Dinámica de Medios Deformables: Tarea 4

Tomás Ricardo Basile Álvarez
Jessica Andrea Gallegos Salgado

25 de abril de 2022

Problema 1

Para un fluido invíscido y adiabático, la ecuación de energía térmica puede escribirse como

$$\rho \frac{de}{dt} = -P\nabla \cdot \vec{u}$$

Muestre que si el flujo es además incompresible, esta ecuación de energía conduce a la expresión:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

donde la entalpía (por unidad de masa) es $h = e + P/\rho$.

Empezamos sencillamente usando el dato de que se trata de un flujo incompresible, lo que significa que $\rho = cte$ y entonces la ecuación de continuidad $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$ se reduce a $0 + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$ y luego $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Por lo tanto, la ecuación de energía térmica toma la forma sencilla:

$$\begin{aligned} \rho \frac{de}{dt} &= -P\nabla \cdot \vec{u} = -P(0) \\ \Rightarrow \ \rho \frac{de}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Ahora usamos la definición de la entalpía, que nos dice que $h = e + P/\rho$, y por lo tanto podemos sustituir $e = h - P/\rho$ en la ecuación:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(h - P/\rho\right) = 0$$

Nuevamente, como el flujo es incompresible, se cumple que $\rho = cte$ y por lo tanto al hacer la derivada obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dh}{dt} - \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \rho \frac{dh}{dt} - \rho \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \rho \frac{dh}{dt} - \frac{dP}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \rho \frac{dh}{dt} &= \frac{dP}{dt} \end{aligned}$$

Esto último es la ecuación a la que buscábamos llegar.

Problema 2

Para obtener una expresión que da la presión de un fluido a partir de su vorticidad, empleamos la siguiente identidad:

$$\nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] = \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\nabla^2 \vec{u}) - \vec{\omega} \cdot \vec{\omega},$$

donde $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$. Muestra que esta identidad es válida para un fluido incompresible. Serán útiles las siguientes identidades que valen para cualesquiera campos vectoriales $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$\begin{aligned}
(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{A} &= \frac{1}{2}\nabla(\vec{A} \cdot \vec{A}) - \vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) \\
\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \\
\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.
\end{aligned}$$

Para probar la identidad que se busca, partiremos del lado izquierdo y llegaremos al derecho. Empezaremos usando la primera identidad que nos dan en el enunciado, para poder reescribir $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] &= \nabla \cdot \left[\frac{1}{2}\nabla(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})\right] \\
&\text{Usamos ahora la definición de la vorticidad } \nabla \times \vec{u} = \vec{w} \\
&= \nabla \cdot \left[\frac{1}{2}\nabla(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \times \vec{w}\right] \\
&= \frac{1}{2}\nabla \cdot \nabla(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \\
&\text{Vemos ahora que tenemos la definición del laplaciano en el primer término } \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \\
&= \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{w})
\end{aligned}$$

Identificamos que el segundo término es la divergencia de un producto cruz. Por lo tanto, será útil usar la segunda identidad para reescribir este término:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] &= \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - [\vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{w})] \\
&= \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{u}) + \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{w})
\end{aligned}$$

El último término de esta expresión se puede reescribir, pues por la definición de $\vec{w}$, tenemos que:

$$\nabla \times \vec{w} = \nabla \times (\nabla \times \vec{u})$$

A esta expresión le podemos aplicar la tercera identidad, lo que nos lleva a:

$$\nabla \times \vec{w} = \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u}$$

Además, como el flujo es incompresible, se tiene que $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ (como se dijo en el primer ejercicio) y por lo tanto concluimos que $\nabla \times \vec{w} = -\nabla^2 \vec{u}$. Sustituimos esto en la expresión que teníamos y llegamos así a:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] &= \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{u}) + \vec{u} \cdot (-\nabla^2 \vec{u}) \\
&= \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\nabla^2 \vec{u})
\end{aligned}$$

