Tensors Renteln

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

28 de diciembre de 2020

1. Álgebra Lineal

1.0.1. Secuencia Exacta

Supongamos que tenemos espacios vectoriales V_i y mapeos lineales $\phi : V_i \to V_{i+1}$ conectándolos.
Estos mapeos se llaman **exactos** si:

$$im\phi_{i-1} = \ker \phi_i$$

Es decir, una de las funciones mapea V_i a el kernel de la siguiente función.

Si V_1, V_2, V_3 son tres espacios vectoriales y tenemos la seguencia:

$$0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$$

Conectada por las funciones $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$, entonces se llama una **secuencia exacta corta**. Se puede probar que esto es equivalente a decir que ϕ_1 es inyectiva y ϕ_2 es suprayectiva. (pues $im(\phi_0) = 0_{V_1}$ y esto es igual al kernel de ϕ_1. Y el Kernel de V_3 es todo V_3, por lo que la imagen de ϕ_2 es todo V_3.

Se sigue que si $T : V \to W$ es suprayectiva, entonces:

$$0 \to \ker T \to_{Id} V \to_T W \to 0 \qquad (1{,}9)$$

Es una secuencia exacta corta (pues cumple lo de que la imagen de uno es el kernel del siguiente).

Teorema 1.2 Dada la secuencia corta exacta 1.9, existe un mapeo lineal $S : W \to V$ tal que $T \circ S = Id_W$. Decimos que la secuencia exacta 1.9 se **separa**.
El mapeo S se llama una **sección de** T

Teorema 1.3: Dada la secuencia exacta 1.9, y sea S una sección de T, entonces:

$$V = \ker(T) \oplus S(W)$$

Lo cual nos deja con el **teorema de Nulidad-rango**: $\dim V = \dim \ker T + \dim W$

1.1. Espacio Cociente

Sea V un e.v. y U un subespacio.
Definimos una **relación de equivalencia** como $v \sim w$ si $v - w \in U$.
El conjunto de clases de equivalencia se denota V/U y se llama **espacio cociente de** V **mod** U.
$[v]$ representa a toda la clase de equivalencia de v en V/U (todos los vectores w tales que $v - w \in U$

Teorema 1.4: Si U es un subespacio de V, entonces V/U tiene la estructura de e.v. con $[v] + [u] = [v + u], \alpha[v] = [\alpha v]$. Y $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$

1.2. Representación Matricial

Sea $T : V \to V$ donde V tiene la base $\{e_i\}$. Entonces, la matriz que representa a T en esta base está dada por las componentes T_{ij} tales que:

$$Te_j = e_i T_{ij}$$

Es decir, aplicamos T a cada elemento de la base de ida y escribimos el resultado en la base de llegada. Estos números que escribimos forman las columnas de T_{ij}.

Entonces, si $v = v_i e_i \in V$, se tiene que:

$$v' := Tv = T(v_j e_j) = v_j Te_j = v_j T_{ij} e_i$$

Por lo que los componentes de $v' = T(v)$ son :

$$v'_i = T_{ij} v_j$$

Y por eso se define así el producto de una matriz por un vector.

Si $S, T : V \to V$ y tienen matrices S_{ij}, T_{ij}, entonces $ST = S \circ T$ tiene matriz dada por:

$$(ST)_{ij} = S_{ik} T_{kj}$$

1.3. Espacio Dual:

Un **funcional lineal** de V es un mapeo linal $f : V \to \mathbb{R}$.
Espacio Dual: Es el espacio de todos los funcionales lineales de V
Al espacio dual se le asigna la suma $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ y el producto por escalar $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$. Que convierten a V^* en un espacio vectorial.

Se suele escribir $\langle v, f \rangle$ para denotar $f(v)$ y se llama el **dual pairing** entre V, V^*.
Los elementos de V^* se llaman **covectores**

Base Dual: Si $\{e_i\}$ es una base en V, entonces su base dual son los covectores $\{\theta_j\}$ de V^* definidos a partir de:

$$\langle e_i, \theta_j \rangle = \delta_{ij}$$

Cualquier elemento $f \in V^*$ se puede expandir en la base dual como:

$$f = f_i \theta_i$$

Donde $f_i \in \mathbb{R}$ son los **componentes** de f en la base $\{\theta_i\}$

Por tanto, $\dim V^* = \dim V$ y por tanto son isomorfos (pero no de manera natural).

Por otro lado, V, V^{**} son isomorfos en una forma más natural. En la que a cada $v \in V$ le asignamos el $v \in V^{**}$ tal que $v(f) = f(v)$.

Aniquilador: El aniquilador de W es:

$$AnnW = \{\theta \in V^* \ \mid \theta(w) = 0 \quad \forall w \in W\}$$

Se puede probar que $AnnW$ es un subespacio de V^*. Y que todo subespacio de V^* es un $AnnW$ para algún W.
Además $(V/W)* \simeq V^*/W^*$.

1.4. Cambio de Base

Sea $\{e_i\}$ y $\{e'_i\}$ dos bases de V. Cada base se puede escribir como combinación lineal de la otra. Por convención, podemos escribir:

$$e'_j = e_i A_{ij}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 A_{11} + e_2 A_{21} + e_3 A_{31} + \cdots + e_n A_{n1} \\ e'_j &= e_1 A_{1j} + e_2 A_{2j} + e_3 A_{3j} + \cdots + e_n A_{nj} \end{aligned}$$

Para la matriz **cambio de base** A_{ij}.
Es decir, A^T transforma los vectores base de la base sin primas a la primada.

Cambio de Coordenadas:

Digamos que tenemos un vector $v = v_i e_i$, entonces sus coordenadas son $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$. Luego, si lo queremos escribir en la base primada, sería de la forma $v = v'_i e'_i$ con coordenadas $(v'_1, v'_2, \cdots, v'_n)$.

Tenemos que $v = v'_j e'_j = v'_j e_i A_{ij}$ Por lo que $v_i = A_{ij} v'_j$. Y sacando inverso, tenemos las dos relaciones:

$$v_i = A_{ij} v'_j \quad , \quad v'_i = (A^{-1})_{ij} v_j$$

Entonces, para cambiar de coordenadas del sistema primado al no primado se usa la misma matriz A (que convertía a los vectores no primados en primados) pero sin transponer. Por eso, se dice que estos son vectores **contravariantes**.

Covectores Un cambio de base en V induce un cambio de base en V^*. Si V tiene una base original $\{e_i\}$, entonces tiene su dual $\{\theta_i\}$ que cumple $\langle e_i, \theta_i \rangle = \delta_{ij}$.
Si cambiamos a una base $\{e'_i\}$, la base dual debe de cambiar a una base $\{\theta'_i\}$ tal que $\langle e'_i, \theta'_j \rangle = \delta_{ij}$
Los covectores de una base se tienen que poder escribir respecto a la otra. Entonces escribimos:

$$\theta'_j = \theta_i B_{ij}$$

O bien:

$$\theta'_j = \theta_1 B_{1j} + \theta_2 B_{2j} + \theta_3 B_{3j} + \cdots + \theta_n B_{nj}$$

Entonces, usando la definición de los covectores, tenemos que $\delta_{ij} = \langle e'_i, \theta'_j \rangle = \langle e_k A_{ki}, \theta_l B_{lj} = A_{ki} B_{lj} \langle e_k, \theta_l \rangle = A_{ki} B_{lj} \delta_{kl} = A_{ki} B_{kj}$
Por lo que $A_{ki} B_{kj} = \delta_{ij}$
$\boxed{\text{Lo que implica que } B = (A^T)^{-1}}$
Entonces, la matriz que convierte la base de covectores a la base de covectores primados es

$B = (A^T)^{-1}$

componentes: Sea $f \in V^*$ un covector. En la base original se escribe como $f = f_i \theta_i$. Y en la base primada como $f' = f'_j \theta'_j$.
Vemos cómo se transforman de una base a otra. Tenemos que $f = f'_j \theta'_j = f'_j \theta_i B_{ij}$. Por lo que $f_i = B_{ij} f'_j$.
Por lo que concluimos que:

$$f_i = B_{ij} f'_j \quad , \quad f'_i = (B^{-1})_{ij} f_j$$

O bien, usando la matriz A, tenemos que:

$$f'_j = f_i A_{ij}$$

Por lo que los componentes de los covectores se transforman exactamente como es transformaba la base original.

Y de hecho, reescribimos la transformaciones de las coordenadas de los vectores para tener que $v'_i = (A^{-1})_{ij} v_j \quad \Rightarrow \quad v'_j = B_{ij} v_i$. Por lo que las coordenadas de los vectores se transforman justo como se transforma la base de los covectores (dual de dual es el original).

1.5. Notación

Decimos que los componentes de un covector se transforman **covariantemente** (de la misma forma que los vectores base).
Y los componentes de un vector se transforman **contravarianetemente** (en contra de los vectores de la base)

Escribimos con índice abajo las cosas que se transforman como base de vectores, y con índice arriba las que se transforman como base de covectores.

Por convención escribimos los vectores base con índice abajo e_i. Los covectores como θ^i.
Los componentes de un vector van con índice arriba $v = v^i e_i$ y los de un covector van con índice abajo $f = f_i \theta^i$.

En general, si escribimos:

$$\mathbf{e} = (e_1, e_2, \cdots, e_n) \ , \ \theta = (\theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^n)^T$$
$$\mathbf{v} = (v^1, v^2, \cdots, v^n)^T \quad , \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

Entonces, las reglas de transformación son:

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$$
$$\theta' = \mathbf{A}^{-1}\theta$$
$$\mathbf{f}' = \mathbf{f}\mathbf{A}$$

1.6. Espacios de Producto Interno

Sea V un espacio vectorial sobre K. Se dice que $g : V \times V \to K$ es una **producto interno** de V si cumple que:

- $g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$
- $g(v, u) = \overline{g(u, v)}$
- $g(u, v) = 0$ para todo v implica que $u = 0$.

- **Se llama Positiva definida si** $g(u, u) \geq 0$ para todo u y la igualdad implica $u = 0$

Las primeras dos propiedades implican que g es anitlineal en la primera entrada (separa sumas pero conjuga escalares al sacarlos).

Forma Bilineal: Es una función $g : V \times V \to K$ que toma dos entradas y es lineal en cada una de ellas por separado. Es simétrica si cumple que $g(u, v) = g(v, u)$ y es positiva definida si cumple lo de positiva definida

Ortogonal: Un conjunto de vectores es ortogonal si $g(v_i, v_j) = 0$ cuando $i \neq j$.
Ortonormal: Un conjunto de vectores es ortonormal si $g(v_i, v_i) = \delta_{ij}$

Teorema: Todo espacio con producto interno tiene una base ortonormal.

Matriz de Gram: Dada una base $\{v_i\}$, se puede construir una matriz $G_{ij} = g(v_i, v_j)$ llamada matriz Grammiana.

Lemma: Si V es un espacio real con base $\{e_i\}$ y g es una forma bilineal simétrica. Sea $G = g(e_i, e_j)$. Entonces g es un producto interno sii el determinante del Grammiano es distinto de 0.

Signo de una Forma Bilineal Simétrica: Si g es una forma bilinaeal bisimétrica, entonces se puede diagonalizar con una matriz otrogonal (toerema espectral). Luego, se puede normalizar esta matriz multiplicando por todavía otra matriz. El resultado es una matriz con puros 1 y -1. El signo de la permutación es el número de 1s y de -1s en esta matriz.

1.7. Lemma de Riesz:

Digamos que V tiene un producto interno g . Definimos un mapeo $\psi : V \to V^*$ dado por $v \to f_v$. Con:

$$f_v(\cdot) = g(v, \cdot)$$

Entonces, si $K = \mathbb{R}$, el mapeo ψ es un isomorfismo y si $K = \mathbb{C}$, es un antihomomorfismo (porque es antilineal).
Es decir, a cada $v \in V$ le corresponde el funcional lineal $f_v(\cdots) = g(v, \cdot)$.

Adjunta: Dada una función $A : V \to W$, tiene una adjunta $A^* : W^* \to V^*$ con:

$$(A^*(f))(v) = f(A(v))$$

O bein:

$$\langle A^* f, v \rangle = \langle f, Av \rangle$$

Resulta que la matriz que representa a A^* es la matriz transpuesta y conjugada de A. Lo cual tiene todo el sentido del mundo con lo visto antes.

2. Álgebra Multilineal

Un **Mapeo multilineal** es una función $f : V \times V \times ... \times V \to A$ (con A es lo que sea) tal que es lineal en cada una de las entradas por separado (cuando las demás entradas se mantienen fijas).
Por ejemplo, tenemos algunos ejemplos de mapeos multilineales:

- Un producto interno sobre $\mathbb{R}$ es una función bilineal que toma dos vectores y devuelve un real
- El determinante de matrices de $n \times n$ es una función multilineal que toma n vectores y devuelve un escalar
- El producto cruz es un mapeo bilineal que toma dos vectores de $\mathbb{R}^3$ y devuelve un tercer vector de $\mathbb{R}^3$.

Consideremos por un momento a las formas bilineales que van de $V \times W \to Y$.
Sea por ejemplo f una forma bilineal de este tipo. Nos preguntamos ahora de qué elementos hay que conocer la imagen de f para poder determinar a f por completo. Es decir, cuántos números necesitamos para determinar perfectamente a f.

Digamos que $\{e_1, ...\ e_n\}$ es una base de V y que $\{g_1, ..., g_m\}$ es una base de w. Podemos ver que para determinar a f por completo, es necesario conocer a f en cada uno de los elementos de la forma (e_i, g_j).
Entonces, digamos que estas imágenes son $f(e_i, g_j) = f_{ij}$

Esto porque si queremos calcular por ejemplo $f(v, w)$, lo podemos hacer como sigue :

$$f(v, w) = f(v_i e_i, w_j g_j) = \sum_i v_i f(e_i, w_j g_j) = \sum_i v_i \sum_j w_j f(e_i, g_j) = v_i w_j f_{ij}$$

Entonces, necesitamos todos estos números $f_{ij} = f(e_i, g_j)$ para determinar los valores de f sobre $V \times W$. Sin embargo, a diferencia de como sucede para transformaciones lineales, los elementos (e_i, g_j) no son una base de $V \times W$ (porque una base de este espacio puede ser $\{(e_1, 0), (e_2, 0), ..., (e_n, 0), (0, w_1), ..., (0, w_m)\}$)

Entonces, no basta con saber la imagen de f en cada elemento de la base de $V \times W$ (de hecho no sirve de nada saber eso, porque f en cada elemento de la base de antes vale 0). Sino que hay que conocer f en todos los elementos de la forma (e_i, g_j).
Esto es algo que no se parece en nada en como solían ser usualmente las transformaciones lineales en las que solamente había que saber el valor de f en los elementos de la base.
Esto nuevamente se debe a que f es una función bilineal.

