

MAF

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

12 de enero de 2021

1. Análisis de Fourier

1.1. Onda Armónicas:

Un tipo muy importante de ondas son las armónicas, que son aquéllas que tienen como perfil de onda la gráfica de un sin. Es decir, se ven como:

$$\psi(x, t) = A \sin(k(x \mp vt) + \epsilon) = A \sin(kx \mp kvt + \epsilon) = A \sin(kx \mp \omega t + \epsilon)$$

Donde k , A , ϵ son parámetros para definir la curva seno, v es la velocidad en la que se propaga la onda. Donde por ahora consideremos que ω se define como vk .

Una onda parámetro tiene varios parámetros importantes como:

Fase (ϕ): Es el argumento que está dentro del seno, es decir. $\phi = kx - \omega t$.

Amplitud (A): Es la altura de las crestas con respecto al punto medio.

Número de propagación de onda (k): Es necesario introducirla porque x tiene unidades de metros. Para un perfil fijo de onda ($t = t_0$), $k/2\pi$ mide la cantidad de repeticiones que tiene la onda por unidad de longitud. (Es decir, es algo así como la frecuencia angular del perfil de onda)

Longitud de Onda (periodo espacial) (λ): Para un perfil de onda fijo, λ mide la distancia entre dos repeticiones seguidas de la onda. Es decir, es el número que cumple $\psi(x, t) = \psi(x + \lambda, t)$

Velocidad (v): Mide la velocidad con la que se propaga la onda. Es decir, para si tenemos un observador fijo, mide la longitud de onda que pasa por el observador por segundo.

Frecuencia Angular (ω): Es el ángulo en el que aumenta la fase después de un segundo.

Frecuencia (temporal) (f): Para un observador fijo, es la cantidad de repeticiones que verá al pasar un segundo.

Periodo Temporal (T): Para un observador fijo, es la cantidad de tiempo que debe de pasar para que se repita la onda. Es decir, que cumple $\psi(x, t + T) = \psi(x, t)$

Desfase Inicial (ϵ): Es la fase que se tiene inicialmente en $t = 0, x = 0$.

Se pueden comprobar las siguientes relaciones sobre estas definiciones:
 $k = (2\pi)/\lambda$ (A partir de usar la def. de λ).

$f = 1/T$ (A partir de las definiciones de estas dos cantidades)

$2\pi f = \omega$

$\omega = kv$ (A partir de la definición de ω)

$v = \lambda/T$

Podemos notar que estas ondas son infinitas en ambas direcciones.

1.2. Objetivo y Aplicaciones de Fourier

Objetivo: Queremos descomponer una función periódica en combinación lineal de elementos de la base $B = \{1, \cos x + \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x\}$

En este caso se aplica al caso específico en que el periodo sea de longitud 2π . Si la función tiene un periodo p , la base es: $\{1, \cos 2\pi/p x, \cos 2(2\pi/p)x, \dots, \sin 2\pi/p x, \sin 2(2\pi/p)x, \dots\}$.

Para el caso de funciones de periodo 2π , queremos escribirlas como sigue:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$$

.

Aplicaciones: Sirve para resolver ecuaciones diferenciales como la ecuación de onda o como la ecuación de calor.

Ecuación del calor es: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Con condición de frontera dada por $u(0, x) = u_0(x)$.

Buscaremos una solución del tipo $u_n(t, x) = T_n(t)X_n(x)$ (método de separación de variables).

En la que para todo n , $u_n(t, x)$ es una solución y la solución general la conseguiremos como la suma de todas estas soluciones.

Ecuación de Onda es: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Y el método de solución será muy parecido, donde cada una de las soluciones $u_n(t, x)$ se llama un armónico.

Las series de Fourier también se pueden usar para descomponer una señal en una combinación lineal de funciones continuas (que pueden ser senos y cosenos si queremos una serie de Fourier). Entonces, se calculan los coeficientes de esta base y estos coeficientes son los que se envían a otra persona para que pueda reconstruir la onda.

1.3. Coeficientes de la serie de Fourier:

Promedio de una función en un intervalo:

El promedio de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es obviamente:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx := P_{a,b}(f)$$

Por ejemplo, el valor promedio de \sin o \cos en un intervalo completo es de 0. El valor promedio de \sin^2, \cos^2 en un intervalo completo es la mitad de la amplitud.

Coeficientes de Fourier:

Digamos que $f(x)$ tiene periodo 2π . Tomamos como la base, a las funciones seno y coseno con este mismo periodo, $B = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$.

Queremos aproximar f como una serie de fourier (aproximar porque no sabemos si converja bien). Es decir:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Necesitaremos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} P_{-\pi,\pi}(\sin(mx) \cos(nx)) &= 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \\ P_{-\pi,\pi}(\sin(mx) \sin(nx)) &= \frac{1}{2} \delta_{m,n} \text{ o vale } 0 \text{ si } m = n = 0 \\ P_{-\pi,\pi}(\cos(mx) \cos(nx)) &= \frac{1}{2} \delta_{m,n} \text{ o vale } 1 \text{ si } m = n = 0. \end{aligned}$$

Se puede hacer sencillamente con la representación compleja de las funciones y usando que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ excepto si $k = 0$ donde la integral vale 2π .

Sino, se puede usar las identidades trigonométricas que van de producto a suma.

Más generalmente definimos:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

Usaremos ahora que la base B es una base ortogonal con este producto interno. Volvemos a la representación aproximada que buscamos:

$$f(x) \sim S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

Lo que vamos a hacer es calcular los promedios siguientes:

$$\begin{aligned} P_{-\pi,\pi}(f \cdot 1) &\sim P_{-\pi,\pi}(S(f) \cdot 1) = a_0/2 \\ P_{-\pi,\pi}(f \cdot \cos mx) &\sim P_{-\pi,\pi}(S(f) \cdot \cos mx) = \frac{1}{2\pi} \frac{a_m}{2} \\ P_{-\pi,\pi}(f \cdot \sin mx) &\sim P_{-\pi,\pi}(S(f) \cdot \sin mx) = \frac{b_m}{2} \end{aligned}$$

Los resultados se deben a las propiedades de ortogonalidad. Entonces, los coeficientes se calculan como:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \end{aligned}$$

Forma Compleja

Nuevamente, tenemos que $S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$

Luego, reemplazamos las expresiones para sin, cos en términos de exponencial y nos queda:

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} \sum \frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) + \sum \frac{b_n}{2i} (e^{inx} - e^{-inx})$$

que podemos escribir como:

$$S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Donde los c_n están dados por:

$$\begin{aligned} n \geq 0 \quad c_n &= \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{b_n}{i} \right) = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \\ n \geq 0 \quad c_{-n} &= \frac{1}{2} \left(a_n - \frac{b_n}{i} \right) = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \end{aligned}$$

Con lo que vemos que si a, b son reales, entonces $c_n = \bar{c}_{-n}$.

Los valores c_n se pueden escribir como $c_n = \hat{f}(n)$.

El objetivo es escribir $f(x) = S(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ y usamos el hecho de que el promedio cumple

$P_{(-\pi, \pi)}(e^{inx})$ es igual a 0 para $n \neq 0$ y 1 si $n = 0$.

Calculamos ahora el promedio de $f \cdot e^{-imx}$.

$$P_{(-\pi, \pi)}(f \cdot e^{-imx}) = P_{(-\pi, \pi)}(s(f)e^{-imx}) = c_m$$

Entonces, queda que los coeficientes de fourier son:

$$c_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Y se puede ver que dados los coeficientes de la forma compleja, se puede regresar a los de la forma real con:

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

Ejemplo: Sea $f(x)$ igual a 1 para $x \in (0, \pi)$ e igual a 0 en $(-\pi, 0)$. Entonces, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi in} (e^{-in\pi} - 1)$

Con lo que tenemos que $c_n = \frac{1}{\pi in}$ para n impar y vale 0 para n par y vale $c_0 = \frac{1}{2}$.

Entonces, la serie de Fourier es:

$$\begin{aligned} f(x) = S(f)(x) &= \sum c_n e^{inx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \left(\frac{e^{ix}}{1} + \frac{e^{3ix}}{3} + \dots \right) + \frac{1}{\pi i} \left(\frac{e^{-ix}}{-1} + \frac{e^{-3ix}}{-3} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2i}{\pi} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{3(2i)} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right) \end{aligned}$$

1.4. Otros Intervalos:

Intervalo simétrico: Digamos que los intervalos en los que queremos trabajar son $[-l, l]$. Entonces, necesitamos que los senos y cosenos sean $2l$ periódicos, por tanto, las funciones van a ser:

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad e^{in\pi x/l}$$

Entonces, ahora la serie que buscamos es una del tipo:

$$s(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)]$$

Ahora los coeficientes vienen dados por:

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l}$$

Intervalo General: Digamos que el intervalo es $[a, b]$ donde $L = b - a$. Entonces queremos expresar una función l periódica. Ahora necesitamos cosenos y senos con este periodo, que son:

$$\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right), \quad \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right), \quad e^{i2\pi nx/L}$$

Y los coeficientes de la serie están dados por:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\ c_n &= \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-\frac{2\pi inx}{L}} dx \end{aligned}$$

Funciones Pares e Impares

Una función es par si $f(x) = f(-x)$ y es impar si $f(x) = -f(-x)$. Además, cualquier función f se puede escribir como una suma de una función par y una impar con:

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Para una función par, se cumple que:

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx$$

Para una función impar, se cumple que:

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0$$

El producto de dos pares es par, de par e impar es impar y de dos impares es par.

En series de fourier, claramente si f es par, entonces $b_n = 0$ para todo n .

SI f es impar, entonces $a_n = 0$ para todo n .

Si tenemos una función $f(x)$ definida en $[0, l]$ entonces tenemos tres posibilidades. La primer es extender a f a $[-l, l]$ como una función par y luego calcular la serie de cosenos.

La segunda es extender f a $[-l, l]$ como una función impar y calcular su serie de senos.

La tercera opción es no extender nada y calcular su serie de fourier (senos y cosenos) en el intervalo $[0, l]$.

1.5. Convergencia de Series de Fourier

Consideramos funciones que sean 2π periódicas (o lo que es equivalente, funciones definidas en el círculo unitario complejo $= \Pi$).

Consideramos la serie compleja, dada por:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad n \in \mathbb{Z} \\ S(f)(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}\end{aligned}$$

$$\text{Y consideramos la suma parcial } S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}$$

Convergencia: Decimos que la sucesión de funciones $S_n(f)(x)$ converge a $S(f)$ en x si para todo $\epsilon > 0$ existe una $N : N(\epsilon, x)$ tal que si $n > N$ entonces $|S_n(f)(x) - S(f)(x)| < \epsilon$.

Convergencia Uniforme: Decimos que la sucesión de funciones converge uniformemente en el intervalo $[a, b]$ si para toda $\epsilon > 0$ existe una $N : N(\epsilon)$ tal que si $n > N$ y $x \in [a, b]$ entonces $|S_n(f)(x) - S(f)(x)| < \epsilon$.

Teorema: Si la función $f \in C^2(\Pi)$ (función clase C^2 con periodo 2π [los valores en los extremos coinciden]) entonces $S_N(f)$ converge uniformemente a $S(f)$.

En este caso, los coeficientes de fourier se pueden calcular con integración por partes:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Al integrar por partes desaparece el primer término y queda solamente la integral, que en este caso es:

$$\frac{1}{2\pi in} \int f'(x) e^{-inx} = \frac{1}{in} \hat{f}'(n)$$

Por tanto, tenemos la siguiente relación entre coeficientes de Fourier de una función y de su derivada:

$$\widehat{f}(n) = \frac{-1}{n} \widehat{f}'(n)$$

O más general:

$$(in)^k \widehat{f}(n) = \widehat{f^{(k)}}(n)$$

Entonces:

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{n^2} |\widehat{f''}(n)| \leq \frac{1}{n^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| |e^{-inx}| dx = \frac{1}{n^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| dx \leq \frac{C}{n^2}$$

Para una C constante que no depende de n .

Entonces, los términos en la serie de Fourier, que son $\widehat{f}(n)e^{inx}$, están acotados por $|\widehat{f}(n)|$ que a su vez se acota por $\frac{C}{n^2}$. Esta última $\frac{C}{n^2}$ es una serie convergente. Por lo que el criterio de Weirstrass nos dice que la serie $\sum \widehat{f}(n)e^{inx}$ es uniformemente convergente. ■

Teorema: Si f es $C^1(\Pi)$ entonces la serie de Fourier convergen uniformemente.

No se puede usar el mismo procedimiento que en el teorema anterior porque la series $\frac{C}{n}$ no converge. Sin embargo el teorema es cierto, aunque no trivial.

Lema de Riemann-Lebesgue: Si f es continua y de periodo 2π (lo que implica que no tiene saltos ni en las orillas), entonces los términos de Fourier tienden a 0.

Fenómeno de Gibbs: Si se tiene una discontinuidad de salto en f , entonces la serie de Fourier va a overshoot la discontinuidad y se pasa por un poco.

Función de Bois-Reymonda: Él encontró una función f continua y periódica en la que la serie de Fourier evaluada en 0 tendía a infinito.

1.5.1. Criterio de Dirichlet

Si f es una función de periodo 2π que cumple:

- Hay un número finito de máximos o mínimos.
- Hay una cantidad finita de puntos de discontinuidad
- $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| < \infty$

Entonces, se prueba que $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$ en todos los puntos excepto los de discontinuidad.

Y en los de discontinuidad, se tiene que $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(y_k) = \frac{f(y_k^+) - f(y_k^-)}{2}$.

Existen otros criterios de convergencia como el de Jordan y el de Diri.

Espacio de Lebesgue

El espacio de Lebesgue $L^P(\Pi)$ consiste de las funciones con $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^P dx < \infty$.

Donde la integral que se toma es la integral de Lebesgue.

En este tipo de integral, se desechan las discontinuidades de medida 0.

Dos funciones en este espacio son 'iguales' o más bien equivalentes si son diferentes en un conjunto medible de puntos.

Entonces ahora la convergencia que se busca no es 'total' sino una convergencia en todos los puntos excepto un conjunto de medida 0.

Teorema: Se demostró que hay una $f \in L^1(\Pi)$ cuya serie de Fourier diverge en todos los puntos.

Resultado de Corleson: Se demostró que toda función de tipo $L^2(\Pi)$ tiene una serie de Fourier convergente en casi todos los puntos.

Luego se probó que esto es cierto para toda $P > 1$.

Convergencia en L^2

Decimos que una sucesión de funciones S_n converge en media cuadrática (o en L^2) a f en $[-\pi, \pi]$ si $\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f(x)|^2 dx = 0$.

O lo que es lo mismo, si $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_n - f\|^2 = 0$
Donde $\|\cdot\|$ es la norma en L^2

$L^2(\Pi)$ Es un ejemplo de un espacio de **Hilbert**, que es un espacio con un producto interno y completo.

Como es completo, existe una base ortonormal (respecto a este producto interno) tal que toda función de L^2 se puede escribir como combinación lineal (infinita) de esta base.

1.6. Teorema de Parseval

Sea $f \in L^2(\Pi)$, entonces sus coeficientes de Fourier son $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Espacio de Hilbert: Para dos funciones en $L_2(\Pi)$, se les define el producto interno dado por:

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \in \mathbb{C}$$

Este producto interno cumple que:

- $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$
- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$
- $\langle f, f \rangle \geq 0$ y que $\langle f, f \rangle = 0 \leftrightarrow f \equiv 0$

En general, para funciones L periódicas, se define:

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{L} \int_{Periodo} f(x) \overline{g(x)} dx \in \mathbb{C}$$

Para que $L_2(\Pi)$ sea un espacio de Hilbert, debe de cumplir también que sea completo. Que significa que toda sucesión de cauchy converge dentro del mismo espacio.

Una definición equivalente es que existe una base de este espacio. En este caso, la base es la base de Fourier, que es $\mathcal{B} = \{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$. Que es una base ortonormal con este producto punto.

Entonces, para un $f \in L_2(\Pi)$, podemos calcular sus coeficientes en la base de Fourier como:

$$\widehat{f}(n) = \langle f, e^{inx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Proposición : Si $f \in L_2(\Pi)$ y $S_N(f)$ es su serie de Fourier cortada en N , entonces $f - S_N(f)$ es ortogonal a P_m . Donde P_m es cualquier polinomio trigonométrico (una combinación lineal finita de e^{inx} que se detiene en m).

Dem: PD. $\langle f - S_N(f), P_m \rangle = 0$. Basta verlo para cada uno de los sumandos de P_m nadamás. Entonces, por demostrar que $\langle f - S_N(f), e^{imx} \rangle = 0$. Esto es fácil de demostrar.

Luego, como $f - S_N(f)$ es ortogonal a cualquier polinomio P_m , en particular es ortogonal a $S_N(f)$. Por lo tanto, como $f = f - S_N(f) + S_N(f)$, se puede usar el teorema de pitágoras para llega a:

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2$$

Proposición 2: Por demostrar que $\|S_N(f)\|^2 = \sum_{|n| \leq N} |\widehat{f}(n)|^2$.

$$\text{Dem: } \|S_N(f)\|^2 = \left\langle \sum_{|n| \leq N} \widehat{f}(n) e^{inx}, \sum_{|n| \leq N} \widehat{f}(n) e^{inx} \right\rangle = \sum_{n,m} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{f}(m)} \langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \sum_{|n| \leq N} |\widehat{f}(n)|^2$$

Por tanto, al juntar esto con la proposición anterior, nos queda que $\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{|n| \leq N} |\widehat{f}(n)|^2$.

Lo que nos lleva a la **desigualdad de Bessel**:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

En particular, si $S_N(f)$ se aproxima a f como dijimos que lo hace, entonces $\|f - S_N(f)\| = 0$ y entonces se cumple la **identidad de Parseval**

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

Donde de manera general, la norma para una función L periódica se define como:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{L} \int_{Periodo} |f(x)|^2 dx$$

Definimos un nuevo espacio $l^2(\mathbb{Z})$ de hilbert cuyos elementos son sucesiones de complejos tales que su suma norma cuadrada sea finita.

La identidad de Parseval nos dice que $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$.

Entonces, para toda función en $f \in L^2(\Pi)$, tenemos una sucesión $\{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$.

Y además, ambos elementos tienen la misma norma.

Con el teorema de Parseval se pueden sacar sumas bien cools como las siguientes

Ejemplos

1. Sea $f(x) = x$, $-1 < x < 1$ (función $L = 2$ - periódica)

Entonces, su coeficiente complejo de Fourier es:

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{L} \int_{Periodo} f(x) e^{-2\pi n i x / L} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x e^{-\pi i n x} dx \\ &= \dots = \frac{-1}{2\pi i n} [e^{\pi i n} + e^{-\pi i n}] = \dots = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi i n} \end{aligned}$$

Esto para $n \neq 0$ (porque dividimos entre n), pero se puede comprobar que $\hat{f}(0) = 0$. Entonces, la función se puede escribir como:

$$f(x) = x = \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi i n} e^{\pi i n x} = \dots = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \pi n x}{n}$$

Según el teorema de Dirichlet, esta representación es válida para todo x excepto en los puntos de discontinuidad en donde vale la mitad de los límites del salto.

Podemos evaluarla en varios puntos y ver qué pasa:

- $x = 0$) nos queda $0 = 0$
- $x = 1$) nos queda $1 = 0$ lo cual sucede porque la serie de fourier no es válida en este discontinuidad.

- $x = 1/2$) Nos queda que: $\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(\pi n/2)}{n}$.

Lo que nos hace llegar a:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Ahora usamos la identidad de Parseval para encontrar otras cosas.

$$\text{La norma de } f \text{ es } \|f\|_2^2 = \frac{1}{L} \int_{\text{periodo}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 |x|^2 = \frac{1}{3}$$

Por otro lado, la suma del cuadrado de los coeficientes es:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\pi i n} \right|^2 = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Igualando estas dos cosas, nos queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- 2) $f(x) = x^2$ con $x \in [-\pi, \pi]$.

Me salto el desarrollo, pero resulta que la serie de Fourier puede ser una serie de cosenos y se obtiene:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Por Dirichlet, esto es válido en los puntos de $[-\pi, \pi]$ en donde la función es continua, y nos da las sumas:

- $x = 0$) nos queda $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Lo cual luego nos da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- $x = \pi$: En este punto nos queda la suma de Basilea de nuevo. Aquí sí es válido evaluar en las puntas porque la función no es discontinua ahí.

Parseval: La norma de f es:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{L} \int_{\text{periodo}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5}$$

La suma de los cuadrados de los coeficientes resulta dar $\frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Juntando ambas cosas, nos queda que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

1.7. Transformada de Fourier

Se utiliza para funciones no-periódicas. Se extiende la teoría para espectros continuos en vez de espectros discretos como se hacia con la serie de Fourier.

Los coeficientes de Fourier ahora serán continuos y a esta función continua se le llamará la transformada de Fourier.

En la serie de siempre, teníamos que:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\pi x/l} \quad , \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx$$

Si hacemos la extensión para parámetros continuos, llegamos a la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\alpha x} dx \\ f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \end{aligned}$$

La primera expresión es la transformada de f , que es una función en el mundo de frecuencias. La segunda expresión es la recuperación de $f(x)$ a partir de su transformada de Fourier y a esta propiedad se le conoce como teorema de inversión.

La motivación de esta definición se consigue partiendo de la serie y definiendo $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$. Luego se hace tender l a infinito.

El hecho de que f expresado a partir de la transformada se parezca como a sacarle la transformada a la transformada se llama **teorema de Dirichlet**

No todas las funciones pueden tener su transformada de Fourier.

Introducimos el espacio de Schartz $S(\mathbb{R})$ compuesto por funciones infinitamente diferenciables en todo \mathbb{R} y que $x^\alpha f^\beta(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

En el espacio de Schartz, todo funciona de manera ideal para la transformada de Fourier.

Otro espacio es el $f \in M(\mathbb{R})$ de funciones continuas en todo \mathbb{R} y acotadas como $|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^{1+\epsilon}}$ para todo x y todo $\epsilon > 0$.

En este espacio también funcionan lo de transformadas de Fourier.

Otro espacio es el ya visto $L^2(\mathbb{R}) = \{f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}$

Se puede comprobar que $S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Y no solamente eso, sino que cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede conseguir como una sucesión de elementos de $S(\mathbb{R})$ (S es denso en L). Lo cuál puede ser útil para probar que las series de fourier están bien definidas en $L^2(\mathbb{R})$.

Representación Alternativa:

Se usa la representación alternativa en la que la transformada es:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad , \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

Nosotros usaremos la original que mencionamos antes.

Propiedades:

- **Lineal:** La transformada es lineal: $\widehat{af + bg}(\alpha) = a\widehat{f}(\alpha) + b\widehat{g}(\alpha)$
- **Traslación:** $\widehat{f(x - a)}(\alpha) = e^{-ia\alpha}\widehat{f}(\alpha)$
- **Modulación:** $\widehat{e^{iax}f}(\alpha) = \widehat{f}(\alpha - a)$
- **Dilatación:** $\widehat{f(sx)}(\alpha) = \frac{1}{|s|}\widehat{f}\left(\frac{\alpha}{s}\right)$
- **Reflexión:** $\widehat{f(-x)}(\alpha) = \widehat{f}(-\alpha)$
- **Derivada:** $\widehat{f^{(n)}}(\alpha) = (i\alpha)^n\widehat{f}(\alpha)$
- **Mult. Polinomio:** $\widehat{x^n f}(\alpha) = i^n\widehat{f^{(n)}}(\alpha)$

Transformada Seno y Coseno:

Si la función con la que partimos es par o impar, la transformada se va a simplificar a solamente incluir senos o cosenos.

Por ejemplo: Si $f(x)$ es impar, entonces su transformada es impar pues:

$$\widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(\alpha x) - i\sin(\alpha x)] dx = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x) dx$$

Esta última expresión es una función impar respecto a α .

Transformada Seno:

Si f_s es una función impar, entonces su transformada seno es:

$$\widehat{f_s}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(x)\sin(\alpha x) dx \quad , \quad f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f_s}(\alpha)\sin(\alpha x) dx$$

Transformada Coseno

Si f_x es una función par, entonces su transformada coseno es:

$$\widehat{f_c}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(x)\cos(\alpha x) dx \quad , \quad f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f_c}(\alpha)\cos(\alpha x) dx$$

Ejemplo 1

$f(x) = \text{rect}(1)$, es decir,
 $f(x) = 1$ en $-1 < x < 1$ y $f(x) = 0$ en $|x| > 1$.

