Tomás Ricardo Basile Álvarez 28/09/20

Mecánica Analítica : Tarea 1

1.5: Comprobar la ecuación 1.31 $A\times(B\times C)=(A\cdot C)B-(A\cdot B)C$ desarrollando ambos componentes en componentes cartesianos.

Sea $\bar{A}=A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}$, $\bar{B}=B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_z\hat{k}$, $\bar{C}=C_x\hat{\imath}+C_y\hat{\jmath}+C_z\hat{k}$

• $\Rightarrow \bar{B}\times\bar{C}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=(B_yC_z-B_zC_y)\hat{\imath}+(B_zC_x-B_xC_z)\hat{\jmath}+(B_xC_y-B_yC_x)\hat{k}$

$$\Rightarrow \bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C})=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_yC_z-B_zC_y & B_zC_x-B_xC_z & B_xC_y-B_yC_x\end{vmatrix}$$

$$=[A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)]\hat{\imath}+[A_z(B_yC_z-B_zC_y)-A_x(B_xC_y-B_yC_x)]\hat{\jmath}$$
$$+[A_z(B_yC_z-B_zC_y)-A_x(B_xC_y-B_yC_x)]\hat{k}$$

$$=[A_yB_xC_y-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x+A_zB_xC_z]\hat{\imath}+[A_zB_yC_z-A_zB_zC_y-A_xB_xC_y+A_xB_yC_x]\hat{\jmath}$$
$$+[A_zB_yC_z-A_zB_zC_y-A_xB_xC_y+A_xB_yC_x]\hat{k} \quad \cdots(1)$$

•• Por otro lado: $(\bar{A}\cdot\bar{C})\bar{B}-(\bar{A}\cdot\bar{B})\bar{C}$

$$=(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)(B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_z\hat{k})-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)(C_x\hat{\imath}+C_y\hat{\jmath}+C_z\hat{k})$$

$$=[A_xB_xC_x+A_yB_xC_y+A_zB_xC_z]\hat{\imath}+[A_xB_yC_x+A_yB_yC_y+A_zB_yC_z]\hat{\jmath}$$
$$+[A_xB_zC_x+A_yB_zC_y+A_zB_zC_z]\hat{k}+[-A_xB_xC_x-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x]\hat{\imath}$$
$$+[-A_xB_xC_y-A_yB_yC_y-A_zB_zC_y]\hat{\jmath}+[-A_xB_xC_z-A_yB_yC_z-A_zB_zC_z]\hat{k}$$

$$=[A_yB_xC_y+A_zB_xC_z-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x]\hat{\imath}$$
$$+[A_xB_yC_x+A_zB_yC_z-A_xB_xC_y-A_zB_zC_y]\hat{\jmath}$$
$$+[A_xB_zC_x+A_yB_zC_y-A_xB_xC_z-A_yB_yC_z]\hat{z} \quad \cdots(2)$$

Vemos que $(1)=(2)$ y así se comprueba que

$$A\times(B\times C)=(A\cdot C)B-(A\cdot B)C$$

Hállese el triple producto de $\bar{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$, $\bar{B} = -\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$
$\bar{C} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$.

Usamos la identidad probada para escribir $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = (\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C}$

$$\bar{A} \cdot \bar{C} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}) \cdot (2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}) = 3(2) + 4(-1) + 5(1) = 7$$
$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}) \cdot (-\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}) = 3(-1) + 4(4) + 5(-2) = \underline{3}$$

$$\Rightarrow (A \cdot C)B - (A \cdot B)C = 7\bar{B} - 3\bar{C}$$
$$= 7(-\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}) - 3(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k})$$
$$= \underline{-13\hat{\imath} + 31\hat{\jmath} - 17\hat{k}}$$

1.11: Halla el conjunto recíproco de vectores del conjunto no coplanar de 1-10.

