Electromagnetismo I : Tarea 4 Tomás Basile Álvarez 19/03/20

1) Se tiene un campo eléctrico definido como $\vec{E} = Kr^3 \hat{r}$ (esféricas)

a) Encuentra la densidad de carga ρ

b) Calcula la carga total en una esfera de radio R, centrada en el origen.

Por la ley de Gauss en forma diferencial: $\nabla \cdot E(r) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

En coordenadas esféricas, la divergencia de una función $\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta} + E_\phi \hat{\phi}$ es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial(E_\theta \operatorname{Sen}\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}$$

En este caso: $E_r = Kr^3$, $E_\theta = 0$, $E_\phi = 0$

$$\rightarrow \nabla \cdot E = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2(Kr^3))}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(Kr^5)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}(5Kr^4) = \underline{5Kr^2}$$

Por la ley de Gauss diferencial $\rightarrow$ $\underline{\rho(\vec{r}) = 5K\varepsilon_0 r^2}$

b) Para calcular la carga total en la esfera de radio R hay que sumar todos los diferenciales de carga $dQ = \rho dV$

$$\rightarrow Q = \int \rho dV = \int 5K\varepsilon_0 r^2 \underbrace{(r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr d\theta d\phi)}_{dV \text{ en esféricas}}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} 5K\varepsilon_0 r^4 \operatorname{sen}\theta \, dr d\theta d\phi = 5K\varepsilon_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{R} r^4 dr$$

Se vale separar porque los límites de integración son ctes

límites de integración para esfera radio R centrada en origen.

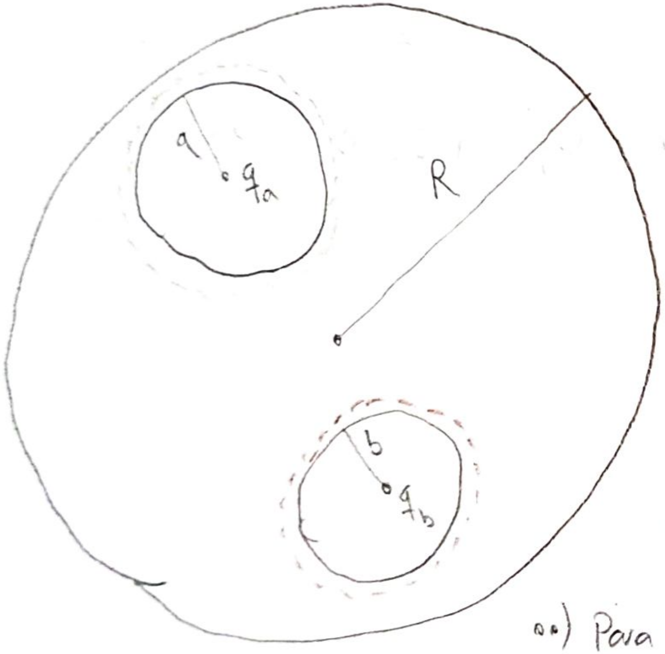
$$= 5K\varepsilon_0 (2\pi)(2)\left(\frac{R^5}{5}\right)$$

$$= 4\pi K\varepsilon_0 R^5$$

$$\rightarrow \underline{Q = 4\pi K \varepsilon_0 R^5}$$

2) Cavidades esféricas huecas de radios a y b en una esfera conductora hueca de radio R en el centro se hallan cargas q_a y q_b

a) Encuentre σ_a, σ_b, σ_R.



•) Proponemos de superficie Gaussiana una esfera centrada en q_a pero un poco más grande que la cavidad.

