Solitones: Tarea 3

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

8 de noviembre de 2021

Problemas 5-10

En las notas de clase vimos que al usar el método de escalas múltiples se obtienen las ecuaciones NLS y cmKdV a los órdenes ϵ^3 y ϵ^4

Calcula qué ecuaciones se obtienen a los órdenes $\epsilon^5, \epsilon^6, \epsilon^7$

Hacemos un procedimiento similar al de la clase 8 pero con más términos en las expansiones. Primero consideramos una función de dos variables $f(x,y)$ y encontraremos su serie de Taylor alrededor de un punto (x_0, y_0), que está dada por:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-m} \partial y^m}\bigg|_{x_0,y_0} (x-x_0)^{n-m}(y-y_0)^m$$

Escribimos los primeros términos de la serie (hasta el séptimo término)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0) + k_1(x-x_0) + k_2(y-y_0) \\
&+ \frac{1}{2!}[k_{11}(x-x_0)^2 + 2k_{12}(x-x_0)(y-y_0) + k_{22}(y-y_0)^2] \\
&+ \frac{1}{3!}[k_{111}(x-x_0)^3 + 3k_{112}(x-x_0)^2(y-y_0) + 3k_{122}(x-x_0)(y-y_0)^2 + k_{222}(y-y_0)^3] \\
&+ \frac{1}{4!}[k_{1111}(x-x_0)^4 + 4k_{1112}(x-x_0)^3(y-y_0) + 6k_{1122}(x-x_0)^2(y-y_0)^2 + 4k_{1222}(x-x_0)(y-y_0)^3 + k_{2222}(y-y_0)^4] \\
&+ \frac{1}{5!}[k_{11111}(x-x_0)^5 + 5k_{11112}(x-x_0)^4(y-y_0) + 10k_{11122}(x-x_0)^3(y-y_0)^2 + 10k_{11222}(x-x_0)^2(y-y_0)^3 \\
&\quad + 5k_{12222}(x-x_0)(y-y_0)^4 + k_{22222}(y-y_0)^5] \\
&+ \frac{1}{6!}[k_{111111}(x-x_0)^6 + 6k_{111112}(x-x_0)^5(y-y_0) + 15k_{111122}(x-x_0)^4(y-y_0)^2 + 20k_{111222}(x-x_0)^3(y-y_0)^3 \\
&\quad + 15k_{112222}(x-x_0)^2(y-y_0)^4 + 6k_{122222}(x-x_0)(y-y_0)^5 + k_{222222}(y-y_0)^6] \\
&+ \frac{1}{7!}[k_{1111111}(x-x_0)^7 + 7k_{1111112}(x-x_0)^6(y-y_0) + 21k_{1111122}(x-x_0)^5(y-y_0)^2 + 35k_{1111222}(x-x_0)^4(y-y_0)^3 \\
&\quad + 35k_{1112222}(x-x_0)^3(y-y_0)^4 + 21k_{1122222}(x-x_0)^2(y-y_0)^5 + 7k_{1222222}(x-x_0)(y-y_0)^6 + k_{2222222}(y-y_0)^7]
\end{aligned}$$

Donde hemos definido los términos k de la misma forma que en las notas. Luego, hacemos la sustitución

$$f \to k \ , \ x \to \omega \ , \ y \to |A|^2 \ , \ x_0 \to \omega_0 \ , \ y_0 \to 0 \ , \ f(x_0,y_0) \to k_0$$

Con esta sustitución, nos queda que:

