

CONTROL AUTOMÁTICO I - ELO 207 -2020 S2

TAREA 3: LUGAR GEOMÉTRICO DE RAÍCES Y NYQUIST

TOMÁS IBACETA
JOEL RIVERA
VALENTINA BARREDA

201721039-7
201721044-3
201721010-9

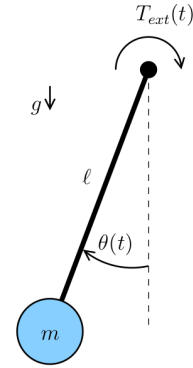
NOVIEMBRE 2020

El objetivo de esta tarea es utilizar MATLAB - SIMULINK para el diseño de un lazo de control lineal analizando el Lugar Geométrico de Raíces (LGR), el criterio de estabilidad (robusta) de Nyquist y luego aplicarlo al sistema *verdadero*.

Considere nuevamente el péndulo **no lineal** de Tarea 1 descrito por:

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = -mg\ell \sin \theta(t) - C \frac{d\theta(t)}{dt} + T_{ext}(t)$$

en que $J = m\ell^2$ es el momento de inercia del péndulo, m es la masa en el extremo del péndulo, ℓ es el largo del péndulo, g es la aceleración de gravedad, y C es una constante de roce viscoso.



1. Escoja valores para $0,5 < m \leq 1[\text{kg}]$, $0,5 < \ell \leq 1[\text{m}]$, $0 < C \leq 0,1[\text{N m s/rad}]$ y considere como **entrada** del sistema $u(t) = T_{ext}(t)$ [Nm] : torque externo aplicado en el extremo fijo del péndulo y como **salida** $y(t) = \theta(t)$ [rad] es el ángulo de desviación respecto a la vertical.

Se escogen los valores:

Constante	Valor
m	$0,7[\text{kg}]$
ℓ	$0,75[\text{m}]$
C	$0,05[\frac{\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}{\text{rad}}]$

2. Determine el modelo nominal $G_o(s)$ del péndulo **linealizado** en el punto de equilibrio *superior*, es decir, $u_Q = 0$ e $y_Q = \pi$.

Conociendo el punto de equilibrio se definen las señales incrementales entorno al punto de operación como:

$$\Delta u(t) \triangleq u(t) - u_Q$$

$$\Delta y(t) \triangleq y(t) - y_Q$$

Ya que en el punto de equilibrio la función que depende de la entrada $g_1(u(t))$ es igual a la función que depende de la entrada $g_2(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt^2})$, entonces, en este punto se pueden igualar entorno a este punto. Para linealizar el modelo se usa la expansión de Taylor de primer orden. Igualando y evaluando en (u_Q, y_Q) se obtiene la ecuación:

$$J \frac{d^2 \Delta y(t)}{dt^2} - mg\ell \Delta y(t) + C \frac{d\Delta y(t)}{dt} = \Delta u(t)$$

Para obtener la función de transferencia, se aplica la transformada de Laplace al modelo, con condiciones iniciales 0, de forma:

$$Js^2 \Delta Y(s) - mg\ell \Delta Y(s) + Cs \Delta Y(s) = \Delta U(s)$$

$$\Delta Y(s) (Js^2 - mg\ell + Cs) = \Delta U(s)$$

$$G_0(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1}{Js^2 + Cs - mg\ell}$$

3. Con ayuda del LGR (teóricamente y luego con sisotool), determine si es posible elegir los parámetros de los siguientes controladores tal que el lazo nominal sea internamente estable:

$$C_P(s) = K_p \quad C_{PD}(s) = K_p \left(1 + \frac{T_d s}{\tau_d s + 1} \right) = \frac{K(s+c)}{s+p}$$

Para el controlador $C_P(s)$ se analiza la ecuación 1. Sea $\lambda = K_p$, $M(s) = 1$, $D(s) = Js^2 + Cs - mgl$. Factorizando $D(s)$ e igualando a 0 se obtienen los polos del sistema $p_1 \approx -3,6806776$ y $p_2 \approx 3,553693$.

$$1 + \lambda \frac{M(s)}{D(s)} = 0 \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

Si n la cantidad de polos y m el número de ceros, se calcula la asíntota del LGR como:

$$\sigma = \frac{\sum_{i=0}^n p_i + \sum_{i=0}^m c_i}{n-m} = \frac{3,553693 - 3,6806776}{2} = -0,063492$$

Y como son dos polos reales y ningún cero, ambos polos se encuentran en σ y 'chocan' en 90° . El LGR se observa en la figura 1.

Analizando el polinomio de lazo cerrado $A_{cl} = Js^2 + Cs - mgl + K_p$ con el algoritmo de Routh de forma:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & J & K_p - mgl \\ s^1 & C & 0 \\ s^0 & K_p - mgl & \end{array}$$

Con lo que se obtiene que $K_p > 5,15025$ para asegurar la estabilidad de el lazo.

Además, reemplazando σ en $\frac{M(s)}{D(s)}$, se obtiene qué los polos de lazo cerrado llegan a σ con $K_p = 5,1518$.

Mediante `sisotool`, se observa, respecto a los polos de lazo cerrado:

- en $K_p \in [0; 5,1502]$, el sistema es inestable.
- en $K_p \geq 5,1503$, el sistema es estable.
- Después de $K_p = 5,1518$, se separa del eje real
- Desde ahí, los polos se vuelven más y más complejos

Finalmente $K_p \in [5,1503; \infty[$ y en particular, se escoge $K_p = 5,152$.

Respecto a el lazo usando $C_{PD}(s)$ se hacen las siguientes observaciones:

- Se debe evitar una cancelación inestable, por lo que el cero c del controlador no puede ser igual al polo p_2 de la planta.
- Sería conveniente hacer una cancelación estable con c y el polo estable, obteniendo un polo 'fijo' en A_{cl} independiente de la ganancia K .
- El polo p del controlador debe ubicarse en el SPI y ser considerablemente más rápido para disminuir el efecto del polo inestable p_2 de la planta.

