Dinámica de Medios Deformables: Tarea 2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
Jessica Andre Gallegos Salgado

March 9, 2022

Problema 1

1. Para un fluido isotérmico, la ecuación de energía queda reemplazada por la condición $T = P\mu/\rho R = T_0$ (con T_0 una constante).

a) **Plantear las ecuaciones de Euler 1D para un flujo isotérmico (son solo 2 ecuaciones que contienen la velocidad y la densidad)**

Empezamos escribiendo las ecuaciones de Euler de continuidad y momento en 3 dimensiones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$
$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j + P\delta_{ij}) = 0$$

Como sólo nos interesan las ecuaciones en una dimensión, ignoramos los términos con derivadas respecto a y y a z, con lo que las ecuaciones son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$
$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) = 0$$

A estas ecuaciones les agregamos la ecuación de energía, que para un fluido isotérmico queda reemplazada por $T_0 = \frac{P\mu}{\rho R}$. Podemos usar esta ecuación para escribir P en términos de ρ como $P = \frac{\rho R T_0}{\mu}$. Reemplazamos este valor de P en las ecuaciones a las que habíamos llegado antes para eliminar la presión de éstas.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$
$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2 + \rho\frac{RT_0}{\mu}\right) = 0$$

Estas son las dos ecuaciones que describen a un fluido isotérmico en 1D.

b) **Linealizar las ecuaciones para la velocidad y la densidad obtenidas en el inciso** (a)

Para linealizar es necesario escribir la densidad como un valor constante ρ_0 más una pequeña perturbación ρ'. Por otro lado, suponemos que la velocidad no perturbada es 0, por lo que con una pequeña perturbación tendremos que agregarle una velocidad pequeña u' (pequeña comparada con la velocidad del sonido en el medio). Por lo tanto, tenemos que la densidad y la velocidad perturbadas son:

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$
$$u = u'$$

Introducimos estas expresiones en las ecuaciones encontradas en el inciso anterior. Primero lo hacemos en la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \frac{\partial}{\partial x}\left((\rho_0 + \rho')u'\right) = 0$$

Usamos que ρ_0 es constante

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \rho' u'}{\partial x} = 0$$

Para la linealización es necesario eliminar los términos que son productos de cantidades pequeñas. Por lo tanto, despreciamos el término $\rho' u'$ y nos queda solamente:

$$\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0}$$

Ahora hacemos la linealización para la ecuación de momento:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2 + \rho \frac{RT_0}{\mu}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left((\rho_0 + \rho')u'\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left((\rho_0 + \rho')u^{'2} + (\rho_0 + \rho')\frac{RT_0}{\mu}\right) = 0$$

Podemos despreciar los términos que son productos de cantidades pequeñas, $\rho' u'$ y $u^{'2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 u') + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{RT_0}{\mu} + \rho' \frac{RT_0}{\mu}\right)$$

Como ρ_0 es constante, la derivada $\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{RT_0}{\mu}\right)$ es 0

$$\Rightarrow \boxed{\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{RT_0}{\mu}\frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0}$$

Con lo que tenemos ya las dos ecuaciones linealizadas.

c) **Combinar las ecuaciones linealizadas para encontrar la ecuación diferencial para la velocidad u del flujo ¿Cuál es su solución general?**

Las ecuaciones linealizadas a las que habíamos llegado en el inciso pasado son:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (1)$$
$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{RT_0}{\mu}\frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Para combinarlas, podemos derivar la ecuación (1) respecto a x y derivar la ecuación (2) respecto a t, para que así ambas ecuaciones tengan el término $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial t}$ y podamos cancelarlo. Al hacer estas derivadas nos queda:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x}\right) = 0 \quad (1')$$
$$\rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + \frac{RT_0}{\mu}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t \partial x} = 0 \quad (2')$$

Por la ecuación (1') tenemos que $\dfrac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \dfrac{\partial u'}{\partial x}\right)$, lo cual podemos sustituir en el término $\dfrac{\partial^2 \rho'}{\partial t \partial x}$ de la ecuación (2') (tomando en cuenta que no importa el orden de las derivadas, por lo que $\dfrac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial^2 \rho'}{\partial t \partial x}$). Entonces la ecuación (2') nos queda como:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - \frac{RT_0}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \ \rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - \rho_0 \frac{RT_0}{\mu}\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} &= 0 \\ \Rightarrow \ \boxed{\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - \frac{RT_0}{\mu}\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0} \end{aligned}$$

Podemos reescribir esta ecuación definiendo la velocidad del sonido en el fluido isotérmico $c_I = \sqrt{\dfrac{RT_0}{\mu}}$, con lo que nos queda:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - c_I^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0$$

