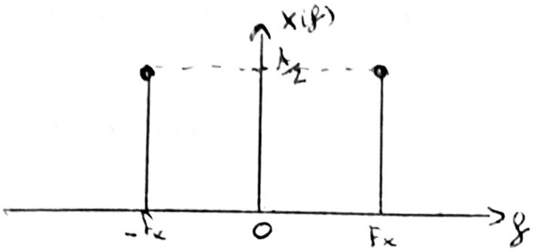
Daniel Vilardell
2020-2021

Previ 6 SSIS

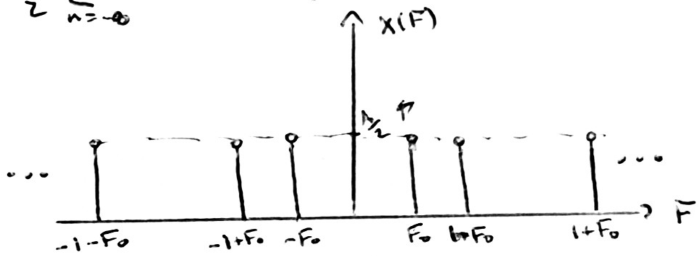
a) $x(t) = A\cos(2\pi f_x t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{2}(\delta(f-f_x) + \delta(f+f_x)) = X(f)$



b) Sabem que $X(F) = f_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_m) \Big|_{f=Ff_m}$

Per tant $A\cos(2\pi F_0 n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(F - F_0 - n) + \delta(F + F_0 - n) = X(F)$

c) $\boxed{F_x = \frac{f_x}{f_s}}$



d) Tenim $x[n] = A\cos(2\pi F_x n)$ i $p_N[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \delta[n-m]$

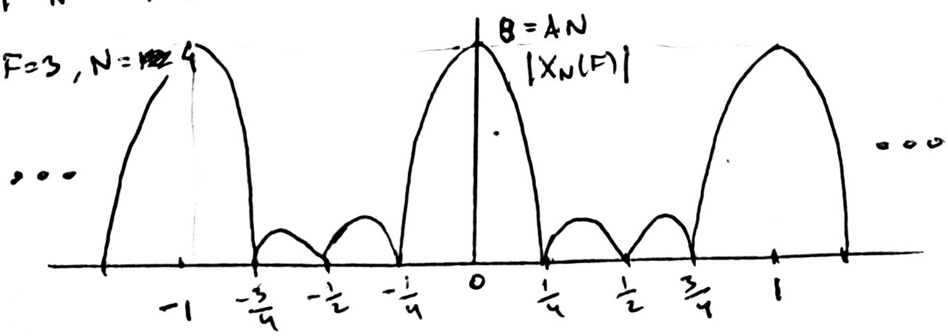
$$\Longrightarrow \quad x_N[n] = A\cos(2\pi F_x n) \sum_{m=0}^{N-1} \delta[n-m]$$

La transformada ~~discreta~~ de Fourier serà la convolució de les dos transformades.

Com hem vist a teoria $P_N(F) = \frac{\sin(\pi N F)}{\sin(\pi F)} e^{-j\pi F(N-1)}$

Per tant $|X_N(F)| = |X(F) * P_N(F)| = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi N(F - F_0 - n))}{\sin(\pi(F - F_0 - n))} + \frac{\sin(\pi N(F + F_0 - n))}{\sin(\pi(F + F_0 - n))} \right)$

