Parcial de pandemia Cálculo IV

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

24 de abril de 2020

Medida y contenido cero

1. Si $F, G : R \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que sus discontinuidades son de medida cero, donde $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo. Demuestren:
a) El conjunto de discontinuidades de $F + G$, también es de medida cero.

Demostración: Llamemos D_F al conjunto de discontinuidades de la función F y D_G al conjunto de discontinuidades de la función G.
Por lo estudiado en cálculo III, sabemos que si la función F es continua en un punto $x_0 \in R$ y G también es continua en dicho punto, entonces la función $F+G$ es continua en x_0. Con la nueva notación introducida, esto se puede escribir como:
$x_0 \notin D_F$ y $x_0 \notin D_G \;\Rightarrow\; x_0 \notin D_{F+G}$
Si consideramos la contrapuesta de esta implicación, se obtiene:
$x_0 \in D_{F+G} \Rightarrow x_0 \in D_F$ ó $x_0 \in D_G$
Es decir, $D_{F+G} \subset D_F \cup D_G$ ...(1)

Pero, como D_f y D_G son conjuntos de medida cero por hipótesis, entonces su unión $D_F \cup D_G$ también es de medida cero. Y cualquier subconjunto de un conjunto de medida cero sigue siendo de medida cero. Entonces, por (1), D_{F+G} es de medida cero, que es lo que se quería probar. ■

b) El conjunto de discontinuidades de FG también es de medida cero. Noten que un caso particular es cuando F ó G son una función constante.

Demostración: Por lo estudiado en cálculo III, sabemos que si la función F es continua en un punto $x_0 \in R$ y G también es continua en dicho punto, entonces la función FG es continua en x_0. Esto se puede escribir como:
$x_0 \notin D_F$ y $x_0 \notin D_G \;\Rightarrow\; x_0 \notin D_{FG}$
Si consideramos la contrapuesta de esta implicación, se obtiene:
$x_0 \in D_{FG} \;\Rightarrow\; x_0 \in D_F$ ó $x_0 \in D_G$
Es decir, $D_{FG} \subset D_F \cup D_G$ ...(2)

Pero, como D_f y D_G son conjuntos de medida cero por hipótesis, entonces su unión $D_F \cup D_G$ también es de medida cero. Y cualquier subconjunto de un conjunto de medida cero sigue siendo de medida cero. Entonces, por (1), D_{FG} es de medida cero, que es lo que se quería probar.

Por último, si una de las funciones es constante (digamos que la $F = c \neq 0$) entonces es continua en todo R y por lo tanto $D_F = \emptyset$ y por lo tanto, la expresión (2) pasa a ser $D_{FG} \subset D_G$
Por otro lado, si cG es continua en un punto, entonces, al multiplicarla por $\frac{1}{c}$ (que existe porque $c \neq 0$), la función $\frac{1}{c}cG = G$ también es continua. O bien, por la contrapuesta de esta implicación, si G es discontinua en un punto, entonces cG también. Es decir, $D_G \subset D_{cG}$
Pero tomando en cuenta que cG es simplemente FG y usando las dos contenciones anteriores, obtenemos:
$D_{FG} = D_G$.
Es decir, en el caso particular en el que F sea constante (distinta de 0) entonces las discontinuidades de FG son iguales a las de G. ■

2. Sea A un conjunto Jordan-Medible. Demuestre lo siguiente:
a) Si A tiene medida de Jordan positiva, entonces $int(A) \neq \emptyset$. Inversamente, si un conjunto es Jordan-medible con interior no vacío, entonces la medida de Jordan de A es positiva. Más aún, prueben que la medida de $intA$ y la medida de A es la misma.

Demostración ⇒) Si A tiene medida de Jordan positiva, significa que la función característica χ_A es integrable en un rectángulo R que contiene a A y su valor $\int \chi_A > 0$. Entonces, en particular, la integral inferior es mayor que cero.
Es decir, $sup\{L(\chi_A, P) \mid P$ es una partición de R $\} = \underline{\int} \chi_A > 0$ Con $L(\chi_A, P)$ la suma inferior de χ_A para la partición P.
Es decir, tiene que haber por lo menos una partición P_0 tal que $L(\chi_A, P_0) > 0$ (sino, el supremo mencionado valdría cero, pero sabemos que es mayor que 0).
Pero la suma inferior $L(\chi_A, P_0)$ suma los ínfimos de la función χ_A en cada rectangulito R_i de la partición P_0. Pero para que esta suma sea distinta de cero, tiene que haber por lo menos un rectangulito R_0 de la partición, tal que el ínfimo de la función en dicho rectángulo sea mayor que cero (para que así contribuya positivamente a la suma inferior y ésta no sea cero).

