Cálculo Tensorial Tarea Examen 3

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

20 de enero de 2021

1. Dados los sistemas coordenados $x^\alpha = \{x^1, x^2, x^3\}$ y $y^\alpha = \{y^1, y^2, y^3\}$, que cumplen las siguientes condiciones:

$$x^1 = y^1 \cos y^2$$
$$x^2 = y^1 \sin y^2$$
$$x^3 = y^3$$

a) Calcule las componentes del tensor métrico en su forma covariante g_{bc}

Primero buscamos los vectores base en coordenadas cilíndricas.

Según la regla de transformación vista en clase, para pasar los vectores base de un sistema de coordenadas x^i a uno y^j se sigue la relación:

$$\vec{e}_{y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \vec{e}_i$$

Entonces, usando las relaciones entre las variables x y y, en tenemos que los vectores base son:

- $\vec{e}_{y^1} = \frac{\partial x^i}{\partial y^1}\vec{e}_i = \frac{\partial x^1}{\partial y^1}\vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^1}\vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial y^1}\vec{e}_3 = \frac{\partial(y^1 \cos y^2)}{\partial y^1}\vec{e}_1 + \frac{\partial(y^1 \sin y^2)}{\partial y^1}\vec{e}_2 + \frac{\partial y^3}{\partial y^1}\vec{e}_3$
$= \cos y^2 \vec{e}_1 + \sin y^2 \vec{e}_2$

- $\vec{e}_{y^2} = \frac{\partial x^i}{\partial y^2}\vec{e}_i = \frac{\partial x^1}{\partial y^2}\vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial y^2}\vec{e}_3 = \frac{\partial(y^1 \cos y^2)}{\partial y^2}\vec{e}_1 + \frac{\partial(y^1 \sin y^2)}{\partial y^2}\vec{e}_2 + \frac{\partial y^3}{\partial y^2}\vec{e}_3$
$= -y^1 \sin y^2 \vec{e}_1 + y^1 \cos y^2 \vec{e}_2$

- $\vec{e}_{y^3} = \frac{\partial x^i}{\partial y^3}\vec{e}_i = \frac{\partial x^1}{\partial y^3}\vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^3}\vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial y^3}\vec{e}_3 = \frac{\partial(y^1 \cos y^2)}{\partial y^3}\vec{e}_1 + \frac{\partial(y^1 \sin y^2)}{\partial y^3}\vec{e}_2 + \frac{\partial y^3}{\partial y^3}\vec{e}_3$
$= \vec{e}_3$

Luego, las componentes covariantes de la métrica se definen como:

$$g_{ab} = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b$$

En este caso tenemos que:

- $g_{y^1y^1} = \vec{e}_{y^1} \cdot \vec{e}_{y^1} = (\cos y^2 \vec{e}_1 + \sin y^2 \vec{e}_2) \cdot (\cos y^2 \vec{e}_1 + \sin y^2 \vec{e}_2) = \cos^2 y^2 + \sin^2 y^2 = 1$
- $g_{y^1y^2} = (\cos y^2 \vec{e}_1 + \sin y^2 \vec{e}_2) \cdot (-y^1 \sin y^2 \vec{e}_1 + y^1 \cos y^2 \vec{e}_2) = -y^1 \cos y^2 \sin y^2 + y^1 \cos y^2 \sin y^2 = 0$
- $g_{y^1y^3} = (\cos y^2 \vec{e}_1 + \sin y^2 \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_3) = 0$
- $g_{y^2y^1} = (-y^1 \sin y^2 \vec{e}_1 + y^1 \cos y^2 \vec{e}_2) \cdot (\cos y^2 \vec{e}_1 + \sin y^2 \vec{e}_2) = y^1 \cos y^2 \sin y^2 - y^1 \cos y^2 \sin y^2 = 0$
- $g_{y^2y^2} = (-y^1 \sin y^2 \vec{e}_1 + y^1 \cos y^2 \vec{e}_2) \cdot (-y^1 \sin y^2 \vec{e}_1 + y^1 \cos y^2 \vec{e}_2) = (y^1)^2 \sin^2 y^2 + (y^1)^2 \cos^2 y^2 = (y^1)^2$
- $g_{y^2y^3} = (-y^1 \sin y^2 \vec{e}_1 + y^1 \cos y^2 \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 = 0$
- $g_{y^3y^1} = \vec{e}_3 \cdot (\cos y^2 \vec{e}_1 + \sin y^2 \vec{e}_2) = 0$
- $g_{y^3y^2} = \vec{e}_3 \cdot (-y^1 \sin y^2 \vec{e}_1 + y^1 \cos y^2 \vec{e}_2) = 0$
- $g_{y^3y^3} = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$

