Cálculo Tensorial Tarea 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

19 de octubre de 2020

1. Sea $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ con $\mathcal{V}$ un espacio vectorial. Muestra que: $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Primero notamos que por distributividad se cumple

$$\begin{aligned} 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} &= (0+0)\mathbf{v} \\ &= 0\mathbf{v} \quad \text{Porque 0 es el neutro aditivo del campo} \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} = 0\mathbf{v}$

Como $0\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ entonces tiene inverso $-0\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ que sumamos de ambos lados

$\Rightarrow 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v}) = 0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v})$

$\Rightarrow\ 0\mathbf{v} + (0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v})) = 0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v})$ Por asociatividad

$\Rightarrow\ 0\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ Porque el resultado de sumar un vector con su inverso es $\mathbf{0}$

$\Rightarrow\ 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ Porque $\mathbf{0}$ es el neutro aditivo del espacio vectorial

Y ya se probó lo que se buscaba.

2. Sean $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ subespacios de un espacio vectorial $\mathcal{V}$. Muestra que la unión $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ es un subespacio de $\mathcal{V}$ si y sólo si $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ o $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$

$\Rightarrow$: Buscando una contradicción, supongamos que la conclusión es falsa, es decir, es falso que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ o $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$, lo que significa que $\mathcal{S}_1 \not\subset \mathcal{S}_2$ y también $\mathcal{S}_2 \not\subset \mathcal{S}_1$.

Como $S_1 \not\subset S_2$, entonces existe un $x_1 \in \mathcal{S}_1$ tal que $x_1 \notin \mathcal{S}_2$.
Y como $S_2 \not\subset S_1$, entonces existe un $x_2 \in \mathcal{S}_2$ tal que $x_2 \notin \mathcal{S}_1$.
Por lo tanto, como $x_1 \in \mathcal{S}_1$ y $x_2 \in \mathcal{S}_2$ entonces ambos pertenecen a $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.
Luego, como $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ es un subespacio por hipótesis, la suma es cerrada y por tanto $x_1 + x_2 \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Esto nos deja con dos casos:

1) $x_1 + x_2 \in \mathcal{S}_1$
Como $x_1 \in \mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_1$ es un subespacio, entonces $-x_1 \in \mathcal{S}_1$.

Por lo tanto, como $(x_1 + x_2) \in \mathcal{S}_1$ y $-x_1 \in \mathcal{S}_1$ y la suma es cerrada en un subespacio, tenemos
$(x_1 + x_2) + (-x_1) \in \mathcal{S}_1$ y así, $x_2 \in \mathcal{S}_1$, lo cuál es una contradicción ya que $x_2 \notin \mathcal{S}_1$

2) $x_1 + x_2 \in \mathcal{S}_2$
Como $x_2 \in \mathcal{S}_2$ y $\mathcal{S}_2$ es un subespacio, entonces $-x_2 \in \mathcal{S}_2$.
Por lo tanto, como $(x_1 + x_2) \in \mathcal{S}_2$ y $-x_2 \in \mathcal{S}_2$ y la suma es cerrada en un subespacio, tenemos:
$(x_1+x_2)+(-x_2) \in \mathcal{S}_2$ y así, $x_1 \in \mathcal{S}_2$, Lo cuál es una contradicción ya que $x_1 \notin \mathcal{S}_2$.

Como ambos casos llevan a una contradicción, concluimos que la negación inicial es incorrecta y que sí se cumple que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ o $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$.

$\Leftarrow$) Si $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ o $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$ tenemos dos casos:
Si $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ entonces $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2$ que es un subespacio.
Si $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$ entonces $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1$ que es un subespacio.
En cualquier caso concluimos que $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ es un subespacio de $\mathcal{V}$ y queda probado el regreso del teorema.

3. Sea $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ y $c \in \mathbb{R}$:

(a) **Si $\mathbf{u} = (2, 0, -1), \mathbf{v} = (3, 1, 0), \mathbf{w} = (1, -1, c)$. ¿Para qué valores de c el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ forma una base para $\mathbb{R}^3$?**

Para una base de $\mathbb{R}^3$, como tiene dimensión 3, necesitamos 3 vectores que sean linealmente independientes. Ya tenemos 3 vectores y sólo nos falta probar que son L.I.
Para esto, escribimos una combinación lineal de los vectores y la igualamos a $\vec{0}$:

$$a_1(2, 0, -1) + a_2(3, 1, 0) + a_3(1, -1, c) = (0, 0, 0)$$

Esto genera un sistema homogéneo de 3 ecuaciones en las variables a_1, a_2, a_3. Según la definición de independencia lineal, los tres vectores son L.I si y sólo si la única solución a este sistema es la trivial $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
Notamos que el sistema tiene siempre esta solución, por lo que los vectores son L.I. si y sólo si no encontramos más soluciones, es decir, si y sólo si es un sistema con una solución única (la trivial).
Sabemos que un sistema de ecuaciones de $n \times n$ tiene una solución única determinada si el determinante del sistema es distinto de 0. Por lo tanto, los vectores serán L.I si y sólo si el determinante del sistema es distinto de cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix} \neq 0$$
$$\Rightarrow\ 2(c) - 1(-3 - 1) \neq 0$$
$$\Rightarrow\ 2c + 4 \neq 0$$
$$\Rightarrow\ c \neq -2$$

Entonces, para que los vectores sean linealmente independientes, se debe de cumplir que $c \neq -2$

(b) **Si $\mathbf{u} = (1, -1, 3), \mathbf{v} = (1, 0, 1), \mathbf{w} = (1, 2, c)$. ¿Para qué valores de c el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ forma una base para $\mathbb{R}^3$?**

Usamos el mismo argumento de la parte a), pero ahora el sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$a_1(1, -1, 3) + a_2(1, 0, 1) + a_3(1, 2, c) = (0, 0, 0)$$

Como dijimos en a), este sistema tiene solamente la solución trivial (los vectores son L.I) si y sólo si el determinante no se anula, es decir:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} \neq 0$$
$$\Rightarrow\ 1(-2) + 1(c-1) + 3(2-0) \neq 0$$
$$\Rightarrow\ c + 3 \neq 0$$
$$\Rightarrow\ c \neq -3$$

Entonces, para que los vectores sean linealmente independientes (y por tanto formen una base, porque son 3 vectores de $\mathbb{R}^3$), se debe de cumplir que $c \neq -3$

4. **Considera las matrices**

(a) **Muestra que las matrices $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ son un espacio vectorial.**
Sean $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ matrices de 2×2 con entradas reales y sean α_1, α_2, reales.
Con la suma definida como $A + B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_2 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$
Producto escalar como $\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{pmatrix}$.
Vemos que estas dos operaciones son cerradas ya que dan por resultado nuevamente una matriz de 2×2 con entradas reales. Ahora demostramos las propiedades que debe de cumplir un espacio vectorial:

1) Conmutatividad de la suma:
$A+B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix} =^* \begin{pmatrix} b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 & b_4 + a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = B + A$
* Aquí se usó que la suma es conmutativa en los reales.

