

# Electromagnetismo

Tomás Ricardo Basile Álvarez  
316617194

28 de enero de 2021

## 1. Cálculo Vectorial:

**Coordenadas Curvilineas:** Se utilizan tres funciones  $q_i = q_i(x, y, z)$ . Las ecuaciones  $q_i = cte_i$  describen tres superficies en  $\mathbb{R}^3$ . La intersección de estas superficies es un punto en  $\mathbb{R}^3$  que queda descrito por estas tres coordenadas curvilineas. Por ejemplo, en cilíndricas tenemos que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$   $\theta = \arctan(y/x)$   $\varsigma = z$ . Es útil tener las funciones inversas, que son  $x = x(q_1, q_2, q_3)$  ,  $y = y(q_1, q_2, q_3)$  ,  $z = z(q_1, q_2, q_3)$ .

**Vector Unitario:** El vector unitario en la dirección  $i$  es  $\hat{q}_i$  = un vector ortogonal a la superficie  $q_i = cte$  y que apunta en la dirección en la que  $q_i$  aumenta. Como tal, para calcularlo, podemos escribir  $r = (x, y, z)$  como función de las variables  $q_1, q_2, q_3$ , luego derivamos con respecto a la  $q_i$  que queramos y eso nos da el vector en la dirección en la que  $q_i$  aumenta. Finalmente, lo unitarizamos.

Sea  $r$  un punto  $(x, y, z)$  descrito como función de  $q_1, q_2, q_3$ . Entonces tendremos que:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial r}{\partial q_3} dq_3$$

La norma de los vectores  $|\frac{\partial r}{\partial q_i}|$  se llama componente de longitud a lo largo de  $q_i$  y al multiplicarlo por  $dq_i$  es el componente de longitud a lo largo de  $q_i$  diferencial.

$$h_i = \left| \frac{\partial r}{\partial q_i} \right|$$
$$ds_i = h_i dq_i$$

Si unitarizamos estos vectores  $\frac{\partial r}{\partial q_i}$  nos quedan los vectores unitarios que mencionamos antes.

Finalmente (para coordenadas ortogonales), tenemos que un pedacito de longitud  $ds$  es:

$$ds = h_1 dq_1 \hat{q}_1 + h_2 dq_2 \hat{q}_2 + h_3 dq_3 \hat{q}_3 = ds_1 \hat{q}_1 + ds_2 \hat{q}_2 + ds_3 \hat{q}_3$$

**Elemento de área:**  $d\sigma_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j$

**Elemento de Volumen:**  $d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$

### 1.1. Operaciones Diferenciales:

**Gradiente:** Dada una función  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  en coordenadas curvilíneas, definimos  $\nabla\phi$  como el vector en el que sucede el máximo crecimiento y como tal, se define como el vector tal que  $d\phi = \nabla\phi \cdot ds$ . Entonces:

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q_1} \hat{q}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q_2} \hat{q}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q_3} \hat{q}_3$$

**Divergencia:** Sea  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en coordenadas curvilíneas. entonces definimos  $\nabla \cdot V(p) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta V} F \cdot d\sigma}{\Delta V}$ . Donde la integral es la integral de superficie alrededor de una superficie que rodea a  $p$  y que se hace pequeña. Dibujando y calculando los flujos infinitesimales, se llega a que:

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (F_3 h_1 h_2) \right]$$

**Laplaciano:** El laplaciano de  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se define como  $\nabla \cdot \nabla\phi$ . Usando las fórmulas de estas cosas, se puede llegar a que:

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_2 h_1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q_3} \right) \right]$$

**Curl:** Dada una función  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se define su curl en la dirección  $\hat{q}_i$  como:  $\nabla \times F \cdot \hat{q}_i(p) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_{\sigma} F \cdot ds}{\sigma}$  donde  $\sigma$  es una curva cerrada que rodea al punto  $p$  y que es ortogonal al vector unitario  $\hat{q}_i$ . Podemos calcular los tres componentes del curl para cada vector unitario haciendo dibujitos y así. para llegar a:

$$\nabla \times F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{pmatrix} \hat{q}_1 h_1 & \hat{q}_2 h_2 & \hat{q}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{pmatrix}$$

**Segundas Derivadas:**  $\nabla \times \nabla\phi = 0$   $\nabla \cdot \nabla \times F = 0$   $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$  (Aquí el  $\nabla^2 F$  indica tomar el laplaciano de cada componente de  $F$  y juntarlos en un vector)

**Teoremas y cosas:**

**Integral de Línea (vectorial):**  $\int_C F \cdot ds = \int_a^b F(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt$  donde  $\phi(t)$  parametriza la curva  $C$ .

**Integral de Superficie (vectorial):**  $\int_S F \cdot da = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} F(\sigma(u, v)) \cdot (T_u \times T_v) dv du$  donde

$\sigma(u, v)$  parametriza la superficie  $S$ .

**Teorema Fundamental:**  $\int_C \nabla \phi = \phi(b) - \phi(a)$  donde  $C$  es una curva que une  $a$  con  $b$ .

**Teorema de la div:**  $\int_V \nabla \cdot F \, dV = \oint_{\partial V} F \cdot dA$

**Teorema de Stokes:**  $\int_S (\nabla \times F) \cdot da = \int_{\partial S} F \cdot ds$

**Equivalencias irrotacionales:** Son equivalentes (bajo ciertas condiciones):  $\nabla \times F = 0$ , Las integrales de línea de  $F$  son indep. de la trayectoria, la integral de línea por un camino cerrado es 0,  $F = \nabla V$  para alguna función escalar  $V$ .

**Equivalencias Incompresibles:** Son equivalentes (bajo ciertas condiciones):  $\nabla \cdot F = 0$ , La integral de superficie de  $F$  es independiente de la superficie para cualquier borde, la integral de superficie en una superficie cerrada es 0, existe una función  $A$  con  $F = \nabla \times A$

## 2. Electrostatica

**Carga:** Existen cargas positivas y negativas, la carga se conserva y es cuantizada. Se pueden presentar de forma puntual o distribuida.

### Teorema 2.1.

**Ley de Coulomb:** Si tenemos dos cargas puntuales  $q_1$  en posición  $r_1$  y  $q_2$  en posición  $r_2$ , entonces se presenta una fuerza entre ellas con:

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2 \widehat{r_{12}}}{|r_{12}|^2}$$

Donde  $F_{12}$  = la fuerza de la carga 1 sobre la carga 2. Además  $r_{12} = r_2 - r_1$ . Notar que  $\widehat{r_{12}}$  es un vector unitario, y lo podemos reemplazar por  $r_{12}/|r_{12}|$

**Principio de Superposición:** Las fuerzas sobre una carga debido a muchas cargas se suman vectorialmente por separado.

### Definición 2.1.

**Energía:** La energía para traer una carga puntual  $q_1$  desde el infinito hasta una distancia  $r_{12}$  de una carga puntual  $q_2$  es:

$$U = \int_{\infty}^{r_{12}} F \cdot dr = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Esta es la energía potencial de dos cargas puntuales debido a la forma en que están puestas.

**Energía de un conjunto de Cargas Puntuales:** La energía potencial total debido a la forma en que están colocadas cargas puntuales.

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}$$

**Campo eléctrico:** El campo eléctrico debido a una carga puntual  $q$  es un campo  $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que se define por  $E(p) = F(p)/q_0$  Donde  $p$  es un punto en el que colocamos una carga de prueba  $q_0$ . Es decir, ponemos una carga en  $p$ , calculamos la fuerza que sentiría  $q_0$  y dividimos esta fuerza por el valor de  $q_0$ . Para una carga puntual  $q$  localizada en  $r_1$ , se calcula como:

$$E(p) = k \frac{q r_{1p}}{|r_{1p}|^3}$$

Donde  $r_{1p} = \widehat{p - r_1}$  es el vector unitario que va de  $r_1$  al punto  $p$  en el que estamos midiendo.

**Campo eléctrico de una distribución de carga:** Si tenemos una distribución de cargas dada por  $\rho(x', y', z')$  (a cada punto le da la densidad volumétrica de carga). Entonces, el campo eléctrico en un punto  $(x, y, z)$  se calcula como:

$$E(x, y, z) = k \int \frac{\rho(x', y', z')}{|r - r'|^3} (r - r') dV'$$

Es decir, partimos la distribución de cargas en pequeños pedazos con carga  $\rho(x', y', z') dV'$  y sumamos (integramos) sus contribuciones del campo eléctrico.  $r'$  varía sobre la posición de las cargas. La misma fórmula es válida para distribuciones de carga superficiales, en las que la densidad se reemplaza por  $\sigma$ . Para calcularla, primero parametrizamos el objeto con 1, 2, o 3 variables dependiendo de si es una distribución lineal, superficial o volumétrica. Esta parametrización es  $r'$ . Por otro lado  $r$  es  $(x, y, z)$  es el punto en el que queremos medir el campo. Finalmente calculamos  $dV'$  según la parametrización usada y luego integramos.

**Flujo Eléctrico:** El flujo del campo eléctrico a través de una superficie  $S$  es:

$$\Phi_{E S} = \int_S E \cdot da$$

Se parametriza la superficie  $S$ , se calcula su vector de área y luego se calcula el flujo de  $E$  por esta superficie.

### Teorema 2.2.

**Ley de Gauss:** Para una superficie  $S$  cerrada, se cumple que:

$$\int_S E \cdot da = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\text{Forma diferencial: } \nabla \cdot E(r) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Donde  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$

La ley de Gauss integral se evalúa sobre una superficie, mientras que la ley diferencial se tiene que evaluar en un punto en particular  $r$ .

Con la ley de Gauss se puede calcular el campo eléctrico de varias cosas (sin usar la fórmula para distribuciones de carga). Es necesario que la distribución tenga cierta simetría y se usa una superficie de Gauss que aproveche esta simetría para que el flujo eléctrico sea simplemente  $|E||A|$  (donde  $|E|$  es este valor constante). Con esto se puede calcular que el campo debido a una esfera es como el campo debido a su carga total localizada en el centro, o que el campo debido a una línea es  $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{s}$  y el campo debido a un plano es igual en cualquier punto y vale  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}$ .

Cuando el campo  $E$  pasa através de una superficie con densidad de carga  $\sigma$ , entonces  $\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon}$ .

Es el valor por el que cambia  $E$  perpendicular al atravesar una superficie con densidad de carga  $\sigma$ .

**Energía asociada al campo:** Si queremos calcular la energía total debida a un campo, es:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |E|^2 dV$$

Donde esta integral se realiza a lo largo de todo el espacio.

