RESUMEN: SEMANA 12

ERNESTO MAYORGA SAUCEDO

11. Producto punto

Las operaciones aritméticas, de $\mathbb{R}$-espacio vectorial, introducidas en $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) nos permitieron formalizar el concepto de traslación; además el lenguaje así obtenido nos da la posibilidad de estandarizar algunas técnicas como, por ejemplo, la descripción de las rectas en forma vectorial; más adelante veremos más ejemplos de este tipo de ideas y como un pequeño adelanto mencionamos el cálculo de la distancia de un punto a una recta, en $\mathbb{R}^n$.

Por otra parte, para encontrar el significado de la noción de rectas paralelas en el lenguaje vectorial será necesario introducir otros conceptos concernientes a espacios vectoriales y un concepto más con un alto contenido geométrico, como se verá más adelante, llamado *producto punto*.

11.1. Rectas paralelas en $\mathbb{R}^2$. A manera de motivación, comenzamos con lo mencionado en el párrafo anterior y sea $\ell_{P,\overline{u}}$ una recta en $\mathbb{R}^n$. Ya que

$$\ell_{P,\overline{u}} = \{P\} + \ell_{\mathcal{O},\overline{u}},$$

se tiene que $\ell_{P,\overline{u}}$ se obtiene trasladando $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$ por P.

¿Cómo es dicha traslación? Para responde esto, supongamos que $Q \in \ell_{P,\overline{u}} \cap \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$, entonces por el corolario 9.5 se tiene que $\ell_{Q,\overline{u}} = \ell_{P,\overline{u}}$ y $\ell_{Q,\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$, y por consiguiente

$$\ell_{P,\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{u}};$$

lo cual implica $P \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$. A partir de esto podemos establecer la siguiente propiedad.

Proposición 11.1. *Sea $\ell_{P,\overline{u}}$ una recta en $\mathbb{R}^n$. Si $P \notin \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$, entonces*

$$\ell_{P,\overline{u}} \cap \ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \varnothing.$$

De esta manera, en el caso del plano cartesiano; si $P \notin \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$, entonces $\ell_{P,\overline{u}} \parallel \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$ en el sentido de Euclides.

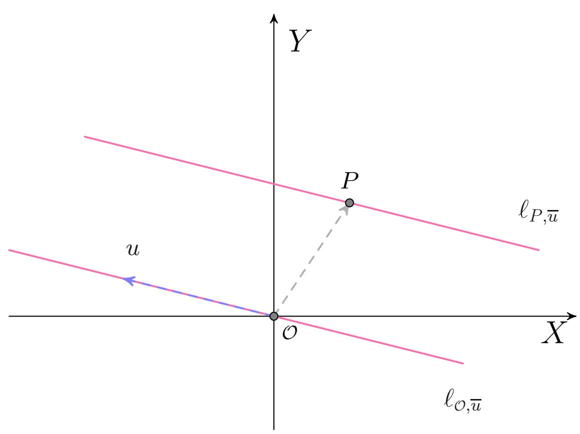


Figura 62. $\ell_{P_0,\overline{u}} \parallel \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$

Ahora bien, si suponemos que $\ell_{P,\overline{u}}$ y $\ell_{Q,\overline{v}}$ son rectas en el plano y $\ell_{P,\overline{u}} \parallel \ell_{Q,\overline{v}}$, ya que $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} \parallel \ell_{P,\overline{u}}$ y $\ell_{Q,\overline{v}} \parallel \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$ intuitivamente sabemos que debe ser $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} \parallel \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$ y como $\mathcal{O} \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}} \cap \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$ necesariamente $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$. Pero bajo el enfoque formal que buscamos establecer con el punto de vista de la estructura algebraica de $\mathbb{R}^2$, esto no es tan simple, es necesario conocer más acerca de qué propiedades nos brinda la estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial sobre el mismo $\mathbb{R}^2$.

11.2. Pie de perpendicular y proyección ortogonal. Para llevar a cabo esto, comenzaremos por introducir el producto punto y a manera de motivación resolveremos el siguiente problema.

Dado una recta $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$ en el plano y $P \in \mathbb{R}^2$, con $P \notin \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$; queremos encontrar el punto $F \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$ tal que $\overline{PF}$ es perpendicular a $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$

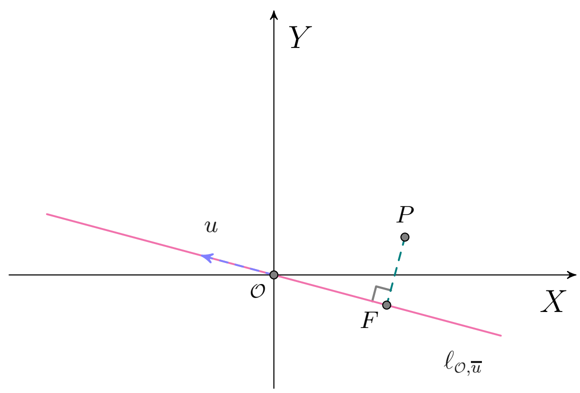


FIGURA 63. F pie de perpendicular de P en $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$

Ahora bien, si $F \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $F = \lambda \cdot u$; lo que haremos es mostrar que con los datos con los que contamos podemos encontrar tal escalar λ.

Por construcción, $\triangle \mathcal{O}FP$ es rectángulo con $\overline{\mathcal{O}P}$ como hipotenusa, así que por el teorema de pitágoras

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{O},P)^2 &= d(\mathcal{O},F)^2 + d(F,P)^2 \\
&= d(\mathcal{O},F)^2 + (x_F - x_P)^2 + (y_F - y_P)^2 \\
&= d(\mathcal{O},F)^2 + \left(x_F^2 + y_F^2\right) + \left(x_P^2 + y_P^2\right) - 2\left(x_F x_P + y_F y_P\right) \\
&= 2d(\mathcal{O},F)^2 + d(\mathcal{O},P)^2 - 2\left(x_F x_P + y_F y_P\right) \\
&= 2\lambda^2 d(\mathcal{O},u)^2 + d(\mathcal{O},P)^2 - 2\lambda\left(x_u x_P + y_u y_P\right) && \left(\text{ya que } F = \lambda \cdot u\right) \\
&= 2\lambda\left[\lambda d(\mathcal{O},u)^2 - \left(x_u x_P + y_u y_P\right)\right] + d(\mathcal{O},P)^2
\end{aligned}$$

lo cual implica que $2\lambda\left[\lambda d(\mathcal{O},u)^2 - (x_u x_P + y_u y_P)\right] = 0$ y como $\lambda \neq 0$ necesariamente $\lambda d(\mathcal{O},u)^2 - (x_u x_P + y_u y_P) = 0$ y por consiguiente, al ser $u \neq \mathcal{O}$,

$$\lambda = \frac{(x_u x_P + y_u y_P)}{d(\mathcal{O},u)^2}. \tag{11.1}$$

La expresión (11.1) la podemos calcular conociendo las coordenadas de u y P y por ende es posible construir el pie de perpendicular de P en $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$.

