

Óptica

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

28 de febrero de 2021

1. Movimiento Ondulatorio

Ondas: Una onda es una perturbación que se propaga por un medio (o no). Hay de dos tipos, **Longitudinales:** El medio se desplaza en la dirección de movimiento y **Transversales:** El medio se desplaza en dirección transversal al movimiento de la onda.

1.1. Ondas en 1D:

Tomamos una función de dos variables $f(x, t)$. Es decir, para cada t , nos da una función de una variable especial $f(x, t_0)$ que se puede representar como una gráfica en el espacio.

Perfil de Onda (en $t = t_0$): Es la gráfica de la función $f(x, t_0)$ en el plano x, y .

Onda: Una Onda es una deformación en el espacio que se propaga. Por ahora nos limitamos a ondas que no cambian de forma y sólo se mueven (el perfil es siempre el mismo y sólo se mueve a velocidad v en alguna dirección). Es decir, $f(x, 0) = f(x - vt, t)$. Lo cual nos lleva, junto con algunos dibujitos a que para una onda que no cambia de forma, debe de verse como:

$$f(x \mp vt)$$

Entonces, podemos tomar cualquier función que queramos como perfil $f(x)$ y le reemplazamos la variable indep. por $x' = x \mp vt$, y entonces, $f(x \mp vt)$ es una onda viajera en dirección $\pm x$ a velocidad v .

1.2. Ecuación Diferencial de Onda:

Para una onda $\psi(x, t) = f(x \mp vt) = f(x')$, tomamos las derivadas con respecto a x y a t :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 1 \frac{\partial f}{\partial x'} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mp v \frac{\partial f}{\partial x'} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \pm v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

Juntando estas últimas dos ecuaciones, llegamos a la ecuación diferencial de onda:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

O bien, en más dimensiones: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

Que es la ecuación de onda para medios sin damping. Y cuya solución son funciones del tipo

$$\psi(x, t) = f(x \mp vt)$$

1.3. Onda Armónicas:

Un tipo muy importante de ondas son las armónicas, que son aquéllas que tienen como perfil de onda la gráfica de un sin. Es decir, se ven como:

$$\psi(x, t) = A \sin(k(x \mp vt) + \epsilon) = A \sin(kx \mp kvt + \epsilon) = A \sin(kx \mp \omega t + \epsilon)$$

Donde k , A , ϵ son parámetros para definir la curva seno, v es la velocidad en la que se propaga la onda. Donde por ahora consideremos que ω se define como vk .

Una onda parámetro tiene varios parámetros importantes como:

Fase (ϕ): Es el argumento que está dentro del seno, es decir. $\phi = kx - \omega t$.

Amplitud (A): Es la altura de las crestas con respecto al punto medio.

Número de propagación de onda (k): Es necesario introducirla porque x tiene unidades de metros. Para un perfil fijo de onda ($t = t_0$), $k/2\pi$ mide la cantidad de repeticiones que tiene la onda por unidad de longitud. (Es decir, es algo así como la frecuencia angular del perfil de onda)

Longitud de Onda (periodo espacial) (λ): Para un perfil de onda fijo, λ mide la distancia entre dos repeticiones seguidas de la onda. Es decir, es el número que cumple $\psi(x, t) = \psi(x + \lambda, t)$

Velocidad (v): Mide la velocidad con la que se propaga la onda. Es decir, para si tenemos un observador fijo, mide la longitud de onda que pasa por el observador por segundo.

Frecuencia Angular (ω): Es el ángulo en el que aumenta la fase después de un segundo.

Frecuencia (temporal) (f): Para un observador fijo, es la cantidad de repeticiones que verá al pasar un segundo.

Periodo Temporal (T): Para un observador fijo, es la cantidad de tiempo que debe de pasar para que se repita la onda. Es decir, que cumple $\psi(x, t + T) = \psi(x, t)$

Desfase Inicial (ϵ): Es la fase que se tiene inicialmente en $t = 0$, $x = 0$.

Se pueden comprobar las siguientes relaciones sobre estas definiciones:

$$k = (2\pi)/\lambda \quad (\text{A partir de usar la def. de } \lambda).$$

$$f = 1/T \quad (\text{A partir de las definiciones de estas dos cantidades})$$

$$2\pi f = \omega$$

$$\omega = kv \quad (\text{A partir de la definición de } \omega)$$

$$v = \lambda/T$$

Podemos notar que estas ondas son infinitas en ambas direcciones.

Monocromática: Una onda que tiene una sola constante frecuencia.

Sin embargo, incluso un generador de ondas perfectas no puede haber estado trabajado para siempre, es decir no se extiende hasta $t = -\infty$. Entonces, todas las ondas contienen en realidad toda una banda de frecuencias distintas. Cuando esta banda de frecuencias es delgada, se dice que la onda es **Quasicromática**.

1.4. Fase y Velocidad de Fase:

Como mencioné antes, la fase de una onda es el argumento que está dentro del seno y la fase inicial es el argumento que queda al hacer $x = t = 0$. Si dos ondas tienen el mismo valor de k y de ω y de A pero cambian en la fase inicial, entonces se pueden ver como la misma onda, sólo que una está viajando atrasada con respecto a la otra.

ω es la cantidad de radianes que viajan por segundo o bien, mide el cambio de fase con respecto al tiempo para una posición fija:

$$\omega = \left| \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_x \right|$$

k es la cantidad de radianes que tiene la onda por metro. O bien, mide el cambio de la fase con respecto a la posición, a tiempo fijo:

$$k = \left| \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_t \right|$$

Estas fórmulas son obvias para una onda armónica pero la ventaja es que se pueden usar para extender la definición de ω y k para ondas que no sean armónicas.

Con estas fórmulas, podemos llegar a la siguiente fórmula de velocidad:

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \phi / \partial t}{\partial \phi / \partial x} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v$$

1.5. El principio de Superposición:

El principio de superposición dice que si tenemos dos soluciones a la misma ecuación de onda (dos ondas), entonces la suma de éstas funciones son nuevamente una solución (son una onda).

La perturbación resultante de la suma de dos ondas es igual a la suma de las perturbaciones de las dos ondas sumadas.

En Fase: Dos ondas ψ_1 y ψ_2 están en fase si sus fases son iguales todo el tiempo, es decir: $\phi_1 = \phi_2$

Fuera de Fase: Dos ondas están desfasadas si sus fases no son iguales.

Interferencia: Es el fenómeno por el cual ondas que están fuera de fase tienden a cancelarse y disminuir de amplitud.

1.6. La representación Compleja y Fasores:

Una onda armónica como $\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \epsilon)$ se puede representar usando una función compleja como la siguiente:

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t + \epsilon)}$$

Esta función es compleja, pero no hay problema, una vez que tomamos la parte real, nos queda la función de onda original. Esta representación nos permite usar las operaciones que ya conocemos de números complejos al tratar con ondas, lo que simplifica las cuentas. Después de operar con las ondas y haber llegado a una solución, simplemente se toma la parte real de esta solución, o se puede dejar en forma compleja, dando por hecho que se debe de interpretar como que sólo hay que tomar en cuenta la parte real. Sin embargo, no es válido multiplicar dos funciones complejas entre sí y luego tomar la parte real, porque puede llevar a una solución errónea.

Fasor: Un fasor es una forma de representar toda una onda armónica como un sólo número complejo que gira.

Simplemente, una onda del tiempo $A \sin(kx - \omega t + \epsilon)$ en un tiempo t_0 se representa por un número complejo con norma A y con un ángulo $\phi_0 = -\omega t_0 + \epsilon$

Este número complejo $A < \phi_0 = -\omega t_0 + \epsilon$, representa a la amplitud y fase de la onda en $x = 0$. Si sabemos que es una onda armónica, esto bastará para representar a todo el perfil de onda $f(x) = A \sin(kx - \omega t_0 + \epsilon)$. O sea, el fasor en t_0 sólo nos dice el valor de la fase en $x = 0, t = t_0$ y la amplitud de la onda. Con eso podemos dibujar toda la onda sin problemas. Sin embargo, si la onda no es armónica, necesitaremos un fasor distinto para cada punto del espacio. En un punto $x = x_0$, el fasor vendrá dado por $A(x_0, t) < \phi(x_0, t)$. Es decir, a todo tiempo nos da la amplitud y fase de este punto en el espacio. Ésta es la única forma de poder describir a toda la onda.

Entonces, el fasor empieza en $A < \epsilon$ y luego conforme pasa el tiempo, si la onda se mueve a la izquierda (derecha), el fasor gira en sentido horario (antihorario) con velocidad angular ω .

Cuando se suman dos o más ondas, podemos representar a sus fasores y sumarlos. El fasor suma representará a la onda suma. Cuando las frecuencias angulares de ambas son iguales, esto es fácil, porque basta con calcular el fasor en un momento y después sabemos que girará a velocidad ω como sus componente. Pero cuando tenemos las componentes tienen diferentes ω , es más complicado y hay que considerar el fasor para todo tiempo t (y para cada posición x)

1.7. Ondas En 3D

Las ondas en 3D son funciones $\psi(\vec{r}, t)$ que satisfacen la ecuación de onda 3D. Para cada tiempo t , $\psi(\vec{r})$ le asigna un número a todos los vectores del espacio (un campo escalar). Para que sea una onda, queremos que conforme pasa el tiempo, este campo escalar cambie con el tiempo de forma que se note una 'propagación'.

Perfil de Onda a tiempo t_0 : Es el campo escalar $f(\vec{r}) = \psi(\vec{r}, t_0)$.

Frente de Onda: En un instante t_0 , un frente de onda es una superficie con fase constante. Es el conjunto de puntos que tiene el mismo valor al evaluar f .

Onda Plana: Es una onda cuyo frente de onda son planos paralelos. Se puede encontrar una expresión general al resolver la ecuación de onda 3D en coordenadas cartesianas.

La onda plana viene definida por un vector \vec{k} llamado **Vector de Propagación** que apunta en la dirección en la que se propaga la onda (ortogonal a los planos de frente de onda) y que tiene por magnitud el número de propagación de la onda.

Como tal, para construir una onda plana con vector \vec{k} se puede considerar lo siguiente:

$$A \cos(kr_k - \omega t + \epsilon)$$

Donde r_k es la componente en la dirección \vec{k} de \vec{r} . Con esto, nos aseguramos que todos los puntos en un mismo plano perpendicular a \vec{k} va a tener la misma fase. Y los valores de la función escalar cambian armónicamente conforme nos movemos ortogonalmente a los planos. Así, una onda armónica tiene la forma general:

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t + \epsilon)}$$

El vector \vec{k} se puede ver como (k_x, k_y, k_z) y tiene norma k . El resto de cosas como la longitud de onda, velocidad angular, etc. se puede calcular como siempre, pero usando k (la norma).

Una onda general que no sea armónica tiene la forma $\psi(x, y, z, t) = f(ax + by + cz \mp vt)$.

Onda Esférica: Para encontrar una expresión para las ondas esféricas, empezamos con la ecuación de onda pero en coordenadas esféricas (usando el laplaciano esférico):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = \pm \frac{1}{v^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Para encontrar una solución particular, haremos la condición de que ψ sea función puramente de r , con lo que se simplifica considerablemente la ecuación de onda a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) &= \pm \frac{1}{v^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \pm \frac{1}{v^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} &= \pm \frac{1}{v^2} \frac{\partial(r\psi)}{\partial t} \end{aligned}$$

Esta es como la ecuación de onda pero para $r\psi$, por lo que tiene solución armónica $r\psi = A \sin(kr - \omega t + \epsilon)$. Entonces, la solución armónica y radial es:

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} \sin(kr \mp vt + \epsilon)$$

Onda esférica: Nuevamente empezamos con la ecuación de onda en forma cilíndrica. Luego, para simplificar, imponemos la condición de que la onda sea radial (cilíndricamente radial). Resulta que esto nos lleva a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r - \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \mp \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Después de un poco de manipulación, esta ecuación lleva a una ecuación de Bessel. Resulta que esta ecuación de Bessel tiene una solución trigonométrica para $r \gg 1$, con lo que tenemos:

$$\psi(r, t) \simeq \frac{A}{\sqrt{r}} e^{ik(r \mp vt)}$$

2. Superposición de Ondas

2.1. Suma de Ondas de la Misma Frecuencia

Tenemos una onda del tipo $E(x, t) = E_0 \sin[\omega t - (kx + \epsilon)]$, que vamos a escribir como:

$$E(x, t) = E_0 \sin[\omega t + \alpha(x, \epsilon)] \quad \text{donde: } \alpha(x, \epsilon) = -(kx + \epsilon)$$

Ahora tomamos dos ondas con misma frecuencia:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{01} \sin(\omega t + \alpha_1) \\ E_2 &= E_{02} \sin(\omega t + \alpha_2) \end{aligned}$$

Nota: Estas dos ondas tienen la misma frecuencia y como tienen la misma velocidad (ambas son luz), tiene el mismo número de onda $k = \omega/c$. Consideraremos después el caso en el que el número de onda no es el mismo debido a que las dos ondas de luz no viajan a exactamente la misma velocidad.

Consideramos la superposición de las dos ondas $E = E_1 + E_2$. $E = E_{01}(\sin \omega t \cos \alpha_1 + \cos \omega t \sin \alpha_1) + E_{02}(\sin \omega t \cos \alpha_2 + \cos \omega t \sin \alpha_2) = (E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2) \sin \omega t + (E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2) \cos \omega t$

Ahora suponemos que la suma $E = E_1 + E_2$ tiene la siguiente solución:

$$E = E_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

Igualamos esta suposición a la suma $E_1 + E_2$ y encontramos con eso a E_0 y a α con bastantes cuentas. Resulta que:

$$\begin{aligned} E_0^2 &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \tan \alpha &= \frac{E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2}{E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2} \end{aligned}$$

La suma es entonces armónica y con la misma frecuencia que los componentes, aunque su amplitud y fase es distinta. Vemos que si $E_{01} \gg E_{02}$, entonces $\alpha \simeq \alpha_1$ (lo mismo pasa con E_{02}), lo que significa que cuando una de las amplitudes es máxima, entonces ésta predomina en el resultado. También vemos que si las ondas están en fase $\alpha_1 = \alpha_2$, entonces $E_0 = E_{01} + E_{02}$. Y que si están perfectamente en desfase $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi/2$, entonces $E_0 = |E_{02} - E_{01}|$. El resultado se puede obtener también dibujando los fasores y realizando un poco de trigonometría.

Término de interferencia: Es el nombre que recibe el término $E_{01}E_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$, que es lo que puede cambiar a la amplitud de la suma.

Diferencia de Fase: La diferencia de fase entre dos ondas de misma frecuencia es $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = (kx_1 + \epsilon_1) - (kx_2 + \epsilon_2)$

La diferencia de x_1 y x_2 se puede dar porque las ondas tienen sistemas de referencia distintos (fueron emitidas desde distintos puntos) o porque una onda realizó un viaje más largo que otra. De hecho, si las ondas están en fase en sus respectivos emisores ($\epsilon_2 - \epsilon_1 = 0$), entonces la diferencia de fase en el punto de medida va a ser simplemente $k(x_1 - x_2)$

Coherentes: Un grupo de ondas son coherentes si son enviadas siempre con la misma fase relativa entre ondas consecutivas.

Por ejemplo, un átomo emite ondas de una forma aleatoria y por tanto no las emite coherentemente porque están separadas por tiempos random.

Si tenemos un grupo de ondas coherentes, entonces los ϵ son arbitrarios y al usar la fórmula para suma de varias funciones, los términos coseno se cancelan y resulta que el $A_{tot}^2 = \sum A_i^2$. Por otro lado, si las ondas son coherentes, entonces, siempre interfieren de la misma forma y pueden cancelarse entre todas o sumar todas las amplitudes.

Un caso especial que nos puede interesar sucede cuando mandamos dos ondas con la misma frecuencia y misma amplitud y mismo desfase inicial pero que tienen una diferencia de caminos de $\alpha_2 - \alpha_1 = k\Delta x$. Aplicando las ecuaciones que ya encontramos para la suma de ondas, tenemos $E = E_0 \sin(\omega t + \alpha) = E_0 \sin \omega t + \cos \alpha + E_0 \cos \omega t + \sin \alpha$.

Después de hacer varias cuentas, llegamos a que la suma de estas ondas es:

$$E = 2E_{01} \cos\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \sin\left[\omega t - k\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

De donde vemos que si la separación entre las ondas es muy chica, $\Delta x \ll \lambda$, entonces el resultado tiene una amplitud de más o menos $2E_{01}$ (**Interferencia Constructiva**) pero si $\Delta x = \lambda/2$, entonces el coseno vale 0 y nos queda que $E = 0$ (**Interferencia Destructiva**)

La suma de muchas ondas (de la misma freq):

La suma de cualquier cantidad de ondas armónicas, coherentes, de misma frecuencia y dirección vuelve a dar como resultado una onda armónica de la misma frecuencia. Tenemos

una suma del tipo:

$$\sum_{i=1}^N E_{0i} \cos(\alpha_i \pm \omega t)$$

Y el resultado será de la forma:

$$E = E_0 \cos(\alpha \pm \omega t)$$

Donde, $E_0^2 = \sum_{i=1}^N E_{0i}^2 + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N E_{0i} E_{0j} \cos(\alpha_i - \alpha_j)$

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{i=1}^N E_{0i} \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N E_{0i} \cos \alpha_i}$$

Este resultado se puede comprobar realizando cuentas muy largas. Si todos los constituyentes están en fase ($\alpha_i = \alpha_j$), entonces la amplitud total será simplemente la suma de las amplitudes individuales y el α será igual a los α_i .

Para luces generadas por lámparas o así, este efecto de interferencia no se observará. Esto debido a que si tenemos N átomos formando una lámpara, cada uno de estos átomos lanzará un torrente de fotones, donde podemos pensar que cada fotón es un pequeño tren de onda independiente de no más de 1 a $10ns$. Cada que se emite un nuevo tren, éste sale con una fase totalmente nueva y aleatoria. En cualquier caso, la fase de la luz emitida por un átomo $\alpha_i(t)$ permanecerá constante con respecto a la fase de otro átomo $\alpha_j(t)$ por una duración de a lo mucho $10ns$ antes de cambiar aleatoriamente. Los átomos permanecerán coherentes por muy poco tiempo por lo que no podemos esperar ver interferencia.

Ondas Estacionarias

Examinamos a dos ondas armónicas de la misma frecuencia pero moviéndose en direcciones opuestas. Por ejemplo, una onda que rebota en un espejo en $x = 0$. Tenemos: $E_l = E_{0l} \sin(kx + \omega t + \epsilon_l)$ y $E_r = E_{0r} \sin(kx - \omega t + \epsilon_r)$. La onda resultante será $E = E_{0l} + E_{0r}$. Sin embargo, podemos usar algunas condiciones de frontera para simplificar un poco antes. Hacemos que $\epsilon_L = 0$ y queremos que en $x = 0$, E valga siempre cero pues es justo donde está el espejo. Entonces, asumiendo también que tienen la misma amplitud $E_{0l} = E_{0r} = E_0$, nos lleva a que para que se cumpla la condición de frontera, se debe de tener que $\epsilon_R = 0$. Finalmente, la onda resultante será:

$$E = E_0 [\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)]$$

$$= 2E_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Este resultado describe a una onda estacionaria, ya que conforme pasa el tiempo, su perfil no se mueve, sino que sólo va cambiando su amplitud.

Nodo: Es un punto donde la perturbación es 0 para todo tiempo. Suceden cuando $kx = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$ o bien, cuando $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \dots$

Antinodo: Son los puntos con máxima perturbación ($\pm 2E_0$). Es decir, los puntos con $kx = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$ o bien, con $x = \pm\lambda/4, \pm3\lambda/4, \pm5\lambda/4, \dots$

Además, hay momentos en los que toda la onda vale 0, esto sucede cuando $\omega t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$ o bien, cuando $t = (2m + 1)T/4$ donde $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ y T el periodo.

Para amplitudes diferentes: Si $E_{0L} > E_{0R}$. Se creará una onda semiestacionaria que viajará en el sentido de la onda constituyente con mayor amplitud y ya no habrá nodos ni antinodos.

2.2. Suma de Ondas de Diferente Frecuencia:

Tenemos dos ondas distintas pero de misma amplitud:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{01} \cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ E_2 &= E_{01} \cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{aligned}$$

La onda suma de estas dos se puede obtener usando la identidad de suma de cosenos y da como resultado.

$$\begin{aligned} E &= 2E_{01} \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \\ &= 2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t) \cos(k_c x - \omega_c t) \end{aligned}$$

Donde $k_m = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$, $\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ son llamados el número de onda y frecuencia de modulación. Y $k_c = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, $\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ son llamados el número de onda y frecuencia del Carrier.

Veamos qué dice este resultado. Tenemos que la parte $\cos(k_c x - \omega_c t)$ es una onda viajera que tiene como frecuencia y como número de onda el promedio de las ondas componentes y tendrá una velocidad de propagación $v = \frac{\omega_c}{k_c} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$.

Sin embargo, para un tiempo t_0 fijo, esta onda está siendo modulada por $2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t_0)$. Es decir, no tiene la misma amplitud en todos lados, sino que su amplitud se ve modificada por la función de $2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t_0)$. Esto **Modula** a la onda viajera carrier. Claro que, la modulación en sí misma está viajando también y la velocidad a la que viaja se llama **Velocidad de Grupo** y tiene un valor de $v_g = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$.

Generalmente es la onda de modulación la que carga la información que se está transmitiendo.

Por ejemplo, si $\omega_1 = \omega_2$, entonces la modulación no viaja. Esto quiere decir que la onda carrier se mueve pero la onda moduladora se queda quieta como un molde. Conforme se mueve la carrier, se va adaptando al molde quieto.

Como otro ejemplo, si ambas velocidades son iguales, entonces la onda carrier y la modulación viajan a la misma velocidad por lo que se ve como el mismo perfil de siempre moviéndose a dicha velocidad.

Más ejemplos se pueden ver en: <https://www.geogebra.org/m/mz7v8kan>.

Beats: Los beats son las montañas creadas por la onda moduladora. Estas montañas miden de longitud la mitad de la longitud de onda de la onda moduladora y se mueven a la velocidad de la onda moduladora. Por lo tanto, tienen una frecuencia del doble de la onda moduladora, o bien $\omega_B = \omega_1 - \omega_2$.

Por otro lado, la onda carrier va a tener una longitud de onda de $\frac{4\pi}{k_1+k_2}$.

El análisis anterior se puede realizar también para ondas de diferentes amplitudes. En este caso, los beats no se cancelarán completamente en ningún punto. La amplitud de la onda resultante oscila entre $|E_{01} - E_{02}|$ y $E_{01} + E_{02}$.

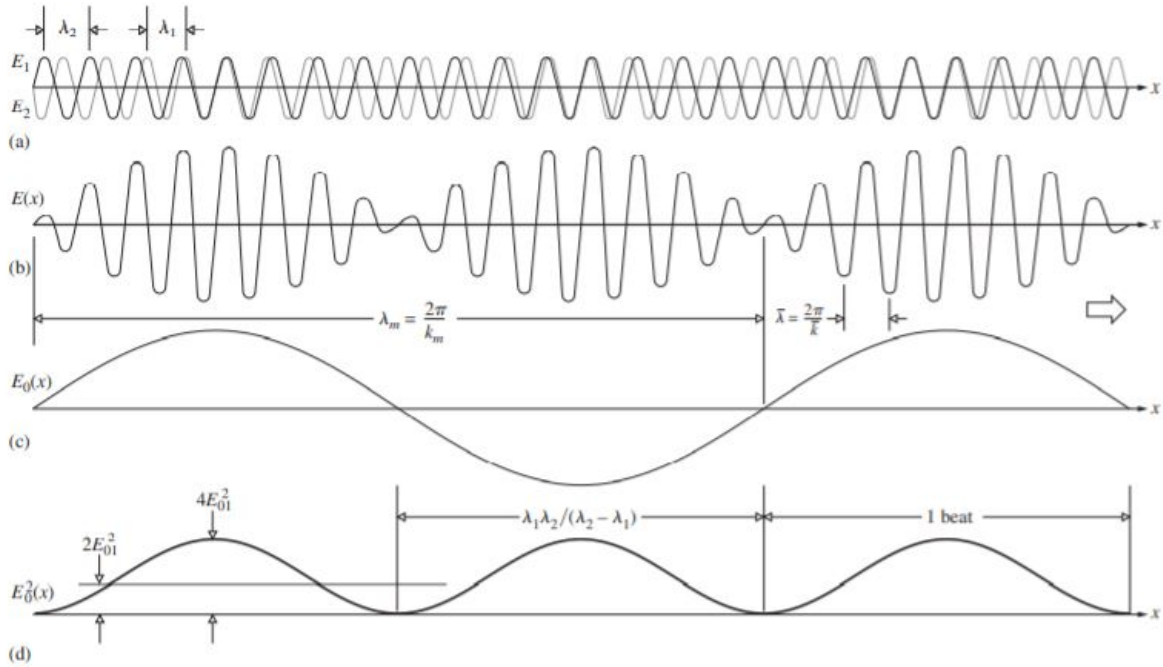


Figure 7.16 The superposition of two equal-amplitude harmonic waves of different frequency producing a beat pattern.

El análisis anterior es bastante general, sin embargo no es tan necesario hacerlo de este modo. Como estamos hablando de ondas en un mismo medio, la velocidad a la que se mueven ondas de distintas frecuencias es casi la misma. Sin embargo, en algunos medios la velocidad de propagación depende levemente de la frecuencia. Esto se conoce como **Medios Dispersivos** y la dependencia se suele dibujar en una gráfica que da a ω como función de k .

Si tomamos una onda cualquiera con frecuencia ω_0 , sólo es necesario fijarnos en la gráfica para saber cuál es su número de propagación. Y su velocidad será ω_0/k_0 que corresponde a la pendiente de una recta que va del origen al punto (k_0, ω_0) .

Por eso, para medios no dispersivos, la gráfica ω vs k será una línea recta que pasa por el origen y cuya pendiente es la velocidad de la luz en el medio. Para medios dispersivos, esta gráfica se va a desviar un poco de la línea de velocidad constante, indicando que algunas frecuencias se propagarán más rápido que otras.

Dispersión normal: Cuando la gráfica de ω vs k se curva por arriba de la línea de velocidad constante.

Dispersión anormal: Cuando la gráfica de ω vs k se curva por abajo de la línea de velocidad constante.

En cualquier caso, la frecuencia va a estar relacionada con el número de onda por medio de $\omega = \omega(k)$ y la velocidad estará dada entonces por $\omega(k)/k$

Si mandamos dos ondas en un medio, la onda resultante viene dada por la onda modulada que ya obtuvimos.

Si el medio no es dispersivo, se cumple siempre que $\omega = ck$ y por lo tanto, todas las ondas viajan a la misma velocidad. En este caso, al sumar las dos ondas, la velocidad de carrier será igual a la velocidad de grupo y será a su vez igual a la velocidad en el medio c . Por lo tanto, la onda y su modulación viajarán a la vez.

Si el medio es dispersivo, ω y k tienen una relación más complicada y hay que calcular la velocidad de grupo en la forma en la que se definió. A menos que tengamos un caso especial como el que sigue:

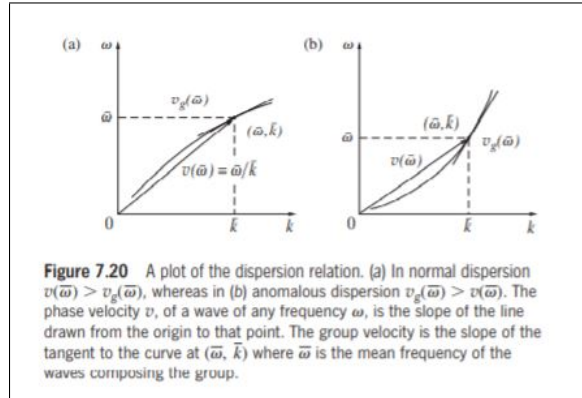
2 Ondas de frecuencia casi igual: Digamos que mandamos dos ondas con frecuencias muy similares. Digamos que las frecuencias de ambas están cerca de un punto ω_0 y por tanto, sus números de propagación están cerca de un k_0 . Entonces, al igual que antes, la onda resultante será una onda modulada. Pero en este caso tendremos que la velocidad de propagación de la carrier es:

$$v_c = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \simeq \frac{2\omega_0}{2k_0} = \frac{\omega_0}{k_0}$$

Que se podría pensar como la velocidad promedio de propagación de la onda.

Por otro lado, en este caso límite en que las frecuencias son muy cercanas una a la otra, tenemos que la velocidad de grupo es:

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}(k_0)$$



Con esto, podemos ver la diferencia entre un medio dispersivo normal y uno dispersivo anormal con respecto a cómo se comparan sus velocidades de grupo con las velocidades de carrier.

En el caso en el que tengamos muchas ondas, todas cercanas a un valor de (k_0, ω_0) , nuevamente la onda suma viajará con una velocidad de grupo igual a la derivada de $\omega(k)$ evaluada en k_0 y la onda carrier se moverá a ω_0/k_0 .

Índice de Refracción: Recordamos que para un medio con velocidad v , el índice de refracción se define como $n = c/v$.

Para medios no dispersivos, esta definición está perfecta. Pero para medios dispersivos, este índice es una función que depende del número de propagación. $n(k) = c/v(k) = c/(\omega(k)/k) = ck/\omega(k)$. También se puede escribir como que es función de λ (sustituyendo k por $2\pi/\lambda$) o que directamente es una función de ω .

Hay muchas expresiones equivalentes para la velocidad de grupo. Por ejemplo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}$$

O bien, usando que $\omega(k)$ es una función conocida. (Pues según lo del párrafo anterior, $\omega(k) = kc/n(k)$), entonces la velocidad de grupo se puede escribir como:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2} \frac{dn}{dk} = v \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right)$$

Donde las derivadas deben de evaluarse en el valor promedio ω_0 o k_0 .

Se puede definir también un **índice de difracción de Grupo** como $n_g := c/v_g$

3. Series y Transformada de Fourier:

Vimos que la suma de varias ondas de la misma frecuencia da una onda armónica de la misma frecuencia.

Ahora bien, si sumamos muchas ondas armónicas de longitud de onda $\lambda, \lambda/2, \lambda/3, \lambda/4, \dots$. Entonces el resultado será un perfil de onda medio extraño con periodicidad de λ .

Resulta que cualquier onda periódica (que no necesariamente sea armónica) de periodo $2\pi/\lambda$ (número de propagación k (frecuencia angular)), se puede escribir como la combinación lineal de muchas ondas armónicas (senos y cosenos) de periodo $\lambda, \lambda/2, \lambda/3, \dots$ (es decir, de número de propagación $k, 2k, 3k, \dots$).

Teorema de Fourier: Sea f una onda continua periódica de número de onda k , entonces se puede escribir como:

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos(kx) + A_2 \cos(2kx) + A_3 \cos(3kx) + \dots + B_1 \sin(kx) + B_2 \sin(2kx) + B_3 \sin(3kx)$$

Para encontrar los números de los coeficientes, usamos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda \sin(akx) \cos(bkx) dx &= 0 \\ \int_0^\lambda \cos(akx) \cos(bkx) dx &= \lambda/2 \delta_{ab} \\ \int_0^\lambda \sin(akx) \sin(bkx) dx &= \lambda/2 \delta_{ab} \end{aligned}$$

Donde $k = 2\pi/\lambda$.

Con estas identidades, podemos calcular los coeficientes de la serie de fourier. Si queremos calcular el A_0 , entonces simplemente integramos de 0 a λ , todos los cosenos y senos se cancelan y entonces $\lambda C_0 = \int_0^\lambda f(x)dx$. Si queremos calcular A_m , multiplicamos por $\cos(mkx)$ y luego integramos de 0 a λ . Todos los miembros se cancelan excepto la integral de $A_m \cos^2(mkx)$ cuya integral vale $A_m \lambda/2$. Por lo tanto, nos queda que $\int_0^\lambda \cos(mkx)f(x)dx = \lambda/2 A_m$.

Entonces, nos queda que:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(mkx) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(mkx)$$

$$\text{Donde, } A_0 = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x)dx$$

$$A_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \cos(mkx)dx$$

$$B_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \sin(mkx)dx$$

Existen algunas condiciones de simetría. Si f es par, entonces los coeficientes de seno valen 0. Si f es impar, entonces todos los coeficientes de coseno valen 0. Por último, A_0 es el valor promedio de f .

Espectro de Frecuencias: El Espectro de frecuencias de f guarda los coeficientes de amplitud para cada m . Se puede pensar como una función $A(mk) = A_m$. Que a cada frecuencia mk le asigna su amplitud A_m . Éste sería el espectro de frecuencias de coseno, sin embargo, también podemos dibujar el espectro de frecuencias de seno $B(mk) = B_m$. Podemos también tener el espectro de frecuencias mixto, simplemente juntamos $A_m \cos(mk) + B_m \sin(mk) = C_m \cos(mk + \phi_m)$. $C(mk) = C_m$ es el espectro de frecuencias mixto. El valor de $A(1k)$ se conoce como frecuencia fundamental y los demás son los armónicos.

Un valor de A_m negativo indica que el coseno correspondiente se debe de desplazar 180 grados antes de sumarlo.

Ejemplo 3.1.

Tenemos una onda saw tooth que vale 1 de $-\lambda/a$ hasta λ/a y desde $\lambda - \lambda/a$ hasta $\lambda + \lambda/a$, ... Vale 0 sino.

Los coeficientes de Fourier apropiados son $A_0 = 4/a$ y $A_m = \frac{4}{a} \left(\frac{\sin(m2\pi/a)}{m2\pi/a} \right)$

Luego, $f(x) = \frac{2}{a} + \sum \frac{4}{a} (\text{sinc}(m2\pi/a) \cos mkx)$

Si la $f(x)$ tiene detalles muy finos, se necesitarán senos y cosenos con frecuencia muy alta.

Serie de Fourier Compleja:

Se pueden juntar los cosenos y senos para formar una serie de términos de la forma e^{imkx} donde nuevamente $k = 2\pi/\lambda$ es la frecuencia angular. Se tiene:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{ikmx}$$

Donde, $C_n = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) e^{-ikmx} dx$

Las expresiones para los coeficientes se obtienen de forma similar a antes, simplemente se multiplica por e^{-ikmx} y luego se integra, lo que hace que todo se cancele excepto el coeficiente con C_m .

Podemos definir nuevamente un espectro de frecuencias, en el que graficamos C_m con respecto a mk .

3.1. Transformada de Fourier:

La transformada de Fourier es en cierto sentido una generalización a la serie de Fourier. La transformada de Fourier es una aplicación que convierte una función f en el espacio a una función g en el espacio frecuencia. La transformada es:

$$C(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx$$

$$B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(kx) dx$$

Éstas son en orden, la transformada compleja de $f(x)$, la transformada coseno y la transformada seno.

Es como una generalización de la serie de Fourier, sólo que toma todo tipo de frecuencias y no solo las enteras. Además, no se divide entre el promedio (entre $\lambda/2$) por lo que no es exactamente lo mismo. Es el caso límite de la serie de Fourier de f pero cuando el periodo de f tiende a infinito (y sin dividir entre el periodo total a las amplitudes constituyentes).

La función $C(k)$ da el espectro de frecuencias, nos da una idea de qué tanto está siendo usada cada una de las frecuencias angulares.

Se puede denotar $\mathbb{F}(f)$ a la función en el espacio frecuencia que resulta de tomar la transformada de Fourier de f .

Para $A(k)$ está claro que $A(-k) = A(k)$ por la paridad del coseno, por lo que la transformada siempre nos da una función par en el espacio de frecuencias.

Por otro lado, para $B(k)$, está claro que $B(-k) = -B(k)$ por la imparidad del seno, por lo

que la transformada siempre nos da una función impar en el espacio de frecuencias. Vemos además que $C(k) = A(k) - iB(k)$

Teorema 3.1.

Propiedades de la Transformada de Fourier:

- 1) Es lineal: $\mathbb{F}[af + bg] = a\mathbb{F}[f] + b\mathbb{F}[g]$
- 2) Cambio de escala: $\mathbb{F}[f(at)](k) = \frac{1}{|a|}\mathbb{F}[f]\left(\frac{k}{a}\right)$
- 3) Traslación: $\mathbb{F}[f(x - a)](k) = e^{-ika}\mathbb{F}[f](k)$
- 4) Inversión: La transformada de la transformada vuelve a ser la función original (siempre y cuando tanto f como su transformada sean integrables).
- 5) $\mathbb{F}[f](0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Finalmente, tal como antes podíamos encontrar f como la suma de sus ondas constituyentes, ahora dado el espacio de frecuencias de f , podemos 'sumarlas' para darnos f de vuelta:

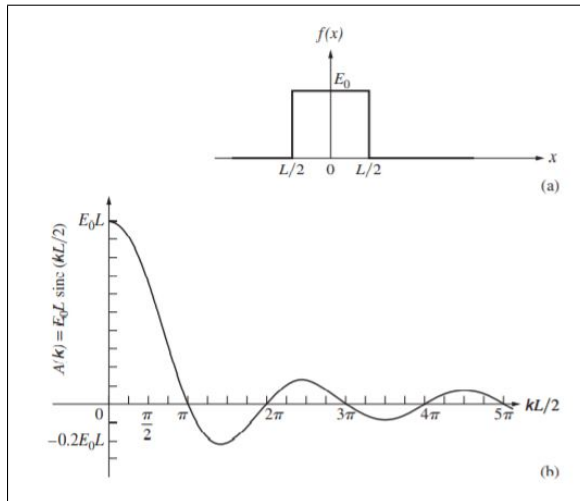
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} A(k) \cos(kx) dk + \int_0^{\infty} B(k) \sin(kx) dk \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{-ikx} dk$$

Ejemplo 3.2.

Tenemos la función:

$$f(x) = \begin{cases} E_0, & |x| < L/2 \\ 0, & |x| > L/2 \end{cases}$$



Calculamos su transformada. Como es una función par, su transformada seno va a ser 0 para todo k ($B(k) = 0$). La transformada coseno la calculamos como sigue:

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx = \int_{-L/2}^{L/2} E_0 \cos kx dx = \frac{2E_0}{k} \sin kL/2 = E_0 L \text{sinc}(kL/2)$$

$$A(k) = E_0 L \text{sinc}(kL/2)$$

La transformada compleja será también

$$C(k) = E_0 L \text{sinc}(kL/2)$$

Entonces, podemos escribir a la función original como:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E_0 L \text{sinc}(kL/2) \cos kx dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0 L \text{sinc}(kL/2) e^{-ikx} dk$$

Nota: Se usó que $A(k) - iB(k) = C(k)$. Entonces, en este caso se tiene que $A(k) = C(k)$. Parece que la expresión compleja de f no es igual a la que tiene a $A(k)$. Sin embargo lo son, esto debido a que la parte imaginaria de la

integral compleja es una función impar multiplicada por una par (el sinc), lo que da como resultado una función impar que se integra a 0. En general, siempre que tengamos a f par, $B(k) = 0$ y $A(k)$ va a ser par. Así, $C(k) = A(k)$ es par y la representación compleja de f va a perder a su parte imaginaria cuando multipliquemos $C(k)$ por $i \sin(-kx)$ y quede una función impar que integra a 0.

Teorema 3.2. Simetrías de la transformada de Fourier:

- 1) Si f es par y real, entonces $C(k)$ es par y real.
- 2) Si f es impar y real, entonces $C(k)$ es impar e imaginaria (sólo sobrevive el $B(k)$).
- 3) Si f es par e imaginaria, entonces $C(k)$ es par e imaginaria.
- 4) Si f es impar e imaginaria, entonces $C(k)$ es impar y real.
- 5) Si f es par y compleja, entonces $C(k)$ es par y compleja.
- 6) Si f es impar y compleja, entonces $C(k)$ es impar y compleja.

Ejemplo 3.3.

El tren de Ondas de Coseno:

Tenemos la función dada por:

$$E(x) = \begin{cases} E_0 \cos(k_p x) & , \quad -L \leq x \leq L \\ 0 & , \quad |x| > L \end{cases}$$

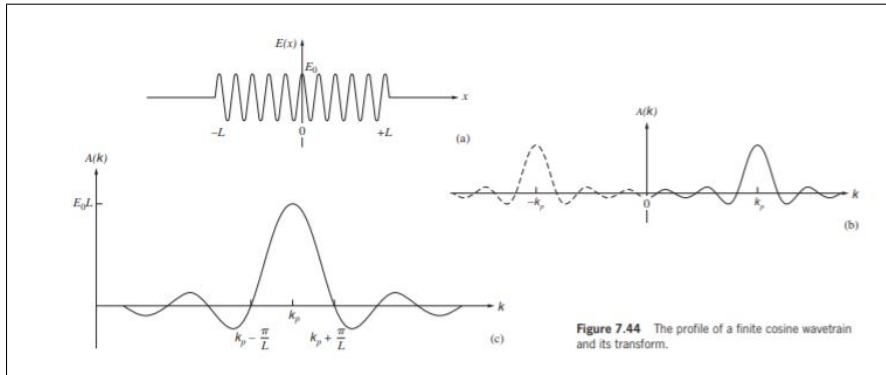


Figure 7.44 The profile of a finite cosine wavetrain and its transform.

Como la función es par, $B(k) = 0$ y por otro lado, calculamos $A(k) = \int_{-L}^L E_0 \cos(k_p x) \cos(kx) dx = \int_{-L}^L \frac{E_0}{2} [\cos((k_p + k)x) + \cos((k_p - k)x)] dx$

Lo cual da como resultado:

$$A(k) = E_0 L [\text{sinc}(L(k_p + k)) + \text{sinc}(L(k_p - k))]$$

Que nuevamente es igual a $C(k)$ y nuevamente es una función par.

Cuando hay muchas ondas en el tren, $\lambda_p \ll L \Rightarrow k_p L \gg 2\pi$, entonces $(k_p + k)L \gg 2\pi$ y por lo tanto el sinc y la transformada se vuelven muy chicos.

Aunque el tren coseno sea muy largo, de todas formas es finito y por lo tanto su transformada de Fourier tiene un cierto grosor alrededor de k_p . De hecho, vemos en la imagen

que en este caso la montaña principal en la transformada de fourier tiene un grosor que va de $k_p - \pi/L$ hasta $k_p + \pi/L$. Vemos entonces que el ancho de la transformada de fourier es inversamente proporcional a la longitud del tren de ondas.

Similarmente al tren seno, se puede calcular la transformada de Fourier de un tren seno igual y da como resultado: $A(k) = 0$, $B(k) = E_0 L [\text{sinc}((k_p - k)L) - \text{sinc}((k_p + k)L)]$ y $C(k) = -iB(k)$

Este espectro de frecuencias se ve como un sinc hacia arriba centrado en k_p y un sinc hacia abajo centrado en $-k_p$, es una función impar.

3.2. Delta de Dirac:

Para seguir trabajando con la transformada de Fourier, será necesario desarrollar la teoría de la función Delta de Dirac. La función se define como:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \infty & , x = 0 \end{cases}$$

En realidad, no es una función como tal, sino que es una distribución de probabilidad, y como tal cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Sifting Property:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

También podemos recorrer la función delta para que ahora obtenga el infinito en otro punto, simplemente tomamos $\delta(x - x_0)$. Con esta nueva función, la sifting property queda como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

Con esto definido, podemos ahora calcular la transformada de Fourier de Coseno y de Seno. A partir de ahora, denotaremos la transformada de una función f como la función \hat{f} que está aplicada sobre el espacio de frecuencias.

Transformada del Coseno y Seno (completos): Ahora vemos la transformada del seno y coseno (completas). Veremos la transformada de $\cos k_p x$, $\sin k_p x$.

Coseno: La transformada de coseno $E_0 \cos(k_p x)$ sólo tiene parte real ($B(k) = 0$). Entonces, la transformada es: $\int_{-\infty}^{\infty} E_0 \cos(k_p) \cos(kx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} E_0/2 [\cos((k_p + k)x) + \cos((k_p - k)x)] dx$
Lo cual vale 0 si $k \neq k_p, -k_p$. Pero si $k = k_p$ o $k = -k_p$, uno de los cosenos se transforma en un 1 y la integral es infinito. Por lo tanto, la transformada de coseno es:

$$\mathbb{F}[E_0 \cos(k_p x)](k) = E_0/2[\delta(k - k_p) + \delta(k + k_p)]$$

Similarmente, la transformada de $E_0 \sin(k_p x)$ es $F(k) = iE_0/2[-\delta(k - k_p) + \delta(k + k_p)]$

Lo de la i se puede notar porque $F(k) = A(k) - iB(k)$

Transformada de la función Delta: Empezamos con la función $\delta(x - x_0)$. Su transformada es:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) e^{-ikx} dx = e^{-ikx_0} = \cos(kx_0) - i \sin(kx_0)$$

Con esto vemos que la transformada de Fourier de $E_0/2 [\delta(k - k_p) + \delta(k + k_p)] = E_0/2 [e^{-ixk_p} + e^{ixk_p}] = E_0 \cos(k_p x)$

Con esto se comprueba lo de que la transformada de Fourier de la transformada de Fourier es igual a la función original.

El hecho de que la transformada de Fourier del Coseno completo sea igual a delta de dirac confirma lo que dijimos antes: *Mientras más grande es el tren de ondas de coseno, más delgada es la montaña que rodea a $k_p, -k_p$ en el espacio de frecuencias. En el caso límite, la transformada de Fourier del coseno completo es una delta de dirac (infinitamente delgada).* Cuando el tren de Cosenos es finito (que es en todos los casos en la vida real), la curva en el espacio de frecuencias siempre tiene un grosor. Esto significa que para reconstruir el tren de coseno, se requieren de muchas 'infinitas' ondas de frecuencias parecidas a las del coseno original.

Todo lo que hicimos con k y λ se puede intercambiar al dominio del tiempo usando ω y T .

3.3. Ancho de frecuencia y Coherencia:

Espectro de Potencia: Para una onda f , su espectro de frecuencia es $\hat{f}(k)$ que nos dice las frecuencias componentes. Pero la energía de la onda suele ser proporcional al cuadrado de la amplitud. Entonces, la energía correspondiente a f en una frecuencia k es $\hat{f}^2(k)$. Por lo tanto, podemos tener el espectro de potencia como la función $\hat{f}^2(k)$.

Para un tren coseno $E_0 \cos(k_p x)$ de longitud L , la transformada de Fourier es $E_0 L [\text{sinc}(L(k_p + k)) + \text{sinc}(L(k_p - k))]$, la cual es una montaña Sinc centrada en k_p . Definimos el **Ancho de frecuencia** como el ancho de esta montaña. La definición puede ser un poco arbitraria de definir. En el caso estudiado, la montaña cruza el cero en $k_p + \pi/L$ y $k_p - \pi/L$, por lo que podemos definir el ancho de frecuencia en este caso como $2\pi/L$. Lo denotamos como Δk .

Por otro lado, denotamos por Δx a la longitud del tren coseno (que en este caso era L). Lo visto anteriormente sobre estas dos cantidades nos lleva a medio suponer lo siguiente:

$$\Delta k \simeq 1/\Delta x$$

O bien, $\Delta \omega \simeq 1/\Delta t$

Es decir, mientras más corto es el tren de onda, se requiere una selección más gruesa de frecuencias constituyentes que rodean a k_p y viceversa. Como ya dijimos, en el caso extremo en el que la onda es infinita, el espectro frecuencia es una función delta (infinitamente delgada).

Línea Espectral: Cuando pasamos una onda por un análisis de Fourier, nos da el espectro de frecuencias. La transformada de Fourier tendrá una montaña en cada frecuencia componente de la onda. Cada banda marcada en el espectro de frecuencias se llama línea espectral.

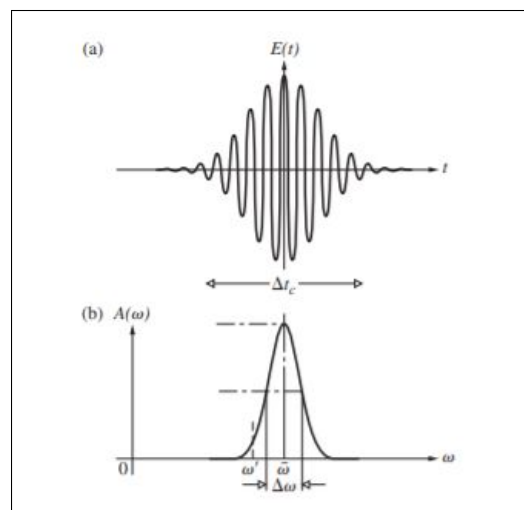
Natural Linewidth: Es el espaciamiento entre las frecuencias presentes en el espectro de frecuencias.

