Geometría Diferencial

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

26 de julio de 2020

La geometría diferencial estudia las propiedades y características de curvas y superficies en el espacio.

1. Geometría de Curvas

Definición 1.1. Curva: Una curva es una función diferenciable $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Y se puede escribir por componentes como $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$

Informalmente, cuando hablamos de la "curva α", no nos referimos a la función como tal, sino a la figura que dibuja en R^3. Es decir, a su imagen o traza: $\{(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \; : \; t \in I\}$ que es un subconjunto de R^3.

Definición 1.2. Vector Tangente o velocidad: Dada una curva α, definimos el vector tangente a la curva como $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t))$. Es decir, para cada $t \in I$, obtenemos un vector $\alpha'(t)$ el cual es tangente a la curva en el punto $\alpha(t)$.

Ejemplo 1.1. Línea: Podemos parametrizar la línea que une al punto $p \in \mathbb{R}^3$ con el punto $q \in \mathbb{R}^3$ como $\alpha(t) = p + (q-p)t$ cuyo vector tangente es entonces $q - p$ para todo t.

Definición 1.3. Rapidez: La rapidez de la curva α en el punto t es: $||\alpha'(t)||$, es decir, la norma del vector tangente o velocidad. En general, en una curva, la rapidez no es la misma a lo largo de la trayectoria, sino que es una función de la variable t.

Definición 1.4. Curva Regular: Una curva regular es aquélla que cumple que su rapidez nunca es 0.

Definición 1.5. Longitud de Curva: La longitud de curva de α de $t = a$ hasta $t = b$ se define como: $L(\alpha)\Big|_a^b := \int_a^b ||\alpha'(t)||dt$

Ejemplo 1.2. Hélice: Es la curva $(R\cos(t), R\sin(t), bt)$. La cual tiene la forma de un resorte, su vector tangente es: $\alpha'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t), b)$ y rapidez $|\alpha'| = \sqrt{R^2 + b^2}$.

Ejemplo 1.3. Catenaria: Es la curva que se forma al suspender un cable entre dos extremos.

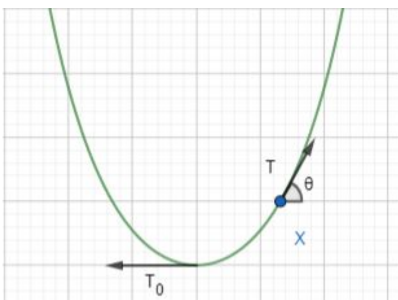

Figura 1: Catenaria

Sea $s(x)$ la longitud de la curva hasta el punto x, que tiene un peso $\lambda s(x)$. Entonces, por el equilibrio: $T\cos(\theta) = T_0$ y $T\sin(\theta) = \lambda s(x)$. Ahora los dividimos y nos queda:
$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda}{T_0} s(x)$ luego derivamos de nuevo y usamos la def de $s(x)$:
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda}{T_0}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$. Reemplazamos $z = y'$ para obtener una ecuación separable que resolvemos como:
$\operatorname{arcsin} h(z) = \frac{\lambda}{T_0}x + C \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh(\frac{\lambda}{T_0}x + C) \Rightarrow y = \frac{T_0}{\lambda}\cosh(\frac{\lambda}{T_0}x + C) + D$.

Entonces la curva catenaria se puede parametrizar como $(t, A\cosh(Bt + C) + D)$

Definición 1.6. Reparametrización: $\alpha(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva, sea $h(t) : J \longrightarrow I$ un mapeo diferenciable. Entonces, $\beta(t) = \alpha((h(t)) : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una reparametrización.

Una reparametrización tiene la misma traza que la curva original, pero la recorre de una manera distinta. Además, por la regla de la cadena: $\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$ y una reparametrización no cambia la longitud de arco de una curva. Decimos que una curva está ***Parametrizada por longitud de arco (P.L.A)*** si su rapidez es constante y de valor 1, es decir $|\alpha'(t)| = 1 \; \forall \; t$. Cuando una curva es p.l.a , la longitud de arco cuando la variable t va de a a b es $b - a$.

Teorema 1.1. Reparametrizar con p.l.a: Si una curva es regular, entonces existe una reparametrización para hacerla p.l.a.

Dem: Definimos $s(t) = \int_a^t |\alpha'(u)|\, du$, usando que α es regular, llegamos a que $\frac{ds}{dt} > 0$, por lo que s es invertible y $\frac{dt}{ds} = \dfrac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s))}$. Luego usamos la reparametrización $\beta(s) = \alpha(t(s))$ y con esta reparametrización, nos queda que la rapidez de β es 1.
En un sentido práctico, reparametrizar p.l.a es casi siempre imposible porque implica realizar un integral y luego sacar una función inversa. Sin embargo, lo importante del resultado es el significado teórico.

1.1. Fórmulas de Frenet

Las siguientes fórmulas aplican sólo para curvas parametrizadas por p.l.a. Sin embargo, el significado geométrico es aplicable para cualquier curva regular, ya que (al menos teóricamente) se puede reparametrizar con p.l.a.
Sea $\beta(s)$ una curva p.l.a.

Definición 1.7. Vector Tangente: El vector $T(s) = \beta'(s)$.
Como β es p.l.a. el vector tangente tiene norma 1 a lo largo de toda la trayectoria. Por lo tanto, su derivada T' nos habla solamente de como se esta desviando la curva y no de la velocidad como tal. Además, como para todo s tenemos que $T \cdot T = 1$ para todo s, que al derivar, obtenemos $T \cdot T' = 0$. Por lo tanto, T' no tiene componente en la dirección tangente, es puramente ortogonal a la curva.

Definición 1.8. Curvatura: La curvatura es el número: $k(s) = |T'(s)|$
La curvatura nos dice qué tan rápido cambia la dirección del vector tangente. Posteriormente, si queremos un vector ortogonal, podemos usar T' pero normalizarlo.

Definición 1.9. Vector Normal (Unitario): $N(s) = \frac{1}{|T'|}T' = \frac{1}{k}T'$

Definición 1.10. Binormal: Se define: $B = T \times N$

Entonces, que para cualquier tiempo s, tenemos tres vectores $\{T, N, B\}$ los cuales generan una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ para cada tiempo.

Teorema 1.2. Frenet:
1) $T' = kN$
2) $B' = -\tau N \quad$ (con $\tau = -N \cdot B'$ llamada torsión)
3) $N' = -kT + \tau B$

Dem: Se demuestran partiendo de productos puntos conocidos (usando que $\{T, N, B\}$ es una base ortonormal y luego derivando.
Las fórmulas nos dicen el valor de la derivada de cada vector en la base de Frenet. La curvatura mide qué tanto se desvía la curva de ser una recta y la torsión nos dice qu'e tanto se desvía de ser un plano. De hecho, $1/k$ mide el radio de la circunferencia que mejor se aproxima a la curva, o circunferencia osculante.

