MAF: Tarea 3

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

19 de enero de 2021

1. Sea $\psi(p) = \dfrac{d}{dp}\log\Gamma(p)$ la denominada función digamma (ver problema 11.7 del capítulo 11). Demostrar las identidades:

a) $\psi(1-p) - \psi(p) = \pi\cot(\pi p)$

Empezamos notando que $\psi(p) = \dfrac{d}{dp}\log(\Gamma(p)) = \dfrac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}$
Ahora recordamos la fórmula de reflexión de la función Gamma demostrada en clase:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

Aplicamos log de ambos lados

$\Rightarrow\ \log\left(\Gamma(p)\Gamma(1-p)\right) = \log\left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi p)}\right)$

$\Rightarrow\ \log(\Gamma(p)) + \log(\Gamma(1-p)) = \log(\pi) - \log(\sin(\pi p))$

Derivamos respecto a p :

$\Rightarrow\ \dfrac{d}{dp}[\log(\Gamma(p))] + \dfrac{d}{dp}[\log(\Gamma(1-p))] = -\dfrac{d}{dp}[\log(\sin(\pi p))]$

$\Rightarrow\ \dfrac{d}{dp}[\log(\Gamma(p))] + (-1)\dfrac{\Gamma'(1-p)}{\Gamma(1-p)} = -\pi\dfrac{\cos(\pi p)}{\sin(\pi p)}$

$\Rightarrow\ \psi(p) - \psi(1-p) = -\pi\dfrac{\cos(\pi p)}{\sin(\pi p)}$ por la definición de la digamma

$\Rightarrow\ \psi(p) - \psi(1-p) = -\pi\cot(\pi p)$

$\Rightarrow\ \boxed{\psi(1-p) - \psi(p) = \pi\cot(\pi p)}$

Y se tiene lo que queríamos demostrar.

b) $\psi(p) + \psi(p + 1/2) + 2\log 2 = 2\psi(2p)$

Empezamos demostrando una fórmula similar pero para la función Γ. Vamos a demostrar que $\sqrt{\pi}\Gamma(2p) = 2^{2p-1}\Gamma(z)\Gamma(p + 1/2)$
Para ello, empezamos con una propiedad probada en clase para la función beta, que $B(p,p) = \dfrac{B(p,\frac{1}{2})}{2^{2p-1}}$

$$
\begin{aligned}
& B(p,p) = \frac{B(p,\frac{1}{2})}{2^{2p-1}} \\
& \Rightarrow \ \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(p+p)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2p-1}\Gamma(\frac{1}{2}+p)} \quad ; \text{ por la relación entre la función Beta y Gamma} \\
& \Rightarrow \ \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{\Gamma(1/2)}{2^{2p-1}\Gamma(\frac{1}{2}+p)} \\
& \Rightarrow \ \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}\Gamma(\frac{1}{2}+p)} \quad \text{porque } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

Y reoredenando un poco tenemos :

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2p) = 2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma(p + 1/2)$$

Ahora que ya tenemos esta nueva fórmula, le aplicamos logaritmo de ambos lados:

$$
\begin{aligned}
& \log[\sqrt{\pi}\Gamma(2p)] = \log[2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma(p + 1/2)] \\
& \Rightarrow \log(\sqrt{\pi}) + \log(\Gamma(2p)) = (2p-1)\log(2) + \log(\Gamma(p)) + \log(\Gamma(p + 1/2)) \quad \text{por propiedades de log}
\end{aligned}
$$

Derivamos ambos lados con respecto a p

$$
\begin{aligned}
& \Rightarrow \frac{d}{dp}[\log(\Gamma(2p))] = 2\log(2) + \frac{d}{dp}[\Gamma(p)] + \frac{d}{dp}[\log(\Gamma(p + 1/2))] \\
& \Rightarrow \ 2\frac{\Gamma'(2p)}{\Gamma(2p)} = 2\log(2) + \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + \frac{\Gamma'(p + 1/2)}{\Gamma(p + 1/2)} \\
& \Rightarrow \ \boxed{2\psi(2p) = 2\log 2 + \psi(p) + \psi(p + 1/2) \quad \text{por la def. de } \psi}
\end{aligned}
$$

Y ya tenemos justo lo que se quería probar.

Usar las propiedades de la función digamma para demostrar que:

$$\psi(n+1/2) = -\gamma - 2\log 2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\ , \quad n = 1, 2, \cdots$$

donde $\gamma = -\psi(1) = -\Gamma'(1) = 0{,}57721566\cdots$ **es la constante de Euler**

Empezamos probando una fórmula de recurrencia para la función digamma. Vamos a probar que $\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$.

Para ello, empezamos con la fórmula de recurrencia de la función Gamma, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\\
&\Rightarrow\ \log[\Gamma(z+1)] = \log[z\Gamma(z)] \qquad \text{aplicamos el logaritmo}\\
&\Rightarrow\ \log(\Gamma(z+1)) = \log(z) + \log(\Gamma(z))\\
&\text{Y ahora derivamos con respecto a z}\\
&\Rightarrow\ \frac{d}{dz}[\log(\Gamma(z+1))] = \frac{d}{dz}[\log(z)] + \frac{d}{dz}[\log(\Gamma(z))]\\
&\Rightarrow\ \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{z} + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\\
&\Rightarrow\ \psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

Con esta fórmula de recurrencia, podemos probar ahora que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\text{PD.} \qquad \psi(n) = \psi(1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \qquad (1)$$

Lo probamos por inducción. En el caso base $n = 1$ la suma $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$ ni siquiera empieza y la fórmula que queremos probar se reduce a $\psi(1) = \psi(1)$ que es obviamente verdadera.

Hipótesis de Inducción: Suponemos que se vale la fórmula para n

Ahora buscamos probarla para $n+1$

$$\begin{aligned}
\psi(n+1) &= \psi(n) + \frac{1}{n} \qquad \text{por la fórmula de recurrencia probada antes}\\
&= \psi(1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{n} \quad \text{por hipótesis de inducción}\\
&= \psi(1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

Lo que prueba la fórmula para $n+1$.

Con este resultado, ahora sí vamos a probar lo que se nos pide. Sea $n \in \mathbb{N}$ y empezamos con la identidad probada en b):

$\psi(n) + \psi(n + 1/2) + 2\log 2 = 2\psi(2n)$
$\Rightarrow\ \psi(n + 1/2) = -2\log 2 + 2\psi(2n) - \psi(n)$
Luego, por la fórmula (1), tenemos:
$\Rightarrow\ \psi(n + 1/2) = -2\log 2 + 2\left[\psi(1) + \displaystyle\sum_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{i}\right] - \left[\psi(1) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\right]$
$= -2\log 2 + \psi(1) + \displaystyle\sum_{i=1}^{2n-1} \frac{2}{i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$
$= -2\log 2 + \psi(1) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \frac{2}{2j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{2j-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$ Separamos la primer suma en dos, una que suma sobre los términos pares $\dfrac{2}{2}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{2}{6}, \cdots, \dfrac{2}{2n-2}$ y una que suma sobre los impares $\dfrac{2}{1}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{5}, \cdots, \dfrac{2}{2n-1}$
$= -2\log 2 + \psi(1) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{2j-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$
La primer y tercer sumas son iguales y se cancelan
$= -2\log 2 + \psi(1) + 2\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1}$

Con lo que ya probamos que:

$$\boxed{\psi(n + 1/2) = -2\log 2 - \gamma + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1}}$$

Donde $\gamma = -\psi(1)$

2.- Obtener las series asintóticas de las siguientes integrales y comprobar la identidad (10.7) o (10.8) del Boas:

a) $I(\epsilon) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-\epsilon x^4}dx = \sqrt{2\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n-1)!!}{n!}\epsilon^n\right)\ , \ \ \epsilon \to 0^+$

Primero, expandiremos $e^{-x^2/2-\epsilon x^4}$ en sus primeros N términos de la serie de Taylor centrada en 0 más el residuo.

Para ello, antes que nada recordamos que por el teorema de Taylor, la función $f(y) = e^{-y}$ se puede expandir alrededor de $y = 0$ como:

$$\begin{aligned} e^{-y} &= f(0) + f'(0)y + \frac{f''(0)}{2!}y^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(0)}{N!}y^N + R_N(y) \\ &= 1 - y + \frac{1}{2!}y^2 + \cdots + \frac{(-1)^N}{N!}y^N + R_N(y) \end{aligned}$$

Porque $f^{(n)}(0) = (-1)^n e^{-y}\big|_0 = (-1)^n$
Donde $R_N(y)$ es el residuo de la expansión. Y una de las muchas formas de calcular dicho residuo según el teorema de Taylor es como $R_N(y) = \dfrac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}y^{N+1}$ para un c entre 0 y y (tomamos a y como positivo).
Podemos acotar este residuo notando que $f^{(N+1)}(c) = (-1)^{N+1}e^{-c}$
$\Rightarrow \quad |f^{(N+1)}(c)| = |(-1)^{N+1}e^{-c}| = e^{-c}$. Y como c se encuentra entre 0 y y, esta expresión es a lo sumo $e^{-0} = 1$.
Por tanto:

$$|R_N(z)| = \left|\frac{f^{N+1}(c)}{(N+1)!}y^{N+1}\right| = \frac{|f^{N+1}(c)|}{(N+1)!}y^{N+1} \leq \frac{y^{N+1}}{(N+1)!}$$

Ahora reemplazamos y por ϵx^4, tenemos que la expresión $e^{-\epsilon x^4}$ se puede escribir como:

$$e^{-\epsilon x^4} = 1 - \epsilon x^4 + \frac{1}{2!}\epsilon^2 x^8 + \cdots + \frac{(-1)^N}{N!}\epsilon^N x^{4N} + R_N(x,\epsilon)$$

Y en este caso, el residuo $R_N(x,\epsilon)$ al sustituir y por ϵx^4 está acotado por:

$$|R_N(x,\epsilon)| \leq \frac{\epsilon^{N+1}x^{4(N+1)}}{(N+1)!}$$

Entonces, podemos escribir $I(\epsilon)$ como:

$$\begin{aligned}
I(\epsilon) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-\epsilon x^4} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-\epsilon x^4} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \left[1 - \epsilon x^4 + \frac{1}{2!}\epsilon^2 x^8 + \cdots + \frac{(-1)^N}{N!}\epsilon^N x^{4N} + R_N(x,\epsilon)\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx - \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^4 dx + \epsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2!} e^{-x^2/2} x^8 dx + \cdots + \epsilon^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!} e^{-x^2/2} x^{4N} dx + \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} R_N(x,\epsilon) dx
\end{aligned}$$

Esta última expresión es un polinomio en la variable ϵ seguido por un residuo. Donde cada uno de los coeficientes del polinomio es una integral. Estos coeficientes los denotaremos por a_n.

Por lo que la expresión para $I(\epsilon)$ es:

$$I(\epsilon) = \sum_{n=0}^{N} a_n \epsilon^n + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} R_N(x,\epsilon) dx \qquad (1)$$

Donde $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-x^2/2} x^{4n} dx$.

Calculamos estas integrales:

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-x^2/2} x^{4n} dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-x^2/2} x^{4n} dx \qquad \text{porque la función es par}$$

Hacemos un cambio de variable $u = x^2/2$, $du = xdx$, $x = \sqrt{2u}$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$, $x = \infty \Rightarrow u = \infty$

$$\begin{aligned}
&= 2\frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} x^{4n-1} \; x \, dx \\
&= 2\frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-u} (\sqrt{2u})^{4n-1} \, du \\
&= 2\frac{(-1)^n}{n!} \cdot 2^{\frac{4n-1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{4n-1}{2}} \, du \\
&= (\sqrt{2})^{4n+1} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{2n-\frac{1}{2}} du \\
&= (\sqrt{2})^{4n+1} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{2n+\frac{1}{2}-1} du
\end{aligned}$$

Identificamos que esta última integral es la definición de la función Gamma evaluada en $2n + \frac{1}{2}$ y entonces los coeficientes de la suma de (1) son de la forma:

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-x^2/2} x^{4n} dx = (\sqrt{2})^{4n+1} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(2n + \frac{1}{2})$$

Para reescribir esta expresión recordamos una fórmula demostrada en clase para expresar la función Gamma evaluada en un entero más 1/2. Si k es un entero, tenemos que:

$$\Gamma(k+1/2) = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2^k}\sqrt{\pi} = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}$$

Por lo que $\Gamma(2n+1/2) = \dfrac{(2(2n)-1)!!}{2^{(2n)}}\sqrt{\pi} = \dfrac{(4n-1)!!}{2^{2n}}\sqrt{\pi}$
Esto es válido para cualquier n natural a partir de 1. Ya que para $n=0$, el factorial $(4n-1)!! = (-1)!!$ no tiene sentido. Sin embargo, para $n=0$ tenemos directamente el resultado $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
Por tanto, retomando lo que teníamos antes, nos queda en general que a_n se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
a_n &= (\sqrt{2})^{4n+1}\frac{(-1)^n}{n!}\Gamma(2n+\frac{1}{2}) = (\sqrt{2})^{4n+1}\frac{(-1)^n(4n-1)!!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\\
&= 2^{2n+1/2}\cdot 2^{-2n}\frac{(-1)^n(4n-1)!!}{n!}\sqrt{\pi}\\
&= 2^{1/2}\sqrt{\pi}\frac{(-1)^n(4n-1)!!}{n!}\\
&= \sqrt{2\pi}\frac{(-1)^n(4n-1)!!}{n!}
\end{aligned}$$

Excepto para a_0, que es $a_0 = (\sqrt{2})^{4(0)+1}\dfrac{(-1)^0}{0!}\Gamma(2(0)+1/2) = \sqrt{2}\Gamma(1/2) = \sqrt{2\pi}$

Entonces, retomando la expresón (1), teníamos que:

$$I(\epsilon) = \sum_{n=0}^{N} a_n\epsilon^n + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}R_N(x,\epsilon)dx$$

Donde sabemos que $a_n = \sqrt{2\pi}\dfrac{(-1)^n(4n-1)!!}{n!}$
Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
I(\epsilon) &= \sum_{n=0}^{N} a_n\epsilon^n + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}R_N(x,\epsilon)dx\\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\epsilon^n + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}R_N(x,\epsilon)dx\\
&= \sqrt{2\pi} + \sum_{n=1}^{N}\sqrt{2\pi}\frac{(-1)^n(4n-1)!!}{n!}\epsilon^n + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}R_N(x,\epsilon)dx\\
&= \sqrt{2\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n(4n-1)!!}{n!}\epsilon^n\right) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}R_N(x,\epsilon)dx
\end{aligned}$$

Con lo que ya casi tenemos la expresión asintótica que se buscaba probar para $\epsilon \to 0^+$. Pero nos sobra el término con residuo al final. Para probar que efectivamente podemos decir que $I(\epsilon)$ es la serie asintótica
$I(\epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon^n = \sqrt{2\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n-1)!!}{n!}\epsilon^n\right)$

Hay que ver lo que dice el Boas 10.8 (básicamente ver que el residuo es muy pequeño), probar que para un N arbitrario, se tiene que:

$$\text{PD.} \qquad \left| I(\epsilon) - \sum_{n=0}^{N} a_n \epsilon^n \right| / \epsilon^N \to 0 \qquad \text{conforme } \epsilon \to 0^+$$

Con lo que ya podríamos confirmar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon^n$ es la serie asintótica de $I(\epsilon)$

Por la expresión (1), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left| I(\epsilon) - \sum_{n=0}^{N} a_n \epsilon^n \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} R_N(x,\epsilon) dx \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-x^2/2} \right| |R_N(x,\epsilon)| \, dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-x^2/2} \right| \frac{\epsilon^{N+1} x^{4(N+1)}}{(N+1)!} dx \qquad \text{por cómo acotamos } R_N \\
&= \epsilon^{N+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \frac{x^{4(N+1)}}{(N+1)!} dx
\end{aligned}$$

Esta última integral es convergente porque $e^{-x^2/2} x^{4(N+1)}$ tiende a cero conforme $x \to \pm\infty$ porque e^{-x^2} decrece más rápido que cualquier potencia $x^{4(N+1)}$. Por tanto, denotaremos el valor de la integral por M. Entonces, tenemos:

$$\left| I(\epsilon) - \sum_{n=0}^{N} a_n \epsilon^n \right| \leq \epsilon^{N+1} M$$

$$\Rightarrow \quad \left| I(\epsilon) - \sum_{n=0}^{N} a_n \epsilon^n \right| / \epsilon^N \leq \epsilon M \qquad \text{porque } \epsilon > 0 \text{ y podemos pasarlo dividiendo sin cambiar la desigualda}$$

