El problema de la braquistòcrona usant tècniques d'optimització

24 de Desembre del 2020

Nom	DNI
Rubén Aciego	48038376R
Daniel Vilardell	48109585W

Índex

1 Formulació matematica del problema

La formulació matematica es ben senzilla, el que hem de minimitzar es el temps que tarda en arribar a (a, b) tenint en compte que $t = \frac{d}{v}$ i que si discretitzem x i y la $d_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ ens donaria la distancia entre dos punts de la funció (x_{i-1}, y_{i-1}) i (x_i, y_i). La velositat en un fragment de distancia es calcularia de la forma que ens han proposat al enunciat, es a dir $v_= \sqrt{2gy_i}$. Aixi doncs el problema a resoldre es el següent:

$$
\begin{aligned}
P\colon min \quad & \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}{\sqrt{2gy_i}} \\
& x_0 = 0 \qquad y_0 = 0 \\
& x_n = a \qquad y_n = b
\end{aligned}
$$

Tenint en compte però que multiplicar per $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ no variarà el resultat, ja que es una constant, podem formular el problema de la següent forma.

$$
\begin{aligned}
P\colon min \quad & \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}{y_i}} \\
& x_0 = 0 \qquad y_0 = 0 \\
& x_n = a \qquad y_n = b
\end{aligned}
$$

2 Codis i gràfiques

2.1 Fitxer .run gloval

```
#run problema braquistocrona

reset;

option solver minos;
option show_stats 1;
option minos_options 'superbasics_limit=3000';

model practica3_b.mod;

data practica3_b.dat;

solve;

printf '%i\n', n;

printf '\n';
for {i in 0..n} {
        printf '(%f_%f)\n', XS[i], YS[i];
}
```

2.2 Fitxers .mod

2.2.1 Part a

```
#model problema braquistocrona

param n >= 0;
param a >= 0;
param b >= 0;
param eps > 0;
param XS{i in 0..n};

var YS{i in 0..n} >= 0 default eps;

#Funcio objectiu
minimize c:
sum{i in 1..n} sqrt(((YS[i] - YS[i - 1])**2 + (XS[i] - XS[i - 1])**2)/(YS[i] + eps) + eps);

#Restriccions
subject to iniciy: YS[0] = 0;
subject to finaly: YS[n] = b;
```

2.2.2 Part b

```
#model problema braquistocrona

param n >= 0;
param a >= 0;
param b >= 0;
param eps > 0;
param YS{i in 0..n};

var XS{i in 0..n} >= 0 default i*a/n;

#Funcio objectiu
minimize c:
sum{i in 1..n} sqrt(((YS[i] - YS[i - 1])**2 + (XS[i] - XS[i - 1])**2)/(YS[i] + eps) + eps);

#Restriccions
subject to inicix: XS[0] = 0;
subject to finalx: XS[n] = a;
```

2.2.3 Part c

```
#model problema braquistocrona

param n >= 0;
param a >= 0;
param b >= 0;
param eps > 0;

var XS{i in 0..n} >= 0 default i*a/n;
var YS{i in 0..n} >= 0 default i*b/n;

#Funcio objectiu
minimize c:
sum{i in 1..n} sqrt(((YS[i] - YS[i - 1])**2 + (XS[i] - XS[i - 1])**2)/(YS[i] + eps) + eps);

#Restriccions
subject to iniciy: YS[0] = 0;
subject to inicix: XS[0] = 0;
subject to finaly: YS[n] = b;
subject to finalx: XS[n] = a;
```

2.3 Fitxers .dat

2.3.1 Part a

```
#dades problema braquistocrona part a

param n := 100;
param a := 1;
param b := 1;
param XS;
param eps := 0.001;

let {i in 0..n} XS[i] := a*((i/n)**2);
```

2.3.2 Part b

```
#dades problema braquistocrona part b

param n := 100;
param a := 1;
param b := 1;
param YS;
param eps := 0.0000000000001;

let {i in 0..n} YS[i] := b*i*1/n;
```

