PRÁCTICO 6

Soluciones

Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

(1) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales.

a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$.

d) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 0\}$.

e) $B \cup D$.

f) $B \cap D$.

g) $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$.

Solución:

a) No es subespacio vectorial. Por ejemplo $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ pertenecen a A, pero $(1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0)$ no pertenece a A.

b) Es subespacio vectorial. En efecto, si (x_1, x_2, x_3) y (y_1, y_2, y_3) pertenecen a B y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3) &= (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \\
&= (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3) \\
&= \lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3) \\
&= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

c) No es subespacio vectorial. Por ejemplo $(1, 0, 0) \in C$ pero $(-1)(1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin C$, pues $-1 + 0 + 0 < 0$.

d) Es subespacio vectorial. En efecto, si $(x_1, x_2, 0)$ y $(y_1, y_2, 0)$ pertenecen a D y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lambda(x_1, x_2, 0) + \mu(y_1, y_2, 0) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, 0) \in D.$$

e) No es subespacio vectorial. Por ejemplo $(1, 0, -1) \in B$ y $(0, 1, 0)$ pertenecen a $B \cup D$, pero $(1, 0, -1) + (0, 1, 0) = (1, 1, -1)$ no pertenece a $B \cup D$, pues $(1, 1, -1) \notin B$ y $(1, 1, -1) \notin D$.

f) Es subespacio vectorial

$$\begin{aligned}
B \cap D &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ y } x_3 = 0\} \\
&= \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 = 0\}.
\end{aligned}$$

Luego, si $(x_1, x_2, 0)$ y $(y_1, y_2, 0)$ pertenecen a $B \cap D$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lambda(x_1, x_2, 0) + \mu(y_1, y_2, 0) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, 0) \in B \cap D,$$

pues $\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$.

g) No es subespacio vectorial. Por ejemplo $(1, 0, 0)$ pertenece a G, pero $\sqrt{2}(1, 0, 0) = (\sqrt{2}, 0, 0)$ no pertenece a G.

□

(2) Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.
a) El conjunto de matrices invertibles.
b) El conjunto de matrices A tales que $AB = BA$, donde B es una matriz fija.
c) El conjunto de matrices triangulares superiores.

Solución:

a) No es subespacio vectorial. Por ejemplo, Id_n y $-\mathrm{Id}_n$ son matrices invertibles, pero $\mathrm{Id}_n + (-\mathrm{Id}_n) = 0$ no es invertible.

b) Es subespacio vectorial. En efecto, si A y A' pertenecen al conjunto y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}(\lambda A + \mu A')B &= \lambda AB + \mu A'B \\ &= \lambda BA + \mu BA' && \text{(por hipótesis)} \\ &= (\lambda A + \mu A')B.\end{aligned}$$

Luego $\lambda A + \mu A'$ pertenece al conjunto.

c) Es subespacio vectorial. En efecto, si A y A' son matrices triangulares superiores y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda A + \mu A' &= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ 0 & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu a'_{11} & \mu a'_{12} & \cdots & \mu a'_{1n} \\ 0 & \mu a'_{22} & \cdots & \mu a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu a'_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} + \mu a'_{11} & \lambda a_{12} + \mu a'_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} + \mu a'_{1n} \\ 0 & \lambda a_{22} + \mu a'_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} + \mu a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda a_{nn} + \mu a'_{nn} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Luego $\lambda A + \mu A'$ es una matriz triangular superior.

□

(3) Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Dar una condición necesaria y suficiente para que L sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Solución: Una recta en $\mathbb{R}^2$ es un subespacio vectorial si y sólo si pasa por el origen.

La ecuación general de la recta en el plano es $ax + by = c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y a, b no ambos nulos.

($\Rightarrow$) Si L es un subespacio vectorial, entonces $(0, 0) \in L$, es decir la recta pasa por el origen. Además, como $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 = c$, la ecuación de la recta es $ax + by = 0$.

($\Leftarrow$) Si la recta pasa por el origen, entonces $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 = c$, es decir la ecuación de la recta es $ax + by = 0$. Luego, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la recta y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} a(\lambda x_1 + \mu x_2) + b(\lambda y_1 + \mu y_2) &= \lambda(ax_1 + by_1) + \mu(ax_2 + by_2) \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Luego $\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)$ pertenece a la recta y por lo tanto la recta es un subespacio vectorial.

$\square$

(4) Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $v \in V$ no nulo y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda v = \mu v$. Probar que $\lambda = \mu$.