Cas $A=2$, $F=3$, $N=4$

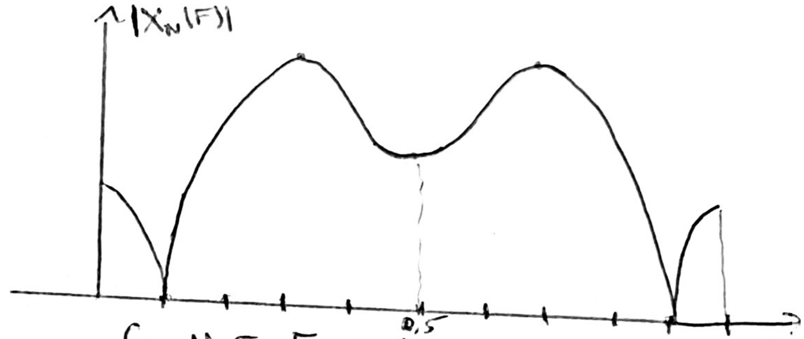


e) 1. Considerem $X_N[K] = \left(\frac{\sin(\pi N(\frac{K}{N} - \frac{K_x}{N}))}{\sin(\pi(\frac{K}{N} - \frac{K_x}{N}))} + \frac{\sin(\pi N(\frac{K}{N} + \frac{K_x}{N}))}{\sin(\pi(\frac{K}{N} + \frac{K_x}{N}))} \right) \cdot \frac{A}{2} =$

$$= \frac{A}{2} \left(\frac{\sin(\pi(K-K_x))}{\sin(\frac{\pi}{N}(K-K_x))} + \frac{\sin(\pi(K+K_x))}{\sin(\frac{\pi}{N}(K+K_x))} \right)$$

2. Com que la resta de dos nombres $x, y \in \mathbb{Z}$ $x+y \in \mathbb{Z}$ i $\sin(\pi x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{Z}$ el numerador sempre serà 0 i per tant la funció nomes tindrà valors quan el denominador s'anuli, es a dir quan $K = K_x$ i quan $K = N - K_x$ $\Rightarrow \boxed{B = \frac{A}{2} N}$

3. Si $K_x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\frac{F_x}{F_s} \cdot N \in \mathbb{Z}}$



Cas N=5 F=0,65

f) 1. $W_{Lw}(F) = \frac{1}{10} \frac{\sin(\pi 10 F)}{\sin(\pi F)} \cdot \frac{\sin(\pi 10 F)}{\sin(\pi F)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{10}(P_{10}[n] * P_{10}[n]) = w_{Lw}[n]$

$$w_{Lw}[n] = P_{10}[n] * P_{10}[n] = \sum_{m=0}^{2L-2} \delta(n-m) \cdot 10 \cdot \frac{1}{10} \wedge\left(\frac{n-9}{10}\right) = \boxed{\sum_{m=0}^{L-2} \delta(n-m) \wedge\left(\frac{n-9}{10}\right)}$$

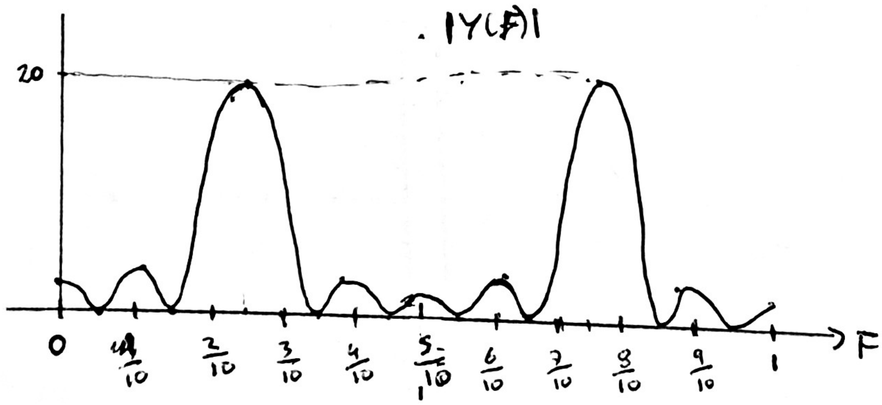
2. Amb el mateix procediment que abans

$$X(F) = \frac{A}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(F - F_0 - m) + \delta(F + F_0 - m)$$

$$\Rightarrow Y(F) = W_{Lw}(F) * X(F) = \frac{A}{20} \sum_{m} \left(\frac{\sin^2(\pi 10(F - F_0 - m))}{\sin^2(\pi(F - F_0 - m))} + \frac{\sin^2(\pi 10(F + F_0 - m))}{\sin^2(\pi(F + F_0 - m))} \right)$$

