Solitones: Tarea 7

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

21 de enero de 2022

Problemas 31-32

Considera la ecuación:

$$iu_z + \epsilon_2 u_{tt} - i\epsilon_3 u_{ttt} + \epsilon_4 u_{4t} + \gamma_1 |u|^2 u - \gamma_2 |u|^4 u = 0$$

Usando el teorema de Noether investiga si hay una cantidad conservada asociada a la transformación:

$$z^* = z + \epsilon \ , \ \ t^* = t \ , \ \ u^* = u \ , \ \ v^* = v$$

donde v es el complejo conjugado de u. Fíjate que u^* no es el complejo conjugado de u, sino que es la nueva función transformada.

En caso de que exista una cantidad conservada, determina cuál es.

Primero necesitamos la Lagrangiana de esta ecuación, dicha lagrangiana la vimos en las notas del teorema de Noether y es la siguiente:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^* u_z - u u_z^*) - \epsilon_2 u_t u_t^* - \frac{i}{2}\epsilon_3 (u^* u_{ttt} - u u_{ttt}^*) + \epsilon_4 u_{tt} u_{tt}^* + \frac{\gamma_1}{2} u^2 (u^*)^2 - \frac{\gamma_2}{3} u^3 (u^*)^3$$

Para comprobar que efectivamente es ésta la lagrangiana, podemos calcular la ecuación de Euler Lagrange (una de las dos, la correspondiente a derivar respecto a u^*) y ver que efectivamente se reduce a la ecuación diferencial que nos dan, la ec. de Euler Lagrange es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}^*} - \frac{\partial^3}{\partial t^3}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}^*} = 0 \qquad (1)$$

Calculamos cada una de las derivadas del Lagrangiano:

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = \dfrac{i}{2}u_z - \dfrac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt} + \gamma_1 u^2 u^* - \gamma_2 u^3 u^2 = \dfrac{i}{2}u_z - \dfrac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt} + \gamma_1 u|u|^2 - \gamma_2 u|u|^4$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} = -\dfrac{i}{2}u$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} = -\epsilon_2 u_t$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}^*} = \epsilon_4 u_{tt}$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}^*} = \dfrac{i}{2}\epsilon_3 u$

Y ahora calculamos las derivadas que necesitamos para meter en la ecuación de Euler Lagrange (1).

- $\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-\dfrac{i}{2}u\right) = -\dfrac{i}{2}u_z$
- $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\epsilon_2 u_t\right) = -\epsilon_2 u_{tt}$
- $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}^*} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\epsilon_4 u_{tt}\right) = \epsilon_4 u_{tttt}$
- $\dfrac{\partial^3}{\partial t^3}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}^*} = \dfrac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\dfrac{i}{2}\epsilon_3 u\right) = \dfrac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt}$

Entonces, si metemos todo esto en la ecuación de Euler Lagrange (1) nos queda:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}^*} - \frac{\partial^3}{\partial t^3}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}^*} = 0 \\
&\Rightarrow\ \frac{i}{2}u_z - \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt} + \gamma_1 u|u|^2 - \gamma_2 u|u|^4 + \frac{i}{2}u_z + \epsilon_2 u_{tt} + \epsilon_4 u_{tttt} - \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt} = 0 \\
&\Rightarrow\ iu_z + \epsilon_2 u_{tt} - i\epsilon_3 u_{ttt} + \epsilon_4 u_{tttt} + \gamma_1 u|u|^2 - \gamma_2 u|u|^4 = 0
\end{aligned}$$

Que es la ecuación del problema, por lo que ya tenemos su lagrangiana.

Antes de continuar, para no confundir el significado de u^* como conjugada de u o como la función transformada en el lenguaje del teorema de Noether, denotaremos a $v = u^*$ como el conjugado complejo de u. Con lo cual tendremos que la Lagrangiana es:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(vu_z - uv_z) - \epsilon_2 u_t v_t - \frac{i}{2}\epsilon_3(vu_{ttt} - uv_{ttt}) + \epsilon_4 u_{tt}v_{tt} + \frac{\gamma_1}{2}u^2v^2 - \frac{\gamma_2}{3}u^3v^3$$

Ya teniendo el lagrangiano, revisemos la transformación. Como se menciona en el enunciado, la transformación que nos interesa es:

$$z^* = z + \epsilon\ ,\ t^* = t\ ,\ u^* = u\ ,\ v^* = v$$

Primero vamos a ver que se cumpla que $\underline{\delta\mathcal{L} = 0}$ para que sea válido usar el teorema de Noether.

De acuerdo a la notación vista en clase, las transformaciones se escriben en general en la forma:

$$\begin{aligned}
z^* &= z + \epsilon\xi_1 \\
t^* &= t + \epsilon\xi_2 \\
u^* &= u + \epsilon\phi_1(u) \\
v^* &= v + \epsilon\phi_2(v)
\end{aligned}$$

Por lo que en este caso $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, $\phi_1(u) = 0$ y $\phi_2(v) = 0$. Antes de continuar, debemos de calcular el valor de δu y de δv, para lo que usamos las ecuaciones (37) y (38) de las notas:

$$\begin{aligned}
\delta u &= \epsilon[\phi_1(u(z,t)) - u_z\xi_1 - u_t\xi_2] = -\epsilon u_z \\
\delta v &= \epsilon[\phi_2(v(z,t)) - v_z\xi_1 - v_t\xi_2] = -\epsilon v_z
\end{aligned}$$

Luego, podemos ya calcular la variación de $\mathcal{L}$, que tiene la siguiente expresión según la ecuación (34) de las notas:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} + \cdots + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}\delta v + \cdots$$

Para escribir la forma de $\delta\mathcal{L}$ pertinente para este ejercicio, notamos que $\mathcal{L}$ sólo depende de $u, u_z, u_t, u_{tt}, u_{ttt}, v$, $v_z, v_t, v_{tt}, v_{ttt}$, por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{ttt} + \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{ttt}\end{aligned}$$

Ahora bien, como t no cambia en la transformación, tenemos que $\delta t = 0$, por lo que el segundo término de esta expresión es 0. Las derivadas necesarias se pueden calcular directamente de la expresión de $\mathcal{L}$.

