Tarea 5
Física Nuclear y Subnuclear

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

May 29, 2022

Problema 1 Electron - Positron Collisions

Inciso a)

Los electrones y positrones, cada uno con una energía de haz E de $4GeV$ chocan de frente en un anillo de almacenamiento. ¿Qué tasa de producción $\mu^+\mu^-$ - pares esperaría con una luminosidad de $10^{32}cm^{-2}s^{-1}$? ¿Qué tasa de producción esperaría para eventos con estados finales hadrónicos?

La luminosidad se define como (ecuación 4.9 de [1]):

$$\mathcal{L} = \Phi_a N_b,$$

donde Φ_a es la cantidad de partículas del haz por unidad de tiempo por unidad de área y N_b es el número de blancos de dispersión. Además, la sección transversal σ se relaciona con estas cantidades mediante (ecuación 4.5 de [1]):

$$\sigma = \frac{\dot{N}}{\Phi_a N_b} = \frac{\dot{N}}{\mathcal{L}},$$

donde $\dot{N}$ es el número de reacciones por unidad de tiempo, que es justo lo que buscamos (la tasa de producción de partículas $\mu^+\mu^-$). Por lo tanto, despejando $\dot{N}$ de esta última ecuación, tenemos que:

$$\dot{N} = \mathcal{L}\sigma \quad (1)$$

En el problema ya nos están dando la luminosidad, por lo que para usar (1) necesitamos conocer σ también. Según la ecuación 9.5 de [1], la sección transversal de producción de $\mu^+\mu^-$ a partir del choque de electrones con positrones está dada por:

$$\sigma_{\mu^+\mu^-} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}(\hbar c)^2, \quad (2)$$

con α la constante de estructura fina y $\sqrt{s}$ es la energía en el centro de masa del positrón y electrón, que por los datos que da el problema (cada uno de los haces tiene energía de $4GeV$), la energía del centro de masa es de $\sqrt{s} = 8GeV$. Entonces, sustituyendo todo en (2), nos queda que:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mu^+\mu^-} &= \frac{4\pi\alpha^2}{3s}(\hbar c)^2 \\
&= \frac{4\pi(0.00729735)^2}{3(8\times 10^9 eV)^2}[(6.5821196\times 10^{-16} eVs)(2.998\times 10^8 m/s)]^2 \\
&= 1.35717\times 10^{-37} m^2
\end{aligned}$$

Entonces, utilizando la ecuación (1), tenemos que la tasa de producción de $\mu^+\mu^-$ (denotada por $\dot{N}$) está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{N} &= \mathcal{L}\sigma_{\mu^+\mu^-}\\ &= (10^{32}cm^{-2}s^{-1})(1.35717\times 10^{-37}m^2)\\ &= (10^{36}m^{-2}s^{-1})(1.35717\times 10^{-37}m^2)\\ &= \boxed{0.135717s^{-1}}\end{aligned}$$

Es decir, se producen 0.135717 pares $\mu^+\mu^-$ por segundo.

¿Qué tasa de producción esperaría para eventos con estados finales hadrónicos?

Para esto vamos a usar la ecuación (1) pero necesitamos encontrar la sección transversal de producción de hadrones a partir de un par electrón - positrón (en vez de la sección transversal de producción de $\mu^+\mu^-$). Para ello vamos a usar la ecuación 9.10 de [1] que dice que la relación entre la sección eficaz de la producción de hadrones a partir de e^+e^- respecto a la producción de $\mu^+\mu^-$ está dada por:

$$R := \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadrones})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = 3\sum_f z_f^2$$

donde f itera sobre los tipos de quarks que se pueden crear con la energía del centro de masa que se tiene y z_f es la carga del quark de sabor f. Es decir, como tenemos ya la sección eficaz de la producción de $\mu^+\mu^-$ (que vimos que es igual a $1.35717\times 10^{-37}m^2$), sólo hay que multiplicarla por R para tener la sección eficaz de producción de hadrones. Sin embargo, primero hay que ver qué tipo de quarks se pueden crear con la energía de centro de masa de $8GeV$, para sólo incluir estos tipos en la suma que define a R. Como lo mínimo que se puede crear es un par quark anti quark, en realidad los quarks que podemos incluir son aquéllos que tienen una masa menor a $4GeV/c^2$. Revisando las masas de los quarks que aparece en la tabla 9.1 de [1], podemos ver que los quarks d, u, s, c tienen masas menores a $4GeV/c^2$, pero los quarks b, t tienen masas mayores. Por lo tanto, en la definición de R sólo hay que considerar estos 4 tipos de quarks:

$$\begin{aligned}R = 3\sum_f z_f^2 &= 3\sum_{f\in\{d,u,s,c\}} z_f^2\\ &= 3(z_d^2+z_u^2+z_s^2+z_c^2)\\ &\text{Consultamos las cargas de cada tipo de quark en la tabla 9.1 de [1]}\\ &= 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)\\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

Entonces, por lo dicho antes, la sección eficaz de producción de hadrones es:

$$\sigma(e^+e^- \to \text{hadrones}) = R\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{10}{3}(1.35717\times 10^{-37}m^2) = 4.5239\times 10^{-37}m^2$$

Luego, al igual que antes, la tasa de producción $\dot{N}$ se calcula con la ecuación (1) , $\dot{N} = \mathcal{L}\sigma$, donde ahora σ es la sección eficaz de producción de hadrones. Como vimos que la sección eficaz era la misma que antes, pero multiplicada por 10/3, y la luminosidad sigue siendo la misma, entonces el resultado será el mismo que antes pero multiplicado por 10/3:

$$\dot{N}_{hadrones} = \frac{10}{3}(0.135717s^{-1}) = \boxed{0.4524s^{-1}}$$

Lo que quiere decir que se producen 0.4524 hadrones por segundo.

Inciso b)

Está previsto construir dos aceleradores lineales dirigidos uno al otro (un colisionador lineal) desde cuyos extremos colisionarán electrones y positrones con una energía en el centro de masa de $500GeV$. ¿Qué tan grande debe ser la luminosidad si se quiere medir la sección transversal hadrónica en dos horas con un error estadístico de 10%?

