

1) Considere un gas ideal de fermi  $T=0$ . Si su densidad numérica  $n$  y su energía de Fermi  $\epsilon$  son conocidas, calcule  $K = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)$  en donde  $V$  es el volumen y  $p$  la presión

Para calcular  $K$ , usamos que la presión  $p$  se puede conseguir como  $p = -\left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$ . Donde  $F$  se define como  $F \equiv U - TS$  pero como  $T=0 \rightarrow F=U$

$$\text{Entonces, } p = -\left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = -\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T$$

Pero sabemos que se cumple la relación de Bernoulli que vimos en clase  $pV = \frac{2}{3}U \rightarrow U = \frac{3}{2}pV$  y

$$\text{por lo tanto, } p = -\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = -\left( \frac{\partial \left( \frac{3}{2}pV \right)}{\partial V} \right)_T = -\frac{3}{2} \left( V \frac{\partial p}{\partial V} + p \frac{\partial V}{\partial V} \right) = -\frac{3}{2} \left( V \frac{\partial p}{\partial V} + p \right)$$

↑  
regla del producto

$$\text{Y de esta ecuación } p = -\frac{3}{2} \left( V \frac{\partial p}{\partial V} + p \right) \text{ podemos despejar } V \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{5}{3} p$$

$$\text{Sacando el recíproco y multiplicando por menos, tenemos } \rightarrow -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{3}{5p}$$

$$\text{pero } \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T^{-1} \rightarrow -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{3}{5p} \rightarrow K = \frac{3}{5p}$$

Pero esto no está escrito en términos de  $n$  y  $\epsilon_F$  como se nos pidió. Para escribirlo respecto a estas variables, usamos primero que  $pV = \frac{2}{3}U$  como se dijo antes y entonces  $p = \frac{2}{3} \frac{U}{V}$

$$\rightarrow K = \frac{3}{5p} = \frac{3}{5 \left( \frac{2}{3} \frac{U}{V} \right)} = \frac{9}{10} \frac{V}{U}$$

Y ahora usamos que la energía total a temperatura 0K de fermiones con energía de Fermi  $\epsilon_F$  es de  $U = \frac{3}{5} N \epsilon_F$  con  $N$  el número de partículas (probaremos este resultado en la siguiente hoja).

Usando esto tenemos que:

$$K = \frac{9}{10} \frac{V}{U} = \frac{9}{10 \left( \frac{3}{5} N \epsilon_F \right)} = \frac{3}{2 N \epsilon_F} = \frac{3}{2 n \epsilon_F} \quad \leftarrow \text{donde } n \text{ es la densidad numérica, que se define como } n = \frac{N}{V}$$

Con lo que llegamos al resultado:  $K = \frac{3}{2 n \epsilon_F}$

Para que el resultado anterior sea válido, nos falta probar que  $U = \frac{3}{5} N E_F$ , identidad que de hecho vimos en clase. Y que es válida para un gas ideal de  $N$  fermiones con energía de Fermi  $E_F$  y a temperatura 0.

Para probarla, primero calculamos el número de partículas  $N$  de un gas con estas características. Lo cual lo podemos conseguir integrando sobre todo el espacio fase accesible.

Cuando  $T=0$ , sabemos que todos los niveles con energía menor a  $E_F$  quedan ocupados por exactamente un fermión y aquellos con energía mayor a  $E_F$  quedan desocupados. Por tanto hay que contar la cantidad de estados con energía menor a  $E_F$ .

Para ello, sumamos sobre todas las posibles posiciones  $(x, y, z)$  dentro del volumen y

Sobre todos los posibles momentos  $\vec{p}=(p_x, p_y, p_z)$  tales que la energía  $\frac{|\vec{p}|^2}{2m}$  sea menor a  $E_F$ .

