TAREA 3 *Medios Deformables*

Basile Álvarez Tomás Ricardo 316617194
Gallegos Salgado Jessica Andrea 316038456

Las ecuaciones de Euler 1D son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}(\rho u^2 + P) &= 0, \\
\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[u(E+P)] &= 0,
\end{aligned}$$

con $E = \rho u^2/2 + p/(\gamma - 1)$.

1. Dar el nombre de la variables (ρ, u, P) en estas ecuaciones. ¿Qué es γ? ¿Qué valores toma γ para un gas monoatómico y para un gas de moléculas diatómicas (explicar por qué)?

- ρ es la densidad del fluido y tiene unidades de $[\mathrm{Kg/m^3}]$
- u es la velocidad del fluido y tiene unidades de $[\mathrm{m/s}]$
- P es la presión del fluido o bien, la fuerza (por unidad de área) que va a ejercer el fluido sobre sus alrededores. Tiene unidades de $[\mathrm{N/m^2}]$

A partir de estas variables podemos definir a la densidad de energía total del fluido:

$$E = \underbrace{\frac{\rho u^2}{2}}_{\text{densidad de energía cinética}} + \underbrace{\frac{P}{(\gamma - 1)}}_{\text{densidad de energía interna}}$$

En esta expresión tenemos que γ es el índice adiabático, el cual es la razón entre la capacidad calorífica a presión constante (C_p) y la capacidad calorífica a volumen constante (C_v):

$$\boxed{\gamma = \frac{C_p}{C_v}}$$

γ depende de la cantidad de grados de libertad "f" internos del gas, a partir de la relación: $\gamma = 1 + \frac{2}{f}$ ... $*$

Los grados de libertad son la cantidad de modos independientes de movimiento en que las partículas de un gas pueden almacenar energía interna, por lo que:

- El gas monoatómico tiene únicamente tres grados de libertad, ya que únicamente se puede mover en tres direcciones independientes de traslación (al ser monoatómica no puede rotar), por lo que $f = 3$ y por $*$ obtenemos que:

$$\gamma_{\text{gas mono}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \qquad \boxed{\therefore\ \gamma_{\text{gas mono}} = \frac{5}{3}}$$