Es decir, concluimos que:

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] = \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\nabla^2 \vec{u}) \\
\Rightarrow &\boxed{\nabla \cdot [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] = \frac{1}{2}\nabla^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{w} \cdot \vec{w} - \vec{u} \cdot (\nabla^2 \vec{u})}
\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

Problema 3

En coordenadas cilíndricas, el campo de velocidad de un flujo uniforme que pasa alrededor de un cilindro circular es:

$$u_R = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)\cos\theta$$
$$u_\theta = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right)\sin\theta$$

donde U_∞ es la velocidad del flujo (uniforme) lejos del cilindro y a es el radio del cilindro. Suponemos que el flujo es invíscido e incompresible (densidad $\rho =$ constante).

a) **Usando la ecuación de Bernoulli, determina el campo de presión $P(R,\theta)$ para todo punto en el fluido. La presión del flujo lejos del cilindro es constante e igual a P_∞**

Como vimos en clase, el teorema de Bernoulli para un flujo estacionario es:

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2} + \phi + \int \frac{dP}{\rho} = cte,$$

donde ϕ es el potencial de las fuerzas conservativas. Como no hay ninguna fuerza en el problema, tenemos que $\phi = 0$, además, como $\rho = cte$, puede salir de la integral y nos queda:

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2} + \frac{1}{\rho}\int dP = cte$$
$$\Rightarrow \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2} + \frac{P}{\rho} = cte$$

Podemos multiplicar ambos lados por ρ para que no esté dividiendo (y el lado derecho seguirá siendo una constante, ya que ρ lo es):

$$\frac{1}{2}\rho\vec{u}\cdot\vec{u} + P = cte \quad (1)$$

Primero tenemos que obtener el valor de la constante del lado derecho de la ecuación. Como esta constante tiene que ser la misma en toda una línea de flujo, podemos usar los datos de presión y velocidad lejos del cilindro para obtenerla. Lejos del cilindro la presión es P_∞ y la velocidad es U_∞, por lo que la constante de la ecuación de Bernoulli es:

$$\frac{1}{2}\rho\vec{U}_\infty\cdot\vec{U}_\infty + P_\infty = cte$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty = cte$$

Por lo tanto, ya habiendo obtenido la constante, podemos sustituirla en la ecuación (1) y obtenemos la ecuación:

$$\frac{1}{2}\rho\vec{u}\cdot\vec{u} + P = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty$$

Por lo tanto, la presión en un punto cualquiera del fluido se obtiene despejando esto:

$$P(R,\theta) = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty - \frac{1}{2}\rho\vec{u}\cdot\vec{u}$$

Lo único que hace falta para conseguir esta expresión completa es sustituir las componentes de $\vec{u}$ para calcular su norma cuadrada $\vec{u}\cdot\vec{u} = u_R^2 + u_\theta^2$.

$$P(R,\theta) = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty - \frac{1}{2}\rho[u_R^2 + u_\theta^2]$$

Sustituimos las componentes de $\vec{u}$ que nos da el enunciado.

$$= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty - \frac{1}{2}\rho\left[U_\infty^2\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)^2\cos^2\theta + U_\infty^2\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^2\sin^2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + P_\infty - \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)^2\cos^2\theta + \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^2\sin^2\theta\right]$$

$$= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)^2\cos^2\theta - \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^2\sin^2\theta\right]$$

Esta expresión nos permite calcular la presión para cualquier posición del fluido con R, θ.