Nos gustaría ahora definir un espacio o algo así en el que podamos encontrar una función f' relacionada con la función f tal que ahora sí requiera solamente de conocer las imágenes en la base de este espacio y que ahora sí sea una función lineal.

Para esto, definimos el mágico producto Tensorial

Espacio Tensorial:
Dados dos espacios vectoriales V, W, definimos su producto tensorial como el espacio $V \otimes W$. Este producto tiene a los elementos de la forma $v \otimes w$ y además, le definimos la siguiente suma y producto por escalares:

- $\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$

- $v \otimes w + v' \otimes w = (v + v') \otimes w$

Si tenemos elementos que no comparte una de las coordenadas, entonces es imposible reducir su suma como en el ejemplo de arriba. Por ello, los elementos de la forma $v \otimes w$ son llamados simples. Y todos los elementos que se consiguen como sumas no reducibles de estos elementos se consideran todavía como miembros de $V \otimes W$ (para que sea un e.v.) pero no se pueden representar de forma simple. Estamos declarando que cumpla con todos los axiomas de un espacio vactorial. También le vamos a exigir que:

$$\lambda(a \otimes b + c \otimes d) = \lambda(a \otimes b) + \lambda(c \otimes d)$$

Entonces, los axiomas con los que definimos a $V \otimes W$ son:

- Los vectores (tensores) "simples"son $v \otimes w$ y se usan para construir otros vectores (tensores)
- La suma es simbólica nada más. A menos que dos tensores tengan una coordenada fija, en cuyo caso se suma la otra
- Los escalares salen al estar en una sola de las entradas.
- El resto de los axiomas de un e.v (distributividad, inversos, etc) se asumen o se obligan digamos.

Base: Una base para $V \otimes W$ se puede ver que es $\{e_i \otimes g_j\} = \{e_1 \otimes g_1, e_1 \otimes g_2, ...e_i \otimes g_m, e_2 \otimes g_1, ..., e_n \otimes g_m\}$
Se puede ver que con esta base se pueden obtener de forma sencilla los elementos simples y por tanto, luego todos los demás.
Vemos que $\dim(V \otimes W) = nm$ mientras que $\dim(V \times W) = n + m$.

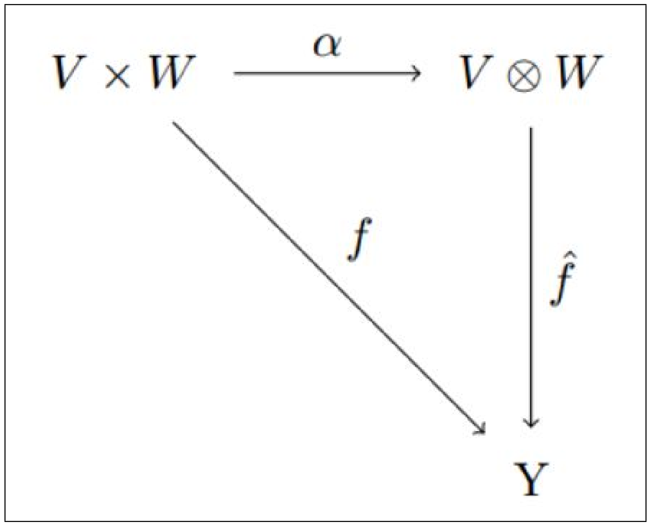
Y curiósamente la base de $V \otimes W$ se parece mucho a los elementos que necesitábamos para definir una forma bilineal. No es coincidencia.

Para qué nos ayuda este espacio tan raro?
Ah bueno, regresando a la discusión pasada sobre formas bilineales, el espacio $V \otimes W$ ayuda a transformar una forma bilineal f que iba de $V \times W$ a Y en una transformación lineal

común y corriente f' que va de $V \otimes W$ a Y.

Primero definimos una función $\mu : V \times W \rightarrow V \otimes W$ dada por:

$$\mu(v, w) = v \otimes w$$



μ es un mapeo multilineal, porque:

- $\mu(v_1 + v_2, w) = (v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w = \mu(v_1, w) + \mu(v_2, w)$
- $\mu(\lambda v, w) = (\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) = \lambda\mu(v, w)$

Ahora bien, considermos al mapa $f : V \times W \rightarrow Y$ y queremos verlo como un mapa lineal de $V \otimes W$ a Y.
Para ello, definimos f' como:

$$f'(e_i \otimes g_j) = f(e_i, w_j)$$

Y obligamos a f' a que sea lineal. La multilinealidad de f obliga a que f' esté bien definido.

Entonces, f' ya es una mejor forma de ver a la forma bilineal f porque ahora sí es lineal y se requiere justamente de conocer la imagen de la base del dominio de f' para conocer a todo f'.

Toda esta construcción se puede generalizar como uno esperaría para funcionels k-lineales (más de bi) y para k productos tensoriales.

Entonces, dada una forma multilineal $B : V_1 \times V_2 ... \times V_k \rightarrow Y$, podemos constuir el espacio $V_1 \otimes V_2 ... \otimes V_k$ que contiene a todos los productos tensoriales
Luego, el tensor que describe a B será un arreglo multidimensional que nos da todas las

imágenes que necesitamos para describir a B.
Además, ahora B se podrá ver como una función sencillamente lineal que va de $V_1 \otimes ... \otimes V_k$ a Y.

Todo lo anterior se puede ignorar porque está mejor el resumen uwu.

Resumen Y Ejemplos

Los tensores sirven para representar funciones multilineales. En especial cuando se tratan de funcionales cuyo resultado es un número real pero sino también se puede.
Nos fijaremos principalmente en funciones bilineales para los ejemplos porque es lo más sencillo y luego generalizamos.

Función Bilineal

Nos restringiremos a funciones bilineales para tener buenos ejemplos y que sea más fácil.
Una función bilineal es $B : V \times W \to Y$ que es bilineal en ambas entradas.
Creo que se llama forma bilineal si Y es el campo K.

Evaluar una función Bilineal :
Digamos que tenemos $v \in V, w \in W$, entonces, vemos que:

$$B(v, w) = B(v^i e_i, w^j g_j) = v^i w^j B(e_i, g_j)$$

Entonces, **una función bilineal se ve como elementos $v^i w^j$ multiplicados por elementos de Y, $B(e_i, g_j)$.**

Ejemplo: Si $f \in V^*, g \in V^*$, entonces una forma bilineal $\phi : V \times W \to K$ es:

$$\phi(u, v) = f(u)g(v)$$

Si $v \in V, w \in W$, entonces una forma bilineal $\lambda : V^* \times W^* \to K$ es:

$$\lambda(f, g) = f(u)g(v)$$

.

El problema de las funciones bilineales es que no se determinan totalmente al conocer la imagen de toda la base de $V \times W$. Para esto creamos el espacio 'abstracto' $V \otimes W$.
Este espacio nos servirá como un paso intermedio entre $V \times W$ y Y de tal forma que las funciones bilineales en $V \times W$ son ahora lineales en $V \otimes W$.

Queremos un espacio en el que la base sean elementos de la forma $[e_i, g_j]$ digamos. Para que una función bilineal como la de arriba se conozca en su totalidad al conocer la imagen de solamente este tipo de elementos.

Y que estos elementos sean verdaderamente distintos y no 'interaccionen entre sí' para que sí sean una base. A diferencia de $V \times W$, en la que no serían una base.

El espacio $V \otimes W$ tiene elementos de la forma $e_i \otimes g_j$. Y luego extendemos al generar usando bilinealidad. Es decir, definimos la suma y producto por escalar como:

- $+ : \begin{cases} e_i \otimes g_j + e_l \otimes g_j = (e_i + e_l) \otimes g_j & \text{(porque la segunda entrada es igual)} \\ e_i \otimes g_j + e_i \otimes g_k = e_i \otimes (g_j + g_k) & \text{(porque primera entrada son iguales)} \\ e_i \otimes g_j + e_l \otimes g_k = e_i \otimes g_j + e_l \otimes g_k & \text{La suma se deja sólo escrita} \end{cases}$

- $\cdot : a \cdot (e_i \otimes g_j) = (ae_i) \otimes g_j = e_i \otimes (ag_j)$

El espacio $V \otimes W$ tiene todos los elementos generados por los elementos de esta forma $e_i \otimes g_j$. Al hacer esto, como que este espacio tiene una 'estructura bilineal' en vez de la estructura lineal de $V \times W$. Lo que permita que las funciones bilineales de $V \otimes W$ se representen de una forma más natural.

Algunos elementos importantes del espacio $V \otimes W$ son los elementos de la forma $v \otimes w$. Se puede probar (con la definición de arriba) que tienen las propiedades:

- $+ : \begin{cases} v_1 \otimes w + v_2 \otimes w = (v_1 + v_2) \otimes w & \text{(porque la segunda entrada es igual)} \\ v \otimes w_1 + v \otimes w_2 = v \otimes (w_1 + w_2) & \text{(porque primera entrada son iguales)} \\ v \otimes w + x \otimes z = v \otimes w + x \otimes z & \text{La suma se deja sólo escrita} \end{cases}$

- $\cdot : \quad a \cdot (v \otimes w) = (av) \otimes w = v \otimes (aw)$

Con estas operaciones, el espacio $V \otimes W$ es un espacio vectorial y todos los elementos se ven como sumas de elementos de la forma $v \times w$ (no todos se pueden expresar de esta forma sencilla, algunos se deben dejar como sumas indicadas). Y es un espacio muy útil.
La base de $V \otimes W$ son los elementos de la forma $e_i \otimes g_j$. (porque literal lo construimos así, para que la forma bilineal quedara determinada por la base)

La utilidad de $V \otimes W$ es que ahora podemos ver a la forma bilineal B como si fuera una función lineal $B' : V \otimes W \to Y$.

Para esto, definimos B' como $B'(v \otimes w) = B(v, w)$ y le exigimos alv ser lineal. Lo bueno de haberle definido al espacio tensorial la suma toda rara es que ahora se cumple que:

- $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w) = B'(v_1 \otimes w) + B'(v_2 \otimes w) = B'(v_1 \otimes w + v_2 \otimes w) = B'((v_1 + v_2) \otimes w)$

Además ahora queda determinada toda B' con sólo conocer la imagen de los básicos. Pues se tiene que:

$$B(v, w) = B(v_i e_i, w_j g_j) = v_i B(e_i, w_j g_j) = v_i w_j B(e_i, g_j) = v_i w_j B'(e_i \otimes g_j) := v_i w_j B_{ij}$$

Con lo que se ve que B queda totalmente determinada con sólo saber su imagen en los elemento $e_i \otimes g_j$.
Por eso la utilidad de los tensores. Porque las formas bilineales no dependen solamente de la imagen de las bases, sino de los pares de vectores. Las funciones bilineales siempre se ven como sumas de productos de la forma $v_i w_j$.

Podemos representar B_{ij} en un arreglo multidimensional (en este caso una matriz) para guardar toda la información de la transformación.
También podemos representar a los tensores (los simples de la forma $v \otimes w$) como arreglos multidimensionales.

Representación del producto de dos vectores:

Si tenemos dos vectores v, w y queremos ver su imagen bajo B, ya sabemos que lo importante son los productos de sus coordenadas, porque $B(v,w) = v^i w^j B(e_i, g_j) = v^i w^j B'(e_i \otimes g_j)$.
Entonces, representaremos al elemento $v \times w$ como la matriz $v^i w^j$:

$$v \otimes w = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_2 w_1 & v_3 w_1 \\ v_1 w_2 & v_2 w_2 & v_3 w_2 \\ v_1 w_3 & v_2 w_3 & v_3 w_3 \end{pmatrix}$$

Donde cada elemento de esta matriz representa el coeficiente de $v \otimes w$ en el básico $e_i \otimes e_j$.

Representación de un tensor:

En general, recibe el nombre de tensor un elemento del espacio tensorial $V \otimes W$. Como tal, un tensor R debe de tener nueve componentes R^{ij}, correspondientes a los 9 básicos $e_i \otimes g_j$. Donde entonces, $R = R^{ij} e_i \otimes g_j$.
Para representar este tensor, usamos la matriz R^{ij} y ya sabemos que el elemento i, j de la matriz representa al coeficiente de $e_i \otimes g_j$.

Representación de la función bilineal

Si tenemos la forma bilineal $B(v,w)$, sabemos que queda definida por la imagen en los productos $e_i \otimes g_j$.
Es decir, $B(v,w) = v^i w^j B'(e_i \otimes g_j)$.
Para representarlo en una matriz, escribimos a $B(e_i \otimes g_j)$ en el lugar i, j de una matriz B.
Claro que al mentos que B sea una forma bilineal, las entradas de la matriz B^{ij} serán los vectores de Y llamados $B'(e_i \otimes g_j)$.

Si tenemos una forma bilineal B representada por una matriz y se la queremos aplicar a un par de vectores v, w. Simplemente ponemos la matriz $v^i w^j$ sobre la B y sumamos todos los elementos que coninciden. $B(v,w) = v^i w^j B'(e_i \otimes g_j)$

2.0.1. Ejemplos

1. **Producto Interno:** Definimos la forma bilineal $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $g(\vec{v}, \vec{w}) = v_i w_i$.

   En este caso, sí le podemos dar una forma a los elementos de $V \otimes W$ como:

$$v \otimes w = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_2 w_1 & v_3 w_1 \\ v_1 w_2 & v_2 w_2 & v_3 w_2 \\ v_1 w_3 & v_2 w_3 & v_3 w_3 \end{pmatrix}$$

   Se puede ver que al representar a los tensores de esta forma, se cumplen con las características que debe de cumplir el producto tensorial.
   Además, la base del espacio tensorial $e_i \otimes g_j$ serán entonces como la matriz anterior pero con un 1 en algún lado (i, j) y 0s en las demás.

   La importancia de exponer $v \otimes w$ de esta forma es que ahora la función bilineal g se puede escribir como una función lineal g' que simplemente combina los 9 elementos de $v \otimes w$.

   Podemos ver que el tensor g tiene entonces la representación $g_{ij} = \delta_{ij} = Id$.

   En realidad, cualquier tensor que vaya de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ queda definido por nueve números que dicen cómo hacer una suma de los elementos de la forma $v_i w_j$. En este caso resultó ser la delta de Kroenecker.

