Tarea 1 Cálculo

Tomás Basile   Jessica Gallegos   Zeús Hernández   Nathan Kosoi
Rebeca Rangel

4 de abril de 2019

Haaser p.424

Ejercicio 1. Demuéstrese que el intervalo abierto (a, b) no tiene un elemento mínimo.

Demostración. Suponemos que sí tiene un elemento mínimo. Sea $q = min(a, b)$, entonces cumple que:
- $q \in (a, b) \;\; \Rightarrow \;\; a < q < b$
- $q \leq x \;\; \forall x \in (a, b)$

Construimos $\frac{a+q}{2}$, sabemos que $a < \frac{a+q}{2} < q < b \;\; \Rightarrow \;\; a < \frac{a+q}{2} < b \; \Rightarrow \;\; \frac{a+q}{2} \in (a, b)$**!**
Esto es una contradicción ya que encontramos un elemento del conjunto que es menor al mínimo. Por lo tanto el conjunto no tiene mínimo

■

Ejercicio 2. ¿Son los siguientes conjuntos acotados superiormente, acotados inferiormente, acotados?

a) $(-\infty, b)$
Pd. Es acotado superiormente

Demostración. Sabemos que el conjunto es acotado superiormente porque $x < b \;\; \forall x \in (a, b)$
$\therefore b$ es cota superior.

Pd. **No tiene cota inferior**
Suponemos que el conjunto tiene una cota inferior. Sea L cota inferior de $(-\infty, b)$
$\Rightarrow \;\; L \leq x \;\; \forall x \in (-\infty, b) \;\; \Rightarrow \;\; L \leq x < b$
$\Rightarrow \;\; L - 1 < L \leq x < b \;\; \Rightarrow \;\; L - 1 < b \;\;\;\; \Rightarrow \;\; L - 1 \in (-\infty, b)$
$\therefore L - 1 \in (-\infty, b)$ y $L - 1 < L$ **!**
Entonces encontramos un número menor que la cota inferior pero que pertenece al conjunto. **!**
Por lo tanto suponer una cota inferior llevó a contradicción. El conjunto no tiene cota inferior.

■

b) $A = \{n | n, \text{entero positivo cualquiera}\}$
Probaremos que es acotado inferiormente

Demostración. $A = \{n | n, \text{entero positivo cualquiera}\} = \{n | n > 0\} \Rightarrow \quad n > 0\ \forall n \in A \quad \therefore$ 0 es cota inferior de A

pd. No tiene cota superior
Suponemos que sí tiene cota superior y sea M cota superior de $A \Rightarrow \quad M \geq a\ \forall a \in A$
$\Rightarrow \quad M \geq a > 0$ ya que $a \in A$ y entonces $a > 0$
$\Rightarrow \quad M + 1 > M \geq a > 0 \quad \Rightarrow \quad M + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad M + 1 \in A$
$\therefore \quad M + 1 > M$ y $M + 1 \in A$ **!** Encontramos un número mayor a la cota superior y que pertenece al conjunto. Por lo tanto la suposición de que el conjunto tiene cota superior es falsa. No tiene cota superior.

■

c) $B = \left\{(-1)^n \dfrac{1}{n}\ |n, \text{ entero positivo cualquiera}\right\}$
B es acotado.
Demostración. Exhibimos algunos elementos de B para darnos una idea de como se ve el conjunto
$B = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, ...\}$ Notamos que los elementos pares son positivos y los impares negativos.

Demostraremos que $\frac{1}{2}$ es cota superior de B.
Suponemos que no lo es, entonces existe $(-1)^n \frac{1}{n}$ elemento de B con $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que:
$(-1)^n \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$
n tiene que ser par ya que $\frac{1}{2}$ es positivo, entonces la desigualdad se vuelve:
$\frac{1}{n} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad n < 2$**!** Contradicción ya que n tiene que ser un positivo par y por lo tanto no puede ser menor a 2.
Entonces la suposición es falsa, $\frac{1}{2}$ sí es cota superior de B

Demostraremos que -1 es cota inferior de B.
Suponemos que -1 no es cota inferior, entonces existe $(-1)^n \frac{1}{n}$ elemento de B con $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que: $(-1)^n \frac{1}{n} < -1$
n tiene que ser impar para que $(-1)^n \frac{1}{n}$ sea negativo, entonces la desigualdad se convierte en:
$-\frac{1}{n} < -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} > 1 \quad \Rightarrow \quad n < 1$**!** Contradicción ya que n tiene que ser un entero positivo.
Por lo tanto la suposición inicial era falsa, -1 sí es cota inferior.

■

d) $C = \left\{n + (-1)^n \dfrac{1}{n}\ |n, \text{ entero positivo cualquiera}\right\}$
C es acotado inferiormente.
Demostración. Exhibimos algunos elementos de C para darnos una idea de como se ve el conjunto
$C = \{0, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{17}{4}, \frac{24}{5}, ...\}$

Demostraremos que 0 es cota inferior de C. Suponemos que no lo es.

Entonces existe $n+(-1)^n\dfrac{1}{n}$ elemento se C con $n \in \mathbb{Z}^+$, tal que: $n+(-1)^n\dfrac{1}{n}<0$, hay dos casos:
Caso 1) n es par $\Rightarrow \quad n+\frac{1}{n}<0 \Rightarrow \frac{n^2+1}{n}<0 \Rightarrow \quad n^2+1<0 \Rightarrow \quad n^2<-1$ **!**
Caso 2) n es impar $\Rightarrow \quad n-\frac{1}{n}<0 \Rightarrow \frac{n^2-1}{n}<0 \Rightarrow \quad n^2-1<0 \Rightarrow \quad n^2<1 \Rightarrow \quad -1<n<1$ **!**
Contradicción porque n es un entero positivo.
Por lo tanto suponer que 0 no es cota inferior de C lleva a una contradiccón. Por lo tanto 0 es cota inferior.

Demostraremos que no tiene cota superior. Suponemos que sí tiene cota superior en los reales (la cual tiene que ser positiva ya que sabemos que $0 \in C$). Y llamemos m al número entero inmediatamente mayor a la cota superior (que sabemos que existe por el teorema demostrado en clase), entonces $m \in \mathbb{Z}^+$ y m es cota superior de C.
$\Rightarrow \quad m \geq n+(-1)^n\frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Construimos $2m \in \mathbb{Z}^+$, como m es mayor que todos los elementos de C, debe de ser mayor al elemento creado con $n=2m$:
$m > 2m+(-1)^{2m}\frac{1}{2m} \quad \Rightarrow \quad m > 2m+\frac{1}{2m} \quad \Rightarrow \quad m > \frac{4m^2+1}{2m} \quad \Rightarrow \quad 2m^2 > 4m^2+1 \quad \Rightarrow \quad 2m^2+1<0 \quad \Rightarrow \quad m^2 < -\frac{1}{2}$ **!**
Entonces suponer la existencia de una cota superior nos llevó a una contradicción. Por lo tanto el conjunto no tiene cota superior.

■

Ejercicio 3. Escríbase una definición análoga a la 2.5 para el ínfimo de un conjunto de números reales.

