Álgebra Clase 8

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

10 de octubre de 2020

Ejercicio 9.10

a) **Sea $a \in G$ y G finito. Entonces $a^{|G|} = e$**

Digamos que el orden de a es n, entonces, $a^n = e$. Además, entonces la cardinalidad de $\langle a \rangle$ es n. Pero como $\langle a \rangle$ es un subgrupo de G, por el teorema de Lagrange tenemos que $|\langle a \rangle|$ divide a $|G| \ \Rightarrow \ n$ divide $|G|$ y entonces existe un entero k tal que $|G| = kn$
Luego:

$$a^{|G|} = a^{nk} = (a^n)^k = e^k = e$$

b) Sea G finito y $H \leq G$ tal que $[G : H] = 2$. Probar que $x^2 \in H \forall x \in G$

Sea $x \in G$. Si $x \in H$, entonces claramente $x^2 \in H$ porque H es un grupo.

Si $x \notin H$, entonces consideramos el conjunto xH. Como $[G : H] = 2$, entonces la partición inducida por $\sim_H$ separa a G en dos clases de equivalencia.
En particular, como $x \notin H$, y como $x = xe \in xH$ (porque $e \in H$), entonces xH y H son disjuntos y por tanto son los dos conjuntos que forman la partición de G.

Consideramos ahora el conjunto x^2H. Como las clases de equivalencia o son disjuntas o son iguales, el conjunto x^2H tiene que ser igual a H o igual a xH (porque estos dos forman la partición de G)
Suponemos que $x^2H = xH$. Como $x^2 = x^2e \in x^2H$, entonces $x^2 \in xH$, lo que implica que existe una $h \in H$ tal que $x^2 = xh$, de donde se deduce que $h = x$ y por tanto $x \in H$, una contradicción.

Por lo tanto, x^2H tiene que ser igual a H. En este caso, como $x^2 \in x^2H$, entonces $x^2 \in H$ y listo.