PRÁCTICO 5

Soluciones
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

(1) Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores reales, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{R}$.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

f) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

SOLUCIÓN: En todos los casos calculamos el polinomio característico, averiguamos sus raíces y luego resolvemos el sistema de ecuaciones que nos da el autoespacio asociado a cada autovalor.

a) Denominamos A a la matriz del enunciado. El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x-4) - (-1)(1) = x^2 - 6x + 9 \\ &= (x-3)^2. \end{aligned}$$

Luego $\lambda = 3$ es el único autovalor. Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda = 3$ resolvemos el sistema $(3\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 - v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Luego, el único autovalor es $\lambda = 3$ y el autoespacio asociado es $\{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

b) Denominamos B a la matriz del enunciado. El polinomio característico de B es

$$\begin{aligned}\chi_B(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -1 & x+2 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x+2) - (-1)(0) = x^2 + x - 2 \\ &= (x+2)(x-1).\end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 1$ son los autovalores.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = -2$ resolvemos el sistema $(-2\,\mathrm{Id} - B)v = 0$, es decir

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} -2-1 & 0 \\ -1 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{bmatrix} -3v_1 \\ -v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = 0.\end{aligned}$$

Luego, el autovalor $\lambda_1 = -2$ tiene autoespacio asociado $\{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1$ resolvemos el sistema $(\mathrm{Id} - B)v = 0$, es decir

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ -1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{bmatrix} 0 \\ -v_1 + 3v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = 3v_2.\end{aligned}$$

Luego, el autovalor $\lambda_2 = 1$ tiene autoespacio asociado $\{(3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

c) Denominamos C a la matriz del enunciado. El polinomio característico de C es

$$\begin{aligned}\chi_C(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)^2(x-1).\end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$ son los autovalores.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 2$ resolvemos el sistema $(2\,\mathrm{Id} - C)v = 0$, es decir

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{bmatrix} 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2 - v_3.\end{aligned}$$

Luego, el autovalor $\lambda_1 = 2$ tiene autoespacio asociado $\{(-t, t, s) : t, s \in \mathbb{R}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1$ resolvemos el sistema $(\mathrm{Id} - C)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -v_1 \\ v_1 + v_3 \\ -v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = v_3 = 0.$$

Luego, el autovalor $\lambda_2 = 1$ tiene autoespacio asociado $\{(0, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

d) Denominamos D a la matriz del enunciado. El polinomio característico de D es

$$\begin{aligned} \chi_D(x) &= \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & 5 \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x+1) \begin{vmatrix} x-3 & 5 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)[(x-3)(x+1) - (-1)(5)] \\ &= (x+1)(x^2 - 2x + 2). \end{aligned}$$

El polinomio $x^2 - 2x + 2$ no tiene raíces reales, luego el único autovalor real de D es -1. Averigüemos el autoespacio correspondiente, resolviendo el sistema $(-\mathrm{Id} - D)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -1+1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-3 & -5 \\ 0 & 1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 - 4F_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $v_2 = 0$ y $v_3 = 0$, es decir $v_2 = v_3 = 0$. Por lo tanto, el autoespacio asociado a -1 es $\{(v_1, 0, 0) : v_1 \in \mathbb{R}\}$.

e) Denominamos E a la matriz del enunciado. En realidad la matriz E depende de λ y debemos analizar la existencia de autovalores y autovectores para diferentes valores de λ. El polinomio característico de E es

$$\begin{aligned} \chi_E(x) &= \begin{vmatrix} x-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & x-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & x-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (x-\lambda)^3. \end{aligned}$$

Luego λ es el único autovalor. Para calcular el autoespacio asociado a λ resolvemos el sistema $(\lambda\,\mathrm{Id} - E)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} \lambda-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2 = 0.$$

Luego, el único autovalor es λ y el autoespacio asociado es $\{(0,0,t) : t \in \mathbb{R}\}$.

