Señales

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

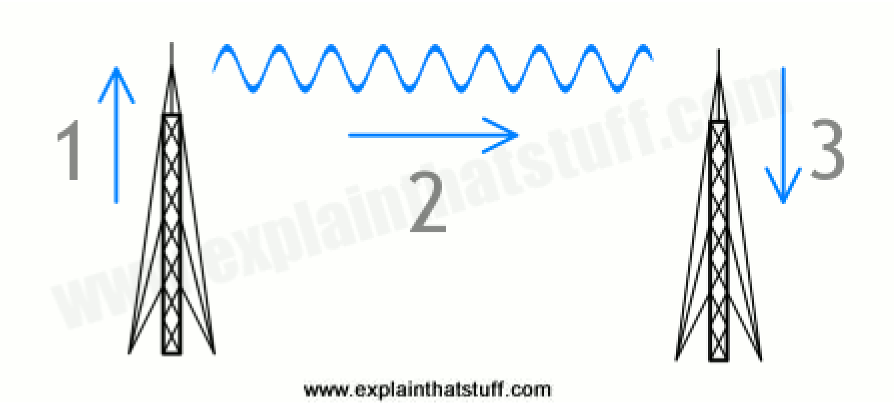
Laboratorio de Electrónica. Grupo 8285

Introducción

Explicaremos los conceptos básicos relacionados con las señales y las series de Fourier.

¿Qué es una señal?

El concepto señal se refiere a todo aquello que transmite información sobre un fenómeno o sistema físico.[4]



*

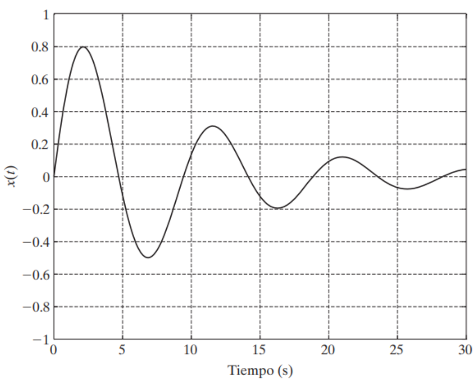
Figura 1: Antenas transmitiendo una señal

*
"How Do Antennas Work: Mobile Systems - Tait Mobile Radio (BOP), Tauranga." *How Do Antennas Work | Mobile Systems - Tait Mobile Radio (BOP), Tauranga*, https://www.mobilesystems.co.nz/news_and_publications/id/167/How%20do%20antennas%20work.

Representación y clasificación de las señales

Las señales se representan matemáticamente por una función escalar en el tiempo x(t).

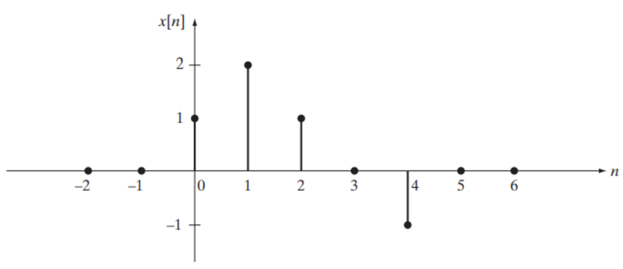
Señales continuas:
La variable t toma valores en un conjunto continuo.[2]



[2]

Figura 2: Señal Continua

Señales discretas:
La variable t toma valores en un conjunto discreto.[2]



[2]

Figura 3: Señal Discreta

Se definen algunas características que pueden tener las señales:

