Álgebra Moderna Tarea 5.1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

6 de enero de 2021

a) **Has una lista de todas las series normales de $\mathbb{Z}_{105}$ y sus respectivos factores. De esta lista señala cuales series son de composición**

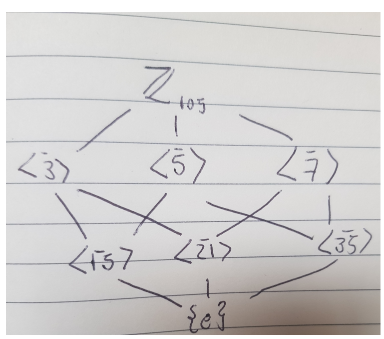
Primero necesitamos dibujar el diagrama de Hasse de $\mathbb{Z}_{105}$. Para lo que necesitamos conocer todos los subgrupos de Z_{105}
Por la teoría que vimos sobre grupos cíclicos, los subgrupos de $\mathbb{Z}_{105}$ son los generados por los factores de 105.

Tenemos que $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Por lo que los factores de 105 son $1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105$.

Con esto, los subgrupos de $\mathbb{Z}_{105}$ son:

$$\mathbb{Z}_{105} \ , \ \langle \bar{3} \rangle \ , \ \langle \bar{5} \rangle \ , \ \langle \bar{7} \rangle \ , \ \langle \bar{15} \rangle \ , \ \langle \bar{21} \rangle \ , \ \langle \bar{35} \rangle \ , \ \{e\}$$

Considerando que $\langle \bar{p} \rangle \leq \langle \bar{s} \rangle$ sii $s \mid p$, podemos construir el diagrama de Hasse como sigue:



Como $\mathbb{Z}_{105}$ es abeliano, todos los subgrupos son normales. Entones no tenemos que preocuparnos por normalidad.
Luego, podemos enlistar todas las series siguiendo los caminos que se ven en el diagrama de Hasse (y todas son series normales porque como dijimos, todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_{105}$ son normales)

Para calcular los factores, tomaremos en cuenta que todos los grupos aquí son cíclicos, por lo que los cocientes también son cíclicos y por tanto estos cocientes serán siempre isomorfos a grupos de la forma $\mathbb{Z}_n$ dependiendo del número de elementos del cociente.

Para determinar si estos cocientes son simples, tomamos en cuenta que son cíclicos y un grupo cíclico es simple si y sólo si es de orden primo (porque así sólo tiene los subgrupos triviales, y si no es de orden primo, tendrá algún subgrupo no trivial y éste será normal porque los grupos cíclicos son abelianos).

- $\{e\} \subset \mathbb{Z}_{105}$
  Y los factores son:
  - $\mathbb{Z}_{105}/\{e\} \simeq \mathbb{Z}_{105}$ que **no es simple** porque tiene muchos subgrupos normales no triviales.

  Por lo que es una serie normal pero no de composición

- $\{e\} \subset \langle \bar{15} \rangle \subset \mathbb{Z}_{105}$
  y los factores son:
  - $\langle \bar{15} \rangle/\{e\} \simeq \langle \bar{15} \rangle \simeq \mathbb{Z}_7$ que es **simple** porque es de orden primo
  - $\mathbb{Z}_{105}/\langle \bar{15} \rangle \simeq \mathbb{Z}_{15}$ (porque $\mathbb{Z}_{105}$ tiene 105 elementos y $\langle \bar{15} \rangle$ tiene 7 y entonces $\mathbb{Z}_{105}/\langle \bar{15} \rangle$ tiene $105/7 = 15$ elementos). **No es simple** porque no es de orden primo

  Por lo que es una serie normal pero no de composición.

- $\{e\} \subset \langle \bar{21} \rangle \subset \mathbb{Z}_{105}$
  y los factores son:
  - $\langle \bar{21} \rangle/\{e\} \simeq \langle \bar{21} \rangle \simeq \mathbb{Z}_5$ que **es simple** pues es de orden primo.
  - $\mathbb{Z}_{105}/\langle \bar{21} \rangle \simeq \mathbb{Z}_{21}$ (porque $\mathbb{Z}_{105}$ tiene 105 elementos y $\langle \bar{21} \rangle$ tiene 5 y entonces $\mathbb{Z}_{105}/\langle \bar{21} \rangle$ tiene $105/5 = 21$ elementos).**No es simple** porque no es de orden primo.