Demostración. $c = inf(S)$ si:

1) Para todo $x \in S \ \ , x \geq c$ (c es una cota superior)

2) Para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $x \in S$ tal que $x < c+\epsilon$ (ningún número mayor que c es una cota inferior de S)

■

Ejercicio 4. Verifíquese que a es el ínfimo de (a,b) y de $[a,b]$

a=inf(a,b)

Demostración. 1) sea $x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad a<x<b \quad \Rightarrow \quad a<x \ \forall x \in (a,b)$ por lo tanto a es cota inferior.
2)Suponemos que existe una cota inferior r con $a<r$ y construimos $s=\frac{a+r}{2} \quad \Rightarrow \quad a<s<r$
$\Rightarrow \quad a<s<r<b \quad \Rightarrow \quad a<s<b \quad \Rightarrow \quad s \in (a,b)$ y $s<r$**!**
Esto es una contradicción ya que hallamos un elemento de (a,b) menor a la cota inferior r. Entonces la suposición inicial de que existe una cota inferior mayor a a es falsa, a es la máxima cota inferior.
$inf(A) = a$

■

a=inf(a,b)

Demostración. 1) sea $x \in [a,b] \;\Rightarrow\; a \leq x \leq b \;\Rightarrow\; a \leq x \; \forall x \in [a,b]$ por lo tanto a es cota inferior.
2)Además a es la máxima cota inferior, ya que si hubiera una cota inferior más grande, ésta no acotaría a a que es un elemento de $[a,b]$
$inf(A) = a$

■

Ejercicio 5. Determínese el supremo y el ínfimo (si existen) de los siguientes conjuntos. Verifíquese que las contestaciones satisfacen 2.5 y la condición correspondiente para el ínfimo

a) (2,7)
inf(2,7)=2 , sup(2,7)=7

Demostración. 1) sea $x \in (2,7) \;\Rightarrow\; 2 < x < 7 \;\Rightarrow\; 2 < x \; \forall x \in (2,7)$ por lo tanto 2 es cota inferior.
2)Suponemos que existe una cota inferior r con $2 < r$ y construimos $s = \frac{2+r}{2} \;\Rightarrow\; 2 < s < r$
$\Rightarrow\; 2 < s < r < 7 \;\Rightarrow\; 2 < s < 7 \;\Rightarrow\; s \in (2,7)$ y $s < r$**!**
Esto es una contradicción ya que hallamos un elemento de $(2,7)$ menor a la cota inferior r. Entonces la suposición inicial de que existe una cota inferior mayor a 2 es falsa, 2 es la máxima cota inferior.

1) sea $x \in (2,7) \;\Rightarrow\; 2 < x < 7 \;\Rightarrow\; x < 7 \; \forall x \in (2,7)$ por lo tanto 7 es cota superior.
2)Suponemos que existe una cota superior r con $r < 7$ y construimos $s = \frac{7+r}{2} \;\Rightarrow\; r < s < 7$
$\Rightarrow\; 2 < r < s < 7 \;\Rightarrow\; 2 < s < 7 \;\Rightarrow\; s \in (2,7)$ y $r < s$**!**
Esto es una contradicción ya que hallamos un elemento de $(2,7)$ mayor a la cota superior r. Entonces la suposición inicial de que existe una cota superior menor a 7 es falsa, 7 es la mínima cota superior.

■

b) [-3,5]
inf[-3,5]=-3 , sup[-3,5]=5

Demostración. 1) Sea $x \in [-3,5] \;\Rightarrow\; -3 \leq x \leq 5 \;\Rightarrow\; -3 \leq x \; \forall x \in [-3,5]$ Por lo tanto -3 es cota inferior.
2)Además -3 es la máxima cota inferior, ya que si hubiera una mayor, ésta no acotaría al -3, que es un elemento del conjunto.

1) Sea $x \in [-3,5] \;\Rightarrow\; -3 \leq x \leq 5 \;\Rightarrow\; x \leq 5 \; \forall x \in [-3,5]$ Por lo tanto 5 es cota superior.
2)Además 5 es la mínima cota superior, ya que si hubiera una menor, ésta no acotaría al 5, que es un elemento del conjunto.

$\blacksquare$

c) $A = \{n|n,$ un entero positivo cualquiera $\}$
inf(A)=0, el conjunto no tiene supremo.

Demostración. 1) Sea $x \in A \Rightarrow$ x es positivo $\Rightarrow$ $x > 0\ \forall x \in A$ entonces 0 es cota inferior.
2) Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria $\Rightarrow$ $\epsilon > \frac{\epsilon}{2}$ $\Rightarrow$ $0 + \epsilon > \frac{\epsilon}{2}$ Pero $\frac{\epsilon}{2} > 0$ y por lo tanto pertenece al conjunto. Entonces para todo ϵ, encontramos un elemento de A tal que $0 + \epsilon$ es mayor que dicho elemento. Entonces 0 es el ínfimo.

Demostraremos que no tiene supremo. Suponemos que sí lo tiene, sea $c = sup(A) \Rightarrow$ $c \geq x\ \forall x \in A$
Pero como $x \in A \Rightarrow x > 0 \Rightarrow c \geq x > 0$
$c + 1 > c \geq x > 0 \Rightarrow c + 1 > 0 \Rightarrow c + 1 \in A$
$\therefore$ $c + 1 > c$ y $c + 1 \in A$ **!** Encontramos un elemento de A mayor a c. Entonces la suposición inicial era falsa y A no tiene supremo.

$\blacksquare$

d) $B = \{1, 4, 9, 13\}$
$inf(B) = 1, sup(B) = 13$

Demostración. 1) Sabemos que $1 \leq 1 < 4 < 9 < 13$ y por lo tanto 1 es cota inferior de B
2)Además como 1 pertenece al conjunto, no puede haber una cota inferior mayor a 1, ya que no acotaría al 1. Entonces 1 es la máxima cota inferior.

1) Sabemos que $13 \geq 13 > 9 > 4 > 1$ y por lo tanto 13 es cota superior de B
2)Además como 13 pertenece al conjunto, no puede haber una cota superior menor a 13, ya que no acotaría al 13. Entonces 13 es la mínima cota superior.

$\blacksquare$

Ejercicio 6. Pruébese que un conjunto de números reales tiene cuando más un supremo.

Demostración. Suponemos que hay dos supremos para el conjunto P
$\Rightarrow$ Sea $T = sup(P)$ y $J = sup(P)$

1) $T = sup(P)$ y J es una cota superior, entonces como el supremo es la mínima cota superior $\Rightarrow T \leq J$

2) $J = sup(P)$ y T es una cota superior, entonces como el supremo es la mínima cota superior $\Rightarrow J \leq T$

$\therefore T = J$

$\blacksquare$

Ejercicio 7. Demuestre que si S tiene un elemento máximo, entonces S tiene un supremo y que el elemento máximo de S es el supremo de S

Demostración. Sea $c = max(S) \ \Rightarrow \ c \geq x \ \ \forall x \in S$ y $c \in S$ por definición. Como tiene cota superior $\Rightarrow$ S tiene supremo

Para la segunda parte de esta demostración, procederemos por contradicción. Sea $k = sup(S)$

Caso 1) Suponemos que $c < k$. Pero como c es una cota superior, no puede ser más pequeña que el supremo k, ya que éste es la mínima cota superior **!**
$\therefore c \nless k \ldots (1)$

Caso 2) Suponemos que $k < c$, lo cual tampoco es cierto ya que como c es máximo $\Rightarrow \ c \in S$ y al ser $k = sup(S)$ debe ser $k \geq x \ \ \forall x \in S$**!**
$\therefore c \ngtr k \ldots (2)$

Y por (1) y (2) tenemos que $c = k$
$\therefore$ El elemento máximo de S es el supremo de S

■

Ejercicio 8. Demuéstrese que si el supremo c de S es un elemento de S, entonces tiene un elemento máximo, y que c es el elemento máximo de S

Demostración. Si $c = sup(S) \ \Rightarrow \ c \geq x \ \ \forall x \in S$ y si $c \in S \ \Rightarrow$ tenemos la definición de máximo, donde c es el elemento máximo de S

■

Ejercicio 9. Demuéstrese que si el supremo c de un conjunto S no es un elemento de S, entonces c es un punto de acumulación de S

Demostración. Por definición de supremo sabemos que dada $\epsilon > 0 \ \Rightarrow \ \exists a^* \in S$ tal que $c - \epsilon < a^* \ldots (1)$
Sabemos que $a^* < c \ldots (2)$(No puede ser $\leq$ ya que c no es elemento de S)
Por (1) y (2) tenemos que $c - \epsilon < a^* < c \ \Rightarrow \ a^* \in (c - \epsilon, c) \ \Rightarrow \ a^* \in V_\epsilon'(c)$ y además $a^* \in S$
$\Rightarrow \ a^* \in V_\epsilon'(c) \cap S$ lo cual implica que $V_\epsilon'(c) \cap S \neq \emptyset$
y por la definición de punto de acumulación tenemos que c es punto de acumulación de S.

