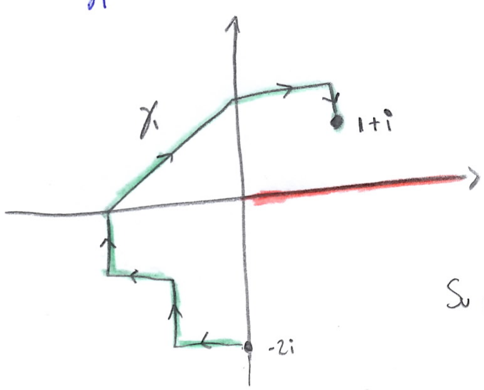
Tomás Ricardo Basile Alvarez Variable Compleja Examen 2

1. Calcula las siguientes integrales en las curvas marcadas

1) $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}$



Usaremos el T.F.C. que dice que si $f: A \to \mathbb{C}$ es continua definida en una región A y existe $F: A \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F' = f$.
Entonces $\forall$ curva $\gamma: [a,b] \to A$ diferenciable por pedazos, se tiene que $\int_\gamma f\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

En este caso, la función f es $1/z$, que es continua en $\mathbb{C} / \{0\}$

Su primitiva es la función $F(z) = \log(z) = \text{Log}|z| + i\text{Arg}(z)$ con $\text{Ag}(z) \in [0, 2\pi)$. Porque cumple $F'(z) = (\log(z))' = 1/z = f(z)$

Escogemos la rama del logaritmo que tiene un corte en el eje real positivo. Esto para que la función sea holomorfa en toda la región de la curva, la cual no cruza el eje real positivo.

Entonces, según el TFC tenemos que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

$$\to \int_\gamma \frac{dz}{z} dz = \log(\gamma(b)) - \log(\gamma(a))$$

Porque $1+i$ es el punto final y $-2i$ el inicial de la curva

$$= \log(1+i) - \log(-2i)$$

$$= \log(|1+i|) + i\,\text{Arg}(1+i) - [\log|-2i| + i\,\text{Arg}(-2i)]$$

por cómo se calcula el log complejo

$$= \log(\sqrt{2}) + i(\pi/4) - [\log(2) + i(\tfrac{3\pi}{2})]$$

Porque $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
$|-2i| = 2$
y los argumentos se pueden ver claramente del dibujo en este ejemplo. (tomando el argumento entre 0 y 2π por la rama elegida)

$$= \log|\sqrt{2}| - \log(2) - \tfrac{5}{4}\pi i$$

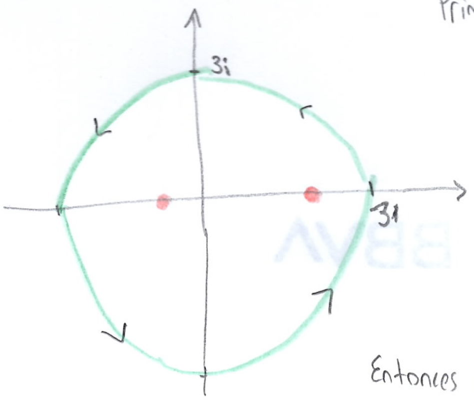
$$= \log\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \tfrac{5}{4}\pi i$$

propiedad del logaritmo de reales.

$$= -\tfrac{1}{2}\log(2) - \tfrac{5}{4}\pi i$$

$$\approx -0.3466 - 3.9269\, i$$

2) $\int_{\gamma_2} \frac{z}{(z+1)(z-2)}\,dz$



Primero reescribimos la integral usando fracciones parciales

$$\int_{\gamma_2} \frac{z}{(z+1)(z-2)}\,dz$$

$$\frac{z}{(z+1)(z-2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2)+B(z+1)}{(z+1)(z-2)}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} Az + Bz = z \\ -2A + B = 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} A+B=1 \rightarrow A+2A=1 \rightarrow A = 1/3 \\ \rightarrow B = 2A \qquad \therefore B = 2/3 \end{array}$$

