Variable Compleja Tarea 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

20 de octubre de 2020

Todos los ejercicios del capítulo 1 a partir de la sección 1.4

1. Sección 1.4:

Ejercicio 1: *Verifique con cálculos que los valores de:*

$$\frac{z}{z^2+1}$$

Para $z = x+iy$ y $z = x-iy$ son conjugados

1)Para $z = x+iy$: $\dfrac{x+iy}{(x+iy)^2+1} = \dfrac{x+iy}{x^2-y^2+2xyi+1} = \dfrac{x+iy}{x^2-y^2+1+2xyi}$
$= \dfrac{x+iy}{x^2-y^2+1+2xyi}\dfrac{x^2-y^2+1-2xyi}{x^2-y^2+1-2xyi} = \dfrac{x(x^2-y^2+1)+2xy^2+i[y(x^2-y^2+1)-2x^2y]}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$

2) Para $z = x-iy$: $\dfrac{x-iy}{(x-iy)^2+1} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2-2xyi+1} = \dfrac{x-iy}{x^2-y^2+1-2xyi}$
$= \dfrac{x-iy}{x^2-y^2+1-2xyi}\dfrac{x^2-y^2+1+2xyi}{x^2-y^2+1+2xyi} = \dfrac{x(x^2-y^2+1)+2xy^2+i[-y(x^2-y^2+1)+2x^2y]}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$
$= \dfrac{x(x^2-y^2+1)+2xy^2-i[y(x^2-y^2+1)+2x^2y]}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$
Podemos ver que los dos resultados son conjugados, con lo que queda probado el ejercicio.

Ejercicio 2: *Encuentra los valores absolutos de:*

a) $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$
Expandimos el producto: $-2i(2+14i)(1+i) = -2i(-12+16i) = 32+24i$
Este número tiene una norma de $\sqrt{32^2+24^2} = \sqrt{1600} = \mathbf{40}$

b) $\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$

Desarrollamos los productos: $\dfrac{-11+2i}{-4-2i} = \dfrac{-11+2i}{-4-2i}\dfrac{-4+2i}{-4+2i} = \dfrac{40-30i}{20} = 2 - \dfrac{3}{2}i$

Este número tiene una norma de $\sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

Ejercicio 3: *Probar que:*

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$$

Si $|a|=1$ o $|b|=1$. ¿Qué excepción se debe de hacer si $|a|=|b|=1$?

Debido a que $|z|^2 = z\overline{z}$, tenemos que $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 = \dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\overline{\left(\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)}$

Ahora usamos las propiedades del conjugado para simplificar:

$= \dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\dfrac{\overline{a-b}}{\overline{1-\overline{a}b}} = \dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{1-\overline{\overline{a}}\overline{b}} = \dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{1-a\overline{b}} = \dfrac{a\overline{a}-\overline{a}b-a\overline{b}+b\overline{b}}{1-\overline{a}b-a\overline{b}+a\overline{a}b\overline{b}}$

Ahora bien, en el caso en que $|a|=1 \;\Rightarrow\; a\overline{a}=1$ y por tanto, la última expresión a la que llegamos se convierte en:

$\dfrac{1-\overline{a}b-a\overline{b}+b\overline{b}}{1-\overline{a}b-a\overline{b}+b\overline{b}} = 1$

y por lo tanto, $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 = 1$ con lo que concluimos que $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$

Por otro lado, en el caso en que $|b|=1 \;\Rightarrow\; b\overline{b}=1$ y por tanto, la última expresión a la que llegamos se convierte en:

$\dfrac{\overline{a}a-\overline{a}b-a\overline{b}+1}{1-\overline{a}b-a\overline{b}+a\overline{a}} = 1$

y por lo tanto, $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 = 1$ con lo que concluimos que $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$

En el caso de que $|a|=|b|=1$ (es decir, $a\overline{a}=b\overline{b}=1$) la expresión queda como:

$\dfrac{a\overline{a}-\overline{a}b-a\overline{b}+b\overline{b}}{1-\overline{a}b-a\overline{b}+a\overline{a}b\overline{b}} = \dfrac{2-\overline{a}b-a\overline{b}}{2-\overline{a}b-a\overline{b}}$

Que vale 1, con la condición de que $\overline{a}b+a\overline{b} \neq 2$ para que esté bien definido.

Ejericicio 4: Encontrar las condiciones tales que la ecuación $az+b\overline{z}+c=0$ tiene eactamente una solución, calcular la solución.

Sea $z = x + iy$, $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$. Entonces la ecuación pasa a ser: $(a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + b_2 i)(x - iy) + c_1 + c_2 i = 0$
Entonces, $a_1 x - a_2 y + a_2 xi + a_1 yi + b_1 x - +b_2 y - b_1 yi + b_2 xi + c_1 + c_2 i = 0$

Ahora podemos partir la ecuación en su parte real e imaginaria para llegar a un sistema de dos variables x, y:

$$\begin{gathered} a_1 x - a_2 y + b_1 x + b_2 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + a_1 y + b_2 x - b_1 y + c_2 = 0 \end{gathered}$$

Que podemos escribir mejor como:

$$\begin{gathered} (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y = -c_1 \\ (a_2 + b_2)x + (-b_1 + a_1)y = -c_2 \end{gathered}$$

La condición para que este sistema tenga solución es que su determinante sea distinto de cero, es decir $(a_1 + b_1)(-b_1 + a_1) - (-a_2 + b_2)(a_2 + b_2) \neq 0$
$\Rightarrow \; a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |a|^2 - |b|^2 \neq 0$

Dada esta condición, podemos obtener x y y usando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & -a_2 + b_2 \\ -c_2 & -b_1 + a_1 \end{vmatrix}}{|a|^2 - |b|^2} = \frac{b_1 c_1 - a_1 c_1 - a_2 c_2 + b_2 c_2}{|a|^2 - |b|^2}$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & -c_1 \\ a_2 + b_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{|a|^2 - |b|^2} = \frac{-a_1 c_2 - b_1 c_2 + a_2 c_1 + b_2 c_1}{|a|^2 - |b|^2}$$

Entonces, la solución queda como:
$$z = x + iy = \frac{b_1 c_1 - a_1 c_1 - a_2 c_2 + b_2 c_2 + (-a_1 c_2 - b_1 c_2 + a_2 c_1 + b_2 c_1)i}{|a|^2 - |b|^2}$$
$$= \frac{b_1 c_1 + b_2 c_2 - b_1 c_2 i - c_1 b_2 i - a_1 c_1 - a_2 c_2 - a_1 c_2 i + a_2 c_1 i}{|a|^2 - |b|^2}$$
$$= \frac{b_1 c_1 + b_2 c_2 + (b_1 c_2 - c_1 b_2)i - [a_1 c_1 + a_2 c_2 + (a_1 c_2 - a_2 c_1)i]}{|a|^2 - |b|^2}$$
$$= \frac{\bar{c}b - c\bar{a}}{|a|^2 - |b|^2}$$

Ejercicio 5: Probar la identidad de Lagrange en su forma compleja:

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i \overline{b_j} - a_j \overline{b_i}|^2$$

Empezamos con: $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} |a_i\bar{b_j} - a_j\bar{b_i}|^2$
Y expandimos las dos sumas usando $|z|^2 = z\bar{z}$:

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{a_j}\bar{b_j}\right) + \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i\bar{b_j} - a_j\bar{b_i})(\bar{a_i}b_j - \bar{a_j}b_i)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_i \bar{a_j}\bar{b_j} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(a_i\bar{b_j}\bar{a_i}b_j - a_i\bar{b_j}\bar{a_j}b_i - a_j\bar{b_i}\bar{a_i}b_j + a_j\bar{b_i}\bar{a_j}b_i\right)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_i \bar{a_j}\bar{b_j} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(|a_i|^2|b_j|^2 - a_i\bar{a_j}b_i\bar{b_j} - a_j\bar{a_i}b_j\bar{b_i} + |a_j|^2|b_i|^2\right)$$
$$= \sum_{i\neq j}^{n} a_i b_i \bar{a_j}\bar{b_j} + \sum_{i=j=1}^{n} a_i b_i \bar{a_j}\bar{b_j} + \sum_{1\leq i<j\leq n} (|a_i|^2|b_j|^2 + |a_j|^2|b_i|^2) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(a_i\bar{a_j}b_i\bar{b_j} + a_j\bar{a_i}b_j\bar{b_i}\right)$$

Para este último paso, partimos la primera suma en los términos que tienen índices i y j distintos y los que tienen índices iguales.

En la última expresión, la primera y la última suma son iguales. Esto se debe a que la primera suma se realiza sobre todos los índices con $i \neq j$ mientras que la última suma se realiza sobre los índices que cumplen $i < j$. Tomemos ahora un elemento cualquiera de la última suma, que tiene la forma $a_m\bar{a_n}b_m\bar{b_n} + a_n\bar{a_m}b_n\bar{b_m}$ (donde $m < n$). Ahora consideramos el término de la primera suma con índices $i = m, j = n$, que es $a_m b_m \bar{a_n}\bar{b_n}$ y el érmino correspondiente a $i = n, j = m$ que es $a_n b_n \bar{a_m}\bar{b_m}$. Podemos ver que estos dos términos juntos forman el término que teníamos de la última suma. Así, estas dos sumas son iguales pues para cada término de la última, podemos encontrar dos únicos términos de la primera que dan el mismo valor. Entonces, en la expresión a la que llegamos, estas dos sumas se cancelan y queda:

$$= \sum_{i=j=1}^{n} a_i b_i \bar{a_j}\bar{b_j} + \sum_{i<j}(|a_i|^2|b_j|^2 + |a_j|^2|b_i|^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \bar{a_i}\bar{b_i} + \sum_{i<j}(|a_i|^2|b_j|^2 + |a_j|^2|b_i|^2) \quad \text{(escribimos la primera suma con un sólo índice)}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2|b_i|^2 + \textstyle\sum_{i<j}(|a_i|^2|b_j|^2 + |a_j|^2|b_i|^2)$$

Estas dos sumas tienen todos los posibles productos de la forma $|a_m|^2|b_n|^2$ (sin repetir). Pues si $m = n$, dicho producto se encuentra en la primera suma, si $m < n$, entonces $|a_m|^2|b_n|^2$ se encuentra en el primer término de la segunda suma al hacer $i = m, j = n$ y si $n < m$, entonces $|a_m|^2|b_n|^2$ se encuentra en el segundo término de la segunda suma al hacer $i = n, j = m$.
Por lo tanto, ésta última expresión es igual a:
$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$
Pues esta expresión también tiene todos los productos de la forma $|a_m|^2|b_n|^2$ sin repetir.

