Álgebra Moderna Tarea 6.2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

7 de enero de 2021

a) **Sea $n \in \mathbb{N}$. Prueba que la función $s : S_n \to \{1, -1\}$ (vista en las notas de la clase 36) está bien definida y que es un morfiso de grupos**

Primero vemos que esté bien definida para un ciclo. Definimos en clase que si $\sigma = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_r)$ entonces su paridad es $(-1)^{r+1}$.
Vemos que esto no depende de la representación usada para el ciclo, pues las únicas otras representaciones de la función $a_1 \to a_2$, $a_2 \to a_3$, $\cdots$, $a_{r-1} \to a_r$, $a_r \to a_1$ son:
$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_r)$, $(a_2, a_3, \cdots, a_r, a_1)$, $\cdots$, $(a_r, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1})$
Y en todos los casos el ciclo tiene una longitud de r y por tanto una paridad de $(-1)^{r+1}$.
Con lo que se ve que está bien definida para ciclos.

Ahora supongamos que σ es una permutación que no es un ciclo. Entonces σ se puede descomponer de forma única como la composición de varios ciclos ajenos σ_i, es decir $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_l$.
Definimos la paridad de esta permutación como:

$$s(\sigma) = s(\sigma_1)s(\sigma_2)\cdots s(\sigma_l)$$

La representación de σ es única excepto por el orden de los ciclos. Si $\sigma = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_l}$ es otra representación de σ, entonces ambas representaciones tienen la misma paridad, pues:

$$s(\sigma) = s(\sigma_1)s(\sigma_2)\cdots s(\sigma_l) = s(\sigma_{i_1})s(\sigma_{i_2})\cdots s(\sigma_{i_l})$$

La igualdad se tiene porque en ambos casos estamos haciendo los productos de los mismos números σ_j pero en distinto orden.
Con lo que se muestra que el valor de $s(\sigma)$ no depende de la representación de σ.

Probar que es un morfismo:
Digamos que tenemos dos permutaciones $\sigma, \rho \in S_n$. Y que se pueden representar como producto de ciclos como:

- $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m$
- $\rho = \rho_1\rho_2\cdots\rho_k$

Con $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k$ ciclos.
Entonces, la paridad del producto es:

$$\begin{aligned} s(\sigma\rho) &= s(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m\rho_1\rho_2\cdots\rho_k) \\ &= s(\sigma_1)\cdots s(\sigma_m)\cdot s(\rho_1)\cdots s(\rho_k) \quad \text{por la def de s para un producto de ciclos} \\ &= [s(\sigma_1)\cdots s(\sigma_m)]\cdot[s(\rho_1)\cdots s(\rho_k)] \\ &= s(\sigma)\cdot s(\rho) \end{aligned}$$

Por lo que s separa el producto de ciclos en producto de números reales (del grupo $\{-1, 1\}$) y por tanto es un morfismo.

b) **Sea $n \geq 5$. Demuestre que dadas dos transposiciones $\tau_1, \tau_2 \in S_n$, tenemos que $\tau_1\tau_2(i) = i$ para algún $i \in \{1, \cdots, n\}$**

Por definición, una transposición es un ciclo de longitud 2. Por lo que podemos escribir $\tau_1 = (a, b)$ para $a, b \in \{1, \cdots, n\}$
Y podemos escribir también $\tau_2 = (c, d)$ para $c, d \in \{1, \cdots, n\}$

Entonces, el producto $\tau_1\tau_2$ es:

$$\tau_1\tau_2 = (a, b)(c, d)$$

Esta permutación actúa sobre únicamente los 4 elementos $a, b, c, d \in \{1, \cdots, n\}$, pues son los únicos elementos que están en la expresión de $\tau_1\tau_2$.
Por tanto, $\tau_1\tau_2$ no mueve a los elementos de $\{1, \cdots, n\}$ distintos de a, b, c, d.
Como $n \geq 5$, simpre habrá un elemento $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ distinto de a, b, c, d. Por lo que tenemos que:

$$\tau_1\tau_2(i) = i$$

c) **Muestra un ejemplo de un grupo soluble y un ejemplo de un grupo no soluble. Justifica tu respuesta.**

Grupo Soluble:
Un grupo soluble podría ser $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.
Y consideramos el subgrupos $\{\bar{0}, \bar{2}\}$.
Entonces podemos formar la cadena:

$$\{\bar{0}\} \subset \{\bar{0}, \bar{2}\} \subset \mathbb{Z}_4$$

Claramente la serie es subnormal porque todos los subgrupos son normales (por ser abelianos, se sigue directamente la normalidad).
Además, los cocientes son:

- $\mathbb{Z}_4/\{\bar{0}, \bar{2}\}$: Que es un grupo de $\dfrac{|\mathbb{Z}_4|}{|\{\bar{0}, \bar{2}\}|} = \dfrac{4}{2} = 2$ elementos, por lo que es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ y por tanto, abeliano.
- $\{\bar{0}, \bar{2}\}/\{\bar{0}\}$: Que es un grupo de $\dfrac{|\{\bar{0}, \bar{2}\}|}{|\{\bar{0}\}|} = \dfrac{2}{1} = 2$ elementos, por lo que es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ y entonces es abeliano.

Por lo que todos los factores de la serie subnormal son abelianos y por tanto es un grupo soluble.

Grupo No Soluble:
Un grupo no soluble es A_5.