Luego, conforme $\epsilon \to 0^+$, el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0. Por tanto, el lado izquierdo, que es siempre positivo o 0, debe de tender a 0 también. Con lo que se prueba que:

$$\left| I(\epsilon) - \sum_{n=0}^{N} a_n \epsilon^n \right| / \epsilon^N \to 0 \qquad \text{conforme} \quad \epsilon \to 0$$

Con esto, se concluye finalmente que $I(\epsilon)$ se expresa como la seria asintótica:

$$I(\epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon^n = \sqrt{2\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n-1)!!}{n!}\epsilon^n\right) \qquad , \epsilon \to 0^+$$

b) $Ei(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt = \frac{e^x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{x^n}, \qquad x \to \infty$

Integramos por partes usando $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int vdu$ repetidamente:

$$\begin{aligned}
Ei(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt \\
&= \frac{e^t}{t}\bigg|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} -\frac{e^t}{t^2} dt \qquad \text{por partes, con } u = \frac{1}{t}\ ,\ dv = e^t dt \\
&= \frac{e^x}{x} + \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^2} dt \quad \text{porque conforme } t \to -\infty\ ,\ \frac{e^t}{t} \text{ tiende a } 0 \\
&= \frac{e^x}{x} + \frac{e^t}{t^2}\bigg|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} -\frac{2e^t}{t^3} dt \quad \text{por partes, con } u = \frac{1}{t^2}\ ,\ dv = e^t dt \\
&= \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^3} dt \\
&= \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2\left(\frac{e^t}{t^3}\bigg|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} -\frac{3e^t}{t^4} dt \right) \quad \text{integramos por partes de nuevo} \\
&= \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^3} + 3 \cdot 2 \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^4} dt
\end{aligned}$$

Y así sucesivamente, de hecho, podemos probar en general que:
$Ei(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{e^x (n-1)!}{x^n} + N! \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{N+1}} dt$

Se puede probar por inducción sobre N. El caso base para $N = 1$ ya lo probamos (de hecho probamos hasta $N = 3$).
Luego, suponemos que se vale el caso para N y buscamos probarlo para $N + 1$.

$$\begin{aligned}
Ei(x) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{e^x (n-1)!}{x^n} +\ N! \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{N+1}} dt \qquad \text{expresión para N} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{e^x (n-1)!}{x^n} +\ N! \left[\frac{e^t}{t^{N+1}}\bigg|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} -(N+1) \frac{e^t}{t^{N+2} dt} \right] \quad \text{por partes, con } u = \frac{1}{t^{N+1}}\ , dv = e^t dt \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{e^x (n-1)!}{x^n} + N! \left[\frac{e^x}{x^{N+1}} + (N+1) \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{N+2}} dt \right] \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{e^x (n-1)!}{x^n} + N! \frac{e^x}{x^{N+1}} + (N+1)N! \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{N+2}} dt \\
&= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{e^x (n-1)!}{x^n} + (N+1)! \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{N+2}} dt
\end{aligned}$$

Y esta es la fórmula que se quería probar para $N + 1$. Por lo que probamos que para todo N se tiene que:

$$Ei(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{e^x(n-1)!}{x^n} + N! \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{N+1}} dt \qquad (2)$$

Por lo que ya tenemos $Ei(x)$ escrito como la suma $\sum_{n=1}^{N} \frac{e^x(n-1)!}{x^n}$ con el residuo $N! \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{N+1}} dt$.

Sin embargo, según el punto 10.7 del Boas, para concluir que $Ei(x)$ efectivamente se puede escribir como una serie asintótica $Ei(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^x(n-1)!}{x^n} = \frac{e^x}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} = \frac{e^x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$ hay que probar que para un N fijo:

$$\left| Ei(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{e^x(n-1)!}{x^n} \right| \cdot x^N \to 0 \qquad \text{conforme } x \to \infty$$

Por tanto, sea N un natural arbitrario y tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\left| Ei(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{e^x(n-1)!}{x^n} \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{e^x(n-1)!}{x^n} + N! \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{N+1}} dt - \sum_{n=1}^{N} \frac{e^x(n-1)!}{x^n} \right| \qquad \text{por } (2) \\
&= \left| N! \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{N+1}} dt \right| \\
&\leq N! \int_{-\infty}^{x} \left| \frac{e^t}{t^{N+1}} \right| dt \\
&\text{Hacemos el cambio de variable } u = -t \ \Rightarrow \ du = -dt \\
&= N! \int_{\infty}^{x} \left| \frac{e^{-u}}{(-u)^{N+1}} \right| (-du) \\
&= N! \left(- \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-u}}{u^{N+1}} du \right) \\
&= N! \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{N+1}} du
\end{aligned}$$

Hay que probar que esto tiende a 0 conforme x tiende a ∞. Como x tiende a infinito, podemos suponer en particular que es positivo.

Como la integral tiene variable u que va de x a ∞, tenemos que

$$0 < x \leq u \ \Rightarrow \ 0 < \frac{1}{u} \leq \frac{1}{x} \ \Rightarrow \ \frac{1}{u^{N+1}} \leq \frac{1}{x^{N+1}}.$$

Por lo que podemos acotar la integral que teníamos antes:

$$
\begin{aligned}
\left| Ei(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{e^x (n-1)!}{x^n} \right| &= N! \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^{N+1}} du \\
&\leq N! \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{x^{N+1}} du \\
&= \frac{N!}{x^{N+1}} \int_x^\infty e^{-u} du \\
&= \frac{N!}{x^{N+1}} \left(-e^{-u}\right)\Big|_x^\infty \\
&= \frac{N!}{x^{N+1}} e^{-x}
\end{aligned}
$$

Pasamos ahora el x^N multiplicando (que es positivo y no afecta la desigualdad):

$$
\left| Ei(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{e^x (n-1)!}{x^n} \right| \cdot x^N \leq \frac{N!}{x} e^{-x}
$$

Finalmente, esta expresión de la derecha tiende a 0 conforme x tiende a infinito (porque tanto $\frac{1}{x}$ como e^{-x} decrecen rápidamente).

Con lo que probamos que $\left| Ei(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{e^x (n-1)!}{x^n} \right| \cdot x^N$ tiende a 0 conforme x tiende a infinito. Probando así el punto (10.7) del Boas y concluimos que $Ei(x)$ se puede expandir asintóticamente como:

$$
Ei(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^x (n-1)!}{x^n} = \frac{e^x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{x^n} \quad , \ x \to \infty
$$

3.- Usando el método de Frobeniuos, encontrar la solución general en todos los casos de los parámetros de la denominada ecuación hipergeométrica en el punto $x = 0$, dada por:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \quad ,\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$$

Comprobamos que las soluciones se escriben en términos de la función hipergeométrica de Gauss, definida como:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{x^k}{k!} \ , \quad |x| < 1$$

Donde $(\lambda)_k$ denota el símbolo de Pochhammer, definido recurrentemente por:

$$(\lambda)_0 = 1, \quad (\lambda)_k = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1) \ , \quad k = 1,2\cdots$$

.

Primero dividimos la ecuación por $x(1-x)$ y nos queda que:

$$y'' + \frac{[\gamma - (\alpha+\beta+1)x]}{x(1-x)}y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y = 0 \quad ,\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$$

Usando la notación típica de ecuaciones diferenciales como $y'' + P(x)y' + Q(x) = 0$, tenemos que $P(x) = \dfrac{[\gamma - (\alpha+\beta+1)x]}{x(1-x)}$, $Q(x) = \dfrac{\alpha\beta}{x(1-x)}$.
Por lo que vemos que P, Q tienen una singularidad en $x = 0$ pero $xP(x), x^2Q(x)$ son regulares en $x = 0$. Por lo que $x = 0$ es un punto singular regular de la EDO.
Por ello, podemos utilizar el método de Frobenius centrado en $x = 0$

Proponemos una solución

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+s}$$
$$\Rightarrow \ y'(x) = \sum_{n\geq 0}(n+s)a_n x^{n+s-1}$$
$$\Rightarrow \ y''(x) = \sum_{n\geq 0}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2}$$

Sustituimos estas expresiones en la ecuación hipergeométrica:

$$x(1-x)\sum_{n\geq 0}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\sum_{n\geq 0}(n+s)a_n x^{n+s-1} - \alpha\beta\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+s} = 0$$
$$\Rightarrow \ \sum_{n\geq 0}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-1} - \sum_{n\geq 0}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} + \gamma\sum_{n\geq 0}(n+s)a_n x^{n+s-1}$$
$$- (1+\alpha+\beta)\sum_{n\geq 0}(n+s)a_n x^{n+s} - \alpha\beta\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+s} = 0$$

Para simplificar, necesitamos cambiar los índices para que coincidan las potencias de x. Haremos que todas tengan como exponente $n+s$. Por lo que las sumas con exponente x^{n+s-1} cambiamos el índice n por $n+1$ (y ahora esas sumas empiezan desde el -1). Entonces nos queda:

$$\sum_{n\geq -1}(n+1+s)(n+s)a_{n+1}x^{n+s} - \sum_{n\geq 0}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} + \gamma\sum_{n\geq -1}(n+1+s)a_{n+1}x^{n+s}$$
$$-(1+\alpha+\beta)\sum_{n\geq 0}(n+s)a_n x^{n+s} - \alpha\beta\sum_{n\geq 0}a_n x^{n+s} = 0$$

Y para las sumas que empiezan desde el -1, sacamos el primer término para hacerlas empezar desde el 0.

$$s(s-1)a_0x^{s-1} + \sum_{n\geq 0}(n+1+s)(n+s)a_{n+1}x^{n+s} - \sum_{n\geq 0}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} +$$
$$+\gamma s a_0 x^{s-1} + \gamma\sum_{n\geq 0}(n+1+s)a_{n+1}x^{n+s} - (1+\alpha+\beta)\sum_{n\geq 0}(n+s)a_n x^{n+s} - \alpha\beta\sum_{n\geq 0}a_n x^{n+s} = 0$$

.

$$\Rightarrow\ a_0(s(s-1)+\gamma s)x^{s-1} + \sum_{n\geq 0}(n+1+s)(n+s)a_{n+1}x^{n+s} - \sum_{n\geq 0}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} +$$
$$+\gamma\sum_{n\geq 0}(n+1+s)a_{n+1}x^{n+s} - (1+\alpha+\beta)\sum_{n\geq 0}(n+s)a_n x^{n+s} - \alpha\beta\sum_{n\geq 0}a_n x^{n+s} = 0$$

Y ahora ya podemos juntar todas las potencias de x e igualar los coeficientes de las potencias a 0 (porque el lado derecho es 0).
El coeficiente de x^{s-1} es $a_0(s(s-1)+\gamma s)$ y al igualar esto a 0 (y considerando que $a_0 \neq 0$, porque es el primer coeficiente de la serie de Frobenius), tenemos la **ecuación indical**:

$$s(s-1)+\gamma s = 0 \ \ \Rightarrow\ s(s-1+\gamma) = 0$$

Por lo que tenemos las soluciones:

$$\boxed{s_1 = 0 \quad , \quad s_2 = 1-\gamma}$$

Ahora, según las sumas que tenemos, el coeficiente de la potencia x^{n+s} para cualquier n es:

$$(n+1+s)(n+s)a_{n+1} - (n+s)(n+s-1)a_n + \gamma(n+1+s)a_{n+1} - (1+\alpha+\beta)(n+s)a_n - \alpha\beta a_n$$

Igualamos este coeficiente a 0 y despejamos a_{n+1} para escribirlo en términos de a_n y obtener la **fórmula de recurrencia:**

$$a_{n+1} = \frac{\alpha\beta + (1+\alpha+\beta)(n+s) + (n+s)(n+s-1)}{\gamma(n+1+s)+(n+1+s)(n+s)}a_n$$

Podemos reescribir esto notando que el numerador puede quedar como
$\alpha\beta + (1+\alpha+\beta)(n+s) + (n+s)(n+s-1) = \alpha\beta + (1+\alpha+\beta+n+s-1)(n+s)$
$= (n+s)(n+s+\alpha) + (n+s)\beta + \alpha\beta = (n+s)(n+s+\alpha) + \beta(n+s+\alpha)$
$= (n+s+\alpha)(n+s+\beta)$
Y el denominador es $\gamma(n+1+s) + (n+1+s)(n+s) = (n+1+s)(n+s+\gamma)$.
Por lo que la **fórmula de recurrencia** queda mejor como:

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{(n+s+\alpha)(n+s+\beta)}{(n+1+s)(n+s+\gamma)} a_n}$$

Ahora buscamos una forma de resolver la recurrencia y expresar el a_n en términos de a_0. Empezamos calculando unos pocos términos usando la fórmula de recurrencia de arriba y el símbolo de Pochhammer para encontrar un patrón:

$$a_1 = \frac{(s+\alpha)(s+\beta)}{(s+1)(s+\gamma)} a_0$$
$$a_2 = \frac{(1+s+\alpha)(1+s+\beta)}{(2+s)(1+s+\gamma)} a_1 = \frac{(1+s+\alpha)(1+s+\beta)}{(2+s)(1+s+\gamma)} \frac{(s+\alpha)(s+\beta)}{(s+1)(s+\gamma)} a_0 = \frac{(s+\alpha)_2(s+\beta)_2}{(s+1)_2(s+\gamma)_2} a_0$$
$$a_3 = \frac{(2+s+\alpha)(2+s+\beta)}{(3+s)(2+s+\gamma)} a_2 = \frac{(2+s+\alpha)(2+s+\beta)}{(3+s)(2+s+\gamma)} \frac{(s+\alpha)_2(s+\beta)_2}{(s+1)_2(s+\gamma)_2} a_0 = \frac{(s+\alpha)_3(s+\beta)_3}{(s+1)_3(s+\gamma)_3} a_0$$

El patrón nos indica que en general se va a tener la expresión de a_n en términos de a_0 como:

$$\boxed{a_n = \frac{(s+\alpha)_n(s+\beta)_n}{(s+1)_n(s+\gamma)_n} a_0} \qquad (1)$$

Demostración: Para demostrar la validez de esta expresión más allá de $n = 3$, podemos proceder por inducción. El caso base para $n = 1$ ya lo probamos (de hecho probamos hasta $n = 3$). Ahora suponemos que la fórmula es válida para a_n y buscamos probarla para a_{n+1}. Usamos la fórmula de recurrencia y la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{(n+s+\alpha)(n+s+\beta)}{(n+1+s)(n+s+\gamma)} a_n = \frac{(n+s+\alpha)(n+s+\beta)}{(n+1+s)(n+s+\gamma)} \left[\frac{(s+\alpha)_n(s+\beta)_n}{(s+1)_n(s+\gamma)_n} a_0 \right] = \\ &= \frac{(s+\alpha)_n(s+\alpha+n)(s+\beta)_n(s+\beta+n)}{(s+1)_n(s+1+n)(s+\gamma)_n(s+\gamma+n)} a_0 = \frac{(s+\alpha)_{n+1}(s+\beta)_{n+1}}{(s+1)_{n+1}(s+\gamma)_{n+1}} \end{aligned}$$

Lo que muestra la fórmula para a_{n+1}
Por tanto, los términos a_n como los expresamos en (1) son válidos.
Luego, la solución $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$ queda como:

$$\boxed{y(x) = a_0 \sum_{n \geq 0} \frac{(s+\alpha)_n(s+\beta)_n}{(s+1)_n(s+\gamma)_n} x^{n+s}} \qquad (2)$$

La solución es válida para $|x| < 1$ (que es la distancia desde 0 hasta la siguiente singularidad de la ecuación diferencial, ubicada en 1).

