Introducción a la Lógica y la Computación — Lógica proposicional
Práctico 5: Conjuntos Consistentes

1. Demuestre las siguientes, justificando mediante derivaciones apropiadas o (en los casos $\nvdash$) aplicando resultados del teórico, que deben ser citados correctamente.
   a) $\Gamma \vdash \neg\bot$.
   b) $\{p_0\} \nvdash p_1$.
   c) $\{\bot\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$.
   d) $\{\neg p_0,\ \neg(p_1 \wedge (\neg p_2))\} \nvdash p_2 \to p_0$.
2. Decida cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes:
   a) $\{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0, p_1 \to (\neg p_1 \to p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$.
   b) $\{\neg p_1 \vee \neg p_2 \to \neg p_0, p_1 \wedge p_0,\ p_1 \to (\neg p_0 \vee \neg p_2),\ \neg p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$.
   c) $\{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_3 \to \neg p_0\}$.
   d) $\{p_0 \to p_1, p_0 \wedge p_2 \to p_1 \wedge p_3, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \to p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \dots\}$
   ("pares implican impares").
   e) $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{3n+1} : n \geq 0\}$.
   f) $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{4n+1} : n \geq 0\}$.
3. Decidir si son verdaderos o falsos. Justificar.
   a) Si Γ es consistente entonces $\bot \notin \Gamma$.
   b) Si Γ es consistente entonces $\bot$ no ocurre en ninguna fórmula de Γ.
   c) Si Γ es inconsistente entonces existe φ tal que $\varphi \in \Gamma$ y $\neg\varphi \in \Gamma$.
4. Probar que $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ es consistente si y sólo si $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ es consistente.
5. Demostrar que "$\Gamma \vdash \neg\varphi$" equivale a "$\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente".
6. Demostrar que $\Gamma^+ := \{\varphi \in \mathit{PROP} : \bot \text{ no ocurre en } \varphi\}$ es consistente (Ayuda: se puede dar una f explícita tal que $[\![\varphi]\!]_f = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma^+$).
7. Probar que son equivalentes las siguientes caracterizaciones de que Γ sea consistente maximal:
   a) Γ es un elemento maximal del poset (Conjuntos consistentes, $\subseteq$).
   b) Γ es consistente, y si $\varphi \in \mathit{PROP} \setminus \Gamma$, entonces $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente.
8. Pruebe todo Γ consistente maximal realiza la disyunción:
   Para toda φ, ψ, se tiene $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ si y sólo si $[\varphi \in \Gamma$ ó $\psi \in \Gamma]$.
9. Sea Γ consistente maximal y suponga $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$. Decida si las siguientes proposiciones están en Γ. (Ayuda: usar Completitud, o la caracterización de consistente maximal).
   a) $\neg p_0$.
   b) $((\neg p_1) \vee p_2)$.
   c) p_3.
   d) $p_2 \to p_5$.
   e) $p_1 \vee p_6$.
10. Dar al menos dos conjuntos Γ diferentes que sean consistentes maximales y contengan al conjunto $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\}$
11. Decidir si los siguientes subconjuntos de PROP son consistentes maximales.
    a) $\{\varphi \in \mathit{PROP} : \{p_0, p_1, p_3, ...\} \vdash \varphi\}$.
    b) Las tautologías.