Por lo que las componentes del tensor métrico en estas coordenadas se pueden resumir en la matriz:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (y^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcule la métrica en coordenadas cilíndricas

Ya tenemos los componentes del tensor métrico, por lo que podemos calcular la métrica sencillamente como:

$$ds^2 = g_{ab} dy^a dy^b$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{ab} dy^a dy^b &= g_{11} dy^1 dy^1 + g_{12} dy^1 dy^2 + g_{13} dy^1 dy^3 + g_{21} dy^2 dy^1 + g_{22} dy^2 dy^2 + g_{23} dy^2 dy^3 \\ &\qquad + g_{31} dy^3 dy^1 + g_{32} dy^3 dy^2 + g_{33} dy^3 dy^3 \\ &= dy^1 dy^1 + (y^1)^2 dy^2 dy^2 + dy^3 dy^3 \end{aligned}$$

Es decir:

$$ds^2 = dy^1 dy^1 + (y^1)^2 dy^2 dy^2 + dy^3 dy^3$$

.

2. Muestre que la conexión de Levi-Civita puede caracterizarse de manera única si cumple las condiciones:

a) **Libre de Torsión:** $\nabla_a \nabla_b \phi = \nabla_b \nabla_a \phi$

b) **Compatibilidad con la métrica:** $\nabla_c g_{ab} = 0$

Para ϕ un campo escalar

Según el resultado del siguiente ejercicio de esta tarea, la derivada covariante de un covector ω_b en la dirección a es:

$$\nabla_a \omega_b = \partial_a \omega_b - \Gamma^c{}_{ba} \omega_c \qquad (1)$$

Ahora probamos que la condición de ser libre de torsión implica que los coeficientes de la conexión Γ son simétricos respecto a los índices inferiores.
Primero calculamos $\nabla_a \nabla_b \phi$. Para ello, tomamos en cuenta que esto es igual a $\nabla_a(\nabla_b \phi)$, que es la derivada covariante de un covector y por tanto podemos utilizar la ecuación (1).

$$\begin{aligned}
\nabla_a \nabla_b \phi &= \nabla_a(\nabla_b \phi) \\
&= \partial_a(\nabla_b \phi) - \Gamma^c{}_{ba}(\nabla_c \phi) \\
&= \partial_a \partial_b \phi - \Gamma^c{}_{ba} \partial_c \phi \quad \text{porque para una función escalar } \phi \text{ , la derivada} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{y la derivada covariante son iguales } \ \nabla_b \phi = \partial_b \phi
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\nabla_a \nabla_b \phi = \partial_a \partial_b \phi - \Gamma^c{}_{ba} \partial_c \phi$$

Por otro lado, si de ambos lados de esta ecuación intercambiamos los nombres de los índices libres a y b, nos queda que:

$$\nabla_b \nabla_a \phi = \partial_b \partial_a \phi - \Gamma^c{}_{ab} \partial_c \phi$$

Luego, por ser libre de torsión, $\nabla_a \nabla_b \phi = \nabla_b \nabla_a \phi$, al igualar esto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\partial_a \partial_b \phi - \Gamma^c{}_{ba} \partial_c \phi = \partial_b \partial_a \phi - \Gamma^c{}_{ab} \partial_c \phi \\
&\Rightarrow \ \ \partial_a \partial_b \phi - \Gamma^c{}_{ba} \partial_c \phi = \partial_a \partial_b \phi - \Gamma^c{}_{ab} \partial_c \phi \quad \text{ por la condición de libre de torsión, } \ \partial_a \partial_b \phi = \partial_b \partial_a \phi \\
&\Rightarrow \ \ -\Gamma^c{}_{ba} \partial_c \phi = -\Gamma^c{}_{ab} \partial_c \phi
\end{aligned}$$

Y como ϕ es una función arbitraria, debemos de tener que:

$$\boxed{\Gamma^c{}_{ba} = \Gamma^c{}_{ab}}$$
.