Como la función χ_A vale 1 para los puntos dentro de A y 0 para los demás, para que el ínfimo de la función en R_0 sea positivo, es necesario que R_0 no tenga puntos fuera de A. Entonces, $R_0 \subset A$.

En resumen, existe un rectángulo $R_0 \subset A$. Pero sabemos que dentro de cualquier rectángulo podemos colocar una bola abierta $B \neq \emptyset$. Entonces, existe una bola abierta $B \subset A$. Si tomamos el interior de ambos lados, obtenemos $intB \subset intA$. Pero como B es abierto, entonces $int(B) = B \neq \emptyset$. Por lo tanto $int(A) \neq \emptyset$

$\Leftarrow$) Si un conjunto es Jordan medible con interior no vacío, como el interior es no vacío, existe una bola abierta $B \neq \emptyset$ con $B \subset A$. Pero dentro de esta bola abierta, podemos colocar un rectángulo $R_0 \neq \emptyset$ (basta con colocarlo en el centro y hacer sus lados menores que el radio de la bola). Entonces existe un rectángulo $R_0 \subset A$. Entonces, en este rectángulo, la función χ_A siempre vale 1.

Ahora, si creamos una partición P_0 de A tal que incluya al rectángulo R_0, entonces la suma inferior de χ_A para dicha partición, será mayor a cero (Porque en la suma, el rectángulo R_0 contribuye positivamente, pues la función χ_A vale 1 en todo el rectángulo).

Entonces, la integral inferior (que es el supremo de las sumas inferiores), será mayor que cero. Pero como A es Jordan medible, entonces la medida de Jordan y la integral inferior de χ_A son lo mismo y por tanto la medida de A es mayor a cero.

Por último, falta probar que $m(int(A)) = m(A)$. Para esto, usaré un teorema muy conocido y que mencionamos en clase.

El teorema dice que un conjunto A es Jordan medible si y sólo si ∂A es de contenido cero (o lo que es lo mismo, ∂A tiene medida de Jordan igual a 0).

Ahora bien, todo conjunto A cumple que $int(A) \subset A \subset A \cup \partial A$ (Todo conjunto contiene a su interior y es contenido por su cerradura), entonces, A se puede escribir como $int(A) \cup C$ donde $C \subset \partial A$. Es decir, A es igual a su interior junto con algunos elementos de su frontera.

Y además, por el teorema mencionado, como A es Jordan medible, ∂A es de contenido cero, pero como $C \subset \partial A$, entonces C es de contenido cero, o lo que es lo mismo, tiene medida de Jordan $m(C) = 0$.

Y, por otro lado, por una propiedad de topología, $\partial(int(A)) \subset \partial A$, pero como ∂A es de contenido cero, entonces $\partial(int(A))$ también, lo cual implica, por el teorema mencionado, que $int(A)$ es medible.

Finalmente, la medida de Jordan de A es:
$m(A) = m(int(A) \cup C)$
$= m(int(A)) + m(C) - m(int(A) \cap C)$ (Propiedad de medida de Jordan de la unión)
$= m(int(A)) + m(C)$ (Porque $int(A) \cap \partial A = \emptyset$, entonces en particular, $int(A) \cap C = \emptyset$)
$= m(int(A))$ (Por lo mencionado arriba) ■

b) La medida de Jordan de A es cero sii $A \subset \partial A$

Demostración ⇒) Por contradicción, digamos que hay un $x_0 \in A$ pero $x_0 \notin \partial A$
Entonces como x_0 no está en la frontera pero está en A, tiene que ser un punto interior de A. Eso implica que $int(A) \neq \emptyset$. Pero por el inciso a), esto implica que A tiene medida de Jordan positiva. Lo que contradice la hipótesis de este ejercicio.

