Entregable Càlcul Diferencial

Daniel Vilardell

1 Problema 1

a) Es pot comprovar facilment subtituint.

$$\Phi_a(1,-1,0,2) = (1(0)^2 + -1\cdot 2 - 0a + 2, 2(1)^2(-1)^3 - 0(2)^2 - a(-1+1) + 2) = (0,0)$$

b) Haurem de veure que compleix les hipotesis del Th de la funció implicita. Primer de tot com hem vist en lapartat a) el punt p anula la funció Φ. Despres hem de veure que el seguent determinant en el punt p es diferent de 0.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z^2 & y \\ 4xy^3 & 2zt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Com que es compleixen les hipotesis del teorema mencionat $\forall a \in \mathbb{R}$ i per tant es pot aillar x i t en funció de y i z en un entorn del punt p.

En llenguatge i notació del teorema de la funció implicita qué $\exists$ oberts, $(1,-1,0,2) \in U \subseteq \mathbb{R}^4$ i $a = (-1,0) \in \mathbb{R}^2$ i una funció $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$(anomenada implícita), tal que $\det \frac{\partial f_i}{\partial y_j(z)}_{i,j=1,2} = 0, \forall z \in U$. A mes $g \in C^r(\mathbb{R}^2)$ i $\phi(-1,0) = (1,2)$.

c) Per a calcular els primers quatre valors recorrerem a la derivació implícita de forma matricial amb $x = g_1(y,z)$ i $t = g_2(y,z)$ que ens diu que en el punt en questiós

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t & 2xz - a \\ 6x^2y^2 - a & -t^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -a \\ 6-a & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6-a}{4} & -1 \\ 2 & -a \end{pmatrix}$$

Per a trobar la segona derivada de t respecte de y farem derivació implicita dos cops directament de f_1, l'equació donada al enunciat.

$$\begin{aligned} z^2 g_1 + y g_w - az + 2 = 0 \\ z^2 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + y \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0 \\ z^2 \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + y \frac{\partial^2 g_2}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial g_2}{\partial y} \frac{1}{-y} = 4 \end{aligned} \tag{1}$$

Aplicarem el mateix procediment per a trobar la segona derivada de x respecte de y en f_2.

$$\begin{aligned} 2g_1^2 y^3 - z g_2^2 - a(y+1) + 2 = 0 \\ 6y^2 g_1^2 + 4y^3 g_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} - 2z g_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} - a = 0 \\ 12y g_1^2 + 12y^2 g_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + 12y^2 g_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + 4y^3 \frac{\partial g_1}{\partial y}^2 + 4y^3 g_1 \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} - 2z \frac{\partial g_2}{\partial y}^2 - 2z g_2 \frac{\partial^2 g_2}{\partial y^2} = 0 \\ -12 + 12 \frac{\partial g_1}{\partial y} + 12 \frac{\partial g_1}{\partial y} - 4 \frac{\partial g_1}{\partial y}^2 - 4 \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} = 0 \\ -12 + 24 \frac{6-a}{4} - \frac{(6-a)^2}{4} - 4 \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} = -\frac{a^1 + 12a - 60}{16} \end{aligned} \tag{2}$$

d) Per a veure per quins valors de a calcularem el determinant del Jacovià de la funció $g(y, z)$ i veurem quan s'anula

$$\begin{vmatrix} \frac{6-a}{4} & -1 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = \frac{-6a + a^2}{4} + 2 = \frac{a^2 - 6a + 8}{4} = \frac{(a-4)(a-2)}{4}$$

Que això s'anula per $a = 4$ i per $a = 2$ i per tant en aquests punts $\nexists$ la inversa. Com hem comentat abans $g \in C^r$ i a mes $p \in \mathbb{R}^2$ es un obert per tant $\exists$ inversa en tot punt diferent dels que tenen $a = 2$ i $a = 4$.

En termes i llenguatge de la funció implicita això significa que $\exists U \in \epsilon_a, U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $f|_U : U \to \mathbb{R}^n$ és injectiva i $\det(Dg(z)) \neq 0 \forall z \in U$.