En numerador en (11.1) es una expresión que surge de manera frecuente en geometría, en la siguiente secciones veremos ejemplos de esto.

Definición 11.2. *Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$. El producto punto de u con v, que denotamos como $u \bullet v$, es el número real*

$$u \bullet v = x_u x_v + y_u y_v.$$

Ejemplos 11.3. *1) Si $u = (2, -3)$ y $v = (1, 1)$, entonces*

$$u \bullet v = 2 + (-3) = -1.$$

2) Si $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$, entonces

$$e_i \bullet e_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Además para cada $P \in \mathbb{R}^2$

$$e_i \bullet P = \begin{cases} x_P & \text{si } i = 1, \\ y_P & \text{si } i = 2. \end{cases}$$

3) Si $P \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} P \bullet P &= x_P^2 + y_P^2 \\ &= d(\mathcal{O}, P)^2 . \end{aligned}$$

4) Si $P, Q \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} (P - Q) \bullet (P - Q) &= (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 \\ &= d(P, Q)^2 . \end{aligned}$$

5) Si $v = (a, b) \neq \mathcal{O}$ y $v^\perp := (-b, a)$, entonces

$$v \bullet v^\perp = -ab + ba = 0.$$

Antes de hacer mención sobre algunos de los ejemplos anteriores, presentamos las principales propiedades del producto punto.

Proposición 11.4. *Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1) $u \bullet v = v \bullet u$.
2) $u \bullet (v + w) = u \bullet v + u \bullet w$.
3) $u \bullet (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (u \bullet v)$.
4) *El producto punto es positivo definido:*
   4.1) $u \bullet u \geq 0$.
   4.2) $u \bullet u \geq 0$ *si y sólo si* $u = \mathcal{O}$.

La demostración no representa ningún problema y se deja como ejercicio al lector. Como primer consecuencia de la proposición 11.4, tenemos que las propiedades (2) y (3), ahí descritas, son válidas cuando cambiamos el orden, más precisamente.

Corolario 11.5. *Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1) $(u + v) \bullet w = u \bullet w + v \bullet w$.
2) $(\lambda \cdot u) \bullet v = \lambda \cdot (u \bullet v)$.

Regresando a el problema de encontrar el pie de perpendicular F de P en $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$, si consideramos las nuevas definiciones y teniendo en cuenta el inciso 3) del ejemplo 11.3, se tiene que

$$F = \left(\frac{u \bullet P}{u \bullet u}\right) \cdot u.$$

La expresión anterior será de gran importancia en lo subsecuente así que la introducimos en la siguiente definición.

Definición 11.6. *Sean $v \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$ y $P \in \mathbb{R}^3$. La proyección ortogonal de P en v, que denotaremos como* $\mathbf{Proy}_{v}\,(\boldsymbol{P})$*, es el elemento de $\mathbb{R}^2$ dado por*

$$\operatorname{Proy}_{v}(P) = \left(\frac{v \bullet P}{v \bullet v}\right) \cdot v.$$

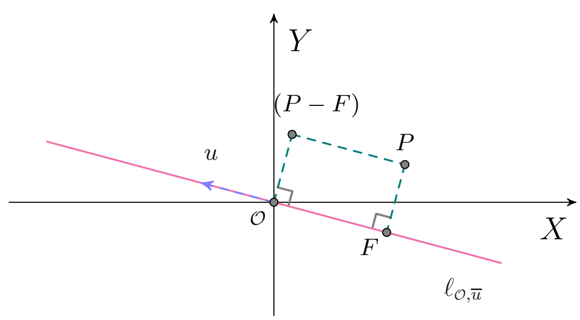


FIGURA 64. Paralelogramo con vértices $\mathcal{O}, F, P$ y $(P-F)$

Con esta expresión para el pie de perpendicular, podemos establecer una forma de calcular la distancia de un punto a una recta de forma vectorial la cual también funcionará para el caso de rectas en el espacio cartesiano.

Considerando $P \in \mathbb{R}^2$ y $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$ una recta por el origen, $F = \operatorname{Proy}_{u}(P)$y teniendo en cuenta el ejemplo del inciso 4) de 11.3 se tiene que, si $d(P, \ell_{\mathcal{O},\overline{u}})$ denota la distancia de P a $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(P, \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}) := d(P,F) &= \sqrt{(P-F) \bullet (P-F)} && \text{(por inciso 4))} \\ &= \sqrt{(P - \operatorname{Proy}_{u}(P)) \bullet (P - \operatorname{Proy}_{u}(P))}. \end{aligned}$$

La identidad anterior sólo hace uso de la aritmética de $\mathbb{R}$-espacio vectorial y del producto punto, así que no es aventurado pensar que dicha expresión también funcionará para calcular la distancia de un punto a una recta por el origen en $\mathbb{R}^3$. De hecho, mostraremos que a partir de esta formula podremos calcular la distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^n$.

Observe que según la construcción que realizamos para determinar el pie de perpendicular de $P \in \mathbb{R}^2$ en $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$, el punto $(P-F)$, que utilizamos en el cálculo anterior, satisface que

$$P = F + (P-F);$$

así, resulta ser que $\mathcal{O}, F, P$ y $(P-F)$ son los vértices de un paralelogramo y en consecuencia el segmento $\overline{\mathcal{O}(P-F)}$ es perpendicular a $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$ y además este segmento y $\overline{PF}$ tienen la misma longitud; más adelante utilizaremos esta observación (véase la figura 64).

11.3. Representación normal de una recta en $\mathbb{R}^2$. Consideremos $v := (a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$ entonces $u := v^\perp = (-b,a) \neq \mathcal{O}$; luego si para la recta en el plano $\ell_{Q,\overline{u}}$, sabemos que la ecuación lineal que determina a esta recta es precisamente

$$a\mathrm{x} + b\mathrm{y} + c = 0,$$

donde $c = -(ax_Q + by_Q) = -v \bullet Q \in \mathbb{R}$; esto es

$$\begin{aligned}
\ell_{Q,\overline{u}} &= \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid ax_P + by_P + c = 0\right\} \\
&= \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid v \bullet P - v \bullet Q = 0\right\} \\
&= \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid v \bullet (P - Q) = 0\right\} \\
&= \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid (-v) \bullet (P - Q) = 0\right\} && (\text{ya que } -0 = 0) \\
&= \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid u^\perp \bullet (P - Q) = 0\right\} && (\text{ya que } u^\perp = -v)
\end{aligned}$$

La igualdad obtenida

$$\ell_{Q,\overline{u}} = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid u^\perp \bullet (P - Q) = 0\right\}, \tag{11.2}$$

se conoce como representación normal de la recta $\ell_{Q,\overline{u}}$. En la sección 11.6, demostramos que para $u \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$, $u^\perp$ se obtiene a partir de rotar u en torno al origen $\mathcal{O}$ por el ángulo $\frac{\pi}{2}$.

