Tarea 1
Física Nuclear y Subnuclear Tarea

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

March 23, 2022

Problema 1. Radio.

a) **Calcula el radio de la órbita s de un átomo π-mésico para un átomo de Na_{11}^{23}**

El átomo de sodio en cuestión tiene una masa atómica de $A = 23$ y tiene $Z = 11$ protones. Además, suponemos que en vez de electrones, el núcleo es orbitado por un pión de carga $-e$ (que es lo que significa tener un átomo π-mésico) y con masa μ, que es igual a $\mu = 139.56995MeV/c^2 = 273.132m_e$ (dato que se pueden encontrar en [1]).

Para obtener el radio con el que orbita el pión, notamos que se trata de un átomo hidrogenoide (pues tiene solamente una partícula orbitando el núcleo) con $Z = 11$ protones. Para un átomo hidrogenoide es bien conocido que la función de distribución radial para el estado base (el orbital con $n = 1$ y $l = 0$) es [2]:

$$P(r) = R_{10}^2(r)r^2 = 4\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 r^2 e^{-2Zr/a_0},$$

donde a_0 es el radio de Bohr, que se define como [2] $a_0 = \dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$. Sin embargo, como en vez de un electrón tenemos un pión, en la expresión del radio de Bohr hay que cambiar m_e por la masa μ del pión y tenemos que $a_0 = \dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}$ (la carga no cambia porque la del electrón y pión son iguales).

Luego, una buena forma de definir el radio de órbita del pión es como la distancia en la que la distribución radial $P(r)$ es máxima. Para encontrarla, derivamos $P(r)$ e igualamos a 0, lo que nos lleva a:

$$\frac{dP}{dr} = 4\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3\left[2re^{-2Zr/a_0} - \frac{2Z}{a_0}r^2e^{-2Zr/a_0}\right] = 0$$
$$\Rightarrow\ 2re^{-2Zr/a_0} - \frac{2Z}{a_0}r^2e^{-2Zr/a_0} = 0$$
$$\Rightarrow\ 2 - \frac{2Z}{a_0}r = 0$$

Por lo que el valor en de r en el que se encuentra el máximo de $P(r)$ y que definiremos como el radio de la órbita del pión es $r = \dfrac{a_0}{Z}$. Por lo tanto, el radio de la órbita es:

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{a_0}{Z} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2 Z} \\
&\text{sustituimos los valores de las constantes, que se pueden ver en [3]:} \\
&= \frac{4\pi(8.85418\times10^{-12}Fm^{-1})(1.05457\times10^{-34}Js)^2}{273.132(9.109383\times10^{-31}kg)(-1.602716\times10^{-19}C)^2(11)} \\
&= \boxed{1.76131\times10^{-14}m}
\end{aligned}
$$

b) **Demostrar que la órbita se sitúa fuera del núcleo, suponiendo que el parámetro del radio nuclear es $r_0 = 1.2\times10^{-15}m$**

Para obtener el radio nuclear se puede utilizar la relación (5.56) de [4] que dice que para un núcleo con A nucleones, el radio nuclear está dado por:

$$R = r_0 A^{1/3}.$$

Para el átomo en cuestión, sustituimos los valores de $r_0 = 1.2\times10^{-15}m$ y $A = 23$, con lo que nos queda:

$$R = r_0 A^{1/3} = (1.2\times10^{-15}m)(23^{1/3}) = \boxed{3.41264\times10^{-15}m}$$

Podemos ver que el radio de la órbita, que es $r = 1.76131\times10^{-14}m$ es mayor que el del núcleo $R = 3.41264\times10^{-15}m$, por lo que la órbita se sitúa fuera del núcleo. De hecho, para verlo más claramente y considerando que el pión no tiene un radio de órbita fijo, sino que tiene una distribución radial, podemos calcular la probabilidad de encontrar al pión dentro del núcleo. Esto se calcularía como la integral de $P(r)$ desde $r = 0$ hasta r igual al radio del núcleo R. Esto nos da como resultado:

$$\int_0^R P(r)dr = \int_0^R 4\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 r^2 e^{-2Zr/a_0}dr$$

Realicé la integral en Mathematica y obtuve como resultado 0.00727, indicando que la distribución de densidad radial es muy baja dentro del radio del núcleo.

c) **Calcular la densidad de los nucleones disponibles para la interacción y el recorrido libre medio que corresponde a una sección eficaz de $\pi(\hbar/\mu c)^2$.**

La densidad de nucleones en el núcleo se consigue como la cantidad de nucleones $A = 23$ divido por el volumen del núcleo $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. Por lo tanto, dicha densidad es de

$$n = \frac{A}{V} = \frac{3A}{4\pi R^3} = \frac{3A}{4\pi(r_0A^{1/3})^3} = \frac{3}{4\pi r_0^3} = \frac{3}{4\pi(1.2\times10^{-15}m)^3} = 1.38155\times10^{44}\ \text{nucleones}/m^3$$

Queremos ahora calcular el recorrido libre medio si el pión entra al núcleo. Como dice el enunciado, la sección eficaz del pión es $\sigma = \pi\left(\dfrac{\hbar}{\mu c}\right)^2$ y esto representa el área efectiva con la que puede colisionar el pión con alguno de los nucleones.

Luego, si pensamos que el pión se mueve a una velocidad promedio de v, en un tiempo t cubre una distancia vt. En ese tiempo, considerando que el área transversal efectiva del pión es σ, el pión habrá cubierto un volumen de σvt. Considerando que la densidad de nucleones es n, en ese volumen hay un

total de σvtn nucleones con los cuales puede interactuar.
Luego, el recorrido libre medio es la distancia que recorre el pión dividida por la cantidad de colisiones que podría tener en dicha distancia recorrida (para que así obtengamos la longitud recorrida por cada colisión). Entonces, el recorrido libre medio es:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{nucleones con los que interactúa en esa distancia}} = \frac{vt}{\sigma vtn} = \frac{1}{\sigma n} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{n}\end{aligned}$$

sustituimos los valores de las constantes y la n calculada antes:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{273.132(9.109383\times 10^{-31}kg)(2.99792\times 10^{8}m/s)}{(1.05457\times 10^{-34}Js)}\right)^2 \frac{1}{1.38155\times 10^{44}\text{nucleones}/m^3} \\ &= \boxed{1.15264\times 10^{-15}m}\end{aligned}$$

Problema 2. Masa 1.