Ahora viéndolo al revés, digamos que estamos en el espectro de frecuencias de f (es decir \hat{f}). La onda original puede estar compuesta por muchos trenes cosenos distintos con distintas frecuencias. En el espacio de frecuencias tenemos bandas con ancho Δf correspondientes a cada frecuencia componente. Digamos que nos centramos en una frecuencia f_0 con un ancho de banda de Δf , definimos el **Tiempo Coherente** (correspondiente a f_0) como $\Delta t = 1/\Delta f$. Es el tiempo en el que la onda original es coherente.

Longitud Coherente: Definimos $\Delta L = c\Delta t$. Es la distancia en la onda en la que se puede decir que es razonablemente sinusoidal o coherente y se puede predecir sencillamente su fase.

Estabilidad de Frecuencia: La estabilidad de frecuencia para una frecuencia f_0 en el espectro de frecuencias es $\Delta f/f_0$

* No estoy seguro de lo que sigue: La luz **Monocromática:** de frecuencia ω_0 está compuesta por N (muchos) pequeños paquetes de trenes armónicos pequeños. Cada uno modulado en promedio por una gaussiana.



En el dibujo se ve uno de estos paquetes de onda (llamémosle fotones) con forma gaussiana y su transformada de Fourier que está centrada en ω_0 .

Cada uno de estos fotones está compuesto por una infinidad de ondas componentes (cuya amplitud por frecuencia nos lo da la transformada de Fourier). Recordemos que estos componentes son armónicos, infinitos y de amplitud constante. Nos concentramos en el componente ω_0 , para cada uno de los fotones (que son iguales) tendremos una onda seno con una fase relativa aleatoria. Al juntar todos los fotones, el com-

ponente de frecuencia ω_0 de la luz total va a ser la suma de todos los componentes (que están desfasados). Esto es cierto para todas las otras frecuencias componentes.

Finalmente, la onda completa tiene una transformada de Fourier que va a tener un sólo pico en ω_0 . A partir del ancho de banda centrado en ω_0 , podemos calcular el tiempo de coherencia de la onda original como $\Delta t = 1/\Delta\omega$ que nos dice qué tan largo es cada fotón, o bien, durante cuánto tiempo está en fase la onda completa en promedio.

3.4. Transformada en 2D

Como una generalización a la transformada de fourier en 1D tenemos:

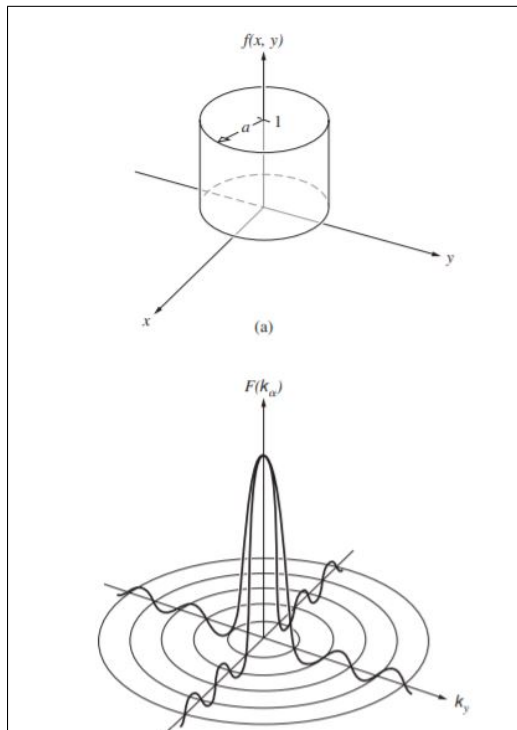
$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Las ondas planas (o más bien lineales) en 2D son de la forma $e^{-i(k_x x + k_y y)}$ para una onda que se mueve con vector de propagación (k_x, k_y) y por tanto, número de propagación $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. La primera doble integral calcula la amplitud correspondiente a este vector de propagación. 'on. $F(k_x, k_y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ nos da la amplitud correspondiente a cada vector de propagación. Luego, la segunda ecuación nos dice como reconstruir la función original a partir de las amplitudes, 'suma' sobre cada una de las ondas componentes.

Ejemplo 3.4.

Consideramos la función: $f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0 & , \sqrt{x^2 + y^2} > a \end{cases}$



En coordenadas cilíndricas tenemos que $k_x = k_\alpha \cos \alpha$ $k_y = k_\alpha \sin \alpha$ $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$

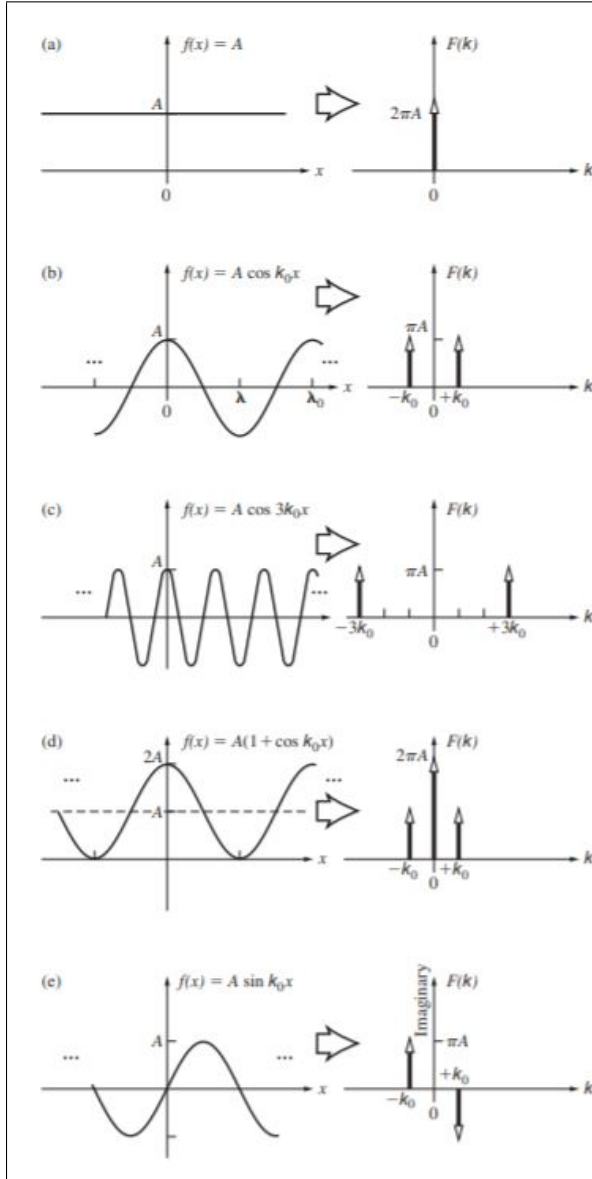
Es decir, expresamos cada vector de propagación en su forma cilíndrica. entonces, la transformada de Fourier es:

$$F(k_\alpha, \alpha) = \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik_x x + k_y y} r d\theta dr$$

Realizamos la sustitución a coordenadas polares y luego hacemos muchas cuentas. El resultado no puede depender de α por la simetría. Después de las cuentas queda que: (J_1 la primera función de Bessel)

$$F(k_\alpha) = 2\pi a^2 \left[\frac{J_1(k_\alpha a)}{k_\alpha a} \right]$$

Recordamos que la transformada de $\cos(k_p x)$ son dos deltas hacia arriba en k_p y $-k_p$. la transformada de $\sin(k_p x)$ son una delta hacia arriba en k_p y una hacia abajo en $-k_p$. La transformada de la función constante c es $C(k) = \int_{-\infty}^{\infty} c e^{-ikx} dx$ vale 0 en todos los puntos excepto $x = 0$. Pero en $x = 0$ vale infinito, Dirac centrada en 0.



Entonces cada seno y coseno se puede representar como un par de deltas de Dirac. Luego, como cualquier función bonita y periódica se puede representar como una combinación lineal de senos y cosenos, su transformada será un conjunto de pares de deltas de Dirac con sus pesos apropiados. Entonces la transformada de cualquier función periódica será un conjunto discreto de deltas de Dirac.

En dos dimensiones se sigue el mismo principio. Si tenemos una onda coseno en 2D con vector de propagación (k_x, k_y) , su transformada serán dos deltas de Dirac positivas, una en (k_x, k_y) y otra en $(-k_x, -k_y)$. Si la onda es un seno, su transformada será una delta positiva en (k_x, k_y) y una negativa en $(-k_x, -k_y)$.

Esto se puede representar como una serie de puntos en el plano frecuencia. Un punto por blanco cada delta de Dirac presente en la transformada. Si tomamos cualquier función periódica en 2D que querramos, al aplicarle la transformada de Fourier, se descompone en sus ondas armónicas correspondientes, y luego la transformada de Fourier está formada por puntos en donde van las deltas de Dirac.

3.5. Convolución:

La convolución entre dos funciones f y g se define como la nueva función h con:

$$h(t) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Es decir, para evaluar $g(t)$, primero volteamos a h y luego lo trasladamos una cantidad t . Esta nueva función $h(t - x)$ la multiplicamos por $f(x)$ y luego integramos de $-\infty$ hasta ∞ . Claro que tiene sentido sólo para funciones que valen 0 o casi 0 en todos los reales. En este caso, el ancho de la función resultante es igual a la suma de los anchos de las funciones originales.

Teorema 3.3. El Teorema de Convolución

Si tenemos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ con transformadas de Fourier $\mathbb{F}[f](k)$ y $\mathbb{F}[g](k)$ y definimos $h = f * g$, entonces:

$$\mathbb{F}[h] = \mathbb{F}[f * g] = \mathbb{F}[f] \cdot \mathbb{F}[g]$$

Dem: Hacer las cuentas e integrales.

4. Teoría Electromagnética, Fotones y Luz

Si la longitud de onda de la luz es pequeña a comparación del aparato usado, una buena aproximación es usar Óptica Geométrica. Sin embargo, un tratamiento más adecuado y preciso es usar óptica física.

Podemos considerar a la luz como una clásica onda electromagnética, recordando los momentos en los que esta aproximación es inadecuada.

4.1. Leyes Básicas de Electro

Las leyes de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} & \int_C E \cdot dl &= -\frac{\partial \Phi_M}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \mu J_{free} + \mu \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} & \int_C B \cdot dl &= \mu \int_S (J_{free} + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}) \cdot dA \\ \nabla \cdot E &= \rho_{free}/\epsilon & \int E \cdot dA &= Q_{free\ in}/\epsilon \\ \nabla \cdot B &= 0 & \int_S B \cdot dA &= 0 \end{aligned}$$

Donde podemos cambiarlo por $D = \epsilon_d E$

$$H = \frac{B}{\mu_m}$$

Son iguales a las leyes de Maxwell en el vacío pero con ϵ y μ en vez de ϵ_0 y μ_0

Todos los conceptos de campos y operadores diferenciales están al principio del resumen de Electromagnetismo.

En el espacio libre (con $\rho = 0$ y $J = 0$) las ecuaciones de Maxwell toman la siguiente forma homogénea:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} & \int_C E \cdot dl &= -\frac{\partial \Phi_M}{\partial t} \\
 \nabla \times B &= \mu\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} & \int_C B \cdot dl &= \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_S E \cdot dA \\
 \nabla \cdot E &= 0 & \int E \cdot dA &= 0 \\
 \nabla \cdot B &= 0 & \int_S B \cdot dA &= 0
 \end{aligned}$$

se pueden manipular las ecuaciones de Maxwell para llegar a las siguientes expresiones sencillas:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \vec{E} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
 \nabla^2 \vec{B} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden conseguir empezando con las ecuaciones de Maxwell diferenciales sin fuentes. Empezamos con la primera ecuación (la de Faraday) y le aplicamos rotacional. Entonces $\nabla \times (\nabla \times E) = -\nabla \times \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times B \Rightarrow \nabla^2 E = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ (usando la ley de ampere diferencial). Para la otra ecuación se aplica el rotacional primero a la ecuación de Ampere.

Para las dos ecuaciones anteriores, el laplaciano se aplica término a término al igual que la derivada temporal. Lo que significa que en realidad tenemos 6 ecuaciones, cada una es una ecuación de onda para cada componente de E y de B . Cada una de las ondas con una velocidad de $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Nota: Es una ecuación de onda vectorial. En vez de asociarle un número a cada punto del espacio, le asocia un vector. En realidad son 6 ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

Onda Transversal: Digamos que \vec{E} es una onda plana que se mueve en la dirección x . Es decir, \vec{E} es constante en cada plano de $x = cte$. Por lo tanto, \vec{E} es una función sólo de x y de t , $\vec{E}(x, t) = (E_x(x, t), E_y(x, t), E_z(x, t))$.

Es decir, todos los componentes de \vec{E} pueden variar pero sólo en la dirección x .

Sin embargo, regresando a la ecuación de Gauss diferencial y tomando en cuenta que $\partial E_y/\partial y = 0$ y que $\partial E_z/\partial z = 0$, la ecuación de Maxwell queda como $\partial E_x/\partial x = 0$.

Esto significa que si \vec{E} tiene un componente en la dirección x , éste no cambia a lo largo de la onda (pero no sería una onda viajera si este componente es distinto de 0, por lo que se debe de tener que $E_x = 0$).

Lo que finalmente significa que \vec{E} es siempre ortogonal a la dirección de propagación. Entonces, el perfil de onda son muchos vectores en todo el espacio que nunca tienen componente x . Luego, este perfil se mueve con el tiempo en la dirección x a velocidad v .

Polarización: Es describir momento a momento la dirección en la que apunta el campo \vec{E} (que es en alguna dirección del plano YZ).

Polarización Lineal: El campo \vec{E} apunta siempre ortogonal a la dirección de propagación. Si la dirección de propagación es x , podemos asignarle el eje y a la dirección de \vec{E} , por lo que la onda es $\vec{E} = E_y(x, t)\vec{j}$

Regresando a la ecuación de Faraday y tomando en cuenta que $\vec{E} = E_y(x, t)\vec{j}$, tenemos que $\partial E_y/\partial x = -\partial B_z/\partial t$ y en las otras direcciones \vec{B} es constante.

Por lo tanto, en el espacio libre, una onda electromagnética es transversa.

Nos concentramos por ahora en ondas planas armónicas, que tienen la forma:

$$E_y(x, t) = E_{0y} \cos[\omega(t - x/c) + \epsilon]$$

Luego, de la ley de Faraday tenemos que $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$. Si integramos con respecto al tiempo, obtenemos:

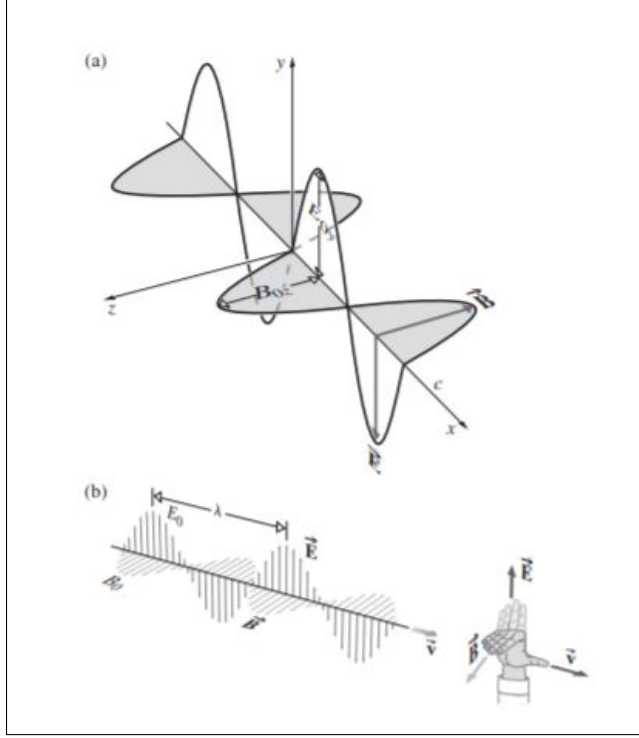
$$B_z(x, t) = \frac{1}{c} E_{0y} \cos[\omega(t - x/c) + \epsilon]$$

Entonces, es evidente que en el vacío tenemos que $E_y = cB_z$. Entonces \vec{E} y \vec{B} están en fase todo el tiempo. Más aún, $\vec{E} = E_y(x, t)\vec{j}$ y $\vec{B} = B_z(x, t)\vec{k}$ son mutuamente perpendiculares y su producto cruz apunta en la dirección de movimiento. Para cualquier medio en general, se cumple que:

$$E = vB$$

Con v la velocidad en el medio correspondiente $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$

4.2. Energía y Momento:



Densidad de Energía: Cuando tenemos un capacitor de placas paralelas que tiene energía $1/2CV^2$, podemos imaginarnos que su energía está guardada en el campo entre las placas. Entonces, la densidad de energía del campo eléctrico es:

$$u_E = \frac{1/2CV^2}{Ad} = \frac{1/2(\epsilon A/d)(Ed)^2}{Ad} = \frac{\epsilon}{2}|E|^2$$

Por otro lado, si tenemos un inductor solenoidal, podemos pensar que su energía $1/2LI^2$ está guardada en el campo magnético en su interior. Así, la densidad de energía del campo magnético es:

$$\frac{1/2LI^2}{Al} = \frac{1/2(\mu n^2 l A)(B/\mu n)^2}{Al} = \frac{1}{2\mu}|B|^2$$

Usando que $E = cB$ y que $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$, se puede llegar a que:

$$u_E = u_B$$

Es decir, la energía guardada en una onda magnética está partida en partes iguales entre el campo Eléctrico y el Magnético.

Densidad de Energía: Es la densidad de energía total de una onda.

$$u = u_E + u_B = 2u_E = \epsilon|E|^2 = 2u_B = \frac{1}{\mu_0}|B|^2$$

Hay que tomar en cuenta que los campos cambian con el tiempo y u es una función del tiempo.

Poynting Vector: Es un vector que apunta en la dirección de propagación y da la energía transportada por unidad de tiempo en un pedazo de área ortogonal a la dirección de propagación. La onda viaja a velocidad c y durante un intervalo de tiempo muy corto Δt , recorre una distancia $c\Delta t$. Por lo tanto, un cilindro de área A paralelo a la dirección de propagación es atravesado por una cantidad de energía total de $uV = u(c\Delta tA)$. Entonces, la cantidad de energía que atraviesa un área A por unidad de tiempo es:

$$|S| = \frac{uc\Delta tA}{\Delta tA} = uc = \epsilon_0 c|E|^2 = c^2\epsilon_0|E||B| = \frac{1}{\mu_0}|E||B|$$

Finalmente, es razonable suponer que la energía se transporta en la dirección de propagación, por lo que el Poynting vector es:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

Para el caso particular de una onda plana y armónica, tenemos $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ y que $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

Usando la definición de \vec{S} llegamos a que:

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

4.2.1. Promediar Funciones Armónicas:

Para seguir estudiando el Poynting, necesitamos un poco de teoría de cómo promediar funciones.

Promedio de una función: El promedio de $f(t)$ en un intervalo T alrededor de t es:

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(t') dt'$$

Por ejemplo, el promedio de $e^{i\omega t}$ es:

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega T} e^{i\omega t} \Big|_{t-T/2}^{t+T/2} = \frac{1}{i\omega T} e^{i\omega t} (e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}) = \left(\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \right) e^{i\omega t}$$

Tomando la parte real e imaginaria, tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \cos \omega t \rangle_T &= \text{sinc}(\omega T/2) \cos \omega t \\ \langle \sin \omega t \rangle_T &= \text{sinc}(\omega T/2) \sin \omega t \end{aligned}$$

Por lo que la función promedio de un coseno y seno se comportan como coseno y seno, pero modulados por un sinc.

4.2.2. Irradiancia:

Irradiancia: La irradiancia es la cantidad de luz iluminando una superficie, denotada por I . La cantidad de energía promedio por unidad de área y por unidad de tiempo. Se calcula la cantidad de energía total recibida en un tiempo $T \gg \tau$ (τ es el periodo).

Tiene sentido que la Irradiancia sea el promedio de la función \vec{S} pues así se promedia la cantidad de energía recibida por unidad de área por unidad de tiempo sobre un tiempo T largo.

$$I = \langle S \rangle_T = c^2 \epsilon_0 |\vec{E}_0 \times \vec{B}_0| \langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} |\vec{E}_0 \times \vec{B}_0| = \frac{c \epsilon_0}{2} |E_0|^2 = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle$$

Esto se ve porque el promedio de \cos^2 (sobre un tiempo largo) es $1/2$.

Por lo tanto, la Irradiancia es proporcional al promedio del cuadrado del campo eléctrico.

La ley del inverso cuadrado: Tenemos una point Source irradiando en forma esférica, la amplitud es $\propto 1/r$. Tomamos dos esferas de radio r_1, r_2 , la energía que pasa por cada

una debe de ser igual. La energía por unidad de tiempo es IA , por lo que $I_1A_1 = I_2A_2 \Rightarrow |E(r_1)|^2 r_1^2 = |E(r_2)|^2 r_2^2$. Por lo tanto, $E(r) \propto 1/r$ y por tanto la irradiancia es proporcional a $1/r^2$

4.2.3. Fotones:

La luz es emitida y absorbida en pequeños paquetes llamados **fotones**. Un fotón con frecuencia f tiene una energía de:

$$\mathcal{E} = hf$$

Donde h es la constante de Planck, que vale $6,626 \times 10^{-34} Js$

El ojo humano es capaz de observar unos 50 fotones en un cuarto oscuro. Brumber hizo un experimento de apuntar una luz muy tenue a un shutter que se abría el tiempo suficiente (0.1 s) como para dejar pasar 50 fotones. Observaron que al abrirlo muchas veces, sólo la mitad de las veces (al azar) lograban ver la luz, indicando que la luz no es una onda clásica, sino que es un stream de fotones que salen arbitrariamente.

Los fotones empiezan y terminan en partículas cargadas, generalmente son transmitidos y absorbidos por electrones que pierden o ganan energía.

Cuando un número muy alto de fotones ocupan el mismo estado, la granularidad de la luz desaparece y el campo electromagnético parece ser continuo.

Promedio de Densidad de Flujo de fotones: Pordemos calcular la cantidad promedio de fotones que caen en una zonade área A por segundo. Sabemos que la energía que llega a la zona por segundo está dada por I dividido entre la energía de cada fotón: I/hf_0 (Donde f_0 es la frecuencia promedio de los fotones).

Flujo Promedio de fotones: La cantidad de fotones que llegan a una zona de área A por segundo se consigue al multiplicar la cantidad anterior por A . Es la cantidad de propones que pasan por unidad de segundo en un área A .

$$\Phi = \frac{AI}{hf_0}$$

El número de fotones que pasan por una zona de área A en un tiempo T es:

$$N_{prom} = \Phi T = \frac{AIT}{hf_0}$$

Claro que si repetimos el experimento de contar los fotones que pasan por una zona A en un tiempo T , no siempre tendremos el mismo resultado. En muchas repeticiones, esperamos que en promedio contemos N_{prom} fotones, pero podríamos contar más o menos. Podemos hacer un plot en el que el eje 'x' sea el número de fotones contados y el eje 'y' sea el número de veces que se contó tal número de fotones después de repetir mucho el experimento.

La distribución de esta gráfica depende de la naturaleza de la fuente de luz.

4.2.4. Presión de Radiación:

En una superficie perfectamente absorbente se genera una presión cuando un haz de luz le llega. La presión es igual a la densidad de energía que transmite la onda, es decir:

$$\mathcal{P}(t) = u = \frac{|S(t)|}{c}$$

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle = \frac{\langle |S(t)| \rangle}{c}$$

Entonces, la fuerza total sobre el objeto absorbente (de área A) será de $A\mathcal{P}$. Entonces:

$$A\mathcal{P} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Sea p_v el momento transportado por unidad de volumen por la luz, entonces:

$$A\mathcal{P} = \frac{p_v \Delta V}{\Delta t} = \frac{p_v (A \Delta t c)}{\Delta t} = A \frac{|S|}{c}$$

Entonces, $p_v = \frac{|S|}{c^2}$

Por otro lado, cuando el objeto iluminado es **Perfectamente Reflejante**, el haz de luz entra con una velocidad c y sale rebotado con una velocidad $-c$. Esto es el doble de intercambio de momento que sucede durante la absorbsión y por lo tanto:

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle = 2 \frac{\langle |S(t)| \rangle}{c}$$

Resumen hasta ahora:

- 1) u_E , u_B son densidad de energía del campo E y B y son proporcionales al cuadrado del módulo del campo. $[J/m^3]$
- 2) u Es la densidad de energía total de una onda, es $u_E + u_B$ y como los campos cumplen $|E| = c|B|$, u es proporcional al cuadrado de $|E|$ o de $|B|$. $[J/m^3]$
- 3) \vec{S} Apunta en la dirección de movimiento de la onda y tiene como norma la energía transportada por unidad de tiempo por unidad de área, es proporcional a $\vec{E} \times \vec{B}$. $[J/sm^2] = [W/m^2]$
- 4) I : Es la cantidad de ennergía que transmite la luz, por segundo y por unidad de área (es el promedio de $|S|$) $[J/sm^2] = [W/m^2]$
- 5) \mathcal{E} es la energía de un fotón debido a su frecuencia y es igual a hf . $[J]$
- 6) Densidad de Flujo Promedio de Fotones: Cantidad de fotones que atraviesan una zona de área A por segundo. La cantidad de energía en una zona por área por segundo es I y por tanto, la cantidad de protones es I/hf_0 $[N/sm^2]$
- 7) **Flujo Promedio de Fotones:** Cantidad de fotones que llegan a una zona de área A por segundo. Es $\Phi = AI/hf_0$ $[N/s]$
- 8) Presión de Radiación: Presión que transmite una onda, es igual a su densidad de energía.
- 9) p_v : momento por unidad de volumen de la luz.
- 10) Δp = momento que absorbe un objeto de área A debido a la presión de la luz.

Momento que carga un fotón: Si un fotón tiene energía \mathcal{E} , entonces tiene un momento de \mathcal{E} por tiempo entre distancia, que resulta ser:

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Entonces, $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

Donde \vec{k} es el vector de propagación de la onda y $\hbar = h/2\pi$.

Esto coincide con la fórmula de la relatividad especial que dice:

$$\mathcal{E} = [(cp)^2 + (mc^2)^2]^{1/2}$$

4.3. Radiación:

La radiación electromagnética viene en un ancho rango de longitudes de onda y frecuencias.

Las cargas quietas no producen radiación, pues tienen un campo E constante y B nulo. Las cargas en movimiento uniforme tampoco producen radiación, pues desde un sistema de referencia sobre la carga, se vería quieto.

Sin embargo, cargas en movimiento no-uniforme sí producen radiación electromagnética. Una partícula cargada libre puede absorber o emitir un fotón.

4.3.1. Cargas Aceleradas Linealmente:

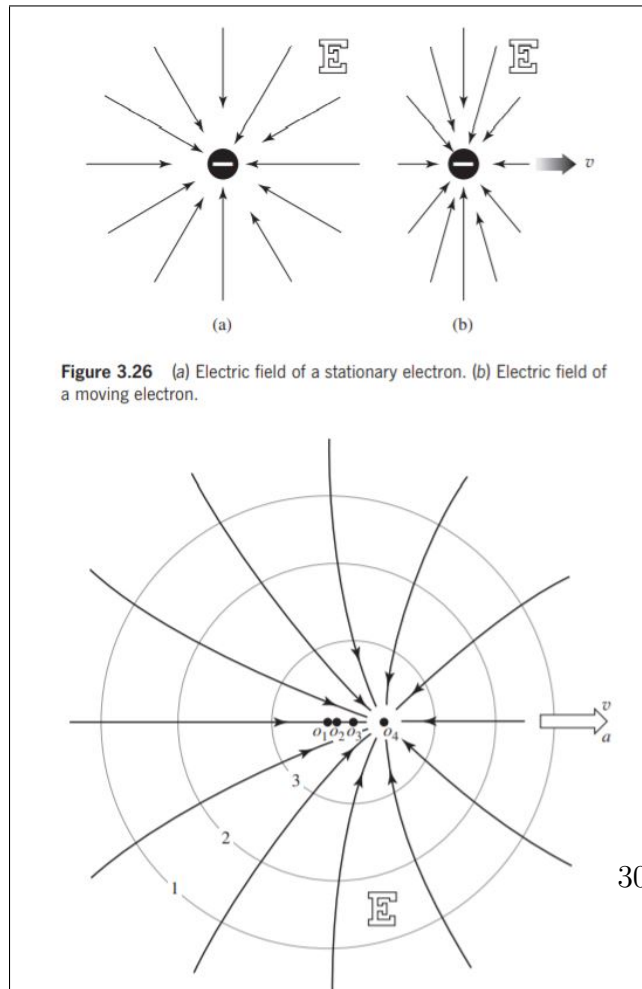
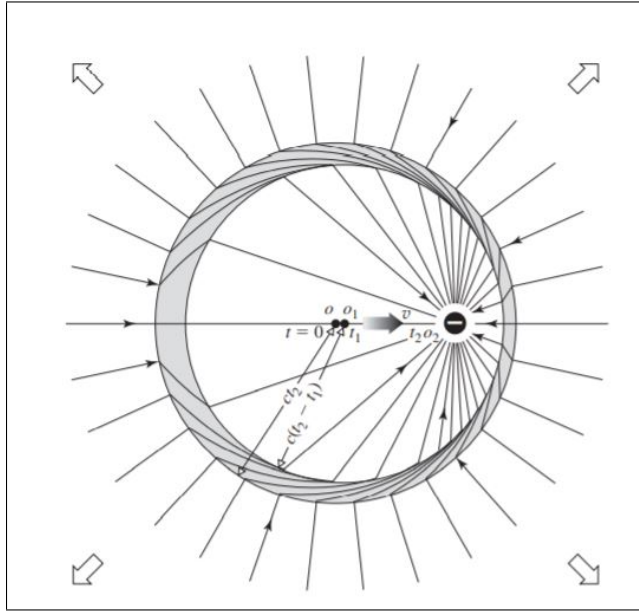


Figure 3.26 (a) Electric field of a stationary electron. (b) Electric field of a moving electron.

La primera imagen muestra el campo de una carga quieta vs una carga en movimiento uniforme. La segunda imagen muestra el campo de una carga acelerada, donde O_1, O_2, O_3, O_4 son las posiciones a tiempos iguales de la carga. Los círculos alrededor miden ct , puntos fuera del círculo i sólo han tenido tiempo de sentir la posición de la carga antes del tiempo O_i . Por ejemplo, las líneas de campo afuera del círculo 1 sienten que la carga está quieta y centrada en el origen. La información del movimiento de la carga viaja a velocidad c .

En esta imagen se ve una carga que empieza en el origen e inmediatamente empieza a acelerar. Fuera del círculo de radio ct , las líneas de campo no han sentido ninguna diferencia. Vemos como se crea

un pico de campo E transversal ortogonal a la dirección de movimiento. Es como un pulso que se mueve con la carga. Entonces, para un punto fijo en el espacio, el campo eléctrico E es una función del tiempo y como cambia con el tiempo, se genera también un campo magnético.



Resulta que el componente transversal (el pulso) del campo eléctrico disminuye de forma proporcional a $1/r$ mientras que el campo radial disminuye a $1/r^2$. Por lo que a distancias grandes, el campo transversal predomina. Por lo tanto, la energía es irradiada más fuertemente en la dirección transversal al movimiento.

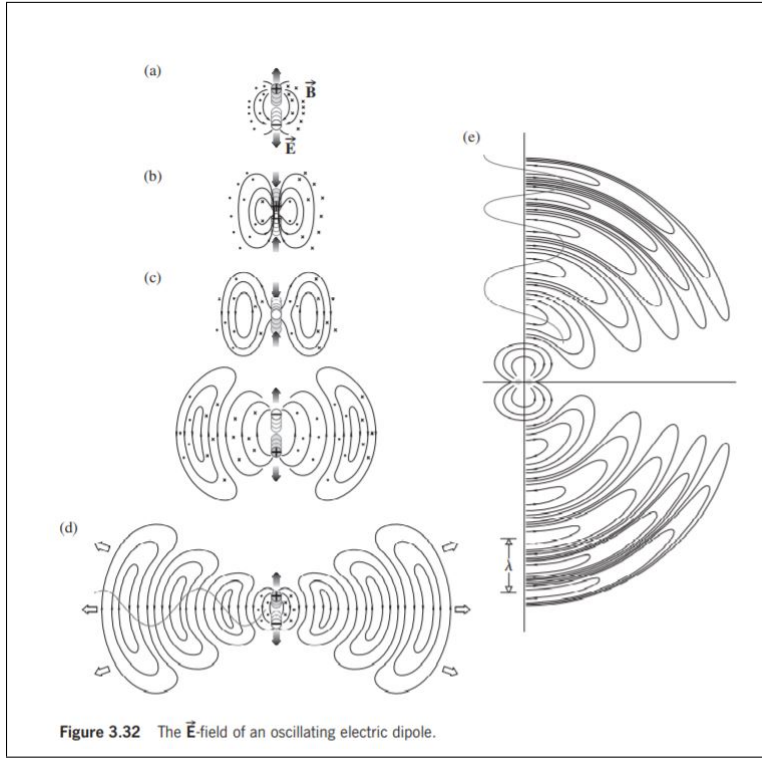
4.3.2. Radiación de Sincrotrón:

Una de las formas de crear radiación electromagnética es con la radiación de sincrotrón.

Un grupo de partículas moviéndose con movimiento sincrotrónico van a emitir radiación (porque se mueven de forma acelerada). Como es radiación ortogonal a la aceleración

(y la aceleración es centrípeta), en este caso la radiación máxima será siempre tangente al círculo. La distribución en las frecuencias generadas depende de las frecuencias con la que se haga girar a las cargas.

4.3.3. Dipolo Oscilante:



Tenemos un dipolo de tal forma que la carga negativa oscila acercándose y alejándose de la carga positiva con una frecuencia de oscilación ω (la carga positiva se queda fija). Entonces, el momento angular como función del tiempo es:

$$p(t) = p_0 \cos \omega t$$

En $t = 0$, el momento inicial es $p_0 = qd$ siendo un vector que apunta de la carga negativa a la positiva.

En la imagen se ve el cambio en el campo magnético conforme la carga negativa oscila con respecto a la positiva. Se puede ver como el campo eléctrico se propaga en forma de ondas. Lejos del dipolo, en la (*wave zone*). En esta zona, los campos \vec{E} y \vec{B} son transversos y

oscilantes.

$$|E|(r, \theta) = \frac{p_0 k^2 \sin \theta \cos(kr - \omega t)}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Donde la frecuencia ω de la onda es igual a la frecuencia de oscilación del dipolo.

El poynting vector $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ siempre apunta radialmente hacia fuera. Usando que la irradiancia es igual a $\langle |S| \rangle = \frac{c\epsilon_0}{2} |E|^2$, podemos llegar a que la irradiancia como función del ángulo y del radio es:

$$I(\theta) = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

La dependencia de la irradiancia va con la cuarta potencia de ω , mayor frecuencia, mucha mayor irradiancia.

4.3.4. La emisión de Luz con Átomos:

La mayoría de los fenómenos se deben a los electrones de valencia. **Ground State:** Un átomo está en su ground state si todos los electrones se encuentran en su nivel de mínima

posible energía. **Estado excitado:** Cuando el átomo se encuentra con una energía mayor a la del ground state.

A bajas temperaturas, los átomos suelen estar a su nivel más bajo y a altas temperaturas empiezan a excitarse.

Estudiamos qué pasa cuando un átomo está excitado (sin importar cómo llegó a dicho estado). Cuando un electrón en un átomo recibe suficiente energía, el electrón realiza un **Salto Cuántico** y pasa a un estado excitado. La cantidad de energía recibida por el átomo es igual a la diferencia de energía entre la posición inicial y final del electrón y ésta está cuantizada por lo que la energía que puede absorber un electrón es cuantizada.

El electrón excitado suele regresar a su estado inicial rápidamente y libera la energía de sobra de una de dos maneras: 1) En forma de luz (con un fotón de energía igual al salto del electrón (cuantizada), 2) en forma de energía calorífica a través de interacción con otros átomos del medio.

En el primer caso, el salto del electrón corresponde a una energía en particular por la fórmula $\Delta\mathcal{E} = h\nu$. Entonces el fotón saldrá con esta frecuencia, conocida como la **frecuencia de resonancia**.

Un átomo tiene varias posibles frecuencias de resonancia (según de qué órbita a qué órbita sea el salto). Una vez excitado, puede deshacerse de esa energía extra lanzando algún fotón con alguna de las frecuencias de resonancia (cada una con una posibilidad distinta).

Se puede pensar que mientras el electrón baja de órbita, oscila levemente en el camino, lo que creará una onda (un pulso de onda) que se puede asociar con el fotón. Asociar a un fotón como un pulso de onda es una buena representación pero no es del todo correcta, pues tiene niveles de energía continuos, mientras que el fotón tiene niveles de energía cuantizados.

Espectro de Emisión: Se refiere a las frecuencias que puede emitir un átomo de cierto tipo. Son líneas delgadas en el espectro de frecuencias, aunque no infinitamente delgadas. La luz emitida nunca es totalmente monocromática.

En general, el espectro de gases está bien marcado por líneas de espectro delgadas, pero el espectro de sólidos y líquidos tienen bandas de frecuencia más gordas por la interacción entre átomos. Por lo tanto, emiten y absorben en espectros más amplios de luz.

4.3.5. Enfriamiento óptico:

Se puede disminuir el momento lineal de un átomo al lanzarle muchos fotones. Después de muchos ciclos de absorción y emisión de luz, el átomo pierde energía y por tanto va más lento. Este proceso recibe el nombre de enfriamiento óptico.

4.4. Luz en materia:

Estudiamos la respuesta a la luz por materiales dieléctricos (no conductores) y que sean transparentes.

En un dieléctrico, en las ecuaciones de Maxwell se intercambia ϵ_0 por ϵ y se cambia μ_0 por μ . Las ondas de luz en este medio se transportan a velocidad de $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$

Absoluto Índice de Refracción de un Material: se define como:

$$n := \frac{c}{v} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} = \pm \sqrt{K_E K_M}$$

Nos interesamos en materiales que son transparentes en el espectro visible y que no son magnéticos. En general, entonces $K_M \simeq 1$ y por lo tanto, tenemos que:

$$n \simeq \sqrt{K_E}$$

Con K_E la constante eléctrica. Surge una dificultad con que K_E (y por tanto n) es dependiente de la frecuencia. Este fenómeno recibe el nombre de **dispersión** como ya se mencionó.

4.4.1. Scattering y Absorción

Incidencia de un fotón en un átomo:

Cuando un fotón incide con un átomo, se presentan dos posibilidades dependiendo de la frecuencia del fotón:

- 1) Scatter: Redireccionar al fotón sin alterarlo.
- 2) Absorber (La energía del fotón es equivalente a alguna de las energías de los estados excitados o frecuencias resonantes): El átomo absorbe la luz y se excita. En un objeto denso, es común que esta energía extra se transfiera rápidamente a los alrededores por colisiones con otros átomos. Dividimos mejor la definición:

Absorber: Cuando un átomo absorbe a un fotón y por tanto gana energía.

Absorción Disipativa: La absorción mencionada se convierte en calor que se disipa por el material.

El Scattering se puede pensar como que el fotón no tiene la energía adecuada para excitar al átomo, pero sí lo hace oscilar levemente (siguiendo en el ground state). Ésta oscilación constituye un dipolo oscilante que creará un fotón de respuesta (con la misma energía que el original). Este es el rebote de la luz en el átomo .

Podemos pensar en un átomo como una fuente de ondas electromagnéticas esféricas (aunque es un modelo simplista y no es correcto). Si la luz incidente no está polarizada en alguna dirección entonces el scattering sucede en direcciones aleatorias.

Cuando un material sin frecuencias de resonancia en la luz visible es bañado con luz, sucede un Scattering no resonante y los átomos rebotan la luz, cada átomo tiene la apariencia

de ser un generador de trenes de onda esféricos.

4.4.2. Dispersión:

Como ya se mencionó, es el fenómeno por el cual el índice de refracción es dependiente de la frecuencia. Todos los medios son dispersivos.

Recordar que un cuerpo bajo un campo eléctrico se polariza con un vector de polarización \vec{P} . Para dieléctricos lineales, \vec{P} y \vec{E} el campo total son proporcionales:

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$$

El vector de polarización es una medida de la diferencia entre el campo con y sin el medio dieléctrico. Esta disminución en el valor del campo es lo que causa que cambie el valor de la velocidad de la luz.

Para moléculas con un momento polar permanente, si la frecuencia de la luz ω es alta, las moléculas (que son pesadas) no serán capaces de girar al ritmo de ω y por lo tanto P no tendrá un valor tan alto, lo que causa que K_E disminuya.

Por eso, el índice de refracción del agua $n = \sqrt{K_E}$ es alto a bajas frecuencias pero de repente baja considerablemente.

Por otro lado, los electrones tienen un momento de inercia bajo, por lo que son capaces de moverse junto con el campo eléctrico de la onda ω .

La nube de electrones se encuentra en equilibrio a cierta distancia del núcleo (digamos en un punto de equilibrio $x = 0$). Y podemos pensar que al distorcionar levemente la nube, habrá una fuerza restitutiva F que suponemos lineal para x muy pequeño. Entonces, $F = -k$ describirá el movimiento de la nube de electrones, que tiene una frecuencia natural de $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Si ahora lanzamos un fotón con frecuencia ω , entonces va a mover a la nube de electrones con una fuerza $F = q_e E_0 \cos \omega t$, que es una Driven Force. entonces se creará una forced oscillation (con damping porque al oscilar, el dipolo electrón-núcleo crea una onda EM y va perdiendo energía). Entonces, siendo x la posición de la nube de electrones con respecto al equilibrio, nos queda que al llegar un fotón de frecuencia ω , la posición del electrón viene dada por:

$$m_e \ddot{x} + m_e \omega_0^2 x = q_e E_0 \cos \omega t$$

Esta ecuación diferencial se resuelve como es común, y eliminamos los transients (solución homogénea que desaparece rápido) por lo que sólo nos queda adivinar una respuesta del tipo $x_0 \cos \omega t$ y nos queda que el electrón oscila con respecto a su punto de equilibrio:

$$x(t) = \frac{q_e/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2} E_0 \cos \omega t$$

Es decir, al llegar la luz al electrón, y suponiendo que ésta no es igual a la frecuencia normal, el electrón oscila igual que la luz de llegada y **con una amplitud mucho más grande**

conforme la frecuencia del fotón se acerca a la frecuencia normal del electrón.

Si no hay una fuerza externa (no llega un fotón), el electrón oscila a su frecuencia normal de ω_0 .

Si la frecuencia del fotón es menor a la del electrón ($\omega < \omega_0$), entonces la posición del electrón tiene el mismo signo que E y es capaz de seguirlo permanecer en fase.

Si la frecuencia del fotón es mayor a la natural del electrón ($\omega > \omega_0$), la posición del electrón tiene signo opuesto a E y está desfasado por 180 grados.

Esta oscilación driven por el fotón genera a un dipolo oscilante con frecuencia ω , que como se dijo antes, crea un tren de onda de frecuencia ω . Es así como un fotón incidente es 'absorbido' por el átomo pero luego lanza un fotón con la misma frecuencia.

El momento dipolar del dipolo en un tiempo t es: $p = q_e x$.

Si hay un haz de luz con frecuencia ω impactando a muchos átomos, cada uno crea un dipolo oscilante con $p = q_e x$ por lo dicho antes, y si hay N electrones oscilando por unidad de volumen, se crea un vector de polarización total de:

$$P = q_e x N = \frac{q_e N E(t) / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Y finalmente, como $P = (\epsilon - \epsilon_0)E$, tendremos que $\epsilon = \epsilon_0 + P/E$. Entonces:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{q_e^2 N / m_e}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Finalmente, usando que $n^2 = K_E = \epsilon / \epsilon_0$. llegamos a la **Ecuación de Dispersión:**

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{N q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Entonces, un rayo de luz entrante con freq ω hace oscilar a los electrones :(de frecuencia natural ω_0) a ω . Esta oscilación genera un nuevo fotón, por lo que el fotón entrante 'rebota'. Además la amplitud de esta oscilación es dependiente de la cercanía de ω con ω_0 . Esta oscilación altera al campo de polarización y por tanto altera a la constante dieléctrica y finalmente al índice de refracción.

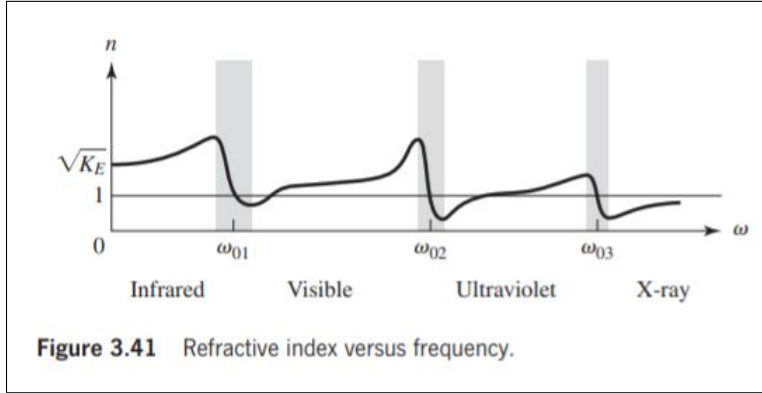
Si la frecuencia del fotón es mayor a la natural $\omega > \omega_0$, entonces los electrones oscilan desfasados y el índice de refracción es menor que 1.

En frecuencias menores a la frecuencia natural de resonancia del electrón $\omega_0 < \omega$, el índice de refracción es mayor a 1.

En general, un material tiene varias frecuencias de resonancia $\omega_{01}, \omega_{02}, \dots$. Si hay N moléculas por unidad de volumen y cada una con una porcentaje de f_j de oscilaciones a ω_{0j} , entonces el índice de refracción como función de la frecuencia incidente es:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \left(\frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2} \right)$$

Notar que cuando intentamos evaluar n justo en una frecuencia de oscilación, tenemos un pico o indeterminación. Esto se debe a que omitimos el término debido a damping por la energía que pierde el electrón al irradiar. Al introducirlo, la función se ve como sigue:



La gráfica en general se ve como aquí. Conforme la frecuencia se acerca a una frecuencia de resonancia, el índice de refracción cambia drásticamente. Estos valores se llaman bandas de absorción, porque son los puntos en los que el átomo absorberá la luz.

Dispersión Normal: Cuando n aumenta con la frecuencia.

Dispersión anormal: n disminuye conforme aumenta la frecuencia (comportamiento dentro de las

bandas de absorción)

Cuando la luz blanca pasa por un prisma de vidrio, la luz azul tiene un índice de refracción mayor que la roja (por mayor frecuencia) y por tanto la luz azul se desvía más.

Si incluimos el término de Damping, la ecuación diferencial a resolver tiene ahora un término $m_e \gamma \dot{x}$ y al resolverla queda:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{oj}^2 + \omega^2 + i\gamma_j \omega}$$

Los materiales transparentes tienen sus frecuencias características fuera de la región visible del espectro.

También, los átomos pueden oscilar alrededor del centro de la molécula de la que forman parte, pero al ser muy masivos, su frecuencia natural de oscilación es muy baja. Por eso, moléculas como H_2O o CO_2 tienen resonancias en el infrarrojo.

