IFC   Tomás Ricardo Basile Álvarez   Tarea Examen 2

1) a) ¿Qué propuso Louis de Broglie en 1924 acerca de las propiedades ondulatorias de las partículas?

De Broglie propuso que la longitud de onda que inicalmente se calculaba como $\lambda = h/p$ para fotones se podía aplicar también a partículas con masa.

Es decir, sugirió que las partículas tenían una característica ondulatoria (el inverso a la propuesta de años antes de que las ondas tienen características de partículas)

Y para calcular la longitud de onda de estas ondas asociadas a una partícula sugirió usar la expresión $\lambda = \frac{h}{p}$ que se tenía para fotones pero extenderla para cualquier partícula.

b) En qué consistió el experimento que confirmó la hipótesis de de-Broglie y quiénes lo realizaron?

El experimento fue realizado por Clinton Davisson y Lester Germer en 1927.

Ellos buscaban observar la difracción de un electrón, que es un comportamiento más bien típico de ondas.

Lanzaron un rayo de electrones a una superficie de metal. Según la teoría clásica, las partículas al incidir en el metal van a rebotar en todas direcciones con casi la misma intensidad y sin ninguna preferencia.

Sin embargo, en este mismo experimento, si en vez de lanzar partículas se hiciera incidir una onda, se presentaría un fenómeno de difracción que haría que las ondas rebotadas interfieran y generen un máximo de intensidad en una dirección particular con respecto a la superficie del metal. Y esa dirección se podría calcular con la ley de Bragg

$\lambda = 2d \operatorname{sen}\theta$ ← λ = long de onda, d = distancia entre planos del metal, θ = ángulo con máxima intensidad respecto a los planos.

Al hacer el experimento con electrones vieron que rebotaban con preferencia en una dirección particular, tal como se supone que hacen las ondas y no las partículas.

Y no sólo eso, el máximo seguía la ecuación de Bragg $\lambda = 2d \operatorname{sen}\theta$ cuando $\lambda = \frac{h}{p}$ era la longitud de onda asociada al electrón según de Broglie. Confirmando la teoría de de Broglie

2) a) ¿Qué interpretación se le da a $|\Psi|^2$ y quién la propuso en 1926?

La propuso Max Born. $|\Psi|^2$ es una función de (x,y,z,t) que a cada posición y tiempo le asigna un número real. Se interpreta $|\Psi|^2$ evaluado en (x,y,z,t) como la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula descrita por Ψ en la posición (x,y,z) al tiempo t.

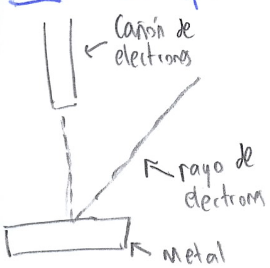
Es decir, $|\Psi|^2$ nos da la probabilidad de encontrar a la partícula en cada punto del espacio en cualquier tiempo t.

b) ¿Por qué la función de onda Ψ no puede tener esta interpretación?

Porque una densidad de probabilidad tiene que ser una función positiva y asignar a cada punto en el espacio un número entre 0 y 1, que es la probabilidad.

Sin embargo, Ψ puede tomar valores negativos o incluso complejos, que no tienen una interpretación como probabilidad y no tienen sentido. Tomar $|\Psi|^2$ corrige este problema.

3) ¿En qué consiste el experimento que verificó la hipótesis de de Broglie?



El experimento consiste en lanzar un rayo de electrones a una superficie de metal y medir la intensidad de los electrones dispersados como función del ángulo usando algún tipo de detector.

Para partículas este experimento no debería de dar resultados muy sorprendentes. Según la teoría clásica la intensidad del rayo dispersado no debería depender mucho del ángulo.

Sin embargo, para ondas entraría en escena el fenómeno de difracción, lo que hace que las ondas rebotadas interfieran constructivamente en alguna dirección y exista un máximo de intensidad.

Es más, esta dirección de máxima intensidad se puede calcular con la ley de Bragg como: $\lambda = 2d\,\text{sen}\,\theta$

d = distancia entre planos del metal,

con λ = longitud de onda de la onda,

θ = ángulo de máxima intensidad medido respecto a los planos.

