Álgebra Moderna Tarea 3.1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

7 de noviembre de 2020

a) **Definimos $\tau_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\tau_{a,b}(x) = ax + b$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Muestra que $G := \{\tau_{a,b} | a, b \in \mathbb{R} \ , a \neq 0\}$ es un subgrupo de $S_{\mathbb{R}}$**

Primero vemos que G es un subconjunto de $S_{\mathbb{R}}$. Para ello, hay que ver que un elemento arbitrario de $\tau_{a,b} \in G$ se encuentra en $S_{\mathbb{R}}$.
Para ello, hay que probar que $\tau_{a,b}$ es una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
Por la definición de $\tau_{a,b}$, es claro que manda números reales en números reales. Además, si $a \neq 0$, se ve claramente que $\tau_{a,b}$ tiene un inverso dado por $\tau_{a,b}^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$.
Esto se ve porque $\tau_{a,b}^{-1}(\tau_{a,b}(x)) = \tau_{a,b}^{-1}(ax+b) = \dfrac{(ax+b)-b}{a} = \dfrac{ax}{a} = x$
Y así, la composición $\tau_{a,b}^{-1} \circ \tau_{a,b}$ da la función identidad.
Como la función inversa es válida en todos los reales (porque $a \neq 0$), eso significa que la función original $\tau_{a,b}$ es biyectiva y por tanto, es un mienbro de $S(\mathbb{R})$.

Luego, nos queda probar que G es un subgrupo de $S_{\mathbb{R}}$. Como ya tenemos que es un subconjunto, solamente hay que probar dos cosas:

- **La composición es cerrada:**
  Sea $\tau_{a,b}, \tau_{c,d} \in G$. Entonces consideramos su composición $\tau_{a,b} \circ \tau_{c,d}$. La imagen de x bajo esta función es:

  $$\tau_{a,b} \circ \tau_{c,d}(x) = \tau_{a,b}(cx+d) = a(cx+d) + b = acx + ad + b$$

  Esto prueba que $\tau_{a,b} \circ \tau_{c,d}$ es igual a la función $\tau_{ac,ad+b}$ que pertenece a G porque como $a \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces $ac \neq 0$.

- **Todos los elementos tienen inverso dentro de G**
  Tomamos un elemento $\tau_{a,b} \in G$. Como vimos antes, la función inversa es $\tau_{a,b}^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a} = \dfrac{x}{a} - \dfrac{b}{a}$.
  Pero notamos que esta función no es otra cosa que $\tau_{\frac{1}{a}, \frac{b}{a}}$, que está bien definida porque $a \neq 0$. Por lo que $\tau_{a,b}^{-1} = \tau_{\frac{1}{a}, \frac{b}{a}}$ pertenece a G.

Por tanto, todo elemento de G tiene inverso en G.
Luego, G es un subgrupo de $S_{\mathbb{R}}$

b) **Encuentra un subgrupo de S_8 isomorfo al grupo de cuaterniones Q_8**

Como vimos en el teorema de Cayley, el grupo Q_8 es isomorfo a un subgrupo de S_{Q_8}. Donde a cada elemento $x \in Q_8$ le asociamos el elemento $\tau_x \in S_{Q_8}$ dado por $\tau_x(y) = xy$. Y el conjunto $\{\tau_x \ |x \in Q_8\}$ es un subgrupo de S_{Q_8} isomorfo a Q_8

Luego, dicho subconjunto de S_{Q_8} se puede corresponder con S_8 si cambiamos los elementos de Q_8 por números del 1 al 8.

Ahora encontremos explícitamente un subgrupo de S_8 que es isomorfo a Q_8. Para ello recordamos que $Q_8 = \{E, -E, I, -I, J, -J, K, -K\}$.
Digamos que numeramos los elementos de Q_8 del 1 al 8 en el orden en que los escribimos arriba. Para así asociar cualquier permutación S_{Q_8} con una de S_8.
Ahora para cada $x \in Q_8$ veremos qué le hace la función τ_x a Q_8. Luego usaremos la numeración de los elementos de Q_8 para asociar esta función con una permutación de los números 1,2,3,..,8.

