1 Campo Eléctrico - Ley de Gauss

① Un cascarón esférico tiene la densidad de carga $\rho = K/r^2$. En una región $a \leq r \leq b$ donde K es cte. Encuentre el campo eléctrico en 3 regiones: i) $r<a$, ii) $a<r<b$, iii) $r>b$. Grafica $|\vec{E}(r)|$

Por la simetría del problema, parece conveniente usar la ley de Gauss para resolverlo.

• Caso 1) $r<a$:

Proponemos como superficie de Gauss a una esfera "S" de radio r centrada en el origen.

Aplicaremos la ley de Gauss, que dice que: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = Q_{enc}/\varepsilon_0$

En este caso, la esfera S no tiene cargas encerradas (pues se encuentra dentro del "hueco" del cascarón) y entonces $Q_{enc}=0$

∴ Por la ley de Gauss: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$

Ahora bien, como la distribución es esféricamente simétrica, $\vec{E}$ apunta radialmente y a parte tiene la misma norma en toda la esfera S.

Por lo tanto: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$

$\Rightarrow \oint |\vec{E}||d\vec{a}| = 0$ ← porqué $\vec{E}$ y $d\vec{a}$ son radiales y ∴ paralelos

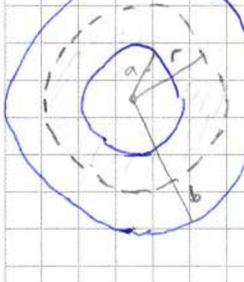
$\Rightarrow |\vec{E}| \oint |d\vec{a}| = 0$ ← porque $|\vec{E}|$ es cte en toda la esfera S por simetría

$\Rightarrow |\vec{E}| = 0$

∴ $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

••) Caso 2) $a<r<b$:

Proponemos como superficie de Gauss una esfera de radio r centrada en el origen como se ve en la imagen.



Vemos que la Q_{enc} es la carga contenida entre el radio a y el radio r.

Para calcular esta carga, hay que integrar $dq = \rho\, dV$ en dicho volumen

$$Q_{enc} = \int \rho\, dV = \int K/r^2\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{r} \frac{K}{r'^2}\, r'^2 \operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\phi'$$

✓ El volumen de integración en coordenadas esféricas está descrito por $a<r'<r$, $0<\theta'<\pi$, $0<\phi'<2\pi$ y tiene diferencial $dV = r'^2 \operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\phi'$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \int_a^{r} k\, dr'$$

$$= 2\pi \left(-\cos\theta'\Big|_0^{\pi}\right) kr'\Big|_a^{r}$$

$$= 2\pi\, (2)\, (k(r-a))$$

∴ $Q_{enc} = 4\pi k(r-a)$

Entonces, la ley de Gauss nos dice que $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = Q_{enc}/\varepsilon_0$

Como en el caso anterior, como la distribución es esféricamente simétrica, $\vec{E}$ apunta radialmente, por lo que $\vec{E}$ es paralelo a $d\vec{a}$. Además $|\vec{E}|$ es cte. en la esfera S

$\therefore \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = Q_{enc}/\varepsilon_0 \rightarrow |\vec{E}| \oint_S |d\vec{a}| = Q_{enc}/\varepsilon_0$

Pero $\oint_S |d\vec{a}|$ es el área total de la esfera S, que es $4\pi r^2$

$\Rightarrow |\vec{E}| (4\pi r^2) = Q_{enc}/\varepsilon_0 = 4\pi K (r-a)/\varepsilon_0$ ← por el resultado de Q_{enc}

Despejamos $|\vec{E}| \rightarrow |\vec{E}| = \frac{4\pi K (r-a)}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{K}{\varepsilon_0} \frac{r-a}{r^2}$

Y como $\vec{E}$ es radial y ya tenemos su magnitud $\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{K}{\varepsilon_0} \frac{r-a}{r^2} \hat{r}}$

∘∘∘ Caso 3) $r > b$:

Usamos una esfera S de radio r como superficie de Gauss.
Calculamos Q_{enc} al igual que en el anterior, pero ahora S encapsula todo el cascarón, por lo que Q_{enc} es toda la carga entre a y b.