Soluciones:
Ahora sí revisamos las posibles soluciones según los valores de los parámetros. Para ello, usamos el Teorema de Fuchs como lo vimos en clase para cada uno de los casos posibles de las raíces $s_1 = 0, s_2 = 1 - \gamma$

- **Caso 1) γ no es entero**
  Es este caso, $s_2 = 1 - \gamma$ tampoco es un entero.
  Entonces, tenemos claramente $s_1 - s_2 \notin \mathbb{N}$. Lo cual, según vimos en clase, implica que las dos soluciones son de la forma (2), sustituyendo s por $s_1 = 0$ y por $s_2 = 1 - \gamma$:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(s_1+\alpha)_n(s_1+\beta)_n}{(s_1+1)_n(s_1+\gamma)_n} x^{n+s_1} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n} x^n \qquad \text{porque } (1)_n = n! \\ &= \ F(\alpha,\beta;\gamma;x) \quad , \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(s_2+\alpha)_n(s_2+\beta)_n}{(s_2+1)_n(s_2+\gamma)_n} x^{n+s_2} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n}{(2-\gamma)_n(1)_n} x^{n+1-\gamma} = \sum_{n\geq 0} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n}{(2-\gamma)_n n!} x^{n+1-\gamma} \\ &= x^{1-\gamma} \sum_{n\geq 0} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n}{(2-\gamma)_n n!} x^n \\ &= \ x^{1-\gamma} F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta; 2-\gamma; x) \quad , |x| < 1 \end{aligned}$$

  Por lo que la solución general en este caso es una combinación lineal de estas dos soluciones:

$$\boxed{y(x) = A\ F(\alpha,\beta;\gamma;x) + B\ x^{1-\gamma} F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta; 2-\gamma; x)}$$

- **Caso 2)** $\gamma = 1 \ \Rightarrow \ s_2 = 1 - \gamma = 0$
  En este caso las dos raíces son repetidas $s_1 = s_2 = 0$.
  Por lo que vimos en clase, una primera solución se consigue como la que calculamos antes usando la expresión (2) con $s = 0$, pero ahora también ponemos $\gamma = 1$.

$$y_1(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(1)_n} x^n = \boxed{F(\alpha,\beta;1;x)} \qquad ,|x|<1$$

Para el caso de raíces repetidas, la segunda solución es un poco más complicada, y vimos que en este caso, se consigue de la forma:

$$y_2(x) = x^{s_1+1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + y_1(x)\log x = x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + y_1(x)\log x$$

Necesitamos calcular los coeficientes b_n. Para ello, hay que sustituir $y_2(x)$ en la ecuación diferencial original. Pero antes, calculamos sus derivadas:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + y_1 \log x \\ y_2'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_n x^n + y_1'\log x + \frac{y_1}{x} \\ y_2''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n)b_n x^{n-1} + y_1''\log x + \frac{2}{x}y_1' - \frac{y_1}{x^2} \end{aligned}$$

Sustituimos estas expresiones en la ec. diferencial para encontrar b_n:

$$x(1-x)y'' + [1-(\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \qquad \text{ecuación con } \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \ x(1-x)\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n)b_n x^{n-1} + y_1''\log x + \frac{2}{x}y_1' - \frac{y_1}{x^2}\right] +$$
$$[1-(\alpha+\beta+1)x]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_n x^n + y_1'\log x + \frac{y_1}{x}\right] - \alpha\beta\left[x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + y_1\log x\right] = 0$$

$$\Rightarrow -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nb_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nb_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_n x^n - (\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_n x^{n+1}$$
$$-\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} \qquad + x(1-x)y_1''\log x + [1-(\alpha+\beta+1)x]y_1'\log x - \alpha\beta y_1\log x$$
$$+2(1-x)y_1' - (1-x)\frac{y_1}{x} + \frac{y_1}{x} - (\alpha+\beta+1)y_1 = 0$$

Notamos que todos los términos con $log(x)$ se pueden factorizar como $[x(1-x)y_1'' + [1-(\alpha+\beta+1)x]y_1' - \alpha\beta y_1]\log x$. Pero el término entre corchetes es la ecuación diferencial original, y como y_1 es solución de la ecuación, lo que está entre corchetes vale

0, por lo que todos los términos que incluyen $\log x$ desaparecen de la expresión anterior.

Por otro lado, nos fijamos en los términos que tienen a y_1 (los del último renglón) y vemos cuánto valen. Para ello, usamos la expresión de la solución y_1:
$y_1(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(1)_n} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!^2} x^n$
$\Rightarrow \ y_1'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!^2} x^{n-1}$

Sustituimos esto en los términos que tienen a y_1:

$$\begin{aligned}
&2(1-x)y_1' - (1-x)\frac{y_1}{x} + \frac{y_1}{x} - (\alpha+\beta+1)y_1 \\
&= 2(1-x)y_1' + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \alpha - \beta\right) y_1 \\
&= 2(1-x)y_1' + (-\alpha-\beta)\, y_1 \\
&= 2(1-x)\sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!^2} x^{n-1} + (-\alpha-\beta)\sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!^2} x^n \\
&= 2\sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!^2} x^{n-1} - 2\sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!^2} x^n + (-\alpha-\beta)\sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!^2} x^n
\end{aligned}$$

Por todo esto, la espresión a la que habíamos llegado al meter y_2 en la ecuación diferencial queda como:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nb_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nb_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_n x^n - (\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_n x^{n+1} \\
&-\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!^2} x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!^2} x^n + (-\alpha-\beta)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!^2} x^n = 0
\end{aligned}$$

Luego, hacemos un cambio de índice para que todas las potencias sean x^{n+1}:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nb_n x^{n+1} + \sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)(n+1)b_{n+1}x^{n+1} + \sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)b_{n+1}x^{n+1} \\
&-(\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_n x^{n+1} - \alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} + 2\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n+2}(\beta)_{n+2}(n+2)}{(n+2)!^2} x^{n+1} \\
&-2\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(n+1)}{(n+1)!^2} x^{n+1} + (-\alpha-\beta)\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!^2} x^{n+1} = 0
\end{aligned}$$

Sacamos los primeros sumandos de las sumas que empiezan antes del 0 para hacer que todas empiecen en 0.

$$b_0 + 2(\alpha)_1(\beta)_1 + (-\alpha-\beta)(\alpha)_0(\beta)_0 - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nb_nx^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)b_{n+1}x^{n+1} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)b_{n+1}x^{n+1} - (\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_nx^{n+1} - \alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+2}(\beta)_{n+2}(n+2)}{(n+2)!^2}x^{n+1}$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(n+1)}{(n+1)!^2}x^{n+1} + (-\alpha-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!^2}x^{n+1} = 0$$

Los términos independientes son $b_0 + 2(\alpha)_1(\beta)_1 + (-\alpha-\beta)(\alpha)_0(\beta)_0 = b_0 + 2\alpha\beta + (-\alpha-\beta)$. Esto debe de valer 0 porque son los únicos términos sin potencias de x. Por lo que tenemos que: $b_0 = \alpha+\beta-2\alpha\beta$

Luego, igualamos a 0 todos los coeficientes de x^{n+1} para obtener una fórmula de recurrencia.

$$\begin{aligned}&-(n+1)nb_n + (n+2)(n+1)b_{n+1} + (n+2)b_{n+1} - (\alpha+\beta+1)(n+1)b_n - \alpha\beta b_n\\ &+2\frac{(\alpha)_{n+2}(\beta)_{n+2}(n+2)}{(n+2)!^2} - 2\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(n+1)}{(n+1)!^2} + (-\alpha-\beta)\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!^2} = 0\end{aligned}$$

Despejando nos queda la fórmula de recurrencia:

$$\begin{aligned}b_{n+1} = &\frac{\alpha\beta + (\alpha+\beta+n+1)(n+1)}{(n+2)(n+2)}b_n\\ &-\frac{1}{(n+2)(n+2)}\left(2\frac{(\alpha)_{n+2}(\beta)_{n+2}(n+2)}{(n+2)!^2} - 2\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(n+1)}{(n+1)!^2} - \frac{(\alpha+\beta)(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\frac{(1+\alpha+n)(1+\beta+n)}{(n+2)^2}b_n\\ &-\frac{1}{(n+2)^2}\Bigg(2\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{(n+2)(n+1)!^2} - 2\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(n+1)}{(n+1)!^2}\\ &-\frac{(\alpha+\beta)(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!^2}\Bigg)\\ =&\frac{(1+\alpha+n)(1+\beta+n)}{(n+2)^2}b_n + \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{(n+2)!^2}\\ &\left(-2\frac{1}{n+2} + 2\frac{n+1}{(\alpha+n+1)(\beta+n+1)} + \frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}\right)\end{aligned}$$

.

Simplificamos las últimas dos fracciones entre paréntesis por fracciones parciales:

$$= \frac{(1+\alpha+n)(1+\beta+n)}{(n+2)^2}b_n + \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{(n+2)!^2}\left(-\frac{2}{n+2} + \frac{1}{\alpha+n+1} + \frac{1}{\beta+n+1}\right)$$

Por lo que la fórmula de recurrencia es:

$$b_{n+1} = \frac{(1+\alpha+n)(1+\beta+n)}{(n+2)^2} b_n + \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{(n+2)!^2} \left(-\frac{2}{n+2} + \frac{1}{\alpha+n+1} + \frac{1}{\beta+n+1} \right)$$

Calculamos algunos valores de b_n para encontrar un patrón, empezando desde $b_0 = \alpha+\beta-2\alpha\beta$

$$\begin{aligned}
b_0 &= \alpha+\beta-2\alpha\beta \\
b_1 &= \frac{(1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta-2\alpha\beta)}{2^2} + \frac{(\alpha)_1(\beta)_1(\alpha+1)(\beta+1)}{2!^2} \left(-\frac{2}{2} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \right) \\
&= \frac{(1+\alpha)(1+\beta)(-2\alpha\beta)}{2^2} + \frac{(1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta)}{2^2} + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{2!^2} \left(-\frac{2}{2} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \right) \\
&= \frac{(\alpha)_2(\beta)_2(-2)}{2!^2} + \frac{(\alpha)_2(\beta)_2}{2!^2}\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + \frac{(\alpha)_2(\beta)_2}{2!^2} \left(-\frac{2}{2} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \right) \\
&= \frac{(\alpha)_2(\beta)_2}{2!^2} \left(-2 + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} - 1 + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \right) \\
&= \frac{(\alpha)_2(\beta)_2}{2!^2} \left(-2 - 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{(2+\alpha)(2+\beta)}{3^2} b_1 + \frac{(\alpha)_2(\beta)_2(\alpha+2)(\beta+2)}{3!^2} \left(\frac{-2}{3} + \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta+2} \right) \\
&= \frac{(2+\alpha)(2+\beta)}{3^2}\frac{(\alpha)_2(\beta)_2}{2!^2} \left(-2 - 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} \right) + \frac{(\alpha)_2(\beta)_2(\alpha+2)(\beta+2)}{3!^2} \\
&\quad \left(\frac{-2}{3} + \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta+2} \right) \\
&= \frac{(\alpha)_3(\beta)_3}{3!^2} \left(-2 - 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \right) + \frac{(\alpha)_3(\beta)_3}{3!^2} \left(\frac{-2}{3} + \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta+2} \right) \\
&= \frac{(\alpha)_3(\beta)_3}{3!^2} \left(-2 - 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3 &= \frac{(3+\alpha)(3+\beta)}{4^2} b_2 + \frac{(\alpha)_3(\beta)_3(\alpha+3)(\beta+3)}{4!^2} \left(-\frac{2}{4} + \frac{1}{\alpha+3} + \frac{1}{\beta+3} \right) \\
&= \frac{(3+\alpha)(3+\beta)}{4^2}\frac{(\alpha)_3(\beta)_3}{3!^2} \left(-2 - 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} \right) \\
&\quad + \frac{(\alpha)_3(\beta)_3(\alpha+3)(\beta+3)}{4!^2} \left(-\frac{2}{4} + \frac{1}{\alpha+3} + \frac{1}{\beta+3} \right) \\
&= \frac{(\alpha)_4(\beta)_4}{4!^2} \left(-2 - 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+3} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} + \frac{1}{\beta+3} \right)
\end{aligned}$$

Habiendo calculado estos términos, parece que la regla general es la siguiente:

$$\boxed{b_n = \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!^2} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{2}{1+k} + \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\beta+k} \right)} \tag{3}$$

Para comprobar que esta expresión de b_n es correcta, podemos ver que para empezar coincide con lo calculado en b_0, b_1, b_2, b_3. Y podemos probarlo para cualquier b_n por inducción. El caso base ya lo tenemos (tenemos hasta b_3 incluso). Suponemos que b_n se escribe como en (3) y hay que probar que b_{n+1} se puede escribir así.
Para ello, usamos la regla de recurrencia:

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{(1+\alpha+n)(1+\beta+n)}{(n+2)^2} b_n + \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{(n+2)!^2}\left(-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{\alpha+n+1}+\frac{1}{\beta+n+1}\right) \\
&= \frac{(1+\alpha+n)(1+\beta+n)}{(n+2)^2}\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!^2}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{2}{1+k}+\frac{1}{\alpha+k}+\frac{1}{\beta+k}\right) \\
&\quad + \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{(n+2)!^2}\left(-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{\alpha+n+1}+\frac{1}{\beta+n+1}\right) \quad \text{por hipótesis inductiva} \\
&= \frac{(\alpha)_{n+2}(\beta)_{n+2}}{(n+2)!^2}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{2}{1+k}+\frac{1}{\alpha+k}+\frac{1}{\beta+k}\right)-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{\alpha+n+1}+\frac{1}{\beta+n+1}\right] \\
&= \frac{(\alpha)_{n+2}(\beta)_{n+2}}{(n+2)!^2}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\left(-\frac{2}{1+k}+\frac{1}{\alpha+k}+\frac{1}{\beta+k}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Con lo que se prueba la fórmula para b_{n+1}.
Por tanto, los coeficientes b_n que propusimos en (3) son correctos.
Entonces, como dijimos al principio, la segunda solución es:

$$y_2(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + y_1 \log x$$

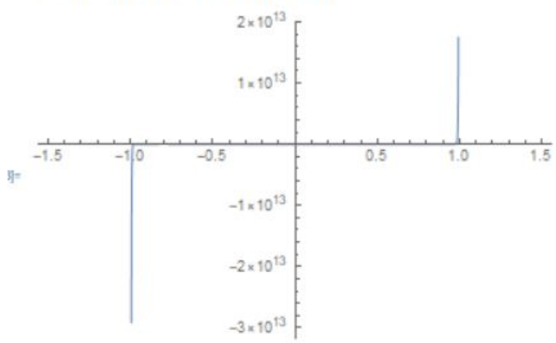
$$\Rightarrow \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!^2}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{2}{1+k}+\frac{1}{\alpha+k}+\frac{1}{\beta+k}\right)\right]x^{n+1} + y_1\log(x) \quad , \quad |x|<1$$

Donde $y_1 = F(\alpha,\beta;1;x)$ es la primer solución.
Juntamos este $y_2(x)$ con la solución $y_1(x)$ que teníamos antes y tomamos una combinación lineal de ambas para formar la solución general. Sea $A, B \in \mathbb{C}$, la solución general es:

$$\boxed{\begin{gathered} y(x) = A\, F(\alpha,\beta;1;x) + \\ B\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!^2}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{2}{1+k}+\frac{1}{\alpha+k}+\frac{1}{\beta+k}\right)\right]x^{n+1} + F(\alpha,\beta;1;x)\log(x)\right]\end{gathered}}$$

Comprobación:
Como la solución $y_2(x)$ fue algo difícil de conseguir, hacemos una pequeña comprobación para algún caso particular, para ver que no hayamos cometido un error.
Para ello, tomamos valores arbitrarios de α y de β y escribimos los primeros términos de la función $y_2(x)$ en Mathematica. Para ver que $y_2(x)$ sea una solución de la ecuación diferencial en $(-1, 1)$, sustituimos esta $y_2(x)$ en la ecuación diferencial y tenemos que fijarnos que al hacer esta sustitución, el resultado valga 0 en el intervalo $(-1, 1)$.

```
(* Asignamos valores arbitrarios a alpha y beta y ponemos gamma = 1*)
α = 1.4 ; β = 4.1; γ = 1;
(*Definimos la y2[x] como encontramos en el ejercicio (Pero con una suma finita) *)
y2[x_] =
  Sum[ Pochhammer[α, n + 1] * Pochhammer[β, n + 1] / (n + 1) !^2 *
     Sum[ -2 / (1 + k) + 1 / (α + k) + 1 / (β + k) , {k, 0, n}] * x^(n + 1) + Hypergeometric2F1[α, β, 1, x] * Log[x] ,
   {n, 0, 500}];

(*Para ver si y2[x] es solución de la ecuación diferencial en [-1,1],
definimos la función sol[x] que consiste en sustituir y2[x] en la ecuación diferencial. Si
 y2[x] es una solución entonces sol[x] debería valer 0 en [-1,1]*)

sol[x_] = x (1 - x) D[y2[x], {x, 2}] + (γ - (α + β + 1) x) * D[y2[x], x] - α * β * y2[x];

(*La graficamos para ver que sol[x] vale 0 en el intervalo [-1,1]*)

Plot[sol[x], {x, -1.5, 1.5}]
```



