

BOAS

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

30 de enero de 2021

1. Series Infinitas y de Potencias

Una **Suma de Potencias** es:

$$a + ra + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Si se extiende a una serie infinita, el límite existe si y sólo si $|r| < 1$, en cuyo caso:

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

En general, una serie infinita es una expresión de la forma:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Las **sumas parciales** son los términos:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

Se dice que la serie converge a un valor S si y sólo si la secuencia de sumas parciales converge a S

1.1. Tests de Convergencia

- **Test Preliminar:**

Si los sumandos no tienden a cero, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, entonces la serie diverge. (No se vale el regreso, ni el contrapuesto del regreso).

1.1.1. Tests para series con términos positivos

- **Test de Comparación**

Si $\sum m_i$ es una serie convergente y $|a_i| \leq m_i$ entonces $\sum |a_i|$ converge.

Si $\sum d_i$ diverge y $|a_i| \geq d_i$ entonces $\sum |a_i|$ diverge.

Suele ser muy útil usar series geométricas para la comparación

- **Test de Integral:** Si $0 < a_{n+1} \leq a_n$ para $n > N$ y si $\int^\infty a_n dn$ es finita entonces $\sum^\infty a_n$ converge. Y si $\int^\infty a_n dn$ diverge, entonces $\sum^\infty a_n$ diverge.

- **Ratio Test:** Definimos la razón entre dos elementos seguidos como $\rho_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ y

definimos $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$.

Luego, si $\rho < 1$, la serie converge. Si $\rho > 1$, la serie diverge. Si $\rho = 1$, quién sabe.

1.2. Series Alternantes

Una serie alternante es una cuyos términos van cambiando de + a -.

1.2.1. Test:

Una serie alternante converge si $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Convergencia Condicional: Una serie que converge pero que no converge al tomar el valor absoluto de los términos.

Convergencia absoluta: Si el valor absoluto de los términos converge.

Si una serie converge condicionalmente, entonces se puede cambiar el orden de los sumandos para cambiar el punto de convergencia a cualquier número que se quiera.

1.2.2. Datos útiles

- La convergencia o divergencia de una serie no cambia al multiplicar todos los términos por una constante o por cambiar una cantidad finita de términos.
- Dos series convergencias se pueden sumar término a término y el resultado converge a la suma de las convergencias.

1.3. Series de Potencias

Las series de potencias son en general de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + \dots +$$

Si la serie converge o no para un x se puede comprobar usando el ratio test. Para ello, vemos que la serie converge si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}(x-a)^{n+1}|}{|a_n(x-a)^n|} < 1$

O bien, converge si:

$$|x-a| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

1.4. Teoremas para series de potencias

Vemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge dentro de un radio alrededor del 0. Entonces, en dicha region, podemos definir una función $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Se cumplen las siguientes propiedades para una serie de potencias como ésta:

1. La serie se puede derivar o integrar término a término y el resultado converge a la derivada o integral de la función que está siendo representada dentro del mismo intervalo.
2. Dos series de potencias se pueden sumar, restar o multiplicar y dividir (si la de abajo no toca el 0)
3. Una serie se puede sustituir en otra si la imagen se encuentra en el intervalo de convergencia de la otra serie
4. La serie de potencias de una función es única.

1.5. Serie de Taylor:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \dots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) + \dots$$

Se pueden usar los teoremas de arriba para encontrar la serie de una función a partir de series conocidas.

Error: Una fórmula para el residuo de una serie de Taylor como la de arriba es:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Donde c es un punto entre x y a .

1.5.1. Teorema del Binomio Generalizado

Para un r arbitrario (no necesariamente entero), se define el coeficiente combinatorio como:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1) \cdots (r-k+1)}{k!} = \frac{(r)_k}{k!}$$

Y entonces, se tiene que:

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k$$

O bien, si $y = 1$, tenemos que:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

2. Números Complejos

Casi todo lo de series de potencias del capítulo anterior funciona.

En especial lo de radio de convergencia, que en este caso da lugar a un círculo de convergencia.

Logaritmo:

El logaritmo en realidad da como resultado toda una clase de equivalencia, pues:

$$\log^*(z) = \text{Log}(r) + (\theta + 2n\pi)i$$

Con Log el logaritmo usual para reales. Y con n un entero cualquiera. El logaritmo definido de esta forma cumple todas las propiedades típicas como la de $\log^*(zw) = \log^*(z) + \log^*(w)$. Esta igualdad se entiende entre las clases de equivalencias.

Ramas de Logaritmo: Para evitar estos problemas, definimos la rama principal de logaritmo como:

$$\log(z) = \text{Log}(r) + \theta i$$

Con $-\pi < \theta < \pi$.

Es decir, eliminamos los reales negativos. Esto es para que la función sea continua en todo el dominio.

Este logaritmo ya no cumple todas las propiedades de antes. Por ejemplo, $\log(e^{2\pi i/3} e^{2\pi i/3}) = \log(e^{4\pi i/3}) = -\frac{2}{3}\pi i$. Y por otro lado, $\log(e^{2\pi i/3}) + \log(e^{2\pi i/3}) = \frac{4\pi i}{3}$.

La igualdad sólo se vale en el logaritmo definido como clases de equivalencia.

Potencias

Con esto se puede definir cualquier potencia usando que $a^b = e^{\log^*(a^b)} = e^{b \log^*(a)}$

Entonces, con esto podemos encontrar las raíces n -ésimas de un complejo. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} a^{1/n} &= e^{\log^*(a^{1/n})} = e^{1/n \log^*(a)} \\ &= e^{1/n (\text{Log}(r_a) + (\theta + 2\pi i m))} \\ &= e^{1/n \text{Log}(r_a) + \frac{1}{n} \theta + \frac{m}{n} 2\pi i} \end{aligned}$$

Lo cual nos da un total de n raíces distintas.

3. Álgebra Lineal

3.1. Operadores Funcionales y eso

Definición 3.1.

Funcional Lineal: Una transformación lineal que tiene como contradominio el campo (Los reales generalmente)

Espacio Dual: Dado un espacio vectorial V , definimos $V^* = \{ \text{funciones lineales de } V \text{ a } \mathbb{R} \}$.

Espacio bi-dual: $V^{**} = \{ \text{funciones lineales de } V^* \text{ a } \mathbb{R} \}$

Es decir, el espacio bi-dual toma funcionales de V como entrada y da como resultado un \mathbb{R} .

Observación, $V \simeq V^*$: Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V , entonces podemos definir $\phi_i(v_j) = \delta_{i,j}$, (Es decir, $\phi_i(x) = \phi_i(a_1v_1 + \dots + a_iv_i + \dots + a_nv_n) = a_i$, la función ϕ_i da el componente i -ésimo de x en la base original de V .)

Entonces, el conjunto de funcionales (ϕ_1, \dots, ϕ_n) es una base de V^* (probarlo) y como entonces tienen la misma dimensión, son isomorfos. Si la base original de V es la canónica, entonces las proyecciones de la base dual se escriben como π_i y cualquier funcional se puede escribir como una combinación lineal de proyecciones.

Observación, $V \simeq V^{**}$: Dado un $v \in V$ construimos $\phi_v \in V^{**}$ con $\phi_v(f) = f(v)$ para $f \in V^*$. La asociación $v \longrightarrow \phi_v$ es biyectiva, por lo que $V \simeq V^{**}$

Nota: podemos ver que la asociación con el bi-dual es más natural que con el dual en el sentido de que no se requiere de bases para definirla.

Definición 3.2.

Producto Interno: $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow K$ es un funcional lineal que cumple 4 propiedades:

- a) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- b) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- d) $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$

Ejemplos:

- 1) En \mathbb{C}^n : $\langle a, b \rangle = a_1 \overline{b_1} + \dots + a_n \overline{b_n}$
- 2) En \mathbb{R}^n : $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$
- 3) En $M_{n \times n}(\mathbb{R})$: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(\overline{B^t} A)$
- 4) $H = \{ \text{funciones de } [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ continuas} \}$: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \overline{g} dx$

Teorema 3.1.

Teorema de Riezs: Sea $g : V \rightarrow K$ entonces existe un único $y \in V$ con $g(x) = \langle x, y \rangle$
Es decir, toda funcional lineal se puede ver como un producto interno con un elemento fijo.

Teorema 3.2. Propiedades:

- a) $\langle x, cy \rangle = \bar{c} \langle x, y \rangle$
- b) Si $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in V \Rightarrow y = z$

Definición 3.3. Norma:

Una norma en su definición más general es una función $V \times V \rightarrow K$ con:

- a) $|cx| = |c||x|$
- b) $|x| > 0$ sii $x \neq 0$ y $|0| = 0$
- c) Desigualdad del triángulo: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Norma inducida por un producto punto:

Dado un producto punto, podemos definir una norma como: $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Se puede probar que esta norma cumple con las propiedades que definen a la norma (entonces está bien llamarla así) y además cumple con:

Desigualdad de Cauchy: $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$

Definición 3.4.

Ortogonal: x y y son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$

$S \subset V$ es un conjunto ortogonal si $\langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \forall x_i, x_j \in S$ (con $i \neq j$)

$S \subset V$ es **Ortonormal** si $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}$ (la delta de Kroenecker)

Teorema 3.3.

Si $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto ortogonal, entonces es L.I.

Pitágoras: Si $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto ortogonal, entonces $|x_1 + \dots + x_n|^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$

Proceso de Ortogonalización de Grahm Schmidt: Dado un conjunto cualquiera $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ que sea L.I. , podemos encontrar una conjunto $\{y_1, \dots, y_n\}$ que se puede calcular a partir del conjunto original y que es ortogonal.

Para encontrar dicho conjunto, simplemente hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 \\
y_2 &= x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{|y_1|^2} y_1 \\
y_3 &= x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{|y_1|^2} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{|y_2|^2} y_2 \\
&\quad \dots \\
y_n &= x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle x_n, y_j \rangle}{|y_j|^2} y_j
\end{aligned}$$

Se puede probar que este conjunto $\{y_1, \dots, y_n\}$ es ortogonal. Además, se puede convertir en un conjunto ortonormal si dividimos cada y_i por su norma para unitarizarlo. Entonces, vemos que para todo espacio vectorial finito, le podemos encontrar una base y luego convertirla en una base ortonormal, es decir, todo espacio vectorial tiene una base ortonormal.

Combinación Lineal para Bases Ortonormales

Dada una base ortonormal $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V , y dado un punto cualquiera x en V , podemos encontrar su expresión en esta base muy sencillamente como:

$$x = \langle x, x_1 \rangle x_1 + \langle x, x_2 \rangle x_2 + \dots + \langle x, x_n \rangle x_n$$

Esta es la ventaja de las bases ortonormales, poder encontrar fácilmente la expresión de cualquier elemento.

Complemento Ortogonal: Dado un conjunto S , definimos su complemento ortogonal como el conjunto:

$$S^\perp = \{x \in V : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in S\}$$

Para W un espacio vectorial, tenemos que: $(W^\perp)^\perp = W$

Si $W \leq V$: $V = W \oplus W^\perp$

Definición 3.5. Adjunto:

Dado un operador Lineal (o una matriz) tenemos que $g(x) = \langle T(x), y \rangle$ es un funcional lineal. Por lo tanto, por el teorema de Riezs, debe de existir un valor fijo w tal que $g(x) = \langle T(x), y \rangle = \langle x, w \rangle$.

Entonces, para todo y podemos definir una función T^* nueva que nos da a w , es decir $T^*(y) = w$.

Es decir, el adjunto de T es la transformación lineal única tal que:

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

Teorema 3.4. Propiedades del adjunto:

1) Para una matriz: $A^* = \overline{A^t}$

- 2) $[T]^* = [T^*]$
- 3) $(T + U)^* = T^* + U^*$
- 4) $(cT)^* = \bar{c}T^*$
- 5) $(TU)^* = U^*T^*$
- 6) $T^{**} = T$

Ahora podemos definir varios tipos de operadores lineales según sus relaciones con el adjunto.

3.2. Operadores Normales y Autoadjuntos

3.2.1. Normal:

Sea $T : V \rightarrow V$. Decimos que T es normal si $TT^* = T^*T$.

Teorema: Sea V un espacio producto interior, y sea T un operador normal en V . Entonces:

- a) $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ para toda $x \in V$
- b) $T - cI$ es normal para toda $c \in F$
- c) Si λ es un eigenvalor de T , entonces $\bar{\lambda}$ es un eigenvalor de T^* . De hecho, si $T(x) = \lambda x \Rightarrow T^*(x) = \bar{\lambda}x$

3.2.2. Autoadjunto:

Un operador $T : V \rightarrow V$ con $T = T^*$ (En el caso de matrices reales, equivale a ser simétrica).

Teorema: Cumple todas las propiedades de un operador normal.

Corolario: Si λ es un eigenvalor de T , entonces λ es real (sale de la propiedad de operadores normales).

Teorema para Normales y Autoadjuntos

Sea V un espacio vectorial dimensionalmente finito sobre F y sea T un operador lineal en V , entonces:

- a) Si V es un espacio vectorial complejo, entonces T tiene un eigenvalor.
- b) Si V es un espacio real con producto interior y T es autoadjunto, entonces T tiene un eigenvalor (que es real).

Teoremón:

\mathbb{C} : Sea V un espacio con producto interior complejo y dimensión finita. Entonces T es normal si y sólo si V tiene una base ortonormal de eigenvectores de T .

\mathbb{R} : Sea V un espacio con producto interior real y dimensionalmente finito. Entonces T es autoadjunto si y sólo si V tiene una base ortonormal formada por eigenvectores de T .

Un operador normal en un espacio real no es ni suficiente para asegurar un eigenvalor. Pero uno autoadjunto nos asegura toda una base ortonormal de eigenvectores con eigenvalores reales.

3.2.3. Unitario

Definición (Operador Unitario): Sea V un espacio con producto interior (sobre F) y sea T un operador lineal. Entonces, llamamos a T un operador unitario (si $F = \mathbb{C}$) y ortogonal (si $F = \mathbb{R}$) si cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- a) $\|T(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in V$
- b) $(T(x), T(y)) = (x, y) \quad \forall x, y \in V$
- c) Si β es una base ortonormal para V , entonces $T(\beta)$ es una base ortonormal para V
- d) Existe una base ortonormal β para V tal que $T(\beta)$ es una base ortonormal para V
- e) $TT^* = T^*T = I$

Corolario: Sea T un operador lineal en V un espacio real de dimensión finita. V tiene una base ortonormal de eigenvectores de T con eigenvalores de valor absoluto 1 si y sólo si T es autoadjunto y ortogonal.

Corolario 2 Sea T un operador lineal en V un espacio complejo con dimensión finita. Entonces, V tiene una base ortonormal de eigenvectores de T con eigenvalores cuyo valor absoluto es 1 si y sólo si T es unitario.

Vemos que para el caso de T ortonormal, se requiere también lo de autoadjunto. Para lo de unitario, es suficiente.

Matriz ortogonal o unitaria: Sea A una matriz con $AA^* = A^*A = I$. Decimos que es unitaria si tiene elementos complejos y ortogonal si tiene elementos reales.

Las matrices de rotación son ortogonales, pero no autoadjuntas.

Obs: Una matriz ortogonal tiene como columnas a vectores ortogonales (por eso $AA^* = I$, por lo que los productos de columnas son una delta Kronecker). Para una matriz unitaria se tiene algo similar, pero con complejos.

Teorema:

- \mathbb{C} Sea A una matriz compleja. Entonces A es normal si y sólo si se puede diagonalizar con una matriz unitaria.
- \mathbb{R} Sea A una matriz real. Entonces A es autoadjunta si y sólo si A se puede diagonalizar con una matriz ortogonal.

3.3. Proyecciones Ortogonales

Def: Sea V un espacio con producto interior y sea $T : V \rightarrow V$ una proyección. Decimos que T es una proyección ortogonal si $R(T)^\perp = N(T)$ y $N(T)^\perp = R(T)$

Teorema: Sea T un operador lineal en V un espacio con producto interior. Entonces T es una proyección ortogonal sii $T^2 = T = T^*$

Teorema Espectral: Sea T un operador en el espacio dimensionalmente finito y con producto interno V sobre F . Suponga que T es normal si $F = \mathbb{C}$ y que T es autoadjunto si $F = \mathbb{R}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son los distintos eigenvalores de T , sea $W_i = E_{\lambda_i}$ los eigenspacios correspondientes a cada eigenvalor. Y sea P_i la proyección ortogonal sobre W_i . Entonces:

- $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$
- $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$
- $I = P_1 + \dots + P_k$
- $T = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k$

4. Diferenciación Parcial

4.0.1. Regla de Leibniz derivada

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

4.1. Expansión de funicones en dos variables

Si tenemos una función $f(x, y)$, podemos pensar en que se puede expandir cerca de (a, b) como:

$$f(x, y) = a_{00} + a_{10}(x - a) + a_{01}(y - b) + a_{20}(x - a)^2 + a_{11}(x - a)(y - b) + a_{02}(y - b)^2 + \dots$$

Se puede ver entonces que:

$$\begin{aligned} f(a, b) &= a_{00} \quad , \quad f_x(a, b) = a_{10} \quad , \quad f_y(a, b) = a_{01} \\ f_{xx}(a, b) &= 2a_{20} \quad , \quad f_{xy}(a, b) = a_{11} \end{aligned}$$

Y así podemos seguir la serie si quisiéramos. En el caso más general, si definimos $h = x - a$, $k = y - b$, entonces tenemos que la serie es:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b)$$

4.2. Diferencial total

Si $u = f(x, y, z, \dots)$ entonces:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots$$

4.3. Derivación Implícita

Si tenemos que $f(x, y) = 0$ es una ecuación implícita, entonces podemos calcular la derivada de y respecto a x al derivar ambos lados respecto a x y despejar. O bien, escribimos el diferencial:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

Entonces, 'despejando' nos queda que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

4.4. Regla de la Cadena

Si $u = f(x, y)$ y a la vez $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$. Entonces podemos encontrar que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

O se puede escribir con Jacobianos.

4.5. Cambio de Variable

Ejemplo: Queremos hacer el cambio de variable $t = x + vt$, $s = x - vt$ a la ecuación:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

Entonces, calculamos las derivadas para cada caso:

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial s} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s} \right) F \\ \blacksquare \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = v \frac{\partial F}{\partial r} - v \frac{\partial F}{\partial s} = v \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial s} \right) F \end{aligned}$$

Con esta notación de operadores, podemos calcular las segundas derivadas como:

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial s} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \\ \blacksquare \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \dots = v^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \right) \end{aligned}$$

Entonces, al sustituir en la ecuación diferencial, nos queda que:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial s} = 0$$

Entonces, $\frac{\partial F}{\partial s}$ debe de ser una función de s . Y al integrar, tenemos que $F = f(s) + cte = f(s) + g(r)$.

Por lo tanto:

$$F = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Similarmente se puede hacer un cambio de variable para la ecuación de Laplace.

5. Integración

5.1. Integrar en un conjunto

Para integrar en un conjunto acotado por $y_1(x)$ y por $y_2(x)$ Desde $x = a, x = b$ simplemente integramos como:

$$\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Si el conjunto está acotado por $x_1(y)$ hasta $x_2(y)$ y desde $y = c$ hasta $y = d$, entonces la integral es:

$$\int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy$$

5.2. Cambio de Variable (Jacobianos)

Digamos que queremos integrar una función f en un conjunto A . Y digamos que encontramos una forma de parametrizar dicho conjunto como $x(u, v), y(u, v)$ donde de alguna forma podemos hacer correr u, v en un rectángulo. Es decir, tenemos una función ϕ y un rectángulo $R = a < u < b, c < v < d$ tal que:

$$\phi(R) = A$$

Entonces, tenemos que la integral se puede calcular como:

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_R f(u, v) |J\phi| du dv$$

Donde $\phi(R) = A$. Lo bueno de esto es que nos permite integrar sobre un rectángulo en vez de sobre el conjunto original bien raro.

Por ejemplo, para integrar sobre un círculo de radio R centrado en el origen, necesitamos el cambio de variable $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan y/x$.

O bien, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

ϕ es la función que convierte a las variables en un rectángulo a las del círculo.

Factor de volumen en distintas coordenadas:

- **Cilíndricas:** $dV = r dr d\theta dz$
- **Esféricas:** $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Supongamos que tenemos la triple integral:

$$\int \int \int f(u, v, w) du dv dw$$

Sea r, s, t otras variables, tales que:

$u = u(r, s, t)$, $v = v(r, s, t)$, $w = w(r, s, t)$.

Entonces, consideramos el determinante:

$$J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, s, t)} = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial s} & \frac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} \right|$$

Entonces, podemos integrar con respecto a las otras variables como:

$$\int \int \int f(r, s, t) |J| dt ds dr$$

5.3. Integral de Línea

5.3.1. De un campo escalar:

Digamos que queremos integrar la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una curva C parametrizada como $\gamma(t)$ con $a \leq t \leq b$.

Entonces, se calcula como:

$$\int_C f(\vec{r}) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

Que se interpreta como el área de una valla con altura f y base dada por la curva C .

Caso espacial (Longitud de Arco) Si queremos calcular la longitud de una curva C , podemos hacer esta integral pero para $f = 1$. Entonces, nos queda que:

$$lon(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

5.3.2. Campo Vectorial

Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial y queremos calcular el trabajo por una curva C parametrizada por γ , entonces se calcula como:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

5.4. Integrales de Superficie

5.4.1. En un campo escalar

Digamos que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar. Y queremos sumarla a lo largo de una superficie parametrizada por $\vec{x} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Entonces, se integra como:

$$\int \int_S f dS = \int_c^d \int_a^b f(\vec{x}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv$$

Porque el término entre normas es el pedazo de área.

Caso especial (área de Superficie)

Si tenemos una superficie parametrizada de alguna forma, podemos calcular su área al parametrizarla y usar $f = 1$.

5.4.2. Campo Vectorial

Si el campo sobre el que queremos integrar es vectorial, lo que estaremos calculando es el flujo. Se calcula como:

$$\int \int_S \vec{F} \cdot dS = \int \int \vec{F}(\vec{x}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) du dv$$

6. Análisis vectorial

Coordenadas Curvilineas: Se utilizan tres funciones $q_i = q_i(x, y, z)$. Las ecuaciones $q_i = cte_i$ describen tres superficies en \mathbb{R}^3 . La intersección de estas superficies es un punto en \mathbb{R}^3 que queda descrito por estas tres coordenadas curvilineas. Por ejemplo, en cilíndricas tenemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \arctan(y/x)$ $\varsigma = z$.

Es útil tener las funciones inversas, que son $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$.

Vector Unitario: El vector unitario en la dirección i es \hat{q}_i = un vector ortogonal a la superficie $q_i = cte$ y que apunta en la dirección en la que q_i aumenta. Como tal, para calcularlo, podemos escribir $r = (x, y, z)$ como función de las variables q_1, q_2, q_3 , luego derivamos con respecto a la q_i que queramos y eso nos da el vector en la dirección en la que q_i aumenta. Finalmente, lo unitarizamos.

Sea r un punto (x, y, z) descrito como función de q_1, q_2, q_3 . Entonces tendremos que:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial r}{\partial q_3} dq_3$$

La norma de los vectores $|\frac{\partial r}{\partial q_i}|$ se llama componente de longitud a lo largo de q_i y al multiplicarlo por dq_i es el componente de longitud a lo largo de q_i diferencial.

$$h_i = \left| \frac{\partial r}{\partial q_i} \right|$$

$$ds_i = h_i dq_i$$

Si unitarizamos estos vectores $\frac{\partial r}{\partial q_i}$ nos quedan los vectores unitarios que mencionamos antes.