Teorema 1.3.
1) $k = 0 \iff \beta$ es parte de una recta
2) $k > 0, \tau = 0 \iff \beta$ está contenida en un plano.
3) $k = cte > 0, \tau = 0 \iff \beta$ es parte de un círculo.

1.2. Fórmulas para curvas no P.L.A

Si α no es p.l.a, puede ser difícil parametrizar con p.l.a. sin embargo, definimos la curvatura de α (y los otros valores) como los valores que tendría la parametrización p.l.a en el mismo punto.

Teorema 1.4. 1) $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$
2) $N(t) = \frac{T'(t)}{k|\alpha'(t)|}$ 3) $B(t) = \frac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{|\alpha'(t)\times\alpha''(t)|}$ 4) $k(t) = \frac{|\alpha'(t)\times\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$ 5) $\tau(t) = \frac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha'''}{|\alpha'\times\alpha''|^2}$

1.3. Curvas derivadas a partir de la original

Definición 1.11. Evoluta (plana): A partir de una curva $\alpha(t)$, construimos una curva a partir de los centros de la circunferencia osculante para cada s. El radio de la circunferencia osculante es $1/k(s)$. Entonces tenemos que la evoluta es:
$\xi(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}N(s)$

También podemos ver que $\xi'(s) = (\frac{1}{k(s)})'N(s)$. Es decir, la dirección tangente de la evoluta es paralelo al vector normal de α.

Definición 1.12. Involuta: Si α es una curva, ponemos un hilo sobre ésta, luego clavamos un extremo del hilo con una tlachuela y al otro extremo le ponemos un lápiz. Luego desenrrollamos lentamente el lápiz mateniendo tenso el hilo entre el lápiz y el punto de contacto del hilo con la curva. Conforme desenrrollamos, el lápiz dibuja la curva involuta. El segmento del hilo tenso (del punto de contacto actual al lápiz) mide $L(t)$ (L es la longitud) y apunta en la dirección tangente $-\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$. Entonces la parametrización de la involuta es:
$I(t) = \alpha(t) - L(t)\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$

Proposición: La evoluta de la involuta de α es α.

Teorema 1.5. Teorema fundamental de curvas en $\mathbb{R}^3$
Si dos curvas $\alpha(s)$ y $\beta(s)$ cumple que $k_\alpha = k_\beta$ y $\tau_\alpha = \tau_\beta$, entonces la curva α se puede transformar en la curva β por medio de una transformacién rígida.

1.4. Propiedades Globales de las Curvas:

Definición 1.13. Curva Cerrada:
$\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es cerrada si $\alpha(a) = \alpha(b)$ y $\alpha^{(n)}(a) = \alpha^{(n)}(b) \quad \forall n$
Curva simple: Curva que no se auntointersecta.

Teorema 1.6. Teorema de la curva de Jordan:
Toda curva cerrada en $\mathbb{R}^2$ separa a $\mathbb{R}^2$ en dos subconjuntos ajenos (dentro y fuera de la curva)

Teorema 1.7. Desigualdad Isoperimétrica:
Si C es una curva simple cerrada de longitud L y que encierra un área A entonces: $L^2 \geq 4\pi A$

Teorema 1.8. Teorema de los 4 vértices: Si α es una curva cerrada y simple, entonces tiene al menos 4 puntos donde $k' = 0$ (vértices)

2. Superficies

Definición 2.1. Superficie: Es la imagen de una función $\mathbf{x} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
En realidad, una superficie se puede formar juntando muchas tales imágnes que se denotan 'patches' o parametrizaciones.

Definición 2.2.
Superficie Suave: Es una superficie parametrizada por $\mathbf{x}$ pero con la condición de que ésta función es diferenciable, y localmente invertible (i.e, las columnas de su jacobiano son l.i.)

Una superficie $\mathbf{x}$ se puede ver como una función de dos variables u, v las cuales varían sobre un conjunto D.

Definición 2.3.
u y v - curvas: Dado un punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ en la superficie, la u-curva es la curva $\alpha(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$ (es decir, deja la v fija y usa la u como parametro.

Vectores Tangentes: Dado un punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ en la superficie, el vector tangente u es el vector tangente a la $u-$curva y similarmente con v. Entonces, estos vectores se calculan como:

$$x_u = (x_u^1, x_u^2, x_u^3)$$
$$x_v = (x_v^1, x_v^2, x_v^3)$$

Para conseguir estos vectores en un punto en particular, hay que evaluarlos en (u_0, v_0)
Así, la condición de regularidad de una superficie se simplifica a pedir que estos dos vectores sean l.i en todo punto.

Teorema 2.1. Preimágenes de curvas en una superficie.
Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{x}(D) \subset M$ (M es una superficie) Es decir, α es una curva contenida en la superficie M.
Entonces, hay únicas funciones suaves $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$

Ejemplo 2.1. Ejemplos de parametrizaciones de Superficies:
Monge Patch: Para parametrizar la gráfica de una función $f(x, y)$: $(u, v, f(u, v))$

Esfera: $(R\sin(u)\cos(v), R\sin(u)\sin(v), R\cos(u))$ $0 \leq u \leq \pi$; $0 \leq v \leq 2\pi$
Superficie de revolución: Tenemos una curva $(g(u), h(u), 0)$ y la rotamos respecto al eje x: $(g(u), h(u)\cos(v), h(u)\sin(v))$
Toro: $((R + r\cos(u))\cos(v), (R + r\cos(u))\sin(v), r\sin(u))$
Helicoide: $(av\cos(u), av\sin(u), bu)$
Catenoide: $(c\cosh(v/c)\cos(u), c\cosh(v/c)\sin(u), v)$
Superficie Reglada: $\beta(u) + v\delta(u)$ con β, δ curvas.

Definición 2.4.
Plano Tangente: El plano tangente a la superficie M en un punto $p \in M$ es:

$$T_p(M) = \{v : v \text{ es tangente a } M \text{ en } p\}$$

Es decir, un vector $v_p \in T_p(M)$ sii existe una curva $\alpha : I \longrightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(p) = v_p$

Teorema 2.2.
1) Sea $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un patch de una superficie y sea $q \in U$, entonces, $Jx_q(U) = T_{x(q)}(M)$
2) Además, se puede demostrar que para una superficie regular, $\{x_u(p), x_v(p)\}$ son una base de $T_p(M)$. Se puede probar usando el teorema 2.3 y la regla de la cadena.

