# Introducción a la Lógica y la Computación — Estructuras de orden
## Práctico 8: Productos y sumas directas. Caracterización de $D_n$.

**Notación**: Mediante $\underline{\mathbf{n}}$ denotamos la cadena (es decir, el conjunto totalmente ordenado) de $n$ elementos. Decimos "*la* cadena" porque todas las del mismo cardinal son isomorfas; por este motivo, se pueden elegir los elementos que uno encuentre más convenientes para el problema en cuestión.

El **producto directo** $(L, \leq_L) \times (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ tiene como universo a $L \times M$ y como orden parcial a la relación

$$(x_1, y_1) \leq_{L\times M} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_L x_2 \;\&\; y_1 \leq_M y_2.$$

Definimos además $L^1 := L$ y $L^{n+1} := L \times L^n$ para todo poset $L$.

La **suma directa** $(L, \leq_L) \oplus (M, \leq_M)$ de $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ disjuntos tiene como universo a $L \cup M$ y al orden parcial definido por casos:

$$x \leq_{L\oplus M} y \iff (x, y \in L \;\&\; x \leq_L y) \text{ ó } (x, y \in M \;\&\; x \leq_M y).$$

1. Dé los diagramas de Hasse de $\underline{\mathbf{2}} \times \underline{\mathbf{4}}$ y de $\mathscr{P}(\{a, b\}) \times \underline{\mathbf{2}}$.
2. Demostrar que si $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ son posets, entonces $L \times M \cong M \times L$.
3. Suponga que $(L, \vee_L, \wedge_L)$ y $(M, \vee_M, \wedge_M)$ son reticulados. Entonces las operaciones
$$(x_1, y_1) \vee_{L\times M} (x_2, y_2) := (x_1 \vee_L x_2, y_1 \vee_M y_2)$$
$$(x_1, y_1) \wedge_{L\times M} (x_2, y_2) := (x_1 \wedge_L x_2, y_1 \wedge_M y_2)$$
definidas en $L \times M$ son exactamente el supremo y el ínfimo, respectivamente, en el poset $L \times M$. Concluir que $L \times M$ también es un reticulado.
4. *a*) Dar explícitamente un isomorfismo entre $\underline{\mathbf{2}}^3$ y $D_{30}$.
   *b*) Demostrar que $\underline{\mathbf{2}}^n \cong \mathscr{P}(\{1, \dots, n\})$.
5. Supongamos que $L$ y $M$ son posets disjuntos.
   *a*) Si $D \subseteq L \cup M$ es decreciente en la suma directa $L \oplus M$, entonces $D \cap L$ es decreciente en $L$ y $D \cap M$ lo es en $M$.
   *b*) Si $D \subseteq L$ es decreciente en $L$, entonces lo es en $L \oplus M$ (ídem con $D \subseteq M$).
6. Explique por qué no existe $n$ tal que $D_{630}$ sea isomorfo a $\underline{\mathbf{2}}^n$
7. Escriba a $D_{300}$ como producto de cadenas.
8. Dé un poset $P$ sobre $X$ tal que $\mathscr{D}(P)$ sea iso a $\underline{\mathbf{4}} \times \underline{\mathbf{5}}$.
9. *a*) Sea $L$ un reticulado distributivo y sea $\{a_1, a_2\} \subseteq L$. Demostrar que hay un subreticulado *finito* $L_0$ de $L$ tal que $\{a_1, a_2\} \subseteq L_0$. (Nota: este caso no requiere distributividad).
   *b*) (*) Igual que el ítem anterior para $\{a_1, a_2, a_3\}$ (se puede ver que $L_0$ tendrá cardinal menor o igual a 18 en este caso).