Para empezar, al igual que en el inciso anterior, la tasa de creación de partículas $\dot{N}$ se relaciona con la luminosidad y la sección transversal mediante la ecuación (1):

$$\dot{N} = \mathcal{L}\sigma.$$

Empezamos obteniendo la sección eficaz. En el inciso anterior vimos que la sección eficaz para la producción de hadrones se obtiene como:

$$\sigma(e^+e^- \to \text{hadrones}) = R\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-),$$

donde R se define como $R = 3\sum_f z_f^2$ (sumado sobre los quarks que se pueden crear con la energía que se tienen en el CM) y donde la sección eficaz de producción de $\mu^+\mu^-$ se obtiene al igual que antes con la ecuación (2) como:

$$\sigma_{\mu^+\mu^-} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}(\hbar c)^2$$

con $\sqrt{s}$ la energía en el centro de masa. Entonces, la sección eficaz de producción de hadrones es:

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \to \text{hadrones}) &= R\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)\\ &= 3\sum_f z_f^2\,\frac{4\pi\alpha^2}{3s}(\hbar c)^2\end{aligned}$$

La energía energía del centro de masa es de $500GeV$, que es mayor al doble de la masa del quark más masivo (que es el quark t, con masa $180GeV$) y por lo tanto es suficiente para crear un par quark-anti quark top. Entonces, la suma $\sum_f z_f^2$ tiene que hacerse sobre los 6 tipos de quarks y queda que:

$$\begin{aligned}\sum_f z_f^2 &= z_u^2 + z_d^2 + z_s^2 + z_c^2 + z_b^2 + z_t^2\\ &= (\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2\\ &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Entonces, siguiendo el desarrollo que teníamos antes, nos queda que la sección eficaz de creación de hadrones es:

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \to \text{hadrones}) &= 3\sum_f z_f^2\,\frac{4\pi\alpha^2}{3s}(\hbar c)^2\\ &= 3\frac{5}{3}\frac{4\pi\alpha^2}{3s}(\hbar c)^2\\ &= \frac{20\pi\alpha^2}{3s}(\hbar c)^2\\ &\text{Sustituimos las constantes y la energía del centro de masa}\\ &= \frac{20\pi(0.00729735)^2}{3(500\times 10^9 eV)^2}[(6.5821196\times 10^{-16}eVs)(2.998\times 10^8 m/s)]^2\\ &= 1.35717\times 10^{-37}m^2\\ &= 1.73718\times 10^{-40}m^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (1) queda como:

$$\dot{N} = \mathcal{L} \cdot (1.73718 \times 10^{-40} m^2)$$

Como $\dot{N}$ es igual a la tasa de producción de hadrones por segundo, la cantidad de hadrones creado en dos horas se obtiene multiplicando $\dot{N}$ por dos horas, que es igual a:

$$\begin{aligned}\text{Eventos en dos horas} &= \dot{N}(7200s) = \mathcal{L} \cdot 1.73718 \times 10^{-40} m^2 \cdot 7200s \\ &= \mathcal{L} \cdot 1.25077 \times 10^{-36} m^2 s\end{aligned}$$

Y entonces, dependiendo del número de eventos que se quieran observar en dos horas, la luminosidad tiene que ser:

$$\mathcal{L} = \frac{\text{Eventos en dos horas}}{1.25077 \times 10^{-36} m^2 s}$$

Por ejemplo, si para obtener el 10% de error estadístico que se quiere, es necesario observar 100 eventos en esas dos horas, entonces la luminosidad debe de ser:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{100}{1.25077 \times 10^{-36} m^2 s} \\ &= \boxed{7.99508 \times 10^{37} m^{-2} s^{-1}}\end{aligned}$$

Problema 2. Distribución de Quarks

Se puede suponer que las distribuciones de quarks u en el protón y del antiquark $\bar{d}$ en el antiprotón están representadas por las funciones: $F_u(x) = xu(x) = a_1(1-x)^3$, $F_{\bar{d}}(x) = x\bar{d}(x) = a_2(1-x)^3$, donde x es la variable de Bjorken, es decir, la fracción del momento del nucleón que llevan los quarks. Suponiendo que los quarks contribuyen a la mitad del impulso del nucleón, calcule las constantes a_1 y a_2.

Como el antiprotón se consigue a partir del protón convirtiendo quarks en anti-quarks, la distribución de quarks d en el protón $F_d(x)$ es igual a la distribución de antiquarks $\bar{d}$ en el antiprotón $F_{\bar{d}}(x) = a_2(1-x)^3$. Ahora bien, como vimos en clase y se realiza en [1], el momento que se llevan las partículas es la integral de su función F correspondiente con $x \in [0,1]$.

Como se mencionó, dentro del protón, los dos quarks u tienen una distribución $F_u(x) = a_1(1-x)^3$ y el quark d tiene función $F_d(x) = a_2(1-x)^3$. Entonces, el momento total que se llevan los quarks del protón es:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F_u(x) + F_d(x)\ dx &= \int_0^1 a_1(1-x)^3 + a_2(1-x)^3\ dx \\
&= (a_1 + a_2)\int_0^1 (1-x)^3 dx \\
&= (a_1 + a_2)\left.\frac{-(1-x)^4}{4}\right|_0^1 \\
&= (a_1 + a_2)\left[\frac{-(1-1)^4}{4} - \frac{-(1-0)^4}{4}\right] \\
&= \frac{a_1 + a_2}{4}
\end{aligned}$$

Como dice el enunciado, los quarks se llevan la mitad del momento, por lo que esta cantidad debe de ser 1/2:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{a_1 + a_2}{4} \\
\Rightarrow\ a_1 + a_2 &= 2 \quad (1)
\end{aligned}$$

Ahora bien, la composición del protón es uud, por lo que tiene el doble de quarks u que quarks d. Luego, por invarancia de espín [2], la distribución de los quarks u debe de ser el doble que la de los quarks d, es decir, $F_u(x) = a_1(1-x)^3 = 2F_d(x) = 2a_2(1-x)^3$. Entonces, se tiene que $a_1 = 2a_2$. Si juntamos esto con la ecuación (1), tenemos que:

$$\begin{aligned}
2a_2 + a_2 &= 2 \\
\Rightarrow\ a_2 &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Luego, como $a_1 = 2a_2$, entonces $a_1 = 2\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. En conclusión, tenemos que:

$$\boxed{a_1 = \frac{4}{3} \quad , \quad a_2 = \frac{2}{3}}$$

Problema 3. Interacción Fuerte

Considere la dispersión inelástica de muones con energía de $600 GeV$ de protones en reposo. El análisis de datos se realizará a $Q^2 = 4GeV^2/c^2$.