   Por esta razón, un tensor de grado 2 (que representa a una forma bilineal $V \times W \to \mathbb{R}$) requiere de $\dim(V) \cdot \dim(W)$ números, que podemos ordenar en un arreglo matricial por ejemplo.

- **Determinante:** Consideramos el determinante de una matriz de 2*2. Esto se puede ver como una forma bilineal $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Con $d(v, w) = v_1 w_2 - v_2 w_1$.

  Podemos representar un producto tensorial como:

$$v \otimes w = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 \end{pmatrix}$$

  Y el tensor d simplemente nos dice qué es lo que hace d con cada una de estas coordenadas. En este caso es:

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1. Tensores Generales

Un tensor de lo más general del tipo (r, s) es un elemento del espacio:

$$T_s^r = \bigotimes_{i=1}^r V \otimes \bigotimes_{j=1}^s V^*$$

Digamos que V tiene una base $\{e_i\}$ y que V^* tiene una base $\{\theta^i\}$. Entonces, una base para el espacio T_s^r sería todos los objetos de la forma:

$$e_{i1} \otimes e_{i2} \otimes ... \otimes e_{ir} \otimes \theta^{j1} \otimes \theta^{j2} \otimes ... \otimes \theta^{js}$$

Esta base para T_s^r tiene puros ceros excepto por un uno en cada lugar correspondiente.
Un tensor de tipo (r,s) general sería una combinación lineal de esta base, es decir:

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_r}{}_{j_1 j_2 \ldots j_s} e_{i1} \otimes e_{i2} \otimes ... \otimes e_{ir} \otimes \theta^{j1} \otimes \theta^{j2} \otimes ... \otimes \theta^{js}$$

Es decir, se puede ver de por lo menos dos formas:

- Un arreglo de muchos números (en esta caso necesitamos un arreglo $r + s$ dimensional con n números en cada 'fila'). Tal que representa a una función lineal que se aplica a r vectores y s covectores. La función consiste en multiplicar cada una de las combinaciones posibles de coordenadas de los $r + s$ objetos por el número correspondiente de T y luego sumar sobre todas.
- Una función multilineal que toma r vectores y s covectores.

2.2. Cambio de Base

Entonces, el tensor representado en esta base se ve como un arreglo de un chingo de números en una forma bastante rara. Ahora nos preguntamos qué pasa si queremos cambiarnos a una base $\{e'_i\}$. Representamos los componentes de un objeto en esta base al poner un primado en su índice.
T va a tener r índices que se transforman contravariantemente y s que se transforman covariantemente.
Como vimos antes, si A es la matriz que transforma a la base e en la base e' según $e'_j = e'_i A^{i'}_j$.
Entonces, los componentes de vectores y covectores se transforman como:

$$v^{i'} = (A^{-1})^{i'}_j v^j$$
$$\phi_{i'} = A^j_{i'} \phi_j$$

Entonces, nos queda que las componentes del tensor se transforman como:

$$T^{i'_1 \cdots i'_r}{}_{j'_1 \cdots j'_s} = T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} (A^{-1})^{i'_1}_{i_1} \cdots (A^{-1})^{i'_r}_{i_r} A^{j_1}_{j'_1} \cdots A^{j_s}_{j'_s}$$

2.3. Tensores como mapeos multilineales

Como ya dije antes, un tensor del espacio T^r_s se puede ver como un mapeo multilineal de la forma $T : V^* \times ... \times V^* \times V \times .... \times V \to \mathbb{R}$.

Por ejemplo, si tenemos el tensor básico dado por:

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{j_s}$$

Lo podemos ver como un mapeo multilineal en el espacio $(V^*)^{\times r} \times V^{\times s}$ que actúa según la regla:

$$\begin{aligned}&(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{j_s})(\theta^{k_1}, \cdots, \theta^{k_r}, e_{l_1}, \cdots, e_{l_s})\\&= \langle e_{i_1}, \theta^{k_1}\rangle \cdots \langle e_{i_r}, \theta^{k_r}\rangle\langle \theta^{j_1}, e_{l_1}\rangle \cdots \langle \theta^{j_s}, e_{l_s}\rangle\\&= \delta^{k_1}_{i_1} \cdots \delta^{k_r}_{i_r}\delta^{j_1}_{l_1} \cdots \delta^{j_s}_{l_s}\end{aligned}$$

Entonces, un tensor general es

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{\quad j_1 j_2 \ldots j_s} e_{i1} \otimes e_{i2} \otimes ... \otimes e_{ir} \otimes \theta^{j1} \otimes \theta^{j2} \otimes ... \otimes \theta^{js}$$

Que es una combinación lineal de los tensores de antes

2.4. Tensores de Orden General

Un tensor de orden $(r + s)$ que es $r-$ contravariante y s covariante se escribe como T^r_s.
Es una función multilineal del conjunto $\times_r V^* \times \times_s V$ a $\mathbb{R}$.
Es lineal en cada uno de los componentes.

El conjunto de todos los tensores r- contravariantes y s- covariantes se denota por $\mathcal{T}^r_s(V) = \bigotimes_r V \otimes \bigotimes_s V^*$
Definimos la suma y producto por escalares de estas funciones como es de esperar y forma así un espacio vectorial.

Base: La base de este espacio son los N^{r+s} elementos de la forma: $\{\vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_r} \otimes \tilde{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{e}^{j_s}\}$

Producto Tensorial: Sea T^r_s , W^p_q dos tensores. Entonces definimos $T^r_s \otimes W^p_q$ como un funcional lineal de $V^* \times \cdots_{r+p} \times V^* \times V \times \cdots_{s+q} \times V$ a $\mathbb{R}$.
Es decir, un elemento de $\mathcal{T}^{r+p}_{s+q}(V)$. Se define por:

$$\begin{aligned}&(T^r_s \otimes W^p_q)(\tilde{u}^1, \cdots, \tilde{u}^r, \tilde{v}^1, \cdots, \tilde{v}^p; \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s, \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_q)\\&= [T^r_s(\tilde{u}^1, \cdots, \tilde{u}^r; \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s)][W^p_q(\tilde{v}^1, \cdots, \tilde{v}^p; \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_q)]\end{aligned}$$

Cumple las propiedades de asociatividad, sacas escalares, distributividad, no-conmutatividad.

Componentes: Un tensor T^r_s (toma r covectores y s vectores) se puede escribir como:

$$T^r_s = T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_r} \otimes \tilde{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{e}^{j_s}$$

Entonces, los componentes son $T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$.

Cambio de Base: Si la base se cambia como $\vec{e'}_a = \lambda^b_a \vec{e}_b \quad , \quad \vec{e}_a = \mu^b_a \vec{e'}_b$.
Entonces las N^{r+s} componentes de $T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$ cambian según la regla:

$$T^{i'_1 \cdots i'_r}_{j'_1 \cdots j'_s} = \mu^{i'_1}_{i_1} \cdots \mu^{i'_r}_{i_r} \lambda^{j_1}_{j'_1} \cdots \lambda^{j_s}_{j'_s} \; T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$$

Tensor Numérico:
Es un tensor cuyos componentes se mantienen fijos bajo cambios de coordenadas. Por ejemplo, el tensor O. O bien el tensor I. Pues en cambio de coordenadas tenemos:

$$\delta'^a_b = \mu^a_c \lambda^d_b \delta^c_d = \mu^a_c \lambda^c_b = \delta^a_b$$

2.5. Simetría de Tensores

Sea T un tensor de tipo $(0,2)$ (toma 2 covectores y da un escalar, sus componentes son covariantes), solamente como ejemplo.
Decimos que es:

- **Simétrico:** $T_{ij} = T_{ji}$
- **Antisimétrico:** $T_{ij} = -T_{ji}$

La simetría o antisimetría de un tensor no depende de la base elegida para sus componentes. Un tensor cualquiera de tipo (0,2) o (2,0) o (1,1)? se puede descomponer en su parte simétrica y su parte antisimétrica:

$$(T_{sim})_{ij} := \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$$
$$(T_{asim})_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$$

Para tensores de mayor orden hay que tomar en cuenta todas las otras simetrías que pueden pasar y así. Y hay que considerar las posibles permutaciones de los índices que hay. Ver Renteln 36.
No escribiré la condición desde el punto de vista del tensor como un arreglo de índices, pero sí del tensor como una función multilineal.
Sea σ una permutación de p elementos. Entonces T es simétrico si:

$$T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(p)}) = T(v_1, v_2, ..., v_p)$$

Y es antisimétri si:

$$T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(p)}) = sgn(\sigma) T(v_1, v_2, ..., v_p)$$

El conjunto de tensores antisimétricos son aquéllos que sacan un menos al trasponer dos vectores de su dominio. A este subespacio de los $(0,p)$ tensores se le conoce como espacio alternante de V o $Alt^p V$

2.6. Operaciones Especiales de Tensores de segundo Orden

2.6.1. Composición:

La composición de dos tensores es básicamente el producto de sus matrices. En clase lo llamamos el producto punto pero bueno.

Por ejemplo, si queremos calcular el producto de dos tensores A y B, hacemos el producto de los componentes del tensor como matrices (omitiendo los elementos de la base tensorial):

$$A \cdot B = A^{ij} B^{kl}$$

$\Rightarrow \quad A^{ij} B^{jl}$ al igualar la segunda del primero y la primera del segundo, estamos haciendo el producto de matrices

Entonces, el resultado como tal, ya con la base es:

$$A \cdot B = A^{ij} B^{jl} (e_i \otimes e_l)$$

Pero, qué significa esto? No sé

Pero es fácil ver que aís como las matrices no conmutan, $AB \neq BA$.
Y también se puede probar que $A \cdot (B + A) = A \cdot B + A \cdot C$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

2.6.2. Producto con un escalar:

Es como el producto de la matriz y el vector:

$$A \cdot w = A^{ij} w^j$$

Que ya es un simple vector.

O por ejemplo:

$$\begin{aligned} (v \otimes u) \cdot w &= (v^i e^i \otimes u^j e^j) \cdot w \\ &= v^i u^j w^j (e^i \otimes e^j e^j) \\ &= v \otimes (u \cdot w) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= v^i u^j (e^i \otimes e^j) \cdot w^j e^j \\ &= v^i e^i \otimes u^j w^j \end{aligned}$$

Y este producto cumple que $v \otimes (\alpha u + \beta w) = \alpha (v \otimes u) + \beta (v \otimes w)$

2.6.3. Doble Contracción

Definimos la doble contracción (horizontal) de dos tensores de la forma:

$$(v \otimes u) \cdot \ \cdot (w \otimes s) = (v \cdot s)(u \cdot w)$$

que ya es un escalar. Extendemos esta definición a tensores más arbitrarios. Y tenemos entonces que en general:

$$\begin{aligned} A\cdot\cdot B &= (A^{ij}e^i \otimes e^j)\cdot\cdot(B^{kl}e^k \otimes e^l) = (A^{ij}e^i \cdot e^l)(e^j \cdot B^{kl}e^k) = \\ &= (A^{ij}\delta^{il})(B^{kl}\delta^{jk}) = A^{lj}B^{jl} \end{aligned}$$

Se puede probar que es un producto conmutativo.

Doble contracción Parada

Una definición alternativa a la doble contracción anterior, y con la que nos quedaremos es:

$$(v\otimes u) : (w \otimes s) = (v \cdot w)(u \cdot s)$$

Con esta definición, el producto general de dos tensores es:

$$\begin{aligned} A : B &= (A^{ij}e^i \otimes e^j) : (B^{kl}e^k \otimes e^l) = (A^{ij}e^i \cdot B^{kl}e^k)(e^j \cdot e^l) = \\ &= A^{ij}B^{kl}\delta^{ik}\delta^{jl} = A^{ij}B^{ij} \end{aligned}$$

Se puede ver que este producto es conmutativo y en general no es igual al otro.
Además, se distribuye con la suma y saca escalares.

2.7. Propiedades básicas

- **Transpuesta de un Tensor:**
  La transpuesta de un tensor es $(v \otimes u)^T = (u \otimes v)$
  O bien, si el tensor es $A^{ij}(e^i \otimes e^j)$, entonces su transpuesta es $A^T = Aji(e^i \otimes e^j) = A^{ij}(e^j \otimes e^i)$

  Propiedades:

  - $(A^T)^T = A$
  - $(\alpha B + \beta A)^T = \alpha B^T + \beta A^T$
  - $(B \cdot A)^T = A^T \cdot B^T$
  - $A : B^T = A\cdot\cdot B$
  - $A^T : B = A\cdot\cdot B$
  - $A^T : B = A : B^T$

  Traza: La traza actuando sobre los elementos de la base es $Te(e^i \otimes e^j) = e^i \cdot e^j = \delta^{ij}$
  La traza de un tensor A es la suma de las componentes de su diagonal principal:
  $Tr(A) = Tr(A^{ij}(e^i \otimes e^j))A^{ij}Tr(e^i \otimes e^j) = A^{ij}\delta^{ij} = A^{ii}$

  Con esto, podemos redefinir algunas de las operaciones que hemos hecho:

- **Producto punto de Dos vectores:**
  $u \cdot v = u^i v^i = u^i v^j \delta^{ij} = u^i v^j Tr(e^i \otimes e^j) = Tr(u^i e^i \otimes v^j e^j) = Tr(u \otimes v)$

Propiedades de la traza:

- $Tr(A^T) = Tr(A)$
- $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
- $Tr(A \cdot B) = A \cdot \cdot B = Tr(B \cdot A)$

Entonces, podemos definir a la doble $A \cdot \cdot B = Tr(A \cdot B)$ y también que $A : B = Tr(A^T \cdot B)$

Vemos que un tensor (de rango 2) es simétrico si $A = A^T$ y antisimétrico si $A^T = -A$.

Simetría:

Para tensores de orden 4, decimos que un tensor tiene simetría menor si al permutar por separado la primera pareja o la segunda, el resultado es el mismo tensor.
Tiene simetría mayor si al cambiar cualquier pareja de índices el resultado es el mismo.

2.8. Delta De Kronecker

Dados dos vectores $\mathbf{v} = (v^1, v^2), \mathbf{u} = (u^1, u^2)$. Entonces, podemos escribir el producto punto de $\mathbf{u}$ con $\mathbf{v}$ como:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}^T I \mathbf{u} = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad fue necesaria para poder verlo en notación de índices:

$$\mathbf{v} I \mathbf{u} = v_j \delta_i^j u^i = \delta_i^j v_j u^i = v^i u^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

Y además, la delta de Kronecker subió el índice de v (convierte un covector en un vector). Esto define el producto escalar entre un vector y un covector.
Si hacemos el producto de $\mathbf{v}$ con sigo mismo, obtenemos por resultado $v^i v^i = (v^i)^2 = |v|^2$. Por ello, el producto punto nos permite definir norma.
Pero para definir la norma, usamos la delta de Kronecker.

