Óptica Tarea 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

31 de julio de 2020

Del libro Eugene Hecht, Óptica 3ra edición: Resolver los problemas 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.7, 2.9, 2.17, 2.23, 2.31, 2.37, 2.39, 2.41

Ejercicio 2.2: *La velocidad de la luz en el vacío es aproximadamente* $3 \times 10^8 m/s$. *Calcule la longitud de onda de luz roja con una frecuencia de* $5 \times 10^{14} Hz$. *Compárela con la longitud de onda de una onda electromagnética de* $60 Hz$.

La relación entre longitud de onda (λ), periodo (T) y velocidad (v) viene dada por: $v = \lambda/T$
Esto debido a que λ es la longitud de cada onda y T el tiempo que tarda una onda completa en superar a un observador estacionario. Pero como dicha onda mide λ metros, entonces λ/T da la cantidad de metros que recorre la onda por unidad de tiempo, o bien, la velocidad de propagación.
Por la definición de frecuencia $f = 1/T$, entonces tenemos que $v = f\lambda$
Entonces, para la luz roja: $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{5 \times 10^{14} Hz} = \underline{\mathbf{6 \times 10^{-7} m}}$
Para la otra onda: $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8 m/s}{60 Hz} = \underline{\mathbf{5 \times 10^{6} m}}$
Vemos que la longitud de onda de la segunda onda es casi 10^{13} veces más grande que la primera.

Ejercicio 2.3: *Es posible generar ondas ultrasónicas en cristales con longitudes de onda similares a la luz* ($5 \times 10^{-5} cm$) *pero con frecuencias más bajas* ($6 \times 10^8 Hz$). *Calcule la velocidad de dicha onda*

Por lo dicho en el ejercicio anterior, tenemos que, $v = f\lambda = (6 \times 10^8 Hz)(5 \times 10^{-5} cm) = (6 \times 10^8 Hz)(5 \times 10^{-7} m) = 30 \times 10^1 m/s = \mathbf{300 m/s}$

Ejercicio 2.4: *Un joven en un barco sobre un lago está mirando las ondas que parecen una sucesión infinita de cresas idénticas, produciéndose con un intervalo de medio segundo cada una. Si cada perturbación tarda* $1{,}5s$ *en cubrir la extensión del barco de* $4{,}5m$*, ¿cuál es la frecuencia, el periodo y la longitud de onda de las olas?*

Como se producen ondas cada $0{,}5s$, significa que éste es el periodo, pues es el tiempo entre una onda y la siguiente para un observador estacionario. $\mathbf{T = 0{,}5s}$
Con esto calculamos la frecuencia que es: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}5s} \Rightarrow \mathbf{f = 2Hz}$
Si las ondas tardan $1{,}5s$ en recorrer $4{,}5m$, significa que su velocidad de propagación es $v = \dfrac{4{,}5m}{1{,}5s} = 3m/s$
Con esto, calculamos su longitud de onda como $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{3m/s}{2Hz} = 1{,}5m \quad \Rightarrow \lambda = \mathbf{1{,}5m}$

Ejercicio 2.5: *Con un martillo vibrante se golpea el extremo de un barra de metal larga de manera que una onda de compresión periódica con una longitud de onda de* $4{,}3m$ *recorra todo lo largo de la barra con una velocidad de* $3{,}5km/s$ *¿Cuál era la frecuencia de vibración?*