Considerando lo anterior, se define $c = 3,6806776$ y el polo ubicado en -10 para el controlador, obteniendo un polinomio de lazo cerrado

$$A_{cl2} = (s + 3,6806776)(K + J(s + 10)(s - 3,553693))$$

por lo que para el LGR se analiza la ecuación 1 con $\lambda = \frac{K}{J}$, $M(s) = 1$, $D(s) = (s + 10)(s - 3,553693)$, con lo tendrá una forma parecida al del controlador proporcional, con una asíntota en

$$\gamma = \frac{\sum_{i=0}^n p_i + \sum_{i=0}^m c_i}{n-m} = \frac{-10 + 3,553693}{2} = -3,2231535$$

El dibujo del LGR se observa en la figura 2. Analizando con el algoritmo de Routh al polinomio A_{cl2}

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & J & K + Cp - mgl \\ s^2 & C + Jp & Kc - mglp \\ s^1 & \frac{(C+Jp)(K+Cp-mgl)-J(Kc-mglp)}{C+Jp} & 0 \\ s^0 & Kc - mglp & \end{array}$$

Con lo que se determina que $K > 13,995245$ y $K > -0,73626$, por lo que K pertenece al intervalo $]13,995245; \infty[$. Usando `sisotool` se determina arbitrariamente una ganancia $K = 40$, y se sabe ($\lambda = K/J \approx 35,6$). Por lo que el controlador C_{PD} es igual a

$$C_{PD} = K \frac{(s + 3,6806776)}{(s + 10)} = 40 \frac{(s + 3,6806776)}{(s + 10)} \quad (2)$$

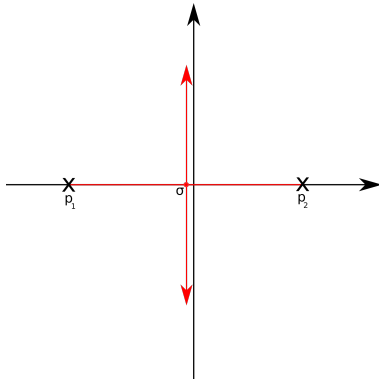


Figura 1: LGR teórico con C_P

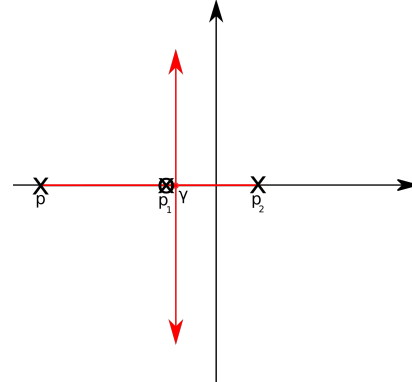


Figura 2: LGR teórico con C_{PD}

4. Para los casos en que se obtiene un controlador estabilizante:

a) Obtenga los polos de lazo cerrado.

Para el controlador proporcional se tiene un par de polos conjugados en $-0,0635 \pm 0,0203j$, como muestra la figura 3. Por lo que el lazo es efectivamente estable y tiene una oscilación asociada en el tiempo.

En el caso del controlador proporcional derivativo se obtienen un polo real en $-3,68$ y un par conjugado $-3,22 \pm 7,46j$, los que se pueden observar en la fig 4. Por lo que se tiene una oscilación asociada y el polo dominante tiene parte real en $-3,22$.

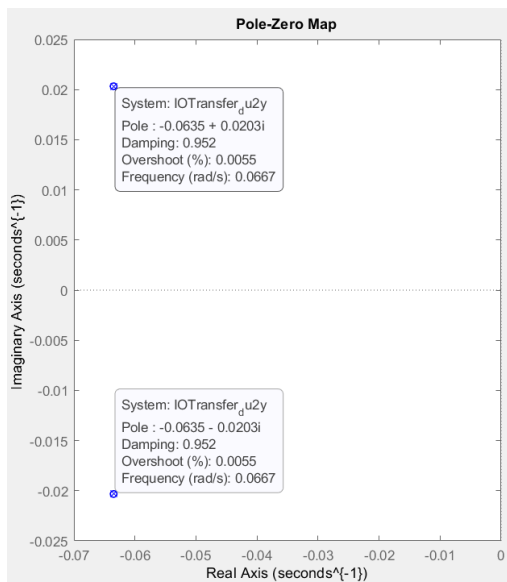


Figura 3: Polos de Lazo cerrado, C_P

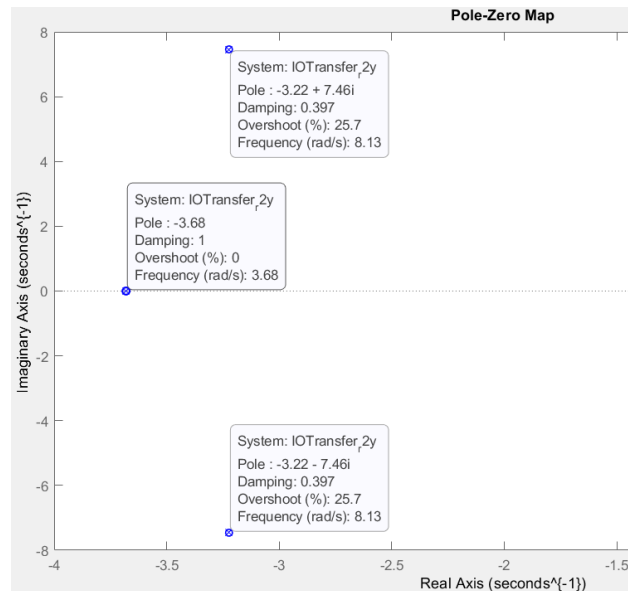


Figura 4: Polos de Lazo cerrado, C_{PD}

b) Obtenga gráficos de la salida $y(t)$, cuando $d_o(t)$ es un escalón unitario.