f) Denominamos F a la matriz del enunciado. En realidad la matriz F depende de θ y debemos analizar la existencia de autovalores y autovectores para diferentes valores de θ. El polinomio característico de F es

$$\begin{aligned} \chi_F(x) &= \begin{vmatrix} x-\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & x-\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= (x-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}(\theta)^2 \\ &= x^2 - 2x\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}(\theta)^2 \\ &= x^2 - 2x\cos\theta + 1. \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio $x^2 - 2x\cos\theta + 1$ son

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{2\cos\theta - 2\sqrt{\cos^2\theta - 1}}{2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} \\ &= \cos\theta \pm \sqrt{-\operatorname{sen}^2\theta} \end{aligned} \qquad (*)$$

Debemos dividir en 3 casos, según el valor de θ.

i) Cuando $\theta = 0$ tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. En ese caso, F es la matriz identidad y por lo tanto hay un único autovalor, 1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^3$.

ii) Cuando $\theta = \pi$, tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. En este caso la matriz es

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego, F es $-\mathrm{Id}$, hay un solo autovalor, -1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^2$

iii) Cuando $\theta \neq 0, \pi$ y en este caso tenemos que $-\operatorname{sen}^2\theta < 0$ y por lo tanto, por (*), no hay autovalores reales. □

(2) Calcular los autovalores complejos de las matrices *d)* y *f)* del ejercicio anterior, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{C}$.

Solución:

En el caso de la matriz *d)* del ejercicio anterior, el polinomio característico es $x^2 - 2x + 2$ como ya fue calculado. Por lo tanto sus raíces son

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i.$$

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 1 + i$ resolvemos el sistema $((1+i)\operatorname{Id} - D)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1+i-3 & 5 \\ -1 & 1+i+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+i & 5 \\ -1 & 2+i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/(-1)} \begin{bmatrix} -2+i & 5 \\ 1 & -2-i \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_1+(2-i)F_2} \begin{bmatrix} 0 & 5-(2+i)(2-i) \\ 1 & -2-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2-i \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $v_1 + (-2-i)v_2 = 0$, es decir $v_1 = (2+i)v_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 1+i$ es $\{((2+i)t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1 - i$ resolvemos el sistema $((1-i)\operatorname{Id} - D)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1-i-3 & 5 \\ -1 & 1-i+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-i & 5 \\ -1 & 2-i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/(-1)} \begin{bmatrix} -2-i & 5 \\ 1 & -2+i \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_1+(2+i)F_2} \begin{bmatrix} 0 & 5-(2-i)(2+i) \\ 1 & -2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2+i \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $v_1 + (-2+i)v_2 = 0$, es decir $v_1 = (2-i)v_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1-i$ es $\{((2-i)t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

En la resolución del punto *f)* del ejercicio anterior, obtuvimos $\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm \sqrt{-\operatorname{sen}^2\theta}$. Luego, los autovalores son $\lambda_1 = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ y $\lambda_2 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$. Veamos ahora los autoespacios asociados a estos autovalores complejos, es decir cuando $\operatorname{sen}\theta \neq 0$. En el caso $\lambda_1 = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ resolvemos el sistema $((\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\operatorname{Id} - F)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - \cos\theta \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} i\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & i\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1\cdot i} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & -i\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & i\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[F_2/\operatorname{sen}\theta]{F_1/\operatorname{sen}\theta} \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $-v_1 - iv_2 = 0$, es decir $v_1 = -iv_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_1 = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ es $\{t(-i, 1) : t \in \mathbb{C}\}$.

En el caso $\lambda_2 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$ resolvemos el sistema $((\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)\operatorname{Id} - F)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta - \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta - \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -i\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -i\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \cdot i} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & -i\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -i\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[F_2/\operatorname{sen}\theta]{F_1/\operatorname{sen}\theta} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $v_1 - iv_2 = 0$, es decir $v_1 = iv_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_2 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$ es $\{t(i, 1) : t \in \mathbb{C}\}$.

Conclusión. Haremos un resumen de los resultados acerca de autovalores y autovectores de la matriz del ejercicio (1) *f)*, es decir de la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

- Si $\theta = 0$, entonces F tiene un único autovalor, 1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^2$.
- Si $\theta = \pi$, entonces F tiene un único autovalor, -1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^2$.
- Si $\theta \neq 0, \pi$, entonces F tiene dos autovalores complejos, $\lambda_1 = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ y $\lambda_2 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$, cuyos autoespacios son $\{t(-i, 1) : t \in \mathbb{C}\}$ y $\{t(i, 1) : t \in \mathbb{C}\}$, respectivamente.