Solución: Si $\lambda v = \mu v$, entonces $(\lambda - \mu)v = 0$. Supongamos que $\lambda - \mu \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} v &= 1 \cdot v && \text{(axioma P1 de esp. vectoriales)} \\ &= (\lambda - \mu)^{-1}(\lambda - \mu)v \\ &= (\lambda - \mu)^{-1}0 && \text{(por hipótesis)} \\ &= 0. && \text{(demostrado en la teórica: } 0 \cdot v = 0) \end{aligned}$$

Concluimos que $v = 0$, lo cual contradice la hipótesis. El absurdo vino de suponer que $\lambda - \mu \neq 0$, luego $\lambda = \mu$.

$\square$

(5) Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Solución:

($\Rightarrow$) Si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$ no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que $W_1 \nsubseteq W_2$ y $W_2 \nsubseteq W_1$. Entonces existen $w_1 \in W_1$ tal que $w_1 \notin W_2$ y $w_2 \in W_2$ tal que $w_2 \notin W_1$. Como $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$, entonces $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$. Como $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V, entonces $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $w_1 + w_2 \in W_1$ o $w_1 + w_2 \in W_2$. Supongamos que $w_1 + w_2 \in W_1$, entonces $w_2 = w_1 + w_2 - w_1 \in W_1$, lo cual es absurdo.Análogamente, si

$w_1 + w_2 \in W_2$, entonces $w_1 \in W_2$, lo cual es absurdo. El absurdo vino de suponer que $W_1 \not\subseteq W_2$ y $W_2 \not\subseteq W_1$, luego $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $W_1 \subseteq W_2$. Entonces $W_1 \cup W_2 = W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V. Análogamente se demuestra que si $W_2 \subseteq W_1$, entonces $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V.

$\square$

(6) Sean $u = (1,1)$, $v = (1,0)$, $w = (0,1)$ y $z = (3,4)$ vectores de $\mathbb{R}^2$.
  a) Escribir z como combinación lineal de u, v y w, con coeficientes todos no nulos.
  b) Escribir z como combinación lineal de u y v.
  c) Escribir z como combinación lineal de u y w.
  d) Escribir z como combinación lineal de v y w.

Solución: En general tenemos que resolver la ecuación $z = \lambda u + \mu v + \nu w$, bajo ciertas condiciones sobre λ, μ, ν. En cada caso, las condiciones son distintas. Si escribimos en coordenadas la ecuación es

$$\begin{aligned}(3,4) &= \lambda(1,1) + \mu(1,0) + \nu(0,1)\\ &= (\lambda + \mu, \lambda + \nu). \qquad (*)\end{aligned}$$

El sistema es sencillo de resolver, pues la segunda coordenada nos dice que $\lambda + \nu = 4$, es decir $\nu = 4 - \lambda$. Reemplazando en la primera coordenada obtenemos $\lambda + \mu = 3$, es decir $\mu = 3 - \lambda$. Por lo tanto, λ es libre y

$$z = \lambda u + \mu v + \nu w = \lambda(1,1) + (3-\lambda)(1,0) + (4-\lambda)(0,1).$$

a) Si $\lambda = 1$, entonces $\mu = 2$ y $\nu = 3$ y por lo tanto

$$z = 1 \cdot u + 2 \cdot v + 3 \cdot w.$$

b) Si $\lambda = 4$, entonces $\mu = -1$ y $\nu = 0$ y por lo tanto

$$z = 4 \cdot u - 1 \cdot v.$$

c) Si $\lambda = 3$, entonces $\mu = 0$ y $\nu = 1$ y por lo tanto

$$z = 3 \cdot u + 1 \cdot w.$$

d) Si $\lambda = 2$, entonces $\mu = 1$ y $\nu = 2$ y por lo tanto

$$z = 2 \cdot v + 2 \cdot w.$$

$\square$

(7) Sean $p(x) = (x-1)(x+2)$, $q(x) = x^2 - 1$ y $r(x) = x(x^2-1)$ en $\mathbb{R}[x]$.
  a) Describir en forma implícita todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que son combinación lineal de p, q y r.
  b) Elegir a tal que el polinomio x se pueda escribir como combinación lineal de p, q y $2x^2 + a$.

