

# Cálculo en Variedades

Tomás Ricardo Basile Álvarez  
316617194

28 de octubre de 2020

## 1. Funciones en el Espacio Euclideo

**Definición 1.1.**  $\mathbb{R}^n$  : Son todas las n-eadas de números reales  $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$

A parte, le definimos la suma  $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$  y el producto por escalar  $a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n)$ . Entonces  $\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ .

**Norma:** Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ , definimos su norma como el real positivo  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  (Para  $n = 1$  tenemos que la norma se reduce simplemente al valor absoluto). La norma es la distancia entre el origen y el punto  $x$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.1. Propiedades de la Norma:** Para  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $a \in \mathbb{R}$ , la norma como la definimos cumple las siguientes propiedades.

- 1)  $|x| \geq 0$ ,  $|x| = 0$  sii  $x = 0$ .
- 2) Desigualdad de Cauchy:  $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq |x||y|$  (Posteriormente llamaremos a la suma de la izquierda el producto punto entre  $x$  y  $y$ )
- 3) Desigualdad del triángulo:  $|x + y| \leq |x| + |y|$
- 4)  $|ax| = |a||x|$

Dempstración: 2) Si  $x$  y  $y$  no son l.i, entonces  $\lambda y - x \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , entonces:  
 $0 < |\lambda y - x|^2 = \sum (\lambda y_i - x_i)^2 = \lambda^2 \sum y_i^2 - 2\lambda \sum x_i y_i + \sum x_i^2$ . Esta expresión se puede ver como un polinomio cuadrático de  $\lambda$  que como es siempre mayor que 0, entonces no tiene raíces, por lo que el discriminante  $b^2 - 4ac < 0$ .

Entonces,  $4(\sum x_i y_i)^2 - 4 \sum x_i^2 \sum y_i^2 < 0$

$$\begin{aligned} 3) |x + y|^2 &= \sum (x_i + y_i)^2 = \sum x_i^2 + \sum y_i^2 + 2 \sum x_i y_i \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \quad (\text{por 2}) \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

Nota: Se puede generalizar el concepto de norma para incluir normas distintas a la euclidea y para cualquier espacio vectorial. En este sentido, dado un espacio vectorial  $V$ , una norma es una función  $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}$  con la condición con que cumpla los puntos 1,3 y 4 del teorema anterior. Así, la definición anterior de norma es un caso particular de norma para  $\mathbb{R}^n$ . La norma siempre da un sentido de 'magnitud' o tamaño a los elementos de  $V$ .

**Definición 1.2. Producto punto:** Dados dos vectores  $x$  y  $y \in \mathbb{R}^n$  definido por:  
 $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$ .

**Teorema 1.2. Propiedades:** si  $x, y, w \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}$  tenemos:

- 1) Simetría:  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- 2) Linealidad en cada espacio:  $\langle ax + y, w \rangle = a\langle x, w \rangle + \langle y, w \rangle$   
 $\langle x, ay + w \rangle = a\langle x, y \rangle + \langle x, w \rangle$
- 3)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0$  si  $x = 0$
- 4)  $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- 5)  $\langle x, y \rangle = \frac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4}$

Nota: Como en el caso anterior, podemos generalizar el producto interno a espacios más generales  $V$  como una función  $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que cumpla con las tres primeras propiedades anteriores. En este sentido, el producto punto anterior definido para  $\mathbb{R}^n$  es un caso especial de un producto interno. Sin embargo, trabajaremos solamente con el producto punto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.3. Transformación lineal:**  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es lineal si  $T(ax + y) = aT(x) + T(y)$  para todo  $a \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^m$ .

Podemos definir la matriz  $A$  asociada a  $T$  (con la base canónica) donde los coeficientes de  $T(e_i)$  aparecen en la  $i$ -ésima columna.

**Ejercicio 1.1.**  $|x| \leq \sum |x_i|$

Prueba:  $(\sum |x_i|)^2 = \sum x_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j \geq \sum x_i^2 = |x|^2$

**Ejercicio 1.2.** Si  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es lineal, entonces existe un  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|T(h)| \leq M|h|$  para todo  $h \in \mathbb{R}^m$ .

$$\text{Prueba: } T(h) = Ah = (|a_1|, \dots, |a_n|)h = \begin{pmatrix} \langle a_1, h \rangle \\ \langle a_2, h \rangle \\ \dots \\ \langle a_n, h \rangle \end{pmatrix}$$

$$|T(h)| = \sum \langle a_i, h \rangle^2 \leq \sum (|a_i| |h|)^2 = |h|^2 \sum |a_i|^2$$

$$\Rightarrow |T(h)| \leq |h| \sqrt{\sum |a_i|^2}$$

**Definición 1.4. Ortogonalidad:**  $x, y \in \mathbb{R}^n$  son ortogonales si  $\langle x, y \rangle = 0$

**Teorema 1.3. Pitágoras:** Si  $x$  y  $y$  son ortogonales, entonces  $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$

$$\text{Prueba: } |x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = |x|^2 + |y|^2$$

## 1.1. Subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y topología

Estudiamos ahora la estructura de los espacios euclidos y sus conjuntos.

**Definición 1.5. Rectángulo Abierto:** En  $\mathbb{R}^n$ , un rectángulo abierto es un conjunto de la forma:  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$

**Rectángulo cerrado:**  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

**Definición 1.6. Bola abierta:** Bola de radio  $r$  y centro  $y$  es:  $B_r(y) = \{x : |y - x| < r\}$  (Es decir, todos los puntos a distancia menor que  $r$  de  $y$ ).

**Bola cerrada:** Bola de radio  $r$  y centro  $y$  es:  $\overline{B}_r(y) = \{x : |y - x| \leq r\}$  (Es decir, todos los puntos a distancia menor o igual que  $r$  de  $y$ .)

**Definición 1.7. Punto Interior:** Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  es un punto interior de  $A$  si existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(a) \subset A$

**Interior:** Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$ , el interior de  $A$  denotado  $\text{int}(A)$  es el conjunto de todos los puntos interiores de  $A$ .

**Punto frontera:**  $a \in \mathbb{R}^n$  es un punto frontera de  $A$  si para todo  $\epsilon > 0$  tenemos que  $B_\epsilon(a)$  intersecta tanto a  $A$  como a  $A^c$

**Frontera:** La frontera de  $A$  es el conjunto  $\partial A$  formado por todos los puntos frontera de  $A$

**Punto exterior:**  $a \in \mathbb{R}^n$  es un punto exterior de  $A$  si es un punto interior de  $A^c$ , es decir si existe una  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(a) \subset A^c$

**Exterior:** El exterior de  $A$  es el conjunto  $\text{ext}(A)$  formado por todos los puntos exteriores

de  $A$ .

Nota: Para la definición anterior, se puede cambiar la condición de que exista una bola abierta con  $a \in B_\epsilon(a) \subset A$ , por la condición de que exista un rectángulo abierto  $R$  con  $a \in R \subset A$ . Ya que todo dentro de una bola abierta siempre se puede encontrar un rectángulo abierto y viceversa.

Además, vemos que dado un conjunto  $A$ , un punto  $a$  necesariamente se encuentra en el interior, frontera o exterior de  $A$  y en sólo uno de estos.

**Definición 1.8. Abierto:** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es abierto si todos sus puntos son puntos interiores, es decir  $\text{int}(A) = A$

**Cerrado:** Un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado si  $C^c$  es abierto.

**Teorema 1.4. Propiedades:** 1) La unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierta. La intersección finita de conjuntos abiertos es abierta.

2) La unión finita de conjuntos cerrados es cerrada. La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.

Nota: La intersección infinita de conjuntos abiertos no es necesariamente abierta. Al igual que la unión infinita de conjuntos cerrados no es necesariamente cerrada.

Un conjunto no tiene por qué ser abierto o cerrado, puede no ser ninguna de las dos o puede ser ambas a la vez (en  $\mathbb{R}^n$  los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son  $\emptyset$  y  $\mathbb{R}^n$ )

**Definición 1.9. Cerradura:** La cerradura de  $A$  denotada  $\overline{A}$  es  $A \cup \partial A$  es decir,  $A$  junto con sus puntos frontera.

**Teorema 1.5.** Dado un conjunto cualquiera  $A$ ,  $\text{int}(A)$  es el conjunto abierto más grande que está contenido en  $A$ .

Además,  $\overline{A}$  es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a  $A$ .

**Definición 1.10.** Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$ , Una colección de abiertos  $\mathcal{O}$  es una cubierta abierta de  $A$  si  $A \subset \bigcup \mathcal{O}$

**Compacto:** Un conjunto  $A$  es compacto si para toda cubierta  $\mathcal{O}$  de  $A$ , podemos encontrar

una subcolección de  $\mathcal{O}$  con una cantidad finita de abiertos que sigue siendo cubierta de  $A$

**Teorema 1.6. Heine Borel:** En  $\mathbb{R}^n$  se cumple que un conjunto es compacto sii es cerrado y acotado. Dem: en notas de var compleja.

**Teorema 1.7.** Si cada  $A_i$  es compacto, entonces  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  es compacto. (En particular, los rectángulos cerrados son compactos)

## 1.2. Funciones y continuidad:

**Definición 1.11. Función:** Una función  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  es una regla que a cada elemento de  $\mathbb{R}^n$  le asocia un único elemento de  $\mathbb{R}^m$

**Dominio:** El conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  sobre el cual está definida  $f$ .

**Imagen de  $B \subset \mathbb{R}^n$ :**  $f(B) = \{f(x) : x \in B\} \subset \mathbb{R}^m$  Es decir, el conjunto formado por la imagen de todos los elementos de  $B$ .

**Imagen inversa de  $C \subset \mathbb{R}^m$ :**  $f^{-1}(C) = \{x : f(x) \in C\} \subset \mathbb{R}^n$ . El conjunto formado por todos los elementos de  $\mathbb{R}^n$  tales que su imagen está en  $C$ .

La composición, suma de funciones se define como se espera. Una función  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$  determina  $m$  funciones componentes  $f_1, \dots, f_m : A \longrightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

La función proyección en  $i$  es  $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\pi_i(x) = \pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ .

**Definición 1.12. Límite:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  denota que  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta$  y  $x \in A$  entonces  $|f(x) - b| < \epsilon$

Es decir, podemos acercarnos arbitrariamente a  $b$  con  $f(x)$  si acercamos  $x$  a  $a$  (sin llegar a  $a$ ).

**Definición 1.13. Continuidad:**  $f$  es continua en  $a \in A$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Es decir, acercarse lo suficiente a  $a$ , hace que  $f(x)$  se acerque arbitrariamente a  $f(a)$ .

**Teorema 1.8.**  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$  es continua en  $A$  si para todo abierto  $U \subset \mathbb{R}^m$  entonces  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $A$ .

Dem: Sea  $a \in f^{-1}(U)$  entonces, por def.  $f(a) \in U$ , pero como  $U$  es abierto, podemos encontrar una bola  $B_\epsilon(f(a))$  tal que  $f(a) \in B_\epsilon(f(a)) \subset U$ . Como  $f$  es continua en  $a$ , entonces

existe una  $\delta$  tal que si:

$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$ , es decir, para todo  $x \in B_\delta(a)$  tenemos que  $f(x) \in B_\epsilon(f(a))$

Pero por lo dicho antes, esto significa que  $f(x) \in U$

Por lo tanto, para todo  $x \in B_\delta(a)$  tenemos que  $f(x) \in U$ . Lo que significa que  $B_\delta(a) \subset f^{-1}(U)$

Y por lo tanto  $f^{-1}(U)$  es abierto. El regreso es fácil.

**Teorema 1.9.** Si  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$  es continua y  $A$  compacto, entonces  $f(A) \subset \mathbb{R}^m$  es compacto.

