Óptica Tarea 3

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

16 de agosto de 2020

Del libro Eugene Hecht, Óptica 3ra edición: Resolver los problemas 11.2, 11.4, 11.10, 11.12, 11.14, 11.16, 11.18, 11.20, 11.22.

Ejercicio 11.2: *Determina la transformada de Fourier de:*

$$f(x)\begin{cases}\sin^2\ k_p x & |x|<L\\ 0 & |x|>L\end{cases}$$

Haga un dibujo de ella.

La transformada se define (con la convención que usa el libro) como $F(k) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx =$

$= \displaystyle\int_{-L}^{L} \sin^2 k_p x\ e^{ikx}dx$ (Solo en el intervalo $[-L,L]$ es distinta de 0)

$= \displaystyle\int_{-L}^{L}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(2k_p x)}{2}\right)e^{ikx}\ dx$ (Por identidad trigonométrica)

$= \displaystyle\int_{-L}^{L}\frac{e^{ikx}}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2ik_p x}+e^{-2ik_p x}}{2}\right)e^{ikx}\ dx$ (Usando la expresión compleja de cos)

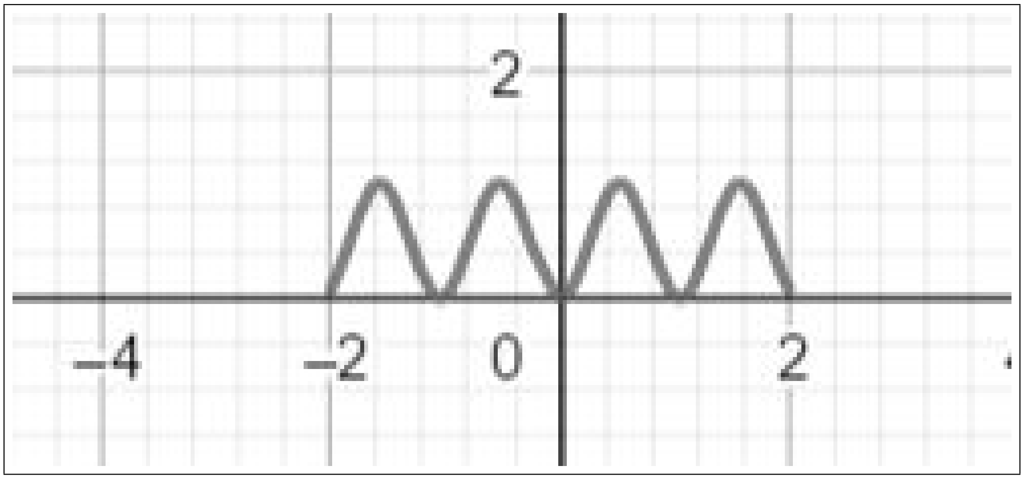
$$= \int_{-L}^{L}\frac{e^{ikx}}{2}-\frac{e^{(2k_p+k)ix}}{4}-\frac{e^{(k-2k_p)ix}}{4}\ dx$$

$$= \frac{e^{ikx}}{2ik}-\frac{e^{(2k_p+k)ix}}{4(2k_p+k)i}-\frac{e^{(k-2k_p)ix}}{4(k-2k_p)i}\Bigg|_{-L}^{L}$$

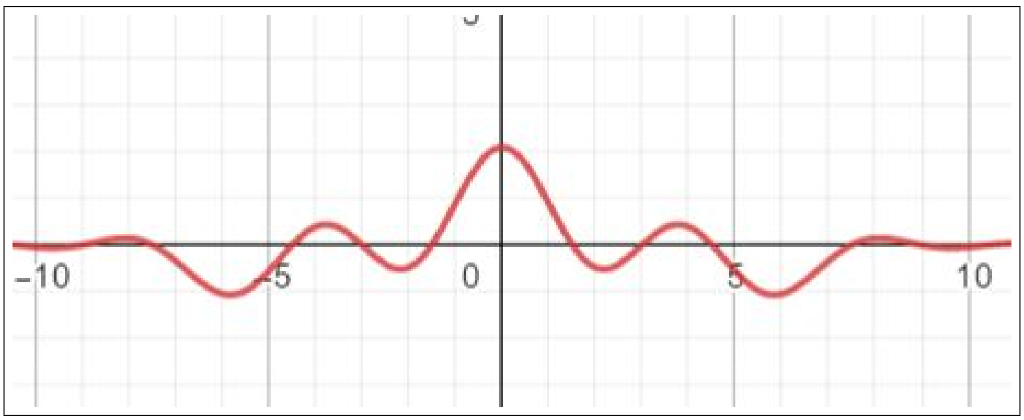
$$= \frac{e^{ikL}}{2ik}-\frac{e^{-ikL}}{2ik}-\frac{e^{(2k_p+k)iL}}{4(2k_p+k)i}+\frac{e^{-(2k_p+k)iL}}{4(2k_p+k)i}-\frac{e^{(k-2k_p)iL}}{4(k-2k_p)i}+\frac{e^{-(k-2k_p)iL}}{4(k-2k_p)i}$$