$Q_{enc} = \int \rho\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b K/r'^2 \; r'^2 \operatorname{sen}\theta' \, dr' d\theta' d\phi'$ ← usamos $dV = r'^2 \operatorname{sen}\theta' dr' d\theta' d\phi'$ e integramos sobre todo el cascarón.

$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b K \operatorname{sen}\theta' \, dr' d\theta' d\phi'$

$= \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta' d\theta' \int_a^b K\, dr' = (2\pi)(2)(K(b-a)) = 4\pi K (b-a)$

Por otro lado, usando la ley de Gauss y el mismo argumento de simetría que en los otros casos, tenemos que

$|\vec{E}| \oint_S |d\vec{a}| = Q_{enc}/\varepsilon_0 \rightarrow |\vec{E}| (4\pi r^2) = Q_{enc}/\varepsilon_0$ ← porque $\oint_S |d\vec{a}| = 4\pi r^2$ es el área de S

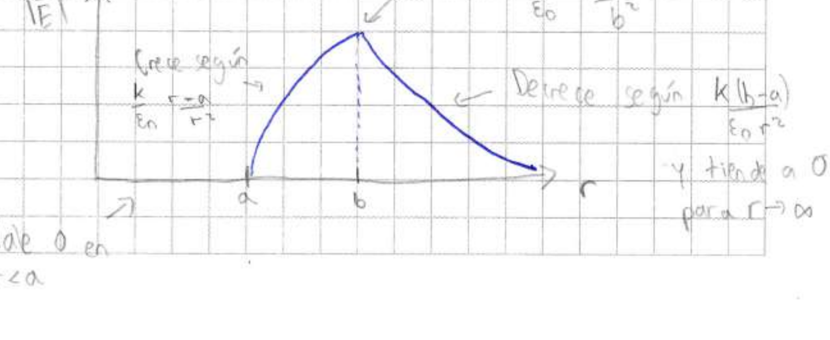
$\rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q_{enc}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{4\pi K (b-a)}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{K(b-a)}{r^2 \varepsilon_0}$ ← por el resultado de Q_{enc}

Y como $\vec{E}$ es radial $\rightarrow \vec{E} = |\vec{E}| \hat{r} = \boxed{\frac{K(b-a)}{r^2 \varepsilon_0} \hat{r}}$

Por los resultados de antes, tenemos que:

$$|\vec{E}|(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{K}{\varepsilon_0} \frac{r-a}{r^2}, & a < r < b \\ \frac{K(b-a)}{r^2 \varepsilon_0}, & b > r \end{cases}$$

Podemos graficarlo:



2 Potencial eléctrico - Ec de Laplace

2) El potencial en la superficie de una esfera (radio R) es $V_0 = K\cos 3\theta$
Donde K es cte. a) Encuentra el potencial dentro y fuera de la esfera.

Como no hay cargas en el espacio, tenemos que resolver la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$ con las condiciones de frontera $V(r=R) = V_0$ y $V \to 0$ cuando $r \to \infty$

En coordenadas esféricas y con simetría azimutal (V no depende de ϕ, pues las condiciones de frontera no dependen de ϕ) la solución a $\nabla^2 V$ que vimos en clase es:

$$V(r,\theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) & \text{para } r \leq R \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) & \text{para } r \geq R \end{cases}$$

se divide así en casos para que la solución no diverja en $r=0$ ni en $r=\infty$

Donde A_l, B_l son constantes que dependen de la condición de frontera y las tenemos que encontrar.