Definición 2.5.
Vector Normal: Vector normal a la superficie M en el punto $\mathbf{X}(u_0, v_0)$ es: $U = x_u(u_0, v_0) \times x_v(u_0, v_0)$
Área de una Superficie: El área de una superficie es $A = \int\int_Q |x_u \times x_v| dudv$

2.1. Derivada

Definición 2.6. De un mapeo entre superficies:
Podemos definir funciones que van de una superficie a otra, es decir, si S_1 y S_2 son superficies,

podemos definir una función $\phi : S_1 \longrightarrow S_2$

Derivada de un Mapeo entre Superficies: Estas funciones se pueden derivar. La derivada de ϕ en $p \in S_1$ es un mapeo lineal $D_p\phi$ que va de $T_p(S_1)$ a $T_{\phi(p)}(S_2)$, y que se define como sigue:
Para $w \in T_p(S_1)$, $D_p\phi(w) = (\phi \circ \alpha)'(0)$ con α una curva en S_1 tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$
Resulta que no importa la curva α que se agarre, con tal que cumpla esas coindiciones.
Es decir, si tenemos la derivada de un mapeo ϕ en p (es decir $D_p\phi$), para evaluar su derivada en un vector tangente, hay que tomar una curva que tenga dicho vector tangente. Posteriormente, hay que encontrar la curva imagen en S_2 y encontrar su vector tangente en $\phi(p)$ y ésta será la solución.

Derivada de una función compuesta con una curva: Sea $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, y la componemos con una curva, $g(\alpha(t))$. Entonces, : $\frac{d}{dt}g(\alpha(t)) = \bigtriangledown g(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$

Derivada direccional: Dada una función $g : M \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, se define su derivada direccional en la dirección $v \in T_p(M)$ como:
$v[g](p) = \bigtriangledown g(p) \cdot v$
Entonces la derivada de una función compuesta con una curva es un caso especial de derivada direccional en la dirección $\alpha'(t)$.

Derivada Covariante: Dada una función $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $U = (U^1, U^2, U^3)$. Entonces definimos la derivada covariante en la dirección v como:
$\nabla_v U = (v[U^1], v[U^2], v[U^3])$
Es decir, se aplica la derivada direccional a cada componente de U.
A final de cuentas, esta derivada (evaluada en un punto p) es:
$\text{lím}_{h \longrightarrow 0}(U(p + hv) - U(p))/h$
Es decir, consiste en ver cómo cambia U en la dirección v. Y la respuesta es nuevamente un vector (un vector 'diferencia').

Si U resulta ser un mapeo entre superficies, esta definición coincidirá con la derivada de un mapeo entre superficies en el punto p evaluada en una dirección v.

Definición 2.7.
Mapeo de Gauss: El mapeo de Gauss de una superficie M es: $G : M \longrightarrow S^2$ dado por:
$G(p) = U(p)$
Donde $U(p)$ es el vector normal unitario a M en p.

Definición 2.8.
Shape operator: Definimos el Shape Operator (en el punto p) como $S_p : T_p(M) \longrightarrow T_{U(p)}(S^2)$ con:

$$S_p(v) = -DU_p(v)$$

Es decir, el Shape Operator es la $-$ derivada del mapeo entre superficies de Gauss, o bien, $S_p(v)$ es $-$ la derivada covariante del vector U en el punto p en la dirección v.
En cualquier caso, $S_p(v)$ mide $-$ cuánto cambia el vector normal unitario en un punto p al moverlo levemente en la dirección v.
Además, S_p es lineal, por como se define la derivada y es un operador, porque $T_{U(p)}(S^2) = T_p(M)$, así que podemos considerar a S_p como un operador lineal $S_p : T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$.

Además:

$S_p(x_u) = -DU_p(x_u) =$ como cambia U en la dirección $x_u \quad = \frac{\partial U}{\partial u}(p)$
o bien, usando la derivada covariante:
$S_p(x_u) = -\nabla_{x_u}U(p) = -(x_u[U^1](p), x_u[U^2](p), x_u[U^3](p)) = -(\frac{\partial U^1}{\partial u}(p), \frac{\partial U^2}{\partial u}(p), \frac{\partial U^3}{\partial u}(p))$

En cualquier caso, $S_p(v)$ mide cuánto cambia U en cualquier dirección v en $T_p(M)$, y lo mide de cualquiera de estas dos formas equivalentes:
1) Agarramos una curva α en M que pase por p y cuya derivada ahí sea v. Luego, mapeamos la curva a S^2 (para cada punto q, lo mapeamos a $U(q) \in S^2$), y ahora calculamos el vector tangente en esta curva en $U(p)$, este vector está en $T_{U(p)}(S^2)$ que en realidad es $T_p(M)$ y $-$ este vector es el resultado.

2) Estamos parados en el punto p, ahora, sumamos una pequena distancia a este punto p en la dirección $v \in T_p(M)$, lo cual nos lleva a $p + hv$. Este punto está técnicamente afuera de la superficie M (porque caminamos a lo largo del plano tangente), sin embargo, para h chiquito, igual podemos calcular $U(p + hv)$. Finalmente, $S_p(v)$ será $-$ la diferencia de estos

vectores normales. Es decir: $-(U(p+hv)-U(p))/h$

Sin embargo, en general no es necesario hacer todo esto, pues S_p es un operador lineal. Por lo que sólo es necesario evaluarlo en una base:

$$S_p(x_u) = -\frac{\partial U}{\partial u}$$
$$S_p(x_v) = -\frac{\partial U}{\partial v}$$

Y con esto es suficiente para calcular S_p en cualquier dirección de $T_p(M)$. Lo único necesario es tener U como función de u y v. Además, entonces podemos representar S_p como una matriz de 2×2. Claro que dicha matriz sería en la base x_u, x_v y como tal, hay que evaluarla en vectores escritos en dicha base.

Ejemplo 2.2.

Esfera: Dada una esfera de Radio R, calcular $S_p(w)$ en cualquier dirección w.
En este caso, el punto p no importa porque todos los puntos de una esfera son iguales.
Según el método 1, tenemos que tomar una curva que pase por p y cuyo vector tangente en p sea w, tomaremos como curva un círculo máximo. Luego, aplicamos U para transformar esta curva en una curva en S^2. Podemos convencernos de que dicha curva será tambíen un círculo máximo pero ahora en esta esfera unitaria. El vector tangente de esta curva en $U(p)$ tiene la misma dirección que w pero se multiplicó por un factor $1/R$ al mapear la curva.
Por lo tanto, $S_p(w) = -\frac{w}{R}$.

Alternativamente, podemos calcular $U(u,v)$, como $x_u \times x_v$
$(R^2 \sin^2(u)\cos(v), R^2 \sin^2(u)\sin(v), R^2\cos(u)\sin(u))$ unitarizado $(\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u))$.
Y luego calcular $S_p(x_u)$ y $S_p(x_v)$ derivando este U con respecto a u $(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), -\sin(u))$ y a v $(-\sin(u)\sin(v), \sin(u)\cos(v), 0)$. Luego escribimos estos como combinaciones lineales de x_u, x_v para crear la matriz. Así, la matriz del shape operator en cualquier punto p será:

$$[S_p] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

En este caso en particular, el operador S_p no depende del punto p.

