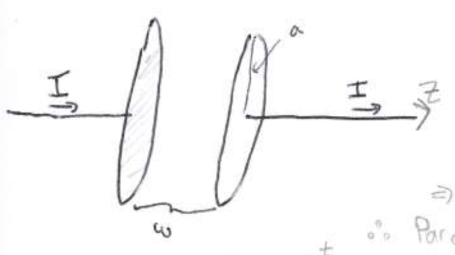
04

1. Imagina dos cables delgados que están conectados a los centros de placas circulares. La corriente I de los cables es constante, el radio del condensador es a y la separación es $w << a$. Supón que la corriente fluye de tal manera que para todo tiempo, la carga superficial es uniforme y que es cero en $t=0$

a) Encuentra el campo eléctrico entre las placas, como función de t.



Primero calculamos la cantidad de carga Q en cada placa como función del tiempo t.

Sobre la placa izquierda entra una corriente $I = cte$ para todo t, que por definición de corriente, está dada por $I = \frac{dQ}{dt}$

$\Rightarrow dQ = I\,dt$

$\therefore$ Para calcular la carga total que llegó a la placa, calculamos $Q(t) = \int_0^t I\,dt'$

$$Q(t) = \int_0^t I\,dt' = \underline{It} \quad \leftarrow \text{Porque } I \text{ es cte}$$

Similarmente, la placa derecha tiene una corriente que sale, por lo que su carga es $-It$.

$\therefore$ Para cualquier tiempo t, el arreglo se ve como un capacitor de placas paralelas con carga It.

Considerando que la carga se distribuye uniformemente y que $w << a$, podemos aproximar el campo entre las placas como si fuera entre dos planos infinitos, en cuyo caso el campo está dado por la conocida expresión $\underline{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$ con σ la densidad de carga

Como el área de las placas es $\pi a^2 \Rightarrow$ la densidad de carga es $\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$

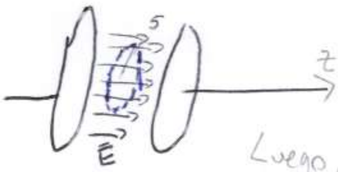
$$\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{\pi a^2 \varepsilon_0} = \frac{It}{\pi a^2 \varepsilon_0}$$

Y apunta de la placa izquierda (que se carga positivamente) a la derecha, es decir, en la dirección $\hat{z}$ mostrada en la imagen

$$\vec{E} = \frac{It}{\pi a^2 \varepsilon_0}\hat{z}$$

$\leftarrow$ Uniforme en todo el espacio entre las placas

b) Encuentra la corriente de desplazamiento a través del círculo de radio s en medio de las placas. Usa este círculo como tu circuito amperiano y la superficie plana que encierra para encontrar el campo magnético a una distancia s del eje.



La densidad de corriente de de desplazamiento está dada por $\bar{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

Sustituimos el valor de $\vec{E}$ $\rightarrow$ $\vec{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{It}{\pi \varepsilon_0 a^2}\right)\hat{z} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{z}$ ← uniforme en todo el espacio entre placas.

Luego, la ley de Ampere Maxwell dice que

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ Donde $\bar{B}$ es el campo magnético y $\vec{J}$ la corriente total (en este caso, $\vec{J} = \vec{J}_D$)

En su forma integral $\rightarrow$ $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}_D \cdot d\vec{a}$ (1)

Calculamos $\int_S \vec{J}_D \cdot d\vec{a}$ a lo largo del disco encerrado por el circuito

$= \int_S \frac{I}{\pi a^2}\hat{z}\cdot d\vec{a}$ ← Por la expresión de $\bar{J}_D$

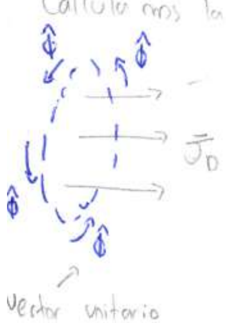
$= \frac{I}{\pi a^2}\int_S \hat{z}\cdot d\vec{a}$ ← I es cte

