Medida Badajoz

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

24 de enero de 2021

1. Medida

1.1. σ-Álgebras

Def (Anillos): Un anillo en Ω es una colección no vacía $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$, pata la que:

$$A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \cup B, A - B \in \mathcal{A}$$

Lo que implica que $A \cap B \in \mathcal{A}$ y que $\emptyset = A - A \in \mathcal{A}$.

Álgebra: Es un anillo que además contiene al todo Ω. (y por tanto, es cerrado bajo complementos)
$\sigma-$**Álgebra:** Es un álgebra cerrada bajo uniones numerables en vez de finitas.

Def (Espacio Medible): Es el par $(\Omega, \mathcal{A})$, donde Ω es un conjunto y A es una $\sigma-$álgebra de Ω y **conjuntos medibles** a los elementos de $\mathcal{A}$
Si C es una familia de subconjuntos de Ω, denotamos por $\sigma(C)$ la mínima $\sigma-$álgebra que contiene a C. Se puede conseguir intersectando a todas las $\sigma-$álgebras que contienen a C.

1.1.1. σ-álgebra de Bórel

Se refiere a un caso especial de un espacio medible.

Def ($\sigma-$álgebra de Bórel): Dado un espacio topológico (Ω, τ), su sigma álgebra de Borel es la generada por sus abiertos (los conjuntos que se obtienen como unión numerable de abiertos o como restas entre abiertos, por tanto, contiene a los cerrados también).
Los elementos se llaman Borelianos.
La denotamos como $\sigma(\tau) = B(\Omega)$

Prop 1.2.11: Si X es un espacio topológico y $Y \subset X$ es un subespacio, entonces:

$$B(Y) = B(X) \cap Y$$

Si un espacio topológico tiene una base numerable de abiertos N, entonces $B(\Omega) = \sigma(N)$

Ejemplo 1.2.13: En $\Omega = \mathbb{R}$ con la topología usual $\tau_{\mathbb{R}}$, la base topológica es $N = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{Q}\}$. Por tanto, el $\sigma-$álgebra de Borel es $\sigma(N) = B(\mathbb{R})$

1.1.2. El conjunto de Cantor

Consideramos a los compactos de $\mathbb{R}$ definidos como:

$$K_0 = [0,1]$$
$$K_1 = K_0 \cap (1/3, 2/3)^c = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$
$$K_2 = K_1 \cap (1/9, 2/9)^c \cap (7/9, 8/9)^c = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

Y así.

Conjunto de Cantor: Es el conjunto $K = \cap K_n$
El conjunto de Cantor es compacto y perfecto (todos los puntos son límites y no aislados).

1.1.3. Clases Monótonas

Def Límite Superior e Inferior: De una sucesión de conjuntos A_n es:

$$\limsup A_n \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$
$$\liminf A_n \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$$

Denotamos como:

$$A_n \uparrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } \cup A_n = A$$
$$A_n \downarrow A \Leftrightarrow A_n \supset A_{n+1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } \cap A_n = A$$

Def Clase Monótona: C es una clase monótona de Ω es una familia de subconjuntos de Ω que satisface:

a) Si $A_n \in C$ y $A_n \uparrow A$, entonces $A \in C$

b) Si $A_n \in C$ y $A_n \downarrow A$, entonces $A \in C$

Prop 1.2.20: Una familia A de Ω es una $\sigma-$álgebra sii es un álgebra y una clase monótona.

Dada una familia C de subconjuntos de Ω existe la mínima clase monótona que la contiene, que denotamos como $M(C)$

Lema 1.2.21: Si $\mathcal{A}$ es álgebra, $M(\mathcal{A})$ es álgebra.

Teorema de la clase monótona: Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces:

$$\sigma(\mathcal{A}) = M(\mathcal{A})$$

1.2. Medida

Def: Una medida en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ un álgebra o anillo, es una función:

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

que satisface:

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) Es **numerablemente aditiva**, es decir, si dados $A_1, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$ disjuntos y cuya unión está en $\mathcal{A}$ (se cumple trivialmente si es una $\sigma-$álgebra), entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Si la condición (b) es sólo válida para colección finita, decimos sencillamente que es una función **aditiva**.
$\sigma-$**finita:** Si existe una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $\cup A_n = \Omega$ y cada $\mu(A_n) < \infty$
Probabilidad: Es una medida con $\mu(\Omega) = 1$

Def Espacio de Medida: Es una terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ con μ una medida sobre la $\sigma-$álgebra

Def. Completo: Un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es **completo** si para cada $B \subset A$, con $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$, también es $B \in \mathcal{A}$
Es decir, los subconjuntos de conjuntos de medida cero son medibles.

- **Ejemplo 1.3.1 Medida Delta de Dirac:** Consideramos $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Fijamos un $x_0 \in \Omega$. Para cada $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = 0$ si $x_0 \notin E$ y $\mu(E) = 1$ si $x \in E$. Suele denotarse con δ_{x_0}

- **Ejemplo 1.3.2 Medida de Contar:** Consideramos un espacio de medida de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y definimos $\mu(A) = n$ si A es finito y tiene n elementos.

- **Medida de Lebesgue:** Será la úncia medida en los borelianos invariable sobre traslaciones y que vale 1 en el cubo unidad.

- **Medida de Haar:** Se define en un grupo compacto y generaliza a la de Lebesgue (es invarainte bajo traslaciones en el grupo).

Proposición (Propiedades): Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, entonces para $A, B \in \mathcal{A}$:

a) $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$

b) **Monótona:** Si $A \subset B$ entonces $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$ y en particular $\mu(B) \leq \mu(A)$

c) Si $A \subset B$ y $\mu(A) = \infty$, entonces $\mu(B) = \infty$

d) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

e) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
Lo cual se generaliza para uniones numerables.

Prop 1.311: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $A_n \in \mathcal{A}$ una sucesión, entonces:

a) Si $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \to \mu(A)$

b) Si $A_n \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces $\mu(A_n) \to \mu(A)$

1.3. Extensión de Medidas

1.3.1. Medida Exterior

Con lo que veremos podremos extender una medida μ sefinida en un anillo $\mathcal{A}_0$ a una colección más grande.

Def (Medida Exterior): Una medida exterior en Ω es una función de conjunto:

$$\mu^* : P(\Omega) \to [0, \infty]$$

que verifica lo siguiente:

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$

b) Si $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

c) Si B_n es una sucesión de subconjuntos de Ω, entonces:

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$$

Vamos a construir varias medidas exteriores:

Proposición 1.4.3: Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de Ω y $\rho : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ una función cualquiera tales que $\emptyset \in C$, $\rho(\emptyset) = 0$. Para cada $B \subset \Omega$,

$$\mu^*(B) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) \ : \ A_n \in \mathcal{C} \ , \ B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}$$

Esto define la **medida exterior generada por** ρ (que es lo que queremos probar). Además, si $\mathcal{C} = \mathcal{A}_0$ es un anillo y ρ una medida, μ^* coincide con ρ sobre $\mathcal{A}_0$. Y es una medida para todos los conjuntos B cubiertos por numerables A_n.

Es decir, dada una función $\rho : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ que cumpla con lo de antes, se puede definir una medida exterior a todos los conjuntos que se pueden cubrir con C. Y la medida es la obvia, que se consigue como el ínfimo de las medidas de todas las cubiertas.

- **Medida Exterior de Lebesgue:** En $\mathbb{R}$ definimos $\mathcal{C} = \{(a, b] \ : \ a \leq b \in \mathbb{R}\}$ y definimos $\rho(a, b] = b - a$, entonces para $A \subset \mathbb{R}$ tenemos:

  $$m^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \ : \ a_n \leq b_n \in \mathbb{R} \ , \ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]\}$$

  es una medida exterior. Es decir, podemos medir todos los conjuntos que se pueden cubrir con intervalos de $\mathcal{C}$ (que son todos) y los medimos sacando el ínfimo de esas cubiertas. Con ello esta medida exterior funciona para todos los conjuntos de $\mathbb{R}$. Además, como $\mathcal{C}$ es un anillo y ρ una medida, esta extensión coincide con ρ en $\mathcal{C}$

1.3.2. Teoremas de Extensión de medidas:

Aunque una medida exterior μ^* está definida en todo $P(\Omega)$, tiene la desventaja de no ser numerablemente aditiva, ni si quiera aditiva.
Para ello, tratamos de encontrar una $\sigma-$álgebra sobre la que sí sea numerablemente aditiva.

Def: Sea μ^* una medida exterior en Ω. Decimos que $E \subset \Omega$ es μ^*-medible si para todo $A \subset \Omega$:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

y denotamos por $\mathcal{A}_*$ la familia de conjuntos μ^* medibles.

