Laboratorio de Mecánica.
Semestre 2019-2.
Facultad de Ciencias.

Dr. Martín Romero Martínez.
Fis. José Abarca Munguía.

Práctica 2
Relaciones Directas

J. Gallegos.
I. Santiago.
R. Rangel.
T. Basile.

Grupo: 8074.

Universidad Nacional Autónoma de México.

Fecha de elaboración: 20, 25 de febrero, 2019.
Fecha de entrega: 4 de marzo, 2019.

Resumen:

A lo largo de este trabajo, vimos a detalle las relaciones directas, en especial la relación masa-volumen, y la relación peso-masa.

Esta práctica fue sumamente importante para aprender a manejar datos con incertidumbre, Así mismo, para conocer a profundidad el ajuste a recta de mínimos cuadrados de los datos obtenidos en el experimento.

I. *Introducción.*

Marco teórico.

Al hacer mediciones y obtener datos experimentales, se busca que se asemejen lo mejor posible a los valores teóricos, ya que de esta manera se puede demostrar qué tan eficaz es un método de aproximación.**[1]**

Una de estas relaciones es la llamada "Relación de proporción directa" en donde si un valor aumenta, el otro también lo hace proporcionalmente, así mismo si disminuye, por lo que son directamente proporcionales y la recta entre estos valores es la constante de proporcionalidad.

El ajuste a recta de mínimos cuadrados.

Dado un número número n de puntos de datos (xi, yi), buscamos encontrar la ecuación para la mejor línea recta. **[2]**

La ecuación de la recta es de la forma y=mx+b, por lo que para hallar esta recta que mejor encaja a los datos, necesitamos encontrar primero la pendiente y ordenada al origen. **[3]**

En la recta que mejor se aproxima, llamada también como curva de tendencia deben caer por arriba y debajo los datos experimentales y dicha diferencia se denominará "error o desviación vertical" **[4]**

Para la parte A, necesitamos obtener la relación masa volumen, la cual es la densidad de los balines y las plastilinas, ya que $\rho = m \, / \, V$**(1)**

Para calcular las densidades, obtenemos la pendiente a la recta ajustada a los puntos correspondientes en una gráfica de masa vs volumen, tanto para los balines como para las plastilinas (**Gráfica 1 y 2)**

Para la parte B, necesitamos obtener la relación peso-masa, la cual es la aceleración de la gravedad respecto a los balines y a la plastilina, ya que $g = P \, / \, m$ **(2)**

Para calcular dichas aceleraciones de la gravedad, de igual manera calculamos la pendiente de la recta más aproximada a los puntos correspondientes en una gráfica de peso vs masa.

Para ambas pendientes, usamos la fórmula:

$$m = \frac{\Sigma x_1 \, \Sigma y_1 - n \, \Sigma x_1 y_1}{(\Sigma x_i)^2 - n \, \Sigma (xi)^2} \quad \textbf{(3)}$$

Para obtener las ordenadas al origen se usa la fórmula:

$$b = \frac{\Sigma x_1 \, \Sigma x_1 y_1 - \Sigma y_1 \, \Sigma (x_1)^2}{(\Sigma x_i)^2 - n \, \Sigma (xi)^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Pero así como se obtiene la pendiente y la ordenada al origen, se deben sacar sus respectivas incertidumbres con las siguientes fórmulas: **[3]**

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{n}{n \, \Sigma (x_i)^2 - (\Sigma x_i)^2} \left(\frac{1}{n} \, \Sigma (y_i - m x_i - b^2)\right)}$$

(5)

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i)^2}{n \, \Sigma (x_i)^2 - (\Sigma x_i)^2} \left(\frac{1}{n} \, \Sigma (y_i - m x_i - b^2)\right)} \quad \textbf{(6)}$$

- **Objetivos generales y específicos**

El objetivo de esta práctica es encontrar experimentalmente el valor de la densidad de distintos materiales (acero y plastilina en nuestro caso). Además de encontrar el valor de la aceleración de la gravedad a partir de datos calculados con distintos instrumentos de medición, tal como una balanza, un dinamómetro, entre otras cosas. El objetivo es medir los datos necesarios y aprender a encontrar una línea de tendencia para obtener los valores de la densidad y la aceleración de la gravedad.