- **Caso 3) γ es un entero mayor que 1.**

En este caso, las dos raíces son $s_1 = 0$, $s_2 = 1-\gamma$. Como γ es mayor que 1, entonces s_2 es un entero menor que s_1.
Por tanto, tenemos dos raíces separadas por un entero, con $s_1 = 0$ la raíz mayor. Según el teorema de Fuchs, podemos conseguir una primera solución correspondiente a la raíz mayor $s_1 = 0$. Y se consigue con la solución que ya habíamos encontrado en (2) sustituyendo $s = s_1 = 0$:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n} x^n \qquad \text{porque } (1)_n = n! \\ &= \boxed{\; F(\alpha,\beta;\gamma;x) \qquad , |x| < 1 \;} \end{aligned}$$

Luego, según el teorema de Fuchs, la segunda solución se consigue como:

$$y_2(x) = x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + d\, y_1 \log(x) \qquad b_0 \neq 0\ ,\ d \in \mathbb{R}$$

Donde necesitamos encontrar el valor de los b_n y de la d. Para ello, necesitamos sustituir esta y_2 en la ecuación diferencial, pero antes hay que encontrar sus derivadas:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1-\gamma} + dy_1 \log x \\ y_2'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1-\gamma) b_n x^{n-\gamma} + dy_1' \log x + d\frac{y_1}{x} \\ y_2''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1-\gamma)(n-\gamma) b_n x^{n-\gamma-1} + dy_1'' \log x + d\frac{2}{x} y_1' - d\frac{y_1}{x^2} \end{aligned}$$

Y ahora ya sustituimos esto en la ecuación diferencial:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(1-x)\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)(n-\gamma)b_n x^{n-\gamma-1} + dy_1''\log x + d\frac{2}{x}y_1' - d\frac{y_1}{x^2}\right] +$$

$$[\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)b_n x^{n-\gamma} + dy_1'\log x + d\frac{y_1}{x}\right] - \alpha\beta\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1-\gamma} + dy_1 \log x\right] = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)(n-\gamma)b_n x^{n-\gamma+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)(n-\gamma)b_n x^{n-\gamma} + \gamma\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)b_n x^{n-\gamma} \\ &\quad - (\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)b_n x^{n-\gamma+1} - \alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\gamma+1} \\ &\quad + x(1-x)dy_1''\log x + [\gamma-(\alpha+\beta+1)x]dy_1'\log x - \alpha\beta d y_1 \log x \\ &\quad + 2d(1-x)y_1' - d(1-x)\frac{y_1}{x} + [\gamma-(\alpha+\beta+1)x]d\frac{y_1}{x} = 0 \end{aligned}$$

Los términos que tienen el log se pueden factorizar como $[x(1-x)y_1''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y_1''-\alpha\beta y_1]d\log x$. El término que está entre corchetes no es otra cosa que la ecuación diferencial evaluada en y_1, pero como y_1 es solución de la ec dif, estos términos suman 0.

Por otro lado, nos fijamos en los términos que tienen a y_1 (los del último renglón) y vemos cuánto valen. Para ello, usamos la expresión de la solución y_1:

$$y_1(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n$$

$$\Rightarrow\ y_1'(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!(\gamma)_n}x^{n-1}$$

Sustituimos esto en los términos que tienen a y_1:

$$\begin{aligned}
&2d(1-x)y_1'-d(1-x)\frac{y_1}{x}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]d\frac{y_1}{x}\\
&=2d(1-x)\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!(\gamma)_n}x^{n-1}-d(1-x)\frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]d\frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n\\
&=2d\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!(\gamma)_n}x^{n-1}-2d\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!(\gamma)_n}x^n+d(\gamma-1)\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^{n-1}\\
&\qquad -d(\alpha+\beta)\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n
\end{aligned}$$

Entonces, la expresión que teníamos antes al sustituir $y_2(x)$ en la ecuación diferencial queda como:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)(n-\gamma)b_nx^{n-\gamma+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)(n-\gamma)b_nx^{n-\gamma}+\gamma\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)b_nx^{n-\gamma}\\
&-(\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)b_nx^{n-\gamma+1}-\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-\gamma+1}\\
&+2d\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!(\gamma)_n}x^{n-1}-2d\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!(\gamma)_n}x^n+d(\gamma-1)\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^{n-1}\\
&\qquad -d(\alpha+\beta)\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n=0
\end{aligned}$$

Hacemos un cambio de índice para que las primeras sumas tengan $x^{n-\gamma+1}$ y las últimas x^n.

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)(n-\gamma)b_nx^{n-\gamma+1}+\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2-\gamma)(n+1-\gamma)b_{n+1}x^{n-\gamma+1}+\gamma\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2-\gamma)b_{n+1}x^{n-\gamma+1}\\
&-(\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)b_nx^{n-\gamma+1}-\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-\gamma+1}\\
&+2d\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(n+1)}{(n+1)!(\gamma)_{n+1}}x^n-2d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!(\gamma)_n}x^n+d(\gamma-1)\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!(\gamma)_{n+1}}x^n\\
&\qquad -d(\alpha+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n=0
\end{aligned}$$

Luego sacamos los términos correspondientes a $n = -1$ de las sumas para que todas empiecen en $n = 0$:

$$(1-\gamma)(-\gamma)b_0x^{-\gamma} + \gamma(1-\gamma)b_0x^{-\gamma} + d(\gamma-1)\frac{(\alpha)_0(\beta)_0}{0!(\gamma)_0}x^{-1}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)(n-\gamma)b_nx^{n-\gamma+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2-\gamma)(n+1-\gamma)b_{n+1}x^{n-\gamma+1} + \gamma\sum_{n=0}^{\infty}(n+2-\gamma)b_{n+1}x^{n-\gamma+1}$$
$$-(\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)b_nx^{n-\gamma+1} - \alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-\gamma+1}$$
$$+2d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(n+1)}{(n+1)!(\gamma)_{n+1}}x^n - 2d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n n}{n!(\gamma)_n}x^n + d(\gamma-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!(\gamma)_{n+1}}x^n$$
$$-d(\alpha+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n = 0$$

Simplificamos un poco y juntamos algunas sumas:

$$d(\gamma-1)x^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(1+\beta-\gamma+n)(1+\alpha-\gamma+n)b_nx^{n-\gamma+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2-\gamma)(n+1)b_{n+1}x^{n-\gamma+1}$$
$$+d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}(1+\gamma+2n)}{(n+1)!(\gamma)_{n+1}}x^n - d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\alpha+\beta+2n)}{n!(\gamma)_n}x^n = 0 \qquad (4)$$

Tenemos un primer término con exponente x^{-1} y luego tenemos varias sumas que empiezan desde un exponente de $x^{-\gamma+1}$ y finalmente sumas que empiezan desde exponente de x^0

Ahora igualamos a 0 el coeficiente de cada potencia x^m que aparece.

$\cdot$) **Si $-\gamma < \mathbf{m} < -\mathbf{1}$:**
Como $m < -1$, entonces la potencia x^m no aparece en las sumas del último renglón de (4) y tampoco en el término fuera de las sumas. Y sólo aparece en las primeras sumas. En estas primeras sumas, la potencia es $x^{n-\gamma+1}$, y su coeficiente es:

$$-(1+\beta-\gamma+n)(1+\alpha-\gamma+n)b_n + (n+2-\gamma)(n+1)b_{n+1} = 0$$

Y por tanto, se tiene la fórmula de recurrencia:

$$b_{n+1} = \frac{(1+\alpha-\gamma+n)(1+\beta-\gamma+n)}{(n-\gamma+2)(n+1)}b_n$$

Con esto podemos calcular b_0, b_1 y así hasta $b_{\gamma-2}$. Paramos aquí porque para ya calcular $b_{\gamma-1}$ hay que usar en la expresión (4) la potencia x^0, pero entonces ya hay que tomar en cuenta las últimas sumas de (4).
Esta recurrencia se parece mucho a la que habíamos resuelto en la ecuación (1). Teníamos una fórmula de la forma $a_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)}a_n$ y la solución era que $a_n = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(d)_n}a_0$. Aquí tenemos esa misma recurrencia, por lo que podemos concluir que:

$$\boxed{b_n = \frac{(1+\alpha-\gamma)_n(1+\beta-\gamma)_n}{(-\gamma+2)_n(1)_n}b_0 \qquad 0 < n \leq \gamma-2} \qquad (5)$$

Con lo que ya podemos calcular los primeros $\gamma - 2$ coeficientes b_n a partir de b_0. Donde b_0 puede tomar cualquier valor, por lo que tomaremos $\underline{b_0 = 1}$.

·) **Si** $m = -1$
El exponente de x^{-1} aparece sólo en las primeras sumas de (4) y también en el término fuera de las sumas. En las sumas se presenta cuando $x^{n-\gamma+1}$ es x^{-1} por lo que $n = \gamma - 2$. Al sustituir esto en estas sumas, nos queda que el coeficiente de x^{-1} es:
$-(1+\beta-\gamma+(\gamma-2))(1+\alpha-\gamma+(\gamma-2))b_{\gamma-2} = -(\beta-1)(\alpha-1)b_{\gamma-2}$
Si luego le sumamos el término libre, tenemos que el coeficiente de x^{-1} es:
$d(\gamma-1) - (\beta-1)(\alpha-1)b_{\gamma-2}$
Como este coeficiente tiene que ser 0, con un despeje tenemos que:

$$d = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\gamma-1} b_{\gamma-2}$$

Donde el $b_{\gamma-2}$ se puede calcular con (5), por lo que tenemos que:

$$\boxed{d = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\gamma-1} \frac{(1+\alpha-\gamma)_{\gamma-2}(1+\beta-\gamma)_{\gamma-2}}{(-\gamma+2)_{\gamma-2}(1)_{\gamma-2}}}$$

Con lo cual ya tenemos el valor de d.

·) **Si** $m = 0$:
Ahora igualamos a 0 el coeficiente de x^0 en (4). Dicho coeficiente aparece en las sumas con exponente $x^{n-\gamma+1}$ cuando $n = \gamma - 1$. Y finalmente, aparece en las sumas con exponente x^n cuando $n = 0$.
Entonces, viendo la expresión (4), el coeficiente de x^0 es:

$$\beta\alpha b_{\gamma-1} + \gamma b_\gamma + d\frac{\alpha\beta(1+\gamma)}{\gamma} - d(\alpha+\beta)$$

Este coeficiente tiene que valer 0.
Para ello, tenemos muchas opciones para $b_{\gamma-1}$ y para b_γ. Para simplificar, escogeremos que $\underline{b_{\gamma-1} = 0}$ y por tanto, igualando la expresión de arriba a 0 y despejando tenemos que:

$$\boxed{b_\gamma = \frac{d(\alpha+\beta)}{\gamma} - \frac{d(\alpha\beta(1+\gamma)}{\gamma^2}}$$

·) **Si** $m > 0$
Si $m > 0$, entonces la potencia x^m aparece en todas las sumas de la expresión (4). En las sumas con exponente $x^{n-\gamma+1}$ aparece cuando $n = m + \gamma - 1$ y en las sumas con exponente x^n aparece cuando $n = m$.
Si sustituimos esto en las sumas nos queda que el coeficiente de x^m es:

$$\begin{aligned}
&-(1+\beta-\gamma+(m+\gamma-1))(1+\alpha-\gamma+(m+\gamma-1))b_{m+\gamma-1} + ((m+\gamma-1)+2-\gamma)((m+\gamma-1)+1)b_{m+\gamma} + \\
&\qquad + d\frac{(\alpha)_{m+1}(\beta)_{m+1}(1+\gamma+2m)}{(m+1)!(\gamma)_{m+1}} - d\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\alpha+\beta+2m)}{m!(\gamma)_m} \\
&= -(\beta+m)(\alpha+m)b_{m+\gamma-1} + (m+1)(m+\gamma)b_{m+\gamma} + d\frac{(\alpha)_{m+1}(\beta)_{m+1}(1+\gamma+2m)}{(m+1)!(\gamma)_{m+1}} - d\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\alpha+\beta+2m)}{m!(\gamma)_m}
\end{aligned}$$

Este coeficiente tiene que valer 0, por lo que lo igualamos a 0 y al hacer un despeje nos da una **fórmula de recurrencia**:

$$b_{m+\gamma} = \frac{(\beta+m)(\alpha+m)}{(m+1)(m+\gamma)} b_{m+\gamma-1} + \frac{1}{(m+1)(m+\gamma)} \left[-d\frac{(\alpha)_{m+1}(\beta)_{m+1}(1+\gamma+2m)}{(m+1)!(\gamma)_{m+1}} + d\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\alpha+\beta+2m)}{m!(\gamma)_m} \right]$$

Esta es una fórmula de recurrencia más complicada y no la resolveré. Sin embargo, lo importante es que empezando desde el valor de b_γ que ya habíamos calculado (y que corresponde a $m = 0$), podemos calcular todos los valores de $b_{m+\gamma}$ siguientes.

Con lo que ya tenemos todos los coeficientes b_n
Por tanto, ya tenemos la solución $y_2(x)$:

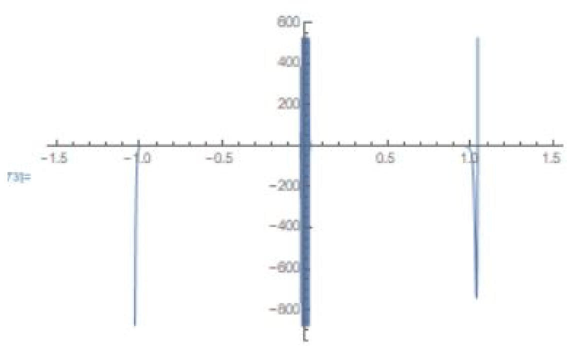
$$\boxed{y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1-\gamma} + dy_1 \log(x) \qquad , |x| < 1}$$

Donde $y_1(x) = F(\alpha, \beta; \gamma; x)$
$b_0 = 1$
$d = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\gamma-1} \frac{(1+\alpha-\gamma)_{\gamma-2}(1+\beta-\gamma)_{\gamma-2}}{(-\gamma+2)_{\gamma-2}(1)_{\gamma-2}}$
$b_n = \frac{(1+\alpha-\gamma)_n(1+\beta-\gamma)_n}{(-\gamma+2)_n(1)_n} \quad$ para $0 < n \leq \gamma - 2$
$b_{\gamma-1} = 0$
$b_\gamma = \frac{d(\alpha+\beta)}{\gamma} - \frac{d\alpha\beta(1+\gamma)}{\gamma^2}$
$b_{m+\gamma} = \frac{(\beta+m)(\alpha+m)}{(m+1)(m+\gamma)} b_{m+\gamma-1} + \frac{1}{(m+1)(m+\gamma)} \left[-d\frac{(\alpha)_{m+1}(\beta)_{m+1}(1+\gamma+2m)}{(m+1)!(\gamma)_{m+1}} + d\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\alpha+\beta+2m)}{m!(\gamma)_m} \right]$
para $m \geq 1$

Y la solución general es una combinación lineal de $y_1(x) = F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ y ésta $y_2(x)$.