Nota: Se sigue que $E \in \mathcal{A}_*$ sii $E^c \in \mathcal{A}_*$
Y que si $\mu^*(E) = 0$, entonces $E \in \mathcal{A}_*$

Teorema de Extensión de Caratheodoty: (1) Sea μ^* una medida exterior en Ω, entonces $\mathcal{A}_*$ es una σ-álgebra. La restricción de μ^* a ella es una medida y $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ es completo (todo subconjunto de conjuntos de medida cero son medibles).
(2) Si además μ^* es la medida exterior generada por una medida ρ de un anillo $\mathcal{A}_0$ de Ω, entonces:

$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_* \quad , \rho = \mu^* \text{ en } \mathcal{A}_0$$

.

Teorema de extensión de Hahn: Toda medida $\sigma-$finita en un anillo $\mathcal{A}_0$ se extiende de modo único a cada $\sigma-$álgebra entre $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_*$

Es decir, si empezamos con una función ρ en una familia $\mathcal{C} \subset P(\Omega)$, que cumpla que $\emptyset \in \mathcal{C}$, $\rho(\emptyset) = 0$. Entonces, podemos generar una medida exterior μ^* generada por ρ que funciona en todo $P(\Omega)$ usando cubiertas de los conjuntos de $\mathcal{C}$.
Sin embargo, μ^* no es una medida (no es aditiva)
Por ello, el teorema de extensión de Cathedory nos dice que nos fijemos sólo en los E que 'no afectan'. Que cumplen $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.
A estos conjuntos les llamamos μ^* medibles y denotamos su familia como $\mathcal{A}_*$ (que es cerrada bajo complementos y contiene a los de medida 0 y es una $\sigma-$álgebra).
Además, μ^* es una medida (ya cumple aditividad y eso). Entonces $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ es un espacio de medida completo.
Además, si ρ estaba definida en un anillo, μ coincide con ρ en este anillo.

1.4. Medida de Lebesgue-Stieljes

1.4.1. medida de Lebesgue-Stieljes en $\mathbb{R}$

Sigma Álgebra: Cerrada bajo uniones numerables y restas y contiene a $\emptyset$ y al conjunto completo.

Sigma Álgebra de Borel: Es la generada por los conjuntos abiertos (todas las uniones numerables de abiertos y las restas). Que por tanto contiene a todos los cerrados y muchos más.

En $\mathbb{R}$ la sigma -álgebra se denota $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Función de Distribución: Es una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a la derecha.
Llamamos **medida de Lebesgue-Stieljes** en $\mathbb{R}$ a toda medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ finita en cada compacto.

Teorema 1.5.1: Sea μ una medida de Lebesgue-Stieljes en $\mathbb{R}$. Entonces cada función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que para todo $a < b \in \mathbb{R}$ verifique:

$$F(b) - F(a) = \mu(a, b]$$

es una función de distribución. Existen infinitas así y difieren por una constante.

Recíprocamente, dada una función de distribución $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, existe una única medida $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ que para $a < b \in \mathbb{R}$ verifica:

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a)$$

Tal medida la conocemos sobre los semiintervalos $(a, b]$

Lema 1.5.2: Para cada $A \in \mathcal{A}_0$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $B \in \mathcal{A}_0$, con $\bar{B} \subset A$ tal que $\mu(A - B) < \epsilon$

Teorema 1.5.5: Dada una función de distribución F en $\mathbb{R}$, existe una única medida μ en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$, para cada $a < b$ de $\mathbb{R}$ y es una medida de **Lebesgue Stieljes**.

Ejemplo: La medida de Lebesgue unidimensional: Definimos en particular a la distribución $F(x) = x$ y a la medida de la 'base de Borel' como $\mu(a, b] = b - a$
La correspondiente medida $\sigma-$finita $\mu : \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$ define la **medida exterior de Lebesgue** que para $A \subset \mathbb{R}$ vale:

$$\begin{gathered}\mu^*(A) = \inf\{\sum \mu(A_i) \ : \ A_i \in \mathcal{A}_0, \ \ A \subset \cup A_i\} \\ = \int\{\sum \mu(I_i) \ : \ I_i \in \mathcal{C} \ , \ \ A \subset \cup I_i\} \\ \inf\{\sum (b_i - a_i) \ : \ a_i \leq b_i \ , \ \ A \subset \cup (a_i, b_i]\}\end{gathered}$$

Luego, a los conjuntos que satisfacen el criterio de Cathedoroy los denotamos $\mathcal{A}_*$ y forman una $\sigma-$ álgebra. Les llamamos **Lebesgue medibles** de $\mathbb{R}$. Y llamamos **medida de Lebesgue** a la restricción $m = \mu^* \Big|_{\mathcal{A}_*}$. Que en esta reestricción ya es una medida aditiva numerable en una σ-álgebra.
Denotamos $\mathcal{A}_* = \mathcal{L}(\mathbb{R})$ a la $\sigma-$álgebra (los conjuntos que cumplen lo de Cathedoroy).

1.4.2. Medidas de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}^n$

Rectángulo (acotado) en $\mathbb{R}^n$: Es el producto de n intervalos acotados de $\mathbb{R}$. Y semi-rectángulo si los n semi-intervalos son cerrados a la derecha (pueden ser no acotados). Llamaremos cubo si todos los n intervalos son de la misma longitud. Llamaremos cubo unidad a $Q = [0,1]^n$.

Nota 1.5.9: Denotamos $(-\infty, x] = \Pi_{i=1}^n(-\infty, x_i]$ para $x = (x_1, \cdots, x_n)$

Luego $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la $\sigma-$ álgebra generada por los abiertos de $\mathbb{R}^n$ (bajo uniones numerables y restas), o bien, basta con los generados por los semirectángulos acotados.

Prop: La familia $\mathcal{A}_0$ de las uniones finitas disjuntas de semi-rectángulos acotados de $\mathbb{R}^n$ en un anillo.

Def: Diremos que una medida $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ es de **Lebesgue-Stieltjes** si es finita en los compactos.

Def Función de Distribución: Diremos que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de distribución si:

a) Es continua a la derecha (Es decir, si $x \leq \cdots \leq x_{n+1} \leq x_n$ y $x_n \to x$, entonces $F(x_n) \to F(x)$

b) Es **monótona creciente** para cada dirección.

Ejemplo 1.5.12: Dadas n funciones de distribución en $\mathbb{R}$, $F_1, \cdots, F_n$. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ es una función de distribución en $\mathbb{R}^n$

Como en el caso unidimensional, tenemos una biyección entre medidas de Lebesgue-Stieltjes y funciones de distribución (con diferencias por una constante)

Teorema 1.5.14: Sea μ una medida finita en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $F(x) = \mu(-\infty, x]$ es una función de distribución.

Teorema 1.5.15: Dada F una función de distribución en $\mathbb{R}^n$, hay una única medida μ en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\mu(a,b] = \sum_{x \in S_{a,b}} \sigma(x)F(x)$ para cada semirectángulo acotado $(a,b]$. Además, μ es de Lebesgue-Stieltjes.

Y es aditiva.

Esto nos permite extender μ al anillo $\mathcal{A}_0$ de las uniones finitas disjuntas de semi-rectángulos acotados, $\mu(\cup_{i=1}^k R_i) = \sum \mu(R_i)$.
De este modo μ es aditiva en $\mathcal{A}_0$.
Y vemos que para cada $A \in \mathcal{A}_0$ y cada $\epsilon > 0$ existe un $B \in \mathcal{A}_0$ con $\bar{B} \subset A$ y $\mu(A - B) < \epsilon$.

El teorema de Caratheodory nos permite construir la medida exterior $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, asociada a μ, de la forma:

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \ : \ A_i \in \mathcal{A}_0 \ , \ A \subset \cup A_i\}$$
$$= \int \{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) \ : \ R_i \in \mathcal{C}^n \ , \ A \subset \cup R_i\}$$

Ejemplo: La medida de Lebesgue n-dimensional: Consideramos la función de distribución $F(a_1, \cdots, x_n) = x_1 \cdots x_n$, entonces su medida asociada en los semi rectángulos es:

$$\mu(a, b] = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

Esta medida exterior funciona para todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Luego, consideramos $\mathcal{A}_* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a los conjuntos que cumplen lo de Catheodory y forman una sigma-álgebra. En estos conjuntos, $m = \mu^*$ es la medida de Lebesgue y es aditiva numerable.

1.4.3. Propiedades de la medida de Lebesgue

Vemos algunas propiedades de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.5.18 Invariancia bajo traslaciones: Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $B + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(B) = m(B + x)$.
Además, si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $B + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Teorema de unicidad 1.5.19: Sea μ una medida de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ invariante por traslaciones, tal que $\mu[(0, 1]^n] < \infty$. Entonces existe $c \in [0, \infty)$ tal que $\mu(A) = c \cdot m(A)$ para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

1.5. Medidas de Hausdorff

Medida exterior métrica: Sea (Ω, d) un e.m. Si dados $A, B \subset \Omega$ tales que $d(A, B) > 0$ se cumple que:

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Prop 1.6.1: Si μ^* es una medida exterior métrica en un espacio métrico (Ω, d), entonces $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}_*$

1.5.1. Las Medidas de Borel H_p

Sea (Ω, d) un espacio métrico.
Llamamos **diámetro** de un $B \subset \Omega$ al valor:

$$d(B) = \sup\{d(x, y) \ : \ x, y \in B\}$$

Ahora para cada $p > 0, \delta > 0$ definimos la función de conjunto que para cada $A \subset \Omega$ vale:

$$H_{p,\delta}(A) = \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} d(B_n)^p \ : \ A \subset \cup B_n \ , \ d(B_n) \leq \delta\}$$

Es decir, es mínimo de las sumas de los diámetros elevados a la p de una cubierta numerable de A con $d(B_n) \leq \delta$.