2.9. Tensor Métrico

Es una forma bilineal con las siguientes características:

- $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
- $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

- $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{u} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v} = 0$

Redefinimos el producto interior usando el tensor métrico:

- Entre vectores:

$$s = g_{ab} v^a u^b$$

- Entre covectores:

$$s = g^{ab} v_a u_b$$

- Entre vector y covector:

$$s = g^a_b v_a u^b$$

Definimos ahora la **contracción entre dos tensores**. Sea A de rango (0,m) y sea B de rango (n,0). Entonces, la contracción va a ser:

$$s = g^{b_1 b_2 \ldots b_m}_{a_1 \ldots a_n} A^{b_1 \ldots b_n} B^{a_1 \ldots a_n}$$

O como corresponda según la covarianza o varianza.

El tensor es simétrico (obvio porque su función bilineal lo es) y además sube o baja índices según corresponde.

2.10. Tensores Alternantes

Producto externo o cuña: El producto externo entre dos vectores de V se define como:

$$v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v$$

El producto exterior de dos vectores es llamado un 2-vector y el espacio de 2-vectores es denotado como $\bigwedge^2 V$.
Probamos ahora que una base para este conjunto son los productos de la forma $e_i \wedge e_j$ para $i < j$.
Para ver esto, notamos que los vectores se pueden escribir como $v = v^i e_i, w = w^j e_j$.
Y que el producto exterior es:

$$\begin{aligned} v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v = v^i e_i \otimes w^j e_j - w^j e_j \otimes v^i e_i \\ = v^i w^j (e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) = v^i w^j e_i \wedge e_j \end{aligned}$$

Si cambiamos los índices mudos, el resultado queda igual pero con un menos. Por lo que los únicos elementos básicos son los $e_i \wedge e_j$.

Entonces, tenemos una base para los 2-vectores. Y esta base tiene $\binom{n}{2}$ elementos.

$\bigwedge^2 V$ **es isomorfo a** $Alt^2 V$: Esto porque $Alt^2 V$ también tiene $(n2)$ elementos.

Podemos ahora proceder de manera axiomática y definimos el producto exterior de p vectores como una operación $v_1 \wedge v_2 \wedge .... \wedge v_p$ de p vectores cuyo resultado es un tensor que satisface:

- **Multilineal:**

$$v_1 \wedge ... \wedge (au + bv) \wedge ... \wedge v_p = a(v_1 \wedge ... \wedge u \wedge ... \wedge v_p) + b(v_1 \wedge ... \wedge v \wedge ... \wedge v_p)$$

- **Antisimetría:**
  Cambiar el orden de dos vectores le cambia el signo al resultado.

Un producto exterior de p vectores se llama un p-vector y es un elementos de $\bigwedge^p V$.
Una base para este espacio está dada por:

$$e_I := e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}$$

Donde $I = (i_1, ..., i_p)$ indica una colección ordenada de índices (los de las e de la derecha) y donde $1 \leq i_1 < ... < i_p \leq \dim V$.
Esto porque cualquier otra colección de índices que no cumpla esta regla o vale 0 (si dos son iguales) o se puede llevar a una de esta forma.

La dimensión de $\bigwedge^p V$ es $(n\ p)$. Un vector general en $\bigwedge^p V$ s escribe como:

$$\frac{1}{p!}\ a^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} = a^I e_I$$

Donde se tiene el $p!$ abajo porque varias de las entradas son iguales y solamente cambia la posición de los ídices, que se resuelve con antisimetría.
De forma general, se puede definir:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p = c_p \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots v_{\sigma(p)}$$

2.11. El Álgebra Exterior

La colección $\bigwedge V$ de todos los $\bigwedge^p V$ para todo p forman un álgbra llamada álgebra exterior de V. Dado $\lambda \in \bigwedge^p V$ y $\mu \in \bigwedge^q V$, dan como resultado:

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge \cdots \wedge w_p) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_p$$

Y extendemos la operación con linealidad. Para que cumpla las propiedades:

- $\lambda \wedge (a\mu + b\nu) = a\lambda \wedge \mu + b\lambda \wedge \nu$
- $\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu$
- $\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq} \lambda \wedge \mu$

Así como el producto tensorial sirve para identificar funciones multilineales, el producto producto alternante sirve para identificar funciones multilineales alternantes sin términos adicionales de la base.

2.12. La transformación Lineal Inducida

Digamos que tenemos un mapeo $T : V \to V$ lineal. Definimos su **potencia p exterior** como el mapeo lineal:

$$\Lambda^p T : \bigwedge^p V \to \bigwedge^p V$$

Definida por:

$$(\bigwedge^p T)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = T(v_1) \wedge \cdots \wedge T(v_p)$$

Este mapeo es natural, en el sentido que:

$$\bigwedge^p (ST) = (\bigwedge^p S)(\bigwedge^p T)$$

Similarmente, si $\lambda \in \bigwedge^p V$, $\mu \in \bigwedge^q V$, entonces:

$$(\bigwedge^{p+q} T)(\lambda \wedge \mu) = (\bigwedge^p T)(\lambda) \wedge (\bigwedge^q T)(\mu)$$

Además, como $\dim \bigwedge^n V = 1$, entonces $\bigwedge^n T$ es un mapeo lineal entre espacios de una dimensión y por tanto se ve como el producto por un escalar:

$$(\bigwedge^n T)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = (\det T)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)$$

2.13. El Dual de Hodge

Un producto interno g en V induce un producto interno en $\bigwedge^p V$ como sigue. Si $\lambda = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ y $\mu = w_1 \wedge \cdots \wedge w_p$ definimos:

$$g(\lambda, \mu) = \det(g(v_i, w_j))$$

3. Diferenciación en Variedades

3.1. Resumen Topología

Dado un conjunto X, una topología es una familia τ de subconjuntos de X llamados abiertos que cumplen:

- La unión arbitraria de abiertos es abierta
- La intersección finita de abiertos es abierta
- $\emptyset, X$ son abiertos

Vecindad: La vecindad de $p \in X$ es cualquier abierto que contiene a a p

Hausdorff: Es un espacio topológico tal que cualesquiera dos puntos tienen vecindades disjuntas.
Cerrado: Un conjunto cuyo complemento es abierto
Interior: Y^0 es la unión de todos los abiertos contenidos en Y.
Cerradura: clY es la intersección de todos los cerrados que contienen a Y.
Denso A es denso en X si $clA = X$
Pto de Acumulación: $x \in X$ es un pto de ac. de Y si $x \in cl(Y - \{x\})$

Cubierta abierta: Una familia de abiertos que cubren a Y
Compacto: Si toda cubierta abierta tienen una subcubierta finita

Base: Una base para X es una colección $\mathcal{B}$ de abiertos tales que:

1) Para todo $x \in X$, existe un $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$
2) Dados dos elementos de la base B_1, B_2 si $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe un abierto B_3 con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

La topología **generada por** $\mathcal{B}$ son todos los conjuntos que se pueden generar como uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$.
O bien, todos los conjuntos U tales que para todo $x \in U$ existe un B tal que $x \in B \subset U$

Topología de Producto: Dados dos conjuntos X, Y, la topología de $X \times Y$ se puede formar con la base dada por todos los conjuntos de la forma $U \times V$ con U abierto en X y V abierto en Y y luego sacando su generado.

Topología del Subespacio: Si X tiene una topología τ y $Y \subset X$, le podemos dar a Y la topología formada por todos los conjuntos de la forma $Y \cap U$ donde $U \in \tau$

Continuidad: $f : X \to Y$ es continua si la imagen inversa de un abierto en Y es abierto en X
Homeomorfismo: Es un mapeo continuo y con inverso continuo. Si existe dicho mapeo,

X, Y son homeomorfos y se escribe $X \simeq Y$
Invariante topológico: Es toda propiedad que se mantiene bajo homeomorfismos

3.2. Cálculo Multivariable

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. La **derivada parcial es**:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

Suave: Una función C^∞ que existen todas sus derivadas parciales de todos los órdenes y son continuas.

Una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un mapeop $x \to (f^1(x), \cdots, f^m(x))$ donde aca f^i es una **función componente**.
La **derivada** Df_x en x es la matriz de derivadas parciales $Df_x = (\partial f^i / \partial x^j)$ llamada **matriz jacobiana**.
Es la transformación lineal que mejor aproxima a f cerca de x

Diffeomorfismo: Dados U, V, $f : U \to V$ es un diffeomorfismo si tanto f como f^{-1} son suaves.

Teorema de la función Inversa: Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : W \to \mathbb{R}^n$ una función suave. Si $a \in W$ y $Df(x)$ es no singular, entonces existe una vecindad abierta U de a tal que $f(U) = V$ es abierto y $f : U \to V$ es un difeomorfismo.
Si $x \in U$ y $y = f(x)$, entonces $(Df^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}$

3.3. Coordenadas

3.3.1. Funciones Coordenadas

Pensamos en las **funciones coordenadas** que a cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ le asignan sus coordenadas.
Son n funciones de la forma $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que le asignan la i-ésima coordenada al punto p.
Por ejemplo:

$$x^i(a) = a_i$$

El problema con esta notación es que también usamos estas x^i como coordenadas para describir conjuntos. Por ejemplo, describimos una esfera como $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$

3.3.2. Sistemas de Coordenadas

Cuando intentamos encontrar una forma de representar la esfera con coordenadas, nos damos cuenta que debería de bastar con dos coordenadas para hacerlo, pero no se puede.
Por ejemplo, intentamos hacer la parametrización con las coordenadas θ, ϕ como:

$$\begin{aligned} x^1 &= \sin\theta\cos\phi \\ x^2 &= \sin\theta\sin\phi \\ x^3 &= \cos\theta \end{aligned}$$

Sin embargo, si escogemos el rango $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$, el polo norte y el sur tienen infinidad de representaciones.
Por tanto, no se puede expresar la esfera con dos coordenadas. Esto es porque hay la esfera y el plano $\mathbb{R}^2$ tienen topologías distintas.

3.3.3. Cambio de Coordenadas

Digamos que hacemos el cambio de coordenadas entre cartesianas y polares. Dado por $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
Entonces, el Jacobiano del cambio de coordenadas es:

$$\begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

El teorema de la función inversa nos asegura que hay correspondencia entre estas coordenadas. Por lo que podemos asignarle coordenadas polares a todos los puntos. Excepto en el 0, en el que el jacobiano se anula, lo que indica que en este punto no es invertible.

3.4. Variedades Diferenciables

Una **variedad suave M** es un espacio topológico de Hausdorff.
Junto con una colección de abiertos $\{U_i\}$ llamados **vecindades coordenadas** cada uno junto con una función $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$. Las parejas (U_i, ϕ_i) se llaman **cartas coordenadas**, que cumplen:

1) Cada $\phi_i : U \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo a un subespacio abierto de $\mathbb{R}^n$ (Es decir M es **localmente euclideo)**

2) Si $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ son dos cartas tales que: $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ es un difeomorfismo. Las cartas son **compatibles en las intersecciones**.

Cada pareja (U_i, ϕ_i) es llamada una **carta coordenada** y la colección de cartas se llama **atlas**. Los mapeos $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ es una **función de transición** del atlas.

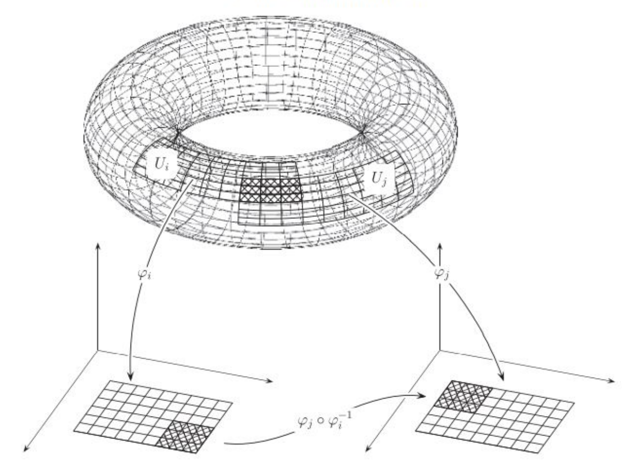


Figure 3.3 Two coordinate charts and a transition function.

Pedimos también que M sea Hausdorff (para que sea infinitamente divisible). Y pedimos que la cubierta sea contable.

En una variedad, podemos darle coordenadas a cada punto de la variedad.
Por ejemplo, si (U, ϕ) es una carta coordenada con $p \in U$ y supongamos que $\phi(p) = q \in \mathbb{R}^n$.
Si $x^1, \cdots, x^n$ son las coordenadas usuales de q en $\mathbb{R}^n$ tiene las coordenadas $(x^1(q), \cdots, x^n(q))$.
Entonces podemos escribir:

$$\phi(p) = (x^1(q), \cdots, x^n(q))$$

Es decir, convertimos p en $q \in \mathbb{R}^n$ y luego le damos coordenadas $(x^1(q), \cdots, x^n(q))$.
En lugar de eso, le asignamos ' coordenadas ' a $p \in M$ directamente usando las de q como:

$$\phi(p) = (x^1(p), \cdots, x^n(p))$$

Que se interpretan las coordenadas $x^i(p)$ como las de $q \in \mathbb{R}^n$. Se llaman las **coordenadas locales de U.**

Sea V otra vecindad coordenada, con coordenadas locales $y^1, \cdots, y^n$. Si $U \cap V \neq \emptyset$ entonces, en $\phi(U \cap V)$ tenemos la conexión entre coordenadas $\psi \circ \phi^{-1}$ que convierte una de las coordenadas locales en las otras como sigue $\psi \circ \phi^{-1}$

$$(x^1, \cdots, x^n) \to (y^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, y^n(x^1, \cdots, x^n))$$

La concdición de compatibilidad en la def. de Variedad se traduce a que esta función de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo sea un difeomorfismo.
Que por el teorema de la función inversa, significa que el Jacobiano $\det(\partial y^i / \partial x^j)$ es distinto de 0.

Orientable: Una variedad es orientable si es posible escoger las cartas coordenadas de tal forma que en las zonas que se intersectan las cartas, el determinante de la conexión de coordenadas sea siempre del mismo signo.
Ejemplo: Renteln 65

3.5. Mapeos Suaves en Variedades

La definición de función diferenciable en $\mathbb{R}^n$ usa la estructura lineal del espacio Euclideo, por lo que no se puede generalizar tan sencillamente a variedades.
Sin embargo, podemos definir mapeos suaves en una veriedad.

