Análisis

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

30 de enero de 2021

1. Números Reales y Complejos

1.1. Conjuntos Ordenados

Def. (Conjunto Ordenado): Decimos que S es un conjunto ordenado si existe una relación $<$ tal que:

1) Si $x, y \in S$, entonces una y sólo una de las siguientes es verdadera:

$$x < y \ \ , \ \ x = y \ \ , \ \ y < x$$

ii) Si $x, y, z \in S$ y $x < y.y < z$ entonces $x < z$

Ejemplo: $\mathbb{Q}$ es un conjunto ordenado con el orden se define como $r < s$ si $s - r$ es positivo.

Definición (Acotado superiormente): Si $E \subset S$ es un conjunto ordenado. Se dice que E está acotado superiormente si existe un $\beta \in S$ tal que $x \leq \beta$ para cada $x \in E$ y β es una **cota superior de** E
De la misma forma se definen las cotas inferiores.

Definición (Supremo) Si $E \subset S$ está acotado, se define el supremo de E que es $\alpha \in S$ como un número con las propiedades:

i) α es una cota superior de E

ii) Si $\gamma < \alpha$, entonces γ no es una cota superior de E

El supremo es la mínima cota superior.
Por otro lado, si el conjunto está acotado inferiormente, se le define el ínfimo como la máxima cota inferior.

Definición (Propiedad de Supremo) Un conjunto ordenado S tiene la propiedad de supremo si para todo $E \subset S$ con E no vació y acotado superiormente, $\sup(E)$ existe en S.
Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ no tiene la propiedad de cota superior.

Teorema 1.11: Supóngase que S es un conjunto ordenado con la propiedad de supremo. Sea $B \subset S$ con B no vació y acotado inferiormente. Entonces, existe un ínfimo de B (S tiene la propiedad de ínfimo).
Además, dicho ínfimo es $\inf(B) = \sup(L)$ con $L =$ todas las cotas inferiores de B

1.2. Campos

Definición: Un campo es un conjunto F con operaciones de adición y multiplicación tales que cumplen con los axiomas de campo:

A1 Si $x \in F, y \in F$ entonces $x + y \in F$

A2 $x + y = y + x$ para toda $x, y \in F$

A3 $(x + y) + z = x + (y + z)$ para toda $x, y, z \in F$

A4 F contiene a un elemento 0 tal que $0 + x = x$ para cada $x \in F$

A5 A cada $x \in F$ le corresponde un elemento $-x \in F$ tal que: $x + (-x) = 0$

M1 Si $x, y \in F$ entonces $xy \in F$

M2 $xy = yx$ para todo $x, y \in F$

M3 $(xy)z = x(yz)$ para todo $x, y, z \in F$

M4 F contiene a un elemento $1 \neq 0$ tal que $1x = x$ para todo $x \in F$

M5 Si $x \in F$ y $x \neq 0$, entonces existe un $1/x \in F$ tal que $x \cdot (1/x) = 1$

D $x(y + z) = xy + xz$

Proposición:

- Si $x + y = x + z \;\Rightarrow\; y = z$
- Si $x + y = x \;\Rightarrow\; y = 0$
- Si $x + y = 0 \;\Rightarrow\; y = -x$
- $-(-x) = x$
- Si $x \neq 0$ y $xy = xz \;\Rightarrow\; y = z$
- Si $x \neq 0$ y $xy = x \;\Rightarrow\; y = 1$
- Si $x \neq 0$ y $xy = 1 \;\Rightarrow\; y = 1/x$

- Si $x \neq 0 \Rightarrow 1/(1/x) = x$
- $0x = 0$
- Si $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$
- $(-x)y = -(xy) = x(-y)$
- $(-x)(-y) = xy$

Def 1.17: Un campo ordenado es un campo F que a su vez es un conjunto ordenado y que las operaciones cumplen:

$$y < z \quad \Rightarrow \quad x + y < x + z$$
$$x > 0, y > 0 \quad \Rightarrow \quad xy > 0$$

Proposición 1.18

- Sii $x > 0 \Rightarrow -x < 0$
- Si $x > 0, y < z \Rightarrow xy < xz$
- Si $x < 0, y < z$, entonces $xy > xz$
- Si $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$. En particular, $1 > 0$
- Si $0 < x < y \Rightarrow 0 < 1/y < 1/x$

1.3. Campo Real

Teorema de Existencia 1.19) Existe un campo ordenado $\mathbb{R}$ que tiene la propiedad de mínima cota superior.
Además, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
A los números de $\mathbb{R}$ se les denomina números reales.

Dem:

1 Los miembros de $\mathbb{R}$ serán determinados subconjuntos de $\mathbb{Q}$, llamados cortaduras. Una cortadura es un conjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ tal que:

   - α es no vacío y $\alpha \neq \mathbb{Q}$
   - Si $p \in \alpha, q \in \mathbb{Q}$ y $q < p \Rightarrow q \in \alpha$
   - Si $p \in \alpha \Rightarrow p < r$ para un $r \in \alpha$

   Las cortaduras son todos los elementos menores que un real.
   Notamos que (III) implica que α no tiene un miembro más grande. Implica que si $p \in \alpha, q \notin \alpha$, entonces $p < q$
   Si $r \notin \alpha, r < s \Rightarrow s \notin \alpha$

2. Definimos $\alpha < \beta$ si $\alpha \subset \beta$
   Se puede comprobar que cumple con los requisitos de ser un orden. (que se cumple siempre que $\alpha < \beta$ ó $\alpha = \beta$ ó $\beta < \alpha$)
   Se puede probar que alguna de las anteriores se debe de cumpli usando las definiciones de cortes.

3. El conjunto ordenado $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de supremo.

4. Se define $\alpha + \beta$ como el conjunto de todas las $r + s$ para $r \in \alpha, s \in \beta$. Y se define 0^* como el conjunto de todos los racionales negativos.
   Se puede probar así las 5 propiedades de la suma.

5. Se define la multiplicación entre cortaduras de una forma un poco más fastidiosa. Y se demuestran las 5 propoiedades.

6. Se demuestran las propiedades de un campo ordenado.

7. Se demuestra la distributividad.

8. Se reemplazan las cortaduras por elementos.

Teorema: (Propiedad Arquimedeana)
Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, entonces existe un entero $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$nx > y$$

Dem: Definimos $A = \{nx|n \in \mathbb{N}\}$. Si el teorema no fuera cierto, entonces y sería una cota superior de A. Entonces A tiene un supremo en $\mathbb{R}$. Sea $\alpha = \sup(A)$. Por consiguiente, $\alpha - x < mx$ para algún entero positivo m. De donde $\alpha < (m+1)x \in A$!

Teorema 1.20b) (Densidad de $\mathbb{Q}$) Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, entonces existe un $p \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$x < p < y$$

Como $x < y \Rightarrow \quad y - x > 0$. Entonces, por Arquimedeana me da $n(y-x) > 1$. Luego, aplicando Arqui de nuevo, existen m_1, m_2 tales que $m_1 > nx, m_2 > -nx$. Entonces: $-m_2 < nx < m_1$
Por tanto, hay un entero m con $-m_2 \leq m \leq m_1$ tal que $m - 1 \leq nx < m$.
Entonces, se tiene que $nx < m \leq 1 + nx < ny$.
Como $n > 0$, entonces $x < m/n < y$

Teorema 1.21: Para todo número real $x > 0$ y cada entero $n > 0$ hay un único real $y > 0$ con $y^n = x$.

Dem: Definimos E como el conjunto de todos los positivos t tales que $t^n < x$. Demostración larga.

Corolario: Si a, b son reales positivos y n es un entero positivo, entonces $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$
dem: Haciendo $\alpha = a^{1/n}, \beta = b^{1/n}$. Se tiene $ab = \alpha^n\beta^n = (\alpha\beta)^n$ (por conmutatividad). Por tanto, la unicidad del teorema anterior da el resultado.

1.4. El sistema extendido de los Reales

Definición: El sistema extendido de los reales está constituido por $\mathbb{R}$ junto con $\infty, -\infty$. Se define para todo $x \in \mathbb{R}$ que $-\infty < x < \infty$.
Entonces ∞ es una cota superior de cada subconjunto de los reales. El sistema extendido no forma un campo, pero se acostumbra que $x + \infty = \infty$, $x/\infty = 0$, lo demás es bastante obvio.

1.5. Campo Complejo

Definición 1.24: Un número complejo es un par (a, b). Se dice que $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c, b = d$. Y se define la suma y el producto como:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b, d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Teorema 1.25: Las definiciones anteriores para la adición y la multiplicación vuelven al conjunto de los números complejos un campo.

Definición 1.27) $i = (0, 1)$

Teorema 1.28: $i^2 = -1$

Teorema 1.29: Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $(a, b) = a + bi$

Definición 1.30: El conjugado de $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$.
Y además Re(z) = a , Im(z) = b.

Teorema 1.31:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{zw}$
- $z + \overline{z} = 2Re(z)$, $z - \overline{z} = 2iIm(z)$
- $z\overline{z}$ es real positivo (excepto si $z = 0$)

Def. 1.32) Si z es un complejo, definimos la norma como $|z| = (z\overline{z})^{1/2}$ que existe y es único.
Teorema 1.33 Siendo z, w complejos:

- $|z| > 0$ a menos que $z = 0$, entonces $|0| = 0$

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zw| = |z||w|$
- $|Rez| \leq |z|$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$

Para demostrar e) se usa que $|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$

Teorema(Cauchy Shwartz) Si $a_1, ..., a_n$ y $b_1, ..., b_n$ son complejos, entonces:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b}_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$$

1.6. Espacios Euclidianos

Definiciones: Definimos $\mathbb{R}^k$ al conjunto de k-adas $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$
Y se define la suma y el producto por escalares como siempre.
Definimos también el **Producto interior como:**

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Y la **norma como**:

$$|\vec{x}| = (\vec{x} \cdot \vec{x})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}$$

Teorema: Supongamos que $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^k$ y que $a \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $|\vec{x}| \geq 0$
- $|x| = 0 \quad$ sii $\vec{x} = 0$
- $|a\vec{x}| = |a||\vec{x}|$
- $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$
- $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$
- $|\vec{x} - \vec{z}| \leq |\vec{x} - \vec{y}| + |\vec{y} - \vec{z}|$

d) es la desigualdad de C-S. Y f) se puede probar a partir de esta desigualdad.

1.7. Ejercicios Importantes:

12. Si $z_1, ..., z_n$ son complejos, entonces:

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$$

13. Si x, y son complejos, entonces:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Dem: Usar $x = x - y + y$ y usar la regla del tríangulo. Luego con y.

17. Paralelogramos:

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 + |\vec{x} - \vec{y}|^2 = 2|\vec{x}|^2 + 2|\vec{y}|^2$$

2. Topología Básica

2.1. Conjuntos Numerables y no Numerables

Def 2.2: Si existe un mapeo 1-1 de A sobre B, decimos que A y B se pueden poner en correspondencia 1-1 (biunívoca). Y decimos que A y B tienen el mismo **número cardinal**. O más brevemente, que A y B son equivalentes, y se escribe como $A \sim B$. Esta relación tiene las siguientes propiedades:

- **Es Reflexiva:** $A \sim A$
- **Es simétrica:** Si $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
- **Es transitiva:** Si $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Def 2.4: Para todo entero n, definimos J_n como el conjunto cuyos elementos son los enteros $1, 2, ..., n$. Y sea J el conjunto formado por todos los enteros positivos. Para un conjunto A, decimos:

a) A es finito si $A \sim J_n$ para algún n.

b) A es infinito si no es finito

c) A es numerabla si $A \sim J$

d) A es no numerable si no es finito ni numerable

e) A es a lo más numerable si es finito o numerable

Def 2.7 Sucesión en X: Una sucesión es una función $f : J \to X$. Se acostumbra poner $f(n) = x_n$ y la sucesión completa es la imagen, que es $\{x_n\}$.

Con esto, vemos que los elementos de un conjunto numerable pueden ser dispuestos en una sucesión.

Teorema 2.8: Todo subconjunto infinito de un conjunto numerable A, es numerable.

Teorema 2.12: Sea $\{E_n\}$, $n = 1, 2, 3, ...$ una colección numerable de conjuntos numerables. Entonces $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es numerable.
Teorema: El conjunto de números racionales es numerable.

2.2. Espacios Métricos y Topología

Def 2.15: Un espacio métrico es un conjunto X junto con una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

a) $d(p, q) > 0$ si $p \neq q$, $d(p, p) = 0$

b) $d(p, q) = d(q, p)$

c) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$

Definición 2.1. Bola de centro en w y radio r: Es el conjunto de puntos a una distancia a w menor o igual a r. $B_r(w) = \{z : |z - w| < r\}$

Conjunto abierto: $A \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto si para todo $z \in A$ existe una $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(z) \subset A$.

Cerrado: K es un conjunto cerrado si $\mathbb{C} - K$ es abierto.

Teorema 2.1. Propiedades básicas de los conjuntos abiertos y cerrados:
1) $\emptyset, \mathbb{C}$ son abiertos
2) Si $A_1, ..., A_n$ son abiertos, entonces su intersección es abierta.
3) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos abiertos, entonces su unión es abierta.

1) $\emptyset$ y $\mathbb{C}$ son cerrados
2) La unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.
3) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.

Definición 2.2.
Punto frontera de A: $a \in \mathbb{C}$ es un punto frontera de A si para todo $\epsilon > 0$ $B_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ y $B_\epsilon(a) \cap A^c \neq \emptyset$

Definimos ∂A = conjunto de puntos fronteras de A

Punto interior de A: $a \in A$ es un punto abierto de A si existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \subset A$
Int(A) = Conjunto de puntos interiores de A.

Punto exterior de A: $a \in \mathbb{C}$ es un punto exterior de A si es un punto interior de A^c

Punto de acumulación de A: $a \in \mathbb{C}$ es un punto de ac. de A si para toda $\epsilon > 0$, $(B_\epsilon(a) - \{a\}) \cap A \neq \emptyset$
$A' = \{$ puntos de Ac. de A $\}$

Punto límite: Igual a la definición de pto de ac. pero con una bola normal (no agujerada), así que esto incluye puntos aislados

Cerradura de A: $\overline{A} = A \cup \partial A$

Teorema 2.2. Propiedades
0)Dado un $A \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{C} = \partial A \cup int(A) \cup ext(A)$ y estos conjuntos son ajenos.
1) Ω es abierto sii int$(\Omega) = \Omega$
2) Ω es cerrado sii $\overline{\Omega} = \Omega$
3)Ω es cerrado sii $\partial\Omega \subset \Omega$
3.5) $\partial\Omega \subset \Omega'$
4)Ω es cerrado sii $\Omega' \subset \Omega$
5) int(Ω) = unión de la colección de todos los abiertos que son subconjuntos de Ω.
6) $\overline{A}$ = la intersección de todos los cerrados en los que A está contenido.
7) int$(\Omega) = \mathbb{C} - \overline{(\mathbb{C} - \Omega)}$
8) $\overline{\Omega} = \mathbb{C} - int(\mathbb{C} - \Omega)$
9) $\partial\Omega = \overline{\Omega}-$ int(Ω)
10) int$(\Omega) \subset \Omega \subset \overline{\Omega}$

0) Dado un punto $a \in \mathbb{C}$, o todas las bolas intersectan A y A^c o alguna está metida en A o alguna está metida en A^c.
1) Directo de la definición de ambas cosas
2)Como $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, por 0), $(\overline{\Omega})^c$ es abierto.
3) $\rightarrow$ Pues por 2) $\Omega \cup \partial\Omega = \Omega$ entonces $\partial\Omega \subset \Omega$
$\leftarrow$ Pues si $\partial\Omega \subset \Omega$, entonces $\Omega \cup \partial\Omega = \Omega$ y luego por 2), Ω es cerrado.
3.5) Por definición, toda bola de un punto frontera intersecta a Ω y por tanto es un punto de ac.
4) $\rightarrow$ por 2, $\Omega = \Omega \cup \partial\Omega$, pero un punto de acumulación no puede ser externo por def., por lo que por 0, $\Omega' \subset \Omega \cup \partial\Omega = \Omega$
$\leftarrow$ Por 3.5 y 3.
5) Como int(Ω) es abierto, entonces para todo p ahí, existe un abierto que queda contenido en int(Ω), por lo que p está en el conjunto del lado derecho. Si p está en una vecindad del lado derecho, esta vecindad está contenida en Ω y por tanto p es un punto interior.

6) Por 3), no puede haber un cerrado más chiquito que $A \cup \partial A$ contenga a A, pues le faltaría algún punto de la frontera.
7 y 8) Por complementos. 9) Para que un punto esté en $\overline{\Omega}$ pero no en $\text{int}(\Omega)$, tiene que estar en Ω o ser punto de ac. de Ω (en cualquier caso, no puede ser un punto exterior) pero tampoco puede ser interior, luego es frontera.
10) Directo de 5 y 6.

Definición 2.3. Disconexo: Ω es Disconexo si existen A y B abiertos tales que:
1) $A \cap \Omega \neq \emptyset \neq B \cap \Omega$
2) A y B son ajenos.
3) $\Omega \subset A \cup B$

Teorema 2.3.
1) $\Omega \subset \mathbb{C}$ es conexo sii los únicos conjuntos clopen relativos en Ω son $\emptyset$ y Ω.

2) Si tenemos una familia de conexos que se intersectan todos en un punto, entonces la unión es conexa.

3) Si Ω es abierto: Ω es conexo sii cualquier par de puntos en Ω se puede unir por medio de un polígono contenido en Ω.

Dem: 1) Si A es clopen en Ω y es un subconjunto propio, entonces A y $\Omega - A$ crean una disconección de Ω.
Si Ω es disconexo, entonces existe una disconección usando A y B, entonces, $A \cap \Omega$ y $B \cap \Omega$ son abiertos, pero como juntos forman Ω y son ajenos, entonces $\Omega - (A \cap \Omega) = B \cap \Omega$ por lo que $A \cap \Omega$ es cerrado relativo en Ω, entonces es clopen.

2) Intuitivamente es obvio
3)Sea $z \in \Omega$ arbitrario, definimos D_z como el conjunto de puntos en Ω que se pueden conectar con z por medio de un polígono contenido en Ω. Si probamos que $D_z = \Omega$, ya está. Podemos ver que D_z es abierto, pues si $a \in D_z \subset \Omega$, entonces existe una $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \subset \Omega$ (pues Ω abierto). Pero entonces para todo $w \in B_\epsilon(a)$, w se puede conectar con a (sin salir de Ω) y luego a con z, por lo que w se puede conectar con z. Por lo que $B_\epsilon(a) \subset D_z$ y por lo tanto es abierto.
Similarmente podemos probar que D_z es cerrado probando que su complemento es abierto en Ω y por 1), queda que $D_z = \Omega$ (pues es clopen y no es vacío porque $z \in D_z$)

Definición 2.4. Cubierta abierta de A: Es una colección de conjuntos abiertos tales que su unión cubre a A.
Compacidad: A es compacto si para toda cubierta abierta de A, existe una subcubierta finita.

Teorema 2.4. Sea $K \in \mathbb{C}$ un compacto, entonces
1) K es cerrado.

2) Si $F \subset K$ y F es cerrado, entonces F es compacto.

Dem: Tomamos un punto p fuera de K, luego creamos una cubierta abierta en todos los puntos de K de radio tal que no lleguen hasta p. Luego tomamos una subcubierta finita cuya unión sea U. Si tomamos el abierto más chico de esta subcubierta y ahora lo centramos en p, es imposible que esta vecindad V_p toque a K, pues si lo hiciera, esta vecindad tendria un radio mayor al que se le pidió por def. Luego, la vecindad se queda en K^c y por tanto éste es abierto.

2) Dada una cubierta de F, le podemos agregar F^c (abierto) para convertirla en cubierta de K. Luego, K acepta una subcubierta finita, a ésta le sacamos F^c (si lo tiene) que no nos sirve y nos quedamos entonces con una subcubierta de F

Teorema 2.36: Si $\{K_\alpha\}$ es una colección de subconjuntos compactos de un espacio métrico X, tal que la intersección de toda subcolección finita de $\{K_\alpha\}$ es no vacía, $\cap K_\alpha$ es no vacía.

Dem: Tomemos un elemento K_1 de $\{K_\alpha\}$ y hagamos $G_\alpha = K_\alpha^c$. Supongamos que ningún punto de K_1 pertenece a todos los K_α. Los conjuntos G_α forman una cubierta abierta de K_1 y como K_1 es compacto, hay una subcubierta finita tal que $K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$. Pero esto significa que $K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_n}$ es vacío. Una contradicción.

Corolario (Teorema de Cantor): Si $\{K_n\}$ es una sucesión de conjuntos compactos no vacíos, tales que $K_{n+1} \subset K_n$. Entonces $\cap_1^\infty K_n$

Teorema 2.37 Si E es un subconjunto infinito de un conjunto compacto K, E tiene un punto límite en K.

Teorema 2.41 (Heine Borel):

a) E es cerrado y acotado

b) E es compacto

c) Todo subconjunto infinito de E tiene un punto límite en E.

2.3. Conjuntos Perfectos

Teorema 2.43 Sea P un conjunto perfecto (Cerrado y sin puntos aislados) no vacío en $\mathbb{R}^k$. Entonces P es no numerable.

Dem: Como P tiene puntos límites (todos sus puntos son límites) entonces debe de ser infinito. Se puede probar que es no numerable.

Conjunto de Cantor: El conjunto de Cantor es perfecto pero no contiene ningún segmento.

2.4. Conjuntos Conexos

Definición: Dos subconjuntos A y B de un espacio métrico se dicen separados si $A \cap \overline{B}$ y $\overline{A} \cap B$ son vacíos.

Conexo: Un conjunto $E \subset X$ se dice conexo si E no es la unión de dos conjuntos separados no vacíos.

3. Sucesiones Numéricas y Series

Sucesión: Se define una sucesión en X como una función que va de $\mathbb{N}$ a X. Se denotan todos los elementos de la sucesión como $\{p_n\}$.

Convergente: Se dice que la sucesión $\{p_n\}$ en un espacio métrico X converge si hay un punto $p \in X$ tal que:
Para todo $\epsilon > 0$, existe un número entero N tal que si $n \geq N$ implica que $d(p_n, p) < \epsilon$.
Si no converge, decimos que diverge.

Teorema 3.2: Sea $\{p_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X

a) $\{p_n\}$ converge hacia $p \in X$ sii toda vecindad tiene todos los términos de $\{p_n\}$ salvo un número finito de ellos.

b) Si $\{p_n\}$ converge hacia p y hacia p' entonces $p = p'$.

c) Si $\{p_n\}$ converge, es acotada.

d) Si $E \subset X$ y p es un punto límite de E, existe una sucesión $\{p_n\}$ en E para la cual $p = \lim_{n\to\infty} p_n$

Teorema 3.3 Supongamos que $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ son sucesiones complejas y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Se verifica que:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s + t$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} cs_n = cs$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n t_n = st$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$

Teorema 3.4 Sea $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^k$ y $\mathbf{x}_n = (\alpha_{1,n}, ..., \alpha_{k,n})$.
Entonces $\{\mathbf{x}_n\}$ converge hacia $\mathbf{x} = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ si y sólo si:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j$$

Además:

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n \mathbf{x}_n = \beta \mathbf{x}$$

3.1. Subsucesiones

Def: Dada una sucesión $\{p_n\}$, consideramos otra $\{n_k\}$ constituida por enteros positivos tales que $n_1 < n_2 < \cdots$. La sucesión $\{p_{n_i}\}$ se llama subsucesión.

Teorema BW 3.6: Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^k$ tiene una subsucesión convergente.

Teorema 3.7 Los límites subsecuenciales de una sucesión $\{p_n\}$ en un espacio métrico X forman un subconjunto cerrado de X.

3.2. Sucesiones de Cauchy

Def (Cauchy): $\{p_n\}$ en un espacio métrico X es una sucesión de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$, hay un entero N tal que $d(p_n, p_m) < \epsilon$ si $n, m \geq N$.

Def (Diámetro): Sea $E \subset X$. Y S el conjunto de todos los reales de la forma $d(p, q)$ con $p, q \in E$. El supremo de S se llama el diámetro de E.

$$diam(E) = \sup\{d(p,q) \;\; p, q \in E\}$$

Teorema:

a) Si $\overline{E}$ es la cerradura de u conjunto E entonces:

$$diam(\overline{E}) = diam(E)$$

b) Si K_n es una sucesión de conjuntos compactos en X, tales que $K_{n+1} \subset K_n$ y si:

$$\lim_{n\to\infty} diam K_n = 0$$

Entonces $\bigcap_1^\infty K_n$ está constituido por un punto.

Dem a) Como $E \subset \overline{E}$. Entonces $diam E \leq diam \overline{E}$. Entonces, para un $\epsilon > 0$, elejimos $p, q \in \overline{E}$ y existen $p', q' \in E$ con $d(p, p') < \epsilon, d(q, q') < \epsilon$. De ahí tenemos que $d(p, q) \leq d(p, p') + d(p'q') + d(q', q) < 2\epsilon + d(p', q') \leq 2\epsilon + diam E$.
Entonces $diam\overline{E} \leq 2\epsilon + diam E$ para cualquier ϵ.
b) La intersección es no vacía por un teorema anterior. Y es un punro porque sino la intersección tendría diámetro mayor que 0.

Teorema 3.11:

a) En cualquier espacio métrico X, toda sucesión convergente es de Cauchy

b) Si X es un espacio métrico compacto y $\{p_n\}$ una sucesión de Cauchy. Entonces $\{p_n\}$ converge a un punto en X.
Def: Un espacio con la propiedad de que toda sucesión de Cauchy converge dentro del espacio se llama completo.

c) Y toda sucesión de Cauchy converge

a) Si $p_n \to p$ y $\epsilon > 0$, hay un entero N tal que $d(p, p_n) < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Entonces:

$$d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < 2\epsilon$$

Si $n, m \geq N$ Por tanto $\{p_n\}$ es de Cauchy.
Si x_n es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^k$. Definimos E_N
b) Sea $\{p_n\}$ una sucesión de Cauchy en X. Para $N = 1, 2, 3, ...$, sea E_N el conjunto de $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, ...$ Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} diam\ \overline{E}_N = 0$$

Cada E_N es compacto por teorema 3.7. Y también $E_{N+1} \subset E_N$, así que $\overline{E}_{N+1} \subset \overline{E}_N$.
Entonces, hay un único $p \in X$ en la intersección de todos estos conjuntos. Dicho punto es el punto de convergencia.
c)Sea x_n una sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}^k$. Definimos E_n como antes con x_i en lugar de p_i. Para algún N, $diam\ E_N < 1$. El rango $\{x_n\}$ es la unión de E_N y el conjunto finito $\{x_1, ..., x_{N-1}\}$.
Por esto $\{x_n\}$ es acotado Luego, de b) se deduce c).

Def (Monótona): Se dice que $\{s_n\}$ es:

a) Monótona Creciente si $s_n \leq s_{n+1}$

b) Monótona decreciente si $s_n \geq s_{n+1}$

.

Teorema 3.14: Supongamos que $\{s_n\}$ es monótona. $\{s_n\}$ converge si y sólo si es acotada.
Dem: Converge al supremo de $\{s_n\}$

3.3. Límites Superior e Inferior

Def. Una sucesión $s_n \to \infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe un N tal que si $n > N$ entonces $s_n > M$. Similarmente para las sucesiones que tienden a $-\infty$.

Def (Límites sup y Inf): Sea $\{s_n\}$ una sucesión de números reales. Sea E el conjunto de todos los puntos de convergencia de las subsucesiones de s_n.
Entonces, definimos:

$$\limsup s_n \equiv s^* = \sup E \quad , \quad \liminf s_n \equiv s_* = \inf E$$

Teorema 3.17 Sea $\{s_n\}$ una sucesión y consideremos E y s^* como en la definición anterior. Entonces, se tiene que:

a) $s^* \in E$

b) Si $x > s^*$, existe un $N \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq N$ implica que $s_n < x$.

Y s^* es el único número que posee las propiedades a),b).

3.4. Algunas Sucesiones Especiales

a) Si $p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$

b) Si $p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

d) Si $p > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$

e) Si $|x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

3.5. Series

Def (serie): Una serie es una expresión de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Def (Sumas Parciales): Son las sumas hasta cierto término, como:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Convergencia: Decimos que la serie $\sum a_n$ converge si la secuencia $\{s_n\}$ converge hacia s y lo escribimos como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Teorema 3.23: Si $\sum a_n$ converge entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Dem: Se sigue de que las sucesión de suma parciales debe de seguir la condición de Cauchy.
El regreso no es válido (por ejemplo, la serie armónica).

Teorema 3.24 (A partir de sucesiones monótonas) Una serie de términos no negativos converge si y sólo si sus sumas parciales son una sucesión acotada.

Teorema 3.25 Test de comparación:

a) Si $|a_n| \leq c_n$ para $n > N_0$ y $\sum c_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también.

b) Si $a_n \geq d_n \geq 0$ para $n > N_0$ y $\sum d_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

3.5.1. Algunas series No negativas

Serie geométrica 3.26 Si $0 \leq x < 1$ entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Si $x \geq 1$, la serie diverge.

P-series La serie:

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

Converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

3.5.2. Criterios

Criterio de la Raíz: Dado $\sum a_n$, hacemos $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.Entonces:

- Si $\alpha < 1$, $\sum a_n$ converge.
- Si $\alpha > 1$, $\sum a_n$ diverge.

Criterio de la razón. Hacemos $\alpha = \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Entonces:

- Si $\alpha < 1$, $\sum a_n$ converge.
- Si $\alpha > 1$, $\sum a_n$ diverge.

3.5.3. Series de Potencias

Es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

La convergencia depende del valor de z respecto a los coeficientes. En general, la serie converge en un círculo centrado en el origen. Tenemos que:

Teorema 3.39: Dada la serie de potencias. Hacemos

$$alpha = \limsup \sqrt[n]{|c_n|},\ R = \frac{1}{\alpha}.$$

Entonces, la serie converge en $|z| < R$ y diverge fuera de este círculo.
Se puede aplicar también el criterio de la razón y generalmente da el mismo resultado, pero es menos aplicable.

Más Cosas de Series.

4. Continuidad

4.1. Límite

Def (Límite): Sea X, Y espacios métricos. Y sea $f : E \subset X \to Y$. Entonces, escribimos:

$$\lim_{x \to p} f(x) = q$$

Si para $q \in Y$ se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $x \in E$:

$$\text{Si } 0 < d_X(x,p) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), q) < \epsilon.$$

Notar que p no tiene que ser un punto de E.

Teorema 4.2: Se tiene que:

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \quad \text{sii} \quad \lim_{n \to \infty} f(p_n) = q$$

Para toda sucesión $\{p_n\}$ en E tal que $p_n \neq p$ y con $\lim_{n \to \infty} p_n = p$

Corolario: Si f tiene un límite p, este límite es único.

Teorema: Supongamos que $E \subset X$ y que p es un punto límite de E. f, g son funciones complejas de E y:

$$\lim_{x \to p} f(x) = A \quad , \quad \lim_{x \to p} g(x) = B$$

Entonces:

- $\lim_{x \to p} (f+g)(x) = A + B$
- $\lim_{x \to p} (fg)(x) = AB$
- $\lim_{x \to p} (f/g)(x) = A/B \quad \text{si } B \neq 0$

4.2. Funciones Continuas

Def: Sea $f : E \subset X \to Y$. Se dice que f es continua en p si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in E$ con:

$$d_X(x,p) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$$

Si f es continua en todo punto de E, se dice que f es continua en E. Se observa que f debe de estar definida en p. Si p es un punto aislado de E, entonces toda función f que tiene como dominio E es continua en p.

Teorema 4.6 Si admitimos que p no sea un punto cualquiera de E, sino que sea un punto límite de E, entonces f es continua en p si y sólo si $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Teorema 4.7: Sea $f : E \subset X \to Y$ y $g : f(E) \subset Y \to Z$. Si f es continua en todo E y g es continua en $f(p)$. Entonces $h = g \circ f$ es continua en p.

Teorema: La suma producto y cociente de funciones continuas son continuas.

Teorema 4.8: $f : X \to Y$ es continua en X si y sólo si para todo V abierto en Y, $f^{-1}(V)$ es abierto en X.
Corolario: f es continua si y sólo si para todo C cerrado en Y , $f^{-1}(C)$ es cerrado en X.

Teorema 4.10: Sean $f_1, ..., f_k$ funciones reales en un espacio métrico X. Y sea $\mathbf{f}$ la aplicación de X en $\mathbb{R}^k$ definida por:

$$\mathbf{f}(x) = (f_1(x), ..., f_k(x))$$

$\mathbf{f}$ es continua sii cada una de las f_i son continuas.

Funciones coordenadas: Si $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k)$. Enotnces se definen las funciones coordenadas como:

$$\phi_i(\mathbf{x}) = x_i$$

Se puede ver que son continuas.

Se deduce entonces que todo polinomio de varias variables es continuo (se puede conseguir multiplicando muchas proyecciones)

4.3. Continuidad y Compacidad

Def 4.13: Se dice que $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^k$ es acotada si existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in E$.
Teorema 4.14: Si $f : E \subset X \to Y$ es continua y E es compacto. Entonces $f(E)$ es compacto en Y.

Teorema 4.15: Si f es una aplicación continua de un espacio métrico compacto X en $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{f}(X)$ es cerrado y acotado. Así $\mathbf{f}$ es acotada.
Corolario: Si $f : X \to \mathbb{R}$ es continua y X compacto, entonces f alcanza su máximo y mínimo.

Def (Continuidad Uniforme): Sea f una función de un espacio métrico X en un espacio métrico Y. Decimos que f es u.c en X si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $d_X(p, q) < \delta$:

$$d_Y(f(p), f(q)) < \epsilon$$

Es evidente que si f es U.C en X entonces f es continua en todos los puntos de X. El siguiente teorema es un regreso:

Teorema 4.19: Sea $f : X \to Y$ Continua en X con X compacto. Entonces, f es U.C en X.

4.4. Continuidad y Conexibilidad

Teorema 4.22: Si f es una aplicación de un espacio métrico X en un espacio métrico Y, y E es conexo en X entonces $f(E)$ es conexo.

Teorema 4.23 (TVI): Sea f una función real continua en el intervalo $[a, b]$. Si $f(a) < f(b)$ y c es un real tal que $f(a) < c < f(b)$, entonces existe un punto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.

4.5. Discontinuidades

Decimos que f es discontinua en x si x es un punto en el dominio de f en el cuál ésta no es continua.

Def (Límites por izq y derecha): Escribimos:

$$f(x+) = q$$

Si $f(t_n) \to q$ cuando $n \to \infty$ para todas las sucesiones $\{t_n\}$ en (x, b) tales que $t_n \to x$.
Similarmente decimos que $f(x-) = q$ si $f(t_n) \to q$ para toda sucesión $\{t_n\}$ en (a, x).

Teorema: Si $\lim_{t \to x} f(t)$ existe entonces $f(x+) = f(x-) = \lim\limits_{t \to x} f(t)$

Tipos de discontinuidades: Si f es discontinua en x pero existe $f(x+)$ y $f(x-)$ entonces es una discontinuidad de primer tipo.
Si los límites laterales no existen, es una discontinuidad de segunda clase.
La discontinuidad se puede dar porque $f(x+) \neq f(x-)$ o porque $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$

4.6. Monótonas

Def: f es monótona creciente (decreciente) si $x < y$ implica que $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) \geq f(y)$

Teorema 4.29: Si f es monótona creciente, entonces existen $f(x+)$ y $f(x-)$. Más precisamente:

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \text{ínf}_{x<t<b} f(t)$$

Corolario: Las funciones monótonas no tienen discontinuidades de segunda clase.

Teorema 4.30: Sea f monótona en (a, b). El conjunto de puntos de (a, b) en los que f es discontinua es a lo sumo numerable.

5. Diferenciación

5.1. Derivada de una función real

Def: Supongamos que f está definida en $[a,b]$. Entonces para cada $x \in [a,b]$, definimos:

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

Así asociamos a la función f una función f' cuyo dominio es el conjunto de puntos x en los que existe el límite.
Si f' está definida en x, decimos que f es diferenciable en x.

Teorema 5.2: Si f es diferenciable en un punto $x \in [a,b]$, entonces es continua.
Dem: Cuando $t \to x$, tenemos que:

$$f(t)-f(x) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \cdot (t-x) \to f'(x) \cdot 0 = 0$$

El recíproco no es cierto.

Teorema 5.3: Supongamos que f, g están definidas en $[a,b]$ y son diferenciables en x. Entonces $f+g, fg, f/g$ son diferenciables en x. Y se cumple:

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

Teorema 5.4 (Regla de la cadena): Digamos que f es continua en $[a,b]$, y que existe $f'(x)$. Y que g está definida en un intervalo que incluye el rango de f y g es diferenciable en $f(x)$. Entonces:

$$h(t) = g(f(t))$$

h es diferenciable en x, y:

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

5.2. Teoremas del Valor Medio

Def (máximo Local): Sea f definida en un espacio métrico X. Decimos que f tiene un máximo local en $p \in X$ si existe un $\delta > 0$ tal que si $d(p,q) < \delta$ entonces $f(q) \leq f(p)$.

Teorema 5.8: Si f está definida en $[a,b]$. Si tiene un máximo local en un punto $x \in (a,b)$ y existe $f'(x)$. Entonces $f'(x) = 0$.

Teorema 5.9 (TVM general): Si f, g son funciones reales contiuas en $[a,b]$ diferenciables en (a,b), existe un punto $x \in (a,b)$ con:

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x)$$

Teorema TVM: Si f es una función real continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), entonces existe un punto $x \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x)$$

Teorema 5.11: Si f es diferenciable en (a, b). Entonces:

a) Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es monótona creciente.

b) Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es constante.

c) Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es monótona decreciente.

5.3. Continuidad de las derivadas

Teorema 5.12: Sea f una función real diferenciable en $[a, b]$ y que $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Existe un punto $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = \lambda$

Corolario: Si f es diferenciable en $[a, b]$, f' no puede tener ninguna discontinuidad simple en $[a, b]$ (pero sí puede tener discontinuidades del segundo tipo).

5.4. Regla de L'Hopital

Teorema: Supongamos que f, g son reales y diferenciables en (a, b) y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, donde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Supongamos que :

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \text{ si } x \to a$$

Si $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$. O si $g(x) \to \infty$. Entonces:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \text{ cuando } x \to a$$

5.5. Teorema de Taylor

Teorema: Sea f una función real en $[a, b]$. Y $f^{(n)}(t)$ existe para todo $t \in (a, b)$. Sean α, β puntos distintos de $[a, b]$ y definimos:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t - \alpha)^k$$

Existe un punto x entre α y β tal que:

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta - \alpha)^n$$

5.6. Diferenciación de curvas

Sea $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^k$. Entonces, definimos su derivada en x $\mathbf{f}'(x)$ como el punto que cumple:

$$\lim_{t \to x} \left| \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(x)}{t - x} - \mathbf{f}'(x) \right| = 0$$

Resulta que $\mathbf{f}' = (f_1', ..., f_k')$

Teorema: Supongamos que $\mathbf{f}$ es una aplicación continua de $[a, b]$ en $\mathbb{R}^k$ y $\mathbf{f}$ es diferenciable en (a, b). Entonces existe un $x \in (a, b)$ tal que:

$$|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)| \leq (b - a)|\mathbf{f}'(x)|$$

6. Integral de Riemann-Stieltjes

Partición: Una partición de $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

Escribimos:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Definimos:

$$\begin{gathered} M_i = \sup f(x) \quad (x_i \leq x \leq x_i) \\ m_i = \inf f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i) \\ U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \\ L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \end{gathered}$$

Y también:

$$\begin{gathered} \overline{\int}_a^b dx = \inf U(P, f) \\ \underline{\int}_a^b f dx = \sup L(P, f) \end{gathered}$$

Integrable: Decimos que f es integrable si la integral inferior y la superior coinciden. Y a dicho valor lo denotamos por $\int_a^b f dx$

Si f es acotada, entonces $m \leq f(x) \leq M$ y por tanto:

$$m(b - a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b - a)$$

Y por tanto, la integral inferior y superior existe.

Def: Sea α una función monótona creciente en $[a, b]$. Correspondiendo a una partición P de $[a, b]$, escribimos:

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$$

Entonces, hacemos las demás definiciones de forma similar. Ahora las longitudes de los intervalos no son simplemente δx, sino que antes se aplica la función α.

$$U(P, f\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha$$
$$L(P, f\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha$$
$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf U(P, f, \alpha)$$
$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup L(P, f, \alpha)$$

Y si son iguales las integrales inferior y superior, el resultado es simplemente la integral y la escribimos como:

$$\int_a^b f d\alpha$$

Y en este caso decimos que f es integrable respecto a α y se escribe como $f \in R(\alpha)$.

La integral de Riemman es el caso particular cuando $\alpha = Id$

Def (Refinamiento) Decimos que P^* es un refinamiento de P si $P \subset P^*$.

Teorema 6.4: Si P^* es un refinamiento de P, entonces:

$$L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha)$$
$$U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$$

Teorema 6.5: $\displaystyle \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha$

Teorema 6.6 (equivalencia de integrabilidad) $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ sii para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P_ϵ tal que:

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon$$

Teorema(Suma de Riemann) Si $f \in R(\alpha)$ y si t_i es arbitrario en $[x_{i-1}, x_i]$, entonces:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha \right| < \epsilon$$

Teorema 6.8: Si f es continua en $[a, b]$, entonces $f \in R(\alpha)$ sobre $[a, b]$.

Teorema 6.9 Si f es monótona en $[a, b]$ y α es continua en $[a, b]$, $f \in R(\alpha)$.

Teorema 6.10 Si f es acotada sobre $[a, b]$ y tiene sólo un número finito de puntos de discontinuidad y α es continua en cada punto de discontinuidad. Entonces $f \in R(\alpha)$

Teorema 6.11: Supongamos que $f \in R(\alpha)$. $m \leq f \leq M$ y que ϕ es continua en $[m, M]$. Entonces $h(x) = \phi(f(x)) \in R(\alpha)$

6.1. Propiedades:

a) $\int_a^b (f_1+f_2)d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha$

- $\int_a^b cf d\alpha = c\int_a^b f d\alpha$
- $f_1(x) \leq f_2(x)$ en $[a,b]$:

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha$$

c) $\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$

d) Si $|f| \leq M$ en $[a,b]$ entonces $\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq M[\alpha(b)-\alpha(a)]$

- Si $f \in R(a\alpha_1), f \in R(\alpha_2)$ entonces $f \in R(\alpha_1+\alpha_2)$ y:

$$\int_a^b d(\alpha_1+\alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_2$$

Además si $c \in \mathbb{R}$, entonces $f \in R(c\alpha)$ y:

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c\int_a^b f d\alpha$$

- Si $f, g \in R(\alpha)$, entonces $fg \in R(\alpha)$
- Si $f \in R(\alpha)$, entonces $|f| \in R(\alpha)$ y $\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq \int_a^b |f| d\alpha$.

Def (Escalón unitario): Se define como:

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

Entonces $I(x-a)$ vale 1 arriba de a y vale 0 abajo.

Teorema 6.15: Si $a < s < b$ es acotada sobre $[a,b]$, f es continua en s y $\alpha(x) = I(x-s)$, entonces:

$$\int_a^b f d\alpha = f(s)$$

Teorema 6.16: Suponga que $c_n \geq 0$ y que $\sum c_n$ converge, $\{s_n\}$ es una sucesión de puntos distintos en (a,b) y :

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x-s_n)$$

Sea f continua sobre $[a,b]$. Entonces:

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n)$$

La propiedad se ve sencillamente porque solamente importa cuando α da un salto. Entonces, una integral de Riemann Stieljes se puede convertir en una suma.

Teorema 6.17: Si se supone que α crece monótonamente y α' es integrable (en el sentido normal de Riemann) sobre $[a, b]$. Si f es una función acotada, entonces:

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$$

Entonces, con la integral de Riemman-Stieljes se pueden escribir sumas e integrales a la vez.

Ejemplo: Digamos que queremos calcular el momento de inercia de un alambre en $[0, 1]$. Entonces, la integral es:

$$\int_0^1 x^2 dm$$

Donde $m(x)$ es una función que da la masa en el intervalo $[0, x]$.
Si la masa es continua, entonces se usa el teorema anterior y el hecho que $m'(x) = \rho(x)$ para tener:

$$\int_0^1 x^2 \rho(x)dx$$

Si está compuesta por varias masas m_i en puntos x_i, entonces la integral se convierte en :

$$\sum_i x_i^2 m_i$$

Cambio de Variable:
Si ϕ es una función continua estrictamente creciente que mapea un intervalo $[A, B]$ en uno $[a, b]$. Supóngase también que α es monótona creciente en $[a, b]$ y $f \in R(\alpha)$. Si se define β y g sobre $[A, B]$ como:

$$\beta(y) = \alpha(\phi(y)) \quad , \quad g(y) = f(\phi(y))$$

Entonces $g \in R(\beta)$ y:

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha$$

6.2. Derivadas e Integrales

Teorema 6.20: Sea $f \in R$ en $[a, b]$. Definimos:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Entonces, F es continua en $[a,b]$. Además, si f es continua en un punto x_0, F es diferenciable en x_0 y:

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Dem: Como f es integrable, es acotada. Por lo que $|f(t)| \leq M$. Si $a \leq x < y \leq b$, entonces:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq M(y-x)$$

Con lo que se prueba que F es Lipschitz y por tanto es u.c. Lo de la derivada es un poco más largo.

TFC 6.21: Si f es integrable en $[a,b]$ y existe una función diferenciable F sobre $[a,b]$ tal que $F' = f$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Teorema 6.22 (Integración por partes): Si F, G son diferenciables sobre $[a,b]$ y $F' = f, G' = g$. Entonces:

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx$$

6.3. Integración de Funciones Vectoriales:

Def: Sean $f_1, ..., f_k$ funciones reales en $[a,b]$ y $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_k)$ es una función de $[a,b]$ en $\mathbb{R}^k$. Si α es monótona creciente en $[a,b]$, decir que $\mathbf{f}$ es integrable significa que cada f_i lo es. Y se define:

$$\int_a^b \mathbf{f} d\alpha = \left(\int_a^b f_1 d\alpha, \cdots, \int_a^b f_k d\alpha \right)$$

Teorema 6.24: Si $\mathbf{f}, \mathbf{F} : [a,b] \to \mathbb{R}^k$. Si $\mathbf{f}$ es integrable en $[a,b]$ y $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$, entonces:

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

Longitud de Curva:
Una curva es una fnución continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^k$. Entonces, la longitud de la curva es:

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

7. Sucesiones y Series de Funciones

Def: Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones definidas en un conjunto E, y que la sucesión de números $\{f_n(x)\}$ converge para todo $x \in E$. Entonces, podemos definir una función f como:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Decimos que $\{f_n\}$ converge en E a f. O que f_n **converge puntutalmente en** E.

