Flujo Vehicular con Dinámica de Fluidos

Tomás Ricardo Basile Álvarez

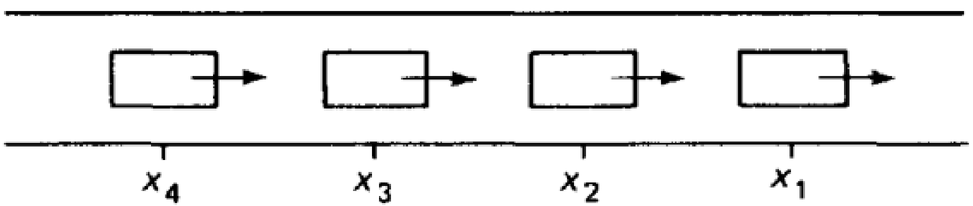
Definición de Flujo Vehicular

- Es el estudio del movimiento de vehículos a lo largo de calles.
- Se hacen modelos para simular este flujo de vehículos con la finalidad de entenderlo mejor y de mejorar la infraestructura vehicular [1].
- Los modelos se dividen en:
  - Microscópicos
  - Macroscópicos (relacionados con hidrodinámica).

[1] Poppin, J. *An overview of microscopic and macroscopic traffic model. Rijksuniversiteit groningen, 2013.*

Modelos microscópicos

- Se sigue el movimiento de cada coche. Se tiene una función de posición $x_i(t)$ por cada coche [2].



Coches en una carretera. Imagen obtenida de [2]

- Se propone un conjunto de reglas que debe de seguir cada coche (desacelerar cuando se acerca mucho al siguiente, estar por debajo del límite de velocidad, etc.) [6]

[2] Haberman, Richard. *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow: And Introduction to Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
[6] Helbing Dick. "Traffic and Related Self-Driven Many-Particle Systems." *Reviews of Modern Physics, vol. 73 no.4, 2001.*

Modelos Macroscópicos

- Simula el tráfico como un continuo en vez de ver a los coches individuales.
- De esta forma, el trafico se modela de forma similar a los fluidos.

[3] Lighthill, Michael, and Gerald Whitman. "On Kinematic Waves II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads." *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 229, no. 1178, 1955, pp. 317–345., https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0089.

Variables de los modelos macroscópicos

Consideraremos una carretera en el eje x. Se usan tres variables para caracterizar el flujo vehicular análogas a las de hidrodinámica:

- **Velocidad** $u(x,t)$: Se reemplazan las velocidades individuales por este campo de velocidades como de un fluido.
- **Densidad** $\rho(x,t)$: Para un tiempo t dado, es la cantidad de coches por unidad de longitud alrededor del punto x a dicho tiempo [4]. Se relaciona con el tráfico.
- **Flujo** $q(x,t)$: Para una posición x dada y tiempo t, es la cantidad de coches que atraviesan dicha posición por unidad de tiempo [4].

$$\boxed{q = u\rho}$$

[4] Treiber, Martin, and Arne Kestin. *Traffic Flow Dynamics*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG, 2012.

Ecuaciones de movimiento

- **Ecuación 1. Conservación de coches.**

Si la zona de la carretera entre x=a y x=b no tiene entradas ni salidas, el cambio en la cantidad de coches N depende solamente del flujo en a y b.

$$N = \int_a^b \rho \, dx$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q(a,t) - q(b,t) \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b \rho \, dx = q(a,t) - q(b,t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b \rho \, dx = -\int_a^b \frac{\partial q}{\partial x} \, dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0}$$

- **Ecuación 2.**

Se pueden proponer distintos modelos para obtener una segunda ecuación:

1. Lighthill y Whitham [3] proponen un modelo muy sencillo:

$$u(x,t) = u(\rho(x,t))$$

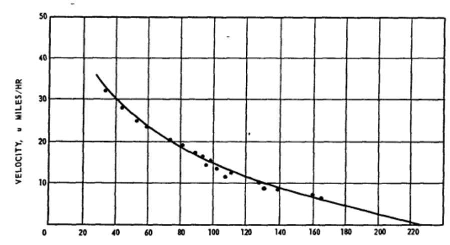


Fig. 2. Traffic velocity versus density—Lincoln Tunnel

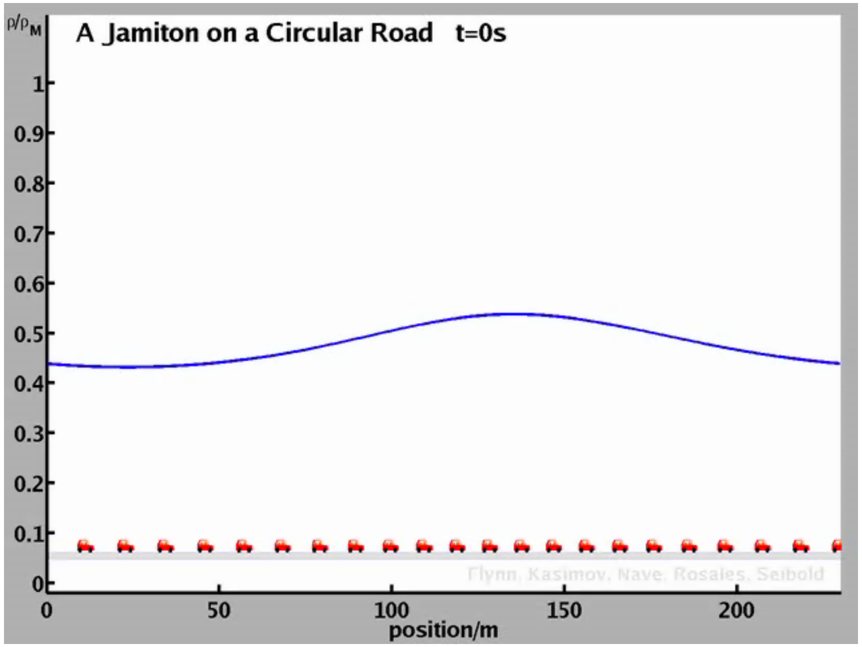
2. Payne [6] propone algo más elaborado:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Delta t}\left[u_e(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} - u\right]$$

[3] Lighthill, Michael, and Whitman, Gerard. "On Kinematic Waves II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads." *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 229, no. 1178, 1955, pp. 317–345., https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0089.
[6] Helbing, Dirk. "Traffic and Related Self-Driven Many-Particle Systems." *Reviews of Modern Physics, vol. 73 no.4, 2001.*

Jamitones

- El grupo [7] resolvió numéricamente el modelo de Payne para una densidad casi uniforme con una pequeña perturbación.



Encontraron ondas de “tráfico fantasma” que se propagan (les llamaron jamitones).

[7] Flynn, Morris et al. Traffic Modeling - Phantom Traffic Jams and Traveling Jamitons. https://math.mit.edu/traffic/

Comprobación Experimental

Conclusiones

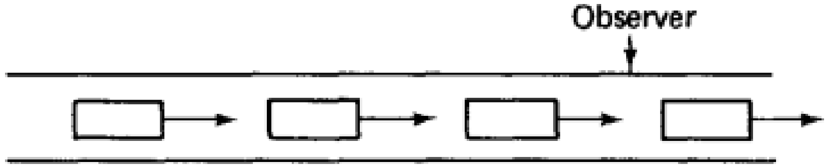
- El flujo vehicular se puede modelar usando ecuaciones similares a las de la hidrodinámica.
- Se pueden así modelar y explicar varios fenómenos del tráfico vehicular.

