Dinámica de Medios Deformables: Tarea 4

Tomás Ricardo Basile Álvarez
Jessica Andrea Gallegos Salgado

10 de abril de 2022

Problema 1

Para un fluido invíscido adiabático, la ecuación de energía térmica puede escribirse como

$$\rho \frac{de}{dt} = -P\nabla \cdot \vec{u}$$

Muestre que si el flujo es además incompresible, esta ecuación de energía conduce a la expresión:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

donde la entalpía (por unidad de masa) es $h = e + P/\rho$.

Empezamos sencillamente usando el dato de que se trata de un flujo incompresible, lo que significa que $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Por lo tanto, la ecuación de energía térmica toma la forma sencilla:

$$\rho \frac{de}{dt} = -P\nabla \cdot \vec{u} = -P(0)$$
$$\Rightarrow \ \rho \frac{de}{dt} = 0$$

Ahora usamos la definición de la entalpía, que nos dice que $h = e + P/\rho$, y por lo tanto podemos sustituir $e = h - P/\rho$ en la ecuación:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(h - P/\rho\right) = 0$$

Como el flujo es incompresible, se cumple también que $\rho = cte$ y por lo tanto al hacer la derivada obtenemos:

$$\rho \frac{dh}{dt} - \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho}\right)$$
$$\Rightarrow \rho \frac{dh}{dt} - \rho \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow \rho \frac{dh}{dt} - \frac{dP}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow \rho \frac{dh}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

Esto último es la ecuación a la que buscábamos llegar.

Problema 2

Para obtener una expresión que da la presión de un fluido a partir de su vorticidad, empleamos la siguiente identidad:

$$\nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] = \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\nabla^2 \vec{u}) - \vec{\omega} \cdot \vec{\omega},$$

donde $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$. Muestra que esta identidad es válida para un fluido incompresible. Serán útiles las siguientes identidades que valen para cualesquiera campos vectoriales $\vec{A}, \vec{B}$:

$$\begin{aligned} (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{A} &= \frac{1}{2}\nabla(\vec{A} \cdot \vec{A}) - \vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) \\ \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}. \end{aligned}$$

Para probar la identidad que se busca, partiremos del lado izquierdo y llegaremos al derecho. Empezaremos usando la primera identidad que nos dan en el enunciado, para poder reescribir $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] &= \nabla \cdot \left[\frac{1}{2}\nabla(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})\right] \\ &\text{Usamos ahora la definición de la vorticidad } \nabla \times \vec{u} = \vec{w} \\ &= \nabla \cdot \left[\frac{1}{2}\nabla(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \times \vec{w}\right] \\ &= \frac{1}{2}\nabla \cdot \nabla(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \\ &\text{Vemos ahora que tenemos la definición del laplaciano en el primer término } \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \\ &= \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \end{aligned}$$

Ahora identificamos que el segundo término es la divergencia de un producto cruz. Por lo tanto, será útil usar la segunda identidad para reescribir este término:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] &= \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - [\vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{w})] \\ &= \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{u}) + \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{w}) \end{aligned}$$

El último término de esta expresión se puede reescribir, pues por la definición de $\vec{w}$, es igual a $\nabla \times \vec{w} = \nabla \times (\nabla \times \vec{u})$. A esta expresión le podemos aplicar la tercera identidad, lo que nos lleva a $\nabla \times \vec{w} = \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u}$. Además, como el flujo es incompresible, se tiene que $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ y por lo tanto concluimos que $\nabla \times \vec{w} = -\nabla^2 \vec{u}$. Sustituimos esto en la expresión que teníamos y llegamos así a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] &= \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{u}) + \vec{u} \cdot (-\nabla^2 \vec{u}) \\ &= \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\nabla^2 \vec{u}) \end{aligned}$$

Es decir, concluimos que:

$$\boxed{\nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] = \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\nabla^2 \vec{u})}$$

que es lo que se quería probar.

Problema 3

En coordenadas cilíndricas, el campo de velocidad de un flujo uniforme que pasa alrededor de un cilindro circular es:

$$u_R = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)\cos\theta$$
$$u_\theta = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right)\sin\theta$$

donde U_∞ es la velocidad del flujo (uniforme) lejos del cilindro y a es el radio del cilindro. Suponemos que el flujo es invíscido e incompresible (densidad $\rho =$ constante).

a) **Usando la ecuación de Bernoulli, determina el campo de presión $P(R,\theta)$ para todo punto en el fluido. La presión del flujo lejos del cilindro es constante e igual a P_∞**

Como vimos en clase, el teorema de Bernoulli para un flujo estacionario es:

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2} + \phi + \int \frac{dP}{\rho} = cte,$$

donde ϕ es el potencial de las fuerzas conservativas. Como no hay ninguna fuerza en el problema, tenemos que $\phi = 0$, además, como $\rho = cte$, puede salir de la integral y nos queda:

