ipru}du$ con $u = -\cos\theta$.
Dicha integral es igual a $\left.\frac{1}{ipr}e^{ipru}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{ipr}(e^{ipr} - e^{-ipr}) = \frac{2\sin(pr)}{pr}$. Por lo que la integral que teníamos nos queda como:

$$= \int \frac{dpd\theta}{(2\pi)^2}\frac{p^2\sin\theta}{2\sqrt{p^2+m^2}}e^{-ipr\cos\theta} = \int \frac{dp}{(2\pi)^2}\frac{p^2}{2\sqrt{p^2+m^2}}\frac{2\sin(pr)}{pr}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^2}\frac{p\sin(pr)}{r\sqrt{p^2+m^2}}$$

$$= \frac{1}{r(2\pi)^2}\int_0^\infty dp\frac{p\sin(pr)}{\sqrt{p^2+m^2}}$$

No veo como continuar.
Sin embargo, después de simplificar esta expresión, hay que recordar que en un momento supusimos que $y^0 - x^0 = 0$. Pero por la invariancia de Lorentz del propagador, el resultado es el mismo si le aplicamos una transformada de Lorentz a las coordenadas, por lo que podríamos volver a introducir el tiempo en nuestro resultado.

Problema 3

Utilice el teorema de Wick para calcular lo siguiente

$$T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)]$$

Recordamos que el teorema de Wick como lo vimos en clase nos dice que:

$$T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)] =: \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3) : + \sum : \text{todas las posibles contracciones} :$$

Las contracciones posibles en este caso van a ser de una sola pareja (pues solamente tenemos 3 operadores). Por lo que las posibles parejas a contraer son $\hat{\phi}(x_1)$ con $\hat{\phi}(x_2)$, $\hat{\phi}(x_1)$ con $\hat{\phi}(x_3)$ o $\hat{\phi}(x_2)$ con $\hat{\phi}(x_3)$. Por lo tanto, nos queda que:

$$\begin{aligned}
T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)] &=: \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3) : + \sum : \text{todas las posibles contracciones} : \\
&=: \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3) : + : \overbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)}\hat{\phi}(x_3) : + : \overbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)} : + : \hat{\phi}(x_1)\overbrace{\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)} : \\
&=: \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3) : + \overbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)} : \hat{\phi}(x_3) : + \overbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_3)} : \hat{\phi}(x_2) : + \overbrace{\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)} : \hat{\phi}(x_1) :
\end{aligned}$$

Reemplazamos las contracciones por el propagador de Feynmann

$$= \boxed{: \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3) : + \Delta_F(x_1 - x_2)\hat{\phi}(x_3) + \Delta_F(x_1 - x_3)\hat{\phi}(x_2) + \Delta_F(x_2 - x_3)\hat{\phi}(x_1)}$$

Problema 4

Calcule los siguientes correladores

- $G_3^{(0)}(x_1, x_2, x_3) = \langle 0|T\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\right]|0\rangle$

Por el resultado de la pregunta anterior:

$$\begin{aligned}G_3^{(0)}(x_1, x_2, x_3) &= \langle 0|T\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\right]|0\rangle \\ &= \langle 0|\ :\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3): + \Delta_F(x_1 - x_2)\hat{\phi}(x_3) + \Delta_F(x_1 - x_3)\hat{\phi}(x_2) + \Delta_F(x_2 - x_3)\hat{\phi}(x_1)\ |0\rangle\end{aligned}$$

Como el primer término está ordenado normalmente, al aplicarlo a $|0\rangle$, el resultado es 0.

$$\begin{aligned}&= \langle 0|\Delta_F(x_1 - x_2)\hat{\phi}(x_3) + \Delta_F(x_1 - x_3)\hat{\phi}(x_2) + \Delta_F(x_2 - x_3)\hat{\phi}(x_1)\ |0\rangle \\ &= \Delta_F(x_1 - x_2)\langle 0|\hat{\phi}(x_3)|0\rangle + \Delta_F(x_1 - x_3)\langle 0|\hat{\phi}(x_2)|0\rangle + \Delta_F(x_2 - x_3)\langle 0|\hat{\phi}(x_1)|0\rangle\end{aligned}$$