Simulando en MATLAB-SIMULINK se obtiene la respuesta que se ve en la figura 5 para C_P y en la figura 6 para C_{PD} . Respecto a C_P : Se observa que la señal se va a un valor muy alto. La imagen por si sola no permite saber si es inestable o simplemente tiene una amplitud altísima, por lo que se utilizarán las otras herramientas para corroborar que el sistema es estable. Sin embargo, se verá que "estable" no lo es todo a la hora de elegir

un controlador, ya que veremos que su respuesta a ruido se ve amplificada a una señal irreconocible. Esto se explorará en el bode de S_0 para este controlador, donde se ratificará que, sea estable o no estable, un controlador únicamente proporcional es inútil para este tipo de aplicación.

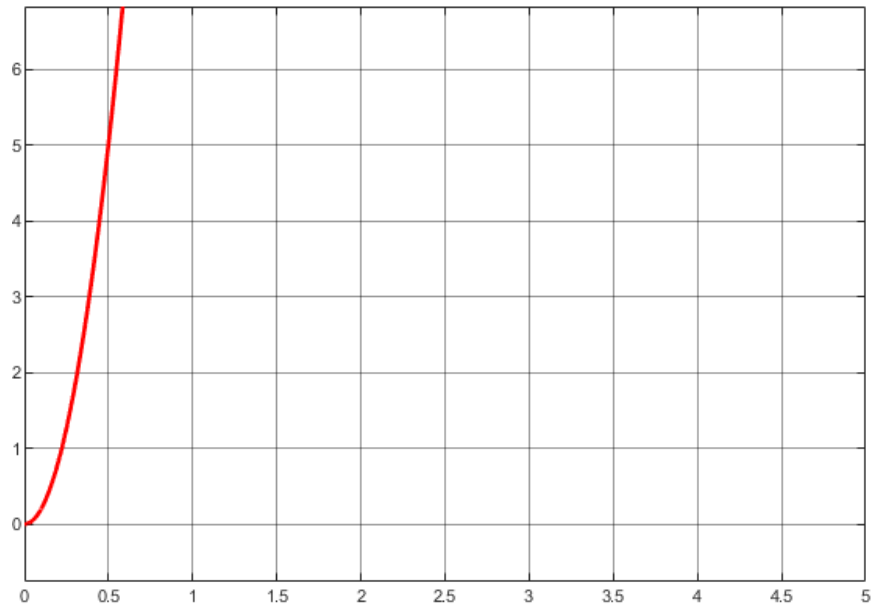


Figura 5: Salida con perturbación de salida un escalón unitario, C_P

Respecto a C_{pd} se observa un overshoot menor al 200% y un valor de estado estacionario de 3.5, con un settling time de aproximadamente 2 segundos. Considerando el marco de referencia, podría interpretarse físicamente como qué, comenzando desde 0 radianes, un escalón inicial lo acerca a los π radianes, y antes de dar una segunda vuelta el controlador logra corregir curso y devolverlo al estado de péndulo invertido. Se observa que el sistema aguanta la adición de la perturbación.

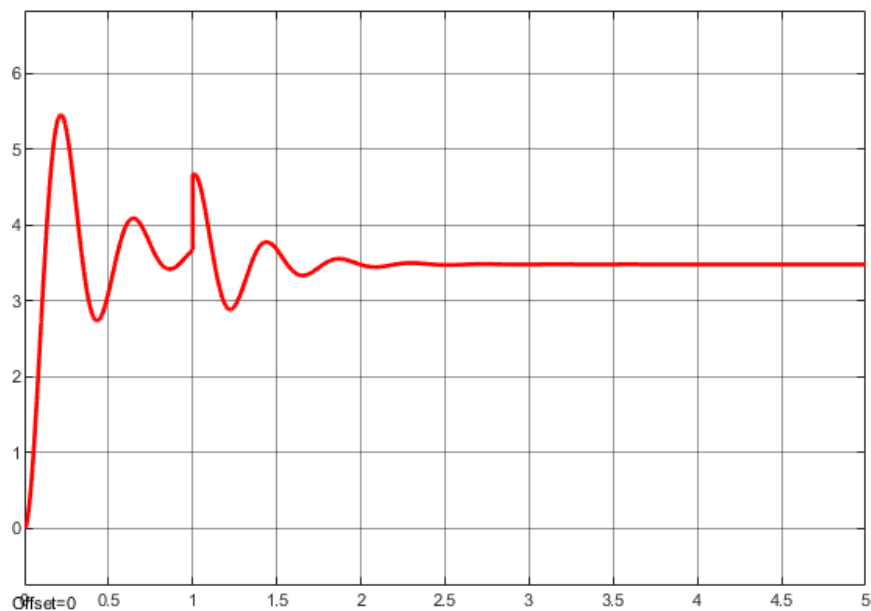


Figura 6: Salida cuando la perturbación de salida es un escalón C_{PD}

c) Obtenga el diagrama de Bode de $S_o(s)$ y de $T_o(s)$.

Para el controlador C_P se obtiene los diagramas de Bode de la sensibilidades del lazo cerrado, en la figura 7 se observa la sensibilidad nominal y en la figura 8 el de la sensibilidad nominal complementaria. Con la primera identificamos el error con respecto a la referencia del sistema, se puede ver como este tiene una alta ganancia

en las bajas frecuencias, es decir en la banda que comprende el lazo cerrado que se observa en T_0 . Por lo tanto este controlador no tiene un buen rechazo a perturbaciones, lo que era esperable ya que el control proporcional depende de una alta ganancia lo cual no es posible con el intervalo obtenido para K_p .