Inciso a)

¿Cuál es el valor más pequeño de x que se puede obtener en estas circunstancias? Puede suponer que la energía de dispersión mínima es $E' = 0$.

En clase vimos que la variable de Borjken se define como:

$$x = Q^2/2M\nu,$$

donde M es la masa de los protones en reposo y ν se define como $\nu = E - E'$. Si suponemos que $E' = 0$ como dice el enunciado, entonces $\nu = E$ y nos queda:

$$x = \frac{Q^2}{2ME}$$

Sustituimos Q^2, la masa del protón $M = 938.272088 \times 10^6 eV/c^2$, la energía $E = 600 \times 10^9 eV$ y el valor de $Q^2 = 4 \times 10^{18}\ eV^2/c^2$ y nos queda:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 \times 10^{18}\ eV^2/c^2}{2(938.272088 \times 10^6 eV/c^2)(600 \times 10^9 eV)} \\ &= \boxed{0.00355} \end{aligned}$$

Inciso b)

¿Cuántos partones se pueden resolver con $x > 0.3, x > 0.03$ y en el rango medible completo de x si parametrizamos la distribución de partones de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} q_v(x) = A(1-x)^3/\sqrt{x}, \text{ para los quarks de valencia,} \\ q_s(x) = 0.4(1-x)^8/x, \text{ para los quarks del mar y} \\ g(x) = 4(1-x)^6/x, \text{ para los gluones} \end{gathered}$$

El papel de la constante de normalización, A, es tener en cuenta que hay 3 quarks de valencia.

El número de quarks de valencia se consigue integrando la distribución $q_v(x)$ sobre el rango de valores de x (y similarmente se consigue el número de quarks del mar integrando q_s y de gluones integrando $g(x)$).

- Con $x > 0.3$:

  En este caso, las integrales se tienen que hacer desde $x = 0.3$ hasta 1. Por lo tanto, nos queda que el número de quarks de valencia es de:

  $$\begin{aligned} \text{Número de quarks de valencia} &= \int_{0.3}^{1} q_v(x)dx = \int_{0.3}^{1} A(1-x)^3/\sqrt{x}\ dx \\ &= A\int_{0.3}^{1} (1-x)^3/\sqrt{x}\ dx \end{aligned}$$

  La integral de $(1-x)^3/\sqrt{x}$ se puede resolver sencillamente expandiendo los términos, y la hice en Mathematica como se muestra en la figura 1. El resultado es de 0.0925454, por lo que la cantidad de quarks de valencia es $0.0925454A$. Como sabemos que esta cantidad tiene que ser igual a 3, concluimos que $\boxed{A = 32.4165}$.

Luego, el número de quarks del mar se consigue integrando $q_s(x)$ y nos queda:

$$\begin{aligned}\text{Número de quarks del mar} &= \int_{0.3}^{1} q_s(x) \\ &= \int_{0.3}^{1} 0.4(1-x)^8/x \; dx\end{aligned}$$

La integral se puede hacer sencillamente desarrollando los términos y el resultado se muestra en la figura 1 hecho en Mathematica. El resultado es de 0.004968, por lo que concluimos que hay $\boxed{0.004968}$ quarks de valencia.

Finalmente, el número de gluones se obtiene integrando $g(x)$ y queda:

$$\begin{aligned}\text{Número de gluones} &= \int_{0.3}^{1} g(x) \\ &= \int_{0.3}^{1} 4(1-x)^6/x \; dx\end{aligned}$$

La integral se puede hacer sencillamente desarrollando los términos y el resultado se muestra en la figura 1 hecho en Mathematica. El resultado es de 0.12557, por lo que concluimos que hay $\boxed{0.12557}$ gluones.

```
In[54]:=
        Integrate[(1 - x)^3 / Sqrt[x], {x, 0.3, 1}]
        Integrate[(1 - x)^8 * 0.4 / x, {x, 0.3, 1}]
        Integrate[(1 - x)^6 * 4 / x, {x, 0.3, 1}]

Out[54]= 0.0925454

Out[55]= 0.00496856

Out[56]= 0.125569
```

Figura 1

- Con $x > 0.03$:

En este caso, las integrales se tienen que hacer desde $x = 0.03$ hasta 1. Por lo tanto, nos queda que el número de quarks de valencia es de:

$$\begin{aligned}\text{Número de quarks de valencia} &= \int_{0.03}^{1} q_v(x)dx = \int_{0.03}^{1} A(1-x)^3/\sqrt{x} \; dx \\ &= A\int_{0.03}^{1} (1-x)^3/\sqrt{x} \; dx\end{aligned}$$

La integral de $(1-x)^3/\sqrt{x}$ se puede resolver sencillamente expandiendo los términos, y la hice en Mathematica como se muestra en la figura 2. El resultado es de 0.57808, por lo que la cantidad de quarks de valencia es $0.57808A$. Como sabemos que esta cantidad tiene que ser igual a 3, concluimos que $\boxed{A = 5.1896}$.

Luego, el número de quarks del mar se consigue integrando $q_s(x)$ y nos queda:

$$\begin{aligned}\text{Número de quarks del mar} &= \int_{0.03}^{1} q_s(x) \\ &= \int_{0.03}^{1} 0.4(1-x)^8/x \; dx\end{aligned}$$

La integral se puede hacer sencillamente desarrollando los términos y el resultado se muestra en la figura 2 hecho en Mathematica. El resultado es de 0.4066, por lo que concluimos que hay $\boxed{0.4066}$ quarks de valencia.

