Relatividad: Tarea 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

14 de marzo de 2021

Problema 1

Durante el curso usaremos unidades naturales, en las que $c = 1$ y medimos tiempo y distancia en metros. Para que te acostumbres a esto en este problema harás algunas conversiones entre unidades naturales y el SI. Aunque parezca a primera vista un simple ejercicio mecánico, recuerda que $c = 1$ vino de entender que el espacio y el tiempo son la misma cosa física, así que posiblemente escribir otras cantidades físicas en unidades naturales nos revele más de lo que pensamos.

a) Transforma las siguientes cantidades del SI a unidades naturales. Expresa tus resultados en términos de kg y m.

- **Energía** $E = 5J$

  Como en estas coordenadas tenemos que $c = 1$, entonces $3 \times 10^8 m/s = 1$, lo que implica que podemos transformar segundos a metros usando $\underline{1s = 3 \times 10^8 m}$.
  Usamos esto para transformar los Joules:

$$E = 5J = 5\frac{kg\ m^2}{s^2} = 5\frac{kg\ m^2}{(3 \times 10^8 m)^2} = \frac{5}{9 \times 10^{16}}\frac{kgm^2}{m^2}$$
$$= \frac{5}{9 \times 10^{16}}kg = \boxed{5{,}55 \times 10^{-17} kg}$$

- **Momento** $p = 3 \times 10^4 kg\ ms^{-1}$ **(compara tu resultado con el anterior, qué curioso)**

  Usamos de nuevo la conversión $1s = 3 \times 10^8 m$. Entonces nos queda:

$$p = 3 \times 10^4 \frac{kg\ m}{s} = 3 \times 10^4 \frac{kg\ m}{3 \times 10^8 m} = \frac{3 \times 10^4}{3 \times 10^8}\frac{kg\ m}{m} = \boxed{10^{-4} kg}$$

  Tanto el momento como la energía se miden en kg, muy curioso.

- **Densidad de Masa** $\rho = 10kg\ m^{-3}$
  Esta cantidad ya está escrita en términos de kg y de m por lo que no hace falta cambiarle nada.

b) Transforma las siguientes cantidades de unidades naturales al SI

- **Velocidad** $v = 10^{-2}$ **(siempre hablaremos de velocidades entre 0 y 1 por lo que es importante imaginarse cuál es la magnitud de éstas en unidades más humanas).**

  Podemos simplemente hacer una regla de tres. Sabemos que una velocidad de 1 corresponde a $3 \times 10^8 m/s$. Por lo que 10^{-2} corresponde a:

  $$v = 10^{-2}\frac{3 \times 10^8 m/s}{1} = \boxed{3 \times 10^6 m/s}$$

- **Presión** $P = 10^{19} kg\ m^{-3}$

  Las unidades SI de la presión deberían de ser $N\ m^{-2} = \dfrac{kgm}{s^2} m^{-2} = kg\ s^{-2}\ m^{-1}$.
  Por lo tanto, vemos que para pasar de las unidades naturales $kg\ m^{-3}$ a las unidades SI $\quad kg\ s^{-2}\ m^{-1}$, necesitamos multiplicar por $\dfrac{m^2}{s^2} = \left(\dfrac{m}{s}\right)^2$. Que tiene unidades de velocidad al cuadrado, es decir, necesitamos multiplicar por el factor de conversión c^2. Entonces nos queda:

  $$P = 10^{19} kg\ m^{-3} \ \rightarrow\ 10^{19}\ kg\ m^{-3}(c)^2 = 10^{19}(3 \times 10^8 m/s)^2\ \frac{kg}{m^3}$$
  $$= \boxed{9 \times 10^{35}\frac{kg}{ms^2}}$$

- **Densidad de energía** $U = 1kg\ m^{-3}$

  La densidad de energía en el sistema SI tiene unidades de $J\ m^{-3} = kg\ m^2\ s^{-2}\ m^{-3} = kg\ m^{-1}\ s^{-2}$. Entonces vemos que para pasar de las unidades naturales $kg\ m^{-3}$ a las unidades SI $kg\ m^{-1}\ s^{-2}$, necesitamos multiplicar por m^2/s^2.
  Este factor tiene unidades de velocidad al cuadrado, es decir, necesitamos multiplicar por el factor c^2. Nos queda:

  $$U = 1\ kg\ m^{-3} \ \rightarrow\ 1(c)^2\ kg\ m^{-3} = \ (3 \times 10^8\ m/s)^2\ kg\ m^{-3}$$
  $$= 9 \times 10^{16}\frac{kg}{ms^2} = \boxed{9 \times 10^{16}\frac{J}{m^3}}$$

c) Dos de las ecuaciones de Maxwell relacionan los campos eléctrico y magnético. En el vacío éstas son

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

¿Cómo se ven estas ecuaciones escritas en unidades naturales? ¿Cuál es la relación entre las unidades de $\vec{E}$ y las de $\vec{B}$?

