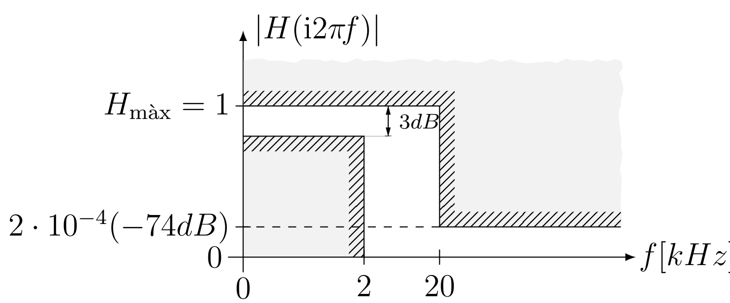
Entregable Circuits i Sistemes Lineals

(a) Per tal de dibuixar la plantilla hem de trobar els seus elements característics:

- freqüència de tall a la que l'amplificació serà de $\frac{1}{\sqrt{2}}$: $2kH$
- freqüència amb fita superior d'atenuació: $20kHz$ amb el guany mínim de $74dB$ de la maxima, es a dir amb un guany de $10^{-\frac{74}{20}} \approx 2 \cdot 10^{-4}$.

I per tant, considerant aquestes dades la plantilla ens quedaria així:



(b) Hem aconseguit trobar fàcilment la funció de xarxa d'un filtre passa-baixes Butterworth d'ordre 2 amb el següent codi d'Octave.

```
pkg load signal
[num,den] = butter(n, 2e3*2*pi,'s');
disp(num);
disp(den);
```

I ens ha donat que la funció és la següent

$$H(s) = \frac{1.58 \times 10^8}{s^2 + 1.78 \times 10^4 \cdot s + 1.58 \times 10^8}$$

(c/d) Per tal d'obtenir les amplificacions dels filtres d'ordre $\in \{1, \ldots, 5\}$ en les freqüències demanades hem programat el següent codi d'Octave.

```
pkg load signal
output_precision(5)

disp("Tipo Butterworth")
for n = 1:5
  [num,den] = butter(n,2e3*2*pi,'s');
  H = tf(num,den);
  [mag,fas,w] = bode(H, [0,2e3*2*pi,20e3*2*pi]);
  disp(n);
  disp(mag)
end
```

I ens ha permès completar la següent taula

Ordre	Amplificació a 0Hz	Amplificació a 2kHz	Amplificació a 20kHz
1	1	0.707	10^{-1}
2	1	0.707	10^{-2}
3	1	0.707	10^{-3}
4	1	0.707	10^{-4}
5	1	0.707	10^{-5}

(e) Seguint el mateix procediment comentat anteriorment i amb el següent codi obtenim la funció de xarxa del filtre de Txebixov tipus 1

```
pkg load signal
[num,den] = cheby1(n, 2e3*2*pi,'s');
disp(num);
disp(den);
```

I ens mostra que la funció de xarxa per a $n = 2$ és

$$H(s) = \frac{7.91 \times 10^7}{s^2 + 8.1 \times 10^3 \cdot s + 1.12 \times 10^6}$$

Obtenim les amplificacions amb un codi semblant a l'anterior

```
pkg load signal
output_precision(5)

disp("Tipo Txebixoc")
for n = 1:5
    [num,den] = cheby1(n,3,2e3*2*pi,'s');
    H=tf(num,den);
    [mag,fas,w]=bode(H,[0, 2e3*2*pi,20e3*2*pi]);
    disp(n);
    disp(mag);
end
```

I ens dona la següent taula

Ordre	Amplificació a 0Hz	Amplificació a 2kHz	Amplificació a 20kHz
1	1	0.708	0.1
2	0.708	0.708	0.005
3	1	0.708	0.00025
4	0.708	0.708	$1.26 \cdot 10^{-5}$
5	1	0.708	$6.34 \cdot 10^{-7}$

(f) Com podem veure clarament a les taules anteriors les amplificacions a 20kHz son inferiors per tot ordre en el filtre de tipus Txebixoc. Tot i això els dos filtres tenen un guany inferior al demanat, -74dB o una amplificació inferior a la de 0.0002 a partir de l'ordre 4. Les altres especificacions, és a dir, que tingui una amplificació de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ als 2kHz es compleix per tots els ordres, ja que així ho hem imposat al codi i finalment el guany a 0Hz és de 0 sempre per la mateixa raó.

