Examen 3 MAF   Tomás Ricardo Basile Alvarez   14/01/21

1) Para $a > -1/2$ demostrar la expansión en términos de polinomios ortogonales de Laguerre

a) $x^a = \Gamma(a+\alpha+1)\Gamma(a+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(a-n+1)}$, $0 \leq x < \infty$

Escribimos x^a como una serie en la base $(L_n^\alpha)_n$ con coeficientes c_n

$\rightarrow x^a = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x)$ ← queremos conocer los c_n

$\Rightarrow$ multiplicamos ambos lados por $L_m^\alpha(x)$, $m \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $x^a L_m^\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x)$

$\Rightarrow$ Multiplicamos por $x^\alpha e^{-x}$ $\Rightarrow$ $x^{a+\alpha} e^{-x} L_m^\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x)$

Integramos ambos lados de 0 a ∞ y usamos la Ortogonalidad de funciones de Laguerre que dice que $\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} & \text{si } n = m \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^\infty x^{a+\alpha} e^{-x} L_m^\alpha(x)\,dx = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^\infty x^{a+\alpha} e^{-x} L_m^\alpha(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty c_n x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^\infty x^{a+\alpha} e^{-x} L_m^\alpha(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ c_n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} & \text{si } n = m \end{cases}$ ← por ortogonalidad

$\Rightarrow \int_0^\infty x^{a+\alpha} e^{-x} L_m^\alpha(x)\,dx = c_m \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(m+1)}$ ← sólo "sobrevive" el término de $n=m$

$$\Rightarrow \quad c_m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty x^{a+\alpha} e^{-x} L_m^\alpha(x)\,dx$$

$$C_m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty x^{a+\alpha} e^{-x} L_m^\alpha(x)\, dx$$

Usamos la fórmula de Rodriguez para L_m^α : $L_m^\alpha(x) = \frac{1}{m!} x^{-\alpha} e^{x} \frac{d^m}{dx^m}[e^{-x} x^{\alpha+m}]$

$$\rightarrow C_m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty x^{a+\alpha} e^{-x} \frac{1}{m!} x^{-\alpha} e^{x} \frac{d^m}{dx^m}[e^{-x} x^{\alpha+m}]\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty \frac{1}{m!} x^a \frac{d^m}{dx^m}[e^{-x} x^{\alpha+m}]\, dx = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty x^a \frac{d^m}{dx^m}[e^{-x} x^{\alpha+m}]\, dx}_{(1)}$$

← porque $m! = \Gamma(m+1)$

Integramos por partes:

$$C_m = \frac{1}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty x^a \frac{d^m}{dx^m}[e^{-x} x^{\alpha+m}]\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+\alpha+1)} \left[x^a \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(e^{-x} x^{\alpha+m}) \Big|_0^\infty - a\int_0^\infty \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(e^{-x} x^{\alpha+m})\, x^{a-1} dx \right]$$

Por partes $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
con $u = x^a \rightarrow du = a x^{a-1}$
$dv = \frac{d^m}{dx^m}(e^{-x} x^{\alpha+m}) \rightarrow v = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(e^{-x} x^{\alpha+m})$

$$= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(m+\alpha+1)} \left[-a\int_0^\infty \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(e^{-x} x^{\alpha+m})\, x^{a-1} dx \right]}_{(2)}$$

← $x^a \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(e^{-x} x^{\alpha+m}) \Big|_0^\infty = 0$
porque la derivada $\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x} x^{\alpha+m}$ va a tener a e^{-x} en cada uno de sus términos y conforme $x \to \infty$, e^{-x} tiende a 0 más rápido que cualquier monomio.