- E :
  Calculamos τ_E para todos los elementos y vemos para cada número de elemento de Q_8 a qué número de elemento es mandado

$$\begin{aligned} \tau_E(E) = EE = E \quad (1 \to 1), \quad & \tau_E(-E) = E(-E) = -E \quad (2 \to 2) \\ \tau_E(I) = EI = I \quad (3 \to 3), \quad & \tau_E(-I) = E(-I) = -I \quad (4 \to 4) \\ \tau_E(J) = EJ = J \quad (5 \to 5), \quad & \tau_E(-J) = E(-J) = -J \quad (6 \to 6) \\ \tau_E(K) = EK = K \quad (7 \to 7), \quad & \tau_E(-K) = E(-K) = -K \quad (8 \to 8) \end{aligned}$$

  Entonces, vemos que esta función corresponde a mandar el elemento 1 al 1, el 2 al 2 , ... el 8 al 8. Se trata de la función identidad y le corresponde el elemento de S_8 dado por (1).

- $-E$:
  Calculamos τ_{-E} para todos los elementos y vemos para cada número de elemento de Q_8 a qué número de elemento es mandado

$$\begin{aligned} \tau_{-E}(E) = -EE = -E \quad (1 \to 2), \quad & \tau_{-E}(-E) = -E(-E) = E \quad (2 \to 1) \\ \tau_{-E}(I) = -EI = -I \quad (3 \to 4), \quad & \tau_{-E}(-I) = -E(-I) = I \quad (4 \to 3) \\ \tau_{-E}(J) = -EJ = -J \quad (5 \to 6), \quad & \tau_{-E}(-J) = -E(-J) = J \quad (6 \to 5) \\ \tau_{-E}(K) = -EK = -K \quad (7 \to 8), \quad & \tau_{-E}(-K) = -E(-K) = K \quad (8 \to 7) \end{aligned}$$

  Entonces, vemos que esta función corresponde a la permutación (1 2)(3 4)(5 6)(7 8)

- I :
  Calculamos τ_I para todos los elementos y vemos para cada número de elemento de Q_8 a qué número de elemento es mandado

$$\tau_I(E) = IE = I \quad (1 \to 3), \quad \tau_I(-E) = I(-E) = -I \quad (2 \to 4)$$
$$\tau_I(I) = I^2 = -E \quad (3 \to 2), \quad \tau_I(-I) = -I^2 = E \quad (4 \to 1)$$
$$\tau_I(J) = IJ = K \quad (5 \to 7), \quad \tau_I(-J) = I(-J) = -K \quad (6 \to 8)$$
$$\tau_I(K) = IK = -J \quad (7 \to 6), \quad \tau_I(-K) = I(-K) = J \quad (8 \to 5)$$

  Entonces, vemos que esta función corresponde a la permutación $(1\ 3\ 2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8)$

- $-I$:
  Calculamos τ_{-I} para todos los elementos y vemos para cada número de elemento de Q_8 a qué número de elemento es mandado

$$\tau_{-I}(E) = -IE = -I \quad (1 \to 4), \quad \tau_{-I}(-E) = -I(-E) = I \quad (2 \to 3)$$
$$\tau_{-I}(I) = -I^2 = E \quad (3 \to 1), \quad \tau_{-I}(-I) = I^2 = -E \quad (4 \to 2)$$
$$\tau_{-I}(J) = -IJ = -K \quad (5 \to 8), \quad \tau_{-I}(-J) = -I(-J) = K \quad (6 \to 7)$$
$$\tau_{-I}(K) = -IK = J \quad (7 \to 5), \quad \tau_{-I}(-K) = -I(-K) = -J \quad (8 \to 6)$$

  Entonces, vemos que esta función corresponde a la permutación $(1\ 4\ 2\ 3)(5\ 8\ 6\ 7)$

- J :
  Calculamos τ_J para todos los elementos y vemos para cada número de elemento de Q_8 a qué número de elemento es mandado

$$\tau_J(E) = JE = J \quad (1 \to 5), \quad \tau_J(-E) = J(-E) = -J \quad (2 \to 6)$$
$$\tau_J(I) = JI = -K \quad (3 \to 8), \quad \tau_J(-I) = -JI = K \quad (4 \to 7)$$
$$\tau_J(J) = J^2 = -E \quad (5 \to 2), \quad \tau_J(-J) = -J^2 = E \quad (6 \to 1)$$
$$\tau_J(K) = JK = I \quad (7 \to 3), \quad \tau_J(-K) = J(-K) = -I \quad (8 \to 4)$$

  Entonces, vemos que esta función corresponde a la permutación $(1\ 5\ 2\ 6)(3\ 8\ 4\ 7)$

