Álgebra Moderna Tarea 6.3

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

11 de enero de 2021

a) **Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos. Si G tiene una serie de composición de longitud n, entonces $Ker(f)$ e $Im(f)$ admiten series de composición de longitud r, s respectivamente con $n = r + s$**

Es un resultado directo del teorema 38.3 demostrado en las notas.
El teorema dice que si G es un grupo y $K \trianglelefteq G$. Si G admite una serie de composición de longitud n, entonces K admite una serie de composición de longitud r y G/K admite una serie de composición de longitud s, donde $n = s + r$

En nuestro caso en particular, ya hemos probado antes que $Ker(f) \trianglelefteq G$.
Entonces, como G tiene una serie de composición de longitud n, el teorema 38.3 nos asegura que $Ker(f)$ tiene una serie de composición de longitud r y G/K tiene una serie de composición de longitud s, donde $n = r + s$.

Sin embargo, el primer teorema de isomorfismo nos asegura que $G/Ker(f) \simeq Im(f)$.
Entonces, el párrafo anterior nos asegura que $Im(f)$ tiene una serie de composición de longitud s y que $n = r + s$

b) **Sea G un grupo abeliano de orden $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ donde p_i es primo tal que $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$. Prueba que G admite una serie de composición de longitud $a_1 + \cdots + a_k$**

Procedemos por inducción sobre $|G|$.
Si $|G| = 1$, el resultado es trivialmente cierto.
Digamos que el teorema es válido para todo grupo G con orden $|G| < n$.

Ahora consideremos un G de orden $|G| = n$. Como G es abeliano, entonces todos los subgrupos de G son normales y podemos no preocuparnos por normalidad.

Probamos en la tarea 5.1 que un grupo abeliano G tiene subgrupos de todos los ordenes que dividen a $|G|$.
En particular, podemos encontrar un subgrupo K de orden $K = p_1^{a_1-1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ y es normal por ser G abeliano.

Por hipótesis inductiva, K tiene una serie de composición de orden $s := a_1 - 1 + a_2 + a_3 + \cdots a_k$.
Digamos que la serie es:

$$\{e\} = K_s \subset \cdots \subset K_2 \subset K_1 \subset K$$

Luego, podemos convertir esta serie en una para G al agregar G al final como:

$$\{e\} = K_s \subset \cdots \subset K_2 \subset K_1 \subset K \subset G$$

Para ver que se trata de una serie de composición, sabemos que todos los subgrupos son normales por ser abeliano.
Luego, todos los cocientes K_{i-1}/K_i son simples porque teníamos que $\{e\} = K_s \subset \cdots \subset K_2 \subset K_1 \subset K$ es una serie de composición.
Ya sólo falta ver que el último factor G/K es simple.
Esto es claro porque G/K tiene orden $|G/K| = |G|/|K| = p_1$ que es un primo. Y todo grupo abeliano de orden primo es simple (porque sólo tiene como subgrupos a los triviales por ser de orden primo), por lo que G/K es simple.

Lo que prueba que tenemos una serie de composición de G con longitud $s + 1$. Pero $s + 1 = a_1 - 1 + a_2 + \cdots + a_k + 1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.
Por lo que se prueba el paso inductivo.

c) **Sea $n = p_1 p_2 \cdots p_r$ con p_i primos distintos**

- **Prueba que $\mathbb{Z}_n$ tiene exactamente r subgrupos normales maximales**

  $\mathbb{Z}_n$ es un grupo cíclico de orden n. Como es abeliano, no tenemos que preocuparnos porque un subgrupo sea normal ya que todos los subgrupos son normales.
  Por lo que vimos sobre grupos cíclicos, un grupo cíclico de orden n tiene un único subgrupo para cada uno de los factores de n.

  No solo eso sino que sabemos que si $\langle \bar{r} \rangle, \langle \bar{s} \rangle \leq \mathbb{Z}_n$ entonces s divide a r sii $\langle \bar{r} \rangle \leq \langle \bar{s} \rangle$.

  Consideramos el subgrupo $\langle \bar{p}_i \rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}_n$
  Vemos que este subgrupo es maximal porque para que existiera un subgrupo más grande de la forma $\langle \bar{q} \rangle$ deberíamos de tener que $\langle \bar{p}_i \rangle \trianglelefteq \langle \bar{q} \rangle$
  Sin embargo, por lo dicho antes, para ello se debe de tener que q divide a p_i. Como p_i es primo, las únicas posibilidades son $q = 1$ y $q = p_i$. Pero si $q = 1$, entonces $\langle \bar{q} \rangle = \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_n$ y si $q = p_i$ entonces $\langle \bar{q} \rangle = \langle \bar{p}_i \rangle$. Por tanto, no hay un subgrupo normal entre $\langle \bar{p}_i \rangle$ y $\mathbb{Z}_n$ distinto de estos dos.