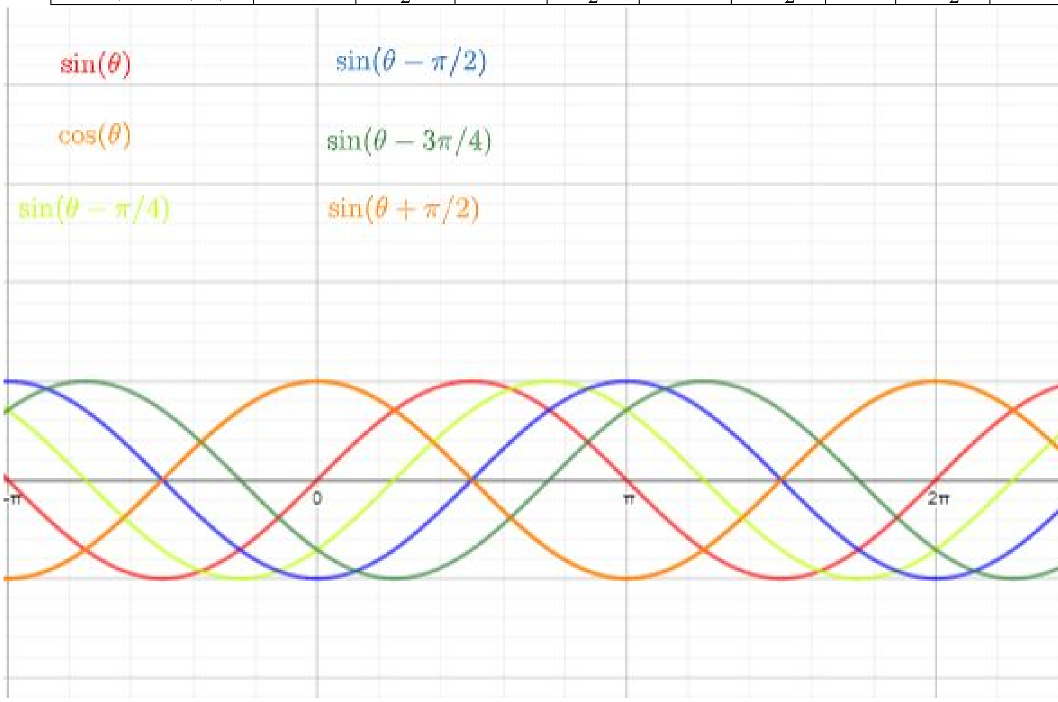
Directamente tenemos que $v = f\lambda \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{3{,}5km/s}{4{,}3m} = \dfrac{3500m/s}{4{,}3m} = \mathbf{814Hz}$

Ejercicio 2.7: *Un pulso de onda tarda* $2{,}0s$ *en recorrer* $10m$ *a lo largo de cuerda se genera una perturbación armónica con una longitud de* $0{,}50m$ *en la cuerda. ¿Cuál es su frecuencia?*

Como recorre $10m$ en $2s$, tiene una velocidad de $v = 10m/2s = 5m/s$
Entonces tiene una frecuencia de $f = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{5m/s}{0{,}5m} = \mathbf{10\ Hz}$

Ejercicio 2.9: *Defina una tabla con columnas para valores de* θ *que van de* $-\pi/2$ *a* $2/pi$ *con intervalos de* $\pi/4$*. En cada columna coloque el valor correspondiente de* $\sin(\theta)$*, colocando debajo los valores de* $\cos(\theta)$ *y luego los valores de* $\sin(\theta - \pi/4)$ *y haga lo mismo para las funciones* $\sin(\theta - \pi/2), \sin(\theta - 3\pi/4), \sin(\theta + \pi/2)$*. Trace cada función, tomando nota del efecto de cambio de fase. ¿ El* $\sin(\theta)$ *precede al* $\sin(\theta - \pi/2)$ *o va detrás?; dicho de otra forma, ¿una de las funciones alcanza una magnitud particular con un valor más pequeño de* θ *que la otra y, por lo tanto, la precederá?*