2) Asociatividad de la suma:
$A+(B+C) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 \\ b_3+c_3 & b_4+c_4 \end{pmatrix} \right) =$
$\begin{pmatrix} a_1+(b_1+c_1) & a_2+(b_2+c_2) \\ a_3+(b_3+c_3) & a_4+(b_4+c_4) \end{pmatrix} =^* \begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 & (a_2+b_2)+c_2 \\ (a_3+b_3)+c_3 & (a_4+b_4)+c_4 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} =$
$(A+B)+C$
$*$ Aquí se usó la propiedad asociativa de la suma de reales.

3) Neutro:
El neutro es la matriz $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que claramente pertenece al conjunto porque es una matriz de 2×2 con entradas reales. Además es el neutro porque cumple:
$A+O = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+0 & a_2+0 \\ a_2+0 & a_4+0 \end{pmatrix} =^* \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = A$
$*$Aquí se usó que 0 es el neutro aditivo en los reales.

d) Inverso Aditivo: Dada la matriz A, su inverso aditivo es la matriz definida por $-A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{pmatrix}$. Esta matriz pertenece al conjunto ya que es una matriz de 2×2 y como a_1, a_2, a_3, a_4 son entradas reales, sus inversos $-a_1, -a_2, -a_3, -a_4$ también son reales. Probamos ahora que esta matriz es efectivamente el inverso aditivo de A:
$A + (-A) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+(-a_1) & a_2+(-a_2) \\ a_3+(-a_3) & a_4+(-a_4) \end{pmatrix} =^*$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$
$*$ Aquí se usó que $-a_i$ es el inverso aditivo de a_i. Como el resultado final es la matriz neutra O, concluimos que efectivamente $-A$ es el inverso aditivo de A.

5) Propiedad asociativa del producto escalar: Hay que probar que $\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot A) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot A$
$\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot A) = \alpha_1 \cdot \left(\alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right) = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 a_1 & \alpha_2 a_2 \\ \alpha_2 a_3 & \alpha_2 a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(\alpha_2 a_1) & \alpha_1(\alpha_2 a_2) \\ \alpha_1(\alpha_2 a_3) & \alpha_1(\alpha_2 a_4) \end{pmatrix} =^*$
$\begin{pmatrix} (\alpha_1\alpha_2)a_1 & (\alpha_1\alpha_2)a_2 \\ (\alpha_1\alpha_2)a_3 & (\alpha_1\alpha_2)a_4 \end{pmatrix} = (\alpha_1\alpha_2) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = (\alpha_1\alpha_2)A$
* Se usó la asociatividad del producto de reales.

6) Neutro en el producto escalar: Debemos probar la existencia de un elemento $e \in \mathbb{R}$ tal que $e \cdot A = A$ para toda matriz A. Para esto, usamos como e el número real 1 y probamos que:
$1 \cdot A = 1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_1 & 1 \cdot a_2 \\ 1 \cdot a_3 & 1 \cdot a_4 \end{pmatrix} =^* \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = A$

$*$ Aquí se usó que 1 es el neutro multiplicativo en los reales.

7) Probar que $\alpha_1 \cdot (A+B) = \alpha_1 \cdot A + \alpha_1 \cdot B$.
$\alpha_1 \cdot (A+B) = \alpha_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(a_1+b_1) & \alpha_1(a_2+b_2) \\ \alpha_1(a_3+b_3) & \alpha_1(a_4+b_4) \end{pmatrix} =^* \begin{pmatrix} \alpha_1 a_1+\alpha_1 b_1 & \alpha_1 a_2+\alpha_1 b_2 \\ \alpha_1 a_3+\alpha_1 b_3 & \alpha_1 a_4+\alpha_1 b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_1 & \alpha_1 a_2 \\ \alpha_1 a_3 & \alpha_1 a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 b_1 & \alpha_1 b_2 \\ \alpha_1 b_3 & \alpha_1 b_4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot A + \alpha_1 \cdot B$
$*$ Aquí se usó la propiedad distributiva de los reales.

8) Debemos de demostrar que $(\alpha_1+\alpha_2) \cdot A = \alpha_1 \cdot A + \alpha_2 \cdot A$.
$(\alpha_1+\alpha_2) \cdot A = (\alpha_1+\alpha_2) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1+\alpha_2)a_1 & (\alpha_1+\alpha_2)a_2 \\ (\alpha_1+\alpha_2)a_3 & (\alpha_1+\alpha_2)a_4 \end{pmatrix} =^* \begin{pmatrix} \alpha_1 a_1+\alpha_2 a_1 & \alpha_1 a_2+\alpha_2 a_2 \\ \alpha_1 a_3+\alpha_2 a_3 & \alpha_1 a_4+\alpha_2 a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_1 & \alpha_1 a_2 \\ \alpha_1 a_3 & \alpha_1 a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 a_1 & \alpha_2 a_2 \\ \alpha_2 a_3 & \alpha_2 a_4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \alpha_1 A + \alpha_2 A$
$*$ Se usó la propiedad distributiva de los reales.

(b) **Muestra que las matrices $T_2(\mathbb{R})$ cuya traza es cero forman un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.**

Claramente, las matrices $T_2(\mathbb{R})$ son un subconjunto de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ porque siguen siendo matrices de 2×2 con entradas reales con la única condición de que la traza es cero. Entonces hay que probar las 3 propiedades que debe de cumplir un subconjunto de un espacio vectorial para ser un subespacio:

1) Probar que $O \in T_2(\mathbb{R})$:
La matriz $O \in T_{2\times 2}(\mathbb{R})$ claramente porque $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene una traza de $0+0=0$.

2) Probar que si $A \in T_2(\mathbb{R})$ y $B \in T_2(\mathbb{R})$ entonces $A+B \in T_2(\mathbb{R})$.
Sean $A, B \in T_2(\mathbb{R})$ con $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Como ambas matrices están en $T_2(\mathbb{R})$, tienen traza cero y por tanto cumplen que $a_1+a_4=0$ (1) y que $b_1+b_4=0$ (2).
Su suma es: $A+B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{pmatrix}$
La traza de $A+B$ es $(a_1+b_1)+(a_4+b_4) = a_1+a_4+b_1+b_4 = 0+0 = 0$
Donde se usaron las ecuaciones (1) y (2).
Entonces $A+B$ tiene una traza de 0 y por tanto pertence a $T_2(\mathbb{R})$.

