Álgebra Moderna Tarea 2.1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

10 de octubre de 2020

a) **Sean G un grupo, H, K subgrupos de G. Probar que $H \cup K$ es un grupo si y sólo si $H \subset K$ó $K \subset H$**

$\Rightarrow$) Suponemos que $H \cup K$ es un grupo y queremos probar que $H \subset K$ó $K \subset H$.
Probaremos mejor la contrapuesta de esta proposición, es decir probar que:
Si $H \not\subset K$ y $K \not\subset H$, entonces $H \cup K$ no es un grupo.

Como $H \not\subset K$, entonces existe una $h \in H$ tal que $h \notin K$
Como $K \not\subset H$, entonces existe una $k \in K$ tal que $k \notin H$.

Notamos entonces que ambos elementos h, k están en $H \cup K$.
Sin embargo probaremos que su producto hk no está en $H \cup K$, lo que prueba que este conjunto no es cerrado bajo el producto y por tanto no es un grupo.
Para esto, probaré que $hk \notin H$ y que $hk \notin K$:

- $hk \notin H$) Suponemos que $hk \in H$. Como $h \in H$ y como H es grupo entonces, $h^{-1} \in H$ y luego, el producto $h^{-1}(hk) \in H \;\Rightarrow\; k \in H$. Lo que es una contradicción a cómo se definió k, por lo que $hk \notin H$
- $hk \notin K$) Suponemos que $hk \in K$. Como $k \in K$ y como K es grupo entonces, $k^{-1} \in K$ y luego, el producto $(hk)k^{-1} \in K \;\Rightarrow\; h \in K$. Lo que es una contradicción a cómo se definió h, por lo que $hk \notin K$

Por lo que $hk \notin H$ y $hk \notin K$, entonces, $hk \notin H \cup K$.
Que como $h, k \in H \cup K$, el hecho de que $hk \notin H \cup K$ muestra que el producto no es cerrado en este conjunto y por tanto no es un grupo.
Con esto se termina de probar la contrapuesta del teorema.

$\Leftarrow$) Digamos que $H \subset K$ ó que $K \subset H$.
Si $H \subset K$, se tiene que $H \cup K = K$ y como K es un grupo, entonces $H \cup K = K$ es un grupo.
Si $K \subset H$, se tiene que $H \cup K = H$ y como H es un grupo, entonces $H \cup K = H$

es un grupo.

b) **Sea $H = \langle x \rangle$. Suponga que $|x| = \infty$, entonces $H = \langle x^a \rangle$ si y sólo si $a = \pm 1$**

$\Rightarrow$) Como $\langle x \rangle = H$, entonces $x^1 = x \in H$.
Y como $H = \langle x^a \rangle$, entonces, todo elemento de H se ve como $(x^a)^b$ para un entero b. En particular, el elemento $x \in H$ se ve así. Es decir $x = (x^a)^b$ para enteros a, b.

Entonces $x = (x^a)^b = x^{ab}$ y si multiplicamos por x^{-1} ambos lados, obtenemos que $e = x^{ab-1}$.
Pero como x es de orden infinito, la única potencia de x que es igual a e es el entero 0, entonces $ab - 1 = 0$.
Y por lo tanto, $ab = 1$. Las únicas soluciones a esto son $a = b = 1$ y $a = b = -1$ y por tanto $a = \pm 1$

$\Leftarrow$) Hay que probar que si $a = \pm 1$, entonces $H = \langle x^a \rangle$.
Si $a = 1$, entonces $\langle x^a \rangle = \langle x \rangle$, lo que es igual a H por como se define H.

Si $a = -1$, entonces $\langle x^a \rangle = \langle x^{-1} \rangle$. Este conjunto $\langle x^{-1} \rangle$ es igual a $\langle x \rangle$, porque para cada $a^n \in \langle a \rangle$, $(n \in \mathbb{Z})$, tenemos a $(a^{-1})^{-n} \in \langle a^{-1} \rangle$ (porque $-n \in \mathbb{Z}$) .
Entonces, el conjunto de todas las potencias enteras de a es igual al conjunto de todas las potencias enteras de a^{-1}. Y por tanto $H = \langle x \rangle = \langle x^{-1} \rangle$

c) **Encuentra todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_{45}$, da un generador para cada uno y describe las contenciones entre ellos.**