Finalmente (para coordenadas ortogonales), tenemos que un pedacito de longitud ds es:

$$ds = h_1 dq_1 \hat{q}_1 + h_2 dq_2 \hat{q}_2 + h_3 dq_3 \hat{q}_3 = ds_1 \hat{q}_1 + ds_2 \hat{q}_2 + ds_3 \hat{q}_3$$

Elemento de área: $d\sigma_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j$

Elemento de Volumen: $d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$

6.1. Operaciones Diferenciales:

Gradiente: Dada una función $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ en coordenadas curvilíneas, definimos $\nabla\phi$ como el vector en el que sucede el máximo crecimiento y como tal, se define como el vector tal que $d\phi = \nabla\phi \cdot ds$. Entonces:

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q_1} \hat{q}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q_2} \hat{q}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q_3} \hat{q}_3$$

Divergencia: Sea $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en coordenadas curvilíneas. entonces definimos $\nabla \cdot F(p) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int F \cdot d\sigma}{\Delta V}$. Donde la integral es la integral de superficie alrededor de una superficie que rodea a p y que se hace pequeña. Dibujando y calculando los flujos infinitesimales, se llega a que:

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (F_3 h_1 h_2) \right]$$

Laplaciano: El laplaciano de $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se define como $\nabla \cdot \nabla\phi$. Usando las fórmulas de estas cosas, se puede llegar a que:

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_2 h_1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q_3} \right) \right]$$

Curl: Dada una función $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, se define su curl en la dirección \hat{q}_i como: $\nabla \times F \cdot \hat{q}_i(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint F \cdot ds}{\Delta A}$ donde σ es una curva cerrada que rodea al punto p y que es ortogonal al vector unitario \hat{q}_i y de área A . Podemos calcular los tres componentes del curl para cada vector unitario haciendo dibujitos y así. para llegar a:

$$\nabla \times F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{pmatrix} \hat{q}_1 h_1 & \hat{q}_2 h_2 & \hat{q}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{pmatrix}$$

Segundas Derivadas: $\nabla \times \nabla\phi = 0$ $\nabla \cdot \nabla \times F = 0$ $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$ (Aquí el $\nabla^2 F$ indica tomar el laplaciano de cada componente de F y juntarlos en un vector)

Teoremas y cosas:

Integral de Línea (vectorial): $\int_C F \cdot ds = \int_a^b F(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt$ donde $\phi(t)$ parametriza

la curva C .

Integral de Superficie (vectorial): $\int_S F \cdot da = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} F(\sigma(u, v)) \cdot (T_u \times T_v) dv du$ donde $\sigma(u, v)$ parametriza la superficie S .

Teorema Fundamental: $\int_C \nabla \phi = \phi(b) - \phi(a)$ donde C es una curva que une a con b .

Teorema de la div: $\int_V \nabla \cdot F dV = \oint_{\partial V} F \cdot dA$

Teorema de Stokes: $\int_S (\nabla \times F) \cdot da = \int_{\partial S} F \cdot ds$

Equivalencias irrotacionales: Son equivalentes (bajo ciertas condiciones): $\nabla \times F = 0$, Las integrales de línea de F son indep. de la trayectoria, la integral de línea por un camino cerrado es 0, $F = \nabla V$ para alguna función escalar V .

Equivalencias Incompresibles: Son equivalentes (bajo ciertas condiciones): $\nabla \cdot F = 0$, La integral de superficie de F es independiente de la superficie para cualquier borde, la integral de superficie en una superficie cerrada es 0, existe una función A con $F = \nabla \times A$

7. Fourier

7.1. Coeficientes de Fourier

7.1.1. Función de periodo 2π :

Sea f una función de periodo 2π , entonces la podemos escribir como:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

Si integramos de ambos lados, nos queda que los coeficientes están dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

7.1.2. Condiciones de Dirichlet:

Si $f(x)$ es de periodo 2π y tiene un número finito de máximos y mínimos y un número finito de discontinuidades y $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$ es finito, entonces la serie de Fourier converge a $f(x)$ en todos los puntos de continuidad.

7.1.3. Forma compleja

Digamos que queremos escribir $f(x)$ como:

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + c_{-2} e^{-2ix} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Entonces, los coeficientes complejos de Fourier se calculan como:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

7.1.4. Otros intervalos

Si f es una función periódica de periodo $\lambda = 2\pi/k$, entonces la podemos escribir como:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(kx) + A_2 \cos(2kx) + \dots + B_1 \sin(kx) + B_2 \sin(2kx) + \dots$$

Y los coeficientes están dados por:

$$A_m = \frac{2}{\lambda} \int_{\text{un-periodo}} f(x) \cos(mkx) dx$$

$$B_m = \frac{2}{\lambda} \int_{\text{un-periodo}} f(x) \sin(mkx) dx$$

O bien, en la forma compleja, tenemos que:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{ikmx}$$

Y se puede ver que los coeficientes están dados por:

$$C_m = \frac{1}{\lambda} \int_{\text{un-periodo}} f(x) e^{-ikmx} dx$$

7.1.5. Caso especial:

Digamos que f está definida en $-l, l$ y por tanto tiene periodo $2l$. entonces, se tiene que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \dots + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \dots$$

O bien, en forma compleja como:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l}$$

Entonces, los coeficientes están dados por:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx$$

7.1.6. Expansión en Seno y Coseno

Seno: Digamos que tenemos una función f en el intervalo $0, l$. Para extenderla en forma seno, lo que hacemos es primero definirla en $[-l, l]$ de forma impar. Y luego calculamos los b_n con la fórmula anterior.

Pero como ahora es impar, la integral se puede calcular como:

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Coseno: Digamos que tenemos la función f en el intervalo $[0, l]$. Para extenderla en coseno, la expandimos en $[-l, l]$ de forma par. Y luego calculamos los a_n con la fórmula de antes. Entonces queda como:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

7.2. Teorema de Parseval

Si f es una función que se puede expandir de forma compleja con coeficientes $\hat{f}(n)$. Entonces tenemos que:

$$\frac{1}{L} \int_{\text{periodo}} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

7.3. Transformada de Fourier

Se utiliza para funciones no-periódicas. Se extiende la teoría para espectros continuos en vez de espectros discretos como se hacía con la serie de Fourier.

Los coeficientes de Fourier ahora serán continuos y a esta función continua se le llamará la transformada de Fourier.

En la serie de siempre, teníamos que:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\pi x/l} \quad , \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx$$

Si hacemos la extensión para parámetros continuos, llegamos a la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\alpha x} dx \\ f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \end{aligned}$$

La primera expresión es la transformada de f , que es una función en el mundo de frecuencias. La segunda expresión es la recuperación de $f(x)$ a partir de su transformada de Fourier y a esta propiedad se le conoce como teorema de inversión.

La motivación de esta definición se consigue partiendo de la serie y definiendo $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$.

Luego se hace tender l a infinito.

El hecho de que f expresado a partir de la transformada se parezca como a sacarle la transformada a la transformada se llama **teorema de Dirichlet**

No todas las funciones pueden tener su transformada de Fourier.

Introducimos el espacio de Schartz $S(\mathbb{R})$ compuesto por funciones infinitamente diferenciables en todo \mathbb{R} y que $x^\alpha f^\beta(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

En el espacio de Schartz, todo funciona de manera ideal para la transformada de Fourier.

Otro espacio es el $f \in M(\mathbb{R})$ de funciones continuas en todo \mathbb{R} y acotadas como $|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^{1+\epsilon}}$ para todo x y todo $\epsilon > 0$.

En este espacio también funcionan las de transformadas de Fourier.

Otro espacio es el ya visto $L^2(\mathbb{R}) = \{f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}$

Se puede comprobar que $S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Y no solamente eso, sino que cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede conseguir como una sucesión de elementos de $S(\mathbb{R})$ (S es denso en L). Lo cual puede ser útil para probar que las series de Fourier están bien definidas en $L^2(\mathbb{R})$.

Representación Alternativa:

Se usa la representación alternativa en la que la transformada es:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad , \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

Nosotros usaremos la original que mencionamos antes.

Propiedades:

- **Lineal:** La transformada es lineal: $\widehat{af + bg}(\alpha) = a\widehat{f}(\alpha) + b\widehat{g}(\alpha)$
- **Traslación:** $\widehat{f(x-a)}(\alpha) = e^{-ia\alpha} \widehat{f}(\alpha)$
- **Modulación:** $\widehat{e^{iax} f}(\alpha) = \widehat{f}(\alpha - a)$
- **Dilatación:** $\widehat{f(sx)}(\alpha) = \frac{1}{|s|} \widehat{f}\left(\frac{\alpha}{s}\right)$
- **Reflexión:** $\widehat{f(-x)}(\alpha) = \widehat{f}(-\alpha)$
- **Derivada:** $\widehat{f^{(n)}}(\alpha) = (i\alpha)^n \widehat{f}(\alpha)$
- **Mult. Polinomio:** $\widehat{x^n f}(\alpha) = i^n \widehat{f^{(n)}}(\alpha)$

Transformada Seno y Coseno:

Si la función con la que partimos es par o impar, la transformada se va a simplificar a solamente incluir senos o cosenos.

Por ejemplo: Si $f(x)$ es impar, entonces su transformada es impar pues:

$$\widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\cos(\alpha x) - i \sin(\alpha x)] dx = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$$

Esta última expresión es una función impar respecto a α .

Transformada Seno:

Si f_s es una función impar, entonces su transformada seno es:

$$\widehat{f}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(x) \sin(\alpha x) dx \quad , \quad f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}_s(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha$$

Transformada Coseno

Si f_c es una función par, entonces su transformada coseno es:

$$\widehat{f}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(x) \cos(\alpha x) dx \quad , \quad f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}_c(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha$$

7.3.1. Identidad de Plancherel

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y su transformada $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Queremos ahora comparar las normas entre estas dos funciones.

Como no son funciones periódicas y viven en cambio en $L^2(\mathbb{R})$, el producto escalar que se les define es:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Lema: Si f, g son funciones y \widehat{f}, \widehat{g} sus transformadas, entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle_2 = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Dem: } \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\alpha) \overline{\widehat{g}(\alpha)} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} e^{i\alpha x} dx \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \right] \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

Teorema de Plancherel: Usamos el lema anterior para $g = f$ y nos queda:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_2^2$$

8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Una ecuación diferencial es una expresión de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Y se busca una función $y = y(x)$ que convierta esto en una identidad. Veamos algunos métodos.

8.1. Métodos

- **Ecuación separable**

Es una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Entonces, la solución se consigue como:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c$$

- **Ecuación Homogénea**

Es una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

Donde M, N son homogéneas del mismo orden (sacan escalares con la misma potencia). Entonces, se soluciona con una sustitución del tipo:

$$z = y/x \Rightarrow y = xz \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$$

Al sustituir siempre se obtiene una ecuación separable.

- **Ecuaciones Lineales Exactas**

Son ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} M(x, y)dx + N(x, y)dy &= 0 \\ M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

Ecuación Exacta: Es una ecuación exacta si $M_y = N_x$. En cuyo caso, acepta una solución $f(x, y)$ con $f_x = M, f_y = N$. Que se puede encontrar integrando M respecto a x por ejemplo.

Factor de integración: Si no es exacta, podemos multiplicar todo por μ y nos queda $\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$.

Y vemos si ahora sí es exacta. Para ello, deberíamos de tener que $\mu M_y + \mu_y M = \mu N_x + \mu_x N$.

Y para encontrar μ suponemos que μ no depende de x y la encontramos (y vemos si verdaderamente no depende de x), sino, lo hacemos suponiendo que no depende de y .

■ Ecuaciones Lineales de primer grado

Tenemos una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Podemos resolver la parte homogénea y la particular. O bien, podemos multiplicar por un factor μ tal que quede $\mu y' + \mu P(x)y = \mu Q(x)$.

Y buscamos que el lado derecho sea la derivada de una expresión, para lo cual resolvemos $\mu' = \mu P(x)$. Luego, nos queda que $(\mu y)' = \mu Q(x)$, lo cual podemos integrar sencillamente.

■ Ecuación de Bernoulli: Es una ecuación de la forma:

$$y' + Py = Qy^n$$

Entonces, se hace la sustitución $z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}y'$

Al hacer estas sustituciones, nos queda $z' + (1-n)Pz = (1-n)Q$ que ya es una ecuación lineal.

■ EDO lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes

Es una ecuación de la forma:

$$y'' + py' + qy = 0$$

Proponemos una solución e^{mx} y encontramos las m que funcionen, que son $m_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

Lo que nos deja con tres casos:

- **Raíces Distintas Reales:** Entonces, las soluciones son e^{m_1x}, e^{m_2x}
- **Raíces complejas:** Las dos raíces son $m = a \pm bi$ y las soluciones son $e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx$
- **Raíces iguales:** Si las dos raíces son m , entonces las soluciones son e^{mx}, xe^{mx}

■ EDO de segundo orden con coeficientes constantes

Tenemos una ecuación de la forma:

$$y'' + py' + qy = R(x)$$

Primero debemos de resolver la ecuación homogénea y luego sumar una solución particular. Para la ecuación particular hay muchos métodos:

- **Coefficientes Indeterminados:** Proponemos una solución y_p parecida a la $R(x)$. Por ejemplo, si $R(x) = e^{ax}$, proponemos $y_p = ke^{ax}$ y vemos el valor de k que funcione.

Si $R(x)$ es una combinación de senos y cosenos, proponemos a y_p también como una combinación de los mismos senos y cosenos y encontramos los coeficientes.

Si el lado derecho es e^{ax} pero eso ya es una de las soluciones, entonces proponemos algo como $y_p = kxe^{ax}$

- **Variación de Parámetros:**

Si ya tenemos las dos soluciones y_1, y_2 a la ecuación homogénea, proponemos $y_p = v_1y_1 + v_2y_2$ y lo metemos en la ecuación particular. Entonces, resulta que:

$$v'_1 = \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)}, \quad v'_2 = \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)}$$

Si del lado derecho hay muchas funciones, podemos usar el principio de superposición y encontrar cada particular y sumarlas.

Si el lado derecho es coseno o algo así, podemos suponer una solución $ke^{i\omega_0 x}$ y encontrar k para luego sacar la parte real (o imaginaria).

- **EDO de segundo orden general:**

Tenemos una EDO de segundo orden:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Entonces, para encontrar una solución, hacemos una sustitución según sea la ecuación o usamos algún método de reducción de grado o algo así. Luego, dada la primera solución y_1 podemos buscar la segunda proponiendo $y_2 = vy_1$ y resulta que:

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx}$$

- **Transformada de Laplace**

Definimos la transformada de Laplace como:

$$L(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = F(p)$$

Las transformadas de Laplace cumplen:

- **Lineal:** $L[f + \alpha g] = L[f] + \alpha L[g]$

- **Traslación:** Si $f(t) \begin{cases} g(t-a), & t > a > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$
Entonces, $F(p) = e^{-pa}G(p)$
 - **Modulación:** Si $f(t) = e^{-at}g(t)$ entonces $F(p) = G(p+a)$
 - **Dilatación:** Sea $f(t) = g(at)$ (con $a > 0$). Entonces $F(p) = \frac{1}{a}G(\frac{p}{a})$
 - **División por t.** Sea $f(t) = g(t)/t$. Entonces, $F(p) = \int_p^\infty G(u) du$
 - **Multiplicación por t^n .** Si $f(t) = t^n g(t)$, entonces $F(p) = (-1)^n \frac{d^n G(p)}{dp^n}$
 - **Integral.** Sea $f(t) = \int_0^t g(u) du$. Entonces $F(p) = \frac{G(p)}{p}$.
- Convolución:** $L^{-1}[G(p)F(p)] = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

Table of Laplace Transforms ◀ 469

Table of Laplace Transforms

$y = f(t), t > 0$ $[y = f(t) = 0, t < 0]$		$Y = L(y) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	
L1	1	$\frac{1}{p}$	$\text{Re } p > 0$
L2	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
L3	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L4	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L5	$t^k, k > -1$	$\frac{k!}{p^{k+1}}$ or $\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}$	$\text{Re } p > 0$
L6	$t^k e^{-at}, k > -1$	$\frac{k!}{(p+a)^{k+1}}$ or $\frac{\Gamma(k+1)}{(p+a)^{k+1}}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
L7	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\text{Re } (p+a) > 0$ $\text{Re } (p+b) > 0$
L8	$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\text{Re } (p+a) > 0$ $\text{Re } (p+b) > 0$
L9	$\sinh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\text{Re } p > \text{Re } a $
L10	$\cosh at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\text{Re } p > \text{Re } a $
L11	$t \sin at$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L12	$t \cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L13	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$\text{Re } (p+a) > \text{Im } b $
L14	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$\text{Re } (p+a) > \text{Im } b $
L15	$1 - \cos at$	$\frac{a^2}{p(p^2+a^2)}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L16	$at - \sin at$	$\frac{a^3}{p^2(p^2+a^2)}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L17	$\sin at - at \cos at$	$\frac{2a^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $

Table of Laplace Transforms (continued)

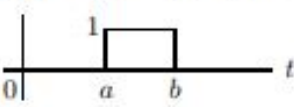
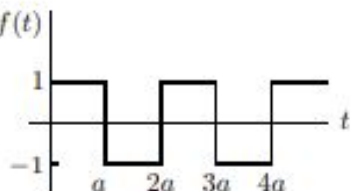
	$y = f(t), t > 0$ $[y = f(t) = 0, t < 0]$	$Y = L(y) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	
L18	$e^{-at}(1 - at)$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$\operatorname{Re} (p+a) > 0$
L19	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{p}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Im} a $
L20	$\frac{1}{t} \sin at \cos bt,$ $a > 0, b > 0$	$\frac{1}{2} \left(\arctan \frac{a+b}{p} + \arctan \frac{a-b}{p} \right)$	$\operatorname{Re} p > 0$
L21	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$	$\ln \frac{p+b}{p+a}$	$\operatorname{Re} (p+a) > 0$ $\operatorname{Re} (p+b) > 0$
L22	$1 - \operatorname{erf} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right), \quad a > 0$ (See Chapter 11, Section 9)	$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
L23	$J_0(at)$ (See Chapter 12, Section 12)	$(p^2 + a^2)^{-1/2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Im} a ;$ or $\operatorname{Re} p \geq 0$ for real $a \neq 0$
L24	$u(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a > 0 \\ 0, & t < a \end{cases}$ (unit step, or Heaviside function)	$\frac{1}{p} e^{-pa}$	$\operatorname{Re} p > 0$
L25	$f(t) = u(t-a) - u(t-b)$ 	$\frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$	All p
L26	$f(t)$ 	$\frac{1}{p} \tanh \left(\frac{1}{2} ap \right)$	$\operatorname{Re} p > 0$
L27	$\delta(t-a), \quad a \geq 0$ (See Section 11)	e^{-pa}	
L28	$f(t) = \begin{cases} g(t-a), & t > a > 0 \\ 0, & t < a \end{cases}$ $= g(t-a)u(t-a)$	$e^{-pa} G(p)$ [$G(p)$ means $L(g)$.]	
L29	$e^{-at} g(t)$	$G(p+a)$	

Table of Laplace Transforms (continued)		
	$y = f(t), t > 0$ $[y = f(t) = 0, t < 0]$	$Y = L(y) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$
L30	$g(at), a > 0$	$\frac{1}{a} G\left(\frac{p}{a}\right)$
L31	$\frac{g(t)}{t}$ (if integrable)	$\int_p^{\infty} G(u) du$
L32	$t^n g(t)$	$(-1)^n \frac{d^n G(p)}{dp^n}$
L33	$\int_0^t g(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} G(p)$
L34	$\int_0^t g(t-\tau)h(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau)h(t-\tau) d\tau$ (convolution of g and h , often written as $g * h$; see Section 10)	$G(p)H(p)$
L35	Transforms of derivatives of y (see Section 9): $L(y') = pY - y_0$ $L(y'') = p^2Y - py_0 - y_0'$ $L(y''') = p^3Y - p^2y_0 - py_0' - y_0'',$ etc. $L(y^{(n)}) = p^nY - p^{n-1}y_0 - p^{n-2}y_0' - \dots - y_0^{(n-1)}$	

Resolución de EDO

Usamos la propiedad 35 para encontrar la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial. Luego, despejamos Y . Finalmente, sacamos la transformada inversa usando las propiedades y quizá fracciones parciales o lo de convolución para calcular la transformada inversa de un producto.

Incluso se puede usar para convertir un sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones lineales.

8.2. Delta de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & , t = t_0 \\ 0 & , t \neq t_0 \end{cases}$$

Esto claramente no es como tal una función, pero es como se define en ciertos libros. Como queremos que el impulso sea unitario, tenemos que $\int_{\mathbb{R}} \delta(t) = 1$.

Esta función normalmente se denota por $f(t) = \delta(t - t_0)$ cuando el infinito está en t_0 . Como tal no es una función, pero vamos a trabajar con esta delta como si fuera un símbolo (como si fuera el símbolo de infinito). Y como símbolo, queremos que

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t - t_0) dt = 1$$

Construir como sucesión

Se puede construir en general como una sucesión de funciones que se van pareciendo a las deltas y que son todas impulsos unitarios.

Propiedades

- **Definición Alternativa:** Si $\phi(t)$ es una función lo suficientemente bonita, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \phi(t_0)$$

Entonces, se puede ver a δ como un funcional que toma una función de $S(\mathbb{R})$ (una función del espacio de Schwartz, que es infinitamente diferenciable y todas sus derivadas multiplicadas por un polinomio son acotadas) y que da como resultado un real.

- **Transformada de δ :** $L[\delta(t - t_0)] = \int_0^\infty \delta(t - t_0) e^{-pt} dt = e^{-pt_0}$
Siempre y cuando $t_0 > 0$ para que entre al intervalo de integración.

$$L[\delta(t - t_0)] = e^{-pt_0}$$

Ahora podemos resolver ecuaciones diferenciales que involucren a la δ sin usar una sucesión que la aproxime, sino usando la transformada y las propiedades.

- **Transformada de Fourier de δ :**
Sea $f = \delta(x - a)$, entonces, la transformada de Fourier es:

$$\widehat{f}(\alpha) = \widehat{\delta}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-i\alpha a}$$

Por el teorema de inversión, tenemos que:

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha(x-a)} d\alpha$$

- **Derivadas:** Queremos darle sentido a $\delta'(x - a)$. Para esto, veremos qué es lo que ocurre con: $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \delta'(x - a) dx$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \delta'(x - a) dx = \phi(x) \delta(x - a) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \phi'(x) \delta(x - a) dx = -\phi'(a)$$

Siempre y cuando $\phi(x)$ se anula en infinito.

De forma más general, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta^{(n)}(x-a) dx = (-1)^n \phi^{(n)}(a)$$

Lo que se puede probar por inducción usando integración por partes.

- $x\delta(x) = 0$.
- $x\delta'(x) = -\delta(x)$
s igual que haberle aplicado $-\delta(x)$.
- **En general:** Tenemos que:
 - $x^m \delta^{(n)}(x) = 0$ con $m > n$
 - $x^m \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x)$ con $n = m$
 - $x^m \delta^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^m}{(n-m)!} \delta^{(n-m)}(x)$ con $n > m$

a) $\delta(x) = \delta(-x)$

b) $\delta'(-x) = -\delta'(x)$, $\delta'(x-a) = -\delta'(a-x)$

c) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ $a \neq 0$

d) $\delta((x-a)(x-b)) = \frac{1}{|a-b|} [\delta(x-a) + \delta(x-b)]$ $a \neq b$

e) $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$, $f(x_i) = 0$, $f'(x_i) \neq 0$

8.2.1. En varias Variables

La vamos a centrar en un punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y la delta es una función tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y, z) \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) dx dy dz = \phi(x_0, y_0, z_0)$$

Donde ϕ es una función test adecuada (muy continua y se a nula en infinito).

A veces se representa por $\delta(\vec{x})$ o por $\delta^3(\vec{r})$ o algo así.