- $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}$: Esta es la única derivada medio complicada, pues como u, v dependen de z, hay que aplicar la regla de la cadena a todos los términos de $\mathcal{L}$ y hay que usar la regla del producto muchas veces también. De todas formas, es fácil escribirla directamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} &= \frac{i}{2}(v_z u_z + v u_{zz} - u_z v_z - u v_{zz}) - \epsilon_2(u_t v_{tz} + u_{tz} v_t) - \frac{i}{2}\epsilon_3(v_z u_{ttt} + v u_{tttz} - u_z v_{ttt} - u v_{tttz}) + \\ &+ \epsilon_4(u_{ttz} v_{tt} + u_{tt} v_{ttz}) + \gamma_1(u u_z v^2 + v v_z u^2) - \gamma_2(u^2 u_z v^3 + v^2 v_z u^3) \\ &= \frac{i}{2}(v u_{zz} - u v_{zz}) - \epsilon_2(u_t v_{tz} + u_{tz} v_t) - \frac{i}{2}\epsilon_3(v_z u_{ttt} + v u_{tttz} - u_z v_{ttt} - u v_{tttz}) + \\ &+ \epsilon_4(u_{ttz} v_{tt} + u_{tt} v_{ttz}) + \gamma_1(u u_z v^2 + v v_z u^2) - \gamma_2(u^2 u_z v^3 + v^2 v_z u^3)\end{aligned}$$

- $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} = -\dfrac{i}{2}v_z + \dfrac{i}{2}\epsilon_3 v_{ttt} + \gamma_1 u v^2 - \gamma_2 u^2 v^3$
- $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z} = \dfrac{i}{2}v$
- $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} = -\epsilon_2 v_t$
- $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}} = \epsilon_4 v_{tt}$
- $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}} = -\dfrac{i}{2}\epsilon_3 v$
- $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} = \dfrac{i}{2}u_z - \dfrac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt} + \gamma_1 u^2 v - \gamma_2 u^3 v^2$
- $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z} = -\dfrac{i}{2}u$
- $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t} = -\epsilon_2 u_t$
- $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}} = \epsilon_4 u_{tt}$
- $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}} = \dfrac{i}{2}\epsilon_3 u$

Con estas derivadas podemos ya sustituir $\delta\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{ttt} + \\
&+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{ttt} \\
&= \Bigg[\frac{i}{2}(vu_{zz} - uv_{zz}) - \epsilon_2(u_t v_{tz} + u_{tz}v_t) - \frac{i}{2}\epsilon_3(v_z u_{ttt} + vu_{tttz} - u_z v_{ttt} - uv_{tttz}) + \\
&+ \epsilon_4(u_{ttz}v_{tt} + u_{tt}v_{ttz}) + \gamma_1(uu_z v^2 + vv_z u^2) - \gamma_2(u^2 u_z v^3 + v^2 v_z u^3)\Bigg]\delta z \\
&+ \left[-\frac{i}{2}v_z + \frac{i}{2}\epsilon_3 v_{ttt} + \gamma_1 uv^2 - \gamma_2 u^2 v^3\right]\delta u \\
&+ \left(\frac{i}{2}v\right)\delta u_z + (-\epsilon_2 v_t)\,\delta u_t + (\epsilon_4 v_{tt})\,\delta u_{tt} + \left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)\delta u_{ttt} \\
&+ \left(\frac{i}{2}u_z - \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt} + \gamma_1 u^2 v - \gamma_2 u^3 v^2\right)\delta v + \left(-\frac{i}{2}u\right)\delta v_z + (-\epsilon_2 u_t)\delta v_t + (\epsilon_4 u_{tt})\delta v_{tt} + \left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)\delta v_{ttt}
\end{aligned}$$

Ahora usamos que $\delta u = -\epsilon u_z$ y que $\delta v = -\epsilon v_z$, además que $\delta u_t = \frac{\partial}{\partial t}(\delta u) = \frac{\partial}{\partial t}(-\epsilon u_z)$ y similarmente para las otras derivadas (se puede intercambiar δ y $\frac{\partial}{\partial z}$ o $\frac{\partial}{\partial t}$). También usamos que $\delta z = \epsilon$. Entonces nos queda:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = &\Bigg[\frac{i}{2}(vu_{zz} - uv_{zz}) - \epsilon_2(u_t v_{tz} + u_{tz}v_t) - \frac{i}{2}\epsilon_3(v_z u_{ttt} + vu_{tttz} - u_z v_{ttt} - uv_{tttz}) + \\
&+ \epsilon_4(u_{ttz}v_{tt} + u_{tt}v_{ttz}) + \gamma_1(uu_z v^2 + vv_z u^2) - \gamma_2(u^2 u_z v^3 + v^2 v_z u^3)\Bigg](\epsilon) \\
&+ \left[-\frac{i}{2}v_z + \frac{i}{2}\epsilon_3 v_{ttt} + \gamma_1 uv^2 - \gamma_2 u^2 v^3\right](-\epsilon u_z) \\
&+ \left(\frac{i}{2}v\right)(-\epsilon u_z)_z + (-\epsilon_2 v_t)\,(-\epsilon u_z)_t + (\epsilon_4 v_{tt})\,(-\epsilon u_z)_{tt} + \left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)(-\epsilon u_z)_{ttt} \\
&+ \left(\frac{i}{2}u_z - \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt} + \gamma_1 u^2 v - \gamma_2 u^3 v^2\right)(-\epsilon v_z) + \left(-\frac{i}{2}u\right)(-\epsilon v_z)_z + (-\epsilon_2 u_t)(-\epsilon v_z)_t + (\epsilon_4 u_{tt})(-\epsilon v_z)_{tt} + \left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)(-\epsilon v_z)_{ttt}
\end{aligned}$$

Lo cual es igual a:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = \epsilon\Bigg[&\frac{i}{2}vu_{zz} - \frac{i}{2}uv_{zz} - \epsilon_2 u_t v_{tz} - \epsilon_2 u_{tz}v_t - \frac{i}{2}\epsilon_3 v_z u_{ttt} - \frac{i}{2}\epsilon_3 vu_{tttz} + \frac{i}{2}\epsilon_3 u_z v_{ttt} + \frac{i}{2}\epsilon_3 uv_{tttz} \\
&+ \epsilon_4 u_{ttz}v_{tt} + \epsilon_4 u_{tt}v_{ttz} + \gamma_1 uu_z v^2 + \gamma_1 vv_z u^2 - \gamma_2 u^2 u_z v^3 - \gamma_2 v^2 v_z u^3 \\
\\
&+ \frac{i}{2}v_z u_z - \frac{i}{2}\epsilon_3 v_{ttt}u_z - \gamma_1 uv^2 u_z + \gamma_2 u^2 v^3 u_z \\
&- \frac{i}{2}vu_{zz} + \epsilon_2 v_t u_{zt} - \epsilon_4 v_{tt}u_{ztt} + \frac{i}{2}\epsilon_3 vu_{zttt} \\
&- \frac{i}{2}u_z v_z + \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt}v_z - \gamma_1 u^2 vv_z + \gamma_2 u^3 v^2 v_z + \frac{i}{2}uv_{zz} + \epsilon_2 u_t v_{zt} - \epsilon_4 u_{tt}v_{ztt} - \frac{i}{2}\epsilon_3 uv_{zttt}\Bigg]
\end{aligned}$$

En esta última expresión, se puede ver que todos los términos se cancelan a pares, por lo que $\boxed{\delta\mathcal{L} = 0}$. Entonces, podemos aplicar el teorema de Noether.