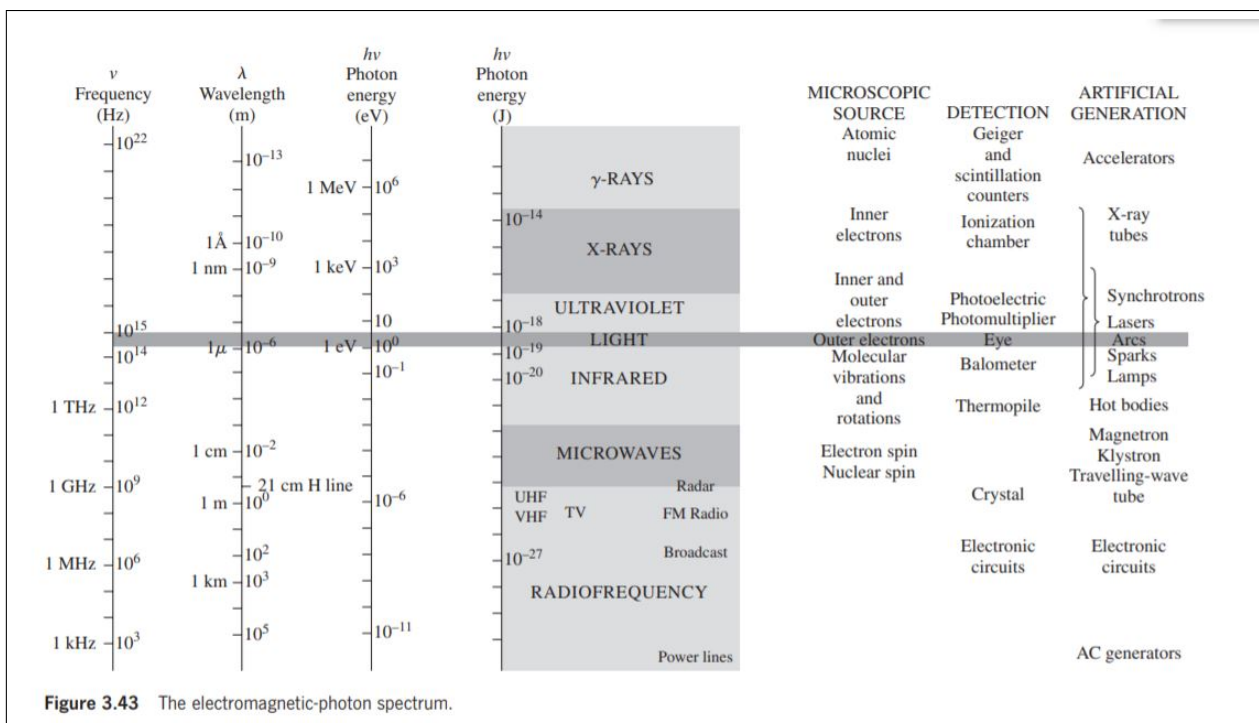
En Resumen: Cuando llega la luz ω a un material con frecuencia natural ω_0 , hace mover a la nube de electrones con una frecuencia de oscilación ω , lo que crea un nuevo tren de ondas.

Si la frecuencia ω es similar a la frecuencia natural de oscilación (está en una de las bandas de absorción), el electrón oscilará con una amplitud muy alta. Por lo tanto, hay una gran cantidad de energía electromagnética eliminada de la onda y cedida al movimiento del electrón que se disipa térmicamente por el medio, se genera entonces, una absorción disipativa. El

material es opaco a este tipo de luz

Si la frecuencia ω está lejos de la frecuencia de oscilación natural ω_0 , entonces el electrón oscila a ω pero con una amplitud muy baja, por lo que hay poca pérdida de energía y el fotón rebota en un Scattering. El material es transparente a este tipo de luz y la luz rebota (ya veremos cómo y cómo preserva su dirección)

4.5. El Espectro Electromagnético-Fotón



Radiofrecuencia: Ondas con muy alta longitud de onda y baja frecuencia. Se usan para la televisión y radio.

Microondas: Ondas con una longitud de onda un poco menor.

Infrarrojo: Ondas justo debajo de la luz visible. Las moléculas de cualquier cuerpo sobre el 0 absoluto irradian a IR. Los cuerpos calientes irradian especialmente fuerte.

Luz visible: En un cuerpo incandescente o un filamento caliente, los electrones son acelerados y presentan colisiones frecuentes. Las emisiones de transmisión se llaman radiación térmica. La luz emitida es característica de los niveles de energía de los átomos.

Luz blanca: Es la combinación de toda la luz del espectro visible y un prisma lo único que hace es dividir esta luz.

Black Body: Un emisor ideal, que no absorbe luz y emite toda. La frecuencia con la que

emite depende de la temperatura. La temperatura tiene que ser considerablemente alta para que se emita luz visible. Se puede relacionar así el color con la temperatura.

Ultravioleta: Luz con un poco más de energía. Se requiere que un electrón haga un salto energético particularmente alto.

Rayos X: Tienen energía considerablemente mayor. Se pueden generar de manera más práctica al desacelerar una partícula cargada rápida. Los átomos a los que los que les pega pueden resultar ionizados.

Rayos Gamma: Los más energéticos. Se producen cuando hay un cambio en el núcleo de un átomo.

5. Propagación de la Luz:

5.1. Rayleigh Scattering:

Recordemos que el Scattering que conocemos hasta ahora sucede cuando un fotón choca con un átomo y la frecuencia del fotón no corresponde con una de las posibles bandas de absorción del átomo (la energía del fotón no corresponde con las posibles energías de saltos de los electrones).

Entonces, el fotón no hará saltar al electrón, sino que será absorbido y sólo lo hace oscilar levemente desde su ground state. Esta oscilación hará que se cree un nuevo fotón (la oscilación de un dipolo crea luz) con la misma energía que el entrante (un scattering elástico). Si el nuevo fotón va en una dirección predominantemente ortogonal a la del fotón entrante, hablamos de un **Scattering Lateral**.

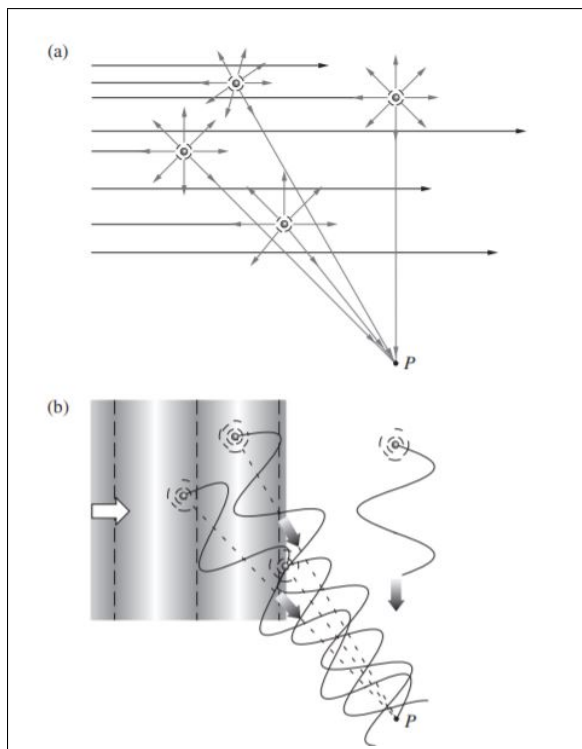
La amplitud de la luz rebotada depende de la amplitud con la que oscila el electrón (que depende de la cercanía de la frecuencia de la onda con alguna frecuencia normal del átomo). Pero como **todas las moléculas tienen frecuencia de resonancia en el rango UV**, entonces la luz violeta y azul son scattereadas más que la luz amarilla y roja.

Rayleigh Scattering: Cuando las partículas scatteras tienen un tamaño menor a la longitud de onda de la luz incidente. La luz rebotada tiene una intensidad proporcional a $1/\lambda^2$. Es el tipo de scattering que sucede en el cielo.

La luz del sol llega a la atmósfera y las ondas cercanas al rojo atraviesan como si nada, mientras que las azules son scattereadas y rebotan y le dan color al cielo. Sin embargo, el nivel de scattering depende de la densidad del aire, un medio denso no scatterea mucho lateralmente y entonces la atmósfera baja no scatterea lateralmente ni al azul. Si no fuera así, las montañas lejanas se verían rojas porque toda su luz azul se scattereó lateralmente.

5.1.1. Scattering e Interferencia:

En un medio denso, los muchos átomos contribuyen muchas ondas electromagnéticas scattereadas. **En un medio denso, la luz no se scatterea mucho lateralmente** y ahora veremos por qué.



Las ondas de luz llegan al medio y son scattereadas en todas direcciones, pero si el medio es poco denso (las moléculas están separadas por distancias comparables con λ), las ondas scattereadas en la dirección lateral se encontrarán aleatoriamente fuera de fase y no interferirán por lo que hay scattering lateral (como en la parte alta de la atmósfera). Si las moléculas no están tan separadas, se puede crear interferencia en la dirección lateral y resulta en menos scattering lateral.

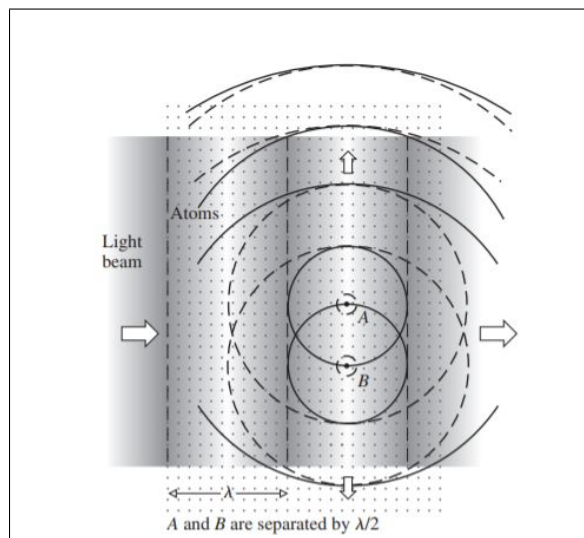
Propagación Hacia Adelante:

La única dirección geométicamente diferente a las demás es la dirección con la que llega en primer lugar el haz de luz.

Las ondas rebotadas en esta dirección interfieren positivamente y es esto lo que permite que la luz se siga propagando en esta dirección.

Cuando la luz llega a un átomo A , genera que éste mande ondas en todos los sentidos, nos concentramos en la dirección en la que se estaba moviendo en primer lugar el haz. En esta dirección, la luz scattereada va a tener una fase de 180 grados con respecto a la original (la luz scattereada generalmente rebota con un desfase de 180) y se moverá junto a la luz original siempre en perfecto desfase. Entonces, la luz original llegará a un punto B , el cuál scattereará una nueva onda en la misma dirección y con desfase de 180. Como el haz de A venía siguiendo al haz original, ahora se encontrará con el de B y estarán en fase, por lo que interferirán constructivamente.

Por lo tanto **Todas las ondas scattereadas se suman constructivamente en la dirección hacia la que se mueve el haz original** sin importar la densidad o arreglo del medio.



En un medio de densidad óptica alta (muchas moléculas por cubo de longitud λ) y con moléculas ordenadas, la luz scattereada lateralmente se suele cancelar y sólo queda la luz hacia adelante. Como se ve en el dibujo, por eso la atmósfera baja no scatterea mucho en las direcciones laterales (pero la alta sí porque es menos densa y por la imagen de arriba). Mientras más ordenado y denso sea el medio, más se va a cancelar el scattering lateral y preservar el de hacia adelante.

El scattering suele ser débil. Un rayo de luz verde debe de viajar 150km en aire para que la mitad de su energía se pierda en scattering lateral.

Por otro lado, en el agua hay 1000 veces más moléculas por lo que esperamos que sólo pueda viajar como 150m hasta perder la mitad de su intensidad. Sin embargo, el agua es más ordenada y densa, por lo que no hay tanto scattering lateral y la luz no pierde tanta energía de esa manera como en el aire. Así, puede haber más scattering que en el aire, pero no 1000 veces más.

Mie Scattering: Es el scattering debido a moléculas de aprox. la longitud de onda de la luz. Prácticamente no depende de λ en este rango. Por eso, en las moléculas de vapor de las nubes, toda la luz blanca se scatterea sin que una lo haga más que otras y la nube se ve blanca.

Geometrical Scattering: Cuando las partículas son como 10 veces más grandes que la longitud de onda, se puede usar la aproximación de óptica geométrica.

5.1.2. Transmisión y el índice de Refracción:

La transmisión de luz en un medio homogéneo es un proceso repetitivo de scattering y rescattering. Cada evento introduce un shift en la luz y en total hace que la luz parezca ir más lento, aunque la velocidad de los fotones sea siempre c .

Para entender esto, definimos la **Onda principal** como la onda que llega al medio, la **onda secundaria** como la onda causada por el scattering en la dirección de propagación, como se ve en la última imagen. Finalmente, tenemos la **onda transmitida** que es la superposición de lo que queda de la onda principal junto con la onda secundaria y es la onda para la cuál definiremos la velocidad. La onda primaria y secundaria se propagan por el vacío interatómico a velocidad c .

La teoría nos dice que el electrón oscilador en un átomo sólo puede mantenerse en fase a la driving force (la onda principal) si la frecuencia (de la onda principal) es relativamen-

te baja. Conforme la frecuencia de la onda principal aumenta de frecuencia, el electrón se atrasa y un análisis detallado muestra que cuando la frecuencia está en resonancia, el retraso es de 90 grados (es mejor hacer fuerza al columpiar justo cuando la persona está abajo).

Si la onda drive es $F_0 \cos \omega t$, entonces la solución particular para el movimiento del electrón es $\rho \cos(\omega t + \theta)$, donde θ vale 90 grados cuando $\omega = \omega_0$. De hecho, en general, el retraso de la onda de respuesta viene dado por θ donde $\tan \theta = -\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$. Lo cual vale 0 cuando ω es mucho menor que ω_0 (el sistema puede keep up con la oscilación externa), vale 90 cuando $\omega = \omega_0$ y vale 180 cuando ω es mucho más grande (el sistema está totalmente retrasado. (ver óptica de Feynman o capítulo 23 resonancia”).

A parte de este efecto que sale de resolver la ecuación de oscilador armónico forzada con damping, hay otro efecto más: cuando se combinan los scatterings de muchos átomos, la secondary wave resultante siempre tiene un desfase de 90 grados respecto a los scatterings. Entonces, hay que sumar estos dos desfases.

En total, se ve como estas gráficas. Llega una onda primaria con frecuencia ω a un átomo con frecuencia natural ω_0 . Entonces se crea un oscilador forzado con damping (hay que resolver $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0/m \cos(\omega t)$).

Resulta que la solución es que el electrón empieza a oscilar con la ecuación $x(t) = \rho F_0 \cos(\omega t + \theta)$. (bueno esta es la solución particular, que es la única que importa cuando mueren los transients)

La amplitud de este nuevo movimiento viene dado por ρF_0 y es la primera gráfica, que es máxima en ω_0 .

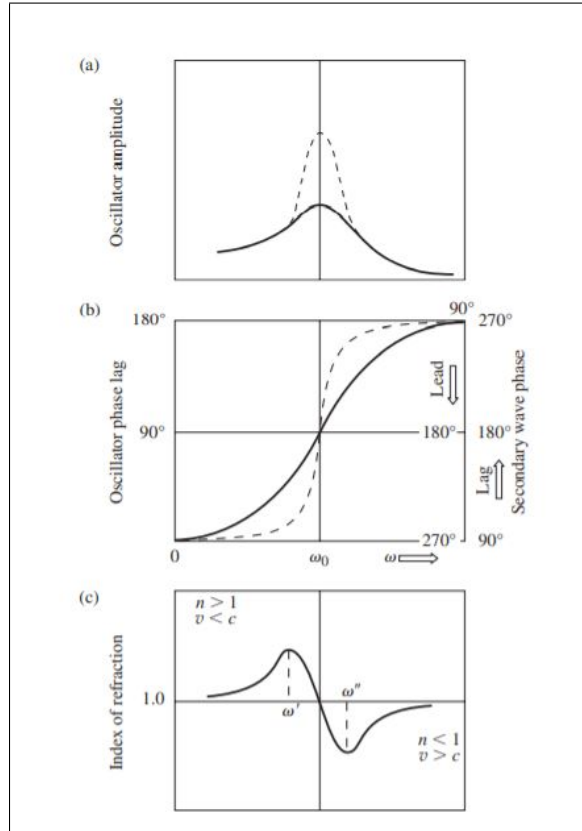
La frecuencia del movimiento del electrón es ω pero tiene un desfase dado por θ que viene en la segunda gráfica (eje izquierdo) y vemos que corresponde a lo mencionado antes.

La onda secundaria está formada cuando muchas de estas oscilaciones se suman, y resulta que por esa suma, se retrasa unos 90 grados más (por

eso los ejes derechos).

La línea punteada corresponde a lo que pasa a menor damping.

Entonces, la onda transmitida será la suma de la onda principal $F_0 \cos \omega t$ y la onda secundaria $\rho F_0 \cos(\omega t + \theta)$. Su suma se puede calcular con los métodos ya vistos en suma de ondas, para dar una onda suma $F_T \cos(\omega t + \alpha)$.



Por ahora, lo único importante es que la onda transmitida tendrá un nuevo desfase y amplitud que dependen del desfase y amplitud que dependen de la secundaria.

Para frecuencias menores a ω_0 , la onda transmitida laggea a la principal, mientras que para frecuencias mayores a ω_0 , la onda transmitida lidera a la principal. Para el caso especial en que $\omega = \omega_0$, las ondas principal y secundaria están en perfecto desfase y la onda transmitida tiene mínima amplitud.

Conforme la onda transmitida avanza por el medio, sucede scattering una y otra vez y si $\omega < \omega_0$, la onda transmitida se va atrasando cada vez más. Mientras que si $\omega > \omega_0$, la onda transmitida se va adelantando. Si $\omega = \omega_0$, la onda transmitida está siempre en fase con la original y se mueve a la misma velocidad. En total, el índice de refracción sigue la gráfica 3.

Esto explica por qué la grafica de $n(\omega)$ vs ω de antes se ve de la forma en que se ve en las bandas de absorción.

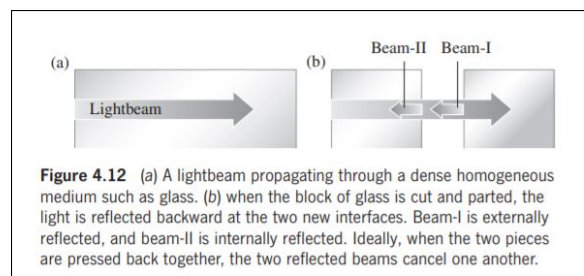
Cuando $\omega \ll \omega_0$, la onda secundaria se desfasa por 90 grados, pero tiene una amplitud muy baja, por lo que no contribuye mucho a atrasar a la onda original. Cuando $\omega < \omega_0$, la amplitud es mayor y el desfase de la secundaria sigue siendo de entre 90 y 180 grados atrasada, por lo que la onda resultante se atrasa bastante y es muy lenta. Cuando $\omega = \omega_0$, la amplitud de la secundaria es máxima, pero su desfase es 180, lo cual no atrasa ni adelanta a la onda original, sólo la disminuye, por lo que la velocidad es c . Cuando $\omega > \omega_0$, la amplitud de la secundaria es alta y está adelantada, por lo que adelanta a la onda transmitida resultante y la hace ir más rápido. Cuando $\omega \gg \omega_0$, la onda secundaria está muy adelantada, pero su baja amplitud contribuye poco y no causa que la onda resultante sea mucho más rápida.

Entonces, el índice de refracción aparece cuando el proceso de absorción y emisión avanza o retrasa las fases de los fotones scattereados, aunque todo el tiempo se mueven a c . De ahora en adelante supondremos que la onda se mueve a $v \neq c$ para estudiarla.

5.2. Reflección:

Cuando una onda de luz viaja en un solo medio, como vimos antes, la luz scattereada se cancela en todas las direcciones pero en general se cancela en todas excepto en la de propagación. Si el medio está cambiando de densidad con una transición continua, no habrá reflexión. Sin embargo, en la frontera entre dos medios, hay un gran cambio en el scattering y ya no toda la luz se va a cancelar, por lo que una parte se refleja.

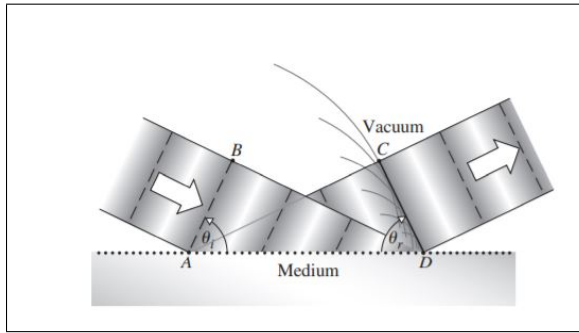
Se puede explicar como en el dibujo, cuando el medio es continuo, el beam no se refleja porque todos los scatterings laterales y hacia atrás se cancelan. Sin embargo, cuando partimos el material en 2, los scatterings de repente dan un salto discontinuo y ya no son capaces de cancelarse totalmente. Entonces la luz se refleja en la frontera.



El primer beam es una reflexión externa y el segundo es una reflexión interna.

Recordando el Rayleigh scattering, la cantidad de scattering es proporcional a $1/\lambda^4$ (por lo que longitudes de onda cortas como el azul son más scattereadas). Sin embargo, como la longitud de onda es menor, contribuyen menos capas de átomos a la reflexión. Estos efectos suelen contrarrestarse y toda la luz blanca se scatterea por igual.

5.2.1. Ley de Reflexión



Para saber el ángulo, notamos que el wavefront AB se transforma en CD . Las partes C y D llegarán en fase si $AC = BD$. Luego, como los dos triángulos son semejantes, concluimos que:

$$\theta_i = \theta_r$$

Además, el rayo de incidencia, el de reflexión y el vector normal se encuentran en el mismo plano.

Rayos: Podemos reemplazar los frentes de onda por un solo rayo para hacer el dibujo más

sencillo.

Reflección Difusa: Cuando el medio es muy rugoso (comparado con λ) y rayos paralelos se reflejan en distintas direcciones.

Reflección Especular: Si el material es muy liso (comparado con λ), rayos paralelos se reflejan de la misma forma.

5.3. Refracción

Los átomos en el borde del material reflejan luz pero también scatterean hacia adelante, haciendo que la onda de luz entre al medio.

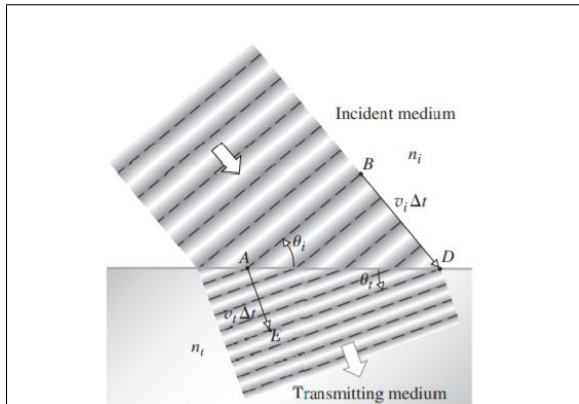


Figure 4.19 The refraction of waves. The atoms in the region of the surface of the transmitting medium reradiate wavelets that combine constructively to form a refracted beam. For simplicity the reflected wave has not been drawn.

Sin importar cómo lo visualicemos, cuando la luz entra al otro medio, su velocidad es ahora $v \neq c$.

Notar que en tiempo Δt en el que la esquina derecha viaja de B a D una distancia $BD = \Delta t v_i$, pero la otra parte viaja a menor velocidad, una distancia de $AE = \Delta t v_r$.

El wavefront reflejado va de E a D y esta distancia es igual a la de AB . Por lo tanto, podemos llegar a que, **Ley de Snell:**

$$\frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\sin \theta_t}{v_t} \Rightarrow n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_j$$

Además, como en la reflexión, el plano de incidencia y refracción es el mismo.

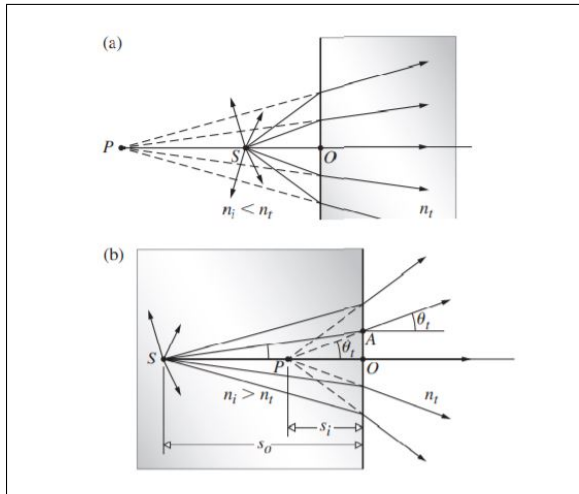
Cuando $n_i < n_t$ (el medio de llegada es de mayor índice), entonces el rayo se dobla hacia la normal.

Cuando $n_i > n_t$ (el medio de llegada es de menor índice), entonces el rayo se aleja de la normal.

5.3.1. Refracción de un Source Point:

Si tenemos un punto que irradia luz esféricamente, al llegar a otro medio, cada rayo se va a refractar de manera distinta. Sin embargo, si vemos una cantidad pequeña de estos rayos, parecerá que vienen de otro punto P .

Este par de puntos se conocen como puntos conjugados. Notamos la diferencia entre la distancia-objeto (distancia a S), y la distancia-imagen (distancia a P).



Suceden tres cosas importantes cuando el rayo pasa de un medio a otro:

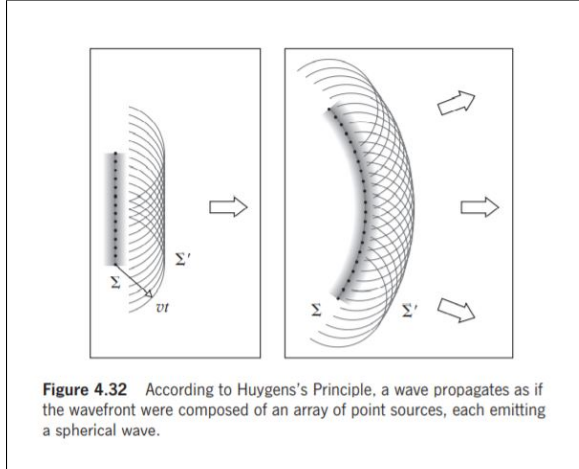
- 1) Cambia de dirección.
- 2) El beam en el vidrio tiene una sección transversal mayor al beam en el aire.
- 3) La longitud de onda disminuye, porque la frecuencia no cambia mientras que la velocidad sí. $\lambda = v/f = c/(nf)$, entonces:

$$\lambda = \lambda_0/n$$

Por lo tanto, cuando hablamos de colores y longitudes de onda, debemos referirnos a la longitud de onda en el vacío. Se ha asumido que la luz reflejada y refractada tienen la misma frecuencia que la luz que entra. Esto es razonable debido a que la luz que entra hace oscilar a los átomos del vidrio a esa frecuencia.

5.3.2. Principio de Huygen's:

Principio de Huygen's: Cada punto en un frente de onda propagante sirve como un source de ondas secundarias esféricas. Tal que el frente de onda final es el envelope de estas ondas secundarias.



Por lo tanto, si luz llega a una pantalla con forma Σ , luego se propagará con forma Σ' . Los rayos de luz son entonces trayectorias perpendiculares a todos los frentes de onda.

Congruencia Normal: Si un grupo de rayos es tal que podemos encontrar una superficie ortogonal a todos, se dicen que tienen congruencia normal.

Teorema de Malus y Dupin: Un grupo de rayos con congruencia normal va a preservar esta congruencia normal después de cualquier canti-

dad de reflexiones y refracciones.

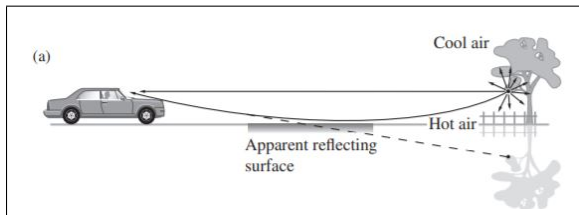
5.4. Principio de Fermat:

El camino que hace un rayo de luz es siempre aquél que tome el menor tiempo posible.

A partir del principio de Fermat se puede probar la ley de reflexión y la de refracción. Si un rayo de luz va de S a P y el índice de refracción es función de la posición s . Entonces se define la **Longitud de Camino Óptico** como el tiempo total (que se consigue como $v * s = n/c * s$) pero dividido entre c :

$$OPL = \int_S^P n(s) ds$$

Es decir, es la distancia equivalente que recorrería el rayo en el vacío. Esto explica el fenómeno de mirages, en el que el aire caliente justo arriba del suelo tiene un índice de refracción menor que el frío y la luz viaja entonces por él. Entonces el árbol parece estar en el piso.



Formulación moderna: Un rayo de luz de S a P viaja por un camino tal que el OPL es estacionario con respecto a cambios en el camino. Se puede pensar como que diferentes rayos de luz rebotan en diferentes direcciones y toman caminos muy distintos para ir de P a S . Y todos los posibles caminos suceden a la vez.

Sin embargo llamemos C al camino de mínimo

OPL que va de P a S .

Como es un mínimo, hay muchos caminos parecidos con un OPL muy similar al de C . Entonces estos caminos se refuerzan positivamente porque llegan a P en fase. Los otros caminos

llegarán a P con OPL muy distintos y se cancelarán.

No tiene que ser necesariamente un OPL mínimo sino sólo un camino estacionario.

5.5. Visión EM:

Digamos que tenemos una onda de luz polarizada linealmente:

$$\vec{E}_i = E_{0i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t + \epsilon_i)$$

Donde E_{0r} es constante para asegurarnos de que la luz está polarizada linealmente. Digamos que la onda llega a un material. Entonces se crean dos ondas, la reflejada E_r , y la refractada E_t con ecuaciones:

$$\begin{aligned}\vec{E}_r &= E_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \epsilon_r) \\ \vec{E}_t &= E_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \epsilon_t)\end{aligned}$$

Una condición de frontera que debe de cumplir el campo eléctrico es que el componente de E tangente a la superficie se mantiene igual.

Entonces, viendo el dibujo, nombrando \vec{u}_n al vector ortonormal y usando la condición de frontera, tenemos:

$$\vec{u}_n \times \vec{E}_i + \vec{u}_n \times \vec{E}_r = \vec{u}_n \times \vec{E}_t$$

Por lo tanto, podemos sustituir las expresiones de \vec{E}_i y las demás para obtener:

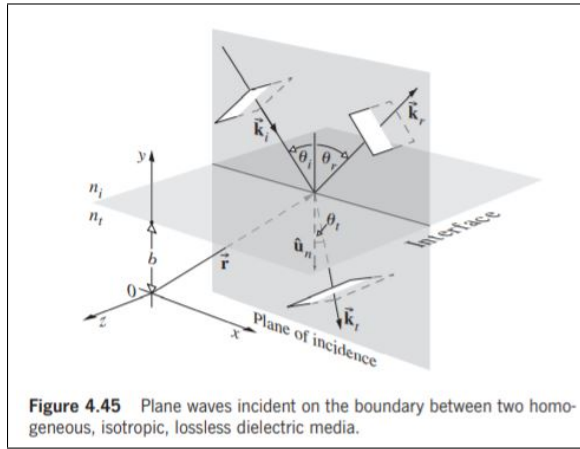
$$\vec{u}_n \times E_{0i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) + \vec{u}_n \times E_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \epsilon_r) = \vec{u}_n \times E_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \epsilon_t)$$

Esta relación debe de ser válida para cualquier punto en la superficie ($y = b$) durante todo el tiempo, por lo tanto, la dependencia con el tiempo debe de ser la misma, entonces:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t$$

Si \vec{r} es un punto en la superficie ($y = b$), para que se cumpla la igualdad pasada, debemos de tener:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} + \epsilon_r = \vec{k}_t \cdot \vec{r} + \epsilon_t$$



Obtenemos así que $(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r} = \epsilon_r$

Entonces, \vec{r} dibuja un plano (que es la interface) perpendicular a $\vec{k}_i - \vec{k}_r$. Por lo tanto $\vec{k}_i - \vec{k}_r$ es paralelo a u_n .

Pero como la onda incidente y reflejada están en el mismo medio y se mueven a la misma velocidad, la norma de k_i y k_r son iguales, lo que nos lleva a concluir que para que $\vec{k}_i - \vec{k}_r$ sea paralelo a u se debe de tener que:

$$\theta_i = \theta_r$$

Además, los tres vectores están en el mismo plano.

Por otro lado, a partir de la ecuación de Snell, obtenemos $(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r} = \epsilon_t$.

Por lo que $(\vec{k}_i - \vec{k}_t)$ es normal al plano de interface por el mismo argumento de antes (\vec{r} dibuja un plano y ese plano tiene que ser el plano de interface). Por lo tanto, los componentes tangentes de estos vectores deben de ser iguales para que se cancelen:

$$k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t$$

Pero como $\omega_i = \omega_t$, podemos multiplicar ambos lados por c/ω_i para obtener la ecuación de refracción:

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$$

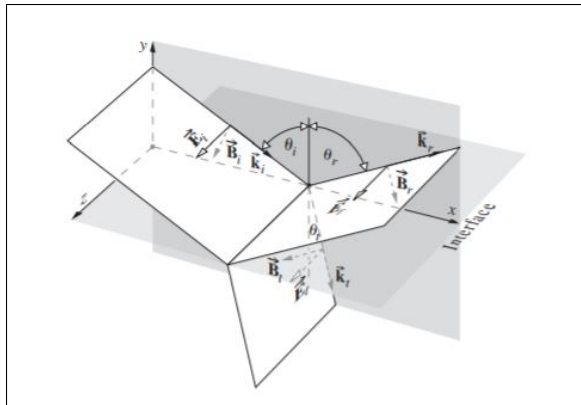
5.6. Ecuaciones de Fresnel:

Las ecuaciones de Fresnel nos permiten conocer la amplitud con la que queda la onda reflejada y la amplitud con la que queda la onda refractada.

Primero recordamos un par de cosas, cuando un campo \vec{E} y un campo \vec{B} atraviesan una superficie de un medio a otro, entonces:

- 1) El componente tangente de \vec{E} es continuo a través de la frontera
- 2) El componente normal de $\epsilon \vec{E}$ es continuo a través de la frontera
- 3) El componente normal de \vec{B} es continuo a través de la frontera
- 4) El componente tangencial de $1/\mu \vec{B}$ es continuo a través de la frontera.

Caso 1: \vec{E} es perpendicular al plano de incidencia:



En este caso, la continuidad del elemento tangencial de \vec{B}/μ nos dice que:

$$-\frac{\vec{B}_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{\vec{B}_r}{\mu_i} \cos \theta_r = -\frac{\vec{B}_t}{\mu_t} \cos \theta_t$$

Luego, como $\hat{k} \times \vec{E} = v \vec{B}$ por las propiedades de las ondas, entonces tenemos:

$$B_i = E_i/v_i \quad , \quad B_r = E_r/v_r \quad B_t = E/v_t$$

Donde cada uno representa la magnitud del vector correspondiente.

Finalmente, usamos lo que ya sabemos que $\theta_i = \theta_r$ y que $v_i = v_r$, por lo que tenemos:

$$\frac{1}{\mu_i v_i} (E_i - E_r) \cos \theta_i = \frac{1}{\mu_i v_i} E_t \cos \theta_t$$

Finalmente, podemos reemplazar el $1/v_i$ y $1/v_t$ por n_i y n_t al multiplicar ambos lados por c . Entonces, combinando esto con $\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}$ (la condición de frontera para \vec{E} tomando en cuenta que E es tangente a la interface, llegamos a las **Ecuaciones de Fresnel**:

$$\begin{aligned} r_{\perp} &:= \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \\ t_{\perp} &:= \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \end{aligned}$$

Donde r_{\perp} es el coeficiente de amplitud de reflexión y t_{\perp} es el coeficiente de amplitud de transmisión. El \perp se pone para recordarnos que estamos en el caso 1 en el que el campo \vec{E} es perpendicular al plano de incidencia. Se usó $\mu = 1$, suponiendo que se trata de un medio no-magnético, que es lo común.

Caso 2) \vec{E} paralelo al plano de incidencia:

Se hace de forma similar, usando las condiciones de frontera y un poco de geometría (Hecht 117) y se llega a:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &:= \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \\ t_{\parallel} &:= \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \end{aligned}$$

Finalmente, usando la ley de Snell, se puede relacionar el ángulo de incidencia con el de refracción y simplificar así un poco las fórmulas, para llegar:

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ r_{\parallel} &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\perp} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\parallel} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \end{aligned}$$

5.6.1. Interpretación de las ecuaciones de Fresnel:

Cuando el ángulo de Incidencia es $\simeq 0$

Entonces, tenemos que $r_{\parallel} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}$

Y de hecho $-r_{\perp}$ toma el mismo valor.

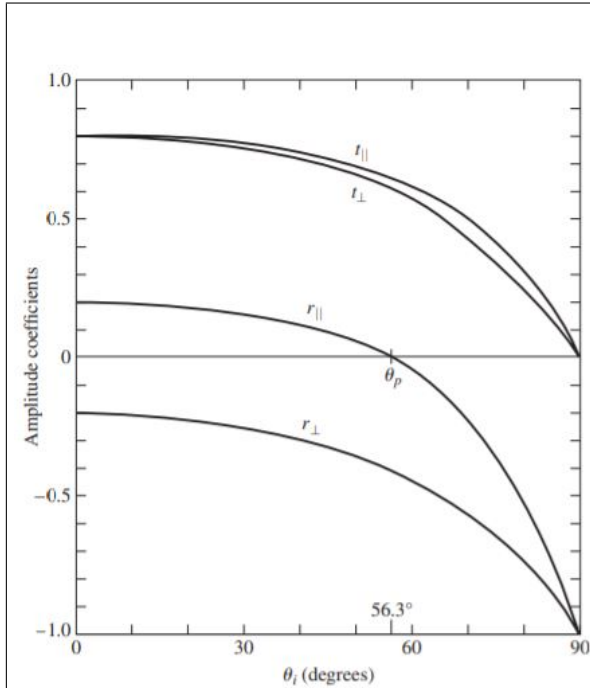


Figure 4.49 The amplitude coefficients of reflection and transmission as function of incident angle. These correspond to external reflection $n_t > n_i$ at an air-glass interface ($n_g = 1.5$).

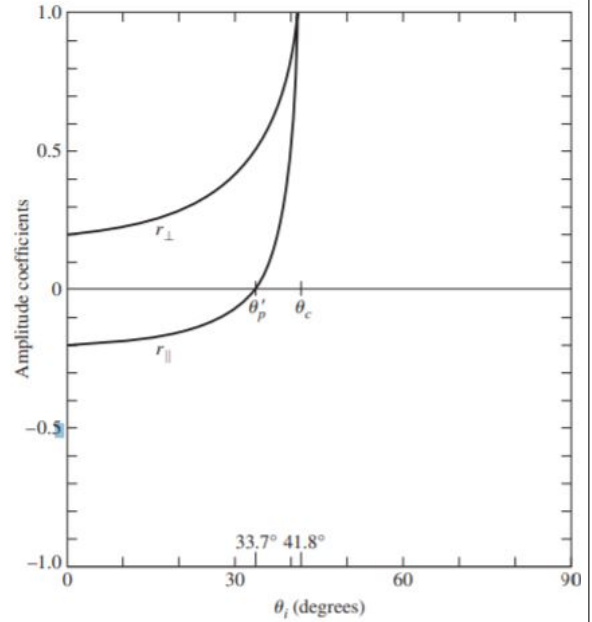


Figure 4.50 The amplitude coefficients of reflection as a function of incident angle. These correspond to internal reflection $n_t < n_i$ at an air-glass interface ($n_g = 1/1.5$).

Por otro lado, cuando $n_t > n_i$ (entra a un medio de mayor índice) se sigue por la ley de Snell que $\theta_i > \theta_t$ y por tanto r_{\perp} es negativo para todo valor de θ_i (entonces este componente se desfasa π al reflejarse).

En contraste, r_{\parallel} empieza negativo en $\theta_i = 0$ y poco a poco disminuye hasta que vale 0 cuando $\theta_i + \theta_t = 90$. El valor particular para el que sucede esto se llama **Ángulo de polarización**. Es decir, antes del ángulo de polarización, el E_r reflejado tiene amplitud opuesta (desfase de π) pero después ya tiene la misma fase que el incidente.

Cuando $\theta_i \simeq 90$, los coeficientes de reflexión tienden a -1 (se refleja casi perfectamente [y se voltea]) y los coeficientes de refracción tienden a 0. Entonces, cualquier superficie es casi un espejo cuando $\theta_i \simeq 90$.

Por ahora sólo vimos reflexión externa ($n_t > n_i$), para reflexión interna sucede lo contrario.

Cuando $n_i > n_t$, entonces r_{\perp} es siempre positivo.

El valor de r_{\perp} aumenta desde su valor inicial hasta que alcanza 1 para un ángulo θ_c (**ángulo crítico**), en el cual r_{\parallel} también alcanza 1. Entonces, en el ángulo crítico, toda la luz se refleja y nada se refracta.

Se puede conseguir usando la ley de Snell, cuando $n_i > n_t$, y hacemos $\theta_t = 90$, $\theta_i = \theta_c$ indicando que la luz no atraviesa. Entonces $\theta_c = \arcsin(n_t/n_i)$

5.6.2. Reflectancia y Transmitancia

Recordar que r_\perp indica la cantidad de luz reflejada, de entre toda la luz que llega con polarización perpendicular (no de toda la luz), lo mismo con las demás. r representa ahora sí la cantidad de luz reflejada de entre toda la luz.

Consideremos un haz de luz con forma transversal circular y área transversal A . Recordemos que la densidad de flujo radiante (cantidad de energía transmitida por unidad de tiempo y de área) es $I = \langle S \rangle_T = \frac{c\epsilon_0}{2}|E_0|^2$.

Sea I_i, I_r, I_t las densidades de flujo radiantes de la onda incidente, reflejada y refractada. Las áreas transversales de los haces son $A \cos \theta_i, A \cos \theta_r, A \cos \theta_t$. Por tanto, el poder incidente, reflejado y transmitido son $I_i A \cos \theta_i, I_r A \cos \theta_r, I_t A \cos \theta_t$. Definimos entonces:

$$\text{Reflectancia: } R := \frac{I_r A \cos \theta_r}{I_i A \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i}$$

$$\text{Transmitancia: } T := \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i}$$

Asumiendo que $\mu_i = \mu_t = \mu_0$. Y usando que $I_r/I_i = (v_r \epsilon_r |E_{0r}|^2/2)/(v_i \epsilon_i |E_{0i}|^2/2)$, entonces llegamos a:

$$R = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = r^2$$

Y similarmente,

$$T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t^2$$

Por conservación de la energía, podemos usar que $I_i A \cos \theta_i = I_r A \cos \theta_r + I_t A \cos \theta_t$, lo cual podemos simplificar a :

$$R + T = 1$$

Notemos que R_\perp es la fracción de $I_{i\perp}$ que es reflejada y no la fracción de toda la I_i que lo es. Un rayo de luz no polarizado de alguna forma particular se puede pensar como medio polarizado en la dirección \perp y medio polarizado en la \parallel , por lo tanto, la reflectancia total

Light impinges on a slab of glass in air at the polarization angle θ_p . Assume that the net transmittance is known to be 0.86, and the incoming light is unpolarized. (a) Determine the percent of the incident power that is reflected. (b) If 1000 W comes in, how much power is transmitted with its E -field perpendicular to the plane-of-incidence?

SOLUTION

(a) We are given that $T = 0.86$ and that since the beam is unpolarized half the light is perpendicular to the plane of incidence and half is parallel to it. Hence since both T_\parallel and T_\perp can be 1.0, for unpolarized light

$$T = \frac{1}{2}(T_\parallel + T_\perp)$$

Here $\theta_i = \theta_p$, and so from Fig. 4.56 $T_\parallel = 1.0$; all the light whose electric field is parallel to the plane of incidence is transmitted. Hence

$$T = \frac{1}{2}(1 + T_\perp) = 0.86$$

and for the perpendicular light

$$T_\perp = 1.72 - 1 = 0.72$$

Since

$$R_\perp + T_\perp = 1$$

$$R_\perp = 1 - T_\perp = 0.28$$

and the net reflected fraction is

$$R = \frac{1}{2}(R_\parallel + R_\perp) = \frac{1}{2}R_\perp$$

$$R = 0.14 = 14\%$$

(b) Given 1000 W incoming, half of that, or 500 W, is perpendicular to the incident plane. Of this 72% is transmitted, since $T_\perp = 0.72$. Hence the power transmitted with its E -field perpendicular to the plane-of-incidence is

$$0.72 \times 500 \text{ W} = 360 \text{ W}$$

es:

$$R = \frac{1}{2}(R_{\perp} + R_{\parallel})$$

5.7. Reflección Interna Total:

Cuando $n_i > n_t$, existe un ángulo θ_c tal que la luz transmitida sale a 90 grados (justo en la orilla), a partir de ahí, la luz se refleja totalmente y no se refracta para nada. Como mencionamos antes:

$$\sin \theta_c = \frac{n_t}{n_i}$$

Ver más en el Hecht

5.8. Propiedades Ópticas de los Metales

En un metal, hay cargas libres que se pueden mover como quieran. Esto complica el análisis exclusivo para dieléctricos que hemos hecho hasta el momento. En un metal, al aplicar un campo \vec{E} , se produce una densidad de corriente J según la regla:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

En metales tenemos que la ecuación de Ampere es $\nabla \times \vec{B} = \mu J + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu\sigma \vec{E} + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Entonces, haciendo un proceso similar al de antes, nos queda que la ecuación 'de onda' en un metal de:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

El último término es como un damping.

Para este tipo de ondas será necesario usar un índice de refracción complejo:

$$\bar{n} = n_R - in_I$$

Al hacer esto, se puede encontrar una solución para la ecuación de onda en un metal, teniendo para una onda armónica propagándose en la dirección y :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - ky) = \vec{E}_0 \cos(\omega(t - \bar{n}y/c))$$

Que en la forma compleja toma la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\omega n_I y/c} e^{i\omega(t - n_R y/c)}$$

O bien, $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\omega n_I y/c} \cos \omega(t - n_R y/c)$

Entonces, la perturbación se mueve en el medio a velocidad c/n_R (n_R corresponde al típico índice de refracción) y su amplitud es atenuada exponencialmente con ayuda de n_I debido a la energía que se pierde en cargas circulando.

Coeficiente de Atenuación: Es el coeficiente $\alpha = 2\omega n_I/c$ debido al cual la onda pierde energía.

Como la irradiancia es proporcional al cuadrado de la amplitud, tenemos que la irradiancia como función de la posición es:

$$I(y) = I_0 e^{-\alpha y}$$

(De ahí viene el 2 en la expresión para alfa).

Profundidad de penetración: Es la profundidad en la que la irradiancia disminuyó en e^{-1} , es decir, es una distancia de $y = 1/\alpha$

Los metales en general tienen profundidades de penetración muy bajas y por eso son opacos. La mayoría de los metales reflejan casi toda la luz que les llega no puede penetrar efectivamente al material.

5.8.1. La ecuación de Dispersión

Imaginamos al conductor como un ensamblaje de muchos osciladores forzados (por la luz entrante) y damped. Algunos electrones están sueltos, y son estos los que contribuyen más a los efectos ópticos.

Los electrones libres se pueden ver como osciladores con $\omega_0 = 0$. Entonces, la ecuación de dispersión queda como:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \left[\frac{f_e}{-\omega^2 + i\gamma_e \omega} \right] + \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega}$$

f_e es el número de electrones libres por cada uno de los N átomos por unidad de volumen. Así, el primer término se refiere a los electrones libres y el segundo es el conocido término para los electrones en átomos.

Notar que los electrones libres están siempre fuera de fase con respecto al campo externo, mientras que la fase de los electrones en átomo depende de la cercanía de la frecuencia externa con ω_0

Para simplificar un poco, asumiremos que los electrones libres son responsables de la mayoría de los efectos ópticos y que no tienen un damping γ_e significativo. Entonces:

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2}$$

5.9. Aspectos Familiares de la Interacción de la Luz con la Materia:

La luz que contiene cantidades iguales en todo el espectro visible es vista como blanca y es el tipo de luz que manda el sol.

Objetos con partículas pequeñas pero de tamaño mayor que las longitudes de onda involucradas van a reflejar a todas las frecuencias y por tanto se verán blancos. Sin embargo, si reducimos su índice de refracción, va a reflejar menos blanco y se va a ver más gris (como por ejemplo, al mojar el objeto).

5.9.1. Coloración Aditiva:

Colores Primarios: Las tres partes principales del espectro visible (azul, verde y rojo).

Colores secundarios: Son los que se forman al juntar colores primarios.

Magenta = Rojo + Azul , Cyan = Azul + Verde , Amarillo = Rojo + verde.

Color complementario de X: Es el color que hace falta agregarle a X para que se vuelva blanco.

Saturado: Cuando un color no contiene blanco.