Finalmente, el número de gluones se obtiene integrando $g(x)$ y queda:

$$\begin{aligned} \text{Número de gluones} &= \int_{0.03}^{1} g(x) \\ &= \int_{0.03}^{1} 4(1-x)^6/x \, dx \end{aligned}$$

La integral se puede hacer sencillamente desarrollando los términos y el resultado se muestra en la figura 2 hecho en Mathematica. El resultado es de 4.92, por lo que concluimos que hay $\boxed{4.92}$ gluones.

```
Integrate[(1 - x)^3 / Sqrt[x], {x, 0.03, 1}]
Integrate[(1 - x)^8 * 0.4 / x, {x, 0.03, 1}]
Integrate[(1 - x)^6 * 4 / x, {x, 0.03, 1}]

Out[61]= 0.578082

Out[62]= 0.406636

Out[63]= 4.91994
```

Figura 2

Problema 4. Resonancia 1.

La resonancia Δ pion-nucleón (ver figura 1) tiene una masa central de $1232MeV/c^2$ y espín $J = 3/2$. Decae predominantemente en un pion de $J = 0$ más un nucleón de $J = 1/2$, pero también decae en el modo $\Delta \to n + \gamma$ con una relación de ramificación de 0.55%. Usando la ecuación

$$\sigma(E) = \frac{4\pi ƛ^2(2J+1)(\Gamma^2/4)}{(2s_a+1)(2s_b+1)[(E-E_R)^2+(\Gamma^2/4)]}$$

donde s_a y s_b son los espín de las partículas incidentes, J es el del estado resonante (todo en unidades de $\hbar$) y $\bar{\lambda} = \hbar/p$. Calcule la sección transversal para el proceso $\gamma + p \to \Delta^+$. El fondo cósmico de microondas consta de fotones con una temperatura de $T = 2.73K$ y una densidad de $400cm^{-3}$. Estime la energía que necesitarían los protones de rayos cósmicos primarios para excitar el pico de la resonancia Δ, en colisiones con el fondo de microondas. Suponga una energía fotónica de $2.7kT$ y colisiones frontales. ¿Cuál es el camino libre meido para la colisión de tales protones?

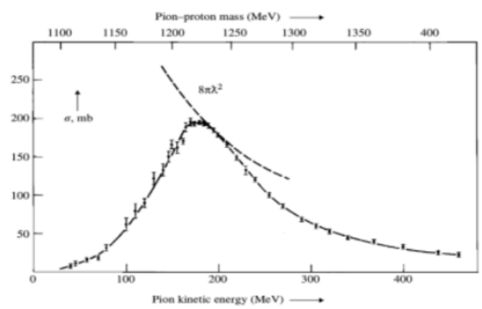

Figure 1: The pion-proton resonance $\Delta(1232)$ first observed by Anderson et al. in 1952.

Como dice el enunciado, nos interesa calcular el valor de $\sigma(E)$ en la energía pico cuando se tiene la reacción:

$$\gamma + p \to \Delta^+$$

Para ello, como dice el problema, utilizaremos la fórmula de Breit Wigner, que dice que la sección eficaz se obtiene como:

$$\sigma(E) = \frac{4\pi ƛ^2(2J+1)(\Gamma^2/4)}{(2s_a+1)(2s_b+1)[(E-E_R)^2+(\Gamma^2/4)]}$$

Además, como nos interesa el máximo de esta sección transversal, hay que considerar que la energía E es igual a la energía de la resonancia, por lo que $E = E_R$ y la ecuación se simplifica a:

$$\sigma_{max} = \frac{4\pi ƛ^2(2J+1)}{(2s_a+1)(2s_b+1)}\frac{\Gamma_i}{\Gamma}, \qquad (1)$$

donde al final se agrega el factor $\dfrac{\Gamma_i}{\Gamma}$, el cual es la razón de ramificación del proceso, que considera que hay varios posibles decaimientos, por lo que hay que multiplicar por su probabilidad, que en este caso nos dicen que es igual a 0.0055.

Para usar esta ecuación, necesitamos calcular $ƛ$, que se define como $ƛ = \dfrac{\hbar}{|p_{cm}|}$, donde p_{cm} es el momento de la partícula del haz (en este caso el fotón) medido en el sistema de centro de masa. Para hacerlo, podemos utilizar la ecuación 1.91 de [3] (y que también se desarrolla al final de esta tarea en el "Apéndice"). Esta ecuación dice que si se tiene una colisión de una partícula con masa $m_1 = 0$ sobre una de masa m_2 en reposo y la energía del centro de masa es $\sqrt{s}$, entonces el momento en el centro de masa de la partícula 1 es de:

$$|p_{cm}| = \frac{s - m_2^2 c^4}{2c\sqrt{s}}$$

En este caso, la partícula m_2 es un protón, por lo que la ecuación queda como:

$$|p_{cm}| = \frac{s - m_p^2 c^4}{2c\sqrt{s}}$$

Luego, tenemos entonces que $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{p_{cm}} = \frac{2\hbar c\sqrt{s}}{s - m_p^2 c^4}$. Sustituimos esto en la ecuación (1) y resulta que la sección eficaz en el máximo es de:

$$\sigma_{max} = \frac{4\pi(2\hbar c\sqrt{s})^2(2J+1)}{(s - m_p^2 c^4)^2(2s_a+1)(2s_b+1)}\frac{\Gamma_i}{\Gamma}$$

Luego, como las partículas entrantes tienen un espín de $s_a = 1$ (para el fotón) y $s_b = 1/2$ (para el protón) y la partícula final tiene espín $J = 3/2$, nos queda:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \frac{4\pi(2\hbar c\sqrt{s})^2(4)}{(s - m_p^2 c^4)^2(3)(2)}\frac{\Gamma_i}{\Gamma}\\ &= \frac{32\pi\hbar^2 c^2 s}{3(s - m_p^2 c^4)^2}\frac{\Gamma_i}{\Gamma}\end{aligned}$$

Finalmente, como se está creando la partícula Δ^+ justo en la resonancia, la energía del centro de masa tiene que ser la energía de reposo de la partícula, que es $\sqrt{s} = m_\Delta c^2 = 1232MeV$. Entonces, sustituyendo $\sqrt{s} = 1232MeV$, $m_p = 938.272MeV/c^2$ y como se dijo antes, $\Gamma_i/\Gamma = 0.0055$, tenemos:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \frac{32\pi(6.58211957\times 10^{-16}eVs)^2(2.998\times 10^8 m/s)^2(1232\times 10^6 eV)^2}{3((1232\times 10^6 eV)^2 - (938.272\times 10^6 eV)^2)^2}0.0055\\ &= 1.072\times 10^{-31}m^2\\ &= \boxed{1.072\times 10^{-3}b}\end{aligned}$$

