Introducción a la Lógica y la Computación — Lógica proposicional
Práctico 1: Sintaxis de la lógica proposicional

1. Para las siguientes cadenas determinar cuáles están en Σ^*, cuáles en $PROP$, y cuáles en ninguno de los dos.
   a) $p_0 \to p_1$.
   b) $((p \wedge p) \to p)$.
   c) $(\varphi \vee \psi)$.
   d) $(((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_2)$.
2. *a*) Defina recursivamente una función *complej* que devuelva la cantidad ocurrencias de conectivos en una fórmula. Análogamente con *card_bot*, que sólo cuenta las ocurrencias de $\perp$.
   b) Defina la función *card_paren* que cuenta las ocurrencias de paréntesis (tanto "(" como ")").
   c) Probar que para toda $\varphi \in PROP$ se da
   $$card\_paren(\varphi) = 2 \cdot (complej(\varphi) - card\_bot(\varphi)).$$
3. Defina recursivamente una función $ocur(k, \varphi)$, que devuelva la cantidad de ocurrencias de p_k que posee φ, para cada $\varphi \in PROP$. (Note que para cada k fijo se está definiendo una función de $PROP$ en los naturales).
4. Defina recursivamente una función $S : PROP \to \mathscr{P}(PROP)$ de tal manera que $S(\varphi)$ sea el conjunto de subfórmulas de φ. Por ejemplo,
   $$S(\perp) = \{\perp\}, \qquad S((p_0 \wedge p_1)) = \{p_0, p_1, (p_0 \wedge p_1)\}.$$
   Esta definición no se puede justificar mediante el esquema de recursión del teórico. Para ello, ver el Ejercicio 7.
5. Considere los conjuntos $PROP_n$, para $n \in \mathbb{N}_0$, definidos como sigue:
   $$\begin{aligned} PROP_0 &:= At, \\ PROP_{k+1} &:= PROP_k \cup \{(\varphi \odot \psi) \mid \varphi, \psi \in PROP_k\} \qquad (k \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$
   Determine el menor n tal que $PROP_n$ contiene a φ, para cada una de las siguientes proposiciones φ:
   a) $(p_0 \to \perp)$.
   b) $((\neg p_0) \wedge ((p_0 \to \perp) \to \perp))$.
   c) $(((\neg p_0) \vee p_{2312}) \wedge (\neg(p_0 \to \perp)))$.
6. Demuestre que $PROP = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} PROP_n$. (Ayuda: para una de las inclusiones, basta demostrar que el lado derecho satisface la propiedad que se dio en el teórico para definir $PROP$).
7. Sea B un conjunto, y considere el esquema de *recursión con el argumento como parámetro*:
   (ArgParam) Dadas funciones $G_{At} : At \to B$ y $G_\odot : B \times B \times PROP \to B$, existe una única función $F : B \times PROP \to B$ tal que
   $$\begin{cases} F(\varphi) &= G_{At}(\varphi) \qquad \text{para } \varphi \text{ en } At, \\ F((\varphi \odot \psi)) &= G_\odot\big(F(\varphi), F(\psi), (\varphi \odot \psi)\big). \end{cases}$$
   a) Muestre que la definición de la función S del Ejercicio 4 se puede justificar usando (ArgParam) (i.e., encontrando B y las funciones G_{At} y $G_\odot$ apropiadas).
   b) (*) Demostrar el esquema (ArgParam).
   (Ayuda: Tomar $A := B \times PROP$ en el esquema de recursión usual).