Integramos por partes de nuevo:

$$= \frac{1}{\Gamma(m+\alpha+1)} \left[\cancel{-a\left(x^{a-1} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(e^{-x} x^{\alpha+m})\right)\Big|_0^\infty} + a\int_0^\infty (a-1)\, x^{a-2} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(e^{-x} x^{\alpha+m})\, dx \right]$$

← $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
con $u = x^{a-1} \rightarrow du = (a-1)x^{a-2}$
$dv = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(e^{-x} x^{\alpha+m})$
$\rightarrow v = \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(e^{-x} x^{\alpha+m})$

$$= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(m+\alpha+1)}\, a(a-1) \int_0^\infty x^{a-2} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(e^{-x} x^{\alpha+m})\, dx}_{(3)}$$

↖ por el mismo argumento de antes, $x^{a-1} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(e^{-x} x^{\alpha+m}) \Big|_0^\infty = 0$

Si seguimos integrando por partes, el resultado irá cambiando de signo (por el signo menos en la fórmula de integral por partes)

$$C_m = \frac{1}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty x^a \frac{d^m}{dx^m}[e^{-x} x^{\alpha+m}]\, dx \quad \text{(por (1))}$$

$$= \frac{-a}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty x^{a-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(e^{-x} x^{\alpha+m})\, dx \quad \text{(por (2))}$$

$$= \frac{a(a-1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty x^{a-2} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(e^{-x} x^{\alpha+m})\, dx \quad \text{(por (3))}$$

vemos que efectivamente va cambiando de signo y que van apareciendo constantes fuera de la integral y la derivada va bajando de orden

Si repetimos la integral por partes m veces, llegaremos entonces a:

$$C_m = \frac{(-1)^m\, a(a-1)\cdots(a-m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty x^{a-m} \frac{d^0}{dx^0}(e^{-x} x^{\alpha+m})\, dx$$

$$\Rightarrow C_m = \frac{(-1)^m\, a(a-1)\cdots(a-m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty x^{a-m} \left(e^{-x} x^{\alpha+m}\right) dx$$

$$= \frac{(-1)^m\, a(a-1)\cdots(a-m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty x^{a+\alpha} e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{(-1)^m\, a(a-1)\cdots(a-m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \Gamma(a+\alpha+1) \leftarrow \text{por def. de la función gama}$$

$$= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+\alpha+1)} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-m+1)} \Gamma(a+\alpha+1)$$

← por propiedades de la función Γ,

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$$
$$= a(a-1)\,\Gamma(a-1)$$
$$= a(a-1)(a-2)\,\Gamma(a-2)$$
$$= \cdots = a(a-1)(a-2)\cdots(a-m+1)\,\Gamma(a-m+1)$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-m+1)} = a(a-1)(a-2)\cdots(a-m+1)$$

Y así ya tenemos los coeficientes C_m

Si reemplazamos en la expansión original, nos queda que:

$$x^a = \sum_{m=0}^{\infty} C_m L_m^{\alpha}(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, \Gamma(a+1)\, \Gamma(a+\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)\, \Gamma(a-m+1)} L_m^{\alpha}(x)$$

$$= \Gamma(a+\alpha+1)\,\Gamma(a+1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+\alpha+1)\,\Gamma(a-m+1)} L_m^{\alpha}(x)$$

Que es justo lo que se quería probar.

b) $e^{-ax} = \frac{1}{(a+1)^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n L_n^\alpha(x)$

Queremos escribir e^{-ax} en la base $(L_n^\alpha)_n$ como

$e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x)$ ← Queremos conocer los coeficientes c_n

Multiplicamos ambos lados por $L_m^\alpha(x)\, x^\alpha e^{-x}$ (con $m \in \mathbb{N}$) e integramos de 0 a infinito

$$\rightarrow \int_0^\infty e^{-ax} e^{-x} x^\alpha L_m^\alpha(x)\, dx = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x)\, x^\alpha e^{-x}\, dx$$

$$\rightarrow \int_0^\infty e^{-ax} e^{-x} x^\alpha L_m^\alpha(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty c_n L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x)\, x^\alpha e^{-x}\, dx$$

utilizamos la ortogonalidad de funciones de Laguerre, que dice que $\int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x)\, x^\alpha e^{-x}\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}, & n = m \end{cases}$

$$\rightarrow \int_0^\infty e^{-ax} e^{-x} x^\alpha L_m^\alpha(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} 0, & n \neq m \\ c_n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}, & n = m \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_0^\infty e^{-ax} e^{-x} x^\alpha L_m^\alpha(x)\, dx = c_m \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(m+1)}$$ ← sólo "sobrevive" el término de la suma de $n=m$

$$\Rightarrow c_m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-(1+a)x} x^\alpha L_m^\alpha(x)\, dx$$