Para aplicar el teorema de Noether y encontrar la ley de conservación de la forma que lo vimos en clase, necesitamos escribir las expresiones Q_1, Q_2:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \xi_1\mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v \\
Q_2 &= \xi_2\mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta u) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta v) + \cdots
\end{aligned}
$$

Y lay ley de conservación dice que:

$$
\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} = 0
$$

El único problema es que la definición de Q_2 como fue dada en las notas sólo incluye derivadas de $\mathcal{L}$ hasta u_{tt}, pero nuestro lagrangiano incluye términos dependiendo de u_{ttt}, por lo que falta agregar algunas partes a Q_2. Sin embargo, no está muy fácil ver cómo se debería de generalizar Q_2 para incluir los términos que dependen de u_{ttt} y v_{ttt}. Para ver cómo se ven estos términos, probaremos de nuevo el teorema de Noether pero haciendo una expansión hasta u_{ttt}, v_{ttt}.

Primero que nada, escribimos la expresión de $d\mathcal{L}$

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{ttt} + \\
+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{ttt} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Luego, para la lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_z, u_t, u_{tt}, u_{ttt}, v, v_z, v_t, v_{tt}, v_{ttt})$, las ecuaciones de Euler Lagrange son:

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}} - \frac{\partial^3}{\partial t^3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}} = 0 \qquad (3)
$$

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}} - \frac{\partial^3}{\partial t^3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}} = 0 \qquad (4)
$$

Con estas ecuaciones y con la forma de la variación $\delta\mathcal{L}$ dada en (2), podemos demostrar el teorema de Noether. Primero que nada, de la ecuación (3) y (4), podemos despejar $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}$ y $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}$ y sustituirlas en (2):

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}dt \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}} + \frac{\partial^3}{\partial t^3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\right]\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{ttt} \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}} + \frac{\partial^3}{\partial t^3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\right]\delta v + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{ttt} = 0
\end{aligned}
$$

Ahora introducimos las siguientes identidades, que se deducen de usar la regla del producto de la derivada:

- $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\frac{\partial}{\partial z}\delta u$
- $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\frac{\partial}{\partial t}\delta u$
- $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u\right] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}\delta u$

- $\dfrac{\partial^3}{\partial t^3}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u = \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\right)\delta u\right] - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_t$

Sustituyendo estas identidades (y otras equivalentes pero para v), la expresión de $\delta\mathcal{L}$ se convierte en la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = {} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt \\
& + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\frac{\partial}{\partial z}\delta u + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\frac{\partial}{\partial t}\delta u + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u\right] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}\delta u \\
& + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\right)\delta u\right] - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_t \\
& + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{ttt} \\
& + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z}\frac{\partial}{\partial z}\delta v + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t}\frac{\partial}{\partial t}\delta v + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v\right] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}\delta v \\
& + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\right)\delta v\right] - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_t \\
& + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{ttt}
\end{aligned}
$$

Muchos términos se cancelan y otros los podemos reacomodar y nos queda:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = {} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt \\
& + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u\right] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}\delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} \\
& + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\right)\delta u\right] - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{ttt} \\
& + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v\right] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\right)\frac{\partial}{\partial t}\delta v + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} \\
& + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\right)\delta v\right] - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{ttt}
\end{aligned}
$$

Se puede ver que los términos del final del segundo renglón $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\dfrac{\partial}{\partial t}\delta u + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt}$ se puede escribir como $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_t\right)$

Por otro lado, los últimos dos términos del tercer renglón se pueden escribir como $-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_t + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{ttt} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{tt}\right) - \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_t\right)$

Lo mismo se puede hacer para los términos equivalentes pero que dependen de v. Al hacer estas sustituciones, nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}dt \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_t\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\right)\delta u\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{tt}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_t\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_t\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\right)\delta v\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{tt}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_t\right)\end{aligned}$$

Esta expresión se puede rescribir usando que $\delta z = \epsilon\xi_1$ y que $\delta t = \epsilon\xi_2$, con lo que toma la forma:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = \epsilon\frac{\partial}{\partial z}&\left[\xi_1\mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v\right] \\ + \epsilon\frac{\partial}{\partial t}&\left[\xi_2\mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_t\right. \\ &\left. + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_t\right]\end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que esto tiene la forma de la ley de conservación:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} = 0$$

Con Q_1 y Q_2 definidos como sigue:

$$\begin{aligned}Q_1 &= \xi_1\mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v \\ Q_2 &= \xi_2\mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_t + \\ &+ \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_t\end{aligned}$$

Con lo cual ahora ya conseguimos la expresión más completa de Q_2 que la de las notas, que incluye derivadas respecto a u_{ttt} y a v_{ttt}.

Ahora sí podemos encontrar la ley de conservación, simplemente calculamos Q_1 y Q_2 para este caso. Para hacerlo, usamos que $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, $\delta u = -\epsilon u_z$, $\delta v = -\epsilon v_z$.

$$\begin{aligned}Q_1 &= \xi_1\mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v \\ &= \frac{i}{2}(vu_z - uv_z) - \epsilon_2 u_t v_t - \frac{i}{2}\epsilon_3(vu_{ttt} - uv_{ttt}) + \epsilon_4 u_{tt}v_{tt} + \frac{\gamma_1}{2}u^2v^2 - \frac{\gamma_2}{3}u^3v^3 + \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{i}{2}v\right)(-\epsilon u_z) + \frac{1}{\epsilon}\left(-\frac{i}{2}u\right)(-\epsilon v_z) \\ &= \frac{i}{2}(vu_z - uv_z) - \epsilon_2 u_t v_t - \frac{i}{2}\epsilon_3(vu_{ttt} - uv_{ttt}) + \epsilon_4 u_{tt}v_{tt} + \frac{\gamma_1}{2}u^2v^2 - \frac{\gamma_2}{3}u^3v^3 - \frac{i}{2}vu_z + \frac{i}{2}uv_z \\ &= \boxed{-\epsilon_2 u_t v_t - \frac{i}{2}\epsilon_3(vu_{ttt} - uv_{ttt}) + \epsilon_4 u_{tt}v_{tt} + \frac{\gamma_1}{2}u^2v^2 - \frac{\gamma_2}{3}u^3v^3}\end{aligned}$$

Y calculamos ahora Q_2:

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= \xi_2\mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_t + \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_t \\
&= \frac{1}{\epsilon}(-\epsilon_2 v_t)(-\epsilon u_z) - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_4 v_{tt})(-\epsilon u_z) + \frac{1}{\epsilon}(\epsilon_4 v_{tt})(-\epsilon u_z)_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)(-\epsilon u_z) \\
&+ \frac{1}{\epsilon}\left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)(-\epsilon u_z)_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)(-\epsilon u_z)_t \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon}(-\epsilon_2 u_t)(-\epsilon v_z) - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_4 u_{tt})(-\epsilon v_z) + \frac{1}{\epsilon}(\epsilon_4 u_{tt})(-\epsilon v_z)_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)(-\epsilon v_z) \\
&+ \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)(-i\epsilon v_z)_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)(-\epsilon v_z)_t \\
&= \epsilon_2 v_t u_z + \epsilon_4 v_{ttt}u_z - \epsilon_4 v_{tt}u_{zt} + \frac{i}{2}\epsilon_3 v_{tt}u_z + \frac{i}{2}\epsilon_3 v u_{ztt} - \frac{i}{2}\epsilon_3 v_t u_{zt} \\
&+ \epsilon_2 u_t v_z - \epsilon_4 u_{ttt}v_z - \epsilon_4 u_{tt}v_{zt} - \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{tt}v_z - \frac{i}{2}\epsilon_3 u v_{ztt} + \frac{i}{2}\epsilon_3 u_t v_{zt}
\end{aligned}
$$

