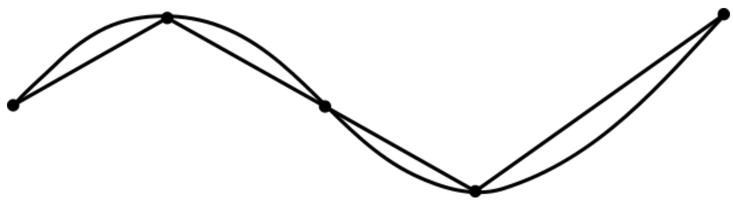
Cálculo II

Trabajo Final

Longitud de curva



Tomás Basile
Jessica Gallegos
Zeus Hernández
Nathan Kosoi
Rebeca Rangel

7 de Junio de 2019

Introducción

El cálculo de la longitud de una curva plana supone un problema cuya resolución es propia del Cálculo elemental (elemental para quien sabe Cálculo), siempre que ésta esté definida por una función $y = f(x)$. Asumimos que el lector está familiarizado con los conceptos de partición, cotas inferiores y superiores, supremos, entre otros, que son fundamentales en la construcción de la teoría.

Dada una función $f : [a, b] \subseteq A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$, definimos una partición P no trivial sobre $[a, b], P = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, y en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i], i \in \{1, \ldots, n\}$, es posible aproximar la longitud de la curva a través de una línea poligonal, cuyos vértices están dados por los puntos de la partición y sus imágenes bajo f.

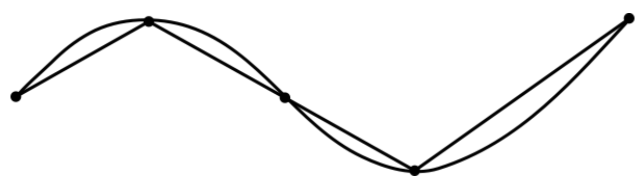


Figura 1: Aproximación de una curva mediante varios segmentos de recta.

En virtud del teorema de Pitágoras, la longitud de un segmento con vértices $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ se obtiene con la expresión $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (f(x_2) - f(x_1))^2}$. En consecuencia, la aproximación descrita anteriormente está dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Definimos entonces, $l(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$, que podemos pensar como la aproximación de la longitud de la curva usando la partición P.

Para cada partición $P \in P_{[a,b]}$, una refinación de la anterior presenta un resultado más exacto, y el conjunto de sumas, de ser acotado superiormente, nos llevará al valor buscado, manifestándose en el supremo de dicho conjunto. Si el conjunto no es acotado superiormente, se dice que la curva no es rectificable. Por lo tanto definimos la longitud de curva como: $lon(f) = \sup\{l(f, P) | P \in P_{[a,b]}\}$. Desde luego, la justificación pertinente es desarrollada con rigor en las páginas posteriores.

Teorema 1.
Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ una función, y sea $[a,b] \subset A$. Si $P = P = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ es una partición de $[a,b]$ y Q es un refinamiento de P, entonces $l(f,P) \leq l(f,Q)$

Demostración. Tomamos el primer elemento x_k^* que está en la partición Q pero no en la partición P, y creamos la nueva partición $P_1 = P \cup \{x_k^*\}$.

Este x_k^* se encuentra en algún subintervalo de P, $x_k^* \in [x_{j-1}, x_j]$ para algún $j = 1, ..., n$

$$l(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$
$$= \sum_{m=1}^{j-1} \sqrt{(x_m - x_{m-1})^2 + (f(x_m) - f(x_{m-1}))^2} + \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2} + \sum_{m=j+1}^{n} \sqrt{(x_m - x_{m-1})^2 + (f(x_m) - f(x_{m-1}))^2}$$
$$\leq \sum_{m=1}^{j-1} \sqrt{(x_m - x_{m-1})^2 + (f(x_m) - f(x_{m-1}))^2} + \sqrt{(x_k^* - x_{j-1})^2 + (f(x_k^*) - f(x_{j-1}))^2} + \sqrt{(x_j - x_k^*)^2 + (f(x_j) - f(x_k^*))^2} + \sum_{m=j+1}^{n} \sqrt{(x_m - x_{m-1})^2 + (f(x_m) - f(x_{m-1}))^2}$$
(Esta última desigualdad se debe a la desigualdad del triángulo)
$= l(f, P_1)$
$\therefore\ l(f,P) \leq l(f,P_1)$