Dem: Si tomamos una cubierta abierta  $O$  de  $f(A)$ , cada elemento de la cubierta abierta es abierto, por lo que por el teorema anterior, su preimagen es abierta. Juntamos todas estas preimágenes y cubrimos así a  $A$ . Luego, como  $A$  es compacto, existe una subcubierta finita. Los elementos originales de  $O$  cuyas preimágenes están en esta cubierta finita son una cubierta finita de  $f(A)$ .

**Corolario:** Si  $f : \mathbb{R}^n \longleftarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces  $f$  alcanza un max y un min.

**Definición 1.14.** Dado  $f : A \longleftarrow \mathbb{R}$  acotada, definimos:

$$M(a, f, \delta) = \sup \{f(x) : |x - a| < \delta\}$$

$$m(a, f, \delta) = \inf \{f(x) : |x - a| < \delta\}$$

Es decir,  $M$  mide el supremo de las imágenes de  $f$  en el círculo de radio  $\delta$  alrededor de  $a$ .

El valor más grande de  $f$  para elementos  $\delta$  cerca de  $a$ .

$m$  mide el ínfimo de lo mismo.

**Oscilación:** La oscilación de  $f$  en  $a$   $o(f, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)]$  La oscilación mide la distancia entre el máximo de  $f$   $\delta$  cerca de  $a$  y el mínimo de  $f$   $\delta$  cerca de  $a$ .

**Teorema 1.10.** La función  $f$  es continua en  $a$  sii  $o(f, a) = 0$  Dem: si  $f$  es continua en  $a$  entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

$$\text{Luego: } M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) = |M(a, f, \delta) - f(a) + f(a) - m(a, f, \delta)| \leq |M(a, f, \delta) - f(a)| + |f(a) - m(a, f, \delta)| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

Por lo tanto, como es cierto para todo  $\epsilon$ , entonces  $o(f, a) = 0$

**Teorema 1.11.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  cerrado. Si  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$  es acotada y  $\epsilon > 0$  entonces  $\{x \in A : o(f, a) \geq \epsilon\}$  es cerrado.

Es decir, el conjunto de puntos  $\epsilon$  - discontinuos es cerrado.

## 2. Diferenciación

Definiciones básicas de diferenciación. Recordamos que para una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  decimos que es diferenciable en  $a$  si existe un número que denotamos por  $f'(a)$  tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad (1)$$

Para funciones más generales  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definimos un concepto de diferenciabilidad un poco distinto (que posteriormente veremos que en el caso especial de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  significa lo mismo).

Decimos que  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en  $a \in A$  si es posible aproximar  $f$  cerca de  $a$  como una función lineal. (En realidad  $f$  se aproximaría como una función lineal más un traslado). Es decir,  $f$  es diferenciable cerca de  $a$  si localmente (en  $a$ ) tiene un comportamiento lineal.

**Definición 2.1. Diferenciable:**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en  $a$  si existe una función lineal que denotamos por  $Df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - (f(a) + Df_a(h))|}{|h|} = 0 \quad \text{donde } h \text{ es un vector}$$

O bien, equivalentemente:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - (f(a) + Df_a(x-a))|}{|x-a|} = 0$$

Esta última definición se puede interpretar como que  $(f(a) + Df_a(x-a))$  es una función (que es lineal más una traslación) que aproxima muy bien a  $f(x)$  cerca de  $a$ .

Esta función lineal  $Df_a$  es llamada la derivada de  $f$  en  $a$  o el Jacobiano de  $f$  en  $a$  y como es una función lineal, se puede representar como una matriz, llamada matriz Jacobiana en  $a$ .

Vale la pena notar, que la derivada de  $f$  en un punto  $a$  es una función (lineal). Pero, si  $f$  es diferenciable en todo  $A$  entonces para todo  $x \in A$  existe su propia función lineal o Jacobiano  $Df_x$ . Usualmente, si  $f$  es diferenciable en todo  $A$  entonces podemos escribir  $Df_x$  de forma general (es decir sin indicar un punto  $x$  en particular, sino usar  $(x_1, \dots, x_n)$  y luego, si queremos el Jacobiano en especial en el punto  $a = (a_1, \dots, a_n)$  simplemente usamos la expresión de  $Df_x$  y sustituimos  $x$  por  $a$ .

Podemos ver que en el caso particular de funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la definición general se reduce a la definición dada en (1). Pues si  $f$  es diferenciable en  $a$  en el sentido general, entonces existe una función lineal  $Df_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - (f(a) + Df_a(h))|}{|h|} = 0$ . Pero una función lineal de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  consiste simplemente en multiplicar por un real, entonces la función  $Df_a(h) = f'(a)h$  donde  $f'(a)$  es dicho real que define a la transformación lineal. Entonces el límite queda como:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - (f(a) + f'(a)h)|}{|h|}$  que es equivalente a la definición (1).

**Teorema 2.1.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en  $a \in \mathbb{R}^n$  entonces el Jacobiano de  $f$  en  $a$ ,  $Df_a$  es único.

Dem: Fingimos que hay otra transformación con la misma cualidad  $\mu$  y calculamos  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(h) - Df_a(h)}{|h|}$ , sumamos y restamos  $f(a+h) - f(a)$  y usamos la propiedad que define al Jacobiano para demostrar que el lím es 0.

**Teorema 2.2.** Si  $f$  es diferenciable en  $a$  entonces  $f$  es continua en  $a$ . Dem: Si  $f$  es diff en  $a$  entonces  $\lim_{h \rightarrow 0} |f(a+h) - f(a) - Df_a(h)| = 0 \Rightarrow f(a+h) - f(a) = Df_a(h) + r(h)$  con  $r$  una función tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0$  y como  $Df_a$  es lineal entonces existe una  $M$  constante tal que  $Df_a(h) \leq Mh \Rightarrow Df_a(h) \rightarrow 0$   
Por lo tanto,  $f(a+h) - f(a) = 0$

## 2.1. Teoremas Básicos

**Teorema 2.3. Regla de la Cadena:** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en  $a$  y  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  es diferenciable en  $f(a)$  entonces la composición  $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  es diferenciable en  $a$  y además  $D(g \circ f)_a = Dg_{f(a)} \circ Df_a$  Intuición:  $f$  se puede aproximar alrededor de  $a$  con  $Df_a$  y  $g$  se puede aproximar alrededor de  $f(a)$  con  $Dg_{f(a)}$  Entonces  $g \circ f$  se puede aproximar primero como  $g(Df_a)$  y luego como  $Dg_{f(a)}(Df_a)$  que es una transformación lineal y aproxima a  $g \circ f$

**Teorema 2.4.** 1) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función constante, entonces  $Df_a = 0$  (la transformación 0).

2) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es lineal, entonces  $Df_a = f$ .

3)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , entonces  $f$  es diferenciable en  $a \in \mathbb{R}^n$  sii cada función componente  $f_i$  es



diferenciable y:  $Df_a = (Df_{1a}, \dots, Df_{ma})$ .

Donde cada  $Df_{ia}$  es el jacobiano de  $f_i$  en  $a$  (que en este caso va a ser una simple columna).

4) Si  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es  $s(x, y) = x + y$  entonces:  $Ds_{(a,b)} = s$

5) Si  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\rho(x, y) = xy$  entonces:  $D\rho_{(a,b)}(x, y) = bx + ay$  Entonces,  $D\rho_{(a,b)} = (b, a)$

Intuición: 1) Si  $f$  es constante, entonces la transformación afín que mejor la aproxima es la misma constante y por tanto su parte lineal es 0.

2) Si  $f$  es lineal, entonces la transformación lineal que mejor la aproxima es obviamente la propia  $f$ .

3) Si  $f$  se puede aproximar como una trans lineal, es de esperar que cada función componente se puede aproximar como una trans lineal.

4) Se sigue de 2)

$$5) \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|\rho(a+h, b+k) - \rho(a, b) - D\rho(h, k)|}{|(h, k)|} = \frac{|(a+h)*(b+k) - a*b - bh - ak|}{|(h, k)|} = \frac{|h||k|}{|(h, k)|} = 0$$

**Corolario:** Si  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables en  $a$  entonces:

$$D(f + g)_a = Df_a + Dg_a \quad D(fg)_a = g(a)Df_a + f(a)Dg_a \quad D(f/g)_a = \frac{g(a)Df_a - f(a)Dg_a}{|g(a)|^2}$$

## 2.2. Derivada Parcial

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, entonces podemos definir la derivada con respecto a cada una de las variables por separado. Por ejemplo, la derivada parcial de  $f$  en  $a \in \mathbb{R}^n$  con respecto a la  $i$ -ésima variable es:

$$D_i f(a) = \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}$$

En muchos libros, suele denotarse esta derivada como  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ .

Que básicamente consiste en interpretar a  $f$  como si fuera una función de únicamente la  $i$ -ésima variable y derivar con respecto a esta variable.

Si  $D_i f(x)$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  entonces tenemos la función derivada de  $f$  con respecto a la  $i$ -ésima variable.

**Teorema 2.5.** Si  $D_{i,j}f$  y  $D_{j,i}f$  existen como funciones y son continuas, entonces son iguales.

De hecho, si las derivadas parciales de  $k$ -ésimo orden son continuas, entonces no importa

el orden de derivación.

**Teorema 2.6.** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $f$  tiene un max o min en un punto  $a$  y  $D_i f(a)$  existe, entonces  $D_i f(a) = 0$  para toda  $i$ .

## 2.3. Más sobre Jacobianos

Ahora presentamos la manera de calcular el Jacobiano.

**Teorema 2.7.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en  $a$ , entonces  $D_j f^i(a)$  existe para  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  (Es decir, la derivada parcial con respecto a la  $j$ -ésima variable del componente  $i$ -ésimo de  $f$ ) y además,  $Df_a$  (el jacobiano) viene dado por la matriz de  $m \times n$ ,  $(D_j f_a^i)$

Sin embargo, el converso de teorema no es cierto, que existan todas las derivadas parciales de las componentes de  $f$  no implica que  $f$  sea diferenciable, para esto hace falta una nueva condición:

Si todas las derivadas parciales de  $f$  existen y son Continuas, ahora sí esto implica que  $f$  es diferenciable y el Jacobiano tiene la matriz que indica el teorema.

## 2.4. Función Inversa:

Inversas para funciones de una variable: Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es clase  $C^1$  en un punto  $a$  en el que  $f'(a) > 0$  entonces existe un conjunto abierto  $V$  en el que  $f'(x) > 0$  en todo  $V$  y por tanto  $f$  es estrictamente creciente, por lo que es biyectiva en el conjunto  $V$ . Entonces existe una función inversa  $f^{-1}$  definida en un conjunto  $W$  que contiene a  $f(a)$ .

Y además  $f^{-1}$  es diferenciable en  $y \in W$  y  $(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

**Teorema 2.8. Teorema de la Función Inversa:** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable en un conjunto que contiene a  $a$  y  $\det |Df_a| \neq 0$ . Entonces existe un conjunto  $V$  abierto que contiene a  $a$  y un conjunto abierto  $W$  que contiene a  $W$  tal que:  $f : V \rightarrow W$  tiene una inversa continua  $f^{-1} : W \rightarrow V$  que es diferenciable para todo  $y$  en  $W$  y con:

$$Df_y^{-1} = [Df^{-1}(y)]^{-1}$$

Intuición: Como  $f$  es dif en  $a$  entonces se puede aproximar con la transformación lineal  $Df_a$ . Y como esta función tiene un determinante no 0, entonces es invertible. Luego, como ésta era una buena aproximación de  $f$  cerca de  $a$ , entonces  $f$  también es invertible (al menos localmente cerca de  $a$ ). Además, la inversa se podrá aproximar localmente con la inversa de la transformación lineal  $Df$

## 2.5. función implícita

Empezamos con el caso para  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y)$ . Entonces si escogemos un  $(a, b)$  tal que  $f(a, b) = 0$  y que  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ , podremos encontrar una función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un abierto cerca de  $a$  tal que:  $f(x, g(x)) = 0$  para todo  $x$  en dicho abierto.

