

Termodinámica: Tarea 2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

17 de noviembre de 2021

Problema 1

La ecuación de estado de una sustancia elástica ideal es

$$\tau = KT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right)$$

siendo K una constante y L_0 (el valor de L a tensión nula) función solamente de la temperatura.

a. Demostrar que el módulo de Young isotérmico viene dado por

$$Y = \frac{KT}{A} \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2} \right)$$

El módulo de Young se define como:

$$Y = \frac{L}{A} \left(\frac{\partial \tau}{\partial L} \right)_T$$

Donde A es el área de una sección transversal. Calculamos esto directamente para obtener el módulo de Young:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{L}{A} \left(\frac{\partial \tau}{\partial L} \right)_T \\ &= \frac{L}{A} \frac{\partial}{\partial L} \left[KT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) \right] \quad \text{por la ecuación de estado} \\ &= \frac{L}{A} KT \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) \\ &= \frac{LKT}{A} \left(\frac{1}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^3} \right) \\ &= \boxed{\frac{KT}{A} \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2} \right)} \end{aligned}$$

-
- b) **Calcular el trabajo necesario para comprimir la sustancia desde $L = L_0$ hasta $L = L_0/2$ cuasiestática e isotérmicamente**

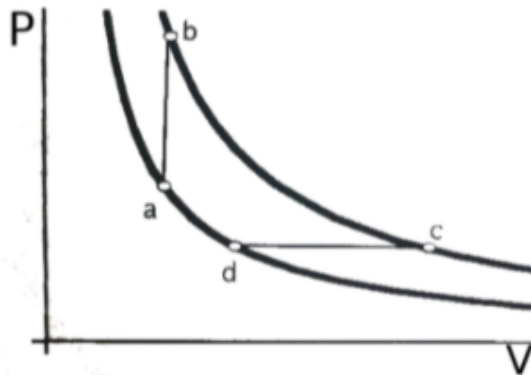
El trabajo diferencial en una banda elástica se calcula como $dW = \tau dL$, lo cual veremos más adelante en la pregunta 4. Entonces el trabajo total en un proceso es $\int_{L_i}^{L_f} \tau dL$. Lo cual es válido para un proceso cuasiestático como el que tenemos.

Para calcularlo, reemplazamos el valor de τ y la longitud inicial y final $L_i = L_0$, $L_f = L_0/2$ y hacemos la integral:

$$\begin{aligned} W &= \int_{L_i}^{L_f} \tau dL \\ &= \int_{L_i}^{L_f} KT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) dL \quad \text{por la ecuación de estado} \\ &= \int_{L_0}^{L_0/2} KT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) dL \\ &= KT \int_{L_0}^{L_0/2} \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) dL \quad \text{sacamos T de la integral por ser cte en un proceso isotérmico} \\ &= \frac{KT}{L_0} \int_{L_0}^{L_0/2} L - KTL_0^2 \int_{L_0}^{L_0/2} \frac{1}{L^2} dL \\ &= \frac{KT}{L_0} \left(\frac{L^2}{2} \right) \Big|_{L_0}^{L_0/2} - KTL_0^2 \left(-\frac{1}{L} \right) \Big|_{L_0}^{L_0/2} \\ &= \frac{KT}{L_0} \left(\frac{(L_0/2)^2}{2} - \frac{L_0^2}{2} \right) + KTL_0^2 \left(\frac{1}{(L_0/2)} - \frac{1}{L_0} \right) \\ &= \frac{KT}{L_0} \left(\frac{L_0^2}{8} - \frac{L_0^2}{2} \right) + KTL_0^2 \left(\frac{2}{L_0} - \frac{1}{L_0} \right) \\ &= \frac{KT}{L_0} \left(-\frac{3L_0^2}{8} \right) + KTL_0^2 \left(\frac{1}{L_0} \right) \\ &= -\frac{3KTL_0}{8} + KTL_0 \\ &= \boxed{\frac{5kTL_0}{8}} \end{aligned}$$

Problema 2

El ciclo de la figura siguiente es el ciclo de Sargent para un gas ideal de capacidades térmicas C_V y C_p constantes



El ciclo está constituido por dos adiabáticas, una isócora y una isóbara. Muestre que la eficiencia del ciclo es

$$\eta = 1 - \gamma \frac{T_c - T_d}{T_b - T_a}$$

La definición de la eficiencia es $\eta = \frac{W_T}{Q_{in}}$ con W_T el trabajo total y Q_{in} el calor que entra al sistema. Además, durante el ciclo sale una cantidad de calor Q_{out} . Por tanto, la cantidad total de calor que entra y sale del sistema es $Q_T = Q_{in} - Q_{out}$.