  Por lo que es una serie normal pero no de composición.

- $\{e\} \subset \langle \bar{35} \rangle \subset \mathbb{Z}_{105}$
  y los factores son:
  - $\langle \bar{35} \rangle/\{e\} \simeq \langle \bar{35} \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$ que **es simple** pues es de orden primo
  - $\mathbb{Z}_{105}/\langle \bar{35} \rangle \simeq \mathbb{Z}_{35}$ (porque $\mathbb{Z}_{105}$ tiene 105 elementos y $\langle \bar{35} \rangle$ tiene 3 y entonces $\mathbb{Z}_{105}/\langle \bar{35} \rangle$ tiene $105/3 = 35$ elementos). **no es simple** porque no es de orden primo

  Por lo que es una serie normal pero no de composición.

- $\{e\} \subset \langle\bar{3}\rangle \subset \mathbb{Z}_{105}$
  y los factores son:
  - $\langle\bar{3}\rangle/\{e\} \simeq \langle\bar{3}\rangle \simeq \mathbb{Z}_{35}$ que **no es simple** pues no es de orden primo
  - $\mathbb{Z}_{105}/\langle\bar{3}\rangle \simeq \mathbb{Z}_3$ (porque $\mathbb{Z}_{105}$ tiene 105 elementos y $\langle\bar{3}\rangle$ tiene 35 y entonces $\mathbb{Z}_{105}/\langle\bar{3}\rangle$ tiene $105/35 = 3$ elementos). **Es simple** por ser de orden primo

  Por lo que es una serie normal pero no de composición

- $\{e\} \subset \langle\bar{5}\rangle \subset \mathbb{Z}_{105}$
  y los factores son:
  - $\langle\bar{5}\rangle/\{e\} \simeq \langle\bar{5}\rangle \simeq \mathbb{Z}_{21}$ que **no es simple** pues no es de orden primo
  - $\mathbb{Z}_{105}/\langle\bar{5}\rangle \simeq \mathbb{Z}_5$ (porque $\mathbb{Z}_{105}$ tiene 105 elementos y $\langle\bar{5}\rangle$ tiene 21 y entonces $\mathbb{Z}_{105}/\langle\bar{5}\rangle$ tiene $105/21 = 5$ elementos). **Es simple** por ser de orden primo

  Por lo que es una serie normal pero no de composición

- $\{e\} \subset \langle\bar{7}\rangle \subset \mathbb{Z}_{105}$
  y los factores son:
  - $\langle\bar{7}\rangle/\{e\} \simeq \langle\bar{7}\rangle \simeq \mathbb{Z}_{15}$ que **no es simple** pues no es de orden primo
  - $\mathbb{Z}_{105}/\langle\bar{7}\rangle \simeq \mathbb{Z}_7$ (porque $\mathbb{Z}_{105}$ tiene 105 elementos y $\langle\bar{7}\rangle$ tiene 15 y entonces $\mathbb{Z}_{105}/\langle\bar{7}\rangle$ tiene $105/15 = 7$ elementos). **Es simple** por ser de orden primo

  Por lo que es una serie normal pero no de composición

- $\{e\} \subset \langle\bar{15}\rangle \subset \langle\bar{3}\rangle \subset \mathbb{Z}_{105}$
  Y los factores son:
  - $\langle\bar{15}\rangle/\{e\} \simeq \langle\bar{15}\rangle \simeq \mathbb{Z}_7$ que **es simple** por ser de orden primo.
  - $\langle\bar{3}\rangle/\langle\bar{15}\rangle \simeq \mathbb{Z}_5$ (porque $\langle\bar{3}\rangle$ tiene 35 elementos y $\langle\bar{15}\rangle$ tiene 7, por lo que $\langle\bar{3}\rangle/\langle\bar{15}\rangle$ tiene $35/7 = 5$ elementos). **Es simple** por ser de orden primo
  - $\mathbb{Z}_{105}/\langle\bar{3}\rangle \simeq \mathbb{Z}_3$ que **es simple**