Entonces, se puede calcular que la transformada es:

$$\widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x} dx = \dots = \frac{1}{\pi\alpha} \frac{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}}{(-2i)} = \frac{1}{\pi} \text{sinc}(\alpha)$$

Por el teorema de inversión, tenemos que:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha)}{\pi\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha = \dots = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \cos(\alpha x)}{\alpha} d\alpha$$

Esta expresión es válida en todos los puntos de continuidad de f . Para el caso particular de $x = 0$, nos da la identidad:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

1.7.1. Ejemplo 2

Sea $f(x) = e^{-|x|}$

Entonces, su transformada es:

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\alpha x} dx = \dots = \frac{1}{\pi(1 + \alpha^2)}$$

Luego, el teorema de inversión nos dice que en los puntos de continuidad (todos), la función se puede escribir a partir de su transformada como:

$$f(x) = e^{-|x|} = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\pi(1 + \alpha^2)} d\alpha$$

Y entonces, $\frac{\pi}{2} e^{-|x|} = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + \alpha^2} d\alpha$

Y por ejemplo, en $x = 1$, se tiene: $\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2e}$

Ejemplos, Parejas:

- $f(x) = e^{-ax} H(x)$ (con H el step de Heaviside que vale 0 en negativos y 1 en positivos)
 $\Rightarrow \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi(a + i\alpha)}$
- $f(x) = e^{-bx^2}$ ($b > 0$) $\Rightarrow \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{b\pi}} e^{-\alpha^2/4b}$
- $f(x) \cos(ax)$, al aplicarle transformada, queda: $\frac{1}{2\pi} \frac{\hat{f}(\alpha - a) + \hat{f}(\alpha + a)}{2}$
- $f(x) \sin(ax)$, al aplicarle transformada, queda: $\frac{1}{2\pi} \frac{\hat{f}(\alpha - a) - \hat{f}(\alpha + a)}{2}$

1.8. Identidad de Plancherel (Teorema de Parseval para transformada)

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y su transformada $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Queremos ahora comparar las normas entre estas dos funciones.

Como no son funciones periódicas y viven en cambio en $L^2(\mathbb{R})$, el producto escalar que se les define es:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Lema: Si f, g son funciones y \hat{f}, \hat{g} sus transformadas, entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle_2 = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Dem: } \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\alpha) \overline{\hat{g}(\alpha)} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} e^{i\alpha x} dx \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \right] \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

Teorema de Plancherel: Usamos el lema anterior para $g = f$ y nos queda:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2$$

Ejemplo 1: Habiámos visto que la transformada de $Rect(1)$ es $\frac{1}{\pi} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$. Entonces, la identidad de Plancherel nos dice que:

$$\int_{-1}^1 1^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha}{\pi^2 \alpha^2} d\alpha$$

Ejemplo 2: Habiámos visto que si $f = e^{-|x|}$, su transformada es $\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \alpha^2}$. Luego, según Plancherel:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} dx &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(1 + \alpha^2)^2} d\alpha \\ \text{Y luego, ... } \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + \alpha^2)^2} d\alpha &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

1.9. Aplicaciones

- **Fórmula de sumación de Poisson:** Si $f \in S(\mathbb{R})$ y su transformada (con la definición sin el 2π) $\hat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \alpha} dx$
Entonces,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$$

\widehat{f} es la transformada evaluada en n , no los coeficientes de la serie de f (f ni si quiera es periódica, qué coeficientes quieres).

■ **Fórmula de Whitakker-Shannon de muestreo:**

Si $f \in S(\mathbb{R})$, $\widehat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i \alpha x} dx$, donde el soporte de f está dentro de $[-1/2, 1/2]$, entonces, se puede conocer f sólo conociendo sus valores en los enteros:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}$$

■ **Principio de Incertidumbre:**

Si $\phi \in S(\mathbb{R})$ tal que $\|\phi\|_2 = 1$, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx$ (es decir, es una distribución de probabilidad), entonces:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\phi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \alpha^2 |\widehat{\phi}(\alpha)|^2 d\alpha \right) \geq \frac{1}{8\pi}$$

Dem: $1 = \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|^2 dx = x|\phi(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - 2 \int_{\mathbb{R}} x \operatorname{Re}(\overline{\phi} \phi') dx$ Por partes, con $u = |\phi(x)|^2$
 $= 0 - 2 \int_{\mathbb{R}} x \operatorname{Re}[\overline{\phi}(x) \phi'(x)] dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x| |\phi(x)| |\phi'(x)| dx \leq$
 $\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |x\phi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ Desigualdad de CS
 $2 \left(\int_{\mathbb{R}} |x\phi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(2\pi \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi}'(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2}$ Planchel (def. usual de transformada)
 $2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\phi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(2\pi \int_{\mathbb{R}} |i\alpha \widehat{\phi}(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} = 2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\phi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(2\pi \int_{\mathbb{R}} \alpha^2 |\widehat{\phi}(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2}$
Y listo.

2. Fourier (Resumen visto en çÓptica)

Vimos que la suma de varias ondas de la misma frecuencia da una onda armónica de la misma frecuencia.

Ahora bien, si sumamos muchas ondas armónicas de longitud de onda $\lambda, \lambda/2, \lambda/3, \lambda/4, \dots$. Entonces el resultado será un perfil de onda medio extraño con periodicidad de λ .

Resulta que cualquier onda periódica (que no necesariamente sea armónica) de periodo $2\pi/\lambda$ (número de propagación k (frecuencia angular)) , se puede escribir como la combinación lineal de muchas ondas armónicas (senos y cosenos) de periodo $\lambda, \lambda/2, \lambda/3, \dots$ (es decir, de número de propagación $k, 2k, 3k, \dots$).

Teorema de Fourier: Sea f una onda continua periódica de número de onda k , entonces se puede escribir como:

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos(kx) + A_2 \cos(2kx) + A_3 \cos(3kx) + \dots + B_1 \sin(kx) + B_2 \sin(2kx) + B_3 \sin(3kx)$$

Para encontrar los números de los coeficientes, usamos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda \sin(akx) \cos(bkx) dx &= 0 \\ \int_0^\lambda \cos(akx) \cos(bkx) dx &= \lambda/2 \delta_{ab} \\ \int_0^\lambda \sin(akx) \sin(bkx) dx &= \lambda/2 \delta_{ab} \end{aligned}$$

Donde $k = 2\pi/\lambda$.

Con estas identidades, podemos calcular los coeficientes de la serie de fourier. Si queremos calcular el A_0 , entonces simplemente integramos de 0 a λ , todos los cosenos y senos se cancelan y entonces $\lambda C_0 = \int_0^\lambda f(x) dx$. Si queremos calcular A_m , multiplicamos por $\cos(mkx)$ y luego integramos de 0 a λ . Todos los miembros se cancelan excepto la integral de $A_m \cos^2(mkx)$ cuya integral vale $A_m \lambda/2$. Por lo tanto, nos queda que $\int_0^\lambda \cos(mkx) f(x) dx = \lambda/2 A_m$.

Entonces, nos queda que:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(mkx) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(mkx)$$

$$\text{Donde, } A_0 = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) dx$$

$$A_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \cos(mkx) dx$$

$$B_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \sin(mkx) dx$$

Existen algunas condiciones de simetría. Si f es par, entonces los coeficientes de seno valen 0. Si f es impar, entonces todos los coeficientes de coseno valen 0. Por último, A_0 es

el valor promedio de f .

Espectro de Frecuencias: El Espectro de frecuencias de f guarda los coeficientes de amplitud para cada m . Se puede pensar como una función $A(mk) = A_m$. Que a cada frecuencia mk le asigna su amplitud A_m . Éste sería el espectro de frecuencias de coseno, sin embargo, también podemos dibujar el espectro de frecuencias de seno $B(mk) = B_m$. Podemos también tener el espectro de frecuencias mixto, simplemente juntamos $A_m \cos(mk) + B_m \sin(mk) = C_m \cos(mk + \phi_m)$. $C(mk) = C_m$ es el espectro de frecuencias mixto. El valor de $A(1k)$ se conoce como frecuencia fundamental y los demás son los armónicos.

Un valor de A_m negativo indica que el coseno correspondiente se debe de desplazar 180 grados antes de sumarlo.

Ejemplo 2.1.

Tenemos una onda saw tooth que vale 1 de $-\lambda/a$ hasta λ/a y desde $\lambda - \lambda/a$ hasta $\lambda + \lambda/a$, ... Vale 0 sino.

Los coeficientes de Fourier apropiados son $A_0 = 4/a$ y $A_m = \frac{4}{a} \left(\frac{\sin(m2\pi/a)}{m2\pi/a} \right)$
 Luego, $f(x) = \frac{2}{a} + \sum \frac{4}{a} (\text{sinc}(m2\pi/a) \cos mkx)$

Si la $f(x)$ tiene detalles muy finos, se necesitarán senos y cosenos con frecuencia muy alta.

Serie de Fourier Compleja:

Se pueden juntar los cosenos y senos para formar una serie de términos de la forma e^{imkx} donde nuevamente $k = 2\pi/\lambda$ es la frecuencia angular. Se tiene:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{ikmx}$$

$$\text{Donde, } C_n = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) e^{-ikmx} dx$$

Las expresiones para los coeficientes se obtienen de forma similar a antes, simplemente se multiplica por e^{-ikmx} y luego se integra, lo que hace que todo se cancele excepto el coeficiente con C_m .

Podemos definir nuevamente un espectro de frecuencias, en el que graficamos C_m con respecto a mk .

2.1. Transformada de Fourier:

La transformada de Fourier es en cierto sentido una generalización a la serie de Fourier. La transformada de Fourier es una aplicación que convierte una función f en el espacio a una función g en el espacio frecuencia. La transformada es:

$$\begin{aligned} C(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ A(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx \\ B(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(kx) dx \end{aligned}$$

Éstas son en orden, la transformada compleja de $f(x)$, la transformada coseno y la transformada seno.

Es como una generalización de la serie de Fourier, sólo que toma todo tipo de frecuencias y no solo las enteras. Además, no se divide entre el promedio (entre $\lambda/2$) por lo que no es exactamente lo mismo. Es el caso límite de la serie de Fourier de f pero cuando el periodo de f tiende a infinito (y sin dividir entre el periodo total a las amplitudes constituyentes).

La función $C(k)$ da el espectro de frecuencias, nos da una idea de qué tanto está siendo usada cada una de las frecuencias angulares.

Se puede denotar $\mathbb{F}(f)$ a la función en el espacio frecuencia que resulta de tomar la transformada de Fourier de f .

Para $A(k)$ está claro que $A(-k) = A(k)$ por la paridad del coseno, por lo que la transformada siempre nos da una función par en el espacio de frecuencias.

Por otro lado, para $B(k)$, está claro que $B(-k) = -B(k)$ por la imparidad del seno, por lo que la transformada siempre nos da una función impar en el espacio de frecuencias.

Vemos además que $C(k) = A(k) - iB(k)$

Teorema 2.1.

Propiedades de la Transformada de Fourier:

- 1) Es lineal: $\mathbb{F}[af + bg] = a\mathbb{F}[f] + b\mathbb{F}[g]$
- 2) Cambio de escala: $\mathbb{F}[f(at)](k) = \frac{1}{|a|} \mathbb{F}[f]\left(\frac{k}{a}\right)$
- 3) Traslación: $\mathbb{F}[f(x - a)](k) = e^{-ika} \mathbb{F}[f](k)$
- 4) Inversión: Se puede recuperar la función f original a partir de la transformada (se muestra cómo luego).
- 5) $\mathbb{F}[f](0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

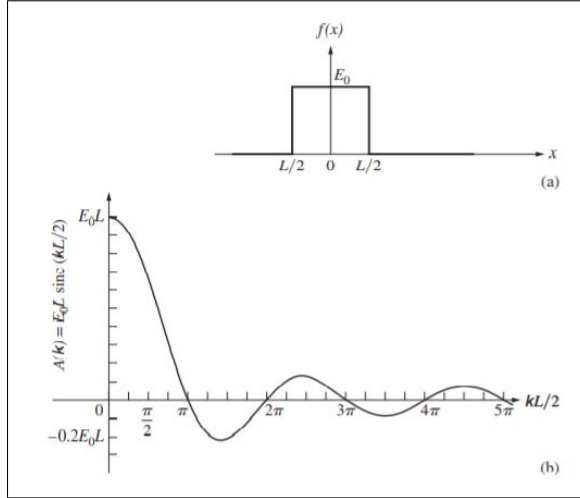
Finalmente, tal como antes podíamos encontrar f como la suma de sus ondas constituyentes, ahora dado el espacio de frecuencias de f , podemos 'sumarlas' para darnos f de vuelta:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} A(k) \cos(kx) dk + \int_0^{\infty} B(k) \sin(kx) dk \right] \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{-ikx} dk \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.

Tenemos la función:

$$f(x) = \begin{cases} E_0, & |x| < L/2 \\ 0, & |x| > L/2 \end{cases}$$



Calculamos su transformada. Como es una función par, su transformada seno va a ser 0 para todo k ($B(k) = 0$). La transformada coseno la calculamos como sigue: $A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx = \int_{-L/2}^{L/2} E_0 \cos kx dx =$

$$\frac{2E_0}{k} \sin kL/2 = E_0 L \text{sinc}(kL/2)$$

$$A(k) = E_0 L \text{sinc}(kL/2)$$

La transformada compleja será también

$$C(k) = E_0 L \text{sinc}(kL/2)$$

Entonces, podemos escribir a la función original como:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E_0 L \text{sinc}(kL/2) \cos kx dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0 L \text{sinc}(kL/2) e^{-ikx} dk$$

Nota: Se usó que $A(k) - iB(k) = C(k)$. Entonces, en este caso se tiene que $A(k) = C(k)$. Parece que la expresión compleja de f no es igual a la que tiene a $A(k)$. Sin embargo lo son, esto debido a que la parte imaginaria de la integral compleja es una función impar multiplicada por una par (el sinc), lo que da como resultado una función impar que se integra a 0. En general, siempre que tengamos a f par, $B(k) = 0$ y $A(k)$ va a ser par. Así, $C(k) = A(k)$ es par y la representación compleja de f va a perder a su parte imaginaria cuando multipliquemos $C(k)$ por $i \sin(-kx)$ y quede una función impar que integra a 0.

Teorema 2.2. Simetrías de la transformada de Fourier:

- 1) Si f es par y real, entonces $C(k)$ es par y real.
- 2) Si f es impar y real, entonces $C(k)$ es impar e imaginaria (sólo sobrevive el $B(k)$).
- 3) Si f es par e imaginaria, entonces $C(k)$ es par e imaginaria.
- 4) Si f es impar e imaginaria, entonces $C(k)$ es impar y real.
- 5) Si f es par y compleja, entonces $C(k)$ es par y compleja.
- 6) Si f es impar y compleja, entonces $C(k)$ es impar y compleja.

Ejemplo 2.3.

El tren de Ondas de Coseno:

Tenemos la función dada por:

$$E(x) = \begin{cases} E_0 \cos(k_p x) & , -L \leq x \leq L \\ 0 & , |x| > L \end{cases}$$

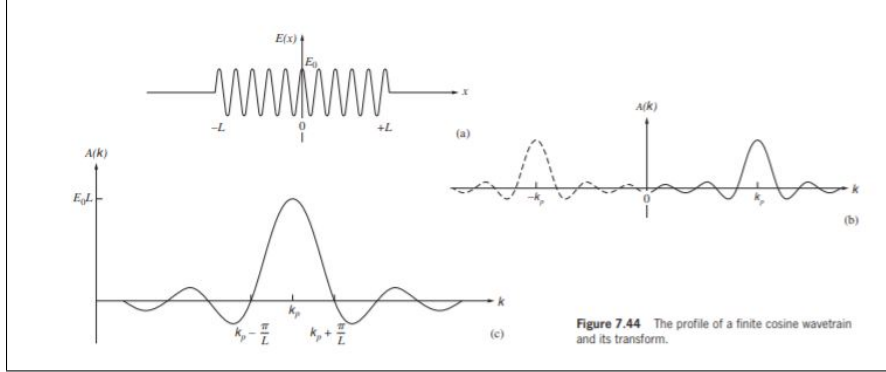


Figure 7.44 The profile of a finite cosine wavetrain and its transform.

Como la función es par, $B(k) = 0$ y por otro lado, calculamos $A(k) = \int_{-L}^L E_0 \cos(k_p x) \cos(kx) dx = \int_{-L}^L \frac{E_0}{2} [\cos((k_p + k)x) + \cos((k_p - k)x)] dx$

Lo cual da como resultado:

$$A(k) = E_0 L [\text{sinc}(L(k_p + k)) + \text{sinc}(L(k_p - k))]$$

Que nuevamente es igual a $C(k)$ y nuevamente es una función par.

Cuando hay muchas ondas en el tren, $\lambda_p \ll L \Rightarrow k_p L \gg 2\pi$, entonces $(k_p + k)L \gg 2\pi$ y por lo tanto el sinc y la transformada se vuelven muy chicos.

Aunque el tren coseno sea muy largo, de todas formas es finito y por lo tanto su transformada de Fourier tiene un cierto grosor alrededor de k_p . De hecho, vemos en la imagen que en este caso la montaña principal en la transformada de fourier tiene un grosor que va de $k_p - \pi/L$ hasta $k_p + \pi/L$. Vemos entonces que el ancho de la transformada de fourier es inversamente proporcional a la longitud del tren de ondas.

Similarmente al tren seno, se puede calcular la transformada de Fourier de un tren seno igual y da como resultado: $A(k) = 0$, $B(k) = E_0 L [\text{sinc}((k_p - k)L) - \text{sinc}((k_p + k)L)]$ y $C(k) = -iB(k)$

Este espectro de frecuencias se ve como un sinc hacia arriba centrado en k_p y un sinc hacia abajo centrado en $-k_p$, es una función impar.

2.2. Delta de Dirac:

Para seguir trabajando con la transformada de Fourier, será necesario desarrollar la teoría de la función Delta de Dirac. La función se define como:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \infty & , x = 0 \end{cases}$$

En realidad, no es una función como tal, sino que es una distribución de probabilidad, y como tal cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Sifting Property:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

También podemos recorrer la función delta para que ahora obtenga el infinito en otro punto, simplemente tomamos $\delta(x - x_0)$. Con esta nueva función, la sifting property queda como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

Con esto definido, podemos ahora calcular la transformada de Fourier de Coseno y de Seno. A partir de ahora, denotaremos la transformada de una función f como la función \hat{f} que está aplicada sobre el espacio de frecuencias.

Transformada del Coseno y Seno (completos): Ahora vemos la transformada del seno y coseno (completas). Veremos la transformada de $\cos k_p x$, $\sin k_p x$.

Coseno: La transformada de coseno $E_0 \cos(k_p x)$ sólo tiene parte real ($B(k) = 0$). Entonces, la transformada es: $\int_{-\infty}^{\infty} E_0 \cos(k_p) \cos(kx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} E_0/2 [\cos((k_p + k)x) + \cos((k_p - k)x)] dx$. Lo cual vale 0 si $k \neq k_p, -k_p$. Pero si $k = k_p$ o $k = -k_p$, uno de los cosenos se transforma en un 1 y la integral es infinito. Por lo tanto, la transformada de coseno es:

$$\mathbb{F}[E_0 \cos(k_p x)](k) = E_0/2 [\delta(k - k_p) + \delta(k + k_p)]$$

Similarmente, la transformada de $E_0 \sin(k_p x)$ es $F(k) = iE_0/2 [-\delta(k - k_p) + \delta(k + k_p)]$

Lo de la i se puede notar porque $F(k) = A(k) - iB(k)$

Transformada de la función Delta: Empezamos con la función $\delta(x - x_0)$. Su transformada es:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) e^{-ikx} dx = e^{-ikx_0} = \cos(kx_0) - i \sin(kx_0)$$

Con esto vemos que la transformada de Fourier de $E_0/2 [\delta(k - k_p) + \delta(k + k_p)] = E_0/2 [e^{-ixk_p} + e^{ixk_p}] = E_0 \cos(k_p x)$

Con esto se comprueba lo de que la transformada de Fourier de la transformada de Fourier es igual a la función original.

El hecho de que la transformada de Fourier del Coseno completo sea igual a delta de dirac confirma lo que dijimos antes: *Mientras más grande es el tren de ondas de coseno, más*

delgada es la montaña que rodea a $k_p, -k_p$ en el espacio de frecuencias. En el caso límite, la transformada de Fourier del coseno completo es una delta de Dirac (infinitamente delgada). Cuando el tren de Cosenos es finito (que es en todos los casos en la vida real), la curva en el espacio de frecuencias siempre tiene un grosor. Esto significa que para reconstruir el tren de coseno, se requieren de muchas 'infinitas' ondas de frecuencias parecidas a las del coseno original.

Todo lo que hicimos con k y λ se puede intercambiar al dominio del tiempo usando ω y T .

2.3. Ancho de frecuencia y Coherencia:

Espectro de Potencia: Para una onda f , su espectro de frecuencia es $\hat{f}(k)$ que nos dice las frecuencias componentes. Pero la energía de la onda suele ser proporcional al cuadrado de la amplitud. Entonces, la energía correspondiente a f en una frecuencia k es $\hat{f}^2(k)$. Por lo tanto, podemos tener el espectro de potencia como la función $\hat{f}^2(k)$.

Para un tren coseno $E_0 \cos(k_p x)$ de longitud L , la transformada de Fourier es $E_0 L [\text{sinc}(L(k_p + k)) + \text{sinc}(L(k_p - k))]$, la cual es una montaña Sinc centrada en k_p . Definimos el **Ancho de frecuencia** como el ancho de esta montaña. La definición puede ser un poco arbitraria de definir. En el caso estudiado, la montaña cruza el cero en $k_p + \pi/L$ y $k_p - \pi/L$, por lo que podemos definir el ancho de frecuencia en este caso como $2\pi/L$. Lo denotamos como Δk .

Por otro lado, denotamos por Δx a la longitud del tren coseno (que en este caso era L). Lo visto anteriormente sobre estas dos cantidades nos lleva a medio suponer lo siguiente:

$$\Delta k \simeq 1/\Delta x$$

O bien, $\Delta \omega \simeq 1/\Delta t$

Es decir, mientras más corto es el tren de onda, se requiere una selección más gruesa de frecuencias constituyentes que rodean a k_p y viceversa. Como ya dijimos, en el caso extremo en el que la onda es infinita, el espectro de frecuencia es una función delta (infinitamente delgada).

Línea Espectral: Cuando pasamos una onda por un análisis de Fourier, nos da el espectro de frecuencias. La transformada de Fourier tendrá una montaña en cada frecuencia componente de la onda. Cada banda marcada en el espectro de frecuencias se llama línea espectral.

Natural Linewidth: Es el espaciamiento entre las frecuencias presentes en el espectro de frecuencias.

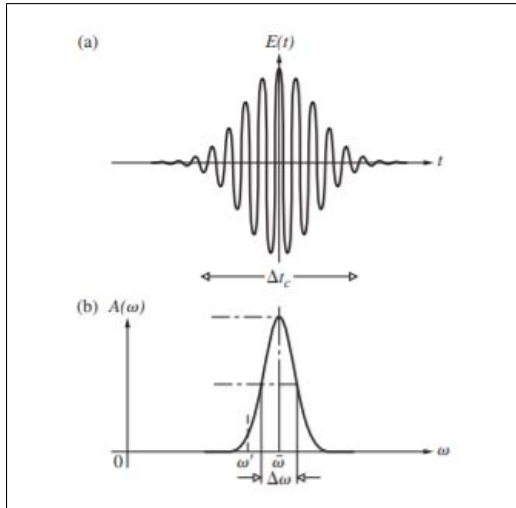
Ahora viéndolo al revés, digamos que estamos en el espectro de frecuencias de f (es decir \hat{f}). La onda original puede estar compuesta por muchos trenes cosenos distintos con distintas

frecuencias. En el espacio de frecuencias tenemos bandas con ancho Δf correspondientes a cada frecuencia componente. Digamos que nos centramos en una frecuencia f_0 con un ancho de banda de Δf , definimos el **Tiempo Coherente** (correspondiente a f_0) como $\Delta t = 1/\Delta f$. Es el tiempo en el que la onda original es coherente.

Longitud Coherente: Definimos $\Delta L = c\Delta t$. Es la distancia en la onda en la que se puede decir que es razonablemente sinusoidal o coherente y se puede predecir sencillamente su fase.

Estabilidad de Frecuencia: La estabilidad de frecuencia para una frecuencia f_0 en el espectro de frecuencias es $\Delta f/f_0$

* No estoy seguro de lo que sigue: La luz **Monocromática:** de frecuencia ω_0 está compuesta por N (muchos) pequeños paquetes de trenes armónicos pequeños. Cada uno modulado en promedio por una gaussiana.



En el dibujo se ve uno de estos paquetes de onda (llamémosle fotones) con forma gaussiana y su transformada de Fourier que está centrada en ω_0 .

Cada uno de estos fotones está compuesto por una infinidad de ondas componentes (cuya amplitud por frecuencia nos lo da la transformada de Fourier). Recordemos que estos componentes son armónicos, infinitos y de amplitud constante. Nos concentramos en el componente ω_0 , para cada uno de los fotones (que son iguales) tendremos una onda seno con una fase relativa aleatoria. Al juntar todos los fotones, el componente de frecuencia ω_0 de la luz total va a ser la suma de todos los componentes (que están desfasados). Esto es cierto para todas las otras frecuencias componentes.

Finalmente, la onda completa tiene una transformada de Fourier que va a tener un sólo pico en ω_0 . A partir del ancho de banda centrado en ω_0 , podemos calcular el tiempo de coherencia de la onda original como $\Delta t = 1/\Delta\omega$ que nos dice qué tan largo es cada fotón, o bien, durante cuánto tiempo está en fase la onda completa en promedio.

