RESUMEN: SEMANAS 13 Y 14

ERNESTO MAYORGA SAUCEDO

12. Planos en $\mathbb{R}^3$

12.1. Representación vectorial de un plano. Extrapolando la descripción del plano cartesiano dada en la proposición 11.7 e inspirados en la descripción vectorial de las rectas, introducimos la siguiente definición.

Definición 12.1. *Sean $u, v \in \mathbb{R}^3 - \{\mathcal{O}\}$, donde $u \nparallel v$, y $Q \in \mathbb{R}^3$. El plano que pasa por Q, con vectores de dirección u y v, que denotamos $\boldsymbol{\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}}$, está dado por*

$$\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}} = \left\{Q + \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}. \tag{12.1}$$

Llamaremos a la descripción (12.1) la representación vectorial de un plano.

A partir de la definición 12.1, las siguientes observaciones son inmediatas.

Observación 12.2. *1)* $\Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}} = \{\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
2) $\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}} = \{Q\} + \Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}}$*; esto es, el plano* $\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}$ *es el trasladado por* Q *del plano por el origen* $\Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}}$.
3) $\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}} = \Pi_{Q,\overline{v},\overline{u}}$
4) $R \in \Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}$ *si y sólo si* $\Pi_{R,\overline{u},\overline{v}} = \Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}$.
5) $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} \cup \ell_{\mathcal{O},\overline{v}} \subset \Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}}$.
6) $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} + \ell_{\mathcal{O},\overline{v}} = \Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}}$.[XI]

Teniendo presenta las propiedades de las rectas dadas en el corolario 9.5, presentamos las siguientes propiedades para los planos en el espacio.

Proposición 12.3. *Sean $P, Q, R, S, u, v \in \mathbb{R}^3$, con $u, v \neq \mathcal{O}$ y $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} \neq \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$.*
1) $w \in \Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}} - \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$ *si y sólo si* $\Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{w}} = \Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}}$.
2) si $Q, R \in \Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}}$ *y* $(Q - R) \notin \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$*, entonces* $\Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{(Q-R)}} = \Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}}$.
3) si $P, Q, R \in \Pi_{S,\overline{u},\overline{v}}$*, son puntos distintos entre si, que **no son colineales,*** $(Q - P) \notin \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$ *y* $(R - P) \notin \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$*, entonces* $\Pi_{Q,\overline{(Q-P)},\overline{(R-P)}} = \Pi_{S,\overline{u},\overline{v}}$.

12.2. Extrapolación de conceptos a $\mathbb{R}^3$. Antes de continuar con el estudio de planos en el espacio, extrapolaremos algunos conceptos definidos en el plano al espacio cartesiano.

Ext 1. En el apéndice de [M2] demostramos que si $P, Q \in \mathbb{R}^3$, entonces la **distancia** de P a Q, está dada por la fórmula

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

Ext 2. El **producto punto** de $u, v \in \mathbb{R}^3$ está dado por la fórmula

$$u \bullet v := x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v; \tag{12.2}$$

en particular se obtienen las siguientes identidades

1) Para cada $P \in \mathbb{R}^3$, $P \bullet P = d(\mathcal{O}, P)^2$.
2) Para cada $P, Q \in \mathbb{R}^3$, $(P - Q) \bullet (P - Q) = d(P, Q)^2$.
3) Si $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ y $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$, entonces

$$\boldsymbol{e}_i \bullet \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

[XI] Para $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$, $(n = 2, 3)$ se define $\mathcal{A} + \mathcal{B} := \left\{A + B \in \mathbb{R}^3 \mid A \in \mathcal{A} \text{ y } B \in \mathcal{B}\right\}$.

Ext 3. (Compadres ortogonales) Si $u \in \mathbb{R}^3 - \{\mathcal{O}\}$, definimos

$$\begin{aligned} u^{(1)} &:= (-y_u, x_u, 0)\,, \\ u^{(2)} &:= (-z_u, 0, x_u)\,, \\ u^{(3)} &:= (0, -z_u, y_u)\,. \end{aligned}$$

Claramente para cada $j \in \{1,2,3\}$, $u \bullet u^{(j)} = 0$ y no es difícil comprobar que por lo menos dos de los tres elementos $u^{(1)}, u^{(2)}$ y $u^{(3)}$ son diferentes de cero.

Si definimos el conjunto $\{u\}^{\perp} := \{v \in \mathbb{R}^3\} \mid u \bullet v = 0$, entonces para cada $j \in \{1,2,3\}$, $u^{(j)} \in \{u\}^{\perp}$; en realidad se puede comprobar que si $u^{(i)} \neq \mathcal{O}$ y $u^{(j)} \neq \mathcal{O}$ entonces

$$\{u\}^{\perp} = \langle u^{(i)}, u^{(j)} \rangle\,.$$

Ext 4. (Proyección ortogonal) Dados $u, v \in \mathbb{R}^3$ con $v \neq \mathcal{O}$, la proyección ortogonal de u en v, que denotamos $\operatorname{Proy}_u(v)$, es el elemento de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\operatorname{Proy}_v(u) := \left(\frac{v \bullet u}{v \bullet v}\right) \cdot v.$$

Para finalizar esta sección, mencionaremos un concepto más que permite relacionar los conceptos de producto punto y distancia. Este concepto no fue mencionado en el plano pero como veremos la definición tiene el mismo sentido tanto en el plano como en el espacio.