3) Probar que si $A \in T_2(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha A \in T_2(\mathbb{R})$.

Sea $A \in T_2(\mathbb{R})$ con $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$. Y como pertenece a $T_2(\mathbb{R})$, debe de tener traza igual a 0, es decir, $a_1 + a_4 = 0$ (1).
Entonces, $\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{pmatrix}$
Y la traza de esta matriz αA es igual a $\alpha a_1 + \alpha a_4 = \alpha(a_1 + a_4) = \alpha(0) = 0$
Donde se usó la ecuación (1).
Entonces la matriz αA tiene traza 0 y por tanto pertenece a $T_2(\mathbb{R})$

(c) : **Da una base para $T_2(\mathbb{R})$**

Sea $A \in T_2(\mathbb{R})$ con $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$
Como la matriz pertenece a $T_2(\mathbb{R})$, debe de tener traza 0 y por tanto, $a_1 + a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = -a_1$.
Por lo tanto, podemos escribir una matriz de $T_2(\mathbb{R})$ en su forma más general como:
$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix}$ y la podemos descomponer como:
$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1).$
Entonces, propongo como base de $T_2(\mathbb{R})$ al conjunto de matrices:
$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
Se puede ver directamente que este conjunto está formado por puras matrices de $T_2(\mathbb{R})$ ya que la traza de cada matriz es 0. También, ya se probó en (1) que cualquier matriz de $T_2(\mathbb{R})$ se puede escribir como combinación lineal de las matrices de $\mathcal{B}$ y por tanto $\mathcal{B}$ genera a $T_2(\mathbb{R})$.
Finalmente, se puede ver que $\mathcal{B}$ es linealmente independitente, ya que si tomamos una combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$ y lo igualamos a la matriz 0, obtenemos:
$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Y por tanto, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ es la única solución.
Con lo que se prueba que el conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y como también es un generador de $T_2(\mathbb{R})$, concluimos que es una base.

(d) **Da una base para las matrice simétricas $S_3(\mathbb{R})$, que son un subespacio vectorial de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$**

Sea $A \in S_3(\mathbb{R})$ con $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Como es una matriź simétrica, cumple que:

$$A = A^t$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

De donde concluimos que $b = d, c = g, f = h$. Esto nos permite escribir una matriz lo más general posible de $S_3(\mathbb{R})$ de una forma que involucre menos parámetros. Una matriz $A \in S_3(\mathbb{R})$ es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad (1)$$

Vemos que entonces una matriz arbitraria en $S_3(\mathbb{R})$ tiene 6 parámetros libres y proponemos como base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vemos directamente que este conjunto está formado por puras matrices de $S(\mathbb{R}_3)$ ya que son simétricas, y vemos que es generador pues si tenemos una matriz $A \in S_3(\mathbb{R})$ arbitraria, entonces tiene la forma dada por (1) y se puede escribir como combinación lineal de la base como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix} =$$
$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, $\mathcal{B}$ es claramente un conjunto linealmente independiente, pero por si queda alguna duda, tomamos una combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$ y la igualamos a la matriz 0:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$a_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y entonces, los coeficientes de la combianción lineal $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ tienen como única solución valer 0. Por lo que el conjunto es linealmente independiente. Como $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y generador de $S_3(\mathbb{R})$, entonces es una base.

5. Sea $\mathcal{V}$ el espacio vectorial de las funciones polinomiales $p(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de grado menor o igual a 2:

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

Definimos tres funciones lineales como sigue:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)dx \;,\; f_2(p) = \int_0^2 p(x)dx \;,\; f_3(p) = \int_0^{-1} p(x)dx$$

Muestra que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base para el espacio dual $\mathcal{V}^*$
Hint: Encuentra una base para $\mathcal{V}$ a la que $\{f_1, f_2, f_3\}$ sea dual.

Primero escribimos las tres funciones lineales de manera más sencilla resolviendo las integrales:

$$1)\;\; f_1(p) = \int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \; dx = c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3}$$

$$2)\;\; f_2(p) = \int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \; dx = c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = 2c_0 + 2c_1 + \frac{8}{3} c_2$$

$$3)\;\; f_3(p) = \int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \; dx = c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{-1} = -c_0 + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{3}$$

Ahora bien, queremos que estas transformaciones lineales sean las duales de una base para los polinomios. Para esto, proponemos una base de $\mathcal{V}$ como la que sigue: $\mathcal{B} = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2, \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2\}$.
La base dual de esta base serán las tres funciones lineales que van del espacio a los reales tales que al aplicarlas a la base nos den como resultado deltas de Kronecker. Es decir, serán tres funciones f_1, f_2, f_3 tales que:

$$\begin{gathered}
f_1(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) = 1 \\
f_1(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2) = 0 \\
f_1(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2) = 0 \\
. \\
f_2(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) = 0 \\
f_2(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2) = 1 \\
f_2(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2) = 0 \\
. \\
f_3(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) = 0 \\
f_3(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2) = 0 \\
f_3(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2) = 1
\end{gathered}$$

El dual de $\mathcal{B}$ son las tres funciones que cumplan esto. Nosotros queremos que el dual resulte ser las tres funciones que habíamos definido antes (para así luego usar un teorema visto en clase que dice que si $\mathcal{B}$ es base de V entonces su dual es base de V^* y así concluir que f_1, f_2, f_3 son base de V^*)
Entonces en las ecuaciones de arriba usamos la definición de estas funciones para exigir que éstas sean las duales y nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{gathered}
\alpha_0 + \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \tfrac{1}{3}\alpha_2 = 1 \\
\beta_0 + \tfrac{1}{2}\beta_1 + \tfrac{1}{3}\beta_2 = 0 \\
\gamma_0 + \tfrac{1}{2}\gamma_1 + \tfrac{1}{3}\gamma_2 = 0 \\
. \\
2\alpha_0 + 2\alpha_1 + \tfrac{8}{3}\alpha_2 = 0 \\
2\beta_0 + 2\beta_1 + \tfrac{8}{3}\beta_2 = 1 \\
2\gamma_0 + 2\gamma_1 + \tfrac{8}{3}\gamma_2 = 0 \\
. \\
-\alpha_0 + \tfrac{1}{2}\alpha_1 - \tfrac{1}{3}\alpha_2 = 0 \\
-\beta_0 + \tfrac{1}{2}\beta_1 - \tfrac{1}{3}\beta_2 = 0 \\
-\gamma_0 + \tfrac{1}{2}\gamma_1 - \tfrac{1}{3}\gamma_2 = 1 \\
.
\end{gathered}$$