$$
\begin{aligned}
k - k_0 &= k_1(\omega-\omega_0) + k_2|A|^2 \\
&+ \frac{1}{2!}[k_{11}(\omega-\omega_0)^2 + 2k_{12}(\omega-\omega_0)|A|^2 + k_{22}|A|^4] \\
&+ \frac{1}{3!}[k_{111}(\omega-\omega_0)^3 + 3k_{112}(\omega-\omega_0)^2|A|^2 + 3k_{122}(\omega-\omega_0)|A|^4 + k_{222}|A|^6] \\
&+ \frac{1}{4!}[k_{1111}(\omega-\omega_0)^4 + 4k_{1112}(\omega-\omega_0)^3|A|^2 + 6k_{1122}(\omega-\omega_0)^2|A|^4 + 4k_{1222}(\omega-\omega_0)|A|^6 + k_{2222}|A|^8] \\
&+ \frac{1}{5!}[k_{11111}(\omega-\omega_0)^5 + 5k_{11112}(\omega-\omega_0)^4|A|^2 + 10k_{11122}(\omega-\omega_0)^3|A|^4 + 10k_{11222}(\omega-\omega_0)^2|A|^6 \\
&\quad + 5k_{12222}(\omega-\omega_0)|A|^8 + k_{22222}|A|^{10}] \\
&+ \frac{1}{6!}[k_{111111}(\omega-\omega_0)^6 + 6k_{111112}(\omega-\omega_0)^5|A|^2 + 15k_{111122}(\omega-\omega_0)^4|A|^4 + 20k_{111222}(\omega-\omega_0)^3|A|^6 \\
&\quad + 15k_{112222}(\omega-\omega_0)^2|A|^8 + 6k_{122222}(\omega-\omega_0)|A|^{10} + k_{222222}|A|^{12}] \\
&+ \frac{1}{7!}[k_{1111111}(\omega-\omega_0)^7 + 7k_{1111112}(\omega-\omega_0)^6|A|^2 + 21k_{1111122}(\omega-\omega_0)^5|A|^4 + 35k_{1111222}(\omega-\omega_0)^4|A|^6 \\
&\quad + 35k_{1112222}(\omega-\omega_0)^3|A|^8 + 21k_{1122222}(\omega-\omega_0)^2|A|^{10} + 7k_{1222222}(\omega-\omega_0)|A|^{12} + k_{2222222}|A|^{14}] \quad \cdots (1)
\end{aligned}
$$

Ahora, al igual que como se detalla en las notas, aplicaremos la transformada de Fourier a la ecuación. Con dicha transformada, los términos $(k-k_0)$ y $(\omega-\omega_0)$ se transforman de la siguiente forma:

$$(k-k_0) \leftrightarrow -i\partial_z \quad , \quad (\omega-\omega_0) \leftrightarrow i\partial_T$$

Además de esto, al igual que en las notas, introducimos la variable ϵ para darnos un término que nos permita cortar las series. Dicho término se introduce con las siguientes variables:

$$t = \epsilon T \quad , \quad z_n = \epsilon^n Z$$

Con estas nuevas definiciones, como vimos en clase, $(\omega-\omega_0)$ se transforma en realidad como:

$$(\omega-\omega_0) \leftrightarrow i\frac{\partial}{\partial T} = i\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial T} = i\epsilon\frac{\partial}{\partial t} \qquad (2)$$

Y como vimos en clase (ecuación 12), el término $(k-k_0)$ se transforma como:

$$(k-k_0) \leftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial Z} = -i\sum_n \frac{\partial}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{Z} = -i\sum_n \epsilon^n \frac{\partial}{\partial z_n} \qquad (3)$$

Ahora podemos sustituir (2) y (3) en la ecuación (1), lo cual hacemos a continuación:

$$\begin{aligned}
&-i\sum_n \epsilon^n \partial_{z_n}(\epsilon u) = k_1(i\epsilon\partial_t) + k_2|A|^2\\
&+\frac{1}{2!}[k_{11}(i\epsilon\partial_t)^2 + 2k_{12}(i\epsilon\partial_t)|A|^2 + k_{22}|A|^4]\\
&+\frac{1}{3!}[k_{111}(i\epsilon\partial_t)^3 + 3k_{112}(i\epsilon\partial_t)^2|A|^2 + 3k_{122}(i\epsilon\partial_t)|A|^4 + k_{222}|A|^6]\\
&+\frac{1}{4!}[k_{1111}(i\epsilon\partial_t)^4 + 4k_{1112}(i\epsilon\partial_t)^3|A|^2 + 6k_{1122}(i\epsilon\partial_t)^2|A|^4 + 4k_{1222}(i\epsilon\partial_t)|A|^6 + k_{2222}|A|^8]\\
&+\frac{1}{5!}[k_{11111}(i\epsilon\partial_t)^5 + 5k_{11112}(i\epsilon\partial_t)^4|A|^2 + 10k_{11122}(i\epsilon\partial_t)^3|A|^4 + 10k_{11222}(i\epsilon\partial_t)^2|A|^6\\
&\quad + 5k_{12222}(i\epsilon\partial_t)|A|^8 + k_{22222}|A|^{10}]\\
&+\frac{1}{6!}[k_{111111}(i\epsilon\partial_t)^6 + 6k_{111112}(i\epsilon\partial_t)^5|A|^2 + 15k_{111122}(i\epsilon\partial_t)^4|A|^4 + 20k_{111222}(i\epsilon\partial_t)^3|A|^6\\
&\quad + 15k_{112222}(i\epsilon\partial_t)^2|A|^8 + 6k_{122222}(i\epsilon\partial_t)|A|^{10} + k_{222222}|A|^{12}]\\
&+\frac{1}{7!}[k_{1111111}(i\epsilon\partial_t)^7 + 7k_{1111112}(i\epsilon\partial_t)^6|A|^2 + 21k_{1111122}(i\epsilon\partial_t)^5|A|^4 + 35k_{1111222}(i\epsilon\partial_t)^4|A|^6\\
&\quad + 35k_{1112222}(i\epsilon\partial_t)^3|A|^8 + 21k_{1122222}(i\epsilon\partial_t)^2|A|^{10} + 7k_{1222222}(i\epsilon\partial_t)|A|^{12} + k_{2222222}|A|^{14}] \quad \cdots (4)
\end{aligned}$$

Sin embargo, nos falta considerar un detalle, no hemos dicho a qué función se le aplicarán todas estas derivadas. Y a dicha función se le debe de agregar el parámetro ϵ también. Entonces, definimos al igual que en la ecuación (13) de las notas, $A(Z,T) = \epsilon u(z_1, z_2, \cdots, t)$ y esta será la función a la que se le aplican las todos los términos de (4).
Además, como $A(Z,T) = \epsilon u$, cada que aparezca $|A|^n$, debemos poner $\epsilon^n|u|^n$. Entonces, hacemos esta sustitución y además aplicamos todo sobre ϵu:

$$\begin{aligned}
&-i\sum_n \epsilon^n \partial_{z_n}(\epsilon u) = k_1(i\epsilon\partial_t)(\epsilon u) + k_2\epsilon^2|u|^2(\epsilon u)\\
&+\frac{1}{2!}[k_{11}(i\epsilon\partial_t)^2 + 2k_{12}(i\epsilon\partial_t)\epsilon^2|u|^2 + k_{22}\epsilon^4|u|^4](\epsilon u)\\
&+\frac{1}{3!}[k_{111}(i\epsilon\partial_t)^3 + 3k_{112}(i\epsilon\partial_t)^2\epsilon^2|u|^2 + 3k_{122}(i\epsilon\partial_t)\epsilon^4|u|^4 + k_{222}\epsilon^6|u|^6](\epsilon u)\\
&+\frac{1}{4!}[k_{1111}(i\epsilon\partial_t)^4 + 4k_{1112}(i\epsilon\partial_t)^3\epsilon^2|u|^2 + 6k_{1122}(i\epsilon\partial_t)^2\epsilon^4|u|^4 + 4k_{1222}(i\epsilon\partial_t)\epsilon^6|u|^6 + k_{2222}\epsilon^8|u|^8](\epsilon u)\\
&+\frac{1}{5!}[k_{11111}(i\epsilon\partial_t)^5 + 5k_{11112}(i\epsilon\partial_t)^4\epsilon^2|u|^2 + 10k_{11122}(i\epsilon\partial_t)^3\epsilon^4|u|^4 + 10k_{11222}(i\epsilon\partial_t)^2\epsilon^6|u|^6\\
&\quad + 5k_{12222}(i\epsilon\partial_t)\epsilon^8|u|^8 + k_{22222}\epsilon^{10}|u|^{10}](\epsilon u)\\
&+\frac{1}{6!}[k_{111111}(i\epsilon\partial_t)^6 + 6k_{111112}(i\epsilon\partial_t)^5\epsilon^2|u|^2 + 15k_{111122}(i\epsilon\partial_t)^4\epsilon^4|u|^4 + 20k_{111222}(i\epsilon\partial_t)^3\epsilon^6|u|^6\\
&\quad + 15k_{112222}(i\epsilon\partial_t)^2\epsilon^8|u|^8 + 6k_{122222}(i\epsilon\partial_t)\epsilon^{10}|u|^{10} + k_{222222}\epsilon^{12}|u|^{12}](\epsilon u)\\
&+\frac{1}{7!}[k_{1111111}(i\epsilon\partial_t)^7 + 7k_{1111112}(i\epsilon\partial_t)^6\epsilon^2|u|^2 + 21k_{1111122}(i\epsilon\partial_t)^5\epsilon^4|u|^4 + 35k_{1111222}(i\epsilon\partial_t)^4\epsilon^6|u|^6\\
&\quad + 35k_{1112222}(i\epsilon\partial_t)^3\epsilon^8|u|^8 + 21k_{1122222}(i\epsilon\partial_t)^2\epsilon^{10}|u|^{10} + 7k_{1222222}(i\epsilon\partial_t)\epsilon^{12}|u|^{12} + k_{2222222}\epsilon^{14}|u|^{14}](\epsilon u) \quad \cdots (5)
\end{aligned}$$