Calcula la masa del átomo N^{17}, si la energía de la reacción $N^{17}(p,n)O^{17}$ es $Q = 7.898MeV$

La reacción nos dice que empezamos con un nitrógeno con $A = 17$ y al aventarle un protón, se convierte en O^{17} y libera un neutrón y cierta cantidad Q de energía. Es decir, tenemos la reacción

$$N^{17} + p \to O^{17} + n + Q.$$

La energía a ambos lados de la reacción tiene que ser igual. Del lado izquierdo la energía total es la masa multiplicada por c^2, $(m(N^{17}) + m(p))c^2$ y del lado derecho es la masa más la energía Q que es liberada: $(m(O^{17}) + m(n))c^2 + Q$. Por lo tanto, el balance de energía nos da:

$$\begin{aligned} (m(N^{17}) + m(p))c^2 &= (m(O^{17}) + m(n))c^2 + Q \\ \Rightarrow\ m(N^{17})c^2 &= (m(O^{17}) + m(n) - m(p))c^2 + Q \\ \Rightarrow\ m(N^{17}) &= m(O^{17}) + m(n) - m(p) + Q/c^2 \end{aligned}$$

El oxígeno O^{17} es un isótopo muy común, su masa se puede consultar en [5] y tiene un valor de $16.99913u = 16.99913(9.314941\times10^8 eV/c^2) = 1.5834591\times10^{10} eV/c^2$, y las masas del protón y neutrón se pueden encontrar en [3] y por lo tanto nos queda:

$$\begin{aligned} m(N^{17}) &= m(O^{17}) + m(n) - m(p) + Q/c^2 \\ &= 1.5834591 \times 10^{10} eV/c^2 + 939.565 \times 10^6 eV/c^2 - 938.272 \times 10^6 eV/c^2 + 7.898 \times 10^6 eV/c^2 \\ &= \boxed{1.58438 \times 10^{10} eV/c^2} \end{aligned}$$

Considerando que la unidad de masa atómica $1u$ es igual a $9.314941 \times 10^8 eV/c^2$ [3], podemos convertir el resultado a u

$$\begin{aligned} m(N^{17}) &= 1.5843782 \times 10^{10} eV/c^2 = 1.5843782 \times 10^{10} eV/c^2 \left(\frac{1u}{9.314941 \times 10^8 eV/c^2} \right) \\ &= \boxed{17.0089u} \end{aligned}$$

Problema 3. Masa 2.

Isaac Asimov en su novela *The Gods Themselves* describe un universo donde el núcleo más estable con $A = 186$ no es $^{186}_{74}W$ sino $^{186}_{94}Pu$. Se afirma que esto es una consecuencia de que la proporción de las fuerzas de las interacciones fuertes y electromagnéticas es diferente a la de nuestro Universo. Suponga que solo la constante de acoplamiento electromagnético α difiere y que tanto la interacción fuerte como las masas de nucleones no cambian. ¿Qué tan grande debe ser α para que $^{186}_{82}Pb$, $^{186}_{88}Ra$ y $^{186}_{94}Pu$ sean estables?

Notamos primero que los tres átomos $^{186}_{82}Pb$, $^{186}_{88}Ra$ y $^{186}_{94}Pu$ son isobaros, pues tienen $A = 186$. En clase vimos que la expresión semi-empírica para la masa $M(A, Z)$ de un átomo con A nucleones y Z protones es:

$$M(A,Z) = NM_n + ZM_p + Zm_e - a_V A + a_S A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(N-Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{1/2}} \quad (1)$$

si consideramos el valor de A constante, la expresión semi-empírica para la masa $M(A, Z)$ de un átomo con A nucleones y Z protones se puede reescribir como:

$$M(A,Z) = \xi A - \beta Z + \gamma Z^2 + \frac{\delta}{A^{1/2}} \quad (2)$$

donde:

$$\xi := M_n - a_V + a_S A^{-1/3} + \frac{a_a}{4} \ , \ \beta = a_a + (M_n - M_p - m_e) \ , \ \gamma = \frac{a_a}{A} + \frac{a_c}{A^{1/3}}$$

Vemos entonces que se puede considerar que la masa depende solamente de Z para todos estos átomos con A fijo. Donde según [4], las constantes son $a_V = 15.67 MeV/c^2$, $a_s = 17.23 MeV/c^2$, $a_c = 0.714 MeV/c^2$, $a_a = 93.15 MeV/c^2$ y $\delta = \begin{cases} -11.2 MeV/c^2 \text{ para } Z \text{ y } N \text{ pares} \\ 0 MeV/c^2 \text{ para } A \text{ impar} \\ +11.2 MeV/c^2 \text{ para } Z \text{ y } N \text{ impares} \end{cases}$

La ecuación (2) nos dice que la masa del átomo depende cuadráticamente de Z, por lo que una gráfica de $M(A, Z)$ vs Z forma dos parábolas (son dos parábolas desplazadas verticalmente porque δ puede ser positivo o negativo dependiendo de si Z es impar o par). Para asegurar que un átomo sea estable, su valor de Z debe de producir el mínimo de $M(A, Z)$ de entre todos los Z posibles, para que así el átomo no pueda decaer a otro por medio de un decaimiento β. Entonces, primero buscamos cuál es el mínimo de $M(A, Z)$ respecto a Z, para lo cual derivamos e igualamos a 0:

$$M'(A,Z) = -\beta + 2\gamma Z = 0$$
$$\Rightarrow \ Z_{min} = \frac{\beta}{2\gamma}.$$

Podemos sustituir β y γ en esta expresión:

$$Z_{min} = \frac{a_a + (M_n - M_p - m_e)}{2\left[\frac{a_a}{A} + \frac{a_c}{A^{1/3}}\right]}$$

Es decir, para cierto valor de A, el átomo más estable es el que tiene Z_{min} protones dado por esta expresión.

Nos gustaría encontrar como depende esta expresión de la constante de acoplamiento electromagnético α para encontrar los valores que debería de tener α para tener distintos Z_{min}. Para empezar, el valor de a_a aparece en la expresión de la masa (1) en el término de asimetría y no depende de α pues no tiene que ver con el acoplamiento electromagnético.