Plano: Calculamos $S_p(w)$ en un punto p cualquiera (no importa cuál). Según el método 1, tomamos una curva α que pase por p y con vector tangente w. Luego mapeamos esta curva a S^2 a través del mapeo U, pero en este caso, se va a mapear a un simple punto. Finalmente, calculamos el vector tangente de esta curva mapeada, pero en este caso es sólo un punto y el vector tangente es 0. Alternativamente, calculamos $S_p(x_u) = -\frac{\partial U}{\partial u} = 0$, lo mismo para x_v, entonces la matriz de Shape Operator es 0

Cilindro: Un cilindro parametrizado por $(R\cos(u), R\sin(u), v)$, calculamos su S_p en un punto p (en este caso no importa cuál). Calculamos $S_p(x_u)$, para esto, tomamos una curva con vector tangente x_u, como puede ser un círculo. Luego, al aplicar U, esta curva pasará a convertirse en un círculo máximo de S^2, cuyo vector tangente tiene la misma dirección que x_u pero se achica por $1/R$, es decir $S_p(x_u) = 1/R\ x_u$. Por otro lado, para calcular $S_p(x_v)$, necesitamos una curva en el cilindro con vector tangente x_v, como puede ser una recta vertical. Como el vector tangente en esta línea es constante, su mapeo será un punto constante en la esfera. Y para calcular $S_p(x_v)$ encontrar el vector tanegente a esta curva, pero como es sólo un punto, el vactor tangente es 0. También se puede calcular S_p al calcular U y derivarlo, así podemos calcular $S_p(x_u)$ y $S_p(x_v)$ como las derivadas de U, luego, si queremos la matriz de S_p, hay que escribir estas respuestas como combinación lineal de x_u y x_v. Finalmente:

$$[S_p] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.3. El Shape Operator es un operador autoadjunto: El shape operator cumple que $\langle S_p(w), z\rangle = \langle S_p(z), w\rangle$ para toda v, w

Como operador autoadjunto, tiene la propiedad de que es diagonalizable por un matriz ortogonal, o mejor: S_p **tiene eigenvectores que forman una base ortonormal y cuyos eigenvalores son reales**

Teorema 2.4. El operador $S_p : T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$ cumple que: $S_p(x_u) \cdot x_u = U \cdot x_{uu}$, $S_p(x_v) \cdot x_v = U \cdot x_{vv}$, $S_p(x_u) \cdot x_v = U \cdot x_{uv}$

Dem: Partimos de que $U \cdot x_v = 0$, luego le aplicamos la derivada direccional a esto y usamos regla del producto. $x_u[U] \cdot x_v + x_u[x_v] \cdot U = 0$ y entonces, $S_p(x_u) = U \cdot x_{uv}$

Lo mismo se puede hacer para otras permutaciones de u y v. Y de hecho, podemos con esto (empezando por $(x_u \cdot U) = 0$ y derivando respecto a x_v) llegar a que $S_p(x_u) \cdot x_v = S_p(x_v) \cdot x_u$ y concluir que es autoadjunto.

Teorema 2.5. Si $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es lineal y autoadjunto y u_1 es un eigenvector entonces, si u_2 es ortogonal a u_1, entonces u_2 es un eigenvector.

dem: $S(u_2) = au_1 + bu_2$ (pues u_1, u_2 es una base). Luego, $S(u_2) \cdot u_1 = a$, luego por autoadjunto, $u_2 \cdot S(u_1) = a \;\Rightarrow\; u_2 \cdot \lambda_1 u_1 = a \;\Rightarrow\; a = 0$ Por lo tanto, $S(u_2) = bu_2$.

Teorema 2.6. Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ autoadjunto y definimos $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por la forma cuadrática $f(w) = T(w) \cdot w$. Entonces, esta forma cuadrática alcanza su máximo y mínimo en los autovectores.

Dem: Como T es autoadjunto, podemos encontrar una base ortonormal de eigenvectores. Luego, $f(w) = T(a_1u_1 + ... + a_nu_n) \cdot (a_1u_1 + ... + a_nu_n)$, que usando que son eigenvectores, llegamos a: $(a_1\lambda_1u_1 + ... + a_n\lambda_nu_n) \cdot (a_1u_1 + ... + a_nu_n) = \lambda_1a_1^2 + ... + \lambda_na_n^2$ (Por se ortonormales). Pero además, como w es unitario, por la propiedad pitagórica tenemos que $a_1^2 + ... + a_n^2 = 1$, lo cuál, al juntarlo con el resultado anterior nos permite demostrar que el maximo lo encontraremos haciendo $a_i = 1$ (y todas las demás $= 0$) donde λ_i es la máxima λ. Lo mismo para el mínimo.
En el caso particular de $\mathbb{R}^2$, la formula encontrada se puede escribir como:
$f(w) = \lambda_1 \cos^2(\theta) + \lambda_2 \sin^2(\theta)$

Definición 2.9.
Curvatura Normal: La curvatura normal toma un punto $p \in M$ y una dirección $w \in T_p(M)$ (unitaria) y regresa un número Real (la curvatura normal de M en la dirección w en el punto p.

Se define como sigue: $k_p(w) = k_\sigma(p)$

Donde el lado derecho es la curvatura de la curva σ evaluada en p. Donde la curva σ está dada por la intersección entre la superficie M y el plano dado por las direcciones U, w y que pasa por p. (Es decir, el plano contiene al vector normal y de ahí el nombre de la curvatura).

Teorema 2.7.
Algunas propiedades de la Curvatura Normal:
1) $k_p(w) = S_p(w) \cdot w$ (Para w unitario, si queremos generalizar, hay que dividir el lado derecho entre la norma de w)

Dem: $k_p(w) = k_\sigma(p)$ pero por def. , σ es una curva plana y por tanto, su vector Normal está contenido en dicho plano. Luego, dicho vector Normal N tiene que ser el vector normal $\pm U$ de la superficie (pues ambos vectores están en el plano y son ortogonales a w y son unitarios). Pero por las fórmulas de Frenet (la última) , la curvatura de σ es $-N' \cdot T = -N' \cdot w = -w[U] \cdot w = S_p(w) \cdot w$

2) La curvatura normal en p es máxima en la dirección de uno de los eigenvectores de S_p y mínima en la dirección del otro (De acuerdo a su eigenvalor) y el valor de la curvatura normal en esta dirección es el eigenvalor correspondiente.
Dem: por la propiedad anterior y el teorema 2.8

Definición 2.10. Curvaturas principales:
Como se mencionón en la propiedad anterior, la curvatura normal alcanza su máximo y mínimo en la dirección de los eigenvectores de S_P y el valor de la curvatura es el eigenvalor. Estas direcciones se llaman direcciones principales, y sus curvaturas se llaman curvaturas principales y se denotan por k_1 (la menor) y k_2 (la mayor).