Además, nos dicen que se tienen protones en colisión con el fondo de microondas y nos piden calcular la energía que deben de tener los protones para que al chocar con fotones puedan excitar el pico de la resonancia. Para que eso sea posible, la energía del centro de masa de la colisión debe de ser igual a $\sqrt{s} = 1232MeV$. Veremos ahora la energía que deben de tener los protones para conseguir esto. Según una de las ecuaciones de las notas del capítulo 5 de clase, la energía del centro de masa para dos partículas con energías E_1 y E_2 es de:

$$\sqrt{s} = E_{CMS} = [2E_1E_2(1-\cos\theta)]^{1/2}.$$

Si nombramos al fotón como la partícula 1 (y entonces $E_1 := E_{fot}$) y al protón como la partícula 2 (y entonces $E_2 := E_p$) y consideramos un choque de frente como dice el ejercicio (por lo que $\theta = 180$), entonces queda:

$$\sqrt{s} = [4E_{fot}E_p]^{1/2}$$

Y entonces la energía del protón es:

$$E_p = \frac{s}{4E_{fot}}$$

Nos falta conseguir la energía de los fotones, para ello usamos que nos dicen que supongamos que los fotones tienen una energía de $2.7kT$, donde k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura, que es de $2.73K$. Sustituyendo la constante de Boltzman, nos queda que esta energía es de $E = 2.7(8.617333 \times 10^{-5} eVK^{-1})2.73K = 6.352 \times 10^{-4} eV$. Entonces, la energía de los protones debe de ser aproximadamente:

$$E_p = \frac{s}{4E_{fot}} = \frac{(1232 \times 10^6 eV)^2}{4(6.352 \times 10^{-4} eV)} = \boxed{6 \times 10^{20} eV}$$

Finalmente, nos piden calcular el camino libre medio para la protones en colisión con el fondo de microondas. Para hacerlo, utilizamos la definición del camino libre medio que se encuentra en la ecuación 7.10 de [2], que dice que el camino libre medio es igual a:

$$\lambda = 1/\rho\sigma,$$

donde ρ es la densidad de "blancos" en el medio (en este caso fotones y según el enunciado es de $400cm^{-3} = 4 \times 10^8 m^{-3}$) y σ es la sección eficaz, que ya calculamos como $1.072 \times 10^{-31} m^2$ en el pico de resonancia. Por lo tanto, el camino libre medio es:

$$\lambda = \frac{1}{(4 \times 10^8 m^{-3})(1.072 \times 10^{-31} m^2)} = \boxed{2.33 \times 10^{22} m}$$

Problema 5. Resonancia 2.

Una resonancia de importancia para los experimentos con neutrinos de energía ultra alta en astrofísica es la resonancia Glashow:

$$\bar{\nu}_e + e \to W$$

donde $M_W c^2 = 81 GeV$. Suponiendo que los electrones objetivo en el cosmos están en reposo, demuestre que esta resonancia se excitaría para energías antineutrinos de alrededor de $6400 TeV$, y que la sección transversal máxima sería de alrededor de $5 \mu b$.

Empezamos considerando que para que se pueda crear la resonancia W, es necesario que la energía del centro de masa de $\bar{\nu}_e$ y e sea por lo menos igual a la masa de W, para que así se tenga la energía suficiente para crearla.

Entonces, empezamos calculando la energía del centro de masa de $\bar{\nu}_e + e$, donde el electrón e está en reposo. Para hacerlo, usamos que en las diapositivas del capítulo 5 obtuvimos que la energía del CM de una partícula 1 (el neutrino) incidiendo sobre la partícula 2 (el electrón) en reposo es de:

$$\sqrt{s} = [m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2]^{1/2},$$

donde m_1, m_2 son las masas de las partículas 1 y 2 y E_1 es la energía de la partícula 1. Como la masa del neutrino es despreciable, queda que:

$$\sqrt{s} = [m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2]^{1/2}$$

Luego, despejamos la energía E_1 de esta ecuación:

$$s = m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2$$
$$\Rightarrow \; E_1 = \frac{s - m_2^2 c^4}{2 m_2 c^2}$$

Como se dijo antes, la partícula W se creará cuando la energía del centro de masa sea de alrededor de $M_W c^2$, es decir, que $\sqrt{s} = 80.433 GeV$. Además, la masa del electrón es $m_e = 0.511 \times 10^6 eV/c^2$ y entonces sustituyendo nos queda:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{(80.433 GeV)^2 - (0.511 \times 10^6 eV/c^2)^2 c^4}{2(0.511 \times 10^6 eV/c^2) c^2} \\ &= 6330 \times 10^{12} eV \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que la energía del neutrino debe de ser aproximadamente $E_1 \simeq 6400 \times 10^{12} eV =$ $\boxed{6400 TeV}$ para que se creen las resonancias W.

Ahora calculamos la sección transversal máxima de esta reacción. Para hacerlo, utilizamos la fórmula de Breit-Wigner que dice que la sección eficaz se obtiene como:

$$\sigma(E) = \frac{4\pi \lambda\!\!\bar{}^2 (2J+1) \Gamma^2/4}{(2s_a+1)(2s_b+1)[(E-E_R)^2 + (\Gamma^2/4)]},$$

donde s_a, s_b son los espines de las partículas entrantes y J el de la resonancia creada. Como nos piden la sección eficaz máxima, la energía tiene que ser igual a la de resonancia, por lo que $E = E_R$ y la fórmula se simplifica a:

$$\sigma_{max} = \frac{4\pi \lambda\!\!\bar{}^2 (2J+1)}{(2s_a+1)(2s_b+1)}, \quad (1)$$

donde $\lambdabar = \dfrac{\hbar}{|p_{cm}|}$, con p_{cm} el momento de las partículas entrantes en el sistema del centro de masa. Al igual que en el ejercicio anterior, podemos utilizar la fórmula que se obtiene en el apéndice de este trabajo para calcular p_{cm} (en el apéndice se supone que la partícula entrante tienen masa nula, lo cual se puede aproximar aquí, ya que se trata de un neutrino, que tienen masa muy pequeña):

$$|p_{cm}| = \frac{s - m_2^2 c^4}{2c\sqrt{s}},$$

donde $\sqrt{s}$ es la energía del centro de masa y m_2 es la masa del objetivo (en este caso los electrones). Luego, la ecuación (1) al sustituir $\lambdabar = \hbar/|p_{cm}|$ queda como:

$$\sigma_{max} = \frac{4\pi\hbar^2(2c\sqrt{s})^2(2J+1)}{(s - m_e^2c^4)^2(2s_a+1)(2s_b+1)}$$