  Entonces, ya tenemos r subgrupos normales maximales $\langle \bar{p}_1 \rangle, \langle \bar{p}_2 \rangle, \cdots, \langle \bar{p}_r \rangle$.

  Ahora hay que mostrar que estos son los únicos subgrupos normales maximales.
  Para ello, consideramos un subgrupo $H \leq \mathbb{Z}_n$ distinto a los $\langle \bar{p}_i \rangle$.
  Como estamos en $\mathbb{Z}_n$, este grupo se tiene que ver de la forma $H = \langle \bar{h} \rangle$ donde h es un divisor de n.
  Como n se descompone en factores primos como $n = p_1 \cdots p_r$, para que h sea divisor de n, h debe de tener como factor primo a alguno de los p_k.
  Es decir, algún p_k divide a h, lo cual implica que $\langle \bar{h} \rangle \trianglelefteq \langle \bar{p}_k \rangle$.
  Como H es distinto de los $\langle \bar{p}_i \rangle$, la contención $\langle \bar{h} \rangle \subset \langle \bar{p}_k \rangle$ es propia (y además $\langle \bar{p}_k \rangle \neq \mathbb{Z}_n$), entonces $H \trianglelefteq \langle \bar{p}_k \rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}_n$, existe un subgrupo normal entre H y $\mathbb{Z}_n$ y por tanto H no es un normal maximal.

  Por tanto, los únicos normales maximales son los r subgrupos $\langle \bar{p}_1 \rangle, \langle \bar{p}_2 \rangle, \cdots, \langle \bar{p}_r \rangle$.

- **Muestra que $\mathbb{Z}_n$ tiene $r!$ cadenas de composición (Hint: Inducción)**

  Procedemos por inducción sobre r.

  Si $r = 1$ entonces nos interesan los grupos con orden $n = p_1$, es decir, los grupos de orden primo.
  Un grupo $\mathbb{Z}_n$ con $n = p_1$ tiene solamente como subgrupos normales a e y a $\mathbb{Z}_n$, por lo que la única serie de composición es $\{e\} \subset \mathbb{Z}_n$. Por tanto, cumple con tener $r! = 1!$ series de composición.

Suponemos que el teorema se cumple para $r-1$. Es decir, si $n = p_1p_2\cdots p_{r-1}$ con p_i primos, entonces $\mathbb{Z}_n$ tiene $(r-1)!$ series de composición.

Lo probamos para r. Sea $n = p_1p_2\cdots p_r$ con p_i cualesquiera primos distintos.

Como vimos en el inciso anterior, $\mathbb{Z}_n$ tiene r subgrupos maximales, por lo que si queremos crear una serie de composición en $\mathbb{Z}_n$, dicha serie tiene que tener como último subgrupo a alguno de estos r subgrupos $\langle\bar{p}_1\rangle, \langle\bar{p}_2\rangle, \cdots \langle\bar{p}_r\rangle$ (la serie de composición tiene que acabar con un grupo normal maximal y no cualquier otro subgrupo normal para asegurarnos que así el último factor es simple según el teorema de correspondencia tal como dice el ejercicio 35.7 b)

Entonces digamos que la serie de composición tiene como último subgrupo a $\langle\bar{p}_1\rangle$. Luego, podríamos continuar la serie 'hacia abajo' considerando una serie de composición de $\langle\bar{p}_1\rangle$. Pero $\langle\bar{p}_1\rangle \simeq \mathbb{Z}_{p_2p_3\cdots p_r}$.
Como $p_2p_3\cdots p_r$ es el producto de $r-1$ primos, la hipótesis de inducción nos asegura que $\mathbb{Z}_{p_2p_3\cdots p_r}$ tiene $(r-1)!$ series de composición. (y claramente se cumple lo mismo si cambiamos 1 por algún otro índice entre 1 y r)

Por tanto, para la serie de $\mathbb{Z}_n$ podemos empezar escogiendo alguno de los r subgrupos maximales $\langle\bar{p}_i\rangle$ y luego nos quedarán $(r-1)!$ posibilidades para seguir la serie de composición 'hacia abajo'.
Por tanto, tendremos un total de $r(r-1)! = r!$ opciones para crear la serie.