Mecánica Cuántica: Tarea 2

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

14 de marzo de 2021

Problema 1

Supongamos que una partícula está representada por la función de onda:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax/a \quad , \quad 0 \leq x \leq a \\ A(b-x)/(b-a) \quad , \quad a \leq x \leq b \\ 0 \quad \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde A, a, b son constantes.

- **a) Normaliza Ψ**

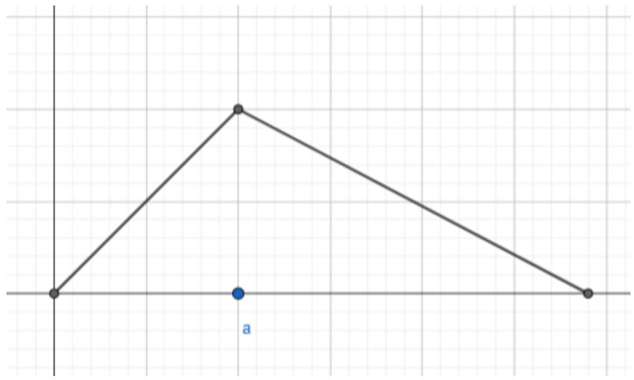
  Necesitamos que se cumpla que $\int_{\mathbb{R}} |\Psi(x,0)|^2 dx = 1$. Entonces, calculamos esta integral:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\Psi(x,0)|^2 dx &= \int_0^a \left| A\frac{x}{a} \right|^2 dx + \int_a^b \left| A\frac{b-x}{b-a} \right|^2 dx \qquad \text{por cómo está definida la función} \\ &= \int_0^a A^2 \frac{x^2}{a^2} dx + \int_a^b A^2 \frac{(b-x)^2}{(b-a)^2} dx \\ &= A^2 \frac{x^3}{3a^2}\Big|_0^a + A^2 \frac{-(b-x)^3}{3(b-a)^2}\Big|_a^b \\ &= A^2 \frac{a^3}{3a^2} + A^2 \left[\frac{-(b-b)^3}{3(b-a)^2} + \frac{(b-a)^3}{3(b-a)^2} \right] \\ &= A^2 \frac{a}{3} + A^2 \frac{(b-a)}{3} = A^2 \frac{b}{3} \end{aligned}$$

  Queremos que esta integral valga 1, es decir $A^2 \frac{b}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \sqrt{\frac{3}{b}}}$

b) **¿Alrededor de qué valor de x es más probable encontrar a la partícula?**

  Para ver esto, primero graficamos la función Ψ.
  El punto de mayor probabilidad es aquél en el que $|\Psi|^2$ alcanza su valor máximo.



La primera parte de la función (en el intervalo $[0, a]$) es una recta con pendiente A/a (Y es creciente porque tanto a como A son positivas). Luego, en el intervalo $[a, b]$ tenemos una recta con pendiente $-\frac{A}{b-a}$ (decreciente porque $\frac{-A}{b-a}$ es negativo)
Entonces, claramente la función Ψ alcanzará su máximo en el punto $x = a$.

Como Ψ toma puros valores reales y positivos, podemos asegurar que al elevarla al cuadrado para obtener $|\Psi|^2$, el máximo se conservará en el punto $x = a$.

Por tanto, es más probable encontrar a la partícula alrededor del valor $\boxed{x = a}$

c) **¿Cuál es el valor esperado de x?**

Para encontrar el valor esperado necesitamos calcular la integral $\langle x \rangle = \int_{\mathbb{R}} x|\Psi|^2 dx$.