Por ejemplo, cuando llega a nuestro ojo una combinación de verde y azul adecuados, aunque no ondas amarillas, nuestro ojo lo verá amarillo

5.9.2. Coloración Substractiva:

El azul del cielo se debe a que las moléculas de aire tienen resonancias en el UV, por lo que el componente azul de la luz del sol es llevado a mayores resonancias. Los rayos azules pierden energía y son scattereados en todas las direcciones. Mientras que los rayos rojos y amarillos atraviesan el aire sin demasiado cambio.

Absorción selectiva: Un objeto que sólo absorbe un cierto tipo de ondas y el resto las refleja o deja pasar.

Por ejemplo, el agua tiene una resonancia amplia en el infrarrojo, por lo que al llegar un rayo rojo, lo lleva a una gran oscilación y es absorbido, mientras que los rayos azules rebotan.

Por otro lado, un filtro amarillo lo que hace es absorber el azul, mientras que deja pasar la luz roja y verde.

Todos los colores se pueden formar al dejar pasar luz blanca por una combinación de filtros magenta, cian y amarillos.

6. Resumen De Capítulos 3 y 4:

Las leyes de Maxwell nos llevan a que cada componente de \vec{E} y \vec{B} son ondas con velocidad $1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Es una onda transversa.

1) u_E , u_B son densidad de energía del campo E y B y son proporcionales al cuadrado del módulo del campo. $[J/m^3]$

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2, \quad u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

2) u Es la densidad de energía total de una onda, es $u_E + u_B$ y como los campos cumplen $|E| = c|B|$, u es proporcional al cuadrado de $|E|$ o de $|B|$. $[J/m^3]$

$$u = \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2$$

3) \vec{S} Apunta en la dirección de movimiento de la onda y tiene como norma la energía transportada por unidad de tiempo por unidad de área, es igual a $1/\mu_0 \vec{E} \times \vec{B}$. $[J/sm^2] = [W/m^2]$

4) I : Es la cantidad de energía que transmite la luz, por segundo y por unidad de área (es el promedio de $|S|$) $[J/sm^2] = [W/m^2]$

5) \mathcal{E} es la energía de un fotón debido a su frecuencia y es igual a hf . $[J]$

6) Densidad de Flujo Promedio de Fotones: Cantidad de fotones que atraviesan una zona de área A por segundo. La cantidad de energía en una zona por área por segundo es I y por tanto, la cantidad de protones es I/hf_0 $[N/sm^2]$

7) Flujo Promedio de Fotones: Cantidad de fotones que llegan a una zona de área A por segundo. Es $\Phi = AI/hf_0$ $[N/s]$

8) Presión de Radiación: Presión que transmite una onda, es igual a su densidad de energía.

9) p_v : momento por unidad de volumen de la luz.

10) Δp = momento que gana un objeto de área A debido a la presión de la luz.

11) Momento que carga un fotón: Si un fotón tiene energía \mathcal{E} , entonces tiene un momento de \mathcal{E} por tiempo entre distancia, que resulta ser: $p = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{h}{\lambda}$

Entonces, $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

Donde \vec{k} es el vector de propagación de la onda y $\hbar = h/2\pi$.

Radiación: Una carga acelerada genera un campo eléctrico cambiante que se propaga en el espacio, una onda de luz.

La forma más común de generar luz es con un **Dipolo Oscilante**. Que genera luz a una frecuencia igual a la frecuencia de oscilación.

Un átomo tiene ciertos niveles cuantizados en los que le gusta absorber energía. Un átomo energizado suele bajar su nivel de energía al emitir un fotón con la energía de sobra que tiene.

Un átomo se puede ver como una nube de electrones alrededor del núcleo que forma un sistema oscilante con una **frecuencia natural** de ω_0 . En realidad, un átomo común tiene muchas posibles frecuencias normales.

Al llegar un rayo de luz externo (freq ω), éste ejerce una driven force sobre el electrón. Entonces, se crea un **Driven Oscillator con Damping**.

En un oscilador así, la amplitud de oscilación es mayor conforme más cerca esté ω a ω_0 . El desfase del electrón con respecto a la driven force es mínimo para $\omega \ll \omega_0$, llega a 90 cuando $\omega = \omega_0$ y es 180 para $\omega \gg \omega_0$.

Cuando llega una onda de luz a un átomo, si la frecuencia es diferente a sus frecuencias normales, entonces lo hace oscilar levemente y la oscilación crea una onda de luz nueva de la misma frecuencia (como si rebotara) en alguna otra dirección sin perder mucha energía disipada por el movimiento del electrón en una **Scattering no resonante (elástico)**. Cuando la onda de luz tiene una frecuencia similar a la del oscilador electrón, entonces lo hace oscilar fuertemente, se crea una onda rebotada pero con menos energía, **scattering resonante** por la energía disipada por el movimiento del electrón en el proceso de **Absorción**.

Un átomo bañado en luz scattereará las ondas que le llegan en todas direcciones y se puede ver como un generador de ondículas esféricas. En un material denso, si llega luz con una frecuencia similar a la frecuencia normal, mucha de la energía de estas ondas será perdida en absorción en vez de ser scattereadas al azar. Esta **absorción selectiva** le da color a las cosas.

Si a un átomo con frecuencia normal ω_0 y damping γ le llega una onda de luz de frecuencia ω (que tiene un campo $E_0 \cos \omega t$), empezará a oscilar según la función:

$$x(t) = \rho \cos(\omega t + \theta)$$

$$\text{Donde } \rho^2 = \frac{1}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]} \quad , \quad \tan \theta = -\gamma \omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$$

Dispersión: La diferencia de velocidad de la luz en un material dependiendo de la longitud de onda.

Con lo que hemos visto, se puede explicar la dispersión: cuando llega una onda de luz de frecuencia ω a un objeto con frecuencia normal ω_0 , le produce la creación de muchos dipolos oscilantes con el tiempo. Estos dipolos crean un vector de polarización P , que causan que cambie la permeabilidad del medio. Lo que hace que cambie el índice de refracción. Para frecuencias ω bajas, los dipolos están alineados con el campo E y bajan el k . Para frecuencias

altas, los dipolos oscilan contrarios al campo E , por lo que sube k y el índice de refracción. En general, tenemos:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega}$$

Donde N es el número de átomos por volumen. ω_{0j} son las frecuencias naturales, cada una con un damping γ_j y una posibilidad f_j de suceder.

Se interpreta como que la parte real es el verdadero índice de refracción y la imaginaria mide qué tan fuerte es la absorción. Luego veremos más de esto.

La dispersión normal es cuando aumentar la frecuencia aumenta el índice, y la anormal es al revés.

Rayleigh Scattering:

Cuando la luz pasa por la atmósfera, todas las frecuencias son scattered elásticamente (porque la banda de absorción más cercana está en los UV). Sin embargo, las ondas azules están cerca de UV, por lo que las ondas que scatterean rebotan con una mayor amplitud que las otras frecuencias. Entonces, azul es el color principal en ser scattereado lateralmente y le da color al cielo.

El Rayleigh Scattering sucede para moléculas más pequeñas que la longitud de onda y la intensidad de luz scattereada es proporcional a $1/\lambda^4$ (por eso el azul es más scattereada).

Scattering e interferencia: Cuando la luz está inmersa en un medio y se scatterea en todas las direcciones (todos los átomos se ven como generadores de ondas circulares). En cualquier medio, las ondas scattereadas se suman principalmente en la dirección de propagación.

Por otro lado, conforme más denso es el medio, menor es el scattering lateral. Y para materiales muy densos, la luz inmersa no se propaga lateralmente ni hacia atrás, sino sólo hacia adelante.

Transmisión e índice de Refracción: Cuando la luz está inmersa en un medio, la onda principal viaja a c y hace oscilar a los átomos en su camino (los cuales oscilan desfases según la cercanía de ω a ω_0 , para $\omega < \omega_0$, desfase de 0, para $\omega \simeq \omega_0$, desfase de 90, para $\omega > \omega_0$, desfase de 180). Esto crea una onda secundaria (pero hay que sumarle 90 a los desfases por un resultado).

Finalmente, la onda secundaria se suma con la principal y es ésta onda suma la que es transmitida y de la cuál medimos la velocidad.

Entonces, si $\omega \ll \omega_0$, la onda secundaria tiene muy baja amplitud y un atraso de 90 grados, por lo que la onda resultante viaja ligeramente más lento. Si $\omega < \omega_0$, la onda secundaria tiene amplitud un poco mayor y un atraso de entre 90 y 180 grados, por lo que la onda resultante viaja más lento. Si $\omega = \omega_0$, la onda secundaria tiene muy alta amplitud y un atraso de 180 grados, por lo que cancela a la onda original pero no le cambia la velocidad. Entonces, si $\omega > \omega_0$, la onda secundaria tiene alta amplitud y un adelanto de 0 a 90 grados, por lo que la onda resultante viaja considerablemente más rápido. Si $\omega \gg \omega_0$, la onda secundaria tiene muy baja amplitud y un atraso de 270 grados (adelanto de 90), por lo que la onda resultante

viaja ligeramente más rápido.

Reflección: Cuando una onda entra por la frontera de un cuerpo, los scattering (vemos cada átomo con un generador esférico) de los átomos en la frontera que se reflejan hacia atrás no tienen la posibilidad de cancelarse (como cuando estamos sumergidos en el material) por lo que parte de la luz se refleja. Se refleja con el mismo ángulo de entrada.

Refracción: Cuando la luz atraviesa la frontera de un material a otro, por la forma en que los átomos scatteran (como generadores de ondas esféricas), parte de la luz cambia de dirección en la frontera con $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. La refracción hace que un punto S se vea como que viene en realidad de un punto P . La frecuencia no cambia, por lo que debe de cambiar la longitud de onda.

Principio de Huygens: Cada punto en la propagación de un frente de onda sirve como un generador de ondas esféricas. El frente de onda después viene dado por el envelope de estas ondículas esféricas.

Congruencia Normal: Un grupo de rayos que es ortogonal a todos los frentes de onda. Un grupo de rayos preservará su congruencia normal tras cualquier cantidad de reflexiones y refracciones.

Principio de Fermat: La luz que viaja entre un punto P y uno S siempre lo hace en el camino de menor tiempo.

Longitud de Camino Óptico: Es la longitud equivalente que recorrería el rayo en el vacío. $OPL = \int_S^P n(s)ds$.

La luz viaja por el camino con OPL estable.

Esto explica los mirages y otros fenómenos.

El acercamiento EM: Se puede demostrar la reflexión y refracción estudiando como tal a las ondas EM y usando las condiciones de frontera de los campos E, B cuando pasan de un medio a otro. Con esto se llega a las leyes de refracción y reflexión.

E_{0i} es la amplitud de la onda entrante, E_{0r} es la reflejada y E_{0t} la transmitida o reflejada.

Las ecuaciones de Fresnel

1) Cuando E es perpendicular al plano de incidencia:

$$r_{\perp} := \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

$$t_{\perp} := \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

Donde r_{\perp} es el coeficiente de amplitud de reflexión y nos dice qué fracción de la luz orientada perp es reflejada. t_{\perp} es el coeficiente de amplitud de transmisión que nos la fracción de luz orientada perp que es reflejada.

2) Cuando \vec{E} es paralelo al plano de incidencia:

$$r_{\parallel} := \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$$

$$t_{\parallel} := \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$$

Donde r_{\parallel} es el coeficiente de amplitud de reflexión y nos dice qué fracción de la luz orientada paralela es reflejada. t_{\parallel} es el coeficiente de amplitud de transmisión que nos la fracción de luz orientada paralela que es reflejada.

Se puede usar la relación entre los ángulos de entrada, reflexión y refracción para llegar a que:

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$$

Interpretación: Cuando $\theta_i \simeq 0$, tenemos que $r_{\parallel} = r_{\perp} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}$ porque a este ángulo, no hay diferencia entre orientar perp y paralelo.

También, cuando $\theta_i \simeq 0$, tenemos que $t_{\perp} = t_{\parallel} = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$ porque a este ángulo, no hay diferencia entre orientar perp y paralelo.

Ángulo de Polarización: ángulo para el cual $r_{\perp} = 0$, lo que significa que la luz polarizada paralelo no se refleja.

Ángulo crítico: ángulo en el que $r_{\perp} = r_{\parallel} = 1$ (todo se refleja sin importar la orientación). Sólo es posible si la luz va de un medio de alto índice a uno de menor.

Escribimos sólo r y t cuando nos referimos a las razones de amplitud entre la onda de entrada y la reflejada o transmitida. Sin importar su orientación.

Reflectancia R La razón de poder reflejado (sin importar la orientación de \vec{E}): $R = \frac{I_r A \cos \theta_r}{I_i A \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} = r^2$

Transmitancia: T Es la razón de la energía de la onda transmitida y la entrante (para cualquier orientación): $T = \frac{I_t A \cos \theta_t}{I_i A \cos \theta_i} = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \frac{E_{0t}^2}{E_{0i}^2} = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} t^2$

Estas ecuaciones se valen si ponemos un \perp o \parallel en ambos lados.

Por la conservación de la energía, tendremos $R + T = 1$, $R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$, $R_{\perp} + T_{\perp} = 1$. Además, para una onda no polarizada, la mitad de la onda es paralela y la otra mitad perp, por lo que $R = 1/2(R_{\perp} + R_{\parallel})$, $T = 1/2(T_{\perp} + T_{\parallel})$

Propiedades Ópticas de los Metales:

En los metales, hay cargas libres, lo que convierten a la ecuación de onda en:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Para esta ecuación σ funciona como un término de damping. Para resolverla, necesitamos usar un índice de refracción complejo $n = n_R - in_t$. Usando esto, nos queda que la solución a la ecuación diff para una onda que se mueve en la dirección y con frecuencia ω es: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\omega n_i y/c} \cos \omega(t - n_R y/c)$

Entonces, la parte imaginaria de n funciona como un atenuador de la onda.

Similar a como antes teníamos un índice imaginario donde la parte imaginaria estaba relacionada con la absorción (atenuación) de la onda. Esta parte imaginaria era máxima cuando $\omega \simeq \omega_0$ indicando que se encuentra en una banda de absorción.

En los metales, no sólo oscilan los electrones amarrados a un átomo, sino que también los electrones libres. Estos no son driven oscillators porque no tienen una frecuencia normal, por tanto, siempre oscilan con la misma fase.

Aspectos familiares de la luz y la materia:

Como se mencionó, la luz dentro de un material es scattereada en todos los sentidos, pero si el material tiene una onda de absorción, estas frecuencias perderán energía antes de ser scattereadas.

Los colores característicos de la mayoría de los objetos se deben a esta **Absorción selectiva**. Cuando llega luz blanca, se absorben selectivamente algunos colores, que no llegan a reflejarse. Los colores que sí se reflejan le dan el color al objeto.

7. Óptica Geométrica:

Foco: Un punto del cual diverge o converge una onda esférica.

Si un cono de rayos que salen de S llegan en foco a P , se dice que estos puntos son **Estigmáticos**.

En tal caso, se dice que P es una **imagen perfecta** de P . Sino, forman un **blur spot**.

Se sigue por el principio de reversibilidad, que si la luz saliera de P , entonces se formaría perfectamente en S . En un sistema ideal, todos los puntos en el **espacio de objeto** son perfectamente imageados en un punto en el **espacio de imagen**.

En el estudio de óptica geométrica, se omiten efectos de difracción y es sólo una buena aproximación.

7.1. Lentes

Lente: Es un dispositivo refractivo que reconfigura la luz.

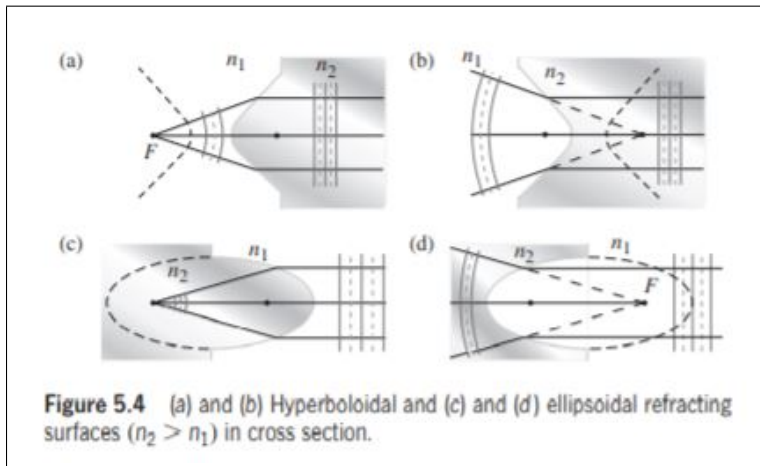
Los más comunes transforman ondas esféricas en paralelas (para apuntar las ondas) o dirigen ondas paralelas para que converjan en un punto.

Cónicas: Recordamos las definiciones de las cónicas a partir de punto y directriz:

Dado un punto (foco) y una línea (directriz). Una cónica es el conjunto de puntos tales que la distancia de un punto al foco es ϵ veces la distancia del punto a la directriz.

Si $\epsilon < 1$ es una elipse, si $\epsilon = 1$ es una parábola, si $\epsilon > 1$ es una hipérbola.

7.1.1. Lentes Cónicas:



Para convertir darle a un grupo de rayos un nuevo frente de onda, necesitamos que todos los rayos recorran el mismo camino óptico, para asegurarnos de que lleguen al frente de onda en fase.

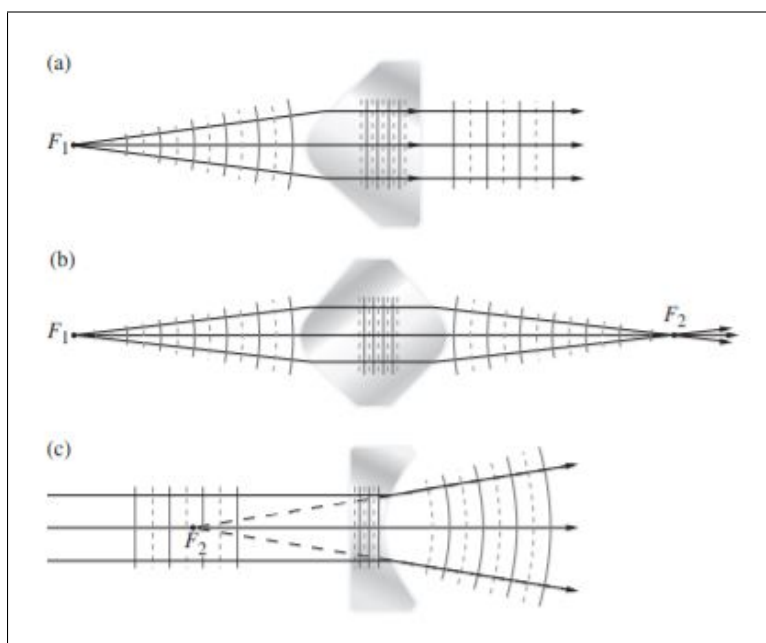
Por ejemplo, si queremos convertir la luz de un foco F en un grupo de rayos paralelos (imagen a) necesitamos que para todos los rayos se cumpla que $n_1(FA) + n_2(A\Sigma) = \text{cte}$. Donde A es el punto de contacto en la interfase y Σ es

el nuevo frente de onda. Sin embargo, esta ecuación es $(FA) + \frac{n_2}{n_1}(A\Sigma) = \text{cte}$.

Entonces, $\frac{n_2}{n_1}(A\Sigma) = \text{cte} - (FA) = F'A$ (donde F' es el otro foco y cte es la constante de la cónica (suma de la distancia a los focos)). Entonces $(F'A) = \frac{n_2}{n_1}A\Sigma$. Lo cual describe una cónica de excentricidad $\epsilon = n_2/n_1$

En general, un lente cónico dobla los rayos de tal forma que pasen de un foco a ser paralelos.

Entonces, dependiendo del valor de la excentricidad necesitamos una cónica u otra. Para entrar a un material con mayor índice de refracción ($n_2/n_1 > 1$) y paralelizar los rayos, necesitamos un lente hiperbólico. Para salir, necesitamos uno elíptico.



Se pueden formar lentes que combinen estas secciones cónicas para hacer que para hacer que converjan la luz de un foco en F_1 en un foco F_2 como en la imagen b. O bien, para que hagan parecer como que unos rayos paralelos en realidad vienen de un foco.

Lente Convergente: Causa que los rayos paralelos se doblen para mandarlos a un foco. Genera una imagen **Real** en dicho foco.

Lente Divergente: Causa que los rayos paralelos diverjan como si vieran de un foco. Genera una imagen **virtual**

nieran de un foco. Genera una imagen **virtual**

Refracción de Superficies Esféricas: Aberraciones: Cuando los rayos no convergen todos a un foco y se crea una imagen algo borrosa.

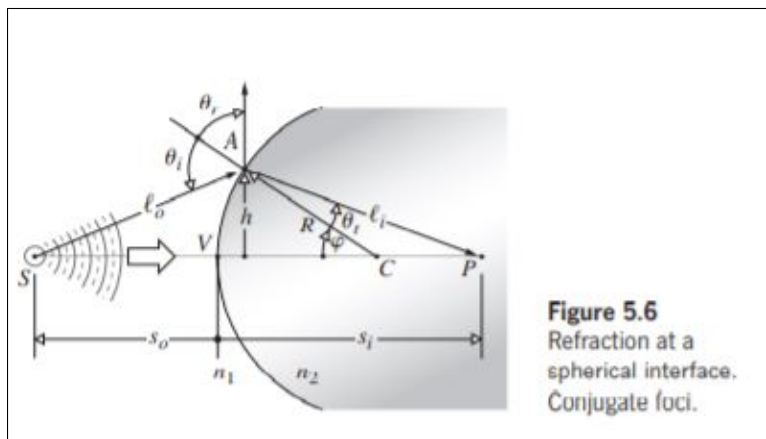


Figure 5.6
Refraction at a
spherical interface.
Conjugate foci.

El punto S irradia luz. El punto V recibe el nombre de **Vértice**, el eje que conecta SV se llama **eje óptico** y la longitud SV se llama **distancia a objeto**. El rayo llega a un punto P (junto con todos los demás rayos con el mismo θ_i).

El camino óptico es:

$$OPL = n_1 l_0 + n_2 l_1$$

Pero l_0 y l_1 se pueden calcular usando la ley de cosenos y se llama

ga finalmente a :

$$OPL = n_1 [R^2 + (s_0 + R)^2 - 2R(s_0 + R) \cos \phi]^{1/2} + n_2 [R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R) \cos \phi]^{1/2}$$

TABLE 5.1 Sign Convention for Spherical Refracting Surfaces and Thin Lenses* (Light Entering from the Left)	
s_o, f_o	+ left of V
x_o	+ left of F_o
s_i, f_i	+ right of V
x_i	+ right of F_i
R	+ if C is right of V
y_o, y_i	+ above optical axis

*This table anticipates the imminent introduction of a few quantities not yet spoken of.

Todas las cantidades s_0, s_i, R, \dots son positivas y así se definen en este caso según la convención de signos. Por el principio de Fermat, del este camino a P es el más corto posible, por lo tanto, $d(OPL)/d\phi = 0$ o bien:

$$\frac{n_1 R(s_0 + R) \sin \phi}{2l_0} - \frac{n_2 R(s_i - R) \sin \phi}{2l_i} = 0$$

De lo cual se sigue que:

$$\frac{n_1}{l_0} + \frac{n_2}{l_i} = \frac{1}{R} \left(\frac{n_2 s_i}{l_i} - \frac{n_1 s_0}{l_0} \right)$$

Esta ecuación se debe de cumplir para los parámetros de un rayo que va de S a P . Sin embargo, si muevo la A , el rayo ya no va a

pasar por P . Por esto, hacemos una aproximación con $\phi \simeq 0$ (es decir, A cercano a V) y entonces nos queda que $l_0 \simeq s_0$ y $l_i \simeq s_i$ y por lo tanto, la expresión pasa a ser:

$$\text{Ecuación paraxial de lente esférica: } \frac{n_1}{s_0} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Esta ecuación sirve para saber a qué distancia del vértice va a converger un grupo de rayos (con ángulo chico) que salen de un punto S . Estos rayos con ángulo chico se llaman **rayos paraxiales** y van a formar una imagen perfecta en P ubicado a una distancia s_i . La expresión es independiente del valor de A con tal de que esté cerca del vértice.

Esta aproximación recibe el nombre de **Óptica paraxial, de primer orden o Gaussiana**

Notar la convención de signos, para determinar el signo correcto para R y entender qué nos dice el signo de f_0 y f_i si requerimos calcularlos.

First Focal length / object focal length: Es la distancia a la esfera para que los rayos salgan paralelos. El punto desde el que salen los rayos se llama **First focus o object focus**

Ponemos $s_1 = \infty$ para indicar que los rayos nunca llegan al eje óptico y despejamos s_0 :

$$f_0 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$$

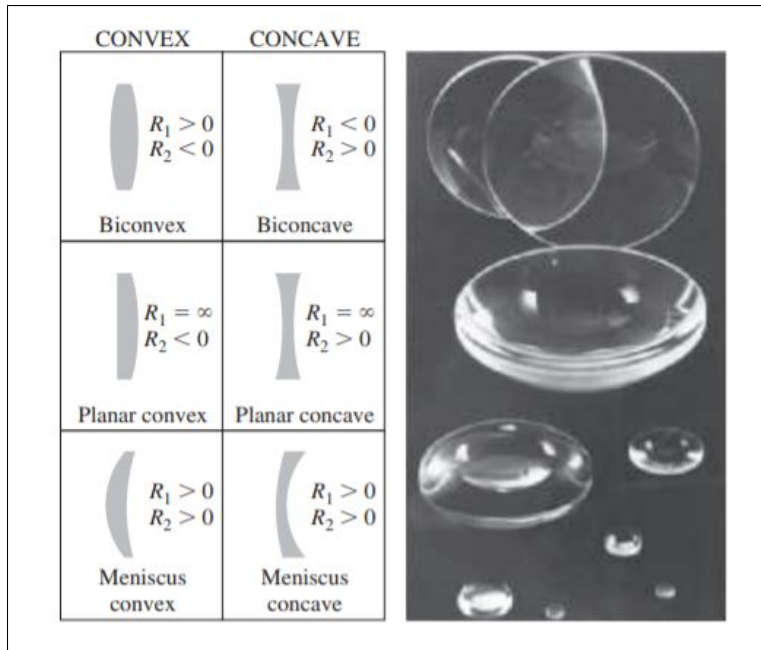
Second focal length / image focal length: Es la distancia a la que se formará la imagen si los rayos llegan paralelos. El punto como tal se llama **Second o Image Focus**. Se consigue haciendo $s_0 = \infty$ y despejamos s_1 .

$$f_1 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$$

Estos puntos pueden ser reales o virtuales.

7.1.2. Lentes delgados

Lentes formados por dos superficies esféricas o una plana y una esférica y con la condición de que son delgados.



Generalmente son convergentes si el centro es más grueso y divergentes sino.

Ya tenemos la ecuación del lente esférico. Ahora buscamos algo similar para lentes delgados realizados con dos círculos de radios R_1 y R_2 .

Tenemos una fuente en S , luego de pasar la primera parte del lente, va a parecer como si viniera de otro punto. A este otro punto le aplicamos la ecuación del lente esférico para el segundo lente.

En total (desarrollo en Hecht 159) si el lente es muy delgado y el medio externo es n_m y el interno n_i , nos quedará:

$$\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \left(\frac{n_i}{n_m} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

s_0 es la distancia de la fuente al lente y s_i de la imagen al lente. Ambas distancias se miden con respecto al centro del lente. Hay que tomar en cuenta la convención de signos para interpretar bien los resultados.

A partir de ahora omitiremos el índice de refracción del medio y diremos que estamos en el vacío.

Tenemos que f_i es el punto al que se converge si los rayos llegan paralelos ($s_0 \rightarrow \infty$) o que f_0 es el punto desde el cual al crear una fuente, los rayos saldrán paralelos. Viendo la ecuación, notamos que $f_1 = f_0 := f$ y a este número le llamamos simplemente foco y se encuentra a ambos lados del lente, y se calcula como:

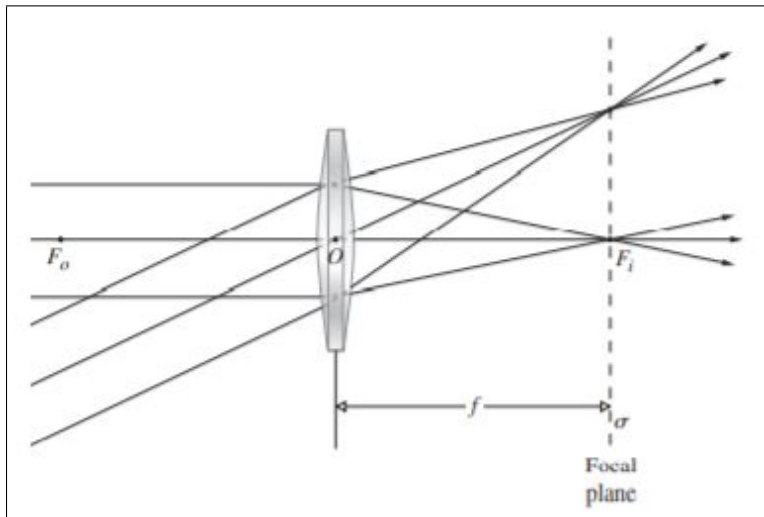
$$\frac{1}{f} = (n_i - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Y además, tenemos la ecuación de Gauss de lentes:

$$\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

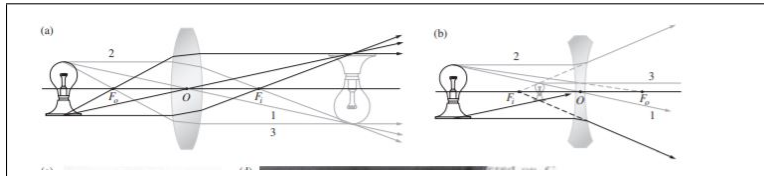
Con esto, se puede calcular el foco de cualquier lente y también saber si se tiene una fuente en un punto, en qué otro punto se formará la imagen.

Con un poco de geometría se puede demostrar también que: **Todos los rayos que pasen por el centro del lente, salen sin ser desviados**



Plano focal: Si tenemos varios grupos de rayos, todos los grupos convergerán en puntos cercanos con los cuales se puede formar un plano llamado plano focal. Esto porque todos los grupos están formados por rayos paralelos y por tanto su imagen aparece a una distancia f .

Imagería: Para estudiar cómo se vería la imagen de un objeto al pasar por un lente, tomamos una de las esquinas del objeto y calculamos dos de sus rayos (los fáciles son los que pasan por el centro, los paralelos y los que pasan por el foco cercano). Luego vemos donde convergen y completamos la figura.



Definimos: y_0 como la altura del objeto (hacia arriba positiva) y y_i la de la imagen.

Si tienen distinto signo, decimos que la imagen es **invertida**. sino, decimos que está right side up. Por similitud de triángulos, se puede

probar:

$$\frac{y_0}{|y_i|} = \frac{s_0}{s_i}$$

Definimos también x_0 como la distancia del objeto al foco que está de su lado. Y x_i como la distancia de la imagen a su foco. Entonces, se puede probar que:

$$x_0 x_i = f^2$$

que se llama la **Forma de Newton** de la ecuación del lente.

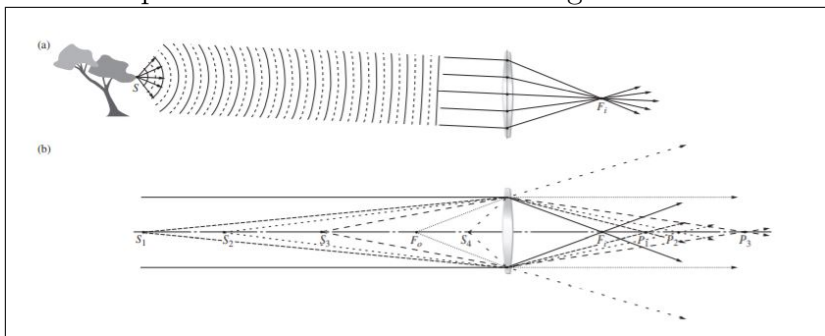
Magnificación transversa: La razón del tamaño de la imagen y del objeto:

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} = \frac{-s_i}{s_o}$$

Un valor positivo indica una imagen right side up. mientras que uno negativo indica una imagen invertida.

TABLE 5.3 Images of Real Objects Formed by Thin Lenses				
Convex				
Object	Image			
Location	Type	Location	Orientation	Relative Size
$\infty > s_o > 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Inverted	Minified
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Inverted	Same size
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Inverted	Magnified
$s_o = f$		$\pm \infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i > s_o$	Erect	Magnified
Concave				
Object	Image			
Location	Type	Location	Orientation	Relative Size
Anywhere	Virtual	$ s_i < f $, $s_o > s_i $	Erect	Minified

Ahora el comportamiento de un lente convergente:



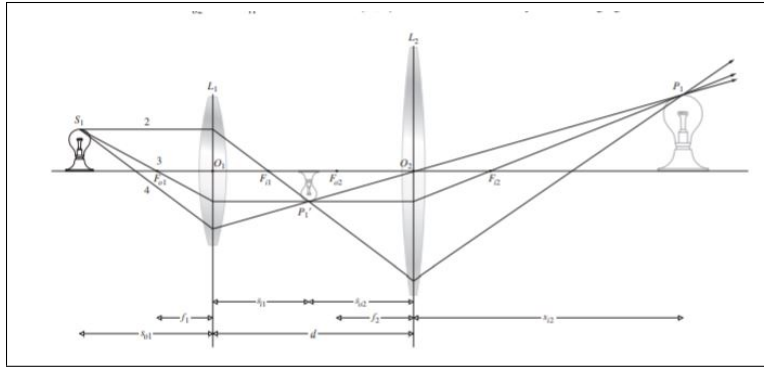
Mientras el objeto se acerca al lente, la imagen real se aleja. Cuando el objeto pasa el foco, la imagen se vuelve virtual. La imagen empieza minimizada, luego cuando el objeto está en $2f$, su imagen es del mismo tamaño. Conforme nos acercamos más al foco, la imagen aumenta de tamaño (un proyector). Siempre volteada.

Luego llegamos al foco y la imagen ahora será virtual pero right side up y magnificada (como una lupa)

Magnificación Longitudinal: Se refiere al cambio en tamaño de un objeto tridimensional en la dirección del eje óptico. Se define como:

$$M_L = \frac{dx_i}{dx_o} = -\frac{f^2}{x_o^2} = -M_T^2$$

La segunda igualdad debido a la ecuación óptica de Newton.



Combinaciones de Lentes

Delgados:

Si se tienen dos lentes por ejemplo, lo que se puede hacer es primero dibujar la imagen p_1 que genera el primer lente (ignorando el segundo). Luego, dibujamos un rayo hacia atrás que pase por la imagen p_1 y por el centro del segundo lente y luego lo redireccionamos según el primer lente para regresarlo al objeto original. Este rayo no se ve

afectado por la aparición del segundo lente (porque pasa por su centro) y por tanto la imagen tras los dos lentes va a estar en algún punto de este rayo. Luego, tomamos algún rayo que llegue paralelo al segundo lente y lo refractamos con dirección al foco como es común, entonces, la intersección de estos dos rayos nos dirá la posición de la imagen tras los dos lentes.

Usando la ecuación de Gauss, podemos calcular la posición de la primera imagen (debida sólo al primer lente) como: $s_{i1} = \frac{s_{o1}f_1}{s_{o1} - f_1}$

Ahora, en lo que respecta al segundo lente, la luz está saliendo de este punto, por lo que la distancia al objeto es $s_{o2} = d - s_{i1}$ (Es un objeto virtual)

Ahora podemos calcular la posición de la imagen del objeto virtual intermedio con respecto al segundo lente usando nuevamente la ecuación de Gauss, para obtener $s_{i2} = \frac{s_{o2}f_2}{s_{o2} - f_2}$

Finalmente, usando la ecuación que nos daba s_{o2} , obtenemos: $s_{i2} = \frac{(d - s_{i1})f_2}{d - s_{i1} - f_2}$. Y usando ahora la ecuación que nos daba s_{i1} , podemos obtener finalmente:

$$s_{i2} = \frac{f_2d - f_2s_{o1}f_1/(s_{o1} - f_1)}{d - f_2 - s_{o1}f_1/(s_{o1} - f_1)}$$

Tomar en cuenta que las distancias marcadas con 1 se miden respecto al primer lente, y las marcadas con 2 respecto al segundo. Finalmente, tenemos también que:

$$M_T = M_{T1}M_{T2}$$

Si tenemos un sistema de muchos lentes, podemos verlo como un solo lente muy grueso. Este sistema tiene un object focus (punto desde el cual la luz que sale radialmente se convierte en paralelos) y un image focus (punto al cual convergen los rayos cuando mandamos rayos paralelos). Con esto, podemos definir ahora:

back focal length (bfl): Como la distancia del último lente al image focus.

front focal length (ffl): Como la distancia entre el vértice del primer lente al object focus.

Para calcular el $f.f.l$, hacemos $s_{i2} = \infty$ (indicando que los rayos de salida serán paralelos) y necesitamos calcular s_{o1} (la posición del objeto respecto al primer lente que hace esto posible) y metemos esta condición en la ecuación de los dos lentes, lo que corresponde a igualar a 0 el denominador: $d - f_2 - \frac{s_{o1}f_1}{s_{o1} - f_1} = 0$. y nos queda:

$$f.f.l = \frac{f_1(d - f_2)}{d - (f_1 + f_2)}$$

Por otro lado, para calcular el bfl. Hacemos $s_{o1} = \infty$ (indicando que los rayos llegan desde el infinito) y calculamos s_{i2} (la distancia al punto en el que convergen con respecto al último lente. Haciendo estos arreglos en la ecuación de los dos lentes, nos queda:

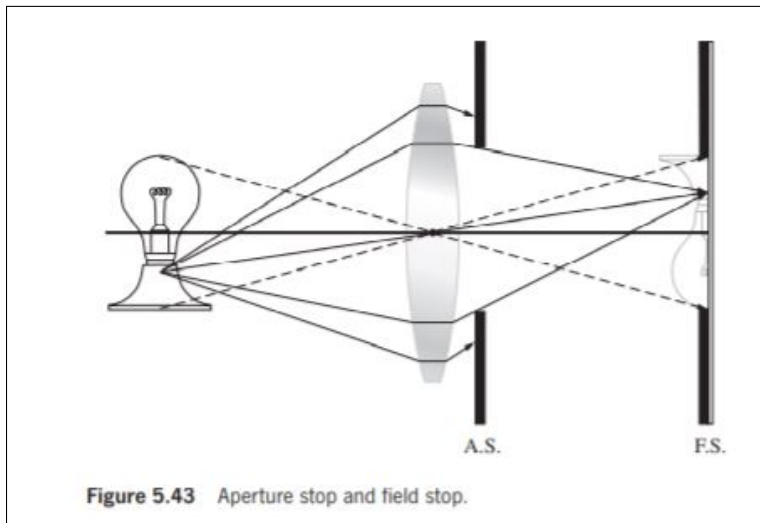
$$bfl = \frac{f_2(d - f_1)}{d - (f_1 + f_2)}$$

Lentes delgados en contacto: Si tenemos dos lentes delgados muy cercanos, entonces $d \simeq 0$ y resulta que $bfl = ffl$ (donde ambos se miden con respecto al centro del sistema de lentes) y éste número será el foco del nuevo lente. Entonces:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

o bien: $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

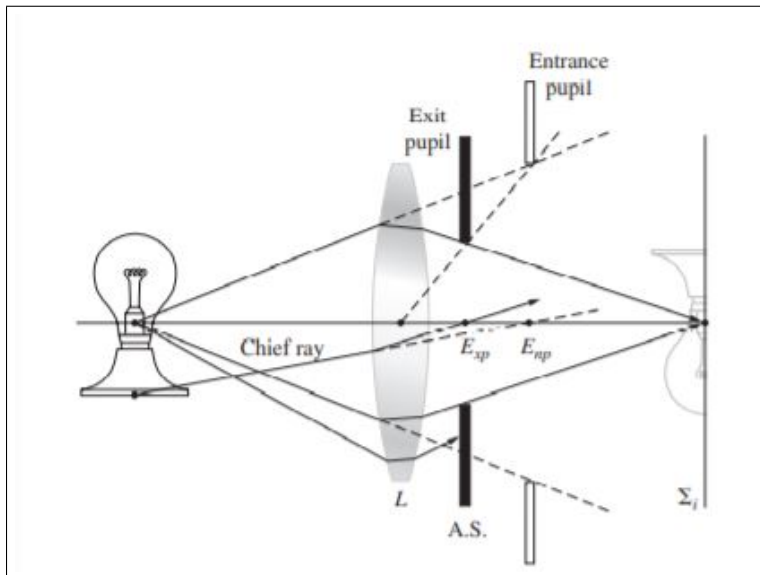
7.2. Stops:



El Stop de apertura es un elemento que limita el grosor de los rayos de luz que pasan por el lente. **El field stop** determina el campo de vista del lente.

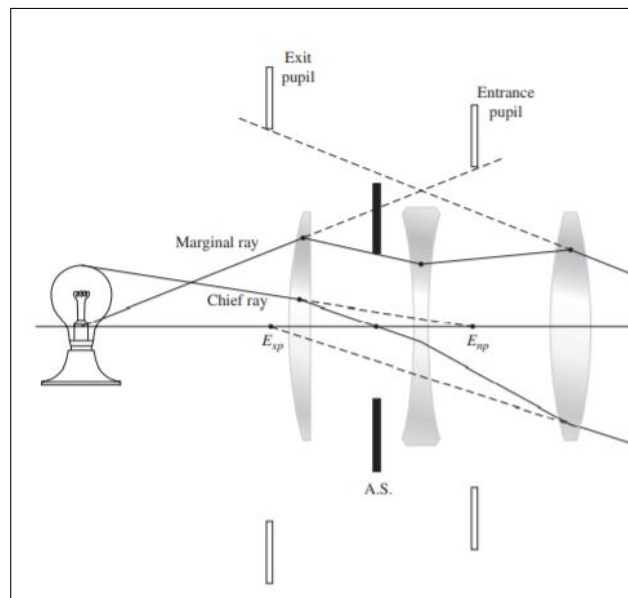
Pupila de Entrada: Es el cono de luz que al entrar al lente no se bloquea por el aperture stop. Se puede calcular al obtener la imagen (en este caso virtual) del aperture stop.

Pupila de Salida: Es el cono de rayos que pueden llegar o que forman a la imagen.



Chief Ray: Es un rayo que pasa por enmedio del Aperture stop. Si no lo refractáramos por el lente, pasaría por el centro de la pupila de entrada.

Rayo Marginal: Es el último rayo que no será absorbido por el stop. Su imagen refractada pasa justo por la orilla del stop y su continuación normal es el último rayo que define a la pupila de entrada.



Vignetting: Es el efecto por el cual los rayos que salen del eje óptico tienen un cono mucho más amplio (una entrance pupil más grande), mientras que los rayos que salen de un punto lejano al eje óptico (por ejemplo, de la esquina del foco) tienen un cono menos amplio.

7.2.1. Apertura Relativa y número f :

La cantidad de energía que recibe un sensor de cámara es proporcional al área del lente (o más bien, al área de la pupila de entrada).

Número f : Si D es el diámetro de la pupila de entrada y f el foco del lente, entonces se define el número f como:

$$f_{\#} = \frac{f}{D}$$

7.3. Espejos:

7.3.1. Espejos Planos:

Tenemos un punto S que genera la luz y un punto P que parece ser el punto desde el que vienen los rayos para alguien que ve el espejo. Se puede probar que la distancia del espejo a S (s_o) es igual a la distancia del espejo a P (s_i). Se puede probar usando lo de los ángulos de reflexión y triángulos semejantes.

Signos: Se definen los signos de s_0 y s_i como positivos si están a la derecha del espejo (son reales) y negativos a la izquierda (son virtuales)

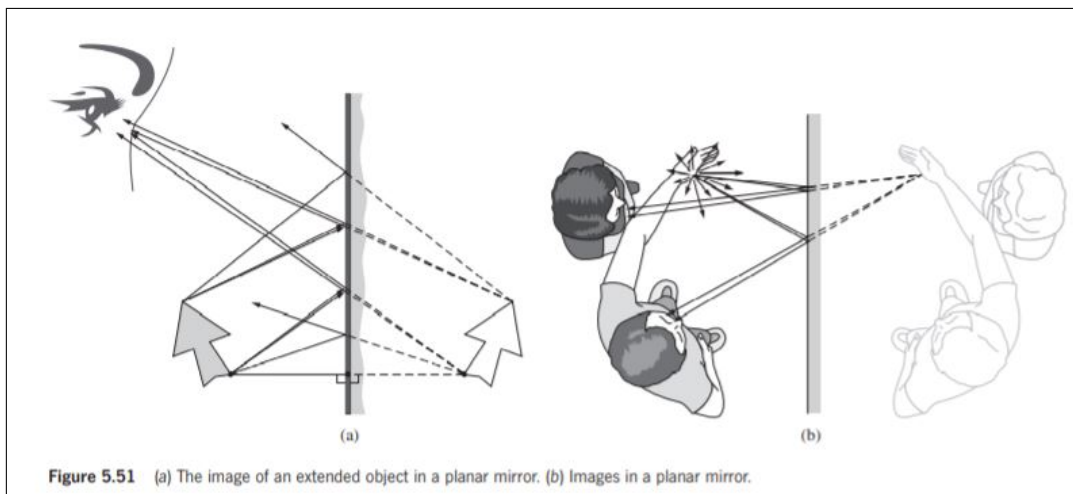


Figure 5.51 (a) The image of an extended object in a planar mirror. (b) Images in a planar mirror.

Espejo que Rota:

Si rotamos un espejo con un ángulo α , entonces los rayos reflejados giran 2α

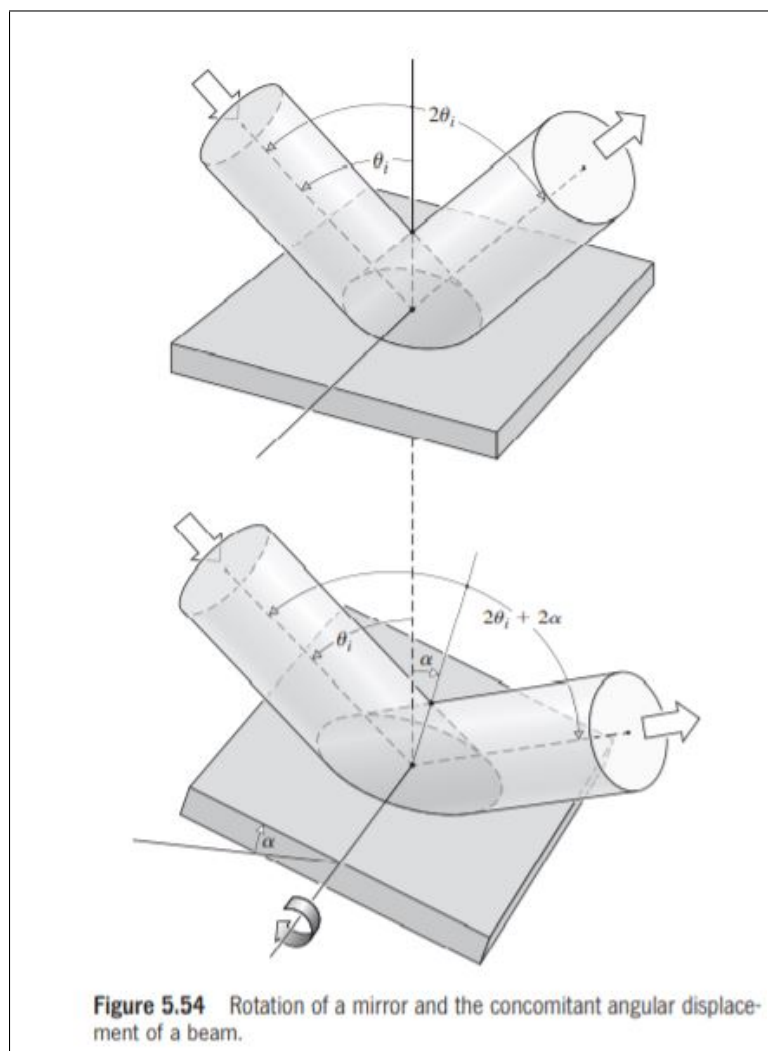


Figure 5.54 Rotation of a mirror and the concomitant angular displacement of a beam.

