Mecánica analítica: Tarea 2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

4 de noviembre de 2020

1) **Encuentre las componentes covariantes de la velocidad y aceleración en coordenadas esféricas. Utilice estas componentes para obtener los vectores velocidad y aceleración**

Primero que nada, $\vec{r}$ en coordenadas esféricas es:
$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\widehat{i} + r\sin\theta\sin\phi\widehat{j} + r\cos\theta\widehat{k}$
Y entonces los vectores base y sus correspondientes elementos de escala son:

- $\vec{b}_r = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\widehat{i} + \sin\theta\sin\phi\widehat{j} + \cos\theta\widehat{k} \quad\Rightarrow\quad h_r = |\vec{b}_r| = 1$
- $\vec{b}_\theta = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\phi\widehat{i} + r\cos\theta\sin\phi\widehat{j} - r\sin\theta\widehat{k} \quad\Rightarrow\quad h_\theta = |\vec{b}_\theta| = r$
- $\vec{b}_\phi = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = -r\sin\theta\sin\phi\widehat{i} + r\sin\theta\cos\phi\widehat{j} \quad\Rightarrow\quad h_\phi = |\vec{b}_\phi| = r\sin\theta$

Luego, como las coordenadas esféricas son una base ortogonal, vimos en clase que la norma al cuadrado de la velocidad está dada por:

$$\begin{aligned} v^2 &= \sum_{i=1}^{3} h_i^2\dot{q}_i^2 \\ &= h_r^2\dot{r}^2 + h_\theta^2\dot{\theta}^2 + h_\phi^2\dot{\phi}^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\;\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

Luego, por lo visto en clase, las componentes covariantes de la velocidad se pueden obtener a partir de conocer v^2 con la fórmula $v_i = \dfrac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\dfrac{1}{2}v^2\right)$.
Entonces, tenemos que las componentes covariantes de la velocidad en este caso son:

- $v_r = \dfrac{\partial}{\partial\dot{r}}\left(\dfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\;\dot{\phi}^2)\right) = \dot{r}$
- $v_\theta = \dfrac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\dfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\;\dot{\phi}^2)\right) = r^2\dot{\theta}$

- $v_\phi = \dfrac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\dfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2)\right) = r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}$

Luego, ya conseguimos los componentes covariantes de la velocidad. Estos componentes son los componentes de la velocidad en la base recíproca, es decir, podemos escribir al vector velocidad como:

$$\vec{v} = v_r\vec{\mathfrak{b}}_r + v_\theta\vec{\mathfrak{b}}_\theta + v_\phi\vec{\mathfrak{b}}_\phi$$

Donde los vectores $\vec{\mathfrak{b}}$ son los de la base recíproca. Pero, como las coordenadas esféricas son una base ortogonal, entonces los vectores recíprocos se obtienen de una forma sencilla como: $\vec{\mathfrak{b}}_i = \dfrac{\vec{e}_i}{h_i}$.
Entonces, la expresión para el vector velocidad queda como:

$$\vec{v} = v_r\frac{\vec{e}_r}{|h_r|} + v_\theta\frac{\vec{e}_\theta}{|h_\theta|} + v_\phi\frac{\vec{e}_\phi}{|h_\phi|}$$

Aquí ya podemos sustituir los componentes covariantes encontrados y obtenemos:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\dot{r}}{1}\vec{e}_r + \frac{r^2\dot{\theta}}{r}\vec{e}_\theta + \frac{r^2\sin^2\theta\dot{\phi}}{r\sin\theta}\vec{e}_\phi \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi\end{aligned}$$

Y esta es la expresión que se buscaba.

Aceleración: Ahora podemos calcular los componentes covariantes de la aceleración a partir de v^2 con la fórmula que vimos en clase $a_i = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\dfrac{1}{2}v^2\right) - \dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{1}{2}v^2\right)$.
Calculamos entonces estas componentes a partir de la expresión de v^2.