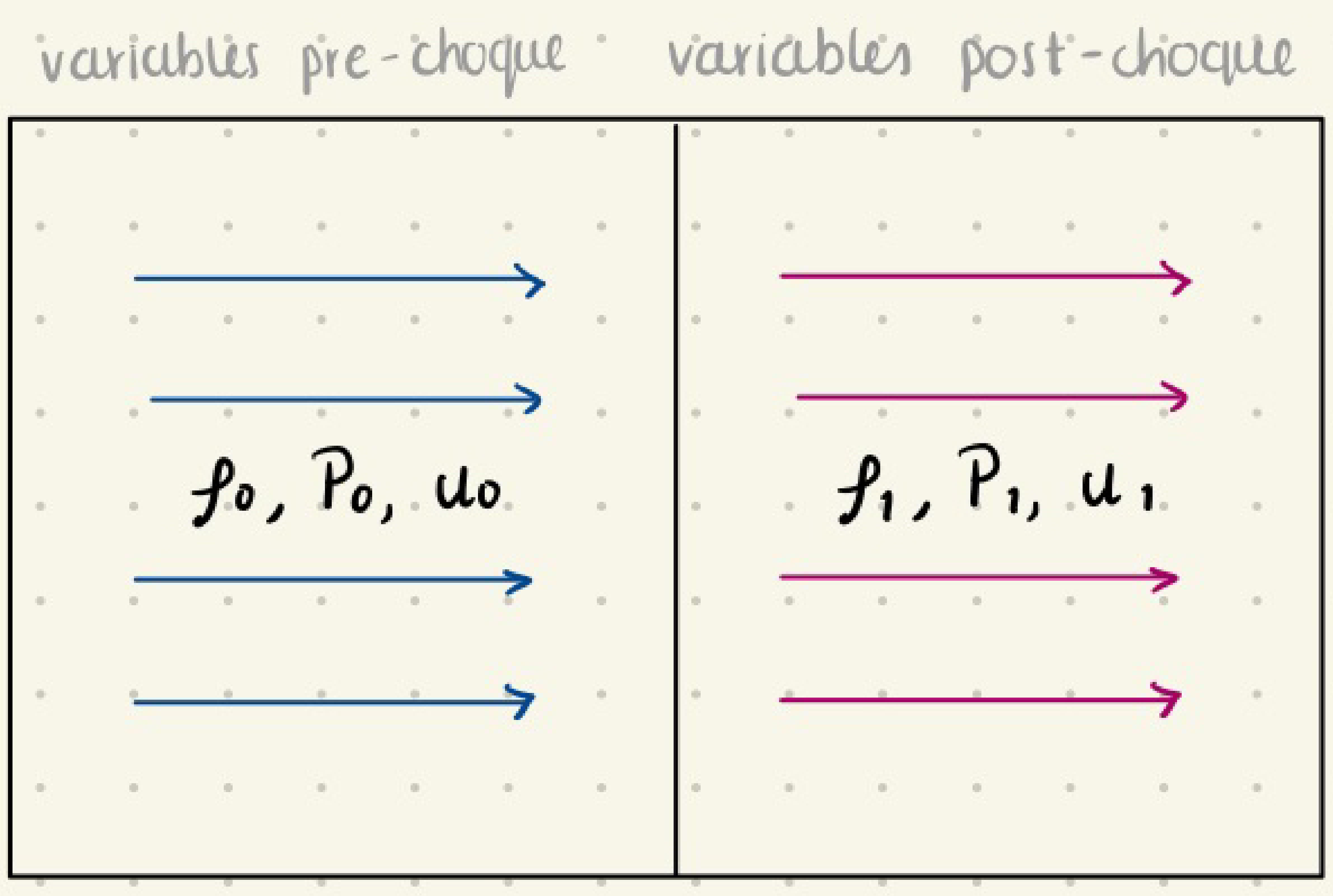
- El gas de moléculas diatómicas, a diferencia del gas monoatómico, sí puede rotar (excepto la rotación en torno al eje de simetría de la molécula, ya que no aporta energía), por lo que se le suman dos grados de libertad rotacional a los tres grados de libertad traslacional. Quedando así $f=5$ grados de libertad, y por * queda:

$$\gamma_{\text{gas diatóm.}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \qquad \boxed{\therefore \gamma_{\text{gas diatóm.}} = \frac{7}{5}}$$

2. En problemas astrofísicos a veces los procesos de emisión y radiación fuerzan al gas a tener una temperatura aproximadamente constante. Para estos flujos *isotérmicos*, la ecuación de la energía queda reemplazada por la condición $P = \rho c_0^2$, con $c_0^2 =$ constante. Demostrar que un choque isotérmico tiene una compresión

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = M_0^2,$$

con $M_0 = u_0/c_0$ (el número de Mach pre-choque).



Consideramos un choque como el que se muestra en la figura, en donde las variables antes del choque son ρ_0, P_0 y u_0, y después del choque son ρ_1, P_1 y u_1.

Primero debemos hallar las condiciones de salto, para lo cual consideramos las ecuaciones de Euler en 1D:

$$i) \ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \qquad ii) \ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) = 0$$