2.4. Transformada en 2D

Como una generalización a la transformada de fourier en 1D tenemos:

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Las ondas planas (o más bien lineales) en 2D son de la forma $e^{-i(k_x x + k_y y)}$ para una onda que se mueve con vector de propagación (k_x, k_y) y por tanto, número de propagación $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. La primera doble integral calcula la amplitud correspondiente a este vector de propagación. $F(k_x, k_y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ nos da la amplitud correspondiente a cada vector de propagación. Luego, la segunda ecuación nos dice como reconstruir la función original a partir de las amplitudes, 'suma' sobre cada una de las ondas componentes.

Ejemplo 2.4.

Consideramos la función: $f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0 & , \sqrt{x^2 + y^2} > a \end{cases}$

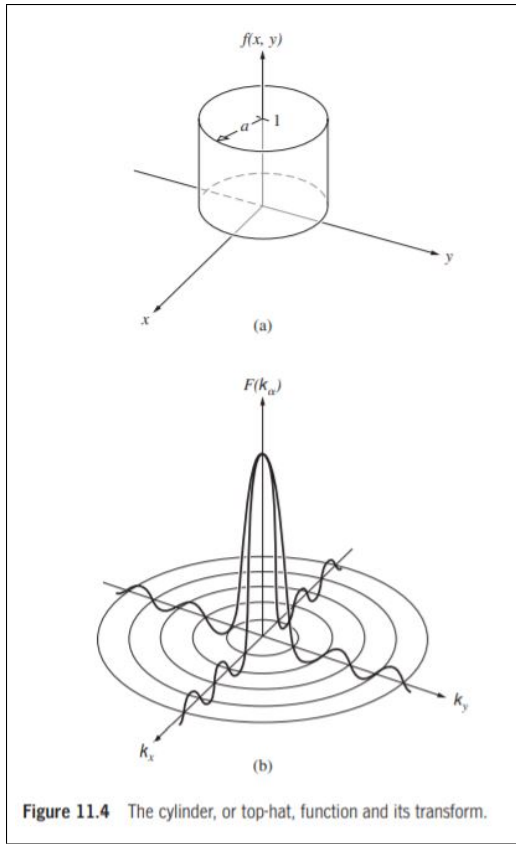


Figure 11.4 The cylinder, or top-hat, function and its transform.

En coordenadas cilíndricas tenemos que $k_x = k_\alpha \cos \alpha$ $k_y = k_\alpha \sin \alpha$ $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$

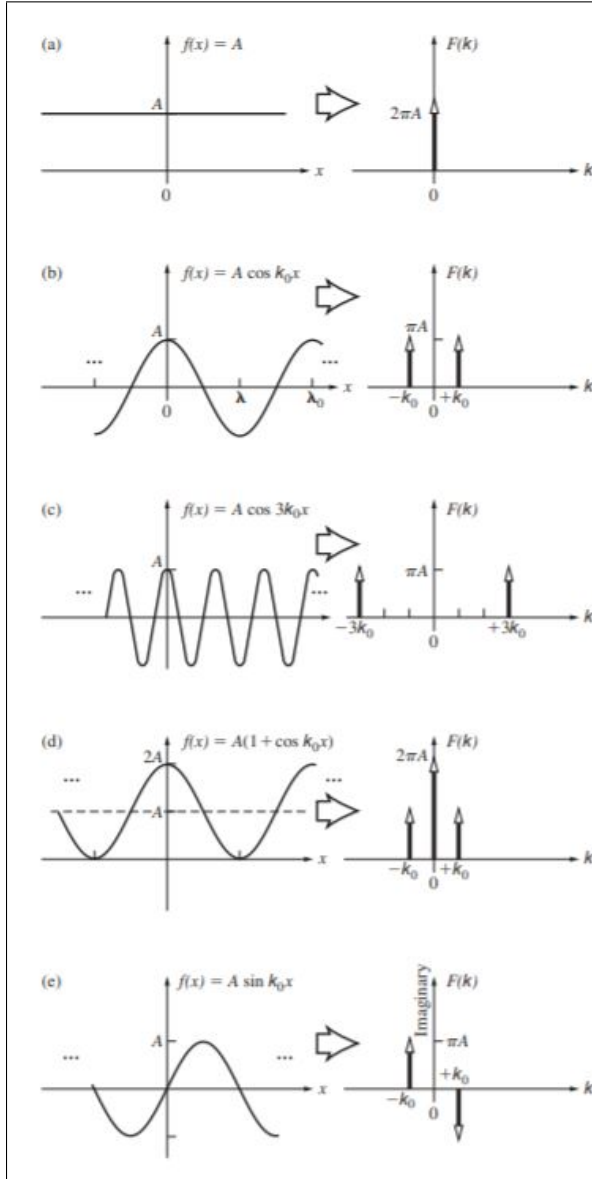
Es decir, expresamos cada vector de propagación en su forma cilíndrica. entonces, la transformada de Fourier es:

$$F(k_\alpha, \alpha) = \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik_x x + k_y y} r d\theta dr$$

Realizamos la sustitución a coordenadas polares y luego hacemos muchas cuentas. El resultado no puede depender de α por la simetría. Después de las cuentas queda que: (J_1 la primera función de Bessel)

$$F(k_\alpha) = 2\pi a^2 \left[\frac{J_1(k_\alpha a)}{k_\alpha a} \right]$$

Recordamos que la transformada de $\cos(k_p x)$ son dos deltas hacia arriba en k_p y $-k_p$. la transformada de $\sin(k_p x)$ son una delta hacia arriba en k_p y una hacia abajo en $-k_p$. La transformada de la función constante c es $C(k) = \int_{-\infty}^{\infty} c e^{-ikx} dx$ vale 0 en todos los puntos excepto $x = 0$. Pero en $x = 0$ vale infinito, Dirac centrada en 0.



Entonces cada seno y coseno se puede representar como un par de deltas de Dirac. Luego, como cualquier función bonita y periódica se puede representar como una combinación lineal de senos y cosenos, su transformada será un conjunto de pares de deltas de Dirac con sus pesos apropiados. Entonces la transformada de cualquier función periódica será un conjunto discreto de deltas de Dirac.

En dos dimensiones se sigue el mismo principio. Si tenemos una onda coseno en 2D con vector de propagación (k_x, k_y) , su transformada serán dos deltas de Dirac positivas, una en (k_x, k_y) y otra en $(-k_x, -k_y)$. Si la onda es un seno, su transformada será una delta positiva en (k_x, k_y) y una negativa en $(-k_x, -k_y)$.

Esto se puede representar como una serie de puntos en el plano frecuencia. Un punto por blanco cada delta de Dirac presente en la transformada. Si tomamos cualquier función periódica en 2D que querramos, al aplicarle la transformada de Fourier, se descompone en sus ondas armónicas correspondientes, y luego la transformada de Fourier está formada por puntos en donde van las deltas de Dirac.

2.5. Convolución:

La convolución entre dos funciones f y g se define como la nueva función h con:

$$h(t) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Es decir, para evaluar $g(t)$, primero volteamos a h y luego lo trasladamos una cantidad t . Esta nueva función $h(t - x)$ la multiplicamos por $f(x)$ y luego integramos de $-\infty$ hasta ∞ . Claro que tiene sentido sólo para funciones que valen 0 o casi 0 en todos los reales. En este caso, el ancho de la función resultante es igual a la suma de los anchos de las funciones originales.

Teorema 2.3. El Teorema de Convolución

Si tenemos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ con transformadas de Fourier $\mathbb{F}[f](k)$ y $\mathbb{F}[g](k)$ y definimos $h = f * g$, entonces:

$$\mathbb{F}[h] = \mathbb{F}[f * g] = \mathbb{F}[f] \cdot \mathbb{F}[g]$$

Dem: Hacer las cuentas e integrales.

3. Métodos avanzados de resolución de EDO

3.1. Repaso de EDO (sección 1-7 cap 8)

Una **función diferencial** es una ecuación del tipo:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Ecuaciones Lineales: Son del tipo:

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Se llaman lineales porque cualquier combinación lineal de soluciones vuelven a ser una solución.

La solución general se consigue a partir de n soluciones independientes.

Luego, las constantes se consiguen a partir de n condiciones iniciales.

Campo vectorial: Si tenemos $y' = f(x, y)$ podemos dibujar un campo en el que en cada punto del plano se puede poner una flechita.

3.1.1. Métodos:

- **Separable:** Es una ecuación en la que podemos escribir $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$. Se separan las variables y se integran ambos lados.
- **Lineal de primer orden:** $y' + P(x)y = Q(x)$
Se puede resolver al solucionar la parte homogénea con separación de variables para obtener $y_H = e^{-I}$ con $I = \int^x P dx$.
Y luego, para buscar una solución particular, proponemos $y = Ay_H$. Al sustituir nos queda que $A = \int e^I Q + C$.
La solución general va a ser $y = e^{-I} \int Q e^I dt + C e^{-I}$
- **Bernoulli:** De la forma $y' + P(x)y = Qy^n$.
Se hace un cambio de variable $z(x) = y(x)^{1-n}$, entonces $z' = (1-n)y^{-n}y'$ y sustituimos en la ecuación y ya nos queda una ec. lineal con z
- **Exactas:** Ecuaciones de la forma $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Donde $P_y = Q_x$. Entonces existe una F tal que $F_x = P, F_y = Q$ y por tanto $F(x, y) = C$ es solución.

Si la ecuación no es exacta, se pues multiplicar por un μ y buscar exactificarla.

- **Segundo orden con coef. lineales**
Son de la forma:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Primero buscamos la solución de la homo ($f = 0$). Y buscamos una solución del tipo e^{mx} .

Encontramos tres casos:

Raíces Distintas Reales: Digamos que las soluciones a la cuadrática son m_1, m_2 reales. Entonces las soluciones son:

$$e^{m_1 x} \quad e^{m_2 x}$$

Soluciones Complejas Distintas: Digamos que las complejas distintas son $a \pm ib$. Entonces las soluciones son $e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ y $e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$. Podemos sumarlas y dividir entre dos y restarlas y dividir entre $2i$ para conseguir soluciones reales.

$$e^{ax} \cos bx \quad , \quad e^{ax} \sin bx$$

Raíces Iguales Reales: En este caso sólo tenemos una solución a la cuadrática m . Luego tenemos una sola solución. Finalmente, podemos usar el procedimiento pasado para encontrar la otra solución. Entonces las soluciones son:

$$e^{mx} \quad , \quad x e^{mx}$$

Cuando representa a un oscilador físico, los exponentes siempre serán negativos (por los signos que van a tener los coeficientes). Luego, el primer caso se llama overdamped (no llega a oscilar), el segundo se llama underdamped (oscila solamente un par de veces), el tercero se llama critically damped.

Luego, nos falta la solución **Particular**.

Para lo cual tenemos lo siguiente:

- **Coeficientes Indeterminados:** Método para encontrar una solución particular a una ecuación no homogénea con coeficientes constantes. Es decir, tenemos una ecuación del tipo:

$$y'' + py' + qy = R(x)$$

Entonces lo que hacemos es adivinar una solución particular parecida a R con algún coeficiente indeterminado que luego hay que encontrar.

Veamos el caso particular en que:

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ax}$$

Con $P_n(x)$ un polinomio de orden n .

Entonces adivinamos una solución del tipo $y_p = Q_n(x)e^{ax}$ con $Q_n(x)$ un polinomio de orden n con coeficientes indeterminados. Luego de sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos el valor de los coeficientes y listo.

Esto funciona siempre y cuando a no sea una solución de la ecuación cuadrática correspondiente. Ya que entonces el denominador valdría 0. Por tanto, cuando pasa esto (una de las soluciones ya está ocupada por la homogénea), entonces adivinamos una solución del tipo $xQ_n(x)e^{ax}$.

Si la homogénea ya tiene la raíz repetida a (ya ocupa las dos soluciones), entonces adivinamos algo del tipo $y_p = x^2Q_n(x)e^{ax}$.

En otro caso, si $R(x)$ es $\sin bx$, entonces la ecuación es $y'' + py' + qy = \sin bx$. Podemos adivinar una solución del tipo $y_p = A \sin bx + B \cos bx$ y encontramos A, B .

También se puede escribir la ecuación en forma compleja como $y'' + py' + qy = e^{bix}$. Y ahora resolvemos para y_p de la forma más sencilla que teníamos antes. Luego, sacamos la parte imaginaria y listo.

En caso de que $R(x)$ sea un polinomio, entonces adivinamos una solución también polinomial y encontramos los coeficientes indeterminados.

- **Variación de Parámetros:** Método más general para encontrar la solución particular a una ecuación no homogénea y de coeficientes no constantes a partir de conocer las dos soluciones homogéneas. La ecuación es:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Suponemos que ya tenemos dos soluciones para la ecuación homogénea. Y adivinamos una solución particular de la forma $y = v_1y_1 + v_2y_2$.

Entonces tenemos que $y' = (v_1y_1' + v_2y_2') + (v_1'y_1 + v_2'y_2)$

Para evitar complicaciones, pedimos que el segundo término sea 0, es decir (1) $v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$.

Entonces tenemos que $y' = v_1y_1' + v_2y_2'$ y que $y'' = v_1y_1'' + v_1'y_1' + v_2y_2'' + v_2'y_2'$

Al sustituir, en la ecuación diferencial, tenemos que (2) $v_1'y_1' + v_2'y_2' = R(x)$.

Al juntar (1) y (2), nos va a quedar que:

$$v_1' = \frac{-y_2R(x)}{W(y_1, y_2)} \quad , \quad v_2' = \frac{y_1R(x)}{W(y_1, y_2)}$$

Al integrar podemos encontrar v_1, v_2 y ya tenemos la solución particular.

Entonces, con tener solamente una de las soluciones homogéneas, se puede encontrar otra al suponer $y_2 = vy_1$ como dijimos antes. Y luego se puede encontrar la solución particular con variación de parámetros.

- **Superposición:** Si $f(x)$ es $f(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$, podemos separar en n ecuaciones particulares y resolvemos cada una de ellas.
El resultado será la suma de las soluciones.

- **Vibración Mecánica:** Una vibración mecánica suele tener ecuaciones de la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = R(t)$$

Undamped Unforced: Un undamped no tiene el término de $\frac{dx}{dt}$ y es entonces de la forma $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$. Lo cual tiene como soluciones:

$$\cos \omega_0 t, \quad \sin \omega_0 t$$

Damped Unforced: Ahora sí se tiene una fuerza proporcional a la velocidad y la ecuación es de la forma $\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$.

Entonces, proponemos soluciones de la forma e^{mt} y tenemos los tres casos de over damped, critical damping y under damped de antes.

Forced Damped: Ahora sí se tiene una fuerza externa. Suele ser una fuerza del tipo $F_0 \cos \omega t$. Y entonces la ecuación que nos queda es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0/m \cos \omega t$$

Las soluciones particulares serán como las del caso unforced y depende de si es under/over damped o critical. Para la solución particular, se puede adivinar una solución de la forma $x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$.

Y resolvemos para A, B .

También se puede resolver de la forma compleja, reemplazando el coseno por $e^{i\omega t}$ y suponiendo una solución de la forma $Ae^{i\omega t}$. Luego se encuentra la solución de A (que es un complejo).

Así, resulta que la solución total es:

$$x(t) = \rho \cos(\omega t + \phi)$$

Donde se tiene que:

$$\rho^2 = \frac{1}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}, \quad \tan \theta = -\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$$

- **Euler - Cauchy:** Son de la forma $a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = f(x)$

Hacemos la sustitución $x = e^z$ y tenemos que $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dz} = \frac{dy}{dx} x$ y que $\frac{d^2y}{dz^2} =$

$$\frac{dy}{dz} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

Por lo que al hacer el cambio, nos queda:

$$a_2 \frac{d^2y}{dz^2} + (a_1 - a_2) \frac{dy}{dz} + a_0y = f(e^z)$$

- **Segunda Homogénea a partir de la primera** Si tenemos una solución de una ec. homogénea que sea $u(x)$. Proponemos como segunda solución homogénea a $y = u(x)v(x)$ y al sustituir nos queda una ecuación en términos de v'' que podría ser más fácil.

Ejemplo: Sea $y'' + 2y' + 10y = 1$ ($0 \leq y \leq \pi$), 0 ($\pi \leq t \leq 2\pi$)

La solución particular es sencillamente $y_c = e^{-t}(A \cos 3t + B \sin 3t)$

Luego, para la particular lo que hacemos es calcular la serie de Fourier de $f(x)$.

Resulta que queda que $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$.

Lo que hacemos, es resolver la ecuación para cada uno de estos sumandos. Y luego sumamos las soluciones. Ver Boas

3.2. Transformada de Laplace

Una transformada en general transforma a una función f en una función $F(s) = \int_0^\infty f(x)K(x,s)dx$ que es función de s y K recibe el nombre de núcleo.

La de Laplace es:

$$L[f] = L(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = F(p)$$

La función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ es una función de los reales positivos a (posiblemente) los complejos. Y su transformada $F(p)$ puede resultar ser una función en dominio complejo.

Propiedades

- **Lineal:** $L[f + \alpha g] = L[f] + \alpha L[g]$

- **Traslación:** Si $f(t) = \begin{cases} g(t-a), & t > a > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ entonces, $F(p) = e^{-pa}G(p)$

- **Modulación:** Si $f(t) = e^{-at}g(t)$, entonces $F(p) = G(p+a)$

- **Dilatación:** Sea $f(t) = g(at)$ (con $a > 0$). Entonces $F(p) = \frac{1}{a}G\left(\frac{p}{a}\right)$

- **División por t** Sea $f(t) = g(t)/t$. Entonces, $F(p) = \int_p^\infty G(u)du$
- **Multiplicación por t^n** : Si $f(t) = t^n g(t)$, entonces $F(t) = (-1)^n \frac{d^n G(p)}{dp^n}$
- **Integral:** Sea $f(t) = \int_0^t g(u)du$. Entonces $F(t) = \frac{G(p)}{p}$

Table of Laplace Transforms ◀ 469

Table of Laplace Transforms			
$y = f(t), t > 0$ $[y = f(t) = 0, t < 0]$		$Y = L(y) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$	
L1	1	$\frac{1}{p}$	$\text{Re } p > 0$
L2	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
L3	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L4	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L5	$t^k, k > -1$	$\frac{k!}{p^{k+1}}$ or $\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}$	$\text{Re } p > 0$
L6	$t^k e^{-at}, k > -1$	$\frac{k!}{(p+a)^{k+1}}$ or $\frac{\Gamma(k+1)}{(p+a)^{k+1}}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
L7	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\text{Re } (p+a) > 0$ $\text{Re } (p+b) > 0$
L8	$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\text{Re } (p+a) > 0$ $\text{Re } (p+b) > 0$
L9	$\sinh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\text{Re } p > \text{Re } a $
L10	$\cosh at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\text{Re } p > \text{Re } a $
L11	$t \sin at$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L12	$t \cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L13	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$\text{Re } (p+a) > \text{Im } b $
L14	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$\text{Re } (p+a) > \text{Im } b $
L15	$1 - \cos at$	$\frac{a^2}{p(p^2+a^2)}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L16	$at - \sin at$	$\frac{a^3}{p^2(p^2+a^2)}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L17	$\sin at - at \cos at$	$\frac{2a^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $

Table of Laplace Transforms (continued)

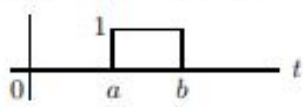
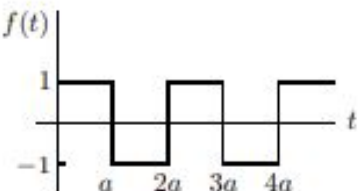
	$y = f(t), t > 0$ $[y = f(t) = 0, t < 0]$	$Y = L(y) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	
L18	$e^{-at}(1 - at)$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$\text{Re } (p+a) > 0$
L19	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{p}$	$\text{Re } p > \text{Im } a $
L20	$\frac{1}{t} \sin at \cos bt,$ $a > 0, b > 0$	$\frac{1}{2} \left(\arctan \frac{a+b}{p} + \arctan \frac{a-b}{p} \right)$	$\text{Re } p > 0$
L21	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$	$\ln \frac{p+b}{p+a}$	$\text{Re } (p+a) > 0$ $\text{Re } (p+b) > 0$
L22	$1 - \text{erf} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right), a > 0$ (See Chapter 11, Section 9)	$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}}$	$\text{Re } p > 0$
L23	$J_0(at)$ (See Chapter 12, Section 12)	$(p^2 + a^2)^{-1/2}$	$\text{Re } p > \text{Im } a ;$ or $\text{Re } p \geq 0$ for real $a \neq 0$
L24	$u(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a > 0 \\ 0, & t < a \end{cases}$ (unit step, or Heaviside function)	$\frac{1}{p} e^{-pa}$	$\text{Re } p > 0$
L25	$f(t) = u(t-a) - u(t-b)$ 	$\frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$	All p
L26	$f(t)$ 	$\frac{1}{p} \tanh \left(\frac{1}{2} ap \right)$	$\text{Re } p > 0$
L27	$\delta(t-a), a \geq 0$ (See Section 11)	e^{-pa}	
L28	$f(t) = \begin{cases} g(t-a), & t > a > 0 \\ 0, & t < a \end{cases}$ $= g(t-a)u(t-a)$	$e^{-pa} G(p)$ [$G(p)$ means $L(g)$.]	
L29	$e^{-at} g(t)$	$G(p+a)$	

Table of Laplace Transforms (continued)		
	$y = f(t), t > 0$ $[y = f(t) = 0, t < 0]$	$Y = L(y) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$
L30	$g(at), a > 0$	$\frac{1}{a} G\left(\frac{p}{a}\right)$
L31	$\frac{g(t)}{t}$ (if integrable)	$\int_p^{\infty} G(u) du$
L32	$t^n g(t)$	$(-1)^n \frac{d^n G(p)}{dp^n}$
L33	$\int_0^t g(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} G(p)$
L34	$\int_0^t g(t-\tau)h(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau)h(t-\tau) d\tau$ (convolution of g and h , often written as $g * h$; see Section 10)	$G(p)H(p)$
L35	Transforms of derivatives of y (see Section 9): $L(y') = pY - y_0$ $L(y'') = p^2Y - py_0 - y_0'$ $L(y''') = p^3Y - p^2y_0 - py_0' - y_0''$, etc. $L(y^{(n)}) = p^nY - p^{n-1}y_0 - p^{n-2}y_0' - \dots - y_0^{(n-1)}$	

3.3. Resolución de EDO con Laplace

Este método suele transformar el problema de una ecaución diferencial en un problema algebraíco y de aplicar la transformada inversa.

Primero necesitamos saber cómo transforma la transformada a las derivadas.

Sea y una función y sea $L[y] = Y(p)$ su transformada. Entonces:

$$L[y'] = \int_0^{\infty} t'(t)e^{-pt} dt = y(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} y(t)e^{-pt} dt = -y(0) + pY$$

Para la segunda derivada, aplicamos la fórmula de nuevo:

$$L[y''] = pL[y'] - y_0' = p(pY - y_0') - y_0' = p^2Y(p) - py_0 - y_0'$$

Y para la tercera derivada:

$$L[y'''] = p^3Y(p) - p^2y_0 - py_0' - y_0''$$

Y así sucesivamente hasta:

$$L[y^{(n)}] = p^nY(p) - p^{n-1}y_0 - \dots - y_0^{(n-1)}$$

La fórmula se puede comprobar fácilmente por inducción. Vemos que necesitamos saber el valor de y y sus derivadas evaluadas en 0.

Ejemplo: Resolver $y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}$ con $y_0 = 0, y'_0 = 0$

Aplicamos transformada de Laplace de ambos lados y separamos (por linealidad):

$$\begin{aligned} L[y''] + 4L[y'] + 4L[y] &= L[t^2 e^{-2t}] \\ p^2 Y - p y_0 - y'_0 + 4(pY - y_0) + 4Y &= \frac{2}{(p+2)^2} \\ \Rightarrow (p^2 + 4p + 4)Y &= \frac{2}{(p+2)^2} \\ Y(p) &= \frac{2}{(p+2)^5} \end{aligned}$$

Buscamos ahora la anti transformada de Laplace. Localizamos que la transformada de $t^k e^{-at}$ es $\frac{k!}{(p+a)^{k+1}}$

Y entonces, la anti transformada que buscamos es:

$$y(t) = \frac{2t^4 e^{-2t}}{4!} = \frac{t^4 e^{-2t}}{12}$$

Lo mismo para todos los ejemplos. El procedimiento es aplicar la transformada a toda la EDO, luego usamos la transformada de las derivadas para escribir tod en términos de Y . Despejamos Y y siplificamos (a veces conviene usar fracciones parciales) vemos la forma de calcular la transformada inversa según las tablas para recuperar y

Ejemplo Sistema: Resolvemos ahora el sistema dado por:

$$\begin{aligned} y' - 2y + z &= 0 \\ z' - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Con $y_0 = 1, z_0 = 0$. Aplicamos la transformada a las dos ecuaciones y nos queda:

$$\begin{aligned} pY - y_0 - 2Y + Z &= 0 \\ pZ - z_0 - Y - 2Z &= 0 \end{aligned}$$

Y al sustituir los valores iniciales, nos queda:

$$\begin{aligned} (p-2)Y + Z &= 1 \\ Y - (p-2)Z &= 0 \end{aligned}$$

Que es un sistema de ecuaciones. Lo resolvemos como querramos. Y nos queda que $Y(p) = \frac{p-2}{(p-2)^2+1}$ y por tanto, por L14 obtenemos que $y(t) = e^{2t} \cos t$. También obtenemos que $Z = \frac{1}{(p-2)^2+1}$ y por L13 eso nos da que $z(t) = e^{2t} \sin t$

3.3.1. Más ejemplos y Convolución

- **Ejemplo1 :** Sea $y'' + 2y' + 10y = -6e^{-t} \sin(3t)$ con $y_0 = 0, y'_0 = 1$

Aplicamos Laplace a ambos lados:

$$p^2 Y - p y_0 - y'_0 + 2(pY - y_0) + 10Y = -6 \frac{3}{(p+1)^2 + 9}$$

$$\Rightarrow (p^2 + 2p + 10)Y = -\frac{18}{(p+1)^2 + 9} + 1$$

Y despejamos la Y para obtener:

$$Y(p) = -\frac{18}{[(p+1)^2 + 9]^2} + \frac{1}{(p+1) + 9}$$

Y ahora usamos la anti transformada. Del lado derecho tenemos la L13 y del izquierdo usamos la L17 junto con la L29.