b) **Obtén la presión en la superficie del cilindro,** $P(a,\theta)$

Para ello usamos la expresión encontrada para $P(R,\theta)$ en el inciso anterior y sustituimos $R = a$:

$$P(a,\theta) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-\left(1-\frac{a^2}{a^2}\right)^2\cos^2\theta - \left(1+\frac{a^2}{a^2}\right)^2\sin^2\theta\right]$$

$$= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-(1-1)^2\cos^2\theta-(1+1)^2\sin^2\theta\right]$$

$$= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-4\sin^2\theta\right]$$

c) **Determina la posición de los dos puntos de estancamiento del flujo en la superficie del cilindro, es decir, los valores de θ en los que la presión es la de estancamiento, $P(a,\theta) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\theta^2$ (ahí la velocidad del fluido es cero). Nótese que ésta es la presión máxima en todo el fluido (en esos puntos, toda la energía cinética del fluido se ha convertido en energía interna)**

Como dice el problema, necesitamos obtener las posiciones en las que $P(a,\theta) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\theta^2$. La expresión para $P(a,\theta)$ ya la tenemos en el inciso pasado y ahora simplemente la igualamos a $P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\theta^2$ y nos queda:

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-4\sin^2\theta\right] = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\theta^2$$

Restamos P_∞ de ambos lados

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left[1-4\sin^2\theta\right] = \frac{1}{2}\rho U_\theta^2$$

Dividimos por $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ de ambos lados

$$\Rightarrow\ 1-4\sin^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow -4\sin^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow\ \sin^2\theta = 0$$

Esto implica que $\sin\theta = 0$, lo que sucede cuando $\boxed{\theta = 0\ ,\ \theta = \pi}$

d) **Calcula el coeficiente de presión C_P (no confundir con la capacidad calorífica a presión constante) en la superficie del cilindro; este coeficiente se define como:**

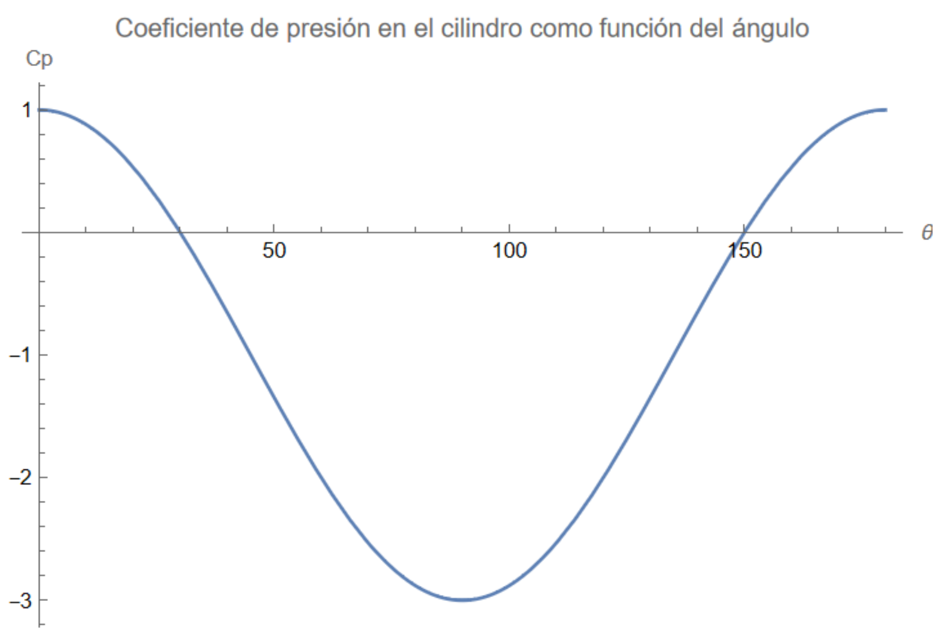
$$C_P = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

Simplemente sustituimos en la expresión que nos dan. Ya por el inciso *b*) sabemos que la presión en la superficie del cilindro es $P(a,\theta) = P_\infty + \dfrac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta)$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} C_P &= \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \\ &= \frac{P_\infty + \dfrac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta) - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \\ &= \boxed{1 - 4\sin^2\theta} \end{aligned}$$

e) **Grafica C_P en la superficie del cilindro como función de θ en el rango $0 < \theta < 180°$. Nótese que en los puntos de estancamiento se tiene $C_P = 1$ (y éste es su valor máximo).**

Simplemente graficamos lo obtenido en el inciso anterior como función de θ. Realizamos la gráfica en Mathematica.