Es decir, si tenemos un punto en el que  $f$  vale 0 y  $f_y \neq 0$  entonces podemos reemplazar la  $y$  por una función de  $x$  y para cada  $x$  cercana al punto podemos encontrar un punto  $y = g(x)$  tal que  $f(x, y) = 0$

**Teorema 2.9.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $f(x_1, \dots, x_n)$  entonces, si  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$  y además  $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$  entonces podemos encontrar una función que 'sustituya' a la  $x_n$   $g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$  para puntos  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  suficientemente cercanos a  $a$ .

Además, podemos encontrar las parciales de esta  $g$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_n}}$$

## 3. Integración

La definición de integral para funciones escalares multivariadas es muy parecida a la de funciones de una variables, por lo que será sencillo definir los conceptos importantes de integración.

Dado un intervalo  $[a, b]$ , definimos una **partición**  $P$  como un conjunto  $\{a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b\}$ . Para rectángulos de mayor dimensión, como  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  una partición  $P$  es una colección  $P = (P_1, \dots, P_n)$  donde cada  $P_i$  es una partición de  $[a_i, b_i]$ . Y esta partición parte el rectángulo original en muchos subrectángulos pequeños  $S$  que sólo se

intersectan en la frontera y que juntos forman a  $R$ . Ahora definimos:

**Definición 3.1.** Para un subrectángulo  $S$  y una función acotada  $f$ , definimos:

$$m_S(f) = \inf\{f(x) : x \in S\} \quad M_S(f) = \sup\{f(x) : x \in S\}$$

**Volumen de  $S$ :**  $v(S) = (b_1 - a_1) * \dots * (b_n - a_n)$

**Suma inferior:**  $L(f, P) = \sum_S m_S(f) * v(S)$

**Suma superior:**  $U(f, P) = \sum_S M_S(f) * v(S)$

**Lema:** Si  $P'$  refina a  $P$  (Es decir sus subrectángulos están metidos en los subrectángulos de  $P$ ) entonces

$$L(f, P) \leq L(f, P') \quad U(f, P') \leq U(f, P)$$

**Corolario:** Si  $P$  y  $Q$  son dos particiones cualquiera entonces:  $L(f, P) \leq U(f, Q)$

**Definición 3.2. integrable:** Una función  $f$  es integrable en  $A$  si  $\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\}$

**Teorema 3.1.** Equivalencia: Una función  $f$  es integrable si para toda  $\epsilon > 0$  existe una partición  $P$  tal que  $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$

### 3.1. Medida y contenido cero

**Definición 3.3. Contenido Cero:** Decimos que un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tiene contenido cero si para toda  $\epsilon > 0$  existe una cubierta FINITA de rectángulos  $\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$  que cubre a  $A$  y que cumple  $\sum_{i=1}^m a(R_i) < \epsilon$ .

**Definición 3.4. Medida Cero:** Decimos que un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tiene medida cero si para toda  $\epsilon > 0$  existe una cubierta NUMERABLE (o finita) de rectángulos  $\{R_1, R_2, \dots\}$  que cubre a  $A$  y que cumple  $\sum_{i=1}^{\infty} a(R_i) < \epsilon$ .

Es decir, un conjunto  $A$  tiene contenido cero, si es tan "chiquito" o "delgado" que podemos encontrar una cubierta finita de rectángulos que cubren  $A$  y que además la suma de sus áreas se puede hacer tan chica como queramos. Los conjuntos de medida cero pueden ser un poco más "grandes" ya que podemos darnos el lujo de cubrirlos con una infinidad numerable de rectángulos en vez de con una cantidad finita, pero aún con la condición de que la suma de las áreas de los rectángulos se pueda hacer tan chiquita como queramos.

Claramente, un conjunto de contenido cero, automáticamente es de medida cero, pero el regreso no siempre es válido.

Nota: Para las definiciones de contenido y medida cero, se pueden usar equivalentemente rectángulos abiertos en vez de cerrados. Que son iguales pero sin la frontera, es decir, en vez de ser el producto cartesiano de intervalos cerrados, un rectángulo abierto es el producto cartesiano de intervalos abiertos. Con este cambio no varía la definición de contenido y medida cero.

### **Teorema 3.2. Propiedades sencillas**

#### **1. Si $A$ y $B$ tienen contenido cero, entonces $A \cup B$ tienen contenido cero:**

Prueba: Sea  $\epsilon > 0$  como  $A$  y  $B$  tienen contenido cero, hay una familia finita de rectángulos que cubren a  $A$  y la suma de sus áreas es menor que  $\frac{\epsilon}{2}$ . De la misma manera, como  $B$  tiene contenido cero, hay una familia finita de rectángulos que cubren a  $B$  y la suma de sus áreas es menor que  $\frac{\epsilon}{2}$ . Entonces, si unimos las dos familias de rectángulos, tenemos una familia que sigue siendo finita, que cubre a  $A \cup B$  y que la suma de sus áreas es menor que  $\epsilon$ . Esta propiedad se puede generalizar por inducción, si tenemos una cantidad FINITA de conjuntos de contenido cero, su unión es de contenido cero. Sin embargo no se puede generalizar para cantidades infinitas de conjuntos de contenido cero.

#### **2. Si $A$ y $B$ tienen medida cero, entonces $A \cup B$ tiene medida cero.**

Prueba: igual que la anterior, pero ahora las cubiertas son numerables, y al tomar la unión de las dos cubiertas, sigue siendo una cubierta numerable. Esta propiedad sí se puede generalizar para cualquier cantidad finita o numerable de conjuntos con medida cero. Por que si tenemos una cantidad numerable de conjuntos con medida cero y juntamos todas sus cubiertas numerables, esta cubierta enorme sigue siendo numerable (porque la unión numerable de conjuntos numerables es numerable).

**3. Si  $A$  es de contenido cero y  $B \subset A$ , entonces  $B$  es de contenido cero.**

Prueba: Sea  $\epsilon > 0$ . Como  $A$  es de contenido cero, existe una cubierta finita de rectángulos  $\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$  que cubre a  $A$  y que cumple  $\sum_{i=1}^m a(R_i) < \epsilon$ . Pero como  $B \subset A$ , entonces esta cubierta finita también cubre a  $B$  (y hasta sobran rectángulos) y sigue cumpliendo que  $\sum_{i=1}^m a(R_i) < \epsilon$ , entonces  $B$  es de contenido cero.

**4. Si  $A$  es de medida cero y  $B \subset A$ , entonces  $B$  es de medida cero.**

Prueba: igual que la anterior.

**5. Si  $A$  y  $B$  son de contenido (medida) cero, entonces  $A \cap B$  es de contenido (medida) cero:**

Prueba: Notamos que  $A \cap B \subset A$  pero  $A$  tiene contenido (medida) cero, entonces por la propiedad 3 (4),  $A \cap B$  tiene contenido (medida) cero.

**6. Si  $A$  y  $B$  son de contenido (medida) cero, entonces  $A \Delta B$  es de contenido (medida) cero:**

Prueba: Notamos que por la propiedad 1 (2),  $A \cup B$  tiene contenido (medida) cero. Además,  $A \Delta B \subset A \cup B$  pero  $A \cup B$  tiene contenido (medida) cero, entonces por la propiedad 3 (4),  $A \Delta B$  tiene contenido (medida) cero.

**7. Si  $A$  es de medida cero y es COMPACTO, entonces  $A$  es de contenido cero:**

Prueba: Sea  $\epsilon > 0$ , Como  $A$  es de medida cero, existe una cubierta numerable de rectángulos ABIERTOS  $\{R_1, R_2, \dots\}$  que cubren a  $A$  y que cumplen:  $\sum_{i=1}^{\infty} a(R_i) < \epsilon$  (es válido usar rectángulos abiertos, porque como dice la nota, la definición de medida y contenido cero es equivalente sin importar si usamos rectángulos cerrados o abiertos).

Como  $A$  es compacto, por Heine Borel, existe una subcubierta finita  $\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$  que sigue cubriendo a  $A$  y que naturalmente, cumple  $\sum_{i=1}^m a(R_i) < \epsilon$ , entonces  $A$  es de contenido

cero.

Entonces todo conjunto de contenido cero tiene medida cero, pero si es de medida cero, sólo podemos asegurar que es de contenido cero cuando sea además compacto.

### 3.2. Contenido de Jordan

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  acotado y sea  $R$  un rectángulo que contiene a  $A$ , y  $P$  una partición de  $R$  en rectángulos  $R_i$ .

**Definición 3.5.** Definimos la suma interior como:

$$S^-(P) = \sum a(R_i) \quad | \quad R_i \subset A$$

Es decir, la suma de las áreas de los rectángulos de la partición pero únicamente de aquellos metidos  $A$

Definimos la suma exterior como:

$$S^+(P) = \sum a(R_i) \quad | \quad R_i \cap A \neq \emptyset$$

Es decir, la suma de las áreas de todos los rectángulos de la de la partición que tocan a  $A$ .

Claramente, para cualquier partición se cumple que  $S^-(P) \leq S^+(P)$  y para un refinamiento  $P'$  de  $P$  se cumple  $S^-(P) \leq S^-(P')$  y  $S^+(P) \geq S^+(P')$ . Es decir, con refinamientos, las áreas interiores se hacen más grandes (y se acercan a lo que definiremos como área de  $A$ ) mientras que las áreas exteriores se hacen chicas (y se acercan al área de  $A$ )

**Definición 3.6.** Y definimos el área interior de  $A$  como:

$$V^-(A) = \sup\{S^-(P) \mid P \text{ es partición de } R\}$$

Y el área exterior de  $A$  como:

$$V^+(A) = \inf\{S^+(P) \mid P \text{ es partición de } R\}$$

**Definición 3.7. Jordan Medible** Finalmente decimos que  $A$  es tiene contenido de Jordan (o es Jordan medible) si  $V^+(A) = V^-(A)$  y a este número le llamamos contenido de Jordan de  $A$  o volumen de  $A$  que denotamos simplemente como  $V(A)$

Como vemos, estas definiciones se parecen mucho a la construcción que hicimos de la integral. Con esta idea, podemos encontrar una definición alternativa a contenido de Jordan usando integrales.

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ , primero definimos la función característica de  $A$  como:

**Función característica de  $A$**  : Es la función  $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

**Definición alternativa de contenido de Jordan:** Ahora digamos que  $R$  es un rectángulo que cubre a  $A$ , entonces  $A$  es Jordan medible si:

$\int_R \chi_A$  existe (es decir la función  $\chi_A$  es integrable en  $R$ .)

Y el valor de esta integral es el contenido de Jordan o volumen de  $A$  que denotamos como  $V(A)$

Se puede demostrar la igualdad entre las dos definiciones de contenido de Jordan viendo las semejanzas entre la construcción que se hizo de contenido de jordan y la construcción de la integral con la función  $\chi_A$

**Teorema 3.3. Propiedades de contenido de Jordan:**

1.  $A$  es **Jordan medible** con  $V(A) = 0$  sii  $A$  tiene **contenido cero**.

Prueba:  $\rightarrow$ ) Si  $A$  es JM con  $V(A) = 0$ , Entonces, usando la def. alternativa,  $\chi_A$  es integrable con  $\int \chi_A = 0$ .



Lo que quiere decir que  $\overline{\int} \chi_A = \inf \{U(\chi_A, P) : P \text{ es partición}\} = 0$

Por def. de ínfimo, para toda  $\epsilon > 0$  existe una partición  $P_\epsilon$  con  $0 + \epsilon > U(\chi_A, P_\epsilon)$ . Pero

$$U(\chi_A, P_\epsilon) = \sum_{R_i \in P_\epsilon} [\sup\{\chi_A(x) \mid x \in R_i\}]a(R_i)$$

Pero este supremo  $\sup\{\chi_A(x) \mid x \in R_i\}$ , por la def. de  $\chi_A$ , valdrá 1 en los rectángulos que intersectan a  $A$  y 0 en los otros.