Tenemos que en estas unidades $c = 1$. Por tanto, las ecuaciones de Maxwell quedan como:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Podemos así apreciar mucho mejor la simetría de estas dos leyes.

Veamos ahora las unidades de $\vec{E}$ en unidades naturales. En el SI las unidades son $m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$. Para hacer el cambio a unidades naturales, convertimos los segundos a metros:

$$\frac{m\ kg}{s^3\ A} \to \frac{m\ kg}{m^3\ A} = \frac{kg}{m^2 A}$$

Por otro lado, el campo $\vec{B}$ en el SI tiene unidades de $kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$. Para pasarlo unidades del sistema natural, convertimos los segundos a metros y nos queda:

$$\frac{kg}{s^2\ A} \to \frac{kg}{m^2\ A}$$

Con lo que vemos que el campo magnético y el eléctrico tienen las mismas unidades en unidades naturales.

Problema 2

Considera dos sistemas de referencia inerciales O, O', tal que O' se mueve con velocidad v en la dirección positiva del eje x respecto a O y el origen de ambos sistemas es el mismo evento. En clase pintamos el diagrama de espacio-tiempo desde la perspectiva de O y localizamos en éste los ejes de O'. El resultado final se muestra en la Fig. 1, la velocidad v entre los observadores es tal que los ejes de O' se inclinan en un ángulo θ respecto a los de O. En este problema encontrarás los ejes de O en el diagrama de O'

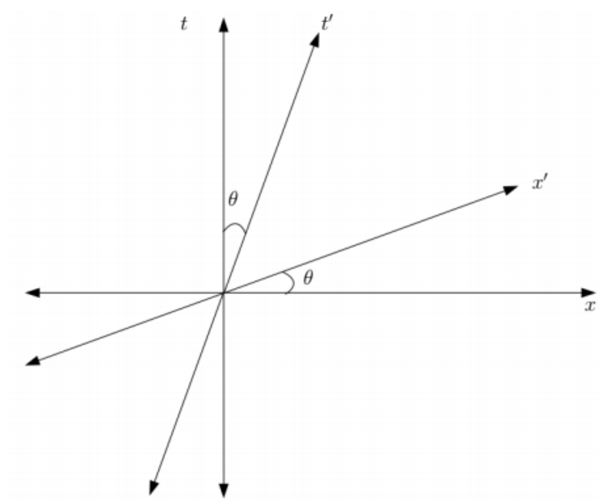
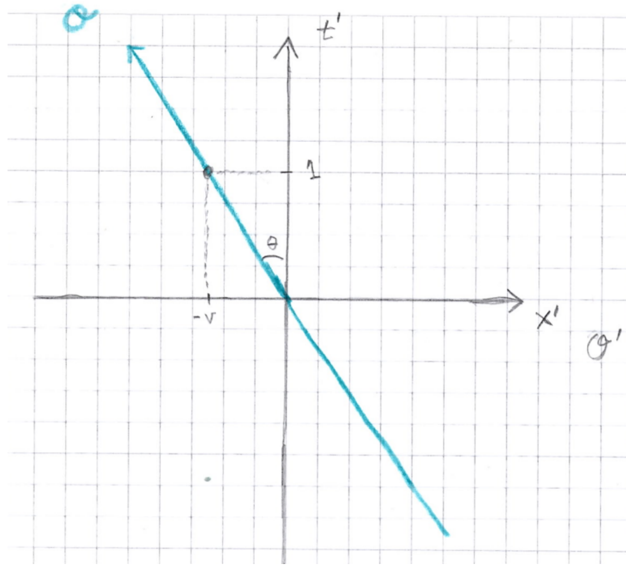


Figura 1: Diagrama de espacio-tiempo de $\mathcal{O}$.

a) Pinta la línea de mundo de O en el diagrama de O', indicando la inclinación de ésta en términos del ángulo θ

Desde el punto de vista de O', es el observador O el que se mueve. Y se mueve a velocidad $-v$ (es decir, una velocidad v pero en el sentido contrario).
Como O se mueve a velocidad $-v$, entonces, medido desde el sistema de O', en un tiempo de $t' = 1s$ tendremos que el observador O se encuentra en una posición $x' = (-v)t' = -v(1s)$. Por ello, el observador O pasará por el evento $(t', x') = (1, -v)$ como se ve en el diagrama. Con ello podemos dibujar la línea de mundo de O (sabiendo que pasa también por el origen y uniendo estos dos puntos) y podemos ver que el ángulo θ cumple que $\tan(\theta) = v$. Que es el mismo ángulo que la línea de mundo de O' en el diagrama de O.



