Cuarto Parcial Cálculo IV

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

19 de junio de 2020

Cambio de Variable

1. Sean $P(x,y) = xe^{-y^2}$ y $Q(x,y) = -x^2ye^{-y^2} + \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Evaluar la integral $\oint Pdx + Qdy$ sobre el cuadrado de lado $2a$, definido por las desigualdades $|x| \leq a$ y $|y| \leq a$.

Solución Queremos calcular la integral de línea $\int_\Gamma F \cdot d\gamma$ donde $F = (P(x,y), Q(x,y))$. Inmediatamente notamos un problema que no nos permite usar el teorema de Green, la función F no está definida en $(0,0)$ (que está dentro del cuadrado) pues al evaluar $Q(x,y)$ en $(0,0)$ es necesario dividir entre 0.

Entonces, mejor separamos la función F en dos: $F(x,y) =$
$= \left(xe^{-y^2}, -x^2ye^{-y^2} + \dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = \left(xe^{-y^2}, -x^2ye^{-y^2}\right) + \left(0, \dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \equiv F_1 + F_2$

Ahora podemos separar la integral de línea en dos partes:

$$\int_\Gamma F \cdot d\gamma = \int_\Gamma F_1 \cdot d\gamma + \int_\Gamma F_2 \cdot d\gamma \qquad ...(1)$$

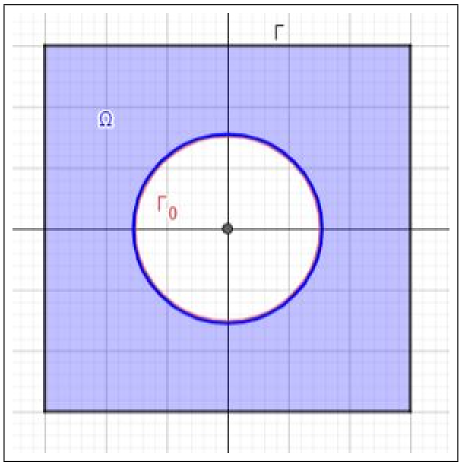
.

$\cdot$) Calculamos la primera integral $\int_\Gamma F_1 \cdot d\gamma$:
La función $F1$ sí está definida en todos los puntos del interior del cuadrado y además es clase C_1. Entonces podemos usar el teorema de Green para calcular la integral. El teorema nos dice que:
$\int_\Gamma F_1 \cdot d\gamma = \int_\Omega Rot(F_1)dxdy$ (con Ω el interior del cuadrado).
Pero $Rot(F_1) = Rot(xe^{-y^2}, -x^2ye^{-y^2}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-x^2ye^{-y^2}) - \dfrac{\partial}{\partial y}(xe^{-y^2}) = -2xye^{-y^2} - (-2yxe^{-y^2}) = 0$
Por lo tanto $Rot(F) = 0$ y entonces $\int_\Omega Rot(F_1)dxdy = 0$.
Por lo tanto $\underline{\int_\Gamma F_1 \cdot d\gamma = 0}$

$\cdot\cdot$) Calculamos la integral $\int_\Gamma F_2 \cdot d\gamma$:

La función $F_2(x,y) = (0, \dfrac{1}{x^2+y^2})$ no está definida en $(0,0)$ por lo que no podemos usar tranquilamente el teorema de Green.
Sin embargo, podemos usar la generalización del teorema de Green para espacios con 'hoyos'.