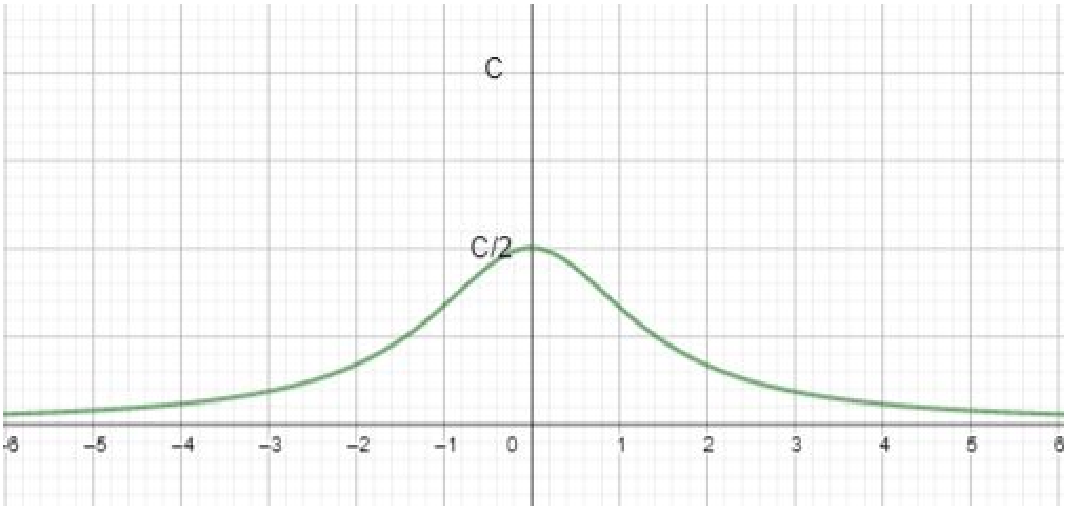
θ	$-\pi/2$	- $\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\sin(\theta)$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin(\theta-\pi/4)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(\theta-\pi/2)$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\sin(\theta-3\pi/4)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(\theta+\pi/2)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1



Se puede ver en la gráfica y en los datos de la tabla que $\sin(\theta)$ alcanza las mismas magnitudes que $\sin(\theta - \pi/2)$ para valores de θ menores. Por lo que $\sin(\theta)$ precede a $\sin(\theta - \pi/2)$.

Ejercicio 2.17: *Considere el pulso descrito en términos de sus desplazamientos en* $t = 0$ *por* $y(x,t)|_{t=0} = \dfrac{C}{2+x^2}$ *donde* C *es una constante. Dibuje el perfil de onda. Escriba una expresión para la onda que tiene velocidad* v *en la dirección negativa de* x *como función del tiempo* t*. Si* $v = 1m/s$*, dibuje el perfil en* $t = 2s$

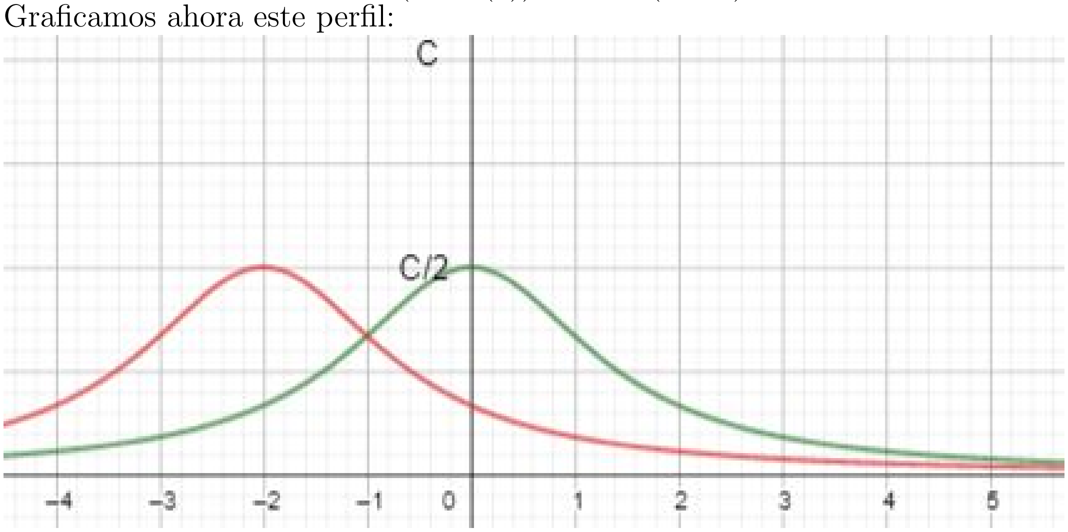
El perfil de onda cuando $t = 0$ es la gráfica de la función $y(x) = \dfrac{C}{2+x^2}$ que se ve como sigue:



