Mecánica Cuántica: Tarea 5

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

11 de julio de 2021

Problema 1

a) Usa la relación de recurrencia que encontramos en clase al estudiar el oscilador armónico para calcular las funciones $\psi_2(x,t), \psi_3(x,t)$ respectivas al segundo y tercer estado excitado de este sistema. Escribe estas funciones explícitamente en términos de E y x (en lugar de las K y ξ introducidas en clase

Como vimos en clase, la solución general al oscilador armónico está dada de la forma:

$$\psi(\xi) = f(\xi)e^{-\xi^2/2} \quad (1)$$

Donde $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$. Donde la función $f(\xi)$ está dada por una serie de potencias en ξ de la forma:

$$f(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \xi^j \quad (2)$$

Y la relación de recurrencia de los coeficientes A está dado por:

$$A_{j+2} = \frac{2j-(K-1)}{(j+1)(j+2)}A_j \qquad (3)$$

Donde como vimos en clase, la única forma de que la solución sea normalizable es que $K = 2n+1$ para un n natural, donde $K = \frac{2E}{\hbar\omega}$

Para la segunda solución a la ecuación diferencial, ponemos $n = 2$ y entonces $K = 2(2)+1 = 5$.
Luego, la relación de recurrencia (3) pasa a ser:

$$A_{j+2} = \frac{2j-(5-1)}{(j+1)(j+2)}A_j = \frac{2j-4}{(j+1)(j+2)}A_j \quad (4)$$

Como vimos en clase, esto dará lugar a una serie de potencias par (cuyo primer coeficiente es A_0) y una serie impar (cuyo primer coeficiente es A_1). Sin embargo, viendo la relación de recurrencia, para que la serie se corte y así la solución sea normalizable, se necesita que $j = 2$. Por lo que la solución impar no es normalizable.

Por lo tanto, necesitamos tomar la solución par y descartar la impar, para lo cual hacemos $A_1 = 0$ (y así, por la serie de recurrencia, todos los términos impares son 0). Y empezamos a conseguir los coeficientes pares empezando desde A_0 usando (4):

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0 \\ \text{con j=0:}\ \ A_2 &= \frac{2(0)-4}{(0+1)(0+2)}A_0 = -2A_0 \\ \text{con j=2:}\ \ A_4 &= \frac{2(2)-4}{(2+1)(2+2)}A_2 = \frac{0}{12}A_2 = 0 \end{aligned}$$

Y entonces, a partir de aquí, todo los términos A_j para j par son 0.

Con estos términos, podemos construir la función $f(\xi)$ expresada en (2):

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} A_j \xi^j = A_0\xi^0 + A_2\xi^2 \quad \text{los demás términos son 0} \\ &= A_0 - 2A_0\xi^2 = A_0(1-2\xi^2) \end{aligned}$$

Entonces, por (1) tenemos que:

$$\psi(\xi) = f(\xi)e^{-\xi^2/2} = A_0(1-2\xi^2)e^{-\xi^2/2}$$

Luego, usamos que $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ para escribirlo en términos de x:

$$\psi(x) = A_0\left(1 - 2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)^2\right)e^{-\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)^2/2}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\psi(x) = A_0\left(1 - 2\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}$$

En este caso, usando $K = \frac{2E}{\hbar\omega}$ con $K = 5$, tenemos que la energía es:

$$\boxed{E_5 = \frac{5\hbar\omega}{2}}$$

Para la tercera solución, ponemos $n = 3$, tenemos que $K = 2(3) + 1 = 7$
Luego, la relación de recurrencia (4) pasa a ser:

$$A_{j+2} = \frac{2j - (7-1)}{(j+1)(j+2)} A_j = \frac{2j-6}{(j+1)(j+2)} A_j \quad (5)$$

Esto dará lugar a una serie de potencias par con primer coeficiente A_0 y una serie impar con primer coeficiente A_1. Viendo la relación de recurrencia, tenemos que para que la serie se corte y así la solución sea normalizable, se necesita que $j = 3$. Por lo que la solución par no es normalizable.
Por lo tanto, tomamos sólo la solución con coeficientes impares y descartamos la serie de términos pares, para lo cuál hacemos $A_0 = 0$ (por lo tanto, por la serie de recurrencia, todos los términos pares son 0). Empezamos a conseguir los coeficientes impares empezando desde A_1 usando (5):