$$
\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_{\mathbb{R}} x|\Psi|^2 dx \\
&= \int_0^a x \left| A\frac{x}{a} \right|^2 dx + \int_a^b x \left| A\frac{b-x}{b-a} \right|^2 dx \quad \text{por la definición de } \Psi \text{ en cada intervalo} \\
&= \int_0^a A^2 \frac{x^3}{a^2} dx + \int_a^b A^2 \frac{(b-x)^2 x}{(b-a)^2} dx \\
&= \int_0^a A^2 \frac{x^3}{a^2} dx + \frac{A^2}{(b-a)^2} \int_a^b x^3 - 2bx^2 + b^2 x \; dx \\
&= A^2 \frac{x^4}{4a^2} \bigg|_0^a + \frac{A^2}{(b-a)^2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2bx^3}{3} + \frac{b^2x^2}{2} \right]_a^b \\
&= A^2 \frac{a^4}{4a^2} + \frac{A^2}{(b-a)^2} \left[\frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4} - \frac{2b(b)^3}{3} + \frac{2ba^3}{3} + \frac{b^2(b^2)}{2} - \frac{b^2a^2}{2} \right] \\
&= \frac{A^2}{(b-a)^2} \left[\frac{a^2(b-a)^2}{4} + \frac{b^4}{12} - \frac{a^4}{4} + \frac{2ba^3}{3} - \frac{a^2b^2}{2} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{(b-a)^2}\left[\frac{a^4}{4} - \frac{2ba^3}{4} + \frac{a^2b^2}{4} + \frac{b^4}{12} - \frac{a^4}{4} + \frac{2ba^3}{3} - \frac{a^2b^2}{2}\right] \\
&= \frac{A^2}{(b-a)^2}\left[\frac{ba^3}{6} - \frac{a^2b^2}{4} + \frac{b^4}{12}\right] \\
&= \frac{A^2}{12(b-a)^2}[b^4 + 2ba^3 - 3a^2b^2] \\
&= \frac{A^2b}{12(b-a)^2}[b^3 + 2a^3 - 3a^2b] \\
&= \frac{A^2b}{12(b-a)^2}[b^3 + 2a^3 - 3a^2b + 2ab^2 - 2ab^2] \qquad \text{sumamos } 0 = 2ab^2 - 2ab^2 \\
&= \frac{A^2b}{12(b-a)^2}[2a^3 - 4a^2b + 2ab^2 + ba^2 - 2ab^2 + b^3] \\
&= \frac{A^2b}{12(b-a)^2}[2a(a^2 - 2ab + b^2) + b(a^2 - 2ab + b^2)] \\
&= \frac{A^2b}{12(b-a)^2}(2a+b)(b-a)^2 \\
&= \frac{A^2b(2a+b)}{12} \\
&= \frac{3}{b}\frac{b(2a+b)}{12} \qquad \text{por el valor de A que encontramos en a)} \\
&= \boxed{\frac{2a+b}{4}}
\end{aligned}
$$

d) **¿Cuál es la probabilidad de encontrar a la partícula a la izquierda de a?**

Para encontrar esta probabilidad hay que integrar la función $|\Psi|^2$ en todo el espacio a la izquierda de a, es decir, de $-\infty$ hasta a:

$$
\begin{aligned}
P_{(-\infty < x \leq a)} &= \int_{-\infty}^{a} |\Psi(x)|^2 dx \\
&= \int_0^a \left|A\frac{x}{a}\right|^2 dx \quad \text{por la definición de } \Psi \text{ , vale 0 a la izquieda de 0} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{y vale } \frac{Ax}{a} \text{ entre 0 y a} \\
&= \int_0^a A^2\frac{x^2}{a^2}dx = \left.\frac{A^2x^3}{3a^2}\right|_0^a = \frac{A^2a^3}{3a^2} = \frac{A^2a}{3} \\
&= \frac{3}{b}\frac{a}{3} \qquad \text{por el valor de A encontrado en a)} \\
&\boxed{= \frac{a}{b}}
\end{aligned}
$$

Problema 2

Demuestra que $\sigma^2 \equiv \langle x - \langle(x\rangle)^2\rangle$ está dada por $\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$

El valor esperado de una función de x se calcula como $\langle f(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)|\Psi(x)|^2 dx$. En este caso, deseamos calcular el valor esperado de $(x - \langle x\rangle)^2$, que según la regla de antes, se calcula como:

$$\begin{aligned}
\langle(x - \langle x\rangle)^2\rangle &= \int_{\mathbb{R}} (x - \langle x\rangle)^2 |\Psi(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (x^2 - 2\langle x\rangle x + \langle x\rangle^2)|\Psi(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} x^2|\Psi(x)|^2 dx - 2\langle x\rangle \int_{\mathbb{R}} x|\Psi(x)|^2 dx + \langle x\rangle^2 \int_{\mathbb{R}} |\Psi(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

donde usamos que $\langle x\rangle$ es simplemente una constante y puede salir de la integral

Usamos ahora que como Ψ está normalizada, se debe de cumplir que $\int_{\mathbb{R}} |\Psi(x)|^2 dx = 1$. Además, por la definición de valor esperado tenemos que $\int_{\mathbb{R}} x|\Psi(x)|^2 dx = \langle x\rangle$ y que $\int_{\mathbb{R}} x^2|\Psi(x)|^2 dx = \langle x^2\rangle$.
Podemos sustituir estos tres resultados en las integrales:

$$= \langle x^2\rangle - 2\langle x\rangle\langle x\rangle + \langle x\rangle(1) = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

Con lo que hemos demostrado que:

$$\boxed{\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

Problema 3

Muestra que la varianza $\sigma_{\widehat{O}}(\Psi) \equiv \langle \widehat{O}^2 \rangle - \langle \widehat{O} \rangle^2$ de cualquier operador $\widehat{O}$ se anula al ser calculado en un estado Ψ_{O_c} para el que se cumple que $\widehat{O}\Psi_{O_c} = O_c\Psi_{O_c}$ siendo O_c una constante.