Suave: Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es suave en $p \in M$ si para cualquier carta (U, ϕ) con $p \in U$ el mapeo:

$$\tilde{f} := f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$$

Es una función suabe en el sentido Euclideo en $\phi(p)$.
Esta definición es independiente de la carta coordenada que se use (para una variedad suave).
Pues si usamos una carta (V, ψ) con $p \in V$, entonces por definición se tiene que $\psi \circ \phi^{-1}$ es suave. Entonces $f \circ \phi^{-1} = f \circ \psi^{-1} \circ \phi \circ \phi^{-1}$ es suave sii $f \circ \psi^{-1}$ es suave.
El espacio de funciones suaves en M se denota como $\Omega^0(M)$.
Si $x^1, \cdots, x^n$ son las coordenadas locales de p, abusamos la notación y escribimos $f = f(x^1, \cdots, x^n)$ como si se aplicara directo a las coordenadas.

Mapeos Más Generales: Sean M, N dos variedades suaves con dimensión m, n. Un mapeo $f : M \to N$ es **suave** si para cada $p \in M$ existen cartas (U, ϕ) en M y (V, ψ) en N con $p \in U$ y $f(U) \subset V$ tales que:

$$\tilde{f} := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

Es un mapeo suave entre espacios euclideos.
Un mapeo $f : M \to N$ es un **Difeomorfismo** si tanto f como f^{-1} son suaves.
Si existe un difeomorfismo entre M y N decimos que son diffeomorfos.

Si $x^1, \cdots, x^n$ son las coordenadas locales en U y $y^1, \cdots, y^m$ son las locales en V, entonces deberíamos de escribir:

$$f(x^1, \cdots, x^n) = (f^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, f^m(x^1, \cdots, x^n))$$

Donde $f^i = y^i \circ f$. Es decir, ya nos da directamente la coordenada en V del resultado $f(p)$.
Sin embargo, solemos escribir sloppy como:

$$f(x^1, \cdots, x^n) = (y^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, y^m(x^1, \cdots, x^n))$$

Escrito de esta forma parece que $f : M \to N$ es una función multivariable usual en espacios Euclideos.
Y en cierto sentido lo es, sólo que antes usa las cartas coordenadas para traducir.

Remark: Como los mapeos suaves de variedades se reducen a mapeos suaves de espacios euclideos, se vale el teorema de la función inversa.
Remark: En cálculo se definen curvas y superficies por medio de parametrizaciones. Los mapeos coordenados se pueden pensar como parametrizaciones inversas.

3.6. Inmersiones y Embedings

Sean M, N variedades de dim m, n. Y sea $f : M \to N$ un mapeo suave representado en coordenadas locales como:

$$f(x^1, \cdots, x^n) = (y^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, y^m(x^1, \cdots, x^n))$$

Si $m \leq n$ y la matriz JAcobiana tiene rango máximo (m) en $p \in M$, entonces f se llama una **inmersión en** p.
Si f es una inmersión para todo $p \in M$, entonces M es una subvariedad inmersa en N.

Si $m \geq n$ y el Jacobiano tiene máximo rango (n) en $p \in M$ entonces f es una submersión en p.

Una inmersión inyectiva f se llama embedding si f mapea M homeomorficamente en su imagen $f(M)$ (no puede tener auto intersecciones).
El **Teorema de Whitney** dice que cualquier variedad $n-$dimensional puede ser embedded a $\mathbb{R}^{2n+1}$ y cualquier variedad suave puede ser embeded a $\mathbb{R}^{2n}$
Por ejemplo, la botella de Klein es una variedad de dimensión 2 que no puede embedarse a $\mathbb{R}^3$ sin auto intersecciones pero sabemos que sí se puede en $\mathbb{R}^4$

3.7. Espacio Tangente

Regresamos un momento al espacio Eucliedo. Sea ψ un campo escalar en $\mathbb{R}^3$ y sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada como $t \to (\gamma^1(t), \gamma^2(t), \gamma^3(t)) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$. Entonces, tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\psi(\gamma(t)) = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \nabla\psi$$

Donde $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Y $d\gamma/dt$ es el **vector tangente de la curva**

Esta ecuación es la derivada direccional de ψ en la dirección $d\gamma/dt$. Nos dice como cambia ψ en la curva. Pero ψ es arbitrario, por lo que podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \nabla$$

Esta ecuación nos da una pista de como la idea de un vector tangenete se puede generalizar. No podemos poner flechas o líneas en una variedad (porque no es un espacio vectorial general). Pero mantenemos la idea de que un vector tangente es algo que nos dice como cambia una función al movernos en esa dirección.
Entonces, en vez de ver $d\gamma/dt$ que es el vector tangente y vive en el Euclideo, ahora vemos d/dt como el vector tangente.

Example 3.8 As a simple illustration of the utility of this perspective, consider again the transformation (3.6) between Cartesian and polar coordinates in the plane. By considering the effect of the gradient operator we see that the vector $\partial/\partial x$ (respectively, $\partial/\partial y$) points in the direction of increase of the x (respectively, y) coordinate. We set the length of each vector to unity and therefore write

$$e_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{and} \quad e_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

for the usual orthonormal basis of $\mathbb{R}^2$.

From (3.6) and the chain rule we compute

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

The vector $\partial/\partial r$ evidently has unit length, so it must be the unit vector e_r in the r direction. The vector $\partial/\partial\theta$ points in the θ direction (i.e., the direction in which θ increases), but it must be scaled by r to yield a unit vector. Thus we have

$$\begin{aligned} e_r &= \cos\theta\, e_x + \sin\theta\, e_y \\ e_\theta &= -\sin\theta\, e_x + \cos\theta\, e_y. \end{aligned}$$

The reader should verify that these are indeed the correct unit vectors. (See Figure 3.10.)

Para extender estas ideas a una variedad M general, definimos un
Vector tangente X_p en $p \in M$ como una **derivación lineal** en p. Es decir, para $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \Omega^0(M)$,
$X_p : \Omega^0(M) \to \mathbb{R}$ satisface:

1) Linealidad $X_p(af + bg) = aX_p(f) + bX_p(g)$

- Propiedad de Leibnitz: $X_0(fg) = g(p)X_p(f) + g(p)X_p(g)$

El espacio **tangente a** M **en** p T_PM es el generado por todos los X_p

Es decir, si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función suave, un vector tangente a p es una regla $X_p : \Omega^0(M) \to \mathbb{R}$ que a partir de f nos devuelve un número y que cumple la linealidad y la propiedad de Leibniz.
Para estos vectores tangentes, podemos definir una suma y un producto escalar como:

- $(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f)$
- $(\lambda \cdot X_p)(f) = \lambda X_p(f)$

Luego, T_pM es el generado por estos vectores tangentes.

Alternativa: Alternativamente, se puede definir T_pM como todos los vectores $\gamma'(0)$ para curvas γ en M que cumplen $\gamma(0) = p$.

Equivalencia de def: Sea $p \in M$ y una curva tal que $\gamma(0) = p$. Definimos $D_\gamma(f) = (f \circ)'(0)$ (que se puede probar que es una derivación lineal en p, un vector tangente en p).

Ejemplo: En el ejemplo de la curva, el vector tangente es $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d\gamma}{dt} \cdot \nabla$. Que dada una función ψ que va de la curva a $\mathbb{R}$, nos da un número real.
El vector tangente no es como tal d/dt sino que es $d\gamma/dt$, que son las coordenadas de d/dt

en la base $\partial/\partial x^i$,

Coordenadas: Sea X_p un vector tangente a M en p. Es decir, que a cada función $f : M \to \mathbb{R}$ le asigna un real y que cumple las dos reglas de antes. En particular, si las coordenadas en una vecindad de p son $(x^1, \cdots, x^n)$, tenemos las funciones x^i (que son las proyecciones). Y entonces, definimos las coordenadas de X_p como $X^i = X_p(x^i)$

Teorema 3.3: Sean $x^1, \cdots, x^n$ las coordenadas locales en una vecindad U de un punto $p \in M$. Entonces T_pM está generado por las **derivaciones lineales en** p $\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n$. En particular $T_pM = n$

- Sin pérdida de generalidad, asumimos que $(x^1(p), \cdots, x^n(p)) = (0, \cdots, 0)$. Sea X_p un vector tangente a p. Y definimos $X^i := X_p(x^i)$.
  Como vimos antes, un mapeo suave $f : U \subset M \to \mathbb{R}$ se puede escribir a partir de las coordenadas como:

  $$(x^1, \cdots, x^n) \to f(x^1, \cdots, x^n)$$

  Por lo que podemos usar el teorema de Taylor del Resifuo $f(x) = f(0) + \sum x^i g_i(x)$ con $g_i(0) = \left.\frac{df}{dx^i}\right|_p$
  Hacemos actuar X_p en esta expresión y usamos que al aplicar X_p en una constante nos da 0. Por lo que usando las propiedades, tenemos:
  $X_p(f) = 0 + \sum_i X_p(x^i) g_i(0) + \sum(0) X_p(g_i) = 0 + \sum_i X^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$
  Por lo tanto:

  $$X_p = \sum_i X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

  Entonces, $\partial/\partial x^i$ una base de T_pM. Y los escalares son $X^i = X_p(x^i)$

Resumen:
Un vector tangente a M en p (donde M tiene coordenadas x^i) es una expresión de la forma $X_p = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$. Entonces, es un operador que toma una función $f \int \Omega^0(M)$ (una función continua que va de M a $\mathbb{R}$) y devuelve un número real. Cumple con linealidad y la propiedad de Leibniz.
El espacio tangente a M en p es T_pM generado por todos los X_p.
Las coordenadas del vector tangente $X_p = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ donde cada X^i es $X^i = X_p(x^i)$ con x^i la proyección a la coordenada x^i.

Cambio de Coordenadas:
Podemos tener otras coordenadas locales de M en p que sean $\{y^1, \cdots, y^n\}$. Entonces, el vector tangente a p es:

$$X_p = Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p$$

Y además, el cambio de bases es (regla de la cadena) $\dfrac{\partial}{\partial y^j} = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Entonces, juntando con lo anterior, tenemos que $X_p = Y^j \dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$. Por lo tanto, tenemos que
$X^i = Y^j \dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\bigg|_p$ es el cambio de variable.

O alternativamente, se puede llegar a que $Y^j = X^i \dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_p$.

Campo Vectorial: Un campo vectorial X en M es un mapeo suave $p \to X_p$ que a cada punto de p le da un vector tangente X_p. En términos de las coordenadas locales $x_1, \cdots, x_n$, se tiene que:

$$X = \sum_i X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x$$

Donde X^i son funciones suaves. Y si $\{y_1, \cdots, y_n\}$ son otras coordenadas locales, entonces podemos escribir $X = \sum_j Y^j(y) \dfrac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_y$. El mismo argumento de antes nos da el cambio de coordenadas $Y^j(y(x)) = \sum_i X^i(x) \dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}$.

Resumen:
X es un campo vectorial que a cada punto p le asigna un vector X_p, que es una función diferencial. Para un punto p, se pueden tener las coordenadas locales de M $\{x^1, \cdots, x^n\}$ y $\{y^1, \cdots, y^n\}$.

Las bases para el campo vectorial en un punto p son $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \right\}$ y $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_p \right\}$.

En la primera base tenemos que X_p es $X^i(p)\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$ (donde p se escribe en las coordenadas x) y en la segunda base es $X = Y^j(p)\dfrac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p$ (donde p se escribe en las coordenadas y).

Es decir, tenemos que:

$$X = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \quad X = Y^j(p)\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p$$

Y donde el cambio de base dado por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Y tenemos un cambio de base dado por:

$$Y^j = X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

Es decir, la base cambia por el factor $\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$ mientras que las coordenadas cambian por $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$, por lo que es **contravariante**.

3.8. Espacio Cotangente

El espacio cotangente a M en p es el espacio dual al espacio tangente T_pM.
Si $\{x^i\}$ son las coordenadas locales en p de la variedad M, entonces la base de T_pM es $\partial/\partial x^i$.
Definimos sus covectores como dx^i que cumplen que:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j \right\rangle = \delta_i^j$$

Es claro que T_p^*M es también un espacio de dimensión n.
Los elementos de la base dx^j se pueden interpretar como funciones continuas de M en $\mathbb{R}$ que dan la proyección de un punto en M a su coordenada i-ésima.
Por ello, al aplicarle el vector tangente $\partial/\partial x^i$, el resultado es la delta de Kroenecker.

Un elemento general $\alpha_p \in T_p^*M$ es de la forma:

$$\alpha_p = a_i dx^i$$

1-Forma: Es un campo covectorial. Que a cada $p \in M$ le asigna el covector α_p. Es de la forma:

$$\alpha = a_i(x)dx^i$$

Si $\{y^j\}$ es otro sistema de coordenadas loclaes, entonces α se puede escribir como $\alpha = b_j(y)dy^j$ donde, se puede demostrar que $b_j(y) = a_i(x(y))\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$

O equivalentemente, $a_i(x) = b_j(y(x))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$

En particular, podemos escribir que $\alpha = b_j(y)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i$. Y por tanto, se tiene que la **co base** se transforma como:

$$dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i$$

campo coframe: Si $\{e_i\}$ es una base de T_pM, entonces su correspondiente dual $\{\theta^i\}$ es el **campo coframe**.
En términos de este campo coframe, una 1-forma se puede escribir como $\alpha = a_i\theta^i$. Si $\{\theta'^i\}$ es otro coframe field, relacionado al primero por $\theta'^i = (A^{-1})^i_j\theta^j$. Entonces $\alpha = a'_i\theta'^i$. Donde el cambio de coordenadas es covariante $a'_i = a_jA^j_i$.