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1 \\ \text{j =1: } \; A_3 &= \frac{2(1)-6}{(1+1)(1+2)} A_1 = \frac{-2}{3} A_1 \\ \text{j=3: } \; A_5 &= \frac{2(3)-6}{(3+1)(3+2)} A_3 = \frac{0}{20} A_3 = 0 \end{aligned}$$

Entonces la función $f(\xi)$ está dada por:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} A_j \xi^j = A_1 \xi^1 + A_3 \xi^3 \quad \text{los demás términos son 0} \\ &= A_1 \xi - \frac{2}{3} A_1 \xi^3 \end{aligned}$$

Entonces, por (1) tenemos que:

$$\psi(\xi) = f(\xi) e^{-\xi^2/2} = A_1(\xi - \frac{2}{3}\xi^3) e^{-\xi^2/2}$$

Luego, usando que $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$, tenemos que:

$$\psi(x) = A_1 \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x - \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)^3 \right) e^{-\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right)^2 /2}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\psi_3(x) = A_1 \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(x - \frac{2}{3} \frac{m\omega}{\hbar} x^3 \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}}$$

Usando que $K = \frac{2E}{\hbar\omega}$, con $K = 7$, tenemos que la energía es:

$$\boxed{E_7 = \frac{7\hbar\omega}{2}}$$

b) Normaliza los dos estados de a). Si no quieres integrar a mano, puedes buscar las integrales necesarias en donde gustes, incluidos programas de cálculo, pero tienes que poner las integrales que utilizaste.

Para $\psi_2(x) = A_0(1-2\frac{m\omega}{\hbar}x^2)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$, calculamos la norma de esta solución $\int_{\mathbb{R}} \psi_2(x)\psi_2^*(x)dx$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi_2(x)\psi_2^*(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(A_0(1-2\frac{m\omega}{\hbar}x^2)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right)\left(A_0(1-2\frac{m\omega}{\hbar}x^2)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right)^* dx \\
&= |A_0|^2 \int_{\mathbb{R}} (1-2\frac{m\omega}{\hbar}x^2)^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx \\
&= |A_0|^2 \int_{\mathbb{R}} (1-4\frac{m\omega}{\hbar}x^2 + 4\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^4)e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx \\
&= |A_0|^2 \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx - 4\frac{m\omega}{\hbar}\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx + 4\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx\right]
\end{aligned}$$

Como los integrandos son funciones pares, tenemos:

$$\begin{aligned}
&= 2|A_0|^2 \left[\int_0^\infty e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx - 4\frac{m\omega}{\hbar}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx + 4\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx\right] \\
&= 2|A_0|^2 \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}} - 4\frac{m\omega}{\hbar}\frac{\sqrt{\pi}}{4(\frac{m\omega}{\hbar})^{3/2}} + 4\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\frac{3}{8(\frac{m\omega}{\hbar})^{5/2}}\right]
\end{aligned}$$

Donde las integrales se resolvieron usando Mathematica. Se utilizó que $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$, $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$, $\int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{5/2}}$ para $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$. Siguiendo el desarrollo tenemos que:

$$\begin{aligned}
&= 2|A_0|^2\sqrt{\pi}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right] \\
&= 2|A_0|^2\sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}}
\end{aligned}$$

Para que esté normalizado, debemos de tener que esto valga 1, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
2|A_0|^2\sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}} &= 1 \\
\Rightarrow \quad |A_0|^2 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} \\
\Rightarrow \quad A_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}
\end{aligned}$$

Salvo por una posible fase.
Entonces, la solución ya normalizada está dada por:

$$\boxed{\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\left(1 - 2\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}$$

