Álgebra Moderna Tarea 3.3

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

13 de noviembre de 2020

a) **Sea G un grupo arbitrario y $a, b \in G$. Demostrar que ab y ba son conjugados en G**

Simplemente tomamos $b \in G$. Entonces, el conjugado de ab usando b para conjugar es:

$$b(ab)b^{-1} = ba(bb^{-1}) = ba(e) = ba$$

Entonces ba se obtiene al conjugar ab usando al elemento b para conjugar. Por lo que ba y ab son conjugados.

b) **Si H, K son subgrupos conjugados en G, muestre que $N(H)$ y $N(K)$ son conjugados.**

Recordamos que los conjuntos en cuestión se definen como:

$$N(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$$
$$N(K) = \{g \in G | gKg^{-1} = K\}$$

Como H y K son conjugados, entonces existe un elemento $x \in G$ tal que se cumple que:

$$xHx^{-1} = K \quad (1)$$

Ahora, para probar que $N(H)$ es conjugado a $N(K)$, probaremos que:

$$\text{PD. } xN(H)x^{-1} = N(K)$$

Lo haremos sencillamente por doble contención:

$\subset$) Sea $xg_1x^{-1} \in xN(H)x^{-1}$, para lo cual, $g_1 \in N(H)$.
Pero como $g_1 \in N(H)$, eso implica que $g_1Hg_1^{-1} = H$ (2). Y entonces:

$$\begin{aligned}(xg_1x^{-1})K(xg_1x^{-1})^{-1} &= (xg_1x^{-1})K(xg_1^{-1}x^{-1}) \\ &= (xg_1)(x^{-1}Kx)(g_1^{-1}x^{-1}) \\ &= (xg_1)H(g_1^{-1}x^{-1}) \quad \text{por (1)} \\ &= x(g_1Hg_1^{-1})x^{-1} \\ &= xHx^{-1} \quad \text{por (2)} \\ &= xHx^{-1} \\ &= K \quad \text{por((1)}\end{aligned}$$

Con lo que concluimos que:

$$(xg_1x^{-1})K(xg_1x^{-1})^{-1} = K$$

Pero esto significa que $xg_1x^{-1} \in N(K)$.
Entonces, $xg_1x^{-1} \in xN(H)x^{-1} \Rightarrow xg_1x^{-1} \in N(K)$ y por lo tanto $xN(H)x^{-1} \subset N(K)$

$\supset$) Sea $g_2 \in N(K)$. Lo que significa que $g_2Kg_2^{-1} = K$ (3)
Queremos demostrar que $g_2 \in xN(H)x^{-1}$ para lo cual notamos que:

$$\begin{aligned}(x^{-1}g_2x)H(x^{-1}g_2x)^{-1} &= (x^{-1}g_2x)H(x^{-1}g_2^{-1}x) \\ &= (x^{-1}g_2)(xHx^{-1})(g_2^{-1}x) \\ &= (x^{-1}g_2)K(g_2^{-1}x) \quad \text{por (1)} \\ &= x^{-1}(g_2Kg_2^{-1})x \\ &= x^{-1}Kx \quad \text{por (3)} \\ &= H \quad \text{por (1)}\end{aligned}$$

Entonces:

$$(x^{-1}g_2x)H(x^{-1}g_2x)^{-1} = H$$

Lo que implica que $x^{-1}g_2x \in N(H)$ y por lo tanto, $x(x^{-1}g_2x)x^{-1} \in xN(H)x^{-1} \Rightarrow g_2 \in xN(H)x^{-1}$.
Por lo tanto, concluimos que $g_2 \in N(K) \Rightarrow g_2 \in xN(H)x^{-1}$.
Y entonces $N(K) \subset xN(H)x^{-1}$.

Y ya probamos las dos contenciones para concluir que $xN(H)x^{-1} = N(K)$ por lo que $N(H)$ y $N(K)$ son conjugados.

c) **Sean G un grupo finito y $H \neq G$ un subgrupo. Muestre que:**

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$$

Llamemos n a la cantidad de conjuntos conjugados de H, es decir a la cantidad de conjuntos distintos que tienen la forma gHg^{-1}.
El teorema 21.2 b) nos asegura que la cantidad de conjuntos conjugados a H es:

$$n = [G : N(H)] = \frac{|G|}{|N(H)|} \quad (1)$$

Esto último debido al teorema de Lagrange y porque G es finito.