7.3.2. Espejos Aesféricos

Primero analizamos los espejos con formas cónicas. Para un espejo cónico, un objeto colocado en un foco va a converger en el otro (o va a parecer que viene de otro foco en caso de ser una imagen virtual). Por esto, un parabólico va a llevar rayos lejanos paralelos hacia el foco.

7.3.3. Espejo esférico:

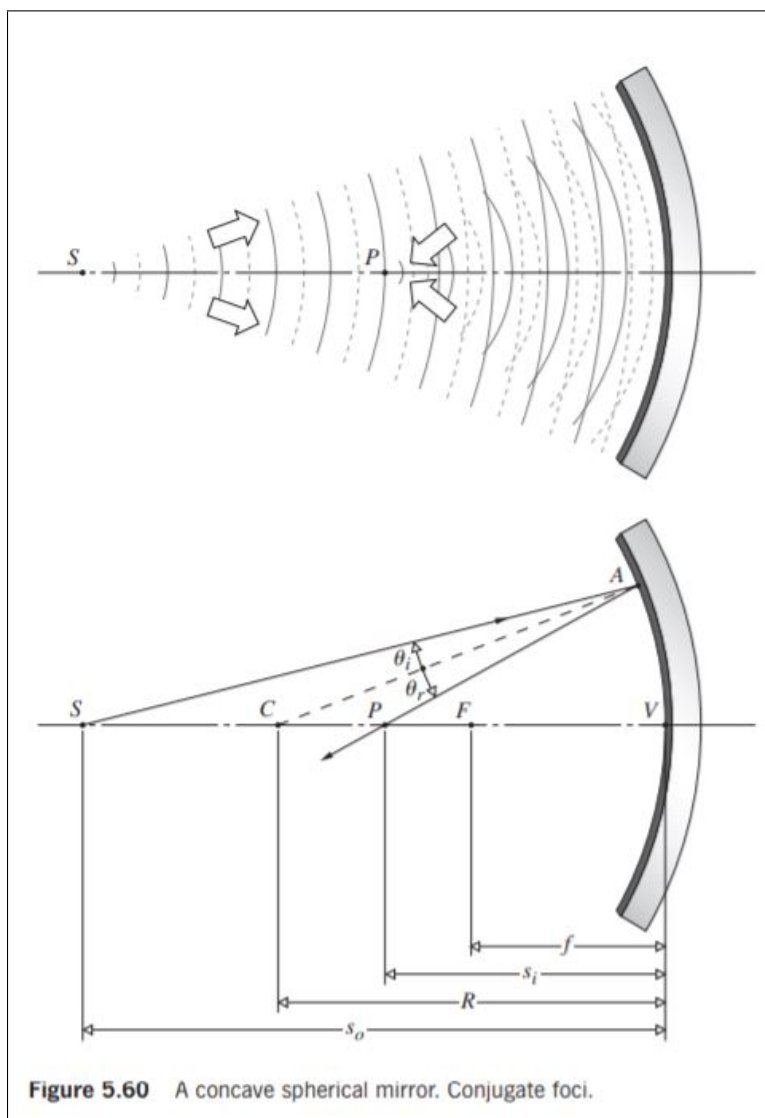
Los rayos esféricos son más fáciles de construir. Para esto, primero analizamos la zona paraxial (el cono de rayos de poca anchura que salen del objeto).

La ecuación de un círculo centrado en R y con radio R es $y^2 + (x - R)^2 = R^2$.

$$\text{Entonces, } x = R \pm (R^2 - y^2)^{1/2}$$

Se puede desarrollar como $x = \frac{y^2}{2R} + \frac{y^4}{2^4 2! R^3} + \frac{3y^6}{2^3 3! R^5}$ Entonces, en una primera aproximación, se ve como una parábola $x = y^2/2R$ y tiene una longitud focal de $f = R/2$. En la aproximación paraxial, seguirá siendo válido que se comporta como una parábola.

7.3.4. La ecuación del Espejo:



Como el ángulo de incidencia es igual al de salida, se puede probar que $SC/SA = CP/PA$. Además, tenemos que $SC = s_o - |R|$ y que $CP = |R| - s_i$.

Como s_o y s_i están a la izquierda, son positivos. Y como el vértice está a la derecha del centro, entonces R es negativo. Usando la relación conseguida por los triángulos semejantes, tenemos: $\frac{s_o + R}{s_o} = -\frac{s_o + R}{s_i}$. Entonces, tenemos la ecuación del espejo:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = -\frac{2}{R}$$

Es aplicable para círculos cóncavos y convexos.

Object Focus: La distancia que hay que tener para que la imagen se forme en el infinito. Entonces hacemos $s_i = \infty$ y calculamos s_0 .

Image Focus: Es la distancia en la que se forma la imagen si el objeto está en el infinito (muy lejos del espejo). Se puede ver que ambos focos son iguales y:

$$f_0 = f_i = -\frac{R}{2}$$

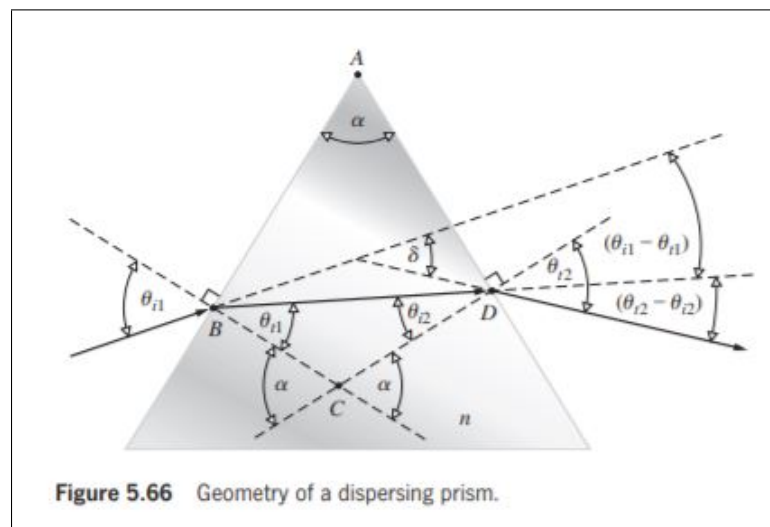
Ray Tracing: Hacemos algo similar a los lentes, los puntos que salen del foco terminan paralelos y los paralelos van al foco.

TABLE 5.5 Images of Real Objects Formed by Spherical Mirrors				
Concave				
Object		Image		
Location	Type	Location	Orientation	Relative Size
$\infty > s_o > 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Inverted	Minified
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Inverted	Same size
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Inverted	Magnified
$s_o = f$		$\pm \infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i > s_o$	Erect	Magnified
Convex				
Object		Image		
Location	Type	Location	Orientation	Relative Size
Anywhere	Virtual	$ s_i < f $, $s_o > s_i $	Erect	Minified

7.4. Prismas:

La función más común de los prismas es separar o dispersar los rayos de distintas longitudes de onda.

7.4.1. Prismas Dispersores:



Desviación angular (δ): El ángulo entre el rayo que entra y el que sale. En la primera superficie se refracta una cantidad $\theta_{i1} - \theta_{r1}$ y en la segunda superficie por una cantidad $\theta_{t2} - \theta_{i2}$. La desviación total es: $\delta = (\theta_{i1} - \theta_{r1}) + (\theta_{t2} - \theta_{i2})$.

Ángulo de Apex (α): Es el ángulo entre dos rectas ortogonales. Tenemos que $\delta = \theta_{i1} + \theta_{t2} - \alpha$

Usando la ley de Snell para un prisma en el aire, el ángulo de desviación será:

$$\delta = \theta_{i1} + \sin^{-1}[(\sin \alpha)(n^2 - \sin^2 \theta_{i1})^{1/2} - \sin \theta_{i1} \cos \alpha] - \alpha$$

Entonces δ aumenta con n , pero a su vez n es función de la frecuencia (o del periodo) y por tanto, se puede pensar en δ como función de la frecuencia $\delta(\nu), \delta(\lambda)$

Desviación Mínima: Es el mínimo δ posible (para algún ángulo θ_{i1}). Con un poco de cuentas, se puede probar que para éste ángulo se cumple también que $\theta_{i1} = \theta_{t2}$ lo que significa que viaja por el prisma de forma simétrica. Con esto, se puede llegar a la siguiente ecuación:

$$n = \frac{\sin(\delta_m + \alpha)/2}{\sin \alpha/2}$$

Con esta ecuación se puede calcular el índice de refracción de un medio buscando el ángulo de desviación mínima.

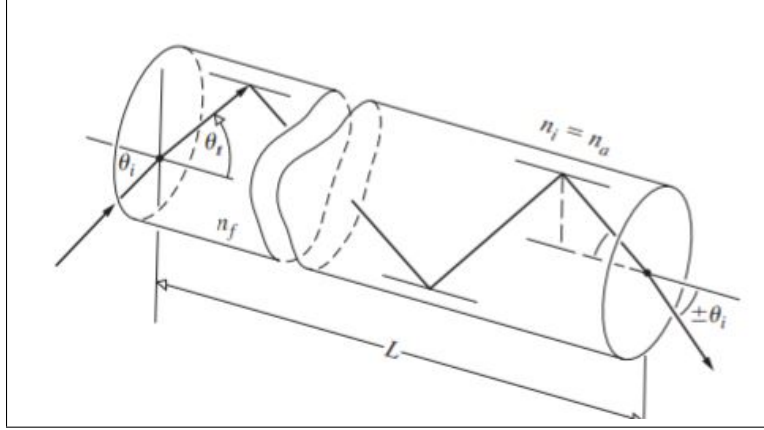
7.4.2. Prismas Reflejantes:

Son prismas contruidos de tal forma que suceda al menos una reflexión interna con el objetivo de que el rayo cambie de dirección.

Hay muchos tipos de prismas para cambiar en todo tipo de direcciones a los rayos. Ver más en Hecht 194

7.5. Fibra Óptica:

La fibra óptica son tubos de un material con alto índice de refracción de tal forma que al pasar un rayo de luz por dentro, éste se refleja totalmente y es dirigido por el tubo a lo largo de un camino para cargar información.



Si la fibra tiene un diámetro D y una longitud L , entonces el camino viajado por el rayo de luz como se ve en el dibujo será de

$$l = L / \cos \theta_t$$

Donde θ_t es el ángulo después. Si queremos tenerlo con respecto al ángulo con el que se entra, podemos usar la ley de Snell para llegar a

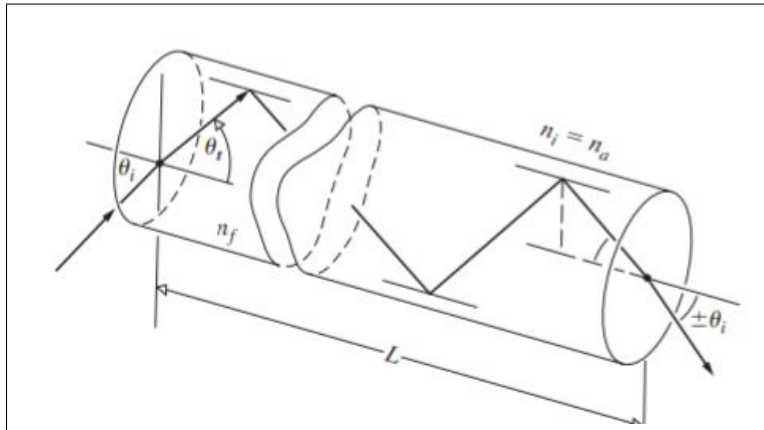
$$l = n_f L (n_f^2 - \sin^2 \theta_i)^{-1/2}$$

(para una fibra óptica en el vacío. El número de reflexiones que sufre

la luz viene dado por:

$$N_r = \frac{l}{D / \sin \theta_t} = \frac{L \sin \theta_i}{D (n_f^2 - \sin^2 \theta_i)^{1/2}}$$

Es común recubrir a la fibra óptica con un cladding de otro material. Con este cladding, se tiene un ángulo máximo tal que la luz se refleje internamente en vez de atravesar el cladding.



El ángulo crítico cumple que $\sin \theta_c = n_c / n_f = \sin(90 - \theta_t)$. Luego, tenemos que $n_c / n_f = \cos \theta_t$ y finalmente, usando la ley de Snell y reordenando, nos queda:

$$\sin \theta_{max} = \frac{1}{n_i} (n_f^2 - n_c^2)^{1/2}$$

Se define la **apertura numérica (NA)** como la cantidad $n_i \sin \theta_{max}$. Es una medida de qué tan grande puede ser el ángulo de entrada de la luz.

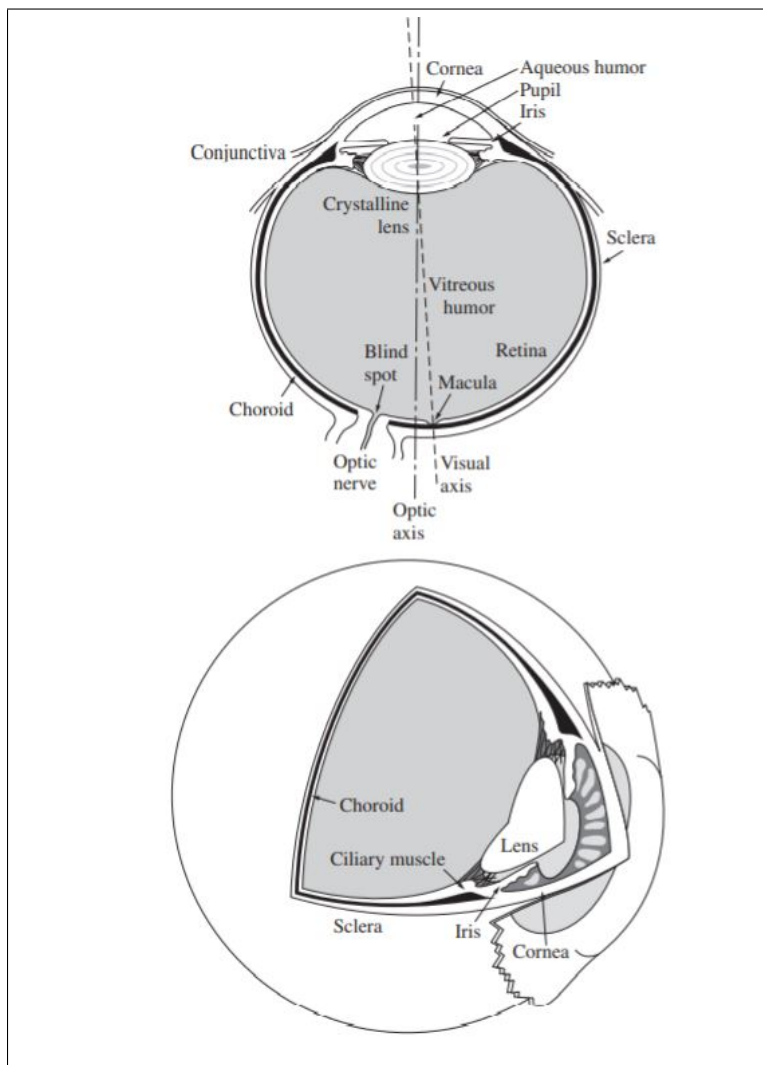
Se pueden usar para hacer endoscopías o para transmitir información de un continente a otro y así.

7.6. Sistemas ópticos

7.6.1. El Ojo:

El Ojo Humano

El ojo humano se puede pensar como un lente doble que deja una imagen en una superficie sensible a la luz.



El ojo consiste de una masa gelatinosa llamada esclera excepto en el frente en donde se localiza la cornea transparente. La luz llega a la cornea (índice de 1.376) donde sucede la mayoría de la refracción. Luego pasa a l aqueous humor ($n_{ah} = 1,336$) donde sucede una leve refracción adicional. Luego pasa por la iris que sirve como un aperture stop controlando el cono de luz entrante por el hoyo (pupila) . La iris es lo que le da color al ojo y puede cambiar el diámetro de la pupila de 2mm a 8mm.

Luego se llega al lente cristalino, que tiene más de 22000 capas finas de índice de refracción variable y puede cambiar su forma para permitir una longitud focal variable.

La córnea y el lente cristalino se pueden pensar como un doble lente con un object focus de 15.6mm y un image focus de 24.3mm (en la retina). El ojo tiene dos tipos de

células fotorreceptoras, los bastones (blanco y negro) y conos (color).

El ojo humano puede ver longitudes de onda de entre 390nm y 780nm. Luego se encuen-

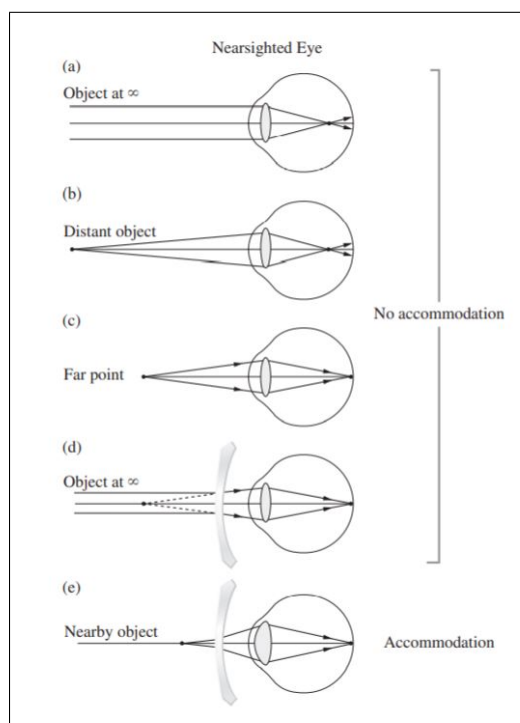
tra el nervio óptico, esta parte no tiene receptores y es la causa de un punto ciego. En otra parte se encuentra la fovea, que es la parte con mayor cantidad de conos, y la parte que queda enfocada en la visión.

Para la visión, el lente cristalino se flexibiliza según sea necesario. Cuando los músculos están relajados, el lente tiene una entrada muy plana (un radio muy grande) lo que aumenta la longitud focal según la ecuación del lentero. Cuando el lente está totalmente relajado, se puede enfocar luz que viene del infinito en la retina. Cuando el objeto se acerca al ojo, el lente se acomoda para disminuir la longitud focal de tal forma que s_i permanezca constante y la imagen se siga formando en la retina. Se tiene un límite a qué tan cerca se puede enfocar un objeto (ya que es necesario tensar los músculos para esta tarea). Este límite aumenta con la edad y a mayor edad es más difícil enfocar de cerca.

La acomodación sucede de forma muy distinta para diferentes animales. Los humanos acomodan al cambiar la curvatura del lente, los peces acomodan al mover físicamente el lente, los moluscos acomodan al expandir y contraer el ojo en su totalidad para cambiar la distancia a la retina.

Lentes(miopía)

Dioptric power (D) Se define como el inverso de la longitud focal. Se puede calcular sencillamente con la ecuación del lentero. Un objeto que dobla mucho los rayos de luz tiene una distancia focal corta y por tanto un poder dióptrico muy grande. Si tenemos dos lentes muy cercanos, ya sabemos que el sistema en su totalidad tendrá un foco de: $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$ y por tanto, tenemos que $D = D_1 + D_2$.



Far Point: El punto más lejano que puede enfocar un ojo relajado. Para un ojo sano, debería de ser infinito (que en un sentido práctico son como $5m$). Sin embargo, un ojo con miopía genera la imagen un poco antes de la retina. Entonces, requiere una lente divergente para que los objetos lejanos parezcan venir de cerca y se enfoquen en la retina y que no afecte demasiado a los objetos cercanos. El foco del lente tiene que ser igual a la distancia al far point. Así, los rayos paralelos que vienen del infinito serán acomodados por el lente para que parezcan venir del far point.

Para este conjunto de lentes, queremos que el bfl (distancia del último lente al foco de rayos paralelos) sea del diámetro del ojo. Recordar que el bfl se calcula como:

$$bfl = \frac{f_{ojo}(d - f_{lente})}{d - (f_{lente} + f_{ojo})}$$

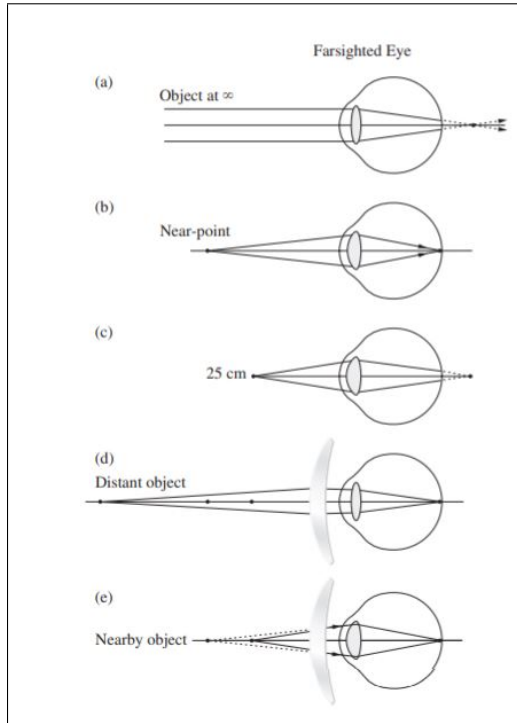
Esta ecuación es necesaria para alguien usando lentes alejados una distancia d de su ojo. Sin embargo, para lentes de contacto se puede hacer $d = 0$ y usar la ecuación común de lentes cercanos ($1/f = 1/f_1 + 1/f_2$) Con lo que la bfl es:

$$bfl = \frac{f_{ojo}f_{cont}}{f_{ojo} + f_{cont}}$$

Con esto podemos comparar el poder que necesita un lente de contacto con el poder de un lente normal. Igualando las ecuaciones y despejando, obtenemos:

$$D_{contacto} = \frac{D_{lente}}{1 - dD_{lente}}$$

Hypermetropía



El lente relajado enfoca por detrás del ojo. Se usa un lente convergente.

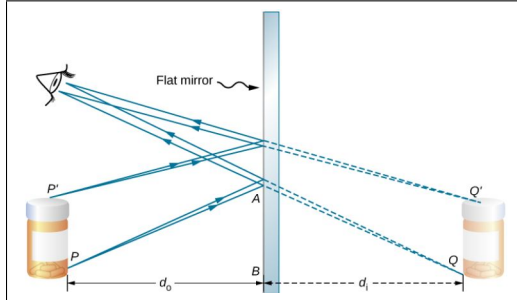
7.6.2. Lupa:

Un aparato con la función de crear una imagen de mayor tamaño que como se vería con el ojo normal. Evidentemente, para eso se puede usar un lente convergente y poner el objeto más cerca que el foco. Entonces, se producirá una imagen virtual de mayor tamaño. Pues al ser un lente positivo, tenemos $f > 0$, y tomamos un $s_o < f$, entonces, por la ecuación de Gauss, tenemos: $1/s_i = 1/f - 1/s_o$. Entonces, s_i es negativo (la imagen se forma a la izquierda y es virtual) y $|s_i| > s_o$, por lo que el objeto se ve magnificado por una cantidad $|s_i|/s_o$.

Poder de Magnificación(o Magnificación angular) : Es la razón entre la imagen en la retina del objeto viendo con el lente que viendo sin el lente.

8. Nuevo Intento De Óptica Geométrica:

8.1. Espejos Planos:



En un espejo, por la ley de reflexión, los rayos incidentes se reflejan con el mismo ángulo de entrada.

Las imágenes en un espejo son del mismo tamaño, están localizadas detrás del espejo (imagen virtual) y a la misma distancia del espejo y la imagen tiene la misma orientación.

Por la igualdad de ángulos, se puede probar que los triángulos PAB y QAB son congruentes y por tanto, la distancia al objeto es igual a la distancia a la imagen. Entonces, tenemos:

$$d_o = -d_i$$

Con d_o la distancia del objeto al espejo y d_i la distancia de la imagen al espejo (negativa por la convención de signos y por ser una imagen virtual).

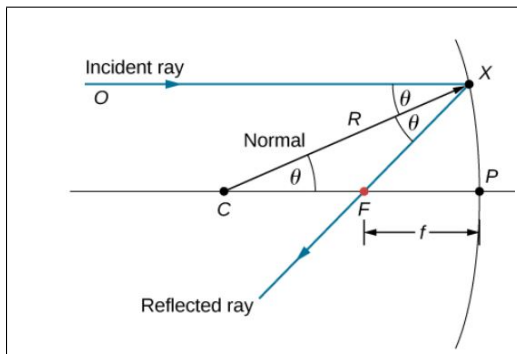
8.2. Espejos Esféricos:

Espejo Cóncavo: La parte reflejante curva hacia adentro (la superficie interna de un círculo).

Espejo Convexo: La parte reflejante se curva hacia afuera (la superficie externa del círculo).

Eje óptico: Un eje que pasa por el centro del espejo.

En un espejo parabólico, los rayos paralelos pasan por el foco de la parábola. En un espejo cóncavo grande, los rayos paralelos no convergen (aberración esférica). En un espejo esférico chiquito, se parece a una parábola y por tanto los rayos paralelos sí convergen a un foco. En un espejo esférico convexo chiquito, los rayos que llegan divergen y parecen salir de un foco (formando una imagen virtual).

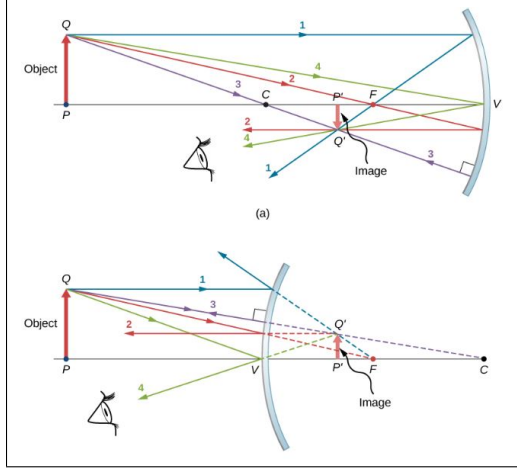


Cómo se relaciona la distancia focal con el radio de curvatura de la esfera? Como se ve en el dibujo, $R = CF + FP$ y los ángulos θ son iguales por la ley de reflexión. Pero en la aproximación **paraxial** (espejo chico), tenemos que $\sin \theta \simeq \theta$.

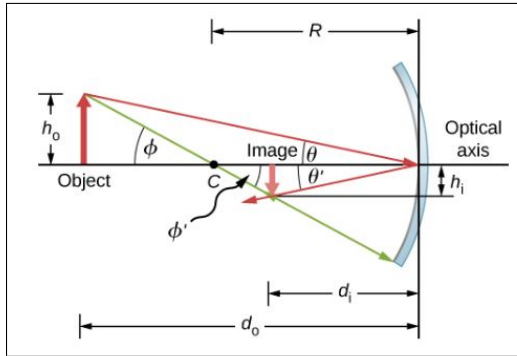
Por la igualdad de ángulos en el triángulo CFX , tenemos que es isósceles y por tanto $CF = FX$. Y por la aproximación de ángulo chico, tenemos que $CF \simeq FP$. Por lo tanto, tenemos que:

$$f = -R/2$$

El signo se debe a una convención de signos.



Para ray tracing consideramos que 1) los rayos que pasan paralelos al eje óptico se reflejan por el foco, 2) los rayos que pasan por el centro son reflejados como si hubiera un plano perpendicular al eje óptico, 3) Los rayos que pasan por el foco son reflejados paralelos y 4) los rayos que pasan por el centro son reflejados sobre sí mismos.



Ecuación de Espejo:

Consideramos el objeto a distancia d_o que forma una imagen en d_i . El centro del círculo es C . h_o es la altura del objeto y h_i es la altura de la imagen.

Convención de signos:

d_o, d_i son positivos a la izquierda del vértice (imagen real)

f es positivo para un espejo cóncavo.

R es positivo C está a la derecha de V (convexo).

y_o, y_i son positivos hacia arriba.

Tomando la tangente de θ y θ' (que son iguales por ley de reflex) nos queda que $-h_o/d_o = h_i/d_i$.

Tomando la tangente de ϕ y ϕ' (que son opuestos y por tanto tienen tan de signo opuesto), nos queda que $\frac{h_o}{d_o - R} = -\frac{h_i}{R - d_i}$.

Juntando estas dos ecuaciones y usando la convención de signos, nos queda:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{-2}{R} = \frac{1}{f}$$

La ecuación se vale para espejos cóncavos y convexos o incluso planos al hacer $R = 0$ y tomando en cuenta la convención de signos.

Magnificación: Se refiere a la comparación entre los tamaños de la imagen y del objeto. Se define como:

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$$

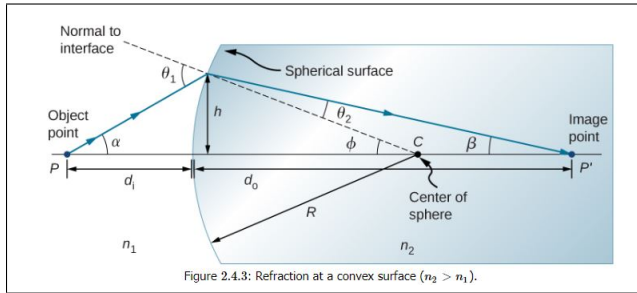
8.3. Imágenes Formadas por Refracción

Ley de Snell: Al pasar un rayo de un medio a otro, se cumple que $n_i \sin \theta_i = n_o \sin \theta_o$.

Refracción en Superficie del Agua: Se puede probar que debido a la refracción en la superficie del agua, un pez va a tener una profundidad de h_i en vez de su profundidad real de h_o donde:

$$h_i = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{agua}}} h_o$$

8.3.1. Refracción en una Superficie Esférica



Convención de Signos:

s_o, f_1 positivos a la izquierda de V. s_i, f_i positivos a la derecha de V. R positivo si C a la derecha de V. y_o, y_i positivos sobre el eje óptico.

Por ley de Snell y usando la aprox. de ángulo chico, tenemos que $n_1 \theta_1 \simeq n_2 \theta_2$

Y tenemos que $\theta_1 = \alpha + \phi$ y que $\theta_2 = \phi - \beta$. Además, $\alpha \simeq h/d_o$, $\beta \simeq h/d_i$, $\phi \simeq h/R$ (usando la aprox. de ángulo chico para tan). Luego, usamos estas ecuaciones, simplificamos y llegamos a **Ecuación del Lente Esférico**

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Podemos definir así dos focos:

Foco Objeto (f_o, f_q) = Distancia con respecto al vértice a la que hay que poner el objeto para que la imagen quede en el infinito. Entonces, en la ecuación del lente esférico ponemos $d_i = \infty$ y despejamos d_o para obtener:

$$f_i = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}$$

Por otro lado, definimos el **Foco Imagen**, que es la distancia a la que se forma la imagen de un objeto en el infinito. Sustituimos $d_o = \infty$ y despejamos d_i para obtener:

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$$

8.4. Lentes Delgadas:

Lente Convergente: Un lente tal que rayos paralelos convergen en un punto dado.

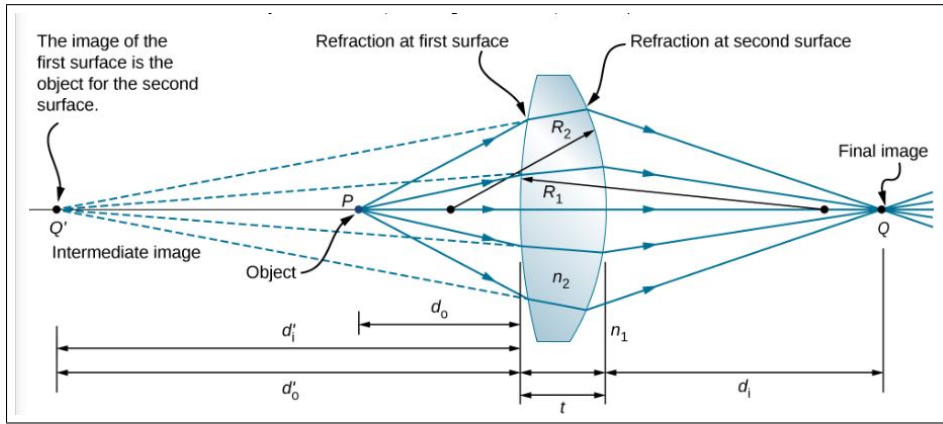
Lente Divergente: Lente tal que los rayos paralelos divergen y parecen venir de un foco virtual.

Generalmente formamos lentes delgadas usando dos la intersección de dos circunferencias. El lente tiene un grosor t

Plano Focal: Es un plano en el que se forman todas las imágenes de rayos paralelos (aunque no sean paralelos al eje óptico).

Nuevamente definimos dos focos: **Foco de objeto:** Distancia a la que hay que poner el objeto para la imagen salga en el infinito.

Foco de imagen: La distancia a la que se forma una imagen cuando los rayos llegan del infinito.



Primero el objeto se ve refractado por la primera parte del lente. Según la ecuación del lente esférico: Se forma una imagen virtual en un punto d'_i . Esto funciona como un objeto virtual a ojos de la segunda superficie, con una distancia $d'_o = |d'_i| + t$.

Luego, podemos usar las ecuaciones de lentes esféricas para las dos superficies, es decir:

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d'_i} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

$$\frac{n_2}{d'_o} + \frac{n_1}{d_i} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}$$

Con estas dos ecuaciones, y la relación entre d'_o , d'_i , podemos llegar a la ecuación del realizador de lentes:

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_1}{d_i} + \frac{n_2}{d'_i} + \frac{n_2}{-d'_i + t} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Para un lente delgado ($t \ll 1$), llegamos a **Ecuación del Lentero (delgado):**

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Con esta ecuación podemos calcular los focos. El foco objeto se obtiene al hacer $d_i = \text{inf}$ y despejar d_o . Para el foco imagen, hacemos $d_o = \infty$ y despejamos d_i . Resultan que los dos focos son iguales (los llamamos f a los dos) y podemos llegar a la **Ecuación del Lente Delgado**:

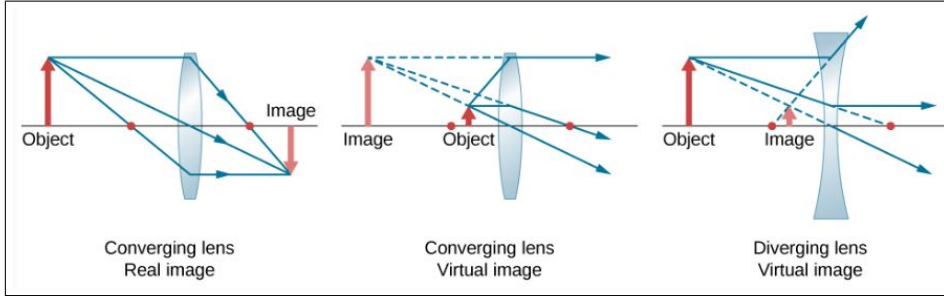
$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Magnificación: La razón en el tamaño entre la imagen y el objeto:

$$m := \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$$

La igualdad se puede probar usando triángulos similares y así.

Ray Tracing: 1) Los rayos que llegan paralelos se van al foco lejano (o parecen salir del foco cercano en caso de un lente divergente), 2) Los rayos que pasan por el centro no se desvían, 3) Los lentes que pasan por el foco cercano (o que parecen pasar por el lejano en caso divergente) salen paralelos.



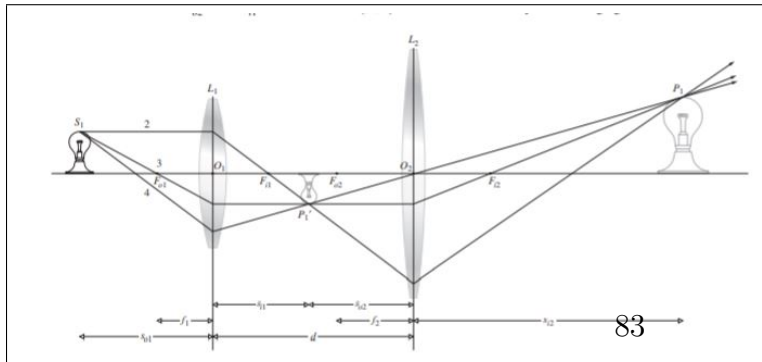
Forma de Newton: Definimos x_o como la distancia del objeto a su foco cercano. x_i es la distancia de la imagen a su foco. Entonces, tenemos que:

$$x_o x_i = f^2$$

Magnificación Longitudinal: Se refiere al cambio en tamaño de un objeto tridimensional en la dirección del eje óptico. Se define como:

$$M_L = \frac{dx_i}{dx_o} = -\frac{f^2}{x_o^2} = -M_T^2$$

La segunda igualdad debido a la ecuación óptica de Newton.



Combinaciones de Lentes Delgados:

Si se tienen dos lentes por ejemplo, lo que se puede hacer es primero dibujar la imagen p_1 que genera el primer lente (ignorando el segundo). Luego, dibujamos un rayo hacia atrás que pase por la imagen

p_1 y por el centro del segundo lente y luego lo redireccionamos según el primer lente para regresarlo al objeto original. Este rayo no se ve afectado por la aparición del segundo lente (porque pasa por su centro) y por tanto la imagen tras los dos lentes va a estar en algún punto de este rayo. Luego, tomamos algún rayo que llegue paralelo al segundo lente y lo refractamos con dirección al foco como es común, entonces, la intersección de estos dos rayos nos dirá la posición de la imagen tras los dos lentes.

Usando la ecuación de Gauss, podemos calcular la posición de la primera imagen (debida sólo al primer lente) como: $s_{i1} = \frac{s_{o1}f_1}{s_{o1} - f_1}$. Ahora, en lo que respecta al segundo lente, la luz está saliendo de este punto, por lo que la distancia al objeto es $s_{o2} = d - s_{i1}$ (Es un objeto virtual)

Ahora podemos calcular la posición de la imagen del objeto virtual intermedio con respecto al segundo lente usando nuevamente la ecuación de Gauss, para obtener $s_{i2} = \frac{s_{o2}f_2}{s_{o2} - f_2}$

Finalmente, usando la ecuación que nos daba s_{o2} , obtenemos: $s_{i2} = \frac{(d - s_{i1})f_2}{d - s_{i1} - f_2}$. Y usando ahora la ecuación que nos daba s_{i1} , podemos obtener finalmente:

$$s_{i2} = \frac{f_2d - f_2s_{o1}f_1/(s_{o1} - f_1)}{d - f_2 - s_{o1}f_1/(s_{o1} - f_1)}$$

Tomar en cuenta que las distancias marcadas con 1 se miden respecto al primer lente, y las marcadas con 2 respecto al segundo. Finalmente, tenemos también que:

$$M_T = M_{T1}M_{T2}$$

Si tenemos un sistema de muchos lentes, podemos verlo como un solo lente muy grueso. Este sistema tiene un object focus (punto desde el cual la luz que sale radialmente se convierte en paralelos) y un image focus (punto al cual convergen los rayos cuando mandamos rayos paralelos). Con esto, podemos definir ahora:

back focal length (bfl): Como la distancia del último lente al image focus.

front focal length (ffl): Como la distancia entre el vértice del primer lente al object focus.

Para calcular el $f.f.l$, hacemos $s_{i2} = \infty$ (indicando que los rayos de salida serán paralelos) y necesitamos calcular s_{o1} (la posición del objeto respecto al primer lente que hace esto posible) y metemos esta condición en la ecuación de los dos lentes, lo que corresponde a igualar a 0 el denominador: $d - f_2 - \frac{s_{o1}f_1}{s_{o1} - f_1} = 0$. y nos queda:

$$f.f.l = \frac{f_1(d - f_2)}{d - (f_1 + f_2)}$$

Por otro lado, para calcular el bfl. Hacemos $s_{o1} = \infty$ (indicando que los rayos llegan desde el infinito) y calculamos s_{i2} (la distancia al punto en el que convergen con respecto al último lente. Haciendo estos arreglos en la ecuación de los dos lentes, nos queda:

$$bfl = \frac{f_2(d - f_1)}{d - (f_1 + f_2)}$$

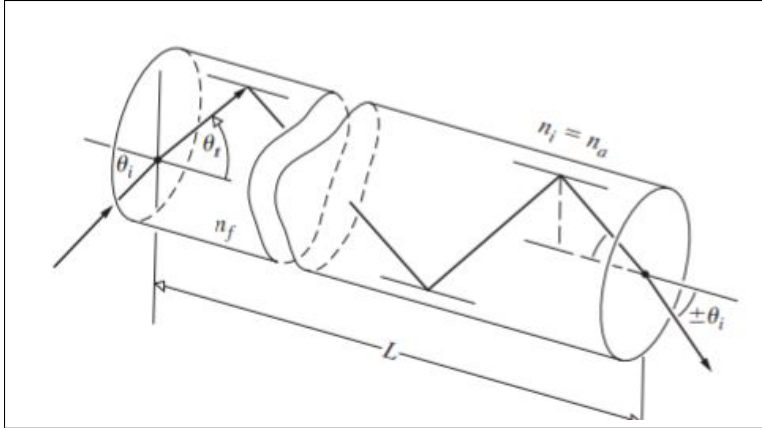
Lentes delgados en contacto: Si tenemos dos lentes delgados muy cercanos, entonces $d \simeq 0$ y resulta que $bfl = ffl$ (donde ambos se miden con respecto al centro del sistema de lentes) y éste número será el foco del nuevo lente. Entonces:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

o bien: $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

8.5. Fibra Óptica:

La fibra óptica son tubos de un material con alto índice de refracción de tal forma que al pasar un rayo de luz por dentro, éste se refleja totalmente y es dirigido por el tubo a lo largo de un camino para cargar información.



Si la fibra tiene un diámetro D y una longitud L , entonces el camino viajado por el rayo de luz como se ve en el dibujo será de

$$l = L / \cos \theta_t$$

Donde θ_t es el ángulo después. Si queremos tenerlo con respecto al ángulo con el que se entra, podemos usar la ley de Snell para llegar a

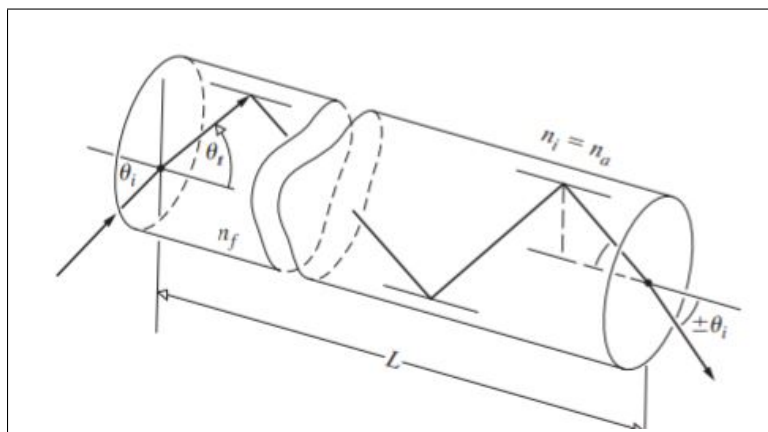
$$l = n_f L (n_f^2 - \sin^2 \theta_i)^{-1/2}$$

(para una fibra óptica en el vacío. El número de reflexiones que sufre

la luz viene dado por:

$$N_r = \frac{l}{D / \sin \theta_t} = \frac{L \sin \theta_i}{D (n_f^2 - \sin^2 \theta_i)^{1/2}}$$

Es común recubrir a la fibra óptica con un cladding de otro material. Con este cladding, se tiene un ángulo máximo tal que la luz se refleje internamente en vez de atravesar el cladding.



El ángulo crítico cumple que $\sin \theta_c = n_c/n_f = \sin(90 - \theta_t)$. Luego, tenemos que $n_c/n_f = \cos \theta_t$ y finalmente, usando la ley de Snell y reordenando, nos queda:

$$\sin \theta_{max} = \frac{1}{n_i} (n_f^2 - n_c^2)^{1/2}$$

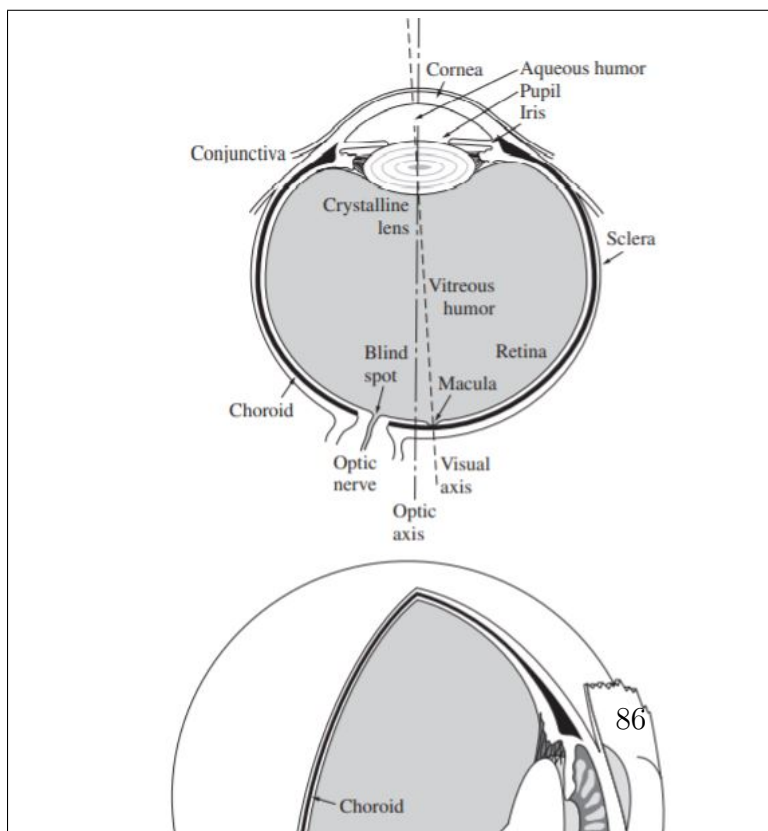
Se define la **apertura numérica (NA)** como la cantidad $n_i \sin \theta_{max}$. Es una medida de qué tan grande puede ser el ángulo de entrada de la luz.

Se pueden usar para hacer endoscopías o para transmitir información de un continente a otro y así.

8.6. Ojo:

El Ojo Humano

El ojo humano se puede pensar como un lente doble que deja una imagen en una superficie sensible a la luz.



El ojo consiste de una masa gelatinosa llamada esclera excepto en el frente en donde se localiza la cornea transparente. La luz llega a la cornea (índice de 1.376) donde sucede la mayoría de la refracción. Luego pasa al aqueous humor ($n_{ah} = 1,336$) donde sucede una leve refracción adicional. Luego pasa por la iris que sirve como un aperture stop controlando el cono de luz entrante por el hoyo (pupila). La iris es lo que le da color al ojo y puede cambiar el diámetro de la pupila de 2mm a 8mm.

Luego se llega al lente cristalino, que tiene más de 22000 capas finas de índice de refracción variable y puede cambiar su forma para permitir una longitud focal variable.

La córnea y el lente cristalino se pueden pensar como un doble lente con un object focus de 15.6mm y un image focus de 24.3mm (en la retina). El ojo tiene dos tipos de células fotorreceptoras, los bastones (blanco y negro) y conos (color).

El ojo humano puede ver longitudes de onda de entre 390nm y 780nm. Luego se encuentra el nervio óptico, esta parte no tiene receptores y es la causa de un punto ciego. En otra parte se encuentra la fovea, que es la parte con mayor cantidad de conos, y la parte que queda enfocada en la visión.

Para la visión, el lente cristalino se flexibiliza según sea necesario. Cuando los músculos están relajados, el lente tiene una entrada muy plana (un radio muy grande) lo que aumenta la longitud focal según la ecuación del lentero. Cuando el lente está totalmente relajado, se puede enfocar luz que viene del infinito en la retina. Cuando el objeto se acerca al ojo, el lente se acomoda para disminuir la longitud focal de tal forma que s_i permanezca constante y la imagen se siga formando en la retina. Se tiene un límite a qué tan cerca se puede enfocar un objeto (ya que es necesario tensar los músculos para esta tarea). Este límite aumenta con la edad y a mayor edad es más difícil enfocar de cerca.

La acomodación sucede de forma muy distinta para diferentes animales. Los humanos acomodan al cambiar la curvatura del lente, los peces acomodan al mover físicamente el lente, los moluscos acomodan al expandir y contraer el ojo en su totalidad para cambiar la distancia a la retina.