Al hacer el experimento, se dieron cuenta que los rayos dispersados tenían un máximo de intensidad. Lo que sugiere que los electrones se difractaban y comportaban como ondas.

Más aún, la expresión de Bragg $\lambda = 2d\,\text{sen}\,\theta$ resultaba cierta cuando se ponía $\lambda = \frac{h}{p}$ para los electrones, la longitud de onda de de-Broglie.

4) Principio de incertidumbre. a) Enuncie el Principio de Incertidumbre de Heisenberg para la posición y momento.

Es imposible conocer la posición exacta y momento exacto de una partícula al mismo tiempo.

Más precisamente, el momento de una partícula siempre tiene una indeterminación Δp (debida a la propia naturaleza y no a la exactitud de mediciones) y la posición una indeterminación Δx.

El principio asegura que $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

Es decir, este producto $\Delta x \Delta p$ no se puede hacer tan chico como queramos, siempre hay una indeterminación en la posición y en el momento que hacen que $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

b) Usando el principio de incertidumbre, estime el tamaño de un átomo de hidrógeno si la energía del electrón es 13.6 eV

Si la energía es $E = 13.6\,eV$, vemos que no es comparable con la energía de 0.511 MeV en reposo. Por lo que usamos una aproximación no relativista.

La relación entre momento y Energía cinética no relativista es $p = \sqrt{2mE}$

Si el electrón tiene dicho momento entonces la incertidumbre en el momento es más o menos de ese mismo orden. Por tanto

$$\Delta p = \sqrt{2mE}$$

Por tanto, la incertidumbre en la posición tiene que ser al menos suficiente para que se cumpla $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2mE}}$$

$$\rightarrow \quad \Delta x = \frac{(1.054 \cdot 10^{-34} J\cdot s)}{2\sqrt{2(9.109\cdot 10^{-31} kg)(13.6 eV)\left(\frac{1.602\cdot 10^{-19} J}{1 eV}\right)}} = \underline{2.645 \cdot 10^{-11}\,m}$$

El radio de Bohr es de $5.29 \times 10^{-11} m$, así que estamos en el orden de magnitud correcto.

5. a) Encuentre la energía cinética de un protón cuya longitud de onda de de Broglie es 1.00 fm

Por si las dudas, haré todo relativisticamente.

La longitud de onda se calcula como $\lambda = \frac{h}{p} \rightarrow p = \frac{h}{\lambda} \quad \dots (1)$

Pero el momento p se relaciona con la energía total con $(mc^2)^2 = E_T^2 - (pc)^2$

$\rightarrow E_T = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \quad \dots (2)$

La energía total es $E_T = \underbrace{KE}_{\text{cinética}} + \underbrace{mc^2}_{\text{reposo}} \rightarrow KE = E_T - mc^2$

$$KE = E_T - mc^2$$

$$= \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2 \quad \leftarrow \text{por (2)}$$

$$= \sqrt{(mc^2)^2 + \left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2} - mc^2 \quad \leftarrow m = \text{masa protón}, \ \lambda = 1\,\text{Fm}$$

Sustituimos los valores: $KE = \sqrt{\left[(1.672 \cdot 10^{-27} kg)(3 \cdot 10^8 \tfrac{m}{s})^2\right]^2 + \left[\frac{(6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s)(3 \cdot 10^8 m/s)}{1 \cdot 10^{-15} m}\right]^2} - (1.672 \cdot 10^{-27} kg)(3 \cdot 10^8 m/s)^2$ ← Energía reposo protón

$$= 9.883 \times 10^{-11} J$$

$$= 6.169 \cdot 10^8 eV = 617\ MeV$$

← Estuvo bien ser relativistas, porque $617\ MeV \approx 938 MeV$ por lo que requiere cálculos relativistas.

b) Compare las incertidumbres en las velocidades de un electrón y un protón en una caja de 2.5 nm

Según el principio de incertidumbre, tenemos que $\Delta p \, \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$

Entonces, la incertidumbre en momento es $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$ ... (1)

lo justificamos después

Luego, usamos la definición no relativista del momento $p = mv$

Como la masa es fija y bien definida, la incertidumbre del momento es $\Delta p = m\Delta v$

Entonces, por (1) tenemos:

$$m\Delta v \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

$$\rightarrow \Delta v \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x}$$ incertidumbre en la velocidad

Luego, calculamos para cada partícula con $\Delta x = 2.5\,nm$ la incertidumbre en la posición.

