Termodinámica: Tarea 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

17 de diciembre de 2021

Sección 1: Ley Cero y Ecuaciones de Estado

1. **Los sistemas A, B, C son gases con coordenadas P, V, P', V', P'', V''. Cuando A y C están en equilibrio térmico se cumple la relación:**

$$PV - nbP - P''V'' = 0$$

Cuando B y C lo están, se cumple:

$$P'V' - P''V'' + \frac{nBP''V''}{V'} = 0$$

a) **¿Cuáles son las tres funciones que son iguales entre sí en el equilibrio térmico, siendo cada una de ellas iguales a T (temperatura empírica)?**

Cuando los 3 sistemas están en equilibrio térmico, en particular lo están los sistemas A y C, por lo que se cumple la relación:

$$PV - nbP - P''V'' = 0$$
$$\Rightarrow \quad P''V'' = PV - nbP \qquad (1)$$

Por otro lado, los sistemas B y C también están en equilibrio, por lo que se cumple la relación:

$$P'V' - P''V'' + \frac{nBP''V''}{V'} = 0$$
$$\Rightarrow \; P'V' + P''V''\left(-1 + \frac{nB}{V'}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \; P''V''\left(-1 + \frac{nB}{V'}\right) = -P'V'$$
$$\Rightarrow \; P''V'' = \frac{-P'V'}{-1 + \frac{nB}{V'}}$$
$$\Rightarrow \; P''V'' = \frac{P'V'}{1 - \frac{nB}{V'}} \qquad (2)$$

En (1) y (2) tenemos dos expresiones distintas para la cantidad $P''V''$, por lo que podemos igualarlas:

$$PV - nbP = \frac{P'V'}{1 - \frac{nB}{V'}} \qquad (3)$$

Las tres ecuaciones (1), (2) y (3) nos dan las siguientes igualdades:

$$P''V'' = PV - nbP = \frac{P'V'}{1 - \frac{nB}{V'}}$$

Cada una de estas expresiones es una función de las variables de un solo sistema. Por lo que hemos encontrado las tres funciones (una para cada sistema) que son iguales entre sí en el equilibrio térmico, siendo entonces cada una de ellas iguales a la temperatura T. Las funciones son:

- $T(P, V) = PV - nbP$
- $T(P', V') = \dfrac{P'V'}{1 - \frac{nB}{V'}}$
- $T(P'', V'') = P''V''$

b) **¿ Cuál es la relación que expresa el equilibrio térmico entre A y B?**

Para encontrarla igualamos la función del sistema A con la del sistema B:

$$T(P, V) = T(P', V')$$
$$\Rightarrow \boxed{PV - nbP = \frac{P'V'}{1 - \frac{nB}{V'}}}$$

2. **Los sistemas A y B son gases ideales con coordenadas (P, V) respectivamente, y el sistema C es una sustancia elástica de coordenadas (F, L). Cuando A y C están en equilibrio térmico se cumple:**

$$kPV\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right) - FR = 0$$

Cuando están en equilibrio térmico A y B, se cumple:

$$PV - P'(V' - b) = 0$$

Siendo los demás valores constantes.
¿Cuáles son las funciones del par de variables de cada sistema, iguales entre sí en el equilibrio térmico? ¿Cuál es la relación que expresa el equilibrio térmico entre los sistemas B y C

Si los sistemas A, B, C están en equilibrio, en particular lo están los sistemas A y C, por lo que se cumple:

$$kPV\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right) - FR = 0$$
$$\Rightarrow\; kPV\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right) = FR$$
$$\Rightarrow\; PV = \frac{FR}{k\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right)} \qquad (4)$$

Por otro lado, A y B también están en equilibrio, por lo que se cumple que:

$$PV - P'(V' - b) = 0$$
$$\Rightarrow\; PV = P'(V' - b) \qquad (5)$$

Con las ecuaciones (4) y (5) podemos llegar a las siguientes igualdades:

$$\frac{FR}{k\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right)} \stackrel{(4)}{=} PV \stackrel{(5)}{=} P'(V' - b)$$

Con lo que hemos encontrado 3 funciones iguales entre sí, una para cada sistema:

- $T(P, V) = PV$
- $T(P', V') = P'(V' - b)$
- $T(F, L) = \dfrac{FR}{k\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right)}$

Finalmente, la relación que expresa el equilibrio térmico entre B y C se encuentra al igualar las expresiones para el sistema B con la del sistema C:

$$
\begin{aligned}
T(P', V') &= T(F, L) \\
\Rightarrow\ P'(V' - b) &= \frac{FR}{k\left(\dfrac{L}{L_0} - \dfrac{L_0^2}{L^2}\right)}
\end{aligned}
$$

Sección 2: Ecuaciones de Estado

1. **La ecuación del gas ideal es $PV = R\theta$. Demostrar que $\beta = \dfrac{1}{\theta}$ y $\kappa = \dfrac{1}{P}$**

