

Mecánica Cuántica

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

10 de marzo de 2021

Es difícil decir qué es la mecánica cuántica pero sí podemos decir a qué se refiere la mecánica cuántica.

A diferencia de la mecánica clásica donde las cantidades pueden tomar cualquier valor continuo, toman valores en un discreto.

La cantidad mínima de estos discretos se llaman cuantos y son muy chiquitos, por lo que no son fáciles de ver a simple vista.

0.1. Introducción

0.1.1. Cuerpo Negro:

Es un objeto ideal que absorbe toda la luz que le llega y a su vez, toda la energía libre es emitida en forma de radiación. Ambos procesos ocurriendo constante y perfectamente.

Era interesante determinar la densidad espectral de este objeto.

Le llamamos densidad a $\rho(\omega)$ que es la cantidad de energía por unidad de volumen en la radiación que emite este objeto a una frecuencia particular ω (y a una temperatura T).

La expresión para esta ρ será distinta dependiendo de si suponemos que el cuerpo negro intercambia energía en cuantos o de forma continua.

Kirchhoff demostró termodinámicamente que la energía no depende de la naturaleza de las paredes del cuerpo negro.

Einstein aprovechó para modelarlo como un conjunto enorme de osciladores armónicos unidimensionales.

Visualizamos el sistema como un ente a temperatura T conformado por muchos sistemas S_ω en equilibrio termodinámico, cada uno de estos sistemas es el conjunto de todos los osciladores de frecuencia ω que se encuentran en el cuerpo negro. De esta forma, el cuerpo negro completo será la unión de todos ellos en equilibrio termodinámico.

La densidad espectral ρ de un cuerpo negro a temperatura T en frecuencia ω es proporcional a la energía promedio que un oscilador armónico en esta misma frecuencia ω mantiene al estar en equilibrio a una temperatura T :

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \bar{E}(\omega, T)$$

En lugar de usar el promedio temporal de la energía de un oscilador usaremos el promedio de energía en un tiempo dado sobre un grupo largo de osciladores (es válido porque pensamos que están en desfase).

Por ello resulta conveniente la visualización del cuerpo negro.

Necesitamos saber entonces el promedio de energía de una frecuencia. Para lo cual necesitamos la energía total de S_ω .

De acuerdo a la mecánica estadística, la energía interna de un sistema a temperatura T se distribuye entre sus constituyentes de tal forma que el número de ellos que alcanzan la energía E es:

$$N(E_\alpha, T) = \mathcal{N} e^{-\beta E_\alpha}$$

Donde \mathcal{N} es una constante relacionada con el número total de constituyentes. Mientras que $\beta = 1/KT$. A mayor temperatura, el decaimiento es más lento y habrá más estados con energía alta.

Clásico Si el intercambio de energía es continuo, entonces la energía promedio es:

$$\bar{E} = \frac{E_{tot}}{N_{tot}} = \frac{\int_0^\infty N(E_\alpha) E_\alpha dE_\alpha}{\int_0^\infty N(E_\alpha) dE_\alpha}$$

Si usamos el valor de $N(E_\alpha)$, llegamos a

Si usamos (2) en la expresión anterior tenemos

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\int_0^\infty \mathcal{N} e^{-\beta E_\alpha} E_\alpha dE_\alpha}{\int_0^\infty \mathcal{N} e^{-\beta E_\alpha} dE_\alpha} = -\partial_\beta \log \int_0^\infty e^{-\beta E_\alpha} dE_\alpha \\ &= -\partial_\beta \log\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} = kT, \end{aligned} \quad (4)$$

que al ser insertado en (1) nos lleva a

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT, \quad (5)$$

que claramente es de la forma

$$\rho(\omega) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (6)$$

para alguna función f , como demanda la ley de desplazamiento de Wien.

$$\bar{E} = kT$$

Esto es el principio de equipartición. Todos los osciladores tienen la misma E promedio sin importar ω .

Al insertarlo en la ecuación para ρ , llegamos a:

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT$$

Ecuación de Rayleigh Jeans

Que claramente es de la forma:

$$\rho(\omega) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right)$$

Lo que pide la ley de Wein

El problema es que esta función es infinita y si la integramos en todo ω , nos da como resultado infinito, lo cual implica que hay una energía infinita por unidad de volumen. Contradicción.