Usamos la fórmula de Rodrigues, $L_m^\alpha(x) = \frac{1}{m!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^m}{dx^m}\left[e^{-x} x^{\alpha+m}\right]$

$$\Rightarrow c_m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-(1+a)x} \cancel{x^\alpha} \frac{1}{m!} \cancel{x^{-\alpha}} e^x \frac{d^m}{dx^m}\left[e^{-x} x^{\alpha+m}\right] dx$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dx^m}\left[e^{-x} x^{\alpha+m}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \frac{d^m}{dx^m}\left[e^{-x} x^{\alpha+m}\right] dx$$ ← porque $m! = \Gamma(m+1)$

$$C_m = \frac{1}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \frac{d^m}{dx^m}[e^{-x} x^{\alpha+m}]\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+\alpha+1)} \left[e^{-ax} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (e^{-x} x^{\alpha+m}) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -a e^{-ax} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} [e^{-x} x^{\alpha+m}]\, dx \right]$$

Por partes, $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = e^{-ax} \rightarrow du = -a e^{-ax}$

$dv = \frac{d^m}{dx^m}[e^{-x} x^{\alpha+m}] \rightarrow v = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[e^{-x} x^{\alpha+m}]$

$$= \frac{a}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (e^{-x} x^{\alpha+m})\, dx$$

$e^{-ax} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (e^{-x} x^{\alpha+m}) \Big|_0^\infty = 0$ porque todos los términos de la derivada tienen e^{-x} y $\therefore$ todos los términos tienen $e^{-ax} e^{-x} = e^{-(a+1)x}$ luego, como $a > -1/2 \Rightarrow a+1$ es positivo y entonces $e^{-(a+1)x}$ es decreciente. Entonces en $x = \infty$ vale 0 y decrece más rápido de lo que crece cualquier monomio

$$=$$

$$= \frac{a}{\Gamma(m+\alpha+1)} \left[e^{-ax} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} (e^{-x} x^{\alpha+m}) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-a) e^{-ax} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} (e^{-x} x^{\alpha+m})\, dx \right]$$

por partes, $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

con $u = e^{-ax} \rightarrow du = -a e^{-ax}$

$dv = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (e^{-x} x^{\alpha+m}) \rightarrow v = \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} (e^{-x} x^{\alpha+m})$

$$= \frac{a^2}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} (e^{-x} x^{\alpha+m})\, dx$$

$e^{-ax} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} (e^{-x} x^{\alpha+m}) \Big|_0^\infty = 0$ por lo mismo de antes.

Vemos que cada vez que aplicamos la integración por partes, sale una a de la integral y baja en un grado la derivada.

Entonces, luego de m repeticiones, nos quedará:

$$C_m = \frac{a^m}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \frac{d^0}{dx^0} (e^{-x} x^{\alpha+m})\, dx$$

$$= \frac{a^m}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-ax} (e^{-x} x^{\alpha+m})\, dx = \frac{a^m}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-(a+1)x} x^{\alpha+m}\, dx$$

hacemos el cambio de variable $u = (a+1)x \rightarrow du = (a+1)\,dx$

y si $x = 0 \Rightarrow u = 0$, si $x = \infty \Rightarrow u = \infty$, porque $u = (a+1)x$ y como $a > -1/2$, $a + 1/2$ es positivo

$$= \frac{a^m}{\Gamma(m+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{a+1}\right)^{\alpha+m} \frac{1}{\alpha+1}\, du$$

$$= \frac{a^m}{\Gamma(m+\alpha+1)\,(a+1)^{\alpha+m+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha+m}\, du$$

$$= \frac{a^m}{\cancel{\Gamma(m+\alpha+1)}\,(a+1)^{\alpha+m+1}} \cancel{\Gamma(\alpha+m+1)}$$ ← por la def. de la Gamma

$$= \frac{a^m}{(a+1)^{\alpha+m+1}}$$

Entonces, hemos probado que $C_m = \dfrac{a^m}{(a+1)^{\alpha+m+1}}$

Luego, la expresión de e^{-ax} en polinomios de Laguerre queda como

$$e^{-ax} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m L_m^{\alpha}(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{(a+1)^{\alpha+m+1}} L_m^{\alpha}(x)$$

$$= \frac{1}{(a+1)^{\alpha+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{(a+1)^m} L_m^{\alpha}(x)$$