Comprobación:
Como la solución $y_2(x)$ fue difícil de conseguir, hacemos una pequeña comprobación para algún caso particular, para ver que no hayamos cometido un error.
Para ello, tomamos valores arbitrarios de α y de β y escribimos los primeros términos de la función $y_2(x)$ en Mathematica. Para ver que $y_2(x)$ sea una solución de la ecuación diferencial en $(-1, 1)$, sustituimos esta $y_2(x)$ en la ecuación diferencial y tenemos que fijarnos que al hacer esta sustitución, el resultado valga 0 en el intervalo $(-1, 1)$.

```
(* Asignamos valores arbitrarios a alpha y beta y asignamos un entero positivo a gamma *)
α = 0.5; β = 1.1; γ = 10;
(*Definimos los coeficientes b[n] hasta como encontramos en el ejercicio hasta n =200*)
b[0] = 1;
d = (α - 1) (β - 1) / (γ - 1) * (Pochhammer[1 + α - γ, γ - 2] * Pochhammer[1 + β - γ, γ - 2] / (Pochhammer[-γ + 2, γ - 2] * (γ - 2) !));

For[n = 1, n ≤ γ - 2, n++, b[n] = (Pochhammer[1 + α - γ, n] * Pochhammer[1 + β - γ, n]) / ((Pochhammer[-γ + 2, n]) * n!)];
b[γ - 1] = 0;
b[γ] = d (α + β) / γ - d * α * β * (1 + γ) / γ^2;

For[m = 1, m + γ ≤ 200 , m++,
  b[m + γ] = (β + m) (α + m) / ((m + 1) (m + γ)) * b[m + γ - 1] +
    1 / ((m + 1) (m + γ)) * ((-d * Pochhammer[α, m + 1] * Pochhammer[β, m + 1] * (1 + γ + 2 m)) / ((m + 1) ! * Pochhammer[γ, m + 1]) +
      (d * Pochhammer[α, m] * Pochhammer[β, m] * (α + β + 2 m)) / (m ! * Pochhammer[β, m]))] ;

(*Ahora escribimos la funcion y2[x] como encontramos usando los coeficientes b[n]*)
y2[x_] = Sum[b[n] * x^(n + 1 - γ), {n, 0, 200}] + d * Hypergeometric2F1[α, β, γ, x] * Log[x];

(*Para ver si y2[x] es solución de la ecuación diferencial en [-1,1],
definimos la función sol[x] que consiste en sustituir y2[x] en la ecuación diferencial. Si y2[x] es una solución entonces
 sol[x] debería valer 0 en [-1,1]
 La graficamos para comprobar esto*)
sol[x_] = x (1 - x) D[y2[x], {x, 2}] + (γ - (α + β + 1) x) * D[y2[x], x] - α * β * y2[x];
Plot[sol[x], {x, -1.5, 1.5}]
(*Vemos que efectivamente vale 0 en [-1,1], aunque tiene una singularidad en el 0 por el log*)
```



- **Caso 4) γ es un entero menor que 1**

En este caso, las dos raíces son $s_1 = 0$, $s_2 = 1-\gamma$. Como γ es menor que 1, entonces $s_2 = 1-\gamma$ es un entero positivo y por tanto, mayor a s_1.
Entonces, tenemos dos raíces separadas por un entero, con $s_2 = 1-\gamma$ la raíz mayor. Según el teorema de Fuchs, podemos conseguir una primera solución correspondiente a esta raíz mayor $s_2 = 1-\gamma$. Y se consigue al sustituir $s = s_2 = 1-\gamma$ en la solución (2) que teníamos antes :

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s_2+\alpha)_n (s_2+\beta)_n}{(s_2+1)_n (s_2+\gamma)_n} x^{n+s_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n (1-\gamma+\beta)_n}{(2-\gamma)_n (1)_n} x^{n+1-\gamma} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n (1-\gamma+\beta)_n}{(2-\gamma)_n n!} x^{n+1-\gamma} \\
&= x^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n (1-\gamma+\beta)_n}{(2-\gamma)_n n!} x^{n} \\
&= \underline{\ x^{1-\gamma} F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta; 2-\gamma; x)\ }
\end{aligned}$$

Luego, según el teorema de Fuchs, la segunda solución se consigue con la otra raíz s como:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + d y_1 \log x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + d y_1 \log x
\end{aligned}$$

Donde necesitamos encontrar los b_n y la d. Para ello, necesitamos sustituir esta $y_2(x)$ en la ec. diferencial, pero antes hay que encontrar sus derivadas:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + d y_1 \log x \\
y_2'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} + d y_1' \log x + d\frac{y_1}{x} \\
y_2''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} + d y_1'' \log x + d\frac{2}{x} y_1' - d\frac{y_1}{x^2}
\end{aligned}$$

Y ahora ya sustituimos esto en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
&x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \\
&\Rightarrow \quad x(1-x)\left[\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} + d y_1'' \log x + d\frac{2}{x} y_1' - d\frac{y_1}{x^2}\right] + \\
&[\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\left[\sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} + d y_1' \log x + d\frac{y_1}{x}\right] - \alpha\beta\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + d y_1 \log x\right] = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} nb_n x^{n-1} - (\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty} nb_n x^n - \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$
$$+ x(1-x)dy_1'' \log x + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]dy_1' \log x - \alpha\beta d y_1 \log x$$
$$+ 2d(1-x)y_1' - d(1-x)y_1/x + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]d\frac{y_1}{x} = 0$$

Si factorizamos todos los términos que tienen $\log x$, tenemos
$[x(1-x)y_1'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y_1'' - \alpha\beta y_1]d \log x$ El término entre corchetes es la ecuación diferencial en y_1. Pero como y_1 es una solución, el término entre corchetes es 0.

Ahora nos fijamos en los términos que tienen a y_1 (los del último renglón). Para ello, usamos la expresión de y_1:
$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n}{(2-\gamma)_n n!} x^{n+1-\gamma}$$
$$\Rightarrow \quad y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n(n+1-\gamma)}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma}$$

Luego, podemos sustituir esto en los términos que tienen y_1:

$$2d(1-x)y_1' - d(1-x)y_1/x + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]d\frac{y_1}{x}$$
$$= 2d(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n(n+1-\gamma)}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma}$$
$$- d(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma} + d[\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma}$$

.

$$= -2d\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n(n+1-\gamma)}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma+1} - d(\alpha+\beta)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma+1}$$
$$+ 2d\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n(n+1-\gamma)}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma} + d(\gamma-1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma}$$

.

$$= -d\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n(2n+2-2\gamma+\alpha+\beta)}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma+1}$$
$$+ d\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n(2n+1-\gamma)}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma}$$

Entonces, al quitar los términos con log y reemplazar los términos con y_1 por lo que acabamos de calcular, la expesión que teníamos al reemplazar y_2 en la ecuación diferencial queda como:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} nb_n x^{n-1} - (\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty} nb_n x^n - \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$
$$- d\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n(2n+2-2\gamma+\alpha+\beta)}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma+1} + d\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n(2n+1-\gamma)}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma}$$

Luego, hacemos un cambio de índice para que los exponentes de las primeras sumas empiecen en x^n y las últimas empiecen en $x^{n-\gamma+1}$:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=-1}^{\infty} n(n+1)b_{n+1}x^n + \gamma \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)b_{n+1}x^n - (\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty} nb_n x^n - \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$
$$- d\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n(2n+2-2\gamma+\alpha+\beta)}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma+1}$$
$$+ d\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_{n+1}(1-\gamma+\beta)_{n+1}(2n+3-\gamma)}{(2-\gamma)_{n+1}(n+1)!} x^{n-\gamma+1} = 0$$

Ahora, de las sumas que empiezan en $n=-1$ sacamos el primer término para que todas empiecen desde $n=0$:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)b_{n+1}x^n + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1}x^n - (\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty} nb_n x^n - \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$
$$+ d(1-\gamma)x^{-\gamma} - d\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n(2n+2-2\gamma+\alpha+\beta)}{(2-\gamma)_n n!} x^{n-\gamma+1}$$
$$+ d\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_{n+1}(1-\gamma+\beta)_{n+1}(2n+3-\gamma)}{(2-\gamma)_{n+1}(n+1)!} x^{n-\gamma+1} = 0 \qquad (6)$$

Por lo que tenemos primero unas sumas que empiezan desde x^0, luego un término con exponente $x^{-\gamma}$ y finalmente dos sumas que empiezan desde $x^{-\gamma+1}$ (recordar que $-\gamma$ es un entero mayor que 0).

Igualamos el Coeficiente de cada x^m a 0.

·) **Si $m = 0$:**
Vemos qué términos de (6) tienen exponente x^0. Notamos que las últimas sumas empiezan desde $x^{-\gamma+1}$ que es un exponente mayor que 0, por lo que ningún término de estas sumas tiene exponente 0.
Luego, los únicos términos con x^0 se consiguen en las primeras sumas al sustituir $n=0$. Por lo que al hacer esto, el coeficiente de x^0 es:

$$\gamma b_1 - \alpha\beta b_0$$

Este coeficiente tiene que valer 0 por lo que podemos elegir un valor de b_0 cualquiera y a partir de eso, calcular b_1.
Elegimos $\underline{b_0 = 1}$, igualamos el coeficiente $\gamma b_1 - \alpha\beta b_0$ a 0 y podemos despejar b_1:

$$b_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma} b_0$$

·) **Si** $0 \le m \le -\gamma - 1$:
Buscamos el coeficiente de x^m de la expresión (6). Este coeficiente no aparece en las últimas sumas de (6), porque éstas empiezan en $x^{-\gamma+1}$ y solamente aparece en las primeras sumas al poner $n = m$. Hacemos esto y entonces el coeficiente de x^m es:

$$-m(m-1)b_m + m(m+1)b_{m+1} + \gamma(m+1)b_{m+1} - (\alpha+\beta+1)mb_m - \alpha\beta$$

Este coeficiente tiene que valer 0, así que igualamos esta expresión a 0 y nos queda la relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} b_{m+1} &= \frac{\alpha\beta + (\alpha+\beta+1)m + m(m-1)}{m(m+1)+\gamma(m+1)} b_m \\ \Rightarrow\ b_{m+1} &= \frac{(\alpha+m)(\beta+m)}{(m+1)(m+\gamma)} b_m \quad 0 \le m \le -\gamma-1 \end{aligned}$$

Esto nos da una fórmula de recurrencia para los primeros coeficientes b_n desde 0 hasta $-\gamma$ (a partir de este coeficiente ya es necesario usar los términos de las últimas sumas de (6)). La fórmula de recurrencia es fácil de resolver, pues ya hemos resuelto fórmulas de recurrencia de la forma $a_{n+1} = \dfrac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)} a_n$ y la solución era $a_n = \dfrac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(d)_n} a_0$. Por lo que la solución de la fórmula de recurrencia que tenemos es (usando que $b_0 = 1$):

$$\boxed{b_m = \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(1)_m(\gamma)_m}} \qquad 1 \le m \le -\gamma$$

·) **Si** $m = -\gamma$

Vemos qué términos de (6) tienen la potencia $x^{-\gamma}$. Las primeras sumas de (6) tienen dicha potencia $x^{-\gamma}$ cuando $n = -\gamma$, el término libre $d(1-\gamma)x^{-\gamma}$ también tiene exponente $-\gamma$. Las sumas que siguen empiezan desde $x^{-\gamma+1}$, por lo que no incluyen este exponente.

Por tanto, el coeficiente de $x^{-\gamma}$ se consigue al poner $n = -\gamma$ en las primeras sumas e incluir el término $d(1-\gamma)$. Y dicho coeficiente es:

$$\gamma(-\gamma-1)b_{-\gamma} - \gamma(-\gamma+1)b_{-\gamma+1} + \gamma(-\gamma+1)b_{-\gamma+1} + (\alpha+\beta+1)\gamma b_{-\gamma} - \alpha\beta b_{-\gamma} + d(1-\gamma) = 0$$

De esta expresión, ya conocemos $b_{-\gamma}$ por el paso anterior. Nos falta conocer $b_{-\gamma+1}$ y d, pero tenemos esta única restricción. Por tanto, tenemos la libertad de escoger que $\underline{b_{-\gamma+1} = 0}$ y ahora sí ver cuánto vale d.

Con esta condición, despejamos d de la expresión de arriba y nos queda:

$$d = \frac{\alpha\beta - \gamma(\alpha+\beta+1) + \gamma(1+\gamma)}{1-\gamma} b_{-\gamma}$$

Usando la expresión de $b_{-\gamma}$ del paso anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\alpha\beta - \gamma(\alpha+\beta+1) + \gamma(1+\gamma)}{1-\gamma} \frac{(\alpha)_{-\gamma}(\beta)_{-\gamma}}{(1)_{-\gamma}(\gamma)_{-\gamma}} \\ \Rightarrow &\ \boxed{d = \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{1-\gamma} \frac{(\alpha)_{-\gamma}(\beta)_{-\gamma}}{(1)_{-\gamma}(\gamma)_{-\gamma}}} \end{aligned}$$

·) **Si** $m = -\gamma+1$

En este caso, todas las sumas de la expresión (6) tienen en algún momento la potencia $x^{-\gamma+1}$. En las primeras sumas se consigue al sustituir $n = -\gamma+1$. En las últimas sumas se consigue al sustituir $n = 0$. Haciendo esto, el coeficiente de $x^{-\gamma+1}$ es:

$$\begin{aligned} &-(-\gamma+1)(-\gamma)b_{-\gamma+1} + (-\gamma+1)(-\gamma+2)b_{-\gamma+2} + \gamma(-\gamma+2)b_{-\gamma+2} - (\alpha+\beta+1)(-\gamma+1)b_{-\gamma+1} - \alpha\beta b_{-\gamma+1} \\ &-d(2-2\gamma+\alpha+\beta) - d\frac{(1-\gamma+\alpha)(1-\gamma+\beta)}{(2-\gamma)}(3-\gamma) = 0 \end{aligned}$$

Usamos ahora que $b_{-\gamma+1} = 0$ y despejamos para obtener:

$$b_{-\gamma+2}=\frac{1}{-\gamma+2}\left[d(2-2\gamma+\alpha+\beta)+d\frac{(1-\gamma+\alpha)(1-\gamma+\beta)}{2-\gamma}(3-\gamma)\right]$$

Donde d está dado por la expresión encontrada antes.

.

·) **Si** $m\geq-\gamma+2$

O bien, podemos escribir m como $m=k-\gamma+2$ donde $k=0,1,2,\cdots$.

Buscamos el coeficiente de $x^{k-\gamma+2}$ en (6). Esta potencia se consigue en las primeras sumas de (6) al sustituir $n=k-\gamma+2$ y se consigue en las últimas sumas al sustituir $n=k+1$.

Haciendo esto, se tiene que el coeficiente de $x^{k-\gamma+2}$, que es:

$$\begin{aligned}&-(k-\gamma+2)(k-\gamma+1)b_{k-\gamma+2}+(k-\gamma+2)(k-\gamma+3)b_{k-\gamma+3}+\gamma(k-\gamma+3)b_{k-\gamma+3}\\&\quad-(\alpha+\beta+1)(k-\gamma+2)b_{k-\gamma+2}-\alpha\beta b_{k-\gamma+2}-d\frac{(1-\gamma+\alpha)_{k+1}(1-\gamma+\beta)_{k+1}(2(k+1)+2-2\gamma+\alpha+\beta)}{(2-\gamma)_{k+1}(k+1)!}\\&+d\frac{(1-\gamma+\alpha)_{k+2}(1-\gamma+\beta)_{k+2}(2(k+1)+3-\gamma)}{(2-\gamma)_{k+2}(k+2)!}=0\end{aligned}$$

Al despejar esto se puede encontrar una fórmula de recurrencia:

$$\begin{aligned}b_{k-\gamma+3}=\frac{1}{(k+2)(k-\gamma+3)}\Bigg[&\left[(k-\gamma+2)(k-\gamma+1)+(\alpha+\beta+1)(k-\gamma+2)+\alpha\beta\right]b_{k-\gamma+2}\\&+d\frac{(1-\gamma+\alpha)_{k+1}(1-\gamma+\beta)_{k+1}(2(k+1)+2-2\gamma+\alpha+\beta)}{(2-\gamma)_{k+1}(k+1)!}\\&-d\frac{(1-\gamma+\alpha)_{k+2}(1-\gamma+\beta)_{k+2}(2(k+1)+3-\gamma)}{(2-\gamma)_{k+2}(k+2)!}\Bigg]\qquad,k\geq0\end{aligned}$$

Con esta fórmula de recurrencia algo complicada se puede calcular $b_{k-\gamma+3}$ para $k\geq0$ a partir de conocer $b_{-\gamma+2}$ (que ya conocemos)

Por lo que ya tenemos todos los coeficientes b_n y podemos decir que la solución $y_2(x)$ se consigue como:

$$\boxed{y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n+dy_1\log x}$$

Donde $y_1(x)=x^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha,1-\gamma+\beta;2-\gamma;x)$

$d=\dfrac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{1-\gamma}\dfrac{(\alpha)_{-\gamma}(\beta)_{-\gamma}}{(1)_{-\gamma}(\gamma)_{-\gamma}}$

$b_0=1$

$b_m=\dfrac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(1)_m(\gamma)_m}\qquad,1\leq m\leq-\gamma$

