Cadenas de Markov — Probabilidades de un transición

Matriz de transición

Diagrama de transición

Clases comunicantes -

$$P(X_n = j, \quad n \geq 1 \mid X_0 = i) = \rho_{ij}$$

$$P(X_n = i, \quad n \geq 1 \mid X_0 = i) = \rho_{ii}$$

$\rho_{ii} = 1 \Rightarrow$ i es recurrente

$P_{ii} = 1 \Rightarrow$ i es absorbente

Si i no es recurrente, entonces se dice transitorio.

Proposición: Si i es recurrente, y existe un camino de i a j; entonces j es recurrente.

Si j fuera transitorio, existiría un camino C que sale de j y no vuelve a j.

Pero tomamos un camino que sale de i, llega a j, y luego toma C $\Rightarrow$ tiene que volver a i. Por lo tanto puede ir a j. Luego C no existe.

- Afirmación: Si la cadena de Markov es finita, no pueden ser todos los estados transitorios. Al menos hay uno recurrente.

- Si la cadena es finita e irreducible, todos los estados son recurrentes.

  La cadena también se dice recurrente.

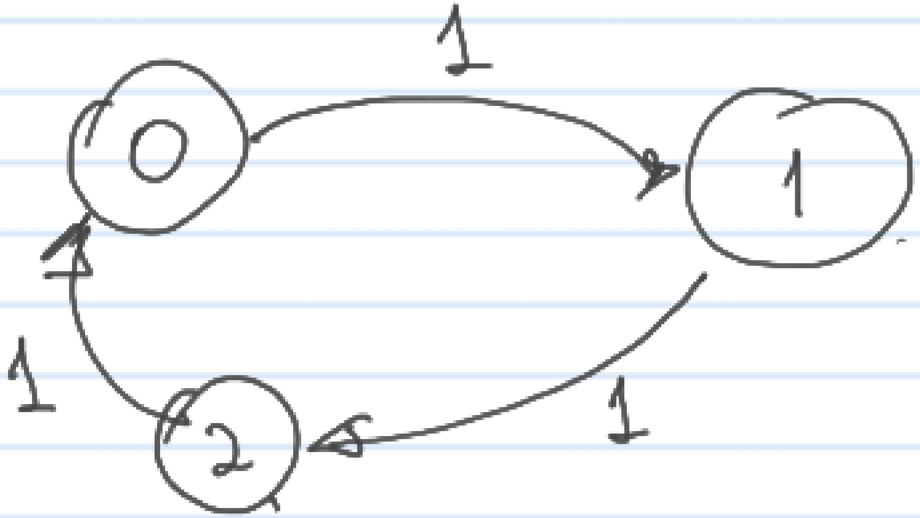
Estados periódicos

$$\text{MCD}\left\{ n > 0 ; P(X_n = i \mid X_0 = i) > 0 \right\} = k$$

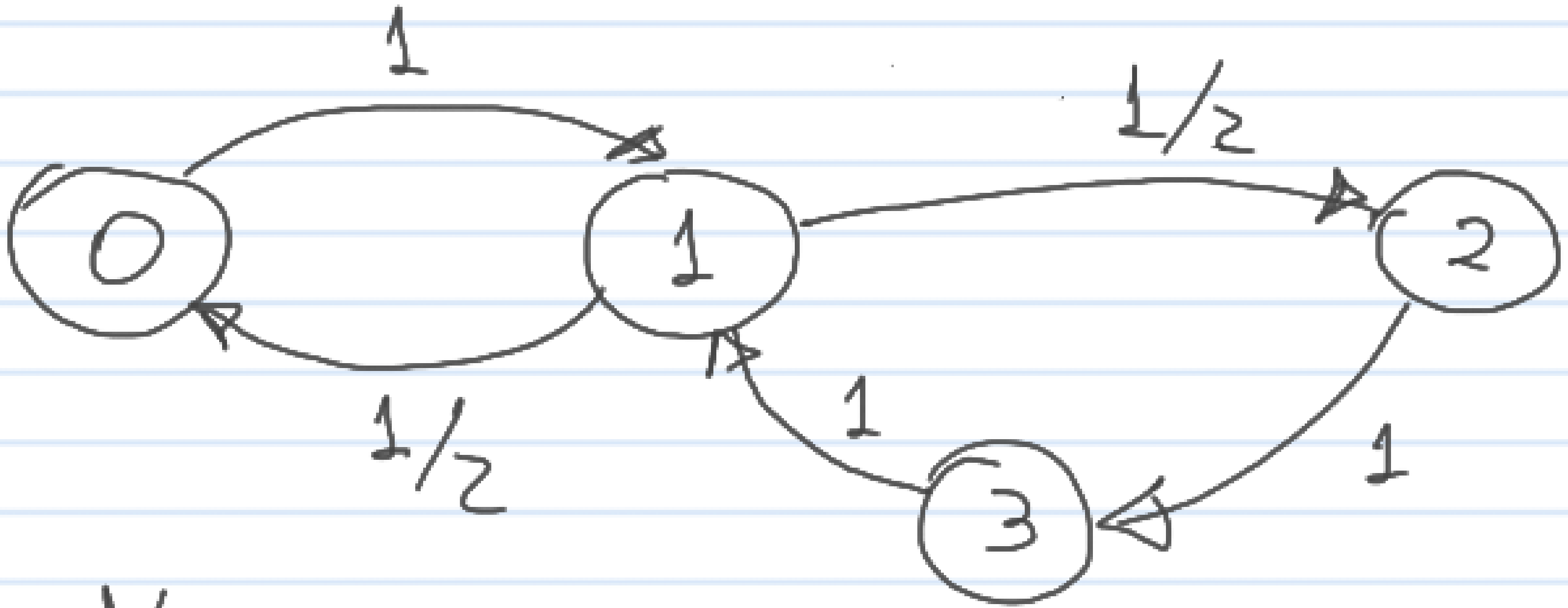
$k = 1 \Rightarrow$ i es aperiódico.

$k > 1 \Rightarrow$ i es periódico, con período k.