Entonces nos queda que $\int_{\gamma_2} \frac{z}{(z+1)(z-2)}\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{1/3}{z+1}\,dz + \int \frac{2/3}{z-2}\,dz$

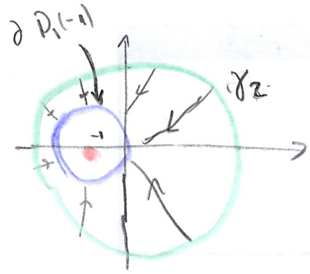
Cada una de estas integrales se puede calcular usando la fórmula de cauchy
Que dice que si f es holomorfa en el disco $D_r(z_0) \Rightarrow \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = 2\pi i\, f(z_0)$

f cumple ser holomorfa

i) $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z+1}\,dz$ En este caso $f(z)=1$ y $z_0=-1$

Entonces la fórmula de cauchy dice que $\int_{\partial D_1(-1)} \frac{1}{z+1} = 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i$

pero además $\int_{\partial D_1(-1)} \frac{1}{z+1}\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z+1}\,dz$ porque $\partial D_1(z_0)$ y γ_3 son homótopas en el dominio en el que $\frac{1}{z+1}$ es holomorfa $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ y aplicamos el teorema de deformación.



← Son homótopas sin necesidad de cruzar el -1

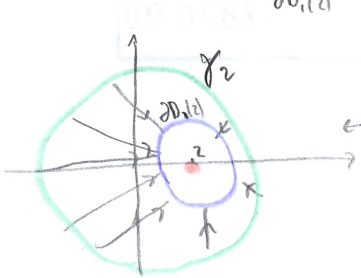
$$\therefore \int_{\gamma_3} \frac{1}{z+1}\,dz = 2\pi i$$

f es holomorfa

ii) $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-2}$ En este caso $f(z)=1$, $z_0=2$

Entonces cauchy dice que $\int_{\partial D_1(2)} \frac{1}{z-2} = 2\pi i f(2) = 2\pi i$

Pero además, $\int_{\partial D_1(2)} \frac{1}{z-2} = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-2}\,dz$ por el teorema de deformación y usando que $\partial D_1(2)$ es homótopa a γ_2 el el dominio $\mathbb{C}/\{2\}$ en que $\frac{1}{z-2}$ es holomorfa.



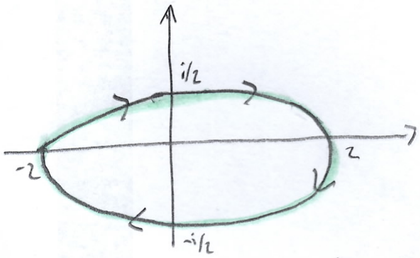
← Son homótopas sin necesidad de cruzar el 2.

$$\therefore \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-2}\,dz = 2\pi i$$

Entonces nos queda que $\int_{\gamma_2} \frac{z}{(z+1)(z-2)}\,dz = \frac{1}{3}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z+1}\,dz + \frac{2}{3}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-2}\,dz = \frac{1}{3}(2\pi i) + \frac{2}{3}(2\pi i) = 2\pi i$

$$\therefore \int_{\gamma_2} \frac{z}{(z+1)(z-2)}\,dz = 2\pi i$$

3) $\int_{\gamma_3} \sqrt{z^2+1} \; dz$ (con la rama principal de log)



Primero vemos dónde está bien definida $\sqrt{z^2+1}$ en la rama principal de log

Tenemos que $(z^2+1)^{1/2} = e^{\log(z^2+1)^{1/2}} = e^{\frac{1}{2}\log(z^2+1)}$

Tenemos que asegurarnos que $\log(z^2+1)$ tenga sentido en la rama principal de log para lo cual z^2+1 no puede ser un real negativo. Vemos dónde sí lo es

sea $z = x+iy$

$\rightarrow \quad z^2+1 = (x+iy)^2+1 = x^2+2xyi-y^2+1$

$= x^2-y^2+1+2xyi$ ← Un real negativo tiene parte real <0 y parte imaginaria $=0$