- $a_r = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial \dot{r}}[\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2)] - \dfrac{\partial}{\partial r}[\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2)]$
  $= \dfrac{d}{dt}[\dot{r}] - [r\dot{\theta}^2 + r\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2] = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2$
- $a_\theta = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial \dot{\theta}}[\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2)] - \dfrac{\partial}{\partial \theta}[\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2)]$
  $= \dfrac{d}{dt}[r^2\dot{\theta}] - [r^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta] = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta$
- $a_\phi = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial \dot{\phi}}[\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2)] - \dfrac{\partial}{\partial \phi}[\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2)]$
  $= \dfrac{d}{dt}[r^2\sin^2\theta\dot{\phi}] - 0 = 2r\dot{r}\sin^2\theta\dot{\phi} + r^2(2\sin\theta)(\dfrac{d}{dt}\sin\theta)\dot{\phi} + r^2\sin^2\theta\ddot{\phi}$
  $= 2r\sin^2\theta\dot{\phi}\dot{r} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + r^2\sin^2\theta\ddot{\phi}$

Y estas son las componentes covariantes de la aceleración. Al igual que en la velocidad, estas componentes son las componentes en la base recíproba, por lo que la aceleración es:

$$\vec{a} = a_r\frac{\vec{e}_r}{h_r} + a_\theta\frac{\vec{e}_\theta}{h_\theta} + a_\phi\frac{\vec{e}_\phi}{h_\phi}$$

Sustituyendo lo que conocemos, nos queda:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2}{1}\vec{e}_r + \frac{r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta}{r}\vec{e}_\theta + \frac{2r\sin^2\theta\dot{\phi}\dot{r} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + r^2\sin^2\theta\ddot{\phi}}{r\sin\theta}\vec{e}_\phi \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta + (2\sin\theta\dot{\phi}\dot{r} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi})\vec{e}_\phi
\end{aligned}$$

2. **Repítase el problema 2.7 (obtener las velocidades y aceleraciones covariantes) para $q_1 = \theta, q_2 = \phi$, dado que:**

$$v^2 = a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta}$$

Calculamos primero las componentes covariantes de la velocidad. Como se mencionó en el ejercicio anterior, estas componentes se calculan como $v_i = \dfrac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\dfrac{1}{2}v^2\right)$. Entonces:

- $v_\theta = \dfrac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\dfrac{1}{2}\left(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta}\right) = a\dot{\theta} + c\dot{\theta}\sin^2\theta + \dfrac{d}{2}\dot{\phi}$
- $v_\phi = \dfrac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\dfrac{1}{2}\left(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta}\right) = b\dot{\phi}\cos^2\theta + \dfrac{d}{2}\dot{\theta}$

Ahora calculamos los componentes covariantes de la aceleración usando la fórmula vista en clase $a_i = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\dfrac{1}{2}v^2\right) - \dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{1}{2}v^2\right)$:

- $a_\theta = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\dfrac{1}{2}(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta})\right) - \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{2}(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta})\right)$
$= \dfrac{d}{dt}\left(a\dot{\theta} + c\dot{\theta}\sin^2\theta + \dfrac{d}{2}\dot{\phi}\right) - \left(b\dot{\phi}^2(-2\cos\theta\sin\theta) + c\dot{\theta}^2(2\sin\theta\cos\theta)\right)$
$= \dfrac{d}{dt}\left(a\dot{\theta} + c\dot{\theta}\sin^2\theta + \dfrac{d}{2}\dot{\phi}\right) + 2b\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta - 2c\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$
$= a\ddot{\theta} + c\ddot{\theta}\sin^2\theta + c\dot{\theta}(2\sin\theta\cos\theta)\dot{\theta} + \dfrac{d}{2}\ddot{\phi} + 2b\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta - 2c\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$
$= a\ddot{\theta} + c\ddot{\theta}\sin^2\theta + \dfrac{d}{2}\ddot{\phi} + 2b\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta$
- $a_\phi = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\left(\dfrac{1}{2}(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta})\right) - \dfrac{\partial}{\partial\phi}\left(\dfrac{1}{2}(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta})\right)$
$= \dfrac{d}{dt}\left(b\dot{\phi}\cos^2\theta + \dfrac{d}{2}\dot{\theta}\right) - 0$
$= b\ddot{\phi}\cos^2\theta + b\dot{\phi}(-2\cos\theta\sin\theta)\dot{\theta} + \dfrac{d}{2}\ddot{\theta}$
$= b\ddot{\phi}\cos^2\theta - 2b\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta + \dfrac{d}{2}\ddot{\theta}$

Y con esto ya tenemos los componentes covariantes de la aceleración.