Ejemplo

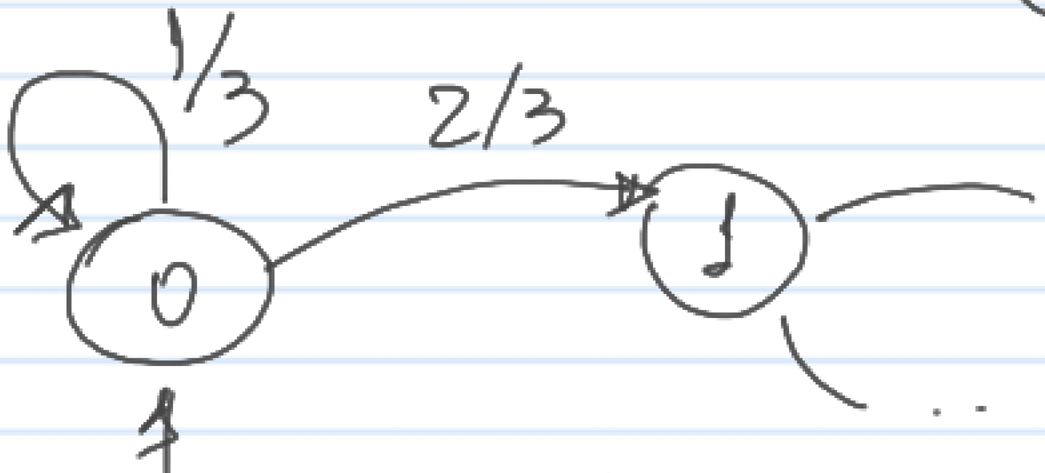


$k = 3$



$k = MCD\{2, 4, 6, \dots, 3, 6, 9, \dots\}$

$k = 1$

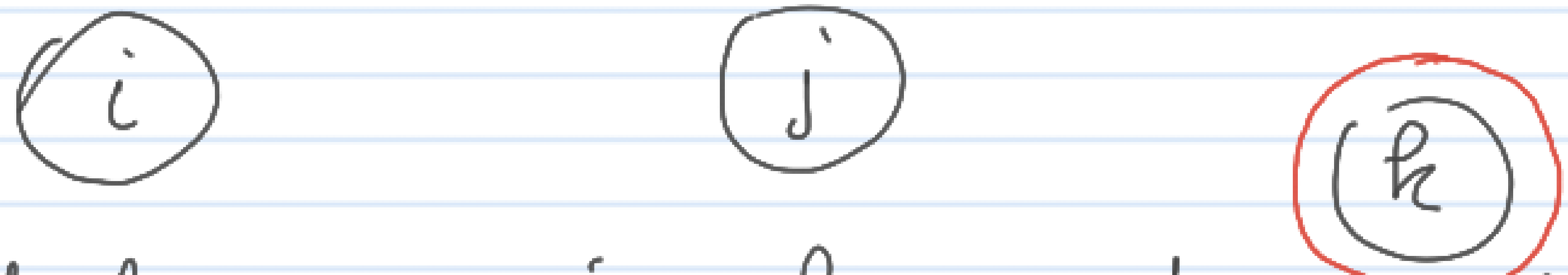


aperiódico

- La cadena es periódica si todos los estados son periódicos.
- Si es irreducible, todos tienen el mismo periodo k.

Probabilidades de alcance y tiempo medio de alcance

Queremos calcular la probabilidad de alcanzar un determinado estado. Si el estado es absorbente, se llama probabilidad de absorción.



Estas probabilidades son iguales a 1 cuando la cadena es recurrente, e irreducible.

Tiene sentido calcularlas cuando hay estados transitorios y absorbentes.

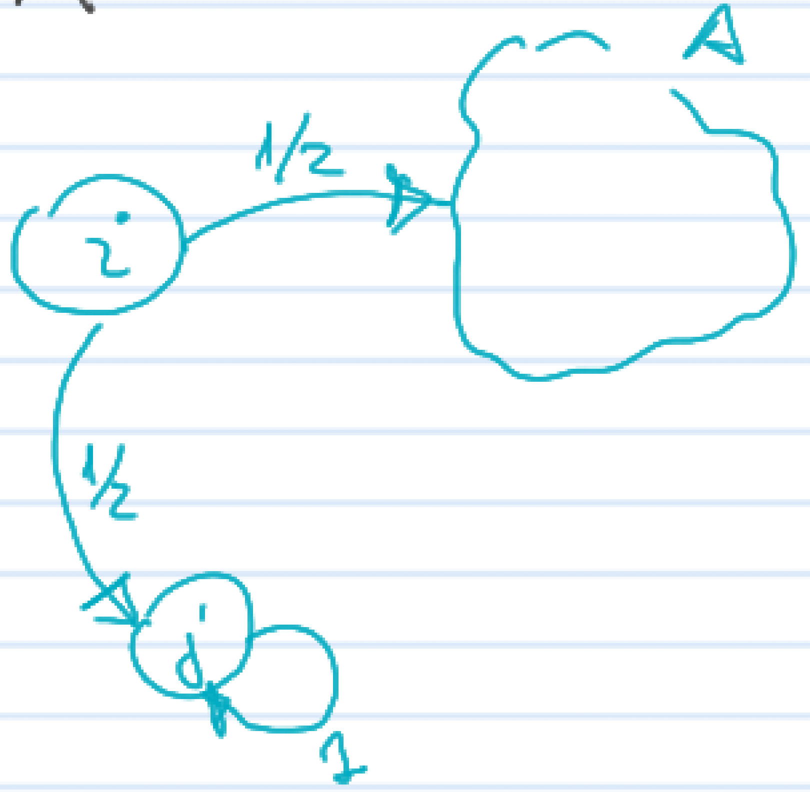
A: un conjunto de estados; $A \neq \emptyset$

$$H^A = \inf \{ n \geq 0 \mid X_n \in A \}$$

$$h_i^A = P(H^A < \infty \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(H^A = n \mid X_0 = i)$$