II. Desarrollo experimental

Material

- 5 balines de acero de distintos diámetros.
- Plastilina
- Vernier
- Balanza
- Probeta
- Hilo
- Dinamómetro

<u>Procedimiento A</u>

Relación masa y volumen para balines

1. Primero medimos los diámetros de los 5 balines con ayuda del vernier para poder obtener el volumen de cada uno con su respectiva incertidumbre.

Figura 1. Cálculo del diámetro de los balines con ayuda del vernier

2. Calculamos las masas colocando cada balín sobre la balanza, así como su incertidumbre.

Figura 2. Cálculo de la masa de los balines con ayuda de la balanza

3. Hacemos una tabla de volumen y masa (***Tabla 1***) donde el volumen será la variable independiente "x" y la masa, la variable dependiente "y".
4. Graficamos los puntos obtenidos y encontramos la curva de tendencia y la ordenada al origen (***Gráfica 1***) con la ecuaciones **(3)** y **(4)**, así como sus respectivas incertidumbres con la ecuación **(5)** y **(6)**

Relación masa y volumen para plastilina

1. Primero calculamos la masa de las cinco figuras de plastilina con ayuda de la balanza, así como sus respectivas incertidumbres.

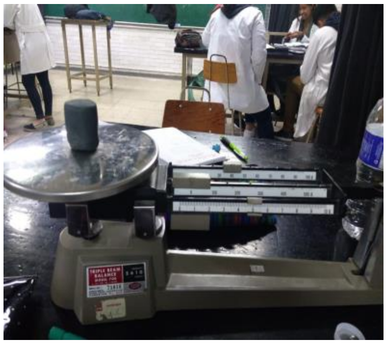


Figura 3. Cálculo de la masa de las figuras de plastilina con ayuda de la balanza

2. Obtenemos su volumen amarrando con un hilo y sumergiendo cada figura en la probeta con agua, dependiendo de cuánto suba la medida del agua, es su volumen.

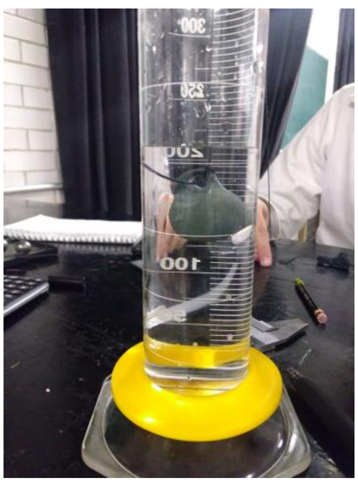


Figura 4. Cálculo del volumen de las figuras de plastilina con ayuda de la probeta

3. Hacemos una tabla de volumen y masa (**Tabla 2**) donde el volumen será la variable independiente "x" y la masa, la variable dependiente "y".
4. Graficamos los puntos obtenidos y encontramos la curva de tendencia y la ordenada al origen (***Gráfica 2***) con las ecuaciones **(3)** y **(4)**, así como sus incertidumbres con las ecuaciones **(5)** y **(6)**

Procedimiento B

Relación peso y masa para balines

1. Calculamos el peso de los balines colgándolos con un hilo al dinamómetro. La masa ya la obtuvimos anteriormente.
2. Hacemos una tabla de peso y masa (***Tabla 3***) donde la masa será la variable independiente "x" y el peso, la variable dependiente "y".
3. Graficamos los puntos obtenidos y encontramos la curva de tendencia y la ordenada al origen (***Gráfica 3***) con la ecuaciones **(3)** y **(4)**, así como sus respectivas incertidumbres con la ecuación **(5)** y **(6)**

Relación peso y masa para plastilina

4. Calculamos el peso de las figuras de plastilina colgándolas con un hilo al dinamómetro. La masa ya la obtuvimos anteriormente.

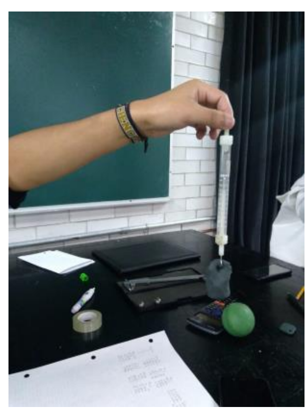


Figura 5. Cálculo del peso de los balines con ayuda del dinamómetro.