Ahora recordamos que vimos en clase que la expresión para la derivada covariante de un tensor de orden (0,2) se consigue como:

$$\nabla_c T_{ab} = \partial_c T_{ab} - \Gamma^d{}_{ca} T_{db} - \Gamma^d{}_{cb} T_{ad}$$

Y en particular, para el tensor métrico (que es de orden (0,2)), su derivada covariante es:

$$\nabla_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma^d{}_{ca} g_{db} - \Gamma^d{}_{cb} g_{ad}$$

Pero por la compatibilidad de la métrica, el lado izquierdo es 0 y entonces:

$$\partial_c g_{ab} - \Gamma^d{}_{ca} g_{db} - \Gamma^d{}_{cb} g_{ad} = 0$$

Esta expresión tiene como índices libres a, b, c. Podemos cambiar de nombre a estos índices sin problema. Si consideramos las tres posibles permutaciones de los índices $\{a, b, c\}$ en esta ecuación, nos quedan las tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\partial_c g_{ab} - \Gamma^d{}_{ca} g_{db} - \Gamma^d{}_{cb} g_{ad} = 0 \\
\partial_a g_{bc} - \Gamma^d{}_{ab} g_{dc} - \Gamma^d{}_{ac} g_{bd} = 0 \\
\partial_b g_{ca} - \Gamma^d{}_{bc} g_{da} - \Gamma^d{}_{ba} g_{cd} = 0
\end{aligned}$$

Si sumamos la segunda y tercera de estas ecuaciones, nos queda:

$$\partial_a g_{bc} - \Gamma^d{}_{ab} g_{dc} - \Gamma^d{}_{ac} g_{bd} + \partial_b g_{ca} - \Gamma^d{}_{bc} g_{da} - \Gamma^d{}_{ba} g_{cd} = 0$$

Y luego le restamos esto a la primera ecuación, para obtener:

$$\partial_c g_{ab} - \Gamma^d{}_{ca} g_{db} - \Gamma^d{}_{cb} g_{ad} - \partial_a g_{bc} + \Gamma^d{}_{ab} g_{dc} + \Gamma^d{}_{ac} g_{bd} - \partial_b g_{ca} + \Gamma^d{}_{bc} g_{da} + \Gamma^d{}_{ba} g_{cd} = 0$$

Usamos que los símbolos de la métrica son simétricos con respecto a los índices inferiores y que la métrica es también simétrica para cambiar los índices de los términos $-\Gamma^d{}_{ca} g_{db} \rightarrow -\Gamma^d{}_{ac} g_{bd}$, $-\Gamma^d{}_{cb} g_{ad} \rightarrow -\Gamma^d{}_{bc} g_{da}$, y $\Gamma^d{}_{ab} g_{dc} \rightarrow \Gamma^d{}_{ba} g_{cd}$. Con lo que nos queda:

$$\begin{aligned}
&\partial_c g_{ab} - \Gamma^d{}_{ac} g_{bd} - \Gamma^d{}_{bc} g_{da} - \partial_a g_{bc} + \Gamma^d{}_{ba} g_{cd} + \Gamma^d{}_{ac} g_{bd} - \partial_b g_{ca} + \Gamma^d{}_{bc} g_{da} + \Gamma^d{}_{ba} g_{cd} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \partial_c g_{ab} - \partial_a g_{bc} - \partial_b g_{ca} + 2\Gamma^d{}_{ba} g_{cd} = 0 \\
&\Rightarrow \quad 2\Gamma^d{}_{ba} g_{cd} = \partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}
\end{aligned}$$

Luego, usamos que el inverso del tensor métrico g_{cd} es g^{cd} y lo multiplicamos de ambos lados para obtener:

$$\boxed{\Gamma^d{}_{ba} = \frac{1}{2} g^{cd} \left[\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}\right]}$$

Por tanto, podemos calcular los símbolos de la conexión a partir de la métrica. Pero si conocemos los símbolos de la conexión, la derivada covariante queda totalmente caracterizada de manera única. Lo que prueba que la condición de ser libre de torsión y de compatibilidad de la métrica nos lleva a una única posible conexión en términos de la métrica (la de Levi-Civita).