Como estamos considerando un flujo isotérmico, la tercera ecuación de Euler en 1D (la de la energía), es reemplazada por:

$$iii) \ P = \rho c_0^2$$

Tomamos un sistema de referencia que se mueve con el choque, lo cual hace que el problema no tenga dependencia temporal desde este marco de referencia. Entonces, en las ecuaciones de Euler, las derivadas respecto al tiempo son cero y por lo tanto, las ecuaciones i, ii y iii quedan como:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) = 0$$

$$P = \rho c_0^2$$

En las primeras dos ecuaciones tenemos la derivada de una cantidad respecto a x igualada a cero, lo que implica que estas expresiones son constantes. Por lo tanto tenemos que:

$$\rho u = cte$$

$$\rho u^2 + P = cte$$

$$P = \rho c_0^2$$

Sustituimos la expresión de $P = \rho C_0^2$ en la segunda ecuación $\rho u^2 + P = cte$

$$\rho u = cte \quad \ldots iv$$
$$\rho u^2 + \rho C_0^2 = cte \quad \ldots v$$

A partir de ahora denotamos por un subíndice 0 a las variables de densidad ρ y velocidad u pre-choque y por un subíndice 1 a las variables post-choque. Luego, como la ecuación iv nos dice que ρu es constante y la ecuación v nos dice que $\rho u^2 + \rho C_0^2$ también es constante, entonces los valores de estas dos cantidades pre-choque y post-choque deben ser iguales. Por lo tanto llegamos a que:

$$\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1 \quad \ldots vi$$
$$\rho_0 u_0^2 + \rho_0 C_0^2 = \rho_1 u_1^2 + \rho_1 C_0^2 \quad \ldots vii$$

A partir de estas ecuaciones buscamos una relación entre u_0 y u_1.
Despejando ρ_1 de vi tenemos $\rho_1 = \frac{\rho_0 u_0}{u_1}$ y sustituyendo en la ecuación vii:

$$\left[\rho_0 u_0^2 + \rho_0 C_0^2 = \rho_0 \frac{u_0}{u_1} u_1^2 + \rho_0 \frac{u_0}{u_1} C_0^2\right] \frac{1}{\rho_0} \quad \text{multiplicamos por } \frac{1}{\rho_0}$$
$$\Rightarrow u_0^2 + C_0^2 = \frac{u_0}{u_1} u_1^2 + \frac{u_0}{u_1} C_0^2$$
$$\Rightarrow u_0^2 + C_0^2 = \frac{1}{u_1} (u_0 u_1^2 + u_0 C_0^2)$$
$$\Rightarrow u_1 u_0^2 + u_1 C_0^2 = u_0 u_1^2 + u_0 C_0^2$$
$$\Rightarrow u_1 u_0^2 - u_0 u_1^2 = u_0 C_0^2 - u_1 C_0^2$$
$$\Rightarrow u_1 u_0 (u_0 - u_1) = C_0^2 (u_0 - u_1) \quad \ldots viii$$

De la expresión viii, se puede ver que una solución es $u_0 = u_1$, pero esta solución implica que todas las variables pre-choque y post-choque son iguales, lo cual es una solución trivial que no nos dice nada. Por lo tanto, suponemos que $u_0 \neq u_1$ y nos queda:

$$u_1 u_0 = C_0^2 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{C_0^2}{u_0}$$

Finalmente, de vi tenemos que:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{u_0}{u_1} = \frac{u_0}{(C_0^2/u_0)} = \frac{u_0^2}{C_0^2}$$

y como el número de Mach pre-choque viene dado por $M_0 = \frac{u_0}{C_0}$, entonces:

$$\boxed{\frac{\rho_1}{\rho_0} = M_0^2}$$

3. Calcular la velocidad u_1 y la presión P_1 detrás de un choque isotérmico (en función de las variables pre-choque u_0, P_0 y M_0).

