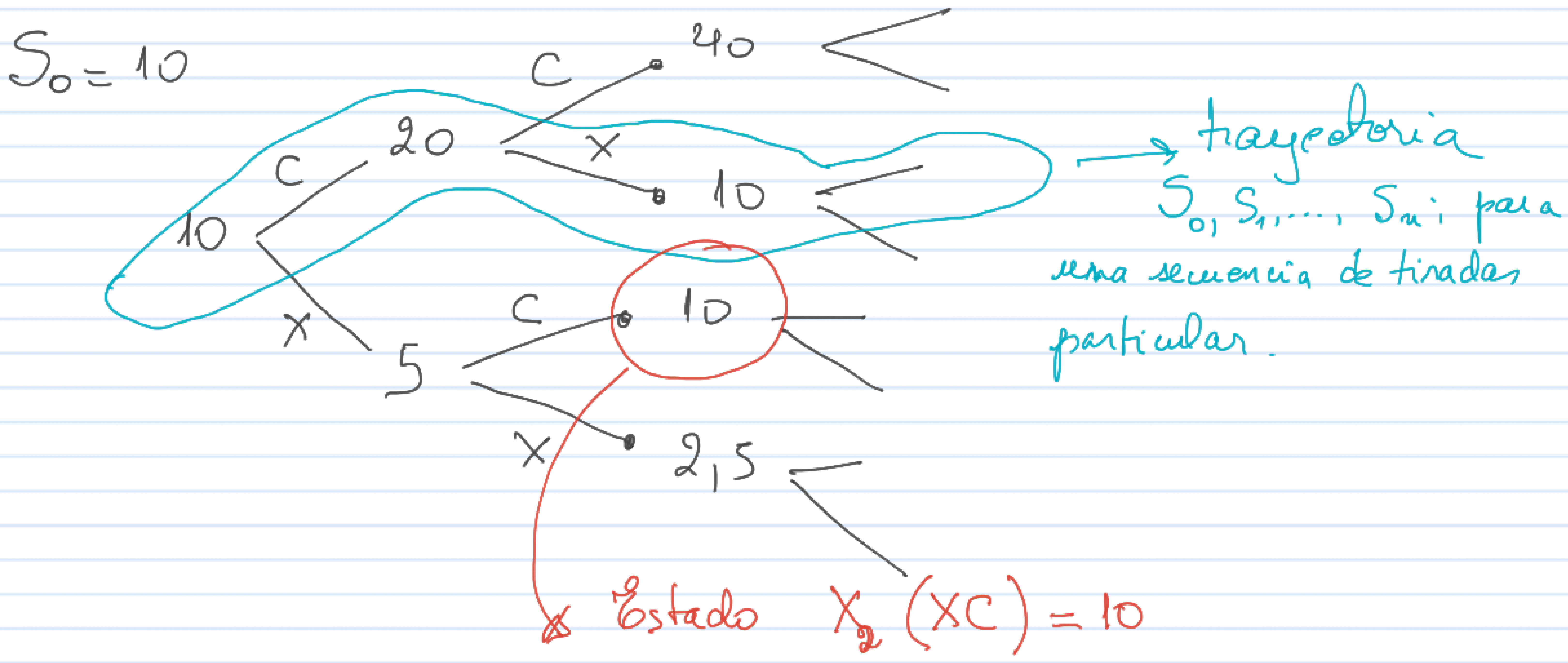
Cadenas de Markov

Es un proceso estocástico; $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} X_t;\quad t \text{ discreto};\\ X_t \text{ es una variable discreta}\end{array}\right\}\ \text{cadena}$$

Ejemplo: S_t: el precio de un activo; S_0: valor inicial;

$$S_t = \begin{cases} S_{t-1} \times 2 & \text{si la moneda sale cara} \\ S_{t-1} \times \frac{1}{2} & \text{si la moneda sale cruz.} \end{cases}$$



Vamos a considerar cadenas con un número finito de estados.

Decimos que la cadena cumple la propiedad de Markov si

$$P(X_n = j \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1, X_0) = P(X_n = j \mid X_{n-1})$$

En ese caso decimos que es una "cadena de Markov".

Suponemos que la cadena puede tomar los estados $\{0, 1, 2, \dots, k\}$

Podemos querer calcular $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) =$ probabilidad de pasar al estado j dado que se está en el estado i, en el tiempo n.