Definición 12.4. *Sea $u \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2,3$). La norma de u, que denotamos $\|u\|$, es el número real*

$$\|u\| = \sqrt{u \bullet u}.$$

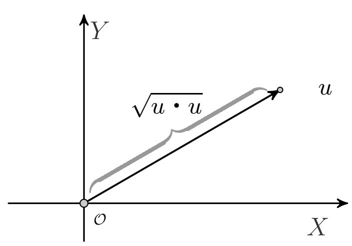

FIGURA 69. Magnitud del vector u

Observe que con esta definición, para cada $P, Q \in \mathbb{R}^n$, ($n = 2,3$)

$$\begin{aligned} \|P\| &= d(\mathcal{O}, P)\,, \\ \|P - Q\| &= d(P, Q)\,; \end{aligned}$$

además si $u, v \in \mathbb{R}^n$ y $v \neq \mathcal{O}$, entonces

$$\operatorname{Proy}_v(u) := \left(\frac{v \bullet u}{\|v\|^2}\right) \cdot v.$$

Las principales propiedades de la norma de un vector se listan en la siguiente proposición.

Proposición 12.5. *Si* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces*

1) $\|u\| \geq 0$ *y*
$$\|u\| = 0 \text{ si y sólo si } u = \mathcal{O}.$$
2) $\|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \, \|u\|$.

3) (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)
$$|u \bullet v| \leq \|u\| \, \|v\| \, .$$
4) (Desigualdad del triángulo)
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \, .$$

Demostración. Las propiedades (1) y (2) son consecuencia directa de la propiedad (4) de la proposición 11.4 y los dejamos como un ejercicio.

(3) Dados $u, v \in \mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$ consideraremos los vectores de la forma
$$u - \lambda \cdot v \in \ell_{u,\overline{v}} \subset \mathbb{R}^n$$

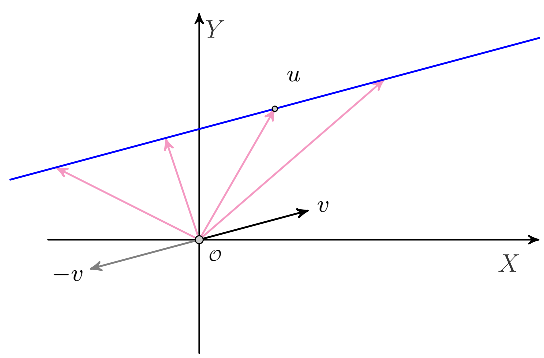

FIGURA 70. Vectores de la forma $u - \lambda \cdot v$

Luego

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|u - \lambda \cdot v\|^2 && \text{(propiedad en } \mathbb{R}\text{)}\\
&= (u - \lambda \cdot v) \bullet (u - \lambda \cdot v) && \text{(definición)}\\
&= (u - \lambda \cdot v) \bullet u - \lambda \cdot ((u - \lambda \cdot v) \bullet v) && \text{(proposición 11.4 (2) y (3))}\\
&= u \bullet u - \lambda \cdot v \bullet u - \lambda \cdot (u \bullet v - \lambda \cdot v \bullet v) && \text{(corolario 11.5)}\\
&= \|u\|^2 - 2\lambda \cdot u \bullet v + \lambda^2 \cdot \|v\|^2 && \text{(proposición 11.4 (1))}\\
&= \|u\|^2 - \lambda \cdot \left(2 \cdot u \bullet v - \lambda \cdot \|v\|^2\right) && \text{(proposición 11.4 (1))}
\end{aligned}$$

si elegimos $\lambda = \frac{u \bullet v}{\|v\|^2}$, la desigualdad anterior implica que
$$0 \leq \|u\|^2 - \left(\frac{u \bullet v}{\|v\|^2}\right)(u \bullet v) = \|u\|^2 - \frac{(u \bullet v)^2}{\|v\|^2},$$
de donde
$$\frac{(u \bullet v)^2}{\|v\|^2} \leq \|u\|^2 \, ,$$

y por consiguiente

$$(u \bullet v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

y por lo tanto se obtiene

$$|u \bullet v| \leq \|u\| \|v\| .$$

(4) Ya que

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= (u+v) \bullet (u+v) && \text{(definición)}\\
&= u \bullet u + u \bullet v + v \bullet u + v \bullet v && \text{(propiedad del producto punto)}\\
&= \|u\|^2 + 2\,(u \bullet v) + \|v\|^2 && \\
&\leq \|u\|^2 + 2\,|u \bullet v| + \|v\|^2 && \text{(propiedad del valor absoluto)}\\
&\leq \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 && \text{(desigualdad de Cauchy-Schwarz)}\\
&= (\|u\| + \|v\|)^2
\end{aligned}$$

se sigue, a partir de lo anterior y de (1) de esta proposición, que

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| .$$

□

12.3. Producto cruz. No es extraño pensar a partir de la similitud en las descripciones vectoriales de las rectas, en $\mathbb{R}^2$, y los planos en $\mathbb{R}^3$, que se debería tener una *forma normal de un plano*. En efecto esto sucede ya que si pensamos en el problema inverso, esto es, dado $n \in \mathbb{R}^3 - \{\mathcal{O}\}$, como mencionamos en 3) de la página , el lugar geométrico que describe el conjunto $\{n\}^{\perp}$ es precisamente $\Pi_{\mathcal{O},\overline{n^{(i)}},\overline{n^{(j)}}}$, donde $n^{(i)}$ y $n^{(j)}$ están definidos en **Ext 3.**

Por la identidad dada en la observación 12.2 inciso 2), es suficiente describir los planos que pasan por el origen en su forma normal y es así que nos preguntamos si existe, para $u, v \in \mathbb{R}^3 - \{\mathcal{O}\}$ no paralelos, un vector $n \in \mathbb{R}^3 - \{\mathcal{O}\}$, tal que

$$\Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}} = \{n\}^{\perp}.$$

Supongamos resuelto el problema y sea $n \in \mathbb{R}^3 - \{\mathcal{O}\}$, entonces tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{aligned} x_u x_n + y_u y_n + z_u z_n = 0\\ x_v x_n + y_v y_n + z_v z_n = 0 \end{aligned}\right. \tag{12.3}$$

del cual obtenemos

$$\left\{\begin{aligned} x_u x_v x_n + x_v y_u y_n + x_v z_u z_n = 0\\ x_u x_v x_n + x_u y_v y_n + x_u z_v z_n = 0 \end{aligned}\right.$$