Por lo que concluimos que:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&Q_2 = \epsilon_2 v_t u_z + \epsilon_4 v_{ttt}u_z - \epsilon_4 v_{tt}u_{zt} + \frac{i}{2}\epsilon_3 v_{tt}u_z + \frac{i}{2}\epsilon_3 v u_{ztt} - \frac{i}{2}\epsilon_3 v_t u_{zt} \\
&+\epsilon_2 u_t v_z - \epsilon_4 u_{ttt}v_z - \epsilon_4 u_{tt}v_{zt} - \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{tt}v_z - \frac{i}{2}\epsilon_3 u v_{ztt} + \frac{i}{2}\epsilon_3 u_t v_{zt}
\end{aligned}
}
$$

Ya encontrados los valores de Q_1 y Q_2, el teorema de Noether dice que se cumple la ecuación:

$$
\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} = 0
$$

O bien, el enunciado 2 visto en clase dice que si $Q_2(z,t_1) = Q_2(z,t_2) = 0$, entonces la siguiente cantidad:

$$
\int_{t_1}^{t_2} Q_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} -\epsilon_2 u_t v_t - \frac{i}{2}\epsilon_3(v u_{ttt} - u v_{ttt}) + \epsilon_4 u_{tt}v_{tt} + \frac{\gamma_1}{2}u^2v^2 - \frac{\gamma_2}{3}u^3v^3 \;\; dt
$$

No depende de z.

Problemas 33-34

Vuelve a considerar la ecuación y usando el teorema de Noether investiga si hay una cantidad conservada asociada a la transformación:

$$z^* = z \ \ , \ \ t^* = t + \epsilon \ \ , \ \ u^* = u \ \ , \ \ v^* = v$$

En caso de que exista, determina cuál es.

Al igual que antes, el lagrangiano es el siguiente

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(vu_z - uv_z) - \epsilon_2 u_t v_t - \frac{i}{2}\epsilon_3(vu_{ttt} - uv_{ttt}) + \epsilon_4 u_{tt}v_{tt} + \frac{\gamma_1}{2}u^2v^2 - \frac{\gamma_2}{3}u^3v^3$$

Primero vamos a ver que se cumpla que $\delta\mathcal{L} = 0$ para que sea válido usar el teorema de Noether.

De acuerdo a la notación vista en clase, las transformaciones en general son de la forma:

$$\begin{aligned} z^* &= z + \epsilon\xi_1 \\ t^* &= t + \epsilon\xi_2 \\ u^* &= u + \epsilon\phi_1(u) \\ v^* &= v + \epsilon\phi_2(v) \end{aligned}$$

Por lo que en este caso $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, $\phi_1(u) = 0$ y $\phi_2(v) = 0$. Antes de continuar, debemos de calcular el valor de δu y de δv, para lo que usamos las ecuaciones (37) y (38) de las notas:

$$\begin{aligned} \delta u &= \epsilon[\phi_1(u(z,t)) - u_z\xi_1 - u_t\xi_2] = -\epsilon u_t \\ \delta v &= \epsilon[\phi_2(v(z,t)) - v_z\xi_1 - v_t\xi_2] = -\epsilon v_t \end{aligned}$$

Luego, podemos ya calcular la variación de $\mathcal{L}$, que tiene la siguiente expresión según la ecuación (34) de las notas:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} + \cdots + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}\delta v + \cdots$$

Para escribir la forma de $\delta\mathcal{L}$ pertinente para este ejercicio, notamos que $\mathcal{L}$ sólo depende de $u, u_z, u_t, u_{tt}, u_{ttt}, v$, $v_z, v_t, v_{tt}, v_{ttt}$, por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{ttt} + \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{ttt} \end{aligned}$$

Ahora bien, como z no cambia en la transformación, tenemos que $\delta z = 0$, por lo que el primer término de esta expresión es 0. Las derivadas necesarias de $\mathcal{L}$ ya fueron calculadas en el ejercicio anterior, la única derivada adicional que tenemos que calcular es $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = &\frac{i}{2}(vu_{zt} - uv_{zt} + v_tu_z - u_tv_z) - \epsilon_2(u_tv_{tt} + u_{tt}v_t) - \frac{i}{2}\epsilon_3(v_tu_{ttt} + vu_{tttt} - u_tv_{ttt} - uv_{tttt}) + \\ &+ \epsilon_4(u_{ttt}v_{tt} + u_{tt}v_{ttt}) + \gamma_1(uu_tv^2 + vv_tu^2) - \gamma_2(u^2u_tv^3 + v^2v_tu^3) \end{aligned}$$

Ahora que ya tenemos todas las derivadas necesarias, podemos sustituir en la expresión de $\delta\mathcal{L}$:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{ttt} + \\
&+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{ttt} \\
&= \Bigg[\frac{i}{2}(vu_{zt} - uv_{zt} + v_t u_z - u_t v_z) - \epsilon_2(u_t v_{tt} + u_{tt} v_t) - \frac{i}{2}\epsilon_3(v_t u_{ttt} + vu_{tttt} - u_t v_{ttt} - uv_{tttt}) + \\
&+ \epsilon_4(u_{ttt}v_{tt} + u_{tt}v_{ttt}) + \gamma_1(uu_t v^2 + vv_t u^2) - \gamma_2(u^2 u_t v^3 + v^2 v_t u^3)\Bigg]\delta t \\
&+ \left[-\frac{i}{2}v_z + \frac{i}{2}\epsilon_3 v_{ttt} + \gamma_1 uv^2 - \gamma_2 u^2 v^3\right]\delta u \\
&+ \left(\frac{i}{2}v\right)\delta u_z + \left(-\epsilon_2 v_t\right)\delta u_t + \left(\epsilon_4 v_{tt}\right)\delta u_{tt} + \left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)\delta u_{ttt} \\
&+ \left(\frac{i}{2}u_z - \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt} + \gamma_1 u^2 v - \gamma_2 u^3 v^2\right)\delta v + \left(-\frac{i}{2}u\right)\delta v_z + (-\epsilon_2 u_t)\delta v_t + (\epsilon_4 u_{tt})\delta v_{tt} + \left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)\delta v_{ttt}
\end{aligned}
$$