Por otro lado, por el lema 21.1 b), tenemos que $H \trianglelefteq N(H)$. Lo que significa en particular que $|H| \leq |N(H)|$.
Y entonces tenemos que:

$$\frac{1}{|N(H)|} \leq \frac{1}{|H|} \quad (2)$$

Con (1) y (2) concluimos que:

$$n = \frac{|G|}{|N(H)|} \leq \frac{|G|}{|H|} \quad (3)$$

Ahora bien, el ejercicio 21.3 a) nos dice que la función $H \to gHg^{-1}$ es biyectiva, y como H es finito, significa que H y gHg^{-1} tienen la misma cantidad de elementos.
Entonces, los conjuntos de la forma gHg^{-1} cada uno tiene $|H|$ elementos. Pero dijimos que hay n conjuntos de esta forma. Lo que significa que la unión de todos los conjugados de H tiene a lo sumo $n|H|$ elementos
Es decir: $|\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}| \leq n|H|$. (La igualdad se da solamente en el caso de que todos los conjugados no se intersecten, lo cual no sucede, porque todo los conjugados contienen por lo menos a $e = geg^{-1}$)Y por tanto:

$$|\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}| < n|H| \leq |G| \quad \text{por } (3)$$
$$\Rightarrow \quad |\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}| < |G|$$

Como tiene menos elementos, es imposible que $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} = G$.

d) **Sean** $\sigma = (1234)$, $\tau = (123) \in S_4$**. Calcular** $N(\sigma), N(\tau)$

- $N(\sigma)$ son los elementos con los que conmuta σ

  Calculamos el producto con todos los elementos de S_4:

  - (12) : $(1234)(12) = (134) \neq (234) = (12)(1234)$
  - (13) : $(1234)(13) = (14)(23) \neq (12)(34) = (13)(1234)$

- $(14):\quad (1234)(14) = (234) \neq (123) = (14)(1234)$
- $(23):\quad (1234)(23) = (124) \neq (134) = (23)(1234)$
- $(24):\quad (1234)(24) = (12)(34) \neq (14)(23) = (24)(1234)$
- $(34):\quad (1234)(34) = (123) \neq (124) = (34)(1234)$

- $(123):\quad (1234)(123) = (1324) \neq (1342) = (123)(1234)$
- $(132):\quad (1234)(132) = (14) \neq (34) = (132)(1234)$
- $(243):\quad (1234)(243) = (12) \neq (14) = (243)(1234)$
- $(143):\quad (1234)(143) = (23) \neq (12) = (143)(1234)$
- $(234):\quad (1234)(234) = (1243) \neq (1324) = (234)(1234)$
- $(142):\quad (1234)(142) = (34) \neq (23) = (142)(1234)$
- $(134):\quad (1234)(134) = (1423) \neq (1243) = (134)(1234)$
- $(124):\quad (1234)(124) = (1342) \neq (1423) = (124)(1234)$
- $(12)(34):\quad (1234)(12)(34) = (13) \neq (24) = (12)(34)(1234)$
- $(13)(24):\quad (1234)(13)(24) = (1432) = (1432) = (13)(24)(1234)$
- $(14)(23):\quad (1234)(14)(23) = (24) \neq (13) = (14)(23)(1234)$
- $(1234):\quad (1234)(1234) = (1234)(1234)$
- $(1432):\quad (1234)(1432) = () = () = (1432)(1234)$
- $(1243):\quad (1234)(1243) = (132) \neq (142) = (1243)(1234)$
- $(1342):\quad (1234)(1342) = (143) \neq (243) = (1342)(1234)$
- $(1423):\quad (1234)(1423) = (432) \neq (132) = (1423)(1234)$
- $(1324):\quad (1234)(1324) = (142) \neq (143) = (1324)(1234)$

Entonces σ conmuta solamente con $(1), (13)(24), (1432), (1234)$ Por lo que el grupo $N(\sigma)$ es $\{(1), (13)(24), (1432), (1234)\}$

$N(\tau)$: Seguimos la misma lógica que en el anterior. Por lo que hay que encontrar los elementos que conmutan con τ.