### 3. El potencial eléctrico

Para un campo electrostático, la integral de línea  $\int_{p_1}^{p_2} E \cdot ds$  es independiente del camino que se utilice entre  $p_1$  y  $p_2$ . (Se puede demostrar calculándolo para el campo de una sola carga, luego, partimos la trayectoria en pedazos radiales y angulares, las partes angulares no suman nada y las radiales suma  $1/r$ ).

**Definición 3.1.**

**Diferencia de Potencial (entre  $p_1$  y  $p_2$ ) :** Se define como:

$$\phi_{21} = - \int_{p_1}^{p_2} E \cdot ds$$

Que no depende de la trayectoria. También podemos definir el potencial con respecto al infinito, para que así ahora es una función que depende de un solo punto  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a cada punto le da como resultado la diferencia de potencial con respecto al infinito (donde el potencial vale 0). Y si queremos la diferencia de potencial entre dos puntos como antes,

sólo calculamos el potencial con respecto al infinito en cada punto según esta función y los restamos. Se puede probar realizando la integral de línea desde el infinito, que para una carga puntual, el potencial en el espacio es  $\phi(x, y, z) = k \frac{q_0}{\varrho}$  donde  $\varrho$  es la distancia entre la carga y el punto de medida.

**Potencial con respecto al infinito:** El potencial con respecto al infinito debido a una distribución  $\rho$  medido en un punto  $(x, y, z)$  es:

$$\phi(x, y, z) = \int k \frac{\rho(x', y', z') dV'}{|r - r'|}$$

Donde la integral se toma variando sobre el volumen de carga (o superficie o curva) con  $r'$  un punto parametrizado sobre este volumen, y el punto  $r$  es el punto en el que medimos el potencial. Esto es porque usamos superposición de la fórmula para una carga puntual, tomando muchas cargas puntuales  $\rho(x', y', z')dV'$

**Teorema:**

$$E = -\nabla\phi$$

Por esta razón, llegamos a que para campos electrostáticos, se tiene que  $\nabla \times E = 0$ .

**Definición 3.2.**

**Energía potencial electrostática:** La energía para llevar una carga  $q$  desde un punto  $p_1$  hasta uno  $p_2$  es

$$W = q\phi_{p_1 p_2}.$$

Esto se puede ver a partir de la definición de  $\phi$  como integral de línea del campo eléctrico y del hecho de que  $qE$  es la fuerza, entonces la integral de línea de esta cantidad es el trabajo.

**Energía potencial de formar una distribución de carga:**

$$U = \frac{1}{2} \int \rho\phi dV \quad \text{o bien,} \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{i,j}}$$

Para el lado izquierdo, esto es porque estamos sumando  $\rho dV$  es una carguita y estamos sumando cada carguita por el potencial en el lugar al que llega.

**Teorema 3.1.**

**Ecuación de Poisson y Laplace:** Con el potencial, la ecuación de Gauss diferencial toma una nueva forma:

$$\nabla^2 \phi(p) = -\frac{\rho(p)}{\epsilon_0}$$

En un punto sin cargas,  $\nabla^2 \phi = 0$

**Definición 3.3.**

**Dipolo:** Un dipolo consiste en dos cargas opuestas  $\pm q$  a una distancia  $l$ . El momento dipolar de este dipolo se define como  $p = ql$  que apunta de la carga negativa a la positiva.

El potencial en un punto  $p$  es:  $\phi(p) = \frac{kq}{|r - r_1|} - \frac{kq}{|r - r_2|}$  Luego, haciendo dibujitos y usando la ley de cosenos, se puede llegar a que esto es igual a:

$$\phi(r, \theta) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E = -\nabla\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

Donde está escrito en coordenadas polares,  $r$  es la distancia con respecto al centro del dipolo y  $\theta$  el ángulo con respecto a la carga positiva en sentido horario. Para  $E$ , se describe el campo con respecto a los vectores unitarios y se puede llevar a una expresión cartesiana usando sus expresiones en coordenadas cartesianas (expresar un punto  $(x, y)$  como función de  $r, \theta$  y derivar con respecto a una de las variables y luego unitarizar).

## 4. Conductores:

**Definición 4.1.**

**Conductor:** Un conductor es un material con todas sus cargas perfectamente libres. Cuando se coloca un campo eléctrico externo, estas cargas se mueven y acomodan hasta alcanzar el equilibrio.

**Teorema: Un conductor en equilibrio cumple lo siguiente:**

- 1)  $E = 0$  en todo punto dentro del conductor (sino no estaría en eq.)
- 2)  $\rho = 0$  dentro del conductor
- 3)  $\phi = \phi_k$  es constante dentro de cada conductor.
- 4) En la superficie,  $E$  es perpendicular y tiene valor  $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

Dem: Las primera 3 proposiciones se deben a que su negación indicaría que el conductor no está en equilibrio. La 4 se debe a que  $E$  es el gradiente de  $\phi$  y se puede usar la ley de Gauss con un pastillero para llegar a la expresión.

**Ejemplo 4.1.**

Si tenemos una cáscara de esfera conductora neutra, con una carga  $q$  adentro, podemos poner una superficie de Gauss esférica justo dentro del conductor, donde el flujo será 0 (porque  $E = 0$ ). Y por tanto, la carga interior es 0. Entonces la carga en la superficie interior de la cáscara es  $-q$  (y no se distribuye uniformemente). Como el conductor es neutro, la superficie exterior tiene carga  $q$  y sí se distribuye uniformemente (porque estas cargas exteriores no 'sienten' a las cargas de la cara interior porque el conductor las separa). Entonces, en cualquier punto fuera de la cáscara, el campo es como si  $q$  estuviera en el centro.

**Teorema 4.1.**

**Teorema de Unicidad:** Para un conjunto de conductores a unos potenciales  $\phi_k$  dados. Entonces si encontramos una función  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que en los conductores tome el valor  $\phi_k$  y que cumpla con la ecuación de Poisson, entonces ES la función de potencial y es la única solución.

**Método de imágenes:** Digamos que quiero calcular el campo eléctrico de un conjunto de cargas con un conjunto de conductores. Entonces, el método consiste en reemplazar un conductor por una carga imaginaria de tal forma que en el espacio donde estaba el conductor, el campo eléctrico sea ortogonal al conductor (cumpla las condiciones frontera), entonces el campo de las cargas y la carga imagen es la solución al problema original de campo eléctrico.

**Definición 4.2.**

**Capacitancia:** Un capacitor es cualquier par de conductores en el espacio. Si un conductor se carga a  $Q$  y el otro a  $-Q$ , entonces entre ellos se crea una diferencia de potencial  $\Delta\phi$ . Esta diferencia de potencial es directamente proporcional al valor de  $Q$ . Por lo tanto, definimos la capacitancia de este arreglo como:

$$Q = C\Delta\phi$$

Esta  $C$  depende únicamente del arreglo de los conductores y su geometría.

También podemos definir la capacitancia para un solo conductor (en vez de 2). Lo que hacemos es pensar que el infinito es un conductor a potencial 0 y usamos el conductor y el infinito como el par de conductores necesarios para la capacitancia.

Por ejemplo, para un solo conductor esférico de carga  $Q$ , el potencial en la superficie (a distancia  $r$ ) es  $k\frac{Q}{r}$  y el potencial en el infinito es 0. Por lo que el factor de proporcionalidad

$$C = Q/\Delta\phi = \frac{r}{k}.$$

Para dos planos a distancia  $s$ , el campo entre ellos es ortogonal a los planos y tiene valor  $\sigma/\epsilon_0$ . Por lo tanto, la diferencia de potencial entre los planos es  $\int_{p_1}^{p_2} E \cdot ds$  (donde  $p_1$  y  $p_2$  son puntos cualquiera en el primer y segundo conductor). Entonces la diferencia de potencial es  $\Delta\phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0}s$ . Entonces, la capacitancia es  $C = \frac{Q}{\phi} = \frac{Q\epsilon_0}{\sigma s} = \frac{A\epsilon_0}{s}$ .

Si hay muchos conductores, la carga en cada uno es una combinación lineal de los potenciales de cada conductor. Los coeficientes son las capacitancias.



**Fórmula diferencial:** Tenemos que  $Q = C\phi$  pero se puede escribir también como  $-\int I dt = C\phi$  o bien,  $I = -C \frac{d\phi}{dt}$ .

**Energía de un capacitor:** La energía guardada por un capacitor es:  $U = \frac{1}{2}C\phi^2$

## 5. Corrientes Eléctricas

### Definición 5.1.

**Corriente:** Una corriente se forma por el flujo de cargas. Se define  $I$  como la cantidad de carga que pasa por un punto por segundo, y se mide en Ampere.

**Densidad de Corriente:** La densidad de corriente es la cantidad de corriente que atraviesa una superficie por unidad de área. Tenemos que  $J = I/A$ .

Si tenemos  $n$  cargas con carga  $q$  y velocidades  $u$  que atraviesan una superficie, entonces el flujo de corriente es:  $J = nqu$  (que es un vector que mide la carga que atraviesa una superficie por unidad de superficie).

Por último, tenemos que la cantidad de corriente total que atraviesa la superficie es:  $I = \int J \cdot dA$

### Teorema 5.1.

**Ecuación de Continuidad:**

$$\nabla \cdot J(p) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}(p)$$

Que básicamente describe la conservación de la carga.

Para una corriente estacionaria (en la que no aparece ni desaparecen carga), se cumple que  $\nabla \cdot J = 0$

**Ley de Ohm:** La ley de Ohm dice que si tenemos un campo eléctrico  $E$  en un cuerpo, entonces se genera una densidad de corriente proporcional:

$$J = \sigma E$$

Aquí  $\sigma$  es un tensor y se le conoce como conductividad y depende de cada cuerpo. En modelos sencillos se simplifica a pensar en  $\sigma$  como un número real y no un tensor.

La ley de Ohm escrita como antes nos lleva a:

$$V = RI$$

Aquí  $R$  es una constante de proporcionalidad.

Podemos escribir esta ec. como  $\int E \cdot ds = R \int J \cdot dA$ , entonces  $EL = RJA$ , por lo tanto  $E/J = \frac{AR}{L}$  por lo que tenemos que:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{AR}{L}$$

Al inverso de  $\sigma$  se le llama resistividad y es también una propiedad intrínseca de los materiales.

## Circuitos

### Teorema 5.2.

**Leyes de Kirchhoff:** 1) Dado un circuito cerrado, la suma de los voltajes es 0. 2) En un nodo de un circuito, la cantidad de corriente que entra es igual a la que sale.

**Suma de resistencias:** En serie se suman y en paralelo se reciprosuman. Un arreglo en triángulo (delta) se puede convertir en un arreglo en estrella. Las fórmulas se obtienen igualando las resistencias entre los mismos extremos.

