Solitones: Tarea 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

27 de septiembre de 2021

Problema 1

En la Clase-2 se mencionó algo sobre el seminario que organizaba Gelfand en Moscú.

En el blog solitonesopticos.blogspot.com, encontrarán (después del temario) un renglón que dice Material adicional. Al picarle allí se abrirá una carpeta con varios documentos.
Les voy a pedir que lean los 2 siguientes archivos:

- Amor-Matem (copias de unas páginas del libro "Amor y Matemáticas", de Edward Frenkel)

- Gelfand-Seminar (un artículo de Slava Gerovitch)

Después de leer estos 2 documentos, apunten 5 datos (o 5 ideas) acerca del seminario de Gelfand (o acerca de Gelfand mismo) que les hayan parecido de alguna importancia, o de algún interés.

Amor-Matem Ideas importantes o interesantes:

1. Es interesante la idea de Gelfand de hacer de su seminario un acontecimiento social. El auditorio se abría a las 19 horas pero no había ninguna charla hasta casi las 20 horas, en el tiempo antes de las charlas, los invitados hablaban y paseaban por el auditorio. Esto hacía al seminario distinto a cualquier otro.

2. En esa época existía mucho segregacionismo hacia los judíos en Rusia y por ello les era casi imposible realizar posgrados en Moscú y mucho menos obtener un puesto de investigador. Es inevitable cuestionarse cuántos grandes descubrimientos habremos perdido por este tipo de segregación. En ese aspecto, los seminarios de Gelfand se consideraban como un refugio seguro para judíos dado que el propio Gelfand era judío

3. La actitud de Gelfand en el seminario era muy autoritaria. Gelfand solía intervenir en casi todas las pláticas y castigar a quienes dieran conferencias con errores. Incluso a veces interrumpía las pláticas con anéctdotas entretenidas o chistes.

4. Gelfand seleccionaba a un invitado (generalmente alguien joven) como 'oyente de prueba'. A esta persona se le pedía repetir las ideas principales de lo que decía el conferencista y se estimaba si el oyente de prueba seguía bien la conferencia. Esto era una forma muy interesante de medir qué tan bien había explicado el conferencista.

5. Gelfand promovía mucho el ingreso de jóvenes universitarios a las conferencias, porque sabía que era muy importante preparar a la siguiente generación de matemáticos. Muchos de estos jóvenes acababan convirtiéndose en matemáticos de gran renombre.

Gelfand Seminar Ideas importantes o interesantes:

1. Gelfand no terminó la preparatoria pues entró directamente al posgrado a los 19 años cuando impresionó al famoso matemático ruso Kolmogorov.

2. Tras la segunda guerra mundial, Gelfand participó en el proyecto soviético para crear una bomba de hidrógeno y así se convirtió luego en miembro de la academia de ciencias.

3. Gelfand tenía también un profundo gusto por la biología y hasta organizaba un seminario en biología y uno en fisiología (a parte de su famoso seminario en matemáticas).

4. El seminario era turbulento y aparentemente desorganizado, pues Gelfand interrumpía una plática a los pocos minutos y luego hablaba el resto de la sesión o hacia pasar a alguien del público a comentar algo. Esto tenía el efecto de hacer al seminario más ágil y mantener a los asistentes al borde de sus asientos.

5. Gelfand no se fijaba en el nivel de estudios de los participantes y usualmente ponía a jóvenes universitarios a discutir junto con investigadores que llevaban décadas estudiando. Esto permitía el intercambio de ideas y los jóvenes aprendían que podían contribuir a las matemáticas desde una muy temprana edad.