Problema 4

a) **Escribe el potencial complejo de la superposición de una fuente de fuerza m localizada en $z_0 = ih$ y otra fuente también de fuerza m pero localizada en $z_0 = -ih$.**

Como vimos en clase, el potencial de una fuente de flujo de fuerza m situado en un punto z_0 se obtiene como $F(z) = \frac{m}{2\pi}\ln(z - z_0)$. Por lo tanto, el potencial de la fuente en $z_0 = ih$ es $\frac{m}{2\pi}\ln(z - ih)$ y el de la fuente en $z_0 = -ih$ es $\frac{m}{2\pi}\ln(z + ih)$. El potencial total de ambas fuentes se consigue simplemente sumando los potenciales complejos de estas dos partes:

$$\boxed{F(z) = \frac{m}{2\pi}\ln(z - ih) + \frac{m}{2\pi}\ln(z + ih)}$$

b) **Obtén la función de corriente ψ, y muestra que el flujo resultante en el eje x corresponde a una línea de corriente.**
Ayuda: Servirá notar que si $z = x + iy = Re^{i\theta}$, entonces la parte imaginaria de $\ln z$ es $Im(lnz) = Im(\ln(Re^{i\theta})) = Im(\ln R + i\theta) = \theta = \tan^{-1}(y/x)$.
Esto establece que el potencial complejo de dos fuentes de flujo separadas es equivalente al potencial complejo de una fuente única situada una distancia h por encima de una placa sólida plana ubicada en $y = 0$.

Por definición, el potencial complejo $F(z)$ tiene la forma $F(z) = \phi + i\psi$, donde ψ es la función de corriente, que es lo que nos interesa. Por lo tanto, para obtener ψ necesitamos obtener la parte imaginaria de $F(z)$. Entonces tenemos que:

$\psi(x, y) = Im(F(z))$

Usamos el resultado del inciso a)

$$= Im\left(\frac{m}{2\pi}\ln(z - ih) + \frac{m}{2\pi}\ln(z + ih)\right)$$

Usamos que la parte imaginaria de una suma es igual a la suma de las partes imaginarias

$$= Im\left(\frac{m}{2\pi}\ln(z - ih)\right) + Im\left(\frac{m}{2\pi}\ln(z + ih)\right)$$

Como m es real, podemos sacar $m/2\pi$ de Im en ambos sumandos

$$= \frac{m}{2\pi}Im(\ln(z - ih)) + \frac{m}{2\pi}Im(\ln(z + ih))$$

Escribimos el complejo z como $x + iy$

$$= \frac{m}{2\pi}Im(\ln(x + iy - ih)) + \frac{m}{2\pi}Im(\ln(x + iy + ih))$$
$$= \frac{m}{2\pi}Im(\ln(x + i(y - h))) + \frac{m}{2\pi}Im(\ln(x + i(y + h)))$$

Usamos la pista, que dice que la parte imaginaria de un logaritmo $Im(\ln(a + ib))$ es igual a $\tan^{-1}(b/a)$

$$= \frac{m}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y-h}{x}\right) + \frac{m}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y+h}{x}\right)$$
$$= \frac{m}{2\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{y-h}{x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y+h}{x}\right)\right]$$

Finalmente, podemos usar una identidad para sumar tangentes inversas. Según esta identidad, se tiene que $\tan^{-1}(a) + \tan^{-1}(b) = \tan^{-1}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$. Aplicando esto al resultado anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
\psi(x,y) &= \frac{m}{2\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\frac{y-h}{x}+\frac{y+h}{x}}{1-\frac{y-h}{x}\frac{y+h}{x}}\right)\right] \\
&= \frac{m}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2y}{x}}{1-\frac{y^2-h^2}{x^2}}\right) \\
&= \frac{m}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2y}{x}}{\frac{x^2-y^2+h^2}{x^2}}\right) \\
&= \frac{m}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2yx}{x^2-y^2+h^2}\right)
\end{aligned}$$

