Tomás Ricardo Basile Alvarez

Álgebra Moderna I   Tarea 1.2

a) Calcule el orden de cada elemento de D_6:

Por lo visto en clase, $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$
y se cumple que: (1) $r^3 = 1$, (2) $s^2 = 1$, (3) $rs = sr^{-1}$

$\Rightarrow$ •) 1: Como $1^1 = 1$ $\rightarrow$ $o(1) = 1$

••) r: Se probó en la proposición 3.5 a) que $1, r, r^2$ son distintos entre sí, $\Rightarrow r \neq 1$, $r^2 \neq 1$
Pero, por (1) $r^3 = 1$ $\rightarrow$ $o(r) = 3$

•••) r^2: Por lo dicho antes: $r^2 \neq 1$

•) $(r^2)^2 = r^4 = r r^3$
$= r(1)$ $\leftarrow$ por (1)
$= r \neq 1$

• $(r^2)^3 = r^6 = r^3 r^3 = (1)(1)$ $\leftarrow$ por (1)
$= 1$
$\therefore$ $o(r^2) = 3$

••••) s: Por la propiedad (2) $\rightarrow s^2 = 1 \rightarrow$ $o(s) = 2$

-) sr: • $(sr)^2 = (sr)(sr) = s(rs)r$
$= s(sr^{-1})r$ $\leftarrow$ por (3)
$= (ss)(r^{-1}r) = s^2(1) = 1(1)$ $\leftarrow$ por (2)
$= 1$
$\longrightarrow$ $o(sr) = 2$

-) sr^2: • $(sr^2)^2 = (sr^2)(sr^2) = sr(rs)r^2$
$= sr(sr^{-1})r^2$ $\leftarrow$ por (3)
$= s(rs)(r^{-1}r^2)$
$= s(rs)(1r) = s(rs)r$
$= s(sr^{-1})r$ $\leftarrow$ por (3)
$= s^2 r^{-1} r$
$= s^2$
$= 1$ $\leftarrow$ por (2)

$\therefore$ $o(sr^2) = 2$

Ahora Para D_8:

Por lo visto en clase, $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$

y se cumple 1) $r^4 = 1$, 2) $s^2 = 1$, 3) $rs = sr^{-1}$

.) 1 : como $1^1 = 1 \rightarrow o(1) = 1$

..) r : $1, r, r^2, r^3$ son distintos entre sí, pero $r^4 = 1$ por (1) $\rightarrow$ $\underline{o(r) = 4}$

...) r^2 :
$r^2 \neq 1$
$(r^2)^2 = r^4 \overset{\text{por (1)}}{=} 1 \rightarrow$ $\underline{o(r^2) = 2}$

....) r^3 :
$r^3 \neq 1$
$(r^3)^2 = r^6 = r^2 \cdot r^4 \overset{\text{por (1)}}{=} r^2 \cdot 1 = r^2 \neq 1$
$(r^3)^3 = r^9 = r r^4 r^4 = r(1)(1) = r \neq 1$
$(r^3)^4 = r^{12} = (r^4)^3 = (1)^3 = \underline{1}$ $\therefore$ $\underline{o(r^3) = 4}$

-) s
$s \neq 1$
$s^2 = 1$ (por 2) $\rightarrow$ $o(s) = 2$

-) sr :
$sr \neq 1$
$(sr)^2 = (sr)(sr) = s(rs)r \overset{\text{por (3)}}{=} s(sr^{-1})r = (s^2)(r^{-1}r)$
$= s^2 \cdot 1 = s^2 \overset{\text{por (2)}}{=} 1$ $\rightarrow$ $\underline{o(sr) = 2}$

-) sr^2 :
$sr^2 \neq 1$
$(sr^2)^2 = (sr^2)(sr^2) = s(r^2s)r^2 = (sr)(rs)r^2$
por(3) $= (sr)(sr^{-1})r^2 = (srs)(r^{-1}r)r = srsr$
$= s(rs)r \overset{\text{por (3)}}{=} s(sr^{-1})r = s^2(r^{-1}r) \overset{\text{por (2)}}{=} (1)(1) = \underline{1}$