Esta ecuación es la ecuación de onda con una velocidad c_I, cuya solución más general es bien conocida y es de la forma:

$$u'(x,t) = f(x - c_I t) + g(x + c_I t)$$

Con f y g funciones arbitrarias. La función f indica una onda longitudinal que viaja a velocidad c_I hacia $+x$ y la función g indica una onda longitudinal que viaja a velocidad c_I hacia la dirección $-x$.

d) **Encontrar la ecuación diferencial para la perturbación de densidad ρ'**

Nuevamente empezamos con las ecuaciones (1) y (2) del inciso pasado, pero ahora derivamos la ecuación (1) respecto a t y la ecuación (2) respecto a x, con lo que llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial x} &= 0 \quad (1'') \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial t} + \frac{RT_0}{\mu}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} &= 0 \quad (2'') \end{aligned}$$

De la ecuación $(1'')$ vemos que $\rho_0 \dfrac{\partial^2 u'}{\partial t \partial x} = -\dfrac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}$ y podemos sustituir esto en la ecuación $(2'')$, que nos queda:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \frac{RT_0}{\mu}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} &= 0 \\ \Rightarrow \ \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \frac{RT_0}{\mu}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} &= 0 \\ \boxed{\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_I^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0} \end{aligned}$$

Por lo que vemos que la ecuación para ρ' es también una ecuación de onda y su solución es también de la forma:

$$\rho'(x,t) = f(x - c_I t) + g(x + c_I t)$$

e) **¿Cuál es la velocidad de propagación de perturbaciones pequeñas en un flujo isotérmico? ¿En qué se diferencia ésta de la "velocidad del sonido" de un gas no isotérmico?**

Como vimos en los inciso c) y d), tanto ρ' como u' cumplen con la ecuación de onda con una velocidad dada por $c_I = \sqrt{\frac{RT_0}{\mu}}$, que es la velocidad con la que se transmiten estas perturbaciones. Si usamos de nuevo la ecuación de estado $P = \frac{\rho R T_0}{\mu}$, podemos reescribir esta velocidad como $c_I = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}$.

Esta velocidad es algo distinta a la encontrada para un gas que no sea isotérmico, en cuyo caso la velocidad a la que llegamos en clase es $c_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$. Podría pensarse que la velocidad isotérmica se cosigue a partir de c_s cuando $\gamma = 1$.

Problema 2

Considerar una atmósfera isotérmica plana (o sea algo como la atmósfera de la Tierra, la cual tiene una temperatura $T_0 \simeq 300K$, para alturas mucho menores que el radio de la Tierra).

a) **Para una atmósfera en reposo, hacer el balance de presión y gravedad en dirección vertical para un elemento de fluido y deducir la ecuación de "equilibrio hidrostático",**

$$\frac{dP_0}{dz} = -\rho g$$

donde $P_0(z)$ es la estratificación vertical de la presión.

Imaginamos un pedazo cúbico muy pequeño del gas en la atmósfera que tenga una altura dz y que se encuentra en reposo. La cara inferior del cubo se encuentra a una altura z sobre la tierra y la parte superior se encuentra entonces a una altura $z+dz$. Además, denotamos por dA el área de las caras del cubo.

Consideramos ahora las fuerzas que actúan sobre este cubo.

1. El cubo siente la fuerza de gravedad debido a su masa. Para calcularla, vemos que el volumen del cubo es área de la base por altura, lo cual es igual a $dAdz$. Luego, su masa es este volumen multiplicado por su densidad ρ (que se puede considerar como que no varía dentro del cubo debido a su pequeño tamaño), que es igual a $\rho dzdA$. Entonces, la fuerza de la gravedad sobre el cubo de gas se consigue multiplicando esta masa por g, que da como resultado
$$-\rho g dzdA$$
Con el signo negativo porque la fuerza de gravedad actúa hacia abajo.
2. El cubo siente una fuerza debida a la presión sobre su cara superior. La presión en la cara superior es P_0 evaluado en $z+dz$, es decir $P_0(z+dz)$. Y la fuerza sobre esta cara se consigue al multiplicar la presión por el área sobre la que actúa, que es dA. Por lo que la fuerza es de
$$-P_0(z+dz)dA$$
Con el signo negativo porque la presión sobre la cara superior empuja al cubo hacia abajo.
3. El cubo siente una fuerza debida a la presión sobre su cara inferior. Esta cara se encuentra a una altura z, por lo que la presión es $P_0(z)$ y por lo tanto la fuerza es de
$$P_0(z)dA$$
Que es positiva porque la presión sobre la cara inferior empuja al gas hacia arriba.