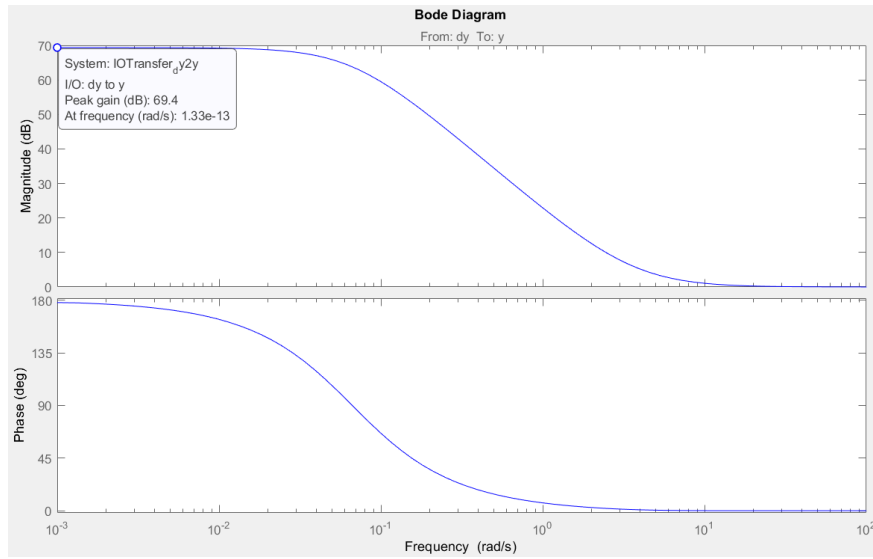


Figura 7: Diagrama de Bode para S_0 , lazo con C_P

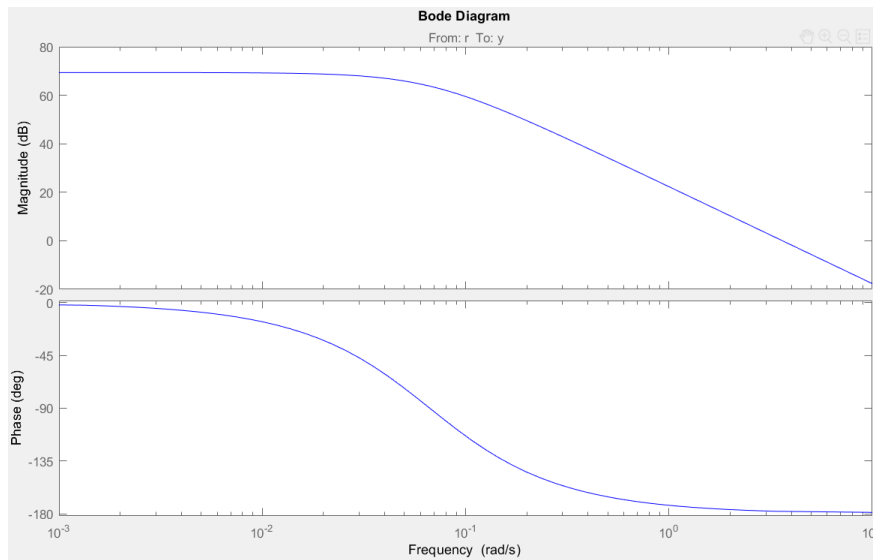


Figura 8: Diagrama de Bode para T_0 , lazo con C_P

Para el controlador C_{PD} se obtiene con sisotool la figura 9 para el diagrama de Bode de la sensibilidad nominal y en la figura 10 el diagrama de Bode de la sensibilidad nominal complementaria. En este caso sí se observa un comportamiento de tipo pasa alto en S_0 lo que implica que permite un buen seguimiento de la referencia en el ancho de banda del lazo cerrado que se observa en el diagrama de Bode de T_0 . Cabe notar el peak de sensibilidad con ganancia de 7dB, 2.24 en magnitud, que amplifica al ruido en la salida. Sin embargo, este peak ocurre fuera del ancho de banda dado por T_0 , por lo que su efecto es despreciable.