Entonces,  $\epsilon > U(\chi_A, P_\epsilon) = \sum_{i=1}^m a(R_i) : R_i \cap A \neq \emptyset$  Y estos  $R_i$  forman una cubierta de  $A$

Por lo tanto,  $\forall \epsilon > 0 \exists$  una cubierta de rectángulos con  $\sum_{i=1}^m a(R_i) < \epsilon$

$\leftarrow$ ) Si  $A$  tiene contenido cero, hay que probar que  $\chi_A$  es integrable y su integral vale 0.

Como ya se mencionó en la ida, la suma superior de  $\chi_A$  coincide con sumar las áreas de los rectángulos que intersectan a  $A$  (Porque en estos rectángulos hay puntos donde la función vale 1 y si no intersecta, la función vale 0 en todo el rectángulo). Luego, como estas sumas de áreas se pueden hacer tan chicas como queramos (por ser  $A$  de contenido cero) entonces las sumas superiores se pueden hacer tan chicas como queramos. Entonces la integral superior (que es el ínfimo de las sumas superiores) vale 0.

Por otro lado, la integral inferior de  $\chi_A$  es necesariamente mayor o igual a 0 (porque la función nunca toma valores negativos), pero no puede ser mayor a la integral superior. Luego, la integral inferior vale exactamente lo mismo que la superior, es decir 0.

Como la integral inferior y la superior valen 0, entonces  $\chi_A$  es integrable y por tanto  $A$  es JM con  $V(A) = 0$

Con esto vemos, que en la primera sección, cuando decíamos que un conjunto tenía contenido cero, bien podríamos haber dicho que el conjunto es JM y su volumen es 0.

2. Si  $R$  es un rectángulo, entonces el contenido de Jordan o volumen de  $R$  coincide con el volumen que habíamos dado cuando definimos un rectángulo.

3. Si  $A$  y  $B$  son Jordan medibles, entonces  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $A \Delta B$  son Jordan medibles. (se demostrará más tarde con otra equivalencia a ser JM)

4. **Positividad:** Si  $A$  es Jordan medible, entonces  $V(A) \geq 0$

Prueba: La medida de Jordan de  $A$  es  $\int \chi_A$  (que existe porque  $A$  es JM, pero claramente esta integral es mayor o igual a cero porque  $\chi_A$  es una función que no toma valores negativos.)

5. **Aditividad:** Si  $A$  y  $B$  son Jordan medibles y  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $V(A \cup B) = V(A) + V(B)$  (Se puede generalizar a una cantidad finita de conjuntos que no se intersecten entre sí)

Prueba: Se puede ver fácilmente que como  $A$  y  $B$  no se intersectan, la función  $\chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B$ . Luego  $V(A \cup B) = \int \chi_{A \cap B} = \int \chi_A + \chi_B = \int \chi_A + \int \chi_B = V(A) + V(B)$   
(Faltaría probar que la integral se puede separar como se hizo)

6. **Monotonía:** Si  $A$  y  $B$  son Jordan medibles y  $A \subset B$  entonces  $V(A) \leq V(B)$

7. Si  $A$  y  $B$  son Jordan medibles, entonces  $V(A \cup B) = V(A) + V(B) - V(A \cap B)$   
(la propiedad 5 es un corolario de ésta) (Además, una forma más útil es simplemente la llamada **Subaditividad:**  $V(A \cup B) \leq V(A) + V(B)$ )

### Teorema 3.4. Teorema de integrabilidad importante:

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto acotado y sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Extendemos  $f$  a todo un rectángulo que cubra  $A$  y hacemos que  $f$  afuera de  $A$  valga cero y que adentro no cambie, para así poder definir la integral. Entonces  $f$  es integrable en  $R$  sii el conjunto de puntos donde  $f$  es discontinua es de medida cero.

**Corolario importante:** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es Jordan medible sii su frontera tiene

medida cero.

Dem: Si  $A$  es Jordan medible, según la segunda definición de Jordan medible, significa que la función  $\chi_A$  es integrable. Pero por el teorema importantísimo, si  $\chi_A$  es integrable, es porque su conjunto de discontinuidades tiene medida cero. Pero, dónde es discontinua  $\chi_A$ ? Pues viendo la def. de  $\chi_A$ , es claro que es discontinua en la frontera de  $A$  porque para los puntos justo afuera, la función vale 0 y para los puntos justo adentro de  $A$ , la función salta al 1. Entonces es discontinua en  $\partial A$  y por la ida del teorema,  $\partial A$  tiene medida cero.

El regreso es igual.

### 3.3. Teorema de Fubini

Ya vimos cómo se define la integral de una función  $f$  en un rectángulo  $R$ . Sin embargo, esta definición no nos ayuda en nada si queremos realmente calcular la integral, sería imposible calcularla haciendo particiones y sacando ínfimos y supremos hasta el cansancio. Para esto nos ayuda el teorema de Fubini, el cual a grandes rasgos dice que para calcular la integral de una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en un rectángulo, no es necesario aprender ningún método nuevo sino que bastará con aplicar dos veces los métodos para integrar funciones de una variable.

**Teorema 3.5.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset \mathbb{R}^m$  rectángulos cerrados y sea  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable, entonces para una  $x \in A$  fija, definimos  $g_x : B \rightarrow \mathbb{R}$  como  $g_x(y) = f(x, y)$  (que es el 'corte' de  $f$  para  $x$  constante) y definimos:

$$\begin{aligned} L(x) &= \sup\{L(g_x, P_B)\} = \sup\{L(f, P_B)\} \\ U(x) &= \inf\{U(g_x, P_B)\} = \inf\{U(f, P_B)\} \end{aligned}$$

Entonces  $L$  y  $U$  son integrables en  $A$  y:

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f &= \int_A L \\ \int_{A \times B} f &= \int_A U \end{aligned}$$

Nota: En la práctica, es común que la  $g_x$  sea integrable, con lo cual se puede llegar al resultado más sencillo:  $\int_{A \times B} f = \int_A \left( \int_B f dy \right) dx$

### 3.4. Teorema de cambio de Variable:

Por el teorema de Fubini, ya podemos realizar integrales sobre rectángulos, sin embargo, muchas veces nos encontramos con integrales sobre conjuntos que no son rectángulos. Para

integrar sobre un conjunto que no sea un rectángulo, es necesario usar límites de integración que sean variables.

Es decir, si queremos integrar  $f$  sobre el conjunto  $A$ , es necesario encontrar una función  $\phi_1(x)$  y  $\phi_2(x)$  tal que para una  $x$  fija en el conjunto, la variable  $y$  varía entre  $\phi_1(x)$  hasta  $\phi_2(x)$  (Es decir, cortamos el conjunto  $A$  en tiras verticales) y ahora la integral quedará como  $\int \int_A f = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f dy dx$ . Una construcción similar se puede hacer para conjuntos que cortemos en tiras horizontales o para más dimensiones.

Sin embargo, realizar estas integrales con límites variables no siempre es fácil y a veces es más práctico encontrar la forma de transformar el conjunto  $A$  en un rectángulo y después integrar sobre el rectángulo usando el teorema de Fubini.

Si queremos calcular  $\int_B f$  donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lo que hacemos es buscar un conjunto sencillo (preferiblemente un rectángulo)  $A$  y una función  $g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $g(A) = B$  y tal que  $g$  es clase  $C^1$ , biyectiva y con  $|Dg| \neq 0$  en  $A$ .

Para calcular la integral de  $f$  en  $B$ , lo que hay que hacer es partir  $B$  en rectángulos  $S$  y luego agarrar un punto  $y_S$  de cada rectángulo y sumar los números  $f(y_S)v(S)$  (y realizar un proceso de límite conforme refinamos los rectángulos).

Sin embargo, podemos realizar esto de una forma indirecta que será más sencilla, primero partimos el conjunto  $A$  en rectángulos  $R$  y en cada rectángulo tomamos una  $x_R$ . Entonces, esto nos genera una partición de  $B$  en rectángulos  $S = g(R)$  cada uno de los cuales con un punto arbitrario  $g(x_R)$ . Luego, por el párrafo anterior la integral se consigue al sumar  $f(g(x_R))v(g(R)) = f(g(x_R))|Dg_{x_R}|v(R)$ . Esta última igualdad debido a que si el rectángulo  $R$  es muy chiquito, podemos aproximar la función  $g$  en él con la función lineal  $Dg_{x_R}$ , pero las funciones lineales mandan rectángulos a paralelogramos y multiplica sus áreas por el determinante por lo que  $V(g(R)) = v(R)|Dg_{x_R}|$ .

Luego tenemos que  $\sum_S f(y_S)v(S) = \sum_R f(g(x_R))|Dg_{x_R}|v(R)$

Con lo que 'probamos' el teorema de cambio de variable:

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g) |Dg|$$

### Ejemplo 3.1.

Calcular  $\int \int_D x^2 y^2 dx dy$  donde  $D \subset \mathbb{R}^2$  es la región acotada, en el primer cuadrante, por las hipérbolas  $xy = 1$ ,  $xy = 2$  y las rectas  $x = y$ ,  $y = 4x$ . (Proponga un cambio de variables

y demuestre que tal cumple las hipótesis del Teorema de Cambio de Variable, úselo para calcular la integral)

### Solución

Propongo el siguiente cambio de variable:  $u(x, y) = xy$ ,  $v(x, y) = y/x \dots (1)$ .

Con este cambio de variable, los límites de integración pueden verse sencillamente como  $1 \leq u \leq 2$ ,  $1 \leq v \leq 4$ .

Ahora obtenemos la transformación inversa que es la que nos interesa (la que va de  $(u, v)$  a  $(x, y)$ ). Para esto, podemos tomar las ecuaciones (1) y despejar  $y$  en ambas, e igualarlas, para obtener  $\frac{u}{x} = vx$  y así, obtenemos  $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ , luego sustituimos este valor de  $x$  en cualquiera de las ecuaciones (1) y encontramos  $y$ , entonces  $y = \sqrt{uv}$ . Así, la transformación del cambio de variable es:

$$(x, y) = G(u, v) = \left( \sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right)$$

Así, este cambio de variable  $G$  envía el conjunto  $D^* = [1, 2] \times [1, 4]$  al conjunto  $D$ . Además, es un cambio de coordenadas diferenciable, pues las funciones componentes son al menos clase  $C^1$  (en el conjunto  $D^*$ ) y su Jacobiano es:

$$JG = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{v}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{bmatrix}$$

Y calculamos su determinante,  $\text{Det}(JG) = \frac{1}{2\sqrt{uv}} * \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} * \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}$ .

Vemos que este determinante no se anula en la región  $D^*$ , por lo que se vale el TCV. Entonces:

$$\begin{aligned} \int \int_D f \, dx dy &= \int \int_{D^*} (f \circ G) \, \text{Det}(JG) \, du dv = \int_1^4 \int_1^2 \left( \sqrt{\frac{u}{v}} \right)^2 \cdot (\sqrt{uv})^2 \cdot \left( \frac{1}{2v} \right) \, du dv = \\ &= \int_1^4 \int_1^2 \frac{u^2}{2v} \, du dv = \int_1^4 \left. \frac{u^3}{6v} \right|_1^2 dv = \int_1^4 \frac{7}{6v} dv = \left. \frac{7}{6} \ln(v) \right|_1^4 = \frac{7}{6} \ln(4) \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.2.** Calcular  $\int \int \int_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} \, dx dy dz$

Donde  $B$  es el sólido acotado por las esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ , aquí  $0 < b < a$ .