Calculamos la varianza para el estado Ψ_{O_c} usando la definición que nos da el ejercicio. Para ello, primero calculamos $\langle \widehat{O}^2 \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{O}^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{O_c}^* \widehat{O}^2 \Psi_{O_c} dx \quad \text{por cómo se calcula el valor esperado de un operador} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{O_c}^* \widehat{O}(\widehat{O}(\Psi_{O_c})) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{O_c}^* \widehat{O}(O_c \Psi_{O_c}) dx \quad \text{por hipótesis } \widehat{O}\Psi_{O_c} = O_c\Psi_{O_c} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{O_c}^* O_c \widehat{O}(\Psi_{O_c}) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{O_c}^* O_c O_c \Psi_{O_c} dx \quad \text{por hipótesis} \\
&= O_c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{O_c}^* \Psi_{O_c} dx \\
&= O_c^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{O_c}|^2 dx \\
&= O_c^2 \quad \text{Porque la función de onda tiene que estar normalizada}
\end{aligned}$$

Por otro lado, calculamos $\langle \widehat{O} \rangle$ usando también la definición de valor esperado de un operador:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{O} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{O_c}^* \widehat{O} \Psi_{O_c} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{O_c}^* O_c \Psi_{O_c} dx \quad \text{por hipótesis} \\
&= O_c \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{O_c}|^2 dx \\
&= O_c
\end{aligned}$$

Juntando estos resultados, tenemos que la varianza tiene el valor de:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\widehat{O}}(\Psi_{O_c}) &= \langle \widehat{O}^2 \rangle - \langle \widehat{O} \rangle^2 \\
&= O_c^2 - (O_c)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Con lo que se prueba que la varianza de un operador $\widehat{O}$ en un estado Ψ_{O_c} tal que $\widehat{O}\Psi_{O_c} = O_C\Psi_{O_c}$ es 0.

Problema 4

La razón por la cual ocurre lo que demostrarás a continuación la vimos en clase, pero es buena idea afianzar el resultado
Demuestra que si dos funciones $\Psi_{E_1}(x,t)$ y $\Psi_{E_2}(x,t)$, escritas como $\Psi_{E_c}(x,t) = \psi_{E_c}(x)e^{-iE_ct/\hbar}$, son solución a la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi + V(x)\Psi = i\hbar\partial_t\Psi$$

también lo será cualquier combinación lineal de ellas con coeficientes constantes $\Psi(x,t) = C_1\Psi_{E_1}(x,t) + C_2\Psi_{E_2}(x,t)$ independientemente de los valores de E_1 y E_2

Digamos que Ψ_{E_1} y Ψ_{E_2} son soluciones a la ecuación. Entonces consideramos la combinación lineal de ambas y la metemos a la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\left[C_1\Psi_{E_1} + C_2\Psi_{E_2}\right] + V(x)\left[C_1\Psi_{E_1} + C_2\Psi_{E_2}\right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[C_1\partial_x^2\Psi_{E_1} + C_2\partial_x^2\Psi_{E_2}\right] + V(x)\left[C_1\Psi_{E_1} + C_2\Psi_{E_2}\right] \quad \text{por linealidad de } \partial_x \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}C_1\partial_x^2\Psi_{E_1} + V(x)C_1\Psi_{E_1} - \frac{\hbar^2}{2m}C_2\partial_x^2\Psi_{E_2} + V(x)C_2\Psi_{E_2} \\
&= C_1\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi_{E_1} + V(x)\Psi_{E_1}\right] + C_2\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi_{E_2} + V(x)\Psi_{E_2}\right] \\
&= C_1\left[i\hbar\partial_t\Psi_{E_1}\right] + C_2\left[i\hbar\partial_t\Psi_{E_2}\right]
\end{aligned}$$

