PRÁCTICO 8

Soluciones
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

(1) Dar las coordenadas del polinomio $2x^2 + 10x - 1 \in \mathbb{K}_3[x]$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \{1, x+1, x^2+x+1\}.$$

Solución:

$$[2x^2 + 10x - 1]_{\mathcal{B}} = (a, b, c)$$
$$\Updownarrow$$
$$2x^2 + 10x - 1 = a \cdot 1 + b \cdot (x+1) + c \cdot (x^2 + x + 1)$$
$$\Updownarrow$$
$$2x^2 + 10x - 1 = cx^2 + (b+c)x + (a+b+c)$$
$$\Updownarrow$$
$$c = 2,\ b + c = 10,\ a + b + c = -1.$$

Este último renglón es un sistema que se resuelve fácilmente por sustitución: $c = 2$, $b = 8$ y $a = -11$. Por lo tanto,

$$[2x^2 + 10x - 1]_{\mathcal{B}} = (-11, 8, 2).$$

$\square$

(2) Dar las coordenadas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Más generalmente, dar las coordenadas de cualquier matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$.

Solución:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$[A]_{\mathcal{B}} = (b, d, a, c).$$

En particular,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = (2, 4, 1, 3).$$

□

(3) *a)* Dar una base del subespacio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$.
b) Dar las coordenadas de $w = (1, -1, -1)$ en la base que haya dado en el item anterior.
c) Dado $(x, y, z) \in W$, dar las coordenadas de (x, y, z) en la base que haya calculado en el item anterior.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + 2z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x = y - 2z\} \\ &= \{(y - 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{K}\} \\ &= \{y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{K}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ generan W. Además, como $(1, 1, 0)$ y $(-2, 0, 1)$ son LI, entonces $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ es una base ordenada de W.

b) Primero, es claro que $w = (1, -1, -1) \in W$, pues cumple con la ecuación implícita que define W. Entonces

$$\begin{aligned} [w]_{\mathcal{B}} = (a, b) &\Leftrightarrow (1, -1, -1) = a(1, 1, 0) + b(-2, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow 1 = a - 2b,\ -1 = a,\ -1 = b. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[w]_{\mathcal{B}} = (-1, -1).$$

c) Sea $(x, y, z) \in W$. Entonces

$$\begin{aligned} [(x, y, z)]_{\mathcal{B}} = (a, b) &\Leftrightarrow (x, y, z) = a(1, 1, 0) + b(-2, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow x = a - 2b,\ y = a,\ z = b. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[(x, y, z)]_{\mathcal{B}} = (y, z).$$

$\square$

(4) Escribir las matrices de las siguientes transformaciones lineales respecto de las bases canónicas de los espacios involucrados.

a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.

b) $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $S(x, y, z) = (x - y + z, 2x - y + 2z)$.

c) $D : P_4 \longrightarrow P_4$, $D(p(x)) = p'(x)$.

d) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(A) = \operatorname{tr}(A)$.

e) $L : P_3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $L(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a & b+c \\ b+c & a \end{bmatrix}$.

f) $Q : P_3 \longrightarrow P_4$, $Q(p(x)) = (x + 1)p(x)$.

Solución: denotemos $\mathcal{C}_n$ a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, Denotemos $\mathcal{B}_n$ a la base $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ de P_n y denotemos $\mathcal{M}_{2\times 2}$ a la base$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

a)

$$T(e_1) = T(1, 0) = (1, 1, 2) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1)$$
$$T(e_2) = T(0, 1) = (-1, 1, 3) = -1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1).$$

Por lo tanto, la matriz de T respecto de las bases canónicas es

$$[T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

b)

$$S(e_1) = S(1, 0, 0) = (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1)$$
$$S(e_2) = S(0, 1, 0) = (-1, -1) = -1(1, 0) - 1(0, 1)$$
$$S(e_3) = S(0, 0, 1) = (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1).$$

Por lo tanto, la matriz de S respecto de las bases canónicas es

$$[S]_{\mathcal{C}_3\mathcal{C}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

c)

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$
$$D(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$
$$D(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$
$$D(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3.$$

Por lo tanto, la matriz de D respecto de las bases canónicas es

$$[D]_{\mathcal{B}_4\mathcal{B}_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e)

$$L(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 1 \cdot E_{22}$$
$$L(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot E_{11} + 1 \cdot E_{12} + 1 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22}$$
$$L(x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot E_{11} + 1 \cdot E_{12} + 1 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22}$$