Punto Cercano: El punto más cercano en el que el ojo será capaz de formar una imagen en la retina. El punto cercano aumenta con la edad y en promedio es como de 25cm

Punto Lejano: El punto más lejano en el que el ojo es capaz de acomodarse para formar una imagen en la retina. Un ojo normal es capaz de hacerlo para puntos considerados infinitamente lejos.

Aproximando el ojo como un bi lente cercano, tiene una longitud focal de aprox. 1.7cm.

8.7. Lentes para Corregir Vista:

Potencia: La potencia D de un lente delgado se define como el inverso de su distancia focal y se mide en **Diopteros**. Tiene la ventaja de que cuando se tienen varios lentes en contacto, como $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$, entonces, $D = D_1 + D_2$

Miopía: La imagen de rayos desde el infinito converge antes de llegar a la retina. Es decir, el ojo refracta demasiado los rayos y no se puede ver de lejos (porque se necesita para eso un lente menos fuerte). Tiene un Far point distinto de infinito.

Hipermetropía: La imagen de rayos que vienen de lejos convergen atrás de la retina. El lente del ojo es muy débil y es difícil ver de cerca porque para eso se requiere un lente fuerte. Tiene un near point muy grande.

La corrección a la miopía consiste en poner un lente divergente de tal forma que los objetos del infinito parezcan en realidad venir desde el far point de la persona y entonces los pueda ver bien. Por ejemplo, una persona tiene un far point de $2m$, y le queremos colocar un lente de contacto que lo corrija, entonces necesitamos que el lente en cuestión debe de tener un f de $-2m$ para que imágenes del infinito parezcan estar a $2m$ (o bien usamos la ecuación del lentero con $d_o = \text{inf}$ y $d_i = -2m$ (que la imagen se cree del mismo lado), con lo que conseguimos nuevamente que se requiere un lente de foco a $-2m$, o bien, de potencia $-1/2D$

Una persona con hipermetropía requiere de un lente convergente para que le ayude con un poco del trabajo al ojo. Si una persona tiene un near point de $1,25m$, entonces requiere que un objeto a $25cm$ (near point saludable) en realidad parezca a $-1,25m$ (del mismo lado que el objeto, por eso el signo). Entonces, reemplazamos en la ecuación del lente delgado para obtener que requiere un foco de $0,31m$, es decir, un poder de $3,2D$

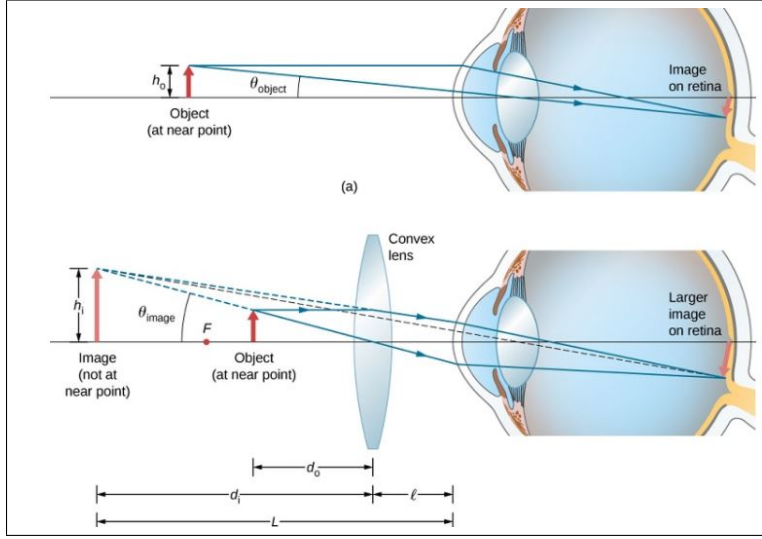
Para lentes que no sean de contacto ya no se puede usar la simplificación de pensar que contamos con un sistema de lentes en contacto. Por tanto, hay que relacionar la potencia del lente de contacto D_c con la de un lente equivalente D_L colocado a una distancia d del ojo. Queremos que el sistema Ojo -lente tenga un bfl equivalente al f del sistema Ojo-Lente de Contacto. Entonces, según las fórmulas, tenemos:

$$bfl = \frac{f_{ojo}(d - f_{lente})}{d - (f_{lente} + f_{ojo})} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_{contacto}} + \frac{1}{f_{ojo}}$$

Al igualar f y bfl resulta que el f_{ojo} desaparece y nos queda:

$$D_{contac} = \frac{D_{Lente}}{1 - D_{lente}d}$$

8.8. Lupa



El tamaño que percibimos de un objeto depende del span angular que tenga. Sabemos que si colocamos un objeto antes del foco en un lente convergente, entonces crea una imagen de mayor tamaño, virtual y upright. Por eso, se pueden usar lentes convexas como lupas sencillas.

Magnificación: La magnificación de una lupa es $M = \frac{\theta_i}{\theta_o}$, que en la aproximación de ángulo chico, podemos aproximar con tangentes

y nos queda la siguiente expresión:

$$\frac{h_i L_o}{L_i h_o}$$

Generalmente tomaremos L_o como 25 cm que es la distancia común a la que se usaría una lupa.

Luego, usando que $-d_i/d_o = h_i/h_o$, y usando que $-d_i = L_i - l$ (recordar convención de signos), podemos escribir la magnificación como:

$$M = \left(-\frac{d_i}{d_o}\right) \left(\frac{L_o}{L_i}\right) = -d_i \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d_i}\right) \left(\frac{L_o}{L_i}\right) = \left(\frac{L_o}{L_i}\right) \left(1 + \frac{L_i - l}{f}\right)$$

Si queremos que la imagen se forme a 25 cm (que es la misma distancia del objeto), sustituimos $L_i = 25\text{cm}$ y sostenemos el lente muy cercano al ojo ($l = 0$) entonces tendremos la máxima magnificación, que es $1 + 25/f$.

8.9. Cámara

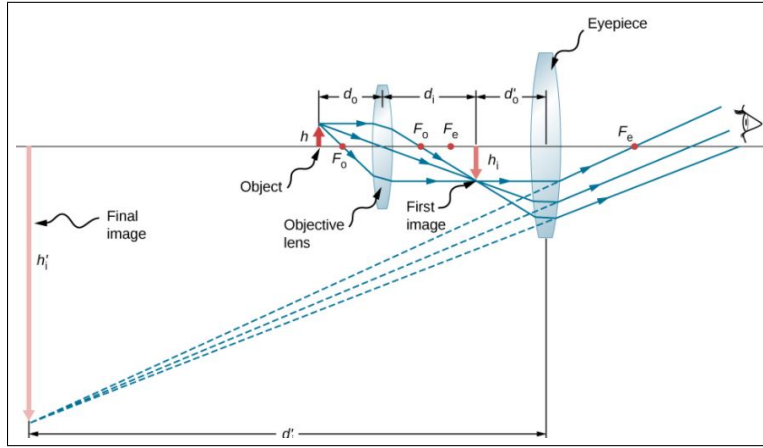
Las cámaras modernas tienen un sensor digital que convierte la intensidad de la luz en voltajes y tiene filtros de luz para asignar un voltaje a cada uno de los colores primarios.

Una cámara consiste de un par de lentes que se pueden mover para cambiar el punto al que enfocan. Luego, tiene un lente-espejo que deja pasar cierta cantidad de luz al sensor y rebota el resto al visor.

Las cámaras del celular no tienen lentes movibles, sin embargo, usan lentes con una distancia focal muy pequeña (unos 5mm, el grosor del celular) para que la luz paralela se enfoque justo en el sensor al otro lado del celular. Lo bueno es que con esta longitud focal tan baja, y tomando una foto a un objeto medio lejano a comparación ($d_o \gg f$), con la ecuación del lente se puede concluir que la distancia de la imagen será aproximadamente de 5mm al igual que f . Lo que significa que la imagen se formará justo en el sensor y estará

bien enfocada.

8.10. Microscopio



Obtener una imagen muy magnificada, puede ser un poco difícil usando un único lente.

El más sencillo es un microscopio simple como el de la imagen. El lente objetivo es uno convexo de poca longitud focal y el lente eyepiece es convexo y de mayor longitud focal. En la imagen se puede ver como el primer lente voltea y amplifica un poco el objeto y el segundo lente la amplifica y la aleja (para que el ojo humano pueda enfocar bien).

El objeto está justo después de f_{ob} ,

mientras que esta imagen se encuentra más cerca que el foco del eyepiece.

La magnificación total del microscopio es igual a la magnificación lineal del lente objetivo multiplicado por la magnificación angular del eyepiece. Donde $m_{ob} = -d_{ob,o}/d_{ob,i} \simeq -d_{ob,i}/f_{ob}$ y también, $M_{eyepiece} = 1 + 25/f_{eyep}$.

Las multiplicamos y tenemos que la magnificación total es:

$$M_{net} = m_{ob}M_{eyepiece} = -\frac{d_{obj,i}(f_{eye} + 25)}{f_{ob}f_{eyep}}$$

Podemos calcularlo de otra forma. $m_{ob} = -\frac{d_i^{ob}}{d_o^{ob}} = 1 - \frac{d_i^{ob}}{f^{ob}} = \frac{f^{ob} - d_i^{ob}}{f^{ob}}$

La segunda igualdad usando la ecuación de lente delgado.

Y digamos que la imagen final está en infinito, $d_i = \infty$. Para esto, la imagen del objective debe de estar justo en el foco del eyepiece.

Además, definimos **Longitud de Tubo:** como la distancia los focos del objetivo y del eyepiece. Como d_i se quiere en el foco del eyepiece, entonces $f^{ob} - d_i^{ob}$ es igual a esta distancia. Estandarmente se pone como 16cm.

Entonces, queda: $m_{ob} = \frac{16cm}{f_{ob}}$

Por otro lado, calculamos de nuevo la magnificación angular. Por aproximación de ángulo pequeño, tenemos que $\theta_i m \simeq h_i^{ob}/f_{eye}$ (altura de la imagen intermedia entre distancia al ojo [que es f_{eye} porque queremos que ahí quede la imagen intermedia]). y tenemos que

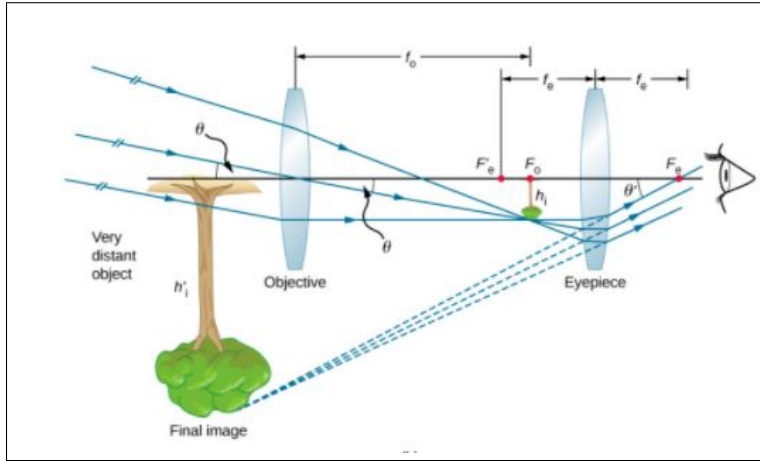
$$\theta_{ob} = h_i^{ob}/25. \text{ Entonces, tenemos que } M_{eye} = \frac{\theta_{im}}{\theta_{ob}} = \frac{25}{f_{eye}}$$

Entonces, calculamos M_{net} y nos queda:

$$M_{net} = m_{ob}M_{eye} = -\frac{16cm \ 25cm}{f_{ob}f_{eye}}$$

8.11. Telescopios:

Los telescopios sirven para ver objetos lejanos y producir una imagen de mayor tamaño al objeto original.



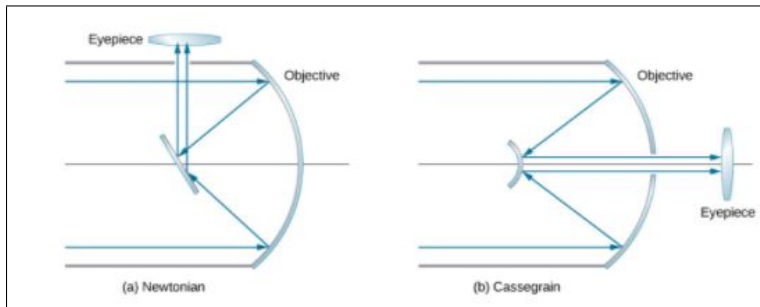
En la figura se ven los rayos muy lejanos, básicamente paralelos que llegan al lente objetivo, éste lente los transforma en una imagen invertida en su foco. Este objeto virtual car más cercano al foco del eyepiece, por lo que el lente eyepiece transforma este objeto virtual en una imagen también invertida pero muy grande y lejana que ocupa un mayor tamaño en la retina.

Como el objeto está tan lejos del lente objetivo, su imagen se crea en el foco $d_i^{ob} = f^{ob}$. Luego el lente eyepiece crea una magnificación de $M = \theta_{im}/\theta_{ob}$

Para obtener una expresión sencilla de la magnificación total, asumamos que la imagen del lente objeto (que se crea en el foco del lente objeto) se crea justo en el foco del lente eyepiece. Y así, la imagen final se creará en el infinito. Luego, se puede probar (libretexts) que la magnificación total será de :

$$M = -\frac{f_{ob}}{f_{eyep}}$$

Por otro lado se encuentran lo **Telescopios reflejantes:**

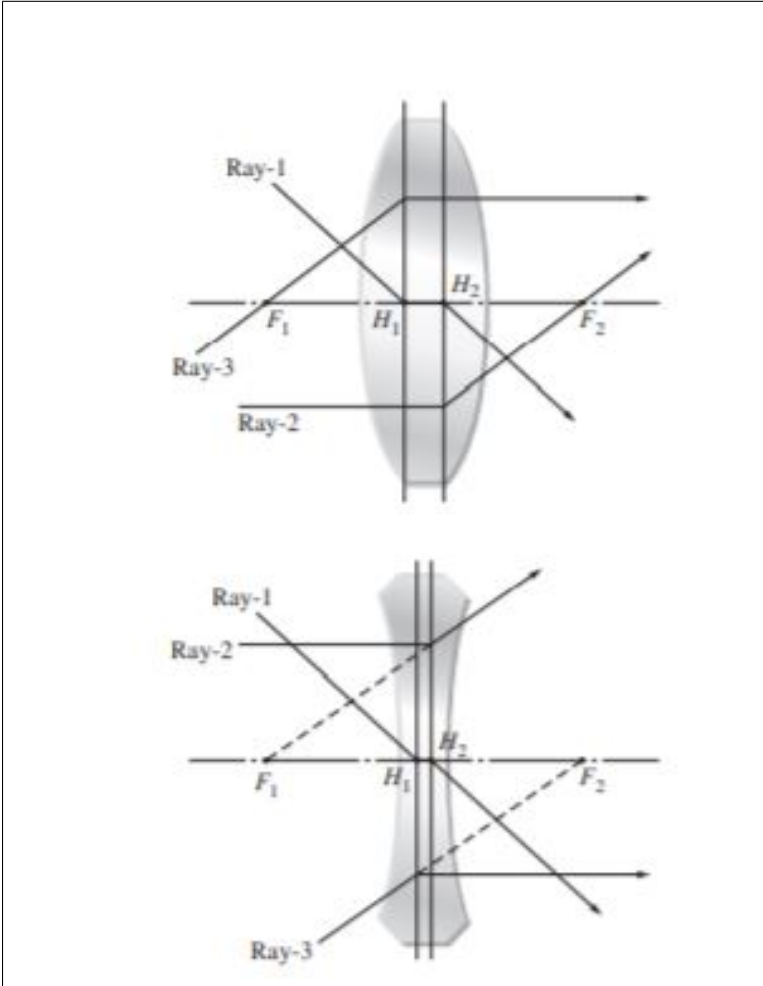


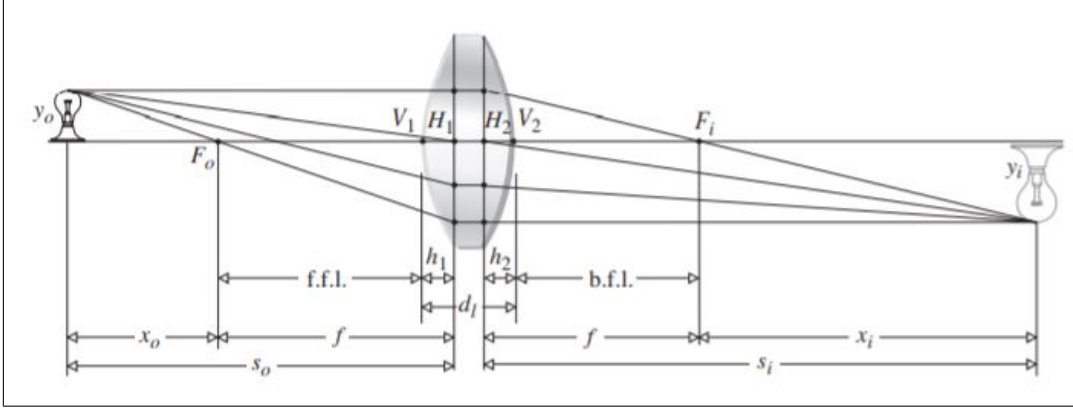
En la imagen se ven dos diseños bastante sencillos de entender. El Hubble es un reflecting Telescope.

9.1. Lente Grueso:

Plano Secundario: Los rayos paralelos que llegan parecen reflejarse hacia el foco en el segundo plano.

Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum
 Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ip-
 sum Ipsum IpsumIpsumIpsum Ip-
 sum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ip-
 sum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ip-
 sum IpsumIpsumIpsum Ipsum Ip-
 sum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ip-
 sum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ip-
 sumIpsumIpsum Ipsum Ipsum Ip-
 sum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ip-





En la imagen se ven los rayos y convención de signos. Usando la ecuación de un lente y luego la de otro, se puede probar la **Ecuación del Lente Grueso**:

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n_l - 1)d_l}{n_l R_1 R_2} \right]$$

Donde f es la distancia focal efectiva. Por otro lado, se puede calcular los h_1 y h_2 como sigue:

$$h_1 = -\frac{f(n_l - 1)d_l}{R_2 n_l}$$

$$h_2 = -\frac{f(n_l - 1)d_l}{R_1 n_l}$$

Por otro lado, tenemos la forma de Newton y de Gauss de la ecuación del lente y la ecuación de magnificación:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad x_o x_i = f^2$$

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} = -\frac{x_i}{f} = -\frac{f}{x_o}$$

h_1 y h_2 se toman positivas a la derecha de sus respectivos vértices.

Dos Lentes Gruesos: Para un sistema de dos lentes separados por una distancia d , se tiene una distancia focal de:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

Y los planos principales se pueden localizar con:

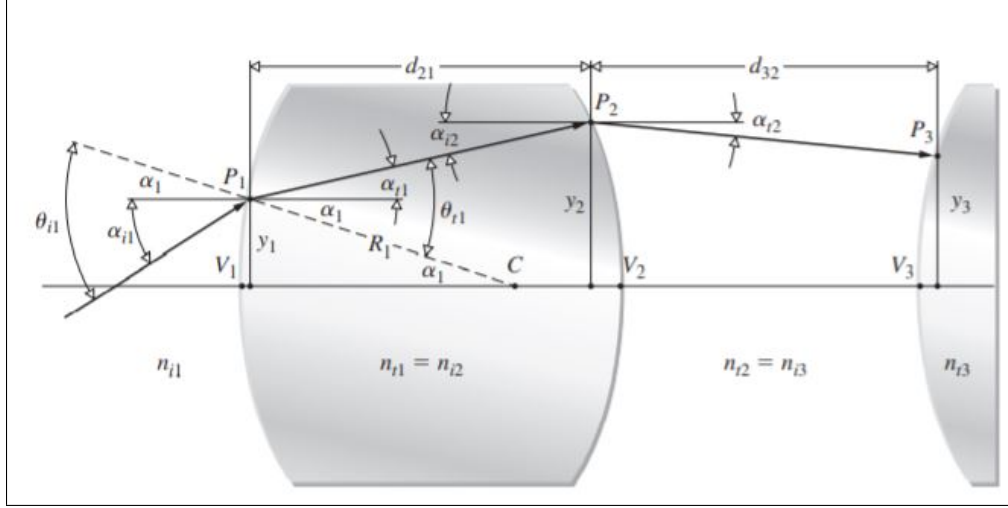
$$\overline{H_{11}H1} = \frac{fd}{f_2}$$

$$\overline{H_{22}H2} = \frac{fd}{f_1}$$

9.2. Ray Tracing Analítico:

Un rayo puede ser traced analíticamente estudiando cada una de sus refracciones, usando la ecuación de la refracción:

$$n)i(\hat{k}_i \times \hat{u}_n) = n_t(\hat{k}_t \times \hat{u}_n)$$



Todo lo numerado con 1 indica el primer cambio de superficie, i indica de entrada y t indica de salida. Los ángulos α son respecto al eje óptico (positivos antihorario), los ángulos θ se miden respecto al eje normal a cada superficie. Luego,

cada y es la altura que tiene el rayo en cada superficie.

Por la ley de Snell, para ángulo chico, tenemos que: $n_{i1}\theta_{i1} = n_{t1}\theta_{t1}$. Viendo los ángulos del dibujo, tenemos que: $n_{i1}(\alpha_{i1} + \alpha_1) = n_{t1}(\alpha_{t1} + \alpha_1)$. Usando la aprox. de ángulo chico de tangente, tenemos que $\alpha_1 = y_1/R_1$. Entonces, la ecuación pasada se convierte en: $n_{t1}\alpha_{t1} = n_{i1}\alpha_{i1} - \left(\frac{n_{t1} - n_{i1}}{R_1}\right)y_1$. Sin embargo, por la ecuación para lentes esféricas, tenemos que $D_1 = \frac{n_{t1} - n_{i1}}{R_1}$. Con todo esto, llegamos a la **Ecuación de Refracción**:

$$n_{t1}\alpha_{t1} = n_{i1}\alpha_{i1} - D_1 y_1$$

La cual nos permite calcular el ángulo después de pasar por una superficie.

Por otro lado, otra vez usando la aprox. de tangente, podemos comparar la altura final e inicial de un rayo luego de pasar por un lente. La **Ecuación de Transferencia**:

$$y_2 = y_1 + d_{21}\alpha_{t1}$$

9.2.1. Método de Matrices:

El rayo de entrada a la superficie 1 se puede representar usando un vector $\rho_{i1} = \begin{pmatrix} n_{i1}\alpha_{i1} \\ y_{i1} \end{pmatrix}$, es decir, usando el ángulo del rayo con respecto a la horizontal y la altura con respecto al eje óptico.

Cuando un rayo pasa de un lado de la superficie a otro, la altura de entrada y de salida es la misma y el ángulo viene dado por la ecuación de refracción, entonces, tenemos:

$$\begin{pmatrix} n_{t1}\alpha_{t1} \\ y_{t1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -D_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{i1}\alpha_{i1} \\ y_{i1} \end{pmatrix}$$

A esta matriz de un lado de la superficie a otro se le llama **Matriz de Refracción** y se escribe como \mathcal{R}_1 . Recordar que $D_1 = \frac{n_{t1} - n_{i1}}{R_1}$.

Por otro lado, cuando pasamos de una superficie a la siguiente, el ángulo del que sale sale de la primera superficie es igual al ángulo al que entra en la siguiente. Sin embargo, la altura final se calcular por medio de la ecuación de transferencia. Entonces, nos queda que:

$$\begin{pmatrix} n_{i2}\alpha_{i2} \\ y_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_{t1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{t1}\alpha_{t1} \\ y_{t1} \end{pmatrix}$$

La matriz se llama matriz de transferencia y se denota por \mathcal{T}_{21}

Luego, tenemos que:

$$\rho_{i2} = \mathcal{T}_{21}\mathcal{R}_1\rho_{i1}$$

$$\text{Y también tenemos que: } \rho_{t2} = \mathcal{R}_2\mathcal{T}_{21}\mathcal{R}_1\rho_{i1}$$

Es decir, toma el rayo que entra a una superficie de un lente y luego lo transforma en el rayo que sale de la superficie opuesta del lente. A la matriz completa se le llama $\mathcal{A} = \mathcal{R}_2\mathcal{T}_{21}\mathcal{R}_1$

Se puede calcular la forma de \mathcal{A} , para llegar a:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{D_2 d_{21}}{n_{t1}} & -D_1 - D_2 + \frac{D_2 D_1 d_{21}}{n_{t1}} \\ \frac{d_{21}}{n_{t1}} & 1 - \frac{D_1 d_{21}}{n_{t1}} \end{pmatrix}$$

También se puede hacer algo similar para lentes delgados y de espejos.

9.3. Aberraciones:

Las aberraciones se dividen en **aberraciones cromáticas** que suceden debido a las diferencias en índice de refracción con respecto a la longitud de onda, por otro lado tenemos las **aberraciones monocromáticas** que suceden incluso para rayos de luz monocromáticos.

9.3.1. Aberraciones Monocromáticas

Para todo lo estudiado hasta ahora, solamente usamos las aproximaciones lineales de las funciones trigonométricas. Sin embargo, para un estudio más detallado se usan aproximaciones de tercer orden en lo que se llama *teoría de tercer orden*. Esto da lugar a 5 aberraciones (esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión).

Aberraciones Esféricas:

Por la ecuación de lente esférico (de primer orden) tenemos que $\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$. Sin embargo, si regresamos a como habíamos encontrado esta ecuación inicialmente pero usamos una aproximación de más términos, nos queda que la ecuación de refracción esférica es:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2 \left[\frac{n_1}{2s_o} \left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R} \right)^2 + \frac{n_2}{2s_i} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i} \right)^2 \right]$$

Estos términos dan una corrección que varía con h^2 , por lo que los rayos lejanos al eje óptico salen más desviados y no convergen todos en el mismo punto. La podemos dividir en aberración esférica longitudinal y transversa. El Hubble tuvo este problema de hecho.

Coma:

Coma o comatic aberration. Se debe a que los planos principales no son en realidad planos. Entonces, algunos de los rayos serán refractados de formas diferentes a lo esperado. Se divide en varios tipos de coma.

Astigmatismo: Cuando el punto objeto se encuentra a una buena distancia del eje óptico. Los rayos que salen del punto llegan al lente de formas asimétricas. Los rayos en un plano enfoca en un punto distinto a los rayos de otro plano.

Curvatura de Campo: No sé.

Distorsión: Sucede porque la magnificación puede ser una función de la distancia del punto objeto al eje óptico. Entonces puede ser que las esquinas de un objeto se magnifiquen más o menos que el centro del objeto.

9.3.2. Aberraciones Crómicas

La aberración cromática se debe a la dependencia del índice de refracción con la longitud de onda de la luz. En la ecuación del lente delgado $\frac{1}{f} = (n_l - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$. Entonces, el foco en el que converge la luz depende en realidad de la longitud de onda, por lo que distintos colores convergen a distintos puntos. Entonces, en un lente delgado convergente, el color azul converge antes del color rojo. Tenemos el foco del azul F_B y el foco del rojo, F_R .

Esto sugiere que podemos usar dos lentes (uno convergente y uno divergente) para corregir los errores y lograr que colores distintos converjan casi juntos.

Tenemos que el foco del primer lente es: $1/f_1 = (n_1 - 1)\rho_1$ donde $\rho_1 = (1/R_1 - 1/R_2)$ para el primer lente.

Para el segundo lente, tenemos que $1/f_2 = (n_2 - 1)\rho_2$.

Luego, por la ecuación de dos lentes cercanos, tenemos que $1/f = (n_1 - 1)\rho_1 + (n_2 - 1)\rho_2 - d(n_1 - 1)\rho_1(n_2 - 1)\rho_2$ (con d la distancia entre los lentes).

Cada uno de los índices de refracción en realidad dependen del color.

Queremos que $1/f_R = 1/f_B$. Por lo que nos queda:

$$(n_{1R} - 1)\rho_1 + (n_{2R} - 1)\rho_2 - d(n_{1R} - 1)\rho_1(n_{2R} - 1)\rho_2 = (n_{1B} - 1)\rho_1 + (n_{2B} - 1)\rho_2 - d(n_{1B} - 1)\rho_1(n_{2B} - 1)\rho_2$$

Si los lentes son muy cercanos, podemos tomar $d = 0$ y llegamos a que se necesita tener:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = -\frac{n_{2B} - n_{2R}}{n_{1B} - n_{1R}}$$

10. Polarización

Digamos que tenemos una onda armónica moviéndose en la dirección z^+ . El campo eléctrico de la onda puede posicionarse de cualquier forma perpendicular a la dirección de movimiento, e incluso puede ir cambiando su dirección con el tiempo.

Polarización Lineal: Una onda que se mueve en la dirección z está linealmente polarizada si el campo Eléctrico apunta siempre en la misma dirección. En este caso vemos una onda polarizada en la dirección x y en la dirección y . Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\vec{E}_x(z, t) &= \hat{i}E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y(z, t) &= \hat{j}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \epsilon)\end{aligned}$$

Podemos sumar estas dos ondas polarizadas para obtener:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t)$$

Si las ondas constituyentes están en fase, el resultado será sencillamente:

$$\vec{E} = (\hat{i}E_{0x} + \hat{j}E_{0y}) \cos(kz - \omega t)$$

Que vuelve a ser una onda polarizada linealmente, pero en la dirección $(\hat{i}E_{0x} + \hat{j}E_{0y})$, que tiene un ángulo θ de tilt de $\tan \theta = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$

Polarización Circular: Un caso particular sucede cuando el desfase entre la onda en y y la onda en z es de $-\pi/2$ y ambas tienen la misma amplitud. Es decir, las ondas 'componentes' son:

$$\begin{aligned}\vec{E}_x(z, t) &= \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y(z, t) &= \hat{j}E_0 \cos(kz - \omega t - \pi/2) = \hat{j}E_0 \sin(kz - \omega t)\end{aligned}$$

Entonces, la suma es una onda con polarización circular, que viene dada por:

$$\vec{E} = E_0 \left[\hat{i} \cos(kz - \omega t) + \hat{j} \sin(kz - \omega t) \right]$$

La dirección del vector \vec{E} da vueltas en círculos.

En este caso está polarizada en right circular porque el vector \vec{E} gira en sentido horario. Sino se llama left circular.

Una onda polarizada linealmente se puede conseguir como la suma de dos ondas polarizadas circularmente en sentido opuesto y con la misma amplitud.

Polarización Elíptica: Regresamos a las componentes de antes:

$$\begin{aligned}\vec{E}_x(z, t) &= \hat{i} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y(z, t) &= \hat{j} E_{0y} \cos(kz - \omega t + \epsilon)\end{aligned}$$

Después de un par de operaciones, nos queda que:

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\epsilon = \sin^2\epsilon$$

Esta ecuación prueba que los componentes x y y de la suma de los vectores giran en una elipse. Con esto se puede ver a la polarización circular y lineal como un caso especial de polarizaciones elípticas.

La polarización lineal se llamará P-estado y la polarización circular derecha e izquierda se llamarán R-Estado y L-Estado.

Luz Natural: La luz natural no tiene ninguna polarización en particular. Pues se generan trenes de onda muy cortos que al sumarlos entre todos no tienen una polarización particular. Una onda monocromática perfecta, que tiene que ser una onda infinita, siempre está polarizada linealmente.

La luz natural se puede descomponer siempre en en dos P-estado incoherentes, de igual magnitud y ortogonales. O bien, se puede descomponer en un R-estado y un L-estado.

10.1. Polarizadores:

Un polarizador es un material que permite separara la luz según su polarización. **Polarizador Lineal:** Toma uno de los P-estados que componen a la luz. **Polarizador Circular:** Permite el paso de un tipo de luz polarizada circularmente.

Los polarizadores se basan en uno de los siguientes mecanismos: reflexión, scattering, birefringence (doble refracción) y dichroismo (absorción selectiva).

Si luz natural llega a un polarizador, sólo la componente en el P-estado correspondiente pasará. Esta dirección se llama **Eje de Transmisión** del polarizador.

Ley de Malus: Si tenemos luz que está polarizada linealmente y colocamos un polarizador a un ángulo θ de la polarización original. Entonces, si la amplitud de la luz que cruza el primer polarizador es E_0 , entonces la que cruza el segundo es $E_0 \cos\theta$ y que por tanto, tiene una intensidad de $\frac{c\epsilon_0}{2}|E_0 \cos\theta|^2 = \frac{c\epsilon_0}{2}E_0^2 \cos^2\theta$. Entonces, la intensidad transmitida por el segundo polarizador como función de θ es:

$$I(\theta) = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2 \theta = I(0) \cos^2 \theta$$

si llega luz sin polarizar a un polarizador, entonces se puede considerar como que está formada por todas las posibles polarizaciones y cada una es recortada por un ángulo $\cos^2 \theta$. Entonces la intensidad total que sale es el promedio de \cos^2 y es por lo tanto la mitad de la intensidad que entra.

10.2. Dichroismo:

El método de Dichroismo se refiere a la absorción de un tipo de P-estado y la transparencia del tipo ortogonal.

El Polarizador de Reja: Tenemos una reja vertical de varas de metal muy juntas. Llega luz a la reja, la componente vertical hace oscilar a los electrones (pero la horizontal no). El movimiento de los electrones en la dirección y hace que el campo pierda energía. Además, esta luz vertical cancela a la luz original por lo que la luz no se transmite en la dirección vertical. Por otro lado, la componente componente x no afecta a las cargas en la reja (porque no se pueden mover así) y entonces la componente horizontal se transmite sin alteraciones. El eje de transmisión es perpendicular a la dirección de la reja.

Cristales Dichroicos: Algunos materiales son inherentemente dichroicos. Tienen una dirección o **Eje Óptico**, la luz en esta dirección es transmitida y en la dirección perpendicular es absorbida.

Polaroide: Tenemos un material con partículas o cadenas largas que parecen rejillas. El componente eléctrico en esta dirección es capaz de mover mucho a los electrones y por tanto les hace trabajo y esta luz pierde energía. Por otro lado, el campo en la dirección ortogonal no pierde energía y atraviesa el polarizador. Estos polarizadores están contruidos solamente para ciertos intervalos de longitud de onda (en los que el material tiene frecuencia natural y por tanto oscila muy fuerte y pierde energía)

Digamos que llega luz con una intensidad I_i al polarizador. Si el rayo está polarizado en la dirección de transmisión del polarizador, entonces mucha luz pasará y terminará con una intensidad de I_{t0} , la fracción I_{t0}/I_i se llama **Transmitancia Principal**, se denota T_0 y en el caso ideal vale 1.

Si la luz que llega tiene un ángulo de 90 con respecto al eje de transmisión, se transmitirá una intensidad chica de I_{t90} , la fracción I_{t90}/I_i se llama **Transmitancia Menor** y se denota por T_{90} e idealmente vale 0.

Si tengo una luz cualquiera E_0 con un ángulo θ respecto al eje de transmisión, entonces una cantidad $E_0 \cos \theta$ será paralela al eje de transmisión y una cantidad $E_0 \sin \theta$ será ortogonal. Las intensidades son proporcionales al cuadrado de estas cantidades y la transmitancia total (intensidad final entre inicial) será de:

$$T_l = T_0 \cos^2 \theta + T_{90} \sin^2 \theta$$

Razón de Transmitancia: La razón entre la transmitancia de luz a ángulo 0 y a ángulo 90: T_0/T_{90} . Nos da una idea de qué tan bien polariza.

Si luz natural incide en un polarizador, podemos pensar que el ángulo es arbitrario y la transmitancia es de: $T_n = \frac{1}{2}(T_0 + T_{90})$ (usando el promedio de \cos^2 y \sin^2)

10.3. Birefringence

Muchos objetos cristalinos son ópticamente anisotrópicos, se comportan de diferente formas en diferentes direcciones. Los cristales Dichroicos son un ejemplo particular de esto. Se puede modelar como un núcleo rodeado por una nube de electrones conectada por resortes, pero los resortes en distintas direcciones tienen diferente constante de resorte y por tanto diferente frecuencia de oscilación natural. Para un cuerpo ópticamente isotrópico, todas las direcciones tienen resortes de la misma constante.

Como se vió antes, la luz llega a un material y hace un driven oscillator en todos los electrones que hacen que reirradien luz con cierta amplitud y diferencia de fas, estas ondas secundarias se recombinan con la principal y la onda resultante se mueve. La velocidad y por tanto índice de refracción de la onda resultante depende de la frecuencia normal de oscilación y por tanto en objetos anisotrópicos (en cuanto a la fuerza que mantiene a los electrones), existe una anisotropía en el índice de refracción.

Un material es **Birefringent** si una de sus direcciones tiene un índice de refracción distinto a la otra.

Por ejemplo, podemos tener un material con cierta frecuencia natural en la dirección y y z pero con una frecuencia natural distinta en la dirección x . Si irradiamos este material con luz natural que tenga una frecuencia similar a la de la dirección y , entonces: La componente en y será absorbida porque perderá energía al hacer oscilar fuertemente a los electrones. Pero la componente en x casi no perderá energía y pasará libremente. Entonces, el material efectivamente funcionó como un polarizador con eje óptico en la dirección x .

Por su estructura atómica, la calcita es un ejemplo de un material Birefringence.

Un rayo que se propague en la dirección x siempre va a tener su polarización en la dirección y o z y va a tener un cierto índice de refracción llamado normal con valor $n_o(\omega)$. Un rayo que se dirige en otra dirección tiene uno de sus componentes paralelo al eje x y éste va a tener un índice de refracción extraordinario $n_e(\omega)$.

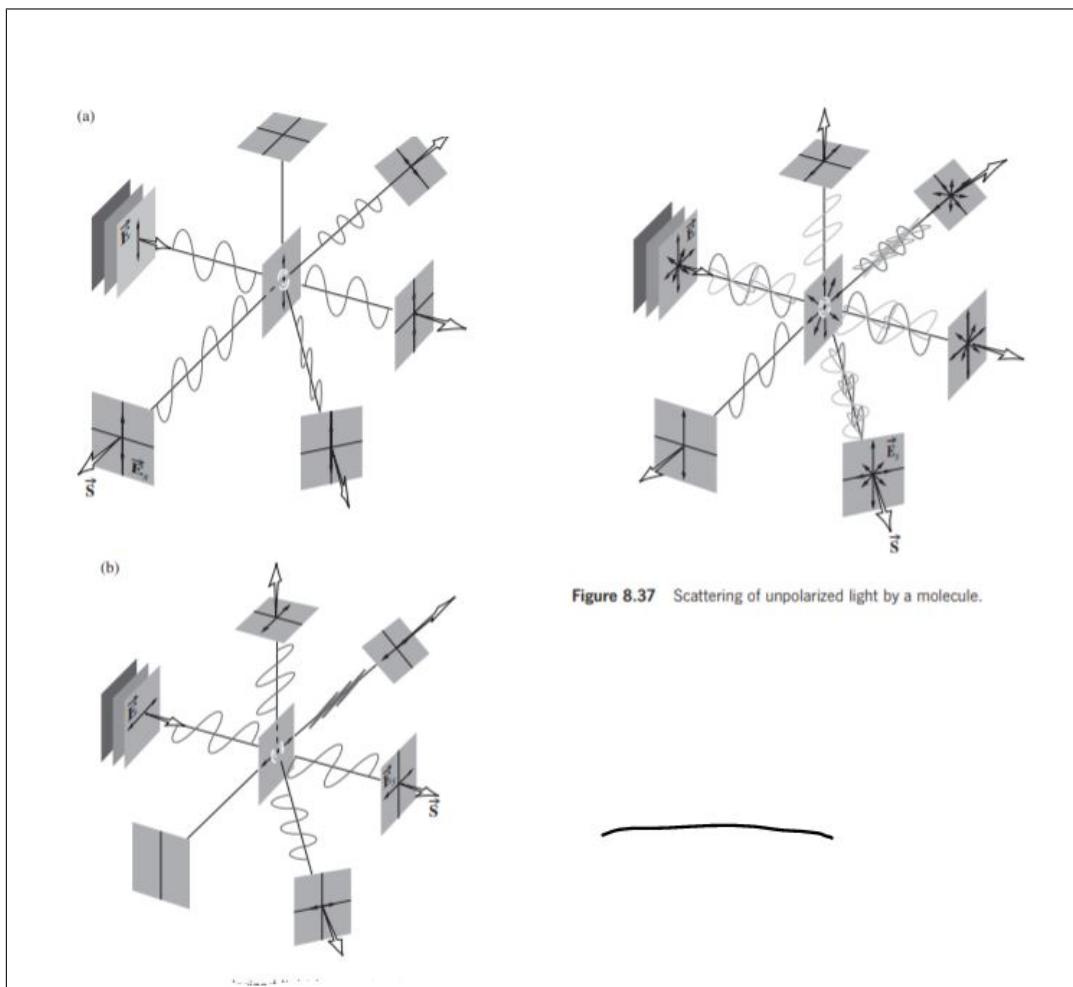
Así, una luz que entre en una dirección arbitraria y polarización arbitraria, tendrá unas componentes con índice de refracción normal y otras con índice extraordinario. Entonces, se crean dos rayos que generan una refracción doble.

La Birefringence se define como:

$$\Delta n = n_e - n_o$$

Se puede construir un material polarizador usando un birefringente y arreglándolo de tal forma que el rayo normal sea reflejado internamente en su totalidad y sólo sobreviva el extraordinario. Funciona entonces como un polarizador.

10.4. Scattering y Polarización

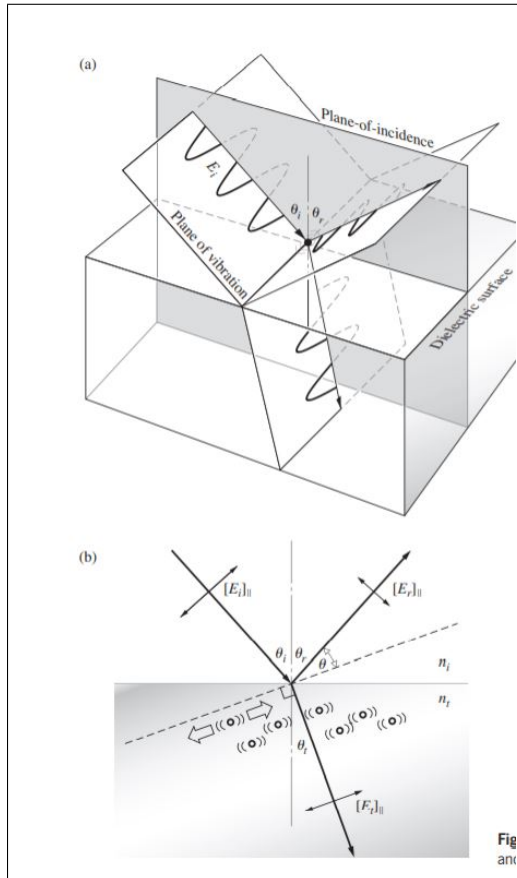


Cuando llega luz polarizada a una molécula, ésta empieza a vibrar en la dirección de polarización. Esto hace que se scateree luz en todas las direcciones, pero siempre con la polarización también en la dirección vertical. Y vemos que en la dirección vertical no se scaterea luz porque es la misma dirección de vibración de la molécula.

Cuando llega la luz polarizada horizontalmente, la molécula vibra horizontalmente y por tanto el scatereo tiene esta polarización. La onda no se propaga en la dirección horizontal pues es la propia dirección de vibración.

Por esto, si tenemos luz no polarizada, se puede ver como una combinación de las dos polarizaciones y entonces algunos scatereros son polarizados de una forma y otros de otra. Por esto, al ver la luz scaterada a 90 grados de la llegada de la luz del sol, estará polarizada en alguna dirección.

10.5. Polarización por Reflección:



Llega una onda de luz a una superficie y parte se refleja y parte se refracta. Si la luz es polarizada perpendicular al plano de incidencia como en la parte a), no sucede nada que nos interese.

Si la luz es polarizada paralela al plano de incidencia, vemos en la parte b) como sucede la vibración de las partículas en el medio dieléctrico. El ángulo θ se mide entre esta dirección de vibración y la dirección en la que se propaga el rayo reflejado. Si estas dos direcciones son iguales, no habrá un rayo reflejado.

El ángulo de entrada en el que sucede esto se llama **ángulo de polarización**. Ya lo habíamos estudiado antes en las ecuaciones de Fresnel al definirlo como el ángulo en el que las ondas paralelas al plano de incidencia no son reflejadas en absoluto.

Viendo el dibujo, para que el ángulo de incidencia sea el ángulo de polarización, se debe de cumplir:

$$\theta_p + \theta_t = 90$$

Luego, usando la ley de Snell, nos queda que:

$$n_i \sin \theta_p = n_t \sin \theta_t$$

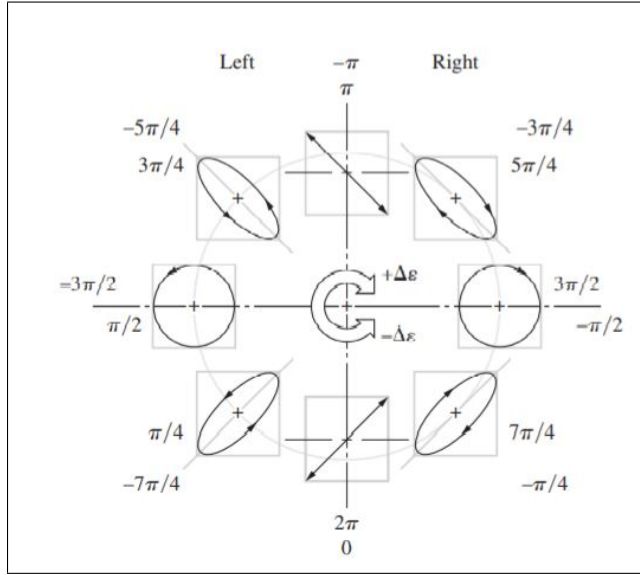
Con esto, se puede llegar a la **Ley de Brewster** que dice que el ángulo de polarización cumple:

$$\tan \theta_p = \frac{n_t}{n_i}$$

Con esto se puede construir un polarizador, pues la luz reflejada queda polarizada.

10.6. Retarder

Un retarder toma luz no polarizada (superposición de dos polarizaciones lineales ortogonales) y retrasa (o adelanta) alguna de las dos. Con esto se puede pasar de cualquier polarización elíptica a cualquier otra.



La imagen muestra las polarizaciones elípticas que aparecen según el desfase entre las ondas lineales.

Fast Axis: El eje que es adelantado de fase.

Por ejemplo, si la luz tiene un fast axis en la dirección x , la polarización gira en sentido horario.

Una forma de construir esto es con un material birefringente. Pues una de las direcciones de polarización será la normal y tendrá una velocidad v_o , mientras que la otra parte será la extraña y tendrá una velocidad de v_e . Luego, las ondas se desfazan y su com-

binación final será algún tipo de onda elíptica.

Si el vidrio tiene un ancho d y la onda que llega tiene una longitud de onda λ_0 (en vacío), entonces se crea un desfase entre los componentes de:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(|n_o - n_e|)$$

El estado de polarización de la onda que sale dependerá de la diferencia de fase $\Delta\phi$ y de las amplitudes de los componentes que se forman.

Full-Wave Plate: Si $\Delta\phi = 2\pi$, entonces las ondas e y o están justo una longitud de onda fuera de fase, por lo que vuelven a estar en fase. Por la dependencia de $\Delta\phi$ con λ_0 , éste desfase de una longitud de onda se podrá realizar solamente en una longitud de onda en particular, el resto de las ondas se desfazan diferente. Entonces, si mandamos luz blanca a un material así, solamente la parte de ese color en particular pasará sin ser afectado, mientras que el resto de las ondas se afectarán y convertirán en algún tipo de onda elíptica.

Half-Wave Plate: La diferencia de fase entre la onda o y e es de π , es decir, media longitud de onda. Llega una onda cualquiera perpendicular al eje óptico y su parte normal (polarizada en la dirección del eje óptico) viajará a v_o mientras que la excéntrica a v_e . La diferencia de velocidad se traduce en una diferencia de fase al salir de $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d|n_o - n_e|$

Un half-wave retarder hace que una longitud de onda en particular λ_0 se retrase por π . Para alguna onda polarizada como la imagen anterior, la onda de salida será la que se encuentra en el lugar opuesto. Para que esto suceda en una longitud λ_0 , se debe de cumplir que:

$$d|n_o - n_e| = (2m + 1)\lambda_0/2$$

Quarter-Wave Plate: Cuando $\Delta\phi = \pi/2$ para alguna longitud de onda en particular. Es decir, se debe de cumplir:

$$d|n_o - n_e| = (4m + 1)\lambda_0/4$$

Si este es el caso, la luz de esta longitud de onda polarizada de cualquier forma que indique la imagen pasará a polarizarse de la forma correspondiente a dar un cuarto de vuelta.