$b_{-\gamma+1}=0$

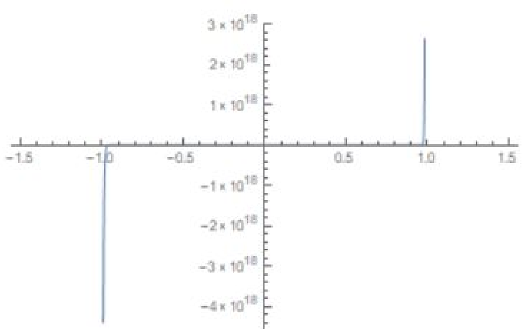
$b_{-\gamma+2}=\dfrac{1}{-\gamma+2}\left[d(2-2\gamma+\alpha+\beta)+d\dfrac{(1-\gamma+\alpha)(1-\gamma+\beta)}{2-\gamma}(3-\gamma)\right]$

$$\begin{aligned}b_{k-\gamma+3}=\frac{1}{(k+2)(k-\gamma+3)}\Bigg[&\left[(k-\gamma+2)(k-\gamma+1)+(\alpha+\beta+1)(k-\gamma+2)+\alpha\beta\right]b_{k-\gamma+2}\\&+d\frac{(1-\gamma+\alpha)_{k+1}(1-\gamma+\beta)_{k+1}(2(k+1)+2-2\gamma+\alpha+\beta)}{(2-\gamma)_{k+1}(k+1)!}\\&-d\frac{(1-\gamma+\alpha)_{k+2}(1-\gamma+\beta)_{k+2}(2(k+1)+3-\gamma)}{(2-\gamma)_{k+2}(k+2)!}\Bigg]\qquad,k\geq0\end{aligned}$$

Y la solución general es una combinación lineal de $y_1(x)=x^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha,1-\gamma+\beta;2-\gamma;x)$ y ésta $y_2(x)$

Comprobación:
Como la solución $y_2(x)$ fue difícil de conseguir, hacemos una pequeña comprobación para algún caso particular, para ver que no hayamos cometido un error.
Para ello, tomamos valores arbitrarios de α y de β y escribimos los primeros términos de la función $y_2(x)$ en Mathematica. Para ver que $y_2(x)$ sea una solución de la ecuación diferencial en $(-1,1)$, sustituimos esta $y_2(x)$ en la ecuación diferencial y tenemos que fijarnos que al hacer esta sustitución, el resultado valga 0 en el intervalo $(-1,1)$.

```
(* Asignamos valores arbitrarios a alpha y beta y asignamos un entero menor que 0 a gamma *)
α = 0.5; β = 1.1; γ = -8;
(*Definimos los coeficientes b[n] hasta 200 como encontramos en el ejercicio hasta n =200*)
b[0] = 1;
d =  (α - γ) (β - γ) / (1 - γ) * Pochhammer[α, -γ] * Pochhammer[β, -γ] / (Pochhammer[1, -γ] * Pochhammer[γ, -γ]);

For[m = 1, m ≤ -γ, m++, b[m] = Pochhammer[α, m] * Pochhammer[β, m] / (Pochhammer[1, m] * Pochhammer[γ, m])];

b[-γ + 1] = 0;
b[-γ + 2] = 1/ (-γ + 2) * (d * (2 - 2γ + α + β) + d * (1 - γ + α) (1 - γ + β) / (2 - γ) (3 - γ));

For[k = 0, k - γ + 3 ≤ 200, k++,
  b[k - γ + 3] =
   1/ ((k + 2) (k - γ + 3)) *
    (((k - γ + 2) (k - γ + 1) + (α + β + 1) (k - γ + 2) + α * β) * b[k - γ + 2] +
      d * (Pochhammer[1 - γ + α, k + 1] Pochhammer[1 - γ + β, k + 1] * (2 (k + 1) + 2 - 2γ + α + β)) / (Pochhammer[2 - γ, k + 1] * (k + 1) !) -
      d * (Pochhammer[1 - γ + α, k + 2] * Pochhammer[1 - γ + β, k + 2] * (2 (k + 1) + 3 - γ)) / (Pochhammer[2 - γ, k + 2] * (k + 2) !))];

(*Ahora escribimos la funcion y2[x] como encontramos usando los coeficientes b[n]*)
y2[x_] = Sum[b[n] * x^(n + 1 - γ), {n, 0, 200}] + d * x^(1 - γ) * Hypergeometric2F1[1 - γ + α, 1 - γ + β, 2 - γ, x] * Log[x];

(*Para ver si y2[x] es solución de la ecuación diferencial en [-1,1],
definimos la función sol[x] que consiste en sustituir y2[x] en la ecuación diferencial. Si y2[x] es una solución entonces
 sol[x] debería valer 0 en [-1,1]
 La graficamos para comprobar esto*)
sol[x_] = x (1 - x) D[y2[x], {x, 2}] + (γ - (α + β + 1) x) * D[y2[x], x] - α * β * y2[x];
Plot[sol[x], {x, -1.5, 1.5}]
(*Vemos que efectivamente vale 0 en [-1,1]*)
```



4.- Sea y solución de la ecuación de Legendre $(1-x^2)y''-2xy'+\nu(\nu+1)y=0$, $\nu\in\mathbb{R}$
a) Hacer el cambio de variable $t=\frac{1}{2}(1-x)$ en la ecuación diferencial y expresarla en términos de la ecuación hipergeométrica. Obtener una solución escrita en términos de la función hipergeométrica de Gauss. A esta solución, que se denota $P_\nu(x)$, se le denomina función de legendre de grado ν de primera especie.

Tenemos que hacer el cambio de variable $t=\frac{1}{2}(1-x)$, o lo que es lo mismo $x=1-2t$. Para ello, vemos cómo cambian las derivadas de y al hacer este cambio:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}(-1/2)=-\frac{1}{2}\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Con estas expresiones, ya podemos escribir la ecuación de Legendre con el cambio de variable:

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\nu(\nu+1)y=0\\
&\Rightarrow\ (1-(1-2t)^2)\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dx^2}-2[1-2t]\frac{-1}{2}\frac{dy}{dt}+\nu(\nu+1)y=0\\
&\Rightarrow\ (-4t^2+4t)\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dx^2}+[1-2t]\frac{dy}{dt}+\nu(\nu+1)y=0\\
&\Rightarrow\ (-t^2+t)y''+(1-2t)y'+\nu(\nu+1)y=0\\
&\Rightarrow\ t(1-t)y''+(1-2t)y'+\nu(\nu+1)y=0
\end{aligned}$$

Donde ahora y' indica derivada respecto a t.
Queremos ver esta ecuación como un caso en particular de la ecuación hipergeométrica:
$t(1-t)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0$

Comparando con la ecuación de Legendre que obtuvimos con el cambio de variable, se puede ver que:

$$\gamma=1$$
$$\alpha+\beta+1=2$$
$$\alpha\beta=-\nu(\nu+1)$$

Por la tercera ecuación, tenemos que $\alpha=\dfrac{-\nu(\nu+1)}{\beta}$. Que al sustituir en la segunda ecuación, nos queda que $\dfrac{-\nu(\nu+1)}{\beta}+\beta=1$. Entonces $-\nu(\nu+1)+\beta^2=\beta\ \Rightarrow\ \beta^2-\beta-\nu(\nu+1)=0$.
Se ve fácilmente que una posible solución es $\beta=-\nu$. Luego, se tiene que $\alpha=\dfrac{-\nu(\nu+1)}{\beta}=\dfrac{-\nu(\nu+1)}{-\nu}=\nu+1$.
Por tanto, tenemos que:

$$\gamma=1$$
$$\alpha=\nu+1$$
$$\beta=-\nu$$

Son posibles valores de α, β, γ.

Luego, como nos encontramos en el caso de $\gamma = 1$, vimos en el ejercicio pasado, que una posible solución a la ecuación hipergeométrica es:

$$P_\nu(t) = F(\alpha, \beta; 1; t) = F[\nu+1, -\nu; 1; t]$$

Finalmente, regresamos a la expresión respecto a x y ya tenemos una solución:

$$\boxed{P_\nu(x) = F[\nu+1, -\nu; 1; \tfrac{1}{2}(1-x)]}$$

Para que esta solución converja, por lo que vimos en el ejercicio 3, necesitamos que $\left|\frac{1}{2}(1-x)\right| < 1 \;\Rightarrow\; |x-1| < 2$.

b) Hacer el cambio de variable $t = x^{-2}$ y $y = x^{-\nu-1}v$ en la ecuación diferencial de Legendre y expresar la ecuación diferencial para v en términos de la ecuación hipergeométrica. Obtener una solución escrita en términos de la función hipergeométrica de Gauss. A esta solución, que se denota por $Q_v(x)$, se le denomina función de Legendre de grado ν de segunda especie.

Hacemos el cambio de variable. Tenemos que $t = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad x = t^{-1/2}$. Y tenemos que $y = x^{-\nu-1}v = t^{\nu/2+1/2}v$.

Calculamos como cambian las derivadas al hacer el cambio de variable:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dx} &= \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = -2x^{-3}\frac{dv}{dt} = -2t^{3/2}\frac{dv}{dt} \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} = -2t^{3/2}\frac{d}{dt} \qquad (1)
\end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(-2t^{3/2}\frac{dv}{dt}\right) = -2t^{3/2}\frac{d}{dt}\left(-2t^{3/2}\frac{dv}{dt}\right) \qquad \text{por } (1) \\
&= 4t^{3/2}\frac{d}{dt}(t^{3/2})\frac{dv}{dt} + 4t^3\frac{d^2v}{dt^2} \\
&= 4t^3\frac{d^2v}{dt^2} + 6t^2\frac{dv}{dt}
\end{aligned}$$

Y entonces, podemos escribir las derivadas de y respecto de x usando las derivadas de v respecto a t:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x^{-\nu-1}v\right) = (-\nu-1)x^{-\nu-2}v + x^{-\nu-1}\frac{dv}{dx} \\
&= (-\nu-1)x^{-\nu-2}v \; + x^{-\nu-1}\left(-2t^{3/2}\frac{dv}{dt}\right) \\
&= (-\nu-1)t^{\nu/2+1}v + t^{\nu/2+1/2}\left(-2t^{3/2}\frac{dv}{dt}\right) \\
&= (-\nu-1)t^{\nu/2+1}v - 2t^{\nu/2+2}\frac{dv}{dt}
\end{aligned}$$

Y la segunda derivada es:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left((-\nu-1)x^{-\nu-2}v + x^{-\nu-1}\frac{dv}{dx}\right)\\
&= (-\nu-1)(-\nu-2)x^{-\nu-3}v + (-\nu-1)x^{-\nu-2}\frac{dv}{dx} + (-\nu-1)x^{-\nu-2}\frac{dv}{dx} + x^{-\nu-1}\frac{d^2v}{dx^2}\\
&= (\nu+1)(\nu+2)x^{-\nu-3}v - 2(\nu+1)x^{-\nu-2}\frac{dv}{dx} + x^{-\nu-1}\frac{d^2v}{dx^2}\\
&= (\nu+1)(\nu+2)t^{\nu/2+3/2}v - 2(\nu+1)t^{\nu/2+1}\left(-2t^{3/2}\frac{dv}{dt}\right) + t^{\nu/2+1/2}\left(4t^3\frac{d^2v}{dt^2} + 6t^2\frac{dv}{dt}\right)\\
&= (\nu+1)(\nu+2)t^{\nu/2+3/2}v + 4(\nu+1)t^{\nu/2+5/2}\frac{dv}{dt} + 6t^{\nu/2+5/2}\frac{dv}{dt} + 4t^{\nu/2+7/2}\frac{d^2v}{dt^2}
\end{aligned}$$

Armados con estas expresiones para escribir las derivadas $dy/dx, d^2y/dx^2$ usando las derivadas de v, ahora hacemos el cambio de variable de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \nu(\nu+1)y = 0\\
&\Rightarrow\ (1-t^{-1})\left[(\nu+1)(\nu+2)t^{\nu/2+3/2}v + 4(\nu+1)t^{\nu/2+5/2}\frac{dv}{dt} + 6t^{\nu/2+5/2}\frac{dv}{dt} + 4t^{\nu/2+7/2}\frac{d^2v}{dt^2}\right]\\
&\quad - 2t^{-1/2}\left[(-\nu-1)t^{\nu/2+1}v - 2t^{\nu/2+2}\frac{dv}{dt}\right] + \nu(\nu+1)t^{\nu/2+1/2}v = 0\\
&\Rightarrow\ (4t^{\nu/2+7/2} - 4t^{\nu/2+5/2})\frac{d^2v}{dt^2} +\\
&\quad + \left(4(\nu+1)t^{\nu/2+5/2} - 4(\nu+1)t^{\nu/2+3/2} + 6t^{\nu/2+5/2} - 6t^{\nu/2+3/2} + 4t^{\nu/2+3/2}\right)\frac{dv}{dt}\\
&\quad + \left((\nu+1)(\nu+2)t^{\nu/2+3/2} - (\nu+1)(\nu+2)t^{\nu/2+1/2} + 2(\nu+1)t^{\nu/2+1/2} + \nu(\nu+1)t^{\nu/2+1/2}\right)v = 0\\
&\Rightarrow\ (4t^{\nu/2+7/2} - 4t^{\nu/2+5/2})\frac{d^2v}{dt^2} + \left(4\nu t^{\nu/2+5/2} + 10t^{\nu/2+5/2} - 4\nu t^{\nu/2+3/2} - 6t^{\nu/2+3/2}\right)\frac{dv}{dt}\\
&\quad + \left((\nu+1)(\nu+2)t^{\nu/2+3/2}\right)v = 0
\end{aligned}$$

Dividimos todo por $-4t^{\nu/2+3/2}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ (-t^2+t)\frac{d^2v}{dt^2} + \left(-\nu t - \frac{5}{2}t + \nu + \frac{3}{2}\right)\frac{dv}{dt} - \frac{1}{4}(\nu+1)(\nu+2)v = 0\\
&\Rightarrow\ t(1-t)v'' + \left[\frac{3}{2} + \nu - \left(\nu + \frac{5}{2}\right)t\right]v' - \frac{1}{4}(\nu+1)(\nu+2)v = 0
\end{aligned}$$

Que ya tiene la forma de la ecuación hipergeométrica $t(1-t)v''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)t]v'-\alpha\beta v = 0$ Vemos que los parámetros de la ecuación para que coincida con la hipergeométrica son:

$$\gamma = \frac{3}{2} + \nu$$

$$\alpha + \beta + 1 = \nu + \frac{5}{2}$$
$$\alpha\beta = \frac{1}{4}(\nu + 1)(\nu + 2)$$

Por la tercera ecuación tenemos que $\alpha = \dfrac{1}{4\beta}(\nu+1)(\nu+2)$. Lo podemos sustituir en la segunda ecuación y conseguimos $\dfrac{1}{4\beta}(\nu+1)(\nu+2)+\beta-\dfrac{3}{2} = \nu \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{4}(\nu+1)(\nu+2)+\beta^2+(-\frac{3}{2}-\nu)\beta = 0$

Podemos resolver esta ecuación cuadrática: $\beta = \dfrac{(\frac{3}{2}+\nu) \pm \sqrt{(\frac{3}{2}+\nu)^2 - (\nu+1)(\nu+2)}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}+\nu \pm \sqrt{1/4}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}+\nu \pm 1/2}{2}$. Por lo que una de las soluciones es $\beta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\nu}{2}$

Por lo que $\alpha = \dfrac{1}{4\beta}(\nu+1)(\nu+2) = \dfrac{1}{2+2\nu}(\nu+1)(\nu+2) = \dfrac{\nu+2}{2} = \dfrac{\nu}{2} + 1$.