Problemas 2-3

Muchos libros dicen que al hacer el cambio de variables (la transformación de Miura):

$$u = v^2 + v_x$$

En la ecuación KdV:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

se obtiene la ecuación mKdV

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0$$

Investiga (y discute) si eso es 100 % cierto

Veamos. Para sustituir $u = v^2 + v_x$ en la ecuación KdV, calcularemos primero el resultado de hacer esta sustitución en cada término por separado:

- u_t :

$$\begin{aligned} u_t &= (v^2 + v_x)_t = (v^2)_t + v_{xt} \\ &= \underline{2vv_t + v_{xt}} \end{aligned}$$

- $6uu_x$:

$$\begin{aligned} 6uu_x &= 6(v^2 + v_x)(v^2 + v_x)_x = 6(v^2 + v_x)(2vv_x + v_{xx}) \\ &= 6(2v^3v_x + v^2v_{xx} + 2vv_x^2 + v_xv_{xx}) \\ &= \underline{12v^3v_x + 6v^2v_{xx} + 12vv_x^2 + 6v_xv_{xx}} \end{aligned}$$

- u_{xxx}

$$\begin{aligned} u_{xxx} &= (v^2 + v_x)_{xxx} = (2vv_x + v_{xx})_{xx} = (2v_xv_x + 2vv_{xx} + v_{xxx})_x \\ &= 2v_{xx}v_x + 2v_xv_{xx} + 2v_xv_{xx} + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} \\ &= \underline{6v_xv_{xx} + 2vv_{xxx} + v_{xxxx}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando estos tres resultados, la ecuación KdV se transforma en:

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= 2vv_t + v_{xt} - (12v^3v_x + 6v^2v_{xx} + 12vv_x^2 + 6v_xv_{xx}) + 6v_xv_{xx} + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} \\ &= 2vv_t + v_{xt} - 12v^3v_x - 6v^2v_{xx} - 12vv_x^2 - 6v_xv_{xx} + 6v_xv_{xx} + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} \\ &= 2vv_t + v_{xt} - 12v^3v_x - 6v^2v_{xx} - 12vv_x^2 + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} \end{aligned}$$

Es decir, con el cambio de variable la ecuación KdV se transforma en:

$$2vv_t + v_{xt} - 12v^3v_x - 6v^2v_{xx} - 12vv_x^2 + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} = 0 \qquad (1)$$

Esta ecuación (1) es equivalente a la KdV pero con la nueva variable v.
Pero notamos que (1) claramente no es igual a la ecuación mKdV como la vimos en clase.

Sin embargo, con un par de manipulaciones podemos encontrar la relación de (1) con la mKdV.

Empezamos desde la ecuación (1) que habíamos conseguido y la vamos a factorizar:

$$2vv_t + v_{xt} - 12v^3v_x - 6v^2v_{xx} - 12vv_x^2 + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} = 0$$

Luego reordenamos los términos

$$\Rightarrow\ 2vv_t - 12v^3v_x + 2vv_{xxx} + v_{xt} - 6v^2v_{xx} - 12vv_x^2 + v_{xxxx} = 0$$

Factorizamos $2v$ en los primeros tres términos

$$\Rightarrow\ 2v(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) + v_{xt} - 6v^2v_{xx} - 12vv_x^2 + v_{xxxx} = 0$$

Ahora notamos que los cuatro términos finales pueden reescribirse como sigue:*

$\dfrac{\partial}{\partial x}(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) = v_{xt} - 6v^2v_{xx} - 12vv_x^2 + v_{xxxx}$, con lo que regresando al desarrollo que llevábamos, tenemos que:

$$\Rightarrow\ 2v(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) + \frac{\partial}{\partial x}(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) = 0$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right)(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) = 0} \qquad (2)$$

* Suponiendo que v es lo suficientemente regular como para que se cumpla $v_{xt} = v_{tx}$

Vemos que ahora en la expresión (2) queda la ecuación mKdV dentro del paréntesis.
Esto nos prueba que la ecuación KdV no se transforma exactamente en la mKdV, sino que se transforma en $\left(2v + \dfrac{\partial}{\partial x}\right)(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) = 0$. Que es la ecuación mKdV pero a la cual luego se le aplica $(2v + \partial_x)$.