Por lo tanto, para concluir, tenemos que:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 + \sum_{i\leq<j\leq n} |a_i\bar{b_j} - a_j\bar{b_i}|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$$

Que es equivalente a lo que se quería probar.

2. Sección 1.5

Ejercicio 1: Pruebe que

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$$

Si $|a| < 1$ y $|b| < 1$

Prueba: $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|^2 = \dfrac{|a-b|^2}{|1-\bar{a}b|^2} = \dfrac{(a-b)(\bar{a}-\bar{b})}{(1-\bar{a}b)(1-a\bar{b})}$ (usando que $|z|^2 = z\bar{z}$)
$= \dfrac{a\bar{a} - \bar{a}b - a\bar{b} + b\bar{b}}{1 - a\bar{b} - \bar{a}b + a\bar{a}b\bar{b}} = \dfrac{|a|^2 + |b|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b}{1 - \bar{a}b - a\bar{b} + |a|^2|b|^2}$

Si probamos que esta última fracción es menor que 1, ya tendríamos probado que $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|^2 <$ 1, lo cual prueba el problema original.

Entonces tenemos que probar que $\dfrac{|a|^2 + |b|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b}{1 - \bar{a}b - a\bar{b} + |a|^2|b|^2} < 1$. O bien, multiplicando por el denominador de ambos lados (que es válido porque el denominador es $|1 - \bar{a}b|^2$ que es un número positivo y multiplicarlo no afecta la desigualdad). Entonces, queremos probar que $|a|^2 + |b|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b < 1 - \bar{a}b - a\bar{b} + |a|^2|b|^2$.
Cancelando de ambos lados, finalmente debemos de probar que $|a|^2 + |b|^2 < 1 + |a|^2|b|^2$.

Demostración: Por hipótesis, $|a|^2 < 1$ y $|b|^2 < 1$, por lo tanto, tenemos que $(1 - |a|^2) > 0$ y $(1 - |b|^2) > 0$. Por lo tanto:
$(1 - |a|^2)(1 - |b|^2) > 0 \;\Rightarrow\; 1 - |a|^2 - |b|^2 + |a|^2|b|^2 > 0$
por lo que finalmente, $|a|^2 + |b|^2 < 1 + |a|^2|b|^2$

Con esto y por lo dicho anteriormente, ya se probó la proposición original.

Ejercicio 2: Pruebe la desigualdad de Cauchy por inducción

La desigualdad de Cauchy es:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$$

Caso Base) Para $n = 1$ tenemos que probar: $|a_1b_1|^2 \leq |a_1|^2|b_1|^2$ Lo cual se cumple (es más, se cumple la igualdad) por las propiedades de la norma.

Ambos lados de la desigualdad son números no negativos, podemos aplicar raíz cuadrada de ambos lados y probar la desigualdad de esa forma.

Hipótesis de Inducción) Suponemos ahora que $\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}$

Paso inductivo: Debemos de probar para $n+1$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_ib_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n+1} |b_i|^2}$$

Entonces, lo demostramos partiendo del lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_ib_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + a_{n+1}b_{n+1}\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| + |a_{n+1}b_{n+1}| \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2} + |a_{n+1}b_{n+1}| \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2} + |a_{n+1}||b_{n+1}|
\end{aligned}$$

La primera desigualdad se debe a la desigualdad del triángulo y la segunda se debe a la hipótesis inductiva.

Para simplificar un poco lo que sigue, definimos los siguientes términos: $a = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}$, b = $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}$, $p = |a_{n+1}|$, $q = |b_{n+1}|$. Que son todos números no negativos.

Entonces, a lo que hemos llegado hasta ahora según el procedimiento anterior es:

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_ib_i\right| \leq ab + pq \quad (1)$$

Sin embargo, podemos probar que $ab + pq \leq \sqrt{a^2 + p^2}\sqrt{b^2 + q^2}$

Pues:

$$\begin{aligned}
&0 \leq (aq - bp)^2 = a^2q^2 - 2abpq + b^2p^2 \\
&\Rightarrow\ 2abpq \leq a^2q^2 + b^2p^2 \\
&\Rightarrow a^2b^2 + 2abpq + p^2q^2 \leq a^2b^2 + a^2q^2 + b^2p^2 + p^2q^2 \\
&\Rightarrow (ab + pq)^2 \leq (a^2 + p^2)(b^2 + q^2)
\end{aligned}$$

Entonces, combinando esto con (1) y usando las definiciones de a, b, p, q nos queda:

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i\right| \leq ab + pq \leq \sqrt{a^2+p^2}\sqrt{b^2+q^2}$$
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + |a_{n+1}|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 + |b_{n+1}|^2}$$
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |b_i|^2}$$

Que es lo que se quería probar.

Ejercicio 3: Si $|a_i| < 1$, $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, ..., n$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + ...\lambda_n = 1$, probar que:

$$|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n| < 1.$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n| &\leq |\lambda_1 a_1| + |\lambda_2 a_2| + ... + |\lambda_n a_n| \quad \text{(por la desigualdad del triángulo)} \\
&= |\lambda_1||a_1| + |\lambda_2||a_2| + ... + |\lambda_n||a_n| \quad \text{(por las propiedades de la norma)} \\
&= \lambda_1|a_1| + \lambda_2|a_2| + ... + \lambda_n|a_n| \quad \text{(porque todos los } \lambda \text{ son positivos)} \\
&< \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n \quad \text{(por hipótesis } |a_i| < 1) \\
&= 1 \quad \text{(por hipótesis)}
\end{aligned}$$

Entonces, concluimos: $|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n| < 1$

Ejercicio 4: Probar que existe números complejos z que satisfacen:

$$|z - a| + |z + a| = 2|c|$$

Si y sólo si $|a| \leq |c|$. Si se cumple esta condición, cuáles son los valores mínimos y máximos de $|z|$?

$\Rightarrow$) Empezamos con: $2|a| = |2a| = |2a + z - z| = |(z - a) - (z + a)|$
$\leq |z - a| + |z + a|$ (por la desigualdad del triángulo)
$= 2|c|$ (por hipótesis)

Por lo tanto, tenemos que $2|a| \leq 2|c| \quad \Rightarrow \quad |a| \leq |c|$ ■

$\Leftarrow$) Si $|a| = 0$, entonces la ecuación es $|z| + |z| = 2|c|$ y entonces $z = c$ es una solución.

Si $|a| \neq 0$, sea $z = |c|\frac{a}{|a|}$, probaremos que ésta es una solución de la ecuación. pues:

$$|z-a|+|z+a| = ||c|\tfrac{a}{|a|}-a|+||c|\tfrac{a}{|a|}+a| = \left|a(\tfrac{|c|}{|a|}-1)\right|+\left|a(\tfrac{|c|}{|a|}+1)\right| = |a|\left|\tfrac{|c|}{|a|}-1\right|+|a|\left|\tfrac{|c|}{|a|}+1\right|$$

Por hipótesis, $|a| \leq |c|$, por lo que $|c|/|a| \geq 1$ y entonces, $|c|/|a| - 1 \geq 0$ y entonces le podemos sacar le podemos sacar el valor absoluto a esta expresión y también a $|c|/|a| + 1$:

$$= |a|\left(\frac{|c|}{|a|} - 1\right) + |a|\left(\frac{|c|}{|a|} + 1\right) = |c| - |a| + |c| + |a| = 2|c|$$

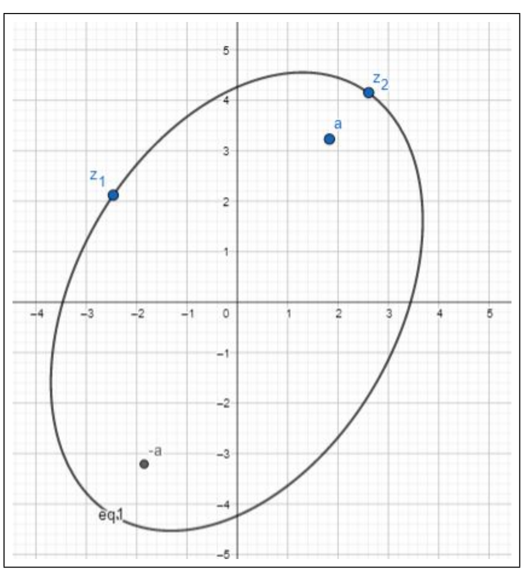
Lo que prueba que esta z es una solución.

Ahora veamos el mínimo y máximo valor posible de $|z|$ con z una solución de la ecuación:

Para el mínimo, vemos que: $|2z| = |z - a + z + a| \leq |z - a| + |z + a| = 2|c|$
Donde el último paso se debe a que z es una solución a la ecuación, entonces el valor máximo de $|z|$ es:

$$|z| \leq |c|$$

Por otro lado, para encontrar la máxima y mínima norma que puede tener $|z|$ usaré un método algo gráfico .
La ecuación básicamente dice que z es solución si la distancia entre z y a más la distancia entre z y $-a$ tiene que ser el valor fijo $2|c|$. Viéndolo así, parece la definición de una elipse en el plano complejo, donde los focos son a y $-a$ y suma de las distancia $2|c|$.