**Poder disipado:** El poder disipado por una resistencia es  $P = I^2 R = IV$

### Teorema 5.3.

**Teorema de Thevenin:** Cualquier circuito encerrado en una 'caja negra' es equivalente a un circuito de una sola source  $\xi_{eq}$  y una resistencia  $R_{eq}$

**Suma de capacitancias:** Las capacitancias en un circuito se suman en paralelo y se reciprosuman en serie.

**Circuito RC:** Un circuito formado por una resistencia y una capacitancia. Hay de dos:

**En carga:** Circuito formado por una batería con voltaje  $V$ , una resistencia  $R$  y una capacitancia  $C$ . Por la ley de Kirchhoff 1:  $V = IR + Q/C \Rightarrow V = Q'R + Q/C$ . Y tenemos el valor inicial  $Q(0) = Q_0$ . Tras resolverlo, obtenemos que  $Q(t) = CV - (CV - Q_0) e^{-\frac{t}{RC}}$

**Descarga:** Tenemos un capacitor con carga inicial  $Q_0 > 0$  y no hay una pila, ahora cerramos el circuito con una resistencia  $R$ . Entonces nos queda que  $0 = Q'R + Q/C$  por lo que la solución es  $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

## 6. Campo de Cargas en Movimiento:

**Invariancia de Carga:** La carga dentro de una superficie  $S$  es la misma sin importar el marco de referencia desde el que se vea. Donde la carga dentro de la superficie se define como  $Q = \int_S E \cdot da$

**Transformada de Lorentz:** Si un sistema de referencia  $S'$  se mueve a velocidad  $v$  con respecto a un sistema  $S$ , definimos:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x)$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t)$$

$$\Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z$$

**Campo eléctrico en diferentes frames:** Tenemos dos planos con densidad  $\sigma$  y el sistema  $S'$  se mueve a velocidad  $v$  en la dirección paralela a los planos. Entonces el campo en este frame es  $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\gamma\sigma}{\epsilon_0} = \gamma E$

Debido a que en una dirección, la longitud de las placas se contrae pero por la invariancia, la carga total se mantiene y por tanto la densidad aumenta. Por lo tanto, el campo cambia de valor en el nuevo sistema de referencia según:

$$\begin{aligned} E'_{||} &= E_{||} \\ E'_{\perp} &= \gamma E_{\perp} \end{aligned}$$

Donde  $||$  representa cualquier dirección paralela al movimiento del sistema de referencia  $S'$  con respecto a  $S$  y  $\perp$  una dirección perpendicular. Aunque lo probamos sólo para planos, es válido para cualquier cosa, pues un observador no sabe a qué se debe las flechas de campo que ve.

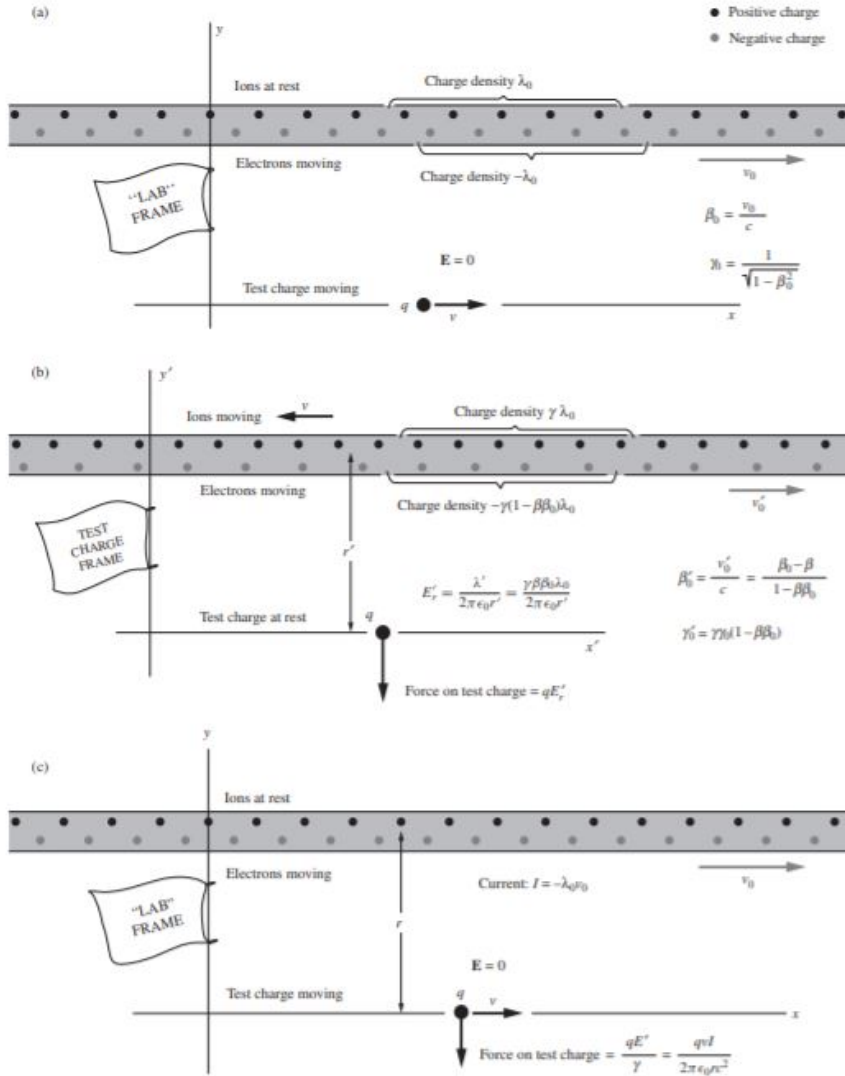
**Fuerzas:** Si un sistema  $S'$  se mueve respecto a un sistema  $S$ , entonces la relación entre las fuerzas en ambos sistemas es:

$$\begin{aligned} F_{||} &= F'_{||} \\ F_{\perp} &= \frac{1}{\gamma} F'_{\perp} \end{aligned}$$

Donde el frame normal es el frame del lab y el primado es el frame de la partícula a la que se le imprime la fuerza. Por lo tanto, la fuerza transversal al movimiento de una partícula es máxima en el frame de la partícula.

Por otro lado, el campo eléctrico es mínimo en el Frame en el que el source está quieto.

### Interacción de Cargas en Movimiento:



Tenemos un cable con electrones y protones. Desde el punto de vista del Lab frame, los electrones están en movimiento a velocidad  $v_0$  y la carga de prueba está a velocidad  $v$ . Sin embargo, desde este punto de vista, la densidad de electrones cancela a la de protones y no hay fuerzas eléctricas.

Desde el punto de vista del Charge Frame, las cargas positivas se mueven a velocidad  $v$  a la izquierda y tienen una densidad  $\gamma\lambda_0$  ( $\gamma$  es el factor de la velocidad  $v$ ) y los electrones se mueven a  $v'_0 = v_0 \oplus -v = \dots - \frac{-v + v_0}{1 - \frac{vv_0}{c^2}}$ . La densidad de electrones en el lab frame era

$\lambda_0$  por lo que en SU frame era  $\lambda_0/\gamma_0$  por lo que en el frame de  $q$  es  $\lambda'_0 = \gamma'\lambda_0/\gamma_0$  (donde  $\gamma'$  es el factor asociado a  $v'_0$ ). Podemos calcular este factor a partir de los otros y resulta ser  $\gamma' = \gamma\gamma_0(1 - \beta\beta_0)$ .

Por lo que la densidad de electrones en el charge frame es  $\lambda' = \gamma(1 - \beta\beta_0)\lambda_0$  Y en este frame, la densidad total del cable es la de protones menos electrones:  $\gamma\lambda_0 - \gamma(1 - \beta\beta_0)\lambda_0 = \gamma\beta\beta_0\lambda_0$ .

Entonces, el campo radial en el charge frame (recordar la formula del campo de un cable) es  $E'_r = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r'} = \frac{\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r'}$ .

Es decir, un campo distinto de 0. Pero si ésta es la fuerza en el charge frame, entonces debe de haber una fuerza en el lab frame según las fórmulas de fuerza, debe de ser igual a:

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma} = \frac{q\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Pero  $I = \lambda_0 v_0 = \lambda_0 \beta_0 c$  por lo que sustituyendo en la fórmula y sustituyendo las  $\beta$  obtenemos en el lab Frame (donde  $v_x$  es la velocidad de  $q$ ):

$$F_y = \frac{qv_x I}{2\pi\epsilon_0 r c^2}$$

Pero esto es imposible, porque no hay un campo eléctrico en este Frame, para arreglar esto, definimos un nuevo campo llamado campo magnético  $B$ .

### Definición 6.1.

**Fuerza de Lorentz:** Cargas eléctricas en movimiento experimentan una fuerza eléctrica y 'magnética':

$$F = q(E + v \times B)$$

O bien, la fuerza sobre un pequeno trozo de alambre  $dl$  con corriente  $I$  es:

$$dF = Idl \times B$$

**Def. del campo  $B$ :** El campo  $B$  magnético es el necesario para que se cumpla la relación de la fuerza de Lorentz. Entonces por el ejemplo anterior, para que se cumpla esto, para una corriente  $I$  en la dirección  $x$  se debe de tener un campo magnético  $B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 r c^2} \hat{z}$ . Para que así la fuerza de Lorentz coincida con la fuerza que calculamos en el lab frame.

## 7. Campo magnético:

### Teorema 7.1.

**Ley de Gauss Magnética:**  $\nabla \cdot B = 0$  o bien, en su forma integral:  $\oint_S B \cdot da = 0$  para toda superficie cerrada.

**Ley de Ampere:** (Para corrientes Steady campos electrostáticos con  $\nabla \cdot J = 0$ ) tenemos que:  $\oint_C B \cdot ds = \mu_0 I$  (donde  $I$  es la carga que atraviesa la zona encerrada por la curva  $C$ ) o bien, en su forma diferencial:  $\nabla \times B = \mu_0 J$

### Definición 7.1.

**Potencial Vectorial:** Como  $B$  es incompresible, existe un potencial vectorial que denotamos  $A$  con:

$$B = \nabla \times A$$

Y podemos imponer que  $\nabla \cdot A = 0$  para definirlo bien. Luego, tenemos que  $\mu_0 J = \nabla \times B = \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$  (por BAC - CAB [considerar que  $\nabla^2 A$  indica tomar el Laplaciano de cada componente de  $A$  y luego ponerlos en un vector]).