Por otro lado, a_c aparece en (1) dentro del término Coulumbiano $E_c = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$, por lo que es de esperar que a_a sí dependa de α. Para encontrar la dependencia, podemos fijarnos en la ecuación (2.11) de [4] y que vimos en

clase, en la que se escribe este mismo término pero en la forma levemente distinta como $E_c = \frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)\alpha\hbar c}{R}$. Esta expresión se puede reescribir usando que el radio nuclear está dado por la expresión (5.56) de [4], que dice que $R = r_0 A^{1/3}$ con $r_0 = 1.2 \times 10^{-15} m$, por lo que nos queda: $E_c = \frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)\alpha\hbar c}{r_0 A^{1/3}} \simeq \frac{3}{5}\frac{Z^2\alpha\hbar c}{r_0 A^{1/3}}$.
Esto último ya tiene la forma de la expresión $a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}}$ con $a_c = \frac{3\alpha\hbar c}{5r_0} := k\alpha$ donde definimos $k = \frac{3\hbar c}{5r_0} \simeq 9.86633 \times 10^7 eV/c^2$.

Por lo tanto, ya podemos ver que a_c es directamente proporcional a la constante de acoplamiento electromagnético α, escrito como $a_c = k\alpha$.

Entonces, regresando a la expresión de Z_{min}, tenemos que:

$$Z_{min} = \frac{a_a + (M_n - M_p - m_e)}{2\left[\frac{a_a}{A} + \frac{k\alpha}{A^{1/3}}\right]}$$

Con esto ya podemos ver cómo hay que variar el valor de α para que Z_{min} tome el valor que queremos para el átomo estable. Para hacerlo, podemos despejar α en esta expresión y nos queda:

$$\alpha = \frac{A(a_a + M_n - M_p - m_e) - 2a_a Z_{min}}{2A^{2/3}kZ_{min}}$$

Podemos entonces ya ver el valor que tiene que tener α para los distintos átomos que queremos que sean estables:

- Antes de empezar, para comprobar que todo está bien, veremos que con el valor verdadero de $\alpha \simeq 1/137$, la fórmula de Z_{min} predice correctamente que el átomo más estable es ${}^{186}_{74}W$

$$\begin{aligned} Z_{min\ (\alpha=1/137)} &= \frac{a_a + (M_n - M_p - m_e)}{2\left[\frac{a_a}{A} + \frac{k\alpha}{A^{1/3}}\right]} \\ &= \frac{93.15 \times 10^6 eV/c^2 + (939.565 \times 10^6 eV/c^2 - 938.272 * 10^6 eV/c^2 - 0.511 \times 10^6 eV/c^2)}{2\left[\frac{93.15 \times 10^6 eV/c^2}{186} + \frac{9.86633 \times 10^7 eV/c^2 (1/137)}{186^{1/3}}\right]} \\ &= 74.81 \end{aligned}$$

  Lo cual se acerca mucho al valor de Z esperado de 74.

- Encontramos el valor de α para que ${}^{186}_{82}Pb$ sea estable, para lo que usamos la expresión con α despejada y sustituimos $Z = 82$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{A(a_a + M_n - M_p - m_e) - 2a_a Z_{min}}{2A^{2/3}kZ_{min}} \\ &= \frac{186(93.15 \times 10^6 eV/c^2 + 939.565 \times 10^6 eV/c^2 - 938.272 * 10^6 eV/c^2 - 0.511 \times 10^6 eV/c^2) - 2 * 93.15 \times 10^6 eV/c^2 (82)}{2 * 186^{2/3} * 9.86633 \times 10^7 eV/c^2 * 82} \\ &\simeq \boxed{0.004162} \end{aligned}$$

- Encontramos el valor de α para que ${}^{186}_{88}Ra$ sea estable, para lo que usamos la expresión con α despejada y sustituimos $Z = 88$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{A(a_a + M_n - M_p - m_e) - 2a_a Z_{min}}{2A^{2/3}kZ_{min}} \\ &= \frac{186(93.15 \times 10^6 eV/c^2 + 939.565 \times 10^6 eV/c^2 - 938.272 * 10^6 eV/c^2 - 0.511 \times 10^6 eV/c^2) - 2 * 93.15 \times 10^6 eV/c^2 (88)}{2 * 186^{2/3} * 9.86633 \times 10^7 eV/c^2 * 88} \\ &\simeq \boxed{0.001903} \end{aligned}$$

- Encontramos el valor de α para que ${}^{186}_{94}Pu$ sea estable, para lo que usamos la expresión con α despejada y sustituimos $Z = 94$:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{A(a_a + M_n - M_p - m_e) - 2a_aZ_{min}}{2A^{2/3}kZ_{min}} \\ &= \frac{186(93.15\times10^6 eV/c^2 + 939.565\times10^6 eV/c^2 - 938.272 * 10^6 eV/c^2 - 0.511\times10^6 eV/c^2) - 2*93.15\times10^6 eV/c^2(94)}{2*186^{2/3}*9.86633\times10^7 eV/c^2 * 94} \\ &\simeq \boxed{-0.000067}\end{aligned}$$

En este caso nos da un valor de α negativo, lo cual es imposible, pues esta constante se define como $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$, que es un producto de cantidades que son positivas. Concluimos que no hay forma de hacer que Pu sea el átomo de $A = 186$ estable con solamente cambiar el valor de α, pues haría falta hacerla negativa, lo cual no tiene sentido.

Problema 4. Energía de enlace 1.

a) **Determine la energía de enlace de un deuterón, utilizando las masas de sus constituyentes.**

Para calcular la energía de enlace es necesario el concepto de defecto de masa, según el cual, la energía de enlace de un núcleo es igual a la diferencia entre la masa de sus constituyentes y la masa total del núcleo. Es decir, para un átomo de Z protones y N neutrones, la energía de enlace está dada por (ecuación 2.2 de [4]):

$$B(Z,A) = [ZM(^1H) + NM_n - M(A,Z)]c^2$$

Donde $M(^1H)$ y M_n son las masas de un hidrógeno ^1H y un neutrón respectivamente y $M(N,Z)$ es la masa del núcleo con Z protones y N neutrones. Se agrega el factor de c^2 para convertir las masas en energías. Las masas del neutrón y de ^1H son bien conocidas y se pueden consultar en [3] y [5].