Entonces, las soluciones a la ecuación son todos los puntos en dicha elipse.
Además, el punto medio entre los focos a y $-a$ es claramente el origen, por lo que éste es el centro de la elipse.
Entonces, la solución z tal que $|z|$ es máximo se obtiene en el punto de la elipse en el que la distancia al origen es máxima, o lo que es lo mismo, en el punto tal que la distancia al centro de la elipse es mínima (porque el centro está en el origen)
Es bien sabido de geometría que tal punto se encuentra en el vértice mayor (marcado con z_2) y su distancia al centro es la mitad de la suma de la distancia a los focos, es decir la mitad de $2|c|$, que es $|c|$. Por lo tanto:

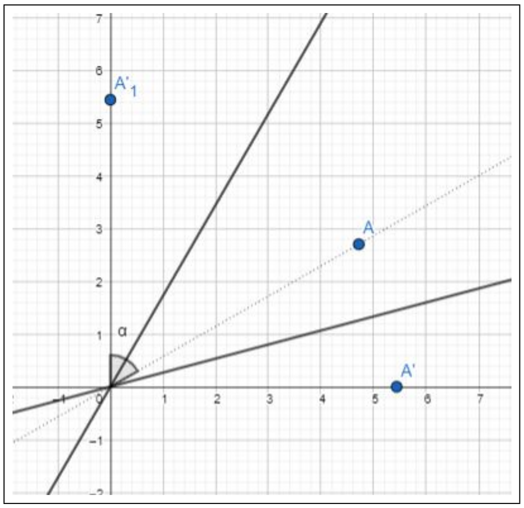
$$|z| \leq |c|$$

Por otro lado, la solución z tal que $|z|$ es mínimo se obtiene en el punto de la elipse en el que la distancia al origen es mínima, o lo que es lo mismo, en el que la distancia al centro de la elipse es mínima.
Pero es bien sabido de geometría que el punto más cercano al centro de la elipse se encuentra en el vértice menor (marcado con z_1).
Y la distancia al vértice menor es igual a la raíz cuadrada de la distancia al vértice mayor al cuadrado ($|c|^2$) menos la distancia al foco al cuadrado $|a|^2$. Por tanto, es de $\sqrt{|c|^2 - |a|^2}$, entonces:

$$\sqrt{|c|^2 - |a|^2} \leq |z|$$

3. Sección 2.1

Ejercicio 1: Encuentra los puntos simétricos a a con respecto a las lineas que bisectan los ángulos con los ejes coordenados:

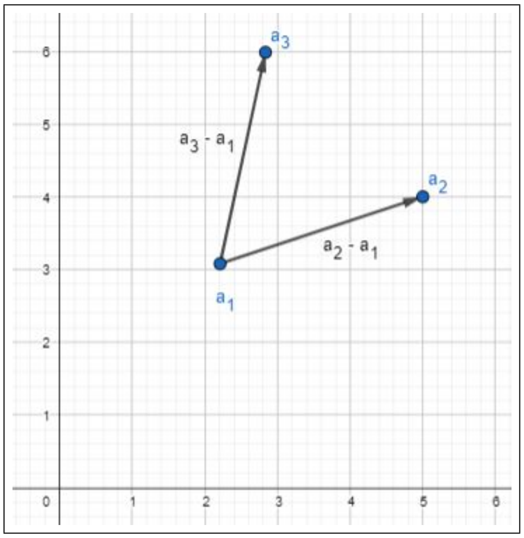


Consideremos la recta que corta el ángulo con respecto al eje Y (la recta con mayor pendiente). Esta recta pasa por el origen y por tanto, realizar una reflexión con respecto a esta recta es una transformación lineal del plano en sí mismo y es una transformación rígida (las reflexiones no afectan la distancia entre puntos). Por lo tanto, la distancia entre a y el origen permanece constante y además el origen no se desplaza en la transformación. Por lo tanto, la norma de a tras reflejarlo es la misma.
Ahora bien, a debe de hacer el mismo ángulo con respecto a la recta antes y después de la reflexión. Y como la recta se definió como el bisector con respecto al eje y, entonces después de la reflexión el punto debe de acabar sobre el eje y.

Juntando esto, tenemos que el punto reflejado será $|a|i$

El argumento para la otra recta es el mismo, el punto tendrá la misma norma, pero ahora acaba sobre el eje x, por lo tanto, es $|a| + 0i$.

Ejercicio 2: Pruebe que los puntos a_1, a_2, a_3 son los vértices de un triángulo equilátero si y sólo si $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3$



$\Rightarrow$) Si a_1, a_2a_3 son un triángulo, entonces $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1$ son los dos lados que se juntan en a_1 como se ve en la figura. Para que estos lados efectivamente sean parte de un triángulo, deben de tener la misma longitud y un ángulo de diferencia de $\pi/3$. Entonces $a_3 - a_1$ se puede conseguir al rotar $a_2 - a_1$ por un ángulo $\pi/3$. Usando que multiplicar por $e^{\theta i}$ es equivalente a rotar un ángulo de θ, llegamos a que:

$$a_3 - a_1 = e^{i\pi/3}(a_2 - a_1) \qquad (1)$$

Se puede ver algo similar para los lados que se juntan en a_3. En este caso, $a_2 - a_3$ se consigue al rotar $a_1 - a_3$ un ángulo de $\pi/3$, entonces:

$$a_2 - a_3 = e^{i\pi/3}(a_1 - a_3) \quad (2)$$

Ahora dividimos (1) entre (2) y nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_3} &= \frac{a_2 - a_1}{a_1 - a_3} \\ \Rightarrow\ (a_3 - a_1)(a_1 - a_3) &= (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \\ \Rightarrow\ a_3a_1 - a_3^2 - a_1^2 + a_1a_3 &= a_2^2 - a_2a_3 - a_1a_2 + a_1a_3 \\ a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

$\leftarrow$) Para el regreso, suponemos que: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3$, haciendo las operaciones de la ida pero en el orden contrario, podemos llegar a que:

$$\frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_3} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 - a_3}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}$$

Para que ambos lados sean iguales, se debe de tener que el ángulo de ambos complejos sean iguales. Del lado izquierdo, debido a la división, el ángulo es $arg(a_1 - a_3) - arg(a_2 - a_3)$ y del derecho es $arg(a_2 - a_1) - arg(a_3 - a_1)$, es decir:

$$arg(a_1 - a_3) - arg(a_2 - a_3) = arg(a_2 - a_1) - arg(a_3 - a_1)$$

Del lado izquierdo tenemos la diferencia de ángulos de los lados que se juntan an a_3 (es decir, el ángulo en el vértice a_3) y del derecho la diferencia de ángulos de los lados que se juntan en a_1. Con esto probamos que el ángulo en el vértice a_3 es igual al ángulo en el vértice a_1.

Vemos que la ecuación $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3$ no cambia si intercambiamos a_1 por a_2 y a_2 por a_1. Entonces, el resultado al que llegamos tampoco cambia si hacemos este intercambio. Por lo tanto:

$$arg(a_2 - a_3) - arg(a_1 - a_3) = arg(a_1 - a_2) - arg(a_3 - a_2)$$

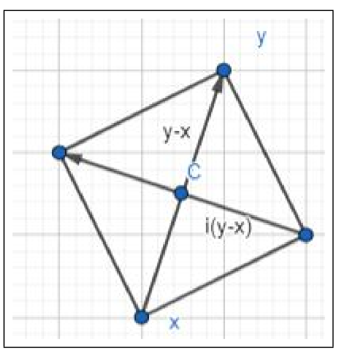
Del lado izquierdo tenemos la diferencia de ángulos de los lados que se juntan an a_3 (es decir, el ángulo en el vértice a_3) y del derecho la diferencia de ángulos de los lados que se juntan en a_2. Con esto probamos que el ángulo en el vértice a_3 es igual al ángulo en el vértice a_2.

Entonces, los tres ángulos de los vértices son iguales y por lo tanto es un triángulo equilátero. ■

Ejercicio 3: Suponga que a y b son dos vértices de un cuadrado. Encuentre los otros dos vértices en todos los casos posibles.

Sean x y y los dos vértices del triángulo que nos da el problema:

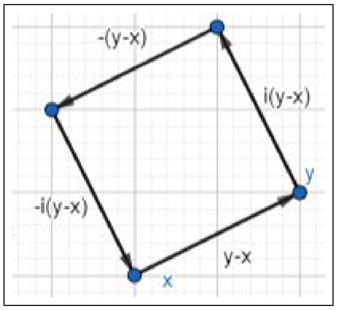
Caso 1) x y y son vértices opuestos:



En este caso el centro del cuadrado se puede encontrar como el punto medio de los dos vértices, es decir, el centro es: $C = \dfrac{x+y}{2}$. Por otro lado, la diagonal que va de x a y se consigue como $y-x$. La otra diagonal se puede conseguir al rotar esta diagonal un ángulo de 90 grados, lo que es equivalente a multiplicar por i, entonces la otra diagonal es $i(y-x)$.
Para llegar a cualquier vértice, podemos empezar desde el centro y luego movernos media diagonal hacia cada dirección. La dirección $(y-x)/2$ nos lleva a y, la dirección $-(y-x)/2$ nos lleva a x, la dirección $i(y-x)/2$ nos lleva al punto de la izquierda y $-i(y-x)/2$ nos lleva al de la derecha. Por tanto, los vértices son:

$$\{C + \frac{y-x}{2}, C - \frac{y-x}{2}, C + \frac{i(y-x)}{2}, C - \frac{i(y-x)}{2}\}$$
$$\{\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}, \frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}, \frac{x+y}{2} + \frac{i(y-x)}{2}, \frac{x+y}{2} - \frac{i(y-x)}{2}\}$$
$$\left\{y, x, \frac{x+y+i(y-x)}{2}, \frac{x+y-i(y-x)}{2}\right\}$$

Caso 2) x y y son vértices adyacentes (y se llega a y al caminar en sentido antihorario a partir de x)



En este caso, empezamos en x y luego recorremos el cuadrado en sentido antihorario. El número $y-x$ nos lleva de x a y. Y si lo rotamos 90 grados en sentido horario (es decir $i(y-x)$), nos lleva de y al siguiente vértice. Si lo volvemos a rotar 90 grados ($i\ i(y-x) = -(y-x)$), este vector nos lleva del tercer vértice al último.
Entonces, los vértices son:

$$\{x, x+(y-x), x+(y-x)+i(y-x), x+(y-x)+i(y-x)+-(y-x)\} \\ = \{x, y, y+i(y-x), x+i(y-x)\}$$

Caso 3) x y y son vértices adyacentes (y se llega a x al caminar en sentido antihorario a partir de y)
Este caso es igual al anterior pero con x e y intercambiados, por tanto, los vértices son los mismos pero hay que intercambiar x con y:

$$\{y, x, x+i(x-y), y+i(x-y)\}$$

.