■

Ejercicio 10. Demuéstrese que si $c = supS$, entonces, para cualquier $\epsilon > 0 \ \exists$ un $x \in S$ tal que $0 \leq c - x < \epsilon$. Así pues, si J es un intervalo abierto que contiene a c, entonces existe un $x \in S$ tal que $x \in J$

Demostración. Como $c = sup(S) \ \Rightarrow \ c \geq x \ \ \forall x \in S$ y para todo $\epsilon > 0 \ \ \exists \ x \in S$ tal que $c - \epsilon < x \ \Rightarrow \ c - x < \epsilon \ldots (1)$ y por $c \geq x \ \Rightarrow \ c - x \geq 0 \ldots (2)$
Y por (1) y (2) tenemos que $0 \leq c - x < \epsilon$

$\Rightarrow \quad |c-x| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |x-c| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad -\epsilon < x-c < \epsilon \quad \Rightarrow \quad x \in (c-\epsilon, c+\epsilon)$ Lo cual implica que para cualquier intervalo abierto que contiene a c, existe $x \in S$ tal que x está en el intervalo.

■

Ejercicio 11. Si c es el supremo de S, pruébese que $-c$ es el ínfimo de $-S$; donde $-S$ denota el conjunto de números que son los inversos aditivos de los números que están en S

Demostración. El conjunto $-S$ se vería de la forma $-S = \{-x \mid x \in S\}$
Sabemos que $c = Sup(S) \;\Rightarrow\; c \geq x \;\; \forall x \in S$ y $\forall \epsilon\; > 0 \;\; \exists x^* \in S$ tal que $c - \epsilon < x^*$
De $c \geq x \; \forall x \in S$ (multiplicamos por -1) $\Rightarrow \; -c \leq -x \; \forall -x \in -S$
$\Rightarrow \; -c$ es cota inferior.

Ahora de $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists x^* \in S$ tal que $c - \epsilon < x^*$ (multiplicamos por -1)
$\Rightarrow \; \forall \epsilon > 0 \;\; \exists -x^* \in -S$ tal que $-c + \epsilon > -x^*$.
Lo cual termina la demostración de que c es el ínfimo de $-S$

■

Haaser p.429

Ejercicio 1. Determínese el supremo y el ínfimo (si existen) de los siguientes conjuntos. Verifíquese que las contestaciones dadas satisfacen 2.5 y las condiciones correspondientes para el ínfimo. ¿Tienen estos conjuntos máximo y mínimo?

$a) A = \left\{1 - \frac{1}{n} | n, \text{ un entero positivo}\right\}$
inf(A)=0 , sup(A)=1
Demostración. Enlistamos algunos elementos del conjunto $A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...\}$
1) Como $n \in \mathbb{Z}^+ \;\Rightarrow\; n \geq 1 \;\Rightarrow\; 1 \geq \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; 1 - \frac{1}{n} \geq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{Z}^+$ Entonces 0 es cota inferior
2) $0 \in A$ ya que para $n = 1$, $0 = 1 - \frac{1}{n}$. Entonces no puede haber una cota inferior mayor a 0 ya que no acotaría al 0. Y entonces 0 es la máxima cota inferior. Y también el mínimo porque pertenece al conjunto

1) Como $n \in \mathbb{Z}^+ \;\Rightarrow\; n \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{n} \geq 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq -\frac{1}{n} \;\Rightarrow\; 1 \leq 1 - \frac{1}{n} \;\; \forall n \in \mathbb{Z}^+$ Entonces 1 es cota superior.
2) Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria, sabemos que $1 > 0, \epsilon > 0$, Entonces por la propiedad arquimedeana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n\epsilon \;\Rightarrow\; \epsilon > \frac{1}{n}$
$\Rightarrow\; -\epsilon < -\frac{1}{n} \;\Rightarrow\; 1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n}$ con $1 - \frac{1}{n} \in A$
Por lo tanto 1 es el supremo de A. Pero no es el máximo ya que no pertenece al conjunto.

■

$b) B = \left\{(-1)^n \frac{1}{n} | n, \text{ un entero positivo}\right\}$
inf(B)= -1 , sup(B)=$\frac{1}{2}$

Demostración. Enlistamos algunos elementos, $B = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$
1) Ya se demostró en el ejercicio 2 de la página 424 del Haaser que -1 es cota inferior.
2) $-1 \in B$, ya que para $n = 1$, $-1 = (-1)^n \frac{1}{n}$ Entonces no puede haber una cota inferior mayor a -1 ya que no acotaría al -1. Y entonces -1 es la máxima cota inferior. Y también el mínimo porque pertenece al conjunto.

1) Ya se demostró en el ejercicio 2 de la página 424 del Haaser que $\frac{1}{2}$ es cota superior.
2) $\frac{1}{2} \in B$, ya que para $n = 2$, $\frac{1}{2} = (-1)^n \frac{1}{n}$ Entonces no puede haber una cota superior menor a $\frac{1}{2}$ ya que no acotaría al $\frac{1}{2}$. Y entonces $\frac{1}{2}$ es la mínima cota superior. Y también el máximo porque pertenece al conjunto.

∎

c)$C = \left\{n + (-1)^n \frac{1}{n} | n, \text{ un entero positivo}\right\}$
inf(C)= 0 , No tiene supremo
Demostración. Enlistamos algunos elementos, $C = \{0, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{17}{4}, ...\}$
1) Ya vimos en el ejercicio 2 de la página 424 del Haaser que 0 es cota inferior de este conjunto.
2) $0 \in c$, ya que para $n = 1$, $0 = n + (-1)^n \frac{1}{n}$ Entonces no puede haber una cota inferior mayor a 0 ya que no acotaría al 0. Y entonces 0 es la máxima cota inferior. Y también el mínimo porque pertenece al conjunto.

Ya vimos en el ejercicio 2 de la página 424 del Haaser que este conjunto no tiene cota superior. Y por lo tanto no tiene supremo.

∎

d)$D = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n n | n, \text{ un entero positivo}\right\}$
No tiene ínfimo ni supremo.
Demostración. Enlistamos algunos elementos. $D = \{0, \frac{5}{2}, -\frac{8}{3}, \frac{17}{4}, -\frac{24}{5}\} = \{0, -\frac{8}{3}, -\frac{24}{5}, -\frac{48}{7}, ...\} \cup \{\frac{5}{2}, \frac{17}{4}, \frac{31}{6}, \frac{65}{8}, ...\}$
Notamos que para n impar, los elementos decrecen sin cota y para n pares, los elementos crecen sin cota. Por lo tanto el conjunto no tiene supremo ni ínfimo.

∎

Ejercicio 2. Pruébese que si S es un conjunto no nulo de elementos de $\mathbb{R}$ inferiormente acotado, entonces S tiene un ínfimo de R.

Demostración. Construímos el elemento $-sup(-S) \in \mathbb{R}$
Para justificar la existencia de dicho elemento, sabemos que S está acotado inferiormente, entonces $\exists r \in \mathbb{R}$ tal que $r \leq s \ ; \forall s \in S$
$\Rightarrow \ -s \leq -r \ \ \forall -s \in -S$
$\Rightarrow \ -r$ es una cota sup de S
$\Rightarrow -S$ tiene supremo por el axioma del supremo
$\Rightarrow \ \exists sup(-S) \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \ \exists -sup(-S) \in \mathbb{R}$ (Podemos asegurar su inverso por propiedades de los reales)

Ahora demostraremos que $-sup(-S)$ es el ínfimo de S
$-s \leq sup(-S)\ \forall -s \in -S$, ya que $-S$ es un conjunto acotado superiormente y por lo tanto, tiene supremo
$-sup(-S) \leq s\ \forall s \in S$
$\Rightarrow\ -sup(-S)$ es cota inferior del conjunto S.

Ahora sólo falta demostrar que $-sup(-S)$ es la máxima cota inferior
Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria, como $-S$ tiene supremo por el axioma del supremo, entonces se cumple que $sup(-S) - \epsilon < -s^*\ \ p.a. - s^* \in_S$
$\Rightarrow\ s^* < -sup(-S) + \epsilon\ \ p.a.\ s^* \in S$
lo cual prueba que es la máxima cota inferior

$\therefore -sup(-S) = inf(S)$
$\therefore$ Si $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \phi$ es acotado inferiormente, entonces S tiene ínfimo.