- $-J$:
  Calculamos τ_{-J} para todos los elementos y vemos para cada número de elemento de Q_8 a qué número de elemento es mandado

$$\tau_{-J}(E) = -JE = -J \quad (1 \to 6), \quad \tau_{-J}(-E) = -J(-E) = J \quad (2 \to 5)$$
$$\tau_{-J}(I) = -JI = K \quad (3 \to 7), \quad \tau_{-J}(-I) = JI = -K \quad (4 \to 8)$$
$$\tau_{-J}(J) = -J^2 = E \quad (5 \to 1), \quad \tau_{-J}(-J) = J^2 = -E \quad (6 \to 2)$$
$$\tau_{-J}(K) = -JK = -I \quad (7 \to 4), \quad \tau_{-J}(-K) = J(K) = I \quad (8 \to 3)$$

  Entonces, vemos que esta función corresponde a la permutación $(1\ 6\ 2\ 5)(3\ 7\ 4\ 8)$

- K :
  Calculamos τ_K para todos los elementos y vemos para cada número de elemento de Q_8 a qué número de elemento es mandado

$$
\begin{gathered}
\tau_K(E) = KE = K \quad (1 \to 7), \quad \tau_K(-E) = K(-E) = -K \quad (2 \to 8) \\
\tau_K(I) = KI = J \quad (3 \to 5), \quad \tau_K(-I) = -KI = -J \quad (4 \to 6) \\
\tau_K(J) = KJ = -I \quad (5 \to 4), \quad \tau_K(-J) = -KJ = I \quad (6 \to 3) \\
\tau_K(K) = K^2 = -E \quad (7 \to 2), \quad \tau_K(-K) = -K^2 = E \quad (8 \to 1)
\end{gathered}
$$

Entonces, vemos que esta función corresponde a la permutación (1 7 2 8)(3 5 4 6)

- $-K$:
  Calculamos τ_{-K} para todos los elementos y vemos para cada número de elemento de Q_8 a qué número de elemento es mandado

$$
\begin{gathered}
\tau_{-K}(E) = -KE = -K \quad (1 \to 8), \quad \tau_{-K}(-E) = -K(-E) = K \quad (2 \to 7) \\
\tau_{-K}(I) = -KI = -J \quad (3 \to 6), \quad \tau_{-K}(-I) = KI = J \quad (4 \to 5) \\
\tau_{-K}(J) = -KJ = I \quad (5 \to 3), \quad \tau_{-K}(-J) = KJ = -I \quad (6 \to 4) \\
\tau_{-K}(K) = -K^2 = E \quad (7 \to 1), \quad \tau_{-K}(-K) = K^2 = -E \quad (8 \to 2)
\end{gathered}
$$

Entonces, vemos que esta función corresponde a la permutación (1 8 2 7)(3 6 4 5)

Así, cada elemento de Q_8 tiene asociado un elemento de S_{Q_8} con un isomorfismo según el teorema de Cayley. Y ahora cada una de estas permutaciones se puede ver como una permutación en S_8. Por lo que a cada elemento de Q_8 le asociamos uno de S_8 con un isomorfismo

c) **Probar que $Z(S_n) = \{1\}$ para todo $n \geq 3$**

Sea $\sigma \in S_n$. Para que σ esté en el centro de S_n se debe de cumplir que $\sigma\gamma = \gamma\sigma$ para toda permutación γ. O bien, que $\sigma = \gamma\sigma\gamma^{-1}$.

Supongamos que σ no es la identidad de S_n y veremos que siempre existe un ciclo γ tal que $\sigma \neq \gamma\sigma\gamma^{-1}$. Probando así que σ no pertenece al centro.
Para ello, supongamos que uno de los ciclos de σ es $(a_1 ... a_k)$ donde $k \geq 2$ (σ tiene algún ciclo así porque no es la identidad).
Luego, consideramos una permutación γ definida como sigue: $\gamma(a_1) = a_1$ y $\gamma(a_2)$ igual a cualquier elemento distinto de a_2

Entonces, recordamos por el ejercicio 14.1 que se puede conseguir la descomposición en ciclos de $\gamma\sigma\gamma^{-1}$ al tomar la descomposición en ciclos de σ y aplicarle γ a cada elemento de cada ciclo.
En particular, si tenemos el ciclo $(a_1 ... a_k)$ en σ, entonces corresponde al ciclo $(\gamma(a_1)\ \gamma(a_2) ... \gamma(a_k))$ en $\gamma\sigma\gamma^{-1}$.