Si estamos por ejemplo en **coordendas esféricas**. Tenemos que llamar a la delta de dirac como:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\phi - \phi_0)}{r_0^2 \sin \theta_0}$$

Lo hacemos así, de tal manera que si tomamos la integral triple que sigue:

$$\begin{aligned} \int_S f(r, \theta, \phi) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dS &= \int_S f(r, \theta, \phi) \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) \frac{r^2 \sin \theta}{r_0^2 \sin \theta_0} dr d\phi d\theta = \\ &= f(r_0, \theta_0, \phi_0) \frac{r_0^2 \sin \theta_0}{r_0 \sin \theta_0} = f(r_0, \theta_0, \phi_0) \end{aligned}$$

Por eso se define así, para que al dividir, desaparezca el elemento de volumen y sea otra vez f evaluada en \vec{r}_0

Propiedades en Esféricas

- $\nabla \cdot \frac{e_r}{r^2} = 4\pi\delta(\vec{r})$
- $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$

O más general:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

8.3. Funciones de Green

Si f es cualquier función, entonces se puede escribir como:

$$f(t) = \int_0^\infty f(t')\delta(t' - t) dt'$$

El método de Green se usa para resolver una ecuación lineal como del tipo $y'' + P(x)y' + Q(x) = f(x)$ Con condiciones iniciales o de frontera.

Lo que hacemos es resolver la ecuación auxiliar con deltas de dirac:

$$G(x, x'') + P(x)G(x, x') + Q(x) = \delta(x - x')$$

Luego, la solución a la ecuación completa será:

$$y(x) = \int_0^\infty G(x, x')f(x')dx'$$

8.3.1. Encontrar la función de Green

Con condiciones iniciales: Digamos que tenemos una ecuación diferencial $y'' + P(x)y' + Q(x) = f(x)$ con condiciones iniciales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

Entonces, lo que hacemos es resolver la ecuación auxiliar con $G(x, x')$:

$$G(x, x'') + P(x)G(x, x') + G(x, x') = \delta(x - x')$$

La resolvemos con las mismas condiciones iniciales usando el método que sea (Laplace puede ser) y tomando x' como un parámetro. Luego, la solución verdadera será:

$$y(x) = \int_0^\infty G(x, x')f(x') dx'$$

Con Condiciones de Frontera: Digamos que queremos resolver $y'' + P(x)y' + Q(x) = f(x)$ con las condiciones de frontera de que $a_1y(a) + a_2y'(a) = 0$, $b_1y(b) + b_2y'(b) = 0$.

Entonces, debemos de encontrar la función de Green que es solución a la ecuación auxiliar con las mismas condiciones y luego encontrar $y(x)$ a partir de eso.

Resulta que no hace falta resolverlo cada vez, la ecuación de Green es siempre la misma. Digamos que y_1 es una solución homogénea que cumple la primera condición. Y y_2 es una que cumple la segunda condición. Entonces:

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{y_2(x')y_1(x)}{W(x')} & a < x < x' < b \\ \frac{y_1(x')y_2(x)}{W(x')} & a < x' < x < b \end{cases}$$

Y entonces, la solución a la EDO será:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b G(x, x')f(x')dx' \\ &= y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(x')f(x')}{W(x')}dx' + y_1(x) \int_x^b \frac{y_2(x')f(x')}{W(x')}dx' \end{aligned}$$

8.3.2. Sistemas de ecuaciones Lineales con coeficientes constantes

Digamos que tenemos un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

Donde \vec{x} es un vector de funciones x_1, \dots, x_n y A una matriz de coeficientes constantes. Entonces, una solución es:

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{v}$$

Donde e^{At} es:

$$e^{At}\vec{v} = I_d\vec{v} + tA\vec{v} + \frac{A^2t^2}{2!}\vec{v} + \frac{A^3t^3}{3!}\vec{v} + \dots + \frac{A^nt^n}{n!}\vec{v} + \dots$$

Entonces, usamos un truquito para escribir la solución como:

$$e^{(A-\lambda I)t}e^{\lambda t}\vec{v} = Ie^{\lambda t}\vec{v} + (A - \lambda I)te^{\lambda t}\vec{v} + \frac{(A - \lambda I)^2t^2}{2!}\vec{v} + \frac{(A - \lambda I)^3t^3}{3!}\vec{v} + \dots$$

Para cualquier λ y cualquier \vec{v} .

Para que la solución sea sencilla, nos conviene que la serie se detenga.

Si tenemos una combinación de \vec{v} y λ tal que $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$, entonces podemos cortar la suma en el primer término.

Entonces, para un autovector-autovalor, la solución es:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$$

Con \vec{v} un autovector y λ su autovalor.

Pero no siempre podemos conseguir n parejas así. Sin embargo, si no podemos conseguir tantos autovectores, lo que sí podemos es conseguir n autovectores generalizados. Que hacen que la suma se detenga con 2 o 3 términos y tengamos una solución, aunque no tan limpia.

9. Cálculo de Variaciones

Problema: Tenemos que encontrar la función $y(x)$ que hace mínima (o estacionaria en general) a la siguiente integral:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

Solución: Digamos que $y(x)$ es la solución que hace estacionaria a I . Encontraremos una condición necesaria para $y(x)$. Para ello, consideramos una pequeña variación de $y(x)$ que es:

$$Y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x)$$

Para una función η . Que cumpla que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, para que todas las variaciones tengan los mismos extremos.

Entonces, tenemos que la integral que depende de ϵ es:

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y') dx$$

Para que y sea el estacionario, necesitamos que $\frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon) = 0$ para cuando $\epsilon = 0$. Luego, si derivamos respecto a ϵ , tenemos que:

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \frac{dY'}{d\epsilon} \right) dx$$

Sustituyendo la definición de Y , nos queda que:

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial Y'} \eta'(x) \right) dx$$

Si queremos que $dI/d\epsilon = 0$ para $\epsilon = 0$. Que para $\epsilon = 0$ significa que $Y = y$, entonces:

$$\left(\frac{dI}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx = 0$$

Podemos integrar por partes y nos queda:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) dx \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \eta(x) dx = 0$$

Entonces, como η es arbitrario, nos queda que:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Otras Variables:

Si se tienen otras variables en F , se construye una ecuación para cada una de las variables y listo.

Conservación

Por la ecuación de Euler, tenemos que si F no depende de y (es decir, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$) entonces:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = cte$$

Si F no depende de x

Si F no depende de x , entonces hacemos la sustitución:

$$x' = \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1}, \quad y' = \frac{1}{x'}, \quad dx = \frac{dx}{dy} dy = x' dy$$

Y entonces el integrando es una función de y, x' y se simplifica. La ecuación pasa a ser:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = Cte$$

9.1. Problemas Isoperimétricos

Digamos que queremos encontrar el punto estacionario de:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

Pero queremos que se cumpla la condición que:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')$$

Donde J es una constante.

Entonces, el método consiste en considerar el funcional:

$$\int_{x_1}^{x_2} (F + \lambda G) dx$$

Y usar la ecuación de Euler para éste. Habiendo encontrado $y(x)$, podemos sustituirlo en la condición de constante para encontrar λ

10. Análisis Tensorial

Empezamos con la idea de un vector en \mathbb{R}^3 .

Un vector en \mathbb{R}^3 es una flecha con dirección y magnitud.

coordenadas: Se le puede asignar unas coordenadas (x, y, z) si se toma un sistema de coordenadas del espacio.

Pero el vector no es solamente un trío de coordenadas. El vector es todos los posibles tríos de coordenadas según el sistema base que se tome.

Las coordenadas del vector se tienen que transformar correctamente al pasar de una base a otra.

Entonces, una colección de 3 números no es siempre un vector. El vector es la flecha que representan y tienen que seguir las leyes de transformación correctas entre coordenadas.

Un vector de desplazamiento es verdaderamente un vector. Por lo que todo vector (de fuerza, velocidad, etc.) será verdaderamente un vector si se transforma de la misma forma.

Tensor: Un tensor de dimensión n y de rango r es una colección de n^r números. Se requieren r índices entre 1, n para encontrar uno de los números. Además, debe de cumplir ciertas reglas de transformación.

10.1. Tensores Cartesianos

Consideramos cómo cambian las coordenadas de un vector de desplazamiento al rotar los ejes en los que se encuentra.

Sea (x, y, z) las coordenadas en los ejes originales y (x', y', z') las coordenadas después de rotar. Podemos enlstar los cosenos de los 9 ángulos entre los ejes originales y los nuevos como:

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

Por ejemplo, l_2 es el ángulo entre el eje x y el y' .

Entonces, cualquier vector se puede escribir en las dos bases.

Ejemplo: Tenemos las bases $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ y la base $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$. Entonces, un vector cualquiera \vec{r} que tenga coordenadas (x, y, z) en la primera base, tiene coordenadas (x', y', z') en la otra base.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

Entonces, podemos tomar el producto punto con \vec{i}' de ambos lados y del lado izquierdo nos queda el coseno entre \vec{i}, \vec{i}' (porque son unitarios) y así entre los demás. En general, tenemos que:

$$\begin{aligned} x' &= l_1x + m_1y + n_1z \\ y' &= l_2x + m_2y + n_2z \\ z' &= l_3x + m_3y + n_3z \end{aligned}$$

Y también podemos encontrar la relación inversa:

$$\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' \end{aligned}$$

Lo podemos escribir de forma más resumida como:

$$\begin{aligned} r' &= Ar \\ r &= A^T r' \end{aligned}$$

Donde A es la matriz de la foto. Esto porque A^T es la matriz inversa de A .

Vectores Cartesianos: Un vector cartesiano \mathbf{V} es un conjunto de 3 coordenadas (V_x, V_y, V_z) en un sistema tal que si pasamos a otro sistema por una rotación, los componentes se transforman a (V'_x, V'_y, V'_z) según la regla:

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

O bien, lo podemos escribir como:

$$V' = AV$$

Con V la triada formada por las coordenadas en el sistema original y V' la triada en el primado.

Podemos cambiar la notación y escribir que:

$$V'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} V_j$$

Y tenemos también que:

$$V_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} V'_j$$

.

Definición de un Tensor Cartesiano: Un tensor de rango 0 es un número que no cambia bajo rotaciones.

Un tensor de rango 1 ya lo definimos.

Un tensor de rango 2 tiene 3^2 componentes. Y además, si llamamos T_{ij} a las de un sistema y T'_{kl} a las del otro, entonces se transforma según:

$$T'_{kl} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ki} a_{lj} T_{ij}$$

Producto Directo (Tensorial):

Dados dos vectores (U_1, U_2, U_3) y (V_1, V_2, V_3) , definimos su producto como:

$$\begin{pmatrix} U_1 V_1 & U_1 V_2 & U_1 V_3 \\ U_2 V_1 & U_2 V_2 & U_2 V_3 \\ U_3 V_1 & U_3 V_2 & U_3 V_3 \end{pmatrix}$$

Estos 9 componentes los denotamos por UV . Se puede probar que se transforma como un tensor de rango 2. Pues como U es un vector, $U'_k = a_{ki}U_i$, $V'_l = a_{lj}V_j$. Entonces:

$$U'_k V'_l = a_{ki} a_{lj} U_i V_j$$

Tensor de rango 4:

Son $81 = 3^4$ componentes T_{ijkl} tales que se transforman como:

$$T'_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{\alpha i} a_{\beta j} a_{\gamma k} a_{\delta l} T_{ijkl}$$

.

Contracción:

Si tenemos un tensor T_{ijkl} , una contracción consiste en igualar dos de sus índices (que implica sumar sobre ellos).

Entonces, el producto punto entre U, V es igual a la contracción de UV

Tensores como matrices: Un tensor de rango r se puede representar como una 'matriz' de dimensión $3 \times 3 \times \cdots \times 3 = 3^r$.

Tensor simétrico y antisimétrico:

Se llama simétrico si $T_{ij} = T_{ji}$

Se llama antisimétrico si $T_{ij} = -T_{ji}$.

Cualquier tensor se puede escribir como la suma de un tensor simétrico y uno antisimétrico:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$$

Combinar tensores: La combinación lineal de dos tensores de rango r es un tensor de rango n nuevamente.

(Se puede demostrar que se transforma como un tensor).

Regla del Cociente: Si V_j es un vector y $U_i = T_{ij}V_j$ también, entonces T_{ij} es un tensor de rango 2.

10.2. Delta de Kronecker y Levi Civita:

Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & O.C \end{cases}$$

Levi Civita:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k = 1, 2, 3, \quad 2, 3, 1, \quad 3, 1, 2 \\ -1 & i, j, k = 3, 2, 1, \quad 2, 1, 3, \quad 1, 3, 2 \\ 0 & o.c \end{cases}$$

Tensor isotrópico: Un tensor que tiene las mismas componentes en todos los sistemas de coordenadas.

La delta de Kronecker y el tensor de Levi Civita son isotrópicos.

La delta de Kronecker transforma dos componentes distintos en iguales.

Determinante: El determinante de una matriz con renglones a_{1i}, a_{2j}, a_{3k} . Entonces:

$$\det A = a_{1i}a_{2j}a_{3k}\epsilon_{ijk}$$

Propiedad:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} &= 2\delta_{kn} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 6\end{aligned}$$

Identidades Vectoriales:

- $(B \times C)_i = \epsilon_{ijk}B_jC_k$
- $A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$
- $\nabla \times V = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}V_k$
- $\nabla \times (\nabla \times V) = \nabla(\nabla \cdot V) - \nabla^2 V$

Vector Axial y Polar: Si un vector satisface las reglas de transformación bajo reflexiones, se llama polar. Si cambia de signo bajo reflexiones, se llama vector axial (o pseudovector).

10.3. Vector No cartesiano

Para coordenadas generales x_1, x_2, x_3 y x'_1, x'_2, x'_3 . La relación entre las variables es:

$$\begin{pmatrix} dx'_1 \\ dx'_2 \\ dx'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Entonces, las coordenadas se transforman como:

$$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j$$

Entonces V es un tensor si sus coordenadas se transforman como:

- **Contravariante**

$$V'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V_j$$

■ **Covariante**

$$V'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} V_j$$

Los índices se ponen arriba si se transforma contravariantemente. Y se ponen abajo si se transforman covariantemente.

Entonces, los tensores se ven más o menos así:

■ **rango 2 covariante:**

$$T'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} T_{kl}$$

■ **rango 3 contravariante**

$$T'^{ijk} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_l} \frac{\partial x'_j}{\partial x_m} \frac{\partial x'_k}{\partial x_n} T^{lmn}$$

■ **rango 2-contr, 1-cov**

$$T'^{ij}_k = \frac{\partial x'_i}{\partial x_l} \frac{\partial x'_j}{\partial x_m} \frac{\partial x_n}{\partial x'_k} T^{lm}_n$$

11. Funciones Especiales

11.1. Factorial

Para empezar, calculamos la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

Entonces, así se puede calcular el factorial de cualquier entero.

11.2. Gamma

Ahora se nos ocurre usar esta definición para extender el factorial. Así que definimos:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad p > 0$$

Entonces, notamos que para un entero se tiene que:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Y para el resto de los valores, se extiende el significado del factorial.

Propiedades:

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$
Se consigue usando integral por partes.
- $\Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$
- $\binom{p}{n} = \frac{\Gamma(p+1)}{n!\Gamma(p-n+1)}$

Función Gamma de números negativos:

Tenemos que $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$.

Entonces, conforme $p \rightarrow 0$, tenemos que $\Gamma(p) = \infty$. Por lo que $\Gamma(0)$ tiende a infinito.

Entonces, al usar la fórmula de nuevo, la función Γ tiende a $\pm\infty$ en todos los enteros negativos.

11.3. Función Beta

Definimos la función Beta:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad , p > 0, q > 0$$

Propiedades:

- $B(p, q) = B(q, p)$

- $B(p, q) = \int_0^a y^{p-1}(a-y)^{q-1} dy$

Haciendo el cambio de variable $x = y/a$.

- **Forma Trigonométrica** $B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta$

Con la sustitución $x = \sin^2 \theta$

- $B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1} dy}{(1+y)^{p+q}}$

Se obtiene haciendo $x = \frac{y}{1+y}$

Funciones Beta y Gamma

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

11.3.1. El péndulo Simple (periodo)

Un péndulo simple tiene la ecuación dada por:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Es una ecuación difícil de resolver. Sin embargo, podemos multiplicar ambos lados por $\dot{\theta}$ e integrar:

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{g}{l} \cos \theta + cte$$

Digamos que queremos calcular el **periodo con condición inicial** $\dot{\theta}(0) = 0, \theta(0) = 90^\circ$. Entonces, podemos separar por variables la ec. diferencial y tener:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} dt$$

Luego, un cuarto de periodo se consigue al integrar entre 0, $T/4$ y el ángulo entre 0, $\pi/2$. Entonces nos queda:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \int_0^{T/4} dt = \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{T}{4}$$

El lado izquierdo coincide con la forma trigonométrica de la función B evaluada en $(1/2, 1/4)$ y multiplicada por $1/2$. Se puede calcular usando $B(1/2, 1/4) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}$. Con lo que al despejar llegamos a que el periodo es de $T = 7,42\sqrt{\frac{l}{g}}$

11.4. Función Error

La función error se define a partir de calcular el área de la función e^{-t^2} .

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Esto sirve porque una integral muy típica es calcular la distribución acumulativa de la gaussiana normalizada. Esta distribución acumulativa es:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})$$

$$\operatorname{erf}(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$$

Función error complementaria: También definimos la complementaria como:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

Función error positiva:

$$\operatorname{erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{t^2} dt$$

Aproximación:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \dots\right) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dots\right)$$

Propiedades:

- $\operatorname{erf}(\infty) = 1$
- $\operatorname{erf}(ix) = i \operatorname{erfi}(x)$
- $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$

11.4.1. Series Asimptóticas

Vamos a expandir la función $\operatorname{erfc}(x)$. Tenemos que:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

Podemos expandirlo de manera asintótica usando unos truquitos.

We are going to expand the integral in (10.1) in a series of inverse powers of x . To do this we write

$$(10.2) \quad e^{-t^2} = \frac{1}{t} t e^{-t^2} = \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right)$$

and integrate by parts as follows:

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \int_x^\infty e^{-t^2} dt &= \int_x^\infty \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \Big|_x^\infty - \int_x^\infty \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2x} e^{-x^2} - \frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Now in the last integral in (10.3), write $(1/t^2)e^{-t^2} = (1/t^3)(d/dt)(-\frac{1}{2}e^{-t^2})$, and again integrate by parts:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt &= \int_x^\infty \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{t^3} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \Big|_x^\infty - \int_x^\infty \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \left(-\frac{3}{t^4} \right) dt \\ &= \frac{1}{2x^3} e^{-x^2} - \frac{3}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t^4} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Continue this process, and substitute (10.3) and the following steps into (10.1) to get (Problem 1)

Entonces, nos queda que:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots \right)$$

Por ejemplo, podemos parar tras unos cuantos términos y tener algo como:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} \right) + \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \int_x^\infty t^{-4} e^{-t^2} dt$$

11.4.2. Fórmula de Stirling

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

O bien, se puede escribir como:

$$\Gamma(p+1) \sim p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p}$$

Esto es válido para p grandee.

11.5. Integrales Elípticas

11.5.1. Forma de Legendre

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad 0 \leq k \leq 1$$

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \quad 0 \leq k \leq 1$$

Jacobi Forms

Si ponemos $t = \sin \theta$, $x = \sin \phi$. Entonces obtenemos las formas de Jacobi.

$$F(\phi, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - k^2 t^2}}$$

$$E(\phi, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

Integrales Completas

Las completas se consiguen cuando $\phi = \pi/2$. Tenemos entonces:

$$K(k) = F(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - k^2 t^2}}$$

$$E(k) = E(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

Estas funciones se pueden usar para encontrar la longitud de arco de una elipse.

► **Example 5.** Let a pendulum swing through large angles. We had in Section 8

$$(12.5) \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} \cos \theta + \text{const.},$$

and we considered 180° swings, that is of amplitude 90° . Now we want to consider swings of any amplitude, say α ; then $\dot{\theta} = 0$ when $\theta = \alpha$, and (12.5) becomes

$$(12.6) \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \alpha).$$

Integrating (12.6), we get

$$(12.7) \quad \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{T_\alpha}{4},$$

where T_α is the period for swings from $-\alpha$ to $+\alpha$ and back. This integral can be written as an elliptic integral; its value (Problem 17) is

$$(12.8) \quad \sqrt{2} K \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Then (12.7) gives for the period

$$T_\alpha = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \sqrt{2} K \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

For α not too large (say $\alpha < 90^\circ$, $\frac{1}{2}\alpha < 45^\circ$, so that $\sin^2(\alpha/2) < \frac{1}{2}$), we can get a good approximation to T_α by series (Problem 1):

$$(12.9) \quad T_\alpha = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \cdots \right).$$

For α small enough so that $\sin \alpha/2$ can be approximated by $\alpha/2$, we can write

$$(12.10) \quad T_\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \cdots \right).$$

For very small α , we get the familiar formula for simple harmonic motion, $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ independent of α . For somewhat larger α , say $\alpha = \frac{1}{2}$ radian (about 30°), we get

$$(12.11) \quad T_{\alpha=1/2} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{64} + \cdots \right).$$

This would mean that a pendulum started at 30° would get exactly out of phase with one of very small amplitude in about 32 periods.

For another physics problem giving rise to an elliptic integral, see Am. J. Phys. **55**, 763 (1987).

12. Soluciones en Serie

12.1. Resolución por series:

Tenemos una ecuación diferencial cualquiera. Y proponemos una solución de la forma:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{aligned}$$

Luego, se meten estas expresiones a la ecuación diferencial y se encuentra alguna fórmula de recurrencia para las a_i . Para lograr eso, se hace lo posible para que todas las sumas corran iguales y que los exponentiales sean iguales.

El método se puede usar para aproximar en x_0 usando una serie con $(x - x_0)^n$.

El método funciona siempre y cuando la ecuación de la forma $y'' + P(x)y' + Q(x) = R(x)$ y las funciones P, Q, R sean analíticas en $x = x_0$.

12.2. Ecuación de Legendre:

La ecuación es:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

Nuevamente proponemos una solución en suma y al reemplazarla nos queda:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} l(l+1)a_n x^n &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + l(l+1)a_n]x^n &= 0 \end{aligned}$$

En la primera suma cambiamos n por $n+2$ (que varía de 2 a infinito) habría que sumar los términos correspondientes a $n=0, n=1$ que estamos desechando pero estos desaparecen porque valen 0. Entonces obtenemos la fórmula de recurrencia:

$$a_{n+2} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

Entonces, la solución general al sustituir los coeficientes es:

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left[1 - \frac{l(l+1)}{2!}x^2 + \frac{l(l+1)(l-2)(l+3)}{4!}x^4 - \dots \right] + \\ &+ a_1 \left[x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3 + \frac{(l-1)(l+2)(l-3)(l+4)}{5!}x^5 - \dots \right] \end{aligned}$$

Esta solución en serie converge para $|x| < 1$.

12.2.1. Polinomios de Legendre

Si l es un entero, entonces alguna de las soluciones a la ecuación de Legendre se cortan y nos queda un polinomio. Si l es natural y par, entonces nos queda un polinomio par (el de a_0) y si l es impar, entonces nos queda un polinomio impar (el de a_1).

Denotamos por $P_l(x)$ a la solución polinómica de la ecuación de Legendre correspondiente a l . **Normalización:** Además, le pedimos que $P_l(1) = 1$ para definirlo totalmente. Le llamamos la **función de Legendre de primer tipo**. La función de segundo tipo es la que no se detiene en polinomio y es una serie infinita.

Tenemos por ejemplo:

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Problema de Eigenvalores: Si denotamos por $f(D) = (1 - x^2)D^2 - 2xD$, entonces el problema de encontrar una solución se reduce a encontrar una y tal que $f(D)(y) = -l(l+1)y$. Un problema de Eigenvalores.