(g) Per a fer aquest apartat he creat un nou codi de Octave en el que primer creo un vector fe freqüències f entre 1Hz i 100kHz amb escalat logarítmic entre mostres. Despres he trobat la funció de xarxa i a partir del mètode bode d'Octave he anat aplicant la formula per a trobar l'amplificació en dB en funció de la freqüència a mesura que recorria el vector creat anteriorment.

Això ho he fet tant pel primer cas amb el filtre tipus Butterworth com el segon amb el filtre tipus Txebixoc i després he guardat els resultats en un fitxer dades.dat des de el que he representat a Grace. El codi d'Octave és el següent:

```
pkg load signal
output_precision(5)

f=logspace(1,5,200)';
disp(size(f,1))

[num,den]=butter(4,2e3*2*pi,'s');
H1=tf(num,den);
[mag,fas,w]=bode(H1,[0,2e3*2*pi,20e3*2*pi]);

[num,den]=cheby1(4,3,2e3*2*pi,'s');
H2=tf(num,den);
[mag,fas,w]=bode(H2,[0,2e3*2*pi,20e3*2*pi]);

h1=[]
for i = 1:size(f,1)
    h1 = vertcat(h1, 20*log10(bode(H1,f(i)*2*pi)));
end

h2=[]
for i = 1:size(f,1)
    h2 = vertcat(h2, 20*log10(bode(H2,f(i)*2*pi)));
end

aux = [f h1 h2];
save -ascii dades.dat aux
```