Restando la segunda ecuación a la primera, y factorizando, se tiene

$$(x_v y_u - x_u y_v)\, y_n + (x_v z_u - x_u z_v)\, z_n = 0 \tag{12.4}$$

Una solución para la ecuación (12.4), en las indeterminadas y_n y z_n, es elegir

$$\begin{aligned} y_n &= x_v z_u - x_u z_v,\\ z_n &= -\,(x_v y_u - x_u y_v)\\ &= x_u y_v - x_v y_u. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas en la primer ecuación del sistema (12.3) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= x_u x_n + y_u \left(x_v z_u - x_u z_v \right) + z_u \left(x_u y_v - x_v y_u \right) \\ &= x_u x_n + y_u x_v z_u - y_u x_u z_v + z_u x_u y_v - z_u x_v y_u \\ &= x_u \left(x_n - y_u z_v + z_u y_v \right) \\ &= x_u \left(x_n - \left(y_u z_v - y_v z_u \right) \right) \end{aligned}$$

de donde, si elegimos

$$x_n = y_u z_v - y_v z_u,$$

la ecuación anterior se cumple.

De análisis anterior presentamos la siguiente definición.

Definición 12.6. *Para $u, v \in \mathbb{R}^3$, el producto cruz de u con v, que denotamos por $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, el vector dado por*

$$u \times v = \left(y_u z_v - y_v z_u, -\left(x_v y_u - x_u y_v \right), x_u y_v - x_v y_u \right). \tag{12.5}$$

Por construcción, $(u \times v) \cdot u = 0$ y $(u \times v) \cdot v = 0$, hecho que dejamos al lector comprobar.

Antes de pasa a más propiedades del producto cruz presentamos una regla nemotécnica para obtener el producto cruz de dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$; y esta utiliza el algoritmo para calcular el *determinante de una matriz* de 3×3 a través de la *expansión de Laplace*,[XII] de la cual, una de las afirmaciones dice que, si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de $n \times n$, entonces

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \alpha_{ik}, \tag{12.6}$$

[XII] Cita de [B-P], página 387. [...]El nombre "determinante" fue introducido por Cauchy, así como la notación en su uso ordinario para representar estas funciones (Art. 107). Aunque en 1693 Leibnitz había observado la peculiaridad de las funciones que surgen de la solución de ecuaciones lineales, no hubo más avances en esta dirección hasta que en 1750 Cramer lo llevó al estudio de tales funciones en relación con el análisis de curvas. Durante el último período del siglo dieciocho, el tema se amplió aún más por los trabajos de Bezout, Laplace, Vandermonde y Lagrange. Estos trabajos fueron continuados en el presente siglo por Gauss y Cauchy; al primero se le debe la proposición de que el producto de dos determinantes es en sí mismo un determinante. Un gran impulso al estudio de estas expresiones fue dado por los escritos de Jacobi en la *revista* Crelle, y por sus memorias publicadas en 1841. Entre los matemáticos más recientes que han avanzado en este tema, pueden mencionarse a Hermite, Hesse, Joachinistal, Cayley, Sylvester, y Salmon. No hay un departamento de matemáticas, puro o aplicado, en el que el empleo de este cálculo no sea de gran ayuda, no solo por ser conciso y elegante en la demostración de propiedades conocidas, sino que incluso conduce a nuevos descubrimientos en la ciencia matemática. Entre los trabajos recientes que han hecho que este tema sea accesible a los estudiantes, se pueden mencionar *Teoremas elementales relacionados al Determinante* de Spottiswoode, Londres, 1851; *La Teoría del determinante* de Brioschi, Pavia, 1854; *Teoría y aplicación de los determinantes.*, Leipzig de Baltzer, 1864; *Elementos de la teoría de los determinantes.* de Dostor, París, 1877; *Teoría de los determinantes* de Scott, Cambridge, 1880; y los capítulos en Salmon *Lecciones introductorias al Álgebra Superior Moderna*, Dublín, 1876. Para más información sobre la historia de este tema, así como sobre la de Eliminantes, Invariantes, Covariantes y Transformaciones lineales, se remite al lector a Apuntes al final del último trabajo mencionado.[...]

donde α_{ik}, llamado *menor complementario* de a_{ik}, es el determinante de la submatriz de A, de $(n-1)\times(n-1)$, que se obtiene al suprimir el i-ésimo renglón y la k-ésima columna de A.

Cuando se emplea la fórmula (12.6) decimos que "el determinante de A se ha desarrollado por el i-ésimo renglón".

Para el caso concreto de una matriz A de 3×3 este luce de la siguiente manera: Considerando $i=1$ (desarrollo por el primer renglón)

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} &= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix} + a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}\\ &= a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)\end{aligned}$$

Por otra parte, observando las entradas de $u\times v$ en la fórmula (12.5), vemos que estas tiene la forma de menores complementarios asociados a las entradas del primer renglón de una matriz de 3×3 cuyos renglones 2 y 3 son las entradas de u y v, respectivamente.