$= \dfrac{\sin(kL)}{k}-\dfrac{\sin((2k_p+k)L)}{2(2k_p+k)}-\dfrac{\sin((k-2k_p)L)}{2(k-2k_p)}$ (por la expresión compleja de sin)

$$= Lsinc(kL)-\frac{L}{2}sinc((2k_p+k)L)-\frac{L}{2}sinc((k-2k_p)L)$$



Gráfica de $f(x)$ para $L = 2, k_p = 3$



Gráfica de la transformada de Fourier

Ejercicio 11.4: *Demuestre que* $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(k)$

Probaré que $\mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(k)\} = 1$.
Probando así que 1 es la transformada inversa de $2\pi\delta(k)$

Según la teoría, la transformada inversa de una función $F(k)$ es una función $f(x)$ que se calcula como: $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ikx}\, dk$
Entonces, la transformada inversa de $2\pi\delta(k)$ es:
$f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(k)e^{-ikx}dk =$
$= \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k)e^{-ikx}dk = e^{-ikx}\Big|_0$ (Por la 'propiedad de localización' de la delta de Dirac)
$= e^0 = 1$

Con lo que se prueba que la transformada inversa de $2\pi\delta(k)$ es 1. O bien, la transformada de 1 es $2\pi\delta(k)$

Ejercicio 11.10: *Demuestre que la transformada de Fourier de la transformada $\mathcal{F}\{f(x)\}$ equivale a $2\pi f(-x)$ y que ésta no es la transformada inversa de la transformada, que equivale a $f(x)$*

Primero tenemos por definición que la transformada de f es: $F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx$
Que es una función de k.

Luego la transformada de la transformada (que denotaremos por G) es:

$$G(\tau) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} = \mathcal{F}\{F(k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{i\tau k}dk \quad (1) \quad \text{Que es una función de } \tau$$

Pero por otro lado, $f(x)$ se puede obtener calculando la transformada inversa de $F(k)$. Recordando que la transformada inversa de una función $F(k)$ se calcula como:

$f(x) \ = \ \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ikx}dk$

Entonces, $2\pi f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ikx}dk$

Por lo tanto, $2\pi f(-x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$

Pero ésta última expresión es igual a la expresión (1) para $G(\tau)$, solamente con la variable x en vez de τ. Así podemos ver que $2\pi f(-x)$ es igual a $G(x)$. Por lo tanto, la transformada de la transformada es G, mientras que la inversa de la transformada es f y éstas no son iguales, sino que $2\pi f(-x) = G(x)$.

Ejercicio 11.12 *Recordando los dos últimos problemas, demuestre que $\mathcal{F}\{(1/2\pi)sinc(\frac{1}{2}x)\} = rect(k)$, sabiendo que $\mathcal{F}\{rect(x)\} = sinc(\frac{1}{2}k)$.*

Como dice el problema, partimos de que $\mathcal{F}\{rect(x)\} = sinc(\frac{1}{2}k)$
Ahora aplicamos la transformada de Fourier de ambos lados:
$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{rect(x)\}\} = \mathcal{F}\{sinc(\frac{1}{2}k)\}$
Pero usando el ejercicio anterior, la transformada de la transformada es igual a 2π veces la función original pero evaluada en $-x$.

Entonces, $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{rect(x)\}\} = \mathcal{F}\{sinc(\frac{1}{2}k)\} \ \Rightarrow \ 2\pi \ rect(-x) = \mathcal{F}\{sinc(\frac{1}{2}k)\}$

Pero la función $rect(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{1}{2} \\ 1, & |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$ claramente cumple que $rect(-x) = rect(x)$ porque el signo de x no afecta en los valores absolutos en la definición.