3.9. Resumen espacios Tangentes

- Sea M una variedad. Digamos que tiene un sistema de coordenadas locales $\{x^1, \cdots, x^n\}$ y otro sistema de coordenadas $\{y^1, \cdots, y^n\}$.
- Definimos $\Omega^0(M)$ como el conjunto de todas las funciones $f : M \to \mathbb{R}$ que son continuas (Es decir que son continuas al componer con las funciones coordenadas y ver como una función real)
- **Espacio Tangente**: T_pM Es el conjunto de todos los operadores que toman una función f y dan un real. Y cumplen con linealidad y regla de Leibniz.
  La **base** son elementos de la forma $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, que toman una función de $\Omega^0(M)$ y devuelven su derivada evaluada en p.
  En general sus elementos son **vectores** de la forma $X_p = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$.
  O bien, en la otra base es de la forma $X_p = Y^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p$
- **Espacio Cotangente:** T_p^*M es el espacio dual a T_pM.
  La **base** son elementos de la forma dx^i. Estos elementos pertenecen a $\Omega^0(M)$. Toman los puntos de M y los proyectan sobre el eje x^i.
  Es el dual porque $\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j \rangle = \delta_i^j$, donde el producto punto consiste en derivar la función dx^j usando $\frac{\partial}{\partial x^i}$ y por eso la delta de Kroenecker.
  En general, son **covectores** de la forma $\alpha_p = a_i dx^i$
  O bien, en la otra base es de la forma $\alpha_p = b_i dy^i$
- **Transformaciones:**
  - **la Base** Tenemos la base $\frac{\partial}{\partial x^i}$ y la base $\frac{\partial}{\partial y^j}$ del espacio tangente, entonces por la regla de la cadena, se transforman **covariantemente:**
    $$\frac{\partial}{\partial y^j} = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_p$$
    Donde el operador $\frac{\partial}{\partial x^i}$ se deja indicado.
  - **La Cobase**: Si tenemos la cobase $\{dx^i\}$ y la cobase $\{dy^i\}$ que vienen de las bases coordenadas $\{x^i\}, \{y^j\}$. Enotnces, la cobase se transforma **contravariantemente**
    $$dy^j = \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_p dx^i$$
  - **Coordenadas de vectores:** Digamos que $X_p = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ y $X_p = Y^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p$.
    Entonces las coordenadas de los vectores se transforman **contravariantemente** como:

$$Y^j = X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_p$$

- **Coordenada de covectores:** Digamos que $\alpha_p = a_i dx^i$ y también $\alpha_p = b_j dy^j$. Entonces, las coordenadas se transforman **covariantemente:**

$$a_i = b_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\bigg|_p$$

Es decir, las cosas se transforman como $\mathbf{e}' = \mathbf{eA}$, $\theta' = \mathbf{A}^{-1}\theta$, $\mathbf{v}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$, $\mathbf{f}' = \mathbf{fA}$. Donde $A = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}$

Campos: Podemos definir campos como asignaciones que a cada punto p le dan un vector tangente y un covector y así.

3.9.1. Lie Bracket

Dados X, Y dos campos vectoriales. Su Lie Bracket $[X, Y]$ es el operador diferenciabl dado por:

$$[X, Y] = XY - YX$$

Se puede ver que esto vuelve a ser un campo vectorial al probar que $[X, Y]$ vuelve a ser una derivación tensorial.
Si $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$

$$\begin{aligned}(XY)f &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \\ &= X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)\end{aligned}$$

Si luego restamos un término igual pero con X, Y intecambiados. Y ahora quitando la f, nos queda:

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

Por lo que es un campo vectorial nuevamente.
Además, cumple la **identidad de Jacobi:**

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, x]] + [Z, [x, Y]] = 0$$

3.10. Campos Tensoriales

Tensor: Un tensor en un punto $p \in M$ se puede ver ya sea como un elemento de un espacio de producto tensorial o como un mapeo multilineal. En cualquier caso, un tensor en $p \in M$ es:

$$\Psi = \Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

O bien es un mapeo multilineal que toma r elementos de T_p^*M y s elementos de T_pM como $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, X_1, \cdots, X_s)$ y aplica $\Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$ a esto (aplicando cada uno por parejas usando el producto interno en el que el elemento de T_pM se aplica a T_p^*M.

Campo Tensorial. Es una expresión del tipo:

$$\Psi = \Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

Donde $\Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$ es una expresión que depende del punto $p \in M$. Es decir, a cada punto p (o bien a cada coordenadas x) le da un tensor de $(T_pM)^{\otimes r} \otimes (T_p^*M)^{\otimes s}$.
Y ahora las derivadas se deben de evaluar en p
Este es un **Tensor de tipo** (r, s).

Transformación de coordenadas. Si tenemos unas coordenadas $\{y^1, \cdots, y^n\}$, entonces vimos que las bases se transforman como $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}$ y $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k$. Entonces, en estas nuevas coordenadas, los componentes del tensor se transforman como:

$$\Psi^{i'_1 \cdots i'_r}_{j'_1 \cdots j'_s}(y(x)) = \Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}(x) \frac{\partial y^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{j'_s}}$$

Y ahora para cada punto p con coordenadas y, se le asigna un tensor.

3.11. Formas Diferenciales

Tal como un $k-$vector era un tipo muy particular de tensor (uno alternante), una $k-$forma es un tipo especial de campo tensorial (uno alternante).

Sea U un patch coordenado de M y sea $p \in U$. una **k-forma** ω_p en U en p es un elemento de $\bigwedge^k (T_p^*M)$. Es decir, en coordenadas locales es algo del estilo:

$$\omega_p = \frac{1}{k!} \sum a_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum a_I dx^I$$

Una **k-forma diferencial** ω en M es una asignación suave $p \to \omega_p$. En coordenadas locales es como:

$$\omega_U = \sum a_I(x)dx^I$$

Donde $a_I(x)$ son un funciones suaves en U a $\mathbb{R}$. En particular pensamos en las funciones suaves de M como **0-formas**.

$\Omega^k(M)$ es el espacio vectorial de todas las $k-$formas en M.
Ejemplo:
Por ejemplo:

$$\mu = 2x^y dy \wedge dz + 7z^3 dz \wedge dx + 4xy dx \wedge dy$$

que es una 2-forma en $\mathbb{R}^3$ definida globalmente

3.12. Derivada Exterior

Introducimos un operador diferencial en k-formas, denotado por d. Que es una generalización de la divergencia, gradiente y todo es.

Teorema 3.6: Existe un único operador lineal:

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

llamado **derivada exterior**
Donde recordamos que $\Omega^k(M)$ es una función continua que toma k vectores de M y devuelve un real. Un ejemplo particular sería un elemento de $\bigotimes^o = kT_p^*M$

Satisface las siguientes propiedades. Para cualesquiera formas λ, μ y para cualquier función f, el operador d es:

1) Lineal: $d(\lambda + \mu) = d\lambda + d\mu$
2) Derivada graduada: $d(\lambda \wedge \mu) = d\lambda \wedge \mu + (-1)^{\deg \lambda} \lambda \wedge d\mu$
3) Nilpotente: $d^2\lambda = 0$
4) Natural: En las coordenadas locales $\{x^i\}$:

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

La expresión de natural no depende de las coordenadas locales que se usen.
Por la propiedad (4), la derivada exterior en $\mathbb{R}^n$ coincide con la noción usual de diferencial de una función.

De hecho, lo definimos como:

$$d(adx^I) = \frac{\partial a}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^I$$

Example 3.11 Let $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ be a 1-form on $\mathbb{R}^3$. Then

$$\begin{aligned} d\omega &= dA \wedge dx + A \wedge d^2x \\ &\quad + dB \wedge dy + B \wedge d^2y \\ &\quad + dC \wedge dz + C \wedge d^2z && \text{(by (1) and (2))} \\ &= dA \wedge dx + dB \wedge dy + dC \wedge dz && \text{(by (3))} \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz\right) \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial B}{\partial x}dx + \frac{\partial B}{\partial y}dy + \frac{\partial B}{\partial z}dz\right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial C}{\partial x}dx + \frac{\partial C}{\partial y}dy + \frac{\partial C}{\partial z}dz\right) \wedge dz && \text{(by (4))} \\ &= \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \text{cyclic.} && (3.63) \end{aligned}$$

Here "cyclic" means that the subsequent terms are obtained from the first by cyclically permuting $x \to y \to z$ and $A \to B \to C$. Observe that the components of $d\omega$ are just the components of the curl of the vector field (A, B, C). We shall return to this example below.

Example 3.12 Let $\omega = A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy$ be a 2-form on $\mathbb{R}^3$. Then

$$d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz, \qquad (3.64)$$

which is obviously related to the divergence of the vector field (A, B, C).

Example 3.13 We can use the exterior derivative to define forms (globally) on a smooth manifold M. For example, if $f : M \to \mathbb{R}$ is a smooth function then, provided that it does not blow up anywhere, df is a (globally defined) 1-form on M.

3.13. El producto Interior

Dado un campo vectorial X, definimos un mapeo lineal $i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$. Que toma $k-$formas en $(k-1)$formas, llamado el **producto interio**
Sea f una función, ω una 1-forma, λ, η formas de grado arbitrario. Entonces, pedimos que tenga las propiedades:

1) $i_X f = 0$

2) $i_X \omega = \omega(X) := \langle \omega, X \rangle$

3) $i_X(\lambda \wedge \eta) = i_X(\lambda) \wedge \eta + (-1)^{deg\lambda} \lambda \wedge i_X(\eta)$

Definimos además:

$$\omega(X_1, \cdots, X_k) := (i_{X_1}\omega)(X_2, \cdots, X_k) = i_{X_k} i_{X_{k-1}} \cdots i_{X_1} \omega$$

Ejercicio: Se puede probar que $i_X df = df(X) = Xf$

3.14. Pullback

Sea $f : M \to N$ un mapeo suave. Y sea $g : N \to \mathbb{R}$ un mapeo. Entonces definimos $f^*g : M \to \mathbb{R}$ como $f^*g = g \circ f$.
Este mapeo se llama el **pullback de** g **por** f porque la función g se empuja de N a M.
Podemos expandir el pullback a formas al requerir que:

- Es un homeomorfismo anillo:
  - $f^*(\lambda + \mu) = f^*\lambda + f^*\mu$
  - $f^*(\lambda \wedge \mu) = f^*\lambda \wedge f^*\mu$
- Es natural: $d(f^*\lambda) = f^*(d\lambda)$

3.15. Pushfoward

Sea $f : M \to N$ un mapeo suave. Y sea $g : N \to \mathbb{R}$ un mapeo suave. Definimos el mapeo lineal $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ llamado el **pushfoward** como:

$$(f_*X_p)_{f(p)}(g) := X_p(f^*g)$$

3.15.1. Ejemplo de Cambio de Coordenadas

Sea $x'^1 = r, x'^2 = \theta$, $x^1 = x, x^2 = y$. Entonces, tenemos que el cambio de base es:

$$\vec{e'}_j = \vec{e}_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$$

Por lo que en este ejemplo, la base se transforma como:

- $\vec{e}_r = \frac{\partial x}{\partial r}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{e}_y = \cos\theta\widehat{i} + \sin\theta\widehat{j}$
- $\vec{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\vec{e}_y = -r\sin\theta\widehat{i} + r\cos\theta\widehat{j}$

Luego, la cobase se transforma contravariantemente:

$$dx'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} dx^i$$

Por lo que tenemos que:

- $dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy$
- $d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta}{\partial y}dy$

Transformamos ahora una derivada. Tenemos que en rectangulares es $\frac{\partial}{\partial x}$. Es decir $1\frac{\partial}{\partial x}+0\frac{\partial}{\partial y}$. Las componentes se transforman como:

$$X^{j'} = X^i \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

Entonces, los componentes en polares son $X^r = 1\frac{\partial r}{\partial x} + 0\frac{\partial r}{\partial y}$. Por otro lado, tenemos que $X^\theta = 1\frac{\partial \theta}{\partial x} + 0\frac{\partial \theta}{\partial y}$.

Por lo que la derivada es $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}$

3.16. Tensor Métrico

El vector de dirección infinitesimal es:

$$d\vec{r} = \vec{e}_i dx^i$$

O usando componentes covariantes y base dual, tenemos:

$$d\vec{r} = \vec{e}^i dx_i$$

Luego, $ds^2 = d\vec{r} \cdots d\vec{r}$.
Tenemos que:

$$\begin{aligned} ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{e}_1 dx^i \cdot \vec{e}_j dx^j & \\ &= (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) dx^i dx^j \\ &= g_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$

Porque el tensor métrico es:

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

Donde se deben de tomar los vectores no unitarizados. Por ejemplo, en coordenadas esféricas tenemos que:

$$g_{r\theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 0$$

En general, tenemos que en coordenadas esféricas la métrica es:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Y por tanto, la forma fundamental en estas coordenadas es:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

3.16.1. Subir y Bajar Índices

El tensor métrico nos permite convertir entre componentes covariantes y contravariantes de otros tensores. Por ejemplo, si tenemos un vector A, podemos convertirlo en un covector usando la métrica. Definimos el covector asociado a A aplicado a un vector $\vec{v}$ como:

$$\tilde{A}(\vec{v}) = g(A, \vec{v}) = g_{ij} A^i v^j$$

Por tanto, tenemos que los componentes del covector $\tilde{A}$ son:

$$A_j = g_{ij} A^i$$

Similarmente, si definimos que g^{ij} sea la matriz inversa de g_{ij}, entonces tenemos:

$$B^j = g^{ij} B_i$$

3.17. Christoffel y Derivada

Tenemos un vector de la forma $\vec{A} = A^i\vec{e}_i$. Escrito en una base $\{\vec{e}_i\}$ y con coordenadas locales $(x_1, \cdots, x_n)$.
Entonces, si queremos derivar $\vec{A}$, respecto a una coordenada, tenemos que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\vec{e}_i + A^i\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}$$

Porque hay que derivar tanto los componentes como los vectores. La derivada de un vector es nuevamente un vector en esta base, así que tenemos que:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\vec{e}_k$$

Es decir, Γ^k_{ij} es la magnitud del k-ésimo componente de la derivada del vector base $\vec{e}_i$ con respecto a la coordenada x^j

Ejemplo: En coordenadas polares se tiene que:

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = 0\vec{e}_r + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta$$

Por lo tanto, $\Gamma^r_{r\theta} = 0$, $\Gamma^\theta_{r\theta} = \dfrac{1}{r}$

Calcular los Coeficinetes de Christoffel (Para un espacio sin torsión):
Empezamos con la definición de los símbolos de Christoffel y aplicamos producto punto con el covector $\vec{e}^l$ de ambos lados:

$$\Gamma^k_{ij}\vec{e}_k \cdot \vec{e}^l = \vec{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}$$
$$\Rightarrow \Gamma^k_{ij}\delta^l_k = \vec{e}^j \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}$$

Luego, si no hay torsión, el término $\dfrac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i}$.
Entonces, tenemos que:

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}\vec{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \frac{1}{2}\vec{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\vec{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \left(\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j}\cdot\vec{e}_i - \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k}\cdot\vec{e}_i\right) + \frac{1}{2}\vec{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \left(\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j}\cdot\vec{e}_i - \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k}\cdot\vec{e}_i\right) \quad \text{sumar } 0$$