Ahora podemos ya construir las ecuaciones que surgen de aquí al tomar distintas potencias de ϵ. Simplemente nos fijamos en la ecuación y tomamos solamente los elementos que tienen ϵ^n. Recordamos que las derivadas se aplican sobre la función (ϵu) solamente.

- ϵ^2: Nos quedamos sólo con los términos que tengan ϵ^2 en la expresión (5)

$$\begin{aligned}
-i\epsilon^2\partial_{z_1}u &= k_1(i\epsilon\partial_t)(\epsilon u) \\
\Rightarrow\ -\partial_{z_1}u &= k_1\partial_t u \\
\Rightarrow &\boxed{u_{z_1} + k_1 u_t = 0}
\end{aligned}$$

- ϵ^3: Nos quedamos sólo con los términos que tengan ϵ^3 en la expresión (5)

$$\begin{aligned}
-i\epsilon^3\partial_{z_2}u &= k_2\epsilon^3|u|^2u + \frac{1}{2!}k_{11}(i\epsilon\partial_t)^2(\epsilon u) \\
\Rightarrow\quad -i\partial_{z_2}u &= k_2|u|^2u - \frac{1}{2}k_{11}\partial_t^2 u \\
\Rightarrow\quad -iu_{z_2} - k_2|u|^2u + \frac{1}{2}k_{11}\partial_t^2 u &= 0 \\
\Rightarrow\quad &\boxed{iu_{z_2} - \frac{1}{2}k_{11}u_{tt} + k_2|u|^2u = 0}
\end{aligned}$$

- ϵ^4: Nos quedamos sólo con los términos que tengan ϵ^4 en la expresión (5)

$$\begin{aligned}
-i\epsilon^4\partial_{z_3}u &= \frac{1}{2!}2k_{12}(i\epsilon\partial_t)\epsilon^2|u|^2(\epsilon u) + \frac{1}{3!}k_{111}(i\epsilon\partial_t)^3(\epsilon u) \\
\Rightarrow\quad -\partial_{z_3}u &= k_{12}|u|^2\partial_t u - \frac{1}{6}k_{111}\partial_t^3 u \\
\Rightarrow\quad -u_{z_3} - k_{12}|u|^2\partial_t u + \frac{1}{6}k_{111}u_{ttt} &= 0 \\
\Rightarrow\quad &\boxed{u_{z_3} + k_{12}|u|^2u_t - \frac{1}{6}k_{111}u_{ttt} = 0}
\end{aligned}$$