Donde como se ve, la altura máxima (o mínima si $C < 0$) tiene un valor de $C/2$ y se alcanza en $x = 0$. Para escribir la expresión de una onda que tiene una velocidad v en la dirección negativa de x hay que cambiar la variable x por $x' = x + vt$ (El signo + debido a que se propaga en la dirección negativa) y obtenemos:

$$y(x,t) = \frac{C}{2 + (x + vt)^2}$$

Finalmente, si $v = 1$, obtenemos el perfil de la onda en $t = 2s$ al evaluar en $t = 2$. Lo que nos queda como: $y(x) = \dfrac{C}{2 + (x + 1(2))^2} = \dfrac{C}{2 + (x + 2)^2}$.
Graficamos ahora este perfil:



La curva roja es el perfil de la onda cuando $t = 2s$ y la verde es la gráfica que ya teníamos de cuando $t = 0s$. Se observa como la onda se movió 2 unidades a la izquierda en el trascurso de los $2s$.

Ejercicio 2.23: *Una onda gaussiana tiene la forma* $\psi(x,t) = Ae^{-a(bx+ct)^2}$. *Utilice que* $\phi(x,t) = f(x \mp vt)$ *para calcular su velocidad, comprobando luego su respuesta con la ecuación 2.34*

Reordenamos un poco la función para que tenga la forma $f(x \mp vt)$. Entonces: $\psi(x,t) = Ae^{-a(bx+ct)^2} = Ae^{-ab^2(x+\frac{c}{b}t)^2}$ que ya tiene la forma $f(x+vt)$ donde $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}$ y por el signo positivo en $f(x+vt)$ significa que la onda viaja en la dirección negativa.

Por otro lado, como comprobación, la ecuación 2.34 dice que: $\pm v = -\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)_x / \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)_t$.
Entonce calculamos cada uno de estos:
$\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)_x = \dfrac{\partial}{\partial t}Ae^{-a(bx+ct)^2} = Ae^{-a(bx+ct)^2}(2(-a)(bx+ct)(c)) = -2ac(bx+ct)Ae^{-a(bx+ct)^2}$
$\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)_t = \dfrac{\partial}{\partial x}Ae^{-a(bx+ct)^2} = Ae^{-a(bx+ct)^2}(2(-a)(bx+ct)(b)) = -2ab(bx+ct)Ae^{-a(bx+ct)^2}$
Entonces, al sustituir en la fórmula 2.34 nos queda:
$v = -\dfrac{-2ac(bx+ct)Ae^{-a(bx+ct)^2}}{-2ab(bx+ct)Ae^{-a(bx+ct)^2}} = -\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}$.

Aquí el signo negativo indica lo que ya sabíamos de resolver el problema sin la ecuación 2.34, es decir, que la onda se propaga en la dirección de x negativa.

Ejercicio 2.31: *Trabajando directamente con exponenciales, demuestre que la magnitud de $\psi = Ae^{i\omega t}$ es A. A continuación vuelva a calcular el mismo resultado utilizanco la fórmula de Euler. Demuestre que $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$*

Demostraré primero que $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ usando la fórmula de Euler.
$e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$ (Por fórmula de Euler)
$=(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) + i(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)) =$
$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$ (usando las fórmulas de suma de ángulo)
$= e^{i(\alpha+\beta)}$ (por la fórmula de Euler)
Lo que demuestra el resultado.