Por lo tanto, la matriz de L respecto de las bases canónicas es

$$[L]_{\mathcal{B}_3\mathcal{M}_{2\times 2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

f)

$$Q(1) = x + 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$
$$Q(x) = (x+1)x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$
$$Q(x^2) = (x+1)x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3.$$

Por lo tanto, la matriz de Q respecto de las bases canónicas es

$$[Q]_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

(5) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{K}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$ otra base de $\mathbb{R}^2$.

a) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

b) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

c) ¿Qué relación hay entre $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$?

d) Encontrar $(x,y),(z,w) \in \mathbb{K}^2$ tal que $[(x,y)]_{\mathcal{B}} = (1,4)$ y $[(z,w)]_{\mathcal{B}} = (1,-1)$.

e) Determinar las coordenadas de $(2,3)$ y $(0,1)$ en las bases $\mathcal{B}_2$.

Solución: recordar que si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases ordenadas de V, la matriz $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es llamada la *matriz de cambio de base* de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.

a)

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}(1,0) &= 1\cdot(1,0)+0\cdot(1,1)\\ \mathrm{Id}(0,1) &= (-1)\cdot(1,0)+1\cdot(1,1).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}(1,0) &= 1\cdot(1,0)+0\cdot(0,1)\\ \mathrm{Id}(1,1) &= 1\cdot(1,0)+1\cdot(0,1).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

c)

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathrm{Id}\,.$$

Por la teórica sabemos que esta relación vale en general.

d)

$$\begin{aligned}[(x,y)]_{\mathcal{B}} = (1,4) &\Leftrightarrow (x,y) = 1\cdot(1,0)+4\cdot(1,1)\\ &\Leftrightarrow x=5,\ y=4.\end{aligned}$$

También es posible hacerlo por la matriz de cambio de base:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[(x,y)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}.$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}[(z,w)]_{\mathcal{B}} = (1,-1) &\Leftrightarrow (z,w) = 1\cdot(1,0)+(-1)\cdot(1,1)\\ &\Leftrightarrow z=0,\ w=-1.\end{aligned}$$

Obviamente, también es posible hacerlo por la matriz de cambio de base:

$$\begin{bmatrix}z\\ w\end{bmatrix} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[(z,w)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}.$$

e)

$$[(2,3)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}[(2,3)]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}.$$

El caso general es análogo:

$$[(a,b)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}[(a,b)]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ b \end{bmatrix}.$$

□

(6) Sea $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$.

a) Calcular la inversa de P.

b) Dar una base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^3$ tal que P es la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica de $\mathbb{K}^3$ a la base $\mathcal{B}$.

c) Encontrar $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ tal que su vector de coordenadas con respecto a $\mathcal{B}$ es

$$[(x,y,z)]_{\mathcal{B}} = (2,-1,-1).$$

Solución:

a) Utilizamos el método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3+2F_2]{F_1-F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}F_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[F_2+F_3]{F_1-F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Concluyendo,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Si $\mathcal{C}$ es la base canónica, queremos encontrar $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, tal que $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}} = P$. Es decir, queremos encontrar $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$e_1 = \mathrm{Id}(e_1) = 1\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 3\cdot v3$$

$$e_2 = \mathrm{Id}(e_2) = 1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 1\cdot v3$$

$$e_3 = \mathrm{Id}(e_3) = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 0\cdot v3.$$

Podemos plantear este sistemas de ecuaciones en coordenadas y resolverlo, pero es más fácil observar que $P^{-1} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}}$ y por lo tanto, v_1, v_2, v_3 son las

columnas de P^{-1}, es decir
$$\mathcal{B} = \left\{(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), (0,0,1), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\right\}.$$

c) Recordar que
$$[v]_{\mathcal{B}} = (a,b,c) \qquad \Leftrightarrow \qquad v = a\cdot v_1 + b\cdot v_2 + c\cdot v_3.$$
por lo tanto, $[(x,y,z)]_{\mathcal{B}} = (2,-1,-1)$ significa que
$$\begin{aligned}(x,y,z) &= 2\cdot(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) + (-1)\cdot(0,0,1) + (-1)\cdot(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ &= (-1,3,-1) + (0,0,-1) + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ &= (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}).\end{aligned}$$

□

(7) Sean $\mathcal{C}_n$, $n = 2,3$, las bases canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Sean $\mathcal{B}_2 = \{(1,0),(1,1)\}$ y $\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

a) Escribir la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}_n,\mathcal{C}_n}$ de $\mathcal{B}_n$ a $\mathcal{C}_n$, $n = 2,3$.

b) Escribir la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}_n}$ de $\mathcal{C}_n$ a $\mathcal{B}_n$, $n = 2,3$.

