12.50, Recuerda que un 4-vector covariante se obtiene del contravariante al cambiar de signo el componente 0. Lo mismo para tensores: Cuando bajamos de índice para convertirlo a covariante, cambiamos de signo si el índice es 0. Calcula los invariantes tensoriales:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \qquad G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \qquad F^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

En términos de $\vec{E}$ y $\vec{B}$

Primero recordamos las expresiones de $F^{\mu\nu}$ y $G^{\mu\nu}$ como vienen en el Griffiths.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

Y calculamos directamente $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = F^{0\nu} F_{0\nu} + F^{1\nu} F_{1\nu} + F^{2\nu} F_{2\nu} + F^{3\nu} F_{3\nu}$$ ← Hacemos la suma en μ

Ahora desarrollamos las sumas en ν

$$= F^{00}F_{00} + F^{01}F_{01} + F^{02}F_{02} + F^{03}F_{03} + F^{10}F_{10} + F^{11}F_{11} + F^{12}F_{12} + F^{13}F_{13}$$
$$+ F^{20}F_{20} + F^{21}F_{21} + F^{22}F_{22} + F^{23}F_{23} + F^{30}F_{30} + F^{31}F_{31} + F^{32}F_{32} + F^{33}F_{33}$$

Subimos los índices que están abajo, poniendo un signo - cada que subimos un índice 0 como dice el enunciado:

$$= F^{00}(F^{00}) + F^{01}(-F^{01}) + F^{02}(-F^{02}) + F^{03}(-F^{03}) + F^{10}(-F^{10}) + F^{11}F^{11} + F^{12}F^{12} + F^{13}F^{13}$$
$$+ F^{20}(-F^{20}) + F^{21}F^{21} + F^{22}F^{22} + F^{23}F^{23} + F^{30}(-F^{30}) + F^{31}F^{31} + F^{32}F^{32} + F^{33}F^{33}$$

Sustituimos los valores de $F^{\mu\nu}$

$$= 0(0) + (E_x/c)(-E_x/c) + (E_y/c)(-E_y/c) + (E_z/c)(-E_z/c) + (-E_x/c)(E_x/c) + 0(0) + B_z(B_z) + (-B_y)(-B_y)$$
$$+ (-E_z/c)(E_z/c) + (B_y)(B_y) + (-B_x)(-B_x) + (0)(0)$$
$$+ (-E_y/c)(E_y/c) + (-B_z)(-B_z) + (0)(0) + (B_x)(B_x)$$

$$= -\frac{E_x^2}{c^2} - \frac{E_y^2}{c^2} - \frac{E_z^2}{c^2} - \frac{E_x^2}{c^2} + B_z^2 + B_y^2 - \frac{E_y^2}{c^2} + B_z^2 + B_x^2 - \frac{E_z^2}{c} + B_y^2 + B_x^2$$

$$= -\frac{2E_x^2}{c^2} - \frac{2E_y^2}{c^2} - \frac{2E_z^2}{c^2} + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

$$= 2\left(|\vec{B}|^2 - \frac{|\vec{E}|^2}{c^2}\right)$$

Ahora hacemos lo mismo para $G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$

$$G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = G^{0\nu} G_{0\nu} + G^{1\nu} G_{1\nu} + G^{2\nu} G_{2\nu} + G^{3\nu} G_{3\nu}$$ ← Desarrollamos la suma en μ

$$= G^{00} G_{00} + G^{01} G_{01} + G^{02} G_{02} + G^{03} G_{03} + G^{10} G_{10} + G^{11} G_{11} + G^{12} G_{12} + G^{13} G_{13}$$
$$+ G^{20} G_{20} + G^{21} G_{21} + G^{22} G_{22} + G^{23} G_{23} + G^{30} G_{30} + G^{31} G_{31} + G^{32} G_{32} + G^{33} G_{33}$$ ← Desarrollamos las sumas en ν

Subimos los índices, poniendo un signo $-$ cada que subimos un 0

$$G^{00}(G^{00}) + (G^{01})(-G^{01}) + (G^{02})(-G^{02}) + G^{03}(-G^{03}) + G^{10}(-G^{10}) + (G^{11})(G^{11}) + (G^{12})(G^{12}) + (G^{13})(G^{13})$$
$$+ (G^{20})(-G^{20}) + (G^{21})(G^{21}) + (G^{22})(G^{22}) + (G^{23})(G^{23}) + (G^{30})(-G^{30}) + (G^{31})(G^{31}) + (G^{32})(G^{32}) + (G^{33})(G^{33})$$