Luego, como el gas se encuentra en equilibrio, estas tres fuerzas se deben de cancelar, por lo que:

$$\begin{aligned}
&-\rho g dzdA - P_0(z+dz)dA + P_0(z)dA = 0\\
&\text{Dividimos por el volumen } dzdA,\\
&-\rho g - \frac{1}{dz}P_0(z+dz) + \frac{1}{dz}P(z) = 0\\
&-\rho g - \frac{P_0(z+dz) - P_0(z)}{dz} = 0
\end{aligned}$$

Pero para dz tendiendo a 0, la fracción $\frac{P_0(z+dz)-P_0(z)}{dz}$ se aproxima a la derivada de P_0 respecto a z, por lo que tenemos que:

$$-\rho g - \frac{dP_0}{dz} = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP_0}{dz} = -\rho g}$$

b) **Integrar esta ecuación y obtener la estratificación vertical de densidad**

$$\rho_0(z) = P_0(z)/c_0^2 = \rho_s e^{-z/H}$$

donde $c_0^2 = RT_0/\mu$ es la velocidad del sonido isotérmica, ρ_s la densidad en $z = 0$ (i.e. en la superficie) y $H := c_0^2/g$ es la "escala de altura" de la atmósfera (donde g es la aceleración de la gravedad, que suponemos constante).

Primero que nada usamos la ecuación de estado isotérmica (válida para alturas mucho menores que el radio de la Tierra, en las que la temperatura es T_0 y es aproximadamente constante con la altura), que es $\frac{P_0\mu}{\rho_0 R} = T_0$.
Usando que la velocidad del sonido isotérmica es $c_0^2 = RT_0/\mu$, esta ecuación se puede escribir como $P_0 = c_0^2\rho_0$.

Luego, podemos sustituir $P_0 = c_0^2\rho_0$ en la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP_0}{dz} = -\rho_0 g$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\left(c_0^2\rho_0\right) = -\rho_0 g$$

Como la velocidad del sonido es constante, tenemos que

$$\Rightarrow \; c_0^2\frac{d\rho_0}{dz} = -\rho_0 g$$

$$\Rightarrow \; \frac{d\rho_0}{dz} = -\frac{g}{c_0^2}\rho_0$$

Esta ecuación es muy sencilla y se puede integrar usando separación de variables, para lo cual pasamos el dz del lado derecho y el ρ_0 del izquierdo e integramos:

$$\int \frac{d\rho_0}{\rho_0} = -\int \frac{g}{c_0^2}dz$$

$$\Rightarrow \; \ln(\rho_0) = -\frac{g}{c_0^2}z + K$$

$$\Rightarrow \; \ln(\rho_0) = -\frac{1}{H}z + K$$

Con K una constante de integración y $H := c_0^2/g$. Sacamos la exponencial de ambos lados, con lo que nos queda:

$$\rho_0(z) = e^K e^{-z/H}$$

Finalmente, la densidad en $z = 0$ tiene que ser igual a ρ_s, por lo que $\rho_s = \rho_0(0) = e^K e^{-0/H} = e^K$. Con lo que concluimos que $e^K = \rho_s$ y entonces la solución es:

$$\boxed{\rho_0(z) = \rho_s e^{-z/H}}$$

Problema 3

a) **Demostrar que las ecuaciones de Euler 1D linealizadas (para un flujo isotérmico moviéndose en la dirección vertical z) para una perturbación con w (la velocidad en z) pequeña y con $\rho' << \rho_0$ son:**

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial w\rho_0(z)}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial w\rho_0(z)}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial z} = -\rho' g$$

Partimos de las ecuaciones de Euler 1D isotérmicas para movimiento vertical. Estas ecuaciones son las mismas que a las que llegamos en el problema 1.a) pero con w en vez de u para la velocidad y con z en vez de x. Además, para considerar la fuerza de la gravedad, hay que agregar el término $-\rho g$ a la ecuación del momento. Entonces, las ecuaciones son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (3)$$
$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w^2 + \rho \frac{RT_0}{\mu}\right) = -\rho g \quad (4)$$

Para linealizar las ecuaciones, al igual que en el ejercicio 1, agregamos una pequeña perturbación a la densidad respecto a un valor no perturbado ρ_0 y consideramos la velocidad w como un valor muy pequeño.

$\rho = \rho_0 + \rho'$

$w =$ Un valor pequeño respecto a la velocidad del sonido.

