TAREA 5 Medios Deformables
Basile Álvarez Tomás Ricardo 316617194
Gallegos Salgado Jessica Andrea 316038456

1. El potencial complejo de un cilindro de radio a sobre el cual incide un flujo uniforme de velocidad U y que forma un ángulo α con la horizontal es

$$F(z) = U\left(z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha}\right).$$

Para verificar que esto es correcto:
(a) Muestra que lejos del origen (si $z = Re^{i\theta}$, se tiene $R \gg a$) las componentes cartesianas de la velocidad son $u = U\cos\alpha$ y $v = U\sin\alpha$ (un flujo de velocidad U inclinado en α). Recuerda que $W = dF/dz = u - iv$.

Tenemos que $F(z) = U\left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z}e^{i\alpha}\right)$. Entonces, primero calculamos la velocidad compleja como:

$$W = \frac{dF}{dz}$$

$$= \frac{d}{dz}\left[U\left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z}e^{i\alpha}\right)\right] \qquad \text{Separamos la derivada}$$

$$= \frac{d}{dz} U z e^{-i\alpha} + \frac{d}{dz} U \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \qquad \text{Derivamos}$$

$$= Ue^{-i\alpha} - U\frac{a^2}{z^2}e^{i\alpha}$$

Ahora, escribimos a z en su representación polar: $z = Re^{i\theta}$

$$\Rightarrow W = Ue^{-i\alpha} - U\frac{a^2}{R^2}\frac{e^{i\alpha}}{(e^{i\theta})^2}$$

y como estamos lejos del origen (es decir, $R \gg a$), entonces el término $\frac{a^2}{R^2}$ es muy pequeño y por lo tanto, podemos despreciar todo el segundo término, quedándonos únicamente que:

$$W = Ue^{-i\alpha}$$

Usamos la fórmula de Euler para escribir la exponencial como: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi$
y así poder separar la parte real de la parte imaginaria de W

$$= U(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

$$= U\cos\alpha - iU\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Finalmente usamos que $W = \frac{dF}{dz} = u - iv$. Y como ya tenemos a W separado en su parte real e imaginaria, comparando tenemos que:

$$W = U\cos\alpha - iU\,\mathrm{sen}\,\alpha = u - iv$$

$$\boxed{\therefore\ u = U\cos\alpha \quad , \quad v = U\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$

(b) Muestra que sobre el círculo de radio a centrado en el origen ($z = ae^{\theta}$) se tiene $\psi = cte$, es decir, este círculo es una línea de corriente. Recuerda que $F = \phi + i\psi$.

En la expresión del potencial complejo que nos da el problema, evaluamos en $z = ae^{i\theta}$, para así obtener su valor en el círculo de radio a:

$$F(z) = U\left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z}e^{i\alpha}\right)$$

$$= U\left(ae^{i\theta}e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{ae^{i\theta}}e^{i\alpha}\right)$$ Juntamos las exponenciales

$$= U\left(ae^{i\theta-i\alpha} + ae^{i\alpha-i\theta}\right)$$

$$= Ua\left(e^{i(\theta-\alpha)} + e^{i(\alpha-\theta)}\right)$$ usamos la fórmula de Euler para escribir las exponenciales como: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi$

$$= Ua\left[\cos(\theta-\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha) + \cos(\alpha-\theta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha-\theta)\right]$$

Separamos la parte real de la imaginaria

$$\Rightarrow F(z) = Ua\left[\cos(\theta-\alpha) + \cos(\alpha-\theta) + i\left[\mathrm{sen}(\theta-\alpha) + \mathrm{sen}(\alpha-\theta)\right]\right] \quad \cdots 2$$

Ahora, como coseno es una función par $\cos(-x) = \cos(x)$ $\Rightarrow \cos(\theta-\alpha) = \cos(\alpha-\theta)$
$\Rightarrow \cos(\theta-\alpha) + \cos(\alpha-\theta) = 2\cos(\theta-\alpha)$

y como seno es una función par $\mathrm{sen}(-x) = -\mathrm{sen}(x)$ $\Rightarrow \mathrm{sen}(\theta-\alpha) = -\mathrm{sen}(\alpha-\theta)$
$\Rightarrow \mathrm{sen}(\theta-\alpha) + \mathrm{sen}(\alpha-\theta) = 0$

