Variable Compleja Tarea-Examen 3

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

15 de diciembre de 2020

1) **Sea f una función entera tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$, si $|z| > R$ para alguna R positiva. Muestre que f es un polinomio de grado $\leq n$**

Probaremos que $f^{(n+1)}(z) = 0$ para todo z.

Para ello, sea $z \in \mathbb{C}$ arbitrario.
Luego, por la fórmula de Cauchy para derivadas, tenemos que
$f^{(n+1)}(z) = \dfrac{(n+1)!}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_r(z)} \dfrac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} dw$
La cual es válida para todo $r > 0$ ya que f es holomorfa en todo el plano.
Ahora intentaremos acotar esta integral.

Demostramos primero que si $r = 2R + |z|$ y $w \in \partial D_r(z) \quad \Rightarrow \quad |w| > R$.

Para ello, definimos $r = 2R + |z| > 0$.
Y sea $w \in \partial D_r(z)$, por lo que tenemos que $|w - z| = r$
Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
|w| &= |w - z + z| \\
&= |(w-z) - (-z)| \\
&\geq ||w-z| - |-z|| \qquad \text{por la desigualdad de triángulo inversa } |a-b| \geq ||a| - |b|| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{con } a = w - z \text{ , } b = -z \\
&= ||w-z| - |z|| \\
&\geq |w-z| - |z| \quad \text{porque para todo } a \in \mathbb{R} \text{ tenemos } |a| \geq a \text{ y en particular para } a = |w-z| - |z| \\
&= 2R + |z| - |z| \\
&= 2R \\
&> R \quad \text{porque } R > 0 \ \Rightarrow \ 2R > R
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que si $w \in \partial D_r(z)$ y $r = 2R + |z|$, entonces $|w| > R$, y luego por hipótesis tenemos que $|f(w)| \leq M|w|^n$.

Ahora ya podemos acotar $f^{(n+1)}(z)$. Por la fórmula de Cauchy, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|f^{(n+1)}(z)| &= \left|\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z)}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}dw\right| \\
&= \left|\frac{(n+1)!}{2\pi i}\right|\left|\int_{\partial D_r(z)}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}dw\right| \\
&\leq \frac{(n+1)!}{2\pi}\int_{\partial D_r(z)}\left|\frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\right|dw \qquad \text{porque } \left|\int g(x)\right|dx \leq \int |g(x)|dx \\
&= \frac{(n+1)!}{2\pi}\int_{\partial D_r(z)}\frac{|f(w)|}{|(w-z)^{n+2}|}dw \\
&\leq \frac{(n+1)!}{2\pi}\int_{\partial D_r(z)}\frac{M|w|^n}{|(w-z)^{n+2}|}dw \qquad \text{Como w es la variable de integración } \Rightarrow \\
&\qquad\qquad \Rightarrow \quad w \in \partial D_r(z) \;\Rightarrow\; |f(w)| \leq M|w|^n
\end{aligned}$$

Pero tenemos que $|w| = |w - z + z| \leq |w - z| + |z| = r + |z| < r + r = 2r$. Esto último porque claramente $|z| < |z| + 2R = r$.
Entonces $|w| < 2r$.

Y por otro lado, $|(w-z)^{n+2}| = |w-z|^{n+2} = r^{n+2}$.

Juntando estas dos cosas, tenemos que $\frac{M|w|^n}{|(w-z)^{n+2}|} = \frac{M|w|^n}{r^{n+2}} < \frac{M(2r)^n}{r^{n+2}}$.
Con esto podemos retomar el desarrollo de antes y tenemos:

$$\begin{aligned}
|f^{(n+1)}(z)| &\leq \frac{(n+1)!}{2\pi}\int_{\partial D_r(z)}\frac{M|w|^n}{|(w-z)^{n+2}|}dw \\
&< \frac{(n+1)!}{2\pi}\int_{\partial D_r(z)}\frac{M(2r)^n}{r^{n+2}}dw \\
&= \frac{(n+1)!}{2\pi}\,\frac{M(2r)^n}{r^{n+2}}\int_{\partial D_r(z)}dw \\
&= \frac{(n+1)!}{2\pi}\,\frac{M(2r)^n}{r^{n+2}}(2\pi r) \qquad \text{porque la integral es sobre la circunferencia de radio r} \\
&= \frac{(n+1)!M2^n}{r}
\end{aligned}$$