Ahora para la tercera solución, tenemos que $\psi_3(x) = A_1\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x - \frac{2}{3}\frac{m\omega}{\hbar}x^3\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$, calculamos la norma de esta solución $\int_{\mathbb{R}}\psi_3(x)\psi_3^*(x)dx$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\psi_3(x)\psi_3^*(x)dx &= \int_{\mathbb{R}}\left(A_1\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x - \frac{2}{3}\frac{m\omega}{\hbar}x^3\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right)\left(A_1\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x - \frac{2}{3}\frac{m\omega}{\hbar}x^3\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right)^* dx \\
&= |A_1|^2\frac{m\omega}{\hbar}\int_{\mathbb{R}}(x^2 - \frac{2}{3}\frac{m\omega}{\hbar}x^3)^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx \\
&= |A_1|^2\frac{m\omega}{\hbar}\int_{\mathbb{R}}(x^2 - \frac{4m\omega}{3\hbar}x^4 + \frac{4m^2\omega^2}{9\hbar^2}x^6)e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx \\
&= |A_1|^2\frac{m\omega}{\hbar}\left[\int_{\mathbb{R}}x^2e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx - \frac{4m\omega}{3\hbar}\int_{\mathbb{R}}x^4e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx + \frac{4m^2\omega^2}{9\hbar^2}\int_{\mathbb{R}}x^6e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx\right]
\end{aligned}$$

Como los integrandos son pares, tenemos:

$$\begin{aligned}
&= 2|A_1|^2\frac{m\omega}{\hbar}\left[\int_0^\infty x^2e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx - \frac{4m\omega}{3\hbar}\int_0^\infty x^4e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx + \frac{4m^2\omega^2}{9\hbar^2}\int_0^\infty x^6e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx\right] \\
&= 2|A_1|^2\frac{m\omega}{\hbar}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{4(\frac{m\omega}{\hbar})^{3/2}} - \frac{4m\omega}{3\hbar}\frac{3\sqrt{\pi}}{8(\frac{m\omega}{\hbar})^{5/2}} + \frac{4m^2\omega^2}{9\hbar^2}\frac{15\sqrt{\pi}}{16(\frac{m\omega}{\hbar})^{7/2}}\right]
\end{aligned}$$

Donde las integrales se resolvieron usando Mathematica. Se utilizó que $\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}$, $\int_0^\infty x^4e^{-\alpha x^2}dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{5/2}}$, $\int_0^\infty x^6e^{-\alpha x^2}dx = \frac{15\sqrt{\pi}}{16\alpha^{7/2}}$ para $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$. Siguiendo el desarrollo tenemos que:

$$\begin{aligned}
&= 2|A_1|^2\sqrt{\pi}\left[\frac{1}{4\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}} + \frac{5}{12\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}\right] \\
&= -|A_1|^2\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}
\end{aligned}$$

Para que esté normalizado, debemos de tener que esto valga 1, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
-|A_1|^2\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} &= 1 \\
\Rightarrow\quad -|A_1|^2 &= 3\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \\
\Rightarrow\quad A_1 &= \sqrt{3}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}
\end{aligned}$$

Salvo por una posible fase.
Entonces, la solución ya normalizada está dada por:

$$\boxed{\psi_3(x) = \sqrt{3}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x - \frac{2}{3}\frac{m\omega}{\hbar}x^3\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}$$

Problema 2

Todos los incisos de este problema se refieren al oscilador armónico
a) Expresa a los operadores $\widehat{x}$ y $\widehat{p}$ como una combinación de los operadores a_+ y a_-

Seguún la definición de los operadores, tenemos que:

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\widehat{p} + im\omega\widehat{x})$$
$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\widehat{p} - im\omega\widehat{x})$$

Si sumamos los dos operadores $a_+ + a_-$, tendremos que los términos que involucran a $\widehat{x}$ se cancelan y nos queda:
$a_+ + a_- = \frac{2}{\sqrt{2m}}\widehat{p}$
Despejamos: $\Rightarrow \quad \widehat{p} = \sqrt{\frac{m}{2}}(a_+ + a_-)$

