Métodos numéricos y Optimización - primer cuatrimestre de 2023

Trabajo Práctico 2 - Estudio numérico de péndulos simples y dinámica poblacional

Fecha de entrega: Jueves 12 Octubre a las 23h59

Escribir un informe de máximo 15 carillas reportando los resultados de los siguientes experimentos numéricos. Los códigos desarrollados se deben entregar junto al informe. Las secciones 1, 2, 3 sirven como introducción de los temas. Los objetivos a resolver se detallan en la sección 4.

1 Péndulo simple

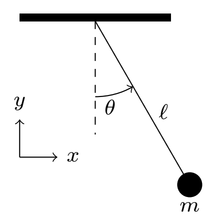

Figura 1: Esquema de un péndulo simple. El origen de coordenadas se encuentra en el punto de agarre.

Un péndulo simple está compuesto por una partícula de masa m sujeta a un punto de agarre por una vara sin masa de largo ℓ y bajo la acción de la gravedad. La figura 1 muestra un diagrama del sistema [1]. La gravedad tiene aceleración g. Tomando los ejes de coordenadas que se usan en la figura y utilizando el hecho de que la longitud de la vara es fija, el vector posición de la partícula **r** puede escribirse como

$$\boldsymbol{r} = (\ell \sin\theta(t), -\ell\cos\theta(t)), \tag{1}$$

y la gravedad como

$$\boldsymbol{g} = (0, -g). \tag{2}$$

La dinámica del péndulo está descripta por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \tag{3}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$. La energía total del sistema viene dado por

$$E = T + V, \tag{4}$$

donde

$$T = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2, \tag{5}$$

es la energía cinética, y

$$V = -mg\ell\cos\theta + mg\ell. \tag{6}$$

[1] Aclaración importante: el "techo" de la figura está puesto a modo de referencia y no interfiere con la dinámica, el péndulo puede dar toda la vuelta y $0 \leq \theta \leq 2\pi$

es la energía potencial. La energía total de este sistema se conserva en el tiempo, es decir, el valor de E es siempre el mismo, tanto a $t = 0$ como a t más grande. Los valores de T y V, en cambio, fluctúan.

1.1 Sistema linealizado

El sistema tiene un punto de equilibrio estable en $\theta = 0$. Esto quiere decir que si la condición inicial es tal que el péndulo está en reposo y $\theta = 0$ este se quedará ahí. Nada muy sorprendente. Ahora bien, la existencia de este punto de equilibrio nos permite hacer una expansión de $\sin\theta$ alrededor de $\theta = 0$. A primer orden está toma la forma

$$\sin\theta \approx \theta. \tag{7}$$

Si reemplazamos esta expresión en la ecuación (3) obtenemos una ecuación lineal para la dinámica

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \tag{8}$$

la cual podemos resolver analíticamente. Es importante notar que la expansión (7), y por lo tanto su aplicación, solo vale para valores de θ cercanos a cero, el punto de equilibrio. Por eso se refiera a esta aproximación como una aproximación de "pequeñas oscilaciones".

2 Modelo logístico de crecimiento poblacional

Considerar una población cuyo tamaño N sera gobernado por una dinámica de crecimiento poblacional a través del tiempo

$$\frac{dN}{dt}$$

El supuesto de este modelo es que la tasa de crecimiento de la población decrecerá a mayor densidad poblacional y se incrementara a menor densidad poblacional causado por la competencia de recursos limitados como el alimento o la tierra por ejemplo.

De todos modos si la población es lo suficientemente pequeña en cantidad, por ejemplo si solo hay uno o muy pocos rinocerontes, no importa cuanta abundancia de alimento o tierra se disponga la población terminara extinguiéndose. Este modelo por ende plantea el principio de que los individuos de una población requieren de una presencia mínima de otros individuos para poder sobrevivir y reproducirse exitosamente. Entonces cuando el tamaño de la población es muy pequeño, no se podrá mantener una tasa de crecimiento positiva. La ecuación que gobierna esta dinámica poblacional se describe a continuación

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(\frac{N}{A} - 1\right)$$

donde r es la tasa de crecimiento poblacional intrínseca, K es la cantidad máxima de individuos que se pueden sostener con los recursos disponibles en el sistema y A es el tamaño mínimo de la población necesaria para que pueda sobrevivir, es decir, A es el umbral de mínima supervivencia. Por razones obvias suponemos que $A < K$. Se esperan observar dinámicas distintas dependiendo si la cantidad inicial de población $N(t = 0)$ es mayor, igual o menor que K y si es mayor, igual o menor que A.

3 Métodos numéricos

En esta práctica se propone estudiar dos esquemas numéricos distintos: el método de Euler explicito y el método de Runge-Kutta de orden 4. Recordar que dada una ecuación de segundo orden del tipo

$$\ddot{\theta} = f(\theta), \tag{9}$$

ésta puede escribirse como un sistemas de dos ecuaciones de primer orden de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= f(\theta), \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned} \tag{10}$$

En el método de Euler explícito, estas ecuaciones se discretizan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \omega_{t+1} &= \omega_t + hf(\theta_t), \\ \theta_{t+1} &= \theta_t + h\omega_t, \end{aligned} \tag{11}$$

donde h es el paso temporal.
Por otro lado, para el método de Runge-Kutta de orden 4, las ecuaciones quedan

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t + \frac{1}{6}(\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4), \tag{12}$$

donde $\boldsymbol{\theta} = (\theta, \omega)$ es el vector de variables y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}) = (f(\theta), \omega)$ es el lado derecho de la ecuación (10) en forma vectorial y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}_1 &= h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}_t), \\ \boldsymbol{k}_2 &= h\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\theta}_t + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1\right), \\ \boldsymbol{k}_3 &= h\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\theta}_t + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_2\right), \\ \boldsymbol{k}_4 &= h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}_t + \boldsymbol{k}_3). \end{aligned}$$

(notar que las ecuaciones de RK4 estan detalladas con θ para el caso del pendulo simple aunque pueden adaptarse facilmente al caso de la dinamica poblacional).

4 Objetivos

El objetivo de este trabajo es estudiar la estabilidad y convergencia de los distintos métodos numéricos y la dinámica de los distintos sistemas físicos. Deberá resolver las ecuaciones del péndulo simple y la dinámica poblacional y analizar el comportamiento de sus soluciones y de los métodos numéricos. Para esto deberá probar distintas condiciones iniciales y distintos pasos temporales para reconstruir numéricamente la trayectoria de cada sistema.

Algunas consideraciones para el péndulo simple:

- Estudie tanto las trayectorias obtenidas como tambien la evolución de E, T, y V. Recuerde que, en este sistema, E debería ser constante en el tiempo.
- Resuelva utilizando distintas condiciones iniciales, todas con $\dot{\theta}(t=0) = 0$, pero con distinto $\theta(t=0)$.

- Como vimos en clase, las ecuaciones pueden linealizarse en el caso que los ángulos sean pequeños. Utilice la solución analítica del sistema linealizado para comprar con los resultados que obtienen numéricamente. ¿Se recupera la solución analítica en el caso que las condiciones iniciales sean las correspondientes?

Para el caso de la dinámica poblacional

- además de lo ya mencionado anteriormente, estudiar como evoluciona la tasa de cambio de población respecto al tamaño de la población.

Algunas consideraciones generales

- El informe deberá incluir un análisis de la **estabilidad de los métodos numéricos** propuestos para las ecuaciones del péndulo simple *linealizadas* y para el caso de crecimiento poblacional.

- ¿Qué un método sea incondicionalmente estable nos asegura convergencia? No se olviden de mostrar que sucede con pasos temporales grandes.