3. **Determinar el gradiente de la función escalar Ψ en:**

   a) Coordenadas cilíndricas

   Como vimos en clase, el gradiente en coordenadas curvilíneas (como las cilíndricas) es:

$$\nabla\psi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\widehat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\widehat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\widehat{e}_3$$

   Para calcular los coeficientes h, primero escribimos el vector posición en estas coordenadas como hemos visto en clase $\vec{r} = \rho\cos\phi\widehat{i} + \rho\sin\phi\widehat{j} + z\widehat{k}$.
   Luego calculamos los vectores de la base al derivar esta expresión con respecto a cada una de las variables y los h_i calculando la norma de estos vectores.

   - $\vec{b}_r = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\widehat{i} + \sin\phi\widehat{j} \quad\Rightarrow\quad h_\rho = |\vec{b}_\rho| = 1$
   - $\vec{b}_\phi = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = -\rho\sin\phi\widehat{i} + \rho\cos\phi\widehat{j} \quad\Rightarrow\quad h_\phi = |\vec{b}_\phi| = \rho$
   - $\vec{b}_z = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \widehat{k} \quad\Rightarrow\quad h_z = |\vec{b}_z| = 1$

   Luego, usando la fórmula de arriba, el gradiente es:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\widehat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\widehat{\phi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\widehat{z}$$

   b) Coordenadas esféricas.

   Usamos la misma expresión se arriba para el gradiente. Primero que nada, $\vec{r}$ en coordenadas esféricas es:
   $\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\widehat{i} + r\sin\theta\sin\phi\widehat{j} + r\cos\theta\widehat{k}$
   Y los vectores base y sus correspondientes elementos de escala son:

   - $\vec{b}_r = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\widehat{i} + \sin\theta\sin\phi\widehat{j} + \cos\theta\widehat{k} \quad\Rightarrow\quad h_r = |\vec{b}_r| = (\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta)^{1/2} = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^{1/2} = 1$
   - $\vec{b}_\theta = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\phi\widehat{i} + r\cos\theta\sin\phi\widehat{j} - r\sin\theta\widehat{k} \quad\Rightarrow\quad h_\theta = |\vec{b}_\theta| = (r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta)^{1/2} = (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^{1/2} = r$
   - $\vec{b}_\phi = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = -r\sin\theta\sin\phi\widehat{i} + r\sin\theta\cos\phi\widehat{j} \quad\Rightarrow\quad h_\phi = |\vec{b}_\phi| = (r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi)^{1/2} = (r^2\sin^2\theta)^{1/2} = r\sin\theta$

   Entonces, usando la fórmula de arriba, la expresión del gradiente será:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\widehat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\widehat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\widehat{\phi}$$

.

4. **Obtener las componentes tangencial y normal de las velocidades y las aceleraciones de las partículas de los problmas 2-1 b) y c)**

   Primero obtendré las fórmulas generales de lo que se pide para luego solamente reemplazar las expresiones de cada inciso.