I el grafic que ens ha donat grace es el següent

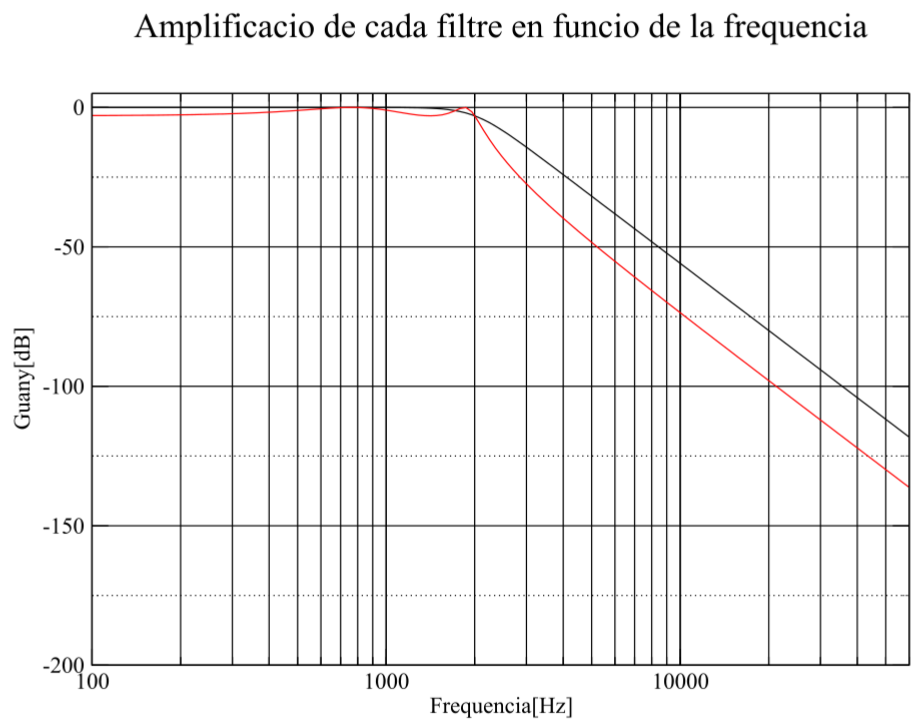


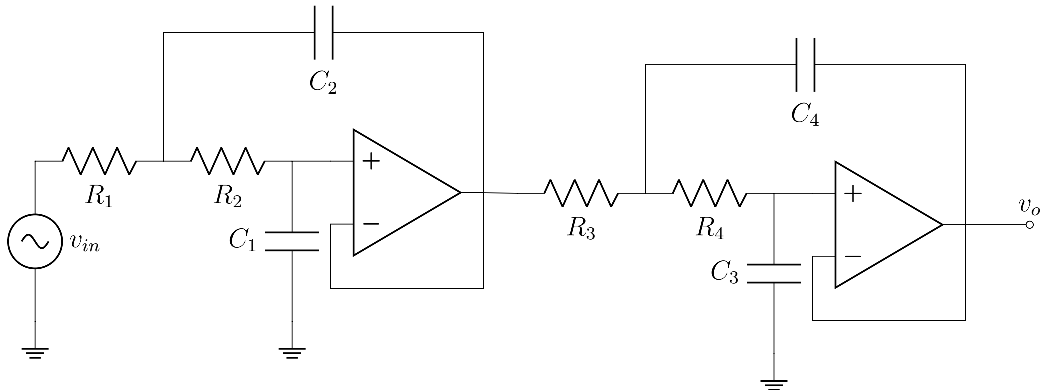
Figura 1: Grafica

Es pot veure clarament que tant el guany del filtre de Butterworth com la del filtre de Txebixov en la freqüència de 20kHz té una amplificació inferior a la demanada, és a dir -74dB

(g) La funció de xarxa de un filtre de tipus Txebixoc de quart ordre es la següent

$$H(s) = \frac{3.12 \times 10^{15}}{s^4 + 7.3 \times 10^3 \cdot s^3 + 1.85 \times 10^8 \cdot s^2 + 8.03 \times 10^{11} \cdot s + 4.41 \times 10^{15}}$$

El circuit que s'usarà per a implementar el filtre és el següent

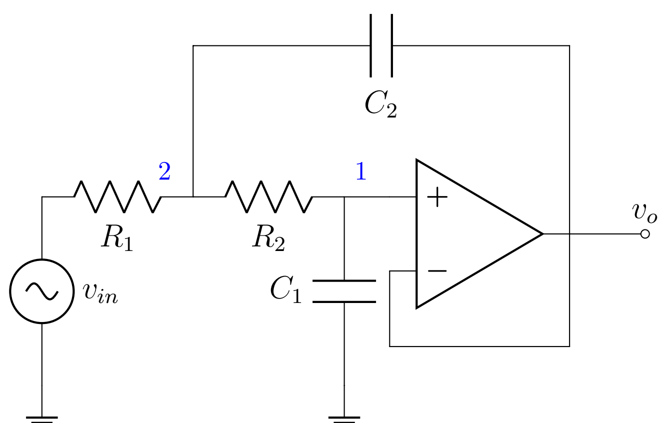


Com que el circuit de la dreta i el de l'esquerra són iguals podem analitzar-los per separat. La sortida del circuit de l'esquerra ens donarà l'entrada del de la dreta i per tant com que en aquest cas no hi ha efecte de càrrega $H_1(s) = \frac{V_i}{V_{o1}}$, $H_2(s) = \frac{V_{o1}}{V_o}$ i per tant

$$H(s) = \frac{V_i}{V_o} = \frac{V_i}{V_{o1}} \frac{V_{o1}}{V_o} = H_1(s)H_2(s)$$

Així doncs només ens caldrà calcular la $H(S)$ del primer cirquit, ja que el segon té la mateixa canviant els valors de R_1, R_2, C_1, C_2 pels respectius R_3, R_4, C_3, C_4. Quan tinguem les dues fent el producte entre elles arribarem a la $H(s)$ buscada.

Busquem la $H_1(S)$ aplicant KCL als nodes 1 i 2.



Tenint en compte que $V_o = V_2$ obtenim les següents equacions les següents equacions

$$\frac{V_o - V_1}{R2} + V_o C_1 s = 0 \tag{1}$$

$$\frac{V_1 - V_i}{R1} + (V_1 - V_o) C_2 s + \frac{V_1 - V_o}{R2} = 0 \tag{2}$$

De la (1) podem treure que

$$\frac{V_1}{R_2} = V_o \left(\frac{1}{R_2} + C_1 \right)$$

$$V_1 = V_o \left(C_1 R_2 s + 1 \right)$$

I de la (2)

$$V_1 \left(\frac{1}{R_1} + C_2 s + \frac{1}{R_2} \right) - V_o \left(C_2 s + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V_i}{R_1}$$

