Mecánica analítica: Examen 2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

20 de enero de 2021

1) **Ejercicio 7.7 iii) a) Obtener las condiciones de las k para las que serán estables las órbitas circulares correspondientes a los siguientes campos de fuerzas centrales:** $U(r) = -a/r^k \quad , a > 0$

Primero calculamos el potencial efectivo de la partícula, si la partícula tiene un momento angular l, sabemos que dicho potencial efectivo para un campo central se calcula como:

$$U_{ef}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{a}{r^k}$$

Sabemos que la energía total de la partícula se consigue como $E = KE(r) + U_{ef}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{ef}(r)$

Aquí metemos la condición de que queremos que la partícula se mueva en un círculo. Para que esto suceda, el radio r tiene que ser constante $r = r_0 = cte$ y entonces $\dot{r} = \ddot{r} = 0$.

Luego, $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0$ y entonces la energía total en una órbita circular es simplemente $E = U_{ef}(r)$.
Como la energía se conserva en un potencial central, entonces E es constante y al derivar tenemos que $0 = U'_{ef}(r)$

Entonces, una condición para que la partícula se mueva en un círculo de radio $r = r_0$ es que $U'_{ef}(r_0) = 0$.
Por tanto, derivamos U_{ef} e igualamos a 0:

$$\begin{aligned} U'_{ef}(r) =& \frac{d}{dr}\left(\frac{l^2}{2mr^2} - \frac{a}{r^k}\right) = 0 \\ =& -\frac{l^2}{mr^3} + \frac{ka}{r^{k+1}} \end{aligned}$$

Sabemos que en la órbita circular $r = r_0$, esto debe de valer 0, por lo que:

$$
\begin{aligned}
-\frac{l^2}{mr_0^3} + \frac{ka}{r_0^{k+1}} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \frac{l^2}{mr_0^3} &= \frac{ka}{r_0^{k+1}} \\
\Rightarrow \quad r_0^{k-2} &= \frac{kam}{l^2} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Esto nos da la primera condición sobre k. Sabemos que r_0 tiene que ser positivo (pues es el radio en el que gira el objeto) y entonces r_0^{k-2} es positivo sin importar el valor de k. Por lo que $\frac{kam}{l^2}$ es positivo.
También m, l^2 son positivos y a es positivo por hipótesis, por lo que $\frac{am}{l^2}$ es positivo.
Entonces, para que $\frac{kam}{l^2}$ sea positivo, debemos de tener que $\underline{k > 0}$

Y esta es la condición para una órbita circular.

Ahora agregamos la condición de que la órbita sea estable:
Para que la ótbita sea estable, el potencial efectivo tiene que estar en un mínimo cuando $r = r_0$ para que la partícula no pueda 'escapar' de la órbita circular ya que no tiene la energía suficiente.
Entonces, se debe de cumplir que $U''_{ef}(r_0) > 0$. Para ello, calculamos la segunda derivada de U_{ef}:

$$
\begin{aligned}
U''_{ef}(r) &= \frac{d}{dr}\left(\frac{-l^2}{mr^3} + \frac{ka}{r^{k+1}}\right) \\
&= \frac{3l^2}{mr^4} - \frac{k(k+1)a}{r^{k+2}}
\end{aligned}
$$

Y al evaluar en $r = r_0$, esto debe de tener un valor positivo para que $r = r_0$ sea un mínimo:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad U''_{ef}(r_0) = \frac{3l^2}{mr_0^4} - \frac{k(k+1)a}{r_0^{k+2}} &> 0 \\
\Rightarrow \quad \frac{3l^2 r_0^{k-2}}{mr_0^{k+2}} - \frac{k(k+1)ma}{mr_0^{k+2}} &> 0 \\
\Rightarrow \quad 3l^2 r_0^{k-2} - k(k+1)ma &> 0 \\
\Rightarrow \quad 3l^2 \frac{kam}{l^2} - k(k+1)ma > 0 \qquad &\text{por } 1 \\
\Rightarrow \quad 3 - (k+1) &> 0 \\
\Rightarrow \quad 2 &> k
\end{aligned}
$$

Lo cual nos da la segunda condición para una órbita circular estable, $k < 2$.
Entonces, una órbita circular estable se obtiene siempre y cuando:

$$\boxed{0 < k < 2}$$

b) Hállese el período de las pequeñas oscilaciones respecto a las órbitas circulares estables