   Como vimos en clase, sabemos que el vector velocidad $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ apunta en la dirección tangente a la curva.
   Es decir, la velocidad no tiene componente normal a la curva y es puramente tangente a ésta.
   Entonces, el componente tangencial de la velocidad es simplemente la norma de $\mathbf{v}$.
   Por lo tanto:

   $$\text{Componente tangencial de } \mathbf{v} = |\mathbf{v}|$$
   $$\text{Componente normal de } \mathbf{v} = 0$$

   Por otro lado, tenemos al vector de aceleración, que se define como $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$.
   Este vector se puede expresar a partir de su componente tangencial a_T y su componente normal a_N como $\mathbf{a} = a_T\mathbf{e}_T + a_N\mathbf{e}_N \quad (1)$
   Donde $\mathbf{e}_T$ es el vector unitario en la dirección tangente a la curva y $\mathbf{e}_N$ es el vector unitario normal a la curva.
   Dado (1), podemos obtener a_T al aplicar el producto escalar de ambos lados con $\mathbf{e}_T$ y usando que $\mathbf{e}_T \cdot \mathbf{e}_N = 0$ por ser vectores ortogonales y $\mathbf{e}_T \cdot \mathbf{e}_T = 1$ por ser unitario:

   $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_T = (a_T\mathbf{e}_T + a_N\mathbf{e}_N) \cdot \mathbf{e}_T = a_T\mathbf{e}_T \cdot \mathbf{e}_T + a_N\mathbf{e}_T \cdot \mathbf{e}_N = a_T(1) = a_T$$

   Por lo que tenemos que:

   $$\text{Componente tangente de aceleración: } a_T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_T$$

   Por otro lado, para obtener a_N podemos empezar calculando la norma cuadrada de $\mathbf{a}$ y usar que $\mathbf{e}_T \cdot \mathbf{e}_N = 0, \mathbf{e}_T \cdot \mathbf{e}_T = 1, \mathbf{e}_N \cdot \mathbf{e}_N = 1$ por ser $\{\mathbf{e}_T, \mathbf{e}_N\}$ vectores ortonormales.

   $$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_T\mathbf{e}_T + a_N\mathbf{e}_N) \cdot (a_T\mathbf{e}_T + a_N\mathbf{e}_N) =$$
   $$a_T^2\mathbf{e}_T \cdot \mathbf{e}_T + a_N^2\mathbf{e}_N \cdot \mathbf{e}_N + 2a_N a_T\mathbf{e}_T \cdot \mathbf{e}_N = a_N^2 + a_T^2$$

   Por lo que tenemos que:

   $$\text{Componente normal de la aceleración: } a_N^2 = |\mathbf{a}|^2 - a_T^2$$

Por último, como mencionamos antes, el vector de velocidad $\mathbf{v}$ es tangente a la curva y por tanto, para calcular el vector tangente unitario $\mathbf{e}_T$, podemos simplemente normalizar a $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{e}_T = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Con esto, ya podemos resolver los incisos:

b) $\mathbf{r} = 3t\widehat{i} - 4t\widehat{j} + (t^2+3)\widehat{k}$

Calculamos el vector velocidad y aceleración derivando $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3t)\widehat{i} + \frac{d}{dt}(-4t)\widehat{j} + \frac{d}{dt}(t^2+3)\widehat{k} = 3\widehat{i} - 4\widehat{j} + 2t\widehat{k}$$
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(3)\widehat{i} + \frac{d}{dt}(-4)\widehat{j} + \frac{d}{dt}(2t)\widehat{k} = 2\widehat{k}$$

Luego, calculamos también la norma de $\mathbf{v}$, el vector unitario tangente $\mathbf{e}_T$ y la norma de $\mathbf{a}$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (2t)^2} = \sqrt{25+4t^2}$$
$$\mathbf{e}_T = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{3\widehat{i} - 4\widehat{j} + 2t\widehat{k}}{\sqrt{25+4t^2}}$$
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(2)^2} = 2$$

Luego, por las fórmulas que obtuvimos arriba para el componente tangencial y normal de la velocidad, tenemos:

$$\text{Componente normal de la velocidad} = 0$$
$$\text{Componente tangente de la velocidad} = |\mathbf{v}| = \sqrt{25+4t^2}$$