Ejercicio 4: Encuentre el centro y el radio de un círculo que circunscribe el triángulo con vértices a_1, a_2, a_3

El circuncentro es el punto d que equidista a todos los tres puntos y dicha distancia es el radio r.
Es decir, necesitamos un complejo d y un real r tal que:

$$|a_1 - d| = |a_2 - d| = |a_3 - d| = r \\ \Rightarrow |a_1 - d|^2 = |a_2 - d|^2 = |a_3 - d|^2 = r^2$$

Desarrollando las normas como $|a_1 - d|^2 = (a_1 - d)(\bar{a_1} - \bar{d}) = |a_1|^2 + |d|^2 - d\bar{a_1} - a_1\bar{d}$ llegamos a las tres siguientes ecuaciones:

$$|a_1|^2 + |d|^2 - d\bar{a_1} - a_1\bar{d} = r^2 \\ |a_2|^2 + |d|^2 - d\bar{a_2} - a_2\bar{d} = r^2 \\ |a_3|^2 + |d|^2 - d\bar{a_3} - a_3\bar{d} = r^2$$

Ahora reordenamos un poco para llegar a:

$$\bar{a_1}d + a_1\bar{d} + (r^2 - |d|^2) = |a_1|^2 \\ \bar{a_2}d + a_2\bar{d} + (r^2 - |d|^2) = |a_2|^2 \\ \bar{a_3}d + a_3\bar{d} + (r^2 - |d|^2) = |a_3|^2$$

Lo cual podemos pensar como un sistema de tres ecuaciones con tres variables $(d, \bar{d}, r^2 - |d|^2)$.
Podemos obtener el valor de d usando la regla de Cramer:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} |a_1|^2 & a_1 & -1 \\ |a_2|^2 & a_2 & -1 \\ |a_3|^2 & a_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \overline{a_1} & a_1 & -1 \\ \overline{a_2} & a_2 & -1 \\ \overline{a_3} & a_3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{|a_1|^2(-a_2+a_3) - a_1(-|a_2|^2+|a_3|^2) - (|a_2|^2 a_3 - a_2|a_3|^2)}{\bar{a_1}(-a_2+a_3) - a_1(-\bar{a_2}+\bar{a_3}) - (\bar{a_2}a_3 - a_2\bar{a_3})}$$

$$= \frac{a_1(|a_2|^2 - |a_3|^2) + a_2(|a_3|^2 - |a_1|^2) + a_3(|a_1|^2 - |a_2|^2)}{-\bar{a}_1 a_2 + \bar{a}_1 a_3 + a_1\bar{a}_2 - a_1\bar{a}_3 - \bar{a}_2 a_3 + a_2\bar{a}_3}$$

$$d = \frac{a_1(|a_2|^2 - |a_3|^2) + a_2(|a_3|^2 - |a_1|^2) + a_3(|a_1|^2 - |a_2|^2)}{a_1\bar{a}_2 - \bar{a}_1 a_2 + a_2\bar{a}_3 - \bar{a}_2 a_3 + \bar{a}_1 a_3 - a_1\bar{a}_3}$$

.

Luego, por la definición que tenemos, $r = |a_1 - d|$, entonces podemos calcular r como:
$$r = |a_1 - d| = \left| a_1 - \frac{a_1(|a_2|^2 - |a_3|^2) + a_2(|a_3|^2 - |a_1|^2) + a_3(|a_1|^2 - |a_2|^2)}{a_1\bar{a}_2 - \bar{a}_1 a_2 + a_2\bar{a}_3 - \bar{a}_2 a_3 + \bar{a}_1 a_3 - a_1\bar{a}_3} \right| =$$
$$\left| \frac{a_1^2\bar{a}_2 - |a_1|^2 a_2 + a_1 a_2\bar{a}_3 - a_1\bar{a}_2 a_3 + |a_1|^2 a_3 - a_1^2\bar{a}_3 - a_1(|a_2|^2 - |a_3|^2) - a_2(|a_3|^2 - |a_1|^2) - a_3(|a_1|^2 - |a_2|^2)}{a_1\bar{a}_2 - \bar{a}_1 a_2 + a_2\bar{a}_3 - \bar{a}_2 a_3 + \bar{a}_1 a_3 - a_1\bar{a}_3} \right|$$

$$r = \left| \frac{a_1^2(\bar{a}_2 - \bar{a}_3) + a_1 a_2\bar{a}_3 - a_1\bar{a}_2 a_3 - a_1|a_2|^2 + a_1|a_3|^2 - a_2|a_3|^2 + |a_2|^2 a_3}{a_1\bar{a}_2 - \bar{a}_1 a_2 + a_2\bar{a}_3 - \bar{a}_2 a_3 + \bar{a}_1 a_3 - a_1\bar{a}_3} \right|$$

.

4. Sección 2.2

Ejercicio 1: Exprese $\cos 3\phi, \cos 4\phi$ y $\sin 5\phi$ en términos de $\cos\phi$ y $\sin\phi$

Usando la ley de Moivre, tenemos que:

$$\begin{aligned}(\cos 3\phi + i\sin 3\phi) &= (\cos\phi + i\sin\phi)^3 \\ &= \cos^3\phi + 3\cos^2\phi(i\sin\phi) + 3\cos\phi(i\sin\phi)^2 + (i\sin\phi)^3 \\ &= \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi + i(3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi)\end{aligned}$$

Entonces, igualando la parte real de ambos lados obtenemos:

$$\begin{aligned}\cos 3\phi &= \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi \\ &= \cos^3\phi - 3\cos\phi(1-\cos^2\phi) \\ &= 4\cos^3\phi - 3\cos\phi\end{aligned}$$

Para $\cos 4\phi$ calculamos con la ley de Moivre:

$$\begin{aligned}(\cos 4\phi + i\sin 4\phi) &= (\cos\phi + i\sin\phi)^4 \\ &= \cos^4\phi + 4\cos^3\phi(i\sin\phi) + 6\cos^2\phi(i\sin\phi)^2 + 4\cos\phi(i\sin\phi)^3 + (i\sin\phi)^4 \\ &= \cos^4\phi + \sin^4\phi - 6\cos^2\phi\sin^2\phi + i(4\cos^3\phi\sin\phi - 4\cos\phi\sin^3\phi)\end{aligned}$$

Igualando las partes reales, tenemos:

$$\begin{aligned}\cos 4\phi &= \cos^4\phi + \sin^4\phi - 6\cos^2\phi\sin^2\phi \\ &= \cos^4\phi + (1-\cos^2\phi)^2 - 6\cos^2\phi(1-\cos^2\phi) \\ &= \cos^4\phi + 1 - 2\cos^2\phi + \cos^4\phi - 6\cos^2\phi + 6\cos^4\phi \\ &= 8\cos^4\phi - 8\cos^2\phi + 1\end{aligned}$$

Para $\sin 5\phi$ calculamos con la ley de Moivre:

$$\begin{aligned}&(\cos 5\phi + i\sin 5\phi) = (\cos\phi + i\sin\phi)^5 \\ &= \cos^5\phi + 5\cos^4\phi(i\sin\phi) + 10\cos^3\phi(i\sin\phi)^2 + 10\cos^2\phi(i\sin\phi)^3 + 5\cos\phi(i\sin\phi)^4 + (i\sin\phi)^5 \\ &= \cos^5\phi - 10\cos^3\phi\sin^2\phi + 5\cos\phi\sin^4\phi + i(5\cos^4\phi\sin\phi - 10\cos^2\phi\sin^3\phi + \sin^5\phi)\end{aligned}$$

Igualando las partes imaginarias, tenemos:

$$\begin{aligned}\sin 5\phi &= \\ &= 5\cos^4\phi\sin\phi - 10\cos^2\phi\sin^3\phi + \sin^5\phi \\ &= 5(1-\sin^2\phi)^2\sin\phi - 10(1-\sin^2\phi)\sin^3\phi + \sin^5\phi \\ &= 5(1-2\sin^2\phi+\sin^4\phi)\sin\phi - 10(1-\sin^2\phi)\sin^3\phi + \sin^5\phi \\ &= 5\sin\phi - 10\sin^3\phi + 5\sin^5\phi - 10\sin^3\phi + 10\sin^5\phi + \sin^5\phi \\ &= 16\sin^5\phi - 20\sin^3\phi + 5\sin\phi\end{aligned}$$

Ejercicio 2: Simplifique $1 + \cos\phi + \cos 2\phi + ... + \cos n\phi$ **y** $\sin\phi + \sin 2\phi + ... + \sin n\phi$

Sea $z = \cos\phi + i\sin\phi$, entonces tenemos que $z^k = (\cos\phi + i\sin\phi)^k = \cos k\phi + i\sin k\phi$
Entonces, tenemos que:
$1 + z + z^2 + ... + z^n = (1 + \cos\phi + \cos 2\phi + ... + \cos n\phi) + i(\sin\phi + \sin 2\phi + ... + \sin n\phi)$ cuya parte real e imaginaria son las sumas que deseamos calcular.

