PRÁCTICO 6

Espacios y subespacios vectoriales
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Objetivos.

- Familiarizarse con los conceptos de espacio y subespacio vectorial.
- Familiarizarse con los conceptos de conjunto de generadores e independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial.
- Aprender a caracterizar los subespacios de $\mathbb{K}^n$ por generadores y de manera implícita.
- Dado un subespacio W de $\mathbb{K}^n$, aprender a extraer una base de cualquier conjunto de generadores de W, y a completar cualquier subconjunto linealmente independiente de W a una base.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales.
   a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.
   b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
   c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$.
   d) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 0\}$.
   e) $B \cup D$.
   f) $B \cap D$.
   g) $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$.

Observación En los items *a)*, *b)* y *c)* del ejercicio (1) podemos apreciar como un simple cambio en la condición que define al subconjunto hace que dicho subconjunto sea o no un subespacio vectorial. Este es un fenómeno que pasa en general. De hecho podríamos haber definido subconjuntos similares para todo $\mathbb{R}^n$. Lo mismo sucede en los ejercicios (21) y (22). En **Ayudas**, al final del práctico, están las respuestas a los ejercicios (1), (2) y (21).

(2) Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.
   a) El conjunto de matrices invertibles.
   b) El conjunto de matrices A tales que $AB = BA$, donde B es una matriz fija.
   c) El conjunto de matrices triangulares superiores.

(3) ⓐ Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Dar una condición necesaria y suficiente para que L sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(4) Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $v \in V$ no nulo y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda v = \mu v$. Probar que $\lambda = \mu$.

(5) Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

(6) Sean $u = (1, 1)$, $v = (1, 0)$, $w = (0, 1)$ y $z = (3, 4)$ vectores de $\mathbb{R}^2$.
  a) Escribir z como combinación lineal de u, v y w, con coeficientes todos no nulos.
  b) Escribir z como combinación lineal de u y v.
  c) Escribir z como combinación lineal de u y w.
  d) Escribir z como combinación lineal de v y w.

  Observación. En este ejercicio vemos como un vector se puede escribir de muchas maneras como combinación lineal de vectores dados. Esto pasa porque $\{u, v, w\}$ es LD.

(7) Sean $p(x) = (x - 1)(x + 2)$, $q(x) = x^2 - 1$ y $r(x) = x(x^2 - 1)$ en $\mathbb{R}[x]$.
  a) Describir en forma implícita todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que son combinación lineal de p, q y r.
  b) Elegir a tal que el polinomio x se pueda escribir como combinación lineal de p, q y $2x^2 + a$.

(8) Dar un conjunto de generadores para los siguientes subespacios vectoriales.
  a) Los conjuntos de soluciones de los sistemas homogéneos del ejercicio (5) del Práctico 2.
  b) Los conjuntos descriptos en el ejercicio (6) del Práctico 2.

(9) En cada caso, caracterizar con ecuaciones al subespacio vectorial dado por generadores.
  a) $\langle (1, 0, 3), (0, 1, -2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.
  b) $\langle (1, 2, 0, 1), (0, -1, -1, 0), (2, 3, -1, 4) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

(10) En cada caso, determinar si el subconjunto indicado es linealmente independiente.
  a) $\{(1, 0, -1), (1, 2, 1), (0, -3, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
  b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(11) Dar un ejemplo de un conjunto de 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean LD, y tales que dos cualesquiera de ellos sean LI.

(12) Probar que si α, β y γ son vectores LI en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, entonces $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ y $\beta+\gamma$ también son LI.

(13) Extender, de ser posible, los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales.
  a) Los conjuntos del ejercicio (10).
  b) $\{(1,2,0,0),(1,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
  c) $\{(1,2,1,1),(1,0,1,1),(3,2,3,4)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(14) Dar subespacios vectoriales W_0, W_1, W_2 y W_3 de $\mathbb{R}^3$ tales que $W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3$ y $\dim W_0 = 0$, $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ y $\dim W_3 = 3$.

(15) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.
  a) Probar que cualquier subconjunto no vacío de $\mathcal{B}$ es LI.
  b) Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, con $0 \leq k \leq n$, dar un subespacio vectorial de V de dimensión k.

(16) Dar una base y calcular la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(17) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.
  a) Los subespacios del ejercicio (8).
  b) $W = \{(x,y,z,w,u) \in \mathbb{R}^5 \;:\; y = x - z,\; w = x + z,\; u = 2x - 3z\}$.
  c) $W = \langle (1,0,-1,1),(1,2,1,1),(0,1,1,0),(0,-2,-2,0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
  d) Matrices triangulares superiores 2×2 y 3×3.
  e) Matrices triangulares superiores $n \times n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(18) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + y - 2z = 0\},$$
$$W_2 = \langle (1,-1,1),(2,1,-2),(3,0,-1) \rangle.$$

  a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
  b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

(19) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
  a) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^8$ de dimensión 5, entonces $W_1 \cap W_2 = 0$.
  b) Si W es un subespacio de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ de dimensión 2, entonces existe una matriz triangular superior no nula que pertence a W.
  c) Sean $v_1, v_2, w \in \mathbb{K}^n$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $Av_1 = Av_2 = 0 \neq Aw$. Si $\{v_1, v_2\}$ es LI, entonces $\{v_1, v_2, w\}$ también es LI.
  d) ⓐ $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
  e) ⓐ $\{1, \operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

f) ⓐ $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, si λ_1, λ_2 y λ_3 son todos distintos.