Estas funciones son medidas exteriores, que verifican $\delta \leq \epsilon \ \Rightarrow \ H_{p,\delta}(A) \geq H_{p,\epsilon}(A)$.
Entonces podemos definir una **medida exterior** límite como:

$$H_p(A) = \lim_{\delta \to 0} H_{p,\delta}(A)$$

La llamamos **medida exterior p-dimensional de Hausdorff**.

Teorema 1.6.3: Las medidas $H_{p,\delta}$ no son métricas pero H_p sí lo es.

Medida de Hausdorff p-dimensional: Es la restricción de H_p a los borelianos $\mathcal{B}(\Omega)$

Prop 1.6.4: Sea $A \subset \Omega$ y sean $0 \leq p < q$, entonces:

$$H_p(A) < \infty \ \Rightarrow \ H_q(A) = 0$$
$$H_q(A) > 0 \ \Rightarrow \ H_p(A) = \infty$$

Dimensión de Hausdorff: De $A \subset \Omega$ al valor:

$$\dim_H(A) = \sup\{p \geq 0 \ : \ H_p(A) = \infty\} = \text{ínf}\{q > 0 \ : \ H_q(A) = 0\}$$

Prop 1.6.7: Sea $T : \Omega \to \Omega$ una biyección isométrica ($d(T(x), T(y)) = d(x, y)$). Entonces para todo $B \subset \Omega$ y todo $p \geq 0$, se tiene que $H_p[T(B)] = H_p(B)$

1.5.2. Medidas de Hausdorff en $\mathbb{R}^n$

Lema 1.6.8: Sea $B = B[0,1]$ la bola unidad cerrada de $\mathbb{R}^n$, m la medida de Lebesgue y $Q = [0,1]^n$ el cubo unidad, entonces:

$$\frac{1}{m[B]} \leq H_n(Q) \leq (\sqrt{n})^n$$

Teorema 1.6.9: Existe una constante $\gamma_n > 0$, tal que $\gamma_n H_n$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

De hecho, se tiene que $\gamma_n = m(B) = \dfrac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(1+n/2)}$

2. Resumen Medida:

- **Álegras**
  - **Anillo en Ω:** Es una familia de conjuntos de Ω cerrada bajo uniones y restas
  - **Álgebra:** Es un anillo que incluye Ω (y por tanto es cerrado bajo complementos e intersecciones)
    Sigma-Álgebra: Si es cerrado bajo uniones numerables (En resumen, incluye a Ω, es cerrado bajo complementos y bajo uniones numerables).
  - **Espacio Medible:** Al par $(\Omega, \mathcal{A})$, con Ω un conjunto y $\mathcal{A}$ una sigma álgebra de Ω. Los conjuntos de $\mathcal{A}$ se llaman **medibles**.
  - **Generado:** Si $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos de Ω, su generado $\sigma(\mathcal{C})$ es la mínima sigma-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$ y se obtiene tomando todas las uniones numerables, complementos y agregando Ω
  - **$\sigma-$álgebra Borel:** En un espacio topológico (Ω, τ) , es la que se genera con todos los abiertos (y por tanto incluye todos los cerrados y muchos más). Se denota como $\mathcal{B}(\Omega)$ y es igual a $\sigma(\tau)$
    Si el espacio topo tiene una base numerable $\mathcal{N}$, enotnces $\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{N})$.
    En $\mathbb{R}$, los borelianos se pueden generar con $(a, b]$
  - **Límites:** Decimos que $A_n \uparrow A$ si $A_n \subset A_{n+1}$ y $\cup A_n = A$
    Decimos que $A_n \downarrow A$ si $A_n \supset A_{n+1}$ y $\cap A_n = A$
- **Medida:**
  - **Medida:** En un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ es un álgebra o anillo. Es una función que cumple:
    - $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$
    - $\mu(\emptyset) = 0$
    - Es numerablemente aditiva. Si $A_1, A_2, \cdots$ son disjuntos, entonces $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
  - **Espacio de Medida:** Es una terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ con $\mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra, μ una medida.
    Es **completo** si para cada $B \subset A$ con $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0 \;\Rightarrow\; B \in \mathcal{A}$
  - **Propiedades**: Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces:
    $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$, si $A \subset B \;\Rightarrow\; \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$ (y en particular, **monotonía**)
    $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, en particular $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$
    Si $A_n \uparrow A \;\Rightarrow\; \mu(A_n) \to \mu(A)$
    Si $A_n \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty \;\Rightarrow\; \mu(A_n) \to \mu(A)$

- **Extensión de medidas**
  - **Medida Exterior:** en Ω es una función:
    - $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$
    - $\mu^*(\emptyset) = 0$
    - Si $A \subset B \ \Rightarrow \ \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
    - $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$

    Notar que a diferencia de la medida, no nos restringimos a una álgebra, sino que usamos todo $\mathcal{P}(\Omega)$

  - **Def de una medida exterior:** Si $\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos de Ω y $\rho : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ una función tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$ y $\rho(\emptyset) = 0$. Entonces, para cada $B \subset \Omega$, podemos definir la medida exterior de cubiertas:

$$\mu^*(B) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) \ : \ A_n \in \mathcal{C} \ , \ B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}$$

    Esto es siempre una medida exterior.
    Y si $\mathcal{C}$ era un anillo y ρ una medida en ese anillo, entonces $\rho = \mu^*$ en $\mathcal{A}_0$

- **Extensión de medidas exteriores**:
  si μ^* es una medida exterior en Ω. Decimos que E es μ^* **medible:** si para todo $A \subset \Omega$:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

  Vemos si E es medible, también su complemento y que los de medida exterior 0 son medibles.

  Extensión de Caratheodory: Si μ^* es una medida exterior, consideramos la familia de conjuntos $\mathcal{A}_*$ que son los que cumplen la condición de Caratheodoty. Entonces $\mathcal{A}_*$ es una $\sigma-$álgebra. Y la restricción de μ^* a $\mathcal{A}_*$ es una medida y $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ es completo. Si μ^* es la medida exterior generada por una medida ρ en un anillo $\mathcal{A}_0$, entonces esta exterior μ^* coincide con ρ en el anillo $\mathcal{A}_0$

  Es decir, podemos empezar desde una función $\rho : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ que mande el vacío al 0. Luego la extendemos a una medida exterior μ^* en todo $\mathcal{P}(\Omega)$. Si la restringimos a sólo los conjuntos que cumplan el criterio de Catheodory, estos conjuntos forman una familia $\mathcal{A}_*$ que es una $\sigma-$álgebra. Y μ^* reestringido ya es una medida (es ahora numerablemente aditiva).

  Teorema de Extensión de Hahn: Toda medida $\sigma-$finita en un anilo $\mathcal{A}_0$ se extiende de modo único a una $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ entre $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_*$

- **Medida de Lebesgue**

  - **Función de distribución:** Es una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a la derecha.
  - **Medida de Lebesgue-Stieljes en $\mathbb{R}$:** Es toda medida en el sigma álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ finita en cada compacto.

  Teorema: Si μ es una medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Entonces cada función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique para $a < b$, $F(b) - F(a) = \mu(a, b]$ es una función de distribución. Y dos difieren por una constante.
  Dada una función de distribución $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, existe una única medida $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ que verifica $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$ y luego la podemos extender a más conjuntos.
  Teorema: Dada una función de distribución $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, existe una única medida μ en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$ para $a < b$. Y es una medida de Lebesgue-Stieljes.

  Medida de Lebesgue 1d: Empezamos con la función $\mu(a, b] = b - a$ en los semiabiertos $\mathcal{C}$. Luego, se puede extender a una función:

  $$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\sum \mu(I_i) \ : \ I_u \in \mathcal{C} \ , A \subset \cup I_i\}$$

  Esta medida funciona en todo $\mathcal{A}_*$ (los que cumplen lo de Catheodory) y es de Lebesgue-Stieljes (finita en compactos).
  Los conjuntos de la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}_*$ se llaman **Lebesgue medibles** y definimos $m = \mu^*$ restringida a estos conjuntos. Denotamos además $\mathcal{A}_* = \mathcal{L}(\mathbb{R})$

  Se extiende similarmente a $\mathbb{R}^n$, empezando con una medida ρ en rectángulos $\mathcal{C}^n$ y extendiendo a una medida exterior en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ como:

  $$\mu^*(A) = \int\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) \ : \ R_i \in \mathcal{C}^n \ , \ A \subset \cup R_i\}$$

  Los conjuntos que cumplen Catheodory se denotan $\mathcal{A}_* := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
  La medida exterior μ^* en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ya es una medida (con aditividad numerable) y es una medida de Lebesgue-Stieljes y se denota m.