Entonces, retomando lo que teníamos: $2\pi\ rect(-x) = \mathcal{F}\{sinc(\frac{1}{2}k)\} \quad \Rightarrow \quad 2\pi\ rect(x) = \mathcal{F}\{sinc(\frac{1}{2}k)\}$

Por lo tanto, la transformada de $sinc(\frac{1}{2}k)$ es $2\pi\ rect(x)$

Entonces, la transformada de $\frac{1}{2\pi}sinc(\frac{1}{2}x)$ que pide el enunciado es:
$\mathcal{F}\{\frac{1}{2\pi}sinc(\frac{1}{2}x)\} \ = \ \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{sinc(\frac{1}{2}x)\}$ (por la linealidad de la transformada)
$= \frac{1}{2\pi}(2\pi\ rect(k)) \ = \ rect(k)$

Por lo tanto, $\mathcal{F}\{\frac{1}{2\pi}sinc(\frac{1}{2}x)\} = rect(k) \quad \blacksquare$.

Ejercicio 11.14 *Dada $\mathcal{F}\{f(x)\}$, demuestre que $\mathcal{F}\{f(x-x_0)\}$ difiere de ello tan solo por un factor de fase lineal*

$$\mathcal{F}\{f(x-x_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{ikx}\, dx$$

Usamos ahora el cambio de variable $y = x - x_0$, $dy = dx$ y la integral queda como:

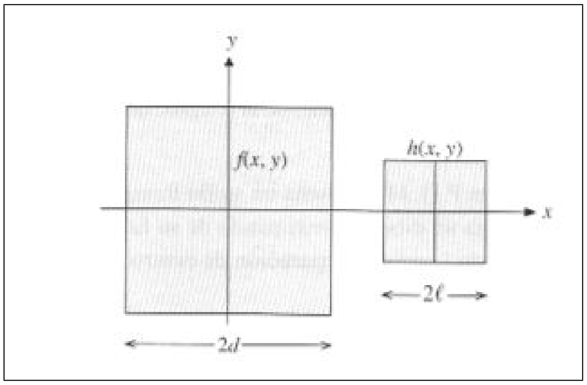
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{ik(y+x_0)}\, dy \ = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{iky}\, e^{ikx_0}\, dy = e^{ikx_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{iky}dy \ = e^{ikx_0}\mathcal{F}\{f\}$$

Porque esta última integral es sencillamente la transformada de Fourier de f, entonces:

$$\mathcal{F}\{f(x-x_0)\} = e^{ikx_0}\mathcal{F}\{f\}$$

Entonces, estas transformadas difieren por solamente un factor.

Ejercicio 11.16 *Suponga que tenemos dos funciones $f(x,y)$ y $h(x,y)$, donde ambas tienen un valor de 1 en una región del plano xy siendo cero en cualquier otro lugar. Si $g(X,Y)$ es su convolución, haga un dibujo de $g(X,0)$*