Que podemos reagrupar como sigue:

$$\begin{gathered}
\alpha_0 + \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \tfrac{1}{3}\alpha_2 = 1 \\
2\alpha_0 + 2\alpha_1 + \tfrac{8}{3}\alpha_2 = 0 \\
-\alpha_0 + \tfrac{1}{2}\alpha_1 - \tfrac{1}{3}\alpha_2 = 0 \\
. \\
\beta_0 + \tfrac{1}{2}\beta_1 + \tfrac{1}{3}\beta_2 = 0 \\
2\beta_0 + 2\beta_1 + \tfrac{8}{3}\beta_2 = 1 \\
-\beta_0 + \tfrac{1}{2}\beta_1 - \tfrac{1}{3}\beta_2 = 0 \\
. \\
\gamma_0 + \tfrac{1}{2}\gamma_1 + \tfrac{1}{3}\gamma_2 = 0 \\
2\gamma_0 + 2\gamma_1 + \tfrac{8}{3}\gamma_2 = 0 \\
-\gamma_0 + \tfrac{1}{2}\gamma_1 - \tfrac{1}{3}\gamma_2 = 1
\end{gathered}$$

Aquí tenemos 3 sistemas de ecuaciones, cada uno con con tres variables que nos servirán para determinar $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_-, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$. Cada sistema se puede resolver por separado con el método de determinantes y se obtiene:

$$\alpha_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2 & 8/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 2 & 8/3 \\ -1 & 1/2 & -1/3 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1 \; , \; \alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/3 \\ 2 & 0 & 8/3 \\ -1 & 0 & -1/3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 2 & 8/3 \\ -1 & 1/2 & -1/3 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1 \; , \; \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 2 & 8/3 \\ -1 & 1/2 & -1/3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$\beta_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 2 & 8/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 2 & 8/3 \\ -1 & 1/2 & -1/3 \end{vmatrix}} = \frac{1/3}{-2} = -\frac{1}{6} \; , \; \beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 2 & 1 & 8/3 \\ -1 & 0 & -1/3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 2 & 8/3 \\ -1 & 1/2 & -1/3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-2} = 0 \; , \; \beta_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 2 & 8/3 \\ -1 & 1/2 & -1/3 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2 & 8/3 \\ 1 & 1/2 & -1/3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 2 & 8/3 \\ -1 & 1/2 & -1/3 \end{vmatrix}} = \frac{2/3}{-2} = -\frac{1}{3}\ ,\ \gamma_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 2 & 0 & 8/3 \\ -1 & 1 & -1/3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 2 & 8/3 \\ -1 & 1/2 & -1/3 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1\ ,\ \gamma_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 2 & 8/3 \\ -1 & 1/2 & -1/3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Con estos resultados, finalmente llegamos a que la base que queríamos es la base

$$\mathcal{B} = \{1 + x - \frac{3}{2}x^2, -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x^2, -\frac{1}{3} + x - \frac{1}{2}x^2\}.$$

Ahora, por si las dudas, comprobaremos efectivamente lo que se nos pide en el problema. Usaremos el teorema visto en clase de que si $\mathcal{B}$ es una base de V, entonces su base dual es una base de V^*. Entonces comprobamos las dos hipótesis del teorema:

- **$\mathcal{B}$ es una base**: Primero notamos que $\mathcal{B}$ tiene 3 vectores, por lo que solamente hay que demostrar que son L.I. para concluir que son una base (porque el espacio tiene dimensión 3) Entonces tomamos una combinación lineal con escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ y la igualamos a 0:

  $$\alpha_1(1 + x - \tfrac{3}{2}x^2) + \alpha_2(-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}x^2) + \alpha_3(-\tfrac{1}{3} + x - \tfrac{1}{2}x^2) = 0$$

  Igualamos los coeficientes de cada potencia de x de ambos lados:

  $$\begin{gathered} \alpha_1 - \tfrac{1}{6}\alpha_2 - \tfrac{1}{3}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -\tfrac{3}{2}\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_3 = 0 \end{gathered}$$

  Tenemos un sistema homogéneo de 3 ecuaciones. La base será L.I. si y sólo si este sistema tiene como única solución la trivial, lo cual sucede si y sólo si su determinante es distinto de 0 (si tiene un determinante 0, el sistema tiene más soluciones). Por lo que calulamos el determinante del sistema:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1/6 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = 1(-1/2) + 1/6(-1/2 + 3/2) - 1/3(1/2) = -\tfrac{1}{2} \neq 0$$

  Con lo que concluimos que los vectores de $\mathcal{B}$ son L.I y como son 3 vectores en un espacio de dimensión 3, esto implica que son una base.

- **f_1, f_2, f_3 son la base dual de $\mathcal{B}$**: Esto obviamente se cumple porque es justo la condición que le pusimos a $\mathcal{B}$ al construirla. Sin embargo, lo comprobaré de nuevo por si las dudas. Para lo que hay que probar que el resultado de aplicar estas funciones a los elementos de la base nos da deltas de Kronecker:

  $$\begin{gathered} f_1(1 + x - \tfrac{3}{2}x^2) = \int_0^1 (1 + x - \tfrac{3}{2}x^2) = [x + x^2/2 - x^3/2]_0^1 = 1 \ \checkmark \\ f_2(1 + x - \tfrac{3}{2}x^2) = \int_0^2 (1 + x - \tfrac{3}{2}x^2) = [x + x^2/2 - x^3/2]_0^2 = 0 \ \checkmark \\ f_3(1 + x - \tfrac{3}{2}x^2) = \int_0^{-1} (1 + x - \tfrac{3}{2}x^2) = [x + x^2/2 - x^3/2]_0^{-1} = 0 \ \checkmark \end{gathered}$$

  .

$$f_1(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}x^2)=\int_0^1(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}x^2)=[-\tfrac{x}{6}+\tfrac{x^3}{6}]_0^1=0\ \checkmark$$
$$f_2(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}x^2)=\int_0^2(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}x^2)=[-\tfrac{x}{6}+\tfrac{x^3}{6}]_0^2=1\ \checkmark$$
$$f_3(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}x^2)=\int_0^{-1}(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}x^2)=[-\tfrac{x}{6}+\tfrac{x^3}{6}]_0^{-1}=0\ \checkmark$$
.
$$f_1(-\tfrac{1}{3}+x-\tfrac{1}{2}x^2)=\int_0^1(-\tfrac{1}{3}+x-\tfrac{1}{2}x^2)=[-\tfrac{x}{3}+\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x^3}{6}]_0^1=0\ \checkmark$$
$$f_2(-\tfrac{1}{3}+x-\tfrac{1}{2}x^2)=\int_0^2(-\tfrac{1}{3}+x-\tfrac{1}{2}x^2)=[-\tfrac{x}{3}+\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x^3}{6}]_0^2=0\ \checkmark$$
$$f_3(-\tfrac{1}{3}+x-\tfrac{1}{2}x^2)=\int_0^{-1}(-\tfrac{1}{3}+x-\tfrac{1}{2}x^2)=[-\tfrac{x}{3}+\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x^3}{6}]_0^{-1}=1\ \checkmark$$

Como se cumplen estas dos condiciones, podemos usar el teorema ya mencionado para concluir que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base del espacio dual.