3. Partiendo de la expresión para la derivada covariante de un vector v^a en coordenadas locales:

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} v^\lambda$$

del hecho de que la derivada covariante ∇_a cumple la regla de Leibniz, y de que para un campo escalar ϕ, $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$; muestre que la derivada covariante en coordenadas locales para las componentes de un covector ω_a es:

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \omega_\lambda$$

Como ω es un covector y v es un vector, sabemos que ω actúa sobre v para producir un escalar $\phi := \omega(v)$
Además, si el vector v tiene componentes v^ν en una base local y el covector tiene componentes ω_ν en la base correspondiente para el espacio dual, entonces sabemos que ω actuando en v para producir un escalar se calcula como:

$$\phi := \omega(v) = \omega_\nu v^\nu$$

Luego, usamos que la derivada covariante $\nabla_\mu \phi$ es igual a la derivada común $\partial_\mu \phi$ para calcular la derivada covariante de ϕ:

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \phi &= \partial_\mu \phi \\
&= \partial_\mu (\omega_\nu v^\nu) \\
&= \omega_\nu \partial_\mu v^\nu + v^\nu \partial_\mu \omega_\nu \qquad \text{por la regla de Leibniz para la derivada } \partial_\mu
\end{aligned}$$

Pero como sabemos que para el vector v se cumple que $\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} v^\lambda$, al despejar tenemos que $\partial_\mu v^\nu = \nabla_\mu v^\nu - \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} v^\lambda$ y podemos sustituir esto en el desarrollo que llevábamos para $\nabla_\mu \phi$:

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \phi &= \omega_\nu \partial_\mu v^\nu + v^\nu \partial_\mu \omega_\nu \\
&= \omega_\nu \left[\nabla_\mu v^\nu - \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} v^\lambda \right] + v^\nu \partial_\mu \omega_v \\
&= \omega_\nu \nabla_\mu v^\nu - \omega_\nu \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} v^\lambda + v^\nu \partial_\mu \omega_\nu
\end{aligned}$$

En el segundo término de la última expresión tenemos $\omega_\nu \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} v^\lambda$. Como ν y λ son índices mudos, podemos renombrarlos y en particular, podemos renombrar λ como ν y renombrar a ν como λ. Con lo que nos quedaría la expresión $\omega_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} v^\nu$. Por lo que la expresión de antes queda como:

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \phi &= \omega_\nu \nabla_\mu v^\nu - \omega_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} v^\nu + v^\nu \partial_\mu \omega_\nu \\
&= \omega_\nu \nabla_\mu v^\nu + v^\nu \left[\partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \omega_\lambda \right] \qquad (1)
\end{aligned}$$

Por otro lado, pudimos haber calculado la derivada covariante de ϕ directamente usando la regla de Leibniz:

$$\nabla_\mu \phi = \nabla_\mu (\omega_\nu v^\nu) = \omega_\nu \nabla_\mu v^\nu + v^\nu \nabla_\mu \omega_\nu \qquad (2)$$

Comparando (1) con (2), vemos que lo que está entre corchetes en (1) tiene que ser igual a $\nabla_\mu \omega_\nu$.
Por tanto, concluimos que:

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \omega_\lambda$$

4. Considere las ecuaciones de campo de Einstein para el espacio-tiempo en el que no hay materia ni energía, es decir el vacío, sin tomar en cuenta el término correspondiente a la constante cosmológica:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0$$

Llamamos a $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$, el tensor de Einstein. Pruebe los siguientes enunciados y responda la pregunta de manera breve.

a) Para la conexión de Levi-Civita con una métrica g_{ab}, la segunda identidad de Bianchi implica que la divergencia del tensor de Einstein es cero:

$$\nabla^a (G_{ab}) = 0.$$

.

