1 9.a) Escribe los campos eléctrico y magnético (partes reales) para una onda monocromática plana con Amplitud E_0, frecuencia ω y fase cero que está: a) Viajando en la dirección x negativa, polarizada en la dirección z.

Primero calculamos el vector de propagación $\vec{k}$. Este vector tiene como norma el número de onda k, que está dado por la relación de dispersión $\frac{\omega}{k} = c$ (con c la velocidad de luz en el vacío)

$\rightarrow k = \omega/c$

Además, el vector de propagación $\vec{k}$ apunta en la dirección en la que se propaga la onda, que en este caso es $-\hat{x}$.

Entonces $\rightarrow \vec{k} = k(-\hat{x}) = -\frac{\omega}{c}\hat{x}$

El vector $\hat{n}$ apunta en la dirección de propagación y es unitario. Como la onda está polarizada en la dirección z $\rightarrow \hat{n} = \hat{z}$

Con esto podemos calcular los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Pues para una onda con vector de propagación $\vec{k}$, frecuencia (angular) ω, amplitud E_0, fase δ y polarización $\hat{n}$, se tiene que:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta)\,\hat{n}$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta)\,(\hat{k}\times\hat{n})$$

← Porque $\vec{B}$ tiene amplitud E_0/c y apunta perpendicular a $\vec{k}$ y al campo $\vec{E}$

↓ Sustituimos los valores de $\vec{k}$ y $\hat{n}$ y $\delta = 0$ ← porque no hay desfase

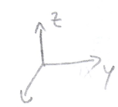
$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos\left(\left(-\frac{\omega}{c}\hat{x}\right)\cdot\vec{r} - \omega t + 0\right)(\hat{z})$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} E_0 \cos\left(\left(-\frac{\omega}{c}\hat{x}\right)\cdot\vec{r} - \omega t + 0\right)\left((-\hat{x})\times\hat{z}\right)$$

← porque el vector unitario de $\vec{k} = -\frac{\omega}{c}\hat{x}$ es $-\hat{x}$

↓

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos\left(-\frac{\omega}{c}x - \omega t\right)\hat{z}$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{E_0}{c} \cos\left(-\frac{\omega}{c}x - \omega t\right)\hat{y}$$

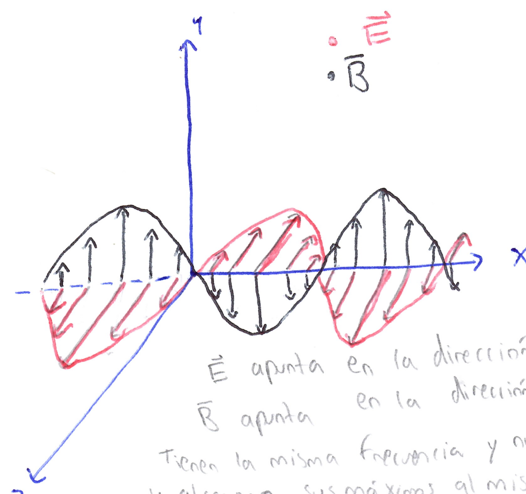
← Porque $-\hat{x}\times\hat{z} = \hat{y}$ y $\hat{x}\cdot\vec{r} = \hat{x}\cdot(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = x$ con $x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \vec{r}$ el punto en el que medimos los campos



↓

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \omega t\right)\hat{z}\\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \omega t\right)\hat{y}\end{aligned}}$$

↑ Usamos que coseno es par $\rightarrow \cos(-a) = \cos(a)$



$\vec{E}$ apunta en la dirección z
$\vec{B}$ apunta en la dirección y
Tienen la misma frecuencia y número de onda, y alcanzan sus máximos al mismo tiempo, sólo que $\vec{B}$ tiene amplitud $\frac{E_0}{c}$ (en la figura se usa c = 1)

b) Viajando en la dirección que va del origen al punto $(1,1,1)$ con polarización paralela al plano xz.

Al igual que antes, la norma del vector de propagación es $k = \omega/c$

Pero ahora la onda se propaga en la dirección $(1,1,1)$.