12.2.2. Fórmula de rodrigues

Se pueden generar los polinomios de Lagrange de una forma mejor:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

dem: Probamos primero que si $v = (x^2 - 1)^l$ entonces $d^l v / dx^l$ es una solución de la ecuación de Legendre y probamos que la fórmula cumple $P(1) = 1$. Pag 568.

12.2.3. Función Generadora de Polinomios de Legendre

Si tenemos una sucesión de funciones $\phi_n(x)$, entonces una función generadora de estas funciones es una función $\Phi(x, h)$ tal que se desarrolla en serie de h como $\Phi(x, h) = P_0(x) + P_1(x)h + P_2(x)h^2 + \dots$. En el caso de las de Legendre se puede demostrar que para $|h| < 1$:

$$\Phi(x, h) = (1 - 2xh + h^2)^{-1/2} = P_0(x) + P_1(x)h + P_2(x)h^2 + \dots$$

Dem: Algo trabajos, pag 570. Probamos primero que se cumple que $(1 - x^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + h \frac{\partial^2}{\partial h^2} (h\Phi) = 0$

Luego sustituimos Φ en forma de serie para tener que $(1 - x^2) \sum h^l P_l''(x) - 2x \sum h^l P_l'(x) + \sum l(l+1)h^l P_l(x) = 0$. Entonces el coeficiente para cada h^l debe de ser 0. Y por tanto, cada P_l cumple la ec. de Legendre. Para ver que $P_l(1) = 1$, vemos que $\Phi(1, h) = 1 + h + h^2 + \dots$

12.2.4. Relaciones de Recurrencia:

- $lP_l(x) = (2l-1)xP_{l-1}(x) - (l-1)P_{l-2}(x)$
- $xP'_l(x) - P'_{l-1}(x) = lP_l(x)$
- $P'_l(x) - xP'_{l-1}(x) = lP_{l-1}(x)$
- $(1-x^2)P'_l(x) = lP_{l-1}(x) - lP_{l+1}(x)$
- $(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$
- $(1-x^2)P'_{l-1}(x) = lP_{l-1}(x) - lP_l(x)$

La primera relación es la mejor para obtener $P_l(x)$ conociendo los polinomios anteriores.

Dem: De la función generadora, al derivar tenemos que $(1-2xh+h^2)\frac{\partial\Phi}{\partial h} = (x-h)\Phi$.

Luego sustituimos la expresión de Φ en forma de serie y nos queda que $(1-2xh+h^2)\sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x) =$

$(x-h)\sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x)$. Luego reacomodando los índices y simplificando nos queda la relación que se buscaba.

12.2.5. Relación con Potenciales

Digamos que tenemos una partícula \mathbf{r} y queremos medir el potencial eléctrico en un punto \mathbf{R} . Tenemos que el potencial entre ellos es:

$$V = \frac{K}{|\vec{R} - \vec{r}|} = \frac{K}{R\sqrt{1 - 2\frac{r}{R}\cos\theta + \left(\frac{r}{R}\right)^2}}$$

Podemos hacer el cambio de variable $h = r/R$, $x = \cos\theta$ y escribir el potencial como:

$$\begin{aligned} V &= \frac{K}{R}(1-2hx+h^2)^{-1/2} = \frac{K}{R}\Phi(x, h) \\ &= \frac{K}{R}\sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x) = K\sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l P_l(\cos\theta)}{R^{l+1}} \end{aligned}$$

Generalización: Supongamos que tenemos varias cargas q_i en \vec{r}_i . Entonces, el potencial eléctrico en un punto \vec{R} debido a una carga r_i es de:

$$V_i = K'q_i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_i^l P_l(\cos\theta)}{R^{l+1}}$$

Con θ_i el ángulo entre los vectores. Luego, el potencial total debido a todas las cargas es de:

$$V = \sum_i V_i = K' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sum_i q_i r_i^l P_l(\cos\theta_i)}{R^{l+1}}$$

Cargas continuas: Si tenemos una distribución continua, entonces la suma sobre i se convierte en una integral. Una integral del tipo $\int \int \int r^l P_l(\cos\theta) \rho dV$.

Entonces, el potencial se convierte en:

$$V = K' \sum_l \frac{1}{R^{l+1}} \int \int \int r^l P_l(\cos \theta) \rho dV$$

La suma exterior se puede interpretar. El término de $l = 0$ es $\frac{1}{R} \int \int \int \rho dV = \frac{1}{R} Q_{Tot}$.

El término de $l = 1$ es $\frac{1}{R^2} \int \int \int r \cos \theta \rho dV$ y se llama el momento dipolar. Luego sigue el momento cuadrupolar, y así sucesivamente.

Teorema: Cualquier polinomio de grado n se puede escribir como combinación lineal de polinomios de Legendre de orden $l \leq n$.

12.2.6. Conjunto de Funciones Ortogonales

Un conjunto de funciones A, B son ortogonales en $[a, b]$ si $\int_a^b A^*(x)B(x)dx = 0$.

Un conjunto de funciones es ortogonal si son ortogonales a pares y el producto de una consigo misma es una constante distinta de 0.

Completo: Una base es completa si no hay una función ortogonal a todos los elementos de la base. Y se pueden usar para expresar cualquier función como una serie de estas funciones.

12.2.7. Ortogonalidad de los Polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre son un conjunto ortogonal en $[-1, 1]$, pues cumplen que:

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_m(x)dx = 0$$

si $l \neq m$.

Dem: Escribimos la ecuación diferencial para P_l y para P_m en forma reducida. Luego multiplicamos en cruzado por P_l y P_m . Luego restamos y el resultado lo integramos entre -1,1.

Otra propiedad es que cualquier polinomio de grado menor que l es ortogonal a P_l .

Con esto se puede probar también que $\int_{-1}^1 P_l(x)dx = 0$ para todo $l > 0$.

Sólo consideramos $\int_{-1}^1 P_l(x)P_0(x)dx$

12.2.8. Normalización de los polinomios

Notamos lo siguiente:

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1}$$

Entonces, las funciones de Legendre normalizadas son $\sqrt{(2l+1)/2}P_l(x)$ son ortonormales en $[-1, 1]$.

Y en general, tenemos que:

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$$

12.2.9. Serie de Legendre

Como los polinomios de Legendre forman un conjunto completo y ortogonal en $[-1, 1]$, podemos expandir funciones de este intervalo en términos de polinomios de Legendre.

Sea $f(x)$ en este intervalo. Entonces ponemos:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)$$

Luego multiplicamos ambos lados por $P_m(x)$ e integramos:

$$\int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = c_m \frac{2}{2m+1}$$

Entonces, nos queda que:

$$c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx$$

Para que el desarrollo en serie sea válido, basta con las condiciones de Dirichlet como en Fourier.

Además, dan la mejor aproximación polinomial de una función.

12.2.10. Funciones de Legendre Asociadas

Generalizamos: Una ecuación diferencial asociada a la de Legendre pero más general es:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

Con $m^2 \leq l^2$. Para $m = 0$, esta ecuación se reduce a la original de Legendre. Llamamos P_l^m a las soluciones de esta ecuación para un cierto l, m enteros (m positivo). Entonces, resulta que se pueden conseguir a partir de los polinomios de Legendre como:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

Si cambiamos m por $-m$ en la ecuación diferencial, la solución es la misma.

Dem: Sustituimos $y = (1-x^2)^{m/2} u$ en la ec. diferencial y obtenemos $(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [l(l+1) - m(m+1)]u = 0$ que indica que para $m = 0$, u es un polinomio de Legendre. Luego derivamos y obtenemos $(1-x^2)(u')'' - 2[(m+1)+1]x(u')' + [l(l+1) - (m+1)(m+2)]u' = 0$ que es la misma ecuación pero con u' en vez de u y $m+1$ en vez de m .

También se puede usar la fórmula de Rodrigues para tener:

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

Resulta que para un m fijo, estas funciones son un sistema ortogonal de funciones con norma cuadrada de $\frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$

Ortogonalidad de las funciones asociadas:

$$\int_{-1}^1 P_k^m P_l^m dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{kl}$$

12.3. Método de Frobenius

Punto Singular: $x = x_0$ es un punto singular de la EDO si alguna de las funciones p, q no es singular en x_0 . Entonces, no se pueden desarrollar como serie de potencias. Sin embargo, hay dos casos de puntos singulares:

- 1) **Punto Singular Regular:** Es un punto x_0 que es singular pero que $(x - x_0)p(x)$, $(x - x_0)^2q(x)$ son analíticas en $x = x_0$
- 2) Punto singular irregular: Caso contrario.

Nos fijaremos en los PSR y principalmente cuando $x_0 = 0$.
Digamos que tenemos una ecuación diferencial de este tipo:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Entonces, por la condición de PSR, tenemos que $xp(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ y que $x^2q(x) =$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$$

Entonces, la ecuación queda como:

$$\begin{aligned} y'' + \frac{f(x)}{x}y' + \frac{g(x)}{x^2}y &= 0 \\ \Rightarrow x^2y'' + xf(x)y' + g(x)y &= 0 \end{aligned}$$

Donde f, g son analíticas en $x = 0$. Esta es la forma más general de una ecuación con un PRS en $x_0 = 0$.

Para resolver estas ecuaciones, se propone una solución de la forma:

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{con } a_0 \neq 0, s \in \mathbb{R}$$

Por qué se propone este tipo de soluciones? Eso porque una EDO con PRS en $x_0 = 0$ se puede ver como:

$$x^2y'' + xf_0y' + g_0y = 0$$

Cerca del 0, cuando expandemos $f(x)$ y $g(x)$. Esta es una **Ecuación de Cauchy- Euler**.

Para resolverla, se propone una solución de la forma $y(x) = x^s$, lo que resulta en que

ecuación indicial: $s(s-1) + sf_0 + g_0 = 0$.

Entonces, cerca del cero, la solución es x^{s_1}, x^{s_2}

Por eso, para la ecuación general en cualquier punto, proponemos una solución de la forma x^s multiplicado por una expansión analítica.

Para resolver, proponemos una solución de la forma:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+s} \\
y'(x) &= \sum_{n \geq 0} (n+s) a_n x^{n+s-1} \\
y''(x) &= \sum_{n \geq 0} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-2}
\end{aligned}$$

Luego, se sustituye esto y se ve qué hacer con los coeficientes. Generalmente se encuentra la ecuación indicial fácilmente para encontrar los valores posibles de s y nos puede dar distintos casos.

12.3.1. Teorema de Fuchs

Digamos que tenemos que $x^2 y'' + x f(x) y' + g(x) y = 0$

Entonces, la ecuación indicial es: $s(s-1) + s f_0 + g_0 = 0$. Y digamos que las dos raíces son $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \geq s_2$

Entonces, el teorema asegura que **Siempre** existe una solución:

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0 \neq 0$$

Para la segunda solución, tenemos tres casos:

a) Si $s_1 - s_2 \notin \mathbb{N}$, entonces la segunda solución es:

$$y_2(x) = x^{s_2} \sum b_n x^n \quad b_0 \neq 0$$

b) $s_1 = s_2$, entonces, la segunda solución es:

$$y_2(x) = x^{s_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + y_1(x) \log x$$

c) Si $s_1 - s_2 \in \mathbb{N}$, entonces, la segunda solución es:

$$x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + d \cdot y_1(x) \cdot \log(x) \quad b_0 \neq 0, d \in \mathbb{R}$$

Donde los parámetros como el d hay que calcularlos. Esto se puede ver al resolver la ecuación de CE y generalizar.

12.4. Ecuación de Bessel

La ecuación de Bessel es:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Con p una constante (el orden de la función de Bessel correspondiente). Se puede escribir en su forma reducida como:

$$x(xy')' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Proponemos una solución en series como $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$, $y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)x^{n+s-1}$, $xy' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)x^{n+s}$, $(xy')' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)^2 x^{n+s-1}$, $x(xy')' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)^2 x^{n+s}$

Ahora metemos todo esto en la ecuación de Bessel:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)^2 x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n x^{n+s} = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)^2 x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n x^n = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)^2 x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n x^n = 0 \\ \Rightarrow & a_0 s^2 + a_1(s+1)^2 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n+s)^2 x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - p^2 a_0 - p^2 a_1 x - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n x^n = 0 \\ \Rightarrow & a_0(s^2 - p^2) + a_1[(s+1)^2 - p^2]x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} + a_n[(n+s)^2 - p^2])x^n = 0 \end{aligned}$$

Como $a_0 \neq 0$, entonces $s = \pm p$. Entonces, a menos que $p = -1/2$, debemos de tener que $a_1 = 0$. Obtenemos la fórmula de recurrencia: $a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2 - p^2}$.

Entonces, para el caso en que $s = p$, tenemos que $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}$.

Entonces tenemos que $a_2 = -\frac{a_0}{2^2(1+p)}$, $a_4 = \frac{a_0}{2^4 2!(1+p)(2+p)} = \frac{a_0 \Gamma(p+1)}{2^4 2! \Gamma(p+3)}$, $a_6 = \frac{a_0 \Gamma(p+1)}{3! 2^6 \Gamma(p+4)}$.

Y en general tenemos que $a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0 \Gamma(p+1)}{n! 2^{2n} \Gamma(p+n+1)}$

Se escoge el a_0 de tal forma que $a_0 \Gamma(p+1) = \frac{1}{2^p}$.

Entonces, nos queda que la serie es:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^s [a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots] \\ &= a_0 x^p \Gamma(1+p) \left[\frac{1}{\Gamma(p+1)} - \frac{1}{\Gamma(p+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \Gamma(p+3)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right] \\ &= \frac{x^p}{2^p} \left[\frac{1}{\Gamma(p+1)} - \frac{1}{\Gamma(p+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \Gamma(p+3)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

Entonces, la **función de Bessel de Primera especie** se define como:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Estas funciones se suelen ver como senos o cosenos amortiguados.

Segunda Solución: Si hubiéramos tomado $s = -p$, la solución que nos queda es:

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

Sin embargo, si p es un entero, esta segunda solución no es independiente, pues se tiene que $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$.

Aunque J_{-p} es una segunda solución si p no es entero, se suele tomar una combinación de J_p y J_{-p} como segunda solución:

Función de Weber:

$$Y_p(x) = \frac{\cos(\pi p)J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(\pi p)}$$

Para p entero, es una forma indeterminada $0/0$. Sin embargo, para cualquier $x \neq 0$, tiene un límite conforme p tiende al entero, por lo que da una solución válida. Y además es l.i. respecto a la primera solución.

En cualquier caso, la solución completa es:

$$y = AJ_p(x) + BY_p(x)$$

Graphs: Todas las J_p con $p \neq 0$ empiezan en 0 y se parecen a x^p . Luego actúan como un seno que baja de magnitud. Excepto J_0 , que empieza en 1 y luego baja, actúa como un coseno amortiguado.

Las Y_p empiezan en $\pm\infty$ y luego también oscilan bajando de magnitud.

Los 0s de las funciones están distribuidos en intervalos irregulares. Sin embargo, conforme x crece, los 0s se empiezan a separar por π como el seno o coseno.

12.4.1. Relaciones de Recurrencia

a) $\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x)$

b) $\frac{d}{dx}[x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x)$

c) $J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x)$

d) $J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x)$

e) $J'_p(x) = -\frac{p}{x} J_p(x) + J_{p-1}(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x)$

12.4.2. Ecuaciones Diferenciales con soluciones de Bessel

Muchas veces aparecen ecuaciones diferenciales parecidas a las de Bessel. Para resolverlas, muchas veces la solución se parece a la función de Bessel o tiene alguna relación.

Por ejemplo, tenemos la ecuación:

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + \left[(bcx^{c-1})^2 + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2} \right] y = 0$$

Y resulta que tiene como solución $y = x^a Z_p(bx^c)$ con Z_p una función J_p o Y_p .

Muchas ecuaciones se pueden poner de esta forma y por tanto usar estas soluciones.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación $y'' + 9xy = 0$

Tendremos que $a = 1/2, c = 3/2, b = 2, p = 1/3$.

Entonces tiene como soluciones $x^{1/2}[AJ_{1/3}(2x^{3/2}) + BN_{1/3}(2x^{3/2})]$

12.4.3. Otros tipos de funciones de Bessel

Como las ecuaciones de Bessel son de segundo orden, tienen dos soluciones l.i. que ya conseguimos. Sin embargo se pueden escribir varias funciones diferentes como combinaciones lineales distintas de estas soluciones (que vuelven a ser soluciones a la ecuación de Bessel correspondiente).

Por ejemplo, tenemos:

Funciones de Hankel (Funciones de Bessel del tercer tipo):

$$\begin{aligned} H_p^{(1)}(x) &= J_p(x) + iY_p(x) \\ H_p^{(2)}(x) &= J_p(x) - iY_p(x) \end{aligned}$$

Éste es un nuevo sistema de soluciones a la ecuación de Bessel para p .

Es como tenemos las soluciones $\cos x, \sin x$ de una ec. Pero luego podemos crear otras soluciones $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$.

Funciones de Bessel Hiperbólicas

Así se llaman las soluciones de:

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0$$

Las dos soluciones a esta ec. diferencial que se suelen usar son:

$$\begin{aligned} I_p(x) &= i^{-p} J_p(ix) \\ K_p(x) &= \frac{\pi}{2} i^{p+1} H_p^{(1)}(ix) \end{aligned}$$

Que son como las soluciones $\sinh(x) = -i \sin(ix)$ o bien $\cosh(x) = \cos(ix)$. Se pueden resolver usando la ecuación diferencial general con soluciones de Bessel. Y se muestra que las soluciones son $Z_p(ix)$. Sin embargo, se escriben las soluciones como antes por alguna razón.

Funciones Esféricas de Bessel:

Si $p = n + \frac{1}{2}$. Entonces $J_p(x), N_p(x)$ se llaman funciones de Bessel de un medio entero. Éstas se pueden escribir como seno o cosenos multiplicados por potencias de x . Definimos las funciones de Bessel correspondientes como:

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) = x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\sin x}{x} \right) \\ y_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x) = -x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\cos x}{x} \right) \\ h_n^{(1)} &= j_n(x) + iy_n(x) \\ h_n^{(2)} &= j_n(x) - iy_n(x) \end{aligned}$$

.

Funciones de Kelvin

Tenemos la ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - ix = 0$$

Se relaciona con la ecuación parecida a Bessel. Se llega entonces a que la solución es $Z_o(i^{3/2}x)$. Se suelen definir la parte real y la parte imaginaria como las funciones que nos interesan:

$$\begin{aligned} J_0(i^{3/2}x) &= ber(x) + ibei(x) \\ K_0(i^{1/2}x) &= Ker(x) + iKei(x) \end{aligned}$$

Funciones de Airy

La ec. diferencial de Airy es:

$$y'' - xy = 0$$

Por lo visto en ecuaciones parecidas a Bessel, la solución es $\sqrt{x}Z_{1/3}(\frac{2}{3}ix^{2/3})$.

Donde Z es alguna de las soluciones de Bessel. Luego, estas soluciones se pueden escribir en términos de $I_{1/3}, K_{1/3}$. Las funciones de Airy son entonces:

$$\begin{aligned} Ai(x) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{3}} K_{1/3} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} \right) \\ Bi(x) &= \sqrt{\frac{x}{3}} \left[I_{-1/3} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} \right) + I_{1/3} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} \right) \right] \end{aligned}$$

12.4.4. Ortogonalidad de Funciones de Bessel

En general, J_p, J_q no son ortogonales y no es lo que probaremos. Más bien haremos algo análogo a la ortogonalidad de los senos.

Para eso, veamos lo siguiente:

Seno y Coseno:

Tenemos las dos funciones \sin, \cos .

Consideramos solamente $\sin x$.

Tiene como ceros a $x = n\pi$. Por lo que cumple que cuando $x = 1$, se tiene $\sin n\pi x = 0$
 $y = \sin n\pi x$ satisface la EDO $y'' + (n\pi)^2 y = 0$

Bessel

Tenemos las dos funciones J_p, N_p para un p fijo.

Sean $x = \alpha, \beta, \dots$ los ceros de J_p . En $x = 1$ se cumple que $J_p(\alpha x) = J_p(\beta x) = \dots = 0$

La ecuación diferencial que satisface $y = J_p(\alpha x)$ es $x(xy')' + (\alpha^2 x^2 - p^2)y = 0$

Entonces, para seno tenemos que $\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx = 0$ para $n \neq m$. Y para las de Bessel tendremos que:

$$\int_0^1 x J_p(\alpha x) J_p(\beta x) dx = 0$$

Para $\alpha \neq \beta$ raíces distintas. Si las raíces son iguales, entonces el resultado es $\frac{1}{2} J_{p+1}^2(\alpha) = \frac{1}{2} J_p'^2(\alpha)$.

Entonces, las funciones $J(\alpha_n x)$ son ortogonales en $(0, 1)$ con respecto a la función de peso x .

Se puede generalizar haciendo un cambio de variable $x = r/a$. Entonces nos $\frac{1}{a^2} \int_0^a r J_p(\alpha r/a) J_p(\beta r/a) dr$.

Por tanto, tenemos que:

$$\int_0^a r J_p(\alpha r/a) J_p(\beta r/a) dr = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ \frac{a^2}{2} J_{p+1}^2(\alpha) = \frac{a^2}{2} J_{p-1}^2(\alpha) = \frac{a^2}{2} J_p'^2(\alpha) & \alpha = \beta \end{cases}$$

12.4.5. Aplicación: Péndulo de Alargamiento

Tenemos un péndulo inicialmente con longitud l_0 . Pero la longitud del péndulo se va alargando según la fórmula $l = l_0 + vt$.

La ecuación diferencial del péndulo es:

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) + mgl \sin \theta = 0$$

Oscilación Pequeña: Suponemos $\sin \theta \sim \theta$. Y cambiamos el diferencial para derivar respecto a l :

$$\frac{dl}{dt} \frac{d}{dl} (ml^2 \frac{d\theta}{dt}) + mgl\theta = 0$$

Entonces, nos queda que:

$$v^2(2l\frac{d\theta}{dl} + l^2\frac{d^2\theta}{dl^2}) + gl\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2}{l}\dot{\theta} + \frac{g}{v^2l}\theta = 0$$

.Esta es una ecuación diferencial de las parecidas a las de Bessel. Por lo que podemos calcular a, b, c, p y concluir que la solución es $a = -1/2, c = 1/2, b = 2\sqrt{g}/v, p = 1$
Entonces, nos queda que:

$$\theta(l) = l^{-1/2}Z_1\left(\frac{2\sqrt{g}}{v}l^{1/2}\right)$$

Para estudiarla mejor, nos conviene poner $u = \frac{2\sqrt{g}}{v}l^{1/2}$. Y entonces, la solución general es:

$$\theta(l) = Au^{-1}J_1(u) + Bu^{-1}Y_1(u)$$

Entonces, la derivada con respecto a l es:

$$\frac{d\theta}{dl} = -Au^{-2}J_1(u) + Au^{-1}J_1'(u) - Bu^{-2}Y_1(u) + Bu^{-1}Y_1'(u)$$

Luego, por las fórmulas de recurrencia de Bessel, se puede probar que:

$$\frac{d\theta}{dl} = -Au^{-1}J_2(u) - Bu^{-1}Y_2(u)$$

Con esto podemos encontrar una solución dada ciertas condiciones iniciales.