Para las pequeñas oscilaciones alrededor de $r = r_0$, necesitamos encontrar una expresión para la energía potencial $U_{ef}(r)$ cerca de r_0.
Para ello, utilizamos la serie de Taylor hasta el segundo término:
Para $r \simeq r_0$, tenemos que:

$$U_{ef}(r) \simeq U_{ef}(r_0) + U'_{ef}(r_0)(r - r_0) + \frac{1}{2!}U''_{ef}(r_0)(r - r_0)^2$$

Pero como r_0 era un mínimo de potencial, tenemos que $U'_{ef}(r_0) = 0$ y por tanto:

$$U_{ef}(r) = U_{ef}(r_0) + \frac{1}{2}U''_{ef}(r_0)(r - r_0)^2$$

Viéndolo como un problema unidimensional en la variable r, una partícula con este potencial $U_{ef}(r)$ sentiría una fuerza de $f_{ef}(r) = -\dfrac{d}{dr}U_{ef}(r)$. Es decir:

$$f_{ef}(r) = -\frac{d}{dr}U_{ef}(r) = -\frac{d}{dr}\left(U_{ef}(r_0) + \frac{1}{2}U''_{ef}(r_0)(r - r_0)^2\right) = -U''_{ef}(r_0)(r - r_0)$$

Y para este problema unidimensional, por la segunda ley de Newton, la fuerza es igual a $f_{ef}(r) = m\ddot{r}$. Por lo que nos queda la ecuación:

$$m\ddot{r} = -U''_{ef}(r_0)(r - r_0)$$

Y esto no es otra cosa que la ecuación de un oscilador armónico alrededor de r_0 con frecuencia $\omega^2 = U''_{ef}(r_0)/m$

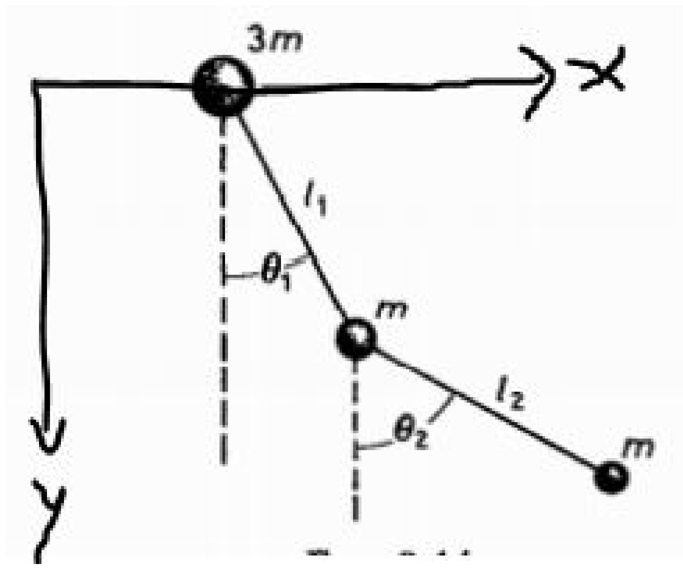
Entonces calculamos esta frecuencia:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= U''_{ef}(r_0)/m \\
&= \frac{3l^2}{m^2 r_0^4} - \frac{k(k+1)a}{m r_0^{k+2}} \qquad \text{por lo calculado en el inciso anterior} \\
&= \frac{3l^2 r_0^{k-2} - k(k+1)ma}{m^2 r_0^{k+2}} \\
&= \frac{3l^2 r_0^{k-2} - k(k+1)ma}{m^2 r_0^{k-2} r_0^4} = \frac{3l^2 \dfrac{kam}{l^2} - k(k+1)ma}{m^2 r_0^4 \dfrac{kam}{l^2}} \qquad \text{por (1)} \\
&= \frac{3kam - k(k+1)am}{m^2 r_0^4 \dfrac{kam}{l^2}} = \frac{2kam - k^2 am}{m^2 r_0^4 \dfrac{kam}{l^2}} \\
&= \frac{(2-k)l^2}{m^2 r_0^4}
\end{aligned}$$

Por lo que la frecuencia angular de pequeñas oscilaciones es:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{(2-k)l^2}{m^2 r_0^4}}$$

2 **Ejercicio 8.13. Una cuenta de masa $3m$ puede deslizarse horizontalmente sin rozamiento por un alambre como se indica en la figura. Unido a la cuenta hay un péndulo doble. Si, en una posición cercana ala de su equilibrio, se deja al sistema en libertad, a partir del reposo, las masas oscilan en el plano de la figura a un lado y otro de la vertical. a) Escríbanse las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema**