$= \frac{I}{\pi a^2}\int_S da$ ← porque $d\vec{a}$ apunta en la dirección z $\rightarrow$ $\hat{z}\cdot d\bar{a} = |d\bar{a}| = da$

$= \frac{I}{\pi a^2} A$ con A el área del disco encerrado, que es de radio s $\rightarrow$ $A = \pi s^2$

$= \frac{I}{\pi a^2}\pi s^2 = \frac{Is^2}{a^2}$

Calculamos la otra integral: $\oint \bar{B}\cdot d\bar{l}$ a lo largo del circuito.



Viendo la dirección de $\bar{J}_D$ y usando la regla de la mano derecha, vemos que la dirección de $\bar{B}$ es a lo largo de $\hat{\phi}$, es decir, siempre paralelo al vector $d\bar{l}$ tangente al circuito.

Además, como $\bar{J}_D$ es uniforme, $\bar{B}$ debe de ser cte a lo largo de todo el circuito por simetría

$\rightarrow$ $\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \int B\,dl$ ← porque $\bar{B}$ es paralelo a $d\bar{l}$ $\rightarrow$ $\bar{B}\cdot d\bar{l} = |B|\,dl$

$= B\int dl$ ← porque B es cte

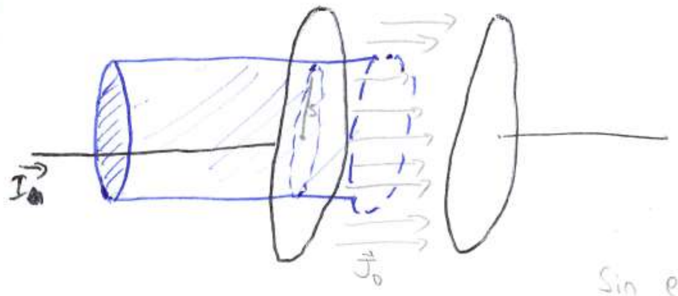
$= B(2\pi s)$ ← $\int dl$ es la longitud total del circuito

Juntamos los resultados de las dos integrales en (1)

$\rightarrow$ $\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 \int \bar{J}_D \cdot ds$ $\rightarrow$ $B(2\pi s) = \mu_0 \frac{Is^2}{a^2}$ $\rightarrow$ $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} s$

Y como dijimos antes, $\bar{B}$ va a lo largo de $\hat{\phi}$ $\rightarrow$ $\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} s\,\hat{\phi}$

c) Repite b) pero esta vez usando una superficie cilíndrica, la cual se extiende a través de la placa y termina fuera del condensador. Observa que la corriente de desplazamiento a través de la superficie es 0 y que hay dos contribuciones a la corriente encerrada I_{enc}.



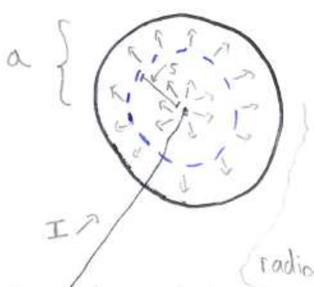
Vamos a usar nuevamente la ley de Ampere, $\oint B \cdot ds = \mu_0 I_{enc}$

En este caso no hay corrientes de desplazamiento, pues $\vec{J}_D$ sólo es distinto de 0 entre las placas y es perpendicular a éstas. Por lo tanto, viendo el dibujo, notamos que $\vec{J}_D$ nunca atraviesa el cilindro (sólo pasa por la apertura que tiene éste en el circuito)

Sin embargo, hay dos corrientes involucradas. La corriente del cable I que entra al cilindro y la corriente que se esparce radialmente en la placa y atraviesa el cuerpo del cilindro cuando llega al radio s.