Un deuterón ^2H está formado por un átomo de hidrógeno que tiene un neutrón adicional. Por lo tanto en este caso $N = 1$ y $Z = 1$, entonces tenemos que la energía de enlace es:

$$\begin{aligned} B &= [ZM(^1H) + NM_n - M(A,Z)]c^2 \\ &= [1M(^1H) + 1M_n - M(^2H)]c^2 \end{aligned}$$

Las masas de ^1H y ^2H se pueden encontrar en [5] y tienen valores de $1.007825u$ y $2.014102u$ respectivamente. Mientras que la masa del neutrón tiene un valor de $1.008665u$. Entonces nos queda que la energía de enlace es de:

$$\begin{aligned} B &= [1M(^1H) + 1M_n - M(^2H)]c^2 \\ &= [1(1.007825u) + 1(1.008665u) - 2.014102u]c^2 \\ &= 0.002388u\, c^2 \end{aligned}$$

Finalmente, para convertir a eV, usamos que $u = 9.314941 \times 10^8 eV/c^2$ (tomado de [3]) y por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} B &= 0.002388u\, c^2 = 0.002388(9.314941 \times 10^8 eV/c^2)c^2 \\ &= \boxed{2.224 \times 10^6 eV} \end{aligned}$$

b) **Calcula la energía de enlace por nucleón de ^4He (partícula α)**

El helio está formado por 2 protones y 2 neutrones, por lo que se puede usar $Z = N = 2$ en la misma ecuación que la del inciso pasado. Necesitamos también la masa de ^4He, que se puede consultar en [5] y tiene un valor de $M(^4He) = 4.002603u$. Entonces, la energía de enlace es:

$$\begin{aligned} B &= [ZM(^1H) + NM_n - M(A,Z)]c^2 \\ &= [2M(^1H) + 2M_n - M(^4He)]c^2 \\ &= [2(1.007825u) + 2(1.008665u) - 4.002603u]c^2 \\ &= 0.030377u\, c^2 \end{aligned}$$

Convertimos esta expresión a eV reemplazando el valor de u:

$$\begin{aligned} B &= 0.030377u\, c^2 \\ &= 0.030377(9.314941 \times 10^8 eV/c^2)c^2 \\ &= \boxed{2.8296 \times 10^7 eV} \end{aligned}$$

Sin embargo, nos piden la energía de enlace por nucleón (y son 4 nucleones), por lo que hay que dividir entre 4:

$$\text{Energía de enlace por nucleón} = \frac{2.8296 \times 10^7 eV}{4} = \boxed{7.074 \times 10^6 eV}$$

Problema 5. Energía de enlace 2.

1. **Un núcleo posee igual número de protones y neutrones y tiene un radio igual a 2/3 el radio de ^{54}V (tomar $r_0 = 1.2 \times 10^{-15} m$), encontrar la energía de enlace.**

Sabemos que el átomo en cuestión tiene una cantidad de protones Z y de neutrones N con $Z = N$. Para calcular el valor de A de este átomo, obtendremos primero su radio R usando la información que nos da el problema.

Empezamos calculando el radio de ^{54}V. Para hacerlo, utilizamos la relación (5.56) de [4] que dice que un núcleo con A nucleones tiene un radio de

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (1)$$

con $r_0 = 1.2 \times 10^{-15} m$. Entonces, en el caso del ^{54}V se tiene un radio de

$$R_V = r_0 (54)^{1/3}.$$

Luego, el radio del átomo que buscamos estudiar es 2/3 este radio, por lo que tiene un valor de:

$$R = \frac{2}{3} R_V = \frac{2}{3} r_0 (54)^{1/3}$$

Usando la ecuación (1) para este radio, tenemos que el átomo que nos interesa tiene una masa atómica de:

$$A^{1/3} = \frac{2}{3}(54)^{1/3} \;\; \Rightarrow \;\; A = \left(\frac{2}{3}(54)^{1/3}\right)^3 = \frac{8}{27}(54) = 16$$

Por lo tanto, tenemos un átomo con $A = 16$ y con mismo número de protones y neutrones, es decir $N = P = 8$, esto corresponde al átomo ^{16}O.

Para obtener la energía de enlace de este átomo, usamos al igual que en el ejercicio pasado que dicha energía se calcula como:

$$\begin{aligned} B &= [ZM(^1H) + NM_n - M(^{16}O)]c^2 \\ &= [8(1.00782u) + 8(1.00866u) - 15.99491u]c^2, \end{aligned}$$

donde tomamos la masa del oxígeno 16 de la referencia [5]. Haciendo la suma y luego sustituyendo $u = 9.314941 \times 10^8 eV/c^2$ obtenemos una energía de enlace de:

$$\begin{aligned} B &= 0.13693u\ c^2 \\ &= 0.13693(9.314941 \times 10^8 eV/c^2)c^2 \\ &= 0.13693(9.314941 \times 10^8 eV) \\ &= \boxed{1.2755 \times 10^8 eV} \end{aligned}$$

2. **a) Conociendo las masas del ^{15}O y del ^{15}N, calcular la diferencia en la energía de enlace.**

Como en los otros problemas anteriores que hemos visto, la energía de enlace de un átomo con Z protones y N neutrones se calcula como la diferencia de la masa de sus partes menos su masa total, es decir (ecuación 2.2 de [4]):

$$B(Z, A) = [ZM(^1H) + NM_n - M(A, Z)]c^2,$$

donde $M(^1H)$ es la masa de un átomo de Hidrógeno, M_n la de un neutrón y $M(A,Z)$ la de un átomo con masa atómica A y Z protones.