- $(12):\quad (123)(12) = (13) \neq (23) = (12)(123)$
- $(13):\quad (123)(13) = (23) \neq (12) = (13)(123)$
- $(14):\quad (123)(14) = (1423) \neq (1234) = (14)(123)$
- $(23):\quad (123)(23) = (12) \neq (13) = (23)(123)$
- $(24):\quad (123)(24) = (1243) \neq (1423) = (24)(123)$
- $(34):\quad (123)(34) = (1234) \neq (1243) = (34)(123)$

- $(123):\quad (123)(123) = (123)(123)$
- $(132):\quad (123)(132) = () = () = (132)(123)$
- $(243):\quad (123)(243) = (124) \neq (143) = (243)(123)$
- $(143):\quad (123)(143) = (14)(23) \neq (12)(34) = (143)(123)$
- $(234):\quad (123)(234) = (12)(34) \neq (13)(24) = (234)(123)$

- (142) : $(123)(142) = (143) \neq (234) = (142)(123)$
- (134) : $(123)(134) = (234) \neq (124) = (134)(123)$
- (124) : $(123)(124) = (13)(24) \neq (14)(23) = (124)(123)$
- $(12)(34)$: $(123)(12)(34) = (134) \neq (243) = (12)(34)(123)$
- $(13)(24)$: $(123)(13)(24) = (243) \neq (142) = (13)(24)(123)$
- $(14)(23)$: $(123)(14)(23) = (142) \neq (134) = (14)(23)(123)$
- (1234) : $(123)(1234) = (1342) \neq (1324) = (1234)(123)$
- (1432) : $(123)(1432) = (14) \neq (34) = (1432)(123)$
- (1243) : $(123)(1243) = (1324) \neq (1432) = (1243)(123)$
- (1342) : $(123)(1342) = (34) \neq (24) = (1342)(123)$
- (1423) : $(123)(1423) = (1432) \neq (1342) = (1423)(123)$
- (1324) : $(123)(1324) = (24) \neq (14) = (1324)(123)$

Entonces, los únicos con los que conmuta son $N(\tau) = \{(123), (), (132)\}$

e) **Sea G un grupo finito de orden ps, con p un primo y $s \in \mathbb{Z}^+$ tal que $p > s$. Demostrar que G tiene un subgrupo normal de orden p**

Primero que nada, por el teorema de Cauchy, como p es primo, sabemos que G tiene un elemento $a \in G$ de orden p.
Entonces, el generado $H = \langle a \rangle$ es un subgrupo de G de orden p.
Ya sólo hace falta probar que es normal.

Para ello, consideramos el morfismo construido para el teorema 22.7 que es $\phi : G \to S_m$ con $m = [G : H]$.
En este caso, como G es finito, tememos que $m = [G : H] = \dfrac{|G|}{|H|} = \dfrac{ps}{p} = s$

Entonces, tenemos un morfismo $\phi : G \to S_s$. No hace falta conocer explícitamente quién es el morfismo ϕ, aunque lo construimos en la clase 22. Es suficiente con saber que existe dicho morfismo y que cumple que $Ker(\phi) \leq H$ (teorema 22.7 b).

Luego, como $Ker(\phi)$ es un subgrupo de H, debe de tener una cardinalidad que divida a la de H (Teorema de Lagrange). Pero como $|H| = p$ es primo, entonces $|Ker(\phi)|$ tiene que ser 1 o p.
En caso de que $|Ker(\phi)| = 1$, tenemos que $Ker(\phi) = \{e\}$.
Y entonces ϕ es inyectivo, por lo que si restringimos el dominio de ϕ a $\phi : G \to \phi(G) \subset S_s$. Ahora tenemos que ϕ es biyectiva y entonces G es isomorfo a $\phi(G) \leq S_s$.
Es decir, S_s tiene un subgrupo isomorfo a G.
Pero esto es imposible ya que p divide a $|G|$ pero p no divide a $|S_s|$ (porque $|S_s| = s!$ y p es un primo más grande que s y que por tanto no está incluido en el producto $s!$).

Entonces, es imposible que $Ker(\phi) = \{e\}$ por lo que se debe de cumplir la otra opción, es decir, $Ker(\phi) = H$.
Y así, como H es el Kernel de un morfismo, debe de ser normal (el Kernel siempre es normal). Y entonces $H \trianglelefteq G$