Punto Umbílico: Un punto umbílico es un punto $p \in M$ tal que las dos curvaturas principales k_1 y k_2 son iguales $k_1 = k_2 := k$, como éstas son las direcciones máxima y mínima, esto implica que en todas las direcciones se tiene una curvatura k.

3) $k_p(w) = k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta)$
Con θ el ángulo respecto a la dirección principal que corresponde al eigenvector k_1. Dem: Se

debe al teorema 2.6 para formas cuadráticas y el teorema 2.7 1)

Nota: La curvatura normal no depende de la parametrización utilizada, debido a que los eigenvectores y eigenvalores son invariantes a la base utilizada.

Ejemplo 2.3.
Basándonos en el ejemplo anterior, es fácil ver que para la esfera, todas las direcciones son direcciones principales (son eigenvectores) y su curvatura normal en cualquier dirección es $-1/R$
Para un plano, vemos que tabién todas las direcciones son direcciones principales y con curvatura 0. En estos dos casos, todos los puntos de la superficie son umbílicos.
En el cilindro, una de las direcciones principales es x_u, la cual tiene curvatura normal $-1/R$, la otra dirección principal es x_v con curvatura normal 0.

Definición 2.11.
Curvatura Gaussiana: La curvatura Gaussiana de una superficie M medida en p es el determinante de S_p (que no depende de qué parametrización usemos). Como k_1 y k_2 son los autovalores de S_p, tenemos que la curvatura gaussiana es: $K_G = k_1 \cdot k_2$

Curvatura Media: La curvatura media de M medida en p es el promedio de las dos curvaturas principales (O bien, la 1/2 la traza de S_p, que no depende de la parametrización). Es decir, $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$.

En los ejemplos anteriores, la curvatura gaussiana de la esfera es $\frac{1}{R^2}$ y la del plano y el cilindro son ambas 0. En realidad, un punto p en una superficie se puede clasificar según el valor de la curvatura Gaussiana en dicho punto.

1) **Curvatura Positiva $K_G(p) > 0$:** Todas las curvaturas normales tienen el mismo signo sin importar la dirección, lo cuál significa que todas abrazan o se alejan de U. Por ejemplo: La esfera en cualquier punto.

2)**Curvatura Negativa $K_G(p) < 0$:** Se curva en diferente sentido según la dirección. Por ejemplo: Un paraboloide hiperbólico en el origen.

3) **Curvatura 0 $K_G(p) = 0$:** Todas las curvaturas son positivas o todas son negativas, pero en al menos una dirección es 0. Por ejemplo: Un plano o un cilindro. Una superficie en la que la curvatura gaussiana vale 0 en todos los puntos se llama plana.

Proposición: Si todos los puntos de S son umbílicos, entonces S es un plano o una esfera.

En coordenadas Locales.

Para lo que sigue, definimos los siguientes números:

$$E = x_u \cdot x_u \qquad F = x_u \cdot x_v \qquad G = x_v \cdot x_v$$
$$l = S_p(x_u) \cdot x_u = U \cdot x_{uu} \qquad m = S_p(x_u) \cdot x_v = U \cdot x_{uv} \qquad n = S_p(x_v) \cdot x_v = U \cdot x_{vv}$$

Con la ayuda de estos números, podemos encontrar expresiones para calcular la curvatura gaussiana y la curvatura media de manera sencilla (sin recurrir a S_p).

Empezamos suponiendo que: $S_p(x_u) = a_{11}x_u + a_{21}x_v \quad S_p(x_v) = a_{12}x_u + a_{22}x_v$

Entonces tenemos que $l = a_{11}E + a_{21}F$, $m = a_{11}F + a_{21}G$, $n = a_{12}F + a_{22}G$

Lo cual nos permite escribir:

$\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ Donde la matriz a_{ij} es la matriz S_p

Entonces, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \dfrac{1}{EG - F^2}$

Entonces, calculando el determinante y la traza de ambos lados, obtenemos:

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} \qquad H = \frac{1}{2}\frac{lG - 2mF + nE}{EG - F^2}$$

Fórmulas de 'aceleración':
Como $\{x_u, x_v, U\}$ es una base, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \Gamma^1_{11}x_u + \Gamma^2_{11}x_v + L_1U \\ x_{uv} &= \Gamma^1_{12}x_u + \Gamma^2_{12}x_v + L_2U \\ x_{uu} &= \Gamma^1_{22}x_u + \Gamma^2_{22}x_v + L_3U \\ U_u &= a_{11}x_u + a_{21}x_v \\ U_v &= a_{12}x_u + a_{22}x_v \end{aligned}$$

Donde vemos que $L_1 = l$ $L_2 = m$ $L_3 = n$
Los símbolos de Christoffel (Las Γ) se pueden calcular como en el siguiente ejemplo (Para $F = 0$) que lo hace más sencillo:
$x_{uu} = \Gamma^1_{11}x_u + \Gamma^2_{11}x_v + lU$
$x_{uu} \cdot x_u = \gamma^1_{11}x_u \cdot x_u \ = \ \Gamma^1_{11}E$
Pero: $E = x_u \cdot x_u \rightarrow E_u = 2x_{uu} \cdot x_u$
Por lo tanto: $\Gamma^1_{11} = \dfrac{E_u}{2E}$

Definición 2.12.
Paramterización Isotérmica: Es una parametrización $x(u, v)$ de una superficie tal que $F = 0$ y que $E = G$

Teorema: Toda superficie se puede parametrizar con una parametrización Isotértmica.

2.2. Superficies Determinadas por H = cte

Definición 2.13.
Superficie Minimal: Una superficie minimal es una superficie para la cual $H = 0$ en todos los puntos.

Teorema 2.8.
x es una superficie minimal sii $A'(0) = 0$ donde $A(t) = x(u, v) + tU(u, v)$ es decir, es un

estiramiento en la dirección normal.
Dem: Larga y en mi cuaderno.

Observación: Una superficie es minimal y de rotación si y sólo si es un catenoide (o parte de).
Una superficie es minimal y reglada si y sólo si es un helicoide (o parte de).

Proposición: Para un film de burbuja no cerrado (Es decir presión ext = presión interna) sostenido por un alambre (frontera) entonces la superficie es mímina. Así es posible encontrar una superficie mínima experimentalmente a partir de conocer la frontera.

Proposición: Si M es una superficie con frontera C y es la superficie de área mínima con esta propiedad, entonces M es minimal.
El regreso no es cierto.

Ahora veremos un poco de las superficies con $H = cte$. Resulta que algunos conceptos de variable compleja son útiles en este contexto.