Primero vamos a enlistar los subgrupos cíclicos de $\mathbb{Z}_{45}$, es decir, los que están generados por un solo elemento.
Antes de empezar, notamos que podemos parar de escribir el conjunto cuando llegamos a $\overline{0}$, porque a partir de ahí se empiezan a repetir los elementos.
Por esto, notamos que si $m \in \{1, ..., 45\}$, entonces, $\langle \overline{m} \rangle$ serán todos los múltiplos de m y como dijimos antes, la cadena de múltiplos se empezará a repetir cuando lleguemos a $\overline{0}$, es decir, cuando alcancemos un múltiplo de 45.
El primer múltiplo de 45 que alcanzaremos se dará cuando nos encontremos en el mínimo común múltiplo de m y 45 (que denotamos por $[m, 45]$)
Por lo que la cantidad de elementos de $\langle \overline{m} \rangle$ (denotada por $|\langle \overline{m} \rangle|$) es igual a la cantidad de múltiplos de m que hay hasta llegar a $[m, 45]$, es decir, es igual a $\dfrac{[m, 45]}{m}$.
Pero si $(m, 45)$ denota al máximo común divisor de m y 45, sabemos que se tiene la relación : $(m, 45)[m, 45] = 45 \cdot m$, y por lo tanto, $\dfrac{[m, 45]}{m} = \dfrac{45}{(45, m)}$.

Juntando esto, tenemos que la cantidad de elementos $|\langle\overline{m}\rangle| = \dfrac{[m,45]}{m} = \dfrac{45}{(45,m)}$

Por otro lado, probaremos que se cumple que $\langle\overline{m}\rangle = \langle\overline{(45,m)}\rangle$.
Primero vemos que estos dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos, pues $\langle\overline{m}\rangle$ tiene $\dfrac{45}{(45,m)}$ elementos.
Mientras que $\langle\overline{(45,m)}\rangle$ tiene $\dfrac{45}{(45,(45,m))}$ elementos. Pero como $(45,m)$ divide a 45 por definición, entonces el máximo común divisor entre 45 y $(45,m)$ es $(45,m)$ por lo que $(45,(45,m)) = (45,m)$ y la cantidad de elementos de $\langle\overline{(45,m)}\rangle$ es entonces sencillamente $\dfrac{45}{(45,m)}$.

Ahora, sea $km \in \langle\overline{m}\rangle$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Y como $(45,m)$ divide a m, podemos encontrar un entero i tal que $m = (45,m)i$. Por tanto, $km = k(45,m)i$, lo cual es un elemento de $\langle\overline{(45,m)}\rangle$ porque es un múltiplo de $(45,m)$.
Entonces, $\langle\overline{m}\rangle \subset \langle\overline{(45,m)}\rangle$. Y como probamos que tienen la misma cantidad de elementos, estos conjuntos son necesariamente iguales.

Luego, si tenemos un $m \in \{1,2,...,45\}$, ya sabremos que $\langle\overline{m}\rangle = \langle\overline{(45,m)}\rangle$ y nos podemos ahorrar el trabajo de calcular $\langle\overline{m}\rangle$ si es que ya calculamos $\langle\overline{(45,m)}\rangle$

Con esto, notamos en particular que si un elemento m es coprimo con 45, entonces $(45,m) = 1$ y se tiene que $\langle\overline{m}\rangle = \langle\overline{1}\rangle = \mathbb{Z}_{45}$

Usaremos esta proposición para calcular varios generados a la vez. Para esto, agruparemos a los cíclicos en todos los que tienen el mismo MCD con 45.

- $\langle\overline{0}\rangle = \{\overline{0}\}$
- **Los coprimos con 45:** (todos estos generados son iguales a $\mathbb{Z}_{45}$ por lo mencionado antes) $\langle\overline{1}\rangle = \langle\overline{2}\rangle = \langle\overline{4}\rangle = \langle\overline{7}\rangle = \langle\overline{8}\rangle = \langle\overline{11}\rangle = \langle\overline{13}\rangle = \langle\overline{14}\rangle = \langle\overline{16}\rangle = \langle\overline{17}\rangle = \langle\overline{19}\rangle = \langle\overline{23}\rangle = \langle\overline{26}\rangle = \langle\overline{28}\rangle = \langle\overline{29}\rangle = \langle\overline{31}\rangle = \langle\overline{32}\rangle = \langle\overline{34}\rangle = \langle\overline{37}\rangle = \langle\overline{38}\rangle = \langle\overline{41}\rangle = \langle\overline{43}\rangle = \langle\overline{44}\rangle = \mathbb{Z}_{45}$
- m **tal que (m,45) = 3:** cualquiera de estos $\langle\overline{m}\rangle$ son iguales a $\langle\overline{(m,45)}\rangle = \langle\overline{3}\rangle$ por lo mencionado antes, entonces: $\langle\overline{3}\rangle = \langle\overline{6}\rangle = \langle\overline{12}\rangle = \langle\overline{21}\rangle = \langle\overline{24}\rangle = \langle\overline{33}\rangle = \langle\overline{39}\rangle = \langle\overline{42}\rangle$
$= \{\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12},...,\overline{45} = \overline{0}\}$
- **m tal que (m,45) = 5:** $\langle\overline{5}\rangle = \langle\overline{10}\rangle = \langle\overline{20}\rangle = \langle\overline{25}\rangle = \langle\overline{35}\rangle = \langle\overline{40}\rangle = \{\overline{5},\overline{10},\overline{15},...,\overline{45} = \overline{0}\}$
- **m tal que (m,45) = 9:** $\langle\overline{9}\rangle = \langle\overline{18}\rangle = \langle\overline{27}\rangle = \langle\overline{36}\rangle$
$= \{\overline{9},\overline{18},\overline{27},...,\overline{35},\overline{45} = \overline{0}\}$