2.3.3 Part c

```
#dades problema braquistocrona part c

param n := 100;
param a := 1;
param b := 1;
param eps := 0.01;
```

2.4 Grafiques

2.4.1 Part a

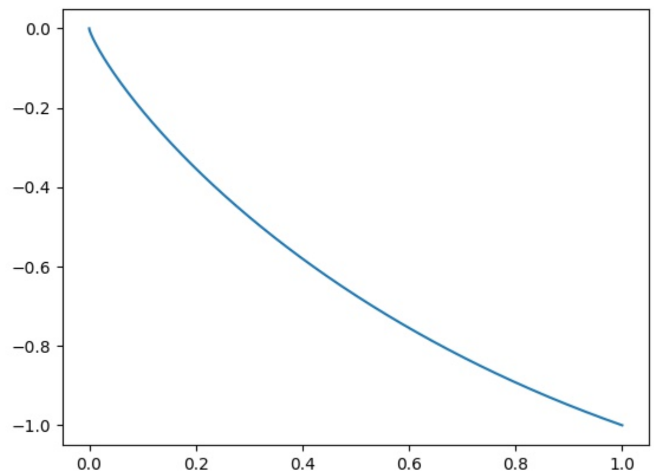

Figura 1: Grafica model A amb $n = 500$

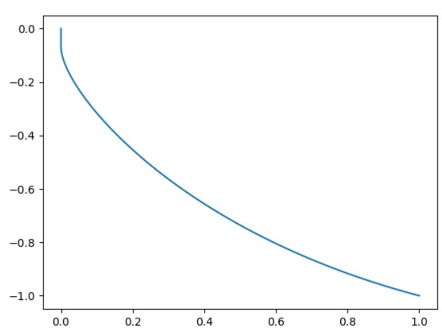

Figura 2: Grafica model A amb $n = 100$

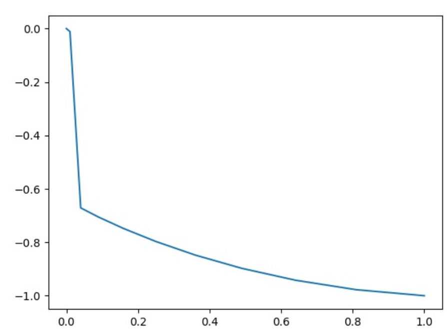

Figura 3: Grafica model A amb $n = 10$

2.4.2 Part b

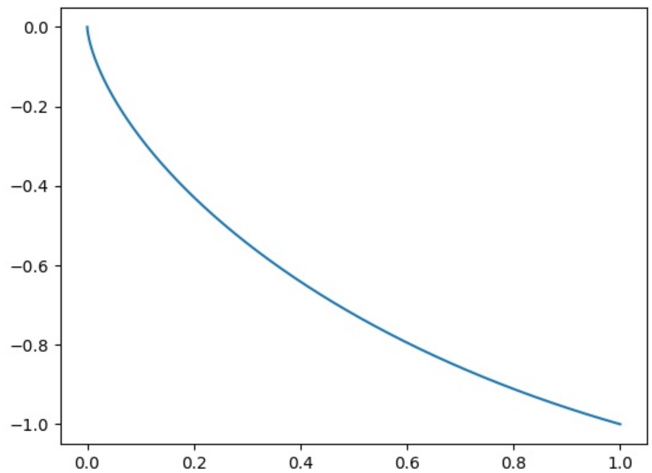

Figura 4: Grafica model B amb $n = 500$

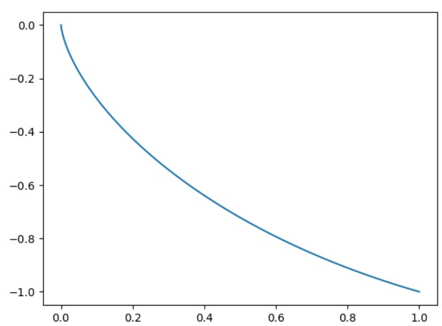

Figura 5: Grafica model B amb $n = 100$

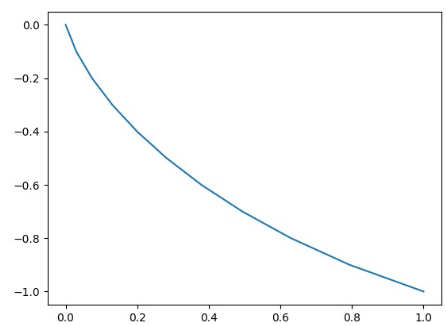

Figura 6: Grafica model B amb $n = 10$

2.4.3 Part c

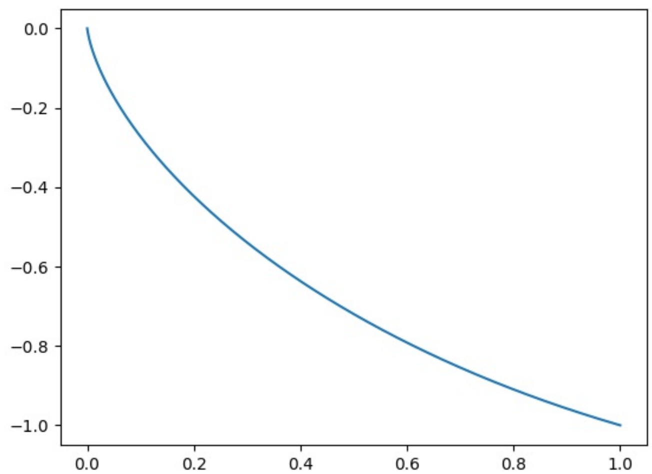

Figura 7: Grafica model C amb $n = 500$

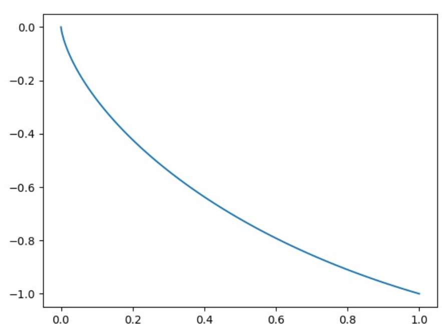

Figura 8: Grafica model C amb $n = 100$

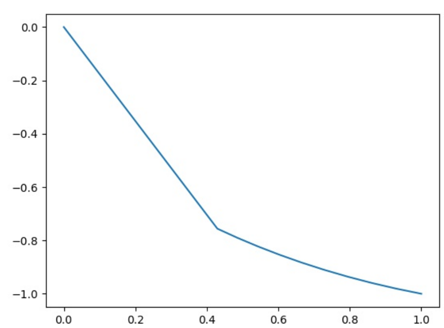

Figura 9: Grafica model C amb $n = 10$

3 Demostració de que el model B es un problema convex

Per tal de demostrar això veurem que el determinant de la Hessiana es semidefinit positiu. Com que nomes te com a variable les x, calculem la segona derivada de $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}{y_i}}$. Com que y es un vector constant calcular aquesta matriu hessiana no serà massa complicat. Per linealitat de les derivades, si demostrem que la hessiana de $g(x) = \sqrt{\frac{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}{y_i}}$ per tot $i \in (1, n)$ es semidefinida positiva, la hessiana de la funció original serà definida.

$$\nabla g(x) = (\frac{x_{i-1} - x_i}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}, \frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}})$$

$$\nabla^2 g(x) = \begin{pmatrix} \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{((x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-(y_i - y_{i-1})^2}{((x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-(y_i - y_{i-1})^2}{((x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{((x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

Com que tots els menors de la matriu hessiana son positius, per el criteri de Sylvester podem confirmar que la matriu hessiana es semidefinida positiva i per tant la funció $g(x)$ es convexa. La suma de funcions convexas dona com a resultat una funció convexa i per tant $f(x)$ es convexa. Com que les restriccions també son convexes ja que es tracten de una igualtat en un punt, podem confirmar que el model B del problema es un problema d'optimització convex.