Por lo tanto, la energía de enlace de ^{15}O (que tiene $Z=8$ y $N=7$) es de:

$$B(^{15}O) = [8M(^1H) + 7M_n - M(^{15}O)]c^2$$

Por otro lado la energía de enlace de ^{15}N (que tiene $Z=7$ y $N=8$) es de:

$$B(^{15}N) = [7M(^1H) + 8M_n - M(^{15}N)]c^2$$

Por lo tanto, la diferencia en estas dos energías es de:

$$\begin{aligned}\Delta E &= B(^{15}N) - B(^{15}O)\\ &= [7M(^1H) + 8M_n - M(^{15}N)]c^2 - [8M(^1H) + 7M_n - M(^{15}O)]c^2\\ &= [-M(^1H) + M_n - M(^{15}N) + M(^{15}O)]c^2\end{aligned}$$

Sustituimos ahora las masas de estos objetos. La masa del hidrógeno es $M(^1H) = 1.007825u$, la del neutrón es $M_n = 1.008665u$. Las masas de ^{15}N y ^{15}O se pueden consultar en [5] y tienen valores de $15.000109u$ y de $15.003066u$ respectivamente. Nos queda entonces:

$$\begin{aligned}\Delta E &= [-M(^1H) + M_n - M(^{15}N) + M(^{15}O)]c^2\\ &= [-1.007825u + 1.008665u - 15.000109u + 15.003066u]c^2\\ &= 0.003797u\, c^2\end{aligned}$$

Usamos ahora que $1u = 9.314941 \times 10^8 eV/c^2$ como se puede consultar en [3] y nos queda:

$$\Delta E = 0.003797(9.31494102 \times 10^8 eV/c^2)c^2 = \boxed{3.5369 \times 10^6 eV}$$

b) **Suponiendo que la diferencia se debe a la diferencia en la energía Coulombiana, calcular el radio nuclear del ^{15}O y del ^{15}N.**

Primero recordamos que la expresión para la energía de enlace de un núcleo según [4] tiene varios términos, entre los cuales se encuentra el término electromagnético, que tiene la forma [4]:

$$E_C = \frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)\alpha\hbar c}{R}$$

donde R denota el radio del núcleo. Si suponemos que la diferencia de energías de enlace calculada en el inciso a) se debe a este término, entonces esta diferencia debe de ser igual a la diferencia de este término evaluado para el nitrógeno y el oxígeno, es decir:

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_{C\ ^{15}N} - E_{C\ ^{15}O}\\ &= \frac{3}{5}\frac{8(8-1)\alpha\hbar c}{R_O} - \frac{3}{5}\frac{7(7-1)\alpha\hbar c}{R_N}\end{aligned}$$

Sin embargo, como vimos en clase y se puede ver en la ecuación (5.56) de [4], el radio de un núcleo se puede aproximar como dependiente únicamente de A según la relación:

$$R = r_0 A^{1/3},$$

con r_0 una constante, por lo que supondremos que el radio del oxígeno y del nitrógeno es el mismo, $R_O = R_N = R$, ya que tienen la misma masa atómica A. Entonces, siguiendo con la relación que teníamos antes, tenemos ahora que:

$$\Delta E = \frac{3}{5}\frac{8(8-1)\alpha\hbar c}{R} - \frac{3}{5}\frac{7(7-1)\alpha\hbar c}{R}$$
$$= \frac{168\alpha\hbar c}{5R} - \frac{126\alpha\hbar c}{5R} = \frac{42\alpha\hbar c}{5R}$$

Luego, podemos despejar R y nos queda:

$$R = \frac{42\alpha\hbar c}{5\Delta E}$$

Sustituimos los valores para $\alpha \simeq 1/137$, $\hbar = 6.582119 \times 10^{-16} eVs$, $c = 2.99792 \times 10^8 m/s$ y la diferencia en energía calculada antes $\Delta E = 3.5369 \times 10^6 eV$ y nos queda:

$$R = \frac{42(1/137)(6.582119 \times 10^{-16} eVs)(2.99792 \times 10^8 m/s)}{5(3.5369 \times 10^6 eV)}$$
$$= \boxed{3.4207 \times 10^{-15} m}$$

Vemos que este resultado se acerca un poco al esperado para un átomo de $A = 15$, que sería $R = r_0 A^{1/3} = 1.2 \times 10^{-15} m(15)^{1/3} = 3.0827 \times 10^{-15} m$. No es demasiado preciso porque la diferencia de energías de enlace entre ^{15}N y ^{15}O no se debe solamente a la atracción electromagnética.

3. **Usando la tabla adjunta:**

Núcleos	^2H	^4He	^6Li	^8Be	^{12}C
Energía de enlace (MeV)	2.22	28.3	31.99	56.5	92.16

a) **Mostrar que ^8Be puede desintegrarse en dos partículas α con desprendimiento de $0.1 MeV$ de energía pero que el ^{12}C no puede desintegrarse en tres partículas α.**

Para el caso de berilio, la reacción que nos interesa ver si es posible es:

$$^8Be \rightarrow {}^4He + {}^4He + Q,$$

donde Q es la energía que se desprende en la reacción (por eso la colocamos del lado derecho, pues es energía que se desprende en la reacción y no energía que hay que meter a ^8Be). Para que sea posible la reacción, debe de haber cierto valor de Q positivo tal que la energía a ambos lados de la expresión se pueda balancear. Para ver si esto es posible, primero igualamos la energía de ambos lados de la ecuación:

$$M(^8Be)c^2 = 2M(^4He)c^2 + Q$$

Sin embargo, sabemos que la masa de un núcleo es igual a la suma de las masas de sus constituyentes menos la energía de enlace. Es decir, la masa de un átomo se puede escribir como $M(A,Z) = ZM(^1H) + NM_n - B(A,Z)/c^2$ donde $B(A,Z)$ indica su energía de enlace. Hacemos esto para cada uno de los átomos, considerando que para ^4Be, se tiene $Z = N = 4$ y para ^2He se tiene $Z = N = 2$ y nos queda:

$$(4M(^1H) + 4M_n - B(^8Be)/c^2)c^2 = 2(2M(^1H) + 2M_n - B(^4He)/c^2)c^2 + Q$$
$$\Rightarrow -B(^8Be) = -2B(^4He) + Q$$

Usamos ahora las energías de enlace de la tabla y llegamos así a que:

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ -56.5MeV &= -2(28.3MeV) + Q \\ \Rightarrow\ Q &= 0.1MeV \end{aligned}$$

Es decir, se puede desintegrar ^8Be en dos partículas α sin necesidad de agregar energía (de hecho, se desprende $0.1MeV$ en el proceso).