Sustituimos esto en la ecuación (3) para linealizarla:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \frac{\partial}{\partial z}((\rho_0 + \rho')w) = 0$$

Usamos que ρ_0 es constante en el tiempo (aunque sí depende de z)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho' + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho' w) = 0$$

Despreciamos los productos de cantidades pequeñas, en este caso $\rho' w$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w) = 0}$$

Linealizamos ahora la ecuación (4):

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w^2 + \rho \frac{RT_0}{\mu}\right) = -\rho g$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}((\rho_0 + \rho')w) + \frac{\partial}{\partial z}\left((\rho_0 + \rho')w^2 + (\rho_0 + \rho')\frac{RT_0}{\mu}\right) = -(\rho_0 + \rho')g$$

Despreciamos los términos que son productos de cantidades pequeñas, $\rho' w, w^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 w) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{RT_0}{\mu} + \rho' \frac{RT_0}{\mu}\right) = -\rho_0 g - \rho' g$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_0 w}{\partial t} + \frac{RT_0}{\mu}\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{RT_0}{\mu}\frac{\partial \rho'}{\partial z} = -\rho_0 g - \rho' g$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_0 w}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial z} = -\rho_0 g - \rho' g$$

Finalmente, utilizamos la ecuación de estado $P_0 = c_0^2\rho_0$ sobre el segundo término, lo que lo transforma en $c_0^2\dfrac{\partial\rho_0}{\partial z} = \dfrac{\partial P_0}{\partial z}$ y la ecuación queda como

$$\frac{\partial\rho_0 w}{\partial t} + \frac{\partial P_0}{\partial z} + c_0^2\frac{\partial\rho'}{\partial z} = -\rho_0 g - \rho' g$$

Y ahora usamos la ecuación de equilibrio hidrostático del problema 2, $\dfrac{dP_0}{dz} = -\rho_0 g$, con lo que obtenemos:

$$\frac{\partial\rho_0 w}{\partial t} - \rho_0 g + c_0^2\frac{\partial\rho'}{\partial z} = -\rho_0 g - \rho' g$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\rho_0 w}{\partial t} + c_0^2\frac{\partial\rho'}{\partial z} = -\rho' g}$$

b) **Despreciando la acción de la gravedad sobre ρ' (es decir, el término $\rho' g$ en la ecuación de arriba, obtener la ecuación:**

$$\frac{\partial^2 w\rho_0}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 w\rho_0}{\partial z^2} = 0$$

Despreciando el término $\rho' g$, las ecuaciones del inciso pasado son:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \frac{\partial\rho_0 w}{\partial z} = 0 \quad (3')$$
$$\frac{\partial\rho_0 w}{\partial t} + c_0^2\frac{\partial\rho'}{\partial z} = 0 \quad (4')$$

Derivamos la ecuación (3') respecto a z y la (4') respecto a t, con lo que nos quedan:

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial z\partial t} + \frac{\partial^2\rho_0 w}{\partial z^2} = 0 \quad (3'')$$
$$\frac{\partial^2\rho_0 w}{\partial t^2} + c_0^2\frac{\partial^2\rho'}{\partial t\partial z} = 0 \quad (4'')$$

De la ecuación (3") obtenemos $\dfrac{\partial^2\rho'}{\partial z\partial t} = -\dfrac{\partial^2\rho_0 w}{\partial z^2}$ y podemos reemplazar esto en la ecuación $(4'')$ (tomando en cuenta que las derivadas cruzadas de ρ' son iguales). Por lo que la ecuación $(4'')$ se convierte en:

$$\boxed{\frac{\partial^2\rho_0 w}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\rho_0 w}{\partial z^2} = 0}$$

c) **¿Cuál es la solución general $w(z,t)$ de esta ecuación? Describir el comportamiento cualitativo de esta solución**

La ecuación del inciso pasado es una ecuación de onda para $\rho_0 w$ con velocidad c_0. Por lo que su solución general es:

$$(\rho_0 w)(z,t) = f(z - c_0 t) + g(z + c_0 t)$$

Con f, g funciones arbitrarias y que representan una perturbación que viaja hacia $z+$ y una que viaja hacia $z-$. Luego, despejando w tenemos que:

$$w(z,t) = \frac{1}{\rho_0}\left[f(z - c_0 t) + g(z + c_0 t)\right]$$

Pero por lo visto en el ejercicio 2, la densidad ρ_0 depende de z como $\rho_0(z) = \rho_s e^{-z/H}$ y entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
w(z,t) &= \frac{1}{\rho_s e^{-z/H}} \left[f(z - c_0 t) + g(z + c_0 t) \right] \\
&= \boxed{\frac{e^{z/H}}{\rho_s} \left[f(z - c_0 t) + g(z + c_0 t) \right]}
\end{aligned}
$$

La interpretación es que se trata de la superposición de dos ondas $f(z - c_0 t)$ y $g(z + c_0 t)$ que se propagan en la dirección $z+$ y $z-$ respectivamente a velocidad c_0. Pero con la particularidad de que la amplitud está multiplicada por $e^{z/H}/\rho_0$, por lo que las ondas que viajan hacia arriba aumentan de amplitud exponencialmente y las que viajan hacia abajo disminuyen de amplitud exponencialmente.