12.5. Funciones de Hermite

Funciones de Hermite: Tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$y_n'' - x^2y_n = -(2n+1)y_n$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

La podemos resolver en método de series, pero en vez de eso, usaremos el método de operadores. Para ello, la escribimos como:

$$(22.2) \quad (D-x)(D+x)y = \left(\frac{d}{dx} - x\right)(y' + xy) = y'' - x^2y + y, \quad \text{and similarly} \\ (D+x)(D-x)y = y'' - x^2y - y.$$

Using (22.2), we can write (22.1) in two ways:

$$(22.3) \quad (D-x)(D+x)y_n = -2ny_n \quad \text{or}$$

$$(22.4) \quad (D+x)(D-x)y_n = -2(n+1)y_n.$$

Now let us operate on (22.3) with $(D+x)$ and on (22.4) with $(D-x)$, and change n to m for later convenience:

$$(22.5) \quad (D+x)(D-x)[(D+x)y_m] = -2m[(D+x)y_m],$$

$$(22.6) \quad (D-x)(D+x)[(D-x)y_m] = -2(m+1)[(D-x)y_m].$$

(The brackets have been inserted to clarify our next step.)

Now compare (22.3) and (22.6); if $y_n = [(D-x)y_m]$ and $n = m+1$, the equations are identical. We write

$$(22.7) \quad y_{m+1} = (D-x)y_m$$

and we see that, given a solution y_m of (22.1) for one value of n , namely $n = m$, we can find a solution when $n = m+1$ by applying the “raising operator” $(D-x)$ to y_m . Similarly, from (22.4) and (22.5), we find that (Problem 1)

$$(22.8) \quad y_{m-1} = (D+x)y_m.$$

and we see that, given a solution y_m of (22.1) for one value of n , namely $n = m$, we can find a solution when $n = m+1$ by applying the “raising operator” $(D-x)$ to y_m . Similarly, from (22.4) and (22.5), we find that (Problem 1)

$$(22.8) \quad y_{m-1} = (D+x)y_m.$$

We may call $(D+x)$ a “lowering operator”; these operators are called *creation* and *annihilation* operators in quantum theory. Operators of this kind (see Problems 29, 30, and 23.27 for other examples) are called *ladder operators* since, like the rungs of a ladder, they enable us to go up or down in a set of functions.

Básicamente, lo que notamos es que tenemos un operador que puede convertir una solución en la siguiente al aplicar $(D-x)$.

Por eso se llama **Operador de subida**. Porque convierte una solución en la siguiente. También tenemos un operador de bajada.

Entonces, lo que podemos hacer es resolver la ecuación para $n = 0$. Que es $y_0'' - x^2y_0 = -y_0$. Esta ecuación se puede resolver para dar $y_0 = e^{-x^2/2}$.

Entonces, tenemos que:

$$y_0 = e^{-x^2/2} \\ y_n = (D-x)^n e^{-x^2/2} \\ y_n = e^{x^2/2} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) e^{-x^2}$$

Si multiplicamos por $(-1)^n e^{x^2}$, nos quedan los **polinomios de Hermite**:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Podemos ver por ejemplo, que:

$$H_0(x) = 1 \quad , \quad H_1(x) = 2x \quad , \quad H_3(x) = 4x^2 - 2$$

Los polinomios de Hermite satisfacen la ecuación diferencial: **ecuación de Hermite:**

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

Propiedad de Ortogonalidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & n = m \end{cases}$$

Función generadora:

$$\Phi(x, h) = e^{2xh - h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{h^n}{n!}$$

Recurrencia:

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= 2nH_{n-1}(x) \\ H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

12.6. Funciones de Laguerre:

Los polinomios de Laguerre se puede definir por una fórmula de tipo Rodrigues como:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-1})$$

Al hacer las derivadas obtenemos que:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{x^2}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{x^m}{m!} \end{aligned}$$

Encontramos por ejemplo que:

$$L_0(x) = 1 \quad , \quad L_1(x) = 1 - x \quad , \quad L_2(x) = 1 - 2x + x^2$$

Los polinomios de Laguerre son soluciones a la **ecuación de Laguerre:**

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

Ortogonalidad:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_k(x) dx = \delta_{nk}$$

Función generadora:

$$\Phi(x, h) = \frac{e^{-xh/(1-h)}}{1-h} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)h^n$$

Fórmulas de recurrencia:

- a) $L'_{n+1}(x) - L'_n(x) + L_n(x) = 0$
- b) $(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$
- c) $xL'_n(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$

12.6.1. Polinomios de Laguerre Asociados

Los polinomios asociados de Laguerre se definen al derivar los polinomios:

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x)$$

Los polinomios asociados satisfacen la ecuación:

$$xy'' + (k+1-x)y' + ny = 0$$

Estos asociados también se pueden conseguir con una fórmula tipo Rodrigues:

$$L_n^k(x) = \frac{x^{-k}e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+k}e^{-x})$$

Ortogonalidad:

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-x} L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{nm}$$

13. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Tenemos los siguientes tipos de ecuaciones diferenciales:

- **Ecuación de Laplace:**

$$\nabla^2 u = 0$$

- **Ecuación de Poisson:**

$$\nabla^2 u = f(x, y, z)$$

- **Ecuación de Calor:**

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

■ Ecuación de Onda

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

■ Ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0$$

■ Ecuación de Schrodinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Para resolver estos problemas se suele usar el método de separación de variables. En el que se sugiere una solución como de la forma $X(x)Y(y)Z(z)$ y se mete en la ecuación dif. Luego se separa en cada una de las variables con una constante de separación. Luego nos aseguramos de cumplir con las condiciones de frontera.

13.1. Ecuación de Laplace

13.1.1. Rectangular 2d

Tenemos la ecuación:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Proponemos una solución de la forma $T(x, y) = X(x)Y(y)$. Y al sustituir nos queda que:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Luego, podemos pasar la Y del otro lado y ambos lados deben de ser constantes. Los igualamos a una constante $-k^2$ y nos queda:

$$\begin{aligned} X'' &= -k^2 X \\ Y'' &= k^2 Y \end{aligned}$$

El signo de la constante depende de cuál de las dos soluciones queremos que sea oscilante y cuál queremos que sea un exponencial (positivo o negativo). En este caso, queremos que la Y se vaya a cero conforme y va a infinito.

Entonces tenemos que:

$$X = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} \quad Y = \begin{cases} e^{kx} \\ e^{-kx} \end{cases}$$

Luego se puede adaptar para que cumpla con las condiciones de frontera:

Ejemplo: Queremos que $T(0, y) = T(L, y) = 0$ y que $T(x, 0) = 100$ y que $\lim_{y \rightarrow \infty} T(x, y) = 0$. Entonces, viendo la solución pasada, eliminamos el coseno (porque queremos $X(0) = 0$), eliminamos el exponencial positivo (porque queremos que $Y(y)$ tienda a 0 conforme $y \rightarrow \infty$). Además queremos que $X(L) = \sin(kx) = 0$. Lo que nos deja solamente con ciertas posibilidades para k :

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Por tanto, las soluciones son todas de la forma:

$$T(x, y) = e^{-n\pi y/L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Sin embargo, esta solución no cumple la condición de frontera. Pero podemos sumar muchas de estas funciones para distintos n :

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\pi y/L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Como queremos que cumpla la última condición, reemplazamos $y = 0$ y nos queda que queremos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} = 100$$

Esto es una serie de Fourier de senos en el intervalo $[0, L]$ por lo que los coeficientes se pueden obtener como:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L 100 \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Con ello, podemos encontrar la temperatura de equilibrio como una serie con estos coeficientes de Fourier.

Ejemplo 2: Digamos que ahora la placa es finita. Cumple que $T(0, y) = T(L, 0) = 0$, $T(x, 0) = f(x)$, $T(x, M) = 0$.

Entonces ya no tenemos razón para desechar al exponencial positivo. Entonces, la solución vertical tendrá que ser $\sinh k(M - y)$ para que valga 0 en la esquina superior.

Por tanto, la combinación de las soluciones es:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi}{L}(M - y) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Para que cumpla la condición de que $T(x, 0) = f(x)$, entonces sustituimos $y = 0$ y nos queda:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi}{L} M \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Y definimos $b_n = B_n \sinh \frac{n\pi}{L} M$. Con ello, nos queda que $f(x) = \sum b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$. Y entonces b_n se puede calcular como los coeficientes de la serie de senos.

Si tenemos una placa en las cuatro caras son funciones distintas de 0, entonces resolvemos 4 problemas distintos (uno en el que cada lado es distinto de 0 y los demás son 0) y sumamos las respuestas.

13.1.2. Cilindro

Buscamos resolver:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Y proponemos una solución del tipo $u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ y lo sustituimos. Nos queda:

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Luego usamos una variable de separación k^2 . Y nos queda que $\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2$.

Luego nos queda la otra parte como $\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + k^2 = 0$

Luego, podemos multiplicar por r^2 y luego separar esta ecuación en sus partes. $\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) +$

$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + k^2 r^2 = 0$. Entonces, nos queda la primera parte $\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -n^2$.

Y exigimos que n sea un entero. Esto porque la solución $\sin n\theta, \cos n\theta$ tiene que ser de periodo 2π (porque podemos dar una vuelta y el valor de la función debe de ser la misma).

Entonces, nos quedan las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 & \Rightarrow Z(z) = \begin{cases} e^{Kz} \\ e^{-Kz} \end{cases} \\ \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -n^2 & \Rightarrow \Theta(\theta) = \begin{cases} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{cases} \\ r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (K^2 r^2 - n^2) R = 0 & \Rightarrow R(r) = \begin{cases} J_n(Kr) \\ Y_n(Kr) \end{cases} \end{aligned}$$

La última ecuación la identificamos como una ecuación de Bessel con soluciones $J_n(Kr), Y_n(Kr)$.

Condiciones Fronteras: Digamos que u vale 100 en la base de un cilindro de radio a (Cuando $r < a, z = 0$) Y vale 0 en la pared (Cuando $r = a$). Y que la temperatura tiende a 0 para z grande.

Como Y_n es infinita para $r = 0$, la desechamos.

Como u vale 0 en la pared lateral, debemos de tener $J_n(Ka) = 0$. Definimos $k = Ka$ y entonces queremos que k sea un cero de J_n . Y la solución en R es $R(r) = J_n(kr/a)$.

Por la condición de que se hace 0 conforme z tiende a infinito, tenemos que $Z(z) = e^{-Kz} = e^{-kz/a}$.

Entonces, las posibles soluciones son:

$$u = \begin{cases} J_n(kr/a) \sin n\theta e^{-kz/a} \\ J_n(kr/a) \cos n\theta e^{-kz/a} \end{cases}$$

Con k un cero de J_n .

Nuestra solución no puede depender de θ por la simetría del problema. Por lo que tomamos la solución correspondiente a $n = 0$ del coseno. (La solución $\Theta(\theta) = 1$).

Entonces, nuestra combinación lineal de soluciones queda como:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0(k_m r/a) e^{-k_m z/a}$$

Con k_m los ceros de J_0 .

Queremos que $u = 100$ cuando $z = 0$. Por lo que tenemos que:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0(k_m r/a) = 100$$

Que es una serie de funciones del tipo $J_0(k_m r/a)$. Ya vimos que estas funciones son ortogonales en $[0, a]$ con respecto a una función de peso r . Donde k_m son los ceros de J_0 . Además,

$$\int_0^a r [J_p(\alpha r/a)]^2 dr = \frac{a^2}{2} J_{p+1}^2(\alpha) = \frac{a^2}{2} J_{p-1}^2(\alpha)$$

Entonces, multiplicamos ambos lados de la expresión de antes por $r J_0(k_\mu r/a)$ e integramos de $r = 0$ hasta $r = a$.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} c_m r J_0(k_m r/a) J_0(k_\mu r/a) = 100 r J_0(k_\mu r/a) \\ \Rightarrow & \int_0^a c_m r J_0(k_m r/a) J_0(k_\mu r/a) dr = \int_0^a 100 r J_0(k_\mu r/a) dr \\ \Rightarrow & c_m \frac{a^2}{2} J_1^2(k_m) = 100 \int_0^a r J_0(k_\mu r/a) dr \\ \Rightarrow & c_m = \frac{200}{a^2 J_1^2(k_m)} \int_0^a r J_0(k_\mu r/a) dr \end{aligned}$$

Por una de las relaciones de recurrencia, se tiene que $\frac{d}{du}[u^p J_p(u)] = u^p J_{p-1}(u)$. En este caso

tenemos que $\frac{d}{du}[u J_1(u)] = u J_0(u)$. Entonces la integral de la derecha es igual a (tras hacer

un cambio de variable para la fórmula anterior) $\left. \frac{ar}{k_\mu} J_1(k_\mu r/a) \right|_0^a = \frac{a^2}{k_m} J_1(k_m)$

Entonces, tenemos que:

$$c_m = \frac{200}{a^2 J_1^2(k_m)} \frac{a^2 J_1(k_m)}{k_m} = \frac{200}{k_m J_1(k_m)}$$

Entonces, ya conociendo los valores de c_m . La solución a nuestro problema original es:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{200}{k_m J_1(k_m)} J_0(k_m r/a) e^{-k_m z/a}$$

Donde k_m son los ceros de J_0 .

Ejemplo 2: Digamos que la base ahora es una función más complicada $f(r, \theta)$

Entonces las soluciones u son iguales pero no podemos decir que u no depende de θ para quedarnos sólo con $n = 0$. Todas las n son válidas. Por lo que la solución es de la forma:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{mn} r/a) (A_{mn} \cos n\theta + B_{mn} \sin n\theta) e^{-k_{mn} z/a}$$

En $z = 0$ se tiene que $u = f(r, \theta)$ por lo que:

$$f(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{mn} r/a) (A_{mn} \cos n\theta + B_{mn} \sin n\theta)$$

Para determinar los coeficientes A_{mn} multiplicamos por $J_\nu(k_{\mu\nu} r/a) \cos \nu\theta$ e integramos sobre toda la base. Por la independencia de sin, cos todos los B_{mn} desaparecen. Y sólo quedan los A_{mn} con $n = \nu$. Por la ortogonalidad de $J_n(k_{mn} r/a)$ sólo queda $A_{\mu\nu}$.

Hacemos algo similar para las B .

13.1.3. Esfera:

Queremos resolver la ecuación de Laplace para una esfera:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

Proponemos $u = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$. Lo metemos y multiplicamos por r^2/u para obtener:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

Luego multiplicamos por $\sin^2 \theta$ y la última parte se convierte en una función de ϕ . Por lo que igualamos a una constante de separación $-m^2$ (con el - y entero porque esta función tiene que ser periódica). Entonces $\frac{1}{\Phi} = \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2$

Luego, la ecuación diferencial queda como:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0$$

Entonces, quedan las ecuaciones:

- $\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi} = -m^2$
- $\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = k$
- $\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (k \sin^2 \theta - m^2) \Theta = 0$

La última ecuación requiere un cambio de variable. Hacemos $x = \cos \theta \Rightarrow dx = -\sin \theta d\theta \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - x^2$. $\frac{d}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$.

Las sustituciones son $\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} = \sin \theta \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} \Theta(x) = -\sin^2 \theta \frac{d\Theta}{dx}$.

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} = -\sin^2 \theta \frac{d}{dx}.$$

Entonces, la ecuación queda como:

$$\begin{aligned} -\sin^2 \theta \frac{d}{dx} \left(-\sin^2 \theta \frac{d\Theta}{dx} \right) + (k \sin^2 \theta - m^2) \Theta(x) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \left(k - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) \Theta &= 0 \end{aligned}$$

Podemos reemplazar k por $l(l+1)$ y obtener:

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) \Theta = 0$$

Esta es la **ecuación de Legendre generalizada**. Recordamos que sólo tiene soluciones finitas en $x = \pm 1$ si l es un entero. Por lo que pedimos que l sea un entero.

Entonces, la solución es $P_l^m(x)$. Por tanto, la solución ya bien es:

$$P_l^m(\cos \theta)$$

Si metemos esta condición para k en la ecuación de R , se puede ver que $R(r) = r^l, r^{-l-1}$.

Entonces, las soluciones son:

$$\begin{aligned} u &= R\Phi\Theta \\ \Phi &= \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases} \\ R &= \begin{cases} r^l \\ r^{-l-1} \end{cases} \\ \Theta &= P_l^m(\cos \theta) \end{aligned}$$

Condiciones de Frontera: Queremos una solución que valga 0 en la superficie inferior de la esfera de radio a y que valga 100 en la superficie superior.

Como sólo nos importa la solución dentro de la esfera, escogemos $R(r) = r^l$ (porque la otra solución r^{-l-1} se hace infinita en el origen).

Entonces, nos queda como solución:

$$u = r^l P_l^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases}$$

$P_l^m(\cos \theta) \sin m\phi$ y $P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi$ se suelen llamar esféricos armónicos y se denotan por $Y_l^m(\theta, \phi)$.

Entonces, la solución en series es:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l^m(\cos \theta) [A_{ml} \sin m\phi + B_{ml} \cos m\phi]$$

Queremos que $u(r = a, \theta, \phi) = f(\theta, \phi)$.

Entonces, sustituimos:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a^l P_l^m(\cos \theta) [A_{ml} \sin m\phi + B_{ml} \cos m\phi]$$

Luego se pueden encontrar los coeficientes A, B usando ortogonalidad.

Ejemplo: Digamos que $f(\theta, \phi)$ vale 100 en el hemisferio superior y 0 en el inferior y que el radio es $r = a$

Como no depende de θ , entonces $m = 0$. Y la serie es $f(\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l a^l P_l(\cos(\theta))$. O lo que es lo mismo, $c_l a^l P_l(x)$ da 0 en $-1 < x < 0$ y da 1 en $0 < x < 1$. Se puede conseguir la serie en polinomios de Legendre.

13.2. Ecuación de Difusión:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Suele describir el flujo de calor. u es la temperatura.

Hacemos una separación de variables $u = F(x, y, z)T(t)$. Metemos esto en la ecuación y separamos las variables. Nos va a quedar que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{F} \nabla^2 F &= -k^2 \Rightarrow \nabla^2 F + k^2 F = 0 \\ \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} &= -k^2 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -k^2 \alpha^2 T \end{aligned}$$

La ecuación del tiempo se puede resolver fácilmente como:

$$T = e^{-k^2 \alpha^2 t}$$

Ejemplo 1: Consideramos un slab de grosor l con las líneas $x = 0, x = l$. Suponemos que el calor sólo fluye en la dirección x .

Digamos que la barra empieza con la distribución estable con 0 grados en $x = 0$ y 100 grados en $x = l$.

Entonces, la solución estable cumple $\frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0$, Por lo que $u_0 = \frac{100}{l}x$

Luego, la solución sigue la ecuación del calor. Ya tenemos $T(t)$ y sabemos que $\frac{d^2 F}{dx^2} + k^2 F = 0$. Por tanto $F(x) = \sin kx, \cos kx$.

Entonces, las soluciones son:

$$u = e^{-k^2 \alpha^2 t} \sin kx, \quad e^{-k^2 \alpha^2 t} \cos kx$$

Quitamos el coseno porque sabemos que $u = 0$ en $x = 0$. También queremos que $u = 0$ en $x = l$, para lo que ponemos $k = n\pi/l$. Entonces nuestras funciones base son $e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$.

Entonces tenemos que la solución es $u = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$.

Queremos que la solución en $t = 0$ sea la solución estacionaria que obtuvimos antes u_0 . Al poner esta condición podemos calcular los coeficientes b_n de la serie de senos.

Tarea 2 Ejercicio de Schrodinger.

13.3. Ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Proponemos $y = X(x)T(t)$, y entonces nos queda:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2$$

Entonces, nos quedan los dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} X'' + k^2 X &= 0 & \Rightarrow & X = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} \\ T'' + k^2 v^2 T &= 0 & \Rightarrow & T = \begin{cases} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{cases} \end{aligned}$$

Donde $\omega = kv$.

Condiciones Frontera: Digamos que el hilo está amarrado en $x = 0, x = l$. Entonces, no nos queda de otra más que la función X sea un seno y que tenga $k_n = n\pi/l$.

Por tanto, nos queda:

$$y = \begin{cases} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi v t}{l} \\ \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi v t}{l} \end{cases}$$

Digamos que la forma original del hilo es $y(x, t = 0) = f(x)$ y que la velocidad del hilo en $t = 0$ es 0. Es decir $\partial y / \partial t = 0$.

Esta segunda condición nos hace eliminar el seno temporal. Entonces, las soluciones generales son:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l}$$

Los coeficientes se escogen de tal forma para que en $t = 0$ nos quede $y_0 = \sum b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x)$.

Es decir, hay que encontrar la serie de Fourier de senos de la $f(x)$

Otra posibilidad: En vez de soltar la cuerda desde el equilibrio, se le da una velocidad inicial $\partial y / \partial t = f(x)$ a cada punto en el inicio (cuando la cuerda está reposando).

Entonces de las posibilidades temporales hay que desechar ahora el coseno. Y quedarnos solamente con:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l}$$

Los coeficientes ahora se buscan de forma que $(\partial y / \partial t)_{t=0} = f(x)$ que también resulta en una serie de senos.

Esto prueba que cualquier vibración es una combinación de los modos normales (los senos solitos).

13.3.1. Vibración de una membrana circular

Tenemos una membrana circular y queremos encontrar $z(x, y, t)$. La ecuación es:

$$\nabla^2 z = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Ponemos $z = F(x, y)T(t)$. Al separar nos quedan las ecuaciones:

$$\nabla^2 F + K^2 F = 0 \quad , \quad T'' + K^2 v^2 T = 0$$

Escogemos coordenadas polares para la de Helmholtz y nos queda:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + K^2 F = 0$$

Y ponemos ahora $F = R(r)\Theta(\theta)$

Las soluciones a esta ecuación son como las del cilindro para la ecuación de temperatura.

Nos queda que $R(r) = J_n(Kr)$ y $\Theta(\theta) = \sin n\theta, \cos n\theta$

Donde n es un entero para que se pariódicas.

Las soluicones Temporales son $T(t) = \sin Kvt, \cos Kvt$.

Además, le imponemos que la membrana del tambor está sostenida en $r = a$, Por lo que $J_n(Ka) = 0$. Entonces hacemos $k = Ka$ que sea un cero de J_n . Entonces nos queda:

$$z = J_n(kr/a) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin kvt/a \\ \cos kvt/a \end{Bmatrix}$$

Para un desplazamiento inicial, escribiremos z como una doble serie y podemos encontrar los coeficientes. Ahora ya no son armónicos, porque las k_{mn} ya no serían espaciadas uniformemente (son los ceros de J)

13.4. Ecuación de Poisson

Potencial: Digamos que tenemos una distribución continua de masa con densidad $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, el potencial en un punto r se consigue sumando expresiones de la forma $-\frac{G\rho d\tau}{|r-r'|}$ que son el potencial de un puntito en r' con masa $\rho d\tau$.

$$V(r) = - \int_{\text{volumen}} \int \int \frac{G\rho d\tau}{|r-r'|} d\tau$$

Además, tenemos que $\vec{F} = -\nabla V$ y por que:

$$\nabla \cdot F = -\nabla^2 V = 0$$

Si lo evaluamos en puntos fuera de la masa.

Ahora qué pasa si $V(r)$ cuando r es un punto dentro de la masa. Suponemos que quitamos una esfera de masa alrededor de r . Entonces r ya está fuera de la masa y para el nuevo campo \mathbf{F}' se cumple que $\mathbf{F}' = 0$.

Luego, si \mathbf{F}_s es la fuerza debido a sólo la esfera, entonces $\mathbf{F} = \mathbf{F}' + \mathbf{F}_s$. Y si sacamos la divergencia, nos queda que $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}_s$

Pero el $\nabla \mathbf{F}_s$ cumple que $\int \int \int_S \nabla \cdot \mathbf{F}_s dV = \int \int_{\partial S} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

Si hacemos tender el radio de la esfera a 0. Entonces la densidad tiende a la constante $\rho(r)$. Y entonces, la esfera contiene una masa total de aprox $\frac{4}{3}\pi a^3 \rho(r)$.

Y el valor de \mathbf{F}_s en la superficie debido a esta esfera es $\frac{GM}{a^2} = G\frac{4}{3}\pi a \rho(r)$ que se dirige hacia adentro.