Entonces obtenemos:

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t}(\sin 3t - 3t \cos 3t) + \frac{1}{3}e^{-t} \sin 3t$$

$$y(t) = te^{-t} \cos 3t$$

- **Ejercicio 2:** Tenemos la ecuación $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = e^{-t}$ con $t_0 = y'_0 = y''_0 = 0$

Aplicamos la transformada de ambos lados y tenemos:

$$p^3 Y - p^2 y_0 - p y'_0 - y''_0 + 6(p^2 Y - p y_0 - y'_0) + 11(pY - y_0) + 6Y = \frac{1}{p+1}$$

Y luego de ponder las condiciones iniciales nos queda:

$$(p^3 + 6p^2 + 11p + 6)Y = \frac{1}{p+1}$$

$$\text{Entonces, } Y = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)(p+3)}$$

Y ahora hacemos la descomposición por fracciones parciales como $\frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{C}{p+2} + \frac{D}{p+3}$ y se obtiene al final que:

$$Y(p) = \frac{-3/4}{p+1} + \frac{1/2}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+2} + \frac{-1/4}{p+3}$$

Y usamos las formulitas para llegar a que:

$$y(t) = -\frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} + e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-3t}$$

- **Ejercicio 3** Tenemos ahora un sistema de ecuaciones de segundo orden:

$$\begin{aligned}y' + z' - 3z &= 0 \\ y'' + z' &= 0\end{aligned}$$

Con $y_0 = y'_0 = 0, z_0 = 1/3$.

Aplicamos Laplace a ambos lados y usamos las condiciones iniciales para obtener:

$$\begin{aligned}pY + (p-3)Z &= \frac{4}{3} \\ p^2Y + pZ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

lo que es una ecuación de dos por dos. La resolvemos sencillamente para obtener que $Z = \frac{4}{3} \frac{p-1}{p(p-4)}$ y que $Y = -\frac{4}{p^2(p-4)}$.

Luego, descomponemos por fracciones parciales cada una:

$$\begin{aligned}Y(p) &= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{p} - \frac{1}{4(p-4)} \\ Z(p) &= \frac{1}{3p} + \frac{1}{p-4}\end{aligned}$$

Y vemos la tabla para obtener la inversa, que será:

$$\begin{aligned}y(t) &= t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{4t} \\ z(t) &= \frac{1}{3} + e^{4t}\end{aligned}$$

Con esto vemos que podemos resolver cualquier ecuación de la forma:

$$Ay'' + By' + Cy = f(t)$$

Aplicamos Laplace de ambos lados:

$$(Ap^2 + Bp + C)Y - (Ay_0p + Ay'_0 + By_0) = F(p)$$

Y nos va a quedar:

$$Y(p) = \frac{1}{Ap^2 + Bp + C}F(p) + \frac{Ay_0p + Ay'_0 + By_0}{Ap^2 + Bp + C}$$

Y podremos descomponer en fracciones simples. El segundo término lo descomponemos y resolvemos con la tabla alv.

El primer término va a quedar algo más difícil. Llamamos $G(p)$ a $\frac{1}{Ap^2 + Bp + C}$ cuya anti-transformada podemos calcular sencillamente. Y definimos $H(p)$ a la otra fracción. Entonces:

$$Y(p) = G(p)F(p) + H(p)$$

Para cada una de estas transformadas podemos calcularle la antitransformada. Para G, H usamos descomposición en fracciones parciales y la de F es simplemente f . Sin embargo, como tenemos un producto $G(p)F(p)$, lo que nos interesa es obtener la antitransformada del producto de dos funciones que conocemos sus antitransformadas por separado.

Buscamos: $L^{-1}[G \cdot P](y)$

$$\begin{aligned} \text{Empezamos con } G(p)F(p) &= \int_0^\infty g(\alpha)e^{-p\alpha}d\alpha \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(\alpha)f(\tau)e^{-p(\alpha+\tau)}d\alpha d\tau \\ \text{Hacemos el cambio } t &= \alpha + \tau \\ &= \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt}g(t-\tau)f(\tau)dt \\ &= \int_0^\infty dt \int_0^t d\tau e^{-pt}f(\tau)g(t-\tau) \\ &= \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] dt \\ &= L \left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] \end{aligned}$$

A esto último se le conoce como convolución de dos funciones y es:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Y esta convolución es conmutativa. Y entonces, tenemos que:

$$L^{-1}[G(p)F(p)] = (f * g)(t)$$

Entonces, ya podemos resolver $y(t)$ en el caso general porque queda que:

$$\begin{aligned} Y(p) &= G(p)F(p) + H(p) \\ y(t) &= (g * f)(t) + h(t) \end{aligned}$$

Ejemplo: Sea $y'' - a^2y = f(t)$ con f la función de Heaviside. Y con $y_0 = y'_0 = 0$. Aplicamos la transformada de Laplace de ambos lados y tenemos que:

$$\begin{aligned} (p^2 - a^2)Y &= L[f] \\ Y &= \frac{1}{p^2 - a^2}L[f] \end{aligned}$$

Luego nos conviene escribir el lado derecho como el producto de dos transformadas. Para lo que vemos que se puede escribir como:

$$Y = L\left[-\frac{1}{2a}e^{-at} + \frac{1}{2a}e^{at}\right]L[f]$$

Y usamos el teorema de convolución para concluir que:

$$y(t) = g * f = f * g \\ = \frac{1}{2a} \int_0^t f(t - \tau) [e^{a\tau} - e^{-a\tau}]$$

Y como $f(t - \tau) = 1$ si $t > \tau$ y sino vale 0, tenemos que vale 1 para todos los valores de la integral. Por lo que resolvemos la integral y nos queda:

$$y(t) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2} - 1 \right)$$

Ejemplo 2: Sea $y'' + \omega^2 y = f(t)$ con $f(t)$ el pulso que vale 1 entre 0 y a y 0 sino. Y con $y_0 = Y'_0 = 0$.

Entonces, aplicamos transformada de ambos lados y queda:

$$(p^2 + \omega^2)Y = L[f]$$

O bien, entonctrando la inversa de algo, nos queda que:

$$Y = L[\frac{1}{\omega} \sin \omega t] L[f]$$

Luego, usamos el teorema de la convolución para cnocluir que:

$$y = (g * f)(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t - \tau)) d\tau$$

El valor de esta integral depende de si $t > a$ o no. Si $t > a$ entonces la integral se separa en la parte que va de 0 a a y la otra parte (que vale 0) y nos queda:

$$t > a : \quad y(t) = \int_0^a \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t - \tau)) d\tau = \frac{1}{\omega^2} [\cos \omega(t - a) - \cos \omega t]$$

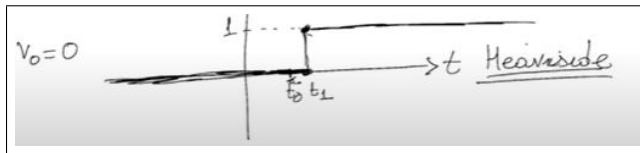
Si $t < a$ entonces la integral no se separa y nos queda que:

$$t < a : \quad y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

3.4. Delta de Dirac

Impulso unitario: Un impulso unitario es una función $f(t)$ se fuerza tal que su integral $\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt = 1$. Es decir, se tiene un cambio de momento de 1.

Entonces, la velocidad del objeto al que se le aplica la fuerza se podría ver como



En el caso en que t_0 y t_1 se parecen mucho, el salto es practicamente inmediato.

La función de fuerza que cause esto debe de valer 0 en todos os puntos fuera de $[t_0, t_1]$ pero concentrar todo el área 1 dentro del intervalo $[t_0, t_1]$.

En el límite, queremos una función que tenga un área 1 en un intervalito muy muy chiquito. La única manera de hacer esto cuando hacemos le límite de $t_1 \rightarrow t_0$ es si $f(t_0)$ es infinito. Entonces, la función $f(t)$ se debería de definir como:

$$f(t) = \begin{cases} \infty & , t = t_0 \\ 0 & , t \neq t_0 \end{cases}$$

Esto claramente no es como tal una función, pero es como se define en ciertos libros. Como queremos que el impulso sea unitario, tenemos que $\int_{\mathbb{R}} f(t) = 1$.

Esta función normalmente se denota por $f(t) = \delta(t - t_0)$ cuando el infinito está en t_0 . Como tal no es una función, pero vamos a trabajar con esta delta como si fuera un símbolo (como si fuera el símbolo de infinito). Y como símbolo, queremos que

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t - t_0) dt = 1$$

3.4.1. Construir como sucesión

Buscamos una sucesión de funciones $\{f_n(t)\}$ tales que de alguna manera, cuando tomamos $n \rightarrow \infty$, de alguna manera la sucesión converja a la delta. Vamos a dar 4 ejemplos:

- $f_n(t) = \begin{cases} ne^{-n(t-t_0)} & , t > t_0 \\ 0 & , c.c \end{cases}$ La función es claramente 0 a la izquierda de 0 y a la derecha es una exponencial que cada vez va tomando mayor altura conforme $n \rightarrow \infty$. Ahora lo que queremos ver es que esta sucesión de funciones cumplen que son pulsos unitarios, es decir, que $\int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt \quad \forall n$. Lo que se ve fácilmente que es cierto. Luego, vemos que cuando el límite tiende a infinito $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \delta(t - t_0)$

- $f_n(t) = \begin{cases} n & , t_0 < t < t_0 + 1/n \\ 0 & c.c \end{cases}$

La función es siempre una función escalonada con escaloncitos que se hacen cada vez más altos y delgados a la derecha de t_0 .

Vemos que las funciones son de pulso unitario porque para todo n se tiene que $\int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt = 1$.

Y podemos usar el límite de la sucesión de estas funciones para aproximar a la delta de Dirac.

- $D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikn}$ llamado el núcleo de Dirichlet.

Las exponenciales se pueden juntar para formar cosenos y tenemos que es igual a :

$$D_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}$$

Lo último por el ejercicio extra del examen.

Haciendo L'hopital podemos ver que cuando t tiende a 0, el valor tiende a $D_n(t) = 2n + 1$.

Para ver que es un impulso unitario, calculamos $\int_{\mathbb{R}} D_n(t)$ usando la definición original de suma de exponenciales complejas, con lo cual nos queda que la integral vale 1 para todo n .

- **Núcleo de Fejer:** Se define por $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$ $t \in [-\pi, \pi]$.

Resulta que estas funciones son iguales a $F_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2$

Vemos que el límite cuando t tiende a 0 es $F_n(t) = n$.

También vemos que son funciones de impulso unitario. Y que aproxima a la función delta

Entonces, al resolver problemas con impulsos rápidos, deberíamos de usar alguna de estas sucesiones de funciones. Sin embargo, no lo haremos, sino que usaremos directamente el símbolo δ .

Ejemplo: $y'' + \omega^2 y = f(t)$, $y_0 = y'_0 = 0$.

Con la función f es un impulso cuando $t = 0$ y vale 0 fuera de este impulso.

Para resolver el problema, en vez de usar la delta de Dirac usaremos la sucesión de funciones $f_n(t) = ne^{-n(t-t_0)}$ y obtendremos una sucesión de soluciones.

Aplicamos la transformada de laplace y nos queda:

$$(p^2 + \omega^2)Y_n(p) = L[ne^{-n(t-t_0)}]$$

Y podemos resolver esa transformada de forma fácil, con lo que nos queda que:

$$Y_n(p) = n \frac{e^{-pt_0}}{(p+n)(p^2 + \omega^2)}$$

Luego podemos separar esto en fracciones parciales y aplicar la transformada inversa (recordar que el exponencial e^{-pt_0} es solamente un desplazamiento de cada solución. Entonces nos queda:

$$y_n(t) = \frac{n}{n^2 + \omega^2} \left[e^{-n(t-t_0)} + \frac{n}{\omega} \sin(\omega(t-t_0)) - \cos(\omega(t-t_0)) \right]$$

Lo que queremos es eventualmente hacer n tender a infinito. Nos fijamos en cada una de las tres funciones. La primera claramente tiende a 0 y la tercera también. La segunda tiende a:

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t-t_0))$$

Lo podríamos haber hecho con cualquier sucesión que aproxime a la delta de Dirac. Se puede por ejemplo usando la segunda sucesión de funciones.

Es decir, $f(t) = n$ si $t \in (0, 1/n)$. Con esta sucesión nos queda que la transformada es:

$$Y_n(p) = \frac{1}{p^2 + \omega^2} L[f_n] = L\left[\frac{1}{\omega}\right] L[f_n]$$

Y luego podemos usar la convolución para saber que:

$$y_n(t) = g * f_n = \int_0^\infty \sin(\omega(t-\tau)) f_n(\tau) d\tau$$

Y obtendremos la misma solución al hacer la integral.

En vez de usar estas aproximaciones para $f(t)$, usaremos sino $\delta(t)$ de una forma más simbólica.

Propiedades

- **Definición Alternativa:** Si $\phi(t)$ es una función lo suficientemente bonita, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \phi(t_0)$$

Esto se puede ver usando una secuencia de funciones $f_n(t)$ que se aproxime a la delta. Y notar que la integral $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) f_n(t - t_0) dt$ se convierte en $\int_{|t-t_0| < \epsilon} \phi(t) f_n(t - t_0) dt$ cuando n es muy grande, porque f_n tiene un soporte muy chiquito. Pero como el intervalo es muy chiquito, tenemos que podemos reemplazar $\phi(t)$ por $\phi(t_0)$ y entonces nos queda la integral $\phi(t_0) \int_{|t-t_0| < \epsilon} f_n(t - t_0) dt = \phi(t_0) 1 = \phi(t_0)$

Entonces, se puede ver a δ como un funcional que toma una función de $S(\mathbb{R})$ (una función del espacio de Schwartz, que es infinitamente diferenciable y todas sus derivadas multiplicadas por un polinomio son acotadas) y que da como resultado un real.

Entonces, δ es un elemento del espacio dual de $S(\mathbb{R})$ y a estos elementos se les conoce como distribuciones.

- **Transformada de δ :** $L[\delta(t - t_0)] = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-pt} dt = e^{-pt_0}$

Siempre y cuando $t_0 > 0$ para que entre al intervalo de integración.

$$L[\delta(t - t_0)] = e^{-pt_0}$$

Ahora podemos resolver ecuaciones diferenciales que involucren a la δ sin usar una sucesión que la aproxime, sino usando la transformada.

Por ejemplo, digamos que $y'' + \omega^2 y = \delta(t - t_0)$ con $y_0 = y'_0$, entonces, al transformar ambos lados, nos queda:

$$(p^2 + \omega^2)Y(p) = e^{-pt_0}$$

Y luego, nos queda que:

$$Y(p) = \frac{e^{-pt_0}}{\omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

La antitransformada de la fracción derecha es $\sin(\omega t)$. Pero el factor de la izquierda hace una traslación y nos queda que la solución es:

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \sin((\omega(t - t_0)))$$

■ **Transformada de Fourier de δ :**

Sea $f = \delta(x - a)$, entonces, la transformada de Fourier es:

$$\widehat{f}(\alpha) = \widehat{\delta}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-i\alpha a}$$

Por el teorema de inversión, tenemos que:

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha(x-a)} d\alpha$$

- **Derivadas:** Queremos darle sentido a $\delta'(x - a)$. Para esto, veremos qué es lo que ocurre con: $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \delta'(x - a) dx$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \delta'(x - a) dx = \phi(x) \delta(x - a) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \phi'(x) \delta(x - a) dx = -\phi'(a)$$

Siempre y cuando $\phi(x)$ se anula en infinito.

De forma más general, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta^{(n)}(x - a) dx = (-1)^n \phi^{(n)}(a)$$

Lo que se puede probar por inducción usando integración por partes.

- **Relación con Heaviside** Recordamos que la función $u(x - a) = \begin{cases} 1 & , x > a \\ 0 & , x < a \\ \frac{1}{2} & , x = a \end{cases}$ Y

veremos que $u'(x - a) = \delta(x - a)$

Primero que nada, como heaviside y delta son operadores. Para probar su igualdad hay que probar que al evaluarla en todas las funciones del espacio de Schwartz (o de otro espacio) es siempre el mismo. Es decir, probar que para todo $\phi \in S(\mathbb{R})$, se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) u'(x - a) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \delta(x - a) dx = \phi(a)$$

Para eso, partimos del lado derecho y usamos integral por partes y tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) u'(x - a) dx &= \phi(x) u(x - a) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \phi'(x) u(x - a) dx = - \int_a^{\infty} \phi'(x) dx = \\ &= -\phi(\infty) + \phi(a) = \phi(a) \end{aligned}$$

Con lo que se prueba que la delta de dirac actúa de la misma forma que la derivada de heaviside.

■ **Probar que** $x\delta(x) = 0$.

Visto a $x\delta(x)$ como un operador, lo operamos sobre una función $\phi(x)$ y nos queda:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)x\delta(x)dx = \int_{\mathbb{R}} (x\phi(x))\delta(x)dx = (x\phi(x))|_0 = 0\phi(0) = 0$$

■ **Probar que** $x\delta'(x) = -\delta(x)$

Hacemos lo mismo, operamos $x\delta'(x)$ en una ϕ :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)x\delta'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} (\phi(x)x)\delta'(x)dx = -(\phi x)'(x)|_0 = -(x\phi'(x) + \phi(x))|_0 = -\phi(0)$$

y vemos que es igual que haberle aplicado $-\delta(x)$.

■ **En general:** Tenemos que:

- $x^m\delta^{(n)}(x) = 0$ con $m > n$
- $x^m\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x)$ con $n = m$
- $x^m\delta^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^m}{(n-m)!} \delta^{(n-m)}(x)$ con $n > m$

a) $\delta(x) = \delta(-x)$

Simplemente vemos que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\delta(-x)dx = \int_{\infty}^{-\infty} \phi(-y)\delta(y)(-dy) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(-y)\delta(y)dy = \phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\delta(x)dx$

b) $\delta'(-x) = -\delta'(x)$, $\delta'(x-a) = -\delta'(a-x)$

Similar a la a)

c) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ $a \neq 0$

Para $a < 0$: Sea $a = -b$, con $b > 0$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\delta(ax)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\delta(-bx)dx = \int_{\infty}^{-\infty} \phi\left(\frac{-u}{b}\right)\delta(u)\frac{du}{-b} = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{-u}{b}\right)\delta(u)du = \frac{1}{b}\phi(0/b) = \frac{1}{b}\phi(0) = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\delta(x)dx$$

Pero como $b = |a|$, recuperamos la identidad.

$$d) \delta((x-a)(x-b)) = \frac{1}{|a-b|} [\delta(x-a) + \delta(x-b)] \quad a \neq b$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta((x-a)(x-b)) dx$ Entonces, los únicos puntos en los que no vale 0 son a y b , entonces:

$$= \int_{|a| < r_1} \phi(x) \delta((x-a)(x-b)) dx + \int_{|b| < r_2} \phi(x) \delta((x-a)(x-b)) dx$$

Pero para la integral cerca a a , el $x-b$ es como una constante, y para la segunda integral, el $x-a$ es como constante. Por lo tanto, usamos el c y tenemos:

$$= \frac{1}{|a-b|} \phi(a) + \frac{1}{|b-a|} \phi(b) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \frac{\delta(x-a) + \delta(x-b)}{|a-b|} dx$$

$$e) \delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad f(x_i) = 0, \quad f'(x_i) \neq 0$$

$\int_{f(\mathbb{R})} \phi(u) \delta(u) du$ y hacemos el cambio de variable $u = f(x)$, $du = f'(x) dx$ para hacer el cambio de variable:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(f(x)) \delta(f(x)) |f'(x)| dx$$

Y luego usamos un truquito parecido al anterior.

3.4.2. En varias Variables

La vamos a centrar en un punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y la delta es una función tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y, z) \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) dx dy dz = \phi(x_0, y_0, z_0)$$

Donde ϕ es una función test adecuada (muy continua y se a nula en infinito).

A veces se representa por $\delta(\vec{x})$ o por $\delta^3(\vec{r})$ o algo así.

Si estamos por ejemplo en **coordendas esféricas**. Tenemos que llamar a la delta de dirac como:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{\delta(r-r_0) \delta(\theta-\theta_0) \delta(\phi-\phi_0)}{r_0^2 \sin \theta_0}$$

Lo hacemos así, de tal manera que si tomamos la integral triple que sigue:

$$\begin{aligned} \int_S f(r, \theta, \phi) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dS &= \int_S f(r, \theta, \phi) \delta(r-r_0) \delta(\theta-\theta_0) \delta(\phi-\phi_0) \frac{r^2 \sin \theta}{r_0^2 \sin \theta_0} dr d\phi d\theta = \\ f(r_0, \theta_0, \phi_0) \frac{r_0^2 \sin \theta_0}{r_0 \sin \theta_0} &= f(r_0, \theta_0, \phi_0) \end{aligned}$$

Por eso se define así, para que al dividir, desaparezca el elemento de volumen y sea otra vez f evaluada en \vec{r}_0

Propiedades en Esféricas

$$\blacksquare \nabla \cdot \frac{e_r}{r^2} = 4\pi\delta(\vec{r})$$

Usamos la expresión de la divergencia en esféricas. Cuando $r \neq 0$, la expresión nos va a dar 0.

Si $r = 0$, entonces aplicamos el teorema de la divergencia entonces

$$\int \int \int_S \nabla \cdot \frac{e_r}{r^2} dS = \int \int_{\partial S} \frac{e_r}{r^2} \cdot e_r d\sigma = \int \int_{\partial S} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2} d\phi d\theta = 4\pi.$$

Esto lo demuestra intuitivamente, ahora lo demostramos con función test:

$$\int \int \int_S f(r) \nabla \cdot \frac{e_r}{r^2} dS = \int_{\partial S} f(V \cdot \vec{n}) d\sigma - \int_S V \cdot \nabla f dS$$

por un teorema de como integrar por partes

$$\begin{aligned} &= \int \int_{\partial S} f(r) \frac{e_r}{r^2} \cdot e_r d\sigma - \int \int \int_S \nabla f(r) \cdot \frac{e_r}{r^2} dS \\ &= \int \int_{\partial S} f(r) \sin \theta d\theta d\phi - \int \int \int_S \frac{\partial f}{\partial r} e_r \cdot \frac{e_r}{r^2} r^2 dr d\sigma \\ &= 4\pi f(a) - (f(a) - f(0))4\pi = f(0) \end{aligned}$$

$$\blacksquare \nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$$

Se puede ver que el gradiente de $1/r$ es $-\frac{e_r}{r^2}$.

Y para el laplaciando, calculamos la divergencia, que es lo que tenemos arriba y da $-4\pi\delta(\vec{r})$.

O más general:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

3.5. Funciones de Green

Son muy útiles para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Ejemplo:

$$1 \quad y'' + \omega^2 y = f(t), \text{ con } y_0 = y'_0 = 0.$$

Con f una función cualquiera. Pero observamos que la función f siempre se podrá representar como:

$$f(t) = \int_0^\infty f(t') \delta(t' - t) dt' \quad t' > t$$

Que se interpreta como una suma (integral) de muchos impulsos unitarios $\delta(t - t')$

Planteamos ahora una ecuación auxiliar pero ahora para una función $G(t, t')$ y que tenga una función de fuerza dada por la delta de dirac (es decir, vamos a resolver la ecuación para cada uno de los impulsos $\delta(t' - t)$).

$$\frac{d^2}{dt^2}G(t, t') + \omega^2 G(t, t') = \delta(t' - t)$$

Con las mismas condiciones, $G(0, t') = 0$, $\frac{d}{dt}G(t, t')|_{t=0} = 0$.

Ahora, digamos que resolvemos esta ecuación (que ya la habíamos resuelto antes usando laplace).

Y entonces, al resolver $G(t, t')$ en la ecuación auxiliar, podemos comprobar que la solución de la ecuación original es:

$$y(t) = \int_0^\infty G(t, t')f(t')dt'$$

Esto se puede comprobar viendo que esto es efectivamente una solución al meterlo en la ecuación diferencial y viendo que verifica las condiciones iniciales.