3. Geodésicas

Definición 3.1.
Campo Vectorial: Un campo vectorial es una función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que podemos separar en sus funciones componentes. $F = (F_1, F_2, F_3)$

Derivada covarainte en $\mathbb{R}^3$: Es la derivada: $\nabla_v^3 F = (\nabla_v F_1, \nabla_v F_2, \nabla_v F_3)$. Es decir, se consigue al obtener la derivada direccional de cada uno de los componentes. Ésta nuevamente es una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$.

Derivada Covariante en una superficie S: Dada una superficie S y un campo vectorial F, podemos definir la derivada covariante de F en S proyectando la derivada direccional de F a la superficie.
Es decir, $\nabla_v^S F = \nabla_v^3 F - (\nabla_v^3 F \cdot U)U$.
Es decir, sólo toma los componentes de la derivada covariante de F que son $'$ visibles $'$ para un habitante en la superficie.

Podemos restringir F a una curva $\alpha(t)$ en S. Es decir, $F|_\alpha$ es una función que a cada t le asigna un vector $F(\alpha(t))$ proyectado sobre el espacio tangente a la superficie.

Por ejemplo, pensemos en la función $\alpha'(t)$ que hace justo esto (a cada tiempo t le asigna un vector sobre α. Entonces, le podemos aplicar las derivadas covariantes antes mencionadas, y tenemos:

$$\nabla_{\alpha'}^3 \alpha' = \alpha'' \qquad\qquad \nabla_{\alpha'} \alpha' = \alpha''_{tan}$$

Recordando que α' es en un vector que apunta en la dirección de α, esto nos dice que la derivada covariante de α' en la dirección de la curva no es otra cosa que la segunda derivada de la curva. Y si le sacamos la derivada covariante en S, esto la proyecta a la propia superficie y por eso nos da como resultado α''_{tan}. Estas derivadas se pueden calcular directamente de la definición (bueno, la segunda es más bien una definición).

Campo Paralelo: Sea F un campo definido en una curva α contenida en una la superficie S. Entonces decimos que F es un campo paralelo (sobre la curva α) si:

$$\nabla_{\alpha'}^S F = 0$$

Es decir, es un campo vectorial que al calcular su cambio a lo largo de la curva α, sólo puede cambiar en la dirección U y no en la dirección $T_p(M)$. Por lo que un habitante en la superficie S que se mueve por la curva α no vería cambiar al campo F.

Teorema 3.1.
1) Se ω es un campo vectorial paralelo a la curva α. entonces $|\omega| = \text{cte}$.

2) Sea α una curva en S y w_0 un vector en $T_{\alpha(t_0)}(S)$, entonces existe un único campo $\omega(t)$ definido sobre los puntos de la curva, que es paralelo y con $\omega(t_0) = \omega_0$. (A este campo se le conoce como el transporte de ω_0 sobre la curva α).

Dem1: $\alpha'[\omega \cdot \omega] = 2\omega \cdot \nabla^3_{\alpha'}\omega = 0$ (Es 0 porque ω es un campo paralelo a lo largo de α, por lo que la derivada covariante tiene puro componente normal, pero ω tiene puro componente tangente a la superficie)

Dem2: Se deja para luego.

Definición 3.2.
Geodésica: Una curva geodésica en S es una curva $\alpha : I \to S$ con $\nabla^S_{\alpha'}\alpha' = 0$. (O bien, $\alpha''_{tan} = 0$)
Es decir, es un transporte paralelo de α' a lo largo de α.
Es decir, un habitante en la superficie S cree que α' no cambia, pues no hay aceleración en las direcciónes que él ve (las direcciones tangentes a la superficie).

De hecho, la acelaración de una curva α (que digamos que está sobre una superficie S) se puede descomponer en dos componentes:

$$\alpha'' = \alpha''_{tan}(U \times T) \; + \; \alpha''_{norm}U$$

No tiene componentes en la dirección T por ser una curva p.l.a (o bien, se puede reparametrizar a p.l.a). Además, cada uno de estos componentes es una curvatura.

$\alpha''_{tan} = k_g$ (definida como la curvatura geodésica, es la curvatura que ve un habitante de S). Se puede calcular como $\alpha''_{tan} = \alpha'' \cdot (U \times T)$
$\alpha''_{norm} = \alpha'' \cdot U = S_p(\alpha') \cdot \alpha' = k(\alpha')$ Que es la curvatura normal de la superficie en la dirección de α'
$||\alpha''|| = k_\alpha$ Que es la curvatura de α en el espacio.

Entonces nos queda la siguiente relación entre estas curvaturas:

$$k_\alpha^2 = (k(\alpha'))^2 + k_g^2$$

La curvatura de α es la norma de α''. La curvatrua normal es la componente normal y la curvatura geodésica es la curvatura tangente.

Con todo esto, podemos redefinir una curva geodésica. Una curva geodésica es una curva sobre la superficie S tal que su aceleración sólo tiene componente normal a la superficie. Ya sea porque el campo α' es un campo paralelo a lo largo de α o bien porque la curvatura geodésica $\alpha' \cdot (U \times T) = 0$.

Ejemplo: Los círculos mayores en una esfera (en ellos α'' es siempre paralelo a N).
Para otros ejemplos sencillos, si tenemos una superficie $x(u, v)$, entonces podemos suponer que tiene geodésicas de la forma $x(u(t), v(t))$ (Uno de los primeros teoremas de superficies nos asegura que toda curva en una superficie se ve así). Luego, podemos calcular el vector U, el vector T y el vector α'' y obtenemos $\alpha'' \cdot (U \times T)$, finalmente lo igualamos a 0 y resolvemos el sistema de ecuaciones que quede para $u(t)$ y $v(t)$

Sist. de ecuaciones geodésicas: Se pueden encontrar las ecuaciones diferenciales para una geodésica siguiendo el procedimientos mencionado antes. Sin embargo, sólo llegaremos a fórmulas definitivas si suponemos que $F = 0$ (que teóricamente, siempre es posible encontrar una parametrización así).
Suponemos que $\alpha(t) = x(u, v)$ (u, v son funciones de t). Luego, se puede obtener que: $\alpha' = u'x_u + v'x_v$ y que $\alpha'' = u^2 x_{uu} + 2u'v'x_{uv} + u''x_u + v'^2 x_{vv} + v''x_v$
Posteriormente, usamos las fórmulas de aceleración (usando la simplificación cuando $F = 0$ para resolver los símbolos de Cristophel) y nos queda:

$$\alpha'' = [u'' + \frac{E_u}{2E}u'^2 + \frac{E_v}{E}u'v' - \frac{G_u}{2E}v'^2]x_u + [v'' + \frac{E_v}{2G}u'^2 + \frac{G_u}{G}u'v' - \frac{G_v}{2G}v'^2]x_v + [lu'^2 + 2mu'v' + nv'^2]U$$

Las ecuaciones de una geodésica son el sistema de ecuaciones para u y v correspondiente a hacer 0 los primeros dos corchetes.
Con esto y los teoremas de existencia y unicidad, se puede probar que dado un punto en una superfice y una dirección, existe una única geodésica que pasa por este punto y con esta dirección.