Hacemos el mismo análisis para el carbono, si se pudiera desintegrar en 3 partículas α, la reacción se vería así:

$$^{12}C \to 3^4He + Q$$

donde Q es la energía que se desprende en la reacción. Luego, igualando las energías de ambos lados nos queda que:

$$M(^{12}C)c^2 = 3M(^4He)c^2 + Q$$

Finalmente, usamos la misma ecuación que en el caso anterior para la masa de cada núcleo, $M(A,Z) = ZM(^1H) + NM_n - B(A,Z)/c^2$ donde $B(A,Z)$ indica la energía de enlace, con lo que nos queda (considerando que para el cabono-12 $N = Z = 6$):

$$\begin{aligned} (6M(^1H) + 6M_n - B(^{12}C)/c^2)c^2 &= 3(2M(^1H) + 2M_n - B(^2He)/c^2)c^2 + Q \\ \Rightarrow\ -B(^{12}C) &= -3B(^2He) + Q \end{aligned}$$

Finalmente, sustituimos los valores de energía de enlace de la tabla y nos queda:

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ -92.16MeV &= -3(28.3MeV) + Q \\ \Rightarrow\ Q &= -7.26MeV \end{aligned}$$

Que el resultado sea negativo nos dice que la desintegración no es posible, y se necesitaría agregar $7.26MeV$ al Carbono para que se desintegre en 3 partículas α.

b) **Mostrar que la energía desprendida (incluyendo la del fotón) en la reacción $^2H + ^4He \to ^6Li + \gamma$ es de $1.5MeV$.**

Al igual que en los otros incisos, igualamos las energías a ambos lados de la expresión:

$$M(^2H)c^2 + M(^4He)c^2 = M(^6Li)c^2 + \gamma + Q$$

donde Q simboliza energía desprendida a parte de la que se lleva el fotón.

Sin embargo, sabemos que la masa de un núcleo es igual a la suma de las masas de sus constituyentes menos la energía de enlace. Es decir, la masa de un átomo se puede escribir como $M(A,Z) = ZM(^1H) + NM_n - B(A,Z)/c^2$ donde $B(A,Z)$ indica su energía de enlace. Hacemos esto para cada uno de los átomos, considerando que ^2H tiene $Z = N = 1$, ^4He tiene $Z = N = 2$ y que ^6Li tiene $Z = N = 3$ y nos queda:

$$\begin{aligned} (M(^1H) + 1M_n - B(^2H)/c^2)c^2 + (2M(^1H) + 2M_n - B(^4He)/c^2)c^2 &= (3M(^1H) + 3M_n - B(^6Li)/c^2)c^2 + E(\gamma) + Q \\ \Rightarrow\ -B(^2H) - B(^4He) &= -B(^6Li) + E(\gamma) + Q \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía desprendida (incluyendo la del fotón) es:

$$\begin{aligned} E(\gamma) + Q &= -B(^2H) - B(^4He) + B(^6Li) \\ &\text{sustituimos los valores de la tabla} \\ &= -2.22MeV - 28.3MeV + 31.99MeV \\ &= \boxed{1.47MeV} \end{aligned}$$

que es lo que se buscaba probar.

Problema 6. Energía de ionización

Estime el campo eléctrico necesario para sacar un electrón de un átomo en un tiempo comparable al del electrón para dar la vuelta al núcleo. El radio de Bohr corresponde a $a_0 = 0.53\times10^{-8}cm$

Modelamos al átomo en cuestión como un átomo hidrogenoide con Z protones y por lo tanto una carga nuclear de Ze. No nos dicen el orbital en el que se encuentra el electrón, por lo que lo denotaremos simplemente por n

Podemos obtener la energía de ionización de este electrón usando la expresión para la energía en un átomo hidrogenoide, que es $-13.6eV\frac{Z^2}{n^2}$ (ecuación 4.20 de [6]). Entonces, para sacar al electrón es necesario darle una energía de $13.6eV\frac{Z^2}{n^2} = 13.6eV\frac{Z^2}{n^2}$

Por otro lado, el radio de la órbita en el que orbita un electrón en el orbital n de un átomo hidrogenoide con Z protones según el modelo de Bohr es $r_n = \frac{n^2a_0}{Z}$ (ecuación 4.18 de [6]) con a_0 el radio de Bohr.

Ahora nos imaginamos que ponemos al átomo en un campo eléctrico externo E_0 uniforme en la dirección $\hat{z}$. El trabajo que hace el campo sobre el electrón al moverse desde un punto 1 hasta un punto 2 en su órbita es entonces

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = (-e)\int_1^2 \vec{E_0}\cdot d\vec{r} = (-e)\int_1^2 E_0\hat{z}\cdot d\vec{r} = -eE_0\int_1^2 dz = -eE_0(z_2 - z_1) = -eE_0\Delta z$$

Por lo tanto, el trabajo que hace el campo eléctrico sobre el electrón depende de la diferencia de la coordenada z a lo largo de la órbita. Si la órbita está alineada a lo largo de la coordenada z (o más bien, el campo eléctrico hace que la órbita se alinee en esta dirección), entonces la diferencia en z a lo largo de media órbita será de dos veces el radio, $\Delta z = 2r$. Por lo tanto, el trabajo que realiza el campo eléctrico a lo largo de media órbita es de:

$$W = -eE_0(2r) = -\frac{2eE_0n^2a_0}{Z}$$

Para que se ionice el átomo, es necesario que este trabajo sea mayor a la energía del electrón, que es de $-13.6eVZ^2$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\frac{2eE_0n^2a_0}{Z} \geq 13.6eV\frac{Z^2}{n^2}$$
$$\Rightarrow\ E_0 \geq 13.6eV\frac{Z^3}{2ea_0n^4}$$

Si sustituimos el valor de la carga del electrón $e = 1.602177\times10^{-19}C$ y del radio de Bohr $a_0 = 5.29\times10^{-11}m$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} E_0 &\geq (13.6eV)\frac{Z^3}{2(1.602177\times10^{-19}C)(5.29\times10^{-11}m)n^4} \\ &= 1.28\times10^{11}V/m\frac{Z^3}{n^4} \end{aligned}$$

Problema 7. Energía de separación

a) **Calcula la energía de separación de un neutrón de:** Li^7, Zr^{91} **y** U^{236}

Para cada caso estudiamos una reacción en la que al agregar energía Q al átomo, se separa en un neutrón y queda el átomo con un neutrón menos.