Agregamos una segunda curva Γ_0 parametrizada por γ_0 que sea una circunferencia de radio $\frac{a}{2}$ centrada en el origen y que rodea a la singularidad $(0,0)$



Por el teorema de Green generalizado, tenemos que:
$\int_\Omega Rot(F_2)dxdy = \int_\Gamma F_2 \cdot d\gamma - \int_{\Gamma_0} F_2 \cdot d\gamma_0$
Donde Ω es la región azul en la imagen. Y ambas curvas están parametrizadas en sentido antihorario
Entonces, la integral que buscamos es:

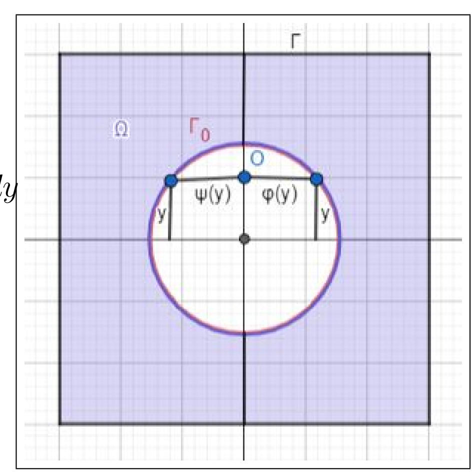
$$\int_\Gamma F_2 \cdot d\gamma = \int_\Omega Rot(F_2)dxdy + \int_{\Gamma_0} F_2 \cdot d\gamma_0 \quad ...(2)$$

Necesitamos resolver estas dos integrales.

En la segunda integral de (2) , Γ_0 es el círculo de radio $a/2$ y se parametriza como $\gamma_0(t) = (\frac{a}{2}\cos(t), \frac{a}{2}\sin(t))$ con t de 0 a 2π. Entonces la integral es:

$$\int_{\Gamma_0} F_2 \cdot d\gamma_0 = \int_0^{2\pi} F_2(\gamma_0(t)) \cdot \gamma_0{}'(t)\ dt \ = \int_0^{2\pi} F_2\left(\frac{a}{2}\cos(t), \frac{a}{2}\sin(t)\right) \cdot \left(-\frac{a}{2}\sin(t), \frac{a}{2}\cos(t)\right)\ dt = \int_0^{2\pi} \left(0, \frac{1}{(\frac{a}{2}cos(t))^2 + (\frac{a}{2}sin(t))^2}\right) \cdot \left(-\frac{a}{2}\sin(t), \frac{a}{2}\cos(t)\right)\ dt = \int_0^{2\pi} \left(0, \frac{4}{a^2}\right) \cdot \left(-\frac{a}{2}\sin(t), \frac{a}{2}\cos(t)\right)\ dt = \int_0^{2\pi} \frac{a}{2}\cos(t)\ dt = \underline{\ 0\ }$$

Por otro lado, la primera integral de (2) es una integral doble, $\int_\Omega Rot(F_2)\ dxdy$. Donde $Rot(F_2) = Rot(0, \frac{1}{x^2+y^2}) = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \ \equiv g(x,y)$.
Entonces nos queda la integral $\int\int_\Omega \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\ dxdy$.
Sin embargo, podemos ver que esta función $g(x,y)$ es "impar con respecto a x", es decir, podemos comprobar que cumple que $g(x,y) = -g(-x,y)$
Para realizar la integral doble de g sobre el conjunto azul en la imagen, podemos realizar la integral sobre el lado izquierdo y derecho de Ω por separado.
En el lado derecho, la integral iterada es $\int_{-a}^{a}\int_{\phi(y)}^{a} g(x,y)dx\ dy$ (3) ya que y varía de $-a$ hasta a y x varía desde algún



punto $\phi(y)$ hasta a.
En el lado izquierdo de Ω, la integral es $\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{\psi(y)} g(x,y)dx\ dy$.
x varía desde $-a$ hasta un punto $\psi(y)$ que depende de y.