La situación descrita es la misma que la del problema anterior, por lo que podemos repetir el desarrollo que hicimos antes. Del problema anterior llegamos a que:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = M_0^2 \quad \dots *$$

Pero también de la ecuación vi teníamos que $\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{u_0}{u_1}$. Por lo tanto:

$$\frac{u_0}{u_1} = M_0^2 \Rightarrow \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{M_0^2}$$

$$\boxed{\therefore u_1 = \frac{u_0}{M_0^2}}$$

Este resultado nos permite conocer la velocidad u_1 post-choque a partir de conocer la velocidad pre-choque u_0 y el número de Match pre-choque M_0

Por otro lado, para hallar la relación entre las presiones, usamos la condición isotérmica $P = \rho c_0^2$, por lo que $P_0 = \rho_0 c_0^2$ y $P_1 = \rho_1 c_0^2$. Así pues, nos queda que la razón entre las presiones es:

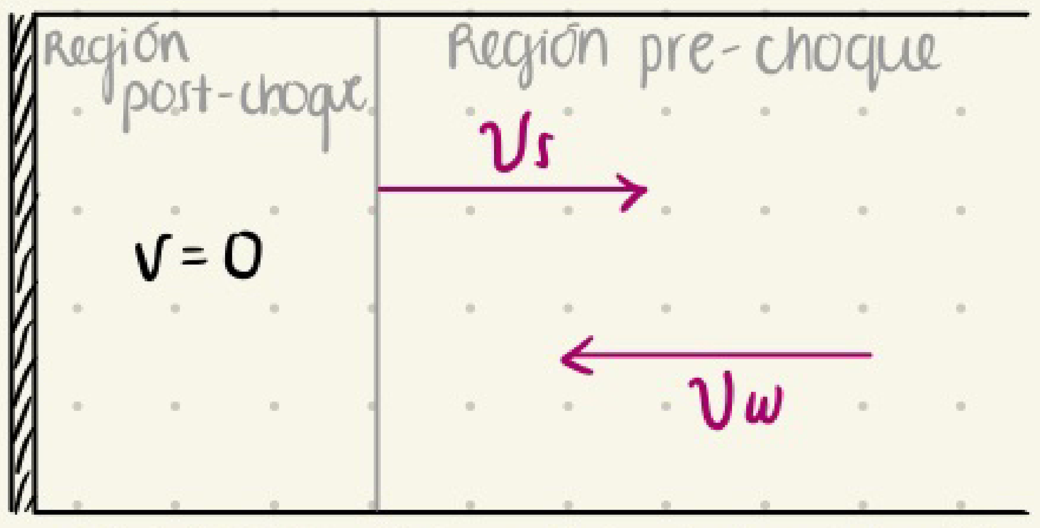
$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{\rho_1 \cancel{c_0^2}}{\rho_0 \cancel{c_0^2}} = \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad \dots **$$

Sin embargo, teníamos de $*$ que $\frac{\rho_1}{\rho_0} = M_0^2$, e igualando a $**$ obtenemos que:

$$\frac{P_1}{P_0} = M_0^2 \qquad \boxed{\therefore P_1 = P_0 M_0^2}$$

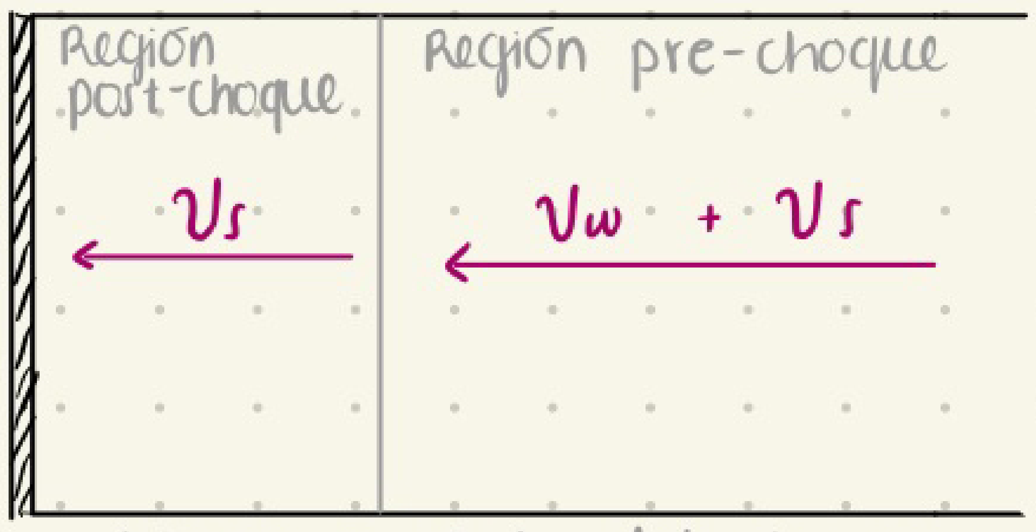
Este resultado nos permite conocer la presión P_1 post-choque a partir de conocer la presión pre-choque P_0 y el número de Match pre-choque M_0