Entonces, $\mathbf{F}_s \cdot \mathbf{n} = -\frac{4}{3}G\pi a \rho(r)$. Al integrar sobre la superficie de la esfera nos queda $\int \int_{\partial S} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\frac{4}{3}G\pi a \rho(4\pi a^2) = (-\frac{4}{3}G\pi a \rho)(4\pi a^2)$.

Por otro lado, la integral de volumen de la divergencia se convierte en $\nabla \cdot \mathbf{F}_s(r)(\frac{4}{3}\pi a^3)$.

Al juntar los resultados obtenemos que $\nabla \cdot \mathbf{F}_s = -4\pi G\rho$. Y entonces tenemos la **ecuación de Poisson**

$$\nabla^2 V = 4\pi G\rho$$

Y resulta que la fórmula para el potencial que vimos antes es una solución. En general, tenemos

Tenemos la ecuación:

$$\nabla^2 u(x, y, z) = f(x, y, z)$$

Entonces, una solución es :

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int \int \int \frac{f(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'$$

No sólo eso, sino que da una solución que tiende a 0 para distancias infinitas.

Ejemplo: Tenemos una carga q en $(0, 0, a)$. Y una esfera de radio R ($R < a$) que está a potencial 0.

Queremos encontrar el potencial en puntos fuera de la esfera.

Sabemos que el potencial cumple (unidades Gaussianas):

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho$$

Entonces, se puede ver como que tenemos una distribución de carga $\rho = q\delta^3(r' - (0, 0, a))$. Por lo que el potencial es:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi} \int \int \int \frac{-4\pi q \delta^3(r' - (0, 0, a))}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dx' dy' dz' \\ &= \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} \end{aligned}$$

Claro que podríamos haber obtenido este potencial con la fórmula para cargas discretas.

Ahora le podemos añadir una solución a la ecuación de Laplace. Así, se seguirá cumpliendo que $\nabla^2 V = -4\pi\rho$ (Sumar la solución de Laplace no cambia nada ahí) pero ahora con la condición de valer 0 en la esfera

Escribimos como V_q al potencial debido a la carga q que teníamos antes. Lo escribimos en esféricas:

$$V_q = \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos \theta + a^2}}$$

Ahora resolvemos la ecuación de Laplace en esféricas y le ponemos V . Que como vimos en la ecuación de Laplace en esféricas, se tiene que la solución es:

$$\left\{ \begin{matrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{matrix} \right\} P_l^m(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{matrix} \right\}$$

Como nos interesa la región fuera de la esfera, nos fijamos en r^{-l-1} . Y por la simetría, os fijamos en soluciones independientes de ϕ , por lo que $m = 0$. Entonces, la solución general es:

$$V = V_q + \sum_l c_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta)$$

Queremos que valga 0 en la esfera de radio R . Es decir, que $V_{r=R} = 0$. Queremos que:

$$0 = V_{r=R} = \frac{q}{\sqrt{R^2 - 2aR \cos \theta + a^2}} + \sum_l c_l R^{-l-1} P_l(\cos \theta)$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_l c_l R^{-l-1} P_l(\cos \theta) &= -\frac{q}{\sqrt{R^2 - 2aR \cos \theta + a^2}} \\ \Rightarrow \sum_l c_l P_l(\cos \theta) &= -qR^{l+1} \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2aR \cos \theta + a^2}} \end{aligned}$$

Y se sigue y se llega a que (Boas 657):

$$V = \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos \theta + a^2}} - \frac{(R/a)q}{\sqrt{r^2 + (R^2/a)^2 - 2r(R^2/a) \cos \theta}}$$

13.4.1. Funciones de Green

Queremos resolver problemas de la forma:

$$\nabla^2 u = f(x, y, z)$$

Primero resolvermos la ecuación correspondiente de Green:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

Y una solución se consigue como al problema original se consigue como:

$$u(\mathbf{r}) = \int \int \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\tau'$$

Sin embargo, sabemos que la solución es $u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \int \int \frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$

Entonces, la función de Green es:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

13.5. Transformadas Integrales para resolver EDP

13.5.1. Transformada de Laplace

Digamos que queremos resolver la EDP:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Tomamos la transformada respecto al tiempo de ambos lados. Sea $U(x, p) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt$.

Además, tenemos que $L(\partial u / \partial t) = pU - u_{t=0}$.

Por otro lado $L(\partial^2 u / \partial x^2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(u) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$

Ponemos la condición inicial de que $u_{t=0} = 0$. Entonces, la edp se transforma en:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} pU$$

Entonces, tenemos que $U = e^{\sqrt{p}/\alpha x}$, $e^{-\sqrt{p}/\alpha x}$.

Y luego encontramos la combinación lineal adecuada de estas soluciones.

Finalmente, le sacamos la transformada inversa para regresar a la u .

14. Partial deiferential Equations Arfken

Una EDP es una expresión que relaciona U, U_x, U_y, \dots .

Podemos representar muchas operaciones diferenciales por medio de un operador L como $u \rightarrow L(u)$.

Entonces, una ecuación diferencial se puede escribir como:

$$Lu = F$$

Se dice que es **lineal** si L separa sumas y productos escalares.

Si L es lineal, se cumple el principio de superposición para la ecuación homogénea (con $F = 0$).

Ejemplos:

- **Ecuación de Laplace:** $\nabla^2 \psi = 0$
- **Poisson:** $\nabla^2 \psi = -\rho/\epsilon_0$
- **Helmholtz:** $\nabla^2 \psi \pm k^2 \psi = 0$
- **Ecuación de difusión (calor) dependiente del tiempo:** $\nabla^2 \psi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}$
- **Ecuación de onda:** $\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi = 0 \Rightarrow \partial^2 \psi = 0$
- **Schrodinger dep tiempo:** $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$
- **Schrodinger indep tiempo:** $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi$

Téctinas para resolver:

- Separación de Variables
- Conversión en una ecuación integral con **funciones de Green**.
- Transformadas integrales.

14.1. Clases de PDE

Un operador lineal de segundo orden general es:

$$L = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f$$

Esta ecuación se puede transformar a tres tipos de ecuaciones como:

- **Elípticas:** Involucran ∇^2 o $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$

- **Parabólicas:** Involucran $a \frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2$
- **Hiperbólica:** $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$

Partiendo del operador original, se puede encontrar qué tipo de ecuación es al realizar el cambio de variable usando el discriminante. El discriminante es $D = ac - b^2$

14.1.1. Condiciones de Frontera:

- **Cauchy:** Se especifica el valor de la función en una frontera y de su derivada normal.
- **Dirichlet:** Se especifica el valor de la función en la frontera.
- **Neuman:** Se especifica el valor de la derivada normal en la frontera.

Boundary conditions	Type of partial differential equation		
	Elliptic	Hyperbolic	Parabolic
	Laplace, Poisson in (x, y)	Wave equation in (x, t)	Diffusion equation in (x, t)
Cauchy			
Open surface	Unphysical results (instability)	Unique, stable solution	Too restrictive
Closed surface	Too restrictive	Too restrictive	Too restrictive
Dirichlet			
Open surface	Insufficient	Insufficient	Unique, stable solution in one direction
Closed surface	Unique, stable solution	Solution not unique	Too restrictive
Neumann			
Open surface	Insufficient	Insufficient	Unique, stable solution in one direction
Closed surface	Unique, stable solution	Solution not unique	Too restrictive

14.2. Soluciones a PDEs

Table 9.2 Solutions in Spherical Polar Coordinates^a

$\psi = \sum_{l,m} a_{lm} \psi_{lm}$		
1.	$\nabla^2 \psi = 0$	$\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos \theta) \\ Q_l^m(\cos \theta) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}^b$
2.	$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$	$\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} j_l(kr) \\ n_l(kr) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos \theta) \\ Q_l^m(\cos \theta) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}^b$
3.	$\nabla^2 \psi - k^2 \psi = 0$	$\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} i_l(kr) \\ k_l(kr) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos \theta) \\ Q_l^m(\cos \theta) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}^b$

^aReferences for some of the functions are $P_l^m(\cos \theta)$, $m = 0$, Section 12.1; $m \neq 0$, Section 12.5; $Q_l^m(\cos \theta)$, Section 12.10; $j_l(kr)$, $n_l(kr)$, $i_l(kr)$, and $k_l(kr)$, Section 11.7.

^b $\cos m\varphi$ and $\sin m\varphi$ may be replaced by $e^{\pm im\varphi}$.

Table 9.3 Solutions in Circular Cylindrical Coordinates^a

$\psi = \sum_{m,\alpha} a_{m\alpha} \psi_{m\alpha}$		
a.	$\nabla^2 \psi + \alpha^2 \psi = 0$	$\psi_{m\alpha} = \begin{Bmatrix} J_m(\alpha\rho) \\ N_m(\alpha\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{-\alpha z} \\ e^{\alpha z} \end{Bmatrix}$
b.	$\nabla^2 \psi - \alpha^2 \psi = 0$	$\psi_{m\alpha} = \begin{Bmatrix} I_m(\alpha\rho) \\ K_m(\alpha\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha z \\ \sin \alpha z \end{Bmatrix}$
c.	$\nabla^2 \psi = 0$	$\psi_m = \begin{Bmatrix} \rho^m \\ \rho^{-m} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}$

^aReferences for the radial functions are $J_m(\alpha\rho)$, Section 11.1; $N_m(\alpha\rho)$, Section 11.3; $I_m(\alpha\rho)$ and $K_m(\alpha\rho)$, Section 11.5.

14.3. Funciones de Green

Digamos que tenemos una ecuación diferencial de la forma:

$$Ly(\vec{r}_1) = -f(\vec{r}_1)$$

Entonces, definimos la función de Green como la solución a:

$$LG(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Entonces, la solución particular $y(\vec{r}_1)$ es:

$$y(\vec{r}_1) = \int G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) f(\vec{r}_2) d\tau_2$$

Caso electrostático: Para el caso electrostático, buscamos una solución a $\nabla^2 \psi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. Entonces, sabemos de la teoría electromagnética que ψ se puede conseguir como:

$$\psi(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\tau_2$$

Entonces, vemos automáticamente que la función de Green correspondiente es:

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Aquí la conseguimos directamente, pero en realidad la pudimos haber conseguido de resolver $\nabla^2 G = -\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

14.3.1. Simetría de las funciones de Green

Una propiedad importante de las ecuaciones de Green es que cumplen:

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = G(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

Chapter 9 Differential Equations			
Table 9.5 Green's Functions ^a			
	Laplace ∇^2	Helmholtz $\nabla^2 + k^2$	Modified Helmholtz $\nabla^2 - k^2$
One-dimensional space	No solution for $(-\infty, \infty)$	$\frac{i}{2k} \exp(ik x_1 - x_2)$	$\frac{1}{2k} \exp(-k x_1 - x_2)$
Two-dimensional space	$-\frac{1}{2\pi} \ln \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 $	$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)$	$\frac{1}{2\pi} K_0(k \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)$
Three-dimensional space	$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 }$	$\frac{\exp(ik \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{4\pi \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 }$	$\frac{\exp(-k \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{4\pi \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 }$

^aThese are the Green's functions satisfying the boundary condition $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0$ as $\mathbf{r}_1 \rightarrow \infty$ for the Laplace and modified Helmholtz operators. For the Helmholtz operator, $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ corresponds to an outgoing wave. $H_0^{(1)}$ is the Hankel function of Section 11.4. K_0 is the modified Bessel function of Section 11.5.

15. Teoría de Sturm Lioville

15.1. ODEs Autoadjuntos

Tenemos un operador L definido como:

$$Lu(x) = p_0(x)u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x)$$

En una región de interés $[a, b]$

Donde las funciones $p_i(x)$ tiene $2 - i$ derivadas continuas al menos. Y además $p_0(x)$ no se anula en $a < x < b$, esto para que no tengan Puntos singulares estas ecuaciones.

Entonces, le podemos definir un producto como:

$$\begin{aligned}\langle u|L|u \rangle &= \langle u|Lu \rangle = \int_a^b u(x)Lu(x)dx \\ &= \int_a^b [p_0u'' + p_1u' + p_2u]dx\end{aligned}$$

Luego, se puede definir el adjunto como el operador que cumple $\langle v|Lu \rangle = \langle L^*v, u \rangle$. Entonces, resulta que si pedimos que el operador sea autoadjunto, se tiene que:

$$L^*u = Lu = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + q(x)u(x)$$

Esta es la forma general de un operador autoadjunto.

Siempre se puede transformar un operador en uno autoadjunto.

15.2. Eigenfunciones y Eigenvalores

El mejor ejemplo de un problema de eigenvalores en física es:

$$H\psi(x) = \psi(x)$$

Forma general de una ecuación de eigenvalores: La forma general de un problema de eigenvalores es:

$$Lu(x) + \lambda w(x)u(x) = 0$$

Donde λ es el **eigenvalor** (que no nos lo dan inicialmente).

Y $w(x)$ se conoce como la **función de densidad**. La función de densidad cumple que $w(x) > 0$ excepto posiblemente en puntos aislados donde $w(x) = 0$

Para un dado valor de λ , una solución $u_\lambda(x)$ que cumpla las condiciones de frontera se llama **eigenfunción**.

No hay garantía que existirá una eigenfunción para todo λ , más bien, pedir la existencia de

una eigenfunción restringe los valores de eigenvalores.

Ortogonalidad: Si nos dan una ecuación como la de arriba, vamos a definir el producto punto entre dos funciones como:

$$\langle v|u \rangle = \int_a^b v^*(x)w(x)u(x)dx$$

Y decimos que dos funciones son ortogonales si su producto punto es cero.

Table 10.1

Equation	$p(x)$	$q(x)$	λ	$w(x)$
Legendre ^a	$1 - x^2$	0	$l(l+1)$	1
Shifted Legendre ^a	$x(1-x)$	0	$l(l+1)$	1
Associated Legendre ^a	$1 - x^2$	$-m^2/(1-x^2)$	$l(l+1)$	1
Chebyshev I	$(1-x^2)^{1/2}$	0	n^2	$(1-x^2)^{-1/2}$
Shifted Chebyshev I	$[x(1-x)]^{1/2}$	0	n^2	$[x(1-x)]^{-1/2}$
Chebyshev II	$(1-x^2)^{3/2}$	0	$n(n+2)$	$(1-x^2)^{1/2}$
Ultraspherical (Gegenbauer)	$(1-x^2)^{\alpha+1/2}$	0	$n(n+2\alpha)$	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$
Bessel ^b , $0 \leq x \leq a$	x	$-n^2/x$	a^2	x
Laguerre, $0 \leq x < \infty$	xe^{-x}	0	α	e^{-x}
Associated Laguerre ^c	$x^{k+1}e^{-x}$	0	$\alpha - k$	$x^k e^{-x}$
Hermite, $0 \leq x < \infty$	e^{-x^2}	0	2α	e^{-x^2}
Simple harmonic oscillator ^d	1	0	n^2	1

^a $l = 0, 1, \dots, -l \leq m \leq l$ are integers and $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ for shifted Legendre.

^b Orthogonality of Bessel functions is rather special. Compare Section 11.2. for details. A second type of orthogonality is developed in Eq. (11.174).

^c k is a non-negative integer. For more details, see Table 10.2.

^d This will form the basis for Chapter 14, Fourier series.

Ejemplo (ec. de Legendre): La ecuación de Legendre está dada por $(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0$ en $-1 \leq x \leq 1$. Podemos ver que $p = 1 - x^2$, $q = 0$, $w(x) = 1$, $\lambda = n(n+1)$. La restricción de que $\lambda = n(n+1)$ surge de intentar resolver la ec. y estos resultan ser los eigenvalores.

15.2.1. Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera que se piden a soluciones $v(x), u(x)$ son:

$$p(x)v^*(x)\frac{du(x)}{dx}\Big|_a = 0 \quad , \quad p(x)v^*(x)\frac{du(x)}{dx}\Big|_b = 0$$

El intervalo de ortogonalidad es tal que estas condiciones se satisfacen.

Ejemplo: Consideramos $L = d^2/dx^2$. Y la ecuación $\frac{d^2}{dx^2}u(x) + \lambda u(x) = 0$. ($p = 1, q = 1, w = 1$). Entonces, las soluciones son:

$$u_n = \cos \sqrt{\lambda} x, \quad v_m = \sin \sqrt{\lambda_m} x$$

Y las condiciones de frontera nos piden que $-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda_m} x \sin \sqrt{\lambda} x|_a^b = 0$. Esto nos deja con que $\lambda = n^2$.

15.3. Operadores Hermitianos

Dada una ecuación diferencial autoadjunta con soluciones $u(x), v(x)$ que cumplen las condiciones de frontera de arriba, se puede probar que:

$$\int_a^b v^* L u dx = \int_a^b u (Lv)^* dx$$

Lo que significa que L es un operador Hermitiano.

Los operadores Hermitianos son operadores autoadjuntos y tienen las siguientes propiedades:

- 1) Los eigenvalores de operadores Hermitianos son reales
 - 2) Las eigenfunciones de un operador hermitiano son ortogonales
 - 3) Las eigenfunciones de un operador Hermitiano forman un conjunto completo.
- **Dem:** Sea (1) $Lu_i + \lambda_i w u_i = 0$ un operador Hermitiano con eigenfunción u_i y eigenvalor λ_i .
 Digamos que existe otra solución $Lu_j + \lambda_j w u_j = 0$
 Tomamos el conjugado y nos queda (2) $L^* u_j^* + \lambda_j^* w u_j^* = 0$
 Multiplicamos (1) por u_j^* y (2) por u_i y las restamos para obtener:
 $u_j^* Lu_i - u_i L^* u_j^* = (\lambda_j^* - \lambda_i) w u_i u_j^*$
 Luego, integramos de ambos lados para obtener:
 $\int_a^b u_j^* Lu_i dx - \int_a^b u_i L^* u_j^* dx = (\lambda_j^* - \lambda_i) \int_a^b u_i u_j^* w dx$
 Como L es hermitiano, vimos antes que el lado izquierdo se cancela. Y si $i = j$, tenemos que $\lambda_i^* = \lambda_i$.
 Además, vemos que si $i \neq j$, la integral debe de valer 0, por lo que $u_i \perp u_j$.

Degenerancia: Decimos que un eigenvalor es degenerado si tiene más de dos eigenfunciones l.i. correspondientes.

Por ejemplo, para el átomo de hidrógeno, cada Eigenvalor E_n puede tener varias degenerancias.

15.4. Ortogonalización de Gram-Schmidt

Antes que nada, si tenemos una función cualquiera ψ_i en un espacio con producto interno con peso w , tendremos que:

$$||\psi_i||^2 = \int_a^b \psi_i^2 w dx = N_i^2$$

Y podemos normalizarla multiplicando por N_i^{-1} para que ahora tenga norma 1.

Un conjunto de funciones ψ_i son **ortonormales** si:

$$\int_a^b \psi_i(x) \psi_j(x) w(x) dx = \delta_{ij}$$

El proceso de Gram Schmidt nos dice que dado un conjunto de funciones $u_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ que sean l.i, podemos construir un conjunto de funciones ortogonales $\psi_n(x)$. Y posteriormente normalizarlas para tener un conjunto de funciones ortonormales $\phi_n(x)$.

El procedimiento en general es:

$$\blacksquare \psi_i(x) = u_i - a_{i,0}\psi_0 - a_{i,1}\psi_1 - \dots - a_{i,i-1}\psi_{i-1}$$

Donde $a_{i,j} = \int u_i \psi_j w dx = (u_i, \psi_j)$.

Y luego tenemos que:

$$\phi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{(\int \psi_i^2(x) w(x) dx)^{1/2}}$$

Ejemplo: Polinomios de Legendre:

Como hemos visto, la ecuación de Legendre tiene peso $w(x) = 1$ e intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Entonces, consideramos las funciones ortonormales $u_n(x) = x^n$. Podemos construir un conjunto ortonormal usando Gram Schmidt a partir de este conjunto y llegar a:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \phi_1(x) &= \sqrt{\frac{3}{2}} x \\ \phi_2(x) &= \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \end{aligned}$$

Aunque esto tiene la ventaja de introducir los polinomios de Legendre, las funciones originales $u_n = x^n$ no son soluciones de la ecuación de Legendre. Pero las funciones luego obtenidas sí lo son.

15.4.1. Polinomios Ortogonales

Al igual que en el ejemplo anterior, podemos construir conjuntos de polinomios ortonotmales que resuelvan distintas usando las correspondientes funciones de peso y diferentes intervalos. Luego, tenemos los siguientes:

Polynomials	Interval	Weighting function $w(x)$	Standard normalization
Legendre	$-1 \leq x \leq 1$	1	$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$
Shifted Legendre	$0 \leq x \leq 1$	1	$\int_0^1 [P_n^*(x)]^2 dx = \frac{1}{2n+1}$
Chebyshev I	$-1 \leq x \leq 1$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$\int_{-1}^1 \frac{[T_n(x)]^2}{(1-x^2)^{1/2}} dx = \begin{cases} \pi/2, & n \neq 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$
Shifted Chebyshev I	$0 \leq x \leq 1$	$[x(1-x)]^{-1/2}$	$\int_0^1 \frac{[T_n^*(x)]^2}{[x(1-x)]^{1/2}} dx = \begin{cases} \pi/2, & n > 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$
Chebyshev II	$-1 \leq x \leq 1$	$(1-x^2)^{1/2}$	$\int_{-1}^1 [U_n(x)]^2 (1-x^2)^{1/2} dx = \frac{\pi}{2}$
Laguerre	$0 \leq x < \infty$	e^{-x}	$\int_0^\infty [L_n(x)]^2 e^{-x} dx = 1$
Associated Laguerre	$0 \leq x < \infty$	$x^k e^{-x}$	$\int_0^\infty [L_n^k(x)]^2 x^k e^{-x} dx = \frac{(n+k)!}{n!}$
Hermite	$-\infty < x < \infty$	e^{-x^2}	$\int_{-\infty}^\infty [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx = 2^n \pi^{1/2} n!$

15.5. Completés de las Eigenfunciones

Un conjunto de funciones $\phi_n(x)$ se llama **completo** si toda función $F(x)$ (por lo menos más o menos bien comportada) se puede aproximar por la serie:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

En el sentido de que la mean square tiende a 0:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \left[F(x) - \sum_{n=0}^m a_n \phi_n(x) \right]^2 w(x) dx = 0$$

Sin embargo, puede no converger puntualmente en un número finito de puntos.

Donde los coeficinetes se calculan como:

$$a_m = \int_a^b F(x) \phi_m^*(x) w(x) dx$$

15.6. Desigualdad de Bessel

Si el conjunto de funciones $\phi_n(x)$ no forma un conjunto completo (quizá nos falta algún elemento), nos lleva a la desigualdad de Bessel. Si $f(x)$ es una función y a_i son sus coeficientes

de Fourier, entonces:

$$\sum_i a_i^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 w(x) dx$$

Si el conjunto si es completo, se cumple la igualdad, que se llama **relación de Parseval**.

16. Funciones de Bessel

Hacemos un approach un poco distinto al habitual.

Definimos las funciones de Bessel para $n \in \mathbb{Z}$ como aquéllas $J_n(x)$ tales que:

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

Es decir $e^{(x/2)(t-1/t)}$ es la función generadora de las Bessel.

Desarrollando la exponencial con serie de Taylor y así, se puede llegar a que:

Para $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

Las funciones de Bessel oscilan pero no son periódicas porque van perdiendo amplitud y cambiando longitud de onda.

Para $n < 0, n \in \mathbb{Z}$ tenemos que:

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{s!(s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} = (-1)^n J_n(x)$$

16.0.1. Relaciones de Recurrencia

Se puede probar que cumplen:

$$\begin{aligned} J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} J_n(x) \\ J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) &= 2J'_n(x) \end{aligned}$$

Luego, cambiando éstas, tenemos que:

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x)$$

Y muchas otras, pero estas son las que nos serán importantes.