De esta manera, si $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0)$ y $e_3=(0,0,1)$, convenimos en la siguiente representación[XIII]

$$u\times v := \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix},$$

donde escribimos $\overline{e}_1$ para distinguir que las entradas del primer renglón son elementos de $\mathbb{R}^3$, y dicho "determinante" se desarrolla precisamente por el primer renglón y además

$$e_j\alpha_{1j} := \alpha_{1j}\cdot e_j. \qquad \text{(producto por escalares)}.$$

Observe que, con esta convención, para cada $u,v,w\in\mathbb{R}^3$

$$u\bullet(v\times w) = \det\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\\ x_w & y_w & z_w\end{pmatrix}.$$

Ejemplo 12.7. *Sean $e_1,e_2,e_3\in\mathbb{R}^3-\{\mathcal{O}\}$ los vectores definidos anteriormente, entonces*

$$\begin{aligned} e_1\times e_2 &= \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\\ &= 0\cdot e_1 - 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3\\ &= e_3\end{aligned}$$

XIII Para evitar confusión, utilizamos el símbolo de barras verticales, $|\ |$, en lugar de $\det$.

$$\begin{aligned} e_2 \times e_3 &= \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot e_1 - 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ &= e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3 \times e_1 &= \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot e_1 - (-1) \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ &= e_2 \end{aligned}$$

Las principales propiedades del producto cruz se listan en el siguiente ejercicio. Recomendamos al lector revisar el apéndice donde se presentan algunas propiedades del determinante que pueden extrapolar al producto cruz.

Ejercicio 7. *Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3 - \{\mathcal{O}\}$, demuestre que:*

1) $(u \times v) \bullet u = (u \times v) \bullet v = 0$*;*
2) $u \times v = -(v \times u)$*;*
3) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$*;*
4) $u \times (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (u \times v)$*;*
5) $(u \times v) \bullet w = u \bullet (v \times w)$*;*
6) $(u \times v) \times w = (u \bullet w) \cdot v - (v \bullet w) \cdot u$*;*
7) $u \times v = \mathcal{O}$ *si y sólo si* $u \parallel v$*;*
8) $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| |\operatorname{sen}(\operatorname{ang}(u, v))|$.

12.4. Representación normal de un plano. Considerando lo expuesto en la sección anterior, dados $u, v \in \mathbb{R}^3 - \{\mathcal{O}\}$, con $u \nparallel v$, se tiene que $u \times v \in \mathbb{R}^3 - \{\mathcal{O}\}$ es ortogonal a u y v y por consiguiente, si $P = \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}}$, entonces

$$\begin{aligned} (u \times v) \bullet P &= (u \times v) \bullet (\lambda \cdot u + \mu \cdot v) \\ &= \lambda \cdot (u \times v) \bullet u + \mu \cdot (u \times v) \bullet v \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}} \subseteq \{u \times v\}^{\perp};$$

la contención recíproca también se cumple pero esta no es tan simple como la que acabamos de comprobar; en [M1] se da una demostración de esta afirmación y en ella se hace uso del concepto de *subespacio vectorial*, el cual es introducido y revisado en sus propiedades más básicas en dichas notas, sin embargo para este curso lo reservamos para más adelante.

Aceptando la igualdad

$$\Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}} = \{u \times v\}^{\perp}, \tag{12.7}$$

podemos describir el caso general de un plano de la forma $\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}$, con $Q \in \mathbb{R}^3$ y para llevar a cabo es trabajo, consideramos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}
P \in \Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}} &\iff P = Q + \lambda \cdot u + \mu \cdot v && \text{(para algunos } \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\
&\iff P - Q = \lambda \cdot u + \mu \cdot v && \text{(para algunos } \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\
&\iff P - Q \in \Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}} \\
&\iff P - Q \in \{u \times v\}^{\perp} && \text{(por (12.7))} \\
&\iff (u \times v) \bullet (P - Q) = 0 \\
&\iff P \in \left\{ R \in \mathbb{R}^3 \mid (u \times v) \bullet (R - Q) = 0 \right\}
\end{aligned}$$

De esta manera se tiene que

$$\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}} = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 \mid (u \times v) \bullet (P - Q) = 0 \right\}. \tag{12.8}$$

Llamaremos a (12.8) la *representación normal* del plano $\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}$.

Si $u \times v = (A, B, C)$ y $D := -(u \times v) \bullet Q \in \mathbb{R}$, entonces (12.8) queda como

$$\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz + D = 0 \right\}, \tag{12.9}$$

en tal caso, decimos que el plano $\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}$ está determinado por la ecuación lineal

$$A\mathrm{x} + B\mathrm{y} + C\mathrm{z} + D = 0.$$

Ejemplo 12.8. *Sea $Q = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ y $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3 - \{\mathcal{O}\}$ los vectores del ejemplo 12.7, entonces*

$$\begin{aligned}
\Pi_{Q,\overline{e_1},\overline{e_2}} &= \left\{ P \in \mathbb{R}^3 \mid e_3 \bullet (P - Q) = 0 \right\} \\
&= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (0, 0, 1) \bullet (x - \alpha, y - \beta, z - \gamma) \right\} \\
&= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - \gamma = 0 \right\} \\
&= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \gamma \right\}
\end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}
\Pi_{Q,\overline{e_2},\overline{e_3}} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \alpha \right\} \\
\Pi_{Q,\overline{e_3},\overline{e_1}} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = \beta \right\}
\end{aligned}$$

Observe que si consideramos los puntos $R = (*, *, \gamma)$, $S = (*, \beta, *)$ y $T = (*, *, \gamma)$, entonces

$$\begin{aligned}
\Pi_{R,\overline{e_1},\overline{e_2}} &= \Pi_{Q,\overline{e_1},\overline{e_2}}, \\
\Pi_{S,\overline{e_2},\overline{e_3}} &= \Pi_{Q,\overline{e_2},\overline{e_3}}, \\
\Pi_{T,\overline{e_3},\overline{e_1}} &= \Pi_{Q,\overline{e_3},\overline{e_1}},
\end{aligned}$$

por esta razón, introducimos la siguiente notación

$$\Pi_{XY}(\gamma) = \Pi_{R,\overline{e_1},\overline{e_2}}$$
$$\Pi_{XZ}(\beta) = \Pi_{S,\overline{e_1},\overline{e_3}}$$
$$\Pi_{YZ}(\alpha) = \Pi_{T,\overline{e_2},\overline{e_3}}$$