Primero que nada, llamamos x a la posición de la partícula $3m$ en la línea sobre la que se puede mover.
Y formamos un sistema de coordenadas como el que se muestra en la figura.
Vemos que la posición de la primera masa es:

$$x_1 = x \quad , \quad y_1 = 0$$

Y derivamos para obtener su velocidad en coordendas cartesianas:

$$\dot{x}_1 = \dot{x} \quad , \quad \dot{y}_1 = 0$$

Por lo que tiene una energía cinética de:

$$T_1 = \frac{1}{2}(3m)(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{3}{2}m\dot{x}^2$$

Y una energía potencial de:

$$U_1 = -mgy_1 = 0$$

.

Vemos que la posición de la segunda masa es:

$$x_2 = x + l_1 \sin\theta_1 \quad , \quad y_2 = l_1 \cos\theta_1$$

Y derivamos para obtener su velocidad en coordendas cartesianas:

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \quad , \quad \dot{y}_2 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$

Por lo que tiene una energía cinética de:

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1)^2 + \frac{1}{2}m(l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\cos\theta_1 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\cos\theta_1 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2
\end{aligned}$$

Y una energía potencial de:

$$U_2 = -mgy_2 = -mgl_1\cos\theta_1$$

.

Vemos que la posición de la tercera masa es:

$$x_3 = x + l_1 \sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2 \quad , \quad y_3 = l_1 \cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2$$

Y derivamos para obtener su velocidad en coordendas cartesianas:

$$\dot{x}_3 = \dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \quad , \quad \dot{y}_3 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2$$

Por lo que tiene una energía cinética de:

$$\begin{aligned}
T_3 &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2 + \frac{1}{2}m(-l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}_2^2\cos^2\theta_2 + ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\dot{x}\cos\theta_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2 \\
&+ \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}_2^2\sin^2\theta_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_1\sin\theta_2 \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}_2^2 + ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\dot{x}\cos\theta_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}$$

Y una energía potencial de:

$$U_3 = -mgy_3 = -mg(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

.

Con esto podemos ya calcular la energía cinética total como la suma de las energías cinéticas y la energía potencial de manera análoga.
Y finalmente tenemos que el laplaciano es:

$$
\begin{aligned}
&L = T - U = T_1 + T_2 + T_3 - U_1 - U_2 - U_3 \\
&= \frac{5}{2}m\dot{x}^2 + 2ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\dot{x}\cos\theta_2 + ml_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}_2^2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\
&+ 2mgl_1\cos\theta_1 + mgl_2\cos\theta_2
\end{aligned}
$$

Ahora conseguimos la ecuación de Lagrange para cada una de las coordenadas:

- x:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \\
&\Rightarrow \quad -\frac{d}{dt}\left(5m\dot{x} + 2ml_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad 5m\dot{x} + 2ml_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 = cte
\end{aligned}
$$

  Que es una expresión de la conservación del momento lineal en la coordenada x (el momento de la primera partícula es $3m\dot{x}$, de la segunda $m\dot{x} + ml_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1$ y de la tercera $m\dot{x} + ml_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2$).

- θ_1:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = 0 \\
&\Rightarrow \quad -2ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\sin\theta_1 - ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - 2mgl_1\sin\theta_1 \\
&\quad - \frac{d}{dt}\left(ml_1\dot{x}\cos\theta_1 + 2ml_1^2\dot{\theta}_1 + ml_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right) = 0
\end{aligned}
$$

  .

- θ_2:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 \\
&\Rightarrow \quad -ml_2\dot{\theta}_2\dot{x}\sin\theta_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - mgl_2\sin\theta_2 \\
&\quad - \frac{d}{dt}\left(ml_2\dot{x}\cos\theta_2 + ml_2^2\dot{\theta}_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\right) = 0
\end{aligned}
$$

Entonces las ecuaciones de Laplace son:

- $5m\dot{x} + 2ml_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + ml_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 = cte$

- $-2ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\sin\theta_1 - ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - 2mgl_1\sin\theta_1$
  $- \dfrac{d}{dt}\Big(ml_1\dot{x}\cos\theta_1 + 2ml_1^2\dot{\theta}_1 + ml_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\Big) = 0$
- $-ml_2\dot{\theta}_2\dot{x}\sin\theta_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - mgl_2\sin\theta_2$
  $- \dfrac{d}{dt}\Big(ml_2\dot{x}\cos\theta_2 + ml_2^2\dot{\theta}_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\Big) = 0$