$\therefore$ $\underline{o(sr^2) = 2}$

-) sr^3 :
$sr^3 \neq 1$
$(sr^3)^2 = (sr^3)(sr^3) = (sr^2)(rs)r^3 \overset{(3)}{=} (sr^2)(sr^{-1})r^3$
$= (sr^2)(s)r^{-1}r^3 = sr^2sr^2 = (sr^2)^2 = 1$

por el inciso ⁚)

$\therefore$ $\underline{o(sr^3) = 2}$

b) Prueba que hay elementos $x, y \in D_4$ tales que el grupo $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle = D_4$

Primero que nada, vemos que $(xy)^2 = 1 \iff (xy)(xy) = 1$

$$\iff x(yxy) = 1$$
$$\iff x^{-1}x(yxy) = x^{-1} \rightarrow \text{multiplicamos por } x^{-1}$$
$$\iff yxy = x^{-1}$$
$$\iff y(yxy) = yx^{-1} \quad \text{multiplicamos por } y$$
$$\iff (y^2)(xy) = yx^{-1}$$
$$\iff 1(xy) = yx^{-1} \quad \text{porque por hipótesis } y^2 = 1$$
$$\iff xy = yx^{-1}$$

$\therefore (xy)^2 = 1 \iff xy = yx^{-1}$

y la descripción del grupo se puede cambiar a

$$\langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, \ xy = yx^{-1} \rangle \ \ldots (1)$$

Recordamos ahora que D_{2n} se describe como:

$D_{2n} \ \langle r, s \mid r^n = 1, \ s^2 = 1, \ sr^{-1} = rs \rangle$

Si $n = 2 \rightarrow D_4 = \langle r, s \mid r^2 = 1, \ s^2 = 1, \ rs = sr^{-1} \rangle$

Vemos que esta descripción es igual a (1) si $x = r, y = s$

y queda probado que para $x = r, y = s$

$$D_4 = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$$

c) Considera $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Encuentra la descomposición en ciclos de σ, τ, $\tau\sigma$, $\tau^2\sigma$

Por la proposición 4.9 la relación $s \sim s' \iff s' = \alpha^k(s)$ para $k \in \mathbb{Z}$ parte a I_n en clases de equivalencia.
Cada una de estas clases es la órbita de algún representante a_i de la clase.
Y por la parte d) del teorema, si tomamos todas las clases $O_{a_i} = \{a_i, \alpha(a_i), \ldots, \alpha^{k}(a_i)\}$ y con ellas formamos los ciclos
$$\sigma_i = (a_i \; \alpha(a_i) \cdots \alpha^{k_i}(a_i))$$

Entonces la biyección α se ve como $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_m$

Algoritmo

Entonces, buscaremos la órbita de cada elemento de I_n (excepto si el elemento se encuentra ya en otra órbita porque en este caso ambas órbitas son iguales)
Una vez que tengamos todas las órbitas, formaremos un ciclo con cada una y la permutación original será igual a la composición de estos ciclos. (No importa el orden porque ciclos disjuntos conmutan)

·) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1: $\sigma(1) = \underline{3}$, $\sigma^2(1) = \sigma(3) = \underline{5}$, $\sigma^3(1) = \sigma(5) = \underline{1}$ ya se repite

$\rightarrow O_1 = \{1, 3, 5\}$

2: $\sigma(2) = \underline{4}$, $\sigma^2(2) = \sigma(4) = \underline{2}$ ya se repite

$\rightarrow O_2 = \{2, 4\}$

Ya todos los elementos están en órbitas $\Rightarrow$ $\underline{\sigma = (1\;3\;5)(2\;4)}$

··) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

1: $\tau(1) = 5$, $\tau(5) = 1$ ya se repite $\rightarrow O_1 = \{1, 5\}$
2: $\tau(2) = 3$, $\tau(3) = 2$ $\rightarrow O_2 = \{2, 3\}$
4: $\tau(4) = 4$ $\rightarrow O_4 = \{4\}$