Como caso particular de (11.2), si $Q = \mathcal{O}$, obtenemos que

$$\langle u \rangle = \ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid u^\perp \bullet P = 0\right\}, \tag{11.3}$$

lo que en palabras significa que

> *los únicos elementos P en $\mathbb{R}^2$ tales que $u^\perp \bullet P = 0$ son los múltiplos escalares de u*

y por consiguiente

$$u^\perp \bullet P \neq 0 \text{ si y sólo si } P \notin \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}. \tag{11.4}$$

11.4. La forma algebraica de $\mathbb{R}^2$. Con la propiedad establecida en (11.4) ya podemos hacer una descripción del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Proposición 11.7. *Sean $u, v \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$. Si $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} \neq \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$, entonces*

$$\mathbb{R}^2 = \left\{\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Demostración. Claramente se tiene la contención "$\supseteq$", así que veamos que se cumple "$\subseteq$".

Sea $P \in \mathbb{R}^2$; debemos exhibir dos números reales λ y μ de manera que

$$P = \lambda \cdot u + \mu \cdot v.$$

Considerando esta igualdad como una ecuación en las indeterminadas λ y μ, veremos que haciendo uso de algunas propiedades podremos "resolver" dicha ecuación para tales indeterminadas. La identidad anterior implica que

$$\begin{cases} v^{\perp} \bullet P = \lambda \left(v^{\perp} \bullet u\right), \\ u^{\perp} \bullet P = \mu \left(u^{\perp} \bullet v\right). \end{cases} \tag{11.5}$$

Ahora bien, como $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} \neq \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$, necesariamente $u \notin \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$ y así, por (11.4), se tiene que $v^{\perp} \bullet u \neq 0$; análogamente, ya que $v \notin \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$ obtenemos que $u^{\perp} \bullet v \neq 0$. Luego, a partir de (11.5) obtenemos que

$$\begin{cases} \lambda = \frac{v^{\perp} \bullet P}{v^{\perp} \bullet u}, \\ \mu = \frac{u^{\perp} \bullet P}{u^{\perp} \bullet v}. \end{cases} \tag{11.6}$$

De esta manera, dado $P \in \mathbb{R}^3$, se tiene que

$$P = \left(\frac{v^{\perp} \bullet P}{v^{\perp} \bullet u}\right) \cdot u + \left(\frac{u^{\perp} \bullet P}{u^{\perp} \bullet v}\right) \cdot v, \tag{11.7}$$

y por lo tanto $\mathbb{R}^2 \subseteq \{\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. □

En general, el conjunto $\{\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ es denotado por el símbolo $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, y se llama "*subespacio generado*" por u y v; más adelante se aclarará dicha terminología.

En general no tiene porqué ser $\langle u, v\rangle = \mathbb{R}^2$, por ejemplo si $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$ se tiene que $\langle u, v\rangle = \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$, pero como vimos si $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} \neq \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$ entonces $\mathbb{R}^2 = \langle u, v\rangle$. Además las identidades (11.6) dan un algoritmo para encontrar los escalares adecuados.

Ejemplo 11.8. *Sean* $u = (-1, 2)$ *y* $v = (2, 3)$*. De esta manera*

$$\begin{aligned} u^{\perp} &= (-2, -1), \\ v^{\perp} &= (-3, 2). \end{aligned}$$

Si $P \in \mathbb{R}^2$*, entonces*

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{-3x_P + 2y_P}{3+4}\right) \cdot u + \left(\tfrac{-2x_P - y_P}{-4-3}\right) \cdot v &= \left(\tfrac{-3x_P + 2y_P}{7}\right) \cdot (-1, 2) + \left(\tfrac{2x_P + y_P}{7}\right) \cdot (2, 3) \\ &= \left(\tfrac{3x_P - 2y_P}{7}, \tfrac{-6x_P + 4y_P}{7}\right) + \left(\tfrac{4x_P + 2y_P}{7}, \tfrac{6x_P + 3y_P}{7}\right) \\ &= \left(\tfrac{7x_P}{7}, \tfrac{7y_P}{7}\right) \\ &= P \end{aligned}$$

11.5. Regreso a rectas paralelas en $\mathbb{R}^2$. Con lo establecido en la proposición 11.7 ya podemos completar el análisis del significado algebraico de rectas paralelas en el plano cartesiano.

Proposición 11.9. *Sean* $\ell_{P,\overline{u}}$ *y* $\ell_{Q,\overline{v}}$ *rectas en el plano* $\mathbb{R}^2$*. Si* $\ell_{P,\overline{u}} \cap \ell_{Q,\overline{v}} = \varnothing$*, entonces* $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$ *y por consiguiente* u *y* v *son uno múltiplo escalar del otro.*

Demostración. Suponemos que las rectas $\ell_{P,\overline{u}}$ y $\ell_{Q,\overline{v}}$ en el plano $\mathbb{R}^2$ satisfacen que $\ell_{P,\overline{u}} \cap \ell_{Q,\overline{v}} = \varnothing$.

Si $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} \neq \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$, por la proposición 11.7 se tiene que $\mathbb{R}^2 = \langle u, v\rangle$, en particular como $P, Q \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $P, Q \in \langle u, v\rangle$ y en consecuencia existen $r, s, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} P &= r \cdot u + s \cdot v, \\ Q &= \lambda \cdot u + \mu \cdot v, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} P - r \cdot u = s \cdot v \in \ell_{P,\overline{u}} \cap \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}, \\ Q - \mu \cdot v = \lambda \cdot u \in \ell_{Q,\overline{v}} \cap \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}. \end{aligned}$$

Considerando el punto $R := \lambda \cdot u + s \cdot v$, se tiene que

$$R = \begin{cases} \lambda \cdot u + (P - r \cdot u) \\ (Q - \mu \cdot v) + s \cdot v \end{cases} = \begin{cases} P + (\lambda - r) \cdot u \\ Q + (s - \mu) \cdot v \end{cases}$$

lo cual implica que $R \in \ell_{P,\overline{u}} \cap \ell_{Q,\overline{v}}$ contradiciendo la hipótesis $\ell_{P,\overline{u}} \cap \ell_{Q,\overline{v}} = \varnothing$. Por lo tanto debe ser $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$.

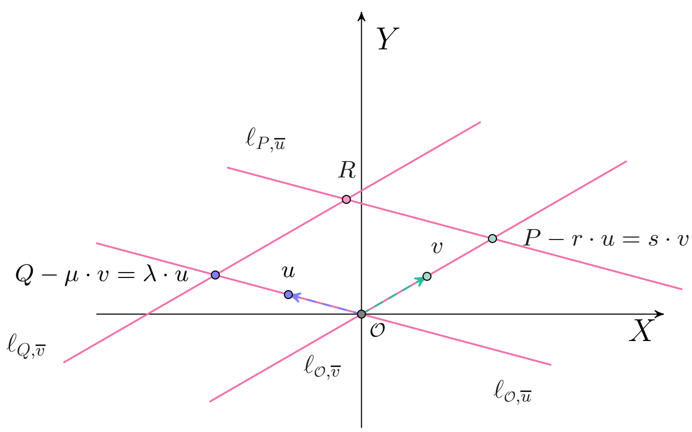


FIGURA 65. Intersección de las rectas $\ell_{P,\overline{u}}$ y $\ell_{Q,\overline{v}}$

$\square$

Ahora estableceremos la propiedad recíproca de la proposición 11.9.

