PRÁCTICO 7

Soluciones
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

(1) Decidir si las siguientes funciones son transformaciones lineales entre los respectivos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

a) La traza $\operatorname{Tr} : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$ (recordar ejercicio (9) *b)* del Práctico 3)

b) $T : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, $T(p(x)) = q(x)\,p(x)$ donde $q(x)$ es un polinomio fijo.

c) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(x, y) = xy$

d) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(x, y) = (x, y, 1)$

e) El determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$.

SOLUCIÓN:

a) Sí, es un transformación lineal. En efecto, si $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\operatorname{Tr}(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + \lambda b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{Tr}(A) + \lambda \operatorname{Tr}(B).$$

b) Sí, es un transformación lineal. En efecto, si $r, s \in \mathbb{K}[x]$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$T(r + \lambda s) = q(r + \lambda s) = qr + \lambda qs = T(r) + \lambda T(s).$$

c) No, no es una transformación lineal. Por ejemplo, que $T(2(1, 1)) \neq 2T(1, 1)$. Por un lado, $T(2(1, 1)) = T(2, 2) = 2 \cdot 2 = 4$. Por otro lado, $2T(1, 1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$.

d) No, no es una transformación lineal. Por ejemplo, veamos que $T(0, 0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$.

e) No, no es una transformación lineal. Por ejemplo, $\det(2\,\mathrm{Id}_2) = 4 \neq 2 = 2\det(\mathrm{Id}_2)$. En general, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, donde n es el tamaño de la matriz A.

$\square$

(2) Sea $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \bar{z}$.

a) Considerar a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y decidir si T es una transformación lineal.

b) Considerar a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y decidir si T es una transformación lineal.

SOLUCIÓN:

a) No, no es una transformación lineal. Por ejemplo, $T(2i) = -2i \neq 2i = 2T(i)$.

b) Sí, es una transformación lineal. En efecto, si $a + bi, a' + b'i \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} T((a+bi)+\lambda(a'+b'i)) &= T((a+\lambda a')+(b+\lambda b')i) = (a+\lambda a')-(b+\lambda b')i \\ &= (a-bi)+\lambda(a'-b'i) = T(a+bi)+\lambda T(a'+b'i). \end{aligned}$$

□

(3) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1, 2, 3)$, $T(e_2) = (-1, 0, 5)$ y $T(e_3) = (-2, 3, 1)$.

a) Calcular $T(2, 3, 8)$ y $T(0, 1, -1)$.

b) Calcular $T(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$. Es decir, dar una fórmula para T donde en cada coordenada del vector de llegada hay una combinación lineal de x, y, z.

c) Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times3}$ tal que $T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. En esta parte del ejercicio escribiremos/pensaremos a los vectores de $\mathbb{K}^3$ como columnas.

SOLUCIÓN:

a)

$$\begin{aligned} T(2,3,8) &= T(2e_1+3e_2+8e_3) = 2T(e_1)+3T(e_2)+8T(e_3) \\ &= 2(1,2,3)+3(-1,0,5)+8(-2,3,1) \\ &= (2,4,6)+(-3,0,15)+(-16,24,8) \\ &= (-17,28,29). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(0,1,-1) &= T(0e_1+1e_2-1e_3) = 0T(e_1)+1T(e_2)-1T(e_3) \\ &= 0(1,2,3)+1(-1,0,5)-1(-2,3,1) \\ &= (0,0,0)+(-1,0,5)+(2,-3,-1) \\ &= (1,-3,4). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T(xe_1+ye_2+ze_3) = xT(e_1)+yT(e_2)+zT(e_3) \\ &= x(1,2,3)+y(-1,0,5)+z(-2,3,1) \\ &= (x,2x,3x)+(-y,0,5y)+(-2z,3z,z) \\ &= (x-y-2z, 2x+3z, 3x+5y+z). \end{aligned}$$

c) Observar que

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ax+by+cz.$$

Basándonos en esta observación, obtenemos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y-2z \\ 2x+3z \\ 3x+5y+z \end{bmatrix} = T(x,y,z).$$

□

(4) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x+2y+3z, y-z, x+5y)$.

a) Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que $T(x,y,z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Como en el ejercicio (3) *c)* pensamos a los vectores como columnas.

b) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1,1,1)$, $(-5,1,1)$.

c) Describir mediante ecuaciones (implícitamente) el núcleo y la imagen de T.

d) Dar un conjunto de generadores del núcleo y la imagen de T.

e) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(0,1,0)$, $(0,1,3)$.