Entonces, el vector unitario en la dirección de propagación es $\hat{k} = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{3}}}$

Por lo tanto, el vector de propagación $\vec{k}$ es: $\vec{k} = k\hat{k}$ $\rightarrow$ $\boxed{\vec{k} = \frac{\omega}{c} \frac{\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{3}}}$

Para calcular el vector $\hat{n}$ en la dirección de polarización, vemos que debe de ser perpendicular a $\hat{y}$ (pues es paralelo al plano xz) y perpendicular a $\hat{k}$ (pues $\hat{n}$ y $\hat{k}$ son siempre perpendiculares en una onda plana)

$$\rightarrow \hat{n} = \hat{y}\times\hat{k} = \hat{y}\times\left(\frac{\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{y}\times\hat{x} + \hat{y}\times\hat{y} + \hat{y}\times\hat{z}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\hat{z}+\hat{x}\right)$$

Bueno, de hecho este vector no es $\hat{n}$ pues no está normalizado, pero la dirección es $\hat{x}-\hat{z}$, si la normalizamos, tenemos:

$$\boxed{\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-\hat{z})}$$

O podríamos haber hecho el producto $n = \hat{y}\times\hat{k}$ al revés, en cuyo caso la solución final tendría un desfase de $180°$ respecto a la solución que encontraremos.

Para encontrar $\bar{E}$ y $\bar{B}$ usamos la misma fórmula de a)

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta)\hat{n}$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}E_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta)(\hat{k}\times\hat{n})$$

porque $\bar{B}$ tiene amplitud E_0/c en una onda plana y debe ser perpendicular a $\hat{k}$ y $\hat{n}$

$\downarrow$ Sustituimos $\vec{k}, \hat{n}, \hat{k}, \delta = 0$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos\left(\left(\frac{\omega}{c}\frac{\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{3}}\right)\cdot(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}) - \omega t + 0\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-\hat{z})\right)$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{3}}\cdot(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}) - \omega t\right)\left(\frac{\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{3}}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-\hat{z})\right)\right)$$

Usamos que $\vec{r} = x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$ es el punto donde medimos el campo y sustituimos $\hat{k}$ y $\hat{n}$

$\downarrow$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c\sqrt{3}}(x+y+z) - \omega t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{x}-\hat{z})\right)$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c\sqrt{3}}(x+y+z) - \omega t\right)\frac{1}{\sqrt{6}}\left((\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})\times(\hat{x}-\hat{z})\right)$$

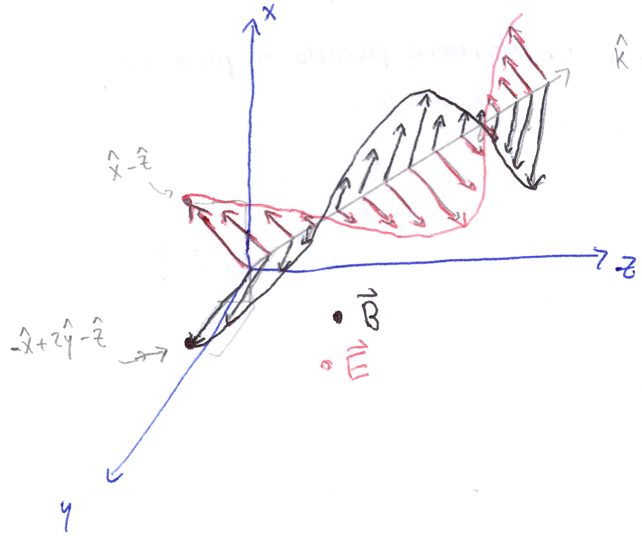
calculamos el producto punto $(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})\cdot(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}) = x+y+z$

$\downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\omega}{c\sqrt{3}}(x+y+z) - \omega t\right)(\hat{x}-\hat{z}) \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{E_0}{\sqrt{6}\,c}\cos\left(\frac{\omega}{c\sqrt{3}}(x+y+z) - \omega t\right)(-\hat{x}+2\hat{y}-\hat{z})\end{aligned}}$$

Usamos que:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\left((\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})\times(\hat{x}-\hat{z})\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left[-1\,\hat{\imath} - (-1-1)\hat{\jmath} - 1\,\hat{k}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left[-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right]$$



$\hat{k} = \frac{\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{3}}$

$\vec{E}$ apunta en dirección $\hat{x}-\hat{z}$
y $\vec{B}$ en dirección $-\hat{x}+2\hat{y}-\hat{z}$
Tienen la misma frecuencia y número de onda
y alcanzan sus máximos al mismo tiempo, sólo que $\vec{B}$ tiene amplitud $\frac{E_0}{c}$ (en el dibujo $c=1$)