### Solución

Hacemos un cambio de variables a esféricas  $g$ :

$$(x, y, z) = g(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi))$$

con  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Con el cambio de variable a esféricas, vemos que:  $x^2 + y^2 + z^2 = (\rho \sin(\phi) \cos(\theta))^2 + (\rho \sin(\phi) \sin(\theta))^2 + (\rho \cos(\phi))^2 = \rho^2 \sin^2(\phi) + \rho^2 \cos^2(\phi) = \rho^2$

Entonces los límites de integración pasan a ser  $b \leq \rho \leq a$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Por último, para este cambio de coordenadas ya hemos calculado en clase y usado múltiples veces el Jacobiano y sabemos que  $|Jg| = \rho^2 \sin(\phi)$

Entonces usamos el teorema del cambio de variable:

$$\begin{aligned} \int \int \int_B f \, dx dy dz &= \int_b^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (f \circ g) \, \text{Det}(Jg) \, d\theta d\phi d\rho = \int_b^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2} (\rho^2 \sin(\phi)) d\theta d\phi d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^\pi \sin(\phi) d\phi \cdot \int_b^a \rho^3 e^{-\rho^2} d\rho \quad (\text{Podemos separar las integrales porque la función es un producto de funciones en cada variable, y los límites de integración son constantes}) \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \sin(\phi) d\phi \cdot \int_b^a \rho^3 e^{-\rho^2} d\rho = 2\pi \cdot (-\cos(\phi)) \Big|_0^\pi \cdot \int_b^a \rho^3 e^{-\rho^2} d\rho = 4\pi \cdot \int_b^a \rho^3 e^{-\rho^2} d\rho$$

Para esta última integral usamos la sustitución  $u = -\rho^2 \rightarrow du = -2\rho d\rho$

$$\begin{aligned} &= 4\pi \int \frac{1}{2} u e^u du = \frac{4\pi}{2} \left( u e^u - \int e^u du \right) \quad (\text{integramos por partes}) \\ &= 2\pi (u e^u - e^u) \\ &= 2\pi \left( -\rho^2 e^{-\rho^2} - e^{-\rho^2} \right) \Big|_b^a \\ &= 2\pi \left( -a^2 e^{-a^2} - e^{-a^2} + b^2 e^{-b^2} + e^{-b^2} \right) \end{aligned}$$

### 3.5. Partición de la unidad

Las particiones de la unidad son un herramienta útil para la teoría de la integración y de hecho se pueden utilizar para una demostración verdadera del TCV.

**Definición 3.8. Support:** Dada una función  $f$  se define  $\text{supp}(f)$  como el subconjunto del dominio que no es mapeado a 0, es decir,  $\text{supp}(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$

**Definición 3.9. Partición de la unidad** Dado un  $A \subset \mathbb{R}^n$ , una partición de la unidad en  $A$  es una colección  $\Phi$  de funciones  $\phi$  clase  $C^\infty$  definidas en  $A$  tales que:

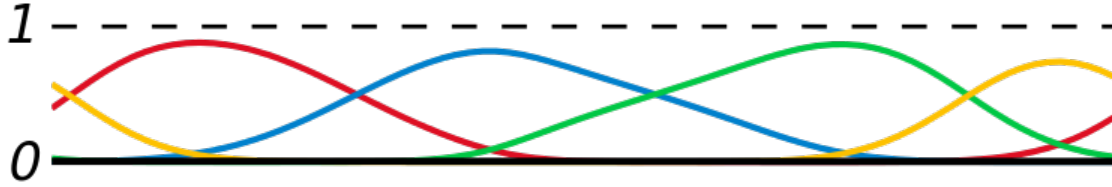
1) Para todo  $x \in A$ ,  $0 \leq \phi(x) \leq 1$

2) Para todo  $x$  en  $A$ , existe una vecindad  $V$  de  $x$  donde solo una cantidad finita de las  $\phi$  son

distintas de 0 (es decir,  $V \cap \text{supp}(\phi) \neq \emptyset$  sólo para una cantidad finita de funciones) (si la colección  $\Phi$  ya es finita, entonces esta condición se cumple trivialmente)

3) Para cada  $x \in A$  tenemos que  $\sum_{\phi \in \Phi} \phi(x) = 1$  (Por la condición anterior, esta suma es siempre finita).

Es decir, una partición de la unidad de  $A$  es una colección de funciones como las de la siguiente imagen:



**Definición 3.10. Partición de la unidad subordinada a una cubierta:** Si  $O$  es una cubierta de  $A$ , decimos que la colección  $\Phi$  está subordinada a la cubierta  $O$  si además de 1), 2) y 3), se cumple que:

Para cada  $\phi \in \Phi$ , tenemos que  $\text{supp}(\phi) \subset U$ , para algún  $U$  en la cubierta.

Es decir, cada  $\phi$  sólo puede ser distinta de 0 en un conjunto que quede dentro de un elemento de la cubierta.

**Teorema 3.6.** Dado un conjunto  $A$  arbitrario, y una cubierta  $O$ , existe una partición de la unidad en  $A$  subordinada a  $O$ .

Dem: Caso 1)  $A$  es compacto

Entonces podemos elegir una cubierta finita  $\{U_1, \dots, U_n\}$ . Sea  $\psi_i$  una función que vale 0 fuera de  $U_i$  y es positiva dentro. Entonces para todo  $x \in A$  tenemos que  $\psi_1(x) + \dots + \psi_n(x) > 0$ .

Ahora en cada  $U_i$  definimos, si  $x \in U_i$ :

$$\phi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_1(x) + \dots + \psi_n(x)}$$

Y la partición de la unidad es  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  Ahora, para todo  $x \in A$ ,  $0 \leq \phi_i(x) \leq 1$ , y como sólo tenemos una cantidad finita de  $\phi$ , 2) se cumple trivialmente.

3) se cumple porque si  $x$  está en varios conjuntos  $U$ , entonces  $x \in U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}$  entonces,

$$\sum_{\phi \in \Phi} \phi(x) = \frac{\psi_{i_1}}{\psi_1(x) + \dots + \psi_n(x)} + \dots + \frac{\psi_{i_k}}{\psi_1(x) + \dots + \psi_n(x)} = 1$$

Y 4) se cumple porque para cada  $\phi_i$ ,  $\text{supp}(\phi_i) \subset U_i$

Caso 2)  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ , donde cada  $A_i$  es compacto y  $A_i \subset \text{int}(A_{i+1})$  (Se demuestra alv)

Caso 3)  $A$  abierto: Hacemos  $A_i = \{x \in A : |x| \leq i \text{ y la distancia de } x \text{ a la frontera de } A \text{ es}$

$\geq 1/i\}$

Caso 4)  $A$  arbitrario: Como la unión de los abiertos de  $O$  es abierta, entonces tiene una partición de la unidad, y como  $B$  está en esta unión, entonces la partición de la unidad anterior también sirve.

Como ejemplo de una utilidad de las particiones de la unidad, tenemos lo siguiente: Una cubierta abierta  $O$  de  $A \subset \mathbb{R}^n$  abierto es **admisibile** si cada  $U \in O$  está contenido en  $A$ .

Si  $\Phi$  es una partición de la unidad de  $A$  subordinada a  $O$ , Definimos  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con la propiedad de que para toda  $x \in A$  existe una vecindad de  $x$  en  $A$  tal que  $f$  es acotada en  $V$  y  $f$  tiene un conjunto de discontinuidades de medida cero.

Entonces, cada  $\int_A \phi |f|$  para toda  $\phi$  existe. Decimos que  $f$  es **integrable\*** si  $\sum_{\phi \in \Phi} \int_A \phi |f|$  converge. Esto implica la convergencia de  $\sum_{\phi \in \Phi} |\int_A \phi f|$  y por lo tanto  $\sum_{\phi \in \Phi} \int_A \phi f$  converge absolutamente y le llamamos  $\int_A f$ . Así, podemos integrar funciones que no son acotadas globalmente, sino sólo localmente, o para conjuntos no acotados

Con este ejemplo, tenemos las siguientes propiedades:

- 1) Lo anterior funciona para cualquier partición subordinada a una cubierta admisible de  $A$  y el valor final es siempre el mismo.
- 2) Si  $A$  y  $f$  son acotadas, entonces  $f$  es integrable en el sentido original y esta integral\* coincide con la antigua.



## 4. Integración en Cadenas

### 4.1. Preliminares algebraicos de tensores y formas

**Definición 4.1. Permutación:** Una permutación de  $\{1, \dots, k\}$  es una función biyectiva de  $\{1, \dots, k\}$  en sí misma. Es decir, es una función que cambia de lugar (permuta) a los números  $\{1, \dots, k\}$ .

El **signo** de una permutación, denotado por  $\text{sgn}$ , es el número de intercambios de dos a dos que se hicieron para llegar a la permutación.

**Definición 4.2. Espacio Dual:** Dado un espacio vectorial  $V$ , definimos  $V^* = \{ \text{funciones lineales de } V \text{ a } \mathbb{R} \}$ .

**Espacio bi-dual:**  $V^{**} = \{ \text{funciones lineales de } V^* \text{ a } \mathbb{R} \}$

Es decir, el espacio bi-dual toma funcionales de  $V$  como entrada y da como resultado un  $\mathbb{R}$ .

**Observación,**  $V \simeq V^*$ : Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$ , entonces podemos definir  $\phi_i(v_j) = \delta_{i,j}$ , (Es decir,  $\phi_i(x) = \phi_i(a_1v_1 + \dots + a_iv_i + \dots + a_nv_n) = a_i$ , la función  $\phi_i$  da el componente  $i$ -ésimo de  $x$  en la base original de  $V$ .)

Entonces, el conjunto de funcionales  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  es una base de  $V^*$  (probarlo) y como entonces tienen la misma dimensión, son isomorfos. Si la base original de  $V$  es la canónica, entonces las proyecciones de la base dual se escriben como  $\pi_i$  y cualquier funcional se puede escribir como una combinación lineal de proyecciones.

**Observación,**  $V \simeq V^{**}$ : Dado un  $v \in V$  construimos  $\phi_v \in V^{**}$  con  $\phi_v(f) = f(v)$  para  $f \in V^*$ . La asociación  $v \longrightarrow \phi_v$  es biyectiva, por lo que  $V \simeq V^{**}$

Nota: podemos ver que la asociación con el bi-dual es más natural que con el dual en el sentido de que no se requiere de bases para definirla.

**Definición 4.3. Multilineal:** Dado  $V$  un espacio vectorial sobre  $R$ , la función  $T : V^k \longrightarrow \mathbb{R}$  es multilineal si  $\forall i$ :

$$T(v_1, \dots, av_i + v'_i, \dots, v_k) = aT(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k)$$

Es decir, es lineal en cada espacio y da como resultado un número real.

Una función multilineal como la anterior se llama **k-tensor** en  $V$  y el conjunto de todos los k-tensores en  $V$  se denota por  $J^k(V)$  **el cual es un espacio lineal sobre  $\mathbb{R}$**  (al definirla

la suma de funciones y producto por escalares usual)

**Definición 4.4. Producto tensorial:** Si tenemos  $S \in J^k(V)$  y  $T \in J^L(K)$ , definimos su producto tensorial como el nuevo tensor  $S \otimes T \in J^{k+L}(V)$  por:

$S \otimes T(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+L}) = S(v_1, \dots, v_k) \cdot T(v_{k+1}, \dots, v_{k+L})$  Es decir, es un tensor cuyo orden es la suma de los órdenes de los operandos y que aplica un tensor al primer grupo de vectores y el otro tensor al resto. Claramente es multilinear porque tanto  $S$  como  $T$  lo son.

**Propiedades Básicas:**

- 1)  $(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T$
- 2)  $S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2$
- 3)  $(aS) \otimes T = a(S \otimes T)$
- 4)  $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$

Por ejemplo, podemos ver que  $J^1(V) = V^*$  y que  $\langle, \rangle \in J^2(V)$  y que si  $V$  es de dimensión  $n$ , entonces,  $\det \in J^n(V)$  y podemos encontrar cosas raras, como ésta:

$$(\det_2 \otimes \langle, \rangle \otimes \pi_2) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \langle (3, 5), (8, -4) \rangle \pi_2(1, 5) = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$$

Aquí el tensor final pertenece a  $J^5(V)$  por lo que toma como entrada a 5 vectores de  $V$  y da como resultado un número (y es multilinear). Al tomar como entrada 5 vectores de dimensión 2, si definimos una base de  $V$  (en este caso la canónica), podemos expresar la entrada como una matriz en la que los elementos son los componentes de cada uno de los vectores colocados verticalmente, es decir, es una matriz de  $2 \times 5$

En general, podemos ver a cualquier  $k$ -tensor de un espacio de dimensión  $n$  como un operador multilinear que toma por entrada una matriz de  $n \times k$  (Siempre y cuando las operaciones que haga el tensor estén definidas en la base que estamos usando de  $V$ , que de ahora en más será siempre la canónica).