Ahora usamos que $\delta u = -\epsilon u_t$ y que $\delta v = -\epsilon v_t$, además que $\delta u_t = \dfrac{\partial}{\partial t}(\delta u) = \dfrac{\partial}{\partial t}(-\epsilon u_t)$ y similarmente para las otras derivadas (se puede intercambiar δ y $\dfrac{\partial}{\partial z}$ o $\dfrac{\partial}{\partial t}$). También usamos que $\delta t = \epsilon$. Entonces nos queda:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = &\Bigg[\frac{i}{2}(vu_{zt} - uv_{zt} + v_t u_z - u_t v_z) - \epsilon_2(u_t v_{tt} + u_{tt} v_t) - \frac{i}{2}\epsilon_3(v_t u_{ttt} + vu_{tttt} - u_t v_{ttt} - uv_{tttt}) + \\
&+ \epsilon_4(u_{ttt}v_{tt} + u_{tt}v_{ttt}) + \gamma_1(uu_t v^2 + vv_t u^2) - \gamma_2(u^2 u_t v^3 + v^2 v_t u^3)\Bigg](\epsilon) \\
&+ \left[-\frac{i}{2}v_z + \frac{i}{2}\epsilon_3 v_{ttt} + \gamma_1 uv^2 - \gamma_2 u^2 v^3\right](-\epsilon u_t) \\
&+ \left(\frac{i}{2}v\right)(-\epsilon u_t)_z + \left(-\epsilon_2 v_t\right)(-\epsilon u_t)_t + \left(\epsilon_4 v_{tt}\right)(-\epsilon u_t)_{tt} + \left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)(-\epsilon u_t)_{ttt} \\
&+ \left(\frac{i}{2}u_z - \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt} + \gamma_1 u^2 v - \gamma_2 u^3 v^2\right)(-\epsilon v_t) + \left(-\frac{i}{2}u\right)(-\epsilon v_t)_z + (-\epsilon_2 u_t)(-\epsilon v_t)_t + (\epsilon_4 u_{tt})(-\epsilon v_t)_{tt} + \left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)(-\epsilon v_t)_{ttt}
\end{aligned}
$$

Lo cual es igual a:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = \epsilon\Bigg[&\frac{i}{2}vu_{zt} - \frac{i}{2}uv_{zt} + \frac{i}{2}v_t u_z - \frac{i}{2}u_t v_z - \epsilon_2 u_t v_{tt} - \epsilon_2 u_{tt} v_t - \frac{i}{2}\epsilon_3 v_t u_{ttt} - \frac{i}{2}\epsilon_3 vu_{tttt} + \frac{i}{2}\epsilon_3 u_t v_{ttt} + \frac{i}{2}\epsilon_3 uv_{tttt} \\
&+ \epsilon_4 u_{ttt}v_{tt} + \epsilon_4 u_{tt}v_{ttt} + \gamma_1 uu_t v^2 + \gamma_1 vv_t u^2 - \gamma_2 u^2 u_t v^3 - \gamma_2 v^2 v_t u^3 \\
&+ \frac{i}{2}u_t v_z - \frac{i}{2}\epsilon_3 v_{ttt}u_t - \gamma_1 uv^2 u_t + \gamma_2 u^2 v^3 u_t \\
&- \frac{i}{2}vu_{tz} + \epsilon_2 v_t u_{tt} - \epsilon_4 v_{tt}u_{ttt} + \frac{i}{2}\epsilon_3 vu_{tttt} \\
&- \frac{i}{2}u_z v_t + \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt}v_t - \gamma_1 u^2 vv_t + \gamma_2 u^3 v^2 v_t + \frac{i}{2}uv_{tz} + \epsilon_2 u_t v_{tt} - \epsilon_4 u_{tt}v_{ttt} - \frac{i}{2}\epsilon_3 uv_{tttt}\Bigg]
\end{aligned}
$$

En esta última expresión, se puede ver que cada uno de los términos se cancela a pares, por lo que $\boxed{\delta\mathcal{L} = 0}$. Entonces, podemos aplicar el teorema de Noether.

Ahora sí podemos encontrar la ley de conservación, simplemente calculamos Q_1 y Q_2 para este caso. Para hacerlo, usamos que $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, $\delta u = -\epsilon u_t$, $\delta v = -\epsilon v_t$.

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \xi_1 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{i}{2}v\right)(-\epsilon u_t) + \frac{1}{\epsilon}\left(-\frac{i}{2}u\right)(-\epsilon v_t) \\
&= \boxed{\frac{i}{2}(v u_t + u v_t)}
\end{aligned}
$$

Y calculamos ahora Q_2:

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= \xi_2 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_t + \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_t \\
&= \frac{i}{2}(v u_z - u v_z) - \epsilon_2 u_t v_t - \frac{i}{2}\epsilon_3(v u_{ttt} - u v_{ttt}) + \epsilon_4 u_{tt} v_{tt} + \frac{\gamma_1}{2}u^2 v^2 - \frac{\gamma_2}{3}u^3 v^3 \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon}(-\epsilon_2 v_t)(-\epsilon u_t) - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_4 v_{tt})(-\epsilon u_t) + \frac{1}{\epsilon}(\epsilon_4 v_{tt})(-\epsilon u_t)_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)(-\epsilon u_t) \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon}\left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)(-\epsilon u_t)_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)(-\epsilon u_t)_t \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon}(-\epsilon_2 u_t)(-\epsilon v_t) - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_4 u_{tt})(-\epsilon v_t) + \frac{1}{\epsilon}(\epsilon_4 u_{tt})(-\epsilon v_t)_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)(-\epsilon v_t) \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)(-\epsilon v_t)_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)(-\epsilon v_t)_t \\
&= \frac{i}{2}(v u_z - u v_z) - \epsilon_2 u_t v_t - \frac{i}{2}\epsilon_3(v u_{ttt} - u v_{ttt}) + \epsilon_4 u_{tt} v_{tt} + \frac{\gamma_1}{2}u^2 v^2 - \frac{\gamma_2}{3}u^3 v^3 \\
&\quad + \epsilon_2 v_t u_t + \epsilon_4 v_{ttt} u_t - \epsilon_4 v_{tt} u_{tt} + \frac{i}{2}\epsilon_3 v_{tt} u_t + \frac{i}{2}\epsilon_3 v u_{ttt} - \frac{i}{2}\epsilon_3 v_t u_{tt} \\
&\quad + \epsilon_2 u_t v_t - \epsilon_4 u_{ttt} v_t - \epsilon_4 u_{tt} v_{tt} - \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{tt} v_t - \frac{i}{2}\epsilon_3 u v_{ttt} + \frac{i}{2}\epsilon_3 u_t v_{tt} \\
&= \frac{i}{2}(v u_z - u v_z) + \epsilon_2 u_t v_t - \epsilon_4 u_{tt} v_{tt} + \epsilon_4 v_{ttt} u_t - \epsilon_4 u_{ttt} v_t - i\epsilon_3 v_t u_{tt} + i\epsilon v_{tt} u_t + \frac{\gamma_1}{2}u^2 v^2 - \frac{\gamma_2}{3}u^3 v^3
\end{aligned}
$$

Por lo que concluimos que:

$$
\boxed{Q_2 = \frac{i}{2}(v u_z - u v_z) + \epsilon_2 u_t v_t - \epsilon_4 u_{tt} v_{tt} + \epsilon_4 v_{ttt} u_t - \epsilon_4 u_{ttt} v_t - i\epsilon_3 v_t u_{tt} + i\epsilon v_{tt} u_t + \frac{\gamma_1}{2}u^2 v^2 - \frac{\gamma_2}{3}u^3 v^3}
$$

Ya encontrados los valores de Q_1 y Q_2, el teorema de Noether dice que se cumple la ecuación:

$$
\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} = 0
$$

O bien, el enunciado 2 visto en clase dice que si $Q_2(z, t_1) = Q_2(z, t_2) = 0$, entonces la siguiente cantidad:

$$
\int_{t_1}^{t_2} Q_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{i}{2}(v u_t + u v_t)\ dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{i}{2} d(uv) = \frac{i}{2}(uv)\Big|_{t_1}^{t_2}
$$

No depende de z.