Solución:

a) Denotemos $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (1,1)$. Luego, por definición la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{C}_2$ es
$$P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}_2} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2} = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{*}$$

Análogamente, denotemos $w_1 = (1,0,0)$, $w_2 = (1,1,0)$, $w_3 = (1,1,1)$, por lo tanto
$$P_{\mathcal{B}_3,\mathcal{C}_3} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{**}$$

b) La matriz de cambio de base de $\mathcal{C}_2$ a $\mathcal{B}_2$ es $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}_2} = [\mathrm{Id}]^{-1}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}_2}$, por lo tanto debemos calcular la inversa de la matriz (*). Utilizamos el método de Gauss-Jordan:
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_1 - F_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$
En consecuencia:
$$P_{\mathcal{C}_2,\mathcal{B}_2} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Análogamente, la matriz de cambio de base de $\mathcal{C}_3$ a $\mathcal{B}_3$ es $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}_3} = [\mathrm{Id}]^{-1}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{C}_3}$, por lo tanto debemos calcular la inversa de la matriz (**). Utilizamos el método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2-F_3]{F_1-F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_1-F_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

En consecuencia:

$$P_{\mathcal{C}_3,\mathcal{B}_3} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

(8) Sean $\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_n$ como en el ejercicio (7) y sean las siguientes transformaciones lineales:

- $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.
- $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $S(x, y, z) = (x - y + z, 2x - y + 2z)$.

Entonces, para cada una de las transformaciones lineales anteriores,

a) Dar las matrices respecto a las bases $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{C}_n$.
b) Dar las matrices respecto a las bases $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{B}_n$.
c) Dar las matrices respecto a las bases $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{B}_n$.

Solución:

a) Para calcular $[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_3}$ debemos calcular $T(v_1)$ y $T(v_2)$ en función de la base $\mathcal{C}_3$. Pero como esta última es la canónica debemos calcular $T(1, 0)$ y $T(1, 1)$ y ponerlos como columnas:

$$T(1, 0) = (1, 1, 2) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1)$$
$$T(1, 1) = (0, 2, 5) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 5 \cdot (0, 0, 1).$$

Luego,

$$[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Análogamente,

$$S(1, 0, 0) = (1, 2),$$
$$S(1, 1, 0) = (0, 1),$$
$$S(1, 1, 1) = (1, 3).$$

Luego,

$$[S]_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Para calcular $[T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}_3}$ debemos calcular $T(e_1)$ y $T(e_2)$ en función de la base $\mathcal{B}_3$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} T(1,0) = (1,1,2) &= a_{11}\cdot(1,0,0) + a_{21}\cdot(1,1,0) + a_{31}\cdot(1,1,1) \\ &= (a_{11}+a_{21}+a_{31}, a_{21}+a_{31}, a_{31}) \\ T(0,1) = (-1,1,3) &= a_{12}\cdot(1,0,0) + a_{22}\cdot(1,1,0) + a_{32}\cdot(1,1,1) \\ &= (a_{12}+a_{22}+a_{32}, a_{22}+a_{32}, a_{32}), \end{aligned}$$

y debemos calcular los a_{ij}. Estas ecuaciones son muy sencillas de resolver pues $a_{31} = 2$, $a_{21} = 1 - a_{31} = -1$, $a_{11} = 1 - a_{21} - a_{31} = 0$. Análogamente, $a_{32} = 3$, $a_{22} = 1 - a_{32} = -2$, $a_{12} = -1 - a_{22} - a_{32} = -2$. Por lo tanto,