.

b) Hállense las aceleraciones cuando los desplazamientos y velocidades son pequeños

Reescribimos las ecuaciones de Laplace pero con las aproximaciones $\sin(y) \simeq y$, $\cos y \simeq 1 - \dfrac{1}{2}y^2$. Para ambos ángulos θ_1, θ_2.
Por lo que nos quedan las ecuaciones:

- $5m\dot{x} + 2ml_1\dot{\theta}_1(1-\frac{1}{2}\theta_1^2) + ml_2\dot{\theta}_2(1-\frac{1}{2}\theta_2^2) = cte$
- $-2ml_1\dot{\theta}_1\dot{x}\theta_1 - ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\theta_1-\theta_2) - 2mgl_1\theta_1$
  $- \dfrac{d}{dt}\Big(ml_1\dot{x}(1-\frac{1}{2}\theta_1^2) + +2ml_1^2\dot{\theta}_1 + ml_1l_2\dot{\theta}_2[1-\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)^2]\Big) = 0$
- $-ml_2\dot{\theta}_2\dot{x}\theta_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\theta_1-\theta_2) - mgl_2\theta_2$
  $- \dfrac{d}{dt}\Big(ml_2\dot{x}(1-\frac{1}{2}\theta_2^2) + ml_2^2\dot{\theta}_2 + ml_1l_2\dot{\theta}_1[1-\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)^2]\Big) = 0$

Estas ecuaciones siguen siendo muy difíciles de resolver explícitamente para x, θ_1, θ_2. Sin embargo, podemos expresar las aceleraciones en términos de θ_1, θ_2, x como sigue:

Para la primera partícula, su posición es:

$$x_1 = x \quad , \quad y = 0$$

Por lo que su velocidad y aceleración en coordenadas cartesianas es:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}$$
$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}$$

.

Para la segunda partícula, la posición está dada por:

$$x_2 = x + l_1\sin\theta_1 \quad , \quad y_2 = l_1\cos\theta_2$$

La velocidad está dada por:

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \quad , \quad \dot{y}_2 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$

Y la aceleración en coordenadas cartesianas es:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x} + l_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - l_1\dot{\theta_1}^2 \sin\theta_1 \quad , \quad \ddot{y}_2 = -l_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_1\ddot{\theta}_1^2 \cos\theta_1$$

Usando la aproximación de ángulos pequeños nos queda:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x} + l_1\ddot{\theta}_1(1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2) - l_1\dot{\theta_1}^2\theta_1 \quad , \quad \ddot{y}_2 = -l_1\ddot{\theta}_1\theta_1 - l_1\ddot{\theta}_1^2(1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2)$$

.

Vemos que la posición de la tercera masa es:

$$x_3 = x + l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \quad , \quad y_3 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2$$

Y derivamos para obtener su velocidad en coordendas cartesianas:

$$\dot{x}_3 = \dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \quad , \quad \dot{y}_3 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2$$

Y de nuevo para obtener la aceleración en coordenadas cartesianas:

$$\begin{gathered}\ddot{x}_3 = \ddot{x} + l_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 + l_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 \\ \ddot{y}_3 = -l_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 - l_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2\end{gathered}$$

Luego usamos la aproximación de ángulos pequeños:

$$\begin{gathered}\ddot{x}_3 = \ddot{x} + l_1\ddot{\theta}_1(1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2) - l_1\dot{\theta}_1^2\theta_1 + l_2\ddot{\theta}_2(1 - \tfrac{1}{2}\theta_2^2) - l_2\dot{\theta}_2^2\theta_2 \\ \ddot{y}_3 = -l_1\ddot{\theta}_1\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2(1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2) - l_2\ddot{\theta}_2\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2(1 - \tfrac{1}{2}\theta_2^2)\end{gathered}$$

.