Suma: Similarmente, si $\sum f_n(x)$ converge para todo $x \in E$, definimos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

El problema es notar qué propiedades se conservan en el límite de una sucesión o de una suma. Por ejemplo, es el límite de una sucesión de funciones una función continua?
Para que f sea continua, se debe de cumplir que $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$
Entonces, necesitamos que:

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t)$$

Resulta que esto no siempre es válido, hay sucesiones de funciones continuas que no convergen a una función continua.

Ejemplo Sea:

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

Y consideramos $f(x) = \sum f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$
Entonces, como $f_n(0) = 0 \;\Rightarrow\; f(0) = 0$. Para $x \neq 0$, la suma es una serie geométrica que converge a $1 + x^2$. Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 1 + x^2 & , x \neq 0 \end{cases}$$

Por lo que la suma no es una función continua.

Ejemplo 2 Sea:

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos(m!\pi x))^{2n}$$

Cuando $m!x$ es entero, entonces $f_m(x) = 1$. Para otro valor de x, $f_m(x) = 0$. Definimos ahora:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$$

Para x irracional, $f_m(x) = 0$ para todo m por lo que $f(x) = 0$. Para x racional, vemos que para m grande se tiene que $m!x$ es entero, de modo que $f(x) = 1$. Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ejemplo 3 Sea: $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Y $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
Entonces, $f'(x) = 0$. Pero $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$. Por lo que las derivadas convergen hacia ∞ pero la derivada de la convergencia converge a 0.

Con todos estos ejemplos se ve que aunque todas las f sean continuas, el límite o la suma no necesariamente convergen a una función continua. Y la derivada no coincide con el límite de la derivada.

7.1. Convergencia Uniforme

Def: Decimos que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ con $n = 1, 2, 3, \cdots$, convergen **uniformemente** en E a una función f si para todo $\epsilon > 0$ hay un entero N tal que $n \geq N$ implica que:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Para todo $x \in E$.

Y decimos que la serie $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en E si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ dada por $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = s_n(x)$ converge unifromemente en E.

Es claro que la convergencia uniforme implica convergencia puntual en cada uno de los puntos de E. Y además, para cada $\epsilon > 0$, la N que asegura la convergencia es la misma en todo E.

Teorema 7.8 (Cauchy): La sucesión de funciones $\{f_n\}$, definida en E, converge uniformemente en E sii para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que si $m, n \geq N$ implica que para cada $x \in E$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

Teorema: Supongamos $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para $x \in E$.
Y definimos:

$$M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$$

Entonces $f_n \to f$ uniformemente en E sii $M_n \to 0$ cuando $n \to \infty$

Teorema de Weirstrass: Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones definidas en E y que:

$$|f_n(x)| \leq M_n \text{ en } E$$

Si $\sum M_n$ converge entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en E.

7.2. Convergencia Uniforme y Continuidad

Teorema 7.11: Supongamos que f_n converge unifromente a f en un conjunto E de un espacio métrico. Sea x un punto de acumulación de E y supongamos que:

$$\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n$$

$\{A_n\}$ convergerá y $\lim_{t\to x} f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$
Lo que implica que la función f a la que converge f_n también es continua.

Dem: Sea $\epsilon > 0$ dado. Por la convergencia uniforma de $\{f_n\}$, existe N tal que $n, m \geq N$ y $t \in E$ implica que $|f_m(t) - f_n(t)| \leq \epsilon$.
Si hacemos $t \to x$, tenemos que $|A_n - A_m| \leq \epsilon$.
Por lo que A_n es una sucesión de Cauchy y converge a un A.
Entonces $|f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|$
Cada uno de estos términos se puede acotar. El primero se acota para todo t por CU, el tercer por la convergencia de A_n. Entonces $|f(t) - A| \leq \epsilon$.

Teorema 7.13: Si K es compacto y:

a) $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en K

b) f_n converge puntutalmente a una función f sobre K

c) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in K$

Entonces f_n converge uniformemente a f en K.

Def: $C(X)$ representará el conjunto de todas las funciones valuadas en los complejos con dominio X, continuas y acotadas.
A cada $f \in C(X)$ le asociamos su **norma suprema:**

$$||f|| = \sum_{x\in X} |f(x)|$$

Se puede ver que cumple xon los axiomas de métrica y convierte a $C(X)$ en un espacio métrico

Con ello, puede anunciarse el **Teorema:** Una sucesión $\{f\}_n$ converge hacia f en la métrica de $C(X)$ sii $f_n \to f$ uniformemente sober X.

Teorema 7.15: Con la métrica anterior, $C(X)$ es un espacio métrico completo.

7.3. Convergencia uniforme e integración:

Teorema 7.16: Sea α monótona creciente en $[a, b]$. Supóngase que $R(\alpha)$. Y que $f_n \to f$ uniformemente sobre $[a, b]$. Entonces $f \in R(\alpha)$ y:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

Corolario: Si $f_n \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y si:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

7.4. Convergencia uniforme y diferenciación

Resulta que para asegurar que se puede derivar término a término, se requiere de una hipótesis un poco más fuerte.

Teorema 7.17: Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones diferenciables en $[a, b]$ de modo que $\{f_n(x_0)\}$ converge para algún punto $x_0 \in [a, b]$. Si $\{f_n'\}$ converge uniformemente en $[a, b]$, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$ a una función f y:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

7.5. Familias Equicontinuas de Funciones:

Def 7.19: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto E.
Decimos que $\{f_n\}$ es **acotada puntualmente en E** si la sucesión $\{f_n(x)\}$ es acotada para cada $x \in E$. Esto es, si existe una función ϕ finita tal que:

$$|f_n(x)| < \phi(x)$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $x \in E$.
Decimos que $\{f_n\}$ es **uniformemente acotada** en E si existe un número M tal que:

$$|f_n(x)| < M$$

Para todo $x \in E, n = 1, 2, 3, \cdots$

Equicontinua: Se dice que una familia F de funciones f definidas en un conjunto E en un espacio métrico X es equicontinua en E, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Para toda $f \in F$.

Es claro que todo miembro de la familia equicontinua es uniformemente continua. Pero tienen que ser uniformememnte continuas 'a la vez' para tener equicontinuidad.

Teorema de Stone-Weierstrass
Si f es una función compleja continua en $[a, b]$, existe una sucesión de polinomios P_n tal que:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

Con la convergencia uniforme.

8. Funciones Especiales

8.1. Series de Potencias

Función Analítica:
Es una función que se puede escribir en la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Aunque nos limitaremos a funciones reales y centradas en 0.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Si esta función converge en $(-R, R)$, decimos que f está desarrollada en serie de potencias en torno a $x = 0$. Si la suma centrada en a converge para $|x-a| < R$, decimos que f está desarrollada en series de potencias en torno a $x = a$.

Teorema 8.1: Suponemos que la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (3)$$

Converge para $|x| < R$ y definimos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ para } |x| < R.$$

Entonces (3) converge uniformemente en $[-R+\epsilon, R-\epsilon]$ para todo ϵ. La función f es continua y diferenciable en $(-R, R)$ y:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad |x| < R$$

Corolario: Con las hipótesis del teorema, podemos calcular las derivadas de todos los órdenes:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n x^{n-k}$$

En particular, $f^{(k)}(0) = k! c_k$

Teorema 8.2 de Abel:
Supongamos que $\sum c_n$ converge. Hagamos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

Será:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Teorema 8.3 (Cambio de orden de suma): Dada una doble sucesión $\{a_{ij}\}$, $i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots,$. Suponemos que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i$$

y que $\sum b_i$ converge. Entonces:

$$\textstyle\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}$$

Teorema 8.4: Supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

convergiendo la serie en $|x| < R$. Si $-R < a < R$, f puede ser desarrollada en serie de potencias alrededor del punto $x = a$, que converge en $|x - a| < R - |a|$, y:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (|x-a| < R - |a|)$$

Teorema 8.5: Supongamos que las series $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ convergen en $(-R, R)$. Sea E el conjunto de todos los $x \in I$, tales que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Si E tiene un punto límite en S, entonces $a_n = b_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, se cumple la igualdad de sumas de arriba para todo $x \in S$.

8.2. Función Exponencial y Logarítmica

Definimos:

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Se puede ver que esta serie converge para todo complejo z y usando el producto de series, se puede probar que:

$$E(z + w) = E(z)E(w)$$

Y una consecuencia es que $E(0) = 1$
Lo que demuestra que $E(z) \neq 0 \ \ \forall z$
También se demuestra que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(z+h) - E(z)}{h} = E(z) \lim_{h \to 0} \frac{E(h) - 1}{h} = E(z)$$

Se puede probar también la monotonía y continuidad. Por lo que al restringirla sobre los reales, definimos que $E(x) = e^x$.

Teorema 8.6: Supongamos e^x definida en $\mathbb{R}$. Entonces:

a) e^x es continua y diferenciable en toro $\mathbb{R}$

b) $(e^x)' = e^x$

c) e^x es estrictamente creciente y es mayor que 0.

d) $e^{x+y} = e^x e^y$

e) $e^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y tiende a 0 cuando $x \to -\infty$

f) $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ para todo n.

Como es estrictamente creciente y diferenciable, entonces E tiene una función inveras L estrictamente creciente y diferenciable y cuyo dominio es $E(\mathbb{R})$. Definido por:

$$\begin{aligned} E(L(y)) &= y \qquad y > 0 \\ L(E(x)) &= x \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Al derivar tenemos que $L'(E(x))E(x) = 1$. Haciendo $y = E(x)$ nos da:

$$L'(y) = \frac{1}{y} \qquad y > 0$$

Tomando $L(1) = 0$ (para que sea la inversa de E), tenemos que:

$$L(y) = \int_1^y \frac{dx}{x}$$

Luego se puede probar que:

$$L(uv) = L(E(x)E(Y)) = L(E(x+y)) = x + y = L(u) + L(v)$$

Además, esto nos permite escribir cualquier potencia:

$$x^a = E(aL(x)) = e^{a \log(x)}$$

8.3. Funciones Trigonométricas

Definimos:

$$C(x) = \frac{1}{2}[E(ix) + E(-ix)] \quad , \quad S(x) = \frac{1}{2i}[E(ix) - E(-ix)]$$

Como $E(\bar{z}) = E\bar{(}z)$, entonces C, S son reales para x real y:

$$E(ix) = C(x) + iS(x)$$

Por lo que son la parte real e imaginaria de $E(ix)$.
Podemos deducir que $C(0) = 1, S(0) = 0$ y que:

$$S' = C \quad , \quad C' = -S$$

Luego se pueden probar todas las propiedades típicas de $\cos, \sin$

8.4. Completitud del campo complejo

Teorema 8.8: Supongamos que $a_0, \cdots, a_n$ son complejos :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

Entonces $P(z) = 0$ para algún complejo z

8.5. Sere de Fourier:

Def 8.9: Un **polinomio trigonométrico** es una suma de la forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Que también puede escribirse como:

$$f(x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$$

Es claro que todo polinomio trigonométrico es periódico de periodo 2π. Si multiplicamos por e^{-mx} e integramos, nos queda:

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$$

Para $|m| \leq N$.

8.5.1. Funciones Ortonormales

Sistema Ortogonal de Funciones: Sea $\{\phi_n\}$ una sucesión de funciones complejas en $[a, b]$ tales que:

$$\int_a^b \phi_n(x) \bar{\phi}_m(x) dx = \delta_{nm} \qquad n \neq m$$

En este caso, definimos el **n-ésimo** coeficiente de Fourier como:

$$c_n = \int_a^b f(t) \overline{\phi_n(t)} dt$$

Escribiremos:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

y llamaremos a esta la serie de Fourier de f (en ϕ_n).

Teorema: Sea $\{\phi_n\}$ ortonormal en $[a, b]$. Sea:

$$s_n(x) = \sum_{m=1}^{n} c_m \phi_m(x)$$

La n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f y supongamos que:

$$t_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \gamma_m \phi_m(x)$$

Será:

$$\int_a^b |f - s_n|^2 dx \leq \int_a^b |f - t_n|^2 dx$$

y la igualdad sólo se cumple si $\gamma_m = c_m$. i.e, la serie de Fourier es la mejor aproximación a d.

Teorema 8.12: (Desigualdad de Bessel): Si $\{\phi_n\}$ es ortonormal en $[a, b]$ y:

$$f(x) \sim \sum c_n \phi_n(x)$$

Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

En particulae, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

8.5.2. Serie Trigonométrica:

De ahora en adelante se tratará sólo el sistema trigonométrico. Funciones f de peirodo 2π e integrables en $[-\pi, \pi]$.
La N-ésima suma de Fourier de f es:

$$s_N(x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$$

Teorema: Si para algún x hay constante $\delta > 0, M < \infty$ tales que:

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|$$

Para todo $t \in (-\delta, \delta)$, entonces:

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f) = f(x)$$

9. Funciones de Varias Variables

9.1. Transformaciones Lineales

Cosas que ya sé.

Definimos por $L(X,Y)$ como el conjunto de todas las transformaciones lineales del espacio vectorial X en Y.
Si $A_1, A_2 \in L(X,Y)$, definimos $c_1A_1 + c_2A_2$ como $(c_1A_1 + c_2A_2)(x) = c_1A_1(x) + c_2A_2(x)$

Norma: Si $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, definimos la norma $||A||$ de A como:

$$\sup\{|A(x)| \ \ , x \in \mathbb{R}^n \ , |x| \leq 1\}$$

Se tiene que:

$$|Ax| \leq ||A|| |x| \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

Además si λ es tal que $|A(x)| \leq \lambda |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $||A|| \leq \lambda$.

Teorema:

a) Si $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, entonces $||A|| < \infty$ y A es uniformemente continua.

b) Si $A, B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y c es un escalar, entonces:

$$||A + B|| \leq ||A|| + ||B|| \qquad , \qquad ||cA|| = |c| ||A||$$

c) Si $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$, entonces:

$$||BA|| \leq ||B|| ||A||$$

El segundo punto nos muestra que $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un espacio métrico.

Teorema 9.8: Sea Ω el conjunto de todos los operadores lineales invertibles en $\mathbb{R}^n$.

a) Si $A \in \Omega$, $B \in L(\mathbb{R}^n)$ y:

$$||B - A|| ||A^{-1}|| < 1$$

Entonces $B \in \Omega$

b) Ω es un conjunto abierto en $L(\mathbb{R}^n)$, y la aplicación $A \to A^{-1}$ es continua en Ω. (y es una aplicación 1-1)

9.2. Diferenciación

Def 9.11: Supongamos que E es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, que $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ y que $\mathbf{x} \in E$. Si existe una transformación lineal A de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0$$

Decimos que $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{x}$ y escribimos:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A$$

Si f es diferenciable en todo $x \in E$, decimos que es diferenciable en E.

Teorema 9.12: Supongamos que E y f son como definimos. $x \in E$. Entonces la derivada $f'(x) = A$ es única.

Obs:
La definición de derivada puede reescribirse como:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h)$$

Donde $r(h)$ es un residuo y cumple $\lim_{h \to 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0$.
Por lo que $f(x+h) - f(x)$ es aproximadamente como aplicar el operador lineal $f'(x)$ a h.

f' es una función que a todo $x \in E$ le asigna $f'(x)$ que es una función lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Si f es una función lineal, su derivada en un punto $f'(x)$ es ella misma.

Si f es diferenciable en x, entonces f es continua.

Teorema 9.15 (Regla de la cadena): Supongamos que E es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. f mapea E en $\mathbb{R}^m$ y que f es diferenciable en $x_0 \in R$. Digamos que g mapea un conjunto abierto que contiene a $f(E)$ en $\mathbb{R}^k$ y g es diferenciable en $f(x_0)$.
Definimos el mapeo $F : E \to \mathbb{R}^k$ definido por:

$$F(x) = g(f(x))$$

Entonces, F es diferenciable en x_0 y:

$$F'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Donde el lado derecho es la composición de las dos transformaciones lineales.

Derivadas Parciales: Consideramos una función $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Sean $\{e_1, \cdots, e_n\}$ y $\{u_1, \cdots, u_m\}$ las bases estándard de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$. f se divide en componentes que son funciones reales $f_1, \cdots, f_m$ definidas como:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)u_i$$

O bien, $f_i(x) = f(x) \cdots u_i$.
Definimos las derivadas parciales como:

$$(D_j f_i)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t}$$

Siempre y cuando el límite exista.
$D_j f_i$ es la derivada de f_i con respecto a x_j conservando las otras variables fijas y se suele denotar como $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$

Solamente la existencia de todas las derivadas parciales no determinan la diferenciabilidad de f. Sin embargo, el Jacobiano se construye como sigue:

Teorema 9.17: Supóngase que f mapea un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$ y que es diferenciable en $x \in E$. Entonces las derivadas parciales existen $D_j f_i(x)$ y:

$$f'(x)e_j = \sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x)u_i$$

O bien, tenemos que:

$$[\mathbf{f}'(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} (D_1 f_1)(\mathbf{x}) & \cdots & (D_n f_1)(\mathbf{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (D_1 f_m)(\mathbf{x}) & \cdots & (D_n f_m)(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Gradiente: Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos el gradiente como:

$$\nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \cdots, \partial_n f)$$

Teorema 9.21: Supóngase que $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Entonces f es diferenciable si existen las derivadas parciales $D_j f_i$ y son continuas en E.

9.3. Principio de la Contracción

Definición: Sea X un espacio métrico con métrica d. Si ϕ mapea X en X y hay un número $c < 1$ tal que:

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq cd(x, y)$$

para todo $x, y \in X$. Entonces se dice que ϕ es una **contracción** de X.

Teorema 9.23: Si X es un espacio métrico completo y si ϕ es una contracción de X en X, existe un único $x \in X$ tal que:

$$\phi(x) = x$$

Además, el punto fijo se puede encontrar empezando desde un $x_0 \in X$ y definiendo:

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

Entonces $x_n \to x$

- Definimos $x_{n+1} = \phi(x_n)$. Entonces, tenemos que $d(x_{n+1}, x_n) = d(\phi(x_n), \phi(x_{n-1})) \leq cd(x_n, x_{n-1})$
  Luego, se puede usar por inducción que $d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n d(x_1, x_0)$.
  Si n, m se deduce que:
  $$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} d(x_i, x_{i-1}) \\ &\leq (c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{m-1}) d(x_1, x_0) \\ &= [(1-c)^{-1} d(x_1, x_0)] c^n \end{aligned}$$

9.4. Teorema de la Función Inversa

Teorema 9.2 : Supongamos que f es un mapeo C^1 de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, que $f'(a)$ es invertible para algún $a \in E$ y que $b = f(a)$. Entonces:

a) Existen conjuntos abiertos U, V en $\mathbb{R}^n$ tales que $a \in U, b \in V$. Y f es uno a uno en U y $f(U) = V$

b) Si g es la inversa de f (que existe en U por a)) definida en V por:

$$g(f(x)) = x \qquad x \in U$$

Entonces g es clase C^1

O bien se puede interpretar como que si $y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$ son un sistema de n ecuaciones que pueden resolverse para poner las x_i en términos de las y.

9.5. Función Implícita

Notación: Si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $y = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, se escribirá $(x, y) = (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$

Cada transformación $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ puede separase en dos transformaciones lineales A_x, A_y que toman los primeros y últimos coordenadas de (x, y).

Teorema: Si $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^m)$ y si A_x es invertible, entonces a cada $k \in \mathbb{R}^m$ le corresponde un $h \in \mathbb{R}^n$ único tal que $A(h, k) = 0$.
Este k puede calcularse como:

$$h = -(A_x)^{-1} A_y k$$

Dem: $A(h,k) = 0$ sii $A_x(h), A_y(k) = 0$. Por lo que se puede despejar h cuando A es invertible.

Teorema 9.28: Sea f un mapeo clase C^1 de $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ en $\mathbb{R}^m$ tal que $f(a,b) = 0$ para algún punto $(a,b) \in E$.
Se ponde $A = f'(a,b)$ y se supone que A_x es invertible.
Entonces existen abiertos $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $W \subset \mathbb{R}^m$ con $(a,b) \in U$ y $b \in W$ tal que
A cada $y \in W$ le corresponde un x único tal que:

$$(x,y) \in U \quad , \quad f(x,y) = 0$$

Si esta x se define como $g(y)$ entonces g es un mapeo clase C^1 de W en $\mathbb{R}^n$, $g(b) = a$.

$$f(g(y), y) = 0$$

y

$$g'(b) = -(A_x)^{-1} A_y$$

Versión de dos variables
Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función C^1. Sea x_0, y_0 un punto en la curva definida por $F(x,y) = 0$.
Si $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0.$
Entonces existe una función $\phi(x)$ tal que la curva cerca a (x_0, y_0) se puede escribir como $F(x, \phi(x)) = 0$

Además, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

Ejemplo:

9.29 Ejemplo Tomando $n = 2$, $m = 3$, y considerando el mapeo $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ de R^5 en R^2 dado por

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3$$
$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3 .$$

Si $\mathbf{a} = (0, 1)$ y $\mathbf{b} = (3, 2, 7)$, entonces $\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$.
Con respecto a la base estándar, la matriz de la transformación $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia

$$[A_x] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A_y] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se ve que los vectores columna de $[A_x]$ son independientes. De aquí que A_x es invertible y el teorema de la función implícita asegura la existencia de un mapeo- $\mathscr{C}'$ **g**, definido en una vecindad de (3, 2, 7), tal que $\mathbf{g}(3, 2, 7) = (0, 1)$ y $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

Puede usarse (58) para calcular $\mathbf{g}'(3, 2, 7)$: Ya que

$$[(A_x)^{-1}] = [A_x]^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

(58) nos da

$$[\mathbf{g}'(3, 2, 7)] = -\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

En términos de derivadas parciales, la conclusión es que

$$\begin{array}{lll} D_1 g_1 = \frac{1}{4} & D_2 g_1 = \frac{1}{5} & D_3 g_1 = -\frac{3}{20} \\ D_1 g_2 = -\frac{1}{2} & D_2 g_2 = \frac{6}{5} & D_3 g_2 = \frac{1}{10} \end{array}$$

en el punto (3, 2, 7).

10. Integración de Formas Diferenciales

Definimos una forma de integrar un poco más complicada de lo normal pero muy general.

10.1. Integración

k-celda: Es un subconjunto de $\mathbb{R}^k$ que consta de los:

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_k)$$

Tales que:

$$a_i \leq x_i \leq b_i$$

La solemos denotar como I^k.

Sea f_k una función real continua en I^k. Definimos f_{k-1} en I^{k-1} como:

$$f_{k-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}) = \int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k) dx_k$$

Esta integral baja en una dimensión a la función f.
La continuidad uniforme de f_k (porque es continua en un compacto) demustra que f_{k-1} es continua en I^{k-1} (y por tanto u.c.).
Por tanto, podemos repetir este proceso y obrenter funciones f_j continuas en I^j, tales que f_{j-1} es la integral de f_j respecto a x_j en $[a_j, b_j]$.
Después de k pasos llegamos a un número f_0, que llamamos la **integral de f sobre I^k**
Lo escribiremos de la forma:

$$\int_{I^k} f(\vec{x}) d\vec{x} \text{ o como } \int_{I^k} f$$

Se puede demostrar que el resultado no depende del orden de las integraciones.

Def: El **soporte** de una función f en $\mathbb{R}^k$ es la cerradura del conjunto de todos los $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ tales que $f(\vec{x}) \neq 0$.

Integral de una función con soporte compacto: Si f es una función continua con soporte compacto y I^k es una k-celda que contiene al soporte de f, definimos:

$$\int_{\mathbb{R}^k} f = \int_{I^k} f$$

10.2. Mapeos Primitivos

Def: Si G mapea un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, y si hay un entero m y una función real g con dominio E tal que:

$$G(x) = \sum_{i \neq m} x_i \mathbf{e}_i + g(\mathbf{x})\mathbf{e}_m$$

Entonces G se denomina **primitivo**. Es decir, el mapeo primitivo cambia a lo más una sola coordenada.
Puede escribirse también como:

$$G(x) = x + [g(x) - x_m]\mathbf{e}_m$$

Como g es diferenciable en un punto $a \in E$, entonces G también lo es y $G'(a)$ sólo tiene elementos en el m-ésimo rengón. Por lo que su jacobiano es:

$$J_g(a) = (D_m g)(a)$$

Flip: Un operador lineal B sobre $\mathbb{R}^n$ que intercambia dos miembros de la base estándar. Por ejemplo un flip en $\mathbb{R}^4$ puede ser:

$$B(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_4 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_2 = x_1\vec{e}_1 + x_4\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_3\vec{e}_4$$

Teorema 10.7 Supóngase que F es un mapeo C' de un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, $0 \in E$, $F(0) = 0$ y $F'(0)$ es invertible.
Entonces hay una vecindad de 0 en $\mathbb{R}^n$ en la cual es válida una representación de la forma:

$$F(x) = B_1 \cdots B_{n-1} G_n \circ \cdots \circ G_1(x)$$

Donde cada G_i es un mapeo-C' primitivo en alguna vecindad de 0, $G_i(0) = 0$,$G_i'(0)$ es invertible y cada B_i es un flip o un operador identidad.

10.3. Particiones de la Unidad

Teorema: Supóngase que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $\{V_\alpha\}$ es una cubierta abierta de K. Entonces existen funciones $\phi_1, \cdots, \phi_s \in C(\mathbb{R}^n)$ tales que:

a) $0 \leq \phi_i \leq 1$

b) Cada ϕ_i tiene su soporte en algún V_α

c) $\phi_1(x) + \cdots + \phi_s(x) = 1$ para cada $x \in K$

$\{\phi_i\}$ se llama una **partición de la unidad** subordinada a la cubierta $\{V_\alpha\}$

Corolario: Si $f \in C(\mathbb{R}^n)$ y el soporte de f está en K, entonces:

$$f = \sum_{i=1}^{s} \phi_i f$$

Cada ϕ_i tiene su soporte en algún V_α.
Es decir, f se puede ver como una suma de funciones ϕf, cada una con soportes 'chiquitos'.

10.4. Cambio de Variable

Teorema 10.9: Sea T un mapeo C' 1-1 de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^k$, tal que $J_T(x) \neq 0$ para todo $x \in E$. Si f es una función continua en $\mathbb{R}^k$, cuyo soporte es compacto y está en $T(E)$, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(y) fy = \int_{\mathbb{R}^k} f(T(x)) |J_T(x)| dx$$

10.5. Formas Diferenciales

Def 10.10 k-superficie en E: Supongamos que E es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Una k-superficie en E es un mapeo C' ϕ de un conjunto compacto $D \subset \mathbb{R}^k$ en E

Así como una superficie o una curva son casos especiales. A D se le llama dominio de parámetros de ϕ. Representamos los puntos de D por $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_k)$.
Nos limitamos al caso en que D es una k-celda.

Def 10.11 Forma diferencial: Sea E un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una forma diferencial de orden $k \geq 1$ en E es una función ω, representada por la suma:

$$\omega = \sum a_{i_1 \cdots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

Los índices $i_1, \cdots, i_k$ varían independientemente de 1 a n. La forma diferencial asigna a cada $k-$superficie ϕ en E el número $\omega(\phi) = \displaystyle\int_\phi \omega$, de acuerdo con la regla:

$$\int_\phi \omega = \int_D \sum a_{i_1, \cdots, i_k}(\phi(\mathbf{u})) \frac{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \cdots, u_k)} d\mathbf{u}$$

Las funciones $a_{i_1 \cdots i_k}$ se suponen reales y continuas en E. Si $\phi_1, \cdots, \phi_n$ son las componentes de la superficie ϕ, el jacobiano en la definición pasada es el determinado por la aplicación:

$$(u_1, \cdots, u_k) \to (\phi_{i_1}(\mathbf{u}), \cdots, \phi_{i_k}(\mathbf{u}))$$

Observe que la def de $\int_\phi \omega$ es una integral sobre D.
Una 0 forma es simplemente una función continua en E

(*a*) Sea γ una superficie-1 (una curva de clase $\mathscr{C}'$) en R^3, con dominio de parámetros [0, 1].

Si se escribe (x,y,z) en lugar de (x_1,x_2,x_3), y se pone

$$\omega = x\,dy + y\,dx.$$

Entonces

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 [\gamma_1(t)\gamma_2'(t) + \gamma_2(t)\gamma_1'(t)]\,dt = \gamma_1(1)\gamma_2(1) - \gamma_1(0)\gamma_2(0).$$

Nótese que en este ejemplo $\int_\gamma \omega$ depende solo del punto inicial $\gamma(0)$ y del punto final $\gamma(1)$ de γ. En particular, para cada curva cerrada γ se tiene $\int_\gamma \omega = 0$. (Como se verá después, esto es válido para cada 1-forma ω que sea *exacta*.)

A las integrales de las 1-formas se les llama comúnmente *integrales de línea*.

(*c*) Sea D la 3-celda definida por

$$0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Si se define $\Phi(r,\theta,\varphi) = (x,y,z)$, en donde

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned}$$

Entonces

$$J_\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2 \operatorname{sen}\theta.$$

De aquí que

$$\int_\Phi dx \wedge dy \wedge dz = \int_D J_\Phi = \frac{4\pi}{3}.$$

O sea, las k-formas son cosas que se integran. Son un tipo de generalización de las integrales de línea y superficie.

Ejemplo 3: Consideramos la 2-superficie dada por:

$$\phi(s,t) = (\sin s \cos t, \sin s \sin t, \cos s)$$

Que es una esfera de radio 1, con $D = [0,\pi] \times [0, 2\pi]$ Y consideramos la 2-forma dada por:

$$\omega = x^2 dx \wedge dy + yz dy \wedge dz + x \sin z dx \wedge dz$$

(omitimos los otros términos de la 2-forma, porque estos son los únicos que importan, como veremos luego).
Entonces, para integrar eso, necesitamos:

$$\int_\phi \omega = \int_D \sum a_{i_1 \cdots i_k}(\phi(u)) \frac{\partial(x_1, \cdots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \cdots, u_k)} du$$
$$= \int_D x^2 \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} + yz \frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)} + x \sin z \frac{\partial(x,z)}{\partial(t,s)}$$
$$= x^2 \left| \begin{pmatrix} \cos s \cos t & \cos s \sin t \\ -\sin s \sin t & \sin s \cos t \end{pmatrix} \right| + yz \left| \begin{pmatrix} \cos s \sin t & -\sin s \\ \sin s \cos t & 0 \end{pmatrix} \right| + x \sin z \left| \begin{pmatrix} \cos s \cos t & -\sin s \\ -\sin s \sin t & 0 \end{pmatrix} \right| dsdt$$

10.5.1. Propiedades Elementales

Sean $\omega, \omega_1, \omega_2$ k-formas en E. Se dice que $\omega_1 = \omega_2$ sii $\omega_1(\phi) = \omega_2(\phi)$ para cada k-superficie ϕ en E. En particular, $\omega = 0$ significa que $\omega(\phi) = 0$ para cada k-superficie ϕ.
Si c es un real, $c\omega$ es la k-forma definida por:

$$\int_\phi c\omega = c \int_\phi \omega$$

Y $\omega = \omega_1 + \omega_2$ significa que:

$$\int_{\phi} \omega = \int_{\phi} \omega_1 + \int_{\phi} \omega_2$$

Considérese una k-forma:

$$\omega = a(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

y sea $\bar{\omega}$ una k-forma que se obtiene al intercambiar un par de subíndices. Entonces, de la def y de que el jacobiano cambia de signo se ve que:

$$\bar{\omega} = -\omega$$

Sea llama **propiedad anticonmutativa**

Como consecuencia particular, se tiene que si una forma ω tiene dos índices repetidos, entonces vale 0.
Entonces, en la def. de ω, se pueden omitir los sumandos que tienen índices repetidos.
Se deduce que 0 es la única $k-$ forma en cualquier subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

k-formas básicas: Si $i_1, \cdots, i_k$ son enteros tales que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, y si I es la k-ada ordenada $\{i_1, \cdots, i_k\}$ entonces I se llama un k-índice creciente y se usa la notación abreviada:

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

Estas son las k-formas básicas.
Hay exactamente $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ k-formas básicas de $\mathbb{R}^n$.
Y cualquier k-forma puede representarse en términos de k-formas básicas.
Si tenemos una k-forma cualquiera, podemos usar la antisimetría y el hecho de que si dos índices se repiten, la k-forma vale 0, para encontrar la representación de ω en forma estándar.
De hecho, si ω es una k-forma, entonces:

$$\omega = \sum_I b_I(x) dx_I$$

Donde la suma se hace sobre todos los k-índices crecientes I

Teorema: Supóngase que:

$$\omega = \sum_I b_I(x) dx_I$$

es la representación estándar de una k-forma ω en un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$. Si $\omega = 0$ en E, entonces $b_I(x) = 0$ para cada k-índice creciente I y cada $x \in E$.
Notése que esto es falso si la suma ω se hace sobre todas las $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$

Productos de k-formas básicas: Supóngase que:

$$I = \{i_1, \cdots, i_p\} \quad , \quad J = \{j_1, \cdots, j_q\}$$

Donde los índices son crecientes $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n$.
El producto de las formas básicas dx_I y dx_J es una (p+q)-forma en $\mathbb{R}^n$, definida como:

$$dx_I \wedge dx_J = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$$

Si I y J tienen algún elemento en común, entonces el resultado será cero.

Multiplicación: Supongamos que ω, λ son p-,q- formas, respectivamente, en algún conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$, con representaciones estándar

$$\omega = \sum_I b_I(x) dx_I \quad , \quad \lambda = \sum_J c_J(x) dx_J$$

En donde I, J varían sobre los p-índices y q-índices crecientes.
Su producto es:

$$\omega \wedge \lambda = \sum_{I,J} b_I(x) c_J(x) dx_I \wedge dx_J$$

Donde I, J varían independientemente sobre sus valores.

Propiedades:

- $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \lambda = (\omega_1 \wedge \lambda) + (\omega_2 \wedge \lambda)$
- $\omega \wedge (\lambda_1 + \lambda_2) = (\omega \wedge \lambda_1) + (\omega \wedge \lambda_2)$
- $(\omega \wedge \lambda) \wedge \sigma = \omega \wedge (\lambda \wedge \sigma)$

Diferenciación: Se define un operador d que toma una k-forma ω y luego da una (k+1)-forma.
Para una 0-forma de clase C' en E (que es una función f),se define:

$$df = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x) dx_i$$

Si $\omega = \sum b_I(x) dx_I$ es una k-forma ω y cada $b_I \in C'(E)$, entonces se define:

$$d\omega = \sum_I (db_I) \wedge dx_I$$

Donde db_I se define como la de una 0-forma, porque lo es.

Teorema:

a) Si ω, λ son k,m-formas de clase C^1, entonces:

$$d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda$$

b) Si ω es de clase C^n en E, entonces $d^2\omega = 0$

Nótese que la ley asociativa (58) se usó con libertad.

Para demostrar la parte (b) considérese primero una 0-forma $f \in \mathscr{C}''$:

$$d^2 f = d\left(\sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\mathbf{x})\, dx_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} d(D_j f) \wedge dx_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij} f)(\mathbf{x})\, dx_i \wedge dx_j .$$

Como $D_{ij}f = D_{ji}f$ (por el Teorema 9.41) y $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, puede verse que $d^2 f = 0$.

Si como en (64) $\omega = f\, dx_I$, entonces $d\omega = (df) \wedge dx_I$. Y por (60), $d(dx_I) = 0$.

Por lo anterior (63) muestra que

$$d^2\omega = (d^2 f) \wedge dx_I = 0.$$

10.6. Cadenas y Simplex

Simplex afines: Un mapeo f que lleva un espacio vectorial X en un espacio vectorial Y se dice que es afín si $f - f(0)$ es lineal. Es decir:

$$f(x) = f(0) + Ax$$

Simplex estándar: El conjunto Q^k de todos los $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$ de la forma:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{e}_i$$

tales que $\alpha_i \geq 0 \quad , \sum \alpha_i \leq 1$

⋮

⋮

⋮

10.7. Teorema de Stokes:

Si Φ es una k-cadena de clase C'' en un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^m$ y si ω es una (k-1) forma de clase C' en V, entonces:

$$\int_{\Phi} d\omega = \int_{\partial\Phi} \omega$$

10.8. Formas cerradas y exactas

Def: Sea ω una k-forma en un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$. Si hay una $(k-1)-$forma λ en E tal que $\omega = d\lambda$, se dice que ω es **exacta** en E

Teorema de Poincare: Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto convexo, si $k \geq 1$ y si ω es una k-forma de clase C' en E y $d\omega = 0$, entonces hay una (k-1) forma λ en E tal que $\omega = d\lambda$.

11. Espacios métricos

Def: Sea X un conjunto. Una métrica en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

M1 $d(x,y) = 0 \quad$ sii $x = y$

M2 $d(x,y) = d(y,x) \quad$ para cualesquiera $x, y \in X$

M3 $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Proposición: De las propiedades anteriores, se concluye que $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$.

Se pueden definir muchas métricas muy típicas.

11.1. Espacios Normados

Dado un V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Definimos una **norma** en V cono una función $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ con las propiedades:

N1 $||v|| = 0$ si y sólo si $v = 0$

N2 $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$ para cualesquiera $v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

N3 $||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \quad \forall v, w \in V$

Un **espacio normado** es un espacio vectorial V provisto con una norma $||\cdot||$.

11.1.1. Métrica Inducida

Dado un espacio normado $(V, ||\cdot||)$, se le puede dotar de una métrica inducida como:

$$d(v,w) := ||v - w||$$

Demostrar que efectivamente es una métrica es fácil.

11.1.2. Ejemplo (norma p de $\mathbb{R}^n$)

: Dado $x \in \mathbb{R}^n$, definimos para $p \in [1, \infty)$:

$$||x||_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$
$$||x||_\infty := \text{máx}_{i \leq k \leq n} |x_k|$$

Y con estas normas se pueden inducir métricas como antes.
Demostrar que una p-norma cumple las primeras dos propiedades de norma es fácil. Sin embargo, la tercera tiene más dificultad. Para la tercera hay que usar el: **Lema (Desigualdad de Young):** Sea $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para cualquier par de reales positivos a, b, se cumple que:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Dem: Partimos de que la función exponencial es convexa, lo que quiere decir que para cualquiera $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ y $t \in [0,1]$ se cumple que $(1-t)e^{x_0} + te^{x_1} \geq e^{[(1-t)x_0 + tx_1]}$.
Tomando $x_0 = \log a^p, x_1 = \log b^q$ y $t = \dfrac{1}{q}$ obtenemos :

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq e^{\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q)} = ab$$

Desigualdad de Holder en $\mathbb{R}^n$: Con la desigualdad de Young se puede demostrar que si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

O bien, $||xy||_1 \leq ||x||_p ||y||_q$

Usamos la desigualdad de Young con $a_k := \dfrac{|x_k|}{||x||_p}$, $b_k = \dfrac{|y_k|}{||y||_q}$ Y obtenemos que $\dfrac{|x_k y_k|}{||x||_p ||y||_q} \leq \dfrac{|x_k|^p}{p||x||_p^p} + \dfrac{|y_k|^q}{q||y||_q^q}$.
Luego sumamos todas las desigualdades para $k = 1, ...n$. Concluimos que:

$$\frac{1}{||x||_p ||y||_q} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k|\right) \leq \frac{1}{p||x||_p^p} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right) + \frac{1}{q||y||_q^q} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $||x||_p ||y||_q$ obtenemos la desigualdad.

Con esto, podemos probar la **proposición 2.13** que para cada $p \in [1, \infty]$, la función $|| \cdot ||_p$ es una norma de $\mathbb{R}^n$.

Desigualdad importante: Si estamos en $\mathbb{R}^n$, se tiene que:

$$||x||_r \leq n^{1/r} ||x||_p$$
$$||x||_\infty \leq ||x||_p$$

11.1.3. Conjunto de Sucesiones

Dado $p \in [1, \infty)$, definimos el conjunto l_p de todas las sucesiones de números reales (x_k) tales que la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$$

converge en un espacio vectorial y definimos la suma y producto por escalar como es usual en sucesiones. Entonces, es un espacio vecotorial y:

$$||(x_k)||_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

es una norma de l_p

En el caso de l_∞ consideramos todas las series acotadas y $||x_k||_\infty = \sup |x_k|$ es su norma.

Se puede probar que estos dos son espacios vectoriales y que tienen la norma. La desigualdad del tríangulo para esta norma en series se llama **desigualdad de Minkowki**. A partir de esta norma se puede definir la métrica inducida.

11.1.4. Métrica Discreta

Sea X un conjunto arbitrario. La función:

$$d_{disc}(x,y) = \begin{cases} 0 & ,x = y \\ 1 & ,x \neq y \end{cases}$$

se llama **métrica discreta**

11.2. Espacios de Funciones Continuas

Denotamos por $C^0[a,b]$ al conjunto de todas las funciones continuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Con la suma y producto por escalares definidas como siempre. Entonces, se le definen normas como:

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \qquad \text{si } p \in [1, \infty)$$
$$||f||_\infty := \text{máx}\{|f(x)| \ : a \leq x \leq b\}$$

Se puede demostrar que estas cosas son normas. Se puede probar la desigualdad de Holder para integrales y luego la del triángulo (Desigualdad de Minkowski).
Luego, dada esta norma podemos definir una métrica en el espacio de funciones continuas.

Ejemplo: Sea $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$. Definimos la función:

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx & ,0 \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 0 & ,\frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, $||f_k||_\infty = R$ para todo k. Pero $||f_k||_1 = \dfrac{R}{2k}$. Es decir, en la norma infinito, todas estas funciones están a distancia R del 0. Mientras que en la norma 1, se van acercando al 0.

Comparación entre las desigualdades: Para toda $f \in C^0[a,b]$ se cumple que:

$$||f||_s \leq (b-a)^{\frac{r-s}{rs}} ||f||_r \qquad \text{si } 1 \leq s < r < \infty$$
$$||f||_s \leq (b-a)^{\frac{1}{s}} ||f||_\infty \qquad \text{si } 1 \leq s < \infty$$

Dem: Se sigue de la desigualdad de Holder.

11.3. El espacio de funciones acotadas

Sea S un conjunto y $X = (X, d)$ un espacio métrico.

Def 2.24: Una función $f : S \to X$ es **acotada** si existen $c \in R$ y x_0 tales que:

$$d(f(z), x_0) \leq c \quad \forall z \in S$$

Denotamos por:

$$B(S, X) = \{f : S \to X : f \text{ es acotada } \}$$

Y definimos:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{z \in S}\{d(f(z), g(z))\}$$

Proposición 2.25: d_∞ es una métrica en $B(S, X)$. Se llama la **métrica uniforme**

Norma uniforme: Si V es un espacio normado. Entonces $B(S, V)$ es un espacio vectorial y:

$$||f||_\infty := \sup_{z \in S} ||f(z)||$$

La métrica uniforme es la métrica inducida por la norma inducida.

11.4. Subespacios métricos e isometrías

Def 2.26: Si $X = (X, d)$ es un espacio métrico y A es un subconjunto de X, definimos:

$$d_A(x, y) = d(x, y)$$

Y es un subespacio métrico.

Notar que una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es acotada. En particulae, $C^0[a, b] \subset B([a, b], \mathbb{R})$.

Isometría: Sean $X = (X, d_X), Y = (Y, d_Y)$ dos espacios métricos. $\phi : X \to Y$ es una **isometría** si:

$$d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$

Toda isometría es inyectiva. Dos espacios métricos se consideran iguales si hay una isometría biyectiva entre ellos.

Ejemplo: Para cada $p \in [1, \infty)$, la función:

$$\iota : \mathbb{R}^n_p \to l_p$$
$$\iota(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, 0, ...)$$

es una isometría.

12. Continuidad

Def (Continuidad): Una función $\phi : X \to Y$ es **continua en el punto** $x_0 \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si } d_X(x, x_0) < \delta \text{ entonces } d_Y(\phi(x), \phi(x_0)) < \epsilon$$

La continuidad depende del espacio métrico.

Ejemplo: La identidad $id : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ es continua.

Ejemplo: $id : C^0_\infty[0,1] \to C^0_1[0,1]$ es continua. Mientras que $id : C^0_1[0,1] \to C^0_\infty[0,1]$.

Def. (Homeomorfismo): Una función $\phi : X \to Y$ es un **homeomorfismo**si ϕ es biyectiva y tanto ϕ como su inversa son continuas.
Entonces, $id : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ es un homeo pero $id : C^0_\infty[a,b] \to C^0_1[a,b]$ no lo es.

Teorema 3.5: Sea $\phi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ funciones entonces:

- Si ϕ, ψ son continuas entonces $\psi \circ \phi$ lo es.
- Si ϕ es un homeomorfismo, entonces ψ es continua sii $\psi \circ \phi$ es continua.
- Si ψ es un homeo, entonces ϕ es continua sii $\psi \circ \phi$ lo es.

Def (Lipschitz) Una función $\phi : X \to Y$ es **Lipschitz continua** si existe $c > 0$ tal que:

$$d_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq c d_X(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Equivalencia: ϕ es una equivalencia si ϕ es Lipschitz, biyectiva y su inversa es Lipschitz.

Teorema 3.7: Si ϕ es Lipschitz, entonces ϕ es continua.
El inverso no es cierto.

Métricas Equivalentes: Dos métricas d_1, d_2 de X son **equivalentes** si la identidad $id : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es una equivalencia. Es decir, existen dos constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que:

$$c_1 d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq c_2 d_2(x,y) \qquad , \forall\, x, y \in X$$

Análogamente con dos normas $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ en V

Por ejemplo, las normas $||\cdot||_p$, $||\cdot||_r$ son equivalentes para todo $p, q \in [1, \infty)$. Se sigue por la desigualdad importante de estas normas:

$$\frac{1}{n^p}||x||_p \leq ||x||_r \leq n^{1/r}||x||_p$$

Bola Abierta: La bola abierta con centro en $x_0 \in X$ y radio $\epsilon > 0$ bajo la métrica d_X es el conjunto:

$$B_X(x_0, \epsilon) = \{x \in X \mid d_X(x, x_0) < \epsilon\}$$

Por tanto, la definición de continuidad se puede reescribir como. $\phi : X \to Y$ es **continua en el punto** x_0 de X si, dada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\phi(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(\phi(x_0), \epsilon)$$

.