También podemos calcular la componente tangente y normal de la aceleración con las fórmulas de arriba:

$$\begin{aligned} a_T &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_T \\ &= (2\widehat{k}) \cdot \frac{3\widehat{i} - 4\widehat{j} + 2t\widehat{k}}{\sqrt{25+4t^2}} = \frac{4t}{\sqrt{25+4t^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_N &= \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{4t}{\sqrt{25+4t^2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{4 - \frac{16t^2}{25+4t^2}} = \sqrt{\frac{100+16t^2-16t^2}{25+4t^2}} = \frac{10}{\sqrt{25+4t^2}} \end{aligned}$$

c) $\mathbf{r} = a(t - \sin \omega t)\widehat{i} + a(1 - \cos \omega t)\widehat{j}$

Calculamos el vector velocidad y aceleración derivando $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(a(t - \sin \omega t))\widehat{i} + \frac{d}{dt}(a(1 - \cos \omega t))\widehat{j} = a(1 - \omega \cos \omega t)\widehat{i} + a\omega \sin \omega t\ \widehat{j}$$
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(a(1 - \omega \cos \omega t))\widehat{i} + \frac{d}{dt}(a\omega \sin \omega t)\widehat{j} = a\omega^2 \sin \omega t\ \widehat{i} + a\omega^2 \cos \omega t\ \widehat{j}$$

Luego, calculamos también la norma de $\mathbf{v}$, el vector unitario tangente $\mathbf{e}_T$ y la norma de $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{v}| &= \sqrt{(a(1 - \omega \cos \omega t))^2 + (a\omega \sin \omega t)^2} = \sqrt{a^2 - 2a^2\omega \cos \omega t + a^2\omega^2 \cos^2 \omega t + a^2\omega^2 \sin^2 \omega t} \\
&= \sqrt{a^2 - 2a^2\omega \cos \omega t + a^2\omega^2} = a\sqrt{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2} \quad (\text{si } a > 0) \\
\mathbf{e}_T &= \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{a(1 - \omega \cos \omega t)\widehat{i} + a\omega \sin \omega t\widehat{j}}{a\sqrt{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}} = \frac{(1 - \omega \cos \omega t)\widehat{i} + \omega \sin \omega t\widehat{j}}{\sqrt{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}} \\
|\mathbf{a}| &= \sqrt{(a\omega^2 \sin \omega t)^2 + (a\omega^2 \cos \omega t)^2} = \sqrt{a^2\omega^4 \sin^2 \omega t + a^2\omega^4 \cos^2 \omega t} = \sqrt{a^2\omega^4} = a\omega^2
\end{aligned}$$

Luego, por las fórmulas que obtuvimos arriba para el componente tangencial y normal de la velocidad, tenemos:

$$\text{Componente normal de la velocidad} = 0$$
$$\text{Componente tangente de la velocidad} = |\mathbf{v}| = a\sqrt{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}$$

También podemos calcular la componente tangente y normal de la aceleración con las fórmulas de arriba:

$$
\begin{aligned}
a_T &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_T \\
&= (a\omega^2 \sin \omega t \, \widehat{i} + a\omega^2 \cos \omega t \, \widehat{j}) \cdot \frac{(1 - \omega \cos \omega t)\widehat{i} + \omega \sin \omega t \widehat{j}}{\sqrt{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}} \\
&= \frac{a\omega^2 \sin \omega t - a\omega^3 \sin \omega t \cos \omega t + a\omega^3 \cos \omega t \sin \omega t}{\sqrt{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}} \\
&= \frac{a\omega^2 \sin \omega t}{\sqrt{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_N &= \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2} = \sqrt{(a\omega^2)^2 - \left(\frac{a\omega^2 \sin \omega t}{\sqrt{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}} \right)^2} \\
&= \sqrt{a^2\omega^4 - \frac{a^2\omega^4 \sin^2 \omega t}{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}} = \sqrt{\frac{a^2\omega^4 - 2a^2\omega^5 \cos \omega t + a^2\omega^6 - a^2\omega^4 \sin^2 \omega t}{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2\omega^4 - 2a^2\omega^5 \cos \omega t + a^2\omega^6 - a^2\omega^4(1 - \cos^2 \omega t)}{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2\omega^6 - 2a^2\omega^5 \cos \omega t + a^2\omega^4 \cos^2 \omega t}{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}} = \sqrt{\frac{a^2\omega^4(\omega^2 - 2\omega \cos \omega t + \cos^2 \omega t)}{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2\omega^4(\omega - \cos^2 \omega t)^2}{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}}
\end{aligned}
$$