  Propiedades: Es invariante bajo traslación: Si $x \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ entonces $B + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(B) = m(B + x)$.
  Y es la única medida de Lebesgue-Stieljes invariante bajo traslaciones (salvo factor de proporcionalidad). Nos fijamos en particular en la que vale 1 en $[0, 1]^n$

- **Medida de Hausdorff**

  - **Medida exterior métrica:** Es una medida en un e.m. tal que si $A, B \subset \Omega$, $d(A, B) > 0$, entonces $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ **Propo:** Si μ^* es una medida exteiror métrica en un espacio m. (Ω, d), entonces $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}_*$

- **Medida Exterior de Hausdorff:** Si (Ω, d) es un e.m. y $d(B)$ es el diam de B, entonces definimos:
$$H_{p,\delta}(A) = \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} d(B_n)^p \ : \ A \subset \cup B_n \ , \ d(B_n) \leq \delta\}$$
es una medida exterior.
Y definimos $H_p(A) = \text{lím}_{\delta \to 0} H_{p,\delta}(A)$.
Entonces $H_p : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ es una medida exterior métrica.
Llamamos **medida de Hausdorff p -dim** a la restricción de H_p sobre los borelianos $\mathcal{B}(\Omega)$
- **Prop:** si $A \subset \Omega$ y $0 \leq p < q$, entonces:
$H_p(A) < \infty \ \Rightarrow \ H_q(A) = 0 \ , \ H_q(A) > 0 \ \Rightarrow \ H_p(A) = \infty$
- **Dimensión de Hausdorff** de $A \subset \Omega$ es el valor $\dim_H(A) = \sup\{p \geq 0 \mid H_p(A) = \infty\}$
Teorema: Si $T : \Omega \to \Omega$ es isometriía biyectiva, entonces $H_p[T(B)] = H_p[B]$

- **Apéndice**
  - Dada una clase T$\mathcal{F}$ de conjuntos de Ω, denotamos por $\mathcal{F}_\delta$ a las familia de intersecciones numerables de $\mathcal{F}$ y a $\mathcal{F}_\sigma$ a la familia de uniones numerables de elementos de $\mathcal{F}$.
  - **Carga:** En un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ (i.e, $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álbegra). llamamos carga a una función $\mu : \mathcal{A} \to (-\infty, \infty]$ numerablemente aditiva y tal que $\mu(\emptyset) = 0$ (i.e., tiene la diferencia de que puede tomar valores negativos).
  Prop: Sea μ una carga en $(\Omega, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ anillo. Enotnces para $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que:
  $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$, si $A \subset B \ \Rightarrow \ \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$.
  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, si $A_n \uparrow A \ \Rightarrow \ \mu(A_n) \to \mu(A)$, si $A_n \downarrow A, |\mu(A_1)| \leq \infty \ \Rightarrow \ \mu(A_n) \to \mu(A)$
  - **Sobre los conjuntos Lebesgue-Medibles:**
  Tenemos las inclusiones $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$
  Se puede ver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R})$ con un contraejemplo.
  Sin embargo, que $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sólo se puede demostrar usando el axioma de elección.

3. Integración

3.1. Funciones Medibles

Def: Diremos que una aplicación $F : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ es **medible** si para cada $B \in \mathcal{A}_2$, $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$.

Si $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ diremos que F es una función medible (o Borel medible).
Si además $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$, diremos que es **Lebesgue medible**.

Prop 2.2.1:

a) La composición de aplicaciones medibles es medible

b) Si $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ son espacios medibles y $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_2$ es tal que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_2$, entonces $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ es medible si y sólo si para cada $B \in \mathcal{C}$, $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$.
Es decir, basta con buscar medibilidad en la 'base' antes de borel-extenderla

c) Las aplicaciones continuas entre espacios topológicos son medibles para las $\sigma-$álgebras de borel.

Proposición 2.2.2:

d) Una función $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ es medible sii para cada $c \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in \Omega \ : \ f(x) > c\} \in \mathcal{A}$$

Nota: Podemos cambiar $>$ por $<, \leq, \geq$ (porque cada una de estas familias son una base de $B(\bar{\mathbb{R}})$ antes de Borel-extender.)

e) Si f es medible, $-f$ y $|f|$ lo son también.

f) Si f es medible, $f^+ = \max(f, 0)$ y $f^- = \max(-f, 0)$ son medibles también.

Teorema: Sean $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ para $n \in \mathbb{N}$ funciones medibles, entonces:

- $\sup f_n, \inf f_n$ son medibles
- $\limsup f_n, \liminf f_n$ son medibles
- Si existe en todo $x \in \Omega$ el límite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, entonces f es medible.

Def: Dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ y un $A \in \mathcal{A}$ denotaremos con :

$$\mathcal{F}(A) = \{f : A \to \mathbb{R}, \text{ funciones medibles reales}\}$$

Notemos que le pdeimos que tomen valores en $\mathbb{R}$ pero no en $\bar{\mathbb{R}}$.

Def: Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y $A \in \mathcal{A}$, llamaremos **indicador** de A a la función medible:

$$I_A : \Omega \to \mathbb{R} \text{ dada por } I_A(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in A \\ 0 & , \ x \in A^c \end{cases}$$

3.1.1. Funciones Simples

Def: Decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es **simple** si es medible y toma un número finito de valores. Denotamos el conjunto de las funciones simples con:

$$\mathcal{S} = \{ s : \Omega \to \mathbb{R} \ \mid \ s \text{ es simple } \}$$

Prop: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es simple sii existen $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$ disjuntos y $a_i \in \mathbb{R}$ tales que:

$$f = \sum a_i I_{A_i} \quad , \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

Prop: Si $f, g \in \mathcal{S}$, entonces $f + g, fg \in \mathcal{S}$. Y si g no es nula, también $f/g \in \mathcal{S}$

Nota: Consideramos en $[0, \infty]$la sucesión de funciones simples no negativas $s_n : [0, \infty] \to [0, \infty)$ que para $0 \leq r \leq \infty$ valen:

$$s_n(r) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2^n} \ , \ r \in [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}) \ , \ i = 1, 2, \cdots, n2^n) \\ n \ , \ n \leq r \end{cases}$$

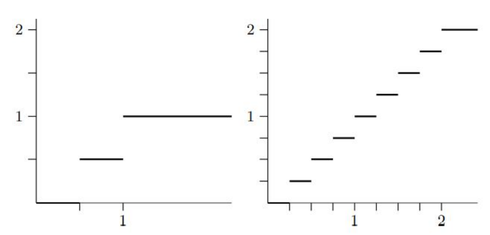

Figura 2.1. Gráficas de s_1 y s_2

Y se tiene que $s_n(r) \leq r$, $0 \leq s_n \leq n$, $s_n \leq s_{n+1}$, $s_n(r) \uparrow r$
Y la convergencia $s_n(r) \to r$ es uniforme en todo acotad de $\mathbb{R}$

Teorema: Sea $f : \Omega \to [0, \infty]$ una función medible, entonces existe una sucesión creciente $f_n \in \mathcal{S}$ de funciones simples, con $0 \leq f_n \leq n$ tales que $f_n \uparrow f$. Además, la convergencia es uniforme en cada conjunto en el que f es acotada.

- Dem: Para ello se usan las funciones definidas antes y se define $f_n = s_n \circ f$

Corolario: Sea $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ medible. Entonces existe una sucesión $f_n \in \mathcal{S}$ de funciones simples con $|f_n| \leq n$, tales que $f_n \to f$, $|f_n| \leq |f|$. Además, la convergencia es uniforme en cada conjunto en el que f sea acotada.

3.1.2. Operaciones de Funciones medibles

Si $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible y $A \in \mathcal{A}$, definimos:

- Si $f, g : A \to \bar{R}$ son medibles, también lo son $cf, f+g, fg, f/g$ si están bien definidas (no hay $a/0$ o $\infty - \infty$ o así)
- $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ tiene estructura de $\mathbb{R}-$álgebra (contiene a las funciones constatnes y es cerrada para suma y producto)

Teorema: Existen conjuntos Lebesgue medibles no Borel medibles. Existe $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ pero $D \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$

3.2. Integración

Def: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $h \in \mathcal{S}$ una función simple y no negativa. Es decir:

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} a_i I_{A_i} \ : \ \Omega \to [0, \infty)$$

con los $0 \leq a_i < \infty$ y los $A_i \in \mathcal{A}$ disjuntos y $\cup A_i = \Omega$. Definimos la integral de h respecto de μ como el valor de $[0, \infty]$:

$$\int_\Omega h d\mu = \sum a_i \mu(A_i)$$

Se puede probar que está bien definido (vale lo mismo en distintas representaciones)

Prop 2.3.2: Sean $f, g \in \mathcal{S}$ no negativas y $c \in [0, \infty)$ entonces:

a) $\int cf d\mu = c \int f d\mu$

b) $\int f + g \, d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

c) Si $f \leq g \ \Rightarrow \ \int f d\mu \leq \int g d\mu$

Def (Integral): Si $h \geq 0$ es una función medible, definimos la integral de h respecto a μ en Ω como:

$$\int_\Omega h d\mu = \sup\{ \int_\Omega s d\mu \ : \ s \in \mathcal{S} \ , \ 0 \leq s \leq h \}$$

Si $h : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ es medible, descomponemos $h = h^+ - h^-$ y definimos:

$$\int_\Omega h d\mu = \int_\Omega h^+ d\mu - \int_\Omega h^- d\mu$$

Si ambos términos son finitos, diremos que h es **integrable**.