Ejemplo 3.11: Denotemos por $B_p(f_0, \epsilon)$ a la bola abierta de $C^0_p[0,1]$ (Conjunto de funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ con la $p-$norma) con centro en la función continua $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ y de radio ϵ.
Por ejemplo, si $p = \infty$, la bola es:

$$B_\infty(f_0, \epsilon) = \{f \in C^0[0,1] \ : \ |f(x) - f_0(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [0,1]\}$$

Porque la métrica infinito es $||f - f_0|| = max\{|f(x) - f_0(x)| \mid \ a \leq x \leq b\}$. Y queremos que esta norma sea menor que ϵ.
Es decir, es el conjunto de las funciones continuas cuya gráfica está contenida en una ϵ franja que rodea a f_0.

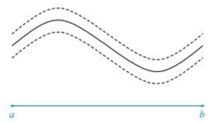
Por otra parte, si $p = 1$, tenemos que:

$$B_1(f_0, \epsilon) = \{g \in C^0[0,1] \ : \ \int_0^1 |g(x) - f_0(x)|dx < \epsilon\}$$

Porque la 1-métrica es $d_1(g, f_0) = ||g - f_0|| = \int |g(x) - f_0(x)|dx$.
Que son entonces las funciones continuas g tales que el área entre g y f_0 es menor que ϵ.

Queda claro entonces que $B_\infty(f_0, \epsilon) \subset B_1(f_0, \epsilon)$ (porque toda función metida en una $\epsilon-$ franja de f_0 tiene una diferencia de área con respecto a f_0 menor a ϵ). Pero podemos encontrar una función $g \in B_1(f_0, \delta)$ tal que $g \notin B_\infty(f_0, \epsilon)$. Simplemente tomamos una función parecida a f_0 pero que tenga un pico que se salga de la ϵ franja aunque el área entre g y f_0 sea menor que ϵ.

es decir, $B_\infty(f_0,\varepsilon)$ es el conjunto de las funciones continuas cuya gráfica está contenida en la franja $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1],\ \ |y-f_0(x)|<\varepsilon\}$.

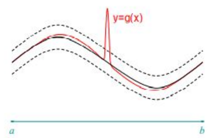


Por otra parte, si $p=1$,

$$B_1(f_0,\varepsilon)=\{g\in\mathcal{C}^0[0,1] : \int_0^1 |g(x)-f_0(x)|\,dx<\varepsilon\}$$

es el conjunto de las funciones continuas g tales que el área de la región comprendida entre las gráficas de g y f_0 es menor que ε.

Resulta claro entonces que $B_\infty(f_0,\varepsilon)\subset B_1(f_0,\varepsilon)$. Y también que, para cada $\varepsilon>0$ y cada $\delta>0$, podemos encontrar una función continua g tal que $g\in B_1(f_0,\delta)$ pero $g\notin B_\infty(f_0,\varepsilon)$:



De la caracterización (3.2) de la continuidad se sigue que $id : \mathcal{C}^0_\infty[0,1]\to\mathcal{C}^0_1[0,1]$ es continua y que $id : \mathcal{C}^0_1[0,1]\to\mathcal{C}^0_\infty[0,1]$ no lo es.

Por tanto, la función $id : C^0_\infty[0,1]\to C^0_1[0,1]$ es continua porque para todo f_0 y toda ϵ existe una $\delta>0$ tal que $\phi(B_\infty(f_0,\delta))\subset B_1(\phi(f_0),\epsilon)$

12.1. Conjuntos Abiertos y Cerrados

Definición: Un punto $x\in X$. Sea llama **punto interior de** A si existe $\epsilon>0$ tal que $B_X(x,\epsilon)\subset A$.
Interior de A**:** Es el conjunto de todos los puntos interiores de A en X y se denota $int_X(A)$.
Abierto: A es abierto si $A=int(A)$.

Proposición 3.13: En cualquier espacio métrico (X,d), la bola abierta $B_X(x_0,\epsilon)=\{x\in X\ :\ d(x,x_0)<\epsilon\}$
Corolario: El interior $int(A)$ es abierto.
Def Alternativa: Dado un conjunto A, $int(A)$ es el máximo abierto contenido en A.

Ejemplo: El conjunto:

$$A=\{f\in C^0[0,1]\ \ : |f(x)|<1/2\ \ \forall x\in[0,1]\}$$

es abierto en $C^0_\infty[0,1]$ pero no lo es en $C^0_1[0,1]$

Dem: Observamos que A es una bola de radio $1/2$ alrededor de la función $f_0=0$ en el espacio $C^0_\infty[0,1]$, donde $d(f_0,f)=\sup\{|f(x)-f_0(x)|\}=\sup\{|f(x)|\}$

Pero A no es abierto en $C^0_1[0,1]$. Consideramos $f_0=0$ que es una función en A. Para todo $\delta>0$, podemos considerar una función continua $g_\delta(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\delta}x & ,\ \ 0\le x\le\delta\\ 0 & ,\ \ \delta\le x\le 1\end{cases}$
Esta función no pertenece a A bajo la métrica $C^0_1[0,1]$, pues tiene puntos con una norma mayor a $1/2$. Y sin embargo, $||g_\delta-f_0||=\delta/2$, pues el área entre estas dos funciones es muy

chica.
Por lo que toda bola abierta en $C_1^0[0,1]$ con radio $\delta/2$ siempre incluye una función que se sale de A. Por lo que f_0 no es un punto interior.

Def 3.16: Un punto $x \in X$ es un **punto de contacto de** A si $B_X(x,\epsilon) \cap A \neq 0$ para todo $\epsilon > 0$.
Cerradura: La cerradura de A en X es el conjunto de todos los puntos de contacto de A y se denota $\bar{A}$
Cerrado: Decimos que A es cerrado si $A = \bar{A}$

Def 3.17: Bola Cerrada: La bola cerrada en X con centro en x_0 y radio ϵ es:

$$\bar{B}_X(x_0,\epsilon) = \{x \in X \ \mid d(x,x_0) \leq \epsilon\}$$

Proposición 3.18: Toda bola cerrada es un subconjunto cerrado de X.

Proposición 3.19: Para cualquier conjunto A de un espacio métrico X, se tiene que:

$$X/\bar{A} = int(X/A)$$

Por lo que A es cerrado sii X/A es abierto.

Corolario: La cerradura de A es el cerrado más chiquito que contiene a A

Ejemplo 3.21: Todo subconjunto de un espacio métrico es abierto (y por tanto, es también cerrado, por ser el complemento de un abierto)

Proposición 3.23: En un espacio normado, la cerradura de la bola abierta es la bola cerrada (no se cumple por ejemplo, en el espacio discreto).

Proposición 3.24: Sea X, Y espacios métricos y sea $\phi : X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\phi : X \to Y$ es continua

b) $\phi^{-1} : Y \to X$ convierte abiertos en abiertos

b) $\phi^{-1} : Y \to X$ convierte cerrados en cerrados

Ejemplo 3.25: Cualquier función $\phi : X_{disc} \to Y$ es continua. Ya que todo subconjunto del discreto es abierto.

Prop 3.26: En cualquier espacio métrico (X,d) se cumple que:

a) $\emptyset, X$ son abiertos en X

b) La unión arbitraria de abiertos es abierta

c) La intersección finita de abiertos es abierta.

12.2. Convergencia de Sucesiones

Sucesión: Se define una sucesión en un espacio métrico (X, d) como una función $\vec{x} : \mathbb{N} \to X$. El valor de dicha función en k se llama el k-ésimo término de la sucesión y se denota x_k
Converge: Decimos que (x_k) converge a $x \in X$ si $\forall \epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$, entonces $d(x_k, x) < \epsilon$.
Y se denota por $x_k \to x$.

Subsucesión: Una subsucesión de $\vec{x}$ es la composición de $\vec{x}$ con una función estrictamente creciente. Toma sólo algunos de los términos de la sucesión en orden creciente x_{k_j}

Proposición: Se cumple lo siguiente:

a) El límite de una sucesión convergente es única

b) Si (x_k) converge a x en X, entonces cualquier subsucesión (x_{k_j}) converge a x en X

Dem: Si x_k converge a x, y. Entonces $0 \leq d(x, y) \leq d(x_k, x) + d(x_k, y)$. Esto último tiende a 0, por lo que $d(x, y) = 0$. Esto implica que $x = y$.

Def 3.30 (Sucesión acotada): Es una sucesión tal que existe $x \in X$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $d(x_k, x) \leq c \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Prop 3.31: Toda sucesión convergente es acotada.

Prop 3.32: Sea $A \subset X$ y sea $x \in X$. Entonces $x \in \bar{A}$ sii existe (x_k) tal que $x_k \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x_k \to x$.
Dem: Si $x \in \bar{A}$, entonces existe $x_k \in B(x, 1/k) \cap A$ para todo $k \in N$. Hacemos esta una sucesión que para toda k toma este punto $x_k \in B(x, 1/k) \cap A$.
Regreso: Si (x_k) es una sucesión que converge a x, entonces claramente por def. de convergencia, toda bola que rodea a x contiene puntos en X.

Prop 3.33: $\phi : X \to Y$ es continua en $x \in X$ sii para cualquier sucesión x_k en X que converge a x en X cumple que $\phi(x_k) \to \phi(x)$ en Y

13. Compacidad

Def 4.1 Cubierta: Una cubierta de A en X es una familia C $C = \{X_i\}$ de conjuntos de X tales que:

$$A \subset \bigcup X_i$$

Si los X_i son abiertos, se llama **cubierta abierta** de A en X.
Un subconjunto de la cubierta C que sigue cubriendo a A se llama **subcubierta** de C.

Def 4.2 Compacto: Un subconjunto K de X es **compacto** si cada cubierta abierta de K en X tiene una subcubierta finita.

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$ no es compacto: Pues podemos tomar la cubierta formada por $\{B(0,k)\ , k \in \mathbb{N}\}$ que no tiene subcubierta finita.
La bola abierta $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ no es compacta: Tomamos la cubierta $C = \{B(0, 1 - 1/k)\ :\ k \in \mathbb{N}\}$ que no tiene subcubierta finita.

Prop. 4.5 Bolzano Weirstrass: Si K es un subconjnuto compacto de X, entonces toda sucesión (x_k) de elementos de K contiene una subsucesión que converge en X a un elemento de K. (El regreso también se vale)

- Dem: Sea (x_k) una sucesión en K. Probamos que existe un punto $y_0 \in K$ tal que para cada $\epsilon > 0$, la bola $B_x(y_0, \epsilon)$ contiene alguna subsucesión de (x_k).
  Por contradicción, suponemos que para todo $y \in K$ existe un $\epsilon_y > 0$ tal que $B_X(y, \epsilon_y)$ no contiene ninguna subsucesión de (x_k). Entonces existe $k_y \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \notin B_X(y, \epsilon_y)$ para todo $k \geq k_y$.
  Como K es compacto, el conjunto $C = \{B_X(y, \epsilon_y)\ :\ y \in K\}$ es una cubierta abierta y tiene unas subcubierta finita:
  $K \subset B_x(y_1, \epsilon_{y_1}) \cup \cdots \cup B_X(y_m, \epsilon_m)$
  Esto implica que $x_k \notin K$ para todo $k \geq \text{máx}\{k_{y_1}, \cdots, k_{y_m}\}$, lo cual es falso.
  Por lo que existe este y_0 y es el límite de una subsucesión.

Definición 4.6 Acotado: Decimos que $A \subset X$ es acotado si existe $x \in X, \epsilon > 0$ tal que $A \subset B_X(x, \epsilon)$.

Prop 4.7 (Medio Heine Borel) Si K es un subconjunto compacto de X, entonces K es cerrado y acotado. (El regreso se vale en $\mathbb{R}^n$, y es el teorema de Heine Borel).

- Dem: Sea K compacto en X. Si $x_0 \in \bar{K}$, existe una sucesión (x_k) en K que converge a x_0 en X (por equivalencia de def de cerradura).
  Y (x_k) contiene una subsucesión (x_{k_j}) que converge a un punto $y_0 \in K$. De la unicidad

de la convergencia, se sigue que $x_0 = y_0 \in K$. Lo que muestra que K es cerrado.
Para probar que es acotado, consideramos una cubierta formada por todas las bolas $B_X(x_0, k)$ para $k \in N$, $x_0 \in X$. Tiene una subcubierta finita, por lo que K está metido en la unión finita de varias bolas, que es acotada.

Ejemplo 4.8 (el regreso no se vale): Consideramos la bola cerrada $\bar{B}_{l_2}(0,1) = \{(x_n) \in l_2 \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq 1\}$ en l_2. Probaos que a pesar de ser cerrada y acotada, no es compacta.

- Dem: Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $e_k \in l_2$ a la sucesión con puros 0 excepto un 1 en la posición k. Claramente todos estos e_k están en la bola cerrada. Y vemos que $||e_k - e_k||_2 = \sqrt{2}$.
  Tomamos la sucesión (e_k). Y supongamos que tiene una subsucesión convergente (e_{k_j}) que converge a e. Entonces existe una $j_0 \in \mathbb{N}$

Prop 4.9 Sea K compacto en X. Si $C \subset K$ y C es cerrado, entonces C es compacto.

- Dem: Consideramos una cubierta de K, le podemos agregar X/C (que es abierto). Entonces tiene una subcubierta finita $B = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m \cup (X/C)$ que cubre a K y por tanto cubre a C. Enotnces C es cubierto por los conjuntos abiertos excepto X/C.

Prop 4.10: Si $\phi : X \to Y$ es continua y K es compacto en X, entonces $\phi(K)$ es compacto en Y.

- Dem: Tomamos una cubierta de $\phi(K)$, le hacemos imágenes inversas para cubrir K, sabamos subcubiertas finitas y tomamos los conjuntos oriignales para formar la subcubierta de $\phi(K)$.

Corolario 4.11: Si K es un espacio métrico compacto y $\phi : K \to X$ es continua, entonces ϕ es acotada.

13.1. Teorema de Heine Borel

Encontramos una forma de caracterizar a los conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Prop 4.12: El cubo cerrado:

$$Q := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i \in [-r, r]\}$$

es compacto.

Usamos un argumento de subdivisión como de Bolzano-Weirstrass.

Teorema 4.13 (Heine Borel): Si K es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Entonces K es compacto sii K es cerrado y acotado.

- La ida es la prop 4.7
  Para el regreso, suponemos que K es cerrado y acotado. Entonces está contenido en un cubo Q.
  Luego, como Q es compacto y K un subconjunto cerrado, K es compacto.

Teorema Bolzano Weirstrass: Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente:

- Sea (z_k) una sucesiíon acotada en $\mathbb{R}^n$. Entonces está metida en un cubo Q. Dicho cubo es compacto. Entonces el teorema 4.5 asegura el resultado.

13.2. Existencia de Max y Min

Def (min,max): Sea $f : X \to \mathbb{R}$. Decimos que f **alcanza su mínimo** en X si existe un $x_0 \in X$ tal que:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X$$

Alcanza su **máximo** si existe $x_1 \in X$ tal que:

$$f(x_1) \geq f(x) \quad \forall x \in X$$

El punto x_0 se llama mínimo de f en X y x_1 se llama máximo de f en X.

Teorema 4.17: Si K es un espacio métrico compacto y no vacío, entonces toda función continua $f : K \to \mathbb{R}$ alcanza su mínimo y máximo en K.

Teorema 4.19: Cualesquiera dos normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.
Es decir $c_1||v||_* \leq ||v|| \leq c_2||v||_*$

Denotamos por:

$$C^0(X,Y) := \{\phi : X \to Y \quad | \, \phi \text{ es continua } \}$$

El corolario 4.11 nos asegura que si K es compacto, entonces $C^0(K,Y) \subset B(K,Y) = \{$ funciones acotadas en $K \to Y\}$. Podemos darle a $C^0(K,Y)$ la **métrica uniforme**:

$$d_\infty(\phi,\psi) = \sup_{x \in K} d_Y(\phi(x),\psi(x))$$

13.3. Semicontinuidad

Def 4.20 Trayectoria: Una **trayectoria** en X es una función $\sigma : [a,b] \to X$. La **longitud de** σ es:

$$L(\sigma) = \sup\{\sum_{k=1}^{m} d_X(\sigma(t_{k-1}),\sigma(t_k)) \ \mid a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = b \,, m \in \mathbb{N}\}$$

Denotamos por:

$$L : C^0([a,b], X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

A la función que a cada trayectoria le asigna su longitud. Sabemos que esta función no es continua en geenral porque pueden existir trayectorias arbitrariamente largas tan cercanas como queramos a una trayectoria dada.

Sin embargo, no existen trayectorias arbitrariamente cortas tan cercanas como queramos a una trayectoria dada, lo que se prueba como:

Prop 4.21: Dadas $\sigma \in C^0([a,b], X)$ y $c \leq L(\sigma)$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } d_\infty(\tau, \sigma) < \delta \quad \Rightarrow \quad c < L(\tau)$$

Def 4.22 (Semicontinua inferiormente): Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es **semicontinua inferiormente en** $x_0 \in X$ si dada $c < f(x_0)$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad c < f(x)$$

Def 4.23 (Semicontinua superiormente en el punto $x_0 \in X$) Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es **semicontinua superiormente en** $x_0 \in X$ si dada $c > f(x_0)$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < c$$

Observa que $f : X \to \mathbb{R}$ es continua sii f es s.c.i y s.c.s.

Ejemplo: La función techo es s.c.i y la función piso es s.c.s.

Entonces, la proposición 4.21 implica que L es s.c.i

Dado $a \in \mathbb{R}$ denotamos:

$$f^{\leq a} := \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$$

Teorema 4.29: Si $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es s.c.i y si $f^{\leq a}$ es compacto para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces f alcanza su mínimo en X.

13.4. Continuidad Uniforme:

Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ dos espacios métricos.

Def 4.30: Una función $\phi : X \to Y$ es **u.c** si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x_1, x_2 \in X$:

$$\text{Si } d_X(x_1, x_2) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) < \epsilon$$

Claramente toda función u.c es continua.

Teorema 4.31: Sea K un espacio métrico compacto. Entonces toda función continua $\phi : K \to Y$ es u.c.

14. Completitud

14.1. Espacios Métricos Completos

Sea (X, d) un espacio métrico.

Def 5.1: Una sucesión (x_k) en X es **de Cauchy** si, dada $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall\, k, j \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad d_X(x_k, x_j) < \epsilon$$

Prop 5.2: Toda sucesión convergente en X es de Cauchy. (El regreso no siempre es cierto).

Ejemplo: La sucesión $\dfrac{1}{k}$ es de Cauchy en $(0, 1)$ pero no es convergente.

Ejemplo: La sucesión de funciones $f_k : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = \begin{cases} -1 & , \ -1 \leq x \leq -\frac{1}{k} \\ kx & , \ -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 1 & , \ \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Es de Cauchy en $C_1^0[0, 1]$ pero no converge en $C_1^0[-1, 1]$ (Pues converge a una función que no es continua).

Def 5.5 (Completo / Banach): Un espacio métrico X es completo si toda sucesión de Cauchy en X converge en X. Un espacio normado que es completo con la métrica inducida por su norma es un **espacio de Banach**.

Por lo que $(a, b), C_1^0[a, b]$ no son completos. De hecho $C_p^0[a, b]$ no es un espacio de Banach para ninguna $p \in [1, \infty)$
La completitud no es invariante ante homeomorfismos. (Por ejemplo $\mathbb{R}$ es completo, tan : $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ es un homeomorfismo pero $(-\pi/2, \pi/2)$ no es completo.

Prop 5.7 Si Existe una equivalencia $\phi : X \to Y$ entre dos espacioes métricos, entonces X es completo sii Y lo es.

- Sea Y completo y $\phi : X \to Y$ una función Lipschitz. Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en X. Entonces, dada $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:
  $d_Y(\phi(x_j), \phi(x_k)) \leq c d_X(x_j, x_k) < \epsilon$ para todo $j, k \geq k_0$
  Es decir, la sucesión $(\phi(x_k))$ es de Cauchy en Y y como Y es completo, la sucesión converge a un $y \in Y$. Luego, sacamos ϕ^{-1} a toda la sucesión $(\phi(x_k))$ y por continuidad, $\phi^{-1}\phi(x_k) = (x_k)$ converge en X.

Teorema 5.8: Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach.

- Se prueba que todo espacio normado de dimensión finita es equivalente a $\mathbb{R}^n_\infty$. Y luego se prueba que $\mathbb{R}^n_\infty$ es completo.

Prop 5.9: Sea X un espacio métrico completo. Un subespacio métrico A de X es completo sii es cerrado en X.

14.2. Convergencia Uniforme

Sea S un conjunto y (X, d_X) un espacio métrico.

Def 5.10 (Convergencia puntual): Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$ converge puntualmente en S a una función $f : S \to X$ si $f_k(z) \to f(z)$ en X para todo $z \in S$.
Es decir, para todo $\epsilon > 0$ y cada $z \in S$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (depende de ϵ, z) tal que:

$$\text{Si } k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad d_X(f_k(z), f(z)) < \epsilon$$

La función f se llama el **límite puntual de** (f_k).

Ejemplo: La función $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $f_k(x) = x^k$ converge puntualmente a $f(x) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \ x = 1 \end{cases}$

Def 5.12 (Convergencia Uniforme) Una sucesión de funciones $f_k : S \to X, k \in \mathbb{N}$ **converge uniformemente** en S a una función $f : S \to X$ si dada $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que depende sólo de ϵ) tal que:

$$\text{Si } k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad d_X(f_k(z), f(z)) < \epsilon \quad \forall z \in S$$

La función f se llama **el límite uniforme** de (f_k)

Si f_k converge uniformemente a f, entonces converge puntualmente a f. El recíproco no es cierto (ejemplo anterior).
Incluso, aún cuando una sucesión de funciones converge puntualmente a una función continua, no necesariamente converge uniformemente.

Teorema 5.14: Sea $(Z, d_Z), (X, d_X)$ espacios métricos. Si $f_k : Z \to X$ es continua para todo k y (f_k) converge uniformemetne a f en $Z \quad \Rightarrow \quad f : Z \to X$ es continua

Para funciones acotadas, la convergencia uniforme es simplemente la convergencia en el espacio métrico $B(S, X)$, cuya métrica es la métrica uniforme $d_\infty(f, g) = \sup_{z \in S} d_X(f(z), g(z))$.
Es decir:
Prop 5.15: Sea (f_k) una sucesión en $B(S, X)$. Entonces (f_k) converge uniformemente a f en S sii (f_k) converge a f en $B(S, X)$

Def (Espacio de funciones continuas y acotadas de Z a X Sea Z, X espacios métricos. El **espacio de funciones continuas y acotadas de Z a X** es el espacio métrico:

$$C_b^0(Z,X) := \{f : Z \to X \mid f \text{ es continua y acotada } \}$$

Con la métrica inducida por la de $B(Z,X)$, es decir:

$$d_\infty(f,g) = \sum_{z \in Z} d_X(f(z), g(z))$$

Entonces, el teorema 5.14 nos asegura que $C_b^0(Z,X)$ es un subespacio cerrado de $B(Z,X)$ (toda sucesión converge dentro del conjunto)

Teorema 5.18: Si $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuamente diferenciables en $[a,b]$ tales que (f_k) converge a f puntutalemnte en $[a,b]$ y (f_k') converge a g uniformemente en $[a,b]$, entonces f es continuamente diferenciable en $[a,b]$ y $f' = g$

14.3. Espacios Completos de Funciones

Damos un criterio que garantiza la convergencia uniforme de una sucesión de funciones.

Def 5.19: Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$ es **uniformemente de Cauchy** en S si para cada $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall\ j,k \geq k_0 \text{ y para todo } z \in S, \text{ se tiene } d_X(f_k(z), f_j(z)) < \epsilon$$

Teorema 5.20 (Criterio de convergencia uniforme de Cauchy Sea X un espacio métrico completo. Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, converge uniformemente en S sii (f_k) es uniformemente Cauchy en S

Teorema 5.21: Sea S un conjunto y Z un espacio métrico:

- Si X es un espacio métrico completo, entonces $B(S,X)$ y $C_b^0(Z,X)$ son completos
- Si V es un espacio de Banach, entonces $B(S,V)$, $C_b^0(Z,V)$ son espacios de Banach

14.4. Series en Espacios de Banach

Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado y sea (v_k) una sucesión en V

DEf 5.22: Decimos que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ **converge** en V si la sucesión (w_n) de sumas parciales $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ converge en V.

Prop 5.23: Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge en V, entonces $v_k \to 0$ en V. En particular (v_k) está acotada.

Prop 5.24 Criterio de Cauchu para series: Sea V un espacio de Banach y sea (v_k) una sucesión en V. La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ converge en V sii para todo $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\text{Para todo } k \geq k_0 \text{ y todo } j \geq 1 \text{ se tiene que } ||v_{k+1} + \cdots + v_{k+j}|| < \epsilon$$

Teorema 5.25 (Criterio de Weierstrass): Sea V un espacio de Banach y sea (v_k) una sucesión en V. Si la serie de números reales:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||v_k||$$

Converge, entonces la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ converge en V y se cumple que:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} v_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

.

Def 5.26 (Convergencia de serie de funciones): Decimos que la seire de funcioens $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente en S si la sucesión de funciones $g_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ converge uniformemente en S a una función de S en V.

Serie de potencias: Es una serie de la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Definimos el radio de convergencia como $R = \sup\{r \in [0, \infty) : \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k r^k \text{ converge en } \mathbb{R}\} \in [0, \infty]$.

Teorema 5.28: Sea (a_k) una sucesión en $\mathbb{R}$

- La serie de potencias $\sum a_k (x - x_0)^k$ converge uniformemente en $[x_0 - r, x_0 + r]$ para todo $r \in (0, R)$
- La función $f(x) = \sum a_k (x - x_0)^k$ es continuamente diferenciable en $(x_0 - R, x_0 + R)$ y su derivada es $\sum k a_k (x - x_0)^{k-1}$

15. Teorema del Punto Fijo de Banach

15.1. Teorema del Punto Fijo de Banach

Sea (X, d) un espacio métrico.
Def (Contracción): Una función $\phi : X \to X$ tal que existe un $\alpha \in (0, 1)$ tal que:

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha d(x, y) \qquad \forall x, y \in X$$

Es decir, es Lipschit con constante estrictamente menor que 1. Es importante que esto puede depender de la métrica que le demos.

Punto Fijo: Es un punto $x^* \in X$ tal que $\phi(x^*) = x^*$.
Potencia: Denotamos por ϕ^k a la composición de ϕ k veces.

Teorema 6.3 (punto fijo de Banach): Sea X un espacio métrico completo y sea $\phi : X \to X$ una contracción. Entonces se cumple:

a) ϕ tiene un punto fijo x^*

b) Para cualquier $x_0 \in X$ la sucesión $(\phi^k(x_0))$ converge a x^* en X y se cumple que:

$$d(\phi^k(x_0), x^*) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(\phi(x_0), x_0)$$

Donde $\alpha \in (0, 1)$ es el número de la contracción.

Demostraremos primero que la sucesión (x_k) es de Cauchy en X. Nota que, si ϕ satisface (6.1), entonces

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(\phi^k(x_1), \phi^k(x_0)) \leq \alpha^k d(x_1, x_0) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Además, para cualesquiera $y, z \in X$, se cumple que

$$\begin{aligned} d(y,z) &\leq d(y,\phi(y)) + d(\phi(y),\phi(z)) + d(\phi(z),z) \\ &\leq d(y,\phi(y)) + \alpha d(y,z) + d(\phi(z),z), \end{aligned}$$

es decir,

$$(1-\alpha)d(y,z) \leq d(y,\phi(y)) + d(\phi(z),z).$$

Tomando $y := x_k$ y $z := x_j$ obtenemos

$$d(x_k, x_j) \leq \frac{d(x_{k+1},x_k) + d(x_{j+1},x_j)}{1-\alpha} \leq \frac{\alpha^k + \alpha^j}{1-\alpha} d(x_1, x_0). \tag{6.3}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\alpha \in (0,1)$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_1, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_0. \tag{6.4}$$

En consecuencia,

$$d(x_k, x_j) < \varepsilon \qquad \forall j, k \geq k_0.$$

Esto demuestra que la sucesión (x_k) es de Cauchy en X.

Como X es completo, existe $x^* \in X$ tal que $x_k \to x^*$ en X y, como ϕ es continua, se tiene entonces que $x_{k+1} = \phi(x_k) \to \phi(x^*)$ en X. Como el límite de una sucesión es único, concluimos que $\phi(x^*) = x^*$, es decir, x^* es un punto fijo de ϕ.

Veamos ahora que es único. Si x_1^* y x_2^* son puntos fijos de ϕ entonces

$$d(x_1^*, x_2^*) = d(\phi(x_1^*), \phi(x_2^*)) \leq \alpha d(x_1^*, x_2^*).$$

Como $\alpha < 1$, esta desigualdad implica que $d(x_1^*, x_2^*) = 0$, es decir, $x_1^* = x_2^*$.

(b): Por último, haciendo tender $j \to \infty$ en la desigualdad (6.3) obtenemos que

$$d(x_k, x^*) = \lim_{j\to\infty} d(x_k, x_j) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esto concluye la demostración. ■

No sólo se afirma la existencia de un punto fijo, sino que se demuestra cómo llegar a él por medio de aproximaciones sucesivas.

Ejemplo 6.4: La función $\phi : (0,1) \to (0,1)$ dada por $\phi(t) = \frac{1}{2}t$ es una contracción y no tiene punto fijo en el dominio. Esto porque $(0,1)$ no es completo

15.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales:

$$Ax - x = b$$

Donde A es una matriz de nxn y $b \in \mathbb{R}^n$. Observamos que $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución sii x es un punto fijo de la función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(x) = Ax - b$. De modo que si ϕ es una contracción podemos aplicar el método de aproximaciones sucesivas.

15.3. Ecuación Integral de Fredholm

Sea $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y sea λ un real. Una ecuación integral de la forma:

$$\lambda f(x) - \int_a^b K(x, y)f(y)dy = g(x)$$

se llama una **ecuación integral de Fredholm**. Es del primer tipo si $\lambda = 0$ y segundo si $\lambda \neq 0$
Queremos ver para qué λ esto tiene una solución.
Para ello, usamos el espacio $C^0[a, b]$ que es completo. Y definimos $\phi_\lambda : C^0[a, b] \to C^0[a, b]$ cuyos puntos fijos son las soluciones de la ecuación de Fredholm.

15.4. Problema de Cauchy

Se puede usar el toerema de punto fijo para demostrar la existencia y unicidad de una e.d.o. con ciertas condiciones.

16. Compacidad en Espacios de Funciones

16.1. Conjuntos Totalmente Acotados

Conjunto Totalmente Acotado: Un subconjunto $A \subset X$ es totalmente acotado si para cada $\epsilon > 0$ existe un número finito de puntos $a_1, \cdots, a_m \in A$ tales que:

$$A \subset B(a_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(a_m, \epsilon)$$

Proposición 7.3: Sea $A \subset X$:

a) Si A es compacto, entonces A es totalmente acotado.

b) Si A es totalmente acotado, entonces A es acotado en X

c) Si $D \subset A$ y A es totalmente acotado, entonces D es totalmente acotado.

d) Si A es totalmente acotado, entonces su cerradora $\overline{A}$ en X es totalmente acotada.

Teorema 7.4: Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

a) X es compacto

b) Toda sucesión en X contiene una subsucesión que converge en X

c) X es completo y totalmente acotado.

Def 7.5: Un subconjunto $A \subset X$ es **Relativamente compacto** en X si su cerradura $\bar{A}$ en X es compacta.

Corolario 7.6: Un subconjunto A de un espacio métrico completo X es relativamente compacto en X sii es totalmente acotado.

16.2. Teorema de Arzela-Ascoli

Sea (K, d_k) un espacio métrico compacto y (X, d_X) un espacio métrico. Consideramos el espacio de funciones continuas:

$$C^0(K, X) = \{f : K \to X \quad : \; f \text{ es continua}\}$$

Con la métrica uniforme:

$$d_\infty(f, g) = \max_{z \in K} d_X(f(z), g(z))$$

Equicontinuo: Un subconjunto H de $C^0(K, X)$ es equicontinuo en el punto $z_0 \in K$ si, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ (que depende de ϵ, z_0) tal que para toda $f \in H$:

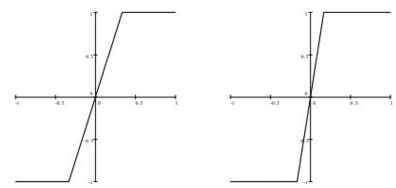
$$\text{Si } d_K(z, z_0) < \delta \;\; \Rightarrow \;\; d_X(f(z), f(z_0)) < \epsilon$$

H es **equicontinuo** si lo es en todo punto de K.
O sea, en un dado punto, todas las funciones son continuas con la misma delta.

Ejemplo 7.8 *El conjunto* $\mathcal{H} = \{f_k \in C^0([-1,1],\mathbb{R}) : k \in \mathbb{N}\}$, *donde*

$$f_k(t) = \begin{cases} -1 & si \ t \in \left[-1, -\frac{1}{k}\right], \\ kt & si \ t \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right], \\ 1 & si \ t \in \left[\frac{1}{k}, 1\right], \end{cases}$$

no es equicontinuo en 0.



f_3 f_6

Denotaremos por:

$$B_\infty(f_0, r) := \{f \in C^0(K, X) \ : \ d_\infty(f, f_0) < r\}$$

Teorema de Arzela-Ascoli: Sean K un espacio métrico compacto y X un espacio métrico completo. Un subconjunto $H \subset C^0(K, X)$ es relativamente compacto en $C^0(K, X)$ sii H es equicontinuo y los conjuntos:

$$H(z) = \{f(z) \ : \ f \in H\}$$

son relativamente compactos en X para cada $z \in K$

Corolario 7.10: Sea K un espacio métrico compacto. Un subconjunto H de $C^0(K, \mathbb{R}^n)$ es relativamente compacto en $C^0(K, \mathbb{R}^n)$ sii H es equicontinuo y acotado en $C^0(K, \mathbb{R}^n)$

17. Teoremas de Aproximación

17.1. Teorema de Aproximación de Weierstrass

Para $0 \leq k \leq n$ consideramos los polinomios:

$$\gamma_{n,k}(t) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ t^k(1-t)^{n-k}$$

A partir de la fórmula binomial $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}$, tenemos que $\sum_{k=0}^{n} \gamma_{n,k}(t) = 1$
Multiplicamos la igualdad por t (y cambiamos n por $n-1$:)

$$\begin{aligned}
t &= t\sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n-1,j}(t) \\
\Rightarrow &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} t^{j+1}(1-t)^{n-1-j} \\
\Rightarrow &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j+1}{n} \frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} t^{j+1}(1-t)^{n-(j+1)} \\
\Rightarrow &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \gamma_{n,k}(t) \\
\Rightarrow &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \gamma_{n,k}(t)
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $nt = \sum_{k=0}^{n} k\gamma_{n,k}(t)$ Y finalmente es sencillo probar que:

$$(n^2-n)t^2 = \sum_{k=0}^{n} (k^2-k)\gamma_{n,k}(t)$$

Def 8.1 n-ésimo polinomio de Bernstein de f Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces su n-ésimo polinomio de Bernstein es el polinomio:

$$\beta_n(t) = \beta_{f,n}(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \gamma_{n,k}(t)$$

Teorema de Bernstein: Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. La sucesión de polinomios de Bernstein $\beta_{f,n}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$

Teorema de Aproximación de Weierstrass: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una sucesión de polinomios (p_n) que converge uniformemente a f en $[a,b]$

Dem: Se sigue del teorema anterior usando un cambio de variable
La compacidad del dominio de f es importante, el teorema no es necesariamente válido si el dominio en el que f es continua no es compacto.

17.2. Stone-Weirstrass

Def: Un subconjunto A de X es **denso en** X si $\bar{A} = X$, es decir, para todo $x \in X$, existe una sucesión (a_k) en A tal que $a_k \to x$ en X

Por ejemplo $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ porque para todo $x \in \mathbb{R}$ podemos encontrar una sucesión de racionales que converge a x

El teorema de la sección pasada afirma que el conjunto de los polinomios $P[a,b] :=$ $\{$polinomios que van de $[a,b]$ a los reales$\}$ es denso en $C^0(K,\mathbb{R})$.

Teorema de Stone-Weierstrass: Sea K un espacio métrico compacto y sea A un subconjunto de $C^0(K,\mathbb{R})$ con las siguientes propiedades:

a) $\lambda\phi + \mu\psi \in A$ para cualquier $\phi, \psi \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

b) $\phi\psi \in A$ para todo $\phi, \psi \in A$

c) $Id \in A$

d) Dados $x_1 \neq x_2$ en K, existe $\phi \in A$ tal que $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$

Entonces A es denso en $C^0(K,\mathbb{R})$. Es decir, para toda función continua $f : K \to \mathbb{R}$ existe una sucesión (ϕ_k) de funciones en A que converge uniformemente a f en K

Corolario: Sea K un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$. Entonces dada una función continua $f : K \to \mathbb{R}$, existe una sucesión de polinomios (p_k) en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a f en K.

18. Diferenciabilidad

Recordamos que una función es diferenciable en x_0 si existe una función lineal que se parece mucho a ella cerca de x_0.
Sin embargo, generalizaremos la definición para espacios de Banach. Para ello, habrá que pedir que la derivada sea lineal y continua (porque lineal en un espacio de Banach infinito no implica continua).

18.1. Espacio de Funciones Lineales y Continuas

Espacio de Banach: Es un espacio métrico X que es completo (toda sucesión de Cauchy en X converge en X). Es completo bajo la métrica inducida por la norma.

Sea $V = (V, ||\cdot||_V), W = (W, ||\cdot||_W)$ dos espacios de Banach. La continuidad de una función entre ellos se caracteriza como sigue:

Prop 9.1: Si $T : V \to W$ es una función lineal, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) T es continua

b) T es continua en 0

c) Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $||T(v)||_W \leq c||v||_W$ para todo $v \in V$

d) T es Lipschitz continua

- Dem: Las implicaciones a) a b) y d) a a) son evidentes.
  b) a c): Si T es continua en 0, existe $\delta > 0$ tal que:

  $$\text{Si } ||v||_V < \delta \quad \Rightarrow \quad ||T(v)||_V < 1$$

  Entonces:

  $$||T(v)||_W = \frac{2}{\delta}||v||_W \left| T\left(\frac{\delta}{2}\frac{v}{||v||_V}\right)\right| < \frac{2}{\delta}||v||_V$$

  c) a d): Tenemos que:

  $$||Tv_1 - Tv_2||_W = ||T(v_1 - v_2)||_W \leq c||v_1 - v_2||_V$$

Def 9.2: Denotamos por:

$$L(V, W) := \{T : V \to W \ \mid T \text{ es lineal y continua } \}$$

Es un e.v. y le definimos una norma:

$$||T||_{L(V,W)} := \sup_{v\in V\ ,\ v\neq 0} \frac{||Tv||_W}{||v||_V} \qquad \forall\, T \in L(V,W)$$

La proposición 9.1 asegura que $||T||_{L(V,W)} < \infty$. Es sencillo comprobar que esta norma es verdaderamente una norma.
Observamos que:

$$||Tv||_W \leq ||T||_{L(V,W)}||v||_V$$

para todo $v \in V\ ,\ T \in L(V,W)$

Proposición 9.3: $L(V,W)$ es un espacio de Banach con esta norma.

18.2. Diferenciabilidad

Def 9.4 Límite: Sean X, Y espacios métricos, $A \subset X$, $f : A \to Y$ una función, $x_0 \in \bar{A}$ y $y_0 \in Y$. Entonces decimos que:

$$y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } x \in A \text{ con } d_X(x,x_0) < \delta \qquad \Rightarrow \quad d_Y(f(x),y_0) < \epsilon$$

Frechet-diferenciable: Una función $\phi : \Omega \subset V \to W$ econ V, W espacios de Banach es diferenciable en $u_0 \in \Omega$ si existe $T \in L(V,W)$ tal que:

$$\lim_{v\to 0} \frac{||\phi(u_0+v) - \phi(u_0) - T(v)||}{||v||_V} = 0$$

T se llama la **Derivada de Frechet** de ϕ en u_0 y se denota por:

$$T := \phi'(u_0) := D\phi(u_0)$$

Hacemos énfasis en que $\phi'(u_0) : V \to W$ es una función lineal y continua. Que al aplicarla en v se escribe como $\phi'(u_0)(v)$.

La diferenciabilidad en u_0 de ϕ significa que para cada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para cualaquier v muy chico $||v||_V < \delta$ se cumple que:

$$u_0 + v \in \Omega \text{ y } ||\phi(u_0+v) - \phi(u_0) - \phi'(u_0)v||_W < \epsilon||v||_V$$

Es decir, en una vecindad chiquita alrededor de u_0, la función $v \to \phi(u_0+v)$ se ve como la función afín $v \to \phi(u_0) + \phi'(u_0)v$. Y la parte lineal de esta aproximación es la derivada de ϕ en u_0.

Prop 9.6: Si ϕ es diferenciable en u_0, la función $\phi'(u_0)$ es única.

- Dem: Supongamos que $T_1, T_2 \in L(V,W)$ son derivadas. Entonces, dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $||v||_V < \delta$ entonces:

  $$||\phi(u_0+v) - \phi(u_0) - T_i(v)||_W < \frac{\epsilon}{2}||v||_V$$

  Por tanto, se tiene que:

  $$||T_1v - T_2v||_W \leq ||T_1v - \phi(u_0+v) + \phi(u_0)||_W + ||\phi(u_0+v) - \phi(u_0) - T_2(v)||_W < \epsilon||v||_V$$

  Si $||v||_V \geq \delta$, escogemos $\lambda \in (0,1)$ tal que $||\lambda v||_V < \delta$. Entonces la desigualdad anterior asegura que:

  $$||T_1v - T_2v||_W = \frac{1}{\lambda}||T_1(\lambda v) - T_2(\lambda v)||_W < \frac{\epsilon}{\lambda}||\lambda v||_V = \epsilon||v||_V$$

  Por tanto, $||T_1(v) - T_2(v)||_W < \epsilon||v||_V$ para ϵ arbitraria y para toda $v \in V$. Lo que prueba que $T_1 = T_2$

.

Def 9.7: $\phi : \Omega \to W$ es **Frechet diferenciable en** Ω si lo es en cada punto $u \in \Omega$. Luego, la función:

$$\phi' : \Omega \to L(V,W) \ \ , \ \ u \to \phi'(u)$$

Se llama la **derivada de** ϕ. También la denotamos como:

$$D\phi : \Omega \to L(V,W)$$

Es decir, a a cada punto de Ω se le asigna su función lineal continua que es la derivada.

Ejemplo: Si $\phi : \Omega \to W$ es constante, entonces es diferenciable y $\phi'(u) = 0 \in L(V,W)$ para todo $u \in \Omega$
Si $T \in L(V,W)$, entonces es diferenciable y $T'(u) = T$ (la mejor aproximación lineal a una función lineal es una función lineal).

Prop 9.11: Si ϕ es diferenciable en u_0, entonces ϕ es continua en u_0

Prop 9.12 (Linealidad): Si $\phi, \psi : \Omega \to W$ son diferenciables y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda\phi + \mu\psi$ es diferenciable en u_0 y:

$$(\lambda\phi + \mu\psi)'(u_0) = \lambda\phi'(u_0) + \mu\psi'(u_0)$$

Prop 9.13 Regla de la cadena: Sea $\omega \subset V, \Omega' \subset W$ subconjuntos abiertos. Si $\phi : \Omega \to W$ es diferenciable en u_0, $\phi(\Omega) \subset \Omega'$ y $\psi : \Omega' \to Z$ es diferenciable en $v_0 = \phi(u_0)$, entonces $\psi \circ \phi : \Omega \to Z$ es diferenciable en u_0 y:

$$(\psi \circ \phi)'(u_0) = \psi'(v_0) \circ \phi'(u_0)$$

18.3. TVM

Una función lineal $T : \mathbb{R} \to V$ está totalmente determinada pr su valor en 1.
Por tanto, podemos identificar a $L(\mathbb{R}, V)$ con V. Simplemente, para $T \in L(\mathbb{R}, V)$ le asignamos $T(1) \in V$
Si $\sigma(a, b) \to V$ es diferenciable en un punto $t_0 \in (a, b)$, identificamos a la transformación lineal $\sigma'(t_0) \in L(\mathbb{R}, V)$ con su valor en 1. Escribimos $\sigma'(t_0)$ en vez de $\sigma'(t_0)[1]$.
Esta es la derivada usual que tenemos cuando es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Teorema 9.14 TVM: Sea $\sigma : [a, b] \to V$ una función continua. Si σ es diferenciable en todo punto $t \in (a, b)$ y si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\forall t \in (a, b), \;\; \Rightarrow \;\; ||\sigma'(t)||_V \leq M$$

Entonces:

$$||\sigma(b) - \sigma(a)||_V \leq M(b - a)$$

Def 9.15: Una función $\phi : \Omega \to W$ es de clase C^1 en Ω si es diferenciable en Ω y su derivada $\phi' : \Omega \to L(V, W)$ es continua

19. TFImplícita

Sea $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Y $c \in \mathbb{R}$. Queremos obtener información del conjunto de nivel:

$$M := \{\xi \in \Omega \mid \phi(\xi) = c\}$$

Por ejemplo, si $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $\phi(x, y) = x^2 - y^2$, entonces para $c < 0$, es una hipérbola vertical, para $c > 0$ es una horizontal y para $c = 0$ es un par de líneas que se cruzan en el origen.

Los conjuntos M de soluciones que tienen la propiedad que $\nabla\phi(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in M$ se llama **variedades**.
El TFImplícita asegura que si M es una variedad, entonces en una vecindad de cada punto $\xi \in M$, M es la gráfica de una función cuyo dominio es un abierto en el subespacio de $\mathbb{R}^n$ ortogonal a $\nabla\phi(\xi)$ y cuyo codominio es el espacio generado por $\nabla\phi(\xi)$,

Teorema 10.7 (función Implícita): Sean V, W, Z espacio de Banach, Ω un subconjunto abierto de $V \times W$, $(v_0, w_0) \in \Omega$ y $\phi : \Omega \to Z$ una función de clase C^1 en Ω.
Si $\phi(v_0, w_0) = c$ y $\partial_2\phi(v_0, w_0) \in L(W, Z)$ es un isomorfismo de Banach, entonces existen $\delta, \eta > 0$ tales que $B_V(v_0, \delta) \times B_W(w_0, \eta) \subset \Omega$ y una función $f : B_V(v_0, \delta) \to W$ de clase C^1 con las propiedades:

1) El conjunto de soluciones $(v, w) \in B_V(v_0, \delta) \times B_W(w_0, \eta)$ de la ecuación:

$$\phi(v, w) = c$$

coincide con la gráfica de f

$$graf(f) := \{(v, f(v)) \ : \ v \in B_V(v_0, \delta)\}$$

En particular, $f(v_0) = w_0$ y $f(v) \in B_W(w_0, \eta)$ para todo $v \in B_V(v_0, \delta)$

ii) Para todo $v \in B_V(v_0, \delta)$ se cumple que $\partial_2\phi(v, f(v))$ es un isomorfismo de Banach y:

$$f'(v) = -[\partial_2\phi(v, f(v))]^{-1} \circ \partial_1\phi(v, f(v))$$

.