Ahora bien, por la suma de una serie geométrica:

$$\begin{aligned} 1+z+z^2+...+z^n &= \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \\ &= \frac{(1-z^{n+1})(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} \\ &= \frac{1-\bar{z}-z^{n+1}+\bar{z}z^{n+1}}{|1-z|^2} \\ &= \frac{1-\bar{z}-z^{n+1}+|z|z^n}{|1-z|^2} \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $z=\cos\phi+i\sin\phi$ y nos queda:

$$\frac{1-\bar{z}-z^{n+1}+\bar{z}z^{n+1}}{|1-z|^2} = \frac{1-(\cos\phi-i\sin\phi)-(\cos\phi+i\sin\phi)^{n+1}+(\cos\phi+i\sin\phi)^n}{|1-(\cos\phi-i\sin\phi)|^2}$$

Ahora aplicamos la ley de Moivre:

$$= \frac{1-\cos\phi+i\sin\phi-\cos((n+1)\phi)-i\sin((n+1)\phi)+\cos(n\phi)+i\sin(n\phi)}{|1-\cos\phi+i\sin\phi|^2}$$
$$= \frac{1-\cos\phi+i\sin\phi-\cos((n+1)\phi)-i\sin((n+1)\phi)+\cos(n\phi)+i\sin(n\phi)}{(1-\cos\phi)^2+\sin^2\phi}$$
$$= \frac{1-\cos\phi+i\sin\phi-\cos((n+1)\phi)-i\sin((n+1)\phi)+\cos(n\phi)+i\sin(n\phi)}{2-2\cos\phi}$$

Ahora separamos la parte real y la imaginaria para obtener los resultados:

$$1+\cos\phi+\cos 2\phi+...+\cos n\phi = \frac{1-\cos\phi-\cos((n+1)\phi)+\cos(n\phi)}{2-2\cos\phi}$$
$$\sin\phi+\sin 2\phi+...+\sin n\phi = \frac{\sin\phi-\sin((n+1)\phi)+\sin(n\phi)}{2-2\cos\phi}$$

Lo cuál es válido siempre y cuando $2-2\cos\phi\neq 0$, es decir $\cos\phi\neq 1$, $\phi\neq\pm 2\pi k$

Si este es el caso, entonces todos los cosenos de la serie valdrán 1 y por tanto la suma es sencillamente $1+\cos\phi+\cos 2\phi+...+\cos n\phi = n+1$ y todos los senos valdrán 0, por lo que $\sin\phi+\sin 2\phi+...+\sin n\phi = 0$

Ejercicio 3: Exprese la quinta y décima raíz de la unidad en forma algebráica

Por la fórmula vista en clase, las raíces n - ésimas de z con norma r y ángulo ϕ son:

$$r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\phi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\phi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right] \ , \quad k=0,1,...,n-1$$

Para la unidad, tenemos que $r = 1$ y $\phi = 0$, entonces nos queda que las raíces quintas son:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \cos(0) + i\sin(0) = 1 \\
w_1 &= \cos\left(\frac{0+2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{0+2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\
w_2 &= \cos\left(\frac{0+2*2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{0+2*2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \\
w_3 &= \cos\left(\frac{0+3*2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{0+3*2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) \\
w_4 &= \cos\left(\frac{0+4*2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{0+4*2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

Para las raíces décimas, tenemos:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \cos\left(\frac{0+0*2\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{0+0*2\pi}{10}\right) = \cos(0) + i\sin(0) = 1 \\
w_1 &= \cos\left(\frac{0+1*2\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{0+1*2\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \\
w_2 &= \cos\left(\frac{0+2*2\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{0+2*2\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\
w_3 &= \cos\left(\frac{0+3*2\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{0+3*2\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \\
w_4 &= \cos\left(\frac{0+4*2\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{0+4*2\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \\
w_5 &= \cos\left(\frac{0+5*2\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{0+5*2\pi}{10}\right) = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\
w_6 &= \cos\left(\frac{0+6*2\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{0+6*2\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) \\
w_7 &= \cos\left(\frac{0+7*2\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{0+7*2\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right) \\
w_8 &= \cos\left(\frac{0+8*2\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{0+8*2\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) \\
w_9 &= \cos\left(\frac{0+9*2\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{0+9*2\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 4: Si w está dado por $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, probar que lo siguiente se cumple para cualquier h que no es un múltiplo de n:

$$1 + w^h + w^{2h} + ... + w^{(n-1)h} = 0$$

Por la suma de la serie geométrica, tenemos:

$$1 + w^h + (w^h)^2 + ... + (w^h)^{n-1} = \frac{1-(w^h)^n}{1-w^h} = \frac{1-\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{hn}}{1-\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{h}}$$

Luego, utilizamos la fórmula de de Moivre y nos queda:

$$= \frac{1-\left(\cos\frac{2hn\pi}{n} + i\sin\frac{2hn\pi}{n}\right)}{1-\left(\cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}\right)} = \frac{1-(\cos 2h\pi + i\sin 2h\pi)}{1-\left(\cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}\right)} = \frac{1-1}{1-\left(\cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}\right)}$$

El término entre paréntesis del numerador vale 1 ya que como h es un entero, $\cos 2h\pi = 1$ y $\sin 2h\pi = 0$.

Por otro lado, el término entre paréntesis del denominador no vale 0 porque como h no es múltiplo de n, entonces h/n no es un entero y por tanto $\cos\frac{2h\pi}{n} \neq 1$, por esta razón la división está bien definida y tiene un valor de 0.

Ejercicio 5: ¿Cuál es el valor de:

$$1 - w^h + w^{2h} - ... + (-1)^{n-1} w^{(n-1)h} \text{ ?}$$

Podemos expresar la serie como: $1 + (-w^h) + (-w^h)^2 + ... + (-w^h)^{n-1}$ y ahora aplicamos nuevamente la fórmula de la suma de la serie geométrica:
$1 + (-w^h) + (-w^h)^2 + ... + (-w^h)^{n-1} =$

$$= \frac{1 - (-w^h)^n}{1 - (-w^h)} = \frac{1 - \left[-\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \right)^h \right]^n}{1 + \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \right)^h}$$

$$= \frac{1 - \left[(-1)\left(\cos\frac{2h\pi}{n} - i\sin\frac{2h\pi}{n} \right) \right]^n}{1 + \cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}} \quad \text{Por de Moivre}$$

$$= \frac{1 - \left[(-1)^n\left(\cos\frac{2hn\pi}{n} - i\sin\frac{2hn\pi}{n} \right) \right]}{1 + \cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}} \quad \text{Por de Moivre}$$

$$= \frac{1 - \left[(-1)^n \left(\cos 2h\pi - i\sin 2h\pi \right) \right]}{1 + \cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}}$$

$$= \frac{1 - (-1)^n}{1 + \cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}} \quad \text{Porque h es un entero y por tanto} \cos 2h\pi = 1, \sin 2h\pi = 0$$

1) Si n es par, tenemos dos casos:

1.1) Primero notamos que si $\frac{2h}{n}$ es un número entero impar, entonces $1 + \cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n} = 1 + (-1) = 0$ y entonces el denominador de la última expresión vale 0, lo cual es indeterminado y nos indica que no es correcto usar la fórmula para sumar series geométricas. En este caso, habría que sumar la serie geométrica a mano y tenemos que $w^h = \cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n} = -1$
y por tanto, la suma es $1 - w^h + w^{2h} - ... + (-1)^{n-1} w^{(n-1)h} = 1 - (-1) + (-1)^2 + ... + (-1)^{n-1}(-1)^{n-1} = 1 + 1 + ... + 1 = n$

1.2) Si $\frac{2h}{n}$ no es un número entero impar, entonces lo del punto anterior no sucede y el denominador es distinto de 0. Por otro lado, el numerador será $1 - (-1)^n = 1 - 1 = 0$ y entonces la suma vale 0.

2) Si n es impar:
En este caso no puede suceder que $\frac{2h}{n}$ sea un entero impar (porque el 2 no se 'cancelará' con ningún factor de la n) y entonces no hay problema en ese aspecto y el denominador es distinto de 0. Y como n es impar, el numerador es $1-(-1)^n = 1-(-1) = 2$ y por tanto la suma vale $\dfrac{2}{1+\cos\dfrac{2h\pi}{n}+i\sin\dfrac{2h\pi}{n}}$

5. Sección 2.3

¿Cuándo sucede que $az + b\bar{z} + c = 0$ representa una línea?

Si la ecuación escrita se satisface, también se satisface si le aplicamos el conjugado a toda la ecuación, entonces tenemos dos ecuaciones equivalentes:

$$az + b\bar{z} + c = 0$$
$$\bar{a}\bar{z} + \bar{b}z + \bar{c} = 0$$

Luego, multiplicamos la primera ecuación por $\bar{a}$ y la segunda por b para que se puedan cancelar algunos términos:

$$a\bar{a}z + \bar{a}b\bar{z} + \bar{a}c = 0$$
$$\bar{a}b\bar{z} + \bar{b}bz + \bar{c}b = 0$$

Ahora restamos las ecuaciones para obtener:

$$(a\bar{a} - \bar{b}b)z + \bar{a}c - \bar{c}b = 0$$
$$\Rightarrow (|a|^2 - |b|^2)z = b\bar{c} - \bar{a}c$$

La única forma de que esta ecuación tenga infinitas soluciones (para que el conjunto de soluciones sea una recta) es que $|a|^2 - |b|^2 = 0$. Y que además $b\bar{c} - \bar{a}c = 0$ para que así la ecuación se cumpla para una cantidad infinita de soluciones z.
Por tanto, el conjunto de soluciones debe de ser una recta o todo el plano (son los únicos posibles conjuntos de soluciones infinitos a una ecuación lineal en el plano).
El conjunto de soluciones será infinito si la ecuación es la ecuación trivial $0 = 0$. Para evitar que esto suceda, ponemos la nueva condición de que a o $b \neq 0$.

Ejercicio 2: Escriba la ecuación de una elipse, de una hipérbola y una parábola en forma compleja

Elipse: Una elipse con focos en a y b es el conjunto de puntos en el plano tal que la suma de la distancia hasta a más la distancia hasta b es una constate $r \in R^+$. Directamente de esta definición y usando que la distancia de z a a se calcula como $|z-a|$, tenemos que la ecuación es:

$$|z-a|+|z-b|=r$$

Hipérbola: Una hipérbola con focos en a y b es el conjunto de puntos en el plano tal que la diferencia (o más bien, el valor absoluto de la diferencia) de la distancia hasta a más la distancia hasta b es una constate $r \in R^+$. Directamente de esta definición y usando que la distancia de z a a se calcula como $|z-a|$, tenemos que la ecuación es:

$$||z-a|-|z-b||=r$$

Parábola: Una parábola con foco en a y directriz dada por la recta $b+tc$, $t \in \mathbb{R}$ es el conjunto de puntos que tienen la misma distancia al foco que a la directriz.
Necesitamos calcular la distancia de z a la recta $b+ct$ que es la recta que pasa por b y tiene dirección c. Para calcular la distancia de z a la recta, podemos trasladar todo el plano por $-b$ para que la recta ahora pase por el origen y por tanto hay que calcular la distancia entre $z-b$ y la recta ct.