Corrientes:

1. Corriente que entra al cilindro a través del cable: I
2. Corriente que sale al esparcirse en la placa:



(cara trasera de la placa)

Como vemos en el dibujo, la corriente llega a la placa en el cable y luego se esparce radialmente hacia afuera.
Queremos saber cuánta de esta corriente atraviesa el corte transversal del cilindro a un radio s

Sea $I(s)$ la corriente que se esparce hacia afuera de una circunferencia de radio s en la placa (como la circunferencia azul del dibujo)

Y sea $Q(s,t)$ la carga total dentro de este disco de radio s a un tiempo t.

Entonces, como a ese disco llega una corriente I y sale una corriente $I(s)$, tenemos que

$$\frac{d}{dt}Q(s,t) = I - I(s) \Rightarrow Q(s,t) = \int_0^t I - I(s)\, dt' = (I - I(s))t$$

$$\therefore Q(s,t) = (I - I(s))t,$$

Luego, la densidad de carga en este disco de radio s a un tiempo t es $\sigma(s,t) \equiv \frac{Q(s,t)}{\text{Área del disco}}$

$$\rightarrow \sigma(s,t) = \frac{Q(s,t)}{\pi s^2} = \frac{(I - I(s))t}{\pi s^2}$$

Sin embargo, el problema dice que la carga superficial es uniforme para todo t. Por lo que $\sigma(s,t)$ no puede depender de s, para que esté uniformemente distribuida en todo el disco.

Para que la expresión de $\sigma(s,t)$ que encontramos no dependa de s, $I(s)$ debe de ser tal que $\frac{I - I(s)}{\pi s^2}$ sea una constante (no dependa de s). Llamémosle c a esta constante

$$\rightarrow \frac{I - I(s)}{\pi s^2} = c \rightarrow I - I(s) = \pi s^2 c \rightarrow I(s) = I - \pi s^2 c$$

Además, en $s = a$, la corriente $I(s)$ deja de fluir, pues estamos ya en la orilla de la placa.

$$\rightarrow I(s=a) = 0 \rightarrow I - \pi s^2 c\Big|_{s=a} = 0 \rightarrow I - \pi a^2 c = 0 \rightarrow c = \frac{I}{\pi a^2} \xrightarrow[I(s)]{\text{sustituir en}} \therefore \underline{I(s) = I - \frac{I s^2}{a^2}}$$

Entonces, ya tenemos calculadas las dos corrientes sobre el cilindro

1 • Corriente que entra por el cable : I

2 • Corriente que sale al esparcirse por la placa : $I(s) = I - \frac{I s^2}{a^2}$

$\therefore$ Corriente total que atraviesa el cilindro : $I_{enc} = I - I(s) = I - \left(I - \frac{I s^2}{a^2}\right) = \frac{I s^2}{a^2}$ // (2)

Entonces, la ley de Ampere nos dice que $\oint \bar{B} \cdot d\ell = \mu_0 I_{enc}$

Al igual que en el inciso b) $\rightarrow$ $\oint \bar{B} \cdot d\ell = B(2\pi s)$ (Aplican los mismos argumentos que en b))

$\therefore$ $B(2\pi s) = \mu_0 I_{enc}$

Sustituimos (2) $\rightarrow$ $B = \frac{\mu_0 \left(\frac{I s^2}{a^2}\right)}{2\pi s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} s$

Y como B apunta a lo largo de $\hat{\phi}$ (al igual que en b) con $\hat{\phi}$ nuevamente el vector unitario polar)

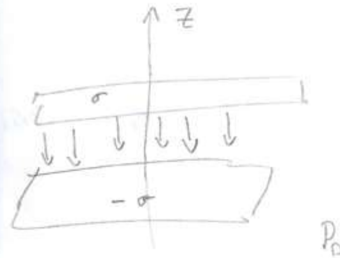
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} s \, \hat{\phi}$$

Que es el mismo resultado de b), tal como debería, pues no debe importar la superficie que se escoge al calcular I_{enc}, con tal que tengan el mismo circuito como frontera.