Tiempo medio de alcance desde i hasta A

$$k_i^A = \begin{cases} \infty & \text{si } P(H^A = \infty \mid X_0 = i) > 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} n \, P(H^A = n \mid X_0 = i) & \end{cases}$$

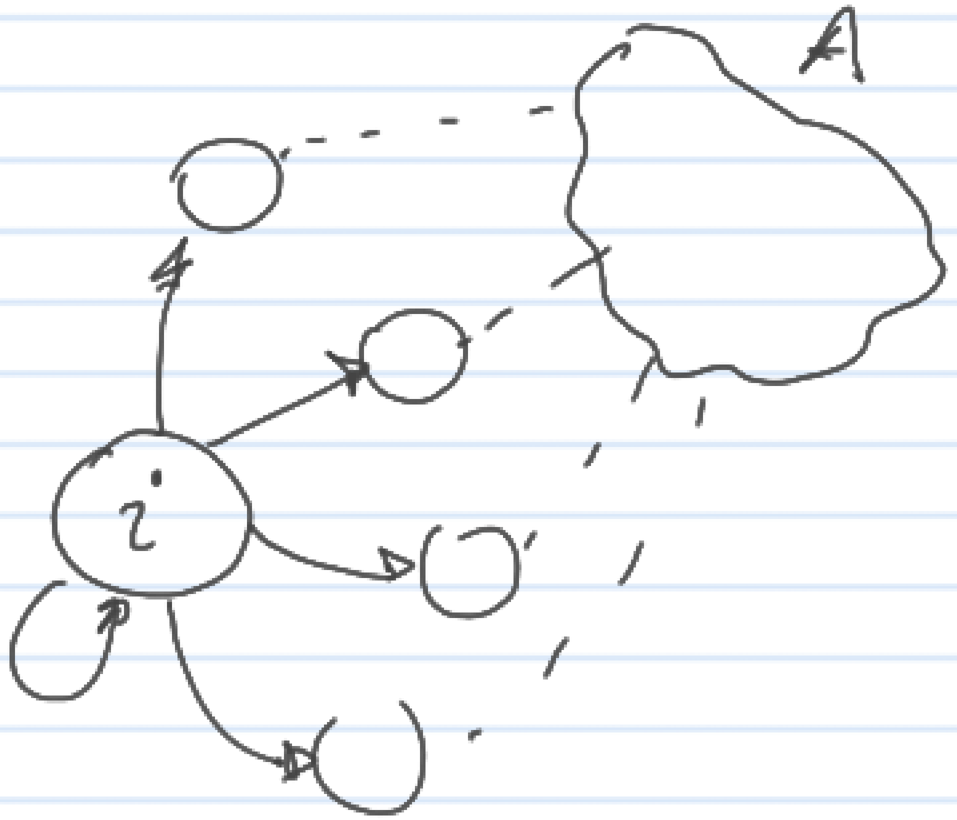


Estos valores se pueden calcular con un sistema de ecuaciones.

$h_0^A \quad h_1^A, \ldots, h_k^A$

$S = \{0, 1, \ldots, k\}$: estados

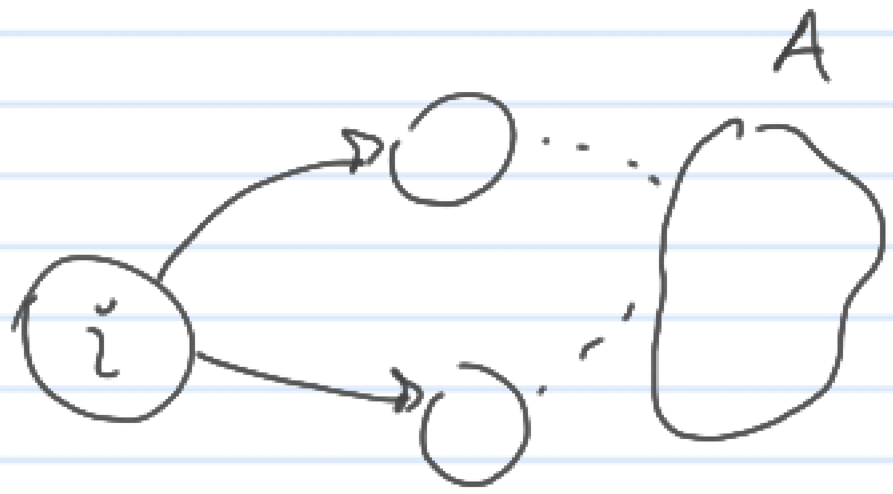
$$h_i^A = \begin{cases} 1 & \text{si } \quad i \in A \\ \sum_{j=0}^{k} p_{ij} \, h_j^A & \end{cases}$$