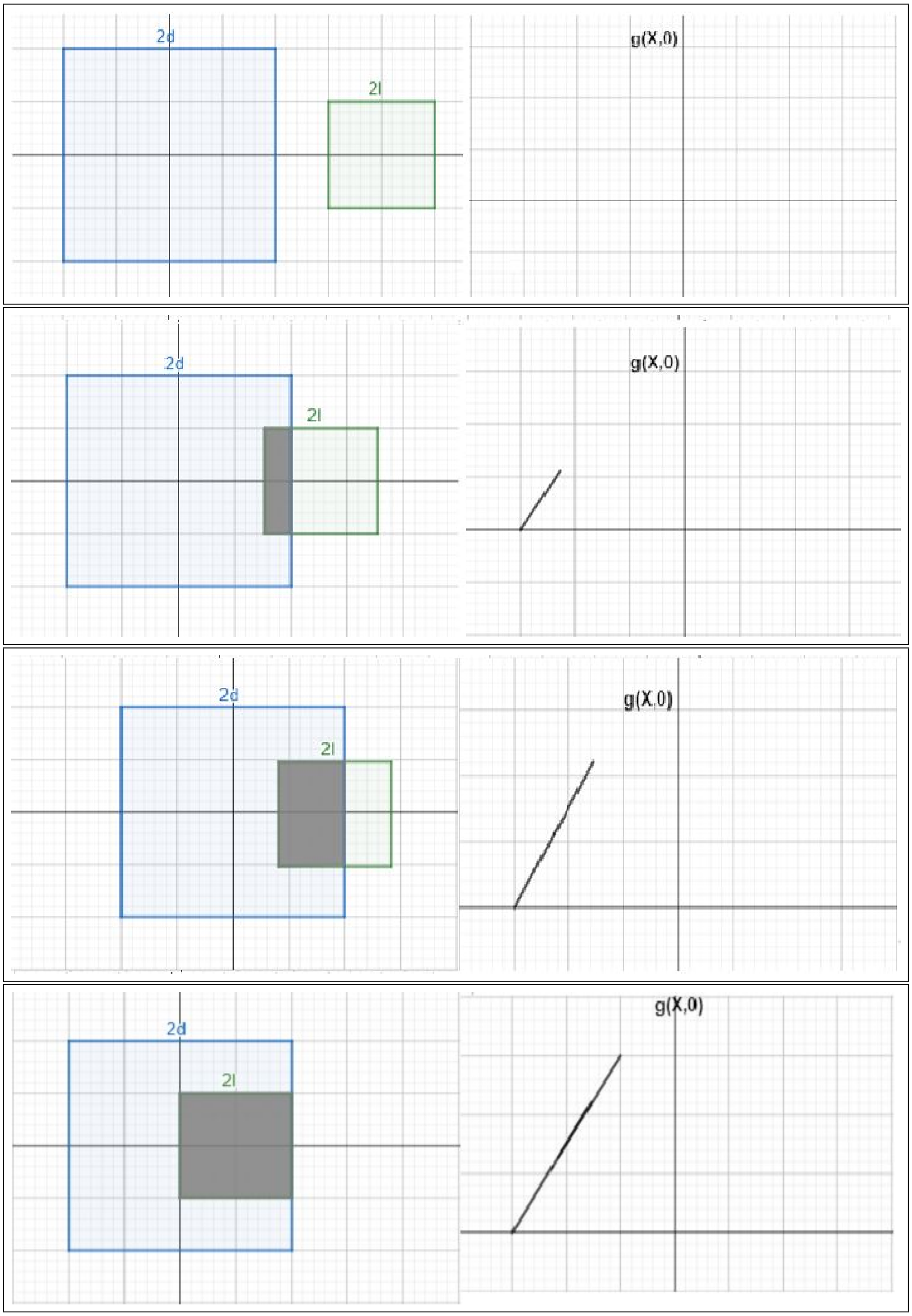
Por definición de convolución, tenemos que $g(X,Y)$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)h(X-x,Y-y)\,dx\,dy$$
Entonces, $g(X,0)$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)h(X-x,-y)\,dx\,dy$$

