# Mecánica analítica: Examen 1

Tomás Ricardo Basile Álvarez
316617194

7 de noviembre de 2020

## 1 Problema 2.8 Repítase el problema 2.7 (obtener las velocidades y aceleraciones covariantes) para $q_1 = \theta, q_2 = \phi$, dado que:

$$v^2 = a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta}$$

Calculamos primero las componentes covariantes de la velocidad, que como vimos en clase, estas componentes se calculan como $v_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$.
Entonces:

- $v_\theta$ :

$$\begin{aligned}
v_\theta &= \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\frac{1}{2}\left(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta}\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2\right) + \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}b\dot{\phi}^2\cos^2\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}c\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}d\dot{\phi}\dot{\theta}\right) \\
&= a\dot{\theta} + c\dot{\theta}\sin^2\theta + \frac{d}{2}\dot{\phi}
\end{aligned}$$

- $v_\phi$ :

$$\begin{aligned}
v_\phi &= \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\frac{1}{2}\left(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2\right) + \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}b\dot{\phi}^2\cos^2\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}c\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}d\dot{\phi}\dot{\theta}\right) \\
&= b\dot{\phi}\cos^2\theta + \frac{d}{2}\dot{\theta}
\end{aligned}$$

Ahora calculamos los componentes covariantes de la aceleración usando la fórmula vista en clase $a_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$:

- $a_\theta = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta})\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta})\right)$
$= \frac{d}{dt}\left(a\dot{\theta} + c\dot{\theta}\sin^2\theta + \frac{d}{2}\dot{\phi}\right) - \frac{1}{2}\left(b\dot{\phi}^2(-2\cos\theta\sin\theta) + c\dot{\theta}^2(2\sin\theta\cos\theta)\right)$

$$= \frac{d}{dt}\left(a\dot{\theta} + c\dot{\theta}\sin^2\theta + \frac{d}{2}\dot{\phi}\right) + b\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta - c\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$
$$= a\ddot{\theta} + c\ddot{\theta}\sin^2\theta + c\dot{\theta}(2\sin\theta\cos\theta)\dot{\theta} + \frac{d}{2}\ddot{\phi} + b\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta - c\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$
$$= a\ddot{\theta} + c\ddot{\theta}\sin^2\theta + \frac{d}{2}\ddot{\phi} + b\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta + c\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$

- $a_\phi = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta})\right) - \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{2}(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta})\right)$
$$= \frac{d}{dt}\left(b\dot{\phi}\cos^2\theta + \frac{d}{2}\dot{\theta}\right) - 0$$
$$= b\ddot{\phi}\cos^2\theta + b\dot{\phi}(-2\cos\theta\sin\theta)\dot{\theta} + \frac{d}{2}\ddot{\theta}$$
$$= b\ddot{\phi}\cos^2\theta - 2b\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta + \frac{d}{2}\ddot{\theta}$$

Y con esto ya tenemos los componentes covariantes de la aceleración.

2. **Problema 2.11 b) Expresar el radio de curvatura de una curva plana en coordenadas polares**

Comenzamos considerando una curva en coordenadas rectangulares parametrizada como $(x(t), y(t))$. Para este tipo de curvas vimos que la curvatura se puede calcular como:

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Luego, consideramos una curva expresada en forma polar, es decir, de la forma $r(\theta)$. Para calcular su curvatura tomamos en cuenta la ecuación anterior y las expresiones de las coordenadas cartesianas con respecto a las polares. Sabemos que $x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \quad , \quad y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta)$. Con lo que tenemos escrito a $x, y$ con respecto al parámetro $\theta$

Ahora ya podemos calcular la curvatura con la expresión de arriba usando a $\theta$ como el parámetro. Para ello, calculamos las derivadas de $x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta) \quad , \quad y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta)$ con respecto al parámetro $\theta$:

- $x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta)$

- $x' = \frac{dx}{d\theta} = \frac{d(r(\theta)\cos(\theta))}{d\theta} = \frac{dr(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) - r(\theta)\sin(\theta)$