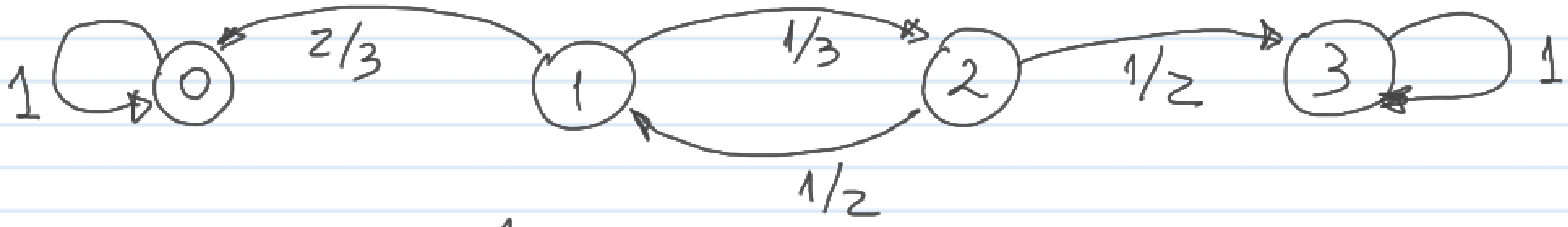
De este sistema de ecuaciones, se toma la menor solución no negativa.

Para los tiempos medios:

$$k_i^A = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in A \\ 1 + \sum_{j=0}^{k} p_{ij} k_j^A & , \text{ si } i \notin A \end{cases}$$



Ejemplo:



$$A = \{0, 3\} \qquad h_i^A = 1; \quad \forall i$$

$$A = \{0\} \quad \begin{cases} h_0^{\{0\}} = 1 \\ h_1^{\{0\}} = \sum_{j=0}^{3} P_{1j}\, h_j^{\{0\}} = 2/3 \times 1 + 1/3 \times h_2^{\{0\}} \\ h_2^{\{0\}} = \sum_{j=0}^{3} P_{2j}\, h_j^{\{0\}} = 1/2\, h_1^{\{0\}} + 1/2\, h_3^{\{0\}} \\ h_3^{\{0\}} = \sum_{j} P_{3j}\, h_j^{\{0\}} = h_3^{\{0\}} \Rightarrow h_3^{\{0\}} = 0 \end{cases}$$

$$h_2^{\{0\}} = \frac{1}{2} h_1^{\{0\}} \qquad \boxed{h_2^{\{0\}} = 2/5}$$

$$h_1^{\{0\}} = 2/3 + \frac{1}{3} h_2^{\{0\}} = 2/3 + \frac{1}{6} h_1^{\{0\}} \Rightarrow 5/6\, h_1^{\{0\}} = 2/3 \Rightarrow \boxed{h_1^{\{0\}} = 4/5}$$