Pero como $\gamma(a_1) = a_1$, entonces este ciclo es $(a_1\ \gamma(a_2)\ ...\ \gamma(a_k))$ y esto definitivamente es distinto al ciclo $(a_1\ a_2\ ...\ a_k)$ porque $\gamma(a_2) \neq a_2$.

Entonces, $\sigma \neq \gamma\sigma\gamma^{-1}$. Y con esto se muestra que σ no puede pertenecer al centro. Por lo que ningún elemento distinto de la unidad puede pertenecer al centro. Y el centro es trivial.

d) **Encuentra las clases de conjugación de cada uno de ests grupos:**

d1) $D_{2(4)}$

Como hemos visto antes que $r^2 \in Z(D_{2(4)})$ porque cumple que $r^2x = xr^2$ para todo $x \in D_{2(4)}$, entonces $r^2 = xr^2x^{-1} \quad \forall x$. Y por tanto la clase de conjugación de r^2 es simplemente $[r^2] = \{r^2\}$
Similarmente con 1 tenemos que $[1] = \{1\}$

Para los demás elementos, calculamos sus conjugados explícitamente. Empezamos con r y calculamos todos sus conjugados (usamos múltiples veces el 3.5e: $sr^k = r^{4-k}s$).

$$\begin{aligned}
1r1^{-1} &= r \\
rrr^{-1} &= r \\
r^2r(r^2)^{-1} &= r^3r^2 = r^5 = r \\
r^3r(r^3)^{-1} &= r^3rr = r \\
srs^{-1} &= srs = s(rs) = s(sr^3) = s^2r^3 = r^3 \\
(sr)r(sr)^{-1} &= (sr)r(r^{-1}s^{-1}) = (sr)r(r^3s) = (sr)s = (r^{4-1}s)s = r^3 \\
(sr^2)r(sr^2)^{-1} &= (sr^2)r(r^{-2}s^{-1}) = (sr^2)r(r^2s) = (sr)s = (sr)s = (r^{4-1}s)s = r^3 \\
(sr^3)r(sr^3)^{-1} &= (sr^3)r(r^{-3}s^{-1}) = (sr^3)r(rs) = (sr)s = (r^{4-1}s)s = r^3
\end{aligned}$$

Entonces, los elelmentos conjugados a r son $[r] = \{r, r^3\}$

Ahora calculamos la clase del s. Usaremos varias veces que $(sr^k)^{-1} = sr^k$

$$\begin{aligned}
1s1^{-1} &= s \\
rsr^{-1} &= r(sr^3) = r(r^{4-3}s) = r^2s = sr^{4-2} = sr^2 \\
r^2s(r^2)^{-1} &= r^2(sr^2) = r^2(r^{4-2}s) = r^4s = s \\
r^3s(r^3)^{-1} &= r^3(sr) = r^3(r^{4-1}s) = r^2s = sr^{4-2} = sr^2 \\
sss^{-1} &= sss = s \\
(sr)s(sr)^{-1} &= (sr)s(sr) = srr = sr^2 \\
(sr^2)s(sr^2)^{-1} &= (sr^2)s(sr^2) = sr^2s^2r^2 = sr^2r^2 = s \\
(sr^3)s(sr^3)^{-1} &= (sr^3)s(sr^3) = sr^3s^2r^3 = sr^3r^3 = sr^2
\end{aligned}$$

Entonces, los elementos relacionados a s son $[s] = \{s, sr^2\}$

Ahora vemos la clase del sr.

$$\begin{aligned}
1(sr)1^{-1} &= sr \\
r(sr)r^{-1} &= rs = sr^{4-1} = sr^3 \\
r^2(sr)(r^2)^{-1} &= r^2(sr)r^2 = r^2(sr^3) = r^2(r^{4-3}s) = r^2rs = r^3s = sr^{4-3} = sr \\
r^3(sr)(r^3)^{-1} &= r^3(sr)r = r^3(sr^2) = r^3(r^{4-2}s) = r^3r^2s = rs = sr^3 \\
s(sr)s^{-1} &= s^2rs = rs = sr^3 \\
(sr)(sr)(sr)^{-1} &= sr \\
(sr^2)(sr)(sr^2)^{-1} &= (sr^2)(sr)(sr^2) = (sr^2)(r^3s)(sr^2) = sr^2r^5 = sr^3 \\
(sr^3)(sr)(sr^3)^{-1} &= (sr^3)(sr)(sr^3) = (sr^3)(r^3s)(sr^3) = sr^3r^6 = sr
\end{aligned}$$