Otra forma de pensarlo es que lo que hicimos primero fue partir $f(t)$ como la suma (integral) de muchas funciones de la forma $f(t')\delta(t' - t)$. Luego, con Green lo que hacemos es encontrar la solución para cuando el lado derecho es $\delta(t' - t)$. Pero el lado derecho es en realidad algo así como $f(t'_1)\delta(t'_1 - t) + f(t'_2)\delta(t'_2 - t) + \dots$. Por lo que para encontrar esta solución completa, hay que usar linealidad para cada una de las soluciones $G(t, t')$ que encontramos. Y es por eso que $y(t)$ es la suma de las soluciones, multiplicadas por los factores $f(t')$.

Por ejemplo, en el caso pasado, habíamos encontrado que $G(t, t') = \begin{cases} 0 & , 0 < t < t' \\ \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) & 0 < t' < t \end{cases}$.

Y entonces, la solución general es:

$$y(t) = \int_0^\infty G(t, t')f(t')dt' = \int_0^t \frac{1}{\omega} \sin \omega(t - t') f(t')dt'$$

- 2) Que de hecho es el mismo resultado que habríamos obtenido usando el método de convolución.

En general, para cualquier EDO de segundo orden de la forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Con condiciones de frontera $y(a) = y(b)$.

Suponemos que p, q, p' son funciones continuas.

Lo que hacemos es primero encontrar la función de Green, que se encuentra poniendo la misma ecuación diferencial pero con $\delta(x' - x)$ y con las mismas condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}G(x, x') + p(x)\frac{d}{dx}G(x, x') + q(x)G(x, x') &= \delta(x' - x) \\ G(0, x') &= 0 = G(b, x') \end{aligned}$$

Y la solución será: $y(x) = \int_a^b G(x, x')f(x')dx'$

Vamos a suponer que por alguna razón conocemos dos soluciones particulares a la ecuación original homogénea y_1, y_2 tales que $y_1(a) = 0, y_2(b) = 0$.

Entonces, la propuesta de la función de Green va a ser:

$$G(x, x') = \begin{cases} A(x')y_1(x) & , a < x < x' < b \\ B(x')y_2(x) & , a < x' < x < b \end{cases}$$

Se puede ver fácilmente que esta función de Green cumple con las condiciones de frontera. Además, queremos que la función sea continua en $x = x'$, para lo que debe de ocurrir que ambas ramas de la función coincidan, por lo que:

$$A(x')y_1(x') = B(x')y_2(x')$$

Luego, vamos a calcular también $\frac{d}{dx}G(x, x')$, que es igual a $\begin{cases} A(x')y_1'(x) & , a < x < x' < b \\ B(x')y_2'(x) & , a < x' < x < b \end{cases}$

Ahora bien, si evaluamos esta función en x' , obtenemos el salto que tiene la derivada cuando $x = x'$. Este salto es $B(x')y_2'(x') - A(x')y_1'(x')$

Ahora integramos la ecuación diferencial de G de ambos lados en un intervalo muy cercano a x' ($x' - \epsilon, x' + \epsilon$). Entonces, al integrar nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dx} \Big|_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} + \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} p(x)\frac{d}{dx}G(x, x') + \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} q(x)G(x, x') &= \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} \delta(x' - x) \\ B(x')y_2'(x') - A(x')y_1'(x') &= 1 \end{aligned}$$

Se puede probar que las dos integrales de enmedio son 0 porque G, p, p', q son continuas y el intervalo de integración es muy chico. En la primera integral se puede usar integración por partes.

Entonces, en total tenemos que:

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \begin{cases} A(x')y_1(x) & , a < x < x' < b \\ B(x')y_2(x) & , a < x' < x < b \end{cases} \\ \text{Con, } B(x')y_2'(x') - A(x')y_1'(x') &= 1 \\ A(x')y_1(x') - B(x')y_2(x') &= 0 \end{aligned}$$

Con lo cual se puede calcular A, B al resolver el sistema de ecuaciones:

$$A(x') = \frac{y_2(x')}{W(x')} \quad , \quad B(x') = \frac{y_1(x')}{W(x')}$$

Entonces, para cualquier EDO de segundo orden con condiciones de frontera, si conocemos dos soluciones de la ecuación homogénea, tendremos que la función de Green es:

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{y_2(x')y_1(x)}{W(x')} & , a < x < x' < b \\ \frac{y_1(x')y_2(x)}{W(x')} & , a < x' < x < b \end{cases}$$

Y esta es la función de Green asociada a la correspondiente EDO. Y la solución a la EDO:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b G(x, x') f(x') dx' \\ &= y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(x') f(x')}{W(x')} dx' + y_1(x) \int_x^b \frac{y_2(x') f(x')}{W(x')} dx' \end{aligned}$$

Y esa es la solución general de la ecuación diferencial forzada.

Una solución particular será:

$$y_p(x) = y_2(x) \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} dx - y_1(x) \int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)} dx$$

4. EDP

Vamos a estudiar ecuaciones cuya solución es una función de varias variables. Primero mencionaremos algunos ejemplos de EDP:

1) Ecuación de Laplace:

$$\Delta u = 0$$

Con Δ el laplaciano. Esta función es $u : \omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Recordamos que el laplaciano tiene formas diferentes dependiendo de las coordenadas que se usan y la elección de coordenadas depende de la simetría de la región Ω .

Se resuelve para encontrar el potencial eléctrico en una zona sin cargas y para otras cosas.

2) Ecuación de Poisson

Es como la ecuación de Laplace pero no homogénea:

$$\Delta u = f$$

Con $u, f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. El lado derecho generalmente representa una densidad de carga o de masa.

3) Ecuación del calor o de difusión

$$\Delta u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

La función $u : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ depende de la posición y del tiempo.

La ecuación en general describe la temperatura como función del tiempo y del espacio.

Y α es una constante de difusión.

4) Ecuación de Ondas

$$\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

La u generalmente describe el desplazamiento o vibración de una onda y v es su velocidad. También se puede representar usando el operador D'Alembertiano $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

5) Ecuación de Helmholtz

$$\Delta F + k^2 F = 0$$

6) Ecuación de Klein Gordon:

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + k^2 F = 0$$

7) Ecuación de Schrodinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Phi + V \Phi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi$$

Con $V : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$.

Todas estas ecuaciones son lineales (porque la combinación lineal de dos soluciones vuelve a ser una solución).

Separación de Variables:

El método más común es suponer que la solución $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un producto de muchas funciones de funciones en cada variable. Es decir, suponer que:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = X_1(x_1)X_2(x_2) \cdots X_n(x_n)$$

Ejemplo: Resolver la ecuación de Laplace en una banda:

Buscamos resolver la ecuación $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ donde Ω es la tira $\Omega = [0, 10] \times [0, \infty)$.

La ecuación a resolver es $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$.

Las condiciones iniciales van a ser que la temperatura vale 0 en las bandas verticales y vale 100 en la inferior, es decir, $T(0, y) = 0, T(10, y) = 0, T(x, 0) = 100$.

El MSV nos dice que supongamos que $T(x, y) = X(x)Y(y)$. Entonces, nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(XY)}{\partial y^2} &= 0 \\ \Rightarrow Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \end{aligned}$$

Del lado izquierdo tenemos una función que depende únicamente de x . Mientras que del lado derecho, tenemos una función que depende de pura y . Si fijamos x a un x_0 , entonces el lado izquierdo se hace constante y obliga a que el lado derecho sea constante para toda y y vice versa.

Entonces, igualamos cada lado a una constante $-k^2$ (el negativo lo explicamos luego). Entonces:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k^2$$

La k normalmente se conoce como la constante de separación. Las ecuaciones que aparecen son:

$$X'' + k^2 X = 0 \quad Y'' - k^2 Y = 0$$

Entonces, tenemos que las soluciones generales son:

$$X(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) \quad Y(y) = D_1 e^{ky} + D_2 e^{-ky}$$

Y la función T es un producto de ambas de la forma $T(x, y) = X(x)Y(y)$ que cumple las condiciones de frontera $T(0, y) = T(10, y) = 0$, $T(x, 0) = 100$ y $T(x, \infty) = 0$.

Pero por la última condición y como $k > 0$, la primera parte de la solución no es posible (la del D_1), por lo que nos quedamos solamente con el segundo miembro de $Y(y)$. Por lo que $D_1 = 0$

Pero como $T(0, y) = X(0)Y(y) = 0$ y $Y(y) \neq 0$, entonces debemos de tener que $X(0) = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = 0$ y por tanto, $C_2 = 0$.

Pero como $T(10, y) = X(10)Y(y) = 0$ y como Y no es cero, entonces debemos de tener que $X(10) = C_1 \sin(10k) = 0$. Esto restringe el valor de k a cualquiera de las siguientes $k_n = \frac{n\pi}{10}$.

Entonces, podemos recopilar las soluciones (que tenemos una solución distinta para cada n):

$$T_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) e^{-\frac{n\pi y}{10}} \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Pero nos falta la última condición de contorno, que $T_n(x, 0) = 100$. Pero al sustituir eso, nos queda que $b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) = 100$. Esto es imposible obviamente.

Sin embargo, podemos usar el principio de superposición para darnos cuenta que $T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) e^{-\frac{n\pi y}{10}}$ es una solución a la ecuación diferencial que cumple con todas las condiciones de frontera excepto la de $T(x, 0) = 100$. Pero podemos hacer que cumpla con esta condición usando una serie seno de Fourier. Ya que tenemos el los sumandos de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/10)$. Queremos que esta suma sea igual a la constante 100 en $[0, 10]$ (ya puse que $y = 0$).

Como queremos una serie sólo de senos, lo que tenemos que hacer es extender la función 100 al intervalo $(-10, 0)$ de tal manera que valga -100 para expandirla de forma impar y ahora sacamos los coeficientes de seno de esta función como:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx \quad , L = 10, f = 100$$

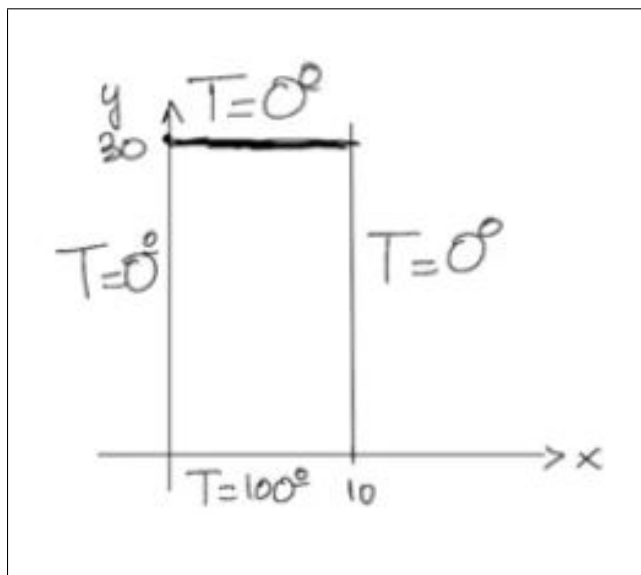
Calculamos esto y nos resulta que:

$$b_n = \begin{cases} \frac{400}{n\pi} & , n \text{ impar} \\ 0 & , n \text{ par} \end{cases}$$

Entonces, la solución ya completa que cumple con todas las condiciones de frontera que es una solución de la ecuación diferencial es:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) e^{-n\pi y/10} \\ &= \frac{400}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{10}\right) e^{-\frac{(2k+1)\pi y}{10}} \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Consideramos un problema similar de ecuación de Laplace pero para un rectángulo acotado:



Entonces, queremos resolver la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\Delta T &= 0 \\ T(0, y) &= 0 = T(10, y) \\ T(x, 0) &= 100 \\ T(x, 30) &= 0\end{aligned}$$

Ahora igual que antes tenemos las soluciones:

$$\begin{aligned}X(x) &= C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \\ Y(y) &= D_1 e^{ky} + D_2 e^{-ky}\end{aligned}$$

Como la temperatura no se hace cero hacia el infinito, ya no podemos decir que $D_1 = 0$. Sin embargo, C_2 sigue valiendo 0 por la condición de que $T(0, y) = 0$.

Y ahora ponemos la nueva condición de frontera:

$$T(x, 30) = X(x) (D_1 e^{30k} + D_2 e^{-30k}) = 0$$

Entonces, queremos que lo de paréntesis sea 0, para lo cual $-\frac{D_1}{D_2} = \frac{e^{-30k}}{e^{30k}}$. Entonces, va a haber un parámetro libre. Una manera conveniente de escribir el $Y(y)$ va a ser:

$$Y(y) = \frac{1}{2} e^{k(30-y)} - \frac{1}{2} e^{-k(30-y)}$$

Donde tomamos $D_1 = -\frac{1}{2} e^{-30k}$, $D_2 = \frac{1}{2} e^{30k}$.

Entonces, $Y(30) = 0$. Y podemos escribir el $Y(y)$ como:

$$Y(y) = \sinh(k(30 - y))$$

Y el $X(x)$ sigue siendo que:

$$X_n(x) = \sin(k_n x) \quad , \quad k_n = \frac{n\pi}{10}$$

Entonces, una solución sería:

$$\begin{aligned}T_n(x, y) &= b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{10}(30 - y)\right) \\ T(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{10}(30 - y)\right)\end{aligned}$$

Cualquier solución de esta forma es una solución pero nos falta la condición inicial de que $T(x, 0) = 100$. En este caso, al imponer esta condición nos queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh(n\pi 3) \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) = 100$$

Que es nuevamente una serie de Fourier de senos. El \sinh lo podemos ignorar y considerar que toda la expresión $b_n \sinh(3\pi n)$ es el coeficiente de Fourier (pero estos ya los calculamos). Entonces, los b_n serán los coeficientes de Fourier pero divididos entre $\sinh(3\pi n)$.

Por lo que la solución general es:

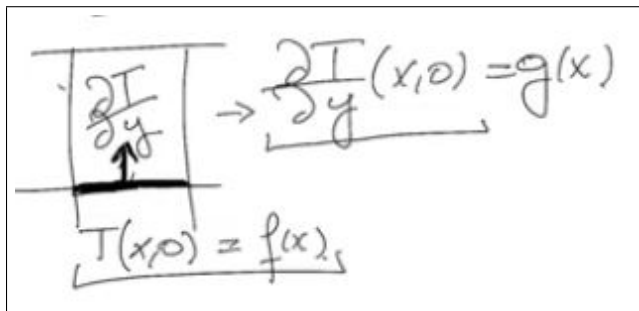
$$T(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{10}(30 - y)\right) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{10}\right)}{(2k+1) \sinh(3\pi(2k+1))}$$

Unicidad? Si los contornos son acotados, entonces siempre es única la solución. Si no es acotado, puede que no sea única pero no vamos a encontrar esos casos.

Por qué supusimos que $k > 0$ y pusimos $-k^2$? Estp para que la x tuviera asociados los senos y cosenos y la Y los exponenciales. Sino hubiéramos hecho esto, hubiera sido imposible conseguir que $T(x, \infty) = 0$. Hubiera tenido que ser así si agarráramos un rectángulo infinito pero horizontal.

Placa General: Digamos que tenemos una placa con 4 lados a temperaturas A, B, C, D . Para resolverlo, podemos resolver cuatro problemas distintos y luego sumarlos. Uno de los problemas sería $A = B = C = 0, D \neq 0$, otro sería $A = C = D = 0, B \neq 0$. Y así sucesivamente. Entonces, resolvemos cada uno de estos problemas como ya lo hicimos antes y luego sumamos las soluciones.

Lados Aislados



En este caso, la pared inferior es un aislante y en vez de tener la condición anterior de que $T(x, 0) = f(x)$, tendremos una condición sobre la derivada de la temperatura como $\frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = g(x)$.

ipsum ipsum
.
ipsum ipsum
.

4.1. Ecuación del calor

La ecuación del calor es:

$$\Delta u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Donde u es una función de \vec{x} en un conjunto Ω y del tiempo t .

Luego, el método de la solución es del mismo de siempre. Proponemos una solución de la forma $u(x, y, z, t) = F(x, y, z)T(t)$. Y nos queda la ecuación:

$$T\Delta F = \frac{F}{\alpha^2} \frac{dT}{dt}$$

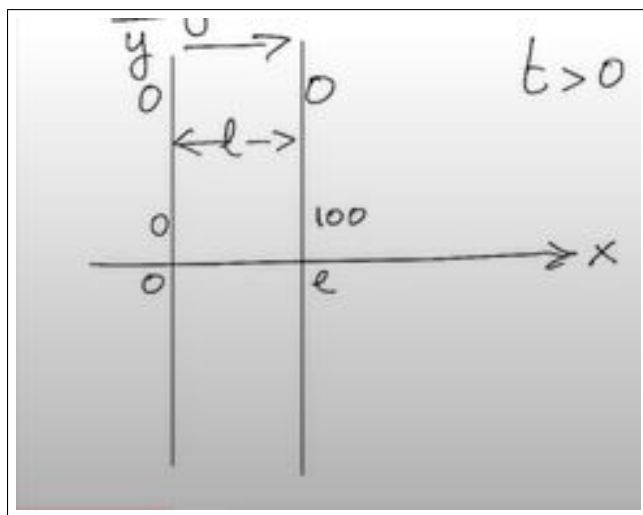
Luego dividimos entre FT y nos queda:

$$\frac{1}{F}\Delta F = \frac{1}{\alpha^2 T}T'$$

Que ahora es una ecuación separada. Por tanto, ambos lados deben de ser iguales a una constante $-k^2$. Y nos quedan las dos ecuaciones:

- $\frac{1}{F}\Delta F = -k^2 \Rightarrow \Delta F + k^2 F = 0$ (ecuación de Helmholtz).
- $\frac{1}{\alpha^2 T}T'(t) = -k^2 \Rightarrow T'(t) + k^2\alpha^2 T(t) = 0 \Rightarrow T(t) = e^{-k^2\alpha^2 t}$
Y es por esto que tomamos una $-k^2$ con el signo menos (para que la temperatura no tienda a infinito).

Ejemplo:



Digamos que tenemos una banda con un ancho L en la dirección x y una que va hasta el infinito en la dirección y .

Digamos que cuando $t = 0$ la temperatura es 0 del lado izquierdo y 100 del derecho.

Podemos simplificar la ecuación para varillas horizontales unidimensionales, ya que el calor se mueve solamente en la dirección horizontal. Entonces, la ecuación a resolver es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 = u(L, t) \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{aligned}$$

Donde al tiempo 0 la temperatura en $x = 0$ es $u_0(0) = 0$ y en $x = L$ es $u_0(L) = 100$.

Luego, para tiempo $t = 0$, la ecuación se simplifica a $u_0''(x) = 0$. Que junto con las condiciones iniciales nos dice que:

$$u_0(x) = \frac{100x}{L}$$

Y por otro lado, la función del tiempo es:

$$T(t) = e^{-k^2\alpha^2 t}$$

Por otro lado, la ecuación espacial sigue la ecuación de Helmholtz:

$$\begin{aligned}\Delta F + k^2 F = 0 &\Rightarrow \frac{d^2 F}{dx^2} + k^2 F = 0 \\ &\Rightarrow F(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx\end{aligned}$$

Luego, la solución más general es:

$$u(x, t) = (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx)e^{-k^2\alpha^2 t}$$

La primera condición de frontera $u(0, t) = 0$ hace que $C_2 = 0$. Mientras que la segunda condición $u(L, t)$ nos hace que $\sin kL = 0$ por lo que $k_n = \frac{n\pi}{L}$.

Luego, la solución más general es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{(-\frac{n\pi\alpha}{L})^2 t}$$

Por último, nos falta la condición de que a tiempo $t = 0$ la temperatura estacionaria es $u(x, 0) = \frac{100x}{l}$.

Entonces tenemos una serie de senos de Fourier y podemos calcular los coeficientes de Fourier que quedan $\frac{200}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Por lo que la solución es:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-(\frac{n\pi\alpha}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

En este ejercicio asumimos que cuando t tiende a infinito, la temperatura tiende a 0.

Sin embargo, podemos pedir que la temperatura tienda a $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_f(x)$.

Para ello hay que añadir esta función $u_f(x)$ de tal forma que:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + u_f(x)$$

$$u_0(x) - u_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ejercicio 3.7:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Y digamos que la frontera de la vara son aislantes, por lo que $u'(0, t) = 0 = u'(L, t)$.
Y digamos también que a un tiempo 0 se tiene que $u(x, 0) = x$.

Luego, nuevamente la función espacial $F(x)$ será una combinación de senos y coseno. Pero la condición de que la derivada sea 0 en tiempo 0 nos lleva a que desaparezca el término que lleva al seno. Entonces, nos va a quedar una combinación de cosenos. Entonces, la solución general va a ser:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-(\frac{n\pi\alpha}{L})^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Y luego hay que agregar la condición inicial de que $u(x, 0) = x$ (por ejemplo) para calcular los coeficientes a_n de la serie de Cosenos. Al calcular estos coeficientes (que incluye al coeficiente a_0 que se calcula diferente) nos queda:

$$u(x, t) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-(\frac{n\pi\alpha}{L})^2 t}$$

4.2. Ecuación de Schrodinger

La ecuación es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Luego, proponemos una solución de la forma $\Psi = \Phi(x, y, z)T(t)$. Al sustituir esto y usar la separación de variables nos queda:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\Phi} \Delta \Phi + V = i\frac{\hbar}{T} \frac{dT}{dt} = E$$

Con E la constante de separación. Entonces, nos queda que la solución del tiempo es:

$$T(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

Por otro lado, nos queda la ecuación independiente del tiempo que es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Phi + V \Phi = E \Phi$$

En una dimensión y con potencial igual a 0, obtenemos la ecuación diferencial sencilla:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Phi'' = E \Phi$$

Cuya solución es un coseno y seno con $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Por lo tanto, la solución completa es:

$$\Psi(x, y) = \Phi(x)T(t) = (c_1 \sin kx + c_2 \cos kx)e^{-iEt/\hbar}$$

Partícula en una caja:

Digamos que tenemos una partícula encerrada en una caja. Tiene que cumplir con la ecuación de Shrodinger en una dimensión y sin potencial y con las condiciones de frontera dadas por: $\Phi(0, t) = \Phi(L, t) = 0$.

Al hacer esta condición, nos queda que desaparece el coseno y que $kl = n\pi$.

Pero como $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, entonces nos queda que:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ml^2}$$

Luego, la solución general es:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{iE_n t/\hbar}$$

Luego a esta solución le podemos dar una condición inicial $\Psi(x, 0)$ y encontrar los coeficientes de la serie de senos de Fourier.

Esta solución es una función compleja que tendrá una parte real y una parte imaginaria.

La función que se usa para interpretar la posibilidad de encontrar a la partícula en un lugar en particular es el valor absoluto al cuadrado de $\Psi(x, t)$ y de tal forma que esté normalizado (su integral sea 1)

4.3. Ecuación de Onda

Tenemos una cuerda con extremos en $x = 0$ y en $x = l$. Y queremos calcular la función $y(x, t)$ que da el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio.

Se puede probar que si el desplazamiento es chico, entonces la onda sigue la ecuación:

$$\Delta y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

En el caso que vamos a resolver (unidimensional) la ecuación es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Nuestras condiciones iniciales van a ser:

- Los extremos fijos: $y(0, t) = y(l, t) = 0$
- Posición inicial: $y(x, 0) = f(x)$
- Derivada inicial: $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$

Proponemos una solución de la forma $y(x, t) = X(x)T(t)$ y nos va a quedar que:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2} \frac{T''}{T}$$

Igualemos cada lado a una constante $-k^2$ y nos queda:

- $X'' + k^2 X = 0$
- $T'' + k^2 v^2 T = 0$

La constante de separación $-k^2$ es negativa para que las soluciones sean oscilatorias y no exponenciales. Las soluciones que nos quedan son:

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \\ T(t) &= D_1 \sin(kvt) + D_2 \cos(kvt) \end{aligned}$$

Usamos primero la condición de que la cuerda está fija en los extremos. Lo que nos lleva a que $X(0) = X(L) = 0$.

Con ello obtenemos que la solución para X es $X = C \sin(k_n x)$ con $k_n = \frac{n\pi}{l}$. Esto también restringe los valores de la k para la función T (porque es la misma k) y entonces la solución es:

$$y_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi vt}{l}\right) + c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)$$

Si usamos la condición de que la derivada temporal en $t = 0$ es 0, lo que nos queda es que la derivada en tiempo cero es $b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)$. Para que esto valga 0 para todo x , necesitamos que $b_n = 0$. Entonces, la solución más general con velocidad inicial 0 es:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)$$

Ahora digamos que la función $y(x, 0) = f(x)$ se consigue al levantar el punto medio una altura h y tener como un triangulito. Es decir, $f(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{l} & , 0 \leq x \leq l/2 \\ \frac{2h(l-x)}{l} & , l/2 \leq x \leq l \end{cases}$

Luego, en tiempo igual a 0, nos queda que $y(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$. Se pueden encontrar los coeficientes c_n usando las series de Fourier. Y al sustituirlos en la solución, nos queda que es:

$$y(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi vt}{l}\right)$$

Se pueden cambiar las condiciones iniciales como quiera el problema.

Por ejemplo, si suponemos que el extremo en $x = 0$ no es fijo sino que se puede mover, las condiciones serán:

- Fija en un extremo: $y(l, t) = 0$
- El primer extremo no está fijo $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0$
Es como la condición de paredes aislantes.