Línea de mundo de O en diagrama de O'

b) Localiza los ejes t, x en el diagrama. No hace falta que utilices los rayos de luz como hicimos en clase, usa el hecho de que la inclinación de ambos debe estar dada en términos del ángulo θ (aunque no es mala idea hacerlo para corroborar tu respuesta)

El eje t son todos los puntos que tienen coordenada $x = 0$ para el observador O. Es decir, son los puntos en los que se encuentra el observador O (la línea de mundo de O), por lo que ya tenemos este eje.

El eje x se puede formar usando el hecho que la inclinación debe de estar dando en términos de θ.
En clase vimos que al dibujar los ejes de O' sobre el sistema O, el ángulo del eje t' se mide respecto al eje t y el ángulo del eje x' se mide en respecto al eje x pero en sentido contrario (como muestra la Figura 1 en el enunciado del problema).
Hacemos lo mismo en este caso para dibujar el sistema de O en el de O'. Ya tenemos el eje t con un ángulo θ respecto a t' y ahora usamos que el eje x tendrá un ángulo θ respecto al eje x' pero en sentido contrario. Con ello nos queda el siguiente diagrama:

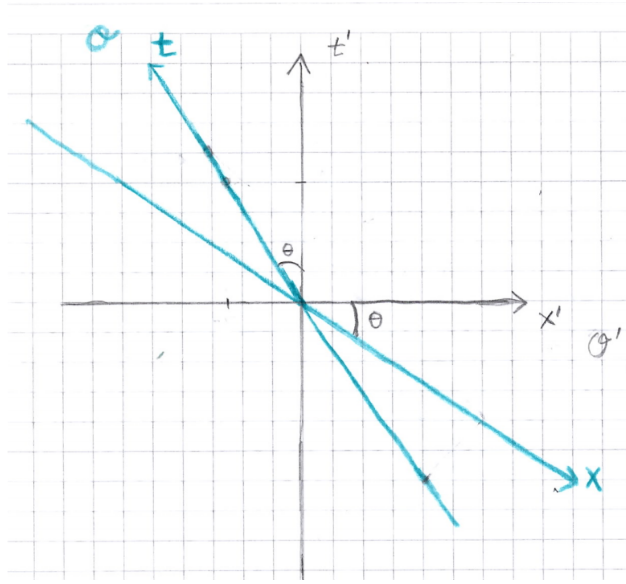
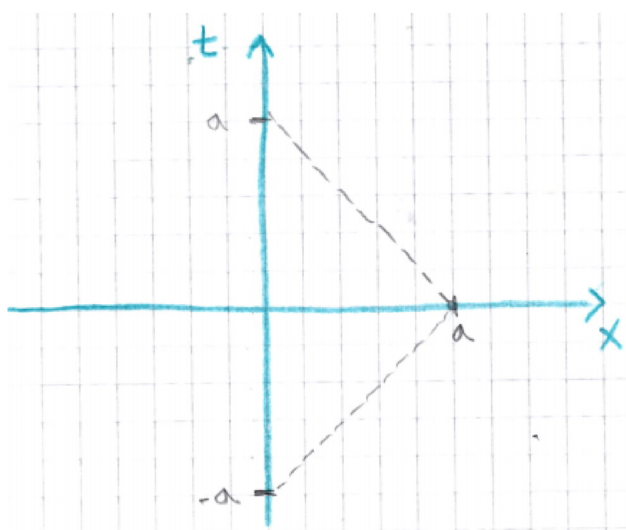


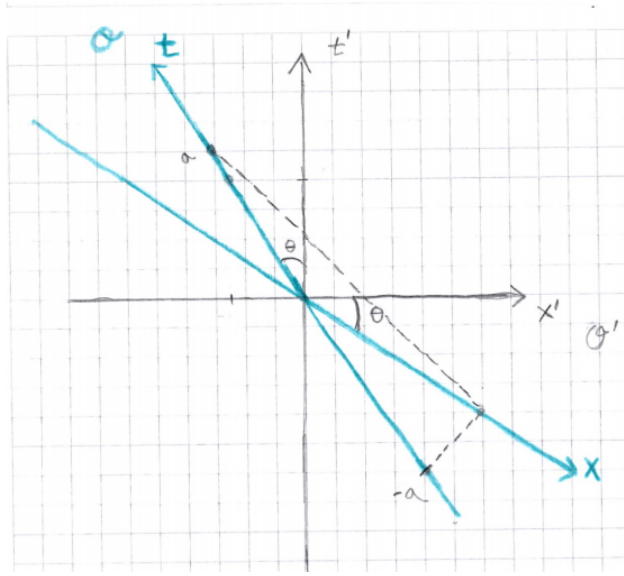
Diagrama de O en el de O'

Alternativamente, podemos usar el argumento del rayo de luz visto en clase. Podemos imaginarnos que el observador O lanza un rayo de luz hacia la derecha a un tiempo $-a$ y pone un espejo en $x = a$. EL rayo rebota en al espejo en la posición $x = a$ al tiempo $t = 0$. En el diagrama de abajo vemos el rayo de luz desde el sistema de referencia de O y notamos que rebota en el eje x.