Solución:

a) Observar que

$$F_i(A) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T(x,y,z)_i.$$

Es decir la fila i de A por el vector (x, y, z) nos da la coordenada i de $T(x, y, z)$. Como $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, x + 5y)$, tenemos que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ y - z \\ x + 5y \end{bmatrix},$$

y por lo tanto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

b)

$$T(1, 1, 1) = (1 + 2 + 3, 1 - 1, 1 + 5) = (6, 0, 6) \neq (0, 0, 0),$$

por lo tanto $(1, 1, 1) \notin \mathrm{Nu}(T)$.

$$T(-5, 1, 1) = (-5 + 2 + 3, 1 - 1, -5 + 5) = (0, 0, 0),$$

por lo tanto $(-5, 1, 1) \in \mathrm{Nu}(T)$.

c) Debemos resolver la ecuación $AX = b$, entonces

- el núcleo de T es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$,
- la imagen de T es el conjunto de los $b \in \mathbb{R}^m$ para los cuales el sistema $AX = b$ tiene solución

Resolvamos el sistema con matrices aumentadas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 1 & 5 & 0 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 3 & -3 & b_3 - b_1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - 3F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 - 3b_2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & b_1 - 2b_2 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 - 3b_2 \end{array}\right].$$

El sistema tiene solución si y solo si $b_3 - b_1 - 3b_2 = 0$. Es decir,

Es decir que

$$\mathrm{Im}(T) = \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{K}^3 : b_3 - b_1 - 3b_2 = 0\} \tag{7.1}$$

Por otro lado, el sistema homogéneo asociado a $AX = 0$ tiene como soluciones los (x, y, z) tales que $x + 5z = 0$, $y - z = 0$. Es decir,

$$\mathrm{Nu}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : x + 5z = 0, y - z = 0\}.$$

d) Por lo visto en el inciso anterior

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(T) &= \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{K}^3 : b_3 - b_1 - 3b_2 = 0\} \\
&= \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{K}^3 : b_3 = b_1 + 3b_2\} \\
&= \{(b_1, b_2, b_1 + 3b_2) : b_1, b_2 \in \mathbb{K}\} \\
&= \{(b_1, 0, b_1) + (0, b_2, 3b_2) : b_2, b_3 \in \mathbb{K}\} \\
&= \langle (1, 0, 1), (0, 1, 3) \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos elegir $(1, 0, 1), (0, 1, 3)$ generadores de $\operatorname{Im}(T)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Nu}(T) &= \{(x, y, z)\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : x = -5z, y = z\} \\
&= \{(-5z, z, z) : z \in \mathbb{K}\} \\
&= \{(-5, 1, 1)z : z \in \mathbb{K}\} \\
&= \langle (-5, 1, 1) \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos elegir $(-5, 1, 1)$ como generador de $\operatorname{Nu}(T)$.

e) Debemos comprobar si los vectores $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 3)$ satisfacen las ecuaciones que definen la imagen, es decir las de la fórmula (7.1). Explícitamente, $(b_1, b_2, b_3) \in \operatorname{Im}(T)$ si y solo si $b_3 - b_1 - 3b_2 = 0$.

Ahora bien, $(0, 1, 0) \in \operatorname{Im}(T)$ si y solo si $0 - 0 - 3 \cdot 1 = -3 = 0$, lo cual es falso. Por lo tanto, $(0, 1, 0) \notin \operatorname{Im}(T)$

Por otro lado, $(0, 1, 3) \in \operatorname{Im}(T)$ si y solo si $3 - 0 - 3 \cdot 1 = 0$, lo cual es verdadero. Por lo tanto, $(0, 1, 3) \in \operatorname{Im}(T)$.

□

(5) Sea $T : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^5$ dada por $T(v) = Av$ donde A es la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Dar una base del núcleo y de la imagen de T.

b) Dar la dimensión del núcleo y de la imagen de T.

c) Describir mediante ecuaciones (implícitamente) el núcleo y la imagen de T.

d) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 2, 3, 4)$, $(1, -1, -1, 2)$, $(1, 0, 2, 1)$.

e) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(2,3,-1,0,1)$, $(1,1,0,3,1)$, $(1,0,2,1,0)$.

SOLUCIÓN: primero encontremos una fórmula para $T(x,y,z,t)$, luego resolvamos los incisos.

$$T(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+t \\ x+3y+t \\ -x-y \\ 3x+3z \\ 2x+y+z \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$T(x,y,z,t) = . \tag{7.2}$$

$$(-1,1,9,2) - 4(0,0,0,1) - 8(0,0,1,0) = (-1,1,1,-2)$$

a) Como $T(v) = (0,0,0,0,0)$ si y solo si $Av = 0$, el $\mathrm{Nu}(T)$ es el conjunto de soluciones del sistema $Av = 0$, que resolvemos con Gauss:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_4-3F_2 \\ F_5-2F_2}]{F_3+F_2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_4-3F_5} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4-3F_1]{F_3-F_1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_5+5F_2]{F_2-3F_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$\mathrm{Nu}(T) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 : x - \frac{1}{2}t = 0, y + \frac{1}{2}t = 0, z + \frac{1}{2}t = 0\}, \tag{7.3}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{Nu}(T) &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 : x = \frac{1}{2}t, y = -\frac{1}{2}t, z = -\frac{1}{2}t\} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{2}t, -\frac{1}{2}t, -\frac{1}{2}t, t \right) : t \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \left\{ t \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) : t \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \langle \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \rangle. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\{(1,-1,-1,2)\}$ es una base del núcleo de T.