En resumen, hemos encontrado que para cualquier z se tiene que:

$$|f^{(n+1)}(z)| < \frac{(n+1)!M2^n}{r}$$

Y ahora podemos hacer crecer a r hasta infinito y el lado derecho tenderá a 0. Por lo tanto, tendremos que $|f^{(n+1)}(z)| = 0 \;\Rightarrow\; f^{(n+1)}(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Con lo que se prueba que $f^{(n+1)}(z) = 0$ para todo z.
Esto implica que f es un polinomio de grado a lo sumo n.

Para ver esto, se debe de probar por inducción que si $f^{(k)}(z) = 0$, entonces f es un polinomio de grado a lo sumo $k-1$.
Para el caso base de $k = 1$, hemos probado en clase que si $f'(z) = 0$, entonces $f(z) = cte$ por lo que se cumple el caso base.
Por hipótesis inductiva, suponemos que si la $k-$ésima derivada de una función es 0, entonces la función es un polinomio de a lo sumo grado $k-1$.

Para el paso inductivo, sea f una función tal que $f^{(k)}(z) = 0$ para todo z. Entonces, $(f')^{(k-1)}(z) = 0$ y por hipótesis inductiva tenemos que $f'(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-2} z^{k-2}$ es un polinomio de grado $k-2$
Y por tanto, al integrar se tiene que $f(z) = c + a_0 z + \cdots + a_{k-2} z^{k-1}$ es un polinomio de grado $k-1$.

Entonces, como habíamos probado que $f^{(n+1)}(z) = 0$, concluimos que f es un polinomio de grado a lo sumo n.

b) **Sea $A \subset \mathbb{C}$ una región en $\mathbb{C}$ y $f, g : A \to \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas en A. Sea $B \subset A$, una región acotada contenida en A, con $\overline{B} \subset A$. Supóngase que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \partial B$. ¿Será cierto que entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in B$? Si tu respuesta es sí, demuéstralo. Si es no, da un contra-ejemplo**

Es cierto.
Definimos $h(z) = f(z) - g(z) : \overline{B} \to \mathbb{C}$

Luego, como f, g son holomorfas en A, entonces h es holomorfa en $\overline{B} \subset A$.

Luego, el corolario al teorema del principio del módulo máximo que probamos en clase nos dice que si B es una región acotada y $h : \overline{B} \to \mathbb{C}$ es continua en $\overline{B}$ y holomorfa en B, entonces $|h|$ alcanza su máximo en algún punto de ∂B.

Ya vimos antes que h es holomorfa en $\overline{B}$, por lo que es también continua en $\overline{B}$. Y por hipótesis B es una región acotada.
Por tanto, se cumplen las hipótesis de este corolario para $h : \overline{B} \to \mathbb{C}$ y concluimos que $|h|$ alcanza su máximo en un punto de la frontera ∂B.

Sin embargo, por hipótesis sabemos que en la frontera ∂B se tiene que $f(z) = g(z)$ y por tanto $h(z) = f(z) - g(z) = 0$ en todos los puntos de la frontera.

Tenemos entonces que $|h(z)| = 0$ para todo $z \in \partial B$.
Pero por el corolario mencionado antes, $|h|$ alcanza su máximo en ∂B, por lo que el máximo de $|h|$ en $\overline{B}$ tiene que ser 0.

Como $|h|$ es siempre positiva o 0 y tiene máximo igual a 0 en $\overline{B}$, tiene que ser 0 en todos los puntos de $\overline{B}$.

