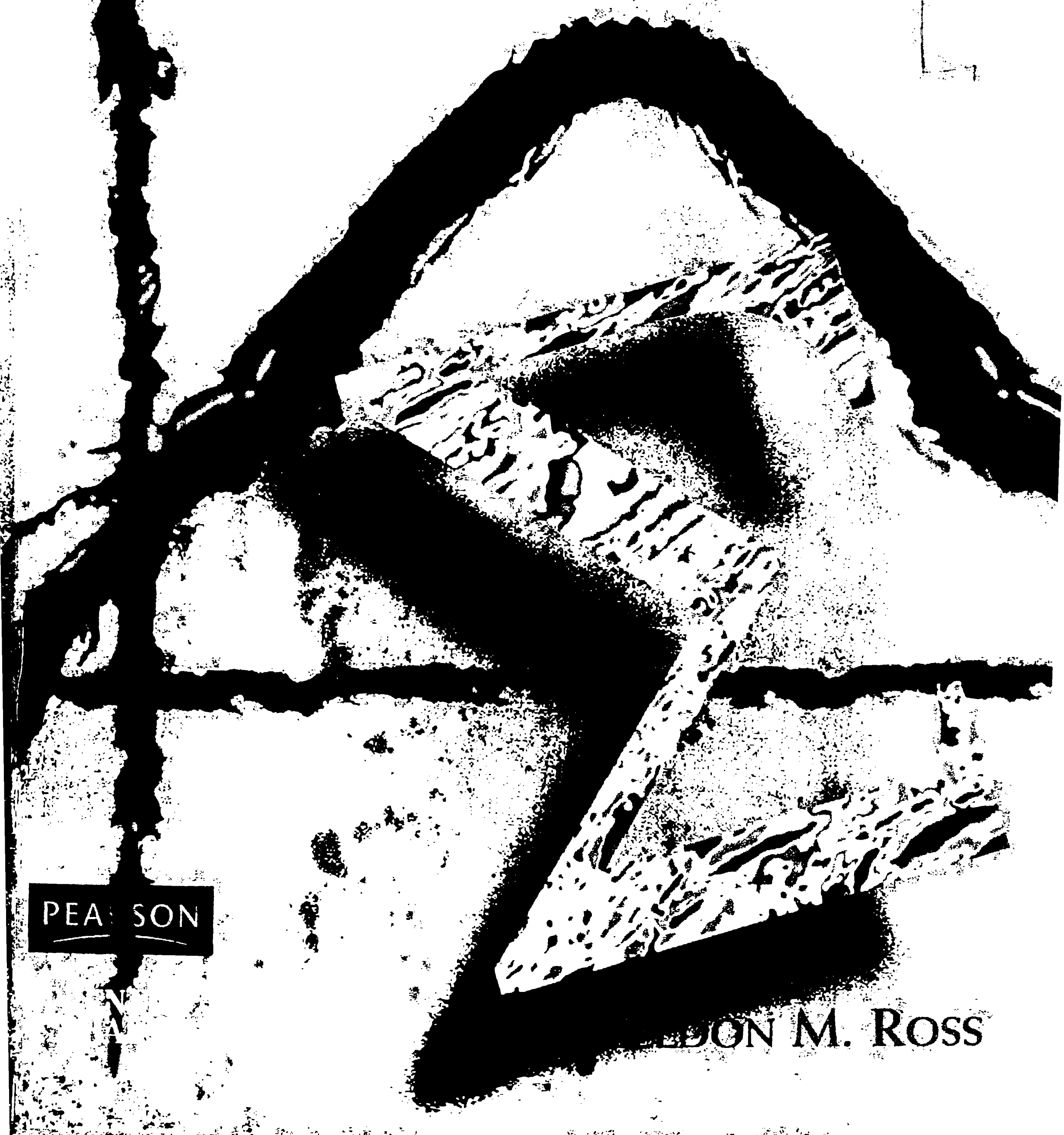
SIMULACIÓN

SEGUNDA EDICIÓN



PEARSON

LDON M. ROSS

Nuestro siguiente ejemplo muestra la forma de aplicar la técnica de rechazo para generar variables aleatorias normales.

Ejemplo 5f Generación de una variable aleatoria normal. Para generar una variable aleatoria normal estándar Z (es decir, aquella con media 0 y varianza 1), primero observe que el valor absoluto de Z tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad 0 < x < \infty \tag{5.2}$$

Primero generamos a partir de la función de densidad anterior, valiéndonos del método de rechazo en el que g es la función de densidad exponencial con media 1, es decir,

$$g(x) = e^{-x} \qquad 0 < x < \infty$$

Ahora,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{2/\pi}\, e^{x - x^2/2}$$

y entonces el valor máximo de $f(x)/g(x)$ ocurre en el valor de x que maximiza $x - x^2/2$. El cálculo muestra que esto ocurre cuando $x = 1$, de modo que podemos considerar

$$c = \text{Máx}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(1)}{g(1)} = \sqrt{2e/\pi}$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{cg(x)} &= \exp\left\{x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right\}\\ &= \exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2}\right\}\end{aligned}$$

esto implica que se obtiene el valor absoluto de una variable aleatoria normal unitaria como sigue:

PASO 1: Generar Y, una variable aleatoria exponencial con razón 1.
PASO 2: Generar un número aleatorio U.
PASO 3: Si $U \leq \exp\{-(Y-1)^2/2\}$, hacer $X = Y$. En caso contrario, regresar al paso 1.