Tomás Ricardo Basile Álvarez   Electro II

8.5 Considera un condensador de placas infinito, con la placa inferior en $z=-d/2$ con densidad $-\sigma$ y la Superior $(z=+d/2)$ con densidad $+\sigma$

d) Determina los 9 componentes del tensor de esfuerzos entre las placas.



En un condensador de placas paralelas infinitas, el campo $\bar{E}$ va de la placa positiva a la negativa con intensidad $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, aquí la dirección es $-\hat{z}$ como en el dibujo.

$$\rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z} \quad \leftarrow \text{En el espacio entre placas}$$

Por otro lado, como no hay corrientes y $\bar{E}$ no cambia con el tiempo, el campo magnético $\bar{B}$ es 0

$$\bar{B} = 0 \quad \leftarrow \text{en todo el espacio}$$

$$\therefore\ E_x = E_y = 0\ ,\ E_z = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ ,\ B_x = B_y = B_z = 0 \quad \leftarrow \text{componentes de los campos.}$$

Ahora calculamos los componentes de T como vimos en clase usando estos valores

$$T_{ij} = \varepsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right) \quad \leftarrow \text{Def. de } T$$

$$\bullet\ T_{xx} = \varepsilon_0\left(E_xE_x - \frac{1}{2}\delta_{xx}E^2\right) + \cancel{\frac{1}{\mu_0}\left(B_xB_x - \frac{1}{2}\delta_{xx}B^2\right)}^{0}$$
$$= \varepsilon_0\left((0)(0) - \frac{1}{2}(1)\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2}\right)\right) + 0$$
$$= -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

como $\bar{E} = 0\hat{x} + 0\hat{y} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}$
$\rightarrow E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2}$

$$\bullet\ T_{xy} = \varepsilon_0\left(E_xE_y - \frac{1}{2}\cancel{\delta_{xy}}^{0}E^2\right) + \cancel{\frac{1}{\mu_0}\left(B_xB_y - \frac{1}{2}\delta_{xy}B^2\right)}^{0}$$
$$= \varepsilon_0((0)(0)) = 0$$

$$\bullet\ T_{xz} = \varepsilon_0\left(E_xE_z - \frac{1}{2}\cancel{\delta_{xz}}^{0}E^2\right) + \cancel{\frac{1}{\mu_0}\left(B_xB_z - \frac{1}{2}\delta_{xz}B^2\right)}^{0}$$
$$= \varepsilon_0\left((0)\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\right) = 0$$

$$\bullet\ T_{yx} = \varepsilon_0\left(E_yE_x - \frac{1}{2}\cancel{\delta_{yx}}^{0}E^2\right) + \cancel{\frac{1}{\mu_0}\left(B_yB_x - \frac{1}{2}\delta_{yx}B^2\right)}^{0}$$
$$= \varepsilon_0(0)(0) = 0$$

$$\bullet\ T_{yy} = \varepsilon_0\left(E_yE_y - \frac{1}{2}\cancel{\delta_{yy}}^{1}E^2\right) + \cancel{\frac{1}{\mu_0}\left(B_yB_y - \frac{1}{2}\delta_{yy}B^2\right)}^{0}$$
$$= \varepsilon_0\left((0)(0) - \frac{1}{2}E^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}$$

$$\bullet\ T_{yz} = \varepsilon_0\left(E_yE_z - \frac{1}{2}\cancel{\delta_{yz}}^{0}E^2\right) + \cancel{\frac{1}{\mu_0}\left(B_yB_z - \frac{1}{2}\delta_{yz}B^2\right)}^{0}$$
$$= \varepsilon_0((0)(E_z)) = 0$$

$$\bullet\ T_{zx} = \varepsilon_0\left(E_zE_x - \frac{1}{2}\cancel{\delta_{zx}}^{0}E^2\right) + \cancel{\frac{1}{\mu_0}\left(B_zB_x + \frac{1}{2}\delta_{zx}B^2\right)}^{0}$$
$$= \varepsilon_0(E_z(0)) = 0$$