■

Ejercicio 3. Si a y b son números reales positivos cualesquiera, demuéstrese que existe un entero positivo m tal que $(m-1)\,a \leq b < ma$

Demostración. Como a y $b \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{R}$ y usando el teorema visto en clase que nos dice que $\forall\ p \in \mathbb{R}$ existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m-1 \leq p < m$
$\Rightarrow$para $\frac{b}{a} \in \mathbb{R}\ \ \exists\ m \in \mathbb{Z}$ tal que $m-1 \leq \frac{b}{a} < m$
Ahora multiplicamos por a y como sabemos que a es positivo, no altera la desigualdad.
$\Rightarrow (m-1)\,a \leq b < ma$

■

Ejercicio 4. Constrúyase un conjunto S de números racionales que tenga $\sqrt{3}$ como supremo. Verifíquese que $supS = \sqrt{3}$

Demostración. Construímos el conjunto $S = \left\{x \mid x < \sqrt{3} \mid x \in \mathbb{Q}\right\}$ donde todos los elementos de dicho conjunto tienen la forma $x < \sqrt{3}$, por lo que sabemos que es una cota superior de S

Ahora debemos demostrar que es la mínima cota superior.
Procederemos por contradiccíon. Por lo que supondremos que $\sqrt{3}$ no es el supremo de S, por lo que no es la mímima cota superior de S. Entonces existe una cota superior $p < \sqrt{3}$

Ahora, por la densidad de los racionales sobre los reales, construímos $r \in \mathbb{Q}$ que cumple que $p < r < \sqrt{3}$
Por un lado tenemos que $r < \sqrt{3}$, lo cual nos indica que $r\ \in S$.
Y por el otro lado tenemos que $p < r$ **!**

Ya que encontramos un elemento de S mayor a la cota superior propuesta.
$\therefore \sqrt{3}$ es la mínima cota superior
$\therefore \sqrt{3}$ es el supremo de S

■

Ejercicio 5. Constrúyase un conjunto S de números racionales que tenga $\sqrt{3}$ como su ínfimo. Verifíquese que $inf(S) = \sqrt{3}$

Demostración. Sea $S = \{x : x > \sqrt{3}$ y x es racional$\}$

1) Sea $x \in S \;\Rightarrow\; x > \sqrt{3} \;\; \forall x \in S$ Entonces $\sqrt{3}$ es cota inferior de S.
2) Por demostrar: $\sqrt{3}$ es la máxima cota inferior. Suponemos que no es así, sea r una cota inferior de S con $\sqrt{3} < r$
$\Rightarrow r \leq x \;\; \forall x \in S$ con $\sqrt{3} < r$.
$\Rightarrow \;\; x > r > \sqrt{3} \;\; \forall x \in S$
Por el teorema de la densidad de $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$. Sabemos que existe $m \in \mathbb{Q}$ tal que $r > m > \sqrt{3}$

$\Rightarrow \;\; m > \sqrt{3} \;\Rightarrow\; m \in S$
$\therefore \;\; r > m$ y $m \in S$ **!**
Esto es una contradicción ya que encontramos un elemento de S menor a la cota inferior r. Por lo tanto la suposición inicial es falsa y $\sqrt{3}$ sí es la máxima cota inferior de S.

■

Ejercicio 6. Pruébese que entre dos números reales distintos a a y b hay infinitos racionales.

Demostración. Usamos el teorema de densidad de los racionales el cual nos dice que entre dos números reales siempre habrá un número racional.
para a y $b \in \mathbb{R}$, con $a < b \; \exists \; r_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r_1 < b$

Sin embargo, si tomamos $r_1 < b$ y aplicamos el mismo teorema, tenemos que $\exists \; r_2$ tal que $a < r_1 < r_2 < b$ y así sucesivamente encontramos infinitos racionales empleando este teorema infinitas veces.

■

Ejercicio 7. Si E y F son conjuntos de números reales tales que para cualquier $x \in E$ y cada $y \in F$ tal que $x \leq y$, demuéstrese que $supE \leq supF$

Demostración. Procederemos con una demostración por contradicción
Suponemos que $supE > supF \;\Rightarrow\; supE - supF > 0$ lo cual emplearemos como ϵ en la definición de supremo.
Por definición de supremo, sabemos que para E, $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; x^* \in E$ tal que $sup(E) - \epsilon < x^*$ y como la definición se cumple para toda $\epsilon < 0$, se cumple para $supE - supF > 0 \;\Rightarrow$ $supE - (supE - supF) < x^* \ldots$ (1)
Pero por hipótesis tenemos que $\forall \; x^*$ hay un $y^* \in F$ tal que $x^* \leq y^* \ldots$ (2)
Por otra parte sabemos que $y^* \leq supF \ldots$ (3)

Finalmente por (1) , (2) y (3) tenemos que:
$supE - supE + supF < x^* \leq y \leq supF$
$\Rightarrow \; supF < x^* \leq y \leq supF$

$\Rightarrow\ supF < supF$!

$\therefore$ Suponer que $supE > supF$ es incorrecto
$\therefore$ $supE \leq supF$

■

Ejercicio 8. Si E, F y G son conjuntos de números reales tales que para cada $x \in E$ y cada $y \in F$ hay un $z \in G$ tal que $x + y \leq z$, demuéstrese que $supE + supF \leq supG$

Demostración. Como $supE + supF = sup\,(E+F)\ \Rightarrow\ P.D\ sup\,(E+F) \leq supG$
Procederemos con una demostración por contradicción
Suponemos que $sup\,(E+F) > supG\ \Rightarrow\ sup\,(E+F) - supG > 0$, lo cual emplearemos como ϵ

Por la definición de supremo para $(E+F)$, $\forall \epsilon > 0\ \exists\ x^* + y^*$ con $x^* \in E$ y $y^* \in F$ tal que $sup\,(E+F) - \epsilon < x^* + y^*$ y como la definición se cumple para toda $\epsilon < 0$, se cumple para la ϵ que propusimos
$\Rightarrow sup\,(E+F) - (sup\,(E+F) - supG) < x^* + y^* \ldots$ (1)
Pero por hipótesis tenemos que para hay un $z \in G$ tal que $x^* + y^* \leq z \ldots$ (2)
Por otra parte sabemos que $z \leq supG \ldots$ (3)

Finalmente por (1) , (2) y (3) tenemos que:
$sup\,(E+F) - sup\,(E+F) + supG < x^* + y^* \leq z \leq supG$
$\Rightarrow\ supG < x^* + y^* \leq z \leq supG$
$\Rightarrow\ supG < supG$!

$\therefore$ Suponer que $sup\,(E+F) > supG$ es incorrecto
$\therefore$ $sup\,(E+F) \leq supG$
$\therefore$ $supE + supF \leq supG$

■

Spivak p.182

Ejercicio 1. Hallar la cota superior mínima y la cota superior máxima (si existen) de los siguientes conjuntos. Decidir también qué conjuntos tienen un elemento máximo o elemento mínimo.

$I)\ \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = A$

$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\frac{1}{4}, ...\right\}$
max(A)=sup(A)=1
inf(A)=0

$II)\ \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\} = B$

Max(B)=sup(B) = 1
Min(B)=inf(B) = -1

$III)\ \left\{x : x = 0 \text{ ó } \ x = \dfrac{1}{n} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\right\} = C$

max(C) = sup(C) = 1
min(C)= inf(C) = -1

$IV)\ \big\{x :\ 0 \leq x \leq \sqrt{2} \ \text{ y x es racional}\big\} = D$

sup(D) = $\sqrt{2}$
min(D)=inf(D) = 0

$V)\ \{x :\ x^2 + x + 1 \geq 0\} = E$

$x^2 + x + 1 \geq 0$
$\Rightarrow \ x^2 + x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} \geq 0$
$\Rightarrow \ \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq 0$
$\Rightarrow \ \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq -\dfrac{3}{4}$
Pero esta desigualdad se cumple para todos los reales ya que cualquier número al cuadrado es positivo y por lo tanto es mayor a $-\dfrac{3}{4}$.
Por lo tanto $E = \mathbb{R}$
Y entonces el conjunto no está acotado y no tiene supremo ni ínfimo.

$VI)\ \{x :\ x^2 + x - 1 < 0\} = F$

$$F = \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Y entonces Inf(F) = $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$ y Sup(F)= $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Pero F no tiene ni mínimo ni máximo ya que el supremo e ínfimo no pertenecen a F.

$VII)\ \{x :\ x < 0 \text{ y } x^2 - x + 1 < 0\} = G$
G= $\left(\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}, 0\right)$
Y entonces Inf(G) = $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$ y Sup(G)=0 . Pero G no tiene ni mínimo ni máximo ya que el supremo e ínfimo no pertenecen a G.