El flujo por esta esfera es 0 ya que su superficie se encuentra dentro del conductor (donde $\vec{E} = \vec{0}$)

$\therefore$ por ley de Gauss: $\frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \oint E \cdot dA = 0$

$\rightarrow q_{in} = 0$

Pero $q_{in} = q_a + q$ (con q la carga en la superficie de la cavidad del conductor) $\rightarrow q = -q_a$

$$\therefore \sigma_A = \frac{q}{4\pi a^2} = -\frac{q_a}{4\pi a^2}$$

••) Para q_b el razonamiento es exactamente igual

$$\rightarrow \sigma_b = -\frac{q_b}{4\pi b^2}$$

•••) Como la carga Total del conductor es cero (es neutro) pero ya dijimos que hay una carga $-q_a$ en la superficie de la cavidad a y $-q_b$ en la superficie de b. Esto implica que tiene que haber una carga $q_a + q_b$ (para que carga total = 0) y ésta no le queda de otra que acomodarse en la superficie del conductor.

$$\therefore \sigma_R = \frac{q_R}{4\pi R^2} = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}$$

b) ¿Campo eléctrico fuera del conductor?

La carga q_R en la superficie del conductor se arregla uniformemente. Esto debido a que en lo que concierne a estas cargas, las cargas en las cavidades no tienen ningún efecto ya que para tenerlo, sus líneas de campo tendrían que "llegar" hasta la superficie de la esfera, pero esto no sucede ya que las líneas de campo se "cortan" en el interior del conductor (donde $\bar{E}=\bar{0}$). Y como no hay cargas afuera para afectar a la distribución de q_R $\rightarrow$ q_R se distribuye uniformemente.

Entonces su campo es como el de un cascarón esférico de Radio R y carga $q_R = q_a + q_b$ uniformemente distribuida. El cual conocemos:

$$\therefore \quad \bar{E}(\bar{r}) = K\frac{(q_a+q_b)}{r^2}\hat{r}$$

c) Campo en cada cavidad.

Como la carga q_a está en el centro de la cavidad y las cargas del conductor en la superficie de la cavidad no sienten influencia externa (por estar rodeadas de conductor, donde $\bar{E}=0$) entonces, por la simetría, las cargas en la cavidad se van a distribuir uniformemente.

Tenemos un punto a distancia $r<a$ de q_a. El campo eléctrico en este punto es la suma del campo por q_a + el campo por las cargas en la superficie de la cavidad.

Pero por lo dicho arriba, las cargas de la cavidad se distribuyen uniformemente y $\therefore$ actúan como un cascarón de esfera (y sabemos que el campo adentro de éste es $\bar{0}$) $\therefore$ Sólo queda el campo generado por q_a que es:

$$E_a(\bar{r}_a) = \frac{q_a}{r_a^2}\hat{r}_a$$

con $\bar{r}_a$ el vector radial centrado en q_a.

Por el mismo argumento:

$$E_b(\bar{r}_b) = \frac{q_b}{r_b^2}\hat{r}_b$$

con $\bar{r}_b$ el vector radial centrado en q_b.

) ¿Cuál es la fuerza sobre q_a y q_b?

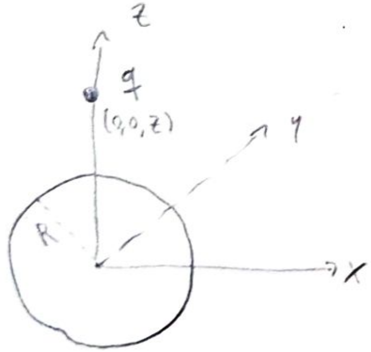
ON. Por lo dicho en la pregunta anterior, las cargas del conductor en la cavidad se distribuyen uniformemente, por lo que actúan como un cascarón uniformemente cargado y como hemos visto en clase, el campo dentro del cascarón es $\bar{0}$. $\therefore$ q_A y q_B no sienten fuerzas por estar dentro de cascarones uniformes. Además, no sienten fuerzas de otras cargas porque al estar rodeados por conductores, donde el campo es $\bar{0}$ $\rightarrow$ las líneas de campo de otros lados no llegan a la cavidad.

---

3 a) Demuestra que si $\phi(x,y,z)$ satisface la ecuación de Laplace $\Rightarrow$ El promedio de ϕ en la superficie de cualquier esfera es el valor de ϕ en el centro.

Consideramos una superficie esférica de radio R. Y consideramos una carga q fuera de la esfera, sabemos que esta carga q genera un potencial $\phi(x,y,z)$ en todo el espacio que satisface la ecuación de Laplace. Ahora probaremos que el promedio sobre la esfera de este potencial ϕ generado por q es igual al valor de ϕ en el centro de la esfera.