A mes $V = f(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ es obert i la inversa $f^{-1} : V \to U$ es $C^r(V)$ i $Dg^{-1}(y_0) = (Dg(g^{-1}(y_0))^{-1}$.

e) Seguint el procediment del apartat a buscarem per quins valors de a s'anula el determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 2xz - a \\ 6x^2y^2 - a & -2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -a \\ 6 - a & -2t \end{vmatrix} = -a^2+6a-8 = -(a-4)(a-2)$$

I que per tant nomes s'anula quan $a = 2$ o quan $a = 4$, els mateixos punts on no $\exists$ la inversa de g.

El fet de que ens hagin donat els mateixos resultats es deu a que al trobar la funció implicita hem posat y, z en funció de x i t i quan hem fet la inversa de g que era la funció que calculava x, t en funció de y i z la funció aquesta ha passat a ser una funció en la que la imatge es trobava en funció de x i t i per tant existeix en els mateixos punts en els que es pot trovar y, z en funció de x i t.

2 Problema 2

a) Per a demostrar que f és glovalment injectiva primer suposarem que no ho és i arribarem a una contradicció.

Si no és injectiva $\exists x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y | f(x) = f(y) \implies ||f(x) - f(y)|| = 0 \geq C||x - y||$. Com que $C > 0$, $||x - y|| = 0 \implies x = y$ que es una contradicció ja que haviem suposat que $x \neq y$ i per tant es glovalment injectiva.

Per a veure que $\det(Jf(z)) \neq 0 \forall z \in \mathbb{R}^n$ suposarem que el rang de $Df(z)$ no es màxim i arribarem a una contradicció. Com que el rang no es màxim $\exists v \neq 0 \in \mathbb{R}^n | Df(z)v = 0$. Com que $f \in C^1$ tenim que si $Df(z)v = 0 \implies D_v f(z) = 0$ i per tant

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(z - hv) - f(z)}{h} \geq \lim_{h \to 0} \frac{C||z - hv - z||}{h} =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{C||hv||}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{Ch||v||}{h} = C||v||$$

Com que $C > 0$ la unica manera de que es compleixi tal condició seria si v fos 0 pero seria una contradicció ja que haviem suposat que $v \neq 0$. I per tant $\det(Jf(z)) \neq 0 \forall z \in \mathbb{R}^n$.

b) Primer demostrarem una idea que usarem mes tard, que $|||u|| - ||v||| \leq ||u - v||$.

$$||u|| = ||u + v - v|| \leq ||v|| + ||u - v|| \implies ||u|| - ||v|| \leq ||u - v||$$
$$||v|| = ||v + u - u|| \leq ||u|| + ||v - u|| \implies ||v|| - ||u|| \leq ||u - v||$$

I per tant $|||u|| - ||v||| \leq ||u - v||$.

Despres veurem que es continua per a demostrar que el conjunt es tancat ja que si és continua la antiimatge d'un tancat es un tancat.

Com que f és continua tenim que en tot punt p de $\mathbb{R}^n$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 | \forall x \in \mathbb{R}^n, ||x - p|| < \delta \implies ||f(x) - f(p)|| < \varepsilon$$

I el que volem demostrar és que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 | \forall x \in \mathbb{R}^n, ||x - p|| < \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(p)| < \varepsilon$$

$$|\phi(x) - \phi(p)| = |||f(x) - z)|| - ||f(p) - z||| \leq ||f(x) - z - f(p) + z|| = ||f(x) - f(p)|| < \varepsilon$$

I per tant queda demostrat. Aleshores es tancat perquè és la antiimatge de la funció continua φ en el conjunt tancat $[0, \alpha]$.

Finalment per a demostrar que es compacte demostrarem que es fitat veient que $A \subseteq \bar{B}(x_o, \frac{2\alpha}{C})$.