Para encontrar una base de la imagen, calculamos $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$, $T(e_4)$ que es un sistema de generadores de la imagen. A partir de estos generadores encontramos una base.

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (2 \cdot 0 + 0, 1 + 3 \cdot 0 + 0, -1 - 0, 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0, 2 \cdot 1 + 0 + 0) \\ &= (0, 1, -1, 3, 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(e_2) &= (2 \cdot 1 + 0, 0 + 3 \cdot 1 + 0, -0 - 1, 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0, 2 \cdot 0 + 1 + 0) \\ &= (2, 3, -1, 0, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(e_3) &= (2 \cdot 0 + 0, 0 + 3 \cdot 0 + 0, -0 - 0, 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1, 2 \cdot 0 + 0 + 1) \\ &= (0, 0, 0, 3, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(e_4) &= (2 \cdot 0 + 1, 0 + 3 \cdot 0 + 1, -0 - 0, 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0, 2 \cdot 0 + 0 + 0) \\ &= (1, 1, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Encontramos una base de la imagen haciendo la matriz donde las filas son los vectores anteriores y hacemos Gauss:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2 + F_3 \\ F_4 + F_3}]{F_1 - F_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego, una base de la imagen es $\{(1, 0, 1, 0, -1), (0, 1, -1, 0, 1), (0, 0, 0, 3, 1)\}$.

b) Hemos visto más arriba que el núcleo tiene una base de un elemento y la imagen tiene una base de tres elementos, por consiguiente $\dim \operatorname{Nu}(T) = 1$ y $\dim \operatorname{Im}(T) = 3$. Observar que $\dim \operatorname{Nu}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = 4$, que es la dimensión del dominio.

c) El núcleo está descripto en (7.3) o, equivalentemente,

$$\operatorname{Nu}(T) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 : 2x - t = 0, 2y + t = 0, 2z + t = 0\}. \tag{7.4}$$

Para la imagen, debemos plantear la ecuación $T(x,y,z,t) = (b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$ y resolver el sistema. Es decir, debemos resolver

$$
\begin{aligned}
(2y+t, x+3y+t, -x-y, 3x+3z, 2x+y+z) &= (b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\\
\Rightarrow \quad 2y+t &= b_1,\\
x+3y+t &= b_2,\\
-x-y &= b_3,\\
3x+3z &= b_4,\\
2x+y+z &= b_5.
\end{aligned}
$$

Resolvamos el sistema con matrices aumentadas:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & b_1\\ 1 & 3 & 0 & 1 & b_2\\ -1 & -1 & 0 & 0 & b_3\\ 3 & 0 & 3 & 0 & b_4\\ 2 & 1 & 1 & 0 & b_5 \end{array}\right]
\underset{\substack{F_4-3F_2\\ F_5-2F_2}}{\xrightarrow{F_3+F_2}}
\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & b_1\\ 1 & 3 & 0 & 1 & b_2\\ 0 & 2 & 0 & 1 & b_2+b_3\\ 0 & -9 & 3 & -3 & -3b_2+b_4\\ 0 & -5 & 1 & -2 & +-2b_2b_5 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{F_3-F_1}
\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & b_1\\ 1 & 3 & 0 & 1 & b_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1+b_2+b_3\\ 0 & -9 & 3 & -3 & -3b_2+b_4\\ 0 & -5 & 1 & -2 & -2b_2+b_5 \end{array}\right]
\xrightarrow{F_1/2}
\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1/2 & b_1/2\\ 1 & 3 & 0 & 1 & b_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1+b_2+b_3\\ 0 & -9 & 3 & -3 & -3b_2+b_4\\ 0 & -5 & 1 & -2 & -2b_2+b_5 \end{array}\right]
$$

$$
\underset{\substack{F_4+9F_1\\ F_5+5F_1}}{\xrightarrow{F_2-3F_1}}
\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1/2 & b_1/2\\ 1 & 0 & 0 & -1/2 & b_2-3b_1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1+b_2+b_3\\ 0 & 0 & 3 & 3/2 & -3b_2+b_4+9b_1/2\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -2b_2+b_5+5b_1/2 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{F_4-3F_5}
\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1/2 & b_1/2\\ 1 & 0 & 0 & -1/2 & b_2-3b_1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1+b_2+b_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6b_1/2+3b_2+b_4-3b_5\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -2b_2+b_5+5b_1/2 \end{array}\right].
$$