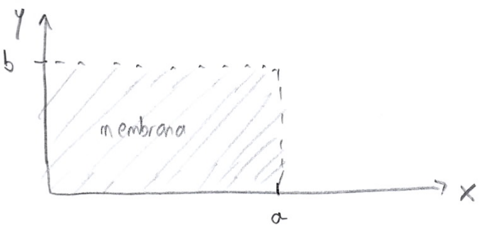
$$= \frac{1}{(a+1)^{\alpha+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^m L_m^{\alpha}(x)$$

Es lo que se quería probar.

2) Se considera una membrana rectangular de base a y altura b fuertemente atada en cada uno de sus lados. Calcular el movimiento de la membrana si inicialmente está en reposo y con posición dada por $f(x,y) = xy(a-x)(b-y)$

Tenemos que resolver la ecuación de onda en coordenadas rectangulares

Representamos la membrana en el plano x,y como sigue:



La ecuación de onda que debe cumplir es $\nabla^2 z = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

con $z(x,y,t)$ el desplazamiento de la membrana en la posición x,y a tiempo t.

- Como los lados están fuertemente atados y no se mueven, debemos de tener que z vale 0 en ellos.

C.F.

1) $z(x=0,y,t) = 0$
2) $z(x=a,y,t) = 0$
3) $z(x,y=0,t) = 0$
4) $z(x,y=b,t) = 0$

Además, el problema nos dice la posición inicial de la membrana está dada por $f(x,y)$

5) $z(x,y,t=0) = f(x,y) = xy(a-x)(b-y)$

Y la membrana empieza en reposo, la velocidad de la membrana está dada por $\frac{dz}{dt}$, por lo que la condición de reposo nos dice que:

6) $\frac{dz}{dt}(x,y,t=0) = 0$

- Resolvemos la ecuación $\nabla^2 z = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} z = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

Proponemos una solución de la forma $z(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$ y lo metemos a la ecuación

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x)Y(y)T(t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} X(x)Y(y)T(t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} X(x)Y(y)T(t)$$

$$\rightarrow Y(y)T(t)\frac{d^2}{dx^2}X(x) + X(x)T(t)\frac{d^2}{dy^2}Y(y) = \frac{1}{v^2}X(x)Y(y)\frac{d^2}{dt^2}T(t)$$

Dividimos por $X(x)Y(y)T(t)$

$$\rightarrow \frac{v^2}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) + \frac{v^2}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) = \frac{1}{T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t)$$

Ambos lados dependen de distintas variables pero son iguales, lo que significa que deben de ser iguales a una constante. Usamos como constante a $-\omega^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t) = -\omega^2 \quad , \quad \frac{v^2}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) + \frac{v^2}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) = -\omega^2$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) + \frac{v^2}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) = -w^2$$

$$\rightarrow \frac{v^2}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) = -\frac{v^2}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) - w^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) - \frac{w^2}{v^2}$$

Como ambos lados dependen de variables distintas, deben de ser iguales a una constante $-K_x^2$

$$\rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) = -K_x^2 \quad , \quad -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) - \frac{w^2}{v^2} = -K_x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) = K_x^2 - \frac{w^2}{v^2} \equiv -K_y^2$$

donde definimos K_y de tal forma que $K_x^2 + K_y^2 = \frac{w^2}{v^2}$

$$\rightarrow \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) = -K_y^2$$

(Esto se vale, pues $K_x^2 - \frac{w^2}{v^2}$ tiene que ser negativo para que $\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) = K_x^2 - \frac{w^2}{v^2}$ tenga una solución oscilatoria y no exponencial y así se pueda adecuar a las condiciones de frontera)

Por tanto, las ecuaciones y sus soluciones son:

i) $\frac{1}{T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t) = -w^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}T(t) = -w^2 T(t) \quad \Rightarrow \quad T(t) = A\cos(wt) + B\,\mathrm{sen}(wt)$

ii) $\frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) = -K_x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2}X(x) = -K_x^2 X(x) \quad \Rightarrow \quad X(x) = C\cos(K_x x) + D\,\mathrm{sen}(K_x x)$

iii) $\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}Y(y) = -K_y^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{dy^2}Y(y) = -K_y^2 Y(y) \quad \Rightarrow \quad Y(y) = E\cos(K_y y) + F\,\mathrm{sen}(K_y y)$