$VIII)\ \left\{\dfrac{1}{n}+(-1)^n\right\}=H$
H=$\{0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{4}, ...\}$
Max(H)=Sup(H)=$\dfrac{3}{2}$ y que Inf(H)=-1.

Ejercicio 2. (a). Supongamos que $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente. Designamos por -A el conjunto de todos los -x con x en A. Demostrar que $-A \neq \emptyset$, que -A está acotado superiormente, y que -Sup(-A) es la cota inferior máxima de A.

Demostración. $-A \neq \emptyset$, ya que $A \neq \emptyset$, entonces dado $x \in A \quad \Rightarrow \quad -x \in -A$.
Como A está acotado inferiormente, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq x \ \ \forall x \in A$
Entonces $-x \leq -\alpha \ \ \forall -x \in -A$, es decir $-A$ es acotado superiormente.

Veamos que $-sup(-A) = inf(A)$
Por una parte, $sup(-A) \geq -x \ \ \forall -x \in -A$.
Entonces $-sup(-A) \leq x \ \forall x \in A$, es decir, $-sup(-A)$ es cota inferior de A ... (1)
Ahora bien, sea $\epsilon > 0$ fijo y arbitrario, se tiene que existe $-a^* \in -A$ tal que $sup(-A) - \epsilon < -a^*$, de donde $-sup(-A) + \epsilon > a^*$ ... (2)

De (1) y (2), se tiene que $-sup(-A)$ es ínfimo de A.

■

Ejercicio 2. (b). Si $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente. Sea B el conjunto de todas las cotas inferiores de A. Demostrar que $B \neq \emptyset$, que B está acotado superiormente y que Sup(B) es la cota inferior máxima de A.

Demostración. Como A es acotado inferiormente, $\exists \beta \in \mathbb{R}$, tal que $\beta \leq x \ \forall x \in A$
De donde $\beta \in B$, por lo que $B \neq \emptyset$.
Como A es acotado inferiormente, A tiene ínfimo, ésta es la mínima cota superior de B, ya que el ínfimo es la cota inferior máxima.
Por la equivalencia de las definiciones de ínfimo, se cumple que $sup(B) = inf(A)$

■

Ejercicio 3. Sea f una función continua en [a,b] con $f(a) < 0 < f(b)$.
(a) La demostración del teorema 1 estableció que existe un x mínimo en [a,b] con $f(x) = 0$,¿Existe necesariamente un penúltimo elemento x en [a,b] con $f(x) = 0$? Demostrar que existe en [a,b] un x máximo con $f(x) = 0$. (Inténtese dar una demostración fácil considerando una nueva función muy relacionada con f.)

Demostración. Si consideramos:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \ x < 0 \\ 0, & \text{si } \ 0 \leq x < 1 \\ x-1, & \text{si } \ 1 \leq x \end{cases}$$

No hay penúltimo elemento tal que $f(x) = 0$

Si consideramos $g(x) = f(b - a + x)$, se tiene que $g(a) = f(b)$ y $g(b) = f(a)$. Entonces existe un mínimo en $[a, b]$ con $g(x) = 0$, este x es el máximo con $f(x) = 0$

■

Ejercicio 3(b). La demostración del teorema 1 dependía de la consideración de $A = \{x : a \leq x \leq b \ y \ f$es negativa en $[a, x]\}$. Dese otra demostración del teorema 1, que dependa de la consideración de $B = \{x : a \leq x \leq b \ y \ f(x) < 0\}$ ¿En qué punto x de $[a, b]$ con $f(x) = 0$ tendrá que localizar esta demostración? Dese un ejemplo en que los conjuntos A y B no coincidan.

Demostración. Definimos $B = \{x : a \leq x \leq b \ y \ f(x) < 0 \ \}$ Evidentemente $B \neq \emptyset$ ya que $a \in B$ por hipótesis y definición de B
Como f es continua, $\exists \delta > 0$ tal que $f(a + \delta) < 0$, entonces $a \leq x < a + \delta$ es un intervalo que pertenece a B.
b es cota superior de B, puesto que $b \geq x \ \forall x \in [a, b]$
Sea $A = \{x : \ a \leq x \leq b$ y f negativa en $[a, x]\}$, análogamente, existe $\delta' > 0$ tal que si $x \in (b - \delta', b]$, entonces x es cota superior de A.
Sea $d = sup(A)$, es claro que $a < d < b$
Veamos que $f(d) = 0$

Si $f(d) < 0 \Rightarrow \exists \epsilon > 0$ tal que $f(d + \epsilon) < 0 \Rightarrow d + \epsilon \in A$ y $d + \epsilon > sup(A)$**!**
Si $f(d) > 0$, se llega a una contradicción análoga con el $sup(B)$
Por lo tanto $f(d) = 0$ y al ser supremo, d es el máximo elemento que satisface $f(d) = 0$

■

Un ejemplo donde $B \neq A$ es $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^3 + 10x^2 - 20x - 30$

Ejercicio 4(a). Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(a) = f(b) = 0$. Supóngase también que $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in [a, b]$. Demostrar que existen números c y d con $a \leq c < x_0 < d \leq b$ y tales que $f(c) = f(d) = 0$ pero $f(x) > 0$ para todo $x \in (c, d)$. Indicación: Será útil aplicar el problema anterior.

Demostración. Del ejercicio 3 sabemos que existe un número en $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$, y un mínimo en $[x_0, b]$ con $f(d) = 0$, donde c y d son estos máximos y mínimos respectivamente.

■

Ejercicio 4(b). Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(a) < f(b)$. Demostrar que hay números c y d con $a \leq c < d \leq b$ tales que $f(c) = f(a)$ y $f(d) = f(b)$ y $f(a) < f(x) < f(d)$ para todo x de (c, d).

Demostración. Debe de haber un error, ya que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$, dados $a = -1$ y $b = 2$, no puede cumplir que $f(a) < f(x) < f(d) \ \ \forall x \in (c, d)$ con $a \leq c < d \leq b$

■

Ejercicio 5(a). Supóngase que $y - x > 1$. Demostrar que existe un entero k tal que $x < k < y$.

Demostración. Sea l el mayor entero que satisface $l \leq x$
$\therefore\ l+1 > x$, pero $l+1 \leq x+1 < y$
$\therefore\ \ k = l+1$ cumple lo buscado.

■

Ejercicio 5(b). Supóngase que $x < y$. Demostrar que existe un número racional r tal que $x < r < y$.

Demostración. Como $y - x > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < y - x$
$\therefore\ \ 1 < ny - mx$
Por a) existe un $k \in \mathbb{Z}$, tal que $ny > k > nx$
$\therefore\ \ \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ cumple que $x < \frac{k}{n} < y$

■

Ejercicio 5(c). Supongamos que $r < s$ son números racionales. Demostrar que existe un número irracional entre r y s. Indicación: Para empezar es sabido que existe un número irracional entre 0 y 1.

Demostración. Sabemos que π es irracional y que $\frac{\pi}{4} < 1$, pero $\frac{\pi}{4} > 0$
$\therefore\ \ r + (s-r)\frac{\pi}{4} > r$ y $r + (s-r)\frac{\pi}{4} < s$

■

Ejercicio 5(d). Supongamos que $x < y$. Demostrar que existe un número irracional entre x y y. Indicación: No hace falta trabajar más, es consecuencia de (b) y (c).

Demostración. Por b) sabemos que existen racionales que cumplen que $x < r < s < y$, al aplicar c) a $r < s$, obtenemos el irracional buscado.

■

Spivak p.192

Ejercicio 1(a). ¿Para cuál de los valores siguientes de α es la función $f(x) = x^{\alpha}$ uniformemente continua en $[0, \infty) : \alpha = \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 2, 3$?