Proposición 11.10. *Sean $\ell_{P,\overline{u}}$ y $\ell_{Q,\overline{v}}$ rectas en el plano cartesiano, con $\ell_{P,\overline{u}} \neq \ell_{Q,\overline{v}}$. Si $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$, entonces $\ell_{P,\overline{u}} \cap \ell_{Q,\overline{v}} = \varnothing$.*

Demostración. Suponemos que $\ell_{P,\overline{u}}$ y $\ell_{Q,\overline{v}}$ son rectas distintas en el plano cartesiano.

Si $R \in \ell_{P,\overline{u}} \cap \ell_{Q,\overline{v}}$, entonces $\ell_{R,\overline{u}} = \ell_{P,\overline{u}}$ y $\ell_{R,\overline{v}} = \ell_{Q,\overline{v}}$, luego

$$\begin{aligned} \ell_{P,\overline{u}} &= \ell_{R,\overline{u}} \\ &= \{R\} + \ell_{\mathcal{O},\overline{u}} \\ &= \{R\} + \ell_{\mathcal{O},\overline{v}} \\ &= \ell_{R,\overline{v}} \\ &= \ell_{Q,\overline{v}}, \end{aligned}$$

lo cual contradice la hipótesis $\ell_{P,\overline{u}} \neq \ell_{Q,\overline{v}}$. Por lo tanto debe ser

$$\ell_{P,\overline{u}} \cap \ell_{Q,\overline{v}} = \varnothing.$$

□

Como consecuencia de estas proposiciones ((11.9) y (11.10)) se tiene el siguiente teorema.

Teorema 11.11. *Sean $\ell_{P,\overline{u}}$ y $\ell_{Q,\overline{v}}$ rectas en el plano cartesiano. Si $\ell_{P,\overline{u}} \neq \ell_{Q,\overline{v}}$, entonces $\ell_{P,\overline{u}} \cap \ell_{Q,\overline{v}} = \varnothing$ si y sólo si $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$.*

Ya que la propiedad $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$ implica que u y v son uno múltiplo escalar del otro, a partir de la información obtenida en el teorema 11.11 introducimos las siguiente definiciones.

Definición 11.12. *Sean $u, v \in \mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$ ($n = 2, 3$). Decimos que u es paralelo a v, y lo denotamos $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$, si u es un múltiplo escalar de v.*

Ya que la condición de que u es múltiplo escalar de v es equivalente a que $u \in \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$ y esta última es equivalente a que $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$, se tiene que

$$u \parallel v \text{ si y sólo si } \ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{v}} \tag{11.8}$$

La propiedad de ser paralelos en $\mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$ determina una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$, y dejamos al lector comprobar esta afirmación en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 6. *Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n - \{\mathcal{O}\}$. Demuestre que*

1) *$u \parallel u$.*
2) *si $u \parallel v$, entonces $v \parallel u$.*
3) *si $u \parallel v$ y $v \parallel w$, entonces $u \parallel w$.*

Ahora definimos cuándo dos rectas en el espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$ son paralelas.

Definición 11.13. *Sean $\ell_{P,\overline{u}}$ y $\ell_{Q,\overline{v}}$ rectas en el espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$. Decimos que $\ell_{P,\overline{u}}$ es paralela a $\ell_{Q,\overline{v}}$ si $u \parallel v$.*

Con esta definición, **no** podemos extender la propiedad dada en el teorema 11.11 al espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$, ya que, por ejemplo, si $e_1 = (1, 0, 0)\,, e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$, entonces las rectas $\ell_{e_3,\overline{e_2}}$ y $\ell_{\mathcal{O},\overline{e_1}}$ satisfacen que

$$\ell_{e_3,\overline{e_2}} \neq \ell_{\mathcal{O},\overline{e_1}}, \qquad \ell_{e_3,\overline{e_2}} \cap \ell_{\mathcal{O},\overline{e_1}} = \varnothing \qquad \text{pero} \qquad \ell_{e_3,\overline{e_2}} \nparallel \ell_{\mathcal{O},\overline{e_1}},$$

la última propiedad se da ya que tales rectas tienes diferentes direcciones, esto es, $\ell_{\mathcal{O},\overline{e_1}} \neq \ell_{\mathcal{O},\overline{e_2}}$.

La siguiente proposición establece un criterio para determinar cuándo dos rectas en $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) son paralelas.

Proposición 11.14. *Sean $\ell_{P,\overline{u}}$ y $\ell_{Q,\overline{v}}$ rectas en $\mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) *$\ell_{P,\overline{u}}$ es paralela a $\ell_{Q,\overline{v}}$.*
2) *existe $R \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\ell_{P,\overline{u}} = \{R\} + \ell_{Q,\overline{v}}.$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Suponemos que $\ell_{P,\overline{u}}$ es paralela a $\ell_{Q,\overline{v}}$. Por la hipótesis tenemos entonces que $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$, luego

$$\begin{aligned}\ell_{P,\overline{u}} &= \{P\} + \ell_{\mathcal{O},\overline{u}} \\ &= \{P\} + \ell_{\mathcal{O},\overline{v}} && \text{(hipótesis)} \\ &= \{(P-Q)\} + \ell_{Q,\overline{v}}\end{aligned}$$

considerando $R := (P-Q) \in \mathbb{R}^n$ lo anterior implica que

$$\ell_{P,\overline{u}} = \{R\} + \ell_{Q,\overline{v}}.$$

$\Longleftarrow$) Suponemos que $\ell_{P,\overline{u}} = \{R\} + \ell_{Q,\overline{v}}$. Luego

$$\begin{aligned}\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} &= \ell_{(-P+P),\overline{u}} \\ &= \{-P\} + \ell_{P,\overline{u}} \\ &= \{-P\} + (\{R\} + \ell_{Q,\overline{v}}) \\ &= \{(R-P)\} + \ell_{Q,\overline{v}} \\ &= \ell_{[(R-P)+Q],\overline{v}}\end{aligned}$$

y como $\mathcal{O} \in \ell_{\mathcal{O},\overline{u}}$ la igualdad anterior implica que $\mathcal{O} \in \ell_{[(R-P)+Q],\overline{v}}$ y por consiguiente $\ell_{\mathcal{O},\overline{v}} = \ell_{[(R-P)+Q],\overline{v}}$. Por lo tanto $\ell_{\mathcal{O},\overline{u}} = \ell_{\mathcal{O},\overline{v}}$ y $\ell_{P,\overline{u}}$ es paralela a $\ell_{Q,\overline{v}}$.