Protón: $$\Delta v_p \geq \frac{\hbar}{2m_p \Delta x} = \frac{1.054 \times 10^{-34}\, J\cdot s}{2(1.672\cdot 10^{-27}\,kg)(2.5\cdot 10^{-9}\,m)}$$

$$= \boxed{12.61\ m/s}$$

Unidades $\frac{J\cdot s}{kg\, m} = \frac{kg\frac{m^2}{s^2}s}{kg\, m} = m/s$

Electrón $$\Delta v_e \geq \frac{\hbar}{2m_e \Delta x} = \frac{1.054\cdot 10^{-34}\, J\cdot s}{2(9.109\cdot 10^{-31}\,kg)(2.5\cdot 10^{-9}\,m)}$$

$$= 23{,}154\ m/s$$

$$= \boxed{2.31 \times 10^4\ m/s}$$

Vemos que $\Delta v_e >> \Delta v_p$. Lo cual es de esperar, porque como $m_e << m_p$, se requiere una gran incertidumbre en Δv_e para que las incertidumbres en momento coincidan.

Los cálculos no relativistas se justifican porque las incertidumbres que obtuvimos son del orden de $10^4\,m/s$ para el electrón.

Entonces, la velocidad del electrón es más o menos de ese orden, e incluso si la velocidad fuera 1000 veces mayor, del orden de $10^7\,m/s$, un cálculo no relativista sería todavía justificable aunque ya un poco impreciso.

7| a) La posición y el momento de un electrón de 3.50 keV son determinados simultáneamente, Si su posición está localizada dentro de 0.250 nm ¿Cuál es el porcentaje de incertidumbre en su momento?

El porcentaje de incertidumbre se calcula como el valor de la incertidumbre entre el valor del momento $\frac{\Delta p}{p}$

Pero por el principio de incertidumbre, $\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ por lo que Δp es por lo menos $\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x}$

Por otro lado, como $KE = 3.50 keV << 511 KeV$ ← energía del electrón en reposo

Entonces, podemos calcular el momento sin usar relatividad con la relación:

$\rightarrow p = \sqrt{2mKE}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{p} = \frac{\hbar/2\Delta x}{\sqrt{2mKE}}$$

con $\Delta x = 0.250 nm$ la incertidumbre de la posición

Sustituimos

$$= \frac{1.054 \cdot 10^{-34} J\cdot s / 2(0.250 \cdot 10^{-9} m)}{\sqrt{2(9.109 \cdot 10^{-31} kg)(3{,}500 eV)(1.6021 \times 10^{-19} \frac{J}{eV})}}$$

Unidades: $\frac{J\cdot s/m}{\sqrt{kg\ eV(\frac{J}{eV})}} = \frac{J\cdot s/m}{\sqrt{kg J}} = \frac{J\cdot s/m}{\sqrt{m^2/s^2 kg^2}} = \frac{J\cdot s/m}{m/s\ kg} = J \cdot \frac{s^2}{m^2 kg} = \frac{J}{J}$

$= 0.0066$

Entonces, el porcentaje de incertidumbre es $\underline{0.66\ \%}$

b) Encuentre la longitud de onda de de Broglie de un electrón con velocidad de $2.5 \cdot 10^8 m/s$

Por la expresión de la longitud de onda de de Broglie:

$\lambda = \frac{h}{p}$

pero como $v = 2.5 \cdot 10^8 m/s \approx c$, hay que usar la expresión del momento relativista $p = \gamma m v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} m v$ ← por la expresión de γ

$$= \frac{h}{\gamma m v}$$

$$= \frac{h}{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} m v} = \frac{h\sqrt{1-v^2/c^2}}{mv}$$

Sustituimos

$$\lambda = \frac{(6.626 \cdot 10^{-34} J\cdot s)\sqrt{1-\frac{(2.5 \cdot 10^8 m/s)^2}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2}}}{(9.109 \cdot 10^{-31} kg)(2.5 \cdot 10^8 m/s)}$$

Unidades: $\frac{J\cdot s\sqrt{1-\frac{m^2/s^2}{m^2/s^2}}}{kg\ m/s} = \frac{J\cdot s}{kg\ m/s} = \frac{kg\frac{m^2}{s^2}s}{kg\frac{m}{s}} = m$

$$= \underline{1.608 \times 10^{-12} m}$$

8. a) La velocidad de fase de las ondas en el océano es $\sqrt{g\lambda/2\pi}$, con g la aceleración de la gravedad. Encuentre la velocidad de grupo.