20. Fourier: Génesis

20.0.1. Cuerda Vibrante

Una onda es **estacionaria** sin se puede ver como:

$$u(x,t) = \phi(x)\psi(t)$$

Es decir, tiene una forma establecida que se amplifica y desamplifica

Una onda es **viajera** si se mueve con el tiempo y se mueve como:

$$u(x,t) = F(x - ct)$$

Derivación de la ecuación de onda:
Tenemos un hilo en el eje x entre $x = 0$ y $x = L$. Digamos que su desplazamiento es $y = u(x,t)$
Consideremos que el hilo está dividido en N masas distribuidas uniformemente, la n-ésima tiene posición $x_n = nL/N$ y podemos pensar que se mueve sólo verticalmente.
A la separación entre partículas le llamamos $h = L/N$. Y cada partícula tiene una masa ρh.

Por la ley de Newton, $\rho h y_n''(t)$ es igual a la fuerza en la partícula n. Esta fuerza se debe a las otras masas. Además la fuerza causa a la masa derecha es proporcional a $(y_{n+1} - y_n)/h$ y por ello, la tensión es:

$$\frac{\tau}{h}(y_{n+1} - y_n)$$

Con $\tau > 0$ un coeficiente de tensiín. Hay una fuerza similar a la izquierda de:

$$\frac{\tau}{h}(y_{n-1} - y_n)$$

Entonces, la fuerza total es:

$$\rho h y_n''(t) = \frac{\tau}{h}[y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)] = [u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n, t)]$$

Sin embargo, para una función continua, tenemos que $\dfrac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \to F''(x)$ conforme $h \to 0$.
Entonces la ecuación queda como:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$\boxed{\Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Con $c^2 = \tau/\rho$

20.0.2. Solución Usando Ondas Viajeras

Se puede ver que una solución de:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Entonces la solución es de la forma:

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

(se resuelve haciendo el cambio de variable $\xi = x + ct$ y $\eta = x - ct$, con lo que la ecuación queda como $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ y se integra dos veces.
Si queremos que empiece con cierta posición $f(x)$ y velocidad $g(x)$, necesitamos que:

$$F(x) + G(x) = f(x)$$
$$F'(x) - G'(x) = g(x)$$

Podemos derivar la primera ecuación y sumarla a la segunda para obtener que $2F'(x) = f'(x) + g(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \dfrac{1}{2}\left[f(x) + \int_0^x g(y)dy\right] + C_1$ y algo similar para G. Al sumar ambas soluciones, nos queda que:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy$$

es la **fórmula d'Alambert**

20.0.3. Solución con ondas estacionarias

Tenemos que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (hicimos $c = 1$ y la longitud $L = \pi$)
Proponemos una solución de $u(x,t) = \phi(x)\psi(t)$ y usamos el método de separación de variables.
Que nos lleva a que $\psi''(t) + m^2\psi(t) = 0 \quad , \quad \phi''(x) + m^2\phi(x) = 0$. Por lo que tenemos que:

$$\psi(t) = A\cos mt + B\sin mt$$
$$\phi(x) = A'\cos mx + B'\sin mx$$

Queremos que valga 0 en los extremos, $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$, lo que lleva a que $A' = 0$ y que m es un entero.
Por lo que nos queda que:

$$u_m(x,t) = (A_m\cos mt + B_m\sin mt)\sin mx$$

Que es una **onda estacionaria**
La onda de $m = 1$ se llama **tono fundamental** y las demás se llaman **sobretonos o harmónicos**.
Proponemos que la solución completa sea una superposición de estas soluciones:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx$$

Suponemos como condición inicial que $u(x, t = 0) = f(x)$, lo que implica que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx = f(x)$$

y los coeficientes A_m se calculan con Forier. Aquí fue donde surgió la duda de si se puede representar cualquier función como una serie de senos o cosenos.
Y los coeficientes B_m se pueden calcular derivando y usando que $u'(x, t = 0) = g(x)$

20.0.4. Ecuación del Calor

Consideramos una placa infinita en $\mathbb{R}^2$ y suponemos que tiene cierta distribución de temperatura a tiempo $t = 0$ como $u(x, y, t = 0) = u_0(x, y)$.
Queremos la función $u(x, y, t)$ que da la temperatura como función del tiempo.

Consideramos un pequeno cuadrado centrado en (x_0, y_0) con lados paralelos a los ejes y longitud h. La cantidad de energía calorífica en el cuadrado de superficie S es:

$$H(t) = \sigma \int \int_S u(x, y, t) dxdy$$

Con $\sigma > 0$ el calor específico del material. Entonces, el flujo de calor es:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sigma \int \int_S \frac{\partial u}{\partial t} dxdy \simeq \sigma h^2 \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, y_0, t)$$

Ahora aplicamos que el flujo del calor es proporcional a la diferencia de temperaturas. La diferencia de temperaturas en el eje x es:

$$-kh \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + h/2, y_0, t)$$

con $k > 0$ la conductividad. Similarmente para los otros lados, el flujo total es:

$$kh \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + h/2, y_0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 - h/2, y_0, t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0 + h/2, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, y_0 - h/2, t) \right]$$

Si hacemos h tender a 0 nos queda:

$$\frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

la **ecuación de onda dependiente del tiempo**

21. Propiedades de Series de Fourier

Coeficientes de Fourier son:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-2\pi inx/L}dx \qquad , \ n \in \mathbb{Z}$$

Funciones en el cículo unitario:
Son funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son 2π periódicas.
Como tiene periodo 2π, podemos restringirla a $[0, 2\pi]$ o a $[-\pi, \pi]$

21.0.1. Definiciones típicas y ejemplos

Sigamos que f es integrable en $[a, b]$ y definimos $L = b - a$, entonces, el n-ésimo **coeficiente de Fourier** es:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)e^{-2\pi inx/L}dx \quad , \ n \in \mathbb{Z}$$

La **Serie de Fourier** de f es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{2\pi inx/L}$$

No decimos nada de convergencia todavá, pero denotamos:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx/L}$$

para indicar que la serie de la derecha es la serie de Fourier de f.

Por ejemplo, si f es integrable y nos interesa el intervalo $[\pi, \pi]$, los coeficientes son:

$$\widehat{f}(n) = a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

Y la serie de Fourier es:

$$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

Por último, si g es periódica en $[0, 1]$, tenemos que:

$$\widehat{g}(n) = a_n = \int_0^1 g(x)e^{-2\pi inx}dx \qquad , \quad g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx}$$

La $N-$ésima **suma parcial** de la serie de Fourier de f es:

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{2\pi inx/L}$$

Necesitamos en qué sentido converge $S_N(f)$ a f para $N \to \infty$

Kernel de Dirichlet: Es el polinomio trigonométrico:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$$

Se llama el **N-ésimo kernel de Dirichlet**.
Resulta que también se puede escribir como:

$$D_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

Nos preguntamos si se cumple que $\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta) = f(\theta)$.

21.1. Unicidad de las Series de Fourier

Teorema 2.1: Supongamos que f es integrable en el círculo y que $\widehat{f}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, $f(\theta_0) = 0$ cuando f es continua en θ_0

Corolario: Si f es continua en el círculo y $\widehat{f}(n) = 0$ para todo n, entonces $f = 0$

Corolario: Supongamos que f es continua en el círculo y que la serie de fourier de f es absolutamente convergente i.e $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$. Entonces, la serie de fourier converge uniformemente a f, es decir:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta) = f(\theta)$$

- Dem: Definimos $g(\theta) = \sum \widehat{f}(n)e^{in\theta}$, por la convergencia de $\widehat{f}(n)$, g es continua. Además, los coeficientes te g son $\widehat{f}(n)$ (podemos cambiar integral y suma infinita por la convergencia). Entonces, el corolario anterior asegura que $f - g = 0 \Rightarrow f = g$

Notación O:
Escribir que $\widehat{f}(n) = O(1/|n|^2)$ significa que el lado derecho está acotado por un múltiplo del derecho. Es decir, existe $C > 0$ tal que $|\widehat{f}(n)| \leq C/|n|^2$ para $|n|$ grande.
Más generalmente, $f(x) = O(g(x))$ conforme $x \to a$ significa que existe C tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ conforme $x \to a$.

Corolario: Supongamos que f es clase C^2, entonces:

$$\widehat{f}(n) = O(1/|n|^2) \quad , \ |n| \to \infty$$

Por lo que la serie de Fourier de f converge absoluta y uniformemente a f.

Proof. The estimate on the Fourier coefficients is proved by integrating by parts twice for $n \neq 0$. We obtain

$$\begin{aligned}
2\pi\hat{f}(n) &= \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta \\
&= \left[f(\theta)\cdot\frac{-e^{-in\theta}}{in}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{in}\left[f'(\theta)\cdot\frac{-e^{-in\theta}}{in}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{(in)^2}\int_0^{2\pi} f''(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta \\
&= \frac{-1}{n^2}\int_0^{2\pi} f''(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta.
\end{aligned}$$

The quantities in brackets vanish since f and f' are periodic. Therefore

$$2\pi|n|^2|\hat{f}(n)| \leq \left|\int_0^{2\pi} f''(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta\right| \leq \int_0^{2\pi} |f''(\theta)|\, d\theta \leq C,$$

where the constant C is independent of n. (We can take $C = 2\pi B$ where B is a bound for f''.) Since $\sum 1/n^2$ converges, the proof of the corollary is complete.

Esto prueba que $|\widehat{f}(n)|$ es absolutamente convergente, y el corolario 2 nos asegura que la serie de Fourier converge a f

Se puede dar un teorema más fuerte en el que se pide que f sólo es C^1.

21.2. Convoluciones

Si f, g son 2π periódicas en $\mathbb{R}$, su **convolución** es $f * g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$$

Por la perioricidad, podemos cambiar las variables como:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)f(x-y)dy$$

El interés en las convoluciones surge de que la suma parcial de la serie de Fourier se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx} &= \sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy\right)e^{inx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)}\right)dy \\
&= (f * D_N)(x)
\end{aligned}$$

Donde $D_N(x) = \sum\limits_{n=-N}^{N} e^{inx}$.

Prop 3.1: Suponga que f, g, h son funciones integrables 2π-periódicas, entonces:

i) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

ii) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg) \quad , c \in \mathbb{C}$

- $f * g = g * f$
- $(f * g*) * h = f * (g * h)$
- $f * g$ es continua (aunque f, g son meramente integrables) $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$

Lema 3.2: Si f es integrable en el círculo y acotada por B. Entonces existe una secuencia $\{f_k\}$ de funciones continuas en el círculo tales que:

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f_k(x)| \leq B$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)|dx \to 0$$

21.3. Buenos Kernesls

Una familia de Kernels $K_n(x)$ se dice **buenoas Kernels** si:

a) Para todo $n \geq$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1$$

b) Existe una M tal que para todo n:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|dx \leq M$$

c) Para todo $\delta > 0$:

$$\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} |K_n(x)|dx \to 0$$

Podemos pensar en los Kernels como distribuciones de peso en el círculo. La propiedad a) dice que tiene densidad total 1 y la c) dice que se concentra cerca del origen cuando n es grande.

Teorema 4.1: Sea $\{K_n\}$ una familia de buenos Kernels, y f una función integrable en el círculo. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} (f * K_n)(x) = f(x)$$

Cuando f es continua en x. Si f es continua en todo el espacio, el límite es uniforme.
Por ello, se dice que los Kernels son una **aproximación a la identidad**.

Vimos antes que $S_N(f)(x) = (f * D_N)(x)$
Si D_N es un buen Kernel, entonces ya probaríamos que las sumas de Fourier tienden a f. Sin embargo, D_N no es un buen kernel porque no cumple la tercera propiedad.

Lo que sugiere que la convergencia de Fourier es intricada y más difícil de lo que parece.

21.4. Sumabilidad de Cesaro y Abel

21.4.1. Suma de Cesaro

Digamos que se nosa da una suma de complejos $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 + c_1 + \cdots$.
Definimos la n-ésima suma parcial como:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

Definimos el promedio de las primeras N sumas parciales como:

$$\sigma_N = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-1}}{N}$$

es la N-ésima **media de Cesaro** de la secuencia $\{s_k\}$ (es el promedio de las primeras sumas parciales)

Si σ_N converge a σ conforme N tiende a infinito, decimos que la serie $\sum c_n$ es **Cesaro sumable** a σ.

Teorema: Si $\sum s_n$ converge a s, entonces también es Cesaro sumable con resultado s. Pero incluye más series, por ejemplo, $1-1+1-1+\cdots$ no tiene límite usual pero sí es cesaro sumable, con resultado $1/2$.

21.4.2. Teorema de Fejer

Consideramos el promedio N de Cesaro de una serie de Fourier, que es:

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{S_0(f)(x) + \cdots + S_{N-1}(f)(x)}{N}$$

Como $S_n(f) = f * D_n$, encontramos que:

$$\sigma_N(f)(x) = (f * F_N)(x)$$

Donde F_N es el N ésimo **Kernel de Fejer** dado por:

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N}$$

Lema: Se puede porbar que:

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$$

Y además, F_N son un buen Kernel.

Teorema 5.2: Sea f integrable en un círculo, entonces la serie de FOrier de f es Cesaro sumable a f en cada punto de continuidad de f.
Si f es continua en todo el círculo, entonces la serie de FOurier de f es Cesaro sumable uniformemente a f.

Corolario 5.3: Si f es integrable en el círculo y $\widehat{f}(n) = 0$ para todo n, entonces $f = 0$ en todos los puntos de continuidad de f.

Corolario 5.4 Funciones continuas en el círculo unitario pueden ser aproximadas por polinomios trignométricos.

21.4.3. Promedios de Abel

Otro método es el de Abel.
Una serie de complejos $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ es **Abel Sumable** a s si para todo $0 \leq < 1$, la serie:

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$$

converge y

$$\lim_{r \to 1} A(r) = s$$

Las cantidades $A(r)$ se llaman **promedios de Abel**

Por ejemplo, la suma $1 - 2 + 3 - 4 + 5 = \sum(-1)^k(k+1)$ es Abel sumable pues:
$A(r) = \sum(-1)^k(k+1)r^k = \dfrac{1}{(1+r)^2}$

Teorema 5.6: La serie de Fourier de una función integrable f es Abel sumable a f en todos los puntos de continuidad. Si f es continua en todo el círculo, la serie es uniformemente sumable de Abel a f.

22. Convergencia de Series de Fourier

22.1. Mean-Square Convergence

Teorema: Sea f una función integrable en el círculo. Entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta) - S_N(f)(\theta)|^2 d\theta \to 0 \quad \text{, conforme } N \to \infty$$

22.1.1. Espacios Vectoriales y Productos Internos

Un **Producto interno** en un espacio V es una función $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que:

- Es bilineal (aunque es conjugado lineal en la segunda entrada)
- Es simétrica $(X, Y) = (Y, X)$
- $(X, X) \geq 0$

Con un producto interno, podemos definir una norma como $||X|| = (X, X)^{1/2}$

Si además $||X|| = 0$ implica $X = 0$, decimos que es un producto punto **positivo definido**

Ortogonal: Dos puntos $X, Y \in V$ son ortogonales si $(X, Y) = 0$.

Teorema:

i **Pitágoras:** Si X, Y son ortogonales, entonces:

$$||X + Y||^2 = ||X||^2 + ||Y||^2$$

- **Cauchy- Shwarz** Para todo $X, Y \in V$, tenemos que:

$$|(X, Y)| \leq ||X||||Y||$$

- **Desigualdad del triángulo:** Para todo $X, Y \in V$ tenemos que:

$$||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||$$

22.1.2. Ejemplos:

Ejemplo: el espacio vectorial $l^2(\mathbb{Z})$ en $\mathbb{C}$ de todas las secuencias bi infinitas de complejos:

$$(\cdots, a_{-n}, \cdots a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$$

tales que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$ es un espacio vectorial.
El producto está dado por la serie absolutamente convergente:

$$(A, B) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \bar{b}_n$$

Y la norma es:

$$||A|| = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2\right)^{1/2}$$

En este caso se cumple que:

- El producto interno es estrictamente definido positivo ($||X|| = 0 \Rightarrow X = 0$
- El espacio vectorial es **completo**

Espacio de Hilbert: Es un espacio con producto interno con las propiedades anteriores (positivo definido y completo).
Si no cumple alguna de estas dos propiedades, se llama **pre-Hilbert**

Ejemplo 2: Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de todas las funciones Riemann-integrables en $[0, 2\pi]$. Este es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Se le define el producto interno como:

$$||f|| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)g(\bar{\theta})d\theta$$

Y la norma es entonces:

$$||f|| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)^2 d\theta\right)^{1/2}$$

Se puede probar que cumplen con las propiedades de la desigualdad de triángulo y esas cosas.

i $\mathcal{R}$ falla en la condición i) de espacio de Hilbert. Porque hay funciones con $||f|| = 0$ que no son 0 en todo $[0, 2\pi]$. Pues $||f|| = 0$ implica que f es 0 en todo menos en un conjunto de medida cero.
Para ello, definimos que dos funciones son iguales si lo son en todo $[0, 2\pi]$ excepto en un conjunto de medida cero y nos quitamos esa dificultad.

ii) $\mathcal{R}$ no es completo.
Por ejemplo, podemos considerar $f(\theta) = \begin{cases} 0 & ,\theta = 0 \\ \log(1/\theta) & ,0 < \theta \leq 2\pi \end{cases}$
que claramente no está en el espacio.
Sin embargo, las funciones $f_n(\theta) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq \theta \leq 1/n \\ f(\theta) & ,1/n < \theta \leq 2\pi \end{cases}$
Sí están en el espacio y son una serie de Cauchy que converge a f

22.1.3. Prueba de Mean Convergence

For each integer n, let $e_n(\theta) = e^{in\theta}$, and observe that the family $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is **orthonormal**; that is,

$$(e_n, e_m) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = m \\ 0 & \text{if } n \neq m. \end{cases}$$

Let f be an integrable function on the circle, and let a_n denote its Fourier coefficients. An important observation is that these Fourier coefficients are represented by inner products of f with the elements in the orthonormal set $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$(f, e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta = a_n.$$

In particular, $S_N(f) = \sum_{|n|\leq N} a_n e_n$. Then the orthonormal property of the family $\{e_n\}$ and the fact that $a_n = (f, e_n)$ imply that the difference $f - \sum_{|n|\leq N} a_n e_n$ is orthogonal to e_n for all $|n| \leq N$. Therefore, we must have

$$(2) \qquad (f - \sum_{|n|\leq N} a_n e_n) \perp \sum_{|n|\leq N} b_n e_n$$

for any complex numbers b_n. We draw two conclusions from this fact.

First, we can apply the Pythagorean theorem to the decomposition

$$f = f - \sum_{|n|\leq N} a_n e_n + \sum_{|n|\leq N} a_n e_n,$$

where we now choose $b_n = a_n$, to obtain

$$\|f\|^2 = \|f - \sum_{|n|\leq N} a_n e_n\|^2 + \|\sum_{|n|\leq N} a_n e_n\|^2.$$

Since the orthonormal property of the family $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ implies that

$$\|\sum_{|n|\leq N} a_n e_n\|^2 = \sum_{|n|\leq N} |a_n|^2,$$

we deduce that

$$(3) \qquad \|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{|n|\leq N} |a_n|^2.$$

The second conclusion we may draw from (2) is the following simple lemma.

Lema de Mejor aprox: Si f es integrable en el círculo con coeficientes a_n, entonces:

$$||f - S_n(f)|| \leq ||f - \textstyle\sum_{|n|\leq N} c_n e_n||$$

Para cualesquiera complejos c_n. Y la igualdad se cumple sólo cuando $c_n = a_n$. Lo que prueba que los mejores coeficientes para aproximar f como polinomio trigonométrico son los de Fourier.

Teorema: Sea f integrable en el círculo y $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$. Entonces:

i) Mean Square Convergence:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)-S_N(f)(\theta)|^2d\theta\to 0 \text{ conforme } N\to\infty$$

ii) Identidad de Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^2d\theta$$

Remark: Si $\{e_n\}$ es cualquier familia de funciones ortonormales en el círculo y $a_n = (f, e_n)$. Entonces:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\leq||f||^2$$

Y se llama **Desigualdad de Bessel**
La igualdad se cumple cuando $\{e_n\}$ es una base ($\sum_{|n|\leq N}||a_ne_n-f||\to 0$ conforme $N\to\infty$ y se convierte en la identidad de Parseval.

Remark 2: A cualquier función integrable le podemos asociar la serie $\{a_n\}$ de coeficientes de Fourier. La identidad de Parseval asegura que $\{a_n\}\in l^2(\mathbb{Z})$

Lema de Riemann-Lebesgue: Si f es integrable en el círculo, entonces $\widehat{f}(n)\to 0$ conforme $|n|\to\infty$

Lema: Supongamos que F, G son integrables en el círculo, con:

$$F\sim\sum a_ne^{in\theta} \text{ y } G\sim\sum b_ne^{in\theta}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\theta)\bar{G}(\theta)d\theta=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\bar{b}_n$$

22.2. Regreso a Convergencia Puntual

Teorema 2.1: Sea f integrable en el círculo y diferenciable en θ_0. Entonces $S_N(f)(\theta_0)\to f(\theta_0)$ conforme N tiende a infinito.

Teorema: Sea f, g integrables en el círculo y para una θ_0 existe un abierto I que contiene a θ_0 tal que $f(\theta)=g(\theta)$ en I.
Entonces $S_N(f)(\theta_0)-S_N(g)(\theta_0)\to 0$ conforme N tiende a infinito.

Condiciones de Dirichlet:
Si f es una función del círculo que cumple:

- Es integrable
- Tiene una cantidad finita de max y min (o bien, tiene bounded variation)
- f tiene una cantidad finita de discontinuidades (que no se van al infinito)

Entonces la serie de Fourier tiende a f en los puntos en los que es continua y se queda en el promedio en los puntos de discontinuidad.

23. Aplicaciones

23.1. Desigualdad Isoperimétrica

Sea Γ una curva cerrada simple de longitud L que encierra un área A. Queremos ver la curva que engloba más área.

Obviamente es el círculo, pero demostrarlo de forma precisa es difícil.

23.1.1. Curvas

Una curva es un mapeo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$.
Es **simple** si no se autointeresecta
Cerrada si su inicio y final coinciden.
Regular si $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t.

Podemos extender a γ en $\mathbb{R}$ como una función de periodo $b - a$ y pensar en γ como una función en el círculo.

- **Longitud:** $l = \displaystyle\int_a^b |\gamma'(s)| ds$

Que no depende de la parametrización.

Parametrización p.l.a: Es la que cumple $|\gamma'(s)| = 1$ para todo s. Siempre se puede conseguir.
Y se cumple que la longitud de γ es $l = b - a$.

Área: El área tiene la siguiente fórmula que sale del cálculo:

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_\gamma (xdy - ydx)\right| = \frac{1}{2}\left|\int_a^b x(s)y'(s) - y(s)x'(s)ds\right|$$

23.1.2. Teorema

Teorema: Si Γ es una curva simple cerrada en $\mathbb{R}^2$ de longitud l y área A entonces:

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi}$$

Con la igualdad sólo si es un círculo.

Primero reescalamos el problema haciendo $(x, y) \to (2\pi/lx, 2\pi/ly)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Ahora sólo hay que probar que si $l = 2\pi$, entonces $A \leq \pi$.

Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ una p.l.a de la curva. Esto implica que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x'(s)^2+y'(x)^2)ds = 1 \quad (1)$$

Las funciones $x(s), y(s)$ son periódicas, por lo que podemos considerar:

$$x(s) \sim \sum a_n e^{ins} \quad , \quad y(s) \sim \sum b_n e^{ins}$$

Luego, su derivada $x'(s)$ tiene coeficientes $a_n in$ (se puede probar sin derivar dentro de la suma) y tenemos:

$$x'(s) \sim \sum a_n ine^{ins} \quad , \quad y'(s) \sim \sum b_n ine^{ins}$$

La identidad de Parseval $\sum |c_n|^2 = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2$
aplicada a x' nos dice que $\frac{1}{2\pi}\int x'(s)^2 ds = \sum |a_n in|^2$ y similarmente para y'. Por lo que en total tenemos que:

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x'(s)^2+y'(s)^2)ds = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|^2(|a_n|^2+|b_n|^2)$$

Ahora aplicamos la forma bilineal de la identidad de Parseval y usamos que $x(s), y(s)$ son reales, por lo que $a_n = \bar{a_{-n}}$, $b_n = \bar{b_{-n}}$. Entonces:

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}x(s)y'(s)-y(s)x'(s)dx\right| = \pi\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}n(a_n\bar{b}_n - b_n\bar{a}_n)\right|$$

Observamos luego que $|a_n\bar{b}_n - b_n\bar{a}_n| \leq 2|a_n||b_n| \leq |a_n|^2+|b_n|^2$
Y como $|n| \leq |n|^2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} A &\leq \pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^2(|a_n|^2+|b_n|^2) \\ &\leq \pi \end{aligned}$$

24. La transformada de Fourier en $\mathbb{R}$

Las transformaciones de Fourier son similares a las series pero aplican para funciones en todo $\mathbb{R}$ aunque no sean periódicas con tal de que se hagan 0 en infinito.

Recordamos que la serie de Fourier le asigna a una función f periódica una secuencia de números (los coeficientes de Fourier)
Mientras que para una función f en $\mathbb{R}$ que se hace 0 en el infinito, la transformada $\widehat{f}$ es una nueva función en $\mathbb{R}$.
Es una forma continua de los coeficientes de Fourier.

Recordamos que para una función f periódica tenemos que:

$$a_n = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx$$

y con las condiciones apropiadas:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx}$$

Ahora reemplazamos las cosas discretas.
Dada una función f en $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos su transformada de fourier como la función $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$$

Y esperamos que de alguna forma se pueda recuperar f con la transformada:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi$$

24.1. Teoría elemental de las transformadas de Fourier

24.1.1. Integración de funciones en la recta real

Definimos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)dx$$

Función de Decrecimiento Moderado: Se llama así si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $A > 0$ con:

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Las denoramos como $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, que forma un espacio vectorial.
En estas funciones se puede integral de -infinito a infinito.

Prop: La integral de una función de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ cumple:

i) **Linealidad:** Si $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y $a, b \in \mathbb{C}$ entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} (af(x) + bg(x))dx = a \int_{\mathbb{R}} f(x)dx + b \int_{\mathbb{R}} g(x)dx$$

ii) **Invariancia traslacional**: para todo $h \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-h)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

iii) **Escalamiento** Si $\delta > 0$, entonces:

$$\delta \int_{\mathbb{R}} f(\delta x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

iv) **Continuidad:** Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)|dx \to 0 \quad , \text{ conforme } h \to 0$$

24.1.2. Definición Transformada de Fourier

Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ entonces su **transformada de Forier** es:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$$

Se puede ver sencillamente que $\widehat{f}$ es continua y tiende a 0 en el infinito.

24.1.3. Espacio de Schwartz

Espacio de Schwartz en $\mathbb{R}$: Es el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables tales que todas las derivadas **decaen rápidamente** en el sentido que:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty \text{ para todo } k, l \geq 0$$

Lo denoramos por $S(\mathbb{R})$ y es un e.v. sobre $\mathbb{C}$.
Además, si $f \in S(\mathbb{R})$, todas las derivads están en $S(\mathbb{R})$ y $p(x)f(x)$ está en $S(\mathbb{R})$ para cualquier polinomio $p(x)$.

Gaussiana: Es un ejemplo sencillo de una función en $S(\mathbb{R})$ que es:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Más en general, e^{-ax^2} pertenece a $S(\mathbb{R})$ para todo $a > 0$.

24.1.4. La transformada de Fourier en $S(\mathbb{R})$

Como dijimos, se define como:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$$

Denotamos con una flecha el hecho de sacar la transformada de Fourier y tenemos las siguientes propiedades:

i) $f(x+h) \to \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ih\xi} \quad ,h \in \mathbb{R}$

ii) $f(x)e^{-2\pi ixh} \to \widehat{f}(\xi+h) \quad , \ h \in \mathbb{R}$

iii) $f(\delta x) \to \frac{1}{\delta}\widehat{f}(\delta^{-1}\xi) \quad , \ \delta > 0$

iv) $f'(x) \to 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$

v) $-2\pi ixf(x) \to \frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$

Teorema: Si $f \in S(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f} \in S(\mathbb{R})$

Teorema: Si $f(x) = e^{-\pi x^2}$, entonces $\widehat{f}(\xi) = f(\xi)$
Corolario: Si $\delta > 0$ y $K_\delta(x) = \delta^{-1/2}e^{-\pi x^2/\delta}$, entonces $\widehat{K}_\delta(\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}$

Y tenemos que estos $K_\delta(x) = \delta^{-1/2}e^{-\pi x^2/\delta}$
forman un buen Kernel, pues:

i) $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(x)dx = 1$

ii) $\int_{\mathbb{R}} |K_\delta(x)|dx \leq M$

iii) Para todo $\eta > 0$, tenemos que conforme $\delta \to 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)|dx \to 0$

Corolario: Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces:

$$(f * K_\delta)(x) \to f(x) \text{ uniformemente conforme } \delta \to \delta$$

Inversión

Proposición: Si $f, g \in S(\mathbb{R})$ entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)g(y)dy$$

Teorema de inversión: Si $f \in S(\mathbb{R})$ entonces definimos:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$$

Y se tiene que:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi$$

Corolario: La transformada de Fourier es un mapeo biyectivo del espacio de Schwartz en sí mismo.

24.1.5. Plancherel

Proposición: Si $f, g \in S(\mathbb{R})$ entonces:

i) $f * g \in S(\mathbb{R})$

ii) $f * g = g * f$

iii) $\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$

Teorema de Pancherel: Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $||\widehat{f}|| = ||f||$.
Donde $||f|| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$

24.1.6. Teorema de Weiestrass

Teorema de aproximación: Sea f una función continua en el compacto $[a, b]$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un polinomio P tal que:

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \epsilon$$

24.2. Aplicaciones a las EDPs

24.2.1. La ecuación de Calor

Consideramos un tubo infinito (la líneal real) y se le da una distribución de temperatura inicial $f(x)$.
La ecuación de calor es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Con $u(x, 0) = f(x)$.
Aplicamos la transformada de Fourier de ambos lados y tenemos que:

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -4\pi^2\xi^2\widehat{u}(\xi, t)$$

Que es una ecuación diferencial para t (consideramos ξ fijo). Entonces nos queda que:

$$\widehat{u}(\xi,t)=A(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}$$

Además, la transformada de Fourier de las condiciones iniciales nos dice que $\widehat{u}(\xi,0)=\widehat{f}(\xi)$
Y entonces $A(\xi)=\widehat{f}(\xi)$.
Entonces, la solución es:

$$\widehat{u}(\xi,t)=\widehat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}$$

Entonces, al sacar la transformada inversa de Fourier, tenemos que:

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{-4\pi^2 t\xi^2}e^{2\pi i\xi x}d\xi$$

24.3. Fórmula de Sumación de Poisson

Dada una función $f\in S(\mathbb{R})$ podemos construir una función de periodo 1 como:

$$F_1(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+n)$$

Es claro que tiene periodo 1 y que la suma converge (porque f decae rápido).
Esta función se llama **periodización de** f.

Hay otra forma de "periodizar.ª una función, que se consiqgue como una forma discreta de la transformada de Fourier:

$$F_2(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

Donde $\widehat{f}$ es la transformada de Fourier.
La función converge y es de periodo 1 por las propiedades de la exponencial.

Teorema: Fórmula de Sumación: Si $f\in S(\mathbb{R})$, entonces:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)$$

24.3.1. Funciones Theta y Zeta

Definimos la **función Thera** $\theta(s)$ para $s>0$ como:

$$\theta(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 s}$$

Teorema: $s^{-1/2}\theta(1/s)=\theta(s)$ cuando $s>0$.

Función Zeta:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

La función ζ, θ, Γ se relacionan por:

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\gamma(s) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{s/2-1}(\theta(t)-1)dt$$

24.4. Principio de Incertidumbre

Teorema: Suponga que ψ es una función en $S(\mathbb{R})$ que cumple la condición de normalización $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$. Entonces:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2|\psi(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

Es decir, la variancia de la posición por la variancia del momento es $\geq \dfrac{1}{16\pi^2}$

25. Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^d$

25.1. Preliminares

$\mathbb{R}^d$ es un espacio vectorial con producto punto definido como:

$$x \cdot y = x_i y_i$$

Y con norma definida como:

$$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$$

25.1.1. Simetrías

Las simetrías en $\mathbb{R}^d$ son:

- **Traslación:** $x \to x + h$ para $h \in \mathbb{R}^d$
- **Dilatación:** $x \to \delta x$ con $\delta > 0$
- **Rotación:** Es una transformación $R : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ que preserva el producto punto i.e:
  - $R(ax + by) = aR(x) + bR(y)$
  - $R(x) \cdot R(y) = x \cdot y$

  Esta condición se puede cambiar por $|R(x)| = |x|$ o por $R^t = R^{-1}$.
  Se llama **rotación propia** si $\det(R) = 1$ y rotación **impropia** si $\det(R) = -1$ (que en realidad es una reflexión, pero bueno).

Ejemplos

- Si R es una rotación en $\mathbb{R}^3$, entonces existe un vector unitario γ con:
  - R fija γ, es decir $R(\gamma) = \gamma$
  - Si $\mathcal{P}$ es el plano que pasa por el origen y perpendicular a γ, entonces la restricción $R : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es una rotación en $\mathbb{R}^2$
  - Dadas dos bases ortonormales $\{e_i\}$ y $\{e'_i\}$, podemos definir una rotación como $R(e_i) = e'_i$

25.1.2. Integración en $\mathbb{R}^d$

Una función $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ se dice que es **rápidamente decreciente** si para todo multiíndice x^α se tiene que la función $|x^\alpha f(x)|$ es acotada.
Donde $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$.
Equivalentemente, es de decrecimiento rápido si:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^k |f(x)| < \infty \quad , \; k = 0, 1, 2, \cdots$$

Dada una función de decrecimiento rápido, definimos:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{Q^N} f(x)dx$$

Donde Q^N es un cubo cerrado centrado en el origen, con longitud de sus lados igual a N. El límite existe por el decrecimiento de f.

Propiedades: (al integrar funciones decrecientes como definimos):

i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x+h)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$ para todo $h \in \mathbb{R}^d$

ii) $\displaystyle\delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$ para todo $\delta > 0$

iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(R(x))dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$, para rotación R

25.2. Teoría Elemental de la Serie de Fourier

Espacio de Schwartz: Es el espacio $S(\mathbb{R}^d)$ consiste de funciones infinitamente diferenciables tales que:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f(x) \right| < \infty$$

Para todo multiíndice α, β.

Gaussiana General: Es la función $e^{-\pi|x|^2}$, que es de $S(\mathbb{R}^d)$

Transformada de Fourier: Para una función de Schwartz, definimos:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

Propiedades: Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces:

i) $f(x+h) \to \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot h}$, con $h \in \mathbb{R}^d$

ii) $f(x)e^{-2\pi i x\cdot h} \to \widehat{f}(\xi + h)$, $h \in \mathbb{R}^d$

iii) $f(\delta x) \to \delta^{-d}\widehat{f}(\delta^{-1}\xi)$, $\delta > 0$

iv) $\displaystyle\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) \to (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$, para todo α multiíndice

v) $\displaystyle(-2\pi i x)^\alpha f(x) \to \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha \widehat{f}(\xi)$

- $f(Rx) \to \widehat{f}(R\xi)$ con R una rotación.

Corolario: La transformada de Fourier mapea $S(\mathbb{R}^d)$ en sí mismo.

f **es Radial** si depende solamente de $|x|$.
Entonces $f(Rx) = f(x)$ para toda rotación R (porque $|Rx| = |x|$).
(En $\mathbb{R}$ una función radial se reduce a función par).

Corolario: La transformada de una función radial es radial

Teorema (Inversión): Suponda que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces definimos:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$$

Se tiene que entonces:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi$$

Y además, **Plancherel**:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx$$

25.3. La ecuación de onda en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$

La generalización de la ecuación de onda en d dimensiones es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Problema de Cauchy: Queremos encontrar la solución a la ecuación de onda dadas las condiciones siguientes:

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

donde $f, g \in S(\mathbb{R}^d)$

El procedimiento consiste en tomar la transformada de Fourier de la ecuación y de las fronteras. Al aplicarlas y usar las propiedades, nos queda que:

$$-4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(\xi, t)$$

para un $\xi \in \mathbb{R}^d$.
Esta es una ecuación ordinaria en t, cuya solución es:

$$\widehat{u}(\xi, t) = A(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + B(\xi)\sin(2\pi|\xi|t)$$

Donde $A(\xi), B(\xi)$ son funciones desconocidas.
Luego, tomando la transformada de Fourier de las condiciones iniciales (respecto a x), tenemos que:

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) \quad , \quad \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi)$$

Podemos usar esto para resolver para $A(\xi)$ y para $B(\xi)$ para obtener:

$$A(\xi) = \widehat{f}(\xi) \quad , \quad 2\pi|\xi|B(\xi) = \widehat{g}(\xi)$$

Entonces, encontramos que:

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}$$

La solución verdadera se obtiene al calcular la transforada inversa de esto y tenemos ya que:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d}\left[\widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right]e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$$

Unicidad: Esta solución dadas las condiciones iniciales sí es única, pero esto es medio difícil de probar.

25.4. Transformada de Radon

Sea O un cuerpo en $\mathbb{R}^2$.
Suponemos que un beam muy angosto de rayos X atraviesa este objeto.

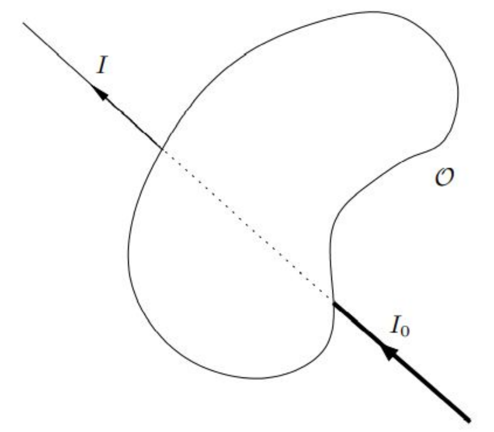


Figure 4. Attenuation of an X-ray beam

Si I_0 es la intensidad de luz que llega y I que sale, entonces:

$$I = I_0 e^{-d\rho}$$

Con ρ el **coeficiente de atenuación** y d la distancia que atraviesa.
Si el objeto consta de dos materiales, con coeficientes ρ_1, ρ_2 entonces tenemos que $I = I_0 e^{-d_1\rho_1 - d_2\rho_2}$
Con d_1, d_2 la distancia viajada en cada material.
Si el coeficiente de atenuación ρ es una función de $\mathbb{R}^2$, entonces tenemos en general que:

$$I = I_0 e^{\int_L \rho}$$

Donde L se hace a lo largo del camino que sigue el rayo en $\mathbb{R}^2$.

Como nosotros conocemos I, I_0, entonces podemos obtener:

$$\int_L \rho$$

Definimos la **Transformada X-Ray** de $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como la función:

$$X(\rho)(L) = \int_L \rho$$

Le asigna a cada función $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ otra función $X(\rho)$ que toma líneas L en $\mathbb{R}^2$ y da números.

Problema de Reconstrucción: Encontrar una fórmula de ρ a partir de $X(\rho)$.

25.4.1. La transformada de Radon en $\mathbb{R}^3$

El experimento de antes aplica para $\mathbb{R}^3$ también. Mandamos un rayo por O, lo que nos permite determinar la cantidad:

$$\int_L \rho$$

Con L cualquier camino en $\mathbb{R}^3$.
Resulta que esta es demasiada información para determinar ρ.

Si $\mathcal{P}$ es un plano cualquiera en $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función definida como:

$$R(f)(P) = \int_P f$$

Primero determinamos a qué nos referimos con la integral de P.
Recordamos que la descripción de un plano en $\mathbb{R}^3$ está dada por un vector $\gamma \in S^2$ y un número $t \in \mathbb{R}$ como:

$$P_{t,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \gamma = t\}$$

Por lo que parametrizamos con un vector γ ortogonal al plano y la distancia t al origen.

Dada una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suficientemente suave. Escogemos una base ortonormal e_1, e_2, γ tal que e_1, e_2 es una base del plano y γ el vector ortonormal. Entonces, cualquier $x \in P_{t,\gamma}$ se puede escribir como:

$$x = t\gamma + u \qquad , u = u_1 e_1 + u_2 e_2 \text{ con } u_1, u_2 \in \mathbb{R}$$

Definimos:

$$\int_{P_{t,\gamma}} f = \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1 e_1 + u_2 e_2) du_1 du_2$$

Se puede probar que esto es independiente de la elección de e_1, e_2.

Entonces, nuevamente la transformada de **Radon** de $f \in S(\mathbb{R}^3)$ es:

$$R(f)(t, \gamma) = \int_{P_{t,\gamma}} f$$

Por lo que la transformada de Radon es una función en los planos de $\mathbb{R}^3$.

- **Problema de Unicidad:** Si $R(f) = R(g)$ entonces $f = g$
- **Reconstrucción:** Expresar f en términos de $R(f)$

Lema: Si $f \in S(\mathbb{R}^3)$, entonces $R(f)(t, \gamma) \in S(\mathbb{R})$ para cada γ fijo. Además:

$$\widehat{R}(f)(s, \gamma) = \widehat{f}(s\gamma)$$

$\widehat{f}$ denota la transformada 3D de Fourier de f.

Corolario: Si $f, g \in S(\mathbb{R}^3)$ y $R(f) = R(g)$, entonces $f = g$

Teorema: Si $f \in S(\mathbb{R}^3)$, entonces:

$$-8\pi^2 f = \delta(R^* R(f))$$

Y ya se puede encontrar f a partir de R.

26. Análisis de Fourier Finito

Definimos $\mathbb{Z}(N)$ como el grupo multiplicativo de N-ésimas raíces de la unidad (isomorfo a $\mathbb{Z}_n$).

26.1. Análisis de Fourier en $\mathbb{Z}(N)$

26.1.1. El grupo $\mathbb{Z}(N)$

Si N es un entero positivo, el grupo $\mathbb{Z}(N)$ es el grupo de todas las raíces N-ésimas de 1. Es decir:

$$\{1, e^{2\pi i/N}, e^{2\pi i 2/N}, \cdots, e^{2\pi i(N-1)/N}\}$$

Es claro que es un grupo abeliano isomorfo a $\mathbb{Z}_N$.

Queremos encontrar las funciones que corresponden a las exponenciales $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$. Algunas propiedades importantes de las exponenciales son:

i) $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal con el producto interno típico en el espacio de funciones integrables en el círculo.

ii) Las combinaciones lineales finitas de los e_n (polinomios trigonométricos) son densos en el espacio de funciones continuas en el círculo.

iii) $e_n(x+y) = e_n(x)e_n(y)$

En $\mathbb{Z}(N)$, los análogos son las N funciones $e_0, e_1, \cdots, e_{N-1}$ dadas por:

$$e_l(k) = \zeta^{lk} = e^{2\pi i lk/N} \qquad \text{para } l = 0, \cdots, N \ , \ k = 0, \cdots, N-1$$

Donde $\zeta = e^{2\pi i/N}$. Definimos el producto interno como:

$$(F, G) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\bar{G(k)}$$

Y su norma como:

$$||F||^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2$$

Lemma: La familia $\{e_0, \cdots, e_{N-1}\}$ es ortogonal y tienen norma N:

$$(e_m, e_l) = N\delta_{m,l}$$

Se define $e_l^* = \dfrac{1}{\sqrt{N}} e_l$ para que sea una base ortonormal.

Sea F una función en $\mathbb{Z}(N)$, el **n-ésimo coeficiente de Fourier** de F es:

$$a_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{-2\pi ikn/N}$$

Teorema: Si F es una función en $\mathbb{Z}(N)$, entonces:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{2\pi ink/N}$$

Y además:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2$$

27. Análisis Complejo

28. Preliminares

28.0.1. Campo Complejo

Los números complejos son de la forma $z = x + iy$ con $i^2 = -1$.
Y forman un campo isomorfo a $\mathbb{R}^2$. Dado un número complejo $z = x + iy$ le podemos definir:

- **Parte Real e Imaginaria:** $Re(z) = x \quad , \quad Im(z) = y$
- **Conjugado:** $\bar{z} = x - iy$
- **Norma:** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (que cumple todas las propiedades de una norma)
- Se puede representar de forma polar como:

$$z = re^{i\theta}$$

  Con $r = |z|$ y $\tan\theta = y/x$

- El producto de dos complejos multiplica sus normas y suma sus ángulos.

28.0.2. Convergencia

Dada una secuencia $\{z_1, z_2, \cdots, \}$, decimos que **converge** a un punto $w \in \mathbb{C}$ si:

$$w = \lim_{n\to\infty} z_n$$

Lo que significa que para toda $\epsilon > 0$ existe una N tal que si $n > N$ entonces $|z_n - w| < \epsilon$.

El espacio $\mathbb{C}$ es completo, por lo que todas las **series de Cauchy** que cumplen que para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que:

$$\text{Si } n, m > N, \text{ entonces } |z_n - z_m| < \epsilon$$

28.0.3. Topología

- **Disco Abierto**:

$$D_r(z_0) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_0| < r\}$$

- **Punto interior:** $z_0 \in \Omega$ es un punto interior de Ω si existe r tal que $D_r(z_0) \subset \Omega$
- **Interior de Ω:** Es el conjunto de todos los puntos interiores de Ω. O bien, la intersección de todos los abiertos metidos en Ω.
- **Abierto:** Es un conjunto igual a su interior.

