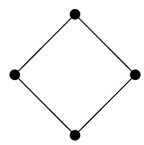
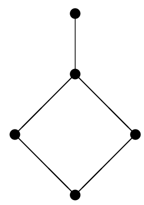
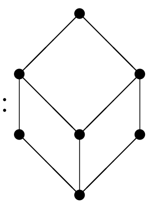
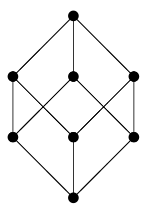
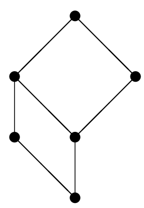
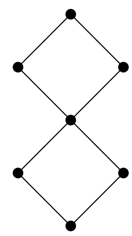
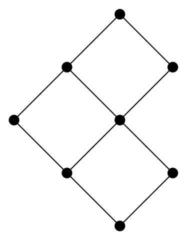
# Introducción a la Lógica y la Computación — Estructuras de orden
## Práctico 7: Teorema de Birkhoff para reticulados distributivos.

1. Sea $L$ un reticulado. Demostrar que si $x \in L$ es irreducible y $x_1, \ldots, x_n \in L$ son todos distintos de $x$, entonces $x \neq \sup\{x_1, \ldots, x_n\}$.
2. Probar que todo átomo es irreducible.
3. Para cada uno de los reticulados diagramados:
   - *a*) Dibuje el diagrama de Hasse del poset de elementos irreducibles.
   - *b*) Dibuje en cada caso el diagrama de Hasse de $\mathcal{D}(Irr(L))$.
   - *c*) Utilice el Teorema de Birkhoff para determinar si es distributivo o no.

$L_1$: 
$L_2$: 
$L_3$: 
$L_4$: 
$L_5$: 

$L_6$: 
$L_7$: 
$L_8$: 
$L_9$: 

4. *a*) Determine $Irr(D_{300})$.
   - *b*) Describa de la manera aritmética cuáles son los elementos irreducibles de $D_n$.
   - *c*) ¿Qué forma tiene los posets $Irr(D_n)$ en general?
   - *d*) (*) ¿Da el ítem anterior alguna pista de qué forma tienen los reticulados $D_n$ en general?
     (La respuesta, en la clase que viene).
5. Determine cuándo $D_n$ es isomorfo a algún $\mathcal{P}(X)$. En tal caso, dé un $X$ adecuado y describa explícitamente el isomorfismo.
6. Sea $P$ un poset (finito).
   - *a*) Probar que todo elemento de $\mathcal{D}(P)$ se obtiene como una unión (finita) de ideales principales.
   - *b*) Concluir que $Irr((\mathcal{D}(P), \subseteq)) = \{d\downarrow \mid d \in P\}$.
   - *c*) (*) Probar el Teorema de Birkhoff Reverso.
7. Dé todos los reticulados distributivos con exactamente 3 elementos irreducibles.

> Recomendamos comenzar con los siguientes ejercicios: 1; 2; $3a$; $3b$ y $3c$ para $L_n$ con $n \leq 7$; $4a$; y 7. Una vez terminados pueden seguir con los otros, y también extender $3b$ y $3c$ al resto de los diagramas.