12.5. Distancia de un punto a un plano. Con la descripción normal de un plano, podemos definir la distancia de un punto a un plano haciendo una analogía de la versión de la distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$, dicha fórmula garantiza que si $P \in \mathbb{R}^2$ y $\ell_{Q,\overline{v}} \subset \mathbb{R}^2$ es una recta,[XIV] entonces

$$d(P, \ell_{Q,\overline{v}}) = \left\| \mathrm{Proy}_{v^{\perp}}(P - Q) \right\|.$$

Lo que hay que observar en esta definición es que $v^{\perp}$ es un elemento en $\mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$ que es ortogonal a todos los elementos de $\ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$. Para el caso de un plano $\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}} \subset \mathbb{R}^3$, el elemento $u \times v \in \mathbb{R}^3 - \{\mathcal{O}\}$ tiene la propiedad de ser ortogonal a todos los elementos de $\Pi_{\mathcal{O},\overline{u},\overline{v}} \subset \mathbb{R}^3$.

Basados en esta observación, presentamos la siguiente definición.

Definición 12.9. *Sea $\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}} \subset \mathbb{R}^3$ un plano y $P \in \mathbb{R}^3$. La distancia de P al plano $\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}$ es el número real*

$$d(P, \Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}) = \left\| \mathrm{Proy}_{u \times v}(P - Q) \right\|.$$

De esta manera

$$\begin{aligned} d(P, \Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}) &= \left\| \left(\frac{(u \times v) \bullet (P - Q)}{\|u \times v\|^2} \right) \cdot (u \times v) \right\| \\ &= \frac{|(u \times v) \bullet (P - Q)|}{\|u \times v\|^2} \|u \times v\| \\ &= \frac{|(u \times v) \bullet (P - Q)|}{\|u \times v\|}, \end{aligned}$$

y si $u \times v = (A, B, C)$ y $D = -(u \times v) \bullet Q \in \mathbb{R}$, entonces

$$d(P, \Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}) = \frac{|Ax_P + By_P + Cz_P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{12.10}$$

Observe que, con la identidad (12.9) y la fórmula (12.10), para cada $P \in \mathbb{R}^3$ se cumple que

$$P \in \Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}} \text{ si y sólo si } d(P, \Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}) = 0.$$

Ejemplo 12.10. *Sea $P \in \mathbb{R}^3$, entonces*

$$d(P, \Pi_{XY}(\gamma)) = |z_P - \gamma|,$$
$$d(P, \Pi_{XZ}(\beta)) = |y_P - \beta|,$$
$$d(P, \Pi_{YZ}(\alpha)) = |x_P - \alpha|,$$

en particular

[XIV] **Pendiente** en estas notas.

$$
\begin{aligned}
d\left(P, \Pi_{XY}\right) &= \left|z_P\right|, \\
d\left(P, \Pi_{XZ}\right) &= \left|y_P\right|, \\
d\left(P, \Pi_{YZ}\right) &= \left|x_P\right|.
\end{aligned}
$$

16. Apéndice

En este apéndice sólo presentaremos algunas propiedades que posé el determinante de una *matriz* cuadrada.

16.1. Matrices. Comenzaremos presentado el concepto de matriz cuadrada y algunas propiedades sobre el conjunto de todas ellas.

Definición 16.1. *Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Una matriz de n por n ($n \times n$) con entradas en $\mathbb{R}$ es un arreglo de la forma*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y tal número es llamado la entrada $i - j$ de la matriz.

Notación 16.2. *Utilizaremos letras mayúsculas $A, B, C, D, \ldots$ para denotar a las matrices de $n \times n$ y si A es como en la definición, el i-ésimo renglón de A que denotamos $\boldsymbol{A_i}$, es el arreglo*

$$A_i = \left(a_{i1} \; a_{i2} \; \cdots \; a_{in} \right).$$

Por otra parte, la j-ésima columna de A, que denotamos por $\boldsymbol{A}^{(j)}$, es el arreglo

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Con esta notación, la descripción de A por renglones es

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix},$$

y la descripción de A por columnas es

$$A = \left(A^{(1)} \; A^{(2)} \; \cdots \; A^{(n)} \right).$$

Finalmente la descripción simplificada de A es

$$A = (\boldsymbol{a_{ij}}).$$

Por otra parte, el conjunto de todas las matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ es denotado $\underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$.

Al igual que en $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) se definieron las operaciones de suma y producto por escalares, en el conjunto $\underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$ se defines las operaciones, de suma y producto por escalares, de la siguiente manera: dadas $A = (a_{ij}) \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$, $B = (b_{ij}) \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}), \tag{16.1}$$

y

$$\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij}). \tag{16.2}$$

No es difícil comprobar que la terna $\left(\underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R}), +, \cdot\right)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

16.2. Determinantes. El determinante de una matriz es un número que permite obtener información sobre la matriz en diferentes contextos. Se conocen diferentes formas de calcular dicho número y aquí presentamos una que extrapolaremos para dar una regla nemotécnica respecto al cálculo de un vector en $\mathbb{R}^3$.