Probabilidad de transición: $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$.

Decimos que la cadena es homogénea si $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ no depende de n.

Cadena de Markov homogénea

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = P(X_1=j \mid X_0=i) = P(X_5=j \mid X_4=i)$$

Notación : $p_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$

Matriz de transición $Q=(p_{ij})$; matriz $(k+1)\times(k+1)$

$$Q=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0k} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & & p_{1k} \\ & & & & \\ p_{k0} & p_{k1} & & & p_{kk} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=0}^{k} p_{ij} = \sum_{j=0}^{k} P(X_1=j \mid X_0=i) = 1.$$

$$0 \le p_{ij} \le 1$$

Distribución inicial de la cadena

$$\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_k) \ ; \quad \Pi_j = P(X_0 = j)$$

$$0 \le \Pi_i \le 1 \ ; \qquad \sum_{j=0}^{k} \Pi_j = 1.$$

Si conocemos la distribución inicial y las probabilidades de transición, se puede determinar la probabilidad de llegar a un determinado estado en un tiempo n.

Ejemplo:

$$Q = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$S = \{0, 1, 2\}$ estados

$$\Pi = [1/3, \ 1/3, \ 1/3]$$

$$P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2) =$$

$$P(X_2 = 2 \mid X_0 = 0, X_1 = 1) \cdot P(X_0 = 0, X_1 = 1) =$$

$$P(X_2 = 2 \mid X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) P(X_0 = 0)$$