Aplicamos las condiciones a la frontera

1) $Z(x=0,y,t)=0 \rightarrow X(0)Y(y)T(t) = 0 \quad \forall y,t \Rightarrow X(0)=0$ (porque $Y(y)\,T(t)$ no son 0 $\forall y,t$)

Entonces $X(0) = C\cos(0) + D\,\mathrm{sen}(0) = 0 \Rightarrow \underline{C=0}$

2) $Z(x=a,y,t)=0 \Rightarrow X(a)Y(y)T(t)=0 \quad \forall y,t \Rightarrow X(a)=0$

Entonces $X(a) = C\cos(K_x a) + D\,\mathrm{sen}(K_x a) = 0 \rightarrow D\,\mathrm{sen}(K_x a) = 0$ ← porque $C=0$

y entonces $K_x a = n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$ $K_x = \frac{n\pi}{a}$ con $n \in \mathbb{Z}$

3) $Z(x,y=0,t)=0 \Rightarrow X(x)Y(0)T(t)=0 \quad \forall x,t \Rightarrow Y(0)=0$

Entonces $Y(0) = E\cos(0) + F\,\mathrm{sen}(0) = 0 \rightarrow \underline{E=0}$

4) $Z(x,y=b,t)=0 \Rightarrow X(x)Y(b)T(t)=0 \quad \forall x,t \rightarrow Y(b)=0$

$\rightarrow Y(b) = E\cos(K_y b) + F\,\mathrm{sen}(K_y b) = 0 \rightarrow F\,\mathrm{sen}(K_y b) = 0$ ← porque $E=0$

Por tanto, $K_y b = m\pi$ para $m \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $K_y = \frac{m\pi}{b}$ con $m \in \mathbb{Z}$

Con estas condiciones, tenemos que $T(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$, $X(x) = D\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, $Y(y) = F\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$

y además, $\omega^2 = v^2(k_x^2 + k_y^2) = v^2\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)$

Entonces, la solución es:

$$Z = XYT = \left[A_{n,m}\cos(\omega_{nm}t) + B_{n,m}\,\mathrm{sen}(\omega_{nm}t)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

Dejamos fuera las constantes D, F definimos $A_{nm} = ADF$, $B_{nm} = BDF$

y podemos sumar sobre todas las $n, m \in \mathbb{N}$ y seguiremos teniendo una solución

$$\Rightarrow Z(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_{n,m}\cos(\omega_{nm}t) + B_{n,m}\,\mathrm{sen}(\omega_{nm}t)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

- Aplicamos las condiciones iniciales

5) $Z(x,y,t=0) = f(x,y)$

$$\rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_{nm}\cos(0) + B_{nm}\,\mathrm{sen}(0)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = f(x,y)$$

$$\rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{nm}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = f(x,y)$$

Que es una serie doble de senos, donde debemos encontrar los A_{nm}

Para ello, multiplicamos por $\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)$, $p \in \mathbb{N}$ e integramos respecto a x de $0 \to a$

$$\rightarrow \int_0^a \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{nm}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dx = \int_0^a f(x,y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)dx$$

$$\rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\int_0^a A_{nm}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)dx = \int_0^a f(x,y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)dx$$

$$\rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)A_{pm}\left(\frac{1}{2}a\right) = \int_0^a f(x,y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)dx$$

(por la ortogonalidad de seno, tenemos que $\int_0^a \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right) = \begin{cases}\frac{1}{2}a & \text{si } p=n \\ 0 & \text{si } p\neq n\end{cases}$

y entonces en la suma sólo sobrevive el término de $n=p$)