**Definición 4.5. k-tensor básico:** Dado  $V$  con base dual  $\phi_1, \dots, \phi_n$ , entonces un  $k$ -tensor básico es una expresión de la forma:

$$\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k} \quad \text{donde } 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$$

Es decir, si queremos aplicar  $\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}(v_1, \dots, v_k)$ , lo primero que hacemos es escribir

cada  $v$  en la base y luego escribimos los componentes de todos los  $v$  en una matriz de  $n \times k$ , el k-tensor básico consiste en tomar la componente  $i_1$  del primer vector y multiplicarla por la componente  $i_2$  del segundo y así hasta multiplicar por la componente  $i_k$  de  $v_k$ . Esto se puede visualizar al dibujar un **camino básico** en la matriz, que definimos como un camino que va de izquierda a derecha en la matriz y tiene un nodo en cada columna. El camino representa a un k-tensor básico y nos indica que lo que hace este tensor es multiplicar los elementos de los nodos. En este caso, los nodos estarían en los elementos  $A_{i_j, j}$  para toda  $j$  de 1 a  $k$ . Por ejemplo, el k-tensor básico  $\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_1$  Toma el primer componente de cada uno de los  $k$  vectores y los multiplica entre sí. En este caso, el camino básico sería una línea horizontal en el primer renglón con nodos en todas las columnas.

**Teorema 4.1. Base de  $J^k(V)$ :** Dado  $V$  de dim  $n$  con base dual de proyecciones  $\phi_1, \dots, \phi_k$ , entonces el conjunto de todos los k-tensores básicos en  $V$ :

$$\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k} \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$$

es una base para  $J^k(V)$ , y entonces  $J^k(V)$  tiene dimensión  $n^k$

Dem: Si  $v_1, \dots, v_n$  es una base de  $V$ , y  $T$  es un k-tensor y  $w_i = a_{i,j}v_j$  son vectores arbitrarios en  $V$  (notación de Einstein), entonces:

$$\begin{aligned} T(w_1, \dots, w_k) &= a_{1,j_1} \dots a_{k,j_k} T(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \quad (\text{Multilinealidad y mucha notación de Einstein}) \\ &= \phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k} (w_1, \dots, w_k) T(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \end{aligned}$$

Entonces  $T$  es una combinación lineal de los k-tensores básicos, además estos son l.i.

Entonces, todo k-tensor es una combinación lineal de k-tensores básicos y entonces se puede representar como una combinación lineal de caminos horizontales.

Por ejemplo, el producto escalar usual en  $R^n$  entre dos vectores es un 2-Tensor y es la operación  $\phi_1 \otimes \phi_1 + \phi_2 \otimes \phi_2$  que se representaría como un camino horizontal en el primer renglón más un camino horizontal en el segundo.

También un determinante se puede expresar como una combinación lineal de caminos básicos y de hecho a veces se dibuja así para recordar la formulita del det de 3x3.

**Definición 4.6. Desplazar el k-tensor  $T$  a través de  $f$  lineal:** Si tenemos un k-tensor  $T \in J^k(W)$  pero por alguna razón queremos convertirlo en un k-tensor en  $V$ , podemos trasladarlo a través de  $f$ .

Si  $f : V \longrightarrow W$  es lineal, definimos el nuevo k tensor en  $V$  llamado  $f^*T$  por:

$$(f^*T)(v_1, \dots, v_k) = T(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

Es decir, aplicamos  $f$  a los  $k$  vectores de  $V$  y luego nos quedan  $k$  vectores en  $W$  a los que les podemos aplicar  $T$  normalmente.

En este sentido,  $f^*$  toma un  $k$  tensor de  $W$  y da como resultado  $f^*T$  que es un  $k$  tensor de  $V$ , entonces  $f^* : J^k(W) \longrightarrow J^k(V)$

Se puede revisar también que  $f^*(S \otimes T) = f^*S \otimes f^*T$

**Definición 4.7. Alternante:** Decimos que un  $k$ -tensor  $\Omega$  es alternante si:

$$\Omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\Omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

Es decir, cambiar el orden de dos columnas (dos vectores), cambia el signo del resultado.

Inmediatamente vemos un resultado importante:

**Proposición 1:**  $\Omega$  es alternante sii  $\Omega$  da 0 como resultado cuando dos columnas (vectores) son iguales.

Dem: Si Dos columnas son iguales, al intercambiarlas no cambia el resultado, pero por ser alternante, debería de cambiar el signo, la única posibilidad es que el resultado sea 0.

Definimos  $\Lambda^k(V)$  como el Espacio Vectorial de los  $k$ -tensores alternantes, vemos que  $\Lambda^k(V) \leq J^k(V)$

**Definición 4.8. Alt:** Dado un  $k$  tensor  $T$  cualquiera podemos construir un  $k$ -tensor alternante, definiendo:

$$(Alt(T))(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

Es decir,  $Alt(T)$  aplica  $T$  a todas las posibles permutaciones de  $(v_1, \dots, v_k)$  y las multiplica por el signo de la permutación.

Si  $T$  resulta ser un  $k$ -tensor básico, en vez de pensar en  $Alt(T)$  como todas las permutaciones de las columnas de la matriz sobre la que se está aplicando, podemos pensar que la matriz se deja fija y lo que se permuta es el orden de las proyecciones del  $k$ -tensor.

$$Alt(\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \phi_{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(i_k)}$$

La aplicación  $Alt$  es una aplicación lineal en  $J^k(V)$ , lo que quiere decir que  $Alt(aT + S) = aAlt(T) + Alt(S)$ . Entonces, como cualquier  $k$ -tensor es una combinación lineal de  $k$ -tensores

básicos, sólo basta con ver el efecto que tiene  $Alt$  en los  $k$ -tensores básicos. Con esto, podemos ver lo siguiente:

**Proposición 1:** Si  $\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}$  es igual que  $\phi_{j_1} \otimes \dots \otimes \phi_{j_k}$  salvo algunos cambios en el orden, entonces  $Alt(\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}) = \pm Alt(\phi_{j_1} \otimes \dots \otimes \phi_{j_k})$  pues estos  $k$ -tensores básicos son iguales salvo alguna permutación.

**Proposición 2:** Si  $\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}$  tiene por lo menos dos proyecciones iguales (es decir, el camino básico pasa por lo menos dos veces por el mismo renglón) entonces  $Alt(\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}) = 0$ . Esto se puede ver como sigue: digamos que  $i_h = i_j$  son las proyecciones repetida. Luego, al realizar el  $Alt$ , se realizan todas las permutaciones posibles, por cada permutación, habrá otra permutación en la que se intercambia  $\phi_{i_h}$  con  $\phi_{i_j}$ . Esta nueva permutación es la misma función (hace lo mismo pues estas  $\phi$  son iguales) pero tiene signo contrario. Por lo tanto, al sumar todas las permutaciones nos da 0.

Por ejemplo,  $Alt(\langle, \rangle) = 0$  pues los caminos básicos del producto interno tienen pasan siempre por el mismo renglón y entonces al aplicarles  $Alt$ , se hacen 0.

#### Teorema 4.2.

- 1) Si  $T \in J^k(V)$ , entonces  $Alt(T) \in \Lambda^k(V)$
- 2) Si  $\Omega \in \Lambda^k(V)$ , entonces  $Alt(\Omega) = \Omega$
- 3) Si  $T \in J^k(V)$ , entonces  $Alt(Alt(T)) = Alt(T)$

**Dem:** 1)  $Alt(T)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(j)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots, v_{\sigma(k)})$

Pero por otro lado,  $Alt(T)(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$  tiene los mismos sumandos pero con signo contrario debido a que las permutaciones tienen un intercambio más ( $i \leftrightarrow j$ )

2) Como  $\Omega$  ya es alternante, al multiplicar por  $sgn(\sigma)$ , todos los sumandos de  $Alt(\Omega)$  son iguales (tomando en cuenta que se multiplican por el signo de  $\sigma$ ) entonces quedan  $k!$  sumandos iguales.

3) Se sigue de 1) y 2).

**Definición 4.9. Wedge Product:** Si  $T \in \Lambda^k(V)$ ,  $S \in \Lambda^L(V)$ , entonces definimos:  $T \wedge S \in \Lambda^{k+L}(V)$  con:

$$T \wedge S = \frac{(k+L)!}{k!L!} \text{Alt}(T \otimes S)$$

Es decir, el producto  $\wedge$  de dos tensores da un tensor de mayor orden y luego lo convierte en alternante.

**Teorema 4.3.**

- 1)  $(\Omega_1 + \Omega_2) \wedge \eta = \Omega_1 \wedge \eta + \Omega_2 \wedge \eta$
- 2)  $\Omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \Omega \wedge \eta_1 + \Omega \wedge \eta_2$
- 3)  $a\Omega \wedge \eta = a(\Omega \wedge \eta)$
- 4)  $\Omega \wedge \eta = (-1)^{kL} \eta \wedge \Omega$
- 5)  $f^*(\Omega \wedge \eta) = f^*(\Omega) \wedge f^*(\eta)$
- 6)  $(\Omega \wedge \eta) \wedge \theta = \Omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+L+m)!}{k!L!m!} \text{Alt}(\Omega \otimes \eta \otimes \theta)$

**Definición 4.10. Formas básicas:** Una k-forma básica es el wedge product de varias proyecciones, del tipo:

$$\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

Es decir, una forma básica consiste en tener un k-tensor básico y luego alternarlo. Es importante notar que el orden de los productos en la k-forma sólo afecta a lo más en el signo, ya que al alternar, se realizan todas las posibles permutaciones, es por esto que ponemos como requisito que las k-formas tengan los productos en orden de menor a mayor.

Además, notamos que si alguna  $i_j = i_r$ , entonces la k forma es 0, esto debido a que el producto  $\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}$  repite un renglón dos veces, por lo que al alternar el resultado es 0.

Es por estas dos razones que todas las posibles k-formas básicas son  $\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  y entonces existe un total de  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

**Teorema 4.4.** El conjunto de todas las k-formas básicas  $\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  es una base para  $\Lambda^k(V)$  que por lo tanto tiene dimensión  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Nota: Podemos ver que si  $k > n$  no existen formas básicas (Esto se debe a que todos los tensores básicos necesariamente repiten un renglón alguna vez y por tanto al alternar dan 0). También vemos que si  $V$  es de dimensión  $n$  entonces  $\Lambda^n(V)$  es de dimensión 1 y dicho espacio es generado por el determinante usual.

**Ejemplo 4.1.**

1) Consideremos  $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in J^1(\mathbb{R}^3)$ . Entonces tenemos que  $\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \phi_3$  Consiste en realizar los productos de la diagonal de una matriz de  $3 \times 3$ .

Además,  $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 = 6 \text{Alt}(\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \phi_3) = 6 * (\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \phi_3 - \phi_1 \otimes \phi_3 \otimes \phi_2 - \phi_2 \otimes \phi_1 \otimes \phi_3 + \phi_2 \otimes \phi_3 \otimes \phi_1 - \phi_3 \otimes \phi_2 \otimes \phi_1 + \phi_3 \otimes \phi_1 \otimes \phi_2)$

Que son todas las posibles reordenaciones del camino básico original (la diagonal)

También vemos que si dos de las  $\phi$  son iguales, se cancela todo y da 0.

**Teorema 4.5.** Se tiene que:

1) Si  $S \in J^k(V), T \in J^l(V), \text{Alt}(S) = 0$ , entonces:

$$\text{Alt}(S \otimes T) = \text{Alt}(T \otimes S) = 0$$

2)  $\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \text{Alt}(\eta \otimes \theta))$

3) Si  $\omega \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V)$  y  $\theta \in \Lambda^m(V)$ , entonces:

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$$

.