Rayo de luz visto por O

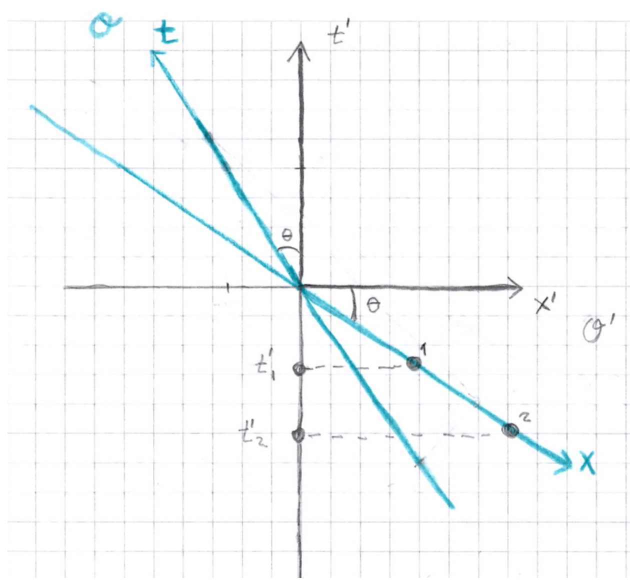
Ahora vemos el mismo rayo desde el sistema de referencia de O'. El rayo sale desde el punto en el eje t a tiempo $t = -a$. El rayo se mueve en diagonal (porque la luz siempre tiene una velocidad 1 a pesar del observador), y tiene que rebotar en algún punto de tal forma que al moverse en el sentido contrario (también en diagonal por la velocidad de la luz) llegue hasta el punto $t = a$. En el siguiente diagrama de O' mostramos dicho punto de rebote. Por lo visto en el diagrama del rayo de luz en O, dicho punto debe de pertenecer al eje x, con lo que marcamos el eje x de forma que pase por el punto de rebote.



Rayo de luz visto por O'

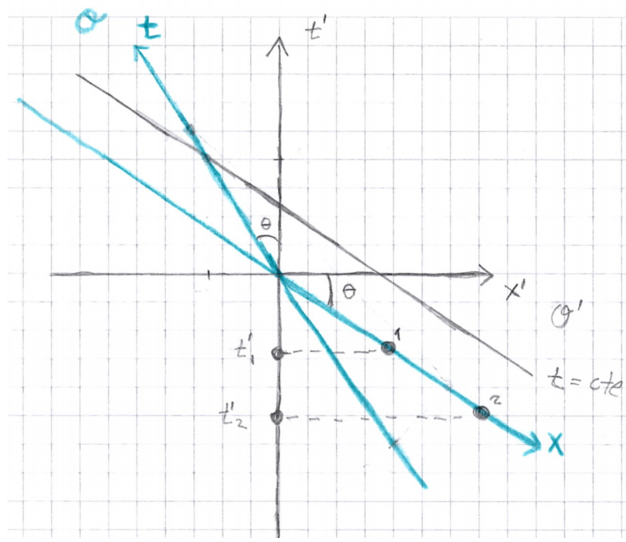
c) Elige dos eventos arbitrarios que ocurran a $t = 0$ y márcalos en el diagrama de O'. ¿Son estos eventos simultáneos para O'?

Dos eventos que sucedan a tiempo $t = 0$ deben de encontrarse sobre el eje x. Son los puntos 1 y 2 que marcamos en el dibujo.
Para O estos eventos son simultáneos (ambos suceden a tiempo $t = 0$).
Sin embargo, para O', uno de los eventos tiene coordenada temporal t'_1 y el otro t'_2 como se ven en el dibujo. Y queda claro que tienen coordenadas de tiempo en O' distintas, por lo que no son simultáneos para este observador.



d) Pinta una línea de $t = cte$ en el diagrama de O'

Una línea de $t = cte$ tiene que ser paralela al eje x. Vemos en el diagrama una línea con estas características.



e) Si $v = 10^{-2}$, ¿cuál es el valor de θ?

Como dijimos en la pregunta a) y vimos en clase, se cumple que $\tan\theta = v$.
Entonces, tendremos que:

$$\theta = \arctan(v) = \arctan(10^{-2}) = 0{,}00999967 \ \text{ radianes}$$