Introducción a la Lógica y la Computación — Lógica proposicional
Práctico 4: Más sobre derivación

1. Complete las siguientes derivaciones agregando las ramas que faltan (indicadas por puntos suspensivos $\vdots$), las reglas utilizadas en cada paso, y los corchetes en las hipótesis canceladas. En ambas derivaciones se deben cancelar todas las hipótesis.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\varphi \qquad \dfrac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg\varphi}}{\bot} \qquad \begin{array}{c}\vdots \\ \bot\end{array}}{\dfrac{\bot}{\neg(\varphi \vee \psi)}}}{(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to (\neg(\varphi \vee \psi))} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi}{\neg\varphi \vee \varphi} \qquad \neg(\neg\varphi \vee \varphi)}{\bot}}{\varphi} \qquad \begin{array}{c}\vdots \\ \neg\varphi\end{array}}{\dfrac{\bot}{\varphi \vee \neg\varphi}}$$

2. Encuentre derivaciones para:
   a) $\{\neg\varphi \vee \psi\} \vdash \varphi \to \psi$. (Usando eliminación de $\vee$).
   b) $\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$.
   c) $\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\varphi \vee \psi$. (Sugerencia: la última regla aplicada es RAA, no intente con $\vee I$. Está desarrollado en el apunte).
   d) $\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$. (Misma idea de la derivación anterior).

3. En el Ejercicio 1 se muestra una derivación (incompleta) de $\varphi \vee \neg\varphi$ ("Principio del Tercero Excluido"). Una estrategia posible para demostrar una proposición γ, es utilizar una eliminación del $\vee$ para subdividir la prueba en dos sub-derivaciones (también de γ), cada una de las cuales tiene una hipótesis más para utilizar (el lado izquierdo debe contener la prueba completa de Tercero Excluido):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \varphi \vee \neg\varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi]_1 \\ \vdots \\ \gamma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg\varphi]_2 \\ \vdots \\ \gamma\end{array}}{\gamma}\ \vee E_{1,2}$$

   Obtenga derivaciones para los Ejercicios $2c$ y $2d$ usando esta estrategia.

4. Encuentre derivaciones para:
   a) $\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$.
   b) $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\neg\varphi \to \psi) \to \psi$.

5. Sean $\Delta, \Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$. Demostrar las siguientes afirmaciones.
   a) Si $\Delta \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma$ entonces $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$.
   b) Comprobar que si no se une $\{\varphi\}$ en el ítem anterior, la afirmación no es cierta.
   c) Si $\Delta \subseteq \Gamma$ y $\Delta \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

6. Demostrar, transformando derivaciones cuando sea necesario:
   a) $\vdash \varphi$ implica $\vdash \psi \to \varphi$.
   b) Si $\varphi \vdash \psi$ y $\neg\varphi \vdash \psi$ entonces $\vdash \psi$.
   c) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$.
   d) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \vee \neg\varphi)$.

7. Demuestre los casos inductivos ($\vee I$) y ($\vee E$) de la prueba del Teorema de Corrección.