$\square$

(3) Probar que hay una única matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $(1, 1)$ es autovector de autovalor 2, y $(-2, 1)$ es autovector de autovalor 1.

Solución: Para encontrar la matriz debemos resolver los sistemas

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} x + y \\ z + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -2x + y \\ -2z + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Son sistemas sencillos de resolver:

$$x + y = 2, \quad z + w = 2, \quad -2x + y = -2, \quad -2z + w = 1.$$

Luego, $y = 2 - x$ y por lo tanto $-2x + 2 - x = -2$, es decir $-3x = -4 \Rightarrow x = 4/3$, y en consecuencia $y = 2 - x = 2 - 4/3 = 2/3$.

Por otro lado, $w = 2 - z$ y por lo tanto $-2z + 2 - z = 1$, es decir $-3z = -1 \Rightarrow z = 1/3$, y en consecuencia $w = 2 - z = 2 - 1/3 = 5/3$.

Luego, la matriz buscada es

$$A = \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/3 & 5/3 \end{bmatrix}.$$

□

(4) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio, con $a, b, c \in \mathbb{K}$. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = aA^2 + bA + c\,\mathrm{Id}_n\,.$$

Probar que todo autovector de A con autovalor λ es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(\lambda)$.

Solución: Sea v un autovector de A con autovalor λ, es decir $Av = \lambda v$. Entonces

$$\begin{aligned} f(A)v &= (aA^2 + bA + c\,\mathrm{Id}_n)v \\ &= aA^2v + bAv + c\,\mathrm{Id}_n\, v \\ &= aA(\lambda v) + b(\lambda v) + c\,\mathrm{Id}_n\, v \\ &= a\lambda A(v) + \lambda bv + cv \\ &= a\lambda^2 v + \lambda bv + cv \\ &= (\lambda^2 a + \lambda b + c)v \\ &= f(\lambda)v. \end{aligned}$$

□

(5) Sea $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$.

a) Probar que el polinomio característico de A es $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A)$.

b) Si A no es invertible, probar que los autovalores de A son 0 y $\mathrm{Tr}(A)$.

Solución:

a) Si $A = [a_{ij}]$, entonces

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & x - a_{22} \end{vmatrix} \\ &= (x - a_{11})(x - a_{22}) - (-a_{12})(-a_{21}) \\ &= x^2 - (a_{11} + a_{22})x + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= x^2 - \operatorname{Tr}(A)x + \det(A).\end{aligned}$$

b) Si A no es invertible, entonces $\det(A) = 0$ y por lo tanto $\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{Tr}(A)x$. Luego, los autovalores de A son las raíces de $x^2 - \operatorname{Tr}(A)x = x(x - \operatorname{Tr}(A))$, es decir 0 y $\operatorname{Tr}(A)$. □

(6) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(A - x\operatorname{Id}_n)$ y el polinomio característico de A tienen las mismas raíces.

Solución: observar que $A - x\operatorname{Id}_n$ es igual a $-\operatorname{Id}_n(x\operatorname{Id}_n - A)$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_A(x) &= \det(A - x\operatorname{Id}_n) \\ &= \det(-\operatorname{Id}_n(x\operatorname{Id}_n - A)) \\ &= \det(-\operatorname{Id}_n)\det(x\operatorname{Id}_n - A) \\ &= (-1)^n\det(x\operatorname{Id}_n - A) \\ &= (-1)^n\chi_A(x).\end{aligned}$$

Luego, $\tilde{\chi}_A(x)$ y $\chi_A(x)$ son polinomios que difieren por un factor $(-1)^n$, es decir tienen las mismas raíces. □

(7) Probar que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz nilpotente entonces 0 es el único autovalor de A. Usar esto para deducir que la matriz $\operatorname{Id}_n - A$ es invertible (esta es otra demostración del ejercicio (13) del Práctico 3).