Demostración. Para $\alpha = \dfrac{1}{3}$ Probaremos que sí es uniformemente continua

Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria y sean $x, y \in [0, \infty)$ Sin pérdida de generalidad, sea $y > x$.
Como $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ es continua y derivable en $[x, y]$, podemos usar el Teorema del Valor Medio para asegurar que existe un $c \in (x, y)$ tal que:
$(y-x)f'(c) = f(y) - f(x) \ \Rightarrow\ \ (y-x)\frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}} = y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = |y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}| \quad [1]$
(La última igualdad se justifica porque la función $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ es creciente y $y > x \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} > x^{\frac{1}{3}} \ \Rightarrow\ \ y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} > 0 \ \Rightarrow\ \ y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = |y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}|$)

Proponemos $\delta \leq 3\epsilon$ tal que $|y - x| < \delta$ y queremos demostrar que $|y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}| < \epsilon$

Como $x < c \Rightarrow \; c^{-\frac{2}{3}} < x^{-\frac{2}{3}}$ [2] (Ya que $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ es decreciente)

Usamos [1] y [2]: $|y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}| = (y-x)\frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}} < (y-x)\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
$\Rightarrow \; |y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}| < (y-x)\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \leq (y-x)\frac{1}{3}$ (Para $x \geq 1$, ya que entonces $0 \leq x^{-\frac{2}{3}} \leq 1$)
$\Rightarrow \; |y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}| \; < (y-x)\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}|y-x| < \frac{1}{3}\delta \leq \frac{1}{3}(3\epsilon) = \epsilon$

$\therefore$ Demostramos que para todo $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|y-x| < \delta \Rightarrow \; |y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}| < \epsilon$
Demostramos que la función es uniformemente continua sólo en $[1, \infty)$ ya que restringimos a $x \geq 1$.
Pero como la función es continua en el cerrado $[0,1]$ entonces es uniformemente continua en $[0,1]$.
Entonces la función es uniformemente continua en $[0,1] \cup [1,\infty) = [0,\infty)$

■

Para $\alpha = \frac{1}{2}$ Probaremos que sí es uniformemente continua

Primero probaremos que para todos $a, b \geq 0$, se cumple que: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Demostración.
$0 < a + b \leq a + 2ab + b$ (Ya que 2ab es mayor o igual a 0).
$\Rightarrow \; 0 < a + b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
$\Rightarrow \; 0 < \sqrt{a+b} \leq |\sqrt{a} + \sqrt{b}| = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

■

Ahora sí probaremos que la función es uniformemente continua.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria y sea $\delta \leq \epsilon^2$ y sean $x, y \in [0, \infty]$ tales que:
$|x - y| < \delta \leq \epsilon^2$ esto no deja dos casos:

Caso 1) $x - y \geq 0$:
$0 \leq |x-y| < \epsilon^2 \Rightarrow 0 \leq x - y < \epsilon^2 \; \Rightarrow \; 0 \leq y \leq x < y + \epsilon^2 \; \Rightarrow \; \sqrt{y} \leq \sqrt{x} < \sqrt{y + \epsilon^2}$
Aplicamos la demostración de arriba: $\sqrt{y} \leq \sqrt{x} < \sqrt{y+\epsilon^2} \leq \sqrt{y} + \epsilon \; \Rightarrow \; \sqrt{y} \leq \sqrt{x} < \sqrt{y} + \epsilon$
$\Rightarrow \; 0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} < \epsilon \Rightarrow \; |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon$

Caso 2) $x - y < 0$:
$0 < |x-y| < \epsilon^2 \Rightarrow 0 < y - x < \epsilon^2 \; \Rightarrow \; 0 < x < y < x + \epsilon^2 \; \Rightarrow \; \sqrt{x} < \sqrt{y} < \sqrt{x + \epsilon^2}$
Aplicamos la demostración de arriba: $\sqrt{x} < \sqrt{y} < \sqrt{x+\epsilon^2} \leq \sqrt{x} + \epsilon \; \Rightarrow \; \sqrt{x} < \sqrt{y} < \sqrt{x} + \epsilon$
$\Rightarrow \; 0 < \sqrt{y} - \sqrt{x} < \epsilon \Rightarrow \; |\sqrt{y} - \sqrt{x}| < \epsilon \quad \Rightarrow \; |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon$

En cualquiera de los dos casos obtenemos $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon$

$\therefore$ Demostramos que para todo $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta \Rightarrow |x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}| < \epsilon$

■

Demostración. Para $\alpha = 2$ Probaremos que no es uniformemente continua

Suponemos que sí es uniformemente continua, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [0, \infty)$ cumplen:
$|x-y| < \delta$, entonces $|x^2 - y^2| < \epsilon$
En particular, si $\epsilon = 1$ debe de existir una delta que cumpla la definicón de arriba. Y con esa delta definimos $x = \dfrac{1}{\delta}$ y hacemos $y = x + \frac{\delta}{2}$, se nota que $x, y \in [0, \infty)$
Tenemos que:
$|x-y| = |x - (x + \frac{\delta}{2})| = |-\frac{\delta}{2}| = \frac{\delta}{2} \ < \delta \qquad \therefore |x-y| < \delta$

Como tenemos que $|x-y| < \delta$, se debería cumplir que $|x^2 - y^2| < \epsilon = 1$, Sin embargo:
$|x^2 - y^2| = |(\frac{1}{\delta})^2 - (\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2})^2| = |1 + \frac{\delta^2}{4}| > 1$
Por lo tanto, para $\epsilon = 1$ encontramos que hay una x y y en $[0, \infty)$ tal que es imposible acotar $|x^2 - y^2|$ con ϵ sin importar con qué δ se acote $|x-y|$.

■

Demostración. Para $\alpha = 3$ Probaremos que no es uniformemente continua

Suponemos que sí es uniformemente continua, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [0, \infty)$ cumplen:
$|x-y| < \delta$, entonces $|x^3 - y^3| < \epsilon$
En particular, si $\epsilon = 1$ debe de existir una delta que cumpla la definición de arriba. Y con esa delta definimos $x = \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$ y hacemos $y = x + \frac{\delta}{3}$, se nota que $x, y \in [0, \infty)$
Tenemos que:
$|x-y| = |x - (x + \frac{\delta}{3})| = |-\frac{\delta}{3}| = \frac{\delta}{3} \ < \delta \qquad \therefore |x-y| < \delta$

Como tenemos que $|x-y| < \delta$, se debería cumplir que $|x^3 - y^3| < \epsilon = 1$, Sin embargo:
$|x^3 - y^3| = |x^3 - (x + \frac{\delta}{3})^3| = |-x^2\delta - \frac{x}{3}\delta^2 - \frac{\delta^3}{27}| = |x^2\delta + \frac{x}{3}\delta^2 + \frac{\delta^3}{27}| = |(\frac{1}{\sqrt{\delta}})^2\delta + \frac{1}{3\sqrt{\delta}}\delta^2 + \frac{\delta^3}{27}| =$
$|1 + \frac{1}{3\sqrt{\delta}}\delta^2 + \frac{\delta^3}{27}| > 1$

Por lo tanto, para $\epsilon = 1$ encontramos que hay una x y y en $[0, \infty)$ tal que es imposible acotar $|x^3 - y^3|$ con ϵ sin importar con qué δ se acote $|x-y|$.

■

Ejercicio 1(b). Hallar una función f que sea continua y acotada en $(0, 1]$, pero no uniformemente continua en $(0, 1]$.

Demostración. $f(x) = cos(\frac{1}{x})$ Es continua ya que es la composición de dos funciones que son continuas en $(0, 1]$. Además es acotada ya que $-1 \leq cos(\frac{1}{x}) \leq 1 \ \forall x$
Sin embargo la función no es uniformemente continua ya que conforme se acerca al cero, la función oscila cada vez más y su pendiente aumenta sin cota y por lo tanto, no podemos acotar $|cos(\frac{1}{y}) - cos(\frac{1}{x})|$ con una ϵ por más que acotemos $|y - x|$ con una delta. Probaremos este hecho suponiendo que sí es uniformemente continua y que por lo tanto para $\epsilon = 1$ existe una $\delta > 0$, y crearemos un x y $y \in (0, 1]$ tales que $|y - x| < \delta$ y por lo tanto debería de cumplirse que $|cos(\frac{1}{y}) - cos(\frac{1}{x})| < 1$

Para $\epsilon = 1$, debe de existir un $\delta > 0$ tal que se cumple la definición. A partir de ese delta construimos el natural $n > \frac{1}{2\pi\delta}$, y hacemos $x = \frac{1}{2\pi n}$, $y = \frac{1}{2\pi n+\pi}$
Ahora bien, como $n > \frac{1}{2\pi\delta} \Rightarrow \frac{1}{\delta} < 2\pi n \Rightarrow \frac{1}{\delta} < 2\pi n + 4\pi n^2 \Rightarrow \frac{1}{2\pi n+4\pi n^2} < \delta$
$\Rightarrow \frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{2\pi n+\pi} < \delta \Rightarrow x - y < \delta \Rightarrow |x - y| < \delta$ (Esta última implicación debido a que $x > y$ y entonces $x - y > 0$)

Como se cumple que $|x - y| < \delta$, entonces debería de cumplirse que $|cos(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{y})| < 1$, sin embargo, $|cos(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{y})| = |cos(2\pi n) - cos(2\pi n + \pi)|$, y como n es un natural, por la periocidad del coseno, se cumple que esta expresión es igual a: $|cos(0) - cos(\pi)| = |1 + 1| = 2 > 1$
Por lo tanto encontramos un x y y en el intervalo, separados por una distancia menor a δ que sin embargo no cumplen que su imagen se encuentre a una distancia menor a $\epsilon = 1$, por lo tanto no se cumple la definición y no es uniformemente continua en el intervalo. ■

Ejercicio 1(c). Hallar una función f que sea continua y acotada en $[0, \infty)$, pero no uniformemente continua en $[0, \infty)$.