- **Punto Límite:** $z \in \mathbb{C}$ es un punto límite de Ω si existe una secuencia de puntos $z_n \in \Omega$ tal que $z_n \neq z$ y que $\lim z_n = z$. O bien, para todo disco $D_r(z_0)$, se tiene que $D_r(z_0)/z_0 \cap \Omega \neq \emptyset$
- **Cerrado:** Es un conjunto cuyo complemento es abierto
- **Cerradura:** Dado Ω, $\bar{\Omega}$ es el conjunto de todos los puntos límites de Ω. O bien, es la intersección de todos los cerrados que contienen a Ω
- **Frontera:** La frontera de Ω es $\partial\Omega = \bar{\Omega}/\Omega$
  Son los puntos que toda bola que los contiene intersecta a Ω y a Ω^c
- **Acotado:** Si existe $M > 0$ tal que $|z| < M$ para todo $z \in \Omega$
- **Diámetro**: El diámetro de Ω es:

$$diam(\Omega) = \sup_{z,w\in\Omega} |z - w|$$

- **Compacto:** Si toda cubierta abierta de Ω tiene una subcubierta finita. O equivalentemente en $\mathbb{C}$, si es cerrado y acotado.
- **Conexo:** Es un conjunto Ω para el que no se pueden encontrar abiertos Ω_1, Ω_2 no vacíos disjuntos tales que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.
  Si Ω es abierto, es equivalente conexo y arcoconexo (entre cualesquiera dos puntos se puede formar una curva que los conecta contenida en Ω). Sin embargo, en general, estos conceptos no son iguales.

Prop 1.4: Si $K_1 \supset K_2 \supset \cdots K_n \supset \cdots$ es una secuencia de compactos no vacíos con la propiedad que:

$$diam(\Omega_n) \to 0$$

Entonces existe un único punto $w \in \mathbb{C}$ tal que $w \in \Omega_n$ para todo n.

- Dem: Escogemos un z_n en cada Ω_n. La condición del diámetro tiende a cero es equivalente a que $\{z_n\}$ es de Cauchy, entonces converge a un límite w. Como los Ω_n son compactos, debemos de tener que $w \in \Omega_n$.
  La unicidad se puede probar por contradicción

28.1. Funciones en el plano complejo

Son funciones $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Continua en z_0: Si cumple que para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cuando:

$$z \in \Omega \text{ y } |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

Teorema: Una función continua en un compacto Ω es acotada y obtiene un máximo y un mínimo.

28.1.1. Holomorfa:

Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es **holomorfa en** $z_0 \in \Omega$ si existe el límite:

$$f'(z_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

Con $h \in \mathbb{C}$.

Una función f es **Holomorfa** en Ω si lo es en todo punto de Ω.

Ejemplos:

- Cualquier polinomio es derivable como uno lo esperaría
- La función $f(z) = \bar{z}$ no es derivable

Una definición alternativa es que f es derivable en $z_0 \in \Omega$ sii existe $a =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - (ah + f(z_0))}{h} = 0$$

Es decir, cerca de z_0 la función se ve como un producto por un complejo a (un amplitwist)

Prop: Si f, g son holomorfas en Ω, entonces:

- $f + g$ es holomorfa y $(f+g)' = f' + g'$
- fg es holomorfa en Ω y $(fg)' = f'g + fg'$
- Si $g(z_0) \neq 0$, entonces f/g es holomorfa en z_0 y:

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

- Si $f : \Omega \to U$, $g : U \to \mathbb{C}$ son holomorfas, entonces la regla de la cadena dice:

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

28.1.2. Mapeos

Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se puede ver como un mapeo del plano en si mismo. Y se puede representar como:

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Donde se especifica la parte real e imaginaria del mapeo.

Una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ es diferenciable en p_0 si existe una transformación lineal tal que si $h \in \mathbb{R}^2$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p_0+h)-f(p_0)-J(h)}{|h|} = 0$$

Y resulta que el Jacobiano es:

$$J = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix}$$

En el caso complejo, nos interesaría que la función lineal J fuera en realidad una función $\mathbb{C}-$lineal (multiplicar por un complejo).
Dichas funciones tienen matrices de la forma: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
Lo cual nos lleva a las **Ecuaciones de Cauchy Riemann**:
Una función $f = u + iv$ es diferenciable sii:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Y el complejo representado por la matriz jacobiana es el valor de $f'(z_0)$

Definimos los operadores:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \ , \ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Proposición: Si f es holomorfa en z_0, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \text{ y } f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$$

28.2. Series de potencias

Serie de Potencia: Es una expansión de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Donde $a_n \in \mathbb{C}$

Teorema: Dada una serie $\sum a_n z^n$, existe un $0 \leq R \leq \infty$ tal que:

i) Si $|z| < R$, la serie converge absolutamente

ii) Si $|z| > R$, la serie diverge

Además, la **fórmula de Hadamard** dice que:

$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

Teorema: La serie $f(z) = \sum a_n z^n$ define una función holomorfa dentro del disco de convergencia. La derivada se puede calcular término a término y esta derivada tiene el mismo radio de convergencia.
Entonces, una serie de potencias es infinitamente diferenciable.

Analítica en $z_o \in \Omega$: Una función f es analítica en $z_0 \in \Omega$ si existe una serie $\sum a_n(z-z_0)^n$ con radio de convergencia $\neq 0$ tal que:

$$f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n \quad \text{, en el círculo de convergencia}$$

Si f es analítica en todos los puntos de Ω, decimos que f es analítica en Ω.

28.3. Integración en Curvas

Sea γ una curva en $\mathbb{C}$ parametrizada por $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y sea f una función continua en γ, entonces la **integral de** f **en** γ es:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Esta integral no depende de la parametrización de la curva.

Longitud de una curva:

$$len(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|dt$$

Propiedades:

i) Es lineal:

$$\int_\gamma af(z) + bg(z)dz = a\int_\gamma f(z)dz + b\int_\gamma g(z)dz$$

- Si γ^- es la curva γ pero con orientación contraria, entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^-} f(z)dz$$

- Desigualdad:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \sup_{z\in\gamma} |f(z)|len(\gamma)$$

Teorema FC: Sea f una función continua que tiene una primitiva $F : \Omega \to \mathbb{C}$ continua (cumple $F' = f$) y γ una curva contenida completamente en Ω que empieza en w_1 y termina en w_2, entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz = F(w_2) - F(w_1)$$

Corolario: Si γ es una curva cerrada en un abierto Ω en el que f es continua y tiene una primitiva continua, entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

- **Ejemplo 1:** La función $f(z) = 1/z$ no tiene primitiva en $\mathbb{C} - \{0\}$ que sea continua en todo un círculo γ que rodea al origen (porque la primitiva tiene que ser $\log z$, que es discontinua en al menos un rayo) Entonces, $\int_\gamma \frac{1}{z}dz \neq 0$.

- **Ejemplo 2:** Si integramos esta función por un círculo que no contiene el origen, el resultado es 0, porque en dicho círculo la función tiene una primitiva $\log z$ que es continua.

Corolario: Si f es holomorfa en la región Ω y $f' = 0$, entonces f es constante.

29. Teorema de Cauchy

Teorema Goursat: Si Ω es un abierto en $\mathbb{C}$ y $T \subset \Omega$ es un triángulo contenido en Ω y f es holomorfa en Ω entonces:

$$\int_T f(z)dz = 0$$

29.0.1. Existencia local de Primitivas

Teorema: Una función holomorfa en un disco abierto tiene una primitiva en dicho disco.

Teorema de Cauchy para el Disco: Si f es holomorfa en un disco, entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Para cualquier curva γ cerrada en el disco.
COrolario: Si f es holomorfa en un abierto que contiene un círculo C en el interior, entonces:

$$\int_C f(z)dz = 0$$

29.0.2. Fórmula de Cauchy

Teorema: Sea f holomorfa en un abierto que contiene a la cerradura de un disco D. Si C denota la frontera del disco con orientación positiva, entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Corolario: Con las mismas hipótesis, f es infinitamente derivable y:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

Desigualdad de Cauchy:
Si f es holomorfa en un abierto que contiene da la cerradura de un disco D centrado en z_0 de radio R entonces:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!||f||_C}{R^n}$$

Teorema: Sea f holomorfa en un abierto Ω. Si D es un disco centrado en z_0 y cuya cerradura está contenida en Ω, entonces f tiene una expansión en series en z_0 como:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Liouville: Si f es entera y acotada, entonces f es constante
Corolario: Todo polinomio no constante $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ con coeficientes complejos tiene una raíz en $\mathbb{C}$

29.1. Más aplicaciones

Teorema de Morera: Supongamos que f es una función continua en el abierto D tal que para todo triángulo T contenido en D:

$$\int_T f(z)dz = 0$$

Entonces f es holomorfa

Secuencias de funciones holomorfas

Teorema: Si $\{f_n\}$ es una secuencia de funciones holomorfas que converge uniformemente a una función f en todo subconjunto compacto de Ω, entonces f es holomorfa en Ω

Teorema: Bajo las mismas hipótesis, $\{f'_n\}$ converge uniformemente a f' en todo subconjunto compacto de Ω.

29.1.1. Principio de Reflexión de Schwarz

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto simétrico respecto al eje real. Es decir $z \in \Omega$ sii $\bar{z} \in \Omega$.
Definimos Ω^+ como la parte de Ω arriba del eje real.
Definimos Ω^- como la parte de Ω debajo del eje real.
Definimos $I = \Omega \cap \mathbb{R}$.
Entonces tenemos que:

$$\Omega = \Omega^+ \cup I \cup \Omega^-$$

Principio de Simetría: Si f^+, f^- son holomorfas en Ω^+ y en Ω^- respectivamente, que se extienden continuamente a I y :

$$f^+(x) = f^-(x) \quad \forall x \in I$$

Entonces la función f definida en Ω como:

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z) & , \ z \in \Omega^+ \\ f^+(z) = f^-(z) & , \ z \in I \\ f^-(z) & , \ z \in \Omega^- \end{cases}$$

Es holomorfa en todo Ω

Principio de Reflexión de Schwarz: Suponga que f es holomorfa en Ω^+ que se extiende continuamente a I y tal que f es real en I. Entonces existe una función F holomorfa en todo Ω tal que $F = f$ en Ω^+.

30. Funciones Meromorfas

30.1. Ceros y Polos

Singularidad Aislada de una función f es un punto z_0 tal que f está definida en una vecindad de z_0 pero no en z_0.

Cero de una función f es un punto z_0 tal que $f(z_0) = 0$.
Los ceros de una función holomorfa son aislados.

Teorema: Suponga que f es holomorfa en la región Ω y que tiene un cero en $z_0 \in \Omega$ pero no es 0 en todo Ω. Entonces existe una vecindad $z_0 \in U \subset \Omega$ y una función g que no se anula en U y un entero n tal que:

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \qquad \forall\ z \in U$$

Donde n se llama el **orden del cero** o multiplicidad del cero.

Polo: Decimos que f definida en una vecindad agujerada de z_0 tiene un **polo de orden** n en z_0 si la función $1/f$ (definida a ser 0 en z_0) es holomorfa en toda una vecindad de z_0 y tiene un cero de orden n.

Teorema: Si f tiene un polo en $z_0 \in \Omega$, entonces en una vecindad de ese putno existe una función holomorfa h que no se anula y un entero n tal que:

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z)$$

n es el orden del polo.
Se dice que es un **polo simple** si $n = 1$.

Teorema: Si f tiene un polo de orden n en z_0, entonces:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + G(z)$$

Los primeros términos son llamados la **parte principal** de f en el polo z_0.
El coeficiente a_{-1} es llamado el **residuo de** f en el polo.

Teorema: Si f tiene un polo simple en z_0, entonces:

$$res_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Teorema: Si $f(z)$ tiene residuo a_{-1}, entonces:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$$

Para C una curva que da la vuelta a z_0 una vez.

Fórmula para el Residuo:
Si f tiene un polo de orden n en z_0, entonces:

$$res_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} (z - z_0)^n f(z)$$

El teorema es una consecuencia de la expansión que tiene f.

30.2. La fórmula del Residuo

Teorema: Sea f holomorfa en un abierto que contiene un círculo C en su interior, excepto por un punto z_0 dentro de C. Entonces:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i res_{z_0} f$$

Corolario: Si C rodea varios polos z_k en el interior de C, entonces:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res_{z_k} f$$

30.3. Singularidades y funciones meromórficas

Singularidad Removible: Es una singularidad de f en z_0 tal que si redefinimos f en z_0, desaparece la singularidad y la función es holomorfa.

Teorema de Riemann sobre singularidades Removibles: Sea f holomorfa en el abierto Ω excepto en z_0.
Si f es acotada en $\Omega - \{z_0\}$ entonces z_0 es una singularidad removible.
Corolario: Sea f con una singularidad aislada en z_0. Entonces z_0 es un polo sii $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to z_0$.

Clasificación de singularidades aisladas:

- Removible: si f es acotada cerca de z_0
- Polo: Si $|f(z)| \to \infty$ conforme $z \to z_0$
- Esencial: Si el límite $f(z)$ conforme $z \to z_0$ ni tiene sentido.

Teorema de Casorati-Weierstrass: Sea f holomorfa en el disco $D_r(z_0) - \{z_0\}$ con una singularidad esencial en z_0. Entonces la imagen de $D_r(z_0) - \{z_0\}$ bajo f es densa en los complejos.

Meromorfa: Si existe una cantidad numerable de singularidades.

30.4. El principio del Argumento

Principio del argumento: Digamos que f es meromorfa en un conjunto abierto conteniendo a C y en su interior. Si f no tiene polos y no se anula a lo largo de C, entonces:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \text{núm de ceros de f dentro C - núm de polos de f dentro C}$$

Teorema de Rouche: Suponga que f, g son holomorfas en un abierto conteniendo al círuclo C y su interior. Si $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C}$ entonces f y $f+g$ tienen el mismo número de ceros dentro de C.

Teorema del Mapeo Abierto: Si f es holomorfa y no constante en una región Ω, entonces f manda abiertos en abiertos.

Teorema del módulo máximo: Si f es no constante holomorfa en una región de Ω, entonces f no alcanza el máximo en Ω.

30.5. Homotopías y conjuntos simplemente conexos

Homotopía: γ_0 y γ_1 son homotópicas en Ω si:

- $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = \alpha$
- $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = \beta$
- Existe una curva $\gamma_s(t)$ para todo $s \in [0,1]$ tal que:
  - $\gamma_{s=0}(t) = \gamma_0(t)$
  - $\gamma_{s=1}(t) = \gamma_1(t)$
  - $\gamma_s(a) = \alpha \ , \ \gamma_s(b) = \beta$
  - γ_s está contenida en Ω para todo s.

Teorema de Deformación:
Si f es holomorfa en Ω entonces:

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Si las dos curvas γ_0 y γ_1 son homotópicas en Ω

Simplemente Conexa: Es una región en la que cualquier par de curvas con los mismos puntos extremos son homótopas.

30.6. El Logaritmo Complejo

Queremos definir un inverso de la exponencial. Lo hacemos como:

$$\log z = \log r + i\theta$$

Donde $z = re^{i\theta}$
Pero podríamos agregarle $2\pi i$ y seguiría siendo una inversa del exponencial.
Sin embargo, para que sea univaluada, necesitamos escoger una rama en particular.

Teorema: Sea Ω una región simplemente conexa con $1 \in \Omega$ y $0 \notin \Omega$. Entonces en Ω hay una rama del logaritmo $F(z) = \log_\Omega(z)$ tal que:

- F es holomorfa en Ω
- $e^{F(z)} = z \quad \forall z \in \Omega$
- $F(r) = \log r$ para r un real cerca de 1

Definimos la Rama Principal como:

$$\log z = \log r + i\theta$$

Par $\theta \in (-\pi, \pi)$

30.7. Series de Fourier y Funciones Armónicas

Suponga que f es holomorfa en el disco $D_R(z_0)$, entonces f tiene una expansión en el disco como:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

que converge en el disco.

Teorema: Los coeficientes de la expansión de f están dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

Para todo $n \geq 0$ y $0 < r < R$

30.8. La Transformada de Fourier

Para una función f en $\mathbb{R}$ que decaiga lo suficientemente rápido y sea suave, su transformada de Fourier se define como:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx \quad , \ \xi \in \mathbb{R}$$

Y la fórmula de inversión nos dice que:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi \quad , \ x \in \mathbb{R}$$

Luego se pueden probar todos los teoremas básicos de Fourier (fórmula de inversión, Poisson, etc) usando analiticidad y cosas así.

31. Funciones Enteras

31.0.1. Función de Jensen

Representamos por D_R al disco abierto de radio R centro 0 y C_R al círculo.

Teorema: Sea Ω un abierto que contiene a la cerradura de un disco D_R y suponga que f es holomorfo en Ω con $f(0) \neq 0$ y f no se anula en ningún punto del círculo C_R. Si $z_1, \cdots, z_N$ son los ceros de f dentro del disco (contados con multiplicidades), entonces:

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{N} \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|d\theta$$

31.0.2. Funciones de Orden Finto

Orden de Crecimiento: Si f es una función entera, se dice que es de orden de crecimiento ρ_f si:

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|^\rho}$$

Entonces, definimos el orden de crecimiento de f como:

$$\rho_f = \int \rho$$

Tomado sobre todas las ρ que cumplen con lo de arriba.

31.0.3. Productos Infinitos

Dada una secuencia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos, decimos que el producto:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$$

converge si el límite:

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1 + a_n)$$

de los productos parciales existe.

Proposición: Si $\sum |a_n| < \infty$, entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ converge. Además, el producto converge a 0 sii alguno de los factores es 0.

Proposición 3.2: Suponga que $\{F_n\}$ es una secuencia de funciones holomorfas en un abierto Ω. Si existe una constante $c_n > 0$ tal que:

$$\sum c_n < \infty \quad , \quad |F_n(z) - 1| \leq c_n \text{ para todo } z \in \Omega$$

Entonces:

- El producto $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ converge uniformemente en Ω a una función holomorfa $F(z)$
- Si $F_n(z)$ no se anula para todo n, entonces:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n'(z)}{F_n(z)}$$

Ejemplo:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Es un ejemplo de una función que tiene ceros en todos los enteros.

31.0.4. Productos Infinitos de Weierstrass

Teorema: Si $\{a_n\}$ es una secuencia de complejos con $|a_n| \to \infty$, entonces existe una función f que se anula en todos los $z = a_n$ y en ningún otro punto. Cualquier otra función entera con esta propiedad es de la forma $f(z)e^{g(z)}$ con g entera.

32. Gamma y Zeta

32.1. Función Gamma

Para $s > 0$, se define como:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$$

Proposición: La función Gamma se extiende a una función analítica en el semiplano Re(s) ¿0 y sigue dándose ahí por la integral definida antes.

.

33. Medida

33.1. σ-Álgebras

Def (Anillos): Un anillo en Ω es una colección no vacía $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$, pata la que:

$$A, B \in \mathcal{A} \;\; \Rightarrow \;\; A \cup B, A - B \in \mathcal{A}$$

Lo que implica que $A \cap B \in \mathcal{A}$ y que $\emptyset = A - A \in \mathcal{A}$.

Álgebra: Es un anillo que además contiene al todo Ω. (y por tanto, es cerrado bajo complementos)
$\sigma-$**Álgebra:** Es un álgebra cerrada bajo uniones numerables en vez de finitas.

Def (Espacio Medible): Es el par $(\Omega, \mathcal{A})$, donde Ω es un conjunto y A es una $\sigma-$álgebra de Ω y **conjuntos medibles** a los elementos de $\mathcal{A}$
Si C es una familia de subconjuntos de Ω, denotamos por $\sigma(C)$ la mínima $\sigma-$álgebra que contiene a C. Se puede conseguir intersectando a todas las $\sigma-$álgebras que contienen a C.

33.1.1. σ-álgebra de Bórel

Se refiere a un caso especial de un espacio medible.

Def ($\sigma-$álgebra de Bórel): Dado un espacio topológico (Ω, τ), su sigma álgebra de Borel es la generada por sus abiertos (los conjuntos que se obtienen como unión numerable de abiertos o como restas entre abiertos, por tanto, contiene a los cerrados también).
Los elementos se llaman Borelianos.
La denotamos como $\sigma(\tau) = B(\Omega)$

Prop 1.2.11: Si X es un espacio topológico y $Y \subset X$ es un subespacio, entonces:

$$B(Y) = B(X) \cap Y$$

Si un espacio topológico tiene una base numerable de abiertos N, entonces $B(\Omega) = \sigma(N)$

Ejemplo 1.2.13: En $\Omega = \mathbb{R}$ con la topología usual $\tau_{\mathbb{R}}$, la base topológica es $N = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Q}\}$. Por tanto, el $\sigma-$álgebra de Borel es $\sigma(N) = B(\mathbb{R})$

33.1.2. El conjunto de Cantor

Consideramos a los compactos de $\mathbb{R}$ definidos como:

$$K_0 = [0, 1]$$
$$K_1 = K_0 \cap (1/3, 2/3)^c = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$
$$K_2 = K_1 \cap (1/9, 2/9)^c \cap (7/9, 8/9)^c = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

Y así.

Conjunto de Cantor: Es el conjunto $K = \cap K_n$
El conjunto de Cantor es compacto y perfecto (todos los puntos son límites y no aislados).

33.1.3. Clases Monótonas

Def Límite Superior e Inferior: De una sucesión de conjuntos A_n es:

$$\begin{aligned} \limsup A_n \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \\ \liminf A_n \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \end{aligned}$$

Denotamos como:

$$\begin{aligned} A_n \uparrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } \cup A_n = A \\ A_n \downarrow A \Leftrightarrow A_n \supset A_{n+1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } \cap A_n = A \end{aligned}$$

Def Clase Monótona: C es una clase monótona de Ω es una familia de subconjuntos de Ω que satisface:

a) Si $A_n \in C$ y $A_n \uparrow A$, entonces $A \in C$

b) Si $A_n \in C$ y $A_n \downarrow A$, entonces $A \in C$

Prop 1.2.20: Una familia A de Ω es una $\sigma-$álgebra sii es un álgebra y una clase monótona.

Dada una familia C de subconjuntos de Ω existe la mínima clase monótona que la contiene, que denotamos como $M(C)$

Lema 1.2.21: Si $\mathcal{A}$ es álgebra, $M(\mathcal{A})$ es álgebra.

Teorema de la clase monótona: Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces:

$$\sigma(\mathcal{A}) = M(\mathcal{A})$$

33.2. Medida

Def: Una medida en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ un álgebra o anillo, es una función:

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

que satisface:

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) Es **numerablemente aditiva**, es decir, si dados $A_1, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$ disjuntos y cuya unión está en $\mathcal{A}$ (se cumple trivialmente si es una $\sigma-$álgebra), entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Si la condición (b) es sólo válida para colección finita, decimos sencillamente que es una función **aditiva**.
$\sigma-$**finita:** Si existe una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $\cup A_n = \Omega$ y cada $\mu(A_n) < \infty$
Probabilidad: Es una medida con $\mu(\Omega) = 1$

Def Espacio de Medida: Es una terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ con μ una medida sobre la $\sigma-$álgebra

Def. Completo: Un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es **completo** si para cada $B \subset A$, con $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$, también es $B \in \mathcal{A}$
Es decir, los subconjuntos de conjuntos de medida cero son medibles.

- **Ejemplo 1.3.1 Medida Delta de Dirac:** Consideramos $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Fijamos un $x_0 \in \Omega$. Para cada $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = 0$ si $x_0 \notin E$ y $\mu(E) = 1$ si $x \in E$. Suele denotarse con δ_{x_0}

- **Ejemplo 1.3.2 Medida de Contar:** Consideramos un espacio de medida de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y definimos $\mu(A) = n$ si A es finito y tiene n elementos.

- **Medida de Lebesgue:** Será la úncia medida en los borelianos invariable sobre traslaciones y que vale 1 en el cubo unidad.

- **Medida de Haar:** Se define en un grupo compacto y generaliza a la de Lebesgue (es invaraínte bajo traslaciones en el grupo).

Proposición (Propiedades): Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, entonces para $A, B \in \mathcal{A}$:

a) $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$

b) **Monótona:** Si $A \subset B$ entonces $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$ y en particular $\mu(B) \leq \mu(A)$

c) Si $A \subset B$ y $\mu(A) = \infty$, entonces $\mu(B) = \infty$

d) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

e) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
Lo cual se generaliza para uniones numerables.

Prop 1.311: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $A_n \in \mathcal{A}$ una sucesión, entonces:

a) Si $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \to \mu(A)$

b) Si $A_n \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces $\mu(A_n) \to \mu(A)$

33.3. Extensión de Medidas

33.3.1. Medida Exterior

Con lo que veremos podremos extender una medida μ sefinida en un anillo $\mathcal{A}_0$ a una colección más grande.

Def (Medida Exterior): Una medida exterior en Ω es una función de conjunto:

$$\mu^* : P(\Omega) \to [0, \infty]$$

que verifica lo siguiente:

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$

b) Si $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

c) Si B_n es una sucesión de subconjuntos de Ω, entonces:

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$$

Vamos a construir varias medidas exteriores:

Proposición 1.4.3: Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de Ω y $\rho : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ una función cualquiera tales que $\emptyset \in C$, $\rho(\emptyset) = 0$. Para cada $B \subset \Omega$,

$$\mu^*(B) = \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) \ : \ A_n \in \mathcal{C} \ , \ B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}$$

Esto define la **medida exterior generada por** ρ (que es lo que queremos probar). Además, si $\mathcal{C} = \mathcal{A}_0$ es un anillo y ρ una medida, μ^* coincide con ρ sobre $\mathcal{A}_0$. Y es una medida para todos los conjuntos B cubiertos por numerables A_n.

Es decir, dada una función $\rho : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ que cumpla con lo de antes, se puede definir una medida exterior a todos los conjuntos que se pueden cubrir con C. Y la medida es la obvia, que se consigue como el ínfimo de las medidas de todas las cubiertas.

- **Medida Exterior de Lebesgue:** En $\mathbb{R}$ definimos $\mathcal{C} = \{(a, b] \ : \ a \leq b \in \mathbb{R}\}$ y definimos $\rho(a, b] = b - a$, entonces para $A \subset \mathbb{R}$ tenemos:

  $$m^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \ : \ a_n \leq b_n \in \mathbb{R} \ , \ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]\}$$

  es una medida exterior. Es decir, podemos medir todos los conjuntos que se pueden cubrir con intervalos de $\mathcal{C}$ (que son todos) y los medimos sacando el ínfimo de esas cubiertas. Con ello esta medida exterior funciona para todos los conjuntos de $\mathbb{R}$. Además, como $\mathcal{C}$ es un anillo y ρ una medida, esta extensión coincide con ρ en $\mathcal{C}$

33.3.2. Teoremas de Extensión de medidas:

Aunque una medida exterior μ^* está definida en todo $P(\Omega)$, tiene la desventaja de no ser numerablemente aditiva, ni si quiera aditiva.
Para ello, tratamos de encontrar una $\sigma-$álgebra sobre la que sí sea numerablemente aditiva.

Def: Sea μ^* una medida exterior en Ω. Decimos que $E \subset \Omega$ es μ^*-medible si para todo $A \subset \Omega$:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

y denotamos por $\mathcal{A}_*$ la familia de conjuntos μ^* medibles.

Nota: Se sigue que $E \in \mathcal{A}_*$ sii $E^c \in \mathcal{A}_*$
Y que si $\mu^*(E) = 0$, entonces $E \in \mathcal{A}_*$

Teorema de Extensión de Caratheodoty: (1) Sea μ^* una medida exterior en Ω, entonces $\mathcal{A}_*$ es una σ-álgebra. La restricción de μ^* a ella es una medida y $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ es completo (todo subconjunto de conjuntos de medida cero son medibles).
(2) Si además μ^* es la medida exterior generada por una medida ρ de un anillo $\mathcal{A}_0$ de Ω, entonces:

$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_* \quad , \rho = \mu^* \text{ en } \mathcal{A}_0$$

.

Teorema de extensión de Hahn: Toda medida $\sigma-$finita en un anillo $\mathcal{A}_0$ se extiende de modo único a cada $\sigma-$álgebra entre $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_*$

Es decir, si empezamos con una función ρ en una familia $\mathcal{C} \subset P(\Omega)$, que cumpla que $\emptyset \in \mathcal{C}$, $\rho(\emptyset) = 0$. Entonces, podemos generar una medida exterior μ^* generada por ρ que funciona en todo $P(\Omega)$ usando cubiertas de los conjuntos de $\mathcal{C}$.
Sin embargo, μ^* no es una medida (no es aditiva)
Por ello, el teorema de extensión de Cathedory nos dice que nos fijemos sólo en los E que 'no afectan'. Que cumplen $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.
A estos conjuntos les llamamos μ^* medibles y denotamos su familia como $\mathcal{A}_*$ (que es cerrada bajo complementos y contiene a los de medida 0 y es una $\sigma-$álgebra).
Además, μ^* es una medida (ya cumple aditividad y eso). Entonces $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ es un espacio de medida completo.
Además, si ρ estaba definida en un anillo, μ coincide con ρ en este anillo.

33.4. Medida de Lebesgue-Stieljes

33.4.1. medida de Lebesgue-Stieljes en $\mathbb{R}$

Sigma Álgebra: Cerrada bajo uniones numerables y restas y contiene a $\emptyset$ y al conjunto completo.

Sigma Álgebra de Borel: Es la generada por los conjuntos abiertos (todas las uniones numerables de abiertos y las restas). Que por tanto contiene a todos los cerrados y muchos más.

En $\mathbb{R}$ la sigma -álgebra se denota $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Función de Distribución: Es una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a la derecha.
Llamamos **medida de Lebesgue-Stieljes** en $\mathbb{R}$ a toda medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ finita en cada compacto.

Teorema 1.5.1: Sea μ una medida de Lebesgue-Stieljes en $\mathbb{R}$. Entonces cada función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que para todo $a < b \in \mathbb{R}$ verifique:

$$F(b) - F(a) = \mu(a, b]$$

es una función de distribución. Existen infinitas así y difieren por una constante.

Recíprocamente, dada una función de distribución $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, existe una única medida $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ que para $a < b \in \mathbb{R}$ verifica:

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a)$$

Tal medida la conocemos sobre los semiintervalos $(a, b]$

Lema 1.5.2: Para cada $A \in \mathcal{A}_0$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $B \in \mathcal{A}_0$, con $\bar{B} \subset A$ tal que $\mu(A - B) < \epsilon$

Teorema 1.5.5: Dada una función de distribución F en $\mathbb{R}$, existe una única medida μ en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$, para cada $a < b$ de $\mathbb{R}$ y es una medida de **Lebesgue Stieljes**.

Ejemplo: La medida de Lebesgue unidimensional: Definimos en particular a la distribución $F(x) = x$ y a la medida de la 'base de Borel' como $\mu(a, b] = b - a$
La correspondiente medida $\sigma-$finita $\mu : \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$ define la **medida exterior de Lebesgue** que para $A \subset \mathbb{R}$ vale:

$$\begin{gathered}\mu^*(A) = \inf\{\sum \mu(A_i) \ : \ A_i \in \mathcal{A}_0, \ \ A \subset \cup A_i\} \\ = \int\{\sum \mu(I_i) \ : \ I_i \in \mathcal{C} \ , \ \ A \subset \cup I_i\} \\ \inf\{\sum (b_i - a_i) \ : \ a_i \leq b_i \ , \ \ A \subset \cup (a_i, b_i]\}\end{gathered}$$

Luego, a los conjuntos que satisfacen el criterio de Cathedoroy los denotamos $\mathcal{A}_*$ y forman una $\sigma-$ álgebra. Les llamamos **Lebesgue medibles** de $\mathbb{R}$. Y llamamos **medida de Lebesgue** a la restricción $m = \mu^*\Big|_{\mathcal{A}_*}$. Que en esta reestricción ya es una medida aditiva numerable en una σ-álgebra.
Denotamos $\mathcal{A}_* = \mathcal{L}(\mathbb{R})$ a la $\sigma-$álgebra (los conjuntos que cumplen lo de Cathedoroy).

33.4.2. Medidas de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}^n$

Rectángulo (acotado) en $\mathbb{R}^n$: Es el producto de n intervalos acotados de $\mathbb{R}$. Y semi-rectángulo si los n semi-intervalos son cerrados a la derecha (pueden ser no acotados). Llamaremos cubo si todos los n intervalos son de la misma longitud. Llamaremos cubo unidad a $Q = [0,1]^n$.

Nota 1.5.9: Denotamos $(-\infty, x] = \Pi_{i=1}^n(-\infty, x_i]$ para $x = (x_1, \cdots, x_n)$

Luego $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la $\sigma-$ álgebra generada por los abiertos de $\mathbb{R}^n$ (bajo uniones numerables y restas), o bien, basta con los generados por los semirectángulos acotados.

Prop: La familia $\mathcal{A}_0$ de las uniones finitas disjuntas de semi-rectángulos acotados de $\mathbb{R}^n$ en un anillo.

Def: Diremos que una medida $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ es de **Lebesgue-Stieltjes** si es finita en los compactos.

Def Función de Distribución: Diremos que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de distribución si:

a) Es continua a la derecha (Es decir, si $x \leq \cdots \leq x_{n+1} \leq x_n$ y $x_n \to x$, entonces $F(x_n) \to F(x)$

b) Es **monótona creciente** para cada dirección.

Ejemplo 1.5.12: Dadas n funciones de distribución en $\mathbb{R}$, $F_1, \cdots, F_n$. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ es una función de distribución en $\mathbb{R}^n$

Como en el caso unidimensional, tenemos una biyección entre medidas de Lebesgue-Stieltjes y funciones de distribución (con diferencias por una constante)

Teorema 1.5.14: Sea μ una medida finita en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $F(x) = \mu(-\infty, x]$ es una función de distribución.

Teorema 1.5.15: Dada F una función de distribución en $\mathbb{R}^n$, hay una única medida μ en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\mu(a, b] = \sum_{x \in S_{a,b}} \sigma(x)F(x)$ para cada semirectángulo acotado $(a, b]$. Además, μ es de Lebesgue-Stieltjes.

Y es aditiva.

Esto nos permite extender μ al anillo $\mathcal{A}_0$ de las uniones finitas disjuntas de semi-rectángulos acotados, $\mu(\cup_{i=1}^{k} R_i) = \sum \mu(R_i)$.
De este modo μ es aditiva en $\mathcal{A}_0$.
Y vemos que para cada $A \in \mathcal{A}_0$ y cada $\epsilon > 0$ existe un $B \in \mathcal{A}_0$ con $\bar{B} \subset A$ y $\mu(A - B) < \epsilon$.

El teorema de Caratheodory nos permite construir la medida exterior $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, asociada a μ, de la forma:

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \ : \ A_i \in \mathcal{A}_0 \ , \ A \subset \cup A_i\} \\ &= \int \{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) \ : \ R_i \in \mathcal{C}^n \ , \ A \subset \cup R_i\} \end{aligned}$$

Ejemplo: La medida de Lebesgue n-dimensional: Consideramos la función de distribución $F(a_1, \cdots, x_n) = x_1 \cdots x_n$, entonces su medida asociada en los semi rectángulos es:

$$\mu(a, b] = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

Esta medida exterior funciona para todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Luego, consideramos $\mathcal{A}_* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a los conjuntos que cumplen lo de Catheodory y forman una sigma-álgebra. En estos conjuntos, $m = \mu^*$ es la medida de Lebesgue y es aditiva numerable.

33.4.3. Propiedades de la medida de Lebesgue

Vemos algunas propiedades de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.5.18 Invariancia bajo traslaciones: Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $B + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(B) = m(B + x)$.
Además, si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $B + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Teorema de unicidad 1.5.19: Sea μ una medida de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ invariante por traslaciones, tal que $\mu[(0, 1]^n] < \infty$. Entonces existe $c \in [0, \infty)$ tal que $\mu(A) = c \cdot m(A)$ para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

33.5. Medidas de Hausdorff

Medida exterior métrica: Sea (Ω, d) un e.m. Si dados $A, B \subset \Omega$ tales que $d(A, B) > 0$ se cumple que:

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Prop 1.6.1: Si μ^* es una medida exterior métrica en un espacio métrico (Ω, d), entonces $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}_*$

33.5.1. Las Medidas de Borel H_p

Sea (Ω, d) un espacio métrico.
Llamamos **diámetro** de un $B \subset \Omega$ al valor:

$$d(B) = \sup\{d(x, y) \ : \ x, y \in B\}$$

Ahora para cada $p > 0, \delta > 0$ definimos la función de conjunto que para cada $A \subset \Omega$ vale:

$$H_{p,\delta}(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} d(B_n)^p \ : \ A \subset \cup B_n \ , \ d(B_n) \leq \delta\}$$

Es decir, es mínimo de las sumas de los diámetros elevados a la p de una cubierta numerable de A con $d(B_n) \leq \delta$.

Estas funciones son medidas exteriores, que verifican $\delta \leq \epsilon \ \Rightarrow \ H_{p,\delta}(A) \geq H_{p,\epsilon}(A)$.
Entonces podemos definir una **medida exterior** límite como:

$$H_p(A) = \lim_{\delta \to 0} H_{p,\delta}(A)$$

La llamamos **medida exterior p-dimensional de Hausdorff**.

Teorema 1.6.3: Las medidas $H_{p,\delta}$ no son métricas pero H_p sí lo es.

Medida de Hausdorff p-dimensional: Es la restricción de H_p a los borelianos $\mathcal{B}(\Omega)$

Prop 1.6.4: Sea $A \subset \Omega$ y sean $0 \leq p < q$, entonces:

$$H_p(A) < \infty \ \Rightarrow \ H_q(A) = 0$$
$$H_q(A) > 0 \ \Rightarrow \ H_p(A) = \infty$$

Dimensión de Hausdorff: De $A \subset \Omega$ al valor:

$$\dim_H(A) = \sup\{p \geq 0 \ : \ H_p(A) = \infty\} = \inf\{q > 0 \ : \ H_q(A) = 0\}$$

Prop 1.6.7: Sea $T : \Omega \to \Omega$ una biyección isométrica ($d(T(x), T(y)) = d(x, y)$). Entonces para todo $B \subset \Omega$ y todo $p \geq 0$, se tiene que $H_p[T(B)] = H_p(B)$

33.5.2. Medidas de Hausdorff en $\mathbb{R}^n$

Lema 1.6.8: Sea $B = B[0,1]$ la bola unidad cerrada de $\mathbb{R}^n$, m la medida de Lebesgue y $Q = [0,1]^n$ el cubo unidad, entonces:

$$\frac{1}{m[B]} \leq H_n(Q) \leq (\sqrt{n})^n$$

Teorema 1.6.9: Existe una constante $\gamma_n > 0$, tal que $\gamma_n H_n$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

De hecho, se tiene que $\gamma_n = m(B) = \dfrac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(1 + n/2)}$

34. Resumen Medida:

- **Álegras**

  - **Anillo en Ω:** Es una familia de conjuntos de Ω cerrada bajo uniones y restas
  - **Álgebra:** Es un anillo que incluye Ω (y por tanto es cerrado bajo complementos e intersecciones)
    Sigma-Álgebra: Si es cerrado bajo uniones numerables (En resumen, incluye a Ω, es cerrado bajo complementos y bajo uniones numerables).
  - **Espacio Medible:** Al par $(\Omega, \mathcal{A})$, con Ω un conjunto y $\mathcal{A}$ una sigma álgebra de Ω. Los conjuntos de $\mathcal{A}$ se llaman **medibles**.
  - **Generado:** Si $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos de Ω, su generado $\sigma(\mathcal{C})$ es la mínima sigma-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$ y se obtiene tomando todas las uniones numerables, complementos y agregando Ω

  - $\sigma-$**álgebra Borel:** En un espacio topológico (Ω, τ) , es la que se genera con todos los abiertos (y por tanto incluye todos los cerrados y muchos más). Se denota como $\mathcal{B}(\Omega)$ y es igual a $\sigma(\tau)$
    Si el espacio topo tiene una base numerable $\mathcal{N}$, enotnces $\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{N})$.
    En $\mathbb{R}$, los borelianos se pueden generar con $(a, b]$

  - **Límites:** Decimos que $A_n \uparrow A$ si $A_n \subset A_{n+1}$ y $\cup A_n = A$
    Decimos que $A_n \downarrow A$ si $A_n \supset A_{n+1}$ y $\cap A_n = A$

- **Medida:**

  - **Medida:** En un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ es un álgebra o anillo. Es una función que cumple:
    - $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$
    - $\mu(\emptyset) = 0$
    - Es numerablemente aditiva. Si $A_1, A_2, \cdots$ son disjuntos, entonces $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
  - **Espacio de Medida:** Es una terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ con $\mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra, μ una medida.
    Es **completo** si para cada $B \subset A$ con $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0 \;\Rightarrow\; B \in \mathcal{A}$

  - **Propiedades**: Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces:
    $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$, si $A \subset B \;\Rightarrow\; \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$ (y en particular, **monotonía**)
    $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, en particular $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$
    Si $A_n \uparrow A \;\Rightarrow\; \mu(A_n) \to \mu(A)$
    Si $A_n \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty \;\Rightarrow\; \mu(A_n) \to \mu(A)$

- **Extensión de medidas**
  - **Medida Exterior:** en Ω es una función:
    - $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$
    - $\mu^*(\emptyset) = 0$
    - Si $A \subset B \;\Rightarrow\; \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
    - $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$

    Notar que a diferencia de la medida, no nos restringimos a una álgebra, sino que usamos todo $\mathcal{P}(\Omega)$

  - **Def de una medida exterior:** Si $\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos de Ω y $\rho : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ una función tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$ y $\rho(\emptyset) = 0$. Entonces, para cada $B \subset \Omega$, podemos definir la medida exterior de cubiertas:

    $$\mu^*(B) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) \;:\; A_n \in \mathcal{C} \;,\; B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}$$

    Esto es siempre una medida exterior.
    Y si $\mathcal{C}$ era un anillo y ρ una medida en ese anillo, entonces $\rho = \mu^*$ en $\mathcal{A}_0$

- **Extensión de medidas exteriores**:
  si μ^* es una medida exterior en Ω. Decimos que E es μ^* **medible:** si para todo $A \subset \Omega$:

  $$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

  Vemos si E es medible, también su complemento y que los de medida exterior 0 son medibles.

  Extensión de Caratheodory: Si μ^* es una medida exterior, consideramos la familia de conjuntos $\mathcal{A}_*$ que son los que cumplen la condición de Caratheodoty. Entonces $\mathcal{A}_*$ es una $\sigma-$álgebra. Y la restricción de μ^* a $\mathcal{A}_*$ es una medida y $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ es completo. Si μ^* es la medida exterior generada por una medida ρ en un anillo $\mathcal{A}_0$, entonces esta exterior μ^* coincide con ρ en el anillo $\mathcal{A}_0$

  Es decir, podemos empezar desde una función $\rho : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ que mande el vacío al 0. Luego la extendemos a una medida exterior μ^* en todo $\mathcal{P}(\Omega)$. Si la restringimos a sólo los conjuntos que cumplan el criterio de Catheodory, estos conjuntos forman una familia $\mathcal{A}_*$ que es una $\sigma-$álgebra. Y μ^* reestringido ya es una medida (es ahora numerablemente aditiva).

  Teorema de Extensión de Hahn: Toda medida $\sigma-$finita en un anilo $\mathcal{A}_0$ se extiende de modo único a una $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ entre $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_*$

- **Medida de Lebesgue**

  - **Función de distribución:** Es una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a la derecha.
  - **Medida de Lebesgue-Stieljes en $\mathbb{R}$:** Es toda medida en el sigma álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ finita en cada compacto.

  Teorema: Si μ es una medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Entonces cada función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique para $a < b$, $F(b) - F(a) = \mu(a, b]$ es una función de distribución. Y dos difieren por una constante.
  Dada una función de distribución $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, existe una única medida $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ que verifica $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$ y luego la podemos extender a más conjuntos.
  Teorema: Dada una función de distribución $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, existe una única medida μ en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$ para $a < b$. Y es una medida de Lebesgue-Stieljes.

  Medida de Lebesgue 1d: Empezamos con la función $\mu(a, b] = b - a$ en los semiabiertos $\mathcal{C}$. Luego, se puede extender a una función:

  $$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\sum \mu(I_i) \ : \ I_u \in \mathcal{C} \ , A \subset \cup I_i\}$$

  Esta medida funciona en todo $\mathcal{A}_*$ (los que cumplen lo de Catheodory) y es de Lebesgue-Stieljes (finita en compactos).
  Los conjuntos de la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}_*$ se llaman **Lebesgue medibles** y definimos $m = \mu^*$ restringida a estos conjuntos. Denotamos además $\mathcal{A}_* = \mathcal{L}(\mathbb{R})$

  Se extiende similarmente a $\mathbb{R}^n$, empezando con una medida ρ en rectángulos $\mathcal{C}^n$ y extendiendo a una medida exterior en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ como:

  $$\mu^*(A) = \int\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) \ : \ R_i \in \mathcal{C}^n \ , \ A \subset \cup R_i\}$$

  Los conjuntos que cumplen Catheodory se denotan $\mathcal{A}_* := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
  La medida exterior μ^* en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ya es una medida (con aditividad numerable) y es una medida de Lebesgue-Stieljes y se denota m.