Además, el espín del neutrino es $s_a = 1/2$, el del electrón igual $s_b = 1/2$ y el de W es $J = 1$, por lo que nos queda:

$$\sigma_{max} = \frac{4\pi\hbar^2(2c\sqrt{s})^2(3)}{(s - m_e^2c^4)^2(2)(2)} = \frac{12\pi\hbar^2c^2s}{(s - m_e^2c^4)^2}$$

Como queremos conseguir la resonancia, la energía del centro de masa tiene que ser igual a la masa de la partícula W, por lo que $\sqrt{s} = 80.433GeV$. Sustituimos entonces todas las cantidades y se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \frac{12\pi(6.58211957\times10^{-16}eVs)^2(2.998\times10^8m/s)^2(80.433\times10^9eV)^2}{((80.433\times10^9eV)^2 - (0.511\times10^6eV)^2)^2} \\ &= 2.237\times10^{-34}m^2 \\ &= \boxed{2.27\mu b},\end{aligned}$$

Problema 6. Parton Momentum fractions and x.

Demuestre que en el modelo de partón de dispersión inelástica profunda, si no descuidamos las masas del nucleón M y del partón m, la fracción de momento ξ del partón disperso en un nucleón con momento P viene dado por

$$\xi = x\left[1+\frac{m^2c^2 - M^2c^2x^2}{Q^2}\right]$$

En el dominio inelástico profundo

$$1 >> \frac{x^2M^2c^2}{Q^2}\ ,\ 1 >> \frac{m^2c^2}{Q^2}$$

(Hint: para ϵ, ϵ' pequeños, podemos aproximar $\sqrt{1+\epsilon(1+\epsilon')} \simeq 1+\frac{\epsilon}{2}(1+\epsilon'-\frac{\epsilon}{4})$)

Como dice el enunciado, el nucleón tiene un momento P, del cual una fracción ξP corresponde al partón que nos interesa.
Si durante la dispersión, le es transferido un momento q al partón, entonces el cuadrimomento final del partón es $q+\xi P$ (ya que es el momento transferido q más ξP, que es el momento que tenía el partón antes).

Luego, el cuadrado del cuadrimomento del partón es $(q+\xi P)^2 = q^2+2\xi qP+\xi^2P^2$. Pero este cuadrimomento cuadrado tiene que ser igual a la masa cuadrada del partón m^2c^2. Por lo tanto, tenemos que:

$$q^2+2\xi qP+\xi^2P^2 = m^2c^2$$
$$\Rightarrow\ q^2+2\xi qP+\xi^2P^2 - m^2c^2 = 0$$

En clase definimos $Q^2 = -q^2$, y definimos $x := \frac{Q^2}{2Pq}\ \Rightarrow\ 2Pq = \frac{Q^2}{x}$, por lo que nos queda:

$$-Q^2 + \xi\frac{Q^2}{x} + \xi^2P^2 - m^2c^2 = 0$$
$$\Rightarrow\ P^2\xi^2 + \frac{Q^2}{x}\xi - Q^2 - m^2c^2 = 0$$

Finalmente, como P^2 es el momento cuadrado del nucleón, esto es igual a su masa invariante, es decir, $P^2 = M^2c^2$ y entonces:

$$M^2c^2\xi^2 + \frac{Q^2}{x}\xi - Q^2 - m^2c^2 = 0$$

Esto define una ecuación cuadrática para ξ, que se puede resolver usando la fórmula general para cuadráticas:

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{-\frac{Q^2}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{Q^2}{x}\right)^2 - 4M^2c^2\left(-Q^2-m^2c^2\right)}}{2M^2c^2} \\
&= \frac{-\frac{Q^2}{x} \pm \sqrt{\frac{Q^4}{x^2} + 4M^2c^2\left(Q^2+m^2c^2\right)}}{2M^2c^2} = \frac{-\frac{Q^2}{x} \pm \sqrt{\frac{Q^4}{x^2}\left[1+\frac{4M^2c^2x^2}{Q^4}(Q^2+m^2c^2)\right]}}{2M^2c^2} \\
&= \frac{-\frac{Q^2}{x} \pm \frac{Q^2}{x}\sqrt{1+\frac{4M^2c^2x^2}{Q^4}(Q^2+m^2c^2)}}{2M^2c^2} = \frac{-\frac{Q^2}{x} \pm \frac{Q^2}{x}\sqrt{1+\frac{4M^2c^2x^2}{Q^2}(1+\frac{m^2c^2}{Q^2})}}{2M^2c^2}
\end{aligned}$$

Notamos que la raíz tiene la forma $\sqrt{1+\epsilon(1+\epsilon')}$ donde $\epsilon = \frac{4M^2c^2x^2}{Q^2}$ y $\epsilon' = \frac{m^2c^2}{Q^2}$. Como dice el enunciado, en el dominio inelástico profundo, estas dos cantidades son muy pequeñas, por lo que podemos aproximar la raíz como $\sqrt{1+\epsilon(1+\epsilon')} = 1 + \frac{\epsilon}{2}\left(1+\epsilon' - \frac{\epsilon}{4}\right)$ y entones nos queda que:

$$
\begin{aligned}
\xi &= \frac{-\frac{Q^2}{x} \pm \frac{Q^2}{x}\left[1+\frac{\epsilon}{2}\left(1+\epsilon'-\frac{\epsilon}{4}\right)\right]}{2M^2c^2} \\
&= \frac{-\frac{Q^2}{x} \pm \frac{Q^2}{x}\left[1+\frac{4M^2c^2x^2}{2Q^2}\left(1+\frac{m^2c^2}{Q^2}-\frac{4M^2c^2x^2}{4Q^2}\right)\right]}{2M^2c^2}
\end{aligned}
$$