Problema 35-36

Vuelve a considerar la ecaución (1) y usando el teorema de Noether investiga si hay una cantidad conservada asociada a la transformación:

$$z^* = z \ , \ t^* = t \ , \ u^* = u + i\epsilon u \ , \ v^* = v - i\epsilon v$$

En caso de que exista, determina cuál es.

Al igual que antes, el lagrangiano es el siguiente

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(vu_z - uv_z) - \epsilon_2 u_t v_t - \frac{i}{2}\epsilon_3(vu_{ttt} - uv_{ttt}) + \epsilon_4 u_{tt} v_{tt} + \frac{\gamma_1}{2}u^2v^2 - \frac{\gamma_2}{3}u^3v^3$$

Primero vamos a ver que se cumpla que $\delta\mathcal{L} = 0$ para que sea válido usar el teorema de Noether.

De acuerdo a la notación vista en clase, las transformaciones en general son de la forma:

$$\begin{aligned} z^* &= z + \epsilon\xi_1 \\ t^* &= t + \epsilon\xi_2 \\ u^* &= u + \epsilon\phi_1(u) \\ v^* &= v + \epsilon\phi_2(v) \end{aligned}$$

Por lo que en este caso $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\phi_1(u) = iu$ y $\phi_2(v) = -iv$. Antes de continuar, debemos de calcular el valor de δu y de δv, para lo que usamos las ecuaciones (37) y (38) de las notas:

$$\begin{aligned} \delta u &= \epsilon[\phi_1(u(z,t)) - u_z\xi_1 - u_t\xi_2] = i\epsilon u \\ \delta v &= \epsilon[\phi_2(v(z,t)) - v_z\xi_1 - v_t\xi_2] = -i\epsilon v \end{aligned}$$

Luego, podemos ya calcular $\delta\mathcal{L}$, tenemos que esta variación es:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{ttt} + \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{ttt} \end{aligned}$$

Como t y z no cambian, se tiene que $\delta z = \delta t = 0$, por lo que los primeros dos términos son cero. El resto de los términos se pueden sustituir con las derivadas que encontramos antes.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{ttt} + \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{ttt} \\ \\ &= \left[-\frac{i}{2}v_z + \frac{i}{2}\epsilon_3 v_{ttt} + \gamma_1 uv^2 - \gamma_2 u^2v^3\right]\delta u \\ &+ \left(\frac{i}{2}v\right)\delta u_z + \left(-\epsilon_2 v_t\right)\delta u_t + \left(\epsilon_4 v_{tt}\right)\delta u_{tt} + \left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)\delta u_{ttt} \\ &+ \left(\frac{i}{2}u_z - \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt} + \gamma_1 u^2 v - \gamma_2 u^3v^2\right)\delta v + \left(-\frac{i}{2}u\right)\delta v_z + (-\epsilon_2 u_t)\delta v_t + (\epsilon_4 u_{tt})\delta v_{tt} + \left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)\delta v_{ttt} \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $\delta u = i\epsilon u, \delta v = -i\epsilon v$.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = &\left[-\frac{i}{2}v_z + \frac{i}{2}\epsilon_3 v_{ttt} + \gamma_1 uv^2 - \gamma_2 u^2v^3\right](i\epsilon u) \\ &+ \left(\frac{i}{2}v\right)(i\epsilon u)_z + \left(-\epsilon_2 v_t\right)(i\epsilon u)_t + \left(\epsilon_4 v_{tt}\right)(i\epsilon u)_{tt} + \left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)(i\epsilon u)_{ttt} \\ &+ \left(\frac{i}{2}u_z - \frac{i}{2}\epsilon_3 u_{ttt} + \gamma_1 u^2v - \gamma_2 u^3v^2\right)(-i\epsilon v) + \left(-\frac{i}{2}u\right)(-i\epsilon v)_z + (-\epsilon_2 u_t)(-i\epsilon v)_t + (\epsilon_4 u_{tt})(-i\epsilon v)_{tt} + \left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)(-i\epsilon v)_{ttt} \end{aligned}$$

Lo cual se reduce a:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = \epsilon\Big[&\frac{1}{2}v_z u - \frac{1}{2}\epsilon_3 v_{ttt}u + i\gamma_1 u^2v^2 - i\gamma_2 u^3v^3\\ &- \frac{1}{2}vu_z - i\epsilon_2 v_t u_t + i\epsilon_4 u_{tt}v_{tt} + \frac{1}{2}\epsilon_3 v u_{ttt}\\ &+ \frac{1}{2}u_z v - \frac{1}{2}\epsilon_3 u_{ttt}v - i\gamma_1 u^2v^2 + i\gamma_2 u^3v^3 - \frac{1}{2}uv_z + i\epsilon_2 u_t v_t - i\epsilon_4 u_{tt}v_{tt} + \frac{1}{2}\epsilon_3 u v_{ttt}\Big]\end{aligned}$$

Se puede revisar que cada término en esta expresión se cancela en parejas, por lo que se tiene que $\delta\mathcal{L} = 0$ y es válido usar el teorema de Noether.

Ahora sí podemos encontrar la ley de conservación, simplemente calculamos Q_1 y Q_2 para este caso. Para hacerlo, usamos que $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\delta u = i\epsilon u$, $\delta v = -i\epsilon v$.

$$\begin{aligned}Q_1 &= \xi_1\mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_z}\delta v\\ &= \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{i}{2}v\right)(i\epsilon u) + \frac{1}{\epsilon}\left(-\frac{i}{2}u\right)(-i\epsilon v)\\ &= -\frac{1}{2}uv - \frac{1}{2}uv\\ &= \boxed{-uv}\end{aligned}$$

