Tomás Ricardo Basile Álvarez

Dinámica de Medios Deformables

Examen 1

Resolver 4 problemas.

2. A partir de las ecuaciones de continuidad y momento Eulerianas, deducir la "ley de Newton"

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \rho \vec{g}$$

La ecuación de momento en forma Euleriana es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla\cdot(\rho v_i \vec{v}) + \nabla\cdot(P\hat{e}_i) = 0$$

que en forma indicial se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0$$

Si consideramos una fuerza exterior (que en este caso es la gravitacional), hay que agregar el término $f_i = \rho g_i$ ← Fuerza gravitacional del lado derecho

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \rho g_i \qquad (1)$$

Usamos la regla del producto en el primer y segundo término de (1)

- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho}{\partial t}$
- $\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left((\rho v_j)v_i\right) = \rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i\frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j}$

Sustituyendo en 1 queda:

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i\frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \rho g_i$$

$$\Rightarrow \rho\underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)}_{2} + v_i\underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j}\right)}_{3} = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i}$$ ← factorizamos $\rho$, $v_i$

Los términos 2 y 3 se simplifican, pues:

2. $\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{dv_i}{dt}$ por como se pasa de la derivada Euleriana a la Lagrangiana
3. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0$ , ya que es la ec. de continuidad en notación indicial

Sustituyendo esto, tenemos que

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{dv_i}{dt}\right) + v_i(0) = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} \Rightarrow \rho\frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i$$

Esto último es la forma indicial de la ley de Newton

$$\boxed{\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \rho\vec{g}}$$

3. Para un flujo isotérmico, la ecuación de energía queda reemplazada por $P = \rho c_0^2$

a) Plantear las ecuaciones de Euler 1D isotérmicas.

Empezamos escribiendo las ecuaciones de Euler de continuidad y momento en 3D

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j + P\delta_{ij}) = 0$$

Como sólo nos interesan las ecuaciones 1D, ignoramos los términos con derivadas respecto a $y$, $z$: (y denotamos por $u$ a la velocidad en $x$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) = 0$$

A estas ecuaciones les agregamos la de energía isotérmica, que según el enunciado es $P = c_0^2 \rho$. Reemplazamos entonces $P = c_0^2 \rho$ en lo que teníamos:

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + c_0^2 \rho) = 0}$$

Estas son las ecuaciones de un fluido isotérmico en 1D.

b) Proponiendo una perturbación pequeña de la densidad y la velocidad sobre un medio estático y homogéneo, encontrar las ecuaciones linealizadas.

En un medio homogéneo, la densidad es $\rho_0$ y en uno estático, la velocidad es 0. Para perturbar estas variables, diremos que la densidad y velocidad perturbadas son:

$$\rho = \rho_0 + \rho' \qquad u = u'$$

donde $\rho' << \rho_0$ y $u'$ es mucho menor a la velocidad del sonido en el medio.

Introducimos estas expresiones en las ecuaciones del inciso anterior:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + c_0^2 \rho) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((\rho_0 + \rho')u') = 0 \quad , \quad \frac{\partial((\rho_0 + \rho')u')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left((\rho_0 + \rho')u'^2 + c_0^2(\rho_0 + \rho')\right) = 0$$

Usamos que $\rho_0$ es cte. y sus derivadas son 0

$$\rightarrow \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho' u') = 0 \quad , \quad \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho' u') + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} u'^2 + \frac{\partial}{\partial x}(\rho' u'^2) + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$$

Despreciamos productos de cantidades pequeñas como $u'^2$, $\rho' u'$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad , \quad \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0}$$

Ecuaciones de las perturbaciones linealizadas

4. Combinar las ecuaciones linealizadas de 3. para encontrar la ecuación diferencial para la perturbación de $U$.

Las ecuaciones linealizadas a las que llegamos son:

1) $\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial U'}{\partial x} = 0$ 2) $\rho_0 \frac{\partial U'}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$

Para combinarlas, podemos derivar 1) respecto a $X$ y derivar 2) respecto a $t$, así ambas tendrán el término $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial t}$ y podemos igualarlo.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(1) = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial t} + \rho_0 \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} = 0 \quad \ldots (1')$$

← Donde usamos que $\rho_0$ es cte.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(2) = \rho_0 \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} + c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t \partial x} = 0 \quad \ldots (2')$$

Por la ecuación $1'$ tenemos $\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial t} = -\rho_0 \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2}$, lo cual podemos sustituir en el término $\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t \partial x}$ de $(2')$ (tomando en cuenta que no importa el orden de las derivadas, por lo que $\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t \partial x}$). Entonces $(2')$ queda como:

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} + c_0^2 \left( -\rho_0 \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} - \rho_0 c_0^2 \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} = 0$$

← Dividimos por $\rho_0$

$$\Rightarrow \underline{\frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} = 0}$$

Esta es una <u>ecuación de onda</u> para la variable $U$ y con velocidad $c_0$.