Por lo tanto, nos queda que  $\nabla^2 A_i = J_i$ . Pero una ecuación similar describía al potencial eléctrico (con  $\rho$  en vez de  $J_i$ ) y la solución era la integral que define al potencial eléctrico, entonces suponiendo algo similar para  $A$ , obtenemos:

$$A_i(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_i(x', y', z')}{|r - r'|} dV'$$

Luego, para corrientes estables en un wire delgado, tenemos que  $JdV = Idl$  por lo que la fórmula anterior pasa a ser:

$$A(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl}{|r - r'|}$$

Si ahora tomamos un pedacito de cable que pase por el origen con dirección  $x$ , tendremos que:  $dA = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{x}$ . Pero como  $dB = \nabla \times dA$ , tenemos que:  $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ydl}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 I \sin(\phi)}{4\pi r^2} \hat{z}$ . Con esto llegamos a:

### Teorema 7.2.

**Ley de Biot Savaart:** Para distribuciones con corriente steady  $\nabla \cdot J = 0$ , se cumple:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times r}{|r|^3}$$

o bien,  $B(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \times (r - r')}{|r - r'|^3}$

Donde  $r'$  varía a lo largo del cable.

Entonces, para calcular el campo mag debido a un cable, lo parametrizamos ( $r'$ ), calculamos su vector tangente  $dl$  (que es la derivada de la parametrización) y calculamos la integral ( $r = (x, y, z)$ )

Sin embargo, suele ser más fácil usar la ley de Ampere cuando se espera que el campo tenga cierta simetría. Por ejemplo, el campo de un solenoide de  $n$  vueltas por unidad de longitud con corriente  $I$  es  $B = \mu_0 n I$  adentro y  $B = 0$  afuera.

**Comportamiento de Frontera:** Si tenemos una hoja con densidad lineal de corriente  $\iota$  (cantidad de corriente que pasa por la hoja por longitud de franja de la hoja), entonces el campo  $B$  cambia de un lado a otro de la hoja según:

$$\Delta B_{||} = \mu_0 \iota$$

**Transformaciones del campo mag y elec.:** Si tenemos un frame  $S'$  que se mueve a  $v$  con respecto a un frame  $S$ , entonces:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} & E'_{\perp} &= \gamma(E_{\perp} + v \times B_{\perp}) \\ B'_{\parallel} &= B_{\parallel} & B'_{\perp} &= \gamma(B_{\perp} - (v/c^2) \times E_{\perp}) \end{aligned}$$

Sin campo  $B$ , estas fórmulas se reducen a las que ya conocíamos para  $E$ . Si hay un frame en el que  $B = 0$  (un frame con todas las cargas quietas), entonces en todos los frames se tiene que  $B = -(v/c^2) \times E'$ . Si hay un frame con  $E = 0$ , entonces en todos los frames se cumple que  $E' = v \times B'$

**Efecto Hall:** Un campo magnético externo a un bloque con cargas en movimiento horizontal, causa que las cargas se desvíen para abajo y se amontonen en la parte inferior. Después de un tiempo, se amontonan tantas que se crea un campo eléctrico hacia arriba que contrarresta la fuerza hacia abajo, por lo que a partir de entonces, las cargas en medio seguirán fluyendo. Sin embargo, se habrá creado un potencial entre arriba y abajo.

**Movimiento ciclotrónico:** Si tenemos un campo  $B = B_0 \hat{z}$  y tiramos una carga  $q$  en el plano  $XY$  con velocidad  $v$ , entonces sentirá una fuerza de lorentz  $F = qv \times B$ . Digamos que la curva que describe la partícula es  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$  entonces su velocidad es  $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), 0)$  y su aceleración  $\alpha''(t) = (\alpha''_1(t), \alpha''_2(t), 0)$ . Si sustituimos esto en la ec. de la fuerza de Lorentz, obtenemos que se mueve en un movimiento circular, de frecuencia  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$ .

## 8. Inducción Electromagnética:

Faraday descubrió que una corriente en un circuito se puede inducir por una corriente cambiante en otro circuito a distancia. Si un loop cuadrangular de lado  $w$  se mueve por un campo magnético ortonormal al loop a velocidad  $v$ . Entonces, la primera arista del Loop sentirá una fuerza de Lorentz proporcional a  $vwB_1$  que mueve a las cargas hacia abajo. Mientras tanto, la arista trasera sentirá una fuerza proporcional a  $vwB_2$  que mueve a las cargas hacia arriba. En total, empezará a circular una corriente en el loop con emf =  $vw(B_1 - B_2)$ . En el caso más general, tenemos:

### Teorema 8.1.

**Ley de Faraday:** Dado un cable en un campo magnético dentro del cual atraviesa un flujo  $\Phi$ , se genera un emf igual a:

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt}$$

O en forma diferencial:  $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

El signo introducido se denomina **Ley de Lenz** e indica que el campo magnético que genera la corriente en el cable debe de oponer al campo magnético inicial.

**Definición 8.1.**

**Inductancia:** Si tenemos dos circuitos  $C_1$  y  $C_2$ , una corriente  $I_1$  por el primer circuito creará un campo magnético  $B_1$  en el espacio que llegará hasta el circuito  $C_2$  y le atravesará un flujo  $\Phi_{21}$  (flujo en circuito 2 debido a corriente en circuito 1). Estas cantidades son proporcionales y definimos entonces:

$$M_{21} = \Phi_{21}/I_1$$

Entonces, se sigue que sobre  $C_2$  se crea un emf igual a  $\xi_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$ .

Esta  $M_{12}$  es la inductancia en  $C_2$  debido a  $C_1$ , pero resulta que  $M_{12} = M_{21}$  y es un valor que depende de la geometría del sistema.

**Autoinductancia:** Similarmente podemos definir la autoinductancia en un cable. Una corriente  $I$  pasa por el circuito, que crea un campo magnético  $B$  que atraviesa el circuito y genera un flujo  $\Phi$ . Entonces la autoinductancia es:

$$L = \frac{\Phi}{I} = M_{11}$$

Y es una constante que depende de la forma del circuito. Sobre el circuito se genera una Emf  $= \frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$

Por ejemplo, en un solenoide, se tiene una corriente  $I$ , que genera un campo  $B = \mu_0 n I$  dentro del solenode, con un flujo  $\Phi = \mu_0 n I A N$  ( $N$  = num de vueltas totales) que por tanto tiene una inductancia  $L = \Phi/I = \mu_0 N^2 A/l$  ( $l$  = longitud por vuelta)

**Inductor:** Un elemento de un circuito con Inductancia. Si un switch es abierto o cerrado, el inductor se resiste a los cambios de corriente (generando un emf opuesto). Como se mostró antes, el inductor tiene la fórmula:

$$\xi = -L\frac{dI}{dt}$$

Y guarda una energía  $U = \frac{LI^2}{2}$

**Circuitos LR: Carga:** Un circuito con un inductor  $L$  y una resistencia  $R$  y una pila  $\xi_0$ :

Por la primera ley de Kirchoff:  $\xi_0 = RI + L\frac{dI}{dt}$ . Y digamos que  $I(0) = I_0$ , entonces al resolver

queda:  $I(t) = \frac{\xi_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$



**Descarga:** Un inductor  $L$  y una resistencia  $R$  por los que ya pasa cierta corriente  $I_0$ .

Por la primera ley de Kirchhoff:  $L \frac{dI}{dt} = RI$ , entonces al resolver nos queda que  $I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$

## 9. Circuitos AC:

### 9.1. Circuitos RLC sin y con emf

Empezamos con un problema inicial. Digamos que tenemos un circuito  $RCL$  sin emf externos. Entonces, tiene una corriente  $I = -\frac{dQ}{dt}$  (donde  $Q$  es la carga del capacitor) y  $Q = CV$ . donde  $V$  es el voltaje entre las placas del capacitor (o bien, podemos resumir estas dos ecuaciones en  $I = -C \frac{dV}{dt}$ ). El voltaje  $V$  del capacitor debe de ser igual a la caída de voltaje en el resto del circuito  $V = L \frac{dI}{dt} + RI$ .

Juntando esto, nos queda la siguiente ODE de 2 orden en  $V$ :

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = 0.$$

La cual se resuelve como es típico, proponiendo una solución del tipo  $V = Ce^{\omega t}$ . Pueden suceder tres casos:

1) Overdamping: que las dos raíces de  $\alpha$  sean reales, y entonces la solución sea del tipo  $V(t) = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t}$  (resulta que  $m_1$  y  $m_2$  serán negativas por los símbolos de las expresiones en la EDO).

2) Underdamping: Que las dos raíces sean complejas del tipo  $-a \pm bi$  y por tanto al tomar las soluciones reales nos quede algo así como:

$$V(t) = e^{-at}(A \cos(bt) + B \sin(bt))$$

3) Critical Damping: Si las dos raíces son reales e iguales, la solución se verá como:  $V(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$

4) Caso especial: (Si  $R = 0$ ) En este caso tenemos la ecuación de oscilador armónico simple y la solución es del tipo:  $V(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  (Donde  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ )

#### Circuito RLC con EMF:

Si tenemos un EMF oscilador del tipo  $\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t)$ , las cosas se complican. En este caso, al aplicar la ley de Kirchhoff, nos queda:

$$L \frac{dI}{dt} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = \xi_0 \cos(\omega t)$$

Que se puede resolver con lo de resolver la homogénea (es una EDO lineal de 2 grado en  $Q$  y luego sumarle la particular).

Existe una forma alternativa de resolverla. Sustituimos  $\xi_0 \cos(\omega t)$  por la compleja  $\xi_0 e^{i\omega t}$  y escribimos una ecuación compleja:

$$L \frac{d\bar{I}}{dt} + R\bar{I}(t) + \frac{\bar{Q}(t)}{R} = \xi_0 e^{i\omega t}$$

Después proponemos una solución compleja del tipo  $\bar{I}(t) = \bar{I}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \bar{Q}(t) = \frac{\bar{I}_0}{i\omega} e^{i\omega t}$

Donde  $\bar{I}_0$  y  $\bar{Q}_0$  son números complejos. La parte real de esta solución compleja será la solución a la ecuación original.

Luego, metemos estas predicciones en la ecuación compleja y resolvemos para  $\bar{I}_0$ .

Entonces nos queda que  $Li\omega\bar{I}_0 e^{i\omega t} + R\bar{I}_0 e^{i\omega t} + \frac{\bar{I}_0 e^{i\omega t}}{i\omega C} = \xi_0 e^{i\omega t}$   
despejando:  $\bar{I}_0 = \frac{\xi_0 [R - i(\omega L - 1/\omega C)]}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$

Lo cual lo podemos escribir en su forma polar como:  $I_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{i\phi}$  (Su magnitud es el factor de enfrente, que denotamos  $I_0$  y su ángulo es  $\phi$ )

Entonces  $\bar{I}(t) = I_0 e^{i\phi} e^{i\omega t}$

Donde  $I_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$  ,  $\tan(\phi) = \frac{1}{R\omega C} - \frac{\omega L}{R}$

La parte real de esta solución será la solución al circuito original, que por lo tanto es:  
 $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \phi)$

Y listo.