Si ahora restamos $a_+ - a_-$, se van a cancelar los términos que involucran a $\widehat{p}$ y nos queda:
$a_+ - a_- = \frac{2im\omega}{\sqrt{2m}}\widehat{x} = i\omega\sqrt{2m}\widehat{x}$
Despejamos: $\Rightarrow \quad \widehat{x} = \frac{i}{\omega\sqrt{2m}}(a_- - a_+)$
En resumen tenemos que:

$$\boxed{\widehat{x} = \frac{i}{\omega\sqrt{2m}}(a_- - a_+)}$$
$$\boxed{\widehat{p} = \sqrt{\frac{m}{2}}(a_+ + a_-)}$$

b) Usando los resultados del inciso $a)$ y el valor que ya conoces para el conmutador $[a_+, a_-]$, encuentra cuanto vale el conmutador de $[\widehat{x}, \widehat{p}]$

Calculamos directamente el conmutador usando las relaciones obtenidas:

$$\begin{aligned}
[\widehat{x}, \widehat{p}] &= \left[\frac{i}{\omega\sqrt{2m}}(a_- - a_+), \sqrt{\frac{m}{2}}(a_+ + a_-)\right] \\
&= \frac{i}{\omega\sqrt{2m}}\sqrt{\frac{m}{2}}\,[a_- - a_+, a_+ + a_-] \\
&= \frac{i}{2\omega}\,[a_- - a_+, a_+ + a_-]
\end{aligned}$$

Ahora distribuimos el conmutador:

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2\omega}\left([a_-, a_+] + [a_-, a_-] + [-a_+, a_+] + [-a_+, a_-]\right) \\
&= \frac{i}{2\omega}\left([a_-, a_+] + [a_-, a_-] - [a_+, a_+] - [a_+, a_-]\right) \\
&= \frac{i}{2\omega}([a_-, a_+] - [a_+, a_-])\text{porque } [A, A] = 0 \text{ para cualquier operador, en particular para } a_+ \text{ y } a_- \\
&= \frac{i}{2\omega}(2[a_-, a_+]) \quad \text{porque} \quad -[A, B] = [B, A] \\
&= \frac{i}{2\omega}(2\hbar\omega) \quad \text{porque } \; [a_-, a_+] = \hbar\omega \\
&= \hbar i
\end{aligned}$$

Entonces $\boxed{[\widehat{x}, \widehat{p}] = \hbar i}$

c) A partir de las expresiones analíticas para $\widehat{x}, \widehat{p}$, calcula $[\widehat{x}, \widehat{p}]$ y verifica que coincide con lo que conseguiste en b)

Usamos que $\widehat{x} = x$ y que $\widehat{p} = -i\hbar\partial_x$
Vamos a calcular el operador actuando sobre alguna función de prueba $\psi(x)$ (para tener algo en lo que aplicar el operador resultante):

$$\begin{aligned}
[\widehat{x}, \widehat{p}]\psi(x) &= (\widehat{x}\widehat{p} - \widehat{p}\widehat{x})\psi(x) \\
&= \widehat{x}\widehat{p}\psi(x) - \widehat{p}\widehat{x}\psi(x) \\
&= \widehat{x}(\widehat{p}\psi(x)) - \widehat{p}(\widehat{x}\psi(x)) \\
&= x\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)\right) - (-i\hbar)\frac{d}{dx}(x\psi(x)) \\
&= -i\hbar x\psi'(x) + i\hbar(x\psi'(x) + \psi(x)) \\
&= -i\hbar x\psi'(x) + i\hbar x\psi'(x) + i\hbar\psi(x) \\
&= i\hbar\psi(x)
\end{aligned}$$

Entonces $[\widehat{x}, \widehat{p}]\psi(x) = i\hbar\psi(x)$
Es decir, $[\widehat{x}, \widehat{p}]$ actúa multiplicando la función por $i\hbar$.
Entonces $\boxed{[\widehat{x}, \widehat{p}] = i\hbar}$, al igual que en b)

d) Basado en las expresiones de a) demuestra que el valor esperado tanto de $\widehat{x}$ como de $\widehat{p}$ es cero en cualquier estado estacionario del oscilador (No hace falta que calcules ninguna integral, sólo que uses las propiedades de integración que conoces en general para las soluciones estacionarias de Schrodinger)

Calculamos primero el valor esperado de $\widehat{x}$ en el estado estacionario ψ_n, usando la definción $\langle x\rangle = \int \psi_n^* x\psi_n dx$

