Solitones: Tarea 4

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

8 de noviembre de 2021

Problemas 11-12

Piensa (y explica) cómo se obtiene la lagrangiana de una ecuación de la siguiente forma:

$$iu_z + u_{tt} + f(|u|^2)u = 0$$

En clase 13 vimos como la lagrangiana dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - u_t u_t^* + \frac{1}{2}u^2 (u^*)^2 \quad \text{ecuación (1) de las notas, con sustitución } v = u^*$$

Como vimos en las notas, minimizar la acción de dicha lagrangiana da lugar a las siguientes ecuaciones:

$$iu_z + u_{tt} + |u|^2 u = 0 \qquad (2)$$
$$-iu_z^* + u_{tt}^* + |u|^2 u^* = 0 \qquad (3)$$

Que se parecen un poco a la ecuación a la que queremos llegar en el enunciado del problema. Sin embargo, queremos tener $f(|u|^2)u$ en vez de simplemente $|u|^2 u$ en el último término.

Para encontrar una forma de llegar a la ecuación que queremos en el enunciado del problema, primero veamos con detalle como la lagrangiana de las notas da lugar a las ecuaciones (2) y (3). La ecuación de Euler-Lagrange para una lagrangiana $\mathcal{L}$ que depende de u es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \right) = 0$$

Calculamos cada una de las derivadas para la lagrangiana de (1):

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\dfrac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - u_t u_t^* + \dfrac{1}{2}u^2 (u^*)^2 \right] = -\dfrac{i}{2}u_z^* + u(u^*)^2$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = \dfrac{\partial}{\partial u_t}\left[\dfrac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - u_t u_t^* + \dfrac{1}{2}u^2 (u^*)^2 \right] = -u_t^*$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} = \dfrac{\partial}{\partial u_z}\left[\dfrac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - u_t u_t^* + \dfrac{1}{2}u^2 (u^*)^2 \right] = \dfrac{i}{2}u^*$

Y ahora lo metemos todo a la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \right) &= 0 \\
\Rightarrow \; -\frac{i}{2} u_z^* + u(u^*)^2 - \partial_t \left[-u_t^* \right] - \partial_z \left[\frac{i}{2} u^* \right] &= 0 \\
\Rightarrow \; -\frac{i}{2} u_z^* + u(u^*)^2 + u_{tt}^* - \frac{i}{2} u_z^* &= 0 \\
\Rightarrow \; -\frac{i}{2} u_z^* + u u^* u^* + u_{tt}^* - \frac{i}{2} u_z^* &= 0 \\
\Rightarrow \; \boxed{-i u_z^* + |u|^2 u^* + u_{tt}^* = 0}
\end{aligned}$$

Con lo que se obtiene la ecuación (3). Para obtener la ecaución (2) se debe hacer lo mismo pero derivando la lagrangiana respecto a u^* en vez de u.

Ahora que ya vimos este ejemplo, queda claro que el término $\frac{1}{2} u^2 (u^*)^2$ de la lagrangiana (1) es el que en la ecuación de Euler-Lagrange da lugar al término $|u|^2 u^*$. Esto nos da la idea de ver qué sucede si en vez del término $\frac{1}{2} u^2 (u^*)^2$, incluimos un término $\frac{1}{3} u^3 (u^*)^3$. Es decir, consideremos la lagrangiana siguiente:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - u_t u_t^* + \frac{1}{3} u^3 (u^*)^3 \quad (4)$$

Con esta lagrangiana vemos qué resulta de usar las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \right) = 0$$

Para hacerlo, calculamos cada una de las derivadas por separado:

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - u_t u_t^* + \frac{1}{3} u^3 (u^*)^3 \right] = -\frac{i}{2} u_z^* + u^2 (u^*)^3$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = \frac{\partial}{\partial u_t} \left[\frac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - u_t u_t^* + \frac{1}{3} u^3 (u^*)^3 \right] = -u_t^*$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} = \frac{\partial}{\partial u_z} \left[\frac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - u_t u_t^* + \frac{1}{3} u^3 (u^*)^3 \right] = \frac{i}{2} u^*$

Y sustituimos esto en la ecuación de Euler Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \right) &= 0 \\
\Rightarrow \; -\frac{i}{2} u_z^* + u^2 (u^*)^3 - \partial_t(-u_t^*) - \partial_z(i/2 u^*) &= 0 \\
\Rightarrow \; -\frac{i}{2} u_z^* + u^2 (u^*)^2 u^* + u_{tt}^* - \frac{i}{2} u_z^* &= 0 \\
\Rightarrow \; \boxed{-i u_z^* + |u|^4 u^* + u_{tt}^* = 0}
\end{aligned}$$

Con lo que vemos que el término $\dfrac{1}{3}u^3(u^*)^3$ en la lagrangiana da lugar a un término $|u|^4u^*$ en la ecuación de Euler Lagrange resultante. Y ya habíamos visto que un término $\dfrac{1}{2}u^2(u^*)^2$ en la lagrangiana da lugar a un término $|u|^2u^*$ en la ecuación de Euler Lagrange.