- $x'' = \frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) - r(\theta)\sin(\theta)\right)$
$$= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\cos(\theta)\right) - \frac{d}{d\theta}(r(\theta)\sin(\theta))$$
$$= \frac{d^2r(\theta)}{d\theta^2}\cos(\theta) - \frac{dr(\theta)}{d\theta}\sin(\theta) - \frac{dr(\theta)}{d\theta}\sin(\theta) - r(\theta)\cos(\theta)$$

$$= \frac{d^2r(\theta)}{d\theta^2}\cos(\theta) - 2\frac{dr(\theta)}{d\theta}\sin(\theta) - r(\theta)\cos(\theta)$$

- $y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta)$
- $y' = \dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{d(r(\theta)\sin(\theta))}{d\theta} = \dfrac{dr(\theta)}{d\theta}\sin(\theta) + r(\theta)\cos(\theta)$
- $y'' = \dfrac{d^2y}{d\theta^2} = \dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dr(\theta)}{d\theta}\sin(\theta) + r(\theta)\cos(\theta)\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\sin(\theta)\right) + \frac{d}{d\theta}(r(\theta)\cos(\theta))\\
&= \frac{d^2r(\theta)}{d\theta^2}\sin(\theta) + \frac{dr(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) + \frac{dr(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) - r(\theta)\sin(\theta)\\
&= \frac{d^2r(\theta)}{d\theta^2}\sin(\theta) + 2\frac{dr(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) - r(\theta)\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Si denotamos a $\dfrac{dr(\theta)}{d\theta}$ como $r'$ y a $\dfrac{d^2r(\theta)}{d\theta^2}$ como $r''$, entonces tenemos en resumen que:

$$\begin{gathered}
x' = r'\cos(\theta) - r\sin(\theta)\\
x'' = r''\cos(\theta) - 2r'\sin(\theta) - r\cos(\theta)\\
.\\
y' = r'\sin(\theta) + r\cos(\theta)\\
y'' = r''\sin(\theta) + 2r'\cos(\theta) - r\sin(\theta)
\end{gathered}$$

Entonces, ahora calculamos las expresiones que necesitaremos sustituir en la expresión de $k$:

$$\begin{aligned}
&x'y'' - y'x'' =\\
&= (r'\cos(\theta) - r\sin(\theta))(r''\sin(\theta) + 2r'\cos(\theta) - r\sin(\theta)) - (r'\sin(\theta) + r\cos(\theta))(r''\cos(\theta) - 2r'\sin(\theta) - r\cos(\theta))\\
&= r'r''\cos\theta\sin\theta + 2r'^2\cos^2\theta - rr'\cos\theta\sin\theta - rr''\sin^2\theta - 2rr'\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta\\
&\quad - [r'r''\sin\theta\cos\theta - 2r'^2\sin^2\theta - rr'\cos\theta\sin\theta + rr''\cos^2\theta - 2rr'\cos\theta\sin\theta - r^2\cos^2\theta]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \quad 2r'^2\cos^2\theta - rr''\sin^2\theta + r^2\sin^2\theta \quad + 2r'^2\sin^2\theta - rr''\cos^2\theta + r^2\cos^2\theta\\
&= \quad 2r'^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - rr''(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + r^2(\sin^2 + \cos^2\theta)\\
&= \quad 2r'^2 - rr'' + r^2
\end{aligned}$$

Y por otro lado:

$$\begin{aligned}
x'^2 + y'^2 &= (r'\cos(\theta) - r\sin(\theta))^2 + (r'\sin(\theta) + r\cos(\theta))^2\\
&= r'^2\cos^2\theta - 2rr'\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta + r'^2\sin^2\theta + 2rr'\cos\theta\sin\theta + r^2\cos^2\theta\\
&= r'^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\\
&= r'^2 + r^2
\end{aligned}$$