Entonces, la clase de conjugación del sr es $[sr] = \{sr, sr^3\}$

Por tanto, las clases de conjugación son $[1] = \{1\}$, $[r^2] = \{r^2\}$, $[r] = \{r, r^3\}$, $[s] = \{s, sr^2\}$, $[sr] = \{sr, sr^3\}$

d2) $\mathbb{Z}_2 \times S_3$

Primero, notamos que los elementos de S_3 son $\{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Entonces, los elementos de $\mathbb{Z}_2 \times S_3$ son $\{(\overline{0}, (1)), (\overline{0}, (12)), (\overline{0}, (13)), (\overline{0}, (23)), (\overline{0}, (123))$ $, (\overline{0}, (132))$, $(\overline{1}, (1)), (\overline{1}, (12)), (\overline{1}, (13)), (\overline{1}, (23)), (\overline{1}, (123)), (\overline{1}, (132))\}$.

Luego, como $(\overline{0}, (1))$ conmuta con todos los elementos por ser el neutro, entonces $(\overline{0}, (1))x = x(\overline{0}, (1))$ para todo $x \in \mathbb{Z}_2 \times S_3$. Y por tanto, $(\overline{0}, (1)) = x(\overline{0}, (1))x^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{Z}_2 \times S_3$. Entonces, la clase de conjugación de $(\overline{0}, (1))$ es $[(\overline{0}, (1))] = \{(\overline{0}, (1))\}$.

Ahora calculamos la clase de conjugación de $(\overline{0}, (12))$ explícitamente:

$$\begin{aligned}
(\overline{0}, (1))(\overline{0}, (12))(\overline{0}, (1))^{-1} &= (\overline{0}, (1))(\overline{0}, (12))(\overline{0}, (1)) = (\overline{0}+\overline{0}+\overline{0}, (1)(12)(1)) = (\overline{0}, (12)) \\
(\overline{0}, (12))(\overline{0}, (12))(\overline{0}, (12))^{-1} &= (\overline{0}, (12)) \\
(\overline{0}, (13))(\overline{0}, (12))(\overline{0}, (13))^{-1} &= (\overline{0}, (13))(\overline{0}, (12))(\overline{0}, (13)) = (\overline{0}, (13)(12)(13)) = (\overline{0}, (23)) \\
(\overline{0}, (23))(\overline{0}, (12))(\overline{0}, (23))^{-1} &= (\overline{0}, (23))(\overline{0}, (12))(\overline{0}, (23)) = (\overline{0}, (23)(12)(23)) = (\overline{0}, (13)) \\
(\overline{0}, (123))(\overline{0}, (12))(\overline{0}, (123))^{-1} &= (\overline{0}, (123))(\overline{0}, (12))(\overline{0}, (132)) = (\overline{0}, (123)(12)(132)) = (\overline{0}, (23)) \\
(\overline{0}, (132))(\overline{0}, (12))(\overline{0}, (132))^{-1} &= (\overline{0}, (132))(\overline{0}, (12))(\overline{0}, (123)) = (\overline{0}, (132)(12)(123)) = (\overline{0}, (13)) \\
(\overline{1}, (1))(\overline{0}, (12))(\overline{1}, (1))^{-1} &= (\overline{1}, (1))(\overline{0}, (12))(\overline{1}, (1)) = (\overline{1}+\overline{0}+\overline{1}, (1)(12)(1)) = (\overline{0}, (12)) \\
(\overline{1}, (12))(\overline{0}, (12))(\overline{1}, (12))^{-1} &= (\overline{1}, (12))(\overline{0}, (12))(\overline{1}, (12)) = (\overline{0}, (12)) \\
(\overline{1}, (13))(\overline{0}, (12))(\overline{1}, (13))^{-1} &= (\overline{1}, (13))(\overline{0}, (12))(\overline{1}, (13)) = (\overline{0}, (13)(12)(13)) = (\overline{0}, (23)) \\
(\overline{1}, (23))(\overline{0}, (12))(\overline{1}, (23))^{-1} &= (\overline{1}, (23))(\overline{0}, (12))(\overline{1}, (23)) = (\overline{0}, (23)(12)(23)) = (\overline{0}, (13)) \\
(\overline{1}, (123))(\overline{0}, (12))(\overline{1}, (123))^{-1} &= (\overline{1}, (123))(\overline{0}, (12))(\overline{1}, (132)) = (\overline{0}, (123)(12)(132)) = (\overline{0}, (23)) \\
(\overline{1}, (132))(\overline{0}, (12))(\overline{1}, (132))^{-1} &= (\overline{1}, (132))(\overline{0}, (12))(\overline{1}, (123)) = (\overline{0}, (132)(12)(123)) = (\overline{0}, (13))
\end{aligned}$$

Entonces, tenemos que la clase de conjugación es $[(\overline{0},(12))] = \{(\overline{0},(12)),(\overline{0},(13)),(\overline{0},(23))\}$.