Def: Para $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ enotamos por $\mathcal{L}_1[\Omega, \mathcal{A}, \mu, K]$ o simplemente $\mathcal{L}_1$ al espacio de funciones integrables:

$$f : \Omega \to K$$

3.2.1. Propiedades Básicas

Prop: Sean $f, g : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to \bar{\mathbb{R}}$ medibles, entonces:

a) Si existe la integral de f y $c \in \mathbb{R}$, entonces existe la integral de cf y $\int cf d\mu = c \int f d\mu$

b) Si $f \leq g$ y existen sus integrales, entonces $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

c) Si $f \leq g$, existe la $\int f d\mu$ y $-\infty < \int f d\mu$, entonces existe la $\int g d\mu$. Y si existe la $\int g d\mu < \infty$, entonces existe $\int f d\mu$

d) Si existe la integral de f, entonces $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$

Prop 2.3.6:

e) Si $f \geq 0$ es medible y $B \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\int_B f d\mu = \int I_B f d\mu$$

f) Si existe la integral de f, entonces existe la integral de f en cada $B \in \mathcal{A}$ y $\int_B f d\mu = \int I_B f d\mu$ y si f es integrable en Ω, también lo es en cada B.

3.3. Teoremas Básicos de Integración

3.4. Teorema de la carga

Sea h una función medible con integral, entonces

$$\lambda : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}\,, \qquad \lambda(A) = \int_A h d\mu$$

es una medida si $h \geq 0$ y en general es una carga (medida que se permite ser negativa). Además, si $\mu(A) = 0$, entonces $\lambda(A) = 0$

Nota 1: Denotamos la carga λ del resultado anterior por $\lambda = h\mu$ y llamaremos a μ la medida base de λ.

Nota 2: Se sigue del resultado anterior que si $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ es medible, entonces para todo $A \in \mathcal{A}$:

$$\int |f| d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_{A^c} |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

Ejemplo 2.4.4 Veamos como consecuencia de los resultados anteriores que la función $\operatorname{sen} x/x$ no es Lebesgue integrable en $(0, \infty)$,

$$\int_{(0,\infty)} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dm = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(n\pi,(n+1)\pi)} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dm \geq$$
$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{(n\pi,(n+1)\pi)} |\operatorname{sen} x|\, dm = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi} = \infty,$$

sin embargo veremos en el ejemplo (3.4.4), pág.134, que es Riemann integrable (impropia), pues existe el límite

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{a \to \infty} \int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3.4.1. Teorema de Convergencia Monótona

Teorema de convergencia monótona:
Sea h_n una sucesión creciente de funciones medibles no negativas, entonces existe $h(x) = \lim h_n(x)$, es medible, tiene integral y:

$$\int h_n d\mu \uparrow \int h d\mu$$

3.4.2. Integral de una Suma

Aditividad: Sea f, g funciones medibles, con integral tales que tanto $f+g$ como $\int f d\mu + \int g d\mu$ están bien definidas, entonces $f+g$ tiene integral y:

$$\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Corolario: $\mathcal{L}_1$ (funciones Lebesgue- integrables a los K) es un K-espacio vectorial y la aplicación:

$$\Lambda : \mathcal{L}_1 \to K \quad , \quad \Lambda(f) = \int f d\mu$$

es K lineal (es un elemento del espacio dual). Además, para cada $f \in \mathcal{L}_1$, $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$

Corolario: Si h_n son funciones medibles no negativas, entonces:

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int h_n d\mu$$

3.5. Teorema de Convergencia Dominada

:
Sean h, f, f_n funciones medibles, tales que existe $\int h d\mu$, entonces:

a) Si $-\infty < \int h d\mu, h \leq f_n$ y $f_n \uparrow f$, entonces:

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$$

b) Si $\int h d\mu < \infty$ y $f_n \leq h$ y $f_n \downarrow f$, entonces:

$$\int f_n d\mu \downarrow \int f d\mu$$

Lema de Fatou: Sean h, f_n funciones medibles tales que existe $\int h d\mu$, entonces:

a) Si $h \leq f_n$, $-\infty < \int h d\mu$, entonces:

$$\liminf \int f_n d\mu \geq \int (\liminf f_n) d\mu$$

b) Si $f_n \leq h$ y $\int h d\mu < \infty$, entonces:

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int (\limsup f_n) d\mu$$

Teorema de la convergencia dominada: Sean $h, f, f_n : \Omega \to K$ medibles tales que $|f_n| \leq h$, h es integrable y $f_n \to f$, entonces f es integrable y :

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$$

3.6. Teorema de convergencia dominada

Teorema de convergencia monótona extendido: Sea h, f, f_n funciones medibles, tales que existe $\int hd\mu$, entonces:

- Si $-\infty < \int hd\mu, h \leq f_n$ y $f_n \uparrow f$, entonces:

$$\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$$

- Si $\int hd\mu < \infty, f_n \leq h$ y $f_n \downarrow f$, entonces:

$$\int f_n d\mu \downarrow \int f d\mu$$

Teorema de la Convergencia Dominada: Sean $h, f, f_n : \Omega \to K$ funciones medibles con $|f_n| \leq h$, h es integrable y $f_n \to f$, entonces f es integrable y:

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$$

Teorema: Sean h_n medibles tales que $\sum \int |h_n| d\mu < \infty$, entonces $\sum h_n$ converge casi siempre a una función medible finita y:

$$\int \sum h_n d\mu = \sum \int h_n d\mu$$

3.7. Integrales de Riemann y Lebesgue

Def Partición: Sea $a < b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada $|f| \leq M$. Por una partición finita de I entendemos un conjunto finito $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$

Def: Para cada partición P de I consideramos los intervalos disjuntos correspondientes E_i y los valores $M_i = \sup\{f(x)|x \in E_i\}$, $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in E_i\}$ y las funciones simples:

$$\beta_P = \sum m_i I_{E_i} \quad , \quad \alpha_P = \sum M_i I_{E_i}$$

Que son las **funciones simples inferior y superior** de f relativas a P.
Y cuyas integrales son:

$$\int_{[a,b]} \beta_P dm = \sum m_i (x_i - x_{i-1}) \ , \ \int_{[a,b]} \alpha_P dm = \sum M_i (x_i - x_{i-1})$$

llamamos **suma inferir y superior de** f respecto a P.

Es fácil demostrar que si $P_n \uparrow P$ es una sucesión creciente de particiones finitas de I y denotamos α_n, β_n las funciones simples inferior y superior de f relativas a P_n, entonces:

$$-M \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq f \leq \cdots \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq M$$

Y por tanto, existe los límites $\alpha_n \downarrow \alpha$ y $\beta_n \uparrow \beta$ que son funciones Borel medibles y $\beta \leq f \leq \alpha$ y son funciones integrables porque $|\alpha_n| \leq M$, $|\beta_n| \leq M$ por el teorema de la convergencia dominada.

Riemann Integrable: Diremos que f lo es si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para toda sucesión creciente $P_n \uparrow P$ de particiones finitas de I, tales que $|P_n| \to 0$, las funciones Borel-medibles α, β verifican:

$$\int_{[a,b]} \alpha dm = \int_{[a,b]} \beta dm = r$$

Valor que denotamos por $\int_a^b f(x)dx$

Teorema de Caracterización: Sea $f : I \to \mathbb{R}$ acotada, entonces lo siguiente es equivalente:

a) f es Riemann integrable

b) Existe una sucesión creciente de particiones finitas P_n cuyas funciones límite superior e inferior cumplen:

$$\int_{[a,b]} \alpha dm = \int_{[a,b]} \beta dm$$

c) f es continua casi siempre.
Y en cualquiera de estos casos, f es Lebesgue medible y la integral de Lebesgue y de Riemann coinciden.

4. Espacios de Funciones Medibles

4.1. Los espacios $\mathcal{L}_p$

A lo largo de todo el tema consideramos un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Definición: Para cada $0 < p < \infty$ y $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, definimos el espacio $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, K)$ de las funciones medibles $f : \Omega \to K$ tales que:

$$\int |f|^p d\mu < \infty$$

y para cada $f \in \mathcal{L}_p$ y $p \geq 1$, definimos:

$$||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Prop: Para $0 < p < \infty$, $\mathcal{L}_p(\Omega, K)$ es un K-e.v.