Proponemos un sistema de ejes coordenados con centro en el centro de la esfera y con q en la posición $(0,0,z)$



Para el promedio de ϕ, sumamos ϕ sobre la esfera y dividimos entre el área de la esfera:

$$V_{prom} = \frac{1}{A}\iint_{esfera} \phi \, dA$$ ← integral de superficie

Ahora bien, $\phi(x',y',z') = \dfrac{Kq}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$ con $\bar{r} = (0,0,z)$ $= \dfrac{Kq}{\left(x'^2+y'^2+(z-z')^2\right)^{1/2}}$

Y podemos parametrizar la esfera con coordenadas esféricas como:

$\sigma(\theta,\varphi) = (R\,sen\theta\cos\varphi,\ R\,sen\theta\,sen\varphi,\ R\cos\theta)$ con $\theta \in [0,\pi]$ $\varphi \in [0,2\pi]$

y la esfera tiene un diferencial de área: $dA = R^2 sen\theta \, d\theta \, d\varphi$

Entonces la integral de superficie queda:

$$V_{prom} = \frac{1}{A} \oiint_{esfera} \phi \, dA = \frac{1}{A} \iint \phi(\sigma(\theta,\varphi))\, dA' = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \phi(R\,sen\theta\cos\varphi, R\,sen\theta\,sen\varphi, R\cos\theta)\; R^2 sen\theta \, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{Kq \quad R^2 sen\theta \, d\theta\, d\varphi}{\left((R\,sen\theta\cos\varphi)^2 + (R\,sen\theta\,sen\varphi)^2 + (R\cos\theta - z)^2\right)^{1/2}} = \frac{KqR^2}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{sen\theta}{(R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta)^{1/2}} \, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{Kq}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{sen\theta}{(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{1/2}}\, d\theta = \frac{Kq}{2} \int_0^{\pi} \frac{sen\theta}{(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{1/2}}\, d\theta$$

resolvemos con la sustitución
$u = R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta$
$\rightarrow du = 2Rz\, sen\theta\, d\theta$

$$= \frac{Kq}{2}\frac{1}{2Rz}\int \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{Kq}{4Rz}(2)\left(u^{1/2}\right)\Big| = \frac{Kq}{2Rz}\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta}\,\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{Kq}{2Rz}\left(\sqrt{R^2+2Rz+z^2} - \sqrt{R^2-2Rz+z^2}\right) = \frac{Kq}{2Rz}\Big[\,|R+z| - |R-z|\,\Big] = \frac{Kq}{2Rz}(2R)$$

Porque q está fuera de la esfera
$(z > R$ ó $z < -R)$

$$= \frac{Kq}{z}$$

Pero esto es el potencial debido a q en el centro de la esfera (el origen).

Esto demuestra el teorema para el potencial de una carga, pero para una distribución de cargas, por el principio de superposición, se sigue válido. Es decir, el potencial promedio en la esfera es igual al potencial en el centro.

b) Es imposible construir un campo eléctrico que mantenga una partícula cargada en equilibrio con el espacio vacío.

Buscando una contradicción, supongamos que tenemos un campo eléctrico en el cual hay un punto P en el cuál una carga positiva se encontraría en equilibrio. Es decir, para cualquier pequeño desplazamiento del punto P, el campo eléctrico debe de empujar a la carga de velta a P.

Es decir, el campo se debe de ver algo así:

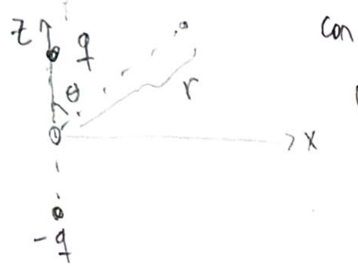
Pero ahora bien, si proponemos una superficie gaussiana una esfera pequeña alrededor de P, el flujo por esta superficie es claramente negativo (entran líneas de campo a la superficie). Pero por la ley de Gauss, El flujo es igual a $\frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ lo cual contradice el hecho de que no había cargas adentro de la superficie Gaussiana (la carga de prueba no cuenta)

Esta contradicción indica que debe de haber líneas de campo apuntando hacia afuera de P para que el flujo total por la superficie Gaussiana sea 0. Pero la carga de prueba q podría "escapar" por esa línea de campo al desplazarla levemente, por lo que no se encuentra en equilibrio estable.