  Por tanto, esta sí es una **serie de composición**

- $\{e\} \subset \langle\bar{15}\rangle \subset \langle\bar{5}\rangle \subset \mathbb{Z}_{105}$
  Y los factores son:
  - $\langle\bar{15}\rangle/\{e\} \simeq \langle\bar{15}\rangle \simeq \mathbb{Z}_7$ que **es simple** por ser de orden primo.
  - $\langle\bar{5}\rangle/\langle\bar{15}\rangle \simeq \mathbb{Z}_3$ (porque $\langle\bar{5}\rangle$ tiene 21 elementos y $\langle\bar{15}\rangle$ tiene 7, por lo que $\langle\bar{5}\rangle/\langle\bar{15}\rangle$ tiene $21/7 = 3$ elementos). **Es simple** por ser de orden primo
  - $\mathbb{Z}_{105}/\langle\bar{5}\rangle \simeq \mathbb{Z}_5$ que **es simple**

  Por tanto, esta sí es una **serie de composición**

- $\{e\} \subset \langle\bar{21}\rangle \subset \langle\bar{3}\rangle \subset \mathbb{Z}_{105}$
  Y los factores son:

- $\langle \bar{21} \rangle / \{e\} \simeq \langle \bar{21} \rangle \simeq \mathbb{Z}_5$ que **es simple** por ser de orden primo.
- $\langle \bar{3} \rangle / \langle \bar{21} \rangle \simeq \mathbb{Z}_7$ (porque $\langle \bar{3} \rangle$ tiene 35 elementos y $\langle \bar{21} \rangle$ tiene 5, por lo que $\langle \bar{3} \rangle / \langle \bar{21} \rangle$ tiene $35/5 = 7$ elementos). **Es simple** por ser de orden primo
- $\mathbb{Z}_{105} / \langle \bar{3} \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$ que **es simple**

Por tanto, esta sí es una **serie de composición**

- $\{e\} \subset \langle \bar{21} \rangle \subset \langle \bar{7} \rangle \subset \mathbb{Z}_{105}$
  Y los factores son:
  - $\langle \bar{21} \rangle / \{e\} \simeq \langle \bar{21} \rangle \simeq \mathbb{Z}_5$ que **es simple** por ser de orden primo.
  - $\langle \bar{7} \rangle / \langle \bar{21} \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$ (porque $\langle \bar{7} \rangle$ tiene 15 elementos y $\langle \bar{21} \rangle$ tiene 5, por lo que $\langle \bar{7} \rangle / \langle \bar{21} \rangle$ tiene $15/5 = 3$ elementos). **Es simple** por ser de orden primo
  - $\mathbb{Z}_{105} / \langle \bar{7} \rangle \simeq \mathbb{Z}_7$ que **es simple**

  Por tanto, esta sí es una **serie de composición**

- $\{e\} \subset \langle \bar{35} \rangle \subset \langle \bar{5} \rangle \subset \mathbb{Z}_{105}$
  Y los factores son:
  - $\langle \bar{35} \rangle / \{e\} \simeq \langle \bar{35} \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$ que **es simple** por ser de orden primo.
  - $\langle \bar{5} \rangle / \langle \bar{35} \rangle \simeq \mathbb{Z}_7$ (porque $\langle \bar{5} \rangle$ tiene 21 elementos y $\langle \bar{35} \rangle$ tiene 3, por lo que $\langle \bar{5} \rangle / \langle \bar{35} \rangle$ tiene $21/3 = 7$ elementos). **Es simple** por ser de orden primo
  - $\mathbb{Z}_{105} / \langle \bar{5} \rangle \simeq \mathbb{Z}_5$ que **es simple**

  Por tanto, esta sí es una **serie de composición**

- $\{e\} \subset \langle \bar{35} \rangle \subset \langle \bar{7} \rangle \subset \mathbb{Z}_{105}$
  Y los factores son:
  - $\langle \bar{35} \rangle / \{e\} \simeq \langle \bar{35} \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$ que **es simple** por ser de orden primo.
  - $\langle \bar{7} \rangle / \langle \bar{35} \rangle \simeq \mathbb{Z}_5$ (porque $\langle \bar{7} \rangle$ tiene 15 elementos y $\langle \bar{35} \rangle$ tiene 3, por lo que $\langle \bar{7} \rangle / \langle \bar{35} \rangle$ tiene $15/3 = 5$ elementos). **Es simple** por ser de orden primo
  - $\mathbb{Z}_{105} / \langle \bar{7} \rangle \simeq \mathbb{Z}_7$ que **es simple**