Sustituimos esto en 2:

$$\Rightarrow F(z) = Ua\left[2\cos(\theta-\alpha) + i(0)\right]$$

y como también tenemos que $F(z) = \phi + i\psi$, comparando con la expresión anterior:

$$2Ua\cos(\theta-\alpha) + i(0) = \phi + i\psi$$

$$\boxed{\therefore\ \phi = 2Ua\cos(\theta-\alpha) \quad ; \quad \psi = 0 = cte}$$

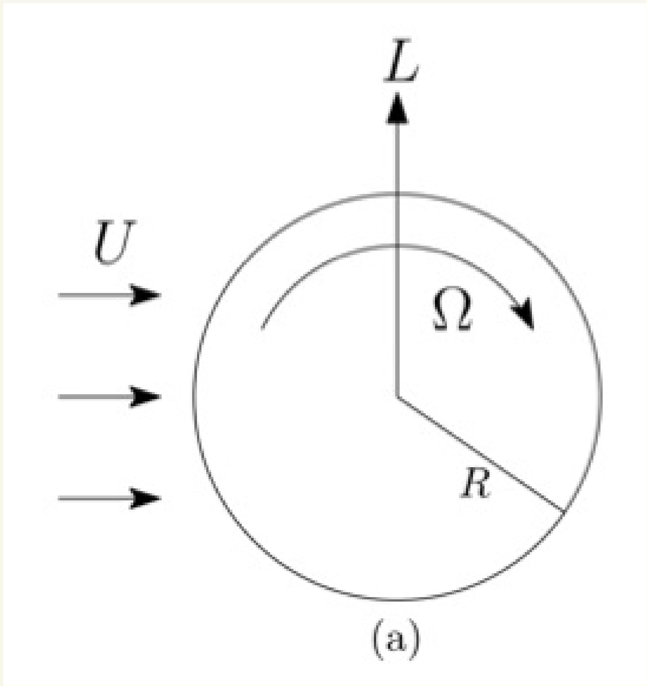
Esto demuestra que, para cualquier punto en el círculo, $\psi = cte$ (en particular vale 0). Como vimos en clase, las curvas con $\psi = cte$ son líneas de corriente y por lo tanto, podemos concluir que:

$\therefore$ El círculo es una línea de corriente

2. Se llama efecto Magnus a la observación de que una esfera en vuelo y que tiene rotación experimenta una fuerza aerodinámica que la desvía de su trayectoria normal. En este problema usaremos la teoría de flujo potencial para estimar la magnitud de este efecto.

(a) Consideremos un cilindro de radio R que rota con velocidad angular Ω sobre el cual incide un flujo uniforme de velocidad U , como se muestra en la Figura 1a. Suponiendo que el flujo en la superficie del cilindro está en reposo con respecto a la superficie (i.e. su velocidad angular es Ω), calcula la circulación integrando sobre la superficie del cilindro:

$$\Gamma = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} (R\Omega)(Rd\theta).$$



(a)

Calculamos la circulación integrando sobre la superficie del cilindro:

$$\Gamma = \int v \cdot dl$$

$$= \int_0^{2\pi} (R\Omega)(R\,d\theta)$$ Sacamos lo que no depende de θ

$$= R^2\Omega \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= R^2\Omega\,[\theta]_0^{2\pi}$$

$$= R^2\Omega\, 2\pi \qquad \boxed{\therefore \Gamma = 2\pi R^2 \Omega}$$

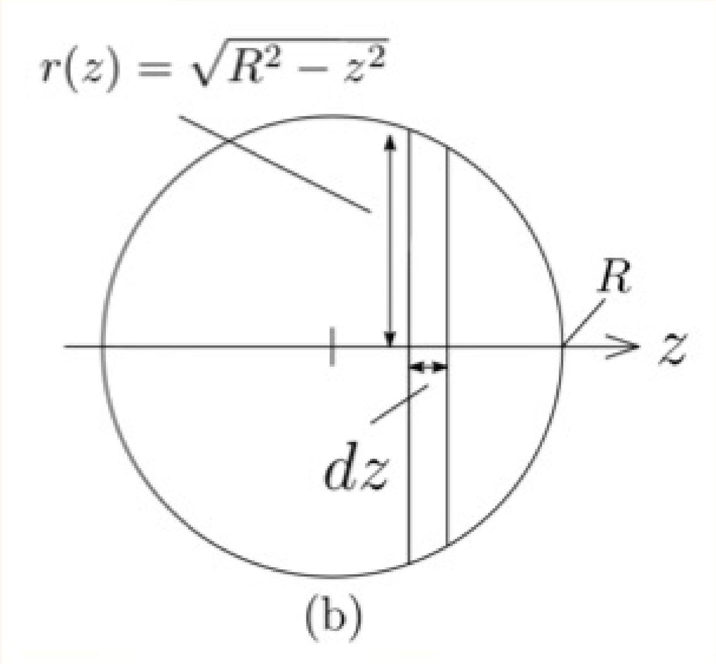
(b) Usa ahora la ley de Kutta-Joukowski, $L = \rho U \Gamma$, para obtener la fuerza de sustentación por unidad de longitud que actúa sobre el cilindro.