- Par: $x(t) = x(-t)$

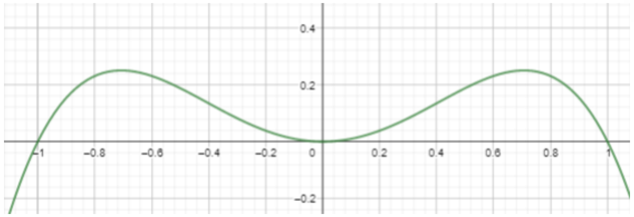


Figura 4: Señal par

- Impar: $x(t) = -x(-t)$

Figura 5: Señal impar

- Periódica: $x(t+T) = x(t)$

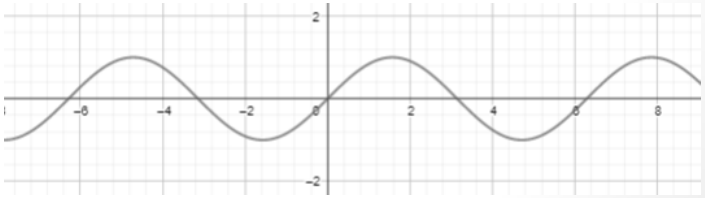


Figura 6: Señal periódica

Ejemplos de señales

- Escalón

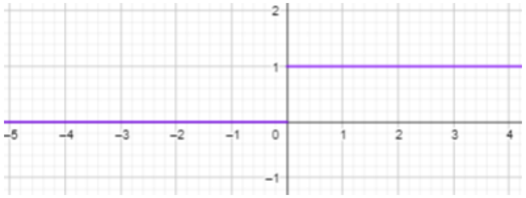


Figura 7: Señal escalón

- Impulso

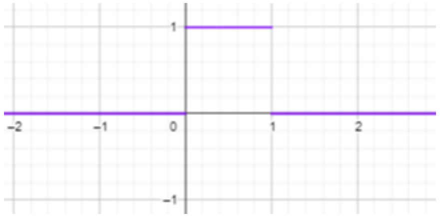


Figura 8: Señal impulso

- Trigonométrica

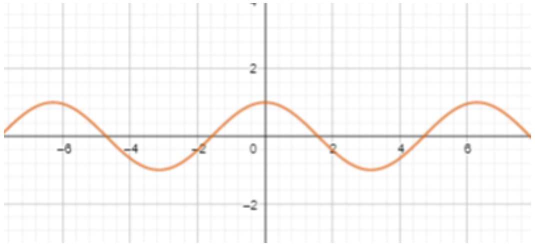


Figura 9: Señal trigonométrica

- Decaimiento exponencial de trigonométrica

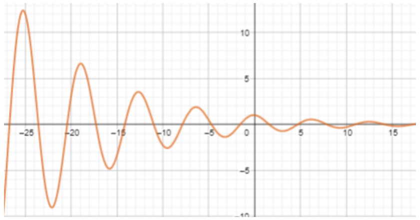


Figura 10: Decaimiento exponencial de trigonométrica

Serie de Fourier

Una serie de Fourier es una forma de representar cualquier función periódica en [0,T] como combinación lineal de senos y cosenos de ciertas frecuencias[3]:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Donde hay que encontrar los coeficientes a_n, b_n adecuados para la función.

Los coeficientes se consiguen como:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Nos permite conocer los componentes de cada frecuencia que conforman a la función.

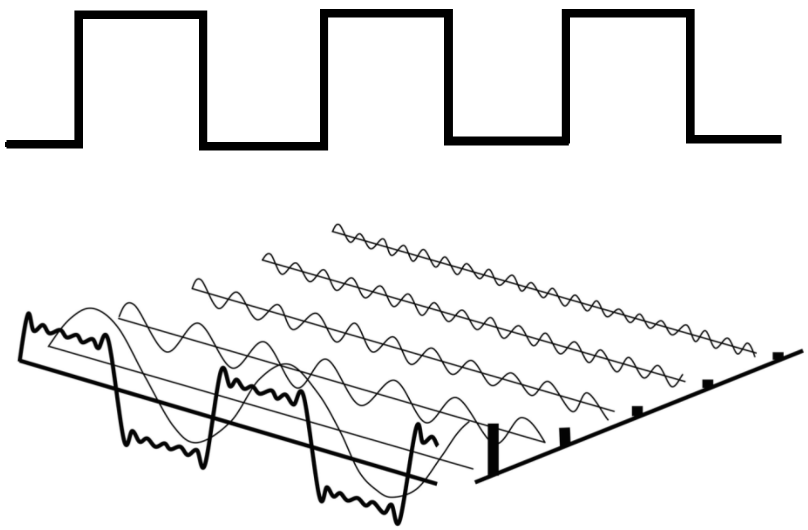


Figura 12: Ejemplo de serie de Fourier

Imagen obtenida de: Zeng, Gengsheng Lawrence, and Megan Zeng. “Fourier Series.” *Electric Circuits*, 2021, pp. 157–170., https://doi.org/10.1007/978-3-030-60515-5_22.

También se puede escribir la serie de forma compleja:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega nt}$$

Donde los coeficientes están dados por:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega nt}dt$$

Transformada de Fourier

¿Y si la función no es periódica y está definida en $(-\infty, \infty)$?