Luego, como tenemos que $\vec{e}^l = g^{kl}\vec{e}_k$, entonces nos queda:

$$\begin{aligned}
\Gamma^l_{ij} &= \frac{1}{2}g^{kl}\vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \left(\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j}\cdot\vec{e}_i - \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k}\cdot\vec{e}_i\right) + \frac{1}{2}g^{kl}\vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \left(\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j}\cdot\vec{e}_i - \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k}\cdot\vec{e}_i\right)\\
&= \frac{1}{2}g^{kl}\left[\left(\vec{e}_k\cdot\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j}\cdot\vec{e}_i\right) + \left(\vec{e}_k\cdot\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i} + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i}\cdot\vec{e}_j\right) - \left(\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k}\cdot\vec{e}_i + \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}\cdot\vec{e}_j\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}g^{kl}\left[\frac{\partial(\vec{e}_k\cdot\vec{e}_i)}{\partial x^j} + \frac{\partial(\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k)}{\partial x^i} - \frac{\partial(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)}{\partial x^k}\right]\\
&= \frac{1}{2}g^{kl}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right]}$$

Por ejemplo, coordenadas cilíndricas tenemos r, ϕ, z y ya podemos calcular la métrica. Entonces, uno de los símbolos de Christoffel es:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11} & \left[\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right] \\
& + \frac{1}{2} g^{21} \left[\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right] \\
& + \frac{1}{2} g^{32} \left[\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} \right],
\end{aligned}$$

which is:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}(1) & \left[\frac{\partial (0)}{\partial \phi} + \frac{\partial (0)}{\partial \phi} - \frac{\partial r^2}{\partial r} \right] \\
& + \frac{1}{2}(0) \left[\frac{\partial r^2}{\partial \phi} + \frac{\partial r^2}{\partial \phi} - \frac{\partial r^2}{\partial \phi} \right] \\
& + \frac{1}{2}(0) \left[\frac{\partial (0)}{\partial \phi} + \frac{\partial (0)}{\partial \phi} - \frac{\partial r^2}{\partial z} \right],
\end{aligned}$$

or

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}(1)[0 + 0 - 2r] + 0 + 0 = -r.$$

3.18. Derivada Covariante

Con los símbolos de Christoffel, podemos derivar tensores. Ahora podemos derivar el tensor tomando en cuenta el cambio de los componentes pero también el cambio de la dirección.

Tenemos un vector de la forma $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$. Escrito en una base $\{\vec{e}_i\}$ y con coordenadas locales $(x_1, \cdots, x_n)$.
Entonces, si queremos derivar $\vec{A}$, respecto a una coordenada, tenemos que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \vec{e}_i + A^i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}$$

Porque hay que derivar tanto los componentes como los vectores. Entonces esto es igual a:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \vec{e}_i + A^i \Gamma^k_{ij} \vec{e}_k$$

Podemos cambiar el índice de la k por i en el segundo término y luego juntar los términos como:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + A^k \Gamma^i_{kj} \right) \vec{e}_i$$

La **derivada covariante** es definida como lo que está entre paréntesis. Se denota con un ;. Tenemos que:

$$\boxed{A^i_{;j} := \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + A^k \Gamma^i_{kj}}$$

Es decir, este es el componente en la dirección i de la derivada de A respecto a la variable x^j

Con coeficientes covariantes, tenemos que la derivada es:

$$A_{i;j} := \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + A_k \Gamma^k_{ij}$$

Ejemplo (Cilíndricas): Tenemos que $x^i = r, x^2 = \phi, x^3 = z$. Entonces, si queremos la derivada de un A respecto a $x^2 = \phi$, tenemos que los componentes son:

$$\begin{aligned} A^r_{;\phi} &= \frac{\partial A^r}{\partial \phi} + A^r \Gamma^r_{r\phi} + A^\phi \Gamma^r_{\phi\phi} + A^z \Gamma^r_{z\phi} \\ &= \frac{\partial A^r}{\partial \phi} + A^\phi(-r) \end{aligned}$$

Por lo que el cambio del componente r de $\vec{A}$ debido a un cambio en ϕ y tomando en cuenta el cambio de la base es $-rA^\phi$

$$\begin{aligned} A^\phi_{;\phi} &= \frac{\partial A^\phi}{\partial \phi} + A^\phi \Gamma^\phi_{r\phi} + A^r \Gamma^\phi_{\phi\phi} + A^z \Gamma^\phi_{z\phi} \\ &= \frac{\partial A^\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} A^r \end{aligned}$$

Y entonces tenemos que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \phi} = \left(\frac{\partial A^r}{\partial \phi} - rA^\phi \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A^\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} A^r \right) \vec{e}_\phi$$

Derivada covariante para tensores de mayor orden:

$$\begin{aligned} A^{ij}{}_{;k} &= \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} + A^{lj} \Gamma^i_{lk} + A^{il} \Gamma^j_{lk}, \\ B_{ij\,;k} &= \frac{\partial B_{ij}}{\partial x^k} - B_{lj} \Gamma^l_{ik} - B_{il} \Gamma^l_{jk}, \\ C^i{}_{j\,;k} &= \frac{\partial C^i{}_j}{\partial x^k} + C^l{}_j \Gamma^i_{lk} - C^i{}_l \Gamma^l_{jk}. \end{aligned}$$

3.19. El Tensor de Curvatura de Riemann

3.19.1. Transporte Paralelo

El transporte paralelo consiste en mover un vector en un espacio para llevarlo a otro lado sin cambiar su longitud o dirección.
En el espacio Euclideo es muy fácil porque simplemente movemos la cola del vector y no cambiamos los componentes del vector.
Sin embargo, en un espacio curvo no es tan fácil ya que los vectores de las bases locales van cambiando.

Esto suele ser necesario porque para sumar u operar de otra forma dos vectores, es necesario que tengan la cola en el mismo lugar. Por ello es necesario transportar un vector hacia la posición del otro.

Por ejemplo consideramos un vector en la Tierra. Digamos que el vector empieza en el ecuador y apuntando hacia el norte. Transportamos el vector a lo largo del meridiano hacia el norte pero lo mantenemos siempre apuntando sobre la línea del meridiano (pero mantenemos el vector siempre tangente a la esfera. Damos la vuelta y al llegar al otro lado del ecuador el vector ya estará apuntando hacia el sur. Así que en el transporte paralelo, el vector pasó de apuntar hacia el norte a apuntar al sur.
Ahora digamos que hacemos el movimiento con mismo punto inicial y final pero a través del ecuador. Al final del viaje el vector seguirá apuntando al norte.
En ambos casos fue un transporte paralelo y sin embargo el resultado fue distinto.

3.19.2. Tensor de Riemann

El tensor de Riemann se usa para conocer la curvatura del espacio.
Para el tensor de Riemann, se usa la derivada covariante. En el espacio plano al hacer dos derivadas covariantes seguidas no importa el orden en que se hacen.
Por ello, para definir el tensor de curvatura se toma un vector V y se deriva covariantemente en las direcciones β, γ. Primero se deriva respecto a β y luego γ. Luego se deriva primero respecto a γ y luego β. Finalmente se calcula la diferencia entre estos resultados.

Como dijimos, en el espacio plano estos dos resultados deben de ser iguales. Al calcular la diferencia entre estos dos resultados nos damos una idea de qué tan curvado está el espacio según la diferencia de este resultado con 0 (que corresponde a un espacio plano).

Procedimiento

- Tomamos un campo vectorial V_α y lo derivamos covariantemente primero respecto a β y nos queda:

  $$V_{\alpha;\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} V_\sigma$$

  Llamamos $V_{\alpha\beta}$ a este vector y ahora derivamos covariantemente respecto a γ, con lo que tenemos:

$$V_{\alpha\beta;\gamma} = \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma} V_{\tau\beta} - \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma} V_{\alpha\eta}$$

Al sustituir el resultado de antes aquí, obtenemos que:

$$V_{\alpha\beta;\gamma} = \frac{\partial^2 V_{\alpha}}{\partial x^{\gamma} x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} V_{\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} \frac{\partial V_{\sigma}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial V_{\tau}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\sigma}_{\tau\beta} V_{\sigma} \right) - \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma} \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\eta}} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\eta} V_{\sigma} \right)$$

- Ahora calculamos las derivadas en el otro orden y nos queda:

$$V_{\alpha\gamma;\beta} = \frac{\partial^2 V_{\alpha}}{\partial x^{\beta} x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} V_{\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} \frac{\partial V_{\sigma}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial V_{\tau}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma^{\sigma}_{\tau\gamma} V_{\sigma} \right) - \Gamma^{\eta}_{\gamma\beta} \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\eta}} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\eta} V_{\sigma} \right)$$

- Luego restamos estos dos resultados. Usamos que las segundas derivadas son iguales. Y usamos que el símbolo de Christoffel es simétrico respecto a los índices de abajo. Después de mucha manipulación nos queda que la diferencia es la misma:

$$V_{\alpha\beta;\gamma} - V_{\alpha\gamma'\beta} = \left(\frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma} \Gamma^{\sigma}_{\tau\beta} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} \Gamma^{\sigma}_{\tau\gamma} \right) V_{\sigma}$$

Con ello, definimos el **tensor de curvatura de Riemann** como:

$$R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma} \Gamma^{\sigma}_{\tau\beta} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} \Gamma^{\sigma}_{\tau\gamma}$$

Una condición suficiente y necesaria para que un espacio sea plano es que este tensor sea 0 en todo el espacio $R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} = 0$

Ahora definimos algunos tensores y cosas que son útiles para la física. Sólo los definiremos sin decir nada sobre de dónde vienen o qué significan.

Tensor de Ricci
Se consigue al contraer el tensor de Riemann en σ y β y es:

$$R_{\alpha\gamma} = R^{\sigma}_{\alpha\sigma\gamma} = R^{1}_{\alpha 1\gamma} + R^{2}_{\alpha 2\gamma} + R^{3}_{\alpha 3\gamma} + R^{4}_{\alpha 4\gamma}$$

Escalar de Ricci: Se consigue al multiplicar por el tensor métrico:

$$R := g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\gamma} = R^{\gamma}_{\gamma} = R^{1}_{1} + R^{2}_{2} + R^{3}_{3} + R^{4}_{4}$$

Tensor de Einstein: Finalmente definimos el tensor de Einstein como:

$$G_{\alpha\gamma} := R_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\gamma}$$

Con ello, la **ecuación de Campo de Einstein** es:

$$G_{\mu\nu} + \Gamma g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía momento y Γ es la çonstante cosmológica".

3.19.3. Ejemplo

Consideramos por ejemplo un espacio esférico de radio a. En este espacio se tiene que la métrica es:

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

Se puede encontrar que los componentes del tensor métrico son:

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= a^2 \\ g_{\theta\phi} = g_{\phi\theta} &= 0 \\ g_{\phi\phi} &= a^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

Luego los valores de los símbolos de Christoffel se pueden encontrar con la ecuación que habíamos demostrado antes:

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right]$$

Donde los índices toman valores θ, ϕ. Con ello tenemos que:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} &= \cot\theta \\ \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} &= \cot\theta \\ \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

Luego calculamos el tensor de Riemann como definimos antes $R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \dfrac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\tau\beta} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\Gamma^{\sigma}_{\tau\gamma}$, variando los índices por θ y ϕ. Muchos de los componentes del tensor quedan como 0, excepto:

$$\begin{aligned} R^{\theta}_{\phi\theta\phi} &= \sin^2\theta \\ R^{\theta}_{\phi\phi\theta} &= -\sin^2\theta \\ R^{\phi}_{\theta\theta\phi} &= -1 \\ R^{\phi}_{\theta\phi\theta} &= 1 \end{aligned}$$

Con ello vemos que el tensor de curvatura es distinto de 0, lo que confirma que el espacio tiene curvatura distinta de 0.
Al contraer vemos que el tensor de Ricci es 0.

4. Misc

4.0.1. Subir y Bajar Índicies

De la misma forma en que la métrica convierte vectores en covectores. En general convierte a un tensor $(N\ M)$ en uno $(N-1\ M+1)$. El tensor lo denotamos con el mismo símbolo pero cambiando la posición de los índices.
Por ejemplo, si tenemos $T^{\alpha\beta}_{\gamma}$ un tensor (2 1), al operar con la métrica nos queda:

$$T^{\alpha}_{\beta\gamma} = g_{\beta\mu}T^{\alpha\mu}_{\gamma}$$

que es un tensor (1 2)

Podemos hacer algo similar con el inverso de la métrica:

$$T^{\alpha\beta\gamma} = \eta^{\gamma\mu}T^{\alpha\beta}_{\mu}$$

Estas operaciones se llaman **subir y bajar índices**.