La segunda identidad de Bianchi para el tensor de curvatura de Riemman nos dice que:

$$\nabla_e R_{abcd} + \nabla_d R_{abec} + \nabla_c R_{abde} = 0$$

Luego, multiplicamos por el tensor métrico g^{ac} y usamos la propiedad del tensor métrico para subir índices:

$$\begin{aligned}
&(\nabla_e R_{abcd} + \nabla_d R_{abec} + \nabla_c R_{abde}) g^{ac} = 0 g^{ac} \\
&\Rightarrow\ \nabla_e R_{abcd} g^{ac} + \nabla_d R_{abec} g^{ac} + \nabla_c R_{abde} g^{ac} = 0 \\
&\Rightarrow\ \nabla_e R^c{}_{bcd} + \nabla_d R^c{}_{bec} + \nabla_c R^c{}_{bde} = 0
\end{aligned}$$

Eso nos permite contraer el tensor de curvatura de Riemann en el tensor de Ricci, que se define como: $R_{bd} := R^c{}_{bcd}$ (1)
Además, el tensor de Riemann es antisimétrico en sus últimos índices, por lo que tenemos que $R^c{}_{bec} = -R^c{}_{bce}$ (2)
Y el tensor de Riemann también cumple que $R^c{}_{bde} = -R_b{}^c{}_{de}$ (3)
Usamos estas tres propiedades en el procedimiento que llevábamos:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \nabla_e R^c{}_{bcd} + \nabla_d R^c{}_{bec} + \nabla_c R^c{}_{bde} = 0 \\
&\Rightarrow\ \nabla_e R_{bd} - \nabla_d R^c{}_{bce} - \nabla_c R_b{}^c{}_{de} = 0 \\
&\Rightarrow\ \nabla_e R_{bd} - \nabla_d R_{be} - \nabla_c R_b{}^c{}_{de} = 0
\end{aligned}$$

Y ahora multiplicamos por la métrico g^{bd} y usamos la propiedad de la métrica para subir índices:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ (\nabla_e R_{bd} - \nabla_d R_{be} - \nabla_c R_b{}^c{}_{de}) g^{bd} = 0 g^{bd} \\
&\Rightarrow\ \nabla_e R_{bd} g^{bd} - \nabla_d R_{be} g^{bd} - \nabla_c R_b{}^c{}_{de} g^{bd} = 0 \\
&\Rightarrow\ \nabla_e R^d{}_d - \nabla_d R^d{}_e - \nabla_c R^{dc}{}_{de} = 0
\end{aligned}$$

Vemos que nos queda el escalar de Ricci en el primer término, definido como $R := R_d^{\ d}$. Y vemos que el último término $R^{dc}_{\ \ de}$ se contrae al tensor de Ricci $R^c_{\ e}$ por (1).
Entonces, nos queda:

$$\nabla_e R - \nabla_d R^d_{\ e} - \nabla_c R^c_{\ e} = 0$$

Renombramos el índice libre e como a y renombramos el índice mudo d por c

$$\Rightarrow \ \nabla_a R - \nabla_c R^c_a - \nabla_c R^c_a = 0$$

$$\Rightarrow \ \nabla_a R - 2\nabla_c R^c_{\ a} = 0$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{2}\nabla_a R - \nabla_c R^c_{\ a} = 0$$

Podemos cambiar de nombre a a y c y multiplicar por -1 para expresar esto como:

$$\nabla_a R^a_{\ c} - \frac{1}{2}\nabla_c R = 0 \quad (4)$$

Finalmente, como estamos usando la conexión de Levi Civita y como vimos en el ejercicio 2, ésta es compatible con la métrica, $\nabla_c g_{ab} = 0$.
Eso implica que $\nabla_a(Rg^a_c)$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\nabla_a(Rg^a_c) &= g^a_c\nabla_a R + R\nabla_a g^a_c \quad \text{por la propiedad de Leibniz}\\ &= g^a_c\nabla_a R \quad \text{por la copatibilidad con la métrica}\\ &= \nabla_c R \quad \text{usamos la métrica para cambiar de índice}\\ &\therefore \ \nabla_c R = \nabla_a(Rg^a_c)\end{aligned}$$