Lema: Una geodésica tiene velocidad constante: En una geódesica, el campo α' es un campo paralelo, y luego usamos un teorema pasado.

4. Superficies no en $\mathbb{R}^3$

Vemos ahora una pocas 'superficies' que no están en $\mathbb{R}^3$ y que se definene a partir de usar productos puntos diferentes a lo usual.

Definición 4.1.

Producto Punto: Es una función $\langle,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ con: a) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ b)$\langle ax + y, z\rangle = a\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ c) $\langle x, x\rangle > 0$ $\forall x \in V/\{0\}$

Producto Conformal: Dado un producto interno, un producto conforme es del tipo: $x \circ y = \dfrac{x \cdot y}{a}$ para un $a > 0$

Sea M una superficie y $p \in M$, para cada p podemos definir un producto conforme en $T_p(M)$ distinto como sigue:

$$\text{Para } v, w \in T_p(M) \quad , v \circ w = \frac{v \cdot w}{f^2(p)}$$

Donde f es una función cualquiera que da como resultado números reales. Con esto podemos definir 'superficies' en $\mathbb{R}^2$.
Para este tipo de superficies (si tienen que $F = 0$), definimos la curvatura Gaussiana como: $K = -\dfrac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\dfrac{\partial}{\partial v}(\dfrac{E_v}{\sqrt{EG}}) + \dfrac{\partial}{\partial u}(\dfrac{G_u}{\sqrt{EG}})\right)$
Se define así como una generalización de como se calculaba la curvatura en superficies comunes en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4.1.

1) **Plano de Poincaré P:**
$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con la superficie parametrizada $x(u, v) = (u, v)$ y le definimos la métrica conforme: $w_1 \circ w_2 = \dfrac{w_1 \cdot w_2}{v^2}$ con $w_1, w_2 \in T_p(M)$

Con esto tenemos que $x_u = (1,0), x_v = (0,1)$ y con esto teneos que $E = x_u \circ x_u = \dfrac{x_u \cdot x_u}{v^2} = \dfrac{1}{v^2}$ lo cual resulta ser igual a G y además $F = 0$ (que es un requisito para usar la fórmula de curvatura).
Usando la fórmula de curvatura, tenemos que $K = -1$. Lo cual le da la curvatura como la de una esfera.

2) Semiplano 2:
Definimos el plano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0 \ \}$ con la parametrización $x(u,v) = (u,v)$ y con el producto conforme: $w_1 \circ w_2 = \dfrac{w_1 \cdot w_2}{v}$
Entonces obtenemos que $x_u = (1,0) \quad x_v = (0,1) \quad$ y que $E = x_u \circ x_u = \dfrac{1}{v} \quad F = x_u \circ x_v 0$ (podemos entonces usar la fórmula para K), $G = x_v \circ x_v = \dfrac{1}{v}$
Con esto podemos calcular que $K = \dfrac{1}{2v}$

3) Plano Hiperbólico: Parametrizamos un círculo de radio 2 en el plano como $x(u,v) = (u \cos v, u \sin v)$ y le definimos un producto conforme como $w_1 \circ w_2 = \dfrac{w_1 \cdot w_2}{(1 - \frac{u^2}{4})^2}$
Con esto podemos calcular x_u, x_v, E, F, G como en los ejemplos anteriores y con esto calcular la curvatura que es $K = -1$

Esfera Estereográfica: S_N^2
Definimos la esfera estereográfica como $S^2/\{(0,0,1)\}$ Parametrizada por $x(u,v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \text{s}$
Y sea $S_t : S_N^2 \to R^2$ la proyección estereográfica al plano que es $S_t(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) = (\dfrac{\cos u \cos v}{1 - \sin v}, \dfrac{\sin u \cos v}{1 - \sin v}, 0)$
Finalmente, definimos el producto interno como $w_1 \circ w_2 = S_t(w_1) \cdot S_t(w_2)$. Con esto podemos calcular E, F, G y llegar a que $K = 0$

Estas 'superficies' en el plano tienen geodésicas (que ya no son las rectas típicas del plano). Simplemente resolvemos las ecuaciones geodésicas. Por ejemplo, resulta que las geodésicas en el plano de poincaré son círculos.

5. Holomonía y eso:

Antes que nada, recordemos un poco lo de transporte paralelo: Si tenemos un campo $F : R^3 \to R^3$, y lo restringimos a una curva α en una superficie M. Entonces, decimos que que F es paralelo a través de α si $\nabla^M_{\alpha'} F = 0$ (Es decir, la derivada direccional de F en la dirección tangente a la curva α' no tiene componente tangente, un habitante en la superficie no vería cambiar al campo, pues éste sólo cambia en la dirección normal).

También, habíamos dicho en el teorema 3.1 que dada una curva α en S y un vector ω_0 en $T_{\alpha(t_0)}(S)$ entonces podíamos 'trasladar' este vector a lo largo de α, lo que significa encontrar un campo $\omega(t)$ tal que sea paralelo en α y con $\omega(0) = \omega_0$. El teorema dice que encontrar este campo es posible y que además, este campo es único. Se llama 'trasladar' ω_0 porque intuitivamente, consiste en mover ω_0 a lo largo de la curva de tal forma que el vector como tal no cambia (para habitantes en S).

Holomonía: Empezamos con una curva α y un vector V_0 al inicio de la curva. Este vector V_0 hace un ángulo θ_0 medido con respecto a $\widehat{x}_u(0)$ (vector unitario). Luego, trasladamos V_0 a lo largo de la curva (según lo descrito antes) y llegamos hasta el final donde tenemos un vector V_f que ahora hace un ángulo θ_f con respecto a $\widehat{x}_u(f)$ (El vector unitario x_u en la posición final). La diferencia entre estos ángulos final e inicial es lo que se conoce como la holomonía de la curva α, no depende del vector V_0 que se tome como inicial.

El concepto de holomonía es especialmente importante cuando las curvas son cerradas, porque para curvas que no son cerradas, los ángulos se miden con respecto al x_u al principio y x_u al final. Pero cuando las curvas son cerradas, estos x_u coinciden, por lo que básicamente estamos calculando la diferencia entre V_0 (antes de recorrer la curva) y V_f (después de recorrer la curva y volver al lugar inicial).

Calcular cómo cambia el ángulo de un vector V_0 (con respecto a $\widehat{x_u}$ al trasladarlo a lo largo de α en una superficie S (parametrizada con $F = 0$ para simplificar).