Para ver que el eje x es una línea de corriente, evaluamos ψ en dicho eje. El eje x se consigue cuando $y=0$ y por lo tanto el valor de ψ en el eje x es:

$$\begin{aligned}
\psi(x,y=0) &= \frac{m}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2(0)x}{x^2+(0)^2-h^2}\right) \\
&= \frac{m}{2\pi}\tan^{-1}(0) \\
&= \frac{m}{2\pi}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Esto demuestra que ψ es constante en todo el eje x. Pero en clase vimos que las líneas con ψ constante son líneas de corriente, por lo que concluimos que el eje x es una línea de corriente.

c) **Calcula las componentes de la velocidad u y v para la región $y > 0$, es decir, arriba de la placa.**

En clase vimos que la velocidad se puede obtener derivando el potencial complejo, pues si definimos $W = \dfrac{dF}{dz}$, entonces resulta que $W = u - iv$ (donde u es la velocidad en la dirección x y v en la y). Entonces, vamos a partir de la expresión de $F(z)$ a la que llegamos en el inciso a) y derivarla para obtener W:

$$\begin{aligned}
W = \frac{dF}{dz} &= \frac{d}{dz}\left(\frac{m}{2\pi}\ln(z-ih) + \frac{m}{2\pi}\ln(z+ih)\right) \\
&= \frac{m}{2\pi}\frac{d}{dz}\ln(z-ih) + \frac{m}{2\pi}\frac{d}{dz}\ln(z+ih)
\end{aligned}$$

Usamos que la derivada del logaritmo es simplemente el recíproco del argumento:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{m}{2\pi}\frac{1}{z-ih} + \frac{m}{2\pi}\frac{1}{z+ih} \\
&= \frac{m}{2\pi}\left[\frac{1}{z-ih} + \frac{1}{z+ih}\right] \\
&= \frac{m}{2\pi}\left[\frac{z+ih+z-ih}{(z-ih)(z+ih)}\right] \\
&= \frac{m}{2\pi}\left[\frac{2z}{z^2+h^2}\right]
\end{aligned}$$

Escribimos z como $x+iy$ y entonces nos queda:

$$W = \frac{m}{2\pi}\frac{2x+2iy}{(x+iy)^2+h^2} = \frac{m}{\pi}\frac{x+iy}{x^2-y^2+h^2+i2xy}$$

Como dijimos antes $W = u - iv$ y entonces para obtener las velocidades u y v hay que separar a W en la parte real y la parte imaginaria. Para conseguir esto, hay que quitar el número complejo del denominador, para lo cual tenemos que multiplicarlo por el complejo conjugado arriba y abajo de la fracción:

$$\begin{aligned} W &= \frac{m}{\pi}\frac{x+iy}{x^2-y^2+h^2+i2xy}\frac{x^2-y^2+h^2-i2xy}{x^2-y^2+h^2-i2xy} \\ &= \frac{m}{\pi}\frac{x^3-xy^2+xh^2+2xy^2+ix^2y-iy^3+iyh^2-i2x^2y}{(x^2-y^2+h^2)^2+4x^2y^2} \\ &= \frac{m}{\pi}\frac{x^3-xy^2+xh^2+2xy^2+i(x^2y-y^3+yh^2-2x^2y)}{(x^2-y^2+h^2)^2+4x^2y^2} \end{aligned}$$