Ahora bien, si construimos P_2 agregando a P_1 el segundo elemento de Q que no está en P, obtenemos que: $l(f,P_1) \leq l(f,P_2)$
Podemos continuar de esta manera, creando particiones $P_3, P_4, ...$ hasta que eventualmente llegaremos a Q, y se cumple que:
$l(f,P) \leq l(f,P_1) \leq l(f,P_2) \leq ... \leq l(f,Q)$
$\therefore l(f,P) \leq l(f,Q)$
Es decir, el valor de $l(f,P)$ aumenta con refinaciones de la partición.

■

Teorema 2. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ una función derivable en $[a,b] \subset A$ y con derivada continua en $[a,b]$. Entonces se tiene que:

$$L(\sqrt{1+f'^2}, P) \leq l(f,P) \leq U(\sqrt{1+f'^2}, P) \quad \forall\ P \in P_{[a,b]}$$

Demostración.
Sea $P = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ partición de $[a,b]$. Para cada $i = 1, ..., n$, existe un $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que $f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i) - f(x_{i-1})$ (Teorema del valor medio)

$m_i(\sqrt{1+f'^2}) = \text{ínf}\{\sqrt{1+f'^2(x)}\ \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \sqrt{1+f'^2(x_i^*)}$
$M_i(\sqrt{1+f'^2}) = \sup\{\sqrt{1+f'^2(x)}\ \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \sqrt{1+f'^2(x_i^{**})}$

Donde $x_i^{**} \in [x_{i-1}, x_i]$ y $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ son los puntos donde $\sqrt{1+f'^2(x)}$ alcanza el valor máximo y mínimo respectivamente en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$

$$\Rightarrow\ L(\sqrt{1+f'^2}, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\sqrt{1+f'^2})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'^2(x_i^*)}(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'^2(c_i)}(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'^2(x_i^{**})}(x_i - x_{i-1})$$

(ya que c_i es un punto entre x_{i-1} y x_i)

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i(\sqrt{1+f'^2})(x_i - x_{i-1}) = U(\sqrt{1+f'^2}, P)$$

$$\therefore\ \ L(\sqrt{1+f'^2}, P) \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'^2(c_i)}(x_i - x_{i-1}) \leq U(\sqrt{1+f'^2}, P) \quad ...(1)$$

Pero además, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'^2(c_i)}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}(x_i - x_{i-1})$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}}(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \quad = l(f,P)$$

Entonces, por (1):
$L(\sqrt{1+f'^2}, P) \leq l(f,P) \leq U(\sqrt{1+f'^2}, P)$

■

A partir de estos dos teoremas, demostraremos que la longitud de la curva de una función en un intervalo $[a, b]$, se puede calcular como $\int_a^b \sqrt{1+f'^2}$, es decir $\text{lon}(f) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2}$

Teorema 3. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ una función derivable en $[a, b] \subset A$ y con derivada continua en $[a, b]$. Entonces $\text{lon}(f) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2}$

Demostración.
$\text{lon}(f) = \sup\{l(f, P) \mid P \in P_{[a,b]}\} \geq l(f, P) \quad \forall P \in P_{[a,b]}$
Pero por el Teorema 2, $l(f, P) \geq L(\sqrt{1+f'^2}, P) \ \forall P \in P_{[a,b]}$
$\Rightarrow \ \sup\{l(f, P) \mid P \in P_{[a,b]}\} \geq L(\sqrt{1+f'^2}, P) \ \forall P \in P_{[a,b]}$

Es decir, $\sup\{l(f, P) \mid P \in P_{[a,b]}\}$ es cota superior del conjunto de las $L(\sqrt{1+f'^2}, P)$ para toda partición del intervalo.