Solución:

a) Escribamos la versión expandida de p, q y r:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + x - 2, \\ q(x) &= x^2 - 1, \\ r(x) &= x^3 - x. \end{aligned}$$

Ahora, planteemos la ecuación

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= \lambda p + \mu q + \nu r \\ &= \lambda(x^2 + x - 2) + \mu(x^2 - 1) + \nu(x^3 - x) \qquad (^*) \\ &= \nu x^3 + (\lambda + \mu)x^2 + (\lambda - \nu)x + (-2\lambda - \mu). \end{aligned}$$

Debemos encontrar todos los $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tales que existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación anterior. Es decir, debemos encontrar todos los $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tales que existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ que satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} a &= \nu \\ b &= \lambda + \mu \\ c &= -\lambda - \nu \\ d &= -2\lambda - \mu. \end{aligned}$$

Si consideramos a, b, c, d como constantes y λ, μ, ν como incógnitas, entonces el sistema, presentado como matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 & c \\ -2 & -1 & 0 & d \end{array}\right] \xrightarrow[F_4+2F_2]{F_3-F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & -1 & -b+c \\ 0 & 1 & 0 & 2b+d \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_3+F_4]{F_2-F_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & -b-d \\ 0 & 0 & -1 & b+c+d \\ 0 & 1 & 0 & 2b+d \end{array}\right] \xrightarrow{F_3+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & -b-d \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \\ 0 & 1 & 0 & 2b+d \end{array}\right].$$

Luego la ecuación (*) solo puede ser satisfecha si y sólo si $a+b+c+d = 0$ por lo tanto, el subespacio de polinomios que obtenemos es

$$\{ax^3 + bx^2 + cx + d : \ a + b + c + d = 0, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

También lo podríamos describir de la siguiente manera:

$$\{(-b - c - d)x^3 + bx^2 + cx + d : \ b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

b) Debemos encontrar a tal que existan $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} x &= \lambda p + \mu q + (2x^2 + a)\nu \\ &= \lambda(x^2 + x - 2) + \mu(x^2 - 1) + \nu(2x^2 + a) \\ &= (\lambda + \mu + 2\nu)x^2 + \lambda x + (-2\lambda - \mu - a\nu). \end{aligned}$$

Claramente $\lambda + \mu + 2\nu = 0$, $\lambda = 1$ y $-2\lambda - \mu - a\nu = 0$, en consecuencia

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \mu + 2\nu \\ 0 &= -2 - \mu - a\nu, \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} \mu + 2\nu &= -1 \\ -\mu - a\nu &= 2. \end{aligned}$$

Planteamos la matriz aumentada correspondiente a este sistema y la escalonamos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -a & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 + F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2-a & 1 \end{array}\right].$$

Observamos entonces que si $a = 2$ el sistema no tiene solución pues quedaría $\mu \cdot 0 + \nu \cdot 0 = 1$. Cuando $a \neq 2$, dividimos por $2 - a$ y obtenemos $\nu = \frac{1}{2-a}$ y $\mu = -1 - 2\nu = -1 - \frac{2}{2-a} = \frac{a}{2-a}$. Por lo tanto, si $a \neq 2$, el polinomio x se puede escribir como combinación lineal de p, q y $2x^2 + a$.

□

(8) Dar un conjunto de generadores para los siguientes subespacios vectoriales.

a) Los conjuntos de soluciones de los sistemas homogéneos del ejercicio (5) del Práctico 2.

b) Los conjuntos descriptos en el ejercicio (6) del Práctico 2.

Solución:

a) Los sistemas homogéneos del ejercicio (5) del Práctico 2 son los tres primeros.

El primer sistema era

$$\begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0. \end{cases}$$

Este sistema tenía como única solución $x = y = z = 0$, luego el conjunto de soluciones es $\{(0,0,0)\}$ y por lo tanto el subespacio generado por las soluciones es $\{0\}$.

El segundo era

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene como soluciones al conjunto $\{(4t, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{t(4, 3, 1) : t \in \mathbb{R}\}$, y por lo tanto podemos tomar como generador del subespacio al vector $(4, 3, 1)$.

El tercero:

$$\begin{cases} x - z + 2t = 0 \\ -x + 2y - z + 2t = 0 \\ -x + y = 0. \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema eran los vectores del subespacio

$$\{(u - 2v, u - 2v, u, v) : u, v \in \mathbb{R}\} = \{u(1, 1, 1, 0) + v(-2, -2, 0, 1) : u, v \in \mathbb{R}\}$$

y por lo tanto podemos tomar como generadores a los vectores $(1, 1, 1, 0)$ y $(-2, -2, 0, 1)$.

b) el primer conjunto era $\{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : -2b_1 + b_2 + 3b_3 = 0\}$. Podemos despejar una de las variables respecto a las otras, por ejemplo $b_2 = 2b_1 - 3b_3$, y en ese caso el conjunto se puede escribir como

$$\{(b_1, -2b_1 - 3b_3, b_3) : b_1, b_3 \in \mathbb{R}\} = \{b_1(1, -2, 0) + b_3(0, -3, 1) : b_1, b_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Por lo tanto, podemos tomar como generadores a los vectores $(1, -2, 0)$ y $(0, -3, 1)$.