Lo importante de estas ecuaciones son las filas donde los coeficientes son 0: $(b_1, b_2.b_3, b_4) \in \operatorname{Im}(T)$ si y solo si $-b_1+b_2+b_3 = 0$ y $-6b_1/2+3b_2+b_4-3b_5 = 0$. Es decir,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}(T) = \{&(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) \in \mathbb{K}^5 :\\
&-b_1+b_2+b_3 = 0 \text{ y } -3b_1+3b_2+b_4-3b_5 = 0\}.
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

d) Para ver si $(1, 2, 3, 4)$, $(1, -1, -1, 2)$, $(1, 0, 2, 1)$ están en $\mathrm{Nu}(T)$ debemos ver si T de cada vector es $(0, 0, 0, 0, 0)$ o si cumplen con la ecuación (7.4) o si, como vimos en *a)*, son múltiplos de $(1, -1, -1, 2)$. El tercer método es el más sencillo y, por lo tanto, lo usaremos.

Es claro que $(1, 2, 3, 4)$ no es múltiplo de $(1, -1, -1, 2)$, por lo tanto, $(1, 2, 3, 4)$ no está en $\mathrm{Nu}(T)$.

Por el contrario $(1, -1, -1, 2)$ es múltiplo de $(1, -1, -1, 2)$, por lo tanto, $(1, -1, -1, 2)$ está en $\mathrm{Nu}(T)$.

Finalmente, $(1, 0, 2, 1)$ no es múltiplo de $(1, -1, -1, 2)$, por lo tanto, $(1, 0, 2, 1)$ no está en $\mathrm{Nu}(T)$.

e) Para ver si $(2, 3, -1, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 3, 1)$, $(1, 0, 2, 1, 0)$ están en $\mathrm{Im}(T)$ debemos ver si cumplen con la ecuación (7.5). Es decir

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathrm{Im}(T) \Leftrightarrow -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ \text{ y } \ -3x_1 + 3x_2 + x_4 - 3x_5 = 0.$$

Para $(2, 3, -1, 0, 1)$, $-2+3-1 = 0$ y $-6+9-3 = 0$, por lo tanto, $(2, 3, -1, 0, 1)$ está en $\mathrm{Im}(T)$.

Para $(1, 1, 0, 3, 1)$, $-1 + 1 + 0 = 0$ y $-3 + 3 + 3 - 3 = 0$, por lo tanto, $(1, 1, 0, 3, 1)$ está en $\mathrm{Im}(T)$.

Para $(1, 0, 2, 1, 0)$, $-1 + 0 + 2 = 1$ y $-3 + 0 + 3 - 0 = 0$, por lo tanto, $(1, 0, 2, 1, 0)$ no está en $\mathrm{Im}(T)$.

□

(6) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales calcular el núcleo y la imagen. Describir ambos subespacios implícitamente y encontrar una base de cada uno de ellos.

a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.
b) $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $S(x, y, z) = (x - y + z, 2x - y + 2z)$.

Solución:

a) Como ya dijimos vamos a caracterizar los $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que $T(x, y) = (b_1, b_2, b_3)$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} (x - y, x + y, 2x + 3y) &= (b_1, b_2, b_3) \\ \Rightarrow \quad x - y &= b_1, \\ x + y &= b_2, \\ 2x + 3y &= b_3. \end{aligned}$$

Resolvamos el sistema con matrices aumentadas:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & b_2 \\ 2 & 3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2-F_1]{F_3-2F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b_1 \\ 0 & 2 & -b_1+b_2 \\ 0 & 5 & -2b_1+b_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2/2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -b_1/2+b_2/2 \\ 0 & 5 & -2b_1+b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-5F_2]{F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1/2+b_2/2 \\ 0 & 1 & -b_1/2+b_2/2 \\ 0 & 0 & b_1/2-5b_2/2+b_3 \end{array}\right]. \qquad (*)$$

Luego, el sistema tiene solución si y solo si $b_1/2 - 5b_2/2 + b_3 = 0$. Es decir,

$$\operatorname{Im}(T) = \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_1 - 5b_2 + 2b_3 = 0\}. \tag{7.6}$$

Encontrar una base de $\operatorname{Im}(T)$ es fácil:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &= \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_1 - 5b_2 + 2b_3 = 0\} \\ &= \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_1 = 5b_2 - 2b_3\} \\ &= \{(5b_2 - 2b_3, b_2, b_3) : b_2, b_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b_2(5,1,0) + b_3(-2,0,1) : b_2, b_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (5,1,0), (-2,0,1) \rangle. \end{aligned}$$

Es decir podemos considerar como base de $\operatorname{Im}(T)$ a $\{(5,1,0), (-2,0,1)\}$.