□

11.6. Compadre ortogonal. Sea $v := (a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$. En la sección 11.3 consideramos $u = v^{\perp} := (-b, a)$ y mostramos que

$$\ell_{Q,\overline{u}} = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid u^{\perp} \bullet (P-Q) = 0\right\}.$$

En esta sección veremos el significado geométrico de $v^{\perp}$, pero antes de iniciar lo presentamos en la siguiente definición.

Definición 11.15. *Dado $u \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$, el compadre ortogonal de u, que denotamos por $u^{\perp}$, es el elemento de $\mathbb{R}^2$ dado por*

$$u^{\perp} = (-y_u, x_u).$$

El símbolo $u^{\perp}$ se lee "u-ortogonal". Para establecer el significado geométrico de $u^{\perp}$ analizamos las posibilidades para las coordenadas de u.

Si la primera coordenada es 0 entonces u se encuentra en eje Y y en consecuencia $u^{\perp} = (-y_P, 0)$ está en el eje X. Además

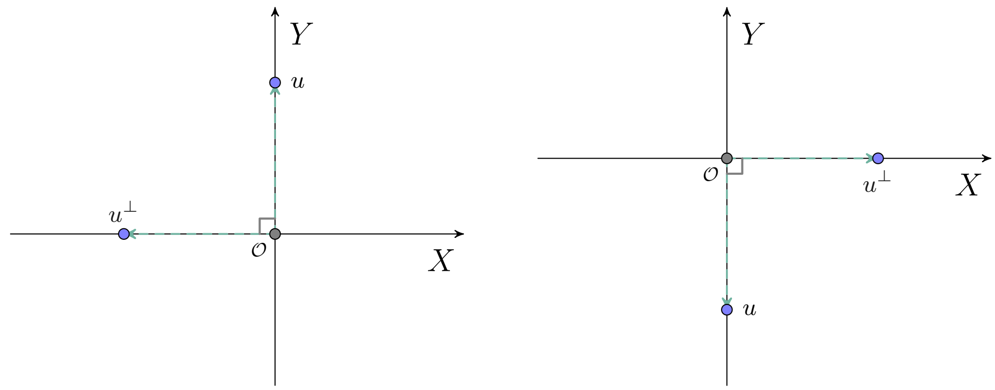
- si $y_u > 0$ entonces u está en el semieje positivo Y y en este caso $u^{\perp}$ está en el semieje negativo Y, pues $-y_P < 0$.
- si $y_u < 0$ entonces u está en el semieje negativo Y y en este caso $u^{\perp}$ está en el semieje positivo Y, ya que $-y_P > 0$.

Véase la figura 66.

Por otra parte, si $x_u \neq 0$ la pendiente del segmento $\overline{\mathcal{O}u}$ es

$$m_{\overline{\mathcal{O}u}} = \frac{y_P}{x_P}. \tag{11.9}$$

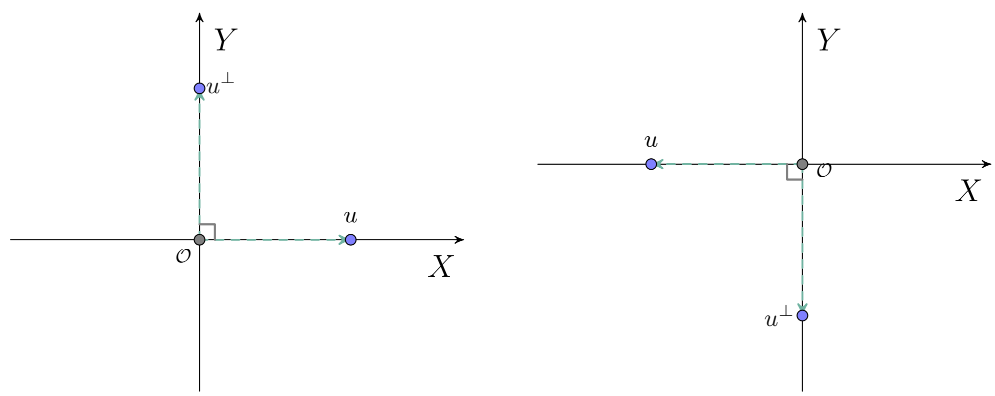
Si $m_{\overline{\mathcal{O}u}} = 0$, entonces u es un punto en el eje X y en tal caso



(A) $y_u > 0$ (B) $y_u < 0$

FIGURA 66. Compadre ortogonal con $u \in \ell_Y$

- si $x_u > 0$ entonces u está en el semieje positivo X y en este caso $u^{\perp} = (0, x_u)$ está en el semieje positivo Y.
- si $x_u < 0$ entonces u está en el semieje negativo X y en este caso $u^{\perp} = (0, x_u)$ está en el semieje negativo Y.



(A) $x_u > 0$ (B) $x_u < 0$

FIGURA 67. Compadre ortogonal con $u \in \ell_X$

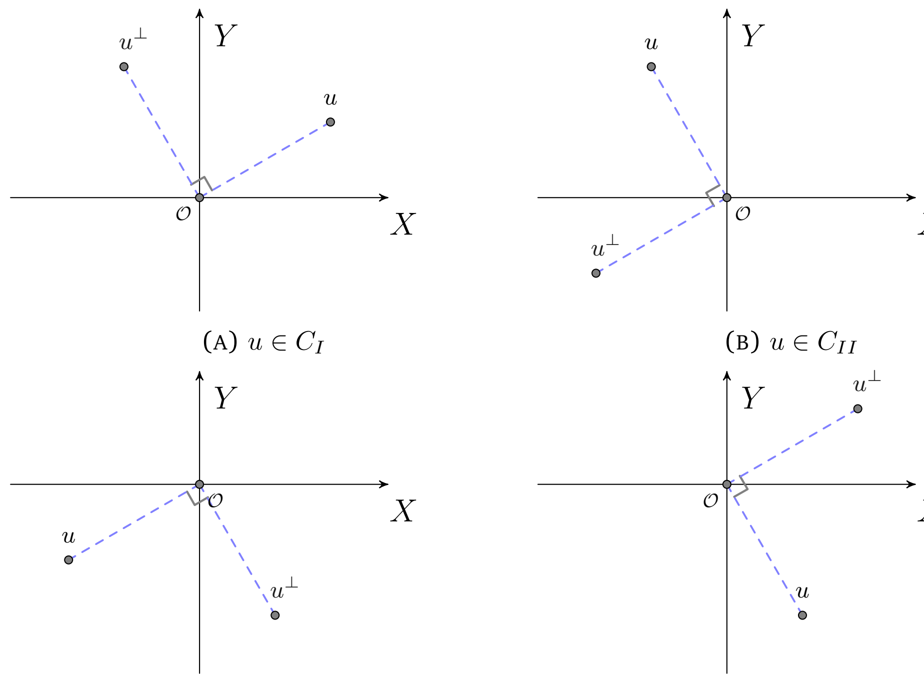
Finalmente, si $m_{\overline{\mathcal{O}u}} \neq 0$, entonces