Suposem que no i per tant $\exists x \in \mathbb{R}^n | x \in A, ||x - x_o|| > \frac{2\alpha}{C}$.

$$\alpha \geq ||f(x)-z|| = ||f(x)-f(x_o)-(z-f(x_o))|| \geq |||f(x)-f(x_o)||-||z-f(x_o)|||$$
$$||f(x) - f(x_o)|| \geq C||x - x_o|| > C\frac{2\alpha}{C} = 2\alpha$$
$$|||f(x) - f(x_o)|| - ||z - f(x_o)||| > 3\alpha \implies \alpha \geq ||f(x) - z|| > 3\alpha$$

I per tant arribem a una contradicció que demostra que $A \subseteq \bar{B}(x_o, \frac{2\alpha}{C})$. Així doncs el conjunt A és compacte.

c) En primer lloc veurem que la funció φ te minim gloval. Podem assegurar que te minim en A ja que aquest conjunt es compacte i φ es contínua i a més aquest compleix que $\varphi(x) \leq \alpha$. Com que tots els punts fora de A compleixen que $\varphi(x) > \alpha$ aquest minim que anomenarem x no es nomes minim de A sinó que és el minim absolut. Per tant també es minim absolut de φ^2.

Ara seguirem un argument semblant al de la demostració del Teorema de la funció Inversa.

Com que el punt x és un minim $\frac{\partial \varphi^2}{\partial x_i}(x) = 0 \; \forall i = 1, 2, ..., n$.

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x_i}(x) = 2(f_1(x) - z_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + 2(f_n(x) - z_n)\frac{\partial f_n}{\partial x_i} = 0$$
$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x_i}(x) = 2(f_1(x) - z_1, \ldots, f_n(x) - z_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \end{pmatrix} (z) = 0$$
$$\implies \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = 2(f_1(x) - z_1, \ldots, f_n(x) - z_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (0, \ldots, 0)$$

Com que el jacobià, com hem vist en el apartat a) es diferent de 0,

$$(f_1(x) - z_1, \ldots, f_n(x) - z_n) = (0, \ldots, 0)$$

I per tant

$$\begin{aligned} f_1(x) &= z_1 \\ &\vdots \\ f_n(x) &= z_n \end{aligned} \tag{3}$$

$$\implies f(x) = z$$

I per tant, $\forall z \in \mathbb{R}^n$ hem trobat un x tal que $f(x) = z$ i per tant la funció f es glovalment exaustiva.

d) Una aplicació $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un difeomorfosme si $f \in C^1(U)$, f es injectiva i $\det(Df(x)) \neq 0 \forall x \in U$.

En el nostre cas f es glovalment injectiva com hem vist en el apartat a), $f \in C^1$ ja que ens ho diu l'enunciat i $\det(Df(x)) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ com també hem vist en l'apartat a) i per tant f es un difeomorfisme de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

e) Per a resoldre aquest apartat usarem la notacio seguent: $p = (x, y, z), p_1 = (x_1, y_1, z_1), p_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Definim en primer lloc les funcions

$$\begin{aligned} G &\colon \mathbb{R}3 \to \mathbb{R}3 \\ (x, y, z) &\mapsto (g(y), g(z), g(x)) \\ H &\colon \mathbb{R}3 \to \mathbb{R}3 \\ (x, y, z) &\mapsto (h(z), h(x), h(y)) \end{aligned}$$

$$||f(p_1) - f(p_2)|| = ||(p_1 - p_2) + (G(p_1) - G(p_2)) + (H(p_1) - H(p_2))|| \geq$$
$$\geq ||p_1 - p_2|| - ||(G(p_1) - G(p_2)) + (H(p_1) - H(p_2))||$$

Considerem el segon terme

$$||(G(p_1) - G(p_2)) + (H(p_1) - H(p_2))|| \leq ||(G(p_1) - G(p_2))|| + ||(H(p_1) - H(p_2))||$$