Para encontrar la ecuación implícita del núcleo debemos resolver el sistema homogéneo asociado a $T(x) = 0$. Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} (x - y, x + y, 2x + 3y) &= (0,0,0) \\ \Rightarrow \quad x - y &= 0, \\ x + y &= 0, \\ 2x + 3y &= 0. \end{aligned}$$

Pero esto ya lo hicimos más arriba, si tomamos $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ en la MRF (*). Claramente, la matriz nos indica que $x = y = 0$. Es decir, $\operatorname{Nu}(T) = \{(0,0)\}$ y la base es el conjunto $\emptyset$.

b) Como ya dijimos vamos a caracterizar los $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que $S(x,y,z) = (b_1, b_2)$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} (x - y + z, 2x - y + 2z) &= (b_1, b_2) \\ \Rightarrow \quad x - y + z &= b_1, \\ 2x - y + 2z &= b_2. \end{aligned}$$

Resolvamos el sistema con matrices aumentadas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & b_1 \\ 2 & -1 & 2 & b_2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & -2b_1+b_2 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -b_1+b_2 \\ 0 & 1 & 0 & b_2-2b_1 \end{array}\right]. \tag{**}$$

Como no hay ninguna condición sobre los b_i, el sistema tiene solución para todo $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Es decir,

$$\operatorname{Im}(S) = \mathbb{R}^2. \tag{7.7}$$

Claramente, una base podría ser $\{(1,0),(0,1)\}$.

Para encontrar la ecuación implícita del núcleo debemos resolver el sistema homogéneo asociado a $S(x) = 0$. Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} (x-y+z, 2x-y+2z) &= (0,0) \\ \Rightarrow \quad x-y+z &= 0, \\ 2x-y+2z &= 0. \end{aligned}$$

Pero esto ya lo hicimos más arriba, si tomamos $b_1 = b_2 = 0$ en la MRF (**). Claramente, la matriz nos indica que $x + z = 0$ e $y = 0$. Es decir,

$$\begin{aligned} \operatorname{Nu}(S) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+z=0, y=0\} \qquad (***) \\ &= \{(-z,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1,0,1) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(1,0,-1)\rangle. \end{aligned}$$

Luego (***) es la ecuación implícita del núcleo y $\{(1,0,-1)\}$ es una base de $\operatorname{Nu}(S)$.

□

(7) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales calcular el núcleo y la imagen. Describir ambos subespacios implícitamente y encontrar una base de cada uno de ellos.

a) $D : P_4 \longrightarrow P_4$, $D(p(x)) = p'(x)$.

b) $T : M_{2\times2}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(A) = \operatorname{tr}(A)$.

c) $L : P_3 \longrightarrow M_{2\times2}(\mathbb{R})$, $L(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix} a & b+c \\ b+c & a \end{bmatrix}$.

d) $Q : P_3 \longrightarrow P_4$, $Q(p(x)) = (x+1)p(x)$.

Solución:

a) Como ya dijimos vamos a caracterizar los $q(x) \in P_4$ tales que $D(p(x)) = q(x)$ para $p(x) \in P_4$. Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} D(a+bx+cx^2+dx^3) &= b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3 \\ \Rightarrow \quad b+2cx+3dx^2 &= b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3. \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son muy fáciles de obtener:

$$\begin{aligned} b &= b_0, \\ 2c &= b_1, \\ 3d &= b_2, \\ 0 &= b_3. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\operatorname{Im}(D) = \{a + bx + cx^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Para encontrar la ecuación implícita del núcleo debemos resolver el sistema homogéneo asociado a $D(p(x)) = 0$. Es decir, $b = c = d = 0$, luego

$$\operatorname{Nu}(D) = \{a : a \in \mathbb{R}\}.$$

b) Como T es no nula, por ejemplo $T(\operatorname{Id}_2) = 2 \neq 0$, entonces $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{K}$. Para averiguar el núcleo debemos resolver el sistema homogéneo asociado a $T(A) = 0$. Es decir, $\operatorname{tr}(A) = 0$, luego,

$$\operatorname{Nu}(T) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K}) : \operatorname{tr}(A) = 0\}.$$

Equivalentemente,

$$\operatorname{Nu}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{K}) : a + d = 0 \right\},$$

y esta sería la forma implícita del núcleo de T. Escrito de otra forma,

$$\operatorname{Nu}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{K} \right\}.$$