**Teorema 4.6.** Si  $v_1, \dots, v_n$  es una base de  $V$  y sea  $\Omega \in \Lambda^n(V)$ . Entonces si  $w_i = Av_i$  son  $n$  vectores en  $V$ :

$$\Omega(w_1, \dots, w_n) = \det(A) \Omega(v_1, \dots, v_n)$$

Dem: Definimos  $\eta(A) := \Omega(a_{1j}v_j, \dots, a_{nj}v_j)$ .

Claramente  $\eta \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ , por lo que  $\eta = \lambda \cdot \det$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pero  $\lambda = \nu(e_1, \dots, e_n) = \Omega(v_1, \dots, v_n)$

Entonces, dado un  $\Omega \in \Lambda^n(V)$ , podemos partir las bases de  $V$  en dos grupos, aquéllos que al aplicarles  $\Omega$  dan un resultado positivo y aquéllos que dan negativo.

El signo que obtienen se llama orientación de la base, dos bases con misma orientación están relacionadas con una matriz de determinante positivo.

Construcción del producto cruz: Si  $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ , definimos  $\psi \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$  como:

$$\psi(w) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ w \end{pmatrix}$$

Como  $\psi \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces por el teorema de Riezs, existe un único vector  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que:

$$\psi(w) = \langle w, z \rangle$$

Entonces definimos  $z = v_1 \times \dots \times v_{n-1}$

## 4.2. Campos y Formas

**Definición 4.11.  $\mathbb{R}^n$  trasladado a  $p$ :** Son las parejas  $(p, v)$  donde  $v$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$ . Se puede ver como el conjunto de todas las flechas que salen de  $p$  con las operaciones:

$$(p, v) + (p, w) = (p, v + w)$$

$$a(p, v) = (p, av)$$

En general escribimos  $(p, v) = v_p$

Definimos:  $\langle v_p, w_p \rangle = \langle v, w \rangle$

**Definición 4.12. Campo vectorial:** Un campo vectorial es una función tal que a todo  $p \in \mathbb{R}^n$  le asigna un vector que surge de  $p$ ,  $F(p) = v_p$ . Esta función tiene  $n$  componentes  $F_1(p), \dots, F_n(p)$

**Definición 4.13. k-forma diferencial:** Una k-forma diferencial es una k-forma en  $\mathbb{R}^n$  que depende del punto  $p$  en el que estemos parados. Es decir, para todo  $p$ , tenemos una forma diferencial distinta:

$$\omega_p = \sum \alpha_{i_1, \dots, i_k}(p) [\phi_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge \phi_{i_k}(p)]$$

Donde las  $\alpha$  son coeficientes y  $\phi_{i_p}$  es la proyección sobre la  $i$ -ésima coordenada de un vector trasladado a  $p$ .

Es decir, dado un punto  $p$ ,  $\omega_p$  es una forma diferencial, sólo que en vez de tomar  $k$  vectores de  $\mathbb{R}^n$ , se toman  $k$  vectores centrados en  $p$ . Y como siempre, es multilineal y alternante. Como ya vimos, las formas básicas  $\phi_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge \phi_{i_k}(p)$  son una base para cualquier  $k$  forma, por lo que la combinación lineal forma una k-forma arbitraria. Como los coeficientes  $\alpha$  dependen del punto  $p$ , para cada punto  $p$  obtenemos una k-forma en  $\mathbb{R}_p^n$ .



Una función sencilla  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es considerada una 0 forma, pues en vez de tomar  $k$  vectores en  $\mathbb{R}_p^n$ , solo toma el punto  $p$  y da un número real.

Dado esto, también podemos escribir  $f \cdot \omega = f \wedge \omega$

Ejemplo: Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una 0 forma diferenciable, entonces tenemos que  $Df_p \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$  pues el jacobiano es una función lineal que toma un vector y que da como resultado un número.

**Definición 4.14. 1-forma a partir de una 0-forma:** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una 0 forma, entonces definimos  $df$ :

$$df_p(v_p) = Df_p(v)$$

Así ya transformamos  $Df_p$  en una 1-forma que en vez de tomar vectores  $v$  en  $\mathbb{R}^n$ , toma vectores que inician en  $p$ .

Es decir, la 1-forma  $df_p$  en  $p$  que surge de la 0-forma  $f$ . Lo que hace es tomar un vector que inicia en  $p$  y luego de regresarlo al origen, le aplica el Jacobiano de  $f$  en  $p$ .

Por ejemplo, consideremos la función  $\pi^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección sobre el eje  $i$ , también la denotaremos con la notación  $x^i$

Entonces,  $dx_p^i$  es una 1-forma de  $\mathbb{R}_p^n$  para cualquier  $p$  con:

$$dx_p^i(v_p) := d\pi_p^i(v_p) := D\pi_p^i(v) = \pi^i(v) = v^i \quad \text{Pues } \pi^i \text{ es lineal.}$$

Es decir,  $dx_p^i = x^i$  es la proyección. Pero como estos  $\pi^i$  son la base dual a la base canónica, entonces, cualquier  $k$ -forma diferencial (que depende del punto  $p$ ) es:

$$\omega = \sum \alpha_{i_1, \dots, i_k}(p) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

**Teorema 4.7.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una 0- forma diferenciable, entonces la 1-forma  $df_p$  (que depende del punto  $p$  es:

$$df_p = D_1f(p)dx^1 + \dots + D_nf(p)dx^n$$

Es decir,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}(p)dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(p)dx^n$$

**Demostración:** El  $df$  de la izquierda es una 1-forma (un 1-tensor alternante) entonces debe de ser la combinación lineal de 1-formas básicas (las  $dx^i$ , que son las simples proyecciones sobre  $i$ -ésima coordenada). Además, por como se define,  $df_p(v_p) = Df_p(v)$  (Pues se define como el Jacobiano en  $p$  evaluado en el vector pero centrado. Pero  $Df_p$  es el gradiente evaluado en  $p$ , que es  $(D_1f(p), \dots, D_nf(p))$ ) Luego, al multiplicarlo por  $v$  nos queda

$$df_p(v_p) = D_1f(p)v_1 + \dots + D_nf(p)v_n$$

Por lo que  $df_p = D_1f(p)dx^1 + \dots + D_nf(p)dx^n$

**Definición 4.15. Asterisco abajo de  $f$ :** Dada una función lineal  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , tenemos la transformación lineal jacobiana  $Df_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ . El  $f_*$  es igual que el Jacobiano, pero lo centra a  $p$  en vez de estar centralizado:

$$f_* : \mathbb{R}_p^n \longrightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m \quad \text{con: } f_*(v_p) = (Df_p(v))_{f(p)}$$

Es decir, tomo un vector  $v$  centrado en  $p$  y le aplico el Jacobiano de  $f$  en  $p$ , luego, escribo el resultado en  $f(p)$

Entonces definir algo similar a lo que habíamos definido de trasladar un  $k$ -tensor para que actúe sobre otro campo sobre el que no está definido.

Digamos que  $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}_{f(p)}^m)$  Pero queremos definir  $\omega$  para el espacio vectorial  $\mathbb{R}_p^n$ . Primero que nada, tenemos que  $f_* : \mathbb{R}_p^n \longrightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m$  como fue definida antes es lineal y entonces definimos:

**Definición 4.16. Trasladar  $\omega$  por  $f$  y definir  $f^*$ :** Definimos  $f^*\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)$  como:

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(p)}(f_*(v_1), \dots, f_*(v_k))$$

Es decir, ahora sí es un  $k$ -tensor alternante en  $\mathbb{R}_p^n$ , que primero transforma los vectores de  $\mathbb{R}_p^n$  a  $\mathbb{R}_{f(p)}^m$  a través de la transformación lineal  $f_*$  y ahora sí aplica  $\omega$ .

**Teorema 4.8.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable, entonces:

- 1)  $f^*(dx^i) = \sum D_j f^i dx^j = \sum \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j$
- 2)  $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$
- 3)  $f^*(g\omega) = (g \circ f)f^*\omega$
- 4)  $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$  **dem:**

$$1) (f^*dx_p^i)(v_p) := dx_{f(p)}^i(f_*(v_p)) := dx_{f(p)}^i(Df_p(v))_{f(p)} = dx_{f(p)}^i \left( \begin{pmatrix} D_1 f^1(p) & \dots & D_n f^1(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 f^m(p) & \dots & D_n f^m(p) \end{pmatrix} v \right)_{f(p)} =$$

$$dx_{f(p)}^i(D_j f^1(p)v_j, \dots, D_j f^m(p)v_j)_{f(p)} \quad (\text{suma de einstein})$$

$$= D_j f^i(p)v_j = \sum_{j=1}^n D_j f^i(p)v_j = \sum_{j=1}^n D_j f^i(p)dx_p^j(v_p)$$

$$2) f^*(\omega_1 + \omega_2)(w_1, \dots, w_n) = (\omega_1 + \omega_2)(f_*(w_1), \dots, f_*(w_n)) = \omega_1(f_*(w_1), \dots, f_*(w_n)) + \omega_2(f_*(w_1), \dots, f_*(w_n)) =$$

$$(f^*\omega_1)(w_1, \dots, w_n) + (f^*\omega_2)(w_1, \dots, w_n) = (f^*\omega_1 + f^*\omega_2)(w_1, \dots, w_n)$$

$$3) f^*(g\omega)(w_1, \dots, w_n) = (g\omega)(f_*(w_1), \dots, f_*(w_n)) = g(f_*(w_1), \dots, f_*(w_n))\omega(f_*(w_1), \dots, f_*(w_n)) =$$

$$(g \circ f_*)(w_1, \dots, w_n)(f^*\omega)(w_1, \dots, w_n) = ((g \circ f_*)f^*\omega)(w_1, \dots, w_n)$$

4)

De esta forma, tenemos resultados como el siguiente:

$$f^*(Pdx^1 \wedge dx^2 + Qdx^2 \wedge dx^3) = f^*(Pdx^1 \wedge dx^2) + f^*(Qdx^2 \wedge dx^3) = (P \circ f)(dx^1 \wedge dx^2) +$$

$$(Q \circ f)(dx^2 \wedge dx^3) =$$

**Teorema 4.9.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable, entonces:

$$f^*(hdx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (h \circ f)(\det(Df))dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

**Dem:** Por la parte 3) tenemos que:

$$f^*(hdx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (h \circ f)f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$$

$$= (h \circ f)(f^*dx^1 \wedge \dots \wedge f^*dx^n) = (h \circ f)(dx^1 f_* \wedge \dots \wedge dx^n f_*)$$

Pero por un teorema anterior, y como  $f_*$  es basicamente la matrix  $Df$ , entonces llegamos a:

$$= (h \circ f)\det(Df)(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$$

Ya vimos hace un rato como el operador  $d$  transforma una 0-forma  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  entonces la 1-forma en el punto  $p$  es:  $df_p(v_p) = Df_p(v)$ , que es una 1-forma de  $\mathbb{R}_p^n$ . Podemos generalizar esta construcción:

**Definición 4.17. diferencial** Dada una  $k$ -forma diferencial, que tiene la forma general:  $\omega_p = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(p) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  (recordemos que los coeficientes  $\alpha$  son función de la posición y a cada punto  $p$  se le asigna una  $k$ -forma distinta. Entonces  $d\omega$  es una  $(k+1)$ -forma llamada el **diferencial** de  $\omega$  con:

$$d\omega_p = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\alpha_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n D_j(\alpha) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Es decir, tomamos los coeficientes como una función de  $\mathbb{R}^n$  (que lo es, pues depende del punto  $p$ ) y le sacamos su diferencial como ya lo definimos para 0-formas (es decir, su jacobiano centrado en  $p$ )

**Teorema 4.10.** Propiedades del diferencial:

- 1)  $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$
- 2) Si  $\omega$  es una  $k$ -forma y  $\eta$  es una  $L$ -forma, entonces:  
 $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$
- 3)  $d(d\omega) = 0$  O brevemente,  $d^2 = 0$
- 4) Si  $\omega$  es una  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^m$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable, entonces,  $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$

**Dem:**

- 1) Digamos que  $\omega_p = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(p) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ,  $\eta_p = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \beta_{i_1, \dots, i_k}(p) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  (Podemos usar la  $i$  en ambas, pues la  $i$  lo que hace es iterar sobre los elementos de la base)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega + \eta &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} (\alpha_{i_1, \dots, i_k} + \beta_{i_1, \dots, i_k})(p) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ \Rightarrow d(\omega + \eta) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(\alpha_{i_1, \dots, i_k} + \beta_{i_1, \dots, i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} D(\alpha_{i_1, \dots, i_k} + \beta_{i_1, \dots, i_k})_p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} D\alpha_{i_1, \dots, i_k} p + D\beta_{i_1, \dots, i_k} p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} D\alpha_{i_1, \dots, i_k} p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_{i_1 < \dots < i_k} D\beta_{i_1, \dots, i_k} p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\alpha_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\beta_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= d\omega + d\eta
\end{aligned}$$

2) La fórmula es cierta si  $\omega = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  y  $\eta = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_L}$ , porque todos los términos desaparecen (pues  $\alpha = 1, \beta = 1$  y su  $d\alpha = d\beta = 0$ ). Si  $\omega$  es una 0-forma, entonces también se puede comprobar, el resto sale de usar 1).