Entonces, tenemos que:

$$\alpha = 1 + \frac{\nu}{2}$$
$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}$$
$$\gamma = \frac{3}{2} + \nu$$

Por tanto, por lo que vimos en el problema 3 sobre la solución de la ecuación hipergeométrica, esto nos deja con algunos casos dependiendo del valor de ν:

1) **ν no se puede escribir como un entero más 1/2**

   En este caso $\gamma = \dfrac{3}{2} + \nu$ no es un entero.
   Eso implica que podemos usar el primer caso de la solución a la ecuación hipergeométrica vista en 3. Cuya solución en términos de la función hipergeométrica era:

$$v_\nu(t) = F(\alpha, \beta; \gamma; t) = F(\frac{\nu}{2}+1, \frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; t)$$

   Luego, usamos que $y = x^{-\nu-1}v$ y que $t = x^{-2}$ para hacer el cambio de variable:

$$yx^{\nu+1} = F(\frac{\nu}{2}+1, \frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; x^{-2})$$
$$\Rightarrow \ y = x^{-\nu-1}F(\frac{\nu}{2}+1, \frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; x^{-2})$$

   Por tanto, la solución de segunda especie es:

$$\boxed{Q_\nu(x) = x^{-\nu-1}F(\frac{\nu}{2}+1, \frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; x^{-2})}$$

Por lo visto en el ejercicio 3, la solución es válida en $|x^{-2}| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| > 1$

2) $\nu = -1/2$

En este caso tenemos que $\gamma = \dfrac{3}{2} + \nu = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} = 1$.
Lo cual corresponde con el segundo caso de la solución de la ecuación hipergeométrica y como vimos, tiene una solución dada por:

$$v_\nu(t) = F(\alpha, \beta; \gamma; t) = F(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}; 1; t)$$

Luego, usamos que $y = x^{-\nu-1}v$ y que $t = x^{-2}$ para hacer el cambio de variable:

$$yx^{\nu+1} = F(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}; 1; x^{-2})$$
$$\Rightarrow \; y = x^{-\nu-1}F(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}; 1; x^{-2})$$

Por tanto, la solución de segunda especie es:

$$\boxed{Q_\nu(x) = x^{-\nu-1}F(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}; 1; x^{-2})}$$

Por lo visto en el ejercicio 3, la solución es válida en $|x^{-2}| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| > 1$

3) $\nu = k + \dfrac{1}{2}$ **con k un entero ≥ 0**

En este caso tenemos que $\gamma = \dfrac{3}{2} + \nu = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} + k = 2 + k$.
Lo cual significa que γ es un entero mayor que 1.
Lo cual corresponde con el tercer caso de la solución de la ecuación hipergeométrica y como vimos, tiene una solución dada por:

$$v_\nu(t) = F(\alpha, \beta; \gamma; t) = F(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}; \nu + \frac{3}{2}; t)$$

Luego, usamos que $y = x^{-\nu-1}v$ y que $t = x^{-2}$ para hacer el cambio de variable:

$$yx^{\nu+1} = F(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}; \nu + \frac{3}{2}; x^{-2})$$
$$\Rightarrow \; y = x^{-\nu-1}F(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}; \nu + \frac{3}{2}; x^{-2})$$

Por tanto, la solución de segunda especie es:

$$\boxed{Q_\nu(x) = x^{-\nu-1}F(\frac{\nu}{2}+1, \frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; x^{-2})}$$

Por lo visto en el ejercicio 3, la solución es válida en $|x^{-2}| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| > 1$.

4) $\nu = \dfrac{1}{2} - k$ **con** k **un entero** > 1

En este caso tenemos que $\gamma = \dfrac{3}{2} + \nu = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} - k = 2 - k$.
Como k es un entero > 1, tenemos que γ es un entero menor que 1.
Lo cual corresponde con el cuarto caso de la solución de la ecuación hipergeométrica y como vimos, tiene una solución dada por:

$$v_\nu(t) = t^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta; 2-\gamma; t) = t^{-1/2-\nu}F(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}-\nu; t)$$

Luego, usamos que $y = x^{-\nu-1}v$ y que $t = x^{-2}$ para hacer el cambio de variable:

$$\begin{aligned} yx^{\nu+1} &= x^{1+2\nu}F(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}-\nu; x^{-2}) \\ \Rightarrow \ y &= x^{\nu}F(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}-\nu; x^{-2}) \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de segunda especie es:

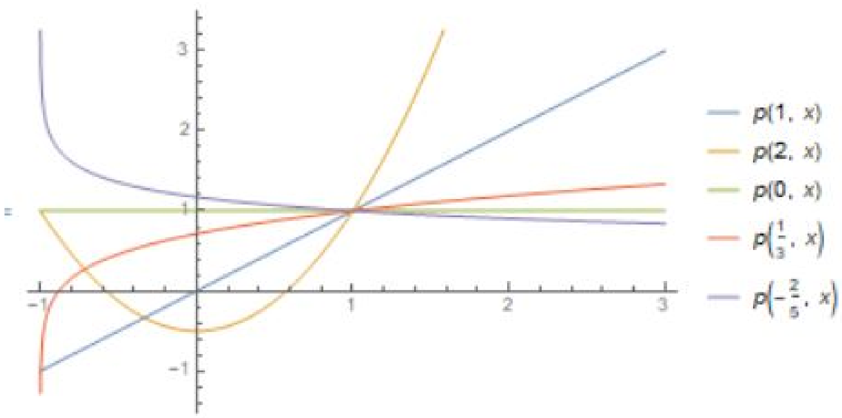
$$\boxed{Q_\nu(x) = x^{\nu}F(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}-\nu; x^{-2})}$$

Por lo visto en el ejercicio 3, la solución es válida en $|x^{-2}| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| > 1$.

c) Hacer algunas gráficas representativas de las funciones $P_\nu(x), Q_\nu(x)$ para ciertos valores de ν a vuestra elección.

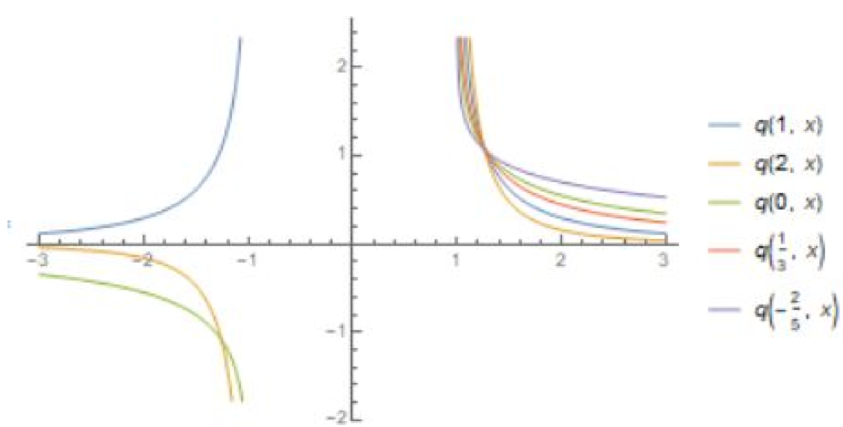
Graficamos las funciones $P_\nu(x)$ en Mathematica usando la expresión que encontramos para varios valores de ν.

```
(*Definimos p[v,x] como la función de Legendre de grado v de primera especie*)
p[v_, x_] = Hypergeometric2F1[v + 1, -v, 1, 1 / 2 * (1 - x)];
(*Graficamos varios p[v,x] entre (-1,3) para distintos valores de v*)
Plot[{p[1, x], p[2, x], p[0, x], p[1 / 3, x], p[-2 / 5, x]}, {x, -1, 3}, PlotLegends → "Expressions"]
```



Graficamos las funciones $Q_\nu(x)$ en Mathematica usando la expresión que encontramos para varios valores de ν.

```
(*Definimos q[v,x] como la función de Legendre de grado v de segunda especie *)
q[v_, x_] = x^(-v - 1) * Hypergeometric2F1[v / 2 + 1 / 2, v / 2 + 1, v + 3 / 2, 1 / x^2] ;
(*Graficamos varios q[v,x] entre (-1,3) para distintos valores de v*)
Plot[{q[1, x], q[2, x], q[0, x], q[1 / 3, x], q[-2 / 5, x]}, {x, -3, 3}, PlotLegends → "Expressions"]
```



5.- a) Demostrar la siguiente función generadora para las funciones de Bessel de primera especie con índice entero:

$$e^{\frac{x}{2}(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

Escribimos $e^{\frac{x}{2}(t-1/t)}$ usando series de Taylor de la exponencial centradas en 0:

$$\begin{aligned}
e^{\frac{x}{2}(t-1/t)} &= e^{\frac{x}{2}t}e^{-\frac{x}{2t}} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{xt}{2}\right)^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{-x}{2t}\right)^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^j t^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k t^{-k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^j t^j\right] \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k t^{-k} \qquad \text{metemos los términos con j a la suma con k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{j!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{j+k} t^{j-k} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Este producto tiene como resultado varias potencias t^n. Nos da como resultado una serie de la forma $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n$. En esta serie, nos interesa saber cuál es el coeficiente a_n para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ y ver que sea igual a $J_n(x)$.

Primero consideremos un $n \in \mathbb{N}$. Si queremos que la potencia de t sea n en (1), necesitamos que $j - k = n$.
Por lo tanto, $j = n + k$. Es decir, para tener el coeficiente de t^n en (1), k puede tomar cualquier entero entre 0 e infinito, pero j está obligada a ser $j = n + k$ (que es un número positivo y por tanto, válido para j).
Entonces, al imponer $j = n + k$ en (1), nos queda:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{(n+k)+k} t^{(n+k)-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} t^n
\end{aligned}$$

Por lo que el coeficiente de t^n en (1) es:

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

Pero por la definición de las funciones de Bessel, tenemos que $J_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$ porque $n, k \in \mathbb{N}$.
Lo que coincide con el resultado que habíamos encontrado para a_n, por lo que:

$$a_n = J_n(x)$$

Lo que prueba que el coeficiente de t^n en la función generadora es $J_n(x)$ para $n \in \mathbb{N}$

Por otro lado, consideramos un $n \in \mathbb{N}$ y buscamos cuál es el coeficiente a_{-n} al escribir (1) como $\sum a_n t^n$.
Como antes, por (1) el coeficiente a_{-n} se va a tener cuando $t^{j-k} = t^{-n}$, es decir, si $j - k = -n \quad \Rightarrow \; k = j + n$.
Entonces, j puede tomar cualquier entero entre 0 e infinito pero k está obligado a ser $k = j+n$ (que es un entero positivo y por tanto, un valor válido para k)
Entonces, imponemos $k = j + n$ en (1) y nos queda:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{j!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{j+k} t^{j-k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+n}}{j!(j+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{j+j+n} t^{j-(j+n)} \\
&= (-1)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n} t^{-n}
\end{aligned}$$

Por lo que el coeficiente a_{-n} es:

$$a_{-n} = (-1)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}$$

Pero nos damos cuenta que esto no es otra cosa que $a_{-n} = (-1)^n J_n(x)$. Según una de las propiedades de las funciones de Bessel, se cumple que $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Por tanto:

$$a_{-n} = J_{-n}(x)$$

Con lo cual, ya probamos que al escribir (1) como $\sum a_n t^n$, el coeficiente de t^n en la serie es $J_n(x)$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.
Por tanto, probamos que:

$$e^{\frac{x}{2}(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

b) Usar la anterior función generadora y herramientas de análisis complejo para derivar la siguiente representación integral de las funciones de Bessel de primera especie:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta) - n\theta)d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Por el resultado anterior, teníamos que:

$$e^{\frac{x}{2}(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

Luego, podemos hacer el cambio de variable $t = e^{i\theta}$.
En ese caso, tenemos que $\dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = i\sin\theta$ (por la representación compleja de sin)
Y entonces nos queda:

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}(t-1/t)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \\ \Rightarrow e^{ix\sin\theta} &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(x)(e^{i\theta})^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(e^{in\theta}) \end{aligned}$$

Luego, para separar la función de Bessel de la suma, hacemos un truco similar a lo que hacíamos para series de Fourier. Multiplicamos ambos lados por $e^{-ik\theta}$ donde k es un entero e integramos en $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta}e^{-ik\theta} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{-ik\theta}e^{in\theta}d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}e^{in\theta}d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta \end{aligned}$$

Pero si $n \neq k$, la integral se resuelve como $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta = \dfrac{1}{i(n-k)}e^{i(n-k)\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi}$
$= \dfrac{1}{i(n-k)}\left(e^{i(n-k)\pi} - e^{-i(n-k)\pi}\right) = \dfrac{1}{i(n-k)}\left((-1)^{n-k} - (-1)^{k-n}\right)$ porque $n-k$ es entero.
Y esto es igual a 0.
Por otro lado, si $k = n$, entonces el integrando se reduce a $e^{i(n-k)\theta} = e^0 = 1$ y la integral da por resultado $\pi - (-\pi) = 2\pi$.

Por tanto, nos queda:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta} e^{-ik\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta$$
$$= J_k(x)(2\pi)$$

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta} e^{-ik\theta} d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - k\theta)} d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - k\theta) + i\sin(x\sin\theta - k\theta) d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - k\theta) d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x\sin\theta - k\theta) d\theta$$

La segunda integral es 0 ya que se trata de una función impar integrada en $[-\pi,\pi]$. Vemos que es impar porque
$\sin(x\sin(-\theta) - k(-\theta)) = \sin(-x\sin\theta + k\theta) = \sin(-(x\sin\theta - k\theta)) = -\sin(x\sin\theta - k\theta)$

Por otro lado, la función en la primera integral es par ya que:
$\cos(x\sin(-\theta) - k(-\theta)) = \cos(-x\sin\theta + k\theta) = \cos(-(x\sin(\theta) - k\theta)) = \cos(x\sin(\theta) - k\theta))$
Por lo que esta integral se reduce a $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - k\theta) d\theta = 2\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - k\theta) d\theta$
Y siguiendo el desarrollo que llevábamos antes, concluimos que:

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - k\theta) d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x\sin\theta - k\theta) d\theta$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(x\sin\theta - k\theta) d\theta$$

Que es lo que se quería probar.

6. Resolver la ecuación de Schrodinger estacionaria en coordenadas esféricas:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi(r,\theta,\phi) + V(r)\Psi(r,\theta,\phi) = E\Psi(r,\theta,\phi)$$

para el caso particular del potencial $V(r) = -e^2/r$ (átomo de hidrógeno), donde e es la carga del electrón. Expresar las autofunciones en términos de armónicos esféricos y polinomios ortogonales de Laguerre. Visualizar las órbitas de la función de ondas del átomo de hidrógeno (más información en el problema 7.22 del Capítulo 13 del Boas)

Primero, reescribimos la ecuación desarrollando el Laplaciano en coordenadas esféricas:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Psi + V(r)\Psi = E\psi$$

(Usé M para la masa en la ecuación para poder usar m más adelante como una de las constantes de separación, como es la convención usual).
Luego, proponemos una solución separable como $\Psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$.
Sustituimos esto en la ecuación (y multiplicamos toda la ecuación por $-\frac{2M}{\hbar^2}$):

$$\frac{1}{r^2}Y(\theta,\phi)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)R(r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}R(r)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)Y(\theta,\phi)$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}R(r)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta,\phi) - \frac{2M}{\hbar^2}[V(r)-E]R(r)Y(\theta,\phi) = 0$$

Ahora dividimos entre $R(r)Y(\theta,\phi)$ y multiplicamos por r^2 para obtener:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)R(r) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)Y(\theta,\phi)$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta,\phi) - \frac{2M}{\hbar^2}[V(r)-E]r^2 = 0$$

.

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) - \frac{2Mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]$$
$$= -\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta,\phi)$$

En la última ecuación, el lado izquierdo es función de únicamente r y el derecho de θ,ϕ. Para que se cumpla la igualdad, ambos lados deben de ser constantes.
Por tanto, agregamos una constante de separación k.

Obtenemos así, la **ecuación radial:**

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) - \frac{2Mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E] = k$$

Y la **ecuación angular**:

$$\frac{1}{Y(\theta,\phi)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y(\theta,\phi)\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta,\phi)=-k$$

Ahora separamos la ecuación angular en la parte polar y la azimutal.
Para ello, proponemos que la solución $Y(\theta,\phi)$ se ve como $Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$.
Sustituimos esto en la ecuación angular:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Theta(\theta)\Phi(\phi)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta(\theta)\Phi(\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Theta(\theta)\Phi(\phi)\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Theta(\theta)\Phi(\phi)=-k\\
&\Rightarrow\ \frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi(\phi)\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi(\phi)=-k\\
&\Rightarrow\ \frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+k=-\frac{1}{\Phi(\phi)\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi(\phi)\\
&\Rightarrow\ \frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+k\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi(\phi)
\end{aligned}$$

El lado izquierdo es función de solamente θ, mientras que el lado derecho es función de solamente ϕ. Para que ambos lados sean iguales, deben de ser igual a una constante. Elegimos como constante de separación a m^2.

Por tanto, nos queda la **ecuación polar:**

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+k\sin^2\theta=m^2$$

Y tenemos la **ecuación azimutal:**

$$\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi(\phi)=-m^2$$

Resolver las ecuaciones:

- **Ecuación Azimutal:**
  La ecuación azimutal es la más fácil de resolver. Tenemos que:

  $$\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi(\phi)=-m^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2}{d\phi^2}\Phi(\phi)=-m^2\Phi(\phi)$$

  Que es la ecuación de oscilador armónico y tiene por solución:

  $$\boxed{\Phi(\phi)=\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}}$$

  Sin embargo, $\Phi(\phi)$ tiene que ser de periodo 2π (porque la variable angular ϕ indica el mismo punto que $\phi+2\pi$ y por tanto, la función $\Phi(\phi)$ debe de valer lo mismo en ϕ que en $\phi+2\pi$).
  Para que $\cos m\phi, \sin m\phi$ tenga este periodo, <u>m debe de ser un entero</u>.