Demostración. $f(x) = cos(x^2)$ Es continua ya que es la composición de dos funciones que son continuas en $[0, \infty)$. Además es acotada ya que $-1 \leq cos(x^2) \leq 1 \ \forall x$
Sin embargo la función no es uniformemente continua ya que conforme tiende a infinito, la función oscila cada vez más y su pendiente aumenta sin cota y por lo tanto, no podemos acotar $|cos(x^2) - cos(y^2)|$ con una ϵ por más que acotemos $|x - y|$ con una delta. Probaremos este hecho suponiendo que sí es uniformemente continua y que por lo tanto para $\epsilon = 1$ existe una $\delta > 0$, y crearemos un x y $y \in [0, \infty)$ tales que $|x - y| < \delta$ y por lo tanto deber'ia de cumplirse que $|cos(x^2) - cos(y^2)| < 1$

Para $\epsilon = 1$, debe de existir un $\delta > 0$ tal que se cumple la definición. A partir de ese delta construimos el natural $n > \frac{\pi}{2\delta^2}$, y hacemos $y = \sqrt{2\pi n}$, $x = \sqrt{2\pi n + \pi}$
Ahora bien, como $n > \frac{\pi}{2\delta^2} \Rightarrow 2n > \frac{\pi}{\delta^2} \Rightarrow \sqrt{2n} > \frac{\sqrt{\pi}}{\delta} \Rightarrow \sqrt{2n} + \sqrt{2n+1} > \frac{\sqrt{\pi}}{\delta} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}} < \frac{\delta}{\sqrt{\pi}}$
$\Rightarrow \frac{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}} < \frac{\delta}{\sqrt{\pi}}$ (Esta última implicación debido a que al desarrollar el

numerador el resultado es 1)
$\Rightarrow \quad \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n} < \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2\pi n + \pi} - \sqrt{2\pi n} < \delta \;\Rightarrow\; x - y < \delta \;\Rightarrow\; |x-y| < \delta$
(Esta última implicación debido a que $x > y$ y entonces $x - y > 0$

Como se cumple que $|x-y| < \delta$, entonces debería de cumplirse que $|cos(x^2) - cos(y^2)| < 1$, sin embargo, $|cos(x^2) - cos(y^2)| = |cos(2\pi n + \pi) - cos(2\pi n)|$, y como n es un natural, por la periodicidad del coseno, se cumple que esta expresión es igual a: $|cos(\pi) - cos(0)| = |-1-1| = 2 > 1$
Por lo tanto encontramos un x y y en el intervalo, separados por una distancia menor a δ que sin embargo no cumplen que su imagen se encuentre a una distancia menor a $\epsilon = 1$, por lo tanto no se cumple la definición y no es uniformemente continua en el intervalo.

■

Ejercicio 2(a). Demostrar que si f y g son uniformemente continuas en A, también lo es $f+g$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria.
Como f es uniformemente continua en A, dados $x, y \in A$ y dada $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists\, \delta_1 > 0$ tal que:
$|x-y| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} \quad [1]$
Como g es uniformemente continua en A, dados $x, y \in A$ y dada $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists\, \delta_2 > 0$ tal que:
$|x-y| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{2} \quad [2]$

Sea $\delta \leq \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$
$\Rightarrow \quad |(f+g)(x) - (f+g)(y)| = |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)|$
$= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|$
$\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$
$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$\therefore |x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |(f+g)(x) - (f+g)(y)| < \epsilon$
Entonces $f+g$ es uniformemente continua en A.

■

Ejercicio 2(b). Demostrar que si f y g son uniformemente continuas y acotadas en A, entonces fg es uniformemente continua en A.

Demostración. Como f y g son acotadas, existe $M_1, M_2 > 0$ tales que $|f(x)| \leq M_1$, $|g(x)| \leq M_2 \;\; \forall x \in A$.
Sea $M = \text{máx}\{M_1, M_2\}$, entonces $|f(x)|, |g(x)| \leq M \;\; \forall x \in A$

Sea $\epsilon > 0$, construimos $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2M}$. Como f es uniformemente continua, existe δ_1 tal que:
$|x-y| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2M}$

Como g es uniformemente continua, existe δ_2 tal que:
$|x-y| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |g(x)-g(y)| < \frac{\epsilon}{2M}$

Sea $\delta \leq \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$
$|fg(x) - fg(y)| = |f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)|$
$= |f(x)[g(x) - g(y)] + g(y)[f(x) - f(y)]|$
$\leq |f(x)[g(x) - g(y)]| + |g(y)[f(x) - f(y)]|$
$= |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)|$
$\leq M(\frac{\epsilon}{2M}) + M(\frac{\epsilon}{2M}) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$\therefore |x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |fg(x) - fg(y)| < \epsilon$ Entonces fg es uniformemente continua en A

■

Ejercicio 2(c). Demostrar que esta conclusión no resulta válida cuando una de las funciones no es acotada.

Demostración. Daremos un contraejemplo. Sea $f(x) = x, g(x) = sen(x)$, ambas funciones son uniformemente continuas en $[0, \infty)$, pero f no es una función acotada en el intervalo. Ahora bien, probaremos que $fg(x) = xsen(x)$ no es uniformemente continua en el intervalo. Suponemos que sí lo es.

Proponemos una $\epsilon = 1$, y como supusimos que sí es uniformemente continua debe de existir una $\delta > 0$, para la cual se debe de cumplir que si $x, y \in [0, \infty)$, y $|x-y| < \delta$, entonces $|xsen(x) - ysen(y)| < 1$
Escogemos entonces $x = 2\pi k + \frac{\delta}{4}, y = 2\pi k - \frac{\delta}{4}$, siendo k un entero positivo.
Bajo esta definición se cumple que:
$|x-y| = |2\pi k + \frac{\delta}{4} - (2\pi k - \frac{\delta}{4})| = |\frac{\delta}{2}| < \delta$, lo cual debería implicar que $|xsen(x) - ysen(y)| < 1$, sin embargo:

$|xsen(x) - ysen(y)| = |xsen(2\pi k + \frac{\delta}{2}) - ysen(2\pi k - \frac{\delta}{2})| = |xsen(\frac{\delta}{2}) - ysen(-\frac{\delta}{2})| = |xsen(\frac{\delta}{2}) + ysen(\frac{\delta}{2})| =$
$= |(x+y)sen(\frac{\delta}{4})| = |4\pi ksen(\frac{\delta}{2})|$

Pero como k era un entero cualquiera que escogimos para definir x, entonces podemos hacer a k tan grande como queramos, y x se mantendrá en el intervalo, ya que el intervalo no tiene cota superior. Entonces podemos escoger una k suficientemente grande para que $|4\pi ksen(\frac{\delta}{2})| > 1$, lo cual muestra que nuestra hipótesis inicial es falsa, la función no es uniformemente continua.