6. Sea $\mathcal{T}=\{U\subset\mathbb{R}\ : U=\emptyset \vee U=\mathbb{R}\vee U=(-\infty,a)$ para algún $a\in\mathbb{R}\}$. Muestra que $\mathcal{T}$ es una topología.

Debemos de probar las tres propiedades que debe de cumplir una colección de conjuntos para ser considerada una topología:

1) Probar que $\emptyset,\mathbb{R}\in\mathcal{T}$: Directamente de la definición de $\mathcal{T}$ vemos que $\emptyset,\mathbb{R}\in\mathcal{T}$

2) Intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$:
Consideramos una colección finita de conjuntos de $\mathcal{T}$ como sigue:
$$\mathcal{U}=\{(-\infty,a_1),(-\infty,a_2),...,(-\infty,a_n)\}=\{(-\infty,a_i)\}_{1\le i\le n}$$
Para un $n\in\mathbb{N}$.
En esta colección omitimos la posibilidad de que se incluya $\emptyset$ o $\mathbb{R}$. Ya que en el primer caso, la intersección de $\mathcal{U}$ será $\emptyset$ que trivialmente pertenece a $\mathcal{T}$. En el segundo caso, intersectar con $\mathbb{R}$ no hace ninguna diferencia y la colección se reduce a una como la de $\mathcal{U}$, a menos que $\mathbb{R}$ sea el único elemento de la colección, en cuyo caso la intersección es $\mathbb{R}$ que trivialmente pertenece a $\mathcal{T}$.

Regresando a la colección $\mathcal{U}$ como está escrita, hay que demostrar que la intersección de los conjuntos en $\mathcal{U}$, pertenece a $\mathcal{T}$.
Para esto, a partir de $\mathcal{U}$ consideramos el conjunto de reales $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ que como es un conjunto finito, tiene un elemento mínimo (y que pertenece al conjunto) $a_m=\min\{a_1,a_2,...,a_n\}$.
Lo que demostraremos es que la intersección de la colección $\mathcal{U}$ que es $\bigcap\limits_{1\le i\le n}\{(-\infty,a_i)\}$ es igual a $(-\infty,a_m)$.

$\subset$) Sea $x\in\bigcap\limits_{1\le i\le n}\{(-\infty,a_i)\}$:
Entonces $x\in(-\infty,a_1)\cap(-\infty,a_2)\cap...\cap(-\infty,a_n)$,
por lo tanto, $x\in(-\infty,a_1)$, $x\in(-\infty,a_2)$, ... , $x\in(-\infty,a_n)$.
Entonces, $x<a_1$, $x<a_2$, ... , $x<a_n$

Como a_m es alguno de estos números a, entonces en particular se tiene que $x < a_m$ y por tanto $x \in (-\infty, a_m)$.

$\supset$) Sea $x \in (-\infty, a_m)$, entonces $x < a_m$. Luego, como $a_m = \text{mín}\{a_1, ..., a_n\}$, se tiene que para todo a_i se cumple que $a_m \leq a_i$ y por tanto:
$x < a_m \leq a_i \;\; \Rightarrow \;\; x < a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.
Luego, $x \in (-\infty, a_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$
Y así concluimos finalmente que $x \in (-\infty, a_1) \cap (-\infty, a_2) \cap ... \cap (-\infty, a_n) = \bigcap\limits_{1 \leq i \leq n} \{(-\infty, a_i)\}$

Por lo tanto, $\bigcap\limits_{1 \leq i \leq n} \{(-\infty, a_i)\} = (-\infty, a_m)$ y se concluye que la intersección de los conjuntos de $\mathcal{U}$ tiene la forma $(-\infty, a_m)$ y por tener esta forma, pertenece a $\mathcal{T}$.

3) Unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$:
Consideramos una colección arbitraria de conjuntos de $\mathcal{T}$ que sea $\mathcal{U} = \{(-\infty, a_i)\}_{i \in I}$ para un conjunto de índices I.
Omitimos la posibilidad de que alguno de los conjuntos de la colección sea $\emptyset$ o $\mathbb{R}$. Porque en el primer caso, al tomar la unión, el conjunto $\emptyset$ no cambia nada, en el segundo caso, la unión será siempre $\mathbb{R}$, que claramente se encuentra en $\mathcal{T}$.

Ahora bien, a partir de la colección de conjuntos de $\mathcal{T}$ formada por $\{(-\infty, a_i)\}_{i \in I}$, podemos formar el siguiente conjunto de números reales: $\{a_i\}_{i \in I}$.
Tenemos ahora dos casos para este conjunto:

a) El conjunto $\{a_i\}_{i \in I}$ no es acotado:
En este caso, se puede probar que la unión de la colección de conjuntos $\{(-\infty, a_i)\}_{i \in I}$ es igual a $\mathbb{R}$. La primera contención es clara pues cada intervalo $(-\infty, a_i)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y por tanto la unión de todos sigue siendo subconjunto de $\mathbb{R}$.
Probar que $\mathbb{R} \subset \bigcup\limits_{i \in I} \{(-\infty, a_i)\}$ es también sencillo. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces, como el conjunto $\{a_i\}_{i \in I}$ no es acotado, existe una $a_M \in \{a_i\}_{i \in I}$ tal que $x < a_M$. Luego, $x \in (-\infty, a_M)$, lo que prueba que $x \in \bigcup\limits_{i \in I} \{(-\infty, a_i)\}$
Luego, como probamos que $\bigcup\limits_{i \in I} \{(-\infty, a_i)\} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$, entonces se concluye que $\bigcup\limits_{i \in I} \{(-\infty, a_i)\} \in \mathcal{T}$ y por tanto la unión arbitraria de conjuntos de $\mathcal{T}$ se queda en $\mathcal{T}$.

b) El conjunto $\{a_i\}_{i \in I}$ es acotado:
Como este conjunto de reales es acotado, el axioma del supremo nos asegura que tiene un supremo, que denotamos por S.
Probaré ahora que $\bigcup\limits_{i \in I} \{(-\infty, a_i)\} = (-\infty, S)$.