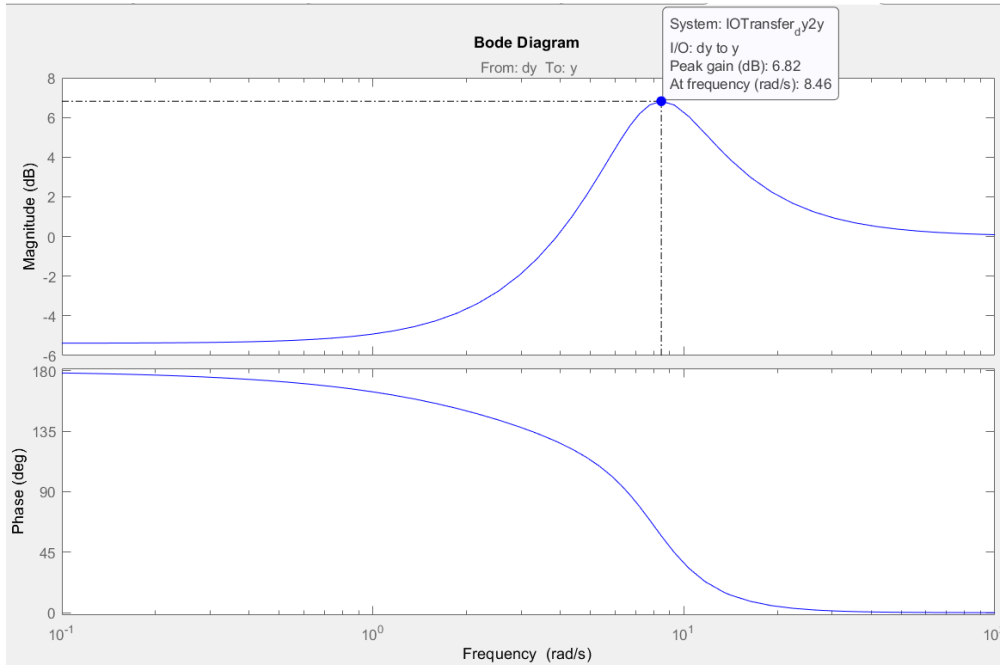


Figura 9: Diagrama de Bode para S_0 , lazo con C_{PD}

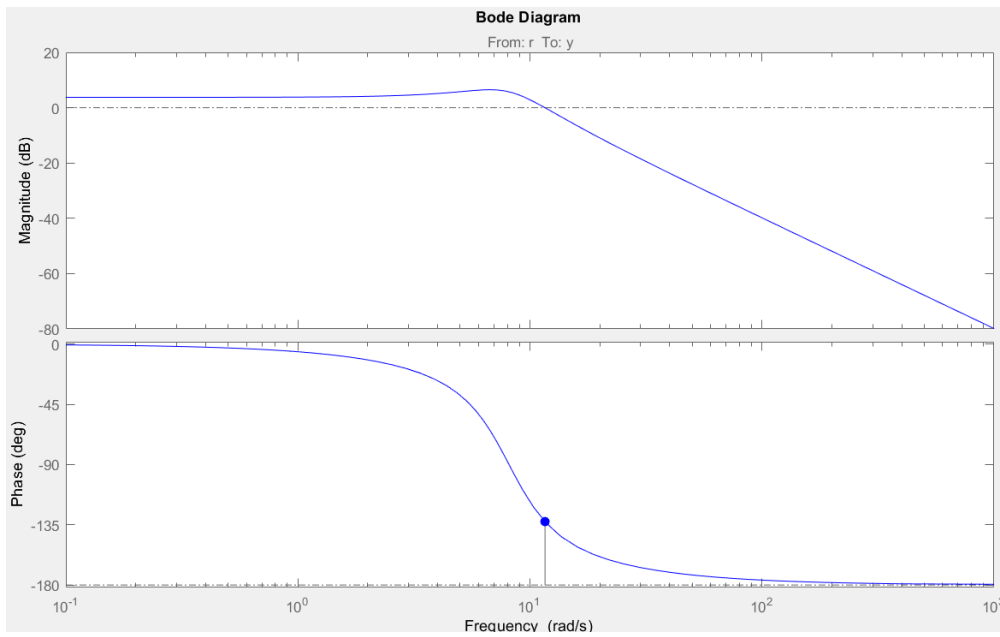


Figura 10: Diagrama de Bode para T_0 , lazo con C_{PD}

- d) Obtenga el diagrama de Nyquist de $G_o(s)C(s)$ y determine los márgenes de ganancia y fase y el *peak* de sensibilidad.

En el caso del controlador C_P se obtiene un diagrama Nyquist (fig. 12) que encierra una vez en sentido antihorario a $(-1,0)$. Por tanto, el sistema es estable. Sin embargo, el margen de ganancia es extremadamente pequeño de 0.00296 dB (1 en magnitud) y tiene un peak de sensibilidad de 69,4 (radio = $3,3 \times 10^{-4}$) lo que indica que el lazo está muy cerca de ser inestable. Esto es un problema ya que cualquier cambio en la ganancia desestabilizará el sistema. Lo anterior se traduce en que si la planta no se comporta exactamente como su modelo nominal G_0 , podría fácilmente esperarse una respuesta inestable en el sistema. Esto puede solucionarse aumentando la ganancia del controlador, pero esto causará un aumento del overshoot y de las oscilaciones en el sistema.