La siguiente proposición es atribuida a Pierre-Simon Laplace y en ella se establece una forma de calcular el determinante de una matriz

Teorema 16.3. *Si $A \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$, entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene que*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}\alpha_{ik}, \tag{16.3}$$

donde α_{ik}, llamado menor complementario *de a_{ik}, es el determinante de la submatriz de A, de $(n-1)\times(n-1)$, que se obtiene al suprimir el i-ésimo renglón y la k-ésima columna de A.*

$$\alpha_{ik} := \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

FIGURA 97. Menor complementario de a_{ik}

Una de las afirmaciones que se establecen en el teorema 16.3 es que el proceso de calcular el determinante de una matriz de $n\times n$ se reduce al cálculo del determinante de unas matrices de tamaño menor, $(n-1)\times(n-1)$, y repitiendo el proceso para cada una de estas matrices de este tamaño, el cálculo de cada una de ellas se reduce al cálculo del determinante de matrices de tamaño $(n-2)\times(n-2)$, y así sucesivamente.

Por otra parte, a partir de la expansión de Laplace se obtienen las siguientes propiedades.

Corolario 16.4. *Si un renglón de $A \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$ tiene todas sus entrada igual a cero, entonces* $\det(A) = 0$.

La demostración es inmediata si se desarrolla el determinante por el renglón con entradas igual a cero. Otras propiedades menos obvias son las siguientes y para comprobarlas introducimos la siguiente notación.

Notación 16.5. *Dada $A \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$, denotamos por $A_{\widehat{r}}$ a la submatriz de A, de $(n-1)\times n$, que se obtiene al suprimir el r-ésimo renglón de A y denotamos por $A^{\widehat{s}}$ a la submatriz de A, de $n\times(n-1)$, que se obtiene al suprimir la s-ésima columna de A. A partir de esta notación, claramente*

$$\left(A_{\widehat{i}}\right)^{\widehat{j}} = \left(A^{\widehat{j}}\right)_{\widehat{i}},$$

lo cual significa que da lo mismo quitar primero el i-ésimo renglón y después la j-ésima columna de A que quitar primero la j-ésima columna y después el i-ésimo renglón de A.

Corolario 16.6. *Sean $A, B \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$. Si B es la matriz que se obtiene al intercambiar dos renglones consecutivos de A, entonces* $\det(B) = -\det(A)$.

Demostración. Suponemos que los renglones de B son

$$B_r = \begin{cases} A_r & \text{si } r \in \{1,2,\dots,n\} - \{i,(i+1)\} \\ A_{(i+1)} & \text{si } r = i \\ A_i & \text{si } r = i+1 \end{cases}$$

así se tiene que

$$B_{\widehat{i+1}} := \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{(i+1)} \\ \cancel{A_i} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = A_{\widehat{i}},$$

y por consiguiente, para cada $k \in \{1,2,\dots,n\}$

$$\left(B_{\widehat{i+1}}\right)^{\widehat{k}} = \left(A_{\widehat{i}}\right)^{\widehat{k}}.$$

Si denotamos por β_{ij} al menor complementario de la entrada $i-j$ de B, se obtiene que para cada $k \in \{1,2,\dots,n\}$

$$\beta_{(i+1)k} = \alpha_{ik}. \tag{16.4}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(i+1)+k}\, b_{(i+1)k}\beta_{(i+1)k} && \text{(desarrollando por el renglón } i+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(i+1)+k}\, a_{ik}\alpha_{ik} && \text{(porque } B_{(i+1)} = A_i \text{ y (16.4))} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)(-1)^{i+k}\, a_{ik}\alpha_{ik} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik}\alpha_{ik} \\
&= -\det(A).
\end{aligned}$$

□

Corolario 16.7. *Sea $A, B \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$. Si B es la matriz que se obtiene al intercambiar dos renglones A, entonces* $\det(B) = -\det(A)$.

Demostración. Supongamos que $1 \leq i < s \leq n$ y que los renglones de B están dados como sigue

$$B_r = \begin{cases} A_r & \text{si } r \in \{1,2,\dots,n\} - \{i,s\} \\ A_s & \text{si } r = i \\ A_i & \text{si } r = s \end{cases}$$

Observe que el número de intercambios de renglones consecutivos que debemos hacer para llevar el renglón A_i hasta el renglón A_s es $(s-i)$ (ya que $i+x=s \Longrightarrow x=s-i$) y además en esta situación, el renglón A_s es el inmediato anterior a A_i, esto es, en dicha matriz, el renglón $(s-1)$ es A_s y el renglón i es A_{i+1}. De esta manera, el número de intercambios de renglones consecutivos que debemos hacer para llevar el renglón A_s hasta el renglón A_{i+1} es uno menos que el numero de intercambios anterior y por esta razón, el numero total de intercambios consecutivos que cambian el renglón A_i con A_s es $2(s-i)-1$ y por lo tanto

$$\det(B) = (-1)^{2(s-i)-1} \det(A) = -\det(A).$$

$\square$

Corolario 16.8. *Si dos renglones de* $A \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$ *son iguales, entonces* $\det(A)=0$.

Demostración. Supongamos que $A \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$ satisface que $A_i = A_s$, donde $i<s$. Si $B \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$ se obtiene al intercambiar el renglón i con el renglón s de A, entonces $B=A$, pero por el corolario 16.7 se tiene que $\det(B) = -\det(A)$ y por consiguiente $\det(A) = -\det(A)$, de donde se obtiene que $\det(A)=0$. $\square$

Otra de las consecuencias de la fórmula (16.3) se establece en la siguiente proposición.