Orden del Retarder: Un retarder de orden 0 es uno que justo causa la retardación necesaria para hacer el cambio de fase necesario y que no tiene múltiplos de 2π sumados. Conforme tenga múltiplos de 2π sumados, se le añade 1 al orden.

Retarder de Fresnel: Vimos que una reflexión interna causa una diferencia de fase entre los componentes de la onda de cierta cantidad. Si hacemos que una luz rebote varias veces por un tubo, podemos hacer que un componente se retarde del otro

Compensador: Un compensador es un tipo de retarder que es variable, se puede cambiar como se quiera el cambio de fase que genera.

El **Babinet Compensator** usa dos wedges del mismo material y con ejes ópticos opuestos y los pone uno arriba del otro de forma que embonen y se puedan deslizar. La luz pasará una distancia d_1 en el primero lo que causa un desfase de $\frac{2\pi}{\lambda_0}d_1|n_o - n_e|$ y luego una distancia de d_2 en el segundo lo que causa un desfase $\frac{-2\pi}{\lambda_0}d_2|n_o - n_e|$ para tener finalmente un desfase total de: $\frac{2\pi}{\lambda_0}(d_1 - d_2)|n_o - n_e|$.

El cual se puede variar al deslizar un wedge sobre el otro y variar así las distancias.

10.7. Polarizador Circular

Un polarizador puede convertir luz natural en solamente el componente circular. Una forma de hacerlo es primero aplicar un polarizador lineal a la luz natural. Luego, aplicamos un Quarter Wave Plate que entonces convierte la luz lineal en circular.

10.8. Polarización de luz Polycromática

La luz verdadera es policromática, pues está compuesta de componentes con un rango de frecuencias. La luz que sale de un átomo se puede ver como un tren de onda con una longitud finita Δl_c o bien, un intervalo de tiempo Δt_c . Por la transformada de Fourier, este wavetrain tiene un espectro de frecuencias centrado en un $\bar{\nu}$ y con una incertidumbre de $\Delta\nu$. Cada átomo envía un tren de ondas así con una duración de $10^{-8}s$ y luego envía otro y otro. Un tren de ondas va a estar desfasado con respecto al siguiente y se pierde la coherencia

Supongamos que examinamos la luz que proviene de un source chiquito con una cantidad chica de átomos. Durante un tiempo mucho menor al tiempo de coherencia, las amplitudes y fases de las ondas de cada átomo son básicamente constantes. Entonces vamos a ver una superposición coherente de ondas.

Onda Cuasicromática: Tiene un ancho de banda muy chico a comparación con su frecuencia promedio.

Se puede representar como la suma de dos P-estados ortogonales en los que la fase y amplitud son funciones del tiempo y se toma la frecuencia angular y número de onda promedio:

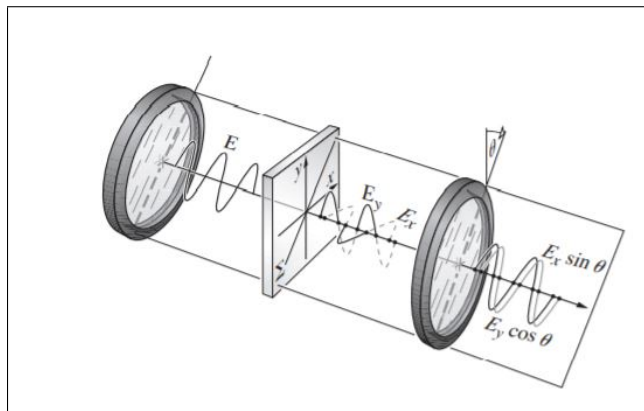
$$\begin{aligned}\vec{E}_x(t) &= \vec{i}E_{0x}(t) \cos[\bar{k}z - \bar{\omega}t + \epsilon_x(t)] \\ \vec{E}_y(t) &= \vec{j}E_{0y}(t) \cos[\bar{k}z - \bar{\omega}t + \epsilon_y(t)]\end{aligned}$$

Durante el intervalo de coherencia, las amplitudes y fases varían lentamente por lo que el estado de polarización también. Para este caso en el que el intervalo de coherencia es grande, se puede ver como varía lentamente la polarización.

Por otro lado, si $E_{0x}(t)/E_{0y}(t)$ y $\epsilon_y(t) - \epsilon_x(t)$ fueran constantes, entonces la onda está polarizada, sin importar su tiempo de coherencia, y así se puede polarizar incluso luz blanca o luz con un ancho de banda largo.

Interference

Colors:



Digamos que polarizamos luz blanca y luego la hacemos pasar por un birefringence y por otro polarizador. La luz blanca se divide en el componente normal y extraordinario del birefringence, los cuales se mueven a distintas velocidades y crean una onda polarizada elípticamente. Sin embargo, ahora seguiremos pensando en los dos componentes E_x, E_y por separado, recordando que tienen una diferencia de fase de $\Delta\phi$. Luego llegan al segundo polarizador y de cada uno de los componentes sobrevive solamente su

subcomponente en la dirección de polarización, $E_x \sin \theta, E_y \cos \theta$. Los cuales están ahora en el mismo plano y por tanto interfieren. Tienen el mismo desfase que antes, así que pueden interferir constructiva o destructivamente dependiendo de eso. Como el desfase del birefringence depende del color, sólo algunos colores sobreviven, los que el birefringence actúa como un full wave, los de half wave mueren.

10.9. Actividad Óptica

Un cuerpo ópticamente activo causa que la polarización de la luz rote continuamente mientras lo atraviesa. Se divide en dextrorotatory y levorotatory dependiendo del sentido de rotación al ver hacia el source de la luz.

Enantiomorfos: Dos moléculas iguales pero que son la imagen espejo una de la otra. Herschel se dio cuenta que la d-rotatory o l-rotatory del quartz dependía de cuál de las estructuras espejadas tuviera.

Fresnel propuso una explicación: Cualquier onda polarizada linealmente se puede descomponer en un R-estado y un L-estado. Fresnel sugirió que el objeto tiene un índice de refracción distinto para cada uno de estos componentes circulares n_R y n_L . Así, al pasar la luz, uno de los componentes se atrasa y el resultado es que parece que la polarización giró. Veámoslo matemáticamente, descomponemos una onda en sus componentes R y L y a cada uno le damos una velocidad distinta al variar k :

$$\begin{aligned}\vec{E}_R &= \frac{E_0}{2} [\hat{i} \cos(k_R z - \omega t) + \hat{j} \sin(k_R z - \omega t)] \\ \vec{E}_L &= \frac{E_0}{2} [\hat{i} \cos(k_L z - \omega t) - \hat{j} \sin(k_L z - \omega t)]\end{aligned}$$

La onda sumada se puede obtener tras un poco de trigonometría y es:

$$\vec{E} = E_0 \cos[(k_R + k_L)z/2 - \omega t] [\hat{i} \cos(k_R - k_L)z/2 + \hat{j} \sin(k_R - k_L)z/2]$$

Se puede ver que conforme aumenta z , los componentes en \hat{i} y \hat{j} van girando y cambia la polarización. Si $k_R > k_L$ la rotación es antihoraria y si $k_L > k_R$ es horaria.

Queda claro que el ángulo que ha rotado la luz para un valor de z es:

$$\beta = -(k_R - k_L)z/2$$

O bien, si el material tiene un grosor d , entonces al atravesarlo la luz habrá rotado una cantidad:

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda_0} (n_L - n_R)$$

Poder rotacional: El ángulo que rota por unidad de ancho β/d . Este valor depende de la longitud de onda (ya que las velocidades dependen de la longitud de onda).

Los objetos tienen diferente potencia de rotación según su combinación y algunos tienen a la vez los efectos birefringent de antes. Se puede determinar la cantidad de azúcar en la orina al saber cómo varía su poder rotacional con la concentración por ejemplo.

Se puede modelar un material ópticamente activo como consistiendo de electrones que no vibran, sino que se mueven en caminos helicoidales a lo largo de una molécula. Entonces

el R-estado o L-estado que congenie con esa hélice se va a adelantar con respecto al otro estado.

El funcionamiento verdadero del fenómeno es mucho más complicado e involucra mecánica cuántica.

10.10. Induced Optical Effects

10.10.1. Fotoelasticidad:

Se descubrió que sustancias isotrópicas y transparentes se podían convertir en anisotrópicas al aplicar un estrés mecánico y se convierte en un cristal uniaxial con el eje óptico en la dirección del estrés.

Al observar los patrones de Birefringence de un material entre dos polarizadores, se puede notar los puntos con mayor estrés porque cambian sus propiedades ópticas.

10.10.2. Efecto Faraday

Faraday descubrió que la aplicación de un campo magnético externo influye en la forma en que se propaga la luz. Notó que el plano de vibración de la luz linealmente polarizada incidente rotaba cuando pasaba por un pedazo de vidrio al que se le aplicaba un campo magnético en la dirección de propagación. Se parece un poco a la actividad óptica. El ángulo β por el que rota la polarización es:

$$\beta = VBd$$

Con d el grosor, B el campo magnético en la dirección de propagación y V una constante llamada constante de Verdet. La constante varía con frecuencia y temperatura.

Vemos que la dirección en la que rota depende también de si B es paralelo o antiparalelo a la dirección de propagación. En esto es en lo que se diferencia de la actividad óptica.

10.11. Descripción Matemática

10.11.1. Parámetros de Stokes:

Se introducen cuatro parámetros que dependen únicamente de variables observables y fáciles de medir. La polarización de la luz se puede describir a partir de estas cantidades. Primero nos imaginamos que tenemos cuatro polarizadores en línea, el primero polariza igual a todas las direcciones, el segundo es un polarizador horizontal, el tercero es un en diagonal a 45 grados y el último es un polarizador circular de un R-estado. La intensidad que atraviesa cada polarizador es I_0, I_1, I_2, I_3 . Con esto se definen los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}
S_0 &= 2I_0 \\
S_1 &= 2I_1 - 2I_0 \\
S_2 &= 2I_2 - 2I_0 \\
S_3 &= 2I_3 - 2I_0
\end{aligned}$$

S_0 es la radiancia incidente, y los otros tres especifican el estado de polarización. Por ejemplo, S_1 es positivo si la polarización parece horizontal y así. Ahora bien, para luz quasimonocromática, tenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_x(t) &= \hat{i}E_{0x}(t) \cos[(\bar{k}z - \bar{\omega}t) + \epsilon_x(t)] \\
\vec{E}_y(t) &= \hat{i}E_{0y}(t) \cos[(\bar{k}z - \bar{\omega}t) + \epsilon_x(t)]
\end{aligned}$$

Entonces, obtenemos que los parámetros de Stokes son:

$$\begin{aligned}
S_0 &= \langle E_{0x}^2 \rangle + \langle E_{0y}^2 \rangle \\
S_1 &= \langle E_{0x}^2 \rangle - \langle E_{0y}^2 \rangle \\
S_2 &= \langle 2E_{0x}E_{0y} \cos \epsilon \rangle \\
S_3 &= \langle 2E_{0x}E_{0y} \sin \epsilon \rangle
\end{aligned}$$

Por ejemplo, luz con una intensidad de 1 y polarización vertical tiene $(1, -1, 0, 0)$, una onda con polarización L e intensidad 2 es $(2, 0, 0, -2)$, etc.

Para obtener la suma de dos luces incoherentes se puede sumar los vectores y listo.

10.12. Vectores de Jones

Escribimos la luz polarizada como un vector:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix}$$

La podemos reescribir en forma compleja como:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ E_{0y}e^{i\phi_y} \end{pmatrix}$$

La polarización horizontal tendrá solamente el primer término y la vertical solamente el segundo. En muchas aplicaciones no importa la norma del vector y por tanto lo unitarizamos. Para luz polarizada en un R-estado, desfasamos la coordenada y por $\pi/2$ y al normalizar obtenemos:

$$E_R = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad E_L = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Podemos ver que la suma de estos dos nos va a dar una onda polarizada horizontalmente. Dos vectores son ortogonales cuando $E_A \cdot E_B^* = 0$

10.13. Las Matrices de Jones

Para pasar de un vector de polarización a otro, se usa una matriz de 2x2 llamada matriz de Jones que representa a un polarizador o cualquier elemento que cambie la polarización de la luz

11. Interferencia

En una de las primeras secciones ya analizamos el problema de la superposición de ondas escalares. Sin embargo, las ondas de luz son vectoriales, por lo que hay que sumarlas como tal.

Por el principio de superposición, el campo eléctrico total debido a muchos campos es la suma de todos estos.

La interferencia generalmente se estudia usando la irradiancia (Energía por unidad de área por unidad de tiempo y que es proporcional al cuadrado del campo). Vimos ya que la irradiancia en un punto P es:

$$I = \epsilon v \langle \vec{E}^2 \rangle_T$$

Sin embargo, de ahora en adelante omitiremos el coeficiente ϵv para simplificar.

Digamos que tenemos dos ondas planas dadas por:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{01} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_1) \\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_2)\end{aligned}$$

Entonces, la suma $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ tiene una norma de $\vec{E}^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$

Tomando el promedio de ambos lados, nos queda:

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}$$

Donde $I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle_T$ es la irradiancia de la primera onda, $I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle_T$ es la irradiancia de la segunda onda, y $I_{12} = 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle_T$ es el **Término de interferencia**

Este término de interferencia es el promedio de $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_1) \times \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_2) = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} [\cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1) \cos \omega t + \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1) \sin \omega t] \times [\cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_2) \cos \omega t + \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_2) \sin \omega t]$ que multiplicamos y luego tiene como promedio (usando propiedades):

$$I_{12} = 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle_T = 2\frac{1}{2} \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \epsilon_2) := \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \delta$$

Con $\delta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_1 - \epsilon_2$ es la **diferencia de fase**

En caso de que las ondas tengan polarización ortogonal, entonces $I_{12} = 0$ y la suma se combina para dar algún tipo de polarización R, L, P, E con intensidad $I = I_1 + I_2$.

Si los vectores son **paralelos**, entonces, el término de interferencia es $I_{12} = E_{01} E_{02} \cos \delta$. Lo cual se puede escribir de una forma más sencilla notando que $I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle = \frac{E_{01}^2}{2}$ y entonces queda que la irradiancia total para vectores paralelos es:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Cuando $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ la interferencia es totalmente constructiva y $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$, si $\cos \delta$ es positivo, entonces es interferencia constructiva, si es negativo es destructiva y si vale -1 es máximamente destructiva $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

En el caso especial de **Igual Amplitudes (y paralelos)**, las irradiancias son iguales $I_1 = I_2 = I_0$ y entonces:

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

El mismo análisis es válido para ondas esféricas, las cuales tienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(r_1, t) &= \vec{E}_{01}(r_1) \exp[i(kr_1 - \omega t + \epsilon_1)] \\ \vec{E}_2(r_2, t) &= \vec{E}_{01}(r_2) \exp[i(kr_2 - \omega t + \epsilon_2)]\end{aligned}$$

Y en este caso la diferencia de fase es de:

$$\delta = k(r_1 - r_2) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

Podemos ver también que el promedio del término de independencia I_{12} en todo el espacio es 0 por lo que la energía total en el espacio es proporcional a la suma de energías como es de esperar.

Si estudiamos el caso en que los sources esféricos estén cerca entre sí y den la misma amplitud y que la zona que estudiemos sea chica, entonces las amplitudes se pueden considerar como constantes y la intensidad total es:

$$\begin{aligned}I &= I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} \cos[(k(r_1 - r_2) + (\epsilon_1 - \epsilon_2))] \\ &= 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2}[k(r_1 - r_2) + \epsilon_1 - \epsilon_2]\end{aligned}$$

Las superficies con equiirradiancia son aquéllas para las que la diferencia $r_1 - r_2$ es constante y por tanto se trata de hiperboloides de dos hojas con focos en los sources.

Fringes de Interferencia: Digamos que las dos fuentes tienen el mismo desfase. Entonces, si ponemos una pantalla, va a detectar las irradiancias y conforme más lejos estemos de las sources, se va a empezar a ver como líneas rectas intercaladas entre máxima potencia e interferencia destructiva total.

Los mínimos y máximos en la pantalla se consiguen cuando:

$$\begin{aligned}\text{máx: } (r_1 - r_2) &= 2\pi m/k = m\lambda \\ \text{mín: } (r_1 - r_2) &= \pi m'/k = \frac{1}{2}m'\lambda\end{aligned}$$

En una pantalla se ve en el centro el primer máximo correspondiente a $m = 0$, luego los mínimos que lo rodean con $m' = \pm 1$, luego los máximos que los rodean con $m = \pm 1$ y así.

Para simplificar el análisis, el fringe pattern generalmente se estudia en una localización muy lejana a los sources, en los que las ondas se pueden aproximar como planas. Este dominio se suele llamar el **far field** y como se vió antes, el fringe tiene forma de coseno cuadrado. Si queremos ver el fringe pattern más de cerca, en el **Near Field**, el patrón es mucho más complicado.

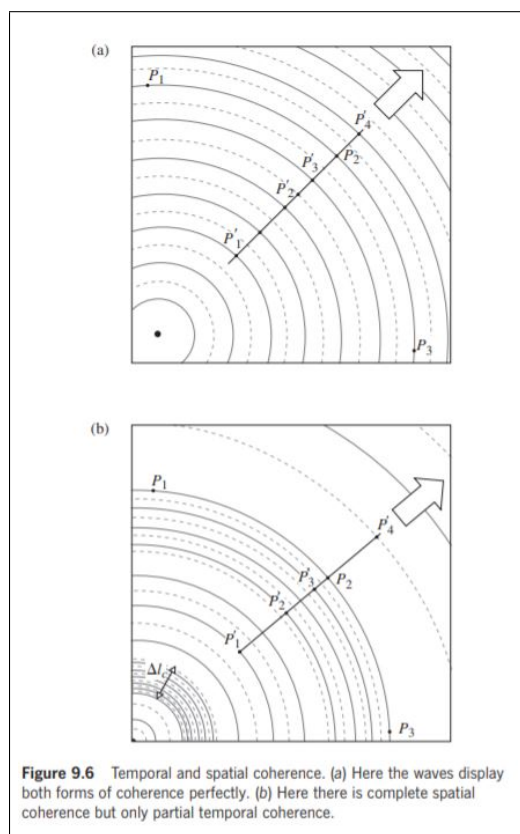
11.1. Condiciones de Interferencia:

Para que dos rayos interfieran en un patrón estable, deben de tener frecuencias muy similares, pues frecuencias distintas darían un desfase que cambia muy rápido con el tiempo, causando que I_{12} promedie a 0 en todos lados.

Coherente: Si las dos fuentes tienen siempre el mismo desfase y éste no cambia con el tiempo.

Por la naturaleza granular de la emisión de luz, un source quasicromático está en fase únicamente durante un tiempo pequeño. Este intervalo se llama **Tiempo de Coherencia**. La luz se ve sinusoidal por un número de oscilaciones predecibles. La longitud espacial en la que la oscilación es regular se llama **Longitud de Coherencia**.

El tiempo de coherencia es una medida de la pureza de la luz, una onda monocromática ideal tiene un tiempo de coherencia infinito. Todas las fuentes reales emiten un rango de frecuencias y tienen un tiempo de coherencia finita.



La coherencia es de dos tipos: **La Coherencia Temporal:** Que tiene que ver con la predictibilidad temporal. Es decir, si nos quedamos en un punto, por cuanto tiempo podemos predecir confiablemente la fase de la luz. Se puede medir con la longitud de frecuencia o con el tiempo de frecuencia.

La primera onda de la imagen tiene una coherencia temporal total, mientras que la segunda tiene una coherencia temporal parcial.

Coherencia Espacial: Notamos como el comportamiento en los puntos P_1, P_2, P_3 es siempre el mismo. Cuando unos puntos desplazados lateralmente tienen la misma fase, se conoce como coherencia espacial. Ambas ondas de la imagen la tienen.

En una visión más realista y con más sources, la coherencia espacial y longitudinal se ve drásticamente disminuida.

Dos fuentes como focos van a tener un desfase constante por a lo sumo un tiempo Δt_c por lo que su patrón de interferencia va a variar rápidamente con el tiempo y no es práctico.

11.1.1. Leyes de Fresnel Arago:

Lo que hemos estudiado es la teoría escalar y aplica solamente para ondas polarizadas linealmente y paralelas. Sin embargo, si tenemos dos ondas generales transmitiéndose por un plano, no aplica.

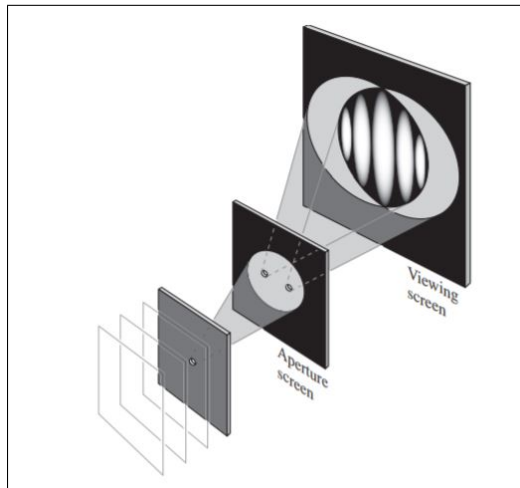
Lo que hay que hacer es partir las ondas (que se asumen polarizadas linealmente) en su componente sobre el plano y su componente perpendicular. Cuando las ondas chocan, sus componentes perpendicular son paralelos e interfieren como lo hace la luz en la teoría escalar. El componente sobre el plano sin embargo solamente es paralelo si la dirección de propagación de las ondas es la misma, lo cual no siempre es el caso.

Leyes:

- 1) Dos P-estados ortogonales y coherentes no pueden interferir, en el sentido en que $I_{12} = 0$
- 2) Dos P-estados paralelos y coherentes sí interfieren.
- 3) Los dos P-estados que componen a la luz natural no interfieren incluso si se hacen rotar para alinearlos. Esto porque son incoherentes.

11.2. Interferómetros Wavefront Splitting

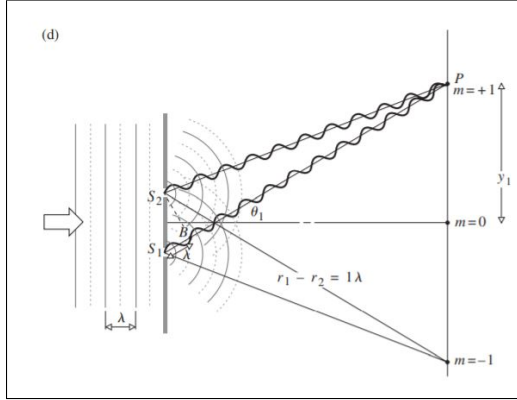
11.2.1. Experimento de Young:



Young hizo pasar la luz del sol por una rendija y luego por dos rendijas para ver su interferencia. El propósito de pasar por una rendija era que la luz que llegara a las dos rendijas fuera coherente al llegar. Se busca que el agujero sea lo más pequeño posible para que la luz sea muy coherente. La luz forma los fringes. La energía total se conserva, solamente que pasa de los fringes oscuros a los luminosos.

Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu
Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu
Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu
Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu

Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu
Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu
Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu
Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu
Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu
Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu Ipsu



La interferencia surge por la diferencia de camino óptico entre los caminos por cada slit que es una diferencia de $r_1 - r_2$. Se aproxima que los rayos sean paralelos y por tanto su diferencia de camino se debe solamente a un componente ortogonal. Este componente mide $r_1 - r_2 = a \sin \theta$ con a la distancia entre los hoyos. Entonces, tenemos que:

$$r_1 - r_2 \simeq a\theta$$

$$r_1 - r_2 \simeq \frac{a}{s}y$$

Donde s es la distancia entre los dos hoyos y la pantalla.

Según la sección pasada, la interferencia de dos ondas coherentes e inicialmente en fase es de $k(r_1 - r_2)$. Y tiene un máximo a una altura de:

$$y_M \simeq \frac{s}{a}m\lambda$$

$$\theta_M = \frac{m\lambda}{a}$$

Con $m = 0, 1, \dots$ Entonces, la distancia entre dos barras luminosas es de:

$$\Delta y \simeq \frac{s}{a}\lambda$$

Si los dos beams tienen la misma irradiancia I_0 y están en fase al inicio, entonces ya se vió que la irradiancia es de:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{k(r_1 - r_2)}{2}$$

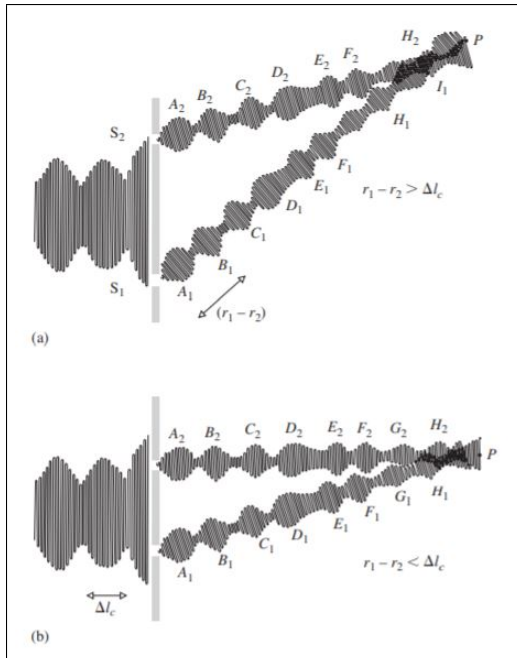
$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{y a \pi}{s \lambda}$$

Estas fórmulas idealizadas solamente funcionan para una a lo suficientemente chiquita.

Si la diferencia entre los caminos ópticos es grande o mayor a la longitud de coherencia, entonces al llegar al punto P , no llegan con el mismo grupo de coherencia y ya no interfieren bien.

Para puntos no tan alejados verticalmente, la diferencia de camino es muy chica y entonces interfieren con los mismos grupos coherentes.

Por otro lado, como y_M es una función de la longitud de onda, entonces los máximos de un color suceden en un punto distinto a los de otro color. Esto sucede para la llegada de luz

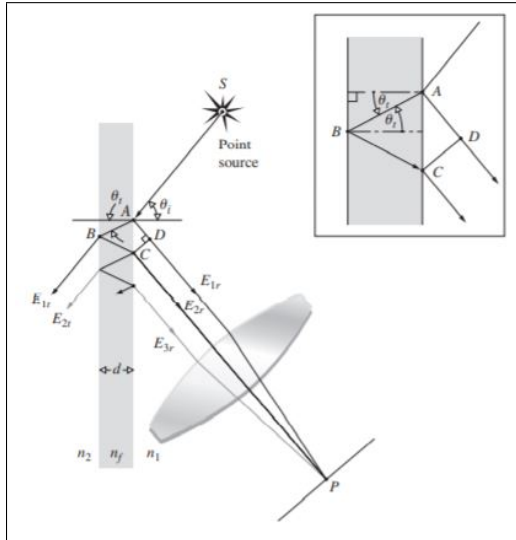


blanca. Los máximos de todos los colores solamente coinciden en $y = 0, m = 0$ que es el único máximo de luz puramente blanca.

11.3. Interferómetros de Amplitude Splitting

Se separa una onda en dos parte por su amplitud y luego se combinan y suman de nuevo.

11.3.1. Dielectric Films



Un tipo de estos interferómetros usa una lámina delgada de un material. La luz llega y un pedazo se refleja directamente mientras que otro atraviesa y se refleja en la segunda capa. Los rayos que salen son paralelos y coherentes (si la diferencia de camino óptico no es mayor a la longitud de coherencia) y se pueden juntar con un lente para hacerlos interferir. La diferencia de camino es $\Lambda = n_f[(AB) + (BC)] - n_1(AD)$ Pero $AD = AC \sin \theta_i = AC \frac{n_f}{n_1} \sin \theta_t = (2d \tan \theta_t) \frac{n_f}{n_1} \sin \theta_t$.

Por lo tanto,

$$\Lambda = \frac{2n_f d}{\cos \theta_t} (1 - \sin^2 \theta_t) = 2n_f d \cos \theta_t$$

La diferencia de fase es $k_0 \Lambda$ donde $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ con la longitud de onda en el vacío, que es igual a $\lambda_0 = n_f \lambda_f$ si lo que conocemos es la longitud de onda en el filme. Además, debido a que hay una reflexión interna y una externa, uno de los rayos voltea su campo E por lo

que se agrega un desfase de π . Entonces,

$$\begin{aligned} \delta &= k_0 \Lambda \pm \pi \\ &= \frac{4\pi n_f}{\lambda_0} d \cos \theta_t \pm \pi \end{aligned}$$

Los rayos reflejados e interferidos van a tener una amplitud máxima si la diferencia de fase es de $2m\pi$, es decir el término de δ que no tiene el π es un múltiplo de π y por lo tanto, **Se Encuentra un Máximo** cuando:

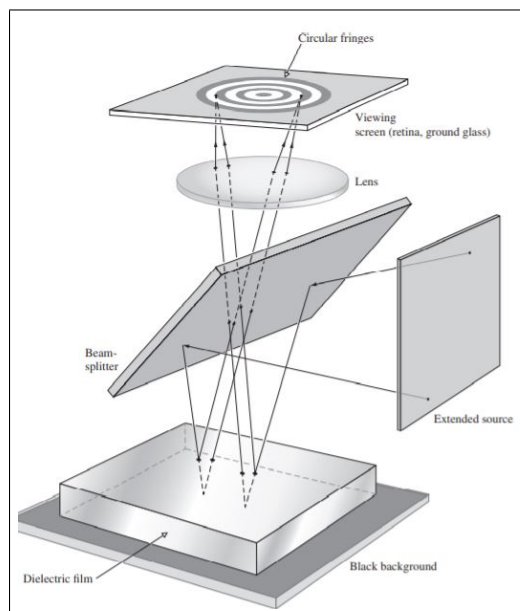
$$d \cos \theta_t = (2m + 1) \frac{\lambda_f}{4}$$

Y similarmente, **se encuentra un mínimo** cuando:

$$d \cos \theta_t = 2m \frac{\lambda_f}{4}$$

Esto es válido cuando hay una reflexión interna y una externa como dijimos antes y se crea un desfase de π . Sin embargo, si $n_1 > n_f > n_2$ o $n_1 < n_f < n_2$ entonces todas las reflexiones son internas o todas externas y no hay un desfase de π por lo que hay que adecuar las fórmulas a eso.

Si el source es extendido, la luz de varios puntos del source va a llegar al lente y el fringe pattern será más extendido.

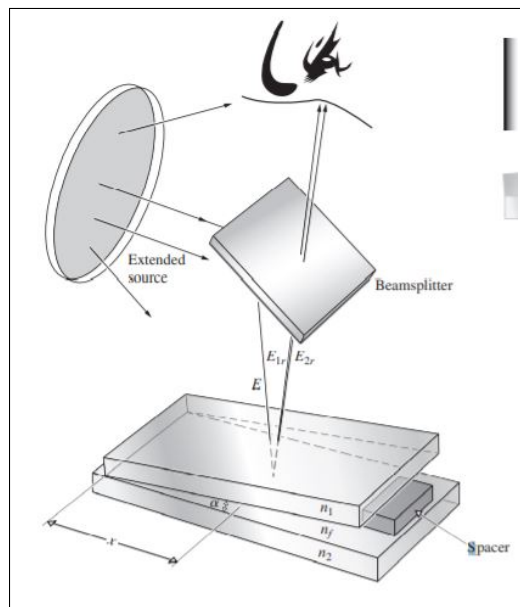


En la imagen se ven los patrones de interferencia de Haidinger cuando se usa un source extendido, que forma interferencia en forma de círculos.

Fringes de Igual Grosor:

Son los fringes de interferencia para los cuales el grosor óptico $n_f d$ es el parámetro dominante, en vez del ángulo θ_i . Los fringes suceden por variaciones en el grosor del material con n_f . Cada fringe es el locus de puntos para los cuales $n_f d$ es constante. Por ejemplo, las burbujas tienen distintos fringes debido a variaciones en su grosor en distintos puntos.

Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum
 Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum
 Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum Ipsum
 Ipsum Ipsum Ipsum



Con un arreglo como el de la imagen y viendo desde incidencia casi normal $\theta_i \simeq 0$, los fringes dependerán del grosor y es un fringe de Igual Grosor. En este caso, se puede ver que el grosor de la capa intermedia es de $d = x\alpha$. Y la condición para **Max Interferencia** pasa a ser:

$$\begin{aligned}(m+1/2)\lambda_0 &= 2n_f d_m \\ (m+1/2)\lambda_0 &= 2\alpha x_m n_f\end{aligned}$$

Donde se usó que $\lambda_f = \lambda_0/n_f$. El primer fringe máximo sucede con $m = 0$ y de ahí en adelante. Con un despeje y usando nuevamente que $\lambda_f = \lambda_0/n_f$, se puede escribir los **max fringes** como:

$$x_m = \frac{m + 1/2}{2\alpha} \lambda_f$$

$$d_m = (m + 1/2) \frac{\lambda_f}{2}$$

Vemos que d_m aparece en múltiplos impares de $\lambda_f/4$. Por otro lado, por la ec. de x_m , tenemos que los fringes tienen una separación de:

$$\Delta x = \lambda_f/2\alpha$$

Por ejemplo, podemos tomar un film de burbuja en un alambre y colocarlo verticalmente para que debido a la gravedad, la parte baja sea más gruesa que la alta.

Al iluminarlo y ver los fringes, la parte de arriba es muy delgada (menor a $\lambda_f/4$) y por tanto no tiene un máximo. Luego llegamos a un grosor de $\lambda_f/4$ y aparece una línea luminosa por ser el primer máximo, luego una oscura en $d = \lambda_f/2$, luego una luminosa en $d = 3\lambda_f/4$, etc.

Anillos de Newton: Presionamos dos slides de microscopio juntos (con una capa de aire atrapado que los separará). La intensidad de los fringes dependerá del grosor d de esta capa como se ha visto en los casos anteriores. Si se presiona con fuerza un punto, se forman fringes casi circulares alrededor del punto por cambios en el grosor del aire que surgen del punto de presión.

11.3.2. Interferómetros de Espejo:

El típico es el de Michelson Morley el cual se puede ver que forma fringes circulares.

El interferómetro también se puede usar para determinar la longitud de coherencia del source de luz. Pues si la diferencia de distancia entre los espejos con respecto al beam splitter se hace mayor a la longitud de coherencia, los rayos reflejados van a provenir de distintos trenes de onda y no van a interferir por lo que no van a aparecer fringes.

Existen otros interferómetros on espejos como:

Mach-zehnder: Tiene forma de un cuadrado. En una esquina se pone un Beam splitter por donde entra la luz del source. Luego parte de la luz sigue una de las aristas y el resto la otra. En las esquinas hay espejos que llevan a los dos rayos a la esquina opuesta de donde empezaron, donde hay un nuevo beam splitter y se juntan en un detector.

Sagnac: Consiste en un cuadrado con un beamsplitter en una esquina. Por el beam splitter entra luz del source. Las otras esquinas son puros espejos. Un pedazo de la luz se refleja en los espejos y los recorre en sentido horario y la otra en sentido antihorario. Luego se juntan nuevamente en el beamsplitter y son detectados.

11.3.3. Clasificación de Fringes:

Reales: Se pueden ver en una pantalla sin un sistema de enfoque.

Virtuales: Requieren de un sistema de enfoque para juntar los rayos.

11.4. Interferencia de Múltiplos Beams:

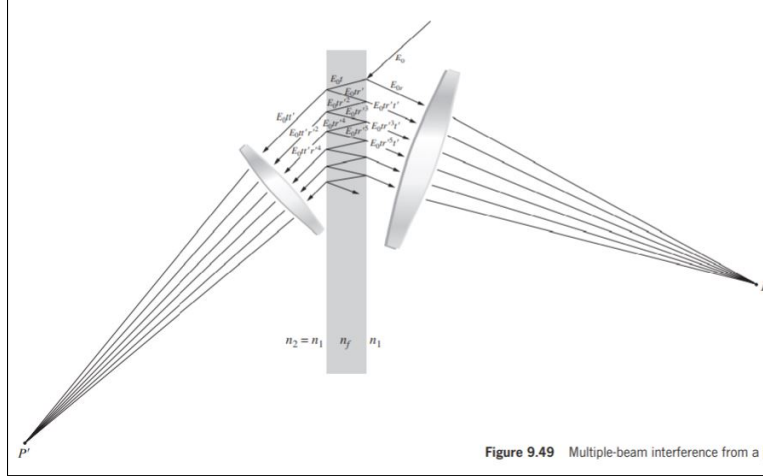


Figure 9.49 Multiple-beam interference from a

Veremos ahora como sumar muchas ondas. Digamos que el film dieléctrico como usábamos antes es no absorbente y digamos que $n_1 = n_2$. Los coeficientes de amplitud-transmisión se representan por t (es la fracción de amplitud de la transmitida entre la amplitud de la onda que llega) y se representan con $|$ o \perp según la polarización con respecto al plano de incidencia. Por otro lado, tenemos los coeficientes de amplitud - reflexión r .

Cuando tienen un símbolo primado indicarán que es de adentro del

film hacia afuera.

Si llega una onda E_0 a un film delgado, rebotan y se transmiten muchas ondas de distintos órdenes.

Las amplitudes de las ondas reflejadas son entonces de E_0r , $E_0tr't'$, $E_0tr'^3t'$, ...

Y r' (el índice de reflexión dentro del film) es $r' = r$ porque indica un fase shift de π como dijimos antes.

Las amplitudes de transmitidas son E_0tt' , $E_0tr'^2t'$, $E_0tr'^4t'$.

Luego, las diferencias de fase entre estas ondas se debe a una combinación de los desfase por las reflexiones internas y el desfase por las diferencias de camino óptico.

La diferencia de camino óptico entre ondas adyacentes es:

$$\Lambda = 2n_f d \cos \theta_t$$

Primer Caso Especial: Digamos por ahora que $\Lambda = m\lambda$ para que las ondas no se desfacen debido a diferencias de camino óptico.

Las ondas que se reflejan a P y que antes rebotan dentro del film no tienen diferencia de fase debido a reflexiones porque siempre hacen un número impar de reflexiones en el film. Sin embargo, la primera onda no hace ninguna reflexión interna por lo que tiene amplitud contraria. Por tanto (y como las ondas están en fase por la condición inicial), tenemos que la amplitud resultante es:

$$\begin{aligned} E_{0r} &= E_0r - (E_0trt' + E_0tr^3t' + E_0tr^5t' + \dots) \\ E_{0r} &= E_0r - E_0trt'(1 + r^2 + r^4 + \dots) \end{aligned}$$

Donde simplemente reemplazamos $r' = -r$ por la fórmula de amplitudes de ondas transmitidas y usamos el hecho de que están en fase por la condición de Λ mencionada. Entonces:

$$E_{0r} = E_0r - \frac{E_0trt'}{1 - r^2}$$

Sin embargo, en el tratamiento de Stokes de reflexiones se probó que $tt' = 1 - r^2$. Entonces resulta que:

$$E_{0r} = 0$$

y no se refleja luz sino que es toda transmitida.

Segundo Caso Especial: Digamos que $\Lambda = (m + \frac{1}{2})\lambda$.

Entonces ahora se agrega un desfase de media onda en cada onda subsiguiente. La segunda onda se desfasea en π debido a la reflexión y en otro π debido a la diferencia de camino óptico. La tercera onda se desfasea 3π debido a las reflexiones y un 2π por la diferencia de camino. Y así. Entonces, nos queda que:

$$\begin{aligned} E_{0r} &= E_0r + E_0trt' - E_0tr^3t' + E_0tr^5t' - \dots \\ E_{0r} &= E_0r + E_0rtt'(1 - r^2 + r^4 - \dots) \\ E_{0r} &= E_0r \left[1 + \frac{tt'}{1 + r^2} \right] \\ E_{0r} &= \frac{2r}{1 + r^2} E_0 \end{aligned}$$

Lo último debido a la relación que surge del tratamiento de Stokes.

La irradiancia es proporcional a $E_{0r}^2/2$ y por tanto tiene un valor de:

$$I_r = \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2} \frac{E_0^2}{2}$$

Ésta es de hecho la irradiancia máxima que puede tener la onda reflejada.

Caso General: Digamos ahora que la diferencia de fase debido al camino óptico dentro del film es de δ y que $n_1 = n_2$ (igual que antes, para no introducir distintos r, t). Entonces las campos eléctricos en el punto P son:

$$\begin{aligned} \overline{E}_{1r} &= E_0r e^{i\omega t} \\ \overline{E}_{2r} &= E_0tr't' e^{i\omega t - \delta} \\ \overline{E}_{3r} &= E_0tr'^3t' e^{i\omega t - 2\delta} \\ &\dots \\ \overline{E}_{Nr} &= E_0tr'^{2N-3}t' e^{i[\omega t - (N-1)\delta]} \end{aligned}$$

Entonces, el campo resultante es la suma de todos estos y da como resultado:

$$\overline{E}_r = E_0r e^{i\omega t} + E_0tr't' e^{i(\omega t - \delta)} + \dots + E_0tr'^{2N-3}t' e^{i[\omega t - (N-1)\delta]}$$

Si $|r'^2 e^{-i\delta}| < 1$ entonces la suma converge y el resultado se puede encontrar como:

$$\overline{E}_r = E_0 e^{i\omega t} \left[r + \frac{r' t t' e^{-i\delta}}{1 - r'^2 e^{-i\delta}} \right]$$

Luego, en el caso en que no haya absorción, se cumplen las relaciones $r = -r'$ y $t t' = 1 - r^2$ por lo que resulta:

$$\overline{E}_r = E_0 e^{i\omega t} \left[\frac{r(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right]$$

Luego, la irradiancia en el punto de reflexión P se puede calcular sacando la norma al cuadrado de este complejo y luego su promedio (que resulta ser dividir entre 2). Y se tiene finalmente que:

$$I_r = I_i \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta}$$

Luego se sigue un procedimiento similar para las ondas transmitidas, donde se usa $E_0 t t', E_0 t t' r'^2, E_0 t t' r'^4, \dots$ y digamos que la diferencia de fase debido al camino óptico es de δ .

Entonces:

$$I_t = \frac{I_i (t t')^2}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta}$$

Luego se usan las relaciones de Stokes porque no hay absorción y unas identidades trigonométricas y se llega a:

$$I_r = I_i \frac{[2r/(1 - r^2)]^2 \sin^2 \delta/2}{1 + [2r/(1 - r^2)]^2 \sin^2 \delta/2}$$

$$I_t = I_i \frac{1}{1 + [2r/(1 - r^2)]^2 \sin^2 \delta/2}$$

Debido a la conservación de energía, también se tiene que:

$$I_i = I_r + I_t$$

La irradiancia de transmisión máxima sucede cuando el denominador es mínimo (es decir $\delta = 2\pi m$ y resulta que $I_t = I$, $I_r = 0$ que fue el caso especial 1.

La irradiancia de transmisión mínima sucede cuando el denominador es máximo, es decir $\delta = (2m + 1)\pi$ y resulta que $I_t|_{min} = I_i \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^2)^2}$. Y le corresponde al máximo de reflexión,

que resulta ser $I_r|_{max} = I_i \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2}$ como se vio en el caso especial 2.

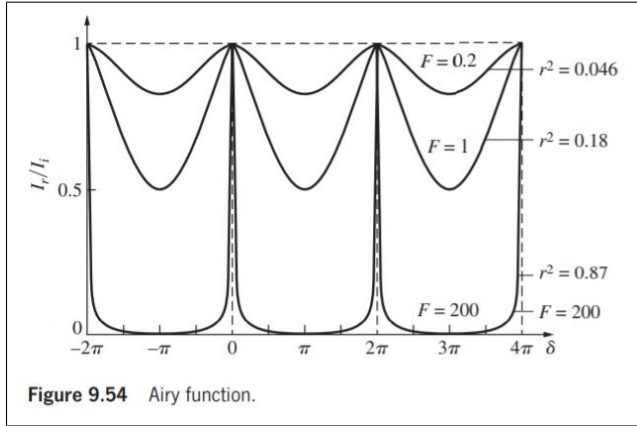
Coefficiente de Finesse: Se define como:

$$F = \left(\frac{2r}{1 - r^2} \right)^2$$

Y entonces resulta que:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{F \sin^2 \delta/2}{1 + F \sin^2 \delta/2}$$

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \delta/2}$$



El denominador $[1 + F \sin^2 \delta/2]^{-1}$ se llama **Función Airy** y da directamente la razón entre I_t y I_i (la imagen tiene un error en el nombre) que como vimos, es máx cuando $\delta = 2\pi m$ y mínima cuando $\delta = (2m + 1)\pi$.

En la gráfica se muestra $Airy = A$ como función de δ para distintas r y se ve como alcanza un pico de 1 en $\delta = 2\pi m$ y un mínimo en $\delta = (2m + 1)\pi$.

Recordar que de hecho A es función de θ_i porque todo surge de este valor. Como vimos

antes, $\Lambda = 2n_f d \cos \theta_i$ y entonces $\delta = k_0 \Lambda$

12. Difracción

12.1. Resumen interferencia

Por el principio de superposición, el campo eléctrico total se consigue sumando muchos campos. Y dad un campo, la irradiancia en un punto es:

$$I = \epsilon v \langle \vec{E}^2 \rangle_T$$

Si tenemos dos ondas planas dada por $\vec{E}_1 = \vec{E}_{01}(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_1)$ y por $\vec{E}_2 = \vec{E}_{02}(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_2)$. La suma de las ondas es $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ y tiene una norma de:

$$\vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

Sacando el promedio de ambos lados, tenemos que la irradiancia (lo que se mide) es:

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}$$

Con

- $I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle_T$
- $I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle_T$
- **Término de Interferencia:** $I_{12} = 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle_T$

El término de interferencia es el promedio de $2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ que se puede ver como:

$$I_{12} = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \delta$$

Con la **diferencia de fase:** $\delta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \epsilon_1 - \epsilon_2$

Esto toma en cuenta que salen al mismo tiempo las ondas (no hay diferencia de fase por tiempo).

- **Paralelos:** Si los campos eléctricos son paralelos, la expresión es más fácil:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Si $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, la interferencia es completamente constructiva y $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$. Si $\delta = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$, la interferencia es totalmente destructiva y $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

- **Amplitudes Iguales (y paralelos):** Si los campos tienen la misma amplitud (y por tanto misma irradiancia $I_1 = I_2 = I_0$), la suma tiene una amplitud dada por:

$$I = I_0 + I_0 + 2I_0 \cos \delta = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

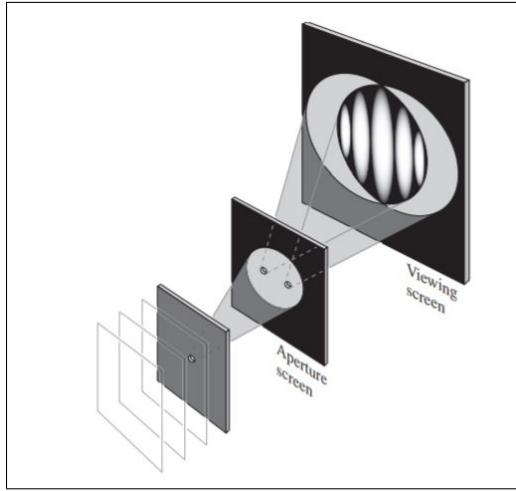
Se ve que la onda resultante puede tener como intensidad cualquier cosa entre 0 y $4I_0$ dependiendo del desfase $\delta = k(r_1 - r_2) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)$

- **Sin Interferencia:** Si las ondas son incoherentes, los desfases van cambiando aleatoriamente todo el tiempo. Por ello, la irradiancia total es simplemente $I = I_1 + I_2$, pues los términos de interferencia en promedio se cancelan.

12.1.1. Leyes de Fresnel Arago

- Dos P-estados ortogonales y coherentes no pueden interferir, en el sentido que $I_{12} = \langle 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = 0$
- Dos P-estados paralelos y coherentes sí interfieren
- Los dos P-estados que componen a la luz natural no interfieren incluso si se hacen rotar para alinearlos, porque son incoherentes.