  Propiedades: Es invariante bajo traslación: Si $x \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ entonces $B + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(B) = m(B + x)$.
  Y es la única medida de Lebesgue-Stieljes invariante bajo traslaciones (salvo factor de proporcionalidad). Nos fijamos en particular en la que vale 1 en $[0, 1]^n$

- **Medida de Hausdorff**

  - **Medida exterior métrica:** Es una medida en un e.m. tal que si $A, B \subset \Omega$, $d(A, B) > 0$, entonces $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ **Propo:** Si μ^* es una medida exteiror métrica en un espacio m. (Ω, d), entonces $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}_*$

- **Medida Exterior de Hausdorff:** Si (Ω, d) es un e.m. y $d(B)$ es el diam de B, entonces definimos:
$$H_{p,\delta}(A) = \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} d(B_n)^p \ : \ A \subset \cup B_n \ , \ d(B_n) \leq \delta\}$$
es una medida exterior.
Y definimos $H_p(A) = \text{lím}_{\delta \to 0} H_{p,\delta}(A)$.
Entonces $H_p : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ es una medida exterior métrica.
Llamamos **medida de Hausdorff p -dim** a la restricción de H_p sobre los borelianos $\mathcal{B}(\Omega)$
- **Prop:** si $A \subset \Omega$ y $0 \leq p < q$, entonces:
$H_p(A) < \infty \ \Rightarrow \ H_q(A) = 0 \ , \ H_q(A) > 0 \Rightarrow H_p(A) = \infty$
- **Dimensión de Hausdorff** de $A \subset \Omega$ es el valor $\dim_H(A) = \sup\{p \geq 0 \mid H_p(A) = \infty\}$
Teorema: Si $T : \Omega \to \Omega$ es isometriía biyectiva, entonces $H_p[T(B)] = H_p[B]$

- **Apéndice**
  - Dada una clase T$\mathcal{F}$ de conjuntos de Ω, denotamos por $\mathcal{F}_\delta$ a las familia de intersecciones numerables de $\mathcal{F}$ y a $\mathcal{F}_\sigma$ a la familia de uniones numerables de elementos de $\mathcal{F}$.
  - **Carga:** En un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ (i.e, $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álbegra). llamamos carga a una función $\mu : \mathcal{A} \to (-\infty, \infty]$ numerablemente aditiva y tal que $\mu(\emptyset) = 0$ (i.e., tiene la diferencia de que puede tomar valores negativos).
  Prop: Sea μ una carga en $(\Omega, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ anillo. Enotnces para $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que:
  $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$, si $A \subset B \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$.
  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, si $A_n \uparrow A \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$, si $A_n \downarrow A, |\mu(A_1)| \leq \infty \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$
  - **Sobre los conjuntos Lebesgue-Medibles:**
  Tenemos las inclusiones $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$
  Se puede ver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R})$ con un contraejemplo.
  Sin embargo, que $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sólo se puede demostrar usando el axioma de elección.

34.1. Conjuntos Medibles y la medida de Lebesgue

La noción de medible reduce la selección de los subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ a solamente algunos para los cuales se va a cumplir algunas de las propiedades que buscamos.

Lebesgue Medible: Un conjunto es Lebesgue medible si para todo $\epsilon > 0$ existe un abierto O con $E \subset O$ y:

$$m_*(O - E) \leq \epsilon$$

Si E es medible, le definimos su **medida de Lebesgue** como:

$$m(E) = m_*(E)$$

1) Todo abierto de $\mathbb{R}^d$ es medible
2) Si $m_*(E) = 0$, entonces E es medible.
3) La unión numerable de conjuntos medibles es medible.
4) Los conjuntos cerrados son medibles.
5) El complemento de un conjunto medible es medible
6) La intersección numerable de medibles es medible

Lema: Si F es cerrado, K es compacto, y son disjuntos, entonces $d(F, K) > 0$.

Teorema (Aditividad): Si $E_1, E_2, \cdots$ son conjuntos medibles disjuntos, y $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, entonces:

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$$

Entonces, ya tenemos:

- Nuestra noción primitiva del volumen dado por medida exterior.
- Refinada a solamente algunos tipos especiales de conjuntos (los medibles)
- Tales que son cerrados bajo operaciones numerables (uniones, intersecciones)
- Y cumple la aditividad

Convergencia:

- Si $E_1, E_2, \cdots$ son una colección contable de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ tales que $E_k \subset E_{k+1}$, y que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, entonces escribimos $E_k \uparrow E$
- Si $E_1, E_2, \cdots$ son una colección contable de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ tales que $E_k \supset E_{k+1}$ y $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, escribimos que $E_k \downarrow E$

Corolario: Suponga que $E_1, E_2, \cdots$ son medibles en $\mathbb{R}^d$, entonces:

- Si $E_k \uparrow E$, entonces $m(E) = \lim_{n \to \infty} m(E_n)$

- Si $E_k \downarrow E$ y $m(E_k) < \infty$ para algún k, entonces $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$

Teorema 3.4: Suponga E es medible en $\mathbb{R}^d$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$:

- Existe un abierto O con $E \subset O$ tal que $m(O - E) \leq \epsilon$
- Existe un cerrado F con $F \subset E$ tal que $m(E - F) \leq \epsilon$
- Si $m(E)$ es finito, existe un compacto K con $K \subset E$ tal que $m(E - K) \leq \epsilon$
- Si $m(E)$ es finito, entonces existe $F = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$ de cubos cerrado tales que $m(E \triangle F) \leq \epsilon$

34.1.1. Propiedades invariantes de la medida de Lebesgue

Invariancia de Traslación: Si E es medible y $h \in \mathbb{R}^d$, entonces el conjunto:

$$E_h = E + h = \{x + h \mid x \in E\}$$

es medible y se cumple $m(E + h) = m(E)$

Invariancia de Dilatación: Si $\delta > 0$, entonces denotamos $\delta E = \{\delta x \mid x \in E\}$.
Si E es medible, entonces $m(\delta E) = \delta^d m(E)$

34.1.2. σ álgebras y conjuntos de Borel

Una $\sigma-$ **álgebra** es una conlección de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ que es cerrado bajo uniones o intersecciones numerables y bajo complementos.

σ-álgebra de Borel: Es la mínima σ-álgebra que contiene a todos los abiertos. Se llaman **conjuntos de Borel.**

Como los abiertos son medibles, concluimos que todos los conjuntos de Borel son medibles.
Sin embargo, existen conjuntos de Lebesgue medibles que no son de Borel.

Definimos los conjuntos G_δ como los que son la intersección numerable de abiertos.
Y definimos los F_σ como los que son la unión numerable de cerrados.

Corolario: Un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible:

- Sii E difiere de un conjunto G_δ por un conjunto de medida cero.
- Sii E difiere de un conjunto de F_σ por un conjunto de medida cero.

34.1.3. Construcción de un conjunto no medible

Escribimos $x \sim y$ cuando $x - y$ es racional como una relación de equivalencia de elementos de $[0, 1]$.
Esto parte a $[0, 1]$ en clases de equivalencia ξ_α que juntas forman a $[0, 1]$.
Construimos $\mathcal{N}$ al escoger un solo elementos x_α de cada ξ_α y uniendo todos. (Axioma de elección).

Teorema: El conjunto $\mathcal{N}$ no es medible.

34.2. Funciones Medibles

Dado un conjunto E, le definimos su **función característica** como:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in E \\ 0 & , \ x \notin E \end{cases}$$

Función Simple: Es una suma finita de la forma:

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$$

Donde E_k es un conjunto medible.

Una función es **step function** si es una función simple pero todos los conjuntos son rectángulos.

34.2.1. Definición y Propiedades Básicas

Una función $f : E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es **medible** si para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto:

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E \mid f(x) < a\}$$

es medible. Lo denotaremos simplemente como $\{f < a\}$.

En realidad, f es medible si la imagen inversa de conjuntos medibles de $\mathbb{R}$ es medible en $\mathbb{R}^d$.

Propiedad: Una función finita f es medible sii $f^{-1}(O)$ es medible para todo abierto O sii $f^{-1}(F)$ es medible para todo abierto F.

Propiedad 2: Si f es continua en $\mathbb{R}^d$, entonces f es medible.

Propiedad 3: Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia de funciones medibles, entonces:

$$\sup_n f_n(x) \quad , \quad \inf_n f_n(x) \quad , \quad \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \quad , \quad \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

Son medibles.

Propiedad 4: Si $\{f_n\}$ es una colección de funciones medibles y:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

entonces f es medible.

Propiedad 5: Si f, g son medibles, entonces:

- Las potencias enteras f^k , $k \geq 1$ son medibles
- $f + g, fg$ son medibles si f, g son finitas.

Propiedad 6: Si $f = g$ casi siempre y f es medible, entonces g es medible.

34.2.2. Aproximación por funciones Simples

Teorema 4.1: Suponga f es una función no negativa medible en $\mathbb{R}^d$. Entonces existe una secuencia creciente de funciones no negativas simples $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a f, es decir:

$$\phi_k(x) \leq \phi_{k+1}(x) \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \phi_k(x) = f(x) \text{ para todo x}$$

Teorema 4.2: Suponga que f es medible en $\mathbb{R}^d$. Entonces existe una secuencia de funciones simples $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ que satisface:

$$|\phi_k(x)| \leq |\phi_{k+1}(x)| \text{ y } \lim_{k\to\infty} \phi_k(x) = f(x) \text{ para todo } x$$

En particular, $|\phi_k(x)| \leq |f(x)|$

Teorema 4.3: Suponga que f es medible en $\mathbb{R}^d$. Enotnces existe una secuencia de funciones escalonadas $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a $f(x)$ para casi todo x.

34.2.3. Principios de Littlewood

Teorema de Egorov: Suponga que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una secuencia de funciones medibles definidas en un conjunto medible E con $m(E) < \infty$ y asuma que $f_k \to f$ casi en todos lados en E. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar un cerrado $A_\epsilon \subset E$ tal que $m(E - A_\epsilon) \leq \epsilon$ y $f_k \to f$ uniformemente en A_ϵ

Teorema de Lusin: Suponga que f es medible y finito en todo E con E finito medible. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un cerrado F_ϵ con:

$$F_\epsilon \subset E \ , \ m(E - F_\epsilon) \leq \epsilon$$

Y tal que $f\big|_{F_\epsilon}$ es continuo.

Entonces, tenemos los principios de **littlewood:**

- Todo conjunto es casi la unión finita de intervalos
- Cada función es casi continua
- Toda secuencia convergente es casi uniformemente convergente.

35. Teoría de Integración

35.1. La integral de Lebesgue

La vamos a definir por etapas a familias de funciones cada vez más grandes.
El orden en que iremos definiendo es:

- Funciones simples
- Funciones acotadas con suporte de medida finita
- Funciones no negativas
- Funciones integrables

35.1.1. 1) Funciones Simples

Recordamos que se trata de una función que es una suma finita de la forma:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}(x)$$

Donde E_k son conjuntos medibles con medidas finitas y a_k son constantes.

Forma canónica: Cada función simple ϕ tiene una única descomposición de la forma mostrada antes, donde todos los números a_k son distintos de cero y los E_k son disjuntos (sin esta restricción, hay muchas formas de escribir una función).

Si ϕ es una función simple de la forma $\phi(x) = \sum_{k=1}^{M} c_k \chi_{F_k}(x)$, entonces definimos la **integral de Lebesgue** como:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx = \sum_{k=1}^{M} c_k m(F_k)$$

Podemos restringir el dominio. Si E es un conjunto medible en $\mathbb{R}^d$ con medida finita, entonces $\phi(x)\chi_E(x)$ es también simple y definimos:

$$\int_E \phi(x)dx = \int \phi(x)\chi_E(x)dx$$

Proposición: La integral de una función simple definida como arriba cumple que si :

- **Independencia de la representación:** Si $\phi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$ es cualquier representación de ϕ, entonces:

$$\int \phi = \sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k)$$

- **Linealidad:** Si ϕ, ψ son simples y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\int (a\phi + b\psi) = a \int \phi + b \int \psi$$

- **Aditividad:** Si E, F son disjuntos en $\mathbb{R}^d$ con medida finita, entonces:

$$\int_{E \cup F} \phi = \int_E \phi + \int_F \phi$$

- **Monotonía**: Si $\phi \leq \psi$ son simples, entonces:

$$\int \phi \leq \int \psi$$

- **Desigualdad del Triángulo:** Si ϕ es simple, también lo es $|\psi|$ y:

$$\left| \int \phi \right| \leq \int |\phi|$$

- Notamos trivialemente que si $f = g$ casi siempre, entonces $\int f = \int g$

35.1.2. Funciones acotadas con soporte de medida finita

Definimos el **soporte** de una función f como:

$$supp(f) = \{x \mid f(x) \neq 0\}$$

Como f es medible, también lo es $supp(f)$ (es la imagen inversa de un conjunto medible). Nos interesaremos en funciones con $m(supp(f)) < \infty$

Lema 1.1: Si f es una función acotada en M y con soporte en E, entonces existe una secuencia de funciones simples $\{\phi_n\}$ con cada ϕ_n acotada en M y suportada en E tal que:

$$\phi_n(x) \to f(x) \quad \forall x$$

Lema 1.2: Sea f una función acotada suportada en un conjunto E de medida finita. Si $\{\phi_n\}$ es una secuencia de funciones simples acotadas por M, suportada en E y con $\phi_n(x) \to f(x)$ para casi todo x, entonces:

- El límite $\lim_{n\to\infty} \int \phi_n$ existe
- Si $f = 0$ casi siempre, entonces el límite $\lim_{n\to\infty} \int \phi_n = 0$

Definición: Para una función acotada suportada en un conjunto de medida finita, definimos la **integral de Lebesgue** como:

$$\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n(x)dx$$

Donde $\{\phi_n\}$ es una secuencia de funciones simples con $|\phi_n| \leq M$ y cada ϕ_n es suportada en el suporte de f y $\phi_n(x) \to f(x)$ para casi todo x.
Se puede demostrar que la definición es independiente de la secuencia de funciones simples escogida.

Si queremos definir la función en un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ de medida finita, definimos:

$$\int_E f(x)dx = \int f(x)\chi_E(x)dx$$

Proposición: Si f, g son acotadas suportadas en conjuntos con medida finita, entonces:

i) **Linealidad:** Para $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g$$

ii) **Aditividad:** Si E, F son disjuntos, entonces:

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f$$

iii) **Monotonía:** Si $f \leq g$, entonces:

$$\int f \leq \int g$$

iv) **Desigualdad del triángulo:** $|f|$ también es acotada, suportada en el conjunto de medida finita y:

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

Teorema de convergencia acotada: Suponga que $\{f_n\}$ es una secuencia de funciones medibles acotadas por M suportadas en E con $m(E) < \infty$ y $f_n(x) \to f(x)$ para todo x conforme $n \to \infty$. Entonces f es medible, acotada, suportada en E para casi todo x y:

$$\int |f_n - f| \to 0 \quad , \; n \to \infty$$

O bien:

$$\int f_n \to \int f \quad , \; n \to \infty$$

Básicamente podemos intercambiar límites con integrales sin problema.

35.1.3. Regreso a la integral de Riemann

Teorema 1.5: Sea f una función Riemann integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f es medible y:

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f(x)dx$$

Donde la integral izquierda es de Riemann y la derecha de Lebesgue.

35.1.4. Paso 3: Funciones no negativas

Ahora estudiamos la integral de funciones no negativas pero no necesariamente acotadas. Permitimos que estas funciones tomen los valores $\pm\infty$.

Definimos la **integral (extendida) de Lebesgue** de f como:

$$\int f(x)dx = \sup_{g} \int g(x)dx$$

Donde el supremo se toma sobre todas las funciones medibles g con $0 \leq g \leq f$ donde g es acotada y suportada en un conjunto de medida finita.

En este caso, tenemos dos posibilidades, que el supremo sea finito (y entonces decimos que f es **integrable**) o que la integral se infinita.

Si $E \subset \mathbb{R}^d$ y $f \geq 0$, entonces podemos definir la integral de f en E:

$$\int_E f(x)dx = \int f(x)\xi_E(x)dx$$

Proposición: La integral de una función medible no negativa, cumple lo siguiente:

i) **Linealidad:** Si $f, g \geq 0$ y $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces:

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g$$

ii) **Aditividad:** Si E, F son disjuntos y $f \geq 0$, entonces:

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f$$

iii) **Monotonía:** Si $0 \leq f \leq g$, entonces:

$$\int f \leq \int g$$

iv) Si g es integrable y $0 \leq f \leq g$, entonces f es integrable

v) Si f es integrable, entonces $f(x) < \infty$ en casi todo x

vi) Si $\int f = 0$, entonces $f(x) = 0$ casi siempre.

Lema 1.7 (Fatou): Suponga que $\{f_n\}$ es una secuencia de funciones medibles con $f_n \geq 0$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para casi todo x, entonces:

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

La convergencia no siempre es como la esperamos, por ejemplo, si definimos:

$$f_n(x) \begin{cases} n & , \ 0 < x < 1/n \\ 0 & c.c \end{cases}$$

Entonces $f_n(x) \to 0$ pero $\int f_n(x)dx = 1$ para todo n.

Corolario 1.8: Supongamos que f es una función no negativa y que $\{f_n\}$ es una secuencia de funciones medibles no negativas con $f_n(x) \leq f(x)$ y $f_n(x) \to f(x)$ para casi todo x, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

Escribiremos $f_n \uparrow f$ cuando $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia de funciones medibles que satisface:

$$\begin{aligned} f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad & \text{para casi todo } x \\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ & \text{para casi todo } x \end{aligned}$$

Similarmente escribimos $f_n \downarrow f$ cuando:

$$\begin{aligned} f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \quad & \text{para casi todo } x \\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ & \text{para casi todo } x \end{aligned}$$

Corolario 1.9 (Teorema de Convergencia Monótona): Suponga que $\{f_n\}$ es una secuencia de funciones no negativas medibles con $f_n \uparrow f$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

Corolario 1.10: Considera las serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ donde $a_k(x) \geq 0$ es medible para todo $k > 1$. Entonces:

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx$$

Si la serie $\sum a_k(x)$ converge para casi todo x y el lado derecho es finito.
Se sigue de la convergencia monótona de las usamos parciales.

- **Corolario interesante (Borel-Cantelli):** Si $E_1, E_2, \cdots$ son una colección de conjuntos medibles con $\sum m(E_k) < \infty$, entonces el conjunto de puntos que pertenecen a una infinidad de E_k tiene medida 0.

  Para probarlo, definimos $a_k(x) = \chi_{E_k}(x)$.
  Y notamos que x pertenece a infinitos conjuntos sii $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \infty$.
  Nuestra hipótesis dice que $\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx < \infty$ y entonces el corolario anterior implica que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ es finita excepto por un conjunto de medida cero. Y listo.

35.1.5. Caso 4) Caso General

Si f es una función medible en $\mathbb{R}^d$, decimos que es **Lebesgue integrable** si la función $|f|$ es integrable en el sentido del caso 3.

Le damos sentido a la integral definiendo lo siguiente:

$$f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\} \quad , \quad f^-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\}$$

Así que f^+, f^- son no-negativas y $f^+ - f^- = f$. Entonces definimos la **integral de Lebesgue** como:

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

Prop 1.11: La integral de Lebesgue para funciones más generales es lineal, aditiva, monótona y satisface la desigualdad del triángulo.

Prop 1.12: Suponga que f es integrable en $\mathbb{R}^d$. Entonces para todo $\epsilon > 0$:

i) Existe un conjunto de medida finita B tal que:

$$\int_{B^c} |f| < \epsilon$$

ii) Hay una $\delta > 0$ tal que:

$$\int_E |f| < \epsilon \quad \text{cuando} \quad m(E) < \delta$$

Teorema 1.13: Suponga que $\{f_n\}$ es una secuencia de funciones medibles tales que $f_n(x) \to f(x)$ para casi todo x conforme n tiende a infinito. Si $|f_n(x)| \leq g(x)$, con g integrable, enotnces:

$$\int |f_n - f| \to 0 \quad , \; n \to \infty$$

y por tanto:

$$\int f_n \to \int f \quad , \; n \to \infty$$

35.2. El espacio L^1 de funciones integrables

Definimos $L^1(\mathbb{R}^d)$ como el espacio de todas las funciones Lebesgue-integrables en $\mathbb{R}^d$. Este conjunto es un espacio vectorial con la suma y producto por escalar esperados.

Para cualquier función f eintegrable en $\mathbb{R}^d$ le definimos su **norma** como:

$$||f|| = ||f||_{L^1} = ||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx$$

Ésta es una norma siempre y cuando consideremos que dos funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ son iguales si son iguales casi siempre. Entonces, los elementos de $L^1(\mathbb{R}^d)$ son en realidad clases de equivalencia, pero no haremos este detalle.

Proposición: Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces:

i) $||af||_{L^1} = |a|||f||_{L^1}$ para todo $a \in \mathbb{C}$

ii) $||f + g||_{L^1} \leq ||f||_{L^1} + ||g||_{L^1}$

iii) $||f||_{L^1} = 0$ sii $f = 0$ (casi siempre)

iv) $d(f, g) = ||f - g||_{L^1}$ define una métrica en $L^1(\mathbb{R}^d)$

Completo: Un espacio se dice completo sii para toda secuencia de Cauchy $\{x_k\}$ en V (es decir, si $k, l > N$ entonces $d(x_k, x_l) < \epsilon$). Existe una $x \in V$ tal que $\lim_{k \to \infty} x_k = x$.
En el sentido de que $d(x_k, x) \to 0$ conforme $k \to \infty$.

Teorema de Riesz- Fischer: El espacio vectorial L^1 es completo con la métrica definida antes.

Corolario: Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en L^1, entonces existe una subsecuencia $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que:

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad , \text{ para casi todo x}$$

Denso: Decimos que una familia $\mathcal{G}$ de funciones integrables de L^1 es denso en L^1 si para todo $\epsilon > 0$ y todo $f \in L^1$, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $||f - g||_{L^1} < \epsilon$.

Teorema 2.4: Las siguientes familias son densas en $L^1(\mathbb{R}^d)$:

- Las funciones simples
- Las funciones step
- Las funciones continuas con soporte compacto

35.2.1. Propiedades de Invariancia

Si f es una función en $\mathbb{R}^d$, definimos una traslación por $h \in \mathbb{R}^d$ como $f_h(x) = f(x - h)$.

Invariancia de Traslación: Si f es integrable, también lo es f_h y:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-h)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$$

Dilatación: Si $\delta > 0$ y f es integrable:

$$\delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(-x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$$

Convolución:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy = (g * f)(x)$$

Traslaciones y Continuidad:
Notar que para todo $x \in \mathbb{R}^d$, decir $f_h(x) \to f(x)$ conforme $h \to 0$ es lo mismo que la continuidad de f en x.

Proposición: Suponga $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces:

$$||f_h - f||_{L^1} \to 0 \quad , \text{ conforme } h \to 0$$

35.3. Teorema de Fubini

En general escribimos $\mathbb{R}^d$ como $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ si $d = d_1 + d_2$

Si f es una función en $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, el **slice** de f correspondiente a $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ es la función f^y definida en $\mathbb{R}^{d_1}$ dada por:

$$f^y(x) = f(x, y)$$

En el caso de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ definimos sus **Slices** como:

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} \mid (x, y) \in E\} \quad , \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^{d_2} \mid (x, y) \in E\}$$

35.3.1. Postulado

Teorema: Suponga que $f(x, y)$ es integrable en $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Entonces para casi todo $y \in \mathbb{R}^{d_2}$:

- La slice f^y es integrable en $\mathbb{R}^{d_1}$
- La función definida por $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx$ es integrable en $\mathbb{R}^{d_2}$
- $$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f$$

Claramente el resultado es simétrico, indicando que:

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y)dx \right) dy$$

Prop 3.6: Suponga que E_1, E_2 son subconjuntos medibles en $\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{R}^{d_2}$ respectivamente. Entonces $E = E_1 \times E_2$ es medible en $\mathbb{R}^d$. Además:

$$m(E) = m(E_1)m(E_2)$$

36. Diferenciación e Integración

36.1. Derivada de la integral

Si f es integrable en un intervalo $[a,b]$, entonces definimos:

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy \qquad , \; a \leq x \leq b$$

Y la derivada sería $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ conforme $h \to 0$.
Entonces, nos damos cuenta que tenemos que calcular el límite de:

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy = \frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy$$

Donde $I = (x, x+h)$ y $|I|$ es la longitud de este intervalo. Queremos que la derivada de integral sea igual a la función original, es decir:

$$\lim_{|I|\to 0\;,\; x\in I} \int_I f(y)dy = f(x)$$

O más en general, para funciónes de $\mathbb{R}^d$, nos preguntamos si se cumple que:

$$\lim_{m(B)\to 0\;,\; x\in B} \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy = f(x) \qquad , \qquad \text{para casi todo x}$$

Esto se conoce como el **problema del promedio.**

Vemos que claramente se vale para todo x en el que f sea continua.
Pues para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(y)| < \epsilon$. Entonces:

$$f(x) - \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy = \frac{1}{m(B)}\int_B (f(x)-f(y))dy$$

Vemos que si la bola B tiene radio menor a $\delta/2$ y contiene a x, entonces:

$$\left| f(x) - \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy \right| \leq \frac{1}{m(B)}\int_B |f(x)-f(y)|dy < \epsilon$$

36.2. La función maximal de Hardy-Littlewood

Sea f integrable en $\mathbb{R}^d$, definimos la **función maximal** f^* como:

$$f^*(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)|dy \;\;,\;\; x\in\mathbb{R}^d$$

Donde el supremo se toma sobre todas las bolas que contienen a x.
Es decir, tomamos el supremos de los promedios de f alrededor de x.

Teorema: Suponga que f es integrable en $\mathbb{R}^d$, entonces:

- f^* es medible
- $f^*(x) < \infty$ para casi todo x
- f^* cumple:

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d \mid f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha}||f||_{L^1}$$

Para todo $\alpha > 0$, donde $A = 3^d$, y $||f||_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx$

El teorema de diferenciación de Lebesgue

Teorema: Si f es integrable en $\mathbb{R}^d$, entonces:

$$\lim_{m(B)\to 0\,,\, x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x) \qquad \text{para casi todo x}$$

Integrable Localmente: Lo es f en $\mathbb{R}^d$ si la función $f(x)\chi_B(x)$ es integrable para toda bola B.
Denotamos por $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ como el espacio de funciones localmente integrables.

Teorema 1.4: Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, entonces:

$$\lim_{m(B)\to 0\,,\, x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x) \qquad \text{para casi todo x}$$

Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible y $x \in \mathbb{R}^d$ cumple que:

$$\lim_{m(B)\to 0\,,\, x\in B} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 1$$

entonces decimos que x es un **punto de Densidad de Lebesgue** de E.

Corolario: Suponga que E es medible en $\mathbb{R}^d$, entonces:

- Casi todo $x \in E$ es un punto de densidad de E
- Casi todo $x \notin E$ no es un punto de densidad de E

Conjunto de Lebesgue de f: Consiste de todos los punto $x' \in \mathbb{R}^d$ tales que $f(x')$ es finito y:

$$\lim_{m(B)\to 0\,,\, x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x')|dy = 0$$

Corolario: Si f es localmente integrable en $\mathbb{R}^d$, entonces casi todo punto pertenece al conjunto de Lebesgue de f

Una familia de conjuntos $\{U_i\}$ se dice que **tiene una excentricidad acotada** en x' si existe una constante $c > 0$ tal que para todo U_i existe una bola B tal que:

$$x' \in B, U_i \subset B \text{ y } m(U_i) \geq cm(B)$$

Corolario: Suponga que f es localmente integrable en $\mathbb{R}^d$. Si $\{U_i\}$ tiene excentricidad acotada en x', entonces:

$$\lim_{m(U_i)\to 0\,,\, x'\in U_i} \frac{1}{m(U_i)} \int_{U_i} f(y)dy = f(x')$$

36.3. Buenos Kernels y Aproximaciones a la Identidad

Si los K_δ son una familia de funciones (llamados Kernels) entonces la convolución es:

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)K_\delta(y)dy$$

Le llamábamos **Buenos Kernels** si cumplían:

i) $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)dx = 1$

ii) $\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)|dx \leq A$

iii) Para cada $\eta > 0$,

$$\int_{|x|\geq\eta} |K_\delta(x)|dx \to 0 \quad \text{conforme } \delta \to 0$$

Donde A es una constante independiente de δ.

El uso principal de estos Kernels es que si f es acotada, entonces $(f * K_\delta)(x) \to f(x)$ conforme $\delta \to 0$ en todo punto en el que f es continua.

Si en vez de las ondiciones $ii), iii)$, cambianos por las siguientes condiciones:

ii') $|K_\delta(x)| \leq A\delta^{-d}$ para cada $\delta > 0$

iii') $|K_\delta(x)| \leq A\delta/|x|^{d+1}$ para todo $\delta > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$

Entonces estos Kernels (que son buenos Kernels) ahora se llaman **aproximaciones a la identidad**

Ejemplo: Delta de Dirac. Definimos los Kernels:

$$K_\delta(x) = \begin{cases} 1/2\delta \quad , \quad |x| < \delta \\ 0 \quad , \quad c.c. \end{cases}$$

Que son un ejemplo de aproximaciones a la identidad. Estos Kernels se aproximan a la Delta de dirac $D(x)$ conforme $\delta \to 0$.
Además, podemos ver que:

$$f * K_\delta(x) = \int f(x-y)K_\delta(y)dy \int f(x-y)D(y)dy \to f(x)$$

Conforme $\delta \to 0$.
Por lo que la delta de Dirac es como la identidad de la convolución

Ejemplo2: Sea ϕ una función acotada no negativa en $\mathbb{R}^d$ soportada en $|x| \leq 1$ y tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi = 1$$

Entonces el conjunto de funciones $K_\delta(x) = \delta^{-d}\phi(\delta^{-1}x)$ es una aproximación a la identidad

Ejemplo 3: El Kernel de Poisson en el medio plano superior es:

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

Para $x \in \mathbb{R}$, donde ahora el parámetro es $\delta = y > 0$.

Ejemplo 4: El Kernel de calor en $\mathbb{R}^d$ es:

$$H_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t}$$

Donde $t > 0$ y $\delta = t^{1/2}$. Alternativamente, podríamos poner $\delta = 2\pi t$. En cualquier caso es una aprox. a la identidad.

Ejemplo 5: El Kernel de Poisson para el disco es:

$$\frac{1}{2\pi}P_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \quad , \quad |x| \leq \pi \\ 0 \quad , \quad |x| > \pi \end{cases}$$

Ejemplo 6: El Kernel de Fejer es:

$$\frac{1}{2\pi}F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} \quad , \quad |x| \leq \pi \\ 0 \quad , \quad |x| > \pi \end{cases}$$

Donde ahora $\delta = 1/N$ y tenemos otra aproximación a la identidad.

Teorema 2.1: Si $\{K_d\}$ es una aproximación de la identidad y f es integrable en $\mathbb{R}^d$, entonces:

$$(f * K_\delta)(x) \to f(x) \quad \text{conforme } \delta \to 0$$

Para todo x en el conjunto de Lebesgue (todos los puntos $x' \in \mathbb{R}^d$ tales que $f(x')$ es finito y $\lim\limits_{m(B)\to 0, x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x')| dy = 0$.
Es decir, es una mejora a lo de buenos Kernels porque incluye no sólo a los puntos de continuidad.

Lema 2.2: Suponga que f es integrabl en $\mathbb{R}^d$, y que x es un punto del conjunto de Lebesgue de f. Sea:

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{r^d} \int_{|y|\leq r} |f(x-y) - f(x)| dy \quad , \text{ con } r > 0$$

Entonces $\mathcal{A}(r)$ es continua para $r > 0$ y $\mathcal{A}(r) \to 0$ conforme $r \to 0$. Además, $\mathcal{A}$ es acotada.

Teorema: Suponga que f es integrable en $\mathbb{R}^d$ y que $\{K_\delta\}$ es una aproximación a la identidad. Enotnces, para cada $\delta > 0$, la convolución:

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) K_\delta(y) dy$$

es integrable, y:

$$||(f * K_\delta) - f||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad \text{conforme } \delta \to 0$$

36.4. Derivación de Funciones

36.4.1. Funciones de Variación acotada

Variación Acotada: Una función F es de variación acotada si bajo toda partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ existe M tal que se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})| \leq M$$

Ejemplo: Si F es monótona y acotada, entonces F es de variación acotada.
Ejemplo2: SI F es diferenciable en todo punto y F' es acotada, entonces F es de crecimiento

acotado.

Sea γ una curva. Decimos que γ es **rectificable** si existe $M < \infty$ tal que para cualquier partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ de $[a, b]$,

$$\sum_{j=1}^{N} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq M$$

Por definición, la **Longitud** es $L(\gamma)$ es el supremo de estas sumas tomado sobre las particiones de $[a, b]$.

Teorema: Una curva parametrizada por $(x(t), y(t))$ en $a \leq y \leq b$ es rectificable sii $x(t), y(t)$ son de variación acotada.

Variación Total: De una función f en $[a, x]$ es definido como:

$$T_f(a, x) = \sup \sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})|$$

Donde el supremo se toma sobre particiones de $[a, x]$

Teorema: Una función real F en $[a, b]$ es de variación acotada sii F es la diferencia de dos funciones crecientes acotadas.

Teorema 3.4: Si F es de variación acotada en $[a, b]$, entonces F es derivable casi siempre en $[a, b]$

Corolario: Si F es creciente y continua, entonces F' existe casi siempre. Y F' es medible, no negativa y:

$$\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a)$$

Sin embargo, la **función de Cantor-Lebesgue** es un ejemplo de una función continua $F : [0, 1] \to [0, 1]$ que es creciente y con $F(0) = 0, F(1) = 1$ pero con $F'(x) = 0$ casi siempre, por lo que es un ejemplo de que en el corolario anterior $\int_a^b F'(x)dx$ no es necesariamente igual a $F(b) - F(a)$.

36.4.2. Funciones Absolutamente Continuas

Sea F una función definida en $[a, b]$. Se dice que es **absolutamente continua** si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$$

Y los intervalos (a_k, b_k), $k = 1, 2, \cdots, N$ son disjuntos.

- Es claro que una función absolutamente continua es uniformemente continua
- Si F es absolutamente continua en un intervalo acotado, entonces es de variación acotada en dicho intervalo.
- Si $F(x) = \int_a^x f(y)dy$ con f integrable, entonces F es absolutamente continua.

Teorema 3.8: Si F es absolutamente continua en $[a, b]$, entonces $F'(x)$ existe casi siempre. Además, si $F'(x) = 0$ para casi todo x, entonces F es continua.

Teorema: Si F es absolutamente continua en $[a, b]$. Entonces F' existe casi siempre y es integrable. Además:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(y)dy \qquad \forall \ a \leq x \leq b$$

36.4.3. Derivación de funciones con saltos

Asumimos que F es acotada y creciente. Eso implica que los límites:

$$F(x^-) = \lim_{y \to x \ , \ y<x} F(y) \qquad , \qquad F(x^+) = \lim_{y \to x \ , \ y>x} F(y)$$

existen. Y además $F(x^-) \leq F(x) \leq F(x^+)$.

Lema: Una función acotada creciente F en $[a, b]$ tiene a lo sumo una cantidad contable de discontinuidades.

37. Espacios de Funciones Medibles

37.1. Los espacios $\mathcal{L}_p$

A lo largo de todo el tema consideramos un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Definición: Para cada $0 < p < \infty$ y $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, definimos el espacio $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, K)$ de las funciones medibles $f : \Omega \to K$ tales que:

$$\int |f|^p d\mu < \infty$$

y para cada $f \in \mathcal{L}_p$ y $p \geq 1$, definimos:

$$||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Prop: Para $0 < p < \infty$, $\mathcal{L}_p(\Omega, K)$ es un K-e.v.

37.1.1. El espacio $\mathcal{L}_\infty$

Localmente nulo: Es un conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que para cada $B \in \mathcal{A}$ con $m(B) < \infty$, se tiene que $\mu(A \cap B) = 0$.
Diremos que una propiedad se vale casi seguro si el conjunto de puntos en el que se cumple es localmente nulo.

Denotamos con $\mathcal{L}_\infty$ al espacio de funciones medibles $f : \Omega \to K$ que llamamos **esencialmente acotados**, para los que existe $0 \leq c < \infty$ tal que $\{|f| > c\}$ es localmente nulo, y para ellas definimos:

$$||f||_\infty = \text{ínf}\{c > 0 \mid \{|f| > c\} \in \mathcal{N}^*\}$$

Prop. $\mathcal{L}_\infty$ es un $K-$espacio vectorial y $||f||_\infty$ es una semi-norma.

37.2. Los Espacios de Banach L_p

37.2.1. Desigualdades fundamentales

Def: Decimos que $1 < p, q < \infty$ son conjugados si $p + q = pq$ o equivalentemente, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lema: Sean $1, p, q < \infty$ conjugados y $a, b >\geq 0$, entonces:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Sean $a, b \geq 0$ y $r > 0$ entonces:

$$\begin{aligned} 0 < r < 1 &\quad \Rightarrow \quad (a+b)^r < a^r + b^r \\ r > 1 &\quad \Rightarrow \quad (a+b)^r > a^r + b^r \end{aligned}$$

Desigualdad de Holder: Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados. Si $f \in \mathcal{L}_p, g \in \mathcal{L}_q$, entonces $fg \in \mathcal{L}_1$ y:

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz (es un caso especial): Si $f, g \in \mathcal{L}_2$, $f\bar{g} \in \mathcal{L}_1$ y:

$$\left| \int f\bar{g} d\mu \right| \leq ||f||_2 ||g||_2$$

Desigualdad de Minkowsky: Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in \mathcal{L}_p$, entonces $f + g \in \mathcal{L}_p$ y:

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Corolario: Para cada $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{L}_p$ es un e.v. sobre K y $|| \cdot ||_p$ es una seminorma sobre él.
Es decir, cumple la desigualdad del triángulo, saca escalares con valor absoluto.
Sin embargo, es semi porque $||f|| = 0$ no implica $f = 0$ (implica $f = 0$ casi siempre).

37.2.2. El espacio $\mathcal{L}_p$ para $0 < p < 1$

Para $0 < p < 1$, $||\cdot||_p$ no es ni una seminorma pues no cumple la desigualdad del triángulo. Para verlo, consideramos conjuntos medibles disjuntos A, B con $\mu(A) = a$, $\mu(B) = b$ finitos y no nulos.
Sea $f = I_A$ y $g = I_B$, entonces $f + g = I_{A \cup B}$ y:

$$||f + g|||_p = \left(\int I_{A \cup B} d\mu \right)^{1/p} = (a+b)^{1/p} > a^{1/p} + b^{1/p} = ||f||_p + ||g||_p$$

Sin embargo, en estos espacios podemos definir directamente una seudométrica como sigue:

$$d_p(f, g) = \int |f - g|^p d\mu$$

y tiene las propiedades:

- $d_p(f, g) \geq 0$
- $d_p(f, g) = 0$ sii $f = g$ casi siempre
- $d_p(f, g) = d_p(g, f)$
- $d_p(f, g) \leq d_p(f, h) + d_p(h, g)$

37.3. Los espacios L_p

En general, las seudométricas para $0 < p < 1$ no son métricas y las seminormas $||\cdot||_p$ para $1 \leq p \leq \infty$ no son normas, pues tenemos que:

- **Para** $0 < p < 1$**:** La semimétrica es $d_p(f,g) = \displaystyle\int |f-g|^p d\mu$, y es pseudo porque $d_p(f,g) = 0$ sii $f = g$ c.s.
- **Para** $1 \leq p < \infty$**:** La seminorma es $||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$. Es pseudo porque $||f||_p = 0$ sii $f = 0$ casi siempre
- **Para** $p = \infty$**:** La seminorma es $||f||_\infty = \text{ínf}\{c > 0 \,|\{|f| > c\}$ es localmente nulo $\}$. Es seminorma porque $||f||_\infty = 0$ sii $f = 0$ es localmente casi siempre 0.

Sin embargo, podemos convertir esto en una norma, pues:
Definición: Decimos que dos funciones medibles $f, g : \Omega \to K$ son **equivalentes** , $f \simeq g$ si $f = g$ localmente casi siempre. Es fácil ver que es una relación de equivalencia. Entonces, definimos los espacios cocientes para $0 < p \leq \infty$:

$$L_p = \mathcal{L}_p / \simeq$$

Es decir, en este espacio vamos a identificar a dos funciones como iguales si son iguales l.c.s. Y ahora las seminormas y semimétricas ya son normas y métricas.

Lema: Si $0 < p < \infty$ y $f, g \in \mathcal{L}_p$, entonces:

$$f = g \text{ c.s} \quad \text{sii} \quad f = g \text{ l.c.s.}$$

Por lo que ahora ya tenemos verdaderamente espacios normados y espacios métricos. En vez de ecribir los elementos como clases de equivalencia, los escribiremos como funciones.

- **Ejemplo (Los espacios de Banach** $(K^n, ||\cdot||_p)$**)**
Si $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ es finito y μ es la medida de contar, entonces cada función $f : \Omega \to K$ se identifica con $x = (x_1, \cdots, x_n) \in K^n$ como $f(\omega_i) = x_i$, en cuyo caso, para $p < \infty$ tenemos que:
$$||f||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = ||x||_p \quad , \quad (L_p, ||\cdot||_p) = (K^n, ||\cdot||_p)$$
y para $p = \infty$, $||f||_\infty = \text{máx}\{|x_i|\} = ||x||_\infty$
Es decir, la norma de la función se reduce a la p-norma típica de K^n.

- **Ejemplo (Los espacios** l_p **de sucesiones)**: En el caso particular de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ para μ la medida de contar. Es habitual escribir l_p en vez de L_p. Es común pensar en f como sucesiones $f(n) = x_n \in K$ en vez de como funciones. Entonces, l_p es el espacio de las sucesiones $f = (x_n)$ tales que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

y para $p = \infty$, l_∞ es el espacio de sucesiones acotadas.

37.3.1. Compleción de los Espacios L_p

Vamos a demostrar que toda sucesión de Cauchy en L_p es convergente. Notar que la convergencia en L_p no es igual a la convergencia puntual y se define que $f_n \to f$ en L_p como:

- **Para** $0 < p < 1$: $d_p(f, f_n) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int |f_n - f|^p d\mu \to 0$
- **Para** $1 \leq p < \infty$: $||f - f_n||_p \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int |f_n - f|^p d\mu \to 0$ omitimos el $()^{1/p}$ porq no importa
- **Para** $p = \infty$: $||f - f_n||_\infty \to 0$

Lema: Sea $0 < p < \infty$ y $f_n \in \mathcal{L}_p$ una sucesión de Cauchy, entonces existe f medible y una subsucesión g_n de f_n tal que $g_n \to f$ casi siempre.

Teorema 6.2.13: Para $1 \leq p \leq \infty$, $(L_p, || \cdot ||_p)$ son espacios de Banach (un espacio métrico completo) y para $0 < p < 1$, los espacios métricos (L_p, d_p) son completos.

Teorema 6.2.14: Si $f_n \in \mathcal{L}_p$ es una sucesión de Cauchy, con límite f, entonces: Para $p = \infty$, $f_n(x) \to f(x)$ l.c.s.
Y para $0 < p < \infty$, existe una subsucesión de f_n que converge c.s. a f.

37.4. Espacio Dual

Entenderemos V_1, V_2, V_3 espacios normados sobre $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definición: Dada una aplicación lineal $T : V_1 \to V_2$, definimos su **norma** como:

$$||T|| = \sup\{||T(x)||/||x|| \ \ : \ 0 \neq x \in V_1\}$$

y decimos que T es acotada si $||T|| < \infty$.

Nota: Podemos tomar el supremo sólo sobre las x con $||x|| = 1$ por la linealidad.
Además, vemos que T es **acotada** sii existe $k \in [0, \infty)$ tal que para todo $x \in V_1$:

$$||T(x)|| \leq k||x||$$

Y que de hecho $||T||$ es el ínfimo de estas constantes k.

Teorema: Para una aplicación lineal $T : V_1 \to V_2$ son equivalentes:

a) T es u.c

b) T es continua en un punto.

c) T es acotada.

Claro que para e.v. finitos, siempre se cumplen las tres propiedades.

- Dem: a) a b) es obvio.
  b) a c): Supongamos que T es continua en y, entonces $\forall\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $||x-y|| \leq \delta \Rightarrow ||T(x-y)|| = ||T(x)-T(y)|| \leq \epsilon$. En particular, si $z = x-y$, quiere decir que si $||z|| \leq \delta \Rightarrow\ ||T(z)|| \leq \epsilon$. Se sigue que si $x \neq 0$, llamamos $z = \delta x/||x||$, $||z|| = \delta$ y:

  $$||T(x)|| = ||x||||T(z)||/\delta \leq (\epsilon/\delta)||x||$$

  Por lo que $||T(x)|| \leq k||x||$ y entonces T es acotada.

  c) a a): $||T(x) - T(y)|| = ||T(x-y)|| \leq ||T||||x-y||$ (por acotada). Entonces T es Lipschitz y por tanto es u.c.

Teorema: Sean V_1, V_2 K-e.v. normados. Entonces definimos el espacio $B(V_1, V_2)$ de las aplicaciones **lineales continuas** $T : V_1 \to V_2$ con la suma y producto por escalares como esperamos.
Se le define el operador norma como definimos antes y entonces eso implica que $B(V_1, V_2)$ es un **espacio normado**.
Además, si V_2 es de Banach (normado completo) entonces $B(V_1, V_2)$ es de Banach.

Def: Dado un espacio normado V, denotamos por V' el espacio vectorial dual de las funciones lineales $f : V \to K$ y denotamos con $V^* = B(V, K)$ el espacio de los funcionales **lineales y continuos**.

Teorema: El dual V^* de un espacio normado V es un espacio de Banach con la norma definida en él como:

$$||f|| = \sup\{|f(x)| \mid ||x|| \leq 1\}$$

Dem: Es una consecuencia del teorema anterior y de que K es completo.

Def: Diremos que una aplicación $T : V_1 \to V_2$ es una **isometría** si es lineal y para cualquier $x \in V$ se cumple:

$$||T(x)|| = ||x||$$

Nota que es acotada y por tanto continua. Si es sobre, diremos que es un **isomorfismo.**

Nota: Hay una aplicación lineal y continua natural entre un espacio normado V y su bidual V^**, dada por:

$$\pi : V \to V^** \quad , \quad \pi(x) = \widehat{x} \;\; , \;\; \widehat{x}(f) = f(x)$$

Que está bien definida, pues $\widehat{x} \in V^**$ porque es un operador lineal y acotado de V^* a K.

Teorema de Hahn-Banach: Sea V un espacio normado, $W \subset V$ un subespacio y $f_0 \in W^*$, entonces existe $f \in V^*$ tal que $f|_W = f_0$ y $||f|| = ||f_0||$

37.5. Espacio Dual de L_p

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados. Entonces para cada $g \in \mathcal{L}_q$, podemos definir el funcional asociado a g como:

$$T_g : \mathcal{L}_p \to K \quad , \quad T_g(f) = \int fg d\mu$$

O podemos extenderlo de modo obvio a $T_g : L_[\to K$.
Esta función es lineal y continua, por lo que $T_g \in L_p^*$. Esto por la desigualdad de Holder que dice que para todo $f \in \mathcal{L}_p$:

$$|T_g(f)| \leq ||g||_q ||f||_p \quad \Rightarrow \quad ||T_g|| \leq ||g||_q$$

Entonces, la desigualdad de Holder nos permite acotar la función $T_g : L_p \to K$ y entonces T_g es lineal y continua.
Entonces, podemos definir la aplicación:

$$T : L_q \to L_p^* \quad , \quad g \to T(g) = T_g$$

Donde:

$$T_g(f) = \int fg d\mu$$

Teorema 6.4.1: Para $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados, la aplicación $T : L_q \to L_p^*$ es una isometría. Es decir $||T(g)|| = ||g||_q$.