Y calculamos ahora Q_2:

$$\begin{aligned}Q_2 = \xi_2\mathcal{L} &+ \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\delta u_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ttt}}\delta u_t +\\ &+ \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t}\delta v - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\right)\delta v + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\delta v_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{ttt}}\delta v_t\\ = &\frac{1}{\epsilon}(-\epsilon_2 v_t)(i\epsilon u) - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_4 v_{tt})(i\epsilon u) + \frac{1}{\epsilon}(\epsilon_4 v_{tt})(i\epsilon u)_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)(i\epsilon u)\\ &+ \frac{1}{\epsilon}\left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)(i\epsilon u)_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{i}{2}\epsilon_3 v\right)(i\epsilon u)_t\\ &+ \frac{1}{\epsilon}(-\epsilon_2 u_t)(-i\epsilon v) - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_4 u_{tt})(-i\epsilon v) + \frac{1}{\epsilon}(\epsilon_4 u_{tt})(-i\epsilon v)_t + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)(-i\epsilon v)\\ &+ \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)(-i\epsilon v)_{tt} - \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i}{2}\epsilon_3 u\right)(-i\epsilon v)_t\\ = &-i\epsilon_2 v_t u - i\epsilon_4 v_{ttt}u + i\epsilon_4 v_{tt}u_t + \frac{1}{2}\epsilon_3 v_{tt}u + \frac{1}{2}\epsilon_3 v u_{tt} + \frac{1}{2}\epsilon_3 v_t u_t\\ &+ i\epsilon_2 u_t v + i\epsilon_4 u_{ttt}v - i\epsilon_4 u_{tt}v_t + \frac{1}{2}\epsilon_3 u_{tt}v + \frac{1}{2}\epsilon_3 u v_{tt} - \frac{1}{2}\epsilon_3 u_t v_t\\ = &\, i\epsilon_2(u_t v - v_t u) + i\epsilon_4(u_{ttt}v - v_{ttt}u) + i\epsilon_4(v_{tt}u_t - u_{tt}v_t) + \epsilon_3(u_{tt}v + v_{tt}u)\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que:

$$\boxed{Q_2 = i\epsilon_2(u_t v - v_t u) + i\epsilon_4(u_{ttt}v - v_{ttt}u) + i\epsilon_4(v_{tt}u_t - u_{tt}v_t) + \epsilon_3(u_{tt}v + v_{tt}u)}$$

Ya encontrados los valores de Q_1 y Q_2, el teorema de Noether dice que se cumple la ecuación:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} = 0$$

O bien, el enunciado 2 visto en clase dice que si $Q_2(z,t_1) = Q_2(z,t_2) = 0$, entonces la siguiente cantidad:

$$\int_{t_1}^{t_2} Q_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} (-uv) \ dt = -\int_{t_1}^{t_2} |u|^2 dt$$

No depende de z.

Problemas 37-42

Supón que tienes alguna generalización fraccionaria de la ec. NLS que además de involucrar derivadas de orden entero de la función incógnita, $u(z,t)$, involucra también las derivadas fraccionarias izquierda y derecha de Grünwald-Letnikov (a las cuales denotaremos como $D_i(u)$ y $D_d(u)$). Si esa ecuación tiene lagrangiana, entonces tendremos que la lagrangiana será una función de la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_z, u_t, D_i(u), D_d(u), \cdots, v, v_z, v_t, D_i(v), D_d(v))$$

Donde hemos usado la letra v para denotar al complejo conjugado de u.

Demuestra que el principio de mínima acción implica que las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a una lagrangiana de la forma (2) son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} + D_i\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(u)}\right] + D_d\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(u)}\right] = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{tt}} + D_i\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(v)}\right] + D_d\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(v)}\right] = 0$$

Puesto que estas ecuaciones se obtienen mediante el principio de mínima acción, el punto de partida de la demostración es la integral de acción. Por lo tanto, explica paso a paso TODOS los pasos que hay que seguir para que, empezando con la integral de acción, lleguemos a las ecs. (3a)-(3b).

Como dice el enunciado, empezamos con la integral de acción, la cual se define como sigue:

$$S[u(z,t), v(z,t)] = \int\int \mathcal{L}(u, u_z, u_t, D_i(u), D_d(u), \cdots, v, v_z, v_t, D_i(v), D_d(v))drdz$$

El objetivo es encontrar la ecuación diferencial que debe de cumplir u para que $\delta S = 0$, es decir, que u extremiza a $S[u]$. En general pensaremos en u y v como funciones independientes y primero encontraremos la ecuación de Euler Lagrange que se obtiene variando solamente u.

Para encontrar la condición que debe de cumplir la u para que $\delta S = 0$, supongamos que $u(z,t)$ ya es una función que extremiza a $S[u]$ (es decir, se cumple $\delta S[u] = 0$) y sujeta a ciertas condiciones de frontera (digamos que la frontera del problema es el conjunto C, las condiciones dicen que u debe de tener cierto valor sobre C).

Como u extremiza a S, se debe de tener que para pequeñas perturbaciones de u, S no cambia, es decir $\delta S[u] = 0$. Sea g^α el resultado de una perturbación aplicada a u como sigue:

$$g^\alpha(t,z) = u(t,z) + \alpha\eta(t,z)$$

Donde $\eta(t,z)$ es una función diferenciable y tal que vale 0 en toda la frontera C (para que así si u cumple las condiciones de frontera, también lo hace g^α).

Como S se extremiza en u, cuando $\alpha = 0$, el valor S alcanza un extremo. Definimos ahora:

$$S(\alpha) = \int\int \mathcal{L}(g^\alpha, g^\alpha_z, g^\alpha_t, g^\alpha_{tt}, D_i(g^\alpha), D_d(g^\alpha))dtdz$$

Es decir, $S(\alpha)$ es el funcional S aplicado sobre la función g^α. Como S alcanza un extremo cuando $\alpha = 0$, se debe de tener que $\left.\frac{dS}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$. Buscaremos calcular $\frac{dS}{d\alpha}$ y luego usaremos el hecho que esta derivada vale 0 en $\alpha = 0$. Pero antes de usar esto, calculemos la derivada como tal:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}\int\int \mathcal{L}(g^\alpha, g_z^\alpha, g_t^\alpha, g_{tt}^\alpha, D_i(g^\alpha), D_d(g^\alpha))dtdz \\ &= \int\int \frac{d}{d\alpha}\mathcal{L}(g^\alpha, g_z^\alpha, g_t^\alpha, g_{tt}^\alpha, D_i(g^\alpha), D_d(g^\alpha))dtdz \qquad (1)\end{aligned}$$

Necesitamos entonces la derivada total de $\mathcal{L}$ respecto a α, la cual por definición de derivada total, se calcula como sigue:

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^\alpha}\frac{\partial g^\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_z^\alpha}\frac{\partial g_z^\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_t^\alpha}\frac{\partial g_t^\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{tt}^\alpha}\frac{\partial g_{tt}^\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_i(g^\alpha)}\frac{\partial D_i(g^\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_d(g^\alpha)}\frac{\partial D_d(g^\alpha)}{\partial\alpha}$$

Pero por la definición de $g^\alpha(t,z) = u(t,z) + \alpha\eta(t,z)$, se tienen las siguientes derivadas:

- $\dfrac{\partial g^\alpha}{\partial\alpha} = \eta$
- $\dfrac{\partial g_z^\alpha}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}(u_z + \alpha\eta_z) = \eta_z$
- $\dfrac{\partial g_t^\alpha}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}(u_t + \alpha\eta_t) = \eta_t$
- $\dfrac{\partial g_{tt}^\alpha}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}(u_{tt} + \alpha\eta_{tt}) = \eta_{tt}$
- $\dfrac{\partial D_i(g^\alpha)}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}(D_i(u) + \alpha D_i(\eta_{tt})) = D_i(\eta_{tt})$
- $\dfrac{\partial D_d(g^\alpha)}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}(D_d(u) + \alpha D_d(\eta_{tt})) = D_d(\eta_{tt})$