Ahora podemos usar esta expresión para reescribir (4):

$$\nabla_a R^a_{\ c} - \frac{1}{2}\nabla_c R = 0$$

$$\Rightarrow \ \nabla_a R^a_{\ c} - \frac{1}{2}\nabla_a(Rg^a_{\ c}) = 0$$

$$\Rightarrow \ \nabla_a(R^a_{\ c} - \frac{1}{2}Rg^a_{\ c}) = 0$$

Multiplicamos ahora por el tensor métrico g^{cb}. Lo podemos meter sin problemas dentro del ∇_a porque la compatibilidad de la métrica nos asegura que $\nabla_a g^{cb} = 0$ y entonces
$\nabla_a(g^{bc}(R^a_{\ c} - \frac{1}{2}Rg^a_{\ c})) = (R^a_{\ c} - \frac{1}{2}Rg^a_{\ c})\nabla_a g^{bc} + g^{bc}\nabla_a(R^a_{\ c} - \frac{1}{2}Rg^a_{\ c}) = g^{bc}\nabla_a(R^a_{\ c} - \frac{1}{2}Rg^a_{\ c})$
Entonces tenemos que:

$$\nabla_a(R^a_{\ c} - \frac{1}{2}Rg^a_{\ c}) = 0$$

$$\Rightarrow \ g^{bc}\nabla_a(R^a_{\ c} - \frac{1}{2}Rg^a_{\ c}) = 0g^{bc}$$

$$\Rightarrow \ \nabla_a(g^{bc}(R^a_{\ c} - \frac{1}{2}Rg^a_{\ c})) = 0$$

$$\Rightarrow \ \nabla_a(g^{bc}R^a_{\ c} - \frac{1}{2}Rg^{bc}g^a_{\ c}) = 0$$

$$\Rightarrow \ \nabla_a(R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab}) = 0$$

Vemos que lo que queda entre paréntesis no es otra cosa que G^{ab} por cómo se define. Entonces tenemos que:

$$\nabla_a G^{ab} = 0$$

Podemos renombrar los índices para escribirlo como:

$$\nabla_c G^{cd} = 0$$

Y ahora usamos el tensor métrico varias veces para subir y bajar índices (y metemos el tensor métrico dentro de ∇_c sin problemas por la compatibilidad con la métrica):

$$\begin{aligned}
&\nabla_c G^{cd} = 0 \\
&\Rightarrow \; g^{ca}\nabla_c G^{cd} = 0 \\
&\Rightarrow \; \nabla^a G^{cd} = 0 \\
&\Rightarrow \; g_{ca}\nabla^a G^{cd} = 0 \\
&\Rightarrow \; \nabla^a g_{ca} G^{cd} = 0 \\
&\Rightarrow \; \nabla^a G_a^{\ d} = 0 \\
&\Rightarrow \; g_{db}\nabla^a G_a^{\ d} = 0 \\
&\Rightarrow \; \nabla^a G_a^{\ d} g_{db} = 0 \\
&\Rightarrow \; \nabla^a G_{ab} = 0
\end{aligned}$$

Con lo que ya probamos que:

$$\boxed{\nabla^a G_{ab} = 0}$$

b) Las ecuaciones $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0$ pueden escribirse como:

$$R_{ab} = 0$$

Tenemos que:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0$$

Ahora bien, el escalar de curvatura se define como $R = R^a_{\ a} = R_{ab} g^{ab}$. Por lo que podemos escribir la expresión como:

$$\begin{aligned}
&R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0 \\
&\Rightarrow \; R_{ab} - \frac{1}{2} R_{ab} g^{ab} g_{ab} = 0
\end{aligned}$$

Pero recordamos que la contracción de dos tensores métricos $g^{ab} g_{ab}$ es igual a la dimensión del espacio, que en este caso es 4:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \; R_{ab} - \frac{1}{2}(4) R_{ab} = 0 \\
&\Rightarrow \; -R_{ab} = 0 \\
&\Rightarrow R_{ab} = 0
\end{aligned}$$

Y ya llegamos a lo que se quería probar.

c) La expresión $R_{ab} = 0$ es mucho más simple que las ecuaciones de Einstein en el vacío. ¿Qué hace evidente sobre la geometría del espacio tiempo?

Que el tensor R_{ab} sea igual a 0 significa que el espacio tiempo no tiene curvatura y por tanto es plano.
Es decir, un espacio tiempo sin materia ni energía y con constante cosmológica igual a 0 es plano.