Substituint el resultat obtingut de la (1) en el de la (2) trobem el següent

$$V_o \left(\frac{C_1 R_2 s + 1}{R_1} + C_1 C_2 R_2 s^2 + C_2 s + \frac{C_1 R_2 s + 1}{R_2} - C_2 s - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V_i}{R_1}$$

$$V_o (C_1 (R_1 + R_2) s + 1 + C_1 C_2 R_1 R_2 s^2) = V_i$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + C_1 (R_1 + R_2) s + 1}$$

$$\boxed{H_1(s) = \frac{\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}{s^2 + \frac{R_1 + R_2}{C_2 R_1 R_2} s + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}}$$

I per tant la H(s) serà

$$\boxed{H(s) = |H(0)| \frac{\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}{s^2 + \frac{R_1 + R_2}{C_2 R_1 R_2} s + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} \cdot \frac{\frac{1}{C_3 C_4 R_3 R_4}}{s^2 + \frac{R_3 + R_4}{C_4 R_3 R_4} s + \frac{1}{C_3 C_4 R_3 R_4}}}$$

Si descomponem amb l'Octave la funció de xarxa mencionada al principi de l'apartat en dues funcions amb el denominador de grau dos obtenim el següent

$$H(s) = 0.707 \cdot \frac{1.42\times10^8}{s^2+2.14\times10^3 s+1.42\times10^8} \cdot \frac{3.09\times10^7}{s^2+5.17\times10^3 s+3.09\times10^7}$$

Ara si ho igualem amb la funció de xarxa que hem tret del circuit veiem que

$$|H(0)| = 0.707$$

$$H_1(s) = \frac{\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}{s^2+\frac{R_1+R_2}{C_2R_1R_2}s+\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}} = \frac{1.42\times10^8}{s^2+2.14\times10^3 s+1.42\times10^8}$$

$$H_2(s) = \frac{\frac{1}{C_3C_4R_3R_4}}{s^2+\frac{R_3+R_4}{C_4R_3R_4}s+\frac{1}{C_3C_4R_3R_4}} = \frac{3.09\times10^7}{s^2+5.17\times10^3+3.09\times10^7}$$

És a dir, dos sistemes de quatre variables d'on es poden treure dues equacions, per tant haurem d'assignar abans els valors de dos components. Imposem que $R_1 = R_2 = 10\text{k}\Omega$. Ara busquem quan val C_1 i C_2.

$$2140 = \frac{R_1+R_2}{C_2R_1R_2} = \frac{2.0\times10^4}{C_2 10^8} \iff C_2 = \frac{2.0\times10^4}{2.140\times10^{11}} = 93.45nF$$

$$1.42\times10^8 = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2} = \frac{1}{93.46C_1} \iff C_1 = \frac{1}{1.42\times10^8\cdot 93.46} = 753.5pF$$

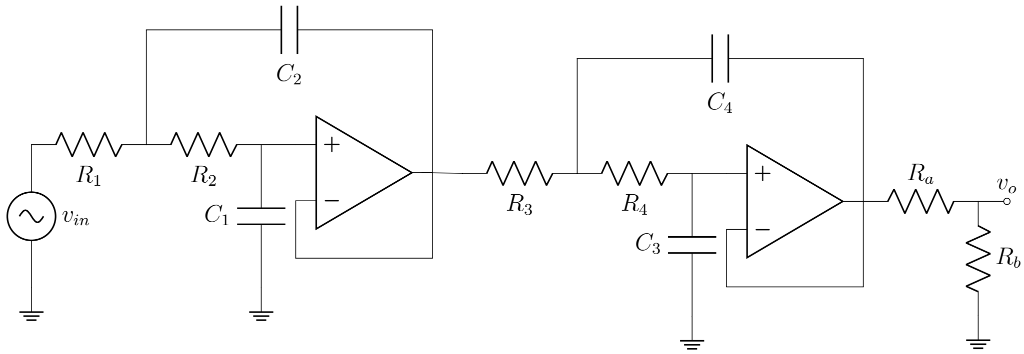
Anàlogament trobem el valors de C_3 i C_4 imposant que $R_3 = R_4 = 10\text{k}\Omega$

$$5170 = \frac{R_3+R_4}{C_4R_3R_4} = \frac{2.0\times10^4}{C_2 10^8} \iff C_4 = \frac{2.0\times10^4}{5.170\times10^{11}} = 38.68nF$$

$$3.09\times10^7 = \frac{1}{C_3C_4R_3R_4} = \frac{1}{3.87C_1} \iff C_3 = \frac{1}{3.09\times10^7\cdot 3.87} = 8.37nF$$