Luego, a lo largo de todo el ciclo, la cantidad de energía total tiene que ser 0 (por ser un ciclo cerrado). Por lo tanto, el trabajo total que realiza el sistema tiene que ser igual al calor que entra menos el calor que sale para que se cumpla esta conservación de la energía. Es decir, $W_T = Q_{in} - Q_{out}$. Por lo tanto, la eficiencia del ciclo es igual a:

$$\eta = \frac{W_T}{Q_{in}} = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{Q_{in}} = 1 - \frac{Q_{out}}{Q_{in}}$$

Calculemos entonces los calores que entran y salen del sistema.

- $a \rightarrow b$: Se trata de una isócora. El calor diferencial en una isócora es $dQ = C_V dT$, por lo que $Q = \int_a^b C_V dT$. En este caso C_V es constante, por lo que $Q = C_V(T_b - T_a)$.

Como b está a mayor presión que a , tenemos que $p_b > p_a \Rightarrow \frac{p_b V}{Nk} > \frac{p_a V}{Nk}$ (considerando que V es constante). Además, $T = \frac{pV}{Nk}$, por lo que hemos concluido que $T_b > T_a \Rightarrow T_b - T_a > 0$

Entonces, el calor en esta parte del ciclo es $Q = C_V(T_b - T_a) > 0$. Por lo que este calor entra al sistema.

- $b \rightarrow c$: Es un proceso adiabático, por lo que $Q = 0$ y no entra ni sale calor.
- $c \rightarrow d$: Es un proceso isobárico. El calor diferencial en una isóbara es $dQ = C_P dT$, por lo que $Q = \int_c^d C_P dT$. Como C_P es constante, la integral es igual a $Q = C_P(T_d - T_c)$.

Además, como c tiene mayor volumen que d , tenemos que $V_c > V_d$ y entonces $\frac{pV_c}{Nk} > \frac{pV_d}{Nk}$ donde p es la presión constante en el proceso. Pero como $T = \frac{pV}{Nk}$, concluimos que $T_c > T_d \Rightarrow T_d - T_c < 0$.

Por lo tanto, el calor durante el proceso es $Q = C_P(T_d - T_c) < 0$. Por lo que es calor que sale del sistema.

- $d \rightarrow a$: Es un proceso adiabático, por lo que $Q = 0$ y no entra ni sale calor.

Concluimos que el calor total que entra al sistema es $Q_{in} = C_V(T_b - T_a)$ (que entra durante el proceso $a \rightarrow b$). El calor que sale del sistema es $Q_{out} = C_P(T_d - T_c)$ (que sale durante el proceso $c \rightarrow d$).

Luego, podemos sustituir esto en la expresión de la eficiencia que teníamos antes:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{out}}{Q_{in}} = 1 - \frac{C_P(T_d - T_c)}{C_V(T_b - T_a)} = 1 - \gamma \frac{(T_d - T_c)}{(T_b - T_a)}$$

Donde usamos que $\gamma := C_P/C_V$. Y con eso llegamos al resultado buscado.

Problema 3

Un sistema elástico tiene por ecuación de estado térmica $\tau(T, L) = aL(T^2 - T_0^2)$. Formular la ecuación diferencial para encontrar la ecuación de estado calórica $U = U(T, L)$

Buscamos escribir U como función de T y de L (es función de sólo dos variables porque la tercera está siempre determinada por las otras 2 debido a la ecuación de estado). Para escribir la ecuación diferencial de U , primero escribimos el diferencial de U como función de las dos variables T, L . Es decir:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T dL + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L dT \quad (1)$$

Todavía nos gustaría simplificar las derivadas que están ahí expresadas para que queden en términos de cosas que podríamos medir en un laboratorio.

Para hacerlo, primero vamos a ocupar la primera ley, que nos dice que $dU = dQ + dW = dQ + \tau dL$ (donde hemos usado que el trabajo diferencial en un sistema elástico es $dW = \tau dL$). Luego, igualamos la expresión (1) para dU con esta que acabamos de obtener:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T dL + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L dT &= dQ + \tau dL \\ \Rightarrow dQ &= \left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T dL + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L dT - \tau dL \\ \Rightarrow dQ &= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T - \tau\right] dL + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L dT \quad (2) \end{aligned}$$

Con esta expresión podemos ahora expresar las derivadas de U en términos de capacidades caloríficas. Para empezar, derivemos ambos lados de la expresión (2) con respecto a T a L constante. Al mantener a L constante, dL es 0 y el primer término del lado derecho de (2) desaparece, por lo que nos queda:

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_L = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L \frac{dT}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L$$