∘) Primero que nada, el potencial V tiene que ser continuo, por lo que ambas partes de la definición por casos deben valer lo mismo en $r=R$

$$\rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \Big|_{r=R} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l/r^{l+1} P_l(\cos\theta) \Big|_{r=R}$$

$$\rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$\rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l R^l - \frac{B_l}{R^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta) = 0$$

Tenemos una serie de polinomios de Legendre igualada a 0. Como dichos polinomios son una base completa y ortogonal, la única combinación lineal de ellos que da 0 es aquélla en la que todos los coeficientes son 0

$$\rightarrow A_l R^l - \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 \rightarrow A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}} \rightarrow \boxed{A_l = \frac{B_l}{R^{2l+1}}} \quad (1)$$

∘∘) Por el enunciado del problema debemos de tener que $V(r=R) = K\cos 3\theta$

Siguiendo nuestra expresión general para V, tenemos que:

$$V(r=R) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta)$$

Entonces, por la condición de frontera: $\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = K\cos 3\theta$ (2)

En general, para encontrar A_l necesitaríamos usar la ortogonalidad de $P_l(\cos\theta)$ pero en este caso hay una solución más sencilla para llegar a A_l

Primero notamos que $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ por la propiedad trigonométrica de ángulo triple.

Ahora bien, podemos escribir $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ usando una combinación lineal de $P_\ell(\cos\theta)$

Para ello, Escribimos los primeros polinomios de Legendre:

$P_0(\cos\theta) = 1$ $\quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ $\quad P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$ $\quad P_3(\cos\theta) = \frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta$

Vemos que no necesitamos P_0 ni P_2 por ser polinomios pares, mientras $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ es un polinomio impar.

Entonces podemos escribir $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ como $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = a\,P_1(\cos\theta) + b\,P_3(\cos\theta)$

$$\rightarrow 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = a\cos\theta + b\left[\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right]$$
$$= \left(a - \frac{3}{2}b\right)\cos\theta + \frac{5}{2}b\cos^3\theta$$

Entonces: $4 = \frac{5}{2}b$, $-3 = a - 3/2\, b$

$\Rightarrow b = 8/5$, $\longrightarrow -3 = a - 3/2(8/5) \rightarrow a = -3 + \frac{3}{2}\frac{8}{5} = -3/5$,

Por lo tanto, tenemos que: $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = -\frac{3}{5}P_1(\cos\theta) + 8/5\, P_3(\cos\theta)$,

Entonces, regresando a la expresión (2), tenemos que:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_\ell R^\ell P_\ell(\cos\theta) = K\cos 3\theta = K\left[-\frac{3}{5}P_1(\cos\theta) + \frac{8}{5}P_3(\cos\theta)\right]$$

Entonces, vemos que del lado izquierdo, los coeficientes de la serie de polinomios valen 0 para $\ell \neq 1,3$ (pues el lado derecho sólo tiene los polinomios de $\ell = 1,3$)

Similarmente, el coeficiente para $P_1(\cos\theta)$ en la serie debe de ser igual a $-3/5\, K$ y el de $P_3(\cos\theta)$ debe valer $8/5\, K$

Es decir, $A_1 R^1 = -3/5\, K \longrightarrow A_1 = -\frac{3}{5R}K$ ← y el resto son 0

, $A_3 R^3 = 8/5\, K \longrightarrow A_3 = \frac{8}{5R^3}K$

Y por la relación (1), tenemos que $A_\ell = B_\ell / R^{2\ell+1} \rightarrow B_\ell = A_\ell R^{2\ell+1}$

$$\rightarrow B_1 = -\frac{3}{5R}K\,(R^{2+1}) = -\frac{3}{5}KR^2$$
$$\rightarrow B_3 = \frac{8}{5R^3}K\,(R^{6+1}) = \frac{8}{5}KR^4$$
← y el resto son 0

Con estos coeficientes, ya tenemos la expresión de V para este problema

$$V(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) = A_1 r^1 P_1(\cos\theta) + A_3 r^3 P_3(\cos\theta) = -\frac{3r}{5R}KP_1(\cos\theta) + \frac{8r^3}{5R^3}KP_3(\cos\theta) & , r \leq R \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) = \frac{B_1}{r^{1+1}}P_1(\cos\theta) + \frac{B_3}{r^{3+1}}P_3(\cos\theta) = -\frac{3}{5}\frac{KR^2}{r^2}P_1(\cos\theta) + \frac{8}{5}\frac{KR^4}{r^4}P_3(\cos\theta) & , r \geq R \end{cases}$$

b) la densidad de carga superficial $\sigma(\theta)$.