4. Se tiene un flujo isotérmico supersónico que incide perpendicularmente sobre una superficie rígida plana. Obtener la velocidad v_s con la cual el choque se aparta de la superficie (en función de la velocidad v_w del flujo inicidente y de la velocidad del sonido isotérmica $c_0 = \sqrt{P_0/\rho_0}$).



a) Marco Ref. del laboratorio

En el marco de referencia del laboratorio (Figura a) el gas impacta sobre la pared y se crea una onda de choque que viaja alejándose de la pared a una velocidad v_s, formando una región post-choque a lado de la pared que se encuentra en reposo respecto a ésta. Mientras tanto, sigue llegando flujo hacia la pared a una velocidad v_w



b) Marco Ref. del choque

Sin embargo, para estudiar el problema, usaremos como sistema de referencia uno que se mueve siguiendo al choque (Figura b). Respecto al sistema de laboratorio, este sistema de referencia se mueve a una velocidad v_s hacia la derecha. Por lo tanto, el gas que se encuentra entre la pared y el choque, que se encontraba en reposo en el sistema del laboratorio (Figura a), ahora se mueve a velocidad v_s en el sistema de referencia del choque (Figura b). Por otro lado, el gas que llega a una velocidad v_w hacia la izquierda en Figura a, se mueve entonces a una velocidad $v_w + v_s$ respecto a la onda de choque.

Por lo tanto, vemos que se tiene una región pre-choque (la región a la que no ha llegado el choque aún) que tiene una velocidad $u_0 = v_w + v_s$, y una región post-choque (la región cercana a la pared por la cual ya pasó el choque) que tiene una velocidad $u_1 = v_s$

Ahora bien, en el problema 2 habíamos visto cuál era la relación entre las velocidades pre-choque y post-choque en el marco de referencia del choque de un flujo isotérmico. Esa es justo la situación que tenemos aquí, por lo que podemos usar la ecuación:

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{M_0^2} = \frac{c_0^2}{u_0^2} \qquad \text{usando la definición de } M_0 = \frac{u_0}{c_0}$$

Sustituimos nuestras velocidades u_0 y u_1

$$\Rightarrow \frac{v_s}{v_w + v_s} = \frac{c_0^2}{(v_w + v_s)^2}$$

Con esta ecuación ya podremos escribir a v_s (la velocidad con la que el choque se aparta de la superficie) en función de v_w (la velocidad del flujo incidente) y la velocidad del sonido isotérmica c_0. Entonces, para despejar v_s empezamos multiplicando ambos lados por $(v_w + v_s)^2$ y nos queda:

$$(v_w + v_s)^2 \frac{v_s}{\cancel{v_w + v_s}} = \cancel{(v_w + v_s)^2} \frac{c_0^2}{\cancel{(v_w + v_s)^2}}$$

$$\Rightarrow (v_w + v_s)\, v_s = c_0^2$$

$$\Rightarrow v_s^2 + v_w v_s - c_0^2 = 0 \quad \dots \; 1$$

Obtenemos así una ecuación cuadrática para v_s (1), por lo que la podemos resolver usando la fórmula general $v_s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ para resolver la ecuación cuadrática $a v_s^2 + b v_s + c = 0$. En nuestro caso particular, la ecuación tiene $a = 1$, $b = v_w$, $c = -c_0^2$:

$$\Rightarrow v_s = \frac{-v_w \pm \sqrt{v_w^2 - 4(-c_0^2)}}{2}$$

$$= \frac{-v_w \pm \sqrt{v_w^2 + 4c_0^2}}{2}$$

Descartamos la solución negativa, ya que esta solución indicaría que el choque se está moviendo hacia la pared, lo cual no es el caso de este problema, pues, por el enunciado sabemos que el choque se está apartando de la superficie, por lo que la solución es :

$$v_s = \frac{-v_w + \sqrt{v_w^2 + 4c_0^2}}{2}$$

$$= \frac{-v_w + \sqrt{v_w^2(1 + 4c_0^2/v_w^2)}}{2}$$

$$= \frac{-v_w + v_w\sqrt{1 + 4c_0^2/v_w^2}}{2}$$

$$\boxed{\therefore v_s = v_w \frac{\sqrt{1+4c_0^2/v_w^2} - 1}{2}}$$

Se puede simplificar el resultado si el flujo incidente tiene una velocidad mucho mayor a la velocidad del sonido, en el caso particular en el que $v_w \gg c_0$.
En este caso, la cantidad $4c_0^2/v_w^2$ es muy pequeña y entonces se puede aproximar la raíz $\sqrt{1+4c_0^2/v_w^2}$ con la forma $\sqrt{1+\varepsilon}$, donde para $\varepsilon \ll 1$ se puede aproximar como $1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, podemos sustituir la raíz $\sqrt{1+4c_0^2/v_w^2} \simeq 1 + \frac{4c_0^2}{2v_w^2} = 1 + \frac{2c_0^2}{v_w^2}$, con lo que nos resulta :

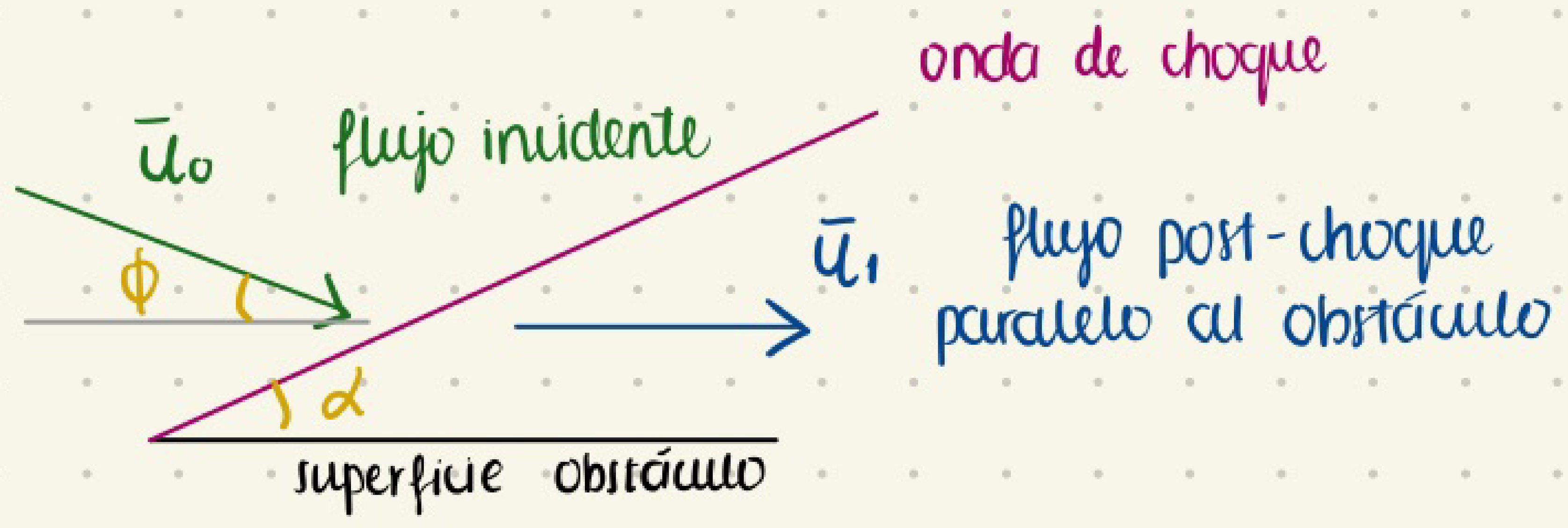
$$v_s = v_w \frac{\sqrt{1+4c_0^2/v_w^2} - 1}{2}$$