## 9.2. Redes de AC:

Digamos ahora que tenemos redes de circuitos AC, con muchos capacitadores, resistencias e inductores. Entonces, las corrientes y voltajes se pueden representar por medio de números complejos que simplifican el análisis.

Una corriente real  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$  es **Representada por el complejo**  $I_0 e^{i\phi}$  (que antes era el módulo de la solución compleja).

El número  $x + iy$  **representa** a la corriente  $I(t)$  si la corriente está dada por la parte real de  $(x + iy)e^{i\omega t}$ . Es decir,  $I_0 e^{i\omega t}$  representa a  $I(t)$  si  $I(t) = \text{Re}(I_0 e^{i\phi} e^{i\omega t})$

La representación de una solución  $I(t)$  nos da toda la información que necesitamos sobre la solución (es decir, su norma y su ángulo). Solución:  $I_0 \cos(\omega t + \phi)$  , representación:  $I_0 e^{-i\phi}$

**Teorema 9.1.**

La representación de la suma de dos corrientes es igual a la suma de sus representaciones.

**Definición 9.1.**

Si tenemos una corriente  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$  y un voltaje  $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta)$  que tienen representaciones  $\bar{I} = I_0 e^{i\phi}$  y  $\bar{V} = V_0 e^{i\theta}$ . Entonces definimos:

**Admitancia:** Es el complejo  $Y$  con  $\bar{I} = Y\bar{V}$

**Impedancia:** Es el complejo  $Z$  con  $\bar{V} = Z\bar{I}$

Vemos que  $\frac{1}{\bar{Y}} = \bar{Z}$

**Teorema 9.2.**

Las impedancias se suman en serie y las admitancias se suman en paralelo.

**Ejemplo 9.1.**

**Impedancias de cada elemento por separado:**

**Resistencia:** Tenemos un voltaje  $V(t) = \xi_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \bar{V} = \xi_0$

Entonces, la corriente es:  $I = \frac{\xi_0}{R} \cos(\omega t) \Rightarrow \bar{I} = \frac{\xi_0}{R}$ .

Podemos así calcular:  $Z = R$  ,  $Y = \frac{1}{R}$

**Capacitancia:**  $V = \xi_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \bar{V} = \xi_0$

$I = -C \frac{dV}{dt} = C\xi_0\omega \sin(\omega t) = C\xi_0\omega \cos(\omega t + \pi/2) \Rightarrow \bar{I} = C\xi_0\omega e^{\frac{\pi}{2}i}$

Entonces, nos queda que  $Z = \frac{1}{C\omega i}$  ,  $Y = C\omega i$

**Inductancia:**  $V = \xi_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \bar{V} = \xi_0$

$I = -\int \frac{V}{L} = -\frac{\xi_0}{\omega L} \sin(\omega t) = -\frac{\xi_0}{\omega L} \cos(\omega t + \pi/2) \Rightarrow \bar{I} = -\frac{\xi_0}{\omega L} e^{\frac{\pi}{2}i} = -\frac{\xi_0}{\omega L} i$

Entonces, nos queda que  $Z = \omega Li$  ,  $Y = -\frac{i}{\omega L}$

**Método de Impedancias y admitancias:**

1) Asignar las impedancias e impedancias de todos los elementos según los ejemplos anteriores. Sumarlas todas para obtener la impedancia total.

2) Escribir  $\bar{V} = Z\bar{I}$  para todo el circuito o partes de él. Obtener la corriente de todo el circuito.

Resolver como se resolvería un circuito normal. Calcular los voltajes y corrientes de cada parte.

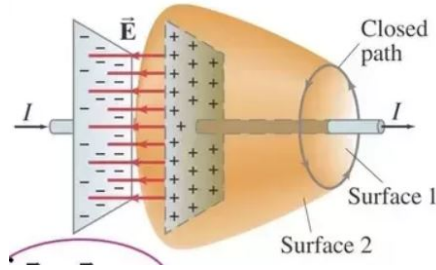
## 10. Ecuaciones de Maxwell y ondas EM

Ya tenemos bien tres de las cuatro leyes de Maxwell (la de Gauss para campos eléctricos y magnéticos y la de Faraday). Sin embargo, la ley de Ampere sigue siendo problemática. Pues la versión diferencial dice:

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

Sin embargo, esto implica (al sacar div de ambos lados) que  $\nabla \cdot J = 0$ . De hecho, la ley de ampere sólo es válida para steady corrientes pero no se vale sino, pues la ecuación de continuidad nos dice que  $\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ .

**Ley de Ampere para corrientes no-estables:**



Para corrientes no estables, parece que falta sumarle algo a la ley de Ampere. Por ejemplo, si tenemos un capacitor en procedimiento de cargarse, podemos poner una superficie gaussiana como en la figura. En la superficie 1, sí se cumple que  $\int \nabla \times B \cdot dA = \int B \cdot dl = \mu_0 I$ . Sin embargo, en la superficie 2, tenemos que el flujo de corriente que atraviesa la superficie es 0 y sin embargo, la integral de línea es la misma que la superficie 1, por lo que no vale 0.

Lo que pasa es que nos falta algo en la ley. Buscando simetría con la ley de Faraday ( $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ ), podemos proponer algo tipo:

$$\nabla \times B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \text{ Entonces la ley completa será:}$$

**Ley de Ampere:**

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Si ahora calculamos la divergencia de ambos lados, del lado izquierdo nos queda 0 y del derecho metemos el operador divergencia dentro de la derivada temporal:  $0 = \mu_0 \nabla \cdot J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} (\nabla \cdot E)$  y usando la ecuación de Poisson,  $\mu_0 (\nabla \cdot J + \epsilon_0 (\frac{\partial}{\partial t} (\rho/\epsilon))) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot J = -\frac{d}{dt} \rho$

Que es la ecuación de continuidad.

En la ecuación de Ampere completa, al término  $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$  se le conoce como corriente de desplazamiento y se escribe como  $J_D$

### Ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} & \nabla \times B &= \mu_0 \left( J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \\ \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot B &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} E \cdot dl &= -\frac{\partial \Phi_{BS}}{\partial t} & \oint_{\partial S} B \cdot dl &= \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{BS}}{\partial t} \\ \oint \oint_{\partial V} E \cdot dA &= \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} & \oint \oint_{\partial V} B \cdot A &= 0\end{aligned}$$

### Ecuaciones de Maxwell diferenciales en el vacío:

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} & \nabla \cdot E &= 0 \\ \nabla \times B &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} & \nabla \cdot B &= 0\end{aligned}$$

### Ondas E.M.:

Una forma posible de una onda electromagnética viajante en el espacio es:  $E = E_0 \sin(y - vt)\hat{z}$  y  $B = B_0 \sin(y - vt)\hat{x}$   
Vemos que estas funciones cumplen con las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Y después de meterlas, nos queda que se debe de cumplir que  $v = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$ . Entonces, no es muy alocado pensar que estas ondas EM son ondas de luz.  $E$  y  $B$  son ortogonales y la onda se propaga en la dirección  $E \times B$

## 11. Campo Eléctrico en la Materia:

**Dieléctrico:** Un dieléctrico es un material que tiene algunas cargas libres pero no tantas como un conductor perfecto. En realidad, todas las cargas están en formas de pares o dipolos.

**Polarizado:** Un dieléctrico está polarizado si sus dipolitos están alineados en una misma dirección. Por ahora, no nos interesa cómo se llega a esta polarización sino que sólo nos importa el campo generado por el propio dieléctrico polarizado.

Nota: Un dieléctrico está uniformemente polarizado si sus dipolitos están alineados y la can-

tividad de dipolos por unidad de volumen es constante.

**Cantidad de dipolos por unidad de volumen:** La densidad de dipolos en un dieléctrico polarizado uniformemente es  $N$  = cantidad de dipolos por unidad de volumen.

**Densidad de Polarización:** La densidad de polarización se define como el vector  $P = Np$  (con  $p$  el momento dipolar de cada dipolito) [ $C/m^2$ ]  
Un volumencito  $dV$  tendrá un momento dipolar  $PdV = NpdV$

### Potencial generado por un dieléctrico polarizado (visto afuera):

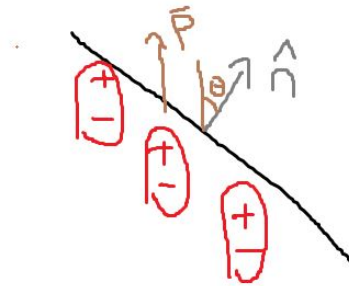
Si tenemos un cilindro delgado (de área  $da$ ) polarizado verticalmente con densidad de polarización  $P$ . Para alguien viendo desde afuera, este cilindro genera un potencial y campo como si sólo tuviera cargas  $Q = \pm Pda$  en los extremos (o sea, como un dipolo). Esto se debe a que las cargas opuestas de los dipolitos del dieléctrico se cancelan.

Si ahora tenemos un Slab polarizado con  $P$ , lo separamos en muchos cilindros delgados verticales. Luego, cada cilindro se ve desde afuera como una carga  $\pm Pda$  en los extremos. Por lo que todo el slab se ve como dos placas paralelas con densidad de carga  $\pm P$  y genera un campo similar al de dos planos infinitos.

De forma más general para dieléctricos que no sean un Slab y que no necesariamente tengan  $P = cte$ , tenemos que este dieléctrico (desde afuera) se ve como si tuviéramos cargas solamente en la superficie, con densidad de carga superficial:

$$\sigma = P \cos(\theta)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector  $P$  en la superficie y el vector ortonormal



Esto debido a que los dipolitos internos se cancelan entre sí. Y la importancia de los de la superficie dependerá de su alineación y de la densidad de dipolitos por unidad de área ( $P$ ). Si los dipolos son ortogonales a la superficie, casi no se ven las partes negativas y resaltan las positivas. Si la orientación es tangente a la superficie, no se distingue ninguna carga.

### Potencial generado por un dieléctrico polarizado (visto adentro):

Adentro de un slab polarizado uniformemente se genera también un campo eléctrico equivalente a dos placas de densidad  $\pm P$  es decir, **un campo**  $-\frac{P}{\epsilon_0}$  perpendicular a las tapas que apunta en dirección opuesta a la polarización. Esto debido a que el campo adentro tiene que ser uniforme por simetría y además, tiene que ser consistente con el hecho de que la diferencia de potencial entre las tapas es como las de dos planos. Esto se vale no sólo para slabs, pero para cualquier dieléctrico polarizado uniformemente.