Este último paso debido a que Ψ_{E_c} es una solución a la ecuación, por lo que $-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi_{E_c} + V(x)\Psi_{E_c} = i\hbar\partial_t\Psi_{E_c}$. Siguiendo con el procedimiento tenemos:

$$\begin{aligned}
&= i\hbar\left[C_1\partial_t\Psi_{E_1} + C_2\partial_t\Psi_{E_2}\right] \\
&= i\hbar\partial_t[C_1\Psi_{E_1} + C_2\Psi_{E_2}] \quad \text{por la linealidad de } \partial_t
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en resumen tenemos que:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\left[C_1\Psi_{E_1} + C_2\Psi_{E_2}\right] + V(x)\left[C_1\Psi_{E_1} + C_2\Psi_{E_2}\right] = i\hbar\partial_t[C_1\Psi_{E_1} + C_2\Psi_{E_2}]$$

Por lo que $[C_1\Psi_{E_1} + C_2\Psi_{E_2}]$ cumple la ecuación.
No hizo falta usar la expresión particular de Ψ_{E_c} ni los valores E_1, E_2. Solamente fue necesario utilizar que Ψ_{E_1}, Ψ_{E_2} son soluciones a la ecuación de Schrödinger y que ésta es una ecuación lineal.

Por otro lado, a diferencia del caso anterior, dadas dos funciones ψ_{E_1} y ψ_{E_2} solución a:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi_{E_c}(x) + V(x)\psi_{E_x}(x) = E_c\psi_{E_c}(x) \qquad (2)$$

con E_c igual a E_1 y a E_2 respectivamente, muestra que el resultado de actuar con el lado izquierdo de (2) sobre una combinación lineal $\psi(x) = C_1\psi_{E_1}(x)+C_2\psi_{E_2}(x)$ se puede escribir como un múltiplo $E_{12}\psi(x)$ de esta combinación sólo cuando $E_1 = E_2$

Como dice el ejercicio, metemos $\psi(x) = C_1\psi_{E_1}(x) + C_2\psi_{E_2}(x)$ del lado izquierdo de (2):

$$\begin{aligned}
&\frac{-\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x) + V(x)\psi(x) = \frac{-\hbar^2}{2m}\partial_x^2[C_1\psi_{E_1}(x) + C_2\psi_{E_2}(x)] + V(x)[C_1\psi_{E_1}(x) + C_2\psi_{E_2}(x)] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}[C_1\partial_x^2\psi_{E_1}(x) + C_2\partial_x^2\psi_{E_2}(x)] + V(x)[C_1\psi_{E_1}(x) + C_2\psi_{E_2}(x)] \qquad \text{por linelaidad de } \partial_x \\
&= C_1\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi_{E_1}(x) + V(x)\psi_{E_1}(x)\right] + C_2\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi_{E_2}(x) + V(x)\psi_{E_2}(x)\right] \\
&= C_1E_1\psi_{E_1}(x) + C_2E_2\psi_{E_2}(x) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Donde aquí usamos que ψ_{E_c} es solución de la ecuación, por lo que: $\dfrac{-\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi_{E_c}(x)+V(x)\psi_{E_x}(x) = E_c\psi_{E_c}(x)$.

Sin embargo, para que $\psi(x)$ sea solución a la ecuación diferencial, deberíamos de tener que $\dfrac{-\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x) + V(x)\psi(x) = E_{12}\psi(x)$ para una constante E_{12}
Desarrollar el lado izquierdo nos llevó a la expresión (3). Por lo tanto, para que $\psi(x)$ sea una solución a la ecuacuón, se debe de tener que (3) equivalga al lado derecho de la ecuación, es decir, que sea de la forma $E_{12}\psi(x)$.
Es decir, necesitamos una constante E_{12} tal que:

$$C_1E_1\psi_{E_1}(x) + C_2E_2\psi_{E_2}(x) = E_{12}\psi(x)$$

Y por la definición de $\psi(x)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad C_1E_1\psi_{E_1}(x) + C_2E_2\psi_{E_2}(x) = E_{12}(C_1\psi_{E_1}(x) + C_2\psi_{E_2}(x)) \\
&\Rightarrow \quad C_1E_1\psi_{E_1}(x) + C_2E_2\psi_{E_2}(x) = C_1E_{12}\psi_{E_1}(x) + C_2E_{12}\psi_{E_2}(x) \\
&\Rightarrow \quad C_1(E_1 - E_{12})\psi_{E_1}(x) = C_2(E_{12} - E_2)\psi_{E_2}(x)
\end{aligned}$$

Esta última igualdad implica que ψ_{E_1} es un múltiplo de ψ_{E_2}, que no es el caso ya que buscamos que sean soluciones independientes.
Entonces la única posibilidad de que aún se tenga la igualdad es que sea de la forma $0 = 0$ y por tanto no depende de x. Para ello, se debe de tener que los factores (E_1-E_{12}) y $(E_{12}-E_2)$ sean 0.
Es decir, que $E_{12} = E_1 = E_2$.