Pero los términos $\langle 0|\hat{\phi}(x_i)|0\rangle$ son 0, pues el operador $\hat{\phi}(x_i)$ se puede escribir como $\phi^+(x_i) + \phi^-(x_i)$. Donde $\hat{\phi}^+(x_i)$ representa la parte del campo con puros operadores de creación $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{\phi}^-(x_i)$ la parte con aniquilación $\hat{a}$.

Entonces tenemos que $\langle 0|\hat{\phi}(x_i)|0\rangle = \langle 0|\phi^+(x_i) + \phi^-(x_i)|0\rangle = \langle 0|\phi^+(x_i)|0\rangle + \langle 0|\phi^-(x_i)|0\rangle$. Pero $\langle 0|\phi^+(x_i) = 0$ porque $\phi^+(x_i)$ tiene puros operadores $\hat{a}^\dagger$ y $\langle 0|\hat{a}^\dagger = 0$. Además, $\phi^-(x_i)|0\rangle = 0$ porque $\phi^-(x_i)$ tiene puros operadores de aniquilación $\hat{a}$ y $\hat{a}|0\rangle$. Por lo tanto, $\langle 0|\hat{\phi}(x_i)|0\rangle = \langle 0|\phi^+(x_i) + \phi^-(x_i)|0\rangle = 0$.

Por lo tanto, todos los términos son 0 y nos queda que $G_3^{(0)}(x_1, x_2, x_3) = 0$.

- $G_4^{(0)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \langle 0|T\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4)\right]|0\rangle$

Por el teorema de Wick tenemos que:

$\langle 0|T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4)]|0\rangle = \langle 0| : \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) : + \sum : \text{Todas las posibles contracciones} : |0\rangle$

Pero $\langle 0| : \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) : |0\rangle$ es igual a 0 porque $: \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) :$ está normalmente ordenado.

Ahora vemos los términos con contracciones $\langle 0|\sum : \text{Todas las posibles contracciones} : |0\rangle$. Las contracciones en las que sólo se contrae una pareja de operadores darán resultado 0 al ponerlas dentro de $\langle 0|\cdots|0\rangle$. Esto porque dichas contracciones se ven de la forma $\overbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)} : \hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) :$ o también $\overbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_3)} : \hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_4) :$ por ejemplo. Al colocar estos términos aquí $\langle 0|\cdots|0\rangle$, el resultado es 0, pues la pareja contraída es un c-número y puede salir de entre $\langle 0|\cdots|\rangle$ y lo que queda es un producto normalmente ordenado, el cual entonces al ponerlo entre $\langle 0|\cdots|0\rangle$ da como resultado 0.

Por lo tanto, las contracciones en las que sólo se contrae una pareja no contribuyen al resultado. Las únicas contracciones que quedan son aquéllas en las que se contraen las dos parejas de términos. Entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
G_4^{(0)}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \langle 0|T\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4)\right]|0\rangle \\
&= \langle 0| : \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) : + \sum : \text{Todas las posibles contracciones} : |0\rangle \\
&= \langle 0| \sum : \text{Todas las contracciones de dos parejas} : |0\rangle \\
&= \langle 0| \overbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)}\overbrace{\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4)} + \overbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_3)}\overbrace{\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_4)} + \overbrace{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_4)}\overbrace{\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)} |0\rangle \\
&\text{Reemplazamos las contracciones por el propagador de Feynmann} \\
&= \boxed{\Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(x_3-x_4) + \Delta_F(x_1-x_3)\Delta_F(x_2-x_4) + \Delta_F(x_1-x_4)\Delta_F(x_2-x_3)}
\end{aligned}
$$