I per tant

$$\boxed{\begin{array}{ccc} R_1 = R_2 & = R_3 = & R_4 = 10\text{k}\Omega \\ C_1 & = & 753.5pF \\ C_2 & = & 93.45nF \\ C_3 & = & 8.37nF \\ C_4 & = & 38.68nF \end{array}} \quad (3)$$



Finalment cal mencionar que perquè es compleixi la primera de les tres equacions mencionades cal posar un divisor de tensió a la sortida. Aquest tindrà valors de resistència petits per a evitar l'efecte de càrrega, assignem per tant a R_b el valor de 10Ω i R_a el calculem a partir de l'equació.

$$\frac{10}{10+R_a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff R_a = 4.142\Omega$$

(h) Finalment fem la simulació amb el Gnucap. El codi programat és el següent

```
.INCLUDE uA741.ckt

Vcc+ 8 0 DC 100
Vcc- 9 0 DC -100

Vi 10 0 ac 1 phase=0
Ra 10 1 4.1421
Rb 1 0 10

R1 1 2 10k
R2 2 3 10k
C1 3 0 753.5p
C2 2 4 93.45n
X1 3 4 8 9 4 uA741

R3 4 5 10k
R4 5 6 10k
C3 6 0 8.37n
C4 5 7 38.68n
X2 6 7 8 9 7 uA741

.print ac vdb(7)
.op
.AC dec 1000 10 100k
.end
```

I graficant els resultats a Grace hem obtingut la gràfica esperada, mostrada a continuació

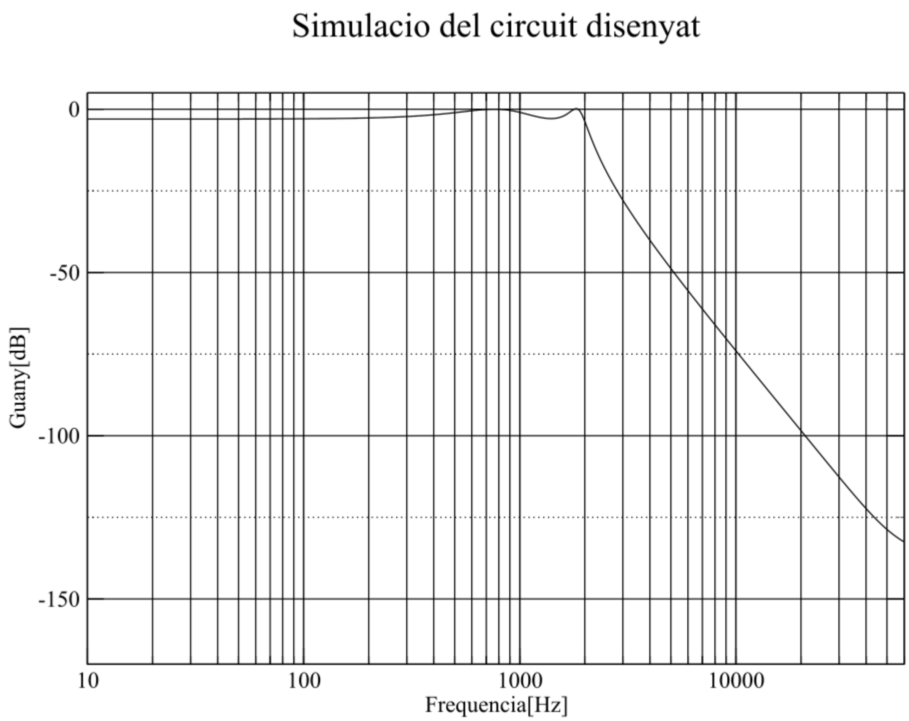


Figura 2: Grafica de la simulació