$\rightarrow$ $\underline{\tau = (1\;5)(2\;3)(4)}$,

$\tau\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&4&1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}$ Calculamos $\tau\sigma$

$\rightarrow \tau\sigma(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(3) = 2$

$\rightarrow \tau\sigma(2) = \tau(\sigma(2)) = \tau(4) = 4$

$\rightarrow \tau\sigma(3) = \tau(\sigma(3)) = \tau(5) = 1$

$\rightarrow \tau\sigma(4) = \tau(\sigma(4)) = \tau(2) = 3$

$\rightarrow \tau\sigma(5) = \tau(\sigma(5)) = \tau(1) = 5$

$\rightarrow \tau\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&3&5\end{pmatrix}$

1: $(\tau\sigma)(1) = 2$, $(\tau\sigma)(2) = 4$, $(\tau\sigma)(4) = 3$, $(\tau\sigma)(3) = 1$ se repite

$\rightarrow O_1 = \{1, 2, 4, 3\}$

5: $(\tau\sigma)(5) = 5 \longrightarrow O_5 = \{5\}$

$\therefore \tau\sigma = (1\ 2\ 4\ 3)\ (5)$

$\sigma\tau$: Calculamos $\sigma\tau$:

$\sigma\tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(5) = 1$

$\sigma(\tau)(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(3) = 5$

$\sigma\tau(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(2) = 4$

$\sigma\tau(4) = \sigma(\tau(4)) = \sigma(4) = 2$

$\sigma\tau(5) = \sigma(\tau(5)) = \sigma(1) = 3$

$\rightarrow \sigma\tau = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&4&2&3\end{pmatrix}$

1: $(\sigma\tau)(1) = 1 \longrightarrow O_1 = \{1\}$

2: $(\sigma\tau)(2) = 5$, $(\sigma\tau)(5) = 3$, $(\sigma\tau)(3) = 4$, $(\sigma\tau)(4) = 2$ se repite

$\rightarrow O_2 = \{2, 5, 3, 4\}$

$\rightarrow \sigma\tau = (1)\ (2\ 5\ 3\ 4)$

$\tau^2\sigma$: Calculamos:

$\tau^2\sigma(1) = \tau(\tau(\sigma(1))) = \tau(\tau(3)) = \tau(2) = 3$

$\tau^2\sigma(2) = \tau(\tau(\sigma(2))) = \tau(\tau(4)) = \tau(4) = 4$

$\tau^2\sigma(3) = \tau(\tau(\sigma(3))) = \tau(\tau(5)) = \tau(1) = 5$

$\tau^2\sigma(4) = \tau(\tau(\sigma(4))) = \tau(\tau(2)) = \tau(3) = 2$

$\tau^2\sigma(5) = \tau(\tau(\sigma(5))) = \tau(\tau(1)) = \tau(5) = 1$

$\rightarrow \tau^2\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}$

1: $(\tau^2\sigma)(1) = 3$, $(\tau^2\sigma)(3) = 5$, $(\tau^2\sigma)(5) = 1$ se repite

$\rightarrow O_1 = \{1, 3, 5\}$

2: $(\tau^2\sigma)(2) = 4$ $(\tau^2\sigma)(4) = 2$

$O_2 = \{2, 4\}$

$\therefore \tau^2\sigma = (1\ 3\ 5)(2\ 4)$

d) Si α, β son r-ciclos en S_n y existe $x_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que α, β mueven a x_0 y $\alpha^t(x_0) = \beta^t(x_0)$ $\forall\, t \in \mathbb{Z}$.
Demuestre que $\alpha \overset{!}{=} \beta$.