Por lo tanto podríamos tomas como base de $\operatorname{Nu}(T)$ a $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

c) Debemos caracterizar las matrices $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que $L(p(x)) = B$ para $p(x) \in P_3$. Es decir, debemos resolver el sistema

$$L(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a & b + c \\ b + c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema es

$$\begin{aligned} a &= b_1, \\ b + c &= b_2, \\ b + c &= b_3, \\ a &= b_4. \end{aligned}$$

Restando la primera ecuación a la cuarta y le segunda a la tercera obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} a &= b_1, \\ b + c &= b_2, \\ 0 &= b_3 - b_2, \\ 0 &= b_4 - b_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Im}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : 0 = b_3 - b_2, 0 = b_4 - b_1 \right\},$$

y

$$\operatorname{Nu}(L) = \left\{ a + bx + cx^2 + \in P_3 : a = 0, b + c = 0 \right\}.$$

Encontremos ahora bases de $\operatorname{Im}(L)$ y $\operatorname{Nu}(L)$. Para $\operatorname{Im}(L)$, notemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(L) &= \left\{ \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} : b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rangle. \end{aligned}$$

Es decir, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de $\operatorname{Im}(L)$.

Para $\operatorname{Nu}(L)$, notemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Nu}(L) &= \left\{ a + bx + cx^2 \in P_3 : a = 0, b + c = 0 \right\} \\ &= \left\{ bx - bx^2 \in P_3 : b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b(x - x^2) : b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \langle x - x^2 \rangle. \end{aligned}$$

Es decir, $\{x - x^2\}$ es una base de $\operatorname{Nu}(L)$.

d) Debemos caracterizar los $q(x) \in P_4$ tales que $Q(p(x)) = q(x)$ para $p(x) \in P_3$. Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} Q(a + bx + cx^2) &= (x + 1)(a + bx + cx^2) \\ &= a + (a + b)x + (b + c)x^2 + cx^3 \\ &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3. \end{aligned}$$

Escrito de otra forma, debemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} a &= b_0, \\ a+b &= b_1, \\ b+c &= b_2, \\ c &= b_3. \end{aligned}$$

Escribamos la matriz aumentada correspondiente y hagamos Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_0 \\ 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-F_4]{F_2-F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 1 & 0 & b_1-b_0 \\ 0 & 1 & 0 & b_2-b_3 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3-F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 1 & 0 & b_1-b_0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0-b_1+b_2-b_3 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right].$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Im}(Q) = \left\{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \in P_4 : b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = 0\right\},$$

e

$$\operatorname{Nu}(Q) = \left\{a + bx + cx^2 \in P_3 : a = 0, b = 0, c = 0\right\} = \{0\}.$$

Obtenemos una base de $\operatorname{Im}(Q)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(Q) &= \left\{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \in P_4 : b_0 = b_1 - b_2 + b_3\right\} \\ &= \left\{(b_1 - b_2 + b_3) + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \in P_4 : b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{b_1(1+x) + b_2(x^2-1) + b_3(x^3+1) \in P_4 : b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \langle 1+x, 1-x^2, 1+x^3\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{1+x, 1-x^2, 1+x^3\}$ es una base de $\operatorname{Im}(Q)$. □

(8) Sea $T : \mathbb{K}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{K}_4[x]$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a - c + 2d)x^3 + (b + 2c - d)x^2 + \\ + (-a + 2b + 5c - 4d)x + (2a - b - 4c + 5d)$$

a) Decir cuáles de los siguientes matrices están en el núcleo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Decir cuáles de los siguientes polinomios están en la imagen:

$$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad q(x) = x^3, \quad r(x) = (x-1)(x-1)$$

SOLUCIÓN:

a) Para ver si A, B y C están en el núcleo debemos ver si T de cada matriz es el polinomio nulo. Por la definición de T,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Nu}(T) \Leftrightarrow \begin{cases} a - c + 2d = 0 \\ b + 2c - d = 0 \\ -a + 2b + 5c - 4d = 0 \\ 2a - b - 4c + 5d = 0. \end{cases}$$

Podemos comprobar en cada matriz estas ecuaciones, o podemos simplificar el sistema para que resulta más fácil al comprobación. Haremos esto último con Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4-2F_1]{F_3+F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4+F_2]{F_3-2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Nu}(T) \Leftrightarrow \begin{cases} a - c + 2d \\ b + 2c - d. \end{cases}$$

Veamos ahora si las matrices A, B y C cumplen con estas ecuaciones:

A: $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$, $d = -1$, por lo tanto, $a - c + 2d = 2 - 0 + 2 \cdot (-1) = 0$ y $b + 2c - d = 0 + 2 \cdot 0 - (-1) = 1$, es decir, $A \notin \mathrm{Nu}(T)$.