4 Usa la expresión encontrada para el potencial del dipolo y obtén:

a) Las ecuaciones de las superficies equipotenciales.

Como vimos en clase, el potencial del dipolo en coordenadas esféricas es $\phi(r,\theta) = k\frac{q\,l\cos\theta}{r^2}$



con θ medido desde el eje vertical y l la distancia entre las cargas.

Una superficie equipotencial cumple $\phi(r,\theta) = \phi_0 = cte.$

$$\to \frac{kql\cos\theta}{r^2} = \phi_0 \Rightarrow r^2 = \frac{kql}{\phi_0}\cos\theta \Rightarrow r = \sqrt{\frac{kql}{|\phi_0|}}\sqrt{|\cos\theta|}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = r_0\sqrt{|\cos\theta|}} \quad \text{con} \quad r_0 \equiv \sqrt{\frac{kql}{|\phi_0|}}.$$

Esta es la ecuación de la superficie equipotencial a ϕ_0.

Veremos la gráfica de las líneas equipotenciales, las superficies equipotenciales se construyen al girar estas líneas con respecto al eje vertical (debido a la simetría azimutal del problema)

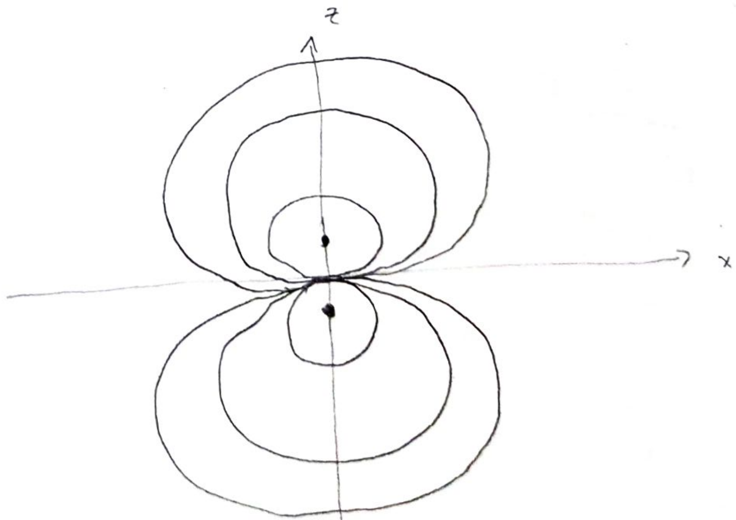
Para un r_0 positivo cualquiera, la ecuación $r = r_0\cos\theta \to r^2 = r_0^2\cos^2\theta$ en coordenadas rectangulares se ve como $x^2+z^2 = r_0^2\left(\frac{z^2}{x^2+z^2}\right) \to (x^2+z^2)^2 = r_0^2 z^2 \to x^2+z^2 = r_0 z$

$$\to x^2+z^2-r_0 z = 0 \to x^2+z^2-r_0 z+\frac{r_0^2}{4}-\frac{r_0^2}{4} = 0 \to x^2+\left(z-\frac{r_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{r_0}{2}\right)^2$$

Entonces $r = r_0\cos\theta$ describe circunferencias con centro en $(0,0,\frac{r_0}{2})$ y radio $\frac{r_0}{2}$

(es decir, circunferencias que tocan el origen y tienen centro en puntos sobre el eje z.)

Entonces, la ecuación que nos concierne: $r = r_0\sqrt{|\cos\theta|}$ debe de verse como las circunferencias mencionadas pero un poco deformadas o aplastadas debido a la raíz cuadrada.