Por lo que tenemos que la derivada total de $\mathcal{L}$ respecto a α es:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^\alpha}\frac{\partial g^\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_z^\alpha}\frac{\partial g_z^\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_t^\alpha}\frac{\partial g_t^\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{tt}^\alpha}\frac{\partial g_{tt}^\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_i(g^\alpha)}\frac{\partial D_i(g^\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_d(g^\alpha)}\frac{\partial D_d(g^\alpha)}{\partial\alpha} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^\alpha}\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_z^\alpha}\eta_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_t^\alpha}\eta_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{tt}^\alpha}\eta_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_i(g^\alpha)}D_i(\eta) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_d(g^\alpha)}D_d(\eta)\end{aligned}$$

Por lo tanto, regresando a la expresión (1), tenemos que:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int\int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^\alpha}\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_z^\alpha}\eta_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_t^\alpha}\eta_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{tt}^\alpha}\eta_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_i(g^\alpha)}D_i(\eta) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_d(g^\alpha)}D_d(\eta)\ \ dtdz$$

Como dijimos antes, cuando $\alpha = 0$, esta derivada vale 0. Y además, $g^0 = u$. Por lo que se sigue que:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \boxed{\int\int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_z}\eta_z + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\eta_t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\eta_{tt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_i(u)}D_i(\eta) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_d(u)}D_d(\eta)\ \ dtdz = 0} \qquad (2)$$

Vamos a trabajar la integral (2) en 5 partes distintas para simplificar cada una por separado:

1. $\int\int \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\eta$

   A esta primera parte no le haremos nada.

2. $\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\eta_t \; dtdz$

Para calcular esta integral, primero notamos que:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\frac{\partial}{\partial z}(\eta) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\eta_z}\right)\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta_z \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\eta\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\frac{\partial}{\partial t}(\eta) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\eta_t \quad (4)$$

Y entonces por (3) tenemos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\eta$$

Y por (4) tenemos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\eta_t}\delta u_t = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\eta\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\eta$$

Sustituimos estas dos expresiones en la integral que queremos calcular:

$$\begin{aligned}\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta_z+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\eta_t \; dtdz &= \int\int \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\eta + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\eta\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\eta \;\; dtdz \\ &= \int\int \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\eta\right] \; dtdz + \int\int -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\eta - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\eta \, dtdz \quad (5)\end{aligned}$$

En esta última expresión la primera integral se puede calcular usando la fórmula de Green $\int\int_D \; \partial_z N + \partial_t M \; dtdz = \int_C N \; dt - M \; dz$. Con C la frontera del conjunto D sobre el que estamos integrando. Por lo que la primera integral de la expresión (5) es igual a:

$$\begin{aligned}\int\int \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\eta\right] \; dtdz &= \int_C \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta\right] \; dt - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\eta\right] \; dz \\ &= \int_C \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \; dt - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \; dz\right]\eta\end{aligned}$$

Pero esta integral vale 0 debido a que en el contorno C la función $\eta = 0$, como se mencionó antes.

Por lo tanto, igualando a 0 la primera integral del lado derecho de (5), tenemos que la integral que buscábamos es:

$$\boxed{\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\eta_t \; dtdz = \int\int -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\eta - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\eta \, dtdz} \quad (6)$$

3. $\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\eta_{tt} \; dtdz$

Para resolver esta integral, integramos por partes primero respecto a t:

$$\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \eta_{tt}\, dtdz = \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \right) \eta_t \Big|_{t_0}^{t_1} - \int \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \right) \eta_t\, dt \right] dz$$

Pero la variación η se anula en los extremos, por lo que $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \right) \eta_t \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$

$$= - \int\int \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \right) \eta_t\, dzdt$$

Ahora integramos por partes respecto a z:

$$= - \int \left[\partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \right) \eta \Big|_{z_0}^{z_1} - \int \partial_t \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \right) \eta\, dz \right] dt$$

η se anula en los extremos por lo que el primer término es 0 y nos queda:

$$= \int\int \partial_t \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \right) \eta\, dzdt$$

Por lo que concluimos que:

$$\boxed{\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \eta_{tt}\, dtdz = \int\int \partial_t \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \right) \eta\, dzdt} \quad (7)$$

4. $\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(u)} D_i(\eta) dtdz$

   Para esta integral usaremos la identidad que siguen las derivadas fraccionarias (que es como un tipo de integración por partes):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) D_i[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} D_d[f(t)] g(t) dt$$

   Aplicamos esta identidad a la integral que queremos calcular y nos queda que:

$$\begin{aligned} \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(u)} D_i(\eta) dtdz &= \int \left[\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(u)} D_i(\eta) dt \right] dz \\ &= \int \left[\int D_d \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(u)} \right) \eta dt \right] dz \\ &= \boxed{\int\int D_d \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(u)} \right) \eta dtdz} \end{aligned} \quad (8)$$

5. $\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(u)} D_d(\eta) dtdz$

   Para esta integral usaremos la misma identidad que en la anterior

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) D_i[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} D_d[f(t)] g(t) dt$$

   Aplicamos esta identidad a la integral que queremos calcular y nos queda que:

$$\begin{aligned} \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(u)} D_d(\eta) dtdz &= \int \left[\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(u)} D_d(\eta) dt \right] dz \\ &= \int \left[\int D_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(u)} \right) \eta dt \right] dz \\ &= \boxed{\int\int D_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(u)} \right) \eta dtdz} \end{aligned} \quad (9)$$

Ahora sí regresamos a la expresión (2) y sustituimos estas integrales (6) (7) , (8) y (9) que conseguimos:

$$\int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\eta_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\eta_{tt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(u)}D_i(\eta) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(u)}D_d(\eta) \;\; dtdz = 0$$

$$\Rightarrow \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\eta \; dtdz + \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\eta_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\eta_t \; dtdz + \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\eta_{tt} \; dtdz$$

$$+ \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(u)}D_i(\eta) \; dtdz + \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(u)}D_d(\eta) \; dtdz = 0$$

sustiuimos las integrales 6,7,8,9:

$$\Rightarrow \int\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\eta + \int\int -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right)\eta - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\eta \; dtdz + \int\int \partial_t \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right)\eta \; dtdz$$

$$+ \int\int D_d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(u)}\right)\eta \; dtdz + \int\int D_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(u)}\right)\eta \; dtdz = 0$$

$$\Rightarrow \int\int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) + \partial_t^2\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right) + D_d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(u)}\right) + D_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(u)}\right)\right]\eta \; dtdz = 0$$

Pero como esto se debe de valer para cualquier variación η, debemos de tener que el término entre corchetes es igual a 0, es decir:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) + \partial_t^2\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right) + D_d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(u)}\right) + D_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(u)}\right) = 0}$$

Que es la ecuación de Euler Lagrange para este caso.

Para v el procedimiento seguido es exactamente el mismo, sólo que ahora las variaciones se hacen en la función v. El resultado es entonces una ecuación diferencial muy similar pero con v en vez de u:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t}\right) + \partial_t^2\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{tt}}\right) + D_d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i(v)}\right) + D_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_d(v)}\right) = 0}$$