Primero vemos cuál de los dos es no coplanar calculando el producto escalar triple

a) $\bar{b}_1 = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 4\hat{k}$

$\bar{b}_2 = \hat{\imath} + 3\hat{k}$

$\bar{b}_3 = -3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - \hat{k}$

$$\rightarrow \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \times \bar{b}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 2(-(-4)(3)) - 1(-1-(-3)(3)) + 4((-4)(+1)) = 0$$

Coplanar

b) $\bar{b}_1 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

$\bar{b}_2 = -3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

$\bar{b}_3 = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$

$$\rightarrow \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \times \bar{b}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1((-4)(-1)-(2)(-1)) - 2((-3)(-1)-2(2)) + 2((-3)(-1)-(-4)(2)) = 30 \neq 0$$

No coplanar

Ahora usamos las fórmulas para los recíprocos de los vectores b)

con $\Delta = b_1 \cdot b_2 \times b_3 = \underline{30}$

$$\rightarrow \bar{\beta}_1 = \frac{b_2 \times b_3}{\Delta} = \frac{(-3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}) \times (2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k})}{30} =$$

$$= \frac{1}{30}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{30}\left[((-4)(-1)-(-1)(2))\hat{\imath} - ((-3)(-1)-(2)(2))\hat{\jmath} + ((-3)(-1)-(-4)(2))\hat{k}\right]$$

$$= \frac{1}{30}(6\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 11\hat{k})$$

$$\rightarrow \bar{\beta}_2 = \frac{\bar{b}_3 \times \bar{b}_1}{\Delta} = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{30}\left[((-1)(2)-(-1)(2))\hat{\imath} - ((2)(2)-(1)(-1))\hat{\jmath} + ((2)(2)-(-1)(1))\hat{k}\right]$$

$$= \frac{1}{30}(-5\hat{\jmath} + 5\hat{k})$$

$$\rightarrow \bar{\beta}_3 = \frac{\bar{b}_1 \times \bar{b}_2}{\Delta} = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{30}\left[((2)(2)-(2)(-4))\hat{\imath} - ((1)(2)-(2)(-3))\hat{\jmath} + ((1)(-4)-(2)(-3))\hat{k}\right]$$

$$= \frac{1}{30}(12\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} + 2\hat{k})$$

1.22: a) Una rotación es una transformación de coordenadas que implica un cambio de base. Considerando los dos conjuntos de vectores base unidad ortogonales $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ y $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$ relacionados por $e_i' = \sum_j t_{ij}\, \bar{e}_j$ demostrar $\bar{e}_j = \sum_i t_{ij}\, e_i'$

Como e_1', e_2', e_3' forman una base, entonces un vector $\bar{e}_j$ se puede escribir como combinación lineal de esta base

$$\bar{e}_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\, \bar{e}_i' = a_{1j}\, \bar{e}_1' + a_{2j}\, \bar{e}_2' + a_{3j}\, \bar{e}_3' \quad \ldots (1)$$

Ahora tomamos el producto punto de ambos lados con e_i'

$$\rightarrow \bar{e}_j \cdot \bar{e}_i' = (a_{1j}\, \bar{e}_1' + a_{2j}\, \bar{e}_2' + a_{3j}\, \bar{e}_3') \cdot e_i'$$
$$= a_{1j}\, e_1' \cdot e_i' + a_{2j}\, e_2' \cdot e_i' + a_{3j}\, e_3' \cdot e_i'$$
$$= a_{ij}$$

porque $\{e_1', e_2', e_3'\}$ es una base ortonormal sólo sobrevive el término i-ésimo. al tomar el producto con $\bar{e}_i'$

$$\therefore\ a_{ij} = \bar{e}_j \cdot e_i' = \bar{e}_j \cdot \sum_j t_{ij}\, \bar{e}_j \quad \leftarrow \text{Por hipótesis}$$
$$= \bar{e}_j \cdot (t_{i1}\, \bar{e}_1 + t_{i2}\, \bar{e}_2 + t_{i3}\, \bar{e}_3)$$
$$= t_{ij}$$