Las superficies equipotenciales se consiguen como superficies de revolución con respecto al eje z.

b) Las ecuaciones de las líneas de campo. hint: resuelve $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{E_\theta}{E_r}$

Primero calculamos E_r y E_θ a partir del potencial. Usando $\bar{E} = -\nabla\phi$ con el gradiente en esféricas:

$\rightarrow \bar{E} = -\nabla\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right)$ · y ya sabemos que $\phi = \frac{Kql\cos\theta}{r^2}$

$= -\left(-2\frac{Kql\cos\theta}{r^3}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{Kql\,\text{sen}\theta}{r^2}\hat{\theta} + 0\,\hat{\varphi}\right) \rightarrow E_r = \frac{Kql}{r^3}(2\cos\theta) \quad E_\theta = \frac{kql}{r^3}\text{sen}\theta$

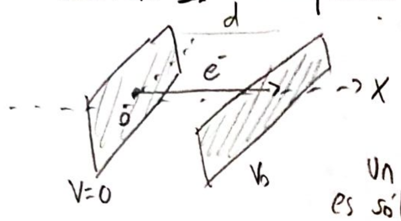
ahora, según el hint, las líneas de campo están dadas por: $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{E_r}{E_\theta}$

$\rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{E_r}{E_\theta} = \frac{2\cos\theta}{\text{sen}\theta} \rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = 2\cot\theta$

$\rightarrow \int\frac{1}{r}dr = \int 2\cot\theta\, d\theta \rightarrow \ln|r| = 2\ln|\text{sen}\theta| + C \rightarrow r = e^{\ln|\text{sen}^2\theta| + C}$

$\rightarrow r = C_1\,\text{sen}^2\theta$

5. Extra. Un cátodo caliente con un potencial nulo y el ánodo tiene una diferencia de potencial V_0. Electrones son acelerados del cátodo al ánodo una distancia d. El campo en el cátodo es 0 y fluye una corriente I. Las placas son mucho más largas que la separación. V, ρ, v son funciones de la posición.



a) Escribe la ecuación de Poisson para la región entre los planos.

Como el plano es lo suficientemente grande, como vimos en la tarea pasada, genera un campo que apunta en la dirección x únicamente. Entonces el potencial también es sólo función de la posición en x

Por la ec. de Poisson: $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}^{0} + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}^{0} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{d^2 V_{(x)}}{dx^2} = \frac{-\rho_{(x)}}{\varepsilon_0}$

b) Si los electrones parten del reposo en el cátodo, ¿cuál es su velocidad en x, donde el potencial es $V_{(x)}$

Calculamos el trabajo para mover la carga e desde el cátodo hasta la posición x.

$dW = e\,dV \rightarrow W = \int_0^x e\,dV = e\int_0^x dV = e\left(V_{(x)} - V_{(0)}\right)$ Pero $V(0)$ es el voltaje en el cátodo, que definimos como 0.

$\therefore W = e V_{(x)}$

La carga parte del reposo (energía cinética 0) → Por el teorema de Trabajo - Energía:

$K_f = W \rightarrow \frac{1}{2} m_e v^2 = e V_{(x)} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 e V_{(x)}}{m_e}}$

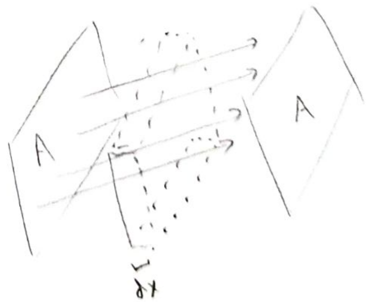
c) En el estado estacionario, I es independiente de x ¿relación entre ρ y v?

La corriente a través de un pequeño bloque de la misma área que el cátodo y de grosor dx es igual a la carga que atraviesa al bloque por unidad de tiempo.