Ara veurem que $||(G(p_1) - G(p_2))|| \leq r||p_1 - p_2||$

$$||(G(p_1) - G(p_2))|| = ||(g(y_1) - g(y_2), g(z_1) - g(z_2), g(x_1) - g(x_2))|| =$$

$$= |(|g(x_1) - g(x_2), g(y_1) - g(y_2), g(z_1) - g(z_2))||$$

Pel teorema del valor mig $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3$ tal que

$$||(g(x_1) - g(x_2), g(y_1) - g(y_2), g(z_1) - g(z_2))|| = ||(\xi_1(x_1 - x_2), \xi_2(y_1 - y_2), \xi_3(z_1 - z_2))|| \leq$$

$$\leq ||(r(x_1 - x_2), r(y_1 - y_2), r(z_1 - z_2))|| = r||p_1 - p_2||$$

Analogament per H veiem que

$$||(H(p_1) - H(p_2))|| \leq s||p_1 - p_2||$$

I per tant

$$||p_1-p_2||-||(G(p_1)-G(p_2))+(H(p_1)-H(p_2))|| \geq ||p_1-p_2||-(r+s)||p_1-p_2|| =$$
$$= (1-r-s)||p_1-p_2||$$

e) Podem veure que es compleixen les condicions del enunciat per f, es a dir, que $||f(x)-f(y)|| \geq C||x-y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ com hem vist en el apartat anterior i ja que $C = 1-r-s > 0$ i a mes la funció $f \in C^1$. Per tant hem vist en l'apartat a) que tal funció és glovalment injectiva i en l'apartat c) que és glovalment exaustiva, per tant la funció és glovalment bijectiva.

Calculem el Jacobià

$$Jf(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & g'(b) & h'(c) \\ h'(a) & 1 & g'(c) \\ g'(a) & h'(b) & 1 \end{pmatrix}$$

Per a veure que el seu determinant no es nul suposarem que si que ho es i arribarem a una contradicció. Si el determinant no es nul, el rang de la matriu no es maxim i per tant $\exists v | Jf(a,b,c)(v) = 0$ i per tant

$$v_1 + v_2 g'(b) + v_3 h'(c) = 0 \implies |v_1| = |v_2 g'(b) + v_3 h'(c)| \leq r|v_2| + s|v_3|$$
$$v_1 h'(a) + v_2 + v_3 g'(c) = 0 \implies |v_2| = |v_1 h'(a) + v_3 g'(c)| \leq s|v_1| + r|v_3|$$
$$v_1 g'(a) + v_2 h'(b) + v_3 = 0 \implies |v_3| = |v_1 g'(a) + v_2 h'(b)| \leq r|v_1| + s|v_2|$$

Si sumem ara els resultats tenim que

$$|v_1| + |v_2| + |v_3| \leq (s+r)(|v_1| + |v_2| + |v_3|)$$

Però al enunciat afirma que $s + r < 1$ i per tant això es una contracicció $\implies \det Jf(a,b,c) \neq 0$

Finalment utilitzant la formula que ens dona el teorema de la funció inversa que diu que $Jf^{-1}(f(a,b,c)) = (Jf(a,b,c))^{-1}$ calculem la inversa

$$Jf^{-1}(f(a,b,c)) =$$
$$= \frac{\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & g'(c) \\ h'(b) & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} h'(a) & g'(c) \\ g'(a) & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} h'(a) & 1 \\ g'(a) & h'(b) \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} g'(b) & h'(c) \\ h'(b) & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & h'(c) \\ g'(a) & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & g'(b) \\ g'(a) & h'(b) \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} g'(b) & h'(c) \\ 1 & g'(c) \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & h'(c) \\ h'(a) & g'(c) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & g'(b) \\ h'(a) & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T}{1 + g'(a)g'(b)g'(c) + h'(a)h'(b)h'(c) - g'(a)h'(c) - g'(b)h'(a) - g'(c)h'(b)}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1 - g'(c)h'(b) & h'(c)h'(b) - g'(b) & h'(a)h'(b) - g'(a) \\ g'(c)g'(a) - h'(a) & 1 - h'(c)g'(a) & h'(c)h'(a) - g'(c) \\ h'(a)h!`(b) - g'(a) & g'(a)g'(b) - h'(b) & 1 - g'(b)h'(a) \end{pmatrix}}{1 + g'(a)g'(b)g'(c) + h'(a)h'(b)h'(c) - g'(a)h'(c) - g'(b)h'(a) - g'(c)h'(b)}$$