Solución: recordemos que A es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$. Si A es nilpotente y v autovector con autovalor λ, entonces $Av = \lambda v$ y por lo tanto $A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v$. Iterando este argumento, obtenemos que $A^k v = \lambda^k v$. Pero $A^k = 0$, luego $\lambda^k v = 0$ y por lo tanto $lambda^k = 0$ y en consecuencia $\lambda = 0$. Luego, 0 es el único autovalor de A.

Ahora bien, si 0 es el único autovalor de A, entonces $\chi_A(x) = x^n$ y por lo tanto $1 = \chi_A(1) = \det(\operatorname{Id}_n - A)$ como el determinate de $\operatorname{Id}_n - A$ es no nulo, esa matriz es invertible. □

(8) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Existe una matriz invertible A tal que 0 es autovalor de A.

b) Si A es invertible, entonces todo autovector de A es autovector de A^{-1}.

Solución:

a) Falso. Si A es invertible, entonces 0 no es autovalor de A. Dado v tal que $Av = 0v = 0$, entonces $v = A^{-1}Av = A^{-1}(0) = 0$, por lo tanto no puede haber autovectores con autovalor 0, por lo tanto 0 no es autovalor de A.

b) Verdadero. Sea $v \neq 0$ autovector de A con autovalor λ, luego $Av = \lambda v$. Aplicando A^{-1} a ambos lados de la igualdad tenemos $A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v)$, o equivalentemente $v = \lambda A^{-1}v$, luego $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$. Es decir, v es autovector de A^{-1} con autovalor $\frac{1}{\lambda}$.

□

(9) Repetir los ejercicios (1) y (2) con las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución:

a) El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x-1) - (-3)(1) = x^2 - 3x + 5. \end{aligned}$$

Luego $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$ son los autovalores. Es decir, son autovalores complejos. Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = \frac{3+i\sqrt{11}}{2}$ resolvemos el sistema $(\frac{3+i\sqrt{11}}{2}\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} \frac{3+i\sqrt{11}}{2} - 2 & -3 \\ 1 & \frac{3+i\sqrt{11}}{2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1+i\sqrt{11}}{2} & -3 \\ 1 & \frac{1+i\sqrt{11}}{2} \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_1 \cdot (-1-i\sqrt{11}/2)} \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2}(1+i\sqrt{11}) \\ 1 & \frac{1}{2}(1+i\sqrt{11}) \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}(1+i\sqrt{11}) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 + \frac{1}{2}(1+i\sqrt{11})v_2 = 0$, es decir $v_1 = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{11})v_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_1 = \frac{3+i\sqrt{11}}{2}$ es $\{(-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{11})t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = \frac{3-i\sqrt{11}}{2}$ resolvemos el sistema $(\frac{3-i\sqrt{11}}{2}\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} \frac{3-i\sqrt{11}}{2} - 2 & -3 \\ 1 & \frac{3-i\sqrt{11}}{2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1-i\sqrt{11}}{2} & -3 \\ 1 & \frac{1-i\sqrt{11}}{2} \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_1\cdot(-1+i\sqrt{11}/2)} \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2}(1-i\sqrt{11}) \\ 1 & \frac{1}{2}(1-i\sqrt{11}) \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-3F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}(1-i\sqrt{11}) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 + \frac{1}{2}(1-i\sqrt{11})v_2 = 0$, es decir $v_1 = -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{11})v_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_2 = \frac{3-i\sqrt{11}}{2}$ es $\{(-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{11})t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

b) El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+9 & -4 & -4 \\ 8 & x-3 & -4 \\ 16 & -8 & x-7 \end{vmatrix} \\
&= (x+9)\begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ -8 & x-7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 16 & x-7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 8 & x-3 \\ 16 & -8 \end{vmatrix} \\
&= (x+9)(x^2-10x-11) + 4(8x+8) - 4(-16x-16) \\
&= x^3 - x^2 - 5x - 3.
\end{aligned}$$

Tanteando con enteros bajos nos podemos dar cuenta que -1 es raíz de $x^3 - x^2 - 5x - 3$, luego $\chi_A(x) = (x+1)(x^2-2x-3) = (x+1)(x+1)(x-3)$. Por lo tanto, los autovalores son -1 y 3.