B: $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 1$, por lo tanto, $a - c + 2d = -1 - 1 + 2 \cdot 1 = 0$ y $b + 2c - d = -1 + 2 \cdot 1 - 1 = 0$, es decir, $B \in \mathrm{Nu}(T)$.

C: $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 0$, por lo tanto, $a - c + 2d = -1 - 1 + 2 \cdot 0 = 0$ y $b + 2c - d = -1 + 2 \cdot 1 - 0 = 1$, es decir, $C \notin \mathrm{Nu}(T)$.

b) Para ver si $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ están en la imagen debemos caracterizar la imagen.

Por la definición de T, $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathrm{Im}(T)$ si y solo si existe $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ tal que $T(A) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Es decir, si y solo si

$$\begin{cases} a - c + 2d = a_3 \\ b + 2c - d = a_2 \\ -a + 2b + 5c - 4d = a_1 \\ 2a - b - 4c + 5d = a_0. \end{cases}$$

Resolvamos el sistema con Gauss.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & a_3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a_2 \\ -1 & 2 & 5 & -4 & a_1 \\ 2 & -1 & -4 & 5 & a_0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_4-2F_1]{F_3+F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & a_3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a_2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & a_1+a_3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & a_0-2a_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_4+F_2]{F_3-2F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & a_3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1-2a_2+a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0+a_2-2a_3 \end{array}\right].$$

Por lo tanto,

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \operatorname{Im}(T)$$
$$\Updownarrow$$
$$a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 \;\text{ y }\; a_0 + a_2 - 2a_3 = 0.$$

En el caso de $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $a_3 = 1$, $a_2 = 1$, $a_1 = 1$, $a_0 = 1$, por lo tanto, $a_1 - 2a_2 + a_3 = 1 - 2 + 1 = 0$ y $a_0 + a_2 - 2a_3 = 1 + 1 - 2 = 0$, es decir, $p(x) \in \operatorname{Im}(T)$.

Para $q(x) = x^3$, $a_3 = 1$, $a_2 = 0$, $a_1 = 0$, $a_0 = 0$, por lo tanto, $a_1 - 2a_2 + a_3 = 1 \neq 0$, es decir, $q(x) \notin \operatorname{Im}(T)$.

Finalmente para $r(x) = (x-1)(x-1) = x^2 - 2x + 1$, $a_3 = 0$, $a_2 = 1$, $a_1 = -2$, $a_0 = 1$, por lo tanto, $a_1 - 2a_2 + a_3 = -2 - 2 + 0 = -4 \neq 0$, es decir, $r(x) \notin \operatorname{Im}(T)$.

□

(9) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $T(x, y, z) = x + 2y + 3z$.

a) Probar que T es un epimorfismo.

b) Dar la dimensión del núcleo de T.

c) Encontrar una matriz A tal que $T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. ¿De qué tamaño debe ser A? Como en el ejercicio (4) *a)* pensamos a los vectores como columnas.

Solución: *a)* Como el codominio de T es de dimensión 1, solo debemos ver que T es no nulo. Pero $T(1, 0, 0) = 1 \neq 0$, por lo tanto, T es un epimorfismo.

b) Por el teorema del núcleo-imagen, $\dim \operatorname{Nu}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim \mathbb{K}^3 = 3$. Como T es un epimorfismo, $\dim \operatorname{Im}(T) = 1$, luego $\dim \operatorname{Nu}(T) = 2$.

c) El tamaño de A debe ser 1×3, pues la multiplicación de una matriz 1×3 por una matriz 3×1, el vector columna, resulta en una matriz de 1×1, un elemento de $\mathbb{K}$. La matriz es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

□

(10) Determinar cuáles transformaciones lineales de los ejercicios (6) y (7) son monomorfismos, epimorfismos y/o isomorfismos.

SOLUCIÓN:

Ejercicio (6)*a)*. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$. T no puede ser sobreyectiva, por dimensión ($2 < 3$). T es inyectiva, pues probamos en el ejercicio (6)*a)* que $\operatorname{Nu}(T) = \{0\}$.

Ejercicio (6)*b)*. $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $S(x, y, z) = (x - y + z, 2x - y + 2z)$. Por dimensión, S no puede ser inyectiva ($3 > 2$). S es sobreyectiva, pues probamos en el ejercicio (6)*b)* que $\operatorname{Im}(S) = \mathbb{R}^2$.

Ejercicio (7)*a)*. $D : P_4 \longrightarrow P_4$, $D(p(x)) = p'(x)$. D no es inyectiva, pues D de una constante es 0 o, alternativamente, ya probamos que $\operatorname{Nu}(D) = \{a : a \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$. D no es sobreyectiva y la forma más sencilla de argumentar es por el teorema de la dimensión, que nos dice que $\dim \operatorname{Im}(D) + \dim \operatorname{Nu}(D) = \dim P_4 = 4$. Como $\dim \operatorname{Nu}(D) = 1$, $\dim \operatorname{Im}(D) = 3$, es decir, $\operatorname{Im}(D) \neq P_4$.