Con el dibujo y por la forma simétrica del círculo, podemos ver que para una y fija, $\psi(y) = -\phi(y)$
Entonces, la integral sobre la parte izquierda de Ω es:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{\psi(y)} g(x,y)dx\ dy$$
$$= -\int_{-a}^{a}\int_{a}^{-\psi(y)} g(-x,y)dx\ dy \quad \text{(Por cambio de variable, cambiando x por -x, dx por -dx)}$$
$$= \int_{-a}^{a}\int_{a}^{-\psi(y)} g(x,y)dx\ dy \quad \text{(Porque } g \text{ es impar respecto a } x\text{)}$$
$$= -\int_{-a}^{a}\int_{-\psi(y)}^{a} g(x,y)dx\ dy \quad \text{(Por propiedad de la integral al voltear los límites)}$$
$$= -\int_{-a}^{a}\int_{\phi(y)}^{a} g(x,y)dx\ dy \quad \text{(Porque } \psi(y) = -\phi(y)\text{)}$$

Que, por (3), es el inverso aditivo de la integral sobre el lado derecho de Ω.
Por lo tanto, la integral sobre el lado izquierdo de Ω es el inverso aditivo a la integral sobre el lado derecho. Por lo tanto, la integral total (en todo Ω) es la suma de ambos lados, que es 0.
Es decir $\int_{\Omega} Rot(F_2)\ dxdy = 0$

Finalmente, por la igualdad (2), concluimos que $\int_{\Gamma} F_2 \cdot d\gamma = \int_{\Omega} Rot(F_2)dxdy + \int_{\Gamma_0} F_2 \cdot d\gamma_0 = 0 + 0 = 0 \quad \therefore \underline{\int_{\Gamma} F_2 \cdot d\gamma = 0}$

Regresando a (1), obtenemos $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Gamma} F_1 \cdot d\gamma + \int_{\Gamma} F_2 \cdot d\gamma = 0 + 0 = 0$
Y con eso concluye el ejercicio, el resultado es 0

2. Si $F = (Q, -P)$, demuestra que $\int_\Gamma Pdx + Qdy = \int_\Gamma F \cdot \eta ds$ (El producto punto $F \cdot \eta$ se llama componente normal de F a lo largo de Γ).

Solucón

Primero veamos quién es el vector η normal a la curva. Sabemos que si la curva está parametrizada por la función $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, entonces, el vector tangente a la curva es $\gamma\,'(t) = (\gamma_1\,'(t), \gamma_2\,'(t))$

Si queremos el vector η normal a la curva, hay que rotar este vector $\gamma\,'$ 270 grados (es decir, 90 grados en sentido horario). Esto porque si la curva está parametrizada en sentido antihorario, necesitamos esta rotación para que η apunte hacia 'afuera' de la curva.
Para esto, aplicamos la matriz la matriz de rotación con $\theta = \frac{3\pi}{2}$ al vector $\gamma\,'$

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\Bigg|_{\theta=\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix} \gamma_1\,'(t) \\ \gamma_2\,'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1\,'(t) \\ \gamma_2\,'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2\,'(t) \\ -\gamma_1\,'(t) \end{pmatrix}$$

Con esto ya tenemos el vector normal y podemos sustituirlo en la integral:
$\int_\Gamma F \cdot \eta ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot (\gamma_2\,'(t), -\gamma_1\,'(t))\ \ dt$ (Por como se calcula una integral de linea)

$$= \int_a^b (Q(\gamma(t)), -P(\gamma(t))) \cdot (\gamma_2\,'(t), -\gamma_1\,'(t))\ \ dt$$

$$= \int_a^b Q(\gamma(t))\gamma_2\,'(t) - P(\gamma(t))(-\gamma_1\,'(t))\ \ dt$$

$$= \int_a^b Q(\gamma(t))\gamma_2\,'(t) + P(\gamma(t))\gamma_1\,'(t)\ \ dt$$

$$= \int_a^b P(\gamma(t))\gamma_1\,'(t) + Q(\gamma(t))\gamma_2\,'(t)\ \ dt$$

$$= \int_a^b (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1\,'(t), \gamma_2\,'(t))\ \ dt$$

$= \int_\Gamma Pdx + Qdy$ (porque así se define la integral de línea en curva Γ parametrizada por γ)

Y ya probamos la igualdad que pedía el problema.