$\rightarrow$ 1) $x^2-y^2+1<0$, 2) $2xy=0$

Por x ó $y=0$

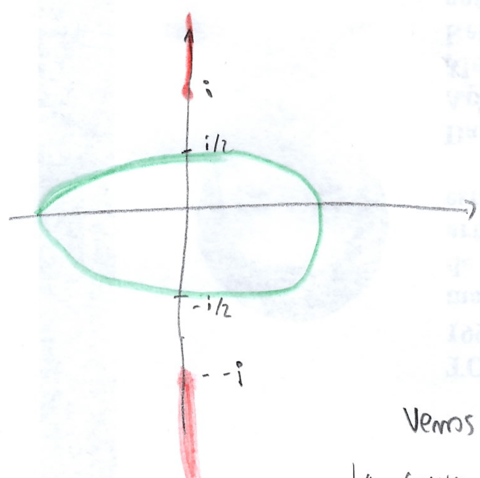
caso 1) Si $y=0 \rightarrow$ 1) queda como $x^2+1<0$ lo cual es imposible para x real

caso 2) Si $x=0 \rightarrow$ 1) queda como $-y^2+1<0 \rightarrow y^2>1 \rightarrow |y|>1$

Entonces, los puntos en los que z^2+1 es real negativo y por tanto $e^{1/2\log(z^2+1)}$ no está definido en la rama principal son aquéllos con

$x=0$, $|y|>1$.

Dibujamos de nuevo la curva marcando estos puntos en rojo:



Vemos que la curva no cruza estos puntos rojos $\Rightarrow$ la integral $\int_{\gamma_3}\sqrt{z^2+1}\,dz$ tiene sentido

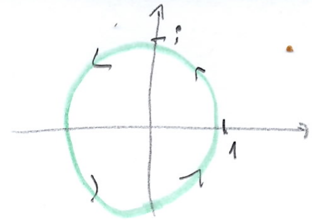
Además $\sqrt{z^2+1} = e^{\frac{1}{2}\log(z^2+1)}$ es holomorfa en todo el plano excepto en estos puntos rojos en los que no está definido el log. (porque log y exp son analíticas)

Vemos que en el dominio en el que $\sqrt{z^2+1}$ es holomorfa, la curva γ_3 es homótopa a cero (la podemos reducir hacia el origen sin cruzar las líneas rojas)

Entonces el teorema de Cauchy nos asegura que la integral en esta curva homótopa a cero es 0.

$\therefore \int_{\gamma_3}\sqrt{z^3+1} = 0$

4) $\displaystyle\int_{\gamma_4} \frac{\log(z+2)\, e^z \, dz}{z^3}$ (rama principal del log)



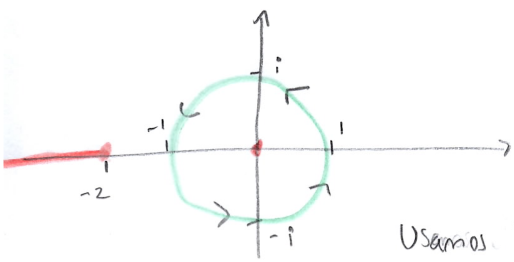
Primero vemos el dominio de la función. El denominador z^3 hace que la función esté indefinida en $z=0$

Por otro lado, hay que ver que $\log(z+2)$ esté definido, para ello, con la rama principal de log necesitamos que $z+2$ no sea un real negativo.

Si $z = x+iy \rightarrow z+2 = x+iy+2 = x+2+iy$

que es un real negativo si $y=0$, $x+2<0 \rightarrow x<-2$

Por tanto, hay que sacar estos puntos del dominio:



vemos que la curva γ_4 no cruza ningún punto problemático.
y el $\log(z+2)$ no es un problema porque γ_4 no cruza el corte de rama.

Usamos la fórmula de Cauchy para derivadas.