5. Hacemos una tabla de peso y masa (***Tabla 4***) donde la masa será la variable independiente "x" y el peso, la variable dependiente "y".

6. Graficamos los puntos obtenidos y encontramos la curva de tendencia y la ordenada al origen (***Gráfica 4***) con la ecuaciones **(3)** y **(4)**, así como sus respectivas incertidumbres con la ecuación **(5)** y **(6)**

III Resultados

1) Densidad de los balines

Los resultados de los volúmenes de los balines a partir de su diámetro, fueron calculados con la ecuación de volumen de la esfera con su incertidumbre.

$$V = \frac{4}{3}\Pi r^3 \pm 4\Pi r^2$$

Y nuestros resultados desde el balín más chico al más grande, fueron:

Balín 1 : $0.78 \ \pm 0.002 \ cm^3$

Balín 2 : $3.602 \ \pm 0.006 \ cm^3$

Balín 3 : $3.602 \ \pm 0.006 \ cm^3$

Balín 4 : $5.76 \ \pm 0.007 \ cm^3$

Balín 5 : $8.58 \ \pm 0.01 \ cm^3$

Volumen (cm^3)	Masa (g) ± 0.05g
0,878	6,8
3,602	28,1
3,602	28,1
5,76	45
8,58	67,1

Tabla 1. Tabla comparativa de volumen y masa de los balines

En seguida de hacer nuestra tabla comparativa de volumen y masa (**Tabla 1**), calculamos las sumas por separado de distintos datos que necesitaríamos para encontrar la pendiente de la curva de tendencia y la ordenada al origen, así como sus incertidumbres. Con los volúmenes como x_i y las masas como y_i.

∑xi	22,422
∑yi	175,1
(∑xi)2	502,746
∑(xi)2	133,513
∑xiyi	1043,320
∑(xi-m*yi-b)2	0,00075

Sustituímos nuestros valores en la ecuación **(3)** y **(4)**

$$m = \frac{(22.42)(175.1)-(5)(1043.32)}{(502.74)-(5)(133.51)} = 7.829$$

$$b = \frac{(22.42)(1043.32)-(175.1)(502.74)}{(502.74)-(5)(133.51)} = -0.09$$

Y para las incertidumbres sustituímos en las ecuaciones **(5)** y **(6)**

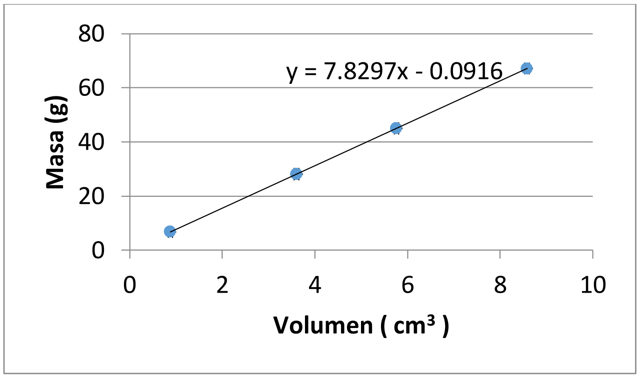
$$\Delta m = \sqrt{\left(\frac{5}{(5)(133.51)-(502.74)}\right)\left(\frac{0.00075}{5}\right)} = 0.021$$

$$\Delta b = \sqrt{\left(\frac{133.51}{(5)(133.51)-(502.74)}\right)\left(\frac{0.592}{5}\right)} = 0.011$$

En la ***Gráfica 1***, la pendiente obtenida es el volumen entre la masa, y por la ecuación **(1)**, sabemos que esta pendiente representa la densidad del acero de los balines, la cual aproximamos como 7.829 ± 0.0021 g/cm^3

La recta de la forma y=mx+b es:

masa=(7.829 ± 0.0021)v+(-0.09 ± 0.011)



Gráfica 1. Gráfica correspondiente al volumen y la masa de los balines

2) Densidad de la plastilina

Volumen (cm^3) ± 5	Masa (g) ± 0.05g
7	7,1
12	12,4
20	18,6
23	21,3
50	45,1

Tabla 2. Tabla de volumen y masa de la plastilina

En seguida de hacer nuestra tabla comparativa de volumen y masa (***Tabla 2***),

Calculamos las sumas por separado de distintos datos que necesitaríamos para encontrar la pendiente de la curva de tendencia y la ordenada al origen, así como sus incertidumbres. Con los volúmenes como x_i y las masas como y_i.