El segundo conjunto era

$$\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0 \wedge -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_4 = 0\}.$$

Plantemos el sistema correspondiente:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_4 = 0. \end{cases}$$

Resolvamos el sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2\cdot F_2]{2\cdot F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_2/(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Luego, el conjunto de soluciones es

$$\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_1 = -b_3 + b_4 \wedge b_2 = b_3 + b_4\}.$$

Es decir, el conjunto de soluciones es

$$\{(-b_3 + b_4, b_3 + b_4, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_3, b_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Escrito de otra forma, el conjunto de soluciones es

$$\{b_3(-1, 1, 1, 0) + b_4(1, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 : b_3, b_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Por lo tanto, podemos tomar como generadores a los vectores $(-1, 1, 1, 0)$ y $(1, 1, 0, 1)$.

El tercer conjunto era $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto podemos tomar los generadores canónicos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

□

(9) En cada caso, caracterizar con ecuaciones al subespacio vectorial dado por generadores.

a) $\langle(1, 0, 3), (0, 1, -2)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) $\langle(1, 2, 0, 1), (0, -1, -1, 0), (2, 3, -1, 4)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

Solución:

a) El subespacio es el conjunto de combinaciones lineales de $(1, 0, 3)$ y $(0, 1, -2)$, es decir

$$\begin{aligned}\{\lambda(1, 0, 3) + \mu(0, 1, -2) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} &= \{(\lambda, \mu, 3\lambda - 2\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) : x = \lambda, y = \mu, z = 3\lambda - 2,\ \mu\lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Planteamos el sistema correspondiente:

$$\begin{cases} \lambda = x \\ \mu = y \\ 3\lambda - 2\mu = z. \end{cases}$$

Resolvamos el sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -2 & z \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - 3F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -2 & z - 3x \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 + 2F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z - 3x + 2y \end{array}\right].$$

Luego, el subespacio se caracteriza implícitamente de la siguiente manera:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 3x + 2y = 0\}.$$

b) El subespacio es el conjunto de combinaciones lineales de $(1,2,0,1)$, $(0,-1,-1,0)$ y $(2,3,-1,4)$, es decir

$$\begin{aligned}&\{\lambda(1,2,0,1)+\mu(0,-1,-1,0)+\nu(2,3,-1,4):\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}\}=\\&=\{(\lambda+2\nu,2\lambda-\mu+3\nu,-\mu-\nu,\lambda+4\nu):\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}\}\\&=\{(x,y,z,t):x=\lambda+2\nu,\\&\qquad\qquad y=2\lambda-\mu+3\nu,z=-\mu-\nu,t=\lambda+4\nu,\ \mu,\lambda,\nu\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Planteamos el sistema correspondiente:

$$\begin{cases}\lambda+2\nu=x\\2\lambda-\mu+3\nu=y\\-\mu-\nu=z\\\lambda+4\nu=t\end{cases}$$

Resolvamos el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&x\\2&-1&3&y\\0&-1&-1&z\\1&0&4&t\end{array}\right]\xrightarrow{F_2-2F_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&x\\0&-1&-1&y-2x\\0&-1&-1&z\\0&0&2&t-x\end{array}\right]\xrightarrow{F_3-F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&x\\0&-1&-1&y-2x\\0&0&0&2x-y+z\\0&0&2&t-x\end{array}\right].$$

En realidad, no es necesario resolver el sistema completamente: la última matriz nos dice que el sistema tiene solución si y sólo si $2x-y+z=0$. Luego, el subespacio se caracteriza implícitamente de la siguiente manera:

$$\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:2x-y+z=0\}.$$

□

(10) En cada caso, determinar si el subconjunto indicado es linealmente independiente.

a) $\{(1,0,-1),(1,2,1),(0,-3,2)\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

b) $\left\{\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\-2&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\right\}\subseteq M_{2\times3}(\mathbb{R})$.