$$\simeq v_w \frac{\left(1 + \frac{2c_0^2}{v_w^2}\right) - 1}{2}$$

$$= \cancel{v_w} \frac{\left(\frac{\cancel{2}c_0^2}{v_w^{\cancel{2}}}\right)}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{\therefore v_s = \frac{c_0^2}{v_w}}$$

5. Un flujo isotérmico inside oblicuamente con un ángulo ϕ sobre una superficie rígida, formando el choque plano de la "reflexión regular". Calcula el ángulo α entre el choque y la superficie rígida para el caso de un flujo incidente altamente supersónico.



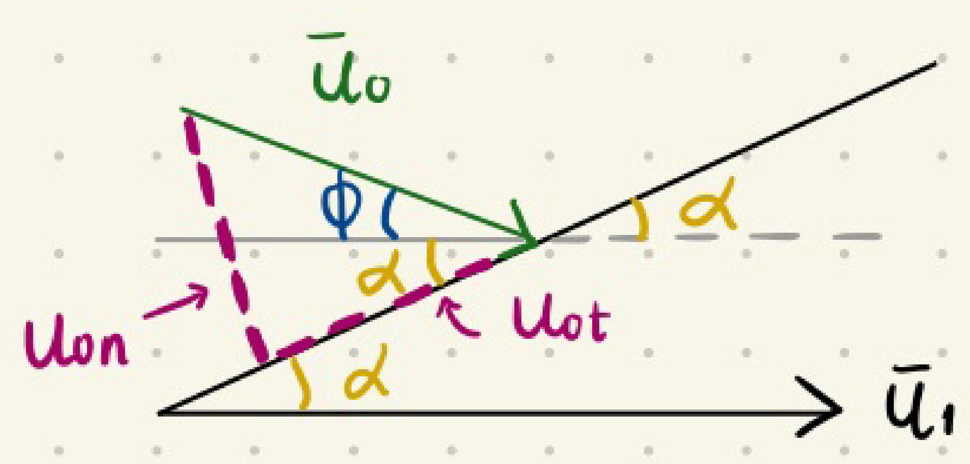
En el diagrama de la izquierda, se muestra el choque oblicuo. La superficie horizontal denota a la pared sobre la que incide el fluido. El fluido llega a una velocidad $\bar{u}_0$ formando un ángulo ϕ respecto a la pared hasta llegar al choque, tras el cual el fluido sale en dirección paralela a la pared con una velocidad $\bar{u}_1$. Además, suponemos que el choque forma un ángulo α respecto a la pared, como se puede apreciar en el diagrama.

Ahora descomponemos al vector $\bar{u}_1$ de la región post-choque en dos componentes, una tangente al choque u_{1t} y una normal al choque u_{1n}. Esta descomposición se muestra en el siguiente diagrama:

De donde notamos que:

$$\tan\alpha = \frac{u_{1n}}{u_{1t}} \quad \dots 1$$

Por otro lado, podemos descomponer la velocidad incidente $\vec{u}_0$ también en sus componentes tangente u_{0t} y normal u_{0n}. Para hacerlo, dibujamos el vector y sus componentes y notamos que se forma un ángulo $\phi+\alpha$ como se observa en el siguiente diagrama:



Esta figura implica que los coeficientes tangente y normal al choque de $\vec{u}_0$ son:

$$u_{0n} = u_0 \operatorname{sen}(\phi+\alpha) \quad \dots 2$$
$$u_{0t} = u_0 \cos(\phi+\alpha) \quad \dots 3$$

Usamos ahora las relaciones para un choque oblicuo separando en la parte tangencial y la parte normal al choque. Como vimos en clase, la componente de la velocidad tangencial claramente no cambia antes ni después del choque, lo que implica que:

$$u_{1t} = u_{0t} \quad \dots 4$$

Mientras que la componente normal sigue las reglas de salto para un choque isotérmico normal como el del problema 2 y 3.

Según el resultado del problema 3, las velocidades antes y después del choque están relacionadas por $u_1 = \frac{u_0}{M_0^2}$, por lo que ésta es la relación entre las componentes normales al choque:

$$u_{1n} = \frac{u_{0n}}{M_{0n}^2}$$

Donde $M_{0n} = \frac{u_{0n}}{c_0}$ es el número de Mach de la componente normal al choque, por lo que nos queda:

$$u_{1n} = \frac{c_0^2}{u_{0n}^2} \cancel{u_{0n}} = \frac{c_0^2}{u_{0n}} \quad \dots 5$$

Con estas cinco ecuaciones buscamos escribir a α en términos de ϕ. Para ello partimos de la ecuación (1):

$$\frac{u_{1n}}{u_{1t}} = \tan\alpha$$

Usamos la ecuación (4) para reemplazar u_{1t} y la ecuación (5) para reemplazar u_{1n}:

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{c_0^2}{u_{0n}}\right)}{u_{0t}} = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{c_0^2}{u_{0n}\, u_{0t}} = \tan\alpha$$

Finalmente, usamos las ecuaciones (2) y (3) para sustituir u_{0n} y u_{0t} respectivamente:

$$\Rightarrow \frac{c_0^2}{u_0 \operatorname{sen}(\phi+\alpha)\, u_0 \cos(\phi+\alpha)} = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{c_0^2}{u_0^2} \, \frac{1}{\operatorname{sen}(\phi+\alpha)\, u_0 \cos(\phi+\alpha)} = \tan\alpha$$

Definimos ahora a M_0 como el número de Mach de la velocidad de incidencia u_0, es decir, $M_0 = \frac{u_0}{c_0}$, por lo que nos queda:

$$\frac{1}{M_0^2} \, \frac{1}{\operatorname{sen}(\phi+\alpha)\, u_0 \cos(\phi+\alpha)} = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow M_0^2 \tan(\alpha) \operatorname{sen}(\phi+\alpha)\, u_0 \cos(\phi+\alpha) = 1$$

Esta última relación es la que nos permite conseguir a α en términos de ϕ, aunque no se puede despejar analíticamente.

Sin embargo, podemos hacer una aproximación para flujos altamente supersónicos (flujos con $M_0 \gg 1$). En clase vimos que, para estos flujos, la superficie de choque se acerca mucho a la pared, es decir, el ángulo α es muy pequeño. Debido a esto, podemos aproximar $\cos(\phi+\alpha)$ como $\cos\phi$, aproximamos $\operatorname{sen}(\phi+\alpha)$ como $\operatorname{sen}\phi$ y $\tan\alpha$ como α. Por lo tanto, la ecuación que relaciona α con ϕ queda como:

$$M_0^2 \alpha \operatorname{sen}\phi \cos\phi = 1$$

$$\boxed{\therefore\ \alpha = \frac{1}{M_0^2 \cos\phi \operatorname{sen}\phi}}$$

α como función de ϕ para flujos supersónicos.

Con esta función podemos graficar el ángulo α como función del número de Mach M_0 del flujo incidente para distintos valores del ángulo de incidencia ϕ.