Con lo que hemos obtenido una de las derivadas de U en términos de algo que se puede medir en el laboratorio:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_L := C_L \quad \text{calor específico a L fija} \quad (3)$$

Si sustituimos esta expresión (3) en (2) nos queda que:

$$dQ = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T - \tau\right] dL + C_L dT$$

Ahora derivamos esta expresión con respecto a T manteniendo τ fija, por lo que obtenemos que:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_\tau &= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T - \tau\right] \left(\frac{dL}{dT}\right)_\tau + C_L \frac{dT}{dT} \\ &= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T - \tau\right] \left(\frac{dL}{dT}\right)_\tau + C_L\end{aligned}$$

Despejamos de esta expresión la derivada de U y definimos $C_\tau = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_\tau$ el calor específico a τ fija:

$$\begin{aligned}C_\tau &= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T - \tau\right] \left(\frac{dL}{dT}\right)_\tau + C_L \\ \Rightarrow \frac{C_\tau - C_L}{\left(\frac{dL}{dT}\right)_\tau} &= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T - \tau\right] \\ \Rightarrow \frac{C_\tau - C_L}{\left(\frac{dL}{dT}\right)_\tau} + \tau &= \left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T \quad (4)\end{aligned}$$

Ahora con (3) y (4) tenemos ya las dos derivadas de U que nos interesaban. Por eso, ahora las sustituimos en la expresión (1):

$$\begin{aligned}dU &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L dT + \left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T dL \\ \Rightarrow dU &= C_L dT + \left[\frac{C_\tau - C_L}{\left(\frac{dL}{dT}\right)_\tau} + \tau\right] dL\end{aligned}$$

Podemos calcular explícitamente la derivada $\left(\frac{dL}{dT}\right)_\tau$ usando la ecuación de estado. Dicha ecuación nos dice que $\tau = aL(T^2 - T_0^2) \Rightarrow L = \frac{\tau}{a(T^2 - T_0^2)}$ Por lo que la derivada nos queda igual a $\left(\frac{dL}{dT}\right)_\tau = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\tau}{a(T^2 - T_0^2)}\right) = -\frac{2T\tau}{(T^2 - T_0^2)^2}$.

Substituimos esto en la ecuación a la que habíamos llegado para dU :

$$\begin{aligned}dU &= C_L dT + \left[\frac{C_\tau - C_L}{\left(\frac{dL}{dT}\right)_\tau} + \tau\right] dL \\ \Rightarrow dU &= C_L dT + \left[-\frac{(T^2 - T_0^2)^2(C_\tau - C_L)}{2T\tau} + \tau\right] dL\end{aligned}$$

Problema 4

Explicar tres trabajos termodinámicos para otros sistemas distintos del fluido hidrostático. Explicar el signo de éste

- **Sustancia elástica:**

Consideramos una sustancia elástica como podría ser por ejemplo un alambre. Este sistema tiene tres variables: la tensión τ medida en Newtons, la longitud del alambre L medida en metros y la temperatura T medida en Kelvin.

Si la longitud del alambre, que se encuentra con una tensión τ , es cambiada por una cantidad infinitesimal dL por una fuerza exterior, entonces se hará un trabajo sobre el alambre. Dicho trabajo se calcula como siempre como fuerza multiplicada por la distancia, es decir τ multiplicado por dL :

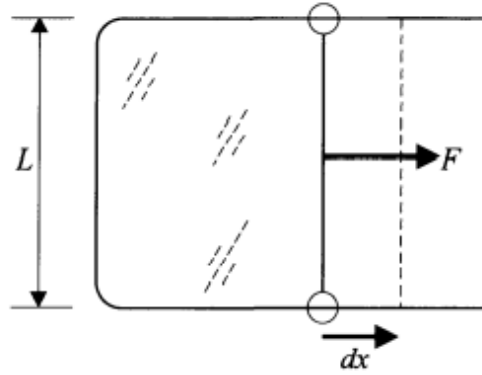
$$dW = \tau dL$$

Notemos que es de signo positivo porque un valor positivo de $dL > 0$ indica que estamos estirando el alambre, por lo que se está haciendo trabajo sobre el sistema y dW debería de ser positivo también.

- **Superficie:**

Consideramos una superficie como puede ser la superficie de un líquido o una burbuja de jabón sostenida en un alambre. Este sistema se define con tres variables: la tensión superficial γ , medida en Netowns por metro (N/m), el área de la superficie A y la temperatura T . La tensión superficial γ se define como la fuerza que actúa tangencialmente por unidad de longitud en el borde de una superficie.