Tomamos solamente el signo positivo, ya que la fracción ξ tiene que ser positiva:

$$
\begin{aligned}
\xi &= \frac{-\frac{Q^2}{x} + \frac{Q^2}{x}\left[1+\frac{2M^2c^2x^2}{Q^2}+\frac{2M^2m^2x^2c^4}{Q^4}-\frac{2M^4x^4c^4}{Q^4}\right]}{2M^2c^2} \\
&= \frac{-\frac{Q^2}{x} + \frac{Q^2}{x} + 2M^2c^2x + \frac{2M^2m^2xc^4}{Q^2} - \frac{2M^4x^3c^4}{Q^2}}{2M^2c^2} \\
&= \frac{2M^2c^2Q^2x + 2M^2m^2xc^4Q^2 - 2M^4x^3c^4}{2M^2Q^2c^2} \\
&= x + \frac{m^2xc^2}{Q^2} - \frac{M^2x^3c^2}{Q^2} \\
&= \boxed{x\left[1+\frac{m^2c^2-M^2c^2x^2}{Q^2}\right]}
\end{aligned}
$$

Que es el resultado esperado.

Problema 7. Función de estructura de gluones.

Se cree que la función de estructura que describe la distribución del momento del gluón dentro de los nucleones, $g(x)$, aumenta fuertemente al disminuir x. Estime el número de gluones que sería posible resolver con colisiones inelásticas profundas $e+p \to e+X$ a $Q^2 = 104GeV^2$ a valores bajos de x (en los intervalos $0.0001-0.001$, $0.001-0.01$, $0.01-0.1$). Suponga que en estos valores de Q^2 la función de distribución de los gluones es $g(x) = 0.36x^{-0.5}$

Siendo la función de distribución $g(x) = 0.36x^{-0.5}$, la cantidad $g(x)dx$ representa la cantidad de gluones dentro del hadrón cuyo momento se encuentra en el intervalo $[x, x+dx]$ (capítulo 7.4 de [1]). Entonces, simplemente hay que integrar esta función en cada uno de los rangos para obtener la cantidad de gluones en dicho rango (al igual que se hizo en el ejercicio 3).

- $x \in [0.0001, 0.001]$: En este rango la integral es:

$$\begin{aligned}\int_{0.0001}^{0.001} g(x)dx &= \int_{0.0001}^{0.001} 0.36x^{-0.5}dx \\ &= 0.36(2x^{0.5})\Big|_{0.0001}^{0.001} \\ &= 0.01556\end{aligned}$$

  por lo que hay 0.01556 gluones en este rango de valores de x.

- $x \in [0.001, 0.01]$: En este rango la integral es:

$$\begin{aligned}\int_{0.001}^{0.01} g(x)dx &= \int_{0.001}^{0.01} 0.36x^{-0.5}dx \\ &= 0.36(2x^{0.5})\Big|_{0.001}^{0.01} \\ &= 0.04923\end{aligned}$$

  por lo que hay 0.04923 gluones en este rango de valores de x.

- $x \in [0.01, 0.1]$: En este rango la integral es:

$$\begin{aligned}\int_{0.01}^{0.1} g(x)dx &= \int_{0.01}^{0.1} 0.36x^{-0.5}dx \\ &= 0.36(2x^{0.5})\Big|_{0.01}^{0.1} \\ &= 001556\end{aligned}$$

  por lo que hay 0.1556 gluones en este rango de valores de x.

Problema 8. Función de estructura.

La distribución de la cantidad de movimiento del quark tipo u en el protón se puede parametrizar mediante la fórmula $F_u(x) \simeq xu(x) = a(1-x)^3$. Determine la constante a con el supuesto de que los quarks-u llevan el 33% del momento del protón.

Al igual que hicimos en clase (pero en ese caso fue para un nucleón completo), la razón de momento transferido a una partícula con distribución de momento $F(x)$ (con x la variable de Borjken) es:

$$\int_0^1 F(x)dx$$

Por lo tanto, en el caso particular del quark u, la razón de momento transferido a éste es de $\int_0^1 F_u(x)dx$. Como dice el enunciado, se le está transfiriendo 0.33 del momento, por lo que esta integral debe de ser igual a 0.33:

$$\begin{aligned}
0.33 &= \int_0^1 F_u(x)dx \\
&\text{Sustituimos la expresión de } F_u(x) = a(1-x)^3 \\
&= \int_0^1 a(1-x)^3 dx \\
&= a\int_0^1 (1-x)^3 dx \\
&= a\frac{-(1-x)^4}{4}\bigg|_0^1 \\
&= a\frac{-(1-1)^4}{4} - a\frac{-(1-0)^4}{4} \\
&= 0a + \frac{1}{4}a = \frac{a}{4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $0.33 = a/4$ y entonces despejando tenemos:

$$\boxed{a = 4(0.33) = 1.32}$$

Problema 9. Dispersión inelástica profunda.

Derivar la relación Callan-Gross

$$2xF_1(x) = F_2(x)$$

¿Qué valor de la masa del objetivo se debe utilizar?

La razón $2xF_1/F_2$ se muestra en la Fig. 2 como una función de x. Puede verse que la razón es, dentro del error experimental, consistente con la unidad.

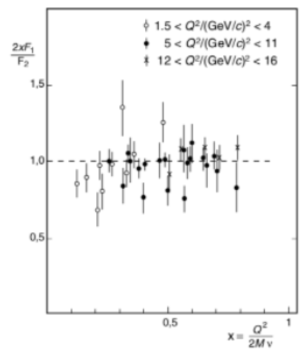

Figure 2: Ratio of the structure functions $2xF_1(x)$ and $F_2(x)$. The data are from experiments at SLAC. It can be seen that the ratio is approximately constant (≈ 1)

Primero usaremos que las funciones de estructura F_1, F_2 se consiguen como (ecuación 7.12 de [1], que también se encuentra en las diapositivas de clase):

$$\begin{aligned} F_1 &= Mc^2 W_1 \\ F_2 &= \nu W_2, \qquad (1) \end{aligned}$$

donde M es la masa del nuecleón y ν es la diferencia de energías del haz $\nu = E - E'$.