Caso Cuántico

Digamos que los osciladores sólo pueden tomar valores que son múltiplos de una energía mínima E_m . Entonces el promedio es:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nE_m e^{-\beta nE_m}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nE_m}}$$

nE_m es la energía de un oscilador en el 'estado n ' y $e^{-\beta nE_m}$ es la fracción del sistema que tiene energía nE_m . (nE_m toma el lugar de la E_α de las expresiones continuas).

El denominador sólo suma las fracciones del sistema y por tanto es el número total de constituyentes. El resultado es entonces el promedio de energía.

Introducimos $x := e^{-\beta E_m}$ y podemos escribir $\bar{E} = \frac{\sum nE_m x^n}{\sum x^n}$. Dado que $0 < x < 1$, el denominador es una serie geométrica, mientras que el numerador es una serie geo-aritmética. Sustituyendo esto nos queda que:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\sum nE_m x^n}{\sum x^n} = \frac{x E_m (1-x)^{-2}}{(1-x)^{-1}} \\ &= \frac{E_m}{e^{1/kT E_m} - 1} \end{aligned}$$

Entonces, tenemos la **distribución de Planck**:

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{E_m}{e^{\frac{E_m}{kT}} - 1}$$

Para que $\rho(\omega)$ tenga la forma que pide Wein, necesitamos que $\rho(\omega) = \omega^3 f(\omega/T)$. Para ello, debemos de proponer necesariamente que $E_m = \hbar\omega$ para \hbar una constante. Entonces llegamos a ahora sí la **distribución de planck**:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{E_m}{kT}} - 1}$$

Se puede ver experimentalmente que:

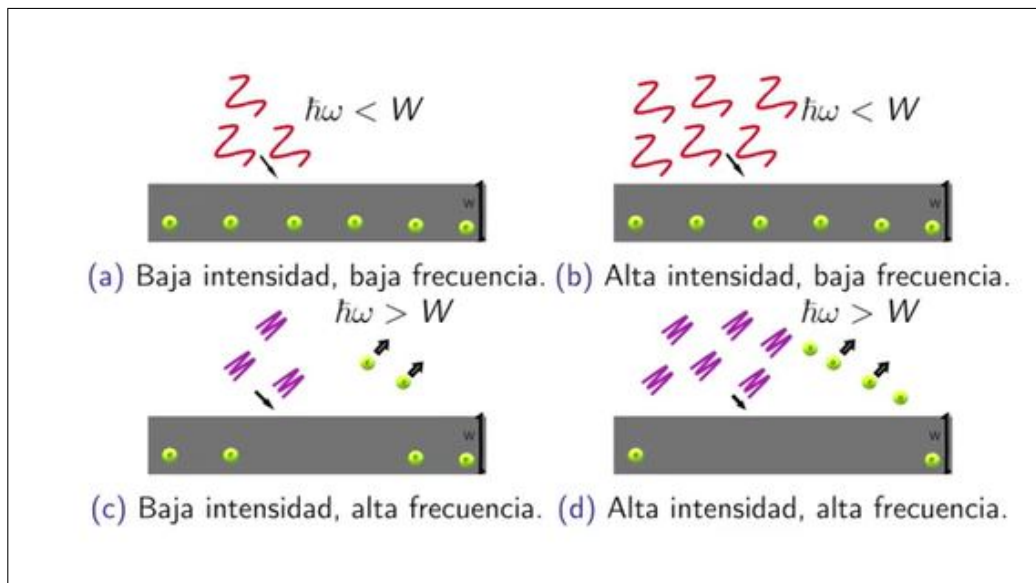
$$\hbar = 1,0545718 \times 10^{-34} J \cdot s$$

Esto previene la catástrofe u.v y se apega de forma espectacular a lo experimental. La de Rayleigh Jeans es una aproximación para ω chiquito.

Muchos otros fenómenos como el Compton y el fotoeléctrico se pudieron explicar con la idea de cuantización.

0.2. Ecuación de Schrodinger

0.2.1. Efecto Fotoeléctrico



Si la luz transmitiera energía de forma continua a un metal, siempre sería posible encontrar una intensidad lo suficientemente alta a una frecuencia fija como para arrancar electrones de un material. Como se muestra en las figuras.