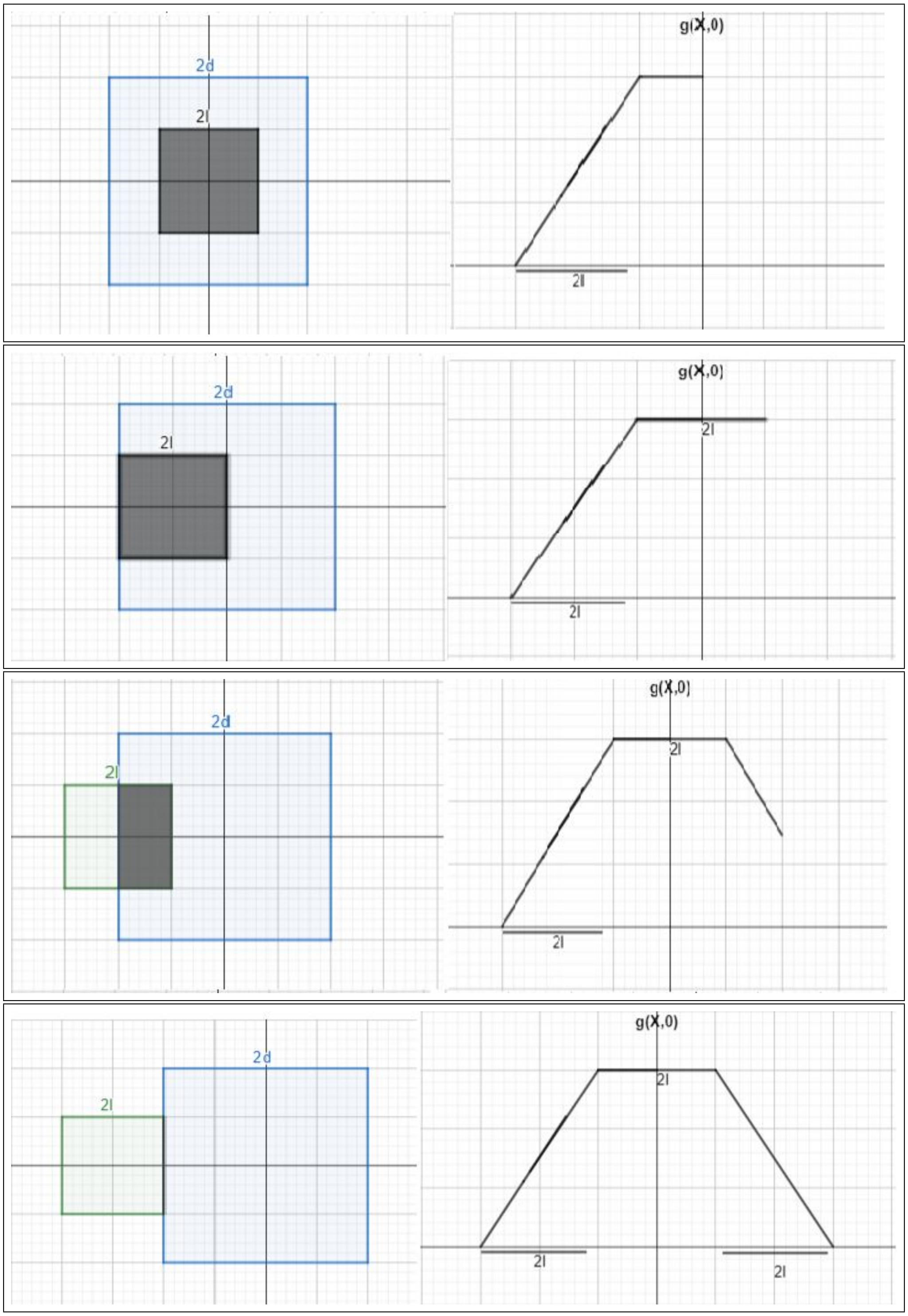
Que se puede interpretar como tomar la función h (el cuadrado chiquito), y primero reflejarla con respecto al eje x y al y (que en este caso no hace ninguna diferencia por la simetría). Luego, para todo X, ir desplazando el cuadrado pequeño horizontalmente una distancia correspondiente a X.

Si para una X los cuadrados no se intersectan, significa que no hay valores (x,y) tales que tanto $f(x,y)$ como $h(X-x,-y)$ sean distintos de cero a la vez, por lo que la integral vale 0.

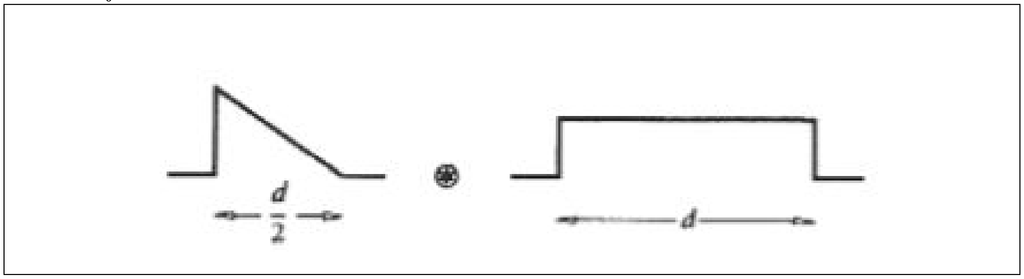
Por otro lado, si para una X los cuadrados se intersectan en algún conjunto de puntos, entonces $f(x,y)h(X-x,-y)$ valdrá 1 en estos puntos de intersección (porque tanto f como h valen 1) y $f(x,y)h(X-x,-y)$ valdrá cero en el resto de los puntos. Por lo tanto, la integral $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)h(X-x,-y)\,dx\,dy$ estaría midiendo sencillamente el área de la intersección para este valor de X.

Con esto, podemos darnos una idea de cómo será el dibujo de la convolución. Simplemente hay que ir recorriendo el rectángulo chico y la medida del área nos irá diciendo el valor de la convolución.
Así, vamos moviendo el cuadrado chiquito y graficando $g(X,0)$.
El eje horizontal es el eje X y conforme vamos desplazando el cuadrado chico, vamos graficando el área de intersección como función de X.