∑xi	112
∑yi	104,5
(∑xi)2	12544
∑(xi)2	3622
∑xiyi	3315,4
∑(xi-m*yi-b)2	0,523

$$m = \frac{(112)(104.5) - (5)(3315.4)}{(12544) - (5)(3622)} = 0.875$$

$$b = \frac{(112)(3315.4) - (104.5)(3622)}{(12544) - (5)(3622)} = 1.28$$

Y para las incertidumbres sustituímos en las ecuaciones **(5)** y **(6)**

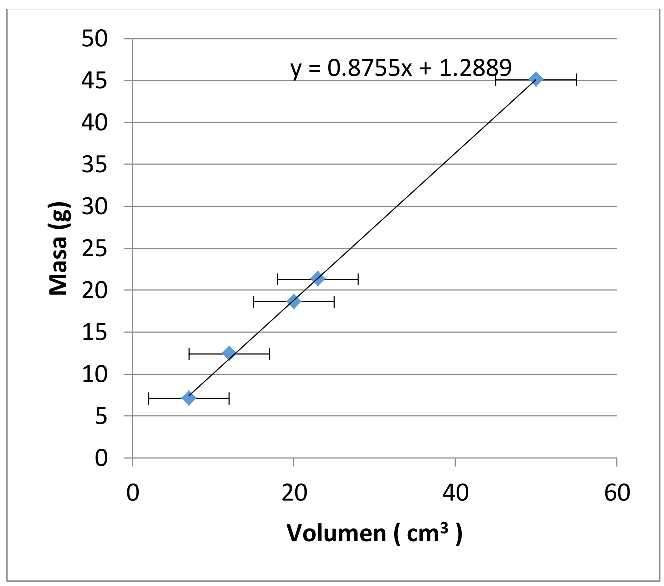
$$\Delta m = \sqrt{\left(\frac{5}{(5)(3622)-(12544)}\right)\left(\frac{0.523}{5}\right)} = 0.096$$

$$\Delta b = \sqrt{\left(\frac{3622}{(5)(3622)-(12544)}\right)\left(\frac{0.523}{5}\right)} = 0.261$$

En la ***Gráfica 2***, la pendiente obtenida, al igual que con los balines, es el volumen entre la masa, y por la ecuación **(1)**, sabemos que esta pendiente representa la densidad de la plastilina, la cual aproximamos como 0.875$\pm$0.0096 g/cm3

La recta de la forma y=mx+b es:

masa=(0.875$\pm$0.096)v+(1.3$\pm$0.261)



Gráfica 2. Gráfica correspondiente al volumen y la masa de la plastilina

3) Aceleración de la gravedad (Balines)

Masa (Kg) ± 0.00005 Kg	Peso (N) ± 0.025N
0,0068	0,05
0,0281	0,25
0,0281	0,25
0,045	0,4
0,0671	0,6

Tabla 3. Tabla comparativa de masa y peso de los balines

Hicimos nuestra tabla comparativa de masa y peso (**Tabla 3**) y después calculamos las sumas por separado de distintos datos que necesitaríamos para encontrar la pendiente de la curva de tendencia y la ordenada al origen, así como sus incertidumbres. Con las masas como x_i y los pesos como y_i.

∑xi	0,1751
∑yi	1,55
(∑xi)2	0,0306
∑(xi)2	0,0081
∑xiyi	0,0726
∑(xi-m*yi-b)2	0,00003

Sustituímos nuestros valores en la ecuación **(3)** y **(4)**

$$m = \frac{(0.1751)(1.55)-5(0.0726)}{(0.0306)-5(0.0081)} = 9.089$$

$$b = \frac{(0.1751)(0.0726)-(1.55)(0.0081)}{(0.0306)-5(0.0081)} = -0.008$$

Y para obtener sus respectivas incertidumbres, sustituímos en las ecuaciones **(5)** y **(6)**