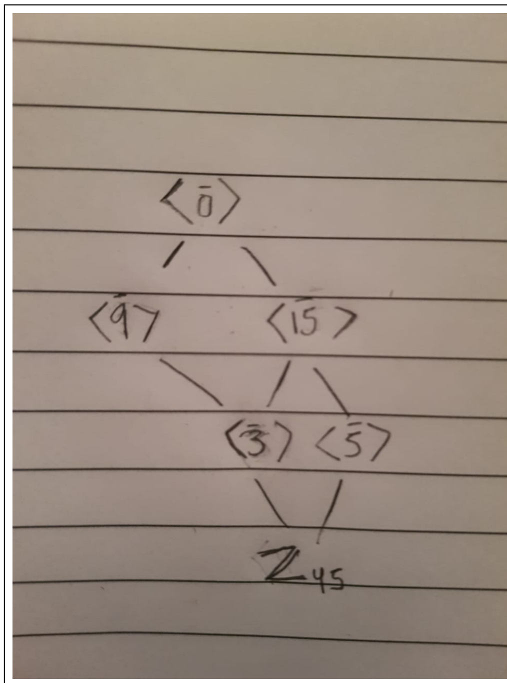
- **m tal que (m,45) = 15:** $\langle\overline{15}\rangle = \langle\overline{30}\rangle$
  $= \{\overline{15}, \overline{30}, \overline{45} = \overline{0}\}$

Luego, los únicos subgrupos propios cíclicos de $\mathbb{Z}_{45}$ son $\mathbb{Z}_{45}, \langle 3\rangle, \langle 5\rangle, \langle 9\rangle, \langle 15\rangle$.

Pero además, resulta que todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_{45}$ son cíclicos. Para probar esto, digamos que $H \leq \mathbb{Z}_{45}$ es un subgrupo.
Por el principio del buen orden, hay un entero mínimo $\overline{m} \in H$. Y sea ahora $\overline{p} \in H$. Probaremos que $\overline{p} \in \langle\overline{m}\rangle$.

Por el algoritmo de la división, existe $q \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r < m$ tal que $p = qm + r$. Enotnces, $r = p - qm$, pero como $\overline{m} \in H$, entonces $\overline{qm} \in H$ y por tanto $p - qm \in H$. Lo que implica que $\overline{r}$ es un elemento de H, pero $0 \leq r < m$ y el entero más chiquito en H era m, por lo que se debe de tener que $r = 0$. Por lo tanto, $p = qm \in \langle\overline{m}\rangle$ y así, todos los elementos de H son generados por m y $H = \langle\overline{m}\rangle$.

Entonces, los grupos cíclicos que encontramos arriba son en realidad todos los que tiene $\mathbb{Z}_{45}$
Y además, las contenciones que tienen se pueden ver fácilmente y se resumen en el siguiente diagrama (en el que una línea indica que el grupo de arriba está contenido en el de abajo)



d) **Probar que el subgrupo de S_4 generado por $(1\ 2)$ y $(1\ 3)(2\ 4)$ es isomorfo a $D_{2(4)}$**

Primero que nada, llamemos H a el conjunto en cuestión $\langle(1\ 2),(1\ 3)(2\ 4)\rangle$.
Consideramos ahora $\langle(1\ 2),(1\ 3\ 2\ 4)\rangle$ y veremos que es igual a H.
Para esto, notamos que se puede conseguir el elemento $(1\ 3\ 2\ 4)$ a partir de $(1\ 2),(1\ 3)(2\ 4)$ como sigue: $(1\ 2)(1\ 3)(2\ 4) = (1\ 3\ 2\ 4) \in H$.
También notamos que $(1\ 3)(2\ 4)$ se puede escribir a partir de $\{(1\ 2),(1\ 3\ 2\ 4)\}$ como sigue $(1\ 3)(2\ 4) = (1\ 2)(1\ 3\ 2\ 4)$.