Si la energía se transmite en cuantos, mayor intensidad sólo implica una mayor cantidad de electrones excitados, pero con la misma energía $h\omega$, que puede no ser suficiente para sacar electrones.

0.2.2. Bohr

En el sentido de la discretización de la interacción, otro paso lo dio Bohr en 1913. Bohr propuso que la energía en las órbitas de los átomos estaban cuantizadas.

Da los siguientes principios:

- Los electrones exclusivamente pueden tomar ciertas órbitas particulares.
- Tales órbitas son aquéllas en las que el electrón tenga un momento angular múltiplo entero de \hbar
- Los electrones sólo emiten radiación al cambiar de una órbita estable a otra (y no por girar en una misma órbita).

Este modelo explicaba las frecuencias de emisión de los átomos y era otro uso de la cuantización

0.2.3. Compton

Cuando llega un fotón a una partícula, la radiación rebotada tendrá una frecuencia distinta a la de entrada (en vez a la idea clásica de que le frecuencia era la misma). Además, la diferencia de frecuencia dependía del ángulo de rebote. Además, explicaba este resultado con cosa cuánticas.

0.3. Mecánica Cuántica

Con todos estos sucesos, Max Born empezó a referirse como mecánica cuántica a estas cosas. Su grupo de investigación formado por él, Hesenberg y otros formó la llamada **mecánica matricial**.

Años antes, de Broglie publicó un trabajo que inició la llamada mecánica ondulatoria.

0.3.1. De Broglie

Para el caso de la materia, en igualdad con el de la radiación, la idea corpuscular debe ser introducida de forma simultánea a la ondulatoria.

Haciendo un análisis relativista de la relación de la energía y momento de partículas, establece que la longitud de onda λ asociada a un corpúsculo con momento p debe estar dada por:

$$\lambda = h/p$$

Con ello la estabilidad de las ondas del átomo se explicaba pidiendo que la onda del electrón diera vueltas enteras a la órbita. El movimiento de un corpúsculo tiene asociado una longitud de onda.

También se comprueba con experimentos como el de la difracción de electrones (en el que los electrones se difractan como si fueran ondas justo con la longitud de onda $\lambda = h/p$).

"¿Será posible que la no aplicabilidad de la mecánica ordinaria a problemas de micro-mecánica sea de exactamente el mismo tipo que la no aplicabilidad de la óptica geométrica a los fenómenos de difracción e interferencia, y que se puedan superar en la misma forma?"

Schrödinger.

Schrodinger sabía que la óptica geométrica, con sus rayos rectos y cosas, no podía explicar la difracción y otros fenómenos ondulatorios.

Por lo que se preguntaba si la mecánica, con sus trayectorias rectas y definidas, tampoco puede explicar los nuevos fenómenos que parecen ondulatorios.

Por ello, usa argumentos simultáneos de mecánica y óptica hamiltoniana, Schrodinger concluye que hay que usar cosas ondulatorias.

Si queremos describir una partícula de masa m , energía E en un potencial V como una onda, primero notamos que su momento está dado por:

$$p = \sqrt{2m(E - V)}$$

Luego, según la hipótesis de De Broglie, tiene una longitud de onda dada por:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E - V)}}$$

Luego, según la relación de mecánica ondulatoria, la velocidad de fase es $v_p = \nu\lambda$, si usamos la λ de antes y usamos que $\nu h = E$, entonces tenemos que la **velocidad de fase de la onda asociada a la partícula** tiene que ser:

$$v_p = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}}$$

Luego, Schrodinger considera que la ecuación ordinaria de onda dada por:

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{v_p^2}\partial_t^2\Psi = 0$$

Luego argumenta que la dependencia temporal debe de ser la misma que la de una onda armónica, i.e $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-itE/\hbar}$, que al sustituir en la ecuación de onda junto con la expresión para la velocidad de fase encontrada antes, nos queda la **ecuación de Schrodinger independiente del tiempo**:

$$\boxed{\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = E\Psi}$$

Dada la dependencia temporal que argumenta Schrodinger $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-itE/\hbar}$, se cumple que multiplicar por E es lo mismo que:

$$E\Psi = i\hbar\partial_t\Psi$$

Que al sustituir en lo de antes, nos lleva a la **ecuación de Schrodinger dependiente del tiempo**:

$$\boxed{\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\partial_t\Psi}$$

La ecuación de Schrodinger no se puede deducir del conocimiento físico de antes y se consigue medio al tanteo.