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2} + \frac{1}{\rho}\int dP = cte$$
$$\Rightarrow \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2} + \frac{P}{\rho} = cte$$

Podemos multiplicar ambos lados por ρ para que no esté dividiendo (y el lado derecho seguirá siendo una constante, ya que ρ lo es):

$$\frac{1}{2}\rho\vec{u}\cdot\vec{u} + P = cte \quad (1)$$

Primero tenemos que obtener el valor de la constante del lado derecho de la ecuación. Como esta constante tiene que ser la misma en todo el fluido, podemos usar los datos de presión y velocidad lejos del cilindro para obtenerla. Lejos del cilindro la presión es P_∞ y la velocidad es U_∞, por lo que la constante de la ecuación de Bernoulli es:

$$\frac{1}{2}\rho\vec{U}_\infty\cdot\vec{U}_\infty + P_\infty = cte$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty = cte$$

Por lo tanto, ya habiendo obtenido la constante, podemos sustituirla en la ecuación (1) y obtenemos la ecuación:

$$\frac{1}{2}\rho\vec{u}\cdot\vec{u} + P = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty$$

Por lo tanto, la presión en un punto cualquiera del fluido se obtiene despejando esto:

$$P(R,\theta) = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty - \frac{1}{2}\rho\vec{u}\cdot\vec{u}$$

Lo único que hace falta para conseguir esta expresión completa es sustituir el vector $\vec{u}$ que nos da el problema. Este vector es $\vec{u} = u_R\hat{R} + u_\theta\hat{\theta}$, por lo que $\vec{u}\cdot\vec{u} = u_R^2 + u_\theta^2$. Sustituyendo esto en la ecuación para $P(R,\theta)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
P(R,\theta) &= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty - \frac{1}{2}\rho[u_R^2 + u_\theta^2] \\
&= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty - \frac{1}{2}\rho\left[U_\infty^2\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)^2\cos^2\theta + U_\infty^2\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^2\sin^2\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty - \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)^2\cos^2\theta + \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^2\sin^2\theta\right] \\
&= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)^2\cos^2\theta - \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^2\sin^2\theta\right]
\end{aligned}$$

Esta expresión nos permite calcular la presión para cualquier posición del fluido con R,θ.

b) **Obtén la presión en la superficie del cilindro,** $P(a,\theta)$

Para ello usamos la expresión encontrada para $P(R,\theta)$ en el inciso anterior y sustituimos $R=a$:

$$\begin{aligned}
P(a,\theta) &= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-\left(1-\frac{a^2}{a^2}\right)^2\cos^2\theta - \left(1+\frac{a^2}{a^2}\right)^2\sin^2\theta\right] \\
&= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-(1-1)^2\cos^2\theta - (1+1)^2\sin^2\theta\right] \\
&= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-4\sin^2\theta\right]
\end{aligned}$$

c) **Determina la posición de los dos puntos de estancamiento del flujo en la superficie dle cilindro. Es decir, los valores de θ en los que la presión es la de estancamiento, $P(a,\theta) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\theta^2$ (ahí la velocidad del fluido es cero). Nótese que ésta es la presión máxima en todo el fluido (en esos puntos, toda la energía cinética del fluido se ha convertido en energía interna)**

Como dice el problema, necesitamos obtener las posiciones en las que $P(a,\theta) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\theta^2$. La expresión para $P(a,\theta)$ ya la tenemos en el inciso pasado y ahora simplemente la igualamos a $P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\theta^2$ y nos queda:

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-4\sin^2\theta\right] = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\theta^2$$

Restamos P_∞ de ambos lados

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-4\sin^2\theta\right] = \frac{1}{2}\rho U_\theta^2$$

Dividimos por $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ de ambos lados

$$\Rightarrow\ 1-4\sin^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow -4\sin^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow\ \sin^2\theta = 0$$

Esto implica $\sin\theta = 0$, lo que sucede cuando $\boxed{\theta = 0\ ,\ \theta = \pi}$

d) **Calcula el coeficiente de presión C_P (no confundir con la capacidad calorífica a presión constante) en la superficie del cilindro; este coeficiente se define como:**

$$C_P = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

Simplemente sustituimos en la expresión que nos dan. Ya por el inciso b) sabemos que la presión en la superficie del cilindro es $P(a,\theta) = P_\infty + \dfrac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta)$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
C_P &= \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \\
&= \frac{P_\infty + \dfrac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta) - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \\
&= \boxed{1 - 4\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

e) **Grafica C_P en la superficie del cilindro como función de θ en el rango $0 < \theta < 180°$. Nótese que en los puntos de estancamiento se tiene $C_P = 1$ (y éste es su valor máximo).**

Simplemente graficamos lo obtenido en el inciso anterior como función de θ. Realizamos la gráfica en Mathematica.

t41.PNG