Ahora calculamos la clase de conjugación de alguno de los elementos que faltan, en particular de $(\overline{0},(123))$:

$$\begin{aligned}
(\overline{0},(1))(\overline{0},(123))(\overline{0},(1))^{-1} &= (\overline{0},(1))(\overline{0},(123))(\overline{0},(1)) = (\overline{0},(123)) = (\overline{0},(123))\\
(\overline{0},(12))(\overline{0},(123))(\overline{0},(12))^{-1} &= (\overline{0},(12))(\overline{0},(123))(\overline{0},(12)) = (\overline{0},(12)(123)(12)) = (\overline{0},(132))\\
(\overline{0},(13))(\overline{0},(123))(\overline{0},(13))^{-1} &= (\overline{0},(13))(\overline{0},(123))(\overline{0},(13)) = (\overline{0},(13)(123)(13)) = (\overline{0},(132))\\
(\overline{0},(23))(\overline{0},(123))(\overline{0},(23))^{-1} &= (\overline{0},(23))(\overline{0},(123))(\overline{0},(23)) = (\overline{0},(23)(123)(23)) = (\overline{0},(132))\\
(\overline{0},(123))(\overline{0},(123))(\overline{0},(123))^{-1} &= (\overline{0},(123))(\overline{0},(123))(\overline{0},(132)) = (\overline{0},(123)(123)(132)) = (\overline{0},(123))\\
(\overline{0},(132))(\overline{0},(123))(\overline{0},(132))^{-1} &= (\overline{0},(132))(\overline{0},(123))(\overline{0},(123)) = (\overline{0},(132)(123)(123)) = (\overline{0},(123))\\
(\overline{1},(1))(\overline{0},(123))(\overline{1},(1))^{-1} &= (\overline{1},(1))(\overline{0},(123))(\overline{1},(1)) = (\overline{0},(123))\\
(\overline{1},(12))(\overline{0},(123))(\overline{1},(12))^{-1} &= (\overline{1},(12))(\overline{0},(123))(\overline{1},(12)) = (\overline{0},(12)(123)(12)) = (\overline{0},(132))\\
(\overline{1},(13))(\overline{0},(123))(\overline{1},(13))^{-1} &= (\overline{1},(13))(\overline{0},(123))(\overline{1},(13)) = (\overline{0},(13)(123)(13)) = (\overline{0},(132))\\
(\overline{1},(23))(\overline{0},(123))(\overline{1},(23))^{-1} &= (\overline{1},(23))(\overline{0},(123))(\overline{1},(23)) = (\overline{0},(23)(123)(23)) = (\overline{0},(132))\\
(\overline{1},(123))(\overline{0},(123))(\overline{1},(123))^{-1} &= (\overline{1},(123))(\overline{0},(123))(\overline{1},(132)) = (\overline{0},(123)(123)(132)) = (\overline{0},(123))\\
(\overline{1},(132))(\overline{0},(123))(\overline{1},(132))^{-1} &= (\overline{1},(132))(\overline{0},(123))(\overline{1},(123)) = (\overline{0},(132)(123)(123)) = (\overline{0},(123))
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que la clase de conjugación es $[(\overline{0},(123)] = \{(\overline{0},(123)),(\overline{0},(132))\}$