Ahora calculamos la magnitud de ψ, usando que $|\psi|^2 = \psi\overline{\psi}$
$|\psi|^2 = \psi\overline{\psi} = (Ae^{i\omega t})\,\overline{(Ae^{i\omega t})} = (Ae^{i\omega t})\,(Ae^{-i\omega t}) = A^2e^{i\omega t}\,e^{-i\omega t} =$
$= A^2e^{i\omega t - i\omega t}$ (Por la identidad que probamos)
$= A^2e^0 = A^2$
Entonces la magnitud es $|\psi| = A$

Y ahora la calculamos usando directamente la fórmula de Euler como pide el ejercicio.
$|\psi|^2 = \psi\overline{\psi} = (Ae^{i\omega t})\,\overline{(Ae^{i\omega t})} = [A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)]\ \overline{[A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)]}$ (Por Euler)
$= [A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)]\ [A(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)] = A^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = A^2$
Entonces, nuevamente la magnitud es $|\psi| = A$

Ejercicio 2.37: *Escriba una expresión en coordenadas cartesianas para una onda plana armónica de amplitud A y frecuencia ω que se propaga en la dirección positiva de x*

Obtenemos primero el vector de propagación $\vec{k}$ que tiene magnitud k (el número de onda) y que apunta en la dirección de propagación. Como la dirección de propagación en este caso es sencillamente el vector unitario en la dirección x positiva: $1\ \widehat{i} + 0\ \widehat{j} + 0\ \widehat{k}$, entonces el vector de propagación de la onda es $\vec{k} = k\ \ \widehat{i} + 0\,\widehat{j} + 0\,\widehat{k}$.

Luego, según la teoría, la función que describe una onda plana con vector de propagación $\vec{k}$ frecuencia angular ω y fase ϵ es: $\psi(\vec{r}, t) = A\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \epsilon)$
Como $\vec{r} = x\widehat{i} + y\widehat{j} + z\widehat{k}$, nos queda que el producto punto es $\vec{k}\cdot\vec{r} = kx$.

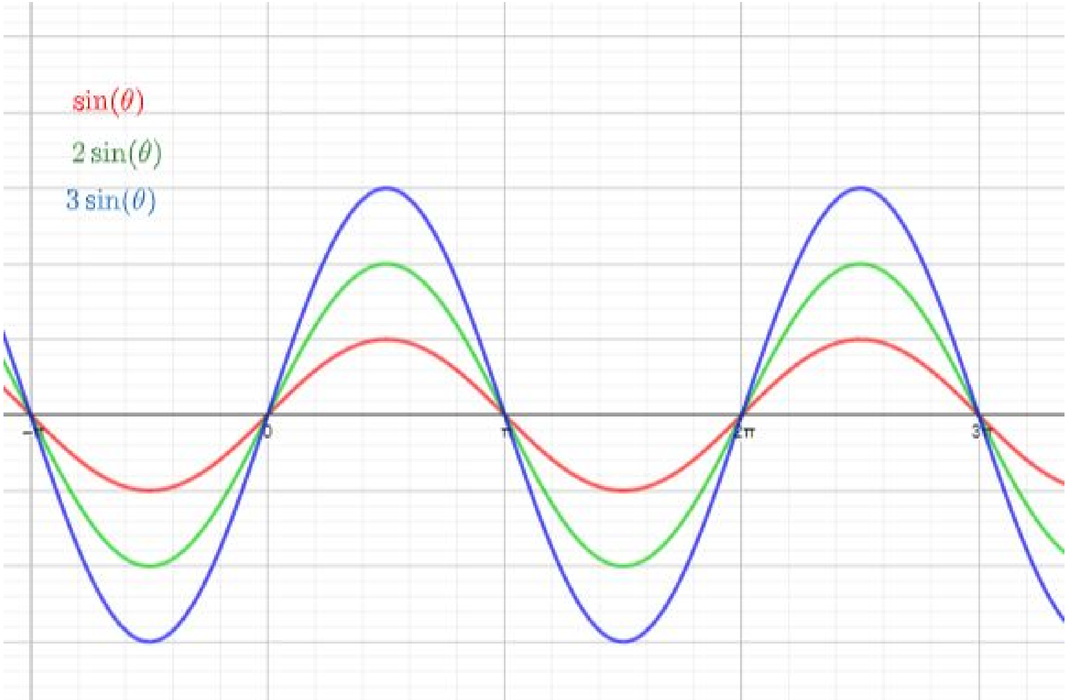
Por lo tanto, la función de esta onda plana se simplifica a:

$$\psi(\vec{r}, t) = A\sin(kx - \omega t + \epsilon)$$

.