5. Sea R^a_{bcd} el tensor de Riemann de la conexión de Levi-Civita ∇_a y v^a un vector cualquiera. Partiendo de la siguiente expresión:

$$R^c{}_{dab} v^d = \nabla_a \nabla_b v^d - \nabla_b \nabla_a v^c$$

muestre que para un covector ω_a:

$$R^d{}_{cab} \omega_d = \nabla_b \nabla_a \omega_c - \nabla_a \nabla_b \omega_c$$

Sugerencia: Calcule el Conmutador de $\omega_c v^c$

Como dice la sugerencia, comenzamos calculando el conmutador de $\omega_c v^c$, que es:

$$\nabla_b \nabla_a (\omega_c v^c) - \nabla_a \nabla_b (\omega_c v^c)$$

Pero como estamos considerando la conexión de Levi Civita, es libre de torsión y el conmutador de un campo escalar (como lo es $\omega_c v^v$) debe de valer 0. Por tanto, igualamos a 0 y luego desarrollamos:

$$\begin{aligned}
&\nabla_b \nabla_a (\omega_c v^c) - \nabla_a \nabla_b (\omega_c v^c) = 0 \\
&\Rightarrow\ \nabla_b (\nabla_a (\omega_c v^c)) - \nabla_a (\nabla_b (\omega_c v^c)) = 0 \\
&\Rightarrow\ \nabla_b (v^c \nabla_a \omega_c + \omega_c \nabla_a v^c) - \nabla_a (v^c \nabla_b \omega_c + \omega_c \nabla_b v^c) = 0 \quad \text{por regla de Leibniz} \\
&\Rightarrow\ \nabla_b (v^c \nabla_a \omega_c) + \nabla_b (\omega_c \nabla_a v^c) - \nabla_a (v^c \nabla_b \omega_c) - \nabla_a (\omega_c \nabla_b v^c) = 0 \\
&\Rightarrow v^c \nabla_b \nabla_a \omega_c + (\nabla_b v^c)(\nabla_a \omega_c) + \omega_c \nabla_b \nabla_a v^c + (\nabla_b \omega_c)(\nabla_a v^c) \\
&\quad - v^c \nabla_a \nabla_b \omega_c - (\nabla_a v^c)(\nabla_b \omega_c) - \omega_c \nabla_a \nabla_b v^c - (\nabla_a \omega_c)(\nabla_b v^c) = 0 \quad \text{por regla de Leibniz} \\
&\text{varios términos se cancelan y queda :} \\
&\Rightarrow v^c \nabla_b \nabla_a \omega_c + \omega_c \nabla_b \nabla_a v^c - v^c \nabla_a \nabla_b \omega_c - \omega_c \nabla_a \nabla_b v^c = 0 \\
&\Rightarrow\ v^c \left[\nabla_b \nabla_a \omega_c - \nabla_a \nabla_b \omega_c\right] + \omega_c \left[\nabla_b \nabla_a v^c - \nabla_a \nabla_b v^c\right] = 0 \\
&\Rightarrow\ v^c \left[\nabla_b \nabla_a \omega_c - \nabla_a \nabla_b \omega_c\right] = \omega_c \left[\nabla_a \nabla_b v^c - \nabla_b \nabla_a v^c\right]
\end{aligned}$$

Pero lo que está entre corchetes del lado derecho es lo que por hipótesis es igual a $R^c{}_{dab} v^d$. Entonces nos queda:

$$v^c \left[\nabla_b \nabla_a \omega_c - \nabla_a \nabla_b \omega_c\right] = \omega_c R^c{}_{dab} v^d$$

Del lado derecho tenemos los índices mudos c, d. Como ambos son mudos, podemos intercambiarles el nombre:

$$\begin{aligned}
v^c \left[\nabla_b \nabla_a \omega_c - \nabla_a \nabla_b \omega_c\right] &= \omega_d R^d{}_{cab} v^c \\
\Rightarrow\ \nabla_b \nabla_a \omega_c - \nabla_a \nabla_b \omega_c &= \omega_d R^d{}_{cab}
\end{aligned}$$

Y es justo lo que se quería probar.