Para esto usamos las condiciones de frontera del campo eléctrico al pasar por una superficie con densidad de carga σ:

$$\vec{E}_{above} - \vec{E}_{below} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

$$\Rightarrow \nabla V_{above} - \nabla V_{below} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} \quad \leftarrow \text{ porque } -\nabla V = \vec{E}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial V_{above}}{\partial n} - \frac{\partial V_{below}}{\partial n}\right|_{r=R} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

← Tomamos el componente en dirección normal a la superficie.

Ahora bien, por el resultado de la página anterior, tenemos que el potencial dentro de la esfera es

$$V_{below} = -\frac{3r}{5R}K P_1(\cos\theta) + \frac{8}{5}\frac{r^3}{R^3}K P_3(\cos\theta)$$

y fuera es:

$$V_{above} = -\frac{3}{5}\frac{R^2}{r^2}K P_1(\cos\theta) + \frac{8}{5}\frac{R^4}{r^4}K P_3(\cos\theta)$$

Entonces, como la dirección normal a la esfera es la dirección $\hat{r}$, la derivada normal $\partial/\partial n$ consiste en derivar respecto a r, $\partial/\partial r$.

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial V_{above}}{\partial n}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial V_{above}}{\partial r}\right|_{r=R} = \left.\frac{6R^2}{5r^3}K P_1(\cos\theta) - \frac{32R^4}{5r^5}P_3(\cos\theta)\right|_{r=R}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial}{\partial n}V_{below}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial}{\partial r}V_{below}\right|_{r=R} = \left.-\frac{3}{5R}K P_1(\cos\theta) + \frac{24r^2}{5R^3}P_3(\cos\theta)\right|_{r=R}$$

Entonces, despejando σ de (3), nos queda:

$$\sigma = \varepsilon_0\left[\frac{\partial V_{below}}{\partial n} - \frac{\partial V_{above}}{\partial n}\right]\Big|_{r=R}$$

$$= \varepsilon_0\left[-\frac{3}{5R}K P_1(\cos\theta) + \frac{24}{5}\frac{r^2}{R^3}P_3(\cos\theta) - \frac{6}{5}\frac{R^2}{r^3}K P_1(\cos\theta) + \frac{32}{5}\frac{R^4}{r^5}P_3(\cos\theta)\right]\Big|_{r=R}$$

$$= \varepsilon_0\left[-\frac{3}{5R}K P_1(\cos\theta) + \frac{24}{5R}P_3(\cos\theta) - \frac{6}{5R}K P_1(\cos\theta) + \frac{32}{5R}P_3(\cos\theta)\right]$$

$$= \varepsilon_0 K\left[-\frac{9}{5R}P_1(\cos\theta) + \frac{56}{5R}P_3(\cos\theta)\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0 K}{5R}\left[-9P_1(\cos\theta) + 56P_3(\cos\theta)\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0 K}{5R}\left[-9\cos\theta + 56\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right)\right]$$

$$\boxed{= \frac{\varepsilon_0 K}{5R}\left[-93\cos\theta + 140\cos^3\theta\right]}$$

3 Expansión Multipolar

1. Un dipolo puro está ubicado en el origen, apuntando en la dirección z.
a) ¿Cuál es la fuerza sobre una carga puntual q ubicada en (a,0,0) (en cartesianas)?

Como vimos en clase, el potencial de un dipolo con momento $\vec{p}$ está dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{\hat{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ con $\vec{r}$ el punto sobre el que estamos midiendo

Como $\vec{p}$ apunta en la dirección z, lo podemos escribir como $\vec{p} = p\hat{z}$.