2d
2l
g(X,0)
2d
2l
g(X,0)
2d
2l
g(X,0)
2d
2l
g(X,0)

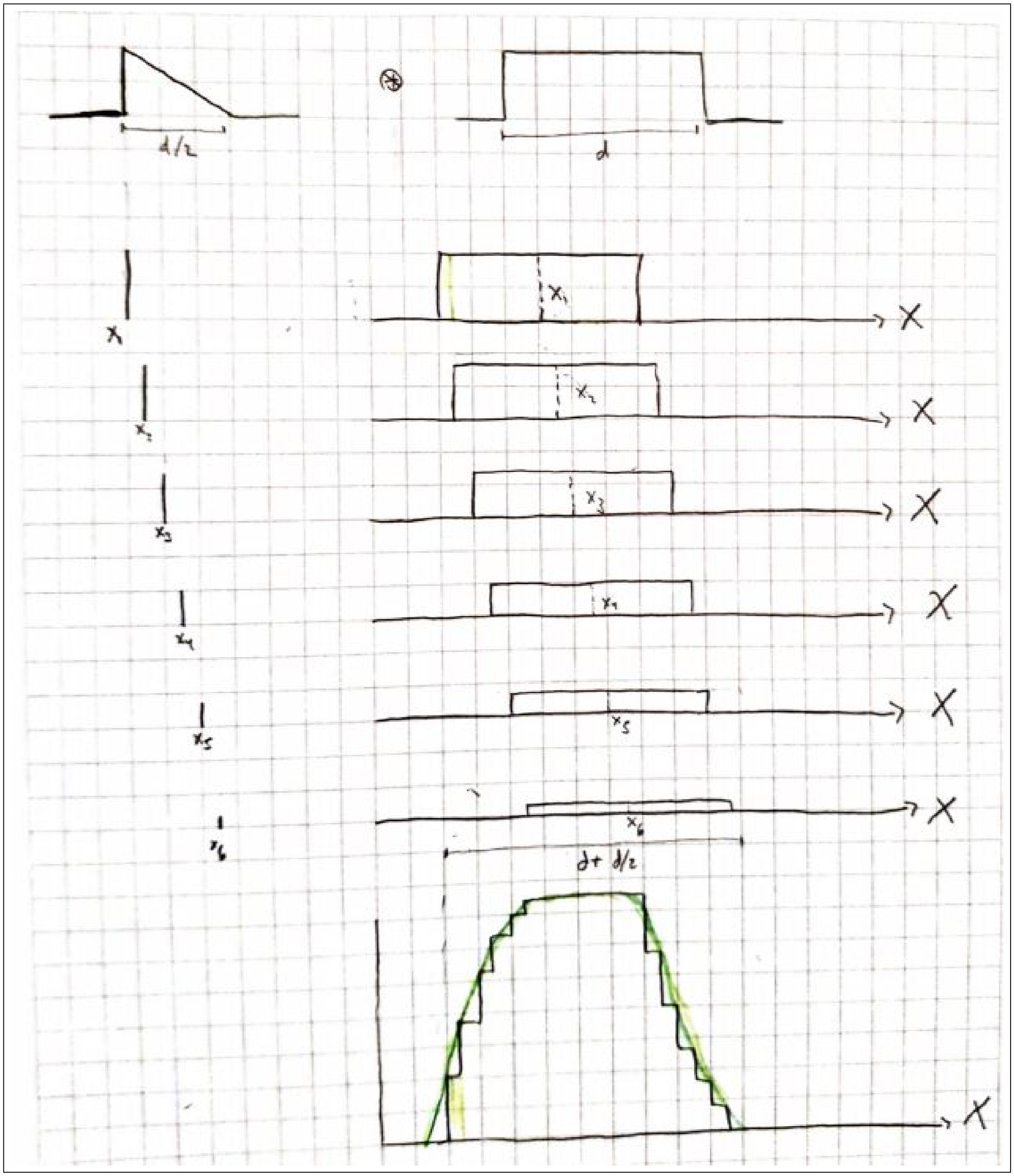

2d
2l
g(X,0)
2l
2d
2l
g(X,0)
2l
2l
2d
2l
g(X,0)
2l
2l
2d
2l
g(X,0)
2l
2l
2l

Ejercicio 11.18 *Use el método ilustrado en la figura 11.23 para hacer la convolución de las dos funciones descritas*



Nuevamente, la convolución consiste en voltear la segunda función e irla desplazando sobre la primera. Digamos que la altura del rectángulo es 1, entonces en la definición de la convolución $g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(X-x)\,dx$, el producto será distinto de 0 solamente cuando las figuras se intersectan. En tal caso, el valor de la convolución en X será igual al área bajo el triángulo sólo en la parte en la que intersecta con el rectángulo.