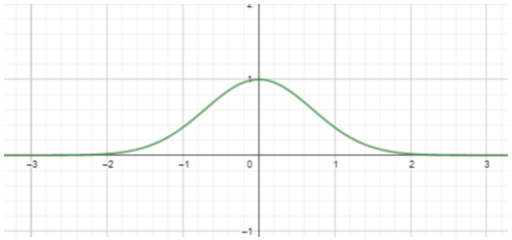


Figura 13: Gaussiana

En este caso, reconstruir la función no será posible con sólo una cantidad numerable de frecuencias. Necesitamos una "combinación lineal" de funciones periódicas pero de todas las frecuencias.

La función periódica de frecuencia α es: $e^{i\alpha x}$

Podemos construir f con una "combinación lineal" de estas funciones

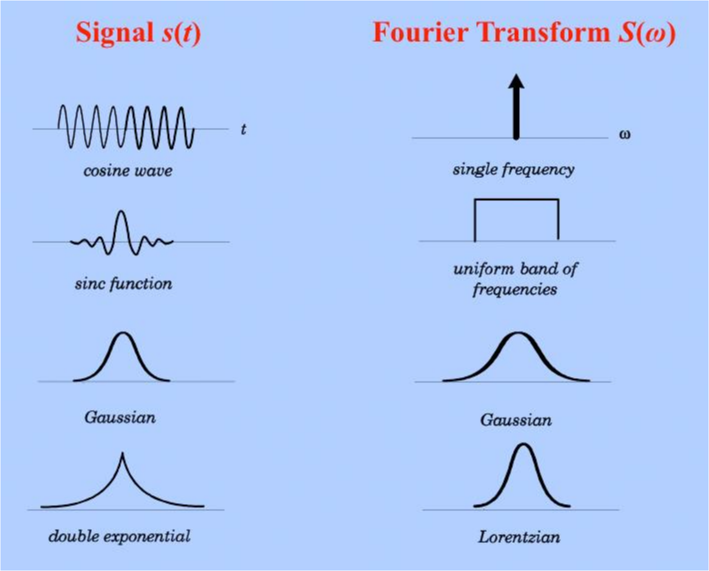
$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha$$

Transformada de Fourier de f

Para una función f(t) en $(-\infty, \infty)$, su transformada de Fourier es[1]:

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\alpha t} dt$$

Y en cierto sentido, la transformada evaluada en α nos dice qué tan importante es la frecuencia α para construir a la función f(t)



$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha$$

Figura 13: Ejemplo s de transformadas de Fourier

Imagen obtenida de: "Fourier Transform (Ft)." *Questions and Answers in MRI*, http://mriquestions.com/fourier-transform-ft.html.

Densidad Espectral

- La densidad espectral de una señal f(t) se define como:

$$DE(\alpha) = |\hat{f}(\alpha)|^2$$

Dicha función especifica cómo se distribuye la energía en el dominio de la frecuencia.[4]

Señal f(t)

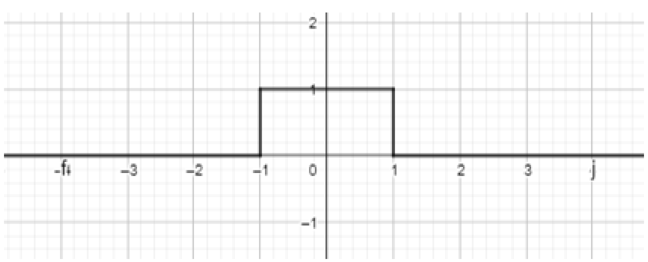


Figura 14: Pulso rectangular

Densidad Espectral

Densidad Espectral

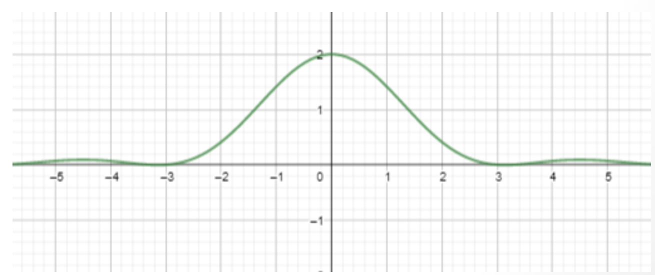


Figura 15: Transformada de pulso rectangular

Ancho de Banda

Dada una señal f(t), su ancho de banda se refiere al rango de frecuencias en las que su densidad espectral es mayor que 0 o que algún valor pequeño escogido.[2]

Señal f(t)