### Polarización debido a un campo Externo:

Ahora veamos cómo se genera una polarización. Tenemos un dieléctrico y un campo eléctrico externo de tal forma que el campo **Total** es  $E$ . Si se trata de un **Dieléctrico Lineal**, éste se polarizará según lo siguiente:

$$P = \chi_e \epsilon_0 E$$

Donde  $\chi_e$  se llama la susceptibilidad eléctrica y es un valor que depende de cada material. Para materiales muy conductores, el valor es más alto, Para el vacío el valor es 0 (no se polariza). Es importante notar que el campo  $E$  en esta expresión es el campo **TOTAL** y no el campo externo (es decir, es igual al campo externo más el campo que produce el propio dieléctrico polarizado). Para un conductor perfecto,  $\chi_e = \infty$  pues el campo  $E$  total es 0 pero la polarización  $P$  no es 0.

Nota: La ecuación de arriba es una relación puntual. En cada punto en donde antes del campo valía  $E'(p)$  donde  $E'$  es el campo externo. Ahora se coloca un dieléctrico que hace que la polarización sea  $P(p) = \chi_e \epsilon E(p)$  donde  $E$  es ahora el campo **total**. Este campo **total**, se debe al campo externo inicial  $E'$  y el campo debido al polarizador que es  $-P/\epsilon_0$ . Por lo tanto, el campo total es ahora  $E = E' - P/\epsilon_0$  y por la definición de susceptibilidad, tenemos que  $P = \chi_e \epsilon_0 E = \chi_e \epsilon_0 (E' - P/\epsilon_0) = \chi_e \epsilon_0 E' - \chi_e P$ . Por lo tanto,  $(1 + \chi_e)P = \chi_e \epsilon_0 E'$ .

### Meter un dieléctrico en un capacitador:

Si tenemos un capacitor (por ejemplo, de placas paralelas) y llenamos el vacío con un dieléctrico, entonces la capacitancia aumenta por una constante  $k$ . Es decir, pasa de  $C_0$  a  $kC_0$ . Resulta que no importa la forma del capacitador, siempre que se le agregue el mismo dieléctrico, su capacitancia aumentará por  $k$ . Donde  $k \geq 1$ .

### Explicación 1: Capacitor conectado (cambio en cargas y no en voltajes)

Explicación: Empezamos con un capacitor de capacitancia  $C_0$ , que tiene una carga inicial  $Q_0$  y un voltaje entre placas  $V_0$  (el campo del capacitor tiene un valor  $E_0$  apunta hacia arriba). Al colocar el dieléctrico, éste se va a polarizar en la dirección opuesta, por lo que cerca de la placa positiva, se colocarán cargas negativas del capacitor con valor  $-Q_D$ . Debido a esto, ahora la placa del capacitor puede aceptar una carga mayor, entonces la pila le da más

carga hasta llegar a  $Q_F = Q_0 + Q_D$  sobre la placa. Esto debido a que ahora entre la placa y la cara del dieléctrico, seguirá pareciendo que hay una carga total de  $Q_0 + Q_D - Q_D = Q_0$  y por tanto, el voltaje entre las placas seguirá siendo el mismo. El campo antes y después de agregar el dieléctrico también es el mismo, pues como dije, las placas del capacitor tienen la posibilidad de cargarse un poco más de lo normal para contrarrestar la carga  $Q_D$  del dieléctrico.

Recordemos que, antes de poner el dieléctrico, la carga es  $Q_0 = C_0 V_0$ . Y al poner el dieléctrico, éste se polariza con  $P = \chi_e \epsilon_0 E_0$  (con  $E_0$  el campo total después de poner el dieléctrico, que resulta ser igual al campo  $E_0$  externo del capacitor antes de agregarlo). Y dentro del dieléctrico se crea un campo  $-P/\epsilon_0$ , por lo que la diferencia de potencial al cruzar todo el dieléctrico (debida únicamente al campo de polarización) es ahora  $\int -P/\epsilon_0 = \int -\chi_e E_0 = -\chi_e V_0$ . Además, el dieléctrico se ve como si sólo tuviera cargas en sus extremos, por lo que se ve como el mismo capacitor original (pero volteado y con diferente carga) por lo que su carga es  $Q_D = C_D V_D = C_0 \chi_e V_0$ .

Calculamos ahora la capacitancia final, a ver si aumentó (nota: la carga en def. de capacitancia es la contenida en la Placa):

$$C_f = \frac{Q_f}{V_f} = \frac{Q_0 + Q_D}{V_0} = \frac{C_0 V_0 + \chi_e C_0 V_0}{V_0} = \frac{(1 + \chi_e) C_0 V_0}{V_0} = (1 + \chi_e) C_0$$

Entonces, la capacitancia del capacitor aumentó al colocar el dieléctrico, el factor por el que aumentó se llama constante dieléctrica. Entonces:

$$k = 1 + \chi_e$$

Para el vacío,  $k = 1$  y para buenos polarizadores,  $k$  es más grande.

### Expliación 2: Carga fija en las placas, cambio en el voltaje:

Empezamos con un capacitor cargado con  $Q_0$ , capacitancia  $C_0$  y un voltaje entre placas de  $V_0$ . Al agregar el dieléctrico, la carga en las placas del capacitador se quedará igual ( $Q_0$ ) porque no tiene de dónde sacar más carga. Sin embargo, el dieléctrico formará una carga  $-Q_D$  de respuesta que cancelará un poco la carga original de las placas. Así, para un observador externo, la carga total es de  $Q_0 - Q_D$ . Por lo tanto, el voltaje habrá disminuido proporcionalmente, hasta un valor de  $V_f = \frac{Q_0 - Q_D}{Q_0} V_0$  y el campo también:  $E_{tot} = \frac{Q_0 - Q_D}{Q_0} E_0$  (regla de tres simple).

Calculamos ahora  $Q_D$ : sabemos que  $P = \chi_e \epsilon_0 E_{tot}$   $P/\epsilon_0 = \chi_e E_{tot}$ . Pero este  $-P/\epsilon_0$  es el campo dentro del dieléctrico debido a su propia polarización. Entonces, el campo 'externo' (que es el campo original  $E_0$ ) es igual al campo total menos este campo resupuesta.  $E_0 = E_{tot} - (-P/\epsilon_0) = E_{tot} + \chi_e E_{tot} = E_{tot}(1 + \chi_e)$

Sustituimos esto en la última ecuación del párrafo anterior,  $E_{tot} = \frac{Q_0 - Q_D}{Q_0} (1 + \chi_e) E_{tot}$  y

despejamos:  $Q_D = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} Q_0$ .



Finalmente, sustituimos en la fórmula de  $V_f$ :  $V_f = \frac{Q_0 - \frac{\chi_e}{1+\chi_e}Q_0}{Q_0}V_0 = 1 - \frac{\chi_e}{1+\chi_e}V_0 = \frac{1}{1+\chi_e}V_0$

Finalmente, calculamos  $C_f = \frac{Q_f}{V_f} = \frac{Q_0}{V_f}$  (la carga de las placas no cambió)  $= \frac{Q_0(1+\chi_e)}{V_0} = (1+\chi_e)C_0$  Listo.

### Campos por cargas colocadas en un medio:

En un medio podemos definir dos tipos de cargas, cargas 'libres' que son externas al medio y cargas 'ligadas' que son parte de los dipolitos en el medio dieléctrico. Digamos que ponemos una carga libre  $Q$  en un dieléctrico, entonces se van a depositar cargas ligadas a su alrededor  $Q_D$  que van a cancelar un poco a la carga original. Si queremos calcular el campo generado por la carga  $Q$  en el dieléctrico, hay que en realidad calcular el campo que generaría una carga  $Q - Q_D$  en el vacío. Este número ya lo calculamos en la explicación 2 y resultó ser  $Q - Q_D = \frac{1}{1+\chi_e}Q = \frac{1}{k}Q$ .

Entonces, el campo neto de esta carga  $Q$  en el dieléctrico es igual al que se tendría por una carga  $Q/k$ :

$$E = \frac{Q}{4\pi k\epsilon_0 r^2}$$

Definimos la combinación  $k\epsilon_0$  como  $\epsilon_d$  la permitividad eléctrica de este medio. Al calcular campos entonces, hay que cambiar la  $\epsilon_0$  por esta nueva  $\epsilon_d = k\epsilon_0$

\*\* Otra forma de verlo es que la carga  $Q$  genera un campo externo  $E_0$ , pero el dieléctrico responde con un campo  $-P/\epsilon_0 = -\chi_e E_{tot} = -\chi_e(-P/\epsilon_0 + E_0)$  (Porque el campo total es el externo más el de respuesta). Tomamos los extremos y despejamos el campo de respuesta:  $-P/\epsilon_0 = \frac{-\chi_e E_0}{1+\chi_e}$ . Entonces, el campo total es  $E_{tot} = E_0 - P/\epsilon_0 = E_0 + \frac{-\chi_e E_0}{1+\chi_e} = \frac{E_0}{1+\chi_e} = \frac{E_0}{k}$ . Que es el mismo resultado de antes, al poner el dieléctrico, el campo  $E$  se divide por  $k$ .

Esto nos puede dar una nueva definición de la constante  $k$ . Al poner una carga libre  $Q$  en un medio, es como si su carga se dividiera por  $k$  para tener una carga neta  $Q/k$ .

**Vector de Desplazamiento Eléctrico:** Definimos ahora la cantidad vectorial  $D$  como sigue:

$$D := \epsilon_d E = k\epsilon_0 E$$

$$D = k\epsilon_0 E = (1+\chi_e)\epsilon_0 E = \epsilon_0 E + P$$

$E$  es el campo total en el aceite (o dieléctrico que sea) Al multiplicar  $E$  por  $k$ , lo que estamos haciendo es tener el campo eléctrico que se sentiría por la misma distribución de cargas,

pero en el vacío (porque el aceite nos dividió entre  $k$  en primer lugar). Multiplicar por  $\epsilon_0$  sólo cambia las unidades y así. Otra forma de verlo es el segundo renglón, tenemos que  $D/\epsilon_0 = E + P/\epsilon_0$  que es el campo total Menos el campo por polarización (recordemos que éste es negativo) y por tanto nos da el campo de las puras cargas libres (el campo que se sentiría en el vacío).

### Ley de Gauss:

Como dice originalmente la ley de Gauss, la densidad de carga total es proporcional a la divergencia del campo  $E$ :

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}$$

Esta ley no cambia, sólo que ahora podemos diferenciar con la densidad libre y la ligada. Esta densidad total  $\rho_{tot}$  se debe a que se puso una densidad libre que se canceló un poco con una densidad ligada  $\rho_{tot} = \rho_{libre} + \rho_{lig}$ . Pero por la nueva definición de  $k$ , si tenemos una densidad libre, enntonces en el dieléctrico se cancela de tal forma que la densidad total es  $\rho_{tot} = \rho_{libre}/k$ .

Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación de Gauss, obtenemos que  $\nabla \cdot (kE) = \rho_{libre}/\epsilon_0^*$ .

Entonces, tenemos:

$$\nabla \cdot P = \nabla \cdot (\epsilon_0 \chi_e E) = \epsilon_0 \nabla \cdot (k - 1)E = \epsilon_0 \nabla \cdot (kE) + \epsilon_0 \nabla \cdot E = \epsilon_0 = \rho_{libre} - \rho_{tot} = -\rho_{lig}$$

Entonces,  $\nabla \cdot P = -\rho_{ligada}$

Con estas fórmulas, tenemos que  $\nabla \cdot D = \nabla \cdot (\epsilon_0 E + P) = \epsilon_0 \nabla \cdot E + \nabla \cdot P = \rho_{tot} - \rho_{lig} = \rho_{libre}$

$$\nabla \cdot D = \rho_{libre}$$

Es decir, el campo  $D$  nos permite medir la densidad de carga **Libre** en vez de la total, por lo que puede ser más útil al trabajar con dieléctricos.

\* más fácil era pasar aquí el  $\epsilon_0$  y usar la def de  $D$ .

**Densidad de Flujo de Carga Ligada:** La densidad de corriente ligada se define como

$$J_{ligada} = \frac{dP}{dt}.$$

Esto es porque un cambio en la polarización de un objeto crea un movimiento de cargas.

Podemos ver que si tomamos la divergencia de ambos lados, obtenemos  $\nabla \cdot J_{lig} = -\frac{d\rho_{lig}}{dt}$  que es como la ecuación de continuidad para las cargas ligadas.

Entonces la densidad de flujo de cargas total se parte en dos, la parte libre ( $J_{free}$ ) y la parte ligada  $J_{lig} = \frac{dP}{dt}$ . Con esto, podemos escribir un poco mejor la ley de Ampere.

### Ley de Ampere:

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 (J_{free} + \frac{\partial P}{\partial t}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 J_{free} + \mu_0 \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \mu_0 J_{free} + \mu_0 \frac{\partial D}{\partial t}$$

Entonces nos queda:

$$\nabla \times B = \mu_0 J_{free} + \mu_0 \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J_{free} + \mu_0 \epsilon_d \frac{\partial E}{\partial t}$$

### Ondas EM en un dieléctrico:

En un dieléctrico, las ecuaciones de ampere homogénea se ve ahora como  $\nabla \times B = \mu_0 \epsilon_d \frac{\partial E}{\partial t}$ . Por lo tanto, al resolver las ecuaciones homogéneas, resulta que ahora la velocidad de la onda de luz es  $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_d}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 k}}$ . Por lo que la velocidad de la luz pasó de ser  $c$  a ser  $c/\sqrt{k}$ . Este índice  $1/\sqrt{k}$  es el índice de refracción.

## 12. Campos Magnéticos en Materia:

Los materiales magnéticos se dividen en tres tipos dependiendo de su comportamiento al ponerlos en presencia de un campo magnético externo. Hay muchos tipos de comportamientos y puede ser algo confuso. Digamos que tenemos un solenoide que nos permite tener en un punto del espacio un campo de  $B_z = 1,8T$  y que cambia a un ritmo  $\frac{dB_z}{dz} = 17T/m$ . Colocamos diferentes objetos atados a un dinamómetro sobre el eje  $z$  en este punto y observamos. Al hacer esto, vemos que algunos objetos son empujados levemente hacia adentro del solenoide (hacia donde aumenta el campo) y otros hacia afuera (hacia donde disminuye el campo) sin importar de la dirección del campo como tal.

Luego encontramos algunas sustancias que son atraídas hacia adentro del solenoide con mucha fuerza como cristales de cloruro de cobre u oxígeno (que se atrae con una fuerza igual a 8 veces su propio peso). Pero por otro lado, el nitrógeno es a penas empujado hacia afuera con una muy chica fuerza, por qué estas diferencias tan marcadas?

Substance	Formula	Force (newtons)
Diamagnetic		
Water	H <sub>2</sub> O	-0.22
Copper	Cu	-0.026
Sodium chloride	NaCl	-0.15
Sulfur	S	-0.16
Diamond	C	-0.16
Graphite	C	-1.10
Liquid nitrogen	N <sub>2</sub>	-0.10 (78 K)
Paramagnetic		
Sodium	Na	0.20
Aluminum	Al	0.17
Copper chloride	CuCl <sub>2</sub>	2.8
Nickel sulfate	NiSO <sub>4</sub>	8.3
Liquid oxygen	O <sub>2</sub>	75 (90 K)
Ferromagnetic		
Iron	Fe	4000
Magnetite	Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	1200

Introducimos la siguiente clasificación de materiales para explicar un poco los fenómenos:

### Definición 12.1.

**Diamagnetismo:** Sustancias que son levemente repelidas por el imán, van hacia zonas

con menor campo magnético (Los primeros objetos de la lista de arriba). Todas las moléculas y átomos son diamagnéticas, si un cuerpo no se comporta así es porque sus propiedades paramagnéticas o ferromagnéticas son más fuertes.

**Paramagnetismo:** Sustancias que son atraídas hacia regiones con mayor campo magnético (nuestro solenoide los atrae hacia adentro, son los objetos de en medio de la lista). En estos materiales, la fuerza con la que se atraen disminuye con la temperatura (en parte por eso el  $O_2$  es tan paramag., pues requiere una temperatura muy baja para tenerlo líquido).

**Ferromagnetismo:** Las sustancias que se comportan como el hierro y la magnetita, que son súper atraídos hacia un imán. Ejemplos son el hierro, cobalto y nickel.

Primero que nada, debido a la ley de gauss Magnética  $\nabla \cdot B = 0$ , no existen monopolos magnéticos, y la única forma de encontrar imanes es como dipolos, con un líneas de campo magnético que no inician ni terminan en ningún punto.

### Campo de un Loop de corriente:

Tenemos un Loop de corriente en el plano  $XY$  con una corriente  $I$ . Según las fórmulas de la sección 7, tenemos que

$$A(0, y_1, z_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{dl}{|r_1 - r_2|}$$

Con  $r_1$  el punto de medida y  $r_2$  variando por el Loop. Haciendo algunas aproximaciones y cuentas, llegamos a que el potencial magnético  $A$  medido en un punto  $(0, y_1, z_1)$  es:

$$A(0, y_1, z_1) = \frac{\mu_0 I \sin(\theta)}{4\pi r_1^2} a \hat{x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \times \hat{r}_1}{|r_1|^2}$$

Donde  $a$  es el área del Loop y  $r_1$  es la distancia al punto  $(0, x_1, y_1)$  en el que medimos. Y  $\theta$  es el ángulo entre la disrección perpendicular al loop (según mano derecha) y el vector  $r_1$ . Finalmente,  $m = \mathbf{Momento\ dipolar\ magnético}$  que tiene magnitud  $Ia$  y apunta en la dirección ortogonal al loop.

Ejemplo: Para convencernos, tomemos una curva chiquita en el plano  $XY$  y queremos medir  $A$  en  $r_1 = (0, y_1, z_1)$ , entonces,  $r_2 = (u_1(t), u_2(t), 0)$ ,  $dl = (u'_1(t), u'_2(t), 0)dt = (du_1, du_2, 0)$ . Entonces la el denominador es:  $|r_1 - r_2| = \sqrt{(-u_1, y_1 - u_2, z_1)} =$

$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2y_1u_2} = |r_1| \sqrt{1 - 2\frac{y_1}{|r_1|^2}u_2 + |r_2|^2/|r_1|^2}$  Pero como el punto  $r_1$  está muy lejos del loop, entonces  $|r_1| \geq |r_2|$  por lo que todo después del 1 es un epsilon, y aproximamos con Taylor lineal.  $\approx |r_1|(1 - \frac{y_1}{|r_1|^2}u_2 + |r_2|^2/2|r_1|^2) = |r_1| - y_1/|r_1| u_2 + 0$  Pero  $y_1/|r_1|$  es el seno del ángulo entre el eje  $z$  y el punto  $r_1$ , por lo que nos queda que  $|r_1 - r_2| = |r_1| - u_2 \sin(\theta)$

Sustituimos en la integral:  $\int \frac{(du_1, du_2, 0)}{|r_1| - u_2 \sin(\theta)} = \int \frac{(du_1, du_2, 0)}{|r_1|(1 - u_2 \sin(\theta)/r_1)} \simeq \int (du_1, du_2, 0) \frac{1}{|r_1|} (1 + u_2 \sin(\theta)/r_1 = \dots\dots\dots$

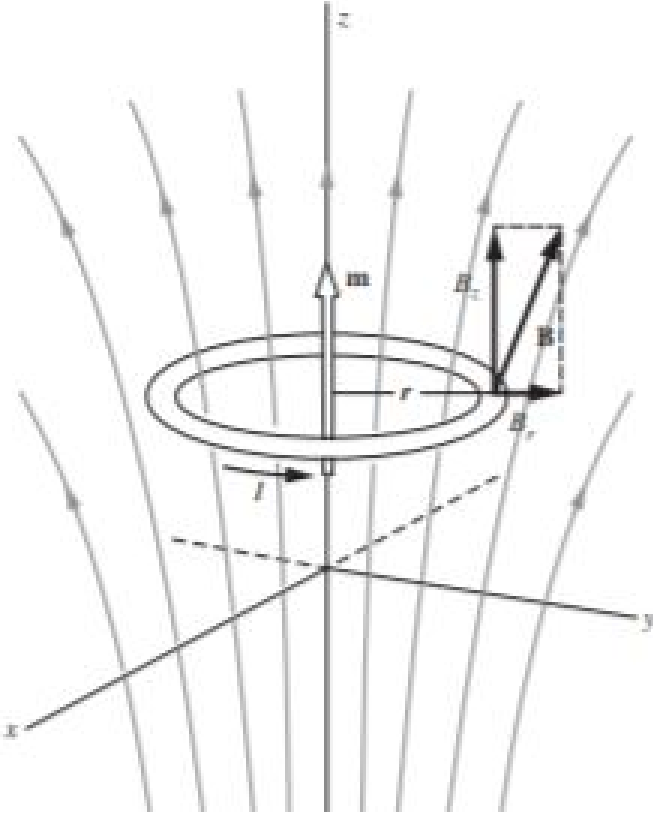
A partir de  $A$ , podemos sacar el rotacional para calcular  $B$  y obtenemos lo siguiente en coordenadas esféricas:

$$B_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos(\theta) \quad B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin(\theta) \quad B_\phi = 0$$

Este campo es una aproximación para grandes distancias, y podemos ver que se parece al campo eléctrico que genera un dipolo. Por eso, un loop chiquito de corriente se conoce como un dipolo magnético y su momento es  $m$  que tiene magnitud  $Ia$  y que apunta según la regla de la mano derecha.