16.0.2. Ecuación diferencial

Digamos que $Z_v(x)$ es una función que satisface las dos relaciones de recurrencia de arriba pero v no es entero. Entonces, $xZ'_v(x) = xZ_{v-1}(x) - vZ_v(x)$

Diferenciando y simplificando, podemos llegar a que **ecuación de Bessel**

$$x^2 Z''_v + x Z'_v + (x^2 - v^2) Z_v = 0$$

Que es la ecuación de Bessel y nos permite definir de forma más general a las funciones de Bessel para coeficiente no entero.

16.0.3. Representación integral:

Usando la definición pero sustituyendo $t = e^{i\theta}$, podemos llegar a que:

$$e^{ix \sin \theta} = J_0(x) + 2[J_2(x) \cos 2\theta + J_4(x) \cos 4\theta + \dots] + 2i[J_1(x) \sin \theta + J_3(x) \sin 3\theta + \dots]$$

Combinando esto y con un poco de trabajo, podemos obtener que:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta$$

16.1. Ortogonalidad

Con algo de trabajo se puede demostrar que:

$$\int_0^a J_v\left(\alpha_{vm} \frac{\rho}{a}\right) J_v\left(\alpha_{vn} \frac{\rho}{a}\right) \rho d\rho = 0$$

Donde α_{vm} es el m-ésimo cero de la función J_v .

Además:

$$\int_0^a \left[J_v\left(\alpha_{vm} \frac{\rho}{a}\right) \right]^2 \rho d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{v+1}(\alpha_{vm})]^2$$

Con lo cual se pueden calcular series de Bessel.

16.2. Funciones de Bessel del segundo tipo

Por la forma de la ecuación dif, claramente $J_v(x)$, $J_{-v}(x)$ son soluciones a la misma eq. diferencial. Si v no es entero, entonces no hay problema y ya tenemos dos soluciones.

El problema es que si v es entero, entonces las soluciones son l.i y de hecho $J_{-n} = (-1)^n J_n$. Entonces, para ello definimos una nueva función:

$$N_v(x) = \frac{\cos v\pi J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin v\pi}$$

Se puede ver que satisface la ecuación de Bessel porque es una combinación lineal de soluciones. Pero además, se puede probar que es independiente a J_v incluso para v entero (calcular su Wronskiano). Por lo que forma una segunda solución.

Esta solución tiene la peculiaridad de que vale $-\infty$ en $x = 0$.

Entonces, una solución general para todo v es:

$$y(x) = AJ_v(x) + BN_v(x)$$

16.3. Funciones de Hankel:

Definimos las funicones de Hankel como:

$$H_v^{(1)}(x) = J_v(x) + iN_v(x)$$

$$H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - iN_v(x)$$

Esto es análogo a tomar $e^{\pm x} = \cos x \pm i \sin x$.

Estas funciones se pueden representar como integrales de contorno:

$$H_v^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty e^{i\pi}} e^{(x/2)(t-1/t)} \frac{dt}{t^{v+1}}$$

$$H_v^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\infty e^{-i\pi}}^0 e^{(x/2)(t-1/t)} \frac{dt}{t^{v+1}}$$

Y además:

$$J_v(x) = \frac{1}{2}[H_v^{(1)}(x) + H_v^{(2)}(x)]$$

$$N_v(x) = \frac{1}{2i}[H_v^{(1)}(x) - H_v^{(2)}(x)]$$

16.4. Funciones de Bessel Esféricas

Definiciones:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x)$$

$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x)$$

$$h_n^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} j_n(x) + i n_n(x)$$

$$h_n^{(2)} = j_n(x) - i n_n(x)$$

Todas estas funciones tienen sus propias relaciones de recurrencia y ortonormalidad

17. Funciones Complejas

Toda función compleja f se puede escribir como:

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Las funciones normalitas no tienen problemas al escribirlas así. Surge un problema con $\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2\pi n)$ porque es una función multivaluada.

La función multivaluada así cumple con todas las propiedades típicas de Logaritmo y se usa para definir potencias arbitrarias como $z^a = e^{a \ln(z)}$ o para definir las trigonométricas inversas.

17.1. Funciones Analíticas

Derivada: Definimos la derivada de f en a como el número $f'(a)$ que cumple

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(a + \delta) - f(a) - f'(a)\delta}{\delta} = 0$$

Y la derivada es el número $f'(a)$.

También se puede ver como el típico límite de derivada donde ahora el resultado debe de ser el mismo sin importar por dónde nos acerquemos.

Teorema 1 (CS): $f = u + iv$ es analítica en un punto si y sólo si en dicho punto se tiene que:

$$u_x = v_y \quad v_x = -u_y$$

Y se tiene que $f' = u_x + iv_x$

Teorema 2: Si f es analítica en una región R , entonces existen sus derivadas de todos los órdenes en la región. Además, la función se puede expandir como serie de Taylor alrededor de $z_0 \in R$ y la convergencia se cumple en el interior de todo el círculo alrededor de z_0 que se extiende hasta la singularidad más cercana.

Teorema 3: Si $f = u + iv$ es analítica en una región, entonces u, v son armónicas en la región.

Además, si u es una función armónica en una región, entonces es la parte real de una función analítica f . Que se puede encontrar usando CS.

17.2. Integrales de Contorno

Integral de Contorno: Definimos la integral de $f(z)$ sobre una curva diferenciable $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ como:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Primitiva: Si f es una función F holomorfa tal que $F' = f$.

Teorema de Primitivas (TFCC): Sea $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua definida en la región A . Y sea $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F' = f$. Entonces para cualquier curva γ contenida en A diferenciable por pedazos, se tiene que:

$$\int_{\gamma} f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Homotopía: Dos curvas son homótopas en una región $R \subset \mathbb{C}$ si existe una deformación continua que convierte a una curva en la otra sin nunca salirnos de R .

Teorema (Teorema de Deformación): Sea f una función analítica en R . Y sean γ_1, γ_2 dos curvas homótopas en R . Entonces se cumple que:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Teorema de Cauchy: Sea $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ analítica Si γ es una curva homótopa a un punto en R (curva cerrada). Entonces:

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Fórmula de Cauchy: Sea $f(z)$ analítica en una región A y sea γ una curva homótopa a un punto en A . Entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Para todo punto z dentro de la curva.

Fórmula generalizada: Con las mismas hipótesis de la anterior, se tiene que:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

.

17.3. Laurent

Una serie de Laurent centrada en z_0 es una serie de la forma:

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

Se puede comprobar la convergencia de una serie de Laurent probando la convergencia de las potencias positivas con el ratio test (lo que nos lleva a un resultado del tipo $|z| < a$). Y luego se prueba el test para las potencias naturales, lo que nos da $|1/z| < b$. Entonces la serie converge en un anillo (puede o no incluir la frontera)

Teorema de Laurent:

Sea C_1, C_2 dos círculos con centro en z_0 . Sea $f(z)$ analítica en R la región entre los círculos. Entonces, $f(z)$ se puede escribir como:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

La serie converge uniformemente en todo el interior de este anillo (por lo menos). Los coeficientes vienen dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}}$$

Donde C es una curva cerrada simple que rodea a z_0 y contenida en el anillo R .

Para demostrarlo, multiplicamos por $(z - z_0)^m$ con el m adecuado para que el coeficiente adecuado esté dividido entre $(z - z_0)$. Luego integramos ambos lados. Todas las integrales se cancelan excepto la que nos interesa, que vale $2\pi i$.

Definiciones:

- Si todas las b son cero, $f(z)$ es analítica. z_0 se llama **punto regular**.
- Si $b_n \neq 0$ pero todas las b después son 0. $f(z)$ tiene un **polo de orden** n en $z = z_0$. Si $n = 1$, le llamamos **polo simple**.
- Si hay una cantidad infinitas de b distintas de 0, entonces $f(z)$ tiene una **singularidad esencial** en $z = z_0$.
- b_1 se llama el **residuo** de $f(z)$ en $z = z_0$.

Meromórficas: Una función es meromórfica si es analítica en todo el plano excepto los polos.

Ejemplos:

- $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$

Es analítica en $z = 0$ y su residuo en $z = 0$ es 0.

- $\frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \cdots$

Tiene un polo de orden 3 en $z = 0$. El residuo en $z = 0$ es $\frac{1}{2!}$

$$\blacksquare e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$

Tiene una singularidad esencial en $z = 0$. El residuo en $z = 0$ es 1.

$$\blacksquare f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

Con g analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$ tiene un polo de orden n en z_0 . Esto porque como g es anal en z_0 , lo podemos escribir como $g(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$. Con $a_0 = g(z_0) \neq 0$. Entonces al dividir por $(z - z_0)^n$, nos queda el exponente negativo más grande de orden n .

Si $g(z_0) = 0$ pero $g'(z_0) \neq 0$ entonces el orden es uno menor y así sucesivamente dependiendo de cuántos de los primeros coeficientes de $g(z)$ son distintos de cero.

$$\blacksquare \frac{\sin^2 z}{z^3}$$

Tiene un polo simple en $z = 0$. Como $\sin z$ empieza su serie con z , entonces $\sin^2 z$ empieza su serie con z^2 . Por lo que al dividir por z^3 , la potencia más negativa es la de -1 .

$$\blacksquare \frac{z + 3}{z^2(z - 1)^3(z + 1)}$$

Tiene un polo de orden 2 en $z = 0$, polo de orden 3 en $z = 1$, polo simple en $z = -1$.

17.4. Teorema del residuo

Sea z_0 una singularidad aislada en $f(z)$. Sea $f(z)$. Entonces, $f(z)$ se puede escribir como una serie de Laurent centrada en z_0 .

Luego si integramos ambos lados en un círculo en el anillo de convergencia, los términos $a_n(z - z_0)^n$ son analíticos y dan 0. Los términos $b_n/(z - z_0)^n$ dan todos 0 (probar con la def. original de integral) excepto el de $b_1/(z - z_0)$ que da $2\pi i b_1$.

Entonces, nos queda que:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i \text{Res}_{z=z_0}(f)$$

Donde C es una curva dentro del anillo de convergencia de la serie de Laurent.

Si la función tiene muchas singularidades aisladas y queremos hacer una integral en una curva que rodea a varias, podemos separar esa curva en muchas curvitas que rodean a cada una de las singularidades. Luego, esas integrales se calculan como en lo anterior. El resultado general es la suma de todos.

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \text{ punto singular de } f} \text{Res}_{z=z_0}(f)$$

Si el polo está justo sobre la curva de integración, entonces su contribución es la mitad. Es decir, es de $\pi i \text{Res}$.

17.5. Métodos para encontrar Residuos

17.5.1. Serie de Laurent

Escribimos la serie de Laurent de la función usando composición o producto de series que ya conocemos. Luego encontramos el b_1 y listo. Hay que tener cuidado de usar la expansión centrada en el punto correspondiente.

Ejemplo: $\frac{e^z}{z-1}$. Le calculamos la serie de Laurent centrada en $z-1$. Entonces tenemos que

$$\frac{e^z}{z-1} = \frac{ee^{z-1}}{z-1} = \frac{e}{z-1} \left[1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \dots \right] = \frac{e}{z-1} + e + \dots$$

Por lo que el residuo es e

17.5.2. Polo Simple

Si $f(z)$ tiene un polo simple en $z = z_0$, entonces:

$$Res_{z=z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

Lo cual tiene sentido al considerar la expansión en series de Laurent. Porque como z_0 es un polo simple, entonces $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{b_1}{z - z_0}$. Luego multiplicamos por $z - z_0$ y queda $a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \dots + b_1$. Al hacer el límite, sólo queda b_1 .

Caso Especial: Si $f(z)$ se puede escribir como $g(z)/h(z)$ con $g(z_0) \neq 0$ finito y $h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$.

Entonces, multiplicamos por $z - z_0$ y tomamos el límite. El $g(z)$ queda como $g(z_0)$ en el límite y sale. Y ya sólo queda $g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{h(z)}$. Sacamos este límite por L'hopital.

Y ya nos queda que:

$$Res_{z=z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

17.5.3. Polo de Orden n

Sea $f(z)$ una función con un polo de orden n , entonces podemos usar el siguiente método:

Multiplicamos $f(z)$ por $(z - z_0)^m$, donde m es un entero mayor o igual n . Derivamos el resultado $m - 1$ veces y dividimos por $(m - 1)!$. El resultado es el polo de f en z_0 .

$$Res_{z=z_0}(f) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - c)^n f(z))$$

Dem: Se puede ver que si empezamos con la serie de Laurent y hacemos este procedimiento, el resultado final es b_1

17.6. Evaluación de Integrales Usando el Teorema del Residuo

Primero que nada, se puede comprobar fácilmente que la fórmula de Cauchy y la fórmula generalizada y el teorema de Cauchy son consecuencia de todo lo que hicimos con los polos. Ver resumen de VC

Principio del Argumento:

Si N es el número de ceros y P el número de polos de una función dentro de una curva C , entonces:

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Theta_C$$

Donde Θ_C es el ángulo total que cambia $f(z)$ al dar la vuelta C

18. Probabilidad

18.1. Probabilidad Elemental

Definición 18.1. Experimento Aleatorio: Un experimento repetible y que da resultados variables del espacio muestral.

Espacio Muestral: Ω Todos los posibles resultados de un experimento.

Probabilidad Clásica: La probabilidad de que suceda un evento en $A \subset \Omega$ es $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ (Siempre y cuando todos los eventos sean equiprobables)

Definición 18.2. Probabilidad Axiomática : La probabilidad es una función $P : \wp(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ tal que:

$$1) P(A) \geq 0 \quad 2) P(\Omega) = 1 \quad 3) P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \quad (\text{Con } A_k \text{ disjuntos})$$

Teorema 18.1. Propiedades de la probabilidad:

- 1) $P(\emptyset) = 0$
- 2) $P(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$ (Con A_k disjuntos)
- 3) $P(A^c) = 1 - P(A)$
- 4) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- 5) $A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$
- 6) Si A es un evento $\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$
- 7) Para cualquier A y B tenemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Definición 18.3. Álgebra: Es una colección $F \subset \wp(\Omega)$ con:

- 1) $\Omega \in F$
- 2) Si $A \in F \Rightarrow A^c \in F$
- 3) La unión finita de elementos de F está en F .

Sigma Álgebra: Igual que un álgebra pero con uniones numerables.

Sigma Álgebra de Borel: Es la Sigma álgebra de \mathbb{R} más chica posible que contiene a $\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Con estos tres elementos: Un Espacio Muestral (posibles resultados de los experimentos), una función de probabilidad (que a varios subconjuntos de Ω les asigna una probabilidad entre 0 y 1 cumpliendo los 3 axiomas) y una σ -álgebra de Ω que consiste de los subconjuntos de Ω que son 'medibles'.

19. Conteo y Combinatoria

Teorema de Multiplicación: Si un evento A se puede realizar de n formas distintas y un evento B de m formas distintas, entonces ambos eventos a la vez se pueden realizar de nm formas distintas.

Ordenaciones Y Combinaciones:

1) **Ordenación con Repetición:** De cuántas maneras puedo escoger una cadena ordenada de k elementos de entre n elementos totales, repitiendo. Cuántas cadenas de $K = 10$ letras $n = 26$ hay?

$$n^k$$

2) **Ordenaciones sin Repetición:** De cuántas formas puedo formar una cadena ordenada de k elementos distintos de un conjunto de n elementos. Cuáles son los posibles resultados del podio $k = 3$ de una carrera de n coches (dichos en orden)

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

3) **Combinación (Sin repetición):** Cuántos subconjuntos de longitud k hay de un conjunto de n elementos totales (no me importa el orden). Cuántos equipos de fútbol $k = 11$ puedo formar en mi salón $n = 30$.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4) **Combinaciones Con Repetición:** Cuántos conjuntos de k elementos puedo formar (si puedo repetir) a partir de un conjunto de n elementos. Cuántos helados distintos puedo hacer con 3 bolas de helado. De cuántas maneras puedo poner 4 pelotas en 10 cajas (tengo que escoger 4 de las diez cajas y puedo repetir). Estrellas y barras:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Con estas operaciones, podemos calcular la probabilidad de muchos eventos, sólo hace falta contar la cantidad de casos favorables y dividir entre la cantidad de casos totales.

19.1. Probabilidad Condicional:

Nos interesa ver la probabilidad de un evento A dado que ya sucedió otro evento B anteriormente.

Probabilidad de A dado que sucedió B : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Intuición: Como sucedió B , podemos reducir el espacio muestral a B y entonces el evento A se reduce a $A \cap B$.

De hecho, si dejamos B fijo y definimos $P_*(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ entonces esta P_* es una función de probabilidad (cumple los 3 axiomas de Kolmogorov)

Teorema 19.1.

Teorema de Probabilidad Total: Tomamos una partición disjunta de Ω $\{B_1, \dots, B_n\}$. Entonces, se cumple que:

$$P(A) = \sum P(A|B_i)P(B_i) \quad \forall A$$

Viéndolo como conjuntos y recordando la def. de probabilidad condicional, queda claro.

Un ejemplo particularmente común es cuando la partición es $\{B, B^c\}$, en este caso:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \\ P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \end{aligned}$$

Teorema 19.2.

Teorema de Bayes: Dada $\{B_1, \dots, B_n\}$ una partición de Ω y A un evento, tenemos que:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum P(A|B_i)P(B_i)}$$

O, en particular: $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$

19.2. Variable Aleatoria:

Los resultados de un experimento aleatorio se encuentran en el espacio muestral. Sin embargo, sería mejor tener números en vez de estos datos abstractos. Para eso, definimos una **Variable Aleatoria** que es una función que toma elementos del espacio muestral y los convierte en reales, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Dado un Ω podemos usar varias variables aleatorias dependiendo de cuál sea el dato que nos interese. Por ejemplo, si el espacio muestral es un dardo cayendo en un tablero, varias posibles variables aleatorias son: 1) tomar la coordenada x del dardo, 2) tomar la coordenada y , 3) tomar la distancia del dardo al centro, 4) tomar el ángulo del dardo con respecto al eje x , 5) cualquier otra cosa.

Estos ejemplos nos muestran como X es simplemente una forma de asociarle números a Ω .

Claro que las probabilidades como tal sólo las conocemos para el conjunto Ω (es el conjunto dominio de la función de probabilidad). Esto nos permite mover la responsabilidad del cálculo de probabilidad para en vez de medirlo en Ω lo medimos en los reales.

Entonces, para calcular la probabilidad de un evento depueés de aplicar la variable aleatoria, necesitamos calcular la probabilidad de su preimagen (que está en Ω)

Definición 19.1.

Preimagen: El conjunto de eventos de Ω tales que aplicarles X da como resultado un valor entre a y b se denota como $a \leq X \leq b$. Es decir, si quiero calcular la probabilidad de que un evento (tras aplicar la variable aleatoria) caiga entre a y b , sólo me fijo en todos los elementos del espacio muestral que lo llevan ahí y calculo su probabilidad.

Para espacios muestrales discretos (finitos)

PMF (Probability Mass Function): $P_X(x) = P(X = x)$

O más generalmente, para $A \subset \mathbb{R}$, $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$

Donde P es la función de probabilidad de Ω (Dado un evento de Ω , le asigna una proba). Y entonces P_X es una función de probabilidad de los reales (es decir, ahora, a los reales les asigna una probabilidad).

Propiedades: 1) $P(A) \geq 0$ 2) $P(\mathbb{R}) = 1$ 3) $P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$
(Con A_k disjuntos) Es decir, es una función de probabilidad (de los reales)

PMF da la probabilidad de que seleccionemos un evento de Ω y tras aplicar la variable aleatoria, caiga en x .

CDF (Cumulative Distribution Function): $F_X(x) = P(X \leq x)$

Es decir, nos da el valor de la probabilidad de que obtengamos un elemento de Ω tal que la variable aleatoria lo manda a un real menor que x .

Propiedades: 1) $F_X(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow -\infty$ 2) $F_X(x) \rightarrow 1$ si $x \rightarrow \infty$

Nota: A una variable aleatoria X la podemos componer con una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para obtener una nueva variable aleatoria. Es decir, toma un resultado del espacio muestral, le aplica X y luego a eso le aplica g para obtener finalmente un real. Por ejemplo, para el dardo, digamos que X nos da la distancia al origen y g nos da el cuadrado, entonces la variable aleatoria $g \circ X$ nos da la distancia al cuadrado.

Definición 19.2.

Esperanza: La esperanza de una variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ es:

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Es decir, es como un promedio ponderado de los valores de x_i (porque los multiplicamos por la probabilidad de que salgan). Es como el centro de masa de los puntos x_i donde $P(X = x_i)$ es la masa de cada uno de los puntos.

Satisface: 1) Linealidad: $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$
 2) $E(g \circ X) = \sum_i g(x_i) P_X(X = x_i)$

Esto es porque da el centro de masa de los puntos. La masa de cada punto es la misma, pero ahora están movidos por g .

Definición 19.3.

Varianza: La varianza de una variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ es:

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$E(X)$ es el centro de masa, entonces $(X - E(X))^2$ es la distancia cuadrada de un punto al centro de masa (es decir el momento de inercia de X). En general, usando la definición de esperanza, y definiendo $E(X) = \mu$, tenemos que $V(X) = \sum_i P(X = x_i)(x_i - \mu)^2$

Es decir, suma las probabilidades por la distancia cuadrada al centro.

Satisface: 1) $V(X) \geq 0$
 2) $Var(c) = 0$
 3) $Var(cX) = c^2 Var(X)$
 4) No es lineal.
 5) $Var(X + a) = Var(X)$

Para espacios muestrales continuos

PDF (Probability Density Function): Es una función $f(x) \geq 0$ tal que se cumple

que: $P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx$

Es decir, es una función tal que nos permite calcular la probabilidad de que la imagen de X esté en un conjunto $[a, b]$. O bien, $f(x)$ es más o menos una densidad, si queremos la probabilidad de que X caiga en $[a, b]$ (la masa dentro de $[a, b]$) hay que integrar esta densidad entre a y b . Nota: que el espacio muestral sea continuo implica que no tiene sentido cosas como $P(X = x)$

Propiedades: 1) $f(x) \geq 0$ 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$
 3) Si $Y = g(X)$, entonces, $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$

PDF da la densidad de probabilidad de que seleccionemos un evento de Ω y tras aplicar la variable aleatoria, caiga en $[a, b]$.

CDF (Cumulative Distribution Function): $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$

Es decir, nos da el valor de la probabilidad de que obtengamos un elemento de Ω tal que la variable aleatoria lo manda a un real menor que x .

Propiedades: 1) $F_X(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow -\infty$ 2) $F_X(x) \rightarrow 1$ si $x \rightarrow \infty$ 3) $F'(x) = f(x)$

Nota: A una variable aleatoria X la podemos componer con una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para obtener una nueva variable aleatoria. Es decir, toma un resultado del espacio muestral, le aplica X y luego a eso le aplica g para obtener finalmente un real. Por ejemplo, para el dardo, digamos que X nos da la distancia al origen y g nos da el cuadrado, entonces la variable aleatoria $g \circ X$ nos da la distancia al cuadrado.

Definición 19.4.

Esperanza: La esperanza de una variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Recordando que $E(X)$ es el centro de masa, tiene sentido la operación definida, multiplicamos cada pedacito de masa $f(x)dx$ por la distancia x . Con esto, se obtiene el promedio ponderado o centro de masa.

Satisface: 1) Linealidad: $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$

2) $E(g \circ X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$

Esto es porque da el centro de masa de los puntos. La masa de cada punto es la misma, pero ahora están movidos por g .

Definición 19.5.