Ejercicio (7)*b)*. $T : M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(A) = \operatorname{tr}(A)$. La traza es una aplicación no nula y como el codominio es de dimensión 1, T es sobreyectiva. T no es inyectiva, pues, por ejemplo, $T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0 = T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejercicio (7)*c)*. $L : P_3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $L(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a & b + c \\ b + c & a \end{bmatrix}$. L no puede ser sobreyectiva pues el dominio de L es de dimensión 3 y el codominio es de dimensión 4. Vimos en (7)*c)* que $\operatorname{Nu}(L) = \langle x - x^2 \rangle$. Como $\operatorname{Nu}(L) \neq \{0\}$, L no es inyectiva.

Ejercicio (7)*d)*. $Q : P_3 \longrightarrow P_4$, $Q(p(x)) = (x + 1)p(x)$. Q no puede ser sobreyectiva pues el dominio de Q es de dimensión 3 y el codominio es de dimensión 4. Vimos en (7)*d)* que $\operatorname{Nu}(Q) = \{0\}$ y por lo tanto Q es inyectiva.

□

(11) Encontrar en cada caso, cuando sea posible, una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que la transformación lineal $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(v) = Av$, satisfaga las condiciones exigidas (como en el ejercicio (3) *c)* pensamos a los vectores como columnas). Cuando no sea posible, explicar por qué no es posible.

a) $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$ y $\dim \operatorname{Nu}(T) = 2$.

b) T inyectiva y $T(e_1) = (1, 0, 0)$, $T(e_2) = (2, 1, 5)$ y $T(e_3) = (3, -1, 0)$.

c) T sobreyectiva y $T(e_1) = (1, 0, 0)$, $T(e_2) = (2, 1, 5)$ y $T(e_3) = (3, -1, 0)$.

d) $e_1 \in \operatorname{Im}(T)$ y $(-5, 1, 1) \in \operatorname{Nu}(T)$.

e) $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$.

SOLUCIÓN:

a) Por el teorema de la dimensión, para cualquier T lineal tendríamos $\dim \operatorname{Im}(T) + \dim \operatorname{Nu}(T) = \dim \mathbb{K}^3 = 3$. Por lo tanto, no puede existir T con $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$ y $\dim \operatorname{Nu}(T) = 2$, pues en ese caso sería $\dim \operatorname{Im}(T) + \dim \operatorname{Nu}(T) = 4$.

b) T está bien definida, pues está definida en una base. Como la base es la canónica, es sencillo calcular A, pues $F_i(A)v = T(v)_i$, es decir la fila i de A por un vector devuelve la coordenada i-ésima de $T(v)$. Por lo tanto,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para que sea inyectiva debemos comprobar que $\operatorname{Nu}(T) = \{0\}$. Es decir, debemos ver que el sistema homogéneo asociado a $T(v) = 0$ solo tiene la solución trivial:

$$\begin{aligned} & T(a,b,c) = (0,0,0) \\ \Rightarrow \quad & a(1,0,0) + b(2,1,5) + c(3,-1,0) = (0,0,0) \\ \Rightarrow \quad & (a+2b+3c, b-c, 5b) = (0,0,0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a+2b+3c &= 0 \\ b-c &= 0 \\ 5b &= 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{cases}.$$

Por lo tanto T es inyectiva.

c) T es la transformación lineal del inciso anterior que ya vimos que es inyectiva. Por el teorema de la dimensión, $\dim \operatorname{Im}(T) = 3$, por lo tanto, T es sobreyectiva.

d) Debemos definir una T tal que que cumpla las condiciones del enunciado. Una podría ser $T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = 0$, $T(e_3) = 5e_1$. Como T está definida en una base, se puede extender a una transformación lineal:

$$T(x,y,z) = xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) = xe_1 + 5ze_1 = (x+5z,0,0).$$

Por lo tanto, $e_1 \in \operatorname{Im}(T)$ y como $T(-5,1,1) = (-5+5,0,0) = (0,0,0)$, entonces $(-5,1,1) \in \operatorname{Nu}(T)$.

La matriz A está formada por las columnas $[T(e_1)\ T(e_2)\ T(e_3)]$, es decir,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e) Definamos $T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = e_2$, $T(e_3) = 0$. Como T está definida en una base, se puede extender a una transformación lineal:

$$T(x,y,z) = xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) = xe_1 + ye_2 = (x,y,0).$$

Es claro que $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$ y que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□