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \widehat{x} \psi_n dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \left(\frac{i}{\omega\sqrt{2m}} (a_- - a_+) \right) \psi_n dx \quad \text{por la expresión halllada en a)} \\
&= \frac{i}{\omega\sqrt{2m}} \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* (a_-\psi_n - a_+\psi_n) dx \\
&= \frac{i}{\omega\sqrt{2m}} \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* a_- \psi_n dx - \frac{i}{\omega\sqrt{2m}} \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* a_+ \psi_n dx
\end{aligned}$$

Pero $a_+\psi_n$ es igual a ψ_{n+1} (sin tomar en cuenta algunas constantes). Y entonces la primer integral es $\int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \psi_{n+1} dx$ que vale 0, pues ψ_n y ψ_{n+1} son ortogonales.
Similarmente, $a_-\psi_n$ es igual a ψ_{n-1} (omitiendo algunas constantes), por lo que la segunda integral queda $\int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \psi_{n-1} dx$, que nuevamente es 0 por ortogonalidad de los estados estacionarios.
Por lo tanto, $\boxed{\langle x\rangle = 0}$
Ahora calculamos $\langle p\rangle$ en el estado ψ_n similarmente:

$$\begin{aligned}
\langle p\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \widehat{p} \psi_n dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \left(\sqrt{\frac{m}{2}} (a_+ + a_-) \right) \psi_n dx \\
&= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* a_+ \psi_n + \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* a_- \psi_n
\end{aligned}$$

Al igual que en el caso de $\langle x\rangle$, las integrales $\int_{\mathbb{R}} \psi_n^* a_+ \psi_n dx$ y $\int_{\mathbb{R}} \psi_n^* a_- \psi_n dx$ valen ambas 0.
Por lo tanto, $\boxed{\langle p\rangle = 0}$

e) Usando integración por partes es fácil ver que:

$$\int (a_\pm^m \Psi_n)^* \mathcal{O} (a_\pm^m \Psi_n) dx = \int \Psi_n^* a_\mp^m \mathcal{O} a_\pm^m \Psi_n dx$$

donde $\mathcal{O}$ es un operador cualquiera, $a_\pm^m$ quiere decir la aplicación de $a_\pm$ m veces y por favor nota la diferencia entre $\pm$ y $\mp$
Con este resultado demuestra que el valor esperado de $\widehat{x}$ en el estado dado por $\Psi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_n + \Psi_m)$ oscila armónicamente alrededor de cero si y sólo si n y m están separadas por una unidad y que en todo otro caso el valor esperado es cero.
Nota que para resolver este inciso, no necesitas realizar ninguna integral, solo echar mano de las propiedades de integración que conoces en general para las soluciones estacionarias de Schrödinger y el hecho de que las soluciones al oscilador armónico están dadas por $\Psi_n = A_n a_+^n \psi_0 e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$, con A_n una costante de

normalización cuyo valor explícito resulta irrelevante para este problema.

Calculamos el valor esperado de $\widehat{x}$ según la definición:

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int \Psi^* \widehat{x} \Psi dx \\
&= \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_n + \Psi_m)\right)^* \widehat{x} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_n + \Psi_m)\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\Psi_n^* + \Psi_m^*)\widehat{x}(\Psi_n + \Psi_m) dx \\
&= \frac{1}{2}\int \Psi_n^*\widehat{x}\Psi_n + \Psi_m^*\widehat{x}\Psi_n + \Psi_n^*\widehat{x}\Psi_m + \Psi_m^*\widehat{x}\Psi_m^* dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \Psi_n^*\widehat{x}\Psi_n + \int \Psi_m^*\widehat{x}\Psi_n + \int \Psi_n^*\widehat{x}\Psi_m + \int \Psi_m^*\widehat{x}\Psi_m^*\right]
\end{aligned}
$$

La primera y última integral son simplemente el valor esperado de $\widehat{x}$ en el estado Ψ_n y en Ψ_m, que ya probamos que valen 0. Por tanto, nos queda que:

$$\langle x\rangle = \frac{1}{2}\left[\int \Psi_m^*\widehat{x}\Psi_n dx + \int \Psi_n^*\widehat{x}\Psi_m dx\right]$$