Dicha suma es la siguiente:

• Cantidad de estados con energía menor a  $E_F$

$$= \int \int \int_{\text{Volumen}} \int \int \int_{\substack{\text{momentos} \\ \text{con } \frac{|\vec{p}|^2}{2m} < E_F}} \frac{dx dy dz}{h^3} dp_x dp_y dp_z$$

$$= \frac{V}{h^3} \int \int \int_{\substack{\text{momentos} \\ \text{con } \frac{|\vec{p}|^2}{2m} < E_F}} dp_x dp_y dp_z$$

Este espacio de integración es una esfera en el espacio de momentos con radio  $\sqrt{2mE_F}$  y la integral es simplemente su volumen  $\frac{4}{3}\pi (\sqrt{2mE_F})^3$

$$= \frac{V}{h^3} \left( \frac{4}{3} \pi (2mE_F)^{3/2} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi \frac{V}{h^3} (2mE_F)^{3/2}$$

Pero en realidad cada estado se ocupa por 2 fermiones si el spin es  $1/2$  (si tienen dicho spin, si tienen  $3/2, 5/2$ , etc. el factor es otro). Denotaremos el número de fermiones por estado clásico debido al spin por  $|s|$ , y entonces hay que multiplicar el resultado por  $|s|$

Entonces:

$$N = |s| \frac{4}{3} \pi \frac{V}{h^3} (2mE_F)^{3/2}$$

Calculamos ahora la energía total del gas  $U$ . Para ello, igual que antes, usamos que a  $T=0K$ , todos los estados con energía menor a  $E_F$  están ocupados y los otros no.

Entonces, para calcular  $U$ , sumamos la energía de cada estado  $\frac{|\vec{p}|^2}{2m}$  sobre todos los estados ocupados (los que cumplen  $\frac{|\vec{p}|^2}{2m} < E_F$ )

$\frac{|\vec{p}|^2}{2m}$  sobre  
↑ Energía de un estado en momento  $\vec{p}$

$$\rightarrow U = \underbrace{\iiint_{\text{Volumen}}}_{\text{Sumar sobre estados ocupados}} \underbrace{\iiint_{\substack{\text{momentos con} \\ |\vec{p}|^2 < E_F}}}_{\text{Energía de cada estado}} \underbrace{\frac{|\vec{p}|^2}{2m} \frac{dx dy dz}{h^3}}_{\text{Diferencial de volumen en el espacio fase}} d\vec{p}_x d\vec{p}_y d\vec{p}_z$$

$$\begin{aligned} &= \frac{V}{2m h^3} \iiint_{\substack{\text{momentos} \\ \text{con } |\vec{p}|^2 < 2m E_F}} |\vec{p}|^2 d\vec{p}_x d\vec{p}_y d\vec{p}_z \\ &= \frac{V}{2m h^3} \int_0^{\sqrt{2m E_F}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\vec{p}|^2 \underbrace{|\vec{p}|^2 \sin \theta d\phi d\theta d|\vec{p}|}_{\text{dif. de volumen en esféricas}} \\ &= \frac{V}{2m h^3} 4\pi \int_0^{\sqrt{2m E_F}} |\vec{p}|^4 d|\vec{p}| \\ &= \frac{2V\pi}{5 m h^3} |\vec{p}|^5 \Big|_0^{\sqrt{2m E_F}} \\ &= \frac{2V\pi}{5 m h^3} (2m E_F)^{5/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{5 m h^3} \end{aligned}$$

pasamos a coordenadas esféricas, con  $|\vec{p}|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ . El espacio de integración es una esfera de radio  $\sqrt{2m E_F}$ , por lo que integramos sobre todos los ángulos y sobre los radios  $|\vec{p}|$  desde 0 hasta  $\sqrt{2m E_F}$

Pero en realidad cada estado se ocupa por 2 fermiones si el spin es  $1/2$  (o por otro número si el spin es  $3/2, 5/2, 7/2, \dots$ ). Denotaremos en general el número de fermiones por estado clásico debido al spin por  $|S|$ . Y entonces hay que multiplicar por este factor para tener ahora sí la energía.

$$U = \frac{2|S| V \pi}{5 m h^3} (2m E_F)^{5/2}$$

Pero comparando el resultado de  $N = |S| \frac{4}{3} \pi \frac{V}{h^3} (2m E_F)^{3/2}$  con éste, vemos que

$$U = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot \pi} (2m E_F) N = \frac{3}{5} E_F N$$

Que es lo que queríamos probar y que usamos antes.

