Ecuaciones Diferenciales I   mini-Tarea 7

Tomás Ricardo Basile Álvarez

1. Encuentre la solución general $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$

- Ecuación homogénea $y'' + 3y' - 10y = 0$

Proponemos $y = e^{\alpha x}$ $\rightarrow$ $\alpha^2 e^{\alpha x} + 3\alpha e^{\alpha x} - 10e^{\alpha x} = 0$ $\rightarrow$ $\alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0$

$\rightarrow$ $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -5$ $\therefore$ Soluciones: e^{2x}, e^{-5x}

$$\rightarrow \quad y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x}$$

- Solución particular: propongo $y_p = Ke^{4x}$

$\rightarrow (Ke^{4x})'' + 3(Ke^{4x})' - 10Ke^{4x} = 6e^{4x}$ $\rightarrow$ $16Ke^{4x} + 12Ke^{4x} - 10Ke^{4x} = 6e^{4x}$

$\rightarrow 18K = 6$ $\rightarrow K = 1/3$ $\therefore$ $y_p = \frac{1}{3}e^{4x}$

$\therefore$ Solución general: $\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x} + \frac{1}{3}e^{4x}}$

b) $y'' + y' - y = 3x - 4x^2$

- Homogénea: $y'' + y' - y = 0 \rightarrow$ propongo $y = e^{\alpha x}$
  $\rightarrow \alpha^2 e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha x} - e^{\alpha x} = 0 \rightarrow \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$

$\rightarrow \alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $\therefore$ Solución homogénea: $y_H = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$

- Solución particular: propongo $y_P = Ax^2 + Bx + C$

$\rightarrow (Ax^2+Bx+C)'' + (Ax^2+Bx+C)' - (Ax^2+Bx+C) = 3x - 4x^2$
$\rightarrow 2A + 2Ax + B - Ax^2 - Bx - C = 3x - 4x^2$

$\rightarrow 2A + B - C = 0 \longrightarrow C = 13$
$2A - B = 3 \rightarrow B = 5$ $\therefore$ $y_P = 4x^2 + 5x + 13$
$-A = -4 \longrightarrow A = 4$

$$\therefore\ y = y_H + y_P = \boxed{C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2^{\alpha_2 t} + 4x^2 + 5x + 13}$$

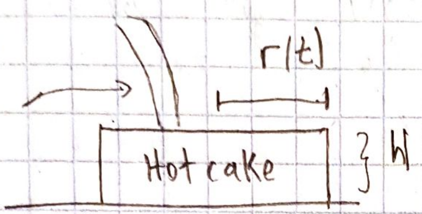
con $\alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\alpha_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

2. Escriba una EDO que describa el crecimiento de un hotcake al verter masa. (El hotcake es un cilindro de altura cte)

Supongo que la masa se vierte a un ritmo cte (digamos K cm^3/s) y el hotcake tiene una altura de H cm también constante.

Su radio a un tiempo t es $r(t)$,

a un momento t:



El volumen es:
$V(t) = \pi r^2(t) H$

Pero el cambio en el volumen es igual a la masa vertida $K \frac{cm^3}{s}$

$$\rightarrow \frac{dV}{dt} = K$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\pi r^2(t) H\right) = K \quad \rightarrow \quad \pi H \left(2 r(t) r'(t)\right) = K$$

$$\rightarrow \boxed{r(t)\, r'(t) = \frac{K}{2\pi H}}$$

$r(0) = r_0 \leftarrow$ radio inicial

que es una edo separable, podemos integrar directamente:

$$\int_{r_0}^{r} \tilde{r}(t)\, \tilde{r}'(t)\, dt = \int_0^t \frac{K}{2\pi H}\, dt$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left(r^2(t) - r_0^2\right) = \frac{K}{2\pi H} t \quad \rightarrow \quad r(t) = \sqrt{\frac{Kt}{\pi H} + r_0^2}$$

Comprobación:

i) vemos que $r(0) = \sqrt{r_0^2} = r_0$ (con $r_0 > 0$, lo cual es evidente)

ii) Vemos que $V(t) = \pi H r^2(t) = Kt + \pi H r_0^2 = Kt + V_0$

$$\rightarrow V(t) = V_0 + Kt$$

claramente el volumen crece a un ritmo cte K, el ritmo al que se vierte la masa. Tal como se esperaría.