Dice que si f es holomorfa en A y $z_0 \in A$. Consideramos el disco $D_r(z_0) \subseteq A$ y entonces para z_0 se tiene
$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\, dw$$

En este caso, sea $f(z) = \log(z+2)\, e^z$ que por lo dicho antes, es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ excepto cuando $x<-2$, $y=0$.
Tomamos 0 (Que está dentro del conjunto en el que f es holomorfa) y tomamos $D_1(0)$ (Que también está dentro del dominio en el que f es holomorfa porque no llega hasta $x<-2$)

Entonces tenemos
$$f^{(2)}(0) = \frac{2!}{2\pi i}\int_{\partial D_1(0)} \frac{\log(w+2)\, e^w}{(w-0)^{2+1}}\, dw = \frac{2!}{2\pi i}\int_{\gamma_4} \frac{\log(w+2)\, e^w}{w^3}\, dw$$
porque $\gamma_4 = \partial D_1(0)$

Entonces, calculemos la segunda derivada de $f(z) = \log(z+2)\, e^z$

$$f'(z) = \frac{1}{z+2} e^z + \log(z+2)\, e^z$$ ← regla del producto y usar que $(\log(z+2))' = \frac{1}{z+2}$

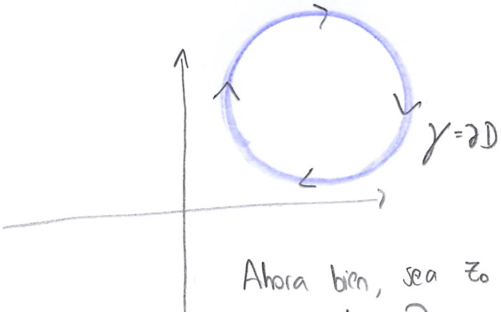
$$f''(z) = \frac{(z+2)e^z - e^z}{(z+2)^2} + \frac{1}{z+2} e^z + \log(z+2)\, e^z$$ ← regla del cociente y del producto

Evaluamos en $0 \rightarrow f''(0) = \frac{2e^0 - e^0}{(0+2)^2} + \frac{1}{0+2}e^0 + \log(0+2)e^0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \log(2) = \frac{3}{4} + \log(2)$

Entonces, regresando a la fórmula de Cauchy, tenemos
$$\int_{\gamma_4} \frac{\log(w+2)\, e^w}{w^3}\, dw = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = \pi i\left[\frac{3}{4} + \log(2)\right]$$
$$\approx 4.534\, i$$

2) Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ una región y γ la frontera de un disco $D \subseteq A$ $\gamma = \partial D$.
Sea $f: A \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Supongamos que f se anula a lo largo de γ.
¿Es cierto que f es idénticamente cero en el interior del disco D?

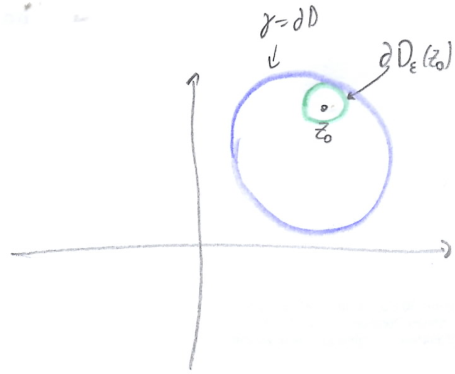
Sí es cierto



Consideramos la fórmula de Cauchy. Que dice que si f es holomorfa en $D_r(z_0)$ entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Ahora bien, sea $z_0 \in \operatorname{int}(D)$ un punto arbitrario dentro del disco D.



