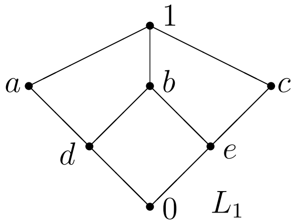
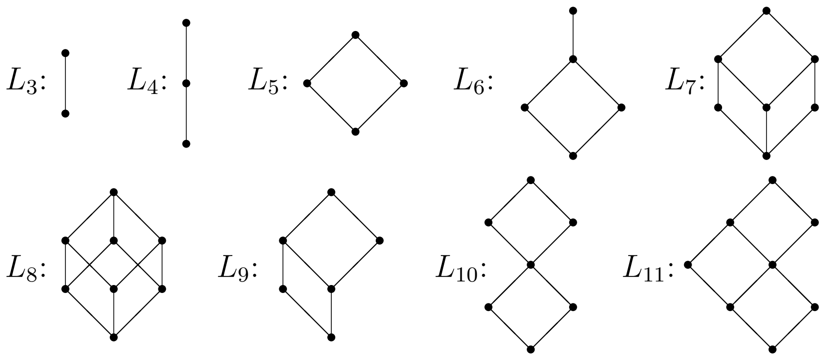
Introducción a la Lógica y la Computación — Estructuras de orden
Práctico 5: Complementos, distributiva y álgebras de Boole.

1. Considere ahora el reticulado L_1.



   a) Dé todos los complementos, si es que hay, de los siguientes elementos: a, b, d, 0.
   b) ¿Es L_1 un reticulado complementado?
   c) ¿Es L_1 un reticulado distributivo?

2. Considere los siguientes diagramas.



   a) Decidir si L_9 ó L_{10} se incrustan en L_{11}.
   b) ¿De cuántas maneras distintas puede incrustarse L_5 en L_{10}?
   c) ¿Se incrusta N_5 en L_8? ¿Se incrusta M_3 en L_{10}?
   d) Determine cuáles son isomorfos a algún D_n.
   e) Determine cuáles se incrustan en $\mathscr{P}(X)$ para algún conjunto X.
   f) Determine cuáles son reticulados distributivos.
   g) Determine cuáles admiten estructura de álgebra de Boole.

3. Sean $(L, \vee, \wedge)$ y $(L', \vee', \wedge')$ reticulados y $f : L \to L'$ inyectiva tal que
$$f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y) \qquad \text{y} \qquad f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y).$$
   Probar que f es una incrustación de L en L'.
4. Dar el diagrama de Hasse de un reticulado no distributivo donde todo elemento tenga a lo sumo un complemento.
5. Sea S un reticulado.
   a) Demuestre que si $x \leq y$, entonces para todo z en S, $x \vee (z \wedge y) \leq (x \vee z) \wedge y$.
   b) Compruebe que si S es distributivo vale la igualdad.
6. Demostrar que M_3 y N_5 no son distributivos usando la propiedad cancelativa. Concluir la dirección $(\Rightarrow)$ del Teorema M_3-N_5.
7. Demostrar que si un reticulado satisface la propiedad cancelativa, entonces es distributivo. (Ayuda: usar el Teorema M_3-N_5).
8. Determine los átomos de los posets L_3, L_8 y L_{11}.
9. Demuestre las siguientes propiedades de las álgebras de Boole.
   a) $\neg(\neg x) = x$;
   b) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.