Sustituimos los valores de G:

$$= 0(0) + (B_x)(-B_x) + (B_y)(-B_y) + (B_z)(-B_z) + (-B_x)(B_x) + (0)(0) + (-E_z/c)(-E_z/c) + (E_y/c)(E_y/c)$$
$$+ (-B_y)(B_y) + (E_z/c)(E_z/c) + (0)(0) + (-E_x/c)(-E_x/c) + (-B_z)(B_z) + (-E_y/c)(-E_y/c) + (E_x/c)(E_x/c) + 0(0)$$

$$= -B_x^2 - B_y^2 - B_z^2 - B_x^2 + E_z^2/c^2 + E_y^2/c^2 - B_y^2 + E_z^2/c^2 + E_x^2/c^2$$
$$- B_z^2 + E_y^2/c^2 + E_x^2/c^2$$

$$= -2B_x^2 - 2B_y^2 - 2B_z^2 + 2E_x^2/c^2 + 2E_y^2/c^2 + 2E_z^2/c^2$$

$$= -2|B|^2 + \frac{2}{c^2}|E|^2$$

$$= 2\left(-|\vec{B}|^2 + \frac{1}{c^2}|\vec{E}|^2\right)$$

Calculamos ahora $F^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = F^{0\nu}G_{0\nu} + F^{1\nu}G_{1\nu} + F^{2\nu}G_{2\nu} + F^{3\nu}G_{3\nu}$$ ← Desarrollamos la suma en μ

$$= F^{00}G_{00} + F^{01}G_{01} + F^{02}G_{02} + F^{03}G_{03} + F^{10}G_{10} + F^{11}G_{11} + F^{12}G_{12} + F^{13}G_{13}$$
$$+ F^{20}G_{20} + F^{21}G_{21} + F^{22}G_{22} + F^{23}G_{23} + F^{30}G_{30} + F^{31}G_{31} + F^{32}G_{32} + F^{33}G_{33}$$ ← Hacemos la suma en ν

Subimos los índices y cambiamos de signo los que involucren un 0

$$= F^{00}(G^{00}) + (F^{01})(-G^{01}) + (F^{02})(-G^{02}) + (F^{03})(-G^{03}) + F^{10}(-G^{10}) + F^{11}G^{11} + F^{12}G^{12} + F^{13}G^{13}$$
$$+ F^{20}(-G^{20}) + F^{21}G^{21} + F^{22}G^{22} + F^{23}G^{23} + F^{30}(-G^{30}) + F^{31}G^{31} + F^{32}G^{32} + F^{33}G^{33}$$

Sustituimos los valores de F y G:

$$= (0)(0) + (E_x/c)(-B_x) + (E_y/c)(-B_y) + (E_z/c)(-B_z) + (-E_x/c)(B_x) + (0)(0) + B_z(-E_z/c) + (-B_y)(E_y/c)$$
$$+ (-E_y/c)(+B_y) + (-B_z)(E_z/c) + (0)(0) + B_x(-E_x/c) + (-E_z/c)(B_z) + B_y(-E_y/c) + (-B_x)(E_x/c) + 0(0)$$

$$= -\frac{E_xB_x}{c} - \frac{E_yB_y}{c} - \frac{E_zB_z}{c} - \frac{E_xB_x}{c} - \frac{E_zB_z}{c} - \frac{E_yB_y}{c} - \frac{E_yB_y}{c} - \frac{E_zB_z}{c} - \frac{E_xB_x}{c} - \frac{E_zB_z}{c} - \frac{E_yB_y}{c} - \frac{E_xB_x}{c}$$

$$= -\frac{4}{c}\left(E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z\right)$$

$$= -\frac{4}{c}\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)$$

En resumen, los resultados obtenidos fueron:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left(|\vec{B}|^2 - \frac{|\vec{E}|^2}{c^2}\right) \qquad G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = 2\left(-|\vec{B}|^2 + \frac{|\vec{E}|^2}{c^2}\right)$$

$$F^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -\frac{4}{c}\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)$$

Notamos que $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$.

Estas cantidades se obtuvieron como contracciones de tensores. Las contracciones de tensores son invariantes ante cambio de sistema de referencia. Por lo que probamos que

$|B|^2 - \frac{|E|^2}{c^2}$ y $\vec{E}\cdot\vec{B}$ son invariantes

Esto coincide con el problema 12.46 que pide probar que $|E|^2 - c^2|B|^2$ es invariante, lo cual es equivalente a decir que $|B|^2 - |E|^2/c$ es invariante (sólo hay que multiplicar por $-c^2$). Y pide probar que $\vec{E}\cdot\vec{B}$ es invariante, que también ya probamos.

Acepto que estos problemas sean considerados para la evaluación del semestre 2021-2
Tomás Basile