Introducción a la Lógica y la Computación — Autómatas y Lenguajes
Práctico 5: Gramáticas

1. Defina gramáticas libres de contexto que generen los siguientes lenguajes:
   a) Números enteros (por ejemplo, 20, −344, −03).
   b) Números enteros pares sin ceros no significativos (ej. **no** puede generar −02).
   c) Expresiones decimales de números racionales (ej. −3,1415926; 0,0001).
2. Sea G la gramática con símbolo inicial S, símbolos terminales a y b, y producciones:
$$S \to bS \mid aA \mid a, \qquad A \to aS \mid bB, \qquad B \to bA \mid aS \mid b.$$
   a) Demuestre, proporcionando la derivación correspondiente, que las siguientes cadenas pertenecen a $L(G)$
$$aaabb, \qquad bbbaaaaa, \qquad abaaabbabbaa.$$
   b) Probar que si $\alpha \in L(G)$ entonces α tiene un número impar de símbolos a. (Ayuda: encontrar un buen invariante).
   c) Probar que la recíproca del ítem anterior es falsa.
   d) Encuentre una gramática regular que genere el mismo lenguaje que G.
3. Defina gramáticas regulares que generen los siguientes lenguajes:
   a) $\{\alpha \in \{a, b, c\}^* \mid \alpha = a^n bc^m,\ n, m > 0\}$.
   b) El lenguaje del Ejercicio 1a.
   c) El lenguaje del Ejercicio 1b.
4. Sea $G = (V, T, P, S)$ una gramática regular y $X \in V$. Demostrar los siguientes por inducción en el largo de la derivación $\overset{*}{\Longrightarrow}$:
   a) Si $X \overset{*}{\Longrightarrow} \beta$ entonces $|\beta| > 1$ ó $\beta =$ "X".
   b) $X \overset{*}{\Longrightarrow} \beta$ y $\beta \in (V \cup T)^* \setminus T^*$ si y sólo si $\beta = \alpha Y$ con $\alpha \in T^*$ y $Y \in V$.
   c) $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha$ y $\alpha \in T^*$ si y sólo si existe $Y \in V$ tal que $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y$ y la producción $Y \longrightarrow \epsilon$ está en P. Se concluye que $X \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha Y \Longrightarrow \alpha$.
5. Obtener un autómata finito no determinista cuyo lenguaje aceptado sea el generado por la siguiente gramática regular G: las variables son S, E y C, con S como variable inicial; los terminales son a, b; y las producciones son:
$$S \to bS, \quad S \to aC, \quad C \to bC, \quad C \to bE, \quad E \to \epsilon.$$
6. Sea G la gramática definida por las producciones
$$S \to bS \mid aA \mid b, \qquad A \to aS \mid bA \mid a$$
   donde a y b son los símbolos terminales. Obtener:
   a) Un autómata finito no determinista $\mathbb{M}$ tal que $L(\mathbb{M}) = L(G)$.
   b) Una expresión regular r tal que $L(r) = L(G)$.
7. Construir una gramática regular que genere el lenguaje denotado la expresión regular $b(a^* + b)^* bb^* a$.
8. Sea G la gramática regular definida por las producciones
$$S \to bS \mid aA \mid bE, \qquad A \to aS \mid bA \mid aE, \qquad E \to \epsilon,$$
   donde a y b son los símbolos terminales. Demuestre que $\alpha \in L(G)$ sii $\alpha \neq \epsilon$ y contiene un número par de símbolos a.