Multiplicamos por $\mathrm{sen}\left(\frac{q\pi}{b}y\right)$, $q \in \mathbb{N}$ e integramos respecto a y de $0 \to b$

$$\rightarrow \int_0^b \sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\mathrm{sen}\left(\frac{q\pi}{b}y\right)A_{pm}\left(\frac{1}{2}a\right)dy = \int_0^b\int_0^a f(x,y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{q\pi}{b}y\right)dx\,dy$$

$$\rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^b \frac{1}{2}aA_{pm}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\mathrm{sen}\left(\frac{q\pi}{b}y\right)dy = \int_0^b\int_0^a f(x,y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{q\pi}{b}y\right)dx\,dy$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}aA_{pq}\left(\frac{1}{2}b\right) = \int_0^b\int_0^a f(x,y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{q\pi}{b}y\right)dx\,dy$$

← por ortogonalidad otra vez, $\int_0^b \mathrm{sen}\left(\frac{\pi m}{b}y\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi q}{b}y\right)dy = \begin{cases}\frac{1}{2}b & \text{si } q=m \\ 0 & \text{si } q\neq 0\end{cases}$

por lo que en la suma sólo sobrevive el término con $m=q$

$$\Rightarrow A_{pq} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{q\pi}{b}y\right)dx\,dy$$

o bien, escrito con m,n $\rightarrow$ $A_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_a^a f(x,y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dx\,dy$

Aplicamos la otra condición, $\frac{d}{dt} Z(x,y,t=0) = 0$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{nm} \cos(w_{nm} t) + B_{nm} \operatorname{sen}(w_{nm} t) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \Big|_{t=0} = 0$$

$$\rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-w_{nm} A_{nm} \operatorname{sen}(w_{nm} t) + w_{nm} B_{nm} \cos(w_{nm} t) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \Big|_{t=0} = 0$$

$$\rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{nm} B_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = 0 \qquad \forall x,y.$$

Como los senos son una base ortonormal, la única forma en que la suma de 0 es que todos los coeficientes $w_{nm} B_{nm}$ sean 0 $\Rightarrow$ $\underline{B_{nm} = 0}$

Sólo nos queda calcular explícitamente A_{nm}

$$A_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x,y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dx\, dy$$

$$= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a xy(a-x)(b-y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dx\, dy$$

$$= \frac{4}{ab} \int_0^b y(b-y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy \int_0^a x(a-x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

Resultado de las integrales ✓

$$= \frac{4}{ab} \left[\frac{b\left[(-2b^2 - bm^2\pi^2 y + m^2\pi^2 y^2) \cos\left[\frac{m\pi y}{b}\right] + bm\pi(b-2y) \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi y}{b}\right]\right]}{m^3\pi^3} \right]_0^b \left[\frac{a\left[(-2a^2 - an^2\pi^2 x + n^2\pi^2 x^2) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + an\pi(a-2x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]}{n^3\pi^3} \right]_0^a$$

$$= \frac{4}{ab} \left[\frac{-2b^3 \cos(m\pi) - m\pi b^3 \operatorname{sen}(m\pi)}{m^3\pi^3} + \frac{2b^3}{m^3\pi^3} \right] \left[\frac{-2a^3 \cos(n\pi) - n\pi a^3 \operatorname{sen}(n\pi)}{n^3\pi^3} + \frac{2a^3}{n^3\pi^3} \right]$$

$$= \frac{4}{ab} \left[-\frac{2b^3(-1)^m}{m^3\pi^3} + \frac{2b^3}{m^3\pi^3} \right] \left[-\frac{2a^3(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{2a^3}{n^3\pi^3} \right] \qquad \text{, pues } n,m \in \mathbb{N}$$

Lo cual nos deja con varios casos según la paridad de n,m.

∘) Si alguno de m,n es par $\Rightarrow$ si m es par, el primer corchete vale 0, pues $\left[\frac{-2b^3(-1)^m}{m^3\pi^3} + \frac{2b^3}{m^3\pi^3}\right] = \frac{-2b^3}{m^3\pi^3} + \frac{2b^3}{m^3\pi^3} = 0$

si n es par, similarmente el segundo corchete es 0.