$$\bullet\ T_{zy} = \varepsilon_0\left(E_zE_y - \frac{1}{2}\cancel{\delta_{zy}}^{0}E^2\right) + \cancel{\frac{1}{\mu_0}\left(B_zB_y - \frac{1}{2}\delta_{zy}B^2\right)}^{0}$$
$$= \varepsilon_0(E_z(0)) = 0$$

$$\bullet\ T_{zz} = \varepsilon_0\left(E_zE_z - \frac{1}{2}\delta_{zz}E^2\right) + \cancel{\frac{1}{\mu_0}\left(B_zB_y - \frac{1}{2}\delta_{zz}B^2\right)}^{0}$$
$$= \varepsilon_0\left(E_z^2 - \frac{1}{2}E^2\right) = \varepsilon_0\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2}\right) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Vemos que todos los términos excepto la diagonal se anulan $\rightarrow$

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Usa la ecuación 8.22 para determinar la fuerza por unidad de área sobre la placa superior. Compara con 2.51

La ecuación 8.22 dice que la fuerza total en un volumen V es

$$\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{a} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\int_V \vec{S}\, d\tau$$

negativo porque apunta hacia afuera de la superficie que rodea a la placa superior

En nuestro caso, como $\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = 0$. Entonces: $\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{a}$ (3)

Ahora bien, la superficie S es el plano $z = d/2$, que tiene vector normal dado por $d\vec{a} = -da\,\hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -da \end{pmatrix}$ ← en notación matricial con $|d\vec{a}| = da$

Entonces, sustituimos en (3)

$$\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{a} = \oint_S \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -da \end{pmatrix} = \oint_S \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -da \end{pmatrix}$$ ← hacemos el producto matricial $\overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{a}$

$$= \oint_S -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\, da\, \hat{z}$$

$$= \oint -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\, dx\,dy\, \hat{z}$$ ← En la placa se tiene que $da = dx\,dy$

$$= -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{z}\underbrace{\oint dx\,dy}_{\text{Área total de la placa (infinita)}}$$

Entonces, la fuerza por unidad de área es: $-\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{z}$ ← Dividimos por el área

Esto es igual a la ecuación 2.51 en la que Griffiths calcula esta fuerza por unidad de área usando directamente el campo eléctrico $\vec{E}$ a ambos lados del plano $z = d/2$. El resultado es el mismo a pesar del método.

f) ¿Cuál es el momento por unidad de área, por unidad de tiempo, que cruza el plano xy?

Como la fuerza $\vec{F}$ es igual a la derivada del momento $\frac{d\vec{p}}{dt}$, usando la ecuación (3) tenemos que $\frac{d\vec{p}}{dt} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{a}$

Pero $d\vec{p}/dt$ es justamente el momento por unidad de tiempo. La integral es la misma de antes, por lo que el momento por unidad de tiempo por unidad de área es $-\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{z}$

* La integral es la misma aunque antes haya sido en el plano $z = d/2$ y ahora en el xy. Pues en ambas zonas los campos son los mismos y en la integral sólo fue necesario usar el vector $d\vec{a}$ (que es el mismo en ambos casos)

g) El momento es absorbido en las placas, haciéndolas retroceder. Encuentra la fuerza con la que la placa superior retrocede.

La fuerza debida al momento se calcula como el momento entregado a la placa dividido por unidad de tiempo, según dice la 2da ley de Newton $\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}$

El momento por unidad de Área entregado en cada unidad de tiempo encontrado en f) es $-\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{z}$.

Por lo dicho antes, como esto ya está dividido por unidad de tiempo, este valor es igual a la Fuerza por unidad de área que siente la placa debida a la absorción del momento.

$\Rightarrow$ Fuerza por unidad de Área $= -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{z}$

Es el mismo resultado de e), pero como dice el enunciado, no es una fuerza adicional, es la misma fuerza pero calculada a través del momento en vez de directamente.