Usando la expresión para $\widehat{x} = \dfrac{i}{\omega\sqrt{2m}}(a_- - a_+)$, tenemos que:

$$\langle x\rangle = \frac{i}{2\omega\sqrt{2m}}\left[\int \Psi_m^*(a_- - a_+)\Psi_n dx + \int \Psi_n^*(a_- - a_+)\Psi_m dx\right]$$

$$\Rightarrow \quad \langle x\rangle = \frac{i}{2\omega\sqrt{2m}}\left[\int \Psi_m^* a_-\Psi_n dx - \int \Psi_m^* a_+\Psi_n dx + \int \Psi_n^* a_-\Psi_m dx - \int \Psi_n^* a_+\Psi_m dx\right] \quad (1)$$

Si m y n están separadas por más de una unidad:
Entonces, en la primer y segunda integral, $a_-\Psi_n$ y $a_+\Psi_n$ nos dan como resultado Ψ_{n-1}, Ψ_{n+1} (sin tomar en cuenta algunas constantes que aparecerán multiplicando). Y ninguno de estos estados es Ψ_m (porque m está separado de n por más de una unidad). Luego, como las distintas soluciones a la ecuación de Schrodinger son ortogonales, la primer y segunda integral se anulan.

Similarmente, en la tercera y cuarta integral, $a_-\Psi_m, a_+\Psi_m$ nos dan como resultado Ψ_{m-1} y Ψ_{m+1} (sin tomar en cuenta constantes). Nuevamente, ninguno de estos estados es Ψ_n por la separación entre n y m. Y por lo tanto, por ortogonalidad, las integrales se anulan.

Entonces, si m y n están separadas por más de una unidad, se tiene que $\langle x\rangle = 0$

Luego, el único caso en el que el valor esperado no es 0, es si m **y** n **están separados por una unidad**.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $m = n + 1$.
Por lo tanto $\int \Psi_m^* a_-\Psi_n dx = 0$, ya que $a_-\Psi_n$ es proporcional a Ψ_{n-1}, que es una solución distinta

a Ψ_m y por ortogonalidad el resultado es 0.
Similarmente, $\int \Psi_n^* a_+ \Psi_m dx = 0$ porque $a_+\Psi_m$ es proporcional a Ψ_{m+1}, que es una solución distinta a Ψ_n y por ortogonalidad el resultado es 0.

Entonces, en (1) desaparece la primer y última integral, por lo que:

$$\langle x \rangle = \frac{i}{2\omega\sqrt{2m}} \left[-\int \Psi_m^* a_+ \Psi_n + \int \Psi_n^* a_- \Psi_m dx \right] \quad (2)$$

Calcularé la primera integral.
Para calcularla, primero usamos que las soluciones son $\Psi_n = A_n a_+^n \psi_0 e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$, por lo que nos queda:

$$\int \Psi_m^* a_+ \Psi_n dx = \int \left(A_m a_+^m \psi_0 e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t} \right)^* a_+ \left(A_n a_+^n \psi_0 e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \right) dx$$

Usamos la propiedad descrita en el enunciado para aplicar el conjugado

$$= \int \left(A_m \psi_0^* e^{i\frac{E_m}{\hbar}t} a_-^m \right) a_+ \left(A_n a_+^n \psi_0 e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \right) dx$$

$$= A_m A_n \int \psi_0^* e^{i\frac{E_m}{\hbar}t} a_-^m a_+ a_+^n \psi_0 e^{i\frac{E_n}{\hbar}t} dx$$

$$= A_m A_n e^{it(E_m - E_n)/\hbar} \int \psi_0^* a_-^m a_+ a_+^n \psi_0 dx$$

$$= A_m A_n e^{it(E_m - E_n)/\hbar} \int \psi_0^* a_-^m a_+^{n+1} \psi_0 dx$$

Pero $a_+^{n+1}\psi_0$ es proporcional a ψ_{n+1}, así que (omitiendo constantes):

$$= A_m A_n e^{it(E_m - E_n)/\hbar} \int \psi_0^* a_-^m \psi_{n+1} dx$$

Pero el operador a_- baja a la solución anterior, por lo que (salvo constantes):

$$= A_m A_n e^{it(E_m - E_n)/\hbar} \int \psi_0^* \psi_{n+1-m} dx$$

Usamos que m=n+1

$$= A_m A_n e^{it(E_m - E_n)/\hbar} \int \psi_0^* \psi_0 dx$$

$$= A_m A_n e^{it(E_m - E_n)/\hbar} \quad \text{porque } \psi_0 \text{ está normalizado}$$