$$[T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}_3} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Análogamente, para calcular $[S]_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}_2}$ debemos calcular $S(e_1)$, $S(e_2)$ y $S(e_3)$ en función de la base $\mathcal{B}_2$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} S(1,0,0) &= (1,2) = a_{11}\cdot(1,0) + a_{21}\cdot(1,1) = (a_{11}+a_{21}, a_{21}) \\ S(0,1,0) &= (-1,-1) = a_{12}\cdot(1,0) + a_{22}\cdot(1,1) = (a_{12}+a_{22}, a_{22}) \\ S(0,0,1) &= (1,2) = a_{13}\cdot(1,0) + a_{23}\cdot(1,1) = (a_{13}+a_{23}, a_{23}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a_{21} = 2$, $a_{11} = 1 - a_{21} = -1$, $a_{22} = -1$, $a_{12} = -1 - a_{22} = 0$, $a_{23} = 2$, $a_{13} = 1 - a_{23} = -1$. En consecuencia,

$$[S]_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

c) Para calcular $[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}$ debemos calcular $T(1,0)$ y $T(1,1)$ en función de la base $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (1,1,2) = 0\cdot(1,0,0) + (-1)\cdot(1,1,0) + 2\cdot(1,1,1) \\ T(1,1) &= (0,2,5) = (-2)\cdot(1,0,0) + (-3)\cdot(1,1,0) + 5\cdot(1,1,1). \end{aligned}$$

Esto sale por cálculos sencillos. Por lo tanto,

$$[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Análogamente, para calcular $[S]_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2}$ debemos calcular $S(1,0,0)$, $S(1,1,0)$ y $S(1,1,1)$ en función de la base $\{(1,0),(1,1)\}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
S(1,0,0) &= (1,2) = (-1)\cdot(1,0) + 2\cdot(1,1) \\
S(1,1,0) &= (0,1) = (-1)\cdot(1,0) + 1\cdot(1,1) \\
S(1,1,1) &= (1,3) = (-2)\cdot(1,0) + 3\cdot(1,1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[S]_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observación. Es posible hacer los incisos *b)* y *c)* de otra forma, utilizando las matrices de cambio de base. En estos casos quizás no valga la pena, pues la cuentas "directas" son muy sencillas, pero de cualquier forma lo haremos a modo ilustrativo.

b) (Otra forma) Observemos que

$$[T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}_3} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}_3}[T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3} = [\mathrm{Id}]^{-1}_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3}[T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3}.$$

Luego debemos primero calcular $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3}$ y $[T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3}$, después la inversa de la primera matriz y finalmente multiplicar matrices. La matriz $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3}$ esta formada por los vectores de la base $\mathcal{B}_3$ como columnas:

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ya vimos que

$$\begin{aligned}
T(1,0) &= (1,1,2) \\
T(0,1) &= (-1,1,3),
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$[T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculemos ahora la inversa de $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2-F_3]{F_1-F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_1-F_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Por lo tanto,

$$[\mathrm{Id}]^{-1}_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$[T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

matriz que, obviamente, ya habíamos obtenido.

Para calcular, $[S]_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}_2}$ usamos la fórmula:

$$[S]_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}_2} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}_2}[S]_{\mathcal{C}_3\mathcal{C}_2} = [\mathrm{Id}]^{-1}_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2}[S]_{\mathcal{C}_3\mathcal{C}_2}.$$

c) (Otra forma) Observemos que

$$[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}_3}[T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2} = [\mathrm{Id}]^{-1}_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3}[T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2}.$$

Ahora bien,

$$[\mathrm{Id}]^{-1}_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las dos primeras matrices fueron calculadas en el inciso anterior y la tercera es obvia. Por lo tanto,

$$[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, para calcular $[S]_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2}$ usamos la fórmula:

$$[S]_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}_2}[S]_{\mathcal{C}_3\mathcal{C}_2}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3} = [\mathrm{Id}]^{-1}_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2}[S]_{\mathcal{C}_3\mathcal{C}_2}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3}.$$

□

(9) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - y, x - z).$$

Sean $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

a) Calcular la matriz $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}$, es decir la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}'$.

b) Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dar las coordenadas de $T(x, y, z)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.

c) Sea $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz respecto a las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}$ es

$$[S]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcular la matriz de la composición $T \circ S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con respecto a la base $\mathcal{B}'$.