Una vez simulada una variable aleatoria X con función de densidad como en la ecuación (5.2) (tal variable aleatoria se distribuye entonces como el valor absoluto de una normal unitaria), podemos obtener una normal unitaria Z al hacer que sea igualmente probable que Z tome X o $-X$.

En el paso 3, el valor Y se acepta si $U \leq \exp\{-(Y-1)^2/2\}$, lo cual es equivalente a $-\log U \geq (Y-1)^2/2$. Sin embargo, en el ejemplo 5b se mostró que $-\log U$ es exponencial con razón 1, de modo que lo anterior es equivalente a lo siguiente:

PASO 1: Generar exponenciales independientes con razón 1, Y_1 y Y_2.

PASO 2: Si $Y_2 \geq (Y_1 - 1)^2/2$, hacer $X = Y_1$. En caso contrario, regresar al paso 1.

Suponga ahora que lo anterior implica que Y_1 es aceptada, por lo que sabemos que Y_2 es mayor que $(Y_1 - 1)^2/2$. ¿En cuánto excede una a la otra? Para responder, recordemos que Y_2 es exponencial con razón 1, por lo cual, dado que excede cierto valor, la cantidad en la que Y_2 excede a $(Y_1 - 1)^2/2$ [es decir, su "vida adicional" arriba del tiempo $(Y_1 - 1)^2/2$] se distribuye exponencial con razón 1, por la propiedad de que no tiene memoria. Es decir, cuando aceptamos en el paso 2 no sólo obtenemos X (el valor absoluto de una normal unitaria), sino que al calcular $Y_2 - (Y_1 - 1)^2/2$ también podemos generar una variable aleatoria exponencial (independiente de X) con razón 1.

Por lo tanto, en resumen, tenemos el siguiente algoritmo que genera una exponencial con razón 1 y una variable aleatoria normal estándar independiente.

PASO 1: Generar Y_1, una variable aleatoria exponencial con razón 1.

PASO 2: Generar Y_2, una variable aleatoria exponencial con razón 1.

PASO 3: Si $Y_2 - (Y_1 - 1)^2/2 > 0$, hacer $Y = Y_2 - (Y_1 - 1)^2/2$ e ir al paso 4. En caso contrario, ir al paso 1.

PASO 4: Generar un número aleatorio U y hacer

$$Z = \begin{cases} Y_1 & \text{si } U \leq \dfrac{1}{2} \\ -Y_1 & \text{si } U > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Las variables aleatorias Z y Y generadas así son independientes, Z es normal con media 0 y varianza 1 y Y es exponencial con razón 1 (si desea que la variable aleatoria normal tenga media μ y varianza σ^2, sólo considere $\mu + \sigma Z$). ■

Observaciones

1. Como, $c = \sqrt{2e/\pi} \approx 1.32$, lo anterior requiere un número de iteraciones del paso 2 con una distribución geométrica y media 1.32.
2. Si queremos generar una sucesión de variables aleatorias normales estándar, nos servimos de la variable aleatoria exponencial Y obtenida en el paso 3 como la exponencial inicial necesaria en el paso 1 para generar la siguiente normal. Por

lo tanto, en promedio, simulamos una normal estándar generando 1.64 (= 2 × 1.32 − 1) exponenciales y calculando 1.32 cuadrados. ■

5.3 El método polar para generar variables aleatorias normales

Sean X y Y variables aleatorias normales unitarias independientes y sean R y θ las coordenadas polares del vector (X, Y). Es decir (véase la figura 5.2)

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

Como X y Y son independientes, su densidad conjunta es el producto de sus densidades individuales y por lo tanto está dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2 + y^2)/2} \end{aligned} \tag{5.3}$$

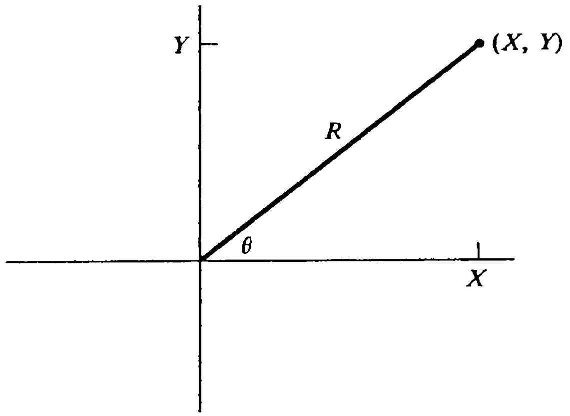


Figura 5.2