- $y(x, 0) = f(x)$
- $\frac{\partial t}{\partial t}(x, 0) = 0$

Se usan estas condiciones y se llega a una solución

5. Funciones Especiales

5.1. Función Gamma

Recordamos que la transformada de Laplace de Monomios nos da:

$$L[x^n](t) = \int_0^\infty x^n e^{-tx} dx = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

Lo cual nos da una idea para encontrar el factorial:

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

De una forma parecida se define la función Gamma pero ahora para una variable continua:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \quad p > 0$$

Notamos las siguientes propiedades:

- 1) En $0 < p < 1$ la integral converge bien, aunque parezca haber problema
- 2) Para $p < 0$, $\Gamma[p] = \infty$, pero ya la definiremos luego.
- 3) $\Gamma[n + 1] = n!$
- 4) $\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p)$

Esto se puede probar con integración por partes.

Esta última propiedad permite definir la función Gamma en puntos que no sean enteros. Por ejemplo:

$$\Gamma(9/4) = \frac{5}{4}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}\frac{1}{4}\Gamma(1/4)$$

Entonces, siempre puedo escribir la función Gamma de cualquier número a partir de conocerla en números entre 0 y 1.

Definir para valores Negativos:

Extendemos la definición usando la fórmula de recurrencia:

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p + 1)$$

Por ejemplo, $\Gamma(-0,3) = \frac{1}{-0,3}\Gamma(0,7)$

Límites en 0: Observando la definición de Γ , podemos ver que:

$$\Gamma(0^+) = +\infty$$

Y por otro lado, usando la definición para números negativos, tenemos que:

$$\Gamma(0^-) = \lim_{p \rightarrow 0^-} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow 0^-} \frac{1}{p}\Gamma(p+1) = -\infty$$

Podemos ver una gráfica de la función Γ usando las definiciones que usamos para números negativos. Por ejemplo $\Gamma(-1^+) = \frac{1}{(-1^+)}\Gamma(-1^+ + 1) = -\Gamma(0^+) = -\infty$. Y $\Gamma(-1^-) = \frac{1}{-1^-}\Gamma(-1^- + 1) = -\Gamma(0^-) = -(-\infty) = \infty$.

Con este tipo de análisis podemos estudiar las funciones en todos los negativos. Y observamos que siempre diverge en los enteros negativos.

La función también se puede extender a los complejos con la definición original permitida para complejos, pero no nos fijaremos en eso.

Un punto importante es que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

5.1.1. Fórmula de Reflexión de Euler:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi * p)}$$

Dem: Vamos a demostrar en $0 < p < 1$, pero en general se puede extender a cualquier valor de p no entero.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(1-p) &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} s^{-p} e^{-s} dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+s)} \left(\frac{t}{s}\right)^{p-1} \frac{1}{s} ds dt \end{aligned}$$

Luego hacemos el cambio de variable $u = s+t, v = t/s$. Que entonces u, v van de 0 a infinito.

Luego, podemos hacer un despeje para ver que $s = \frac{v+1}{u}, t = \frac{u^2-v-1}{u}$. Luego, si queremos integrar respecto a las variables u, v , necesitamos multiplicar por el jacobiano de $(t(u, v), s(u, v))$ El cual se puede calcular fácilmente usando las expresiones anteriores y es de $1/u$.

Por tanto, la integral queda como:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} v^{p-1} \frac{u}{v+1} \left(\frac{1}{u}\right) du dv \\ = \int_0^\infty \frac{v^{p+1}}{1+v} dv \end{aligned}$$

Esta integral se resuelve usando cálculo de residuos y da el resultado esperado.

5.2. Función Beta

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

Con $p, q > 0$. Tiene las siguientes propiedades:

1) $B(p, q) = B(q, p)$

Se demuestra con un cambio de variable de $x = 1 - y$.

2) Si se hace el cambio de variable $y = ax$, entonces podemos escribir la función Beta con el intervalo de integración hasta a

$$B(p, q) = \int_0^a \left(\frac{y}{a}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{y}{a}\right)^{q-1} \frac{dy}{a} = \frac{1}{a^{p+q-1}} \int_0^a y^{p-1} (a-y)^{q-1} dy$$

3) Otra representación se consigue con el cambio $x = \sin^2(\theta)$ Y nos queda:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta$$

4) Otra representación más surge si hacemos el cambio $x = \frac{y}{1+y}$. Entonces, nos queda:

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$$

5) Propiedad importante:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

5.2.1. Ejemplo de Aplicación: Péndulo

El péndulo tiene la ecuación diferencial:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Que es una ecuación diferencial no lineal. Multiplicamos ambos lados por $\dot{\theta}$ e integramos:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \sin \theta \dot{\theta} \\ \frac{\dot{\theta}^2}{2} &= \frac{g}{l} \cos \theta + C \end{aligned}$$

Calcularemos el periodo de un péndulo que oscila entre $\pi/2$ y $-\pi/2$. El péndulo cumple que $\dot{\theta} = 0$ en $\theta = \pi/2$. Entonces, como el coseno vale 0 en ese momento, la C es 0.

Luego, nos queda que $\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{g}{l} \cos \theta$. Haciendo separación de variables nos queda:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} dt$$

Si integramos entre 0 y $\pi/2$, el tiempo se integra de 0 a $T/4$. Entonces:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} = \sqrt{\frac{l}{g}} B(1/2, 1/4)$$

5.3. Función error

Se define como:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Tiene las propiedades:

- 1) $\operatorname{erf}(\infty) = 1$
- 2) Es una función impar
- 3) Relación con la distribución normal estándar.

La distribución normal estándar tiene como probabilidad acumulada a la función :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

Se cumple que:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

O bien:

$$\operatorname{erf}(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$$

- 4) Función error complementaria:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

- 5) Aproximación $|x| \ll 1$

Hacemos una serie de Taylor del integrando y luego integramos:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right)$$

- 6) Aproximación $|x| \gg 1$

Hacemos una expansión asintótica (con potencias negativas) del erfc :

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2x} e^{-x^2} - \frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt \right) \end{aligned}$$

El último paso fue al integrar por partes. Luego podemos hacer este truco varias veces y van apareciendo potencias negativas de x y nos queda:

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &= \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \dots \right) \\ &= \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2x^2)^n} \right) \end{aligned}$$

Cuando x es muy grande, nos basta con tomar solamente algunos términos de la suma. Y nos queda que:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} \right) + \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{1}{t^4} e^{-t^2} dt$$

Pero para x grande, nos queda que la integral tiene un valor muy chiquito y podemos aproximar la erfc como solamente los primeros dos términos.

Fórmula de Stirling:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

O bien:

$$\Gamma(p+1) \sim p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p} \quad \text{cuando } p \rightarrow \infty$$

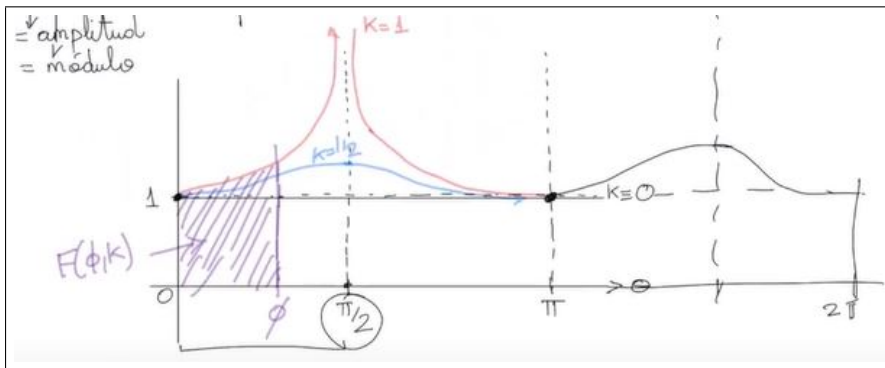
Para probarlo, hay que probar que el error relativo tiende a 0. Es decir, que $\frac{|n! - n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}|}{n!} \rightarrow 0$

5.4. Integrales y Funciones Elípticas

a) Integral elíptica de primera especie:

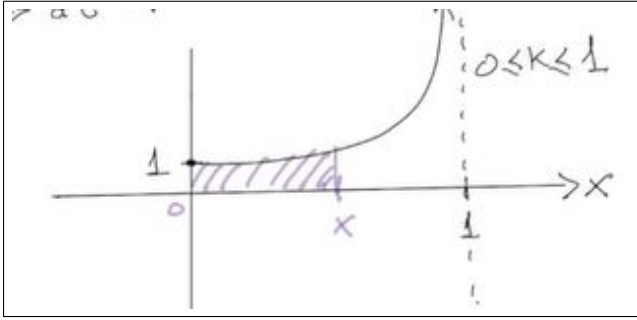
$$F(\phi, k) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

Esta es la **forma de Legendre**. Donde ϕ se llama amplitud y k módulo, con $0 \leq k \leq 1$.



Forma de Jacobi: Sustituimos $t = \sin \theta$ y $\phi = \sin \phi$ (porque cambia el intervalo de integración). Entonces, vamos a tener:

$$F(\phi, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$



Forma completa: Corresponde a cuando hacemos $\phi = \pi/2$ y nos queda una función de pura k :

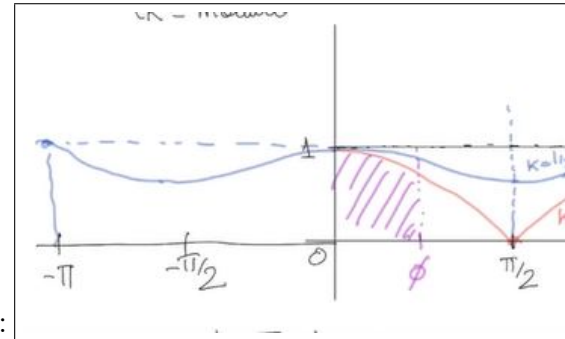
$$K(k) = F(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

Luego, tiene las propiedades:

- **Periodicidad:** $F(n\pi \pm \phi, k) = 2nK(k) \pm F(\phi, k)$
- $\int_{-\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(\phi_1, k) + F(\phi_2, k)$

b **De segunda especie:**

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta$$



Esta es la **forma de Legendre**, para $0 \leq k \leq 1$. La gráfica:

Forma de Jacobi

Hacemos el cambio de variable $t = \sin \theta$, $x = \sin \phi$. Entonces, nos queda que:

$$E(\phi, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Forma completa:

$$E(k) = E(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Propiedades

- $E(n\pi \pm \phi, k) = 2nE(k) \pm E(\phi, k)$
- $\int_{-\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = E(\phi_1, k) + E(\phi_2, k)$

Representación en término de Serie de las integrales elípticas completas

Buscamos expandir $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2 \theta}}$, $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$

Recordamos que la expresión binomial para $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Y entonces, por ejemplo, para $\alpha = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^n}{2n-1} \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^n}{2n-1} \end{aligned}$$

De igual manera se puede hacer para $\alpha = -1/2$ y nos queda:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$$

Entonces, usando estas formulitas, podemos escribir la integral de la de primera especie como:

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \theta \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \end{aligned}$$

Resolviendo la integral que es muy complicada.

Similarmemente, tendremos que:

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right)$$

Ejemplo:

Elipse. Digamos que tenemos una elipse dada por $(a \sin \theta, b \sin \theta)$ con $a > b$ y queremos calcular la longitud de arco. Tenemos que dicha longitud hasta un punto ϕ es:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^\phi a \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \theta} d\theta \\ &= aE \left(\phi, \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo de péndulo

Digamos que soltamos un péndulo desde un ángulo $\alpha < \pi/2$ y queremos medir el periodo.

Recordamos que la ecuación queda como $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} \cos \theta + C$

Y tenemos que $\dot{\theta} = 0$ cuando $\theta = \alpha$. Entonces, nos queda que $C = -\frac{2g}{l} \cos \alpha$.

Luego, nos queda que:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \alpha) \\ \Rightarrow \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} &= \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{T_\alpha}{4} \\ \Rightarrow \int_0^\alpha \frac{d\theta}{1 - 2 \sin^2(\theta/2) - 1 + 2 \sin^2(\alpha/2)} &= \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{T_\alpha}{4} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2 \sin(\alpha/2)}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin^2(\alpha/2)}}} &= \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{T_\alpha}{4} \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $x = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\alpha/2)}$ y nos va a quedar que:

$$T = 4\sqrt{g/l} K(\sin(\alpha/2))$$

Y lo podemos expandir con la expansión de K. Y observamos que para α pequeño se reduce a la fórmula de siempre:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} 2\pi \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha/2 + \frac{9}{64} \sin^4 \alpha/2 + \dots \right)$$

5.4.1. Funciones Elípticas de Jacobi

Recordamos que si $x = \sin(u)$, entonces

$$u = \arcsin(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Y en general, si llamamos $u = F(\phi, k)$, le podemos definir un seno elíptico de alguna manera como:

$$u = F(\phi, x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = \operatorname{sn}^{-1}(x)$$

Y entonces, $x = \operatorname{sn}(u)$

6. Soluciones en Serie

6.1. Método De Frobenius

6.2. Soluciones de EDO en términos de series de potencia

Digamos que tenemos una ecuación diferencial de la forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Empezamos con el caso en que p, q son **analíticas** en $x = x_0 \in \mathbb{R}$, es decir, que se pueden ver como expansiones de $(x - x_0)^n$.

Punto Regular (Ordinario de la EDO): Es un punto en el cual p, q son analíticas. Vamos a restringirnos al caso en que p y q son analíticas en $x_0 = 0$.

Cerca de $x = 0$, la ecuación diferencial se reduce a una ecuación con coeficientes constantes, la cual tiene soluciones analíticas. Por lo cual, tiene sentido proponer que la solución a la ecuación diferencial con p, q funciones sea una expansión por $x_0 = 0$.

Entonces, proponemos:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{aligned}$$

El método consiste en sustituir estas cosas y simplificar las sumas e igualar cada coeficiente de x^n (porque son una familia L.i de funciones).

Ejemplo:

Ej 1) $y' = 2xy \rightarrow \boxed{y = Ce^{x^2}}, C \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1}$$

$\{1, x, x^2, \dots\}$

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots = 2a_0x + 2a_1x^2 + 2a_2x^3 + \dots$$

$x^0 \Rightarrow a_1 = 0 \leftarrow$
 $x^1 \Rightarrow 2a_2 = 2a_0 \Rightarrow a_2 = a_0 \in \mathbb{R}$
 $x^2 \Rightarrow 3a_3 = 2a_1 \Rightarrow a_3 = 0$
 $x^3 \Rightarrow 4a_4 = 2a_2 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{a_0}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2a_n x^{n+1} = 0$$

$n \rightarrow n+2$

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)a_{n+2} - 2a_n] x^{n+1} = 0$$

$a_1 = 0$

$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}, n \geq 0$$

$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$

$n=2m \Rightarrow a_{2m+2} = \frac{2a_{2m}}{2m+2} = \frac{2a_{2m-2}}{(m+1)2} = \dots = \frac{a_0}{(m+1)!}$

$$\boxed{y = a_0 + 0 + a_0x^2 + 0 + \frac{a_0}{2!}x^4 + \dots + \frac{a_0x^{2m}}{m!}}$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \boxed{a_0 e^{x^2}}$$

Ejemplo 2:

Ej. 2) $y'' + y = 0 \rightarrow y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y', y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n] x^n = 0$$

$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 0$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m)!}, \quad a_{2m+1} = \frac{(-1)^m a_1}{(2m+1)!}$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m)!}, \quad a_{2m+1} = \frac{(-1)^m a_1}{(2m+1)!}$$

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} x^{2m+1}$$

$$= a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

Punto Singular: $x = x_0$ es un punto singular de la EDO si alguna de las funciones p, q no es singular en x_0 . Entonces, no se pueden desarrollar como serie de potencias. Sin embargo, hay dos casos de puntos singulares:

- 1) **Punto Singular Regular:** Es un punto x_0 que es singular pero que $(x - x_0)p(x)$, $(x - x_0)^2 q(x)$ son analíticas en $x = x_0$
- 2) Punto singular irregular: Caso contrario.

Nos fijaremos en los PSR y principalmente cuando $x_0 = 0$.

Digamos que tenemos una ecuación diferencial de este tipo:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Entonces, por la condición de PSR, tenemos que $x p(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ y que $x^2 q(x) =$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$$

Entonces, la ecuación queda como:

$$y'' + \frac{f(x)}{x} y' + \frac{g(x)}{x^2} y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y'' + x f(x) y' + g(x) y = 0$$

Donde f, g son analíticas en $x = 0$. Esta es la forma más general de una ecuación con un PRS en $x_0 = 0$.

Ejemplo:

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

Aquí $p = 2/x, q = 1$ no son ambas analíticas en $x = 0$. Sin embargo, $xp(x)$ sí lo es. Entonces, $x_0 = 0$ es un PRS.

6.2.1. Método de Frobenius

Para resolver estas ecuaciones, se propone una solución de la forma:

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{con } a_0 \neq 0, s \in \mathbb{R}$$

Por qué se propone este tipo de soluciones? Eso porque una EDO con PRS en $x_0 = 0$ se puede ver como:

$$x^2 y'' + x f_0 y' + g_0 y = 0$$

Cerca del 0, cuando expandemos $f(x)$ y $g(x)$. Esta es una **Ecuación de Cauchy- Euler**.

Para resolverla, se propone una solución de la forma $y(x) = x^s$, lo que resulta en que

ecuación indicial: $s(s-1) + s f_0 + g_0 = 0$.

Entonces, cerca del cero, la solución es x^{s_1}, x^{s_2}

Por eso, para la ecuación general en cualquier punto, proponemos una solución de la forma x^s multiplicado por una expansión analítica.

Para resolver, proponemos una solución de la forma:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+s} \\ y'(x) &= \sum_{n \geq 0} (n+s) a_n x^{n+s-1} \\ y''(x) &= \sum_{n \geq 0} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-2} \end{aligned}$$

Luego, se sustituye esto y se ve qué hacer con los coeficientes. Generalmente se encuentra la ecuación indicial fácilmente para encontrar los valores posibles de s y nos puede dar distintos casos

Ejemplo 1:

Ej. 3.1. $x y'' + 2y' + x y = 0$

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+s}, \quad y'(x) = \sum_{n \geq 0} (n+s) a_n x^{n+s-1}, \quad y'' = \sum_{n \geq 0} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)(n+s-1) + 2(n+s)] a_n x^{n-1} + a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)(n+s-1) + 2(n+s)] a_n x^{n-1} + a_n x^{n+1} = 0$$

$n \rightarrow n+2$ $(n+s)(n+s+1)$

$$\frac{a_0 s(s+1)}{x} + \frac{a_1 (s+1)(s+2)}{0} + \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2} (n+s+2)(n+s+3) + a_n] x^{n+1} = 0$$

$\nearrow x$ $\downarrow 0$ $\downarrow 0$

$a_0 s(s+1) = 0$

$a_0 \neq 0 \Rightarrow \boxed{s_1 = 0, s_2 = -1}$

$$\frac{a_0 s(s+1)}{x} + \frac{a_1 (s+1)(s+2)}{0} + \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2} (n+s+2)(n+s+3) + a_n] x^{n+1} = 0$$

$\nearrow x$ $\uparrow 0$ $\uparrow 0$

$a_0 s(s+1) = 0$

$a_0 \neq 0 \Rightarrow \boxed{s_1 = 0, s_2 = -1}$

\nearrow 1. $s = -1, a_1 \neq 0$
 2. $s = -1, a_1 = 0$
 3. $s = 0, a_1 = 0$

Caso 1) $s = -1, a_1 \neq 0$ $\boxed{a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, n \geq 0}$

3. $s=0, a_1=0$

Caso 1) $s=-1, a_1 \neq 0$ $\left\{ a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, n \geq 0 \right\}$

$s=-1 \rightarrow y(x) = \frac{1}{x} (a_0 \cos x + a_1 \sin x)$

$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m)!}, a_{2m+1} = \frac{(-1)^m a_1}{(2m+1)!}$

Caso 2) $s=-1, a_1=0 \rightarrow y(x) = \frac{1}{x} a_0 \cos x$

Caso 3) $s=0, a_1=0 \rightarrow \left\{ a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+3)}, n \geq 0 \right\}$

$a_1=a_3=\dots=0, a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}$

Caso 3) $s=0, a_1=0 \rightarrow \left\{ a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+3)}, n \geq 0 \right\}$

$a_1=a_3=\dots=0, a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}$

$y = x^0 a_0 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)$

$= \frac{a_0}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = \frac{a_0}{x} \sin x$

6.2.2. Teorema de Fuchs

Digamos que tenemos que $x^2 y'' + x f(x) y' + g(x) y = 0$
 Entonces, la ecuación indicial es: $s(s-1) + s f_0 + g_0 = 0$. Y digamos que las dos raíces son $s_1, s_2 \in \mathbb{R}, s_1 \geq s_2$
 Entonces, el teorema asegura que **Siempre** existe una solución:

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0 \neq 0$$

Para la segunda solución, tenemos tres casos:

a) Si $s_1 - s_2 \notin \mathbb{N}$, entonces la segunda solución es:

$$y_2(x) = x^{s_2} \sum b_n x^n \quad b_0 \neq 0$$

b) $s_1 = s_2$, entonces, la segunda solución es:

$$y_2(x) = x^{s_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + y_1(x) \log x$$

c) Si $s_1 - s_2 \in \mathbb{N}$, entonces, la segunda solución es:

$$x^{s/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + d \cdot y_1(x) \cdot \log(x) \quad b_0 \neq 0, d \in \mathbb{R}$$

Donde los parámetros como el d hay que calcularlos. Esto se puede ver al resolver la ecuación de CE y generalizar.

Ejemplo.

Ej 1) $y' = 2xy \rightarrow y = ce^{x^2}, C \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1}$$

$\{1, x, x^2, \dots\}$

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots = 2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + \dots$$

$x^0 \} a_1 = 0 \leftarrow$
 $x^1 \} 2a_2 = 2a_0 \Rightarrow a_2 = a_0 \in \mathbb{R}$
 $x^2 \} 3a_3 = 2a_1 \Rightarrow a_3 = 0$
 $x^3 \} 4a_4 = 2a_2 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{a_0}{2}$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2}, \quad y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) a_n x^{n-1/2}, \quad y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)(n-1/2) a_n x^{n-3/2}$$

$$\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n-1) a_n x^{n+1/2}}{x^{n^2-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_n x^{n+3/2}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+5/2} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} = 0$$

$$x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 a_n x^n + (2n+1) a_n x^{n+1} + a_n x^{n+2}) = 0$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 a_n x^n + (2n+1) a_n x^{n+1} + a_n x^{n+2}) = 0$$

$$a_0 x + a_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)^2 a_{n+2} + (2n+3) a_{n+1} + a_n] x^{n+2} = 0$$

$$\boxed{a_1 = -a_0} \quad \boxed{a_{n+2} = -\frac{(2n+3) a_{n+1}}{(n+2)^2} - \frac{a_n}{(n+2)^2}, n \geq 0}$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{3a_1}{4} - \frac{a_0}{4} = -\frac{a_0}{2} = -\frac{a_0}{2!} \\
 a_3 &= -\frac{5a_2}{9} - \frac{a_1}{9} = \frac{a_0}{9} \left(-\frac{5}{2} + 1\right) = -\frac{a_0}{6} = -\frac{a_0}{3!} \\
 a_4 &= \frac{a_0}{4!}, \dots \quad \boxed{a_n = \frac{(-1)^n a_0}{n!}} \\
 s=1/2 \quad \boxed{y_1(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{n!} x^n = a_0 \sqrt{x} e^{-x}}
 \end{aligned}$$

Ahora, por teorema de Fuchs, la segunda solución es de la forma:

$$\begin{aligned}
 y_2(x) &= x^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + y_1(x) \log x \\
 x^2 y'' + 2x y' + (x^2 + 1/4) y &= 0 \\
 y_2'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+3/2) b_n x^{n+1/2} + y_1'(x) \log x + \frac{1}{x} y_1(x) \\
 y_2''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+3/2)(n+1/2) b_n x^{n-1/2} + y_1''(x) \log x + \frac{2}{x} y_1'(x) - \frac{1}{x^2} y_1(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)(2n+1) b_n x^{n+3/2} + x^2 y_1'' \log x + 2x y_1' - y_1 \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3) b_n x^{n+5/2} + 2x^2 y_1' \log x + 2x y_1 \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+7/2} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+3/2} + (x^2 + 1/4) y_1 \log x = C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)(2n+1) b_n x^{n+3/2} + x^2 y_1'' \log x + 2x y_1' - y_1 = C \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3) b_n x^{n+5/2} + 2x^2 y_1' \log x + 2x y_1 \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+7/2} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+3/2} + (x^2 + 1/4) y_1 \log x = 0 \\
 &\quad \log x [x^2 y_1'' + 2x^2 y_1' + (x^2 + 1/4) y_1]
 \end{aligned}$$

Handwritten derivation for the Legendre equation. The top part shows the series expansion of the equation:

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)^2 b_n x^n + (2n+3)b_n x^{n+1} + b_n x^{n+2}] = 0$$

Below this, the series is rearranged to show the recurrence relation for coefficients b_n :

$$4b_0 + 3b_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+4)^2 b_{n+2} + (2n+5)b_{n+1} + b_n] x^{n+2} = 0$$

From this, the recurrence relation is derived:

$$b_{n+2} = -\frac{(2n+5)b_{n+1} + b_n}{(n+4)^2}, n \geq 0$$

Initial conditions are given as $b_0 = 0$ and $b_1 = 0$. The final solution is shown as:

$$y_2(x) = y_1(x) \log x \Rightarrow y_2(x) = a_1 \sqrt{x} e^{-x} \log x$$

6.3. Ecuación de Legendre

Es la ecuación:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

Se puede escribir distinto definiendo un operador $D = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$ y con $\lambda_l = -l(l+1)$. Entonces, la ecuación pasa a ser:

$$Dy_l = \lambda_l y_l$$

Y entonces, la solución a esta ecuación diferencial se llama una eigenfunción y el λ se el autovalor correspondiente..