⇐) Vemos que si $A \subset \partial A$ entonces $intA = \emptyset$
Porque si suponemos que el interior no es vacío, entonces hay un punto $x \in int(A) \Rightarrow x \in A$, que por hipótesis está en ∂A pero esto es una contradiccón porque el interior y la frontera siempre son conjuntos ajenos.
Por lo tanto, $int(A) = \emptyset$, que por la contrapuesta del inciso a), implica que A no tiene medida de Jordan positiva. Pero como la medida de Jordan de un conjunto no puede ser negativa, concluimos que la medida de Jordan de A es 0.

c) Si B es un conjunto tal que $int(A) \subset B \subset A \cup \partial A$, entonces B es Jordan medible y su medida es igual a la medida de A.

Demostración:
Por como se define, B se puede ver como el interior de A junto con algunos elementos de la frontera de A. Es decir, $B = int(A) \cup C$, donde $C \subset \partial A$.
Pero como A es Jordan medible, entonces por el teorema mencionado en el inciso a), ∂A es de contenido cero. Entonces, $C \subset \partial A$ es de contenido cero (o lo que es lo mismo, C es jordan medible con $m(C) = 0$).
Pero como ya vimos en el inciso a), $int(A)$ es Jordan medible y $m(int(A)) = m(A)$.

Entonces, al ser $B = int(A) \cup C$ la unión de dos conjuntos Jordan medibles, entonces B es Jordan medible.
Y su medida es:
$m(B) = m(int(A) \cup C)$
$= m(int(A)) + m(C) - m(int(A) \cap C)$ (Propiedad de medida de Jordan de la unión)
$= m(int(A)) + m(C)$ (Porque $int(A) \cap \partial A = \emptyset$, entonces en particular,$int(A) \cap C = \emptyset$)
$= m(int(A))$ (Por lo mencionado arriba)
$= m(A)$ (por inciso a)) ■

II. Integral múltiple

1. Supongamos que $F, G : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son dos funciones integrables tales que:

$$\int \int_R F \, dxdy = \int \int_R G \, dxdy$$

¿Podemos concluir que $F = G$ en R?

NO, tomemos como contraejemplo a $F(x, y) = cos(x)$ y $G(x, y) = sin(x)$ definidas en el rectángulo $R = [0, 2\pi]$ x $[0, 1]$
Entonces, $\int \int_R F \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} cos(x) \, dxdy = \int_0^1 sin(x)\Big|_0^{2\pi} dy = \int_0^1 0dy = 0$
$\int \int_R G \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} sin(x) \, dxdy = \int_0^1 -cos(x)\Big|_0^{2\pi} dy = \int_0^1 0dy = 0$
Entonces las dos integrales son iguales, sin embargo, las funciones son muy distintas.

2. Si R es un rectángulo, demuestren que la integral doble:

$$\int \int_R f(x)g(y) \, dx \, dy$$

Es en realidad el producto de dos integrales de funciones reales. Digan claramente que resultados están usando.

Demostración: Por el teorema de Fubini, esta integral doble se puede calcular como la integral iterada:
$\int_c^d \left(\int_a^b f(x)g(y)dx \right) \, dy$ (El rectángulo es $[a, b]$ x $[c, d]$)

$= \int_c^d \left(g(y) \int_a^b f(x)dx \right) dy$ (porque para la integral interior, el $g(y)$ es una cte, por lo que sale de la integral)
$= \int_c^d g(y) \left(\int_a^b f(x)dx \right) dy$
$= \left(\int_a^b f(x)dx \right) \int_c^d g(y)dy$ (porque la integral entre paréntesis es simplemente un número constante, por lo que sale de la integral exterior)
Esto último es simplemente el producto de las integrales de funciones reales $f(x)$ y $g(y)$ ■

3. Demuestren la regla de Leibnitz: Si $G : [a,b]$ x $[c,d] \to \mathbb{R}$ y $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)$ son continuas, entonces:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b G(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)dx.$$