Luego $|h(z)| = 0$ para todo $z \in \overline{B}$ y entonces $h(z) = 0$ para todo $z \in \overline{B}$ y finalmente eso implica que $f(z) - g(z) = 0 \ \ \forall\, z \in \overline{B}$.
Concluimos que $f(z) = g(z) \ \ \forall z \in \overline{B}$

3) **Sea $A \subset \mathbb{C}$ una región en $\mathbb{C}$ y $f : A \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en A. Supongamos que existe un punto $z_0 \in A$ tal que $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in A$. ¿Esto implica que f es constante? Si tu respuesta es sí, demuéstralo. Si es no, da un contra-ejemplo.**

No es cierto.
Veamos el caso en que $f(z) = z$ (que es una función holomorfa), $A = D_1(0)$ (que es un conjunto abierto y conexo, es decir, una región). Y sea $z_0 = 0 \in D_1(0)$.

Entonces, tenemos que $|f(z_0)| = |z_0| = |0| = 0 \leq |z| = |f(z)| \quad \forall z \in D_1(0)$.
Entonces, $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in D_1(0)$.
Por lo que se cumplen todas las hipótesis del ejercicio y sin embargo, $f(z) = z$ no es constante.

Por lo que vemos que el resultado es falso. Para obtenerlo falta una hipótesis adicional.

Para obtener el resultado, falta suponer que $f(z_0) \neq 0$.
Con esta extra suposición (que no se cumple en nuestro contra-ejemplo), como $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in A$, entonces $0 < |f(z_0)| \leq |f(z)| \ \ \Rightarrow \ 0 < |f(z)| \ \ \forall z \in A$.
Por tanto, f no se anula en A y eso implica que $\dfrac{1}{f}$ es analítica en A.
Y además, como $|f(z_0)| \leq |f(z)| \ \Rightarrow \ \left|\dfrac{1}{f(z)}\right| \leq \left|\dfrac{1}{f(z_0)}\right|$ para todo $z \in A$.

Entonces $\dfrac{1}{f} : A \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa en la región A y $\left|\dfrac{1}{f}\right|$ alcanza su máximo en el punto $z_0 \in A$.
Por el principio de módulo máximo, esto nos permite concluir que $\dfrac{1}{f}$ es constate. Y por tanto, f es constante.

4) **Sea** $f : int(D_1(0)) \to D_1(0)$ **holomorfa con** $f(0) = 0$**. ¿Es posible que algún** $z_0 \in int(D_1(0))$ **tenga como imagen bajo** f **al punto** i **(es decir, que** $f(z_0) = 0$**)? Si tu respuesta es sí, da un ejemplo. Si es no, demuestra que eso no puede ser posible.**

No es posible.
Vimos en clase (lema de Schwarz) que si $f : int(D_1(0)) \to \mathbb{C}$ es holomorfa y cumple que $|f(z)| \leq 1$ y $f(0) = 0$ entonces en particular se obtiene que $|f(z)| \leq |z|$

En este caso, el problema dice que $f : int(D_1(0)) \to D_1(0)$, por lo que $f(z) \in D_1(0) \Rightarrow |f(z)| \leq 1$ para todo $z \in int(D_1(0))$.
Y además es una función holomorfa y cumple $f(0) = 0$.
Por tanto, cumple todas las condiciones del lema de Schwartz.

Entonces podemos concluir que $|f(z)| \leq |z| \ \ \forall z \in int(D_1(0))$

Ahora suponemos que se cumple la conclusión del ejercicio, que existe un $z_0 \in int(D_1(0))$ tal que $f(z_0) = i$.
Como $z_0 \in int(D_1(0))$ entonces $|z_0| < 1$.
Pero $|f(z_0)| = |i| = 1$.

Por tanto, $|z_0| < |f(z_0)|$.
Esto contradice al lema de Schwartz que dice que $|f(z)| \leq |z| \ \ \forall z \in int(D_1(0))$

Concluimos por contradicción que no existe un z_0 tal que $f(z_0) = i$