Para obtener la fuerza de sustentación por unidad de longitud que actúa sobre el cilindro, sustituimos la circulación que obtuvimos en el inciso anterior en la ley de Kutta-Joukowski : $L = \rho U \Gamma$

$$\Rightarrow L = \rho U\,[2\pi R^2 \Omega] \qquad \boxed{\therefore L = 2\pi \rho U R^2 \Omega}$$

(c) Finalmente, para estimar el lift sobre una esfera, considera que ésta está compuesta de cilindros de grosor infinitesimal y cuyos radios están dados por $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$, donde z es la distancia transversal medida desde el centro (ver Figura 1b). Integre el lift por unidad de longitud encontrado en (b) para obtener el lift total

$$F_L = 2\int_0^R L dz.$$



(b)

En este inciso buscamos calcular el lift sobre una esfera de radio R. Para hacerlo, vamos a considerar a la esfera como compuesta de varios cilindros infinitesimales que se forman al realizar cortes transversales a distintas alturas "z" sobre la esfera.

Cada uno de estos cilindros tiene grosor dz y radio de $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$, como podemos ver en la imagen b) de arriba.

Por lo tanto, para calcular el lift sobre la esfera completa, podemos integrar el lift por unidad de longitud en cada uno de estos cilindros

Ahora, en el inciso b) vimos que el lift por unidad de longitud sobre un cilindro de radio R era: $L = 2\pi \rho U R^2 \Omega$. Y entonces, sobre un cilindro de radio $r(z)$ el lift por unidad de longitud es $L = 2\pi \rho U r^2(z) \Omega$. y por lo tanto:

$$F_L = 2 \int_0^R L \, dz$$

$$= 2 \int_0^R 2\pi \rho U r^2(z) \Omega \, dz$$

$$= 4\pi \rho U \Omega \int_0^R r^2(z)$$ usamos que $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$

$$= 4\pi \rho U \Omega \int_0^R (R^2 - z^2) \, dz$$

$$= 4\pi \rho U \Omega \left[R^2 \int_0^R dz - \int_0^R z^2 \, dz \right]$$

$$= 4\pi \rho U \Omega \left[R^2 (R - 0) - \frac{z^3}{3} \Big|_0^R \right]$$

$$= 4\pi \rho U \Omega \left[R^3 - \frac{R^3}{3} \right]$$

$$= 4\pi \rho U \Omega \left(\frac{2R^3}{3} \right)$$

$$\boxed{\therefore F_L = \frac{8}{3} \pi \rho U \Omega R^3}$$

(d) Según las regulaciones oficiales de la NBA, una pelota de basquetbol tiene un diámetro de 24 cm y una masa de 570 g. Suponiendo que rota a 300 rpm en aire normal ($\rho = 1.2$ kg/m^3) y que se mueve a 10 m/s, evalúa la fuerza total F_L (en N) y calcula la aceleración resultante (en m/s^2).