4.1.1. El espacio $\mathcal{L}_\infty$

Localmente nulo: Es un conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que para cada $B \in \mathcal{A}$ con $m(B) < \infty$, se tiene que $\mu(A \cap B) = 0$.
Diremos que una propiedad se vale casi seguro si el conjunto de puntos en el que se cumple es localmente nulo.

Denotamos con $\mathcal{L}_\infty$ al espacio de funciones medibles $f : \Omega \to K$ que llamamos **esencialmente acotados**, para los que existe $0 \leq c < \infty$ tal que $\{|f| > c\}$ es localmente nulo, y para ellas definimos:

$$||f||_\infty = \text{ínf}\{c > 0 \mid \{|f| > c\} \in \mathcal{N}^*\}$$

Prop. $\mathcal{L}_\infty$ es un $K-$espacio vectorial y $||f||_\infty$ es una semi-norma.

4.2. Los Espacios de Banach L_p

4.2.1. Desigualdades fundamentales

Def: Decimos que $1 < p, q < \infty$ son conjugados si $p + q = pq$ o equivalentemente, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lema: Sean $1, p, q < \infty$ conjugados y $a, b >\geq 0$, entonces:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Sean $a, b \geq 0$ y $r > 0$ entonces:

$$\begin{aligned} 0 < r < 1 \quad &\Rightarrow \quad (a+b)^r < a^r + b^r \\ r > 1 \quad &\Rightarrow \quad (a+b)^r > a^r + b^r \end{aligned}$$

Desigualdad de Holder: Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados. Si $f \in \mathcal{L}_p, g \in \mathcal{L}_q$, entonces $fg \in \mathcal{L}_1$ y:

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz (es un caso especial): Si $f, g \in \mathcal{L}_2$, $f\bar{g} \in \mathcal{L}_1$ y:

$$\left| \int f\bar{g}d\mu \right| \leq ||f||_2 ||g||_2$$

Desigualdad de Minkowsky: Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in \mathcal{L}_p$, entonces $f + g \in \mathcal{L}_p$ y:

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Corolario: Para cada $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{L}_p$ es un e.v. sobre K y $|| \cdot ||_p$ es una seminorma sobre él. Es decir, cumple la desigualdad del triángulo, saca escalares con valor absoluto.
Sin embargo, es semi porque $||f|| = 0$ no implica $f = 0$ (implica $f = 0$ casi siempre).

4.2.2. El espacio $\mathcal{L}_p$ para $0 < p < 1$

Para $0 < p < 1$, $|| \cdot ||_p$ no es ni una seminorma pues no cumple la desigualdad del triángulo. Para verlo, consideramos conjuntos medibles disjuntos A, B con $\mu(A) = a$, $\mu(B) = b$ finitos y no nulos.
Sea $f = I_A$ y $g = I_B$, entonces $f + g = I_{A \cup B}$ y:

$$||f+g|||_p = \left(\int I_{A \cup B} d\mu \right)^{1/p} = (a+b)^{1/p} > a^{1/p} + b^{1/p} = ||f||_p + ||g||_p$$

Sin embargo, en estos espacios podemos definir directamente una seudométrica como sigue:

$$d_p(f, g) = \int |f-g|^p d\mu$$

y tiene las propiedades:

- $d_p(f, g) \geq 0$
- $d_p(f, g) = 0$ sii $f = g$ casi siempre
- $d_p(f, g) = d_p(g, f)$
- $d_p(f, g) \leq d_p(f, h) + d_p(h, g)$

4.3. Los espacios L_p

En general, las seudométricas para $0 < p < 1$ no son métricas y las seminormas $||\cdot||_p$ para $1 \leq p \leq \infty$ no son normas, pues tenemos que:

- **Para** $0 < p < 1$**:** La semimétrica es $d_p(f,g) = \displaystyle\int |f-g|^p d\mu$, y es pseudo porque $d_p(f,g) = 0$ sii $f = g$ c.s.
- **Para** $1 \leq p < \infty$**:** La seminorma es $||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$. Es pseudo porque $||f||_p = 0$ sii $f = 0$ casi siempre
- **Para** $p = \infty$**:** La seminorma es $||f||_\infty = \text{ínf}\{c > 0 \,|\{|f| > c\}$ es localmente nulo $\}$. Es seminorma porque $||f||_\infty = 0$ sii $f = 0$ es localmente casi siempre 0.

Sin embargo, podemos convertir esto en una norma, pues:
Definición: Decimos que dos funciones medibles $f, g : \Omega \to K$ son **equivalentes** , $f \simeq g$ si $f = g$ localmente casi siempre. Es fácil ver que es una relación de equivalencia. Entonces, definimos los espacios cocientes para $0 < p \leq \infty$:

$$L_p = \mathcal{L}_p / \simeq$$

Es decir, en este espacio vamos a identificar a dos funciones como iguales si son iguales l.c.s. Y ahora las seminormas y semimétricas ya son normas y métricas.

Lema: Si $0 < p < \infty$ y $f, g \in \mathcal{L}_p$, entonces:

$$f = g \text{ c.s} \quad \text{sii} \quad f = g \text{ l.c.s.}$$

Por lo que ahora ya tenemos verdaderamente espacios normados y espacios métricos. En vez de ecribir los elementos como clases de equivalencia, los escribiremos como funciones.

- **Ejemplo (Los espacios de Banach** $(K^n, ||\cdot||_p)$**)**
  Si $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ es finito y μ es la medida de contar, entonces cada función $f : \Omega \to K$ se identifica con $x = (x_1, \cdots, x_n) \in K^n$ como $f(\omega_i) = x_i$, en cuyo caso, para $p < \infty$ tenemos que:

$$||f||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = ||x||_p \quad , \quad (L_p, ||\cdot||_p) = (K^n, ||\cdot||_p)$$

  y para $p = \infty$, $||f||_\infty = \text{máx}\{|x_i|\} = ||x||_\infty$
  Es decir, la norma de la función se reduce a la p-norma típica de K^n.

- **Ejemplo (Los espacios** l_p **de sucesiones)**: En el caso particular de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ para μ la medida de contar. Es habitual escribir l_p en vez de L_p. Es común pensar en f como sucesiones $f(n) = x_n \in K$ en vez de como funciones. Entonces, l_p es el espacio de las sucesiones $f = (x_n)$ tales que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

y para $p = \infty$, l_∞ es el espacio de sucesiones acotadas.

4.3.1. Compleción de los Espacios L_p

Vamos a demostrar que toda sucesión de Cauchy en L_p es convergente. Notar que la convergencia en L_p no es igual a la convergencia puntual y se define que $f_n \to f$ en L_p como:

- **Para** $0 < p < 1$: $d_p(f, f_n) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int |f_n - f|^p d\mu \to 0$
- **Para** $1 \leq p < \infty$: $||f - f_n||_p \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int |f_n - f|^p d\mu \to 0$ omitimos el $()^{1/p}$ porq no importa
- **Para** $p = \infty$: $||f - f_n||_\infty \to 0$

Lema: Sea $0 < p < \infty$ y $f_n \in \mathcal{L}_p$ una sucesión de Cauchy, entonces existe f medible y una subsucesión g_n de f_n tal que $g_n \to f$ casi siempre.

Teorema 6.2.13: Para $1 \leq p \leq \infty$, $(L_p, || \cdot ||_p)$ son espacios de Banach (un espacio métrico completo) y para $0 < p < 1$, los espacios métricos (L_p, d_p) son completos.

Teorema 6.2.14: Si $f_n \in \mathcal{L}_p$ es una sucesión de Cauchy, con límite f, entonces: Para $p = \infty$, $f_n(x) \to f(x)$ l.c.s.
Y para $0 < p < \infty$, existe una subsucesión de f_n que converge c.s. a f.

4.4. Espacio Dual

Entenderemos V_1, V_2, V_3 espacios normados sobre $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definición: Dada una aplicación lineal $T : V_1 \to V_2$, definimos su **norma** como:

$$||T|| = \sup\{||T(x)||/||x|| \ : \ 0 \neq x \in V_1\}$$

y decimos que T es acotada si $||T|| < \infty$.

Nota: Podemos tomar el supremo sólo sobre las x con $||x|| = 1$ por la linealidad.
Además, vemos que T es **acotada** sii existe $k \in [0, \infty)$ tal que para todo $x \in V_1$:

$$||T(x)|| \leq k||x||$$

Y que de hecho $||T||$ es el ínfimo de estas constantes k.

Teorema: Para una aplicación lineal $T : V_1 \to V_2$ son equivalentes:

a) T es u.c

b) T es continua en un punto.

c) T es acotada.

Claro que para e.v. finitos, siempre se cumplen las tres propiedades.