Con ello, encontramos que la relación entre KdV y mKdV es la siguiente:

Si v es solución de mKdV, eso significa que $v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0$.
Luego, se tiene que (2) pasa a ser $\left(2v + \dfrac{\partial}{\partial x}\right)(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) = \left(v + \dfrac{\partial}{\partial x}\right)(0) = 0$
Por lo que entonces v es solución de (2).
Como (2) es la ecuación que se obtiene directamente de hacer el cambio de variable a la KdV, que v sea solución de (2) implica que $u = -v^2 - v_x$ es solución de KdV.

En resumen, la mKdV no es exactamente la transformación de la KdV. Pero de todas formas, para cada solución v de la mKdV, podemos encontrar una solución $u = -v^2 - v_x$ de la KdV.

Sin embargo, el inverso no es necesariamente cierto. Si tenemos una u que sea solución de la ecuación KdV, la v correspondiente que se obtiene implícitamente por la transformación de Muria $u = v^2 + v_x$ no será necesariamente solución de mKdV (aunque sí será solución de (2) que es la verdadera transformación de la KdV).

Ejemplo:

Podemos encontrar un ejemplo particular de que esto es así para convencernos un poco más. Tomemos la función constante -1 que es solución de la KdV (es decir $u = -1$). Se puede ver que es solución de la KdV, pues todos los términos de ésta tienen algún tipo de derivada que en este caso se harían 0.
Luego, podemos encontrar la v correspondiente haciendo la transformación de Miura:

$$u = v^2 + v_x \quad \Rightarrow \quad -1 = v^2 + v_x$$

Que como vimos en clase, la solución a esta ecuación diferencial (que es de tipo Ricatti) se puede obtener como $v = \dfrac{\psi_x}{\psi}$ donde ψ cumple con $\psi_{xx} - u\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{xx} + 1\psi = 0$
Ésta es la ecuación de un oscilador armónico y tiene como posible solución a $\psi(x) = \cos(x)$.
Por lo que una solución v a la ecuación de Miura será $v = \dfrac{\psi_x}{\psi} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

Esta v sin embargo no es solución de la mKdV, pues tenemos que:

$$\begin{aligned}
(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) &= \frac{\partial}{\partial t}(-\tan(x)) - 6(-\tan(x))^2 \frac{\partial}{\partial x}(-\tan(x)) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}(-\tan(x)) \\
&= 0 - 6\tan^2(x)(-\sec^2(x)) - 2\sec^4(x) - 4\sec^2(x)\tan^2(x) \\
&= 6\tan^2(x)\sec^2(x) - 2\sec^4(x) - 4\sec^2(x)\tan^2(x) \\
&= 2\sec^2(x)[3\tan^2(x) - \sec^2(x) - 2\tan^2(x)] \\
&= 2\sec^2(x)[\tan^2(x) - \sec^2(x)] \\
&= 2\sec^2(x)[-1] = -2\sec^2(x)
\end{aligned}$$

Como este resultado es distinto de 0, v no es solución de KdV.
Sin embargo, sí es solución de la ecuación (2) como debería (porque la ecuación (2) es la que verdaderamente se obtiene al hacer el cambio de variable). Vemos que esto es cierto porque:

$$\begin{aligned}
\left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right)(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) &= \left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right)(-2\sec^2(x)) \qquad \text{Por el resultado anterior} \\
&= \left(2(-tan(x)) + \frac{\partial}{\partial x}\right)(-2\sec^2(x)) \\
&= 4\tan(x)\sec^2(x) - 2\frac{\partial}{\partial x}(\sec^2(x)) \\
&= 4\tan(x)\sec^2(x) - 2(2\sec^2(x)\tan(x)) = 0
\end{aligned}$$

En resumen, la ecuación KdV no se transforma exactamente en la ecuación mKdV al hacer el cambio de variable. Pero se tiene que toda solución v de la mKdV da lugar a una solución u de la KdV, pero no toda solución u de la KdV da lugar a una solución v de la mKdV.