Consideramos la órbita de x_0 bajo α:

$$O^{\alpha}_{x_0} = \{ y \in I_n : y = \alpha^k(x_0) \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \}$$

Y la de x_0 bajo β:

$$O^{\beta}_{x_0} = \{ y \in I_n : y = \beta^k(x_0) \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \}$$

Sea $x \in I_n$, entonces tenemos dos opciones:

•) $\underline{x \in O^{\alpha}_{x_0}}$, $\Rightarrow$ $x = \alpha^k(x_0)$ para un $k \in \mathbb{Z}$

Pero por hipótesis, $\underline{x = \alpha^k(x_0) = \beta^k(x_0)}$ ... (1)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x = \alpha^k(x_0) \rightarrow \alpha(x) = \alpha^{k+1}(x_0) \\ \Rightarrow x = \beta^k(x_0) \rightarrow \beta(x) = \beta^{k+1}(x_0) \end{array}\right\} \text{Son iguales por hipótesis}$$

por (1)

$$\Rightarrow \underline{\alpha(x) = \beta(x)} /\!/$$

••) $\underline{x \notin O^{\alpha}_{x_0}}$:

Como vimos en clase, si $O_{x_0} = \{x_0, \alpha(x_0), \dots, \alpha^r(x_0)\}$
$\rightarrow$ entonces uno de los ciclos de α es $(x_0\ \alpha(x_0) \cdots \alpha^r(x_0))$
En este caso, como α es un simple ciclo, no se descompone en varios ciclos, más bien sólo en éste.

Es decir, $\alpha = (x_0\ \alpha(x_0)\ \alpha^2(x_0)\ \dots\ \alpha^r(x_0))$

Entonces, como $x \notin O^{\alpha}_{x_0}$ $\rightarrow$ x no forma parte del ciclo y por tanto α deja fijo a x $\rightarrow$ $\underline{\alpha(x) = x}$

Suponemos ahora que $\beta(x) \neq x$. Por el mismo argumento de antes, β también se ve como un ciclo y sólo mueve a los elementos de $O^{\beta}_{x_0}$ $\rightarrow$ $x \in O^{\beta}_{x_0}$ $\Rightarrow$ $x = \beta^k(x_0)$ para un $k \in \mathbb{Z}$

Entonces por hipótesis $x = \beta^k(x_0) = \alpha^k(x_0)$ $\rightarrow$ $x \in O^{\alpha}_{x_0}$!

Es una contradicción porque supusimos $x \notin O^{\alpha}_{x_0}$
$\Rightarrow$ Suponer que $\beta(x) \neq x$ fue equivocado $\rightarrow$ $\underline{\beta(x) = x}$

$\therefore$ $\underline{\alpha(x) = x = \beta(x)}$

$\therefore$ En cualquier caso $\alpha(x) = \beta(x)$ $\rightarrow$ $\underline{\alpha = \beta}$ /\!/

e) $\sigma \in S_n$ es un desarreglo de I_n si $\sigma(i) \neq i$ $\forall i \in I_n$
Liste los desarreglos de S_3 ¿Cuántos desarreglos tiene S_4?

S_3 : Hay dos casos para $\sigma(1)$:

.) $\sigma(1) = 2$ → $\sigma(3)$ no puede ser 2 porque el 2 ya fue ocupado por $\sigma(1)$
y $\sigma(3)$ no puede ser 3 porque no sería un desarreglo → $\sigma(3) = 1$
y ahora no hay de otra que $\sigma(2) = 3$

$$\rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

..) $\sigma(1) = 3$ → $\sigma(2)$ no puede ser 3 porque ya fue ocupado por $\sigma(1)$
y no puede ser 2 porque es un desarreglo → $\sigma(2) = 1$
∴ No hay de otra que $\sigma(3) = 2$

$$\rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y ya son todos los desarreglos posibles

S_4 : Digamos que $\sigma(1) = i$ con $i = 2, 3$ ó 4. Lo cual nos da hasta ahora 3 posibilidades. Dentro de cada una tenemos 2 casos:

→ a) $\sigma(i) = 1$: Entonces eliminamos 1, i y hay que formar un desarreglo de los 2 elementos restantes.
Sólo hay un desarreglo así (cruzar estos dos elementos)

→ b) $\sigma(i) \neq 1$: Entonces, los elementos 2, 3, 4 son libres de escoger sus imágenes con la condición de que el elemento 2 no puede ir al 2, el 3 no puede ir al 3, el 4 no puede ir al 4.
Entonces, hay que formar un desarreglo de 2, 3, 4 y como vimos antes, sólo hay 2 formas de hacer esto.