- Dem: a) a b) es obvio.
  b) a c): Supongamos que T es continua en y, entonces $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $||x-y|| \leq \delta \Rightarrow ||T(x-y)|| = ||T(x)-T(y)|| \leq \epsilon$. En particular, si $z = x-y$, quiere decir que si $||z|| \leq \delta \Rightarrow \ ||T(z)|| \leq \epsilon$. Se sigue que si $x \neq 0$, llamamos $z = \delta x/||x||$, $||z|| = \delta$ y:

  $$||T(x)|| = ||x||||T(z)||/\delta \leq (\epsilon/\delta)||x||$$

  Por lo que $||T(x)|| \leq k||x||$ y entonces T es acotada.

  c) a a): $||T(x) - T(y)|| = ||T(x-y)|| \leq ||T||||x-y||$ (por acotada). Entonces T es Lipschitz y por tanto es u.c.

Teorema: Sean V_1, V_2 K-e.v. normados. Entonces definimos el espacio $B(V_1, V_2)$ de las aplicaciones **lineales continuas** $T : V_1 \rightarrow V_2$ con la suma y producto por escalares como esperamos.
Se le define el operador norma como definimos antes y entonces eso implica que $B(V_1, V_2)$ es un **espacio normado**.
Además, si V_2 es de Banach (normado completo) entonces $B(V_1, V_2)$ es de Banach.

Def: Dado un espacio normado V, denotamos por V' el espacio vectorial dual de las funciones lineales $f : V \rightarrow K$ y denotamos con $V^* = B(V, K)$ el espacio de los funcionales **lineales y continuos**.

Teorema: El dual V^* de un espacio normado V es un espacio de Banach con la norma definida en él como:

$$||f|| = \sup\{|f(x)| \mid ||x|| \leq 1\}$$

Dem: Es una consecuencia del teorema anterior y de que K es completo.

Def: Diremos que una aplicación $T : V_1 \rightarrow V_2$ es una **isometría** si es lineal y para cualquier $x \in V$ se cumple:

$$||T(x)|| = ||x||$$

Nota que es acotada y por tanto continua. Si es sobre, diremos que es un **isomorfismo.**

Nota: Hay una aplicación lineal y continua natural entre un espacio normado V y su bidual $V^{*}*$, dada por:

$$\pi : V \to V^{*}* \quad , \quad \pi(x) = \widehat{x} \quad , \quad \widehat{x}(f) = f(x)$$

Que está bien definida, pues $\widehat{x} \in V^{*}*$ porque es un operador lineal y acotado de V^* a K.

Teorema de Hahn-Banach: Sea V un espacio normado, $W \subset V$ un subespacio y $f_0 \in W^*$, entonces existe $f \in V^*$ tal que $f|_W = f_0$ y $||f|| = ||f_0||$

4.5. Espacio Dual de L_p

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados. Entonces para cada $g \in \mathcal{L}_q$, podemos definir el funcional asociado a g como:

$$T_g : \mathcal{L}_p \to K \quad , \quad T_g(f) = \int fgd\mu$$

O podemos extenderlo de modo obvio a $T_g : L_[\to K$.
Esta función es lineal y continua, por lo que $T_g \in L_p^*$. Esto por la desigualdad de Holder que dice que para todo $f \in \mathcal{L}_p$:

$$|T_g(f)| \leq ||g||_q ||f||_p \quad \Rightarrow \quad ||T_g|| \leq ||g||_q$$

Entonces, la desigualdad de Holder nos permite acotar la función $T_g : L_p \to K$ y entonces T_g es lineal y continua.
Entonces, podemos definir la aplicación:

$$T : L_q \to L_p^* \quad , \quad g \to T(g) = T_g$$

Donde:

$$T_g(f) = \int fgd\mu$$

Teorema 6.4.1: Para $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados, la aplicación $T : L_q \to L_p^*$ es una isometría. Es decir $||T(g)|| = ||g||_q$.

Además. la isometría $T : L_q \to L_p^*$ es un isomorfismo en casi todos los casos:

- Si $1 < p, q < \infty$, entonces $L_q \simeq L_p^*$

- Si $p = 1$, $q = \infty$, entonces $L_\infty \simeq L_1^*$

Lema: Toda aplicación lineal continua $F : V_1 \to V_2$ entre espacios normados define otra entre los duales, a la que llamamos dual o traspuesta.

$$F^* : V_2^* \to V_1^* \quad , \quad F^*(f) = f \circ F$$

Teorema: Para $1 < p, q < \infty$ conjugados, la isometría $T : L_q \to L_p^*$ es sobre y los espacios son isorfos.
Si el espacio es $\sigma-$finita, $T : L_\infty \to L_1^*$ es sobre

4.6. Tipos de Convergencia

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f_n, f : \Omega \to K$ funciones medibles.

- **Casi seguro:** Decimos que $f_n \to f$ casi seguro si:

$$\mu\{x \in \Omega \mid f_n(x) \text{ no converge a } f(x)\} = 0$$

- **Casi uniformemente:** Decimos $f_n \to f$ casi uniformemente si para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que f_n converge uniformemente a f en A y $\mu(A^c) < \epsilon$.

- **En medida:** Decimos que $f_n \to f$ en medida si para todo $\epsilon > 0$:

$$\mu\{|f_n - f| \geq \epsilon\} \to 0$$

- **En** L_p Diremos que $f_n \to f$ en L_p si $f_n, f \in L_p$ y $d_p(f_n, f) \to 0$

Def De Cauchy: Diremos que f_n es de Cauchy casi seguro si:

$$\mu\{x \in \Omega \mid f_n(x) \text{ no es de Cauchy}\} = 0$$

De Cauchy uniformemente: Diremos que f_n es de Cauchy uniformemente si para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que f_n es de Cauchy uniformemente en A y $\mu(A^c) < \epsilon$.

De Cauchy en medida: f_n es de Cauchy en medida si para todo $\epsilon > 0$:

$$\mu\{|f_n - f_m| \geq \epsilon\} \to 0$$

cuando $n, m \to \infty$

Proposición:

a) Si f_n converge en medida a f y a g entonces $f = g$ casi siempre

b) Si $f_n \to f$ y $g_n \to g$ en medida, entonces $f_n + g_n \to f + g$ en medida

c) Si $f_n \to 0$ y $g_n \to 0$ en medida entonces $f_n g_n \to 0$ en medida

d) Si $f_n \to 0$ en medida, g es medible y $\mu(\Omega) < \infty$, entonces $f_n g \to 0$ en medida

e) Si $f_n \to f, g_n \to g$ en meidida y $\mu(\Omega) < \infty$, entonces $f_n g_n \to fg$ en medida.

a) Si $\mu(\Omega) < \infty$, entonces para cualquiera $1 \leq p \leq q \leq \infty$:

$$f_n \to f \text{ en } L_q \quad \Rightarrow \quad f_n \to f \text{ en } L_p$$

c) Si $f_n \to f$ (L_p), para un $0 < p < \infty$, entonces $f_n \to f$ en medida

d) Si $f_n \to f$ casi uniformemente, entnoces $f_n \to f$ en medida y $f_n \to f$ casi seguro.

5. Espacios de Hilbert

Def Producto Interior: Sea $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Llamamos producto interior sobre un $K-$e.v. V a toda función.

$$\langle , \rangle : V \times V \to K$$

que cumple las siguientes propiedades:

- $\langle x, x \rangle > 0$ para todo $x \in V/\{0\}$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si $x = 0$
- $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$
- $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$

Espacio Prehilbertiano: Es u $K - e.v$ V junto con un produto interior.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz: Para todo espacio pre-hilbertiano se cumple que:

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x||||y||$$

Def Espacio de Hilbert: Es un espacio prehilbertiano tal que la norma $||x|| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ lo convierte en un espacio completo.

Podríamos restringir nuestro estudio a sólo espacios de Hilbert, pues todo espacio pre hilbertiano es isomorfo a subespacio denso de un Hilbert.

Compleción: Dado un espacio prehilbertiano V, le llamamo **compleción** de V al espacio de Hilbert H (determinado salvo isomorfismos) al espacio de Hilbert tal que tiene un subespacio denso isomorfo a V.

Ejemplo: Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, el espacio L_2 correspondiente es de Hilbert, pues su norma está inducida por el producto interior:

$$\langle f, g \rangle = \int f\bar{g}d\mu$$

Y es completo bajo la norma.

5.1. Propiedades de los Espacios de Hilbert

Sea H un espacio prehilbertiano sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Proposición: La aplicación $\langle , \rangle : H^2 \to K$ es continua.
Para cada $x \in H$, las aplicaciones en H dadas por $\langle x, \cdot \rangle$ y por $\langle \cdot, x \rangle$ son uniformemente continuas.

Ley del paralelogramo: Un espacio noramdo H es prehilbertiano sii para todo $x, y \in H$ cumple la ley del paralelogramo:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

Ya que si cumple esta ley, le podemos definir un producto interno dado por:

$$4\langle x, y\rangle = ||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - ||x-iy||^2 \quad , \ K = \mathbb{C}$$
$$4\langle x, y\rangle = ||x+y||^2 - ||x-y||^2 \quad , \ K = \mathbb{R}$$

Y ahora su norma inducida por el producto punto es la norma original.