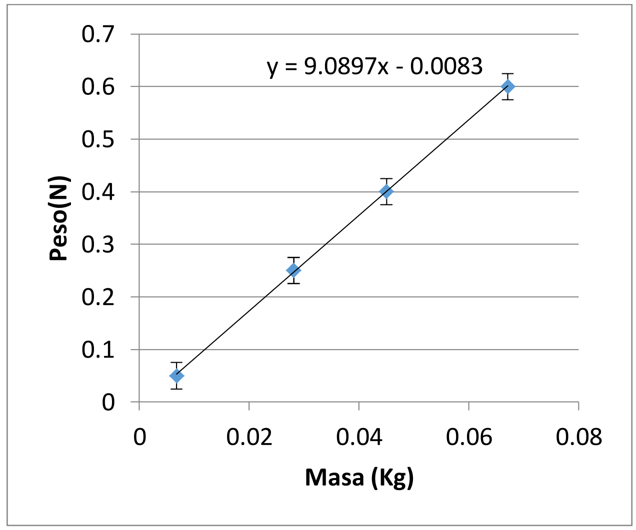
$$\sigma_m = \sqrt{\frac{5}{5(0.0081)-(0.0306)}\left(\frac{0.00003}{5}\right)} = 0.056$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{0.0081}{5(0.0081)-(0.0306)}\left(\frac{0.00003}{5}\right)} = 0.002$$

En la ***Gráfica 3***, la pendiente obtenida, es el peso entre la masa, y por la ecuación **(2)**, sabemos que esta pendiente representa la aceleración de la gravedad, la cual aproximamos como 9.09 ± 0.056 m/s^2

La recta de la forma y=mx+b es:

peso=(9.09 ± 0.056)v+(-0.008 ± 0.0022)



Gráfica 3. Gráfica correspondiente a la masa y el peso de los balines

4) Aceleración de la gravedad (Plastilina)

Masa (Kg)±0.0005 Kg	Peso (N) ± 0.025N
0,0071	0,05
0,0124	0,1
0,0186	0,15
0,0213	0,2
0,0451	0,4

Tabla 4. Tabla de masa y peso de la plastilina

∑xi	0,1045
∑yi	0,9
(∑xi)2	0,0109
∑(xi)2	0,0030
∑xiyi	0,0266
∑(xi-m*yi-b)2	0,00036

Sustituímos nuestros valores en la ecuación **(3)** y **(4)**

$$m = \frac{(0.1045)(0.9)-5(0.0266)}{(0.0109)-5(0.0030)} = 9.22$$

$$b = \frac{(0.1045)(0.0266)-(0.9)(0.0030)}{(0.0109)-5(0.0030)} = -0.012$$

Y para obtener sus respectivas incertidumbres, sustituímos en las ecuaciones **(5)** y **(6)**

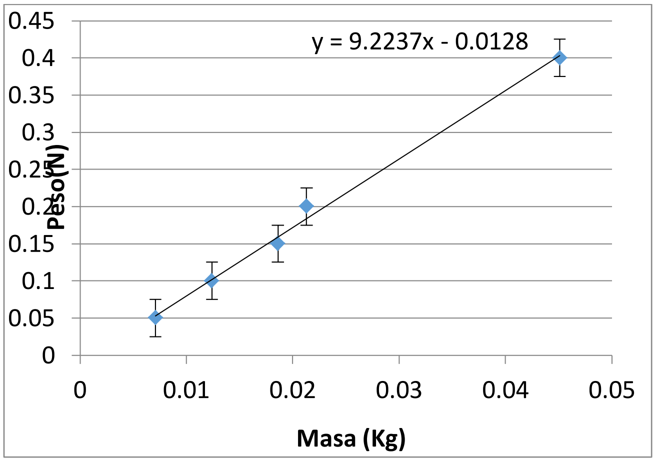
$$\sigma_m = \sqrt{\frac{5}{5(0.00303)-(0.01092)}\left(\frac{1}{5}(0.00036)\right)} = 0.29$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{0.0030}{5(0.0030)-(0.0109)}\left(\frac{1}{5}(0.00036)\right)} = 0.007$$