---

d) Muestra que la "profundidad de piel" en un mal conductor ($\sigma \ll \omega\varepsilon$) es de $\frac{2}{\sigma}\sqrt{\varepsilon/\mu}$ (independiente de la frecuencia). Encuentra la profundidad de piel del agua (pura)

Como vimos, para un conductor con conductividad σ, las ecuaciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están dadas por:

9.122) $\nabla^2\vec{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, $\nabla^2\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ con ε la permitividad y μ la permeabilidad

y la solución está dada por $\tilde{E}(z,t) = \tilde{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}$, $\tilde{B}(z,t) = \tilde{B}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}$ ← moviéndose en la dirección z

Donde $\tilde{k}$ es el número de onda complejo
y cumple que $\tilde{k}^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$

Para obtener $\tilde{k}$, calculamos la raíz cuadrada de $\tilde{k}^2$.

usamos la expresión general para la raíz de un número $x+iy$
$\sqrt{x+iy} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}$
con $x=\mu\varepsilon\omega^2$, $y=\mu\sigma\omega$

$$\tilde{k} = \sqrt{\tilde{k}^2} = \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega} = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mu\varepsilon\omega^2)^2+(\mu\sigma\omega)^2}+\mu\varepsilon\omega^2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{(\mu\varepsilon\omega^2)^2+(\mu\sigma\omega)^2}-\mu\varepsilon\omega^2}{2}}$$

$$= \left[\frac{\mu\omega}{2}\sqrt{\varepsilon^2\omega^2+\sigma^2} + \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\right]^{1/2} + i\left[\frac{\mu\omega}{2}\sqrt{\varepsilon^2\omega^2+\sigma^2} - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{\mu\omega}{2}\varepsilon\omega\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} + \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\right]^{1/2} + i\left[\frac{\mu\omega}{2}\varepsilon\omega\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\right]^{1/2}$$

$$= \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right]^{1/2} + i\,\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right]^{1/2}$$

La parte imaginaria de este número $\tilde{k}$ está relacionada con la atenuación de la onda y por lo tanto, definimos la "profundidad de piel" como el recíproco de esto

$$\Rightarrow d = \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right]^{1/2}}$$

profundidad de piel

Para un mal conductor $\sigma << \omega\varepsilon$, podemos aproximar $\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$ en la definición de d:

usando la serie de Taylor de $f(x) = \sqrt{1+x}$ para $x << 1$

$$\rightarrow f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x$$
$$= 1 + \left.\frac{1/2}{\sqrt{1+x}}\right|_{x=0} x = 1 + \frac{1}{2}x$$

$\therefore \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

En nuestro caso, tenemos $x = \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 << 1$

$$\rightarrow \sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2.$$

Sustituimos esto en la expresión para d:

$$d = \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1\right]^{1/2}} \approx \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 - 1\right]^{1/2}} = \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\sigma}{2}} = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

$$\boxed{\therefore d \approx \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}$$

como se quería probar.

Para el agua pura, el griffiths da valores de ε, μ, σ

$$\varepsilon = K_e\,\varepsilon_0 = 80.1\,\varepsilon_0 \quad \leftarrow \text{Tabla 4.2 del Griffiths.}$$

constante dieléctrica

$$\mu = \mu_0(1+\chi_m) = \mu_0(1 + (-9\cdot 10^{-6})) \approx \mu_0$$

Susceptibilidad magnética Tabla 6.1

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2.5\cdot 10^{5}} = 4\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\Omega m}$$

resistividad Tabla 7.1

Sustituimos en la expresión aproximada de d para malos conductores *

$$d \approx \frac{2}{4\cdot 10^{-6}\frac{1}{\Omega m}}\sqrt{\frac{80.1\,\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{2}{4\cdot 10^{-6}\frac{1}{\Omega m}}\sqrt{\frac{80.1\,(8.854\cdot 10^{-12}\,F/m)}{1.256\cdot 10^{-6}\,H/m}} = \boxed{1.188\times 10^{4}\,m}$$

* La aproximación es válida, pues en el agua $\sigma = 4\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\Omega m}$

y para frecuencias cerca del espectro visible, $\omega \approx 10^{15}\,\frac{rad}{s}$

y $\varepsilon \approx 80\cdot\varepsilon_0 \approx 7\cdot 10^{-10}\,F/m$

$\therefore \omega\varepsilon \approx (10^{15})(7\cdot 10^{-10}) \approx 7\cdot 10^{5}\,\frac{1}{\Omega m}$

y entonces claramente $\sigma << \omega\varepsilon$

d) Muestra que la profundidad de piel para un conductor bueno es $(\sigma >> \omega\varepsilon)$ $\lambda/2\pi$ (con λ la longitud de onda dentro del conductor.