De aquí obtenemos que $h_2^{\{3\}} = 1 - h_2^{\{0\}} = 1 - 2/5 = 3/5$

$$h_1^{\{3\}} = 1 - h_1^{\{0\}} = 1 - 4/5 = 1/5$$

Calculamos los tiempos medios

Notar que $k_1^{\{0\}} = k_2^{\{0\}} = k_3^{\{0\}} = \infty$; entonces tomaremos $A = \{0, 3\}$

$$k_0^A = 0$$

$$k_1^A = 1 + \sum_{j=0}^{3} p_{1j} k_j^A = 1 + \cancel{2/3\, k_0^A} + \frac{1}{3} k_2^A$$

$$k_2^A = 1 + \sum_{j=0}^{3} p_{2j} k_j^A = 1 + \frac{1}{2} k_1^A + \cancel{\frac{1}{2} k_3^A}$$

$$k_3^A = 0$$

$$k_1^A = 1 + 1/3\left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} k_1^A}\right) = \boxed{k_2^A = 9/5}$$

$$\frac{5}{6} k_1^A = 4/3 \Rightarrow \boxed{k_1^A = 8/5}$$

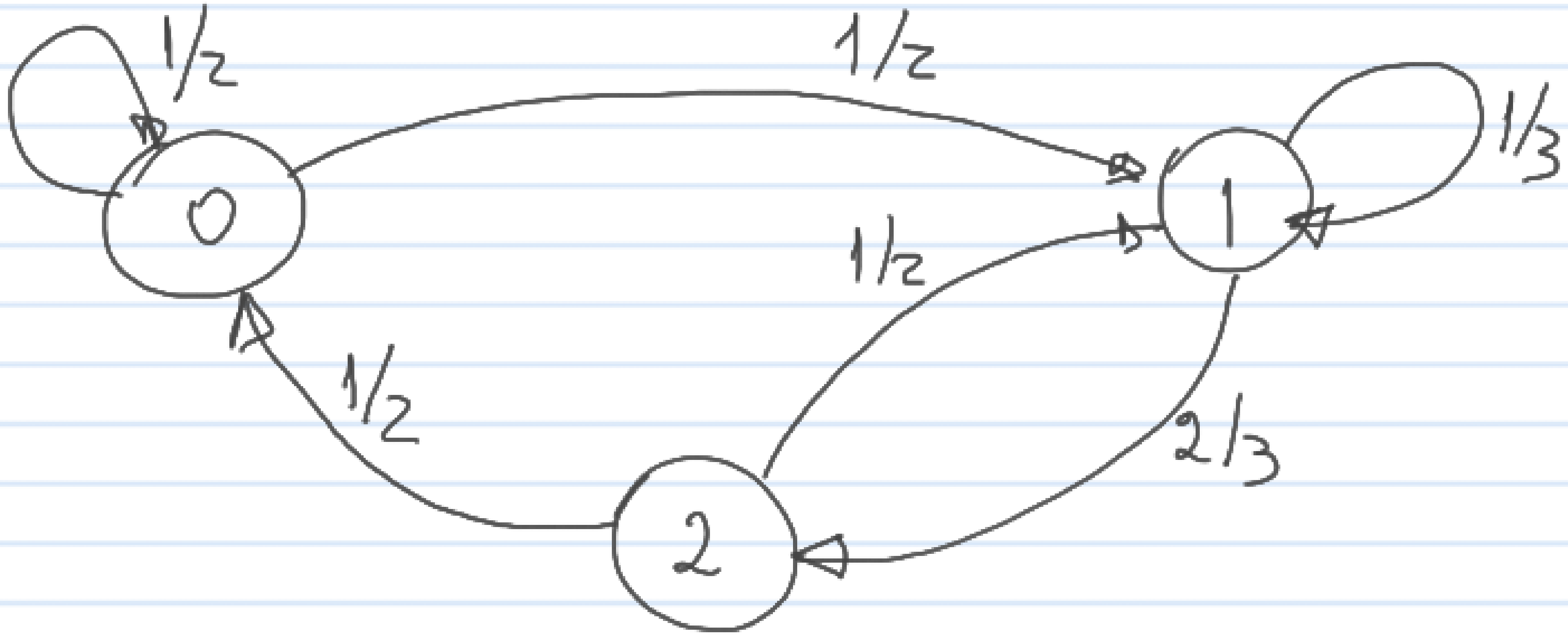
Cuando los estados son recurrentes, tiene sentido calcular el tiempo medio de retorno.