$$m_{\overline{\mathcal{O}u^{\perp}}} = -\frac{1}{m_{\overline{\mathcal{O}u}}},$$

lo cual significa que $\overline{\mathcal{O}u}$ y $\overline{\mathcal{O}u^{\perp}}$ son perpendiculares. Por otra parte claramente $d\left(\mathcal{O}, u^{\perp}\right) = d\left(\mathcal{O}, u\right)$ y además

$$u \in C_I \Longrightarrow u^{\perp} \in C_{II}$$
$$u \in C_{II} \Longrightarrow u^{\perp} \in C_{III}$$
$$u \in C_{III} \Longrightarrow u^{\perp} \in C_{VI}$$
$$u \in C_{IV} \Longrightarrow u^{\perp} \in C_I$$

Por lo tanto, geométricamente el punto $u^{\perp}$ se obtiene a partir de u a través de una rotación en torno al origen $\mathcal{O}$ por un ángulo recto.



(A) $u \in C_I$ (B) $u \in C_{II}$

(C) $u \in C_{III}$ (D) $u \in C_{IV}$

FIGURA 68. Compadre ortogonal con u en un cuadrante

En vista de lo analizado, presentamos la siguiente definición.

Definición 11.16. *Sean $u, v \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$. Diremos que u es ortogonal a v, y lo denotamos $\boldsymbol{u \perp v}$, si $u \cdot v = 0$.*

Con esta definición se tiene que

Ejemplos 11.17. *1) Si $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ son como en el inciso 2) del ejemplo 11.3, entonces $e_1 \perp e_2$*

2) Si $u \in \mathbb{R}^2 - \{\mathcal{O}\}$, entonces $u \perp u^{\perp}$.

15. Apéndice

15.1. Rectas con dirección igual a los ejes coordenados. Como mencionamos anteriormente, extrapolaremos las descripciones de los ejes coordenados, para ello sea $P_0 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, un punto fijo. Denotaremos por $\ell_{P_0,X}$, $\ell_{P_0,Y}$ y $\ell_{P_0,Z}$, a las "rectas" que pasan por P_0 y que tienen dirección los ejes X, Y y Z, respectivamente. Las definiciones son las siguientes:

$P \in \ell_{P_0,X}$ si y sólo si las coordenadas de P satisfacen el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \mathrm{y} = b \\ \mathrm{z} = c \end{cases}$$

$P \in \ell_{P_0,Y}$ si y sólo si las coordenadas de P satisfacen el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \mathrm{x} = a \\ \mathrm{z} = c \end{cases}$$

$P \in \ell_{P_0,Z}$ si y sólo si las coordenadas de P satisfacen el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \mathrm{x} = a \\ \mathrm{y} = b \end{cases}$$

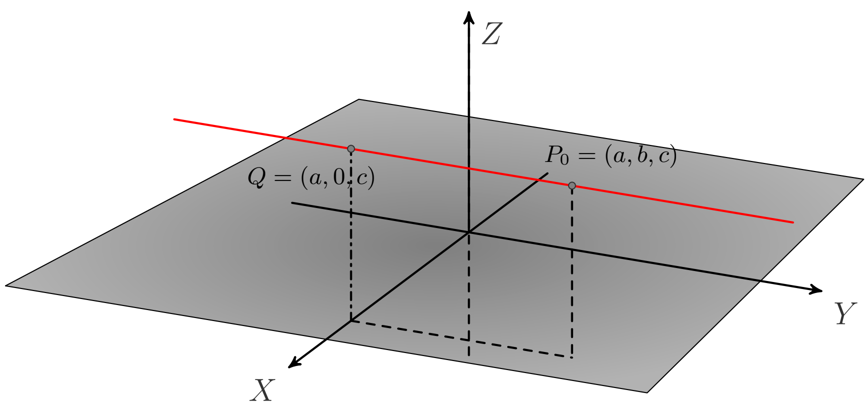


Figura 92. Recta $\ell_{P_0,Y}$

15.2. Planos paralelos a los planos coordenados. Continuando con un punto fijo $P_0 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, denotaremos por $\Pi_{P_0,XY}$, $\Pi_{P_0,XZ}$ y $\Pi_{P_0,YZ}$, a los planos que pasan por el punto P_0 y que son paralelos a los planos Π_{XY}, Π_{XZ} y Π_{YZ}, respectivamente.

Las definiciones de estos son: dado $P \in \mathbb{R}^3$

$P \in \Pi_{P_0,XY}$ si y sólo si las coordenadas de P satisfacen la ecuación lineal: $\mathrm{z} = c$

$P \in \Pi_{P_0,XZ}$ si y sólo si las coordenadas de P satisfacen la ecuación lineal: $\mathrm{y} = b$

$P \in \Pi_{P_0,YZ}$ si y sólo si las coordenadas de P satisfacen la ecuación lineal: $\mathrm{x} = a$

El siguiente ejercicio es inmediato de las definiciones de las rectas cuya dirección es una de las direcciones de los ejes coordenados y de los plano paralelos a los planos coordenados, y muestra que estos objetos heredan el carácter ortogonal del sistema coordenado.

Ejercicio 12. *Para cada* $P \in \mathbb{R}^3$
1) $\Pi_{P,XY} \cap \Pi_{P,XZ} = \ell_{P,X}$.
2) $\Pi_{P,XY} \cap \Pi_{P,YZ} = \ell_{P,Y}$.
3) $\Pi_{P,XZ} \cap \Pi_{P,YZ} = \ell_{P,Z}$.
4) $\Pi_{P,XY} \cap \Pi_{P,XZ} \cap \Pi_{P,YZ} = \{P\}$.

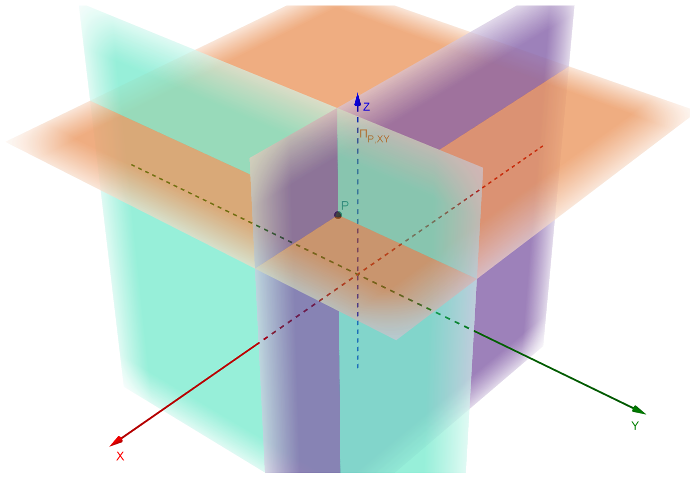


FIGURA 93. Intersección de planos $\Pi_{P,XY}$, $\Pi_{P,XZ}$ y $\Pi_{P,YZ}$

15.3. Distancia en $\mathbb{R}^3$**.** Consideraremos las construcciones de los lugares geométrico de las subsecciones 15.1 y 15.2 para determinar la fórmula de la distancia entre dos punto en el espacio cartesiano.