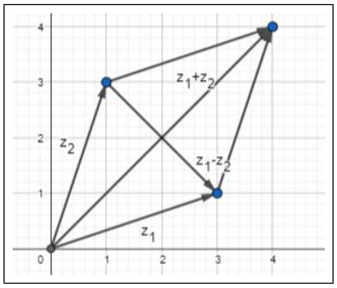
Y ahora podemos rotar todo el plano (sin estirarlo) y la distancia entre $z-b$ y la recta ct seguirá siendo la misma. Para realizar esta rotación, multiplicamos por un complejo de norma uno (para que sea verdaderamente una rotación sin que se 'estire' el plano). Escogemos convenientemente multiplicar por el complejo $\dfrac{\bar{c}}{|c|}$ que es unitario.
Entonces ahora tenemos el problema equivalente de calcular la distancia entre $\dfrac{\bar{c}}{|c|}(z-b)$ y la recta $c\dfrac{\bar{c}}{|c|}t$ que es la recta $|c|t$. Vemos que como $|c|$ es un real, esta recta pasa por el origen y se mueve en la dirección real, es decir, es el eje x.
Ahora calcular la distancia entre el punto $\dfrac{\bar{c}}{|c|}(z-b)$ y el eje x es muy sencillo porque simplemente será la parte imaginaria de $\dfrac{\bar{c}}{|c|}(z-b)$.
Entonces, como la traslación y la rotación no afectaron la distancia entre el punto y la recta (son transformaciones rígidas), entonces la distancia entre el punto z original y la recta $b+ct$ es de:

$$\Im\left[\frac{\bar{c}}{|c|}(z-b)\right]$$

Entonces, según la definición de parábola, esta distancia debe de ser igual a la distancia entre z y el foco, es decir:

$$|z-a|=\Im\left[\frac{\bar{c}}{|c|}(z-b)\right]$$

Ejercicio 3: Pruebe que las diagonales de un paralelogramo se bisectan y que las diagonales de un rombo son ortogonales



Sin perdida de generalidad, suponemos que uno de los vértices está en el origen. De ese vértice salen dos lados que llegan a dos vértices. Los vértices a donde llegan se pueden denotar por z_1, z_2. Por la regla geométrica de la suma, $z_1 + z_2$ llega al vértice opuesto del paralelogramo y entonces $z_1 + z_2$ es una de las diagonales del paralelogramo. Esta diagonal empieza en el origen y su punto medio es simplemente $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$.
La otra diagonal es la diferencia $z_1 - z_2$, esta diagonal parte del punto z_2. Entonces si queremos llegar al punto medio, hay que empezar de z_2 y sumar la mitad de la diagonal, es decir: $z_2 + \dfrac{z_1 - z_2}{2} = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$
Entonces, vemos que las dos diagonales se intersectan en el mismo punto, que es el punto medio de ambas. Por tanto las dos rectas se bisectan.

Para un rombo, las longitudes de los lados son iguales, es decir $|z_1| = |z_2|$ y hay que probar que las diagonales son ortogonales (O lo que es lo mismo, probar que una de las diagonales se obtiene al multiplicar la otra por un número puramente imaginario que lo haga rotar). Es decir:

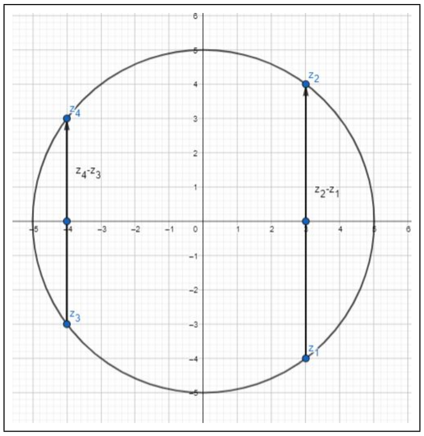
$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = ki \qquad k \in \mathbb{R}$$

Como este número es puramente imaginario, su conjugado es igual a su inverso aditivo

$$\begin{gathered}
\Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = -\frac{\bar{z_1} + \bar{z_2}}{\bar{z_1} - \bar{z_2}} \\
\Leftrightarrow \quad (z_1 + z_2)(\bar{z_1} - \bar{z_2}) = -(z_1 - z_2)(\bar{z_1} + \bar{z_2}) \\
\Leftrightarrow \quad z_1\bar{z_1} - z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_2 - z_2\bar{z_2} = -z_1\bar{z_1} - z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_2 + z_2\bar{z_2} \\
\Leftrightarrow |z_1|^2 - |z_2|^2 - z_1\bar{z_2} - \bar{z_1}z_2 = -|z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_2 \\
\Leftrightarrow 2|z_1|^2 = 2|z_2|^2 \\
\Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2
\end{gathered}$$

Luego, siguiendo las implicaciones en sentido contrario, podemos probar que si la figura es un rombo (es decir $|z_1| = |z_2|$) entonces se cumple que $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = -\dfrac{\bar{z_1} + \bar{z_2}}{\bar{z_1} - \bar{z_2}}$, lo cual muestra que $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ es un número puramente imaginario y por tanto, $z_1 + z_2$ se consigue al multiplicar $z_1 - z_2$ por un númro puramente imaginario. Finalmente, esto implica que una diagonal se obtiene al rotar la otra 90 grados (y luego posiblemente estirarla)

Ejercicio 4: Pruebe analíticamente que los puntos medios de cuerdas paralelas en un círculo se encuentran en el diámetro perpendicular a las cuerdas



Sin que se afecte la validez del teorema, podemos trasladas el círculo de tal forma que su centro se encuentre en el origen del plano complejo. Y además, nuevamente sin que afecte la geometría del problema o la validez del resultado, rotamos el círculo de tal forma que las dos cuerdas del círculo sean verticales. Esto no afecta al resultado, ya que si originalmente existía un diámetro perpendicular a las cuerdas y que pasa por sus centros, al rotar el círculo, el diámetro rota igualmente y sigue siendo ortogonal a las cuerdas y pasando por sus centros.

Denotamos por z_1, z_2 los puntos de una de las cuerdas en el círculo y z_3, z_4 los de la otra. El complejo que representa a las cuerdas se obtiene restando los puntos y por tanto las cuerdas están representadas por $z_2 - z_1$ y por $z_4 - z_3$.

Estos números $z_2 - z_1$ y $z_4 - z_3$ son puramente imaginarios debido a la condición que mencionamos de que las cuerdas sean verticales.
Como $z_2 - z_1$ es puramente imaginario, entonces $z_2 = z_1 + (z_2 - z_1)$ tiene la misma parte real que z_1 (pues le estamos sumando solamente el número imaginario puro $z_2 - z_1$). Además, como se encuentran en el mismo círculo centrado en el origen, z_1 y z_2 tienen la misma norma. Entonces, como z_1 y z_2 tienen la misma norma y la misma parte real, a menos de que sean el mismo punto, deben de cumplir que la parte imaginaria de uno es el inverso de la parte imaginaria del otro. Es decir, son números conjugados, $z_2 = \bar{z}_1$.

El mismo argumento se vale para la otra cuerda, con la que concluimos que $z_3 = \bar{z}_4$.

Para llegar al centro de una de las cuerdas, empezamos en z_1 y sumamos la mitad de la cuerda. Por lo tanto, el centro de la primera cuerda es $z_1 + \dfrac{z_2 - z_1}{2} = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$, usando la condición anterior, tenemos que el centro es $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = \dfrac{z_1 + \bar{z}_1}{2} = \Re(z_1)$

Para llegar al centro de la otra cuerda, empezamos en z_3 y sumamos la mitad de la cuerda. Por lo tanto, el centro de la segunda cuerda es $z_3 + \dfrac{z_4 - z_3}{2} = \dfrac{z_3 + z_4}{2}$, usando la condición anterior, tenemos que el centro es $\dfrac{z_3 + z_4}{2} = \dfrac{z_3 + \bar{z}_3}{2} = \Re(z_3)$

Entonces, los centros de las dos cuerdas son números reales y por tanto se encuentran en el eje x, el centro también se encuentra en el eje x. Entonces, la parte del eje x comprendida dentro del círculo pasa por el origen y por tanto es un diámetro. Y este diámetro pasa por los centros de las cuerdas, como se quería probar. Finalmente, el diámetro es perpendicular a las cuerdas porque éste es horizontal, mientras que las cuerdas son verticales.