Un año antes de su publicación, Heisenberg había publicado una ecuación que después se demostró ser equivalente a la de Schrodinger. Sin embargo, las matemáticas usadas por Heisenberg eran consideradas de frontera y no tuvo gran éxito.

0.3.2. Solución de la Ecuación de Schrodinger

En un sentido pragmático, resolver un problema físico corresponde a imponer en la ec. de Schrodinger el potencial V al que está sujeta una partícula de masa m y encontrar una solución físicamente aceptable que cumpla con ciertas condiciones de frontera.

La solución de la ec. será compleja y toda la información de la partícula estará contenida en la **función de onda** $\Psi(x, t)$.

Lo que se identifica en experimentos como el de la difracción de electrones, es que la distribución en el espacio de muchas partículas iguales impuestas al mismo potencial y en las mismas condiciones está dada por la intensidad de la onda de De Broglie asociada.

Entonces, la propuesta es que una vez resuelta la ecuación de Schrodinger, la función $|\Psi(x, t)|^2$ determina la **densidad de probabilidad** de encontrar a la partícula en la posición x al tiempo t .

Es decir, la probabilidad de encontrar a la partícula descrita por Ψ es una región B al tiempo t es de:

$$P_B(t) = \int_B |\Psi(x, t)|^2 dx$$

Siempre y cuando esté normalizada, es decir:

$$\int_{Espacio} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

Es importante distinguir que esta idea de probabilidad no es igual a la de la física clásica en la que medimos algo que existe y encontramos cierta probabilidad, sino que existe una indeterminación propia de la partícula.

Esto inició una discusión sobre la existencia o no de variable ocultas que completen y hagan determinista la teoría cuántica, a la fecha, no se ha logrado resolver.

Sin embargo, esto no importa mucho, consideremos o no la probabilidad cuántica como fundamental o no, se pueden conseguir resultados simplemente siguiendo las matemáticas y sin preocuparse por el origen de la proba.

Sin embargo, los experimentos apuntan a que la probabilidad es verdaderamente algo fundamental de la naturaleza.

Conservación de la probabilidad

Veamos cual es la derivada temporal de la probabilidad de que la partícula esté en B :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_B |\Psi|^2 dx &= \int_B \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Psi^* + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_B [(\nabla^2 \Psi) \Psi^* - \Psi (\nabla^2 \Psi^*)] dx + \frac{-i}{\hbar} \int_B (V - V^*) \Psi \Psi^* dx \end{aligned}$$

Esto último usando la ec. de Schrodinger.

Es importante notar en este tipo de operaciones, que en la ecuación, las variables x, t son

independientes y entonces tenemos que $\frac{dx}{dt} = 0$.

Siguiendo el desarrollo de antes tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_B |\Psi|^2 dx &= \frac{i\hbar}{2m} \int_B [(\nabla^2 \Psi) \Psi^* - \Psi (\nabla^2 \Psi^*)] dx + \frac{-i}{\hbar} \int_B (V - V^*) \Psi \Psi^* dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_B [(\nabla^2 \Psi) \Psi^* - \Psi (\nabla^2 \Psi^*)] dx \quad \text{el potencial es real} \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_B \nabla \cdot [(\nabla \Psi) \Psi^* - \Psi (\nabla \Psi^*)] dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{\partial B} [(\nabla \Psi) \Psi^* - \Psi (\nabla \Psi^*)] \cdot d\vec{n}\end{aligned}$$

Con $d\vec{n}$ el vector unitario perpendicular a la frontera ∂B de la región B .

Entonces, en general tenemos que:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_B |\Psi|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \int_{\partial B} [(\nabla \Psi) \Psi^* - \Psi (\nabla \Psi^*)] \cdot d\vec{n}}$$

Donde $d\vec{n}$ es el vector perpendicular a la región B .

En caso de que B sea el espacio entero, tenemos que:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{Esp} |\Psi|^2 dx = 0}$$

Pues tanto Ψ como su derivada se anulan en infinito.

Por lo que la probabilidad de todo el espacio es siempre 1.