Ejercicios de repaso Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(20) Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
a) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists\, j > 1,\ x_1 = x_j\}$.
b) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 x_n = 0\}$.

(21) Sea $F[0,1]$ el espacio de funciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $F[0,1]$.
a) $\{f \in F[0,1] \ : \ f(1) = 1\}$.
b) $\{f \in F[0,1] \ : \ f(1) = 0\}$.

(22) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}[x]$ son subespacios vectoriales.
a) $\mathbb{R}_n[x] := \{a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \ : \ a_i \in \mathbb{R}\}$, es decir, el conjunto formado por todos los polinomios de grado estrictamente menor que $n \in \mathbb{N}$.
b) $B = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_0 + \cdots + a_{n-1} = 1\}$.
c) $C = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_0 + \cdots + a_{n-1} = 0\}$.
d) $D = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_{n-1} \leq a_{n-2}\}$.
e) $E = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_{n-1} = 0\}$.
f) $C \cup E$.
g) $C \cap E$.
h) $F = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}\}$.

(23) Hallar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(-1, 2, 1) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(2, 1, -1)$.

(24) *a)* Hallar escalares $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $1 + 2i = a(1 + i) + b(1 - i)$.
b) Hallar escalares $w, z \in \mathbb{C}$ tales que $1 + 2i = z(1 + i) + w(1 - i)$.

(25) Repetir el ejercicio (10) con los subespacios:
a) $\langle (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
b) $\left\langle 1 + x + x^2,\ x - x^2 + x^3,\ 1 - x,\ 1 - x^2,\ x - x^2,\ 1 + x^4 \right\rangle \subseteq \mathbb{R}[x]$.

(26) En este ejercicio no es necesario hacer ninguna cuenta. Es lógica y comprender bien la definición de LI y LD. Probar las siguientes afirmaciones.
a) Todo conjunto que contiene un subconjunto LD es también LD.
b) Todo conjunto que contiene al vector 0 es LD.
c) Un conjunto es LI si y sólo si todos sus subconjuntos *finitos* son LI.

(27) Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ todos distintos. Probar que el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ es LI.

(28) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.

a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x + y\}$.
b) $W = \langle(-1, 1, 1, -1, 1), (0, 0, 1, 0, 0), (2, -1, 0, 2, -1), (1, 0, 1, 1, 0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^5$.

(29) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.
a) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_4[x] \ : \ a + d = b + c\}$.
b) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \ : \ p'(0) = 0\}$.
c) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ : \ A = A^t\}$.

(30) Sea $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$, donde

$$v_1 = (-1, 0, 1, 2), \quad v_2 = (3, 4, -2, 5), \quad v_3 = (0, 4, 1, 11), \quad v_4 = (1, 4, 0, 9).$$

a) Describir implícitamente al subespacio $W = \langle\, S \,\rangle$.
b) Si $W_1 = \langle\, v_1, v_2, v_3 + v_4 \,\rangle$ y $W_2 = \langle\, v_3, v_4 \,\rangle$, describir $W_1 \cap W_2$ implícitamente.

(31) Sean $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.
a) Sean W_1 y W_2 los espacios solución de los sistemas homogéneos asociados a A_1 y A_2, respectivamente. Describir implícitamente $W_1 \cap W_2$.
b) Sean V_1 y V_2 los subespacios de $\mathbb{R}^5$ generado por las filas de A_1 y A_2, respectivamente. Dar un conjunto de generadores de $V_1 + V_2$.

(32) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^6$:

$$W_1 = \{(u, v, w, x, y, z) \ : \ u + v + w = 0,\ x + y + z = 0\},$$
$$W_2 = \langle(1, -1, 1, -1, 1, -1), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 0, -1, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 0, 0, 0)\rangle .$$

a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
c) Decir cuáles de los siguientes vectores están en $W_1 \cap W_2$ y cuáles en $W_1 + W_2$:

$$(1, 1, -2, -2, 1, 1),\ (0, 0, 0, 1, 0, -1),\ (1, 1, 1, 0, 0, 0),\ (3, 0, 0, 1, 1, 3),\ (-1, 2, 5, 6, 5, 4).$$

d) Para los vectores v del punto anterior que estén en $W_1 + W_2$, hallar $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$.

Ayudas

Ejercicio (1): *a)* No. *b)* Si. *c)* No. *d)* Si. *e)* No. *f)* Si. *g)* No.

Ejercicio (2) *a)* No; recordar el ejercicio (12) del Práctico 3. *b)* Si. *c)* Si.

Ejercicio (3) Recordar el ejercicio ?? del Práctico 1.

Ejercicio (19) *d)* Verdadero. Plantear una combinación lineal de las funciones que de igual a cero y evaluar en diferentes valores de x para obtener alguna condición sobre los escalares.

Ejercicio (19) *e)* Falso. Utilizar una igualdad trigonométrica.

Ejercicio (19) *f)* Verdadero. Plantear una combinación lineal de las funciones que de igual a cero. Derivar dos veces la igualdad obteniendo así dos nuevas combinaciones lineales que den cero. Evaluar en cero las tres combinaciones lineales y utilizar la matriz de Vandermonde.

Ejercicio (21): *a)* No. *b)* Si.