Ejercicio 5: Pruebe que todos los círculos que pasan por a y por $\frac{1}{\bar{a}}$ intersectan el círculo $|z| = 1$ en ángulos rectos

Digamos que el círculo que contiene a a y $\frac{1}{\bar{a}}$ tienen centro c y radio r. Entonces como a y $\frac{1}{a}$ pertenecen a este círculo, debemos de tener que su distancia al centro es la misma y vale r, es decir:

$$|a - c|^2 = |1/\bar{a} - c|^2 = r^2$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad (a - c)(\bar{a} - \bar{c}) = r^2 \qquad & (1/\bar{a} - c)(1/a - \bar{c}) = r^2 \\
\Rightarrow \quad |a|^2 - \bar{a}c - a\bar{c} + |c|^2 = r^2 \qquad & 1/|a|^2 - c/a - \bar{c}/\bar{a} + |c|^2 = r^2 \\
\Rightarrow \quad |a|^2 - \bar{a}c - \overline{\bar{a}c} + |c|^2 = r^2 \qquad & 1/|a|^2 - c/a - \overline{c/a} + |c|^2 = r^2 \\
\Rightarrow \quad |a|^2 - 2\Re(\bar{a}c) + |c|^2 = r^2 \qquad & 1/|a|^2 - 2\Re(c/a) + |c|^2 = r^2 \quad (1)
\end{aligned}$$

Unimos las dos ecuaciones para obtener:

$$\begin{aligned}
|a|^2 - 2\Re(\bar{a}c) + |c|^2 &= 1/|a|^2 - 2\Re(c/a) + |c|^2 \\
|a|^2 - 1/|a|^2 &= 2\Re(\bar{a}c) - 2\Re(c/a) \\
|a|^2 - 1/|a|^2 &= 2\Re(\bar{a}c - c/a) \\
|a|^2 - 1/|a|^2 &= 2\Re\left[(|a|^2 - 1)c/a\right] \\
|a|^2 - 1/|a|^2 &= 2(|a|^2 - 1)\Re\left[c/a\right] \qquad \text{Porque} |a|^2 - 1 \text{ es real}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \frac{|a|^2 - 1/|a|^2}{|a|^2 - 1} &= 2\Re(c/a) \\
\Rightarrow \quad \frac{|a|^2(1 - 1/|a|^4)}{|a|^2(1 - 1/|a|^2)} &= 2\Re(c/a) \\
\Rightarrow \quad \frac{|a|^2(1 - 1/|a|^2)(1 + 1/|a|^2)}{|a|^2(1 - 1/|a|^2)} &= 2\Re(c/a) \\
\Rightarrow \quad 1 + 1/|a|^2 &= 2\Re(c/a)
\end{aligned}$$

Sustituimos ahora este resultado en (1) y obtenemos:

$$\begin{aligned}
1/|a|^2 - (1 + 1/|a|^2) + |c|^2 &= r^2 \\
|c|^2 &= r^2 + 1 \quad (2)
\end{aligned}$$

Por otro lado, a tiene una norma $|a|$ y $1/\bar{a}$ una norma $1/|a|$. Como estos números son inversos, alguno de los dos tiene que ser menor que 1 y el otro mayor (a menos que los dos sean iguales a 1). Por tanto, el círculo que pasa por a y por $1/\bar{a}$ en algún momento debe de pasar por un punto de norma igual a 1. Entonces, este círculo intersecta al círculo $|z| = 1$. Digamos que

z_0 es una de esas intersecciones, como pertenece al primer círculo (con centro c y radio r) y al círculo $|z| = 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
|z_0 - c|^2 = r^2 \quad , \quad |z_0|^2 = 1 \\
\Rightarrow \quad (z_0 - c)(\bar{z}_0 - \bar{c}) = r^2 \\
\Rightarrow \quad |z_0|^2 - 2\Re(\bar{z}_0 c) + |c|^2 = r^2 \\
\Rightarrow \quad 1 - 2\Re(\bar{z}_0 c) + |c|^2 = r^2 \qquad \text{Porque}|z_0|^2 = 1 \\
\Rightarrow \quad 1 - 2\Re(\bar{z}_0 c/|z_0|^2) + |c|^2 = r^2 \qquad \text{Porque}|z_0|^2 = 1 \\
\Rightarrow \quad 1 - 2\Re(\bar{z}_0 c/(z_0\bar{z}_0)) + |c|^2 = r^2 \\
\Rightarrow \quad 1 - 2\Re(c/z_0) + |c|^2 = r^2
\end{aligned}$$

Luego, usamos el punto (2) para llegar a:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 1 - 2\Re(c/z_0) + r^2 + 1 = r^2 \\
\Rightarrow 2 - 2\Re(c/z_0) = 0 \\
\Rightarrow \Re(c/z_0) = 1 \quad (3)
\end{aligned}$$

Finalmente, probamos que los círculos intersectan en ángulos rectos. El radio del círculo $|z| = 1$ que va de su centro (0) al punto z_0 es el complejo z_0. El radio del otro círculo, que va del centro c al punto z_0 es el complejo $z_0 - c$. Para probar que los círculos se intersectan ortogonalmente, hay que probar que estos radios son ortogonales. O bien, que uno de los radios se obtiene al rotar el otro por 90 grados, es decir al multiplicar por un número puramente imaginario.
Entonces hay que probar que $z_0 - c = k(z_0)$, donde k es un número imaginario puro, o lo que es lo mismo:
$\dfrac{z_0 - c}{z_0}$ no tiene parte real.

$$\Re\left(\frac{z_0 - c}{z_0}\right) = \Re\left(1 - c/z_0\right) = \Re(1) - \Re(c/z_0) = 1 - 1 \qquad \text{(por 3)}$$
$$= 0$$

Lo que prueba que $\frac{z_0 - c}{z_0}$ es puramente imaginario y por tanto $z_0 - c$ se obtiene al multiplicar z_0 por un número puramente imaginario, lo que muestra que los radios son ortogonales y por tanto los círculos son ortogonales en el punto de intersección z_0.

6. Sección 2.4:

Ejercicio 1: Pruebe que z y z' corresponden a puntos diametralmente opuestos en la esfera de Riemann si y sólo si $z\bar{z'} = -1$

$\Rightarrow$) Denotemos por (x_1, x_2, x_3) y (x_1', x_2', x_3') los puntos correspondientes de z y z' en la esfera de Riemann. Por hipótesis (x_1', x_2', x_3') es opuesto a (x_1, x_2, x_3) en la esfera y como ésta está centrada en el origen, eso significa que $(x_1', x_2', x_3') = (-x_1, -x_2, -x_3)$.

Dado un punto en la esfera de Riemman, su proyección esteroegráfica está dada por $z = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} z &= \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \\ z' &= \frac{x_1' + ix_2'}{1 - x_3'} = \frac{-x_1 + i(-x_2)}{1 - (-x_3)} = \frac{-x_1 - x_2 i}{1 + x_3} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} z\bar{z}' &= \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \; \overline{\frac{-x_1 - x_2 i}{1 + x_3}} \\ &= \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \; \frac{-x_1 + x_2 i}{1 + x_3} \qquad x_1, x_2, x_3 \text{ son reales y por eso resulta sencillo el conjugado} \\ &= \frac{-x_1^2 - x_2^2}{1 - x_3^2} \\ &= \frac{-x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \qquad \text{Por estar en la esfera, } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \;\Rightarrow\; 1 - x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Suponemos que $z\bar{z}' = -1$,
Entonces, $z' = -1/\bar{z}$. Y tenemos que:

$$\begin{aligned} |z'| &= \left|\frac{-1}{\bar{z}}\right| = \frac{|-1|}{|\bar{z}|} = \frac{1}{|z|} \\ \bar{z}' &= \overline{\frac{-1}{\bar{z}}} = \frac{-1}{z} \end{aligned}$$

Entonces, el punto en la esfera de Riemann correspondiente a z es:

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} \qquad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)} \qquad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

El punto correspondiente en la esfera de Riemann a z' es:

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{z' + \bar{z}'}{1 + |z'|^2} = \frac{\frac{-1}{\bar{z}} + \frac{-1}{z}}{1 + \frac{1}{|z|^2}} = -\frac{\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}}{\frac{|z|^2+1}{|z|^2}} = -\frac{\frac{z+\bar{z}}{|z|^2}}{\frac{|z|^2+1}{|z|^2}} = -\frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} = -x_1 \\ x_2' &= \frac{z' - \bar{z}'}{i(1 + |z'|^2)} = \frac{\frac{-1}{\bar{z}} - \frac{-1}{z}}{i(1 + \frac{1}{|z|^2})} = \frac{\frac{-z+\bar{z}}{z\bar{z}}}{i(\frac{|z|^2+1}{|z|^2})} = \frac{-z + \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)} = -x_2 \\ x_3' &= \frac{|z'|^2 - 1}{|z'|^2 + 1} = \frac{\frac{1}{|z|^2} - 1}{\frac{1}{|z|^2} + 1} = \frac{\frac{1-|z|^2}{|z|^2}}{\frac{1+|z|^2}{|z|^2}} = \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} = -x_3 \end{aligned}$$

De esto vemos que el punto en la esfera de Riemann correspondiente a z' es $(x'_1, x'_2, x'_3) = -(x_1, x_2, x_3)$.
Entonces los puntos son opuestos con respecto al origen, y como la esfera de Riemann está centrada al origen, los puntos son diametralmente opuestos.

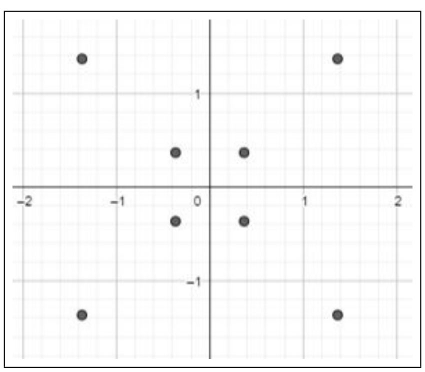
2. Un cubo tiene sus vértices en una esfera S y sus lados son paralelos a los ejes coordenados. Encuentra las proyecciones estereográficas de sus vértices

Para que el cuadrado esté inscrito en la esfera, su centro debe de estar ubicado en el centro de la esfera. Como los lados son paralelos a los ejes, por la simetría del cuadrado, las 3 coordenadas de cada vértice deben de tener el mismo valor absoluto.
Es decir, los vértices tienen las coordenadas $(\pm t, \pm t, \pm t)$, donde cada uno de los 8 vértices surgen de escoger los signos de cada una de las coordenadas.
Como el punto pertenece a la esfera unitaria, entonces debemos de tener $t^2 + t^2 + t^2 = 1$ y luego $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Calculamos ahora la proyección estereográfica de estos puntos según la fórmula:
$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} = \frac{\pm t + i(\pm t)}{1 \mp t} = \frac{\pm\frac{1}{\sqrt{3}} + i(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})}{1 \mp \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\pm 1 + i(\pm 1)}{\sqrt{3} \mp 1} = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{3} \mp 1}$$

Los puntos de la proyección son entonces:
$$\left\{ \frac{1+i}{\sqrt{3}+1}, \frac{1-i}{\sqrt{3}+1}, \frac{-1+i}{\sqrt{3}+1}, \frac{-1-i}{\sqrt{3}+1}, \frac{1+i}{\sqrt{3}-1}, \frac{1-i}{\sqrt{3}-1}, \frac{-1+i}{\sqrt{3}-1}, \frac{-1-i}{\sqrt{3}-1} \right\}$$

Si graficamos los puntos, obtenemos la siguiente figura. Vemos que la cara superior del cubo (en la que la tercera coordenada es positiva) se proyecta al cuadrado exterior y la cara inferior al cuadrado interior.



