Ecuaciones diferenciales I : Tarea 4 Sorpresa

Tomás Ricardo Basile Álvarez

1. Probar que el cambio de variable $z = ax + by + c$ transforma la ecuación,
$$y' = f(ax+by+c)$$
en una ecuación separable, y aplicar este método para resolver la ecuación,
$$y' = (x+y)^2$$

hacemos el cambio de variable $z = ax+by+c$, derivamos todo con respecto a x:

$$\frac{dz}{dx} = a\frac{dx}{dx} + b\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dz}{dx} = a(1) + b\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$$

con este resultado, ya sustituimos todo en la ecuación original

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \rightarrow \frac{dz}{dx} - a = b\,f(z) \rightarrow \frac{dz}{dx} = b\,f(z) + a$$

Lo cual claramente es una ecuación separable, es más, sólo aparecen términos que dependen de la variable dependiente z.

• Resolver: $y' = (x+y)^2 \quad \dots (1)$

hacemos la sustitución $z = x+y$

Derivamos con respecto a x $\rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

y sustituimos todo en (1):

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z^2 \rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2+1 \rightarrow \frac{1}{z^2+1}\frac{dz}{dx} = 1$$

$$\longrightarrow \int \frac{1}{z^2+1}\frac{dz}{dx}\,dx = \int 1\,dx$$

$$\xrightarrow{T.C.V.} \int \frac{1}{z^2+1}\,dz = \int dx \longrightarrow \arctan(z) = x + C$$

$$\rightarrow z = \tan(x+c)$$

Ahora deshacemos la sustitución: $x+y = \tan(x+c) \rightarrow y(x) = \tan(x+c) - x$

• Comprobación: comprobaré que $y(x) = \tan(x+c) - x$ es solución de $y' = (x+y)^2$

$y(x) = \tan(x+c) - x \rightarrow y'(x) = \sec^2(x+c) - 1$

identidad pitagórica

Por otro lado: $(x+y)^2 = (x + \tan(x+c) - x)^2 = \tan^2(x+c) = \sec^2(x+c) - 1$

$\therefore \quad y' = (x+y)^2$ ✓

2. Use el cambio de variable de la tarea 2 para encontrar una solución general a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+4y+2}$$

Como en la tarea 2, hacemos $x = z-h$, $y = w-K$ (ahora vemos quién conviene que sean h y K)

Sustituimos en la ecuación:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(z-h)+(w-K)-1}{(z-h)+4(w-K)+2} = \frac{z+w-h-K-1}{z+4w-h-4K+2}$$

me conviene un h y K tales que $\begin{array}{l} -h-K-1=0 \\ -h-4K+2=0 \end{array}$

$\rightarrow$ Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\begin{array}{l} h+K=-1 \\ h+4K=2 \end{array} \longrightarrow 3K=3 \rightarrow K=1,\ h=-2$

Entonces, con la sustitución $x = z+2$ $y = w-1$, la ecuación diferencial pasa a ser:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{z+2+w-1-1}{z+2+4(w-1)+2} = \frac{z+w}{z+4w}$$

$\rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{z+w}{z+4w}$ que es homogénea de grado 1, entonces la podemos resolver con el cambio de variable $v = \frac{w}{z} \rightarrow w = zv \rightarrow \frac{dw}{dz} = v + z\frac{dv}{dz}$

Sustituimos:

$$\Rightarrow v + z\frac{dv}{dz} = \frac{z+zv}{z+4zv}$$

$$\rightarrow v + z\frac{dv}{dz} = \frac{1+v}{1+4v} \rightarrow z\frac{dv}{dz} = \frac{1+v}{1+4v} - v \rightarrow z\frac{dv}{dz} = \frac{-4v^2+1}{1+4v}$$. que ya es separable

$$\rightarrow \frac{1+4v}{1-4v^2}\frac{dv}{dz} = \frac{1}{z} \longrightarrow \int \frac{1+4v}{1-4v^2}\frac{dv}{dz}dz = \int \frac{1}{z}dz \xrightarrow{TCV} \underline{\int \frac{1+4v}{1-4v^2}dv = \int \frac{1}{z}dz} \quad \ldots (1)$$

Pero: $\int \frac{1+4v}{1-4v^2}dv = \int \frac{1+4v}{(1-2v)(1+2v)}dv$ Fracciones parciales: $\frac{1+4v}{1-4v^2} = \frac{A}{1-2v} + \frac{B}{1+2v} = \frac{(A+B)+(2A-2B)v}{1-4v^2}$

$\rightarrow \begin{array}{l} A+B=1 \\ 2A-2B=4 \end{array} \rightarrow A = \frac{3}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{1-2v}dv - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2v}dv = -\frac{3}{4}\ln|1-2v| - \frac{1}{4}\ln|1+2v| + C_1$$