Solución: para determinar si un conjunto de vectores es LI debemos plantear la ecuación $\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n=0$ y resolverla. Si la única solución es $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$, entonces el conjunto es LI. En caso contrario, el conjunto es LD.

a) Debemos resolver la ecuación

$$\lambda_1(1,0,-1)+\lambda_2(1,2,1)+\lambda_3(0,-3,2)=(0,0,0),$$

o sea

$$(\lambda_1+\lambda_2,\ 2\lambda_2-3\lambda_3,\ -\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)=(0,0,0).$$

Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Resolvamos el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3+F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3/5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2+\frac{3}{2}F_3]{F_1-\frac{3}{2}F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego como la única solución es la trivial los vectores son LI.

b) Debemos resolver la ecuación

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o sea

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & 2\lambda_3 & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ -2\lambda_2 + 3\lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & -3\lambda_1 + \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por la igualdad de fila 1, columna 2, claramente, $\lambda_3 = 0$. Luego, por la igualdad de fila 2, columna 3, $\lambda_1 = 0$. Finalmente, por la igualdad de fila 1, columna 1, $\lambda_2 = 0$. Es decir, la única solución es la trivial y por lo tanto los vectores son LI.

$\square$

(11) Dar un ejemplo de un conjunto de 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean LD, y tales que dos cualesquiera de ellos sean LI.

Solución: tomemos $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ y el tercer vector la suma de ambos, es decir, $v_3 = (1,1,0)$. Por lo tanto, esos tres vectores son LD ($v_1 + v_2 - v_3 = 0$). Ahora bien, si quitamos cualquiera de los vectores, los dos restantes son LI. Por ejemplo, si quitamos v_1, entonces v_2 y v_3 son LI, pues si $\lambda v_2 + \mu v_3 = 0$, entonces $(\mu, \lambda+\mu, 0) = (0,0,0)$ y por lo tanto $\mu = 0$, luego $\lambda = 0$.

$\square$

(12) Probar que si α, β y γ son vectores LI en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, entonces $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ y $\beta+\gamma$ también son LI.

Solución: debemos plantear la ecuación

$$\lambda_1(\alpha+\beta)+\lambda_2(\alpha+\gamma)+\lambda_3(\beta+\gamma)=0,$$

y ver que la única solución es $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. La ecuación anterior es equivalente a

$$(\lambda_1+\lambda_2)\alpha+(\lambda_1+\lambda_3)\beta+(\lambda_2+\lambda_3)\gamma=0.$$

Como α, β y γ son LI por hipótesis, entonces $\lambda_1+\lambda_2=\lambda_1+\lambda_3=\lambda_2+\lambda_3=0$. Resolvamos el sistema:

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2-F_1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3+F_2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, por la tercera fila, $\lambda_3=0$, por la segunda fila se deduce que $\lambda_2=0$ y por la primera fila se deduce que $\lambda_1=0$. Es decir, la única solución es la trivial y por lo tanto los vectores son LI.

□

(13) Extender, de ser posible, los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales.

a) Los conjuntos del ejercicio (10).

b) $\{(1,2,0,0),(1,0,1,0)\}\subseteq\mathbb{R}^4$.

c) $\{(1,2,1,1),(1,0,1,1),(3,2,3,4)\}\subseteq\mathbb{R}^4$.

Solución:

a) Los conjuntos del ejercicio (10) son LI. Luego el primer subconjunto es base, pues tiene 3 elementos de $\mathbb{R}^3$.

El segundo subconjunto no es base pues tiene 3 vectores y $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ tiene dimensión 6.

Extendamos entonces

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&-3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&1\\-2&1&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\right\}$$

a una base de $M_{2\times3}(\mathbb{R})$.

Convendrá mirar a las matrices como vectores de $\mathbb{R}^6$ para poder operar con estos vectores. La forma más obvia de hacerlo es construir un vector de 6 coordenadas a partir de cada matriz con la primera fila y a continuación la segunda. Haciendo esto obtenemos los vectores

$$(1,0,2,0,-1,-3),\ (1,0,1,-2,1,0),\ (1,2,3,3,2,1).$$

Una forna de extender la base es primero construir una matriz con los vectores fila y hallar la MRF. Los vectores que obtenemos en la MRF generan el mismo subespacio que los vectores originales y los podemos completar a una base de $\mathbb{R}^6$ con vectores canónicos. Hagamos el procedimiento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[F_3/2]{F_2/(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-\frac{1}{2}F_2]{F_1-2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Luego el conjunto LI

$$\{(1,0,2,0,-1,-3),(1,0,1,-2,1,0),(1,2,3,3,2,1)\}$$

se puede completar a una base con los vectores canónicos

$$(0,0,0,1,0,0),\ (0,0,0,0,1,0),\ (0,0,0,0,0,1).$$

Volviendo a $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, los vectores canónicos son las matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que completan a una base.