Ejercicio 3: Mismo problema que el anterior pero para un tetrahedro en posición general

Sea (x_1, x_2, x_3) un vértice del tetahedro en un punto arbitrario.

Ejercicio 4: Sea Z , Z' la proyección estereográfica de z, z' y sea N el polo norte. Probar que los triángulos NZZ' y Nzz' son similares

Sea $Z = (x_1, x_2, x_3), Z' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ los puntos en la esfera de Riemann donde $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_2'^3 = 1$. Y sus proyecciones sobre el plano son:

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \quad , \quad z' = \frac{x'_1 + ix'_2}{1 - x'_3}$$

O bien, escritos como puntos en tres dimensiones, son:

$$z = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0\right) \quad , \quad z' = \left(\frac{x'_1}{1 - x'_3}, \frac{x'_2}{1 - x'_3}, 0\right)$$

Entonces, calculamos las longitudes de los lados del triángulo NZZ':
$NZ = |Z - N| = |(x_1, x_2, x_3) - (0, 0, 1)| = |(x_1, x_2, x_3 - 1)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3 + 1} = \sqrt{2 - 2x_3}$

$NZ' = |Z' - N| = |(x'_1, x'_2, x'_3) - (0, 0, 1)| = |(x'_1, x'_2, x'_3 - 1)| = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - 2x'_3 + 1} = \sqrt{2 - 2x'_3}$

$ZZ' = |Z - Z'| = |(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3)| = \sqrt{x_1^2 + x_1'^2 - 2x_1x'_1 + x_2^2 + x_2'^2 - 2x_2x'_2 + x_3^2 + x_3'^2 - 2x_3x'_3}$
$= \sqrt{2 - 2(x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3)}$

Y ahora la longitud de dos lados del triángulo Nzz' :
$Nz = |z - N| = |(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, -1)| = \sqrt{(\frac{x_1}{1-x_3})^2 + (\frac{x_2}{1-x_3})^2 + 1} = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+1-2x_3+x_3^2}{(1-x_3)^2}} = \sqrt{\frac{2-2x_3}{(1-x_3)^2}} = \sqrt{\frac{2}{1-x_3}}$

El lado Nz' se calcula igual y da: $Nz' = \sqrt{\frac{2}{1-x'_3}}$

$zz' = |z - z'| = |(\frac{x_1}{1-x_3} - \frac{x'_1}{1-x'_3}, \frac{x_2}{1-x_3} - \frac{x'_2}{1-x'_3}, 0)| = \sqrt{(\frac{x_1}{1-x_3} - \frac{x'_1}{1-x'_3})^2 + (\frac{x_2}{1-x_3} - \frac{x'_2}{1-x'_3})^2}$
$= \sqrt{\frac{x_1^2}{(1-x_3)^2} - 2\frac{x_1x'_1}{(1-x_3)(1-x'_3)} + \frac{x_1'^2}{(1-x'_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1-x_3)^2} - 2\frac{x_2x'_2}{(1-x_3)(1-x'_3)} + \frac{x_2'^2}{(1-x'_3)^2}}$
$= \sqrt{\frac{x_1^2}{(1-x_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1-x_3)^2} + \frac{x_1'^2}{(1-x'_3)^2} + \frac{x_2'^2}{(1-x'_3)^2} - 2\frac{x_1x'_1}{(1-x_3)(1-x'_3)} - 2\frac{x_2x'_2}{(1-x_3)(1-x'_3)}}$
$= \sqrt{\frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2} + \frac{1-x_3'^2}{(1-x'_3)^2} - 2\frac{x_2x'_2}{(1-x_3)(1-x'_3)} - 2\frac{x_1x'_1}{(1-x_3)(1-x'_3)}} = \sqrt{\frac{1+x_3}{1-x_3} + \frac{1+x'_3}{1-x'_3} - 2\frac{x_2x'_2}{(1-x_3)(1-x'_3)} - 2\frac{x_1x'_1}{(1-x_3)(1-x'_3)}}$
$= \sqrt{\frac{1-x'_3+x_3-x_3x'_3+1-x_3+x'_3-x_3x'_3}{(1-x_3)(1-x'_3)} - 2\frac{x_2x'_2}{(1-x_3)(1-x'_3)} - 2\frac{x_1x'_1}{(1-x_3)(1-x'_3)}}$
$= \sqrt{\frac{2-2x_3x'_3}{(1-x_3)(1-x'_3)} - 2\frac{x_2x'_2}{(1-x_3)(1-x'_3)} - 2\frac{x_1x'_1}{(1-x_3)(1-x'_3)}}$
$= \sqrt{\frac{2-2(x_1x'_1+x_2x'_2+x_3x'_3)}{(1-x_3)(1-x'_3)}}$

Ahora comparamos las razones de lados correspondientes de los triángulos. Para que los triángulos sean semejantes, las tres razones tienen que dar el mismo resultado.

$$\frac{Nz}{NZ'}=\frac{\sqrt{\frac{2}{1-x_3'}}}{\sqrt{2-2x_3}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x_3)(1-x_3')}}$$
$$\frac{Nz'}{NZ}=\frac{\sqrt{\frac{2}{1-x_3'}}}{\sqrt{2-2x_3}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x_3)(1-x_3')}}$$
$$\frac{zz'}{ZZ'}=\frac{\sqrt{\frac{2-2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3')}{(1-x_3)(1-x_3')}}}{\sqrt{2-2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3')}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x_3)(1-x_3')}}$$

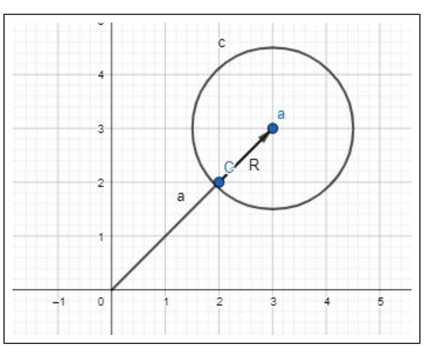
Con lo que se prueba que los triángulos son semejantes.

El problema pide usar esto para demostrar que dados dos complejos z, z', la distancia entre sus puntos correspondientes en la esfera de Riemman (que se denota como $d(z,z')$) es:

$$d(z,z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}$$

Según lo que obtuvimos, podemos calcular ZZ' a partir de la distancia zz' como:
$d(z,z')=ZZ'=zz'\sqrt{(1-x_3)(1+x_3')}=|z-z'|\sqrt{(1-x_3)(1+x_3')}$
$=|z-z'|\sqrt{(1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1})(1+\frac{|z'|^2-1}{|z'|^2+1})}$ Por la fórmula de x_3 de la proyección estereográfica
$=|z-z'|\sqrt{1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}+\frac{|z'|^2-1}{|z'|^2+1}+\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\frac{|z'|^2-1}{|z'|^2+1}}$
$=|z-z'|\sqrt{1-\frac{|z|^2|z'|^2+|z|^2-|z'|^2-1+|z|^2|z'|^2+|z'|^2-|z|^2-1}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}+\frac{|z|^2|z'|^2-|z|^2-|z'|^2+1}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}}$
$=|z-z'|\sqrt{\frac{|z|^2|z'|^2+|z|^2+|z'|^2+1-|z|^2|z'|^2-|z|^2+|z'|^2+1-|z|^2|z'|^2-|z'|^2+|z|^2+1+|z|^2|z'|^2-|z|^2-|z'|^2+1}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}}$
$=|z-z'|\sqrt{\frac{4}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}}$
$=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}}$

5. Encuentra el radio de la imagen esférica del círculo en el plano con centro en a y radio R



Dado el círculo de centro a y radio R, podemos encontrar el punto del círculo de menor y de mayor norma. Viendo la imagen, notamos que el punto de menor norma (C) tiene norma $|a|-R$ y la misma dirección que a, es decir dirección $\frac{a}{|a|}$. Por tanto, el punto de mínima norma es $z=(|a|-R)\frac{a}{|a|}$ y el de mayor norma es $z'=(|a|+R)\frac{a}{|a|}$

Luego, por la geometría de la proyección esférica, los puntos de mayor norma son enviados a puntos de mayor latitud en la esfera. Es decir, la latitud de la imagen en la esfera es mayor conforme aumenta la norma del punto en el plano.

Entonces, el punto de mínima y máxima norma en el círculo son enviados al punto de menor y mayor latitud en la esfera. Estos puntos en la esfera son por tanto diametralmente opuestos y podemos calcular el diámetro de la imagen en la esfera como la distancia de estos puntos.

Es decir, el diámetro del círculo en la esfera es igual a la distancia entre las imágenes de los puntos de máxima y mínima norma. Es decir, la distancia entre las imágenes de $z = (|a| - R)\dfrac{a}{|a|}$ y $z'(|a| + R)\dfrac{a}{|a|}$,
La distancia entre sus imágenes se puede calcular según la fórmula al final del ejercicio anterior:

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}} = \frac{2|(|a| - R)\frac{a}{|a|} - (|a| + R)\frac{a}{|a|}|}{\sqrt{(1 + |(|a| - R)\frac{a}{|a|}|^2)(1 + |(|a| + R)\frac{a}{|a|}|^2)}}$$
$$\frac{2| - R\frac{a}{|a|}|}{\sqrt{(1 + (|a| - R)^2)(1 + (|a| + R)^2)}} = \frac{2R}{\sqrt{(1 + (|a| - R)^2)(1 + (|a| + R)^2)}}$$

El radio del círculo en la esfera es la mitad de este diámetro:

$$\frac{R}{\sqrt{(1 + (|a| - R)^2)(1 + (|a| + R)^2)}}$$