Ortogonal: Dos elementos $x, y \in H$ son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$.
Complemento Ortogonal: Para un subespacio $M \subset H$, el complmento ortogonal es:

$$M^{\perp} = \{y \in H \ \mid \forall x \in M \ y \perp x\} = \cap_{x \in M} \ker(\langle x, \cdot\rangle)$$

Un subconjunto es ortogonal si todos sus elementos son ortogonales entre sí. Y es **ortonormal** si $||x|| = 1$.

Teorema de Pitágoras: Para cualesquiera $x_1, \cdots, x_n \in H$ ortogonales:

$$||\sum x_i||^2 = \sum ||x_i||^2$$

Teorema: Sea $B = \{e_1, \cdots, e_n\} \subset H$ ortonormal y $x \in H$. Entonces $||x - \sum a_i e_i||$ es mínimo sii $a_i = \langle x, e_i\rangle$ para $i = 1, \cdots, n$

coeficiente de Fourier: Dado un subconjunto $B = \{e_i | i \in I\}$ de H ortonormal, llamamos coeficiente i-ésimo de Fourier de un punto $x \in H$ relativo a B como $\langle x, e_i\rangle$.

Def: Dado un conjunto $B \subset H$ y una función $f : B \to [0, \infty]$, llamaremos:

$$\sum_{x \in B} f(x)$$

al supremo de todas las sumas finitas $f(x_1) + \cdots + f(x_n)$ donde los $x_i \in B$.
Se puede demostrar que:

$$\sum_{x \in B} f(x) = \int_B f d\mu$$

Desigualdad de Bessel: Sea $B \subset H$ ortonormal y $x \in H$, entonces:

$$\sum_{y \in B} |\langle x, y\rangle|^2 \leq ||x||^2$$

Teorema de Riesz - Fischer: Si H es de Hilbert y $B \subset H$ ortonormal, entonces para cada $f \in l_2(B)$, existe un $x \in H$ tal que $f = \langle x, \cdot \rangle$.

Teorema: Sea H prehilbertiano, entonces:

a) Si $C \subset H$ es convexo, completo y no vacío, entonces para cada $x \in H$ existe un único $y \in C$ aproximación óptica de $x \in C$ tal que:

$$||x - y|| = \text{ínf}\{||x - z|| \mid z \in C\}$$

Teorema de Proyección: Sea M un subespacio completo de un espacio prehilbertiano H. Entonces existe únicas transformaciones lineales:

$$P : H \to M \quad , \quad Q : H \to M^{-1}$$

tales que:

a) Para cada $x \in H$, $x = P(X) + Q(x)$

b) Para cada $x \in M$, $P(x) = x$ y para cada $x \in M^{\perp}$, $Q(x) = x$

c) $||x - P(x)|| \leq ||x - y||$, para $x \in H, y \in M$

d) Para cada $x \in H$,

$$||x||^2 = ||P(x)||^2 + ||Q(x)||^2$$

Como consecuencia, se tiene que $H = M \oplus M^{\perp}$.

En H prehilbertiano, podemos definir la aplicación:

$$\sigma : H \to H^* \ , \qquad \sigma(x) = \sigma_x = \langle \cdot, x \rangle$$

Teorema de Riesz: Si H es de Hilbert, σ es un isomorfismo y la norma de H^* viene inducida por el producto interior, entonces:

$$\langle \sigma_x, \sigma_y \rangle = \langle y, x \rangle$$

Corolario: Si H es de Hilbert, enotnces H^* es de Hilbert y H es reflexivo, es decir, la isometría canónica dada por:

$$\pi : x \in H \to \widehat{x} \in H^{**} \ , \qquad \widehat{x}(\omega) = \omega(x)$$

es sobre.

5.2. Clasificación de los espacios de Hilbert

Dado $B \subset H$, entendemos por $\langle B \rangle$ el subespacio generado por B y por $s(B)$ el mínimo subespacio cerrado que contiene a B.

Teorema de Gramm-Schmidt: Sea H un espacio prehilbertiano y $A \subset H$ un subconjunto con vectores independiente. Entonces existe $B \subset H$ tal que $\#A = \#B$ y $\langle A \rangle = \langle B \rangle$.

Base Ortonormal: Diremos que $B \subset H$ es una base ortonotmal de H si B es ortonormal y dado C ortonormal con $B \subset C \subset H$, entonces $B = C$.

Teorema: Sea H de Hilbert y B ortonormal, entonces son equivalente:

a) B es una base ortonormal

b) $B^{\perp} = \{0\}$

c) $S(B) = H$

d) Para cada $x \in H$ se tiene:

$$x = \sum_{y \in B} \langle x, y \rangle y = \sum_{y \in B} \sigma_y(x) y$$

e) **Identidad de Parseval:** Para $x, y \in H$ se tiene:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{z \in B} \langle x, z \rangle \langle z, y \rangle$$

f) Si $x \in H$,

$$||x||^2 = \sum_{z \in B} |\langle x, z \rangle|^2 = \sum_{z \in B} |\sigma_x(z)|^2$$

Prop: Cada espacio prehilbertiano tiene una base ortonormal.
Dos bases ortonormales en un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal

Teorema: Sea S un conjunto arbitrario y H un espacio de Hilbert con base ortonormal B con $\#B = \#S$, entonces hay un isomorfismo isométrico entre H y $l_2(S)$

5.3. Teorema Ergódico en L_2

Teorema: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida $\sigma-$finito, $T : \Omega \to \Omega$ una transformación conservando la medida. $f_1 \in L_2, f_{n+1} = T^*(f_n) = f_1 \circ T^n$ y :

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i$$

Entonces existe $g \in L_2$ tal que $g_n \to g$ y cumple:

- $T^*(g) = g$ casi siempre
- $||g||_2 \leq ||f_1||_2$
- Se tiene $\langle f, g\rangle = \langle f, f_1\rangle$ para cada $f \in L_2$ tal que $T^*(f) = f$

6. Espacios de Banach

6.1. Teorema de Hahn Banach

Lema: Sea V un $\mathbb{R}$ e.v. y sea $p : V \to \mathbb{R}$ tal que:

a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

b) $p(tx) = tp(x)$
Si $g : S \to \mathbb{R}$ es lineal y $g \leq p$ en S. Entonces son equivalentes para $e \in V$ y $c \in R$:

c) $g(x) + tc \leq p(x+te)$

d) $-p(-x-e) - g(x) \leq c \leq p(x+e) - g(x)$

Teorema de Hahn Banach: En las condionces anteriores, si $g \leq p$ en S, existe un funcional lineal $\bar{g} : V \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{g} = g$ en S y $\bar{g} \leq p$ en V.

Seminorma: Diremos que $p : V \to [0, \infty)$ es una seminorma si:

a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

Si además $p(x) = 0$ sii $x = 0$, entonces es una norma.

Teorema de Hahn Banach complejo: Sea V un $\mathbb{C}$-ev y $p : V \to 0, \infty)$ una seminorma. Si $g : S \to \mathbb{C}$ es lineal y $|g| \leq p$ en S, entonces existe $\bar{g} : V \to \mathbb{C}$ lineal tal que $\bar{g} = g$ en S y $|\bar{g}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in V$.

Corolario: Sea V un $K-$ev normado, $S \subset V$ un subespacio y $g \in S^*$, entonces existe $\bar{g} \in V^*$ tal que $\bar{g} = g$ en S y $||\bar{g}|| = ||g||$.
Es decir, el dual no es vacío

6.2. Teoremas clásicos

Espacio de Banach; Es un espacio normado y completo.

Teorema de Baire: Sea X un espacio métrico completo y U_n una sucesión de abiertos densos en X, entonces $\cap U_n$ es denso en X.
Decimos que un conjunto es de primera categoría si es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte y de segunda categoría sino.

Denso en ningún lado: Un conjunto E es d.e.n.l en X espacio topolórigo si $(\bar{E})^o = \emptyset$.
Se tiene que $E^o = \emptyset$ sii $B = X/E$ cumple $\bar{B} = X$

Corolario: Todo espacio métrico es de segunda categoría

Teorema de Banach-Steinhaus (principio de acotación uniforme): Sea V un espacio de Banach, N un espacio normado y $\{L_i : V \to N \ , i \in I\}$ un conjunto de aplicaciones lineales acotadas puntualmente, es decir, tales que para cada $x \in V$ existe un $k > 0$ tal que para todo $i \in I, ||L_i(x)|| < k$. Entonces:

$$\sup\{||L_i|| \ : \ i \in I\} < \infty$$

Teorema de Aplicación continua: Sea $L : V \to W$ una aplicación lineal continua y sobre entre espacios de Banach, entonces es abierta. Por tanto, si L es también inyectiva entonces L es un isomorfismo lineal y continuo.