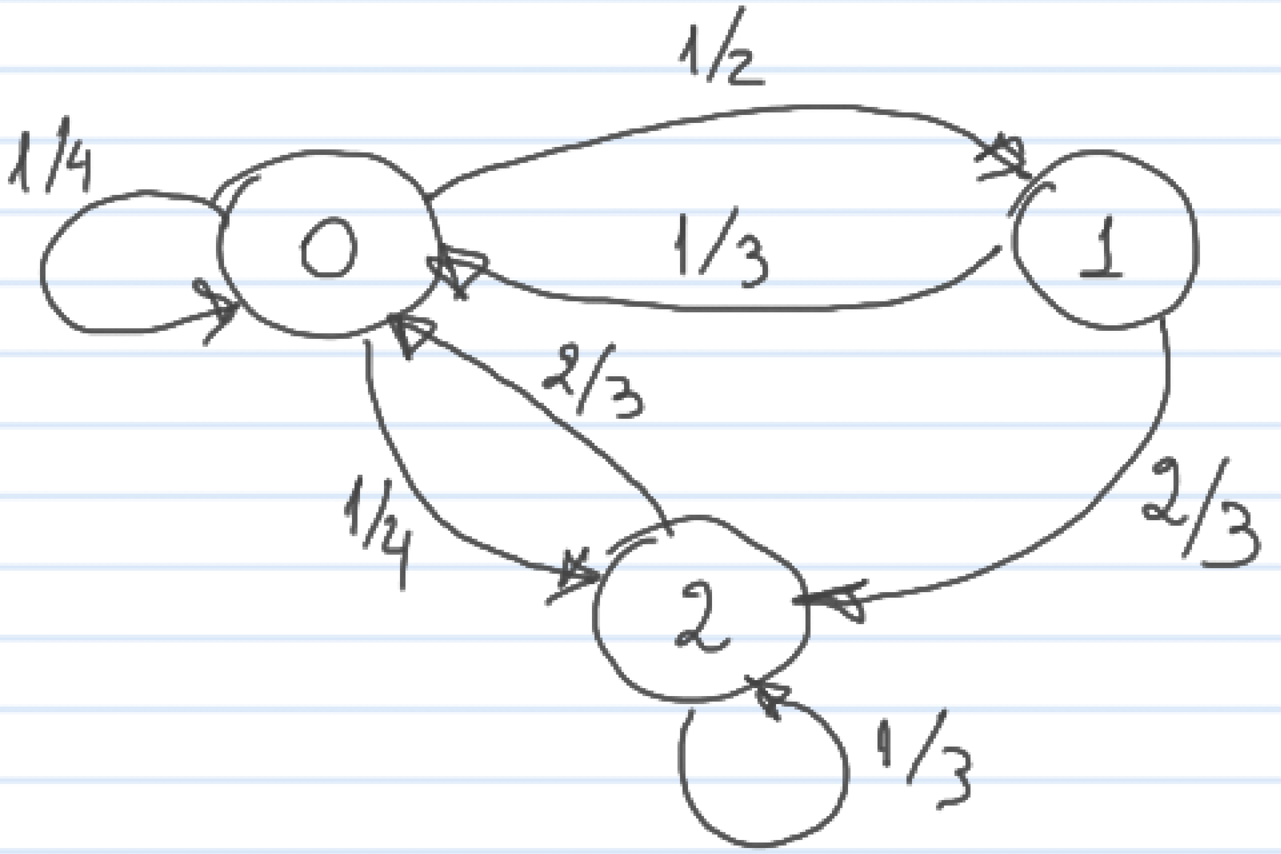
$$= 2/3 \times 1/2 \times 1/3 = 1/9$$

Diagrama de transición: Grafo dirigido;

$S = \{\text{estados}\}$ son los nodos del grafo.

Existe un arco de i a j si $p_{ij} > 0$, y el peso es p_{ij}

En el ejemplo:



La suma de los pesos que salen de un mismo nodo es igual a 1.

. $P(X_{n+2} = 0 \mid X_n = 1) = ?$

$$= \sum_{j=0}^{2} P(X_{n+2} = 0, X_{n+1} = j \mid X_n = 1) = \sum_{j=0}^{2} \underbrace{P(X_{n+2} = 0 \mid X_{n+1} = j)}_{p_{j0}} \cdot \underbrace{P(X_{n+1} = j \mid X_n = 1)}_{p_{1j}}$$

$$P(X_{n+2}=0 \mid X_n=1) = (Q * Q)_{(10)} \qquad Q^2 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

La matriz $Q^2 = Q * Q$ contiene las probabilidades de transición del estado al estado i al estado j en dos pasos.

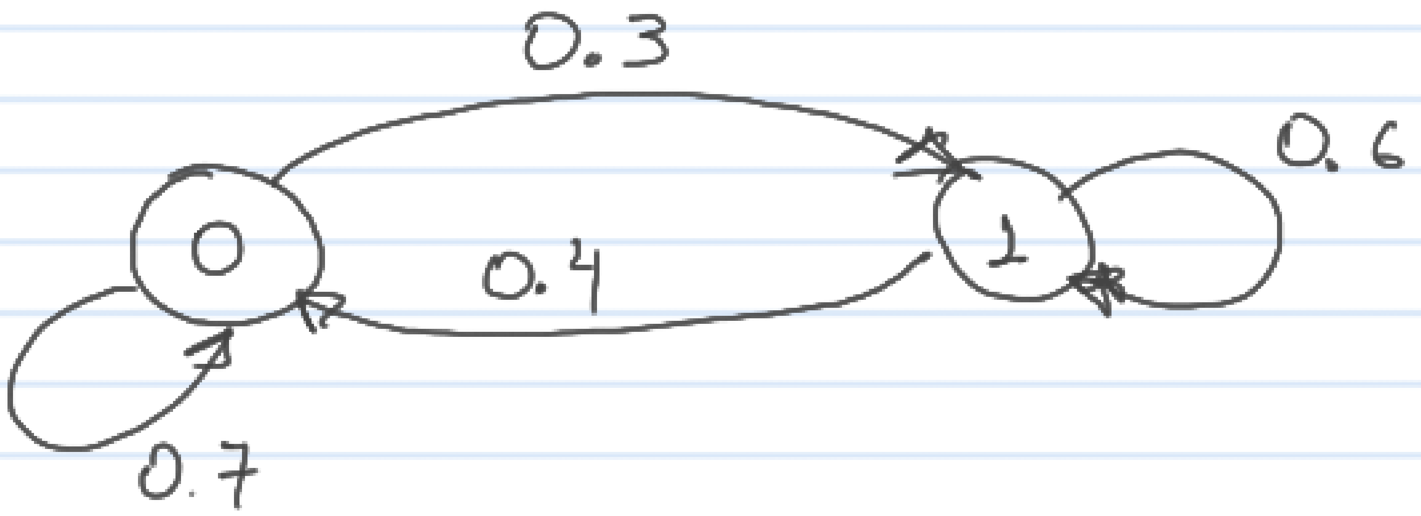
$$P(X_{n+h}=j \mid X_n=i) = \sum_{r=0}^{k} P(X_{n+h}=j,\ X_{n-1+h}=r \mid X_n=i)$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \underbrace{P(X_{n+h}=j \mid X_{n-1+h}=r)}_{p_{rj}} \cdot \underbrace{P(X_{n-1+h}=r \mid X_n=i)}_{(Q^{h-1})_{ir}}$$