Solución:

a)

$$\begin{array}{lllllllll} T(1,0,0) & = & (1,1) & = & 1 & \cdot & (1,1) & + & 0 & \cdot & (1,-1) \\ T(0,1,0) & = & (-1,0) & = & (-\frac{1}{2}) & \cdot & (1,1) & + & (-\frac{1}{2}) & \cdot & (1,-1) \\ T(0,0,1) & = & (0,-1) & = & (-\frac{1}{2}) & \cdot & (1,1) & + & \frac{1}{2} & \cdot & (1,-1). \end{array}$$

Por lo tanto,

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

b) Dado el vector (x, y, z), debemos resolver el sistema

$$(x-y, x-z) = a \cdot (1,1) + b \cdot (1,-1) \quad \Rightarrow$$
$$(x-y, x-z) = (a+b, a-b).$$

Por lo tanto

$$(x-y)+(x-z) = 2a \;\Rightarrow\; 2x-y-z = 2 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2}(2x-y-z)$$
$$(x-y)-(x-z) = 2b \;\Rightarrow\; z-y = 2b \;\Rightarrow\; b = \frac{1}{2}(z-y).$$

Es decir,

$$[T(x,y,z)]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}(2x-y-z, z-y).$$

c) Calculamos en en inciso *a)* la matriz $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}$, entonces

$$\begin{aligned} [T \circ S]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} &= [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}[S]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 1 & 5/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

(10) Sea A la matriz del ejercicio (1)*a)* del práctico 5 y $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T_A(v) = Av$. Hallar los autovalores de T_A, y para cada

uno de ellos, dar una base de autovectores del correspondiente autoespacio. Decidir si T_A es o no diagonalizable. En caso de serlo dar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

Repetir esto para cada una de las matrices de dicho ejercicio.

Solución: Resolvemos el ejercicio para cada una de las matrices del ejercicio (1) del práctico 5. Recordemos que para que una transformación lineal T sea diagonalizable, es necesario y suficiente que exista una base de autovectores. En caso de existir, la matriz de T en dicha base, digamos $\mathcal{B}$, es diagonal y los valores de la diagonal son los autovalores de T. Más aún, si P es la matriz de cambio de base de la base canónica a $\mathcal{B}$, entonces $P^{-1}AP$ es la matriz diagonal de T en la base canónica.

a) Denominamos A a la matriz del enunciado *a)* del práctico 5. entonces,

$$T_A(x,y) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y \\ x+4y \end{bmatrix}.$$

Como ya fue calculado hay un solo autovalor $\lambda = 3$ y el autoespacio asociado es $\{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto, T_A no es diagonalizable.

b) Denominamos B a la matriz del enunciado. Luego,

$$T_B(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x-2y \end{bmatrix}.$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 1$ y los autoespacios son $V_{-2} = \{(0,t) : t \in \mathbb{R}\}$ y $V_1 = \{(3t,t) : t \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto una base de autovectores es $\mathcal{B} = \{(0,1),(3,1)\}$ y T_B es diagonalizable. La matriz de cambio de base de la base canónica a $\mathcal{B}$ se calcula resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}(1,0) &= a_{11}\cdot(0,1) + a_{21}\cdot(3,1)\\ (0,1) &= a_{12}\cdot(0,1) + a_{22}\cdot(3,1),\end{aligned}$$

el cual se soluciona fácilmente: $a_{11} = -1/3$, $a_{21} = 1/3$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = 0$. Por lo tanto,

$$P = \begin{bmatrix} -1/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Denominamos C a la matriz del enunciado. Por lo tanto

$$T_C(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -x+y-z \\ 2z \end{bmatrix}.$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$ y los autoespacios son $V_2 = \{(-t,t,s) : t,s \in \mathbb{R}\}$ y $V_1 = \{(0,t,0) : t \in \mathbb{R}\}$, por lo tanto, podemos elegir como base $\mathcal{B} = \{(-1,1,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$ y T_C es diagonalizable. La matriz de cambio de base de la base canónica a $\mathcal{B}$ se calcula resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}(1,0,0) &= a_{11}\cdot(-1,1,0) + a_{21}\cdot(0,0,1) + a_{31}\cdot(0,1,0)\\ (0,1,0) &= a_{12}\cdot(-1,1,0) + a_{22}\cdot(0,0,1) + a_{32}\cdot(0,1,0)\\ (0,0,1) &= a_{13}\cdot(-1,1,0) + a_{23}\cdot(0,0,1) + a_{33}\cdot(0,1,0).\end{aligned}$$

Las soluciones son, $a_{11} = -1$, $a_{21} = 0$, $a_{31} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{32} = 1$, $a_{13} = 0$, $a_{23} = 1$, $a_{33} = 0$. Por lo tanto,

