Mini tarea 6 Ecuaciones diferenciales Tomás Ricardo Basile Álvarez

1) Encuentra la solución general a $y'' + y = \sec x$ $\quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Homogénea: $y'' + y = 0 \rightarrow y'' = -y$

que por pura inspección, podemos ver que la solución es $y_1 = \cos x \quad y_2 = \operatorname{sen} x$

$$\therefore \underline{y_H = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{Sen} x}$$

Por variación de parámetros, proponemos como solución particular
$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

El wronskiano de y_1 e y_2 es: $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = (\cos x)(\cos x) - (\operatorname{Sen} x)(-\operatorname{Sen} x) =$

Y por la teoría, tenemos: i) $v_1' = \dfrac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} = \dfrac{-\operatorname{Sen}(x) \sec(x)}{1}$

$\Rightarrow v_1 = \int -\tan x \, dx \rightarrow \underline{v_1 = \ln|\cos x|}$

ii) $v_2' = \dfrac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} = \dfrac{\cos(x) \sec(x)}{1} \rightarrow v_2 = \int 1 \, dx = \underline{x}$

$\therefore y = v_1 y_1 + v_2 y_2 = \underline{\cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{Sen} x}$

$\therefore$ La solución general es:

$$\underline{y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{Sen} x + \cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x}$$

7 $\quad y'' + 3y' + 2y = \sqrt{t+1} \qquad y(0) = y'(0) = 0$

Homogénea : $\quad y'' + 3y' + 2y = 0 \quad$ proponemos $\quad y = e^{\alpha t}$

$\rightarrow \alpha^2 e^{\alpha t} + 3\alpha e^{\alpha t} + 2e^{\alpha t} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0 \quad \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}$

$\therefore$ Las soluciones son: $\quad y_1 = e^{-t} \qquad y_2 = e^{-2t} \quad$ que son l.i

$\therefore$ Solución general : $\quad \boxed{y_H = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}}$

Particular: $\quad$ proponemos $\quad y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$

El wronskiano de y_1, y_2 es: $\quad y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-t}(-2e^{-2t}) - (-e^{-t})(e^{-2t})$

$= -2e^{-3t} + e^{-3t} = \underline{-e^{-3t}}$

Por la teoría : $\cdot)\quad v_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{-e^{-2t}\sqrt{t+1}}{-e^{-3t}} dt$

$= \int e^{t}\sqrt{t+1}\, dt$

$\cdot\cdot)\quad v_2 = \int \frac{y_1 R(t)}{W(y_1, y_2)} dt = \int \frac{e^{-t}\sqrt{t+1}}{-e^{-3t}} = \boxed{\int -e^{2t}\sqrt{t+1}\, dt}$

$\therefore\quad \boxed{y_p = e^{-t}\int e^{t}\sqrt{t+1}\, dt + e^{-2t}\int -e^{2t}\sqrt{t+1}\, dt}$

3 Solución general

a) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

Proponemos $y = e^{rt}$ $\rightarrow$ $(e^{rt})''' - 3(e^{rt})'' + 2(e^{rt})' = 0$

$\rightarrow r^3 e^{rt} - 3r^2 e^{rt} + 2r e^{rt} \xrightarrow{\text{Polinomio}} \underline{r^3 - 3r^2 + 2r = 0}$

$r\,(r^2 - 3r + 2) = 0 \rightarrow r\,(r-2)(r-1) = 0 \rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = 2,\ r_3 = 1$

$\therefore$ Soluciones: $y_1 = 1$ $\quad y_2 = e^{2t}$ $\quad y_3 = e^{t}$

General: como son l.i. $\rightarrow$ $y = C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{t}$

---

b) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$

Proponemos $y = e^{rt}$ $\rightarrow$ $r^3 e^{rt} - 3r^2 e^{rt} + 4r e^{rt} - 2e^{rt} = 0$

$\rightarrow r^3 - 3r^2 + 4r - 2 = 0$

	1	-3	4	-2
1		1	-2	2
	1	-2	2	0

$(r-1)(r^2 - 2r + 2) = 0 \rightarrow r_1 = 1 \quad r_2 = 1+i \quad r_3 = 1-i$

De las raíces r_2 y r_3 obtenemos las soluciones: $e^{t}(\cos(t) + \operatorname{sen}(t))$

Con r_1 obtenemos $y = e^{t}$

$$\therefore\ \underline{y = c_1 e^{t} + e^{t}(c_2 \cos(t) + c_3 \operatorname{sen}(t))}$$