Ecuaciones Diferenciales: (mini) - Tarea 5 Tomás Ricardo Basile Álvarez

1. Localice los valores de bifurcación y dibuje las líneas de fase para valores de los parámetros poco menores y poco mayores que el valor de bifurcación.

a) $\frac{dy}{dx} = y^3 - \alpha y^2$

Los puntos de equilibrio son aquéllos en los que $y^3 - \alpha y^2 = 0 \Rightarrow y^2(y-\alpha) = 0$

$\rightarrow y_1 = 0 \qquad y_2 = \alpha$

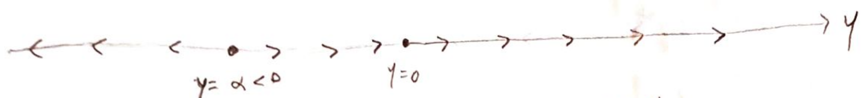
Un punto de bifurcación será aquél en el que también:

$f'(y) = 0 \qquad \rightarrow \qquad f'(y) = 3y^2 - 2\alpha y$

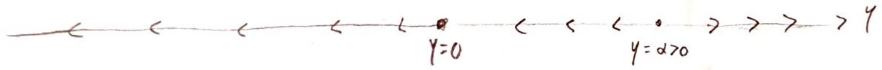
Para $y_1 = 0 \rightarrow f'(y_1 = 0) = 3(0)^2 - 2\alpha(0) = 0$ $\qquad \therefore f'(y_1) = 0$ ✓

Para $y_2 = \alpha \rightarrow f'(y_2 = \alpha) = 3\alpha^2 - 2\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$ $\qquad$ Entonces necesitamos que $\underline{\alpha = 0}$ ← Pto de Bifurcación

- Para $\alpha < 0$: los puntos de equilibrio son $y = 0$, $y = \alpha$ $\qquad$ (además, como $f'(y=\alpha) = \alpha^2 > 0$, $y = \alpha$ es una fuente)



- Para $\alpha > 0$: Los puntos de equilibrio son $y = 0$, $y = \alpha$ $\qquad$ (además, como $f'(y=\alpha) = \alpha^2 > 0$ $\rightarrow y = \alpha$ es una fuente)



b) $\frac{dy}{dx} = \alpha - |y|$

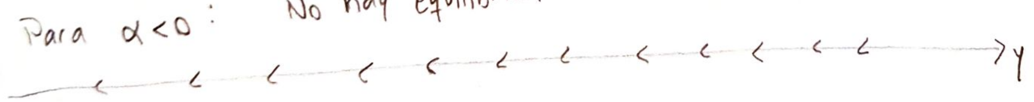
Los ptos de equilibrio son aquéllos en los que $f(y) = 0 \rightarrow \alpha - |y| = 0 \rightarrow |y| = \alpha$

$\rightarrow y_1 = \alpha \qquad y_2 = -\alpha$ siempre y cuando $\alpha > 0$

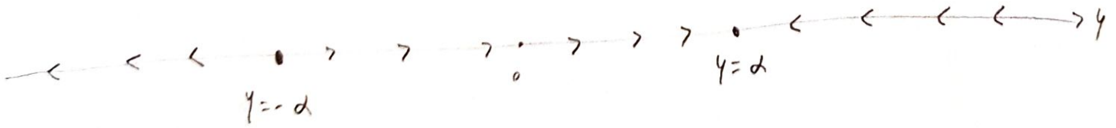
Entonces, cuando $\alpha > 0$, tenemos dos equilibrios: $y = -\alpha$; $y = \alpha$. Cuando $\alpha = 0$ los dos equilibrios "colapsan" a uno en $y = 0$. Cuando $\alpha < 0$, no hay equilibrios.

$\therefore$ Punto de bifurcación es $\underline{\alpha = 0}$:

i) Para $\alpha < 0$: No hay equilibrios. $\qquad$ como $\alpha < 0$ y $|y| > 0$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \alpha - |y|$ es siempre negativo