  Por tanto, esta sí es una **serie de composición**

Entonces, las únicas series de composición son las de longitud 4 y siempre tienen como factores a $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, Z_7$ en algún orden.

b) **Prueba o da un contraejemplo del siguiente enunciado: Sea G un grupo Abeliano. Entonces G tiene serie de composición si y sólo si G es finito**

El teorema es verdadero:

- $\Rightarrow$) Si G es un grupo abeliano y con una serie de composición, debemos de mostrar que es finito.
  Como G tiene una serie de composición, entonces existe una serie finita de subgrupos G_i tal que:
  $$\{e\} = G_n \trianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G$$
  Donde cada uno de los factores $Q_i := G_{i-1}/G_i$ es un grupo simple.
  Como G es abeliano, cada uno de los $G_i \leq G$ son abelianos y entonces $Q_i = G_{i-1}/G_i$ es abeliano.
  Por tanto, cada Q_i es abeliano y simple. Pero al ser abeliano, todos los subgrupos son normales y como es simple, los únicos subgrupos normales deberían de ser $\{e\}, Q_i$. Esto implica que $\{e\}$ y Q_i son los únicos subgrupos de Q_i.
  Lo que significa que Q_i es cíclico.

  Si Q_i fuera cíclico pero infinito, debería de ser isomorfo a $\mathbb{Z}$, lo cual no es cierto porque $\mathbb{Z}$ no es simple.
  Por tanto, Q_i debe de ser cíclico y finito es decir, de la forma $\mathbb{Z}_p$.

  Por último, el orden de G_n es $|G_n| = 1$.
  Luego, como $Q_n = \dfrac{G_{n-1}}{G_n}$, el orden de G_{n-1} es $|G_{n-1}| = |G_n||Q_n|$, que es un número finito, porque tanto $|G_n|$ como $|Q_n|$ son finitos.
  Luego, como $Q_{n-1} = \dfrac{G_{n-2}}{G_{n-1}}$, el orden de G_{n-2} es $|G_{n-2}| = |G_{n-1}||Q_{n-1}|$. Como $|G_{n-1}|$ es finito y $|Q_{n-1}|$ es finito, entonces el producto $|G_{n-2}|$ es finito.
  Seguimos así sucesivamente y usamos que todos los factores son finitos para concluir que $|G|$ es finito.

- $\Leftarrow$) Lo probamos por inducción sobre el orden de G (y de hecho no hace falta usar que G es abeliano).
  Si $|G| = 1$, entonces $G = \{e\}$ y tiene trivialmente una serie de composición.
  Como hipótesis inductiva, suponemos que todo grupo de orden $< n$ tiene serie de composición.

  Sea G un grupo de orden n.
  Si G es simple, entonces la serie $\{e\} \trianglelefteq G$ es una serie de composición, pues $G/\{e\} \simeq G$ es simple.

Si G no es simple, entonces tiene un subgrupo propio normal no trivial, y entonces tiene algún subgrupo normal maximal, digamos que dicho subgrupo es H, es decir $H \trianglelefteq G$. Lo que nos da la serie subnormal:

$$\{e\} \trianglelefteq H \trianglelefteq G$$

Como H tiene orden menor a G, por hipótesis de inducción, H tiene una serie de composición de la forma:

$$\{e\} \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H$$

En la que todos los factores son simples.

Entonces, G tiene una serie subnormal como sigue:

$$\{e\} \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H \trianglelefteq G$$

Los primeros factores hasta la H son todos simples por la hipótesis de inducción. Por lo que sólo nos falta probar que G/H es simple.
Esto es claro por el teorema de correspondencia. Que dice que hay una correspondencia biyectiva de los subgrupos K entre H y G, es decir $\{K \leq G \mid H \leq K\}$
Y los subgrupos de G/H, es decir $\{\mathcal{K} \leq G/H\}$.