$\subset$) Sea $x \in \bigcup\limits_{i \in I} \{(-\infty, a_i)\}$, entonces se cumple que $x \in (-\infty, a_p)$ para algún $a_p \in \{a_i\}_{i\in I}$. Luego, $x < a_p$ y como S es el supremo de $\{a_i\}_{i\in I}$, se tiene que $a_p \leq S$. Por lo tanto, $x < a_p \leq S \;\Rightarrow\; x < S$ y entonces $x \in (-\infty, S)$

$\supset$) Sea $x \in (-\infty, S)$, luego $x < S$. Como $x < S$ pero S es el supremo de $\{a_i\}_{i\in I}$, entonces x no puede ser una cota superior de $\{a_i\}_{i\in I}$ (pues contradiría que S es la mínima cota superior) y por tanto, existe algún elemento de $\{a_i\}_{i\in I}$ estrictamente mayor a x, es decir, existe una $a_k \in \{a_i\}_{i\in I}$ con $x < a_k$.
Con lo que se concluye que $x \in (-\infty, a_k)$ y por tanto, $x \in \bigcup\limits_{i\in I}\{(-\infty, a_i)\}$.

Esta doble contención prueba que $\bigcup\limits_{i\in I}\{(-\infty, a_i)\} = (-\infty, S)$ lo que prueba que la unión arbitraria $\bigcup\limits_{i\in I}\{(-\infty, a_i)\}$ tiene la forma adecuada para pertenecer a $\mathcal{T}$.
En cualquier caso, se demostró que la unión arbitraria de conjuntos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$

Con estas 3 demostraciones concluimos que $\mathcal{T}$ es una topología.

7. Sean $f, g : \{X \to Y\}$ funciones continuas, donde X es un espacio topológico y Y es Hausdorff. Demuestra que $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es un conjunto cerrado de X.

Probaré que es cerrado al probar que su complemento en X es un conjunto abierto.
Primero para facilitar la redacción, nombramos $B := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$.
Luego, el complemento de este conjunto es $X/B = X/\{x \in X : f(x) = g(x)\} = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$.

Suponiendo que X/B no es vacío (si lo fuera, es abierto trivialmente y ya quedaría probado el resultado), tomamos un $x \in X/B$ y queremos probar que existe una un abierto que contiene a x que se queda contenida en X/B. Con lo que concluiríamos que X/B es abierto

Como $x \in X/B$, entonces se tiene que $f(x) \neq g(x)$. Donde tanto $f(x)$ como $g(x)$ son elementos de Y. Y como Y es Hausdorff y estos elementos $f(x)$, $g(x)$ son distintos, concluimos por la definición de un espacio de Hausdorff que:
Existen conjuntos V_f, V_g de Y tales que:

1) V_f, V_g son abiertos en Y
2) $f(x) \in V_f$ y $g(x) \in V_g$
3) $V_f \cap V_g = \emptyset$.

Iremos usando estos puntos en lo que sigue de la demostración.
Como $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ son continuas, entonces las imágenes inversas de conjuntos abiertos de Y son abiertos en X. En particular por (1) V_f, V_g son abiertos en Y y luego $f^{-1}(V_f)$ y $g^{-1}(V_g)$ son conjuntos abiertos de X.
Consideramos ahora la intersección de estos dos abiertos: $f^{-1}(V_f) \cap g^{-1}(V_g)$, que es nuevamente un abierto en X (porque la intersección de dos abiertos es abierta). Y probaremos que este conjunto (que ya vimos que es abierto) es la vecindad de x contenida en X/B que buscábamos. Probamos que:

4) $x \in f^{-1}(V_f) \cap g^{-1}(V_g)$:
Pues como $f(x) \in V_f$ y $g(x) \in V_g$ por (2), entonces evidentemente $x \in f^{-1}(V_f)$ y $x \in g^{-1}(V_g)$ y finalmente, $x \in f^{-1}(V_f) \cap g^{-1}(V_g)$

5) $f^{-1}(V_f) \cap g^{-1}(V_g) \subset X/B$:
Por contradicción, supongamos que hay una $y \in f^{-1}(V_f) \cap g^{-1}(V_g)$ pero que $y \notin X/B$, entonces $y \in B$ y por tanto $f(y) = g(y)$.
Pero como $y \in f^{-1}(V_f)$, $y \in g^{-1}(V_g)$ entonces por como se define la imagen inversa, $f(y) \in V_f$, $g(y) \in V_g$. Sin embargo, como $f(y) = g(y)$, entonces tenemos que $f(y) \in V_f$, $f(y) \in V_g$ y por tanto $f(y) \in V_f \cap V_g$. Lo cual contradice a 3).
Por tanto, $f^{-1}(V_f) \cap g^{-1}(V_g) \subset X/B$.

Con esto, se probó que $x \in f^{-1}(V_f) \cap g^{-1}(V_g) \subset X/B$.

Por lo tanto se probó que para todo $x \in X/B$, existe un abierto de x (el conjunto $f^{-1}(V_f) \cap g^{-1}(V_g)$) tal que este abierto cumple $x \in f^{-1}(V_f) \cap g^{-1}(V_g) \subset X/B$
Esto prueba que X/B es abierto, y por tanto B es cerrado.

8) **Sea X un conjunto no vacío y:**

$$\mathcal{T} = \{A \subset X : A = \emptyset \vee \ |X/A| < \aleph_0\},$$

Es decir $A \subset X$ pertenece a $\mathcal{T}$ si y sólo si A es vacío o si su complemento es finito.

a) **Demuestre que $(X\ \mathcal{T})$ es un espacio topológico**

1) Probar que $\emptyset, X \in \mathcal{T}$:
se sigue directo de la definición que $\emptyset \in \mathcal{T}$.
Por otro lado, el complemento de X es $\emptyset$, el cual es un conjunto con cardinalidad finita. Por tanto X pertenece a $\mathcal{T}$.

2) Intersección finita de conjuntos de $\mathcal{T}$ es un conjunto de $\mathcal{T}$:
Consideremos $A_1, A_2, ...A_n \in \mathcal{T}$. La intersección de estos conjuntos es $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.
Si alguno de los A_i fuera vacío, entonces la intersección sería vacía y pertenece a $\mathcal{T}$, por lo que concluiríamos directamente. Así que suponemos de ahora en adelante que ningún A_i es vacío.
Aplicamos la ley de De Morgan para obtener que su complemento:
$$X \Big/ \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (X/A_i) \quad (1)$$
Luego, como cada $A_i \in \mathcal{T}$ y no es vacío, necesariamente cumplen que $|X/A_i|$ es finito. Luego, como la unión de una cantidad finita de conjuntos finitos es claramente finita, tenemos que el lado derecho de (1) es finito. Lo que prueba que $X \Big/ \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$ es finito y por tanto $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ pertenece a $\mathcal{T}$.