   Por cómo se define β, tenemos que $\beta = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\right)_P$

   Para calcular la derivada, necesitamos despejar V de la ecuación de estado, que nos da $V = \dfrac{R\theta}{P}$. Por lo tanto, al sustituir en la expresión de β, tenemos que:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_P \\ &= \frac{1}{\frac{R\theta}{P}}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{R\theta}{P}\right)_P \\ &= \frac{P}{R\theta}\left(\frac{R}{P}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{\theta}}\end{aligned}$$

   Por otro lado, κ se calcula como $\kappa = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_T$. Sustituyendo la expresión de V, tenemos que:

$$\begin{aligned}\kappa &= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{\frac{R\theta}{P}}\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{R\theta}{P}\right)_T \\ &= -\frac{P}{R\theta}\left(-\frac{R\theta}{P^2}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{P}}\end{aligned}$$

2. **En un alambre estirado tenemos la tensión τ, la longitud del alambre L y la temperatura θ. Si experimenta un cambio infinitesimal desde un estado inicial de equilibrio a otro final, también en equilibrio, demostrar que la variación de la tensión es:**

$$d\tau = -\alpha AY\, d\theta + \frac{AY}{L} dL$$

   Hint: Si un alambre experimenta un cambio infinitesimal de un estado de equilibrio a otro, el cambio infinitesimal de longitud es diferencial exacta y puede escribirse:

$$dL = \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)_\tau d\theta + \left(\frac{\partial L}{\partial \tau}\right)_\theta d\tau$$

Siendo ambas derivadas parciales de θ y τ. Estas derivadas se relacionan con importantes magnitudes físicas. Se define el coeficiente de dilatación lineal como:

$$\alpha = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)_\tau$$

Y el módulo de Young:

$$Y = \frac{L}{A}\left(\frac{\partial \tau}{\partial L}\right)_\theta$$

A partir de la definición de $\alpha = \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta}\right)_\tau$, tenemos que $\alpha L = \left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta}\right)_\tau$ (7)

Por otro lado, al despejar la definición de $Y = \dfrac{L}{A}\left(\dfrac{\partial \tau}{\partial L}\right)_\theta$, encontramos que $\left(\dfrac{\partial \tau}{\partial L}\right)_\theta = \dfrac{YA}{L}$.

Luego, usando la relación entre derivadas parciales que nos dice que $\left(\dfrac{\partial L}{\partial \tau}\right)_\theta = 1/\left(\dfrac{\partial \tau}{\partial L}\right)_\theta$, tenemos que $\left(\dfrac{\partial L}{\partial \tau}\right)_\theta = \dfrac{1}{\frac{YA}{L}} = \dfrac{L}{YA}$ (8)

Ahora sustituimos (7) y (8) en la expresión para dL dada en el enunciado y despejamos $d\tau$:

$$\begin{aligned}
dL &= \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)_\tau d\theta + \left(\frac{\partial L}{\partial \tau}\right)_\theta d\tau \\
&= \alpha L \, d\theta + \frac{L}{YA}\, d\tau \\
\Rightarrow \quad & dL - \alpha L \, d\theta = \frac{L}{YA}\, d\tau \\
\Rightarrow \quad & \frac{YA}{L}\, dL - \frac{YA}{L}\, \alpha L \, d\theta = d\tau \\
\Rightarrow \quad & d\tau = \frac{AY}{L}\, dL - YA\alpha \, d\theta \\
\Rightarrow \quad & \boxed{d\tau = -\alpha AY d\theta + \frac{AY}{L} dL}
\end{aligned}$$

Que es la expresión a la que queríamos llegar.

3. **Discuta si dos isotermas pueden cortarse.**

No pueden cruzarse. Ya que si dos isotermas con temperaturas T_1, T_2 se cruzan en un mismo punto (X_0, Y_0), eso significa que dicho punto tiene asociadas dos temperaturas distintas. Esto contradice lo que hemos discutido en clase de que para los sistemas que estamos estudiando, conocer las variables (X, Y) determina completamente el estado del sistema, y por tanto su temperatura.

4. **Partiendo de la ecuación de estado para un material paramagnético $M = C\dfrac{\mathcal{H}}{\theta}$. Demostrar que las parciales cumplen:**

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_\theta \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{T}}\right)_M \left(\frac{\partial T}{\partial \mathcal{M}}\right)_\mathcal{H} = -1$$

Calculamos cada una de las derivadas necesarias:

- $\left(\dfrac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_\theta$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_\theta &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{H}}\left(C\frac{\mathcal{H}}{\theta}\right) \\ &= \frac{C}{\theta}\end{aligned}$$

- $\left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}\right)_M$

  Primero depejamos $\mathcal{H}$ de la ecuación de estado: $M = C\dfrac{\mathcal{H}}{\theta} \Rightarrow \mathcal{H} = \dfrac{M\theta}{C}$. Ahora sí calculamos la derivada:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}\right)_M &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{M\theta}{C}\right)_M \\ &= \frac{M}{C}\end{aligned}$$