3. Considere un sistema de  $N \gg 1$  partículas independientes, en el cual cada partícula puede tomar sólo dos valores de energía ( $0, E < 0$ ). Sean  $n_0, n_1$  los números de ocupación de los niveles  $0, E$ , respectivamente. La energía total del sistema es  $U$

a) Calcule la entropía del sistema.

Como la energía total les fija un valor  $U$ , podemos usar el conjunto microcanónico para calcular la entropía del sistema.

Para ello, usaremos la fórmula de Boltzmann  $S = k \ln \Omega$  para lo cual tenemos que obtener el número de microestados  $\Omega$  con esta energía  $U$ .

Cada microestado se caracteriza por cuáles de las  $N$  partículas escogeremos para que tengan energía  $E$  (que tienen que ser  $n_1$  partículas del total). Por lo tanto,

un microestado se consigue al escoger un subconjunto de  $n_1$  elementos de entre los  $N$

elementos, lo cual se puede hacer de  $\binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1! (N-n_1)!} = \frac{N!}{n_1! n_0!}$  formas

porque  $n_1 + n_0 = N \rightarrow n_0 = N - n_1$

Es decir, tenemos que  $\Omega = \frac{N!}{n_1! n_0!}$



Luego, la entropía es  $S = K \ln \Omega = K \ln \left[ \frac{N!}{n_1! n_0!} \right]$

Usando que la energía total se consigue sumando la ocupación de cada nivel por su energía  $\rightarrow U = n_0 \epsilon_0 + n_1 E$   
 $\rightarrow U = n_1 E$ , tenemos que:

$$S = K \ln \left[ \frac{N!}{n_1! n_0!} \right] = K \ln \left[ \frac{N!}{\left(\frac{E}{U}\right)! (N - n_1)!} \right] \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Usamos } U = n_1 E \rightarrow n_1 = \frac{E}{U} \\ \text{y que } N - n_1 = n_0 \end{array}$$

$$= K \ln \left[ \frac{N!}{\left(\frac{E}{U}\right)! \left(N - \frac{E}{U}\right)!} \right]$$

b) Encuentre la temperatura como función de  $U$  y determine para qué rango de valores de  $n_0$  es  $T < 0$

Para hacerlo, usamos que para una partícula dentro de un sistema, la probabilidad de encontrarse en un estado con energía  $E$  es de  $p(E) = \frac{e^{-E/KT}}{Z}$  que es la distribución de Boltzmann. Donde  $T$  es la temperatura del sistema y  $Z$  la función de partición.

Luego, el número de partículas en el estado con esta energía se conseguirá multiplicando el número total de partículas por esta probabilidad  $\rightarrow n(E) = Np(E)$

En nuestro sistema en particular tendremos que el número de partículas en energía 0 y energía  $E$  son;

$$n_0 = Np(0) = N \frac{e^{-0/KT}}{Z} = \frac{N}{Z}$$

$$n_1 = Np(E) = N \frac{e^{-E/KT}}{Z} = \frac{N e^{-E/KT}}{Z}$$

Podemos dividirlos para cancelar  $Z \rightarrow \frac{n_1}{n_0} = e^{-E/KT}$

Como  $E < 0 \rightarrow -E/KT > 0$  y entonces  $e^{-E/KT} > 1$ . lo que implica que  $\frac{n_1}{n_0} > 1 \rightarrow n_1 > n_0$ . Lo cual tiene sentido, pues  $n_1$  es el nivel de menor energía, ya que  $E < 0$

Y entonces despejando  $T$  tenemos que  $-E/KT = \ln(n_1/n_0) \rightarrow T = -\frac{E}{K \ln(n_1/n_0)}$

Pero la energía total  $U$  se consigue sumando la cantidad de partículas en cada nivel multiplicada por su energía  $\rightarrow U = n_0(0) + n_1(E) = n_1 E$  con lo que tenemos que  $n_1 = U/E$

Luego, la temperatura es:  $T = \frac{-E}{K \ln(n_1/n_0)} = \frac{-E}{K \ln\left(\frac{U/E}{N-n_1}\right)}$  Usamos  $n_1 = U/E$  y que  $n_0 + n_1 = N \rightarrow n_0 = N - n_1$

$$= \frac{-E}{K \ln\left(\frac{U/E}{N - U/E}\right)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{-E}{K \ln\left(\frac{U}{NE - U}\right)}$$

Donde multiplicamos por  $E/E$  dentro de la fracción del logaritmo.