Usamos el valor de d que calculamos en c)

$$d = \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right]^{1/2}} \approx \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}-1\right]^{1/2}}$$

← porque $\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2} >> 1 \rightarrow \sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} \approx \sqrt{\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} = \frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$

$$\approx \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}}}$$

← porque $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} >> 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}-1} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} \quad \ldots (1)$$

Por otro lado, la parte real de $\tilde{k}$ calculada en c) que denotaremos como k_R determina la longitud de onda dentro del medio con la relación usual $\lambda = \frac{2\pi}{k_R}$

En este caso, $k_R = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right]^{1/2}$ ← por la parte real de la expresión de $\tilde{k}$ encontrada

$$\approx \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}+1\right]^{1/2} \approx \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}} = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} = \frac{1}{d}$$

← por (1)

y por lo tanto $\lambda = \frac{2\pi}{k_R} \doteq \frac{2\pi}{1/d} = 2\pi d$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{\lambda}{2\pi}}$$

Que es lo que se quería probar.

Encuentra la profundidad de piel (en nm) para un metal típico $\sigma \approx 10^7 (\Omega m)^{-1}$ en el rango visible $\omega = 10^{15}/s$ Asume que $\varepsilon \approx \varepsilon_0$, $\mu \approx \mu_0$ ¿Por qué los metales son opacos?

Por (1), tenemos que $d \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1.256\cdot 10^{-6} H/m)(10^{15}/s)(10^7 (\Omega m)^{-1})}{2}}}$

$$= 1.26 \times 10^{-8} m = \boxed{12.6 nm}$$

Los metales son opacos porque los campos no penetran mucho en ellos (esto es lo que indica una profundidad de piel tan baja) y entonces incluso una placa muy delgada de metal no deja pasar la luz.

* Es válido usar la aproximación $\sigma >> \omega\varepsilon$

pues $\sigma = 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$, $\omega = 10^{15}/s$, $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} F \cdot m^{-1}$

$$\Rightarrow \omega\varepsilon = 8.8 \times 10^3 \frac{F}{ms} << 10^7 \frac{F}{ms} = \sigma$$

e) Muestra que en un buen conductor el campo magnético es retardado por $45°$ del campo eléctrico y encuentra la razón de sus amplitudes. Para obtener el resultado numérico, usa el "metal típico" de d)

Como describimos en c), para una onda moviéndose en la dirección z, los campos son:

$$\tilde{\mathbf{E}}(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)} \quad , \quad \tilde{\mathbf{B}}(z,t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}$$

con $\tilde{k}$ como calculamos antes

Si se polariza en, digamos, la dirección $\hat{x}$

$$\rightarrow \tilde{\mathbf{E}}(z,t) = \tilde{E}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}\hat{x}, \ldots$$

Y luego, por la ley de Faraday, tenemos que $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Calculamos cada lado:

$$\bullet \quad \nabla \times E = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \tilde{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

por la expresión para $\tilde{E}$

$$= 0\hat{x} - \hat{y}\left(-\partial_z\left(\tilde{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}\right)\right) + 0\hat{z} = \hat{y}\left[\tilde{E}_0 (i\tilde{k}) e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}\right] = i\tilde{k}\tilde{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}\hat{y} \quad (1)$$

Mientras que por la expresión para $\tilde{B}(z,t)$, tenemos que

$$\bullet \quad -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}\right) = -\left(\tilde{\mathbf{B}}_0 (-\omega) e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}\right) = i\omega \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} \quad (2)$$

Luego, por la ley de Faraday, igualamos (1) y (2)

$$\rightarrow i\tilde{k}\tilde{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}\hat{y} = i\omega\tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} \Rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{\tilde{k}}{\omega}\tilde{E}_0\hat{y} \longrightarrow \tilde{B}_0 = \frac{\tilde{k}}{\omega}\tilde{E}_0 \quad (3)$$

Entonces, el campo $\tilde{\mathbf{B}}$ es

$$\tilde{\mathbf{B}}(z,t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} = \frac{\tilde{k}}{\omega}\tilde{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}\hat{y}$$

Entonces, mientras que el campo $\tilde{\mathbf{E}}$ es $\tilde{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}\hat{x}$, el campo $\tilde{\mathbf{B}}$ es $\tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}$

Para ver el desfase entre los campos, escribimos $\tilde{E}_0$ en forma compleja polar como

$$\tilde{E}_0 = E_0 e^{i\delta_E} \quad \text{y similarmente para} \quad \tilde{B}_0 = B_0 e^{i\delta_B}$$

Donde δ_E es la fase inicial del campo eléctrico y δ_B la del magnético. Y E_0, B_0 las magnitudes.