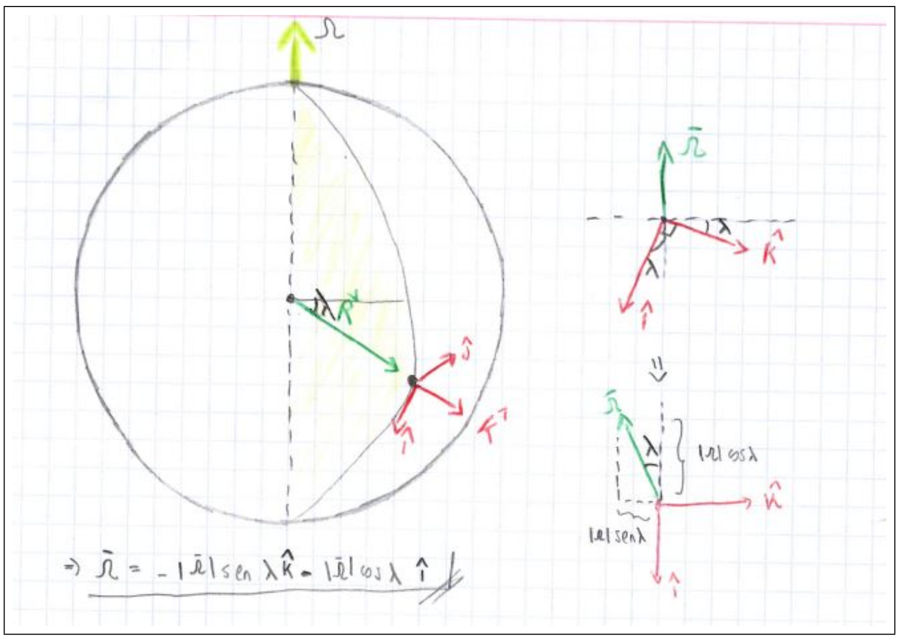
Entonces, al sustituir en la expresión para $k$, tenemos que la curvatura para coordenadas polares es:

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|2r'^2 - rr'' + r^2|}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}$$

Y finalmente, el radio de curvatura es el recíproco de la curvatura, por lo que:

$$\rho = \frac{(r'^2 + r^2)^{3/2}}{|2r'^2 - rr'' + r^2|}$$

3. **Estudie el problema de caída libre con aceleración de Coriolis en el hemisferio Sur. Suponga un vector $g$ (aceleración de gravedad) en la dirección radial. Obtenga la magnitud y dirección de la desviación respecto a la vertical. Haga una figura. Recuerden que en clase estudiamos este problema para el hemisferio norte**




Como se muestra en el dibujo, tomamos un punto en el hemisferio sur con un ángulo de latitud $\lambda$. Como se muestra en el dibujo, formamos un sistema de coordenadas en el que el vector $\vec{k}$ apunta radialmente hacia afuera, el vector $\vec{i}$ apunta en la dirección sur y el vector $\vec{j}$ apunta en la dirección este.

En el dibujo marcamos también el vector de velocidad angular $\vec{\Omega}$ que apunta hacia arriba. Para calcular los componentes de $\vec{\Omega}$ en la base $\{\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}\}$, primero notamos que el vector $\vec{\Omega}$ no tiene componentes en la dirección $\widehat{j}$ porque $\widehat{i}, \widehat{k}, \Omega$ pertenecen al mismo plano (el dibujado con verde).

Luego, del lado derecho dibujamos solamente estos vectores y notamos cuáles son los ángulos $\lambda$. Luego, en la parte de abajo rotamos este sistema para que se vean más

claras las componentes de $\vec{\Omega}$ con respecto a $\widehat{i}, \widehat{k}$.
Y notamos que $\vec{\Omega} = -\Omega\cos\lambda\widehat{i} - \Omega\sin\lambda\widehat{k}$

Luego, estudiamos en clase un cuerpo con posición inicial $\vec{r'}_0$ (sin especificar en qué hemisferio se encuentra) y velocidad inicial $\vec{v'}_0$ que se mueve en la tierra bajo el efecto de la gravedad y de la fuerza de Corioilis. Y obtuvimos que su posición como función del tiempo es igual a:

$$\vec{r'}(t) = \vec{r'}_0 + [(t-t_0) - (t-t_0)^2\vec{\Omega}\times]\vec{v'}_0 + [\tfrac{1}{2}(t-t_0)^2 - \tfrac{1}{3}(t-t_0)^3\vec{\Omega}\times]\vec{g}_{eff}$$

Luego, como se trata de un problema de caída libre, entonces la velocidad inicial es $\vec{0}$, es decir, $\vec{v'}_0 = \vec{0}$.
Entonces el primer corchete desaparece y solamente queda el segundo. Para desarrollar el segundo, necesitamos las expresiones de $\vec{g}_{eff}$ y de $\vec{\Omega}\times\vec{g}_{eff}$.
Suponemos que $\vec{g}_{eff}$ es radial y ya tenemos la expresión de $\vec{\Omega}$, las expresiones de los vectores son:

$$\begin{gathered}\vec{g}_{eff} = -g_{eff}\widehat{k}\\ \vec{\Omega} = -\Omega\cos\lambda\widehat{i} - \Omega\sin\lambda\widehat{k}\end{gathered}$$

