Mecánica Cuántica: Tarea 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

11 de marzo de 2021

Problema 1

Demuestra que el espectro del cuerpo negro derivado por Planck

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

implica la ley de Stefan-boltzmann $u = aT^4$ con u la densidad de energía, y determina la relación entre las constante $\hbar$ y a

Según el resultado de Planck, la densidad de energía en el rango de frecuencias $[\omega, \omega + d\omega]$ es de $\rho(\omega)d\omega$.
Luego, si queremos obtener la densidad de energía total (en todo el rango de frecuencias $[0, \infty]$) tenemos que integrar $\rho(\omega)d\omega$ de 0 a infinito. Por tanto, la densidad de energía es:

$$u = \int_0^\infty \rho(\omega)d\omega \quad = \quad \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega \quad = \quad \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega$$

Luego hacemos la sustitución $x := \hbar\omega/kT \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{\hbar}{kT} d\omega$.
Y los límites de integración se quedan igual porque cuando $\omega = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ y $\omega = \infty \;\Rightarrow\; x = \infty$.
Entonces la integral queda como:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{(\frac{kTx}{\hbar})^3}{e^x - 1} \left(\frac{kT}{\hbar}\right) dx \\
&= \frac{k^4 T^4}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\
&= \frac{k^4 T^4}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \qquad \text{multiplicamos por } e^{-x} \text{ arriba y abajo}
\end{aligned}$$

Notamos que $\dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}$.
Esto porque como x es positiva, entonces $0 < e^{-x} < 1$, luego, podemos hacer una serie

geométrica con las potencias de e^{-x} como $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$. Y como $0 < e^{-x} < 1$, esta serie converge y usando que una serie geómetrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge a $\frac{r}{1-r}$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$

Luego, la integral queda como:

$$
\begin{aligned}
u = & \frac{k^4T^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^{\infty}\frac{x^3e^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \frac{k^4T^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^{\infty}x^3\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}dx \\
= & \frac{k^4T^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}x^3e^{-nx}dx \quad \text{cambiamos integral y suma, válido porque la} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{serie geométrica converge uniformemente} \\
= & \frac{k^4T^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{x^3e^{-nx}}{n}\bigg|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{3x^2e^{-nx}}{n}dx\right] \quad \text{integral por partes} \\
= & \frac{3k^4T^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\frac{x^2e^{-nx}}{n}dx\right] \quad \text{porque } -\frac{x^3e^{-nx}}{n} \text{ vale 0 en } x=0 \text{ y en } x\to\infty \\
= & \frac{3k^4T^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{x^2e^{-nx}}{n^2}\bigg|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{2xe^{-nx}}{n^2}dx\right] \quad \text{integral por partes} \\
= & \frac{6k^4T^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\frac{xe^{-nx}}{n^2}dx\right] \\
= & \frac{6k^4T^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{xe^{-nx}}{n^3}\bigg|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n^3}dx\right] \quad \text{integral por partes} \\
= & \frac{6k^4T^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n^3}dx\right] \\
= & \frac{6k^4T^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{e^{-nx}}{n^4}\bigg|_0^{\infty}\right] \\
= & \frac{k^4T^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}
\end{aligned}
$$

Y la suma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ es igual a $\zeta(4)$ y es una suma muy conocida, que tiene por resultado $\frac{\pi^4}{15}$.

Entonces, el resultado queda: $u = \frac{k^4T^4}{\pi^2\hbar^3c^3}\frac{\pi^4}{15}$ y por lo tanto:

$$\boxed{u = \frac{\pi^2k^4T^4}{15\hbar^3c^3}}$$

Lo que comprueba que $u = aT^4$, con a una constante de proporcionalidad dada por:

$$\boxed{a = \frac{\pi^2k^4}{15\hbar^3c^3}}$$

Problema 2

La función de trabajo del oro es de $5{,}1eV$

a) ¿Cuántos fotoelectrones puedes arrancar de una cuchara de oro si la dejas por 1 segundo dentro de un microondas encendido (suponiendo que el microondas trabaja con radiación de $15cm$ **de longitud de onda y que de su** $600W$ **de consumo, consigue depositar el** $5\,\%$ **en la cuchara)**

Primero calculemos la energía que tienen los fotones con esta longitud de onda. Un fotón con longitud de onda λ tiene una frecuencia de $f = \frac{c}{\lambda}$. Y entonces tiene una energía de $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$.