Pero la cantidad de cargas en el bloque es: $\rho\, dV = \rho A\, dx$ (con A el área del cátodo y el bloque)

Entonces la carga por unidad de tiempo es: $\rho A \frac{dx}{dt} = \rho A v$

$\rightarrow I = A \rho(x)\, v(x)$



d) Obten la ecuación diferencial de V(x)

Regresando a la ecuación de Poisson : $\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$ .... (1)

pero por el resultado c): $\rho(x) = \frac{I}{A\, v(x)}$

que por el resultado b): $\rho(x) = \frac{I}{A\sqrt{\frac{2eV(x)}{m_e}}} = \frac{I}{A}\sqrt{\frac{m_e}{2eV(x)}}$

Reemplazando en (1) : $\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{I}{A\,\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m_e}{2e\,V(x)}}$

e) Resuelve la ecuación de V en función de x, V_0, d. Encuentra $\rho(x)$ y $v(x)$

Reescribimos la ecuación diferencial como: $V^{1/2} V'' = B$ con $B \equiv \frac{I}{A\,\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m_e}{2e}} = cte$

multiplicamos por V' $\rightarrow$ $V^{1/2} V' V'' = BV'$ $\rightarrow$ $V'V'' = \frac{B\,V'}{V^{1/2}}$

$\rightarrow V'dV' = \frac{B\,dV}{V^{1/2}}$ $\longrightarrow$ $\int V'dV' = B\int \frac{dV}{V^{1/2}}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}V'^2 = 2B\,V^{1/2} + \mathcal{C}$

pero como $V'(0) = 0$ (porque el campo eléctrico en el cátodo es 0) $\rightarrow$ $\mathcal{C} = 0$

$\rightarrow \frac{1}{2}V'^2 = 2B\,V^{1/2}$ $\rightarrow$ $V' = 2\sqrt{B}\,V^{1/4}$ $\rightarrow$ $\frac{dV}{dx} = 2\sqrt{B}\,V^{1/4}$

$\rightarrow \frac{dV}{V^{1/4}} = 2\sqrt{B}\,dx$ $\rightarrow$ $\frac{4}{3}V^{3/4} = 2\sqrt{B}\,x + C$ (pero como $V(0) = 0$ porque el potencial en el cátodo es 0 $\rightarrow$ $C = 0$)

$\rightarrow \frac{4}{3}V^{3/4} = 2\sqrt{B}\,x$ $\rightarrow$ $V(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} B^{2/3}\, x^{4/3}$ .... (2)

Pero para deshacernos de la B, que no es un parámetro que nos den, usamos que $V(d) = V_0$ el potencial en el ánodo

$\rightarrow V_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} B^{2/3} d^{4/3}$ $\rightarrow$ $V_0\, d^{-4/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} B^{2/3}$

Entonces reemplazamos en 2) $\rightarrow$ $V(x) = \frac{V_0}{d^{4/3}}\,x^{4/3}$ $\rightarrow$ $V(x) = V_0\left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}$

••) Por Poisson: $\rho(x) = \varepsilon_0\frac{d^2V}{dx^2} = \varepsilon_0 V_0\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{d}\right)\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x}{d}\right)^{1/3}\right) = \varepsilon_0 V_0\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{d}\right)^{-2/3} = \frac{4\,\varepsilon_0 V_0}{9\,d^{4/3}\,x^{2/3}} = \rho(x)$

•••) Por el resultado b): $v(x) = \sqrt{\frac{2e}{m_e}}\sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{2e}{m_e} V_0\left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}} = v(x)$

f) Muestra que $I = K V_0^{3/2}$ encuentra K.

Por 2) $\rightarrow V(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} B^{2/3} x^{4/3}$, que al evaluar en d y con $V(d) = V_0$

$\rightarrow V_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} B^{2/3} d^{4/3} \rightarrow B^{2/3} = V_0 \left(\frac{2}{3d}\right)^{4/3} \rightarrow B = V_0^{3/2} \left(\frac{2}{3d}\right)^2$

Pero por como definimos B:

$$\frac{I}{A\varepsilon_0}\left(\frac{m_e}{2e}\right)^{1/2} = V_0^{3/2}\left(\frac{2}{3d}\right)^2 \rightarrow I = \underbrace{\left(\frac{2}{3d}\right)^2 A\,\varepsilon_0 \left(\frac{2e}{m_e}\right)^{1/2}}_{K} V_0^{3/2}$$

K es cte porque $A, d, \varepsilon_0, e, m_e$ son ctes $\rightarrow$ $I = K V_0^{3/2}$

con $K = \frac{4A\varepsilon_0}{9d^2}\sqrt{\frac{2e}{m_e}}$