Sean $P, Q \in \mathbb{R}^3$, con $P \neq Q$ y suponemos además que todas las coordenadas de estos dos puntos son distintas; si P y Q comparten dos de sus coordenadas, entonces por lo discutido en la subsección 15.1, el segmento $\overline{PQ}$ tiene alguna de las direcciones de los ejes coordenados y en tal caso, la longitud de este segmento es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas en que difieren P y Q, véase la figura 94.

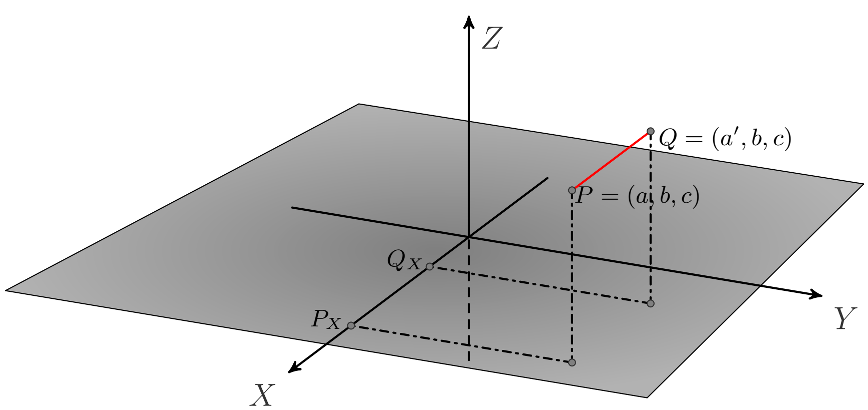


FIGURA 94. $PQ = P_X Q_X = |x_P - x_Q|$

Si todas las coordenadas de P y Q son distintas, entonces el punto

$$S := (x_Q, y_Q, z_P) \in \mathbb{R}^3$$

es distinto de P y Q y así tenemos un triángulo $\triangle PSQ$.

Por otra parte, como la tercer coordenada de P y S coinciden, entonces P y S están en el plano $\Pi_{P,XY}$ determinado por la ecuación

$$\mathrm{z} = z_P;$$

además como las dos primeras coordenadas de S y Q coinciden, el segmento $\overline{SQ}$ tiene la dirección del eje Z y por consiguiente, la elección del sistema coordenado, garantiza que $\overline{PS}$ y $\overline{SQ}$ son perpendiculares y así $\triangle PSQ$ es rectángulo, cuyo ángulo recto es $\llcorner PSQ$ e hipotenusa $\overline{PQ}$.

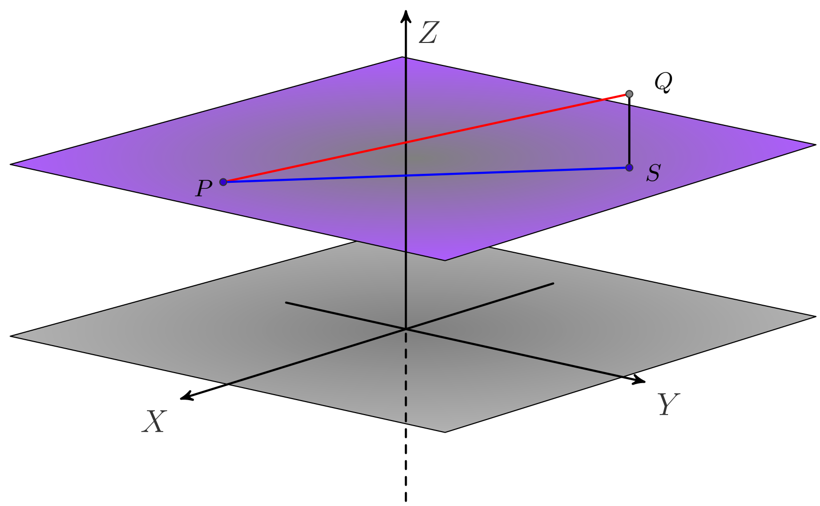


FIGURA 95. Triángulo rectángulo $\triangle PSQ$

Por el teorema de pitágoras

$$(PQ)^2 = (PS)^2 + (SQ)^2,$$

y así

$$PQ = \sqrt{(PS)^2 + (SQ)^2}.$$

Determinaremos ahora las magnitudes PS y SQ.

Para determinar PS, consideramos los punto P' y S' que son los pie de perpendicular de P y S en el plano XY. Por la elección de P' y S', sus terceras coordenadas deben ser 0; por otra parte, como P' está en la recta $\ell_{P,Z}$, sus coordenadas satisfacen el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \mathrm{x} = x_P \\ \mathrm{y} = y_P \end{cases}$$

y por consiguiente $P' = (x_P, y_P, 0)$; análogamente $S' = (x_Q, y_Q, 0)$. Suponiendo que los punto P, P', S' y S están en un plano, entonces esto puntos son los vértices de un paralelogramo y por consiguiente $PS = P'S'$, luego haciendo uso de la fórmula de la distancia en el plano,

$$\begin{aligned} PS &= P'S' \\ &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \end{aligned} \tag{15.1}$$

Por otra parte, si S'' y Q'' son los pie de perpendicular de S y Q en el eje Z, entonces las dos primeras coordenadas de esto puntos son 0; además como $\overline{SS''}$ es perpendicular al eje Z, entonces la tercer coordenada de S'' es precisamente la tercer coordenada de S, esto es, $S'' \in \Pi_{S,XY}$, y por consiguiente

$$S'' = (0, 0, z_P)\,;$$

análogamente $Q'' = (0, 0, z_Q)$. Nuevamente, si suponemos que Q, Q'', S'' y S están en un plano, estos puntos son los vértices de un paralelogramo y por consiguiente $SQ = S''Q''$, luego