3) Unión arbitraria de conjuntos de $\mathcal{T}$ es un conjunto de $\mathcal{T}$:
Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección de conjuntos de $\mathcal{T}$ para un conjunto de índices I. Si alguno de los conjuntos A_p es vacío, entonces la uníon $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ no cambia si eliminamos a este conjunto vacío. Por tanto, supondremos directamente que todos los A_i son no vacíos.
Por la ley de De Morgan, tenemos que:
$$X \Big/ \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (X/A_i) \quad (2)$$
Como $A_i \in \mathcal{T}$ y son no vacías, entonces necesariamente se tiene que $|X/A_i|$ es finito para toda $i \in I$.
Luego, la intersección de una colección de conjuntos finitos es claramente finita, por lo que el lado derecho de (2) tiene una cardinalidad finita. Con esto concluimos que $X \Big/ \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right)$ tiene cardinalidad finita.
Y por tanto, por la definición de la topología, tenemos que $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ pertenece a $\mathcal{T}$.

Con estas 3 propiedades concluimos que $\mathcal{T}$ es una topología.

b) **¿Qué puedes decir de la propiedad de Hausdorff para $(X, \mathcal{T})$?**

$(X, \mathcal{T})$ tendrá o no la propiedad de Hausdorff dependiendo de la cardinalidad del conjunto X.

a) Si X es de cardinalidad infinita, entonces $(X, \mathcal{T})$ no es Hausdorff.

Pues supongamos que $(X, \mathcal{T})$ sí es Hausdorff, entonces tomamos dos puntos distintos $x, y \in X$ (definitivamente podemos tomar dos puntos de X porque tiene una cantidad infinita de puntos). Y como X es Hausdorff, existen con-

juntos $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U, v \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.
Luego, $X/(U \cap V) = X/\emptyset = X$, entonces por De Morgan se tiene que $(X/U) \cup (X/V) = X$.
Sin embargo, como X, Y pertenecen a la topología, entonces X/U y X/V tienen cardinalidad finita. Entonces es imposible que su unión $(X/U) \cup (X/V)$ sea el conjunto infinito X.
La contradicción prueba que $(X, \mathcal{T})$ no es Hausdorff.

b) Si X es de cardinalidad finita, entonces $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff.

Sea $A \subset X$, entonces también $X/A \subset X$. Y como X es de cardinalidad finita , se sigue que X/A es de cardinalidad finita y por tanto A pertenece a la topología. Por lo tanto, todos los subconjuntos de X pertenecen a la topología cofinita.
Entonces, si consideramos $x, y \in X$ con $x \neq y$, por lo mencionado anteriormente, $\{x\}, \{y\}$ son abiertos. Además, como $x \neq y$, se tiene que $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.
Y claramente $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$. Con esto se muestra que se puede separar a x, y en dos conjuntos abiertos disjuntos. Y por lo tanto, se tiene la propiedad de Hausdorff.

Para concluir, hemos probado que con la topología finita, $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff si y sólo si X es de cardinalidad finita.

9) Consideramos a:

$$\mathcal{B} = \{[x, y) \subset \mathbb{R} \ : x < y\}$$

a) **Demuestra que $\mathcal{B}$ es base para alguna topología de $\mathbb{R}$. A dicha topología se le conoce como la recta de Srgenfrey.**

Para que sea una base, debe de cumplir las dos condiciones siguientes:

1) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$.

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces consideramos $[x, x+1)$ que claramente es un elemento de $\mathcal{B}$, además, $x \in [x, x+1)$, con lo que se demuestra esta condición

2) Si $x \in B_1 \cap B_2$ donde B_1, B_2 son elementos de $\mathcal{B}$, entonces existe un elemento B_3 que contiene a x y cumple $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Sea $x \in B_1 \cap B_2$, donde $B_1 = [a_1, b_1), B_2 = [a_2, b_2)$ son conjuntos arbitrarios de $\mathcal{B}$
Entonces tenemos que $a_1 \leq x < b_1$, $a_2 \leq x < b_2$ (1).

Definimos ahora $a = \text{máx}\{a_1, a_2\}$ y $b = \text{mín}\{b_1, b_2\}$
Y consideramos el intervalo $B_3 = [a, b)$ que claramente es un elemento de la base.
Además, como a es igual a a_1 o a_2, en cualquier caso se cumple que $a \leq x$ por (1).
Y como b es igual a b_1 o a b_2, en cualquier caso se cumple que $x < b$ por (1).
Por lo tanto, $a \leq x < b$ y así $x \in [a, b)$.

Ahora falta probar que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
Para esto, sea $y \in B_3$, entonces $a \leq y < b$ (2).
Pero por la definición de a, se tiene que $a_1 \leq a$, $a_2 \leq a$ y por (2), $a_1 \leq y$, $a_2 \leq y$.
Y por la definición de b, se tiene que $b \leq b_1$, $b \leq b_2$ y por (2), se tiene $y < b_1$, $y < b_2$.
Así que, $a_1 \leq y < b_1$ y también $a_2 \leq y < b_2$. Por lo que $y \in B_1 \cap B_2$.
Por lo tanto $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ y queda proba la segunda condición.

b) **¿Es la recta de Sorgenfrey un espacio segundo numerable?**

No. Supongamos que $\mathcal{V}$ es una base para la recta de Sorgenfrey, probaremos que no puede ser numerable. Como es una base, entonces debe de cumplir que para todo conjunto $U \in \mathcal{T}$ y para todo $x \in U$, existe un elemento básico $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subset U$

Entonces, si para una $x \in \mathbb{R}$ en particular escogemos el abierto $U = [x, x+1)$ (Es un conjunto abierto porque pertenece a $\mathcal{B}$, que es la base original con la que se genera la recta de Sorgenfrey). Entonces como $x \in U = [x, x+1)$, debe de existir un elemento básico $V_x \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V_x \subset [x, x+1)$.

Probamos ahora que esto implica que V_x tiene mínimo y de hecho $\text{mín}(V_x) = x$.
Vemos que x es una cota inferior de V_x porque para todo v en V_x, como $V_x \subset [x, x+1)$, entonces $v \in [x, x+1)$ y así $x \leq v$.
Además tenemos que $x \in V_x$.
Luego, por ser x un acota inferior de V_x y además pertenecer a este conjunto, concluimos que x es el mínimo de V_x.