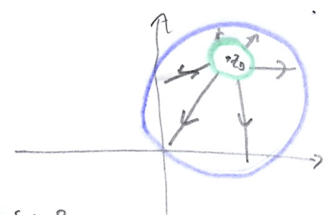
Y consideramos un disco $D_\varepsilon(z_0)$ tal que $D_\varepsilon(z_0) \subset \operatorname{int}(D)$
(se puede porque $\operatorname{int}(D)$ es un abierto $\Rightarrow$ todo punto tiene una bola contenida en $\operatorname{int}(D)$)

Por la fórmula de Cauchy, tenemos que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \quad \leftarrow$$

Por el teorema de deformación.
Ya que como $f(z)$ es holomorfa en A
$\Rightarrow \frac{f(z)}{z - z_0}$ es holomorfa en $A \setminus \{z_0\}$
y las curvas $\partial D_\varepsilon(z_0)$ y ∂D son homótopas en $A \setminus \{z_0\}$
porque se puede deformar una en la otra sin cruzar z_0.
ya que ambas tienen z_0 en su interior.



$$= \underline{0}$$

La integral $\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$ es 0 porque f vale 0 en todos los puntos de ∂D por hipótesis

Entonces, al ir evaluando el integrando $\frac{f(z)}{z - z_0}$ en ∂D nos queda $\frac{0}{z - z_0} = \underline{0}$.

Y al integrar esto nos da 0.

* Notar que el denominador $z - z_0$ nunca se anula en ∂D porque en esta frontera z siempre es distinto de z_0 ya que z_0 está en el interior de D, no en la frontera.
Por lo que $\frac{f(z)}{z - z_0}$ nunca es indefinida en ∂D

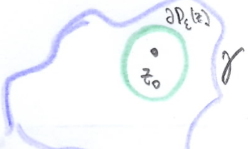
$\therefore$ $\underline{f(z_0) = 0}$

Y esto fue válido para todo $z_0 \in \operatorname{int}(D)$

$\therefore$ f se anula en todo punto del interior de D

¿Qué puedes decir en general si γ es cerrada simple o cerrada no simple?

Si γ es cerrada simple, podemos hacer un argumento similar al anterior



Tomamos un punto z_0 en el interior de la región acotada por γ.

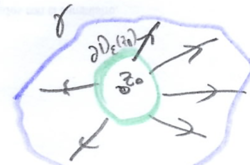
Entonces, podemos considerar un disco $D_\varepsilon(z_0)$ contenido en este interior (porque el interior es abierto)

como f es holomorfa en toda la región $D_\varepsilon(z_0)$, la fórmula de Cauchy nos dice que $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

Pero $\frac{f(z)}{z-z_0}$ es holomorfa en toda la región A excepto en z_0 (porque f es holomorfa)

por tanto podemos deformar $\partial D_\varepsilon(z_0)$ en γ siempre manteniéndonos en el dominio en que $\frac{f(z)}{z-z_0}$ es holomorfa

(porque ambas curvas rodean z_0 y no hace falta cruzarlo)



Entonces por el teorema de deformación, $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

Pero en esa última integral, evaluamos siempre $\frac{f(z)}{z-z_0}$ en puntos de la curva γ. En estos puntos la f se anula, por lo que el integrando es siempre

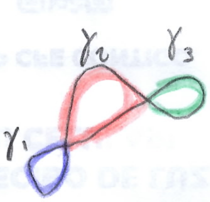
$\frac{0}{z-z_0} = 0 \quad \longleftarrow$ notar que en γ se tiene que $z \neq z_0$ porque z_0 está en el interior. Por lo que el denominador no se anula

Y al hacer la integral, nos queda $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma 0\,dz = 0$

$\therefore\ \forall\, z_0 \in$ en el interior de γ se tiene que $\underline{f(z_0) = 0}$

Si γ no es simple pero es cerrada:

Entonces se puede "descomponer" γ en varios pedazos cerrados simples que se unen en los puntos en los que γ se auto intersecta



Cada uno de estos pedazos es una curva cerrada simple. Y la función f se anula en las fronteras de cada uno de estos componentes (porque se anula en γ y estos pedazos tienen como frontera partes de γ)

Entonces, el resultado anterior nos dice que f es 0 en el interior de cada uno de estos pedazos

Y al juntarlos todos, obtenemos que f es 0 en el interior de todo γ.