4.0.2. Tensor métrico

En un espacio con coordenadas $\{\vec{e}_i\}$ definimos el **tensor métrico** como:

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

En el espacio euclídeo con base $\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}$ nos da la métrica:

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

Coordenadas Polares: En estas coordenadas los vectores base son $\vec{e}_\theta = \dfrac{\partial x^i}{\partial \theta}\vec{e}_{x^i} = -r\sin\theta\vec{e}_x + r\cos\theta\vec{e}_y$
Mientras que $\vec{e}_r = \dfrac{\partial x^i}{\partial r}\vec{e}_{x^i} = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$.
Entonces, tenemos que la métrica es:

$$g_{rr} = 1 \quad , \quad g_{\theta\theta} = r^2$$
$$g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0$$

Con ello definimos el componentes de **desplazamiento** como:

$$dl = dt\vec{e}_r + d\theta\vec{e}_\theta$$

Y tenemos que:

$$ds = dl \cdot dl = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

(aquí el d representa un infinitesimal y no un covector)

4.0.3. Más de la derivada cov

Tenemos que:

$$V^{\alpha}_{;\beta} := V^{\alpha}_{,\beta} + V^{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$$

Definimos así el tensor de derivada covariante de $\vec{V}$ como:

$$(\nabla\vec{V})^{\alpha}_{\beta} = V^{\alpha}_{;\beta}$$

Que es un tensor (1,1) (aumentó en 1 la covariante).
Si las coordenadas son resctangulares, entonces se reduce a $(\nabla\vec{V})^{\alpha}_{\beta} = V^{\alpha}_{,\beta}$

Derivada Covariante de un Escalar
Si f es una función escalar, su derivada covariante es simplemente su derivada, porque f no depende de los vectores base. Entonces:

$$\nabla_{\alpha} f = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}$$

Derivada covariante de un vector:
Como habíamos visto antes, tenemos que:

$$V^{\alpha}_{;\beta} := V^{\alpha}_{,\beta} + V^{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$$

Derivada covariante de un covector:
Sea p una 1-forma.
Luego, podemos considerar V un vector cualquiera. Y calculamos el producto de p y V y lo definimos como el escalar ϕ:

$$\phi = p_{\alpha} V^{\alpha}$$

Entonces, por la regla del producto de la derivada (la normalita porque ϕ es un escalar) tenemos que:

$$\nabla_{\beta}\phi = \phi_{,\beta} = \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} V^{\alpha} + p_{\alpha}\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$$

Ahora usamos la derivada covariante de V para reemplazar $\partial V^{\alpha}/\partial x^{\beta}$ y nos queda:

$$\nabla_{\beta} = \frac{\partial_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} V^{\alpha} + p_{\alpha} V^{\alpha}_{;\beta} - p_{\alpha} V^{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$$

Rearreglamos y renombramos algunos índices para tener:

$$\nabla_{\beta}\phi = \left(\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - p_{\mu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right) V^{\alpha} + p_{\alpha} V^{\alpha}_{;\beta}$$

Luego, como la derivada covariante debe de cumplir la regla del producto $\nabla_{\beta}(p_{\alpha}V^{\alpha}) = p_{\alpha;\beta}V^{\alpha} + p_{\alpha}V^{\alpha}_{;\beta}$
Entonces tenemos que:

$$\boxed{(\nabla_\beta p)_\alpha = p_{\alpha,\beta} - p_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}$$

Vemos que es algo distinta a la derivada covariante de un vector.
En general podemos usar un procedimiento general para llegar a las fórmulas para tensores de orden 2:

$$\nabla_\beta T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}; \tag{5.64}$$
$$\nabla_\beta A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}{}_{,\beta} + A^{\alpha\nu}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} + A^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}; \tag{5.65}$$
$$\nabla_\beta B^\mu{}_\nu = B^\mu{}_{\nu,\beta} + B^\alpha{}_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - B^\mu{}_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}. \tag{5.66}$$

4.0.4. Relación de Símbolos de Christoffel y la métrica

Si $\vec{V}$ es un vector cualquiera, entonces su uno-forma asociada es:

$$\tilde{V} = g(\vec{V}, \cdot)$$

Luego, podemos derivar covariantemente ambos lados para tener:

$$\nabla_\beta \tilde{V} = g(\nabla_\beta \vec{V}, \cdot)$$

Luego, aplicado a un vector $\vec{v}$ se tiene que:

$$\nabla_\beta \tilde{V}(\vec{v}) = g(\nabla_\beta \vec{V}, \vec{v}) = g_{ij}(\nabla_\beta \vec{V})^i v_j$$

Entonces, el α ésimo coeficiente de $\nabla_\beta \tilde{V}$ es:

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^\mu_{;\beta} \qquad (5{,}70)$$

Por otro lado, recordamos que $V_\alpha = g_{\alpha\mu} V^\mu$. Y ahora calculamos la derivada de esto respecto a β y nos queda:

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu;\beta} V^\mu + g_{\alpha\mu} V^\mu_{;\beta}$$

Comparando esto con la ecuación 5.70, obtenemos que:

$$g_{\alpha\mu;\beta} = 0 \qquad (5{,}71)$$

Sin embargo, por cómo se calcula la derivada cotangente, tenemos que:

$$0 = g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^\nu_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} - \Gamma^\nu_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}$$

Por tanto tenemos que la **relación entre derivada y Christoffel**:

$$g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma^\nu_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} + \Gamma^\nu_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}$$

4.0.5. Calcular la Métrica a partir de Christoffel

Como vimos antes, podemos expresar las derivadas de la métrica respecto a los Christoffel.

Simetría de los símbolos de Christoffel:
Digamos que ϕ es un escalar cualquiera. Entonces su derivada es $\nabla\phi$ que es una 1-forma con componentes $\phi_{.\beta}$. Su segunda derivada covaiante es $\nabla\nabla\phi = \phi_{,\beta;\alpha}$ que es un (0 2) tensor.
En coordenadas cartesianas las derivadas y las derivadas covariantes son iguales, por lo que:

$$\phi_{,\beta,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\phi$$

Esto es simétrico respecto a α y β por la igualdad de segundas coordenadas. Por lo que tenemos que $\phi_{,\beta;\alpha} = \phi_{,\alpha;\beta}$
Ahora usamos cómo es la derivada covariante de un covector para tener:

$$\phi_{,\beta,\alpha} - \phi_{,\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} = \phi_{,\alpha,\beta} - \phi_{,\mu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$$

Pero como las derivadas son iguales, tenemos que:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\phi_{,\mu} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\phi_{,\mu}$$

Esto es una ecuación válida para todo todo ϕ y por tanto tenemos el resultado:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$$

Que como es una ecuación tensorial, es válido en cualquier sistema de coordenadas en el espacio plano.
Luego, podemos usar un poco de cuentas para obtener como antes que:

$$\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha})$$

4.0.6. Variedad de Riemann

Una variedad Riemanniana es una variedad junto con un campo tensorial 2-covariante llamado g.
Que además de ser un tensor 2-covariante, cumple que:

$$g(\vec{V}, \vec{V}) > 0$$

para todo $\vec{V} \neq 0$. Esta propiedad define la métrica como **positiva definida**.

Pseudo-Riemanniana: Es una variedad con un campo tensorial 2-covariante que no es positiva definida .

Al escoger una métrica en una variedad le agragamos estructura a esta variedad.

4.0.7. La Métrica y la planidad local

Como hemos visto, la métrica produce un mapeo entre vectores y uno formas en todos los puntos.
Por tanto, dado un campo vectorial $\vec{V}(P)$ que asigna un vector a todos los puntos de la variedad, tenemos una uno forma:

$$\tilde{V}(P) = g(\vec{V}(P), \cdot)$$

Que asigna un covector a cada punto de la variedad. Como hemos visto, la uno forma tiene los componentes dados por:

$$V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta$$

Signo de la Métrica: La matriz g_{ab} es simétrica por definición. Esto implica que la matriz es diagonalizable y hasta se puede llevar a una matriz diagonal con puros ± 1.
El signo de la métrica es la suma de de estos números que quedan en la diagonal.
Por ejemplo, la métrica lorenziana η_{ab} tiene signo -2.

4.0.8. Transporte Paralelo

Primero distinguimos entre dos tipos de curvatura:

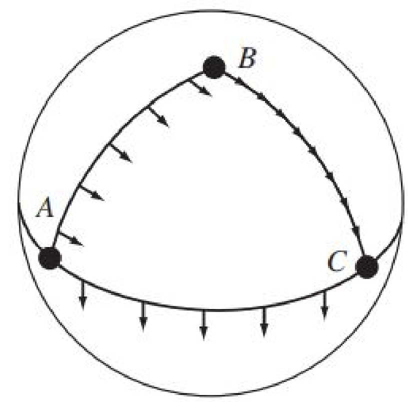
- **Extrínsica:** Es la curvatura que tiene relación al espacio tridimensional en el que está metida la variedad.

- **Intrínsica:** Es la curvatura que tiene que ver con la variedad como tal sin considerarla como metida en un $\mathbb{R}^n$

Por ejemplo, consideramos un cilindro. La curvatura extrínsica del cilindro visto como metido en $\mathbb{R}^3$ es distinta de cero, porque el cilindro se curva respecto al espacio $\mathbb{R}^3$.
Sin embargo, la curvatura intrínsica en el cilindro es 0. Esto porque el cilindro se puede aplanar a una hoja plana de papel. Y la distancia entre dos puntos del cilindro es igual a la de los puntos en la hoja aplanada, además de que se cumplen todos los axiomas de Euclides en el cilindro.
La geometría intrínsica se concentra solamente en las relaciones entre puntos y caminos que se quedan en la variedad sin considerarla como metida en un espacio $\mathbb{R}^n$.

El cilindro es por tanto intrínsicamente plano. Sin embargo, por otro lado la esfera es un espacio que no es intrínsicamente plano.

Una forma de ver esto es realizando el transporte paralelo de un vector a través de una curva en la esfera.



Parallel transport around a spherical triangle.

Consideramos una curva en la esfera como la dibujada en la imagen. Y empezamos con un vector en un punto de la curva, por ejemplo, con un vector en el ecuador que esté apuntando hacia el sur. Luego, vamos moviendo el vector a través de la curva de tal forma que siempre sea tangente a la esfera y de tal forma que se mantenga siempre lo más paralelo posible al vector anterior.
Sin embargo, al dar la vuelta completa a la curva, nos damos cuenta que el vector final ya no es paralelo al original. Esto se debe a que la curvatura de la esfera causó que el vector haya rotado 90 grados al dar esta vuelta, algo que no pasa en un espacio implícitamente plano.

La diferencia crucial entre un espacio plano y uno curvo es que, en un espacio curvo, *el resultado de un transporte paralelo de un vector de un punto al otro depende del camino usado entre los puntos.*

Dada una curva $x^\mu(\lambda)$ en una variedad, parametrizada con λ. La condición de que un tensor $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}$ sea 'constante' en esta curva. Es decir, que sea transportado paralelamente en la curva se traduce a que:

$$\frac{d}{d\lambda}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = 0$$

Para hacer esto tensorial, reemplazamos la derivada parcial por una derivada covariante. Por tanto, definimos la **derivada covariante direccional:**

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\nabla_\mu$$

Entonces, decimos que un campo tensorial T es un **transporte paralelo** a lo largo de $x^\mu(\lambda)$ es el requerimiento que:

$$\left(\frac{D}{d\lambda}T\right)^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} := \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = 0$$

Esta es la **ecuación del transporte paralelos**

Para un vector, la ecación del transporte paralelo toma la forma:

$$\frac{d}{d\lambda}V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda}V^{\rho} = 0$$

Geofésica: Una geodésica es una curva que cumple que el vector tangente está siendo transportado paralelamente a través de ella. Enotnces, si la curva es $x^{\mu}(\lambda)$, debe de cumplir que:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0$$

que es la **ecuación de geodésica**

4.0.9. Conexión y Derivada Covariante

Para definir una derivada buscamos algún tipo de operador ∇ que tome un tensor (k, l) y de por resultado un tensor de tipo $(k, l+1)$. Y le pedimos que cumpla las dos reglas siguientes:

- **Linealidad:** $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$
- **Regla de Leibniz:** $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$

Si queremos que ∇ cumpla estas reglas no es muy alocado pensar que ∇ se debe de ver como una derivada parcial seguida de alguna transformación lineal dada por alguna matriz Γ. Es decir, la derivada covariante será un operador de la forma:

$$\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}V^{\lambda} \qquad (3{,}5)$$

Los coeficientes Γ se llama **coefficientes de conexión**. Y una elección de dichos coeficientes nos permite definir una derivada covariante en particular. Donde los índices de Γ se ponen de esa forma para que se cancelen de la forma correcta para dar los índices del lado izquierdo.

Cómo se transforman los coeficientes de Γ?
Supongamos que cambiamos a una base primada con índices primados. Queremos que $\nabla_{\mu}V^{\nu}$ sea un (1,1) tensor porque así queremos que funcione la derivada. Es decir, buscamos que:

$$\nabla_{\mu'}V^{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\nabla_{\mu}V^{\nu} \quad (3{,}6)$$

Pero a parte, por 3.5, tenemos que en la nueva base se cumple:

$$\nabla_{\mu'}V^{\nu'} = \partial_{\nu'}V^{\nu'} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'}V^{\lambda'}$$

Luego sustituimos 3.5 en 3.6 y transformamos todas las partes que entendemos (todo excepto la Γ). Al hacer esto y varias cuentas (Caroll 95) nos queda que las componentes de Γ se transforman como:

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}\partial\lambda} \quad (3{,}10)$$

Esto no es la transformación típica de tensores, y se que Γ no es en general un tensor.

Más Propiedades:
Además, queremos que la derivada covariante cumpla las dos propiedades siguientes:

3) Conmuta con la contracción: $\nabla_\mu(T^\lambda_{\lambda\rho}) = (\nabla T)^{\lambda}_{\mu\ \ \lambda\rho}$

4) Se reduce a derivada parcial al aplicar en escales: $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$

Al pedir estas propiedades, se puede encontrar que la regla para derivar covectores es:

$$\nabla_\mu\omega_\nu = \partial_\mu\omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda$$

Entonces, para definir una derivada covariante, necesitamos ponerle una conexión a nuestra variedad. Lo que consiste por una serie de 64 coeficiente $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ para cada punto de la variedad y que se transforma según la regla (3.10).
Evidentemente podemos definir varias conexiones distintas en una variedad y luego usar esta conexión para definir una derivada covariante.
Bueno, de hecho no tenemos tanta libertad ya que sabemos que en realidad la métrica define a a la conexión y ya luego la conexión define a la derivada covariante.

Prop 1: La diferencia de dos conexiones es un tensor:
Tenemos las dos conexiones $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ y $\widehat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ y definimos su resta como $S^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \widehat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$.
Entonces, esta resta es un tensor, lo que se puede comprobar con fuerza bruta viendo cómo se transforma esta expresión.

Como consecuencia, una conexión se puede ver como la conexión original más un tensor como:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \widehat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + S^\lambda_{\mu\nu}$$

Y además, dada una conexión cualquiera, podemos conseguir inmediatamente otra conexión al permutar los índices inferiores. Con estas dos conexiones podemos definir el **tensor de torsión**:

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}$$

Claramente el tensor de torsión es antisimétrico en sus índices inferior.
Además, decimos que una conexión es **libre de torsión** sii su torsión es 0 lo cual sucede sii la conexión es simétrica en sus índices inferiores.

4.0.10. Conexión de Levi-Civita

Para una variedad con una métrica $g_{\mu\nu}$ podemos probar el siguiente teorema:
Teorema: Existe una única conexión que cumple con las dos propiedades siguientes:

- **libre de torsión:** $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)}$

- **compatibilidad con la métrica:** $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$

Primero desarrollamos la condición de compatibilidad de métrica para tres permutaciones de los índices

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} = 0 \\
\nabla_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} = 0 \\
\nabla_\nu g_{\rho\mu} = \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0
\end{aligned}$$

Restamos de la primera ecuación la segunda y la tercera y usamos la simetría de la conexión para llegar a que:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} = 0$$

Por tanto, tenemos que:

$$\boxed{\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})}$$

Esta conexión es la **conexión de Levi Civita** y es la más convencional.
Los coeficientes asociados de Γ son los **símbolos de Christoffel**. Que es igual a como habíamos llegao a ella antes.