Entonces, si las dividimos, tenemos que $\frac{\tilde{B}_0}{\tilde{E}_0} = \frac{B_0 e^{i\delta_B}}{E_0 e^{i\delta_E}}$

$$\xrightarrow{\text{por (3)}} \frac{\tilde{k}\tilde{E}_0/\omega}{\tilde{E}_0} = \frac{B_0 e^{i\delta_B}}{E_0 e^{i\delta_E}} \Longrightarrow \frac{\tilde{k}}{\omega} = \frac{B_0}{E_0} e^{i(\delta_B - \delta_E)} \quad (4)$$

Tomas Ricardo Basile Alvarez   Electro II

El lado izquierdo de esta ecuación, $\tilde{K}/\omega$ es un número complejo, que según la ecuación, tiene magnitud igual a B_0/E_0 y ángulo igual a $\delta_B - \delta_E$

Desarrollamos este número $\tilde{K}/\omega$

$$\tilde{K}/\omega = \frac{1}{\omega}\left(\left[\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right]\right]^{1/2} + i\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right]^{1/2}\right)$$

← por la expresión de $\tilde{k}$ encontrada en c)

$$= \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right]^{1/2} + i\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}+1\right]^{1/2} + i\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}-1\right]^{1/2}$$

← pues para un conductor bueno $\sigma >> \omega\varepsilon$ $\Rightarrow \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1 \Rightarrow \sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} \approx \sqrt{\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} = \frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$

$$= \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right]^{1/2} + i\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right]^{1/2}$$

← Nuevamente, como $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1 \rightarrow \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}-1} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}}$

$$= \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}\,(1+i) \quad \ldots (5)$$

Como dijimos antes, por (4): $\frac{\tilde{K}}{\omega} = \frac{B_0}{E_0}e^{i(\delta_B-\delta_E)}$ $\Rightarrow$ la magnitud de $\tilde{K}/\omega$ es igual a B_0/E_0

$$\Rightarrow \frac{B_0}{E_0} = \left|\frac{\tilde{K}}{\omega}\right| = \sqrt{\frac{\tilde{K}}{\omega}\left(\frac{\tilde{K}}{\omega}\right)^*} = \sqrt{\sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}(1+i)\sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}(1-i)} \overset{\text{por (5)}}{=} \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}}$$

∴ La razón entre las magnitudes es $\boxed{\frac{B_0}{E_0} = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}}}$

Y nuevamente por (4), el ángulo de $\tilde{K}/\omega$ es igual a $\delta_B - \delta_E$. Pero el ángulo de $\tilde{K}/\omega \overset{(5)}{=} \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}(1+i)$ es el de $1+i$ que es sencillamente $\pi/4$

Entonces, $\delta_B - \delta_E = \pi/4$ y entonces $\vec{B}$ está retardado por $45°$ respecto a $\vec{E}$.

Resultado Numérico para un buen conductor

La razón entre las amplitudes es $\frac{B_0}{E_0} = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}} = \sqrt{\frac{(1.256\cdot 10^{-6} H/m)(10^7 (\Omega m)^{-1})}{10^{15}/s}}$

← usamos los valores de σ y ω dados y $\mu \approx \mu_0$

$$\rightarrow \boxed{\frac{B_0}{E_0} = 1.12\times 10^{-7}\, s/m}$$

Que es diferente al valor en el vacío, que sería $\frac{B_0}{E_0} = \frac{1}{c} = 3\cdot 10^{-9}\, s/m$

En un conductor bueno, el campo B_0 es 1.12×10^{-7} veces el eléctrico en magnitud a diferencia de las $3\cdot10^{-9}$ veces para el vacío.

Acepto que estos problemas sean considerados para la evaluación del semestre 2021-2

Tomás Basile