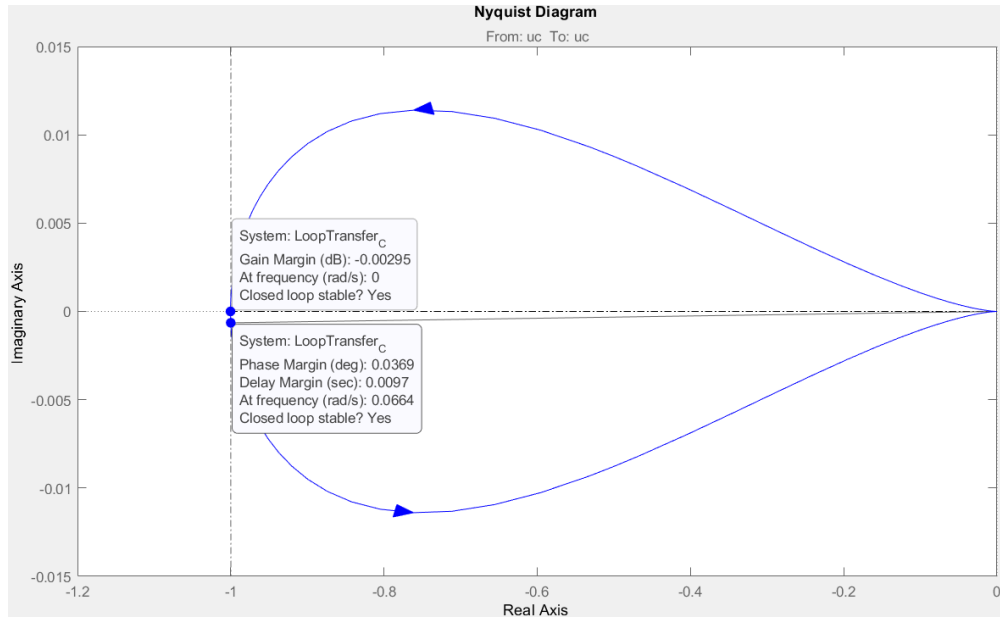


Figura 11: Diagrama de Nyquist, C_P

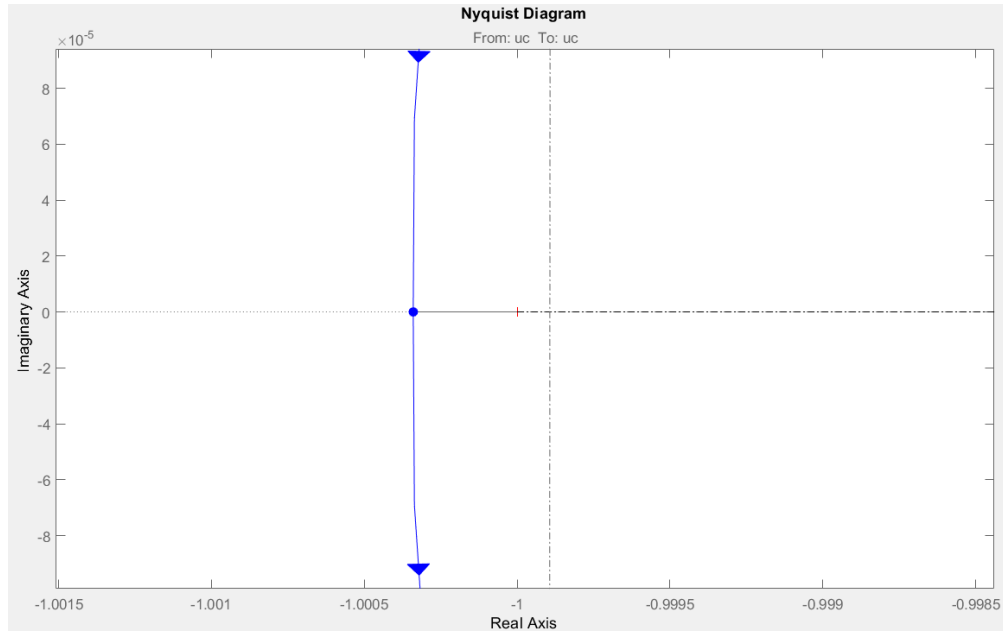


Figura 12: Diagrama de Nyquist, C_P

En el caso del controlador C_{pd} se observa el mismo encierro en sentido antihorario en torno a $(-1,0)$ que, combinado con el conocimiento de un polo inestable en la planta, confirman la estabilidad del sistema. Para este controlador los márgenes de estabilidad son mucho mas grandes con un margen de ganancia de 9.72 dB y en el diagrama Bode de la sensibilidad nominal se observa un peak de sensibilidad de 6.82 dB , es decir el radio es de $= 0,456$ por lo que se tiene mayor margen para mantenerse estable frente a cambios en el sistema. Adicionalmente, se puede notar un margen de delay, calculado por `sisotool` para nuestra conveniencia, de $t_{delay} = 0,066$ s. Esto nos dice que este controlador no aguantará un modelo más cercano a la planta real que incluya un delay mayor a t_{delay}

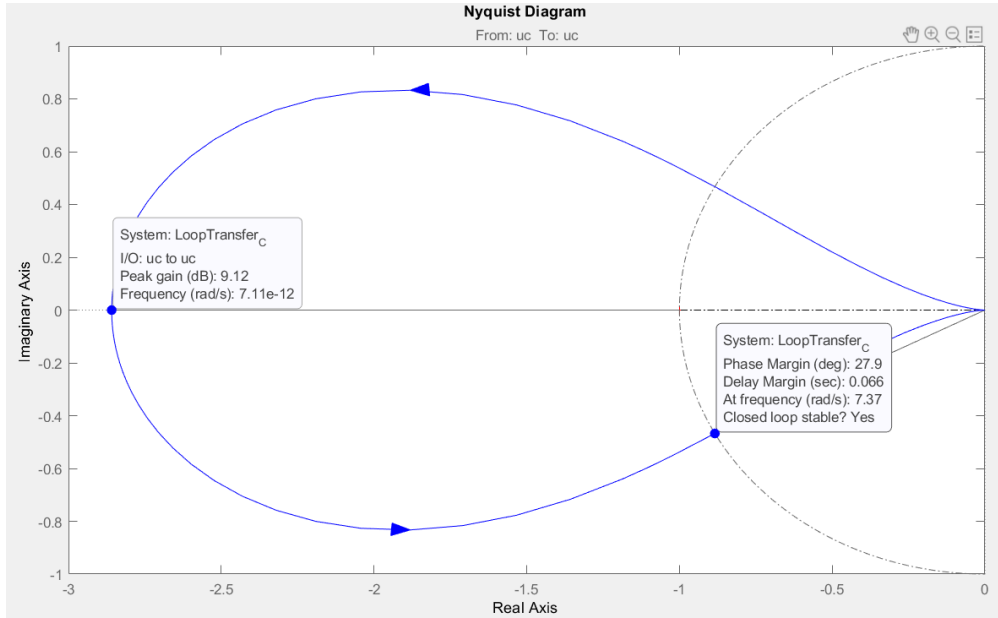


Figura 13: Diagrama de Nyquist, C_{PD}

5. Considere ahora que el torque $u(t) = T_{ext}(t)$ [Nm] depende del voltaje $v_m(t)$ aplicado a un motor eléctrico (el actuador) con función transferencia

$$\frac{T_{ext}(s)}{V_m(s)} = \frac{0,1e^{-T_d s}}{\tau_e s + 1}$$

en que el retardo $T_d \approx 0,1$, la constante de tiempo eléctrica $\tau_e \approx 0,1$ y el voltaje está limitado a $|v_m(t)| \leq 10$.