Con ello, parece ser que un término $\dfrac{1}{n}u^n(u^*)^n$ en la lagrangiana da lugar a un término $(|u|^2)^{n-1}u^*$ en la ecuación de Euler Lagrange.

Con ello, ya estamos listos para encontrar una Lagrangiana que dé una ecuación de la forma

$$iu_z + u_{tt} + f(|u|^2)u = 0$$

Para hacerlo, primero escribimos $f(|u|^2)$ como una serie de Taylor $f(|u|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(|u|^2)^n$. Donde c_n son los coeficientes de la serie de Taylor, dados por $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Entonces, la ecuación que queremos obtener con Euler-Lagrange es:

$$iu_z + u_{tt} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(|u|^2)^n \;\; u = 0 \quad (5)$$

Como mencionamos antes, pareciera que para obtener cada uno de los términos de la suma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(|u|^2)^n \; u$, necesitamos agregar a la lagrangiana un término de la forma $\dfrac{c_n}{n+1}u^{n+1}(u^*)^{n+1}$.
Entonces, para que la ecuación de Euler-Lagrange sea de la forma (5), parece que debemos agregar a la Lagrangiana el término $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{n+1}u^{n+1}(u^*)^{n+1}$.

Por ello, ahora sí proponemos la siguiente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^*u_z - uu_z^*) - u_tu_t^* + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}u^{n+1}(u^*)^{n+1}$$

Y calculamos la ecuación de Euler-Lagrange $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_t\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) - \partial_z\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right) = 0$. Calculando cada una de las derivadas por separado:

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\dfrac{i}{2}(u^*u_z - uu_z^*) - u_tu_t^* + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{n+1}u^{n+1}(u^*)^{n+1}\right]$
  $= -\dfrac{i}{2}u_z^* + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{n+1}(n+1)u^n(u^*)^{n+1} = -\dfrac{i}{2}u_z^* + \sum_{n=0}^{\infty} c_nu^n(u^*)^n \; u^*$
  $= -\dfrac{i}{2}u_z^* + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(|u|^2)^n \; u^*$
  $= -\dfrac{i}{2}u_z^* + f(|u|^2)u^*$ Porque $f(|u|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(|u|^2)^n$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = \dfrac{\partial}{\partial u_t}\left[\dfrac{i}{2}(u^*u_z - uu_z^*) - u_tu_t^* + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{n+1}u^{n+1}(u^*)^{n+1}\right] = -u_t^*$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} = \dfrac{\partial}{\partial u_z}\left[\dfrac{i}{2}(u^*u_z - uu_z^*) - u_tu_t^* + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{n+1}u^{n+1}(u^*)^{n+1}\right] = \dfrac{i}{2}u^*$

Sustituimos estos tres resultados en la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) - \partial_z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ -\frac{i}{2}u_z^* + f(|u|^2)u^* - \partial_t(-u_t^*) - \partial_z(i/2\ u^*) = 0$$

$$\Rightarrow\ -\frac{i}{2}u_z^* + f(|u|^2)u^* - \partial_t(-u_t^*) - \frac{i}{2}\ u_z^* = 0$$

$$\Rightarrow\ \boxed{-iu_z^* + f(|u|^2)u^* + u_{tt}^* = 0}$$

Si en vez de calcular la ecuación de Euler-Lagrange para u, lo hiciéramos para u^*, la ecuación de Euler-Lagrange sería $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*}\right) - \partial_z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*}\right) = 0$. Para obtenerla, al igual que antes, calculamos cada una de las derivadas:

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = \frac{\partial}{\partial u^*}\left[\frac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - u_t u_t^* + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} u^{n+1}(u^*)^{n+1}\right]$
  $= \frac{i}{2}u_z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(n+1)u^{n+1}(u^*)^n = \frac{i}{2}u_z + \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n (u^*)^n\ u$
  $= \frac{i}{2}u_z + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(|u|^2)^n\ u$
  $= \frac{i}{2}u_z + f(|u|^2)u$ Porque $f(|u|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(|u|^2)^n$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} = \frac{\partial}{\partial u_t^*}\left[\frac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - u_t u_t^* + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} u^{n+1}(u^*)^{n+1}\right] = -u_t$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} = \frac{\partial}{\partial u_z^*}\left[\frac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - u_t u_t^* + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} u^{n+1}(u^*)^{n+1}\right] = -\frac{i}{2}u$

Lo sustituimos en la ecuación de Euler-Lagrnage:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*}\right) - \partial_z\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{i}{2}u_z + f(|u|^2)u - \partial_t(-u_t) - \partial_z(-i/2\ )$$

$$\Rightarrow\ \frac{i}{2}u_z^* + f(|u|^2)u + u_{tt} + \frac{i}{2}u_z = 0$$

$$\Rightarrow\ \boxed{iu_z + f(|u|^2)u + u_{tt} = 0}$$

Por lo tanto, para concluir, hemos visto que la lagrangiana:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - u_t u_t^* + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} u^{n+1}(u^*)^{n+1}}$$

Da lugar a las ecuaciones que queríamos:

$$\boxed{-iu_z^* + f(|u|^2)u^* + u_{tt}^* = 0}$$

$$\boxed{iu_z + f(|u|^2)u + u_{tt} = 0}$$

Problemas 13-14

En clase vimos que la ecuación:

$$iu_z + i\beta u_T + \epsilon u_{TT} + \gamma |u|^2 u = 0$$

se simplifica si introducimos el tiempo retardado:

$$t = T - \beta z$$

Ahora considera la ecuación:

$$iu_z + \alpha u_{zz} + i\beta u_T + \epsilon u_{TT} + \gamma |u|^2 u = 0$$

¿En qué ecuación se transforma si introducimos el tiempo retardado? ¿Se simplificó?