Además. la isometría $T : L_q \to L_p^*$ es un isomorfismo en casi todos los casos:

- Si $1 < p, q < \infty$, entonces $L_q \simeq L_p^*$

- Si $p = 1$, $q = \infty$, entonces $L_\infty \simeq L_1^*$

Lema: Toda aplicación lineal continua $F : V_1 \to V_2$ entre espacios normados define otra entre los duales, a la que llamamos dual o traspuesta.

$$F^* : V_2^* \to V_1^* \quad , \quad F^*(f) = f \circ F$$

Teorema: Para $1 < p, q < \infty$ conjugados, la isometría $T : L_q \to L_p^*$ es sobre y los espacios son isorfos.
Si el espacio es $\sigma-$finita, $T : L_\infty \to L_1^*$ es sobre

37.6. Tipos de Convergencia

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f_n, f : \Omega \to K$ funciones medibles.

- **Casi seguro:** Decimos que $f_n \to f$ casi seguro si:

$$\mu\{x \in \Omega \mid f_n(x) \text{ no converge a } f(x)\} = 0$$

- **Casi uniformemente:** Decimos $f_n \to f$ casi uniformemente si para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que f_n converge uniformemente a f en A y $\mu(A^c) < \epsilon$.
- **En medida:** Decimos que $f_n \to f$ en medida si para todo $\epsilon > 0$:

$$\mu\{|f_n - f| \geq \epsilon\} \to 0$$

- **En** L_p Diremos que $f_n \to f$ en L_p si $f_n, f \in L_p$ y $d_p(f_n, f) \to 0$

Def De Cauchy: Diremos que f_n es de Cauchy casi seguro si:

$$\mu\{x \in \Omega \mid f_n(x) \text{ no es de Cauchy}\} = 0$$

De Cauchy uniformemente: Diremos que f_n es de Cauchy uniformemente si para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que f_n es de Cauchy uniformemente en A y $\mu(A^c) < \epsilon$.

De Cauchy en medida: f_n es de Cauchy en medida si para todo $\epsilon > 0$:

$$\mu\{|f_n - f_m| \geq \epsilon\} \to 0$$

cuando $n, m \to \infty$

Proposición:

a) Si f_n converge en medida a f y a g entonces $f = g$ casi siempre

b) Si $f_n \to f$ y $g_n \to g$ en medida, entonces $f_n + g_n \to f + g$ en medida

c) Si $f_n \to 0$ y $g_n \to 0$ en medida entonces $f_n g_n \to 0$ en medida

d) Si $f_n \to 0$ en medida, g es medible y $\mu(\Omega) < \infty$, entonces $f_n g \to 0$ en medida

e) Si $f_n \to f, g_n \to g$ en meidida y $\mu(\Omega) < \infty$, entonces $f_n g_n \to fg$ en medida.

a) Si $\mu(\Omega) < \infty$, entonces para cualquiera $1 \leq p \leq q \leq \infty$:

$$f_n \to f \text{ en } L_q \quad \Rightarrow \quad f_n \to f \text{ en } L_p$$

c) Si $f_n \to f$ (L_p), para un $0 < p < \infty$, entonces $f_n \to f$ en medida

d) Si $f_n \to f$ casi uniformemente, entnoces $f_n \to f$ en medida y $f_n \to f$ casi seguro.

38. Espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert son especialmente importantes porque son una generalización infinito-dimensional de los espacios euclídeos. Con las propiedades de ortogonalidad y de completes.

38.1. El espacio de Hilbert de L^2

El espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$ es el espacio de todas las funciones **cuadrado - integrables**, es decir, que satisfacen:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Le definimos una **norma** dada por:

$$||f||_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Además, el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$ tiene un producto punto muy natural:

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(\bar{x}) dx \qquad , \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Con este producto punto, la norma es la norma inducida.

Proposición: El espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$ tiene las propiedades:

i) $L^2(\mathbb{R}^d)$ es un espacio vectorial

ii) $f(x)\bar{g}(x)$ es integrabl cuando $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Y la **desigualdad de Cauchy** es $|(f, g)| \leq ||f||||g||$

iii) Si $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ es fijo, entonces el mapeo $f \to (f, g)$ es lineal en f y $(f, g) = (g, \bar{f})$

iv) La norma $||||$ es una norma, pues cumple también $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$

Cauchy: Una seuencia $\{f_n\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ es cauchy si $d(f_n, f_m) \to 0$ conforme $n, m \to \infty$. Además, la secuencia converge a $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ si $d(f_n, f) \to 0$ conforme $n \to \infty$.

Teorema: El espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$ es completo con esta métrica.

Teorema: El espacio $L^2(\mathbb{R})$ es **separable,** en el sentido que existe una colección numerable $\{f_k\}$ de elementos tal que sus combinaciones lineales son densas en $L^2(\mathbb{R}^d)$

38.2. Espacios de Hilbert

Decimos que H es un espacio de Hilbert si cumple lo siguiente:

i) H es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (o sobre $\mathbb{R}$)

ii) H tiene un producto punto que cumple:

- $f \to (f, g)$ es lineal en H para todo $g \in H$ fijo.
- $(f, g) = (g, \bar{f})$
- $(f, f) \geq 0$ para todo $f \in H$
  Definimos $||f|| = (f, f)^{1/2}$

iii) $||f|| = 0$ sii $f = 0$

iv) Se cumplen las desigualdades de C-S y del triángulo: $|(f, g)| \leq ||f||||g||$ y $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$ (lo cual de hecho es consecuencia de tener una norma inducida por un producto punto).

v) H es completo bajo la métrica $d(f, g) = ||f - g||$

vi) H es separable (existe una colección de elementos de H tal que su generado por combinaciones lineales es denso en H)

En el contexto de espacios de Hilbert, escribimos $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ para significar que $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$

Ejemplo: Si E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^d$ con $m(E) > 0$, sea $L^2(E)$ todas las funciones cuadrado integrables suportadas en E (cumplen $\int_E |f(x)|^2 dx < \infty$).
El producto punto y norma en este espacio son:

$$(f, g) = \int_E f(x)g(\bar{x})dx \quad , \quad ||f|| = \left(\int_E |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

Donde consideramos dos elementos de $L^2(E)$ como iguales si son diferentes en un conjunto de medida cero.

Ejemplo 2: Consideramos el espacio $\mathbb{C}^N = \{(a_1, \cdots, a_N) \mid a_k \in \mathbb{C}\}$. Y lo equipamos con el producto punto dado por $\sum_{k=1}^{N} a_k \bar{b}_k$. La norma es entonces $\left(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2\right)^{1/2}$. Y cumple con todo lo que debe de cumplir el espacio de Hilbert (es separable si consideramos los puntos $k + hi$ con $k, h \in \mathbb{Q}$).

Ejemplo 3: Consideramos el espacio $l^2(\mathbb{Z})$ definido como:

$$l^2(\mathbb{Z}) = \{(\cdots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots) \mid a_i \in \mathbb{C}\ ,\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$$

Si denotamos por a, b a dos secuencias infinitas, el producto punto entre ellos se define como:

$$(a, b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \bar{b}_k \quad , \quad ||a|| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2\right)^{1/2}$$

Una variante es $l^2(\mathbb{N})$ que consiste de sólo las secuencias infinitas en una dirección.

38.2.1. Ortogonalidad

:
Dos elementos f, g de un espacio de Hilbert se dicen que son ortogonales si se cumple que:

$$(f, g) = 0$$

Prop1 (Teorema de Pitágoras): Si $f \perp g$, entonces $||f + g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2$.

Ortonormal: Es un conjunto $\{e_1, e_2, \cdots\}$ finito o infinito en H tal que:

$$(e_k, e_l) = \begin{cases} 1 & , \ k = l \\ 0 & , \ k \neq l \end{cases}$$

Proposición 2 (pitágoras extendido): Si $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es ortonormal, y $f = \sum a_k e_k \in H$, donde la suma es finita, enotnces:

$$||f||^2 = \sum |a_k|^2$$

Dado un conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, \cdots\}$ de H, un problema muy natural es preguntarnos si genera a todo H.

Base Ortonormal: Decimos que $\{e_i\}$ es una **base ortonormal** de H si las combinaciones lineales finitas de elementos de $\{e_1, e_2, \cdots\}$ son densas en H.
Con una base ortonormal, si tenemos $f \in H$, esperaríamos que $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ con $(f, e_j) = a_j$.

Teorema (Equivalencias de base ortonormal): Las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) Las combinaciones lineales finitas de $\{e_i\}$ son densas en H ($\{e_i\}$ es una base ortonormal de H)

ii) Si $f \in H$ y $(f, e_j) = 0$ para todo j, entonces $f = 0$

iii) Si $f \in H$ y $S_N(f) = \sum_{k=1}^{N} a_k e_k$, donde (f, e_k), entonces $S_N(f) \to f$ conforme $N \to \infty$ en la norma.

iv) Si $a_k = (f, e_k)$ entonces $||f||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$

- i) a ii) Digamos que $f \in H$ con $(f, e_j) = 0$ para todo j. Por hipótesis, existe una secuencia $\{g_n\}$ de combinaciones lineales de elementos de $\{e_k\}$ tal que es denso, por lo que $||f - g_n||$ tiende a 0 conforme $n \to \infty$. Como $(f, e_j) = 0$ para todo j, debemos de tener $(f, g_n) = 0$ para todo n. Por tanto, la desigualdad de C-S nos dice:

  $$||f||^2 = (f, f) = (f, f - g_n) \leq ||f|| ||f - g_n|| \qquad \text{para todo n}$$

  Si dejamos que $n \to \infty$, entonces $||f||^2 = 0$. Y por tanto $f = 0$ casi siempre.

- ii) a iii): Supongamos que $f \in H$ y que $S_N(f) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k e_k$ con $a_k = (f, e_k)$. Por la definición de a_k, se cumple que $(f - S_N(f)) \perp S_N(f)$. Entonces, el teorema de pitágoras dice que:

  $$||f||^2 = ||f - S_N(f)||^2 + ||S_N(f)||^2 = ||f - S_N(f)||^2 + \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2$$

  Entonces queda la **desigualdad de Bessel** $||f||^2 \geq \sum\limits_{k=1}^{N} |a_k|^2$ al hacer N tender a infinito, nos queda la desigualdad como tal:

  $$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq ||f||^2$$

  Lo que implica que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ converge. Entonces, $\{S_N(f)\}_{N=1}^{\infty}$ forma una serie de Cauchy en H ya que:

  $$||S_N(f) - S_M(f)||^2 = \sum_{k=M+1}^{N} |a_k|^2 \qquad , \quad N > M$$

  Como H es completo, existe una $g \in H$ tal que $S_N(f) \to g$.
  Fijamos j y para N grande, $(f - S_N(f), e_j) = a_j - a_j = 0$. Entonces, como $S_N(f)$ tiende a g, tenemos que $(f - g, e_j) = 0$ para todo j.
  Entonces $f - g = 0$ por ii) y por tanto $f = g$ y $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$

- *iii*) a *iv*): Asumimos que se cumple iii) y por tanto observamos que $||f||^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

- *iv*) a *i*): El 4 dice que un conjunto es una base ortonormal sii se cumple la **identidad de Parseval**.

.

Teorema: Todo espacio de Hilbert tiene una base ortonormal.

- Dem: Recordamos que H es separable. Por lo que podemos escoger una $F = \{h_k\}$ subconjunto de H tal que las combinaciones lineales de F son densas en H.
  Luego, lo que hacemos es eliminar elementos redundantes de este conjuto (los l.d.) y luego usamos el proceso de ortonormalización de Gram-Schidt y seguirá generando a un conjunto denso.

38.2.2. Mapeos Unitarios

Es un mapeo entre dos espacios de Hilbert que preserva sus estructuras.
Digamos que H, K son espacios de Hilbert con productos internos $(\cdot,\cdot)_H, (\cdot,\cdot)_K$ y las normas correspondientes.
Entonces un **mapeo unitario** es uno que cumple:

- $U : H \to K$ es lineal
- U es biyectivo
- $||U(f)||_K = ||f||_H$ para todo $f \in H$

Como U es biyectiva, entonces tiene una inversa $U^{-1} : K \to H$. Además, preserva el producto punto, pues:

$$(U(f), U(g))_K = (f, g)_H$$

Lo cual se puede ver al usar la fórmula de polarización.

Unitariamente isomorfos (o equivalente): Son dos espacios H, K de Hilbert tales que existe un mapeo unitario entre ellos.

Teroemaa: Cualesquiera dos espacios de Hilbert dimensionalmente infinitos son unitariamente equivalentes

- Sean H, K dos espacios de Hilbert dimensionalmente infinitos. Podemos encontrarles una base ortonormal $\{e_1, e_2 \cdots\} \subset H$ y $\{k_1, k_2, \cdots\} \subset K$.

Luego, consideramos el mapeo que sigue, si $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ entonces:

$$U(f) := g := \sum_{i=1}^{\infty} a_i k_i$$

Y por la identidad de Parseval, se tiene que $||U(f)||_K^2 = ||g||_K^2 = \sum |a_k|^2 = ||f||_H^2$. Por lo que es unitario.

Entonces, todos los espacios de Hilbert de base infinita son equivalentes a $l^2(\mathbb{N})$ o bien, a $l^2(\mathbb{Z})$.

Corolario: Dos espacios de Hilbert son unitariaemnte equivalentes sii tienen la misma base.

38.2.3. Espacios pre-Hilbert

Un espacio de pre-Hilbert es uno que cumple con todas las propiedades excepto v) (no es asumido que sea completo).
Por ejemplo, las funciones Riemann integrables en $[-\pi, \pi]$ forman un espacio de Hilbert.

Sin embargo, estos espacios se pueden **completar**.

Compleción: Sea H_0 un pre-Hilbert con producto $(\cdot, \cdot)_0$. Entonces, podemos encontrar un espacio H con producto interno $(\cdot, \cdot)$ tal que:

i) $H_0 \subset H$

ii) $(f, g)_0 = (f, g)$ cuando $f, g \in H_0$

iii) H_0 es denso en H

- Dem: Consideramos todas las secuencias de Cauchy en H_0 de la forma $\{f_n\}$. Y decimos que dos secuencias $\{f_n\}, \{f'_n\}$ son equivalentes si $f_n - f'_n$ converge a 0. La colección de estas clases es lo que se define como H.

38.3. Series de Fourier de Fatou

Si $f \in L^1([-\pi, \pi])$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces el n-ésimo **Coeficiente de Fourier** de f es:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

La serie de Fourier de f es entonces $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ y escribimos:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

Para indicar que la suma de la derecha es la correspondiente de la función de la izquierda.

Teorema :Suponga que f es integrable en $[-\pi, \pi]$, entonces:

i) Si $a_n = 0$ para todo n, entonces $f(x) = 0$ para casi todo x

ii) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{inx}$ tiende a $f(x)$ para casi todo x conforme $r \to 1$ con $r < 1$.

- La primera conclusión sale de la segunda.

Teorema: Suponga que $f \in L^2([-\pi, \pi])$, entonces tenemos:

i) La relación de Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

ii) El mapeo $f \to \{a_n\}$ es una correspondencia unitaria entre $L^2([-\pi, \pi])$ y $l^2(\mathbb{Z})$

iii) Las series de Fourier de f convergen a f en la norma L^2.
Esto se debe a las equivalencias entre definiciones de base ortonormales.

38.3.1. Teorema de Fatou

Teorema: Una función acotada y holomorfa $F(re^{i\theta})$ en el disco unitario tiene límites en casi todo θ.

38.4. Subespacios Cerrados y Proyecciones Ortogonales

Un **subespacio lineal** S de H es un conjunto que cumple $\alpha f + \beta g \in S$ para todo $f, g \in S$.
Un subespacio S es **cerrado** si cuando $\{f_n\} \subset S$ converge a $f \in H$, entonces f también pertenece a S.
En el caso de espacios de Hilbert dimensionalmente finitos, todo subespacio es cerrado. Sin embargo, en el caso general no se cumple esto.

Lema: Suponga que S es un subespacio cerrado de H y $f \in H$, entonces:

i) Existe un único $g_0 \in S$ que es el más cercano a f, es decir:

$$||f - g|| = \inf_{g \in S} ||f - g||$$

ii) El elemento $f - g_0$ es perpendicular a S, es decir:

$$(f - g_0, g) = 0 \quad , \quad \forall g \in S$$

Complemento Ortogonal a S: Es el conjunto

$$S^{\perp} = \{f \in H \mid (f, g) = 0 \qquad \forall\, g \in S\}$$

Claramente $S^{\perp}$ es también un subespacio de H y $S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

Proposición: Si S es es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces:

$$H = S \oplus S^{\perp}$$

Es decir, cada elemento H se puede escribir de forma única como $g + h$ con $g \in S$ y $h \in S^{\perp}$.

Proyección Ortogonal: Sea $H = S \oplus S^{\perp}$, entonces definimos:

$$P_S(f) = g \quad , \qquad \text{donde} \ , \ f = g + h \ \ , g \in S \ , \ h \in S^{\perp}$$

El mapeo P_S cumple:

i) $f \to P_S(f)$ es lineal

ii) $P_S(f) = f$ cuando $f \in S$

iii) $P_S(f) = 0$ cuando $f \in S^{\perp}$

iv) $||P_S(f)|| \leq ||f||$ para todo $f \in H$

Ejemplo 1L En $L^2([-\pi, \pi])$, recordamos que $f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ entonces las sumas parciales de Fourier son:

$$S_N(f)(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\theta}$$

Entonces, el operador S_N consiste en la proyección de f al espacio proyectado por $\{e_{-N}, \cdots, e_N\}$.

38.5. Transformaciones Lineales

Transformada Lineal: Es un mapeo $T : H \to K$ entre espacios de Hilbert H, K que cumple:

$$T(af + bg) = aT(f) + bT(g)$$

Acotada: Una transformación lineal $T : H \to K$ es acotada si existe $M > 0$ tal que:

$$||T(f)||_K \leq M||f||_H$$

Norma de una transformación: Si $T : H \to K$, entonces su **norma** $||T||$ está definida por:

$$||T|| = \text{ínf } M$$

De entre las M de arriba

Lema: $||T|| = \sup\{|(T(f), g)| \mid ||f|| \leq 1 \ , \ ||g|| \leq 1\}$ donde $f \in H$, $g \in K$

Continua: Una transformación lineal T es continua si $T(f_n) \to T(f)$ siempre y cuando $f_n \to f$. Claramente, linealidad implica que T es continua en todo H sii es continua en el origen. Y es más:

Proposición: Una transformación lineal $T : H \to K$ es acotada sii es continua.

38.5.1. Funcionales Lineales y Riesz

Funcional Lineal de H: Es una función l desde el espacio de Hilbert H hacia el campo de escalares (que podemos asumir que son los complejos).

Un ejemplo claro es, para un g fijo podemos considerar $\widehat{g}(f) = (f, g)$ que es lineal, y es acotada por la desigualdad de $C - S$ porque $|(f, g)| \leq M||f||$ con $M = ||g||$.
Por lo que $||\widehat{g}|| = ||g||$.

Teorema (Riezs): Sea l un funcional lineal del espacio de Hilbert H. Entonces existe un único $g \in H$ tal que:

$$l(f) = (f, g) \quad , \forall \ f \in H$$

Además, $||l|| = ||g||$

- Dem: Consideramos el subespacio $S = \{f \in H \mid l(f) = 0\}$, es decir, la nulidad de l, que es cerrado. Si $S = H$, entonces $l = 0$ y tomamos $g = 0$. Sino, $S^\perp$ es no trivial y tomamos $h \in S^\perp$ con $||h|| = 1$. Con esta elección de h, determinamos a g como $g = l(\bar{h})h$ y listo.

38.5.2. Adjuntos:

Proposición: Sea $T : H \to H$ una transformación lineal acotada. Entonces existe un único $T^* : H \to H$ tal que:

i) $(T(f), g) = (f, T^*(g))$

ii) $||T|| = ||T^*||$

iii) $(T^*)^* = T$

El primero de estos puntos es la definición. Esta transformación se llama la **adjunta de** T.

Probar la existencia: Para todo $g \in H$, definimos el operador $l_g(f) = (T(f), g)$.
Esta función es acotada, porque como T es acotada, entonces $||T(f)|| \leq M||f||$, entonces la desigualdad de CS implica $|l(f)| \leq ||T(f)||||g|| \leq B||f||$ con $B = M||g||$.
Entonces, el teorema de Rieza asegura la existencia de un único $h \in H$, $h = h_g$ tal que $l(f) = (f, h)$. Entonces, definimos $T^*(g) = h$ y esta asociación es lineal y cumple i).

Propiedad: $(TS)^* = S^*T^*$

Simétrica: Decimos que T lo es si $T = T^*$.

38.5.3. Ejemplos

Definimos el operador de **Sturm - Liouville** en $[a, b]$ como:

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - q(x)$$

Donde q es una gunción real dada.
Una Eigenfunción ϕ de este operador cumple que $L(\phi) = \dfrac{d^2\phi}{dx^2}\phi - q(x)\phi(x) = \mu\phi$ con $\mu \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, si $L = d^2/dx^2$, en el intervalo $[-\pi, \pi]$, una Eigenfunción es e^{inx} que tiene con eigenvalor $\mu = -n^2$.

La pregunta es si una función arbitraria se puede expandir en términos de estas funcinoes.

38.5.4. Matriz infinita Diagonal

Suponga que $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de H. Entonces, una transformación lineal $T : H \to H$ está **diagonalizada** con respecto a la base $\{\phi_k\}$ si:

$$T(\phi_k) = \lambda_k \phi_k \quad , \quad \lambda_k \in \mathbb{C}$$

Se dice que ϕ_k es un **eigenvector** con **eigenvalor** λ.
Entonces:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k \quad \Rightarrow \quad T(f) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \phi_k$$

La secuencia $\{\lambda_k\}$ se llama **secuencia de Multiplicadores** y se cumple que:

i) $||T|| = \sup_k |\lambda_k|$

ii) T^* corresponde a la secuencia $\{\bar{\lambda}_k\}$. Entonces $T = T^*$ sii λ_k es real

iii) T es unitario sii $|\lambda_k| = 1$ para todo k

iv) T es una proyección ortogonal sii $\lambda_k = 0$ o 1 para todo k

38.5.5. Operadores integrales y de Hilbert-Schmidt

Sea $H = L^2(\mathbb{R}^d)$. Si podemos definir $T : H \to H$ por la fórmula:

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(y) dy \qquad , \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Decimos que T es un **operador integral** y K es el **Kernel**.

Con estos operadores, podemos definir ecuaciones integrables.

Operadores de Hilbert - Schmidt: Son aquéllos operadores integrales en los que K pertenece a $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

Proposición: Sea T un operador de Hilbert-Schmidt en $L^2(\mathbb{R}^d)$ con Kernel K.

i) Si $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces para casi todo x, la funciín $y \to K(x,y)f(y)$ es integrable

ii) El operador T es acotado y $||T|| \leq ||K||_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)}$

iii) El adjunto T^* tiene Kernel $K(\bar{y}, x)$

38.6. Operadores Compactos

Compacto: En H, un subconjunto $X \subset H$ es **compacto** si para toda secuencia $\{f_n\}$ en X, existe una subsecuencia $\{f_{n_k}\}$ que converge en la norma a un elemento de X.

Bola unitaria:

$$B = \{f \in H \mid ||f|| \leq 1\}$$

En espacios de Hilbert de dimensión infinita no se cumple necesariamente que que acotado y cerrado implica compacto. Por lo uqe la bola unitaria por ejemplo no es necesariamente compacta.

Operador Compacto: Un operador $T : H \to H$ es compacto si la cerradura de:

$$T(B) = \{g \in H \mid g = T(f) \ \ , \ f \in B\}$$

Es compacto.
Equivalentemente si para toda secuencia acotada $\{f_n\}$ en H, existe una subsecuencia $\{f_{n_k}\}$ tal que $T(f_{n_k})$ converge.

Prop: Suponga que T es un operador lineal acotado, entonces:

- Si S es compacto en H, entonces ST y TS lo son tmabién.
- Si $\{T_n\}$ son una familia de operadores lineales compactos con $||T_n - T|| \to 0$, entonces T es compacto.
- Si T es compacto, entonces existe una secuencia $\{T_n\}$ de operadores de rango finito tal que $||T_n - T|| \to 0$
- T es compacto sii T^* es compacto.

Teorema Espectral: Suponga que T es un operador compacto en un espacio de Hilbert H. Entonces existe una base ortonormal $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ de H compuesta por eigenvectores de T. Además, si $T\phi_k = \lambda_k \phi_k$, entonces $\lambda_k \in \mathbb{R}$ y $\lambda_k \to 0$ conforme $k \to \infty$

39. Hilbert de Nuevo

40. Espacios Con Producto Interno

Definición: Un producto interno es un $\mathbb{C}$-e.v. es un mapeo $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que:

- $(x, y) = \overline{(y, x)}$
- $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- $(x, x) > 0$ cuando $x \neq 0$

Espacio Pre-Hilbert: Es un espacio vectorial complejo V junto con un producto interno.

Ejemplos:

- $\mathbb{C}^n$: Podemos definir el siguientes producto punto para $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

- l^2: Denotamos por l^2 a todas las secuencias complejas $x = (x_n)$ sobre $\mathbb{C}$ que son cuadrado sumables, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

  Si x, y son dos secuencias $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, les podemos definir el producto punto como:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$$

  Podemos ver que este producto punto es finito porque $\sum |x_n \bar{y}_n| \leq (\sum |x_n|^2)^{1/2} (\sum |y_n|^2)^{1/2} < \infty$

- $C[0, 1]$: El espacio de funciones continuas de $[0, 1]$ a $\mathbb{C}$. Le definimos el producto punto:

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

- $\mathbb{C}^{n \times m}$: Es el espacio de matrices complejas de $m \times n$. Definimos el producto punto como:

$$(A, B) = tr(B^* A)$$

- L_2: Espacio de todas las funcines $f : \Omega \to \mathbb{C}$ medibles tales que $\int |f|^2 d\mu < \infty$. Le definimos el producto interno:

$$(f, g) = \int f\bar{g}d\mu$$

En este caso, pensamos en la igualdad si es una igualdad casi siempre (todo excepto un espacio de medida cero).

Teorema: Para todo $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos:

- $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$
- $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$
- $(x, 0) = 0 = (0, x)$
- Si $(x, z) = (y, z)\ \forall\ z \in V \ \Rightarrow\ x = y$

40.1. Espacios Internos como Métricos

Norma Inducida: La norma inducida por un producto punto se define como:

$$||x|| = (x, x)^{1/2}$$

Teorema: Para todo x en un espacio con producto interior V y $\lambda \in \mathbb{C}$, se cumple:

- $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0$ sii $x = 0$
- $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Estas son las propiedades que definen una norma si no viene inducida de un producto punto.

Teorema (Desigualda de Cauchy-Schwartz): Para $x, y \in V$ en un espacio con producto interno con norma inducida, tenemos que:

$$|(x, y)| \leq ||x||||y||$$

Teorema (Ley de Paralelogramos): Para vectores x, y en un espacio con producto interior, se cumple:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

Identidad de Polarización:

$$4(x, y) = ||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i||x + iy||^2 - i||x - iy||^2$$

Teorema de Pitágoras: Si $(x, y) = 0$, entonces:

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

41. Espacio Normado

Definimos una norma de un espacio V como una función $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ tal que:

- $||x|| > 0$ si $x \neq 0$
- $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$ para escalares λ y vectores x
- $||x + y| \ \leq ||x|| + ||y||$

Espacio Normado: Es un espacio vectorial real o complejo con una norma como la definida antes.

Teorema: Si $(E, ||\cdot||)$ es un espacio normado, entonces la función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d(x, y) = ||x - y||$$

Es una métrica traslacionalmente invariante.
Es decir, cumple $d(x, y) > 0$, $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Teorema: Para cualquier espacio normado $(E, ||\cdot||)$, el mapeo $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ es continuo. Y también el mapeo $(\cdot, \cdot) : E \times E \to \mathbb{C}$ es continuo.

Teorema: En un espacio normado E, las operaciones algebráicas de sumar vectores y de multiplicar por escalares son continuas.

Ejemplo:

- $\mathbb{C}^n$: Definimos la norma dada por:

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

- $\mathbb{C}_p^n$: Dado $p \geq 1$, le podemos definir una norma como:

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

O bien, para $p = \infty$ definimos:

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|$$

- l^p: Consiste de todas las secuencias $x = \{x_n\}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Con $p \geq 1$. Su norma está dada por:

$$||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

  Si $p = \infty$, tenemos el espacio l^∞ dado por las secuencias $x = \{x_n\}$ acotadas. Le definimos la norma:

$$||x||_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|$$

- $L_p(\Omega)$: El espacio de todas las funciones medibles $f : \Omega \to K$ tales que $\int |f|^p d\mu < \infty$, para $p \geq 1$.
  Donde la igualdad se entiende como igualdad casi siempre. Le definimos la norma:

$$||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Algunos de estos espacios son las normas inducidas por espacios con producto interno vistos antes.

Un espacio normado es un espacio con producto punto si cumple la ley de paralelogramo.

41.1. Espacio Lineal Cerrado

En $\mathbb{C}^n$ todo subespacio lineal es topológicamente cerrado, sin embargo, en espacios de dimensión infinita, esto no es necesariamente cierto.

Ejemplo: Sea l_0 el espacio de secuencias $(x_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que la casi todos los términos son 0 excepto una cantidad finita. Se puede ver que l_0 es un subespacio de l^2. Pero no es cerrado, pues podemos pensar en una secuencias de secuencias en la que $x^k = (1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/k, 0, 0, \cdots)$. Entonces esta secuencia de secuencias contiene puras secuencias de l_0 pero converge a la secuencia armónica que no es de l_0.

Ejercicio: Sea $F = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = 0\}$. Se puede ver que es un subespacio de $C[0,1]$ (funciones continuas con dominio $[0,1]$) pero no es cerrado. Bueno, el propio $C[0,1]$ no es cerrado porque las funciones x^k pertenecen aquí pero el límite es discontinuo.

Teorema: La cerradura de un subespacio de un espacio normado es un subespacio.

Span: Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado y sea $A \subset E$.
El span lineal de A, denotado por $lin(A)$ es la intersección de todos los subespacios de E

que contienen a A.
También se puede ver como todas las combinaciones lineales de elementos de A.

Span Cerrado Lineal: Definimos $clin(A)$ como la intersección de todos los subespacios cerrados de E que contienen a A.

Teorema: Cualesquiera dos normas en un espacio dimensional finito E sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$ determinan la misma topología.
Corolario: Los conjuntos cerrados acotadas en espacios normados dimensionalmente finitos son compactos.

42. Espacios de Hilbert y Banach

Secuencia de Cauchy: Sea (M, d) un espacio métrico. Una secuencia (x^k) en M es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe un entero k_0 tal que:

$$k, l \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad d(x^k, x^l) < \epsilon$$

Completo: (M, d) es completo si toda secuencia de Cauchy en M converge a un límite en M.

Teorema: $\mathbb{C}^n$ y l^2 son espacios métricos completos.

- Dem: Sea (x^k) una secuencia de Cauchy en l^2, es decir, cada x^k es una secuencia en sí mismo $x^k = (x_n^k)_{n=1}^{\infty}$. Entonces, hacemos:
  - **Encontrar un candidato a a límite:** Tenemos la secuencia de secuencias:

    $$\begin{aligned} x^1 &= (x_1^1, x_2^1, x_3^1, \cdots, x_n^1, \cdots) \\ x^2 &= (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots, x_n^2, \cdots) \\ &\vdots \\ x^k &= (x_1^k, x_2^k, x_3^k, \cdots, x_n^k, \cdots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

    Digamos que converge a una secuencia $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$. Para ello, consideramos una n fija y vemos la secuencia en columna $(x_n^k)_{k=1}^{\infty}$.
    Vemos que es de Cauchy. Como la secuencia (x^k) es de Cauchy, pata todo $\epsilon > 0$ tal que $k, l \geq k_0$ implica $||x^k - x^l|| < \epsilon$. Y esto implica que $|x_n^k - x_n^l| < \epsilon$. Por lo que cada columna es una secuencia de Cauchy en $\mathbb{C}$. Y entonces, converge a un a_n. Por tanto definimos $a = (a_1, a_2, \cdots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ como la convergencia de todas las columnas.
  - **Probar que a pertenece a l^2:**
  - **Probar que $x^k \to a$**

Def (Espacio de Hilbert): Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno tal que es completo con la métrica inducida por la norma inducida por el producto interno.

Def(Espacio de Banach): Es un espacio normado completo con la métrica inducida por la nora.

Claramente todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach. Pero no todo espacio de Banach es de Hilbert.
Por ejemplo, el l^∞ (secuencias acotadas con norma supremo) tiene una norma que lo hace completo.

Sin embargo, es imposible definirle un producto interno tal que $(x,x) = ||x||_\infty^2$ ya que le falla la ley del paralelogramo. Pues:

Teorema: Si un espacio de Banach cumple la ley del paralelogramo $||x+y||^2+||x-y||^2 = 2||x||^2+2||y||^2$, entonces la identidad de polatización:

$$(x,y) := \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^n ||x+i^n y||^2$$

Define un producto interno con $(x,x) = ||x||^2$.

- **Ejemplo espacio de Hilbert $L^2(a,b)$:** Definido como el espacio de todas las funciones $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ medibles tales que $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$.
  Si usamos la integral de Riemann para la definición de arriba, este espacio sigue siendo incompleto, porque hay sucesiones de funciones Riemann cuadrado-integrables que no convergen a una función de este estilo.
  Por ello usamos la integral de Lebesgue, que se comporta mejor bajo límites. Con esta integral, el espacio de funciones cuadrado integrables ya es completo con el producto interno:

  $$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}d\mu$$

  La mayortía del tiempo no hay que fijarnos en la integral de Lebesgue y basta con la de Riemann.
  En el espacio L^2 decimos que dos funciones son iguales sii $f \neq g$ en un conjunto de medida cero. Por lo que en realidad no se trata de un espacio de funciones, sino de clases de equivalencia. Pero hablamos de los elementos como si fueran funciones.
  Es importante notar que $C[a,b]$ (espacio de funciones continuas en $[a,b]$) es denso en $L^2(a,b)$ con la norma L^2.
  Se puede probar que L^2 es cerrado bajo suma y que el producto de arriba es verdaderamente un producto punto.

- **Espacio de Banach $L^p[a,b]$, $p \geq 1$**
  Como vimos antes, podemos definir un espacio normado de todas las funciones medibles $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ tales que $\int |f|^p d\mu < \infty$ con $p\geq 1$. Y le definimos la norma:

  $$||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

  Se puede probar que esto es un espacio vectorial y normado y completo (Banach). Sin embargo, no siempre es un espacio de Hilbert, ya que sólo cumple con la ley del Paralelogramo si $p=2$ y entonces L^2 es el único espacio de Hilbert de los L^p

- **Espacio de Hilbert l^2**: Es el espacio de todas las secuencias complejas $x = (x_n)$ sobre $\mathbb{C}$ que son cuadrado integrables, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

Se puede probar que es un espacio vectorial con la suma y producto escalar típico. Además, le definimos el producto escalar:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

Resulta ser un espacio completo con la métrica inducida y por tanto, un espacio de Hilbert.

- **Espacio de Banach l^p:** Consiste de todas las secuencias $x = \{x_n\}$ tales que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Esto forma un espacio vectorial y le definimos la norma:

$$||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

Que se puede demostrar que es una norma. Este espacio es completo, por lo que tenemos un espacio de Banach.
Sin embargo, no siempre es un espacio de Hilbert, ya que sólo cumple la desigualdad del paralelogramo si $p = 2$, por lo que l^2 es el único espacio de Hilbert de la forma l^p.
Demostramos que para $p \neq 2$ no se cumple la igualdad del paralelogramo.
Para ello definimos $x = (1, 0, 0, \cdots)$ y $y = (0, 1, 0, 0, \cdots)$. Entonces, tenemos que:

  - $||x + y||_p^2 = ||(1, 1, 0, 0, \cdots)||_p^2 = (|1|^p + |1|^p)^{2/p} = 2^{2/p}$
  - $||x - y||_p^2 = ||(1, -1, 0, \cdots)||_p^2 = (|1|^p + |-1|^p)^{2/p} = 2^{2/p}$
  - $||x||_p^2 = ||(1, 0, 0, \cdots)||_p^2 = (|1|^p)^{1/p} = 1$
  - $||y||_p^2 = ||(0, 1, 0, \cdots)||_p^2 = (|1|^p)^{1/p} = 1$

Entonces, si queremos que se cumpla que $||x + y||_p^2 + ||x - y||_p^2 = 2||x||_p^2 + 2||y||_p^2$.
Necesitamos $2^{2/p} + 2^{2/p} = 2 + 2 \;\Rightarrow\; 2 \cdot 2^{2/p} = 4 \;\Rightarrow\; 2^{2/p+1} = 4$
Entonces, tenemos que $2/p + 1 = 2 \;\Rightarrow\; p = 2$.

- $\mathbb{C}^n$: Este espacio es prehilbert con $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$.
Pero resulta que es un espacio completo con la métrica, por lo que es un espacio de Hilbert.

42.1. La propiedad del punto más cercano

Si X es un punto arriba de una superficie plana A, entonces existe un único punto Y en A que es el más cercano a X de entre todos los puntos de A. Esto se puede extender a Hilbert.

Def: Un subconjunto A de un espacio vectorial es **convexo** si para todo $a, b \in A$ y todo $\lambda \in (0,1)$ se cumple que $\lambda a + (1-\lambda)b$ pertenece a A.

Teorema del punto más cercano: Sea A un subconjunto cerrado y convexo de H espacio de Hilbert. Entonces, para todo $x \in H$ existe un único punto $y \in A$ que es el más cercano a x, es decir:

$$||x-y|| = \inf_{a \in A} ||x-a||$$

En un espacio de Banach puede haber infinitos puntos con esta propiedad.

- Dem: Sea $M = \inf_{a \in A} ||x-a||$.
  Como $A \neq \emptyset$, entonces $M < \infty$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in A$ tal que:

  $$||x-y_n||^2 < M^2 + \frac{1}{n}$$

  Luego, vamos a probar que y_n es una secuencia de Cauchy. Aplicamos la ley del paralelogramo (que se vale por estar en un Hilbert) a $x - y_n$ y a $x - y_m$. Tenemos entonces que para cualquier $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple:

  $$\begin{aligned} &||x-y_n-(x-y_m)||^2 + ||x-y_n+x-y_m||^2 \\ &= 2||x-y_n||^2 + 2||x-y_m||^2 \\ &< 4M^2 + 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

  Entonces, podemos reordenar para obtener $||y_n - y_m||^2 < 4M^2 + 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) - 4\left|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right|^2$
  Como A es convexo y $y_n, y_m \in A$, entonces $(y_n+y_m)/2 \in A$. Y por lo tanto:

  $$\left|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right|^2 \geq M^2$$

  Por definición, entonces:

  $$\begin{aligned} ||y_n-y_m||^2 &< 4M^2 + 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) - 4M^2 \\ &= 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

  Entonces (y_n) es una secuencia de Cauchy y por tanto converge a un $y \in H$ (H es completo. Y como A es cerrado, entonces $y \in A$. Por lo tanto, $||x-y|| \geq M$ (ya que

$x \notin A$).
Luego, conforme hacemos tender $n \to \infty$ en $||x - y_n||^2 < M^2 + \dfrac{1}{n}$, tenemos que $||x - y|| \leq M$.
Por tanto, $||x - y|| = M$.
También se puede probar la unicidad.

43. Expansiones Ortogonales

La ventaja de usar vectores en geometría de $\mathbb{R}^n$ es que no necesitamos exponer los números de las coordenadas. Aunque para hacer cálculo sí es necesario usar las coordenadas.

Def (Ortogonal): Los vectores $x, y \in V$ son **ortogonales** si $(x, y) = 0$

Sistema ortogonal: Es un conjunto de elementos $(e_a)_{a\in A} \in V/\{0\}$ tales que $e_a \perp e_b$ para $a \neq b$. Y es un **sistema ortonormal** si:

$$(e_a, e_b) = \delta_{a,b}$$

Se dice **secuencia ortonormal** si puede ser indexada por $\mathbb{N}$ (es un conjunto numerable).

Ejemplos:

- En $\mathbb{C}^n$ la base estándar es ortonotmal
- En l^2, la base $e_i = (0, 0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots)$ es ortonotmal.
- En $L^2(-\pi, \pi)$, una secuencia ortonormal es:

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{int}$$

Para $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, es ortonotmal porque:

$$(e_n, e_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \delta_{n,m}$$

Def (Coeficiente de Fourier): Si (e_n) es una secuencia ortonormal en un espacio de Hilbert H, entonces para todo $x \in H$, definimos el **n-ésimo coeficiente de Fourier de** x respecto a la secuencia ortonotmal como:

$$a_n = (x, e_n)$$

Serie de Fourier: Dado un $x \in H$, definimos su serie de Fourier como:

$$\sum_n (x, e_n) e_n$$

Hasta ahora, esta es una suma formal, no sabemos nada de convergencia.

Teorema (Pitágoras): Si $x_1, \cdots, x_n$ son ortonormales, entonces:

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right|\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2$$

Lema: Sea $e_1, \cdots, e_n$ un sistema ortonormal en un espacio pre-Hilbertiano H. Sea $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ y sea $x \in H$. Entonces:

$$\left|\left|x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right|\right|^2 = ||x||^2 + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - c_j|^2 - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2$$

Donde $c_j = (x, e_j)$.

- Dem: Por propiedades tenemos $(\sum \lambda_j e_j, \sum \lambda_j e_j) = \sum \lambda_j \bar{\lambda_j}$. Entonces:

$$\begin{aligned} ||x - \sum \lambda_j e_j||^2 &= (x - \sum \lambda_j e_j, x - \sum \lambda_j e_j) \\ &= (x, x) - \sum \lambda_j (e_j, x) - \sum \bar{\lambda_j}(x, e_j) + \sum \lambda_j \bar{\lambda_j} \\ &= ||x||^2 - \sum \lambda_j \bar{c_j} - \sum \bar{\lambda_j} c_j + \sum \lambda_j \bar{\lambda_j} \\ &= ||x||^2 + \sum (\lambda_j \bar{\lambda_j} - \lambda_j \bar{c_j} - \bar{\lambda_j} c_j + c_j \bar{c_j}) - \sum c_j \bar{c_j} \\ &= ||x||^2 + \sum (\lambda_j - c_j)(\bar{\lambda_j} - \bar{c_j}) - \sum c_j \bar{c_j} \\ &= ||x||^2 + \sum |\lambda_j - c_j|^2 - \sum |c_j|^2 \end{aligned}$$

Teorema: Sea $e_1, \cdots, e_n$ un sistema ortonormal en un espacio pre- hilbertiano H. Y sea $x \in H$. Entonces, el punto y en $lin\{e_1, \cdots, e_n\}$ más cercano a x (del que hablamos en la propiedad del punto más cercanos) tiene la forma:

$$y = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$$

Y la distancia $d = ||x - y||$ está dada por:

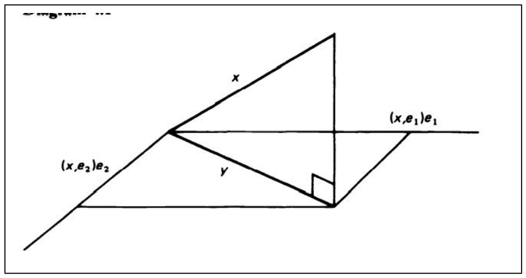
$$d^2 = ||x||^2 - \sum_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2$$

- **Dem:** Del teorema pasado, digamos que e_j y x están fijos y vamos variando $y = \lambda_j e_j$ (variamos las λ). Entonces, como $||x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j||^2 = ||x||^2 + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - c_j|^2 - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2$, vemos que $||x - \sum \lambda_j e_j||^2$ se minimiza si $\lambda_j = c_j$. Por ello, el punto más cercano es $y = \sum (x, e_j) e_j$ y la distancia es $d^2 = ||x||^2 - \sum\limits_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2$

Corolario: Si $x \in lin\{e_1, \cdots, e_n\}$, entonces:

$$x = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$$

Visualización:



43.1. Desigualdad de Bessel

Teorema (Desigualdad de Bessel): Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia ortonormal en el espacio pre-Hilbert H, entonces para todo $x \in H$, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x,e_n)|^2 \leq ||x||^2$$

- **Dem:** Para $N \in \mathbb{N}$, sea $y_N = \sum_{n=1}^{N}(x,e_n)e_n$. Entonces, por el último teorema, tenemos que:

$$||x-y_N||^2 = ||x||^2 - \sum_{n=1}^{N} |(x,e_n)|^2$$

  Y por lo tanto: $\sum\limits_{n=1}^{N} |(x,e_n)|^2 = ||x||^2 - ||x-y_N||^2 \leq ||x||^2$.
  Por lo que conforme $N \to \infty$, tenemos la desigualdad.

Def: Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado y sea $x_n \in E$ para $n \in \mathbb{N}$. Decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge y tiene suma x si $\sum\limits_{n=1}^{k} x_n \to x$ conforme $k \to \infty$.

Teorema 4.11: Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia ortonormal en el espacio de Hilbert H y sea $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ converge en H sii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$

43.2. Convergencia Puntual y L^2

Nota: Suponga que (f_n) es una secuencia de funciones en $L^2(0,1)$. Entonces, ya le dimos definición a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f$ como habíamos hecho para todo espacio normado.
Pero hay una definición de **convergencia puntual** como $\sum f_n(t) = f(t)$ para todo $t \in (0,1)$.

Estas dos condiciones de convergencia no son iguales.

43.3. Secuencias Ortonormales Completas

Dado un $x \in H$ espacio de Hilbert, nos gustaría poder escribir que:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$$

La desigualdad de Bessel y el teorema 4.11 nos asegura que el lado derecho converge. Pero no sabemos si converge a x.