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

d) Denominamos D a la matriz del enunciado. Entonces,

$$T_D(x,y,z) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -5\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x\\ 3y-5z\\ y-z\end{bmatrix}.$$

El único autovalor real de T_D es -1 y el autoespacio asociado es $\{(t,0,0) : t \in \mathbb{R}\}$, por lo tanto el operador no es diagonalizable.

e) Denominamos E a la matriz del enunciado. Entonces,

$$T_E(x,y,z) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x\\ x+\lambda y\\ y+\lambda z\end{bmatrix}.$$

Hay un único autovalor, que es λ y $V_\lambda = \{(0,0,t) : t \in \mathbb{R}\}$, por lo tanto el operador no es diagonalizable.

f) Denominamos F a la matriz del enunciado. Entonces

$$T_F(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta\\ -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta\end{bmatrix}.$$

Como vimos cuando resolvimos el ejercicio *f)* del práctico 5, hay tres casos para analizar según el valor de θ.

i) Cuando $\theta = 0$ tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. En ese caso, T_F es la identidad y por lo tanto hay un único autovalor, 1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, T_F es diagonalizable y podemos tomar como base la base canónica, por lo tanto $P = \mathrm{Id}$.

ii) Cuando $\theta = \pi$, tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. En este caso $T_F = -\mathrm{Id}$ y hay un solo autovalor, -1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, T_F es diagonalizable y podemos tomar como base la base canónica, por lo tanto $P = \mathrm{Id}$.

iii) Cuando $\theta \neq 0, \pi$ y en este caso no hay autovalores reales. Por lo tanto, T_F no es diagonalizable.

□

(11) Repetir el ejercicio anterior para cada matriz del ejercicio (1) del práctico 5 pero ahora consideradando a la transformación como una transformación lineal entre los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $\mathbb{C}^n$.

Solución: Los incisos *a)*, *b)*, *c)* y *e)* tienen la misma respuesta que en el ejercicio anterior, pues los polinomios característicos no tienen raíces complejas. Para resolver los casos *d)* y *f)* usamos los resultados del ejercicio (2) del práctico 5.

d) Los autovalores de T_D son $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$ y los autoespacios son $V_{\lambda_1} = \{((2 + i)t, t) : t \in \mathbb{C}\}$, $V_{\lambda_2} = \{((2 - i)t, t) : t \in \mathbb{C}\}$. Por lo tanto, T_D es diagonalizable. Una base de autovectores es $\mathcal{B} = \{(2 + i, 1), (2 - i, 1)\}$. La matriz de cambio de base de la base canónica a $\mathcal{B}$ se calcula resolviendo el sistema

$$
\begin{aligned}
(1, 0) &= a_{11} \cdot (2 + i, 1) + a_{21} \cdot (2 - i, 1) \\
(0, 1) &= a_{12} \cdot (2 + i, 1) + a_{22} \cdot (2 - i, 1),
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $a_{11}(2 + i) + a_{21}(2 - i) = 1$, $a_{11} + a_{21} = 0$. Resolviendo este sistema obtenemos $a_{11} = -i/2$, $a_{21} = i/2$. De forma análoga, $a_{12} + a_{22} = 1$, $a_{12}(2 + i) + a_{22}(2 - i) = 0$ y resolviendo este sistema obtenemos $a_{12} = i/2$, $a_{22} = -i/2$. Por lo tanto,

$$
P = \begin{bmatrix} -i/2 & i/2 \\ i/2 & -i/2 \end{bmatrix}.
$$

f) Los casos $\theta = 0, \pi$ ya se hicieron en el ejercicio anterior. Cuando $\theta \neq 0, \pi$ los autovalores de T_F son $\lambda_1 = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ y $\lambda_2 = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$ y los autoespacios son $V_{\lambda_1} = \{t(-i, 1) : t \in \mathbb{C}\}$, $V_{\lambda_2} = \{t(i, 1) : t \in \mathbb{C}\}$. Por lo tanto, T_F es diagonalizable. Una base de autovectores es $\mathcal{B} = \{(-i, 1), (i, 1)\}$. La matriz de cambio de base de la base canónica a $\mathcal{B}$ se calcula resolviendo el sistema

$$
\begin{aligned}
(1, 0) &= a_{11} \cdot (-i, 1) + a_{21} \cdot (i, 1) \\
(0, 1) &= a_{12} \cdot (-i, 1) + a_{22} \cdot (i, 1),
\end{aligned}
$$

cuyas soluciones son $a_{11} = i/2$, $a_{21} = -i/2$, $a_{12} = 1/2$, $a_{22} = 1/2$. Por lo tanto,

$$
P = \begin{bmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{bmatrix}.
$$

□

(12) Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y $v \in V$ un autovector de autovalor λ. Probar las siguientes afirmaciones.

a) Si $\lambda = 0$, entonces $v \in \operatorname{Nu}(T)$.

b) Si $\lambda \neq 0$, entonces $v \in \operatorname{Im}(T)$.

c) Si $T^2 = 0$, entonces $T - \mathrm{Id}$ es un isomorfismo.

