PRÁCTICO 3

Álgebra de matrices
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Objetivos.

- Familiarizarse con las matrices y sus operaciones de suma y multiplicación, Ejercicios (1) – (8).
- Familiarizarse con la notación de subíndices para las entradas de matrices, Ejercicios (8) y (9).
- Aprender la noción de matriz inversa y cómo cálcularla, Ejercicios (10) – (13).
- Usar matrices para la resolución de sistemas de ecuaciones, Ejercicios (14) – (19).

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificar que $A(BC) = (AB)C$, es decir que vale la asociatividad del producto.

(2) Determinar cuál de las siguientes matrices es A, cuál es B y cuál es C de modo tal que sea posible realizar el producto ABC y verificar que $A(BC) = (AB)C$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(3) Calcular A^2 y A^3 para la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

(4) ⓐ Dar ejemplos de matrices no nulas A y B de orden 2×2 tales que

a) $A^2 = 0$ (dar dos ejemplos).

b) $AB \neq BA$.

c) $A^2 = -\operatorname{Id}_2$.

d) $A^2 = A \neq \operatorname{Id}_2$.

(5) ⓐ Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Probar que A es un múltiplo de Id_2.

(6) Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, hallar una matriz no nula $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^n = 0$ pero $A^{n-1} \neq 0$.

(7) ⓐ Dar condiciones necesarias y suficientes sobre matrices A y B de tamaño $n \times n$ para que

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

b) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

(8) ⓐ Sean

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

es decir, $C_1, \ldots, C_n$ denotan las columnas de A. Probar que $Av = \sum_{j=1}^{n} v_j C_j$.

(9) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, se define la *traza* de A como $\operatorname{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) Calcular la traza de las matrices del ejercicio (10).

b) ⓐ Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$\operatorname{Tr}(A + cB) = \operatorname{Tr}(A) + c\operatorname{Tr}(B) \quad \text{y} \quad \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$

(10) Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para decidir si son invertibles y hallar la matriz inversa cuando sea posible.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(para que hagan menos cuentas: las matrices 3×3 aparecieron en el Práctico 2).

(11) Sea A la primera matriz del ejercicio anterior. Hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = \operatorname{Id}_3$.

(12) ¿Es cierto que si A y B son matrices invertibles entonces $A + B$ es una matriz invertible? Justificar su respuesta.

(13) ⓐ Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *nilpotente* si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Probar que si una matriz A es nilpotente, entonces $\operatorname{Id}_n - A$ es invertible.

(14) Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

(15) Sea v una solución del sistema $AX = Y$ y w una solución del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución del sistema $AX = Y$ para todo $t \in \mathbb{K}$.

(16) Probar que si el sistema homogéneo $AX = 0$ posee alguna solución no trivial, entonces el sistema $AX = Y$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

(17) Supongamos que los sistemas $AX = Y$ y $AX = Z$ tienen solución. Probar que el sistema $AX = Y + tZ$ también tiene solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

(18) Sean A una matriz invertible $n \times n$, y B una matriz $n \times m$. Probar que los sistemas $BX = Y$ y $ABX = AY$ tienen las mismas soluciones.

(19) ⓐ Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:

a) Si $m > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no triviales.

b) Si $r > n$, entonces existe un Y, $r \times 1$, tal que $ABX = Y$ no tiene solución.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(20) ⓐ Probar que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $A(B + C) = AB + AC$.

(21) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $(A + B)C = AC + BC$.

(22) Sea $v = [v_1 \cdots v_m] \in \mathbb{R}^{1\times m}$ y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que $vA = \sum_{i=1}^{m} v_i F_i$, donde $F_1, \dots, F_m$ denotan las filas de A.

(23) Sea $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz diagonal y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que $AD = (d_{jj} a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(24) Probar las siguientes afirmaciones:

a) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices diagonales, entonces $AB = BA$.

b) Si $A = c\,\mathrm{Id}_n$ para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(25) Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal tal que $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$, entonces $A = 0$.

(26) Sea A matriz 2×2 tal que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ y $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$.

a) Probar que $A^2 = 0$.

b) ¿Es cierta la recíproca?

(27) Probar que si A y B son matrices $n \times n$ *que conmutan entre sí*, entonces para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}.$$

(28) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La *matriz traspuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $(A^t)_{ij} = A_{ji}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

a) Dar las matrices traspuestas de las matrices A, B y C de los ejercicios (1) y (2).

b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$(A+cB)^t = A^t + cB^t, \qquad (BC)^t = C^t B^t.$$

c) Probar que si $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible, entonces D^t también lo es y $(D^t)^{-1} = (D^{-1})^t$.

(29) Una matriz A se dice *simétrica* si $A^t = A$. Una matriz B se dice *antisimétrica* si $B^t = -B$. Probar que toda matriz se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

(30) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si A y B son matrices cuadradas tales $AB = BA$ pero ninguna es múltiplo de la otra, entonces A o B es diagonal.

b) Existen una matriz 3×2, A, y una matriz 2×3, B, tales que AB es una matriz invertible.

c) Existen una matriz 2×3, A, y una matriz 3×2, B, tales que AB es una matriz invertible.

Ayudas.

(4) Probar con algunos 0 y 1 en las entradas.

(5) Elegir matrices B apropiadas con muchos ceros y **un** 1.

(7) El objetivo del ejercicio es completar los puntos suspensivos en la siguiente frase:

"$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si y sólo si A y B satisfacen ..... "

Desarrollen el cuadrado de la suma $A + B$ usando que el producto de matrices es distributivo y vean que les "sobra" para obtener la fórmula del binomio. Misma idea para el item (b).

(8) Usar la notación de subíndices para las entradas de matrices.

(9) *b)* Usar la notación de subíndices para las entradas de matrices.

(13) Pensar en la fórmula de $\sum_{i=0}^{n} a^i$ vista en álgebra I/Matemática Discreta I.

(19) Recordar el ejercicio (11) del Práctico 2.

(20) Usar la notación de subíndices para las entradas de matrices.