3. **Ejercicio 8.16) Analícese el movimiento del regulador del problema 8-15, si la velocidad angular del eje no está restringida a ω, sino que gira libremente sin que tenga ningún momento rotacional externo. a) Hállese la velocidad angular de rotación estacionaria para una altura dada z del manguito inferior. b) Hállese la frecuencia de las pequeñas vibraciones por encima y por debajo de este movimiento estacionario. c) ¿Cuáles son las diferencias entre este movimiento y el del problema 8-15?**

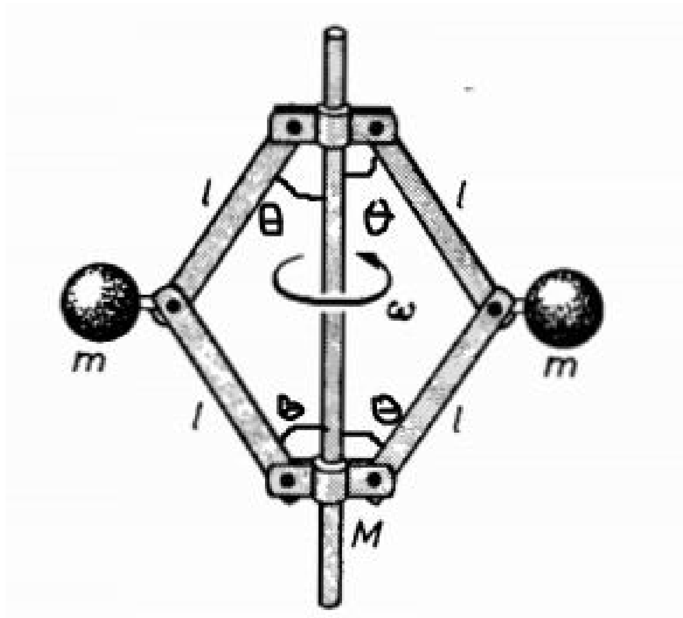


FIG. 8-16

Primero formamos un sistema de referencia centrado en el manguito superior del regular centrífugo. Usamos como coordenadas el ángulo θ dibujado y un ángulo ϕ que indica la rotación con respecto al plano vertical.
Encontramos las posiciones de las tres masas en términos de estas coordenadas

La masa izquierda tiene coordenadas $x_1 = -l\sin\theta\cos\phi$, $y_1 = l\sin\theta\sin\phi$, $z_1 = -l\cos\theta$. Por lo que esta partícula tiene una energía cinética de:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) \\
&= \frac{1}{2}m\left((-l\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi + l\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi)^2 + (l\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + l\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}m\big[l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\cos^2\phi + l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\sin^2\phi - 2l^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi \\
&\quad + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\sin^2\phi + l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\cos^2\phi + 2l^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\theta\ sin\phi\cos\phi + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\big] \\
&= \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right]
\end{aligned}
$$

Y tiene una energía potencial de:

$$U_1 = mgz_1 = -mgl\cos\theta$$

La partícula derecha tiene las mismas coordenadas que la primera partícula pero con un signo distinto en la coordenada x y y. Sin embargo, al elevar al cuadrado para calcular la energía cinética, el resultado es el mismo. Y la energía potencial sólo depende de z, que es la misma en las dos partículas.

La tercer partícula tiene una coordenada z que se puede obtener viendo el dibujo como $z_3 = -2l\cos\theta$.
Por lo que tiene una energía cinética de:

$$T_3 = \frac{1}{2}M\left[\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2\right] = \frac{1}{2}M(2l\dot{\theta}\sin\theta)^2 = 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

Y tiene una energía potencial de:

$$U_3 = Mgz_3 = -2Mlg\cos\theta$$

Por tanto, se tiene que el Lagrangiano es:

$$\begin{aligned} L &= T - U = 2T_1 + T_3 - 2U_1 - U_3 \\ &= ml^2\dot{\theta}^2 + ml^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta + 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2mgl\cos\theta + 2Mgl\cos\theta \end{aligned}$$

Vemos que el Lagrangiano no depende explícitamente de ϕ, por lo que el momento generalizado en la coordenada ϕ es igual a una constante C, esto es:

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = C \\ &\Rightarrow \quad 2ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta = C \end{aligned}$$

Ahora calculamos la ecuación para θ:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = 0 \\ &\Rightarrow \quad 2ml^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + 4Ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - 2mgl\sin\theta - 2Mgl\sin\theta - \frac{d}{dt}\Big(2ml^2\dot{\theta} + 4Ml^2\dot{\theta}\sin^2\theta\Big) = 0 \\ &\Rightarrow \; 2ml^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + 4Ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - 2mgl\sin\theta - 2Mgl\sin\theta \\ &\quad - 2ml^2\ddot{\theta} - 4Ml^2\ddot{\theta}\sin^2\theta - 8Ml^2\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta = 0 \\ &\Rightarrow \quad ml^2\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta - 2Ml^2\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta - (m+M)gl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} - 2Ml^2\ddot{\theta}\sin^2\theta = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo a la pregunta, digamos que la partícula M se encuentra a una altura h respecto al mangutio superior. Viendo el dibujo, tenemos que $z = 2l\cos\theta$. Por tanto, para que esta altura z sea constante, θ tiene que se constante.
Entonces $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, lo cual sustituimos en la última ecuación:

$$
\begin{aligned}
ml^2\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta-(m+M)gl\sin\theta=0\\
\Rightarrow\quad \dot{\phi}=\sqrt{\frac{(m+M)g}{ml\cos\theta}}\\
=\sqrt{\frac{2(m+M)g}{mz}}
\end{aligned}
$$