Para calcular el trabajo, consideremos en particular una burbuja de jabón sostenida en un esqueleto de alambre. Dicha burbuja consiste de dos superficies de jabón encerrando agua. Ahora consideremos que uno de los lados del alambre es movable y se puede de esa forma aumentar o disminuir el área de la burbuja como se ve en la figura.



Burbuja en un alambre movable.

El cable movable tiene una longitud de L , por lo que la fuerza debida a la tensión superficial es de $2\gamma L$ (ya que γ es la fuerza por unidad de longitud y se agrega el 2 porque la burbuja tiene dos superficies). Luego, para mover el alambre una distancia dx y estirar la burbuja se requiere de una fuerza $2\gamma L$ para superar la tensión superficial. Entonces, el trabajo realizado para estirar la burbuja es fuerza por longitud, es decir $2\gamma L$ por dx

$$dW = 2\gamma L dx$$

■ Dieléctrico

Consideramos ahora un material dieléctrico, el cual puede ser descrito con 3 variables: El campo eléctrico E medido en volts por metro, la polarización total \mathcal{P} medida en Coulomb-metros y la temperatura T medida en Kelvin.

Consideramos un bloque de material dieléctrico y buscamos calcular el trabajo para cambiar la polarización total del bloque. Digamos que el dieléctrico se encuentra dentro de un capacitor de placas paralelas de área A y separación l . De electromagnetismo sabemos que si la diferencia de potencial entre las placas es V , entonces el campo eléctrico dentro de la zona entre las placas es de $E = V/l$ (porque el campo eléctrico entre las placas es constante).

Además, digamos que una de las placas tiene carga Q y la otra $-Q$. Cuando aumentamos la carga de las placas por una cantidad dQ (notar que dQ es un diferencial de carga, no tiene que ver con calor), sabemos de electromagnetismo que el trabajo se calcula como $dW = V dQ = El dQ$

Además, la carga eléctrica en las placas Q es igual a DA con D el desplazamiento eléctrico. Entonces $Q = DA \Rightarrow dQ = AdD$. Por lo tanto el trabajo es igual a

$$dW = E l dQ = E l A dD.$$

Sin embargo, la polarización total \mathcal{P} del material y el campo de desplazamiento están relacionados por $D = \epsilon E + \frac{\mathcal{P}}{Al}$ (porque por definición $D = \epsilon_0 E + P$ con P la polarización por unidad de volumen y el volumen es Al , entonces $P = \mathcal{P}/Al$) por lo que $dD = \epsilon_0 dE + \frac{1}{Al} d\mathcal{P}$

Ahora sustituimos esta expresión de dD en la expresión del trabajo $dW = E l A dD$ que teníamos:

$$\begin{aligned} dW &= E l A dD \\ &= E l A \left(\epsilon_0 dE + \frac{1}{Al} d\mathcal{P} \right) \\ &= E l A \epsilon_0 dE + E d\mathcal{P} \end{aligned}$$

El primer término es el trabajo necesario para aumentar el campo eléctrico por una cantidad dE y está presente incluso en el vacío. Es el segundo término $E d\mathcal{P}$ el que corresponde al dieléctrico. Por lo tanto, el trabajo en un dieléctrico es igual a:

$$dW = E d\mathcal{P}$$

El trabajo en el caso hidrostático $dW = -P dV$ tiene un signo negativo porque al realizar trabajo sobre el sistema (es decir $dW > 0$) se disminuye el volumen, por lo que $dV < 0$, por eso necesitamos el signo negativo para que $dW > 0$. Esto es opuesto al caso de la sustancia elástica o de la superficie en las que se tiene una tensión que se opone al estiramiento del sistema, por lo que se requiere trabajo para aumentar el tamaño del sistema en vez de para disminuirlo.

Problema 5

Un líquido se agita irregularmente en un recipiente bien aislado y por ello experimenta una elevación de temperatura. Considerando el líquido como sistema:

a) **¿Ha habido una transferencia de calor?**

Visualizamos el sistema como un recipiente aislado lleno de un líquido el cual se agarra y se agita irregularmente.

En este caso no hay calor transmitido al líquido ya que el líquido permanece aislado del ambiente y el líquido y el recipiente están a la misma temperatura. Sin embargo, se agregó energía cinética al líquido que es lo que se disipa en forma de calor.

b) **¿Se ha realizado trabajo?**

Sí, se ha realizado trabajo sobre el líquido, que es lo que hace que se acelere cuando agitamos el recipiente y la razón por la que aumenta su energía cinética.

c) **¿Cuál es el signo de ΔU**

ΔU es positiva, pues hemos aumentado la energía del sistema. Se hizo esto aumentando la energía cinética del líquido dentro del recipiente por medio de las agitaciones.