Para obtener una relación entre W_1, W_2, partimos de la fórmula de Rosenbluth, que nos da la sección eficaz de un electrón dispersado por un nucléon de masa M, que en clase vimos que es (ecuación 7.7 de [1]):

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{Mott} \left[W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2 \frac{\theta}{2}\right] \qquad (2)$$

Por otro lado, si consideramos ahora que el electrón está incidiendo elásticamente sobre uno de los quarks del nucleón, su sección eficaz está dada por la fórmula 6.5 de [1] y que vimos en clase. Según esta ecuación, si la partícula sobre la que se incide elásticamente (el quark) tiene espín 1/2, la sección eficaz es igual a la de Mott multiplicada por un término como sigue (aquí es donde se introduce la suposición de que los quarks tienen espín 1/2, que es el caso en el que se obtiene la relación de Callan-Gross que luego se comprueba experimentalmente, confirmando que los quarks tienen espín 1/2):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{spin\ 1/2} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left[1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2}\right] \quad (3)$$

donde $\tau = \dfrac{Q^2}{4m^2c^2}$.

Entonces, comparando (2) y (3), vemos que la razón entre W_1 y W_2 tiene que ser igual a τ:

$$\frac{W_1}{W_2} = \tau$$

Ahora usamos las ecuaciones (1), que dicen que $W_1 = F_1/Mc^2$ y $W_2 = F_2/\nu$ y nos queda:

$$\frac{F_1/Mc^2}{F_2/\nu} = \tau$$
$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{\tau Mc^2}{\nu}$$

si sustituimos $\tau = \dfrac{Q^2}{4m^2c^2}$, nos queda:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{Q^2Mc^2}{4m^2c^2\nu} = \frac{Q^2M}{4m^2\nu}$$

Si tomamos en cuenta que la dispersión sobre el quark de masa m se considera elástica, entonces (ecuación 7.10 de [1]) $2m\nu - Q^2 = 0 \Rightarrow Q^2 = 2m\nu$. Pero como la variable de Borjken está definida como $x = \dfrac{Q^2}{2M\nu}$, esto implica que $x = \dfrac{2m\nu}{2M\nu} \Rightarrow x = m/M \Rightarrow m = xM$. Por lo que siguiendo el desarrollo de antes, se tiene que:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{Q^2M}{4m^2\nu}$$
$$\text{Sustituimos } Q^2 = 2m\nu$$
$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{2m\nu M}{4m^2\nu}$$
$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{M}{2m}$$
$$\text{Sustituimos } m = xM$$
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{M}{2xM}$$
$$\Rightarrow \boxed{2xF_1 = F_2}$$

Apéndice

Agregamos aquí la demostración de una fórmula que fue utilizada en los ejercicios 4 y 5. Vamos a probar que si se tiene una partícula 1 que no tiene masa y con energía E_1, incidiendo sobre una partícual 2 en reposo, entonces el momento en el sistema de centro de masa de la partícula 1 es de:

$$|p_{cm}| = \frac{s - m_2^2 c^4}{2c\sqrt{s}},$$

donde s es la energía del centro de masa.
Para probarlo, notamos que la energía total del centro de masa $\sqrt{s}$ tiene que ser igual a la suma de las energías de las dos partículas en el centro de masa. Denotamos por $E_{1\ cm}$ y $E_{2\ cm}$ a las energía de las partículas 1 y 2 en el sistema de centro de masa y entonces se tiene que:

$$E_{1\ cm} + E_{2\ cm} = \sqrt{s} = (m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2)^{1/2} \quad (1)$$

Además, en el centro de masa, la magnitud del momento de las dos partículas tiene que ser igual (porque eso es justo lo que define al sistema de centro de masa, que el momento total se anule). Por lo tanto, si denotamos por $p_{1\ cm}$ y $p_{2\ cm}$ a los momentos de las dos partículas en el centro de masa, concluimos que:

$$|p_{cm}| := |p_{1\ cm}| = |p_{2\ cm}|$$
$$\Rightarrow\ |p_{cm}|c := |p_{1\ cm}|c = |p_{2\ cm}|c$$

Usamos la relación de Einstein entre momoento y energía: $pc = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2}$

$$\Rightarrow\ |p_{cm}|c = \sqrt{E_{1\ cm}^2 - m_1^2 c^4} = \sqrt{E_{2\ cm}^2 - m_2^2 c^4}$$

Como $m_1 = 0$, tenemos que:

$$\Rightarrow\ |p_{cm}|c = E_{1\ cm} = \sqrt{E_{2\ cm}^2 - m_2^2 c^4}$$

Entonces, concluimos que $E_{1\ cm}^2 = E_{2\ cm}^2 - m_2^2 c^4$, pero por (1), se tiene que $E_{2\ cm} = \sqrt{s} - E_{1\ cm}$, lo que implica que:

$$\begin{aligned}
&E_{1\ cm}^2 = E_{2\ cm}^2 - m_2^2 c^4 \\
&\Rightarrow\ E_{1\ cm}^2 = (\sqrt{s} - E_{1\ cm})^2 - m_2^2 c^4 \\
&\Rightarrow\ E_{1\ cm}^2 = s - 2\sqrt{s}E_{1\ cm} + E_{1\ cm}^2 - m_2^2 c^4 \\
&\Rightarrow\ 0 = s - 2\sqrt{s}E_{1\ cm} - m_2^2 c^4 \\
&\Rightarrow\ E_{1\ cm} = \frac{s - m_2^2 c^4}{2\sqrt{s}}
\end{aligned}$$

Ya teniendo la energía en el CM de la partícula 1, como no es masiva, sabemos que su momento se obtiene simplemente como $p_{1\ cm} = E_{1\ cm}/c$ y entonces:

$$\boxed{p_{cm} := p_{1\ cm} = \frac{s - m_2^2 c^4}{2c\sqrt{s}}}$$

Referencias

[1] Povh, Bogdan, et al. Particles and Nuclei. Springer, Fifth ed., S.n., 1995.

[2] Braibant, Sylvie, et al. Particles and Fundamental Interactions: An Introduction to Particle Physics. 2nd ed., Springer, 2012.

[3] Bianchini, Lorenzo. Selected Exercises in Particle and Nuclear Physics. Springer International Publishing, 2018.