Referencias

- [1] Poppin, J. *An overview of microscopic and macroscopic traffic model. Rijksuniversiteit groningen, 2013.*
- [2] Haberman, Richard. *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow: And Introduction to Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [3] Lighthill, Michael, and Gerald Whitman. “On Kinematic Waves II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads.” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 229, no. 1178, 1955, pp. 317–345., https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0089.
- [4] Treiber, Martin, and Arne Kestin. *Traffic Flow Dynamics*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG, 2012.
- [5] Greenberg, Harold. “An Analysis of Traffic Flow.” *Operations Research*, vol. 7, no. 1, 1959, pp. 79–85., https://doi.org/10.1287/opre.7.1.79.
- [6] Helbing Dirk. “Traffic and Related Self-Driven Many-Particle Systems.” *Reviews of Modern Physics, vol. 73 no.4, 2001.*
- [7] Flynn, Morris et al. Traffic Modeling - Phantom Traffic Jams and Traveling Jamitons. https://math.mit.edu/traffic/
- [8] *Biham, Ofer; Middleton, A. Alan; Levine, Dov (1992). "Self-organization and a dynamic transition in traffic-flow models". Physical Review A. **46** (10): R6124–R6127. arXiv:cond-mat/9206001. Bibcode:1992PhRvA..46.6124B. doi:10.1103/PhysRevA.46.R6124. PMID 9907993. S2CID 14543020.*

Relación entre flujo y densidad

Consideramos un observador al lado de la carretera a posición x_0 a tiempo t_0.



Observador al lado de la carretera. Imagen obtenida de [2]

Consideramos un corto tiempo Δt, en el que la velocidad y densidad son casi constantes y los coches se mueven una distancia $u(x_0, t_0)\Delta t$, por lo que $u(x_0, t_0)\Delta t \, \rho(x_0, t_0)$ coches pasan al observador. Entonces concluimos que $q(x_0, t_0) = u(x_0, t_0)\rho(x_0, t_0)$

En general,

$$\boxed{q = u\rho}$$

Ejemplo: Linearización y ondas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dq}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

- Podemos linearizar para fluidos con densidad casi uniforme

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \epsilon \rho_1(x,t)$$

y con condición inicial $\rho(x,0) = \rho_0 + \epsilon f(x)$

- Al hacerlo queda una ecuación de onda.

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c\frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0 \ , \ \ c = \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho_0)$$

- Su solución es: $\rho_1(x,t) = f(x - ct)$

Es decir, la perturbacion en la densidad se traslada con velocidad c, que puede ser positiva o negativa.

Comprobación experimental.

- Greenberg [5] midió velocidades y densidades en un túnel y obtiene la siguiente la velocidad como función de la densidad.

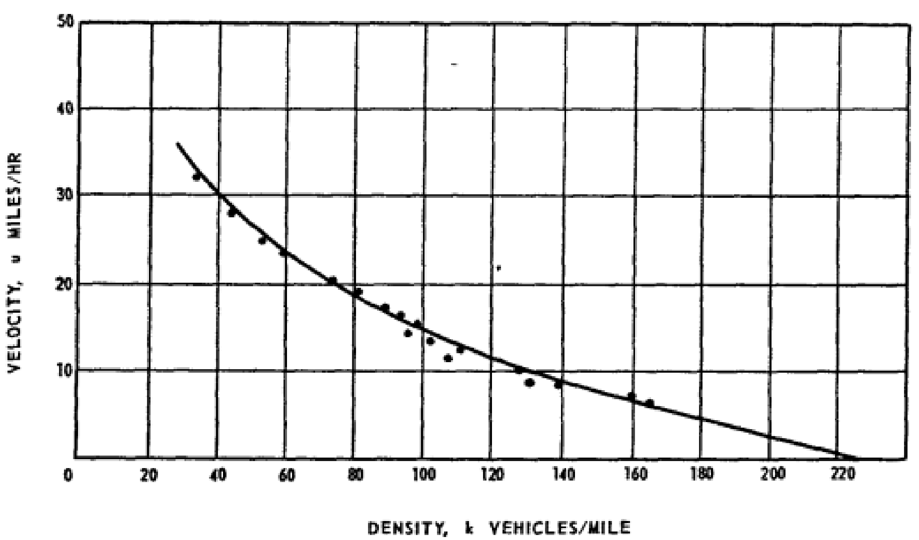


Fig. 2. Traffic velocity versus density—Lincoln Tunnel

[5] Greenberg, Harold. "An Analysis of Traffic Flow." *Operations Research*, vol. 7, no. 1, 1959, pp. 79–85., https://doi.org/10.1287/opre.7.1.79.