$$\begin{aligned} SQ &= S''Q'' \\ &= |z_P - z_Q| \end{aligned} \tag{15.2}$$

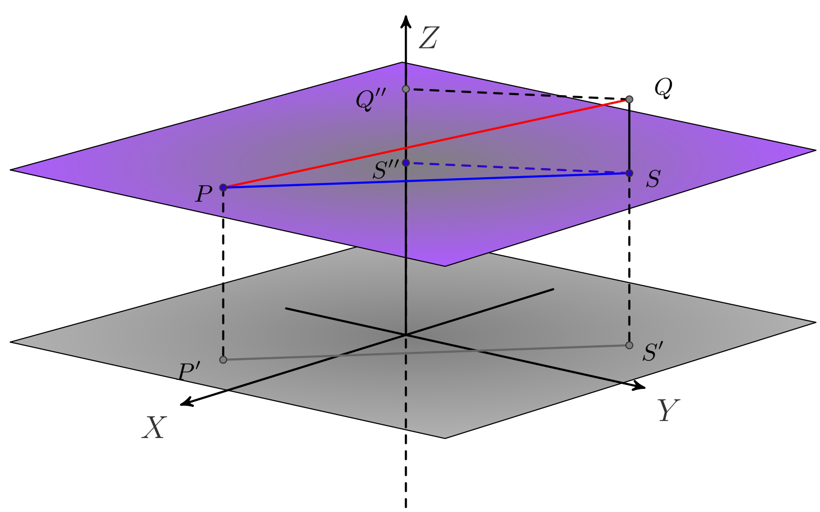


FIGURA 96. Longitud de catetos del triángulo $\triangle PSQ$

Por lo tanto, de (15.1) y (15.2) se obtiene que

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(PS)^2 + (SQ)^2} \\ &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} \end{aligned}$$

Resumimos la discusión anterior en la siguiente proposición.

Proposición 15.1. *Si $P, Q \in \mathbb{R}^3$, entonces la distancia de P a Q, que denotamos por $d\,(P, Q)$, está dada por:*

$$d\,(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

A continuación presentamos las principales propiedades de la distancia.

Proposición 15.2. *Si* $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$*, entonces*

1) $d(P,Q) \geq 0$ *y*
$$d(P,Q) = 0 \text{ si y sólo si } P = Q.$$
2) $d(P,Q) = d(Q,P)$.
3) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$.

La demostración de las propiedades (1) y (2) no son complicadas y se dejan como ejercicio al lector. Por otra parte, la demostración de (3) se deja pendiente y será una consecuencia de otro concepto que revisaremos más adelante.

Referencias

[E1] Euclid; The Thirteen Books of the Elements, Vol. 1, Segunda Edición; Dover; USA; 2012.
[E2] The First Six Books of the Elements by John Casey and Euclid scanned by Project Gutenberg.
[F] Fitzpatrick R.; Euclid's Elements of Geometry; versión otorgada por el autor aquí.
[P-L] Preston G, Lovaglia A.; Modern analytic geometry; Harper & Row, Publishers; New York; 1971.[xv]
[R] Ramirez-Galarza, A. I.; Geometría Analítica: *Una introducción a la geometría*; México: Las Prensas de Ciencias; 2011.
[Sp] Spivak M.; Calculus, Fourth Edition; Publish or Perish Inc. Housuton Texas, 2008.
[Su] Sullivan M.; Trigonometry A Unit Circle Approach; Ninth Edition; Prentice Hall; 2012.
[W-S] Wentworth J., Smith D. E.; Geometría Plana y del Espacio; Ginn & Company; Boston USA, 1915.

[xv] Vínculos Matemáticos No. 55 2006, servicios editoriales de la Facultad de Ciencias UNAM.

Lista de símbolos

$\boldsymbol{x_P}$: Abscisa del punto P
$\widehat{\boldsymbol{AB}}$: Arco de A hasta B
$\mathbf{arg}\,(\boldsymbol{P})$: Argumento de un punto P en el sistema de coordenadas polares
$\boldsymbol{arg}\,(\boldsymbol{P})$: Argumento de un punto P en el sistema de coordenadas cartesiano
$\boldsymbol{\mathcal{Z}}\,(\mathbf{cos})$: Conjunto de números donde la función $\cos$ tiene valor cero
$\boldsymbol{\mathcal{C}}\,(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{r})$: Circunferencia con centro O de rádio r
$\boldsymbol{u}^{\perp}$: Vector u-ortogonal (en $\mathbb{R}^2$)
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$: Producto cruz de u y v
$\boldsymbol{d}\,(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$: Distancia de P a Q
$\boldsymbol{\ell_X}$: Eje coordenado equis
$\boldsymbol{\ell_Y}$: Eje coordenado ye
$\boldsymbol{\ell_Z}$: Eje coordenado zeta
$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$: Subespacio generado por u y v
$[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}]$: Intervalo determinado por los números x_0 y x_1 con $x_0 < x_1$
$\widehat{\boldsymbol{AB}}$: Arco determinado por A y B en sentido levógiro
$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\widehat{\boldsymbol{AB}}\right)$: Longitud del arco $\widehat{AB}$
$\measuredangle \boldsymbol{ABC}$: Medida del ángulo $\angle ABC$
$\boldsymbol{\mathcal{O}}$: Origen en el espacio $\mathbb{R}^n$
$\boldsymbol{y_P}$: Ordenada del punto P
$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$: u es ortogonal a v
$\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$: u es paralelo a v
$\boldsymbol{\Pi_{Q,\overline{u},\overline{v}}}$: Plano que pasa por Q con vectores de dirección u y v
$\boldsymbol{\Pi_{P_0,XY}}$: Plano por P_0 paralelo al plano Π_{XY}
$\boldsymbol{\Pi_{P_0,XZ}}$: Plano por P_0 paralelo al plano Π_{XZ}
$\boldsymbol{\Pi_{P_0,YZ}}$: Plano por P_0 paralelo al plano Π_{YZ}
$\boldsymbol{\Pi_{XY}}$: Plano coordenado XY
$\boldsymbol{\Pi_{XZ}}$: Plano coordenado XZ
$\boldsymbol{\Pi_{YZ}}$: Plano coordenado YZ
$\mathscr{O}$: Polo en el sistema de coordenadas polares
$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{P}$: Producto por escalares de P por λ
$\mathbf{Proy}_{\boldsymbol{v}}\,(\boldsymbol{P})$: Proyección ortogonal de Pu en v
$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{P})_{\boldsymbol{O}}$: Punto simétrico de P respecto a O
$\mathbf{rayOA}$: Rayo desde O hasta A
$\boldsymbol{\ell_m}$: Recta por el origen con pendiente m
$\boldsymbol{\ell_{P_0,X}}$: Recta por P_0 con dirección del eje X
$\boldsymbol{\ell_{P_0,Y}}$: Recta por P_0 con dirección del eje Y
$\boldsymbol{\ell_{P_0,Z}}$: Recta por P_0 con dirección del eje Z
$\boldsymbol{\ell_{P_0,\overline{u}}}$: Recta por P_0 con dirección u
$\overline{\boldsymbol{AB}}$: Segmento de recta determinado por los puntos A y B
$\boldsymbol{V} \leq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$: Suespacio vecorial de $\mathbb{R}^n$
$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$: Suma (vectorial) de P y Q
$\{\boldsymbol{P_0}\} + \mathbb{A}$: Trasladado de $\mathbb{A}$ por B

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS UNAM, OCTUBRE 2018
Email address: ernestoms@ciencias.unam.mx