En clase vimos que A_5 es simple, por lo que sus únicos subgrupos normales son los triviales $\{e\}$ y A_5.
Entonces, la única serie subnormal posible es:

$$\{e\} \subset A_5$$

El único factor en este caso es $A_5/\{e\} \simeq A_5$.
Sin embargo, A_5 no es un grupo abeliano pues por ejemplo, (123) y (12345) son permutaciones pares de A_5 y no conmutan pues:

$$(123)(12345) = (13452) \neq (13245) = (12345)(123)$$

Entonces, el cociente de la serie subnormal no en abeliano y como es la única serie subnormal posible, concluimos que A_5 no es soluble.

d) **Si H, K son grupos solubles, demuestre que $H \times K$ es soluble**

Como H es soluble, existe una serie subnormal de la forma:

$$\{e_H\} \trianglelefteq H_n \trianglelefteq H_{n-1} \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H$$

Donde cada uno de los factores H_{i-1}/H_i es abeliano.

Como K es soluble, similarmente tenemos una serie subnormal

$$\{e_K\} \trianglelefteq K_l \trianglelefteq K_{l-1} \cdots \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq K$$

Donde cada uno de los factores K_{i-1}/K_i es abeliano.

Luego, tenemos que encontrar una serie subnormal de $H \times K$. Para ello, consideramos a los subgrupos de $H \times K$ de la forma $H_i \times K_j$ donde $H_i \leq H$ y $K_j \leq K$.
Entonces, proponemos como serie subnormal de $H \times K$ a :

$$\{(e_H, e_K)\} \subset H_n \times \{e_k\} \subset H_{n-1} \times \{e_k\} \subset \cdots \subset H_1 \times \{e_K\} \subset H \times \{e_K\} \subset H \times K_l \subset \\ H \times K_{l-1} \subset \cdots \subset H \times K_1 \subset H \times K$$

Claramente se trata de una serie subnormal.
Esto porque en general si P, Q son grupos y $P_0 \trianglelefteq P$ y $Q_0 \trianglelefteq Q$ entonces $P_0 \times Q_0 \trianglelefteq P \times Q$
Pues si tomamos un elemento $(p_0, q_0) \in P_0 \times Q_0$ y un $(p, q) \in P \times Q$ arbitrarios, entonces la conjugación $(p, q)(p_0, q_0)(p, q)^{-1}$ pertenece a $P_0 \times Q_0$:

$$(p, q)(p_0, q_0)(p, q)^{-1} = (pp_0p^{-1}, qq_0q^{-1})$$

Y como $P_0 \trianglelefteq P$, entonces $pp_0p^{-1} \in P_0$, como $Q_0 \trianglelefteq Q$, entonces $qq_0q^{-1} \in Q_0$. Por lo tanto,$(p, q)(p_0, q_0)(p, q)^{-1} = (pp_0p^{-1}, qq_0q^{-1}) \in P_0 \times Q_0$. Lo que implica que $P_0 \times Q_0 \trianglelefteq P \times Q$

Regresando al problema original con este nuevo resultado, como $H_i \trianglelefteq H_{i-1}$ y trivialemnte $\{e_K\} \trianglelefteq \{e_K\}$ entonces $H_i \times \{e_k\} \trianglelefteq H_{i-1} \times \{e_K\}$. Y como $H \trianglelefteq H$ y $K_i \trianglelefteq K_{i-1}$, entonces $H \times K_i \trianglelefteq H \times K_{i-1}$.
Lo que prueba que la serie descrita antes es efectivamente subnormal.

Luego, sólo nos falta probar que los factores son abelianos.
Los primeros factores de nuestra serie subnormal son de la forma
$(H_{i-1} \times \{e_K\})/(H_i \times \{e_K\})$
Es decir, es el grupo de clases laterales de $H_i \times \{e_K\}$ en $H_{i-1} \times \{e_K\}$

Esto claramente es isomorfo a las clases laterales de H_i en H_{i-1} (simplemente una clase $h\ H_i \in H_{i-1}/H_i$ se corresponde unívocamente con la clase $(h, e_K)H_i \times \{e_K\} \in H_{i-1} \times \{e_K\}/H_i \times \{e_K\}$)
Por lo tanto, como H_{i-1}/H_i es abeliano por hipótesis, entonces $(H_{i-1} \times \{e_K\})/(H_i \times \{e_K\})$ también es abeliano.

Por otro lado, los otros cocientes son de la forma $H \times K_{i-1}/H \times K_i$ son claramente isomorfos a K_{i-1}/K_i.
Entonces, como K_{i-1}/K_i son abelianos, $H \times K_{i-1}/H \times K_i$ también son abelianos.

Por tanto, todos los factores de la serie subnormal de $H \times K$ son abelianos y entonces $H \times K$ es soluble.

e) **Si G es un grupo finito, soluble y simple, demuestre que G es cíclico de orden primo.**

Como G es simple, entonces los únicos subgrupos normales son G y $\{e\}$.
Esto implica que la única serie subnormal posible es:

$$\{e\} \subset G$$

Como el grupo es soluble, el cociente $G/\{e\}$ debe de ser abeliano.
Por lo que $G \simeq G/\{e\}$ es un grupo abeliano.

Por tanto, ya tenemos que G es finito y abeliano.
Pero además, por ser abeliano, todos los subgrupos deberían de ser normales. Sin embargo, tenemos que los únicos subgrupos normales son $\{e\}$ y G.
Por lo que en general, los únicos subgrupos de G deben de ser G y $\{e\}$

Esto implica que G es cíclico, pues para todo $g \neq e \in G$, $\langle g \rangle$ tiene que ser un subgrupo de G y por lo dicho antes, eso implica que $\langle g \rangle = G$.
Finalmente, vimos que los grupos cíclicos finitos tienen tantos subgrupos como divisores de su orden. Pero como aquí tenemos sólo dos subgrupos de G, eso implica que $|G|$ tiene sólo como divisores a los triviales 1 y $|G|$.
Por lo que $|G|$ es primo y entonces G es un grupo cíclico de orden primo.