2.13) **Determina el radio de curvatura de las curvas de los problemas 2-1 b)y c) para el punto en que está situada la partícula en el instante t**

Como vimos en clase, definimos un parámetro $s(t)$ tal que $s(t)$ sea la longitud de curva recorrida desde el tiempo $t = 0$ hasta t.
Con esta definición, como vimos en clase, el componente normal de la aceleración será: $a_N = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$ y entonces $\rho = \frac{\dot{s}^2}{a_N}$ (1) donde ρ es el radio de curvatura.

Ya tenemos el a_T de las curvas calculado en el ejercicio pasado, por lo que nadamás nos falta calcular $\dot{s}$.
Por la definición, $s(t)$ mide la longitud de curva recorrida desde un tiempo $t = 0$ hasta t. Pero en el curso de cálculo se ve que se puede calcular la longitud de curva entre dos tiempos al integrar $|r'(t)| = |v(t)|$ entre estos tiempos. Entonces:

$$s(t) = \int_0^t |v(t')| dt'$$

Y por lo tanto, debido al teorema fundamental del cálculo, tenemos que:

$$\dot{s}(t) = |v(t)|$$

Juntando esto con (1), podemos conseguir que el radio de curvatura es:

$$\rho = \frac{\dot{s}^2}{a_T} = \frac{|v(t)|^2}{a_N}$$

Ahora sí resolvemos los incisos:

b) $\mathbf{r}(t) = 3t\widehat{i} - 4t\widehat{j} + (t^2+3)\widehat{k}$
Ya tenemos calculado $|v(t)|^2$y a_N en el ejercicio pasado, por lo que simplemente sustituimos en la fórmula obtenida para ρ:

$$\begin{aligned}\rho = \frac{|v(t)|^2}{a_N} &= \frac{(\sqrt{25+4t^2})^2}{\frac{10}{\sqrt{25+4t^2}}} \\ &= \frac{(25+4t^2)^{3/2}}{10}\end{aligned}$$

c) $\mathbf{r}(t) = a(t - \sin\omega t)\widehat{i} + a(1-\cos\omega t)\widehat{j}$

Ya tenemos calculado $|v(t)|^2$ y a_N en el ejercicio pasado, por lo que simplemente sustituimos en la fórmula obtenida para ρ:

$$\begin{aligned}\rho = \frac{|v(t)|^2}{a_N} &= \frac{(a\sqrt{1-2\omega\cos\omega t+\omega^2})^2}{\sqrt{\frac{a^2\omega^4(\omega-\cos^2\omega t)^2}{1-2\omega\cos\omega t+\omega^2}}} \\ &= \frac{a^2(1-2\omega\cos\omega t+\omega^2)\sqrt{1-2\omega\cos\omega t+\omega^2}}{\sqrt{a^2\omega^4(\omega-\cos^2\omega t)^2}} = \frac{a(1-2\omega\cos\omega t+\omega^2)^{3/2}}{\sqrt{\omega^4(\omega-\cos^2\omega t)^2}}\end{aligned}$$

2.15) **En el punto** $(2,1,1)$ **obtener el vector unidad tangente a la intersección de la superficie del problema 2.14 y la superficie:**

$$\text{Superficie 2.14: } \phi_1(x,y,z) = x^2+2xy-y^2+yz+z^2 = 9$$
$$\phi_2(x,y,z) = 3x^2 - xy + y^2 = 11$$

Primero comprobamos que ambas superficies efectivamente pasan por el punto $(2,1,1)$. Para lo que tenemos que comprobar que se cumplen las igualdades $\phi_1(2,1,1) = 9, \phi_2(2,1,1) = 11$.

$$\phi_1(2,1,1) = 2^2 + 2(2)(1) - 1^2 + (1)(1) + 1^2 = 9$$
$$\phi_2(2,1,1) = 3(2)^2 - (2)(1) + (1)^2 = 11$$

