Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
Práctico 3: Posets reticulados. Isomorfismos de posets.

1. La siguiente tabla contiene algunos de los valores de $x \vee y = \sup\{x, y\}$ para x e y en cierto poset $(S, \leq)$. Por ejemplo $b \vee c = d$.

$\vee$	a	b	c	d	e	f
a		e	a	e	e	a
b			d	d	e	b
c				d	e	c
d					e	d
e						e
f						

   a) Llene el resto de la tabla.
   b) ¿Cuál es el mínimo y el máximo de S?
   c) Muestre que $f \leq c \leq d \leq e$.
   d) Dibuje el diagrama de Hasse asociado a $(S, \leq)$.

2. Sea P un poset reticulado y $a, b, c \in P$. Demuestre que $\sup\{a, b, c\}$ existe y es igual a $(a \vee b) \vee c$ (y también a $a \vee (b \vee c)$). Generalice para más elementos.

3. Supongamos que un poset tiene la siguiente propiedad: *para todo $a, b \in P$, $a \vee b$ existe.* Pruebe que $\sup(S)$ existe para cualquier $S \subseteq P$ finito y no vacío.

En los siguientes ejercicios, suponga que a, b y c son distintos dos a dos.

4. a) Dibuje los diagramas de Hasse de $A = (\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, |)$ y $B = (\{1, 2, 3, 4, 6\}, |)$.
   b) ¿Cuáles de esos posets son reticulados?
   c) Calcular $4 \wedge (2 \vee 3)$ en ambos posets.
   d) Determinar un subconjunto de $(\mathscr{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ cuyo diagrama de Hasse sea B.

5. Demuestre que en todo poset reticulado se cumple $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

6. Determine cuáles de los siguientes mapeos f de P a Q son isomorfismos. En caso de no serlo determine qué es lo que falla.
   a) $P = Q = (\mathbb{Z}, \leqslant)$ y $f(x) = x + 1$.
   b) $P = Q = (\mathbb{Z}, \leqslant)$ y $f(x) = 2x$.
   c) $P = Q = (\mathscr{P}(\{a, b, c\}, \subseteq)$ y $f(A) = A^c$.

7. Determine si se dan los isomorfismos indicados.
   a) $(D_6, |) \cong (\mathscr{P}(\{a, b\}), \subseteq)$.
   b) $(D_{30}, |) \cong (\mathscr{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

8. Demuestre que si $f : (P, \leq) \to (Q, \leq')$ es isomorfismo entonces $f^{-1} : (Q, \leq') \to (P, \leq)$ también lo es.

9. Suponga que $f : P \to Q$ es un isomorfismo de posets.
   a) Si $m \in P$ es minimal, entonces $f(m)$ es minimal.
   b) Si $m \in P$ es maximal, entonces $f(m)$ es maximal.
   c) Probar que si Q tiene algún minimal, entonces P tiene un minimal (Ayuda: usar f^{-1}).

10. (*) Determine cuántos isomorfismos hay de $(\mathscr{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ en sí mismo.