En cualquier caso, $A_{nm} = 0$

∘∘) Si m y n son impares :

$$\frac{4}{ab}\left[\frac{-2b^3(-1)^m}{m^3\pi^3} + \frac{2b^3}{m^3\pi^3}\right]\left[-\frac{2a^3(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{2a^3}{n^3\pi^3}\right] = \frac{4}{ab}\left[\frac{2b^3 + 2b^3}{m^3\pi^3}\right]\left[\frac{2a^3 + 2a^3}{n^3\pi^3}\right] = \frac{64}{ab}\left(\frac{b^3a^3}{m^3n^3\pi^6}\right) = \underline{\frac{64a^2b^2}{m^3n^3\pi^6}}$$

Ya con estos coeficientes, podemos expresar la solución:

$$Z(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{nm}\cos(\omega_{nm}t) + B_{nm}\,\text{sen}(\omega_{nm}t) \right] \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$= \sum_{m\ \text{impar}}\ \sum_{n\ \text{impar}} \frac{64\,a^2 b^2}{m^3 n^3 \pi^6}\cos(\omega_{nm}t)\ \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

Para que la suma se haga sobre m impar, n impar, podemos cambiar $m \to 2m+1$ y $n \to 2n+1$ y ahora sumar desde $m=0 \to m=\infty$ y $n=0 \to n=\infty$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{64\,a^2 b^2}{(2m+1)^3(2n+1)^3\pi^6}\cos(\omega_{2n+1,2m+1}\,t)\ \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi}{b}y\right)$$

donde $\omega^2_{2n+1\ 2m+1} = v^2\left(\frac{(2n+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{(2m+1)^2\pi^2}{b^2}\right)$

Extra: Demostrar $W\{J_p(x), Y_p(x)\} = \begin{vmatrix} J_p(x) & Y_p(x) \\ J_p'(x) & Y_p'(x) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi x}$

$$W\{J_p, Y_p\} = J_p(x)\, Y_p'(x) - J_p'(x)\, Y_p(x)$$

$$= J_p(x) \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(\pi p)\, J_p(x) - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen}\pi p}\right] - J_p'(x)\left[\frac{\cos(\pi p)\, J_p(x) - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen}\pi p}\right] \quad \swarrow \text{por la def. de } Y_p$$

$$= J_p(x)\left[\frac{\cos(\pi p)\, J_p'(x) - J_{-p}'(x)}{\operatorname{sen}\pi p}\right] - J_p'(x)\left[\frac{\cos(\pi p)\, J_p(x) - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen}\pi p}\right]$$

$$= \frac{\cancel{J_p(x) J_p'(x) \cos(\pi p)} - J_p(x) J_{-p}'(x) - \cancel{J_p(x) J_p'(x)\cos(\pi p)} + J_p'(x) J_{-p}(x)}{\operatorname{sen}\pi p}$$

$$= \frac{J_p'(x) J_{-p}(x) - J_p(x) J_{-p}'(x)}{\operatorname{sen}\pi p} \quad (1)$$

Pero la expresión de J_p es:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \Rightarrow J_p'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+p)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)} \frac{x^{2n+p-1}}{2^{2n+p}}$$

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p} \Rightarrow J_{-p}'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m-p)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-p+1)} \frac{x^{2m-p-1}}{2^{2m-p}}$$

Entonces, tenemos que:

- $J_p'(x) J_{-p}(x) - J_p(x) J_{-p}'(x)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+p)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)} \frac{x^{2n+p-1}}{2^{2n+p}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m-p)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-p+1)} \frac{x^{2m-p-1}}{2^{2m-p}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} (2n+p)\, x^{2n+2m-1}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)\Gamma(m+1)\Gamma(m-p+1)\; 2^{2m+2n}} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} (2m-p)\, x^{2n+2m-1}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)\Gamma(m+1)\Gamma(m-p+1)\; 2^{2n+2m}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} (2n-2m+2p)\, x^{2n+2m-1}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)\Gamma(m+1)\Gamma(m-p+1)\; 2^{2n+2m}} \quad (2)$$

Por otro lado,

Sabemos que J_p y J_{-p} son soluciones de la ecuación de Bessel, por lo que deben de cumplir que:

$$x^2 J_p''(x) + x J_p'(x) + (x^2-p^2) J_p(x) = 0$$
$$x^2 J_{-p}''(x) + x J_{-p}'(x) + (x^2-p^2) J_{-p}(x) = 0$$

multiplicamos la primera ec. por $J_{-p}(x)$ y la segunda por $J_p(x)$

$$\Rightarrow \quad x^2 J_p''(x) J_{-p}(x) + x J_p'(x) J_{-p}(x) + (x^2-p^2) J_p(x) J_{-p}(x) = 0.$$
$$\Rightarrow \quad x^2 J_{-p}''(x) J_p(x) + x J_{-p}'(x) J_p(x) + (x^2-p^2) J_{-p}(x) J_p(x) = 0$$