Ejercicio 2.39: *Defina una tabla con columnas con valores de θ que van de $-\pi/2$ hasta 2π en intervalos de $\pi/4$. En cada columna coloque el valor de $\sin(\theta)$ y de $2\sin(\theta)$. Luego súmelos, columna por columna, para calcular los valores correspondientes de $\sin(\theta)+2\sin(\theta)$. Trace cada una de estas tres funciones, tomando nota de sus amplitudes y fases.*

θ	$-\pi/2$	- $\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\sin(\theta)$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$2\sin(\theta)$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0
$3\sin(\theta)$	-3	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-3	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0

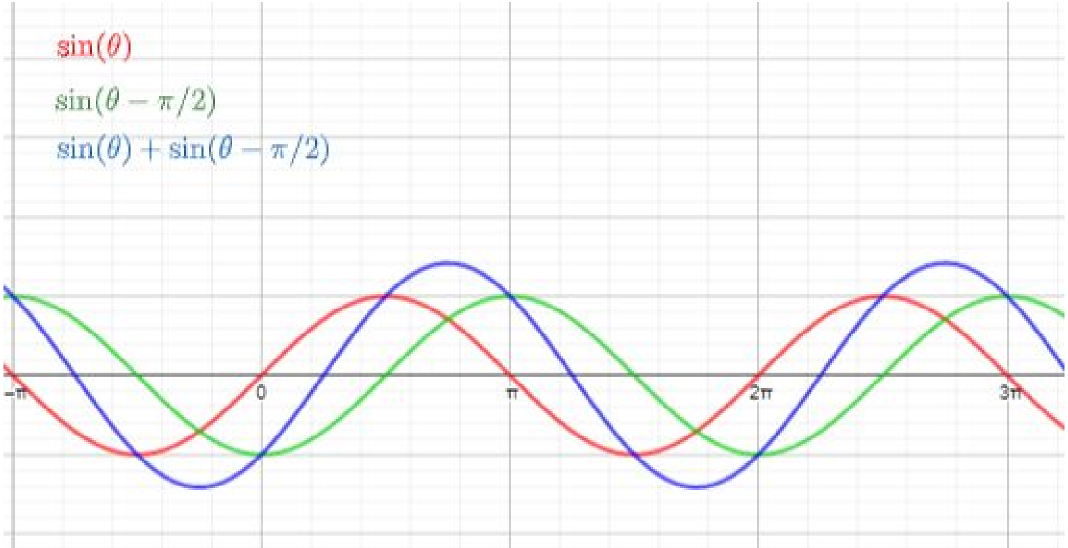


Como se puede ver en la gráfica, las tres ondas están en fase (de hecho la fase de las tres es simplemente θ). Vemos que como es de esperar, la amplitud de $\sin(\theta)$ es 1 , la amplitud de $2\sin(\theta)$ es 2 y la amplitud de $3\sin(\theta)$ es 3. Es decir, en este caso en particular (y debido a que las ondas están en fase), la amplitud de la suma de las dos ondas originales es la suma de sus amplitudes.

Ejercicio 2.41: *Teniendo en cuenta los últimos dos problemas, haga un boceto de las tres funciones* $a)\sin(\theta)$, $b)\sin(\theta - 3\pi/4)$, $c)\sin(\theta) + \sin(\theta - 3\pi/4)$. Compare la amplitud de la función combinada c de este problema con la del problema anterior.