– Li^7: En este caso empezamos con un litio ($Z = 3$) con 4 neutrones Li^7 y se separa un neutrón, dejándonos con solamente 3 neutrones en el litio. Es decir, la reacción que separa al neutrón es:

$$Li^7 + Q \to Li^6 + n$$

donde Q es la energía que hay que meter para que suceda la separación. Para obtener el valor de Q igualamos las energías a ambos lados de la reacción:

$$M(Li^7)c^2 + Q = M(Li^6)c^2 + M(n)c^2$$
$$\Rightarrow \; Q = [M(Li^6) + M(n) - M(Li^7)]c^2$$

Las masas de Li^7 y Li^6 se pueden consultar en [5] y tienen valores de $7.0160u$ y $6.0151u$ respectivamente. Además, la masa del neutrón es $1.00866u$, por lo que nos queda:

$$Q = [6.01512u + 1.00866u - 7.01600u]c^2 = 0.00778u\ c^2$$

Finalmente usamos que $1u = 9.314941 \times 10^8 eV/c^2$ como se puede consultar en [3] y nos queda que:

$$Q = 0.00778(9.314941 \times 10^8 eV/c^2)c^2 = \boxed{7.24702 \times 10^6 eV}$$

Es decir, esta es la energía que hay que agregar a Li^7 para quitarle un neutrón y convertirlo en $Li^6 + n$.

– Zr^{91}: En este caso empezamos con un zirconio ($Z = 40$) con 51 neutrones Zr^{91} y se separa un neutrón, dejándonos con Zr^{90}. Es decir, la reacción que separa al neutrón es:

$$Zr^{91} + Q \to Zr^{90} + n$$

donde Q es la energía que hay que meter para que suceda la separación. Para obtener el valor de Q igualamos las energías a ambos lados de la reacción:

$$M(Zr^{91})c^2 + Q = M(Zr^{90})c^2 + M(n)c^2$$
$$\Rightarrow \; Q = [M(Zr^{90}) + M(n) - M(Zr^{91})]c^2$$

Las masas de Zr^{91} y Zr^{90} se pueden consultar en [5] y tienen valores de $90.90564u$ y $89.90470u$ respectivamente. Además, la masa del neutrón es $1.00866u$, por lo que nos queda:

$$Q = [89.90470u + 1.00866u - 90.90564u]c^2 = 0.00772u\ c^2$$

Finalmente usamos que $1u = 9.314941 \times 10^8 eV/c^2$ como se puede consultar en [3] y nos queda que:

$$Q = 0.00772(9.314941 \times 10^8 eV/c^2)c^2 = \boxed{7.1911 \times 10^6 eV}$$

Es decir, esta es la energía que hay que agregar a Zr^{91} para quitarle un neutrón y convertirlo en $Li^{90} + n$.

– U^{236}: En este caso empezamos con un uranio ($Z = 92$) con 144 neutrones U^{236} y se separa un neutrón, dejándonos con U^{235}. Es decir, la reacción que separa al neutrón es:

$$U^{236} + Q \rightarrow U^{235} + n$$

donde Q es la energía que hay que meter para que suceda la separación. Para obtener el valor de Q igualamos las energías a ambos lados de la reacción:

$$M(U^{236})c^2 + Q = M(U^{235})c^2 + M(n)c^2$$
$$\Rightarrow \; Q = [M(U^{235}) + M(n) - M(U^{236})]c^2$$

Las masas de U^{236} y U^{235} se pueden consultar en [5] y tienen valores de $236.04557u$ y $235.04393u$ respectivamente. Además, la masa del neutrón es $1.00866u$, por lo que nos queda:

$$Q = [235.04393u + 1.00866u - 236.04557u]c^2 = 0.00702u\; c^2$$

Finalmente usamos que $1u = 9.314941 \times 10^8 eV/c^2$ como se puede consultar en [3] y nos queda que:

$$Q = 0.00702(9.314941 \times 10^8 eV/c^2)c^2 = \boxed{6.5391 \times 10^6 eV}$$

Es decir, esta es la energía que hay que agregar a U^{236} para quitarle un neutrón y convertirlo en $U^{235} + n$.

b) **Encontrar la energía de separación de un protón de:** Ne^{20}**,** Mn^{55} **y** Au^{197}

En cada caso estudiamos la reacción que al agregar energía Q al átomo, se separa un protón y queda el átomo con un protón menos y un protón libre.

– Ne^{20}: En este caso empezamos con un átomo con $Z = 10$, $N = 10$ y al agregarle energía se libera un protón, dejándonos con un átomo con $Z = 9, N = 10$, es decir F^{19}. Es decir, la reacción es:

$$Ne^{20} + Q \rightarrow F^{19} + p$$

donde Q es la energía que hay que meter para que suceda la reacción. Para obtener Q igualamos las energías a ambos lados de la reacción:

$$M(Ne^{20})c^2 + Q = M(F^{19})c^2 + M(p)c^2$$
$$\Rightarrow \; Q = [M(F^{19}) + M(p) - M(Ne^{20})]c^2$$

Las masas de F^{19} y Ne^{20} se pueden consultar en [5] y tienen valores de $18.99840u$ y $19.99244u$ respectivamente. Además, la masa del protón es $1.00728u$, por lo que nos queda:

$$Q = [18.99840u + 1.00728u - 19.99244u]c^2 = 0.01324u\; c^2$$

Finalmente usamos que $1u = 9.314941 \times 10^8 eV/c^2$ como se puede consultar en [3] y nos queda que:

$$Q = 0.01324(9.314941 \times 10^8 eV/c^2)c^2 = \boxed{1.2333 \times 10^7 eV}$$

– Mn^{55}: En este caso empezamos con un átomo con $Z = 25$, $N = 30$ y al agregarle energía se libera un protón, dejándonos con un átomo con $Z = 24, N = 30$, es decir Cr^{54}. Es decir, la reacción es:

$$Mn^{55} + Q \rightarrow Cr^{54} + p$$

donde Q es la energía que hay que meter para que suceda la reacción. Para obtener Q igualamos las energías a ambos lados de la reacción:

$$M(Mn^{55})c^2 + Q = M(Cr^{54})c^2 + M(p)c^2$$
$$\Rightarrow\ Q = [M(Cr^{54}) + M(p) - M(Mn^{55})]c^2$$

