PRÁCTICO 8

Coordenadas - Matriz de cambio de base
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Objetivos.

- Aprender a determinar las coordenadas de un vector en una base ordenada de un espacio vectorial.
- Aprender a calcular la matriz de una transformación respecto a las bases canónicas.
- Dadas dos bases ordenadas, aprender a operar con la matriz de cambio de base.

Ejercicios.

(1) Dar las coordenadas del polinomio $2x^2 + 10x - 1 \in \mathbb{K}_3[x]$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \{1, x+1, x^2+x+1\}.$$

(2) Dar las coordenadas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Más generalmente, dar las coordenadas de cualquier matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$.

(3) *a)* Dar una base del subespacio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$.
b) Dar las coordenadas de $w = (1, -1, -1)$ en la base que haya dado en el item anterior.
c) Dado $(x, y, z) \in W$, dar las coordenadas de (x, y, z) en la base que haya calculado en el item anterior.

(4) Escribir las matrices de las siguientes transformaciones lineales respecto de las bases canónicas de los espacios involucrados.
a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.
b) $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $S(x, y, z) = (x - y + z, 2x - y + 2z)$.
c) $D : P_4 \longrightarrow P_4$, $D(p(x)) = p'(x)$.

d) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(A) = \operatorname{tr}(A)$.

e) $L : P_3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $L(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a & b+c \\ b+c & a \end{bmatrix}$.

f) $Q : P_3 \longrightarrow P_4$, $Q(p(x)) = (x+1)p(x)$.

(5) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{K}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$ otra base de $\mathbb{R}^2$.

a) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

b) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

c) ¿Qué relación hay entre $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$?

d) Encontrar $(x,y),(z,w) \in \mathbb{K}^2$ tal que $[(x,y)]_{\mathcal{B}} = (1,4)$ y $[(z,w)]_{\mathcal{B}} = (1,-1)$.

e) Determinar las coordenadas de $(2,3)$ y $(0,1)$ en las bases $\mathcal{B}_2$.

(6) Sea $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$.

a) Calcular la inversa de P.

b) ⓐ Dar una base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^3$ tal que P es la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica de $\mathbb{K}^3$ a la base $\mathcal{B}$.

c) Encontrar $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ tal que su vector de coordenadas con respecto a $\mathcal{B}$ es

$$[(x,y,z)]_{\mathcal{B}} = (2,-1,-1).$$

(7) Sean $\mathcal{C}_n$, $n = 2,3$, las bases canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Sean $\mathcal{B}_2 = \{(1,0),(1,1)\}$ y $\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

a) Escribir la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}_n}$ de $\mathcal{C}_n$ a $\mathcal{B}_n$, $n = 2,3$.

b) Escribir la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}_n,\mathcal{C}_n}$ de $\mathcal{B}_n$ a $\mathcal{C}_n$, $n = 2,3$.

(8) Sean $\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_n$ como en el ejercicio (7) y sean las siguientes transformaciones lineales:

- $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x-y, x+y, 2x+3y)$.
- $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $S(x,y,z) = (x-y+z, 2x-y+2z)$.

Entonces, para cada una de las transformaciones lineales anteriores,

a) Dar las matrices respecto a las bases $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{C}_n$.

b) Dar las matrices respecto a las bases $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{B}_n$.

c) Dar las matrices respecto a las bases $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{B}_n$.

(9) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x,y,z) = (x-y, x-z).$$

Sean $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

a) Calcular la matriz $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}$, es decir la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}'$.

b) Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Dar las coordenadas de $T(x,y,z)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.

c) Sea $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz respecto a las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}$ es

$$[S]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcular la matriz de la composición $T \circ S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con respecto a la base $\mathcal{B}'$.

(10) Sea A la matriz del ejercicio (1)*a)* del práctico 5 y $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T_A(v) = Av$. Hallar los autovalores de T_A, y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del correspondiente autoespacio. Decidir si T_A es o no diagonalizable. En caso de serlo dar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

Repetir esto para cada una de las matrices de dicho ejercicio.

(11) Repetir el ejercicio anterior para cada matriz del ejercicio (1) del práctico 5 pero ahora consideradando a la transformación como una transformación lineal entre los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $\mathbb{C}^n$.

(12) Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y $v \in V$ un autovector de autovalor λ. Probar las siguientes afirmaciones.
a) Si $\lambda = 0$, entonces $v \in \mathrm{Nu}(T)$.
b) Si $\lambda \neq 0$, entonces $v \in \mathrm{Im}(T)$.
c) Si $T^2 = 0$, entonces $T - \mathrm{Id}$ es un isomorfismo.

(13) ⓐ Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Supongamos que existe $v \in V$ tal que $T^3(v) = 0$ pero $T^2(v) \neq 0$.
a) ⓐ Probar que $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v)\}$ es una base de V.
b) Calcular la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B}$.
c) Calcular los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios. Decidir si T es diagonalizable.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(14) Repetir el ejercicio (5) con la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $\mathcal{B}_3 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$. Considerar las 3-upla $(1, 2, 3)$ y $(0, 1, 2)$ para los últimos dos items.

(15) Repetir los últimos items del ejercicio (9) con la transformación lineal $S \circ T$ y la base del ejercicio anterior.

(16) ⓐ Sea V un espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz. Sea $\mathcal{B}' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ donde

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Probar que $\mathcal{B}'$ es una base de V si y sólo si A es inversible. En tal caso determinar la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ y viceversa.

(17) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar sus autovalores, y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Luego, decir si la transformación considerada es o no diagonalizable.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, 0)$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2z, -x - y + z, x + 2y + z)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (4x + y + 5z, 4x - y + 3z, -12x + y - 11z)$.

d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (2x - y, x + 4y, z + 3w, z - w)$.

(18) Repetir el ejercicio (13) pero para cualquier $n \in \mathbb{N}$ en vez de 3.

(19) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\langle(1, 2, 3), (2, 1, -1)\rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle(3, 1, 1), (1, 1, 3)\rangle$ es el autoespacio asociado a 5.

b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\langle(1, 2, 3)\rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle(3, 1, 1)\rangle$ es el autoespacio asociado a 5.

c) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(T)$ y $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ es una base de la $\mathrm{Im}(T)$.

d) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1, 0, 1)\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(T)$ y $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ es una base de la $\mathrm{Im}(T)$.

Ayudas.

(6)*b)* Usar que $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$ y recordar como se define $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

(13)*a)* Es suficiente probar que $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v)\}$ es LI. Sean a, b, c escalares tales que $av + bT(v) + cT^2(v) = 0$. Si aplicamos T^2 en ambos lados deducimos que $aT^2(v) = 0$ dado que $T^3(v) = 0$. Entonces $a = 0$ porque (completar argumento). Con un razonamiento similar deducir que $a = b = c = 0$.

(16) Es suficiente probar que $\mathcal{B}'$ es LI si y sólo si A es invertible. Usar una estrategia similar a la demostración del Teorema 3.3.1 para probar esta equivalencia.