como $\{e_1, e_2, e_3\}$ es ortonormal, sólo sobrevive el término j-ésimo. al tomar el producto con $\bar{e}_j$

$$\therefore\ a_{ij} = t_{ij}$$

$\therefore$ Regresando a (1), tenemos que al sustituir $a_{ij} = t_{ij}$, queda:

$$\boxed{\bar{e}_j = \sum_{i=1}^{3} t_{ij}\, \bar{e}_i'}$$

b) Demuestre que $\sum_{i=1}^{3} t_{ij}\, t_{ik} = \delta_{jk}$

Partimos de que $\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k = \delta_{jk}$ por ser un conjunto ortonormal $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

Usamos el resultado anterior: $\left(\sum_i t_{ij}\, \bar{e}_i'\right) \cdot \left(\sum_i t_{ik}\, e_i'\right) = \delta_{jk}$

$$\rightarrow (t_{1j}\, e_1' + t_{2j}\, e_2' + t_{3j}\, e_3') \cdot (t_{1k}\, e_1' + t_{2k}\, e_2' + t_{3k}\, e_3') = \delta_{jk}$$

Distribuimos: $\rightarrow$
$$t_{1j} t_{1k} (e_1' \cdot e_1')^{1} + t_{1j} t_{2k} (e_1' \cdot e_2')^{0} + t_{1j} t_{3k} (e_1' \cdot e_3')^{0} + t_{2j} t_{1k} (e_2' \cdot e_1')^{0}$$
$$+ t_{2j} t_{2k} (e_2' \cdot e_2')^{1} + t_{2j} t_{3k} (e_2' \cdot e_3')^{0} + t_{3j} t_{1k} (e_3' \cdot e_1')^{0} + t_{3j} t_{2k} (e_3' \cdot e_2')^{0}$$
$$+ t_{3j} t_{3k} (e_3' \cdot e_3')^{1} = \delta_{jk}$$

Usamos ortonormalidad de $\{e_1', e_2', e_3'\}$ y casi todos los productos desaparecen

$$\rightarrow t_{1j}\, t_{1k} + t_{2j}\, t_{2k} + t_{3j}\, t_{3k} = \delta_{jk}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{3} t_{ij}\, t_{ik} = \delta_{jk}}$$

2.1 b) Encontrar las componentes rectángulares de la velocidad y aceleración de una partícula con:

$$r = 3t\,\hat{\imath} - 4t\,\hat{\jmath} + (t^2+3)\,\hat{k}$$

Derivamos: $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(3t)\,\hat{\imath} + \dfrac{d}{dt}(-4t)\,\hat{\jmath} + \dfrac{d}{dt}(t^2+3)\,\hat{k}$

Los vectores $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ son ctes y salen de la derivada

$$= 3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + 2t\,\hat{k}$$

Derivamos de nuevo para la aceleración:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(3)\,\hat{\imath} + \frac{d}{dt}(-4)\,\hat{\jmath} + \frac{d}{dt}(2t)\,\hat{k}$$

$$= 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 2\,\hat{k}$$

$$= 2\,\hat{k}$$

2.2 c) Obtener las expresiones de las componentes polares de la velocidad y la aceleración con

$$r(t) = a/t \quad , \quad \phi(t) = bt$$

Podemos pensar como que estamos en coordenadas cilíndricas con $z(t) = 0$ y usar las fórmulas encontradas en clase para velocidad y aceleración en cilíndricas. (con r en vez de ρ)

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{z}\,\hat{k}$$

Donde $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(a/t) = -a/t^2$, $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(bt) = b$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} = -\frac{a}{t^2}\,\hat{e}_r + \left(\frac{a}{t}\right)(b)\,\hat{e}_\phi + 0\hat{k}$$

$$= -\frac{a}{t^2}\,\hat{e}_r + \frac{ab}{t}\,\hat{e}_\phi$$

En clase vimos también la aceleración en coordenadas cilíndricas como:

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{k}$$

donde $\dot{r} = -a/t^2 \rightarrow \ddot{r} = 2a/t^3$, $\dot{\phi} = b \rightarrow \ddot{\phi} = 0$, $\dot{z} = 0 \rightarrow \ddot{z} = 0$

y por lo tanto, queda:

$$\bar{a} = \left(\frac{2a}{t^3} - \left(\frac{a}{t}\right)(b)^2\right)\hat{e}_r + \left(\left(\frac{a}{t}\right)(0) + 2\left(-\frac{a}{t^2}\right)(b)\right)\hat{e}_\phi + 0\hat{k}$$

$$= \left(\frac{2a}{t^3} - \frac{ab^2}{t}\right)\hat{e}_r + \left(-\frac{2ab}{t^2}\right)\hat{e}_\phi$$

2.4 Hallar las componentes esféricas de la velocidad y aceleración de una partícula con

$$r = b, \quad \theta = \theta_0 \cos \omega t \qquad \phi = \omega t$$

Usamos las expresiones para velocidad en coordenadas esféricas

$$\bar{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

donde $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{db}{dt} = 0$, $\dot{\theta} = \frac{d}{dt}(\theta_0 \cos \omega t) = -\omega\theta_0\,\mathrm{Sen}\,\omega t$, $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\omega t = \omega$

Sustituimos:

$$\Rightarrow \bar{v} = 0\,\hat{e}_r + (b)(-\omega\theta_0\,\mathrm{sen}\,\omega t)\,\hat{e}_\theta + (b)(\mathrm{sen}(\theta_0 \cos \omega t))(\omega)\,\hat{e}_\phi$$

$$= -\omega\theta_0 b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{e}_\theta + b\omega\,\mathrm{sen}(\theta_0 \cos \omega t)\,\hat{e}_\phi$$

Y la expresión de aceleración es:

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\,\mathrm{sen}^2\theta\,\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_\theta$$
$$+ (r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2r\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi$$

Donde $r = b \rightarrow \dot{r} = 0 \rightarrow \ddot{r} = 0$

$\theta = \theta_0 \cos \omega t \rightarrow \dot{\theta} = -\theta_0\,\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t \rightarrow \ddot{\theta} = -\theta_0\,\omega^2 \cos \omega t$

$\phi = \omega t \rightarrow \dot{\phi} = \omega \rightarrow \ddot{\phi} = 0$

Sustituimos:

$$\therefore \bar{a} = \left(0 - (b)(-\theta_0\,\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t)^2 - b\,\mathrm{sen}^2(\theta_0 \cos \omega t)(\omega)^2\right)\hat{e}_r$$
$$+ \left(b(-\theta_0\,\omega^2 \cos \omega t) + 2(0)(-\theta_0\,\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t) - b\,\mathrm{sen}(\theta_0 \cos \omega t)\cos(\theta_0 \cos \omega t)(\omega)^2\right)\hat{e}_\theta$$
$$+ \left(b\,\mathrm{sen}(\theta_0 \cos \omega t)(0) + 2(0)(\omega)\,\mathrm{sen}(\theta_0 \cos \omega t) + 2b\cos(\theta_0 \cos \omega t)(-\theta_0\,\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t)\,\omega\right)\hat{e}_\phi$$

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{a} &= \left[-b\,\theta_0^2\,\omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t) - b\,\omega^2\,\mathrm{sen}^2(\theta_0 \cos(\omega t))\right]\hat{e}_r \\ &+ \left[-b\,\theta_0\,\omega^2 \cos(\omega t) - b\,\omega^2\,\mathrm{sen}(\theta_0 \cos(\omega t))\cos(\theta_0 \cos(\omega t))\right]\hat{e}_\theta \\ &+ \left[-2b\,\omega^2\theta_0 \cos(\theta_0 \cos(\omega t))\,\mathrm{sen}(\omega t)\right]\hat{e}_\phi\end{aligned}}$$