Proposición 16.9. *Si* $A \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$ *está descrita por renglones como*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \lambda\cdot A_i + A'_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix},$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\det(A) = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A'_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Demostración. Suponemos que $A \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$ está descrita por renglones como

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \lambda\cdot A_i + A'_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix},$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ y $A'_i = \begin{pmatrix} a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \end{pmatrix}$; de esta manera el i-ésimo renglón de A es

$$\lambda \cdot A_i + A'_i = \begin{pmatrix} (\lambda a_{i1} + a'_{i1}) & (\lambda a_{i1} + a'_{i2}) & \cdots & (\lambda a_{i1} + a'_{in}) \end{pmatrix}.$$

Luego, desarrollando $\det(A)$ por el i-ésimo renglón, la expansión de Laplace garantiza que

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \left(\lambda a_{ik} + a'_{ik}\right) \alpha_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \left(\left(\lambda a_{ik}\right) \alpha_{ik} + a'_{ik}\alpha_{ik}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{i+k} \left(\lambda a_{ik}\right) \alpha_{ik} + (-1)^{i+k} a'_{ik}\alpha_{ik}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda \left((-1)^{i+k} a_{ik}\alpha_{ik}\right) + (-1)^{i+k} a'_{ik}\alpha_{ik}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda \left((-1)^{i+k} a_{ik}\alpha_{ik}\right) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a'_{ik}\alpha_{ik} \\
&= \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}\alpha_{ik}\right) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a'_{ik}\alpha_{ik} \\
&= \lambda \det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A'_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Para el siguiente corolario, identificaremos los renglones de una matriz en $\underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$ con un elemento de $\mathbb{R}^n$ y en este sentido, podremos hablar de “renglones paralelos”.

Corolario 16.10. *Si dos renglones de* $A \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$ *son paralelos, entonces* $\det(A) = 0$.

Demostración. Sea $A \in \underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$ y suponemos que para $1 \leq i < s \leq n$ se tiene que existe $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A_s = \lambda \cdot A_i.$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \lambda \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} && \text{(proposición 16.9)} \\
&= \lambda 0. && \text{(corolario 16.8)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

Terminamos esta sección con una cita de [K], página 81, correspondiente a una nota histórica sobre el determinante.

[...]Aunque hoy en día se habla del determinante de una matriz, los dos conceptos tienen orígenes diferentes. En particular, los determinantes aparecieron antes que las matrices, y las primeras etapas de su historia estaban estrechamente relacionadas con las ecuaciones lineales. Los problemas subsiguientes que dieron lugar a nuevos usos de determinantes incluyeron la teoría de la eliminación (condiciones de búsqueda en las cuales dos polinomios tienen una raíz común), la transformación de coordenadas para simplificar expresiones algebraicas (por ejemplo, formas cuadráticas), cambio de variables en integrales múltiples, solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, y de mecánica celeste. Ver [24].

Como hemos señalado en la sección anterior sobre ecuaciones lineales, Leibniz inventó los determinantes. "Sabía en esencia la(su) definición combinatoria moderna" [21], y las usó para resolver ecuaciones lineales y en la teoría de la eliminación. Escribió muchos artículos sobre determinantes, pero permanecieron inéditos hasta hace poco. Ver [21], [22].

La primera publicación que contenía información elemental sobre los determinantes fue el Tratado de Álgebra de Maclaurin, en el que se utilizaron para resolver sistemas de 2×2 y 3×3. Esto pronto fue seguido por Cramer con un uso significativo de determinantes (véase la sección anterior). Ver [1], [20], [21].

Vandermonde dio por primera vez una exposición de la teoría de los determinantes independientemente de su relación con la solución de las ecuaciones lineales en su "Memoria sobre la teoría de la eliminación" de 1772. (La palabra "determinante" fue utilizada por primera vez por Gauss, en 1801 , para representar el discriminante de una forma cuadrática, donde el discriminante de la forma $a\mathrm{x}^2 + b\mathrm{xy} + c\mathrm{y}^2$ es $b^2 - 4ac$.) Laplace extendió parte del trabajo de Vandermonde en sus Investigaciones sobre el Cálculo Integral y el Sistema del Mundo (1772) , mostrando cómo expandir determinantes de $n \times n$ por cofactores. Ver [24].

El primero en dar un tratamiento sistemático de los determinantes fue Cauchy en un artículo de 1815 titulado "Sobre funciones que pueden tener solo dos valores iguales de signo opuesto mediante transformaciones realizadas en sus variables". Se puede decir que es el fundador de la La teoría de los determinantes tal como la conocemos hoy. Muchos de los resultados sobre los determinantes encontrados en un primer libro de texto sobre álgebra lineal se deben a él. Por ejemplo, demostró la importante regla del producto $\det(AB) = (\det(A))(\det(B))$. Su trabajo proporcionó a los matemáticos un poderoso aparato algebraico para estudiar el álgebra, la geometría y el análisis tridimensionales. Por ejemplo, en 1843, Cayley desarrolló la geometría analítica de n dimensiones utilizando determinantes como herramienta básica, y en la década de 1870 Dedekind las utilizó para demostrar el importante resultado de que las sumas y los productos de los enteros algebraicos son enteros algebraicos. Ver [18], [21], [22], [24].

Weierstrass y Kronecker introdujeron una definición del determinante en términos de axiomas, probablemente en la década de 1860. (El pensamiento riguroso era característico de ambos matemáticos). Por ejemplo, Weierstrass definió el determinante como una función normalizada, lineal, homogénea. Su trabajo se dio a conocer en 1903, cuando se publicó póstumamente la teoría de Weierstrass sobre la teoría de los determinantes y las conferencias de Kronecker sobre la teoría de los determinantes. La teoría determinante fue un tema de vigorosa e independiente investigación en el siglo XIX, con más de 2000 artículos publicados. Pero pasó de moda durante gran parte del siglo XX, cuando ya no se necesitaban determinantes para probar los principales resultados del álgebra lineal. Ver [21], [22], [24], [25].[...]

Referencias

[B-P] Burnside W. S., Panton A. W.; The theory of equations With an introduction to the theory of binary algebraic forms; Dublin University Press Series; Dublin; 1881.[XV]

[E1] Euclid; The Thirteen Books of the Elements, Vol. 1, Segunda Edición; Dover; USA; 2012.