Este resultado es como un orden de magnitud más grande que el valor real. La diferencia está, como suele ser el caso, en que en la vida real el flujo se separa de la superficie, lo cual reduce el lift (y aumenta el arrastre). Pero al menos esto muestra que la teoría de flujo potencial basta para explicar la física involucrada en el efecto.

vamos a usar la expresión de lift total que encontramos anteriormente (inciso c) pero sustituimos los valores de la pelota de basquetbol:

$\rho = 1.2$ Kg/m^3,
la velocidad $U = 10$ m/s,
la velocidad angular $\Omega = 300$ rpm $= 31.4159$ rad/s
y el radio $R = 24$ cm$/2 = 0.12$ m

$$\Rightarrow F_L = \frac{8}{3} \pi \rho U \Omega R^3$$

$$= \frac{8}{3} \pi (1.2 \text{ Kg/m}^3)(10 \text{ m/s})(31.4159 \text{ rad/s})(0.12 \text{ m})^3$$

$$= \frac{8}{3} \pi (0.6514 \text{ N})$$

$$= 5.4574 \text{ N}$$

$$\boxed{\therefore F_L = 5.4574 \text{ N}}$$

Ahora, para obtener la aceleración resultante a esta fuerza, usamos la segunda ley de Newton : $F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}$

$\Rightarrow a = \frac{F_L}{m}$ con la masa de la pelota siendo $m = 570\ g = 0.57\ kg$

$$= \frac{5.4574\ \cancel{kg}\cdot m/s^2}{0.57\ \cancel{kg}}$$

$$= 9.5745\ m/s^2 \qquad \boxed{\therefore a = 9.5745\ m/s^2}$$

3. El Cessna 172 es uno de los aviones monotores más populares del mundo. Su peso máximo de despegue es 1100 kg y su velocidad típica de despegue es 110 km/h. El ala tiene una envergadura (distancia de punta a punta, *span*) de $s = 11$ m y la longitud promedio de su cuerda (distancia del borde de entrada al borde de salida, *chord*) es $l = 1.4$ m. La densidad del aire es 1.2 kg/m^3 . Calcula el ángulo de ataque necesario para que un Cessna 172 despegue (esto requiere que la fuerza de sustentación total F_L iguale al peso mg) suponiendo que el perfil del ala es:

Primero que nada, tenemos que el coeficiente de lift viene dado por :

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho \cdot u_\infty^2 \cdot l}$$

Donde L es el lift por unidad de longitud transversal, el cual viene dado por $L = \frac{F_L}{s}$

$$\Rightarrow C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 l \cdot s}$$

Por otro lado, para calcular el ángulo de ataque necesario para que un Cessna 172 despegue, se necesita que la fuerza de sustentación total F_L sea igual que el peso mg, es decir, que $F_L = mg$

Sustituimos esta igualdad y nos queda que el coeficiente de lift es:

$$C_L = \frac{mg}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 l \cdot s}$$

vamos a sustituir los valores de este avión :

peso máximo de $mg = (1100\ kg)(9.81\ m/s^2)$
velocidad de despegue de $u_\infty = 30.55\ m/s$
densidad del aire de $\rho = 1.2\ kg/m^3$
envergadura de $s = 11\ m$
longitud promedio de la cuerda de $l = 1.4\ m$

$$\Rightarrow C_L = \frac{(1100)(9.81)}{\frac{1}{2}(1.2)(30.55)^2(1.4)(11)} \qquad \left[\frac{\cancel{kg}\cdot \cancel{m/s^2}}{\cancel{kg/m^3}\cdot \cancel{m^2/s^2}\cdot \cancel{m}\cdot \cancel{m}}\right]$$

$$= 1.2513 \qquad \therefore C_L = 1.2513 \ \ldots *$$

Este es el valor necesario del coeficiente de lift para que la fuerza de sustentación total F_L sea igual que el peso mg y el avión pueda despegar. Por lo tanto, usaremos este resultado (*) para cada una de las expresiones de los tres incisos y a partir de esto, encontraremos el ángulo de ataque necesario para que cada expresión de cada inciso satisfaga que $C_L = 1.2513$.

(a) Una placa plana de longitud $l = 1.4$ m;

la expresión del coeficiente de lift que nos dan para este inciso es:

$$C_L = 2\pi \operatorname{sen}(\alpha)$$

Entonces, igualando esto con el resultado obtenido *:

$$C_L = 1.2513 = 2\pi \operatorname{sen}(\alpha)$$

y como buscamos el ángulo de ataque necesario para que un Cesma 172 despegue, despejamos al ángulo α, al ser justo lo que buscamos:

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{C_L}{2\pi}\right)$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1.2513}{2\pi}\right)$$

$$= 11.4872°$$

$$\boxed{\therefore \alpha \approx 11.4872°}$$

(b) Un ala simétrica de Joukowski con una longitud de cuerda $l = 1.4$ m y un grosor máximo $t = 0.17$ m;

la expresión del coeficiente de lift que nos dan para este inciso es:

$$C_L = 2\pi\left(1 + \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{t}{l}\right)\operatorname{sen}(\alpha)$$