Demostración: Primero, definimos la función $F(y) = \int_a^b G(x,y)dx$ que es una función de una sola variable y. Consideramos:
$\left| \dfrac{F(y+h) - F(y)}{h} - \displaystyle\int_a^b \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)dx \right|$
$= \left| \dfrac{\int_a^b G(x,y+h)\ dx - \int_a^b G(x,y)}{h}\ dx - \displaystyle\int_a^b \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)\ dx \right|$ (Por la def. de F)
$= \left| \displaystyle\int_a^b \frac{G(x,y+h) - G(x,y)}{h} - \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)\ dx \right|$ (por propiedades de la integral)
$= \left| \displaystyle\int_a^b \frac{\partial G}{\partial y}(x,c_h) - \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)\ dx \right|$

Para alguna c_h entre y y $y+h$. Esto debido a que el Teorema del Valor Medio aplicado a la función G en el intervalo $[y, y+h]$ (que se vale porque G es derivable) nos dice que existe una c_h con $G(x,y+h) - G(x,y) = \frac{\partial G}{\partial y}(x,c_h) * h$.
Pero como $\frac{\partial G}{\partial y}$ es continua y por lo tanto uniformemente continua en el compacto $[a,b]$ x $[c,d]$. Entonces, dada una $\epsilon > 0$, podemos encontrar una $\delta > 0$ tal que si $|x_1 - x| < \delta$ y $|y_1 - y| < \delta$, entonces:

$\left| \dfrac{\partial G}{\partial y}(x_1,y_1) - \dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y) \right| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$ ...(1)
Entonces, si escogemos una h con $|h| < \delta$, claramente se cumple que $|c_h - y| < |h| < \delta$ por lo que podemos usar el resultado (1) para $(x_1,y_1) = (x,c_h)$:
$\left| \dfrac{\partial G}{\partial y}(x,c_h) - \dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y) \right| < \dfrac{\epsilon}{b-a}.$ ... (2)

Entonces, regresando al desarrollo que habíamos hecho, teníamos que:
$\left|\dfrac{F(y+h)-F(y)}{h} - \displaystyle\int_a^b \dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y)dx\right| = \left|\displaystyle\int_a^b \dfrac{\partial G}{\partial y}(x,c_h) - \dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y)\, dx\right|$
$\leq \displaystyle\int_a^b \left|\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,c_h) - \dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y)\right| dx \leq \displaystyle\int_a^b \dfrac{\epsilon}{b-a} \quad$ (Por (2))
$= \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$

Para concluir, tenemos entonces que para toda $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$, entonces:
$\left|\dfrac{F(y+h)-F(y)}{h} - \displaystyle\int_a^b \dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y)dx\right| < \epsilon$
Lo cual, es simplemente la definición del siguiente límite:
$\text{lím}_{h\to 0} \frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)dx$
Lo cual significa que F es derivable, y su derivada es $\int_a^b \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)dx$. Pero por como definimos F originalmente, esto demuestra que:
$\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_a^b G(x,y)dx = \displaystyle\int_a^b \dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y)dx.\blacksquare$

4. Usando integrales, verificar que:

a) El área de una elipse con semiejes de longitud a y b es πab

Sabemos que la ecuación de una elipse es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Gracias a la simetría de la elipse, podemos calcular el área de uno de los cuadrantes de la elipse y multiplicarla por 4, por lo que sólo tomaremos la ecuación para $x \geq 0,\ y \geq 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \Rightarrow\ \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \ \Rightarrow\ y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \ = \ f(x)$
Entonces ahora integramos:
$\dfrac{A}{4} = \displaystyle\int_0^a b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}dx$ Y usando el cambio de variable, sea $x = a\ \cos u \ \Rightarrow\ u = \arccos\frac{x}{a}$ y $dx = -a\ \operatorname{sen} u\, du$, donde x va de $0 \to a$ y, luego $u : \frac{\pi}{2} \to 0$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^a b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\, dx = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sqrt{1-\dfrac{a^2cos^2u}{a^2}}\,(-a)\operatorname{sen} u\, du = -ab\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\dfrac{a^2cos^2u}{a^2}}\ \operatorname{sen} u\, du =$
$ab\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\dfrac{a^2cos^2u}{a^2}}\ \operatorname{sen} u\, du = ab\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2(u)\, du$
$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos 2u}{2}\, du = ab\left[\dfrac{u}{2} - \dfrac{sen2u}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{ab\pi}{4}$