En este caso, los fotones del microondas tienen una energía de:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4{,}136 \times 10^{-15} eV \cdot s)(2{,}998 \times 10^{8} m/s)}{0{,}15m} = 8{,}266 \times 10^{-6} eV$$

Vemos que la energía de cada fotón es menor a la función de trabajo del oro. Entonces, sin importar la intensidad de la luz, cada fotón no tiene la energía suficiente como para liberar un electrón del oro y entonces no se crean fotoelectrones.

b) ¿Cuántos puedes arrancar de la misma cuchara usando por un segundo un láser industrial con potencia de $42W$ **y 655 nm de longitud de onda?**

Al igual de antes, primero calculamos la energía de estos fotones con la ecuación $E = \frac{hc}{\lambda}$

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4{,}136 \times 10^{-15} eV \cdot s)(2{,}998 \times 10^{8} m/s)}{655 \times 10^{-9} m} = 1{,}89 eV$$

Vemos que la energía de cada fotón es menor a la función de trabajo del oro. Entonces, sin importar la intensidad de la luz, cada fotón no tiene la energía suficiente como para liberar un electrón del oro y entonces no se crean fotoelectrones.

Problema 3

Partiendo de la ecuación completa de Schrodinger usa el método de separación de variables para encontrar la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo y la solución general a la ecuación temporal en términos de la constante de separación

La ecuación completa de Schrodinger es:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\partial_t\Psi$$

Donde Ψ es función de $\vec{x} = (x, y, z)$ y de t. Proponemos como solución que Ψ se vea como el producto $\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})f(t)$ y lo metemos a la ecuación completa de Schrodinger:

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2[\psi(\vec{x})f(t)] + V[\psi(\vec{x})f(t)] = i\hbar\partial_t[\psi(\vec{x})f(t)] \\ \Rightarrow \quad &-\frac{\hbar^2}{2m}f(t)\nabla^2\psi(\vec{x}) + V\psi(\vec{x})f(t) = i\hbar\psi(\vec{x})\partial_t f(t) \end{aligned}$$

Esto porque $f(t)$ sale del gradiente (que incluye puras derivadas espaciales) y $\psi(\vec{x})$ sale de la derivada temporal.
Ahora dividimos toda la ecuación por $\psi(\vec{x})f(t)$ y nos queda:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(\vec{x})}\nabla^2\psi(\vec{x}) + V = i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} \qquad (1)$$

Notamos que el lado izquierdo es función solamente de $\vec{x}$, mientras que el lado derecho es función de solamente t. Como dependen de distintas variables pero son iguales, para que se cumpla la igualdad para todo $\vec{x}$ y todo t debemos de tener que ambos lados sean constantes. Digamos que son iguales a una constante E.
Entonces, al igualar el lado izquierdo a E obtenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(\vec{x})}\nabla^2\psi(\vec{x}) + V = E$$

$$\boxed{\Rightarrow \ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x}) + V\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})}$$

Con lo que tenemos la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo.

Por otro lado, tomamos ahora el lado derecho de la ecuación (1) y lo igualamos a la constante E, con lo que tenemos:

$$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} = E$$

Y resolvemos esta ecuación para $f(t)$:

$$\frac{df(t)}{dt} = -E\frac{i}{\hbar}f(t)$$

Ésta es una ecuación sencilla cuya solución es un exponencial $f(t) = e^{-iEt/\hbar}$. Y podemos obtener la solución general multiplicando esta solución por cualquier constante. Por lo que tenemos que la solución a la parte temporal es:

$$\boxed{f(t) = Ae^{-iEt/\hbar}}$$

Con A una constante.

Problema 4

En clase hicimos los cálculos suponiendo que el potencial tomaba valores en los reales. Escribe ahora

$$V = V_0 - i\Gamma$$

a) Muestra que en lugar de la conservación de la probabilidad que encontramos en clase, encontraremos que

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{2\Gamma}{\hbar}P$$

Como en el desarrollo visto en clase, tenemos que la probabilidad de que la partícula descrita por $\Psi(\mathbf{x}, t)$ se encuentre en algún punto de la región B al tiempo t es de:

$$P_B(t) = \int_B |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}$$

Luego, vamos a derivar esta probabilidad respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_B(t) &= \frac{d}{dt}\int_B |\Psi|^2 d\mathbf{x} = \frac{d}{dt}\int_B \Psi\Psi^* d\mathbf{x} \\ &= \int_B \frac{\partial\Psi}{\partial t}\Psi^* + \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} d\mathbf{x} \qquad (1) \end{aligned}$$

Usamos ahora la ecuación de Schrodinger que al despejar $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ se ve como

$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\Psi - \frac{i}{\hbar}V\Psi = \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\Psi - \frac{i}{\hbar}(V_0 - i\Gamma)\Psi$

Si sacamos el conjugado de ambos lados de la ecuación (que entra sin problemas a las derivadas), tenemos que:

$\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\Psi^* + \frac{i}{\hbar}(V_0 + i\Gamma)\Psi^*$