Si repetimos este proceso para toda $x \in \mathbb{R}$, concluimos que para cada x existe un elemento de la base V_x. Y además, si $x \neq y$, entonces $V_x \neq V_y$ porque V_x y V_y tienen distintos mínimos y por tanto no pueden ser conjuntos iguales.
Por lo tanto, la asociación que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna el elemento V_x de la base es una asociación inyectiva que va de $\mathbb{R}$ a la base $\mathcal{V}$.

Por esta asociación inyectiva de $\mathbb{R}$ a $\mathcal{V}$ se concluye que la base tiene una cardinalidad por lo menos tan grande como la cardinalidad de los reales y por tanto no

es numerable.
Esto prueba que una base de la recta de Sorgenfrey no puede ser numerable y así, la recta no es segundo numerable.

10. **Un *espacio-tiempo* $(\mathcal{M}, g)$ es el par consistente por una variedad real, cuatro dimensional, conexa y de clase $\mathbb{C}^\infty$, equipada con una métrica g de tipo Lorentziana. Muestra que el espacio-tiempo es Hausdorff**

- **Primero Probamos que $\mathbb{R}^n$ (con la topología usual inducida por la métrica euclídea) es Hausdorff**:
Para esto, recordamos que por la definición de ser Hausdorff, lo que queremos demostrar es que si $x, y \in \mathbb{R}^n$ son dos puntos distintos, entonces existen abiertos V_x, V_y tales que $x \in V_x, y \in V_y$ y que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Entonces, sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos elementos arbitrarios y distintos. Consideramos $r = d(x, y)$ la distancia entre estos puntos.
Y consideramos las siguientes bolas abiertas:

  - $B_d(x, r/2)$: bola de centro x y radio $r/2$
  - $B_d(y, r/2)$: bola de centro y y radio $r/2$.

Vemos que estos conjuntos cumplen trivialmente que $x \in B_d(x, r/2)$ y que $y \in B_d(y, r/2)$. Ahora solamente falta ver que $B_d(x, r/2) \cap B_d(y, r/2) = \emptyset$.
Para esto, suponemos que esta intersección no es vacía y que por tanto existe un punto $p \in B_d(x, r/2) \cap B_d(y, r/2)$. Luego, $p \in B_d(x, r/2)$ y también $p \in B_d(x, r/2)$. Con esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} r &= d(x,y) \quad \text{por como definimos a r} \\ &\leq d(x,p) + d(p,y) \quad \text{desigualdad del triángulo} \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \quad \text{Como } p \in B_d(x, r/2) \text{ entonces por definición de bola, } d(p,x) < r/2 \\ &\qquad\qquad \text{y similarmente como } p \in B_d(y, r/2) \ \Rightarrow \ d(p,y) < r/2 \\ &= r \end{aligned}$$

Y por lo tanto $r < r$. Lo que es una contradicción. Por lo que concluimos que la intersección $B_d(x, r/2) \cap B_d(y, r/2)$ sí es vacía.

Con esto, para todo $x \neq y$ encontramos dos abiertos $B_d(x, r/2), B_d(y, r/2)$ tales qeu $x \in B_d(x, r/2)$ y que $y \in B_d(y, r/2)$ y que su intersección es vacía. Esto es justo lo que pide la definición para ser Hausdorff

- **Probamos ahora que si X es un espacio topológico Hausdorff y es homeomorfo a un espacio Y, entonces Y es Hausdorr.**

Como X y Y son homeomorfos, existe una función $f : X \to Y$ que es un homemorfismo (es biyectiva, y tanto f como f^{-1} son continuas).

Ahora consideramos dos puntos $y, z \in Y$ distintos. Para probar que Y es Hausdorff hay que probar que existen dos abiertos disjuntos, uno que contiene a y y el otro a z. Como f es biyectiva, tiene inversa $f^{-1} : Y \to X$ y además la inversa es inyectiva, por lo que $f^{-1}(y)$ y $f^{-1}(z)$ son puntos distintos en X.

Luego, como X es Hausdorff y $f^{-1}(y)$, $f^{-1}(z)$ son dos elementos de X distintos, entonces existen dos abiertos $A, B \subset X$ tales que $f^{-1}(y) \in A$ y $f^{-1}(z) \in B$ y además $A \cap B = \emptyset$.

Como $f^{-1} : Y \to X$ es continua, entonces la imagen inversa de conjuntos abiertos de X son mapeados a conjuntos abiertos de Y. Pero la imagen inversa de f^{-1} es lo mismo que la imagen directa de f. Entonces, concluimos que f manda conjuntos abiertos de X a conjuntos abiertos de Y.

Con esto, consideramos los conjuntos $f(A)$ y $f(B)$ subconjuntos de Y y que por lo que dice el párrafo anterior, son abiertos. Probamos que estos conjuntos abiertos 'separan' a y, z y por tanto Y es Hausdorff:

- $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(\mathbf{A})$): Por cómo se definió A, $f^{-1}(y) \in A$ y por tanto se sigue que $f(f^{-1}(y)) \in f(A)$ y luego $y \in f(A)$
- $\mathbf{z} \in \mathbf{f}(\mathbf{B})$): Por cómo se definió B, $f^{-1}(z) \in B$ y por tanto se sigue que $f(f^{-1}(z)) \in f(B)$ y luego $z \in f(B)$
- $\mathbf{f}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{f}(\mathbf{B}) = \emptyset$) Vemos que si esto no se cumple, entonces existe una $w \in f(A) \cap f(B)$, lo que significa que w es la imagen de algún elemento $a \in A$, es decir $f(a) = w$. Y también siginifica que w es la imagen de algún elemento $b \in B$, es decir $f(b) = w$.
  Pero $a \neq b$ porque A y B son conjuntos disjuntos y no pueden tener dos elementos iguales. Entonces, encontramos $a \neq b$ tales que $f(a) = w = f(b)$ lo que contradice que f es inyectiva.

Entonces, para resumir, para cualquier par de puntos $y, z \in Y$ encontramos dos conjuntos abiertos $f(A), f(B) \subset Y$ tales que $y \in f(A), z \in f(B)$. Y que además $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.
Esta es justo la definicón de que Y es Hausdorff.

- **Concluir el ejercicio**

  Con estos resultados ya podemos concluir el ejercicio. Como M es una variedad, esto significa que localmente existe un homeomorfismo a conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Pero ya probamos que $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff. Y probamos también que la propiedad de Hausdorff se conserva bajo homeomorfismos. Por lo que concluimos que M es Hausdorff.