Ahora este resultado debemos multiplicarlo por 4 y entonces nos queda finalmente que:$A = \frac{ab\pi}{4}$ (4)
$\therefore\ A = ab\pi$

b) El volumen de un elipsoide de semiejes a,b y c es $\frac{4}{3}\pi abc$

La ecuación del elipsoide es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. O bien, la parte superior del elipsoide está dada por la función $z = c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}}$
Para ver los límites de integración, notamos que en el plano xy, la ecuación de la elipsoide se reduce a la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Así, mientras la y varía de $-b$ a b, para que se siga cumpliendo esta ecuación, la x debe de variar de $-a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ a $a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$. Así, la integral que nos dé la mitad del volumen será:

$$\int_{-b}^{b}\int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}}\ dxdy$$

Si multiplicamos por $\frac{a}{a}$ y la a de arriba la metemos a la raíz, obtenemos:

$$\frac{c}{a}\int_{-b}^{b}\int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \sqrt{a^2 - a^2\frac{y^2}{b^2} - x^2}\ dxdy$$

Pero para la integral interior, el numerito $a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ es constante, llamémosle m por ahora, entonces nos queda:

$$\frac{c}{a}\int_{-b}^{b}\int_{-m}^{m} \sqrt{m^2 - x^2}\ dxdy$$

Pero esa integral de adentro es igual a la que resolveré en la parte c) hasta en los límites de integración (pero con m en vez de a) y su solución es $\frac{m^2}{2}\pi$. Por lo que la integral doble pasa a quedar como:

$$\frac{c}{a}\int_{-b}^{b}\frac{m^2}{2}\pi\ dy \quad = \frac{c}{a}\int_{-b}^{b}\frac{a^2\pi}{2}(1 - \frac{y^2}{b^2}) \quad = \quad \frac{ac\pi}{2}\ \int_{-b}^{b} 1 - \frac{y^2}{b^2}\ dy \quad = \frac{ac\pi}{2}(y - \frac{y^3}{3b^2})\Big|_{-b}^{b} \quad = \frac{ac\pi}{2}\frac{4b}{3}$$

Pero como esto es el volumen de media elipsoide, el volumen del elipsoide completo es $\frac{4abc\pi}{3}$

c)El área de una región semicircular de radio a es $\frac{1}{2}\pi a^2$

Una región circular está dada por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, entonces, la región semicircular superior está entre de la gráfica de la función $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ y el eje x conforme x varía de $-a \to a$.
Entonces, el área es: $A = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}$
Realizamos la sustitución $x = a\sin(\theta) \ \to dx = a\cos(\theta)$
A $= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2(\theta)}\ a\cos(\theta)\ dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos^2(\theta)\ dx = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + \cos(2\theta)$
$= \frac{a^2}{2}\frac{sin(2\theta)}{2} + \frac{a^2}{2}\theta\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}\pi$ ■

d) El volumen de la esfera unitaria es $\frac{4}{3}\pi$

Esta esfera está dada por la ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. O bien, media esfera está dada por la función $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Para ver los límites de integración, notamos que en el plano xy, la ecuación de la esfera se reduce a $x^2 + y^2 = 1$, es decir, conforme la y varía de -1 a 1, para una y fija, la x variará de $-\sqrt{1 - y^2}$ a $\sqrt{1 - y^2}$
Entonces, la integral es:
$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 - y^2 - x^2}\ dxdy$$
Pero para la integral interior (la que depende de x), el numerito $\sqrt{1 - y^2}$ es una constante, llamémosle a por ahora.
$$= \int_{-1}^{1}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ dxdy.$$
Pero esta integral interior es exactamente la que resolvimos en la parte c) (con todo y los límites de integración). Y como vimos, su solución es $\frac{a^2}{2}\pi$, que sustituyendo de vuelta la a es igual a: $(1 - y^2)\ \frac{\pi}{2}$
Entonces la integral completa es igual a:
$\int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}\ (1 - y^2)\ dy\ = \frac{\pi}{2}(y - \frac{y^3}{3})\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\frac{4}{3}$
Pero como este es el volumen de media esfera, el volumen de toda la esfera es $\frac{4}{3}\pi$ ■