Para calcular el autoespacio asociado a -1 resolvemos el sistema $(-\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -1+9 & -4 & -4 \\ 8 & -1-3 & -4 \\ 16 & -8 & -1-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 8 & -4 & -4 \\ 16 & -8 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_3-2F_1} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $2v_1 - v_2 - v_3 = 0$, es decir $v_1 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$. Luego, el autoespacio asociado a -1 es $\{(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2, t_1, t_2) : t_1, t_2 \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a 3 resolvemos el sistema $(3\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 3+9 & -4 & -4 \\ 8 & 3-3 & -4 \\ 16 & -8 & 3-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 8 & 0 & -4 \\ 16 & -8 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2} \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 8 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1-(3/2)F_2} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 8 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F1/2, F_2/4, F_3/4} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $-2v_2 + v_3 = 0$ y $2v_1 - v_3 = 0$, es decir $v_2 = \frac{1}{2}v_3$ y $v_1 = \frac{1}{2}v_3$. Luego, el autoespacio asociado a 3 es $\{(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

c) El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-4 & -4 & 12 \\ -1 & x+1 & -1 \\ -5 & -3 & x+11 \end{vmatrix} \\
&= (x-4)\begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ -3 & x+11 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & x+11 \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} -1 & x+1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} \\
&= (x-4)(x^2+12x+8) + 4(-x-16) + 12(5x+8) \\
&= x^3 + 8x^2 + 16x \\
&= x(x^2+8x+16) \\
&= x(x+4)^2.
\end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -4$ son los autovalores. Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 0$ resolvemos el sistema $(0\,\mathrm{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & 12 \\ -1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3+5F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 - v_3 = 0$ y $v_2 - 2v_3 = 0$, es decir $v_1 = v_3$ y $v_2 = 2v_3$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 0$ es $\{(t, 2t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = -4$ resolvemos el sistema $(-4\,\mathrm{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -4-4 & -4 & 12 \\ -1 & -4+1 & -1 \\ -5 & -3 & -4+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 & 12 \\ -1 & -3 & -1 \\ -5 & -3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-5F_2]{F_1-8F2} \begin{bmatrix} 0 & 20 & 20 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[F_3/12]{F_1/20} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1-F3]{F_2+3F3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $-v_1 + 2v_3 = 0$ y $v_2 + v_3 = 0$, es decir $v_1 = 2v_3$ y $v_2 = -v_3$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_2 = -4$ es $\{(2t, -t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

d) El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)(x-4) \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} \\
&= ((x-2)(x-4)+1) \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -3 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= ((x-2)(x-4)+1)(x^2-4) \\
&= (x^2-6x+9)(x^2-4) \\
&= (x-3)^2(x+2)(x-2).
\end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 2$ son los autovalores. Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 3$ resolvemos el sistema $(3\,\mathrm{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[F_4+(3/2)F_3]{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1+F_3]{F_3/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 - v_2 = 0$, es decir $v_1 = v_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 3$ es $\{(t, t, 0, 0) : t \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = -2$ resolvemos el sistema $(-2\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -2-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4-F_3]{F_1+4F_1} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 = v_2 = 0$ y $-3v_3 - v_4 = 0$, es decir $v_3 = -\frac{1}{3}v_4$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_2 = -2$ es $\{(0, 0, -\frac{1}{3}t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_3 = 2$ resolvemos el sistema $(2\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 2-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4+3F_3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 = v_2 = 0$ y $v_3 - v_4 = 0$, es decir $v_3 = v_4$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_3 = 2$ es $\{(0, 0, t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

e) El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & x-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (x-\lambda)^n. \end{aligned}$$

Esto se debe a que como la matriz es triangular superior su determinante es producto de los elementos de la diagonal. Luego, λ es el único autovalor. Para calcular el autoespacio asociado a λ resolvemos el sistema $(\lambda \operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} \lambda-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \lambda-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 = v_2 = \cdots = v_{n-1} = 0$. Luego, el autoespacio asociado a λ es $\{(0, 0, \dots, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

$\square$