Como pide comparar el resultado con el del problema anterior, primero resolveré el problema 2.40. El cuál pide calcular los valores y graficar las funciones $\sin(\theta), \sin(\theta - \pi/2), \sin(\theta) + \sin(\theta - \pi/2)$:

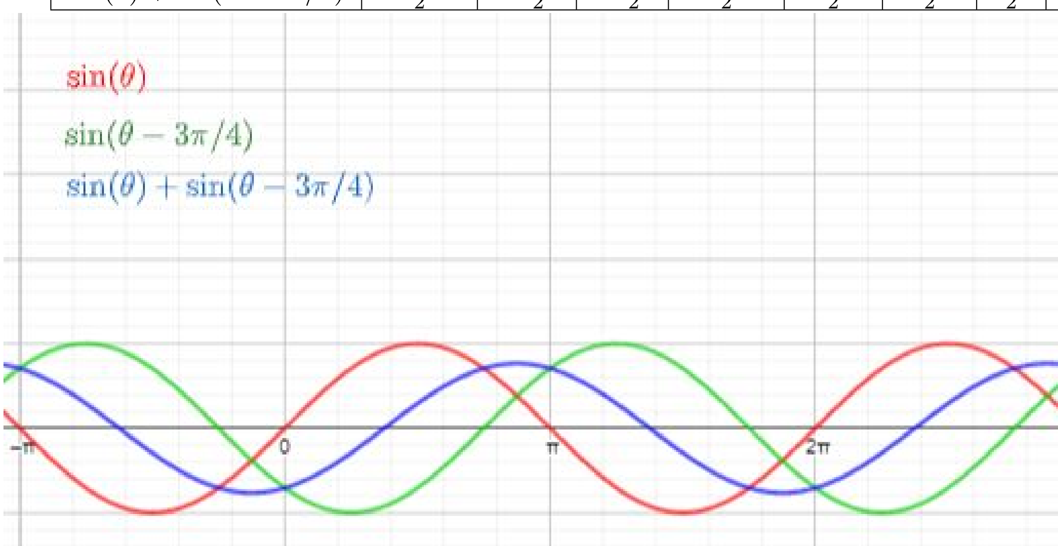
θ	$-\pi/2$	- $\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\sin(\theta)$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\sin(\theta - \pi/2)$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\sin(\theta) + \sin(\theta - \pi/2)$	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1



Se puede ver que la amplitud de $\sin(\theta)+\sin(\theta-\pi/2)$ es mayor que 1. De hecho, podemos calcularla exactamente usando la identidad de suma de senos: $\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ Entonces, $\sin(\theta) + \sin(\theta - \pi/2) = 2\sin(\frac{\theta+\theta-\pi/2}{2})\cos(\frac{\theta-(\theta-\pi/2)}{2}) = 2\sin(\theta - \pi/4)\cos(\pi/4) = \sqrt{2}\sin(\theta - \pi/4)$
Con lo que vemos que la amplitud de la suma es $\sqrt{2}$

Ahora sí, realizaré la tabla y gráfica para las funciones que pide el ejercicio 2.41. El cuál pide las funciones $\sin(\theta), \sin(\theta - 3\pi/4), \sin(\theta) + \sin(\theta - 3\pi/4)$:

θ	$-\pi/2$	- $\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\sin(\theta)$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\sin(\theta - 3\pi/4)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(\theta) + \sin(\theta - 3\pi/4)$	$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$



Se puede ver que la amplitud de $\sin(\theta) + \sin(\theta - 3\pi/4)$ es menor que 1. A diferencia del ejercicio anterior en el que la amplitud aumentaba. De hecho, podemos calcularla exactamente

usando la identidad de suma de senos: $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
Entonces, $\sin(\theta)+\sin(\theta-3\pi/4) = 2\sin(\frac{\theta+\theta-3\pi/4}{2})\cos(\frac{\theta-(\theta-3\pi/4)}{2}) = 2\sin(\theta-3\pi/8)\cos(3\pi/8) \simeq 0{,}765\sin(\theta-3\pi/8)$
Con lo que vemos que la amplitud de la suma es de aproximadamente 0,765.