Motivación: La motivación surge de intentar resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. En coordenadas esféricas, el Laplaciano de $u(r, \theta, \phi)$ toma la forma:

$$\nabla^2 u = \nabla_r^2 u + \frac{1}{r^2} \nabla_{\phi, \theta}^2 u$$

Donde:

$$\nabla_r^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$\nabla_{\theta, \phi}^2 u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Para resolver la ecuación de laplace $\nabla^2 u = 0$, proponemos una solución propuesta como $u = R(r)Y(\theta, \phi)$.

Y al sustituir nos queda:

$$r^2 Y(\theta, \phi) \nabla_r^2 R(r) + R(r) \nabla_{\theta, \phi}^2 Y(\theta, \phi) = 0$$

Entonces, al dividir y separar variables, nos queda que:

$$\frac{r^2 \nabla_r^2 R(r)}{R(r)} = -\frac{\nabla_{\theta, \phi}^2 Y(\theta, \phi)}{Y(\theta, \phi)} = k$$

Entonces, nos queda que:

$$(r^2 R')' = kr$$

$$\nabla_{\theta, \phi}^2 Y(\theta, \phi) + kY(\theta, \phi) = 0$$

Entonces, nos falta separar la segunda ecuación, para lo que proponemos que $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ y lo metemos en la segunda ecuación. Luego hacemos separación de variables y nos quedará:

$$\frac{\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right)}{\Theta(\theta)} + k \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = m^2$$

Entonces, nos quedan las dos ecuaciones:

$$\Phi''(\phi) + m^2 \Phi(\phi) = 0$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (k \sin^2 \theta - m^2) \Theta(\theta) = 0$$

Entonces, ya tenemos las ecuaciones para cada una de las coordenadas. La función $R(r)$ es $(r^2 R')' = kr$ y es una ecuación de Cauchy - Euler.

La de Φ es una ecuación de MAS y su solución es $\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$

La ecuación muy problemática es la de Θ y para resolverla usamos un cambio de variable:

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (k \sin^2 \theta - m^2) \Theta(\theta) = 0$$

$$x = \cos \theta \Rightarrow dx = -\sin \theta d\theta \Rightarrow \sin^2 = 1 - \cos^2 \theta = 1 - x^2, \quad \frac{d}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$$

$$\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} = \sin \theta \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} \Theta(x) = -\sin^2 \theta \frac{d\Theta(\theta)}{dx}$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} = -\sin^2 \theta \frac{d}{dx}$$

entonces, la ecuación qued

$$-\sin^2 \theta \frac{d}{dx} \left(\sin^2 \theta \frac{d\Theta}{dx} \right) + (k \sin^2 \theta - m^2) \Theta(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \left(k - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) \Theta = 0$$

Esta ecuación se llama la **ecuación generalizada de Legendre**. El factor de m es un extra con respecto a la ecuación que teníamos antes. La que teníamos antes sucede cuando $m = 0$ que nos queda:

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + k\Theta = 0$$

$$(1 - x^2)\Theta'' - 2x\Theta' + k\Theta = 0$$

Se recupera la ecuación de Legendre si nos restringimos a soluciones que sean convergentes en todo $[-1, 1]$. Vamos a estudiar las soluciones que sean polinómicas $a_n x^n + \dots = a_n x^n + O(x^{n-1})$. Entonces, si sustituimos esto en la ecuación de arriba, tenemos que:

$$(1 - x^2)[n(n+1)x^{n-2} + \dots] - 2x[nx^{n-1} + \dots] + k[x^n + \dots] = 0$$

Y se puede ver de aquí que $k = k_n = n(n+1)$

Por eso, la ecuación de Legendre es:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

Con esto, si llamamos a la solución $y = y_l = P_l(x)$ entonces, la solución en esféricas se recupera como $P_l(\cos \theta)$.

Y la ecuación de R queda como $(r^2 R')' = kr = l(l+1)r$ y nos queda que $R(r) = C_1 r^l + C_2 r^{1-l}$. Con esto ya podemos encontrar la solución de la ecuación de Laplace en esféricas. Claro que lo hicimos para $m = 0$, pero resulta que para otro m se puede encontrar a partir de esta solución como:

$$\Theta(\theta) = \Theta_{l,m}(x) = C_{l,m}(1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

Y entonces, la Y nos queda como:

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \Theta_{l,m}(\cos \theta)$$

Y la solución ya completa es:

$$u = R(r)Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

Eso nos da una idea de por qué es importante estudiar la ecuación de Legendre original.

6.3.1. Soluciones de la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

Vamos a buscar una solución alrededor del 0. Como $x = 0$ es un punto regular y los únicos PSR son $-1, 1$, entonces cerca de $x = 0$ podemos usar la solución en serie de potencias sin Frobenius.

Handwritten derivation for the Legendre equation using a power series method:

Assume $x=0$ is a regular point. The equation is $(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$. The singular points are $x = \pm 1$, which are regular.

Assume a power series solution $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Then $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ and $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Substitute into the equation:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Shift indices to align powers of x :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Combine terms:

$$\sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) a_n - 2n a_n + l(l+1) a_n] x^{n-2} = 0$$

Let $n \rightarrow n+2$ in the first term:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2(n+2) a_{n+2} + l(l+1) a_{n+2}] x^n = 0$$

$$\sum_{n \neq 0} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + l(l+1)a_n] x^n = 0$$

$$\frac{(-n^2 + n - 2n + l^2 + l)a_n}{l^2 - n^2 + l - n = (l+n)(l-n) + l - n = (l-n)(l+n+1)}$$

$$a_{n+2} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n \geq 0$$

$$a_{n+2} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n \geq 0$$

$$n=2m \rightarrow a_{2m} = \frac{(-1)^m l(l-2) \dots (l-2m+2)(l+1)(l+3) \dots (l+2m-1)}{(2m)!} a_0$$

$$n=2m+1 \rightarrow a_{2m+1} = \frac{(-1)^m (l-1)(l-3) \dots (l-2m+1)(l+2)(l+4) \dots (l+2m)}{(2m+1)!} a_1$$

Podemos ver que si l es un entero, alguna de las soluciones se va a cortar eventualmente. Si escribimos ahora toda la solución par y la impar, tenemos:

$$y_l = a_{l,0} \left[1 - \frac{l(l+1)}{2!} x^2 + \frac{l(l+1)(l-2)(l+3)}{4!} x^4 - \dots \right] + a_{l,1} \left[x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!} x^3 + \frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!} x^5 - \dots \right]$$

Las series convergen en cuando $\left| \frac{a_{n+2} x^{n+2}}{a_n x^n} \right| = x^2 < 1$. O sea, en $|x| < 1$.

Sin embargo, nos puede interesar la solución en $x = \pm 1$. Pero las soluciones no son necesariamente convergentes en estos puntos. Por ejemplo, si $l = 0$, la segunda solución se vuelve la serie armónica impar en $x = 1$.

Sin embargo, para l un entero, una de las soluciones se corta en un polinomio, entonces, podemos quedarnos solamente con la parte polinómica y olvidarnos de la otra parte. La parte sólo polinómica sí converge en -1 y en 1 .

Estos polinomios son los llamados **polinomios de Legendre** Entonces, por ejemplo:

$$\begin{aligned} l = 0 &\Rightarrow y_0 = a_{0,0} \\ l = 1 &\Rightarrow y_1 = a_{1,0} x \\ l = 2 &\Rightarrow y_2 = a_{2,0} (1 - 3x^2) \end{aligned}$$

Entonces, cada una de estas soluciones es un polinomio $y_l = P_l(x)$. Se pide como condición de normalización que $P_l(1) = 1$. Y con esto, nos quedan determinadas las constantes y tenemos:

$$P_0(x) = 1$$

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)
\end{aligned}$$

Se puede generalizar la expresión como:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\text{floor}(n/2)} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}$$

Al graficar se ve que las raíces son todas reales y las de P_{l+1} intercalan a las de P_l .

6.4. Propiedades de Polinomios de Legendre

Recordamos que surgen como las soluciones polinomiales de la ecuación de Legendre:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

Nos queda que $y(x) = P_l(x)$.

Con el grado de P_l igual a l y normalizada de tal forma que $P_l(1) = 1$

6.4.1. Fórmula de Rodrigues:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l]$$

Se puede mostrar que esto es verdadero al probar que cumple con la ecuación de Legendre correspondiente a l .

Pero esta expresión se puede simplificar usando reglas del producto y queda:

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k}^2 (x-1)^k (x+1)^{l-k}$$

6.4.2. Función Generadora

Si queremos una función generadora de ϕ_n , es una función $\Phi(x, h)$ que es una serie de potencias de h tal que el coeficiente de h^n es ϕ_n .

Resulta que:

$$\Phi(x, h) = (1 - 2xh + h^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) h^l \quad , |h| < 1$$

Vemos que efectivamente es la función generadora porque si ponemos $\Phi(1, h)$ se convierte en:

$$\Phi(1, h) = (1 - 2h + h^2)^{-1/2} = \frac{1}{1 - h} = 1 + h + h^2 + \dots = P_0(1) + P_1(1)h + \dots$$

Por lo que están normalizados.

Se puede probar que Φ cumple que:

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + h \frac{\partial^2}{\partial h^2} (h\Phi) = 0$$

Y si sustituimos que $\Phi(x, h) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) h^l$, nos va a quedar la ecuación de Legendre para P_l , lo que implica que sí son las soluciones.

6.4.3. Relaciones de Recurrencia:

- Recurrencia a 3 términos** $(l + 1)P_{l+1}(x) - (2l + 1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0$
- $xP'_l(x) - P'_{l-1}(x) = lP_l(x)$
- $P'_l(x) - xP'_{l-1}(x) = lP_{l-1}(x)$
- $(1 - x^2)P'_l(x) = lP_{l-1}(x) - lxP_l(x)$
- $(2l + 1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$
- $(1 - x^2)P'_{l-1}(x) = lxP_{l-1}(x) - lP_l(x)$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \Phi}{\partial h} = \frac{1}{2} (1-2xh+h^2)^{-3/2} (2h) = (x-h)(1-2xh+h^2)^{-3/2} \\
 & \int (1-2xh+h^2) \frac{\partial \Phi}{\partial h} = (x-h) \Phi \\
 & \int_{-1}^1 (1-2xh+h^2) \sum_{l=1}^{\infty} h^{l-1} P_l(x) = (x-h) \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x) \\
 & \sum_{l=1}^{\infty} h^{l+1} P_l - 2x \sum_{l=1}^{\infty} h^l P_l + \sum_{l=1}^{\infty} h^{l+1} P_l = \sum_{l=0}^{\infty} x h^l P_l - \sum_{l=0}^{\infty} h^{l+1} P_l
 \end{aligned}$$

6.4.4. Expansión del potencial eléctrico

Tenemos un vector \vec{R} y uno \vec{r} de dos partículas, la distancia entre ellos es $d = |\vec{R} - \vec{r}| = \sqrt{R^2 - 2rR \cos \theta + r^2} = R \sqrt{1 - 2 \frac{r}{R} \cos \theta + (\frac{r}{R})^2}$

Por tanto, el potencial (que es inverso a la distancia) es:

$$V = \frac{k}{R} [1 - \frac{2r}{R} \cos \theta + (\frac{r}{R})^2]^{-1/2}$$

Entonces, si definimos $h = \frac{r}{R}$ (donde $r < R$ y definimos $x = \cos \theta$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{K}{R} \Phi(\cos \theta, \frac{r}{R}) = \frac{k}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^l} P_l(\cos \theta) \\
 &= k \left[\frac{1}{R} P_0(\cos \theta) + \frac{r}{R^2} P_1(\cos \theta) + \frac{r^2}{R^3} P_2(\cos \theta) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

Esto se puede extender para varias masas también.

$$\begin{aligned}
 & V_i = K' q_i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_i^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta_i) \\
 & V = \sum V_i = K' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^n q_i r_i^l P_l(\cos \theta_i)}{R^{l+1}} \\
 & \left[V = K' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{l+1}} \iint r^l P_l(\cos \theta) \rho d\tau \right] \\
 & l=0 \rightarrow \frac{1}{R} \iint \rho d\tau = \frac{1}{R} (\text{carga total}) \\
 & l=1 \rightarrow \left[\frac{1}{R^2} \iint r \cos \theta \rho d\tau \right] \leftarrow \text{dipolo} \\
 & l=2 \rightarrow \dots \rightarrow \text{quadrupolo} \dots
 \end{aligned}$$

6.4.5. Ortogonalidad

Un espacio de funciones (ϕ_n) es ortogonal en I si $\int_I \bar{\phi}_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad n \neq m$ y $\int_I |\phi_n|^2 dx \neq 0$.

Completo Se dice que es completo si para toda f con $f \perp \phi_n \quad \forall n$, entonces $f = 0$.

Ortogonalidad de Legendre: El conjunto de polinomios de Legendre es ortogonal en el intervalo $[-1, 1]$

Dem:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{dx}((1-x^2)P_l') + l(l+1)P_l = 0 \right] P_m \\ & \left[\frac{d}{dx}((1-x^2)P_m') + m(m+1)P_m = 0 \right] P_l \\ & P_m \frac{d}{dx}((1-x^2)P_l') - P_l \frac{d}{dx}((1-x^2)P_m') + [l(l+1) - m(m+1)]P_l P_m = 0 \\ & \frac{d}{dx}[(1-x^2)(P_m P_l' - P_l P_m')] + [l(l+1) - m(m+1)]P_l P_m = 0 \\ & \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}[(1-x^2)(P_m P_l' - P_l P_m')] + [l(l+1) - m(m+1)]P_l P_m dx = 0 \\ & \left[(1-x^2)(P_m P_l' - P_l P_m') \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 [l(l+1) - m(m+1)]P_l P_m dx = 0 \\ & 0 + [l(l+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_l P_m dx = 0 \\ & l \neq m \Rightarrow \int_{-1}^1 P_l P_m dx = 0 \end{aligned}$$

Además, los polinomios de Legendre son un espacio **completo**. Por lo que todo polinomio p se puede escribir como:

$$p = \sum a_n x^n = \sum b_n P_n(x)$$

Entonces, si $\deg p < l$, tenemos que $\int_{-1}^1 p P_l(x) dx = 0$ Porque p se expande en polinomios de Legendre ortogonales a P_l .

Además, se tiene que:

$$\int_{-1}^1 P_l^2(x) dx = \frac{2}{2l+1}$$

Dem:

$$\begin{aligned} (5.8) b) & \rightarrow \int_{-1}^1 [lP_l = xP_l' - P_{l-1}'] P_l \\ & e \int_{-1}^1 P_l^2 dx = \int_{-1}^1 x P_l' P_l dx - \int_{-1}^1 P_{l-1}' P_l dx \\ & \left[x P_l^2 - P_l^2 \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x P_l P_l' dx \\ & = x P_l^2 \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_l^2 dx - \int_{-1}^1 x P_l P_l' dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x P_l^2(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_l^2(x) dx - \int_{-1}^1 x P_l P_l' dx \\
 &2I = P_l^2(1) + P_l^2(-1) - \int_{-1}^1 P_l^2(x) dx \\
 &I = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l^2(x) dx \\
 &\rightarrow 1 = \left(l + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 P_l^2(x) dx
 \end{aligned}$$

Entonces, podemos normalizar a los polinomios de Legendre multiplicando cada uno por $\sqrt{\frac{2l+1}{2}}$. Definimos los **polinomios normalizados** como:

$$p_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x)$$

Como son una base ortogonal, cualquier función $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla las condiciones de Dirichlet se puede escribir como:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)$$

Luego, podemos multiplicar ambos lados por $P_m(x)$ e integrar desde -1 hasta 1. Entonces, nos queda que:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx &= \int_{-1}^1 \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2c_m}{2m+1} \\
 \Rightarrow c_m &= \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx
 \end{aligned}$$

Generalmente, dada una función f , es difícil calcular su c_m de forma general. Lo que se hace es calcular los términos uno a uno usando la expresión de los polinomios de Legendre.

Por ejemplo, si $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$ Entonces se puede calcular con $c_m = \frac{2m+1}{2} \int_0^1 P_m(x) dx$.

Y nos queda que $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{3}{4}$, $c_2 = 0$, Y nos queda al final que:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{3}{4} P_1(x) - \frac{7}{16} P_3(x) + \frac{11}{32} P_5(x)$$

Resulta que estos coeficientes dan una muy buena aproximación de cualquier función entre $[-1, 1]$ (De hecho, dan la **mejor** aproximación polinómica de cualquier función entre $[-1, 1]$ que cumpla las condiciones de Dirichlet).

6.4.6. Ecuación de Legendre Generalizada

Recordamos que la ecuación que verdaderamente queríamos resolver era la siguiente ecuación:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$$

Nosotros llamamos $P_l(x)$ a la solución cuando $m = 0$. Pero resulta que si queremos una solución cualquiera, se puede conseguir como:

$$y = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

Dem: Suponemos que la solución a la ecuación generalizada es $y = (1-x^2)^{m/2}u$ para algún u . Y vemos que ese u es $\frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$. Primero calculamos las derivadas de y :

Handwritten derivation of the first and second derivatives of $y = (1-x^2)^{m/2}u$:

$$y = (1-x^2)^{m/2}u$$

$$y' = -mx(1-x^2)^{m/2-1}u + (1-x^2)^{m/2}u' = (1-x^2)^{m/2} \left[-\frac{mx}{1-x^2}u + u' \right]$$

$$y'' = -m(1-x^2)^{m/2-1}u + m\left(\frac{m}{2}-1\right)x^2(1-x^2)^{m/2-2}u - mx(1-x^2)^{m/2-1}u' - mx(1-x^2)^{m/2-1}u' + (1-x^2)^{m/2}u''$$

$$= (1-x^2)^{m/2} \left[\left(\frac{m(m-2)(1+x^2)}{2(1-x^2)^2} - \frac{m^2}{2(1-x^2)} \right) u - \frac{2mx}{1-x^2}u' + u'' \right]$$

Luego metemos esto en la ecuación generalizada de Legendre:

Handwritten substitution of y' and y'' into the Legendre equation:

$$(1-x^2)u'' + \left[(1-x^2) \left(-\frac{2mx}{1-x^2} \right) - 2x \right] u' + \left[(1-x^2) \left(\frac{m(m-2)(1+x^2)}{2(1-x^2)^2} - \frac{m^2}{2(1-x^2)} \right) + 2x \left(\frac{mx}{1-x^2} \right) + l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] u = 0$$

$$\rightarrow \frac{-\frac{1}{2}m(m+2) - \frac{m^2}{2} + l(l+1)}{-m(m+1)} u = 0$$

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [l(l+1) - m(m+1)]u = 0$$

Handwritten analysis of the resulting equation for u :

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [l(l+1) - m(m+1)]u = 0 \quad (*)$$

For $m=0 \rightarrow$ Ec. Legendre $\rightarrow u = P_l(x)$

For $m \neq 0$:

$$(1-x^2)(u'') - 2x(u') - 2(m+1)u' + [l(l+1) - m(m+1)]u = 0$$

Let $u \rightarrow u'$ and $m \rightarrow m+1$:

$$(1-x^2)(u')'' - 2x(m+2)(u')' + [l(l+1) - (m+1)(m+2)]u' = 0$$

For $m=0 \rightarrow u = P_l(x)$

For $m=1 \rightarrow u' = P_l'(x)$

For $m=2 \rightarrow u'' = P_l''(x)$

For $0 \leq m \leq l \rightarrow (*) \rightarrow u = \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$

Y a esta solución generalizada la denotamos por $P_l^m(x)$. ENtonces, tenemos:

$$y = P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

Que se llaman funciones de Legendre asociadas. Y son válidas siempre y cuando $|m| < l$. Se puede utilizar la fórmula de Rodriguez para expresarlas como:

$$P_l^m(x) = \frac{(1 - x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2 - 1)^l$$

Para cualquier m fijo, el sistema P_l^m es un sistema ortogonal.

6.5. Ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Forma compacta:

$$x(xy')' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Ec. de Autovalores:

Si denominamos $D = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + x^2$. Entonces:

$$Dy = \lambda_p y$$

Las soluciones se llaman funciones de Bessel.

Aplicaciones: Muchas. Más que nada en coordenadas cilíndricas.

Motivación. Surge de Resolver la ecuación de Lagrange en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Proponemos una solución $R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ y nos queda:

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Luego, igualamos ambos lados a k^2 . La parte de la Z queda como $Z(z) = e^{kz}, e^{-kz}$

Y la otra parte queda como:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + k^2 r^2 = 0$$

Igualamos ambas partes a $-n^2$. Entonces, la función de Θ ya queda resuelta como $\Theta(\theta) = \sin n\theta, \cos n\theta$.

La parte problemática es la de R . Nos queda que:

$$r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - n^2)R = 0$$

Hacemos una sustitución $x = kr \Rightarrow dx = kdr$ y nos queda:

$$x^2 R''(x) + xR'(x) + (x^2 - n^2)R(x) = 0$$

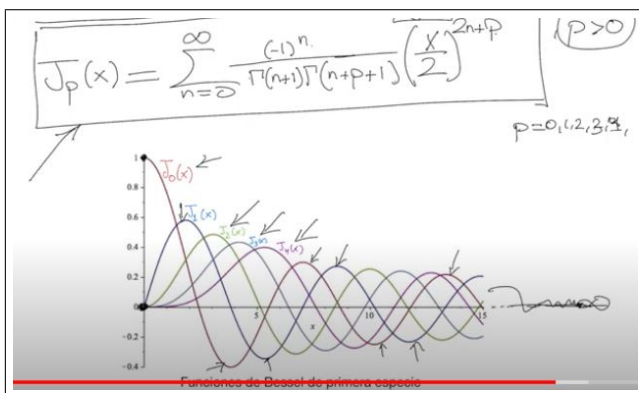
Entonces, la parte radial de la ecuación de Lagrange cilíndrica es la ecuación de Bessel.

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n (a_0 \Gamma(p+1))}{n! 2^{2n} \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+p}$$

$$y = a_0 x^p \Gamma(p+1) \left[\frac{1}{\Gamma(p+1)} - \frac{1}{\Gamma(p+2)} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{2! \Gamma(p+3)} \left(\frac{x}{2} \right)^4 + \dots \right]$$

F. de Bessel de 1ª especie, $y = J_p(x)$

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+p}$$



Funciones de Bessel de primera especie

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n-p}$$

$S = -p$

$p \in \mathbb{N}$

$$J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$$

$p \notin \mathbb{N}$

$$y = A J_p(x) + B J_{-p}(x) \text{ es sol}$$

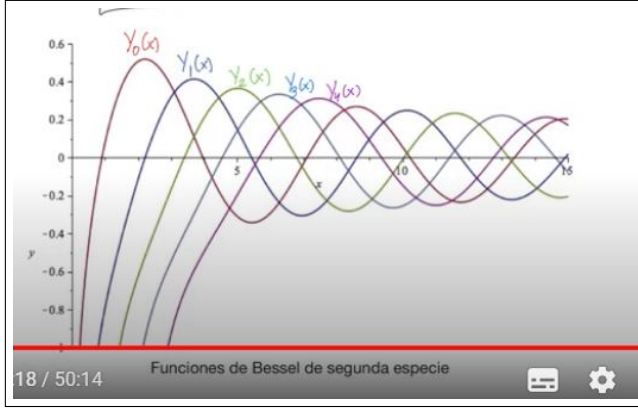
Función de Weber o Neumann

$$Y_p(x) = N_p(x) = \frac{\cos(\pi p) J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(\pi p)}$$

F. Bessel de 2ª especie $p \notin \mathbb{N}$

$x \rightarrow 0 \quad Y_p(0^+) \Rightarrow \infty$

$$y = A J_p(x) + B Y_p(x), \quad A, B \in \mathbb{C}$$



Funciones de Bessel de segunda especie

$$p = -1/2 \quad J_{-1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{x^{2n}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x$$

La ecuación de Bessel es:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Con p una constante (el orden de la función de Bessel correspondiente). Se puede escribir en su forma reducida como:

$$x(xy')' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Proponemos una solución en series como $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$, $y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)x^{n+s-1}$, $xy' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)x^{n+s}$, $(xy')' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)^2 x^{n+s-1}$, $x(xy')' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)^2 x^{n+s}$

Ahora metemos todo esto en la ecuación de Bessel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)^2 x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n x^{n+s} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)^2 x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)^2 x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow a_0 s^2 + a_1(s+1)^2 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n+s)^2 x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - p^2 a_0 - p^2 a_1 x - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow a_0(s^2 - p^2) + a_1[(s+1)^2 - p^2]x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} + a_n[(n+s)^2 - p^2])x^n = 0$$

Como $a_0 \neq 0$, entonces $s = \pm p$. Entonces, a menos que $p = -1/2$, debemos de tener que $a_1 = 0$. Obtenemos la fórmula de recurrencia: $a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2 - p^2}$.