Por último, notemos que si definimos a la **corriente de probabilidad** como:

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m} [(\nabla \Psi) \Psi^* - \Psi (\nabla \Psi^*)]$$

Y denotamos a $|\Psi(x, t)|^2$ como $\rho(x, t)$, entonces la ecuación toma la forma dada por:

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho(x, t) dx = \int_{\partial B} \vec{J} \cdot d\vec{n}$$

Que es la **ecuación de continuidad**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = \nabla \cdot \vec{J}$$

Qué información nos da la función de onda

Como dijimos antes, la función de onda es una densidad de probabilidad para la localización

de la partícula.

Si la función de onda fuera muy delgada y alta, tendríamos una posición muy bien definida y se acercaría mucho a la mecánica clásica.

Para medir qué tan precisa es una medida de probabilidad, medimos la **varianza**:

$$\sigma^2 = \int |\psi(x)|^2 |x - \langle x \rangle|^2 dx$$

El valor esperado de la variables x es:

$$\langle x \rangle = \int |\Psi|^2 x dx$$

Y el valor esperado de una función $f(x)$ es:

$$\langle f(x) \rangle = \int |\Psi|^2 f(x)$$

Velocidad: La definición de la velocidad es sutil porque pierde el significado porque la posición no está bien definida. Proponemos definir el valor esperado de la velocidad como:

$$\langle v \rangle = \frac{d}{dt} \langle x \rangle$$

Para calcularlo, usamos:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{d}{dt} \int \Psi^* x \Psi dx \\ &= \int \partial_t (\Psi^* x \Psi) dx = \int x [(\partial_t \Psi^*) \Psi + \Psi^* \partial_t \Psi] dx \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \int x [(\partial_x^2 \Psi^*) \Psi - \Psi^* \partial_x^2 \Psi] dx \\ &= \frac{-i\hbar}{2m} \int x \partial_x [(\partial_x \Psi^*) \Psi - \Psi^* \partial_x \Psi] dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int [(\partial_x \Psi^*) \Psi - \Psi^* \partial_x \Psi] dx = \int \Psi^* \left(\frac{-i\hbar}{m} \partial_x \right) \Psi dx \end{aligned}$$

Entonces, el momento sería:

$$\langle p \rangle = m \frac{d}{dt} \langle x \rangle(t) = \int \Psi^* (-i\hbar) \partial_x \Psi dx$$

Por ello, definimos el concepto de operadores. Que son artificios que nos permiten calcular valores esperados.

Si Q es una cantidad física, entonces su valor esperado está dado por:

$$\langle Q \rangle(t) = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi dx$$

En este caso, el momento y posición tienen como operadores:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x \\ \hat{p} &= -i\hbar\partial_x \\ \hat{E} &= i\hbar\partial_t\end{aligned}$$

Estos operadores no siempre conmutan. En este caso, claramente no lo hacen. Entonces, definimos el **conmutador**:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$$

Desde la perspectiva de operadores, el operador de T es $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2$.

Mientras que el operador de $V(x)$ es multiplicar por $V(x)$.

Mientras que antes habíamos establecido que $\hat{E} = i\hbar\partial_t$.

Entonces, la ecuación de Schrodinger se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\hat{H}\Psi &:= \hat{T}\Psi + \hat{V}\Psi \\ \Rightarrow \hat{H}\Psi &= \hat{E}\Psi\end{aligned}$$

Calculamos ahora la derivada de $\langle p \rangle$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle p \rangle(t) &= \frac{d}{dt} \int \Psi^*(-i\hbar\partial_x)\Psi dx \\ &= -i\hbar \int [(\partial_t\Psi^*)\partial_x\Psi + \Psi^*\partial_x\partial_t\Psi] dx \\ &= -i\hbar \int \left[\left(\frac{-i\hbar}{2m}\partial_x^2\Psi^* + \frac{i}{\hbar}V\Psi^*\right)\partial_x\Psi + \Psi^*\partial_x\left(\frac{i\hbar}{2m}\partial_x^2\Psi - \frac{i}{\hbar}V\Psi\right) \right] dx \\ &= \int \Psi^*(-\partial_x V)\Psi dx\end{aligned}$$

Entonces, como $F = -\partial_x V$, esto se escribe como:

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle(t) = \langle F(x) \rangle$$

El objeto de la derecha es el valor esperado de la fuerza y no la fuerza evaluada en el valor esperado de x .