Ahora sí podemos obtener las componentes de la velocidad u y v, pues ya podemos identificar la parte real e imaginaria de W. u es la parte real de W y v es menos la parte imaginaria. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} u &= \frac{m}{\pi}\frac{x^3-xy^2+xh^2+2xy^2}{(x^2-y^2+h^2)^2+4x^2y^2} = \boxed{\frac{m}{\pi}\frac{x(x^2+y^2+h^2)}{(x^2-y^2+h^2)^2+4x^2y^2}} \\ v &= -\frac{m}{\pi}\frac{x^2y-y^3+yh^2-2x^2y}{(x^2-y^2+h^2)^2+4x^2y^2} = \boxed{\frac{m}{\pi}\frac{y(x^2+y^2-h^2)}{(x^2-y^2+h^2)^2+4x^2y^2}} \end{aligned}$$

d) **Evalúa u, v en $y = 0$, es decir, en la superficie de la placa**

Simplemente tomamos las expresiones encontradas en el inciso pasado y sustituimos $y = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, y=0) &= \frac{m}{\pi}\frac{x(x^2+0^2+h^2)}{(x^2-0^2+h^2)^2+4x^2(0)^2} \\ &= \frac{m}{\pi}\frac{x(x^2+h^2)}{(x^2+h^2)^2} \\ &= \boxed{\frac{m}{\pi}\frac{x}{x^2+h^2}} \\ v(x, y=0) &= \frac{m}{\pi}\frac{0(x^2+0^2-h^2)}{(x^2-0^2+h^2)^2+4x^2(0)^2} \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

e) **Usando la ecuación de Bernoulli, obtén la distribución de presión en la superficie de la placa.**

Como vimos en clase, la ecuación de Bernoulli para un flujo sin fuerzas externas nos dice que:

$$P + \frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 = cte$$

Escribimos ahora la norma $|\vec{u}|^2$ como $u^2 + v^2$ y nos queda:

$$P + \frac{1}{2}\rho(u^2+v^2) = cte$$

Para obtener la constante, tomamos la línea de corriente $y = 0$, y consideramos un punto con $x \to \infty$. Es decir, evaluaremos la ecuación de Bernoulli en $x = \infty$ y $y = 0$. Por las velocidades obtenidas en el inciso anterior, tenemos que $u(x=\infty, y=0) = \text{lím}_{x\to\infty} \dfrac{m}{\pi}\dfrac{x}{x^2+h^2} = 0$ (tiende a 0 porque el denominador tiene una x^2 y el numerador solamente una x, por lo que conforme $x\to\infty$, el denominador se hace mucho mayor). Por otro lado, la velocidad v también vale 0 porque vimos que es 0 en todos los puntos con $y=0$.

Por lo tanto, la ecuación de Bernoulli evaluada en $x=\infty, y=0$ es:

$$\begin{aligned} P_\infty + \frac{1}{2}\rho(0) &= cte \\ \Rightarrow P_\infty &= cte \end{aligned}$$

Es decir, la constante de la ecuación de Bernoulli en la línea de corriente $y=0$ es P_∞, que es la presión en infinito (o bien, la presión de estancamiento, ya que es la presión cuando la velocidad vale 0). Por lo tanto, sustituyendo esta constante en la ecuación de Bernoulli obtenemos:

$$P + \frac{1}{2}\rho(u^2+v^2) = P_\infty$$

Ahora bien, para puntos en la placa ($y=0$), ya obtuvimos las velocidades u y v en el inciso pasado, por lo que las podemos sustituir aquí:

$$\begin{aligned} P(x, y=0) + \frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{m}{\pi}\frac{x}{x^2+h^2}\right)^2 + 0^2\right) &= P_\infty \\ \Rightarrow\; P(x) + \frac{1}{2}\rho\frac{m^2}{\pi^2}\frac{x^2}{(x^2+h^2)^2} &= P_\infty \\ \Rightarrow\; \boxed{P(x) = P_\infty - \frac{\rho m^2}{2\pi^2}\frac{x^2}{(x^2+h^2)^2}} \end{aligned}$$

Y ésta es entonces la distribución de presiones en la placa.