Entonces, en total hay 3 formas de escoger la i.

Hecho esto, hay 1 forma de escoger el camino a) y 2 formas del camino b). Para un total de 3 formas.

Entonces, las opciones totales son $(3)(3) = 9$

E2) ¿Cuántos desarreglos hay en S_n?

Definimos $d(n)$ como la cantidad de desarreglos en S_n.
Digamos que $\sigma(1) = i$ donde $i = 2, 3, \dots$ ó n. (no puede ser $\sigma(1) = 1$ por ser desarreglo)
Entonces, hay $n-1$ elecciones. Dada una elección, tenemos dos casos

↳ a) $\underline{\sigma(i) = 1}$: Entonces, podemos olvidarnos de 1 y de i que la permutación intercambia entre sí. Entonces, nos quedan $n-2$ objetos para desarreglar. Es decir, $d(n-2)$ opciones

↳ b) $\sigma(i) \neq 1$: Ahora los elementos $2, 3, \dots, n$ pueden tener cualquier imagen del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ ← sin la i porque ya está tomada por $\sigma(1)$. Con la excepción de que $\sigma(2) \neq 2$, $\sigma(3) \neq 3, \dots,$ $\sigma(i) \neq 1, \dots, \sigma(n) \neq n$.
Entonces hay que mandar los $n-1$ elementos $\{2, 3, \dots, n\}$ a los $n-1$ elementos $\{1, 2, \dots, n\}$ ← sin la i
donde cada elemento tiene una excepción a donde no puede ser mandado.
Esto es equivalente a un desarreglo de $n-1$ elementos.
Es decir, hay $d(n-1)$ opciones.

∴ Primero tenemos $n-1$ opciones para $\sigma(1)$. Y dado esto, hay $d(n-2)$ opciones en el caso a) y $d(n-1)$ en el caso b). para un total de $d(n-2) + d(n-1)$ opciones por cada una de las $(n-1)$ elecciones de $\sigma(1)$

$$\Rightarrow \quad d(n) = (n-1)\left[d(n-1) + d(n-2) \right] \quad \leftarrow \text{fórmula de recurrencia}$$

donde como vimos antes, $d(2) = 1$, $d(3) = 2$ $d(4) = 9$ son algunos valores

$$\rightarrow \quad d(n) - n\, d(n-1) = -\left[d(n-1) - (n-1)\, d(n-2) \right] \quad \leftarrow \text{restamos } n\, d(n-1)$$

Si definimos $m(n) := d(n) - n\, d(n-1)$ entonces lo anterior pasa a ser:

$m(n) = -\left[m(n-1) \right]$ con $m(3) = d(3) - 3\, d(3-1) = 2 - 3(1) = -1$
y la fórmula ↑ nos dice que m va cambiando de signo y en 3 vale -1 $\longrightarrow$ $\underline{m(n) = -1^n}$

∴ $d(n) - n\, d(n-1) = -1^n$ → dividimos por $n!$ → $\dfrac{d(n)}{n!} - \dfrac{d(n-1)}{(n-1)!} = \dfrac{-1^n}{n!}$

Escribimos la relación $\forall n$:

$$d(n)/n! - d(n-1)/(n-1)! = -1^n/n!$$
$$d(n-1)/(n-1)! - d(n-2)/(n-2)! = -1^{n-1}/(n-1)!$$
$$d(n-2)/(n-2)! - d(n-3)/(n-3)! = -1^{n-2}/(n-2)!$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Sumamos todos los renglones y del lado izquierdo queda sólo $d(n)/n!$ y del derecho $\sum_{k=1}^{n} \frac{-1^k}{k!}$

$$\rightarrow \quad \frac{d(n)}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1^k}{k!} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d(n) = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$