La velocidad de fase se define como $\frac{\omega}{k}$. Por lo que $\frac{\omega}{k} = \sqrt{g\lambda/2\pi}$

La velocidad de grupo se calcula como $\frac{d\omega}{dk}$. Para obtenerla, hay que encontrar a ω como función de k. Partimos de que $\omega/k = \sqrt{g\lambda/2\pi}$

$$\rightarrow \omega = k\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

$$= k\sqrt{g/k} \quad \leftarrow \text{porque } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

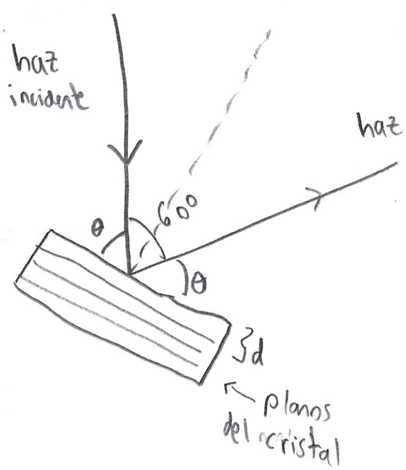
$$= \sqrt{gk}$$

Entonces, por la definición de velocidad de grupo: $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\sqrt{gk}$

$$\sqrt{g}\,\frac{d}{dk}\,k^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,k^{-1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{g/k}$$

Incluso podemos ver que $v_g = \frac{1}{2}\sqrt{g/k} = 1/2\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{1}{2}v_p \Rightarrow v_g = \frac{1}{2}v_p$

b) Un haz de electrones de 70 keV de energía cinética se dirige hacia un cristal y se observan electrones difractados a 60° respecto al haz incidente. ¿Espaciamiento entre los planos del cristal?



Usaremos la ley de Bragg. Que dice que el máximo de intensidad se encuentra a un ángulo θ si

$$\lambda = 2d\,\text{sen}\,\theta$$

Pero θ se debe medir respecto al plano. Es el ángulo θ marcado en la figura.

Por la ley de reflexión, el ángulo de incidencia y el de salida son iguales, por lo que marcamos ambos con θ en la figura.

Entonces, por la figura, $60° + \theta + \theta = 180° \rightarrow \theta = 60°$

Despejando la ley de Bragg tenemos que:

$$d = \frac{\lambda}{2\,\text{sen}\,\theta}$$

Pero en el ejercicio 2) de la tarea vimos que para cálculos relativistas, el valor de la λ como función de la energía cinética T es $\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}$

$$\Rightarrow d = \frac{hc}{2\,\text{sen}\,\theta\sqrt{T(T+2mc^2)}}$$

$$= \frac{(6.626\cdot10^{-34}\,J\cdot s)(3\cdot10^{8}\,m/s)}{2\,\text{sen}(60)\sqrt{70{,}000\,eV\,(1.602\cdot10^{-19}\,\frac{J}{eV})\left[(70000\,eV)(1.602\cdot10^{-19}\,\frac{J}{eV}) + 2(9.109\cdot10^{-31}\,kg)(3\cdot10^{8}\,m/s)^2\right]}}$$

$$= 2.59\times10^{-12}\,m$$

Unidades: $\frac{(J\cdot s)(m/s)}{\sqrt{eV(\frac{J}{eV})\left[eV(\frac{J}{eV}) + kg\frac{m^2}{s^2}\right]}} = \frac{J\cdot m}{\sqrt{J[J+J]}} = \frac{J\cdot m}{\sqrt{J^2}} = \frac{J}{J}m = m$