Notar que el logaritmo se puede calcular sin problema, ya que su argumento es un número positivo porque  $U < 0$  pero también  $NE = n_0 E + n_1 E = n_0 E + U < U$  y entonces  $NE - U < 0$   $\rightarrow n_0 E < 0$   $\therefore U$  y  $NE - U$  tienen el mismo signo y  $\frac{U}{NE - U}$  es positivo.

Tenemos que  $T = -\frac{E}{k \ln(\frac{N}{N-E-U})}$  y queremos ver para qué valores de  $n_0$  es  $T < 0$ .

Para hacerlo, mejor escribimos la expresión de  $T$  en términos de  $n_1, n_0$  a la que habíamos llegado.

$$T = -\frac{E}{k \ln(n_1/n_0)}$$

Como  $E < 0$ , tenemos que  $-\frac{E}{k} > 0$ . Y por tanto, para que  $T < 0$ , se debe de tener que el logaritmo  $\ln(n_1/n_0)$  sea negativo, lo cual se cumple si su argumento  $n_1/n_0 < 1$

$$\rightarrow \underline{n_1 < n_0}$$

$$\rightarrow \underline{N - n_0} < n_0$$

porque  $n_0 + n_1 = N$

$$\rightarrow n_1 = N - n_0$$

$$\rightarrow N < 2n_0$$

$$\rightarrow \boxed{n_0 > \frac{N}{2}}$$

Es decir, si  $n_0 > N/2 \rightarrow$  la temperatura es negativa.

Esto tiene sentido porque recordemos que el nivel  $-E$  tiene menor energía que el nivel  $0$ , lo que implica que normalmente  $n_1 > n_0$  (el estado de menor energía está más ocupado)

pero si  $n_0 > n_1$  (el estado de mayor energía está más ocupado, lo cual no es "normal") entonces  $T < 0$ .

c) ¿En qué dirección fluye el calor cuando un sistema con temperatura negativa está en contacto con uno de temp. positiva?

Para contestar esto, hay que tomar en cuenta la definición de temperatura en términos de entropía, que nos dice que  $\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N}$  con  $U$  la energía.

Con esta definición, un sistema de temperatura positiva cumple que  $\frac{\partial S}{\partial U} > 0$ , por lo que  $S$  aumenta cuando su energía  $U$  aumenta.

Por otro lado, un sistema con temperatura negativa cumple  $\frac{\partial S}{\partial U} < 0 \Rightarrow S$  disminuye cuando su energía  $U$  aumenta.

Cuando juntamos los dos sistemas (sistema A con temperatura negativa y sistema B con temp. positiva), sabemos por la segunda ley que conforme alcanzan el equilibrio, la entropía total no puede disminuir.

Sin embargo, si fluyera energía de B a A, como B tiene temperatura positiva (cumple  $\frac{\partial S}{\partial U} > 0$ ) y está perdiendo energía, su entropía también decrece.

Y como A tiene temperatura negativa (cumple  $\frac{\partial S}{\partial U} < 0$ ) y está ganando energía, su entropía también decrece.

Por lo tanto, si el calor fluye de B a A, concluimos que la entropía de cada sistema (y por tanto, del universo si están aislados) disminuye, lo que contradice la segunda ley.  $\therefore$  El calor debe fluir de A a B.

El calor fluye del sistema de energía negativa al de positiva.

También lo podemos pensar recordando el resultado del inciso b), en el que vimos que  $T < 0$  si  $n_1 < n_0$ , lo que significa que el estado de mayor energía está más ocupado que el de menor. Si ponemos un sistema como este en contacto con uno con  $T > 0$  (en el cual el estado con mayor energía está menos ocupado), el primer sistema tiene más energía por tener esta mayor ocupación en los niveles de energía alta y por tanto pasará esta energía al sistema con  $T > 0$ .