■

Ejercicio 2(d). Supóngase que f es uniformemente continua en A, que g es uniformemente continua en B, y que $f(x)$ está en B para todos los $x \in A$. Demostrar que $g(f(x))$ es uniformemente continua en A.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria. Sean $\alpha, \beta \in B$.
Como g es uniformemente continua, existe un número $\epsilon' > 0$ tal que:

$|\alpha-\beta|<\epsilon' \;\Rightarrow\; |g(\alpha)-g(\beta)|<\epsilon \qquad [1]$
Como f es uniformemente continua, para toda $x, y \in A$ y para $\epsilon' > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:
$|x-y|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(y)|<\epsilon'$

Pero como $f(x), f(y) \in B$ por la hipótesis, entonces por [1], se sigue que:
$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon' \Rightarrow |g(f(x))-g(f(y))|<\epsilon$
$\therefore\; |x-y|<\delta \Rightarrow |g(f(x))-g(f(y))|<\epsilon$

Y por lo tanto $g(f(x))$ es uniformemente continua en A.

■

Ejercicio 4. Deducir el teorema 2 como consecuencia del teorema 1.
Teorema 1: $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente
Teorema 2: Para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural n con $\frac{1}{n} < \epsilon$

Demostración. Suponemos que no se cumple el teorema. Entonces $\frac{1}{n} > \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow \;\; n \leq \frac{1}{\epsilon}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Pero esto implica que $\frac{1}{\epsilon}$ es cota superior de $\mathbb{N}$, lo cual contradice el teorema 1.
Por lo tanto se cumple que $\forall\; \epsilon > 0$ existe un número natural n con $\frac{1}{n} < \epsilon$

■

Haaser p.442

Ejercicio 1. Demuéstrese que la función idéntica I es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria y sea $\delta \leq \epsilon$ y sean $x, y \in \mathbb{R}$
si $|x-y|<\delta \Rightarrow$
$|f(x)-f(y)| = |x-y| < \delta \leq \epsilon$
$\therefore |f(x)-f(y)|<\epsilon$
$\therefore |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon$
Entonces la función es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

■

Ejercicio 2. Demuéstrese que $I^{-1} = \frac{1}{I}$ es uniformemente continua en $[a, \infty)$ donde $a > 0$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria y sea $\delta \leq a^2\epsilon$
Como $x \in [a,\infty), y \in [a,\infty) \Rightarrow$
$x \geq a > 0, y \geq a > 0 \Rightarrow |x| \geq a\,,\; |y| \geq a \Rightarrow$
$|x||y| \geq a^2 \Rightarrow |xy| \geq a^2 \Rightarrow \frac{1}{|xy|} \leq \frac{1}{a^2} \quad [1]$

Ahora bien, si $|x-y|<\delta \Rightarrow$
$|f(x)-f(y)| = |\frac{1}{x}-\frac{1}{y}| = |\frac{y-x}{xy}| = \frac{|y-x|}{|xy|} = \frac{|x-y|}{|xy|} \leq \frac{|x-y|}{a^2} < \frac{\delta}{a^2} \leq \frac{a^2\epsilon}{a^2} = \epsilon$
$\therefore |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon$
Por lo tanto la función es uniformemente continua en $[a, \infty)$

■

Ejercicio 3. Demuéstrese que si existe un número positivo M tal que, para x, y en S cualquiera,
$|f(x) - f(y)| < M|x - y|$
Entonces f es uniformemente continua sobre S.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria, y sea $\delta \leq \frac{\epsilon}{M} > 0$. Y sean $x, y \in S$, entonces:
Si $|x - y| < \delta \quad \Rightarrow$
$|f(x) - f(y)| < M|x - y|$ (Por hipótesis)
$< M\delta \leq M(\frac{\epsilon}{M}) = \epsilon$

$\therefore \quad |x - y| < \delta \leq \frac{\epsilon}{M} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$
Entonces f es uniformemente continua sobre S

■

Ejercicio 4. Las siguientes funciones f son uniformemente continuas en los conjuntos S dados. Para $\epsilon > 0$, determínese un δ específico tal que para todo $x \in S$
$|f(x) - f(y)| < \epsilon$ siempre que $y \in (x - \delta, x + \delta) \cap S$.
$(a) I^3; S = [0, 2]$
$(b) I^{1/2}; S = [2, 4]$.

Demostración. (a) $I^3 = x^3, S = [0, 2]$
Como $x, y \in [0, 2]$, tenemos que:
$0 \leq x \leq 2 \;,\; 0 \leq y \leq 2 \;\Rightarrow$
$0 \leq x^2 \leq 4 \;,\; 0 \leq y^2 \leq 4$
También se deduce que: $0 \leq xy \leq 4 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x^2 + xy + y^2 \leq 12$
$\therefore \quad |x^2 + xy + y^2| \leq 12$

Ahora bien, si $x, y \in S$ y $|x - y| < \delta$
$\Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3| = |(x - y)(x^2 + xy + y^2)| = |x - y||x^2 + xy + y^2|$
$< 12\delta \quad \leq \quad \epsilon$
$\therefore \quad \delta = \frac{\epsilon}{12}$

(b) $I^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}; S = [0, 2]$
Como $x, y \in S$, entonces:
$2 \leq x \leq 4 \;,\; 2 \leq y \leq 4$
$\Rightarrow \quad \sqrt{2} \leq \sqrt{x} \leq 2 \;,\; \sqrt{2} \leq \sqrt{y} \leq 2$
$\Rightarrow \quad \sqrt{2} + \sqrt{2} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 4$
$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$
$\Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$
$\therefore \frac{1}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Ahora bien, si $x, y \in S$ y $|x - y| < \delta$
$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$
$= |(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)| \;=\; |\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}| \;=\; \frac{|x-y|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|} \;<\; \frac{\delta}{2\sqrt{2}} = \epsilon$
$\therefore \delta = 2\sqrt{2}\epsilon$

■

Ejercicio 5. Demuéstrese que si $\tau \subset S$ y f es uniformemente continua sobre S, entonces f es uniformemente continua sobre τ.

Demostración. Como f es uniformemente continua sobre S, tenemos que dada $\epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$. Tal que si $x, y \in S$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Ahora bien, sean $x_0, y_0 \in \tau$. Entonces $x_0, y_0 \in S$, pues $T \subset S$. Por tanto, si $|x_0 - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(y_0)| < \epsilon$
$\therefore\ x_0, y_0 \in \tau$ y $|x_0 - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(y_0)| < \epsilon$
Por lo tanto f es uniformemente continua sobre τ

■

Ejercicio 6. ¿Es la función f definida por $f(x) = x^3$ uniformemente continua sobre $(0, 3)$?

Afirmación: f es uniformemente continua sobre $(0, 3)$.
Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria y sea $\delta \leq \frac{\epsilon}{27}$
Como $x, y \in (0, 3)$, tenemos que $0 < x < 3$, $0 < y < 3$
$\Rightarrow\ 0 < x^2 < 9\ \ 0 < y^2 < 9$
$\Rightarrow\ 0 < x^2 + y^2 < 18$
Además, $0 < xy < 9$, entonces:
$0 < |x^2 + xy + y^2| < 27$

Ahora bien, si $|x - y| < \delta$, tenemos que: $|f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3|$
$= |(x^2 + xy + y^2)(x - y)|$
$= |(x^2 + xy + y^2||x - y|$
$< 27\delta$
$\leq 27(\frac{\epsilon}{27})$
$= \epsilon$

Por lo tanto, si $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
Entonces f es uniformemente continua sobre $(0, 3)$

■

Ejercicio 7. Si f y g son uniformemente continuas sobre un conjunto S, muéstrese que $f + g$ es uniformemente continua sobre S.

Demostración. Como f es uniformemente continua sobre S, entonces:
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $x, y \in S$ y $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
Como g es uniformemente continua sobre S, entonces:
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $x, y \in S$ y $|x - y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \epsilon$

Sea $\epsilon > 0$ fija y arbitraria, construimos $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2}$, entonces:
$\exists \delta_1$ tal que si $x, y \in S$ y $|x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$
También para $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$

$\exists\delta_2$ tal que si $x, y \in S$ y $|x - y| < \delta_2 \;\; \Rightarrow \;\; |g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{2}$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$
Por tanto, si $x, y \in S$ y $|x - y| < \delta$, entonces:
$|(f + g)(x) - (f + g)(y)|$
$= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)|$
$= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|$
$\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$
$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
$\therefore$ si $x, y \in S$ y $|x - y| < \delta = min\{\delta_1, \delta_2\} \;\Rightarrow\; |(f + g)(x) - (f + g)(y)| < \epsilon$

Entonces $f + g$ es uniformemente continua sobre S.

■