Primero exploremos un poco el cambio de variables. El cambio de variables está dado por:

$$\begin{aligned} t &= T - \beta z \\ z^* &= z \end{aligned}$$

Donde z^* es la 'nueva' coordenada z tras el cambio de coordenadas. Que no cambia con la transformación pero aún así la distinguimos con el asterisco para hacer menos confusas las expresiones de la transformación.

Ahora veremos cómo se transforman las derivadas con este cambio de variables. Para ello utilizamos la regla de la cadena en cada derivada que queremos calcular.

- $\dfrac{\partial u}{\partial T} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial T} + \dfrac{\partial u}{\partial z^*}\dfrac{\partial z^*}{\partial T} = \dfrac{\partial u}{\partial t}(1) + \dfrac{\partial u}{\partial z^*}(0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}$
  Es decir, $\dfrac{\partial}{\partial T} = \dfrac{\partial}{\partial t} \quad (1)$

- $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial z^*}\dfrac{\partial z^*}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial t}(-\beta) + \dfrac{\partial u}{\partial z^*}(1) = -\beta\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial z^*}$
  Es decir, $\dfrac{\partial}{\partial z} = -\beta\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial z^*} \quad (2)$

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{\partial u}{\partial T}\right) = \dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)$
  Pero por (1), esto es igual a $= \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-\beta\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial z^*}\right)$
  Ahora usamos (2) para escribir esto como:
  $= \left(-\beta\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial z^*}\right)\left(-\beta\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial z^*}\right) = \beta^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta\dfrac{\partial u}{\partial t\partial z^*} - \beta\dfrac{\partial u}{\partial z^*\partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^{*2}}$
  $= \quad \beta^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\beta\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial z^*} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^{*2}}$

Ahora ya estamos listos para transformar la ecuación. Primero transformamos la ecuación que sabemos que se simplifica $iu_z + i\beta u_T + \epsilon u_{TT} + \gamma|u|^2 u = 0$. Para hacerlo, simplemente reemplazamos las expresiones de las derivadas encontradas

$$\begin{aligned} iu_z + i\beta u_T + \epsilon u_{TT} + \gamma|u|^2 u = 0 \\ \Rightarrow\ i\left(-\beta u_t + u_{z^*}\right) + i\beta(u_t) + \epsilon(u_{tt}) + \gamma|u|^2 u = 0 \\ \Rightarrow\ -i\beta u_t + iu_{z^*} + i\beta u_t + \epsilon u_{tt} + \gamma|u|^2 u = 0 \\ \Rightarrow\ iu_{z^*} + \epsilon u_{tt} + \gamma|u|^2 u = 0 \end{aligned}$$

Que efectivamente es una ecuación más sencilla, pues desaparece el término $i\beta u_T$ que estaba en la original.

Ahora transformamos la ecuación del problema:

$$\begin{aligned} iu_z + \alpha u_{zz} + i\beta u_T + \epsilon u_{TT} + \gamma|u|^2 u = 0 \\ \Rightarrow\ i\left(-\beta u_t + u_{z^*}\right) + \alpha\left(\beta^2 u_{tt} - 2\beta u_{tz^*} + u_{z^*z^*}\right) + i\beta(u_t) + \epsilon(u_{tt}) + \gamma|u|^2 u = 0 \\ \Rightarrow\ -i\beta u_t + iu_{z^*} + \alpha\beta^2 u_{tt} - 2\beta\alpha u_{tz^*} + \alpha u_{z^*z^*} + i\beta u_t + \epsilon u_{tt} + \gamma|u|^2 u = 0 \\ \Rightarrow\ iu_{z^*} + \alpha\beta^2 u_{tt} - 2\beta\alpha u_{tz^*} + \alpha u_{z^*z^*} + \epsilon u_{tt} + \gamma|u|^2 u = 0 \\ \Rightarrow\ iu_{z^*} + (\alpha\beta^2 + \epsilon)u_{tt} - 2\alpha\beta u_{tz^*} + \alpha u_{z^*z^*} + \gamma|u|^2 u = 0 \end{aligned}$$

Y ahora que ya hicimos la transformación, podemos volver a escribir z en vez de z^*

$$\boxed{iu_z + (\alpha\beta^2 + \epsilon)u_{tt} - 2\alpha\beta u_{tz} + \alpha u_{zz} + \gamma|u|^2 u = 0}$$

Vemos que claramente la ecuación no se simplifica