PRÁCTICO 5

# Autovalores y autovectores
# Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

**Objetivos.**

- Familiarizarse con las nociones de autovalor y autovector de una matriz cuadrada.
- Aprender a calcular el polinomio característico, los autovalores, y los autoespacios de una matriz cuadrada.

**Ejercicios.** Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores reales, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{R}$.

*a)* $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$,

*b)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$,

*c)* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

*d)* $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

*e)* $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

*f)* $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

(2) Calcular los autovalores complejos de las matrices *d)* y *f)* del ejercicio anterior, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{C}$.

**Observación.** Es oportuno destacar algunos fenómenos que podemos observar en los ejercicios (1)-(2).

(i) Una matriz con coeficientes reales puede no tener autovalores reales pero sí complejos (matriz *f)*) o tener ambos (matriz *d)*).

(ii) Para describir paramétricamente los autoespacios podemos necesitar distintas cantidades de parámetros para los distintos autovalores (la matriz *c)*). Esta cantidad mínima de parámetros es lo que llamaremos *dimensión*.

(iii) La cantidad de autovalores distintos es menor o igual al tamaño de la matriz. Incluso puede tener un sólo autovalor (matriz *e)* y más generalmente la matriz *e)* del Ejercicio (9)) o tener tantos como el tamaño (matriz *b)*).

(3) Probar que hay una única matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $(1,1)$ es autovector de autovalor 2, y $(-2,1)$ es autovector de autovalor 1.

(4) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio, con $a, b, c \in \mathbb{K}$. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = aA^2 + bA + c\,\mathrm{Id}_n\,.$$

Probar que todo autovector de $A$ con autovalor $\lambda$ es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(\lambda)$.

(5) Sea $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$.

*a)* Probar que el polinomio característico de $A$ es $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A)$.

*b)* Si $A$ no es invertible, probar que los autovalores de $A$ son 0 y $\mathrm{Tr}(A)$.

(6) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}_n)$ y el polinomio característico de $A$ tienen las mismas raíces.

**Observación** Algunos libros definen el polinomio característico de la matriz $A$ como $\tilde{\chi}_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}_n)$. Como vemos en el ejercicio anterior, ambas definiciones sirven para encontrar autovalores de $A$. El polinomio $\chi_A(x)$ tiene la particularidad de ser mónico, o sea que el coeficiente del término $x^n$ es 1, mientras que el coeficiente del término $x^n$ de $\tilde{\chi}_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}_n)$ es 1 si $n$ es par y $-1$ si $n$ es impar.

(7) Probar que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz nilpotente entonces 0 es el único autovalor de $A$. Usar esto para deducir que la matriz $\mathrm{Id}_n - A$ es invertible (esta es otra demostración del ejercicio (13) del Práctico 3).

(8) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

*a)* Existe una matriz invertible $A$ tal que 0 es autovalor de $A$.

*b)* Si $A$ es invertible, entonces todo autovector de $A$ es autovector de $A^{-1}$.

(9) Repetir los ejercicios (1) y (2) con las siguientes matrices.

*a)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$, *c)* $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix}$,

*d)* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$,

*e)* $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Ejercicios de repaso** Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(10) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y sea $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$, un polinomio. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = a_0 \operatorname{Id}_n + a_1A + \cdots + a_nA^n.$$

Probar que todo autovector de $A$ con autovalor $\lambda$ es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(\lambda)$.

(11) *a)* Calcular el polinomio característico de las siguientes matrices.

$$A_2 := \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}.$$

donde $a_0, a_1, a_2$ son escalares.

*b)* ⓐ Sean $a_0, ..., a_{n-1}$ escalares. Calcular el polinomio característico de

$$A_n := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

*c)* Deducir que dado un polinomio mónico $p(x)$ siempre existe una matriz $A$ tal que $\chi_A(x) = p(x)$.

(12) ⓐ Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y $\chi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Probar que

*a)* $a_0 = (-1)^n \det(A)$.

*b)* $a_{n-1} = -\operatorname{Tr}(A)$.

(13) ⓐ Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son los autovalores de $A$ (posiblemente repetidos), entonces se cumple que:

*a)* $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

*b)* $\operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

**Aclaración.** Los ejercicios (12) *b)* y (13) *b)* no son fáciles de probar y no sería posible que estuvieran en una evaluación de la materia. Pero dado que enunciamos los items (12) *a)* y (13) *a)*, es interesante saber que valen los items (12) *b)* y (13) *b)*, respectivamente.

**Ayudas.** (11) *b)* Desarrollar el determinante por la primera fila y hacer inducción.

(12) *a)a)* Evaluar el polinomio $\chi_A(x)$ en un valor apropiado para obtener el término independiente $a_0$.

(12) *b)* Desarrollar el determinante de $x \operatorname{Id} - A$ por la primera columna y hacer inducción en el tamaño de la matriz. Es decir, primero

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \det(x \operatorname{Id} - A) \\ &= (x - a_{11}) \det((x \operatorname{Id} - A)(1|1)) + a_{21} \det((x \operatorname{Id} - A)(2|1)) + \cdots \\ &\qquad + (-1)^n a_{n1} \det((x \operatorname{Id} - A)(n|1)).\end{aligned}$$

De estos sumandos, el único sumando donde hay $x^{n-1}$ es $(x - a_{11}) \det((x \operatorname{Id} - A)(1|1))$. Además, $\det((x \operatorname{Id} - A)(1|1))$ es el polinomio característico de la submatriz $A(1|1)$. Podemos aplicar la hipótesis inductiva a esta matriz y deducir que el coeficiente de $x^{n-1}$ en el producto de polinomios $(x - a_{11}) \det((x \operatorname{Id} - A)(1|1))$ es $-\operatorname{Tr}(A)$.

(13) Sobre $\mathbb{C}$ podemos descomponer el polinomio $\chi_A(x)$ de la siguiente manera

$$\chi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n). \qquad (\diamondsuit)$$

Con esta igualdad podemos calcular los términos $a_0$ y $a_{n-1}$ de $\chi_A(x)$ de dos maneras. La primera es la obtenida en el ejercicio (12). La segunda es usando la multiplicación del lado derecho de $(\diamondsuit)$. Para el término $a_0$ hay que evaluar en un valor apropiado. Para el término $a_{n-1}$ hay que notar que para obtener $x^{n-1}$ debemos elegir una $x$ de todos los factores salvo en uno y un término del estilo $-\lambda_i$. Igualando lo que obtengamos probamos el ejercicio.