Las masas de Cr^{54} y Mn^{55} se pueden consultar en [5] y tienen valores de $53.93888u$ y $54.93804u$ respectivamente. Además, la masa del protón es $1.00728u$, por lo que nos queda:

$$Q = [53.93888u + 1.00728u - 54.93804u]c^2 = 0.00812u\ c^2$$

Finalmente usamos que $1u = 9.314941 \times 10^8 eV/c^2$ como se puede consultar en [3] y nos queda que:

$$Q = 0.00812(9.314941 \times 10^8 eV/c^2)c^2 = \boxed{7.56373 \times 10^6 eV}$$

– Au^{197}: En este caso empezamos con un átomo con $Z = 79$, $N = 118$ y al agregarle energía se libera un protón, dejándonos con un átomo con $Z = 78, N = 118$, es decir Pt^{196}. Es decir, la reacción es:

$$Au^{197} + Q \rightarrow Pt^{196} + p$$

donde Q es la energía que hay que meter para que suceda la reacción. Para obtener Q igualamos las energías a ambos lados de la reacción:

$$M(Au^{197})c^2 + Q = M(Pt^{196})c^2 + M(p)c^2$$
$$\Rightarrow\ Q = [M(Pt^{196}) + M(p) - M(Au^{197})]c^2$$

Las masas de Pt^{196} y Au^{197} se pueden consultar en [5] y tienen valores de $195.96495u$ y $196.96657u$ respectivamente. Además, la masa del protón es $1.00728u$, por lo que nos queda:

$$Q = [195.96495u + 1.00728u - 196.96657u]c^2 = 0.00566u\ c^2$$

Finalmente usamos que $1u = 9.314941 \times 10^8 eV/c^2$ como se puede consultar en [3] y nos queda que:

$$Q = 0.00566(9.314941 \times 10^8 eV/c^2)c^2 = \boxed{5.27226 \times 10^6 eV}$$

Problema 8. Simetría de isospin

Uno podría imaginar ingenuamente los tres nucleones en los núcleos ^3H y ^3He como esferas rígidas. Si uno sólo atribuye la diferencia en las energías de unión de estos dos núcleos a la repulsión electrostática de los protones ^3He, ¿qué tan grande debe ser la separación de los protones? (la energía máxima del electrón en la desintegración β^- de ^3H es $18.6keV$).

Primero que nada encontramos las expresiones de la energía de unión de cada uno de los átomos, que se calcula como la diferencia entre la suma de las masas de sus componentes menos la masa del átomo completo.

Para ^3H tenemos 1 protón y 2 neutrones, por lo que la energía de enlace es:

$$E_{^3H} = [1M_p + 2M_n - M(^3H)]c^2 \quad (1)$$

Para ^3He tenemos 2 protones y un neutrón, por lo que la energía de enlace es:

$$E_{^3He} = [2M_p + 1M_n - M(^3He)]c^2 \quad (2)$$

Por otro lado, nos dicen que la energía máxima del electrón en la desintegración β^- de ^3H es $18.6keV$. Esta desintegración convierte uno de los neutrones de ^3H en un protón y se libera un electrón e^- y un anti-neutrino $\bar{\eta}_e$. Es decir, la reacción es:

$$^3H \rightarrow {^3He} + e^- + \bar{\eta}_e$$

Igualamos ahora las energías en esta reacción, suponiendo que el electrón e^- sale con una energía $Q = 18.6keV$ como dice el enunciado. Además, ignoramos la masa del neutrino por ser despreciable y nos queda:

$$\begin{aligned} M(^3H)c^2 &= M(^3H_e)c^2 + m_ec^2 + Q \\ \Rightarrow\ M(^3H)c^2 &= M(^3H_e)c^2 + m_ec^2 + 18.6keV \quad (3) \end{aligned}$$

Por las ecuaciones (1) y (2), la diferencia en energías de enlace entre los dos núcleos es:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{^3H} - E_{^3He} \\ &= [M_p + 2M_n - M(^3H)]c^2 - [2M_p + M_n - M(^3He)]c^2 \\ &= [M(^3He) - M(^3H) - M_p + M_n]c^2 \end{aligned}$$

Usamos ahora la ecuación (3) que dice que $M(^3He)c^2 - M(^3H)c^2 = -m_ec^2 - 18.6keV$ y nos queda:

$$\Delta E = [-m_e - 18.6keV/c^2 - M_p + M_n]c^2$$

Finalmente, como dice el enunciado, suponemos que esta diferencia en energías de enlace se debe a la repulsión electrostática de los protones en ^3He. Los protones tienen cargas $+e$ y suponemos que están separados por una distancia D, por lo que la energía electrostática es $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 D}$. Como suponemos que esta energía que tiene el helio pero no el tritio es la causante de la diferencia ΔE, entonces igualaremos este valor a ΔE:

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 D} &= [-m_e - 18.6keV/c^2 - M_p + M_n]c^2 \\ \Rightarrow\ D &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0[-m_e - 18.6keV/c^2 - M_p + M_n]c^2} \end{aligned}$$

Sustituimos los valores de m_e, M_p, M_n y las constantes para evaluar D:

$$\begin{aligned} D &= \frac{e^2}{4\pi(55.26349\times10^6 eVm\ e^2)[-0.511\times10^6 eV/c^2 - 18.6\times10^3 eV/c^2 - 938.27209\times10^6 eV/c^2 + 939.5655\times10^6 eV/c^2]c^2} \\ &= \frac{1}{4\pi(55.26349\times10^6 eVm)[-0.511\times10^6 eV - 18.6\times10^3 eV - 938.27209\times10^6 eV + 939.5655\times10^6 eV]} \\ &= \boxed{1.8845\times10^{-15}m} \end{aligned}$$

Referencias

[1] Daum, M., et al. “The Charged and Neutral Pion Masses Revisited.” Physics Letters B, vol. 796, 2019, pp. 11–14., https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.07.027.

[2]Atkins, P. W., and Ronald Friedman. Molecular Quantum Mechanics. Oxford University Press, 2011.

[3] “The Nist Reference on Constants, Units, and Uncertainty.” Fundamental Physical Constants from NIST, Nist, https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html.

[4] Povh, Bogdan, et al. Particles and Nuclei. Springer, Fifth ed., S.n., 1995.

[5] “IUPAC Commission on Isotopic Abundances and Atomic Weights.” IUPAC Commission on Isotopic Abundances and Atomic Weights, https://www.ciaaw.org/.

[6] Tipler, Paul A., and Llewellyn, Ralph A. Modern Physics. W. H. Freeman and Company New York, Sixth ed., 2012.