f) **Suponiendo que la presión del otro lado (i.e. por debajo) de la placa es la presión del flujo libre P_∞ (en este caso resulta ser la misma que la presión de estancamiento, pues $u\to 0$ lejos del origen), integra la diferencia de presión sobre la superficie de la placa y muestra que la fuerza vertical (por unidad de longitud en z) que actúa sobre ella debido a la presencia de la fuente $F = \rho m^2/(4\pi h)$. Esta fuerza está dada por:**

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} P_\infty - P(x)dx$$

Sustituimos la expresión de $P(x)$ encontrada en el inciso pasado:

$$\begin{aligned} F &= \int_{-\infty}^{\infty} P_\infty - P(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_\infty - \left(P_\infty - \frac{\rho m^2}{2\pi^2}\frac{x^2}{(x^2+h^2)^2}\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho m^2}{2\pi^2}\frac{x^2}{(x^2+h^2)^2}dx \\ &= \frac{\rho m^2}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+h^2)^2}dx \end{aligned}$$

Para calcular la integral podemos empezar escribiendo el x^2 del numerador como $x^2+h^2-h^2$ y luego separando las fracciones:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\rho m^2}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+h^2-h^2}{(x^2+h^2)^2}dx \\
&= \frac{\rho m^2}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+h^2}{(x^2+h^2)^2}-\frac{h^2}{(x^2+h^2)^2}dx \\
&= \frac{\rho m^2}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+h^2)}-\frac{h^2}{(x^2+h^2)^2}dx
\end{aligned}$$

En las dos integrales podemos hacer el cambio de variable $w = x/h \Rightarrow x = hw \Rightarrow dx = hdw$ y nos queda:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\rho m^2}{2\pi^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{h^2w^2+h^2}hdw-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2}{(h^2w^2+h^2)^2}hdw\right] \\
&= \frac{\rho m^2}{2\pi^2}\left[\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{w^2+1}dw-\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(w^2+1)^2}dw\right]
\end{aligned}$$

Hacemos ahora sustitución trigonométrica $w = \tan\theta$, por lo que $dw = \sec^2\theta d\theta$. El intervalo de integración $w \in (-\infty,\infty)$ se convierte entonces en $\theta \in (-\pi/2,\pi/2)$ y queda:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\rho m^2}{2\pi^2}\left[\frac{1}{h}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\sec^2\theta d\theta-\frac{1}{h}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{(\tan^2\theta+1)^2}\sec^2\theta d\theta\right] \\
&= \frac{\rho m^2}{2\pi^2}\left[\frac{1}{h}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\sec^2\theta}\sec^2\theta d\theta-\frac{1}{h}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{(\sec^2\theta)^2}\sec^2\theta d\theta\right] \\
&= \frac{\rho m^2}{2\pi^2}\left[\frac{1}{h}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta-\frac{1}{h}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\sec^2\theta}d\theta\right] \\
&= \frac{\rho m^2}{2h\pi^2}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta\right] \\
&= \frac{\rho m^2}{2h\pi^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1-\cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{\rho m^2}{2h\pi^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta
\end{aligned}$$

Usamos la identidad trigonométrica $\sin^2\theta = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)$ y nos queda:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\rho m^2}{2h\pi^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)d\theta \\
&= \frac{\rho m^2}{4h\pi^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1-\cos(2\theta)d\theta \\
&= \frac{\rho m^2}{4h\pi^2}\left[\theta-\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{\rho m^2}{4h\pi^2}\left[\pi/2-(-\pi/2)-\left(\frac{\sin(\pi)}{2}-\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] \\
&= \frac{\rho m^2}{4h\pi^2}[\pi-0] \\
&= \boxed{\frac{\rho m^2}{4h\pi}}
\end{aligned}$$

Que es la fuerza que debíamos obtener según el enunciado. La fuerza es positiva, lo que significa que la placa es empujada hacia arriba.