b) Lo haremos de forma análoga alo que hicimos en *a)*. Debemos hallar la MRF de la matriz formada por los vectores dados como filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, los vectores que completan a una base son $(0,0,1,0)$ y $(0,0,0,1)$. Por supuesto, también podemos completar con otros pares de vectores, pero estos son los más simples.

c) Este inciso lo haremos de otra forma: primero encontraremos la forma implícita del subespacio y luego agregaremos vectores con un criterio que explicaremos más adelante. Para encontrar la forma implícita del subespacio planteamos la ecuación:

$$\lambda_1(1,2,1,1)+\lambda_2(1,0,1,1)+\lambda_3(3,2,3,4)=(b_1,b_2,b_3,b_4).$$

Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = b_1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = b_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = b_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = b_4 \end{cases}$$

Planteamos la matriz ampliada y hacemos Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 2 & 0 & 2 & b_2 \\ 1 & 1 & 3 & b_3 \\ 1 & 1 & 4 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_3-F_1 \\ F_4-F_1}]{F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -2 & -4 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3-b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_4-b_1 \end{array}\right]$$

Luego el subespacio generado por los vectores del enunciado tiene por forma implícita

$$\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_3 = b_1\}.$$

Cualquier vector que no cumpla esta condición no pertenece al subespacio y por lo tanto completa a una base. Por ejemplo, $(0, 0, 1, 0)$ completa a una base.

□

(14) Dar subespacios vectoriales W_0, W_1, W_2 y W_3 de $\mathbb{R}^3$ tales que $W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3$ y $\dim W_0 = 0$, $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ y $\dim W_3 = 3$.

Solución: El único subespacio vectorial de dimensión 0 es $\{0\}$. Por lo tanto, $W_0 = \{0\}$. Sea $W_1 = \langle(1, 0, 0)\rangle$ y $W_2 = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$. El único subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 3 es $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, $W_3 = \mathbb{R}^3$.

□

(15) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V.
a) Probar que cualquier subconjunto no vacío de $\mathcal{B}$ es LI.
b) Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, con $0 \leq k \leq n$, dar un subespacio vectorial de V de dimensión k.

Solución:

a) Sea $W = \{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$ un subconjunto no vacío de $\mathcal{B}$. Supongamos que W es LD. Entonces existen $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 v_{i_1} + \cdots + \lambda_k v_{i_k} = 0.$$

Luego existe una combinación lineal no trivial de los elementos de la base que da como resultado el vector nulo. Más explicitamente si $\mu_i = 0$ para $i \neq i_1, \ldots, i_k$ y $\mu_{i_j} = \lambda_j$ para $j = 1, \ldots, k$, entonces

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0,$$

y no todos los μ_i son nulos. Esto contradice que $\mathcal{B}$ sea una base. Por lo tanto, W es LI.

b) Sea $W_k = \langle v_1, ..., v_k \rangle$. Entonces W_k es un subespacio de V de dimensión k. En efecto, como $\mathcal{B}$ es una base de V, entonces W_k es un subespacio de V. Por otra parte, por *a)*, los $v_1, ..., v_k$ son LI. Por lo tanto, $\dim W_k = k$.

$\square$

(16) Dar una base y calcular la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Solución: una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial es $\{e_1, \ldots, e_n\}$, donde e_i es el vector cuyas coordenadas son todas nulas excepto la i-ésima que es 1. Por lo tanto, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$.

Una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial es $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$, donde e_i es el vector cuyas coordenadas son todas nulas excepto la i-ésima que es 1. Por lo tanto, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

$\square$

(17) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.

a) Los subespacios del ejercicio (8).
b) $W = \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ y = x - z, \ w = x + z, \ u = 2x - 3z\}$.
c) $W = \langle (1, 0, -1, 1), (1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (0, -2, -2, 0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
d) Matrices triangulares superiores 2×2 y 3×3.
e) Matrices triangulares superiores $n \times n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Solución:

a) En el ejercicio (8) ya dimos conjuntos de generadores para cada subespacio y es sencillo comprobar que cada uno de estos subconjuntos son LI y por lo tanto son base. Solo resta calcular la dimensión. Listemos los subespacios y sus respectivas bases, lo cual nos dirá la dimensión de cada uno.