Entonces, para el caso en que $s = p$, tenemos que $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}$.

Entonces tenemos que $a_2 = -\frac{a_0}{2^2(1+p)}$, $a_4 = \frac{a_0}{2^4 2!(1+p)(2+p)} = \frac{a_0 \Gamma(p+1)}{2^4 2! \Gamma(p+3)}$, $a_6 =$

$$\frac{a_0 \Gamma(p+1)}{3!2^6 \Gamma(p+4)}.$$

Y en general tenemos que $a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0 \Gamma(p+1)}{n!2^{2n} \Gamma(p+n+1)}$

Se escoge el a_0 de tal forma que $a_0 \Gamma(p+1) = \frac{1}{2^p}$.

Entonces, nos queda que la serie es:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^s [a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots] \\ &= a_0 x^p \Gamma(1+p) \left[\frac{1}{\Gamma(p+1)} - \frac{1}{\Gamma(p+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \Gamma(p+3)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right] \\ &= \frac{x^p}{2^p} \left[\frac{1}{\Gamma(p+1)} - \frac{1}{\Gamma(p+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \Gamma(p+3)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

Entonces, la **función de Bessel de Primera especie** se define como:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Estas funciones se suelen ver como senos o cosenos amortiguados.

Segunda Solución: Si hubiéramos tomado $s = -p$, la solución que nos queda es:

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

Sin embargo, si p es un entero, esta segunda solución no es independiente, pues se tiene que $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$.

Aunque J_{-p} es una segunda solución si p no es entero, se suele tomar una combinación de J_p y J_{-p} como segunda solución:

Función de Weber:

$$Y_p(x) = \frac{\cos(\pi p) J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(\pi p)}$$

Para p entero, es una forma indeterminada $0/0$. Sin embargo, para cualquier $x \neq 0$, tiene un límite conforme p tiende al entero, por lo que da una solución válida.

En cualquier caso, la solución completa es:

$$y = A J_p(x) + B Y_p(x)$$

Graphs: Todas las J_p con $p \neq 0$ empiezan en 0 y se parecen a x^p . Luego actúan como un seno que baja de magnitud. Excepto J_0 , que empieza en 1 y luego baja, actúa como un coseno amortiguado.

Las Y_p empiezan en $\pm\infty$ y luego también oscilan bajando de magnitud.

Los 0s de las funciones están distribuidos en intervalos irregulares. Sin embargo, conforme x crece, los 0s se empiezan a separar por π como el seno o coseno.

6.5.2. Relaciones de Recurrencia

- a) $\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x)$
- b) $\frac{d}{dx}[x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x)$
- c) $J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x)$
- d) $J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x)$
- e) $J'_p(x) = -\frac{p}{x} J_p(x) + J_{p-1}(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x)$

6.5.3. Ecuaciones Diferenciales con soluciones de Bessel

Muchas veces aparecen ecuaciones diferenciales parecidas a las de Bessel. Para resolverlas, muchas veces la solución se parece a la función de Bessel o tiene alguna relación. Por ejemplo, tenemos la ecuación:

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + \left[(bcx^{c-1})^2 + \frac{a^2 - p^2 c^2}{x^2} \right] y = 0$$

Y resulta que tiene como solución $y = x^a Z_p(bx^c)$ con Z_p una función J_p o Y_p .

Muchas ecuaciones se pueden poner de esta forma y por tanto usar estas soluciones.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación $y'' + 9xy = 0$
 Tendremos que $a = 1/2, c = 3/2, b = 2, p = 1/3$.
 Entonces tiene como soluciones $x^{1/2}[AJ_{1/3}(2x^{3/2}) + BN_{1/3}(2x^{3/2})]$

6.5.4. Otros tipos de funciones de Bessel

Como las ecuaciones de Bessel son de segundo orden, tienen dos soluciones l.i. que ya conseguimos. Sin embargo se pueden escribir varias funciones diferentes como combinaciones lineales distintas de estas soluciones (que vuelven a ser soluciones a la ecuación de Bessel correspondiente).

Por ejemplo, tenemos:

Funciones de Hankel (Funciones de Bessel del tercer tipo):

$$\begin{aligned} H_p^{(1)}(x) &= J_p(x) + iY_p(x) \\ H_p^{(2)}(x) &= J_p(x) - iY_p(x) \end{aligned}$$

Éste es un nuevo sistema de soluciones a la ecuación de Bessel para p .

Es como tenemos las soluciones $\cos x, \sin x$ de una ec. Pero luego podemos crear otras soluciones $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$.

Funciones de Bessel Hiperbólicas

Así se llaman las soluciones de:

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0$$

Las dos soluciones a esta ec. diferencial que se suelen usar son:

$$\begin{aligned} I_p(x) &= i^{-p} J_p(ix) \\ K_p(x) &= \frac{\pi}{2} i^{p+1} H_p^{(1)}(ix) \end{aligned}$$

Que son como las soluciones $\sinh(x) = -i \sin(ix)$ o bien $\cosh(x) = \cos(ix)$. Se pueden resolver usando la ecuación diferencial general con soluciones de Bessel. Y se muestra que las soluciones son $Z_p(ix)$. Sin embargo, se escriben las soluciones como antes por alguna razón.

Funciones Esféricas de Bessel:

Si $p = n + \frac{1}{2}$. Entonces $J_p(x), N_p(x)$ se llaman funciones de Bessel de un medio entero. Éstas se pueden escribir como seno o cosenos multiplicados por potencias de x . Definimos las funciones de Bessel correspondientes como:

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) = x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\sin x}{x} \right) \\ y_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x) = -x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\cos x}{x} \right) \\ h_n^{(1)} &= j_n(x) + i y_n(x) \\ h_n^{(2)} &= j_n(x) - i y_n(x) \end{aligned}$$

.

Funciones de Kelvin

Tenemos la ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{1}{x} y' - ix = 0$$

Se relaciona con la ecuación parecida a Bessel. Se llega entonces a que la solución es $Z_0(i^{3/2}x)$. Se suelen definir la parte real y la parte imaginaria como las funciones que nos interesan:

$$\begin{aligned} J_0(i^{3/2}x) &= ber(x) + ibei(x) \\ K_0(i^{1/2}x) &= Ker(x) + iKei(x) \end{aligned}$$

Funciones de Airy

La ec. diferencial de Airy es:

$$y'' - xy = 0$$

Por lo visto en ecuaciones parecidas a Bessel, la solución es $\sqrt{x}Z_{1/3}(\frac{2}{3}ix^{2/3})$.

Donde Z es alguna de las soluciones de Bessel. Luego, estas soluciones se pueden escribir en términos de $I_{1/3}, K_{1/3}$. Las funciones de Airy son entonces:

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{3}} K_{1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2})$$

$$Bi(x) = \sqrt{\frac{x}{3}} [I_{-1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2}) + I_{1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2})]$$

6.5.5. Ortogonalidad de Funciones de Bessel

En general, J_p, J_q no son ortogonales y no es lo que probaremos. Más bien haremos algo análogo a la ortogonalidad de los senos.

Para eso, veamos lo siguiente:

Seno y Coseno:

Tenemos las dos funciones \sin, \cos .

Consideramos solamente $\sin x$.

Tiene como ceros a $x = n\pi$. Por lo que cumple que cuando $x = 1$, se tiene $\sin n\pi x = 0$
 $y = \sin n\pi x$ satisface la EDO $y'' + (n\pi)^2 y = 0$

Bessel

Tenemos las dos funciones J_p, N_p para un p fijo.

Sean $x = \alpha, \beta, \dots$ los ceros de J_p . En $x = 1$ se cumple que $J_p(\alpha x) = J_p(\beta x) = \dots = 0$

La ecuación diferencial que satisface $y = J_p(\alpha x)$ es $x(xy')' + (\alpha^2 x^2 - p^2)y = 0$

Entonces, para seno tenemos que $\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx = 0$ para $n \neq m$. Y para las de Bessel tendremos que:

$$\int_0^1 x J_p(\alpha x) J_p(\beta x) dx = 0$$

Para $\alpha \neq \beta$ raíces distintas. Si las raíces son iguales, entonces el resultado es $\frac{1}{2} J_{p+1}^2(\alpha) = \frac{1}{2} J_p'^2(\alpha)$.

Entonces, las funciones $J(\alpha_n x)$ son ortogonales en $(0, 1)$ con respecto a la función de peso x .

6.5.6. Aplicación: Péndulo de Alargamiento

Tenemos un péndulo inicialmente con longitud l_0 . Pero la longitud del péndulo se va alargando según la fórmula $l = l_0 + vt$.

La ecuación diferencial del péndulo es:

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) + mgl \sin \theta = 0$$

Oscilación Pequeña: Suponemos $\sin \theta \sim \theta$. Y cambiamos el diferencial para derivar respecto a l :

$$\frac{dl}{dt} \frac{d}{dl} (ml^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{dl}) + mgl\theta = 0$$

Entonces, nos queda que:

$$\begin{aligned} v^2(2l \frac{d\theta}{dl} + l^2 \frac{d^2\theta}{dl^2}) + gl\theta &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2}{l} \dot{\theta} + \frac{g}{v^2 l} \theta &= 0 \end{aligned}$$

Esta es una ecuación diferencial de las parecidas a las de Bessel. Por lo que podemos calcular a, b, c, p y concluir que la solución es $a = -1/2, c = 1/2, b = 2\sqrt{g}/v, p = 1$. Entonces, nos queda que:

$$\theta(l) = l^{-1/2} Z_1 \left(\frac{2\sqrt{g}}{v} l^{1/2} \right)$$

Para estudiarla mejor, nos conviene poner $u = \frac{2\sqrt{g}}{v} l^{1/2}$. Y entonces, la solución general es:

$$\theta(l) = Au^{-1} J_1(u) + Bu^{-1} Y_1(u)$$

Entonces, la derivada con respecto a l es:

$$\frac{d\theta}{dl} = -Au^{-2} J_1(u) + Au^{-1} J_1'(u) - Bu^{-2} Y_1(u) + Bu^{-1} Y_1'(u)$$

Luego, por las fórmulas de recurrencia de Bessel, se puede probar que:

$$\frac{d\theta}{dl} = -Au^{-1} J_2(u) - Bu^{-1} Y_2(u)$$

Con esto podemos encontrar una solución dada ciertas condiciones iniciales.

6.6. Polinomios Ortogonales

Se define primero una **función peso** $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$. Con la exigencia de que existan los momentos $\mu_n = \int_a^b x^n \omega(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Producto Interno: Para un par de polinomios $p, q \in P$ se define:

$$\langle p, q \rangle_\omega = \int_a^b p(x)q(x)\omega(x)dx$$

Y la norma es $\|p\|_\omega^2 = \langle p, p \rangle_\omega$.

Se dice que dos polinomios son ortogonales si $\langle p, q \rangle_\omega = 0$.

Resulta que el espacio $(P, \langle \cdot, \cdot \rangle_\omega)$ es un espacio de Hilbert.

Construcción de Polinomios Ortogonales:

Para irlos construyendo, empezamos con una base $\{1, x, x^2, \dots\} = \{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ y aplicamos Gram-Schmidt. Entonces los polinomios ortonormales serán:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{f_0}{\|f_0\|_\omega} \\
p_1 &= \frac{f_1 - \langle f_1, p_0 \rangle p_0}{\|f_1 - \langle f_1, p_0 \rangle p_0\|_\omega} \\
p_n &= \frac{f_n - \sum_{i=0}^{n-1} \langle f_n, p_i \rangle_\omega p_i}{\|f_n - \sum_{i=0}^{n-1} \langle f_n, p_i \rangle_\omega p_i\|_\omega}
\end{aligned}$$

Así, estos polinomios van a cumplir $\langle p_n, p_m \rangle_\omega = \delta_{n,m}$

Con esto, ya podemos decir que todo polinomio p se puede escribir como una combinación lineal finita de los polinomios de la base ortonormal.

Relación de Recurrencia:

Toda familia de polinomios ortogonales cumple:

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_np_{n-1}(x)$$

Donde $a_{n+1} = \langle xp_n, p_{n+1} \rangle_\omega$, $b_n = \langle xp_n, p_n \rangle_\omega$.

Los ceros: Los ceros de los polinomios ortogonales se alternan.

6.6.1. Polinomios Ortogonales Clásicos

Son familias de polinomios ortogonales con una función de peso ω tales que cumplen lo siguiente:

- p_n satisfacen la EDO:

$$a_2(x)p_n'' + a_1(x)p_n' + \lambda_n p_n = 0$$

Donde a_2 es un pol de grado 2 y a_1 es de grado 1.

- Tienen una **fórmula de Rodrigues**:

$$p_n(x) = \frac{1}{k_n \omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega(x) a_2(x)^n]$$

Donde ω es el peso sobre el que los polinomios son ortogonales.

- p_n' son un sistema ortogonal también

Construir los Polinomios con Rodrigues

Empezamos con $n = 1$ y tenemos que:

$$k_1 p_1 = \frac{1}{\omega(x)} (\omega'(x) a_2(x) + \omega(x) a_2'(x)) = \frac{\omega'}{\omega} a_2 + a_2' = \frac{1}{\omega} (\omega a_2)'$$

Como p_1 debe de ser un polinomio de grado 1, entonces el último elemento, que llamamos τ debe de ser un polinomio de grado 1. Entonces, para que el peso ω sea clástico, debe de cumplirse que existe un polinomio τ de grado 1 tal que:

$$(\omega a_2)' = \tau \omega$$

Que se llama **ecuación de Pearson**.

Entonces, la clasificación de las familias dependerá de cómo sea el polinomio a_2 . Los casos son:

- $a_2 = (1-x)(x+1) = 1-x^2$. Es decir, los ceros de a_2 son los extremos del intervalo de ortogonalidad $[-1, 1]$

Entonces, la ecuación de Pearson nos dice que la función de peso debe de cumplir que:

$$(\omega(1-x^2))' = (\tau_0 + \tau_1 x)\omega$$

Al resolver, nos queda que $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{(\tau_1 + 2)x + \tau_0}{(1-x)(1+x)} = -\frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$.

Con α, β constantes que dependen de τ y son 'libres'. Al resolver nos queda que:

$$\omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

Que se llama el **Peso de Jacobi**. Como este peso cumple con la ecuación de Pearson, podemos usar la fórmula de Rodrigues para crear los **polinomios de Jacobi**:

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]$$

Entonces, por ejemplo:

- Para $\alpha = 0 = \beta$, nos queda el peso $\omega(x) = 1$ y quedan los polinomios de Legendre
 - Para $\alpha = \beta = -1/2$ nos queda $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Los polinomios que resultan se llama T_n **Polinomios de Chebyshev de primera especie**
 - $\alpha = \beta = 1/2$ Nos quedan los polinomios de Chebyshev de segunda especie.
- $a_2 = x, \quad x \in (0, \infty)$

Entonces ahora la ecuación de Pearson es $(\omega x)' = (\tau_0 + \tau_1 x)\omega$. Al resolver esta ecuación nos queda que:

$$\omega(x) = x^\alpha e^{\beta x}$$

Que ω sea integrable en $(0, \infty)$ nos obliga a que $\alpha > -1$ y generalmente se pide que $\beta = -1$. Entonces tenemos el **Peso de Laguerre**:

$$\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$$

Y con ello conseguimos los polinomios de Laguerre generalizados con la fórmula de Rodrigues:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{\alpha+n}]$$

Si tomamos $\alpha = 0$ nos quedan los polinomios de Laguerre típicos.

- $a_2 = 1$ en $(-\infty, \infty)$

Entonces, al resolver la ecuación de Pearson, nos queda que $(\omega)' = (\tau_1 x + \tau_0)\omega$. Al resolver y tomar el caso $\tau_0 = 0, \tau_1 = -2$ nos queda:

$$\omega(x) = e^{-x^2}$$

Entonces con la fórmula de Rodrigues nos quedan los polinomios de Hermite:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$$

Y como dijimos al principio, cada una de estas familias resuelve una ecuación diferencial asociada. Por ejemplo:

- **Hermite:** Cumplen la ecuación:

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$$

Cumplen que $2xH_n = H_{n+1} + 2nH_{n-1}$.

La fórmula generadora es:

$$\Phi(x, h) = e^{2xh - h^2}$$

Y tienen norma $\|H_n\|_{e^{-x^2}}^2 = \sqrt{\pi} 2^n n!$

- **Laguerre:** Satisfacen la ec. diferencial:

$$x(L_n^\alpha)'' + (\alpha + 1 - x)(L_n^\alpha)' + nL_n^\alpha = 0$$

Tienen la recurrencia:

$$xL_n^\alpha = (n+1)L_{n+1}^\alpha - (2n+\alpha+1)L_n^\alpha + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha$$

Y la generadora:

$$\Phi(x, h) = \frac{e^{-xh/(1-h)}}{1-h}$$

Tienen norma pesada con peso $x^\alpha e^{-x}$ dada por $\|L_n^\alpha\| = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)}$

- **Polinomios de Jacobi:** La ecuación que satisfacen es:

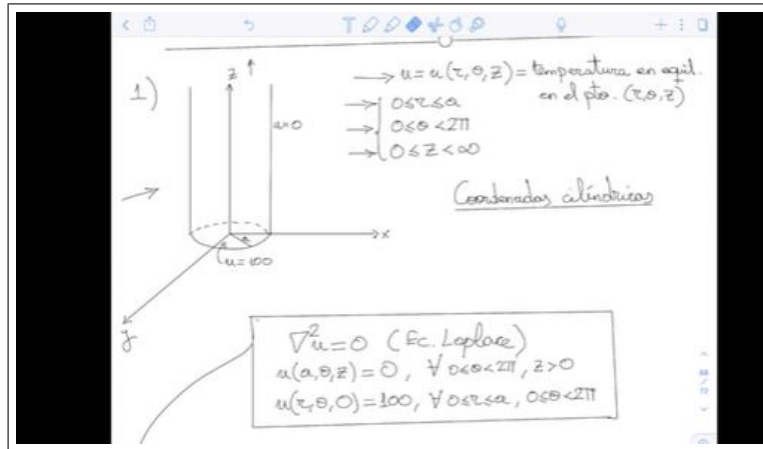
$$(1 - x^2)(P_n^{\alpha, \beta})'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)(P_n^{\alpha, \beta})' + n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{\alpha, \beta} = 0$$

Se tiene por ejemplo los de Chebyshev.

7. Soluciones de EDP

7.1. Temperatura de Equilibrio de un cilindro

Tenemos un cilindro semiinfinito. Y queremos encontrar una temperatura $u(r, \theta, z)$



La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas queda como:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Al hacer la separación de variables $u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ nos quedan las siguientes ecuaciones:

- **Ecuación altura:**

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 Z$$

Y nos quedamos con la solución que tiende a 0:

$$Z(z) = e^{-kz}$$

Con $k > 0$

■ **Ecuación angular:**

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -n^2\Theta$$

Con soluciones:

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases}$$

Como tiene que ser de periodo 2π , entonces $n \in \mathbb{N}$

■ **Ecuación Radial**

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - n^2) R = 0$$

que es la **ecuación de Bessel** (por eso se llaman armónicos esféricos).

Entonces $R(r) = J_n(kZ)$.

No consideramos la segunda solución porque tiene una asíntota en 0 (lo que no tiene sentido físico).

Condiciones de Frontera

Debemos de tener que $u = J_n(ka)(\sin n\theta \text{ o } \cos n\theta)e^{-kz}$ vale 0 en $r = a$ para todo θ y todo z . Entonces, debemos de tener que $ka = \kappa$ con κ un cero de la función de Bessel.

Por tanto, la solución general es:

$$u = J_n\left(\frac{\kappa r}{a}\right) e^{-\kappa z/a} (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta)$$

Con κ un cero de J_n .

La segunda condición nos dice que $u = 100$ en $z = 0$. Como esta condición no depende del ángulo (y en general el problema no depende del ángulo), podemos poner $n = 0$ y tenemos que las soluciones son:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{\kappa_m r}{a}\right) e^{-\kappa_m z/a}$$

Con κ_m los ceros de J_0 .

Poniendo la condición inicial, debemos de tener que:

$$100 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{\kappa_m r}{a}\right)$$

Para calcular los c_m usamos la ortogonalidad de las funciones de Bessel con índice fijo. Para ello, multiplicamos ambos lados por $J_0(\kappa_\mu z/a)$ y por r e integramos ambos lados entre 0 y a .

El lado derecho queda como:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} c_m r J_0\left(\frac{\kappa_m r}{a}\right) J_0\left(\frac{\kappa_\mu r}{a}\right) \\ &= c_\mu \int_0^a r [J_0(\kappa_\mu r/a)]^2 dr \quad \text{por ortogonalidad} \\ &= c_\mu \frac{a^2}{2} J_1(\kappa_\mu) \quad \text{por alguna propiedad} \end{aligned}$$

Mientras que el lado izquierdo es:

$$\begin{aligned} & \int_0^a 100r J_0\left(\frac{\kappa_\mu r}{a}\right) dr \\ &= 100c_m \frac{a^2}{\kappa_m} J_1(\kappa_m) \end{aligned}$$

Usando la fórmula de recurrencia $\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x)$ con un cambio de variable $x = \kappa_\mu r/a$.

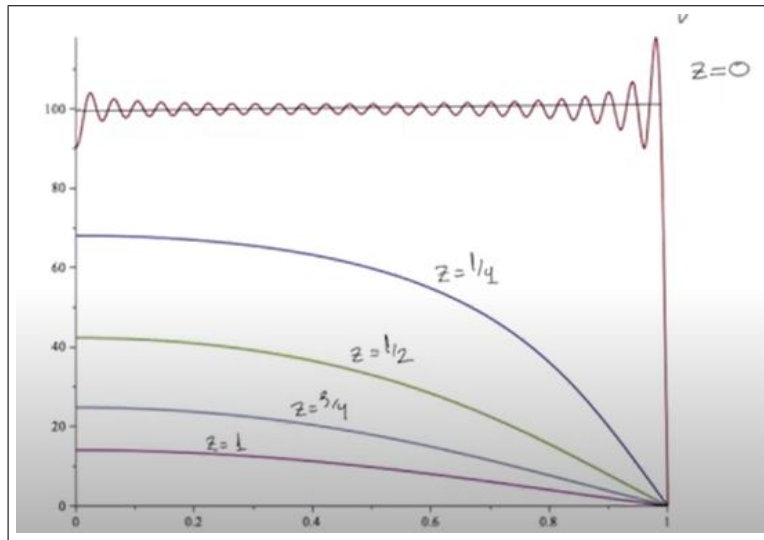
Que nos lleva a $\int_0^a J_0\left(\frac{\kappa_\mu r}{a}\right) dr = \frac{a}{\kappa_\mu} r J_1\left(\frac{\kappa_\mu r}{a}\right) \Big|_0^a = \frac{a^2}{\kappa_\mu} J_1(\kappa_\mu)$.

Al igualar estas dos expresiones, nos queda que:

$$c_m = \frac{200}{k_m J_1(k_m)}$$

Y por tanto, la solución es:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{200}{k_m J_1(k_m)} J_0\left(\frac{k_m r}{a}\right) e^{-k_m z/a}$$



Estas gráficas son de vv sr para $a = 1$ y para diferentes valores de r

7.1.1. Caso General

:

Digamos ahora que la base tiene la función $u = f(r, \theta)$ en $z = 0$.

Entonces, no podemos tener que $n = 0$ como antes. Y por tanto, la n también va variando.

Y la solución general es:

$$u(r, \theta, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{k_{m,n} r}{a} \right) e^{-k_{m,n} z/a} [A_{m,n} \cos n\theta + B_{m,n} \sin n\theta]$$

Entonces, la condición de que $u = f$ en $z = 0$ nos deja que:

$$f(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{k_{m,n} r}{a} \right) [A_{m,n} \cos n\theta + B_{m,n} \sin n\theta]$$

Luego, lo que hacemos es aplicar $\int_0^a r dr \int_0^{2\pi} J_\nu(k_{\mu,\nu} r/a) \cos(\nu\theta) d\theta$ de ambos lados. Nos queda usando ortogonalidad de trigonométricas y de Bessel

$$\begin{aligned} \int_0^a dr \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_\nu \left(\frac{k_{\mu,\nu} r}{a} \right) \cos(\nu\theta) r &= A_{\mu,\nu} \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\theta J_\nu^2 \left(\frac{k_{\mu,\nu} r}{a} \right) \cos^2(\nu\theta) r \\ \Rightarrow A_{m,n} &= \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(k_{m,n}) \pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_n \left(\frac{k_{m,n} r}{a} \right) \cos(n\theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

Para $B_{m,n}$ aplicamos $\int_0^a r dr \int_0^{2\pi} J_\nu(k_{\mu,\nu} r/a) \sin(\nu\theta) d\theta$ de ambos lados y usamos ortogonalidad. Llegamos al final a que:

$$B_{m,n} = \frac{2}{\pi a^2 J_{n+1}^2(k_{m,n})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_n \left(\frac{k_{m,n} r}{a} \right) \sin(n\theta) r dr d\theta$$

Con $k_{n,m}$ el m-ésimo cero de J_n .

Y ya nos queda la solución general.