Per $A = 4$, $F_x = 0,25$

$$Y(F) = \frac{1}{5} \sum_{m} \left(\frac{\sin^2(\pi 10(F - 0,25 - m))}{\sin^2(\pi(F - 0,25 - m))} + \frac{\sin^2(\pi 10(F + 0,25 - m))}{\sin^2(\pi(F + 0,25 - m))} \right)$$



g) Per a realitzar això hem escrit un programa en matlab adjuntat al final del previ. Els maxims de $|Y(F)|$ son els següents

Punt	Valor	Punt
1 →	0,5647	← 512
53 →	0,6644	← 459
123 →	2,0295	← 389
198 →	0,2380	← 314
242 →	0,0322	← 270

h) 1. Per les propietats de la DFT $\quad x[n-n_0] \longleftrightarrow X(F)e^{-j2\pi n_0 F}$

2. No ho podem afirmar ja que si hi ha aliasing no es compleix

i) 1. $X[n]e^{j2\pi F_0 n} \longleftrightarrow X(F-F_0)$

~~Demostrarem que~~

Dem →

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{j2\pi F_0 n} \cdot e^{-j2\pi F n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi n(F-F_0)} = X(F-F_0)$$

$\blacksquare$

2. No es cert per l'aliasing

Contraexemple: Si considerem la seqüencia $x = \{1,2,3,4\}$, de mida 4 i com a $N=3$, es pot veure que no ho compleix de forma trivial.

j) 1. $p_6[n] * p_6[n] = \sum_{m=0}^{10} \delta(n-m) \cdot 6 \wedge \left(\frac{n-5}{6}\right)$

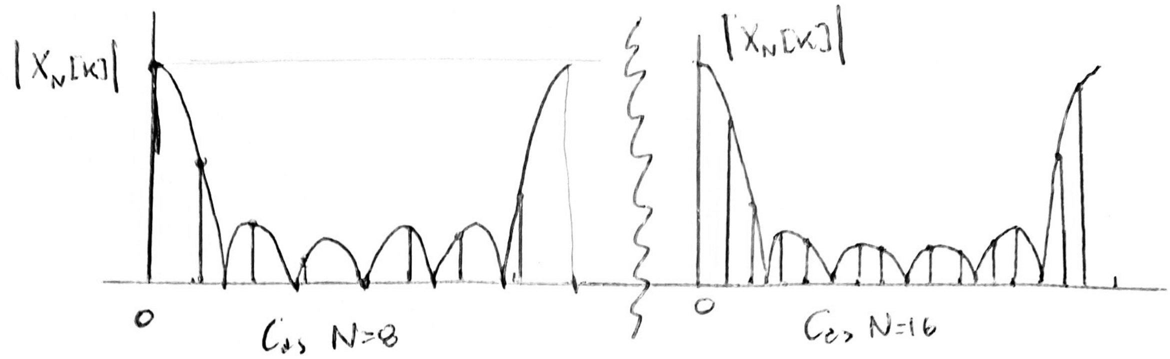
2. Podem veure que la seva longitud es de 11

3. Hem vist a teoria que

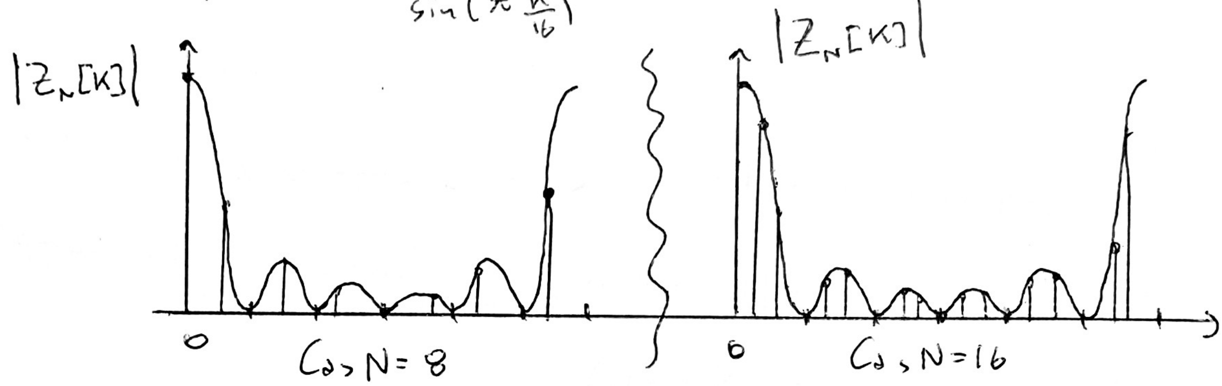
$$X_N[K] = DFT_N\{p_L[n]\} = e^{-j\pi \frac{K}{N}(L-1)} \frac{\sin(\pi \frac{K}{N} L)}{\sin(\pi \frac{K}{N})}$$