Solución:

a) Como v es autovector de autovalor 0, entonces $T(v) = 0 \cdot v = 0$. Por lo tanto, $v \in \mathrm{Nu}(T)$.

b) Como v es autovector de autovalor λ, entonces $T(v) = \lambda v$. Como $\lambda \neq 0$, podemos dividir por λ y en consecuencia $T(v/\lambda) = \lambda v/\lambda = v$. Por lo tanto, $v \in \mathrm{Im}(T)$.

c) Observemos que

$$(T - \mathrm{Id})(T + \mathrm{Id}) = T^2 - \mathrm{Id} \circ T + T \circ \mathrm{Id} - \mathrm{Id}^2 = T^2 - \mathrm{Id}^2 = -\mathrm{Id}\,.$$

Por lo tanto, $(T - \mathrm{Id})(-T - \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, análogamente $(-T - \mathrm{Id})(T - \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$. Por lo tanto, $T - \mathrm{Id}$ es invertible y su inversa es $-T - \mathrm{Id}$. □

(13) Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Supongamos que existe $v \in V$ tal que $T^3(v) = 0$ pero $T^2(v) \neq 0$.

a) Probar que $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v)\}$ es una base de V.

b) Calcular la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B}$.

c) Calcular los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios. Decidir si T es diagonalizable.

Solución:

a) Alcanza con probar que $v, T(v), T^2(v)$ son LI. Si $a, b, c \in \mathbb{K}$ son tales que $av + bT(v) + cT^2(v) = 0$, entonces

$$0 = T^2(av + bT(v) + cT^2(v)) = aT^2(v) + bT^3(v) + cT^4(v), \qquad (*)$$

por hipótesis $T^3(v) = 0$, luego también $T^4(v) = 0$ y por lo tanto la ecuación (*) $\Rightarrow aT^2(v) = 0$. Por hipótesis, $T^2(v) \neq 0$ y por lo tanto $a = 0$, lo cual implica que $bT(v) + cT^2(v) = 0$. Aplicando T a esto último,

$$0 = T(bT(v) + cT^2(v)) = bT^2(v) + cT^3(v) = bT^2(v).$$

Como $T^2(v) \neq 0$, entonces $b = 0$ y por lo tanto $cT^2(v) = 0$. Como $T^2(v) \neq 0$, entonces $c = 0$. Por lo tanto, $a = b = c = 0$ y $\mathcal{B}$ es LI. Como $\dim V = 3$, $\mathcal{B}$ es una base de V.

b) La base es $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v)\}$ y apliquemos T a cada uno de los vectores de la base:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(v) = 0 \cdot v + 1 \cdot T(v) + 0 \cdot T^2(v) \\ T(T(v)) &= T^2(v) = 0 \cdot v + 0 \cdot T(v) + 1 \cdot T^2(v) \\ T(T^2(v)) &= T^3(v) = 0 = 0 \cdot v + 0 \cdot T(v) + 0 \cdot T^2(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) El polinomio característico de T es

$$p_T(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3.$$

En consecuencia, el único autovalor de T es 0 y el autoespacio asociado es $V_0 = \{v \in V : T(v) = 0\} = \operatorname{Nu}(T)$. Ahora bien, $\operatorname{Im}(T) = \langle T(v), T^2(v), T^3(v)\rangle = \langle T(v), T^2(v)\rangle$ y como $T(v), T^2(v)$ son LI entonces $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$. Por el teorema de la dimensión sabemos que $\dim \operatorname{Nu}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V = 3$, por lo tanto $\dim \operatorname{Nu}(T) = 1$. Como $\dim \operatorname{Nu}(T) = 1$ y $\operatorname{Nu}(T) = V_0$, se concluye que T no es diagonalizable.

$\square$