Entonces, sustituimos en (1) $\rightarrow -\frac{3}{4}\ln|1-2v| - \frac{1}{4}\ln|1+2v| + C_1 = \ln|z| + C_2$

$$\rightarrow \ln\left|(1-2v)^3(1+2v)\right| + C_1 = -4\ln|z| - 4C_2$$

exponenciamos: $\rightarrow (1-2v)^3(1+2v) = C_3 z^{-4}$

Deshacemos la sustitución $v = \frac{w}{z}$ $\rightarrow \left(1-\frac{2w}{z}\right)^3\left(1+\frac{2w}{z}\right) = C_3 z^{-4}$

Deshacemos las sustituciones $x = z+2$, $y = w-1$

$$\rightarrow \left(1-\frac{2(y+1)}{x-2}\right)^3\left(1+\frac{2(y+1)}{x-2}\right) = \frac{C_3}{(x-2)^4}$$

$$\rightarrow \left(\frac{x-2-2(y+1)}{x-2}\right)^3\left(\frac{x-2+2y+2}{x-2}\right) = \frac{C_3}{(x-2)^4}$$

$$\rightarrow \underline{(x-2y-4)^3(x+2y) = C_3}$$

3. a) Dada la ecuación $\frac{dy}{dx} = f_a(y) = y(a-y)$, $a \in \mathbb{R}$.
encuentre todos los valores a tales que los puntos fijos (valores (x^*, y^*) tales que $f_a(y^*) = 0$) cambien de estabilidad, i.e. $f_a'(y^*)$ cambia de signo.

Valores para los que $f_a(y^*) = 0$

$$\rightarrow \quad y^*(a - y^*) = 0 \quad \begin{cases} y_1^* = 0 \\ a - y_2^* = 0 \rightarrow y_2^* = a \end{cases}$$

Es decir, los puntos fijos son $(x^*, 0)$; (x^*, a) para cualquier x^*

Puntos de bifurcación: $f_a(y) = y(a-y) = ay - y^2$

$$\rightarrow \quad f_a'(y) = a - 2y$$

- Para el primer punto fijo $(y=0)$: $f_a'(0) = a$ que cambia de signo cuando $a = 0$
- Para el segundo punto fijo $(y=a)$: $f_a'(a) = a - 2a = -a$ que cambia de signo cuando $a = 0$

$\therefore \underline{a = 0}$ es el punto de bifurcación, ya que cuando $a=0$, $f_a'(y^*)$ cambia de signo para los puntos fijos.

b) Encuentre la solución general de (1) y haga un dibujo de las soluciones para los valores de a.
$(a < a_c,\ a = a_c,\ a > a_c)$

$$\frac{dy}{dx} = y(a-y) \rightarrow \frac{1}{y(a-y)}\frac{dy}{dx} = 1 \rightarrow \int \frac{1}{y(a-y)}\frac{dy}{dx}dx = \int 1\,dx \xrightarrow{TCV} \int \frac{1}{y(a-y)}dy = \int dx \quad \dots (1)$$

Pero $\displaystyle\int \frac{1}{y(a-y)}dy \overset{\text{si } a\neq 0}{=} \int \frac{\frac{1}{a}}{y} + \frac{\frac{1}{a}}{a-y}\,dy = \frac{1}{a}\left(\ln|y| - \ln|a-y|\right) + C_1 = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{y}{a-y}\right| + C_1$

Entonces (1) pasa a ser: $\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y}{a-y}\right| = x + C_1 \rightarrow \frac{y}{a-y} = C_2 e^{ax} \rightarrow y = C_2 e^{ax}(a-y)$

$$\rightarrow y(1 + C_2 e^{ax}) = aCe^{ax} \quad \rightarrow \quad y = \frac{aC_2 e^{ax}}{1 + C_2 e^{ax}} \quad \dots (1)$$

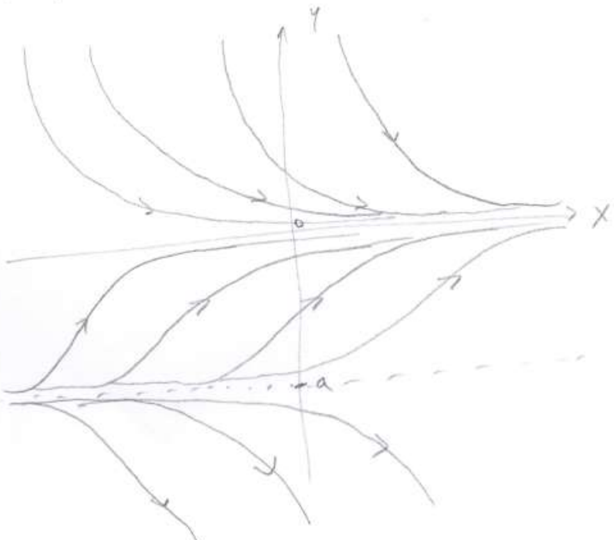
Dibujos: Caso 1: $a < 0$

Los puntos de equilibrio son: $y_1 = 0$, $y_2 = a$

$y_1 = 0$ es un equilibrio estable, pues $f_a'(y_1) = a - 2y_1 = \underline{a < 0}$