El método de la imagen 11.23 consiste en primero reemplazar la primera función por unas cuantas deltas de Dirac. Luego, vamos recorriendo la segunda función sobre estas deltas y la vamos copiando para cada una de las deltas de Dirac, con la altura dada por la 'altura' de la delta de Dirac. Esto nos da muchas copias recorridas de la segunda función. Finalmente, las superponemos todas y las sumamos para obtener la convolución.
Siguiendo este procedimiento descrito en el libro, primero dibujé 6 deltas de Dirac que reemplazan al triángulo. Luego copio 6 rectángulos correspondientes a estas deltas (conforme se desplaza el rectángulo).
Finalmente, para cada punto en el eje X, sumamos los valores de los rectángulos que se encuentran en ese punto y esto nos da el resultado de la convolución



Esta última gráfica es una aproximación de la gráfica de la convolución de las funciones originales.

Ejercicio 11.20 *Demuestre analíticamente que la convolución de cualquier función $f(x)$ con una función delta $\delta(x)$, produce la función original $f(X)$. Puede aprovechar el hecho de que $\delta(x)$ es par.*

Llamemos $g(X)$ a la convolución:
$g(X) = f(x) \circledast \delta(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(X-x)\,dx$ (por definición de convolución)
$= \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-X)\,dx$ (porque la función δ es par, cumple $\delta(y)=\delta(-y)$)
$= f(X)$ (por la propiedad de localización o sifting property de la función δ que dice que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$)

Entonces, tenemos que $g(X) = f(X)$, que es lo que se quería probar.

Ejercicio 11.22 *Demuestre que $\mathcal{F}\{f(x)\cos k_0x\} = [F(k-k_0)+F(k+k_0)]/2$ y que $\mathcal{F}\{f(x)\sin k_0x\} = [F(k-k_0)-F(k+k_0)]/2\ i$*

1) $\mathcal{F}\{f(x)\cos k_0x\} = \mathcal{F}\left\{f(x)\dfrac{e^{ik_0x}+e^{-ik_0x}}{2}\right\}$ (por la representación compleja de cos)
$= \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{ik_0x}+e^{-ik_0x}}{2}\, e^{ikx}\,dx$
$= \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i(k_0+k)x}\,dx \;+\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i(-k_0+k)x}\,dx$
Notamos que la integral de la izquierda corresponde a la transformada de Fourier de f pero evaluada en $k+k_0$ y similarmente la integral de la derecha corresponde a la transformada de fourier de f pero evaluada en $k-k_0$. Denotamos por F a la transformada de f y entonces tenemos:

$= \dfrac{1}{2}F(k+k_0) + \dfrac{1}{2}F(k-k_0)$
$= \dfrac{1}{2}\left[F(k-k_0)+F(k+k_0)\right] \quad \blacksquare$

2) $\mathcal{F}\{f(x)\sin k_0x\} = \mathcal{F}\left\{f(x)\dfrac{e^{ik_0x}-e^{-ik_0x}}{2i}\right\}$ (por la representación compleja de sin)
$= \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{ik_0x}-e^{-ik_0x}}{2i}\, e^{ikx}\,dx$
$= \displaystyle\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i(k_0+k)x}\,dx \;-\; \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i(-k_0+k)x}\,dx$
Notamos que la integral de la izquierda corresponde a la transformada de Fourier de f pero evaluada en $k+k_0$ y similarmente la integral de la derecha corresponde a la transformada de

fourier de f pero evaluada en $k-k_0$. Denotamos por F a la transformada de f y entonces tenemos:

$$= \frac{1}{2i}F(k+k_0) - \frac{1}{2i}F(k-k_0)$$
$$= \frac{1}{2i}\left[F(k+k_0) - F(k-k_0)\right]$$

Luego, usamos que $\frac{1}{i} = -i$ para llegar a:

$$= \frac{1}{2}\left[F(k-k_0) - F(k+k_0)\right] \quad i \qquad \blacksquare$$