12.1.2. Experimento de Young:



Young hizo pasar la luz del sol por una rendija y luego por dos rendijas para ver su interferencia. El propósito de pasar por una rendija era que la luz que llegara a las dos rendijas fuera coherente al llegar. Se busca que el agujero sea lo más pequeño posible para que la luz sea muy coherente. La luz forma los fringes. La energía total se conserva, solamente que pasa de los fringes oscuros a los luminosos.

La interferencia surge por la diferencia de camino óptico entre los caminos por cada slit que es una diferencia de $r_1 - r_2$. Se aproxima que los rayos sean paralelos y por tanto su diferencia de camino se debe solamente a un componente ortogonal. Este componente mide $r_1 - r_2 = a \sin \theta$ con a la distancia entre los hoyos. Entonces, tenemos que:

$$r_1 - r_2 \simeq a\theta$$

$$r_1 - r_2 \simeq \frac{a}{s}y$$

Donde s es la distancia entre los dos hoyos y la pantalla.

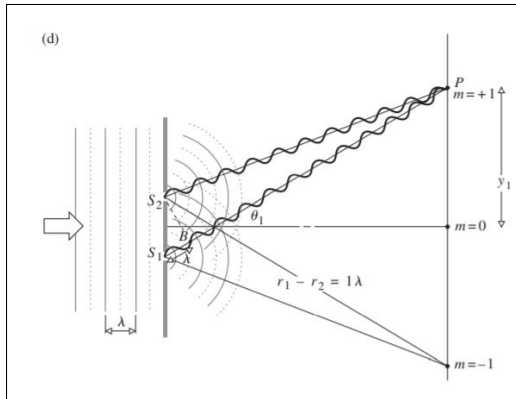
Según la sección pasada, la interferencia de dos ondas coherentes e inicialmente en fase es de $k(r_1 - r_2)$. Y tiene un máximo a una altura de:

$$y_M \simeq \frac{s}{a}m\lambda$$

$$\theta_M = \frac{m\lambda}{a}$$

Con $m = 0, 1, \dots$ Entonces, la distancia entre dos barras luminosas es de:

$$\Delta y \simeq \frac{s}{a}\lambda$$



Si los dos beams tienen la misma irradiancia I_0 y están en fase al inicio, entonces ya se vió que la irradiancia es de:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{k(r_1 - r_2)}{2}$$

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{y a \pi}{s \lambda}$$

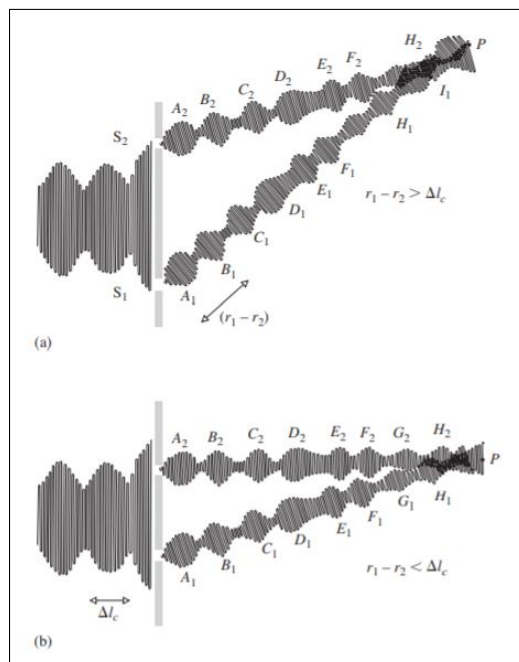
Estas fórmulas idealizadas solamente funcionan para una a lo suficientemente chiquita.

Si la diferencia entre los caminos ópticos es grande o mayor a la longitud de coherencia, entonces al

llegar al punto P , no llegan con el mismo grupo de coherencia y ya no interfieren bien.

Para puntos no tan alejados verticalmente, la diferencia de camino es muy chica y entonces interfieren con

los mismos grupos coherentes.



Por otro lado, como y_M es una función de la longitud de onda, entonces los máximos de un color suceden en un punto distinto a los de otro color. Esto sucede para la llegada de luz blanca. Los máximos de todos los colores solamente coinciden en $y = 0, m = 0$ que es el único máximo de luz puramente blanca.

Hay muchas formas de conseguir las dos ondas que se requieren para interferirlas, una forma es como la que se muestra en el experimento de Young. Pero también se puede usando un espejo o una placa delgada como se muestra en la sección anterior.

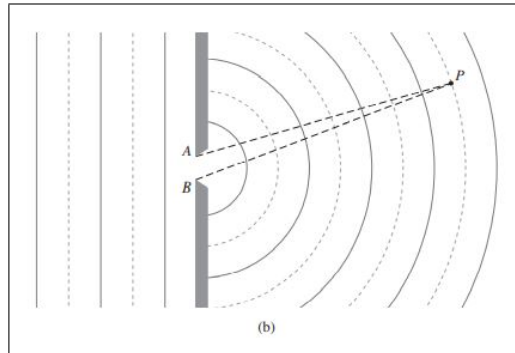
12.2. Difracción (Preliminares)

es la desviación de la luz de propagación rectilínea.

Principio de Huygens-Fresnel:

Cualquier punto sin obstrucción en un wavefront, en cualquier instante, sirve como una fuente de ondas esféricas secundarias con la misma frecuencia. La amplitud de la luz en cualquier punto más allá se consigue como la superposición de estas ondas secundarias (considerando sus amplitudes y fases).

Ejemplo sencillo:



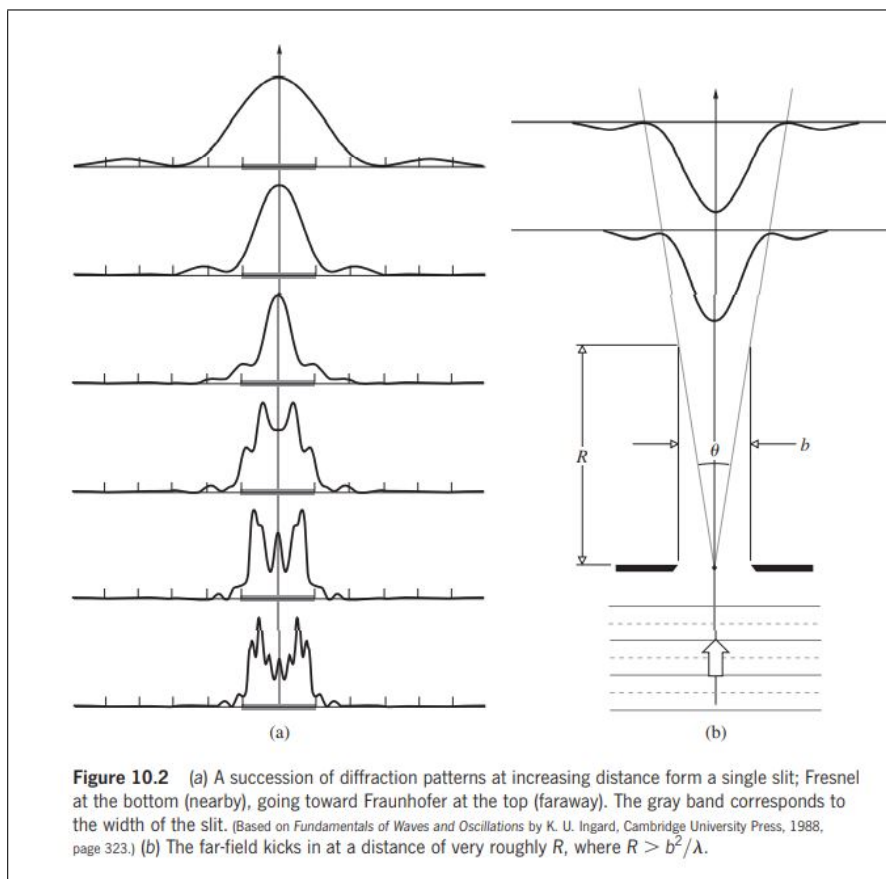
Tenemos una apertura AB y llega luz. Luego, según el principio, cada punto de la apertura crea ondas circulares que interfieren.

La máxima diferencia de camino óptico entre estas ondas es medida en un punto P son de $\Lambda_{max} = |AP - BP|$.

Y esta diferencia es de a lo sumo $\Lambda_{max} \leq AB$. Entonces, tenemos dos casos:

- Si $\lambda > AB$, entonces $\lambda > \Lambda_{max}$ y por tanto, la diferencia de las ondas es menor a λ y interfieren constructivamente.
Entonces la luz tiene bastante potencia incluso en ángulos amplios.
- Si $\lambda < AB$, entonces hay muchas zonas (las zonas de ángulo grande) en las que $\lambda > \Lambda_{max}$ y por tanto pueden interferir destructivamente y aparecen 'sombras'.

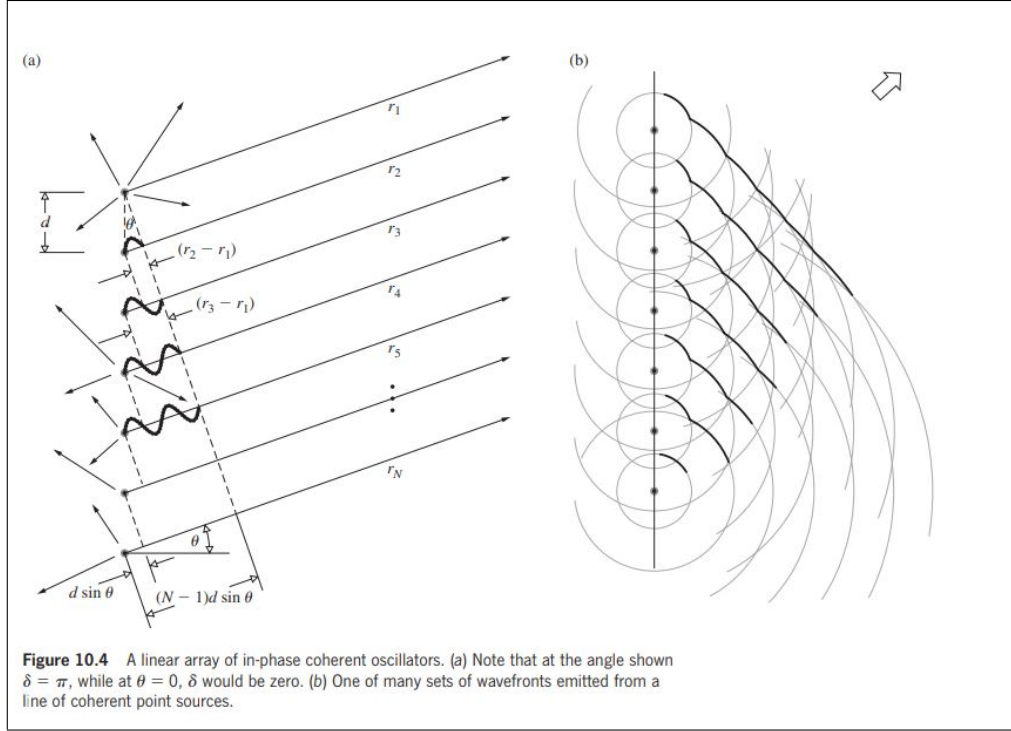
12.3. Difracción de Fresnel y Fraunhofer



La difracción de Fresnel es la de cerca y la de Fraunhofer es la de lejos. La cercanía o no depende de la longitud de onda λ . Para longitud chiquita, todo está lejos. Si $\lambda \rightarrow 0$, la difracción tiende a desaparecer y la luz se ve como diría la óptica geométrica sencillamente. La difracción de Fraunhofer es lineal mientras que la de Fresnel no. La regla de thumb es que se cumple Fraunhofer si $R > b^2/\lambda$.

Una vez que se tiene un patrón de Fraunhofer, simplemente se agranda conforme movemos la pantalla más largo. Se puede obtener una difracción de Fraunhofer usando lentes para que la luz parezca venir de infinito aunque no.

12.3.1. Several Coherent Oscillators



Tenemos el arreglo visto en la imagen, son N osciladores idénticos (hasta en polarización) coherentes puesto en línea. Estos osciladores se pueden activar por luz que llega a una apertura.

Digamos que los osciladores tienen **la misma fase**.

Como la pantalla está muy lejos (comparada con la longitud de la línea de osciladores), entonces las distancias r_i son casi todas iguales y por tanto:

$$E_0(r_1) = E_0(r_2) = \dots = E_0(r_N) := E_0(r)$$

No nos interesa el carácter vectorial por la polarización y todo eso. Entonces, el campo en un punto P tiene la magnitud dada por la suma:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E_0(r)e^{i(kr_1 - \omega t)} + E_0(r)e^{i(kr_2 - \omega t)} + \dots + E_0(r)e^{i(kr_N - \omega t)} \\ &= E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1} [1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + \dots + e^{ik(r_N - r_1)}] \end{aligned}$$

La **diferencia de fase** entre sources adyacentes es $\delta = k\Lambda$ con $\Lambda = nd \sin \theta$. Entonces, $\delta = kd \sin \theta$. O bien, $\delta = k(r_2 - r_1)$, $2\delta = k(r_3 - r_1)$, \dots .

Por tanto, el campo en P se puede obtener como:

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} &= E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1}[1 + (e^{i\delta}) + (e^{i\delta})^2 + (e^{i\delta})^3 + \dots + (e^{i\delta})^{N-1}] \\
 &= E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1} \frac{e^{i\delta N} - 1}{e^{i\delta} - 1} \\
 &= E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1} \frac{e^{iN\delta/2}[e^{iN\delta/2} - e^{-iN\delta/2}]}{e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2}} \\
 &= E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1} e^{i(N-1)\delta/2} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right)
 \end{aligned}$$

Y si definimos que R sea la distancia desde el centro de la línea de osciladores hasta P , entonces $R = \frac{1}{2}(N-1)d \sin \theta + r_1$ y tenemos que

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{i(kR - \omega t)} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right)$$

Luego, la intensidad es proporcional a $\tilde{E}\tilde{E}^*/2$ y tenemos que:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$$

Donde I_0 es la irradiancia de cualquiera de los osciladores.

Vemos que para $N = 0 \Rightarrow I = 0$, para $N = 1 \Rightarrow I = I_0$ y para $N = 2 \Rightarrow I = 4I_0 \cos^2(\delta/2)$

Lo que coincide perfectamente con cuando teníamos 0,1,2 fuentes.

La dependencia con el ángulo es más clara si sustituimos δ y nos queda:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2[N(kd/2) \sin \theta]}{\sin^2[(kd/2) \sin \theta]}$$

El término superior fluctúa muy rápidamente mientras que el inferior lo modula y cambia relativamente lento.

Los máximos principales de la función $I(\theta)$ suceden en las direcciones θ_m tales que $\delta = 2m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$ (para que el seno de abajo valga 0).

Como $\delta = kd \sin \theta$, entonces se obtienen los máximos cuando:

$$d \sin \theta_m = m\lambda$$

Luego, como en estos puntos se cumple $[\sin^2 N\delta/2]/[\sin^2 \delta/2] = N^2$ cuando $\delta = 2m\pi$ (por L'Hopital). Entonces los máximos principales tienen valores $N^2 I_0$ (cuando hay interferencia constructiva completa).

Notamos que si $d < \lambda$, entonces sólo el máximo de orden $m = 0$ existe.

Con diferencia de Fase Inicial

Digamos ahora que cada uno de los osciladores tienen una diferencia de fase inicial ϵ respecto al siguiente. En dicho caso, la diferencia de fase entre osciladores seguidos es:

$$\delta = kd \sin \theta + \epsilon$$

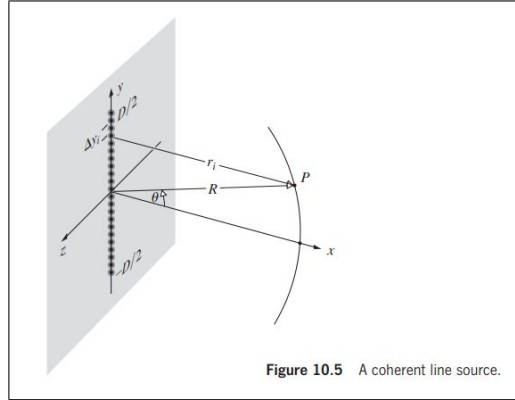
Y los máximos ahora tienen ángulos dados por:

$$d \sin \theta_m = m\lambda - \epsilon/k$$

El máximo central se tienen cuando $m = 0$ y podemos cambiar su ángulo θ_0 al cambiar ϵ .

12.4. Difracción de Fraunhofer

12.4.1. Single Slit



Tenemos una line source como la que se muestra en la imagen de arriba.

Cada uno de los puntos emite una onda esférica que podemos escribir como $E = \frac{\epsilon_0}{r} \sin(\omega t - kr)$ donde ϵ_0 se llama la **source strength**. Podemos pensar como que la línea completa está compuesta por N sources separados por una distancia $d = \Delta y_i (N/D)$.

Entonces, el campo de uno de estos osciladores es:

$$dE = \frac{\epsilon}{R} \sin(\omega t - kr) dy$$

Donde $\epsilon_L := \frac{1}{D} \lim_{N \rightarrow \infty} (\epsilon_0 N)$ es la **source strength por unit length**.

Entonces $\frac{\epsilon_L}{R} dy$ es la amplitud de cada una de las ondas.

Podemos expandir $r(y)$ como sigue:

$$r = R - y \sin \theta + (y^2/2R) \cos^2 \theta + \dots$$

Si R es lo suficientemente grande, podemos omitir el tercer término (ésta es la **condición de Fraunhofer**).

Entonces, nos queda que:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\epsilon_L}{R} \int_{-D/2}^{D/2} \sin[\omega t - k(R - y \sin \theta)] dy \\ &= \frac{\epsilon_L D}{R} \frac{\sin[(kD/2) \sin \theta]}{(kD/2) \sin \theta} \sin(\omega t - kR) \end{aligned}$$

Podemos simplificar las cosas si definimos: $\beta := (kD/2) \sin \theta$ y entonces tenemos que:

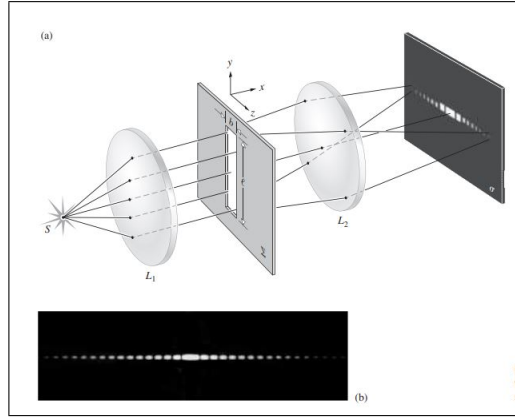
$$E = \frac{\epsilon_L D}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \sin(\omega t - kR)$$

Lo que medimos es la irradiancia, que es proporcional a $I(\theta) = \langle E^2 \rangle_T$ o bien: $I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$, donde el promedio del \sin^2 es $1/2$.

Cuando $\theta = 0$, tenemos que $\sin \beta / \beta = 1$ y entonces $I(\theta) = I(0)$ que corresponde al máximo principal. Entonces, la irradiancia es:

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

12.4.2. Slit con un poco de grosor



Dividimos el slit grueso en muchas líneas delgadas y muy altas. Cada una de estas líneas se puede reemplazar por un point source en su centro. Lo que convierte a la strip vertical en una línea horizontal de longitud b . Entonces, la intensidad es:

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

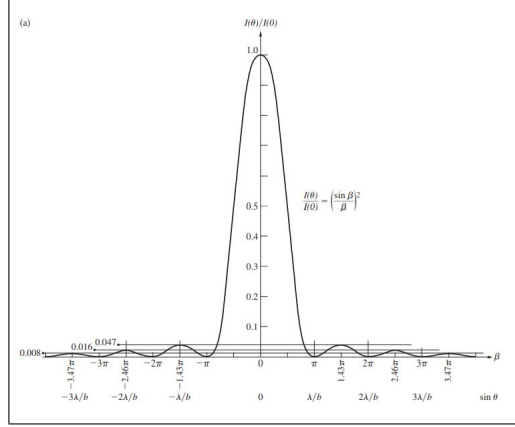
Con $\beta = (kb/2) \sin \theta$.

Los valores máximos de la difracción suceden cuando $\frac{dI}{d\beta} = 0$, se tiene que:

$$\frac{dI}{d\beta} = I(0) \frac{2 \sin \beta (\beta \cos \beta - \sin \beta)}{\beta^3} = 0$$

La irradiancia tiene un mínimo igual a cero cuando $\sin \beta = 0$, es decir, cuando $\beta = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$.

Por otro lado, cuando $\beta \cos \beta - \sin \beta = 0 \Rightarrow \tan \beta = \beta$. Las soluciones a esta ecuación son los máximos de intensidad.



12.4.3. Double Slit

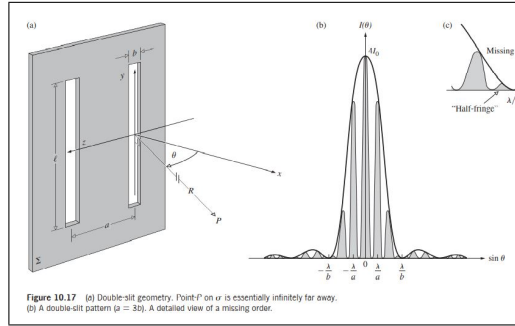


Figure 10.17 (a) Double-slit geometry. Point P on v is essentially infinitely far away. (b) A double-slit pattern ($a = 3b$). A detailed view of a missing order.

Tenemos dos slits con grosor b y separación a . Cada slit por sí solo generaría el patrón de haces. En la pantalla estos se sobrelapan y aunque son casi iguales en amplitud, difieren en fase, por lo que hay que fijarnos bien para sumarlos.

Dividimos cada una de las franjas en líneas de dz por l , que funcionan como una sola source en el centro. Esto genera dos líneas horizontales (una por cada franja) de longitud b . Entonces, el campo eléctrico total en la aproximación de Fraunhofer está dado por:

$$E = C \int_{-b/2}^{b/2} F(z) dz + C \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z) dz$$

Donde $F(Z) = \sin[\omega t - k(R - z \sin \theta)]$. La constante C es la source strength por unidad de longitud a lo largo del eje z . Al integrar, obtenemos:

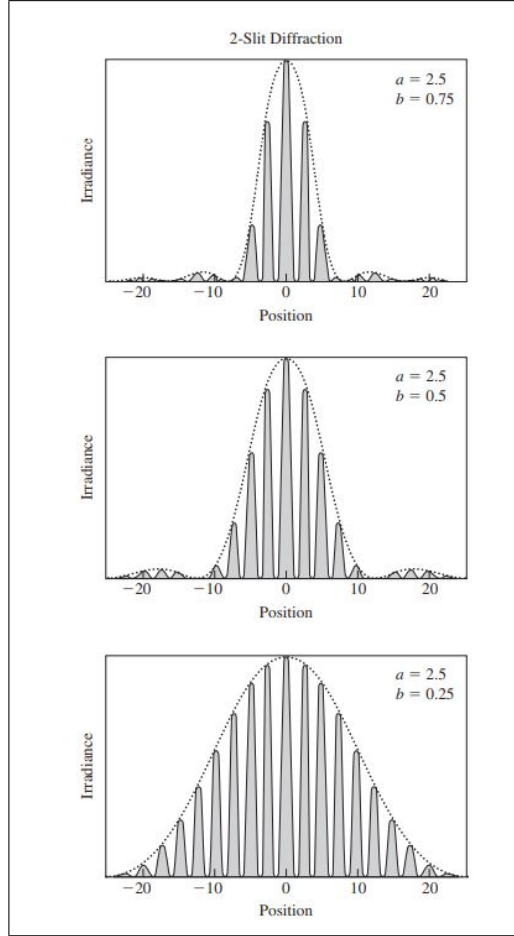
$$E = bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) [\sin(\omega t - kR) + \sin(\omega t - kR + 2\alpha)]$$

donde $\alpha := (ka/2) \sin \theta$ y $\beta := (kb/2) \sin \theta$.
Luego, la irradiancia es de:

$$I(\theta) = 4I_0 \left(\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \cos^2 \alpha$$

Si $b \rightarrow 0$, entonces se reduce a dos point sources y es como el experimento de Young. Si $a = 0$, entonces $\alpha = 0$ y las dos sources se convierten en una y nos queda $I(\theta) = 4I_0(\sin^2 \beta)/\beta^2$.

Podemos ver el patrón completo como la función $\cos^2 \alpha$ modulada por $\sin^2 \beta/\beta^2$



12.4.4. Multiple Slits

Si tenemos N slits de grosor b y cada uno con una separación a , tenemos una intensidad dada por:

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

con $\beta = kb/2$, $\alpha = ka/2 \sin \theta$.

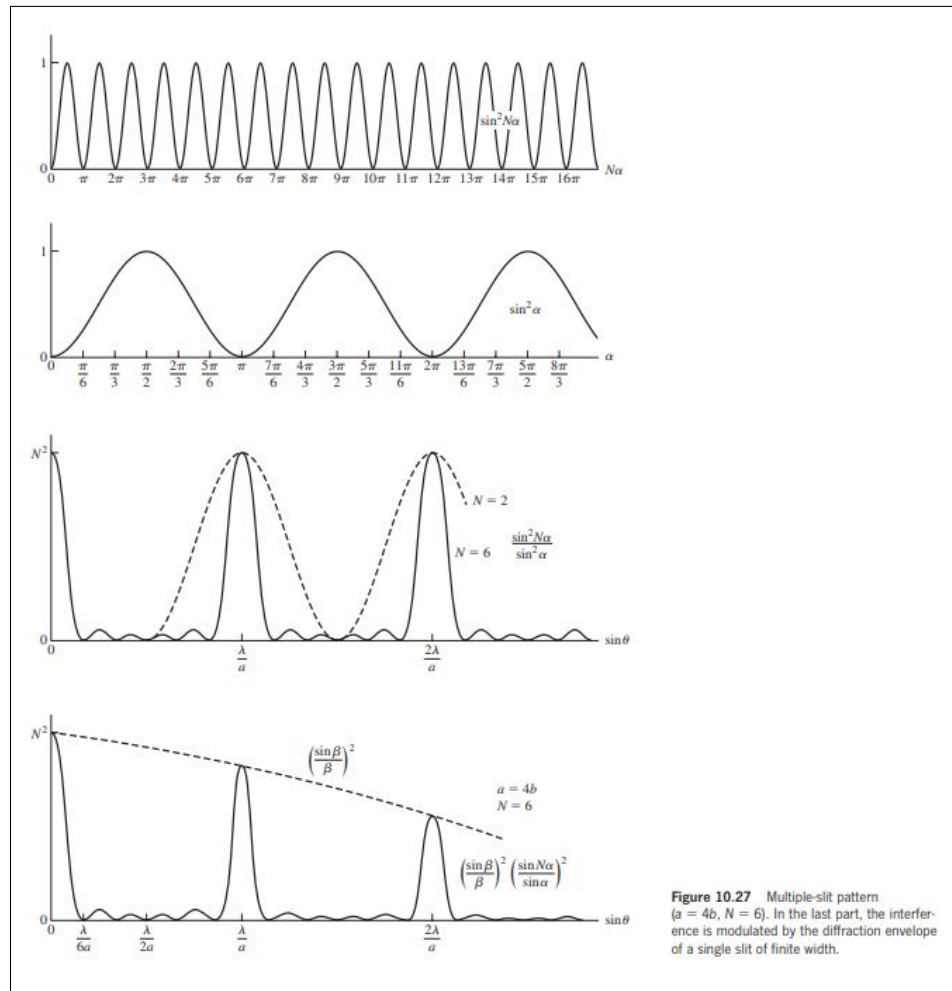


Figure 10.27 Multiple-slit pattern ($a = 4b$, $N = 6$). In the last part, the interference is modulated by the diffraction envelope of a single slit of finite width.

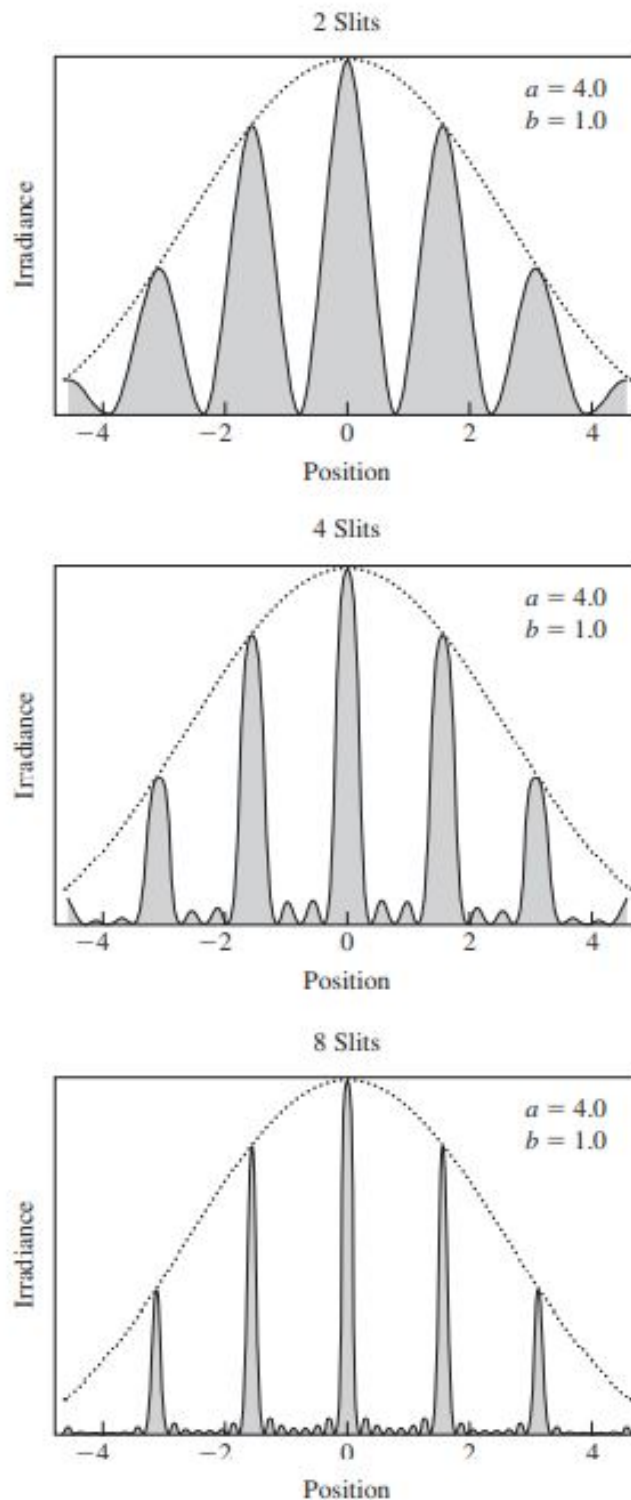
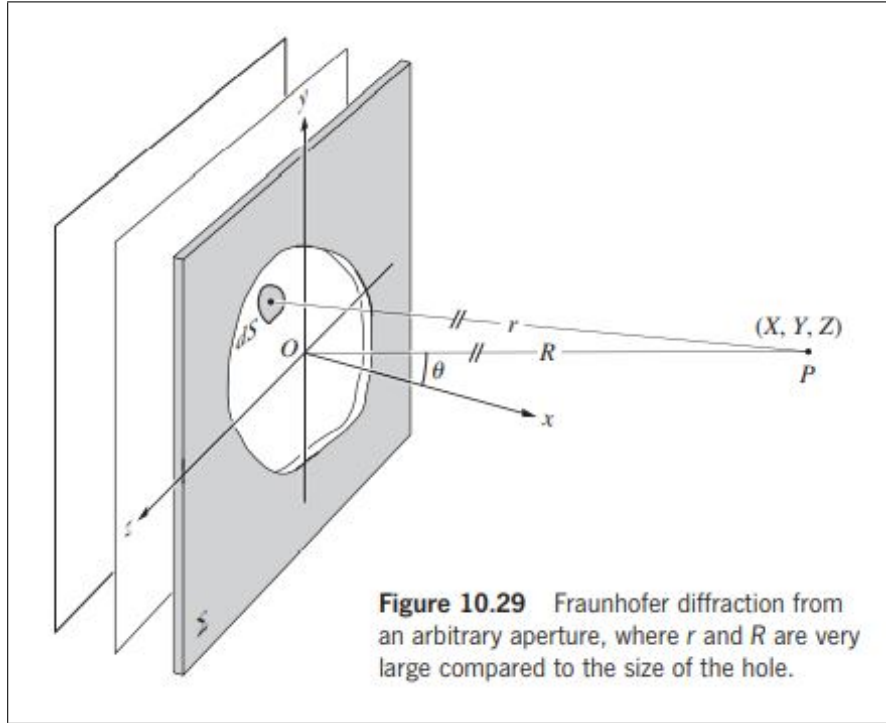


Figure 10.28 Multiple-slit diffraction, each with a finite slit width. The more slits that are opened, the narrower the peaks. Notice that the principal maxima are located at fixed positions. Note, too, that there are $(N - 2)$ subsidiary maxima between adjacent principal maxima (N being the number of slits beyond 1).

12.5. Área Apertura cualquiera



Tenemos una onda monocromática plana que se propaga en la dirección x hasta llegar a una obstrucción como la de la imagen. Queremos encontrar la intensidad del field lejano en un punto P . Según el Huygens-Fresnel, un área diferencial dS en la apertura se puede ver como cubierta con coherentes secondary sources. Pero como $|dS| \ll \lambda$, todas las ondas creadas en dS están en fase al llegar a P , por lo que dS emite una onda esférica. Si ϵ_A es la source strength por unidad de área (asumimos que es constante en toda la apertura), entonces la magnitud en P debido a dS es:

$$dE = \frac{\epsilon_A}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS$$

Donde r es la distancia de dS a P , que es $r = [X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]^{1/2}$.

En la condición Fraunhofer, sustituimos esta distancia r por $R = \bar{OP}$. Pero para aproximar r dentro de la fase necesitamos usar una mejor aproximación:

$$\begin{aligned} r &= R[1 + (y^2 + z^2)/R^2 - 2(Yy + Zz)/R^2]^{1/2} \\ &\simeq R[1 - (Yy + Zz)/R^2] \end{aligned}$$

Entonces, la disturbance total en P es:

$$\tilde{E}(Y, Z) = \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \iint_{\text{aperture}} e^{ik(Yy + Zz)/R} dS$$

12.5.1. Apertura Rectangular

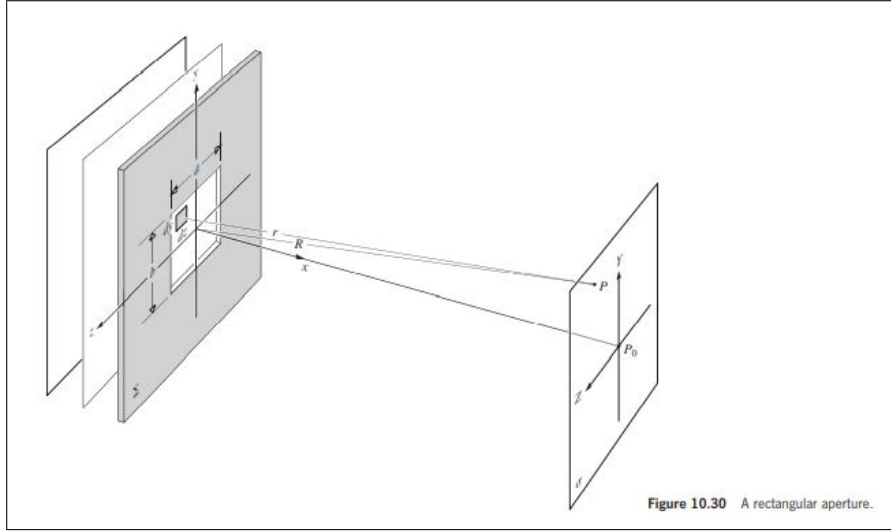


Figure 10.30 A rectangular aperture.

Hacemos la integral descubierta en el ejercicio pasado. Tenemos un rectángulo de longitud a y de altura b como se ve en la imagen. Y una pantalla a una distancia R , buscamos medir el campo eléctrico en esta pantalla en un punto X, Y .

Entonces la integral es:

$$\begin{aligned}\tilde{E}(Y, Z) &= \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \iint_{\text{aperture}} e^{ik(Yy + Zz)/R} dS \\ &= \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikYy/R} dy \int_{-a/2}^{a/2} e^{ikZz/R} dz\end{aligned}$$

Luego, hacemos la sustitución: $\beta' = kbY/2R$, $\alpha' = kaZ/2R$. Y tenemos que las integrales son:

$$\int_{-b/2}^{b/2} e^{ikYy/R} dy = b \frac{\sin \beta'}{\beta'}. \text{ Y similarmente } \int_{-a/2}^{a/2} e^{ikZz/R} dz = a \frac{\sin \alpha'}{\alpha'}$$

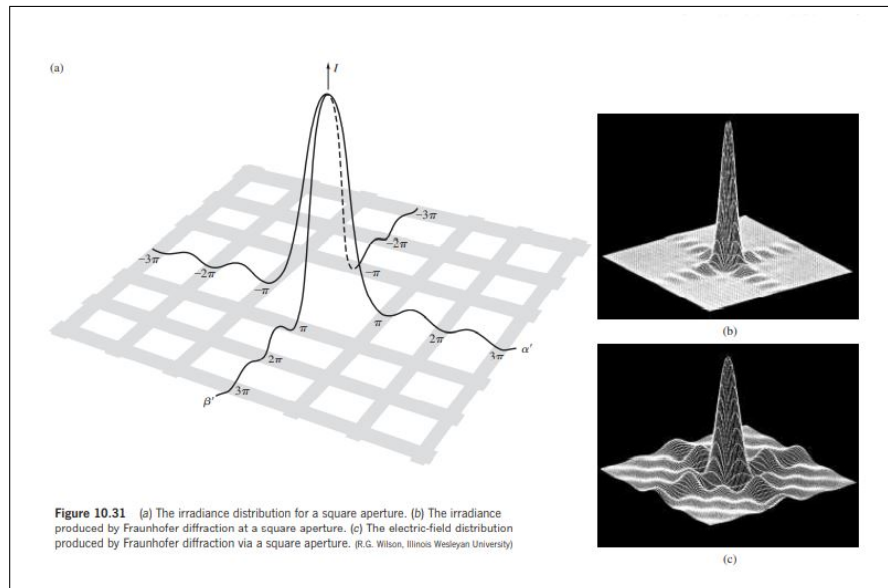
Entonces, el campo \tilde{E} es:

$$\tilde{E} = \frac{A\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \left(\frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \right) \left(\frac{\sin \beta'}{\beta'} \right)$$

Y la intensidad es $I = \langle (Re \tilde{E})^2 \rangle_T$, que nos da:

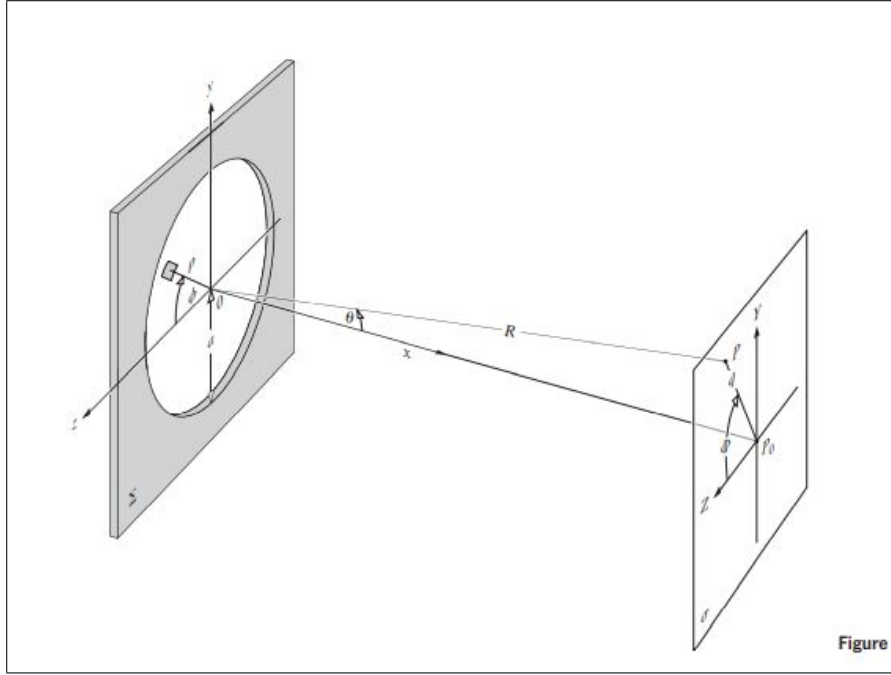
$$I(Y, Z) = I(0) \left(\frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta'}{\beta'} \right)^2$$

Donde $I(0)$ es la irradiancia en $Y = 0, Z = 0$. La forma que tiene es:



El narrow slit se puede ver como un caso especial y se puede resolver el double slit también (usando la fórmula para E para cada slit, porque el campo se suma, la intensidad no). Sin embargo, con los slits usamos θ en vez de Y, Z para medir en la pantalla.

12.5.2. Apertura Circular



Para una apertura circular la integral es la misma pero cambiamos el intervalo.

$$\tilde{E} = \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int \int_{\text{apertura}} e^{ik(Yy + Zz)/R} dS$$

luego hacemos $z = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $Z = q \cos \Phi$, $Y = q \sin \Phi$.
Y el área es de $dS = \rho d\rho d\phi$.

Por lo que nos queda la integral:

$$\tilde{E} = \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{\rho=0}^a \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{(ikpq/R) \cos(\phi - \Phi)} \rho d\rho d\phi$$

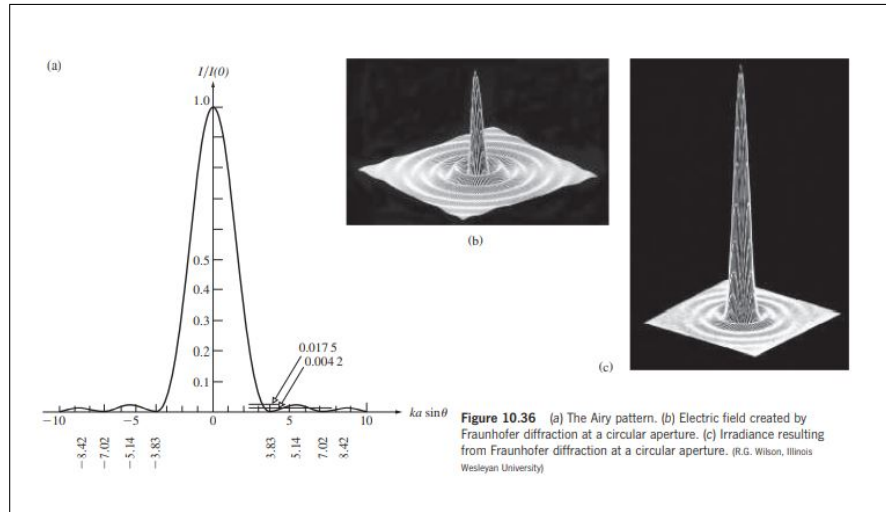
La integral angular tiene que ver con las funciones de Bessel. Y al integrar completamente se puede encontrar que:

$$I(\theta) = I(0) \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2$$

Con $I(0) = \frac{\epsilon_A^2 A^2}{2R^2}$ la intensidad en el centro.

Por la simetría, el spot de alta irradiancia es una zona circular conocida como **disco de Airy.**, que está rodeado por un círculo oscuro de radio dado por el primero cero de $J_1(u)$. Usando esto, se puede encontrar que el radio del primer círculo es de:

$$q_1 = 1,22 \frac{R\lambda}{2a}$$



12.6. Métodos de Fourier para la Teoría de Difracción

Como vimos antes, el campo debido a una apertura parametrizada por y, z en una pantalla parametrizada por Y, Z ubicada a distancia R es de:

$$E(Y, Z) = \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int \int_{\text{apertura}} e^{ik(Yy+Zz)/R} dydz$$

Obviamente se puede cambiar y, z, Y, Z usando otras coordenadas según la geometría.

Se ha asumido hasta ahora que ϵ_A es una constante. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto.

Si la apertura está llena por un vidrio o algo así, el campo de cada elemento $dydz$ difiere en amplitud y fase de punto en punto. El cambio en intensidad y de fase en cada punto de la apertura nos lleva a definir la **función de Apertura**:

$$A(y, z) = A_0(y, z)e^{i\phi(y, z)}$$

Que tiene intensidad y fase dependiente de la posición.

Luego, juntando las constantes de la fórmula de antes y metiéndolas en A_0 , tenemos que:

$$E(Y, Z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} A(y, z) e^{ik(Yy+Zz)/R} dydz$$

Ahora definimos las frecuencias espaciales $k_Y := kY/R$ y definimos $k_Z := kZ/R$. Entonces tenemos que:

$$E(k_Y, k_Z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} A(y, z) e^{i(k_Y y + k_Z z)} dydz$$

Entonces, **la distribución del campo E en la pantalla debido a la difracción de Fraunhofer es la transformada de Fourier de la field distribution en la apertura (la aperture function)** Es decir:

$$E(k_Y, k_Z) = F\{A(y, z)\}$$

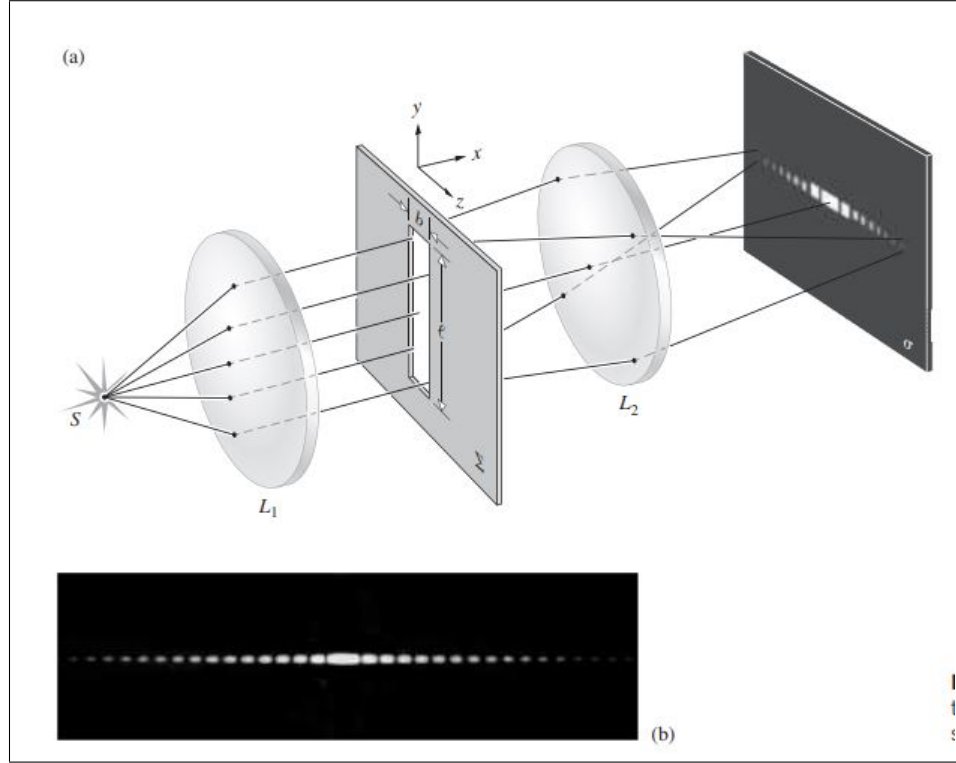
Podemos también calcular la transformada inversa:

$$A(y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} E(k_Y, k_Z) e^{-i(k_Y y + k_Z z)} dk_Y dk_Z$$

Es decir:

$$A(y, z) = F^{-1}\{E(k_Y, k_Z)\}$$

12.6.1. Single Slit



Digamos que la slit es lo suficientemente alta en la dirección y que podemos pensarla como infinita. Entonces, la función de apertura es:

$$A(y, z) = \begin{cases} A_0 & , \quad |z| \leq b/2 \\ 0 & , \quad |z| > b/2 \end{cases}$$

Entonces, calculamos su transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} E(k_Y, k_Z) &= F\{A(y, z)\} \\ &= \int_{y=-b/2}^{b/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} A_0 e^{i(k_Y y + k_Z z)} dy dz \\ &= A_0 b a \operatorname{sinc} \frac{b k_Y}{2R} \operatorname{sinc} \frac{a k_Z}{2R} \end{aligned}$$