Por otro lado, la posición $\vec{r}$ es $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ en cartesianas y tiene una magnitud cuadrada de $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Entonces, reescribimos el potencial como:

$$V(\vec{r}) = \frac{\hat{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad (\text{porque } \hat{r} = \vec{r}/r)$$

$$= \frac{(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})\cdot p\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad (\text{por las expresiones de } \vec{p}, \vec{r}, r)$$

$$= \frac{zp}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad \therefore \boxed{V(\vec{r}) = \frac{zp}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{3/2}}} \quad (1)$$

Teniendo el potencial, ahora lo usamos para calcular el campo eléctrico del dipolo en cartesianas.

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{zp}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\hat{x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{zp}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\hat{y} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{zp}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\hat{z}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{zp\,(2x)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\hat{x} + \frac{3}{2}\frac{zp\,(2y)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\hat{y} + \left[-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3}{2}\frac{zp\,(2z)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right]\hat{z}$$

$$\boxed{= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\hat{x} + \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\hat{y} + \left(\frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\hat{z}\right]} \quad (2)$$

Aunque no sea una expresión bonita y se puede escribir mucho mejor en coordenadas esféricas, lo dejaremos así porque los enunciados nos dan datos y nos piden resultados en cartesianas

Ahora sí, para calcular la fuerza sobre una carga q en $(a,0,0)$ usamos la expresión $\vec{F} = q\vec{E}$ y el campo $\vec{E}$ que ya obtuvimos en (2) evaluado en $x=a$, $y=0$, $z=0$

$$\vec{F} = q\,\vec{E}(a,0,0) = \frac{qP}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(a)(0)}{(a^2+0^2+0^2)^{5/2}}\hat{x} + \frac{3(0)(0)}{(a^2+0^2+0^2)^{5/2}}\hat{y} + \left(\frac{3(0)^2}{(a^2+0^2+0^2)^{5/2}} - \frac{1}{(a^2+0^2+0^2)^{3/2}}\right)\hat{z}\right]$$

$$= \frac{qP}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{a^3}\hat{z}\right) = \boxed{-\frac{Pq}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{z}}$$

b) ¿Cuál es la fuerza sobre q en $(0,0,a)$?

Otra vez usamos que $\vec{F} = q\vec{E}$ y la expresión (2) para $\vec{E}$ evaluado en $x=y=0$, $z=a$

$$\vec{F} = q\vec{E}(0,0,a) = \frac{qP}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(0)(a)}{(0^2+0^2+a^2)^{5/2}}\hat{x} + \frac{3(0)(a)}{(0^2+0^2+a^2)^{5/2}}\hat{y} + \left(\frac{3(a)^2}{(0^2+0^2+a^2)^{5/2}} - \frac{1}{(0^2+0^2+a^2)^{3/2}}\right)\hat{z}\right]$$

$$= \frac{qP}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3a^2}{a^5} - \frac{1}{a^3}\right)\hat{z} = \frac{qP}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{a^3} - \frac{1}{a^3}\right)\hat{z}$$

$$= \frac{qP}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{a^3}\hat{z} = \boxed{\frac{qP}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{z}}$$

c) ¿Cuánto trabajo se requiere para mover q de $(a,0,0)$ a $(0,0,a)$?

Por la relación entre trabajo y voltaje, tenemos

$$W = q\left[V(0,0,a) - V(a,0,0)\right]$$

$$= q\left[\frac{(a)P}{4\pi\varepsilon_0(0^2+0^2+a^2)^{3/2}} - \frac{(0)P}{4\pi\varepsilon_0(a^2+0^2+0^2)^{3/2}}\right]$$

Sustituimos $(a,0,0)$ y $(0,0,a)$ en la expresión (1) para $V(x,y,z)$

$$= \frac{qPa}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = \boxed{\frac{qP}{4\pi\varepsilon_0 a^2}}$$