Por **ejemplo:** Consideramos la secuencia ortonormal usual e_n en l^2. Y sea $f_n = e_{n+1}$, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia ortonormal en l^2 y para $x = (x_n) \in l^2$, tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(x, f_n)f_n &= \sum_{n=2}^{\infty}(x, e_n)e_n \\ &= (0, x_2, x_3, \cdots)\end{aligned}$$

En general, si queremos escribir x como $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$, vamos a definir el error de esta suma como:

$$y = x - \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$$

Entonces, para todo $j \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}(y, e_j) &= (x, e_j) - \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)(e_n, e_j) \\ &= 0\end{aligned}$$

Def (Completa): Una secuencia (e_n) en un espacio de Hilbert H es completa si el único miembro de H ortogonal a todo e_n es 0. Es decir, si $(z, e_n) = 0 \forall z \Rightarrow z = 0$

Teorema 4.14: Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia ortonormal completa en un espacio de Hilbert H. Entonces para todo $x \in H$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$$

y entonces **(parseval)**:

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$$

- **dem:** El error de la suma es $y = x - \sum(x, e_n)e_n$ y entonces tenemos que $(y, e_j) = (x, e_j) - \sum(x, e_n)(e_n, e_j) = 0$

Pero como es completo, eso implica que $y = 0$ y entonces $x = \sum(x, e_j)e_j$.

Una secuencia ortonormal completa en H se llama también **base ortonormal** en H.

Teorema: Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia ortonormal en el espacio de Hilbert H. Entonces lo siguiente es equivalente:

1) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es completo

2) $clin\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} = H$

3) **Parseval:** $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$

- 1) $\Rightarrow$ 2) está contenido en el teorema 4.14 y 1) $\Rightarrow$ 3) también
- 3) $\Rightarrow$ 1): Suponga que (e_n) no es completo. Entonces existe un $x \neq 0 \in H$ tal que $(x, e_n) = 0 \forall n$. Entonces, $||x|| \neq 0$ pero $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = 0$, lo que contradice 3)
- 2) $\Rightarrow$ 1): Suponga que se cumple 2 y sea $x \in H$ tal que $x \perp e_n$ para todo n. Sea $E = \{y \in H \mid (x, y) = 0\}$.
  E es un subespacio de H y es cerrado por continuidad del producto interno. Y contiene todos los e_n, por lo que contiene a $clin\{e_n\} = H$. En particular, eso implica $x \in E$ y entonces $(x, x) = 0$ por lo que $x = 0$. Y (e_n) es completo.

def (Separable): Un espacio de Hilbert es separable si contiene una secuencia ortonormal completa numerable o finita.

Def (Unitario): Un mapeo $U : H \to K$ se llama unitario si es lineal y biyectivo y preserva productos punto:

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

Dos espacios H, K con un operador unitario se llaman **isomorfos**.

Teorema: Sea $U : H \to K$ un mapeo lineal biyectivo. Entonces es unitario sii $|U(x)|| = ||x||$ para todo x.
La ida es inmediata y el regreso depende de la identidad de polarización.

Teorema: Sea H un espacio de Hilbert Separable. Entonces H es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ o a l^2.

43.4. Complementos Ortogonales

Def: Sea $E \subset H$, su complemento ortogonal es:

$$E^{\perp} = \{x \in H \mid (x, y) = 0 \ \ \forall \, y \in E\}$$

Teorema: Sea $E \subset H$, entonces $E^{\perp}$ es un subespacio lineal cerrado de H.

Lema: Sea M un subespacio lineal de un espacio con producto interno H y sea $x \in H$. Entonces $x \in M^{\perp}$ sii:

$$||x - y|| \geq ||x|| \quad \forall \, y \in M$$

Teorema: Sea M un subespacio lineal cerrado de H y sea $x \in H$. Existe $y \in M$ y $z \in M^{\perp}$ tal que $x = y + z$.

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

Corolario:

$$(M^{\perp})^{\perp} = M$$

Proceso de Gram Schmidt: Sea $x_1, x_2, \cdots$ una secuencia de vectores l.i. en un espacio con producto interno. Definimos los vectores e_n inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1/||x_1|| \\ f_n &= x_n - \sum_{j=1}^{n-1} (x_n, e_j) e_j \\ e_n &= f_n/||f_n|| \end{aligned}$$

Entonces e_n son ortonormales y generan el mismo espacio que las x_i

44. Series de Fourier

Para poder usar series de Fourier, necesitamos demostrar que el conjunto de funciones que se usa en Fourier son un conjunto completo.

Teorema: Sea $e_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{inx} \quad , \quad -\pi < x < \pi$. Entonces $(e_n)_{-\infty}^{\infty}$ es una secuencia ortonormal completa en $L^2(-\pi,\pi)$.

- **Dem:** Que (e_n) son ortonormales está claro. Por las equivalencias de espacios completo, (e_n) es completo si $clin\{(e_n)\} = L^2(-\pi,\pi)$.
  Si esto se cumple, entonces, para todo $f \in L^2(-\pi,\pi)$ podríamos escribir $f = \sum(f,e_n)e_n$.

  Es un resultado de teoría de la medida que las restricciones a $(-\pi,\pi)$ de funciones 2π periódicas son un subespacio denso de $L^2(-\pi,\pi)$.
  Entonces, ya sóloo nos queda probar que estas funciones periódicas pertenece a clin $\{e_n | n \in \mathbb{Z}\}$ para probar que $clin\{e_n\}$ es denso (y como es cerrado, es igual a $L^2(-\pi,\pi)$)
  Con lo que tenemos la parte 2 del teorema de equivalencias.

  Consideremos una función f con periodo 2π, queremos ver que está en $clin\{(e_n)\}$, es decir, probar que hay una secuencia de funciones de $lin\{e_n\}$ convergente a f. Entonces, un candidato es $f_m = \sum\limits_{n=-m}^{m}(f,e_n)e_n$.
  Claramente $f_m \in lin\{e_n\}$ y sólo tenemos que probar que $f_m \to f$.
  Para ello, resulta más fácil probar que $F_m = \frac{1}{m+1}(f_0 + f_1 + \cdots + f_m) \to f$.
  Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
f_m(y) &= \sum_{n=-m}^{m}(f,e_n)e_n(y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-m}^{m}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right)e^{iny} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sum_{n=-m}^{m} e^{in(y-x)}dx
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
F_m(y) &= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} f_j(y) \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sum_{n=-m}^{m} e^{in(y-x)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=-j}^{j} e^{in(y-x)}dx
\end{aligned}$$

Definimos el **Kernel de Fejer** como:

$$K_m(t) = \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=-j}^{j} e^{int}$$

Y entonces, hemos probado que:

$$F_m(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_m(y-x)dx = k * f(y)$$

- **Lema:** El Kernel de Fejer se puede escribir como:

$$K_m(t) = \frac{1}{m+1}\frac{\sin^2\dfrac{(m+1)t}{2}}{\sin^2\dfrac{t}{2}}$$

- **Lema 2:** El Kernel de Fejer satisface:
  - $K_m(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $m = 0, 1, 2, \cdots$
  - $\int_{-\pi}^{\pi} K_m(t)dt = 2\pi \quad , \; m = 0, 1, 2, \cdots$
  - Para todo δ con $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{-\pi}^{-\delta} K_m(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} K_m(t)dt \to 0$$

Los $K_m(x)$ se aproximan a $\delta(x)$

Terminamos la Prueba: Consideramos un punto $y \in [-\pi, \pi]$ fijo. Y sustituimos $t = y - x$ en el segundo lema (ii). Entonces, tenemos:

$$\int_{y-\pi}^{y+\pi} K_m(y-x)dx = 2\pi$$

Multiplicamos por $f(y)$ y dividimos por 2π para obtener:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{y-\pi}^{y+\pi} f(y)K_m(y-x)dx \quad (5,3)$$

K_m es claramente 2π periódico por lo que la función $x \to f(x)K_m(y-x)$ también. Por lo que es lo mismo integrarla sobre cualquier periodo de 2π. Entonces, reescribimos la fórmula que teníamos para $F_m(y)$:

$$\begin{aligned} F_m(y) = k * f(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_m(y-x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x)K_m(y-x)dx \end{aligned}$$

Luego, restamos 5.3 para obtener:

$$F_m(y) - f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{y-\pi}^{y+\pi} [f(x)-f(y)]K_m(y-x)dx$$

Se puede acotar esta integral viendo que para $y \sim x$ se tiene que $f(x) - f(y)$ es chico. Pero para x lejos de y, $K_m(y-x)$ es chiquito (porque los K_m se van pareciendo a la delta de dirac para $m \to \infty$). Se puede probar formalmente con los lemas de antes. Entonces, tendremos que para todo $\epsilon > 0$ existe m_0 tal que si $m \geq m_0$, entonces:

$$|F_m(y) - f(y)| < \epsilon$$

Entonces, $F_m \to f$ uniformemente (es decir $||F_m - f||_\infty \to 0$.
Entonces, como la norma de L^2 es menor a la norma $||\cdot||_\infty$, tenemos que $||F_m - f|| \to 0$ con $||\cdot||$ la norma de $L^2(-\pi,\pi)$

Entonces, hemos probado que si f es de periodo 2π, su restricción a $(-\pi,\pi)$ se puede aproximar con funciones de $lin\{e_n\}$. Lo que significa que $f \in clin\{e_n\}$.

Entonces, eso demuestra que (e_n) es completo. Pues digamos que $x \in L^2(-\pi,\pi)$ tal que $x \perp e_n$. Y definimos $E = \{y \in L^2 \mid (x,y) = 0\}$. E es cerrado porque es la imagen inversa bajo el producto punto del 0 (y el prod. punto es continuo). Además, como E contiene a todos los e_n (y sus combinaciones lineales) y es cerrado, contiene a todos los $clin\{e_n\}$. Por tanto, contiene a todo $L^2(-\pi,\pi)$ y en particular a x. Por lo tanto $(x,x) = 0$.
Lo que significa que (e_n) es completo.

Corolario: Sea $f \in L^2(-\pi,\pi)$ y digamos que tiene una serie de Fourier dada por:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Entonces:

$$\left|\left|f(x) - \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx}\right|\right| \to 0$$

En la norma de $L^2(-\pi,\pi)$ conforme $m \to \infty$.

- **Dem:** Como $L^2(-\pi,\pi)$ tiene como base completa a (e_n), entonces ya vimos que $f = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (f, e_n)e_n$

44.1. Teorema de Fejer

Aunque ya vimos que $\sum(f, e_n)e_n \to f$ en $L^2(-\pi,\pi)$, nos falta probar que hay una convergencia puntual.

Teorema de Fejer: Sea f una función continua de periodo 2π en $\mathbb{R}$. Sea $s_n(f) = \sum\limits_{m=-n}^{n} (f, e_m)e_m$ la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de f. Y sea $\sigma_n(f)$ la suma de Cesaro $\sigma_n(f) = \dfrac{s_0(f) + \cdots + s_n(f)}{n+1}$. Entonces $\sigma_n(f) \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}$ conforme $n \to \infty$.

Es decir, si:

$$f(x) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Escribimos:

$$s_n(f,x) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijx}$$

Y escribimos:

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} s_j(f,x)$$

El teorema de Fejer asegura que si f es continua en x y es de periodo 2π, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f,x) = f(x)$$

44.2. Fórmula de Parseval

Sea $f, g \in L^2(-\imath, \pi)$ con series de Fourier dadas por:

$$f(x) \sim \sum c_n e^{inx} \quad , \quad g(x) \sim \sum d_n e^{inx}$$

Entonces, tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{d}_n$$

Corolario: Si $f \in L^2(-\pi, \pi)$ y $f(x) \sim \sum c_n e^{inx}$, entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

44.3. Teorema de Weierstrass

Teorema: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una función continua. Para todo $\epsilon > 0$ existe un polinomio complejo p tal que:

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon \quad , \quad a \leq x \leq b$$

- Podemos cambiar $[a, b]$ por $[-\pi, \pi]$ con un cambio de variable.
  Luego, sea $\mathfrak{p}$ el espacio de todos los polinomios en $[-\pi, \pi]$. Queremos probar que es denso en $C[-\pi, \pi]$ (fucniones continuas).
  La función $e^{inx} \in clos(\mathfrak{p})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ porque e^x tiene una serie de Taylor convergente. Entonces, $clos\mathfrak{p}$ contiene todas las combinaciones lineales de funciones e^{inx} y usamos la convergencia de series de Fourier según Fejer.

45. Espacios Duales

Dado un espacio V, definimos un **funcional lineal** como una función $p : V \to \mathbb{C}$.

Para espacios de dimesión finita, el conjunto de todos los funcionales lineales forme un espacio vectorial y es fácil de identificar (para cada $e_i \in V$ de la base, podemos definir $\widehat{e_i} : V \to \mathbb{R}$ como la i-ésima proyección, es decir $\widehat{e_i}(e_j) = \delta_{ij}$).

Sin embargo, para espacios de dimensión infinita, nos vamos a restringir sólo a funcionales continuos. La ventaja de los espacios de Hilbert sobre los de Banach es que en los de Hilbert es fácil identificar los funcionales lineales ya que tienen la forma $(\cdot, y)$.

Def (Funcional Lineal): Sea E un espacio vectorial sobre K, entonces un funcional lineal es un mapeo lineal $f : E \to K$.

Ejemplos:

- Definimos $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ como:

$$F(x_1, \cdots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

- Definimos $F : C[0,1] \to \mathbb{C}$ como:

$$F(X) = \int_0^1 x(t) d\alpha(t)$$

- Sea H un espacio de Hilbert y sea $y \in H$. Definimos entonces $F_y : H \to \mathbb{C}$ como:

$$F_y(x) = (x, y)$$

Teorema 6.3: Sea F un funcional lineal en un espacio normado $(E, ||\cdot||)$. Entonces los siguientes son equivalentes:

i) F es continuo

ii) F es continuo en 0

iii) $||F|| := \sup\{|F(x)| \mid x \; inE \;, \; ||x|| \leq 1\} < \infty$ (la función F es acotada).
Entonces F es continua sii es acotada en la bola unitaria.

- **Dem:**$i) \Rightarrow \; ii)$ es evidente.
- $ii) \to iii)$: Por ii) con $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $||x|| < \delta \;\Rightarrow\; |F(x)| < 1$. Entonces, para todo $x \in E$ tal que $||x|| \leq 1$, tenemos que $||\delta x/2|| < \delta$ y entonces $|F(\delta x/2)| < 1$. Entonces $|F(x)| < 2/\delta$. Por lo que se cumple iii)

- *iii)* $\Rightarrow$ *i)*: Para $x, y \in E$ distintos, $(x-y)/||x-y||$ es un vector unitario. Entonces, por iii) tenemos que $\left|F\left(\frac{x-y}{||x-y||}\right)\right| \leq M$.
  Entonces $|F(x)-F(y)| \leq M||x-y||$. Por lo que F es Lipschitz y es continua.

Definición: Para un espacio E, definimos el **espacio dual** E^* como el espacio de todos los funcionales lineales continuos de E.

Teorema 6.5: El conjunto E^* de todos los funcionales lineales continuos de $(E, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach con defînción de norma dada por:

$$||F|| = \sup_{x\in E\ ,\ ||x||\leq 1} |F(x)|$$

Teorema 6.6: Para todo vector $x \in E$ un espacio normado. Y todo funcional lineal continuo $F : E \to K$, tenemos que:

$$|F(x)| \leq ||F||||x||$$

Y de hecho, $||F||$ es el ínfimo de las constantes que cumplen lo de arriba.

45.1. El teorema de Riesz - Frechet

Teorema de Riesz Frechet: Sea H un espacio de Hilbert y sea F un funcional lineal continuo de H. Entonces existe un único $y \in H$ tal que:

$$F(x) = (x, y)$$

Para todo $x \in H$, además, $||y|| = ||F||$

El teorema muestra que para todo H espacio de Hilbert, existe una función suprayectiva que preserva la norma $T : H \to H^*$ dada por:

$$T(y) = T_y$$
$$T_y(x) = (x, y)$$

Donde T es **lineal conjugada**, es decir:

$$T(\lambda y + \mu z) = \bar{\lambda}T(y) + \bar{\mu}T(z)$$

Por tanto, los espacios de Hilbert se suelen llamar **auto-duales**.

46. Operadores Lineales

Función Lineal: Un operador lineal entre E y F es una función $T : E \to F$ tal que:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

Operador Lineal en E: Es una función lineal$T : E \to E$.

Acotada: Una función lineal $T : E \to F$ es acotada si existe $M \geq 0$ tal que:

$$||T(x)|| \leq M||x|| \quad , \forall x \in E$$

Para un operador acotado, le definimos la **norma** a T como:

$$||T|| = \sup\{||T(x)|| \ : \ x \in E \ , \ ||x|| \leq 1\}$$

$||T||$ se puede pensar como el máximo factor por el cual T estira a un vector. Notamos que para todo $x \in E$, tenemos:

$$||T(x)|| \leq ||T||||x||$$

De hecho, $||T||$ es el ínfimo de todos los números K tales que $||T(x)|| \leq K||x||$.

Ejemplo

- **Operador de Multiplicación:** Definimos M en $L^2(a,b)$ como:

$$(Mx)(t) = f(t)x(t) \quad , \quad x \in L^2(a,b)$$

Con $f \in C[a,b]$ una función fija. M es claramente lineal y vemos que:

$$\begin{aligned} ||M(x)||^2 &= \int_a^b |f(t)|^2|x(t)|^2 dt \\ &\leq \sup_{a\leq t\leq b} |f(t)|^2 \int_a^b |x(t)|^2 dt \\ &= ||f||_\infty^2 ||x||^2 \end{aligned}$$

Entonces M es acotada y $||M|| \leq ||f||_\infty$. En realidad, se puede probar que $||M|| = ||f||_\infty$.

ii) **Operador Integral:** Sea $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sea: $k : [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ continuo. Y definimos $K : L^2(a,b) \to L^2(c,d)$ como:

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds \quad , \quad c < t < d \quad , \quad x \in L^2(a,b)$$

K es claramente lineal. Además, por la desigualdad de CS, tenemos que para un $t \in (c, d)$ fijo:

$$|Kx(t)|^2 \leq \left(\int_a^b |k(t,s)|^2 ds \right) \left(\int_a^b |x(s)|^2 ds \right)$$

Entonces, tenemos que $||Kx||^2 \leq \left(\int_c^d \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt \right) ||x||^2$.
Entonces K es acotada y $||K|| \leq \left(\int_c^d \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt \right)^{1/2}$

iii) **Operador Diferencial:** Sea $\mathcal{D}$ el espacio de funciones diferenciable en $L^2(-\infty, \infty)$ tal que $f' \in L^2(-\infty, \infty)$. Entonces, definimos el operador:

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{D} \to L^2(-\infty, \infty)$$

es un operador lineal. No es acotada respecto a la norma de L^2

iv) **Operador Shift:** Definimos $S : l^2 \to l^2$ como:

$$S(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$$

S claramente es una isometría, $||Sx|| = ||x||$ para todo $x \in l^2$. Entonces S es acotado con $||S|| = 1$.
También tenemos un shift opuesto como $S^*(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$. S^* es acotado con $||S^*|| = 1$ y S^* es una isometría.

Teorema: Sean E, F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal. Los siguientes son equivalente:

i) T es continuo.

ii) T es continua en 0.

iii) T es acotado.

46.1. El espacio de Banach $L(E, F)$

Def: Dados E, F espacios normados, definimos por $L(E, F)$ al espacio de transformaciones lineales de E a F.
Este conjunto es en sí mismo un espacio vectorial con norma (la norma definida arriba, válida para operadores acotados).

Teorema: El espacio $L(E, F)$ es un espacio vectorial normado. Además, si F es Banach, entonces $L(E, F)$ es Banach.

Teorema: Sean E, F, G espacios normados. Si $A \in L(E, F)$ y $B \in L(F, G)$ entonces $BA \in L(E, G)$ y además:

$$||BA|| \leq ||B||||A||$$

- BA es claramente lineal y continua. Para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned} ||BAx||_G &= ||B(Ax)||_G \\ &\leq ||B||||Ax||_F \\ &\leq ||B||||A||||x||_E \end{aligned}$$

  Entonces, $||BA|| \leq ||B||\,||A||$

46.2. Inversos de Operadores

Definición: Sea E, F espacios normados lineales. Un operador $A \in L(E, F)$ es **invertible** si existe un $B \in L(F, E)$ tal que:

$$AB = I_F \quad , \quad BA = I_E$$

Tal B es única si existe y se llama **inversa de** A.

Equivalencias: Si $A : E \to E$ es un operador en un espacio normado de dimensión finita E. Entonces lo siguiente es equivalente:

i) A es invertible

ii) A es inyectiva

iii) A es supra

iv) Existe $B \in L(E)$ tal que $AB = I$

v) Existe $B \in L(E)$ tal que $BA = I$

En dimensiones infinitas, estas cosas no son equivalentes.

Ejemplos:

i) Los operadores Shift $S, S^* : l^2 \to l^2$ cumplen que:

$$S^*S = I \quad , \quad SS^* \neq I$$

Se sigue que ni S ni S^* son totalmente invertibles. Sino que S tiene un inverso izquierdo (y es inyectiva) y S^* tiene un inverso derecho (y es supra).

ii) El operador de multiplicación $M : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definido como:

$$(Mx)(t) = tx(t) \quad , \quad 0 < t < 1$$

Es inyectiva pero no es suprayectiva y por tanto no es invertible. Es inyectiva porque si $Mx = 0$ entonces $tx(t) = 0$ para casi todo $t \in (0,1)$ y por tanto $x(t) = 0$ c.s.. Sin embargo, no hay un $x \in L^2(0,1)$ tal que Mx sea la función idénticamente 1, esto porque la función $1/t$ no es cuadrado integrable en $(0,1)$.

Teorema 7.10: Sea E un espacio de Banach y sea $A \in L(E)$. Si $||A|| < 1$ entonces $I - A$ es invertible y:

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

En el espacio normado $L(E)$
Este teorema nos permite encontrar inversos a operadores.

Corolario 7.11: Sea E un espacio de Banach. El conjunto de operadores invertibles en E es abierto en $L(E)$

Ejemplo: Sea K un operador integral en $L^2(0,1)$ definido por:

$$Kf(t) = \int_0^t (t-s)f(s)ds \quad , \quad 0 < t < 1$$

Con ello, se puede demostrar que:

$$K^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(s)ds$$

Entonces, podemos resolver para un $f \in L^2(0,1)$ la ecuación integral siguiente:

$$f(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)f(s)ds$$

Donde g es una función dada.
Podemos considerar esta ecuación como $(I-K)f = g$ y entonces $f = (I-K)^{-1}g$. Entonces, por el teorema de antes, tenemos que $f = (I-K)^{-1}g = \sum_{n=0}^{\infty} K^n g$

46.3. Operadores Adjuntos

Teorema: Sea $A \in L(E,F)$ donde E, F son espacios de Hilbert. Entonces, existe un único operador $A^/ \in L(F,E)$ tal que:

$$(Ax, y)_F = (x, A^*y)_E$$

Para todo $x \in E, y \in F$.
Esto se debe al teorema de Riesz.

Adjunto: A este operador único $A^* \in L(F,E)$ asociado a $A \in L(E,F)$ que cumple:

$$(Ax, y)_F = (x, A^*y)_E$$

Se le conoce a A^* como el **adjunto** de A.

Ejemplo:

i) Sea $M : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ definido por:

$$Mx(t) = f(t)x(t)$$

Donde $f \in C[a,b]$ es una función fija. Entonces M^* es también un operador de multiplicación.
Esto lo vemos porque:

$$\begin{aligned}
&(x, M^*y) = (Mx, y) \\
\Rightarrow \quad &\int_a^b x(t)\overline{M^*y(t)}dt = \int_a^b f(t)x(t)\overline{y(t)}dt \\
\Rightarrow \quad &\overline{M^*y(t)} = f(t)\overline{y(y)}
\end{aligned}$$

casi siempre. Lo que demuestr que:

$$M^*y(t) = \overline{f(t)}y(t)$$

En particular, si f es real, $M^* = M$.

ii) Sea $K : L^2(a,b) \to L^2(c,d)$ un operador integral con kernel k, es decir $(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)dx$. Entonces, vemos quién es K^*

$$\begin{aligned}
&(x, K^*y) = (Kx, y) \\
\Rightarrow \quad &\int_a^b x(s)\overline{K^*y(s)}ds = \int_c^d Kx(t)\overline{y(t)}dt \\
= &\int_c^d \int_a^b k(t,s)x(s)\overline{y(t)}dsdt \\
= &\int_a^b \int_c^d x(s)k(t,s)\overline{y(t)}dtds
\end{aligned}$$

Como se cumple para toda función $x \in L^2(a,b)$, $y \in L^2(c,d)$, debemos de tener:

$$\overline{K^*y(s)} = \int_c^d k(t,s)y(\bar{t})dt$$

O bien, intercambiando los roles, tenemos que:

$$K^*y(t) = \int_c^d \overline{k(s,t)}y(s)ds$$

Para casi todo t. Entonces K^* es un operador integral con Kernel k^*, donde $k^*(t,s) = \overline{k(s,t)}$.

Teorema 7.15: Se cumple que $A^{**} = A$ y que $||A^*|| = ||A||$ para todo operador $A \in L(E,F)$ con E, F espacios de Hilbert.

Teorema:

- Si $A \in L(E,F)$ y $B \in L(F,G)$ entonces:

$$(BA)^* = A^*B^*$$

- Si $A, B \in L(E,F)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, entonces:

$$(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda}A^* + \bar{\mu}B^*$$

46.4. Operadores Hermitianos

Def (Hermitiano): Un operador $A \in L(H)$ con H un espacio de Hilbert se llama Hermitiano (o autoadjunto) si $A = A^*$.

De los ejemplos de antes, podemos encontrar varios operadores Hermitianos en espacios dimensionalmente infinitos. Como por ejemplo, el operador de multiplicación $Mx(t) = f(t)x(t)$ tiene por adjunto $M^*y(t) = \overline{f(t)}y(t)$. Entonces, si f es real, entonces $M = M^*$.
O el operador integral $(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)dx$ tiene por adjunto a $(K^*y)(y) = \int_a^b \overline{k(s,t)}y(s)ds$. Entonces, si k es real, $K = K^*$.

Vamos a ver que este tipo de operadores se pueden diagonalizar.

Teorema 7.18: Si A es un operador hermitiano en un espacio de Hilber H, entonces:

$$||A|| := \sup_{||x||\leq 1} ||A(x)|| = \sup_{||x||=1} |(Ax,x)|$$

46.5. El Espectro

La definición de Eigenvalores en operadores dimensionalmente infinitos no es tan útil como para operadores finitos. Por ello, cambiamos un poco la definición:

Def: Espectro: El espectro de $A \in L(E)$ con E un espacio de Banach. Se denota por $\sigma(A)$ y es el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda I - A$ no es invertible.

El espectro no es vacío, pues si lo fuera, el mapeo $\lambda \to (\lambda I - A)^{-1}$ sería un mapeo no constante acotado que contradice algo.
Si E es dim finito, entonces $\sigma(A)$ coincide con los eigenvalores de A pues un λ es un eigenvalor sii $\lambda I - A$ es no invertible, sii existe $x \in A$ con $(\lambda I - A)(x) = 0 \Rightarrow Ax = \lambda x$.

Teorema: Sea E un espacio de Banach y sea $A \in L(E)$. Entonces $\sigma(A)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y contenido en el disco cerrado de centro 0 y radio $||A||$

47. Operadores Compactos

Def (Compacto): Sea E, F espacios normados y sea $A : E \to F$ lineal. A es compacto si para toda secuencia $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en E, la secuencia (Ax_n) tiene una subsecuencia convergente en F.
Un operador A compacto es necesariamente acotado. Sino, existiría una secuencia (x_n) acotada en E tal que $||Ax_n|| \to \infty$ y entonces (Ax_n) no tendría una subsecuencia convergente.

Ejemplo (Operador Diagona): Sea $(e_n)_1^{\infty}$ una secuencia completa ortonormal en el espacio de Hilbert H. Y sea λ_n una secuencia acotada de números complejos. Sea $A \in L(H)$ un operador cuya matriz respecto a la base (e_n) es diag$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$. Entonces, la aplicación de A a un vector $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ es:

$$A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n e_n$$

Entonces, A es compacto sii $\lambda_n \to 0$.

Teorema: Sean E, F espacios de Banach. El conjunto de operadores compactos en $L(E, F)$ es cerrado en $L(E, F)$.

47.1. Operadores de Hilbert-Schmidt

Def: Sean E, F espacios de Hilbert. Un operador lineal acotado $A : E \to F$ es de Hilbert-Schmidt si existe una secuencia ortonormal completa $(e_n)_1^{\infty}$ en E tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||Ae_n||^2 < \infty$$

Teorema: Los operadores de Hilbert - Schmidt son compactos. (pero no se cumple el inverso siempre)

Ejemplo: Sea $k : (c, d) \times (a, b) \to \mathbb{C}$ una función medible y cuadrado integrable. Entonces el operador integral $K : L^2(a, b) \to L^2(c, d)$ con kernel k es un operador de Hilbert Schmidt y es por tanto compacto.

47.2. El teorema espectral para operadores Hermitianos compactos

Teorema: Sea K un operador hermitiano compacto en un espacio de Hilbert H. Entonces $||K||$ o $-||K||$ es un eigenvalor de K.

Teorema: Sea A un operador Hermitiano en un espacio de Hilbert. Entonces todos los eigenvalores de A son reales y los eigenvectores de A correspondientes a distintos eigenvalores son ortogonales.

- **Dem:** Supongamos que λ es un eigenvalor de A y ϕ es su eigenvector. Entonce $A\phi = \lambda\phi$. Por ser hermitiano, tenemos que:

  $$\begin{aligned} 0 &= (A\phi, \phi) - (\phi, A\phi) \\ &= (\lambda\phi, \phi) - (\phi, \lambda\phi) \\ &= (\lambda - \bar{\lambda})||\phi||^2 \end{aligned}$$

  Por lo que $\lambda = \bar{\lambda}$ (ya que $\phi \neq 0$).
  Sean λ, μ distintos eigenvalores de A y sean ϕ, ψ sus eigenvectores tales que $A\phi = \lambda\phi$, $A\psi = \mu\psi$. Entonces:

  $$\begin{aligned} 0 &= (A\phi, \psi) - (\phi, A\psi) \\ &= (\lambda\phi, \psi) - (\phi, \mu\psi) \\ &= (\lambda - \bar{\mu})(\phi, \psi) \end{aligned}$$

  Como μ es real y los eigenval son distintos, entonces $\lambda - \bar{\mu} \neq 0$. Por tanto $(\phi, \psi) = 0$

Teorema: Sea K un operador compacto hermitiano en un espacio de Hilbert H. El conjunto de eigenvalores de K es un conjunto de números reales que es ya sea lineal o una secuencia contable que tiende a 0.

Lema: Sea M un subespacio cerrado de H espacio de Hilbert. Y sea M invariante bajo el operador lineal $T : H \to H$ (es decir $T(M) \subset M$). Entonces $M^{\perp}$ es invariante bajo T^*

Teorema Espectral: Sea K un operador Hermitiano compacto en un espacio de Hilbert H. Entonces existe una cantidad finita o una secuencia infinita ortonormal (ϕ_n) de eigenvectores de K con eigenvalores (λ_n), tal que para todo $x \in H$, se tiene que:

$$Kx = \sum_n \lambda_n(x, \phi_n)\phi_n$$

Si la secuencia (λ_n) es infinita, tiende a 0.

Corolario: Sea K un operador Hermitiano compacto en un espacio separable de dimensión infinita de Hilbert H. Entonces existe una secuencia ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que consiste de eigenvectores de K. Y para todo $x \in H$ se tiene que:

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, e_n)e_n$$

48. Sistemas de Sturm-Liouville

Def (Sistema Regular de Sturm-Liouville, RSL): Consiste en una ecuación diferencial en el intervalo $[a, b]$ junto con condiciones de frontera como sigue:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{df}{dx}\right) + qf = -\lambda\rho f \qquad , \; a \leq x \leq b$$

$$\begin{cases} \alpha f(a) + \alpha' f'(a) = 0 \\ \beta f(b) + \beta' f'(b) = 0 \end{cases}$$

Donde:

- p, q, ρ son funciones continuas y reales en $[a, b]$
- p, ρ son positivas en $[a, b]$
- p' existe y es continua en $[a, b]$
- $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ son constantes reales.

Singular Sturm Liouville (SSL):

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{df}{dx}\right) + qf = -\lambda\rho f \qquad , \quad a < x \leq b$$

$$\beta f(b) + \beta' f'(b) = 0$$

Donde las funciones p, q, ρ cumplen lo mismo de antes, con la diferencia que p vale 0 en a , $p(a)$ pero es positiva en el resto.

48.1. Eigenfunciones y Eigenvalores

Def: Una eigenfunción de un RSL o un SSL es una solución a la ecuación diferencial de SL con un λ particular. Dicho λ se conoce como autovalor correspondiente.

Las ecuaciones de Sturm Liouville se pueden escribir de otra forma usando el operador $L : D(L) \to L^2(a, b)$ definido como:

$$Lf = \frac{d}{dx}\left(p\frac{df}{dx}\right) + qf$$

Donde $D(L)$ es el conjunto de todas las funciones complejas $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ tales que $f'' \in L^(a, b)$ y f satisface las condiciones de frontera del problema de Liouville.
Entonces, la ecuación de SL se puede escribir como:

$$Lf = -\lambda\rho f$$

Y de ahí es de donde viene el nombre de eigen cosas.

Identidad de Lagrange: Para cualquier $u, v \in D(L)$, tenemos que:

$$uLv - vLu = (p(uv' - vu'))'$$

Producto punto: El producto punto aquí es:

$$(u, v) = \int_a^b \bar{v} u dx$$

Propiedad de Autoadjunto:
Se cumple que:

$$(Lu, v) = (u, Lv)$$

Teorema: Los eigenvalores de un sistema de SL son reales.

- **Dem:** Sea λ un eigenvalor de un RSL (o SSL) y sea f la eigenfunción, entonces $Lf = -\lambda\rho f$. Luego, por autoadjunto, se cumple que:

$$\begin{aligned} 0 &= (Lf, f) - (f, Lf) \\ &= (-\lambda\rho f, f) - (f, -\lambda\rho f) \\ &= (\bar{\lambda} - \lambda) \int_a^b \rho(x)|f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

  Luego, como $\rho > 0$ en $[a, b]$ y $f \neq 0$, entonces la integral es positiva y $\lambda = \bar{\lambda}$

48.2. Ortogonalidad de las Eigenfunciones

Teorema de Ortogonalidad: Sean u, v eigenfunciones de un problema de SL, correspondientes a distintos eigenvalores. Entonces $\rho^{1/2}u$, $\rho^{1/2}v$ son ortogonales. O bien, u, v son ortogonales con el peso ρ.

- **Dem:** Por hipótesis, tenemos que $Lu = -\lambda\rho u \quad , \quad Lv = -\mu\rho v$
  Para escalares λ, μ (reales por la propiedad de antes). Por la propiedad de autoadjunto,

se cumple que $(Lu, v) = (u, Lv)$. Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= (Lu, v) - (u, Lv) \\ &= (-\lambda\rho u, v) - (u, -\mu\rho v) \\ &= (\mu - \lambda)\int_a^b \rho(x)u(x)v(\bar{x})dx \\ &= (\mu - \lambda)(\rho^{1/2}u, \rho^{1/2}v) \end{aligned}$$

Entonces como $\mu \neq \lambda$, tenemos que $\rho^{1/2}u \perp \rho^{1/2}v$.

Nos gustaría saber si el sistema de soluciones a parte de ser ortogonal, es completo.

Teorema: No todo número real de un problema RSL es un eigenvalor (hay ciertas restricciones a los eigenvalores, no se puede conseguir una solución finita a $Lf = -\lambda\rho f$ con las condiciones de frontera para cualquier λ)

Para algunas ecuaciones, las soluciones son polinomios, mientras que para otras no. Si las soluciones son polinomios, tenemos:

Fórmula de Rodrigues: Sea $\{P_n(x)\}$ una secuencia de polinomios ortogonales con peso $w(x)$. Lo que significa que tienen ortogonalidad dada por:

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)w(x)dx = K_{m,n}\delta_{m,n}$$

Entonces, buscamos que $w(x)$ cumpla la **ecuación de Pearson** dada por $\dfrac{w'(x)}{w(x)} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ donde $A(x)$ es un polinomio de a lo sumo orden 1 y $B(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo 2. Y además $\lim_{x\to a} w(x)B(x) = \lim_{x\to b} w(x)B(x) = 0$.
Entonces, se cumple que:

$$P_n(x) = \frac{c_n}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}[B(x)^n w(x)]$$

.

- **Movimiento armónico:**
  - **Ecuación:** $f'' + \lambda f = 0 \quad , \quad f(0) = f(\pi) = 0 \quad , \quad [0, \pi]$

- **Valores:** $p = 1$, $q = 0$, $\rho = 1$
- **Solución (con frontera):** $f(x) = B\sin(\sqrt{\lambda}x)$
- **Eigenvalores:** Los eigenvalores válidos son $\lambda \in \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.
- **Funciones ortogonales:** $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$, $\cdots$
- **Norma:** $(\sin nx, \sin nx) = 1$

- **Legendre (Polinomios):**
  - **Ecuación** $\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dP(x)}{dx}\right] = -\lambda P(x) \quad , \quad [-1,1]$
  - **Valores:** $p = 1 - x^2 \quad , \quad q = 0 \quad , \quad \rho = 1$
  - **Eigenvalores:** Se puede resolver usando series y se ve que para que la solución sea finita en $[-1,1]$ se debe de cumplir que $\lambda = n(n+1)$
  - **Soluciones:** Las soluciones son $P_n(x)$ polinomio de orden n. Se pueden conseguir ortogonalizando el conjunto de funciones $\{1, x, x^2, \cdots\}$ con el producto punto con peso $\rho = 1$.
  - **Ortogonalidad:** Las funciones $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $\cdots$ son ortonormales. Y tienen **norma:** $\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = \dfrac{2}{2n+1}$.
  - **Fórmula de Rodrigues:** $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

- **Asociada de Legendre (No Son Polinomios)**
  - **Ecuación:** $\dfrac{d}{dx}\left[(1-x)^2\dfrac{d}{dx}P_l^m(x)\right] - \dfrac{m^2}{1-x^2}P_l^m(x) = -\lambda P_l^m(x) \quad , \quad [-1,1] \quad ,$ $|m| \leq l$
  - **Valores:** $p(x) = 1 - x^2 \quad , \quad q(x) = -\dfrac{m^2}{1-x^2} \quad , \quad \lambda = l(l+1) \quad , \quad w(x) = 1$
  - **Eigenvalores:** Las soluciones se pueden obtener con series o así y los eigenvalores que hacen una solución finita son $\lambda = l(l+1)$ donde $|m| \leq l$
  - **Soluciones:** Las soluciones $P_l^m(x)$ no son polinomios en general (a menos que m sea par). Se pueden obtener a partir de los polinomios de Legendre como:

    $$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}(P_l(x))$$

    Para $m \geq 0$, sino para $-m$ se obtienen soluciones $P_l^{-m} = (-1)^m\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$

    Algunas soluciones son $P_0^0(x) = 1$, $P_1^{-1}(x) = -\dfrac{1}{2}P_1^1(x)$, $P_1^0(x) = x$, $P_1^1(x) =$

$-(1-x^2)^{1/2}$, $P_2^{-2} = \dfrac{1}{24}P_2^2(x)$, $P_2^{-1}(x) = -\dfrac{1}{6}P_2^1(x)$, $P_2^0(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^(1/2)$, $P_2^2(x) = 3(1-x^2)$

- **Ortogonalidad:** Las soluciones son ortogonales y completas y tienen **norma** dada por $\int_{-1}^{1} P_k^m P_l^m dx = \dfrac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\delta_{k,l}$

- **Chebyshev 1 (polinomios) :**
  - **Ecuación:** $\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{1/2}\dfrac{dy}{dx}\right] = -\lambda(1-x^2)^{-1/2}f(x) \quad , \quad -1 \leq x \leq 1$
  - **Valores:** $p(x) = (1-x^2)^{1/2}$, $q = 0$, $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$
  - **Eigenvalores:** Las soluciones se pueden conseguir con series de potencias y resulta que se consiguen soluciones si $\lambda = p^2$.
  - **Soluciones:** Las soluciones son polinomios $T_0, T_1, \cdots, T_p$. Con $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.
    Las soluciones se pueden conseguir ortogonalizando $\{1, x, x^2, \cdots\}$ con Gram-S usando el peso w.
  - **Ortogonalidad:** Las soluciones son ortogonales con el peso w. y son ortonotmales con una norma $\int_{-1}^{1} \dfrac{[T_n(x)]^2}{(1-x^2)^{1/2}}dx = \pi/2$ si $n \neq 0$ y π para $T_0(x)$
  - **Fórmula de Rodrigues:** $T_n(x) = \dfrac{(-1)^n\sqrt{\pi}(1-x^2)^{1/2}}{2^n(n-1/2)!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n-1/2}]$

- **Laguerre (polinomios):**
  - **Ecuación:** $\dfrac{d}{dx}\left[xe^{-x}\dfrac{dy}{dx}\right] = -\lambda e^{-x}y \quad , \quad [0, \infty)$
    O bien, $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$
  - **Valores:** $p(x) = xe^{-x}$, $q = 0$, $w(x) = e^{-x}$
  - **Eigenvalores:** Los polinomios se consiguen haciendo la serie de potencia y se cortan cuando $\lambda \in \mathbb{N}$
  - **Soluciones**: Para $\lambda \in \mathbb{N}$, las soluciones so polinomios $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = -x + 1$, $L_2(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$, $L_3(x) = \dfrac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
    Las soluciones se pueden conseguir también al ortogonalizar $\{1, x, x^2, x^3 \ , \cdots\}$ con respecto al peso $w = e^{-x}$
  - **Ortogonalidad:** Como en los otros casos, los polinomios son ortogonales con el peso w y tienen una norma dada por $\int_0^{\infty}[L_n(x)]^2 e^{-x}dx = 1$
  - **Fórmula de Rodrigues:** $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$

- **Asociada de Laguerre (Polinomios)**
  - **Ecuación:** $\dfrac{d}{dx}\left[x^{k+1}e^{-x}\dfrac{dy}{dx}\right] = -\lambda x^k e^{-x}y \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad , \quad [0,\infty)$
    O bien $xy'' + (k+1-x)y' + \lambda y = 0$
  - **Valores:** $p(x) = x^{k+1}e^{-x}$, $q = 0$, $w(x) = x^k e^{-x}$
  - **Eigenvalores:** Los eigenvalores son $\lambda \in \mathbb{N}$
  - **Soluciones:** Para $\lambda \in \mathbb{N}$ se consiguen soluciones que se cortan (polinomios) que son $L_0^k(x) = 1$, $L_1^k(x) = -x + k + 1$, $L_2^k(x) = \dfrac{1}{2}[x^2 - 2(k+2)x + (k+1)(k+2)]$, $\cdots$
    Las soluciones se pueden obtener al ortonomalizar $\{1, x, x^2, \cdots, \}$ con respecto a $w = x^k e^{-x}$
  - **Ortogonalidad:** Los polinomios para una misma k son ortogonales respecto al peso $x^k e^{-x}$ y tienen norma dada por $\int_0^\infty [L_n^k(x)]^2 x^k e^{-x} dx = \dfrac{(n+k)!}{n!}$
  - **Fórmula de Rodrigues:** $L_n^k(x) = \dfrac{e^x x^{-k}}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+k})$

- **Hermite (Polinomios)**
  - **Ecuación:** $\dfrac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\dfrac{dy}{dx}\right] = -\lambda e^{-x^2}y \quad , \quad (-\infty,\infty)$
    O bien, $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$
  - **Valores:** $p(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$, $w(x) = e^{-x^2}$
  - **Eigenvalores:** Al resolver por medio de series, nos queda que los eigenvalores son $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8, \cdots$
  - **Soluciones:** Para un valor de λ adecuado, la solución en series se detiene y nos queda un polinomio y no una serie infinita. Algunos polinomios de Hermite son $H_0 = 1$, $H_1 = x$, $H_2 = x^2 - 1$, $H_3 = x^3 - 3x$, $\cdots$
    Se pueden conseguir al ortogonalizar $\{1, x, x^2, \cdots\}$ con respecto al peso $w = e^{-x^2}$
  - **Ortogonalidad:** Como en los otros casos, las funciones son ortogonales respecto al peso $w = e^{-x^2}$ y tienen una norma de: $\int_{-\infty}^{\infty}[H_n(x)]^2 e^{-x^2}dx = 2^n \pi^{1/2} n!$
  - **Fórmula de Rodrigues:** $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$

- **Bessel**
  - **Ecuación:** $\dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{dy}{dx}\right] - \dfrac{n^2}{x}y = -\lambda xy$
    Con $n \in \mathbb{R}$ un parámetro fijo.
    La λ que aparece lo transforma en una ecuación de eigen. Pero no aparece generalmente en la 'ecuación de Bessel'

- **Valores:** $p(x) = x$, $q(x) = -n^2/x$, $w(x) = x$
- **Eigenvalores:** Se puede resolver por series y resulta que los eigenvalores para que la solución se finita en un intervalo $[0, R]$ son $\lambda_{n,m} = (j_{n,m}/R)^2$ donde n es el parámetro fijo y $j_{n,m}$ es el m-ésimo cero de la función de Bessel J_n
- **Soluciones:** Entonces, las eigenfunciones son $J_n(j_{n,m}x/R)$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$
- **Ortogonalidad:** Dos funciones de Bessel $J_n(j_{n,i}x/R)$ y $J_n(j_{n,j}x/R)$ son ortogonales

49. Expansión en Eigenfunciones

Recordamos el problema RSL:

$$(pf')' + qf = -\lambda\rho f \quad , \quad a \leq x \leq b \begin{cases} \alpha f(a) + \alpha' f'(a) = 0 \\ \beta f(b) + \beta' f'(b) = 0 \end{cases}$$

Donde p, q, ρ son continuas reales en $[a, b]$. p, ρ son positivas en $[a, b]$ y p es diferenciables.

Decimos que un valor de λ es **simple** si cualesquiera dos eigenfunciones correspondientes son L.D
En otro caso, el eigenvalor se llama **degenerado**.

Teorema de Sturm Liouville: El sistema RSL tiene infinitos $(\lambda_j)_1^\infty$ eigenvalores. Cada eigenvalor es real y simple y $|\lambda_j| \to \infty$ conforme $j \to \infty$. Si ϕ_j es un eigenfunción de RSL correspondiente a λ_j, entonces $(\rho^{1/2}\phi_j)_1^\infty$ es un sistema ortogonal en $L^2(a, b)$.

Algunas otras propiedades en este caso (conste que es un RSL y no un SSL) es que:

- $\lambda_j \to \infty$
- $\sum_{\lambda_j \neq 0} \dfrac{1}{\lambda_j}$ converge
- ϕ_j tiene exactamente j zeros en $[a, b]$