Per $N=8$ i $L=6$

$$|X_N[K]| = \frac{\sin(\pi \frac{3}{4} K)}{\sin(\pi \frac{K}{8})}$$



Per a $N=16$ $L=6$ $\quad |X_N[K]| = \dfrac{\sin(\pi \frac{3}{8} K)}{\sin(\pi \frac{K}{16})}$



4. Ho podem afirmar sempre que no hi hagi aliasing, es a dir, sempre que $N \geq L = 6$

K) 1. Per tal de recuperar la senyal original N ha de ser mes gran o igual a la longitud de la senyal original

La longitud de la senyal original es $L_x + L_h - 1$

$\Rightarrow \boxed{N \geq L_x + L_h - 1}$

2. Es complirà per a qualsevol valor de n, pero per a que es compleixi per a qualsevol valor de t s'ha de complir les hipotesis del teorema de mostreig $F_s > 2B$

3. • $F_{s_1} > 2B = 2 \cdot 10 \Rightarrow$ Considerem $F_{s_1} = 30$

$F_{s_2} > 2B = 2 \cdot 1 \Rightarrow$ Considerem $F_{s_2} = 3$

$\Rightarrow F_s = \max(30, 3) = \boxed{30\text{Hz}}$

Per a determinar la frequencia s'ha mirat que compleixi les hipotesis del Th de mostreig

- Com que la senyal $x[n]$ es 0 $\forall n > 10$ agafarem $10 \cdot 30$ mostres, es a dir, 300

Per la senyal $h[n]$ necessitarem mes mostres en funció de la precisió que volguem. Com que $\forall n > 30$ $h[n] < 10^{-13}$ agafarem ~~fo~~ $30 \cdot 30$ mostres, es a dir 900

$$\boxed{L_x = 300 \quad L_h = 900}$$

- N ha de complir la condició esmentada anteriorment i per tant
$N \geq 300 + 900 = L_x + L_h = 1200$, i per tant aquest serà el mes apropiat.

```matlab
f = @(x) abs(1/5*((sin(pi*10*(x - 0.25))/sin(pi*(x - 0.25))) + (sin(pi*10*(x + 0.25))/sin(pi*(x + 0.25)))));
vec = mostr(512, f);
Ma = trova(vec);
disp(Ma);

%Mostreja la senyal
function XF = mostr(N, F)
    XF = 0;
    for k = 1:N
        XF(k) = F(k/N);
    end
    return;
end

%Troba els maxims d'un vector
function maxims = trova(vec)
    maxims = 0;
    contador = 1;
    if(vec(1) > vec(2))
        maxims(contador, 1) = 1;
        maxims(contador, 2) = vec(1);
        contador = contador + 1;
    end
    for k = 2:length(vec) - 1
        if(vec(k - 1) < vec(k) && vec(k + 1) < vec(k))
            maxims(contador, 1) = k;
            maxims(contador, 2) = vec(k);
            contador = contador + 1;
        end
    end
    if(vec(length(vec)) > vec(length(vec) - 1))
        maxims(contador, 1) = length(vec);
        maxims(contador, 2) = vec(length(vec));
        contador = contador + 1;
    end
    return;
end
```