3) Si  $\omega = \omega_p = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(p) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ , entonces:

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n D_j(\alpha)_p dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \text{Entonces (usando 1):} \\
d(d\omega) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(p) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \dots
\end{aligned}$$

**Definición 4.18. Cerrada:** Una  $k$ -forma  $\omega$  es cerrada si  $d\omega = 0$

**Exacta:** Una forma  $\omega$  es exacta si existe una  $(k-1)$ -forma  $\eta$  tal que  $\omega = d\eta$

Vemos por el teorema anterior, que toda forma exacta es cerrada.

**Ejemplo 4.2.** Si  $\omega$  es la 1-forma  $Pdx + Qdy$  de  $\mathbb{R}^2$  entonces el diferencial:

$$\begin{aligned}
d\omega &= d(Pdx + Qdy) = d(Pdx) + d(Qdy) = DP \wedge dx + DQ \wedge dy \\
&= (D_1Pdx + D_2Pdy) \wedge dx + (D_1Qdx + D_2Qdy) \wedge dy = \\
&= D_1Pdx \wedge dx + D_2Pdy \wedge dx + D_1Qdx \wedge dy + D_2Qdy \wedge dy = \\
&= D_2Pdy \wedge dx + D_1Qdx \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y} (dy \wedge dx) + \frac{\partial Q}{\partial x} (dx \wedge dy) = \\
&= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (dx \wedge dy)
\end{aligned}$$

Que es el rotacional de la expresión inicial. Vemos aquí que si  $\omega$  es cerrada (i.e.  $\partial\omega = 0$ ) entonces,  $D_1Q = D_2P$ . Se puede demostrar que en dicho caso (Y si  $P$  y  $Q$  son continuas) existe una función  $f$  tal que  $\omega = df = D_1f dx + D_2f dy$ .

Ahora bien, dada una  $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \dots + \omega_n dx^n$  que sea una 1-forma en  $\mathbb{R}^n$  y digamos que  $\omega$  es el diferencial de la 0-forma  $f$ . Es decir,  $df = D_1f dx^1 + \dots + D_nf dx^n = \omega$ . Podemos asumir sin problema que  $f(0) = 0$ . Entonces cómo encontramos  $f$  (que en cierto sentido es la antiderivada de  $\omega$ ).

$$\begin{aligned}
\text{Tenemos que } f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n D_i f(tx) \cdot x^i dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) \cdot x^i dt
\end{aligned}$$

Esto sugiere que si queremos encontrar la 'antiderivada'  $f$  dado  $\omega$  (conste que supusimos desde un principio que tal  $f$  existe, lo cual no necesariamente es cierto) necesitamos considerar la siguiente función:

$$I\omega(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) \cdot x^i dt$$

Notamos que para que esta integral esté definida, es necesario que  $\omega$  esté definido en la línea que une a 0 con  $x$  (porque cuando varía  $t$  en la integral, el argumento de  $\omega$  se mueve de 0 a  $x$ ). Es decir, necesitamos un conjunto como el siguiente:

**Definición 4.19. Conjunto Estrellado:** Un conjunto  $A$  es estrellado con respecto a 0 si para todo punto  $x \in A$ , el segmento  $[0, x]$  está contenido en  $A$ .

Una cuenta medio fea demuestra que  $\omega = d(I\omega)$  siempre y cuando  $d\omega = 0$  (en un conjunto estrellado). Es decir, si  $\omega$  es una forma cerrada, entonces se puede ver como el diferencial de la función  $I\omega$ , es decir,  $\omega$  es una forma exacta. Por ejemplo, si tenemos una forma como la del ejemplo anterior ( $Pdx + Qdy$ ), está definida en un conjunto estrellado y su diferencial vale 0 (El rotacional es 0), entonces la forma tiene una antiderivada (en este caso, una función cuyo gradiente es la forma original).

**Teorema 4.11. Lema de Poincaré:** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto estrellado con respecto al 0, entonces una forma ( $\omega$ ) cerrada ( $d\omega = 0$ ) en  $A$  es exacta (tiene antiderivada).

**Ejercicio 4.1.** Dado  $f$  un 0 tensor:

- 1)  $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$  (Que en cierto sentido es el Grad de  $f$ )
- 2)  $d(Pdx + Qdy + Rdz) = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy$   
(El diferencial de una 1-forma es algo así como el Curl, se demuestra como en el ejemplo de arriba)
- 3)  $d(F_1dy \wedge dz + F_2dz \wedge dx + F_3dx \wedge dy) = (div F)dx \wedge dy \wedge dz$

Con estos resultados y usando el teorema de poincare, vemos que si  $F$  es un campo vectorial en un conjunto estrellado y  $Curl F = 0$ , entonces, como el  $Curl F$  es en cierto sentido  $dF$ , entonces esto significa que  $F$  es cerrado por lo que el teorema implica que  $F$  tiene una

antiderivada, es decir una función cuyo gradiente es  $F$ .

También vemos que si  $F$  es un campo vectorial con  $\operatorname{div} F = 0$  entonces,  $d(F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy)$  es una forma cerrada, por lo que si está definida en un conjunto estrellado, implica que tiene antiderivada. Y la antiderivada de una forma como ésta es algo como  $Pdx + Qdy + Rdz$  cuyo diferencial se interpreta como curl, por lo tanto  $F$  es el curl de alguien.

### 4.3. Preliminares Geométricos

**Definición 4.20. n-cubo singular:** en  $A \subset \mathbb{R}^n$  es una función  $c : [0, 1]^n \rightarrow A$

Cuando  $n = 0$ , un 0-cubo es una función  $c : 0 \rightarrow 0$ . Un 1-cubo singular es una curva (pero en  $\mathbb{R}^1$ , osea que no traza mucho).

**Definición 4.21. n-cubo standard:** Es la función  $I^n : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $I^n(x) = x$

O sea, deja el cubo fijo.

**Definición 4.22. n-cadena:** Una n-cadena en  $A$  es una combinación lineal de varios n-cubos singulares en  $A$ .

**Definición 4.23. frontera:** Dado un cubo singular  $c$  en  $A$ , la frontera de  $c$  es  $\partial c$  que es la frontera del conjunto imagen de la función  $c$ . La frontera de un n-cubo es una (n-1) cadena en  $A$

Por ejemplo, la frontera de  $I^2$  (que es la función identidad de  $[0, 1]^2$ ) tiene como frontera el cuadrado unitario, el cual se puede ver como la suma de 4 1-cubos que van rotando 90 grados.

Definimos ahora un par de n-cubos importantes similares a  $I^n$ .

**Definición 4.24.** Para cada  $i$  con  $1 \leq i \leq n$ , definimos los siguientes  $(n - 1)$ -cubos. Para  $x \in [0, 1]^{n-1}$

$$I_{(i,0)}^n(x) = I^n(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^i, \dots, x^{n-1})$$

$$I_{(i,1)}^n(x) = I^n(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^{n-1})$$

Es decir,  $I_{(i,0)}^n$  toma puntos de  $[0, 1]^{n-1}$  y los manda idénticamente a la  $i$ -ésima cara inferior de  $[0, 1]^n$ , mientras que  $I_{(i,1)}^n$  lo manda a la cara superior.

Por ejemplo,  $I_{2,0}^3 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^3$  con  $I(x) = (x^1, 0, x^3)$  es decir, manda  $[0, 1]^2$  a la cara  $y = 0$  del cubo. Mientras que  $I_{2,1}^3$  la manda a la cara del cubo  $y = 1$ .

**Definición 4.25.** Definimos la frontera de  $I^n$  como la función (cadena):

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n \sum_{(\alpha=0,1)} (-1)^{i+\alpha} I_{(i,\alpha)}^n = \sum_{i=1}^n (-1)^i I_{(i,0)}^n + (-1)^{i+1} I_{(i,1)}^n$$

Para un cubo más general, de la forma  $c : [0, 1]^n \rightarrow A$  (que podría ser una superficie, curva, etc), definimos la  $(i, \alpha)$ - **Cara** como:

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ (I_{(i,\alpha)}^n)$$

Y definimos su frontera como:

$$\partial c = \sum_i \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$$

Es decir, para la  $(i, \alpha)$  - Cara de  $c : [0, 1]^n \rightarrow A$ , se consigue al restringir el dominio de la curva a la  $(i, \alpha)$  - cara de  $[0, 1]^n$  y por tanto su dominio ahora es  $[0, 1]^{n-1}$

Por ejemplo, si tenemos una superficie que tiene como dominio el  $[0, 1] \times [0, 1]$ , entonces su  $(1, 0)$  - cara es una función de una sola variable en  $[0, 1]$  que toma sólo los puntos del eje  $x$  entre 0 y 1. La cara  $(1, 0)$  toma también una sola variable en la arista superior del cuadrado y lo manda a una curva en  $A$  a través de  $c$ .

**Teorema 4.12.** Si  $c$  es una  $n$ - cadena en  $A$ , entonces  $\partial(\partial c) = 0$

## 4.4. Teorema Fundamental del Cálculo

Primero necesitamos definir la integral de una  $k$ - forma. Si  $\omega$  es una  $k$ - forma en  $[0, 1]^k$ , entonces  $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ .

Aquí  $f$  es una función de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}$  que para todo  $p$  en  $\mathbb{R}^n$  nos da el coeficiente de la  $k$ -forma  $\omega$ . Entonces, Definimos:



$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f$$

Que es una integral de  $k$  variables típica. También lo podemos escribir como:

$$\int_{[0,1]^k} f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k$$

Si  $\omega$  es una  $k$ -forma en  $A$  y  $c$  es un  $k$ -cubo singular en  $A$ , definimos:

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^* \omega$$

Con el  $c^*$  definido como antes. i.e.  $c^*$  es básicamente el Jacobiano de  $c$ , el cual es lineal y por otro lado,  $\omega$  toma  $k$ -variables y da como resultado un número. Finalmente,  $c^* \omega$  toma  $k$ -variables les aplica  $c^*$  y luego aplica  $\omega$ .

Por ejemplo, si tenemos la 1-forma  $Pdx + Qdy$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un 1-cubo (una curva), entonces tenemos la integral de curva:

$$\int_c Pdx + Qdy = \int_c Pdx + \int_c Qdy = \int_{[0,1]} P(c_1(t))dt + \int_{[0,1]} Q(c_2(t))dt$$

**Teorema 4.13. Teorema de Stokes:** Si  $\omega$  es una  $k - 1$  forma en un conjunto abierto  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $c$  es una  $k$ -cadena en  $A$ , entonces:

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$