Considerando el delay T_d se estudiará la sensibilidad nominal de control (S_{uo}) sólo con C_{PD} y con la planta $G(s)$ definida por

$$G(s) = \frac{0,1e^{-T_d s}}{\tau_e s + 1} G_0(s)$$

Idealmente se espera que en estado estacionario $S_{uo} = 1/G_0$ además de eso se espera que sea menor a 10.

$$\lim_{s \rightarrow 0} sU(s)S_{uo} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C_{PD}}{1 + G(s)C_{PD}} = \frac{KJ(s - 3,55)(s + 3,68)^2(0,1s + 1)}{J(s - 3,55)(s + 3,68)(s + 10)(0,1s + 1) + 0,1Ke^{-T_d s}(s + 3,68)} = 20,62 \quad (3)$$

Se demuestra entonces que se necesita el doble del voltaje requerido. Para trabajar dentro de los 10 V tendría que disminuirse la ganancia del controlador a la mitad obteniendo 8.6 V pero esto afecta el seguimiento a la referencia y el error asociado alas perturbaciones de salida. Otra forma es agregando un polo en el origen en el controlador, su efecto es claramente visible en el LGR ya que corre el centroide de las asíntotas a la derecha que es lo opuesto a lo que se necesita para asegurar la estabilidad del lazo y darle mejor margen. Se decide mantener el controlador diseñado para el siguiente ítem.

6. ¿Es el lazo lineal *verdadero* estable? ¿Modificaría los parámetros de los controladores anteriores?

La figura muestra los LGR para los sistemas con los modelos de planta considerando el actuador. Como se puede ver, ambos tienen polos de lazo cerrado en el semiplano izquierdo y por tanto son inestables.

Para C_p hay solo un grado de libertad y no existe un valor de K que permita estabilizar el sistema. Por lo tanto, un controlador de tipo proporcional no puede controlar esta planta.

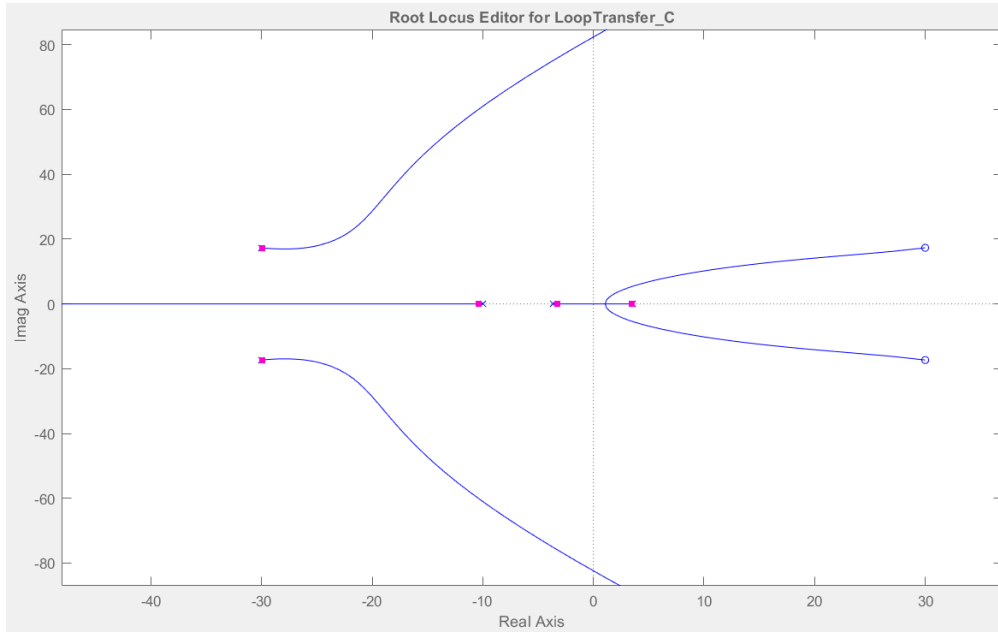


Figura 14: LGR con C_P considerando el actuador

Para C_{pd} el resultado parece ser el mismo. Sin embargo, el grado de libertad adicional presentado por este controlador permite una solución. hacer mas negativo el polo estable de C_{pd} permite desplazar el centroide de las asíntotas a la izquierda, resultando en que las trayectorias inestables del root locus se desplacen tal que ciertos valores de K_{pd} hagan estable el sistema, como muestra la figura.

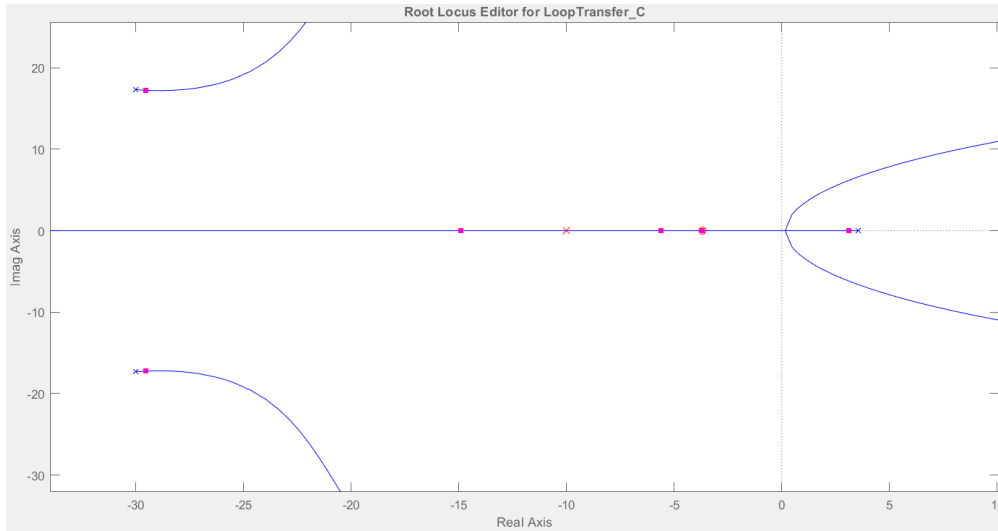


Figura 15: LGR con C_{pd} considerando el actuador

El controlador modificado es $C(s) = \frac{1}{(s - 3,553693) \cdot (s + 3,6806776)} \cdot \frac{e^{-0,1 \cdot s}}{s + 10}$ y su LGR se puede ver aquí:

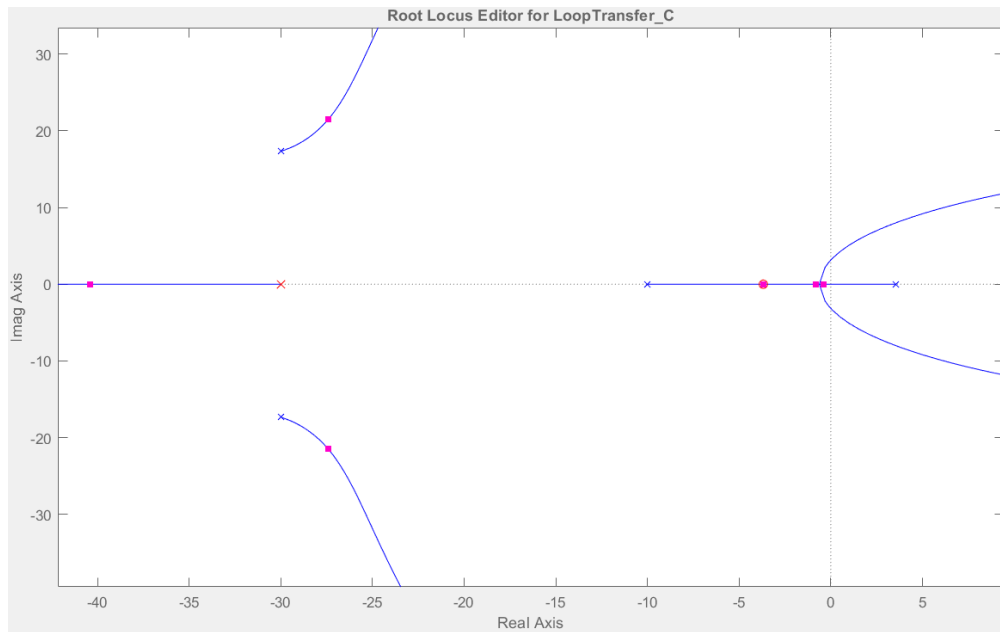


Figura 16: LGR con C_{pd_mod} considerando el actuador

Datos sobre sus márgenes de sensibilidad:

- Peak de ganancia: 38[db]
- Margen de ganancia = 0.108[db]
- Margen de fase = 1.39°

Nótese que, aunque sea estable, el modelo es muy cercano al eje, por lo que puede no ser suficientemente robusto para aguantar el modelo real, de forma análoga a como el controlador proporcional no podía aguantar el modelo considerando el actuador.

7. Con los controladores *modificados* simule el lazo con el péndulo **no lineal** (y con el actuador) para diferentes condiciones iniciales de ángulo cerca de la vertical superior. ¿cuál es el ángulo máximo del péndulo fuera de la vertical superior tal que el controlador aun es capaz de llevarlo a la vertical?

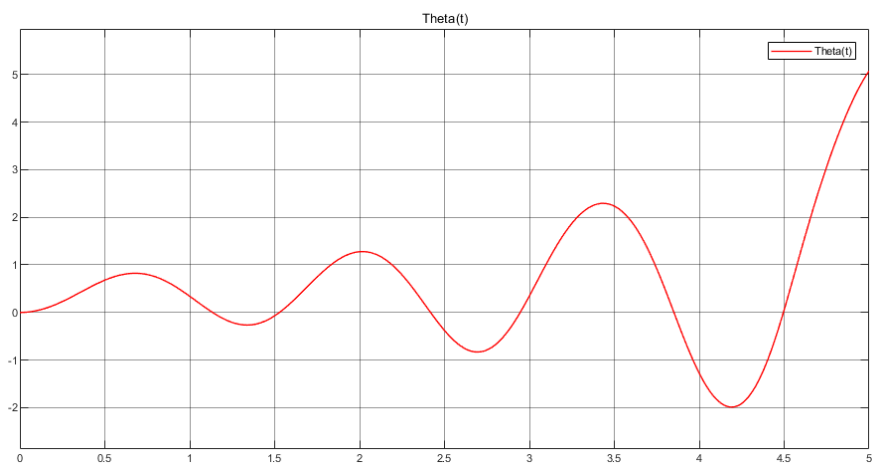


Figura 17: Salida del sistema

En la figura 17 se observa que el controlador no pudo ser estabilizado, ya que el modelo no lineal introduce variabilidad al sistema que el controlador de C_{pd} , con sus márgenes de sensibilidad tan poco robustos, no aguantaron.

8. Comente los resultados.

Notar como la tarea muestra la evolución de los controladores y sus limitaciones contra modelos cada vez más complejos y/o cercanos a la realidad.

En el caso original linealizado, el controlador proporcional es estable, pero extremadamente sensible y funcionalmente inútil, mientras que el controlador proporcional diferencial se maneja y es más útil. Estos márgenes se hacen finalmente notorios cuando existe ruido y perturbaciones en el sistema. En el caso considerando el actuador el controlador proporcional no solo es inestable, es imposible de estabilizar. Con una modificación, el controlador proporcional diferencial se mantiene estable. Sin embargo, tal como sufrió el controlador proporcional en primer caso, ahora este tiene márgenes de estabilidad preocupante mente bajos. Finalmente, esto causa que usando el modelo real, no linealizado, la planta no pueda ser controlada con el controlador proporcional-diferencial, y se requiere trabajar con uno más complejo.