$$= (Q^h)_{ij}.$$

Ejemplo: Una cadena de 2 estados; 0: máquina en funcionamiento
1: máquina descompuesta

$$Q = \begin{pmatrix} 0,7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$



$$Q^{10} = \begin{pmatrix} 0,5714\ldots & 0.4286 \\ 0,5714\ldots & 0,4286 \end{pmatrix} \qquad Q^5 = \begin{pmatrix} 0,5725 & 0,4275 \\ 0,57 & 0,43 \end{pmatrix}$$

$$\Pi = (\pi_0, \pi_1)$$

$$(\pi_0, \pi_1) \times Q^{10} = \left(\sim \overbrace{(\pi_0 + \pi_1)}^{=1} \times 0,5714 \,,\, \overbrace{(\pi_0 + \pi_1)}^{=1}\, 0,4286 \right) \sim (0,5714; 0,4286)$$

Si Q es diagonalizable,

$$Q = P \; D \; P^{-1} \quad ; \quad D = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}}_{\text{autovalores}}$$

$$Q^n = (P D \cancel{P^{-1}})(\cancel{P} D \cancel{P^{-1}})\cancel{)}\cdots(\cancel{P} D P^{-1}) = P D^n P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} \lambda_0^n & & & \\ & \lambda_1^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$Q^n_{00} = a_0 \lambda_0^n + a_1 \lambda_1^n + \cdots + a_k \lambda_k^n$$

$a_0, a_1, \ldots, a_k$ dependen del subíndice 00
no dependen de n.

$$Q = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 1.3\lambda + 0.3 = (\lambda-1)(\lambda-0.3)$$

Autovalores : $1, \quad 0.3$

$$\begin{cases} p_{00}^{(0)} = 1 = a + b \\ p_{00}^{(1)} = 0.7 = a + b.0.3 \end{cases}$$

$$1 - 0.7 = b(1-0.3)$$

$$b = \frac{0.3}{0.7} = 3/7; \quad a = 4/7$$

$$p_{00}^{(n)} = a.1^n + b(0.3)^n$$

$$p_{00}^{(n)} = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}.(0.3)^n$$

$$\begin{cases} p_{10}^{(0)} = 0 = a + b \\ p_{10}^{(1)} = 0.4 = a + b.0.3 \end{cases}$$