Por tanto, no es equivalente a la segunda ley de Newton y ésta se recupera sólo cuando el cambio de F sea muy lento comparado con la variación de $|\Psi|^2$, pues así $\langle F(x) \rangle \simeq F(\langle x \rangle)$. Esto se cumple para partículas descritas por una $|\Psi|^2$ muy localizada. Por lo que recuperamos la mecánica clásica para algunos casos especiales.

Continuamos el Estudio de Schrodinger

Recordamos que la ec. estacionaria de Schrodinger es:

$$\tilde{H}\Psi = E_c\Psi$$

Para una E_c , es un problema de valores propios.

Un cálculo básico lleva a que si $\hat{E}\Psi_{E_c} = E_c\Psi_{E_c}$ entonces la varianza del operador es 0.

En general, si un operador es un eigenfunción de la función de onda, entonces el operador tendrá varianza 0 al ser evaluado en dicha función de onda.

Entonces, a los estados estacionarios les llamamos operadores de energía definida.

Dado el operador \hat{E} , podemos encontrar sus valores propios como $\hat{E}\Psi_{E_c} = E_c\Psi_{E_c}$ (Ψ_{E_c} serán las funciones de energía definida E_c). Entonces siguen la ecuación:

$$i\hbar\partial_t\Psi(x, t) = E_c\Psi(x, t)$$

Que tiene solución de la forma:

$$\Psi_{E_c}(x, t) = \psi_{E_c}(x)e^{iE_ct/\hbar}$$

Donde ψ_{E_c} depende sólo de x y a lo que t concierne, es una constante de integración.

Al calcular el valor esperado de cualquier observable en estas eigenfunciones $\psi_{E_c}(x)e^{-iE_ct/\hbar}$, veremos que la dependencia temporal desaparece. De tal forma que estos estados que cumplen $\hat{E}\Psi_{E_c} = E_c\Psi_{E_c}$ cumplen que el valor esperado de cualquier operador será constante. Es decir, se trata de estados estacionarios.

Si sustituimos $\Psi_{E_c}(x, t) = \psi_{E_c}(x)e^{-iE_ct/\hbar}$ en la ecuación de Schrodinger, llegamos a la independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi_{E_c}(x) + V(x)\psi_{E_c}(x) = E_c\psi_{E_c}(x)$$

Vemos que si el potencial dependiera del tiempo, esto no se podría concluir y no admite estados de energía definida.

Entonces, hay que encontrar todos los valores E_c para los cuales la ec. indep tiene solución (todos los eigenvalores de energía). Entonces, la solución completa será:

$$\Psi(x, t) = \sum_i C_i\psi_{E_i}(x)e^{-iE_it/\hbar}$$

Cada uno de los sumando resuelve la ecuación dependiente del tiempo. Y juntas forman una solución general adaptable a condiciones iniciales.

Sin embargo, para distintos E_i , las soluciones ψ_{E_i} y ψ_{E_j} al sumarlas no resuelven al ec. indep. del tiempo (porque son soluciones de distintas ecuaciones para empezar)

Si los eigenvalores E_c que permiten resolver la ecuación de Schrodinger indep del tiempo son un continuo, entonces la combinación lineal será una integral:

$$\Psi(x, t) = \int C(E) \psi_E(x) e^{-iEt/\hbar} dE$$

Para encontrar una solución específica, se encuentran las constantes C_i tales que $\Psi(x, 0) = \psi_0(x)$ sea una función que queremos, es decir:

$$\sum_i C_i \psi_{E_i}(x) = \psi_0(x) \quad , o \quad \int C(E) \psi_E(x) dE = \psi_0(x)$$

El teorema de Picard asegura que las soluciones de la ec. indep del tiempo son suficientes para encontrar una única combinación lineal que se adapte a las condiciones iniciales.

Además, se puede demostrar que las soluciones a la e.d.s.i.t cumplen:

$$\int \psi_{E_1}^*(x) \psi_{E_2}(x) dx = 0 \quad , \quad E_1 \neq E_2$$

Una vez determinados los coeficientes, sustituirlos en $\Psi(x, t) = \sum_i C_i \psi_{E_i}(x) e^{-iE_i t/\hbar}$ obtenemos la solución y su cambio con el tiempo.