Y calculamos el producto cruz:

$$\vec{\Omega}\times\vec{g}_{eff} = \begin{pmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ -\Omega\cos\lambda & 0 & -\Omega\sin\lambda \\ 0 & 0 & -g_{eff} \end{pmatrix} = -\Omega g_{eff}\cos\lambda\widehat{j}$$

Entonces reemplazamos esto en la expresión para $\vec{r'}(t)$ (tomando en cuenta que el primer corchete desaparece porque $\vec{v'}_0 = 0$). Y obtenemos:

$$\begin{aligned}\vec{r'}(t) &= \vec{r'}_0 + [\frac{1}{2}(t-t_0)^2 - \frac{1}{3}(t-t_0)^3\vec{\Omega}\times]\vec{g}_{eff}\\ &= \vec{r'}_0 + \frac{1}{2}(t-t_0)^2\vec{g}_{eff} - \frac{1}{3}(t-t_0)^3\vec{\Omega}\times\vec{g}_{eff}\\ &= \vec{r'}_0 + \frac{1}{2}(t-t_0)^2(-g_{eff}\widehat{k}) - \frac{1}{3}(t-t_0)^3(-\Omega g_{eff}\cos\lambda)\widehat{j}\end{aligned}$$

Pero aquí notamos que los términos $\vec{r'}_0 + \frac{1}{2}(t-t_0)^2(-g_{eff})\widehat{k}$ corresponden a un cuerpo que cae en caída libre sin considerar la fuerza de Coriolis (porque sería un cuerpo con solamente una aceleración $-g_{eff}\widehat{k}$ y sin velocidad inicial, y por lo tanto su ecuación de movimiento se conseguiría al integrar dos veces y es igual a $\vec{r'}_0 + \frac{1}{2}(t-t_0)^2(-g_{eff})\widehat{k}$).
Luego, la parte de la ecuación que describe la desviación respecto a una caída libre sin Coriolis es:

$$
\begin{aligned}
\vec{d} &= -\frac{1}{3}(t-t_0)^3(-\Omega g_{eff}\cos\lambda)\widehat{j} \\
&= \frac{1}{3}(t-t_0)^3\Omega g_{eff}\cos\lambda\ \ \widehat{j}
\end{aligned}
$$

Pero preferimos obtener la expresión del desplazamiento en términos de la altura inicial $h$ desde la que se deja caer el objeto.
Regresando a la expresión original de $\vec{r'}(t)$, recordamos que el componente radial es igual que el de una caida libre común $\vec{r'}(t) = \vec{r'}_0 + \frac{1}{2}(t-t_0)^2(-g_{eff}\widehat{k})$
Luego, el tiempo para caer una altura $h$ se obtiene cuando el desplazamiento radial $\frac{1}{2}(t-t_0)^2(-g_{eff})\widehat{k}$ es igual a $-h$.
Es decir, $\frac{1}{2}(t-t_0)^2 g_{eff} = h \quad \Rightarrow \quad (t-t_0) = \sqrt{2\frac{h}{g_{eff}}}$

Entonces, podemos reemplazar esto en la expresión del desviamiento del objeto:

$$
\begin{aligned}
\vec{d} &= \frac{1}{3}(t-t_0)^3\Omega g_{eff}\cos\lambda\ \ \widehat{j} \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{2\frac{h}{g_{eff}}}\right)^3\Omega g_{eff}\cos\lambda\,\widehat{j} \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{8\frac{h^3}{g_{eff}^3}}\right)\Omega g_{eff}\cos\lambda\,\widehat{j} \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{8\frac{h^3}{g_{eff}}}\right)\Omega\cos\lambda\,\widehat{j} \\
&= \frac{2h}{3}\Omega\sqrt{\frac{2h}{g_{eff}}}\cos\lambda\ \ \widehat{j}
\end{aligned}
$$

Como $\widehat{j}$ apunta al este, concluimos que el cuerpo tendrá una desviación hacia la dirección este. Este resultado es el mismo que obtuvimos para la caída libre en el polo norte. Esto no es de sorprender, ya que lo único que cambió fue uno de los componentes de $\Omega$ pero finalmente este componente no apareció porque se anula del producto $\vec{\Omega}\times\vec{g}_{eff}$.