- $W_1 = \{(0, 0, 0)\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $\dim W_1 = 0$. Luego su base es $\emptyset$.
- $W_2 = \langle (4, 3, 1) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $\dim W_2 = 1$.
- $W_3 = \langle (1, 1, 1, 0), (-2, -2-, 0 - 1) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ y $\dim W_3 = 2$.
- $W_4 = \langle (1, -2, 0), (0, -3, 1) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $\dim W_4 = 2$.
- $W_5 = \langle (-1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ y $\dim W_5 = 2$.
- $W_6 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $\dim W_6 = 3$.

b) Observar que

$$\begin{aligned}
W &= \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ y = x - z, \ w = x + z, \ u = 2x - 3z\} \\
&= \{(x, x - z, z, x + z, 2x - 3z) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, x, 0, x, 2x) + (0, -z, z, z, -3z) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1, 1, 0, 1, 2) + z(0, -1, 1, 1, -3) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1, 1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 1, -3) \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{(1,1,0,1,2),(0,-1,1,1,-3)\}$ es una base y la dimensión del subespacio es 2.

c) Para ver la dimensión planteamos la matriz donde los vectores fila son los vectores del enunciado y hacemos Gauss para obtener una MRF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4-F_1]{F_3+F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1-F_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego una base del subespacio es $\{(1,0,-\frac{1}{2},1),(0,1,\frac{1}{2},-1)\}$ y por lo tanto la dimensión es 2.

d) Una base de las matrices triangulares superiores 2×2 es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

y por lo tanto su dimensión es 3.

Una base de las matrices triangulares superiores 3×3 es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

y por lo tanto su dimensión es 6.

e) Este inciso es una generalización del anterior. Denotemos E_{ij} a la matriz cuyas entradas son todas nulas excepto la i-ésima fila y la j-ésima columna, que es 1. Es decir, E_{ij} es la matriz que tiene un 1 en la posición (i,j) y ceros en el resto de las posiciones. Entonces, una base de las matrices triangulares superiores $n\times n$ es

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{22}, E_{23}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n-1,n}, E_{nn}\},$$

escrito de forma más compacta y precisa,

$$\mathcal{B} = \left\{E_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ 1 \le i \le j \le n\right\}.$$

Calculemos ahora la dimensión de este subespacio. Para eso debemos ver cuántos elementos tiene $\mathcal{B}$. Observar que la diagonal tiene n elementos de la base, todos los de la forma E_{ii}, $1 \le i \le n$. Justo encima de la diagonal hay $n-1$ elementos de la base, todos los de la forma $E_{i,i+1}$, $1 \le i \le n-1$. Encima de esta última diagonal "menor" hay $n-2$ elementos de la base, todos los de la forma $E_{i,i+2}$, $1 \le i \le n-2$. Y así sucesivamente hasta llegar a la última diagonal menor, donde hay un solo elemento de la base, $E_{n,n}$. Por lo tanto, la cantidad de elementos de la base es

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Luego la dimensión del subespacio formado por las matrices triangulares superiores es $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

□

(18) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - 2z = 0\},$$
$$W_2 = \langle (1,-1,1), (2,1,-2), (3,0,-1) \rangle.$$

a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

Solución:

a) La forma más sencilla de hacer este ejercicio es encontrar la descripción de manera implícita de W_2 y agregando estas ecuaciones a las de W_1 encontramos la forma implícita de $W_1 \cap W_2$. A partir de esta forma implícita se encuentran los generadores.

Los vectores de W_2 son los (b_1, b_2, b_3) tales que

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Plantemos la matriz ampliado del sistema y hallamos una MRF:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ -1 & 1 & 0 & b_2 \\ 1 & -2 & -1 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2+F_1]{F_3-F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 3 & 3 & b_1 + b_2 \\ 0 & -4 & -4 & -b_1 + b_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}(b_1 + b_2) \\ 0 & -4 & -4 & -b_1 + b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3+4F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}(b_1 + b_2) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_1 + \frac{4}{3}b_2 + b_3 \end{array}\right].$$

Luego

$$W_2 = \left\{ (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{1}{3}b_1 + \frac{4}{3}b_2 + b_3 = 0 \right\},$$

o equivalentemente,

$$W_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x + 4y + 3z = 0 \right\}.$$

Por lo tanto,

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - 2z = 0 \text{ y } x + 4y + 3z = 0 \right\}.$$

Para encontrar una base de $W_1 \cap W_2$ debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$$

Planteamos la matriz correspondiente al sistema y hacemos Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Es decir que la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = -\frac{11}{3} z \\ y = \frac{5}{3} z. \end{cases}$$

Por lo tanto, una base de $W_1 \cap W_2$ es $\{(-11, 5, 3)\}$ y la dimensión es 1.

b) Para encontrar vectores que generan $W_1 + W_2$ unimos el conjunto de vectores que generan W_1 con el conjunto de vectores que generan W_2. Ahora bien,

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - 2z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = -y + 2z\} \\ &= \{(-y + 2z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-1, 1, 0) + z(2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Luego $\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$ es un conjunto de generadores de W_1. Por otra parte, $\{(1, -1, 1), (2, 1, -2), (3, 0, -1)\}$ es un conjunto de generadores de W_2. Por lo tanto, $\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1), (1, -1, 1), (2, 1, -2), (3, 0, -1)\}$ es un conjunto de generadores de $W_1 + W_2$.