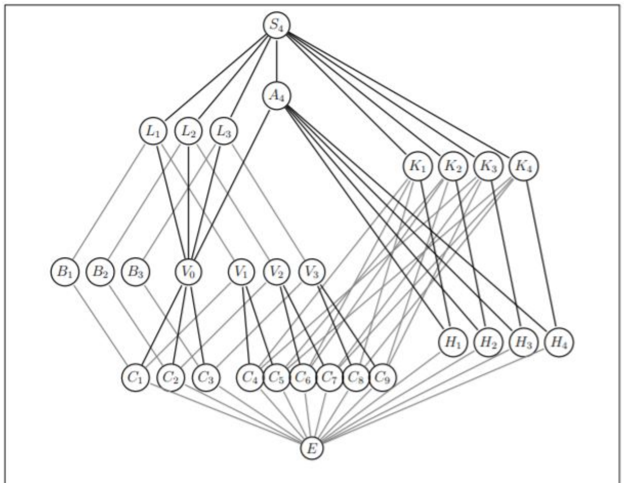
Pero como H es maximal, sólo hay dos subgrupos K entre H y G (el propio H y G) y por la correspondencia, eso implica que sólo hay 2 subgrupos de G/H (que deben de ser $\{e\}, G/H$). Eso implica trivialmente que G/H es simple.

Entonces, la serie subnormal

$$\{e\} \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H \trianglelefteq G$$

Tiene todos los factores simples y por tanto es una serie de composición.

c) **Prueba o da un contraejemplo del siguiente enunciado: S_4 es soluble**



$L_i \cong D_{2(4)}$, $B_i \cong \mathbb{Z}_4$, $C_i \cong \mathbb{Z}_2$, $V_i \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $H_i \cong$, $K_i \cong S_3$

Una posible serie subnormal es:

$$\{e\} \subset X_1 \subset V_0 \subset A_4 \subset S_4$$

Donde:

- $X_1 = \{(1), (13)(24)\}$
- $V_0 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
- $A_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)\}$

Vemos que se trata de una serie subnormal porque $[S_4 : A_4] = \dfrac{|S_4|}{|A_4|} = 2$ y sabemos que un subgrupo de índice dos es normal, por lo que $A_4 \trianglelefteq S_4$
También tenemos que $[V_0 : X_1] = \dfrac{|V_0|}{|X_1|} = 2$ y por la misma razón que antes, $X_1 \trianglelefteq V_0$
Por último, hay que probar que V_0 es normal en A_4. Esto está claro porque la conjugación en S_4 no afecta la estructura cíclica de los elementos que se conjugan. Por lo tanto, un elemento de V_0 de la forma $(ab)(cd)$ al conjugarlo con cualquier $\sigma \in A_4$ seguirá teniendo la forma cíclica del producto de dos ciclos de orden 2 y por tanto pertenecerá en V_0. Lo que prueba que $V_0 \trianglelefteq A_4$.

Entonces, esta serie es una serie subnormal $\{e\} \trianglelefteq X_1 \trianglelefteq V_0 \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$.

Luego, los factores son:

- $Q_1 = S_4/A_4$ que tiene un orden de $Q_1 = \dfrac{|S_4|}{|A_4|} = \dfrac{24}{12} = 2$. Como es de orden 2, es cíclico, y por tanto abeliano.

- $Q_2 = A_4/V_0$ que tiene un orden $Q_2 = \frac{|A_4|}{|V_0|} = \frac{12}{4} = 3$. Como es de orden 3, es cíclico y por tanto abeliano.
- $Q_3 = \frac{V_0}{X_1}$ que tiene un orden de $Q_3 = \frac{|V_0|}{|X_1|} = \frac{4}{2} = 2$. Como es de orden 2, es cíclico y por tanto abeliano.

Entonces todos los factores son abelianos.
y es una serie de composición

d) **Prueba o da un contraejemplo del siguiente enunciado: S_3 es soluble**

Consideramos la serie siguiente:

$$\{e\} \subset A_3 \subset S_3$$

Donde $A_3 = \{e, (123), (132)\}$.

Como A_3 tiene índice 2 en S_3, entonces $A_3 \trianglelefteq S_3$.
Y además $\{e\} \trianglelefteq A_3$
Por lo que se trata de una serie subnormal. Los factores son:

- $Q_1 = S_3/A_3$ que tiene orden $|Q_1| = \dfrac{|S_3|}{|A_3|} = \dfrac{6}{3} = 2$. Por lo que es cíclico y por tanto abeliano.
- $Q_2 = A_3/\{e\}$ que tiene orden $Q_2 = \dfrac{|A_3|}{|\{e\}|} = 3$. Por lo que es cíclico y por tanto abeliano.

Entonces todos los factores son abelianos, lo que significa que S_3 es soluble.