$\Rightarrow \sup\{l(f, P) \mid P \in P_{[a,b]}\} \geq \sup\{L(\sqrt{1+f'^2}, P) \mid P \in P_{[a,b]}\} = \underline{\int_a^b}\sqrt{1+f'^2}$

$\Rightarrow \ \text{lon}(f) \geq \underline{\int_a^b}\sqrt{1+f'^2} \quad ...(1)$

Sean P_1 y P_2 particiones arbitrarias de $[a, b]$ y sea $P = P_1 \cup P_2$

Entonces, por el Teorema 1, $l(f, P_1) \leq l(f, P)$
y por el Teorema 2, $l(f, P) \leq U(\sqrt{1+f'^2}, P)$
y a su vez, $U(\sqrt{1+f'^2}, P) \leq U(\sqrt{1+f'^2}, P_2)$ (ya que P es un refinamiento de P_2)

Entonces por todo esto, tenemos que: $l(f, P_1) \leq U(\sqrt{1+f'^2}, P_2)$

Entonces, $l(f, P_1)$ es una cota inferior del conjunto $\{U(\sqrt{1+f'^2}, P_2) \ \mid P_2 \in P_{[a,b]}\}$
es decir, $l(f, P_1) \leq \ \inf\{U(\sqrt{1+f'^2}, P_2) \ \mid P_2 \in P_{[a,b]}\} = \overline{\int_a^b}\sqrt{1+f'^2}$

$\therefore \ \overline{\int_a^b}\sqrt{1+f'^2}$ es mayor a $l(f, P_1) \ \forall P_1 \in P_{[a,b]}$

Entonces $\sup\{l(f, P_1) \ \mid P_1 \in P_{[a,b]}\} \leq \overline{\int_a^b}\sqrt{1+f'^2}$
$\Rightarrow \ \text{lon}(f) \leq \overline{\int_a^b}\sqrt{1+f'^2} \quad ...(2)$

Por (1) y (2):
$\underline{\int_a^b}\sqrt{1+f'^2} \leq \text{lon(f)} \leq \overline{\int_a^b}\sqrt{1+f'^2}$ y como $\sqrt{1+f'^2}$ es integrable en $[a, b]$
(Por ser f' continua, entonces $\sqrt{1+f'^2}$ es continua y entonces integrable)

$\Rightarrow \ \text{lon(f)} = \int_a^b \sqrt{1+f'^2}$

∎

Con este último teorema, llegamos a la expresión para calcular la longitud de curva de una función en un intervalo $[a, b]$.Y entonces la longitud de dicha función en el intervalo $[a, b]$ se calcula con la siguiente integral:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2}$$

Finalmente, mostraremos un ejemplo del cálculo de la longitud de curva de una función.

Ejercicio: Calcule la longitud de la curva de la función $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo $[0, 3]$.

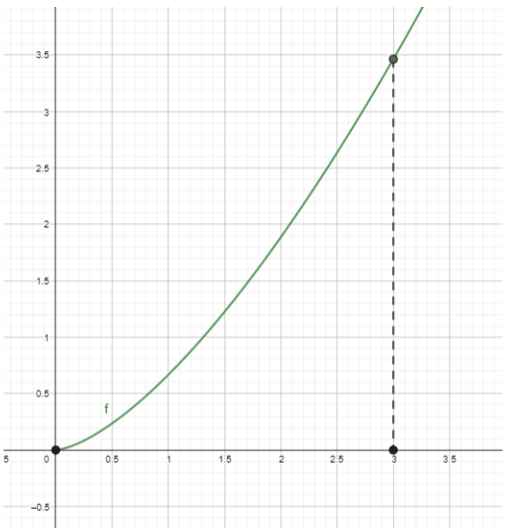


Figura 2: gráfica de $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

Por lo descrito anteriormente, esta longitud se puede calcular con la siguiente integral:
$\int_0^3 \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$

$$= \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}^3\right)\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{1 + x}\, dx$$

Hacemos $u = 1 + x,\ du = dx$ Entonces:

$$\int_1^4 u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}(2)^3 - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \approx 4{,}66$$

Bibliografía

- Haaser, N. B., La Salle, J. P., Sullivan, J. A. (1999). *Análisis matemático.* México: Editorial Trillas.
- Swokowski,E. W. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica.* México: Grupo Editoral Iberoamericana.