Calculamos ahora la segunda integral de (2)

$$\int \Psi_n^* a_- \Psi_m dx = \int \left(A_n a_+^n \psi_0 e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\right)^* a_- \left(A_m a_+^m \psi_0 e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t}\right) dx$$

Usamos la propiedad descrita en el enunciado para aplicar el conjugado

$$= \int \left(A_n \psi_0^* e^{i\frac{E_n}{\hbar}t} a_-^n\right) a_- \left(A_m a_+^m \psi_0 e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t}\right) dx$$

$$= A_n A_m \int \psi_0^* e^{i\frac{E_n}{\hbar}t} a_-^n a_- a_+^m \psi_0 e^{i\frac{E_m}{\hbar}t} dx$$

$$= A_n A_m e^{it(E_n - E_m)/\hbar} \int \psi_0^* a_-^n a_- a_+^m \psi_0 dx$$

$$= A_n A_m e^{it(E_n - E_m)/\hbar} \int \psi_0^* a_-^{n+1} a_+^m \psi_0 dx$$

Pero $a_+^m \psi_0$ es proporcional a ψ_m, así que (omitiendo constantes):

$$= A_n A_m e^{it(E_n - E_m)/\hbar} \int \psi_0^* a_-^{n+1} \psi_m dx$$

Pero el operador a_- baja a la solución anterior, por lo que (salvo constantes):

$$= A_n A_m e^{it(E_n - E_m)/\hbar} \int \psi_0^* \psi_{m-n-1} dx$$

Usamos que m=n+1

$$= A_n A_m e^{it(E_n - E_m)/\hbar} \int \psi_0^* \psi_0 dx$$

$$= A_n A_m e^{it(E_n - E_m)/\hbar} \quad \text{porque } \psi_0 \text{ está normalizado}$$

Entonces, sustituimos en la ecuación (2):

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \frac{i}{2\omega\sqrt{2m}} \left[-\int \Psi_m^* a_+ \Psi_n + \int \Psi_n^+ a_- \Psi_m dx \right] \\
&= \frac{i}{2\omega\sqrt{2m}} \left[-A_m A_n e^{it(E_m - E_n)/\hbar} + A_n A_m e^{it(E_n - E_m)/\hbar} \right] \\
&= \frac{A_m A_n i}{2\omega\sqrt{2m}} \left[e^{it(E_n - E_m)/\hbar} - e^{-it(E_n - E_m)/\hbar} \right] \\
&= \sin(t(E_n - E_m)/\hbar) \quad \text{omitiendo las constantes}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que $\langle x \rangle$ oscila alrededor del cero..

f) ¿Cuánto vale la frecuencia de oscilación encontrada en el inciso e)?

Como vimos la solución es proporcional a $\sin(t(E_n - E_m)/\hbar)$.
Entonces, tiene una frecuencia de $\left|\dfrac{E_n - E_m}{\hbar}\right|$
Sin embargo, como vimos en clase, tenemos que $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, $E_m = (m + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Por lo

que la frecuencia es:

$$\begin{aligned}\left|\frac{E_n - E_m}{\hbar}\right| &= \frac{\left|(n+\frac{1}{2})\hbar\omega - (m+\frac{1}{2})\hbar\omega\right|}{\hbar} \\ &= \frac{|(n-m)\omega|}{\hbar} \\ &= \omega \quad \text{porque m=n+1}\end{aligned}$$

Entonces, sin importar cuáles son las energías E_n, E_m, tal que correspondan a estados separados por una unidad, el valor de $\langle x\rangle$ oscila con frecuencia ω alrededor del 0.