Ahora calculamos la clase de conjugación de $(\overline{1},(12))$ explícitamente:

$$\begin{aligned}
(\overline{0},(1))(\overline{1},(12))(\overline{0},(1))^{-1} &= (\overline{0},(1))(\overline{1},(12))(\overline{0},(1)) = (\overline{1},(1)(12)(1)) = (\overline{1},(12))\\
(\overline{0},(12))(\overline{1},(12))(\overline{0},(12))^{-1} &= (\overline{0},(12))(\overline{1},(12))(\overline{0},(12)) = (\overline{1},(12)(12)(12)) = (\overline{1},(12))\\
(\overline{0},(13))(\overline{1},(12))(\overline{0},(13))^{-1} &= (\overline{0},(13))(\overline{1},(12))(\overline{0},(13)) = (\overline{1},(13)(12)(13)) = (\overline{1},(23))\\
(\overline{0},(23))(\overline{1},(12))(\overline{0},(23))^{-1} &= (\overline{0},(23))(\overline{1},(12))(\overline{0},(23)) = (\overline{1},(23)(12)(23)) = (\overline{1},(13))\\
(\overline{0},(123))(\overline{1},(12))(\overline{0},(123))^{-1} &= (\overline{0},(123))(\overline{1},(12))(\overline{0},(132)) = (\overline{1},(123)(12)(132)) = (\overline{1},(23))\\
(\overline{0},(132))(\overline{1},(12))(\overline{0},(132))^{-1} &= (\overline{0},(132))(\overline{1},(12))(\overline{0},(123)) = (\overline{1},(132)(12)(123)) = (\overline{1},(13))\\
(\overline{1},(1))(\overline{1},(12))(\overline{1},(1))^{-1} &= (\overline{1},(1))(\overline{1},(12))(\overline{1},(1)) = (\overline{1},(1)(12)(1)) = (\overline{1},(12))\\
(\overline{1},(12))(\overline{1},(12))(\overline{1},(12))^{-1} &= (\overline{1},(12))(\overline{1},(12))(\overline{1},(12)) = (\overline{1},(12))\\
(\overline{1},(13))(\overline{1},(12))(\overline{1},(13))^{-1} &= (\overline{1},(13))(\overline{1},(12))(\overline{1},(13)) = (\overline{1},(13)(12)(13)) = (\overline{1},(23))\\
(\overline{1},(23))(\overline{1},(12))(\overline{1},(23))^{-1} &= (\overline{1},(23))(\overline{1},(12))(\overline{1},(23)) = (\overline{1},(23)(12)(23)) = (\overline{1},(13))\\
(\overline{1},(123))(\overline{1},(12))(\overline{1},(123))^{-1} &= (\overline{1},(123))(\overline{1},(12))(\overline{1},(132)) = (\overline{1},(123)(12)(132)) = (\overline{1},(23))\\
(\overline{1},(132))(\overline{1},(12))(\overline{1},(132))^{-1} &= (\overline{1},(132))(\overline{1},(12))(\overline{1},(123)) = (\overline{1},(132)(12)(123)) = (\overline{1},(13))
\end{aligned}$$

Luego, la clase de conjugación de $(\overline{1},(12))$ es $[(\overline{1},(12))] = \{(\overline{1},(12)),(\overline{1},(23)),(\overline{1},(13))\}$

Ahora calculamos la clase de conjugación de alguno de los elementos que faltan, en particular de $(\overline{1},(123))$:

$$\begin{aligned}
(\overline{0},(1))(\overline{1},(123))(\overline{0},(1))^{-1} &= (\overline{0},(1))(\overline{1},(123))(\overline{0},(1)) = (\overline{1},(123))\\
(\overline{0},(12))(\overline{1},(123))(\overline{0},(12))^{-1} &= (\overline{0},(12))(\overline{1},(123))(\overline{0},(12)) = (\overline{1},(12)(123)(12)) = (\overline{1},(132))\\
(\overline{0},(13))(\overline{1},(123))(\overline{0},(13))^{-1} &= (\overline{0},(13))(\overline{1},(123))(\overline{0},(13)) = (\overline{1},(13)(123)(13)) = (\overline{1},(132))\\
(\overline{0},(23))(\overline{1},(123))(\overline{0},(23))^{-1} &= (\overline{0},(23))(\overline{1},(123))(\overline{0},(23)) = (\overline{1},(23)(123)(23)) = (\overline{1},(132))\\
(\overline{0},(123))(\overline{1},(123))(\overline{0},(123))^{-1} &= (\overline{0},(123))(\overline{1},(123))(\overline{0},(132)) = (\overline{1},(123)(123)(132)) = (\overline{1},(123))\\
(\overline{0},(132))(\overline{1},(123))(\overline{0},(132))^{-1} &= (\overline{0},(132))(\overline{1},(123))(\overline{0},(123)) = (\overline{1},(132)(123)(123)) = (\overline{1},(123))\\
(\overline{1},(1))(\overline{1},(123))(\overline{1},(1))^{-1} &= (\overline{1},(1))(\overline{1},(123))(\overline{1},(1)) = (\overline{1},(123))\\
(\overline{1},(12))(\overline{1},(123))(\overline{1},(12))^{-1} &= (\overline{1},(12))(\overline{1},(123))(\overline{1},(12)) = (\overline{1},(12)(123)(12)) = (\overline{1},(132))\\
(\overline{1},(13))(\overline{1},(123))(\overline{1},(13))^{-1} &= (\overline{1},(13))(\overline{1},(123))(\overline{1},(13)) = (\overline{1},(13)(123)(13)) = (\overline{1},(132))\\
(\overline{1},(23))(\overline{1},(123))(\overline{1},(23))^{-1} &= (\overline{1},(23))(\overline{1},(123))(\overline{1},(23)) = (\overline{1},(23)(123)(23)) = (\overline{1},(132))\\
(\overline{1},(123))(\overline{1},(123))(\overline{1},(123))^{-1} &= (\overline{1},(123))(\overline{1},(123))(\overline{1},(132)) = (\overline{1},(123)(123)(132)) = (\overline{1},(123))\\
(\overline{1},(132))(\overline{1},(123))(\overline{1},(132))^{-1} &= (\overline{1},(132))(\overline{1},(123))(\overline{1},(123)) = (\overline{1},(132)(123)(123)) = (\overline{1},(123))
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que la clase de conjugación es $[(\overline{1},(123))] = \{(\overline{1},(123)),(\overline{1},(132))\}$