Sustituimos estas dos expresiones en (1) para seguir con el desarrollo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_B(t) &= \int_B \frac{\partial\Psi}{\partial t}\Psi^* + \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} d\mathbf{x} \\ &= \int_B \left(\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\Psi - \frac{i}{\hbar}(V_0 - i\Gamma)\Psi\right)\Psi^* + \Psi\left(-\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\Psi^* + \frac{i}{\hbar}(V_0 + i\Gamma)\Psi^*\right) d\vec{x} \\ &= \frac{i\hbar}{2m}\int_B \left[\Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*\right] d\vec{x} + \frac{-i}{\hbar}\int_B \left[(V_0 - i\Gamma)\Psi\Psi^* - (V_0 + i\Gamma)\Psi\Psi^*\right] \; d\vec{x} \\ &= \frac{i\hbar}{2m}\int_B \left[\Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*\right] d\vec{x} + \frac{-i}{\hbar}\int_B \left[-2i\Gamma\Psi\Psi^*\right] \; d\vec{x} \\ &= \frac{i\hbar}{2m}\int_B \left[\Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*\right] d\vec{x} - \frac{2\Gamma}{\hbar}\int_B \left[\Psi\Psi^*\right] \; d\vec{x} \qquad (2) \end{aligned}$$

Donde al final usamos que Γ es constante para sacarla de la integral.

Luego, la primera integral se puede resolver como vimos en clase. Primero notamos que:
$\nabla \cdot [(\nabla\Psi)\Psi^* - \Psi(\nabla\Psi*)] = \nabla \cdot [(\nabla\Psi)\Psi^*] - \nabla \cdot [\Psi(\nabla\Psi^*)] =$
$= (\nabla\Psi^*) \cdot \nabla\Psi + \Psi^*(\nabla \cdot \nabla\Psi) - (\nabla\Psi) \cdot \nabla\Psi^* + \Psi(\nabla \cdot \nabla\Psi^*) = \Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*$
Por lo que podemos reescribir el integrando de la primera integral:

$$\begin{aligned}\frac{i\hbar}{2m}\int_B \left[\Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*\right] d\vec{x} = & \frac{i\hbar}{2m}\int_B \nabla \cdot [(\nabla\Psi)\Psi^* - \Psi(\nabla\Psi^*)]\, d\vec{x} \\ = \frac{i\hbar}{2m}\int_{\partial B} [(\nabla\Psi)\Psi^* - \Psi(\nabla\Psi^*)] \cdot d\vec{n} & \quad \text{por el teormea de la divergencia}\end{aligned}$$

Donde $d\vec{n}$ es el vector unitario perpendicular a la frontera ∂B de la región B. Luego, cuando B es el espacio entero, la integral a lo largo de ∂B es cero porque tanto Ψ como sus derivadas se anulan en el infinito. Por tanto, la primera integral de (2) es 0 cuando B es todo el espacio.

Luego, la segunda integral de (2) cuando B es todo el espacio es:

$$-\frac{2\Gamma}{\hbar}\int_B [\Psi\Psi^*] d\vec{x} = -\frac{2\Gamma}{\hbar}\int_{Esp} |\Psi|^2 d\vec{x} = -\frac{2\Gamma}{\hbar}P = -\frac{2\Gamma}{\hbar}P$$

Donde $P = \int_{Esp} |\Psi|^2 d\vec{x}$ es la probabilidad de encontrar a la partícula en todo el espacio.

Luego, sustituyendo las dos integrales, la expresión (2) cuando B es todo el espacio queda como:

$$\boxed{\frac{d}{dt}P = -\frac{2\Gamma}{\hbar}P}$$

b) Resuelve esta ecuación diferencial para $P(t)$ y compáralo con la expresión para el decaimiento de una partícula inestable, y ya que estamos en eso, expresa la vida media τ en términos de Γ

La ecuación $\dfrac{d}{dt}P = -\dfrac{2\Gamma}{\hbar}P$ se puede resolver por inspección sencillamente para obtener:

$$P(t) = Be^{-2\Gamma t/\hbar}$$

Donde B es una constante, y sustituyendo $t = 0$ vemos que en realidad $B = P(0)$.
Entonces, la solución está dada por:

$$\boxed{P(t) = P(0)e^{-2\Gamma t/\hbar}}$$

Vemos que esto es una función de decaimiento exponencial, que en su forma más general se ve como $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$, donde τ se llama la **vida media**.
En nuestro caso, vemos que el exponente es $-2\Gamma t/\hbar$, por lo que tiene la forma $-t/\tau$ cuando $\tau = \dfrac{\hbar}{2\Gamma}$.
Es decir, la vida media es de:

$$\tau = \frac{\hbar}{2\Gamma}$$