En la ***Gráfica 4***, la pendiente obtenida, es el peso entre la masa, y por la ecuación **(2)**, sabemos que esta pendiente representa la aceleración de la gravedad, la cual aproximamos como 9.09 ± 0.056 m/s^2

La recta de la forma y=mx+b es:

peso=(9.2 ± 0.29)v+(-0.012 ± 0.007)



Gráfica 3. Gráfica correspondiente a la masa y el peso de los balines

I. Observaciones

Al hacer las mediciones para obtener los volúmenes del acero y la plastilina, pudimos observar que para los balines hubo más exactitud debido a que el instrumento de medición era más preciso (vernier) y por lo tanto había menor incertidumbre, al contrario de la plastilina, debido a que el instrumento de medición era menos preciso (probeta) y por lo tanto su incertidumbre era muy alta.

Esto, al obtener las densidades nos trajo problemas, ya que la densidad de la plastilina no fue tan exacta como la del acero.

De igual manera, existen muchas plastilinas con distintas densidades, por lo cual tampoco pudimos notar bien cuánto error habíamos obtenido en comparación del valor real, este fue un problema ya que tuvimos que optar por una densidad promedio que encontramos investigando.

Sin embargo notamos que las rectas encontradas con el método de mínimos cuadrados se adaptan muy bien a los datos y permiten hacer un análisis completo del experimento y encontrar constantes de proporcionalidad como la densidad o el volumen.

V. Conclusión

Con respecto a la densidad del acero, su densidad real es de 7.85 g/cm^3, a lo que nosotros obtuvimos en la experimentación un valor de 7.829 ± 0.0021 g/cm^3. Calculando el error de nuestra aproximación, tenemos que: (7.85-7.829)/7.85 = 0.002568

Este resultado nos indica que hubo un error del 0.26%, lo cual nos indica que obtuvimos con éxito la densidad del acero con este método.

La densidad de la plastilina es aproximadamente de 1.3 g/cm^3, a lo que nosotros obtuvimos un valor de 0.875 ± 0.0096 g/cm^3. Calculando el error tenemos que: (1.3-0.875)/1.3 = 0.32

Claro que como hay muchos tipos de plastilina, ésta no tiene una densidad determinada y no sabemos exactamente cuál es el valor teórico de la plastilina del laboratorio.

Este resultado nos indica que hubo un error del 32%, lo cual nos indica que no fue un buen método para obtener la densidad de la plastilina, aunque hay que tomar en cuenta que comparamos el valor obtenido con un valor teórico que no estamos seguros que sea el verdadero.

Para la obtención de la aceleración de la gravedad a partir de los balines, obtuvimos un resultado de 9.09 ± 0.056 m/s^2, la aceleración de la gravedad real es de 9.81 m/s^2. Calculando nuestro error de aproximación, tenemos que: (9.81-9.09)/9.81 = 0.073

Este resultado nos indica que hubo un error del 7.34%, lo cual nos indica que este método sirve lo suficiente para aproximarse a la aceleración de la gravedad real.

Por último, en la comparación de nuestra obtención de la aceleración de la gravedad a partir de la plastilina, obtuvimos un resultado de 9.2 ± 0.29 m/s^2, la aceleración de la gravedad real es de 9.81 m/s^2. Calculando nuestro error de aproximación, tenemos que: (9.81-9.2)/9.81 = 0.059

Este resultado nos indica que hubo un error del 5.97%, lo cual nos indica que este método sirve lo suficiente para aproximarse a la aceleración de la gravedad real al igual que el pasado e incluso mejor.

Por lo tanto, la técnica de mínimos cuadrados empleada en esta práctica aproximó bien los datos y pudimos hacer un buen análisis de las medidas. Además obtuvimos las constantes de proporcionalidad, o sea la densidad y el valor de la constante de gravedad.

Bibliografía

[1] D.C. Baird, *An Introduction to Measurement Theory and Experiment Design*, 2nd edition, Prentice Hall, USA 1988.

[2] Daryl W. Preston, et al., *The Art of Experimental Physics*, John Wiley & Sons, USA 1991.

[3] Louis Lyons, *A practical guide to data analysis for physical science students, Press Syndicate of University of Cambridge*, 1993, Great Britain 1992.

[4] Laboratorio de Mecánica. Artículo de mínimos cuadrados.