Problema 3

Haciendo un cálculo como el que presentamos en clase para a_-, muestra que $||a_+\psi_n||^2 = (E_n + \hbar\omega/2)||\psi_n||^2$

Usamos la definición de la norma $||a_+\psi_n||^2 = \int (a_+\psi_n)^*(a_+\psi_n)dx$ y seguimos el procedimiento directamente:

$$\begin{aligned}
||a_+\psi_n||^2 &= \int_{\mathbb{R}} (a_+\psi_n)^*(a_+\psi_n)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(\widehat{p} + im\omega\widehat{x})\psi_n\right]^* \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(\widehat{p} + im\omega\widehat{x})\psi_n\right] dx \quad \text{por la def de } a_+ \\
&\text{Usamos la definición de } \widehat{p}, \widehat{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right]^* \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx \\
&\text{Aplicamos el conjugado} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(i\hbar\partial_x - im\omega x)\psi_n^*\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx \\
&\text{Distribuimos el corchete izquierdo} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\partial_x\psi_n^* \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] - \frac{1}{\sqrt{2m}} im\omega x\psi_n^* \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\partial_x\psi_n^* \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2m}} im\omega x\psi_n^* \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] \frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\partial_x\psi_n^* dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2m}} im\omega x\psi_n^* \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ahora resolvemos la primer integral por partes, es decir, usando que $\int_{\mathbb{R}} udv = uv\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int vdu$

En este caso, tenemos que $u = \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right]$ y $dv = \frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\partial_x\psi_n^* \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad du = \partial_x \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] \quad , \quad v = \frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\psi_n^*.$

Por lo que la integral izquierda es:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] \frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\partial_x\psi_n^* dx = \\
&\quad = \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] \frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\psi_n^*\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\psi_n^*\partial_x \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx \\
&\quad \psi_n^* \text{ se anula en infinito, por lo que el primer término es 0} \\
&\quad = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\psi_n^*\partial_x \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx
\end{aligned}$$

Entonces sustituimos este resultado en la primer integral de (1), por lo que tenemos que:

$$||a_+\psi_n||^2 = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] \frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\partial_x\psi_n^* dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2m}} im\omega x\psi_n^* \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx \quad (1)$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\psi_n^*\partial_x \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2m}} im\omega x\psi_n^* \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\psi_n^*\partial_x \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] - \frac{1}{\sqrt{2m}} im\omega x\psi_n^* \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx$$

Factorizamos lo que está entre corchetes

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[-\frac{1}{\sqrt{2m}} i\hbar\psi_n^*\partial_x - \frac{1}{\sqrt{2m}} im\omega x\psi_n^*\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x - im\omega x)\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(-i\hbar\partial_x + im\omega x)\psi_n\right] dx$$

usamos la definición de $\widehat{p} = -i\hbar\partial_x$ y de $\widehat{x} = x$

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(\widehat{p} - im\omega\widehat{x})\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2m}}(\widehat{p} + im\omega\widehat{x})\psi_n\right] dx$$

Identificamos los operadores $a_\pm := \frac{1}{\sqrt{2m}}(\widehat{p} \pm im\omega\widehat{x})$

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* a_- a_+ \psi_n dx$$

Usamos que $a_-a_+ = \widehat{H} + \frac{\hbar\omega}{2}$ con $\widehat{H}$ el Hailtoniano para el oscilador armónico

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \left(\widehat{H} + \frac{\hbar\omega}{2}\right) \psi_n dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi_n^* \widehat{H}\psi_n dx + \frac{\hbar\omega}{2}\int_{\mathbb{R}} \psi_n^*\psi_n dx$$

Como ψ_n es solución a la ecuación de Schrodinger, tenemos que $\widehat{H}\psi_n = E_n\psi_n$

$$= E_n \int_{\mathbb{R}} \psi_n^*\psi_n dx + \frac{\hbar\omega}{2}\int_{\mathbb{R}} \psi_n^*\psi_n dx$$

$$= (E_n + \frac{\hbar\omega}{2}) \int_{\mathbb{R}} \psi_n^*\psi_n dx$$

$$= (E_n + \hbar\omega/2)||\psi_n||^2$$

En conclusión, tenemos que:

$$\boxed{||a_+\psi_n||^2 = (E_n + \hbar\omega/2)||\psi_n||^2}$$

Que es lo que se quería probar.