Juntando lo que tenemos hasta ahora, hemos conseguido las siguientes clases de cojugación:

- $[(\overline{0},(1))] = \{(\overline{0},(1))\}$
- $[(\overline{0},(12))] = \{(\overline{0},(12)),(\overline{0},(23)),(\overline{0},(13))\}$
- $[(\overline{0},(123))] = \{(\overline{0},(123),(\overline{0},(132))\}$
- $[(\overline{1},(12))] = \{(\overline{1},(12)),(\overline{1},(23)),(\overline{1},(13))\}$
- $[(\overline{1},(123))] = \{(\overline{1},(123),(\overline{1},(132))\}$

El único elemento que nos falta es $(\overline{1},(1))$. Como las clases de conjugación son disjuntas, entonces debemos de tener que:

- $[(\overline{1},(1))] = \{(\overline{1},(1))\}$

e) **Sea $\sigma \in S_5$ el ciclo $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ en cada caso encuentra el elemento $\tau \in S_5$ explícito el cual satisface la igualdad:**

e1) $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$

Primero calculamos σ^{-1}.Como σ manda $1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 4, 4 \to 5, 5 \to 1$. Enotnces la inversa debe de ser $2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 3, 5 \to 4, 1 \to 5$. Entonces, el

ciclo σ^{-1} es (1 5 4 3 2).
Luego, recordamos que por el ejercicio 14,1 tenemos que $\tau(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\tau^{-1} = (\tau(1)\ \tau(2)\ \tau(3)\ \tau(4)\ \tau(5))$.
Queremos que este resultado sea igual a (1 5 4 3 2). Por lo tanto, tenemos que τ debe de ser:

$$\begin{aligned} \tau(1) &= 1 \\ \tau(2) &= 5 \\ \tau(3) &= 4 \\ \tau(4) &= 3 \\ \tau(5) &= 2 \end{aligned}$$

O bien, escrito en forma de ciclos: $\tau = (2\ 5)(3\ 4)$.

e2) $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-2}$

Primero calculamos $\sigma^{-2} = (\sigma^{-1})^2$ pero ya calculamos $\sigma^{-1} = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$. Entonces, tenemos que:
$\sigma^{-2} = \sigma^{-1}\sigma^{-1} = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)(1\ 5\ 4\ 3\ 2) = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$.
Luego, por el ejercicio 14.1, tenemos que $\tau\sigma\tau^{-1} = \tau(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\tau^{-1} = (\tau(1)\ \tau(2)\ \tau(3)\ \tau(4)\ \tau(5))$
Luego, si queremos que esto sea igual a σ^{-2}, necesitamos que:

$$\begin{aligned} \tau(1) &= 1 \\ \tau(2) &= 4 \\ \tau(3) &= 2 \\ \tau(4) &= 5 \\ \tau(5) &= 3 \end{aligned}$$

O escrito en forma de ciclos: $\tau = (2\ 4\ 5\ 3)$