Primero que nada por la condición de $F = 0$, tenemos que para todo punto p en la superficie, $\{\widehat{x_u}, \widehat{x_v}, \widehat{U}\}$ es una base ortonormal. Sin perdida de generalidad, digamos que V_0 tiene norma 1 y por el teorema 3.1 a, su norma se mantendrá al trasladarlo paralelamente. Además, sólo nos importan los componentes tangentes de V_0 (porque estamos viendo como habitantes en la superficie). Entonces, al trasladar V_0, obtendremos un campo vectorial que se verá como sigue:

$$V(\theta(t)) = \cos(\theta)\widehat{x_u} + \sin(\theta)\widehat{x_v}$$

Es decir, lo escribimos siempre como combinación lineal de la base (considerar que es una base ortonormal y que la base cambia de un punto a otro). Ahora queremos que este campo sea un transporte paralelo (su derivada cov. en S sea 0).

Antes de esto, nos conviene calcular las derivadas covariantes de los vectores base. Primero, lo escribimos como combinación lineal de la base.

$$\nabla^S_{\alpha'}\widehat{x_u} = w_1\widehat{x_u} + w_2\widehat{x_v} + w_3\widehat{U}$$
$$\nabla^S_{\alpha'}\widehat{x_v} = w_4\widehat{x_u} + w_5\widehat{x_v} + w_6\widehat{U}$$

Se pueden probar algunas relaciones de estos coeficientes, por ejemplo, como queremos la derivada covariante EN LA SUPERFICIE (proyectada a la superficie), los coeficientes w_3 y w_6 son 0. Por otro lado, como $F = 0$, tenemos que $\widehat{x_u} \cdot \widehat{x_v} = 0$ por lo que al derivar cov. obtenemos que $\nabla^S_{\alpha'}\widehat{x_u}\cdot x_v + \nabla^S_{\alpha'}x_v \cdot x_u = 0$, con lo que obtenemos que $w_2 = -w_4$. Similarmente, como $\widehat{x_u} \cdot \widehat{x_u} = 0$, al derivar obtenemos que $2\nabla^S_{\alpha'}\widehat{x_u} \cdot x_u = 0$ por lo que $w_1 = 0$ y $w_5 = 0$. Entonces, las fórmulas mejoradas (cuando $F = 0$) son:

$$\nabla^S_{\alpha'}\widehat{x_u} = -w\widehat{x_v}$$
$$\nabla^S_{\alpha'}\widehat{x_v} = -w\widehat{x_u}$$

Ahora bien, como queremos que $V(t)$ sea un transporte paralelo, queremos que $\nabla^S_{\alpha}V = 0$. Lo que nos lleva a:

$\nabla_{\alpha'}[\cos(\theta)\widehat{x_u} + \sin(\theta)\widehat{x_v}] = 0 \quad \Rightarrow \quad -\theta' \sin(\theta)\widehat{x_u} + \cos(\theta)\nabla^S_{\alpha'}\widehat{x_u} + \theta' \cos(\theta)\widehat{x_v} + \sin(\theta)\nabla^S_{\alpha'}\widehat{x_v} = 0$

Entonces, por las formulitas y rearreglando un poco ,

$\theta' \cos(\theta)\widehat{x_v} - \theta' \sin(\theta)\widehat{x_u} + w\cos(\theta)\widehat{x_v} - w\sin(\theta)\widehat{x_u} = 0 \quad \Rightarrow \quad [\theta' + w][-sin(\theta)\widehat{x_u} + \cos(\theta)\widehat{x_v}] = 0$

Entonces, nos queda que $[\theta' + w] = 0$, por lo que $\theta'(t) = -w(t)$ y finalmente tenemos que el ángulo varía según:

$$\theta(t) = \theta_0 - \int w(t) \quad \text{o bien,} \quad \triangle\, \theta = -\int w(t)$$

Con esta $\theta(t)$ podemos ya construir el campo vectorial $V(\theta(t))$ que es el transporte paralelo de V_0 a lo largo de α y la holomonía de la curva (el cambio entre el ángulo inicial y final de $V(t)$ con respecto a x_u se puede calcular con la integral a la que se llegó.

Expresión de w: Por las fórmulas anteriores, $w = \nabla^S_{\alpha'}\widehat{x_u} \cdot \widehat{x_v} = \nabla^S_{u'x_u+v'x_v}\widehat{x_u} \cdot \widehat{x_v} = (u'\nabla_{x_u}\widehat{x_u} + v'\nabla_{x_v}\widehat{x_v}) \cdot \widehat{x_v} = ... = ... = \dfrac{u'}{2\sqrt{EG}}E_v + \dfrac{v'}{2\sqrt{EG}}G_u$

Transporte paralelo de α':
Tenemos el vector α' sobre la curva α, podemos escribir (recordar que $F = 0$) $\alpha' = \cos(\theta)\widehat{x_u} + \sin(\theta)\widehat{x_v}$ (donde ahora θ es el ángulo entre α' y x_u).

Usando un procedimiento similar al de antes (pero con α' en vez de V), podemos llegar a que:
$\nabla_{\alpha'}\alpha' = [\theta' + w][-sin(\theta)\widehat{x_u} + \cos(\theta)\widehat{x_v}]$
Con lo cual nos queda que $||\nabla_{\alpha'}\alpha'|| = \theta' + w$

Pero la norma de $\nabla_{\alpha'}\alpha'$ es la curvatura geodésica (pues es la parte tangencial de la aceleración). Entonces $k_g = \theta' + w$
Entonces, llegamos a que una curva es geodésica sii $\theta' + w = 0$ (θ es el ángulo entre la curva y x_u).

5.1. Triángulos y eso:

Teorema 5.1. Dada una curva cerrada, si integramos w como integral de línea a lo largo de la curva, entonces:

$$\int w = \int\int K$$

Donde la integral doble es una integral de superficie evaluada en la zona dentro de la curva. Se demuestra usando el teorema de Green y la expresión de K dada en la def. 4.1.

Triángulos Dado un triángulo en una superficie S formado por tres geodésicas en la superficie. Al dar la vuelta por todo el triángulo, la curva se cierra y vuelve a sí misma y α' sigue siendo el mismo. Por lo tnato, la diferencia en ángulos al dar una vuelta debe de ser 2π. Digamos que el triángulo tiene ángulos internos i_1, i_2, i_3, entonces al dar la vuelta por el triángulo, en cada esquina se suma $\pi - i_1$ o $\pi - i_2$ o bien $\pi - i_3$. Y debido al transporte paralelo, se suma $\Delta\theta = \int w$ (que es así porque son geodésicas). Pero al integrar w, nos queda que es $\int\int K_G$.

Por lo tanto, $\pi - i_1 + \pi - i_2 + \pi - i_3 + \delta\theta = 2\pi$, por lo que :

$$\text{El excedente } i_1 + i_2 + i_3 - \pi = \int\int K_G$$

Que es la diferencia entre la suma de los ángulos y π (que sería la suma de ángulos de un triángulo en un plano).