ii) Para $\alpha > 0$: Hay equilibrio en $y_1 = -\alpha$, $y_2 = \alpha$



Para $y < -\alpha \rightarrow \frac{dy}{dx} = \alpha - |y| < 0$

Para $-\alpha < y < \alpha \rightarrow \frac{dy}{dx} = \alpha - |y| > 0$

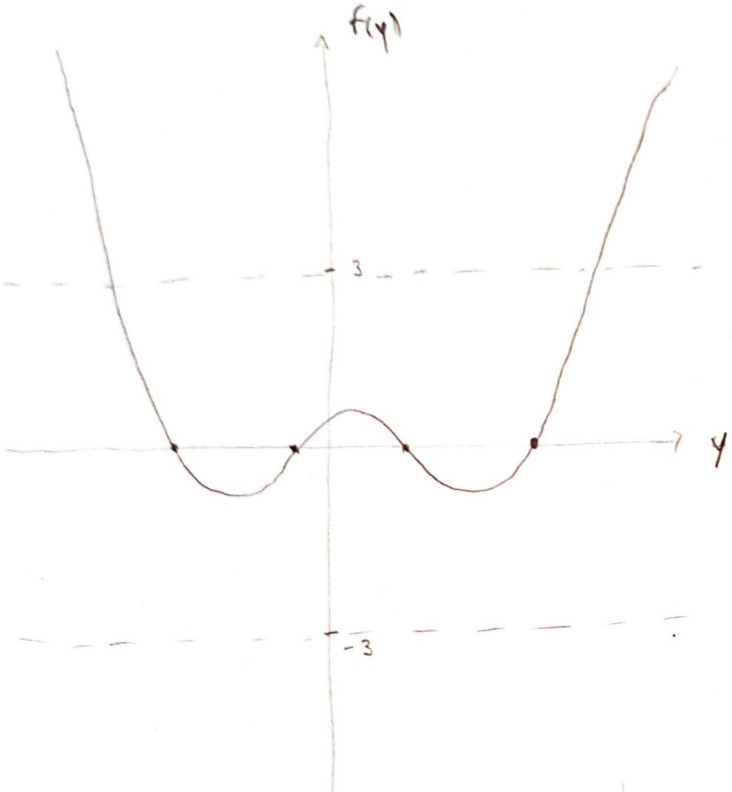
Para $y > \alpha \rightarrow \frac{dy}{dx} = \alpha - |y| < 0$

2 Busque una función $f(y)$ tal que $\frac{dy}{dx} = f(y) + \alpha$ cumpla:

·) Para $\alpha \leq -3$ hay 2 ptos de equilibrio

··) Para $\alpha \geq 3$ no hay ptos de equilibrio

···) Para $\alpha = 0$ hay 4 ptos de equilibrio



·) vemos que para $\alpha \leq -3$, hay dos valores de y con $f(y) = -\alpha$
(i.e hay 2 valores de y con $f(y) \geq 3$)
$\Rightarrow$ hay 2 valores de y con $\frac{dy}{dx} = f(y) + \alpha = -\alpha + \alpha = 0$ $\therefore$ 2 ptos de eq.

··) con $\alpha \geq 3$, no hay valores de y con $f(y) = -\alpha$
entonces no hay valores con $\frac{dy}{dx} = f(y) + \alpha = 0$
$\therefore$ No hay ptos de eq.

···) con $\alpha = 0$, hay 4 valores de y con $f(y) = 0$
$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = f(y) + 0 = 0$ para 4 valores de y. $\therefore$ Hay 4 ptos de eq.

3. a) Verifíquese que $y_1 = 1$ $y_2 = x^2$ son soluciones de $xy'' - y' = 0$ y escriba la solución general.

$y_1 = 1$ $y' = 0$ $y'' = 0$ $\rightarrow$ $xy'' - y' = x(0) - 0 = 0$ ✓

$y_2 = x^2$: $y' = 2x$ $y'' = 2$ $\rightarrow$ $xy'' - y' = x(2) - 2x = 0$ ✓

Como la e.d.o es lineal y tenemos dos soluciones L.i., la solución general será: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = \underline{C_1 + C_2 x^2}$

b) Determine el valor de a que vuelve a $y_p = ax^3$ solución de $xy'' - y' = 3x^2$ escriba la solución general.

$xy'' - y' = 3x^2 \rightarrow x(ax^3)'' - (ax^3)' = 3x^2 \rightarrow 6ax^2 - 3ax^2 = 3x^2 \rightarrow 3ax^2 = 3x^2 \rightarrow \underline{a = 1}$

$\therefore$ la solución particular es $y_p = x^3$

$\therefore$ La solución general es $y_{Homogénea} + y_{particular}$

$\rightarrow$ $\underline{y = C_1 + C_2 x^2 + x^3}$

4) Encuentre una solución particular.

a) $y'' - 2y' = 6$

Probamos con $y = ax \rightarrow y' = a \quad y'' = 0$

$\therefore \quad y'' - 2y' = 6 \rightarrow 0 - 2(a) = 6 \rightarrow a = -3$

$\therefore$ Solución particular: $\underline{y = -3x}$

b) $x^3 y'' + x^2 y' + xy = 1$

probamos con $y = \frac{a}{x} \rightarrow y' = -\frac{a}{x^2} \rightarrow y'' = \frac{2a}{x^3}$

$\rightarrow x^3 y'' + x^2 y' + xy = 1$

$\rightarrow x^3\left(\frac{2a}{x^3}\right) + x^2\left(-\frac{a}{x^2}\right) + x\left(\frac{a}{x}\right) = 1$

$\rightarrow 2a - a + a = 1 \rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = 1/2$

$\therefore$ Solución particular: $\underline{y = \frac{1}{2x}}$