Densidad Espectral

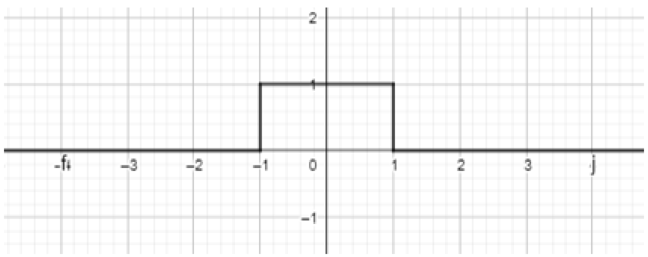


Figura 14: Pulso rectangular

Densidad Espectral

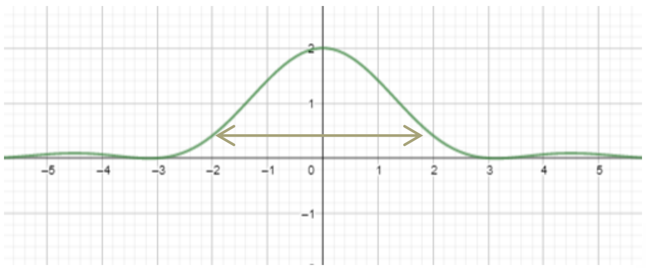


Figura 15: Transformada de pulso rectangular

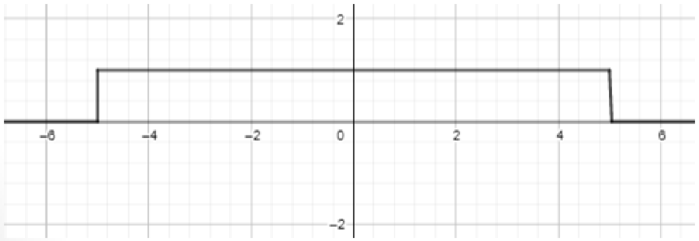


Figura 16: Pulso rectangular grueso

Densidad Espectral

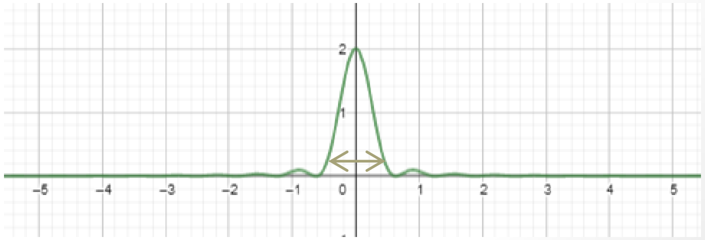


Figura 17: Transformada de pulso rectangular grueso

Ejemplo donde se usen señales eléctricas

Micrófono: Convierte ondas de sonido en señales eléctricas

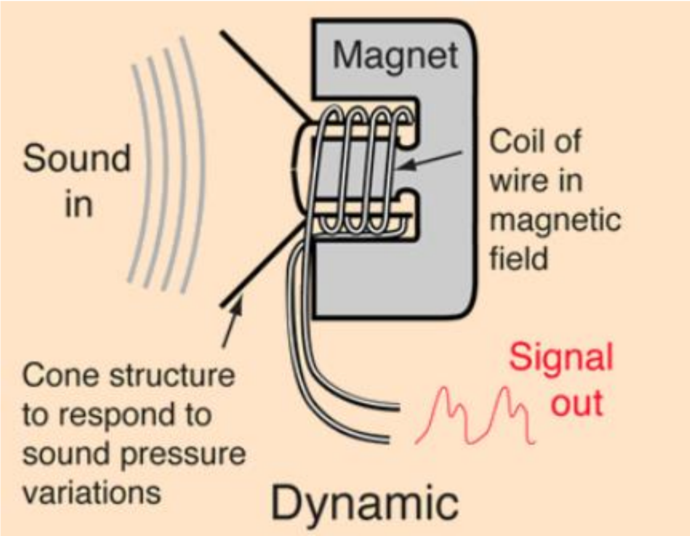


Figura 18: Funcionamiento de un micrófono

Imagen obtenida de: “Microphones.” *Hyperphysics*, http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Audio/mic.html.

Referencias

- [1] Hsu, H. P. (1987). *Análisis de Fourier*. Prentice Hall
- [2] Kamen, Edward, and Bonnie Heck. *Fundamentos De Señales y Sistemas Usando La Web Y MATLAB (3A. Ed.)*. Third ed., Pearson Educación, 2008.
- [3] Proakis, J. G., Manolakis, D. S. G., Santalla del Río, V., & Alba Castro, J. L. (1998). *Tratamiento digital de señales*.
- [4] Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., & Buck, J. R. (2011). Tratamiento de señales en tiempo discreto.