Sin embargo, de cerca se notan las diferencias con el dipolo eléctrico, pues éste sí tiene fuentes y pozos.

### Fuerza Sobre un Dipolo Magnético en un campo externo



Tenemos un loop con corriente  $I$  situado en un campo magnético  $B$  que no es uniforme (se hace más chico conforme aumenta la coordenada  $z$ ) y no incluye al propio campo producido por el Loop. Por la fuerza de Lorentz, el componente  $z$  de  $B$  sólo estira o aplasta el anillo. Pero debido al otro componente, cada pedazo  $dl$  de loop siente una fuerza  $iB_r dl$  hacia abajo, que si el campo es simétrico, nos lleva a una fuerza total  $F = -2\pi r I B_r$ .

Ahora bien, resulta que  $B_r$  se puede relacionar con el gradiente de  $B_z$ . Pues como  $\nabla \cdot B = 0$ , tenemos que el flujo magnético en cualquier volumen es 0. Tomamos una superficie gaussiana de un chico slab con mismo radio  $r$  y altura  $\delta z$ , entonces el flujo en las caras circulares es  $\pi r^2 [-B_z(z) + B_z(z + \Delta z)] \simeq \pi r^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} \Delta z$ . El flujo por el lado es  $2\pi r B_r \Delta z$ . Por

lo tanto, el flujo total es  $\pi r^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} \Delta z + 2\pi r B_r \Delta z$ , el cual igualamos a 0, entonces obtenemos la siguiente relación:

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Por lo tanto y por lo calculado en el párrafo anterior, tenemos que la fuerza sobre el dipolo es:

$$F = \pi r^2 I \frac{\partial B_z}{\partial z} = m \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Para loops pequenos entonces, la fuerza sobre el dipolo depende de  $m = Ia$  y del cambio en el campo mag en la dirección  $z$ . En este caso, la fuerza apunta hacia abajo, que es la dirección en la que aumenta el campo  $B_z$ . Pero si voltemos el momento dipolar, la fuerza será hacia donde disminuye el campo. Se puede resumir en lo siguiente:

### Resumen de Comportamientos:

- 1) Si el momento dipolar es paralelo al campo externo: La fuerza actúa en la dirección de aumento de intensidad de campo. (paramag)
- 2) Si el momento dipolar es antiparalelo al campo externo: La fuerza actúa en la dirección de disminución de intensidad de campo. (diamag)
- 3) Si el campo externo es uniforme: No hay fuerza neta.

Resulta que en el caso más general se tiene que la fuerza sobre un dipolo es:

$$F = \nabla(m \cdot B) = (m \cdot \nabla)B + m \times (\nabla \times B)$$

Con el resumen de comportamientos, podemos teorizar sobre a qué se deben los comportamientos de diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos. Un objeto sería atraído al solenoide (Paramag) si su momento se alinea paralelamente con el campo  $B$  y sería alejado del solenoide (Diamag) si su momento se alinea antiparalelamente al campo  $B$ . Y entonces la fuerza será proporcional a  $\partial B / \partial z$ . Pero de dónde sacan los materiales estos momentos y por qué algunos son paralelos (Paramag, va hacia más campo) y otros antiparalelos (diamag, va hacia menos campo).

### Momento debido al movimiento orbital del electrón:

El electrón se puede modelar como que gira alrededor del centro del átomo con radio  $r$  y a velocidad  $v$ . Entonces se puede ver como una corriente en un anillo con valor  $I = \frac{ev}{2\pi r}$ , entonces el momento mag es:  $m = \pi r^2 I = \frac{evr}{2}$  (Claro que, al ver la dirección de este vector, hay que cambiar la dirección del electrón para verlo como una carga positiva y usar la mano derecha).

Definimos el momento angular orbital  $L = m_e v r$  con  $m_e$  la masa del electrón, que apunta según la mano derecha (para el movimiento del electrón). Entonces, tomando en cuenta el signo de  $L$ , podemos escribir el momento dipolar de este electrón orbitando como:

$$m = \frac{-e}{2m_e} L$$

Ahora bien, si prendemos un campo magnético uniforme en la posición del átomo, hará girar al electrón y le crea un momento  $m = -(\frac{e^2 r^2}{4m_e})B$ . Esto es, un momento magnético opuesto (alineado antiparalelamente) a  $B$ . Debido a esto, sentirá una fuerza hacia menor intensidad de campo y por lo tanto, esto explica el comportamiento diamagnético. Explica la razón por la que todos los cuerpos tienen un comportamiento diamagnético muy chiquito.

### Momento debido al Spin del electrón:

El spin de un electrón se puede modelar como una rotación del electrón sobre su propio eje. Como la magnitud del spin es siempre la misma, un campo magnético externo sólo puede influenciar su dirección.

**Torque:** El torque en un dipolo mag debido a un campo externo es:  $\tau = m \times B$

Los spins de electrones no son totalmente libres de reorientarse. Si se orientaran siempre en dirección paralela al campo externo, entonces generarían un súper momento dipolar y una fuerza paramagnética hacia la dirección de aumento de intensidad de campo.

Sin embargo, en la mayoría de los átomos, los spins de electrones vienen en pares opuestos que por tanto cancelan el momento dipolar total, es por esto que la mayoría de los materiales son puramente diamagnéticos. Algunas moléculas (muy pocas) contienen un número impar de electrones que permiten un momento neto. O algunos átomos tienen en su capa más externa spines que no se cancelan pero que a veces se cancelan con átomos vecinos en un cristal o estructura.

Algunos elementos contienen electrones con spines no cancelados y libres de moverse incluso cuando forman cristales. Estos son los que van de cromo a cobre en la tabla (incluye hierro, cobalto y níquel). Compuestos con estos elementos son generalmente paramagnéticos e incluso ferromagnéticos. El movimiento térmico randomiza estos spines y por eso a mayor temperatura se pierden las propiedades paramagnéticas y ferromagnéticas.

## 12.1. Susceptibilidad Magnética:

A veces, en temperaturas muy bajas y campos fuertes, llega un momento en el que el momento paramagnético llega a un límite sin importar cuánto se aumente el campo  $B$ . Sin embargo, dejando esto de lado, la relación entre el momento inducido y el campo externo es más o menos lineal y ahí es donde entra la susceptibilidad magnética.

**Densidad de momento Magnético o magnetización**  $M$  = momento de cada dipolito multiplicado por la cantidad de dipolitos magnéticos por unidad de volumen (es un vector). Es decir, cantidad de momento magnético por unidad de volumen. Tiene unidades de  $[amp/m^2]$  y es análogo al  $P$  eléctrico.

**Susceptibilidad Magnética:** Generalizando la def. de susceptibilidad eléctrica, sería normal definir ésta como sigue:

$$M = \chi_M / \mu_0 B$$

Donde  $B$  sería el campo total. Sin embargo, la definición convencional no es ésta y se usa un campo nuevo llamado  $H$ .

### **Campo Magnético por un Slab Magnetizado:**

El campo magnético adentro y fuera de un slab de materia magnetizada con  $M$  uniformemente es equivalente (tanto adentro como afuera) es equivalente a si tuviéramos una densidad lineal de corriente por el lado igual a  $\iota = M$ . Si la magnetización no es constante, tenemos más generalmente que  $J = \nabla \times M$  en todo el Slab y el slab crea un campo magnético descrito por esta  $J$ .

### **Campo $H$ y corrientes Libres:**

**Definición 12.2. Campo  $H$ :** Dado un campo magnético TOTAL  $B$  (sumando el externo y el de magnetización) y una magnetización  $M$  de un objeto. Entonces definimos:

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

En cierto sentido,  $H$  mide el 'campo' (no es campo porque lo dividimos entre  $\mu_0$ ) libre, porque toma el campo total y le resta la parte de magnetización.

### **Ley de ampere:**

$$\nabla \times B = \mu_0 (J_{lig} + J_{free}) = \mu_0 J_{tot}$$

Es decir, la ley se sigue cumpliendo para el  $J$  total y el campo total.

Por otro lado, tenemos que la corriente ligada se debe únicamente a la magnetización del objeto y tenemos:

$$\nabla \times M = J_{lig}$$

Con esto, llegamos a que:

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= J_{free} \\ \int_C H \cdot dl &= I_{free} \end{aligned}$$

Que es a lo que me refiero con que el campo  $H$  mide la parte libre del campo magnético.

Entonces, ahora sí definimos la **Permeabilidad Magnética:** (para un material magnético lineal)

$$M = \chi_m H$$



Entonces es la relación entre el campo **EXTERNO** y la magnetización. A diferencia de como se hacia en el caso eléctrico usando el campo total. Esto se debe a que medir  $J_{free}$  es fácil pero medir  $\rho_{free}$  es difícil.

Si juntamos la definición de  $H$  con esta nueva relación, obtenemos:

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M = \mu_0(1 + \chi_m)H := \mu H$$

Donde  $\mu := \mu_0(1 + \chi_m)$  es la permeabilidad magnética del medio.

### Ferromagnetismo:

Como el paramagnetismo, el ferromagnetismo sale del spin de electrones. Sin embargo, por razones cuánticas, los spins se alinean en una misma dirección aunque no haya campos magnéticos externos (son imanes permanentes). Sin embargo, sólo se alinean en 'dominios' donde todo está alineado, pero distintos dominios se alinean distintamente y se cancelan. Es por esto que generalmente, una pieza de hierro sin campo magnético externo no está magnetizado.

Sin embargo, aplicar un campo  $B$  externo puede alinear estos dominios (si  $B$  apunta en una dirección 'sencilla') de una forma que no siempre es invertible y permite crear imanes permanentes.

### Ecuaciones de Maxwell en Materiales:

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} & \int_C E \cdot dl &= -\frac{\partial \Phi_M}{\partial t} \\ \nabla \times H &= J_{free} + \frac{\partial D}{\partial t} & \int_C H \cdot dl &= \int_S (J_{free} + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dA \\ \nabla \cdot D &= \rho_{free} & \int D \cdot dA &= Q_{free\ in} \\ \nabla \cdot B &= 0 & \int B \cdot dA &= 0 \end{aligned}$$

Donde  $D = \epsilon_d E$

$$H = \frac{B}{\mu_m}$$

Es decir, si tenemos el campo eléctrico y lo multiplicamos por  $\epsilon_d$  (es decir, primero por  $k$  y luego por  $\epsilon_0$ ), lo convierte en el campo 'libre'.

Similarmente con  $B$ , pero al dividir por  $\mu$ .