$$-0.4 = b(0.7); \; b = -4/7; \quad a = 4/7$$

$$p_{10}^{(n)} = a.1^n + b.(0,3)^n$$

$$= \frac{4}{7}.1^n - \frac{4}{7}(0.3)^n$$

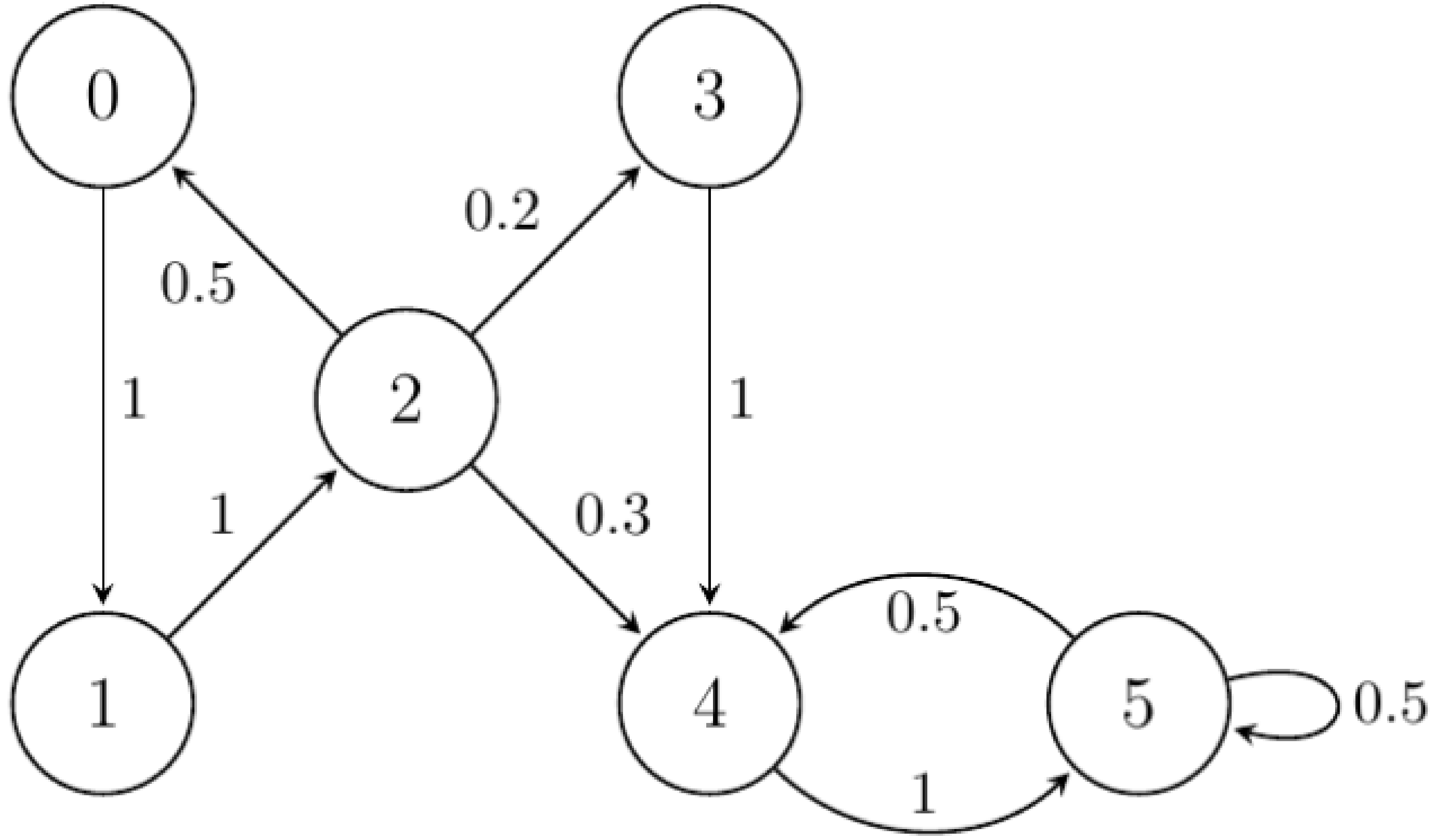
$$Q^n = \begin{pmatrix} 4/7 + 3/7 \cdot (0.3)^n & 3/7 - 4/7 (0.3)^n \\ \underbrace{4/7 - 4/7 (0.3)^n}_{\downarrow \; 4/7} & \underbrace{3/7 + 4/7 (0.3)^n}_{\downarrow \; 3/7} \end{pmatrix}$$

Dada una cadena de Markov; decimos que j <u>es accesible</u> desde i si

$$P(X_n = j, \text{ para algún } n \geq 0 \mid X_0 = i) > 0$$

- i y j se comunican si j es accesible desde i, e i es accesible desde j.

Una clase comunicante es un subconjunto de estados donde todos los estados se comunican entre sí.



$$f_{44} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \times (0{,}5)^{n} \times 0{,}5$$

$$= 0.5 \times \frac{1}{(1-0.5)} = 1$$

$\{0, 1, 2\}$ $\{4, 5\}$ $\{3\}$: clases comunicantes.

$\{4,5\}$ es cerrado porque $\forall j \neq 4, j \neq 5$; j no es accesible desde 4 y 5.

Si la cadena tiene una sola clase comunicante, se dice irreducible.

Equivalentemente, si no tiene subconjuntos propios cerrados.

Clasificación de estados

$$P\left(X_n = j \,,\ \text{para algún } \overset{n \geq 1}{\overbrace{n>0}} \;\middle|\; X_0 = i \right) = \nu_{ij}$$

$\nu_{ii} = 1$ $\qquad$ i se dice recurrente

"saliendo de i, se vuelve a i con probabilidad 1".

Si no es recurrente, se dice transitorio.

Si $p_{ii} = 1 \Rightarrow$ se dice absorbente