Entonces igualando esto con el resultado obtenido *:

$$C_L = 1.2513 = 2\pi\left(1 + \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{t}{l}\right)\operatorname{sen}(\alpha)$$

y como buscamos el ángulo de ataque necesario para que un Cesma 172 despegue, despejamos al ángulo α, al ser justo lo que buscamos:

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{C_L}{2\pi\left(1 + \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{t}{l}\right)}\right]$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{1.2513}{2\pi\left(1 + \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{t}{l}\right)}\right]$$

Además, para este perfil el enunciado nos dice que el grosor máximo es de $t = 0.17$ m y tenemos que $l = 1.4$ m

$$= \text{sen}^{-1}\left[\frac{1.2513}{2\pi\left(1+\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{0.17\,m}{1.4\,m}\right)}\right]$$

$$\approx 10.4826°$$

$$\boxed{\therefore \alpha \approx 10.4826°}$$

(c) Un ala curva de Joukowski, con una curvatura máxima $h = 0.028$ m (esta es la distancia máxima entre la cuerda y la línea de centro del ala, la cual es aprox. un arco circular).

Para estos perfiles, el coeficiente de lift C_L está dado por:

$$(a)\, 2\pi \sin\alpha \qquad (b)\, 2\pi\left(1+\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{t}{l}\right)\sin\alpha \qquad (c)\, 2\pi\left(1+\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{t}{l}\right)\sin\left(\alpha+\frac{2h}{l}\right)$$

El coeficiente de lift se define como

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 l},$$

donde l es la longitud de la cuerda y, ojo, L es el lift por unidad de longitud transversal (i.e. de envergadura) del ala. La fuerza vertical total producida por el ala se obtiene entonces de $F_L = Ls$, es decir,

$$F_L = \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 C_L l s$$

En la vida real un Cessna 172 despega con un ángulo de ataque pequeño ≈4°, y comienza a perder sustentación (entra en pérdida o *stall*) cuando ≈15°. Compara tus resultados con estos datos.

la expresión del coeficiente de lift que nos dan para este inciso es:

$$C_L = 2\pi\left(1+\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{t}{l}\right)\text{sen}\left(\alpha+\frac{2h}{l}\right)$$

Entonces igualando esto con el resultado obtenido ✱:

$$C_L = 1.2513 = 2\pi\left(1+\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{t}{l}\right)\text{sen}\left(\alpha+\frac{2h}{l}\right)$$

y como buscamos el ángulo de ataque necesario para que un Cessna 172 despegue, despejamos al ángulo α, al ser justo lo que buscamos:

$$\Rightarrow \alpha = \text{sen}^{-1}\left[\frac{C_L}{2\pi\left(1+\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{t}{l}\right)}\right] - \frac{2h}{l}$$

$$= \text{sen}^{-1}\left[\frac{1.2513}{2\pi\left(1+\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{t}{l}\right)}\right] - \frac{2h}{l}$$

Además, para este perfil el enunciado nos dice que la curvatura máxima del ala es de $h = 0.028$ m, y teníamos que $t = 0.17$ m y que $l = 1.4$ m

$$= \text{sen}^{-1}\left[\frac{1.2513}{2\pi\left(1+\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{0.17\,m}{1.4\,m}\right)}\right] - \frac{2(0.028\,m)}{1.4\,m}$$

$$\approx 8.2017°$$

$$\boxed{\therefore \alpha \approx 8.2017°}$$

En la vida real, un Cessna 172 despega con un ángulo de ataque pequeño ($\alpha \approx 4°$) y comienza a perder sustentación cuando $\alpha \approx 15°$. Por lo tanto, el resultado obtenido que más se aproxima a este valor de ataque pequeño al despegar es el del ala curva de Joukowski, en donde obtuvimos un ángulo de despegue de $\alpha \approx 8.2017°$, seguido del ala simétrica de Joukowski, en donde obtuvimos un ángulo de despegue de $\alpha \approx 10.4826°$, y finalizando con el ala plana, en donde obtuvimos un ángulo de despegue de $\alpha \approx 11.4872°$