Con lo que los elementos de $\{(1\ 2),(1\ 3\ 2\ 4)\}$ se pueden conseguir a partir de los de $\{(1\ 2),(1\ 3)(2\ 4)\}$ y viceversa. Y entonces sus generados son iguales.
Por esto, a partir de ahora veremos a H más bien como $\langle\{(1\ 2),(1\ 3\ 2\ 4)\}\rangle$

Ahora bien, $D_{2(4)}$ está definido por ser un conjunto generado por los elementos r y s y cumplir las relaciones generadoras: r es de orden 4, s es de orden 2 y $sr = r^{-1}s$.

Probaré que $H = \langle\{(1\ 2),(1\ 3\ 2\ 4)\}\rangle$ también está generado por dos elementos que cumplen esas relaciones:

- $(1\ 3\ 2\ 4)$ es de orden 4:

  - $(1\ 3\ 2\ 4)^2 = (1\ 3\ 2\ 4)(1\ 3\ 2\ 4) = (1\ 2)(3\ 4)$
  - $(1\ 3\ 2\ 4)^3 = (1\ 3\ 2\ 4)^2(1\ 3\ 2\ 4) = (1\ 2)(3\ 4)(1\ 3\ 2\ 4) = (1\ 4\ 2\ 3)$
  - $(1\ 3\ 2\ 4)^4 = (1\ 3\ 2\ 4)^3(1\ 3\ 2\ 4) = (1\ 4\ 2\ 3)(1\ 3\ 2\ 4) = (1)(2)(3)(4) =$ neutro de S_3
- $(1\ 2)$ es de orden 2: Evidentemente $(1\ 2)^2 = (1)(2)$
- $(1\ 2)(1\ 3\ 2\ 4) = (1\ 3\ 2\ 4)^{-1}(1\ 2)$
  Primero calculamos el lado izquierdo: $(1\ 2)(1\ 3\ 2\ 4) = (1\ 3)(2\ 4)$

  Calculamos ahora $(1\ 3\ 2\ 4)^{-1}$ Como $(1\ 3\ 2\ 4)$ manda el 1 al 3, el 3 al 2, el 2 al 4 y el 4 al 1. Su inverso manda el 1 al 4, el 4 al 2, el 2 al 3 y el 3 al 1, es decir, vale $(1\ 4\ 2\ 3)$
  Ahora hacemos el producto del lado derecho de lo que queremos probar: $(1\ 3\ 2\ 4)^{-1}(1\ 2) = (1\ 4\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3)(2\ 4)$

  Vemos que ambos lados son iguales.

Entonces, H tiene las mismas propiedades generadoras que $D_{2(4)}$ pero sus elementos tienen distinto nombre. Simplemente r en $D_{2(4)}$ corresponde a $(1\ 3\ 2\ 4)$ en H y s en$D_{2(4)}$ corresponde a $(1\ 2)$. Luego, ambos grupos se forman al hacer el generado y ambos tienen las mismas relaciones generadoras. Por lo que son el mismo grupo, pero con diferente nombre de elementos. Es decir, son isomorfos.

e) **Prueba que si $A \subset B \subset G$ donde G es grupo, $\langle A \rangle \leq \langle b \rangle$. Muestra un ejemplo donde $A \subsetneq B$ pero $\langle A \rangle = \langle B \rangle$.**

Como vimos en las notas, $\langle A \rangle$ es el conjunto de todas las palabras en A y $\langle B \rangle$ es el conjunto de todas las palabras en B. Pero como $A \subset B$, toda palabra de A es una palabra de B (porque los elementos que forman la palabra de A están en A y por tanto, están en B).
Luego, $\langle A \rangle \subset \langle B \rangle$

Para el ejemplo mencionado, usamos $G = (\mathbb{Z}, +)$ y sea $A = \{2\}$, $B = \{2, 4\}$
Entonces, $\langle A \rangle$ es el conjunto de todas las palabras formadas por 2 y -2, que nos dará todos los múltiplos de 2.
Por otro lado, $\langle B \rangle$ son todas las palabras en B, que se consiguen haciendo sumas de $2, -2, 4, -4$. Es fácil ver que esto nos dará nuevamente a todos los múltiplos de 2.
Por lo tanto, $\langle A \rangle = \langle B \rangle$.