- $\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial \mathcal{M}}\right)_\mathcal{H}$

  Primero depejamos θ en la ecuación de estado $M = C\dfrac{\mathcal{H}}{\theta} \Rightarrow \theta = \dfrac{C\mathcal{H}}{M}$. Ahora sıcalculamos la derivada:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \mathcal{M}}\right)_\mathcal{H} &= \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{C\mathcal{H}}{M}\right)_\mathcal{H} \\ &= -\frac{C\mathcal{H}}{M^2}\end{aligned}$$

Ahora juntamos los tres resultados recién encontrados:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_\theta \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}\right)_M \left(\frac{\partial \theta}{\partial \mathcal{M}}\right)_\mathcal{H} &= \frac{C}{\theta} \cdot \frac{M}{C} \cdot \frac{-C\mathcal{H}}{M^2} \\
&= -\frac{C\mathcal{H}}{\theta M} \\
&= -\frac{M}{M} \quad \text{porque } M = C\frac{\mathcal{H}}{\theta} \text{ según la ecuación de estado} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Que es lo que se buscaba demostrar.

$$\frac{(-4(\mathrm{b3}\cos(t)-\mathrm{a3}\sin(t))(\mathrm{a3}\cos(t)+\mathrm{b3}\sin(t)+\mathrm{c3})-4(\mathrm{b4}\cos(t)-\mathrm{a4}\sin(t))(\mathrm{a4}\cos(t)+\mathrm{b4}\sin(t)+\mathrm{c4}))\log\left(-2(\mathrm{a2}\cos(t)+\mathrm{b2}\sin(t)+\mathrm{c2})^2-2(\mathrm{a4}\cos(t)+\mathrm{b4}\sin(t)+\mathrm{c4})^2+1\right)}{-2(\mathrm{a3}\cos(t)+\mathrm{b3}\sin(t)+\mathrm{c3})^2-2(\mathrm{a4}\cos(t)+\mathrm{b4}\sin(t)+\mathrm{c4})^2+1}-$$

$$\frac{(-4(\mathrm{b2}\cos(t)-\mathrm{a2}\sin(t))(\mathrm{a2}\cos(t)+\mathrm{b2}\sin(t)+\mathrm{c2})-4(\mathrm{b4}\cos(t)-\mathrm{a4}\sin(t))(\mathrm{a4}\cos(t)+\mathrm{b4}\sin(t)+\mathrm{c4}))\log\left(-2(\mathrm{a3}\cos(t)+\mathrm{b3}\sin(t)+\mathrm{c3})^2-2(\mathrm{a4}\cos(t)+\mathrm{b4}\sin(t)+\mathrm{c4})^2+1\right)}{-2(\mathrm{a2}\cos(t)+\mathrm{b2}\sin(t)+\mathrm{c2})^2-2(\mathrm{a4}\cos(t)+\mathrm{b4}\sin(t)+\mathrm{c4})^2+1}$$

$$\frac{(-4(\mathrm{b3}\cos(t)-\mathrm{a3}\sin(t))(\mathrm{a3}\cos(t)+\mathrm{b3}\sin(t)+\mathrm{c3})-4(\mathrm{b4}\cos(t)-\mathrm{a4}\sin(t))(\mathrm{a4}\cos(t)+\mathrm{b4}\sin(t)+\mathrm{c4}))\log\left(-2(\mathrm{a2}\cos(t)+\mathrm{b2}\sin(t)+\mathrm{c2})^2-2(\mathrm{a4}\cos(t)+\mathrm{b4}\sin(t)+\mathrm{c4})^2+1\right)}{-2(\mathrm{a3}\cos(t)+\mathrm{b3}\sin(t)+\mathrm{c3})^2-2(\mathrm{a4}\cos(t)+\mathrm{b4}\sin(t)+\mathrm{c4})^2+1}-$$
$$\frac{(-4(\mathrm{b2}\cos(t)-\mathrm{a2}\sin(t))(\mathrm{a2}\cos(t)+\mathrm{b2}\sin(t)+\mathrm{c2})-4(\mathrm{b4}\cos(t)-\mathrm{a4}\sin(t))(\mathrm{a4}\cos(t)+\mathrm{b4}\sin(t)+\mathrm{c4}))\log\left(-2(\mathrm{a3}\cos(t)+\mathrm{b3}\sin(t)+\mathrm{c3})^2-2(\mathrm{a4}\cos(t)+\mathrm{b4}\sin(t)+\mathrm{c4})^2+1\right)}{-2(\mathrm{a2}\cos(t)+\mathrm{b2}\sin(t)+\mathrm{c2})^2-2(\mathrm{a4}\cos(t)+\mathrm{b4}\sin(t)+\mathrm{c4})^2+1}$$