Varianza: La varianza de una variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es:

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$E(X)$ es el centro de masa, entonces $(X - E(X))^2$ es la distancia cuadrada de un punto al centro de masa (es decir el momento de inercia de X). En general, usando la definición de esperanza, y definiendo $E(X) = \mu$, tenemos que $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x_i - \mu)^2 dx$

Es decir, suma las probabilidades por la distancia cuadrada al centro.

- Satisface:** 1) $V(X) \geq 0$
 2) $Var(c) = 0$
 3) $Var(cX) = c^2 Var(X)$
 4) No es lineal.
 5) $Var(X + a) = Var(X)$

Resumen:

Explicaré dos ejemplos a la vez, uno dentro de []. Digamos que hacemos un experimento que consiste en decirle algo a cruz y esperar su respuesta [O en lanzar un dardo a un blanco]. El espacio muestral del experimento son todas las posibles respuestas de Cruz [El espacio muestral son todas las posibles posiciones en las que cae el dardo].

X es la función que convierte dichos posibles resultados en números reales según qué sea lo que queramos medir. Por ejemplo, podemos decir que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sea el número de palabras en la respuesta de Cruz, o a lo mejor podría ser el tiempo que tardó en responder medido en segundos (nos quedaremos con la primera opción) [Algunas posibles variables aleatorias son dar como resultado el puntaje qué generó el dardo o podría ser la distancia del dardo con respecto al centro, nos quedaremos con la segunda]. En cualquier caso, X convierte los eventos de Ω en números reales de alguna forma que nos parezca interesante. Esto nos permite hablar de una 'nueva' probabilidad, ya no es la probabilidad de que suceda cierto evento de Ω sino que es la probabilidad de que obtengamos cierto real (o cierto intervalo de reales) al aplicar X .

Esta es una distribución discreta, por lo que nos interesa su PMF, el PMF es la probabilidad de que X de un cierto valor $x \in \mathbb{R}$ y lo hace midiendo la probabilidad de que suceda un evento de Ω que bajo X se mapee a x . [Esta es una distribución continua, por lo que nos interesa el PDF, que es la densidad de probabilidad].

En cualquier caso, podemos pensar en los posibles resultados del experimento pasados por X (la imagen de X) como puntos [intervalos continuos] sobre la recta real. Podemos pensar en estos puntos como un conjunto de masas puntuales [masas distribuidas] tales que la masa total (probabilidad total) es 1. En este caso, podemos definir la masa de cada punto [podemos definir la densidad en cada punto, tal que al integrarla en un intervalo, nos da su masa]. La masa de un punto (o intervalo) es la probabilidad de que suceda un evento de Ω que tras mapearlo con X caiga en ese punto [o en ese intervalo]

La esperanza es en cierto sentido el promedio de estos números, o bien el centro de masa de la imagen de X (pesada con sus correspondientes probabilidades). En el caso de cruz, nos dará el número de palabras promedio con las que responderá Cruz [La esperanza nos da la distancia promedio del dardo al centro]. Esto es análogo a calcular el centro de masa.

La varianza es una medida de qué tan distribuida está la imagen de X en la recta real. Para esto sumamos las distancias de cada punto con respecto al centro de masa multiplicada por la masa del punto [lo mismo pero integramos]. Esto es equivalente al momento de inercia que se estudia en mecánica.

Momentos: El momento n -ésimo de una variable aleatoria X es:

$$\mu_n = E(X^n)$$

Así, el primer momento es simplemente la esperanza y la varianza es $V(X) = \mu_2 - \mu_1^2$

Definición 19.6.

Moment Generating Function:

La moment generating function de una variable aleatoria X es la función de t :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tX)^i}{i!}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} E(X^i)$$

Es decir, es un polinomio infinito en la variable t , donde cada uno de los coeficientes son $\frac{E(X^i)}{i!}$ (es decir, los momentos divididos entre su orden factorial). Es decir, este polinomio tiene 'guardada' la información de los momentos en sus coeficientes.

Se puede definir para variables aleatorias discretas o continuas. Es común usar $E(e^{tX}) = \sum x_i e^{tx} P(X=x) \simeq \int e^{xt} f(x) dx$ (para continuas) para obtener la MGF y luego usar lo de los coeficientes para a partir de eso calcular todos los momentos.

Propiedades:

1) $\mu_k = E(X^k) = M_X^{(k)}(0)$ (Lo cual describe el hecho de que M_X guarda información de los momentos)

2) Es única y una MGF determina de forma única a una variable aleatoria.

3) Si X y Y son independientes, entonces: $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$

19.3. Para Variables Aleatorias de Dos Dimensiones:

Dado un espacio muestral Ω , podemos definir varias variables aleatorias. Por ejemplo, digamos que nuestro experimento es lanzar un dardo a un tablero, podemos definir las variables aleatorias $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que nos da la coordenada x del dardo y $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que nos da la coordenada y del dardo.

Entonces, podemos pensar en una variable aleatoria conjunta, X, Y que a cada evento $\omega \in \Omega$ le asocia el punto $(X(\omega), Y(\omega))$ del plano.

Si las variables aleatorias son discretas, podemos definir una *PMF* como $P_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$

Es decir, es la probabilidad de que suceda un evento en Ω que al aplicarle X, Y , sea mandado a (x, y)

Si las variables aleatorias son continuas, entonces también podemos definir una *PDF* conjunta como la función $f_{X,Y}$ tal que cumple que: $P(X, Y \in [a, b] \times [c, d]) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x, y) dy dx$. Es decir, $f_{X,Y}$ mide la densidad de probabilidad en el plano tras aplicar la variable aleatoria X, Y .

Indep.: Con esto, decimos que dos v.a son independientes si se cumple que $f_{X,Y} = f_X \cdot f_Y$

Para estas variables conjuntas, también se puede definir una **CDF** como

$$F_{X,Y} = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) dv du \quad (\text{esto último para v.a. continuas})$$

Esperanza: Nuevamente, la esperanza es el promedio ponderado de las imágenes de X, Y , entonces:

$$E(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \quad (x, y) \quad \text{que es el centro de masa.}$$

Propiedad: (para $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$): $E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy \quad (x, y)$

Varianza: La varianza es nuevamente el momento de inercia de la imagen de X, Y , es decir:

$$V(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) |(x, y) - E(X, Y)|^2 dx dy$$

porque primero que nada g realocates las masas a $g(x, y)$

Dada una distribución bidimensional, también se pueden definir distribuciones marginales como sigue:

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

Es decir, éstas son probabilidades para la variable X , lo único que nos interesa es la masa (o densidad) con respecto al eje x . Por eso, para todo x , definimos su masa (densidad) como la suma de todas las masas (densidades) que tienen como coordenada x el valor x . Como si proyectáramos la distribución X, Y al eje X .

Covarianza: $COV(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$
(Nota que $E(XY)$ no tiene la coma, es la esperanza de una v.a de una dimensión).

Correlación: Es la covarianza estandarizada: $Corr(X, Y) = Cov(X, Y) / \sqrt{Var(X)Var(Y)}$
Propiedad: Si X e Y son indep. entonces su $Cov = 0$

19.3.1. Desigualdad de Chebyshev

Desigualdad de Chebyshev

Si σ es la desviación estándar y μ el valor esperado, entonces si elegimos cualquier número t , tenemos que:

$$P(|X - \mu| \geq t) < \frac{\sigma^2}{t^2}$$

20. Algunas Distribuciones:

20.1. Distribuciones Discretas:

1) Distribución de Bernoulli:

Se dice que $X \sim \text{Ber}(p)$ si $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$

Y la variable aleatoria sólo regresa un verdadero o falso. Es útil para cualquier experimento en el que nos interese saber si sucedió algo o no.

PMF: $P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$

Esperanza: $E(X) = p$

Varianza: $V(X) = p(1 - p)$

MGF: $M_X(t) = (1 - p) + pe^t$

Por ejemplo: 1) $\Omega = \{ \text{Lanzamientos de una moneda cargada} \}$, $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, $X(\omega) = 1$ si es cara, 0 si es cruz.

2) $\Omega = \{ \text{Posibles respuestas de Cruz al decirle algo} \}$, $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ con $X = 1$ si Cruz contesta, $X = 0$ si Cruz no contesta. O bien, $X = 1$ si Cruz dice ehhhhhh, $X = 0$ si no dice ehhh.

La esperanza y la varianza se pueden calcular directamente de las definiciones. o también, se puede calcular el MGF como $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum g(x_i)P(X = x_i) = \sum e^{tx_i}P(X = x_i) = e^{0t}(1-p) + e^{1t}p = (1-p) + pe^t$ Luego calculamos los momentos a partir de este polinomio.

2) Distribución Binomial:

Se dice que $X \sim \text{Bin}(n, p)$ si $X : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$

Y la variable aleatoria X cuenta el número de veces que sucede un evento (que tiene probabilidad p) al realizar n intentos.

PMF: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Esperanza: $E(X) = np$

Varianza: $V(X) = np(1 - p)$

MGF: $M_X(t) = ((1-p) + pe^t)^n$

Propiedad: Si $Y \sim \text{Bin}(n, p) = X_1 + \dots + X_n$ (donde $X_i \sim \text{Ber}(p)$).

Por ejemplo: Repetimos n veces un Bernoulli (Por ejemplo, dados n tiros de una moneda, contar el número de veces que cae cruz ($p = 1/2$). O bien, dado n tiros de dados, contar el número de veces que sale 3 ($p = 1/6$)).

La *PMF* sale de que suceden k eventos positivos (proba p), luego $n - k$ eventos negativos (proba $1 - p$). Finalmente, sabiendo el número de eventos positivos, lo multiplicamos por todas las formas distintas de que suceda dicho evento.

Podemos calcular las cosas directamente con las formulitas. O bien, usamos la propiedad junto con la linealidad de E para calcularlo, o la propiedad de *MGF* de una suma para calcular el *MGF* y luego usar sus derivadas para calcular los momentos.

3) Distribución Geométrica:

Se dice que $X \sim \text{Geom}(p)$ si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$

Y la variable aleatoria X cuenta el número de veces que sucede un evento fallido (que tiene probabilidad $1 - p$) antes de que suceda un evento exitoso (con proba p)

PMF: $P(X = k) = p(1-p)^k$

Esperanza: $E(X) = \frac{1-p}{p}$

Varianza: $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

MGF: $M_X(t) = \frac{p}{1 - (1-p)e^t}$

Por ejemplo: Lanzamos una moneda varias veces y contamos el número de caras antes de la primera cruz. O bien, si p es la proba de ganar la lotería, $P(X = k)$ me da la proba de que necesite comprar k boletos fallidos antes de ganar y en promedio esperaré comprar unos $\frac{1-p}{p}$ boletos.

La *PMF* sale de que necesitamos que sucedan k eventos fallidos, con proba: $(1-p)^k$ y luego suceda uno exitoso (con proba p).

La esperanza se puede calcular haciendo la suma $\sum k(1-p)^k p = p(1-p) \sum k(1-p)^{k-1} = p(1-p) \frac{d}{dp}(-\sum (1-p)^k) = p(1-p) \frac{d}{dp}(-1/p) = \frac{1-p}{p}$

El *MGF* y la varianza se puede calcular de forma similar.

4) Distribución Negativa Binomial:

Se dice que $X \sim \text{NegBin}(r, p)$ si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$

Y la variable aleatoria X cuenta el número de veces que sucede un evento fallido (que tiene

probabilidad $1 - p$) antes de que suceda el r -ésimo éxito (con probabilidad p).

$$\text{PMF: } P(X = k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k$$

$$\text{Esperanza: } E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$\text{Varianza: } V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

$$\text{MGF: } \left(\frac{p}{1 - (1-p)e^t} \right)^r$$

Propiedad: Si $Y \sim \text{NegBin}(r, p) = X_1 + \dots + X_r$ (donde $X_i \sim \text{Geom}(p)$).

2) $\text{NegBin}(1, p) \sim \text{Geom}(p)$

Por ejemplo: Queremos calcular el número de veces que perderemos la lotería antes de ganarla r veces. O bien, cuántas veces debo de perder a los dados antes de hacer r generalas.

La propiedad 1 sale directamente de la definición de la distribución y nos es muy útil para calcular las cosas.

La *PMF* nos dice la probabilidad de que el resultado de X sea k (la probabilidad de que se requieran k fallos antes del r -ésimo éxito). Para esto, k fallos tiene la proba $(1-p)^k$ y r éxitos la forma p^r . Luego, para calcular el número de maneras distintas, podemos pensar que tenemos r cajas y k pelotas, donde la i -ésima caja representa los intentos que sucedieron antes del i -ésimo éxito pero después del $(i-1)$ -ésimo. Luego, tenemos k pelotas que representan los fallos. El problema entonces se reduce a la forma de colocar estas k pelotas en las r cajas, que como sabemos es una combinación sin repetición y se calcula como dice ahí.

Para calcular las cosas, podemos calcular la MGF usando la propiedad 1 y a partir de la MGF de la distribución geom. Con la MGF podemos calcular ya todos los momentos y así la esperanza y la varianza.

Sino, la esperanza se puede calcular con la misma propiedad y con linealidad de E.

5) Hipergeométrica:

Se dice que $X \sim \text{HipGeom}(w, b, n)$ si $X : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, \min(w, n)\}$

Dada una población de w buenos objetos y b malos, X cuenta el número de veces que obtenemos un elemento tipo b al realizar n tomas SIN reemplazo ($n \leq w + b$ para que tenga sentido y $k \leq w, n$).

$$\text{PMF: } P(X = k) = \frac{\binom{w}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{w+b}{n}}$$

$$\text{Esperanza: } E(X) = \frac{nw}{w+b}$$

$$\text{Varianza: } \frac{w+b-n}{w+b-1} \frac{n}{n} \left(1 - \frac{\mu}{n} \right)$$

MGF: Fea expresión

Ejemplos: 1) Al tomar 5 (n) cartas de un conjunto de 52 cartas, la probabilidad de que k de ellas sean aces $w = 4$, $b = 48$.

2) En un bosque con N alces, n de ellos están marcados. Capturamos m alces y queremos ver cómo se distribuye la probabilidad de que k de ellos ya estuvieran marcados. Entonces es $HipGeom(n, N - n, m)$

La PMF sale de que calculamos el número de formas de obtener k objetos buenos (con el w choose k) y lo multiplicamos por el número de formas de que el resto de los objetos sean malos (b choose $n - k$) y finalmente dividimos entre el número total de formas de tomar n elementos.

Podemos calcular las cosas directamente con las formulitas, realizando sumas complicadas. Sin embargo, la esperanza tiene sentido, pues al tomar 100 objetos, nos imaginamos que la en promedio algo así como $w/b + w * 100$ serán buenos (la proporción de objetos buenos del total)

6) Poisson

Se dice que $X \sim Pois(\lambda)$ si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$

Tenemos eventos raros que suceden a un ritmo de λ veces por unidad de tiempo, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ nos dice el número de veces que sucedió este tipo de evento en este intervalo de tiempo

PMF: $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

Esperanza: λ

Varianza: λ

MGF: $e^{\lambda(e^t - 1)}$

Propiedad: 1) Si $X \sim Pois(\lambda_1)$ y $Y \sim Pois(\lambda_2)$ con X y Y indep. entonces $X + Y \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$

2) Es como $Bin(n, p)$ pero con $p \ll 1$ y $n \gg 1$

Por ejemplo: λ es el número de errores tipográficos en una página de texto y queremos calcular la distribución de proba de tener k errores en una pag.

2) Hay 2 accidentes por mes en una calle, entonces el número de accidentes en un mes sigue $Pois(2)$ y en dos meses $Pois(4)$.

Las propiedades 1 y 2 están claras de la definición. El PMF medio tiene sentido. La esperanza tiene mucho sentido y se puede calcular directo del PMF o bien intuitivamente tiene sentido.

21. Algunas Distribuciones Continuas

1) Uniforme

Decimos que $X \sim Unif(a, b)$ si $X : \Omega \rightarrow [a, b]$

f da el mismo valor de densidad de probabilidad para todo $x \in X(\Omega)$ y tiene valor $\frac{1}{b-a}$ (Todo es equiprobable)

PDF: $f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall x \in [a, b]$

Esperanza: $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Varianza: $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

MGF: $M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$

Por ejemplo: Un random number generator entre a y b .

La esperanza, varianza y MGF se puede calcular directamente de las fórmulas.

2) Distribución Normal: Decimos que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Que tiene la siguiente PDF:

PDF: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Esperanza: $E(X) = \mu$

Varianza: $V(X) = \sigma^2$

MGF: $M_X(t) = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Estandar: La distribución Estandar tiene centro 0 y var 1.

Ejemplo: La distribución de los puntajes IQ. $\Omega = \{\text{personas en el mundo}\}$, $X(\omega) = \text{puntaje IQ de } \omega$. Y además, la densidad de probabilidad es la f mencionada, con $\mu = 100, \sigma = 15$

3) Exponencial: Decimos que $X \sim Expo(\lambda)$ si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Que tiene la siguiente PDF:

PDF: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Esperanza: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Varianza: $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

MGF: $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

Ejemplo: Es parecido a la distribución poisson. Por ejemplo, si una estrella fugaz se presenta

$\lambda = 4$ veces por hora, entonces el tiempo esperado para ver uno es $\frac{1}{\lambda}$ horas. $\Omega = \{ \text{Noches viendo las estrellas} \}$ $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es el tiempo antes de que se vea la primera estrella fugaz. Y entonces $f(x)$ es la densidad de probabilidad de ver la primera estrella en un tiempo x .

Dado $f(x)$, podemos calcular $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$. Con esto podemos calcular los momentos, y así tenemos E y V .

Propiedades: No tiene memoria. $P(X < s + t | X > s) = P(X > t)$

4) Gamma Decimos que $X \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$ si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Que tiene la siguiente PDF:

PDF: $f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} (\lambda x)^a e^{-\lambda x} \frac{1}{x}$

Esperanza: $E(X) = \frac{a}{\lambda}$

Varianza: $V(X) = \frac{a}{\lambda^2}$

MGF: $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^a$

Ejemplo: $\Omega = \{ \text{noches viendo las estrellas} \}$ y definimos $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $X(\omega) =$ tiempo de espera antes de ver a estrellas. Entonces $f(x)$ da la densidad de probabilidad de que el tiempo de espera sea x .

Es decir, se distribuye como la suma de n v.as. exponenciales. Con eso, podemos calcular fácilmente M_X a partir del exponencial y luego usar las derivadas para calcular los momentos.

Ejemplo: Hay 3 personas adelante en una fila, el promedio de tiempo de espera para que una persona salga de la fila es 2 min. Mi tiempo de espera se distribuirá como $\text{Gamma}(3, \frac{1}{2})$. Es decir, con esto podemos calcular la densidad de probabilidad de que el evento suceda a veces en un tiempo x

22. Estadística

Se refiere a encontrar información sobre una población a partir de una muestra de esta población.

Una muestra de una población se refiere a tomar un subconjunto chiquito de ésta que se pueda estudiar.

Digamos que tenemos una tabla de resultados (como pueden ser experimentales por ejemplo) con unos pocos resultados. A esto le llamamos la muestra.

Presuntamente, podríamos seguir sacando resultados infinitamente para saber cómo se distribuyen. A esta distribución completa le llamamos población padre o universo.

Nos interesa conocer la función de distribución del universo, o al menos su media μ y desviación estándar σ (la verdadera media y la verdadera desviación estándar) aunque en un principio sólo conocemos unos pocos valores en nuestra muestra.

22.0.1. Estimación de la media

Si agarramos nuestras medidas x_1, \dots, x_n de un experimento, definimos la variable aleatoria:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Es decir, dado un experimento (o más bien n), la variable aleatoria nos da el promedio de los resultados. Tiene sentido que esta variable aleatoria sea una buena aproximación de la **verdadera media** μ .

$$\mu \simeq \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Asumiendo que la población universo tiene media μ y desviación estándar σ , entonces se puede demostrar que el valor esperado y varianza de nuestra variable aleatoria muestral \bar{x} es:

$$\begin{aligned} E(\bar{x}) &= \mu \\ Var(\bar{x}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

22.0.2. Estimación de la Varianza población

La varianza universo es σ^2 . Esperaríamos que la mejor aproximación para la varianza universo a partir de conocer los datos muestrales sería $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Sin embargo, esto no funciona como buena aproximación, ya que se puede demostrar que $E(s^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$. Por lo que concluimos que una buena estimación es $\sigma^2 \simeq \frac{n}{n-1} s^2$.

Por lo que la **estimación de la variación poblacional a partir de la muestra**:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

22.0.3. Error estándar

Digamos que \bar{x} es el promedio de n medidas y es nuestra v.a..

Entonces, por lo que vimos antes, la varianza estándar del promedio es:

$$\sigma_m = \sqrt{Var(\bar{x})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

La cantidad σ_m se llama **error estándar**. Y como se dijo antes, es la desviación estándar de las medias con n elementos.

Si no conocemos la σ original, entonces el error estándar se tiene que calcular usando la aproximación de σ vista antes:

$$\sigma_m \simeq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Es decir, con ello podemos calcular la desviación estándar de los promedios.

22.0.4. Combinación de Medidas

Digamos que tenemos dos cantidades x, y medidas en experimentos. Y queremos medir una cantidad $w = w(x, y)$ que es función de ambas.

El valor promedio medido de x es \bar{x} y su error estándar es $\sigma_{mx} = \sqrt{Var(\bar{x})}$.

Primero consideramos el caso $w = x + y$. Entonces, podemos ver que $E(w) = E(x) + E(y) = \bar{x} + \bar{y}$. Y por tanto:

$$\bar{w} = \bar{x} + \bar{y}$$

Por otro lado, la varianza es $Var(\bar{w}) = Var(\bar{x}) + Var(\bar{y}) = \sigma_{mx}^2 + \sigma_{my}^2$. Por lo tanto:

$$\sigma_{mw} = \sqrt{\sigma_{mx}^2 + \sigma_{my}^2}$$

Más en general, si $w(x, y)$ es una función más complicada, entonces de todas formas la podemos aproximar con Taylor como:

$$w(x, y) \simeq w(\mu_x, \mu_y) + \frac{\partial w}{\partial x}(x - \mu_x) + \frac{\partial w}{\partial y}(y - \mu_y)$$

Y ahora sí podemos calcular la varianza y esperanza para obtener:

$$\begin{aligned} E[w(x, y)] &\simeq w(\mu_x, \mu_y) \\ \Rightarrow \bar{w} &= w(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

Por otro lado, la varianza es:

$$\sigma_{mw} = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_{mx}^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_{my}^2}$$

22.1. Teorema del Límite central

Teorema: Digamos que tenemos una población con cierta característica que tiene una media μ y una variancia σ^2 (no importa cómo esté distribuida la característica, no tiene que ser normal).

Luego tomamos n random samples X_1, \dots, X_n cada uno de n elementos de la población. Definimos \bar{X} como una variable aleatoria que a cada sample le asigna su promedio.

Entonces \bar{X} se distribuye de forma normal y tiene un promedio de μ y una variancia de σ^2/n .

En realidad el número de samples no tiene que ser igual al tamaño de cada sample (pueden ser variables distintas, con que tiendan a crecer y n sea el número de elementos del sample).

Ejemplo: Un hombre promedio toma 2L de agua al día con desviación estándar de 0.7. Queremos un día en el campo con 50 hombres y 110L de agua. ¿Cuál es la proba de que nos quedemos sin agua?

Si tomáramos un sample de 50 personas como tenemos, el promedio de agua que toman se distribuye de manera normal con un centro en 2 y una variancia de $\sigma/\sqrt{50}$.

Nosotros estamos agarrando un punto en ese espacio abstracto de promedios de samples y esperamos que nuestro promedio no sea mayor a 2.2

Los promedios se distribuyen normalmente con media en 2 y variancia $0,7/\sqrt{50}$ por lo que buscamos la probabilidad de que en una distribución de este tipo, estemos a la derecha de 2.2. Resulta ser de 2.17 por ciento.