Su solución más general es bien conocida y es:

$$U'(x,t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

con $f$ y $g$ funciones arbitrarias.

$f$ indica una onda que viaja en la dirección $+X$ con velocidad $c_0$

y $g$ una onda que viaja en dirección $-X$ con velocidad $c_0$

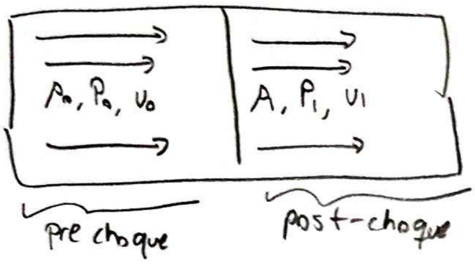
Es decir, las perturbaciones de $U'$ viajan siguiendo la ecuación de onda a velocidad $c_0$

5. Partiendo de las ecuaciones de continuidad y momento estacionarias (i.e. $\partial/\partial t = 0$) demostrar que un choque isotérmico tiene la compresión

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = M_0^2$$

con $M_0 = u_0/c_0$, donde $c_0 = \sqrt{P_0/\rho_0}$ es la "velocidad del sonido isotérmica"

Consideramos un choque como el que se muestra a continuación




Las ecuaciones de Euler que describen este sistema (considerando que es isotérmico) son las halladas en 3.a)

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + c_0^2 \rho) = 0$$

Tomamos un sistema de referencia que se mueve con el choque, lo que hace que no haya dependencia temporal en las variables (i.e $\partial/\partial t = 0$)

$$\rightarrow 0 + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad , \quad 0 + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + c_0^2 \rho) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + c_0^2 \rho) = 0$$

En ambas ecuaciones tenemos una cantidad derivada respecto a $x$ igualada a 0, lo que implica que son ctes

$$\rightarrow \rho u = cte \qquad \rho u^2 + c_0^2 \rho = cte$$

Como estas cantidades son constantes en el espacio, podemos igualar sus valores pre choque y post choque y llegamos a:

$$\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1 \quad (1) \qquad , \qquad \rho_0 u_0^2 + c_0^2 \rho_0 = \rho_1 u_1^2 + c_0^2 \rho_1 \quad (2)$$

Despejamos $\rho_1$ de (1) y obtenemos $\rho_1 = \frac{u_0}{u_1}\rho_0$ y sustituimos en (2)

$$\rightarrow \rho_0 u_0^2 + c_0^2 \rho_0 = \frac{u_0}{u_1}\rho_0 u_1^2 + c_0^2 \frac{u_0}{u_1}\rho_0$$

$$\rightarrow u_0^2 + c_0^2 = \frac{u_0}{u_1} u_1^2 + c_0^2 \frac{u_0}{u_1} \qquad \leftarrow \text{Dividimos por } \rho_0$$

$$\rightarrow u_1 u_0^2 + u_1 c_0^2 = u_0 u_1^2 + c_0^2 u_0 \qquad \leftarrow \text{multiplicamos por } u_1$$

$$\rightarrow u_1 u_0^2 - u_0 u_1^2 = u_0 c_0^2 - u_1 c_0^2 \qquad \leftarrow \text{reordenamos}$$

$$\rightarrow u_1 u_0 (u_0 - u_1) = c_0^2 (u_0 - u_1)$$

De aquí se puede obtener como solución $u_0 = u_1$, pero ésta implica que las variables pre- y post-choque son iguales, lo que es una solución trivial que no nos dice nada. $\therefore$ Suponemos que $u_0 - u_1 \neq 0$ y dividimos por esta cantidad

$$\rightarrow u_1 u_0 = c_0^2$$

$$\rightarrow u_1 = \frac{c_0^2}{u_0}$$

Finalmente usamos de nuevo (1) para obtener $\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1$

$$\rightarrow \rho_1 = \rho_0 \frac{u_0}{u_1}$$

$$\rightarrow \rho_1 = \rho_0 \frac{u_0}{\left(\frac{c_0^2}{u_0}\right)}$$ (por el resultado de $u_1$)

$$\rightarrow \rho_1 = \rho_0 \frac{u_0^2}{c_0^2}$$

$$\rightarrow \rho_1 = \rho_0 M_0^2$$ ← por la def. de $M_0^2$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\rho_1}{\rho_0} = M_0^2}$$

Que es lo que se buscaba.