$$R^{(i)} = \inf \{ n \geq 1 \mid X_n = i \}$$

$$r_i = \sum_{n=1}^{\infty} n \, P(R^{(i)} = n \mid X_0 = i)$$

$$\boxed{r_i = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} \, k_j^{\{i\}}}$$

Ejemplo



Calculamos r_0

$$r_0 = 1 + \sum_{j=0}^{2} p_{0j}\, k_j^{\{0\}} = 1 + \frac{1}{2} k_0^{\{0\}} + \frac{1}{2} k_1^{\{0\}}$$

$$k_0^{\{0\}} = 0$$

$$k_1^{\{0\}} = 1 + \sum_{j=0}^{2} p_{1j}\, k_j^{\{0\}} = 1 + 1/3\, k_1^{\{0\}} + 2/3\, k_2^{\{0\}}$$

$$k_2^{\{0\}} = 1 + \sum_{j=0}^{2} p_{2j}\, k_j^{\{0\}} = 1 + \frac{1}{2} k_1^{\{0\}}$$

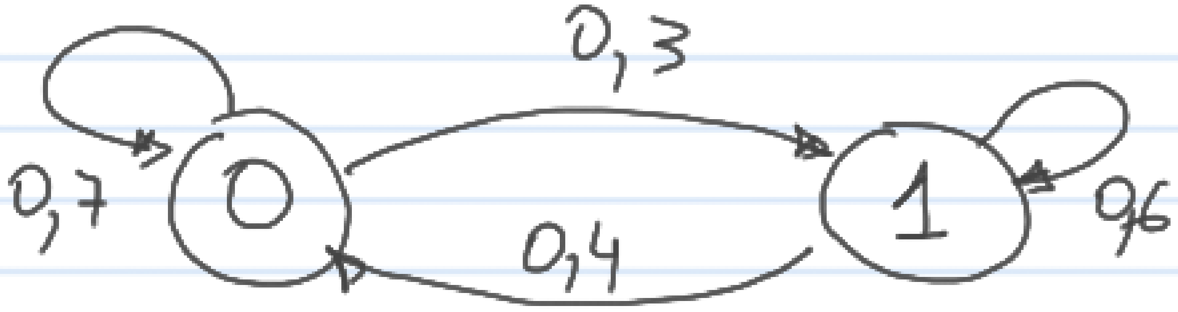
$$k_1^{\{0\}} = 1 + \frac{1}{3} k_1^{\{0\}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} k_1^{\{0\}}$$

$$\frac{1}{3} k_1^{\{0\}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{k_1^{\{0\}} = 5}$$

$$\boxed{h_0 = 1 + \frac{1}{2} k_0^{\{0\}} + \frac{1}{2} k_1^{\{0\}} = 1 + \frac{5}{2} = 7/2}$$

Ejemplo

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$



$$n_0 = 1 + p_{00}\, k_0^{\{0\}} + p_{01}\, k_1^{\{0\}} = 1 + 0{,}3 \times k_1^{\{0\}}$$

$$n_1 = 1 + p_{10}\, k_0^{\{1\}} + p_{11}\, k_1^{\{1\}} = 1 + 0{,}4 \times k_0^{\{1\}}$$

$$k_1^{\{0\}} = 1 + p_{10} \cdot k_0^{\{0\}} + p_{11}\, k_1^{\{0\}} = 1 + 0{,}6\, k_1^{\{0\}} \Longrightarrow \frac{4}{10} k_1^{\{0\}} = 1$$

$$\boxed{k_1^{\{0\}} = 5/2}$$

$$\boxed{n_0 = 1 + \frac{3}{10} \times \frac{5}{2} = 7/4} \qquad \boxed{n_1 = 1 + 0{,}4 \times \frac{10}{3} = 7/3}$$

$$k_0^{\{1\}} = 1 + p_{00}\, k_0^{\{1\}} + p_{01}\, k_1^{\{1\}} = 1 + 0{,}7 \times k_0^{\{1\}} \; ; \; 0{,}3\, k_0^{\{1\}} = 1 \Rightarrow k_0^{\{1\}} = 10/3$$