# Álgebra Moderna Tarea 2.5

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

22 de octubre de 2020

- **1. Sean $G$ grupo y $H \leq G$. Si $[G : H] = 3$, entonces $H \trianglelefteq G$**

  No es cierto. Para un contraejemplo, consideramos el grupo $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$
  Y consideramos ahora el conjunto $H = \langle (23) \rangle = \{(1), (23)\}$
  $H$ claramente es un subgrupo de índice 3, ya que por el teorema de Lagrange $[G : H] = |G|/|H| = 6/2 = 3$.
  Ahora consideramos las siguientes clases laterales de $H$ en $G$:

  - $(123)H = \{(123)(1), (123)(23)\} = \{(123), (12)\}$
  - $H(123) = \{(1)(123), (23)(123)\} = \{(123), (13)\}$

  Con lo que notamos que $(123)H \neq H(123)$. Por lo tanto, $H$ no es un grupo normal.

- **Si $D_{2(n)}$ es el grupo diédrico y $R_n \leq D_{2(n)}$ es el subgrupo de las rotaciones, entonces $R_n \trianglelefteq D_{2(n)}$**

  Como $D_{2(n)} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ tiene $2n$ elementos y $R_n = \{1, r, r^2, ..., r^n\}$ es un subgrupo de $n$ elementos, entonces $[D_{2(n)} : R_n] = |D_{2(n)}|/|R_n| = (2n)/n = 2$.
  Pero en clase vimos que cualquier grupo de índice 2 es normal, por lo que $R_n$ es normal.

  Alternativamente, se puede utilizar el corolario 14.5 de las notas. Que dice que si $G = \langle X \rangle$ (con $X$ un conjunto), y $H = \langle Y \rangle$, entonces $H \trianglelefteq G$ si y sólo si $xyx^{-1} \in H \ \ \forall x \in X, \forall y \in Y$.

  En nuestro caso tenemos que $D_{2(n)} = \langle r, s \rangle$ y $R_n = \langle r \rangle$. Entonces $R_n \trianglelefteq D_{2(n)}$ si y sólo si se cumple lo siguiente:

  - $r(r)r^{-1} \in R_n$ Esto se cumple claramente porque $R_n$ es el generado de $r$ y es cerrado bajo inversos y productos.
  - $s(r)s^{-1} \in R_n$ Esto se cumple porque $s(r)s^{-1} = srs = s(rs) = s(sr^{-1}) = s^2r^{-1} = r^{-1}$
    Pero claramente $r^{-1} \in R_n$

- **$K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, entonces $K \trianglelefteq G$.**

  No. Como contraejemplo consideramos al grupo $D_{2(n)} = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$.
  Sea $B = \{1, r^2, s, sr^2\}$, que ya hemos probado varias veces que es un subgrupo de $D_{2(n)}$.
  Además, como $[D_{(2n)} : B] = |D_{2(n)}|/|B| = 8/4 = 2$, eso implica que $B \trianglelefteq D_{2(n)}$ porque todo subgrupo de índice 2 es normal.
  Y sea $A = \{1, s\}$, que claramente es un subgrupo de $B$. Y como $[B : A] = |B|/|A| = 4/2 = 2$, entonces $A$ es normal en $B$.

  Por lo tanto, tenemos que $A \trianglelefteq B \trianglelefteq D_{2(n)}$.
  Sin embargo, veremos que no se cumple que $A \trianglelefteq D_{2(n)}$, pues si consideramos $r \in D_{2(n)}$, tenemos las dos siguientes clases laterales de $A$:

  - $rA = (r)\{1, s\} = \{r, rs\} = \{r, sr^{-1}\} = \{r, sr^3\}$
  - $Ar = \{1, s\}(r) = \{1, rs\}$

  Lo que prueba que estas dos clases no son iguales y por tanto $A$ no es normal.

- **Sea $Z(G) = \{g \in G | gx = xg$ para todo $x \in G\}$, es un subgrupo de $G$ al que llamaremos centro de $G$. Entonces $Z(G) \trianglelefteq G$**

  Probaremos que para todo $a \in G$ se cumple que $aZ(G)a^{-1} \subset Z(G)$, con lo cual quedará probado que $Z(G) \trianglelefteq G$ según el lema 14.3
  Para esto, sea $g \in Z(G)$, tenemos que $aga^{-1}$ es un elemento arbitrario de $aZ(G)a^{-1}$ y que:

  $$\begin{aligned} aga^{-1} &= (ag)a^{-1} \\ &= (ga)a^{-1} \quad \text{Por la propiedad que define a } Z(G) \\ &= g(aa^{-1}) \\ &= g \end{aligned}$$

  Y como $g \in Z(G)$, concluimos que $aZ(G)a^{-1} \subset Z(G)$ para toda $a \in G$ y por tanto $Z(G)$ es normal en $G$.

- **Si $H \trianglelefteq G$ y es de orden 2, entonces $H \subset Z(G)$**

  Como $H$ es de orden 2 y debe de incluir necesariamente al elemento neutro (porque es un grupo), entonces $H$ se ve como $\{1, h\}$.
  Luego, tenemos claramente que $1 \in Z(G)$ porque $1x = x1$ para todo $x \in G$.
  Ya solamente hace falta probar que $h \in Z(G)$. Como $H$ es normal en $G$, entonces se

cumple que para todo $x \in G$:

$$\begin{aligned} xH &= Hx \\ \Rightarrow \quad (x)\{1,h\} &= \{1,h\}(x) \\ \Rightarrow \quad \{x, xh\} &= \{x, hx\} \end{aligned}$$

Lo cual claramente implica que $xh = hx$. Entonces, para todo $x \in G$ se tiene que $xh = hx$, lo que implica que $h \in Z(G)$.
Así concluimos que $\{1, h\} \subset Z(G)$