- **Ecuación Polar:**
  Tenemos la ecuación:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+k\sin^2\theta=m^2\\
&\Rightarrow\ \sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+k\sin^2\theta\Theta(\theta)-m^2\Theta(\theta)=0\\
&\Rightarrow\ \sin^2\theta\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta)+\sin\theta\cos\theta\frac{d}{d\theta}\Theta(\theta)+k\sin^2\theta\Theta(\theta)-m^2\Theta(\theta)=0
\end{aligned}$$

Y como vimos en clase, conviene hacer el cambio de variable $x=\cos\theta$ (entonces x varía en $[-1,1]$ conforme θ varía en $[0,\pi]$). Primero vemos cómo se transforman las derivadas:

$$\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}=\frac{d\Theta(x)}{dx}\frac{dx}{d\theta}=(-\sin\theta)\frac{d\Theta(x)}{dx}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}&=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d}{d\theta}\Theta(\theta)\right)=\frac{d}{d\theta}\left(-\sin\theta\frac{d\Theta(x)}{dx}\right)=-\cos\theta\frac{d\Theta(x)}{dx}-\sin\theta\frac{d}{d\theta}\frac{d\Theta(x)}{dx}\\
&=-\cos\theta\frac{d\Theta(x)}{dx}-\sin\theta\frac{d}{dx}\frac{dx}{d\theta}\frac{d\Theta(x)}{dx}=-\cos\theta\frac{d\Theta(x)}{dx}-\sin\theta\frac{d}{dx}(-\sin\theta)\frac{d\Theta(x)}{dx}\\
&=-\cos\theta\frac{d\Theta(x)}{dx}+\sin^2\theta\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}
\end{aligned}$$

Ahora ya sustituimos esto en la ecuación polar para hacer el cambio de variables:

$$\sin^2\theta\left(-\cos\theta\frac{d\Theta(x)}{dx}+\sin^2\theta\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}\right)+\sin\theta\cos\theta\left((-\sin\theta)\frac{d\Theta(x)}{dx}\right)+k\sin^2\theta\Theta(x)-m^2\Theta(x)=0$$

Dividimos por $\sin^2\theta$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow-\cos\theta\frac{d\Theta(x)}{dx}+\sin^2\theta\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}-\cos\theta\frac{d\Theta(x)}{dx}+k\Theta(x)-m^2\frac{\Theta(x)}{\sin^2(\theta)}=0\\
&\Rightarrow\ -2\cos\theta\frac{d\Theta(x)}{dx}+\sin^2\theta\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}++k\Theta(x)-m^2\frac{\Theta(x)}{\sin^2(\theta)}=0
\end{aligned}$$

Ahora terminamos de sustituir $x=\cos\theta$ y $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-x^2$ para terminar la sustitución:

$$\begin{aligned}
&-2x\frac{d\Theta(x)}{dx}+(1-x^2)\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}+k\Theta(x)-m^2\frac{\Theta(x)}{1-x^2}=0\\
&\Rightarrow\ \ (1-x^2)\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}-2x\frac{d\Theta(x)}{dx}+k\Theta(x)-\frac{m^2}{1-x^2}\Theta(x)=0
\end{aligned}$$

Esta es una ecuación que ya vimos en clase, es la ecuación asociada de Legendre. Vimos en clase que esta ecuación era finita en $x=\pm1$ sólo si k era el producto de dos enteros consecutivos.
Es decir, si $k=l(l+1)$ con l un entero (y en realidad, basta con fijarnos en l un entero

≥ 0 porque las soluciones para $l < 0$ se pueden escribir en términos de las soluciones a la ecuación asociada de Legendre para $l \geq 0$ y no nos dan información nueva).
Entonces, la solución es la función asociada de Legendre $\Theta(x) = P_l^m(x)$.
Además, ya habíamos encontrado en la ecuación anterior que m es un entero pero para que la ecuación de Legendre sea válida, hemos visto en clase que debemos de tener también que $|m| \leq l$. Con el cambio de variable $x = \cos\theta$, nos queda:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Theta(\theta) = P_l^m(\cos\theta)}$$

Y obtuvimos las condiciones que $\underline{k = l(l+1) \text{ con } l \geq 0 \text{ un entero y } m \text{ un entero con } 0 \leq |m| \leq l}$

- **Ecuación Radial:**
  La ecuación radial a la que habíamos llegado es (poniendo $k = l(l+1)$):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) - \frac{2Mr^2}{\hbar^2}[V(r) - E] = l(l+1) \\
&\Rightarrow \ \frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) - \frac{2Mr^2}{\hbar^2}\left[-\frac{e^2}{r} - E\right] = l(l+1) \\
&\Rightarrow \ \frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{2Me^2r}{\hbar^2} + \frac{2Mr^2}{\hbar^2}E = l(l+1) \\
&\Rightarrow \ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left[\frac{2Me^2r}{\hbar^2} + \frac{2Mr^2}{\hbar^2}E - l(l+1)\right]R(r) = 0
\end{aligned}$$

  Hacemos un cambio de variable propuesto por el problema 22 del capítulo 13 del Boas. El cambio de variable $y(r) = rR(r) \ \Rightarrow \ R(r) = \dfrac{y(r)}{r}$. Con esta sustitución, la derivada se transforma como:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R(r)\right) &= \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\frac{y(r)}{r}\right) \\
&= \frac{d}{dr}\left(r^2\left(-r^{-2}y(r) + r^{-1}y'(r)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dr}\left(-y(r) + ry'(r)\right) \\
&= -y'(r) + y'(r) + ry''(r) \\
&= ry''(r)
\end{aligned}$$

  Al sustituir en la ecuación a la que habíamos llegado, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left[\frac{2Me^2r}{\hbar^2} + \frac{2Mr^2}{\hbar^2}E - l(l+1)\right]R(r) = 0 \\
&\Rightarrow \ r\frac{d^2y(r)}{dr^2} + \left[\frac{2Me^2r}{\hbar^2} + \frac{2Mr^2}{\hbar^2}E - l(l+1)\right]\frac{y(r)}{r} = 0
\end{aligned}$$

Luego definimos $\alpha^2 = -\hbar^2/(2ME)$ (que es positivo porque la energía E es negativa en el estado ligado del átomo).
Por lo que nos queda:

$$r\frac{d^2y(r)}{dr^2} + \left[\frac{2Me^2r}{\hbar^2} - \frac{1}{\alpha^2}r^2 - l(l+1)\right]\frac{y(r)}{r} = 0$$

Y hacemos el cambio de variable $x = 2r/\alpha$, $r = \alpha x/2$. Para hacer el cambio, vemos cómo se transforman las derivadas:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dr} = \frac{dy}{dx}(2/\alpha) = \frac{2}{\alpha}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{dy}{dr}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{2}{\alpha}\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2}{\alpha}\frac{d}{dr}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\alpha}\frac{2}{\alpha}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{4}{\alpha^2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

Por tanto, la ecuación diferencial queda como:

$$\begin{aligned}
& r\frac{d^2y(r)}{dr^2} + \left[\frac{2Me^2r}{\hbar^2} - \frac{1}{\alpha^2}r^2 - l(l+1)\right]\frac{y(r)}{r} = 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{\alpha x}{2}\left(\frac{4}{\alpha^2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left[\frac{2Me^2}{\hbar^2}\frac{\alpha x}{2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\alpha^2x^2}{4} - l(l+1)\right]\frac{y(x)}{(\alpha x)/2} = 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{2x}{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{Me^2\alpha x}{\hbar^2} - \frac{x^2}{4} - l(l+1)\right]\frac{2y(x)}{\alpha x} = 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{Me^2\alpha x}{\hbar^2} - \frac{x^2}{4} - l(l+1)\right]\frac{y(x)}{x^2} = 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{d^2y}{dx^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{Me^2\alpha}{\hbar^2x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right]y(x) = 0
\end{aligned}$$

Ahora definimos $\lambda = Me^2\alpha/\hbar^2$. Con lo que la ecuación queda como:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right]y = 0}$$

Para resolver esta ecuación diferencial, proponemos una solución de la forma
$y = x^{l+1}e^{-x/2}v(x)$, con $v(x)$ una función desconocida.
Sustituimos esta posible solución en la ecuación diferencial para ver qué debe de cumplir $v(x)$

$$\begin{aligned}
& (x^{l+1}e^{-x/2}v)'' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right]x^{l+1}e^{-x/2}v = 0 \\
\Rightarrow\ & \left((l+1)e^{-x/2}x^lv - \frac{1}{2}e^{-x/2}x^{l+1}v + e^{-x/2}x^{l+1}v'\right)' - \frac{1}{4}x^{l+1}e^{-x/2}v + \lambda x^le^{-x/2}v - l(l+1)x^{l-1}e^{-x/2}v = 0 \\
\Rightarrow\ & l(l+1)e^{-x/2}x^{l-1}v - (l+1)x^le^{-x/2}v + \frac{1}{4}x^{l+1}e^{-x/2}v + 2(l+1)x^le^{-x/2}v' - x^{l+1}e^{-x/2}v' + x^{l+1}e^{-x/2}v'' \\
& \qquad - \frac{1}{4}x^{l+1}e^{-x/2}v + \lambda x^le^{-x/2}v - l(l+1)x^{l-1}e^{-x/2}v = 0
\end{aligned}$$

Dividimos por $x^l e^{-x/2}$

$$l(l+1)x^{-1}v - (l+1)v + \frac{1}{4}xv + 2(l+1)v' - xv' + xv'' - \frac{1}{4}xv + \lambda v - l(l+1)x^{-1}v = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{xv'' + (2l+2-x)v' + (\lambda - l - 1)v = 0}$$

$v(x)$ debe de cumplir con esta ecuación.
Esta ecuación se parece mucho a la ecuación de Laguerre asociada. La **ecuación de Laguerre asociada** es $xy'' + (p+1-x)y' + sy = 0$ donde s y p son números naturales. Y tiene como solución al polinomio de Laguerre asociado L_s^p. Definido a partir de los polinomios de Laguerre como $L_s^p(x) = (-1)^p \dfrac{d^p}{dx^p} L_{s+p}(x)$

Por lo que la ecuación que tenemos para v es igual a la de Laguerre asociada pero con $p = 2l+1$ y $\lambda - l - 1 = s$.
Como $s = \lambda - l - 1$ tiene que ser un natural para la ecuación de Laguerre y ya vimos que l es un natural, eso obliga a λ a ser un número natural, por lo que denotaremos $n := \lambda$.
Con lo que nos aseguramos que s sea un entero, pero para que sea un natural, debemos de tener también que $s = n - l - 1 \geq 0$, es decir $\underline{\ n > l}$.
Y entonces, se tendrá la solución para v como:

$$v(x) = L_{n-l-1}^{2l+1}(x)$$

Y por tanto, la solución $y(x)$ es:

$$y(x) = x^{l+1} e^{-x/2} L_{n-l-1}^{2l+1}(x)$$

Ahora deshacemos las sustituciones para poder regresar a $R(r)$. Empezamos cambiando la x por r usando $x = \dfrac{2r}{\alpha}$.
Con lo que nos queda $y(r) = \left(\dfrac{2r}{\alpha}\right)^{l+1} e^{-r/\alpha} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\dfrac{2r}{\alpha}\right)$
Y por último, usamos que $R(r) = y(r)/r$ y omitimos las constantes que están multiplicando y seguiremos teniendo una solución:

$$\boxed{R(r) = r^l e^{-r/\alpha} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{\alpha}\right)}$$

Donde $\alpha^2 = -\hbar^2/2ME$ y $n = Me^2\alpha/\hbar^2$ (con n obligado a ser un entero)

Ya que tenemos las soluciones $\Theta(\theta)$, $\Phi(\phi)$, $R(r)$, las podemos juntar para obtener una solución a la ecuación original:

$$\begin{aligned}\Psi(r,\theta,\phi) &= R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \\ &= r^l e^{-r/\alpha} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{\alpha}\right) P_l^m(\cos\theta) \begin{cases}\cos m\phi \\ \sin m\phi\end{cases}\end{aligned}$$

Donde $P_l^m(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\phi \\ \sin m\phi\end{cases}$ son los armónicos esféricos.
Y donde m, l, n son números enteros.
Con $l \geq 0$, $0 \leq |m| \leq l$, $l < n$
y con $n = Me^2\alpha/\hbar^2$. $\alpha^2 = -\hbar^2/(2ME)$.

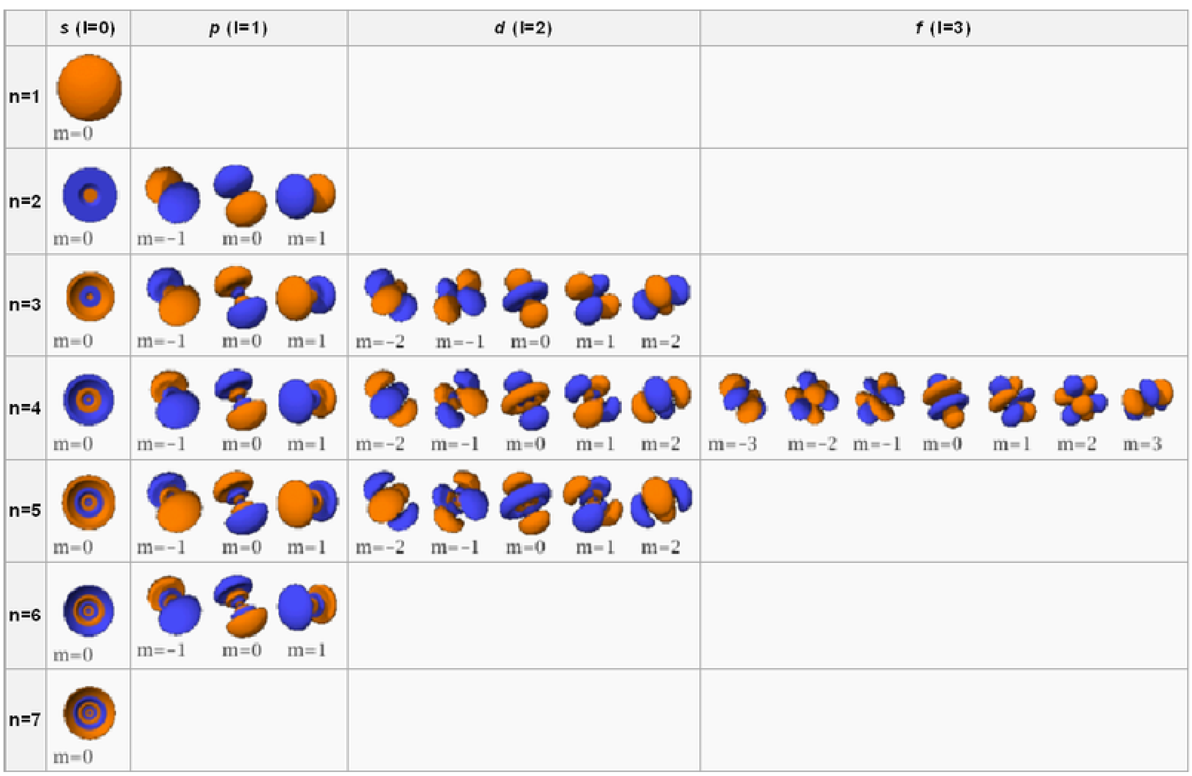
Despejando la expresión de n, tenemos que $\alpha = \dfrac{\hbar^2}{me^2}n := an$, con $a = \dfrac{\hbar^2}{me^2}$.
Con lo que podemos reescribir la solución haciendo más explítos los lugares en los que aparece n:

$$\boxed{\Psi(r,\theta,\phi) = r^l e^{-r/(an)} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{an}\right) P_l^m(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\phi \\ \sin m\phi\end{cases}}$$

Nuevamente, con las condiciones que m, l, n son enteros con $l \geq 0$, $0 \leq |m| \leq l$, $l < n$

Además, por la definición de $\alpha^2 = \hbar^2/(2ME)$ y de que $\alpha = an$, podemos despejar E en función de n como $E = -\dfrac{Me^4}{2\hbar^2 n^2}$. Por lo que obtenemos que la energía del átomo está cuantizada por n.

En la siguiente imagen se visualizan algunos de los orbitales posibles.



A lo largo de los renglones se va cambiando el valor de n desde 1 hasta 7. Las columnas indican el valor de l, tomando en cuenta que $l < n$.

Y en cada celda se muestran las gráficas para distintos valores de m, tomando en cuenta que $0 \leq |m| \leq l$.
Las figuras muestran en 3d la probabilidad de encontrar el electrón en el espacio en cada uno de los casos. La diferencia de colores se usa para distinguir los lugares del espacio en el que la función de onde Ψ tiene fase positiva o negativa.