Para encontrar una base de $W_1 + W_2$ plantemos la matriz cuyas filas son los vectores del conjunto de generadores y encontramos una MRF:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 + 2F_1 \\ F_5 + 3F_1}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_5 - F_3 \\ F_4 - F_3 \\ F_2/2 \\ F_5 - F_4}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 - F_2 \\ F_4 + \frac{5}{2} F_3 \\ F_5 - \frac{1}{2} F_3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego $\{(-1, 0, -\frac{1}{2}), (0, 1, \frac{1}{2}), (0, 0, 1)\}$ es una base de $W_1 + W_2$ y por lo tanto la dimensión es 3, es decir el subespacio es $\mathbb{R}^3$.

□

(19) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^8$ de dimensión 5, entonces $W_1 \cap W_2 = 0$.

b) Si W es un subespacio de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ de dimensión 2, entonces existe una matriz triangular superior no nula que pertence a W.

c) Sean $v_1, v_2, w \in \mathbb{K}^n$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $Av_1 = Av_2 = 0 \neq Aw$. Si $\{v_1, v_2\}$ es LI, entonces $\{v_1, v_2, w\}$ también es LI.

d) $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

e) $\{1, \operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

f) $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, si λ_1, λ_2 y λ_3 son todos distintos.

Solución:

a) Falso. Por ejemplo, si $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\rangle$ y $W_2 = \langle e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\rangle$, entonces $W_1 \cap W_2 = \langle e_4, e_5\rangle$. En este ejemplo $\dim W_1 = \dim W_2 = 5$ y $\dim W_1 \cap W_2 = 2$.

b) Verdadero. Sean

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

matrices que son base del subespacio de dimensión 2. Si $c = 0$, entonces A es triangular superior. Si $c' = 0$, entonces B es triangular superior. Si $c \neq 0$ y $c' \neq 0$, entonces $\frac{1}{c}A - \frac{1}{c'}B$ es cero en fila 2 y columna 1 y por lo tanto es triangular superior y no nula (pues A y B son LI). Es decir en cualquier caso encontramos una matriz no nula y triangular superior.

c) Verdadero. Seaan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w = 0$. Ahora bien,

$$0 = A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w) = \lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \lambda_3 Aw = \lambda_3 Aw.$$

Como $Aw \neq 0$, entonces $\lambda_3 = 0$. Por lo tanto, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$. Como $\{v_1, v_2\}$ es LI, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Es decir, $\{v_1, v_2, w\}$ es LI.

d) Verdadero. Supongamos que

$$a + b\operatorname{sen}(x) + c\cos(x) = 0.$$

Evaluando en $x = 0$ obtenemos $a + c = 0$. Evaluando en $x = \pi$ obtenemos $a - c = 0$. Sumando ambas ecuaciones obtenemos $a = 0$. Luego $c = 0$ y por lo tanto $b = 0$. Es decir, $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ es LI.

e) Falso. Por ejemplo, $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$, luego $\cos^2(x)$ es combinación lineal de 1 y $\operatorname{sen}^2(x)$.

f) Verdadero. Supongamos que

$$ae^{\lambda_1 x} + be^{\lambda_2 x} + ce^{\lambda_3 x} = 0. \tag{6.1}$$

Si derivamos la ecuación (6.1) obtenemos

$$a\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 x} + c\lambda_3 e^{\lambda_3 x} = 0. \tag{6.2}$$

Derivemos nuevamente:

$$a\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + b\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} + c\lambda_3^2 e^{\lambda_3 x} = 0. \tag{6.3}$$

Especializando (6.1), (6.2) y (6.3) en $x = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0, \\ a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3 &= 0, \\ a\lambda_1^2 + b\lambda_2^2 + c\lambda_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observar que la matriz de la izquierda es similar a la matriz de Vandermonde y es fácil probar que tiene el mismo determinante, es decir $(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$ (ver práctico 4, ejercicio (9)). Como los λ_i son distintos, entonces el determinante es distinto de cero y por lo tanto la única solución del sistema es $a = b = c = 0$. Es decir, $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}\}$ es LI.

$\square$