[E2] The First Six Books of the Elements by John Casey and Euclid scanned by Project Gutenberg.

[F] Fitzpatrick R.; Euclid's Elements of Geometry; versión otorgada por el autor aquí.

[M1] Mayorga E., Notas de geometría, demostración: $\Pi_{o,\overline{u},\overline{v}} = \{u \times v\}^{\perp}$, Curso 2017-2, Cd. México 2017.

[M2] Mayorga E., Notas de geometría, Resumen: semana 12, Curso 2019-1, Cd. México 2018.

[K] Kleiner I.; A History of Abstract Algebra; Birkhaäser; Boston; 2007.

[P-L] Preston G, Lovaglia A.; Modern analytic geometry; Harper & Row, Publishers; New York; 1971.[XVI]

[R] Ramirez-Galarza, A. I.; Geometría Analítica: *Una introducción a la geometría*; México: Las Prensas de Ciencias; 2011.

[Sp] Spivak M.; Calculus, Fourth Edition; Publish or Perish Inc. Housuton Texas, 2008.

[Su] Sullivan M.; Trigonometry A Unit Circle Approach; Ninth Edition; Prentice Hall; 2012.

[W-S] Wentworth J., Smith D. E.; Geometría Plana y del Espacio; Ginn & Company; Boston USA, 1915.

[XV] Scanned by Imagenes Digitales Nogales, AZ. On behalf of Preservation Division The University of Michigan Libraries.

[XVI] Vínculos Matemáticos No. 55 2006, servicios editoriales de la Facultad de Ciencias UNAM.

Lista de símbolos

$\boldsymbol{x_P}$: Abscisa del punto P
$\boldsymbol{\widehat{AB}}$: Arco de A hasta B
$\mathbf{arg}\,(\boldsymbol{P})$: Argumento de un punto P en el sistema de coordenadas polares
$\boldsymbol{arg}\,(\boldsymbol{P})$: Argumento de un punto P en el sistema de coordenadas cartesiano
$\boldsymbol{\mathcal{Z}}\,(\mathbf{cos})$: Conjunto de números donde la función $\cos$ tiene valor cero
$\boldsymbol{\mathcal{C}}\,(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{r})$: Circunferencia con centro O de rádio r
$\boldsymbol{u}^{\perp}$: Vector u-ortogonal (en $\mathbb{R}^2$)
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$: Producto cruz de u y v
$\boldsymbol{d}\,(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$: Distancia de P a Q
$(\boldsymbol{a_{ij}})$: Descripción simplificada de la matriz A
$\boldsymbol{\ell_X}$: Eje coordenado equis
$\boldsymbol{\ell_Y}$: Eje coordenado ye
$\boldsymbol{\ell_Z}$: Eje coordenado zeta
$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$: Subespacio generado por u y v
$[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}]$: Intervalo determinado por los números x_0 y x_1 con $x_0 < x_1$
$\boldsymbol{A_i}$: i-ésimo renglon de la matriz A
$\boldsymbol{A}^{(j)}$: j-ésima columna de la matriz A
$\boldsymbol{\widehat{AB}}$: Arco determinado por A y B en sentido levógiro
$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\boldsymbol{\widehat{AB}}\right)$: Longitud del arco $\widehat{AB}$
$\measuredangle \boldsymbol{ABC}$: Medida del ángulo $\angle ABC$
$\underset{n\times n}{\mathrm{M}}(\mathbb{R})$: Conjunto de matrices de $n \times n$
$\boldsymbol{\mathcal{O}}$: Origen en el espacio $\mathbb{R}^n$
$\boldsymbol{y_P}$: Ordenada del punto P
$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$: u es ortogonal a v
$\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$: u es paralelo a v
$\boldsymbol{\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}}$: Plano que pasa por Q con vectores de dirección u y v
$\boldsymbol{\Pi_{P_0,XY}}$: Plano por P_0 paralelo al plano Π_{XY}
$\boldsymbol{\Pi_{P_0,XZ}}$: Plano por P_0 paralelo al plano Π_{XZ}
$\boldsymbol{\Pi_{P_0,YZ}}$: Plano por P_0 paralelo al plano Π_{YZ}
$\boldsymbol{\Pi_{XY}}$: Plano coordenado XY
$\boldsymbol{\Pi_{XZ}}$: Plano coordenado XZ
$\boldsymbol{\Pi_{YZ}}$: Plano coordenado YZ
$\mathscr{O}$: Polo en el sistema de coordenadas polares
$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{P}$: Producto por escalares de P por λ
$\mathbf{Proy}_{\boldsymbol{v}}\,(\boldsymbol{P})$: Proyección ortogonal de Pu en v
$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{P})_{\boldsymbol{O}}$: Punto simétrico de P respecto a O
rayOA: Rayo desde O hasta A
$\boldsymbol{\ell_m}$: Recta por el origen con pendiente m
$\boldsymbol{\ell_{P_0,X}}$: Recta por P_0 con dirección del eje X
$\boldsymbol{\ell_{P_0,Y}}$: Recta por P_0 con dirección del eje Y
$\boldsymbol{\ell_{P_0,Z}}$: Recta por P_0 con dirección del eje Z
$\boldsymbol{\ell_{P_0,\overline{u}}}$: Recta por P_0 con dirección u
$\boldsymbol{\overline{AB}}$: Segmento de recta determinado por los puntos A y B
$\boldsymbol{V} \leq \mathbb{R}^n$: Suespacio vecorial de $\mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{P+Q}$**:** Suma (vectorial) de P y Q
$\boldsymbol{\{P_0\}} + \mathbb{A}$**:** Trasladado de $\mathbb{A}$ por B

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, Noviembre 2018
Email address: ernestoms@ciencias.unam.mx