$y_2 = a$ es un equilibrio inestable, pues $f_a'(y_2) = a - 2y_2 = \underline{-a > 0}$

Entonces, las soluciones se ven algo así:



Caso 2: $a = 0$

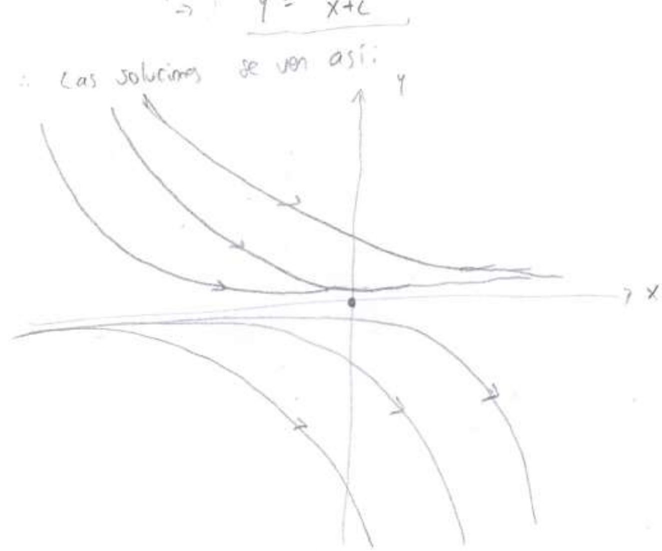
En este caso, la solución (1) no sirve, ya que usamos $a \neq 0$ para resolverla, entonces resolvemos este caso aparte:

$$\frac{dy}{dx} = y(0-y) \rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -1$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{y^2}dy = -\int dx \rightarrow -y^{-1} = -x + C$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{x+C}$$

$\therefore$ Las soluciones se ven así:



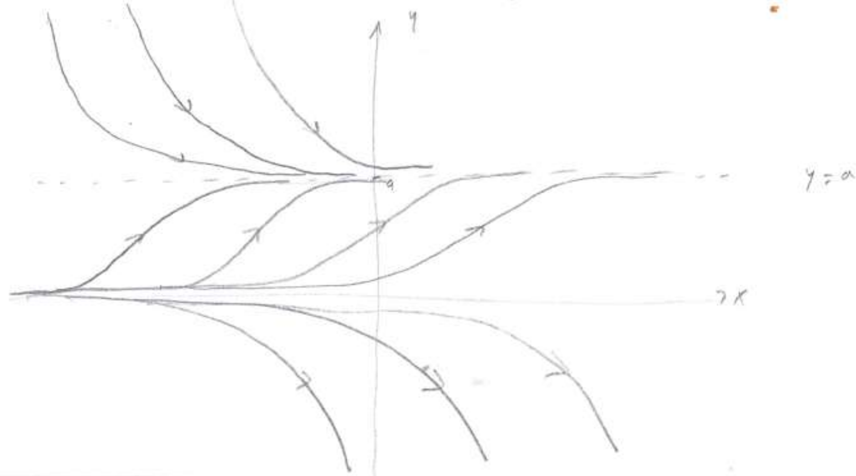
caso c) : $a > 0$

Los puntos de equilibrio son $y_1 = 0$, $y_2 = a$

$y_1 = 0$ es inestable, pues $f'(y_1) = a - 2y_1 = a > 0$

$y_2 = a$ es estable, pues $f'(y_2) = a - 2y_2 = -a < 0$

Entonces las soluciones se ven algo así:



1. Hallar las trayectorias ortogonales a $x^2 + cy^2 = 1$ $(c>0)$

Derivamos: $\rightarrow 2x + 2cyy' = 0 \rightarrow x + cyy' = 0 \rightarrow c = -\dfrac{x}{yy'}$

Sustituimos en la ecuación original: $x^2 - \dfrac{x}{yy'}y^2 = 1 \rightarrow x^2 - \dfrac{xy}{y'} = 1 \rightarrow x^2 - 1 = \dfrac{xy}{y'}$

$\rightarrow y' = \dfrac{xy}{x^2-1}$, Esta ecuación dif describe a las elipses.

$\therefore$ las trayectorias ortogonales cumplen: $\tilde{y}' = -\dfrac{x^2-1}{x\tilde{y}} \rightarrow \dfrac{d\tilde{y}}{dx} = \dfrac{1-x^2}{x\tilde{y}}$

$\rightarrow \tilde{y}\dfrac{d\tilde{y}}{dx} = \dfrac{1-x^2}{x} \rightarrow \int \tilde{y}\dfrac{d\tilde{y}}{dx} = \int \dfrac{1-x^2}{x}dx \xrightarrow{TCV} \int \tilde{y}\, d\tilde{y} = \int \frac{1}{x} - x \, dx$

$\rightarrow \frac{1}{2}\tilde{y}^2 = \ln|x| - \dfrac{x^2}{2} + C$

$\therefore$ Las trayectorias ortogonales son: $\tilde{y}^2 + x^2 = 2\ln|x| + C$ #