.

b) Hállese la frecuencia de las pequeñas vibraciones por encima y por debajo de este movimiento estacionario

Consideramos la ecuación de Lagrange para θ calculada antes y usamos las aproximaciones $\sin\theta\simeq\theta$, $\cos\theta\simeq 1$

$$
\begin{aligned}
&ml^2\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta-2Ml^2\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta-(m+M)gl\sin\theta-ml^2\ddot{\theta}-2Ml^2\ddot{\theta}\sin^2\theta=0\\
&\Rightarrow\ ml^2\dot{\phi}^2\theta-2Ml^2\dot{\theta}^2\theta-(m+M)gl\theta-ml^2\ddot{\theta}-2Ml^2\ddot{\theta}\theta^2=0\\
&\Rightarrow\ ml^2\dot{\phi}^2\theta-(m+M)gl\theta-ml^2\ddot{\theta}=0\qquad\text{nos quedamos con los términos lineales porque }\theta<<1\\
&\Rightarrow\ (ml^2\dot{\phi}^2-(m+M)gl)\theta=ml^2\ddot{\theta}\\
&\Rightarrow\ \ddot{\theta}=\left(\dot{\phi}^2-\frac{(m+M)g}{ml}\right)\theta\\
&\Rightarrow\ \ddot{\theta}=\left(\frac{2(m+M)g}{mz}-\frac{(m+M)g}{ml}\right)\theta
\end{aligned}
$$

Es una ecuación de oscilador armónico simple con una frecuencia de:

$$
\omega^2=\frac{2(m+M)g}{mz}-\frac{(m+M)g}{ml}
$$

.

c) ¿Cuáles son las diferencias entre este movimiento y el del problema 8-15?

Notamos que L no depende explícitamente del tiempo, por lo que el Hamiltoniano $H=p_\theta\dot{\theta}+p_\phi\dot{\phi}-L$ es igual a una constante.

$$
\begin{aligned}
H &= p_\theta\dot\theta + p_\phi\dot\phi - L \\
&= \frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\dot\theta + \frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\dot\phi - L \\
&= (2ml^2\dot\theta + 4Ml^2\dot\theta\sin^2\theta)\dot\theta + \left(2ml^2\dot\phi\sin^2\theta\right)\dot\phi \\
&\quad - (ml^2\dot\theta^2 + ml^2\dot\phi^2\sin^2\theta + 2Ml^2\dot\theta^2\sin^2\theta + 2mgl\cos\theta + 2Mgl\cos\theta) \\
&= ml^2\dot\theta^2 + 2Ml^2\dot\theta^2\sin^2\theta + ml^2\dot\phi^2\sin^2\theta - 2mgl\cos\theta - 2Mgl\cos\theta
\end{aligned}
$$

Viendo las expresiones anteriores, notamos que H es la energía total $2T_1+T_3+2U_1+U_3$. Esto coincide con lo visto en clase que siempre que no haya fuerzas externas no conservativas, si L no depende del tiempo, H es igual a la energía total y se conserva.

Entonces, nos quedan como ecuaciones:

$$
\begin{gathered}
C = 2ml^2\dot\phi\sin^2\theta \\
E = ml^2\dot\theta^2 + 2Ml^2\dot\theta^2\sin^2\theta + ml^2\dot\phi^2\sin^2\theta - 2mgl\cos\theta - 2Mgl\cos\theta
\end{gathered}
$$

Por tanto, vemos que se conserva el momento angular total respecto al ángulo ϕ y se conserva la energía total.
Esto último es una diferencia con respecto al problema visto en clase, ya que en el problema en clase no se conservaba la energía total.
En el problema en clase el regulador estaba restringido a girar con una velocidad angular ω todo el tiempo. Esta restricción requería agregar energía al sistema para mantener este movimiento.