Entonces ambas superficies pasan por este punto.
Lo que haremos ahora es calcular el vector n_1 perpendicular a la curva $\phi_1(x,y,z) = 9$ en $(2,1,1)$
Para esto simplemente calculamos el gradiente de $\phi_1(x,y,z) = x^2 + 2xy - y^2 + yz + z^2$ y evaluamos en $(2,1,1)$ (porque la superficie $\phi_!(x,y,z) = 9$ es una superficie de nivel de la función $\phi_1(x,y,z)$ y el vector gradiente de $\phi_1(x,y,z)$ nos da un vector ortogonal a las superficies de nivel).

$$\begin{aligned}
\vec{n}_1 = \nabla\phi_1\Big|_{(2,1,1)} &= \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\Big|_{(2,1,1)}\widehat{i} + \frac{\partial\phi_1}{\partial y}\Big|_{(2,1,1)}\widehat{j} + \frac{\partial\phi_1}{\partial z}\Big|_{(2,1,1)}\widehat{k} \\
&= (2x+2y)\Big|_{(2,1,1)}\widehat{i} + (2x-2y+z)\Big|_{(2,1,1)}\widehat{j} + (y+2z)\Big|_{(2,1,1)}\widehat{k} \\
&= (2(2)+2(1))\widehat{i} + (2(2)-2(1)+1)\widehat{j} + ((1)+2(1))\widehat{k} \\
&= 6\widehat{i} + 3\widehat{j} + 3\widehat{k}
\end{aligned}$$

Hacemos lo mismo para la curva ϕ_2, obteniendo el vector $\vec{n}_2 = \nabla\phi_2\Big|_{(2,1,1)}$ que es normal a la superficie en el punto $(2,1,1)$:

$$\begin{aligned}
\vec{n}_2 = \nabla\phi_2\Big|_{(2,1,1)} &= \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\Big|_{(2,1,1)}\widehat{i} + \frac{\partial\phi_2}{\partial y}\Big|_{(2,1,1)}\widehat{j} + \frac{\partial\phi_2}{\partial z}\Big|_{(2,1,1)}\widehat{k} \\
&= (6x-y)\Big|_{(2,1,1)}\widehat{i} + (-x+2y)\Big|_{(2,1,1)}\widehat{j} + 0\Big|_{(2,1,1)}\widehat{k} \\
&= (6(2)-1)\widehat{i} + (-2+2(1))\widehat{j} + 0\widehat{k} \\
&= 11\widehat{i}
\end{aligned}$$

Ahora bien, en realidad lo que buscamos es un vector que sea tangente a la intersección de las superficies, lo que quiere decir que el vector debe de ser tangente a ambas superficies a la vez. Para que un vector sea tangente a $\phi_1(x,y,z) = 11$, debe de ser perpendicular al vector normal $\vec{n}_1$ y para que un vector sea tangente a la superficie $\phi_2(x,y,z) = 11$, debe de ser perpendicular al vector normal $\vec{n}_2$.
Por lo tanto, buscamos un vector que sea perpendicular a $\vec{n}_1$ y a $\vec{n}_2$.
Encontrar dicho vector es sencillo, pues solamente hay que tomar el producto vectorial entre $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$.

Entonces, un vector tangente a ambas curvas es:

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 &= \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 6 & 3 & 3 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 33\widehat{j} - 33\widehat{k}\end{aligned}$$

Como lo que buscamos es el vector unitario, hay que dividir este vector $33\widehat{j} - 33\widehat{k}$ entre su norma.
Y tenemos entonces que el vector unitario tangente a la ambas superficies es:

$$\frac{33\widehat{j} - 33\widehat{k}}{|33\widehat{j} - 33\widehat{k}|} = \frac{33\widehat{j} - 33\widehat{k}}{\sqrt{33^2 + 33^2}} = \frac{33\widehat{j} - 33\widehat{k}}{33\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{j} - \widehat{k})$$