- ϵ^5: Nos quedamos sólo con los términos que tengan ϵ^5 en la expresión (5)

$$\begin{aligned}
-i\epsilon^4\partial_{z_4}(\epsilon u) &= \frac{1}{2!}k_{22}\epsilon^4|u|^4(\epsilon u) + \frac{1}{3!}3k_{112}(i\epsilon\partial_t)^2\epsilon^2|u|^2(\epsilon u) + \frac{1}{4!}k_{1111}(i\epsilon\partial_t)^4(\epsilon u) \\
\Rightarrow\ -i\partial_{z_4}(u) &= \frac{1}{2}k_{22}|u|^4u - \frac{1}{2}k_{112}|u|^2(\partial_t)^2u + \frac{1}{4!}k_{1111}(\partial_t)^4u \\
\Rightarrow\ -iu_{z_4} &= \frac{1}{2}k_{22}|u|^4u - \frac{1}{2}k_{112}|u|^2u_{tt} + \frac{1}{4!}k_{1111}u_{tttt} \\
&\boxed{iu_{z_4} + \frac{1}{2}k_{22}|u|^4u - \frac{1}{2}k_{112}|u|^2u_{tt} + \frac{1}{4!}k_{1111}u_{tttt} = 0}
\end{aligned}$$

- ϵ^6: Nos quedamos sólo con los términos que tengan ϵ^6 en la expresión (5)

$$\begin{aligned}
-i\epsilon^5\partial_{z_5}(\epsilon u) &= \frac{1}{3!}3k_{122}(i\epsilon\partial_t)\epsilon^4|u|^4(\epsilon u) + \frac{1}{4!}4k_{1112}(i\epsilon\partial_t)^3\epsilon^2|u|^2(\epsilon u) + \frac{1}{5!}k_{11111}(i\epsilon\partial_t)^5(\epsilon u) \\
\Rightarrow\ -iu_{z_5} &= \frac{1}{2}k_{122}|u|^4(i\partial_t)u + \frac{1}{6}k_{1112}|u|^2(i\partial_t)^3u + \frac{1}{5!}k_{11111}(i\partial_t)^5u \\
\Rightarrow\ -u_{z_5} &= \frac{1}{2}k_{122}|u|^4\partial_t u - \frac{1}{6}k_{1112}|u|^2\partial_t^3 u + \frac{1}{5!}k_{11111}\partial_t^5 u \\
\Rightarrow\ &\boxed{u_{z_5} + \frac{1}{2}k_{122}|u|^4u_t - \frac{1}{6}k_{1112}|u|^2u_{ttt} + \frac{1}{5!}k_{11111}u_{ttttt} = 0}
\end{aligned}$$

- ϵ^7: Nos quedamos sólo con los términos que tengan ϵ^7 en la expresión (5)

$$-i\epsilon^6\partial_{z_6}(\epsilon u) = \frac{1}{3!}k_{222}\epsilon^6|u|^6(\epsilon u) + \frac{1}{4!}6k_{1122}(i\epsilon\partial_t)^2\epsilon^4|u|^4(\epsilon u) + \frac{1}{5!}5k_{11112}(i\epsilon\partial_t)^4\epsilon^2|u|^2(\epsilon u) + \frac{1}{6!}k_{111111}(i\epsilon\partial_t)^6(\epsilon u)$$

$$\Rightarrow\ -i\partial_{z_6}u = \frac{1}{3!}k_{222}|u|^6u - \frac{6}{4!}k_{1122}|u|^4(\partial_t)^2u + \frac{5}{5!}k_{11112}|u|^2\partial_t^4u - \frac{1}{6!}k_{111111}\partial_t^6u$$

$$\Rightarrow \boxed{iu_{z_6} + \frac{1}{3!}k_{222}|u|^6u - \frac{6}{4!}k_{1122}|u|^4u_{tt} + \frac{1}{4!}k_{11112}|u|^2u_{tttt} - \frac{1}{6!}k_{111111}u_{tttttt} = 0}$$