Luego las restamos y nos queda:

$$\Rightarrow x^2 \left[J_p''(x) J_{-p}(x) - J_{-p}''(x) J_p(x) \right] + x \left[J_p'(x) J_{-p}(x) - J_{-p}'(x) J_p(x) \right] + (x^2-p^2) \overbrace{\cancel{\left[J_p(x) J_{-p}(x) - J_{-p}(x) J_p(x) \right]}}^{0} = 0$$

$\Rightarrow$ Dividimos por x $\rightarrow$ $x\left[J_p''(x) J_{-p}(x) - J_{-p}''(x) J_p(x) \right] + \left[J_p'(x) J_{-p}(x) - J_{-p}'(x) J_p(x) \right] = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[x \left(J_p'(x) J_{-p}(x) - J_{-p}'(x) J_p(x) \right) \right] = 0$$

pues $\frac{d}{dx}\left[x \left(J_p'(x) J_{-p}(x) - J_{-p}'(x) J_p(x) \right) \right]$

$= x \frac{d}{dx}\left(J_p'(x) J_{-p}(x) - J_{-p}'(x) J_p(x) \right) + J_p'(x) J_{-p}(x) - J_{-p}'(x) J_p(x)$

$= x \left[J_p''(x) J_{-p}(x) + \cancel{J_p'(x) J_{-p}'(x)} - J_{-p}''(x) J_p(x) - \cancel{J_{-p}'(x) J_p'(x)} \right]$

$+ J_p'(x) J_{-p}(x) - J_{-p}'(x) J_p(x)$

$= x \left[J_p''(x) J_{-p}(x) - J_{-p}''(x) J_p(x) \right] + J_p'(x) J_{-p}(x) - J_{-p}'(x) J_p(x)$

y por tanto, $x\left(J_p'(x) J_{-p}(x) - J_{-p}'(x) J_p(x) \right) = C = cte$

$$\Rightarrow J_p'(x) J_{-p}(x) - J_{-p}'(x) J_p(x) = \frac{C}{x}$$

Para determinar el valor de C, regresamos al punto (2), teníamos

$$J_p'(x) J_{-p}(x) - J_{-p}'(x) J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} (2n-2m+2p) x^{2n+2m-1}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)\Gamma(m+1)\Gamma(m-p+1) 2^{2n+2m}} = \frac{C}{x}$$

De los términos de la doble suma, el único que tiene término x^{-1} es el correspondiente a $n=m=0$. para que la suma de como resultado C/x, los demás términos se deben de cancelar.

Entonces, tomamos el término de $n=m=0$

$$\rightarrow J_p'(x) J_{-p}(x) - J_{-p}'(x) J_p(x) = \frac{(-1)^{0+0} (0-0+2p) x^{0-1}}{\Gamma(1)\Gamma(1+p)\Gamma(1)\Gamma(-p+1) 2^0}$$

$$= \frac{2p}{\Gamma(1+p)\Gamma(1-p) x} = \frac{2p}{\Gamma(p)\, p\, \Gamma(1-p) x}$$ porque $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

$$= \frac{2}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)\,x}$$

$$= \frac{2}{\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi p}\,x}$$ ↙ propiedad de Γ, $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi p}$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\pi p}{\pi x}$$

$$\therefore \quad J_p'(x)\,J_{-p}(x) - J_{-p}'(x)\,J_p(x) = \frac{2\operatorname{sen}\pi p}{\pi x}$$

Pero regresando a (1), teníamos que

$$W\{J_p, Y_p\} = \frac{J_p'(x)\,J_{-p}(x) - J_p(x)\,J_{-p}'(x)}{\operatorname{sen}\pi p}$$

$$= \frac{\frac{2\operatorname{sen}\pi p}{\pi x}}{\operatorname{sen}\pi p}$$

$$= \frac{2}{\pi x}$$

Que es lo que se quería probar.